

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY,
G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XV

FASCICULI 1—2



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1956

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY UTCA 21

Az Acta Technica orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg. Több füzet alkot egy kötetet. Évenként 2—4 kötet jelenik meg.

A közlésre szánt kéziratok, géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80, külföldre 110 Ft. Megrendelhető a belföld számára az Akadémiai Kiadónál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-44), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VI., Sztálin út 21. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy külföldi képviselőinél és bizományosainál.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, французском, английском и немецком языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи (в напечатанном на машинке виде) следует направлять по адресу:

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest, VI., Sztálin út 21. Текущий счет № 43-790-057-181), или его заграничные представительства и уполномоченные.

INDEX

Acta Technica

Tomus XV

- K. Akerman und M. Orman* : Herstellung von Kalzium mit einem Sonderreinheitsgrad — *К. Акерман и М. Орман* : Получение очень чистого кальция — Preparation of Calcium of High Purity — Préparation du calcium de grande pureté 179
- T. F. Alkér and E. Schalk* : A Non-destructive Method for Measuring the Depths of Metallic Surface Layers of Metals — *Т. Алькер и Э. Шальк* : Измерение без разрушения материала толщины поверхностных слоев металлов — Mesure non-destructive de l'épaisseur de couches superficielles de métaux — Zerstörungsfreie Messung der Oberflächen-Schichtstärken von Metallen 3
- J. Barna und B. Marschalkó* : Das rheologische Verhalten wässriger Bentonitdispersionen — *Я. Барна и Б. Маршалко* : Характеристика реологических условий водных дисперсий бентонита — Characterization of the Rheological Properties of Aqueous Bentonite Dispersion — Caractéristiques des conditions rhéologiques des dispersions aqueuses de bentonite 77
- J. Barta* : Über die Berechnung der zulässigen Druckkraft des elastischen Stabes — *Й. Барта* : К вопросу методики расчета допускаемого усилия сжатия упругого стержня на основе допускаемого напряжения сжатия материала — On the Calculation of the Permissible Compressive Load on the Elastic Bar — Contribution au problème de calcul de la compression admise des barres élastiques 443
- T. Boldizsár* : Measurement of Terrestrial Heat Flow in the Coal Mining District of Komló — *Т. Больдизсар* : Измерение теплового тока, движущего в сторону поверхности земли, в угольном бассейне в районе Комло — Messurage de l'écoulement de la chaleur terrestre dans le district charbonnier de Komló — Die Messung des gegen die Erdoberfläche gerichteten Wärmestromes im Kohlenrevier von Komló 219
- E. Bölskei* : Limit Load Capacity of the Compression Bar — *Э. Бёльскеи* : Предельная нагрузка сжатого стержня — Charge limite de la barre comprimée — Die Grenzbelastung von Druckstäben 19
- F. Csáki* : Influence of Series Capacitors on the Operation of Synchronous Machines (Continued) Synchronizing and Damping Torques — *Ф. Чаки* : Влияние последовательно соединенного конденсатора на режим работы синхронной машины (продолжение). Синхронизирующий и демпфирующий моменты — L'influence de condensateurs série sur le fonctionnement de machines synchrones. (Suite). Moments synchronisant et amortisseur — Der Einfluss des Reihenkapazitoren auf den Betrieb von Synchronmaschinen (Fortsetzung). Synchronisierende und Dämpfungsmomente 457
- A. Csernátöny—Hoffer and G. Karády* : Abnormal Overvoltages in Regulating Auto-transformers — *А. Чернатони-Хоффер и Д. Каради* : Специальные перенапряжения, возникающие в регулировочных автотрансформаторах — Surensions spéciales dans les auto-transformateurs de réglage — Besondere Überspannungen in „Regel-Spartransformatoren” 287
- J. Eisler* : The Influence of Boundary Surface Discharges on the Dimensioning of Insulation — *Я. Эйслер* : Роль разрядов на граничных поверхностях при расчете изоляторов — Le rôle des décharges aux surface limits dans le choix des dimensions des isolations — Die Rolle der Entladungen an Grenzflächen in der Bemessung von Isolationen 335

- A. Geleji, J. Schey, K. Fink, R. Hantos und F. Köves* : Die Messung und Berechnung der beim Rohrpilgern auftretenden Kräfte und des Leistungsbedarfs — *А. Гелейи, Я. Шей, К. Финк, Р. Хантош и Ф. Кёвеш* : Измерение и расчет усилий и потребной мощности, возникающих при пильгерной прокатке труб — Measurement and Calculation of Rolling Pressure and of Power Demand on the Pilger Tube-Rolling Mill — Mesurage et calcul des pressions et de la demande de puissance au laminoir à tubes à pas de pélerin 205
- L. Gillemot* : Die Verarbeitung von metallischem Titan — *Л. Жильмо* : Обработка металлического титана — Working of Metallic Titanium — Travail du titane métallique. 155
- R. Hantos, J. Heeringer und J. Schey* : Der Kraftbedarf beim Ziehen von Stahlrohren mit Stopfen — *Р. Хантош, Й. Херингер и Я. Шей* : Анализ сил, возникающих при протяжке труб — Investigation of Forces in Tube Drawing — Étude des forces engendrées à l'étrépage des tubes 127
- I. Karsay* : On the Crystallization of Graphite in Cast Irons — *И. Каршай* : О кристаллизации графита в чугунах — Sur la cristallisation du graphite dans la fonte — Über die Kristallisation des Graphits im Gusseisen 99
- D. Kerényi* : Measurements of Rotor Heating on Scale Models of Air-cooled Turbine-generators — *Д. Кереньи* : Измерения нагрева на модели охлаждаемого воздухом ротора турбогенератора — Mesures d'échauffement sur un modèle réduit de turbo-rotor — Erwärmungsmessungen an Modellen von Turborotoren 433
- И. Кочши* : Некоторые вопросы исследования силовых условий при прессовании сплошных круглых профилей из алюминия и его сплавов через одно и многооточковую матрицу — Some Problems of the Research on Forces Arising during the Extrusion of Aluminium or Aluminium Alloy Rods Through one or more die Apertures — Considérations sur les facteurs conditionnant l'extrusion de barres en aluminium ou alliages d'aluminium par matrices à un ou plusieurs trous — Einige Fragen der Kräfteverhältnisse beim Pressen von Stangen aus Aluminium oder aus seinen Legierungen mit Matrizen mit einer oder mehreren Öffnungen 381
- I. Koncz* : Das Problem des Titans in Ungarn vom Gesichtspunkt der Elektronenröhren-industrie — *И. Конц* : Проблема титана в Венгрии с точки зрения производства электронных ламп — The Titanium Problem from the Viewpoint of the Hungarian Vacuum Tube Industry — Le probleme du titane au point de vue de l'industrie hongroise de tubes électroniques 169
- V. Lovass-Nagy* : On an Application of Egerváry's Hypermatrix-algorithm to the Mathematical Investigation of Polyphase Transformers — *В. Ловасси-Надь* : Применение гиперматричного алгоритма Эгервари для математического анализа многофазных трансформаторов — Application de l'hypermatrice-algorithme de Egerváry à l'étude mathématique de transformateurs polyphases — Anwendung des Egerváryschen Hypermatrix-Algorithmus zur mathematischen Untersuchung von Mehrphasentransformatoren 261
- G. Merényi* : The Effect of Reduced Flat Speed on Cotton Carding — *Г. Мереньи* : Влияние уменьшенной скорости шляпки на чесание хлопчатки — Influence d'une vitesse réduite des chapeaux sur le cardage du coton — Der Einfluss der verringerten Deckelgeschwindigkeit auf das Krempeln von Baumwolle 311
- T. Millner, A. J. Hegedüs und M. Dvorszky* : Neue Methode zur Bestimmung der Verunreinigungen, insbesondere des Sauerstoff- und Kohlenstoffgehaltes von verschiedenen Titanproben — *Т. Милльнер, А. Й. Хегедюш и М. Дворски* : Новый метод определения примесей металлического титана, и в особенности содержания кислорода и углерода — New Method for Determining Impurities in Titanium Particularly Oxygen and Carbon — Nouvelle méthode pour la détermination des impuretés, particulièrement de la teneur en O et C du titane métallique 361
- J. Pelikán* : The Plastic Calculation of Moments on Continuous Reinforced Concrete Beams — *Й. Пеликан* : Пластический расчет момента многоопорных железобетонных балок — Calcul plastique de poutres en béton armé — Plastische Momentenberechnung von Stahlbeton-Durchlaufträgern 373

<i>J. Renner</i> : Untersuchungen über Lotabweichungen — <i>Я. Реннер</i> : Исследование отклонений вертикали — Studies on the Deviations of the Plumb Line — Études des déviations de la verticale	37
<i>P. Réti</i> : Determination of the Yield Point of Steels by Magnetization — <i>П. Рети</i> : Определение предела текучести сталей магнитным методом — Détermination de la limite de fluage des aciers par l'étude des propriétés magnétiques — Bestimmung der Fließgrenze von Stählen auf magnetischem Wege	347
<i>K. Simonyi</i> : Über die zweckmässigsten Typen von kernphysikalischen Beschleunigungsanlagen im Energiebereich von 0—4 MeV — <i>К. Шимоньи</i> : О наиболее целесообразном применении новых ускорительных устройств ядерной физики — On the Most Efficient Lay-out of New Acceleration Plant for Nuclear Research — Sur l'arrangement le plus efficace des nouvelles installations d'accélération pour la physique nucléaire	191
<i>K. Simonyi</i> : Ein 4—MV Van de Graaff-Generator mit Pressgasisolierung — <i>К. Шимоньи</i> : Генератор Ван де Граафа с изоляцией сжатым газом на напряжение до 4 мгв — A Compressed-Air-Insulated Van de Graaff Generator — Un générateur de Van de Graaff isolé à l'air comprimé	197
<i>K. Szmodits</i> : Examen de la stabilité des portiques en cas de barres à moment d'inertie variable — <i>К. Смодич</i> : Анализ устойчивости рам в случае стержней с переменным моментом инерции — Stability Analysis of Frames with Bars of Variable Moments of Inertia — Stabilitätsuntersuchung von Rahmen aus Stäben mit veränderlichem Trägheitsmoment	421
<i>I. P. Valkó</i> : Application of Mechanical White Noise for Measurements of Microphonism in Electron Tubes — <i>И. П. Валько</i> : Применение механического белого шума для измерения микрофонного эффекта электронных ламп — Emploi du bruit blanc au mesurage du microphonisme des tubes électroniques — Die Anwendung des weissen Rauschens zur Messung der Mikrophonie von Elektronenröhren	422
<i>Z. Veress</i> : Superficial Changes of Refractories under the Effect of Molten Glass — <i>З. Вереши</i> : Поверхностные изменения огнеупорных материалов под воздействием расплавленного стекла — Modifications superficielles des matières réfractaires sous l'influence du verre fondu — Veränderungen der Oberfläche feuerfester Stoffe unter dem Einfluss von Glasschmelzen	141
<i>A. Zajta</i> : Untersuchungen über die Verallgemeinerung der Newton—Raphson'schen Wurzelapproximation — <i>А. Зайта</i> : Исследования в области обобщения Ньютон—Рафсоновского метода приближенного определения корней — Investigation on the Generalization of the Newton—Raphson Root Approximation Method — Recherches sur la généralisation de la méthode de Newton et Raphson de l'approximation des racines	233



ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY,
G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XV



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1956

ACTA TECHN. HUNG.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki felelős: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett 1956. IV. 10. — Terjedelem: 20,3 (A/5) ív, 137 ábra, 2 melléklet

39297/56 — Akadémiai Nyomda, V., Gerlóczy utca 2. — Felelős vezető: Puskás Ferenc

A NON-DESTRUCTIVE METHOD FOR MEASURING THE DEPTHS OF METALLIC SURFACE LAYERS OF METALS*

T. F. ALKÉR and E. SCHALK

INSTITUTE FOR MEASURING AND INSTRUMENTATION, HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

Introduction

An important, yet up to now satisfactorily not solved industrial problem is the lack of a non-destructive method for measuring the depths of layers on the surfaces of metals, such as produced by heat-treatment, electrolytic or other procedures. The main purpose of the research-work presented in this paper has been to find a solution generally adaptable for these problems, more especially to determine the layer-depths on hardened, case-hardened and nitrided steels.

A few publications have appeared in the foreign technical literature dealing with methods of non-destructive measuring of the depths of hardened layers of quenched steel; but as far as it could be ascertained from these, only one of them has found industrial application[1].

Theoretical considerations

In testing layered materials the measuring method is decisively affected by the quality of the base material and of the surface layer respectively. Thus whilst dealing with the problem of measuring depths of layers, physical properties of the base material as well as those of the layer have to be given. All materials can be divided into four groups, according to their electrical and magnetic properties utilised in such measurements:

1. insulants, dielectrics,
2. semi-conductors,
3. metallic, but not ferromagnetic materials,
4. ferromagnetic materials.

The group of semi-conductors is generally not considered as a separate group, as these materials may be accepted either as conductors, or dielectrics, depending upon the measuring method applied. Layers may be formed upon a base belonging to anyone of the remaining three groups by any material that belongs to these groups. Thus the following groups may be formed:

- a) insulating layer on insulating base,
- b) insulating layer on metallic base,

* This paper is part of a lecture delivered on the 6th October 1954 at the Congress of Measuring and Instrumentation, Hungarian Academy of Sciences, Budapest.

- c) insulating layer on magnetic base,
- d) metallic layer on insulating base,
- e) metallic layer on metallic base,
- f) metallic layer on magnetic base,
- g) magnetic layer on insulating base,
- h) magnetic layer on metallic base,
- i) magnetic layer on magnetic base.

Base and layer both belonging to the same of these groups present the only difficult case for measuring techniques. This paper deals with two such groups, i.e. e.) and i.), emphasizing that exact mathematical computations concerning group i.) can be achieved only with actual and extensive knowledge of the properties of these materials. As to the measuring methods, distinction must be made between the two cases, when the differences between base and surface layer manifests itself mainly either in permeability or in resistivity. In this latter case the ferromagnetic behaviour of the material itself may generally be of little importance only, consequently left out of consideration. Our special aim being to carry out measurements on steels, where permeability differences are dominant, we have decided to apply a method based on permeability differences. The various possibilities for this are :

A) *Statical measurements of permeability*

- I. measurement of the adhesive power of the magnet,
- II. permeability measurement with ballistic galvanometer or permeameter,
- III. magnetic differential bridge.

B) *Dynamical measurement of permeability*

- I. measuring inductivity as a function of frequency and of the magnetic field strength, etc.
- II. measuring the change of mutual induction,
- III. measuring the losses (hysteresis, eddy currents),
- IV. measurement of wave-form distortion.

Hereafter when discussing the measurement of permeability, a resultant permeability is to be understood. Changes of reluctance and of length of lines of force are also registered by the probe, but the probe cannot discriminate between changes of the length of lines of magnetic force, of the cross section and of

changes in magnetic permeability. The resultant permeability may thus be defined as alleged to a fictitious homogeneous material, which, when compared to that of the base metal, would cause just as large deflection of the instrument, as does the material, with a surface layer, to be tested. Of the measuring methods enumerated in this paper we present results obtained from group B/I. In this chapter we will discuss some theoretical problems, without restricting to problems of ferromagnetic layered materials only.

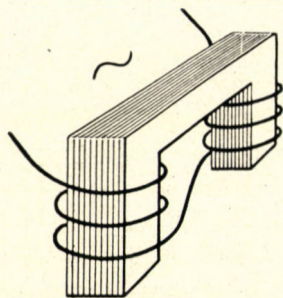


Fig. 1a

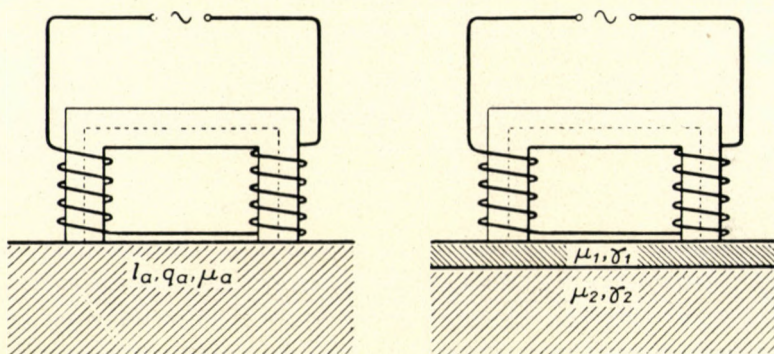


Fig. 1b

The measuring method developed, is as follows: (Figures 1/a and b) The coils are wound in series on two legs of a U-shaped permalloy iron core. There are two probes forming the two sides of a Wheatstone bridge (Figure 2); the balance of the bridge is obtained by ohmic resistors, in the other two branches. The measurement is executed by balancing the bridge, having placed both probes on homogeneous material without surface layer. Placing afterwards one of the probes on the surface-layered material alters the impedance of this measuring probe because of the different electric and magnetic properties of the surface layer; consequently the bridge balance will be upset. The deflection of the measuring instrument, connected with the bridge, i. e. the unbalance-

voltage or current intensity, can be converted to values of layer depth with the help of suitable calibration diagrams.

The purpose of mathematical deduction is to determine the optimum frequency, at which the greatest change of the instrument deflection corresponds to the smallest change of the layer depth. For that it is naturally necessary to know the actual electrical and magnetic properties of the material.

In order to simplify this mathematical treatment some assumptions were made, notably: it has been assumed that the magnetic field induced in the tested piece by the probe is parallel to the surface of the material, i. e. the distance between the poles approaches infinity. This can be motivated by the distance

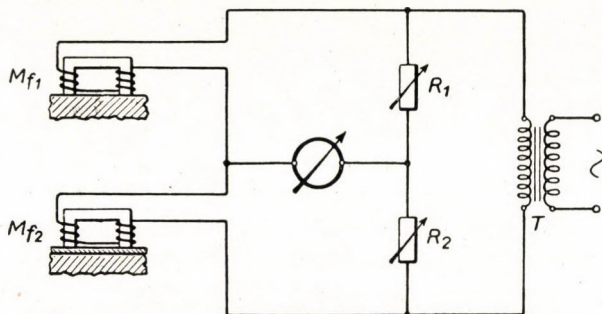


Fig. 2

of the pole pieces being extremely large as compared with the depths of the layer to be measured, and thus the reluctance of the leakage field being only a small part of the whole reluctance. If, however, the distance of the pole pieces is infinite, it suffices to know either the electrical, or the magnetic impedance of the layered material, i. e. their behaviour as a function of frequency; there is no need to actually know the reluctance of the whole circuit for computing the optimum frequency.

Due to the symmetry of the MAXWELL-equations, formally identical relations are found concerning the electrical and magnetic impedances, thus the computation of either of them presents already the optimum measuring frequency. Since the deduction does not concern ferromagnetic materials only, in the following considerations permeability and dielectric coefficient, or conductivity respectively of the base metal or of the layer, are supposed to be constant, i. e. it may be assumed, that

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \text{and} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{i} = \gamma \vec{E}.$$

Because of this the system of MAXWELL-equations may be used for solving the problems in its conventional form, without any further additions. In the following expressions the electrical impedance of the material assumed to be

infinitely thick, without a surface layer, has been denoted with Z_o , that of the surface layer with Z_r (Fig. 3) and the resultant impedance of the material with Z . Due to the nature of comparative measurements, the quotient $\frac{Z}{Z_o}$ is to be determined.

As a result of the deduction it has been obtained, (this deduction has been published in the Technical Publications of the Hungarian Academy of Sciences, Vol. XVI., No. 2-4, 1955, in Hungarian) that :

$$\frac{Z}{Z_o} = g \frac{ae^{c\sqrt{f}} + be^{-c\sqrt{f}}}{ae^{c\sqrt{f}} - be^{-c\sqrt{f}}}, \text{ where}$$

$$a = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\gamma_2}{\mu_2}}; c = (1+j)d\sqrt{\pi\gamma_1\mu_1}$$

$$b = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\mu_1}} - \sqrt{\frac{\gamma_2}{\mu_2}}; g = \sqrt{\frac{\gamma_2\mu_1}{\gamma_1\mu_2}}; \text{ where}$$

μ_1 and γ_1 = permeability and conductivity (respectively) of the surface layer
 and μ_2 and γ_2 corresponding values of the base metal,
 d = layer depth,
 f = frequency applied in measurement.

This fraction renders complex values because of its complex numerator and denominator. When plotting the curves the imaginary part has been neglected. This is permissible, because at *low frequencies* the value of $c\sqrt{f}$ being low, the sine argument, constituting the imaginary part is small too, consequently the imaginary part may be neglected beside the real portion. At *higher frequencies* on the other hand, the second term of both numerator and denominator of the fraction becomes more and more negligible, relative to the first member. Thus the fraction value approaches unity, irrespective of its complexity. More precise calculations have shown, that this error, resulting from having neglected the imaginary part, is much smaller than errors due to other neglects. These errors will be discussed later.

If $\frac{Z}{Z_o}$ is plotted in a curve, the two following diagrams (Fig. 3) are obtained, depending upon whether the impedance of the base metal or that of the layer is higher :

It is manifest from these curves, that in the case of small layer depths, or low frequencies respectively, layered materials act in a manner as if their surface layers did not exist ; on the other hand, at higher frequencies and greater surface layer depths the influence of the metal base disappears. In the case of a layer depth given, d_1 , the optimum measuring frequencies are de-

terminated as follows : on the d -axis of the diagram a perpendicular is drawn at point d_1 and along it that frequency value is sought the slope of which is the largest in that range. This in mathematical terms means the determination of the O -point of the mixed second derivative according to d and f .

No use has been made in the mathematical computations of the derivative according to d , but of that according to c instead. This is permissible, as d is contained in c as a multiplier factor.

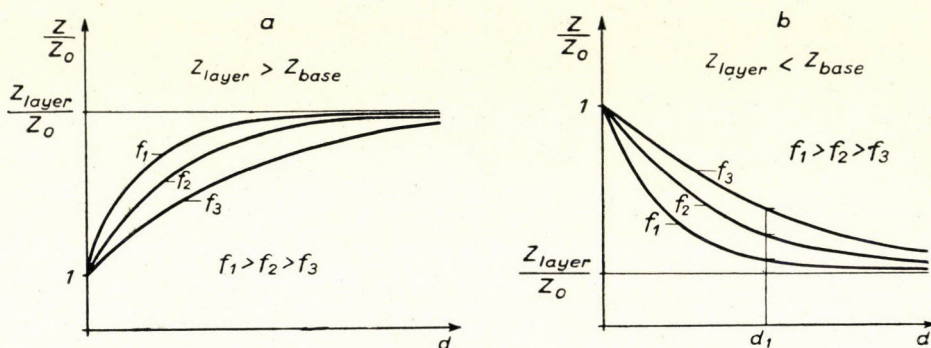


Fig. 3

The postulate for the optimum frequency then is :

$$\frac{1}{2\sqrt{f}} [a \cdot e^{c\sqrt{Vf}} - b \cdot e^{-c\sqrt{Vf}}]^2 + b^2 c e^{-c\sqrt{Vf}} - a^2 c e^{c\sqrt{Vf}} = 0.$$

The solution of this equation is only possible by approximative methods.

The measuring equipment

The measuring probe consists of a pair of coils, connected in series wound on a lamellar permalloy core, (Fig. 1/a and 1/b). To reduce the effect of surface unevenness a finite air gap is allowed between pole face and the surface to be measured ; measurements, of course, can be repeated only at air gaps unaltered as, for instance, a change of 0,01 mm in the airgap has caused a difference of 4% in instrument indication. The instrument in the measuring bridge is a vacuum-tube voltmeter. This audio-frequency vacuum-tube voltmeter is to have a measuring range of 1 mV to 10 V. The bridge is balanced by ohmic resistors. To secure ground symmetry of the measuring equipment, an audio-frequency transformer T is inserted between generator and bridge.

Current for the bridge is supplied by an audio-frequency generator with continuously variable output of up to 20 mA within the applied frequency band.

Initial results

Investigations at first have been confined mostly to measurements on plane surfaces.

These measurements at first were aimed at the determination of layer depths of hardened, case-hardened and nitrided surface layers, that is, of ferromagnetic surface layers on ferromagnetic bases, but measurements executed on metallic surface layers (electrolytic coatings) on ferromagnetic bases, also investigations on heat treated metals notably aluminium, were satisfactory.

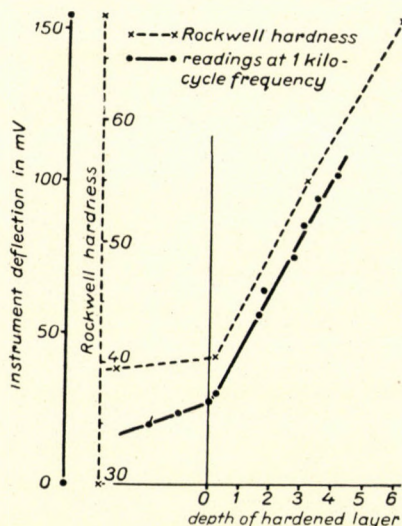


Fig. 4

The permeability of hardened layers is, according to data found in literature [1], of the magnitude of 50 gauss/oersted, that is, substantially lower than that of the base metal; the condition of the change of the distribution of the magnetic field caused by the surface layer is thus satisfied. Similar is the case with other ferromagnetic surface layers, produced by heat treatment: i. e. case-hardened or nitrided. Thus it has justly been anticipated, that problems of measuring the depths of these layers can be solved by this method.

The preliminary measurements that were accounted for in the afore-quoted paper in more detail, were limited to 3—5 different known values of layer depths. Later a piece of carbon steel, hardened about 6 mm deep was examined in such a way that from the hardened layer more or less thin (0.2—1 mm) layers were ground off, whereupon the measurements were performed. Previously, however, the Rockwell-hardness of the piece was determined along a line perpendicular to the surface for every 3 mm of depth (Fig. 4). The original surface of the test piece was unfortunately not plane: the same error subsisted

when a layer of 1 mm had already been worked off the hardened surface, because of incorrect working off and resulting in airgaps of different depths these measurements have failed. Afterwards the other layers were removed by grinding, and thus the plane surfaces permitted more precise measurements. Measurement was executed at a frequency of 1,0 kilocycle.

The Rockwell hardness curve shows a break at and levels off after 6 mm depth from the surface, so does the curve taken by the authors, but since the points of measurement of the latter are denser, the curve shows the border of the hardened layer, i. e. the break, at 6,15 mm depth (at the 0 abscissa of the diagram) more precisely.

Since in this series of measurements, out of the original 6,15 mm for a hardened layer only of 4 mm were acceptable results obtainable, similar measure-

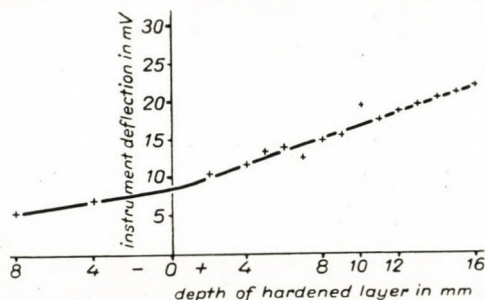


Fig. 5

ments were executed on a test specimen hardened by Jominy's method, the hardening depth of which was 16 mm. Here layers of 1–2 mm depths were removed from the piece by grinding and measurements were executed that way.

Contrary to the former procedure measurements were made in this series at a frequency of 3 kilocycles (Fig. 5). The spread is here less, though still substantial. The precision in this series of measurements was somewhat adversely affected by the surface of the test piece being small (30 mm in diam.) in proportion to that of the probe area, variations in the air gap produced by mechanical vibrations caused thus a generally slight spread of test results.

Similarly a series of measurements was executed (Fig. 6) on a piece of carbon steel, hardened 22 mm deep, by grinding off layers of 1–3 mm thickness. Greater spreads appeared here only exceptionally.

According to informations received, a precision of $\pm 10\%$ in the measurement of the depth of hardened layers is perfectly satisfactory in industrial practice. Although for the time being a substantially lower precision has to suffice in the determination of hardened layers, research has been conducted toward the elimination of the still subsisting uncertainties, as far as possible,

from this measuring procedure, and the further refining of the method. These investigations have been extended to :

1. Stabilization of the output voltage and current of the generator,
2. Effect of the previous magnetization of the tested specimens,
3. Examination of the influence of the temperature of the test specimens,
4. Elimination of the mechanical vibration of probes, that is, stabilization of the air gap between probe and specimen.

The intensity of the output current of the generator was kept constant with the aid of an ampermeter inserted between the generator poles and the primary winding of the transformer.

The examination of the influence of the magnetic state of the test specimens upon the measurement results has proved that at a field intensity of

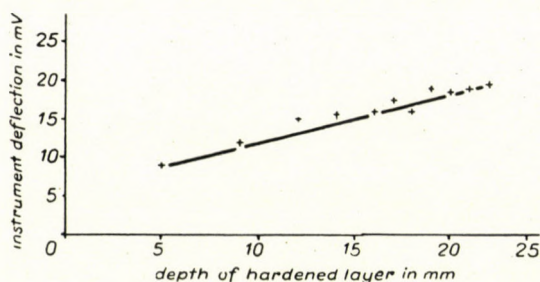


Fig. 6

350 millioersteds the difference against the unmagnetized state produces less than 4% variation in results, further that the effect of a difference of more than 50 °C above the average room temperature is negligible; a temperature above this already might seriously damage the probes, consequently it is superfluous to extend the investigations further in this direction.

The construction of the probes was then essentially modified. For surfaces currently tested in the industry the measuring surface area of 25×7 mm was often too large, therefore on the basis of experience this was reduced to 7×8 mm; by appropriate construction this can further be reduced if necessary. The distance between poles has been reduced from the original 11 mm to 3 mm; thus the more precise measurement of much smaller surfaces became possible. The air gap was also reduced accordingly.

Further results

After the above preliminary tests, measurements were carried out on different kinds of surface-hardened steels. Calibration curves were plotted on carbon steel, chromium-nickel and chromium-molybdenum steels; these are

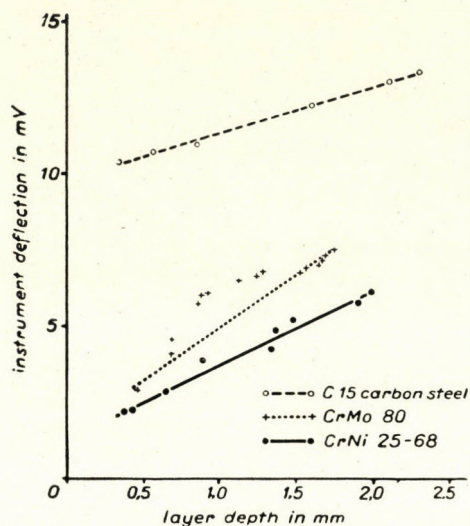


Fig. 7a. Hardened layer of various steels measured at 1 kilocycle

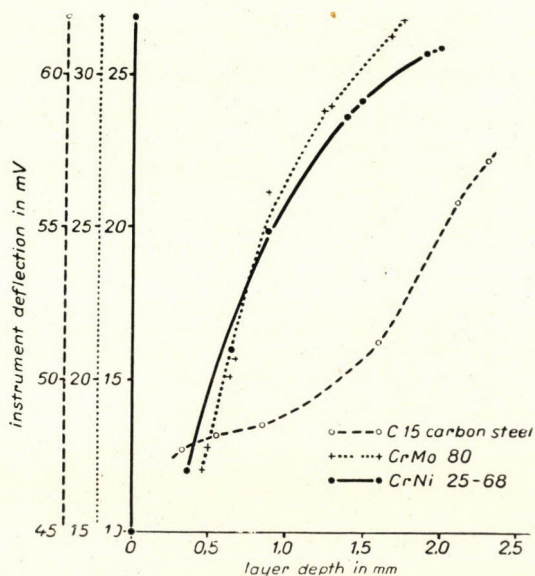


Fig. 7b. Hardened layers of various steels measured at 3 kilocycles

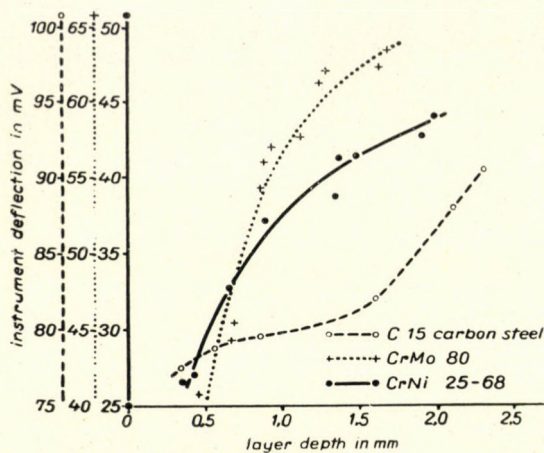


Fig. 7c. Hardened layers of various steels measured at 5 kilocycles

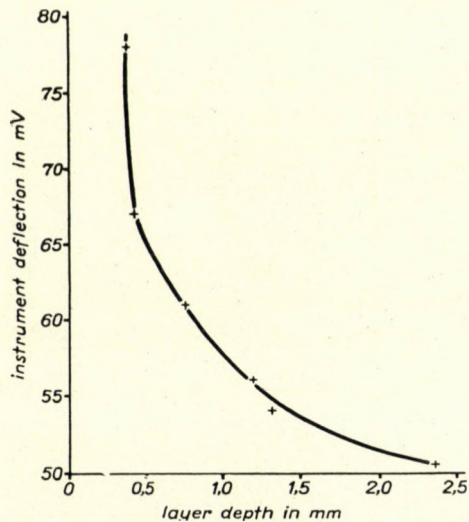


Fig. 8. Measurement of hardened layer of case-hardened C 15 steel at 5 kilocycles

presented in Fig. 7/a—c. Measurements were made at frequencies of 1 ; 3 and 5 kilocycles. Depth values for calibration purposes were determined by destructive methods on ground specimens. Some characteristic features of the curves will be dealt with later in this paper.

Measurements were also made on case-hardened layers as well (Fig. 8). Since here the ratio $\frac{Z}{Z_0} < 1$; a decreasing curve according to Fig 3/b was obtained.

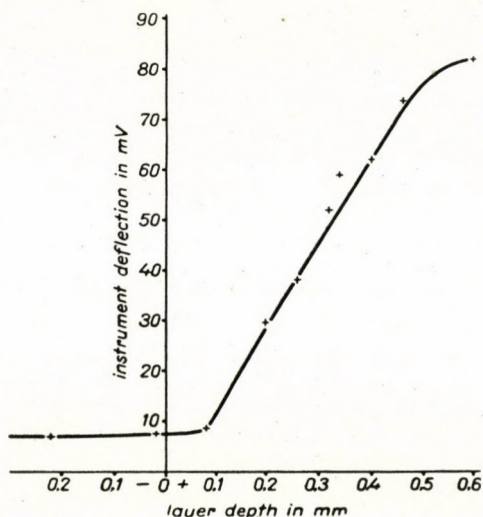


Fig. 9. Measurement of depth of nitrided layer

Nitriding gives sharp, definite, but thin (0,6 mm maximum) layers; this is apparent on curves plotted on nitrided layers (Fig. 9). Rather definite curves with very little spread were obtained; just because of the thin layers the higher frequency of 5 kilocycles was chosen for its better indication.

Evaluation of test results

The comparison of the results of calculation (Fig. 3) with those resulting from the tests leads to the statement that the variation of the impedance ratio as a function of frequency and layer depth qualitatively agrees with the values found in the course of measurements (Fig. 7 a, b, c, 8 and 9). Quantitative differences are due to the following simplifying assumptions admitted in the mathematical treatment :

1. assumption of perfectly homogeneous layers with sharp boundaries between base metal and surface layer.

This is roughly the case with electrolytic deposits and with nitrided surface layers. It is, however, an idealization of conditions for hardened and especially for case-hardened layers, particularly of unalloyed steels. In alloyed steels the transitional layer is thin; its role is less important.

2. Assumption of an extremely large distance between the poles.

To assume this it was necessary in order to allow the field developed near the pole shoes to be disconsidered; the impedance of this portion is supposed to be negligible relative to the impedance of the whole arrangement.

This neglect is not entirely justified in the measurement of deeper layers. It was still possible however to obtain indications in depths in which the arrangement would have theoretically been insensitive to the layer depth.

The course of curves plotted on ferromagnetic layers of various composition, and produced by different methods, presents upon examination characteristics perfectly similar to the $\frac{Z}{Z_0}$ curve obtained by theoretical procedure (Fig. 3/a and b). At lower frequencies, up to 1 kilocycle the curves are flatter, their curvature less. At the layer depth values that most frequently occur in practice, these curves may be replaced by straight lines well within the permissible limit of error (Fig. 9/a).

At higher frequencies (3–5 kilocycles) the curves rise steeply at small layer depths and may similarly be replaced in this range by straight lines; above layer depths of about 0,5–1,5 mm, however, they are curving sharply with a relatively small radius of curvature. Above this, at about 2 mm layer depths, they flatten out, the sensitivity of the measuring method diminishes appreciably. This is conspicuous in Fig. 11, where the curve for nitrided steel is almost perfectly straight up to 0,5 mm depth, afterwards it breaks abruptly. On carbon steel it is observable that the curve is relatively flat between 0,6–1,0 mm, then it rises more and more. This may perhaps be due to the fact that the hardened layer in this kind of steel is, as it is well known, not homogeneous, but composed of an outer and of a transitional layer, the influence of which is outstanding in the course of the curve. In alloyed steels the transitional layer is thinner; it is not conspicuous therefore on the curve. However, these phenomena need yet closer investigation.

The accuracy of the measurement depends very much on the sharpness of the layer boundaries, for the abrupter the transition between layers, the exacter is the measurement, for instance in nitrided layers. The smooth transition of course also makes itself felt in plotting the calibration curves, for in this case not even the destructive testing can be as accurate as in the case of sharper layer borders. The specified precision of destructive testing of 14–19% is though not quite met in values laid off on the abscissa axis, but the curves are unequivocal and coherent.

REFERENCES

a) *Books* :

1. R. BOZORTH : *Ferromagnetism*. (Van Nostrand, New York, 1951).
2. FR. FÖRSTER : *Eddy Current Instruments for Use in the Field of Non-Destructive Testing*. Bios. C. 9. (1952. Technical Information Documents Unit., London.)
3. FR. FÖRSTER : *Apparatus Dependent on Eddy Current Principles*. (Bios, Final Report, No. 720.)
4. D. F. HANSTOCK : *The Non-Destructive Testing of Metals*. (Institute of Metals Monograph and Report Series, 10 London, 1951, p. 4—13.)
5. METHFESSEL : *Dünne Schichten*. (W. Knapp Verlag, Halle, 1953.)
6. K. SIMONYI : *Theory of Electricity* (in Hungarian), University Publishing House, Budapest, 1952. pp. 238—260.

b) *Periodicals* :

1. W. JELLINGHAUS : *Zerstörungsfreie Prüfung mit magnetischen und elektrischen Verfahren*. (Institut für Metallforschung, Düsseldorf.) 1952. p. 138—139.
2. J. M. ZAAT : *Elektromagnetische Schichtdickenmesser, die einen magnetischen Kreis benutzen*. Metalloberfläche, 1951. Dez. p. 185—191.
3. H. GOEBBELS : *Zerstörungsfreie Prüfung von Eisensorten im magnetischen Wechselfeld*. Archiv für Eisenhüttenwesen, Düsseldorf, 1952.
4. FR. FÖRSTER : *Die Berührungsfreie Messung der Dicke und Leitfähigkeit von metallischen Oberflächenschichten, Folien und Blechen*. Zeitschrift für Metallkunde. April 1954.
5. ALKÉR—SCHALK : *Zerstörungsfreie Messung von Metall-Oberflächenschichten*. Veröffentlichungen der Klasse für Technische Wissenschaften der Ungarischen Akademie der Wissenschaften (in Hungarian). Vol. 16 (1955), 383/404.

SUMMARY

The depths of metallic surface layers can be measured by means of inductivity changes caused by differences in the distribution of magnetic and eddy-current field. Theoretical conclusions are verified by experimental results, though the double layers of carbon steels etc. still need further researches.

In the course of experiments it has been found that for attaining greater indications it is expedient to apply higher frequencies ; the flattening of curves thus obtained occurs namely beyond depth values no more or seldom applied in industry ; within conventional depth values, on the other hand, the sensitivity of the procedure is high enough in comparison to values obtained at lower frequencies.

Readings of layer depth values from the calibration curve can be exact only if the electrical and mechanical conditions of the measurements are identical with those that have prevailed at plotting the curve : care has to be taken therefore lest the air gap between the surface measured and the poles should change, but also that the frequency, the intensity of the current fed into the bridge and the balance of the bridge should be the same at the measurement as it has been at plotting the calibration curve. These values therefore are to be marked on the calibration curve ; at the measurement these have to be set, else their variation would lead to false readings.

Experimental measurements and theoretical considerations show that the method, besides the measurement of the depths of ferromagnetic surface layers on ferromagnetic bases, is also suitable for the measurement of the depths of other metallic (electrolytic) and of insulating layers, moreover for the measurement of the depths of metallic layers on non-ferromagnetic but metallic bases, provided that the electric conductivities (resistivities) of the base and of the surface layer are not equal compared to each other.

This method is further suitable for the measurement of differences in the heat treatment of metals, for instance of aluminium, and in their ferromagnetic impurities as evidenced by successful initial experiments, though all these still call for further investigation.

ИЗМЕРЕНИЕ БЕЗ РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛА ТОЛЩИНЫ
ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ МЕТАЛЛОВ

Т. АЛЬКЕР и Э. ШАЛЬК

РЕЗЮМЕ

С помощью изменений индуктивности, вызванных вследствие существующей разности распределения магнитных полей, представляется возможным определить толщину магнитных поверхностных слоев. Разработанные для этой цели теоретические факты подтверждены опытными данными, хотя отдельные вопросы (как, например, двойные слои углеродистых сталей и т. д.) требуют производства дополнительных исследований.

В процессе проведенных экспериментальных опытов установлено, что с точки зрения большей индикации целесообразно применять более высокие частоты (порядка 3–5 кгц); полученные таким образом кривые становятся плоскими уже выше значений толщин слоев, только редко или совершенно не применяемых в промышленности; в пределах же применяемых толщин слоев при этих частотах чувствительность предлагаемого метода по сравнению с полученными при более низких частотах значениями является довольно высокой.

Отсчет значений толщины слоя по калибровочной кривой может быть выполнен точно лишь в том случае, если электрический режим при измерениях идентичен режиму при снятии кривой, следовательно необходимо очень тщательно следить за тем, чтобы не изменялись величина измеряемой площади и воздушный зазор между полюсами, а также за тем, чтобы частота, сила питающего мост тока и сбалансировка моста при измерениях были бы идентичны этим же факторам при снятии калибровочной кривой. Именно поэтому эти величины следует указать на калибровочной кривой, и при измерениях следует устанавливать указанные величины; изменение этих величин может дать в результате неправильные отсчеты.

Как проведенные до сего времени опытные измерения, так и теоретические соображения показывают, что метод кроме измерения толщины ферромагнитных поверхностных слоев ферромагнитных материалов применим также для измерения толщины прочих металлических (электролитических) слоев ферромагнитной основы, затем — изолирующих слоев на такой же основе, далее — толщины металлических слоев не ферромагнитной, но металлической основы, предполагая, что электрическая проводимость (удельное сопротивление) основы и поверхностного слоя не равны между собой, и, наконец, для измерения разностей термообработки металлов (напр., алюминия), далее ферромагнитных примесей (в связи с чем проведены успешные предварительные опыты). Естественно, что вышесказанное требует выполнения еще дополнительных исследований.

MESURE NON-DESTRUCTIVE DE L'ÉPAISSEUR DE COUCHES SUPERFICIELLES
DE MÉTAUX

T. ALKÉR et E. SCHALK

RÉSUMÉ

L'épaisseur de couches métalliques peut être mesurée par le changement de l'inductivité causé par des différences produites dans la répartition des champs magnétiques. Les constatations théoriques y relatives ont été vérifiées par des essais, quoique certains problèmes, par exemple les couches doubles des aciers au carbone, demandent des recherches complémentaires.

Au cours des essais on a trouvé que pour des indications plus fortes il faut employer des fréquences plus hautes (3–5 kHz). L'aplatissement des courbes ainsi obtenues a lieu en effet à des épaisseurs plus grandes et rarement employées dans l'industrie; d'autre part entre des épaisseurs usuelles la sensibilité du procédé est assez grande en comparaison avec les valeurs obtenues à des fréquences plus basses. La lecture des valeurs d'épaisseur des courbes de calibration ne sera précise que si les conditions électriques restent les mêmes que celles qui subsistent à la prise de ces courbes. C'est pourquoi il faut veiller à ce que la fente d'air entre la surface mesurée et les pôles ne change pas, mais aussi à ce que la fréquence, l'intensité du courant appliqué au pont, et le balancement de ce dernier soient les mêmes au moment de la mesure qu'à la prise de la courbe de calibration. Aussi faut-il marquer ces valeurs sur la courbe de calibration; la mesure doit être réglée sur eux, leur alteration pouvant conduire à des lectures faussées.

Les essais exécutés jusqu'ici, ainsi que les considérations théoriques démontrent qu'outre la mesure de l'épaisseur de couches superficielles ferromagnétiques sur des bases ferromagnétiques, la méthode se prête aussi à la mesure d'autres couches superficielles métalliques (électrolytiques) ou isolatrices, à condition que la conductivité électrique (résistivité) de la base et de la surface superficielle soit la même. Enfin des essais préalables ont été exécutés avec succès pour le mesurage des différences dans le traitement thermique de l'aluminium et dans la souillure ferromagnétique de ce métal. Tous ces problèmes bien entendu ont encore besoin d'être examinés et étudiés à l'avenir.

ZERSTÖRUNGSFREIE MESSUNG DER OBERFLÄCHEN-SCHICHTSTÄRKEN VON METALLEN

T. ALKÉR und E. SCHALK

ZUSAMMENFASSUNG

Die Stärke metallischer Oberflächenschichten lässt sich auf Grund der Änderungen der Induktivität messen, die ihrerseits durch Änderungen in der Verteilung des magnetischen Feldes verursacht werden. Die diesbezüglich ausgearbeiteten theoretischen Beziehungen konnten durch Versuche der Verfasser bestätigt werden, obgleich einige Fragen, z. B. diejenige der Doppelschichten auf Kohlenstoff-Stählen, noch einer weiteren Erforschung bedürfen.

Im Laufe der Versuche wurde die Erfahrung gemacht, dass es zur Erreichung stärkerer Anzeigewerte erwünscht ist, höhere Frequenzen (3—5 kHz) anzuwenden, die zwar eine Verflachung der aufgenommenen Kurven zur Folge haben, allerdings nur bei Schichtstärken, die in der Industrie überhaupt nicht mehr oder nur selten vorkommen. Innerhalb der üblichen Schichtdicken ist jedoch die Empfindlichkeit des Verfahrens bei höheren Frequenzen im Vergleich zu den bei niedrigen Frequenzen erhaltenen Werten genügend stark.

Der von der Eichkurve abgelesene Dickenwert ist nur dann genau, wenn die elektrischen Messverhältnisse dieselben bleiben, wie sie bei der Aufnahme der Kurven waren; es ist daher darauf zu achten, dass sich der Luftspalt zwischen der gemessenen Oberfläche und den Polen nicht ändert, und auch darauf, dass die Stärke des der Messbrücke zugeführten Stromes und der Ausgleich der Brücke dieselben bleiben, wie sie bei der Aufnahme der Eichkurve waren. Ebendeshalb sind diese Werte auf der Eichkurve anzugeben und bei der Messung einzustellen, sonst würden sich falsche Ablesungen ergeben.

Die bisher durchgeführten Messversuche, sowie die theoretischen Überlegungen zeigen, dass sich dieses Verfahren ausser zur Dickenmessung ferromagnetischer Oberflächenschichten auf ferromagnetischen Grundstoffen auch zur Stärkenmessung sonstiger metallischer (elektrolytischer) Oberflächenschichten, sowie von Isolierschichten, ferner von nicht ferromagnetischen jedoch metallischen Schichten auf metallischer Grundlage eignet, vorausgesetzt dass die elektrische Leitfähigkeit (spezif. Widerstand) der Grundlage und der Oberflächenschicht im Vergleich zueinander ungleich sind. Endlich konnten erfolgreiche Vorversuche zur Messung von Unterschieden in der Wärmebehandlung und der ferromagnetischen Verunreinigung des Aluminiums durchgeführt werden. All dies bedarf natürlich noch weiterer Forschungsarbeit.

LIMIT LOAD CAPACITY OF THE COMPRESSION BAR

E. BÖLCSKEI

[Manuscript received 18th May, 1955]

The aim of this paper is the theoretical determination of the limit load capacity of the eccentrically compressed bar, supported at its ends free to rotate, of straight centreline and permanent cross section.

The examination of the limit load capacity of the compression bar has to be divided into the investigation of three problems almost independent of one another: the limit states of strength, of deformation and of stability. All these limit states can be produced in general by different loads, e. g. by a load of given eccentricity. Of these only the problem of limit state of strength will be investigated in the following development.

1. Properties and limit state of the ideal structure

In the theoretical analysis of some problems of structural analysis the actual structure (geometric features, conditions of support, material etc. of the bar) has to be substituted for by an ideal structure, and simultaneously the limit state of the ideal structure has to be defined.

In the present analysis the assumed substitute structure is a bar supported at both ends free to rotate, and ideally straight in unloaded condition (Fig. 1).

The cross section of the bar is uniform along its full length and consists only of two chords made to cooperate in carrying the load — by imagined structural members that take no load — as if the two parts of the section formed a coherent cross-sectional area.*

This bar follows the NAVIER-Law, that is, its cross sections remain planes in the course of deformation even if changes of length of its individual fibres fall beyond the Hooke range — the elastic range — of strain (Fig. 2).

Let the forces loading this ideal structure be in every case parallel to the original centreline of the bar, and let the eccentricities of these forces e_0 relative to the hinges be identical at both ends of the bar (Fig. 1). It is pointed out that

* This restriction is made only to facilitate mathematical manipulation.

e_0 denotes the eccentricity of the force relative to the hinge (the point about which bar ends can deflect), while e is the eccentricity of the force relative to the centre of rotation at the bar ends (to the deflected centreline), that is, $e = e_0 + y$.

It is known that the limit load capacity of the compressed bar is decisively affected by the deflected form of the bar, and the degree of flexure depends on the strength properties of the material of the bar, more exactly on the stress-

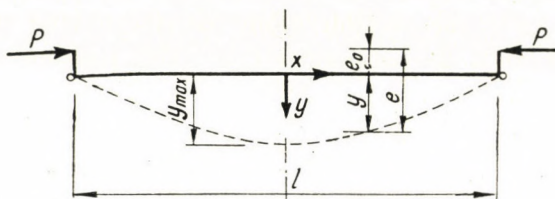


Fig. 1

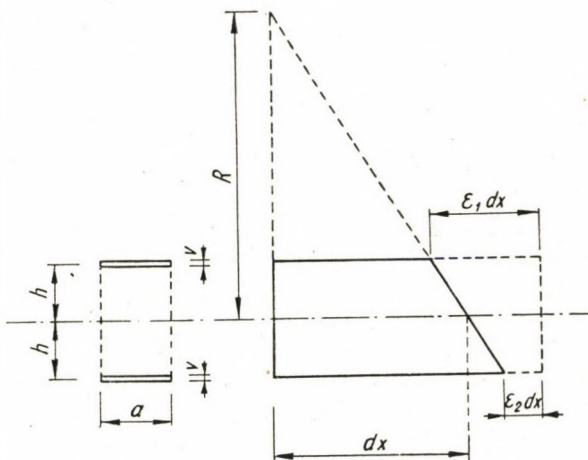


Fig. 2

strain diagram of this material. This paper is not more specific on the stress-strain diagram of the material; it may be a stress-strain diagram referring to an arbitrary (ideally elastic, elasto-plastic, or ideally plastic) material.

By assuming that the material of the bar is elasto-plastic the problem is treated entirely in general, for the ideally elastic or the ideally plastic materials constitute only special cases of elasto-plastic ones.

Let therefore the case of elasto-plastic materials be investigated, that is, let it be assumed that in case of increase or decrease of stress deformations will not take place according to the same stress-strain diagram. This circumstance can be taken account of by introducing two kinds of stress-strain diagrams, one for the case of increasing, another for that of decreasing stress. In this case

stress-strain relations can be described by the following relationships (See diagrams in Fig. 3) :

$$\varepsilon_i = f(\sigma) \quad (1)$$

$$\varepsilon_d = g(\sigma, \sigma_a) . \quad (2)$$

The stress-strain diagram according to equation (1) depends on the value of σ , that is, has only one variable, while the stress-strain diagram according to equation (2) depends also on parameter σ_a . This parameter determines from

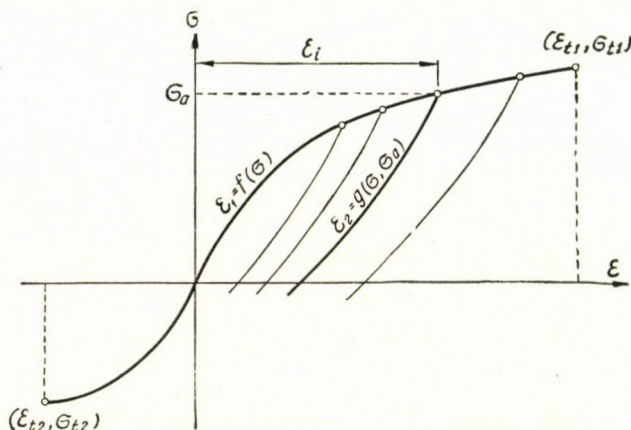


Fig. 3

curves described by equation (2) just that one which passes through point $(\varepsilon_i, \sigma_a)$.

If it is assumed that the stress-strain diagrams valid for decreasing loading are the same curves and are only shifted relative to one another, then equation (2) will pass into the form :

$$\varepsilon_d = g(\sigma, \sigma_a) = h(\sigma) - h(\sigma_a) + f(\sigma_a) .$$

Finally the limit state of the ideal structure has to be defined as well : let the limit state of the substitute structure be the state at which in one outer fibre of some cross section of the bar limit strain (ε_l) takes place.

The static load on the ideal structure is represented by parameters e_0 and P . The problem is now to answer the question at which values of parameters e_0 and P can arrive the bar at the afore-defined limit state, if the eccentricity e_0 of a force of given eccentricity, or the magnitude of the concentric force P is slowly increased.

2. Analysis of the internal forces in the ideal structure

In the investigation of some cross-section of the ideal structure equilibrium conditions may be written as follows:

$$\frac{P}{2av} = \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_2}{2}$$

$$e \frac{P}{2av} = h \left(\frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_2}{2} \right).$$

Introducing the notation

$$\sigma_a = \frac{P}{2av}$$

for the average stress, stresses arising in the concave and the convex part of the bar can be expressed from the above equations by formulas

$$\sigma_1 = \sigma_a \left(1 + \frac{e}{h} \right), \quad (3)$$

and

$$\sigma_2 = \sigma_a \left(1 - \frac{e}{h} \right) \quad (4)$$

respectively.

3. Limit load capacity of the cross-section

In this chapter some cross section of the bar is examined by itself to determine its load capacity. This is to determine the totality of pairs of parameters (P, e) that can produce limit conditions in any cross-section of the bar. According to the afore-exposed definition some cross-sections arrive at limit state if crushing strain ε_{t1} arises on the concave side, or rupture strain ε_{t2} is produced on the convex side. If there is a mutual and unequivocal relation between stresses and strains it may be said, in other words, that the bar arrives at limit state if a crushing stress σ_{t1} , arises on its concave side, or a rupture stress σ_{t2} is produced on its convex side

$$\sigma_{t1} = \sigma_a \left(1 + \frac{e}{h} \right)$$

and

$$\sigma_{t2} = \sigma_a \left(1 - \frac{e}{h} \right).$$

Condition equations, solved for e are :

$$e = h \left(\frac{\sigma_{t1}}{\sigma_a} - 1 \right) = h(n - 1), \quad (5)$$

and

$$e = h \left(1 - \frac{\sigma_{t2}}{\sigma_a} \right) = h(1 - n'), \quad (6)$$

$$\text{where } n = \frac{\sigma_{t1}}{\sigma_a} \quad \text{and} \quad n' = \frac{\sigma_{t2}}{\sigma_a}.$$

Accordingly all loadings characterized by pairs of parameters (P, e) or in other terms by (τ_a, e) , which satisfy either of equations (5) and (6), can produce limit state.

4. Limit load capacity of the bar

According to the afore-exposed definition the bar arrives at limit state if in any cross-section of it limit strain arises. It may be supposed with good reason that the deflected shape of the bar will be symmetrical and its maximum ordinate will be in the middle cross-section; that is, of all cross-sections of the bar the middle cross-section will first reach limit state.

Let the displacement of the middle cross-section of the bar be $y_{\max}$, then in the middle cross-section

$$e = e_0 + y_{\max}.$$

This value substituted into equations (5), (6) the following relationships are obtained :

$$e_0 + y_{\max} = h(n - 1), \quad (7)$$

$$e_0 + y_{\max} = h(1 - n'). \quad (8)$$

After all, all loadings characterized by pairs of parameters $(P, e_0 + y_{\max})$ or $(\sigma_a, e_0 + y_{\max})$ can produce limit state that satisfy either of these condition equations.

In the following, for the sake of brevity, only the limit state defined by formula (7) will be investigated.

5. Differential equation of the deflected bar centreline and its general solution

The originally straight bar centreline can be deflected under load. If P and e_0 are such that initial eccentricity e_0 satisfies the inequality

$$0 \leq e_0 \leq h(n-1)$$

then the bar can assume the shape shown in Fig. 4.

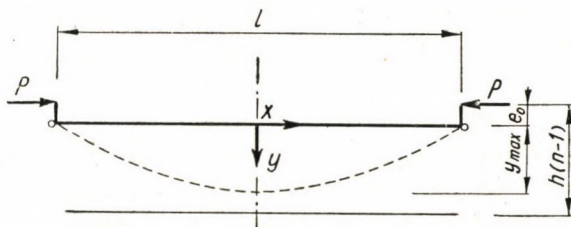


Fig. 4

In different cross-sections of the bar the following equation may be written for the rate of flexure on the basis of Fig. 2:

$$\frac{dx}{R} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2h} dx,$$

where ε_1 is the strain per unit length in the fibre on the concave side, and ε_2 the strain per unit length in the fibre on the convex side.

If the approximation of $1 + y'^2 = 1$ is allowed, the differential equation of the flexured centreline can be written in the form

$$y'' = -\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2h},$$

where y'' is the second derivative with respect to x while ε_1 and ε_2 are functions of y .

The general solution of this differential equation

$$x + A = \int \frac{dy}{\sqrt{B + \frac{1}{h} \int (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) dy}}, \quad (9)$$

and from this the slope of tangents to the deflected bar axis

$$y' = \sqrt{B + \frac{1}{h} \int (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) dy} . \quad (10)$$

Quantities A and B in the above formulas are integration constants.

6. Equation of the deflected bar centreline

Constants figuring in the equation of the deflected centreline can be determined from boundary conditions, but before dealing with this, the ENGESSER or ENGESSER—KÁRMÁN theory of the stability problem of the ideally straight (without any disturbance) and axially loaded bar has briefly to be referred to.

ENGESSER extended the known Euler theory — valid for ideally elastic materials characterized by a straight linear stress-strain diagram — to materials characterized by a curved stress-strain diagram.

ENGESSER later modified his theory, considering that the reduction of stresses during «buckling» takes place in fibres on the convex side of the bar always according to the elasticity modulus corresponding to the tangent at the origin of the stress-strain curve. This theory, later derived and at the same time verified experimentally by KÁRMÁN, is called the ENGESSER—KÁRMÁN theory.

Quantities ε_1 and ε_2 figuring in equations (9) and (10) have to be determined in the following way:

Equations (3) and (4) after substitution of $e = e_0 + y$ can be written in the following form:

$$\sigma_1 = \sigma_a \left(1 + \frac{e_0 + y}{h} \right) = \psi_1(\sigma_a, y),$$

$$\sigma_2 = \sigma_a \left(1 - \frac{e_0 + y}{h} \right) = \psi_2(\sigma_a, y),$$

and thus in the fibre on the concave side, where the stress is always increasing

$$\varepsilon_1 = f(\tau_1) = f[\psi_1(\sigma_a, y)] = F_2(\tau_a, y) = F_1, \quad (11)$$

while in the fibre on the convex side where the stress is always decreasing, in the case of ideally elastic* material

$$\varepsilon_2 = f(\tau_2) = f[\psi_2(\sigma_a, y)] = F_2(\tau_a, y) = F_2, \quad (12)$$

while in the elasto-plastic case

$$\varepsilon_2 = g(\sigma_2, \sigma_a) = g[\psi_2(\sigma_a, y), \sigma_a] = G_2(\sigma_a, y) = G_2. \quad (13)$$

In the following only elasto-plastic materials will be dealt with, considering that the perfectly elastic case, for which the relation

$$F_2 \equiv G_2$$

holds, is only a special case of the latter.

The differential equation of the deflected bar centreline is in this case

$$y'' = \frac{1}{2h} (G_2 - F_1).$$

The general solution of this equation :

$$x + A = \int \frac{dy}{\sqrt{B + \frac{1}{h} \int (G_2 - F_1) dy}}, \quad (14)$$

further

$$y' = \sqrt{B + \frac{1}{h} \int (G_2 - F_1) dy}. \quad (15)$$

Constants of these equations can be determined from boundary conditions, but with regard to the symmetrical shape of the deflected bar centreline it is sufficient to treat one half of the bar only.

Boundary conditions are the following :

1. At $x = 0$, that is, at $y = y_{\max}$ the slope of the tangent $y' = 0$;
2. At $x = l/2$ the deflexion $y = 0$.

Condition 1. is satisfied, if the quantity under the radical sign in equation (15) is written in the following form :

$$B + \frac{1}{h} \int (G_2 - F_1) dy = \frac{1}{h} \int_{y_{\max}}^y (G_2 - F_1) dy.$$

On the other hand, if slenderness ratio $\lambda = l/h$ is introduced and the quantity under the radical sign is written according to the above, from condition 2. the following relation is obtained :

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{h}} \int_0^{y_{\max}} \frac{dy}{\sqrt{\int_{y_{\max}}^y (G_2 - F_1) dy}}. \quad (16)$$

For ideally plastic materials, since

$$G_2 \equiv F_2$$

equation (16) reads

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{h}} \int_0^{y_{\max}} \frac{dy}{\sqrt{\int_{y_{\max}}^y (F_2 - F_1) dy}}. \quad (17)$$

From the above relations in case of given

λ slenderness,

P compressive force (or in other terms stress σ_a),

e_0 eccentricity,

the ordinate $y_{\max}$, hitherto supposed to be unknown, can be determined. If necessary, integration constants are also determinable, and the equation of the deflected bar centreline can be established on the basis of equation (14).

7. Limit state of strength

In Chapter 4 it has been substantiated that the limit state of the bar can be brought about by loads characterized by pairs of values $(P, e_0 + y_{\max})$ which satisfy equation (7). Accordingly, the bar can arrive at limit state if the deflexion of the middle cross section

$$y_{\max} = h(n - 1) - e_0. \quad (18)$$

In the previous section the equation of the deflected bar has been established for the case if the loading characterized by given pairs of parameters (P, e_0) is acting on the bar. Conversely, if the question is put what pairs of parameters (P, e_0) characterize the loading which can put the bar in limit state, only the value of $y_{\max}$ from equation (18) has to be substituted into equations (16), (17).

Relations thus obtained will yield the totality of parameters (P, e_0) and/or (τ_a, e_0) at which the bar can arrive at limit state.

The application of the derived formulas will be visualized by the following numerical examples :

8. Examples

Example 1.

Let the stress-strain diagram be the linear relation

$$\varepsilon = \varphi(\sigma) = \frac{\sigma}{E}$$

corresponding to the conventional assumption of the mathematical theory of elasticity. This relationship has been plotted in Fig. 5a in dashed lines corresponding to Young's modulus $E = 105\,000 \text{ kg/cm}^2$. The limit state of the compressed bar examined on the basis of relation (18)

$$y_{\max} = h \left(\frac{\sigma_{t1}}{\sigma_a} - 1 \right) - e_0 = h(n-1) - e_0,$$

and according to formula (17)

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{h}} \int_0^{y_{\max}} \frac{dy}{\sqrt{\frac{\sigma_a}{E} \int_{y_{\max}}^y \left[\left(1 - \frac{e_0 + y}{h} \right) - \left(1 + \frac{e_0 + y}{h} \right) \right] dy}}.$$

Operations executed and arranged,

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_a}} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{e_0}{h} \frac{1}{n-1} \right).$$

In the special event if the eccentricity of the force relative to the hinge point $e_0 = 0$, the Euler formula is arrived at:

$$\sigma_a = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

This relation is plotted in dashed line in the coordinate system $(\lambda, 1/n)$ in Fig. 5b.

Example 2.

Let the stress-strain diagram be the cubic polynome

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \frac{\varepsilon_0}{\sigma_t} \sigma - \frac{\varepsilon_m}{\sigma_t^2} \sigma^2 + \frac{\varepsilon_t - \varepsilon_0}{\sigma_t^3} \sigma^3. \quad (19)$$

This relation substituted into formula (17) and arranged, equation

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{h}} \int_0^{y_{\max}} \frac{dy}{\sqrt{-2 \int_{y_{\max}}^y \left[b_1 \frac{e_0 + y}{h} + b_3 \left(\frac{e_0 + y}{h} \right)^3 \right] dy}}$$

is arrived at, where

$$n = \sigma_t / \sigma_a,$$

$$b_1 = \frac{\varepsilon_0}{n} - 2 \frac{m}{n^2} + 3 \frac{\varepsilon_t - \varepsilon_0}{n^3},$$

$$b_3 = \frac{\varepsilon_t - \varepsilon_0}{n^3}.$$

The integration under the radical sign executed and notations

$$\alpha^2 = (n - 1)^2$$

$$\beta^2 = (n - 1)^2 + \frac{2 b_1}{b_3}$$

and

$$t = \frac{e_0 + y}{h}$$

introduced give

$$\lambda = \sqrt{\frac{8}{b_3}} \left\{ \int_0^{\alpha} \frac{dt}{\sqrt{(\alpha^2 - t^2)(\beta^2 + t^2)}} - \int_0^{e_0/h} \frac{dt}{\sqrt{(\alpha^2 - t^2)(\beta^2 + t^2)}} \right\}.$$

Introduction of conventional notations of elliptical integration and arrangement leads to the following final result:

$$\lambda = \sqrt{\frac{8}{b_3}} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[F\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \arcsin \frac{\frac{e_0}{h} \alpha^2 + \beta^2}{\alpha \sqrt{\left(\frac{e_0}{b}\right)^2 + \beta^2}}\right) \right].$$

In the case of the axially loaded bar $e_0 = 0$, and thus the above equation may be written with the introduction of the complete elliptical integral in the following form:

$$\lambda = \sqrt{\frac{8}{b^3}} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} K\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right). \quad (20)$$

The following case will be examined on the basis of a numerical example:

Let the material of the bar be wood with the following strength properties:

Young's modulus of elasticity E_0	=	105 000 kg/cm ²
Ultimate strength..... σ_t	=	280 "
Ultimate strain..... ε_t	=	3,57 ⁰ / ₀₀
Elastic strain..... $\varepsilon_0 = \sigma_t/E_0$	=	2,67 ⁰ / ₀₀

Suppose that the material of the bar satisfies the stress-strain diagram according to equation 19, and let the case pertaining to permanent set $\varepsilon_p = 0$ be investigated:

The stress-strain diagram defined according to the above is plotted in Fig. 5.

Values b_3 , α , β determined from the above data and substituted into equation (15) yield relations $(\lambda, 1/n)$ which are plotted in solid line in the system of coordinates $(\lambda, 1/n)$ of Fig. 5b. This line thus describes the totality of related pairs of parameters at which the bar may arrive at limit state. After all this diagram answers the question at what value of P the bar with the above-defined properties and of given slenderness λ can arrive at limit state, if the concentric load P (or the equivalent value of $1/n$) is slowly and gradually increased.

In the same figure for comparison the pairs of values $(1/n, \lambda)$ obtained on the basis of the Euler relationship

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E_0}{\lambda^2}$$

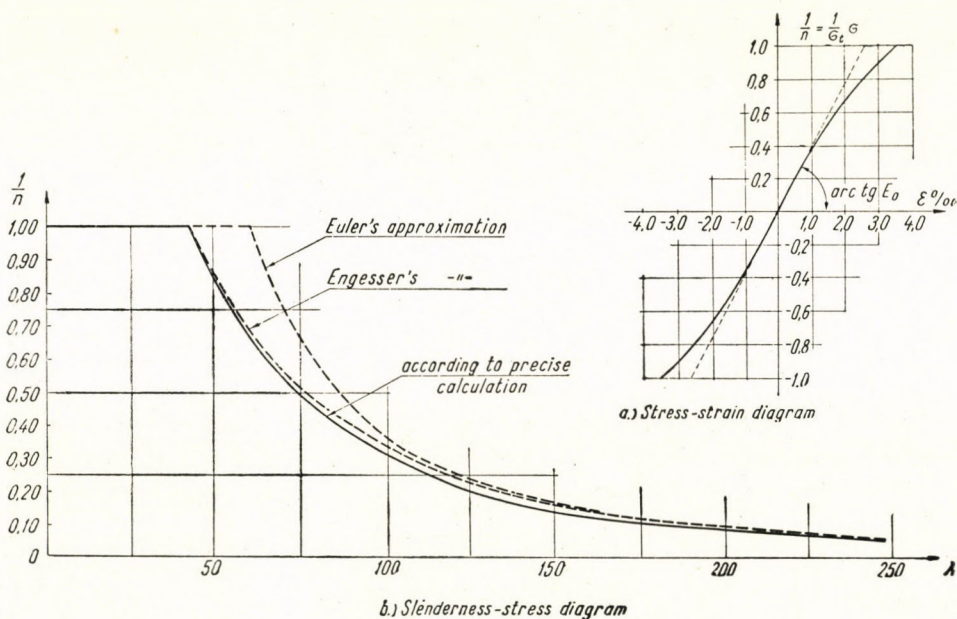


Fig. 5

are also plotted. In this formula E_0 denotes the slope of the tangent at the origin of the stress-strain diagram.

Moreover the pairs of values $(1/n, \lambda)$ obtained on the basis of the Engesser theory, the formula

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

are also plotted. In this formula $E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ is the slope of the tangent to the stress-strain diagram at point σ_a .

The diagram shows clearly that there may be a substantial difference between results of the precise calculation and of those of the approximation of Euler or Engesser. The more accurate Engesser approximation diverges from the more precise calculation presented in this paper only by some % (max. 8%).

Example 3.

Let the bar examined be a structure of elasto-plastic material satisfying conditions of cross-section, support and limit state of the ideal structure specified in Chapter 1. Let the stress-

strain diagram of the material of this bar be the simple linear relationship defined by the equations

$$\varepsilon_l = f(\sigma) = \varepsilon_0 + \frac{\sigma}{E_1},$$

$$\varepsilon_d = g(\sigma, \sigma_a) = \varepsilon_0 + \sigma_a \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) + \frac{\sigma}{E_2}.$$

(Fig. 6)

(A material characterized by a stress-strain diagram of this kind does not exist actually; this relationship has been selected only for the simplification of calculation.)

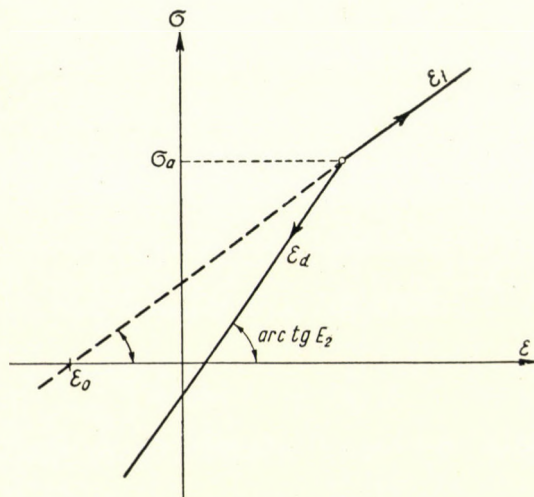


Fig. 6

In this case

$$F_1 = \varepsilon_0 + \frac{\sigma_a}{E_1} \left(1 + \frac{e_0 + y}{h} \right) = \varepsilon_0 + \frac{\sigma_a}{E_1} (1 + t),$$

$$\begin{aligned} G_2 &= \varepsilon_0 + \sigma_a \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) + \frac{\sigma_a}{E_2} \left(-\frac{e_0 + y}{h} \right) = \\ &= \varepsilon_0 + \sigma_a \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) + \frac{\sigma_a}{E_2} (1 - t), \end{aligned}$$

where $t = \frac{e_0 + y}{h}$.

The above values substituted into equation (16) give after arrangement as a final result the equation

$$\lambda = \sqrt{\frac{4 T n}{\sigma_t}} \arccos \left(\frac{e_0}{h} \frac{1}{n-1} \right),$$

where

$$T = \frac{2 E_1 E_2}{E_1 + E_2}$$

is the ENGESSER—KÁRMÁN modulus. If the special case $e_0 = 0$ is examined, and case $n = 1$ is excluded,

$$\sigma_a = \frac{\pi^2 T}{\lambda^2}$$

that is, the critical force of Engesser—Kármán is obtained.

As a second example the case when the stress strain diagram of the bar is identical at increasing and at decreasing loading, or an ideally elastic material will be examined. Let the stress-strain diagrams of the material of this bar be described by the equation

$$\varepsilon_i = \varepsilon_d = \varepsilon_0 + \frac{\sigma}{E_1}.$$

By reason of equation (17) — detailed calculations omitted — the relation

$$\lambda = \sqrt{\frac{E_1 n}{\sigma_l}} \arccos \left(\frac{e_0}{h} \frac{1}{n-1} \right)$$

is obtained. If the special case $e_0 = 0$ is examined and the event of $n = 1$ is excluded,

$$\sigma_a = \frac{\pi^2 E_1}{\lambda^2},$$

that is, the critical force of Engesser is obtained which in the special present case is identical with the Euler critical force.

The results of these calculations can be plotted in the system of coordinates $\lambda, 1/n$, by different curves according to the different eccentricities. These curves thus give the totality of related pairs of parameters $(\lambda, 1/n)$ at which the bar can arrive at limit state. The diagram thus drawn therefore answers in the last analysis the question at what value of P the bar of the afore-defined properties and of given eccentricity can arrive at limit state if the force P of given eccentricity (or the equivalent value of σ_a or $1/n$) is slowly and gradually increased.

The stress-strain diagram assumed in this example is very simple, being composed of straight lines only. The stress-strain diagrams of actual materials (e. g. concrete, aluminium) are in general curvilinear. The procedure of calculation is in such case too essentially the same, as the method shown in the above simple examples. The stress-strain diagrams of the said materials can be well approached by quadratic or cubic parabolas in case of increasing loading, while in the event of decreasing loading the linear variation of strain is generally assumed. If the stress-strain diagram is approximated by a quadratic or cubic relation (ε, σ) it becomes evident that the formula (16) or (17) leads to elliptical integrals, that is, the relation $(\lambda, 1/n)$ can be determined for different eccentricities e_0 in a closed form.

In case of a general stress-strain diagram the result is obtained by graphical integration of formulas (16) and (17).

9. Conclusions

By reason of the afore-stated it is evident that the limit state of strength has also to be considered in the analysis of the limit load capacity of compressed bars.

In the course of these investigations the approximation $1 + y'^2 = 1$ has been made. From this follows that the conclusions arrived at hold only in the

case if the limit state of strength is reached at small deflections, that is, first of all, if the bars examined are not too slender.

The review of the history of investigations on the problem of the limit load capacity of the compression bar («buckling» is the conventional term) shows that different authors (EULER, ENGESSER, KÁRMÁN, SHANLEY and others) examined this problem in the first place on ideally axially loaded and perfectly straight (without any disturbance) compression bars. In this case the stability problem can be raised with good reason. However, if the eccentricity or initial crookedness is also considered, the problem becomes the analysis of the limit state of strength.

The present paper has treated in general the problem of the bar of arbitrary material, supported on both ends free to rotate; a restriction has been made only relative to the shape of the cross-section in order to simplify calculation. From the practical point of view this is not important either, because on the basis of investigations so far conducted it can be supported with good reason that the shape of the cross-section has little influence on limit load capacity, if the slenderness of the compared bars is identical. On the basis of the exposed considerations the problem of bars of more complicated cross-sections can be solved as well, though of course with the aid of substantially more complicated mathematical relationships.

In this paper it has been supposed that the ENGESSER—KÁRMÁN assumption, namely that stresses in the fibre on the convex side decrease in any case, is correct.

However, SHANLEY established that the ENGESSER—KÁRMÁN theory is untenable in the case if flexure takes place during load increase. It can be proved namely that the decrease of stress arises in fibres on the convex side of the bar too, only along a section symmetrical in relation to the middle of the bar, while in the extreme sections of these fibres and of course all along the fibre on the concave side stresses will increase. The author intends to deal with the so-called SHANLEY effect in connection with this ideal structure in a subsequent paper.

It is evident that the SHANLEY effect is inoperative in certain cases (e.g. at eccentricities larger than the core distance). For the determination of the limit load capacity of such bars assumptions of a theory similar to that of Engesser are invariably valid. Therefore in the more general discussion of the problem, that is, in the case of eccentrically compressed bars (including the special case of concentric loading) all three theories have their proper domain of validity.

REFERENCES

1. L. EULERUS: Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Lausanne—Genève, 1744, Bousquet.
2. FR. ENGESSER: Über die Knickfestigkeit gerader Stäbe. Zeitschrift des Architekten und Ingenieur-Vereins zu Hannover (1889).
3. F. JASINSKI: Zu den Knickfragen. Schweizerische Bauzeitung (1895).
4. FR. ENGESSER: Knickfragen. Schweizerische Bauzeitung (1895).
5. FR. ENGESSER—REBER: Knickfragen. Schweizerische Bauzeitung (1895).
6. F. JASINSKI: Noch ein Wort zu den Knickfragen. Schweizerische Bauzeitung (1895).
7. FR. ENGESSER: Widerstandsmomente und Kernfiguren bei beliebigem Formänderungsgesetz (Spannungsgesetz). Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure (1898).
8. TH. V. KÁRMÁN: Untersuchungen über Knickfestigkeit. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens (1910).
9. F. R. SHANLEY: The Column Paradox. Journal of the Aeronautical Sciences (1946).
10. F. R. SHANLEY: Inelastic Column Theory. Journal of the Aeronautical Sciences (1947). (Contribution to discussion of the paper by Th. v. Kármán.)
11. F. R. SHANLEY: Applied Column Theory. Proceedings of the American Society of Civil Engineers. June (1949).
12. P. CSONKA: Beitrag zur Theorie der plastischen Knickung. Acta Technica of the Hungarian Academy of Sc. (4/1952).
13. P. CSONKA: Zur Theorie der plastischen Knickung. Acta Technica, (5/1952).
14. P. CSONKA: Die plastische Knickung des zentrisch gedrückten Stahlstabes. Acta Technica, (5/1952).

SUMMARY

The examination of the limit load capacity of the compression bar has to be divided into the analysis of three problems, almost independent of one another: the limit states of strength, of deformation and of stability. In general, each of these limit states can be brought about by a different load, e. g. by a load of given eccentricity. This paper deals only with the calculation of characteristics of the load producing limit state of strength.

The bar examined has a straight centreline, is of uniform cross-section, supported on both ends free to rotate, and eccentrically loaded. For simplification of the mathematical treatment it is assumed that the cross section of the bar is composed of two chords only, made to cooperate in load carrying by fictive structural members that take themselves no load. No specifications are made as regards the material of the bar; it may be ideally elastic, ideally plastic, or even elasto-plastic. It is assumed, however, that the ENGESSER—KÁRMÁN hypothesis, namely that stresses in the fibre on the convex side decrease along the full length of the bar, is valid.

On the basis of these assumptions the equation serving for the calculation of characteristics of the load producing limit state of strength is established in a closed form, and some examples are presented on its practical application.

ПРЕДЕЛЬНАЯ НАГРУЗКА СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Э. БЁЛЬСКЕИ

РЕЗЮМЕ

Работы по исследованию предельной нагрузки сжатого стержня следует разбить на три независимых друг от друга вопроса, т. е. на исследования предельных состояний прочности, деформации и стабильности. Каждое из этих предельных состояний может возникать при действии различных нагрузок (например, силы данной эксцентриситеты), среди которых в этой статье рассматривается лишь определение параметров нагрузки, вызывающих предельное состояние прочности.

Исследованный стержень представляет собой эксцентрично сжатый стержень неизменного сечения, опирающийся на обоих своих концах допускающим вращение образом. Для упрощения расчетов предполагается, что сечение стержня состоит всего лишь из

двух поясов, которые заставляют совместно работать мнимые конструкционные элементы, не испытывающие действия нагрузок. По материалу стержня не имеется особой оговорки, следовательно материал стержня может быть как идеально упругим, так и идеально пластичным или даже упруго-пластичным. Однако, предполагается, что действительно предположение Энгессер—Кармана.

Наряду с этими предположениями уравнение, — служащее для расчета параметров нагрузок, вызывающих предельное состояние прочности, — дается в закрытом виде; затем демонстрируется несколько примеров практического применения уравнения.

CHARGE LIMITE DE LA BARRE COMPRIMÉE

E. BÖLCSKEI

RESUMÉ

L'examen de la charge limite de la barre comprimée doit être divisé en l'analyse de trois problèmes, l'un presque indépendant de l'autre : états limites de résistance, de déformation, de stabilité. Chacun de ces états limites peut être engendré par une charge différente, (par exemple par une charge d'une excentricité donnée). Cette étude ne s'occupe que du calcul des caractéristiques de la charge engendrant l'état limite de résistance.

La barre examinée est à axe rectiligne, à section constante, supportée aux deux bouts articulés et elle est sollicitée en compression excentrée. Pour simplifier le calcul on suppose que la section de la barre est constituée de deux membrures seulement qui sont reliées par des éléments fictifs ne supportant pas de charges. Aucune réserve n'est faite pour le matériau de la barre ; il peut être parfaitement élastique, parfaitement plastique, ou même élasto-plastique. On suppose quand même que l'hypothèse de Engesser et Kármán, selon laquelle les fatigues dans la fibre du côté convexe de la barre décroissent sur toute sa longueur, soit valable.

En considération de ces stipulations l'équation pour le calcul des caractéristiques de la charge donnant lieu à l'état limite de résistance est établie dans une forme close, puis quelques exemples de son application pratique sont présentés.

DIE GRENZBELASTUNG VON DRUCKSTÄBEN

E. BÖLCSKEI

ZUSAMMENFASSUNG

Die Untersuchung der Grenzbelastung von Druckstäben muss in drei — voneinander fast unabhängige — Teilprobleme unterteilt werden : in die Untersuchung des Festigkeits-, des Formänderungs- und Stabilitätsgrenzzustands. Jeder dieser Grenzzustände kann im allgemeinen durch eine sich jeweils verändernde Belastung (z. B. eine Kraft von gegebener Exzentrizität) hervorgerufen werden ; die vorliegende Arbeit befasst sich bloss mit der Berechnung der den Festigkeitsgrenzzustand hervorrufenden Belastung.

Der untersuchte Stab ist ein an beiden Enden gelenkig gelagerter, geradachsiger, exzentrisch belasteter Druckstab von konstantem Querschnitt. Zur Vereinfachung der Berechnungen nimmt der Verfasser an, dass der Stabquerschnitt bloss aus zwei Gurten besteht, die von gedachten Bauelementen — die aber die Belastung nicht mit aufnehmen — zur Zusammenarbeit gezwungen werden. Was den Werkstoff des Stabes betrifft, wird keine besondere Annahme gemacht, er kann in gleicher Weise ideal elastisch, ideal plastisch oder sogar elasto-plastisch sein.

Dagegen wird vorausgesetzt, dass die ENGESSER—KÁRMÁNSche Annahme, wonach die Spannungen an der konvexen Seite des Stabes abnehmen, richtig ist.

Mit Hilfe dieser Annahmen bestimmt der Verfasser in geschlossener Form die Gleichungen, die zur Berechnung der den Festigkeitsgrenzzustand hervorrufenden Belastung notwendig sind, und bringt einige Beispiele für ihre praktische Anwendung.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER LOTABWEICHUNGEN

J. RENNER

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

ROLAND-EÖTVÖS-GEOPHYSIKALISCHES INSTITUT, BUDAPEST

[Eingegangen am 17. Juni 1955]

I. Einleitung

Im Jahre 1952 wurde vom Verfasser in den »Mitteilungen der Klasse für Technische Wissenschaften der Ungarischen Akademie der Wissenschaften« eine Arbeit in ungarischer Sprache über jene Untersuchungen veröffentlicht, die er über die Bestimmung der Lotabweichungen aus den mit der EÖTVÖSschen Drehwaage gewonnenen Messergebnissen ausgeführt hat [19]. Diese Untersuchungen knüpfen an jene Berechnungsmethode an, die EÖTVÖS in seiner Abhandlung im Jahre 1907 publiziert hatte [2]. Die Untersuchungen des Verfassers ergaben gewisse Vereinfachungen in der anzuwendenden Rechenmethode.

Die Untersuchungen über die Lotabweichungen wurden fortgesetzt, wobei das Bestreben dahin ging, eine auf einer prinzipiellen Grundlage stehende Berechnungsmethode auszuarbeiten, bei der die notwendige Rechenarbeit in einem vernünftigen Verhältnis zu den Anforderungen der Praxis stand. Über diese Untersuchungen soll nun im nachstehenden berichtet werden.

II. Berechnungsmethode

EÖTVÖS gab in seiner grundlegenden Arbeit vom Jahre 1907 zwei Methoden zur Bestimmung der Lotabweichungen an [2]. Die vorliegenden Untersuchungen knüpfen sich an die zweite, genauere Methode von EÖTVÖS.

Wenn das zu untersuchende Gebiet nicht zu gross ist, dann kann man, wie EÖTVÖS gezeigt hat [2], für das ganze Gebiet ein einheitliches Koordinatensystem einführen, weil dann die durch die Meridiankonvergenz verursachten Unterschiede die Beobachtungsfehler nicht übertreffen. Die zulässigen Abmessungen des Gebietes ergeben sich zu 40–50 km in Breite und Länge.

Die Berechnung der Lotabweichungen erfolgt auf Grund von sich aneinander anschliessenden Dreiecken (Abb. 1).

Es sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem gewählt, dessen x -Achse nach Nord, dessen y -Achse nach Ost und dessen z -Achse vertikal nach unten gerichtet ist.

In den folgenden Untersuchungen seien anstatt der Lotabweichungskomponenten die mit der Schwerkraft multiplizierten Werte, d. h. die horizontalen Kraftkomponenten in Betracht gezogen.

Die Veränderung der horizontalen Kraftkomponenten zwischen den Punkten a und b in der Richtung von a nach b ist :

$$\xi_b - \xi_a = \xi_{ab} \quad \text{bzw.} \quad \eta_b - \eta_a = \eta_{ab}$$

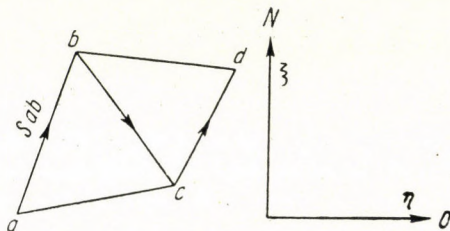


Abb. 1

Die Differenz der nördlichen Komponente der ersten Dreiecksseite ist vorläufig als unbekannt anzusehen :

$$\xi_{ab} = u$$

EÖTVÖS leitete für die Differenz der Kraftkomponenten längs der Dreiecksseiten folgende Ausdrücke ab

$$\eta_{ab} = \frac{T_{ab} + u \sin \alpha_{ab}}{\cos \alpha_{ab}} \quad (1)$$

$$\xi_{bc} = \frac{T_{bc} \cos \alpha_{ca} + (T_{ca} - \xi_{ab} \sin \alpha_{ca} + \eta_{ab} \cos \alpha_{ca}) \cos \alpha_{bc}}{\sin (\alpha_{ca} - \alpha_{bc})} \quad (2)$$

$$\eta_{bc} = \frac{T_{bc} \sin \alpha_{ca} + (T_{ca} - \xi_{ab} \sin \alpha_{ca} + \eta_{ab} \cos \alpha_{ca}) \sin \alpha_{bc}}{\sin (\alpha_{ca} - \alpha_{bc})} \quad (3)$$

In diesen Ausdrücken bedeuten α_{ab} , α_{bc} , α_{ca} die Winkel zwischen den durch die Indizes angegebenen Richtungen. T_{ab} , T_{bc} , T_{ca} sind Linienintegrale bezogen auf die entsprechenden Dreiecksseiten mit folgender Bedeutung :

$$T_{ab} = \int_a^b \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s} ds \doteq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s} \right)_a + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s} \right)_b \right] s_{ab}$$

wo s_{ab} den Abstand zwischen den Punkten a und b bedeutet und die Richtung n mit der Richtung s einen rechten Winkel im Uhrzeigersinn bildet (Abb. 2). Man kann den angenäherten Wert des Integrals mit Hilfe des Mittelwertes des Differentialquotienten $\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s}$ bezogen auf die Punkte a und b berechnen. Da die Beobachtungsergebnisse der Drehwaagenmessungen auf das Nord-Ost-Koordinatensystem bezogen sind, müssen die Werte mit Hilfe folgenden Ausdrucks transformiert werden :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s} = U_A \frac{\sin 2\alpha}{2} + U_{xy} \cos 2\alpha$$

$$\text{wo } U_A = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad U_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

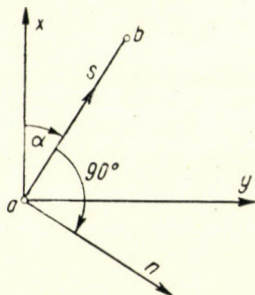


Abb. 2

Spezielle Fälle dieser Transformation sind folgende :

$$\alpha = 0^\circ \text{ oder } \alpha = 180^\circ \text{ (Richtung } s \text{ Nord-Süd)} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s} = U_{xy}$$

$$\alpha = 90^\circ \text{ oder } \alpha = 270^\circ \text{ (Richtung } s \text{ Ost-West)} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s} = -U_{xy}$$

$$\alpha = 45^\circ \text{ oder } \alpha = 225^\circ \text{ (Richtung } s \text{ Nordost-Südwest)} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s} = \frac{U_A}{2}$$

$$\alpha = 135^\circ \text{ oder } \alpha = 315^\circ \text{ (Richtung } s \text{ Nordwest-Südost)} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s} = -\frac{U_A}{2}$$

Die Ausdrücke (1)–(3) sind sinngemäss auf das Dreieck bcd anwendbar, das sich dem Dreieck abc anschliesst, und somit lassen sich auch die Differenzen ξ_{cd} und η_{cd} der Kraftkomponenten berechnen. Wenn man die Berechnung auf mehrere sich aneinander anschliessende Dreiecke ausführt, dann erhält man die Differenzen der Kraftkomponenten für eine zusammenhängende gebrochene Linie. Da die bei der Berechnung gebrauchten Ausdrücke (1)–(3) die Grösse $\xi_{ab} = u$ enthalten, kommt diese vorläufig unbekannte Grösse in sämtlichen auf die Dreieckseiten bezogenen Kraftkomponentendifferenzen vor.

Zur Bestimmung dieser unbekannten Grösse u benötigt man die auf mindestens zwei Punkten des betreffenden Gebietes astronomisch gemessenen Breitenangaben. Ist die Nord-Süd-Komponente der Lotabweichung für zwei astrogeodätische Punkte bekannt, so kann man die Lotabweichungsdifferenzen mit jener Kraftkomponentendifferenz vergleichen, die sich aus der Auswertung des Drehwaagenbeobachtungsnetzes zwischen den beiden astrogeodätischen Punkten ergibt. Auf diese Weise ist es möglich, die Grösse u zu berechnen. Da sich die Messergebnisse der astrogeodätischen Punkte auf ein Referenzellipsoid beziehen, können sie als relative Werte betrachtet werden. Wenn einer der auf dem betreffenden Gebiet befindlichen astrogeodätischen Punkte ein LAPLACE-Punkt ist, dann besteht die Möglichkeit, die relativen Werte der Kraftkomponenten mit Hilfe der Breiten- und Längenangaben des LAPLACE-Punktes für das ganze bearbeitete Gebiet zu berechnen, denn sonst kann man nur die Nordkomponente unmittelbar bestimmen, während für die Ostkomponente mit Rücksicht auf andere Schwereangaben ein willkürlicher Anfangswert gewählt werden muss.

Es wurde schon in der obenerwähnten Abhandlung des Verfassers vom Jahre 1952 dargelegt [19], dass die auf die Kraftkomponenten bezüglichen Berechnungen wesentlich vereinfacht werden können, wenn man anstatt der aus den gemessenen Punkten bestehenden ungleichseitigen Dreiecke gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke benutzt. In diesem Falle müssen natürlich die auf die Eckpunkte eines das betreffende Gebiet bedeckenden quadratischen Netzes bezogenen Werte der zweiten Differentialquotienten mit einem Interpolationsverfahren bestimmt werden. Obwohl diese keine tatsächlich gemessenen Werte und auch nicht unabhängig voneinander sind, ist die Ausgleichung mit ihnen viel einfacher, ohne dass hierbei das Endergebnis wesentlich beeinflusst würde.

Je nach der Lage der gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke und der sich anschliessenden Seiten, sowie je nach der Richtung der Umkreisung der Dreiecke sind verschiedene Fälle zu unterscheiden. Die gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke besitzen auf das Koordinatensystem bezogen vier verschiedene Lagen, und da in jeder Lage 6 Fälle vorkommen, beträgt die Gesamtzahl der verschiedenen Fälle 24. Die Differenzen der horizontalen Kraftkomponenten sind in den einzelnen Fällen die folgenden :

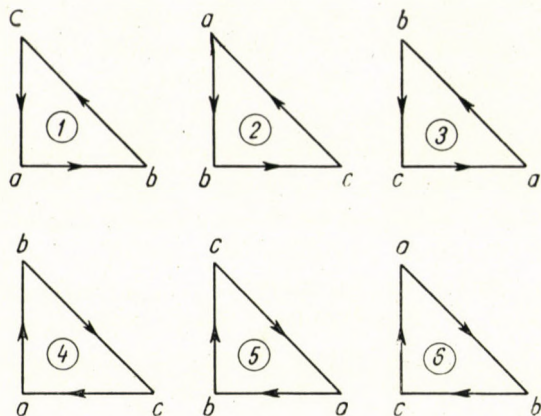


Abb. 3

1. Fall

$$\alpha_{ca} = 180^\circ$$

$$\alpha_{bc} = 315^\circ$$

$$\xi_{bc} = T_{bc} \sqrt{2} - T_{ca} + \eta_{ab}$$

$$\eta_{bc} = T_{ca} - \eta_{ab}$$

2. Fall

$$\alpha_{ca} = 315^\circ$$

$$\alpha_{bc} = 90^\circ$$

$$\xi_{bc} = -T_{bc}$$

$$\eta_{bc} = T_{bc} - T_{ca} \sqrt{2} - \xi_{ab} - \eta_{ab}$$

3. Fall

$$\alpha_{ca} = 90^\circ$$

$$\alpha_{bc} = 180^\circ$$

$$\xi_{bc} = T_{ca} - \xi_{ab}$$

$$\eta_{bc} = -T_{bc}$$

4. Fall

$$\alpha_{ca} = 270^\circ$$

$$\alpha_{bc} = 135^\circ$$

$$\xi_{bc} = -T_{ca} - \xi_{ab}$$

$$\eta_{bc} = -T_{bc} \sqrt{2} + T_{ca} + \xi_{ab}$$

5. Fall

$$\alpha_{ca} = 135^\circ$$

$$\alpha_{bc} = 0^\circ$$

$$\xi_{bc} = -T_{bc} + T_{ca} \sqrt{2} - \xi_{ab} - \eta_{ab}$$

$$\eta_{bc} = T_{bc}$$

6. Fall

$$\alpha_{ca} = 0^\circ$$

$$\alpha_{bc} = 270^\circ$$

$$\xi_{bc} = T_{bc}$$

$$\eta_{bc} = -T_{ca} - \eta_{ab}$$

7. Fall

$$\alpha_{ca} = 315^\circ$$

$$\alpha_{bc} = 180^\circ$$

$$\xi_{bc} = T_{bc} - T_{ca} \sqrt{2} - \xi_{ab} - \eta_{ab}$$

$$\eta_{bc} = -T_{bc}$$

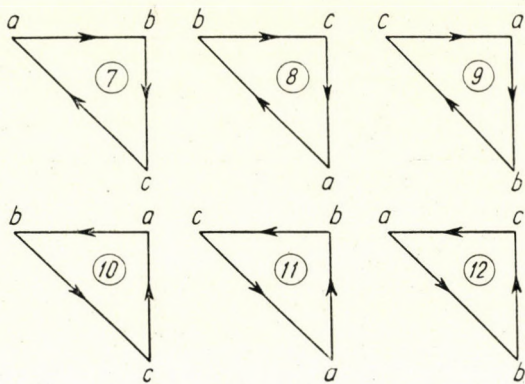


Abb. 4

8. Fall

$$\alpha_{ca} = 180^\circ$$

$$\alpha_{bc} = 90^\circ$$

$$\xi_{bc} = -T_{bc}$$

$$\eta_{bc} = T_{ca} - \eta_{ab}$$

9. Fall

$$\alpha_{ca} = 90^\circ$$

$$\alpha_{bc} = 315^\circ$$

$$\xi_{bc} = T_{ca} - \xi_{ab}$$

$$\eta_{bc} = T_{bc} \sqrt{2} - T_{ca} + \xi_{ab}$$

10. Fall

$$\alpha_{ca} = 0^\circ$$

$$\alpha_{bc} = 135^\circ$$

$$\xi_{bc} = -T_{bc} \sqrt{2} + T_{ca} + \eta_{ab}$$

$$\eta_{bc} = -T_{ca} - \eta_{ab}$$

11. Fall

$$\alpha_{ca} = 135^\circ$$

$$\alpha_{bc} = 270^\circ$$

$$\xi_{bc} = T_{bc}$$

$$\eta_{bc} = -T_{bc} + T_{ca} \sqrt{2} - \xi_{ab} - \eta_{ab}$$

12. Fall

$$\alpha_{ca} = 270^\circ$$

$$\alpha_{bc} = 0^\circ$$

$$\xi_{bc} = -T_{ca} - \xi_{ab}$$

$$\eta_{bc} = T_{bc}$$

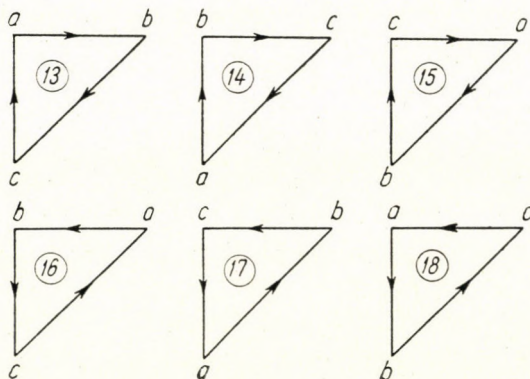


Abb. 5

13. Fall

$$\begin{aligned} \alpha_{ca} &= 0^\circ & \alpha_{bc} &= 225^\circ & \xi_{bc} &= T_{bc} \sqrt{2} - T_{ca} - \eta_{ab} \\ & & & & \eta_{bc} &= -T_{ca} - \eta_{ab} \end{aligned}$$

14. Fall

$$\begin{aligned} \alpha_{ca} &= 225^\circ & \alpha_{bc} &= 90^\circ & \xi_{bc} &= -T_{bc} \\ & & & & \eta_{bc} &= -T_{bc} + T_{ca} \sqrt{2} + \xi_{ab} - \eta_{ab} \end{aligned}$$

15. Fall

$$\begin{aligned} \alpha_{ca} &= 90^\circ & \alpha_{bc} &= 0^\circ & \xi_{bc} &= T_{ca} - \xi_{ab} \\ & & & & \eta_{bc} &= T_{bc} \end{aligned}$$

16. Fall

$$\begin{aligned} \alpha_{ca} &= 45^\circ & \alpha_{bc} &= 180^\circ & \xi_{bc} &= -T_{bc} + T_{ca} \sqrt{2} - \xi_{ab} + \eta_{ab} \\ & & & & \eta_{bc} &= -T_{bc} \end{aligned}$$

17. Fall

$$\begin{aligned} \alpha_{ca} &= 180^\circ & \alpha_{bc} &= 270^\circ & \xi_{bc} &= T_{bc} \\ & & & & \eta_{bc} &= T_{ca} - \eta_{ab} \end{aligned}$$

18. Fall

$$\begin{aligned} \alpha_{ca} &= 270^\circ & \alpha_{bc} &= 45^\circ & \xi_{bc} &= -T_{ca} - \xi_{ab} \\ & & & & \eta_{bc} &= T_{bc} \sqrt{2} - T_{ca} - \xi_{ab} \end{aligned}$$

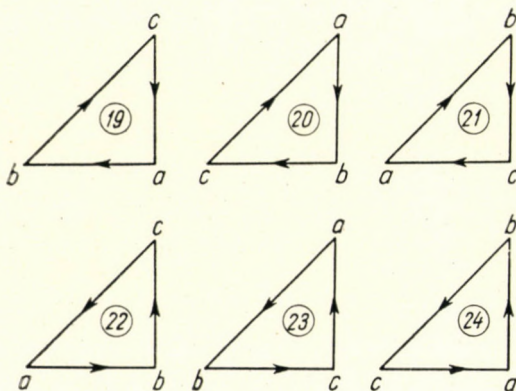


Abb. 6

19. Fall

$$\begin{aligned} \alpha_{ca} &= 180^\circ & \alpha_{bc} &= 45^\circ & \xi_{bc} &= -T_{bc} \sqrt{2} + T_{ca} - \eta_{ab} \\ & & & & \eta_{bc} &= T_{ca} - \eta_{ab} \end{aligned}$$

20. Fall

$$\begin{aligned} \alpha_{ca} &= 45^\circ & \alpha_{bc} &= 270^\circ & \xi_{bc} &= T_{bc} \\ & & & & \eta_{bc} &= T_{bc} - T_{ca} \sqrt{2} + \xi_{ab} - \eta_{ab} \end{aligned}$$

21. Fall

$$\begin{array}{lll} \alpha_{ca} = 270^\circ & \alpha_{bc} = 180^\circ & \begin{array}{l} \xi_{bc} = -T_{ca} - \xi_{ab} \\ \eta_{bc} = -T_{bc} \end{array} \end{array}$$

22. Fall

$$\begin{array}{lll} \alpha_{ca} = 225^\circ & \alpha_{bc} = 0^\circ & \begin{array}{l} \xi_{bc} = T_{bc} - T_{ca}\sqrt{2} - \xi_{ab} + \eta_{ab} \\ \eta_{bc} = T_{bc} \end{array} \end{array}$$

23. Fall

$$\begin{array}{lll} \alpha_{ca} = 0^\circ & \alpha_{bc} = 90^\circ & \begin{array}{l} \xi_{bc} = -T_{bc} \\ \eta_{bc} = -T_{ca} - \eta_{ab} \end{array} \end{array}$$

24. Fall

$$\begin{array}{lll} \alpha_{ca} = 90^\circ & \alpha_{bc} = 225^\circ & \begin{array}{l} \xi_{bc} = T_{ca} - \xi_{ab} \\ \eta_{bc} = -T_{bc}\sqrt{2} + T_{ca} - \xi_{ab} \end{array} \end{array}$$

III. Berechnung der Lotabweichungen auf einem zusammenhängenden Gebiet

Wenn die in der Berechnung benutzten Netzkpunkte in einer Doppellinie ein streifenförmiges Gebiet abstecken, dann schliesst sich jedem Dreiecke nur

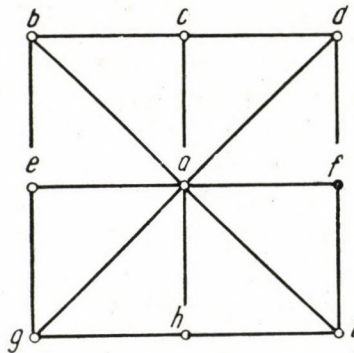


Abb. 7

ein folgendes Dreieck an, so dass die schrittweise Berechnung der horizontalen Kraftkomponenten eindeutig erfolgt. Auf einem zusammenhängenden Gebiete hingegen bestehen zur schrittweisen Entwicklung der Dreiecke mehrere Möglichkeiten, woraus sich dann bei der Berechnung eine gewisse Willkür ergibt. Es ist deshalb die Ausarbeitung eines Verfahrens anzustreben, bei dem die Berechnung

und die Ergebnisse unabhängig von der Reihenfolge sind, in der die benachbarten Dreiecke in Betracht gezogen werden. Das im folgenden darzulegende Verfahren will dieses Ziel erreichen.

Ein jeder innere Eckpunkt des quadratischen Netzes ist von 8 Netzknoten umgeben. In der Abb. 7 ist der innere Punkt a von den benachbarten Netzknoten b, c, d, e, f, g, h, i umgeben. Demgemäss können die Differenzen zwischen den horizontalen Kraftkomponenten der benachbarten 8 Punkte ausgedrückt werden. Im folgenden werden die Differenzen der Komponenten ausführlich ausgeschrieben, anstatt wie bisher durch zwei Indizes bezeichnet zu werden.

Aus dem Dreieck abc (7. Fall) folgt

$$\xi_a - \xi_c = T_{ac} - T_{ab} \sqrt{2} - \xi_c + \xi_b - \eta_c + \eta_b$$

$$\xi_a - \xi_b + \eta_c - \eta_b = T_{ac} - T_{ab} \sqrt{2} \quad (4)$$

$$\eta_a - \eta_c = -T_{ac} \quad (5)$$

Aus dem Dreieck acd (16. Fall) folgt

$$\xi_a - \xi_c = -T_{ac} + T_{ad} \sqrt{2} + \xi_d - \xi_c + \eta_c - \eta_d$$

$$\xi_a - \xi_d + \eta_d - \eta_c = -T_{ac} + T_{ad} \sqrt{2} \quad (6)$$

$$\eta_a - \eta_c = -T_{ac} \quad (7)$$

Aus dem Dreieck adf (20. Fall) folgt

$$\xi_a - \xi_f = T_{af} \quad (8)$$

$$\eta_a - \eta_f = T_{af} - T_{ad} \sqrt{2} + \xi_f - \xi_d + \eta_d - \eta_f$$

$$\xi_d - \xi_f + \eta_a - \eta_d = T_{af} - T_{ad} \sqrt{2} \quad (9)$$

Aus dem Dreieck afi (11. Fall) folgt

$$\xi_a - \xi_f = T_{af} \quad (10)$$

$$\eta_a - \eta_f = -T_{af} + T_{ai} \sqrt{2} + \xi_i - \xi_f + \eta_i - \eta_f$$

$$\xi_f - \xi_i + \eta_a - \eta_i = -T_{af} + T_{ai} \sqrt{2} \quad (11)$$

Aus dem Dreieck *aih* (5. Fall) folgt

$$\xi_a - \xi_h = -T_{ah} + T_{ai}\sqrt{2} + \xi_i - \xi_h + \eta_i - \eta_h$$

$$\xi_a - \xi_i + \eta_h - \eta_i = -T_{ah} + T_{ai}\sqrt{2} \quad (12)$$

$$\eta_a - \eta_h = T_{ah} \quad (13)$$

Aus dem Dreieck *agh* (22. Fall) folgt

$$\xi_a - \xi_h = T_{ah} - T_{ag}\sqrt{2} + \xi_g - \xi_h + \eta_h - \eta_g$$

$$\xi_a - \xi_g + \eta_g - \eta_h = T_{ah} - T_{ag}\sqrt{2} \quad (14)$$

$$\eta_a - \eta_h = T_{ah} \quad (15)$$

Aus dem Dreieck *age* (14. Fall) folgt

$$\xi_a - \xi_e = -T_{ae} \quad (16)$$

$$\eta_a - \eta_e = -T_{ae} + T_{ag}\sqrt{2} + \xi_e - \xi_g + \eta_g - \eta_e$$

$$\xi_g - \xi_e + \eta_a - \eta_g = -T_{ae} + T_{ag}\sqrt{2} \quad (17)$$

Aus dem Dreieck *abe* (2. Fall) folgt

$$\xi_a - \xi_e = -T_{ae} \quad (18)$$

$$\eta_a - \eta_e = T_{ae} - T_{ab}\sqrt{2} + \xi_b - \xi_e + \eta_b - \eta_e$$

$$\xi_e - \xi_b + \eta_a - \eta_b = T_{ae} - T_{ab}\sqrt{2} \quad (19)$$

Von diesen Ausdrücken können folgende 8 unabhängige Gleichungen abgeleitet werden :

aus den Ausdrücken (4) und (7) oder aber (18) und (19) :

$$\xi_b - \xi_a + \eta_b - \eta_a = T_{ab}\sqrt{2} \quad (20)$$

aus den Ausdrücken (6) und (7) oder aber (8) und (9) :

$$\xi_a - \xi_d + \eta_d - \eta_a = T_{ad}\sqrt{2} \quad (21)$$

aus den Ausdrücken (12) und (13) oder aber (10) und (11) :

$$\xi_a - \xi_i + \eta_a - \eta_i = T_{ai}\sqrt{2} \quad (22)$$

aus den Ausdrücken (13) und (14) oder aber (16) und (17) :

$$\xi_g - \xi_a + \eta_a - \eta_g = T_{ag} \sqrt{2} \quad (23)$$

aus der Gleichung (16) oder (18) :

$$\xi_e - \xi_a = T_{ae} \quad (24)$$

aus der Gleichung (8) oder (10) :

$$\xi_a - \xi_f = T_{af} \quad (25)$$

aus der Gleichung (5) oder (7) :

$$\eta_c - \eta_a = T_{ac} \quad (26)$$

aus der Gleichung (13) oder (15) :

$$\eta_a - \eta_h = T_{ah} \quad (27)$$

Zur Bestimmung der Kraftkomponenten ξ_a und η_a dienen 8 unabhängige Gleichungen. Die ersten 4 Gleichungen geben Zusammenhänge in diagonalen Richtungen, die anderen 4 Gleichungen in nordsüdlicher bzw. in ostwestlicher Richtung. Es ist ersichtlich, dass die in ostwestlicher Richtung genommenen Linienintegrale unmittelbar die Veränderung der Nordkomponenten ξ in ostwestlicher Richtung, die in nordsüdlicher Richtung genommenen Linienintegrale dagegen die Veränderung der Ostkomponenten η in nordsüdlicher Richtung ergeben. Die Linienintegrale in diagonalen Richtungen enthalten die Veränderung sowohl der Komponenten ξ als auch der Komponenten η .

Wenn man die Gleichungen (20)–(23) und (24)–(27) für alle Seiten und Diagonalen des quadratischen Netzes bildet, erhält man Gleichungen, deren Zahl die der unbekannten Grössen ξ und η übertrifft.

Die absoluten Glieder auf der rechten Seite der Gleichungen (20)–(27) haben alle die gleiche Bedeutung. Dies ist leicht ersichtlich, wenn man die auf die entsprechenden Richtungen transformierten Grössen betrachtet. Das absolute Glied in der Gleichung für eine diagonale Richtung ist laut der Transformationsformel :

$$T_{ad} \sqrt{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{{}^a U_{\Delta}}{2} + \frac{{}^d U_{\Delta}}{2} \right) k \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{{}^a U_{\Delta} + {}^d U_{\Delta}}{2} k = K_{ad}$$

In diesem Ausdruck bedeutet k die Seitenlänge des quadratischen Netzes. Das absolute Glied in der Gleichung für eine südnördliche Seite lautet :

$$T_{ac} = \frac{{}^aU_{xy} + {}^cU_{xy}}{2} k = K_{ac}$$

Die auf der rechten Seite der Gleichungen (20)–(27) befindlichen absoluten Glieder bedeuten die Produkte aus den die Krümmung bestimmenden zweiten Differentialquotienten und der Länge der Netzseiten.

Die für die Seiten und Diagonalen des quadratischen Netzes gültigen Gleichungen können für die Bestimmung der unbekannten Grössen als vermittelnde Gleichungen angesehen werden. Da die Zahl der vermittelnden Gleichungen die Zahl der Unbekannten übertrifft, können die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten auf Grund des Prinzips der kleinsten Quadrate so bestimmt werden, dass die Quadratsumme der Verbesserungen der absoluten Glieder — wobei diese auf Grund einer gewissen zulässigen Vernachlässigung als gleich genau betrachtet werden — ein Minimum wird.

Die Verbesserungen können folgenderweise geschrieben werden :

$$v_1 = \xi_e - \xi_a - K_{ae} \quad v_2 = \eta_c - \eta_a - K_{ac}$$

$$v_3 = \xi_a - \xi_d + \eta_d - \eta_a - K_{ad} \quad \text{usw.}$$

Die Quadratsumme der Verbesserungen ist

$$\Sigma v^2 = [vv] = \text{minimum}$$

Die Bedingungen des Minimums, d. i. die als Null genommenen partiellen Differentialquotienten ergeben die Normalgleichungen :

$$\frac{\partial [vv]}{\partial \xi_a} = 0 \quad \frac{\partial [vv]}{\partial \eta_a} = 0 \quad \frac{\partial [vv]}{\partial \xi_b} = 0 \quad \frac{\partial [vv]}{\partial \eta_b} = 0 \quad \text{usw.}$$

Da die vermittelnden Gleichungen nur die Differenzen der Komponenten ξ und η enthalten, benötigt man zur Bestimmung der Kraftkomponenten die Ergebnisse der astrogeodätischen Messungen.

Es folgt aus dem einfachen Aufbau der vermittelnden Gleichungen, dass die diagonalen Koeffizienten der Normalgleichungen kleine positive Zahlen sind, während der Wert der übrigen Koeffizienten die positive oder negative Einheit ist. Die Auflösung der Normalgleichungen wird in grossem Masse durch

die Ausdrücke (24)–(27) erleichtert, denn aus diesen Ausdrücken können die Näherungswerte der Unbekannten unmittelbar berechnet werden, so dass die Auflösung des Normalgleichungssystems mit verhältnismässig kleinen absoluten Gliedern ermöglicht wird, was eine bedeutende Vereinfachung der Rechenarbeit bedeutet.

IV. Theoretisches Zahlenbeispiel

Das folgende Zahlenbeispiel soll zur Untersuchung dienen, in welche Grössenordnung die Wirkung einer gegebenen unterirdischen Masse auf die Lotabweichung fällt.

Es sei unter der Erdoberfläche eine wirkende Masse von der Form eines Parallelepipeds angenommen. Die Dichte dieser Masse soll um 0,6 grösser sein als die Dichte der Umgebung, und beide Massen sollen homogen sein.

Im Zahlenbeispiel betragen die Kantenlängen der wirkenden Masse in horizontaler Richtung 2 km und 4 km, in vertikaler Richtung 1 km; die obere horizontale Fläche sei in einer Tiefe von 1 km unterhalb der Erdoberfläche gelegen. Die Differentialquotienten U_A und U_{xy} wurden mit Hilfe folgender aus der Literatur bekannter Formeln für verschiedene Punkte der Erdoberfläche berechnet:

$$\begin{aligned}
 U_A = -f\sigma & \left[\arctg \frac{y_3 z_2}{x_2 r_8} - \arctg \frac{x_2 z_2}{y_2 r_8} + \arctg \frac{y_1 z_1}{x_2 r_3} - \arctg \frac{x_2 z_1}{y_1 r_3} + \right. \\
 & + \arctg \frac{y_2 z_1}{x_1 r_5} - \arctg \frac{x_1 z_1}{y_2 r_5} + \arctg \frac{y_1 z_2}{x_1 r_2} - \arctg \frac{x_1 z_2}{y_1 r_2} - \\
 & - \arctg \frac{y_1 z_1}{x_1 r_1} + \arctg \frac{x_1 z_1}{y_1 r_1} - \arctg \frac{y_2 z_2}{x_1 r_6} + \arctg \frac{x_1 z_2}{y_2 r_6} - \\
 & \left. - \arctg \frac{y_1 z_2}{x_2 r_4} + \arctg \frac{x_2 z_2}{y_1 r_4} - \arctg \frac{y_2 z_1}{x_2 r_7} + \arctg \frac{x_2 z_1}{y_2 r_7} \right] \\
 U_{xy} = f\sigma \ln & \left[\frac{r_1 + z_1}{r_2 + z_2} \cdot \frac{r_6 + z_2}{r_5 + z_1} \cdot \frac{r_4 + z_2}{r_3 + z_1} \cdot \frac{r_7 + z_1}{r_8 + z_2} \right]
 \end{aligned}$$

In diesen Formeln bedeutet f die Konstante der Massenanziehung und σ die Dichtedifferenz zwischen der wirkenden Masse und ihrer Umgebung.

Die Abb. 8 stellt das Parallelepipid im räumlichen Koordinatensystem dar und gibt die Bedeutung der in den Formeln vorkommenden Bezeichnungen an. Die Zeichen $r_1, r_2, \dots$ sind die Entfernungen der betreffenden Eckpunkte vom Anfangspunkt des Koordinatensystems. In den Berechnungen ist der Anfangspunkt des Koordinatensystems der jeweilige Aufpunkt. Die auf der Oberfläche angenommenen Aufpunkte sind Eckpunkte eines quadratischen Netzes von 1 km Seitenlänge. In der Abb. 9 sind die aus den zweiten Differentialquotienten berechneten horizontalen Richtkräfte in der üblichen Weise dargestellt.

Die Linienintegrale T_{ab}, T_{ac} usw. wurden aus den Grössen U_A und U_{xy} mit Hilfe der im vorstehenden erörterten Methode berechnet und daraus die vermittelnden Gleichungen aufgestellt. Infolge der Symmetrie musste die Berechnung nur für einen Teil der Aufpunkte ausgeführt werden. Da die vermittelnden Gleichungen die Differenzen der horizontalen Kraftkomponenten enthalten, mussten die ξ - und η -Werte in mindestens einem Punkte auf eine andere

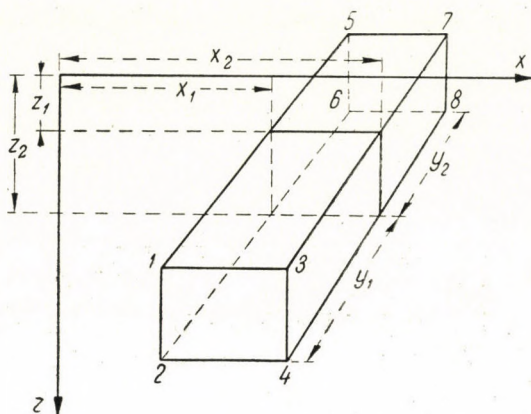


Abb. 8

Horizontale Richtkräfte

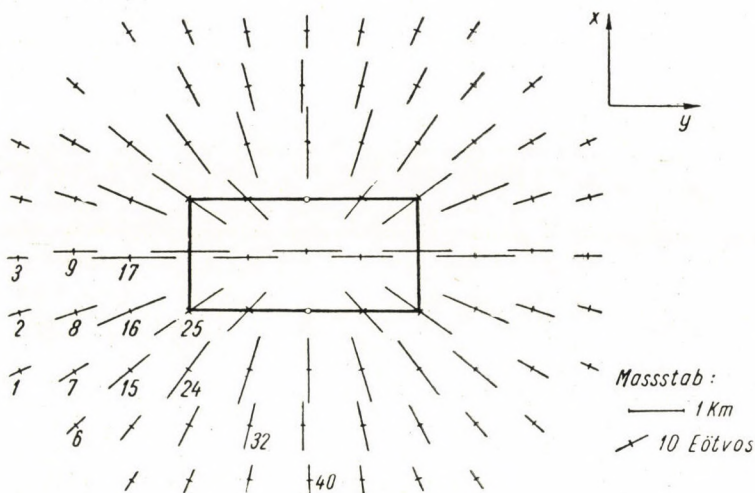


Abb. 9

Weise bestimmt werden. Die Berechnung in einigen Punkten erfolgte mit Hilfe der von HAÁZ abgeleiteten Formeln [20]:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a} \frac{c}{r} - b \ln(c+r) - c \ln(b+r)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = b \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c}{b} \frac{a}{r} - a \ln(c+r) - c \ln(a+r)$$

In diesen Formeln sind a , b , c die rechtwinkligen Koordinaten eines Eckpunktes des Parallelepi-peds, wenn der Koordinatenanfangspunkt als Aufpunkt gewählt wird; r ist die Entfernung des betreffenden Eckpunktes vom Aufpunkte. Die Koordinaten der Eckpunkte sind als Integra-

tionsgrenzen in die oberen Ausdrücke einzusetzen. In der Auflösung der Normalgleichungen wurden die für den Punkt 15 (Abb. 9) berechneten folgenden Werte benutzt :

$$\xi = +13 \cdot 10^{-4}, \quad \eta = +16 \cdot 10^{-4}$$

Die Abb. 10 stellt die berechneten, den Lotabweichungen proportionalen Kraftkomponenten dar. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass die Wirkung der angenommenen Masse in den Lotabweichungen noch in einer grösseren Entfernung bedeutend ist. Dies folgt auch daraus, dass die Lotabweichungen durch die ersten Ableitungen des Schwerepotentials bestimmt werden, die

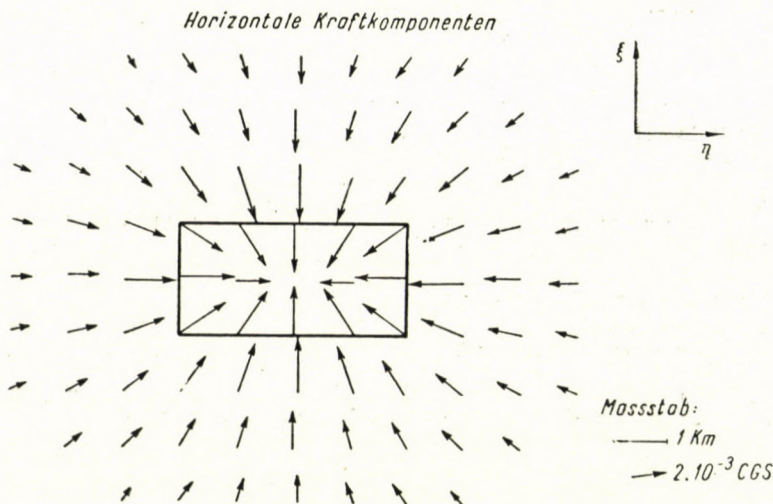


Abb. 10

der zweiten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional sind und deshalb mit der Entfernung weniger rasch abnehmen als die zweiten Ableitungen, die der dritten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional sind.

V. Berechnung der Lotabweichungen aus tatsächlichen, mit der Eötvösschen Drehwaage gewonnenen Messergebnissen

Das im vorstehenden erörterte Verfahren wurde auf einem Gebiete angewandt, auf dem Beobachtungsstationen mit Drehwaagen in genügender Dichte vorhanden waren und auf dem sich auch ein LAPLACE-Punkt befindet. Das Geodätische und Kartographische Institut hatte in liebenswürdiger Weise die

Ergebnisse der astrogeodätischen Messungen zur Verfügung gestellt, wofür auch hier der beste Dank ausgesprochen sei.

Es wurde auf dem betreffenden Gebiet ein quadratisches Netz von 1 km Seitenlänge gelegt. Für einen Eckpunkt des Netzes wurde der LAPLACE-Punkt gewählt, was die Berechnungen bedeutend vereinfachte. Das quadratische Netz wurde so orientiert, dass die eine Koordinatenachse der astronomischen Nordrichtung des LAPLACE-Punktes parallel war.

Die Differenz der ellipsoidischen und astronomischen Breite, d. i. der relative Wert der Nordkomponente der Lotabweichung auf dem LAPLACE-Punkte beträgt $+0,521''$. Umgerechnet beläuft sich die horizontale Kraftkomponente in der Nordrichtung auf

$$\frac{\partial U}{\partial x} = +0,521 \cdot 4,848 \cdot 10^{-6} \cdot 981 = +24,8 \cdot 10^{-4} \text{ CGS}$$

Die Differenz der ellipsoidischen und astronomischen Länge, d. i. der relative Wert der Ostkomponente der Lotabweichung beträgt $+1,298''$. Umgerechnet beläuft sich die horizontale Kraftkomponente in der Ostrichtung auf

$$\frac{\partial U}{\partial y} = +1,298 \cdot 4,848 \cdot 10^{-6} \cdot 981 \cos 46^\circ 21' 17'' = +42,6 \cdot 10^{-4} \text{ CGS}$$

Die ellipsoidischen Angaben beziehen sich auf das Ellipsoid nach HAYFORD.

Da die auf astrogeodätischem Wege bestimmte Lotabweichung auch die topographische Wirkung des Geländes enthält, in den Berechnungen dagegen die subterranean Anomalien der Drehwaagenmessungen benutzt wurden, mussten die auf astrogeodätischem Wege gemessenen Lotabweichungen um die die nächste Umgebung berücksichtigende topographische Wirkung reduziert werden.* Zur Berechnung der topographischen Wirkung wurde folgende Formel verwendet:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -f \sigma (\cos \psi) z \Delta \psi \ln \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -f \sigma (\sin \psi) z \Delta \psi \ln \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$$

In diesen Formeln bedeuten:

- f die Konstante der Massenanziehung,
 - σ die durchschnittliche Dichte der Geländeunebenheiten,
 - ψ das Azimut von Nord nach Ost gerechnet,
 - z die vertikale Koordinate des betreffenden Massenteiles vom Stationsniveau gerechnet (positiv nach unten),
 - ϱ_1 und ϱ_2 die Entfernungen der aufeinander folgenden Höhenlinien vom Aufpunkt.
- Die durchschnittliche Dichte wurde zu 2,0 angenommen. Die Berechnung erfolgte auf Grund der topographischen Karten.
- Die mit der oben angegebenen Formel berechnete topographische Wirkung im LAPLACE-Punkte beträgt

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -4,5 \cdot 10^{-4} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -16,3 \cdot 10^{-4}$$

* Auf die Notwendigkeit dieser Reduktion machte Akademiker A. TÁRCZY-HORNOCH den Verfasser aufmerksam.

Die um die topographische Wirkung reduzierten astrogeodätischen Werte in den horizontalen Kraftkomponenten sind

$$\xi = + 29,3 \cdot 10^{-4} \text{ CGS}$$

$$\eta = + 58,9 \cdot 10^{-4} \text{ CGS}$$

Im gegebenen Falle sind die Niveaudifferenzen in der Umgebung des LAPLACE-Punktes verhältnismässig klein. Wenn die Niveaudifferenzen in der unmittelbaren Umgebung des LAPLACE-Punktes grösser sind, ist es zweckmässig, die topographische Wirkung aus Angaben der bis etwa 100 m Entfernung ausgeführten Nivellierung zu berechnen.

Die erste Aufgabe der weiteren Bearbeitung besteht in der Interpolation der Krümmungswerte der tatsächlichen Drehwaagenstationen für die Eckpunkte des quadratischen Netzes. Diese Interpolation wurde nach dem Verfahren von HAALCK [16] gesondert für die Grössen U_{Δ} und U_{xy} ausgeführt. Zur Kontrolle der Interpolation wurden in der Abb. 11 die horizontalen Richtkräfte sowohl in den tatsächlichen Beobachtungspunkten als auch in den Netzpunkten dargestellt. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass sich die interpolierten Werte vollkommen in das System der beobachteten Werte einfügen und dass die Krümmungsverhältnisse der Niveaufläche durch die interpolierten Werte treu wiedergegeben sind.

Es wurden ferner die Linienintegrale T_{ab} für die Seiten und für die Diagonalen der Netzquadrate aus den interpolierten Krümmungsdaten U_{Δ} und U_{xy} berechnet und mit Hilfe der Formeln (20)–(27) die vermittelnden Gleichungen aufgestellt. Die obigen Angaben des LAPLACE-Punktes wurden als Ausgangswerte in die Gleichungen eingesetzt. Die Auflösung der auf Grund der vermittelnden Gleichungen abgeleiteten Normalgleichungen ergibt die Werte der horizontalen Kraftkomponenten bezogen auf die Netzpunkte.

Die Anwendungsmöglichkeiten der astrogeodätischen Angaben können folgendermassen zusammengefasst werden:

1. Wenn sich auf dem betreffenden Gebiete oder in der unmittelbaren Umgebung zwei astrogeodätische Punkte befinden und auf einem Punkte beide Komponenten, auf dem anderen nur die eine Komponente bekannt ist, dann können aus der Differenz der in zwei astrogeodätischen Punkten bekannten Kraftkomponenten, als Zwangbedingung, die Differenzen der horizontalen Kraftkomponenten auf dem ganzen Gebiete berechnet werden. Die Kenntnis der beiden Komponenten des vollständigen LAPLACE-Punktes ermöglicht die Bestimmung der relativen Lotabweichungen bzw. der horizontalen Kraftkomponenten auf dem ganzen bearbeiteten Gebiete. In diesem Falle ist die Lösung vollkommen eindeutig und es gibt dann auch keine überflüssigen astrogeodätischen Angaben.

2. Wenn auf dem betreffenden Gebiete oder in der unmittelbaren Umgebung die Angaben von zwei vollständigen LAPLACE-Punkten zur Verfügung stehen, dann sind die Ausgangswerte der relativen Lotabweichungen und auch die Differenzen der beiden Komponenten zwischen den LAPLACE-Punkten

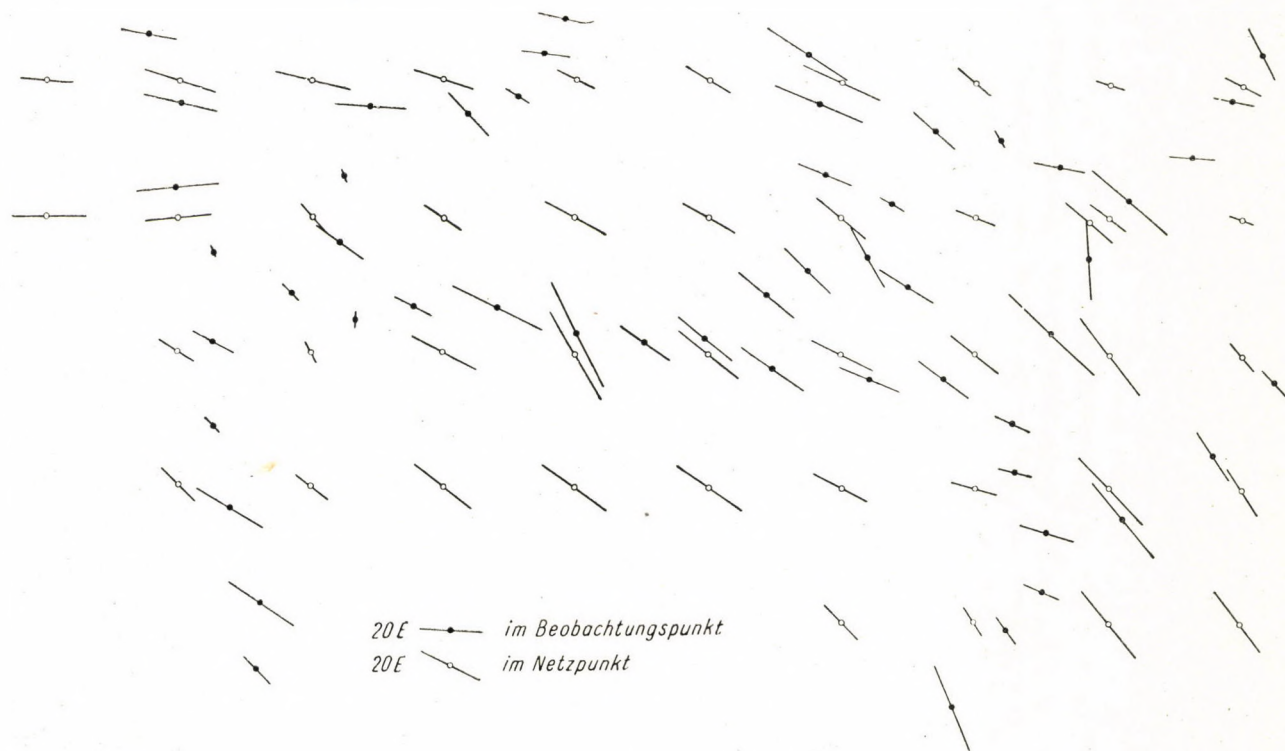
Horizontale Richtkräfte

Abb. 11

bekannt. In diesem Falle sind auch überflüssige Angaben vorhanden, was eine Kontrolle ermöglicht.

3. Wenn auf dem betreffenden Gebiete oder in der nächsten Umgebung in zwei astrogeodätischen Punkten nur eine, aber dieselbe Lotabweichungskomponente gegeben ist, dann können die Differenzen der Komponenten ohne irgendwelche Annahmen berechnet werden, doch wird nur die eine Kraftkomponente einen bestimmten Ausgangswert haben. Dieser Fall bestand bei den Berechnungen von EÖTVÖS bezüglich des Gebietes von Arad, wo EÖTVÖS für die Ostkomponente auf einem bestimmten Punkte nach gewissen Erwägungen der Schwereverhältnisse den Wert Null angenommen hatte [2].

4. Wenn sich auf dem betreffenden Gebiete nur ein einziger vollständiger astrogeodätischer Punkt befindet, dann sind Anfangswerte für beide Komponenten vorhanden, doch wird man für die Differenz der einen Komponente bei Erwägung der Schwereverhältnisse einen geschätzten Wert annehmen müssen. Dieser Fall besteht in dem in diesem Abschnitt erörterten Beispiel.

In diesem Beispiel sind ausser dem astrogeodätischen Punkt 41 Netzkpunkte vorhanden, die Zahl der Unbekannten beträgt also 82. Die Zahl der Normalgleichungen ist ebenfalls 82. In den Berechnungen sind die Kraftkomponenten in Einheiten von 10^{-4} CGS ausgedrückt.

Die aus den Normalgleichungen erhaltenen Werte der Unbekannten wurden in die vermittelnden Gleichungen eingesetzt und die Abweichungen berechnet.

Die Quadratsumme dieser Abweichungen beträgt $1122 \cdot 10^{-8}$. Da die Zahl der vermittelnden Gleichungen 125 und die Zahl der Unbekannten 82 ausmacht, erhält man für den mittleren Fehler

$$\pm \sqrt{\frac{1122 \cdot 10^{-8}}{43}} = \pm 5 \cdot 10^{-4}$$

Die Abb. 12 zeigt die horizontalen Kraftkomponenten für das bearbeitete Gebiet in vektorieller Darstellung.

Da bei den Berechnungen die subterranean Anomalien der aus Drehwaagenmessungen gewonnenen Krümmungsgrößen benutzt wurden, so charakterisieren auch die berechneten horizontalen Kraftkomponenten die Dichteverhältnisse unter der Erdoberfläche.

Schon EÖTVÖS hat in seiner Abhandlung vom Jahre 1910 [3] auf den Zusammenhang zwischen den Lotabweichungen und der unterirdischen Massenordnung hingewiesen. Der Geologe BÖCKH [4] betonte in einem Aufsatz im Jahre 1917 den Zusammenhang der Lotabweichungen mit der Tektonik. Es ist eine Aufgabe der weiteren Forschungen, die ausführliche geophysikalische Untersuchung dieses Zusammenhanges durchzuführen.

Aus den horizontalen Kraftkomponenten lassen sich die relativen Potentialwerte des anomalen Schwerefeldes berechnen. Der Wert des Schwerepotentials

wurde in einem Netzkunkte am südlichen Rande des Gebietes willkürlich als Null angenommen, wobei die Potentialwerte für die einzelnen Netzkunkte unter der Annahme berechnet wurden, dass die Änderungen der Kraftkomponenten entlang der Quadratseiten linear sind. Die Abb. 12 zeigt auch die Linien gleichen Potentials mit einem Wertabstand von 500 CGS-Einheiten. Aus der Abbildung geht hervor, dass die Linien gleichen Potentials senkrecht zu den Kraftkomponenten verlaufen. Den grössten Potentialwert von 4000 CGS-Einheiten findet man am nordwestlichen Rand des Gebietes. Dies bedeutet, dass wenn die Flächen des Referenzellipsoids und des Geoids im Punkte vom Potentialwert Null zusammenfielen, dann würde im erwähnten nordwestlichen Eckpunkte

Horizontale Kraftkomponenten und Linien gleichen Potentials.

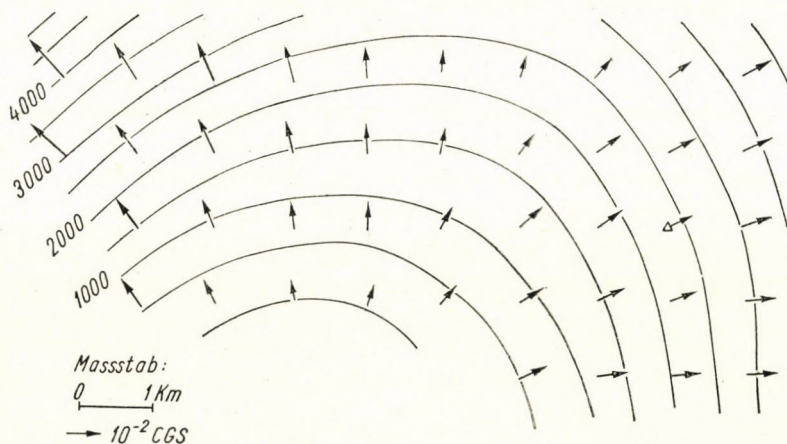


Abb. 12

die Geoidfläche infolge der unterirdischen anomalen Massenordnung um etwa 4 cm höher als die Ellipsoidfläche verlaufen.

Es muss noch erwähnt werden, dass die Lotabweichung im geodätischen Sinne die Differenz zwischen astronomischer Koordinate und ellipsoidischer Koordinate bedeutet, so dass die von EÖTVÖS definierten horizontalen Kraftkomponenten mit entgegengesetztem Vorzeichen proportional den geodätischen Lotabweichungen sind.

VI. Berechnung der Lotabweichungen mit Hilfe der höheren Ableitungen

Seit einigen Jahren werden auch die höheren Ableitungen des Schwerepotentials bei den Gravitationsberechnungen benutzt.

Die sowjetischen Gelehrten NUMEROV [6] und MALKIN [9] wiesen schon darauf hin, dass sich der vertikale Gradient der Schwerkraft, der im Vergleich zu den übrigen Angaben des Schwerefeldes nur mit einer geringeren Genauigkeit gemessen werden kann, auch mit Hilfe der höheren Ableitungen bestimmen lässt.

Der polnische Gelehrte OLCZAK hatte im Jahre 1940 die systematische Theorie der dritten Ableitungen des Schwerepotentials ausgearbeitet, in Berechnungen angewandt und in Universitätsvorlesungen vorgetragen. Der Grundgedanke seiner Theorie besteht darin, dass die dritten Ableitungen aus den in der gleichen horizontalen Ebene ausgeführten Drehwaagenmessungen bestimmt werden können; Messungen in verschiedenen Höhen mit Drehwaage oder Gravimeter sind also überflüssig. OLCZAK arbeitete seine Theorie hauptsächlich zur Bestimmung der Ableitungen $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ und $\frac{\partial^3 U}{\partial z^3}$ aus.

Diese Grössen sind besonders zur ausführlichen Erforschung der unterirdischen Massenarrangements geeignet. Die höheren Ableitungen sind nämlich empfindlicher gegenüber der Wirkung der Dichteanomalien nahe der Erdoberfläche als die Ableitungen niedriger Ordnung. Aus diesem Grunde besitzen also die höheren Ableitungen in der angewandten Geophysik eine grosse Bedeutung. Die Ergebnisse seiner Forschungen über die höheren Ableitungen des Schwerepotentials wurden von OLCZAK im Jahre 1949 veröffentlicht [15].

Auch der deutsche Gelehrte HAALCK befasste sich mit der Berechnung der höheren Ableitungen; seine erste diesbezügliche Publikation erschien im Jahre 1942 [12]. In seiner späteren, im Jahre 1950 veröffentlichten Abhandlung dehnte HAALCK seine Methode der höheren Ableitungen von den Differentialquotienten U_z , U_{zz} , U_{zzz} auch auf die Bestimmung von U_x und U_y , d. i. auf die horizontalen Kraftkomponenten aus [16].

HAALCK entwickelte zur Bestimmung der horizontalen Kraftkomponenten folgendes Verfahren. Die mit der Drehwaage gemessenen Grössen U_Δ und U_{xy} werden graphisch für die Eckpunkte eines quadratischen Netzes interpoliert und die Werte der dritten Ableitungen U_{zzx} und U_{zzy} in den Mittelpunkten der Netzquadrate mit einem die Differentiation ersetzenden Näherungsverfahren bestimmt. Sodann werden die Werte der Ableitung U_{zz} mit einem die Integration ersetzenden Näherungsverfahren ebenso für die Mittelpunkte der Quadrate berechnet. Da diese Werte in zweifacher Weise, nach Zonen und nach Kolonnen berechenbar sind, werden die auf verschiedenem Wege erhaltenen Werte mit einem gewissen Korrektionsverfahren auf das gleiche Niveau gebracht. Im weiteren werden mit Hilfe der LAPLACE-Gleichung

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 2\omega^2$$

die Werte U_{xx} und U_{yy} bestimmt. Die Grösse $2\omega^2$ (ω = die Winkelgeschwindigkeit der Erde) kann vernachlässigt werden, da dieses Glied bei der Integration ausfällt. Mit einem weiteren, die Integration ersetzenden Näherungsverfahren

werden aus den Werten U_{xx} und U_{xy} bzw. U_{yy} und U_{xy} die Werte von U_x und U_y berechnet. Auch dieses Verfahren kann gesondert nach Zonen oder nach Kolonnen angewandt werden, wobei die auf zwei Wegen gewonnenen Werte mit einem ähnlichen Verbesserungsverfahren wie vorher auf das gleiche Niveau gebracht werden. Die Mittelwerte der verbesserten Grössen geben die gesuchten Ableitungen U_x bzw. U_y .

Das Verfahren von HAALCK enthält also eine Differentiation und zwei Integrationen. Die Näherungsberechnungen bedingen ein ziemlich enges quadratisches Netz. Im Zahlenbeispiel von HAALCK beträgt die Seitenlänge der Quadrate 250 m.

Ein ähnliches Verfahren wurde von SAND in der Zeitschrift »Geofisica pura e applicata« im Jahre 1954 veröffentlicht [21], wobei sich SAND auch auf die Arbeiten von HAALCK beruft. SAND zieht in der theoretischen Bestimmung der Lotabweichungen auch die Integrale $\int U_{xz} dz$ und $\int U_{yz} dz$ in Betracht, doch sind diese Integrale in flachen Gebieten praktisch zu vernachlässigen.

Um vergleichende Untersuchungen durchzuführen, wurden vom Verfasser auf einem Teile des vorher besprochenen Gebietes die horizontalen Kraftkomponenten auch mit dem Verfahren von HAALCK berechnet. Hierzu wurde ein quadratisches Netz von 25 Eckpunkten und einer Seitenlänge von 1 km gewählt.

Die Tabelle I enthält für die Eckpunkte des quadratischen Netzes die interpolierten Werte U_A und in Klammern die interpolierten Werte $2 U_{xy}$. Die in der Mitte der Quadrate befindlichen Zahlen bedeuten U_{zzx} und in Klammern U_{zzy} . Zur Berechnung dienen die folgenden Formeln:

$$U_{zzx} = -\frac{\partial U_A}{\partial x} - 2 \frac{\partial U_{xy}}{\partial y} \quad U_{zzy} = -\frac{\partial U_A}{\partial y} - 2 \frac{\partial U_{xy}}{\partial x}$$

Die Zahlenwerte sind in Einheiten von $\frac{1}{2} \cdot 10^{-14}$ CGS angegeben.

Tabelle I

$\Sigma U_A \rightarrow$	+33	+47	+25	0	+1	$\Sigma 2U_{xy}$
ΣU_{zzx}	(+8)	+18	+3	+8	+8	$\downarrow$
$\downarrow$	(-14)	(-20)	(-14)	(-5)	(-10)	(-63)
-1	+19	-11	-7	-2		
	(-5)	(+17)	(-3)	(-6)		
	+11	+5	+10	+5	+8	
	(-16)	(-19)	(-8)	(-14)	(-4)	(-61)
+18	-4	-10	+35	-3		
	(-6)	(-4)	(-7)	(-31)		
	+4	+12	+4	-8	-2	
	(-23)	(-16)	(-18)	(-28)	(-12)	(-97)
-49	-19	-15	+18	-33		
	(-9)	(+21)	(+34)	(-3)		
	+10	+12	+11	0	-7	
	(-22)	(-16)	(-6)	(-29)	(-15)	(-88)
+68	+10	+10	+60	-12		
	(+2)	(+4)	(+14)	(+2)		
	0	0	-3	-5	-6	
	(-20)	(-14)	(-8)	(-26)	(-24)	(-92)
ΣU_{zzy}	(-18)	(+38)	(+38)	(-38)		

Tabelle III

-3,6	-4,9	+11,4	-2,2
-1,5	-1,0	+6,0	-7,1
-6,0	-2,5	+3,0	+9,6
-2,1	+0,1	-9,4	+10,8

Die Zahlenwerte der Grössen U_{xx} und U_{yy} sind auf folgende Weise zu berechnen :

$$U_{xx} = -\frac{1}{2}(U_{zz} + U_{\Delta}) \quad U_{yy} = -\frac{1}{2}(U_{zz} - U_{\Delta})$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle IV zusammen mit den Werten U_{xy} zu finden.

Tabelle IV

$\Sigma U_{yy} \rightarrow$	(+16)	(+11)	(-8)	(-13)	ΣU_{xx}
					$\downarrow$
	-1 (+5) ((-1))	0 (+5) ((0))	-7 (-5) ((+3))	0 (+3) ((+4))	-8
((+6))					
	-1 (+3) ((-1))	-2 (+2) ((0))	-2 (-4) ((-1))	+5 (+2) ((+1))	0
((-1))					$U_{xx} = \text{ohne Klammern,}$ $U_{yy} = \text{in Klammern,}$
	0 (+6) ((-2))	-2 (+4) ((+1))	0 (-2) ((-2))	-1 (-9) ((-2))	-3
((-5))					$U_{xy} = \text{in doppelten}$ Klammern
	0 (+2) ((-1))	-1 (0) ((+2))	+6 (+3) ((-1))	-1 (-9) ((-4))	+4
((-4))					
$\uparrow$ $\Sigma U_{xy} \rightarrow$	((-5))	((+3))	((-1))	((-1))	

Die in der Tabelle IV enthaltenen Zahlenwerte sind in Einheiten von 10^{-9} CGS angegeben. Mit Hilfe dieser Zahlenwerte kann die Ableitung U_x berechnet werden, u. zw. durch Summierung der Werte U_{xx} nach Kolonnen und der Werte U_{xy} nach Zonen. Die Summierung erfolgt schrittweise. Wenn die Werte U_{xx} in der ersten Kolonne von unten nach oben gerechnet mit

${}^1U_{xx}$, ${}^2U_{xx}$, ${}^3U_{xx}$, ${}^4U_{xx}$ bezeichnet werden, bzw. die berechneten Werte U_x mit 1U_x , 2U_x , 3U_x , 4U_x und die Seite des Quadrates d ist, dann ist

$${}^1U_x = 0; {}^2U_x = \frac{d}{2} ({}^1U_{xx} + {}^2U_{xx})$$

$${}^3U_x = {}^2U_x + \frac{d}{2} ({}^2U_{xx} + {}^3U_{xx})$$

$${}^4U_x = {}^3U_x + \frac{d}{2} ({}^3U_{xx} + {}^4U_{xx})$$

Die Ergebnisse dieser Berechnung sind in der Tabelle V zusammengestellt, u. zw. die aus U_{xx} gewonnenen Werte ohne Klammern und die aus U_{xy} auf ähnliche Weise berechneten Werte in Klammern. Links und unten sind die Verbesserungsglieder angegeben.

Tabelle V

[illegible]

Der Mittelwert von U_x beträgt $\bar{U}_x = \frac{1}{16}(-4-11) + \frac{1}{4}(-2-2) = -2$

Auf ähnliche Weise können die Zahlenwerte von U_y aus den Werten von U_{xy} und $U_{y'}$ berechnet werden. Bei der Berechnung der Endergebnisse sind die Mittelwerte U_x bzw. U_y zu subtrahieren.

Die Tabelle VI enthält die Endergebnisse auf die Mittelpunkte der Quadrate bezogen, u. zw. in Einheiten von 10^{-4} CGS. Der mit dem Zeichen $\triangle$ versehene Eckpunkt ist der astrogeodätische Punkt mit folgenden gemessenen horizontalen Kraftkomponenten:

$$U_x = + 29 \cdot 10^{-4}$$

$$U_y = + 59 \cdot 10^{-4}$$

Tabelle VI

-6 (-16)	-10 (+6)	-8 (+5)	+10 (0)
+2 (-10)	-2 (+5)	+3 (0)	0 (-8)
+4 (-9)	+3 (+7)	+6 (+10)	-7 (-9)
+2 (0)	+6 (+2)	+2 (+12)	-4 (+1)

Da die aus den Angaben der Tabelle VI für den astrogeodätischen Punkt berechneten Mittelwerte $U_x = +0,5$ und $U_y = -1,75$ betragen, müssen mit Rücksicht auf die Kraftkomponentenwerte im astrogeodätischen Punkt die in der Tabelle VI angegebenen Zahlenwerte auf folgende Weise abgeändert werden: die Werte U_x werden um $+28$, die Werte U_y um $+61$ erhöht.

Die Resultanten der so gewonnenen horizontalen Kraftkomponenten sind in der Abb. 13 dargestellt. Zum Vergleich sind in dieser Abbildung mit gestrichelten Linien auch jene Vektoren angegeben, die mit dem im V. Abschnitt erörterten Verfahren berechnet wurden. Obzwar sich die mit dem Verfahren von HAALCK gewonnenen Vektoren auf die Quadratmittelpunkte, die anderen aber auf die Eckpunkte beziehen, sind die Ergebnisse gut vergleichbar.

VII. Berechnung der Lotabweichungen aus Schwereanomalien

Für Drehwaagenmessungen sind hauptsächlich die flachen oder schwach hügeligen Gelände geeignet. In Ungarn wurden verhältnismässig viele Messungen mit der Drehwaage von EÖTVÖS ausgeführt, doch wurden die Schwereanomalien in Gebirgsgegenden und teilweise auch in flachen Gebieten auch in Ungarn mit dem Gravimeter gemessen. Im Auslande werden die Schweremessungen beinahe ausschliesslich mit Gravimetern durchgeführt.

Aus diesem Grunde kann sich die Berechnung der Lotabweichungen nicht nur auf die mit der Drehwaage vermessenen Gebiete beschränken, sondern es ist auch ein Verfahren notwendig, mit dem die Lotabweichungen ohne Kenntnis der Krümmungsgrössen unmittelbar aus den Schwereanomalien berechnet werden können. Dieses Verfahren stützt sich auf jenes Theorem, das vor etwa 100 Jahren von STOKES abgeleitet wurde [1].

Laut dieses Theorems ist die Geoidundulation, die zu den Lotabweichungen in enger Beziehung steht:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi S(\psi) \Delta g_\psi \sin \psi d\psi$$

In dieser Formel bedeutet R den mittleren Halbmesser der Erde, γ den mittleren Wert der Schwerkraft. Der Anfangspunkt des Koordinatensystems ist jener Punkt der Erdoberfläche, für den die Geoidundulation zu berechnen ist. Der Winkel α ist das Azimut, ψ der Winkel der sphärischen Entfernung eines Grenzkreises der ringförmigen Zone vom Anfangspunkt und Δg_ψ die durch-

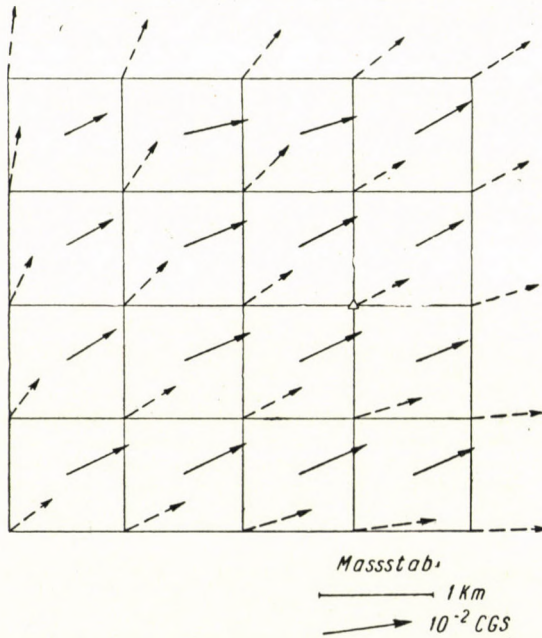


Abb. 13

schnittliche Schwereanomalie in der betreffenden Zone. Die Funktion $S(\psi)$ bedeutet:

$$S(\psi) = \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 1 - 6 \sin \frac{\psi}{2} - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right)$$

VENING-MEINESZ hat in einer Abhandlung vom Jahre 1928 durch Umformung des Theorems von STOKES einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen Lotabweichungen und Schwereanomalien abgeleitet [5].

Wenn nämlich in einer Richtung vom Azimut α und in der Entfernung ds die Geoidundulation dN beträgt, dann ist die Lotabweichung in dieser Richtung $\frac{dN}{ds}$ und die rechtwinkligen Komponenten sind $\frac{dN}{ds} \cos \alpha$, $\frac{dN}{ds} \sin \alpha$. Ferner besteht folgender Zusammenhang: $d\psi = \frac{ds}{R}$;

$$\frac{dN}{ds} = \frac{dN}{d\psi} \cdot \frac{1}{R}$$

Die Komponenten der Lotabweichung in Winkelsekunden bei Anwendung der Formel von STOKES lauten :

$$\xi'' = \frac{1}{4 \pi \gamma \sin 1''} \int_0^{2\pi} \cos a \, da \int_0^\pi \Delta g_\psi \frac{dS}{d\psi} \sin \psi \, d\psi$$

$$\eta'' = \frac{1}{4 \pi \gamma \sin 1''} \int_0^{2\pi} \sin a \, da \int_0^\pi \Delta g_\psi \frac{dS}{d\psi} \sin \psi \, d\psi$$

Von VENING-MEINESZ wurde folgende Funktion eingeführt :

$$V(\psi) = \frac{1}{2 \gamma \sin 1''} \frac{dS}{d\psi} \sin \psi$$

Bei Anwendung dieser Funktion sind $\xi'' = \frac{1}{2 \pi} \int_0^{2\pi} \cos a \, da \int_0^\pi \Delta g_\psi V_{(\psi)} \, d\psi$

$$\eta'' = \frac{1}{2 \pi} \int_0^{2\pi} \sin a \, da \int_0^\pi \Delta g_\psi V_{(\psi)} \, d\psi$$

Die Funktion $V(\psi)$ enthält mehrere trigonometrische Glieder, doch erhält man bei kleinen ψ -Werten, da $\sin \frac{\psi}{2} \doteq 0$ ist, in guter Näherung

$$V_{(\psi)} = \frac{1}{2 \gamma \sin 1''} \left(\operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 3 \right)$$

Zur numerischen Berechnung wird die Umgebung des Aufpunktes mit Radien und mit konzentrischen sphärischen Kreisen in ringförmige Sektoren geteilt, wobei die nächste Umgebung des Punktes eine mit einem sphärischen Kreise begrenzte Fläche sein wird.

Die Funktion $V(\psi)$ ist für diese innere Fläche nicht integrierbar, weil der Aufpunkt ein singularer Punkt der Funktion $\operatorname{cosec} \frac{\psi}{2}$ ist. Für diese zentrale Zone lässt sich folgende Überlegung anstellen. Die dem Winkel ψ entsprechende sphärische Entfernung r soll durch die gerade Entfernung s ersetzt werden, was bei einem kleinen ψ zulässig ist. In diesem Fall ist $\operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} = \frac{2R}{s}$ und somit

$$V_{(\psi)} = \frac{R}{\gamma s \sin 1''} + \frac{3}{2 \gamma \sin 1''}$$

Das zweite Glied ist im Vergleich zum ersten zu vernachlässigen.

Aus $d\psi = \frac{ds}{R}$ folgt für die Lotabweichung der zentralen Zone

$$\xi''_c = \frac{1}{2 \pi \gamma \sin 1''} \int_0^{2\pi} \cos a \, da \int_0^s \frac{\Delta g}{s} \, ds$$

$$\eta''_c = \frac{1}{2 \pi \gamma \sin 1''} \int_0^{2\pi} \sin a \, da \int_0^s \frac{\Delta g}{s} \, ds$$

Wenn Δg_0 die Schwereanomalie im Aufpunkt bedeutet, dann kann $\int_0^s \frac{\Delta g - \Delta g_0}{s} ds$ anstatt

$\int_0^s \frac{\Delta g}{s} ds$ genommen werden.

Ferner ist $\frac{\Delta g - \Delta g_0}{s} = \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r}$ und $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r} = \frac{\partial \Delta g}{\partial r} = \frac{\partial \Delta g}{\partial x} \cos \alpha +$
 $+ \frac{\partial \Delta g}{\partial y} \sin \alpha$

In diesem Ausdruck sind $\frac{\partial \Delta g}{\partial x}$ und $\frac{\partial \Delta g}{\partial y}$ die Komponenten des horizontalen Gradienten der Schwere, wobei diese Komponenten in der zentralen Flächenzone vom Halbmesser r_0 als konstant angesehen werden können. Infolgedessen ist

$$\begin{aligned} \xi_c'' &= \frac{1}{2\pi\gamma \sin 1''} \left[\frac{\partial \Delta g}{\partial x} \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha da \int_0^{r_0} dr + \frac{\partial \Delta g}{\partial y} \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha da \int_0^{r_0} dr \right] = \\ &= \frac{1}{2\gamma \sin 1''} \frac{\partial \Delta g}{\partial x} r_0 = 0,105'' r_0 \frac{\partial \Delta g}{\partial x} \end{aligned}$$

Ähnlicherweise ist $\eta_c'' = 0,105'' r_0 \frac{\partial \Delta g}{\partial y}$.

Mit der Berechnung der Wirkung der äusseren Ringzonen befasste sich der sowjetische Gelehrte KASANSKI in seiner Abhandlung vom Jahre 1935 [8].

KASANSKI benutzte für das Glied $\operatorname{cosec} \frac{\psi}{2}$, das in der Funktion $V(\psi)$ vorkommt, folgenden Ausdruck:

$$\operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} = \frac{2}{\psi} + \frac{\psi}{12} = \frac{2R}{r} + \frac{r}{12R}$$

In diesem Ausdruck bedeutet $\psi = \frac{r}{R}$ den Winkel der sphärischen Entfernung vom Aufpunkte. Mit Rücksicht auf die Zahlenwerte $R = 6371$ km, $\gamma = 981\,000$ mgal ist

$$V(\psi) = \frac{1}{2\gamma \sin 1''} \left(\operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 3 \right) = \frac{1339,6}{r} + 0,000066 r + 0,315$$

Der sowjetische Forscher SWEREW untersuchte die Grenzen, zwischen denen dieser Ausdruck für $V(\psi)$ die genaue Funktion $V(\psi)$ ersetzen kann. Er fand, dass bis 1000 km sphärischer Entfernung nur sehr geringe Abweichungen zwischen den Werten aus der genauen und der Annäherungsformel bestehen [8].

KASANSKI nahm die Grösse $\Delta g \cos \alpha$ und $\Delta g \sin \alpha$ für je einen Sektor als konstant an und betrachtete $V(\psi)$ als veränderlich. Bei dieser Annahme ergibt die Integration die folgende Funktion:

$$F(r) = \int_0^r V(r) dr = 1339,6 \ln r + \frac{1}{2} 0,000066 r^2 + 0,315 r$$

Wenn man die Bedingung aufstellt, dass eine jede ringförmige Zone in den Lotabweichungen dieselbe Wirkung auszuüben habe, dann folgt daraus:

$$F(r_k) - F(r_{k-1}) = \int_{r_{k-1}}^{r_k} V(r) dr = \text{konstant} = P$$

$$1339,6 \ln r_k + \frac{1}{2} 0,000066 r_k^2 + 0,315 r_k = F(r_0) + kP$$

Also in BRIGGSschen Logarithmen geschrieben:

$$\log r_k = \log r_0 - 0,000102 (r_k - r_0) - 11 \cdot 10^{-9} r_k^2 + \frac{P}{3084,5} k$$

Mit Hilfe dieser Formel können die Halbmesser $r_1, r_2, \dots r_k \dots$ berechnet werden. Wenn man in der Formel für $\log r_k$ das Glied $0,000102 (r_k - r_0)$ und das r_k^2 enthaltende Glied vernachlässigt, gelangt man zu dem Ausdruck

$$r_k = r_0 \left(10^{\frac{P}{3084,5} k} \right)$$

Die Halbmesser der sphärischen Kreise, die die Ringzonen begrenzen, bilden eine geometrische Reihe. Nach den Berechnungen von SWEREW ist die erwähnte Vernachlässigung bis etwa $r_k = 100$ km zulässig.

Nimmt man anstatt der sphärischen Entfernungen die geraden Entfernungen, so gelangt man aus der Funktion von VENING-MEINESZ unmittelbar zum Ausdruck $s_k = s_0 h^k$, mithin bedeuten die vorher erwähnten Vernachlässigungen den Übergang von der sphärischen zur geraden Entfernung.

Die Wirkung einer Ringzone zwischen den Azimuten α_{n-1} und α_n in der Komponente ξ ist

$$\frac{1}{2\pi R} (\sin \alpha_n - \sin \alpha_{n-1}) \int_{r_{k-1}}^{r_k} \Delta g V(r) dr$$

Es sei angenommen, dass der rechte Winkel bei gleichen Sinusdifferenzen in 8 Sektoren geteilt ist, wobei die begrenzenden Kreise so gewählt werden sollen, dass die Wirkung jeder einzelnen Sektorzone für eine Komponente der Lotabweichung $0,001''$ ausmacht, falls die Schwereanomalie in der betreffenden Zone $\Delta g = 1$ mgal beträgt.

In diesem Fall besteht der folgende Zusammenhang

$$\frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{P}{8} = 0,001'', \quad \text{hieraus} \quad P = 320,2$$

Bei dieser Einteilung ist $\sin \alpha_n - \sin \alpha_{n-1} = 0,125$.

Die Azimute der die Sektoren begrenzenden Radien betragen von der Nordrichtung gerechnet

$7^\circ 10'$	$38^\circ 45'$
$14^\circ 30'$	$48^\circ 30'$
22°	61°
30°	90°

In den Ausdruck der Komponente η wird Kosinus anstatt Sinus eingesetzt, wobei die aufgezählten Azimute von der Ostrichtung zu rechnen sind.

KASANSKI gibt in seiner Abhandlung die von SWEREW berechneten Werte r_k für verschiedene Anfangswerte r_0 an. Diese Listen beziehen sich auf die Anfangswerte $r_0 = 5$ km, 10 km und 20 km. Der Quotient der geometrischen Reihe beträgt

$$\frac{r_k}{r_{k-1}} = 10^{\frac{P}{3084,5}} = 1,27$$

Im Jahre 1947 hat SOLLINS ähnliche Tabellen zur Berechnung der Lotabweichungen zusammengestellt [13].

Wenn man in einem Aufpunkt aus Schwereanomalien den absoluten Wert der Lotabweichung berechnen will, dann hat man prinzipiell die Berechnung auf die ganze Erdoberfläche auszudehnen. Es ist jedenfalls zu beachten, dass die Wirkung der Schwereanomalien weit entfernter Gebiete verhältnismässig gering ist. Die ringförmige Zoneneinteilung ist ungefähr bis 1000 km Entfernung brauchbar, aber über 100 km kann die sphärische nicht durch die gerade Entfernung ersetzt werden.

Bei Entfernungen von mehr als 1000 km ist die Einteilung in sphärische Vierecke der in ringförmige Zonen vorzuziehen. Diese Einteilung in sphärische Vierecke wurde von HIRVONEN im Jahre 1934 vorgeschlagen [7] und später von TANNI [14] und HEISKANEN [17] weiterentwickelt. Laut dieser Auffassung ist die Geoidundulation

$$N = \sum c_q \Delta g_q$$

Die Summation muss auf die ganze Erdoberfläche ausgedehnt werden. Die Grösse Δg_q ist die durchschnittliche Schwereanomalie auf dem betreffenden Flächenteil q . Der Koeffizient c_q wird durch die Gleichung

$$C_q = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_q S(\psi) d\psi$$

ausgedrückt. TANNI hat die Werte der Koeffizienten c_q für Flächenelemente $5^\circ \times 5^\circ$ — für die ganze Erdoberfläche — berechnet; ausserdem ermittelte er die Koeffizienten auch ausführlicher für Flächenelemente von $1^\circ \times 1^\circ$ in einer Ausdehnung von $20^\circ \times 15^\circ$.

Die Schweremessungen sind in den fernen Weltteilen und auf den Ozeanen ziemlich weitmaschig, allerdings tragen die Angaben der fernen Weltteile nur wenig zu der Berechnung in den europäischen Gebieten bei.

Der Übergang von den ringförmigen Zonen auf die sphärischen Vierecke erfordert die Berechnung der Wirkung einiger unregelmässiger Flächenteile. Es genügt, die Berechnung der Wirkung der Vierecke nach HIRVONEN und TANNI für einige Aufpunkte auszuführen und für die übrigen die entsprechenden Werte zu interpolieren.

Zu Vergleichszwecken wurden vom Verfasser die Lotabweichungen aus Schwereanomalien für dasselbe Gebiet berechnet, das schon mit Hilfe von Krümmungsgrössen und mit dem Verfahren von HAALCK bearbeitet wurde. Die Bestimmung der Schwereanomalien erfolgte hier teils aus Messungen mit der EÖTVÖSSCHEN Drehwaage teils aus solchen mit dem Gravimeter. Dieser Berechnung wurde die ringförmige Zoneneinteilung von KASANSKI zugrunde gelegt. Der Halbmesser der zentralen Fläche wurde zu 0,58 km angenommen, mit Rücksicht darauf, dass auf dem fraglichen Gebiete ziemlich ausführliche Schweremessungen zur Verfügung standen. Die Halbmesser der einzelnen Ringzonen betragen

0,58 km	2,44 km	10,2 km
0,74 «	3,10 «	13,0 «
0,94 «	3,94 «	16,5 «
1,19 «	5,0 «	20,9 «
1,51 «	6,4 «	26,5 «
1,92 «	8,1 «	33,6 «

Die Werte der Halbmesser sind vom Halbmesser 5 km an mit denen von KASANSKI und SWEREW identisch. Die Berechnung wurde nur bis 33,6 km ausgedehnt, denn in gewissen Richtungen standen in grösseren Entfernungen keine Schwereanomalienwerte zur Verfügung. Das Bestreben richtete sich hierbei weniger darauf, absolute Lotabweichungen zu bestimmen, als vielmehr relative Werte zu berechnen, die bei Anwendung der astrogeodätischen Werte mit anders gewonnenen Werten verglichen werden können.

Zur Erleichterung der technischen Ausführung wurde auf einem Pauspapier ein Diagramm angefertigt, das die ringförmigen Zonen mit der entsprechenden Sektorenteilung für einen Quadranten darstellt. Eine jede Zone hat die Wirkung 0,001" im Falle einer durchschnittlichen Schwereanomalie von 1 mgal. Die Schwereanomalien müssen für jeden Aufpunkt in allen Quadranten und für U_x und U_y gesondert bestimmt werden, denn die Einstellung des Diagramms ist in demselben Quadranten für U_x und für U_y verschieden.

Als Beispiel soll die Ermittlung des astrogeodätischen Punktes dienen. Für den zentralen Flächenteil sind die mit $r_0 = 0,58$ km multiplizierten Gradientenkomponenten

$$r_0 \frac{\partial \Delta g}{\partial x} = +0,102 \quad r_0 \frac{\partial \Delta g}{\partial y} = -0,163$$

Die Wirkung des zentralen Teils auf die Lotabweichungskomponenten in Winkelsekunden beträgt

$$\xi'' = +0,102 \cdot 0,105 = +0,0107''; \quad \eta'' = -0,163 \cdot 0,105 = -0,0171''$$

Laut der vorangehenden Erörterung gibt die Summe der für die ringförmigen Zonen bestimmten Schwereanomalien unmittelbar die Wirkung in Winkelsekunden an. Es ist darauf zu achten, dass auf die Nordkomponente die nordwärts gefundene positive Schweranomalie eine positive, die südwärts gefundene positive Anomalie dagegen eine negative Wirkung ausübt. Demgemäss ist

$$\xi'' = (NO + NW) - (SO + SW)$$

Im gegebenen Fall ist

$$\xi'' = (955,9 + 1575,8) \cdot 10^{-3} - (1349,2 + 1060,1) \cdot 10^{-3} = +122,4 \cdot 0,001''$$

Auf die Ostkomponente hat die ostwärts gefundene positive Schwereanomalie eine positive, die westwärts gefundene positive Anomalie dagegen eine negative Wirkung. Demgemäss ist

$$\eta'' = (NO + SO) - (NW + SW)$$

Im gegebenen Fall ist

$$\eta'' = (908,6 + 1332,6) \cdot 10^{-3} - (1750,7 + 1209,4) \cdot 10^{-3} = -718,9 \cdot 0,001''$$

Die Gesamtwirkung der zentralen Fläche und der Ringzonen auf die ξ -Komponente beträgt

$$\begin{array}{r} + 0,0107'' \\ + 0,1224'' \\ \hline + 0,1331'' \end{array}$$

Umgerechnet auf eine Kraftkomponente: $U_x = +6,3 \cdot 10^{-4}$ CGS

Die Gesamtwirkung auf die η -Komponente beträgt:

$$\begin{array}{r} - 0,0171'' \\ - 0,7189'' \\ \hline - 0,7360'' \end{array}$$

Umgerechnet auf eine Kraftkomponente: $U_y = -35,0 \cdot 10^{-4}$ CGS

Da sich die Berechnung aus den Schwereanomalien auf ein verhältnismässig kleines Gebiet erstreckt, ist es nicht wahrscheinlich, dass man Werte erhalten wird, die die astrogeodätischen Angaben annähern. Bei dem Vergleich der Berechnungsmethoden kommen nur die relativen Werte der einzelnen Netzpunkte in Betracht.

Die Abb. 14 stellt die Vektoren der horizontalen Kraftkomponenten dar, wobei zum Vergleich mit gestrichelten Linien auch jene Vektoren eingezeichnet sind, die mit dem Verfahren der Krümmungsgrößen berechnet wurden. In dem mit Δ bezeichneten astrogeodätischen Punkte fallen die auf zwei Wegen berechneten Vektoren zusammen.

Die Übereinstimmung der auf verschiedene Weise berechneten Lotabweichungen ist befriedigend. Die benutzten Schwereanomalien sind BOUGUER-Anomalien. Der Ausgangswert der Schwereanomalien hat keinen Einfluss auf

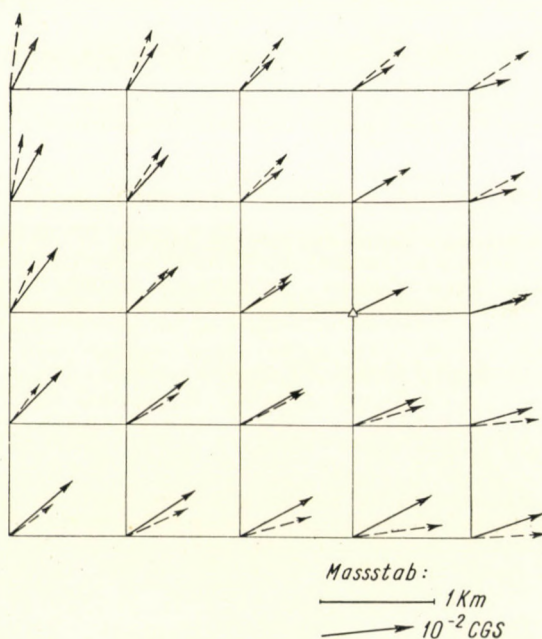


Abb. 14

die Auswertung der Lotabweichungen, weil der Ausgangswert aus den Differenzen ausfällt.

Die Berechnung der Lotabweichungen aus den Schwereanomalien führt auch bei begrenzter Zoneneinteilung zu befriedigenden relativen Ergebnissen. Es ist eine andere Frage, welche absolute Werte der Lotabweichungen man erhalten wird, wenn man die Auswertung auf die ganze Erdoberfläche ausdehnt. Es ist nicht zu erwarten, dass die so berechneten absoluten Werte mit den astrogeodätisch bestimmten Werten gut übereinstimmen, da die durch astrogeodätische Messungen gewonnenen Werte auch von der Wahl des Referenzellipsoids abhängen.

VIII. Untersuchung der Genauigkeit der Lotabweichungsbestimmungen

Im vorstehenden wurde die Bestimmung der relativen Lotabweichungen nach drei verschiedenen Methoden miteinander verglichen. Nun sei noch vergleichsweise die erreichbare Genauigkeit untersucht.

Bei der im V. Abschnitt dargelegten Methode soll angenommen werden, dass die für das quadratische Netz interpolierten Werte der Ableitungen U_A und U_{xy} mit einem mittleren Fehler von $\pm 3 \cdot 10^{-9}$ CGS behaftet sind.

Die absoluten Glieder der vermittelnden Gleichungen sind die Produkte aus den Mittelwerten von U_A bzw. U_{xy} und der Quadratseiten von der Länge 1 km.

$$K = \frac{{}^1U_A + {}^2U_A}{2} k$$

Laut der Regel der Fehlerfortpflanzung ist der mittlere Fehler von K : $\pm \sqrt{\left(\frac{k}{2} \mu\right)^2 + \left(\frac{k}{2} \mu\right)^2}$ wo μ den mittleren Fehler von 1U_A bzw. 2U_A bedeutet. Infolgedessen beträgt der mittlere Fehler der absoluten Glieder

$$\pm \sqrt{2 \cdot \left(\frac{10^5}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-9}\right)^2} = \pm 2,1 \cdot 10^{-4}$$

Da eine horizontale Kraftkomponente im allgemeinen in 6 vermittelnden Gleichungen vorkommt, macht der mittlere Fehler der Kraftkomponenten

$$\pm \sqrt{6 \cdot 4,5 \cdot 10^{-8}} = \pm 5,2 \cdot 10^{-4}$$

aus.

Bei dem Verfahren von HAALCK sei gleichfalls angenommen, dass die für die Eckpunkte des quadratischen Netzes interpolierten Werte der Grössen U_A und U_{xy} einen mittleren Fehler von $3 \cdot 10^{-9}$ CGS aufweisen. Die Länge der Quadratseiten ist 1 km.

Nach seinem Verfahren beträgt der mittlere Fehler der Ableitung U_{zzx}

$$\pm \sqrt{4 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 10^5} 3 \cdot 10^{-9}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{10^5} 3 \cdot 10^{-9}\right)^2} = \pm 6,7 \cdot 10^{-14}$$

Die Ableitung U_{zzy} hat denselben mittleren Fehler.

Der mittlere Fehler der aus 4 aufeinanderfolgenden Quadraten berechneten Ableitung U_{zz} ist

$$\pm \sqrt{6 \cdot \left(\frac{10^5}{2} 6,7 \cdot 10^{-14}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{270}{4} 10^{-18}} = \pm 8,2 \cdot 10^{-9}$$

Für den mittleren Fehler der Reduktion auf das gleiche Niveau ergibt sich

$$\pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} 8,2 \cdot 10^{-9}\right)^2 \cdot 8 + \left(\frac{1}{4} \frac{10^5}{2} 6,7 \cdot 10^{-14}\right)^2 \cdot 8} = \pm 6,3 \cdot 10^{-9}$$

Der mittlere Fehler der reduzierten Ableitung U_{zz} ist

$$\pm \sqrt{(8,2^2 + 6,3^2) \cdot 10^{-18}} = \pm 10,3 \cdot 10^{-9}$$

Der mittlere Fehler des Mittelwertes der Ableitungen U_A und U_{xy} beläuft sich auf

$$\pm \sqrt{4 \cdot \left(\frac{1}{4} 3 \cdot 10^{-9}\right)^2} = \pm 1,5 \cdot 10^{-9}$$

Infolgedessen beträgt der mittlere Fehler der Ableitungen U_{xx} und U_{yy}

$$\pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} 10,3 \cdot 10^{-9}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} 1,5 \cdot 10^{-9}\right)^2} = \pm 5,2 \cdot 10^{-9}$$

Der mittlere Fehler der aus 4 aufeinanderfolgenden Quadraten berechneten Ableitungen U_x und U_y ist

$$\pm \sqrt{6 \cdot \left(\frac{10^5}{2} 5,2 \cdot 10^{-9}\right)^2} = \pm 6,4 \cdot 10^{-4}$$

Für den mittleren Fehler der Reduktion auf das gleiche Niveau ergibt sich

$$\pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} 6,4 \cdot 10^{-4}\right)^2 \cdot 8 + \left(\frac{1}{4} \frac{10^5}{2} 5,2 \cdot 10^{-9}\right)^2 \cdot 8} = \pm 4,9 \cdot 10^{-4}$$

Der mittlere Fehler der horizontalen Kraftkomponenten U_x bzw. U_y beträgt

$$\pm \sqrt{(6,4^2 + 4,9^2) \cdot 10^{-8}} = \pm 8 \cdot 10^{-4}$$

Bei jenem Verfahren, das die Lotabweichungen aus Schwereanomalien berechnet, kann der mittlere Fehler auf Grund folgender Überlegung bestimmt werden. Bei dieser Fehlerrechnung ist die Wirkung der zentralen Fläche von der Wirkung der Ringzonen abzusondern.

Wenn man annimmt, dass der mittlere Fehler des aus Gravimetermessungen bestimmten Gradienten $\pm 8 \cdot 10^{-9}$ beträgt, dann ist der mittlere Fehler bei der Bestimmung der Wirkung der zentralen Fläche

$$\pm 0,105 \cdot 58 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-9} = \pm 4,9 \cdot 10^{-5} \text{ in Winkelsekunden, oder umgerechnet} \\ \pm 2,3 \cdot 10^{-7} \text{ CGS}$$

Bei der Fehlerrechnung der ringförmigen Zonen muss man erwägen, mit welchem Fehler die einzelnen Zonen behaftet sein können. Es sei angenommen, dass in der ersten, sich an die zentrale Fläche anschliessenden Zone der mittlere Fehler der Schwereanomalie $\pm 2 \cdot 10^{-4}$ CGS ist. Da die Flächen der Zonen anwachsen, ist die Ungenauigkeit in der Bestimmung des durchschnittlichen Schwereanomaliewertes um so grösser, je grösser der Flächeninhalt der Zone ist. Die Flächeninhalte der aufeinanderfolgenden Zonen nehmen proportional dem Quadrate der Halbmesser der begrenzenden Kreise zu. Da die Wirkung eines elementaren Flächenteiles gemäss der im VII. Abschnitt angegebenen Formel

$$V(r) = \frac{1339,6}{r} + 0,000066 r + 0,315$$

— bei Vernachlässigung des zweiten und dritten Gliedes — dem Halbmesser umgekehrt proportional ist, der Flächeninhalt dagegen mit dem Quadrate des Halbmessers anwächst, kann gefolgert werden, dass der mittlere Fehler des durchschnittlichen Wertes der Schwereanomalie mit dem Halbmesser linear zunimmt.

Mit Hinweis auf die Darlegungen im VII. Abschnitt beträgt die Wirkung einer ringförmigen Zone auf die Lotabweichung

$$\frac{0,125}{2 \pi 6371} 1339,6 (\ln 1,27) \cdot \Delta g = C \Delta g$$

Die Gesamtwirkung aller Ringzonen ist $\xi = \Sigma C \Delta g$, wo die Summation auf das ganze mit Zonen bedeckte Gebiet auszudehnen ist. Der mittlere Fehler beläuft sich auf

$$\pm \sqrt{\sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial \Delta g} \right)^2 \mu_g^2}$$

Hier bedeutet μ_g den mittleren Fehler der Schwereanomalien in der betreffenden Zone.

Da $\frac{\partial \xi}{\partial \Delta g} = C$, ist der mittlere Fehler $\pm \sqrt{\Sigma C^2 \mu_g^2} = \pm C \sqrt{\Sigma \mu_g^2}$

Aus den oben angegebenen numerischen Daten ergibt sich $C = 0,001$.

Die mittleren Fehler μ_g sind den Halbmessern proportional. Infolgedessen ist die Quadratsumme der mittleren Fehler gleich der Summe einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten $1,27^2 = 1,61$ und mit dem Anfangsglied $0,2^2 = 0,04$, da die Schwereanomalie in mgal ausgedrückt werden muss. Wenn man 18 Ringe in Betracht zieht, beträgt die Quadratsumme bezogen auf einen Sektor

$$\Sigma \mu_g^2 = 0,04 \frac{1,61^{18} - 1}{0,61} = 0,04 \frac{5276}{0,61} = 345,6$$

Mit Rücksicht darauf, dass jeder Ring 32 Sektoren enthält, beläuft sich der mittlere Fehler für sämtliche Zonen auf

$$\pm 0,001 \sqrt{32 \cdot 345,6} = \pm 0,001 \cdot \sqrt{11059} = \pm 0,105$$

Winkelsekunden.

Der mittlere Fehler der horizontalen Kraftkomponente beträgt

$$\pm 0,105 \cdot 4,756 \cdot 10^{-3} = \pm 5 \cdot 10^{-4} \text{ CGS.}$$

Der mittlere Fehler der zentralen Zone ist um 3 Größenordnungen kleiner, so dass der Fehler der zentralen Fläche schon in dem berechneten mittleren Fehler enthalten ist.

Bei Berücksichtigung mehrerer Zonen nimmt der mittlere Fehler zu.

*

Es sei hier Herrn Akademiker Professor A. TÁRCZY-HORNOCH der beste Dank des Verfassers ausgesprochen, weil er schon vor mehreren Jahren die Aufmerksamkeit des Verfassers auf dieses wichtige Problem lenkte und die diesbezüglichen Arbeiten mit seinen wertvollen Ratschlägen unterstützte.

SCHRIFTTUM

1. C. G. STOKES: On the Variation of Gravity at the Surface of the Earth. Trans. Cambridge Phil. Soc. 1849.
2. R. EÖTVÖS: Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen mit Hilfe der Drehwaage. Internationale Erdmessung. 1907.
3. R. EÖTVÖS: Bericht über geodätische Arbeiten in Ungarn besonders über Beobachtungen mit der Drehwaage. Internationale Erdmessung. 1910.
4. H. BÖCKH: Brachyantiklinálisok és dómok kimutatása torziós mérleggel végzett nehézségi mérések alapján. (Der Nachweis von Brachyantiklinalen und Domen auf Grund der Angaben von Schweremessungen mit der Drehwaage. Nur ungar.) Bányászati és Kohászati Lapok 1917.

5. F. A. VENING-MEINESZ : A Formula Expressing the Deflection of the Plumbline in the Gravity Anomalies. Kon. Akad. van Wet. te Amsterdam, 1928.
6. B. NUMEROV : Interrelation between Local Gravity Anomalies and the Derivatives of the Potential. Z. f. Geophys. 58. 1929.
7. R. A. HIRVONEN : The Continental Undulations of the Geoid. Veröff. d. Finn. Geod. Inst. No. 19. 1934.
8. J. KASANSKI : Ein praktischer Versuch der gravimetrischen Bestimmung der Lotabweichungen. Verh. d. 7. Tagung der Balt. Geod. Komm. 1935.
9. Н. М. ЛИН : Об определении вертикальной производной силы тяжести из наблюдений с крутильными весами. Астр. Журн. 13. 1936.
10. N. MIHAL : On the Determination of Gravity Anomalies from the Astronomical-Geodetical Deflection of the Plumb Line. Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS. 1937.
11. N. MIHAL : Über die Bestimmung der Geoidfigur aus den Anomalien des Horizontalgradienten der Erdschwere. Comptes Rendus (Doklady) de l'Acad. des Sc. de l'URSS. 1937.
12. H. HAALCK : Ergebnisse der vollständigen Berechnung des gravimetrischen Störungsfeldes im Gebiet von Gifhorn. Beitr. z. angew. Geoph. 1942.
13. A. D. SOLLINS : Tables for the Computation of Deflections of the Vertical from Gravity Anomalies. Bull. géod. 1947.
14. L. TANNI : On the Continental Undulations of the Geoid as Determined from the Present Gravity Material. Publ. Isost. Inst. of IAG. 1948.
15. T. OLCZAK : The Eötvös Torsion Balance and the Problem of Determining the Higher Normal Derivatives of the External Gravity Potential. Acta Astronomica. Cracovie. 1949.
16. H. HAALCK : Die vollständige Bestimmung örtlicher gravimetrischer Störungsfelder aus Drehwaagemessungen mit Berechnungsbeispiel. Veröff. d. Geodät. Inst. in Potsdam. 1950.
17. W. HEISKANEN : On the World Geodetic System. Publ. Isost. Inst. of IAG. 1951.
18. М. С. Молоденский : Метод совместной обработки гравиметрических и геодезических материалов для изучения гравитационного поля земли и ее фигуры. Сборн. Геод. но. вып. 30.
19. J. RENNER : A függővonalelhajlás. (Die Lotabweichung. Nur ungar.) Magyar Tud. Akadémia Műszaki Tud. Oszt. Közleményei. V. 1952.
20. I. B. HAÁZ : Kapesolat a derékszögű hasáb tömegvonzásának potenciálja és a potenciál deriváltjai között. (Relations between the Potential of the Attraction of the Mass Contained in a Finite Rectangular Prism and its First and Second Derivatives. Ungar. m. engl. u. russ. Zusammenfassung.) Geofizikai Közlemények. 1953.
21. W. SAND : Über die Bestimmung von Differenzen der Lotrichtung mit Hilfe des Gradienten U_{22s} . Geofisica pura e applicata. Vol. 27. 1954.

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Abhandlung erörtert ein Verfahren, mit dem die Lotabweichungen aus den Messergebnissen der Drehwaage von EÖTVÖS verhältnismässig einfach berechnet werden können. Die Grundlage der Berechnung ist ein quadratisches Netz, das die Berechnung der Differenzen der Lotabweichungen entlang der Seiten von gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecken ermöglicht. Die tatsächlichen Messergebnisse müssen für die Eckpunkte des quadratischen Netzes interpoliert werden.

Auf einem zusammenhängenden Gebiete gelangt man zu vermittelnden Gleichungen, deren Zahl die der Unbekannten übertrifft, ein Umstand, der die Anwendung der Ausgleichsrechnung erfordert. Zur Ermittlung der Lotabweichungen benötigt man auch die Angaben der astrogeodätischen Messungen.

Die Abhandlung enthält auch eine vergleichende Untersuchung über das die höheren Ableitungen des Schwerepotentials benutzende Verfahren von HAALCK sowie über jenes Verfahren, das die Lotabweichungen auf Grund des STOKESSchen Theorems aus den Schwereanomalien bestimmt.

Die Bestimmung der Lotabweichungen ist von Bedeutung in der angewandten Geophysik, weil die Lotabweichungen, die aus subterranean Anomalien der Krümmungsgrössen oder der Schwerkraft berechnet wurden, Folgerungen auf die unterirdischen Dichteverhältnisse ermög-

lichen. Die tiefer liegenden Dichteunregelmässigkeiten gelangen in den Lotabweichungen oft besser zum Ausdruck, als in den horizontalen Gradienten.

Die Ermittlung der Lotabweichungen findet eine weitere wichtige Anwendung in der Geodäsie, da die berechneten Lotabweichungen die ausführliche Untersuchung der Geoidfläche ermöglichen.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОТКЛОНЕНИЙ ВЕРТИКАЛИ

Д-р техн. наук Я. РЕННЕР

РЕЗЮМЕ

Излагается такой метод, при помощи которого по данным измерений гравиметром Этвеша можно относительно просто определить вычислениями отклонения вертикали. За основу методики расчетов взята квадратная сеть, которая позволяет производить вычисление разности отклонений вертикали вдоль сторон равнобедренных прямоугольных треугольников. Фактические данные наблюдений необходимо интерполировать для вершин углов квадратной сети.

На связанной территории получается такое число косвенных уравнений, которое превышает число неизвестных, и это обстоятельство заставляет применять уравнивание. Для определения отклонений вертикали необходимы также данные астрогеодезических измерений.

В дальнейшем производится критический анализ метода Халька, основывающийся на использовании высших производных, далее методики вычислений, которая на основе закона Стокса по аномалиям силы тяжести определяет слагающие отклонения вертикали.

Отклонения вертикали имеют значения также при геофизической разведке, т. к. на основе данных отклонений вертикали, рассчитанных по подземным аномалиям, возможно сделать выводы относительно подземного распределения масс. На отклонения вертикали залагающие глубоко неравномерности распределения масс оказывают большее влияние, чем на градиенты.

Другое важное применение вычислений отклонений вертикали позволяет детально исследовать поверхности геоида и, таким образом, с научной точки зрения геодезии играет большое значение.

STUDIES ON THE DEVIATIONS OF THE PLUMB LINE

J. RENNER

D. of Eng. Sc.

SUMMARY

Present paper is introducing a method by means of which it is relatively easy to compute the deviations of the vertical out of the results of the measurements made with the Eötvös torsion balance. Basis of the method of calculation is the quadratic network which renders possible the computation of the difference between the deviations of the vertical along the sides of equilateral rectangular triangles. The actual observation data are to be interpolated for the angular points of the quadratic network.

In a continuous field there occur observation equations exceeding the number of unknowns and this circumstance justifies an application of the method of least squares. The interpretation of the deviations of the vertical makes necessary the data of astro-geodetic measurements.

The present paper is critically studying the method of Haalck based upon the application of the higher derivatives, further that kind of computation, which is, on the basis of Stokes's theorem, determining the components of the deviation of the vertical out of gravity anomalies.

The deviations of the vertical are of importance for geophysical prospecting, as it is possible to draw conclusions from the deviations of the vertical computed from the subterranean anomalies to subterranean mass-distribution. The deeper seated mass-irregularities prove more effective in the deviations of the vertical than in horizontal gradients.

The other important application of the computation of the deviations of the vertical render possible the detailed study of the surface of the geoid and thus it is of importance from the point of view of geodesy.

ÉTUDES DES DÉVIATIONS DE LA VERTICALE

J. RENNER

docteur des sciences techniques

RÉSUMÉ

L'étude fait connaître une méthode à l'aide de laquelle il est relativement simple de calculer les déviations de la verticale des résultats des mesurages faits avec la balance de torsion Eötvös. La base de la méthode de calcul est le réseau quadratique moyennant lequel on peut calculer la différence entre les déviations le long des côtés égaux des triangles rectangulaires. Les données effectives de l'observation sont à interpoler aux points angulaires du réseau quadratique.

Sur un territoire cohérent on obtient des équations d'observation d'un nombre dépassant les inconnues, et ce fait justifie l'application de la méthode des moindres carrées. L'interprétation des déviations de la verticale, nécessite l'utilisation des données des mesurage astro-géodésiques.

La présente étude examine critiquement la méthode de Haalck ayant pour base l'application des dérivés plus hauts, puis une méthode de calcul qui détermine à la base du théorème de Stokes les composantes de la déviation de la verticale des anomalies de la pesanteur.

Les déviations de la verticale ont de l'importance pour la prospection géophysique, étant donné que des déviations de la verticale calculées à la base des anomalies souterraines on peut conclure à la distribution souterraine de la masse. Les irrégularités souterraines de la masse se trouvant plus bas se distinguent mieux dans la déviation de la verticale que dans les gradients.

Une autre application importante du calcul des déviations de la verticale permet l'examen détaillé de la surface de géoïde et par là est important du point de vue de la géodésie.

DAS RHEOLOGISCHE VERHALTEN WÄSSRIGER BENTONITDISPERSIONEN

J. BARNA und B. MARSCHALKÓ

INSTITUT FÜR BERGBAUFORSCHUNG, BUDAPEST

[Eingegangen am 12. Juli 1955]

Bentonitdispersionen, als Prototypen stark lyophiler Zweiphasensysteme, sind nicht nur vom wissenschaftlichen, sondern auch vom Standpunkt einer näheren Erkundung ihrer industriellen Nutzbarkeit Gegenstand stetiger, umfangreicher Forschungen, denen auch bisher schon Resultate von namhafter Bedeutung zu verdanken sind.

Bekanntlich dient etwa die Hälfte des Ertrages aller Bentonitvorkommen der Welt zur Vergütung von Tiefbohrschlammern [1]. Das rheologische Verhalten der zu diesem Zweck verwendeten wässrigen Bentonitdispersionen wird zur Zeit im allgemeinen mit dem sogenannten STORMERSchen Viskosimeter geprüft in der unzulässigen Annahme, nicht-Newtonsche Flüssigkeiten mit einer »verallgemeinerten« Viskositätskennzahl bewerten zu können. Besonders in den letzten Jahren wird auch im Schrifttum immer wieder auf die messtechnischen Unzulänglichkeiten dieses Verfahrens hingewiesen [2, 3, 4], ausserdem wird auch im allgemeinen die Notwendigkeit geeigneterer Wertungszahlen für die Beurteilung von Bentonitdispersionen klar erkannt [5].

Mit den Fliesserscheinungen bzw. Strömungsverhältnissen in wässrigen Bentonit- und anderen Dispersionen haben sich u. a. insbesondere REBINDER [6], DSCHIGATSCH [7], WINOGRADOW [8], HÖPPLER [9], WILLIAMS [10], TRAPESNIKOV und FEDOTOVA [11], SWEENEY und GECKLER [12], BERGEN und PATTERSON [13], FILATOW [14] sowie HOFMANN [15] befasst und die hier in Betracht kommenden Verhältnisse besonders in theoretischer Richtung weitgehend erforscht.

Das Ziel der hier besprochenen Forschungsarbeit war, die rheologischen Eigenschaften praktisch verwendeter Dispersionen von Bentoniten und auch Montmorilloniten verschiedener — in erster Linie ungarischer — Herkunft zu prüfen und anschliessend an die obenerwähnten Forschungsarbeiten ihr wirkliches mechanisches Verhalten auf reelle und vom Messverfahren unabhängige physikalische Konstanten zurückzuführen und eindeutig zu bestimmen.

Zum Beginn wurde der Verlauf ihrer Fliesskurven untersucht. Die Messungen erfolgten mit einem von einem der Verfasser eigens hierzu entwickelten Viskosimeter, das es ermöglichte, *alle Fliesseigenschaften mit der gleichen Füllung in einem einzigen Prüfungsvorgang* innerhalb verhältnismässig sehr weiter Grenzen des Schergeschwindigkeitsgefälles zu verfolgen.

I. Der verwendete Apparat

Die Versuche wurden mit dem Rotationsviskosimeter nach MARSCHALKÓ [16] durchgeführt. Unter der Voraussetzung, dass dessen Konstruktion und

Arbeitsprinzip durch Hinweis auf obige Referenz bekannt ist, wird hier lediglich eine photographische Aufnahme (Abb. 1) sowie eine schematische Darstellung (Abb. 2) dieses Apparates gezeigt. Bei Anwendung des dazugehörigen Geschwindigkeitsreglers arbeitet der Apparat im Bereiche von 0,0001 bis 800 U/min kontinuierlich mit jeder beliebigen Drehzahl. Der unerwünschte Einfluss der beiden Endflächen des für solche Versuche modifizierten Messzylinders konnte durch eine besondere Formgebung des äusseren rotierenden Zylinders (vgl. Abb. 2) weitgehend verringert werden [17].*

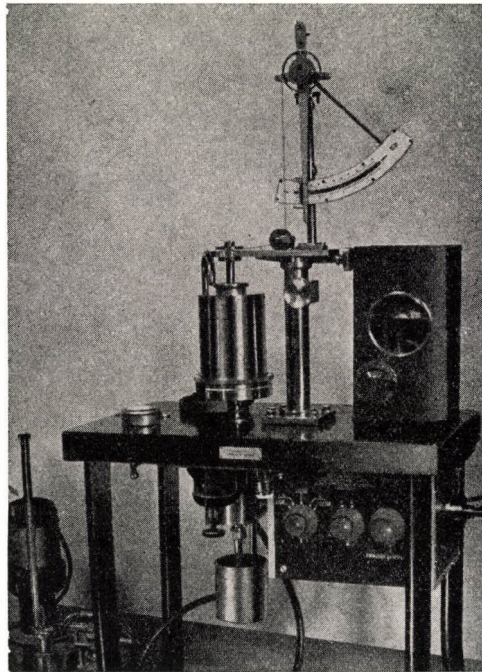


Abb. 1

Die Abmessungen der beiden Zylinder wurden auf Grund bekannter theoretischer Forderungen [5, 18, 19, 21] je nach Bedarf so gewählt, dass die Werte der wahren Fließkurven von den am Apparat abgelesenen Messwerten (Moment in Gramm/Drehzahl) teils nur durch eine Konstante verschieden oder aber gegebenenfalls aus diesen verhältnismässig leicht zu berechnen waren.

* Eine ähnliche Formgebung des äusseren Zylinders wurde in späteren Mitteilungen auch von SCHULTZ—GRUNOW und GRODDE beschrieben [18, 5].

Innenradius der äusseren rotierenden Zylinder	$R_E = 1,502-2,00$ cm
Aussenradius der inneren Messzylinder	$R_A = 1,40-1,90$ cm
Messlänge der Messzylinder	$l = 6-7,7$ cm
Radius der Seilspindel für die Momentenübertragung	$r = 1,904$ cm
Das am Messzylinder auftretende Drehmoment	$M = G \cdot g$
	$G = 980,665 \cdot r$ und

g = das am Schwingarm abgelesene Gewicht in Gramm ist.

Aus der bekannten Formel [21] ergibt sich die Apparatkonstante zu

$$K = \frac{(R_E^2 - R_A^2) \cdot G}{4\pi R_E^2 \cdot R_A^2 \cdot l} \quad (1)$$

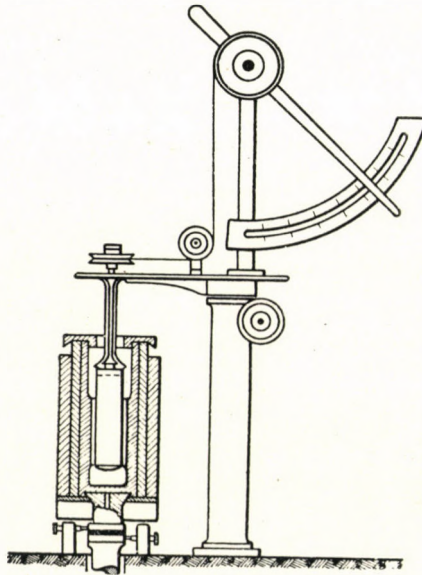


Abb. 2

Da jedoch trotz der bereits erwähnten Abwehrmassnahme ein gewisser Einfluss der Endflächen am Messzylinder — wenn auch in geringem Umfange, aber dennoch — besteht, verringert sich die Konstante nach Berechnung um etwa 1,13%. Eine der arithmetischen Berechnung gegenüber zuverlässigere und genauere Methode für die Ermittlung dieser Einwirkung ist die Eichung mittels entsprechender Newtonscher Eichflüssigkeiten bekannter Viskosität. Für die weiteren Versuche wurden also die so ermittelten Werte angenommen, die mit den rechnerisch festgestellten ziemlich gut übereinstimmen.

Was übrigens die Messgenauigkeit, Messfehler usw. unseres Apparates und die Abweichungen der Messwerte vom theoretischen Verlauf der Fliesskurve anbelangt, stimmen unsere Erfahrungen mit dem Inhalt der Abhandlungen von K. H. GRODDE [19, 20] im wesentlichen gut überein.

II. Vorbereitung der Substanz

Die Konzentration der geprüften Bentonitdispersionen betrug im allgemeinen bei optimalem Sodagehalt 6%. Das Bestreben ging dahin, für jede Bentonitart jeweils den höchstmöglichen Peptisationsgrad zu erreichen, was teils durch Rütteln, teils durch leichte Erhitzung im Wasserbad oder aber durch längeres Stehenlassen erzielt wurde. Die der Prüfung unterzogenen Dispersionen (deren Menge je nach den verwendeten Zylinderabmessungen ungefähr 20 g betrug), wurden in den — möglichst — luftdicht verschlossenen Zylinder des Viskosimeters eingewogen und in wasserdampfgesättigter Atmosphäre 50–120 Stunden lang bei einer Temperatur von 25° C erschütterungsfrei stehen gelassen.

III. Durchführung der Messungen

Danach wurde das mit der Bentonitdispersion gefüllte Viskosimeter in der Regel mit der kleinstmöglichen Winkelgeschwindigkeit (0,0001–0,0005 U/min) zum Rotieren gebracht und das am Schwingarm auftretende, sich langsam vergrößernde Drehmoment bis zur Erreichung des Maximalwertes (Anlasswertes) sorgsam verfolgt und öfters bis zum gewöhnlich plötzlichen Abreißen des festen Verbandes abgelesen. Von hier an wurde dann das Drehmoment minutenweise abgelesen. Die Ablesung erfolgte an dem in Grammgewichtswerten geeichten Ausschlag des Schwingarmes. Um die zeitliche Änderung der Schubspannung bewerten und ihren Einfluss ausschalten zu können, wurden die Ablesungen solange fortgesetzt, bis die Werte als konstant angesehen werden konnten. (Siehe auch später unter IV.) Die Dauer einer solchen bei stationärer Schergeschwindigkeit durchgeführten Messreihe betrug je nach Herkunft der Bentonitdispersionen bei kleinen Schergeschwindigkeiten ca. 1 bis 4 Stunden, bei grösseren Drehzahlen einige Minuten. Hierauf wurde die Drehzahl stufenweise erhöht, wobei 30 bis 50 solcher Werte bis zur Erreichung einer Drehzahl von 600–800 U/min in gleicher Weise bestimmt wurden. Diese Wertermittlungen erfolgten aber bei den verschiedenen Dispersionen nicht in gleichmässigen Abständen, auf den Gesamtbereich der Drehzahlen verteilt, sondern wurden je nach Eigenart der einzelnen Bentonitdispersionen stets den Bedürfnissen entsprechend — an gewissen Teilen der Kurve häufiger, anderswo seltener — durchgeführt.

Nach Erreichung der maximalen Drehzahl von 600–800 U/min wurden die Messungen genau wie oben beschrieben, jedoch in umgekehrter Reihenfolge, also bei stufenweise abnehmenden Drehzahlen, ebenfalls in angemessenen Abständen, bei 30 bis 50 verschiedenen Drehzahlwerten durchgeführt. Die Gründe für diese Prüfmethode sowie für die unsererseits als richtig erachtete Bestimmungsweise der einzelnen Drehmomentenwerte werden später noch näher erörtert.

IV. Folgerungen aus den Messergebnissen

Die am Apparat minutenweise abgelesenen Messwerte sind die Resultanten mehrerer, zugleich auch das zu messende Drehmoment beeinflussender Faktoren. Die wichtigsten darunter sind: 1. die Temperatur, 2. die Zeitdauer der Schubwirkung, 3. die konstruktionselle Eigenart des verwendeten Viskosimeters und schliesslich 4. die Thixotropie. Zur Erzielung endgültiger, als konstant zu erachtender Werte muss die Einwirkung aller dieser Faktoren in jedem Falle rechnerisch berücksichtigt oder aber eliminiert werden.

1. Der Einfluss der Temperatur wurde eliminiert, indem sie während der Gesamtdauer der Messungen möglichst konstant (25° C) gehalten wurde.

2. Der Einfluss der Zeitdauer der Schubwirkung war nur im Abschnitt zwischen 0,0001 und 1 U/min von besonderer Bedeutung. In diesem Bereiche wurde ihr Einfluss besonders geprüft. Übrigens kann der Einfluss der Zeit von dem der Thixotropie nicht genau getrennt werden, so dass die diesbezüglichen Ergebnisse auch später unter 4. besprochen werden.

3. Überall dort, wo die Schubspannung den Grenzwert δ der elastischen Spannung (Fliessgrenze) in der ganzen Breite des Ringraumes überstieg, d. h.

$$\frac{\tau_r}{\delta} \geq \frac{R_E^2}{R_A^2}$$

war die direkte Berechnung der Flieseigenschaften leicht möglich, so dass die konstruktionellen Eigenheiten des Gerätes auch voll berücksichtigt werden konnten.

Durch die Wahl geeigneter Abmessungen der Messzylinder ist es ferner gelungen, die Grenzen, wo die obige Bedingung nicht mehr erfüllt werden konnte, bis auf so niedrige (η) Viskositäts- und Drehzahlenwerte hinabzudrücken, dass die unter ihnen gelegenen Messwerte zur Beurteilung der Flieseigenschaften nicht mehr von Belang waren.

4. Um den Einfluss der Thixotropie möglichst richtig bewerten zu können, wurden folgende Messbedingungen gestellt und eingehalten:

Die Messungen wurden in einem weiten Bereich (6 Grössenordnungen) der Schubspannungswerte vorgenommen, wobei an der Fliesskurve bzw. an der Funktion (gD) der einzelnen Bentonitgele im allgemeinen drei verschiedene, an und für sich charakteristische Abschnitte festgestellt werden konnten.

Der erste Abschnitt erstreckt sich von der noch einstellbaren niedrigsten Drehzahl (0,0001 U/min) bis rund 1 U/min.

Nach Einschaltung der kleinsten Drehzahl vergrössert sich der Schubspannungswert langsam, bis ein Höchstwert («Anlasswert») der Fliessgrenze erreicht wird.

Da dies aus bekannten theoretischen Gründen anfangs nur in der Nähe des inneren («Mess») Zylinders erfolgt, beginnt sich hier das Gerüst des im Ruhezustande als Festkörper geltenden Bentonitgels unter Einwirkung dieses Höchstwertes der Schubspannung zu lockern, so dass der feste Verband zwischen dem inneren und äusseren Zylinder abreisst. Dies geschieht in den meisten Fällen plötzlich und geht mit einem Sinken der Schubspannung einher.

Nun kann aber bei so niedrigen Drehzahlen das Geschwindigkeitsgefälle ruhig als Null betrachtet werden, so dass aus dem ermittelten Wert der Höchstwert (δ_0) der Fliessgrenze, die «Thixistärke», auch theoretisch ganz einwandfrei berechnet werden kann.

Von hier an wurden die durch die Schubspannung hervorgerufenen Momentenwerte minutlich bestimmt, bis ein Gleichgewichtswert erreicht wurde. Danach wurde die Drehzahl stufenweise erhöht und die Ablesungen in gleicher Weise fortgesetzt. Dies geschah in 5—10 Stufen bis zu ca. 0,1 U/min. Da in diesem Bereich die Strömungsverhältnisse aber ziemlich verwickelt sind, ist auch die Berechnung der Flieseigenschaften mit Schwierigkeiten verbunden. Im späteren soll darauf noch näher zurückgekommen werden.

Bei weiterer Erhöhung der Drehzahl erreicht die Schubspannung erfahrungsgemäss in den meisten Fällen schon im ganzen Querschnitt des Ringraumes die Fliessgrenze δ , so dass die einzelnen Werte bereits leicht berechnet werden können. Dementsprechend wird auch der

Übergang der Substanz aus dem festen in den flüssigen Zustand immer ausgeprägter. Dies beginnt bei den verschiedenen Bentonitdispersionen bei Werten zwischen 0,1 und 10 U/min, und als Folgeerscheinung davon tritt hier nun zusätzlich eine rapide Zunahme des durch die innere Reibung der Flüssigkeit verursachten Anteils des Drehmomentes schon bei einer Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit um wenige Umdrehungen/Minute ein.

Hierauf folgt bei fortschreitender Erhöhung der Drehzahl eine anfangs rasche, dann allmählich nachlassende Verminderung des Drehmomentes, bis dieses dann nach Erreichen einer unteren Grenze wieder anzusteigen beginnt. Diesen Bereich, der sich im allgemeinen von 0,1 bis 50 U/min, bei einzelnen Bentoniten sogar bis zu 600—800 U/min erstreckt, bezeichnet man als *zweiten Abschnitt*.

Von hier an benimmt sich die Bentonitdispersion bei weiterer Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit vollständig als BINGHAMscher Körper. Hier beginnt also der *dritte Abschnitt* der Fliesskurve.

Durch Auswertung der Fliesskurven sämtlicher uns bekannten und von uns geprüften Bentonitarten konnte wiederholt die übrigens bekannte Tatsache festgestellt werden, dass sich die Dispersionen im *Ruhezustand* als Festkörper benehmen, nach Erreichung der Grenzspannung δ zu fließen beginnen und eine »Strukturviskosität« zeigen. Ihr Aufbau und ihr Verhalten ist also — im wesentlichen — identischen Charakters und entspricht den »verallgemeinerten BINGHAMschen Körpern« gemäss der Einteilung nach VÁNDOR [23].

Es wurden nun die zur Wiedergabe der Fliesskurven und zur einwandfreien Berechnung der Stoffkonstanten die im Schrifttum bekannten Beziehungen und Grundgleichungen (OSTWALD [24], REINER [25], DE WAELE und LEWIS [26], SCHULTZ-GRUNOW und WEYMAN [18], SCHULTZ-GRUNOW [27], PAWLOWSKY [28], WEYMAN [29], TILLMANN [30], MICHAÏLOW und REBINDER [31]) bei den von uns geprüften Bentonitarten miteinander und mit dem von uns gemessenen Ablauf der Fliesskurven verglichen, wobei festgestellt werden konnte, dass sich die aus der unten angeführten Kombination (4) der Beziehungen (2) und (3) berechnete Kurve gut an die Kurve der gemessenen Werte anschmiegt und dass ihre einzelnen Werte am einfachsten aus der Gl. (4) berechnet werden können.

Die eine ist die ursprünglich von SZEGVÁRI [32] empfohlene und nachher von REINER und RIWLIN [33] genauer entwickelte Grundgleichung

$$\frac{|\tau|}{K'} = g = \frac{\eta}{K} \Omega + \frac{\delta}{K} \ln \frac{R_E}{R_A} \quad (2)$$

wo τ die auf den inneren Zylinder wirkende tangentielle Schubspannung bzw. das mit ihr in enger Beziehung stehende und am Apparat direkt ablesbare Grammgewicht g , K die nach Gl. (1) bestimmte Gerätekonstante, R_E und R_A — wie schon bekannt — die Radien der beiden Zylinder bedeuten.

Da jedoch — wie bereits erwähnt — die Bentonitarten besonders im Bereiche geringerer Schubspannungen auch eine »Strukturviskosität« zeigen, kann η in obiger Gleichung nicht als Konstante, sondern nur als ein von der Winkelgeschwindigkeit stark abhängiger, scheinbarer Mittelwert der in den einzelnen Schichten der zu untersuchenden Gels herrschenden unbekannten Schubspannungen betrachtet werden, die durch den gleichfalls von REINER und RIWLIN empfohlenen Wert w (nach H. FREUNDLICH »Widerstandsgrösse« genannt) gekennzeichnet werden können [21]. In der Originalfassung nach

REINER lautet die Gleichung :

$$w = (\eta_0 - \eta_\infty) e^{-c_1 \frac{R_E^2 + R_A^2}{R_E^2 - R_A^2} \cdot \Omega} + \eta_\infty \quad (3)$$

wo η_0 der Viskositätskoeffizient des Sols in dessen vollkommenem Ruhezustand bzw. im Grenzfall verschwindender Schubspannungen, η_∞ der Viskositätskoeffizient des Sols nach weitestgehender Abscherung der Solvathüllen und c_1 eine von REINER als »Stabilitätskonstante« bezeichnete Stoffkonstante des Sols ist.

Wenn nunmehr η aus Gleichung (2) durch w aus Gleichung (3) ersetzt wird, ergibt sich die Kombination

$$g = \frac{\left[(\eta_0 - \eta_\infty) e^{-c_1 \frac{R_E^2 + R_A^2}{R_E^2 - R_A^2} \cdot \Omega} + \eta_\infty \right]}{K} + \frac{\delta}{K} \ln \frac{R_E}{R_A} \quad (4)$$

wo nunmehr eine Beziehung zwischen dem am Gerät gemessenen jeweiligen Drehmoment g einerseits und der Winkelgeschwindigkeit Ω andererseits in Form einer Funktion mit fünf Konstanten geschaffen wird.

Aus den theoretischen Forderungen folgt weiter, dass eine gute rechnerische Übereinstimmung mit den gemessenen Werten nur dort zu erwarten ist, wo die Schubspannungen den Grenzwert der Fließfestigkeit im ganzen Querschnitt des Ringraumes erreichen, also beiläufig im II. und III. Abschnitte der Fließkurve, etwa zwischen Drehzahlen von 0,1 bis 800.

Bei ganz kleinen Geschwindigkeitsgefällen, also hauptsächlich im Abschnitt I ist dies nicht immer der Fall, da hier die theoretischen Forderungen nicht immer erfüllt sind und auch noch mehrere Nebeneinflüsse in Betracht kommen, deren Berücksichtigung durch die einfache Gleichung nach (4) nicht mehr bewältigt werden kann.

Im weiteren werden die gemessenen Werte der Fließkurven einfachheitshalber als Funktion (gD) bezeichnet sowie als Ordinate anstatt τ das am Apparat direkt ablesbare Grammgewicht (g) und als Abszisse anstatt der Schergeschwindigkeit die Drehzahl (D) aufgetragen.

Bei Ermittlung der Konstanten bereitet nur die Errechnung des Wertes C_1 gewisse Schwierigkeiten. Dieser Wert lässt sich jedoch ziemlich gut einschränken, wenn man den Wendepunkt (Ω') der Funktion (gD) graphisch bestimmt. Die Lage des Wendepunktes ergibt sich nämlich aus zweimaliger Differenzierung

der Gleichung (4) wie folgt :

$$\Omega' = \frac{2}{C_1} \frac{R_E^2 - R_A^2}{R_E^2 + R_A^2} \quad (5)$$

woraus der Wert von c_1 ohne weiteres berechnet werden kann.

Bei den meisten von uns geprüften Bentonitdispersionen fällt der Wendepunkt der Kurve in den Bereich besonders günstiger Drehzahlen und ist gewöhnlich auch deutlich genug ausgeprägt, so dass Ω' und damit auch c_1 leicht abgrenzbar und mit einer die praktischen Ansprüche weit überragenden Genauigkeit zu bestimmen ist. In Kenntnis von c_1 lassen sich die übrigen drei Konstanten der Gleichung nunmehr ohne weiteres berechnen; die vierte ist die bereits bekannte Apparatkonstante.

Eine Ausnahme bildeten die in Abb. 5 dargestellten Funktionen, bei denen die Wendepunkte an verhältnismässig hohe Drehzahlen gebunden sind, wo die Einschränkungsmöglichkeit des Wendepunktes unsicherer ist.

Gemäss vorstehenden Ausführungen musste bei der Bestimmung der einzelnen g -Werte auch die Einwirkungsdauer der Schubspannung sowie die auftretende Thixotropie mit berücksichtigt werden.

Es ist eine allgemein bekannte Tatsache, dass die Struktur der Bentonitgele unter Einwirkung der Scherkraft abgebaut wird, wodurch die Schubspannung im allgemeinen stark abnimmt; nach Aufhören der Scherkräfteinwirkung erfolgt durch Einwirkung der Thixotropie eine allmähliche Wiederherstellung des Originalzustandes. Bei diesen reversiblen Vorgängen wird also *allmählich ein zu jedem Geschwindigkeitsgefälle gehörender Gleichgewichtswert erreicht.*

Nun muss man hier grundsätzlich zwischen Abbau 1. der Fließfestigkeit durch teilweise Zerstörung der Gerüststruktur und 2. der »differentiellen Viskosität« (»Widerstandsgrösse«) durch sukzessive Abscherung der Solvathüllen unterscheiden. In beiden Fällen beginnt der Abbau theoretisch schon bei unendlich kleinen Geschwindigkeitsgefällen, u. zw. beim Anlasswert δ_0 der Fließgrenze (»Thixistärke«) bzw. bei η_0 , der Viskositätskonstante des Gels im Ruhezustande, und endet nach Zerstörung des Gerüsts bzw. weitgehendster Abscherung der Solvathüllen.

Im ersten Falle wird unseren Messungen entsprechend der Endzustand δ_∞ (Gelstärke) schon bei verhältnismässig kleinen Drehzahlen (0,1–1 U/min) erreicht, die weitgehendste Abscherung der Solvathüllen η_∞ hingegen erst bei grossen Drehzahlen (50–500 U/min) beendet. Diese Tatsache ermöglicht es, die einzelnen Werte unabhängig voneinander zu bestimmen, trotzdem das jeweilige Drehmoment immer eine Summe dieser beiden Einwirkungen ist.

Aus Gleichung (4) können η_0 , η_∞ und δ_∞ in Kenntnis entsprechend gewählter Drehmomentenmesswerte leicht berechnet werden. Wird nun ein Drehmomenten-

wert im allgemeinen bei einer Drehzahl 0,1–1,0, gemessen, so lässt sich daraus ein Näherungswert von δ_∞ auch direkt berechnen, da der Einfluss der »differentiellen Viskosität« (Widerstandsgrösse) auf den Drehmomentenwert bei so kleinen Drehzahlen — wegen des kleinen Geschwindigkeitsgefälles — im Verhältnis zur Fließspannung noch ziemlich untergeordnet ist. Die Abmessungen unseres Apparates erlauben bei diesen Drehzahlen oft auch die Berechnung nach Gl. (2), da hier die Fließgrenze schon in der ganzen Breite der Ringspalte erreicht wird. Der so berechnete Gleichgewichtswert von δ_∞ (Gelstärke) stimmt im allgemeinen mit dem aus Gl. (4) berechneten (BINGHAMschen) gut überein.

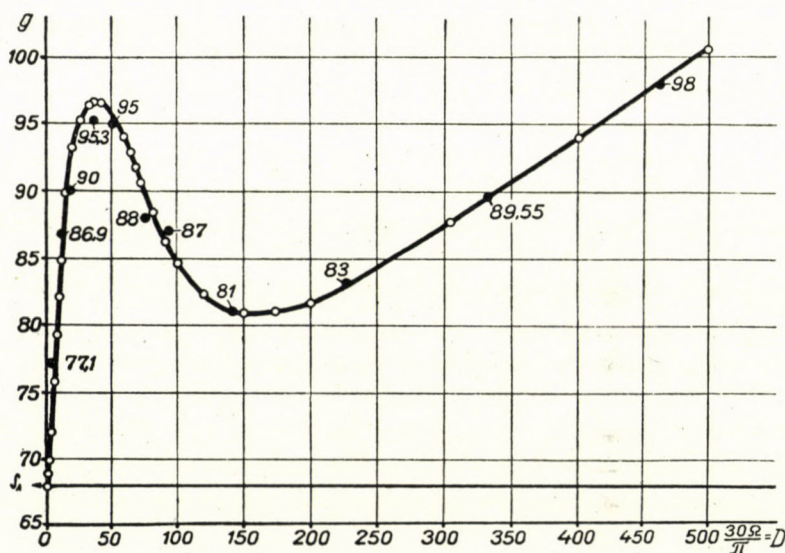


Abb. 3. Funktion (gD) eines an Montmorillonit angereicherten Bentonits aus Ungarn, Muster 9, warm peptisiert. Schwarz punktierte Zahlen Messwerte, leere Kreise nach Gl. (4) berechnete Werte

Ein Zeichen, dass der Endzustand des Gerüstabbaues schon bei so niedrigen Drehzahlen erreicht wird.

Die einzelnen Werte der Fließfestigkeiten fallen also zwischen den Höchstwert δ_0 (Thixistärke) und Mindestwert δ_∞ (Gelstärke).

Gegebenenfalls hängt der momentane Fließfestigkeitswert vom Ausmass der vorhergehenden mechanischen Beanspruchung der Dispersion und vom zeitlichen Verlauf ihrer thixotropen Verfestigung während der Ruhezeit ab. Dies ist eine Funktion der Zeit, deren Konstante als eine weitere wertvolle Kennzahl zur Beurteilung der Bentonite dienen kann. Eine weitere Behandlung dieser Zeitfunktion sei einer späteren Veröffentlichung vorbehalten.

Nun wurden im obigen Bereiche öfters auch Schubspannungen gemessen, die unter der berechneten binghamischen Fließgrenze lagen. Hierauf sei im späteren noch zurückgekommen.

Gemäss dem bei unseren Prüfungen befolgten Verfahren wurden die zu den bestimmenden g -Werten gehörigen Drehzahlen konstant gehalten und die Momentenwerte minutenweise abgelesen. Aus der sich so ergebenden Drehmoment-

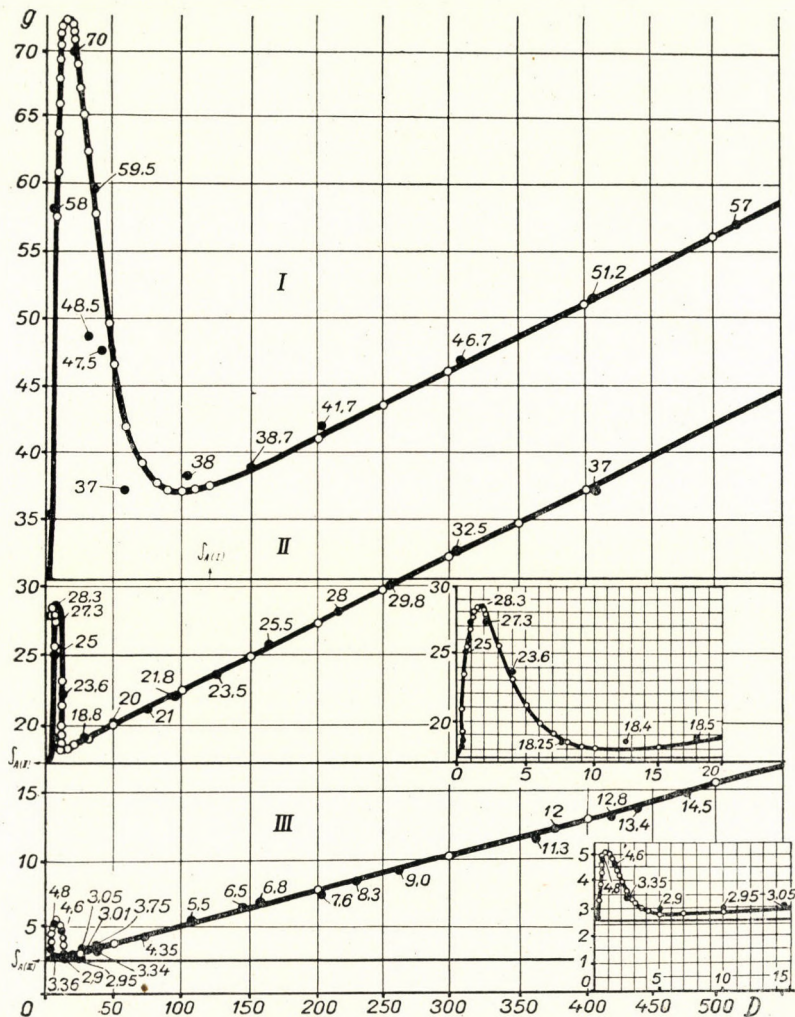


Abb. 4. I. Funktion (gD) eines an Montmorillonit angereicherten Bentonits aus Ungarn, Muster 9, kalt peptisiert. II. Funktion (gD) eines an Montmorillonit angereicherten Bentonits aus Ungarn, Muster 13, warm peptisiert. Vergrößerung des Anfangsabschnittes der Kurve: $g = 1:1$ $D = 1:10$. III. Funktion (gD) eines Bentonits aus den USA, Muster 11. Vergrößerung des Anfangsabschnittes der Kurve: $g = 1:2$ $D = 1:10$

Zeit-Funktion kann dann der Gleichgewichtswert graphisch ermittelt werden. Die Werte lassen sich aber messtechnisch auch direkt bestimmen, indem man obige Ablesungen solange fortsetzt, bis ihre Werte als konstant betrachtet

werden können. Hierfür ist jedoch — besonders bei niedrigen Drehzahlen — eine verhältnismässig lange Zeitspanne erforderlich.

Das bedeutet aber, dass das System längere Zeit hindurch dauernden mechanischen Beanspruchungen unterworfen ist, die den Aufbau der Struktur verändern können, so dass sich auch die Stoffkonstanten ändern, seien es Anlass- oder Gleichgewichtswerte.

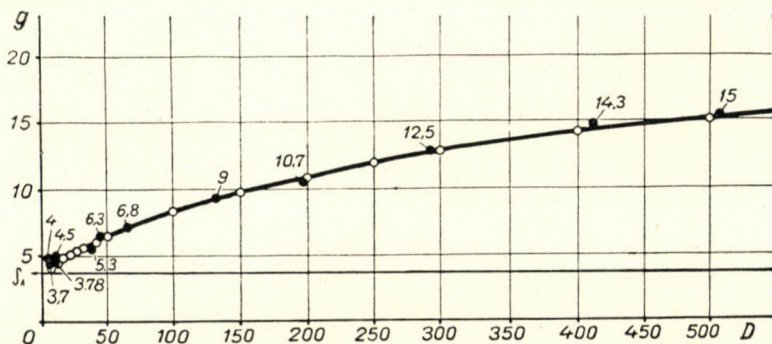


Abb. 5. Funktion (gD) eines Bentonits aus den USA, Muster 10

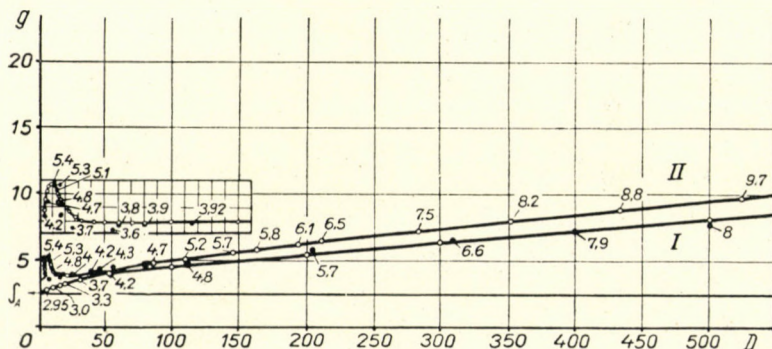


Abb. 6. I. Funktion (gD) eines Bentonits, Muster 14, kalt peptisiert. II. Funktion (gD) eines Bentonits aus Ungarn, Muster 9, warm peptisiert. Vergrößerung des Anfangsabschnittes der Kurve: $g = 1:10$ $D = 1:2$

Um diesen unerwünschten Einfluss berücksichtigen bzw. ausschalten zu können, wurden die Messungen zuerst bei allmählich steigenden Drehzahlen bis zu Höchstwerten fortgesetzt und von dort angefangen auch in umgekehrter Richtung, d. h. bei allmählich abnehmenden Drehzahlen, durchgeführt. Stimmt bei den in beiden Richtungen durchgeführten Messungen die zu derselben Drehzahl gehörenden Drehmomentenwerte überein, so war der Gleichgewichtszustand beruhigend erreicht und keinen weiteren mechanischen Veränderungen unterworfen, so dass die Bestimmungen als einwandfrei anzusehen waren.

Widrigenfalls war entweder die Messung nicht richtig (und zu überprüfen), indem das in der einen Richtung festgestellte Moment den Gleichgewichtszustand noch nicht erreicht hatte, oder aber war der Vorgang nicht vollkommen reversibel, da sich das System durch den Einfluss der dauernden mechanischen Beanspruchungen veränderte. Bei unseren — wiederholt kontrollierten — Messreihen wurden Vertreter beider Varianten angetroffen.

Zur näheren Erläuterung der obigen Darlegungen sind als Beispiel einige Messergebnisse bzw. die daraus ermittelten Fließkurven (gD) in den Abbildungen 3, 4, 5, 6 und 7 dargestellt, während die Stoffkonstanten aus Tabelle I hervorgehen.

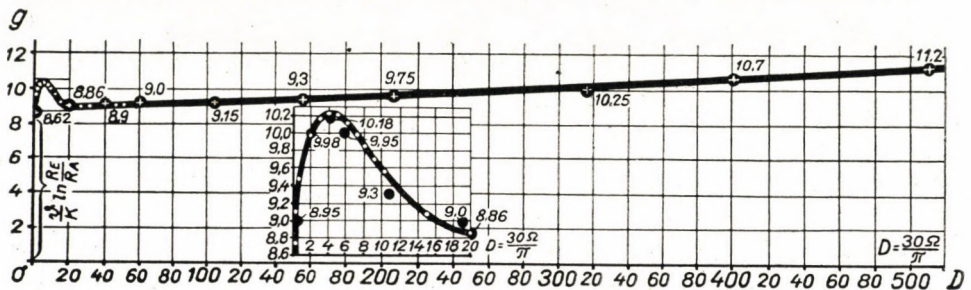


Abb. 7. Funktion (gD) eines Bentonits, Muster 7. Vergrößerung des Anfangsabschnittes der Kurve: g und $D = 1:5$

Bei den Fließkurven (gD) der von uns gemessenen Bentonitdispersionen kann man — abgesehen von den weiter unten zu erläuternden Verhältnissen bei ganz kleinen Drehzahlen (0,0001 bis 0,1) — im allgemeinen zwei Hauptgruppen unterscheiden, u. zw.:

a) Von verhältnismässig geringen Winkelgeschwindigkeiten ausgehend nimmt das Drehmoment bis zur Erreichung eines oberen Endwertes rasch zu, um danach schon bei einer ganz geringer Änderung der Winkelgeschwindigkeit (z. B. von 1,0 auf 5 U/min) auf einen Wert zurückzufallen, von dem angefangen sich die Bentonitdispersion bei weiterer Steigerung der Drehzahl schon vollständig als BINGHAM'scher Körper benimmt (vgl. Abb. 3 und 4, Kurve II. in Abb. 6, Abb. 7).

b) In einem bedeutenden Teil der Fließkurve zeigt der Drehmomentenwert als Funktion der steigenden Schergeschwindigkeit eine zwar stetige, jedoch nicht lineare und ziemlich geringe Zunahme. Das vollständig BINGHAM'sche Verhalten setzt aber erst bei sehr grossen (40—100 U/min) — mitunter sogar die Messbarkeitsgrenze übersteigenden — Schergeschwindigkeitswerten ein (vgl. Abb. 5, Abb. 6, Kurve II).

V. Erläuterung der unter IV(4) erwähnten drei Abschnitte der Fließkurve (gD) von Bentonitdispersionen

Bemerkenswert sind die in den geringsten Winkelgeschwindigkeitsintervallen gemessenen, durch die bei 0,0001—1 U/min wirkenden Scherkräfte hervorgerufenen Momentenwerte der Funktionen (gD). Hier konnte beobachtet werden, falls das Gel auf den Zylinderflächen gut haftet und kein Gleiten eintritt, dass der Wert des Drehmomentes trotz der sehr niedrigen und auf konstanter Höhe gehaltenen Drehzahl fortwährend ansteigt, bis — wie schon

Tabelle I

Herkunftsort	Scheinbare* Viskosität bei 25 °C 600 U/min c. P.	δ_o	δ_∞	δ_A	η_o	η_∞	C_1	Ruhezeit Std.
		Dyn cm ²			c. P.			
An Montmorillonit angereicherter Bentonit, Muster 9, Ungarn, warm peptisiert	216	2188,—	1230,4	546	2808,5	79,4	0,0204	117
An Montmorillonit angereicherter Bentonit, Muster 9, Ungarn, kalt peptisiert.....	132	1531,6	557	440,4	9054,3	61,7	0,0442	113
Bentonit, Muster 13, Ungarn	97	512,5	314,5	273	24058,0	59,1	0,4427	117
Bentonit, Muster 3, Ungarn	16,3	266,0	70,9	70	18	7,1	0,0029	40
Bentonit, Muster 14, Ungarn ...	22,3	241,5	68,8	30,9	8372,6	10,6	1,0626	142
Bentonit, Muster 11, USA,	36	236,5	47,3	47,3	10310,3	30,4	0,8301	117
Bentonit, Muster 10, USA warm peptisiert	45	222,7	139,2	123,8	10847,1	24,5	0,3320	117
Bentonit, Muster 10, USA, kalt peptisiert	32,6	163,6	68	68	63,4	14,8	0,0018	69
Bentonit, Muster 7, vom holländi- schen Markt	26,5	216,8	156,9	74,6	1320,3	6,1	0,1660	40
Bentonit, Muster 1, Frankreich .	16	177,4	69,4	50,1	31	7,6	0,0030	45
Bentonit, Muster 12, Italien	21,4	431,7	82,8	74,6	3818,2	12,6	0,4427	113

* Aus dem Drehmoment bei 600 U/min nach der NEWTONschen Gleichung berechnet.

eingangs erwähnt — ein Höchstwert δ_0 der Fließgrenze (Thixistärke) erreicht wird.

Dieser Wert kann dann trotz gleichbleibender Drehzahl oft plötzlich und sturzartig auf weniger als die Hälfte des kurz vorher gemessenen Höchstwertes zurückfallen, wonach dieser Rückgang allmählich gebremst und nach erneutem Anstieg der vorherige Wert erreicht wird. Bei konstant bleibender Drehzahl wiederholt sich dieser Vorgang in gleichen Zeitabständen öfters.

Bei Erhöhung der Schergeschwindigkeit bis etwa 0,05 U/min bleibt diese Erscheinung nahezu unverändert, mit dem Unterschiede, dass sich die Zeitdauer der einzelnen Wellen verkürzt.

Bei einer weiteren Erhöhung der Drehzahl von etwa 0,05 U/min aufwärts ist aber zugleich auch schon die Anfangsamplitude der Schwingung kleiner als bei niedrigeren Drehzahlen, wobei die Schwingung bei mehrfacher Wiederholung bis zur Erreichung eines Ruhezustandes (Gleichgewichtswertes) abklingt, der aber schon niedriger als die vorher gemessenen ist.

Dies ist ein Zeichen, dass die Abbaugeschwindigkeit des Gerüsts bei diesem Geschwindigkeitsgefälle schon grösser ist als die Aufbaugeschwindigkeit der Wiederherstellung durch Thixotropie.

Bei noch grösseren Drehzahlen bis zu etwa 0,5 U/min werden die Amplituden bereits ganz klein und es tritt schnell ein Gleichgewichtswert ein, der schon nahezu mit dem BINGHAMschen Fließwert δ_∞ übereinstimmt, oft aber — besonders zwischen 0,1 und 1,0 U/min — auch noch bedeutend kleiner (δ_A) sein kann.

Die Einzelheiten des Wesens der bei ganz niedrigen Drehzahlen beobachteten Fluktuationen des Drehmomentes können hier nicht weiter erörtert werden, zumal sie noch einer näheren Untersuchung bedürfen. Es sei hier in diesem Zusammenhang nur auf die Arbeiten von PAWLOWSKY [28] und WEYMANN [29] hingewiesen. Als Ursachen für diese Erscheinungen dürfen aber schon jetzt folgende Umstände erwähnt werden:

1. Die sich aus der konstruktiven Eigenart unseres Gerätes bei sehr niedrigen Winkelgeschwindigkeiten ergebenden periodischen Stösse,

2. der dadurch sowie unter Einwirkung sonstiger Nebenumstände bewirkte periodische Abbau und die thixotrope Wiederherstellung des Gerüsts,

3. die Abscherung und Regenerierung der bei so niedrigen Drehzahlen noch nicht abgebauten Grossmolekularkomplexe und der sich daraus ergebende Drehmomentenüberschuss.

Bei ganz geringen Drehzahlen werden nämlich die unter Punkt 1. erwähnten periodischen Stösse dadurch verursacht, dass der vom äusseren — rotierenden — Zylinder zurückgelegte Weg ungefähr von der gleichen Grössenordnung ist wie derjenige des Messzylinders, da die zwischen den beiden Zylindern befindliche und sich vorläufig mit der Geschwindigkeit des äusseren Zylinders bewegende Substanz an der Messzylinderwand anfangs auf keinen Widerstand stösst und so den Zylinder eine Zeit lang mit sich führt, währenddem noch kein merkbares Drehmoment entsteht. Erst wenn der infolge dieser Bewegung ausgehenkte Schwingarm die Fortbewegung des Messzylinders in zunehmenden Ausmass hemmt, tritt zwischen den Geschwindigkeiten der beiden Zylinder ein sich langsam vergrössernder Unterschied — und proportional dazu — auch die allmählich zunehmende Schubspannung auf.

Die allmähliche Zunahme des Ausschlags dauert solange, bis das dem Höchstwert δ_0 entsprechende Drehmoment erreicht bzw. soweit überschritten wird, dass auch der Drehmomentenüberschuss überwunden wird, der der grossen inneren Reibung der noch nicht abgebauten Molekülkomplexe der an der Messzylinderwand bereits zerfliessenden Substanz entspricht.

Sobald der Abbau dieses Gerüsts einsetzt, vermindert sich das Drehmoment in bedeutendem Ausmass, und bei zunehmendem Strukturaufbau kann sogar eine sturzartige Ausschlagverminderung am Schwingarm eintreten.

Nun ist es offensichtlich, dass die Ausschlagverminderung des Schwingarmes zugleich eine der Drehrichtung des rotierenden Zylinders entgegengesetzte und — im Vergleich mit dessen äusserst niedriger Geschwindigkeit (langsamer als der Uhrzeiger!) — verhältnismässig rasche entgegengesetzte Bewegung des Messzylinders hervorruft. Dieser Umstand wirkt sodann ähnlich wie eine Erhöhung der Drehzahl, was wiederum zum weiteren, beschleunigten Abbau der Struktur führt. Dieser sich gegenseitig beschleunigende Erregungsvorgang klingt dann allmählich ab, sobald der Strukturaufbau infolge der Thixotropie schon wieder merkbar wird.

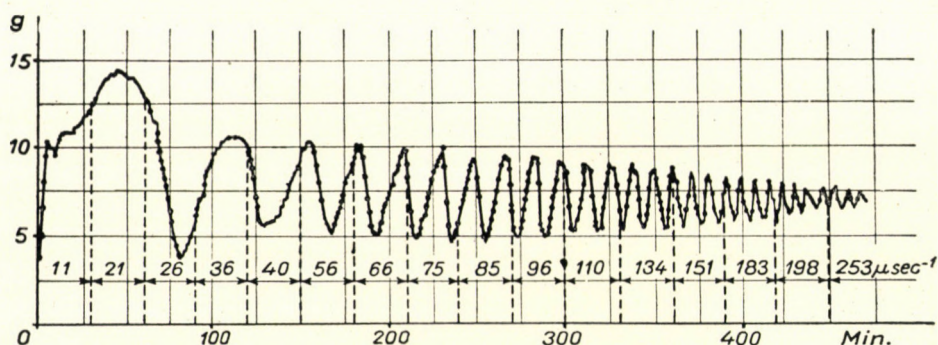


Abb. 8 Als Funktion der Zeit dargestellte Drehmomentenwerte eines an Montmorillonit angereicherten Bentonits, Muster 9, bei stufenweise erhöhten, zwischendurch aber stationär gehaltenen Rotationsgeschwindigkeiten 0,01—0,2 U/Min. bzw. 11—253 μsec^{-1} Geschwindigkeit des äusseren Zylinders. Die minutenweise gemessenen, schwarz punktierten Werte ergeben — den obigen Ausführungen entsprechend — eine annähernd periodische Kurve

Bei niedrigen Drehzahlen kommen also zwischen den koaxialen Zylindern unseres Apparates, trotz zuverlässiger Stabilität der Drehzahl, Kräfte zur Geltung, die so wirken, als ob sich die Drehzahl in regelmässigen Zeitabständen periodisch verändern würde. Man hat es hier offenbar mit einer unerwünscht auftretenden und in entgegengesetzter Richtung wirkenden, jedoch ähnlichen Erscheinung zu tun, wie der unlängst von LINDER [34] beschriebene und in einem ganz speziell entwickelten Messapparat (Schwingviskosimeter) beabsichtigt hervorgerufene und theoretisch behandelte Vorgang. Der Einfluss dieser Erscheinung auf das Drehmoment ist an Hand eines Beispiels in Abb. 8 dargestellt.

Tritt unter Einwirkung dieser periodischen Stösse hauptsächlich bei grösseren Dispersionen und besonders zwischen 0,1—1,0 U/min inzwischen auch Synärese auf, so erfolgt nicht nur eine stets zunehmende Verminderung der Amplitude, sondern es wird auch der Absolutwert des grössten Ausschlags kleiner (δ_A) als der zum BINGHAMschen Elastizitätswert δ_∞ gehörende Gramm-

wert. Gemäss unseren Beobachtungen ist als Ursache für diese Erscheinung ein durch Synärese verursachter Gleiteffekt zu betrachten. Dies geht aus Abb. 9 hervor.

Es wurde versucht, diese Vorgänge auch photographisch zu überprüfen. Die mit *a* bezeichnete Aufnahme (Abb. 10) zeigt in 8facher Vergrösserung einen mit zwei Russstreifen bezeichneten Ausschnitt aus der Oberfläche eines Bentonitgels in einem zu diesem Zwecke mit Glaszylindern versehenen Rotationsviskosimeter, bei der ganz kleinen Drehzahl von 0,0001 U/min. Aufnahme *b* zeigt den gleichen Ausschnitt bei 0,25 U/min und Aufnahme *c* dasselbe nach mehreren Umdrehungen bei 2 U/min.

Infolge Oberflächenreflexionen ist auf den Aufnahmen die elastische Deformation des Bentonitgels, weiterhin die durch einen am inneren Zylinder

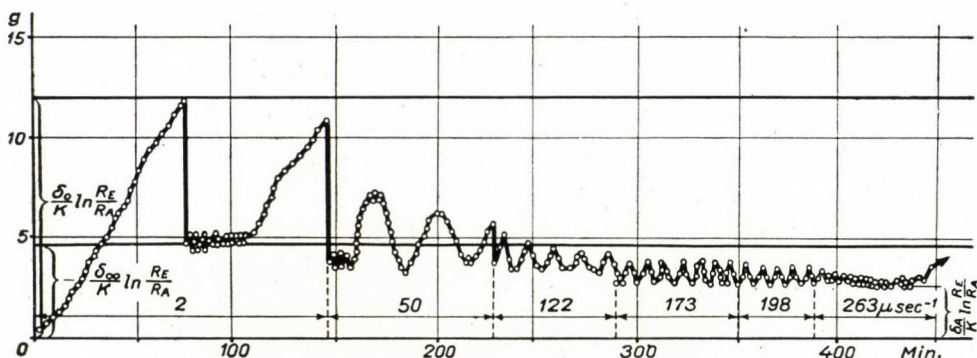


Abb. 9 Drehmomentenwerte des Bentonits Muster 14, bei Geschwindigkeiten des äusseren Zylinders von 2–250 $\mu \text{ sec}^{-1}$. Die Drehmomentwerte fallen bei gewissen Drehzahlen unterhalb des Elastizitätsgrenzwertes

einsetzenden Fließvorgang verursachte Verschiebung der beiden Russstreifen ersichtlich.

Eine weitere Zunahme der Drehzahl erhöht schliesslich die Schubspannung so weit, dass sie gross genug ist, um die ganze zu messende Bentonitgelmasse zu verflüssigen und somit die Fluktuationen im Drehmomentenwert sowie auch die Synärese abzustellen.

Hier beginnt dann der zweite Abschnitt der Fließkurve (gD). Die »differenziellen Viskositätswerte« (Widerstandsgrösse) sind hier noch immer gross, die zunehmende Drehzahl bewirkt also eine weitere, und zwar recht bedeutende Erhöhung der Drehmomentenwerte. Bei weiterer Erhöhung der Schergeschwindigkeit und infolgedessen weiterem Abbau der Solvathüllen setzt als Folgeerscheinung eine Abnahme der inneren Reibung ein, die oft derart gross ist, dass das resultierende Drehmoment trotz stetig zunehmender Winkelgeschwindigkeit sturzartig abnimmt.

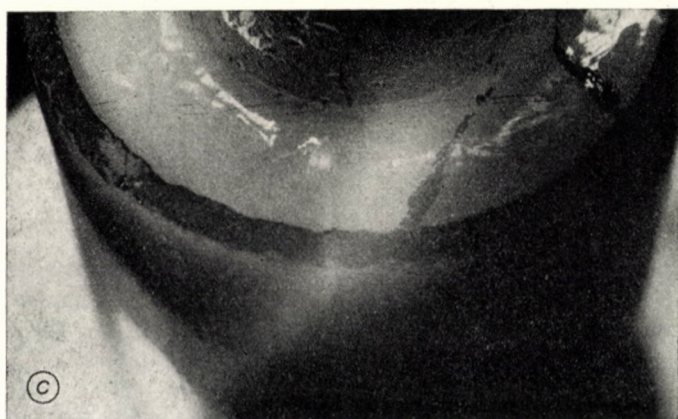
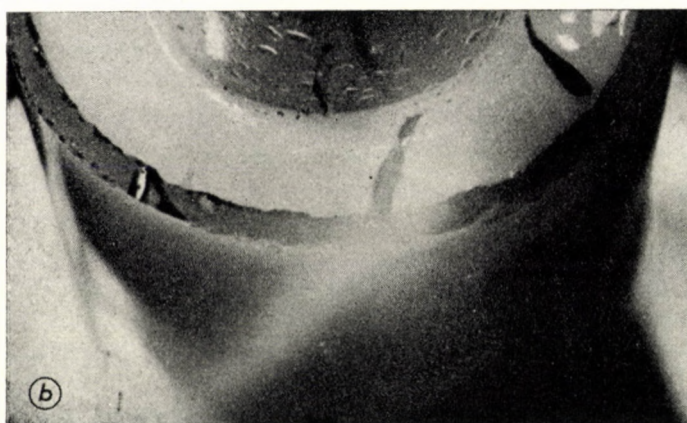
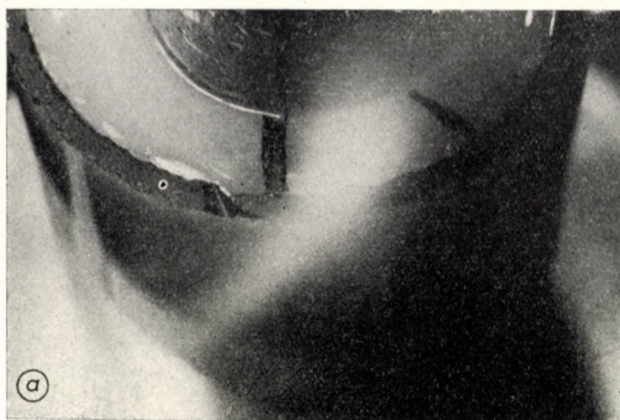


Abb. 10

Dieser Vorgang dauert solange, bis die Struktur und die Solvathüllen zum grössten Teil abgebaut sind und sich daher die damit eng verbundene »Viskositäts«-Abnahme (Widerstandsgrösse) allmählich verlangsamt. In diesem Bereiche liegt auch der schon vorher erwähnte Wendepunkt der Kurve (gD), nach dessen Erreichen die Verminderung der Drehmomentenwerte langsamer wird, bis diese einen Minimalwert erreichen und von dort an allmählich wieder anzu- steigen beginnen.

Schliesslich wird der Strukturabbau beendet, die »Viskosität« nimmt dann endlich einen konstanten Wert an und nun tritt die Fliesskurve in den dritten Abschnitt, wo sich die Bentonitdispersion nunmehr als vollständig BINGHAM-scher Körper benimmt.

Hier soll erwähnt werden, dass der sich im zweiten Abschnitt der Fliesskurve (gD) um den Wendepunkt ergebende, steile bzw. mitunter flache Ablauf der Kurve jeweils davon abhängt, inwieweit der Strukturabbau von der Drehzahl beeinflusst wird. Selbstverständlich ist auch die Lage des Wendepunktes davon abhängig.

Bei allen unseren Versuchen wurde beobachtet, dass ein bei niedriger Drehzahl auftretender Wendepunkt — der auch als ein Zeichen für einen sehr rasch vor sich gehenden Strukturabbau gilt — auf eine vollkommene Peptisation der Substanz hinweist, während eine Inflexion bei hoher Drehzahl auf eine unvollkommene Peptisation der Substanz hindeutet.

Demnach hat es den Anschein, als ob der Winkelgeschwindigkeitswert beim Wendepunkt Ω' zugleich als ein Massstab des Peptisationsgrades gelten dürfte. Obwohl diese Annahme begründet erscheint, bedarf sie noch einer Bestätigung durch weitere Versuche und umfassendere Beweise.*

Schlussfolgerungen

Rheologische Messungen wurden an Bentonit- bzw. Montmorillonit-dispersionen verschiedener Herkunft, jedoch identischer (6%) Konzentration in einem eigens dafür entwickelten Rotationsviskosimeter durchgeführt, der es ermöglichte, Schubspannungen als Funktion der Schergeschwindigkeit innerhalb weiter Schergeschwindigkeitsgrenzen (zwischen 0,0001 und 800 U/min) mit der gleichen Füllung, in einem einzigen Versuchsvorgang zu messen und inzwischen auch den Einfluss der Zeitdauer und der Thixotropie zu prüfen.

Es konnte hierbei festgestellt werden, dass die Funktion »Schergeschwindigkeit/Drehmoment« in drei durchaus verschiedene — selbständigen Gesetzen unterworfenen — Abschnitte unterteilt werden kann:

Im ersten Abschnitt — bei Schergeschwindigkeiten von ungefähr 0,0001 bis 0,1 U/min — besteht noch die den gegebenen Umständen entsprechende, sich langsam mehr oder weniger abbauende Gerüststruktur der Dispersionen,

*Die bereits vorher erwähnte Arbeit von WELIKOWSKY [22] über den Fliessvorgang konsistenter Fette enthält Ergebnisse, die in vieler Hinsicht unseren Erfahrungen über Bentonitdispersionen sehr ähnlich sind. Ganz ähnliche Beobachtungen beschreiben auch ENGELHARDT und NIENHAGEN [2].

die noch als Festkörper wirkt. Der Grund für die in diesem Abschnitte beobachteten Fluktuationen der Drehmomentenwerte soll noch näher untersucht werden; sie sind aber voraussichtlich auf die durch die Konstruktionseigenart unseres Viskosimeters verursachten Schwankungen der Schubspannung sowie auf die gegensätzlich wirkenden thixotropen Verfestigungen zurückzuführen, ferner mit der Synärese und dem dadurch bewirkten Gleiten zu erklären.

Im zweiten, in der Regel zwischen Schergeschwindigkeiten von 0,1 bis 50 U/min liegenden Abschnitt erreicht die Schubspannung im ganzen Querschnitt der Dispersionsmasseschicht bereits den Grenzwert der Fließfestigkeit, wobei die Dispersion allmählich aus der festen in die flüssige Phase übertritt.

Im dritten Abschnitt benimmt sich die Bentonitdispersion vollständig als BINGHAMscher Körper.

Diese Erscheinungen, und zwar der anfängliche Abbau der festen Phase sowie das Auftreten und die allmähliche Zunahme der flüssigen Phase wurden auch photographisch überprüft.

Zur Wiedergabe der Fließkurven [Funktion (gD)] und zur Ermittlung der Stoffkonstanten wurde durch Kombination von zwei bekannten Beziehungen eine Gleichung entwickelt, die sich zur Kennzeichnung der beiden wichtigsten Abschnitte (II und III) der Funktion (gD) für praktische Ansprüche in jeder Hinsicht als zufriedenstellend erwiesen hat.

Diese Beziehung wurde bei verschiedenen Bentonitsorten in- und ausländischer Herkunft untersucht und der dabei jeweils ermittelte Wert mit den Ergebnissen von Messreihen verglichen, wobei sich für praktische Zwecke hinreichend genau übereinstimmende Werte ergaben.

Dadurch wird die Beschreibung des wirklichen mechanischen Verhaltens, sowie die Bestimmung- und Bewertungsmöglichkeit der Bentonitdispersionen auf vier apparatunabhängige Stoff- bzw. reelle physikalische Konstanten zurückgeführt, von denen η_0 , η_∞ sowie δ_∞ in Kenntnis von drei, zu beliebigen Drehzahlen der Funktion (gD) gehörigen g -Werten berechnet werden können, sofern der Wendepunkt der Kurve (gD) genügend ausgeprägt ist und somit auch die vierte Konstante c_1 graphisch bestimmt werden kann. Die fünfte ist die Apparatkonstante.

Die Werte der vier Konstanten, die die Gleichung der 6%igen Montmorillonit- und Bentonitdispersionen bestimmen und auch als deren Kennzahlen dienen können, weisen sehr grosse, oft sogar grössenordnungsmässige Unterschiede auf.

SCHRIFTTUM

1. E. PIT und QUARRY: **127**, 1954.
2. V. ENGELHARDT: Kolloid Z. **131**, (1953) 107.
3. EVANS und REID: Trans. Min. Geol. Inst. India 32. 1 (1936).

4. TH. WHITE: Ber. D. K. G., 9. 302 (1952).
5. K. H. GRODDE: Erdöl u. Kohle, 7. 380, 8. 457, 10. 608 (1953).
6. E. E. Шегалова, П. X. Ребиндер: Колл. Журн. №. 10 (1953) 223 *Н. Н. Серб—Сербииа, П. X. Ребиндер*, Колл. Журн. 9. 391 (1947)
7. К. Ф. Жигач, Д. Е. Злотник, ДАН 72. 527 (1950)
8. Г. П. Виноградов, В. П. Павлов, К. И. Климов, М. М. Гуздеф, ДАН 84. 2. 30. 390 (1952).
8. G. P. WINOGRADOW—W. P. PAWLOW—K. J. KLIMOW—M. M. GOOZDEFF: D. A. N. 84. 2. 30, 390 (1952) UdSR.
9. F. HÖPPLER: Kolloid Z. 128. 2. 87 (1952).
10. P. J. WILLIAMS: J. Appl. Chem. London, 3. 120 (1953).
11. A. A. Трапезников, В. А. Федотова, ДАН, XC. V. 3. (1954)
12. K. H. SWEENEY—R. D. GECKLER: J. Appl. Physics 9. 1136 (1954).
13. J. T. BERGEN—W. PATTERSON: J. Appl. Physics, 24. 712 (1953).
14. Б. С. Филатов: Колл. Журн. 2. 16. (1954)
15. U. HOFMANN: Kolloid Z., 125. 86 (1952).
16. B. MARSCHALKÓ—J. BARNA: Zeitschr. Ung. Ing. u. Arch. Ver. 5/6 (1927), 5/6 (1929).
B. MARSCHALKÓ—J. BARNA: Congr. internat. pour l'essai d. matériaux, Amsterdam, 1927, S. 415.
J. CSÁGOLY: Bull. bimestriel Assn. internat. permanente d. Congr. de la route, Paris, No. 101, 315—359 (1935).
J. BARNA: Rotationsviskosimeter nach B. Marschalkó zur Untersuchung zähflüssiger und strukturviskoser Substanzen. Vortr. 17. Nov. 1952 im Rahmen der unter dem Patronat der Ung. Akademie d. Wissensch. veranstalteten Instrumentenausstellung.
17. J. BARNA: Acta Technica Hung. 8 (1954) 361.
18. F. SCHULTZ-GRUNOW—H. WEYMANN: Kolloid Z. 131. 2 (1953).
19. K. H. GRODDE: Erdöl u. Kohle, 6. Nr. 8, S. 457.
20. K. H. GRODDE: Kolloid Z. 139, S. 92—93.
21. M. REINER—R. RIWLIN: Kolloid Z. 43. 1 (1927), 43. 72 (1927).
22. Д. С. Великовский: Колл. Журн. 6. 406 (1954)
23. J. VÁNDOR: Bevezetés a rheológiába (Manuskri.). (1954).
24. W. OSTWALD: u. a. Kolloid Z. 67, 99. 157, 248 (1925); 41, 66. 112 (1927).
25. M. REINER: Kolloid Z. 50, 199 (1930), 54, 175 (1931).
26. A. DE WAELE—G. L. LEWIS: Kolloid Z. 133, 86 (1953).
27. F. SCHULTZ-GRUNOW: Kolloid Z. 138, 167 (1954).
28. J. PAWLOWSKY: Kolloid Z. 138, 20 (1954).
29. H. WEYMANN: Kolloid Z. 138, 41 (1954).
30. W. TILLMANN: Kolloid Z. 131, 66 (1953).
31. H. B. Михайлов, П. А. Ребиндер, Колл. Журн. 17. 2. 107—119. (1955)
32. A. SZEGVÁRI: Z. Phys. Chem. 108. 175 (1924).
33. Siehe unter [21].
34. R. LINDER: Kolloid Z. 143, 144 (1955).

ZUSAMMENFASSUNG

Die Verfasser studierten die Strömungsverhältnisse der wässrigen Dispersionen von Bentoniten bzw. Montmorilloniten gleicher Konzentration; die Untersuchungen wurden mit einem selbstkonstruierten Viskosimeter durchgeführt, wobei die Strömungsverhältnisse innerhalb eines einzigen Prüfungsvorganges zwischen weiten Schergeschwindigkeitsgrenzen in Abhängigkeit von den Schubspannungen und deren Zeitdauer untersucht wurden.

Es wurde festgestellt, dass die Schubmomentenfunktion (gD) in drei grundlegend verschiedene Bereiche geteilt werden kann.

Zur Charakterisierung der Funktion (gD) wird eine Gleichung untersucht und empfohlen, die durch Kombination zweier bekannter mathematischer Zusammenhänge entwickelt und an mehreren Bentonitsorten heimischer und ausländischer Herkunft geprüft wurde. Der Vergleich der Werte dieser Gleichung mit den Messwerten zeigt, dass sie den praktischen Ansprüchen in jeder Hinsicht genügen.

Dadurch ist eine Möglichkeit geschaffen, dass wirkliche mechanische bzw. rheologische Verhalten der Bentonitdispersionen auf reelle und vom Messapparat unabhängige physikalische Konstanten zurückzuführen und eindeutig zu bestimmen.

ХАРАКТЕРИСТИКА РЕОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ВОДНЫХ ДИСПЕРСИЙ БЕНТОНИТА

Я. БАРНА и Б. МАРШАЛЬКО

РЕЗЮМЕ

Изучались динамические условия процесса водных дисперсий идентичных концентраций бентонита и, соответственно, монтмориллонита при помощи вискозиметра собственной конструкции в очень широких пределах скорости сдвига в функции напряжения сдвига и его времени — одним единственным процессом исследования.

Установлено, что функция момента скорости сдвига (gD) может быть разбита на три друг от друга отличающиеся по существу отрезка.

Для характеристики всех трех отрезков функций gD комбинацией двух известных математических зависимостей полученное уравнение было применено для ряда сортов бентонита отечественного и заграничного происхождения, и полученные при этом величины были сравнены с данными серий измерений, в результате чего было установлено, что они удовлетворяют практическим требованиям во всех отношениях.

CHARACTERIZATION OF THE RHEOLOGICAL PROPERTIES OF AQUEOUS BENTONITE DISPERSIONS

J. BARNA and B. MARSCHALKÓ

SUMMARY

The authors have studied the flow characteristics of aqueous bentonite and montmorillonite dispersions of equal concentration, as a function of shearing stress and its duration, using a viscosimeter of their own design. The examinations were carried out in a single process, within very large intervals of shearing speed.

It has been established that the shearing speed — moment function (gD) can be divided into three sections, which are essentially different from each other.

For characterizing all the three parts of the gD function, they have applied to several Hungarian and foreign bentonites an equation obtained by combination of two known mathematical relations. Comparing the computed values with the results of their series of measurements, they have found that the calculated values are fully satisfactory for practical purposes.

CARACTÉRISTIQUES DES CONDITIONS RHÉOLOGIQUES DES DISPERSIONS AQUEUSES DE BENTONITE

J. BARNA et B. MARSCHALKÓ

RÉSUMÉ

Les auteurs ont étudié les conditions d'écoulement de dispersions aqueuses de bentonite ou de montmorillonite de concentrations égales, dans des larges intervalles de vitesse. Les essais ont été faits avec un viscosimètre étudié par les auteurs, établissant pendant un seul essai ces conditions en fonction de la tension de cisaillement et de sa durée. Il a été constaté que la fonction reliant la vitesse de cisaillement au moment (gD), peut être divisée en trois sections essentiellement différentes l'une de l'autre.

Pour caractériser les trois sections de la fonction gD , les auteurs ont appliqué une nouvelle équation, obtenue par combinaison de trois relations mathématiques connues, à plusieurs bentonites de provenance hongroise et étrangère. Les valeurs calculées avec la formule ont été comparées avec les résultats des séries de mesures et il a été trouvé que ces valeurs satisfont à tous les points de vue aux exigences de la pratique.

ON THE CRYSTALLIZATION OF GRAPHITE IN CAST IRONS*

I. KARSAY
CAND. TECHN. SC.

HUNGARIAN RESEARCH INSTITUTE OF THE IRON AND STEEL INDUSTRY

[Manuscript received 27th July, 1955]

1. Introduction

The problem of the crystallization of graphite in grey cast irons is a very much discussed one, and in the past 50 years scientific papers, related with this theme, have appeared in an incessantly increasing number. There is perhaps no other question in the field of metallography, where so many contradictory views are still conflicting each other. It is, however, hardly conceivable to have a troublefree commercial production or to be able to control securely the various factors, which affect the same, without the clearing up of the theoretical aspects of the crystallization of graphite. Just this shows the practical significance of the outlined problem.

Great efforts have already been produced to give a comprehensive explanation, made during the experiments or in the practice and related with this question. The various explanations are, however, generally in contradiction, not only to each other, but to some observed phenomena too. There are also some observations, for instance some of the author's as well, for which there lacks any explanation.

It is therefore principally just and scientifically permissible to evolve a new hypothesis. This is set down in the last section of this paper and is based partly on observations, made during the experiments conducted by the author, but mostly on theoretical and practical experiences gathered in the past. The said hypothesis explains principally all the observations made by any investigator. It is nevertheless not absolutely — especially in all details — accurate.

2. The review of the literature

As already mentioned in the Introduction, several explanations and by numerous authors were developed for the crystallization of graphite in cast irons. Even a short summary of their work would make this paper out of proportions, and the author wishes to undertake only a critical review of 3 main problems, which are especially important in view of the following interpretations. Even this review could be made only a limited one.

* Abridged version of the author's thesis, submitted in partial fulfilment of the requirements for the degree of Candidate of Technical Sciences at the Hungarian Academy of Sciences.

2.1 The problem of the shape of the graphite flakes

There are very few notes, dealing with this question. The greatest part of the authors take it for granted that the solidification of the molten cast iron leads to flake-graphite.

Essentially there exists only a single explanation for the formation of graphite flakes. According to this, the crystallization has preferred directions in which to propagate at very high rates, and this is made possible by the structure of the crystal lattice of the graphite — this difference in the crystallization rate leads then to the flaky shape.

This explanation is however far from being satisfactory. It is nevertheless a fact, that the formation of a new unit cell in the direction of the axis of the lattice makes necessary the arrangement of 6 carbon-atoms, whereas for the formation of a new unit cell in the direction of the basal plane we need to have only 4, 3 or 2 and in some cases only a single carbon-atom. The probability for a growth in the direction of the basal plane is therefore 6—1 1/2 times as great as in the direction perpendicular to that, and in reality is still much greater, because 2 or 3 atoms may be arranged much easier than 6.

We come to the same conclusion, if we are examining the question of the binding forces. The consecutive basal planes are bound only by very weak forces to each other. The formation of an entirely new basal plane makes therefore necessary the corresponding positioning and grouping of much more atoms, than the further growth of an already existing basal plane. In the last case we have a probability of about 50% for a "superficial equilibrium" of the new atom. (On two of the neighbouring corners there are already located carbon atoms.) Even if it is not so, each atom arriving in the basal plane is bound by covalent forces, which are in any case much greater, than the bonding forces perpendicular to that plane, the so-called VAN DER WAALS forces[1].

It is therefore quite obvious, that the dimensions of the basal planes of the graphite particles are always greater than those perpendicular to that plane. This is, however, far from giving a satisfactory explanation for the formation of flake-graphite.

Should the ratio of the various dimensions really be governed by the laws of statistics, then there lacks an explanation for the great fluctuation of the same ratio. The ratio of the length to the thickness of the graphite flakes varies usually between 3 : 1 and 200 : 1. It is very curious that the greatest flakes are generally the thinnest ones. There also lacks any explanation as to why there are encountered so few graphite flakes with polygonal circumference; if the formation of the same would really be governed by the laws of crystallization, one should expect to find a hexagonal shape of the graphite.

The above explanation is especially insufficient in view of the fact, that the graphite flake is not a monocrystal, but a grouping of crystallites.

PIWOWARSKY and WITTMOSER [2] made X-ray examinations and have shown the linear dimensions of the crystallites of the graphite of cast irons being of the order of 10^{-7} cm. Supposing the shape of the crystallites to be cubical, a graphite plate with a diameter of 100μ and a thickness of 5μ would be made up by a number N of crystallites

$$N = \frac{\frac{\pi}{4}(10^{-2})^2 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{(10^{-7})^3} \cong 3,9 \cdot 10^{13}.$$

In reality, it is very probable that the crystallites are also lamellar and N is therefore more probably somewhat less.

Accepting as a fact — which is hardly disputable — that the hypereutectic graphite crystallizes directly from the melt, it is quite unintelligible, why the crystal nuclei are not randomly distributed in the melt, but are highly concentrated in relatively small — and periodically repeated — volumes and are later grouped into homogeneous graphite flakes. It is still stranger, why these plates, growing out from a great mass of crystal nuclei, are perfectly parallel to each other. It is notably a fact, that the crystallites of a graphite plate are in an arranged state because their (0001) indexed planes are always parallel to the basal plane of the graphite plate. The proof of the same can be attained very easily by magnetic measurements.

The enumerated facts cannot be omitted when considering the problem of the shape of the graphite flake.

2.2 The problem of the spheroidal shape

In contrary to the aforementioned problem, the literature related with the "spheroidizing" problem is very abundant. The most common explanation relates the spheroidal shape with some "unkind" nuclei. A hexagonal (kind or unkind) nucleus grows into a flake, whereas a cubic nucleus leads to spheroidal graphite [3]. Although there remained but a few adherents to this view, it is worth while to deal shortly with this question.

Modern metallography highly appreciates the crystal nuclei or — what is almost the same — some “approximately arranged atomic groupings” within the melt. The dimensions of the primary grains depend mostly on the amount of the said nuclei. It is also conceivable that the lack of these nuclei is suppressing the crystallization of some phases. (Nuclear hypothesis of the Fe-C diagram-twins.) According to our knowledge, however, we cannot give a satisfactory explanation as to how some nuclei, which represent the outset of the crystallization, could be made responsible for the alteration of the shape of a grain in such a way as it happens in the case of spheroidal graphite. The nuclei may indicate as to where the first crystallites are likely to be formed in the melt, and the increasing amount of nuclei may lead to the decrease of the dimensions of the grain, but they can hardly be made responsible for the alteration of the flaky form into a spheroidal one. It is therefore quite out of place to speak of some nuclei which “favour the formation of spheroidal graphite”.

A very interesting opinion is that of GILLEMOT [4], according to which ferrosilicon, used for secondary inoculation, results in some parts of the melt being spheroidal, saturated with silicon and of hypereutectic concentration, in the centre of which places the graphite may segregate in the form of small spheres. Making some calculations on the alteration of the concentration-gradient as a function of time, we find a surprising conformity between the dimensions of these small spheres of hypereutectic concentration and those of the graphite spheres. There is no doubt, however, that spheroidal graphite can be made to crystallize out from a pseudo-homogeneous material [5], without any inoculation with FeSi and this fact could hardly be explained with the help of the said hypothesis.

Graphite formed indirectly has always the shape of a sphere or of a spheroid, according to the opinion of GIRSHOVITCH [6]. The form of the graphite is controlled, according to him, in this case not by the crystallization, but by the conditions for the diffusion of carbon and a diffusion around a nucleus is always spherically symmetrical. The weak point of this reasoning lies in the fact, that tempering at high temperatures may lead to flake graphite too [2, 7]. If we accept, as Girshovitch claims, that the alloy is at this high temperature in a quasi-liquid state, then it must be much more liquid in the temperature range of eutectic solidification or at a temperature just below the eutectic temperature, even after a treatment with Mg.

There is another opinion, according to which the interdendritic residual melt gets highly saturated in carbon and this should be made responsible for the formation of spheroidal graphite [9]. This view neglects, however, to answer just the most important question as to why should this be responsible for the same.

A very imposing and now favoured explanation is based on the great surface tension of the melt which should force the graphite to take the form of a sphere. The formation of spheroidal graphite was compared by THALL and CHALMERS [10] with the modification of the Al-Si alloys by sodium. It is out of question that the treatment of the iron melt with Mg causes an increase of about 50% in the surface tension of the same [11]. But it is also out of question, that spheroidal and flake graphite may be produced within the same material and at the same time. Variation of the cooling rate may result in a part of the sample having graphite in the form of spheroids, while the other part of the same sample may have graphite in the form of flakes (see Fig. 2). The surface tension of a melt is everywhere the same, because it is quite independent of the cooling rate. It may be concluded therefore that the surface tension may exercise only a secondary effect on the shape of the graphite.

Mg forms an adsorbing envelope around the graphite, according to BUTTNER, TAYLOR and WULFF [12], and this prevents the obedience to the laws of crystallization. On the other hand, CORRAL [13] explains the formation of the spheres with the cleaning action of Mg on the boundary of the different phases. Neither idea is based on experimental observations, but on close examination we may find that both attribute the spheroidal shape of the graphite to the increase of surface energy. This explanation is, however, as already discussed, not a sufficient one.

More and more investigators are imagining the crystallization of the graphite as a process, which takes place from a supersaturated solid solution. The investigations of WITTMOSER [14] gave a real proof of the fact, that the spheroidal graphite is formed always in the primary dendrites of austenite. This fact gives, however, no explanation as to why it takes the form of spheres.

The most up-to-date conception of crystallization of the graphite out of a supersaturated solid solution is the hypothesis of BUNIN. His fundamental idea [15] is that the formation of graphite first of all requires some vacant place. Crystallization of the graphite can take place only in those places, which are made free for it by the iron atoms. Thus — according to Bunin — the controlling factor of the crystallization of graphite is the self-diffusion of the iron atoms.

This fundamental idea was further developed by two new papers. The first of them is that of LIGHTMAN [16]. He proves by his experiments that the decomposition of cementite is a very rapid process, if porous products of powder metallurgy are being annealed. This “ultra-

rapid" decomposition of the cementite was explained by Lichtman on the basis of the hypothesis of Bunin. Lichtman supposes that the graphite finds already some ready made cavities in this porous material and thus there is no need for the self-diffusion of the iron-atoms. That is the reason why this process is so rapid.

Last of all a new paper of BUNIN [17] gives a very interesting proof for the pronounced effect the cavities exert on the crystallization of graphite. He succeeded to produce white iron consisting entirely of ledeburite and always being porous, though not to a great extent. This iron he annealed for a long time at a high temperature in order to secure the decomposition of the cementite. He observed already after the first 24 hours, that the nascent carbon atoms were penetrating into the cavities and formed there graphite. These cavities became filled up entirely by graphite. The continuation of these experiments is especially interesting. He continued the annealing after the filling up of the cavities, at the same temperature (1100 C°) and for 72 more hours and found no further graphitisation. This illustrates that after the filling up of the cavities there is no further decomposition of cementite; the same is very stable.

Not even Bunin's reasoning is quite convincing from the viewpoint of the formation of the spheroidal graphite. He brings the support of the sphere-forming action of the formation of cavities by self-diffusion in one of his papers [18], making the observation that the shape of a section of a spheroidal graphite is always a polygonal one. (Should the cavities be formed by self-diffusion, the surface of the same would be made up by planes. This follows from the crystal structure.) In reality the section is generally a circular one, even when examined at great magnifications, and there are, if any, only a few corners in a section of a spheroidal graphite. This can be proved by photomicrographs, taken from the inner structure of a spheroidal graphite (see Fig. 17).

When summing up these explanations of the crystallization of spheroidal graphite, we come to the same conclusion as in the case of flake graphite. There is no univocal explanation of the laws, governing the crystallization and formation of spheroidal graphite, which should comprise all the observed facts without any contradiction.

2.3 The effect of the cooling rate

One of the first observations related with the metallography of cast irons was the fact that the cooling rate exerts a very great effect on crystallization.

Castings with very different properties can be made from the same material, only by varying the cooling rate. It was therefore only a natural stride to clear up quantitatively the effect of the cooling rate. This led to the different "diagrams" of cast irons, which take into consideration the effect of cooling rate.

The most commonly used diagram of this kind was that of F. GREINER and TH. KLINGENSTEIN, determined in 1926. According to this, a material with a given chemical composition has a structure of ferrite + graphite — when produced by slow cooling —, later pearlite + graphite, then mottled and at last — when produced by rapid cooling — fully ledeburitic.

These diagrams have not been able to reproduce truly all the different kinds of structures, which are made possible alone by the variation of the cooling rate.

The inverse chill of the castings was for instance a well-known phenomenon, even at the time of World War I. This phenomenon could not be explained by any of these diagrams.

The supposition, that the effect of the cooling rate cannot be described in such an easy way, as in the case of these diagrams, was supported already in 1929, by an observation made by HEYKE and MAY [19]. They observed that at the point of the wedge-shaped samples, cast for the determination of the effect of the cooling rate there was in some cases some ferrite. This fact could hardly be explained by any conception based on the effect of the cooling rate and was called therefore "ferrite Type I" as against "ferrite Type II", which was formed on slow cooling of the sample. This distinction was not a lucky one, because it is out of question that they are both the same solid solution of iron and carbon. The difference lies only in the circumstances of their formation.

In the next two decades following this observation there were discovered many phenomena which are further interfering with the — once very simple — conception, related with the effect of the cooling rate.

Meanwhile it was established scientifically, that alloys produced with the same chemical composition but melted in different plants show different behaviour. The difference appears mainly in the inclination to become white. Different measurements were given in proof that iron, melted in reverberatory, electric or crucible furnaces shows a greater inclination to become white, than cupola-melted iron.

From this view even the quality of the burden is not indifferent — even in the case when the materials used are of the same composition. These "inherent" properties are too often over-

lapping the effect of the cooling rate and great caution is needed when using the diagrams of Greiner and Klingenstein.

Among other disturbing factors should be mentioned the effect of superheating and of modification and the very important differences in the shape of the graphite.

There are made every year some attempts to improve these diagrams. The most up-to-date ones [21, 22, 23] take into consideration many more factors than the diagram of GREINER and KLINGENSTEIN. They are nevertheless only of informatory character, such as is the diagram of Greiner and Klingenstein. For practical uses it is to be preferred to use the latter one, because it is handier and therefore more valuable.

3. The author's own experiments

3.1 The production of nodular cast iron without the application of any treatment

The possibility of the formation of spheroidal graphite in cast irons is a long-known fact. At first it was observed very seldom and only at the end of the last thirties succeeded ADEY [23] to produce intentionally nodular cast

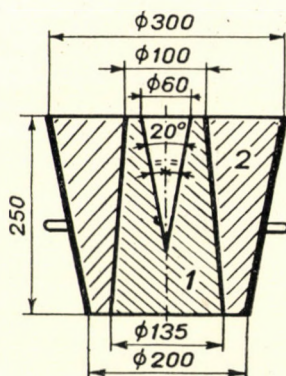


Fig. 1. Mould used for the casting of conical samples. 1 : Dried sand mould. 2 : Dry sand No. 6

iron. His method needed no treatment with either Mg or the like. (The action of these additions and their effect on the shape of the graphite was discovered only about a decade later.)

For this purpose we need to have — according to the patent application of Adey — an alloy of eutectic or hypereutectic composition, free from slag-inclusions and alloyed with silicon in an amount of at least 1%. He considered it as indispensable to have the metal strongly superheated and to contain no more than 0,008% sulphur. Even on fulfilment of all these conditions he succeeded to produce castings with spheroidal graphite only in that case, when the cooling was rapid.

The author carried out experiments in order to shed light on the problem, whether all the criteria — as laid down by Adey — must be taken into consideration.

The samples were melted in a furnace of the Tammann system, composed of the following materials : soft iron powder (0,4% Mn, 0,071% S, 0,012% P, 0,16% Cu and no Ni, Cr or V), flake graphite (with ash-content 4,5%) and ferro-silicon (94,8% Si). The crucible was made by turning on the lathe electrode graphite. The temperature was measured by a Pt-PtRh thermocouple which

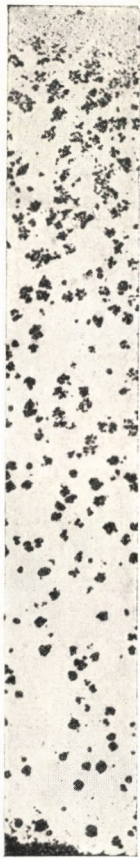


Fig. 2. The variation of the shape of the graphite with increasing cooling rate (the rate increases from top to bottom). Unetched sample. Magn. $\times 40$.

contacted the bottom of the crucible and was controlled by an optical pyrometer.

The alloys with different chemical compositions were melted at a temperature of $1300 \pm 20^\circ \text{C}$ and after a period of holding them at the same temperature, were cast into dry conical sand moulds (Fig. 1). The composition of the moulding sand was the following : 89% washed and dressed, filtered sand, with fineness No. 6 (system DIN) ; 6% refractory lime ; 4% water ; 1% pectine.

The point of the conical samples — which cooled down at the highest rate — generally had a structure with spheroidal graphite (Fig. 2). The chemical composition of the cast samples varied between the following limits: 3,13 to 4,12% C, 0,41 to 4,26% Si, 0,30 to 0,32% Mn, 0,23 to 0,30% P, 0,06 to 0,07% S.

Conclusions :

1. It is possible to produce an untreated and yet nodular cast iron even in the case when the material did not surpass in the molten state the temperature limit of 1300 °C.

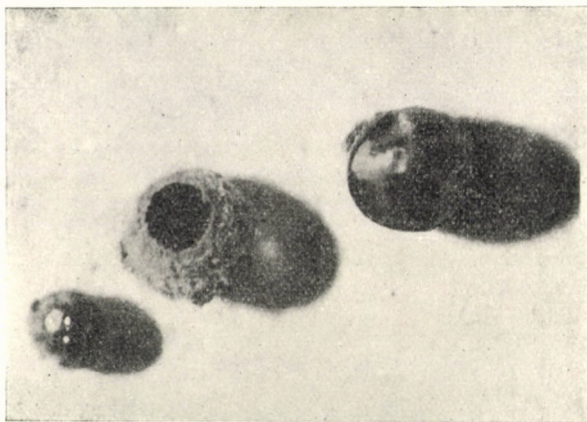


Fig. 3. Graphite in the form of spherical shells, crystallized into gas-cavities. Extracted from castings by solution in hydrochloric acid. Magn. $\times 20$.

2. It is possible to produce an untreated and yet nodular cast iron even in the case when its sulphur-content is higher than 0,008% — the limit, set by Adey.

3. It is not necessary to have a silicon-content in excess of 1%, in order to produce spheroidal graphite.

4. The cooling rate outweighs all else factors in view of the appearance of spheroidal graphite.

3.2 The production of cast iron with graphite of spherical shell form

When examining the fractures of the samples, the author found, after thorough preparation of the samples of the Mg-treated cast irons, some graphite in the form of spherical shells, especially at the edge of the samples (Fig. 3).

The author succeeded later to produce such graphite in the shape of spherical shells by two other methods :

a) Cast iron, heated slightly above its liquidus temperature was put suddenly under high vacuum; on this occasion some particles were thrown out from the surface of the melt, at very high speed (at least 1 m/sec) (Fig. 4).

When dissolving these particles in hydrochloric acid, the residue contained graphite in the form of spherical shells (Fig. 5).

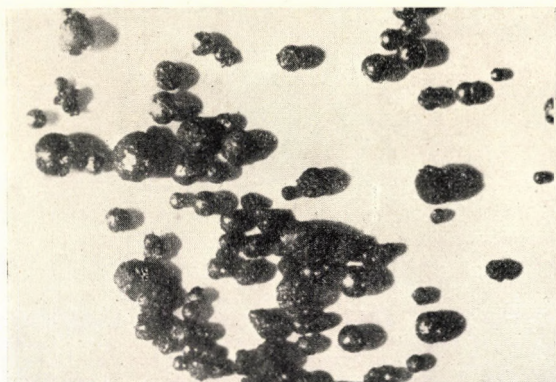


Fig. 4. Globules thrown out of the melt on the action of vacuum. Magn. $\times 7$.

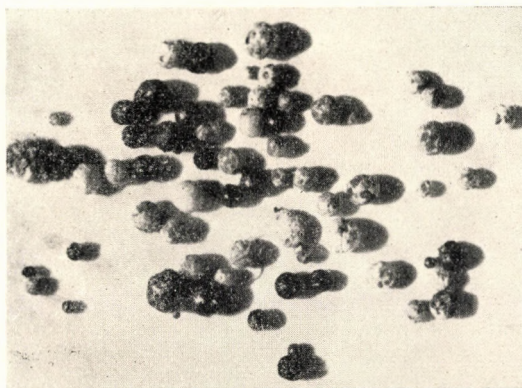


Fig. 5. Spherical shells of graphite inside the globules of iron shown in Fig. 4. (The shells are partly covered by a skeleton of silica, formed during dissolution in hydrochloric acid.) Magn. $\times 7$.

The specific gravity of these small particles — with diameters less than 0,5—1,0 mm — was about 1,013 g/ccm. This is considerably less than the specific gravity of graphite and this gives another proof for the particles being hollow.

b) Molten hypereutectic cast iron was held under vacuum for a considerable time (about 10 hours) in a graphite crucible and then made to solidify in the same. The surface of the samples contains many graphite particles in the form of spherical shells (Fig. 6).

Conclusions :

1. *The graphite crystallized on the inside of gas-cavities ; in the first two cases this is definitely so and in the third case most probably.*
2. *The graphite may crystallize on the inside of gas-cavities.*



Fig. 6. Spherical shells of graphite at the surface of a cast bar of hypereutectic composition and molten in vacuum

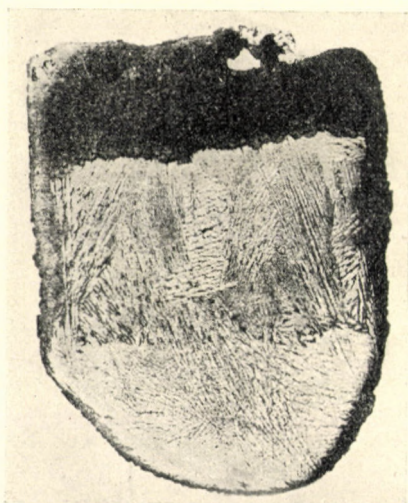


Fig.7. Vertical section of a casting with inverse chill. Etched in 10% HNO_3 in alcohol. Original size

3.3 The production of castings with inverse chill

Some melts have been made in the Tammann furnace and cooled down in the same crucible, at a cooling rate of about $20\text{ }^\circ\text{C/min}$. The crucible used in

this experiments was made of sillimanit, containing some 60% Al_2O_3 ; 38% SiO_2 1% Fe_2O_3 and 1% ($\text{CaO} + \text{FeO}$).

The castings showed in each case a more or less pronounced inverse chill. The section through such a sample is shown on Fig. 7.

Conclusion :

The described method results in each case in the production of castings with inverse chill. This allows for a more thorough examination of the question.

3.4 The noise effect during solidification

During melting experiments mentioned above a characteristic noise could be systematically heard at the beginning of solidification. The sound level of the same is very low ; it could be heard only in a quiet room.

Conclusion :

The noise cannot be produced directly by the solidification process, and it must therefore be supposed, that during the crystallization of cast iron there occur — at least in some cases — other physical processes too, which may lead to this sound effect.

3.5 The effect of the cooling rate

When summing up the literature related with the problem of the effect of the cooling rate, there were mentioned some important factors, omitted in the diagrams of Greine rand Klingenstein. As it is well known, these diagrams furnish some information relating to the solidification of cast iron, melted in cupola.

The author tried to show, whether the melting in a crucible was shifting the position of the lines of the same diagram. Conical samples were cast in the already described manner. The temperature of melting and of casting was 1300 ± 20 °C. The material was held in molten condition for about 30 minutes. Besides of the conical samples, cylindrical samples were cast too, into permanent moulds.

The hardness was measured along the axis of the cones, employing a Vickers diamond pyramid indenter, a load of 10 kg. The time for applying the load was 30 seconds. Besides of the measurement of the hardness, the structure of the samples was determined too, in the plane of the axial section. In the case of the cylindrical samples, only the structure was determined in the section perpendicular to the axis of the sample.

The samples had the following chemical composition :

Test No.	% C	% Si	% Mn	% P	% S
Ll ₀	4,12	0,41	0,32	0,028	0,070
Ll ₁	4,08	1,38	0,32	0,030	0,065
Ll ₂	3,63	1,55	0,33	0,023	0,066
Ll ₃	3,32	3,91	0,32	0,028	0,060
Ll ₄	3,13	4,26	0,30	0,026	0,060

Chips were cut for the determination of the chemical composition by drilling radially at 3 points of the cone, at different heights.

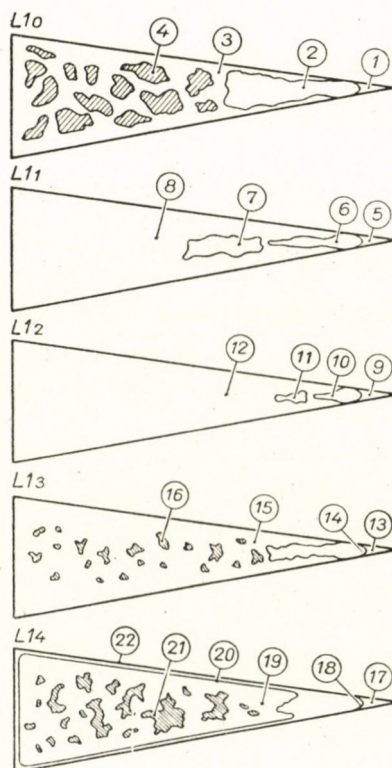


Fig. 8. The structure of the conical samples Ll₄ to Ll₀ in the plane of the axial section. Legend : 1 ledeburite + spheroidal graphite ; 2 ledeburite ; 3 pearlite + graphite ; 4 ledeburite + pearlite + graphite ; 5 ledeburite + spheroidal graphite ; 6 ledeburite + pearlite + graphite ; 7 pearlite + ferrite + graphite ; 8 pearlite + graphite ; 9 ledeburite ; 10 ledeburite + pearlite + graphite ; 11 pearlite + ferrite + graphite ; 12 pearlite + graphite ; 13 ledeburite + ferrite + spheroidal graphite ; 14 ferrite + graphite ; 15 pearlite + graphite ; 16 ferrite + graphite ; 17 ledeburite + ferrite + spheroidal graphite ; 18 ferrite + graphite ; 19 pearlite + graphite ; 20 ferrite + graphite ; 21 ferrite + graphite ; 22 pearlite layer on the surface of the conical sample

The results of the investigation of microstructure are shown on Fig. 8.

The microstructure of the cylindrical sample, cast from the material Ll₃ is shown on Fig. 9.

Conclusions :

1. The results of these experiments do not make possible to construct a diagram like the one made by Greiner and Klingenstein.

2. The appearance of ferrite is not a direct function of the cooling rate. This is especially true for the case of the conical sample cast from the material Ll_4 . That part of the sample which cooled most rapidly, had a structure of ledeburite + ferrite + graphite, while going further along the axis of the sample toward that part, which cooled more slowly, there follows without any transition ferrite + graphite. Pearlite appeared only thereafter. The variation of the structure along the radius of the sample is even more interesting. The edge of the sample — in a thickness of about $50-100\ \mu$ — is pearlitic. Immediately after this, we find a ferritic layer — of about 1 mm thickness — which is super-

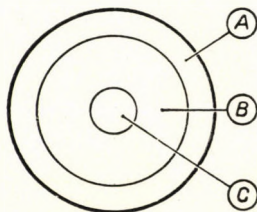


Fig. 9. The structure of the cylindrical sample Ll_3 in the plane perpendicular to its axis. Legend : A ledeburite + spheroidal graphite ; B pearlite + ferrite + graphite ; C ledeburite + pearlite + graphite

seded by pearlite + graphite. Finally in the neighbourhood of the axis, which portion cooled most slowly, there appears again the ferritic structure (Fig. 8).

3. The apparition of cementite is not a direct function of the cooling rate. This is especially true in the case of the structure of the cylindrical sample, cast from material Ll_3 . The outer part of the rod, which cooled most rapidly, was ledeburitic, but the zone around the axis, which cooled most slowly, had a white structure too (Fig. 8).

4. The diagram made by GREINER and KLINGENSTEIN can be regarded only as a simple tool, giving general information, which is valid only under certain conditions. It does not refer to every part of the casting, for instance to the outest case, but only to the structure of the bulk of the casting. It does not represent either truly the variation of the structure of cast iron, cooled very rapidly.

5. It follows from all that has been said, that the cooling rate has only an indirect effect on the crystallization of cast iron.

3.6 More detailed study of the shape and structure of the graphite flakes

This question is discussed only very briefly in the related literature. The shape of the flakes was studied by several investigations of F. ROLL [24], P. SCHAFMEISTER [25] and J. T. MACKENZIE [26], but these investigations refer only to "eutectic flakes" and the applied experimental methods do not provide for a high accuracy of the results.

As to the question of the flakes, it is well known, that each flake consists of many crystallites and that the basal planes of the same are parallel to the basal face of the flake.

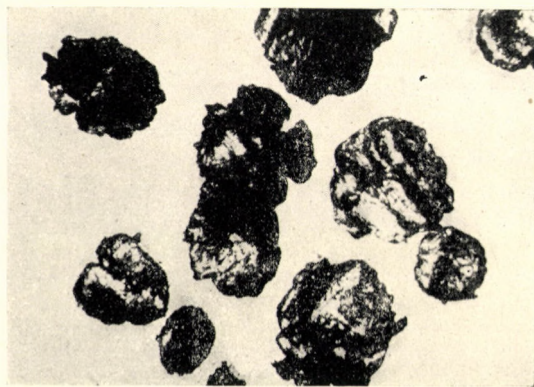


Fig. 10. Hypereutectic flake graphite. Extracted from the castings by solution in hydrochloric acid. Magn. $\times 30$.

For the purposes of these investigations the graphite flakes were generally extracted from the matrix and put under the binocular microscope. Extraction was made with hydrochloric acid. The silica skeleton, which forms on this occasion, can be separated very easily from the graphite and was therefore removed by mechanical means.

The shape of the "hypereutectic graphite flakes" can be seen on Fig. 10. The flakes are in this case like circular plates.

The extracted hypereutectic graphite flakes can be split very easily into two parallel plates. At first sight, this phenomenon could be explained by the easy slip of the graphite in the direction parallel to its basal plane. Later it was proved, that the easy splitting must have another cause, because further splitting could not be accomplished without the total demolishing of the flake.

When examining the possibilities for splitting the hypereutectic flakes, the structure of the sections of the same was studied too. It could be shown, that in a properly prepared section of a flake there is always a partition (Fig. 11). This partition line can be shown even in the case of eutectic flakes.

Conclusions :

1. The shape of the extracted hypereutectic graphite flakes is generally a circular plate or the like.

2. The extracted hypereutectic graphite flakes consist generally of two parallel plates which can be separated very easily. The line parting these two plates is discernible already at a magnification of about 500, provided the metallographic specimen is prepared with great care.

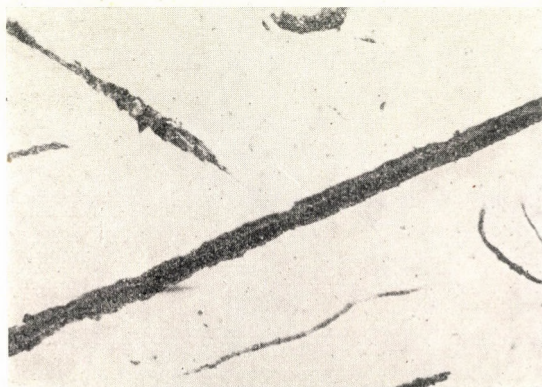


Fig. 11. The partition line in the center of a hypereutectic flake graphite. Unetched sample. Magn. $\times 300$.

3. Based on the material already discussed it may be mentioned again, that besides of the 3 already known shapes of the graphite (flake, quasi-flake or compacted and sphere) there exists also a fourth one, that of a spherical shell.

3.7 *The study of the structure of the surface of graphite of spherical shell form*

As the first step only graphite extracted from cast iron, treated with Mg was studied.

The extraction was made by the same method as described in 3.6. The investigation was made with the help of a binocular microscope, while the photomacrograph was made with the help of a collapsible photographic apparatus.

The photo-macrograph is to be seen on Fig. 12. The surface is full of wrinkles.

Conclusion :

On the surface of graphite extracted from cast iron, treated with Mg, runs a characteristic circular or spiral pattern.

3.8 Experiments to show the effect of degassing

The greatest part of the experiments herein described (more than 30 melts) was conducted in order to clear up the effect of the removal of gases.

Melting was done in a Tammann furnace, in sillimanite crucibles. The removal of the gases was tried by suction. This was done with the help of a rotary pump of 1,5 HP, made by Balzers'. The pressure was measured with a mercury manometer, having a scale with divisions of one mm. By this way a variation in the pressure of about 0,5 mm could be detected, or estimated.

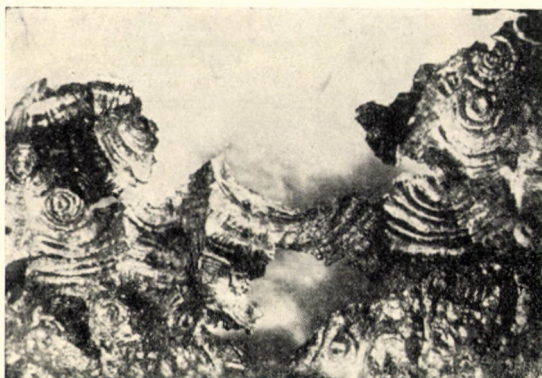


Fig. 12. The pattern on the surface of a graphite in the form of spherical shell, taken from a casting, treated with Mg. Magn. $\times 12$.

The removal of oxygen could not be accomplished in the desired measure with the help of the given apparatus. The attained vacuum was never greater than 10^{-3} atm.

The samples melted under vacuum had a graphite, corresponding to AFA-ASTM Type D.

Based upon the material discussed up to now, it is already out of question, that degassing exerts some effect on the crystallization. It seems therefore reasonable to continue the experiments for the removal of gases, supposed that a more perfect method could be found for this purpose.

The accomplishment of the task set was not possible.

3.9 Experiments to study the effect of some gases

Several experiments were tried to clear up the effect of some gases. The gases introduced into the furnace were purified, conducting the same through copper-turnings, held at a temperature of 600 °C, silica-gel, potassium-hydroxide, phosphoric anhydride and yellow phosphorus. Bubbling through the melt was

accomplished with the help of a sillimanite tube, the end of which reached to the bottom of the melt.

Neither of these experiments can be regarded as reliable, chiefly because the introduction of the said gases was not preceded by a sufficient removal of the other gases (see Section 3.8). The contradictions with respect to this question which are to be met in the literature can be traced back to this point.

There is however a single experiment which should be mentioned. The fracture of a metal, through which hydrogen was bubbled for over 10 minutes and the chemical composition of which was : 4,26% C, 0,21% Si, 0,39% Mn,



Fig. 13. Fracture of cast iron, treated with hydrogen. $\times 0,5$.

0,041% P and 0,064% S (analysed after the treatment), can be seen in Fig. 13. It is very interesting that the surface of the sample, which had the most intimate contact with hydrogen, is grey, whereas the core, which was in the least contact with hydrogen, is white. It is of course impossible to draw far-reaching conclusions from a single experiment. But it is also out of question that the gases exert some effect on the crystallization and it would be therefore very reasonable to continue the investigation of the said problem.

The solution of the task set was not attained.

4. A hypothesis for the explanation of the crystallization of graphite in cast irons

4.1 The existence of some "internal surfaces"

When reviewing the literature, attention was drawn on the contradiction between the structure of the graphite flakes and the supposed mechanism of their formation. The enrichment of the crystallites of the graphite, as in the

case of either the flake graphite or the spheroidal graphite, makes necessary the existence of some surfaces, which arrange and collect the newly formed graphite monocrystals. The parallelism of the crystallites of the flake graphite could be explained by some field of magnetic forces as well, but this supposition is in our case out of question. If we suppose, however, that the arrangement — and perhaps the formation as well — of the crystallites takes place on some definite surfaces, the explanation is quite obvious.

There are numerous observations, which support the view that such surfaces really exist in the solidifying melt and the crystallization of the graphite goes on inwards into some gas-cavities — and this is done independently, whether the result is flake graphite or spheroidal graphite.

We shall note some of these observations.

a) On the surface of hypereutectic pig iron, especially on the surface of its shrinkage cavities, one may find some graphite-kish. This is in the reality, however, nothing else, than a heap of graphite flakes of different orientations. It can be hardly imagined, that during crystallization these graphite flakes emerged from the iron melt. It is also very improbable, that the graphite flakes formed inside the melt could have passed through the surface of the melt, partly because of the high surface tension of the molten iron and partly because of the relatively low strength of the graphite. ($\sigma_{\text{graphite}} \cong 2 \text{ kg/mm}^2$.) One would expect at the most to have the graphite flakes heap up and cover the surface of the melt.

This phenomenon could be explained by supposing the formation of a foam on the surface of the liquid iron, made up by gas-bubbles and a thin liquid film of iron, parting them. The graphite could have been crystallizing on the walls of the gas-cavities of the foam, but after the fissure of the foam — because of variation in the existing pressure — it forms an entirely irregular heap. The author succeeded to trace in the graphite-kish some iron globules which were formed as a result of the fissure, very often on some definite places of the surface of the flakes.

b) According to the opinion of PIASKOWSKI [27], the eutectic spheroidal graphite crystallizes inside the primary dendrites of austenite, whereas the flake graphite is arranged interdendritically. WITTMOSER [14] advocates a similar opinion. The photomicrographs, which Wittmoser shows in support of his views, do not, however, prove the second part of his supposition. It is out of question that the spheroidal graphite was enveloped by a crust of primary austenite, but the photomicrographs are proving — according to the author — the very likely supposition that the flake graphite was also formed inside the primary austenite. This later view is also supported by practical experiences of many years. It is well known, that the graphite is — with the exception of a few cases — more or less uniformly distributed, even in the cases of hypoeutectic composition of the cast iron. It is therefore not accidental that practical experts are considering as the "eutectic graphite distribution" not this, but that exceptional case, where the primary dendrites of austenite are easily perceptible and the graphite is arranged only interdendritically.

The experiment proving that from melts having the same composition i. e. having the same saturation we may produce a material with random or even a material with "eutectic graphite distribution", gives at the same time the correct proof of the view, that the graphite of random distribution cannot be regarded as a "normal" eutectic graphite. PIWOWARSKY [28] made experiments by casting the same material into permanent moulds and into sand moulds. The chemical composition was the following: C = 3,2%; Si = 2,2%; the saturation factor was 0,88. Fig. 14 shows the sample, cast into sand, while Fig. 15 shows that, which was cast into the permanent mould. Both samples were heated to a temperature above 800 °C then slowly cooled down with the furnace to 650 °C. The result was a ferritic structure. Both materials were highly graphitized before the anneal. As it can therefore be seen, material of the same composition produces on rapid cooling an "eutectic graphite", and on slow cooling graphite of random distribution. It is quite obvious that in the latter case the graphite took place inside — at least partly — the primary austenite.

All the graphite — or at least a portion of it — is thus built up by the diffusion of carbon through the solid solution. The controlling factor of the

growth of the crystal is, however, in such circumstances — as already shown by Bunin [15] — the rate of formation of vacant places. The crystallization of graphite can take place only at those places which were cleared by the iron atoms. The formation of vacant sites requires however the self-diffusion of iron atoms, which is a very slow process. It can be hardly imagined, that in the few seconds disposable during solidification, cavities of the required dimensions could be formed [29].

But there is more probably no need for the formation of vacant sites by such a self-diffusion. The cavities are already present at the outset of the crystallization of graphite, in the form of gas-bubbles, on the inside of the austenite



Fig. 14. Ferritic cast iron. Taken from Ref. [28]

dendrites, or better to say — as we shall see it later — on the inside of special austenitic formations, crusts. This is the reason of their random distribution.

The crystallization of the graphite thus begins on the walls of these gas-bubbles. Under favourable conditions the cavities get entirely or almost entirely filled up by graphite. There is time, however, usually only for the formation of a thin spherical shell, which is ruined during the further crystallization and changes its shape. In the first case there is formation of spheroidal graphite and in the second case that of flake graphite.

There is therefore only a single fundamental condition for the formation of graphite: the presence of gas-bubbles or cavities during crystallization.

4.2 The presence of gas bubbles in liquid iron and their dimensions

Are there really in the melt such supposed gas-bubbles?

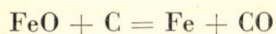
Gray cast iron usually contains about 7–12 % by volume of graphite. According to the afore-said, it is necessary to have during crystallization in

the case of spheroidal graphite exactly the same quantity of gas, in the case of flake graphite, however, considerably more, about 20—40 % by volume.

The determination of the gas-content is hardly reliable. It may be nevertheless accepted, that grey cast iron always contains some 0,3—0,5 standard ccm oxygen per gram, not to speak of the other gases. This quantity is a multiple of the quantity needed.

The further studies are confined to the system Fe—C—O. It has to be remarked that the other constitutional elements, which are always present, cause only a quantitative change and do not change the character of the process.

Oxygen is present in molten iron in the form of FeO. (The solubility of gaseous oxygen and carbon monoxide can more probably be neglected.) The solubility of FeO diminishes, however, strongly with reduction of the temperature. Solid cast iron contains practically no dissolved FeO. During cooling down there results therefore sooner or later a supersaturation of the melt with respect to FeO, and the latter begins to coagulate. This means that at some preferred places of the melt the reaction



looses the equilibrium — if there was any — and carbon monoxide begins to form.

The newly formed gaseous CO surrounds the FeO-particle. The latter cannot escape from the gas-bubble because for the crossing of the surface of the same it would be necessary to have accumulated very much energy. Thus the FeO and the gas-bubbles are slowly rising together in the melt. If all the bubbles could reach the surface of the melt and all FeO would be carried in the slag, this would mean the complete removal of gases. The already mentioned oxygen determinations prove, however, that the short period which elapses until the complete solidification of the melt, is far from being enough for the removal of all gas-bubbles.

It is very interesting to study from this view the question of the formation of the so-called "inverse chill". If complete removal of the gas-bubbles could be reached, the castings would crystallize entirely white, even on slow cooling, just because there are no gas-cavities. This can, however, hardly be realized under practical conditions. In the inner part of the casting there is removal of the gases by flotation, but the oxides adhering to the walls of the crucible or floating to the surface of the melt are producing uninterruptedly new bubbles. The metal is solidifying in this case on the outside of the casting with grey and on the inside of the same with white fracture. The author succeeded to produce in the course of his experiments castings with inverse chill at a cooling rate of about 20 °C/min (see Fig. 7).

If all that has been told, is correct then there exists the possibility of computing the approximative size of the bubbles. With given space of time between the beginning and the end of the solidification, given height of the liquid column, viscosity of the molten cast iron and specific weight of the same, the radius of the bubble can be computed with the help of the Stokes-equation.

For the given set of conditions, the radius of the bubble, ρ amounts to 37μ and the mean length of the flakes, l amounts to 74μ . (We made the supposition that the spherical shell flattens into a thin circular plate. Though this assumption is not quite correct, in the given case it may be accepted.) The real length of the flake graphite in the grey part of our experimental cast iron amounts to 110μ . The accord is sufficient.

4.3 The process of crystallization

When moderately cooled, cast iron always contains some gas-bubbles. Too fast cooling may result in the FeO remaining in solution; in this case there is no development of gases and the solidification results in a graphite-free casting.

Supposed we have an alloy of hypereutectic concentration, the solidification begins with the formation of primary austenite crystals. These crystallize on the surface of the gas-bubbles. Reduction of the FeO is an endothermic reaction, and the coolest points of the liquid are therefore on the surface of the bubbles.

The bubbles get an envelope of a solid shell of austenite. In the mass of this shell there is a considerable diffusion of the carbon towards the inside of the sphere, from the moment of the formation of the shell onward. This question shall be discussed a little later. The carbon atoms may reach the inside of the shell and the continuation of the reduction of the FeO is thereby secured.

Some experiments carried out make it probable that the reduction of the FeO results in a very high pressure, and the spherical shell bursts.

In Figs 4 and 5 were shown some particles which were thrown out of the melt on the action of vacuum. The velocity of the said particles was in the moment of their exit at least 1 m/sec. The energy these particles needed for crossing the surface of the melt and getting accelerated in a highly viscous liquid, could not be acquired by any other means than the bursting of one or more nearby austenite shells.

The observation of noise during the solidification of cast iron — mentioned in Section 3.4 — also supports the existence of the bursting mechanism.

The burst austenite shells and graphite particles are frozen in the melt.

What is happening to the new gas-bubbles formed in consequence of bursting? Their pressure is not further increased — for lack of FeO — but on the contrary is reduced with reduction of the temperature, and they get sooner or later flattened, after having received a graphite shell, which crystallized on their surface.



Fig. 15. Ferritic cast iron. Taken from Ref. [28]

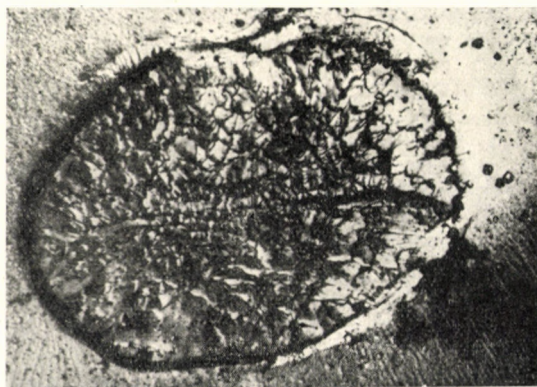


Fig. 16. The partition line in the direction of the major axis of the section of an ellipsoidal graphite. Etched by the cathodic vacuum etching method. (Photomicrograph taken with electron microscope.) Taken from Ref. [36]

What is happening to the gas inside the bubbles? It remains more probably in the center of the graphite flake and forms there a thin disclike cavity. This can be related with the easy splitting of the graphite flakes, already discussed in Section 3.6. Width of the lines which can be seen in the section of a graphite flake is corresponding to the calculated height of the flattened gas-cavity (see Fig. 11).

There is a partion line to be seen in the direction of the major axis of the section of an ellipsoidal graphite, shown by H. TSUCHIKURA, T. KUSAKAWA and T. OKUMOTO [36] (Fig. 16).

4.4 *The mode of formation of spheroidal graphite*

After all that has been said, the necessary conditions for the formation of spheroidal graphite can be formulated very easily. It is only necessary, that the gas-bubbles formed during the solidification get entirely filled up by graphite.

This seemingly simple condition involves however many problems.

The first problem immediately arises as we revert the condition: if more gas-bubbles are formed than what can be filled up entirely with the disposable graphite — which is 7–12 % by volume — we get some flake graphite and if there are less bubbles, some cementite will be found too.

The second related problem: it is not indifferent of what size these bubbles are. If the necessary amount of gases is distributed in the form of large bubbles, the graphite will not fill up these cavities — for lack of time —, and besides of the flattened out spherical shells there will be some isolated cementite too. The original stipulation must therefore be modified in the following manner: the melt should contain gas in an amount of 7–12 % by volume, and the gas-bubbles should be small, their radii should not surpass 10–100 μ . (The latter condition is seemingly not too rigorous, but in real cases the allowable size of the bubbles is further limited by the cooling rate as well. In the case of slower cooling greater bubbles may be filled up as well.)

It is generally accepted, and in this paper it has been discussed too, that a cast iron which is suitably degassed and cooled down at a corresponding rate, may crystallize with spheroidal graphite [23, 30, 31]. The conditions to be met, in order to attain this purpose are, however, so rigorous, that they cannot be fulfilled under practical conditions of industrial production.

The possibilities of industrial production of nodular cast iron were first secured by the discovery of MORROGH and WILLIAMS [32], who found that treatment with cerium results in cast iron with spheroidal graphite. Further research detected many elements which exert a similar effect on the crystallization of graphite.

The common property of all the suitable nodularizing materials is a thorough degassing action. A suitable amount of these nodularizing additions may result in a corresponding level of the gas-content.

A further action of the nodularizing additions is that on the surface tension of the melt. Both actions effect a corresponding variation in the size of the gas-bubbles. A reduction of the gas-content causes undoubtedly the

reduction of the size of the gas-bubble. The increase of the surface tension causes a similar effect. In accordance with these conditions MARINCEK and his coworker [11] found — as already discussed — upon a treatment with Mg an increase of about 50 % of the surface tension of the melt.

The mode of formation of spheroidal graphite is more probably a more complex problem than that already outlined. It is readily conceivable, for instance, that in this case we have to face not carbon monoxide, but some other gas. It is a very interesting observation that a fresh fracture of nodular cast iron develops upon the action of the moisture content of the air some gas. It is therefore possible that — following this track — we may find out in time much more about the mode of formation of the spheroidal graphite. In the meanwhile, there is no reason for further reasoning because there are too few actual observations, objective data.

Just the same must be said about the question of the graphitization of white cast iron. It may be supposed that the FeO which was retained in solution, in consequence of fast cooling, gets coagulated when heated and develops gases. The graphite crystallizes into these generally irregular, clustered cavities. It is worth while to mention in this connection that the reduction of FeO with carbon can be accomplished only at temperatures above 725 °C. Annealing at temperatures lower than this, has therefore no graphitizing action. This is in accordance with practical findings, because the lowest possible temperature of tempering, corresponding to a cycle of $t = \infty$ is about 700 °C. The supposition that in the case of spheroidal graphite not — or not only — the FeO-content is associated with the development of gases, is made probable among others by the fact that the graphitization of a white fractured — although Mg-treated — cast iron can be accomplished at a temperature much lower than the above mentioned, i. e. at 500–550 °C [37].

It is therefore premature and not sufficiently accounted for to discuss in detail the effect of the different alloying elements. It is, however, very probable that they alter mainly the gas-content and surface tensions of the melt, as well as the conditions for diffusion, and hereby exert their action on the crystallization of graphite.

4.5 The mechanism of crystallization of graphite into the cavities

A further question to be discussed is a problem which can be followed very difficultly by experiments, i. e. how the graphite crystallizes into the gas-cavities?

After the formation of a graphite crust of limited thickness, further growth must proceed through the same. It is, however, hardly conceivable that the carbon penetrates this graphite layer of ever increasing thickness by selfdiffusion. The time available is supposedly too short.

The possibility of such a mechanism is, however, more than a mere supposition. The author produced several microphotographs of graphite in the form of spherical shells, having a microscopical wall-thickness.

The next few — already discussed — observations make it also probable, that the graphite grows from the outside inwards.

The hypereutectic graphite flakes have generally the form of circular plates or the like (see Fig. 10). This cannot be accounted for by a "rounding off" effect of the surface tension. This action would prevent first of all the formation of the flakes of large specific surface.

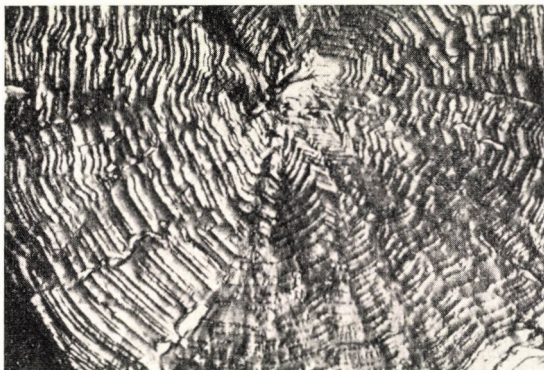


Fig. 17. Spheroidal graphite. Etched by the cathodic vacuum etching method. (Photomicrograph taken with electron microscope.) Taken from Ref. [36]

The flattening out of an originally spherical shell into a circular plate is a much more acceptable explanation. The partition line of the two halves can be made visible, as already discussed. The relatively easy splitting of the hypereutectic flakes into two parallel plates was mentioned too.

H. TSUCHIKURA and his coworkers made photomicrographs of some regularly shaped spheroidal graphite particles as well (Fig. 17). The sectional plane passes in this case more or less exactly through the center of the sphere. It can be seen that the contour lines parallel to the basal plane are at the border of the section more regular, and in the middle of the section almost entirely irregular. This proves again a growth from outside inwards.

How this crystallization into the cavity is yet made possible?

On the surface of a graphite in the form of a spherical shell, extracted from a melt treated with Mg, there is a pattern which is similar to that found by H. BÜCKLE [33] when depositing Zinc on a cooled plate. It is nevertheless hardly conceivable that graphite forms from the gaseous phase. In the volume occupied by carbon monoxide there is carbon in a concentration which is several thousand times less than necessary.

The possibility of growing by self-diffusion cannot be excluded too. This case will be discussed somewhat later. There is another possibility of the carbon atoms entering at some preferred points the surface of the cavity and growing laterally on to the already existing groupings. It may be supposed too that the carbon atoms, shifting the already crystallized layers toward the centre of the cavity, are forming new layers and the process repeats itself.

This question has to be decided by further experiments.

The last question to be discussed is that whether there is any principal contradiction in supposing the diffusion of the carbon toward the cavities.

This diffusion cannot be controlled by concentration — or temperature — gradients. The only conceivable driving force of the diffusion is a stress-gradient. We may choose for a model in our case a thick-walled spherical shell uniformly compressed on the outside and the inside. The tangential stresses set up in the outer part of the shell are compressive stresses and those in the inner part are tensile stresses [34].

The effect of stress-gradients on diffusion was fundamentally investigated by KONOBEJEVSKY [35] — at least qualitatively. According to his findings diffusion is always directed from the compressed volume toward the extended one. This is exactly the condition for the discussed problem because by reducing the free gas-volume the internal gas-pressure becomes greater and greater and as a result, the tensile stress in the inner wall grows too. That is the necessary condition for the possibility of the self-diffusion of graphite.

This also gives an answer to the question as to why there are encountered very few large cavities in the centre of the spheroidal graphites, although according to the afore-said there always must remain some small cavity. This is the space for the highly compressed gases.

The understanding of the process in question would be nearer, if there were an answer to the problem as to the role of the substance of the gases. The experiments carried out up to now give no reassuring answer to this problem. It is nevertheless worth mentioning — remembering the experiments discussed in Section 3.9 — that hydrogen which is usually qualified as exerting a strong effect toward a white fracture, seems to support graphitization. The reason for this seeming contradiction is more probably the neglect of the removal of other gases — especially of the oxygen — while examining the effect of hydrogen. As long as there is oxygen in the melt the treatment with hydrogen undoubtedly diminishes the gas-content of the melt and hereby exerts a whitening effect.

As already mentioned, the experiments carried out up to now, do not allow for a definite decision of the problem, though it seems that the substance of the gases makes no difference as to the mode of graphitization.

REFERENCES

1. Уманский, Я. С., Финкельштейн, Б. Н., Блантер, М. Е.: Физические основы металловедения. Москва, 1949. (in Russian).
2. PIOWOWARSKY, E., WITTMOSER, A.: Giesserei Techn. Wiss. Beihefte, 1 (1949), pp. 33.
3. DE SY, A.: Metal Progress, 57 (1950), pp. 774.
4. GILLEMOT, L.: Proceedings of the Technical Section of the Hungarian Academy of Sciences, III, pp. 47 (in Hungarian).
5. KARSAY, I.: The Foundry, 2 (1953), pp. 25 (in Hungarian).
6. Гиршович, Н. Г.: Литейное производство. 1 (1951), 17 (in Russian).
7. Гиршович, Н. Г.: Литейное производство. Москва.
9. DE SY, A.: Metal Progress, 59 (1951), pp. 798.
10. THALL, P. M., CHALMERS, B.: J. Inst. Metals, 77 (1950), pp. 79.
11. GRÜTTER, K., MARINČEK, B.: Schweizer Archiv, June 1953, pp. 171.
12. BUTTNER, H. F., TAYLOR, F. H., WULF, J.: American Foundryman, 20 (1951), pp. 49.
13. WITTMOSER, A.: Giesserei, 40 (1953), No. 1, p. 9.
14. WITTMOSER, A.: Giesserei, 40 (1953), No. 1, p. 10.
15. Бунин, К. П., Иванов, Г. И.: Доклады Акад. Наук СССР 72 (1950) № 6.
16. Лихтман, В. И., Смирнова, И. Н.: Доклады Акад. Наук СССР 86 (1952), ст. 1151.
17. Бунин, К. П., Спак, Т. М.: Литейное производство 1954, № 3, ст. 26.
18. Бунин, К. П., Черновол, А. В.: Доклады Акад. Наук СССР 95 (1954).
19. HEIKE, W. MAY, G.: Paper in Giesserei, 16 (1929), pp. 625, taken from Piwowarsky E. "Gusseisen", 1951.
20. LAPLANCHE, H.: Metal Progress, 52 (1947), pp. 991.
21. SIPP, K.: Arch. Eisenhüttenwesen, 14 (1940/41/42) pp. 267.
22. Гиршович, Н. Г.: Чугунное литье Москва, 1949. ст. 107. (in Russian)
23. ADEY, C.: Giesserei, 33/35 (1948), pp. 67.
24. ROLL, F.: Paper in Giesserei, 15 (1928), pp. 1270, taken from Piwowarsky E., "Gusseisen", 1951.
25. SCHAFFMEISTER, F.: Arch. Eisenhüttenwesen, 10 (1936—37), pp. 221.
26. MACKENZIE, J. T.: Paper in A. I. M. M. E., Techn. Publ. No. 1741 (1944), taken from Piwowarsky E., "Gusseisen", 1951.
27. PIASKOWSKY, I.: Prace Inst. Odlewn., 2 (1952), pp. 93 (in Polish).
28. PIOWOWARSKY, E.: „Gusseisen", 1951, pp. 132 (Figs 18, 20).
29. BIRCHENALL, C. E., MEHL, R. F.: Trans. AIME, 188 (1950), pp. 144.
30. ZORKÓCZY, B.: Proceedings of the Technical Section of the Hungarian Academy of Sciences, III, pp. 179 (Hungarian).
31. KERPELY, K.: Die metallurgischen und metallographischen Grundlagen des Gusseisens. Berlin, 1928.
32. MORROGH, H., WILLIAMS, W. J.: J. Iron a. Steel Inst., (1948), pp. 306.
33. HALLA, F.: Kristallchemie u. Kristallphysik metallischer Werkstoffe. Leipzig, 1951, pp. 55.
34. Безухов, Н. И.: Теория упругости и пластичности. Москва, 1953, ст. 194.
35. KONOBEEVSKY, S. J., SELISSKY, J. P.: Phys. J. (USSR), 4 (1933), pp. 459, taken from Umanski etc. Ref. (1).
36. Original photomicrographs from "The observation of graphite in cast iron by means of cathodic vacuum etching", lecture held at the London Conference of Electron Microscopy, 1954. By kind permission of the Authors' (H. Tsuchikura, T. Kusakawa and T. Okumoto).
37. Personal communication of Mr. B. KÖRÖS, Cand. Eng. Sci. of the Hung. Acad. of Sci.

SUMMARY

The author described his experiments conducted for further clearing up of the problems related with the structure of the graphite and the phenomena occurring during the solidification of cast irons. He succeeded — among other things — to demonstrate besides of the already known 3 shapes of graphite a fourth one (spherical shell).

The investigations and observations made during the experiments cannot be used directly for the solution of problems related with the industrial production because the research was made entirely on theoretical lines. The results have only an indirect bearing on the problems of the industry, in so far as they are helpful toward a much better understanding of the mode of crystallization of graphite.

The hypothesis, laid down in this paper, may support further scientific research. Based on this it would be expedient to organize systematical experiments for the solution of particular problems of the industry. It would be necessary, however, at the same time to prove or to disprove the assumptions related with the said hypothesis.

О КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ГРАФИТА В ЧУГУНЕ

Канд. техн. наук И. КАРШАИ

РЕЗЮМЕ

Сообщаются опыты, которыми преследовалась цель дальнейшего уточнения явлений, происходящих в структуре графита и в чугуна во время затвердевания. В результате проведенных опытов, между прочим, удалось наряду с известными до сих пор тремя видами графита показать существование еще и четвертого вида (шаровой оболочки).

Естественно, что проведенные исследования и опытные наблюдения, — вследствие чисто теоретического характера проведенной исследовательской работы, — не могут быть использованы непосредственно для решения промышленных проблем. Достигнутые результаты интересны для промышленности только постольку, поскольку они позволяют более основательно ознакомиться с процессом кристаллизации чугуна.

Для дальнейшей исследовательской работы считается важной приведенная в работе гипотеза. На основе этой гипотезы, принимаемой в качестве программы работы, с одной стороны, было бы целесообразным организовать опыты в интересах решения отдельных промышленных проблем, однако в то же время предположения гипотезы — независимо от их правильности или ошибочности — требуют опытного доказательства.

SUR LA CRISTALLISATION DU GRAPHITE DANS LA FONTE

I. KARSAY

candidat des sciences techniques

RÉSUMÉ

Les expériences relatées dans cette étude ont été effectuées en vue de mieux éclaircir la structure du graphite et les phénomènes qui se produisent au cours de la solidification de la fonte. Ces expériences ont prouvé, entre autres, l'existence d'une quatrième forme du graphite (écorce sphérique), en plus des trois formes connues jusqu'à présent.

Les examens et les observations aux cours des expériences ne sont naturellement pas directement utilisables à la solution des problèmes industriels, les recherches ayant un caractère purement théorique. La valeur industrielle des résultats consiste dans leur contribution à une connaissance plus approfondie de la cristallisation de la fonte.

L'auteur estime que l'hypothèse communiquée dans cette étude sera importante pour les recherches ultérieures. Elle pourra servir utilement le programme de travail pour l'organisation des expériences en vue de la solution de certains problèmes industriels; toutefois, les différents points de l'hypothèse demandent encore d'être vérifiés par des expériences.

ÜBER DIE KRISTALLISATION DES GRAPHITS IM GUSSEISEN

I. KARSAY

Kandidat der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Die in der vorliegenden Arbeit geschilderten Versuche wurden vom Verfasser zur weiteren Klärung der Graphitstruktur und der Vorgänge während der Erstarrung des Gusseisens durchgeführt. Als Ergebnis der Versuche ist es — unter anderem — gelungen, neben den bisher bekannten drei Graphitformen auch eine vierte (Kugelschale) nachzuweisen.

Natürlich können die Untersuchungen und experimentellen Beobachtungen — da die Forschungsarbeit einen ausgesprochenen theoretischen Charakter hatte — nicht unmittelbar zur Lösung von industriellen Problemen benutzt werden. Die Ergebnisse sind aber insofern für die Industrie von Bedeutung, als sie die Kenntnisse über die Kristallisation des Gusseisens erweitern. Für die weitere Forschungsarbeit hält der Verfasser die in der Arbeit mitgeteilte Hypothese für wichtig. Mit dieser als Arbeitsprogramm wäre es einerseits zweckmässig, Versuche im Hinblick auf die Lösung von einzelnen industriellen Problemen zu organisieren; andererseits warten aber auch die hypothetischen Annahmen selber auf eine experimentelle Bestätigung.

DER KRAFTBEDARF BEIM ZIEHEN VON STAHLROHREN MIT STOPFEN

R. HANTOS, J. HEERINGER

MATERIALPRÜFUNGSANSTALT DER MÁTYÁS-RÁKOSI-STAHLL- UND METALLWERKE, BUDAPEST—CSEPEL
und

J. SCHEY

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR DIE SCHWERINDUSTRIE, MISKOLC

[Eingegangen am 25. Juli 1955]

Ein grosser Teil der Stahl- und Metallrohre wird in kaltem Zustande fertig gezogen.

Die Grösse der Ziehkraft wird nicht nur durch den Werkstoff des Ziehgutes, die Abnahme und Form der Ziehwerkzeuge, sondern auch durch die Schmierstoffe und Schmierstoffträger sowie durch die Oberflächenbeschaffenheit der Ziehwerkzeuge beeinflusst. Bei den bisherigen Versuchen wurden hydraulische oder mit Membranen ausgestattete Kraftmessgeräte benutzt [1, 2], während jetzt bei unseren Versuchen die beim Stopfenzug von phosphatierten Weichstahlrohren auftretenden Kräfte mit Hilfe von Dehnungsmessstreifen gemessen wurden.

Das einschlägige Fachschrifttum gibt mehrere Formeln zum Berechnen der Kräfte an. Das Ziel unserer Untersuchungen war es, nun auch die Gültigkeit dieser — und besonders der schon mehrmals als richtig befundenen Formeln von GELEJI [3, 4] — zu überprüfen.

a) Versuchsvorrichtung

Im Falle des Stopfenzuges (Abb. 1) ist die Ziehkraft P am Ziehwagen zu messen. Die Ziehkraft P ist gleich der Summe der Reaktionskraft P_1 auf der Aufliegefläche des Ziehringes und der Kraft P_2 im Stopfenwiderlager. Die Ziehkraft P wurde mit Hilfe eines im Ziehwagen eingebauten Messstückes gemessen. Da die Wirkungsweise des Stopfens sehr kennzeichnend für den ganzen Ziehvorgang ist, wurde mit einem anderen Messstück auch die in der den Stopfen haltenden Stange auftretende Kraft P_2 gemessen.

Zum Messen der Ziehkraft wurde an Stelle des Ziehhakens ein für das Aufnehmen des Messstückes geeignetes Mittelstück eingebaut (Abb. 2). Der auf zwei Räder montierte Ziehhaken schliesst sich an das andere Ende des Messstückes an.

Die Abmessungen des Messstückes sind aus Abb. 3 ersichtlich. Es wurde aus einem Werkstoff mit $C = 0,45\%$, $Cr = 1,25\%$ und $V = 0,25\%$ angefertigt und nach dem Drehen auf eine Festigkeit von $\sigma_B = 125 \text{ kg/mm}^2$ gehärtet.

Die höchste zulässige Spannung wurde unter Berücksichtigung von eventuellen dynamischen Beanspruchungen zu 30 kg/mm^2 gewählt. Für eine maximale Zugkraft von 15 Tonnen ergaben sich die Abmessungen der Abb. 3.

Es wurden auf das Messstück 8 Dehnungsmessstreifen vom Typ GM 4473 mit einem Widerstand von 120 Ohm und mit einer Dehnungsempfindlichkeit

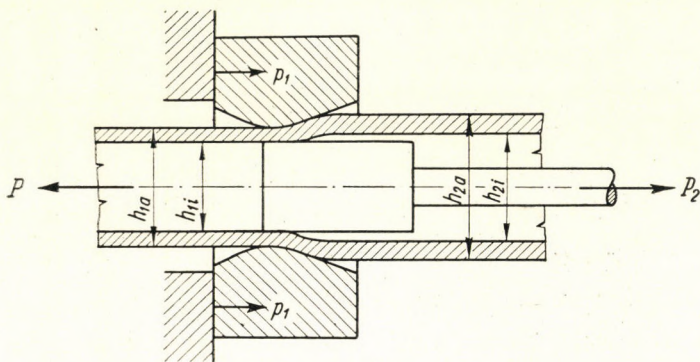


Abb. 1. Rohrziehen mit Stopfen

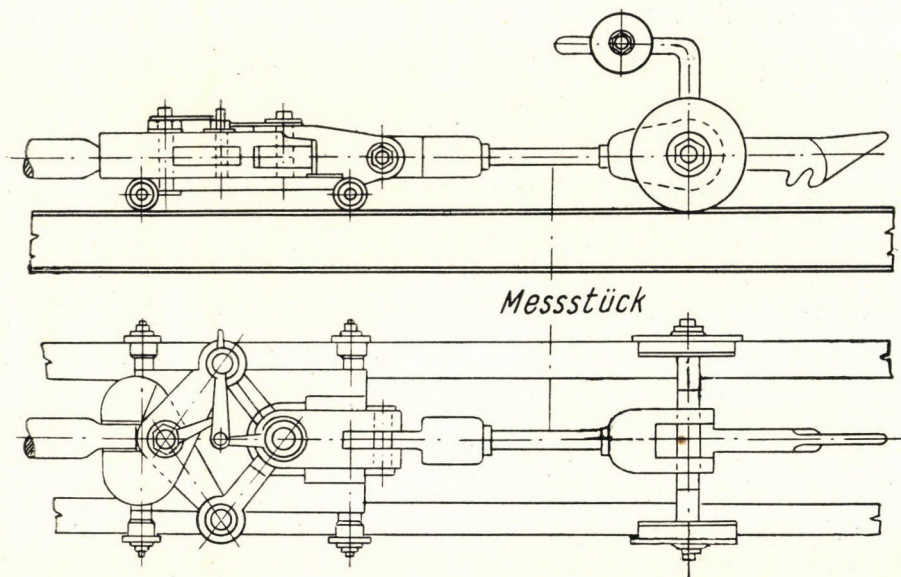


Abb. 2. Die Einbauweise des Messstückes im Ziehwagen

von $k = 2,1$ geklebt, und zwar 4 in Richtung der Beanspruchung und 4 quer dazu. Die Schaltung der Messstreifen ist aus Abb. 3 zu sehen. Diese Schaltung hat den Vorteil, dass das Messstück gegen exzentrische Beanspruchungen unempfindlich ist. Alle vier Zweige der WHEATSTONESchen Brücke sind aktiv.

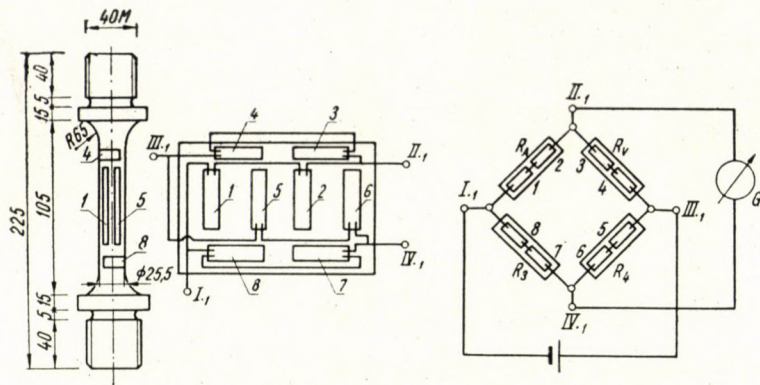


Abb. 3. Messstück zum Ziehwagen

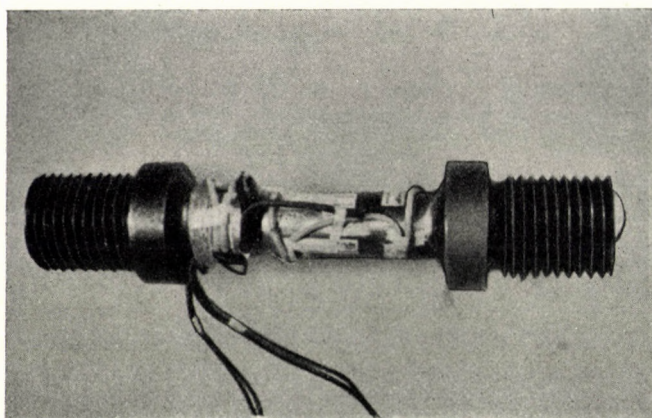


Abb. 4. Das Bild des Messstückes von Abb. 3.

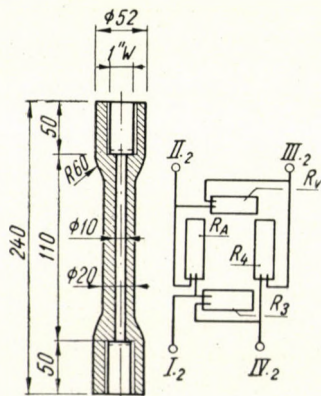


Abb. 5. Messstück zum Messen der Kräfte am Stopfen

Die Schaltung ist somit unempfindlich gegen Temperatureinflüsse und hat mehr als eine doppelte Empfindlichkeit.

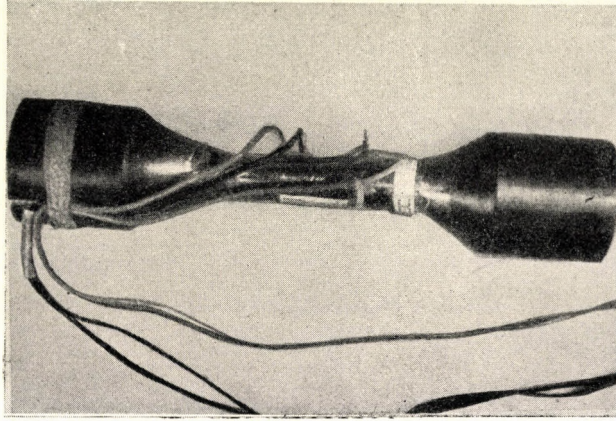


Abb. 6. Das Bild des Messstückes von Abb. 5.

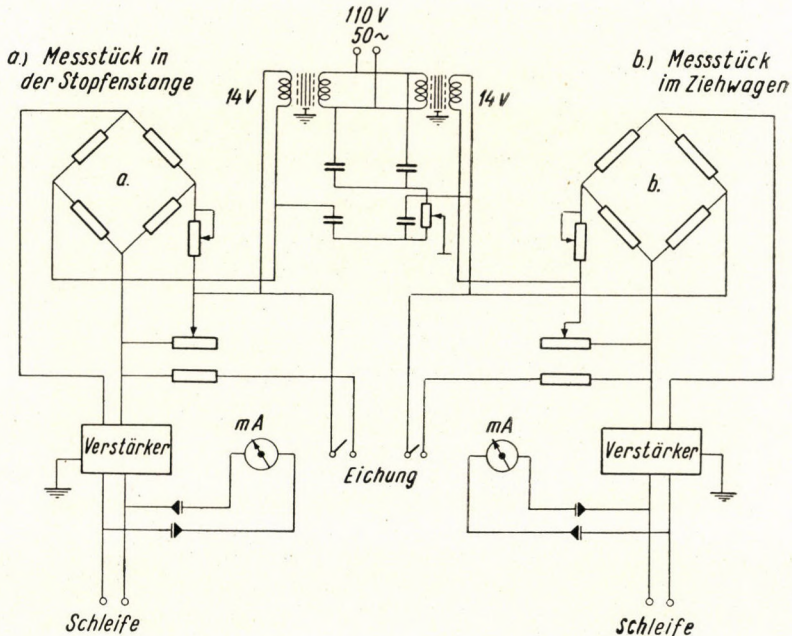


Abb. 7. Das Schaltungsschema der Messeinrichtung

In Abb. 4 sieht man das Messstück mit den aufgeklebten Messstreifen; diese wurden mit Paraffin gegen Feuchtigkeit überzogen und durch ein Stahlrohr gegen mechanische Einwirkungen geschützt.

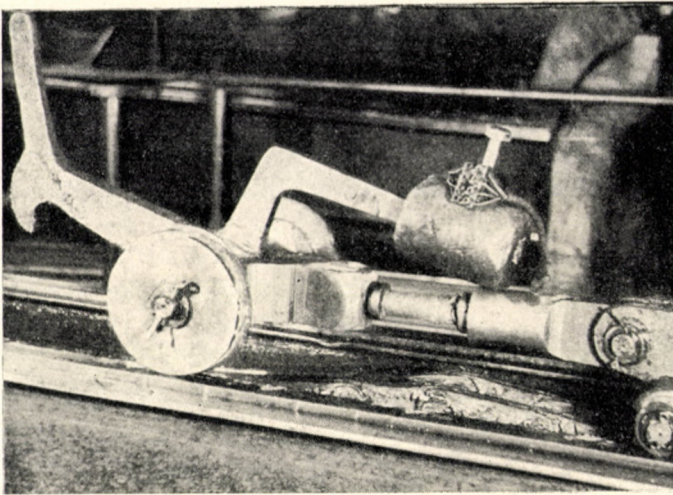


Abb. 8. Das eingebaute Messstück im Ziehwagen

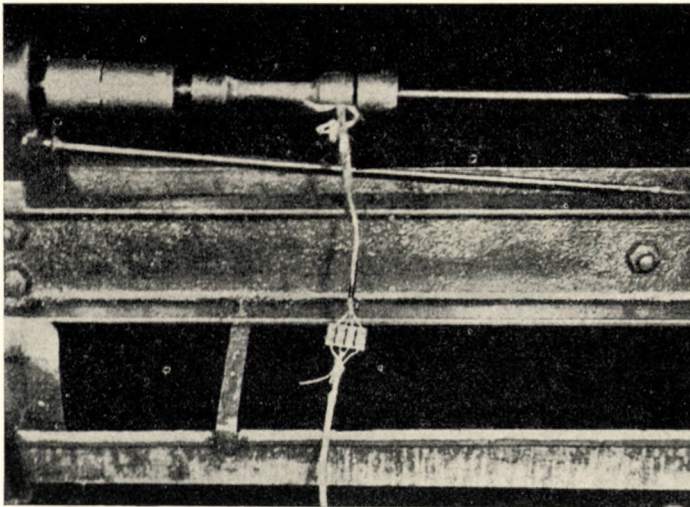


Abb. 9. Das in die Stopfenstange eingebaute Messstück

Die in der Haltestange des Stopfens auftretende Reaktionskraft P_2 wurde mit Hilfe eines kleineren Messstückes gemessen, dessen Abmessungen und Schaltung auf Abb. 5 und dessen Bild in Abb. 6 zu sehen sind.

Beide Brücken wurden über einen Transformator vom Wechselstromnetz gespeist, der Brückenstrom mit Hilfe eines Schleifen-Oszillographen aufgezeichnet. Die elektrische Schaltung der ganzen Messeinrichtung ist in Abb. 7 wiedergegeben.

Vor dem Einbau wurden beide Messstücke auf einer Zerreissmaschine geeicht. Die in den Ziehwagen und in die Haltestange eingebauten Messstücke sind in Abb. 8 und Abb. 9 ersichtlich.

b) Ausführung der Versuche

Als Versuchsmaterial dienten 180 ausgewählte Rohre einer Werkserie mit 29,3 mm Aussendurchmesser und 2,4 mm Wanddicke. Jedes zehnte Rohr wurde einer chemischen Analyse unterworfen und wies folgende durchschnittliche Zusammensetzung auf: C = 0,7–0,11 %, Si = 0,10 %, Mn = 0,50 %, P = 0,04 %, S = 0,04 %.

Alle Rohre wurden zur Erzielung von gleichmässigen mechanischen Eigenschaften bei 680–700° C weichgeglüht, danach in einem Salzsäurebad gebeizt und in Wasser gespült. Die mit Nummern versehenen Rohre wurden dann in kleineren (aber aus wenigstens 10 Rohren bestehenden) Gruppen phosphatiert und in ein Ziehmittel getaucht, danach mit verschiedenen Querschnittsabnahmen gezogen: die nach dem Zug neuerdings in das Ziehmittel getauchten Rohre wurden weitergezogen, und dieses Verfahren solange wiederholt, bis der Phosphatüberzug wirksam blieb bzw. solange die Verfestigung noch ein Glühen erforderte.

Die Phosphatierung erfolgte in jedem Falle in einem 90° C warmen Zinkphosphatbad. Beim Ziehen einiger Rohrgruppen wurden verschiedene Schmiermittel angewandt. Die Zusammensetzung einiger Schmiermittel war nach den in den Tabellen gebrauchten Bezeichnungen:

Schmiermittel	I.:	4 m ³ Wasser, 600 kg Bohröl, 70 kg Rüböl, 15 kg Talg, 6 kg Seifenstein, 30 kg Schmierseife.
Schmiermittel	II.:	25 kg Schlammkreide, 10 kg Vaseline, 0,5 kg Seifenflocken, 10 kg Rüböl.
Schmiermittel	III.:	Zylinderöl
Schmiermittel	IV.:	Ein Gemisch von Al-Staub und Seifenstaub in einem Volumverhältnis von 1 : 7.

Ausser den obigen Mitteln wurde zur Schmierung des Stopfens auch Flockengraphit benutzt: das offene Ende des Rohres wurde in Graphit getaucht, dann das Rohr aufgestellt und der Graphit durch ständiges Anklopfen auf der inneren Wand verteilt. In den Tabellen ist dieses Verfahren mit dem Worte »Graphit« gekennzeichnet.

Der Werkstoff des Ziehringes und des Stopfens war ein Werkzeugstahl (CrS 5) mit C = 1,2–1,5 %, Mn = 0,4 %, Si = 0,35 % und Cr = 0,2–0,5 %. Einige Ziehringe und Stopfen waren hartverchromt, dieser Umstand wird in den Tabellen mit dem Wort »Chrom« bezeichnet.

Die Form des Stopfens war zylindrisch. Zur Bestimmung der Form des Ziehholts wurde der Ziehring von zwei Seiten her mit Blei ausgegossen. Die Umrisse des so erhaltenen Körpers wurden mittels eines Profilprojiziergerätes vergrößert und dann abgezeichnet. Die mit diesem Verfahren bestimmte Form eines Ziehholts geht aus Abb. 10 hervor. Nach Einzeichnung des gezogenen Rohres erhält man die Ziehwinkel; α_1 ist der für den Zug kennzeichnende Ziehwinkel, α_2 der an der Stelle des Rohreintrittes wirksame Winkel.

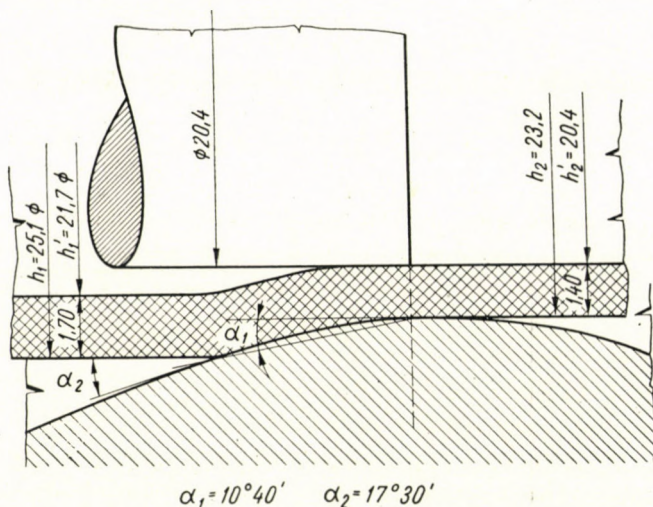


Abb. 10. Die Form eines Ziehholts

Die Zugfestigkeit (σ_B), Fließgrenze ($\sigma_{0.2}$) und Dehnung (δ_{10}) jedes einzelnen Rohres wurden vor und nach jedem Zug ermittelt.

Der Zug der Rohre erfolgte nach dem Ziehplan der Tabelle I. Die meisten Rohre ertrugen vier Züge ohne zu reißen, mit einer gesamten Querschnittsabnahme von ca. 60%.

Zur Veranschaulichung der Messergebnisse werden in der Tabelle II die beim ersten Zug der Rohre Nr. 121–140 erhaltenen Werte wiedergegeben.

Die Tabelle III enthält eine Zusammenfassung aller Messwerte. Die Festigkeitszahlen in den Spalten 8, 9, 10 und 11 sowie die Ziehkräfte in den Spalten 18 und 19 sind arithmetische Mittelwerte der einzelnen Messungen.

Da der Einfluss der Phosphatierung auf den Wert der Reibungszahl noch wenig bekannt ist, wurden vergleichende Versuche an je 10 Rohren durchgeführt. Diese Rohre erhielten die gleiche Behandlung wie bisher: nach dem Glühen und Beizen wurde der eine Teil der Rohre phosphatiert und danach

mit dem Schmiermittel I gezogen. Die Ziehwerkzeuge waren aus Werkzeugstahl CrS 5 angefertigt.

Der andere Teil der Rohre wurde nach dem Beizen in heisse Kalkmilch getaucht und dann ebenfalls mit dem Schmiermittel I gezogen. Der Ziehring

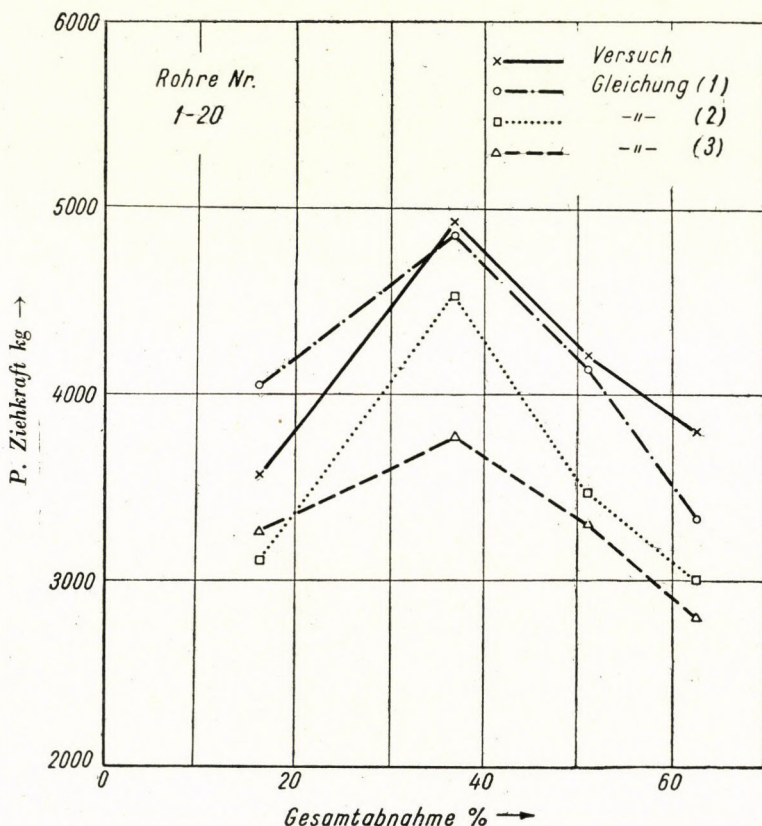


Abb. 11. Die beim Ziehen der Rohre Nr. 1—20 gemessenen Kräfte im Vergleich zu den berechneten Werten

war derselbe wie bei dem Zug der phosphatierten Rohre, der Stopfen musste aber nach Abreißen des ersten Rohres auf einen hartverchromten Stopfen ausgetauscht werden.

Es wurde zuerst von $23,0 \times 1,5$ mm auf $22,0 \times 1,3$ mm gezogen, die Messwerte dieses Zuges sind aber wegen eines Instrumentenfehlers unzuverlässig. Die Tabelle IV enthält deshalb die Messwerte des zweiten Zuges. Auch die Leistung des Antriebmotors wurde bei diesen Versuchen registriert: der Mittelwert der gemessenen Werte ist in der Spalte 9 der Tabelle IV zu finden. Im Leerlauf betrug die Leistung 2,1 kW.

Die Änderung der Ziehkräfte wurde während der ersten Versuche mittels eines Schleifenzillographen beobachtet. Man konnte feststellen, dass die Ziehkraft, nachdem der Stopfen in seine richtige Lage gelangt war, im Laufe des Zuges praktisch gleich blieb. In der Mehrzahl der Versuche wurde darum die Ziehkraft einfach an einem Galvanometer abgelesen.

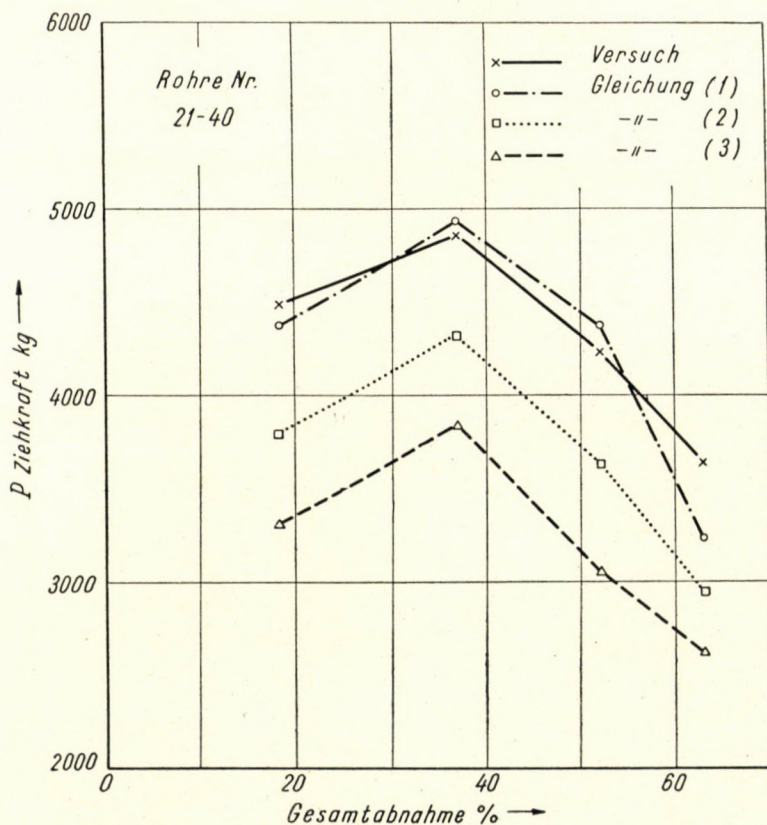


Abb. 12. Die beim Ziehen der Rohre Nr. 21—40 gemessenen Kräfte im Vergleich zu den berechneten Werten

c) Die Auswertung der Messergebnisse

Die Ziehkraft ändert sich während des Ziehens eines Rohres am Stopfen nicht. Unter unseren Versuchsverhältnissen betrug die am Stopfen entstehende Reibungskraft 10 bis 15 Prozent der ganzen Ziehkraft.

Der Werkstoff und die Oberflächenbeschaffenheit der Werkzeuge hatten keinen nennenswerten Einfluss auf die Ziehkraft. Wegen der abgerundeten Form des Ziehholts war es nicht möglich, den Einfluss des Zieh winkels näher

Tabelle I
Ziehplan während der Versuche

Zug Nr.	Rohrabmessungen vor dem Zug mm		Werkzeug $\varnothing$ mm		Abnahme %	
	Aussen $\varnothing$	Innen $\varnothing$	Ziehring	Stopfen	pro Zug	Gesamt
1.	29,3	24,5	27,4	23,0	14,1	14,1
2.	27,4	23,0	25,1	21,5	24,4	35,0
3.	25,1	21,5	23,4	20,5	24,1	50,8
4.	23,4	20,5	21,9	19,5	21,9	61,4

Tabelle II

Das Ziehen von phosphatierten Weichstahlrohren von $29,3 \times 2,4$ mm auf $27,35 \times 2,17$ mm. Schmiermittel I.; Innenfläche darüber noch mit Graphit bestreut. Ziehgeschwindigkeit 15 m/Min. Ziehwerkzeuge aus Chromstahl

Ziehwinkel $\alpha_1 = 7^\circ$; $\alpha_2 = 12^\circ 50'$

Rohr Nr.	Zugfestigkeit σ_B kg/mm ²		Fließgrenze $\sigma_{0,2}$ kg/mm ²		Gesamte Ziehkraft kg	Ziehkraft am Stopfen kg
	vor dem Zug	nach dem Zug	vor dem Zug	nach dem Zug		
121	51,0	74,2	44,1	68,2	3910	322
122	53,2	69,5	46,3	65,1	3868	453
123	54,6	70,6	47,3	64,1	3655	431
124	38,8	52,8	26,7	52,5	3145	369
125	43,8	70,5	31,2	66,8	4165	416
126	52,3	66,7	45,2	62,9	3825	416
127	51,6	67,3	45,2	61,3	3995	322
128	57,7	66,8	54,6	65,0	3230	379
129	46,8	60,9	39,8	56,8	3400	374
130	58,7	59,9	55,2	57,1	3400	379
131	50,2	62,4	41,6	61,5	4250	557
132	50,7	62,1	45,5	61,0	4250	338
133	47,4	61,1	37,4	60,5	3700	473
134	55,8	66,6	51,5	64,5	4123	645
135	50,5	62,4	43,3	61,2	3825	494
136	44,5	58,3	32,5	56,4	3825	483
137	48,0	59,0	41,0	57,6	3783	499
138	46,1	56,6	35,2	55,5	3230	577
139	42,7	63,4	32,2	61,3	4080	338
140	40,8	52,0	27,2	50,7	3485	338
	50,8	63,2	43,5	60,7	3690	430

Tabelle III

Die beim Ziehen von phosphatierten Stahlrohren gemessenen Werte. Ziehgeschwindigkeit 15 m/Min.

Rohr Nr.	Zug	Zahl der gemes- senen Rohre	Rohrabmessung mm		Abnahme %		Zugfestigkeit kg/mm ²		Fließgrenze kg/mm ²		Werkstoff des Ziehringes	Werkstoff des Stopfens	Ziehwinkel		Schmierstoff		Ziehkraft	
			vor dem Zug	nach dem Zug	pro Zug	Gesamt	vor dem Zug	nach dem Zug	vor dem Zug	nach dem Zug			α_1	α_2	aussen	innen	Gesamt	Stop- fen
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.
1—10	1	10	29,3 × 2,4	27,3 × 2,15	16,3	16,3	49,9	62,9	40,6	57,9	CrS 5	CrS 5	7°	12°50'	I	1 + Graphit	3590	350
«	2	10	27,3 × 2,15	25,1 × 1,7	26,5	38,4	62,9	74,8	57,9	71,8	«	Chrom	11°	17°15'	«	«	5190	655
«	3	9	25,1 × 1,7	23,3 × 1,45	20,4	51,0	74,8	76,8	71,8	72,1	«	«	7°40'	11°50'	«	«	4160	600
«	4	3	23,3 × 1,45	21,9 × 1,15	24,6	63,1	76,8	78,4	72,1	74,8	«	«	7°40'	12°45'	«	«	4090	645
11—20	1	7	29,3 × 2,4	27,3 × 2,15	16,3	16,3	49,8	62,9	41,3	57,9	CrS 5	CrS 5	7°	12°50'	I.	Graphit	3590	350
«	2	10	27,3 × 2,15	25,1 × 1,75	24,4	36,6	62,9	71,1	57,9	66,2	«	«	11°	17°15'	«	«	4660	435
«	3	9	25,1 × 1,75	23,3 × 1,45	22,5	51,0	71,1	75,9	66,2	73,0	«	«	7°40'	11°50'	«	«	4420	530
«	4	7	23,3 × 1,45	21,96 × 1,18	22,8	62,2	75,9	78,2	73,0	75,4	«	«	7°40'	12°45'	«	«	3650	555
21—30	1	10	29,3 × 2,4	27,3 × 2,08	18,6	18,6	50,8	68,6	42,7	63,1	Chrom	Chrom	10°10'	16°30'	I.	1 + Graphit	4490	540
«	2	10	27,3 × 2,08	25,1 × 1,75	22,0	36,6	68,6	73,1	63,1	68,3	«	CrS 5	9°40'	16°30'	«	«	4820	540
«	3	10	25,1 × 1,75	23,2 × 1,42	24,5	52,3	73,1	78,2	68,3	72,9	«	«	10°40'	17°30'	«	«	4270	590
«	4	8	23,2 × 1,42	21,9 × 1,15	22,6	63,1	78,2	79,1	72,9	73,1	«	«	9°	14°50'	«	«	3590	720
31—40	1	10	29,3 × 2,4	27,3 × 2,08	18,6	18,6	53,3	68,6	46,1	63,1	Chrom	Chrom	10°10'	16°30'	I.	Graphit	4490	540
«	2	10	27,3 × 2,08	25,1 × 1,7	24,3	38,4	68,6	74,2	63,1	70,9	«	«	9°40'	16°30'	«	«	4960	690
«	3	10	25,1 × 1,7	23,2 × 1,4	20,8	51,3	74,2	78,5	70,9	76,3	«	«	10°40'	17°30'	«	«	4230	735
«	4	10	23,2 × 1,4	21,9 × 1,15	24,3	63,1	78,5	79,7	76,3	77,2	«	«	9°	14°50'	«	«	3720	880
41—60	1	19	29,3 × 2,4	27,1 × 2,0	22,4	22,4	52,2	68,0	45,5	65,3	CrS 5	CrS 5	10°	16°40'	I	1 + Graphit	4880	550
«	2	20	27,1 × 2,0	24,3 × 1,5	31,9	47,0	68,0	79,2	65,3	76,6	«	«	13°30'	17°40'	«	«	5630	390
61—70	1	9	29,3 × 2,4	27,1 × 2,0	22,4	22,4	49,4	67,6	41,3	64,8	CrS 5	CrS 5	10°	16°40'	II	II.	5050	640
«	2	10	27,1 × 2,0	24,3 × 1,5	31,9	47,0	67,6	75,6	64,8	73,9	«	«	13°30'	17°40'	«	«	5380	420
71—80	1	10	29,3 × 2,4	27,1 × 2,0	22,4	22,4	55,2	67,5	48,8	64,7	CrS 5	CrS 5	10°	16°40'	II	Graphit	5560	630
«	2	10	27,1 × 2,0	24,3 × 1,5	31,9	47,0	67,5	77,2	64,7	74,9	«	«	13°30'	17°40'	«	«	5740	510
81—100	1	20	29,3 × 2,4	27,35 × 2,17	15,8	15,8	50,7	64,1	43,3	62,8	CrS 5	CrS 5	7°	12°50'	I	1 + Graphit	3690	425
«	2	20	27,35 × 2,17	25,2 × 1,85	20,6	33,2	64,1	68,4	62,8	63,5	«	«	11°	17°15'	«	«	4730	375
«	3	20	25,2 × 1,85	23,3 × 1,45	26,5	51,0	68,4	77,6	63,5	74,3	Chrom	Chrom	10°40'	17°30'	«	«	4660	740
«	4	20	23,3 × 1,45	21,9 × 1,2	21,6	61,6	77,6	80,4	74,3	76,9	«	«	9°	14°50'	«	«	3380	680
101—110	1	10	29,3 × 2,4	27,1 × 2,0	22,4	22,4	49,5	67,6	40,4	62,2	CrS 5	CrS 5	10°	16°40'	III	III.	5160	725
111—120	1	10	29,3 × 2,4	27,1 × 2,0	22,4	22,4	50,5	67,7	43,7	62,2	CrS 5	CrS 5	10°	16°40'	III	Graphit	5120	520
121—140	1	20	29,3 × 2,4	27,35 × 2,17	15,8	15,8	50,8	63,2	43,5	60,7	CrS 5	CrS 5	7°	12°50'	I	1 + Graphit	3690	430
«	2	20	27,35 × 2,17	25,2 × 1,85	20,6	33,2	63,2	68,6	60,7	64,4	«	«	11°	17°15'	«	«	4730	385
«	3	20	25,2 × 1,85	23,3 × 1,45	26,5	51,0	68,6	76,3	64,4	72,7	«	«	7°40'	11°50'	«	«	4060	540
«	4	20	23,3 × 1,45	21,9 × 1,2	21,6	61,6	76,3	80,0	72,7	75,1	«	«	7°40'	12°45'	«	«	3610	450
141—150	1	9	29,3 × 2,4	27,1 × 2,0	22,4	22,4	46,3	65,6	36,8	63,5	CrS 5	CrS 5	10°	16°40'	IV	IV.	4770	700
151—160	1	9	29,3 × 2,4	27,1 × 2,0	22,4	22,4	45,8	62,7	36,1	60,0	CrS 5	CrS 5	10°	16°40'	IV	Graphit	4260	510

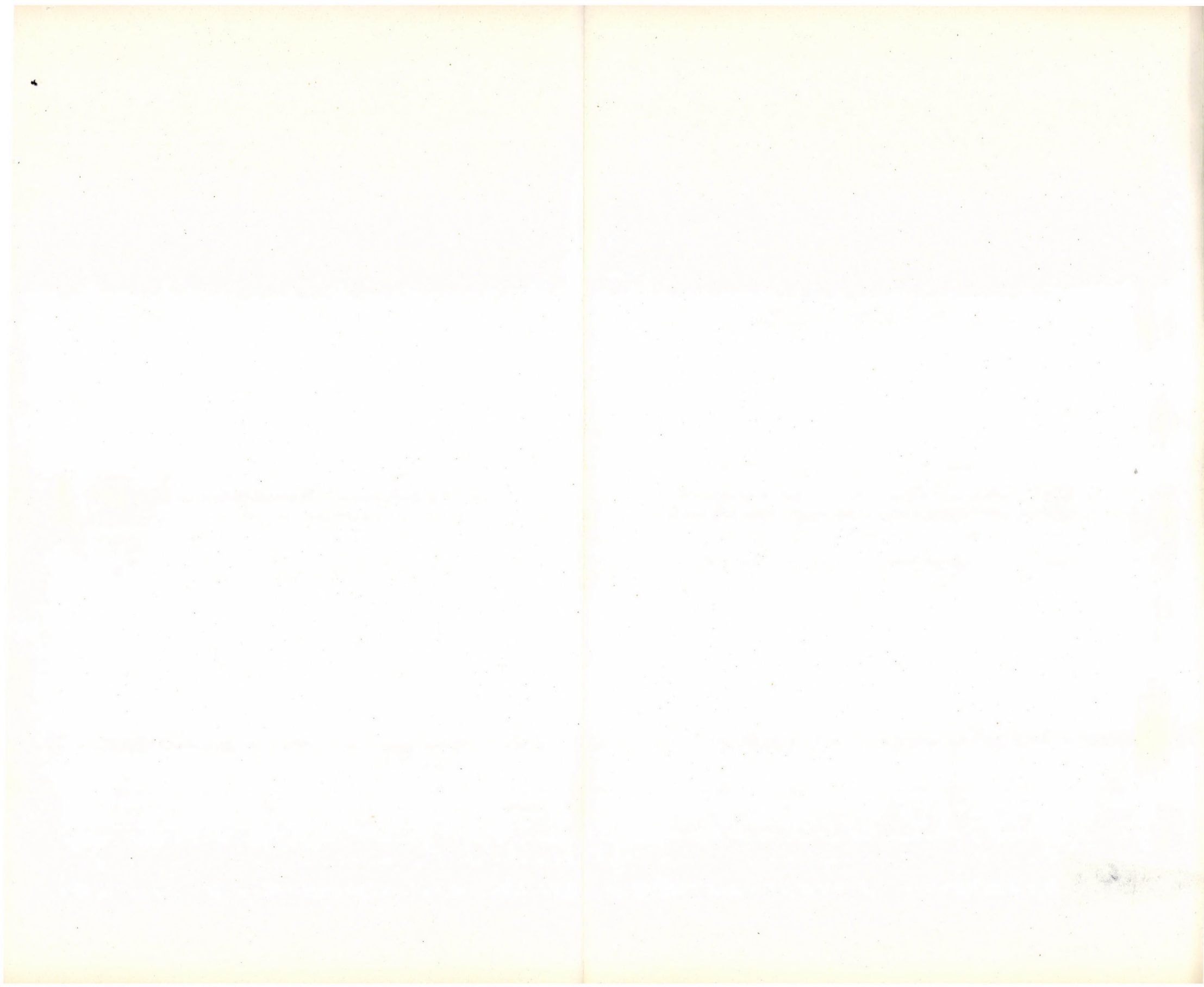


Tabelle IV

Das Ziehen von Weichstahlrohren von $22,0 \times 1,3$ mm auf $20,0 \times 1,0$ mm. Ziehgeschwindigkeit 20 m/Min.

Ziehwinkel $\alpha_1 = 7^\circ 40'$; $\alpha_2 = 15^\circ 20'$

Rohr Nr.	Zahl der gemessenen Rohre	Zugfestigkeit kg/mm ²		Fließgrenze kg/mm ²		Schmiermittel	Ziehkraft kg	Leistung des Antriebsmotors kW
		vor dem Zug	nach dem Zug	vor dem Zug	nach dem Zug			
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
161—170	10	52,0	66,5	48,5	64,2	Phosphat, I + Graphit	2850	15,2
171—180	9	50,4	63,4	46,9	59,5	Gekalkt, I + Graphit	2800	13,2

Tabelle V

Vergleich der gemessenen und der aus Gl. (1) berechneten Ziehkräfte

Rohr Nr.	Zug	Rohrquerschnitt mm ²		Abnahme		Mittlere Zugfestigkeit kg/mm ²	Mittlere Fließgrenze kg/mm ²	Ziehwinkel α_1	Gemessene Ziehkraft kg	Berechnete Ziehkraft P kg	Unterschied %
		vor dem Zug	nach dem Zug	F mm ²	%						
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
1—20	1	203	170,0	33,0	16,3	56,4	49,4	0,122	3590	4040	+ 12,5
«	2	170,0	127,3	42,7	25,0	67,8	63,4	0,192	4930	4860	— 1,0
«	3	127,3	99,5	27,8	21,8	74,6	70,8	0,134	4210	4130	— 2,0
«	4	99,5	76,2	23,3	23,4	77,3	73,9	0,134	3800	3330	— 13,0
21—40	1	203	165,0	38,0	18,6	60,3	53,8	0,177	4490	4390	— 2,0
«	2	165,0	126,7	38,3	23,3	71,1	66,3	0,169	4890	4920	— 0,5
«	3	126,7	98,0	28,7	22,6	76,0	72,1	0,186	4250	4390	+ 3,0
«	4	98,0	75,0	23,0	23,5	78,8	74,8	0,157	3660	3220	— 12,0
41—80	1	203	157,7	45,3	22,4	60,0	55,1	0,174	5100	4820	— 5,5
«	2	157,7	107,5	50,2	31,9	72,9	70,2	0,236	5600	5930	+ 6,0
81—100	1	203	171,0	32,0	15,8	57,4	53,1	0,122	3690	4260	+ 15,0
«	2	171,0	135,7	35,3	20,6	66,2	63,2	0,192	4730	4620	— 2,0
«	3	135,7	99,5	36,2	26,5	73,0	68,9	0,186	4660	4300	— 5,5
«	4	99,5	78,0	21,5	21,6	79,0	75,6	0,157	3380	3310	— 2,0
101—120	1	203	157,7	45,3	22,4	58,8	52,1	0,174	5140	4560	— 11,0
121—140	1	203	171,0	32,0	15,8	57,0	52,1	0,122	3690	4200	+ 14,0
«	2	171,0	135,7	35,3	20,6	65,9	62,6	0,192	4730	4580	— 3,0
«	3	135,7	99,5	36,2	26,5	72,5	68,6	0,134	4060	4420	+ 8,5
«	4	99,5	78,0	21,5	21,6	78,2	73,9	0,134	3610	3240	— 10,0

zu untersuchen: in den Grenzen der gemessenen Ziehwinkel ($\alpha_1 = 7^\circ$ bis $\alpha_1 = 11^\circ$) schwankte die Ziehkraft nur unbedeutend.

Der Einfluss der verschiedenen Schmierstoffe ist aus Tabelle III durch einen Vergleich der beim Ziehen von $29,3 \times 2,4$ auf $27,4 \times 2,2$ mm gemessenen Kräfte ersichtlich. Berücksichtigt man die verschiedenen Festigkeitswerte der einzelnen Rohrgruppen, so kommt man zu dem Schluss, dass die angewendeten Schmiermittel eine Ziehkraftänderung von höchstens ± 10 Prozent verursachen können. Eine nähere Auswertung scheint wegen der unvermeidlichen Fehler bei den Betriebsversuchen nicht genügend begründet zu sein.

Zu vergleichenden Berechnungen wurden Formeln von GELEJI [3]

$$P = k_m (F + \mu Q_1 + \mu Q_2) + 0,77 f_2 k_{fm} a \quad (1)$$

SIEBEL [5]

$$P = k_{fm} \left[F + \left(1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) + \frac{2}{3} f_2 a \right] \quad (2)$$

und JEMELJANENKO—ALJESHEWSKI [2]

$$P = 1,05 \sigma_{Bm} \cdot k_1 \cdot f_2 \cdot \frac{F}{f_1} \quad (3)$$

verwendet.

In diesen Gleichungen ist

- f_1 = der Rohrquerschnitt vor dem Ziehen in mm^2
- f_2 = der Rohrquerschnitt nach dem Ziehen in mm^2
- $F = f_1 - f_2$ = die Abnahme in mm^2
- α = der Ziehwinkel im Bogenmass
- μ = die Reibungszahl
- k_{fm} = das arithmetische Mittel der Formänderungsfestigkeit vor und nach dem Ziehen in kg/mm^2
- σ_{Bm} = der Mittelwert der Zugfestigkeit in kg/mm^2
- k_m = der mittlere Formänderungswiderstand nach GELEJI:

$$k_m = \frac{k_{fm}}{1 + \frac{F + \mu(Q_1 + Q_2)}{2f_2}}$$

Q_1 = die arbeitende Fläche des Ziehholts

$$Q_1 = \frac{(h_{1a}^2 - h_{2a}^2) \pi}{4 \sin \alpha}$$

Q_2 = die arbeitende Fläche des Stopfens

$$Q_2 = \frac{h_{2i} \cdot \pi}{2 \tan \alpha} [(h_{1a} - h_{2a}) - (h_{1i} - h_{2i})]$$

k_1 = ein Faktor nach JEMELJANENKO—ALJESHEWSKI

$$k_1 \cong 1 + \frac{\mu}{\alpha} \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right)$$

In Tabelle V sind die nötigen Werte eingetragen. Gruppen, die in Ziehringen mit gleichen Ziehwinkel verformt wurden, sind zusammengezogen.

Aus den vergleichenden Messungen (Tabelle IV) geht hervor, dass beim Ziehen der gekalkten und phosphatierten Rohre praktisch gleiche Ziehkräfte auftreten. Die Phosphatschicht hatte also keinen nennenswerten Einfluss auf den Wert der Reibungszahl.

Für das Ziehen von Weichstahl wird im Schrifttum [6, 7] ein Wert von $\mu = 0,04 \sim 0,07$ angegeben; auf Grund der obigen Erwägung wurde deshalb mit einem Wert von $\mu = 0,06$ gerechnet.

Die Spalte 11 der Tabelle V enthält die Ergebnisse der Berechnung nach der Formel (1) von GELEJI: die Abweichung von den Messwerten bleibt innerhalb von $\pm 15\%$.

In Abb. 11 und Abb. 12 sind die mit den Gleichungen (1), (2) und (3) berechneten und die gemessenen Ziehkräfte für den ersten Zug der Rohre Nr. 1—20 und Nr. 21—40 dargestellt. In bestem Einklang mit den Messwerten stehen die nach Gl. (1) berechneten Werte, während die Gln. (2) und (3) im allgemeinen eine kleinere Ziehkraft ergeben.

SCHRIFTTUM

1. A. POMP, W. ALBERT: Mitt. K. Wilh. Inst. f. Eisenforschung IX. (1927) S. 95/111.
2. П. И. Орро и Я. Э. Осада: Производство стальных тонкостенных бесшовных труб. Металлургия, 1951, Харьков—Москва.
3. A. GELEJI: Die Berechnung der Kräfte und des Kraftbedarfs bei der Formgebung im bildsamen Zustande der Metalle S. 176/178. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.
4. A. GELEJI—J. SCHEY: Acta Technica IV. (1952) 1—4; S. 347/364.
5. E. SIEBEL: Stahl und Eisen 66/67 (1947) S. 171/180.
6. G. SACHS: Praktische Metallkunde Bd. II. S. 132. Springer, Berlin, 1934.
7. W. LUEG, K. H. TREPTOW: Stahl und Eisen 72 (1952), S. 399/416.

ZUSAMMENFASSUNG

In Betriebsversuchen wurden die beim Ziehen von phosphatierten Weichstahlrohren auftretenden Kräfte gemessen, wobei Dehnungsmessstreifen Verwendung fanden.

Die Ziehkraft ist während des Ziehens völlig konstant. Verschiedene Schmiermittel hatten nur einen unbedeutenden Einfluss auf die Ziehkraft. Nach vergleichenden Versuchen war die Ziehkraft beim Ziehen von gekalkten und phosphatierten Rohren gleich. Die am Stopfen auftretende Reibungskraft betrug 10 bis 15 Prozent der Gesamtziehkraft.

Die Ziehkraft wurde mit einigen Formeln berechnet und das Ergebnis mit den Messwerten verglichen; die besten Ergebnisse konnten mit einer Formel von GELEJI erhalten werden.

АНАЛИЗ СИЛ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ПРОТЯЖКЕ ТРУБ

Р. ХАНТОШ, Й. ХЕРИНГЕР и Я. ШЕЙ

РЕЗЮМЕ

Авторы в процессе производственных опытов производили измерения сил, возникающих при протяжке труб из мягкой стали с фосфатизированной поверхностью. При измерениях использовались электрические тензометры сопротивления.

Сила протяжки в процессе протяжки остается совершенно неизменной. Различные смазывающие вещества только в незначительной степени изменяют силу протяжки. Согласно сравнительным опытам трубы с фосфатизированной поверхностью возможно протягивать с применением такой же силы, как и трубы с обработанной известью поверхностью. Сила, действующая на протяжку, составляет всего лишь 10—20% общей силы протяжки.

Среди формул, применяемых для расчета возникающих при протяжке труб сил, некоторые были сравнены с полученными данными. Согласно расчетам наиболее удовлетворительные данные получаются при помощи формулы Гелейи.

INVESTIGATION OF FORCES IN TUBE DRAWING

R. HANTOS, J. HEERINGER and J. SCHEY

SUMMARY

In the course of mill experiments, the authors have measured the forces developed during plug drawing of mild steel tubes with phosphatized surface. For the measurements they were using electric resistance strain gauges.

During drawing, the drawing force is absolutely constant. Different lubricants caused only insignificant changes of drawing force. According to comparative experiments, the tubes with phosphatized surface can be drawn with the same effort as the tubes with lime-coated surface. The force acting on the mandrel stem was about 10—20% of the total drawing force.

Several of the formulae used for calculating the forces arising in tube drawing have been compared with the experimental results; the best values were given by the formula of Geleji.

ÉTUDE DES FORCES ENGENDRÉES A L'ÉTIRAGE DES TUBES

R. HANTOS, J. HEERINGER et J. SCHEY

RÉSUMÉ

Au cours d'essais en usine, les auteurs ont mesuré les forces engendrées dans la tige du mandrin pendant l'étirage des tubes en acier doux à surface phosphatée. Pour les mesures, des extensomètres à fil résistant ont été utilisés.

Pendant l'étirage, la force d'étirage est complètement constante. Des lubrifiants divers n'ont changé cette force que d'une façon insignifiante. Suivant des essais comparatifs, on peut étirer les tubes à surface phosphatée avec la même force que les tubes à surface passée à la chaux. La force agissant sur la tige du mandrin ne s'élève qu'à 10—20% de la force d'étirage totale.

Plusieurs des formules utilisées pour le calcul des forces engendrées à l'étirage des tubes ont été comparées aux résultats des mesures; le meilleur accord est donné par la formule de Geleji.

SUPERFICIAL CHANGES OF REFRACTORIES UNDER THE EFFECT OF MOLTEN GLASS

Z. VERESS

GLASSWORKS OF BEREKFÜRDŐ NEAR KARCAG (HUNGARY)

[Manuscript received 31st August, 1955]

On getting into molten glass, refractories generally change in the proximity of the boundary surface. Such change in the structure can be microscopically recognized.

The behaviour of the refractories examined here can be grouped as follows :

- | | |
|--|----------------------------|
| I. No change | Cristobalite refractories |
| II. Glass does not penetrate into the structure of the refractory, a new structural constituent is formed on the surface | Corundum refractories |
| III. Glass penetrates into the structure of the material, but no new structure constituent is formed | ZAC (zirconia brick) |
| IV. Glass penetrates into the structure and new structural constituent is formed | Corhart, mullite fireclay. |

It is advisable to examine nearly vertical refractory walls, for the contact products developed cannot accumulate on them. Thus, nothing but the effect of molten glass will be registered on the vertical walls. Products may accumulate near the bottom, so that the boundary would be formed under the effect of changed feeds of molten glass. The bottom of deep tank furnaces shows hardly any change.

Refractories generally used for tank blocks or pots are SiO_2 , Al_2O_3 or their compounds.

These materials are shown in Figs. 1, 2 and 3, in their form as crystallized from glass.

SiO_2 cristobalite (Fig. 1) crystallizes in the regular system as α modification, below 270°C it turns into its β tetragonal modification under substantial contraction. It usually develops incompletely as octahedron, more frequently in lamellar form.

Colourless corundum Al_2O_3 (Fig. 2) adopts a ditrigonal scalenohedral lamellar shape according to the base face; besides the base, also the faces

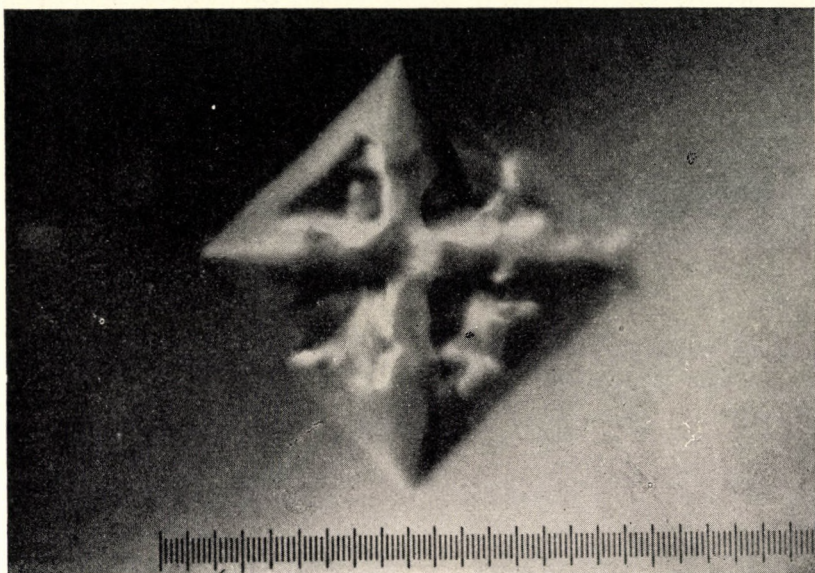


Fig. 1. Cristobalite. β modification, tetragonal, while its outside shape is octahedral, crystallized as regular α modification, in a technical glass. $n = 1,485$. Enlargement: $800 \times$ 1 sc. = 1μ

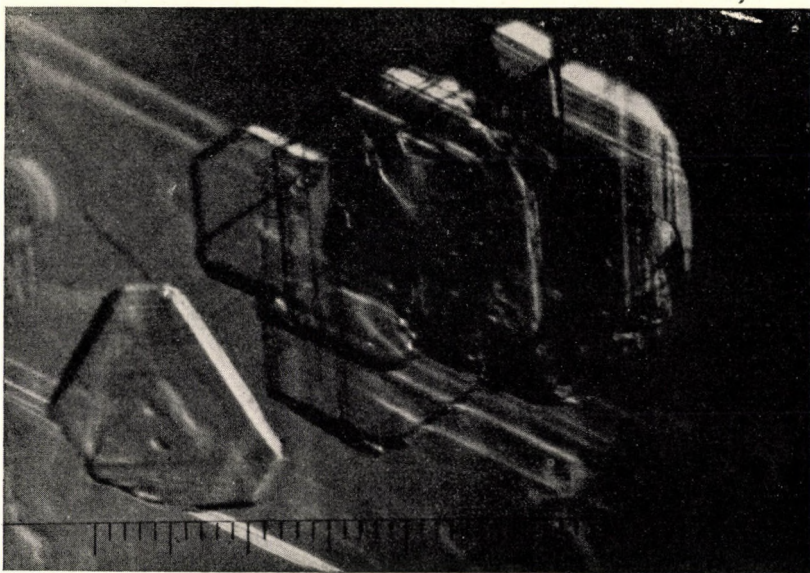


Fig. 2. Corundum crystals. Ditrigonal scalenohedral faces form the base and one protorhombohedral. Crystallized in a technical glass. $\omega = 1,769$, $\varepsilon = 1,761$, optically negative. Enlargement: $200 \times$ 1 sc. = 10μ

of one of the protorhombohedral develop. In oxidizing atmosphere it is pink, in reducing atmosphere it takes on a bluish hue due to the iron-oxide present. It is optically negative.

The mullite $3\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2$ (Fig. 3) contains 72 per cent Al_2O_3 ; it is a rhombic quadrangular rod (110) limited by faces, besides which no other form develops. It is generally colourless, in Corhart it is pleochroic. It is optically

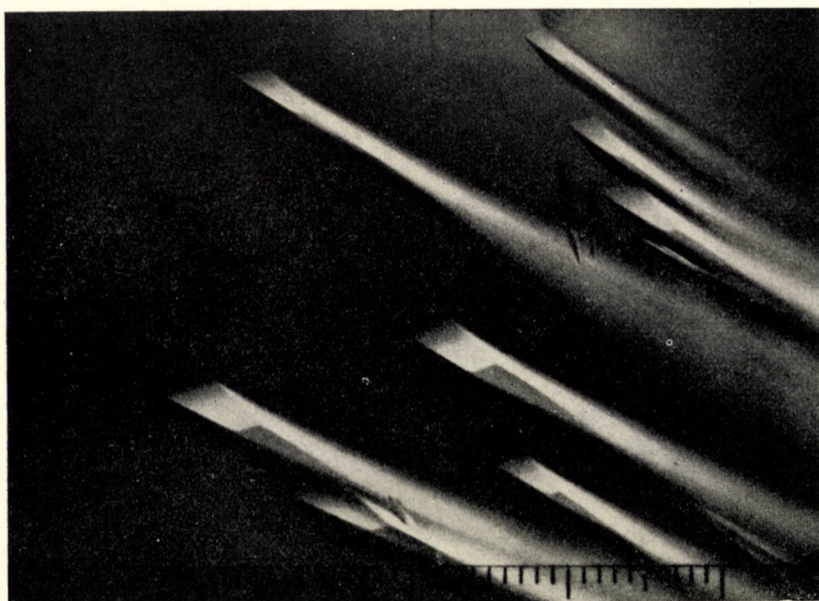


Fig. 3. Mullite crystals. Rhombic holohedral, only the prism faces parallel to the main axis are developed. Crystallized in a technical glass. $a = 1642$, $\gamma = 1,654$ optically positive. Enlargement: $200\times$ 1 sc. = $10\ \mu$

positive. Cristobalite refractory is obtained by melting slightly contaminated quartz sand, at the temperature required for glass melting, when it is transformed into a compact agglomeration of cristobalite crystals.

The modification begins above 1200°C , its rate and even its temperature depending on the degree of contamination. Amorphous SiO_2 is most easily soluble in glass, while as cristobalite it is the least prone to dissolve in glass. The structure is completely unoriented in the cristobalitized material. In Fig. 4, there is no change on the boundary and even when slowly cooling down, no cristobalite crystals develop over the existing ones. This failure is most characteristic of its low solubility; the glass contacting the cristobalite masonry is unable to get sufficiently enriched in SiO_2 to crystallize.

Corundum refractories. The materials tested were obtained after casting

Al_2O_3 into mould. Their structure varied according to the contamination it contained.

The pure crystals are usually rhombohedric agglomerates, when somewhat contaminated, they consist of specimens of lamellar shape. Their behaviour is the same up to about 10 per cent contamination, as long as no structural element besides corundum is present.

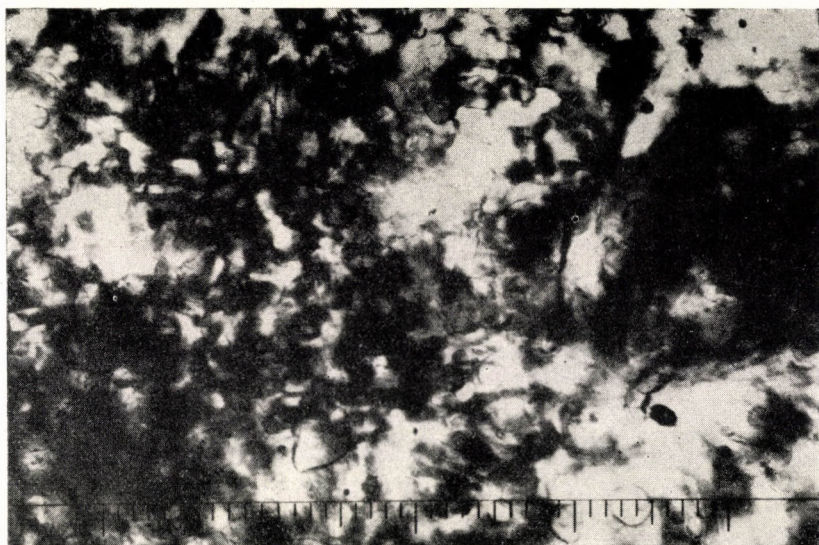


Fig. 4. *Amorphous quartz cristobalitized.* Was built in as amorphous quartz.
Enlargement: $200 \times 1 \text{ sc.} = 10 \mu$. P. light

On the boundary, the glass does not penetrate into the structure. On the surface contacting the glass, the corundum is modified, depending on the composition of the glass.

Green glass containing FeO , MgO builds up a layer consisting of spinel crystals on the boundary of the corundum crystals and the glass; in this case, the glass does not get in touch with the corundum crystals (Fig. 5). On the surface of the corundum crystals, a mullite layer is formed on the contact of hard glass rich in boric acid (Fig. 6). On slowly cooling down, the mullite needles grow into the glass in oriented position. The mullite crystals lie in the base plane of the corundum parallel to one of the rhombohedron faces.

It is specific of cristobalite and corundum refractories that on the boundary of glass, no structural particles spall on the corrosive effect of glass, and they cannot get into the glass unless through mechanical spalling.

ZAC. This refractory is shaped by casting into moulds. Its composition is the following:



Fig. 5. Cast corundum tank block, in contact with glass containing FeO, MgO. On the right, a layer of spinel and three separate spinel octahedrons. Enlargement: $150 \times 1 \text{ sc.} = 10 \mu$. P. light

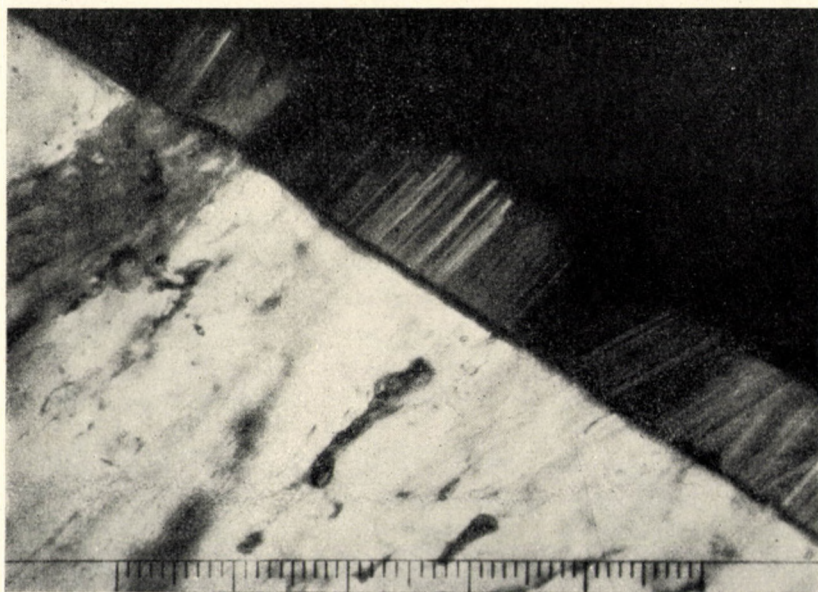


Fig. 6. Cast corundum tank block with a contact layer of borosilicate glass in which mullite crystallized. Enlargement: $150 \times 1 \text{ sc.} = 10 \mu$. P. light

SiO_2	1,00
TiO_2	0,40
ZrO_2	37,00
Al_2O_3	61,30
Fe_2O_3	0,20

Its structure is made up of crystalline lamellae and glassy layers (Fig. 6). The glass penetrates into the structure, loosening it (Fig. 7). In the glass,

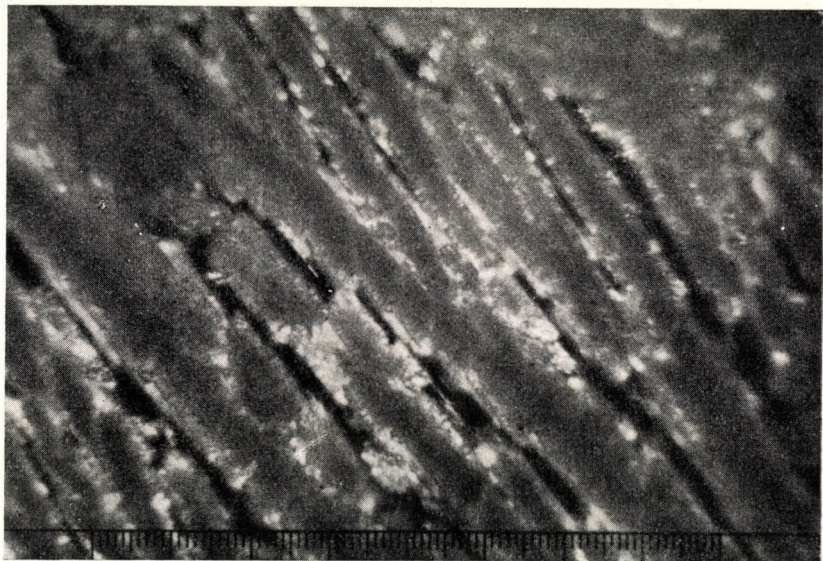


Fig. 7. ZAC tank block. Unheated structure. The dark parts are amorphous. Enlargement : 100 x 1 sc. = 10 μ . P. light

a material containing ZrO_2 may recrystallize in twin-lamellar crystals of un-oriented structure, without faces, the glass penetration into the structure of the material occurs through the amorphous vitreous structural part.

In the amorphous material, ion mobility is sufficiently high to make way for the individual ions of the glass. Crystalline particles form the ZAC substance get into the molten glass.

Mullite-base refractories. The glass boundary of the kinds cast in melted shape or ceramically made is similar.

The mullite crystals apparently dissolve in the boundary layer. The structure of corhart materials consists overwhelmingly of mullite, with scattered corundum lamellae and a few vitreous parts stained dark by the Fe Ti compounds, as it were filling the interstices of crystals (Fig. 9). The rod-shaped mullite crystals of rhombic section have a pleochroic bluish hue. The rays

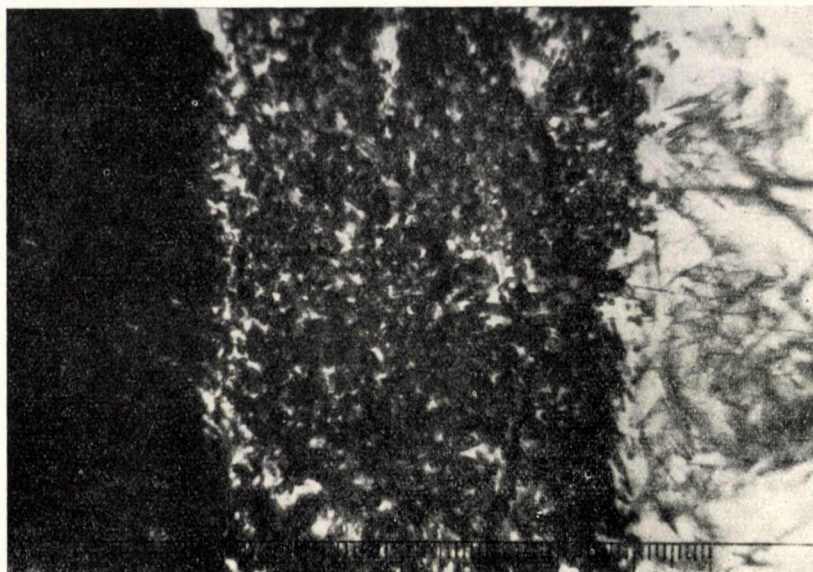


Fig. 8. ZAC tank block and glass contact layer. On the left, the original structure, in the centre, the structure has been loosened up by the penetrating glass ; on the right, the glass from which crystals containing ZrO_2 crystals have developed. Enlargement : $100 \times 1 \text{ sc.} = 10 \mu$



Fig. 9. Corhart material, original structure : mullite needles in square section, in the right hand bottom corner part of a corundum lamina (coarse relief). The interstitial material is dark, mostly amorphous matter. Enlargement : $200 \times$

oscillating in the plane parallel to the main axis are bluish. The corundum laminae are cracked, for their thermal expansion is greater than that of the mullite crystals present in overwhelming quantity, and as they shrink more during cooling, they break. On the boundary, the glass penetrates into the structure on the vitreous parts, the mullite diminishes and on the side of the glass, the structure will consist purely of corundum crystals closely embedded in glass. Rutile needles may also crystallize, however not directly on the glass side (Fig. 10).

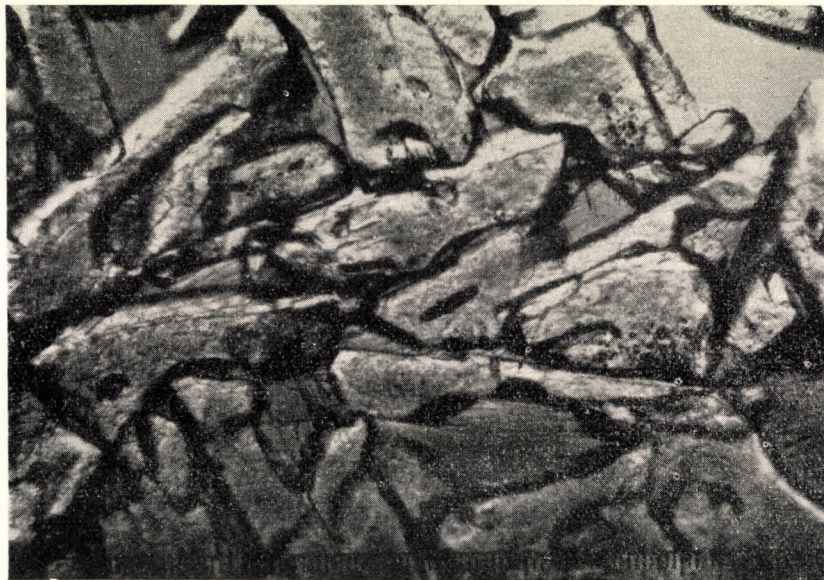


Fig. 10. Glass contact of corhart tank block. The structure is made up of close packed corundum crystals embedded in glass. In the darker parts of the glass, rutile needles developed. Enlargement: $100 \times 1 \text{ sc} = 1 \mu$

Mullite (Koppers make). The above process may be better examined on the boundary layer of the ceramic material, as almost the entire boundary layer is shown (Fig. 11). Here, the glass lies towards the right (in the direction of the glass melt), and this basic material contains some scattered corundum crystals. Further from the glass, the corundum crystals grow denser, and further still, the structure is composed of rough grained mullite embedded in glass. Thereafter follows the structure of the original material (not shown in the photograph), consisting of very fine grained mullite of 1–3 microns. Ceramic mullite is porous, permitting the glass to easily penetrate into the structure; thus the contact layer has a structure similar to that of cast mullite materials.

It is generally assumed that mullite melts incongruously at 1810°C , and in the presence of alkalis it decomposes at a temperature several hundred degrees below that. We do not agree with this assumption. While cooling down, mullite melt crystallizes into mullite. It is on this principle that Corhart materials are made: they are cast as melts and are agglomerates of mullite crystals.

The glass boundary of overwhelmingly or entirely mullite materials looks as follows: inside, farthest from the glass contact, there is little glass

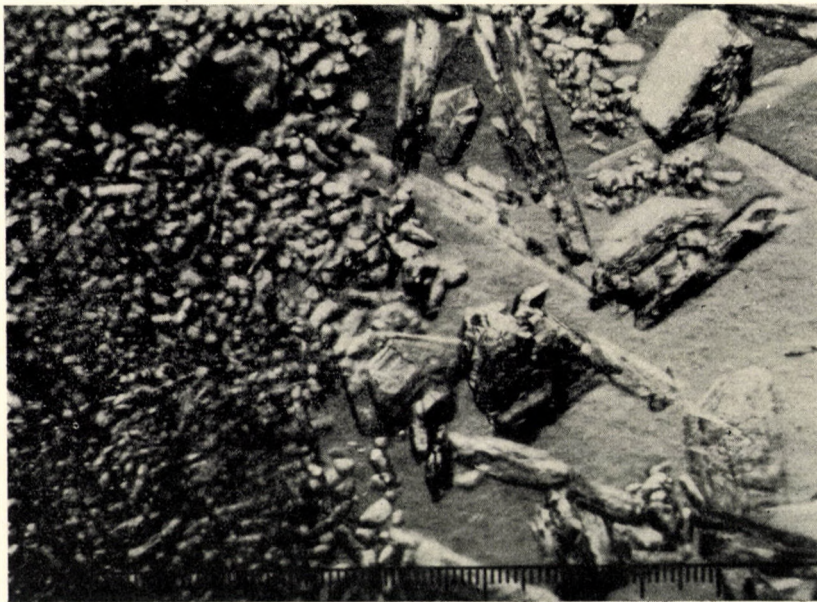


Fig. 11. Ceramic tank block of mullite in contact with glass. On the left, mullite crystals already grown; on the right, corundum laminae; both embedded in glass. Enlargement: $100\times$
1 sc. = 10μ

among the mullite crystals; the quantity of glass grows in the structure towards the glass, while the concentration of the mullite decreases; the mullite specimens are, however, larger; farther, single corundum crystals are formed, often surrounded by a glass corona, and the outermost zone consists of corundum crystals only, embedded in glass.

The solubility of the same crystalline material varies as a function of the crystal size.

The solution surrounding the smaller crystals has a higher concentration. Refractories used for tank blocks must endure temperature fluctuations during work, and the mullite crystals embedded in glass which dissolve are forced to grow. In the case of mullite and corundum crystals embedded in glass,

the higher lattice energy of the corundum will prevail at higher temperature. Corundum will increase, mullite will dissolve while in the glass, the aluminium ions in the direction of the corundum, until finally the mullite vanishes.

In colder glass, ion migration is more difficult, and the mullite crystallizes. Besides Al_2O_3 , mullite also contains SiO_2 , and thus it can crystallize also where the Al_2O_3 concentration is lower. The mullite needle shown in Fig. 13 crystallized later than the corundum lamina; in the vicinity of the corundum, the mullite rod is incompletely developed due to the lower Al_2O_3 concentration.

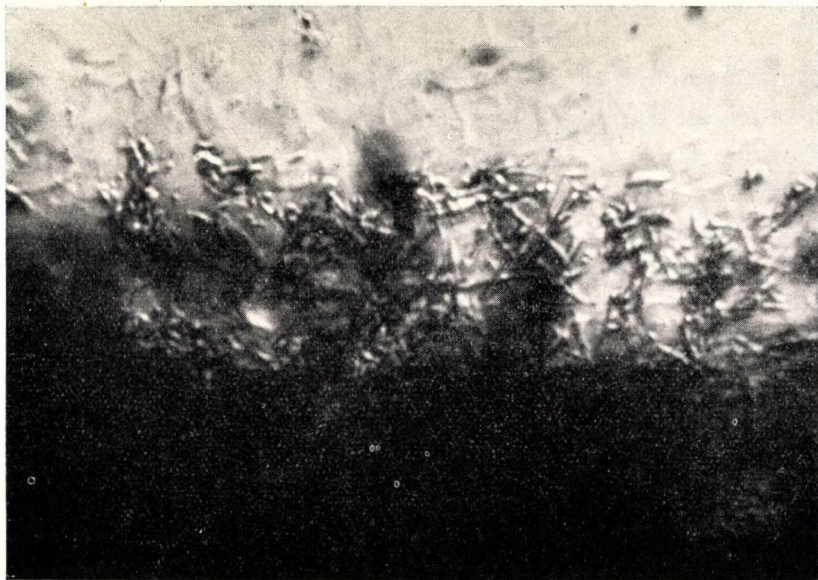


Fig. 12. High-silica pot material in contact with glass. Mullite crystals embedded in glass. No corundum is present. Enlargement: $1000 \times$ 1 sc. = 1μ

Mullite, without an agent, such as glass, does not decompose until its melting point is reached, under the slow effect of heat.

On the boundary, the behaviour of fire-clays of low Al_2O_3 content differs from that of mullite materials inasmuch as the Al_2O_3 concentration is too low for the corundum to crystallize; all that happens is that the mullite crystals grow larger and at the same time glass penetrates into the structure, reducing the Al_2O_3 contents of the interstitial glass.

Thus, especially at lower operating temperature, no corundum crystallizes. Fig. 12 was made of the bottom glass contact of a high-silica pot; only two structural elements were present: glass and mullite.

Between the two extremes, all grades of transition are possible depending on the Al_2O_3 contents of the fireclay.

The behaviour of the surface of the boundary layer facing the glass determines the rate of the fireclay's wear, in other words, of the rapidity of its dissolution in glass. Most resistant are the materials, the boundary structure of which is free from glass. Corhart materials are more stable than ceramic mullite materials. In the former, the corundum crystals are far more closely packed in the boundary layer than in the latter, therefore, they dissolve more slowly.

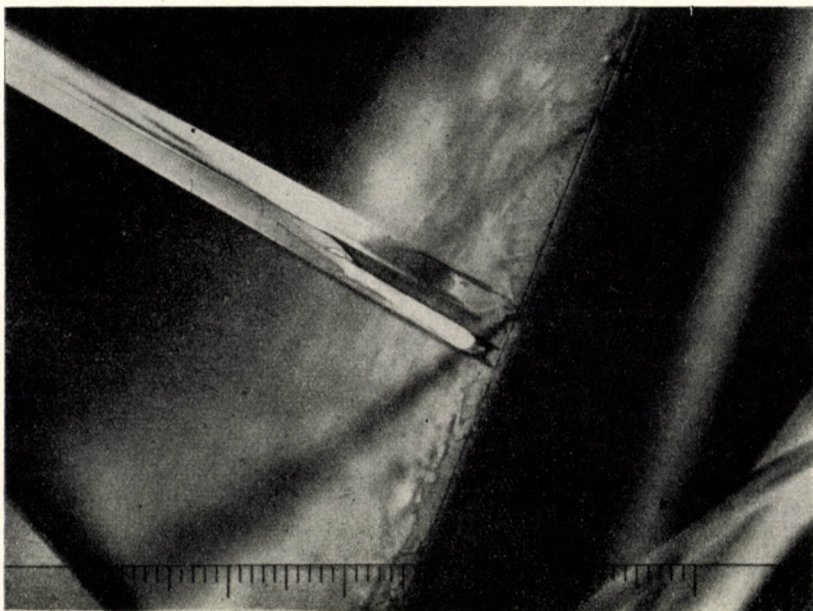


Fig. 13. Corundum lamella and mullite rod. Corundum was first to crystallize. The mullite rod is flattened and deficient in the proximity of the corundum lamella. The Al_2O_3 concentration was low for its buildup. Enlargement: $150 \times$ 1 sc. = 10μ P. light

Frequently, particles from the refractories get into the molten glass, appearing as stones in the finished ware, causing reject.

From all refractories, in the boundary layer of which there is glass penetration, corundum crystals are likely to get into the glass melt. Tank blocks of mullite are most prone to such behaviour. Due to the direct contact effect with glass melt, corundum crystals become embedded in the glass.

The glass melt reduces the viscosity of the glass in the structure of the refractory through diffusion, thus the corundum crystals get from the masonry into the glass melt, and arrive into the finished product as glass stones enveloped in nepheline crystals.

This is not possible in materials with no glass penetration, and particles can get into the glass melt only by mechanical action.

In more acid fireclay material, no corundum crystallizes on the boundary, only the mullite crystals grow. Mullite crystals from the masonry do not get into the glass, due to their relatively high solubility.

The contact layer can be clearly observed even macroscopically, on the surface of the break almost perpendicular to the contact of refractory and glass, appearing as a light, almost white streak in fireclay materials.

The contact layer of mullite materials is stained pink by the corundum crystals formed there, which are coloured by ferric oxide.

Symbols employed

- 1 d = 1 division on the scale in the photograph. E. g. 1 d = 10 μ means that the length of one scale division is 0,010 mm
 P. light = the photograph was taken with polarized light and crossed nicols
 ω = refraction index of the ordinary ray of a crystal having one optical axis.
 ε = refraction index of the extraordinary ray of a crystal having one optical axis.
 α = refraction index of the fastest ray of a crystal having two optical axes.
 γ = refraction index of the slowest ray of a crystal having two optical axes.
 Refraction indices refer to the wave length of the NaD line.

SUMMARY

Refractories generally change when they get into molten glass. The change of structure in the proximity of the boundary surface is microscopically investigated. The behaviour of refractories examined has been as follows:

The cristobalite group shows no change.

Corundum refractories exhibit the formation of a new structural constituent on the boundary surface, but no penetration of glass into the refractory is observable.

ZAC (Zirconia brick): Glass penetrates into the structure of the material, but forms no new structural constituent in it.

Mullite base refractories present both penetration of glass and formation of a new structural constituent.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ ОГНЕУПОРНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ РАСПЛАВЛЕННОГО СТЕКЛА

З. ВЕРЕШШ

РЕЗЮМЕ

При погружении огнеупорных материалов в расплав стекла, вблизи соприкасающейся поверхности происходит вообще изменение огнеупорных материалов. Это структурное изменение можно установить микроскопическим исследованием.

Изменение подвергнутых исследованию огнеупорных материалов можно разбить на четыре группы.

1. Нет изменений: кристобалитные материалы.

2. Стекло не проникает в структуру огнеупорных материалов, на поверхности образуется новый элемент структуры: корундные материалы.

3. Стекло проникает в структуру материала; при этом новой структуры не образуется: цирконевый огнеупорный материал.

4. Стекло проникает в структуру и образуется новый элемент структуры: шамотные, муллитные, корхартные материалы.

Целесообразно проводится исследование приближенно вертикальных обмуровок, так как образующиеся контактные продукты не скапливаются. Поэтому в каждый момент времени фиксируется действие влияния расплава стекла на вертикальной обмуровке. Вблизи обмуровки пода могут скапливаться некоторые продукты и контакт возникает под влиянием меняющегося материала стекла. Материал под глубоких ванн изменяется в очень незначительных масштабах.

MODIFICATIONS SUPERFICIELLES DES MATIÈRES RÉFRACTAIRES SOUS L'INFLUENCE DU VERRE FONDU

Z. VERESS

RÉSUMÉ

Les matières réfractaires parvenues dans du verre fondu subissent ordinairement des changements près de la surface limite ; ces changements sont étudiés au microscope. Les matières réfractaires examinées ont subi les transformations suivantes :

Groupe cristobalite : Pas de changement.

Groupe corindon : Le verre ne pénètre pas dans la structure de la matière réfractaire ; un nouvel élément structural se forme à la surface limite.

Groupe ZAC (à l'oxyde de zirconium) : Le verre pénètre dans la structure, mais il n'y a pas d'élément structural nouveau développé.

Groupe corhart, mullite : Pénétration du verre et formation d'un nouvel élément structural.

VERÄNDERUNGEN DER OBERFLÄCHE FEUERFESTER STOFFE UNTER DEM EINFLUSS VON GLASSCHMELZEN

Z. VERESS

ZUSAMMENFASSUNG

Wenn feuerfeste Stoffe in eine Glasschmelze gelangen, so verändern sie sich gewöhnlich im Bereiche der Grenzfläche. Solche Gefügeveränderungen werden mikroskopisch bestimmt. Das Verhalten der untersuchten feuerfesten Stoffe lässt sich wie folgt gruppieren :

Kristobalitgruppe : Keine Veränderung.

Korundgruppe : Das Glas dringt nicht in das Gefüge des feuerfesten Stoffes ein ; es bildet sich ein neuer Gefügebestandteil an der Grenzfläche.

ZAC (Zirkonerdesteine) : Das Glas dringt in das Gefüge des feuerfesten Stoffes ein ; es bildet sich kein neuer Gefügebestandteil.

Corhartgruppe, Mullitgruppe : Das Glas dringt in das Gefüge ein und es bildet sich ein neuer Gefügebestandteil.

DIE VERARBEITUNG VON METALLISCHEM TITAN*

Prof. L. GILLEMOT

KORRESP. MITGLIED DER UNGAR. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MECHANISCH-TECHNOLOGISCHES INSTITUT DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT, BUDAPEST

1. Einleitung

Zur Gewinnung des metallischen Titans verwendet man zur Zeit in Ungarn zwei Verfahren, teilweise das von FAST, VAN ARKEL und DE BOER stammende sogenannte Jodidverfahren und teilweise eine Modifikation des Kroll-Verfahrens. Es ist eine wohlbekannte Tatsache, dass das aus der Zersetzung des Titanetetrajodids stammende metallische Titan äusserst rein ist, während das mit dem Kroll-Verfahren oder durch eine beliebige Modifikation von diesem hergestellte metallische Titan immer gewisse Mengen an O_2 -, H_2 -, N_2 - und Fe-Verunreinigungen enthält. Die Eigenschaften der beiden Titanarten können deshalb weder vom Standpunkt der Festigkeit noch von dem der Technologie als völlig gleichwertig angesehen werden. Als metallisches Titan kann man eigentlich nur das durch das Jodidverfahren hergestellte Titan betrachten, während das durch das Kroll-Verfahren hergestellte Titan immer eine Legierung darstellt. Man kann im letzteren Falle höchstens damit rechnen, dass der Gehalt an Legierungskomponenten sehr klein wird.

Nach Auffassung der bisher veröffentlichten Fachliteratur gibt die Härte des Titans gleich einen gewissen Hinweis auf die Menge der enthaltenen Verunreinigungen. Der Zusammenhang zwischen den Verunreinigungen und der Härte des Metalles wurde schon von mehreren Verfassern untersucht.

Abb. 1 zeigt auf Grund der Ergebnisse von JAFFEE und CAMPBELL den Einfluss von O_2 , N_2 und Fe auf die Härte des Titans. Beim Kroll-Verfahren hängt der Gehalt an Verunreinigungen sehr stark von der Reinheit der verwendeten Materialien, vom Aufbau des Reaktors sowie vom Ablauf der Reaktion und der Art der Verarbeitung des so entstandenen Titanschwammes ab.

Zur Verarbeitung des Titanschwammes erscheinen nach unseren heutigen Kenntnissen zwei Wege gangbar. Entsprechend dem einen werden alle Produkte, die sich im Reaktor gebildet haben — also Titan, Rückstand an Magnesium und Magnesiumchlorid —, im Hochvakuum geglüht, wobei das Titan durch Destillation vom Magnesiumüberschuss bzw. vom Magnesiumchlorid befreit werden kann.

Der zweite Weg ist der der nassen Aufbereitung, wobei das Magnesiumchlorid mit Wasser und das metallische Magnesium mit verdünnter HCl entfernt wird. Vom Standpunkte der Verunreinigung durch Gase ist das durch Destillation hergestellte Titan viel reiner, da im Falle des durch Waschen und Auslaugen gereinigten Titans die Wahrscheinlichkeit der O_2 - und H_2 -Aufnahme weit grösser ist. Von diesem Standpunkte aus gesehen kann man auch noch innerhalb der verschiedenen Kroll-Verfahren je nach der Verarbeitung zwei verschiedene Qualitäten voneinander unterscheiden: das auf nassem Wege hergestellte Titanpulver bzw. der mittels Glühens hergestellte Titanschwamm. Die Brinellhärte des durch Waschen gereinigten Titans liegt zwischen 190 und 250 kg/mm²-Einheiten, die des durch Vakuumdestillation gereinigten Titans je nach der Reinheit zwischen 130 und 190.

Die Frage wird noch komplizierter, wenn man die Qualität des Titanschwammes innerhalb der einzelnen Reaktionen untersucht. Nach Angaben von WARTMANN, BAKER, NETTLE und ROMME kann man in den Reaktoren vier verschiedene Zonen gut voneinander unterscheiden (Abb. 2). Die reinste Zone ist mit 1 bezeichnet, während die mit 2, 3 und 4 bezeichneten in der

* Vortrag gehalten am Kongress für Leichtmetalle in Budapest, am 29. September 1955; Manuskript vorgelegt der Kongressleitung an der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 30. August 1955.

angegebenen Reihenfolge mehr und mehr verunreinigt sind. Als Erklärung wird von den Autoren angegeben, dass jener Teil des Titans, der mit der Eisenapparatur in Berührung kommt, sowie der sich zuerst bildende Titanschwamm alle Verunreinigungen des Magnesiums in sich aufnehmen, so dass die Zone 4 die am meisten verunreinigte ist. Das Ausmass der Verunreinigung wird in der Zone 1 am kleinsten. Zwischen der Härte eines Körpers, der aus dem Titanschwamm der Zone 1 bzw. der Zone 4 hergestellt wurde, besteht ein Unterschied von rund 50%.

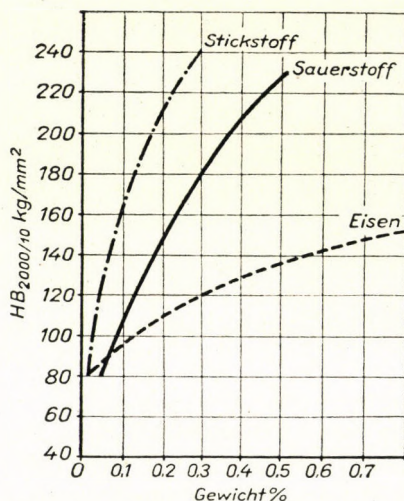


Abb. 1. Der Einfluss von O₂, N₂ und Fe auf die Härte des Titans (nach JAFFEE und CAMPBELL)

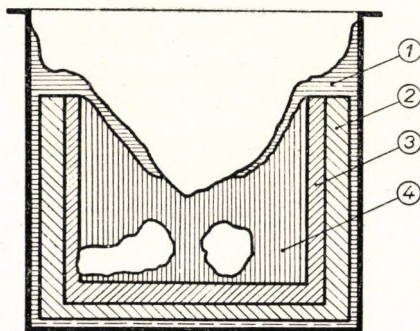


Abb. 2. Die vier Zonen von verschiedener Reinheit des Titans im Reaktor

Bei der Verarbeitung des im Reaktor hergestellten Titanschwamms kann man also zwei Wege einschlagen: entweder hat man die ganze Menge, die sich im Reaktor bildete, bei der Weiterverarbeitung zu homogenisieren, wobei sich eine mittlere Qualität ausbildet, oder aber hat man die einzelnen Zonen 2, 3 und 4 gesondert zu behandeln und zu verarbeiten, vielleicht mit einer solchen Menge an Titanschwamm der Zone 1 vermischt, dass man eine dem gewünschten Zweck entsprechende Qualität erhält. Eine solche Sortierung des Schwamms kommt selbstverständlich nur bei grösseren Reaktoren in Frage, ist aber ebendeshalb im Falle einer Herstellung in industriellem Massstabe von grösster Bedeutung.

Man gewinnt also in den Reaktoren zwangsläufig ein hauptsächlich mit Gasen und Eisen verunreinigtes Titan, dessen Eigenschaften von denen des

reinen Titans sehr stark abweichen. Da sehr viel an solchem Material gewonnen wird, so ist die Frage zu untersuchen, ob dieses Material in der Industrie irgendwo verwendet werden kann und ausserdem welche Legierungen man erhält, wenn der ganze Inhalt eines Reaktors als homogene Einheit verarbeitet wird. Vom Standpunkte der Qualität kann man also je nach der Art der Herstellung von drei verschiedenen Titansorten reden, die in der Reihenfolge der immer geringeren Reinheit folgendermassen zusammengestellt werden können:

1. Jodidtitan,
2. I. Sorte aus dem Kroll-Reaktor,
3. II. Sorte aus dem Kroll-Reaktor.

Die Reinheit der zweiten und dritten Qualität hängt ausserdem auch noch davon ab, ob die Aufbereitung des Schwamms durch Vakuumdestillation oder durch Waschen erfolgt war. Man kann deshalb vom Jodidtitan mit einer Brinellhärte von 80 kg/mm² angefangen bis zum Kroll-Titan II. Sorte gewaschen, mit einer Brinellhärte von 250—260 kg/mm², eine breite Skala des metallischen Titans antreffen. Jede Qualität hat ein entsprechendes Anwendungsgebiet. Für jede Qualität besteht aber gleichzeitig auch die Forderung, dass sie auch kalt verformbar sein muss. Es stellt sich also die Frage, wie man das Jodidtitan bzw. die verschiedenen Schwammsorten, die man aus den Krollreaktoren gewinnt, zu verarbeiten hat, damit sie über eine entsprechende, zur Verarbeitung notwendige Duktilität verfügen.

Unsere eigenen früheren Versuche — die im Jahre 1952 einem Ausschuss der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt wurden — sowie spätere Angaben aus der Fachliteratur zeigten, dass Titan von gleicher Reinheit in Abhängigkeit des Verformungsgrades und der hernach folgenden Wärmebehandlung sehr verschiedene Festigkeitseigenschaften aufzuweisen vermag. Eine systematische Untersuchung dieser Frage führte weiter zu der Erkenntnis, dass die Härte des Titans allein für die Verformbarkeit des Metalles nicht ausschlaggebend ist und mit einer entsprechenden Wärmebehandlung relativ härtere, also verhältnismässig mehr verunreinigte Qualitäten in ein Material umgewandelt werden können, das über eine entsprechend grosse Dehnung verfügt, so dass seine industrielle Verwendung gewährleistet werden kann.

Die im folgenden beschriebenen Versuche wurden mit zwei verschiedenen Titanqualitäten durchgeführt: Titan, mit dem Jodidverfahren hergestellt, mit einer Brinellhärte von rund 90 kg/mm² und Titan, mit dem Kroll-Verfahren hergestellt, nach einer Glühung, mit einer Brinellhärte von rund 225 kg/mm².

2. Die Beschreibung der Versuche

Der durch das Kroll-Verfahren hergestellte Titanschwamm wurde durch Waschen und Auslaugen von den Nebenprodukten der Reaktion befreit und

dann das so gewonnene Titanpulver in einen zylindrischen Stahlmantel mit 80 mm Durchmesser und 120 mm Höhe gepresst. Das Ende des Stahlmantels wurde luftdicht verschweisst. Das Ganze wurde 2 Stunden lang bei einer Temperatur von 900°C geglüht und dann bei dieser Temperatur zu einer 20 mm dicken Platte geschmiedet. Diese wurde ebenfalls warm zu einem 10 mm dicken Titanblech verwalzt. Das Material wurde nach dem Warmwalzen noch einmal geglüht, hernach der Stahlmantel entfernt und die weitere Verformung bei zwei verschiedenen Temperaturen — bei Zimmertemperatur und bei 300°C — fortgesetzt.

Das Jodidtitan, das in der Form eines Fadens mit ungefähr 6 mm Durchmesser vorlag, wurde kalt zu einem Band verwalzt, sodann bei einer Temperatur von 700°C 1 Stunde lang geglüht.

Wir haben also im Laufe unserer Versuche drei Serien aus den zwei Ausgangsmaterialien hergestellt: Kroll-Titan, bei Zimmertemperatur verwalzt, dasselbe bei einer Temperatur von 300°C verwalzt und Jodidtitan, kaltgewalzt. Das Ziel der Versuche war die Bestimmung der Ausbildung der Korngrösse in Abhängigkeit des Verformungsgrades und der Temperatur des nach der Verformung folgenden Glühens, sowie die Ausarbeitung des Zusammenhanges zwischen der Temperatur und Dauer des Glühens einerseits und dem Verformungsgrade andererseits.

Die Messung der Korngrösse erfolgte als Funktion des Verformungsgrades und der Temperatur immer nach einer Glühdauer von 10 Stunden, da auf Grund unserer früheren Erfahrungen eine länger als 10 Stunden währende Wärmebehandlung im Laufe der Herstellung der Titanhalbzeuge nur selten notwendig ist. Auf Grund der mikroskopischen Aufnahmen konnte festgestellt werden, dass die Rekristallisation nicht einmal nach 10 Stunden beendet war, so dass die in Abb. 3 dargestellten Diagramme nicht als vollständige Rekristallisationsdiagramme betrachtet werden können, für die Praxis aber einen guten Anhaltspunkt über die Verhältnisse darstellen, die sich im Laufe der betriebsmässigen Wärmebehandlungen ergeben.

Man sieht aus den in Abb. 3 wiedergegebenen Diagrammen, dass das Jodidtitan viel eher zu einer Kornvergröberung neigt als das Kroll-Titan. Die Korngrösse des Kroll-Titans scheint im Temperaturbereich von 600 bis 850°C von der Temperatur und dem Verformungsgrade praktisch unabhängig zu sein. Eine Kornvergröberung in gesteigertem Masse zeigt sich erst bei einer Temperatur von 900°C , wo die grössten Körner bei einem Kaltverformungsgrade von etwa 5–10% zu sehen sind.

Das Jodidtitan verhält sich im Prinzip ganz ähnlich.

Aus den mikroskopischen Untersuchungen geht hervor, dass eine Glühung bei 500 bzw. 550°C von einer Dauer von 10 Stunden die ursprüngliche Struktur noch nicht ganz verschwinden lässt (siehe Abb. 4 und 5). Abb. 4 zeigt einen Anschliff nach einem Kaltverformungsgrad von 10% und einer 10stündigen

Glühung bei 500° C, während Abb. 5 von einer Probe nach einem Kaltverformungsgrad von 35% und ebenfalls einer 10stündigen Glühung bei 500° C angefertigt wurde. Während also die Rekristallisation nach einem Kaltverformungsgrad von 10% schon bei einer Temperatur von 500° C erfolgte, zeigt

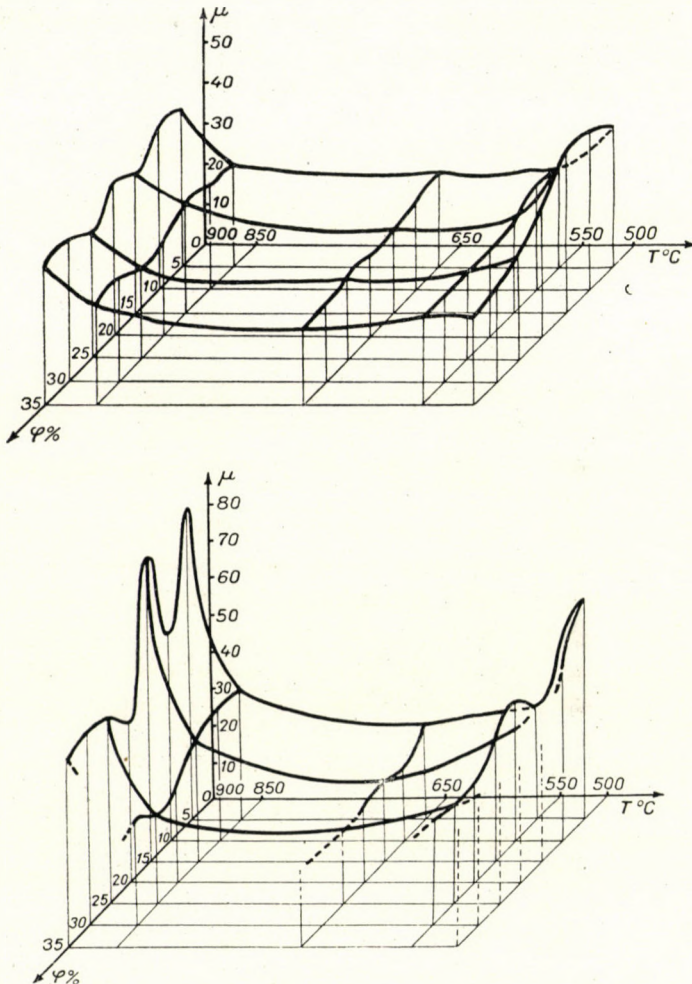


Abb. 3. Messung der Korngrösse bei zwei Titansorten. a) Kroll-Titan (nach 10stündigem Glühen), b) Jodittitan (nach 10stündigem Glühen)

sich nach einem Kaltverformungsgrad von 35% und einer 10stündigen Glühung bei 500° C noch immer die charakteristische Struktur des kaltverformten Materials. Nach den mikroskopischen Befunden ist also die untere Grenze der Rekristallisation im Falle von 10stündigen Glühungen bei einer Temperatur von 550–600° C vom Verformungsgrad abhängig.

Bei den Proben, die bei einer Temperatur von 300°C bzw. bei Zimmertemperatur verformt wurden, konnte man innerhalb der einzelnen Serien keine besondere Veränderung der Korngrösse beobachten. Man darf also ruhig feststellen, dass eine Verformung, die unterhalb der unteren Grenztemperatur

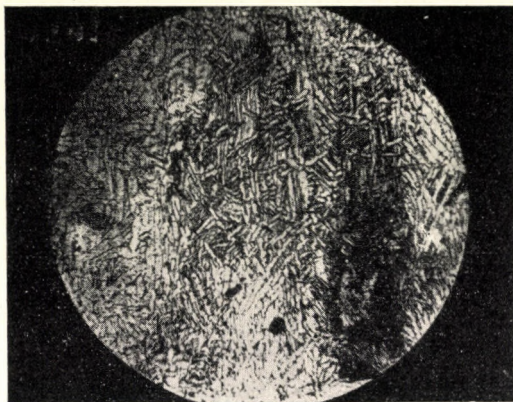


Abb. 4. Gefüge nach einer Kaltverformung von 10% und einer 10stündigen Glühung bei 500°C

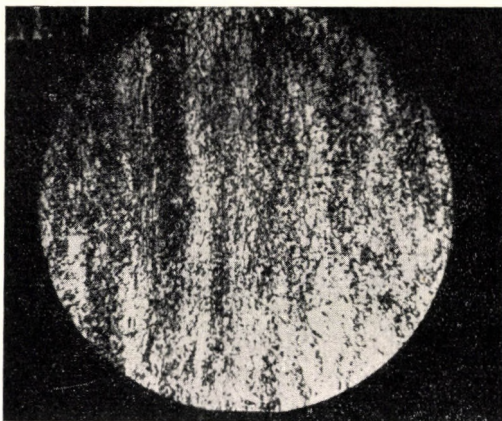


Abb. 5. Gefüge nach einer Kaltverformung von 35% und einer 10stündigen Glühung bei 500°C

der Rekristallisation durchgeführt wird, keine wahrnehmbare Wirkung auf die Korngrösse ausübt.

Der Zusammenhang zwischen der Glühtemperatur und Glühdauer sowie dem Verformungsgrad ist in den Abb. 6, 7, 8 und 9 für den Fall von Jodidtitän bzw. Kroll-Titan dargestellt. Eine halbstündige Glühung des Jodidtitäns als

Funktion des Verformungsgrades weist zwar auf eine Verminderung der Härte bei 500 und 600° C hin, doch bleibt die Härte entsprechend dem grösseren Verformungsgrad noch immer ziemlich gross; eine nennenswerte Erweichung zeigte sich erst bei 700–800° C, ohne dass aber der ursprüngliche weiche Zustand mit einer Brinellhärte von 90 kg/mm² erreicht werden konnte. Nach einer

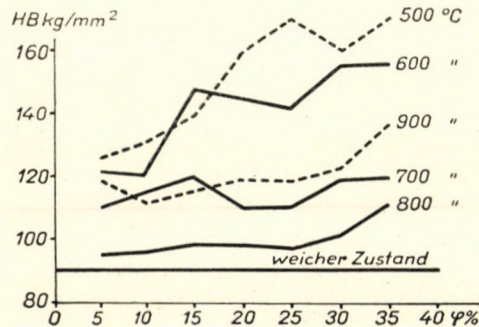


Abb. 6. Die Erweichung von Jodittitan nach einer halbstündigen Glühung nach erfolgter Kaltverformung

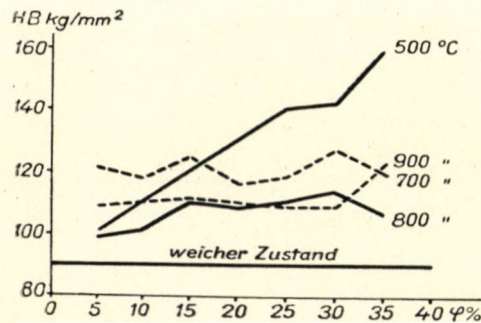


Abb. 7. Die Erweichung von Jodittitan nach einer 10stündigen Glühung nach erfolgter Kaltverformung

Glühung bei einer Temperatur von 900° C zeigte sich jedoch eine gut ausgeprägte Verfestigung. Man kommt zu ähnlichen Ergebnissen, wenn man die Dauer der Glühung auf 10 Stunden verlängert. Eine Erweichung erfolgt auch in diesem Falle bei einer Temperatur von 700–800° C, während bei 900° C wieder eine Verfestigung eintritt.

Man kommt zu ähnlichen Diagrammen, wenn man die Glühversuche mit Kroll-Titan durchführt, wobei die Härte nach einer Glühung bei 900° C jeweils grösser war als nach einer Glühung bei 700–800° C, ganz gleichgültig, ob die Dauer der Glühung eine halbe oder zehn Stunden betrug. Der Charakter

der Erweichung beim Kroll-Titan ist zusammenfassend aus Abb. 10 ersichtlich. Die Verminderung der Härte beginnt bei 550°C , was mit den Diagrammen der Korngrößenveränderung völlig übereinstimmt; die volle Erweichung erfolgt binnen einer halben Stunde bei einer Temperatur von 680°C , während nach einer Glühung bei 900°C eine Zunahme der Härte zu bemerken ist.

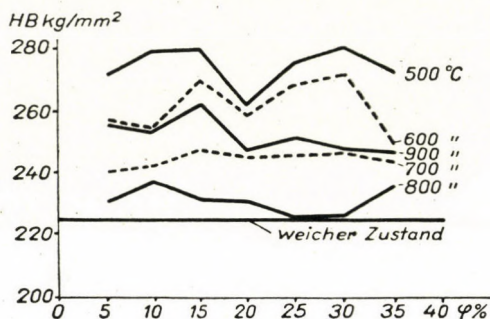


Abb. 8. Die Erweichung des Kroll-Titans nach einer halbstündigen Glühung nach erfolgter Kaltverformung

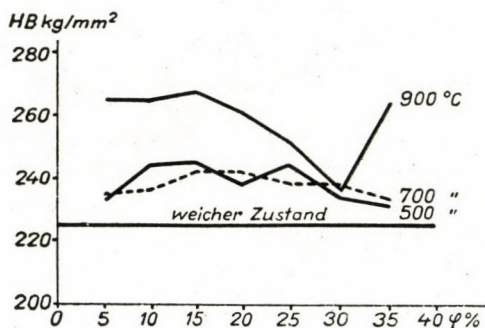


Abb. 9. Die Erweichung des Kroll-Titans nach einer 10stündigen Glühung nach erfolgter Kaltverformung

Man kann also behaupten, dass für die Glühung des Kroll-Titans als untere Temperaturgrenze eine Temperatur von 680°C zu gelten hat. Auch im Falle der oberhalb von 680°C durchgeführten Glühungen muss man unterscheiden, ob die Glühung im α -Felde oder oberhalb der Temperatur bzw. des Temperaturbereiches für die $\alpha \rightarrow \beta$ -Umwandlung erfolgt war.

Im weiteren wurden deshalb zweierlei Wärmebehandlungen zur Bestimmung der Festigkeit und der Dehnung durchgeführt; bei einer Temperatur oberhalb 680°C und unterhalb der $\alpha \rightarrow \beta$ -Umwandlung. Die Ergebnisse für Jodittitan gehen aus der Tabelle I hervor. Die in der Tabelle angegebenen Werte stellen den Mittelwert der nach einem Kaltverformungsgrad von 5, 15,

Tabelle I

Wärmebehandlungen zur Feststellung der Festigkeit und Dehnung des Jodititans

Wärmebehandlung	σ_B kg/mm ²	σ_F kg/mm ²	δ_5 %
Unmittelbar in dem aus der gasförmigen Phase entstandenen Zustand gemessen, ohne jede vorherige Kaltverformung oder Wärmebehandlung	36,3	28,0	19,7
Nach Kaltverformung 1 Stunde bei 750° C gegläht	35,3	27,2	19,7
Nach Kaltverformung 1 Stunde bei 900° C gegläht	36,1	23,6	32,6

25 und 35% geglähten Probestäbe dar. Die erhaltenen Ergebnisse bestätigen die Behauptung von JAFFEE, HOLDEN und OGDEN, wonach die Zerreißfestigkeit und die Streckgrenze des reinen Titans bei grösserer, die Dehnung jedoch bei kleinerer Korngrösse zunimmt.

Im Falle des Kroll-Titans zeigen die Werte eine grosse Streuung, je nachdem, welcher Wärmebehandlung das Material vorher unterworfen wurde. Ein Material mit folgender chemischer Zusammensetzung

$$\begin{aligned} \text{O}_2 &= 0,22 \% \\ \text{Fe} &= 0,14 \% \\ \text{Si} &= 0,023\% \text{ und} \end{aligned}$$

mit einer Ausgangshärte von 225 kg/mm² ergab nach Kaltwalzen und Glühung bei einer beliebigen, jedoch oberhalb der Erweichungstemperatur und unterhalb des Temperaturbereiches der $\alpha \rightarrow \beta$ -Umwandlung liegenden Temperatur folgende Resultate :

$$\begin{aligned} \sigma_B &= 73 \text{ kg/mm}^2; & \sigma_F &= 63 \text{ kg/mm}^2; \\ \delta_5 &= 5,3 \%. \end{aligned}$$

Die Werte sind als Mittelwerte zu betrachten.

Nach einer Glühung bei einer Temperatur von 750, weiter 900° C, die 10 Stunden dauerte und die Verminderung des Wasserstoffgehaltes bezweckte, kommt man zu den Ergebnissen, die in der Tabelle II zusammengefasst wurden. Aus diesen Angaben sieht man, dass sich das Kroll-Titan nach einer lang dauernden, im Gebiet des β -Feldes liegenden Glühung stark verfestigt und dass seine Dehnung kleiner ist, als die des im Gebiet des α -Feldes geglähten Titans. Beide 10stündigen, im Vakuum durchgeführten Glühungen führten jedoch zu einer starken Vergrößerung der Dehnung, ohne nennenswerte Änderung der Festigkeit. Es ist sehr interessant, dass das im Vakuum bei einer Temperatur von 900° C 10 Stunden lang geglähte Material bei einer grösseren Härte eine viel bessere Dehnung aufweist als das einer ähnlichen Wärmebehandlung

Tabelle II

Wärmebehandlungen zur Feststellung der Festigkeit und Dehnung des Kroll-Titans

Wärmebehandlung	σ_B kg/mm ²	σ_F kg/mm ²	δ_Z %	H_V kg/mm ²
Nach Kaltverformung während der $\alpha \rightarrow \beta$ -Umwandlung gegläht	73,0	63,0	5,3	225
10 Stunden bei 750 °C im Vakuum gegläht	73,6	61,5	13,8	225
10 Stunden bei 900 °C im Vakuum gegläht	75,5	63,6	9,5	260

unterworfenen, jedoch normal geglähten Material. Die auf solche Art 10 Stunden lang bei einer Temperatur von 750 bzw. 900° C geglähten Materialien wurden nachher kalt verformt und dann wieder im Gebiet des α -Feldes, bei 700° C, 1 Stunde lang gegläht. Die 10 Stunden lang bei 900° C geglähten, hernach kaltgewalzten und dann bei 700° C eine Stunde lang geglähten Probestäbe zeigten folgende Ergebnisse :

$$\sigma_B = 78,8 \text{ kg/mm}^2; \quad \sigma_F = 63,7 \text{ kg/mm}^2; \quad \delta_s = 17\%$$

Das bei 750° C 10 Stunden lang geglähte Material führte zu denselben Festigkeitswerten, eine weitere Vergrößerung der Dehnung war jedoch nicht zu verzeichnen.

Für die erwähnte Erscheinung kann man folgende Erklärung finden : mit einer bei höherer Temperatur im Vakuum durchgeführten Glühung von langer Dauer lässt sich der Wasserstoffgehalt des Titans stärker verringern, u. zw. um so mehr, je grösser die Glühtemperatur und die Glühdauer sind. Vom Standpunkte des Betriebes wäre es also zweckmässiger, diese Glühung schon im Gebiet des β -Feldes durchzuführen, wobei jedoch eine Vergrößerung der Härte und Verringerung der Dehnung eintreten, wahrscheinlich darum, weil die im Kroll-Titan unvermeidlichen Verunreinigungen in Lösung gehen. Mit einer darauf folgenden Kaltverformung und im Gebiet des α -Feldes durchgeführten Glühung können die optimalen Festigkeitseigenschaften erreicht werden. Um zu beweisen, dass die so erreichten Festigkeitseigenschaften äusserst vorteilhaft sind, sei zum Vergleich erwähnt, dass das Jodititan, das auf eine gleiche Festigkeit verwalzt wurde, praktisch keine Dehnung mehr besitzt, während das mit O₂, N₂ und Fe verunreinigte, jedoch vom Wasserstoff gereinigte und einer richtigen Wärmebehandlung unterworfenen Kroll-Titan bei einer Zerreiissfestigkeit von 72 kg/mm² noch immer eine 17%ige Dehnung aufweist.

Wenn man im Laufe der Versuche die Werte der Härte und der Zerreiissfestigkeit miteinander vergleicht, gelangt man sowohl beim Jodititan wie

beim Kroll-Titan zu dem annähernden Zusammenhang $\sigma_B = HB/3$. Als Mass des Formänderungswiderstandes kann man also in erster Näherung die Werte der Härte einsetzen. Die Änderung der Härte in Abhängigkeit von der Temperatur ist in Abb. 11 veranschaulicht. Die Härte des Jodittitans nimmt in Abhängigkeit von der Temperatur viel weniger ab als die des Kroll-Titans.

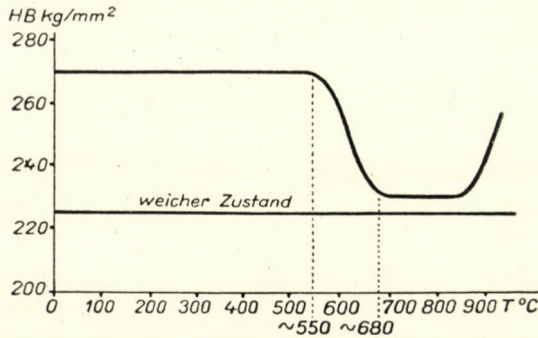


Abb. 10. Die Erweichung des Kroll-Titans bei halbstündiger Glühung nach einer 3,4%igen Kaltverformung

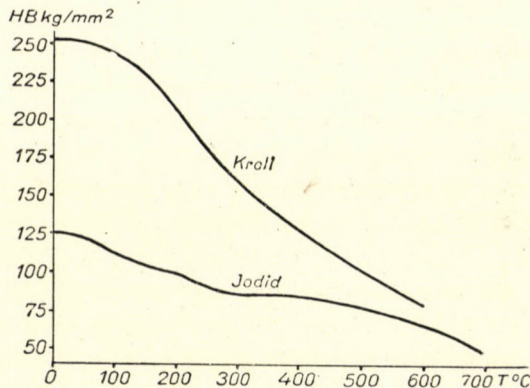


Abb. 11. Die Änderung der Härte des metallischen Titans als Funktion der Temperatur

Beim Jodittitan führt also die bei höheren Temperaturen durchgeführte Verformung nicht zu den gleichen Vorteilen wie beim Kroll-Titan. Die Ergebnisse können daher wie folgt zusammengefasst werden.

1. Auf Grund der vorgeführten Diagramme lässt sich feststellen, dass für die Glühung des Titans je nach dem Reinheitsgrad als optimale Temperatur eine solche angegeben werden kann, die oberhalb 680°C und unterhalb des Temperaturbereiches der $\alpha \rightarrow \beta$ -Umwandlung liegt. Beim Jodittitan erreicht man die optimalen Dehnungswerte nach einer Glühung im Gebiet des β -Feldes, im Gegensatz zum Kroll-Titan, das mit O_2 , N_2 und Fe verunreinigt ist.

2. Die Warmverformung führt beim Jodittitan zu keinen besonderen Vorteilen, und es ist deshalb am zweckmässigsten — mit Rücksicht auf die bei höheren Temperaturen eintretende Oxydation —, das Jodittitan kalt zu verformen und hernach im Gebiet des β -Feldes zu glühen.

3. Das Kroll-Titan ist nach einer Warmverformung unbedingt zu glühen, da während der verhältnismässig kurzen Warmverformung keine vollständige Erweichung eintritt. Zur Verminderung des Wasserstoffgehaltes ist es zweckmässig, diese Glühung bei einer Temperatur von 900°C und mit einer Dauer von 10 Stunden durchzuführen, worauf jedoch unbedingt eine Kaltverformung und hernach eine Glühung folgen muss, die oberhalb 680°C , jedoch unterhalb des Temperaturbereiches der $\alpha \rightarrow \beta$ -Umwandlung liegen soll.

4. Wird das Kroll-Titan nur warmverformt, so muss die Temperatur der Wasserstoffentfernung unterhalb der Temperatur der $\alpha \rightarrow \beta$ -Umwandlung gewählt werden.

5. Die Kaltverformung des Kroll-Titans kann bei einer Temperatur, die zwischen der Zimmertemperatur und der Erweichungstemperatur liegt, erfolgen. Eine Erhöhung der Temperatur innerhalb der gegebenen Grenzen ist vom Standpunkt der Verringerung des Formänderungswiderstandes vorteilhaft. Auf Grund der Beobachtungen darf aber die Temperatur der Formgebung im Falle von gesinterten Körpern, wenn Magnesiumverunreinigungen vorhanden sind, nie höher als 500°C sein, weil sonst sehr leicht Risse auftreten können. Bei gegossenen Materialien besteht keine solche Begrenzung.

Zusammenfassend kann also festgestellt werden, dass die Technologie der Wärmebehandlung und der Verarbeitung des reinen Jodittitans und eines so stark verunreinigten Kroll-Titans voneinander abweichen: während man beim Jodittitan die optimalen Werte mittels einer Kaltverformung und einer kurzen, im Gebiete des β -Feldes liegenden Glühung erreicht, ist beim Kroll-Titan der zweckmässigste Gang der Verarbeitung: Warmverformung, Wasserstoffentfernung mittels Glühung im β -Felde, sodann Kaltverformung und eine Glühung oberhalb der Erweichungstemperatur, jedoch noch im α -Felde. Wenn man im Laufe der Verarbeitung keine Kaltverformung benötigt, soll die Wasserstoffentfernung nach der Warmverformung im α -Felde erfolgen.

ZUSAMMENFASSUNG

Das bei Anwendung des Kroll-Verfahrens erhaltene Titan kann von zweierlei Qualität sein. Vom technologischen Standpunkt bedeutet die Verarbeitung des härteren Materials das grössere Problem. In der vorliegenden Abhandlung werden die Einzelheiten der Kaltverformung und des Glühens eines Kroll-Titans mit der Brinellhärte von 225 kg/mm^2 und eines mit dem Jodidverfahren hergestellten Titanmaterials erörtert und auch die zur Ausarbeitung der obigen Technologie notwendigen Rekristallisationsdiagramme erläutert. Bei richtig gewähltem Walzen bzw. bei richtig gewählter Wärmebehandlung lässt sich auch bei Titan von einer Brinellhärte von 225 kg/mm^2 eine Dehnung von $\delta_s = 17\%$ erreichen.

ОБРАБОТКА МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ТИТАНА

Член корр. А. Н. Венгрии Л. ЖИЛЬМО

РЕЗЮМЕ

При процессе Кроля получается титан двух различных сортов. В технологическом отношении обработка более твердых материалов связана со значительно большими проблемами. В работе рассматриваются частные вопросы технологии холодной прокатки и отжиг титана, полученного при помощи процесса Кроля с твердостью по Бринеллю НВ 225 и иодидным процессом. Кроме этого приводятся также рекристаллизационные диаграммы, необходимые для разработки вышеуказанных технологий. При помощи правильно установленной технологии прокатки и, соответственно, термообработки в случае титана с твердостью по Бринеллю НВ 225 можно добиться относительного растяжения порядка $\delta_5 = 17\%$.

WORKING OF METALLIC TITANIUM

Prof. L. GILLEMOT

Corr. Member of the Hung. Acad. of Sc.

SUMMARY

Titanium produced by the Kroll process is of two grades. Working of material of greater hardness raises a major technological problem. The paper presents details of the technology of cold-rolling and of annealing a titanium specimen produced by the Kroll method of 225 Brinell hardness, and of one produced by the iodide method. Moreover, recrystallization diagrams necessary for the elaboration of the afore-mentioned techniques are also described. By properly chosen rolling and heat treatment methods an elongation of $\delta_5 = 17\%$ can be attained on a titanium sample of 225 Brinell hardness.

TRAVAIL DU TITANE MÉTALLIQUE

Prof. L. GILLEMOT

Membre corresp. de l'Acad. Hongr. des Sc.

RÉSUMÉ

Le titane fabriqué par le procédé Kroll est de deux qualités différentes. Au point de vue technologique le travail d'un matériau d'une grande dureté présente un problème important. L'étude décrit les détails de la technologie du laminage à froid et du recuit d'un échantillon de titane fabriqué par la méthode de Kroll d'une dureté de 225 Brinell, et d'un autre fabriqué à travers l'iode. En outre, l'étude contient les diagrammes de recristallisation nécessaires à l'élaboration des susdites techniques. Par les procédés de laminage et de traitement thermique convenablement choisis on peut obtenir un allongement de l'ordre de $\delta_5 = 17\%$ sur un métal d'une dureté de 225 unités Brinell.

DAS PROBLEM DES TITANS IN UNGARN VOM GESICHTSPUNKT DER ELEKTRONENRÖHRENINDUSTRIE*

I. KONCZ

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

MECHANISCH-TECHNOLOGISCHES INSTITUT DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT, BUDAPEST

Die Elektronenröhrenindustrie ist trotz ihrer verhältnismässig geringen verarbeiteten Materialmengen eine der anspruchsvollsten bezüglich ihrer Rohmaterialien. Der Verkaufspreis einer Elektronenröhre wird hauptsächlich durch ihr evakuiertes Volumen bestimmt, und das technologische Hauptproblem der Röhrenindustrie ist eben die Herstellung und noch mehr die Aufrechterhaltung eines entsprechenden Vakuums.

Im allgemeinen lösen die Metalle im Schmelzfluss beträchtliche Gasmengen, die nach der Erstarrung gelöst bzw. eingeschlossen bleiben und im Vakuum, besonders bei höheren Temperaturen, herausdiffundieren. Diese Gase können entweder vakuumtechnisch inaktiv sein, erhöhen also nur den Druck, oder aber üben sie auf einzelne Bestandteile chemische, sogenannte vergiftende Wirkungen aus. Unter Vergiftung versteht man in der Vakuumtechnik die Änderung bzw. den Verlust spezieller Oberflächeneigenschaften, z. B. der Elektronenemission. Je nach den verwendeten Materialien und je nach den Emissionsmechanismen ist diese Gefahr mehr oder minder ausgeprägt. Die äusseren und inneren Abmessungen einer Elektronenröhre werden wegen elektrischer und anderer Gründe möglichst klein gehalten und die Abmessungen werden — da die Entwicklung immer mehr gegen die kürzeren Wellen zu fortschreitet — ständig kleiner. In einer Maschine bedingt eine erhöhte Volumenleistung bei gleichbleibenden Verlusten eine erhöhte Temperatur. Bei erhöhter Temperatur ist aber die Gefahr der Formänderung immer grösser. Abstandsänderungen der Bauelemente bedingen eine Änderung der inneren, elektrischen Eigenschaften; sie sind also unbedingt zu vermeiden. Deshalb müssen die Bauelemente auch bei den in der Röhrentechnik verwendeten und stellenweise bis über 2000° C gehenden Temperaturen eine hinreichende Festigkeit aufweisen. Es darf nicht unberücksichtigt bleiben, dass der die grössten Materialmengen verbrauchende Sektor dieser Industrie, die Empfangsröhrenfabrikation, eine ausgesprochene Massenproduktion ist und seine Erzeugnisse aus gepressten oder gestanzten Bestandteilen üblicherweise durch Punktschweissung aufbaut. Das verwendete Material muss also gut verformbar und punktschweisbar sein.

Im allgemeinen muss ein Material, das für vakuumtechnische Zwecke geeignet sein soll, mindestens teilweise den folgenden Anforderungen genügen:

1. Grosse Reinheit und Gasfreiheit.
2. Hinreichende Festigkeit bei den — meistens hohen — Betriebstemperaturen.
3. Niedriger Gasdruck.
4. Gute elektrische und thermische Leitfähigkeit.
5. Hinreichende Duktilität.

Die Erzeugnisse der ungarischen Elektronenröhrenindustrie waren und sind auch heute am Weltmarkt geschätzt. Trotz dem hohen Entwicklungsstande besitzt das Land keine Rohstoffquellen für die von dieser Industrie benötigten Materialien. Es stellt sich so von selber die Frage, ob nicht das im Verhältnis zum Metallbedarf der Röhrenindustrie uneingeschränkt zur Verfügung stehende Metall, das Titan, geeignet ist, die fehlende Werkstofflücke auszufüllen.

Die in der Vakuumtechnik verwendeten Metalle sind hauptsächlich: Wolfram, Molybdän, Nickel, Kupfer und Eisen. Wegen seines hohen Schmelzpunktes besitzt Wolfram eine Ausnahmstellung und sein Ersatz durch Titan kommt deshalb überhaupt nicht in Frage. Die vier übrigen Metalle verdienen eine nähere Untersuchung. Bei Molybdän ist der Preis ein Mehrfaches des heute noch übertrieben teuren Titans. Beim Nickel ist die Preislage ungünstig, doch dürften das etwa halb so grosse spezifische Gewicht, der höhere Schmelzpunkt und bessere Festigkeitseigenschaften dies heute schon ausgleichen. Beim Kupfer und Eisen bestehen zwar keine Roh-

* Vortrag gehalten am Kongress für Leichtmetalle in Budapest, am 29. September 1955.

stoffprobleme und das Preisverhältnis ist ebenfalls ungünstig, doch können die technologischen Vorteile auch hier zu einer erfolgreichen Anwendung des Titans führen.

Über die Untersuchung einiger Grundfragen der Eignung des Titans als Röhrenbaustoff hatte der Verfasser Gelegenheit, am vorjährigen Kongress für Fernmeldetechnik in Budapest zu berichten. In der vorliegenden Arbeit seien unsere weiteren Untersuchungen und Erfahrungen mit Titan als Röhrenbaustoff geschildert und — soweit es heute schon möglich ist — die zu empfehlenden Anwendungsgebiete abgegrenzt.

Im Aufbau einer Elektronenröhre können die Elemente — nach ihren Funktionen geordnet — wie folgt gegliedert werden :

1. Die äussere Hülle, die die Abgrenzung zwischen der Aussenwelt und dem luftleeren Raum darstellt und entweder elektrisch inaktiv oder (Aussenanoden) elektrisch aktiv ist.

2. Diejenigen Konstruktionsteile, die zur Stützung und Verbindung der elektrisch aktiven Teile dienen, sowie die eventuellen Abschirmungen.

3. Die aktiven Betriebsteile : Glühkatode, ein oder mehrere Gitter und die Anode.

4. Die den evakuierten Innenraum mit dem Aussenraum elektrisch verbindenden Elemente, die sogenannten Durchführungen.

Um die vom allgemeinen Maschinenbau stark abweichenden Forderungen leichter überblicken zu können, seien die hauptsächlichen Kennzeichen des Titans im nachstehenden zusammengefasst :

1. Spezifisches Gewicht 4,5, Schmelzpunkt 1660°C , gute Duktilität, gute Punktschweisbarkeit.

2. Gute Gasaufzehrung, auch wenn das Metall in massiver Form vorliegt. Eine nicht zu vernachlässigende Verformung durch Gasaufnahme. Reversible Wasserstoffbindung.

3. Eine im Verhältnis zu Wolfram und Molybdän um ein Mehrfaches schlechtere elektrische und Wärmeleitfähigkeit.

4. Durch einfache Methoden erreichbare hohe Oberflächenabstrahlung.

5. Gleichmässiger Verlauf der Wärmeausdehnungskurve bis zum Transformationspunkt (870°C).

Da im Rahmen dieser Arbeit keine röhrentechnischen Detailprobleme erörtert werden sollen, sei jetzt nur das Grundsätzliche behandelt. Auf Grund der bisherigen Ausführungen lassen sich also folgende Richtlinien zusammenfassen :

ad 1. Titan ist bezüglich der Verarbeitbarkeit, Verformbarkeit und Punktschweisbarkeit dem Nickel und Eisen gleichwertig und bedeutend günstiger als Molybdän. Die bei Molybdänbauteilen üblichen Betriebstemperaturen lassen sich auch mit Titan beherrschen, falls einige Vorsichtsmassregeln eingehalten werden.

ad 2. Titan ist eines der wirksamsten Gettermaterialien. Die Gasauf-

nahme ist aber stets mit einer Änderung der geometrischen Abmessungen verbunden, weshalb die gleichzeitige Beanspruchung eines aktiven Bauteiles für Getterungszwecke unzulässig ist. Sollte dies nicht zu vermeiden sein, so hilft nur eine Erhöhung der Metallmasse, also eine Verringerung der spezifischen (auf die Gewichtseinheit bezogenen) Gasaufnahme. Meistens stellt ein gesondertes Getter, das ebenfalls aus Titan bestehen kann, aber eine höhere Temperatur als die üblichen Bauelemente aufweist, die günstigste Lösung dar. Metallische Bestandteile, aus denen eine Elektronenröhre aufgebaut ist, werden während der Fabrikation — aber noch vor dem Einbau — im Hochvakuum geglüht, um sie von dem grössten Teil der gelösten bzw. gebundenen Gase zu befreien. Dieser Arbeitsgang ist kostspielig und zeitraubend. Bei Titanbestandteilen ist dieser Schritt vermeidbar, da der zu entgasende Bestandteil praktisch keine Gase abgibt.

ad 3. Die Zahlenwerte der elektrischen und Wärmeleitfähigkeit sind deutlich schlechter als die der Vergleichsmetalle. Wo diese Eigenschaften ausschlaggebend sind (z. B. Hochstromdurchführungen) ist Titan ungeeignet, dagegen können an Stellen, wo z. B. die elektrische Beanspruchung vernachlässigbar klein ist, andere Vorteile überwiegen, z. B. Glasdurchführungsstifte für kleine Radoröhren.

ad 4. Blanke Metallflächen lassen sich gut mit der Suspension eines sehr feinen Titanpulvers überziehen. Dieser Überzug haftet gut und besitzt einen Strahlungskoeffizienten, der zwischen Zirkonpulver und Graphit liegt. Bei einer mit Titanpulver überzogenen Oberfläche gettert hauptsächlich das Pulver, schützt also auch vor den Deformationen des Bauteiles.

ad 5. Die Wärmeausdehnungskurven der üblichen Einschmelzmetalle (Cr—Fe, Fe—Ni—Co) zeigen um 500°C herum einen Knick, der durch allotrope Transformationen bedingt ist und nicht immer oberhalb des Erweichungspunktes der entsprechenden Gläser liegen muss. Beim Titan hat die Wärmeausdehnungskurve erst bei 870°C einen Knick, bei dieser Temperatur befinden sich aber alle hier in Betracht kommenden Gläser in einem weichviskosen Zustand. Bei Keramik-Metallverbindungen besteht noch ein weiteres Vorteil, die direkte Lötbarkeit mit keramischen Stoffen.

Auf Grund dieser kurzen Übersicht lassen sich — wenigstens zur Orientierung — diejenigen Gebiete abschätzen, wo eine erfolgreiche Anwendung des Titans zu erwarten ist. Selbstverständlich beziehen sich diese Überlegungen auf unsere jetzige Technologie. Ein neues Material verlangt immer eine eigene, ihm zusagende Technologie und eben die Suche nach einer — dem Material zusagenden — Verarbeitung und Formgebung ist das Ziel unserer Arbeit.

Bei unseren ersten Versuchen wurde Titan nur als Austauschbaustoff verwendet, wobei gleichzeitig auch die gasaufzehrenden Eigenschaften des Metalls ausgenutzt werden sollten. Abb. 1 zeigt eine aus reinstem Titan her-

gestellte Anode einer Versuchsröhre mittlerer Leistung nach 1000stündiger Betriebszeit. Das Ende der Lebensdauer wurde durch einen inneren Kurzschluss zwischen Gitter und Anode bewirkt, was nach der — auch im Bilde gut sichtbaren — Deformation der Anode gar nicht überraschend ist. Um den Versuch in gut definierten Grenzen zu halten, war die Anode ohne Überzug. Durch Gitterstrommessungen liess sich der Vakuumzustand gut kontrollieren, dieser blieb während der ganzen Lebensdauer auf derselben Höhe, im Gegen-

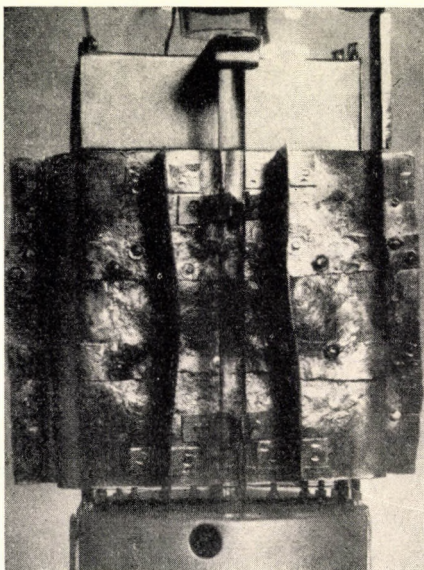


Abb. 1. Starke Deformation zeigende, ohne Konstruktionsänderung aus Titan statt aus Molybdän hergestellte Anode nach 1000 Betriebsstunden

satz zum allgemein beobachteten langsamen Druckanstieg. Auch die Aktivität der emittierenden Kathode war höher als der Durchschnitt von Röhren derselben Serie, die ohne eine solche Getterung waren, dagegen an der Anode einen Zirkonpulverüberzug hatten. Obwohl die Ergebnisse bei dieser Röhre vakuumtechnisch äusserst günstig waren, arbeitete die Röhre nur ein Fünftel ihrer normalen Betriebszeit, stellte also noch keinen Fortschritt dar.

Die Lösung dieses Problems ist eine Konstruktion, wie sie in Abb. 2 zu sehen ist. Diese im Verhältnis zur vorherigen etwas kleinere Röhre besitzt eine massive Titananode, die an der Oberfläche noch mit reinem Titanpulver bedeckt ist. Infolge der massiven Anode ist das Verhältnis zwischen aktivem Metallgewicht und Gesamtvolumen ungefähr zehnmal so gross. Die innen zylindrische Ausbildung des Anodenkörpers ist ferner gegen Deformationen weitgehend widerstandsfähiger als die rechteckige in Abb. 1. Dementsprechend

haben die nach Abb. 2 ausgeführten Röhren alle Erwartungen erfüllt. Zu erwähnen ist, dass bei dieser Röhre, ausser der Anode, noch ein weiterer Bauteil aus Titan eingebaut ist, der allein die Gasaufnahme zu erledigen hat. Dafür ist dieser Teil so angeordnet, dass seine Temperatur um ungefähr 300°C höher liegt als die der Anode. Die Anordnung des Getters an einer analogen Röhre ist in Abb. 3 veranschaulicht. Diese Konstruktion wird allgemein auch mit Zirkongettern ausgeführt, die Anordnung sichert eine gleichmässige und von

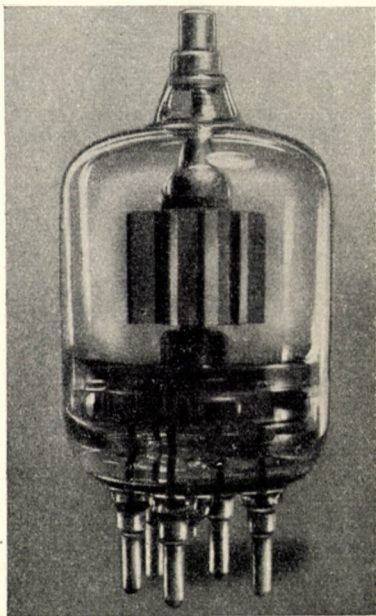


Abb. 2. Nichtdeformierte Titananode, bei der die Eigenschaften dieses Werkstoffs bei der Dimensionierung berücksichtigt wurden

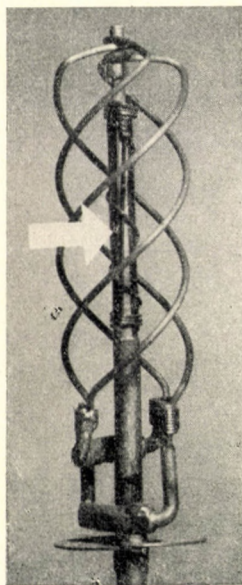


Abb. 3. Anordnung eines Titangetters am Zentrierstab einer thorierten Kathode

den Betriebsbedingungen unabhängige Temperatur des Getters. Nach unseren Messungen wird die Gasaufnahme bis zu 90% von diesem besorgt.

Anwendungsbeispiele, wo das Getter unabhängig von der Röhrenkonstruktion eingebaut ist, sind ferner aus Abb. 4 und Abb. 5 ersichtlich. Solche Anordnungen sind bei gasgefüllten Entladungsgefässen besonders interessant.

Um einen Extremfall einer durch Gasaufnahme möglichen Deformation zu veranschaulichen, sei Abb. 6 vorgeführt. Die Abbildung zeigt das Glühfadensystem einer Senderöhre von grösserer Leistung, die ausser dem Glühfaden ausschliesslich aus Titan aufgebaut war. Die Röhre brannte nach 50^h Betrieb durch, wobei sich — wie aus der Abbildung ersichtlich ist — nur die

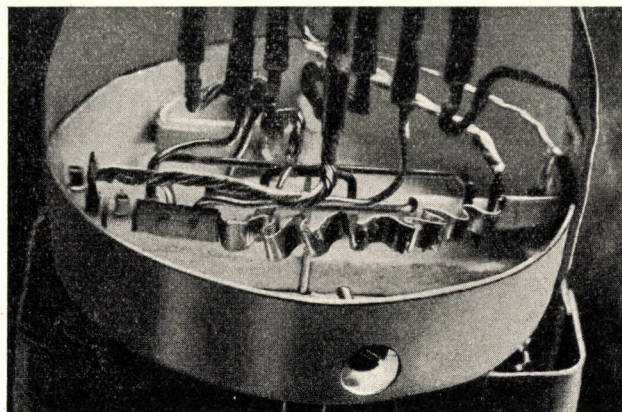


Abb. 4. Unterbringung eines unabhängig heizbaren Titangetters

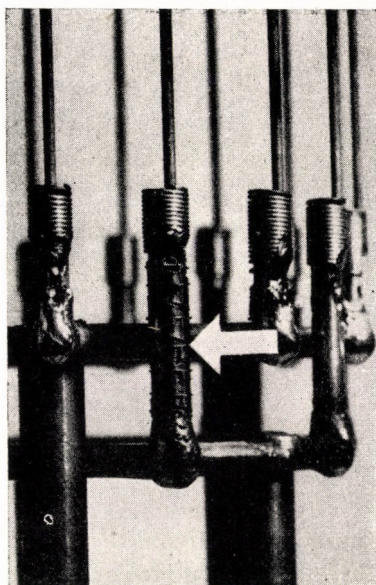


Abb. 5. Titangetter in einer Hochleistungs-Elektronenröhre mit Wolframkathode

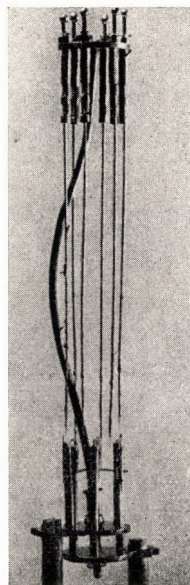


Abb. 6. Stark deformiertes Fadensystem; Zentrierstab und Pole aus Titan

im Betrieb die höchste Temperatur aufweisenden Teile deformierten. Dieser Umstand führte auch den frühzeitigen Kathodenkurzschluss herbei.

Aus diesen Erfahrungen ist also die Folgerung zu ziehen, dass Titan als Baumaterial nicht gleichzeitig auch als Fangstoff verwendet werden darf, weil die durch die Gasaufnahme bedingten Deformationen die Betriebsfähigkeit gefährden. Man muss also grundsätzlich aktive Getterteile und Konstruktionsteile voneinander trennen.

Bekanntlich lässt sich Titan aus seinen Halogenverbindungen durch thermische Zersetzung leicht in grosser Reinheit abscheiden. Nach diesem Verfahren können Drähte und Bänder auch im kontinuierlichen Arbeitsgang

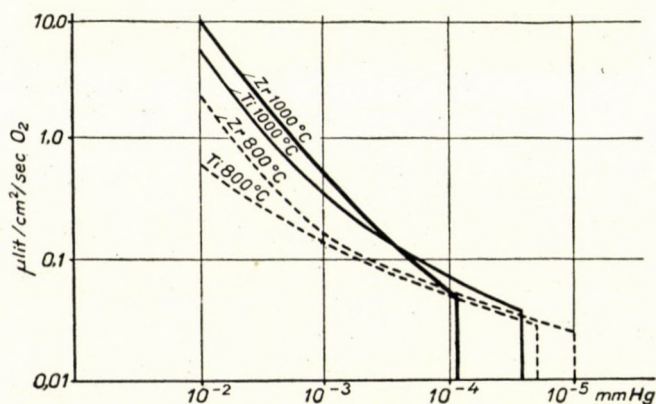


Abb. 7. Auf die Oberflächeneinheit und Sauerstoff bezogene Pumpgeschwindigkeit und Gleichgewichtsdruck von Titan- und Zirkonfolien

überzogen werden. Besonders an Molybdän lässt sich so eine gut haftende Schicht herstellen.

Wegen einiger Anwendungen ist es wichtig zu entscheiden, ob Titan dem Zirkon gleichwertig oder unterlegen ist, besonders wenn eine vorherige Sättigung z. B. mit Stickstoff stattgefunden hat. Die vom korresp. Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften MILLNER auf dem letzten Kongress für Fernmeldetechnik gestellten Fragen können nun folgenderweise beantwortet werden. Die in der Abb. 7 gezeigten Kurven, die nach sorgfältigen Messungen von Z. TOMASCHEK aufgetragen wurden, ergeben, dass die Getteraktivität — in der Darstellung als Saugleistung pro cm² pro sec ausgedrückt — bei höheren Anfangsdrücken für Zirkon etwas höher liegt als beim Titan. Demgegenüber ist der Gleichgewichtsdruck, also der dem Beharrungszustand entsprechende Druck, beim Titan günstiger als beim Zirkon. Ähnliche Messungen an mit Stickstoff vorbehandelten Titanoberflächen gaben fast keinen Unterschied zwischen Zirkon und Titan. Die zwei Metalle können also auch in dieser Hinsicht als gleichwertig betrachtet werden.

Die leichte und ohne jegliche Konstruktionsänderung mögliche Anwendbarkeit des Titangetters legt die Frage nahe, ob es nicht lohnend ist, sonst nicht gegetterte Röhren — z. B. Hochleistungsröhren mit Wolframkathoden — zu gettern. Bei grösseren Volumina ist die Pumpzeit der entscheidende Faktor bei der Fabrikation, die Kapazität einer Anlage wird also in erster Linie durch sie bestimmt. Nach unseren Versuchen kann die Pumpzeit durch eine kleine, im Preise vernachlässigbare Titanfolie um ungefähr 20 % verkürzt werden. Allerdings ist für diese Zwecke reinstes, sogenanntes Jodidtitan zu verwenden, was sonst für die üblichen Konstruktionsteile nicht nötig ist. Bei gegetterten Röhren steigt ausserdem die Lebensdauer um durchschnittlich 20–50%, was einerseits auf die bessere Vakuumhaltung und andererseits auf das durch

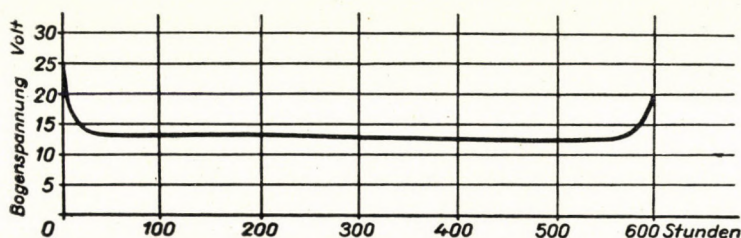


Abb. 8. Lebensdauer einer thorierten Gleichrichterkathode. Gasfüllung: Ar 25 mm Hg + Luft 5 mm Hg. Getter Ti-Band, 750° C, Kathodenspitzenstrom 18 A/cm², 50 ~ Halbwellschaltung

den hochaktiven Fangstoff bedingte schonende Pumpverfahren zurückzuführen ist.

Um die Grenzen der Getterwirkung, also die höchstzulässige Verunreinigung des Vakuumraumes festzustellen, wurden im Forschungsinstitut für die Fernmeldetechnik Lebensdauerversuche mit Röhren durchgeführt, die nach Beendigung des Pumpprozesses mit bekannten Luftmengen verunreinigt waren. Aus Wirtschaftlichkeitsgründen waren diese Röhren gasgefüllte Dioden, da bei diesen der Leistungsverbrauch trotz hoher Kathodenströme verhältnismässig niedrig ist. Abb. 8 zeigt eine Lebensdauerkurve, wobei die Luftverunreinigung des Vakuumraumes ungefähr um zwei Grössenordnungen mehr betrug als es überhaupt vorkommen kann. Die thorierte Kathode reagiert sehr empfindlich auf Misshandlungen. Wie aus der Abbildung ersichtlich, hatte sich die Kathode in verhältnismässig kurzer Zeit erholt und trotz der allergrössten Behandlung und sehr hoher Oberflächenbelastung rund 500^h ihre Aktivität beibehalten.

Ohne auf die ausschliesslich die Vakuumtechniker interessierenden Detailprobleme einzugehen, ist im vorstehenden versucht worden, die heute wirtschaftlich möglichen Anwendungsgebiete des neuen Metalls in der Vakuumtechnik vorzuführen, worüber sich zusammenfassend folgendes feststellen lässt :

1. Metallisches Titan ist der einzige einheimische, für Röhrenbau geeignete Rohstoff. In vakuumtechnischer Hinsicht ist es Eisen und Nickel überlegen, in den meisten Fällen kann es auch statt Molybdän eingesetzt werden.

2. Als Konstruktionsstoff verbilligt und vereinfacht es die Fabrikation durch Wegfall der Vorentgasungsprozesse.

3. Die Pumpzeit lässt sich besonders bei grösseren Röhren bei gleichzeitiger Erhöhung der Qualität und Lebensdauer bis zu 20% verkürzen.

4. Titan ist ein neues Metall und wegen seiner Gasfreiheit und seines Gasaufnahmevermögens den meisten bisherigen Baustoffen überlegen. Doch ist es kein Wundermittel und keinesfalls geeignet, alle Probleme der Vakuumtechnik zu lösen. Seine speziellen Eigenschaften müssen bei der Konstruktion sehr genau berücksichtigt werden.

Als letzte Schlussforderung darf man also behaupten, dass metallisches Titan eine Möglichkeit darstellt, unsere Röhrenindustrie bei gleichzeitiger Erhöhung der Qualität auf eine eigene Rohstoffbasis zu stellen.

ZUSAMMENFASSUNG

Die bei der Herstellung von Elektronenröhren bisher verwendeten Konstruktionsstoffe werden vorteilhaft durch das Titan ergänzt, das sich durch ein grosses Gasaufnahmevermögen auszeichnet. Die vorliegende Arbeit untersucht die Anwendungsmöglichkeiten des Titans in der Elektronenröhrenindustrie und gibt Hinweise, bei welchen Bauelementen es in Frage kommt und welche andere Baustoffe es auf Grund seiner Eigenschaften zu ersetzen vermag. Laut der Ergebnisse der diesbezüglich durchgeführten Versuche eignet sich das Titan sowohl für den Ersatz von Nickel als auch teilweise von Molybdän, da sich bei seiner Verwendung die Pumpzeit sowie die Vorentgasungszeit verkürzen und während des Betriebes bessere Vakuumwerte aufrechterhalten lassen.

ПРОБЛЕМА ТИТАНА В ВЕНГРИИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА ЭЛЕКТРОННЫХ ЛАМП

Канд. техн. наук И. КОНЦ

РЕЗЮМЕ

Титан с большим преимуществом расширяет круг конструкционных материалов, использованных до настоящего времени в производстве электронных ламп, именно своей высокой газоабсорбирующей способностью. В работе рассматриваются возможности применения титана и приводятся данные относительно конструкционного построения, а также возможности применения. Согласно полученных результатов титан пригоден для замены как никеля, так и, частично, молибдена и по сравнению с перечисленными имеет преимущество вследствие снижения времени откачки и предварительной накалки, а также более высоких значений вакуума, поддерживаемых в процессе эксплуатации.

THE TITANIUM PROBLEM FROM THE VIEWPOINT OF THE HUNGARIAN VACUUM TUBE INDUSTRY

I. KONCZ

Cand. of Eng. Sc.

SUMMARY

Titanium with its high gas-absorbing power is a useful addition to the list of constructional materials so far used in the vacuum tube industry. This paper investigates its potential uses and indicates the structural parts for the production of which it is preferable to other materials, and what other constructional materials can be replaced by it. Experiments have shown that titanium replaces to advantage nickel and in part molybdenum too, for its use makes degassing superfluous, reduces evacuation time and allows higher vacuum rates to be maintained during operation of the tubes.

LE PROBLÈME DU TITANE AU POINT DE VUE DE L'INDUSTRIE HONGROISE DE TUBES ELECTRONIQUES

I. KONCZ

cand. des sc. techn.

RÉSUMÉ

Avec sa haute capacité d'absorption pour les gaz le titane est une addition utile à la série de matériaux de construction jusqu'ici employés dans l'industrie de tubes électroniques. Les possibilités de son emploi sont étudiées, et des indications sont données sur les éléments structuraux qu'on en peut fabriquer ainsi que sur les matériaux qu'il peut remplacer grâce à ses qualités. D'après les résultats d'essais le titane peut remplacer le nickel, en partie même le molybdène, car son emploi rend le dégazage préalable superflu, permet de réduire le temps nécessaire à l'évacuation et de maintenir un meilleur vacuum au cours de l'opération des tubes.

HERSTELLUNG VON KALZIUM MIT EINEM SONDERREINHEITSGRAD*

Prof. K. AKERMAN und M. ORMAN

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR LEICHTMETALLE IN SKAWINA BEI KRAKÓW

[Eingegangen am 10. Oktober 1955]

1. Ziel der Forschungsarbeit, Rohstoffe und Wahl des Herstellungsverfahrens

Der Auftrag für die im nachstehenden besprochene Forschungsarbeit wurde dem Forschungsinstitut für Leichtmetalle in Skawina auf Antrag des Instituts für Atomkernforschung der Polnischen Akademie der Wissenschaften erteilt.

Es wurde Kalzium mit folgendem Reinheitsgrad verlangt :

Fe, Si, Mg, Al	— höchstens	300	Teile je 1 Million Teile Kalzium-Metall
B	— höchstens	0,5	Teile je 1 Million Teile Kalzium-Metall
Li	— höchstens	6	Teile je 1 Million Teile Kalzium-Metall
Cd	— höchstens	0,1	Teil je 1 Million Teile Kalzium-Metall

Das Ziel war ein Fertigprodukt, das bei der Drehbankbearbeitung die Bildung von 6 mm starken Spänen zulässt.

Als Herstellungsverfahren wurde der Reduktionsprozess von Kalziumoxyd mittels pulverisierten Aluminiums gewählt. Als Ausgangsmaterial wurde ein Kalzit verwendet, der in den polnischen Kalksteingruben in Sitkówka bei Kielce und in Niegowa bei Zabkowice in Form unregelmässig verteilter Verwachsungen auftritt. Im Verlaufe der Untersuchungen zeigte es sich, dass der Kalzit aus Niegowa durch spektroskopisch nachgewiesene Mengen von Lithiumverbindungen verunreinigt ist, die bei dem Reduktionsprozess als metallisches Lithium völlig ins Kalzium übergehen. Auf der Suche nach einem lithiumfreien Rohstoff wurde auch Schlämmerkide behandelt, in der aber gleichfalls Lithiumverbindungen nachgewiesen wurden. Von einer weiteren Wahl anderer Rohstoffe wurde abgesehen und in der Folge bloss Kalzit aus Niegowa verwendet.

Als zweiter Rohstoff wurde bei der Herstellung von Kalzium pulverisiertes Aluminium mit einem Gehalt von 99,5% Al verwendet. Die Untersuchun-

* Vorgetragen am 29. September 1955 von K. AKERMAN an dem von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften veranstalteten Kongress für die Leichtmetallindustrie in Budapest.

gen erwiesen, dass der Einsatz von Aluminiumpulver mit einem Gehalt von 99,97% Al keinen nennenswerten Einfluss auf den Reinheitsgrad des Kalziums besitzt.

Schon die ersten Reduktionsprozesse ergaben ein Kalzium, das den oben angeführten Reinheitsbedingungen mit Ausnahme eines zu hohen Lithiumgehaltes entsprach.

Die Entfernung des Lithiums wurde durch Destillation und fraktionierte Kondensation erreicht.

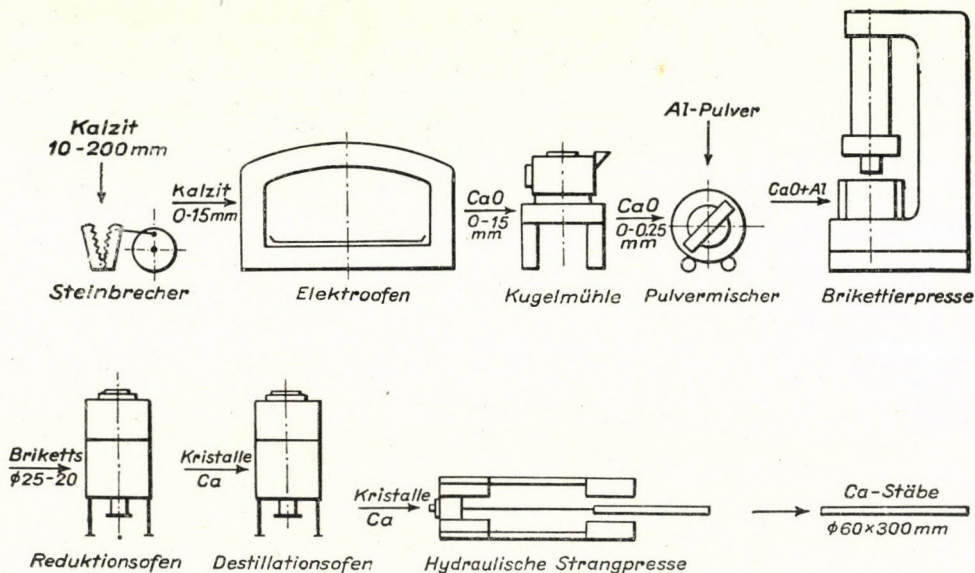


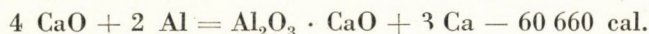
Abb. 1. Die Herstellung von Kalzium

Die Herstellung des Kalziums ist schematisch aus Abb. 1 ersichtlich, sie besteht aus folgenden Phasen:

- Zubereitung von pulverisiertem Kalzit,
- Brikettieren einer Mischung von Kalzitpulver und Aluminiumpulver,
- Reduktionsprozess der Brikette und
- Umdestillieren des Rohkalziums.

2. Der Reduktionsprozess von Kalziumoxyd mit pulverisiertem Aluminium

Der Reduktionsprozess geht nach folgender Reaktionsgleichung vor sich:



Die theoretischen Grundlagen des Reduktionsprozesses (nach der Methode von Prof. KRUPKOWSKI) sind in Abb. 2 dargestellt.

Die zwischen den beiden Achsen liegende Fläche des Diagrammes ist durch die Dampfdruckkurven des Kalziumreduktions- und Kalziumdestillationsprozesses in 3 Felder geteilt (I, II, III). Im Felde I ist der Kalziumdampf unbeständig und unterliegt einer sofortigen Kondensierung bzw. Erstarrung. Im Felde II ist der Kalziumdampf beständig und wird weder kondensieren noch erstarren, jedoch wird sich die Reduktionsreaktion nach links verschoben, da der Dampfdruck des Kalziums grösser als der Dampfdruck des beim Reduktionsprozess entstehenden Kalziums ist. Im Felde III ist schliesslich der Kalziumdampf ebenfalls beständig, doch wird die Reduktionsreaktion

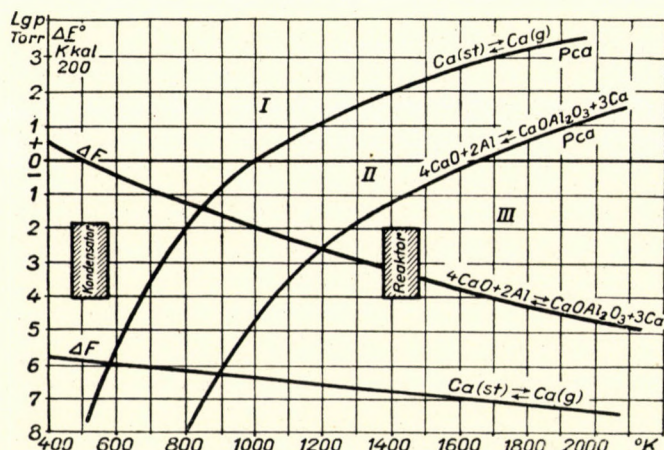


Abb. 2. Diagramm für Berechnungen der Reduktionsreaktion des Kalziums

nicht nach links verschoben, da der bestehende Dampfdruck niedriger als der Dampfdruck des Reduktionsprozesses ist. Aus dem Vorstehenden folgt, dass für die Reduktion Arbeitsverhältnisse wie im Felde III und für die Kondensation wie im Felde I herrschen müssen.

Die Verunreinigungen des Kalzits und ihr Verhalten im Reduktionsprozess

Die spektroskopische Untersuchung wies im Kalzit nachstehende Verunreinigungen nach: Magnesium, Barium, Strontium, Lithium, Natrium, Zink, Silizium, Mangan und Eisen. Von diesen Verunreinigungen bleiben nur Silizium, Magnesium und Eisen in der Aluminatmasse zurück, die anderen gehen in Kalziumdampf über, u. zw. in Mengen, die gemäss den gestellten Bedingungen zulässig sind, mit Ausnahme des Lithiums, das den zulässigen Grenzwert vielfach überschreitet.

Tabelle I
Ergebnisse einiger Reduktionsversuche

Versuchsnummer	22	33	34	52	56
Aufgabe in g	1390	1550	1550	2000	2000
CaO-Anteil	1023	1140	1140	1470	1470
Al-Anteil.....	367	410	410	530	530
Korngrösse von CaO in mm	0,20	0,2	0,2	0,2	0,2
Korngrösse von Al in mm.....	0,06	0,2	0,2	0,2	0,2
<i>Versuchsbedingungen</i>					
Silitstabtemperatur °C	1180	1180	1180	1200	1200
Widerstandsdrahttemperatur °C	750	750	750	500	850
Zeit in Stunden	12	10	10	15	15
Druck in Torr.....	10 ⁻³	10 ⁻³	10 ⁻³	10 ⁻³	10 ⁻³
<i>Metallausbringung</i>					
Ca-Metall in g.....	180	200	185	245	260
Restgewicht in g	1160	1200	1230	1695	1440
Ausbeute in %	32,8	32,7	30,2	29,8	30,0

Das Reduktionsverfahren

Der Rohkalzit wurde im Steinbrecher auf eine Korngrösse von unter 15 mm zerkleinert, im Elektroofen gebrannt und dann in einer Kugelmühle gemahlen. Nach dem Absieben der Körnerfraktion von über 0,25 mm wurde das Mahlgut mit Aluminiumpulver vermischt und trocken unter einem Druck von 600 atm zu Briketten gepresst. Der Reduktionsprozess wurde in dem in Abb. 3 dargestellten Ofen durchgeführt.

Die Messung der in der Muffel herrschenden Temperatur wurde indirekt durchgeführt, u. zw. mit Hilfe von 2 ausserhalb der Muffel angebrachten Thermoelementen. Die Eichung der Temperaturanzeigen ist in Abb. 4 veranschaulicht.

Die Ergebnisse einiger charakteristischer Reduktionen sind in Tabelle I zusammengestellt.

Abb. 5 stellt die kondensierte Kalziummetallschicht schematisch dar und zeigt sowohl die Gefügebildung als auch die Stellen der Probeentnahmen. Das Umpressen der niedergeschlagenen Kalziumkristalle erfolgte auf einer hydraulischen Strangpresse bei einer Temperatur des Rezipienten von 420° C, einem Druck von 200 atm und einer Geschwindigkeit von 60 mm je Minute.

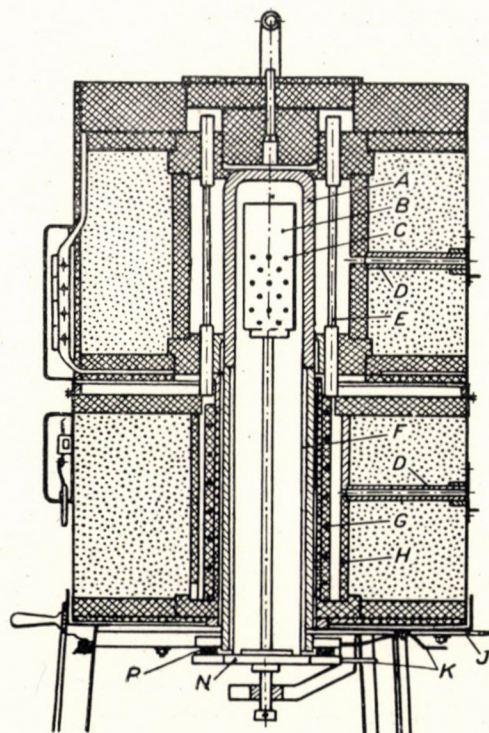


Abb. 3. Reduktionsofen für CaO

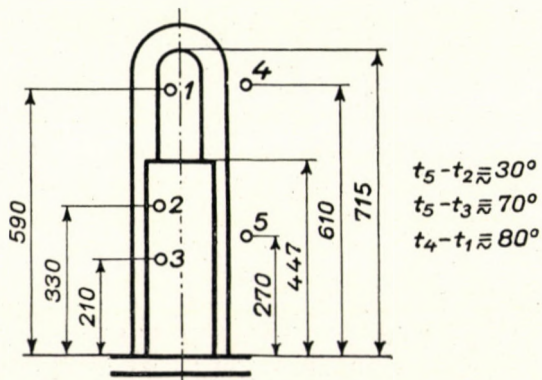


Abb. 4. Thermoelementenverteilung bei der Temperatureichung der Retorte

3. Der Destillationsprozess des metallischen Kalziums

Bei der Verwendung eines Kondensators, in dem das Temperaturgefälle nicht zu scharf ist, sind Schichten aus folgenden Metallen bzw. Metallmischun-

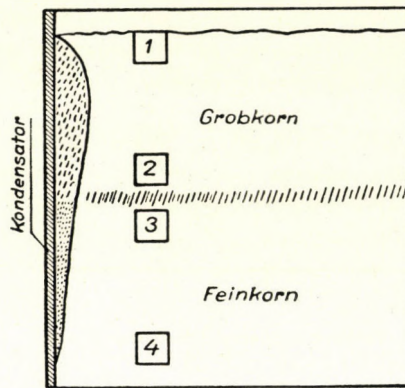


Abb. 5. Gefügeausbildung des Metalls im Kondensator (schematisch). 1, 2, 3, 4 — Verteilung der Probeentnahmestellen



Abb. 6.

gen zu erwarten (von hoher zu niedriger Temperatur übergehend): Barium, Kalzium, Kalzium und Lithium, Kalzium mit Lithium und Strontium, Kalzium mit Magnesium und schliesslich Kalzium mit Natrium und Kalium. Sehr deutlich tritt die Grenze zwischen grob- und feinkörnigem Kalzium auf.

Das feinkörnige Gefüge entsteht infolge einer Ausbildung neuer Kristallkeime. Bei einer Temperatur des Kondensators von 590° C (Abb. 6) wirken die Lithiumdämpfe als Kristallkeime, so dass der Lithiumgehalt in der feinkörnigen Zone grösser als in der grobkörnigen sein muss.

Bei wiederholten Destillationsversuchen mit grobkörnigen Fraktionen wurde jedesmal eine Abnahme der Lithiumkonzentration festgestellt, u. zw. entsprechend folgender empirischen Regel :

$$C_n = \frac{C_0}{4^n}$$

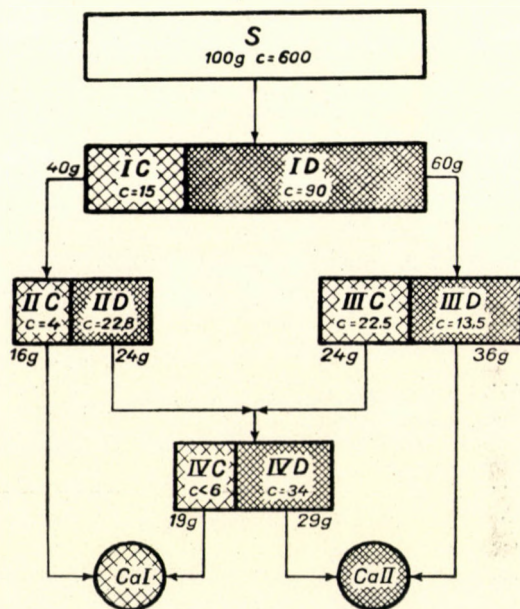


Abb. 7. Schematische Darstellung der Untersuchungen über den Destillationsprozess

Es bedeuten :

- C_0 den Mittelwert der Lithiumkonzentration im Rohmetall des Reduktionsprozesses,
 C_n die Lithiumkonzentration der grobkörnigen Fraktion nach der n-ten Destillation,
 n 1, 2, 3 usw. Ordnungszahl der Destillation der grobkörnigen Fraktion.

In Abb. 7 sind die Untersuchungen über den Destillationsprozess schematisch dargestellt.

Die in der Abbildung benutzten Bezeichnungen bedeuten :

- S Rohmetall aus dem Reduktionsprozess,
G grobkörnige Fraktion,
D feinkörnige Fraktion
I, II, III, IV die aufeinanderfolgenden Destillationsprozesse.

Ausserdem sind in der Abb. 7 die im Einklang mit der oben angeführten Versuchsregel festgestellten Lithiumkonzentrationen im Ca-Metall (c — in ppm) sowie die Gewichtsverhältnisse der einzelnen Fraktionen angegeben.

Die Ergebnisse einiger charakteristischer Destillationsversuche sind in der Tabelle II zusammengestellt, aus der sowohl die Richtigkeit der oben angeführten Versuchsregel als auch des Destillationsschemas hervorgeht.

Tabelle II
Ergebnisse einiger charakteristischer Versuchsdestillationsprozesse

Destillation Nr.	I		II		III		IV	
Probe Nr.	3	6	15	25	14	35	28	38
<i>Metalleinsatz</i>								
Bezeichnung.....	S	S	JG	JG	JD	JD	IID+ IIIG	IID+ IIIG
Gramm	500	300	300	150	300	200	150	450
<i>Bedingungen</i>								
Silitstabilitättemperatur °C ..	950	900	900	860	900	950	860	950
Widerstandsdrahttemperatur °C	650	650	720	600	720	720	680	720
Zeit in Stunden	7	10	10	10	10	15	10	15
Druck in Torr.....	10 ⁻³	10 ⁻³	10 ⁻³	10 ⁻³	10 ⁻³	10 ⁻³	10 ⁻³	10 ⁻³
<i>Metallgewinn</i>								
Im Kondensator	—	—	265	115	270	130	112	37
Ausserhalb des Kondensators	—	—	5	15	—	—	20	—
Zusammen in g	—	—	270	130	270	130	132	37
Grobkorn in g.....	200	120	140	60	140	100	92	20
Feinkorn in g	—	—	130	55	130	30	40	14
<i>Lithiumgehalt</i>								
Probe Nr. 1.....	15	15	3—6	0—3	6	2	0	—
Probe Nr. 2.....	30	30	6—12	0—3	6	2	3	2
Probe Nr. 3.....	60	60	6—12	5—12	24	6	—	6
Probe Nr. 4.....	60	60	50	12—50	24	10	12	20
<i>Ausbringung</i>								
Grobkorn in g.....	40	40	47	40	40	50	61	44
Feinkorn in g	—	—	43	37	37	15	13	32

S »Roh«-Metall aus der Reduktion.
 IG grobkörnige Fraktion aus der I. Destillation.
 ID feinkörnige « « « I. «
 IIIG grobkörnige « « « II. «
 IID feinkörnige « « « II. «
 IIIG grobkörnige « « « III. «

Der Verlauf der Untersuchungen hat des weiteren gezeigt, dass der Reduktionsprozess als erste Destillation anzusehen ist. Es ist dabei zu beachten, dass der Reduktionsprozess erst dann seinen Anfang nimmt, nachdem sich die Temperatur im Kondensator stabilisiert hat. Bei Einhaltung dieser Bedin-

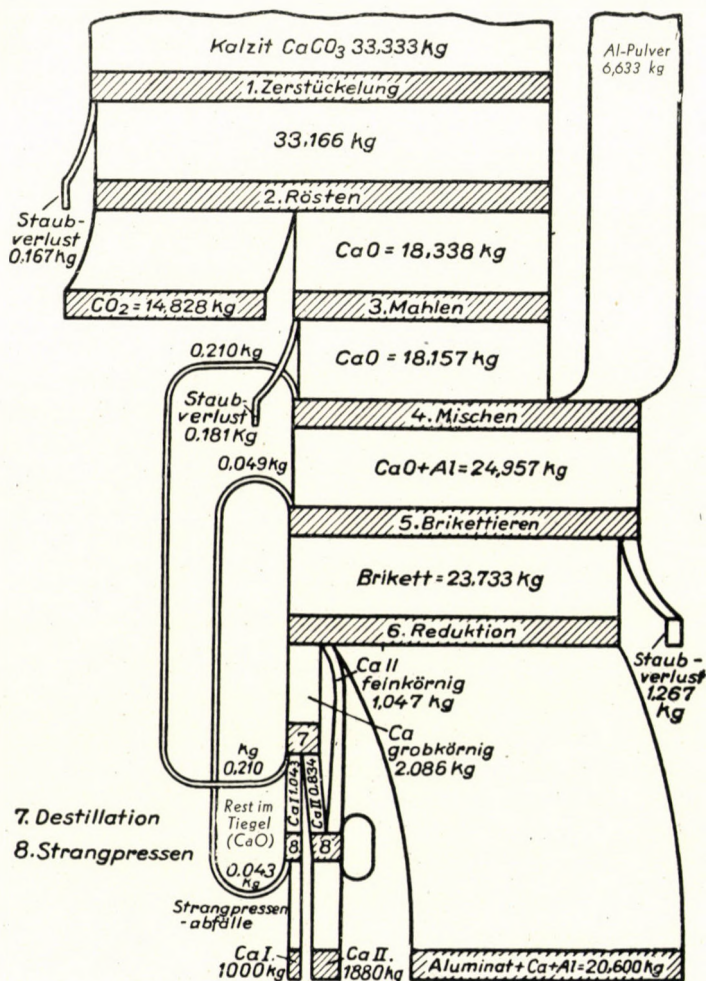


Abb. 8. SHANKEY-Diagramm für die Produktion von Kalzium mit einem Sonderreinheitsgrad

gung zeigt das im Kondensator anfallende Metall eine deutliche Grenze zwischen der grob- und feinkörnigen Fraktion. Bei einer solchen Arbeitsführung gibt eine einzige Destillation der grobkörnigen Fraktion des Reduktionsprozesses Kalzium mit dem geforderten Reinheitsgrad. Die Menge der im Reduktionsprozess enthaltenen grobkörnigen Fraktion verhält sich zur Menge der feinkörnigen Fraktion wie 2 : 1.

4. Günstigste Prozessbedingungen und Stoffbilanz

Die günstigsten Bedingungen bei der Durchführung des Reduktionsprozesses sind folgende :

Einsatzmenge : ein Gemisch von 1000 g Kalziumoxyd mit einer Korngrösse unter 0,2 mm und 360 g Aluminiumpulver mit 99,5 % Al und einer Korngrösse von 0,2 mm.

Brikette : $\varnothing$ 20—25 mm, trocken unter einem Druck von 1000 atm gepresst.

Reduktionstemperatur : 1200° C

Prozessdauer : 10 Stunden

Druck : unter 0,05 Torr

Die günstigsten Destillationsbedingungen sind folgende :

Temperatur des Einsatzes : 820—830° C

Prozessdauer : 7 Stunden

Druck : unter 0,07 Torr

Temperatur des Kondensators : 550—680° C

Abb. 8 veranschaulicht die Stoffbilanz des Reduktions- und Destillationsprozesses. 1 kg Kalzium mit einem Sonderreinheitsgrad erfordert 33,3 kg Kalzit und 6,63 kg Aluminiumpulver. Als Nebenprodukt erhält man 1,88 kg Kalzium mit normalem Reinheitsgrad und 20,6 kg Kalziumaluminat.

ZUSAMMENFASSUNG

Zur Herstellung von Kalzium mit einem Sonderreinheitsgrad wurden Untersuchungen im Laboratoriumsmassstab durchgeführt, wobei als Ausgangsmaterial polnischer Kalzit und Aluminiumpulver verwendet wurden. Durch Destillation von Rohmaterial und fraktionierter Kondensation konnte Kalzium mit einem Sonderreinheitsgrad gewonnen werden.

ПОЛУЧЕНИЕ ОЧЕНЬ ЧИСТОГО КАЛЬЦИЯ

Проф. К. АКЕРМАН и М. ОРМАН

РЕЗЮМЕ

Дается описание лабораторных исследований, проведенных в целях получения очень чистого кальция. В качестве исходных материалов использовались польский кальцит и алюминиевый порошок. При помощи дистилляции и фракционированной конденсации сырья удалось получить очень чистый кальций.

PREPARATION OF CALCIUM OF HIGH PURITY

Prof. K. AKERMAN and M. ORMAN (KRAKOW)

SUMMARY

The paper deals with the preparation of very pure calcium. Polish calcite and aluminium powder were used as raw materials. By distillation and fractionized condensation of the raw material calcium of high purity was obtained.

PRÉPARATION DU CALCIUM DE GRANDE PURETÉ

Prof. K. AKERMAN et M. ORMAN (CRACOVIE)

RÉSUMÉ

L'étude décrit la préparation à l'échelle de laboratoire du calcium de grande pureté. Comme matières premières, de la calcite de Pologne et de la poudre d'aluminium ont été utilisées. Par distillation et condensation fractionnée des matières premières on a obtenu du calcium d'une extrême pureté.

ÜBER DIE ZWECKMÄSSIGSTEN TYPEN VON KERN-PHYSIKALISCHEN BESCHLEUNIGUNGSANLAGEN IM ENERGIEBEREICH VON 0—4 MeV

Prof. K. SIMONYI

ZENTRALFORSCHUNGSINSTITUT FÜR PHYSIK, ATOMPHYSIKALISCHE ABTEILUNG, BUDAPEST

[Eingegangen am 2. November 1955]

Da es heute schon Beschleunigungsanlagen gibt, die schwere Teilchen auf einige 10^9 eV beschleunigen können, stellt sich die Frage, ob es überhaupt zweckmässig ist, Apparate zur Erzeugung von Teilchen mit einer Energie von einigen 10^6 eV zu bauen. Im nachstehenden ist beabsichtigt, als Einleitung eben jene Gesichtspunkte anzuführen, die bei der Beurteilung der Anwendbarkeit der einzelnen Apparatetypen massgebend sind.

Die Tatsache, dass die kosmischen Strahlen dem Forscher Teilchen mit einer Energie von sogar 10^{15} eV zur Verfügung stellen, beweist, dass die Endenergie der Teilchen ein zwar äusserst wichtiges, doch keinesfalls das einzige Kennzeichen der Anwendbarkeit eines Apparates ist, denn von diesem Gesichtspunkte könnte auch die Zweckmässigkeit des Baues eines Kosmotrons in Frage gestellt werden. Diese Frage ist natürlich leicht zu beantworten: die Intensität des Kosmotrons beträgt 10^9 Korpuskel/sec, wogegen die Teilchenzahl der auf die gleiche Fläche entfallenden kosmischen Strahlen 10^2 /sec ist. Das zweite Argument ist, dass Energie und Qualität der künstlich beschleunigten Korpuskel leicht zu behandeln und zu regeln sind, also für die uns eben interessierenden Ionensorten und Energiebereiche eingestellt werden können.

Für die Beurteilung der Verwendbarkeit eines Apparates sind nun vom rein physikalischen Gesichtspunkte folgende Fragen zu entscheiden:

1. Können in dem mit dem Apparat erreichbaren Energiebereich Versuche von praktischer oder von theoretischer Bedeutung durchgeführt werden?
2. Welcher Typ weist unter den Geräten, die im gleichen Energiebereich arbeiten, die grösste Intensität auf?
3. Bei welchem Apparat kann man die Energie am besten in der Hand halten, d. h. am genauesten einstellen, und welcher bietet die grösste Energiehomogenität?

Schliesslich müssen natürlich auch Wirtschaftlichkeits- und wirtschaftspolitische Prinzipien in Betracht gezogen werden: mit welchem Aufwand, mit welchen in- bzw. ausländischen Materialien bzw. Hilfsapparaturen der Bau der fraglichen Anlagen verbunden ist.

Wie aus der wissenschaftlichen Literatur hervorgeht, können mit Strahlen beschleunigter Elektronen oder schwerer Teilchen von 0,03 MeV aufwärts bis zu beliebigen Energiewerten Untersuchungen sowohl von praktischer als auch von theoretischer Bedeutung vorgenommen werden.

Die Abb. 1 enthält die interessanteren Probleme der physikalischen Forschung der letzten Jahre nebst Anführung des Energiebereiches.

Wie man sieht, bietet auch der Bereich der kleineren Energien eine vielfältige Forschungsmöglichkeit. Von den äusserst grosse Energie leistenden

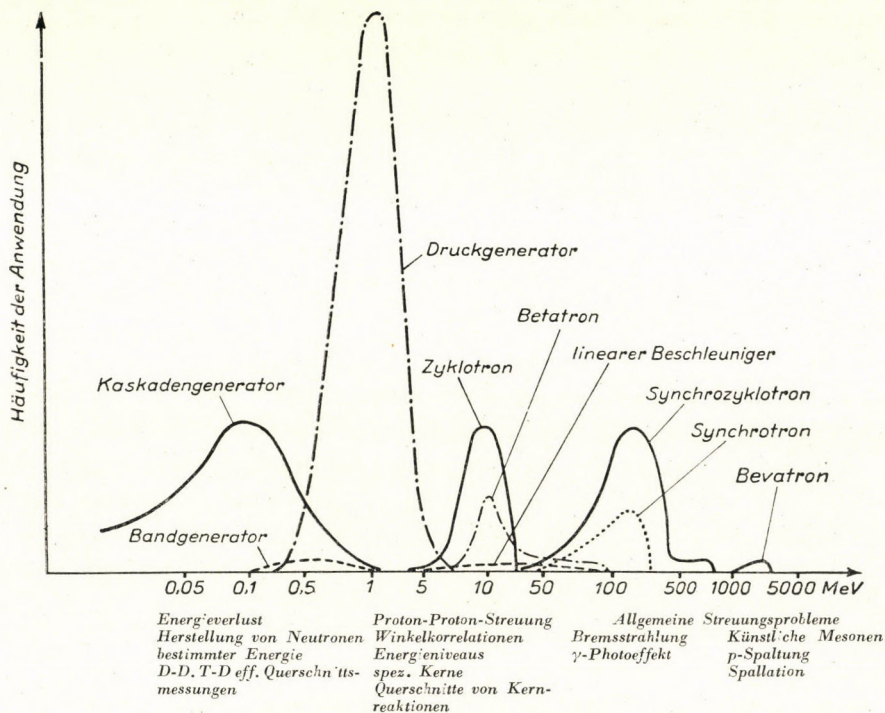


Abb. 1. Die Häufigkeit der Anwendung von verschiedenen Beschleunigertypen als Funktion der erzeugten Energie

Einrichtungen sind natürlich Ergebnisse von viel grösserer prinzipieller Bedeutung zu erwarten.

Der Abb. 1 sind auch die Bereiche der Anwendbarkeit der einzelnen Gerätetypen zu entnehmen. Dieses Diagramm soll nun im nachfolgenden zur Bestimmung einer zweckmässigen Einrichtung eines mittelmässig dotierten Atomforschungsinstitutes benutzt werden.

Bis auf Energien von einigen MeV kommen nur direkte Beschleuniger in Betracht, und zwar vier Typen: der Freiluft- bzw. der unter Druck arbeitende Van de Graaff-Generator und der Freiluft- bzw. der unter Druck arbeitende Kaskadengenerator.

Die VAN DE GRAAFFschen Beschleunigertypen bzw. deren Spannungsbereiche sind heute schon ziemlich genau definiert. Die VAN DE GRAAFFsche Freiluft-Spannungsquelle ist einfach, billig und ohne technische Schwierigkeiten herstellbar. Ihre Beschleunigungsanlage bietet natürlich ebenso viele Probleme wie jede beliebige andere Beschleunigungsanlage. Als Spannungsquelle hat diese Einrichtung heutzutage hauptsächlich die Rolle, in Unterrichtsanstalten andere elektrostatische Maschinen zu ersetzen.

In Energiebereichen von 1 bis 5 MeV ist der unter Druck arbeitende Van de Graaff-Generator zur Zeit einer der praktischsten Gerätetypen. Man kann seine Spannung besonders gut stabilisieren, so dass der Apparat hinsichtlich Regelbarkeit am besten von allen ähnlichen Anlagen den Anforderungen entspricht. Auch seine Stromstärke ist hinreichend: einige hunderte μA sind ohne Schwierigkeit zu erreichen. Einen Nachteil bildet nur die verwickelte technische Ausführung und der damit verbundene hohe Preis des Apparates. Sein rationeller Grenzspannungswert beträgt ungefähr 6 MV.

Für den Freiluft-Kaskadengenerator ist als wichtigstes Kennzeichen die grosse Stromstärke zu betrachten, die prinzipiell einige mA beträgt. Die Konstruktion dieser Anlage ist verhältnismässig unkompliziert. Zufolge ihrer Betriebssicherheit ist die unterhalb der Grenze von 1 MV eine der am besten verbreiteten Typen. Ihr rationeller Grenzspannungswert liegt bei ungefähr 1,5 MV, doch eher unterhalb als oberhalb dieses Wertes. Der Wert und die Leistungsfähigkeit dieser Anlage werden im allgemeinen allerdings stark überschätzt.

Der Kaskadengenerator mit Pressgasisolierung stellt einen neuen Typ dar. Prinzipiell vermag er dem Van de Graaff-Generator eine starke Konkurrenz zu machen, obwohl das elektrische Feld bei ihm bei weitem nicht so günstig ausgebildet werden kann. Somit ist der rationelle Grenzspannungswert bei dieser Anlage fast sicher niedriger als jener der Van de Graaff-Generatoren unter Druck.

Unter Belastung zeigen die Kaskadengeneratoren bedeutende Spannungsschwankungen. Prinzipiell kann zwar dieser Nachteil eliminiert werden, doch sind diesbezüglich keine praktischen Angaben bekannt.

Da sich die in der Literatur enthaltenen Gerätebeschreibungen im allgemeinen nur auf die Angabe der Betriebsdaten (manchmal bloss auf jene der Höchstwerte der Spannungsquelle) beschränken (z. B. 1 MV, 4 mA), lässt sich die Leistungsfähigkeit dieser Anlagen nicht rasch beurteilen. Mit der Angabe der Spannung der Spannungsquelle und der Stromstärke der Ionenquelle ist schon mehr gesagt. Für physikalische Untersuchungen gilt natürlich als einziger Kennwert *die Angabe der zusammengehörenden Werte der Beschleunigungsspannung und der Targetstromstärke*. In solchen Fällen stellt sich nun oft heraus, dass die im Titel der Beschreibung angeführte Zahl mehr als *Name* denn als technische Angabe des Apparates zu betrachten ist. Unser VAN DE GRAAFF-Freiluftgenerator mit den technischen Daten von 1 MV — 180 μA ergab z. B. bei einer Höchstspannung von 1,2 MV nur 0,8 MV, wenn auch das

Beschleunigungsrohr angekoppelt war; bei Beschleunigung fiel die Spannung auf 0,6 zurück; nebst einer betriebsmässigen Spannung von 0,3 — 0,4 MV war ein Targetstrom von 10 μ A zu messen. Obzwar sich diese Daten natürlich nur bei vorhergehenden Untersuchungen ergaben und sehr schlechte, korrigierbare Werte darstellen, die in der Tat auch ausgebessert wurden, zeigen sie klar, dass die wahre Beschleunigungsspannung — abgesehen von speziellen Einzelfällen — wesentlich niedriger ist als die Betriebsspannung des Generators. Zur Schilderung des Obengesagten sind in Tabelle 1 einige der Literatur entnommene Angaben angeführt.

Tabelle I

Vergleich der Nennwerte und Beschleunigungsdaten verschiedener Anlagen laut Literaturangaben

Nenn-Spannung MV	Maximal-Spannung MV	Beschleunigungsangaben		Jahr
		MV	μ A	
0,8	—	0,7	10	1932
0,4	—	0,37	600	1941
		0,3	900	
1,5	1,1	0,8	1000	1951
1,4	1,2	0,9	300	1952
1,5	1,28	—	250	1952

Wie bereits erwähnt, ist für den Physiker nur der bei einer gegebenen Spannung erzeugte Targetstrom und nicht die Spannung der Spannungsquelle und der ihr zu entnehmende maximale Strom kennzeichnend. Die Dimensionierung der Spannungsquellen ist nämlich eine verhältnismässig einfacher elektrotechnische Aufgabe.

Die Höchstspannung der ganzen Beschleunigungsanlage hängt vom Vakuumdurchschlag ab, und der Targetstrom ist nicht durch den der Ionenquelle entnehmbaren Strom, sondern durch die Fokussierungsschwierigkeiten bestimmt. Diese Schwierigkeiten nehmen bei wachsender Spannung infolge der Zunahme der Länge des Beschleunigungsrohres und bei wachsender Stromstärke wegen des Ansteigens der Raumladung in gesteigertem Masse zu. Als Neutronenquelle ist also der Bau von Geräten mit verhältnismässig niedriger Spannung, doch grosser Stromstärke zweckmässig.

Auf Grund des Obengesagten kann folgendes festgelegt werden: Der Kaskadengenerator mit einer Spannung von einigen hunderttausend Volt erweist sich als eine vielfältig verwendbare und dabei äusserst billige Neutronen-

quelle. Wird dieser Apparat mit einem Tankgenerator von 2—4 MV ergänzt, so ist man imstande, wie dies aus der Abb. 1 ersichtlich ist, mit einem Grossteil der kernphysikalischen Forschungen auf der ganzen Welt Schritt zu halten. Die Zweckmässigkeit eines einzigen Kaskadenbeschleunigers von ungefähr 1 MV ist dagegen äusserst fraglich.

Es muss betont werden, dass diese Apparate durch Kernreaktoren, die einen viel stärkeren Neutronenfluss geben, oder durch Zyklotrone, die viel höhere Energien zur Verfügung stellen, *nicht ersetzt*, sondern nur *ergänzt* wer-

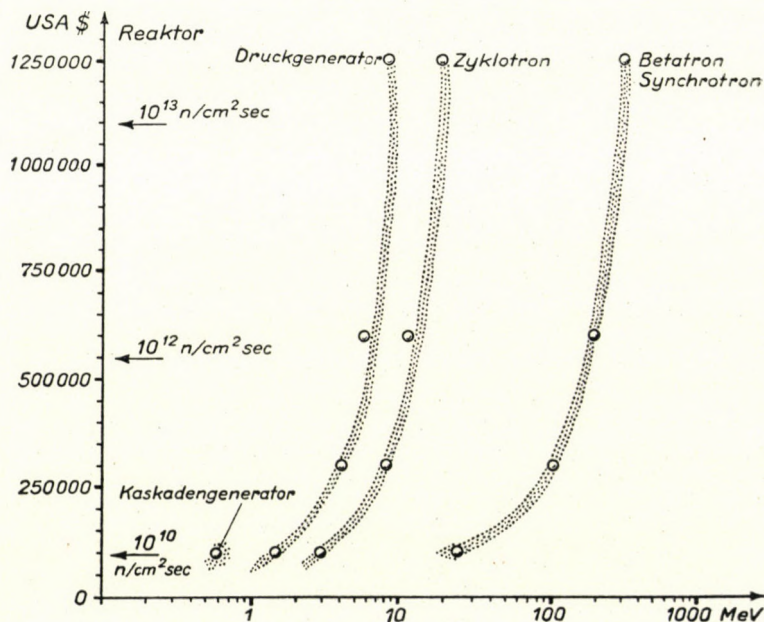


Abb. 2. Die Herstellungskosten verschiedener Generatortypen als Funktion der erwarteten Energie. Auf der linken Seite der Abbildung sind die Kosten von Reaktoren mit verschiedenem Neutronenflusse mit Pfeilen bezeichnet (Nach [1])

den können. Die oben angeführten Generatoren behalten ihre wichtige Rolle neben allen anderen Apparaten bei.

Wenn diese Beschleunigungsanlagen von dem Forschungsinstitut selbst hergestellt werden müssen, scheint es zweckmässig, zur Einübung einen Elektronenbeschleuniger von einigen hunderttausend Volt — eben seiner Einfachheit halber einen Freiluft-Van de Graaff-Generator — zu bauen, der später für Unterrichtszwecke dienen kann.

Die Abb. 2 gibt über die Preise Aufschluss: hieraus folgt, dass die Beschleunigung der Elektronen unvergleichlich einfacher ist. Ungefähr mit dem gleichen Aufwand an materiellen Mitteln und an geistiger Energie können um fast zwei Grössenordnungen höhere Elektronenenergien erzielt werden.

SCHRIFTTUM

1. Research Reactors Cost Data : What You Need to Know to Build One. Nucleonics, April 1954.
2. E. W. TITERTON: 1,2 MeV Accelerator at the Australian National University, Nucleonics 1952. May. S. 28.
3. C. MILEIKOWSKY und R. T. PAULI: A 1,5 MV Accelerator for Heavy Particles with Analysing Magnet for Use in Nuclear Research. Arkiv för Fysik. Band 4. Nr. 12. S. 287.
4. M. ARDENNE: Über eine Atomumwandungsanlage für Spannungen bis zu 1 MV. Zs. f. Physik **121** (1943) S. 236.
5. R. J. VAN DE GRAAFF, J. G. TRUMP und W. W. BUECHNER: Electrostatic Generators for the Acceleration of Charged Particles. Phys. Soc. Progr. Rep. XI.
6. R. L. FORTESCUE: The High Voltage Electrostatic Generator at the Atomic Energy Research Establishment. Journal IEE. 1949/I. S. 77.

ZUSAMMENFASSUNG

Auf Grund einer statistischen Auswertung der in den letzten fünf Jahren in den führenden physikalischen Zeitschriften erschienenen Aufsätze werden die zweckmässigsten Verwendungsgebiete der einzelnen Beschleunigungsanlagentypen festgestellt. Es wird darauf hingewiesen, dass auch weniger reichlich dotierte Forschungsinstitute die Möglichkeit besitzen, sich in den aktuellen Problembereich der Kernforschung einzuschalten

О НАИБОЛЕЕ ЦЕЛЕСООБРАЗНОМ ПРИМЕНЕНИИ
НОВЫХ УСКОРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Проф. К. ШИМОНЬИ

РЕЗЮМЕ

Автор на основе статистической оценки опубликованных за последние пять лет в ведущих физических журналах статей определяет круг целесообразного применения отдельных ускорительных устройств. Он указывает, что исследовательские институты, располагающие меньшими материальными средствами, также имеют возможность включиться в работу по теме экспериментального исследования атомного ядра.

ON THE MOST EFFICIENT LAY-OUT OF NEW ACCELERATION PLANTS
FOR NUCLEAR RESEARCH

Prof. K. SIMONYI

SUMMARY

By a statistical analysis of the papers published by the leading physical reviews during the last five years, the author determines the proper field of application of the various accelerators. He points out that research institutions disposing of rather modest means also have possibilities of taking part in the experimental research on the actual problems of nuclear physics.

SUR L'ARRANGEMENT LE PLUS EFFICACE DES NOUVELLES INSTALLATIONS
D'ACCÉLÉRATION POUR LA PHYSIQUE NUCLÉAIRE

Prof. K. SIMONYI

RÉSUMÉ

Par l'évaluation statistique des articles les plus importantes parus dans les revues de physique pendant les dernières cinq années, l'auteur détermine le champ d'application des différentes installations d'accélération. Il démontre que les instituts de recherche disposant de moyens plus modestes ont aussi la possibilité de prendre part dans les recherches expérimentales relatives aux problèmes actuels de la physique nucléaire.

EIN 4-MV-VAN DE GRAAFF-GENERATOR MIT PRESSGASISOLIERUNG

Prof. K. SIMONYI

ZENTRALFORSCHUNGSINSTITUT FÜR PHYSIK, ATOMPHYSIKALISCHE ABTEILUNG, BUDAPEST

[Eingegangen am 2. November 1955]

Wie aus einer Analyse der diesbezüglichen Literaturangaben [1] hervorgeht, ist der VAN DE GRAAFF-Generator mit Pressgasisolierung — kurz Tankgenerator genannt — in dem Spannungsgebiet von 1 MV bis 4 MV unter den Geräten der kernphysikalischen Forschung das am meisten verbreitete und am häufigsten gebrauchte. Er besitzt eine ziemlich hohe Stromstärke (einige hundert μA) und eine Energiehomogenität, die durch andere Apparate nicht einmal angenähert werden kann. Der Tankgenerator ist und bleibt wahrscheinlich noch lange Zeit das Präzisionsinstrument des Kernphysikers.

Es ist bekannt, dass sich die Durchschlagsfestigkeit der Gase durch Überdruck und Beimischung von elektronegativen Gasen, z. B. von CCl_2F_2 oder noch besser SF_6 , in sehr starkem Masse erhöhen lässt [2]. Diese Erhöhung kann ohne besondere Schwierigkeiten sogar das Zehnfache des Normalwertes betragen. Dadurch werden die Abmessungen stark herabgesetzt, doch wird die ganze Einrichtung technisch entsprechend komplizierter und somit auch teurer.

Über die Abmessungen kann man sich an Hand der Abb. 1 orientieren: sie zeigt die von uns ausgeführten Anlagen. Der erste Freiluftgenerator von 200 kV diente zu Vorversuchen mit Lade- und Umladevorrichtungen [3]. Der zweite wurde zuerst zum Beschleunigen von schweren Teilchen [4] verwendet und dient jetzt, da diese Aufgabe von einem Kaskadengenerator übernommen wurde, als Elektronenbeschleuniger.

Der Tankgenerator von 1 MV [5, 6] wurde als Modell zu Vorversuchen für die 4-MV-Anlage gebaut. Er ist aus Abb. 2 ersichtlich.

Die Kennlinien dieses Generators gehen aus Abb. 3 und 4 hervor. Es zeigt sich, dass bei einem theoretischen Höchstwert von 630 kV sowohl mit einer negativen wie auch mit einer positiven Polarität bei Freiluftversuchen ein Spannungswert von 600 kV erreicht wurde. Bei konstant gehaltenem Druck in einer Mischung von Freon und Stickstoff wurde bei positiver Polarität der Hochspannungselektrode ein Spannungshöchstwert von 1,7 MV erreicht.

Die Abhängigkeit der maximal erreichbaren Spannung vom Druck geht aus Abb. 4 hervor. Der Einfluss des Freongases ist sehr gut zu sehen.

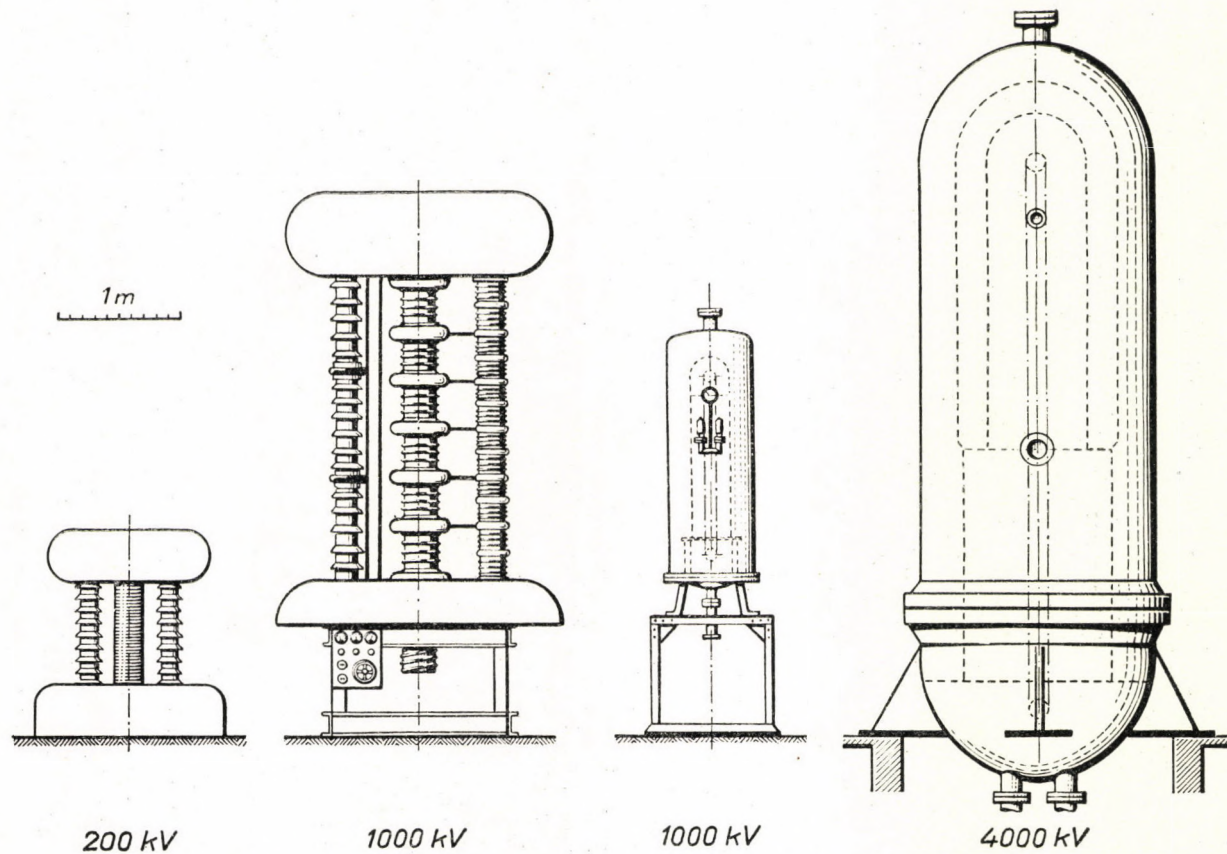


Abb. 1. Vergleich der Dimensionen von Apparaten verschiedener Ausführung

Auf Grund unserer Erfahrungen mit diesem Modell und auf Grund der Literaturangaben [7, 8, 9, 10] wurde der Generator für 4 MV gebaut. Der Druck wurde zu 25 kg/cm^2 gewählt und der Generator dementsprechend konstruiert. Nach unseren späteren Erfahrungen erwies sich der Druck von 25 kg/cm^2 als zu hoch : es scheint nicht zweckmässig zu sein, über 15 kg/cm^2 zu gehen.

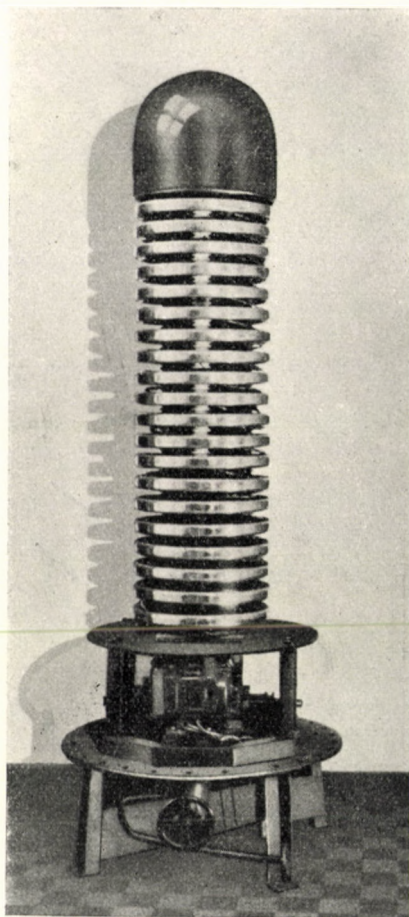


Abb. 2. Lichtbild des 1-MV-Generators

Zur Homogenisierung des Feldes wurde — wie aus Abb. 5 ersichtlich — zwischen die Hochspannungselektrode und die geerdete Wand eine Zwischen-elektrode gesetzt. Dies ist eine übliche Methode : es wurden sogar Anlagen mit mehreren Elektroden hergestellt [11], um die Homogenität des Feldes noch mehr zu verbessern. Die Zweckmässigkeit selbst einer einzigen solchen Elektrode ist aber fraglich. Erstens, weil die Glattheit der äusseren Fläche einer Elektrode

aus technologischen Gründen leichter gesichert werden kann als die der inneren Fläche: mit einer Homogenisierung des Feldes wird also keine gleichmässige Beanspruchung erzielt. Zweitens wird die Spannung nicht durch den Durchschlag

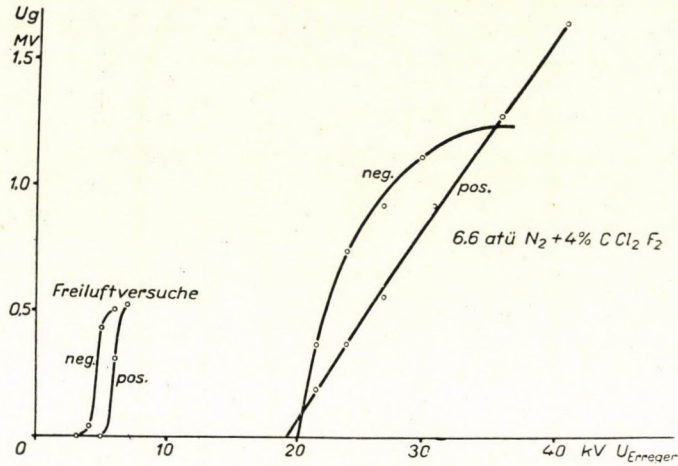


Abb. 3. Erregerkennlinie des 1-MV-Generators

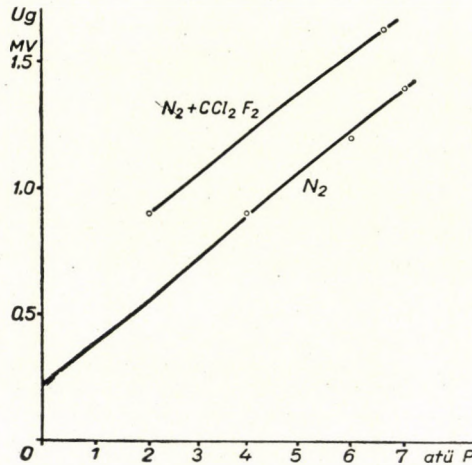


Abb. 4. Die Spannung des 1-MV-Generators als Funktion des Isolierungsgasdruckes

zwischen den Elektroden, sondern durch den Überschlag entlang des Bandes oder der Tragsäulen begrenzt.

Wenn der Durchschlag dennoch zwischen den Elektroden stattfindet, kann die Durchschlagfestigkeit des Füllgases durch sinngemässe Erhöhung des Druckes so weit gesteigert werden, dass die Maximalspannung durch den Kriechweg bestimmt wird. Nach den bisherigen Erfahrungen erscheint der mit einer einzi-

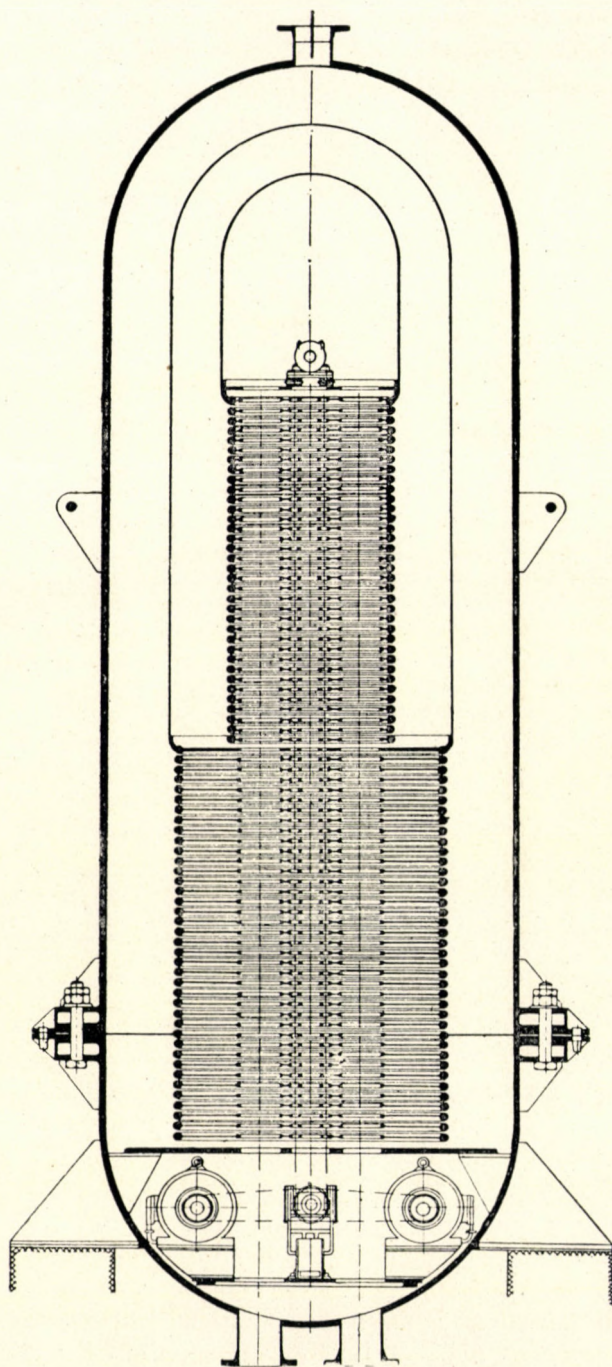


Abb. 5. Anriss des 4-MV-Generators

gen Elektrode und einem Drucke von 15 kg/cm^2 arbeitende Generator als die beste Ausführung.

Das Lichtbild der Anlage ist aus Abb. 6 ersichtlich. Die Äquipotentialringe sind aus Aluminium gegossen und nachher sorgfältig poliert. Die Elektro-

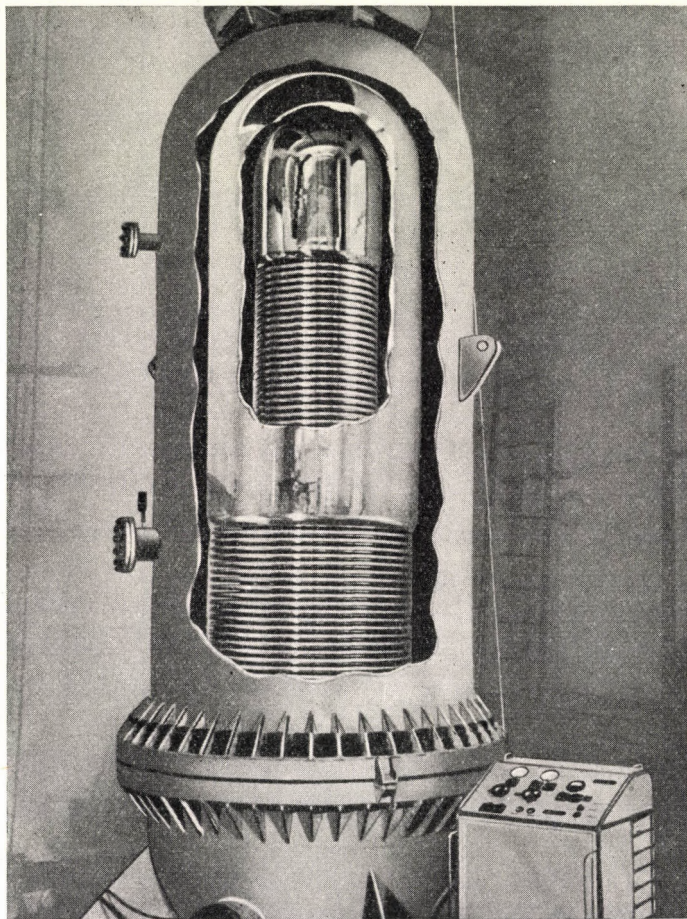


Abb. 6. Lichtbild des 4-MV-Generators

den wurden aus technologischen Gründen aus Kupfer und nicht aus rostfreiem Stahl gefertigt, wie es anderenorts üblich ist.

Die bei verschiedenem Druck erreichten Maximalspannungswerte ergeben sich aus Abb. 7. Es wurde ein Wert von 4,4 MV erreicht. Bei diesem Spannungswert fanden Überschläge entlang des Bandes statt, so dass die Spannung durch Erhöhung des Druckes nicht wesentlich weiter erhöht werden konnte. Mit grösserem Freongehalt des Gases hätte dieser Grenzwert bei kleineren

Drücken erreicht werden können, was wieder auf die untergeordnete Rolle der Feldhomogenisierung hinweist. Über weitere Einzelheiten siehe [12, 13].

Der Verfasser ergreift hier die Gelegenheit, seinen Dank denjenigen auszusprechen, die durch ihre Mitwirkung das Zustandekommen der hier beschriebenen Anlagen gefördert haben. I. MÉREY wirkte bei den Konstruktions- und Ausführungsarbeiten des Tankgenerators, G. SCHMIDT bei den Modellversuchen und P. KOSTKA bei dem Bau und den Messungen des Tankgenerators mit.

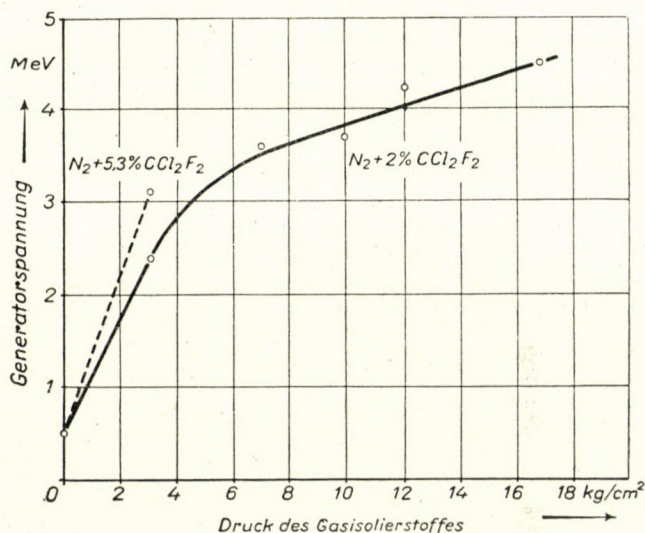


Abb. 7. Spannungsdiagramm des 4-MV-Generators

Oberingenieur LENGYEL baute den Tank, Oberingenieur MARTON die Reinigungsanlage des Apparates. Dank dem Erfahrungsaustausch mit dem Institut für Experimentalphysik von Prof. SZALAY in Debrecen konnten an der Bandkonstruktion die nötigen Vervollkommnungen durchgeführt werden.

Ein besonderer Dank soll noch der mechanischen Werkstatt unserer Abteilung für die Herstellung der Apparate ausgesprochen werden.

SCHRIFTTUM

1. K. SIMONYI: Acta Techn. Hung. 1955 (In diesem Heft).
2. TRUMP: El. Eng. **66** (1947), S. 525.
3. J. KARLOVITS, A., LUX, G. SCHMIDT: KFKI Közl. 1953. S. 82.
4. J. ERŐ, J. KARLOVITS, G. SCHMIDT: KFKI Közl. 1953. S. 90.
5. J. KARLOVITS, G. SCHMIDT: KFKI Közl. 1953. S. 88.
6. P. KOSTKA: KFKI Közl. 1954. S. 239.
7. HERB, PARKINSON, KERST: Phys. Rev. **11** (1937), S. 75.
8. R. J. VAN DE GRAAFF, J. G. TRUMP, W. W. BUECHNER: Phys. Soc. Progr. Rep. XI.
9. R. L. FORTESCUE: J. IEE 1949/I. 77.
10. I. R. MC INTOSH, E. A. BURILL: R. Sc. I. 1947.

11. L. DE BROGLIE : Les accélérateurs des particules. Paris, 1950.
12. P. KOSTKA, I. MÉREY, G. SCHMIDT : Magyar Elektrotechnika 48 (1955), S. 201.
13. P. KOSTKA, I. MÉREY : KFKI Közl. 1955. S. 161.

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit wird zuerst die Konstruktion von zwei Freiluftgeneratoren vorgeführt, wonach die an diesen durchgeführten Messungen geschildert werden. Im weiteren wird ein 1-MV-Tankgenerator beschrieben, der als Modell einer 4-MV-Anlage diene. Schliesslich werden dessen Konstruktion besprochen und ein Diagramm über die mit ihm erreichbaren maximalen Spannungen bei verschiedenen Drücken gegeben.

ГЕНЕРАТОР ВАН ДЕ ГРААФА С ИЗОЛЯЦИЕЙ СЖАТЫМ ГАЗОМ НА НАПРЯЖЕНИЕ ДО 4 мв

Проф. К. СИМОНЬИ

РЕЗЮМЕ

Сначала дается изложение конструкций двух генераторов Ван де Граафа, расположенных на открытом воздухе, и описываются проведенные на них измерения. После чего дается описание установки на напряжение в 1 мв, работающей в атмосфере сжатого газа. Этот генератор служил моделью для изготовления генератора на напряжение в 4 мв. В дальнейшем в статье дается описание конструкции этого генератора и приводится диаграмма максимальных напряжений, которые можно достигнуть при различных давлениях.

A COMPRESSED-AIR-INSULATED VAN DE GRAAFF GENERATOR

Prof. K. SIMONYI

SUMMARY

The author first deals with the design of two free-air belt generators and the measurements made on them, and then describes a compressed-air-insulated generator of 1 MV. This has served as a model for a 4 MV machine, the design and the diagram of which are discussed. The paper also deals with the maximum voltage which can be obtained at different pressures.

UN GÉNÉRATEUR DE VAN DE GRAAFF ISOLÉ A L'AIR COMPRIMÉ

Prof. K. SIMONYI

RESUME

L'auteur décrit tout d'abord deux générateurs à courroie établis à l'air libre et les mesures faites sur eux, passe ensuite à la description d'un appareil de 1 MV travaillant sous pression. Celui-ci a servi de modèle pour l'appareil de 4 MV. L'étude traite ensuite de la construction et du diagramme de ce générateur et communique la tension qui peut être obtenue à des pressions différentes.

DIE MESSUNG UND BERECHNUNG DER BEIM ROHRPILGERN AUFTRETENDEN KRÄFTE UND DES LEISTUNGSBEDARFS

Prof. A. GELEJI

MITGLIED DER UNGAR. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

J. SCHEY

KANDIDAT DER TECHN. WISSENSCHAFTEN

K. FINK, R. HANTOS und F. KÖVES

LEHRSTUHL FÜR BILDSAME VERFORMUNG UND HÜTTENMASCHINENKUNDE, TECHNISCHE UNIVERSITÄT
MISKOLC UND MÁTYÁS RÁKOSI STAHL- UND METALLWERKE, BUDAPEST—CSEPEL

[Eingegangen am 13. Februar 1956]

Mehr als sechs Jahrzehnte sind vergangen, seit es gelungen ist, durch Pilgern nahtlose Rohre herzustellen. Das Verfahren wurde seitdem selbstverständlich verbessert, sowohl in walztechnischer wie auch in maschineller Hinsicht. Doch hat mit der technischen Vervollkommnung des Pilgerverfahrens dessen wissenschaftliche Beleuchtung nicht Schritt gehalten. Die beim Pilgerschrittverfahren auftretenden Kräfte wurden zuerst durch G. B. LOBKOWITZ im Jahre 1927 experimentell ermittelt [1]. Mit der Untersuchung des Pilgervorganges durch Anwendung neuzeitlicher Messverfahren hat sich im Jahre 1933 F. KOCKS befasst [2]*. Zur Ermittlung der Kräfte und des Leistungsbedarfs durch Rechnung hat zuerst A. GELEJI ein Verfahren ausgearbeitet [3] das in dieser Beziehung noch heute das einzige ist. Die Verlässlichkeit und Brauchbarkeit seines Rechnungsverfahrens hat A. GELEJI mit den Lobkowitzschen Versuchsergebnissen bewiesen. Da aber die Lobkowitzschen Versuchsdaten nur in beschränkter Zahl vorhanden sind und sich nur auf den Walzdruck beziehen, wollten wir die Zahl der Versuchsdaten erweitern, auf die Messung vom Leistungsbedarf ausdehnen und somit die Überprüfung der Verlässlichkeit des Gelejischen Rechnungsverfahrens auf Grund von breiteren Versuchsergebnissen durchführen. Die Versuche wurden auf einem Pilgerwalzwerk (Abb. 1) der *M. R. Stahl- und Metallwerke zu Csepel* (bei Budapest) durchgeführt. Im nachstehenden werden diese Versuchsergebnisse wiedergegeben.

Die Beschreibung der Versuchseinrichtung

Die beim Pilgern auftretenden Walzdrücke wollten wir bei unseren Versuchen zuerst durch induktive Messdosen mit dazu gehörenden Verstärkereinrichtungen und mit einem Schleifenzillographen (Schildknecht—Zürich) ermitteln. Wir mussten unsere Versuche nach Auswalzung einer kleinen Anzahl von Rohren einstellen, da die induktiven Messdosen den starken dynamischen

* Leider wurden diese Versuchsergebnisse nicht veröffentlicht.

Beanspruchungen nicht gewachsen waren. Fortwährend zeigten sich Beschädigungen an den Messdosen und dabei erwiesen sich die angegebenen Eichwerte als unverlässlich. Die Eichkurven änderten sich unter Belastung fortwährend. Wir mussten also von der Verwendung der induktiven Messdosen Abstand nehmen und an ihrer statt Druckkörper mit Dehnungsmessstreifen ausgerüstet anwenden. Diese Dehnmessstreifen wurden in eine Wheatstonebrücke eingeschaltet und wurden mit 8000 Hz Tragfrequenz gespeist. Die Widerstandsver-

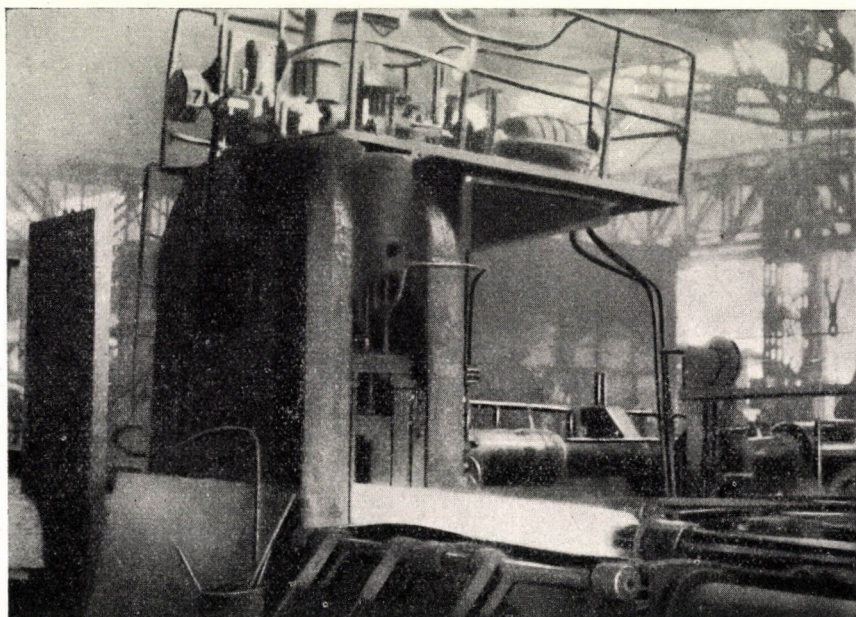


Abb. 1. Das Versuchswalzwerk

änderung wurde durch einen Verstärker und einen Demodulator mit einem Schleifenzillographen auf Fotopapier registriert.

Die bei den Versuchen angewendeten 300 t Messdosen sind in Abb. 2 zu sehen. Der Körper der Messdosen wurde aus CrV150 Stahl hergestellt, dessen Festigkeit nach der Warmbehandlung 110–130 kg/mm² war. Die Aufklebung der Dehnmessstreifen auf die Mantelfläche der Messkörper fand in der Weise statt, dass auf die entgegengesetzten Seiten paarweise in Längs- und in Querrichtung Dehnmessstreifen mit einem Widerstand von 600 Ω und einer Empfindlichkeitszahl von $k = 2$ aufgeklebt und nachher die in Längs- und Querrichtung aufgeklebten Dehnmessstreifen parallel geschaltet wurden. In Abb. 3 ist das Schaltbild wiedergegeben. Durch das kreuzweise Anbringen der Dehnmessstreifen wurde die Empfindlichkeit auf $k = 2,6$ gehoben, und die Wirkung der exzentrischen Beanspruchung eliminiert, sowie auch

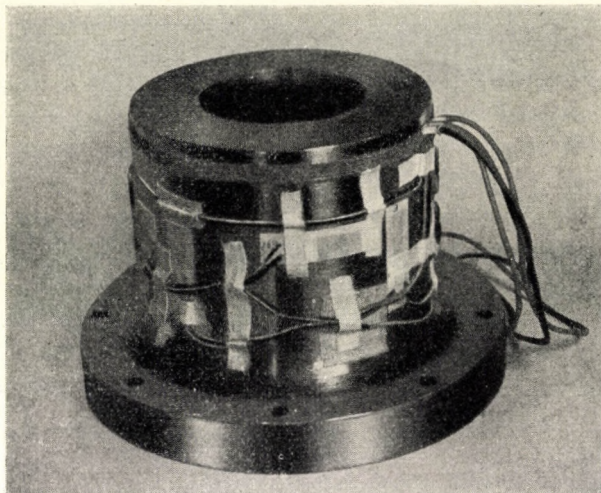


Abb. 4. Mit Dehnungssstreifen ausgerüsteter Messkörper

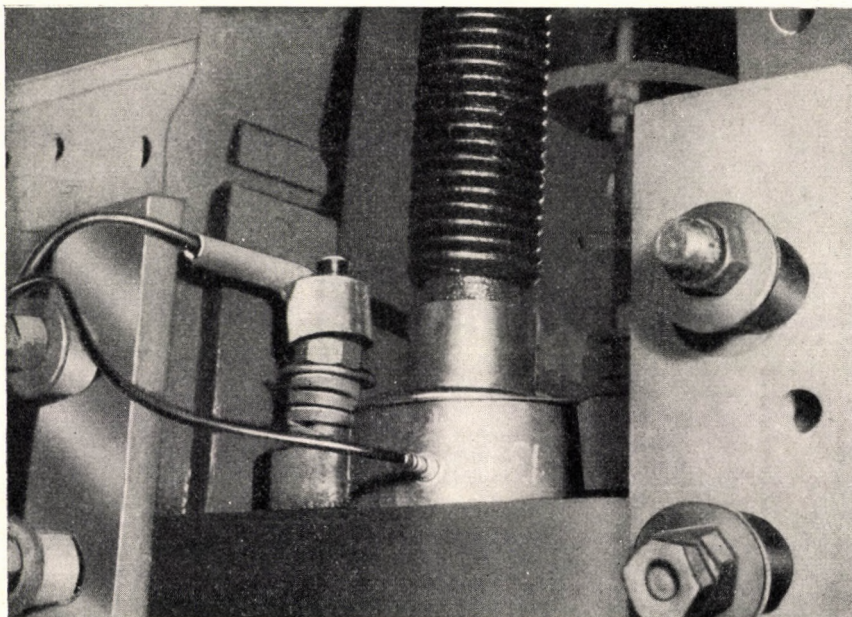


Abb. 5. An Stelle der Brechkapsel eingebaute Messdose

einer 500 t Druckpresse durchgeführt. Die Messkörper wurden statt der Brechtöpfe eingebaut (Abb. 5).

Die Verstärker und der Oszillograph sind auf Abb. 6 zu sehen.

Zur Ermittlung des Leistungsbedarfs wurde ein Registrierwattmeter verwendet. Das Walzwerk wurde durch einen mit Schlupfregler ausgerüsteten Drehstrommotor angetrieben. Die Leistungsspitzen wurden durch ein auf der Motorwelle angebrachtes Schwungrad ausgeglichen. Die Motorleistung (kW) und die Stromstärke (Amp) wurden mit einem Registrierapparat (Abb. 7) gleichzeitig nebeneinander auf eine Papierschleife aufgenommen.

Die Grösse des Vorschubs des Speiseapparats wurde in der Weise ermittelt, dass mit Hilfe eines auf dem Schlitten angebrachten Zeigers und eines auf dem Bett angebrachten Messstabes der auf 30 Schläge (Umdrehungen) fallende Gesamtvorschub abgemessen wurde. In die Tabelle 3 ist der auf eine Walzenumdrehung fallende durchschnittliche Vorschub eingetragen.

Die Verdrehung zwischen zwei nacheinander folgenden Schlägen wurde durch die Verdrehung eines auf dem Dornhalter angebrachten Zeichens ermittelt.

Die Umdrehungszahl der Walzen wurde mit Hilfe eines Tachometerdynamos registriert.

Die Temperatur des Walzgutes wurde mit einem optischen Pyrometer (System Pyro) ermittelt.

Die Abmessungen der Pilgerwalzen

Die Abmessungen der bei den Versuchen verwendeten Pilgerwalzen sind aus Abb. 9 und Tabelle 2 zu entnehmen.

Das angewandte Rechnungsverfahren [3]

- D_0 der Durchmesser des Pilgerdornes (Abb. 8),
- D_1 der Aussendurchmesser des Hohlblockes,
- D_2 der Aussendurchmesser des ausgepilgerten Rohres,
- D_3 der Innendurchmesser des Hohlblockes,
- m der Vorschub,
- r der Halbmesser des arbeitenden Kalibers,
- Q_1 der Querschnitt des Hohlblockes,
- Q_2 der Querschnitt des ausgepilgerten Rohres,
- K_m der maximale mittlere Verformungswiderstand,
- k_n der mittlere Verformungswiderstand während der Auswalzung des Rohres,
- k_f die Verformungsfestigkeit des gewalzten Werkstoffes,
- h_1 die Wanddicke des Hohlkörpers,
- h_2 die Wanddicke des ausgepilgerten Rohres,
- t die Temperatur des gewalzten Stückes ($^{\circ}\text{C}$),
- v die Walzgeschwindigkeit (m/sec),
- l_1 die Länge des Hohlblockes,
- l_2 die Länge des ausgepilgerten Rohres,
- n die Walzenumdrehung pro Minute.

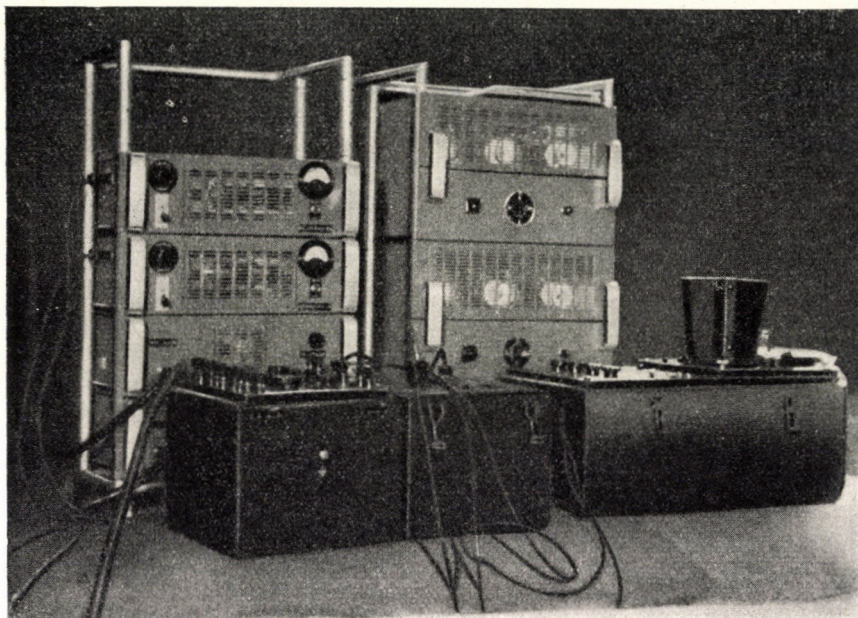


Abb. 6. Der Oszillograph und die Verstärker

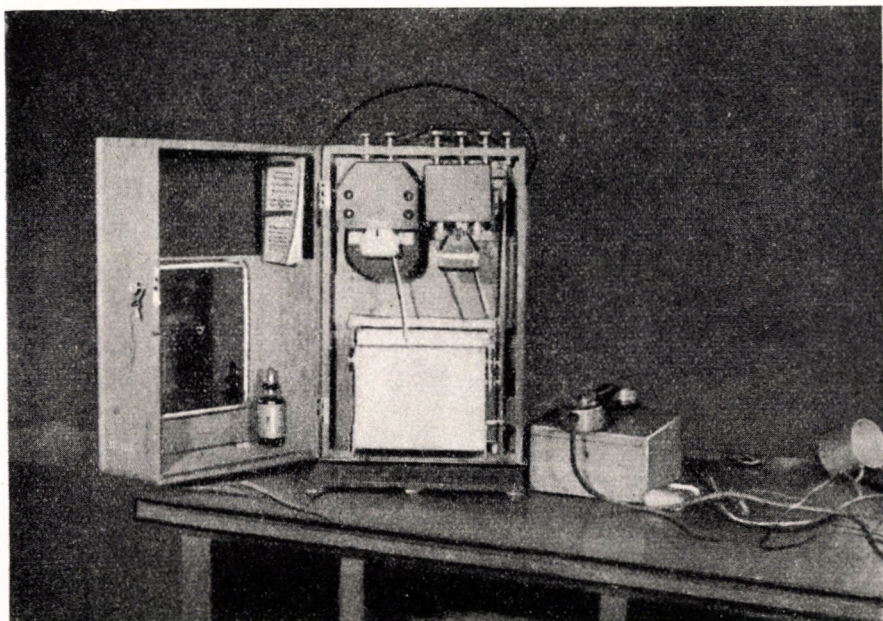


Abb. 7. Registrier-Watt- und Amperemeter

Der Einspannbogen in der Ebene des durch die Dornachse gehenden Stückquerschnittes ist :

$$l_d = \sqrt{m \cdot r} . \quad (1)$$

Die Breite derjenigen Projektion der gedrückten Fläche, die in die zu dem Walzdruck senkrechte Ebene fällt :

$$b = \frac{D_1 + D_2}{2} . \quad (2)$$

Die horizontale Projektion der gedrückten Fläche ist annähernd :

$$S = \frac{2}{3} \cdot l_d \cdot b = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{D_1 + D_2}{2} \right) \cdot \sqrt{m \cdot r} . \quad (3)$$

Der maximale mittlere Verformungswiderstand während einer Umdrehung :

$$K_m = k_f \cdot \left(1 + 5,5 \cdot \mu \cdot \frac{l_d}{h} \cdot \sqrt[4]{v} \right) . \quad (4)$$

Der Reibungskoeffizient :

$$\mu = 0,94 - 0,0005 \cdot t - 0,056 \cdot v . \quad (5)$$

In dieser Formel ist t die Walztemperatur, v die Walzgeschwindigkeit.

Der Walzdruck :

$$P = S \cdot K_m . \quad (6)$$

Die Verlängerung während des Auswalzens :

$$e = \frac{Q_1}{Q_2} . \quad (7)$$

Der mittlere Leistungsbedarf des Rohrpilgers :

$$N = \eta \cdot \frac{F \cdot k_m \cdot v_m}{75} . \quad (8)$$

Der Korrektionsfaktor :

$$\eta = 1,05 - 0,8 \cdot \frac{\Delta h}{h_1} . \quad (9)$$

Die Verminderung des Rohrwandquerschnittes bzw. die Abnahme :

$$F = Q_1 - Q_2 . \quad (10)$$

Die Walzstärkenverminderung :

$$\Delta h = h_1 - h_2 . \quad (11)$$

Die Walzgeschwindigkeit :

$$v = \frac{n \cdot 2 \cdot r \cdot \pi}{60} . \quad (12)$$

Die mittlere Auswalzgeschwindigkeit [m/sec] :

$$v_m = \frac{l_2}{i} = \frac{n \cdot m}{60} . \quad (13)$$

Die Auswalzdauer :

$$i = \frac{60 \cdot l_2}{n \cdot m} . \quad (14)$$

Der mittlere Verformungswiderstand während der Auswalzung eines Rohres :

$$k_m = \frac{k_f + K_m}{2} . \quad (15)$$

Der Leistungsbedarf der Zapfenreibungsarbeit :

$$N_r = \frac{1}{2} \cdot \frac{2P \cdot \mu_z \cdot v_z}{75} . \quad (16)$$

Der Gesamtwalzleistungsbedarf :

$$N = N_a + N_r + N_e , \quad (17)$$

wo N_e die Leerlaufleistung des Walzwerkes bedeutet.

Die chemische Zusammensetzung und die mechanischen Eigenschaften des Rohrwerkstoffes

Der bei den Versuchen verwendete Rohrwerkstoff war Stahl nach MNOSZ 29 (Ungarische Norm 29). Die genauere Zusammensetzung ist aus Tabelle 1 zu entnehmen. Die mechanischen Eigenschaften des Stahles waren bei Raumtemperatur :

$$\sigma_{0,2} = 23,1 \sim 24,8 \text{ kg/mm}^2 ,$$

$$\sigma_B = 26,5 \sim 27,3 \text{ kg/mm}^2 ,$$

$$\delta_{10} = 26,5 \sim 27,3 \% ,$$

bei 1000° C :

$$\sigma_B = 2,84 \sim 3,3 \text{ kg/mm}^2 .$$

Tabelle 1

No.	Zusammensetzung %				
	C	Si	Mn	S	P
1.	0,11	0,29	0,42	0,033	0,015
2.	0,11	0,32	0,49	0,030	0,025
3.	0,11	0,32	0,49	0,030	0,025
4.	0,11	0,32	0,49	0,030	0,025
5.	0,14	0,17	0,45	0,044	0,032
6.	0,12	0,25	0,56	0,039	0,028
7.	0,10	0,15	0,40	0,045	0,025
8.	0,12	0,37	0,48	0,037	0,027
9.	0,15	0,28	0,50	0,038	0,031
10.	0,16	0,22	0,48	0,037	0,027

Tabelle 2

D ₂	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	A	B
135	145,5	145,5	105,5	20	250	426
161	144,0	144,0	104,0	24	250	440
171	153,0	153,0	118,0	24	250	480
193	140,0	144,0	100,0	24	250	460

Einige Bemerkungen über die Durchführung der Versuche und deren Auswertung

Wie bereits gesagt, wurde die Temperatur des gewalzten Stückes knapp vor Beginn der Auswalzung mit einem optischen Pyrometer ermittelt. Die Temperaturmessungen während der Auswalzung waren unsicher. In Tabelle 3 sind deshalb nur die Anfangstemperaturen der Auswalzung eingetragen worden.

Die Walzdrücke wurden, wie schon gesagt, mit einem Schleifenszillo-graphen aufgenommen. Die äusseren und inneren (Antriebsseite) Zapfendrucke wurden auf eine Fotopapierschleife gleichzeitig nebeneinander, mit entgegengesetzten Vorzeichen aufgenommen, wie es aus Abb. 10 ersichtlich ist. Die Hüllkurven sind in Abb. 11 wiedergegeben. Die in Tabelle 3 eingetragenen Walzdrücke bedeuten die Summe der äusseren und inneren Zapfendrucke u. zw. der Drucke im Anfangsstadium des Auswalzens.

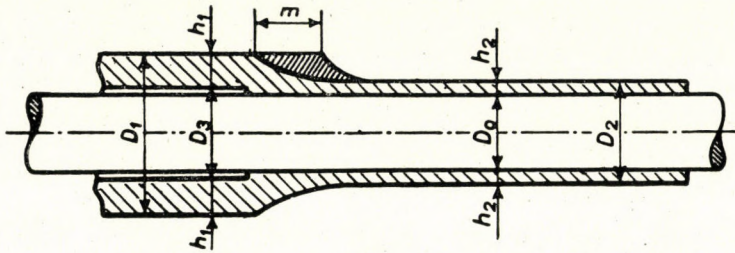


Abb. 8. Schematische Darstellung des Walzvorganges

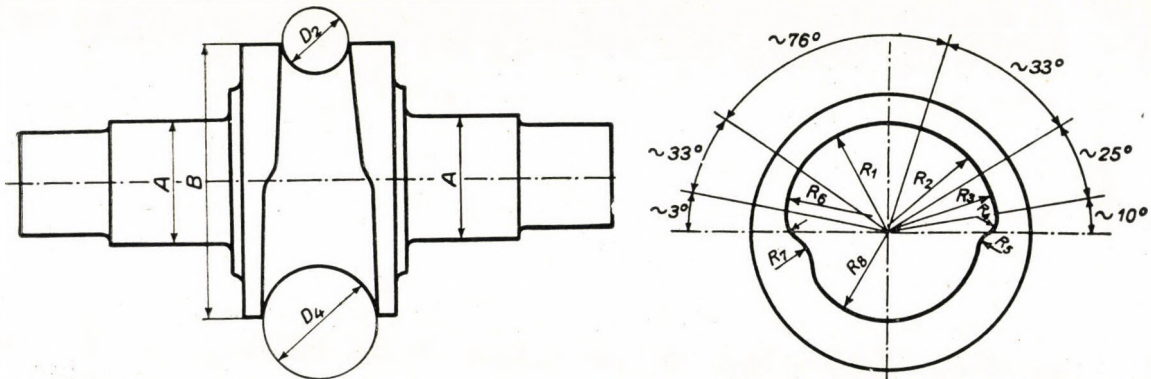


Abb. 9. Die Versuchspilgerwalzen

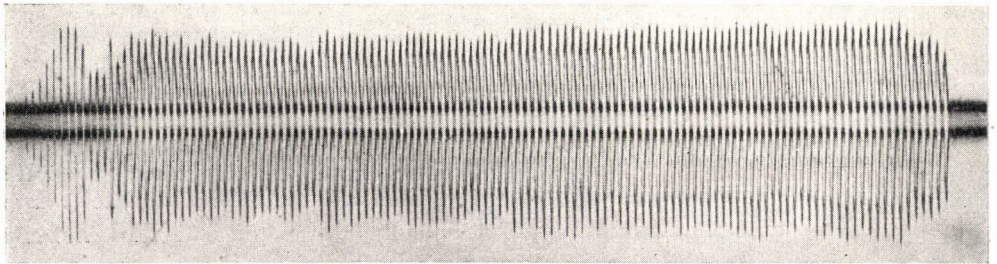


Abb. 10. Die Oszillogramme der äusseren und inneren Walzdrücke beim Auspilgern eines Hohlblocks von 246/65 mm zu einem Rohr von 171/158 mm

Die Stromstärke (A) und der Leistungsbedarf (kW) des Walzenzugmotors wurden gleichzeitig nebeneinander mit einem Registrierapparat auf eine Papierschleife aufgenommen (Abb. 7). Da das auf die Welle des Walzenzugmotors aufgekeilte Schwungrad den ständig wechselnden Leistungsbedarf der Auswalzung ausgleicht, so registriert der Leistungsbedarf-Registrierapparat den

Tabelle 3

No.	Kaliber mm	Wandstärke mm		Hohlblock- abmessung D ₁ /D ₃ mm	D ₂ /D ₀ mm	Hohlblock- querschnitt Q ₁ mm ²	Rohr- querschnitt Q ₂ mm ²	Abnahme Q ₁ —Q ₂ mm ²	Halbmesser des Arbeits- kalibers R ₂ mm	Walzdruck		Vorschub Umdr mm	Gedrückter Bogen l d mm	Gedrückte Fläche S mm ²	Breite der gedrückten Fläche b mm	Umdr Min	Walz- geschwindig- keit v m/s	Verformungs- widerstand k kg/mm ²	Durchschnittlicher Leistungsbedarf kW			Berechneter Leistungsbedarf kW		Auf die Versuchs- werte bezogene Abweichung %
		nom.	gemessen							ΣP gemessen	ΣP gerechnet								Leerlauf	Verformungs- u. Zapfen- reibungs-	Gesamt- leistungs- bedarf	Verformungs- leistungs- bedarf	Gesamt- leistungs- bedarf	
1.	135	4,5	4,25—4,75	206/135	1,075	18692,5	1830,8	16861,7	105,5	186	170	9,68	32	3594	170	80	0,88	47,4	108	252	360	141	336	—7,1
2.		9	8,25—9,25	208/131	1,155	19452,8	3402,6	16050,2		131	137,5	15,4	40	4500	170,5	80	0,88	30,6	—	—	—	—	—	—
3.			8,5—9,25	208/131	1,155	19452,8	3396,5	16056,3		113	136	14,8	39,5	4430	170,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.		14	13,5—14	208/120	1,25	22669,8	5277,9	17391,9		114	100	16,2	41,4	4650	170,5	82	0,9	21,4	108	162	270	73	233,5	—13
5.			13,7—14,2	208/120	1,25	22669,8	5277,9	17391,9		110	107,5	17,5	42,6	4800	170,5	80	0,88	21,9	108	252	360	—	—	—
6.	161	4,5	4,8—6	236/165	1,08	22361,0	2434,7	19926,3	104	220	212	10	33	4330	199	78	0,85	48,9	—	—	—	—	—	—
7.			4,75—5,75	236/165	1,06	22361,0	2550,2	19810,8		184	182	9,8	32	4180	198	81	0,88	43,5	—	—	—	—	—	—
8.			4,75—5,25	236/166,5	1,06	21600,6	2434,7	19165,9		182	177	10	32,1	4150	197	79	0,86	42,6	72	198	270	131	311	+ 15
9.			4,5—5,2	235/166,5	1,055	21612,7	2299,0	19313,7		167	186	10	32,1	4180	197	81	0,88	44,5	72	198	270	138	325	+ 20
10.			4,5—5,5	235/166,5	1,06	21612,7	2434,7	19178,0		190	179	10	32,1	4190	197,5	78	0,85	42,6	108	198	306	—	—	—
11.			3,75—5,5	235/163,5	1,06	22378,0	2224,0	20154,0		220	238	12,5	36	4680	197,5	78	0,85	51	108	297	405	214	464	+ 14,5
12.			4,0—5,0	235/163,5	1,055	22388,9	2176,2	20212,7		181	196	9,7	31,7	4125	197	85	0,93	47	108	252	360	178	414	+ 15
13.			4,5—5,3	235/163,5	1,055	22388,9	2434,7	19954,2		194	190	10,8	33,4	4340	197	72	0,78	44	90	202	292	147	342	+ 17
14.			4,25—5,1	235/163,5	1,06	22388,9	2224,0	20164,9		183	159	8,15	29,2	3800	197	—	—	—	—	—	—	—	—	—
15.			4,25—4,75	235/163,5	1,05	22388,9	2176,0	20212,9		222	204	9	31,4	4080	197	—	—	—	—	—	—	—	—	—
16.	171	6,22	6—6,5	246/165	1,08	26146,7	3182,3	22964,4	118	256	283	16,75	44,4	6080	207,5	68	0,84	46,6	90	320	410	224	439	+ 7
17.			6—6,5	246/165	1,08	26146,7	3182,3	22964,4		218	274	16,2	43,6	5990	207,5	68	0,84	45,9	—	—	—	—	—	—
18.		9	8,5—10	261/164	1,11	32378,0	4574,7	27803,3		180	235	20	48,5	6850	214,5	60	0,74	34,6	—	—	—	—	—	—
19.			8,5—10	260/164	1,11	31968,8	4574,7	27803,1		183	230	19,5	47,9	6730	214	60	0,74	34,2	—	—	—	—	—	—
20.			8,5—9,7	260/164	1,11	31968,8	4574,7	27804,1		171	217	18,5	46,5	6520	214	60	0,74	33,3	—	—	—	—	—	—
21.			8,75—9,5	260/164	1,11	31968,8	4574,7	27804,1		176	275	22,8	51,8	7300	214	70	0,86	37,6	—	—	—	—	—	—
22.	193	6	5,75—6,25	264/190	1,075	30611,7	3406,0	27205,7	100	176	214	12,7	35,6	5450	232,5	71	0,74	39,3	72	378	450	218	407	—9,5
23.			5,5—6	274/190	1,075	30611,7	3406,0	27205,7		164	244	14,6	38,2	5830	232,5	69	0,72	41,8	72	504	576	296	498	—
24.			5,75—6,25	274/190	1,075	30611,7	3406,0	27205,7		204	230	22,7	47,6	7280	232,5	67	0,7	51	108	580	688	355	653	—5,1

durchschnittlichen Leistungsbedarf des Walzenzugmotors bzw. den durchschnittlichen Leistungsbedarf der Verformungsarbeit (Gleichung 8). In Tabelle 3 sind die Werte des auf das Anfangsstadium der Auswalmung bezogenen mittleren Leistungsbedarfs eingetragen.

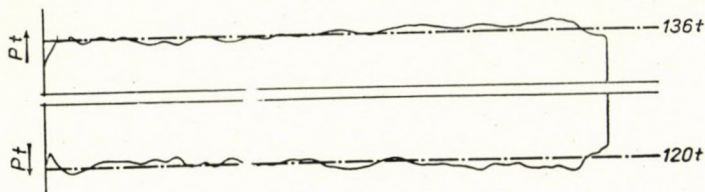


Abb. 11. Die Hüllkurven der Oszillogramme

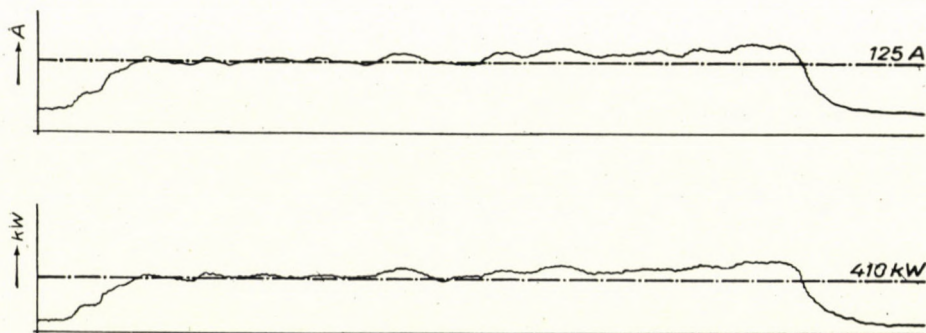


Abb. 12. Leistungs- und Stromstärke-Diagramm des Walzenzugmotors beim Auspilgern eines Hohlblocks von 246/165 mm zu einem Rohr von 171/158 mm

Diese Werte in Tabelle 3 wurden folgenderweise ermittelt (Tabelle 3, Versuch No. 16/7) :

Bei Auswalmung von Stahlrohren von 171/158,5 mm aus Hohlblock mit den Abmessungen von 246/165 mm wurden z. B. der Walzdruck und der Leistungsbedarf an Hand von Abb. 8 und mit dem vorgeführten Rechnungsverfahren folgenderweise berechnet :

$$\begin{aligned}
 D_0 &= 158,5 \text{ mm}, \\
 D_1 &= 246,0 \text{ mm}, \\
 D_2 &= 171,0 \text{ mm}, \\
 D_3 &= 165,0 \text{ mm}, \\
 m &= 16,75 \text{ mm}, \\
 r &= R_3 = 118,0 \text{ mm}, \\
 n &= 68/\text{min.} \\
 Q_1 &= 26146,7 \text{ mm}^2, \\
 Q_2 &= 3182,3 \text{ mm}^2, \\
 F &= 22964,4 \text{ mm}^2, \\
 h_1 &= \frac{D_1 - D_3}{2} \\
 h_2 &= \frac{D_2 - D_0}{2} \\
 t &= 1000^\circ \text{ C.}
 \end{aligned}$$

Nach Gleichung 2 ist

$$b = \frac{246 + 171}{2} = 207,5 \text{ mm},$$

der Einspannbogen (Gl. 1.):

$$l_d = \sqrt[3]{16,75 \cdot 118} = 44,4 \text{ mm},$$

die gedrückte Fläche (Gl. 3.):

$$S = \frac{2}{3} \cdot 44,4 \cdot 207,5 = 6080 \text{ mm}^2,$$

die Walzgeschwindigkeit (Gl. 12):

$$v = \frac{68 \cdot 0,236 \cdot \pi}{60} = 0,84 \text{ m/sec},$$

der Reibungskoeffizient (Gl. 5):

$$\mu = 0,94 - 0,0005 \cdot 1000 - 0,056 \cdot 0,84 = 0,39 ,$$

die Verformungsfestigkeit:

$$k_f = 3 \text{ kg/mm}^2 ,$$

der maximale mittlere Verformungswiderstand (Gl. 4.):

$$K_m = 3 \cdot \left(1 + 5,5 \cdot 0,39 \cdot \frac{44,4}{6,25} \cdot \sqrt[4]{0,84} \right) = 46,6 \text{ kg/mm}^2,$$

der Walzdruck (Gl. 6.):

$$P = 6080 \cdot 46,6 = 283\,000 \text{ kg} \sim 283 \text{ t} ,$$

die Länge des ausgewalzten Rohres (gemessen):

$$l_2 = 13,1 \text{ m} ,$$

die Auswalzdauer (gemessen):

$$i = 120 \text{ sec} ,$$

die mittlere Auswalzgeschwindigkeit (Gl. 13.):

$$v_m = \frac{13,1}{120} = 0,109 \text{ m/sec},$$

der Korrektionsfaktor (Gl. 9.):

$$\eta = 1,05 - 0,8 \cdot \frac{34,25}{40,5} = 0,4 ,$$

der mittlere Leistungsbedarf des Rohrpilgerns (Gl. 8.):

$$N_a = 0,4 \cdot \frac{22\,964,4 \cdot 0,109 \cdot 24,8}{75} = 304 \text{ PS} = 224 \text{ kW} ,$$

der mittlere Leistungsbedarf der Zapfenreibungsarbeit (Gl. 16.):

$$N_r = \frac{283\,000 \cdot 0,05 \cdot 0,9}{75} = 169 \text{ PS} = 125 \text{ kW},$$

der Leerlaufleistungsbedarf (gemessen):

$$N_e = 90 \text{ kW},$$

der Gesamtleistungsbedarf (Gl. 17.):

$$N = 224 + 125 + 90 = 439 \text{ kW}.$$

SCHRIFTTUM

1. G. B. LOBKOWITZ: Über Walzdruck an einem Pilgerwalzwerk. Röhrenindustrie, Berlin, 1936. S. 19/54.
2. G. B. LOBKOWITZ: Über die Grundlagen zum Entwurf von Pilgerwalzwerken. Stahl u. Eisen, 46 (1927) S. 1277/1283.
3. FR. KOCKS: Untersuchungen über den Pilgervorgang. Stahl u. Eisen, 53 (1933) S. 441/446.
3. A. GELEJI: A Mannesmann-rendszerű csőnyújtóhengermű tervezésének elméleti alapjai (Über die theoretischen Grundlagen zum Entwurf von Mannesmannschen Pilgerschrittwalzwerken). Bányászati és Kohászati Lapok (Ung. Z. f. Berg- und Hüttenwesen. 1939. No. 14).
4. A. GELEJI: Walzwerks- und Schmiedemaschinen. VEB Verlag Technik. Berlin, 1954. S. 597/615.
- A. GELEJI: Die Berechnung der Kräfte und des Arbeitsbedarfs bei der Formgebung im bildsamen Zustande der Metalle. Akadémiai Kiadó (Akademischer Verlag), Budapest, 1955. S. 197/207.
- A. GELEJI: Výpočet sil a spotřeby energie při tváření kovů. Státní Nakladatelství Technické Literatury, Praha, 1955. S. 120/128.

ZUSAMMENFASSUNG

Dieser Artikel befasst sich mit der Ermittlung der Walzdrücke und des Leistungsbedarfs beim Warmpilgern von Stahlrohren durch Rechnung und Versuch. Die Versuche wurden auf einer Pilger-Mittelstrecke durchgeführt, mit Hilfe von mit Dehnmessstreifen ausgerüsteten Messkörpern und einem Schleifenzillographen mit Kilowatt- und Stromstärke-Schreibapparat. Die Berechnungen wurden mit dem Gelejischen Rechnungsverfahren durchgeführt. Die Unterschiede zwischen den Versuchs- und Rechnungswerten fallen, wie es aus den Tabellen ersichtlich ist, zwischen die praktisch zulässigen Fehlergrenzen.

ИЗМЕРЕНИЕ И РАСЧЕТ УСИЛИЙ И ПОТРЕБНОЙ МОЩНОСТИ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ПИЛЬГЕРНОЙ ПРОКАТКЕ ТРУБ

Академик А. ГЕЛЕЙИ, д-р техн. наук Я. ШЕЙ, К. ФИНК, Р. ХАНТОШ и Ф. КЕВЕШ

РЕЗЮМЕ

Работа посвящена вопросу определения давлений валков и потребной мощности при пильгерной прокатке труб опытным и расчетным методом. Опытные измерения производились на среднесортном пильгерном прокатном стане при помощи нажимных устройств, снабженных тензометрическими спиральями, и осциллографа; расчетные значения определялись при помощи расчетной методики Гелеи. Отклонения между опытными и расчетными данными находятся в пределах практически допускаемых погрешностей.

MEASUREMENT AND CALCULATION OF ROLLING PRESSURE AND OF POWER DEMAND ON THE PILGER TUBE-ROLLING MILL

A. GELEJI, Academician, J. SCHEY, Cand. of Eng. Sc., K. FINK, R. HANTOS and F. KÖVES

SUMMARY

Rolling pressure and power demand of the pilger tube-rolling mill are determined experimentally and by calculation. Experiments were carried out on a pilger stand of an intermediate size train with the aid of compression specimens fitted with extensometer wire spirals and of an oscillograph. The calculation method of Prof. Geleji has been applied. Test and calculatory results agree within practically permissible error limits.

MESURAGE ET CALCUL DES PRESSIONS ET DE LA DEMANDE DE PUISSANCE AU LAMINOIR A TUBES A PAS DE PÉLERIN

A. GELEJI, membre de l'Académie Hongr. des Sc., J. SCHEY, cand. des sc. techn., K. FINK, R. HANTOS et F. KÖVES

RÉSUMÉ

Les pressions exercées par les cylindres et la demande de puissance du laminoir à pas de pélerin sont étudiées sur la base d'essais et de calculs. Le mesurage a été exécuté sur une cage à pas de pélerin d'un train moyen, à l'aide de barrettes en compression munies d'un extensomètre à spirales de fils, et au moyen d'un oscillograph. Le calcul a été fait d'après le procédé de calcul du Prof. Geleji. Les résultats des essais et du calcul s'accordent bien entre les limites d'erreur pratiquement admissibles.

MEASUREMENT OF TERRESTRIAL HEAT FLOW IN THE COAL MINING DISTRICT OF KOMLÓ

Prof. T. BOLDIZSÁR

D. of ENG. SC.

DEPARTMENT II FOR MINE MACHINERY, UNIVERSITY FOR THE HEAVY INDUSTRY, SOPRON

[Manuscript received 16th March, 1956]

Measurement of virgin-rock temperature

The drifts and shafts of deep mines offer the chance of exactly determining the virgin-rock temperature as has been shown by my previous investigations [1, 2]. In the liassic coal basin of Transdanubia the sinking of four big shafts offered a favourable opportunity to determine terrestrial heat flow. The shafts at Zobák and Hosszuhetény, are just being sunk presumably to a depth of between 800—1000 metres, and thus a good opportunity has been offered, to perform exact and strictly controlled virgin-rock temperature measurements, a fact that will ultimately lead to a knowledge of the geothermic conditions prevailing in this mining district. The shafts are being sunk at a distance of 90 metres from each other. Both twin shafts are being sunk in the middle liassic grey marl for a considerable length from the surface onwards. In the shafts the rock was found to be dense and conducted heat relatively well; except near the surface hardly any inflow of water was met with. No emission of gases was noticed. Ventilation was effected by natural convection, and at later stages by stirring the air so that only slight differences in temperature (1—3 °C) were recorded between the air and the virgin-rock.

In the course of the investigations temperature was measured by means of calibrated mercury in glass maximum thermometers graded by 0,2 °C, admitting thereby an order of precision of 0,1 °C for the readings. The thermometers were placed in dry boreholes 1,2 m. deep. Measurements were taken 6—8 hours after the borings. The thermometers were kept in the holes for 45—60 minutes. The measurements were always taken within 24 hours from the rock blasted at the shaft bottom. Approximating the temperature changes in the rock around the shaft by means of the heat-conduction equation of the semi-infinite solid, the difference between measured temperature and virgin rock temperature is

$$\tau = \tau_0 \left[1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{at}} \right].$$

With $x = 1,2$ m, $t = 24$ hours, $a = 4 \cdot 10^{-3}$ m²/h and $\tau_0 = 3$ °C, τ equals 0,0186 °C.

This slight deviation is considerably smaller than the probable error of a single temperature observation.

Measurement of thermal conductivity and thermal diffusivity of rocks

Determining the thermal conductivity of rocks is a hard task, which is difficult to perform and needs much care, a fact which explains why only few attempts have so far been made to establish terrestrial heat flow by means

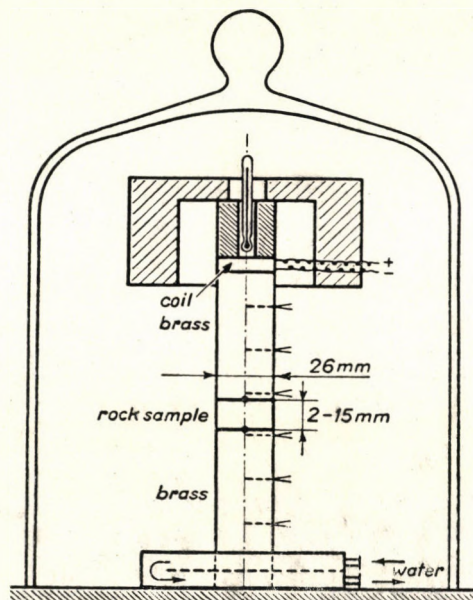


Fig. 1

of precise measurements [3]. The most accurate measurements so far performed were undertaken by BENFIELD [4, 5] and BULLARD [6, 7] in Cambridge and by BIRCH and CLARK [8, 9, 10] at Harvard University. Similar methods are applied in our investigations without any considerable changes and with the same precision.

The method employs a steady heat flow (Fig. 1) and determines the relative thermal conductivity of the rocks. One end of one of two brass bars, with a diameter of 26 mm each, is connected to an electric heating coil that produces 0,4—0,6 cal/sec heat flow; the end of the other brass bar is cooled by a thermostatically controlled flow of water. The heating coil is supplied by means of a voltage stabilizer (fluctuation under 1 per cent) while the fluctuation of temperature of the cooling water is regulated to be under 0,1 °C. The heat flow becomes stationary within 6—8 hours. Loss of heat in the radial direction is negligible

and can be left unconsidered, partly because the temperature difference between the sample and the surrounding air is small, and partly because the measuring apparatus is surrounded by a glass-wool insulator of about 10 cms in thickness. To eliminate the effect of air movement on the equipment, it is put under a glass bell.

The measurement of the thermal gradient is performed in the brass bars above and below the sample. The copper-constantan thermocouples are placed into the radial holes of the brass bars; the diameter of the holes being 0,8 mm (Fig. 1).

The thermal gradient can be determined by exactly measuring temperature difference and the distance between the holes. No measurements are taken

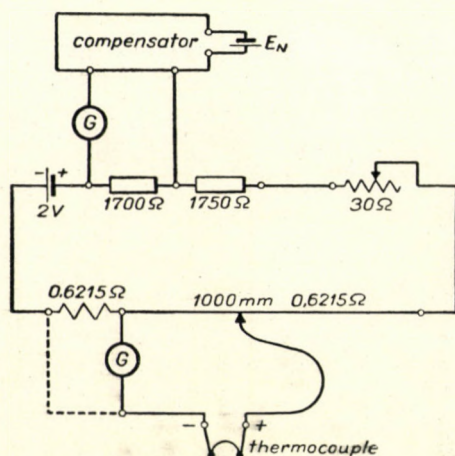


Fig. 2

in the rock sample itself, but only in the holes of the upper and lower brass bars at 3,5—3,5 mm distance from the surface, since in this way the contact surface temperature can be exactly determined by extrapolation.

The accuracy attained in the measurements of temperature, is of the order of 0,01 °C. The thermovoltage of the copper-constantan thermocouple, is about $4 \cdot 10^{-7}$ V at a temperature difference of 0,01 °C. The measuring of voltage is performed by compensation. To speed up the readings, the thermovoltage is compensated, by means of a sliding contact, to the voltage drop along a small-resistance manganin wire, 1 mm in diameter. The voltage drop in the measuring wire is continually controlled by compensation of the current (0,6 mA) passing through the wire. The compensation is carried out by a Feussner compensator based on a Weston standard cell and by a galvanometer with a sensitivity of the order of 10^{-8} A (Fig. 2).

A galvanometer with $2,2 \cdot 10^{-9}$ A sensitivity and 122 ohm internal

resistance, is in the thermocouple circuit. 1 mm per m swing compares to $2,68 \cdot 10^{-7}$ V.

The voltage of the thermocouples is $3,85 \cdot 10^{-7}$ V per $0,01^\circ\text{C}$ temperature difference, and therefore a temperature difference of $0,005^\circ\text{C}$ can well be observed.

The calibration of the thermocouples was performed in a thermostat; the temperature differences were measured by Beckmann thermometers. At 20°C one millimeter on the sliding resistance was equivalent to $0,0103^\circ\text{C}$. A temperature difference of 10°C could be measured and this was doubled by adding a wire of exactly the same resistance as that of the measuring wire.

The best method to establish the thermal conductivity of the brass bars is offered by a comparison with quartz crystals. Many investigations have been recorded concerning the thermal conductivity of quartz; from among the earlier investigators we may mention as outstanding the names of EUCKEN [11] and LEES [12], from among the more recent names, KAYE and HIGGINS [13], GRIFFITHS and KAYE [14], BIRCH and CLARK [15]. The more recent investigations show a reasonable agreement in their findings. According to Kaye and Higgins the thermal conductivity of quartz in a direction perpendicular to the optical axis, is given by the formula:

$$\lambda_{\text{SiO}_2} = 0,0157 - 3,9 \cdot 10^{-5} T$$

where the symbol T stands for the temperature expressed in $^\circ\text{C}$. As it has not been possible to make a natural quartz crystal standard of suitable size, three standards were prepared from an artificial quartz crystal.*

The temperature of the standard was observed during the measurements, and thus by means of the above formula the thermal conductivity of the brass bars could be computed. The mean value and probable error (not including the uncertainty of the conductivity of the quartz discs)

$$\lambda_{BR} = 0,1601 \pm 0,0018 \text{ cal/cm, sec, } ^\circ\text{C}.$$

There is a temperature drop in the airfilm between the adjacent surfaces of brass and standard resp. brass and rock sample, the value of which has to be subtracted from the measured temperature differences (film correction). The thermal resistance of the film depends on the nature of the adjacent substances, on the flatness of the surfaces and on their degree of smoothness. Air being a

* These measurements were controlled by three quartz discs, thickness 2,040 mm, 6,075 mm, and 11,995 mm respectively. The discs were kindly lent by Prof. E. C. Bullard, of the National Physical Laboratory, Teddington, Middlesex, for which I wish to express my sincere obligation. The best value for conductivity of these discs was given as follows

$$\lambda_{\text{SiO}_2} = 0,0162 - 3,9 \cdot 10^{-5} T$$

poor heat conductor, heat resistance can be decreased by employing various liquids for this purpose such as mercury or glycerine, vaseline, greases and similar other substances. But sediments absorb organic liquids, and so with an air-film good or even better results can be reached when the adjoining surfaces are exact planes and have been carefully smoothed.

The temperature drop in the airfilms and in the rock samples (thickness : h), when $\frac{\partial T}{\partial x} = b_r$, can be computed by the formula (4)

$$T = T_{film} + T_{rock} = T_f + hb_r$$

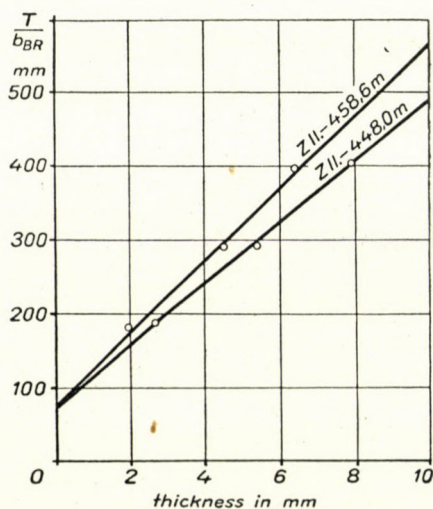


Fig. 3

The quantity of heat may vary in the course of the measurements, and for this reason it is advisable to divide the equation by the gradient of temperature in the brass bar

$$\frac{T}{b_{br}} = \frac{T_{film}}{b_{br}} + h \frac{b_r}{b_{br}} = \frac{T_{film}}{b_{br}} + h \frac{\lambda_{br}}{\lambda_r}$$

The value of T/b_{br} measured with varying thicknesses, if plotted (Fig. 3), will present a straight line where $T_f/b_{br} = F$ represents the constant of film correction, the slope of the straight line stands for the relative conductivity of the brass bars with reference to the rock sample.

The rock samples were dipped in paraffin immediately after having been taken out of the rock. When preparing the sample for examination, great care was taken that the axis of the cylinder and that of the shafts or boreholes, should

always be parallel. No water was used in cutting, forming and grinding the rock samples in order avoid a possible change in moisture of the rock sample. A micrometer was used to control that the plane surfaces should be parallel; the difference in thickness was 0,02–0,03 mm at the most. We have succeeded to increase the smoothness of the plane surfaces to an extent that with the middle liassic calcareous shale the samples with airfilm admitted measuring values $F = 75\text{--}100$ mm. Not even BENFIELD reported to have observed smaller values for F with a liquid film. The surface of the quartz standard can be given such a smoothness that with vaseline films $F = 10$, with airfilms 17,2 values could be achieved. The smoother the surface of the samples, the smaller was the deviation of the measured values from the straight line. Finely grained marls and calcareous shale admits the preparation of smoother surfaces than do rocks more coarse-grained, or those with quartz grains embedded in soft clay particles.

The effect of moisture of the rocks on conductivity, was a feature that was given a detailed consideration in the course of our investigations. The moisture in the liassic shales was found to be slight and hardly showed any changes during measurements. A small loss in weight amounting to not more than 1,2–1,6 per cent was recorded after heating samples at 120 °C for three hours; after heating the samples were immersed in water but absorbed less moisture than the loss following upon heating. The influence of moisture on thermal conductivity was therefore negligible. No correction on this account, was therefore necessary.

Though the rock in situ was under a pressure of 70–140 kg/cm² during the measured interval and only under a pressure of 1,4 kg/cm² in the course of our investigations, nevertheless I did not apply any correction on that account, because the influence of pressure on thermal conductivity is negligible. According to BRIDGMAN [16] at 30 °C and under a pressure of 1000 kg/cm² thermal conductivity showed an increase only of + 0,1 per cent in the case of Solenhofen limestone, and + 0,47 per cent in the case of basalt.

The influence of temperature on thermal conductivity was closely investigated by BIRCH and CLARK [15]. The thermal conductivity of rocks generally decreases as temperature rises. The virgin-rock temperature was 15–35 °C while during the measurements the mean temperature was at 18–22 °C. Due to the slight temperature differences, the changes in thermal conductivity were within error limits of the measurement, and therefore it was not thought necessary to apply any corrections.

Measurements of thermal conductivity were performed in three samples of varying thickness. The thermal conductivity of the medium size sample, can be computed from the values found for the other two samples assuming the same film correction (Fig. 4). Judging by the difference found between the observed and the computed values, from a great number of observed data, the standard

Table I

Temperatures in the upcast shaft at Zobák

Measurement No.	Depth in metres	Corrected temperature °C	Measurement No.	Depth in metres	Corrected temperature °C
1.	316,60	23,95	10.	391,24	26,83
2.	321,50	24,35	11.	396,70	26,98
3.	326,30	24,8	12.	405,70	27,12
4.	344,40	25,6	13.	413,30	27,52
5.	354,80	25,94	14.	440,00	28,92
6.	365,00	26,14	15.	452,90	29,63
7.	372,68	26,43	16.	460,40	30,00
8.	384,44	26,53	17.	469,40	30,50
9.	386,12	26,81	18.	478,00	31,10

Table II

Thermal conductivity of rocks in the upcast shaft at Zobák

Depth	Thermal conductivity cal/cm, sec, °C	Density g/cm ³	Specific heat cal/g, °C	Thermal diffusivity cm ² /sec
316,6	0,01073	2,69	0,21	0,0191
328,5	0,00788	2,61	0,20	0,0151
423,2	0,00652	2,68	0,20	0,0122
431,7	0,00778	2,83	0,21	0,0131
448,0	0,00617	2,54	0,19	0,0128
458,6	0,00546	2,60	0,20	0,0105
469,4	0,00597	2,60	0,20	0,0115

Table III

The heat flow in the upcast shaft at Zobák

Depth m	Thickness of layer h m	Temperature °C	ΔT °C	λ_i cal/cm, sec °C	$10^{-6} \frac{\Delta h_i}{\lambda_i}$ °C cm ² sec/cal	$10^6 q$ cal/cm ² , sec
321,5	—	24,35	—	—	—	—
372,7	51,2	26,43	2,08	0,00788	0,6497	3,201
413,3	40,6	27,52	1,09	0,00652	0,6226	1,750
440,0	26,7	28,92	1,40	0,00778	0,3431	4,080
460,4	20,4	30,00	1,08	0,00617	0,3306	3,266
469,4	9,0	30,50	0,50	0,00546	0,1648	3,033

Mean heat flow: $10^6 q = 3,066 \pm 0,250$ cal/cm² sec.

deviation is 0,00028 cgs unit, and the probable error of single observation is 0,00019 cgs. The observed average 0,00654 cgs in terms of thermal conductivity points to a probable error amounting to 2,9%.

Determination of terrestrial heat flow in the mines of the Pécs and Komló regions

The heat flow was computed according to the following formula :

$$q = \frac{T_2 - T_1}{\sum_{i=1}^n \frac{\Delta h_i}{\lambda_i}},$$

where Δh_i is the thickness of stratum with thermal conductivity of λ_i .

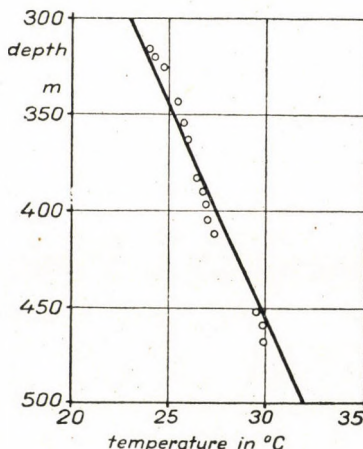


Fig. 4

It is believed that the present measurement has been the first ever attempted in continental Europe [3], and that the high value here gained may be of some interest for the geophysicist and geologist. This high value affects mining operations rather unfavourably. Since at a depth of 570 metres the virgin-rock temperature is 36 °C, it must be assumed to rise to 60 °C at 1000 metres to which the shafts are planned to be sunk. Such high temperatures will present special problems in mine ventilation.

The observations are being extended to the oilfields at Nagylengyel, to other parts of Transdanubia, and to the Great Hungarian Plain as well. Thus it has become possible for the first time to get a more accurate insight into the geothermic conditions prevailing in this country.

REFERENCES

1. BOLDIZSÁR : A geotermikus gradiens bányászati vonatkozásai. BKL. 1943. évf. 20. sz.
2. BOLDIZSÁR : A pécsbányatelepi liasz szénelőfordulás geotermikus viszonyai. BKL. 1944. évf. 10—20. sz. 280—287. és 290—296. old.
3. BIRCH : The present state of geothermal investigations. Geophysics Vol. XIX (1954). No. 4. pp. 645—659.
4. BENFIELD : Terrestrial heat flow in Great Britain. Proc. Roy. Soc. 1939. Vol. A—173. pp. 428—450.
5. BENFIELD : A heat flow value in California. Am. J. Sci. 1947. Vol. 245. pp. 1—18.
6. BULLARD : Heat flow in South Africa. Proc. Roy. Soc. 1939. Vol. A—173. pp. 473., 502.
7. BULLARD : The flow of heat through the floor of the Atlantic. Proc. Roy. Soc. 1954. Vol. A—222. pp. 408—429.
8. BIRCH : Flow heat in the Front Range, Colorado. Bull. Geol. Soc. Am. 1950. Vol. 61. pp. 567—630.
9. BIRCH—CLARK : An estimate of the surface flow of heat in the West-Texas Permian Basin. Am. J. Sci. 1945. Vol. 243 A. pp. 69—74.
10. BIRCH : Thermal conductivity and heat flow near Calumet, Michigan Amer. J. Sci. 1954. Vol. 252. pp. 1—25.
11. EUCKEN : Ann. Phys. 1911, 34. 185.
12. LEES : Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. 1893, 183A.
13. KAYE—HIGGINS : Proc. Roy. Soc. 1926. Vol. A—113. p. 335.
14. GRIFFITHS—KAYE : Proc. Roy. Soc. 1904. Vol. A—104. p. 71.
15. BIRCH—CLARK : The thermal conductivity of rocks and its dependence upon temperature and composition. Am. J. Sci. 1940. Vol. 238. pp. 529—558, 613—635.
6. BRIDGMAN : The Physics of High Pressure. London, 1949.

SUMMARY

In connection with shaft sinkings exact measurements of virgin rock temperature and conductivity allowed computing a heat flow of $3,1 \cdot 10^{-6}$ cal/cm², sec. This value is about three times as great as the average observed in other parts of the world, and affects mining operations rather unfavourably.

ИЗМЕРЕНИЕ ТЕПЛОВОГО ТОКА, ДВИЖУЩЕГО В СТОРОНУ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ, В УГОЛЬНОМ БАСЕЙНЕ В РАЙОНЕ КОМЛО

Д-р. техн. наук Т. БОЛЬДИЖАР

РЕЗЮМЕ

Согласно точным измерениям температуры пород и теплопроводности, связанных с проходкой шахт, на этой территории тепловой ток составляет $3,1 \cdot 10^{-6}$ кал/см² сек. Эта величина примерно в три раза выше средней величины, наблюдаемой на поверхности земли, что является очень неблагоприятным обстоятельством с точки зрения угольной промышленности в этом районе.

MESURAGE DE L'ÉCOULEMENT DE LA CHALEUR TERRESTRE DANS LE DISTRICT CHARBONNIER DE KOMLÓ

Prof. T. BOLDIZSÁR
docteur des sc. techn.

RÉSUMÉ

Des mesures exactes de la température et de la conductibilité thermique de la roche vierge exécutées au fonçage de puits ont permis de calculer un écoulement de chaleur de l'ordre de $3,1 \cdot 10^{-6}$ cal/cm² sec. Cette valeur est à peu près trois fois autant que la moyenne observée dans les autres parties du monde, ce qui aura des répercussions fort défavorables sur les travaux miniers.

DIE MESSUNG DES GEGEN DIE ERDOBERFLÄCHE GERICHTETEN WÄRMESTROMES IM KOHLENREVIER VON KOMLÓ

Prof. T. BOLDIZSÁR
Doktor der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

In Verbindung mit Schachtabteufungen vorgenommene genaue Messungen der Temperatur und Leitfähigkeit der Gesteine ergeben, dass in diesem Revier der Wärmestrom $3,1 \cdot 10^{-6}$ kal/cm² sek beträgt. Dieser Wert ist ungefähr dreimal so gross als der an anderen Stellen beobachtete Durchschnittswert, was für den hiesigen Kohlenbergbau sehr ungünstig ist.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ СООБЩЕНИЕ — COMMUNICATION
PRÉLIMINAIRE — PRELIMINARY REPORT — VORBERICHT

APPLICATION OF MECHANICAL WHITE NOISE FOR MEASUREMENTS OF MICROPHONISM IN ELECTRON TUBES

I. P. VALKÓ

CAND. TECHN. SC.

INDUSTRIAL RESEARCH INSTITUTE FOR TELECOMMUNICATION, BUDAPEST

[Manuscript received 15th February, 1956]

White noise — i. e. a fluctuating quantity characterized by a Fourier-Integral of uniform spectral density within a certain frequency band — has reached a growing importance in the field of electrical measurements. Narrow bands of noise are often applied instead of sine waves in order to reduce the disturbing effect of interferences, as noise components have no phase correlations. Broad bands of noise are even more useful since they make possible the instantaneous averaging of frequency dependent quantities by means of a single measurement. Thus the effective band width of a tuned amplifier may be determined simply by applying a noise voltage to its input and measuring the output. Application of a tunable sine-wave generator yields the same result but only if a series of measurements has been made, and the frequency response curve of the amplifier has been plotted. This latter method gives more information, but it is much more complicated, too.

It is quite logical that the utilization of the unique features of white noise is not restricted to electrical measurements. Thus a mechanical vibration with the properties of white noise would be advantageous in the study of vibrating systems. Yet one hardly finds similar proposals.

Recently a device on this principle has been constructed by the author in the Electron Tube Laboratory of the Industrial Research Institute for Telecommunication. This apparatus is aimed at measuring the microphonism of electron tubes. (Microphonism denotes the unwanted property that mechanical influences excite electrical signals in the plate circuit of the tube.)

The usual test for microphonism consists in tapping the tube with a light mallet or striking it with a ball while it works as a low-frequency amplifier with normal voltages applied to all electrodes.

Since the plate current is a function of tube geometry, a corresponding signal appears in the plate circuit by altering the mutual position of the electrodes.

The amount of this signal is a measure for the microphonism of the tube. This test is very simple but has several drawbacks, especially that reproducibility is very poor. It is a general custom to repeat the test several times on a tube and to take the average of the readings.

A more elaborate method is the application of sine wave excitation which may be obtained from an electro-mechanical vibrator driven by an audio-frequency generator. Recent apparatuses allow to trace automatically the microphonic frequency response curve of the tested tube exhibiting very often a series of sharp resonances. This method is very tedious, however, and not well suitable for mass tests.

The above mentioned new apparatus based on the application of white noise, is free from these drawbacks. It delivers only one characteristic figure for each tube. Reproducibility is very high (deviations usually less than $\pm 10\%$). The method is especially adapted for standard tests as measuring conditions can be clearly defined.

The new apparatus consists of four parts, viz :

1. Noise generator and amplifier delivering a noise current of constant spectral density in a certain frequency band and of adequate energy to actuate the vibrator.
2. An electrodynamic vibrator working as a mass-controlled rigid system.
3. A mounting for the tube which is exposed to the vibrations. The tube is connected as a low-frequency amplifier.
4. A linear amplifier and square law detector for the measurement of the output-signal.

Thermal noise of a resistance, or shot noise of a saturated electron tube, may be used in the generator; semiconductor noise and flicker effect might cause disturbance at extreme low frequencies. It was found however that under certain conditions a gaseous triode (thyatron) gives an approximately white noise, at moderately low frequency.

It should be added to point 2, that a choice has to be made whether uniform spectral density should be related to elongation, velocity or acceleration of the vibrations. We decided for uniform acceleration. This can be achieved by a rigid vibrating system driven above its resonance, by a force of constant amplitude. Thus if I is the driving noise current and $F = KI$ the driving force, one has for the acceleration

$$\ddot{X} = \frac{F}{M} = \frac{KI}{M}, \quad (1)$$

where M is the mass of the system, and K a constant.

Thus there is proportionality between the components of acceleration and driving current. By making the system resonate at 40 c/s and shifting the higher modes of the metallic vibrator above 6000 c/s, it was possible to achieve uniformity in the band between 80 and 6000 c/s, which satisfied the demands.

If the vibrator is driven by a noise current we have

$$I^2 = \int_{f_1}^{f_2} y(f) df = y(f_2 - f_1), \quad (2)$$

where y is the spectral density of I^2 .

The squared value of the acceleration is

$$\ddot{X}^2 = \frac{K^2}{M^2} y(f_2 - f_1). \quad (3)$$

Let $g(f)$ denote the microphonic response of the tube to a unit acceleration at a frequency f , then the square of the total signal will be :

$$S^2 = \int_{f_1}^{f_2} g^2(f) \frac{K^2}{M^2} y df. \quad (4)$$

Thus the signal has a frequency distribution corresponding to the frequency response of microphonism, but its single components are uncorrelated. According to equation (4) only quadratic detectors will measure the correct value of the microphonic effect. While older microphonism test methods did not always conform with the performance of the tube in actual amplifiers, this correlation is remarkably good with the new method.

It should be mentioned that the above method is equally suitable for the determination of the average sensitivity of microphones, pickups and other mechano-electrical transducers.

The author wishes to acknowledge the valuable help of Messrs A. KEMÉNY and L. SZÉCSI during the development of the apparatus.

SUMMARY

White noise is suitable for the determination of the behaviour of a system within some broader frequency band by a single integrating measurement, since in its Fourier spectrum components of any frequency are of the same magnitude. On this basis an equipment has been constructed for the measurement of microphonism in electron tubes, at which the tube is subjected to mechanical vibration with the features of white noise, and the signal arising in the plate circuit is measured. Essential elements of the equipment are: an electronic noise generator and an electro-mechanical vibrator of frequency-independent characteristics within the frequency band of 80—6000 c/s investigated. Measurement results are better reproducible and conform better with practical data than with the older test methods.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО БЕЛОГО ШУМА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ МИКРОФОННОГО ЭФФЕКТА ЭЛЕКТРОННЫХ ЛАМП

Канд. техн. наук И. П. ВАЛЬКО

РЕЗЮМЕ

Белый шум, — учитывая, что в спектре Фурье все слагающие частот имеют идентичную величину, — может быть использован для определения при помощи одного единственного интегрирующего измерения поведения некоторой системы в более широком диапазоне частот. На основе этого принципа сконструирована аппаратура для измерения микрофонного эффекта электронных ламп, на которой электронные лампы подвергаются механической тряске, обладающей свойствами белого шума, и измеряется сигнал, возникающий в анодной цепи. Основными элементами аппаратуры являются электронный шумовой генератор и электромеханический вибратор, который в исследованном диапазоне частот (80—6000 *гц*) работает независимо от частоты. Данные измерений можно лучше воспроизвести и лучше согласовать с практическими данными, чем при помощи ранее известных методов исследования.

EMPLOI DU BRUIT BLANC AU MESURAGE DU MICROPHONISME DES TUBES ÉLECTRONIQUES

I. P. VALKÓ
cand. des sc. techn.

RÉSUMÉ

Le bruit blanc, ses composantes de toutes les fréquences ayant la même grandeur dans le spectre Fourier, se prête à l'examen (du fonctionnement) d'un système dans une bande de fréquence étendue au moyen d'une seule mesure d'intégration. A la base de ce principe on a construit un appareil pour le mesurage du microphonisme des tubes électroniques dans lequel le tube est soumis à une vibration mécanique ayant les caractéristiques du son blanc et le signal engendré dans le circuit anodique est mesuré. Les éléments essentiels de l'appareil sont : une génératrice électronique de bruit et un vibreur électro-mécanique fonctionnant dans la bande (80—6000 *c/s*) étudiée indépendamment de la fréquence. Les résultats de telles mesures sont mieux reproduisibles et s'accordent mieux avec les expériences pratiques que ceux obtenus par les méthodes d'essai jusqu'ici connues.

DIE ANWENDUNG DES MECHANISCHEN WEISSEN RAUSCHENS ZUR MESSUNG DER MIKROPHONIE VON ELEKTRONENRÖHREN

I. P. VALKÓ
Kandidat der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Das weisse Rauschen eignet sich zur Bestimmung des Verhaltens eines Systems innerhalb eines breiteren Frequenzbereichs durch eine einzige integrierende Messung, da im FOURIER-Spektrum die Komponenten einer jeden Frequenz dieselbe Grösse besitzen. Auf Grund dieses Prinzips wurde eine Vorrichtung zur Messung der Mikrophonie von Elektronenröhren angefertigt, in der die Elektronenröhre einer mechanischen Erschütterung, die dem weissen Rauschen entspricht, ausgesetzt und das im Anodenstromkreise auftretende Signal gemessen wird. Wesentliche Bestandteile der Einrichtung sind: ein elektronischer Rauschgenerator und ein elektromechanischer Vibrator, der innerhalb des untersuchten Frequenzbereiches (80—6000 *Hz*) frequenzunabhängig arbeitet. Die Messungsergebnisse sind besser wiederholbar und stimmen mit den praktischen Erfahrungen besser überein als bei den früher bekannten Verfahren.

INDEX

- T. F. Alkér and E. Schalk* : A Non-destructive Method for Measuring the Depths of Metallic Surface Layers of Metals — *Т. Алькер и Э. Шальк* : Измерение без разрушения материала толщины поверхностных слоев металлов. — *Mesure non-destructive de l'épaisseur de couches superficielles de métaux* — *Zerstörungsfreie Messung der Oberflächen-Schichtstärken von Metallen* 3
- E. Bölskei* : Limit Load Capacity of the Compression Bar — *Э. Бельскеи* : Предельная нагрузка сжатого стержня — *Charge limite de la barre comprimée* — *Die Grenzbelastung von Druckstäben* 19
- J. Renner* : Untersuchungen über Lotabweichungen — *Я. Реннер* : Исследование отклонений вертикали — *Studies on the Deviations of the Plumb Line* — *Études des déviations de la verticale* 37
- J. Barna und B. Marschalkó* : Das rheologische Verhalten wässriger Bentonitdispersionen — *Я. Барна и Б. Маршалко* : Характеристика реологических условий водных дисперсий бентонита — *Characterization of the Rheological Properties of Aqueous Bentonite Dispersion* — *Caractéristiques des conditions rhéologiques des dispersions aqueuses de bentonite* 77
- I. Karsay* : On the Crystallization of Graphite in Cast Irons — *И. Каршай* : О кристаллизации графита в чугунах — *Sur la cristallisation du graphite dans la fonte* — *Über die Kristallisation des Graphits im Gusseisen* 99
- R. Hantos, J. Heeringer und J. Schev* : Der Kraftbedarf beim Ziehen von Stahlrohren mit Stopfen — *Р. Хантош, Й. Херингер и Я. Шей* : Анализ сил, возникающих при протяжке труб — *Investigation of Forces in Tube Drawing* — *Étude des forces engendrées à l'étrépage des tubes* 127
- Z. Veress* : Superficial Changes of Refractories under the Effect of Molten Glass — *З. Вереш* : Поверхностные изменения огнеупорных материалов под воздействием расплавленного стекла — *Modifications superficielles des matières réfractaires sous l'influence du verre fondu* — *Veränderungen der Oberfläche feuerfester Stoffe unter dem Einfluss von Glasschmelzen* 141
- L. Gillemot* : Die Verarbeitung von metallischem Titan — *Л. Жильмо* : Обработка металлического титана — *Working of Metallic Titanium* — *Travail du titane métallique* 155
- I. Koncz* : Das Problem des Titans in Ungarn vom Gesichtspunkt der Elektronenröhrenindustrie — *И. Конц* : Проблема титана в Венгрии с точки зрения производства электронных ламп — *The Titanium Problem from the Viewpoint of the Hungarian Vacuum Tube Industry* — *Le problème du titane au point de vue de l'industrie hongroise de tubes électroniques* 169
- K. Akerman und M. Orman* : Herstellung von Kalzium mit einem Sonderreinheitsgrad — *К. Акерман и М. Орман* : Получение очень чистого кальция. — *Preparation of Calcium of High Purity*. — *Préparation du calcium de grande pureté* 179

- K. Simonyi*: Über die zweckmässigsten Typen von kernphysikalischen Beschleunigungsanlagen im Energiebereich von 0—4 MeV — *К. Шимони*: О наиболее целесообразном применении новых ускорительных устройств ядерной физики — On the most Efficient Lay-out of New Acceleration Plants for Nuclear Research — Sur l'arrangement le plus efficace des nouvelles installations d'accélération pour la physique nucléaire 191
- K. Simonyi*: Ein 4-MV Van de Graaff-Generator mit Pressgasisolierung — *К. Шимони*: Генератор Ван де Граафа с изоляцией сжатым газом на напряжение до 4 мгов — A Compressed Air-Insulated Van de Graaff Generator — Un générateur de Van de Graaff isolé à l'air comprimé 197
- A. Geleji, J. Schey, K. Fink, R. Hantos und F. Köves*: Die Messung und Berechnung der beim Rohrpilgern auftretenden Kräfte und des Leistungsbedarfs — *А. Гелеи, Я. Шей, К. Финк, Р. Хантош и Ф. Кевеш*: Измерение и расчет усилий и потребной мощности, возникающих при пильгерной прокатке труб — Measurement and Calculation of Rolling Pressure and of Power Demand on the Pilger Tube-Rolling Mill — Mesurage et calcul des pressions et de la demande de puissance au laminoir à tubes à pas de pèlerin 205
- T. Boldizsár*: Measurement of Terrestrial Heat Flow in the Coal Mining District of Komló — *Т. Больдижар*: Измерение теплового тока, движущего в сторону поверхности земли, в угольном бассейне в районе комло — Mesurage de l'écoulement de la chaleur terrestre dans le district charbonnier de Komló — Die Messung des gegen die Erdoberfläche gerichteten Wärmestromes im Kohlenrevier von Komló 219
- I. P. Valkó*: Application of Mechanical White Noise for Measurements of Microphonism in Electron Tubes — *И. П. Валко*: Применение механического белого шума для измерения микрофонного эффекта электронных ламп — Emploi du bruit blanc au mesurage du microphonisme des tubes électroniques — Die Anwendung des mechanischen weissen Rauschens zur Messung der Mikrophonie von Elektronenröhren 229

Les Acta Technica paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction et écrits à la machine à l'adresse suivante :

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest, VI., Sztálin út 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

The Acta Technica publish papers on technical subjects in Russian, French, English and German.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up one volume.

Manuscripts should be typed and addressed to :

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with „Kultura” Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI., Sztálin út 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in russischer, französischer, englischer und deutscher Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden :

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest, VI., Sztálin út 21. Bankkonto Nr : 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

58,— *Ft*

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY,
G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XV

FASCICULI 3—4



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1956

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok, géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-44), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VI., Sztálin út 21. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy külföldi képviselőinél és bizományosainál.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, французском, английском и немецком языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи (в напечатанном на машинке виде) следует направлять по адресу:

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest, VI., Sztálin út 21. Текущий счет № 43-790-057-181), или его заграничные представительства и уполномоченные.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE VERALLGEMEINERUNGEN DER NEWTON—RAPHSONSCHEN WURZELAPPROXIMATION

I. MITTEILUNG

A. ZAJTA

AGRARWISSENSCHAFTLICHE UNIVERSITÄT, FAKULTÄT FÜR LANDWIRTSCHAFTLICHES INGENIEURWESEN,
LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK, BUDAPEST

[Eingegangen am 16. Mai 1955]

Einleitung

Einer besonderen Beliebtheit unter den verschiedenen Wurzelnäherungsverfahren erfreut sich die bewährte NEWTON—RAPHSONsche Formel (im weiteren kurz als NR-Formel bezeichnet). Das Wesen des Verfahrens besteht in folgendem: Wenn man für die Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ den guten Näherungswert a gefunden hat und gewisse Voraussetzungen erfüllt sind, so liefert die mit diesem Argument gebildete NR-Formel

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} \quad (1)$$

eine noch bessere Näherung.

Mit der Verallgemeinerung der NR-Formel befasste sich schon EULER; eine moderne Fassung seiner Methode wurde 1950 von H. WUNDT [1] angegeben. Der ungarische Mathematiker I. KISS [2] veröffentlichte 1954 eine Verallgemeinerung ganz anderer Art, in der gleichen Arbeit errechnete er jedoch mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten auch weitere praktisch verwendbare Glieder der EULERSchen Verallgemeinerung.

Im ersten Teil der nachstehenden Untersuchungen wurde nun der Versuch unternommen, einen Teil der von KISS offen gelassenen Fragen zu beantworten. In der vorliegenden Mitteilung werden kürzere Methoden zur Berechnung der in den Verallgemeinerungen vorkommenden Polynome angegeben und die errechneten Polynome in ihrer allgemeinen Form dargestellt. Ferner werden die tieferen Zusammenhänge aufgezeigt, die zwischen diesen Polynomen einerseits und den Gliedern der Reihen für die reziproke und Umkehrungsfunktion andererseits bestehen. Diese Untersuchung ist nur der Erkundung der gesuchten Formeln gewidmet und befasst sich daher nicht mit darüber hinausgehenden Problemen, wie z. B. mit den Konvergenzbedingungen oder mit der Klärung der Frage, welche Wurzel der Gleichung gegebenenfalls durch die Näherungsformeln gewonnen werden kann.

1. Die Polynome der Verallgemeinerung von Kiss

Die von KISS angegebene Verallgemeinerung der NR-Formel kann folgendermassen zusammengefasst werden :

$$\kappa_{n+1} = a - \frac{K_{n-1}}{K_n} \cdot f(a) \quad (2)$$

Die Formel (2) stellt die $(n + 1)$ -te Näherung dar, d. h. κ_{n+1} und liefert bei $n = 1$ wiederum die ursprüngliche NR-Formel. Die mit K_n bezeichneten Polynome sehen nämlich — für einige niedere Indizes explizit ausgeschrieben — folgendermassen aus :

$$K_0 = 1$$

$$K_1 = f'$$

$$K_2 = f'^2 - \frac{1}{2} f f''$$

$$K_3 = f'^3 - f f' f'' + \frac{1}{6} f^2 f'''$$

$$K_4 = f'^4 - \frac{3}{2} f f'^2 f'' + \frac{1}{3} f^2 f' f''' + \frac{1}{4} f^2 f''^2 - \frac{1}{24} f^3 f''''$$

Hier und im weiteren sind die ohne Argument angeführten Funktionen an der Stelle $x = a$ zu nehmen, das heisst also :

$$f = f(a), \quad f^{(n)} = \left(\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right)_{x=a}, \quad \left(\frac{1}{f} \right)^{(n)} = \left(\frac{d^n \frac{1}{f(x)}}{dx^n} \right)_{x=a}$$

Es ist ersichtlich, dass dem durch die ursprüngliche NR-Formel (1) gelieferten Wert die Bezeichnung κ_2 zukommt, während als κ_1 der Ausgangswert a bezeichnet werden kann. Als Näherungen n -ter Ordnung bezeichnet man alle jene Näherungen, deren Fehler der n -ten Potenz des Fehlers der ersten Näherung ($\kappa_1 = a$) proportional sind. Weiter bezeichnet man in der hier benutzten Symbolik die zu approximierende Wurzel mit ξ , den Fehler der ersten Näherung mit $d_1 = d$, den Fehler der n -ten Näherung mit d_n . Dementsprechend gilt also :

$$f(\xi) = 0 \quad (3)$$

$$d = a - \xi \quad (4)$$

$$d_n = \kappa_n - \xi. \quad (5)$$

KISS hat mit entsprechenden Berechnungen belegt, dass die von ihm angegebenen Näherungen κ_3 , κ_4 und κ_5 tatsächlich Näherungen 3., 4., bzw. 5. Ordnung sind. Mehr als das: Die explizite Form dieser Näherungen hat er gerade auf Grund der Forderung erhalten, dass die Fehler der entsprechenden Formeln der 3., 4., bzw. 5. Potenz des Fehlers der ersten Näherung proportional werden.

Im weiteren werden bestimmte Polynome definiert, die mit der Reihenentwicklung der reziproken Funktion zusammenhängen. Es wird — mit Hilfe einiger interessanter Eigenschaften dieser Polynome — bewiesen, dass sie mit den Polynomen der von KISS angegebenen Näherung vollständig identisch sind. Aus diesem Grund werden auch zu ihrer Bezeichnung gleich von Anfang an dieselben Buchstaben benutzt.

2. Die Reihenentwicklung der reziproken Funktion

Da $x = a$ keine Nullstelle der Funktion $f(x)$ ist (sonst wäre ja $\xi = a$), kann man die in der Nähe der Stelle $x = a$ gültige Entwicklung zur TAYLORschen Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x-a)^n \quad (6)$$

auch auf die Funktion $\frac{1}{f(x)}$ anwenden:

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{f} \right)^{(n)} (x-a)^n \quad (7)$$

Nachdem durch die Definition

$$\left(\frac{1}{f} \right)^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{f^{n+1}} \cdot K_n \quad (8)$$

die Polynome $K_n = K_n(f)$ eingeführt und dann die gekürzte Bezeichnung

$$a = - \frac{x-a}{f}$$

angewendet wurde, nehmen die Reihen (6) und (7) folgende einfachere Gestalt

an:

$$\frac{f(x)}{f(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{f^{(n)}}{n!} f^{n-1} \cdot \alpha^n. \quad (6a)$$

$$\frac{f(a)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \alpha^n. \quad (7a)$$

Das Produkt der linken Seiten der Formeln (6a) und (7a) gleicht 1; das bedeutet, dass nach Multiplikation der beiden rechten Seiten auch dieses Produkt keine mit Potenzen von α gebildete Reihe sein kann. Dies ist nur dann möglich, wenn die Koeffizienten bei den verschiedenen Potenzen von α (mit Ausnahme von $\alpha^0 = 1$) durchweg Null gleichen:

$$\sum_{k=0}^n K_{n-k} \cdot \frac{(-1)^k}{k!} f^{(k)} f^{k-1} = 0 \quad (n > 0)$$

oder

$$K_n = \sum_{k=1}^n K_{n-k} \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{k!} f^{(k)} f^{k-1} \quad (n > 0) \quad (9)$$

wo ergänzungsweise $K_0 = 1$ und $f^{(0)} = f$ anzunehmen sind.

Ausser der Rekursionsformel (9), die in erster Linie zur Errechnung der Polynome K_n geeignet ist, gibt es noch eine, Differentiationen enthaltende Rekursionsformel. Zu ihrer Aufstellung schreibt man die Definitionsgleichung (8) für $(n-1)$ an:

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{f^n} \cdot K_{n-1}$$

und differenziert beide Seiten noch einmal:

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{(n-1)!}{f^{n+1}} (n \cdot K_{n-1} \cdot f' - K'_{n-1} \cdot f)$$

Vergleicht man das Ergebnis mit der Formel (8), so ist leicht zu erkennen, dass

$$K_n = f' \cdot K_{n-1} - \frac{1}{n} f \cdot K'_{n-1} \quad (10)$$

3. Die explizite Form der Polynome K_n

Die Polynome K_n von $n = 0$ bis $n = 4$ wurden schon oben angegeben. Die allgemeine Formel lautet

$$K_n = \sum (-1)^{i_0} \cdot \frac{\left(\sum_{k=1}^n i_k\right)!}{\prod_{k=1}^n (k!)^{i_k} \cdot \prod_{k=1}^n (i_k!)} \cdot \prod_{k=0}^n (f^{(k)})^{i_k} \quad (11)$$

Die Exponenten i_k sind positive ganze Zahlen oder Nullen. Die Summierung muss auf alle möglichen Fälle ausgedehnt werden, unter Berücksichtigung der Einschränkungen

$$\sum_{k=0}^n i_k = n \quad (12)$$

und

$$\sum_{k=1}^n k \cdot i_k = n \quad (13)$$

Um die Gültigkeit von (11) zu beweisen, sei von der Rekursionsformel (9) ausgegangen

$$K_n = f' \cdot K_{n-1} - \frac{1}{2!} f f'' \cdot K_{n-2} + \frac{1}{3!} f^2 f''' \cdot K_{n-3} - \frac{1}{4!} f^3 f'''' K_{n-4} + \dots$$

Vor allem kann man durch einfache Induktion von n zu $(n+1)$ feststellen, dass alle Glieder des entwickelten Polynoms K_n n -ter Potenz und n -ter Ordnung sind. Das erstere folgt aus der Formel (12), das zweite aus der Formel (13).

Es sei jetzt an Hand eines Beispiels gezeigt, wie die Koeffizienten der einzelnen Glieder von K_n gefunden werden können. Es sei $n = 19$, wobei das betreffende Glied G folgende Gestalt annimmt:

$$G = f^{11} \cdot f'^2 \cdot f''^3 f''' \cdot (f^{(4)})^2$$

Wie leicht festzustellen ist, sind beide obigen Einschränkungen erfüllt; es ist ja

$$11 + 2 + 3 + 1 + 2 = 19$$

und

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 19$$

Das als Beispiel ausgewählte Glied kann nur aus den ersten vier Gliedern der rechten Seite der Formel (9) gewonnen werden, da ja aus den weiteren Gliedern

dern in G Ableitungen höherer Ordnung als der vierten hineinkommen würden. Das erste Glied der rechten Seite von (9) steuert zum Aufbau von G den Faktor

f' bei, das zweite Glied $\left(-\frac{1}{2!}ff''\right)$, das dritte Glied $\left(\frac{1}{3!}f^2f'''\right)$, das vierte Glied $\left(-\frac{1}{4!}f^3f''''\right)$. Bemerkenswert ist, dass jeder einzelne Faktor $f^{(k)}$ — ausser sich selber — dem G noch den Faktor $\frac{1}{k!}(-f)^{k-1}$ zuführt.

Zur Darstellung von G muss die Formel (9) wiederholt angewendet werden — für $(n-1)$, $(n-2)$ usw. —, bis man endlich zu K_0 gelangt:

$$K_{n-1} = f' \cdot K_{n-2} - \frac{1}{2!}ff'' K_{n-3} + \frac{1}{3!}f^2f''' \cdot K_{n-4} - \dots$$

$$K_{n-2} = f' K_{n-3} - \frac{1}{2!}ff'' K_{n-4} + \frac{1}{3!}f^2f''' K_{n-5} - \dots$$

In der Kette dieser Berechnungen ist G auf mehrere Arten zu gewinnen. So z. B. kann man das Ziel auf dem Wege folgender Glieder erreichen:

$$K_{19}, f' K_{18}, f'^2 K_{17}, -\frac{1}{2!}f'^2 \cdot f'' \cdot f K_{15}, \left(-\frac{1}{2!}\right)^2 f'^2 f''^2 f^2 K_{13},$$

$$\left(-\frac{1}{2!}\right)^3 f'^2 f''^3 f^3 \cdot K_{11}, \left(-\frac{1}{2!}\right)^3 \frac{1}{3!} f'^2 f''^3 f''' f^5 \cdot K_8,$$

$$\left(-\frac{1}{2!}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} \left(-\frac{1}{4!}\right) \cdot f'^2 f''^3 f''' \cdot f^{(4)} \cdot f^8 K_4$$

$$\left(-\frac{1}{2!}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} \left(-\frac{1}{4!}\right)^2 f'^2 f''^3 f''' (f^{(4)})^2 f^{11}$$

Der Gang dieser Berechnungen kann durch folgendes Schema veranschaulicht werden:

$$1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4$$

wo die einzelnen Zahlen der Reihe nach die Ordnung der aufeinanderfolgenden Ableitungen bedeuten. Ausser den obigen Berechnungen hätte man aber G

auch auf folgendem Wege erhalten können :

$$2, 4, 3, 1, 1, 2, 4, 2$$

und, ganz allgemein, auf soviel Arten, als Permutationen mit Wiederholung der Elemente 1, 2, 3 und 4 existieren. Dies gleicht jedoch bekanntlich

$$\frac{(2 + 3 + 1 + 2)!}{2! 3! 1! 2!}$$

oder — im allgemeinen Fall —

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^n i_k\right)!}{\prod_{k=1}^n (i_k!)}$$

Der Koeffizient des Gliedes G gleicht also offensichtlich

$$\left(-\frac{1}{2!}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \left(-\frac{1}{4!}\right)^2 \cdot \frac{(2 + 3 + 1 + 2)!}{2! 3! 1! 2!}$$

Im allgemeinen Fall sieht das dann so aus :

$$(-1)^{\sum_{k=2}^n (k-1)i_k} \cdot \frac{\left(\sum_{k=1}^n i_k\right)!}{\prod_{k=2}^n (k!)^{i_k} \prod_{k=1}^n (i_k!)} = (-1)^{i_0} \cdot \frac{\left(\sum_{k=1}^n i_k\right)!}{\prod_{k=2}^n (k!)^{i_k} \cdot \prod_{k=1}^n (i_k!)}$$

da aus den Formeln (12) und (13)

$$\sum_{k=2}^n (k-1) i_k = i_0$$

folgt.

Damit wird die in (11) angegebene explizite Gestalt der Polynome K_n im wesentlichen begründet.

4. Die Verallgemeinerung der NR-Formel

Es sei angenommen, dass in der Folge der Polynome K_n das Verhältnis zweier benachbarter Glieder irgendeinem Grenzwert q zustrebt :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n-1}}{K_n} = q \quad (14)$$

Dann gilt jedoch offensichtlich :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n-2}}{K_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n-2}}{K_{n-1}} \cdot \frac{K_{n-1}}{K_n} = q^2$$

und ganz allgemein, für jeden endlichen Wert von k :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n-k}}{K_n} = q^k$$

Aus der Formel (9) folgt jedoch für den Fall $n \rightarrow \infty$, dass q — zumindest für jede rationale ganze Funktion — die folgende Gleichung erfüllt :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{f^{(k)}}{k!} f^{k-1} \cdot q^k = 0$$

Derselben Gleichung entspricht aber — siehe (6a) — auch α , vorausgesetzt, dass x den Wert irgendeiner Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, z. B. den Wert ξ annimmt. Offenbar gilt also, zumindest wenn f eine rationale ganze Funktion ist :

$$q = \frac{a - \xi}{f(a)}$$

oder

$$\xi = a - f(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n-1}}{K_n} \quad (15)$$

insofern auch der in (14) angeführte Grenzwert existiert.

Die rechte Seite von (15) gibt für die endlichen Werte von n je eine Verallgemeinerung der NR-Formel. Im weiteren wird bewiesen, dass die sich so ergebenden Näherungswerte

$$x_{n+1} = a - \frac{K_{n-1}}{K_n} f(a) \quad (2')$$

mit den Werten der Verallgemeinerung von KISS identisch sind. Zum Beweis sei im nachstehenden die Fehlerformel aufgestellt.

5. Der Fehler der verallgemeinerten NR-Formel

Um die Fehlerformel tatsächlich errechnen zu können, stellt man vorerst einen Hilfssatz auf.

Es sei $f = g \cdot h$; ferner soll gelten :

$$\frac{g(a)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(g) \beta^n, \quad \frac{h(a)}{h(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(h) \gamma^n$$

wo

$$\beta = \frac{a-x}{g(a)} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{a-x}{h(a)}$$

Da $f = g \cdot h$, folgt daraus

$$\frac{g(a)}{g(x)} \cdot \frac{h(a)}{h(x)} = \frac{f(a)}{f(x)}$$

und weiter :

$$\left(\sum_n K_n(g) \beta^n \right) \left(\sum_n K_n(h) \gamma^n \right) = \sum_n K_n(f) \alpha^n$$

Aus dem Vergleich der Glieder der n -ten Potenz ergibt sich :

$$\sum_{k=0}^n \frac{K_{n-k}(g)}{g^{n-k}} \cdot \frac{K_k(h)}{h^k} = \frac{K_n(f)}{f^n} = \frac{K_n(f)}{g^n h^n}$$

oder, anders ausgedrückt :

$$\sum_{k=0}^n K_{n-k}(g) K_k(h) \cdot g^k h^{n-k} = K_n(f) \quad (16)$$

Ein Spezialfall von (16) tritt ein, wenn

$$h(x) = x - \xi$$

$$h = h(a) = a - \xi = d$$

und infolgedessen $K_k(h) = 1$ (für alle Werte von k) gilt. Es soll also im weiteren $g(x)$ die Funktion $\frac{f(x)}{x-\xi}$ bedeuten. Dann erhält man aus (16) :

$$\sum_{k=0}^n K_{n-k}(g) \cdot g^k \cdot d^{n-k} = K_n(f) \quad (16a)$$

Verringert man den Wert von n um 1 :

$$\sum_{k=0}^{n-1} K_{n-1-k}(g) g^k \cdot d^{n-1-k} = K_{n-1}(f)$$

Multipliziert man beide Seiten mit g :

$$\sum_{k=0}^{n-1} K_{n-1-k}(g) g^{k+1} \cdot d^{n-1-k} = g K_{n-1}(f)$$

und zieht man schliesslich die letzte Gleichung aus der Gleichung (16a) ab, so erhält man :

$$K_n(g) d^n = K_n(f) - g K_{n-1}(f) \quad (17)$$

Damit ist der benötigte Hilfssatz aufgestellt. Die Fehlerformel ist jetzt schon leicht zu errechnen :

$$d_{n+1} = \varkappa_{n+1} - \xi = a - \xi - \frac{K_{n-1}(f)}{K_n(f)} \cdot f = \frac{d}{K_n(f)} [K_n(f) - g K_{n-1}(f)] = \frac{K_n(g)}{K_n(f)} \cdot d^{n+1}$$

oder für ein um 1 verringertes n :

$$d_n = \frac{K_{n-1}(g)}{K_{n-1}(f)} \cdot d^n \quad (18)$$

Die aufgestellte Fehlerformel beweist einerseits, dass die mit $\varkappa_{n+1}$ bezeichnete Approximation wirklich $(n+1)$ -ter Ordnung ist, andererseits liegt es jetzt auf der Hand, dass die vom Verfasser angegebenen Polynome K_n tatsächlich mit den von KISS in seiner Verallgemeinerung verwendeten Polynomen identisch sind. Dies lässt sich durch die gleiche Struktur der Formeln (2) und (2') sowie dadurch beweisen, dass KISS im Zuge seiner Berechnungen [2] für die explizite Gestalt der Polynome eine eindeutige Lösung erhalten hat.

6. Die Funktionen f_n

Durch die Definition

$$f_n = \frac{f}{\sqrt[n]{K_{n-1}(f)}} \quad (19)$$

kann man von der ursprünglichen Funktion f zu einer Folge von Funktionen gelangen, die eine Reihe von interessanten Eigenschaften besitzen. Diese Folge ist — ausser der Formel (19) — auch z.B. auf dem Wege des Rekursionsverfahrens

$$f_n = \frac{f_{n-1}}{\sqrt[n]{f'_{n-1}}} \quad (20)$$

erhältlich. Dies kann durch Induktion von $(n - 1)$ zu n und mit Hilfe der Formel (10) bewiesen werden :

$$f_{n-1} = \frac{f}{\sqrt[n-1]{K_{n-2}(f)}} \quad (19)$$

$$f'_{n-1} = K_{n-2}^{-\frac{n}{n-1}} \cdot \left(f' K_{n-2} - \frac{f}{n-1} \cdot K'_{n-2} \right) = K_{n-2}^{-\frac{n}{n-1}} \cdot K_{n-1}$$

oder :

$$f'_{n-1} \frac{1}{n} = \frac{K_{n-1} \frac{1}{n}}{K_{n-2} \frac{1}{n-1}}$$

und so gelangt man zu :

$$f_n = \frac{f_{n-1}}{\sqrt[n]{f'_{n-1}}} = \frac{\frac{f}{\sqrt[n-1]{K_{n-2}}}}{\frac{\sqrt[n]{K_{n-1}}}{\sqrt[n-1]{K_{n-2}}}} = \frac{f}{\sqrt[n]{K_{n-1}}}$$

womit der Satz auch für n bewiesen ist.

Aus der Definition der Funktionen f_n geht hervor, dass an den Nullstellen von f die Funktionen f_n — im allgemeinen — ebenfalls ihre Nullstellen haben. Zur Berechnung der Wurzeln von f kann man daher anstatt von f auch von f_n ausgehen und die Rechnungen für diese Funktionen durchführen. Verwendet man die ursprüngliche NR-Formel, so gelangt man auf diesem Wege eben zur Verallgemeinerung von KISS.

Auf der rechten Seite der NR-Formel steht der reziproke Wert der logarithmischen Ableitung von f . Dies muss also auch für den Fall der Funktionen f_n berechnet werden. Aus (19) ergibt sich

$$\ln f_n = \ln f - \frac{1}{n} \ln K_{n-1}$$

$$\frac{f'_n}{f_n} = \frac{f'}{f} - \frac{1}{n} \cdot \frac{K'_{n-1}}{K_{n-1}} = \frac{f' K_{n-1} - \frac{1}{n} f K'_{n-1}}{f \cdot K_{n-1}}$$

aber unter Verwendung der Rekursionsformel (10) erhält man :

$$\frac{f'_n}{f_n} = \frac{K_n}{f \cdot K_{n-1}}$$

oder

$$\frac{f_n}{f'_n} = \frac{K_{n-1}}{K_n} f \quad (21)$$

Von hier ist es nur mehr ein Schritt zur Verallgemeinerung von KISS :

$$a - \frac{f_n}{f'_n} = a - \frac{K_{n-1}}{K_n} \cdot f.$$

Die Formeln (19), (20) und (21) sind eng miteinander verwandt. Ihre Verallgemeinerung wird im nächsten Abschnitt erörtert.

7. Die Verallgemeinerung der Polynome K_n

Zu den Polynomen der Verallgemeinerung von KISS lassen sich weitere Polynomenfolgen definieren, deren Glieder ebenfalls Funktionen von f und dessen Ableitungen darstellen. Ihre Bezeichnung sei :

$$K_{nm} = K_{nm}(f),$$

wobei man sie als n -tes Glied der m -ten Folge bezeichnet. Die ursprünglichen Polynome K_n erhalten in diesem neuen Bezeichnungssystem als zweiten Index die Zahl 1 :

$$K_n = K_{n1}$$

was aus den untenstehenden Definitionen folgt.

So lassen sich die Polynome K_{nm} als Koeffizienten der Reihe

$$\left(\frac{f(a)}{f(x)} \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \cdot K_{nm} \cdot \alpha^n \quad (22)$$

definieren. Hier ist wieder :

$$\alpha = \frac{a-x}{f(a)}$$

und K_{nm} ist über f und dessen Ableitungen eine Funktion von a .

Wenn man $\left(\frac{1}{f(x)}\right)^m$ in eine TAYLORSche Reihe nach Potenzen von $(x - a)$ entwickelt und diese Reihe mit (22) vergleicht, erhält man

$$\left(\frac{1}{f^m}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \binom{m+n-1}{n} \frac{K_{nm}}{f^{n+m}} \quad (23)$$

Diese Definition ist der Definition (22) gleichwertig. Wenn man sie für $(n-1)$ anstatt für n anschreibt und beide Seiten noch einmal differenziert, erhält man die Rekursionsformel der Polynome K_{nm} , die als Verallgemeinerung der Formel (10) betrachtet werden kann:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{f^m}\right)^{(n-1)} &= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \binom{m+n-2}{n-1} \cdot \frac{K_{(n-1)m}}{f^{n+m-1}} \\ \left(\frac{1}{f^m}\right)^{(n)} &= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \binom{m+n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{f^{n+m}} [K'_{(n-1)m} \cdot f - \\ &\quad - (n+m-1) \cdot f' \cdot K_{(n-1)m}] = (-1)^n \cdot n! \binom{m+n-1}{n} \cdot \frac{1}{f^{n+m}} \cdot K_{nm} \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist:

$$K_{nm} = f' K_{(n-1)m} - \frac{f}{n+m-1} \cdot K'_{(n-1)m} \quad (24)$$

Mit Hilfe dieser jetzt aufgestellten Rekursionsformel können die einzelnen Polynome K_{nm} leicht berechnet werden, da die ersten Glieder jeder Folge die gleiche Gestalt haben:

$$K_{0m} = 1 \quad \text{und} \quad K_{1m} = f'$$

Die Polynome K_{nm} sind in ihrer expliziten Gestalt den schon bekannten Polynomen $K_{n1} = K_n$ vollständig analog; sie sollen demnächst in der zweiten Mitteilung des Verfassers näher behandelt werden.

Bei Anwendung der Polynome K_{nm} kann für die Relationen (19) und (20) eine gemeinsame Verallgemeinerung geschrieben werden:

$$f_n = \frac{f_m}{\sqrt[n]{K_{(n-m)m}(f_m)}} \quad (n \geq m) \quad (25)$$

Beim Beweis wird vorausgesetzt, dass der Satz für f_{n-1} schon bewiesen ist :

$$f_{n-1} = \frac{f_m}{n-1 \sqrt{K_{(n-1-m)m}(f_m)}} \quad (25a)$$

Jetzt differenziert man beide Seiten :

$$f'_{n-1} = \frac{1}{\left(\frac{n-1}{\sqrt{K_{(n-1-m)m}(f_m)}} \right)^n} \cdot \left[f'_m \cdot K_{(n-1-m)m}(f_m) - \frac{f_m}{n-1} \cdot K'_{(n-1-m)m}(f_m) \right]$$

(siehe (24))

$$f'_{n-1} = \frac{K_{(n-m)m}(f_m)}{\left(\frac{n-1}{\sqrt{K_{(n-1-m)m}(f_m)}} \right)^n} \quad (26)$$

und erhält so :

$$f_n = \frac{f_{n-1}}{\sqrt{f'_{n-1}}} = \frac{f_m}{\sqrt{K_{(n-m)m}(f_m)}}$$

das heisst also, dass der Satz auch für f_n Gültigkeit besitzt. Doch gilt er offensichtlich auch für den Fall $n = m$ — also hat er auch für $n = m + 1, m + 2, \dots$ kurz, für alle $n \geq m$ Gültigkeit.

Durch Vergleich von (25a) mit (26) ergibt sich :

$$\frac{f_{n-1}}{f'_{n-1}} = \frac{K_{(n-1-m)m}(f_m)}{K_{(n-m)m}(f_m)} \cdot f_m$$

oder — für ein um 1 grösseres n —

$$\frac{f_n}{f'_n} = \frac{K_{(n-m)m}(f_m)}{K_{(n+1-m)m}(f_m)} \cdot f_m \quad (27)$$

Die letztere Formel ergibt für $m = 1$ die oben errechnete Formel (21).

Ausser den hier angeführten gibt es noch andere Iterationsrelationen, denen die Polynome K_{nm} entsprechen. Mit ihnen wird sich der Verfasser in seiner zweiten Mitteilung befassen.

8. Die Reihenentwicklung der von Kiss angegebenen Verallgemeinerung

Wenn man die durch die Näherungsformel von KISS [2] angegebenen Werte κ_{n+1} nach Potenzen von f entwickelt, konvergieren sie zu ein und derselben Reihe, von der im Abschnitt 9 nachgewiesen wird, dass sie mit der Reihe der Umkehrungsfunktion identisch ist. Die Reihen für κ_n und κ_{n+1} gleichen sich nämlich völlig bis zum Glied, das die Potenz f^{n-1} enthält, da κ_n und κ_{n+1} kongruent sind :

$$\kappa_{n+1} \equiv \kappa_n \pmod{f^n} \quad (28)$$

Der Beweis für diese Behauptung ist laut (2) gleichwertig dem Beweis des Satzes :

$$\frac{K_{n-1}}{K_n} - \frac{K_{n-2}}{K_{n-1}} \equiv 0 \pmod{f^{n-1}} \quad (29)$$

Aus der Rekursionsformel (9) folgt :

$$K_{n-1}^2 = K_{n-1} K_{n-2} f' - \frac{1}{2!} K_{n-1} K_{n-3} f f'' + \frac{1}{3!} K_{n-1} K_{n-4} f^2 f''' - \dots$$

und

$$K_n K_{n-2} = K_{n-1} K_{n-2} f' - \frac{1}{2!} K_{n-2}^2 f f'' + \frac{1}{3!} K_{n-2} K_{n-3} f^2 f''' - \dots$$

Durch Subtraktion auf beiden Seiten gewinnt man :

$$\begin{aligned} K_{n-1}^2 - K_n K_{n-2} &= \frac{1}{2!} f f'' (K_{n-2}^2 - K_{n-1} K_{n-3}) - \\ &- \frac{1}{3!} f^2 f''' (K_{n-2} K_{n-3} - K_{n-1} K_{n-4}) + \dots \end{aligned}$$

Man setze jetzt voraus, dass die Behauptung (29) für die Exponenten

$$1, 2, 3, \dots, n-3, n-2$$

schon bewiesen sei. Dann ist aber das k -te Glied der rechten Seite

$$\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)} \cdot f^k \cdot (K_{n-2} \cdot K_{n-k-1} - K_{n-1} K_{n-k-2})$$

durch f^{n-1} teilbar, da — unserer Voraussetzung nach —

$$\begin{aligned} \frac{K_{n-2}}{K_{n-1}} &\equiv \frac{K_{n-3}}{K_{n-2}} \bmod f^{n-2} \\ \frac{K_{n-3}}{K_{n-2}} &\equiv \frac{K_{n-4}}{K_{n-3}} \bmod f^{n-3} \\ &\vdots \\ \frac{K_{n-k-1}}{K_{n-k}} &\equiv \frac{K_{n-k-2}}{K_{n-k-1}} \bmod f^{n-k-1} \end{aligned}$$

besteht, also :

$$\frac{K_{n-2}}{K_{n-1}} \equiv \frac{K_{n-k-2}}{K_{n-k-1}} \bmod f^{n-k-1}$$

oder :

$$K_{n-2} \cdot K_{n-k-1} - K_{n-1} K_{n-k-2} \equiv 0 \bmod f^{n-k-1}$$

Hieraus folgt jedoch, dass das k -te Glied tatsächlich durch f^{n-1} teilbar ist, da es die Potenz f^k enthält. Auf diese Weise ist aber auch die ganze rechte Seite teilbar — und damit ist der Satz (29) auch für den Exponenten $(n-1)$ bewiesen.

Die Reihen für $\varkappa_n$ und $\varkappa_{n+1}$ gleichen sich jedoch im allgemeinen Fall nicht mehr, was die f^n und höhere Potenzen enthaltenden Glieder betrifft. Dies lässt sich leicht an einem Beispiel beweisen. Wenn man dazu die Funktion

$$f(x) = x^2 - A$$

wählt, so gilt :

$$K_n = \frac{r^{n+1} - s^{n+1}}{r - s}$$

wo : $r = a + \sqrt{A}$ und $s = a - \sqrt{A}$ bedeuten, und so ergibt sich :

$$r \cdot s = f(a) = f$$

$$\varkappa_{n+1} = a - \frac{r^n - s^n}{r^{n+1} - s^{n+1}} \cdot f$$

$$\varkappa_n = a - \frac{r^{n-1} - s^{n-1}}{r^n - s^n} \cdot f$$

Daraus lässt sich leicht errechnen, dass

$$\kappa_{n+1} - \kappa_n = - \frac{f^n}{K_{n-1} \cdot K_n}$$

Dies bedeutet also, dass κ_{n+1} und κ_n einander nur bis einschliesslich zum f^{n-1} enthaltenden Glied gleichen.

9. Die Reihenentwicklung der rechten Seite von (15)

Als Reihe, die dem Grenzwert

$$\xi = a - f \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n-1}}{K_n} \quad (15)$$

entspricht, betrachtet man jene Reihe, zu der die ersten $(n+1)$ Glieder der Reihe der Näherungswerte κ_{n+1} (für endliche Werte von n) konvergieren. Diese Reihe kann man ohne weiteres in der Form

$$\xi = a - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n \cdot \varphi^{n+1}}{(n+1)!} \quad \left(\varphi = \frac{f}{f'} \right) \quad (30)$$

suchen, da für die vorläufig noch unbekannten Polynome A_n keinerlei Beschränkung eingeführt wurde. Die Gestalt der Formel (30) wurde aus Zweckmässigkeitsgründen gewählt, da ja auch die für einige niedrige Indizes errechneten κ_n -Reihen denselben Aufbau aufweisen. So z. B.:

$$\kappa_3 = a - \frac{f}{f'} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''}{f'} \cdot \left(\frac{f}{f'} \right)^2 - \dots$$

Im weiteren gelte die Berechnung einer Rekursionsformel für die Polynome A_n als auszuführende Aufgabe — einer Formel, die es ermöglichen würde, einerseits die explizite Gestalt der Polynome zu bestimmen, andererseits zu zeigen, dass die Reihe (30) mit der Reihe der Umkehrung der hier erörterten Funktion identisch ist.

Zur Aufstellung der Rekursionsformel für die Polynome A_n differenziert man beide Seiten von (30) nach a und zieht dabei in Betracht, dass ξ eine Konstante ist:

$$0 = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (A'_n \cdot \varphi^{n+1} + (n+1) A_n \varphi^n \varphi')$$

aber

$$\varphi = \frac{f}{f'}$$

und deshalb

$$\varphi' = 1 - \frac{f''}{f'} \cdot \varphi$$

Man setzt den Wert von φ' ein und ordnet die Gleichung von neuem :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} A'_n \cdot \varphi^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n \cdot \varphi^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} \cdot A_n \varphi^{n+1} \cdot \frac{f''}{f'} - 1 = 0$$

oder, da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n \varphi^n = A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} A_{n+1} \cdot \varphi^{n+1}$$

so gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left[A_{n+1} - (n+1) \frac{f''}{f'} A_n + A'_n \right] \cdot \varphi^{n+1} + (A_0 - 1) = 0$$

was nur dann möglich ist, wenn einerseits

$$A_0 = 1$$

ist, andererseits

$$A_{n+1} = (n+1) \frac{f''}{f'} A_n - A'_n \quad (31)$$

denn, falls die in den Klammern stehenden Ausdrücke nicht Null glichen, so könnte man die Reihe (30) für ξ nicht als eindeutig bestimmt ansehen.

Aus (31) folgt nach einer kurzen Rechnung (man verringert den Index um 1) :

$$\left[\frac{A_{n-1}}{(-f')^n} \right]' \cdot \frac{1}{f'} = \frac{A_n}{(-f')^{n+1}} \quad (32)$$

und aus letzterem die Identität der Reihe (30) einerseits und der Reihe der Umkehrfunktion andererseits.

Um jetzt letztere darzustellen, entwickelt man die Funktion $f[f(a) - f(b)]$ in eine Reihe nach Potenzen von $f(b)$; die Bezeichnung $\bar{f}$ bedeutet die Umkehrung der Funktion f :

$$f[f(a) - f(b)] = \bar{f}f(a) - \frac{\bar{f}'f(a)}{1!}f(b) + \frac{\bar{f}''f(a)}{2!} \cdot f(b) - \dots$$

Daraus ergibt sich im Falle $b = a$:

$$\xi = \bar{f}(0) = a - \bar{f}'f(a) \cdot f(a) + \frac{1}{2!}\bar{f}''f(a) \cdot f(a)^2 - \dots$$

oder

$$\xi = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \bar{f}^{(n)}f(a) \cdot f(a)^n \quad (33)$$

Hier bedeutet die Differentiation eine Differentiation nach $f(a)$, so dass die Koeffizienten folgendermassen aus einander zu berechnen sind:

$$\bar{f}^{(n)}f(a) = \left[\frac{d}{da} \bar{f}^{(n-1)} \cdot f(a) \right] \cdot \frac{1}{\frac{df(a)}{da}}$$

Mit Bezug auf (32) kann man aber mit derselben Formel auch die Koeffizienten der Reihe (30) darstellen, da sie sich auch folgendermassen schreiben lässt:

$$\xi = a - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{A_{n-1}}{(-f')^n} \cdot f(a)^n$$

Durch Vergleich der beiden Reihen ergibt sich:

$$\bar{f}^{(n)}f(a) = - \frac{A_{n-1}}{(-f')^n} \quad (34)$$

oder wenn man die Differentiationen sinngemäss ausschreibt:

$$\frac{d^n \bar{f}f(a)}{df(a)^n} = (-1)^{n-1} \frac{A_{n-1}}{\left(\frac{df(a)}{da} \right)^n}$$

Die Rekursionsformel (31) definiert, da das erste Glied $A_0 = 1$ bekannt ist, eindeutig die weiteren Glieder A_n . So kann man z. B. schrittweise berechnen:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{f''}{f'} \\ A_2 &= 3 \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 - \frac{f'''}{f'} \\ A_3 &= 15 \left(\frac{f''}{f'} \right)^3 - 10 \frac{f''}{f'} \cdot \frac{f'''}{f'} + \frac{f^{(4)}}{f'} \\ A_4 &= 105 \left(\frac{f''}{f'} \right)^4 - 105 \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \frac{f'''}{f'} + 10 \left(\frac{f'''}{f'} \right)^2 + 15 \frac{f''}{f'} \cdot \frac{f^{(4)}}{f'} - \frac{f^{(5)}}{f'} \end{aligned}$$

Diese Methode ist jedoch einerseits ziemlich mühselig, andererseits auch nicht praktisch: zur Darstellung von A_n muss man A_{n-1} kennen, dazu wiederum A_{n-2} usw. Um also ein beliebiges Glied zu bestimmen, muss man alle vorhergehenden kennen.

Um dies zu vermeiden, wird jetzt die explizite Form der Polynome A_n fertig angegeben:

$$A_n = \sum (-1)^{n - \sum_{k=2}^{n+1} i_k} \cdot \frac{\left(\sum_{k=2}^{n+1} k i_k \right)!}{\prod_{k=2}^{n+1} (k!)^{i_k} \cdot \prod_{k=2}^{n+1} (i_k!)} \prod_{k=2}^{n+1} \left(\frac{f^{(k)}}{f'} \right)^{i_k} \quad (35)$$

Hier sind die Exponenten i_k positive ganze Zahlen oder Nullen, und bei der Summierung sind alle möglichen Fälle in Betracht zu ziehen, unter Berücksichtigung der Einschränkung

$$\sum_{k=2}^{n+1} (k-1) i_k = n \quad (36)$$

Es ist ersichtlich, dass der Aufbau der Polynome A_n jenem der Polynome K_n äusserst ähnlich ist. Die Analogie ist um so offensichtlicher, als sich die Polynome A_n ebenso zu Polynomenfolgen A_{nm} verallgemeinern lassen wie die Polynome K_n zu Polynomenfolgen K_{nm} .

Auf diesen Themenkreis soll noch eingehend in einer späteren Folge der Untersuchungen zurückgekommen und dort auch der Beweis für die Gültigkeit der Formel (35) erbracht werden. Schon jetzt sei jedoch erwähnt, dass der Beweis im wesentlichen auf der Formel (31) bzw. auf einer aus (31) darzustellenden Rekursionsformel fusst.

10. Die Eulersche Verallgemeinerung der NR-Formel

Wenn man die Reihe (30) beim n -ten Glied abbricht, ist die erhaltene Teilsumme

$$s_n = a - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_{k-1} \cdot \varphi^k}{k!} \quad (37)$$

gleichfalls geeignet, eine Näherung zu ξ zu bilden, und da sie für den Fall $n = 2$ die NR-Formel ergibt, kann sie als eine andere Verallgemeinerung der NR-Formel betrachtet werden. Da EULER als erster die Verallgemeinerung der NR-Formel in der Gestalt der Formel (37) suchte, kann sie mit Fug und Recht seinen Namen tragen.

Der Beweis dessen, dass die in (37) angeführte Verallgemeinerung tatsächlich mit der Verallgemeinerung zweiten Typs aus der Arbeit von KISS [2] identisch ist, lässt sich gleichfalls mit Hilfe der Fehlerformel erbringen. Mit anderen Worten: man muss nachweisen, dass s_n gleichfalls eine Näherung n -ter Ordnung darstellt, genau so, wie vorher $\varkappa_n$.

Um die Fehlerformel aufzustellen, benötigt man die Rekursionsformel der Summen s_n ; dazu wiederum — die Rekursionsformel der Ausdrücke

$$\mu_n = \frac{A_{n-1} \varphi^n}{n!} . \quad (38)$$

Auf Grund der Formel (37) und (38) gilt nämlich:

$$s_{n+1} - s_n = -\mu_n . \quad (39)$$

Um die Rekursionsformel für μ_n aufzustellen, drückt man A_{n-1} und A_n mit Hilfe der Formel (38) aus, errechnet A'_{n-1} und setzt das Ergebnis in die Formel (31) ein, die man vorher mit um 1 verringertem Index anschreibt:

$$A_{n-1} = n! \left(\frac{f'}{f} \right)^n \cdot \mu_n$$

$$A'_{n-1} = n(n!) \cdot \left(\frac{f'}{f} \right)^{n-1} \left[\frac{f''}{f} - \left(\frac{f'}{f} \right)^2 \right] \cdot \mu_n + n! \left(\frac{f'}{f} \right)^n \cdot \mu'_n$$

$$A_n = (n+1)n! \left(\frac{f'}{f} \right)^{n+1} \cdot \mu_{n+1}$$

Aber laut (31) gilt:

$$A_n = n \frac{f''}{f'} A_{n-1} - A'_{n-1}$$

Man substituiert, vereinfacht und ordnet :

$$(n+1)\mu_{n+1} = n\mu_n - \frac{f}{f'}\mu'_n \quad (40)$$

Auf Grund von (40) summiert man :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\mu_{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} k\mu_k - \frac{f}{f'} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \mu'_k$$

und zieht von beiden Seiten folgende Ausdrücke ab :

$$\sum_{k=1}^{n-2} (k+1)\mu_{k+1} = \sum_{k=2}^{n-1} k\mu_k$$

Schliesslich erhält man

$$n\mu_n = \mu_1 - \frac{f}{f'} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \mu'_k$$

Da jedoch

$$\mu_1 = \frac{f}{f'}$$

so erhält man

$$n\mu_n = \frac{f}{f'} \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} \mu'_k \right) = \frac{f}{f'} s'_n,$$

Auf Grund der Formel (37) gilt nämlich

$$s_n = a - \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k$$

also auch

$$s'_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \mu'_k$$

Auf Grund des Vergleiches zwischen dem letzten Ergebnis $\left(n \mu_n = \frac{f}{f'} s'_n \right)$ und der Formel (39) kann man jetzt die Rekursionsformel für die Teilsummen s_n wie folgt schreiben :

$$s_{n+1} = s_n - \frac{1}{n} \frac{f}{f'} \cdot s'_n \quad (41)$$

Den Fehler der Näherungswerte s_n wird man — zum Unterschied vom Fehler der Näherungen $\varkappa_n$ (dem die Bezeichnung d_n beigeordnet wurde) — als D_n bezeichnen :

$$D_n = s_n - \xi \quad (42)$$

Die Aufgabe besteht nun darin, zu zeigen, dass s_n tatsächlich eine Näherung n -ter Ordnung darstellt, dass heisst also, dass

$$D_n = \sigma_n d^n \quad (43)$$

wobei σ_n $\left(\text{und } \frac{1}{\sigma_n} \right)$ im Fall $d \rightarrow 0$ nicht divergent sein dürfen. Um dies zu

erreichen, sucht man für σ_n eine Rekursionsformel :

$$\begin{aligned} s_n &= \xi + \sigma_n d^n \\ s'_n &= \sigma'_n \cdot d^n + n \sigma_n \cdot d^{n-1} \\ s_{n+1} &= \xi + \sigma_{n+1} \cdot d^{n+1} \end{aligned}$$

Man setzt jetzt in die Formel (41) ein und vereinfacht :

$$\sigma_{n+1} \cdot d^2 = \sigma_n \left(d - \frac{f}{f'} \right) - \frac{1}{n} \cdot \frac{f}{f'} \sigma'_n \cdot d$$

Da jedoch

$$f = g \cdot d \quad f' = g' d + g$$

gilt, müssen auch folgende Gleichungen erfüllt sein :

$$d - \frac{f}{f'} = \frac{g'}{f'} \cdot d^2$$

und

$$\frac{f}{f'} = \frac{g}{f'} \cdot d$$

Schliesslich ist also :

$$\sigma_{n+1} = \frac{g'}{f'} \cdot \sigma_n - \frac{1}{n} \cdot \frac{g}{f'} \cdot \sigma'_n \quad (44)$$

Die Polynome σ_n dürfen also — ausser bestimmten numerischen Grössen — bloss eine Potenz von f' im Nenner enthalten. Mit Rücksicht darauf, dass das Glied höchster Potenz der Teilsumme s_n , nämlich μ_{n-1} nichts anderes im Nenner enthält als bloss $(n-1)!$ und f' in der $(2n-3)$ -ten Potenz, muss man dasselbe auch von den Ausdrücken σ_n voraussetzen ; es gilt also :

$$\sigma_n = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{\varrho_n}{f'^{2n-3}} \quad (45)$$

wo ϱ_n (wenn $n > 1$) schon jedenfalls ein ganzer Ausdruck ist. Dies lässt sich auch mit Hilfe der Rekursionsformel für ϱ_n nachweisen, die man aus (44) und (45) auf die schon bekannte Weise gewinnen kann

$$\varrho_{n+1} = [ng'f' + (2n-3)gf''] \cdot \varrho_n - gf'\varrho'_n \quad (46)$$

Unsere Fehlerformel hat also schliesslich folgende Gestalt angenommen :

$$D_n = \sigma_n d^n = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{\varrho_n}{f'^{2n-3}} \cdot d^n \quad (47)$$

Die Anfangswerte und die Werte für einige niedrige Indizes :

$$s_1 = a \quad \sigma_1 = 1 \quad \varrho_1 = \frac{1}{f'}$$

$$s_2 = a - \frac{f}{f'} \quad \sigma_2 = \frac{g'}{f'} \quad \varrho_2 = g'$$

$$\varrho_3 = 4g'^2 g - g^2 g'' + 2g'^3 \cdot d$$

$$\begin{aligned} \varrho_4 = & (30g^2 g'^3 - 15g^3 g' g'' + g^4 g''') + (24gg'^4 - 3g^2 g'^2 g'' - 3g^3 g''^2 + g^3 g' g''') d \\ & + 6g'^5 d^2 \end{aligned}$$

Aus diesen Beispielen ist ersichtlich, dass man ϱ_n im Falle von $n \geq 3$ nach Potenzen von d in eine Reihe entwickeln kann :

$$\varrho_n = \sum_{k=1}^{n-1} \varrho_{nk} \cdot d^{k-1}$$

Es interessiert am meisten das erste Glied dieser Reihe. Man gewinnt es auf dem Wege eines Grenzüberganges :

$$\varrho_{n1} = \lim_{d \rightarrow 0} \varrho_n . \quad (48)$$

Dies ermöglicht die explizite Formel von ϱ_{n1} zu bestimmen, und zwar gelangt man mit Hilfe der Formeln (38), (39), (42) und (47) nach kurzen Berechnungen zu

$$n\varrho_n f'^2 - \varrho_{n+1} \cdot d = A_{n-1} g^n f'^{n-1}$$

und daraus wiederum zu

$$\varrho_{n1} = \lim_{d \rightarrow 0} \varrho_n = \frac{g^n}{n} \lim_{d \rightarrow 0} A_{n-1} f'^{n-3}$$

oder anders

$$\varrho_{n1} = \frac{g^{2n-3}}{n} \cdot \lim_{d \rightarrow 0} A_{n-1} \quad (49)$$

In der Formel für A_{n-1} ist also an die Stelle von d überall 0 einzusetzen. Da

$$f = g \cdot d$$

und

$$f^{(k)} = g^{(k)} \cdot d + k \cdot g^{(k-1)}$$

besteht die Substitution einfach darin, dass man in der Formel (35) an Stelle von $f^{(k)}$ überall $k \cdot g^{(k-1)}$ schreibt. Nach Vereinfachung der Formel erhält man :

$$\lim_{d \rightarrow 0} A_n = \frac{1}{g^n} \sum (-1)^{i_0} \cdot \frac{(2n - i_0)!}{\prod_{k=1}^n (k!)^{i_k} \cdot \prod_{k=1}^n i_k!} \cdot \prod_{k=0}^n (g^{(k)})^{i_k}$$

wo

$$\sum_0^n i_k = n \quad \text{und} \quad \sum_1^n k i_k = n$$

gilt. Hieraus folgt :

$$\varrho_{n1} = \frac{g^{n-2}}{n} \cdot \sum (-1)^{i_0} \cdot \frac{(2n - 2 - i_0)!}{\prod_{k=1}^{n-1} (k!)^{i_k} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (i_k!)} \prod_{k=0}^{n-1} (g^{(k)})^{i_k} \quad (50)$$

wobei

$$\sum_0^{n-1} i_k = n - 1 \quad \text{und} \quad \sum_0^{n-1} k i_k = n - 1$$

SCHRIFTTUM

1. H. WUNDT: Eine neue Methode der Periodogrammanalyse und ihre Anwendung auf die Reihe der Sonnenfleckenzahlen. Basel, 1950 (Dissertation).
2. I. KISS: Die theoretischen Grundlagen der Radizierung mit der Rechenmaschine. Acta Technica Hung. **8** (1954) S. 221.
3. I. KISS: Über eine Verallgemeinerung des Newtonschen Näherungsverfahrens. ZAMM **34** (1954). S. 68.
4. R. LUDWIG: Über Iterationsverfahren für Gleichungen und Gleichungssysteme. ZAMM **34** (1954). S. 210 und 404.
5. М. С. Горнштейн: Численное решение уравнений. Доклады Академии наук СССР. Том LXXVIII, № 2, стр. 193—196.
6. E. PFLANZ: Über eine Verallgemeinerung des Verfahrens der Kombination von Newtonscher Methode und Regula falsi zur Auflösung einer Gleichung $f(x) = 0$. ZAMM **28** (1948). S. 114.
7. E. PFLANZ: Zur Bestimmung reeller Nullstellen von reellen Funktionen einer Variablen. ZAMM **29** (1949). S. 85.
8. E. BODEWIG: Konvergenztypen und das Verhalten von Approximationen in der Nähe einer mehrfachen Wurzel einer Gleichung. ZAMM **29** (1949). S. 45.

ZUSAMMENFASSUNG

Das NEWTON—RAPHSONsche Wurzelnäherungsverfahren geriet in den letzten Jahren immer mehr in den Brennpunkt mathematischer Forschungen. Die Bestrebungen zur Erweiterung des ursprünglichen Verfahrens führten zu verschiedenen Verallgemeinerungen; ein Teil dieser Ergebnisse wurde von R. LUDWIG in seiner 1954 erschienenen Arbeit [4] noch unsystematisch dargestellt. GORNSTEIN [5] gab als erster eine Methode an, die die Näherungsformel für eine beliebige Approximation eindeutig bestimmt; er brachte jedoch die Formel nicht in eine explizite Form. Erst im Aufsatz von KISS aus dem Jahre 1954 [2] sind die Näherungsformeln explizit dargestellt, und zwar in zwei verschiedenen Verallgemeinerungen.

Im ersten Teil dieser Arbeit stellte sich der Verfasser zur Aufgabe, die Verallgemeinerungen von KISS (2) und EULER (37) in expliziter Form für beliebige Näherungen darzustellen. Weiter suchte er in beiden Fällen die Fehlerformeln (18) und (47) — gleichfalls in expliziter Gestalt. Um dies zu erreichen, mussten einige an und für sich interessante Hilfssätze aufgestellt werden. Der erste Teil der vorliegenden Arbeit besteht im wesentlichen aus der Besprechung dieser Sätze und aus dem Nachweis mehrerer interessanter Eigenschaften der TAYLORSchen Reihen der reziproken und inversen Funktion, sowie der im Zusammenhang damit definierten Polynome $K_n(f)$ (8) und $A_n(f)$ (34).

Die bei GORNSTEIN [5] noch offen gebliebene Frage — nämlich die Aufstellung seiner mit $\Gamma_n(\xi)$ und $\Gamma_{n,k}(\xi)$ bezeichneten Polynome in ihrer expliziten Form — will der Verfasser in einer zweiten Mitteilung behandeln. Dort soll auch der Beweis erbracht werden, dass die Methode GORNSTEINS gerade zur Verallgemeinerung von KISS (2) führt.

ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ ОБОБЩЕНИЯ НЬЮТОН—РАФСОНОВСКОГО МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ

А. ЗАЙТА

РЕЗЮМЕ

Ньютон—Рафсоновский метод приближенного определения корней уравнений в последние годы все более привлекает интерес математиков. Стремление к расширению первоначального метода привело в ряду обобщений, часть которых была дана в изданной в 1954 г. работе Р. Людвига [4] еще в несистематизированной форме. Горнштейн [5] первым указал метод, позволяющий однозначно определить формулу для любого прибли-

жения, — однако, он не привел ее к явной форме. Явная форма формул приближения впервые была дана в работе И. Кишша в 1954 г. [2] — в виде обобщений двух различных типов.

В первой части данной работы ставилось целью вывести явную форму обобщений Кишша (2) и Эйлера (37) для любых приближений и дать для обоих случаев формулу погрешности — также в явной форме [(18) и (47)]. Для этого потребовалось доказать ряд лемм, которые представляют интерес и сами по себе. Первое сообщение как раз и охватывает изложение этих лемм и доказательство ряда интересных свойств рядов Тэйлора для обратной функции и связанных с ними, согласно определению, полиномов $K_n(f)$ (8) и $A_n(f)$ (34). Второе сообщение будет рассматривать решение проблемы, оставшейся открытой у Горнштейна [5] — вывод явной формы полиномов, обозначенных им через $\Gamma_n(\xi)$ и $\Gamma_{n,k}(\xi)$. Там же будет дано доказательство того, что метод Горнштейна приводит именно к обобщению Кишша (2.).

INVESTIGATION ON THE GENERALIZATION OF THE NEWTON—RAPHSON ROOT APPROXIMATION METHOD

A. ZAJTA

SUMMARY

During the last years, mathematicians have shown increasing interest in the Newton-Raphson method of root approximation. The efforts for generalization of the method have lead to several generalizations, a part of which has appeared, still rather unsystematically, in a paper published last year by Ludwig [4]. For the first time Gornstein [5] developed a method which univocally determines the approximation formula for any chosen approximation, but he did not develop it into explicite form. Only in a paper published last year by I. Kiss [2] there can be found for the first time the explicite form of the approximate formulae, in generalization of two types.

In the first part of his paper, the author develops the approximation of Kiss (2) and of Euler (37) in explicit form for any chosen approximation, and furthermore he establishes the erroneous formula in explicit form ((18) and (47)). In order to obtain the results, the deduction of auxiliary theorems, interesting in themselves, has become necessary. The subject matter of the first published paper is the discussion of these theorems, and the proof of numerous interesting properties of the Taylor-series of the reciprocal and of the inverse of the function, and of the polynomials $K_n(f)$ (8) and $A_n(f)$ (34) defined in connection with them.

The question which has been left still open by Gornstein's method [5], the computation of the explicit form of the polynomials called by him $\Gamma_n(\xi)$ and $\Gamma_{n,k}(\xi)$ will be answered in the second publication of the author. There he will prove also that it is just the generalization of Kiss (2) that is arrived at by the Gornstein method.

RECHERCHES SUR LA GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE NEWTON ET RAPHSON DE L'APPROXIMATION DES RACINES

A. ZAJTA

RÉSUMÉ

Ces dernières années, la méthode de Newton et Raphson du calcul approximatif des racines a attirée de plus en plus l'attention des mathématiciens. Les efforts tendant à la généralisation de la méthode ont conduit à plusieurs généralisations, dont une partie a paru encore sous forme non systématique dans le travail de Ludwig [4] publié l'année dernière. C'est Gornstein [5] qui fut le premier à indiquer une méthode fournissant sans ambiguïté la formule approximative, pour une approximation choisie, mais il ne donne pas la forme explicite de sa formule. Ce n'est que dans le travail de I. Kiss paru l'année dernière [2] qu'a été communiqué pour la première fois la forme explicite de la formule d'approximation, et ceci pour deux types de généralisations.

Dans cette première partie de son travail, l'auteur s'est proposé de développer les formes explicites des généralisations de Kiss (2) et d'Euler (37) pour une approximation quelconque et de donner en plus, pour chaque cas, la formule des erreurs sous forme explicite également ((18) et (47)). Pour trouver les résultats, la déduction de théorèmes auxiliaires, intéressants par eux-mêmes, a été nécessaire. La discussion de ceux-ci et des séries de Taylor des fonctions réciproque et inverse, ainsi que la démonstration de nombreuses propriétés intéressantes des polynômes $K_n(f)$ (8) et $A_n(f)$ (34) font l'objet de cette première étude.

La question encore ouverte dans la méthode de Gornstein [5], l'établissement des formes explicites des polynômes nommés par lui $I_n(\xi)$ et $I_{n,k}(\xi)$, fera l'objet de l'étude suivante à publier par l'auteur. Là il prouvera que par la méthode de Gornstein c'est justement aux généralisations de Kiss (2) que l'on arrive.

ON AN APPLICATION OF EGERVÁRY'S HYPERMATRIX-ALGORITHM TO THE MATHEMATICAL INVESTIGATION OF POLYPHASE TRANSFORMERS

V. LOVASS-NAGY

INSTITUTE FOR APPLIED MATHEMATICS OF THE HUNGARIAN
ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received 16th June, 1955]

Introduction

The purpose of this paper is to seek a uniform and clear solution for systems of differential equations descriptive of steady state and transient electric processes arising in single- and poly-phase transformers, by means of some of the latest issues of the matrix theory [1].

To discuss the problem in general terms, let us assume that the transformer be examined is an n -phase system of $2n$ inductively coupled coils of given ohmic resistance and self-inductance. Let us further assume that the n coils constituting the "primary winding" of the transformer as well as the n coils considered as its "secondary winding" are coupled in star connection.¹ Let us introduce the following notations :

r_{pk} ... ohmic resistance of the k th coil in the primary winding of the transformer
 r_{sk} ... ohmic resistance of the k th coil in the secondary winding of the transformer
 l_{pkk} ... self-inductance of the k th coil in the primary winding of the transformer
 l_{skk} ... self-inductance of the k th coil in the secondary winding of the transformer
 l_{pkt} ... mutual inductance between the k th and t th coil in the primary winding of the transformer
 l_{skt} ... mutual inductance between the k th and t th coil in the secondary winding of the transformer
 m_{kt} ... mutual inductance between the k th coil in the primary winding and the t th coil in the secondary winding of the transformer.

Furthermore let the current intensity in the k th coil of the primary winding be i_{pk} , and the voltage of the coil u_{pk} ; per analogy, denote the current intensity in the k th coil of the secondary winding by i_{sk} , and its voltage by u_{sk} .

The matrices in the differential equation of the transformer written up in matrix form are the following :

¹ From the results derived for the case of the assumed star-connection, the relations applicable to other types of connection can be obtained by simple calculation.

a) *Column matrices :*

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_{p1}(t) \\ \vdots \\ i_{s1}(t) \\ i_{s1}(t) \\ \vdots \\ i_{sn}(t) \end{bmatrix}; \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{p1}(t) \\ \vdots \\ u_{pn}(t) \\ u_{s1}(t) \\ \vdots \\ u_{sn}(t) \end{bmatrix}; \mathbf{i}_0 = \begin{bmatrix} i_{p1}(0) \\ \vdots \\ i_{pn}(0) \\ i_{s1}(0) \\ \vdots \\ i_{sn}(0) \end{bmatrix}; \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} u_{p1}(0) \\ \vdots \\ u_{pn}(0) \\ u_{s1}(0) \\ \vdots \\ u_{sn}(0) \end{bmatrix}$$

b) *Square matrices :*

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{p1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_{p2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & r_{pn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_{s1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & r_{s2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & r_{sn} \end{bmatrix} =$$

$= \langle r_{p1}, r_{p2}, \dots, r_{pn}, r_{s1}, r_{s2}, \dots, r_{sn} \rangle; \text{ (diagonal-matrix);}$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{p11} & l_{p12} & \dots & l_{p1n} & m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ l_{p21} & l_{p22} & \dots & l_{p2n} & m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{pn1} & l_{pn2} & \dots & l_{pnn} & m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \\ m_{11} & m_{21} & \dots & m_{n1} & l_{s11} & l_{s12} & \dots & l_{s1n} \\ m_{12} & m_{22} & \dots & m_{n2} & l_{s21} & l_{s22} & \dots & l_{s2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{1n} & m_{2n} & \dots & m_{nn} & l_{sn1} & l_{sn2} & \dots & l_{snn} \end{bmatrix}.$$

(Here $l_{pjk} = l_{pkj}$, $l_{sjk} = l_{skj}$, $m_{jk} = m_{kj}$.)

From KIRCHHOFF's "second" law [2] the following relations can be written for the k th coil of the primary and secondary windings respectively :

$$r_{pk} i_{pk} + \sum_{v=1}^n l_{pkv} \frac{d}{dt} i_{pv} + \sum_{v=1}^n m_{kv} \frac{d}{dt} i_{sv} = u_{pk} \quad (1a)$$

and

$$r_{sk} i_{sk} + \sum_{v=1}^n l_{skv} \frac{d}{dt} i_{sv} + \sum_{v=1}^n m_{vk} \frac{d}{dt} i_{pv} = u_{sk} \quad (1b)$$

respectively.

Developing equations (1a) and (1b) for all coils in the primary and secondary windings, a system of differential equations of constant coefficients consisting of $2n$ equations will be obtained ; introducing the above symbols, the system of differential equations can be condensed into the following matrix differential equation :

$$\mathbf{L} \frac{d}{dt} \mathbf{i} + \mathbf{R} \mathbf{i} = \mathbf{u} . \quad (1.1)$$

Our next task was to determine the particular solution satisfying the initial condition $\mathbf{i}(0) = \mathbf{i}_0$ of the linear, inhomogeneous matrix differential equation of constant coefficients against (1.1). The solution of this problem can be derived also for resistance- and inductance matrices having arbitrary number of elements [3]; the solution takes on a most remarkable form when the transformer is designed in a manner that the material and geometric data of the coils in the primary winding are identical, and the coils in the secondary winding are also uniform, moreover the arrangement of the coils shows a cyclic symmetry.² Namely, in that case the resistance and inductance matrices take on the following shape (written in hypermatrix form) :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_p \mathbf{E} & 0 \\ 0 & r_s \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

(here $\mathbf{E}$ is the unit matrix of the n th order) and

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_p & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{L}_s \end{bmatrix} .$$

² The assumption of cyclic symmetry is invariably correct in the case of two-phase transformers ; it is generally permissible in the case of three-phase transformers at the cost of disregarding deviations (of percentual magnitude) even if actually the transformer's construction has no cyclic symmetry.

The sub-matrices of matrix $\mathbf{L}$ are written in detail as follows :

$$\mathbf{L}_p = \begin{bmatrix} l_{p0} & l_{p1} & \dots & l_{p(n-1)} \\ l_{p(n-1)} & l_{p0} & \dots & l_{p(n-2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{p1} & l_{p2} & \dots & l_{p0} \end{bmatrix}; \quad l_{pv} = l_{p(n-v)}$$

$$\mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} l_{s0} & l_{s1} & \dots & l_{s(n-1)} \\ l_{s(n-1)} & l_{s0} & \dots & l_{s(n-2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{s1} & l_{s2} & \dots & l_{s0} \end{bmatrix}; \quad l_{sv} = l_{s(n-v)}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_{n-1} \\ m_{n-1} & m_0 & \dots & m_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_1 & m_2 & \dots & m_0 \end{bmatrix}; \quad m_v = m_{n-v}$$

In the above, $\mathbf{L}_p$, $\mathbf{L}_s$ and $\mathbf{M}$ are all cyclic matrices of the n th order, therefore [4] can be written in the following form :

$$\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p (l_{p0}, l_{p1}, \dots, l_{p(n-1)}); \quad l_{pv} = l_{p(n-v)}$$

$$\mathbf{L}_s = \mathbf{L}_s (l_{s0}, l_{s1}, \dots, l_{s(n-1)}); \quad l_{sv} = l_{s(n-v)}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M} (m_0, m_1, \dots, m_{n-1}); \quad m_v = m_{n-v}.$$

In the following let us assume that the "n-phase" transformer examined has the above mentioned kind of cyclic symmetry. Let us also assume that the voltage of all coils is a function of time, and has the same number of cycles, and thus can be written as $\mathbf{u} = e^{j\omega t} \mathbf{u}_0$.³

1. Solution of the matrix differential equation

Equation (1.1) — $\mathbf{L}$ and $\mathbf{R}$ coefficient matrices of which, according to the above, are hypermatrices made up of cyclic submatrices, and $\mathbf{u} = e^{j\omega t} \mathbf{u}_0$, can be conveniently transformed as follows :

$$\frac{d}{dt} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{i} + \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{i} = e^{j\omega t} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}} (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{u}_0. \quad (1.2)$$

³ The components of the $\mathbf{u}_0$ column matrix can be complex numbers too. The real part of the result to be deduced will provide the solution of the given electrotechnical problem.

Let $\mathbf{T}$ be the matrix, with the aid of which the spectral decomposition of $\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}$ may be constructed [5], in other words, which satisfies the equations :

$$\mathbf{T} (\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}) \mathbf{T}^* = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \mathbf{A}; \mathbf{T}\mathbf{T}^* = \mathbf{E}, \quad (1.3)$$

(where $\mathbf{T}^*$ means the *conjugate transposed* of matrix $\mathbf{T}$).

With the aid of matrix $\mathbf{T}$, equation (1.2) can be written as :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{T} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{i} + \mathbf{A} \mathbf{T} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{i} = e^{j\omega t} \mathbf{A} \mathbf{T} (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{u}_0. \quad (1.4)$$

Besides, it is expedient to write initial condition $\mathbf{i}(0) = \mathbf{i}_0$ in the form $\mathbf{T} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{i}(0) = \mathbf{T} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{i}_0$. Introducing the short notations $\mathbf{x} = \mathbf{T} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{i}$ and $\mathbf{g} = e^{j\omega t} \mathbf{A} \mathbf{T} (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{u}_0$, the differential equation (1.4) and the pertaining initial condition can also be written as

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{g}; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.5)$$

Obviously, function $\mathbf{x}(t)$ simultaneously satisfying the inhomogeneous differential equation (1.4) and the inhomogeneous initial condition $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ can be produced by the addition $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, where $\mathbf{x}_1$ satisfies the inhomogeneous differential equation $\dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{g}$ and the homogeneous initial condition $\mathbf{x}_1(0) = 0$, and $\mathbf{x}_2$ satisfies the homogeneous differential equation $\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = 0$ and $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{x}_0$ inhomogeneous initial condition.

It is known from literature [6] that :

$$\mathbf{x}_1 = \int_0^t e^{-\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{g}(\tau) d\tau$$

and

$$\mathbf{x}_2 = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0.$$

Thus, introducing the notation $\mathbf{g} = e^{j\omega t} \mathbf{g}_0$,

$$\mathbf{x} = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \left[\int_0^t e^{(\mathbf{A}+j\omega\mathbf{E})\tau} d\tau \right] e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{g}_0 \quad (1.6)$$

can be written, or, after integrating and a slight transformation :

$$\mathbf{x} = e^{j\omega t} (j\omega \mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{g}_0 + e^{-\mathbf{A}t} [\mathbf{x}_0 - (j\omega \mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{g}_0]. \quad (1.7)$$

As $\mathbf{x} = \mathbf{T} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{i}$, hence $\mathbf{i} = (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T}^* \mathbf{x}$, that is

$$\mathbf{i} = (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T}^* e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{T} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{i}_0 - (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T}^* [\mathbf{A} (j\omega \mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{E} e^{j\omega t} - e^{-\mathbf{A}t})] \mathbf{T} (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{u}_0. \quad (1.8)$$

2. An application of the formula (1.8) to the calculation of single-phase transformers

In order to provide material for the comparative estimation of the result derived from applying the relation (1.8) to the n -phase transformer, let us first demonstrate the application of formula (1.8) to a single-phase transformer.

In a single-phase transformer, obviously

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_p & m \\ m & l_s \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{bmatrix}.$$

In this case, therefore :

$$\mathbf{L}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{L}}{|\mathbf{L}|} = \frac{1}{l_p l_s - m^2} \begin{bmatrix} l_s & -m \\ -m & l_p \end{bmatrix}$$

and further

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}} &= \frac{1}{l_p l_s - m^2} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p} & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_s & -m \\ -m & l_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p} & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{l_p l_s - m^2} \begin{bmatrix} r_p l_s & -\sqrt{r_p r_s} m \\ -\sqrt{r_p r_s} m & r_s l_p \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

The characteristic numbers of $\sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}}$ matrix

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{(l_p l_s - m^2)} \frac{r_p l_s + r_s l_p \mp \sqrt{(r_p l_s - r_s l_p)^2 + 4 r_p r_s m^2}}{2}.$$

E. g. the characteristic vector components of matrix $\sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}}$ can be written⁴:

$$\gamma = \cos \frac{\varphi}{2}; \quad \sigma = \sin \frac{\varphi}{2};$$

⁴ The relations used here may be verified by simply calculating the product

$$\begin{bmatrix} \gamma & \sigma \\ -\sigma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\sigma \\ \sigma & \gamma \end{bmatrix}$$

and substituting the values of λ_1 , λ_2 , γ , σ .

where

$$\cos \varphi = \frac{r_s l_p - r_p l_s}{2\sqrt{d}}, \quad \sin \varphi = \frac{-2m\sqrt{r_p r_s}}{2\sqrt{d}}, \quad d = (r_p l_s - r_s l_p)^2 + 4r_p r_s m^2$$

Being aware of the characteristic numbers and characteristic vectors of matrix $\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}$,

$$\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \gamma & \sigma \\ \sigma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\sigma \\ \sigma & \gamma \end{bmatrix}.$$

can be written. In the case of the single-phase transformer, therefore

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

and

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \gamma & -\sigma \\ \sigma & \gamma \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} \gamma & \sigma \\ -\sigma & \gamma \end{bmatrix}.$$

As any polynomial of matrix $\mathbf{A}$, or any of its functions expandable into a power series can be written in the form :

$$f(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix}$$

hence :

$$\begin{aligned} & (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T}^* f(\mathbf{A}) \mathbf{T} (\sqrt{\mathbf{R}}) = \\ & = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & \sigma \\ -\sigma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\sigma \\ \sigma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p} & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \gamma^2 f(\lambda_1) + \sigma^2 f(\lambda_2) & -\sqrt{\frac{r_s}{r_p}} \gamma \sigma [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] \\ -\sqrt{\frac{r_p}{r_s}} \gamma \sigma [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] & \sigma^2 f(\lambda_1) + \gamma^2 f(\lambda_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

This equation can also be written as follows : as

$$\begin{aligned} \gamma^2 f(\lambda_1) + \sigma^2 f(\lambda_2) &= \frac{1 + \cos \varphi}{2} f(\lambda_1) + \frac{1 - \cos \varphi}{2} f(\lambda_2) = \\ &= \frac{1}{2} [f(\lambda_1) + f(\lambda_2)] + \frac{\cos \varphi}{2} [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)]; \end{aligned}$$

furthermore

$$\begin{aligned}\sigma^2 f(\lambda_1) + \gamma^2 f(\lambda_2) &= \frac{1 - \cos \varphi}{2} f(\lambda_1) + \frac{1 + \cos \varphi}{2} f(\lambda_2) = \\ &= \frac{1}{2} [f(\lambda_1) + f(\lambda_2)] - \frac{\cos \varphi}{2} [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)];\end{aligned}$$

and $\gamma\sigma = \frac{1}{2} \sin \varphi$, therefore

$$\begin{aligned}(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T} f(\mathbf{A}) \mathbf{T}^* (\sqrt{\mathbf{R}}) &= \frac{1}{2} [f(\lambda_1) + f(\lambda_2)] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \\ &- \frac{1}{2} [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] \begin{bmatrix} -\cos \varphi & \sqrt{\frac{r_s}{r_p}} \sin \varphi \\ \sqrt{\frac{r_p}{r_s}} \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [f(\lambda_1) + f(\lambda_2)] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \right. \\ &- [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] \frac{1}{\sqrt{(r_p l_s - r_s l_p)^2 + 4 r_p r_s m^2}} \begin{bmatrix} r_p l_s - r_s l_p & -2 r_s m \\ -2 r_p m & r_s l_p - r_p l_s \end{bmatrix} \left. \right\}.\end{aligned}$$

Also, obviously

$$\begin{aligned}(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T} f(\mathbf{A}) \mathbf{T}^* (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} &= \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & \sigma \\ -\sigma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\sigma \\ \sigma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} [\gamma^2 f(\lambda_1) + \sigma^2 f(\lambda_2)] & -\frac{1}{\sqrt{r_p r_s}} \gamma \sigma [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] \\ -\frac{1}{\sqrt{r_p r_s}} \gamma \sigma [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] & \frac{1}{r_s} [\sigma^2 f(\lambda_1) + \gamma^2 f(\lambda_2)] \end{bmatrix};\end{aligned}$$

which relation, considering the above listed identities between γ , σ and φ can be transformed as follows

$$(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T} f(\mathbf{A}) \mathbf{T}^* (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [f(\lambda_1) + f(\lambda_2)] \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_s} \end{bmatrix} - \\
&- \frac{1}{2} [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_p} \cos \varphi & \frac{1}{\sqrt{r_p r_s}} \sin \varphi \\ \frac{1}{\sqrt{r_p r_s}} \sin \varphi & \frac{1}{r_s} \cos \varphi \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{2} \left\{ [f(\lambda_1) + f(\lambda_2)] \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_s} \end{bmatrix} - \right. \\
&- [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] \frac{1}{\sqrt{(r_p l_s - r_s l_p)^2 + 4 r_p r_s m^2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} (r_p l_s - r_s l_p) & 2 m \\ 2 m & \frac{1}{r_s} (r_s l_p - r_p l_s) \end{bmatrix} \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Using the expressions of

$$(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T} f(\mathbf{A}) \mathbf{T}^* (\sqrt{\mathbf{R}}), \text{ and } (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T} f(\mathbf{A}) \mathbf{T}^* (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}$$

derived above, from formula (1.8), the following matrix relation will be obtained for the currents arising in the coils of the single-phase transformer:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} i_p \\ i_s \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \left\{ [e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \right. \\
&- [e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}] \frac{1}{d} \begin{bmatrix} r_p l_s - r_s l_p & -2 r_s m \\ -2 r_p m & r_s l_p - r_p l_s \end{bmatrix} \left. \right\} \begin{bmatrix} i_{p0} \\ i_{s0} \end{bmatrix} + \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\lambda_1}{j\omega + \lambda_1} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_1 t}) + \frac{\lambda_2}{j\omega + \lambda_2} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_2 t}) \right\} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_s} \end{bmatrix} + \\
&+ \left[\frac{\lambda_1}{j\omega + \lambda_1} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_1 t}) - \frac{\lambda_2}{j\omega + \lambda_2} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_2 t}) \right] \cdot \\
&\cdot \frac{1}{d} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} (r_p l_s - r_s l_p) & -2 m \\ -2 m & \frac{1}{r_s} (r_s l_p - r_p l_s) \end{bmatrix} \left. \right\} \begin{bmatrix} u_{p0} \\ u_{s0} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

(For shorter and clearer expression, abbreviation

$$d = \sqrt{(r_p l_s - r_s l_p)^2 + 4 r_p r_s m^2}$$

has been introduced.)

In the particular case where the primary and secondary windings of the transformer are uniform, i. e. where $r_p = r_s = r$ and $l_p = l_s = l$, evidently

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{l^2 - m^2} \frac{2rl \mp 2rm}{2}; \quad \lambda_1 = \frac{r}{l+m}; \quad \lambda_2 = \frac{r}{l-m};$$

and

$$d = 2rm,$$

hence⁵:

⁵ E. g. the "short circuit currents" of the single-phase transformer having uniform primary and secondary windings can be derived from formula (2.2) by substituting $u_{p0} = U_0 e^{j\psi}$, $u_{s0} = 0$, $i_{p0} = I_0 e^{j\psi}$, $i_{s0} = 0$. (In this case, the primary voltage is written in the form $U_0 e^{j\omega t}$ and the magnetising current of the same phase in the form $I_0 e^{j\omega t}$. In the moment of short circuiting the secondary winding, the phase angle of the primary winding and magnetising current is: ψ .) Should we assume r to be negligible as compared to the inductances — which would be in agreement with the literature — the following formulas would be obtained for the short circuit currents:

$$\begin{aligned} i_p = & \frac{1}{2} \left\{ \left(e^{-\frac{r}{l-m}t} + e^{-\frac{r}{l+m}t} \right) I_0 e^{j\psi} - \right. \\ & \left. - 2j \frac{U_0}{\omega \left(1 - \frac{m^2}{l^2} \right)} e^{j(\omega t + \psi)} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{l+m}{l} e^{-\frac{r}{l-m}t} - \frac{l-m}{l} e^{-\frac{r}{l+m}t} \right) j \frac{U_0}{\omega l \left(1 - \frac{m^2}{l^2} \right)} e^{j\psi} \right\}; \\ i_s = & -\frac{1}{2} \left\{ \left(e^{-\frac{r}{l-m}t} - e^{-\frac{r}{l+m}t} \right) I_0 e^{j\psi} + \right. \\ & \left. + 2 \frac{m}{l} j \frac{U_0}{\omega l \left(1 - \frac{m^2}{l^2} \right)} e^{j(\omega t + \psi)} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{l+m}{l} e^{-\frac{r}{l-m}t} - \frac{l-m}{l} e^{-\frac{r}{l+m}t} \right) j \frac{U_0}{\omega l \left(1 - \frac{m^2}{l^2} \right)} e^{j\psi} \right\} \end{aligned}$$

By introducing the notations:

$$I_{1k} = \frac{U_0}{j\omega l \left(1 - \frac{m^2}{l^2} \right)} = -j \frac{U_0}{\omega l \left(1 - \frac{m^2}{l^2} \right)}$$

and

$$I_{2k} = -\frac{m}{l} I_{1k}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} i_p \\ i_s \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \left[\begin{bmatrix} e^{-\frac{r}{l-m}t} + e^{-\frac{r}{l+m}t} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \right. \\
 &+ \left[e^{-\frac{r}{l-m}t} - e^{-\frac{r}{l+m}t} \right] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{p0} \\ i_{s0} \end{bmatrix} + \\
 &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{r - j\omega(l+m)}{r^2 + \omega^2(l+m)^2} (e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{l-m}t}) + \right. \\
 &+ \left. \frac{r - j\omega(l+m)}{r^2 + \omega^2(l+m)^2} (e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{l+m}t}) \right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \\
 &- \left[\frac{r - j\omega(l-m)}{r^2 + \omega^2(l-m)^2} (e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{l-m}t}) - \right. \\
 &- \left. \frac{r - j\omega(l+m)}{r^2 + \omega^2(l+m)^2} (e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{l+m}t}) \right] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{p0} \\ u_{s0} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

for the steady state values of the short circuit currents and employing the approximation $\frac{m}{l+m} \cong \frac{1}{2}$, the above formulas may be brought to a form which is in agreement with formulas (26) and (27) on page 359 Vol. XVII. of the Handbuch der Physik. Namely, in that case the formulas derived by us assume the shape

$$\begin{aligned}
 i_p &= I_{1k} \left[e^{j(\omega t + \psi)} - \frac{m}{l} e^{j\psi} e^{-\frac{r}{l-m}t} \right] + \frac{1}{4} I_0 e^{j\psi} e^{-\frac{r}{l+m}t} \\
 i_s &= I_{2k} \left[e^{j(\omega t + \psi)} - e^{j\psi} e^{-\frac{r}{l-m}t} \right] + \frac{1}{4} I_0 e^{j\psi} e^{-\frac{r}{l+m}t}.
 \end{aligned}$$

Introducing furthermore the notations $I_0 \text{ eff} = J_0$, $I_{1k} \text{ eff} = J_{1k}$, $I_{2k} \text{ eff} = J_{2k}$ to denote the "effective values" of the current intensity, the real part of the formulas deduced by us will yield the formulas in the Handbuch der Physik referred to above:

$$\begin{aligned}
 \text{Re}(i_p) &= \sqrt{2} J_{1k} \left[\cos(\omega t + \psi) - \frac{m}{l} \cos \psi e^{-\frac{r}{l-m}t} \right] + \frac{\sqrt{2}}{4} J_0 \cos \psi e^{-\frac{r}{l+m}t}; \\
 \text{Re}(i_s) &= \sqrt{2} J_{2k} \left[\cos(\omega t + \psi) - \cos \psi e^{-\frac{r}{l-m}t} \right] + \frac{\sqrt{2}}{4} J_0 \cos \psi e^{-\frac{r}{l+m}t}.
 \end{aligned}$$

3. Application of the formula (1.8) to the calculation of poly-phase transformers

In the case where the "n-phase" transformer under examination possesses the cyclic symmetry described above, in other words matrices $\mathbf{L}$ and $\mathbf{R}$ are hypermatrices consisting of cyclic submatrices, by the method outlined above, a formula can be derived from expression (1.8) showing a marked analogy with the result derived above for the single phase transformer.

Namely in that case : [7]

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{-1} &= \text{adj } \mathbf{L} \cdot (\det \mathbf{L} \cdot \times \mathbf{E})^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & -\mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{L}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_p(\mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2) & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_p \mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s(\mathbf{L}_p \mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} & -\mathbf{M}(\mathbf{L}_p \mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} \\ -\mathbf{M}(\mathbf{L}_p \mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} & \mathbf{L}_p(\mathbf{L}_p \mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Furthermore :

$$\begin{aligned}\sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}} &= \\ &= \begin{bmatrix} r_p \mathbf{L}_s(\mathbf{L}_p \mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} & -\sqrt{r_p r_s} \mathbf{M}(\mathbf{L}_p \mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} \\ -\sqrt{r_p r_s} \mathbf{M}(\mathbf{L}_p \mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} & r_s \mathbf{L}_p(\mathbf{L}_p \mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

As $\mathbf{L}_p$, $\mathbf{L}_s$ and $\mathbf{M}$ are all cyclic matrices, their characteristic numbers may be obtained in the known manner [8], as follows :

k th characteristic number of $\mathbf{L}_p$:

$$\lambda_{pk} = l_{p0} + l_{p1} \omega_k + \dots + l_{p(n-1)} \omega_k^{n-1} ;$$

k th characteristic number of $\mathbf{L}_s$:

$$\lambda_{sk} = l_{s0} + l_{s1} \omega_k + \dots + l_{s(n-1)} \omega_k^{n-1} ;$$

k th characteristic number of $\mathbf{M}$:

$$\mu_k = m_0 + m_1 \omega_k + \dots + m_{n-1} \omega_k^{n-1} ;$$

where $\omega_k = e^{\frac{2k\pi j}{n}}$, ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$), in other words, the k th from the "nth roots of unity".

Knowing the characteristic numbers⁶ of L_p , L_s and M

$$\sqrt{RL^{-1}}\sqrt{R} =$$

$$= \frac{1}{n} \left[\begin{array}{cc} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r_p \lambda_{sk}}{\lambda_{pk} \lambda_{sk} - \mu_k^2} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1 \bar{\omega}_k \dots \bar{\omega}_k^{n-1}] & - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{r_p r_s} \mu_k}{\lambda_{pk} \lambda_{sk} - \mu_k^2} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1 \bar{\omega}_k \dots \bar{\omega}_k^{n-1}] \\ \dots & \dots \\ - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{\tau_p \tau_s} \mu_k}{\lambda_{pk} \lambda_{sk} - \mu_k^2} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1 \omega_k \dots \omega_k^{n-1}] & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r_s \lambda_{pk}}{\lambda_{pk} \lambda_{sk} - \mu_k^2} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1 \bar{\omega}_k \dots \bar{\omega}_k^{n-1}] \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{pk} \lambda_{sk} - \mu_k^2} \begin{bmatrix} r_p \lambda_{sk} & -\sqrt{r_p r_s} \mu_k \\ -\sqrt{r_p r_s} \mu_k & r_s \lambda_{pk} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1 \bar{\omega}_k \dots \bar{\omega}_k^{n-1}]$$

(If $A = [a_{ij}]$ and $B = [b_{ij}]$ are arbitrary square matrices, $A \cdot \times B = [b_{ij}A]$ and $A \times \cdot B = [a_{ij}B]$ we shall nominate the „direct products” of A and B .)

In the following we shall need the matrices T and T^* to multiply there by the matrix $\sqrt{RL^{-1}}\sqrt{R}$ from left and right respectively, so that the product matrix $T\sqrt{RL^{-1}}\sqrt{R}T^*$ yield the *spectral decomposition matrix*. These T and T^* matrices can be produced in the following manner : (8)

$$T = V^* P^* (U^* \cdot \times E_2)$$

and

$$T^* = (U \cdot \times E_2) P V$$

⁶ Namely, in case C_1 and C_2 are optional cyclic matrices, obviously

$$f_1(C_1) \cdot f_2(C_2) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_1(\lambda_{1k}) \cdot f_2(\lambda_{2k}) \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}];$$

where λ_{1k} and λ_{2k} are the k th characteristic numbers of matrices C_1 and C_2 respectively.

respectively. In this case:⁷

$$U = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_{n-1} \\ 1 & \omega_1^2 & \omega_2^2 & \dots & \omega_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \dots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Introducing (for shorter and clearer expression) the following abbreviations:

$$\begin{aligned} \frac{r_p \lambda_{sk}}{\lambda_{pk} \lambda_{sk} - \mu_k^2} &= \varphi_k \\ - \frac{\sqrt{r_p r_s} \mu_k}{\lambda_{pk} \lambda_{sk} - \mu_k^2} &= \varrho_k \\ \frac{r_s \lambda_{pk}}{\lambda_{pk} \lambda_{sk} - \mu_k^2} &= \psi_k \end{aligned}$$

it is evident that:

$$\begin{aligned} & (U^* \cdot \times E_2) \sqrt{\bar{R}} L^{-1} \sqrt{\bar{R}} (U \cdot \times E_2) = \\ & = \begin{bmatrix} \varphi_0 & 0 & \dots & 0 & \varrho_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_1 & \dots & 0 & 0 & \varrho_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_{n-1} & 0 & 0 & \dots & \varrho_{n-1} \\ \hline \varrho_0 & 0 & \dots & 0 & \psi_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varrho_1 & \dots & 0 & 0 & \psi_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varrho_{n-1} & 0 & 0 & \dots & \psi_{n-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

⁷ Namely T^* is the conjugate transposed of matrix T .

Moreover :

$$P = \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} [1,0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} [1,0] \dots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [1,0] \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} [0,1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} [0,1] \dots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [0,1] \end{array} \right] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \end{bmatrix}$$

(In this case, P is a hypermatrix, the submatrices P_{11} , P_{12} , etc. of which are dyadic products. The column vectors of these dyads have n elements ; the hypermatrix itself consists of $2n$ submatrices, that is, of two rows and n columns.)

As can be proved by simple matrix-arithmetical calculation :

$$\begin{aligned} P^* (U^* \cdot \times E_2) \sqrt{RL}^{-1} \sqrt{R} (U \cdot \times E_2) P = \\ = \begin{bmatrix} \varphi_0 & \varrho_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \varrho_0 & \psi_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & \varrho_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varrho_1 & \psi_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \varphi_{n-1} & \varrho_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \varrho_{n-1} & \psi_{n-1} \end{bmatrix} = \\ = \left\langle \begin{bmatrix} \varphi_0 & \varrho_0 \\ \varrho_0 & \psi_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varrho_1 \\ \varrho_1 & \psi_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \varphi_{n-1} & \varrho_{n-1} \\ \varrho_{n-1} & \psi_{n-1} \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Any of the secondary square matrices in the main diagonal of the above diagonal hypermatrix can be produced in the form

$$\begin{bmatrix} \varphi_k & \varrho_k \\ \varrho_k & \psi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_k & \sigma_k \\ -\sigma_k & \gamma_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{k1}^* & 0 \\ 0 & \lambda_{k2}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_k & -\sigma_k \\ \sigma_k & \gamma_k \end{bmatrix}$$

where

$$\lambda_{k1}^*, \lambda_{k2}^* = \frac{1}{\lambda_{pk} \lambda_{sk} - \mu_k^2} \frac{r_p \lambda_{sk} + r_s \lambda_{pk} \mp \sqrt{(r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk})^2 + 4 r_p r_s \mu_k^2}}{2}$$

means the characteristic numbers of matrix

$$\begin{bmatrix} \varphi_k & \varrho_k \\ \varrho_k & \psi_k \end{bmatrix}$$

and $\gamma_k = \cos \frac{\alpha_k}{2}$; $\sigma_k = \sin \frac{\alpha_k}{2}$ the components of the characteristic vectors of the matrix in question.

Here :

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \frac{-2 \mu_k \sqrt{r_p r_s}}{r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk}}.$$

Hence in this case $\mathbf{V} = \langle \mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{n-1} \rangle$, where

$$\mathbf{V}_k = \begin{bmatrix} \gamma_k & -\sigma_k \\ \sigma_k & \gamma_k \end{bmatrix}; \quad \cdot \mathbf{V}_k^* = \begin{bmatrix} \gamma_k & \sigma_k \\ -\sigma_k & \gamma_k \end{bmatrix}.$$

Obviously,

$$\begin{aligned} & \mathbf{V}^* \mathbf{P}^* (\mathbf{U}^* \cdot \times \mathbf{E}_2) \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}} (\mathbf{U} \cdot \times \mathbf{E}_2) \mathbf{P} \mathbf{V} = \\ & = \langle \langle \lambda_{01}^*, \lambda_{02}^* \rangle, \langle \lambda_{11}^*, \lambda_{12}^* \rangle, \dots, \langle \lambda_{n-1,1}^*, \lambda_{n-1,2}^* \rangle \rangle = \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Any polynomial of this matrix, or any of its functions that can be expanded into a power series may be written in the form $f(\mathbf{A}) = \langle \langle f(\lambda_{01}^*), f(\lambda_{02}^*) \rangle, \dots, \langle f(\lambda_{(n-1)1}^*), f(\lambda_{(n-1)2}^*) \rangle \rangle$, hence

$$\begin{aligned} & (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T}^* f(\mathbf{A}) \mathbf{T} (\sqrt{\mathbf{R}}) = \\ & = (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T}^* \langle \langle f(\lambda_{01}^*), f(\lambda_{02}^*) \rangle, \dots, \langle f(\lambda_{(n-1)1}^*), f(\lambda_{(n-1)2}^*) \rangle \rangle \mathbf{T} \sqrt{\mathbf{R}}. \end{aligned}$$

Our next task is the calculation of product

$$(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T}^* f(\mathbf{A}) \mathbf{T} (\sqrt{\mathbf{R}}).$$

It is evident that

$$\begin{aligned} & (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T}^* = \\ & = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}} \mathbf{E}_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}} \mathbf{E}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} & 0 \\ 0 & \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \dots & \mathbf{P}_{1n} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \dots & \mathbf{P}_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{V}_{n-1} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}} \mathbf{U} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}} \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \mathbf{V}_0 & \mathbf{P}_{12} \mathbf{V}_1 & \dots & \mathbf{P}_{1n} \mathbf{V}_{n-1} \\ \mathbf{P}_{21} \mathbf{V}_0 & \mathbf{P}_{22} \mathbf{V}_1 & \dots & \mathbf{P}_{2n} \mathbf{V}_{n-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Furthermore:

$$\begin{aligned}
 T\sqrt{R} &= \\
 &= \begin{bmatrix} V_0^* 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_1^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & V_{n-1}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{21}^* \\ P_{12}^* & P_{22}^* \\ \vdots & \vdots \\ P_{1n}^* & P_{2n}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^* & 0 \\ 0 & U^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p} E_n & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s} E_n \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} V_0^* P_{11}^* & V_0^* P_{21}^* \\ V_1^* P_{12}^* & V_1^* P_{22}^* \\ \vdots & \vdots \\ V_{n-1}^* P_{1n}^* & V_{n-1}^* P_{2n}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p} U^* & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s} U^* \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Evidently:

$$\begin{aligned}
 P V f(A) V^* P^* &= \\
 &= \begin{bmatrix} P_{11} V_0 P_{12} V_1 & \dots & P_{1n} V_{n-1} \\ P_{21} V_0 P_{22} V_1 & \dots & P_{2n} V_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\lambda_{01}^*) & 0 \\ 0 & f(\lambda_{02}^*) \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \begin{bmatrix} f(\lambda_{(n-1)2}^*) & 0 \\ 0 & f(\lambda_{(n-1)1}^*) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} V_0^* P_{11}^* & V_0^* P_{21}^* \\ V_1^* P_{12}^* & V_1^* P_{22}^* \\ \vdots & \vdots \\ V_{n-1}^* P_{1n}^* & V_{n-1}^* P_{2n}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0^2 f(\lambda_{01}^*) + \sigma_0^2 f(\lambda_{02}^*) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \gamma_{n-1}^2 f(\lambda_{(n-1)1}^*) + \sigma_{n-1}^2 f(\lambda_{(n-1)2}^*) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\gamma_0 \sigma_0 [f(\lambda_{01}^*) - f(\lambda_{02}^*)] & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\gamma_{n-1} \sigma_{n-1} [f(\lambda_{(n-1)1}^*) - f(\lambda_{(n-1)2}^*)] \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma_0 \sigma_0 [f(\lambda_{01}^*) - f(\lambda_{02}^*)] & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\gamma_{n-1} \sigma_{n-1} [f(\lambda_{(n-1)1}^*) - f(\lambda_{(n-1)2}^*)] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \sigma_0^2 f(\lambda_{01}^*) + \gamma_0^2 f(\lambda_{02}^*) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{n-1}^2 f(\lambda_{(n-1)1}^*) + \gamma_{n-1}^2 f(\lambda_{(n-1)2}^*) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}} \mathbf{U} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}} \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p} \mathbf{U}^* & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s} \mathbf{U}^* \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \mathbf{D}_{11} \mathbf{U}^* & \sqrt{\frac{r_s}{r_p}} \mathbf{U} \mathbf{D}_{12} \mathbf{U}^* \\ \sqrt{\frac{r_p}{r_s}} \mathbf{U} \mathbf{D}_{12} \mathbf{U}^* & \mathbf{U} \mathbf{D}_{22} \mathbf{U}^* \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Let be $\mathbf{D} = \langle d_0, d_1, \dots, d_{n-1} \rangle$ an arbitrary diagonal matrix and

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{n}} [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}]$$

furthermore :

$$\mathbf{U}^* = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^* \\ \mathbf{u}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{n-1}^* \end{bmatrix},$$

where :

$$\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_k^* = [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}];$$

obviously :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^* = \\
 & = \frac{1}{n} [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}] \begin{bmatrix} d_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & d_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{n-1} \end{bmatrix} = \\
 & = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^*.
 \end{aligned}$$

Hence, ultimately the matrix product in question can be written (similarly to the corresponding relation deduced in respect of the single-phase transformer) :

$$\begin{aligned}
 & (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} (\mathbf{U} \cdot \times \mathbf{E}_2) \mathbf{P} \mathbf{V} f(\mathbf{A}) \mathbf{V}^* \mathbf{P}^* (\mathbf{U}^* \cdot \times \mathbf{E}_2) \sqrt{\mathbf{R}} = \\
 & = \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [\gamma_k^2 f(\lambda_{k1}^*) + \sigma_k^2 f(\lambda_{k2}^*)] \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}] \right. \\
 & \quad - \sqrt{\frac{r_s}{r_p}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \sigma_k [f(\lambda_{k1}^*) - f(\lambda_{k2}^*)] \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}] \\
 & \quad \left. - \sqrt{\frac{r_p}{r_s}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \sigma_k [f(\lambda_{k1}^*) - f(\lambda_{k2}^*)] \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}] \right] = \\
 & \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [\sigma_k^2 f(\lambda_{k1}^*) + \gamma_k^2 f(\lambda_{k2}^*)] \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}] \\
 & = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} \gamma_k^2 f(\lambda_{k1}^*) + \sigma_k^2 f(\lambda_{k2}^*) & - \sqrt{\frac{r_s}{r_p}} \gamma_k \sigma_k [f(\lambda_{k1}^*) - f(\lambda_{k2}^*)] \\ - \sqrt{\frac{r_p}{r_s}} \gamma_k \sigma_k [f(\lambda_{k1}^*) - f(\lambda_{k2}^*)] & \sigma_k^2 f(\lambda_{k1}^*) + \gamma_k^2 f(\lambda_{k2}^*) \end{bmatrix} \cdot \times \\
 & \quad \cdot \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}]
 \end{aligned}$$

Or, taking advantage of the greater clarity of the result by writing in the form of "direct product" :

$$\begin{aligned}
 & (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T} f(\mathbf{A}) \mathbf{T}^* \sqrt{\mathbf{R}} = \\
 & = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ [f(\lambda_{k1}^*) + f(\lambda_{k2}^*)] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [f(\lambda_{k1}^*) - f(\lambda_{k2}^*)] \frac{1}{\sqrt{(r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk})^2 + 4 r_p r_s \mu_k^2}} \begin{bmatrix} r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk} & -2 r_s \mu_k \\ -2 r_p \mu_k & r_s \lambda_{pk} - r_p \lambda_{sk} \end{bmatrix} \cdot \times \\
& \cdot \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}].
\end{aligned}$$

In full analogy with the calculations in the deductions detailed in the above it results that :

$$\begin{aligned}
& (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T} f(\mathbf{A}) \mathbf{T}^* (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} = \\
& = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ [f(\lambda_{k1}^*) + f(\lambda_{k2}^*)] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}} \end{bmatrix} - \right. \\
& - [f(\lambda_{k1}^*) - f(\lambda_{k2}^*)] \frac{1}{\sqrt{(r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk})^2 + 4 r_p r_s \mu_k^2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} (r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk}) & -2 \mu_k \\ -2 \mu_k \frac{1}{r_s} (r_s \lambda_{pk} - r_p \lambda_{sk}) \end{bmatrix} \Bigg\} \cdot \times \\
& \cdot \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \omega_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}].
\end{aligned}$$

Hence, applied to an "n"-phase transformer, formula (1.8) obtains the following form (in complete analogy with the corresponding formula deduced for the single-phase transformer) :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{i}_p \\ \mathbf{i}_s \end{bmatrix} = \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[e^{-\lambda_{k1}^* t} + e^{-\lambda_{k2}^* t} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \right. \\
& - \left[e^{-\lambda_{k1}^* t} - e^{-\lambda_{k2}^* t} \right] \frac{1}{d_k^*} \begin{bmatrix} r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk} & -2 r_s \mu_k \\ -2 r_p \mu_k & r_s \lambda_{pk} - r_p \lambda_{sk} \end{bmatrix} \Bigg\} \cdot \\
& \cdot \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}] \Bigg\} \cdot \left[\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{p0} \\ \mathbf{i}_{s0} \end{bmatrix} + \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{\lambda_{k1}^*}{j\omega + \lambda_{k1}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k1}^* t}) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{\lambda_{k2}^*}{j\omega + \lambda_{k2}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k2}^* t}) \right) \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda_{k2}^*}{j\omega + \lambda_{k2}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k2}^* t}) \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{r_p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_s} \end{array} \right] + \left[\frac{\lambda_{k1}^*}{j + \omega \lambda_{k1}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k1}^* t}) - \right. \\
& \left. - \frac{\lambda_{k2}^*}{j\omega + \lambda_{k2}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k2}^* t}) \right] \cdot \frac{1}{d_k^*} \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{r_p} (r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk}) & -2\mu_k \\ -2\mu_k & \frac{1}{r_s} (r_s \lambda_{pk} - r_p \lambda_{sk}) \end{array} \right] \cdot \times \\
& \cdot \times \left[\begin{array}{c} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{array} \right] \left[1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_{p0} \\ \mathbf{u}_{s0} \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Moreover, as in the case of an arbitrary $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$ matrix, the following identities hold good:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K} \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*)] \cdot \mathbf{i}_0 &= \begin{bmatrix} k_{11} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* & k_{12} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* \\ k_{21} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* & k_{22} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{p0} \\ \mathbf{i}_{s0} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} k_{11} \mathbf{u} (\mathbf{u}^* \mathbf{i}_{p0}) + k_{12} \mathbf{u} (\mathbf{u}^* \mathbf{i}_{s0}) \\ k_{21} \mathbf{u} (\mathbf{u}^* \mathbf{i}_{p0}) + k_{22} \mathbf{u} (\mathbf{u}^* \mathbf{i}_{s0}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^* \mathbf{i}_{p0} \\ \mathbf{u}^* \mathbf{i}_{s0} \end{bmatrix} \cdot \times \mathbf{u}
\end{aligned}$$

The above formula of the "n"-phase transformer can also be written in the form:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{i}_p \\ \mathbf{i}_s \end{bmatrix} &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ (e^{-\lambda_{k1}^* t} + e^{-\lambda_{k2}^* t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \right. \\
&- (e^{-\lambda_{k1}^* t} - e^{-\lambda_{k2}^* t}) \frac{1}{d_k^*} \begin{bmatrix} r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk} & -2r_s \mu_k \\ -r_p \mu_k & r_s \lambda_{pk} - r_p \lambda_{sk} \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c} \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_k^v I_{p,v+1} \\ \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_k^v I_{s,v+1} \end{array} \right] - \\
&- \left[\left(\frac{\lambda_{k1}^*}{j\omega + \lambda_{k1}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k1}^* t}) + \frac{\lambda_{k2}^*}{j\omega + \lambda_{k2}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k2}^* t}) \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_s} \end{bmatrix} + \right.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$+ \left(\frac{\lambda_{k1}^*}{j\omega + \lambda_{k1}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k1}^* t}) - \frac{\lambda_{k2}^*}{j\omega + \lambda_{k2}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k2}^* t}) \right) \frac{1}{d_k^*} \cdot$$

$$\cdot \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{r_p} (r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk}) & -2 \mu_k \\ -2 \mu_k & \frac{1}{r_s} (r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk}) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_k^v U_{p,v+1} \\ \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_k^v U_{s,v+1} \end{array} \right] \cdot \times \left[\begin{array}{c} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{array} \right];$$

where :

$$\mathbf{i}_{p0} = \begin{bmatrix} I_{p1} \\ \vdots \\ I_{pn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_{s0} = \begin{bmatrix} I_{s1} \\ \vdots \\ I_{sn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_{p0} = \begin{bmatrix} U_{p1} \\ \vdots \\ U_{pn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_{s0} = \begin{bmatrix} U_{s1} \\ \vdots \\ U_{sn} \end{bmatrix}.$$

The calculation of the scalar and matrix quantities in the formulas deducted, applied to two- and three-phase transformers — which are of practical importance — is done as follows :

Two-phase transformer :

$$\boxed{n = 2}$$

$$\mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} r_p & 0 \\ 0 & r_p \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} r_s & 0 \\ 0 & r_s \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_p = \begin{bmatrix} l_{p0} & l_{p1} \\ l_{p1} & l_{p0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} l_{s0} & l_{s1} \\ l_{s1} & l_{s0} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 \\ m_1 & m_0 \end{bmatrix};$$

$$\boxed{\omega_0 = 1; \omega_1 = -1;}$$

$$\lambda_{p1} = l_{p0} + l_{p1}; \quad \lambda_{p2} = l_{p0} - l_{p1};$$

$$\lambda_{s1} = l_{s0} + l_{s1}; \quad \lambda_{s2} = l_{s0} - l_{s1};$$

$$\mu_1 = m_0 + m_1; \quad \mu_2 = m_0 - m_1;$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_0^v I_{p,v+1} = I_{p1} + I_{p2};$$

Three-phase transformer :

$$\boxed{n = 3}$$

$$\mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} r_p & 0 & 0 \\ 0 & r_p & 0 \\ 0 & 0 & r_p \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_p = \begin{bmatrix} l_{p0} & l_{p1} & l_{p1} \\ l_{p1} & l_{p0} & l_{p1} \\ l_{p1} & l_{p1} & l_{p0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}_p = \begin{bmatrix} l_{s0} & l_{s1} & l_{s1} \\ l_{s1} & l_{s0} & l_{s1} \\ l_{s1} & l_{s1} & l_{s0} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_1 \\ m_1 & m_0 & m_1 \\ m_1 & m_1 & m_0 \end{bmatrix};$$

$$\boxed{\omega_0 = 1; \omega_1 = \varepsilon; \omega_2 = \bar{\varepsilon};}$$

$$\lambda_{p1} = l_{p0} + 2 l_{p1}; \quad \lambda_{p2} = \lambda_{p3} = l_{p0} - l_{p1};$$

$$\lambda_{s1} = l_{s0} + 2 l_{s1}; \quad \lambda_{s2} = \lambda_{s3} = l_{s0} - l_{s1};$$

$$\mu_s = m_0 + 2 m_1; \quad \mu_2 = \mu_3 = m_0 - m_1;$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_0^v I_{p,v+1} = I_{p1} + I_{p2} + I_{p3};$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_1^v I_{p,v+1} = I_{p1} - I_{p2};$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_0^v U_{p,v+1} = U_{p1} + U_{p2};$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_1^v U_{p,v+1} = U_{p1} - U_{p2};$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_0^v I_{s,v+1} = I_{s1} + I_{s2};$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_1^v I_{s,v+1} = I_{s1} - I_{s2};$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_1^v U_{s,v+1} = U_{s1} + U_{s2};$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_1^v U_{s,v+1} = U_{s1} - U_{s2}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_1^v I_{p,v+1} &= I_{p1} + \bar{\varepsilon} I_{p2} + \varepsilon I_{p3} = \\ &= I_{p1} - \frac{1}{2} (I_{p2} + I_{p3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} j (I_{p2} - I_{p3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_2^v I_{p,v+1} &= I_{p1} + \varepsilon I_{p2} + \bar{\varepsilon} I_{p3} = \\ &= I_{p1} - \frac{1}{2} (I_{p2} + I_{p3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} j (I_{p2} - I_{p3}) \end{aligned}$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_0^v U_{p,v+1} = U_{p1} + U_{p2} + U_{p3};$$

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_1^v U_{p,v+1} &= U_{p1} + \bar{\varepsilon} U_{p2} + \varepsilon U_{p3} = \\ &= U_{p1} - \frac{1}{2} (U_{p2} + U_{p3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} j (U_{p2} - U_{p3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_2^v U_{p,v+1} &= U_{p1} + \varepsilon U_{p2} + \bar{\varepsilon} U_{p3} = \\ &= U_{p1} - \frac{1}{2} (U_{p2} + U_{p3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} j (U_{p2} - U_{p3}) \end{aligned}$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_0^v I_{s,v+1} = I_{s1} + I_{s2} + I_{s3};$$

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_1^v I_{s,v+1} &= I_{s1} + \bar{\varepsilon} I_{s2} + \varepsilon I_{s3} = \\ &= I_{s1} - \frac{1}{2} (I_{s2} + I_{s3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} j (I_{s2} - I_{s3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_2^v I_{s,v+1} &= I_{s1} + \varepsilon I_{s2} + \bar{\varepsilon} I_{s3} = \\ &= I_{s1} - \frac{1}{2} (I_{s2} + I_{s3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} j (I_{s2} - I_{s3}) \end{aligned}$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_0^v U_{s,v+1} = U_{s1} + U_{s2} + U_{s3};$$

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_1^v U_{s,v+1} &= U_{s1} + \bar{\varepsilon} U_{s2} + \varepsilon U_{s3} = \\ &= U_{s1} - \frac{1}{2} (U_{s2} + U_{s3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} j (U_{s2} - U_{s3}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_2^v U_{s,v+1} &= U_{s1} + \varepsilon U_{s2} + \bar{\varepsilon} U_{s3} = \\ &= U_{s1} - \frac{1}{2} (U_{s2} + U_{s3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} j (U_{s2} - U_{s3}). \end{aligned}$$

In the special case where the primary and secondary windings are equal, i. e. $\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_s$ and $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_s$, the formula will take on the following form :

$$\lambda_{k1}^*, \lambda_{k2}^* = \frac{1}{\lambda_k^2 - \mu_k^2} \frac{2r\lambda_k \mp 2r\mu_k}{2};$$

$$\lambda_{k1}^* = \frac{r}{\lambda_k + \mu_k}; \quad \lambda_{k2}^* = \frac{r}{\lambda_k - \mu_k}$$

hence

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_p \\ \mathbf{i}_s \end{bmatrix} &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(e^{-\frac{r}{\lambda_k - \mu_k} t} + e^{-\frac{r}{\lambda_k + \mu_k} t} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \right. \\ &+ \left(e^{-\frac{r}{\lambda_k - \mu_k} t} - e^{-\frac{r}{\lambda_k + \mu_k} t} \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right] \cdot \left[\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_k^v I_{pv} \right] + \\ &+ \left[\frac{r - j\omega(\lambda_k - \mu_k)}{r^2 + \omega^2(\lambda_k - \mu_k)^2} \left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{\lambda_k - \mu_k} t} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{r - j\omega(\lambda_k - \mu_k)}{r^2 + \omega^2(\lambda_k - \mu_k)^2} \left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{\lambda_k + \mu_k} t} \right) \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \\ &- \left(\frac{r - j\omega(\lambda_k - \mu_k)}{r^2 + \omega^2(\lambda_k - \mu_k)^2} \left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{\lambda_k + \mu_k} t} \right) - \right. \\ &- \left. \frac{r - j\omega(\lambda_k + \mu_k)}{r^2 + \omega^2(\lambda_k + \mu_k)^2} \left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{\lambda_k + \mu_k} t} \right) \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right] \cdot \left[\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_k^v U_{pv} \right] \cdot \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

REFERENCES

1. EGERVÁRY, E.: On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice dynamics. Hung. Acta Scientiarum Mathematicarum, Tomus XV., Fasc. 3—4. 1954. Inst. Bolyaian. Univ. Szeged.
2. SOMMERFELD, A.: Elektrodynamik. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1949, p. 140.
3. LOVASS-NAGY, V. and GYÖRY, T.: On the mathematical investigation of coupled circuits by means of the matrix calculus. (Hungarian). Publications of the Institute for Applied Mathematics, Hung. Academy of Sc. Vol. III. 1954.

4. EGERVÁRY, J.: On the canonical representation of matrix functions and some applications thereof. (Hungarian). Proceedings of Section III. of the Hung. Acad. of Sc., Vol. III. No. 4., 1953. p. 451.
5. L. c. (1)
6. L. c. (4), p. 450.
7. L. c. (1), p. 215, formula (9).
8. L. c. (1), p. 218.
9. Янко-Триницкий: Уравнения периодных электромагнитных процессов асинхронного двигателя и их решения. (Электричество. 1951, № 3, стр. 18.)

SUMMARY

Making use of the results derived by Egerváry in producing the spectral decomposition of hypermatrices whose blocks are commutable in pairs [1], the author sought the solution for systems of differential equations describing steady state and transient processes of poly-phase transformers (containing an arbitrary number of phases). In his examinations, the author assumed the transformers examined to possess windings on the primary side of the same material and geometric specifications, the secondary windings to be likewise uniform, moreover the windings to be arranged in cyclic symmetry. The linear system of differential equations constructed on the base of the above conditions can be established as a linear matrix differential equation of first order. The author presents the solution of this matrix differential equation in a clear form suited for numerical calculations by developing the spectral decomposition of the coefficient matrix — in the case before us, a hypermatrix consisting of cyclic submatrices. Thus, the relations serving for the description of steady state as well as transient processes have been derived for transformers containing an arbitrary number of phases. The results derived are demonstrated applied to two- and three-phase transformers.

ПРИМЕНЕНИЕ ГИПЕРМАТРИЧНОГО АЛГОРИФМА ЭГЕРВАРИ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МНОГОФАЗНЫХ ТРАНСФОРМАТОРОВ

В. ЛОВАШШ-НАДЬ

РЕЗЮМЕ

Автор, — используя результаты (1) приведения к диагональной форме гиперматриц Эгервари, состоящих из попарно взаимозаменяемых блоков, — ищет решения систем дифференциальных уравнений, описывающих стационарные и переходные процессы многофазных трансформаторов (с любым числом фаз). Автор при исследованиях исходит из предположения, что исследованные трансформаторы имеют такую конструкцию, что, с одной стороны, материальные и геометрические данные обмоток со стороны первичных обмоток являются идентичными, а с другой стороны, обмотки вторичных обмоток также идентичны, далее в расположении обмоток имеет место циклическая симметрия. Построенная на основе этих условий линейная система дифференциальных уравнений может быть преобразована в линейное матричное дифференциальное уравнение первой степени. Это матричное дифференциальное уравнение преобразуется автором в наглядную форму, пригодную также для числовых расчетов, путем преобразования матричного коэффициента, — который в данном случае является гиперматрицей, состоящей из циклических блоков, — в диагональный вид. Таким образом, получены зависимости, служащие для описания как стационарных, так и переходных процессов для трансформаторов с любым числом фаз; для примера показано применение выведенных результатов для случая двухфазных и трехфазных трансформаторов.

APPLICATION DE L'HYPERMATRICE-ALGORITHME D'EGERVÁRY À L'ÉTUDE MATHÉMATIQUE DE TRANSFORMATEURS POLYPHASÉS

V. LOVASS-NAGY

RÉSUMÉ

L'auteur cherche la solution des équations différentielles exprimant les processus stationnaires et transitoires de transformateurs polyphasés (d'un nombre de phases quelconque), en se servant des résultats [1] de Egerváry obtenus par la transformation en forme diagonale d'hypermatrices formant des blocs échangeables deux par deux. Le transformateur étudié est supposé d'être construit de manière que d'une part les données matérielles et géométriques des bobines primaires soient les mêmes, et d'autre part que les bobines secondaires soient aussi identiques, et qu'il existe une symétrie cyclique dans la disposition des bobines. Le système d'équations différentielles linéaires, qu'on peut construire à la base de ces conditions, peut être transcrit en une seule équation-matrice différentielle linéaire de premier ordre. La solution de cette équation est présentée en une forme lucide et convenable au calcul numérique d'une manière que le coefficient-matrice — qui est dans ce cas une hypermatrice de blocs cycliques — est transformé en forme diagonale. De cette manière les relations servant à la description des processus stationnaires et transitoires sont dérivées pour un transformateur d'un nombre de phases quelconque. À titre d'exemple l'application des résultats dérivés à des transformateurs biphasés et triphasés est présentée.

ANWENDUNG DES EGERVÁRYSCHEN HYPERMATRIX-ALGORITHMUS ZUR MATHEMATISCHEN UNTERSUCHUNG VON MEHRPHASENTRANSFORMATOREN

V. LOVASS-NAGY

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser sucht die Lösung von Differentialgleichungen, die stationäre und Ausgleichsvorgänge von Mehrphasentransformatoren (von beliebiger Phasenzahl) beschreiben, durch Anwendung der Ergebnisse von EGERVÁRY [1] in Verbindung mit der Transformation in Diagonalf orm der aus paarweise vertauschbaren Gruppen bestehenden Hypermatrizen. Es wird vorausgesetzt, dass die untersuchten Transformatoren derart gebaut sind, dass einerseits die baustoffmässigen und geometrischen Angaben der Primärwicklungen gleich sind, dass andererseits auch die Sekundärwicklungen gleich sind ferner und dass eine zyklische Symmetrie in der Anordnung der Wicklungen besteht. Das auf diese Weise aufgestellte lineare Differentialgleichungssystem kann in eine einzige lineare Matrixdifferentialgleichung erster Ordnung umgeschrieben werden. Die Lösung dieser Matrixdifferentialgleichung wird in einer übersichtlichen und für zahlenmässige Berechnung geeigneten Form derart gegeben, dass die Koeffizientmatrix — in diesem Falle eine aus zyklischen Blocks bestehende Hypermatrix — in Diagonalf orm gebracht wird. Auf diese Weise werden die zur Beschreibung sowohl der stationären wie der Ausgleichsvorgänge dienenden Gleichungen für einen Transformator von beliebiger Phasenzahl hergeleitet. Als Beispiel wird die Anwendung der abgeleiteten Ergebnisse auf Zwei- und Dreiphasentransformatoren vorgeführt.

ABNORMAL OVERVOLTAGES IN REGULATING AUTO-TRANSFORMERS*

A. CSERNÁTONY-HOFFER and G. KARÁDY

INSTITUTE FOR ELECTRIC POWER AND RAILWAYS, BUDAPEST TECHNICAL UNIVERSITY

[Manuscript received 5th August, 1955]

I. Introduction

In regulating auto-transformers with isolated neutrals, traveling waves entering from the overhead line may produce severe overvoltage at the neutral.

This phenomenon called transient inversion, essentially consists in the passage of the traveling wave entering the auto-transformer (Fig. 1) into the ground through the transformer's regulator coil having comparatively low number of windings (N_2) and the ground capacitance C_f of the adjacent main transformer or line. The full voltage of the wave is distributed over the two

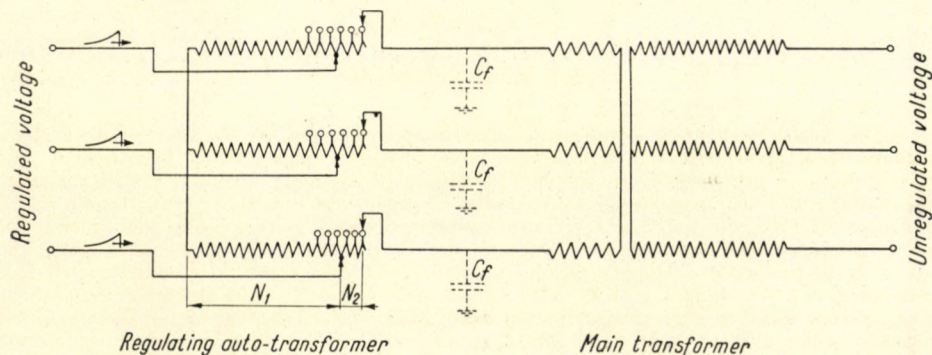


Fig. 1. Three-phase wiring diagram of main transformer and of regulating auto-transformer connection

elements connected in series, the regulator coil of N_2 number of windings, and C_f ground capacitance (Fig. 2), and the portion falling to the coil is stepped up by the transformer according to the ratio between the number of the exciter coil and the regulator coil windings N_1/N_2 . In this manner, tension exceeding several times the crest value of the entering wave may arise in the isolated

* The tests were carried out by the Institute for Electric Power and Railways, Budapest Technical University on behalf of the Electric Power Transmission Authority.

neutral of the auto-transformer, which might break down the insulation on the neutral.

The danger of this phenomenon is all the greater, as the tension arising at the neutral is the resultant of the voltage caused by inversion and the voltage of the surge passing through the exciter coil. In adverse case, the two voltages, add up and, consequently, increased stress on the insulation must be reckoned with.

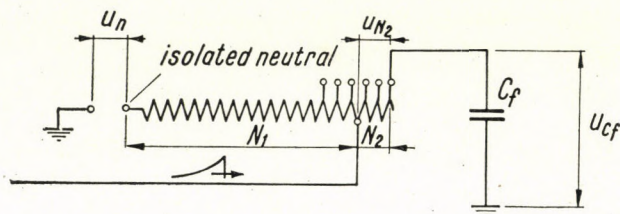


Fig. 2. Single-phase diagram of the main transformer connected with a regulator, referred to transient inversion

To examine the above phenomenon, tests were performed on two 35 kV auto-transformers of 12 MVA and 24 MVA capacity respectively.

II. Method of measurement

The auto-transformers on which the tests were carried out, consisted of two main parts, viz. (Fig. 3).

a) the exciter coil connected in parallel with the line to be regulated,

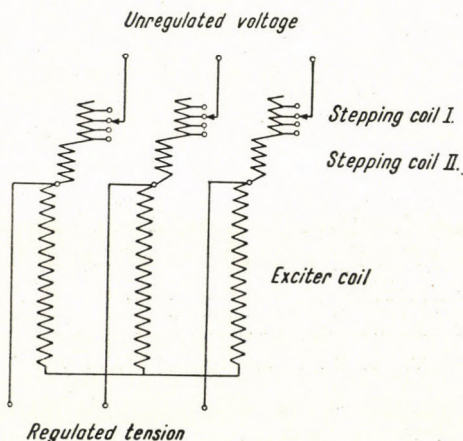


Fig. 3. Connection of regulating auto-transformer coils

b) two stepping coils Nos. I and II inserted in series into the line to be regulated.

The exciter coil is disc-type, the 24 MVA transformer having 840, the 12 MVA 1214 windings.

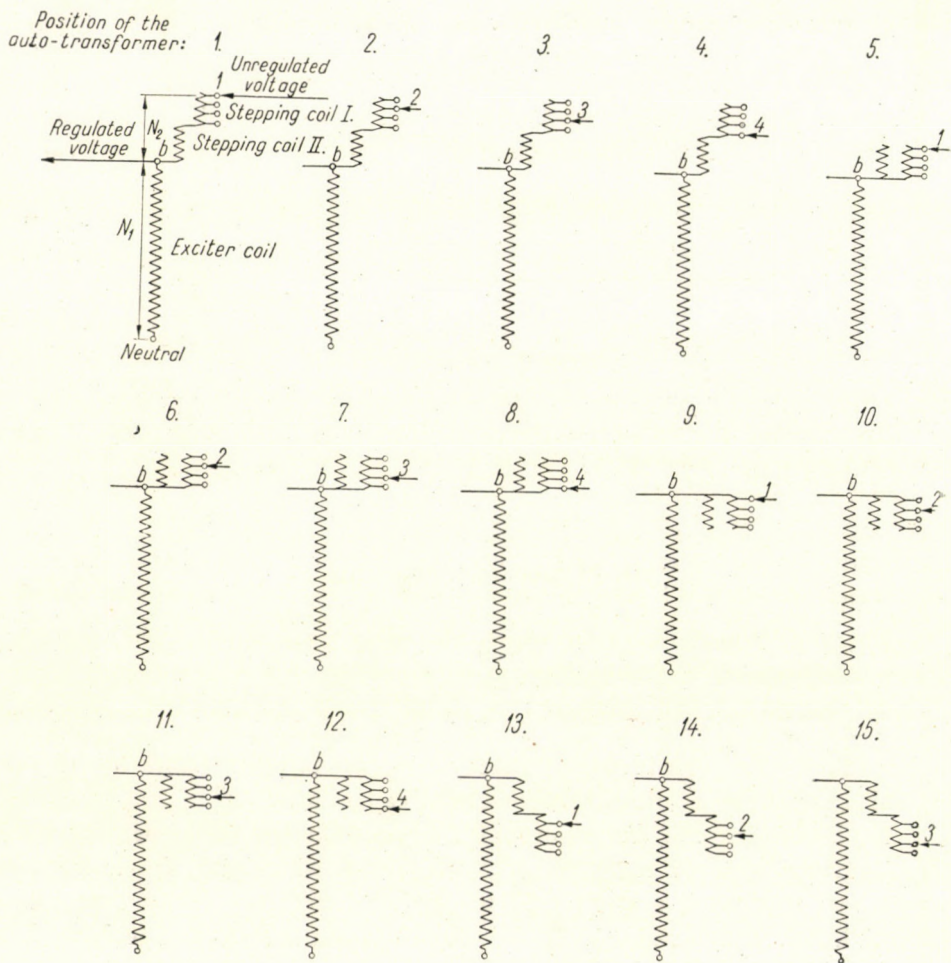


Fig. 4. Fifteen positions of regulating auto-transformer, system GANZ—RATKOVSKY

No. I stepping coil serving for regulating is a single layer cylinder type-coil which actually consists of four coils connected in series. The four coils are, however, not located above each other in axial direction, but are interlaced, similar to a four-thread screw. As the taps necessary for regulating are formed by the outgoing terminals, in this design the portion between two taps is invariably a single, continuous coil filling the entire length of the core. This

complex coil has $4 \times 18 = 72$ windings in the 24 MVA transformer, and $4 \times 26 = 104$ windings in the 12 MVA transformer.*

Stepping coil No. II is a single, continuous cylinder-type coil, with a number of windings equal to the total of coil No. I (72 and 104 respectively).

The 15 positions of the transformer in which it may be operated are shown in Fig. 4 — for simplicity, only in a single phase.

In position No. 1 the auto-transformer steps down the voltage, and regulated tension is 15 per cent below the unregulated voltage.

In positions 1–8 the number of effective regulator windings, N_2 decreases gradually, and with it the difference between regulated and unregulated voltage declines, while transmission ratio N_1/N_2 increases.

In position No. 8 the number of effective regulator windings $N_2 = 0$, as a result of which the unregulated voltage is equal to the regulated one, while ratio N_1/N_2 becomes indefinite.

Proceeding from position No. 8 towards No. 15, the above described procedure unrolls itself in inverse sense. The stepping coils are gradually connected in series again, however, they no longer step down the voltage, but step it up, and in position 15 the regulated tension is 15 per cent higher than before. N_1/N_2 ratio is, of course, equal to the one in position 1.

Fig. 5 shows two typical forms of the use of the transformer, for simplicity again related to a single phase only.

From the point of our examinations, the main difference between the two service conditions is that in the layout in Fig. 5/a the impulse entering from the line-side passes through the terminal of the exciter coil, whereas in the arrangement according to Fig. 5/b, it enters into the transformer through the taps of the stepping coil.**

As from the view point of transient inversion, only the ground capacitance of the main transformer plays any part, during the tests, the main transformer was substituted by a suitably dimensioned capacitor.

To determine the dimensions of the substituting capacitor, the static ground capacitance of some transformers cooperating with the auto-transformer was measured, and on that basis their effective ground capacitance was estimated.***The result indicated that the main transformer could be best substituted by a 10 000 pF capacitor — with a margin of safety.

The tests were performed in both typical working conditions of the auto-transformer (Figs. 5/a and 5/b) in all positions (1–15). As in transformers with isolated neutrals, voltages to ground are higher when caused by three-

* During regulation not all windings are effective.

** There was no need for separately examining the third possible service condition of the transformer, when it is connected on either side directly with the transmission line, without a main transformer. Namely, the connection schemes shown in Figs. 5/a and 5/b include the third alternative too as far as transient inversion is concerned.

*** Estimation was made on the basis of the known formula $C_{\text{effective}} = \sqrt{C_{\text{winding}} \cdot C_{\text{ground}}}$

phase impulses than when produced by single-phase impulses, all tests were performed with single-phase and three-phase impulses alike.

In the course of the tests the operating condition shown in Fig. 5/a was simulated in such manner (Fig. 6/a) that the tap corresponding to the position of the transformer was grounded through a 10 000 pF capacitor, and the 1/50

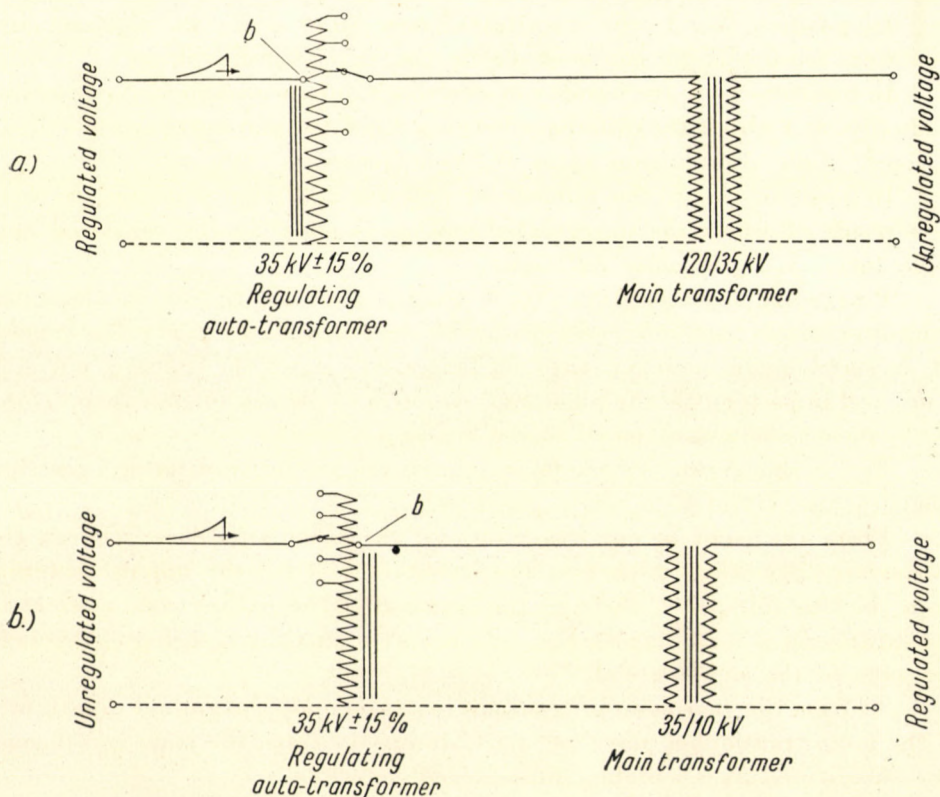


Fig. 5. a) Single-phase wiring diagram of 120/35 kV main transformer and 35 kV regulating auto-transformer

b) Single phase wiring diagram of 35/10 kV main transformer and of 35 kV regulating autotransformer

type impulses of about 500 V crest were conducted to terminal *b* of the exciter coil.

When simulating the operating condition shown in Fig. 5/b, terminal *b* of the transformer was permanently grounded through a 10 000 pF capacitor, and the impulses were conducted to the tap corresponding to the position of the auto-transformer.

Neutral tension produced by the impulses was observed on a cathode-ray oscillograph, and was recorded with a camera.

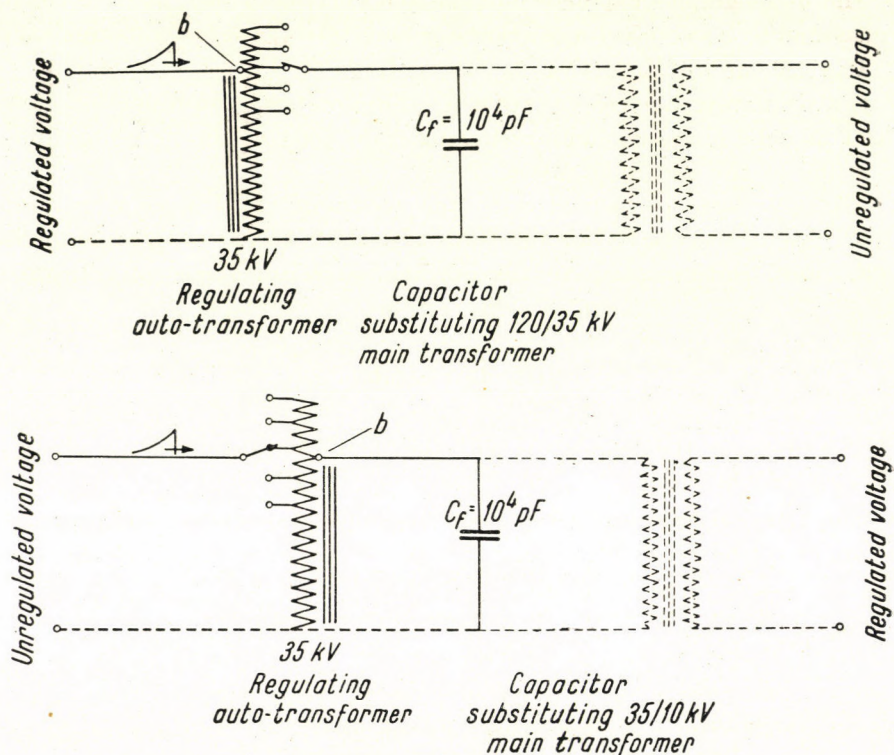


Fig. 6. a) Substitute diagram of a 35 kV regulating auto-transformer connected with a 120/35 kV main transformer, referred to transient inversion
 b) Substitute diagram of 35/10 kV main transformer connected with 35 kV regulating autotransformer; referred to transient inversion

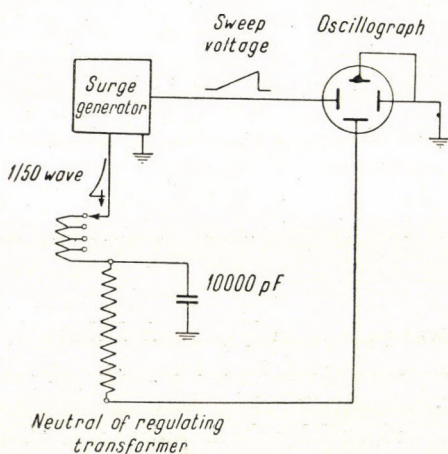


Fig. 7. Scheme of the measurement of transient inversion

The oscillograph's exponential time delay of about $500 \mu s$ time constant was provided by a sweep voltage generator built into the recurrent surge exciter.

The scheme of the testing device is shown in Fig. 7.

In estimating the wave records, the greatest amplitude of voltage oscillations was, for convenient reckoning, expressed in the percentage of the crest value of the incoming wave.

All tests were performed with the recurrent surge generator built at the Institute for Electric Power and Railways, which had an outgoing impedance of 500 Ohms, corresponding to the average wave impedance of transmission lines.

III. Test results

The results of the tests made with the 12 MVA transformer are illustrated in Figs. 8 and 9.

The figures show the regulating transformer's neutral voltages as the function of its position.

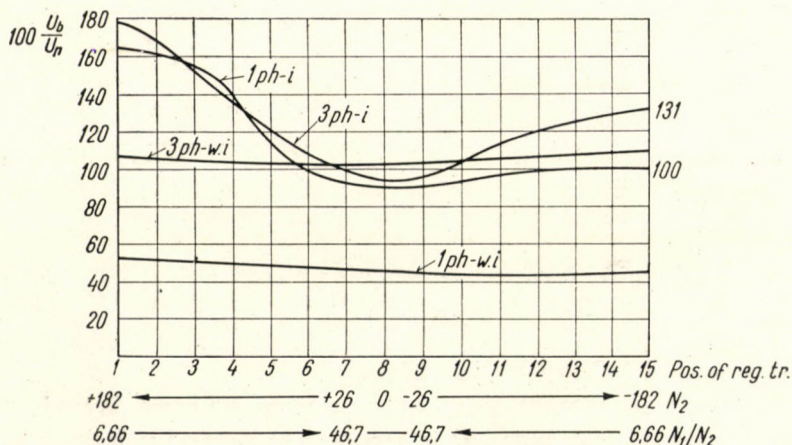


Fig. 8. Neutral tension of 12 MVA auto-transformer with and without inversion, measured at single- and three-phase impulses respectively, entering through the terminal of the exciter coil

Besides the regulating transformer's 15 positions the abscissa shows the number of effective windings pertaining to the various positions and ratio of windings N_1/N_2 .

The ordinate gives the neutral-to-ground voltage in percentage.

Fig. 8 shows the neutral-to-ground tension induced by the single-phase or three-phase impulse entering through terminal *b* of the exciter coil.* (Curves

* See test series plotted in Fig. 6/a.

1 ph-i and 3 ph-i.) The diagram also shows the neutral tension measured without inversion. (Curves marked 1 ph-w. i. and 3 ph-w. i.)

Fig. 9 shows the potential of the neutral when the impulse enters from the tap-side.* Marks as in Fig. 8.

Let us examine these curves more closely.

The neutral-to-ground voltage — as mentioned above — is made up of two component parts, viz :

a) the voltage produced by the impulse passing through the exciter coil, and

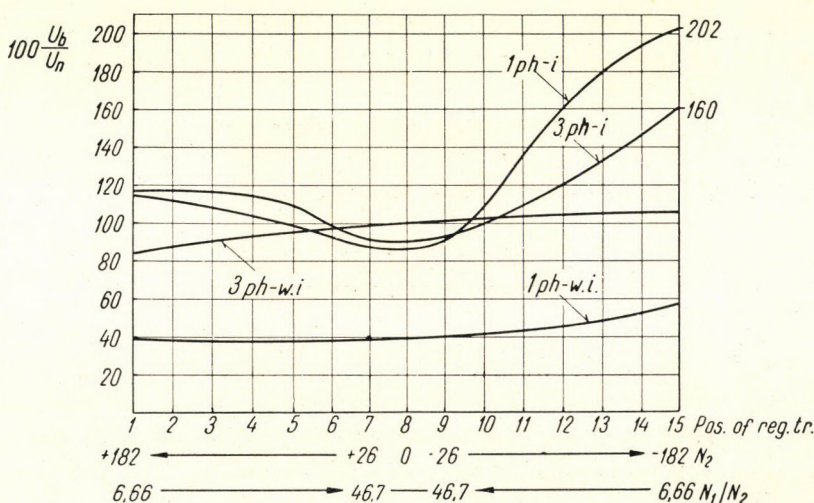


Fig. 9. Neutral tension of 12 MVA auto-transformer with and without inversion, measured at single- and three-phase impulses respectively, entering through the taps

b) the voltage induced by inversion.

When measured without a capacitor which produces inversion — in which case the component under b) is zero — the neutral voltage is actually independent of the transformer's position, tested both with single-phase and three-phase impulses (curves 1 ph-w. i. and 3 ph-w. i.). According to curves 3 ph-w. i. in Figs. 8 and 9, such tension is, however, higher at a three-phase impulse than at a single-phase impulse. The explanation herefor is that when the transformer is impressed with a three-phase impulse, tension becomes congested in the neutral.

During tests with a capacitor causing inversion, both a) and b) components of the neutral voltage are present.

It will be seen from curves 1 ph-i and 3 ph-i in Figs. 8 and 9 that the

* See test series plotted in Fig. 6/b.

resultant of the two voltages is invariably at its lowest about position No. 8 of the transformer, when the number of the regulator windings N_2 amounts to zero. Increasing the number of the effective regulator windings from position 8 either in the positive or in the negative sense, will increase neutral tension.

Where the impulse enters from the exciter coil side, tension will be highest in position 1 of the transformer, amounting to 164 and 178 per cent respectively (Fig. 8).

The impulse arriving from the tap-side further increases the potential of the neutral (Fig. 9). Extreme values reach 202 per cent of the entering wave following a single-phase impulse, and 160 per cent thereof upon a three-phase impulse. It is remarkable that in contrast to the previous test series, highest values are not reached in the transformer's position No. 1, but in position No. 15.

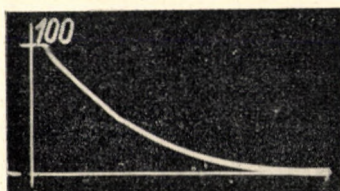


Fig. 10. 1/50 type surge to logarithmic time scale

The results of the tests clearly indicate that severe overvoltages arise in the neutral owing to inversion. As valve-type lightning arresters protecting transformers of 35 kV nominal voltage spark under the effect of a surge of 132 kV, the 202 per cent tension appearing at the neutral means that the voltage ruling at the isolated neutral of the auto-transformer would be $132 \times 2,02 = 270$ kV even where a faultlessly working valve arrester was installed before the auto-transformer.

As a matter of interest — particularly with an eye to the subsequent part of this paper — it seems worth the trouble to examine more closely some of the many records taken in the course of experiments.

Fig. 10 shows a 1/50 type surge delivered by the surge generator. (1 μ s front and 50 μ s tail.)

Records 11 to 15 were taken under service conditions according to Fig. 5/a, records 16 to 20 under those illustrated in Fig. 5/b. As will be seen also from the schemes next to the curves, in the former case, the surge enters into the transformer through the terminals of the exciter coil, while in the latter, through the taps of the stepping coil.

Both series refer to single-phase impulses. In both columns, the diagrams show voltage oscillation in the neutral in positions 1—5—8—11—15 of the transformer, reading from top to bottom.

On examining the oscillograms in the left hand column, it will strike us that the transformer does not oscillate as long as the traveling coils are connected in series with the exciter coil in the positive sense (positions 1 to 8). In positions 1 to 8, the tension ruling at the neutral is essentially made up of oscillations of comparatively low amplitude superposed on the incoming wave. As soon as the traveling coils are oppositely connected with the exciter coil (positions 8 to 15), the transformer begins to oscillate.

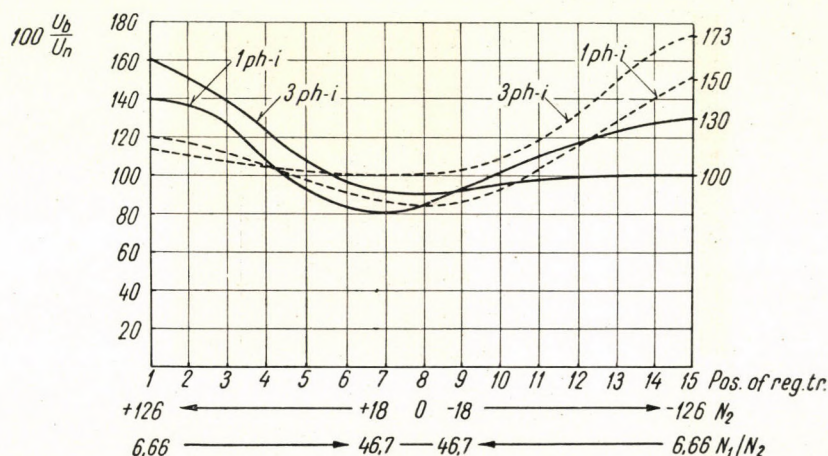


Fig. 21. Neutral tensions of 24 MVA auto-transformer due to transient inversion, measured at single- and three-phase impulses respectively
 ————— (solid line) under service conditions as shown in Fig. 5/a;
 - - - - - (dashed line) under service conditions as shown in Fig. 5/b

Curiously, the pointed positive peak observed initially in the wave pattern — most sharply seen in Fig. 11 — which gradually disappears on approaching position 8 of the transformer, is formed again in the negative sense beyond position 8.

In oscillograms 16 to 20, where the impulse enters through the taps, the gradually rising oscillation of the transformer may once more be observed. Strikingly, however, this time the neutral voltage begins to oscillate when the stepping coils are positively connected in series with the exciter coil, i. e. inversely to the former series.

The phenomenon is rendered still more striking by the reversal of the amplitude relations. Under service conditions according to Fig. 5/a (left hand column of wave records) highest tension is encountered in position 1. of the transformer, while under conditions shown in Fig. 5/b (right hand column), in position 15.

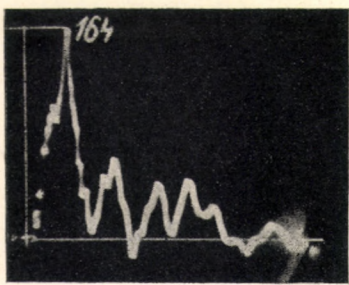


Fig. 11.

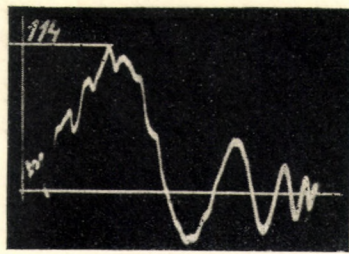
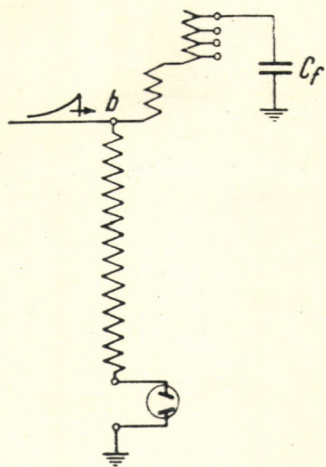


Fig. 16.

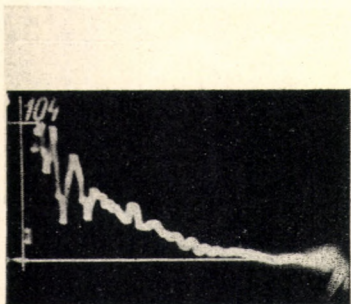
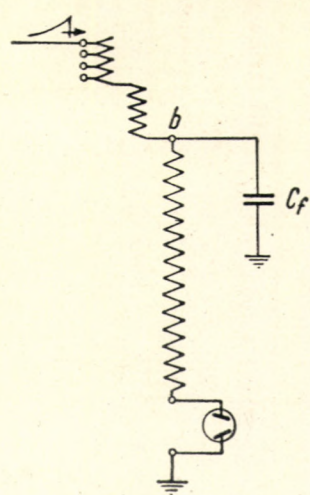


Fig. 12.

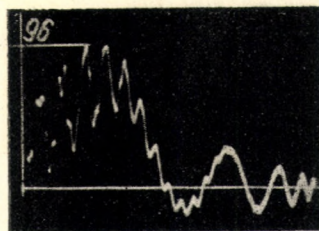
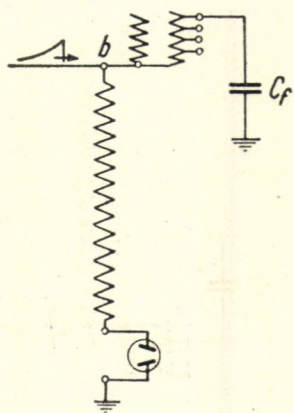


Fig. 17.

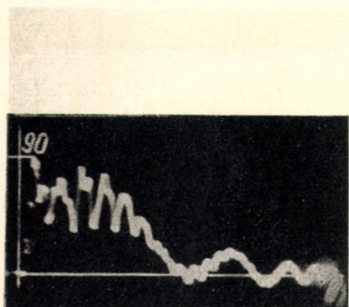
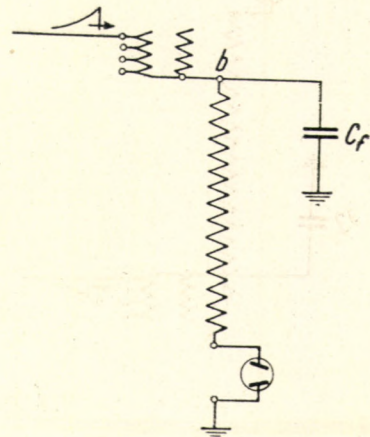


Fig. 13.

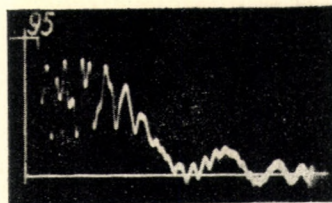
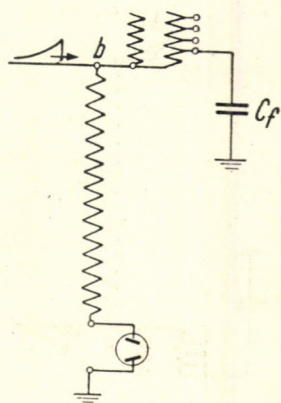


Fig. 18.

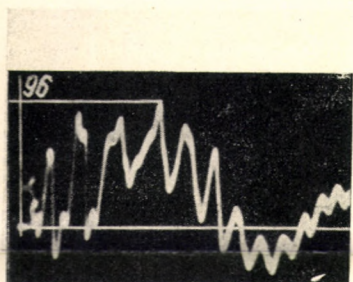
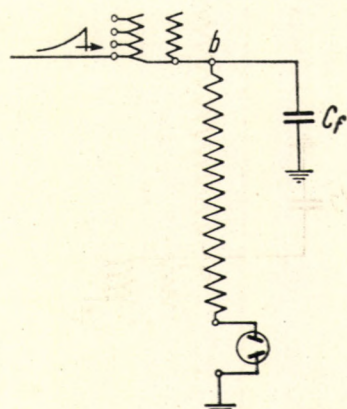


Fig. 14.

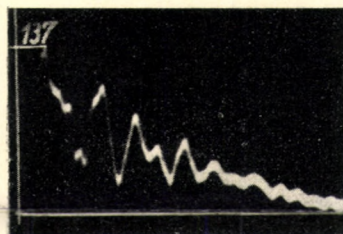
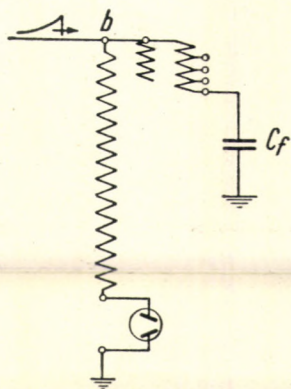


Fig. 19.

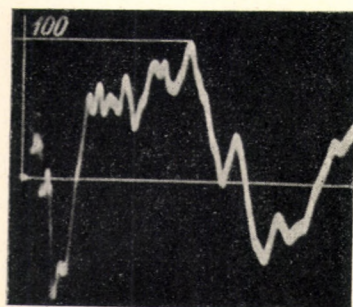
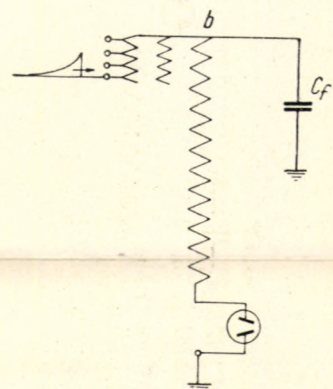


Fig. 15.

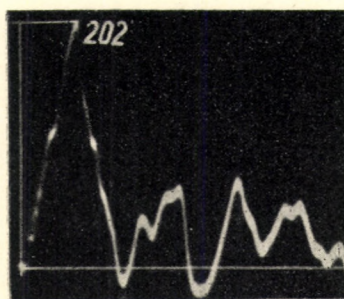
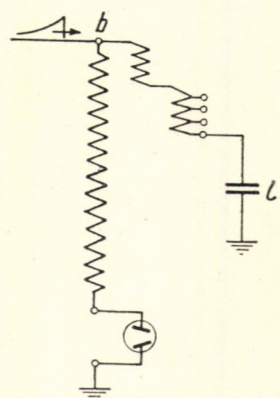
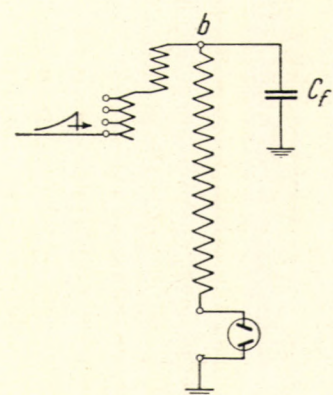
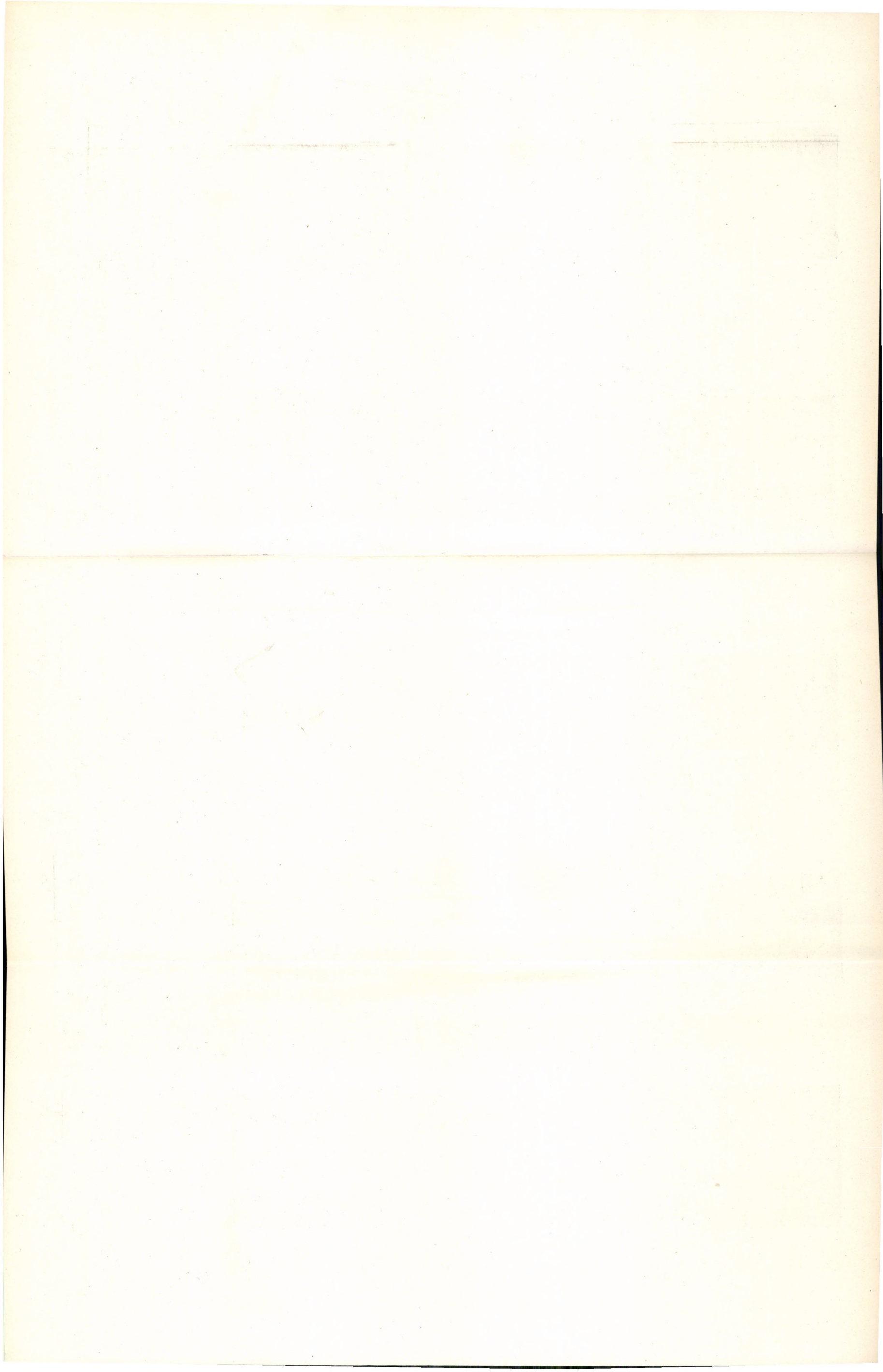


Fig. 20.





The tests were repeated with the 24 MVA auto-transformer. The results — which conform in character to those yielded by the tests with the 12 MVA transformer — are illustrated in Fig. 21.

The values measured without inversion were not included in the diagram. The curves were marked similarly to Figs. 8 and 9.

Summing up the results of the tests with the two auto-transformers, it may be stated that :

1. due to transient inversion, voltages of 180—200 per cent appear at the auto-transformer's neutral relative to the ground. (Measured with 1/50 type wave, and substituting a 10 000 pF capacitor for the main transformer.)
2. in both auto-transformers, highest stress arises upon connecting all windings of the two stepping coils in series ;
3. tension in the neutral increases with the increasing number of the regulator windings (in other words, with the diminution of the N_1/N_2 ratio).

IV. Laws governing transient inversion

As has been seen above, transient inversion is essentially due to the traveling waves flowing through the series regulator coil, the voltage of which is stepped up in proportion to ratio N_1/N_2 of the number of windings in the parallel exciter coil. The transmission ratio being high, severe overvoltage arises between neutral and ground.

Considering that the transformation ratio is N_1/N_2 , the reduction of the number of regulating windings N_2 , in other words the increase of the N_1/N_2 ratio ought to step up the neutral voltage, and conversely.

Against this, the results of our tests prove that the phenomenon depends on the N_1/N_2 ratio in inverse sense. Figs. 8, 9 and 21 show that voltage is highest in the neutral when the N_1/N_2 ratio is lowest (in positions 1 and 15).

To clear up this apparent contradiction, we experimented with one of the phase coils of a Y/Y connected, 30 kV transformer of 1000 kVA, the 840 windings of which were grouped in disc-type arrangement, in 84 discs — similarly to the coil of the auto-transformer.

Each disc in the upper third of the coil was tapped, and a 10 000 pF capacitor — and in a subsequent test series, a 100 000 pF capacitor — was tied between a chosen tap and the ground, according to Fig. 22. Thereafter 1/50 type impulses were impressed through terminal marked *A*, with a recurrent surge generator.

By this arrangement, essentially an auto-transformer was constructed, the regulating coil of which consisted of the stack of N_2 windings between the

capacitor and terminal A , and the exciter coil of which was the stack of N_1 windings between C_f capacitor and the neutral.

Connecting the capacitor in turn with all taps (numbered starting from terminal A), we measured the neutral-to-ground voltage, and the results obtained through the 10 000 pF and the 100 000 pF capacitor respectively were plotted in separate diagrams (Fig. 23).

The diagrams were plotted in such manner that the neutral voltages obtained by connecting the capacitor alternately to various taps, were measured as functions of N_2 , the number of the regulating coil windings. Hence, the abscissa in Fig. 23 shows number of windings of the regulating coil N_2 , while

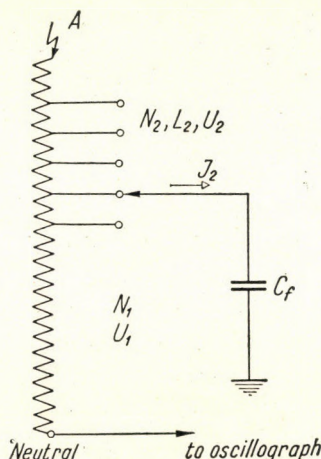


Fig. 22. Scheme showing the determination of neutral potential due to transient inversion while N_2 is varied between broad limits

the voltage induced at the neutral may be read on the ordinate in percentage. The voltage ruling at the neutral relative to the ground at any given regulating winding N_2 may thus be read from the diagram.

An examination of the curves will show that the voltage induced at the neutral grows at first with the increasing number of regulating windings, to reach a peak at a certain number of windings, whereafter the increase of the regulating coils entails already the decline of the voltage.

The winding at which the voltage peak is reached, is called the *critical number of windings*.

According to Fig. 23, with the 10 000 pF capacitor, the curve has a rising tendency until about the 14th disc, after which it declines. The critical number of windings is therefore about 140, about one sixth of the total number of windings.

Also, it may be observed that by increasing the value of C_f from 10 000 pF to 100 000 pF, the peak is shifted towards the lower numbers of

windings. In a limit case, when the tap is directly grounded, $C_f = \infty$, the peak is shifted to $N_2 = 0$. In that case, the induced tension declines in the usual manner until the end with the increase of N_2 , in other words with the decrease of the ratio of the numbers of windings.

As the neutral voltage of the auto-transformer tested increased all the time with the growing number of the regulator windings, it is evident that the number of regulating windings was below the critical value.

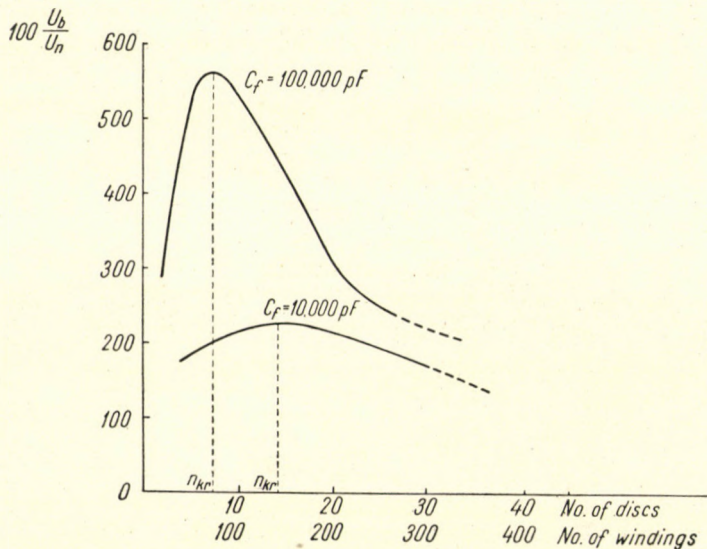


Fig. 23. Diagram of neutral tensions of 1000 kVA, 30 kV transformer due to transient inversion, N_2 being varied between broad limits, tested in turn with a 10 000 and a 100 000 pF capacitor

The explanation for the apparently abnormal relation between the ratio of the numbers of windings and the induced voltage will be readily found if we realize that the voltage induced in the exciter coil of N_1 number of winding

$$U_1(t) = N_1 \cdot \frac{d}{dt} \Phi(t). \quad (1)$$

Herefrom, $\Phi(t)$ flux may be expressed with the conductivity of the transformer's magnetic circuit Λ , and also with excitation $\Theta_2 = N_2 \cdot I_2$ of the coil of N_2 number of windings

$$\Phi(t) = \Lambda N_2 \cdot I_2(t). \quad (2)$$

Thus, providing Λ is considered to be constant,

$$U_1(t) = N_1 \cdot N_2 A \cdot \frac{d}{dt} I_2(t). \quad (3)$$

From the viewpoint of the transient inversion, current I_2 is, however, not only a function of time, but also of $L_2 = A N_2^2$ inductance and C_f capacitance:

$$I_2 = f(t, N_2, C_f) \quad (4)$$

Where the numerical value of L_2 and C_f is equally low, from the point of the wave, the impedance of L_2 is low, that of C_f high, thus the variation of L_2 (and of N_2 respectively) within certain limits *does not affect the rate of I_2* .

$$I_2 = f(t, C_f) \quad (5)$$

Is, however, I_2 independent of N_2 , in equation

$$U_1(t) = N_1 \cdot N_2 A \frac{d}{dt} I_2(t, C_f) \quad (6)$$

$\frac{d}{dt} I_2(t, C_f)$ will not depend either on N_2 , and thus, at constant C_f , equation (6) becomes

$$U_1(t) = N_1 \cdot N_2 \cdot A \cdot \varphi(t) \quad (7)$$

i. e. U_1 voltage increases proportionally with the growth of N_2 .

According to the diagrams in Fig. 23, the relation (7) only holds good until a certain limit, namely until the critical number of windings. Namely, with the increase of N_2 , L_2 will gradually reach such magnitude that its effect can no longer be neglected alongside that of C_f . Beyond the critical number of windings, I_2 current rate is no longer determined by C_f , but primarily by L_2 , in other words approximately

$$I_2(t) = \frac{1}{L_2} \int U_2(t) dt. \quad (8)$$

Substituting into equation (3), the transformer formula

$$U_1(t) = \frac{N_1}{N_2} U_2(t) \quad (9)$$

is obtained. As the function of N_2 , the well known expression (9) has a hyperbolic character; actually, above the critical number of windings, the curves in Fig. 23 on the whole obey that law.

In order to prove the assumption that below the critical number of windings, the rate of I_2 current is not determined by L_2 inductance, but by C_f capacitance, the distribution of a surge of a given crest value between L_2 and C_f was determined.

Namely, it is evident that the rate of the current passing through two elements connected in series is determined by the element on which a disproportionately higher tension falls, in other words, which has a higher impedance.

It was found that almost the entire voltage fell to C_f capacitor.* Voltage measured at L_2 only rose to an appreciable rate under the 1–2 μ s duration of capacitive voltage distribution, and after its rapid disappearance it remained negligibly low as compared to the voltage of C_f capacitor until the end.** Thus the assumption that I_2 current rate was determined by C_f capacitance below the critical number of windings, was proved to hold good.

The physical aspect provides an explanation also for the question why number of windings shifts towards lower values when the capacitance of the condenser increases.

As it has been seen above, the critical number of windings is located at the point where the coil impedance is no longer negligible compared to the capacitor's impedance. The higher the condenser's capacity, the lower its impedance, and the lower the inductance and N_2 winding number, the effect of which at the given capacitance can no longer be neglected, and conversely. This is also illustrated by Fig. 23. Measured with a 10 000 pF capacitor, the critical number of windings of the transformer examined was at 140, while with a 100 000 pF capacitor it dropped to about 70.

Where capacitance C_f tends towards the infinite, the critical winding number approaches zero, for when directly grounded ($C_f = \infty$), $L_2 = A \cdot N_2^2$ inductance determines in itself the rate of the current flowing through, and with it the voltage ruling at the neutral, in accordance with expression (8).

Another phenomenon requiring elucidation is that under service conditions illustrated in Fig. 5/a, the neutral tension is highest in position 1 of the regulator, while in the condition as per Fig. 5/b, in position 15.

In Fig. 24, single-phase connection schemes referred to transient inversion have been drawn up for positions 1 and 15 of both service conditions (Figs. 24/a-b-c-d).

* Namely, due to the magnetic inertia of iron, magnetic conductivity is greatly dependent on the duration of the tension; during the phenomenon taking place in 100–150 μ s, it is several magnitudes lower than at 50 cycles.

** Although the high voltage appearing on the stepping coil's terminals for the duration of a few μ s, has no significance from the point of view of transient inversion, yet it may gravely stress the insulation of the stepping coil and the switchgear. This, however, is beyond the title of this paper.

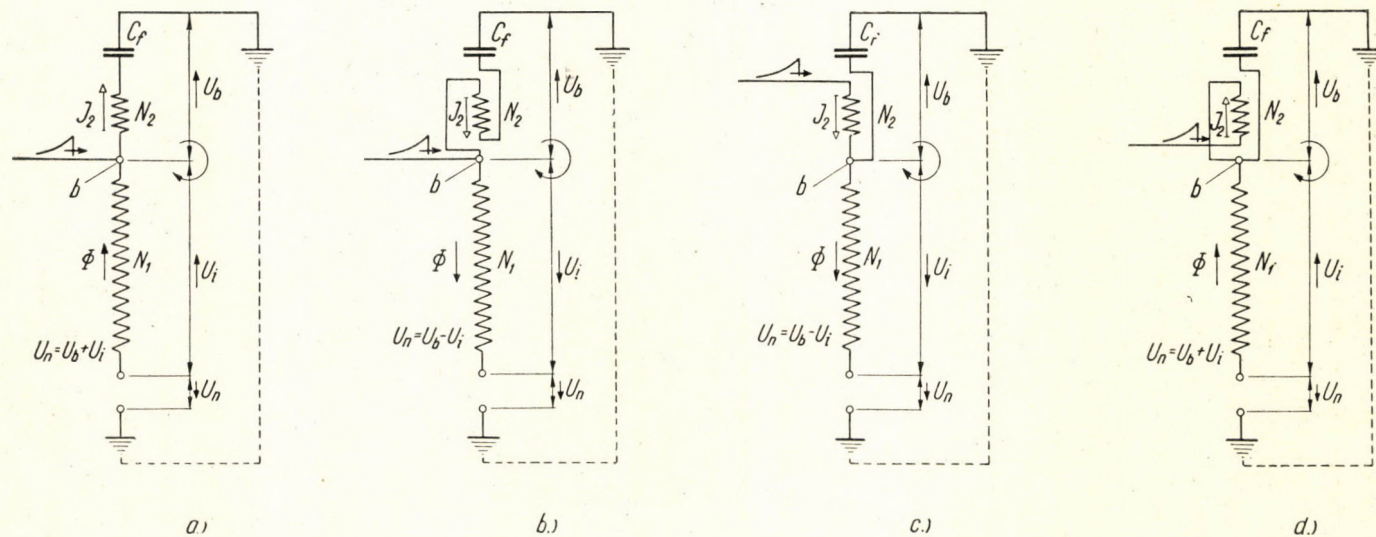


Fig. 24. a) Service condition as per Fig. 5/a, position 1.
 b) Service condition as per Fig. 5/a, position 15.
 c) Service condition as per Fig. 5/b, position 1.
 d) Service condition as per Fig. 5/b, position 15.

On examining the neutral voltage, it should be borne in mind that the tension due to transient inversion between the isolated neutral and the ground is made up of two components. One of them is U_b , the voltage of point b to the ground, the other U_i , the voltage induced by the stepping coils in the exciter coil.

Was the actual direction of U_b and U_i marked in the connection schemes for waves of positive polarity, and so was the direction of the positive flow in the circuit closed through the ground, it was discovered that neutral-to-ground voltage U_n was the sum total of U_b and U_i in Figs. 24/a and 24/d, while in Figs. 24/b and 24/c it was the difference of the two. This explains why the highest neutral tension is in position 1, when connected according to Fig. 5/a. and in position 15, when connected according to Fig. 5/b.

The analogy is, however, not only felt in the extreme positions of the transformer. The 15 records taken of each of the two service conditions show a striking symmetry, which may be clearly discerned in the wave diagrams presented. (Compare Figs. 11–20, 12–19, 13–18, 14–17 and 15–16.)

V. The effect of outside factors on neutral tension

A) Influence of the incoming wave tail

A certain time is required for the development of the magnetic flux which plays an important part in transient inversion. Hence, the transient inversion is hardly affected by the variation of the front steepness of the incoming surge. Against this, the effect of the tail of the wave is all the more significant. Where the tail is comparatively long, a higher flux can develop, and thus the tension induced at the neutral will be higher too.

To clarify the problem experimentally, the tension induced at the neutral under the effect of waves of 1 μ s front and 5, 50 and 500 μ s tail was measured.

The results are compiled in Table I.

Table I

Influence of incoming wave shape on neutral voltage

Character of surge		1/5	1/50	1/500
Neutral tension in percentage of incoming wave crest	3-phase impulse	145	180	200
	Single-phase impulse	120	150	220

It may be seen that the tension induced at the neutral grows with the increasing length of the impulse.

This phenomenon warns us that should instead of a traveling wave of atmospheric origin, a switching overvoltage, the length of which is far longer than that of atmospheric overvoltages, affect the transformer, the voltage induced at the neutral may also be substantially higher.

Thus, switching overvoltages may be more dangerous than overvoltages of atmospheric origin having equal crest values.

B) *Effect of wave chopping*

The effect of wave chopping is also connected with the problem of the influence exerted by the shape of the wave. It is known that when the outer insulation or the co-ordinating spark gap breaks down, chopped wave arrives into the transformer. The question arises, how neutral tension is affected by wave chopping.

Evidently, chopping reduces the length of the wave, and therewith the tension appearing at the neutral. However, abrupt chopping produces high dI/dt current change, which tends to step up voltage at the neutral.

Actually, the two opposing effects are added up, and according to which of the two prevails over the other, tension at the regulating transformer's neutral will be higher or lower than it had been, had the wave not been chopped.

To decide the above problem, the effect of chopping was examined in all cases discussed above. In the course of the tests, the point of chopping was gradually shifted from the wave front to about the middle of the tail length.

As the extensive discussion of the problem would call for the presentation of a large number of oscillograms, this report must be confined to summing up the results.

It was ascertained that

1. chopping in general decreases the neutral-to-ground voltage ; only in the two extreme positions of the transformer did the amplitude of the oscillation elicited by single-phase impulse exceed the voltage produced by the full wave by 10–20 per cent ;
2. is the wave chopped on its front, hardly any tension arises between neutral and ground ;
3. when chopped at any later time, the tensions arising are greatly subject to the point of the wave where it is chopped.

Is the wave chopped at the zero transition point of the oscillation, no incremental stress arises ; the higher the neutral tension at the instant of chopping, the greater the peak value of the induced tension.

C) *The effect of transformers or lines of diverse ground capacitance connected with the auto-transformer*

Our tests were generally performed with 10 000 pF capacitors ; sometimes, however, transmission lines are linked up directly to both sides of the regulator, the capacitance to ground of which is higher than that of the main transformers. We therefore examined the effect of a variable C_f capacitance on the neutral tension.

The results of a series of tests carried out in the connection shown in Fig. 6/a are tabled under No. II.

Table II

Influence of the capacity rate causing transient inversion on neutral voltage

Value of C_f capacitance in pF	4000	10 000	25 000	50 000	100 000
Neutral tension in percentage of incoming wave crest	120	165	300	425	500

Increasing capacitance entails a marked tension at the neutral. The reason for this is that when the capacitance is higher, a higher ratio of the entering surge voltage falls to the regulator coil, and consequently also the tension at the neutral increases.

D) *Transient inversion in the regulator connected with an 8 MVA main transformer*

To check the results of our tests, oscillation in the transformer's neutral was examined by connecting it with an 8 MVA main transformer, in the same manner as under service conditions.

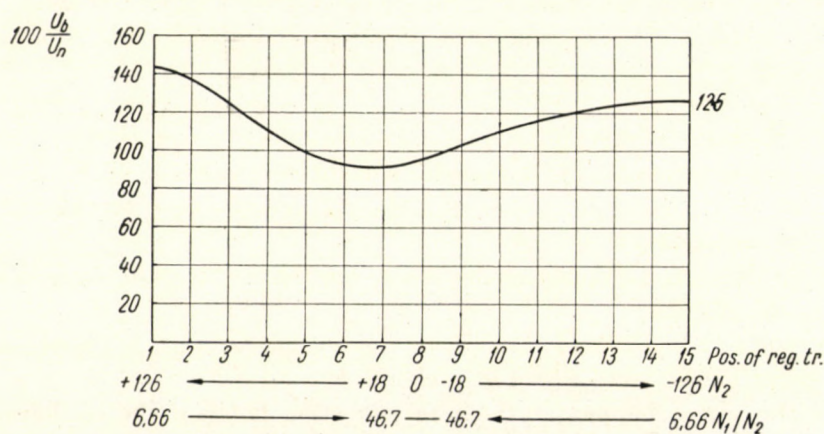


Fig. 25. Neutral tension of 12 MVA auto-transformer coupled with an 8 MVA main transformer according to Fig. 5/a, measured at three-phase surge

The shape of the oscillograms yielded by these tests and the dependence of their peak value on the transformer's position agreed with those observed when the transformer was connected with a substitute capacitance. The substitution of a concentrated capacitance for the main transformer was thus proved to have been correct.

Numerical results of the tests — similar to Figs. 8—9—21 — are shown in Fig. 25.

VI. Protection against overvoltages produced by transient inversion

Three means of protection are available against neutral overvoltages, viz. grounding the neutral:

1. through a valve arrester,
2. through an ohmic resistance, and
3. through a capacitor.

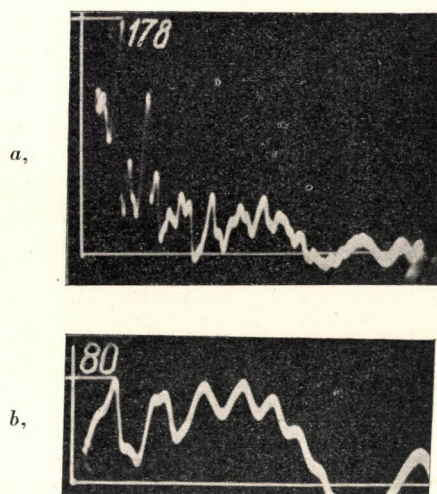


Fig. 26. Neutral voltage oscillation of 12 MVA auto-transformer during inversion produced by a 10 000 pF capacitor, measured

- a) on isolated neutral
- b) on neutral grounded through a 7000 pF capacitor

All of them were tested in the course of our experiments, this report shall, however, be confined to our findings with the least known method: protection by capacitor.

The effect of connect a capacitor between neutral and ground consists in providing for high frequency voltages at the neutral a path of low impedance into the ground, providing its capacitance is adequate.

To determine the extent of the capacitance necessary for protection, tests were made with condensers of various capacitances. Oscillograms 26/a and 26/b were taken of some of the tests. Fig. 26/a shows the tension of the isolated neutral, reaching 178 per cent of the peak of incoming wave. When grounding the neutral through 7000 pF (Fig. 26/b), the tension declines to 80 per cent of the peak of the incoming wave.

Table III contains neutral tensions appearing when various capacitors are employed. It will be seen that connecting a 3—7000 pF capacitor with the neutral yields adequate protection against overvoltages. In general, it is advisable to install as large capacitors as possible, in order to give satisfactory protection even against waves with longer tails.

Table III

Influence of the neutral's grounding through a capacitor on neutral voltage

Capacitance of condenser switched between neutral and ground in pF	Decline of neutral-to-ground tension
	$100 \frac{U_n - U_c}{U_n}$
1 000	22
3 000	39
4 000	42
5 000	44
7 000	55
27 000	61
200 000	83

U_c = neutral tension with capacitor.

U_n = neutral tension without capacitor.

The condenser has the substantial advantage that its resistance against the 50 cycle tension is very high, and thus it does not essentially step up earth fault currents.

In this connection it should be mentioned that in a paper published after the conclusion of our experiments,* BADER and LECH (2) also recommended the protection of the neutral by a capacitor.

Thanks are due to Prof. L. VEREBÉLY and Prof. J. EISLER for their stimulating suggestions and support which were most helpful for the successful conclusion of our work.

* Our experiments were concluded in May 1954.

REFERENCES

1. BLUME—BOYAJIAN—CAMILLI: Transformer Engineering. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.
2. BADER—LECH: Protection du point neutre des transformateurs. CIGRÉ. 1954. Rapp. 113.
3. ELSNER: Neuere Untersuchungen zur Frage der Stossbeanspruchung von Transformatoren. Archiv f. Elektrotechnik. 1936.

SUMMARY

At the neutral of regulating auto-transformers with isolated neutrals, severe overvoltages may arise owing to the phenomenon known as transient inversion. Namely, the voltage of the traveling waves passing through the transformer's series (regulator) coil appears in its parallel (exciter) coil stepped up in the ratio of the numbers of windings of the two coils; and as the voltage ratio is high, dangerous voltage arises between the neutral and the ground. A detailed examination of the laws governing such overvoltages shows that the phenomenon does not obey the generally known rules concerning transformers. The necessity arose to introduce the notion of the critical winding number, which determines the limit until which the transformer rules are valid. Theoretic analysis as well as experimental evidence led to the conclusion that as long as the number of the auto-transformer's regulating coils remained below the critical winding number, the tension induced in the parallel exciter coil was in direct ratio with the number of the regulating windings.

From the viewpoint of service, importance should be attached also to the influence of several outside factors. Experiments were therefore made to examine the influence of main transformers and transmission lines of various capacitances, connected with the auto-transformer, as well as of surges having variable lengths. The effect of chopped waves was also extensively tested.

Among the experimentally controlled means of protection against overvoltages produced by transient inversion, special attention was devoted to the little known method of protection by capacitor.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЯ,
ВОЗНИКАЮЩИЕ В РЕГУЛИРОВОЧНЫХ АВТОТРАНСФОРМАТОРАХ

A. ЧЕРНАТОНИ-ХОФФЕР и Д. КАРАДИ

РЕЗЮМЕ

В регулировочных автотрансформаторах с незаземленной нейтралью могут возникнуть значительные по величине перенапряжения на нейтрали вследствие явлений известных под названием переходной инверсии. Как известно, напряжение бегущих волн, проходящих через последовательную (регулирующую) обмотку трансформатора, в параллельной (возбуждающей) обмотке трансформатора будет пропорционально соотношению числа витков этих двух обмоток, а т. к. это соотношение довольно высокое, то между нейтралью и землей возникают опасные по своей величине напряжения. Детальное исследование закономерностей этих перенапряжений показывает, что явление протекает не соответственно известного закона трансформации. Становится необходимым ввести понятие о критическом числе витков, которое определяет предел действительности закона трансформации. Теоретическое исследование и данные опытов позволяют нам сделать вывод, что пока число витков последовательной регулирующей обмотки регулировочного трансформатора ниже критического числа витков, то до тех пор индуцированное в параллельной возбуждающей обмотке напряжение равно пропорционально числу регулирующих витков.

С практической точки зрения важно также исследовать влияние ряда внешних факторов. По этой причине анализируется при опытах влияние соединенных с регулировочным трансформатором различных по мощности главных трансформаторов и линий, а также ударных волн с различной продолжительностью полупериода. Проведенные подробные измерения выясняют также влияние отсеченных волн.

Среди различных вариантов защиты от вызванных переходной инверсией перенапряжений, проверенных на опыте, в основном заслуживает внимания менее известная конденсаторная защита.

SURTENSIONS SPÉCIALES DANS LES AUTO-TRANSFORMATEURS DE RÉGLAGE

A. CSERNÁTONY-HOFFER et GY. KARÁDY

RÉSUMÉ

Dans les auto-transformateurs de réglage à neutre isolé, des surtensions considérables peuvent apparaître au point neutre par suite de phénomène connu comme inversion transitoire. La tension des ondes de choc passant par l'enroulement série (de réglage) apparaît multipliée et transformée dans le rapport du nombre des spires des deux enroulements dans l'enroulement parallèle (d'excitation). Le rapport de transformation étant élevé, une tension dangereuse apparaît entre le point neutre et la terre. L'étude détaillée des lois de ces surtensions montre que le phénomène ne se déroule pas suivant la loi des transformateurs bien connue. Il était nécessaire d'introduire la notion du nombre de tours critique, lequel détermine les limites de validité de la loi des transformateurs. L'étude théorique, en accord avec les résultats des essais, démontre que la tension induite dans l'enroulement en parallèle d'excitation est directement proportionnelle au nombre des spires régulatrices.

Du point de vue de la pratique, l'examen de plusieurs facteurs extérieurs est également important. C'est pourquoi les essais analysent l'effet des transformateurs et des lignes de différentes capacités connectées au transformateur de réglage, ainsi que l'influence des ondes de choc de différente valeur de mitemps. Des mesures détaillées ont élucidées aussi l'effet des ondes découpées.

Parmi les solutions de la protection contre les surtensions causées par l'inversion transitoire, qui ont été vérifiées par l'essai, c'est surtout la protection par condensateurs, moins connue, qui mérite de l'attention.

BESONDERE ÜBERSpannungen IN „REGEL-SPARTRANSFORMATOREN“

A. CSERNÁTONY-HOFFER und GY. KARÁDY

ZUSAMMENFASSUNG

In Regel-Spartransformatoren mit isoliertem Sternpunkt können infolge der als transiente Inversion bekannten Erscheinung bedeutende Sternpunktüberspannungen zustande kommen. Die Spannung der durch die Reihewicklung (Reglerwicklung) fliessenden Wanderwellen erscheint in der Parallelwicklung (Erregerwicklung) des Transformators im Verhältnis der Windungszahlen der beiden Wicklungen hinauftransformiert, und da die Übersetzung gross ist, entsteht zwischen Sternpunkt und Erde eine gefährlich hohe Spannung. Die genaue Untersuchung der Gesetzmässigkeiten dieser Überspannungen zeigt, dass die Erscheinung nicht entsprechend dem bekannten Transformatorengesetz verläuft. Es erscheint daher notwendig, den Begriff der kritischen Windungszahl einzuführen, die den Geltungsbereich des Transformatorengesetzes bestimmt. Die theoretische Untersuchung ergibt in Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen, dass die in der Parallelerregerwicklung induzierte Spannung direkt proportional der Zahl der regelnden Windungen ist, solange die Windungszahl der regulierenden Reihewicklung unter der kritischen Windungszahl bleibt.

Für die Praxis ist auch die Untersuchung des Einflusses von mehreren äusseren Faktoren von Bedeutung. Die angestellten Versuche analysieren deshalb den Einfluss der verschiedenen an den Regeltransformator angeschlossenen Leistungstransformatoren und Leitungen mit verschiedener Kapazität, sowie den Einfluss von Stosswellen mit verschiedener Halbwertzeit. Eingehende Messungen klären auch die Wirkung der abgeschnittenen Wellen.

Von den verschiedenen experimentell untersuchten Lösungen des Schutzes gegen die durch transiente Inversion verursachten Überspannungen verdient besonders der weniger bekannte Kondensatorschutz Beachtung.

THE EFFECT OF REDUCED FLAT SPEED ON COTTON CARDING

G. MERÉNYI

DEPARTMENT FOR TEXTILE TECHNOLOGY, TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received 10th Sept. 1955]

Among the technological processes of cotton spinning, the basic operation of carding still relies overwhelmingly in empirism. Research has failed to disclose means and methods whereby the hidden process of carding could be accurately defined.

Many are the problems to be solved in this field, and for the moment we must be satisfied with finding the solution for some question of detail that might provide a basis for subsequent analytical studies.

Although research into problems of detail might reveal rules that are partially valid only, they generally lead to practical results that more or less improve the operation of carding.

The first part of this paper deals with the problem of controlling the amount of strips in cotton carding. The target in view is to formulate the theory of the control method and its simple implementation, for reducing the amount of flat strips removed.

In the second part, our comments on the theory of air currents—being one of the general theoretic problems of carding—have been summed up.

I

1. Basic and empirical faults in the front plate control of flat strips

Before going into the problem, we must refer to the experimental results published by R. CHENG and W.E. MORTON in the *Journal of the Textile Institute* No. 8/1951 (P. 442—456).

The treatise discusses the control of flat strips in carding. After describing the general test conditions, it reports on the tests control of flat strips, which are concerning us at present. In the section dealing with „Sensitivity of Flat Strips Weight to Front Plate Setting” the authors examined how the setting of the front plate influenced the amount of flat strips.

The results of the tests revealed two characteristic properties, viz :

1. In any given position of the front plate the amount of flat strips removed is the greater, the tighter the flat-cylinder setting.

2. The weight of the strips removed per flat rises abruptly when increasing the flat-cylinder distance from the closest setting ; from a certain distance onward, however, the weight increase is extremely slow (Fig. 1).

The front plate is generally set at its edges, and due to the bending of the plate, its distance from the cylinder is smaller about its middle portion. By

way of an experiment the plate-cylinder clearance was set closer than 0,43 mm to the cylinder, but at that distance the plate touched already the wires of the cylinder.

The characteristics shown in Fig. 1 strikingly reveal the fault of principle of the weight control of the strips, which at the same time constitutes its practical difficulty. Namely, it will be seen that the useful section of the control zone lies between 0,43 and 0,58 mm, and within it only the section between 0,43 and 0,51 can be considered as permitting the variation of the strips weight in adequate magnitude, such variation being in linear relation to setting. In the zone from 0,51 to 0,58 mm the variation is approximately exponential, and above 0,58

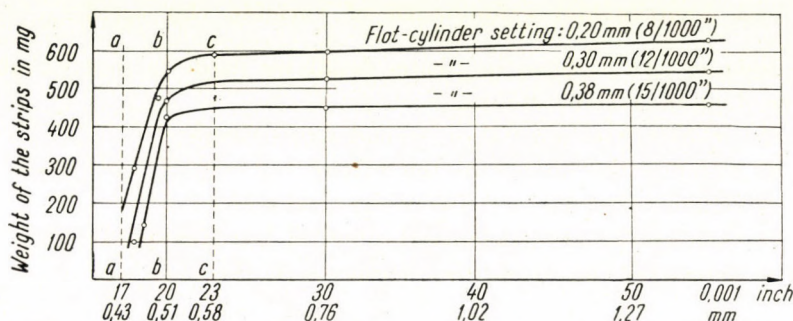


Fig. 1. Variation of strips weight with the plate-cylinder setting.
(According to R. CHENG and W. E. MORTON)

mm abscissa value, the curve is almost parallel to the abscissa, i. e. weight variation is slight.

Before being able to control the strips weight by means of the front plate, we must be fully acquainted with the law governing the variation of strips weight, and besides, the setting required must be accurate and dependable in working reality.

Control by means of the presently employed plate adjustments is utterly undependable, therefore it cannot be done on the basis of control curves.

Furthermore, the curves of Fig. 1 show clearly that in the control zone aa-bb, a difference of about 400 mg strips weight pertains to a difference of 0,08 mm in the setting.

Taking into account that within the aa-bb control zone, actually not more than two distances can be set (0,45 mm and 0,48 mm), it will be realized that strips weights can in reality be adjusted in steps of 130 mg only, in other words very crudely.

It should, however, be considered that within the most sensitive control zone aa-bb, a weight difference of 400 mg — corresponding to approximately 80 per cent of the total strips weight — must in theory be accurately controlled with a difference of 0,08 mm only. This condition requires an accuracy in setting

a perfect adjustment, and a stiffening of the front plate that cannot even be approached in practice.

According to our experience, the lowest value of the plate-cylinder setting in new cards is about 0,45 mm, in older models about 0,56 mm. Thus the control zone is cut down precisely in the sensitive section. The control zone of the strips is thus reduced from a weight difference of about 400 mg to about 100 mg, so that the entire operation of control is rendered insensitive.

A simple and obvious method for safely and accurately controlling the quantity of the strips appears to be the variation of flat speed.

2. Experimental examination of variable flat speed

To examine the problem in greater detail, we made tests at variable flat speeds, to determine the following :

- a) the relation between flat speed and strips weight ;
- b) to examine the charge of the wires ;
- c) to examine the nep contents of the card web ;
- d) to examine the fibre-shortening effect of low flat speeds ;
- e) to determine the impurities contained in the card web.

General test conditions

The materials used for the tests were : Iranian, Ashmouni 2/b cottons as well as cottons grown in the Soviet Union marked 2H, 2CA, 1C, 1H, 2C, OC, OH, 1B, and various blends of the above. The main specifications of the various grades are shown in Table I.

Table I

Variety	Fibre length mm	Breaking strength g	Impurity %
OCN	30-31	4,80	—
OHN	30-31	4,30	—
1CN	30-31	4,70	3-4
1CA	29-30	4,40	3-4
1HA	29-30	4,30	3-4
1HN	30-31	4,35	3-4
1BN	30-31	4,30	3,5-5,0
2HN	30-31	4,30	3,5-5,0
2CN	30-31	3,70	3,5-5,0
2CA	28-29	4,10	3,5-5,0
Iranian	29-31	4,10	—
Ashmouni 2/b	28-29	5,30	—

The idea underlying the variance of raw materials used in tests was that should the tests be performed with some choice material of good physical properties, the rules derived would generally be closely knit with the properties of the material, and would not apply to better or inferior qualities or raw materials.

This consideration justified our using various qualities of raw materials for our experiments.

The card used for the tests was a 1907 Brooks—Doxey unit, having the following dimensions, and speeds:

Working width: 1140 mm (45 inches).
 Cylinder diameter: 1270 mm (50 inches).
 Doffer diameter: 686 mm (27 inches).
 Licker-in diameter: 228 mm (9 inches).
 Number of flats: 105.
 Cylinder clothing: No. 100 (flexible).
 Doffer clothing: No. 110 (flexible).
 Cylinder speed: 163 r. p. m.
 Cylinder surface speed: 650 m/min.
 Doffer speed: 9 r. p. m.
 Doffer surface speed: 19,3 m/min.
 Licker-in speed: 747 r. p. m.
 Licker-in surface speed: 596 m/min.
 Relative speed of cylinder to licker-in: 54 m/min.
 Speed ratio of cylinder to licker-in: 1,09 : 1.

Settings:

Feed plate to licker-in: 0,18 mm (7/1000 inches).
 Mote knife: 0,30 mm (12/1000 inches).
 Licker-in to screen: 1,0—1,4 mm (40—55/1000 inches).
 Cylinder to licker-in: 0,18 mm (7/1000 inches).
 Flats to cylinder: 0,30—0,25—0,18 mm (12—10—7/1000 inches).
 Cylinder to screen: 1,5—3,0 mm (60—120/1000 inches).
 Cylinder to front plate: 0,56 mm (22/1000 inches).
 Cylinder to doffer: 0,127 mm (5/1000 inches).
 Doffer to doffer comb: 0,55 mm (22/1000 inches).
 Lap weight: 420 g/m ($Nm = 0,00238$).
 Sliver weight: 4 g/m ($Nm = 0,25$).

The above settings and speeds were left unchanged during experiments. Counts were likewise the same throughout the tests.

Special attention should be given to the licker-in revolving with a speed higher than usual.

We would refer here to the experiments reported in No. 5/1952 of the Textile World (pp. 91—107) by I. F. BOGDAN and Ivan Y. T. TENG, which at the time created a sensation.

The report points out the advantages derived by the authors by accelerating the licker-in. In this connection we would mention that similar series of tests were also conducted in Hungary by Ing. B. GARAMSZEGI in the spinning mill of the Textile Works of Kőbánya, Budapest, under the control of the Department for Textile Technology I, Technical University. These tests fully confirmed the results and observations of I. F. BOGDAN and Y. T. TENG.

(The results of the experiment carried out in our country with the accelerated licker-in are the following:

1. The nep contents of the card web, (per 100 sq.cm) decrease from 4 to 3,15.
2. Licker-in waste increased from 0,8 per cent to 0,95 per cent, but its composition improved.
3. The modal fibre length was shortened altogether by 0,5—0,7 mm.
4. At the above conditions, the output of the card may be stepped up by about 25 per cent.)

To provide a thoroughly open layer of material allowing us to observe the correlation of flat speed and the loading of the wires — one of the objects of our examinations — in lieu of the normal licker-in speed of 430 r. p. m., the tests were made with 747 r. p. m. of the licker-in.

Besides accelerating the licker-in also the speed ratio of the belt drive actuating the flats was modified to obtain the desired flat speed.

3. Correlation of strips weight and flat speed

Test conditions

The strips were consistently weighed during the whole interval between two strippings of the cylinder. Cylinder strippings were undertaken at an average of 120 minutes. Strips weighings were repeated five times for every flat speed.

The tests were conducted under normal working conditions, that is to say, the card produced regular card sliver during tests. Cylinder and doffer were cleaned according to mill schedule, by means of ordinary rope-drive strippers with bent wireclothing.

After starting the card, the amount of strips removed was assembled in lots of ten each in the order of delivery of the flats, and was weighed on the precision scales in the card room. In order to offset differences due to changes in the atmospheric conditions, the strips were weighed immediately upon removal.

Conclusions

The flat speeds examined were the following: 25,5, 28,5, 31,5, 37,5, 42,7, 48,2, 50,0 and 51,0 mm per min.

The zone of speed variation was therefore in the range between 25,5 mm/min and 51,0 mm/min. (See Fig. 2.)

We expected the loading of the flats to increase with lower flat speed, in other words the specific loading (the weight of the strips per flat in g or mg) to be higher. Against this the limit curves resulting from experiments could, with good approximation, be substituted by a straight line, so that the average amount of the strips varied only with the flat speed, i. e. with the number of the flats departing from the cylinder in unit time.

The raw materials used were the blends marked A—M in Table II; they were introduced into the card at random. Thus, Fig. 2 shows the relations independently of the raw material.

If we agree to consider the straight line connecting the mean values, weighed at 25,5 and 51 mm/min speeds respectively, as a compensating line, at the scale of the co-ordinate in Fig. 2 the slope of that compensating line will be $\text{tg } \alpha = 0,54$, $\alpha = 28^\circ$.

Considering the compensating line at the same time to be the control line valid in general between the above flat speed limits, its equation will be :

$$y = 1,34 \cdot x + 9$$

where :

x = flat speed mm/min

y = average strips weight g/hour.

It appears from the diagrams that for the A—M blend, the quantity of the strips can be linearly controlled with about ± 5 g/hr accuracy, adopting the compensating straight line for the base of the control.

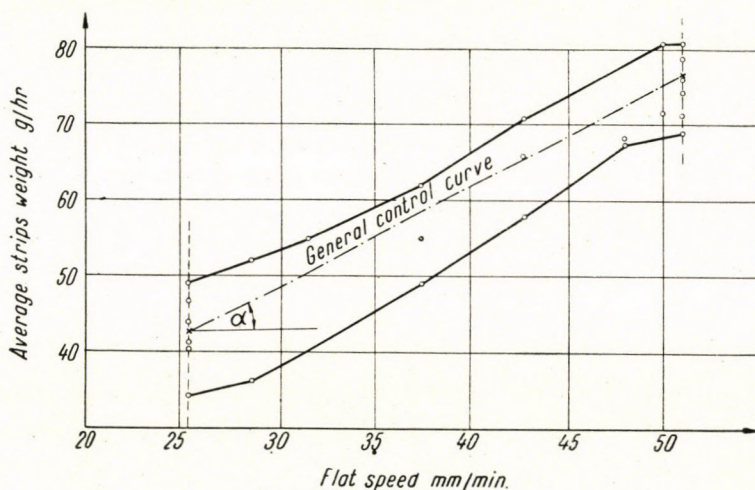


Fig. 2. Variation of average strips weight with flat speed

The composition of blends used during eight months of the experiments is given in Table II.

The interrelation of flat speed and average strips weight is more directly discernible if the data obtained for various materials (blends) are separately correlated.

Thus e. g. Fig. 3 shows average strips weight (g/hr) rates of blends A and B, as a function of flat speed (mm/min).

The diagrams clearly indicate that linear control — involving practical advantages — is actually feasible.

Our experiments confirmed that the specific loading of the wires is independent of flat speed, but it depends on the interval between strippings. If the intervals increase, the weight of the strips will increase per unit time, assuming flat speed to be constant. It is therefore important that the control straight line should invariably refer to equal stripping intervals.

Table II

Blend	Label of cotton	Percentage	Blend	Label of cotton	Percentage
A	1 CN 1 HN OCA	70 10 20	H	1 HN 1 CA 2 CN 0 CN	5 30 45 20
B	Ashmouni 2b	100	J	0 HN 2 CN 1 BN	25 25 50
C	Iranian 2 HN 2 CA 1 CN	20 20 35 25	K	0 HN 1 HN 1 BN 1 CN	25 25 25 25
D	2 CA 2 HN	50 50	L	0 HN 1 BN 1 CN	25 25 50
E	1 CN 1 HA	80 20	M	0 CN 0 HN 1 CN 1 BN 2 HN 2 CN	10 35 10 8 31 6
F	1 CN 1 HN	70 30			
G	1 CN	100			

The explanation for this statement is simply that in initial stage of the loading of the cylinder, the specific strips weight first decreases, then increases

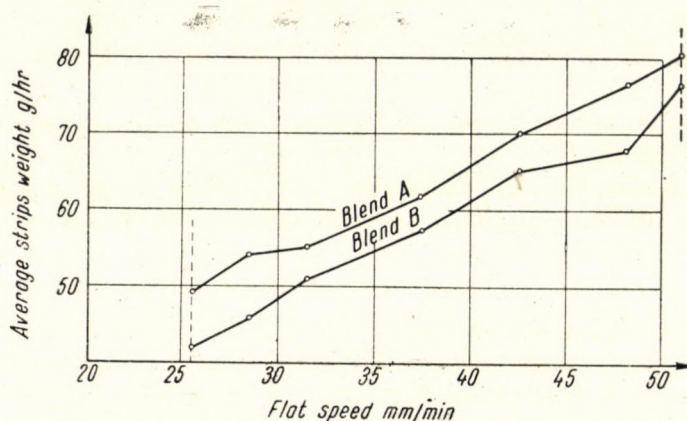


Fig. 3. Actual control curves derived for blend A and B

gradually, and thus the average strips weight per unit time increases likewise along with the growing intervals between strippings.

Naturally, the above observation does not hold good for cards with continuous stripper device or for metallic (rigid) card clothing, where the loading of the cylinder is practically zero.

4. The charge of the wires

Our examinations revealed several phenomena, the close study of which proved to be of interest. Among them were primarily the rules which the charge of the wires obeyed.

To clearly display quantitative divergencies, two substantially differing flat speeds were chosen, and a series of 20 weighings was performed at each speed. As we were merely concerned with the tendency of the variation in the charge of the wires, it was again found sufficient to

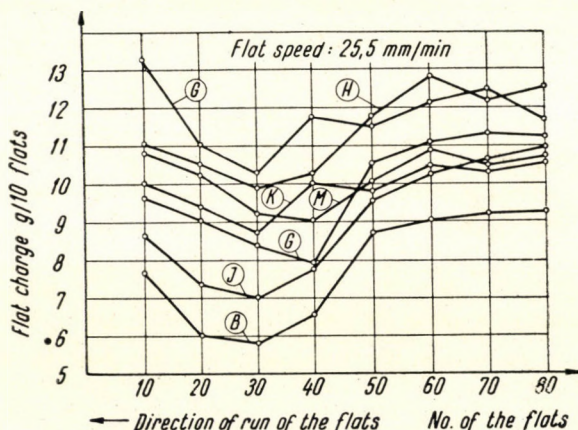


Fig. 4. Variation of the flat charge at 25,5 mm/min flat speed

weight the strips accumulated from ten flats. The flat speeds set for tests were 2,5 and 51,0 mm/min. The movement of the flats agreed with the sense of the cylinder rotation. The duration of the single tests was the interval between two cylinder strippings.

The variation of the charge of the wires is shown in Figs. 4 and 5. The abscissa indicates the number of flats in groups of ten, in the order of delivery, while the ordinate shows the average weight of the strips removed from ten flats, in g.

The movement being uniformly progressing, the abscissa is also proportional to the time, hence the diagrams are at the same time representing the variable strips weight versus time.

The twenty test series were made with various qualities of cotton blended at random. The marks were as indicated in Table II.

The following conclusions may be derived from the diagrams drawn up from tests :

a) Immediately after stripping the cylinder i. e. with clean cylinder clothing, the loading of the flats gradually diminishes whereafter it grows.

The lowest charge of the flats was generally found between the group of flats Nos. 30 and 40, in the very range, where the loaded flats stayed longest in the carding zone after stripping the cylinder.

During the passage of these flats, the fibre absorption of the cylinder is highest.

b) The flats Nos. 10 to 30 — though likewise loaded when entering — stay for a shorter time in the carding zone, and are thus less exposed to the effect of the cylinder wires that are still unloaded. The gradual reduction of the flat loads as far as about the 30th flat proves that within the same grade of flat

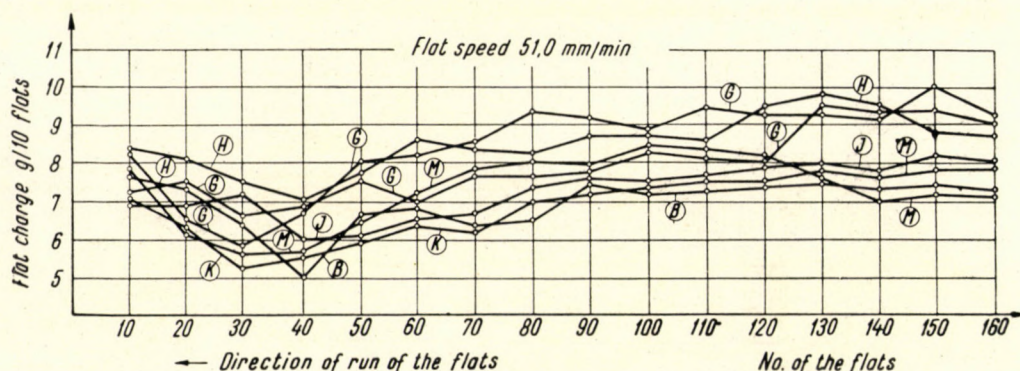


Fig. 5. Variation of the flat charge at 51,0 mm/min flat speed

speed the variation of the load is a function of the time during which the flats are in the carding zone.

c) The flat loading in the range between flats Nos. 40 to 80 and 40 to 160 respectively, which at first is comparatively fast to slow down afterwards, indicates already that after the passage of about the 40th flat, the cylinder clothing under the flats is so saturated that its fibre absorption capacity gradually diminishes.

d) The above regularities were unanimously observed with the various blends, the trend of the curves having had the same character.

The variation of strips weights was, however, found to be greater at lower flat speed.

The fluctuation of the strips weight within a stripping period was 200—360 mg/10 flats at low flat speed (25,5 mm/min); at higher speed (51,0 mm/min) it varied about equally within the range of 190—360 mg/10 flats.

e) The above fluctuation bears no disadvantage as far as the control of strips removal is concerned, for it occurs regularly and has no effect on the average values which are essential for us.

The average weight of the strips depends naturally of the length of the stripping period. Any modification of the stripping intervals may — as indicated before — substantially affect the average rates of the strips.

5. Insensitiveness of front plate control

In paragraph 1. we have already pointed out the insensitiveness of front plate control. This is also obvious from the control zone of the diagrams shown in Fig. 1. Besides the insensitiveness of the control, also its uncertainty can be proved. These two characteristics were verified by experiments. To lend general validity to the conclusions derived, comparative tests were made with various settings, on different types of cards.

One of the cards employed for the tests was a Brooks—Doxey 1909 type, the other a Textima 1948 type.

The test was made at the normal working plate-cylinder setting (0,91 and 0,86 mm) and at the closest setting permitted by the cards in question without contacting the cylinder wires. In first place we wanted to ascertain the minimum amount of the strips that could be removed, in other words, the lowest limit of the controllability.

No change besides the plate setting was effected on the cards.

The cottons used for tests were blends M and L shown in Table III.

Table III

No. of the test	I		II	
Card	Brooks—Doxey 1909		Textima 1948	
Setting mm	0,91	0,56	0,86	0,45
Average flat charge, mg.....	770	750	1500	1300
Flat speed mm/min	105	105	85	85
Blends :	M		L	
Strips per cent	2,24	2,18	2,16	1,77
Strips g/hr	134	132	187	152

Average flat charges were derived from the average results of 10 tests.

Test No. I

The results of tests show that the clearances that can be set in practice are above the actual control zone (see Fig. 1), hence the amount of the strips does not vary essentially in spite of the large difference in the setting. (It declined from 770 mg to 750 mg only.)

Test No. II.

In accordance with the topmost curve of Fig. 1. plotted by CHENG and MORTON, in the range between 0,76 mm and 0,46 mm, the weight of the strips ought to decrease from 600 mg to 300 mg. Against this, in our tests, strips weight decreased from 1500 mg to 1300 mg only. Thus, instead of the expected 50 per cent, the decrease in weight was not more than 13 per cent.

Thus our tests provided a clear proof for the lability and great insensitivity of the plate control. Deformations of the adjusting units and the inaccuracies of the measurement of the setting increase the insensitiveness further.

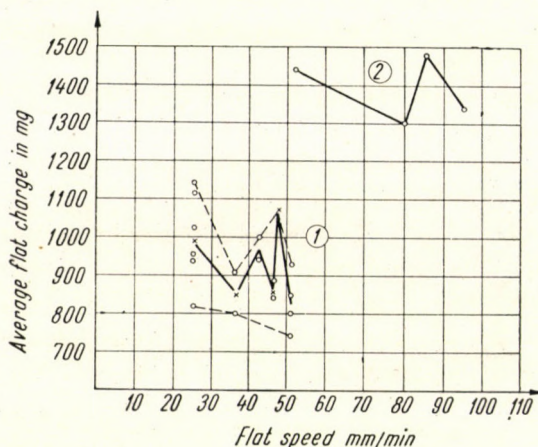


Fig. 6. Relation of the flat charge to flat speed

It can once more be stated from these experiments that no definite relation can be demonstrated between the flat charge (strips weight per flat in g or mg) and the flat speed, although the 1st mean value curve of Fig. 6 appears to show a slightly decreasing tendency of the flat charge with increasing flat speed. The definite clearing up of this problems requires continued experiments.

Diagram 1 in Fig. 6 illustrates the fluctuation of the strips in the speed range between 25,5 and 51,0 mm/min; diagram 2 in the speed range between 52,0 and 105,0 mm/min.

The first diagram was plotted from a used card with accelerated licker-in, and flexible (elastic) clothing, the values of the second diagram were taken from new Textima cards.

6. Nepping tendency of the card web

The assumption that with decreasing flat speed the flats remove less neps from the carded layer of the material during unit time, and thus the nep contents

of the web detached by the doffer increase, seemed to be justified. Comparative tests were again performed at two extreme speeds, viz. at 25,5 mm/min and 51,0 mm/min flat speeds.

Measuring the nep contents of the card web

As the count of the sliver was unchanged during the experiments, the neps contained in one unit (100 sq.cm) of the web surface was counted and compared. Between two strippings, at intervals of 10 minutes, 3 tests were performed; for each degree of speed 36 tests were made on an average, and 72 tests were made on 6 arbitrarily selected cards of the same type, processing equal blends and identical number of slivers. Samples were taken from the two lateral fringes and from the middle of the web.

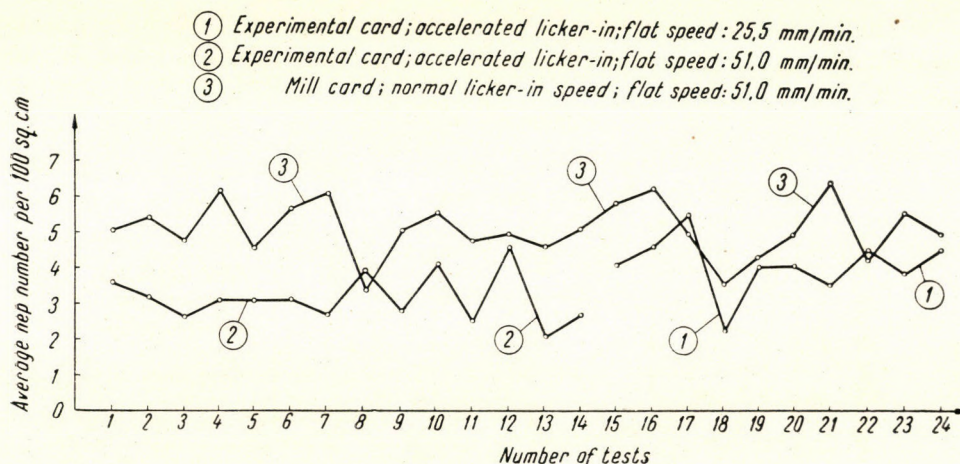


Fig. 7. Variation in the average nep content of the card web

Fig. 7 shows the measured averages on the test card, at 25,5 and 51,0 mm/min speeds respectively: besides, it shows the results of tests made on the selected mill machines. Table IV below contains the average values of the diagrams.

Table IV

Card	Licker-in	Flat speed mm/min	Average number of neps per 100 sq. cm
Experimental	Accelerated	25,5	4,01
Experimental	Accelerated	51,0	3,05
Mill	Slow	51,0	5,01

From the above, there is obviously an about 25 per cent increase in the number of neps at slow flat speed. The quality of the card web was poorer on the experimental card, but still within the tolerated limit.

Comparing the experimental card with mill cards, the results obtained with the former will be more favourable even at low flat speed; this is undoubtedly due to the greater speed of the licker-in. In the event that the yarn quality is satisfactory even at 5,01 nep value, when low flat speed is employed, it is unnecessary to slow down the doffer.

Yarn control tests made in mills confirmed that low flat speed has no effect either on the purity, or on the mechanical properties of the yarns.

7. Variation of the mean fibre length

The assumption according to which the acceleration of the licker-in and the reduction of the flat speed shorten the average fibre length in an intolerable

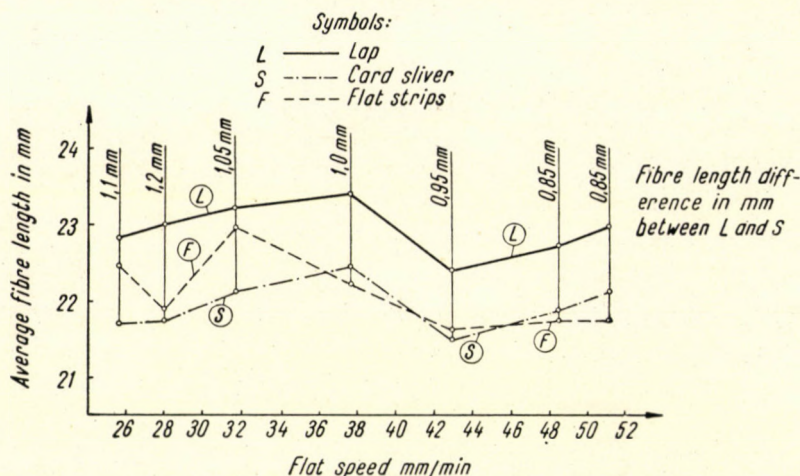


Fig. 8. Variation of the mean fibre length with flat speed

degree, appears to be spurious. Namely, the former increases the beating impulse per fibre, while the latter — owing to higher relative speed of the carding surfaces — increases the pulling force arising between the wires.

The problem was decided by examining the fibre lengths at various flat speeds. The raw material used in the relative tests was blend D (2CA + 2HN), of an average breaking strength of 4,20 g. Blend D of the same grade was employed throughout the tests.

5 samples of 25 g each were taken at each speed from various parts of the lap fed into the card, the strips and the card sliver delivered. Samples were taken at intervals of 10 minutes, and after thoroughly mixing the material of the 25 g samples taken from the various parts, separate diagrams were plotted for each sampling with the Zjukov fibre length measuring instrument. The mean values of the average fibre lengths calculated from fibre diagrams are graphically shown in Fig. 8 as functions of the flat speed.

The fibre length diagrams of L (lap) and S (sliver) show a gradual divergency from 51,0 mm/min to 25,5 mm/min flat speed. In other words, the

average length of the fibres gradually diminishes with reduced flat speed. Average fibre length difference in the lap and in the sliver was: 0,85 mm at 51,0 mm/min flat speed, while at 25,5 mm/min flat speed it amounted already to 1,10 mm.

The explanation for this phenomenon appears to be that in line with the reduced flat speed the flats stay over a longer time in the carding zone, during which the considerable amount of fibres between the wires — most of which get back afterwards on the cylinder — are fatigued as a result of their more intensive contact with the wires, and the weaker fibres in the layer break.

The average fibre shortening of 0,25 mm has no practical significance from the viewpoint of spinning.

The diagram of F flat strips showing the mean fibre length in the strips, essentially follows the diagram S and does not much differ from the average fibre length in the sliver. This has been confirmed by numerous researches (R. CHENG, W. E. MORTON, V. A. VOROSHILOV, A. P. RAKOV, N. P. PAVLOV).

8. Impurities in the flat strips and the card web

The assumption obviously arises that as a result of the reduced flat speed, the absolute amount of the impurities removed by the wires will decrease, and that contained in the card web will increase, consequently the purity of the card web will suffer.

This problem was enlightened by analysing the trash contents of the strips and the card web.

Method

Shirley Analyser was used for determining the impurities.

The analyser was first allowed to run idle, then the first 25 g sample was fed into it. The strips removed were cleared for a second time, and the fibrous material yielded by the second cleaning was added to the material obtained from the first.

The second 25 g sample was analysed similarly.

The actual value of the impurities contained in the materials tested is the arithmetic mean of the two results obtained.

The tests were performed with 8 different blends of cotton, in order to obtain a reliable picture of the distribution of the waste.

The results of the tests were graphically condensed in Fig. 9. Diagram F_1 shows the variation of the actual trash contents of the strips at 51,0 mm/min flat speed, F_2 the same at 25,5 mm/min flat speed. Average values are shown by lines $\bar{F}_1$ and $\bar{F}_2$. Similarly, diagram S_1 shows the variation of the actual impurities contained in the card web at 51,0 mm/min flat speed, and S_2 the same at 25,5 mm/min flat speed. $\bar{S}_1$ and $\bar{S}_2$ lines indicate the mean values.

The letters along the abscissa indicate the blends, according to Table II.

At low flat speeds the trash content of the strips increased by 21,1 per cent. As this was derived from impurities in equal weights of the sample, it is naturally a relative increase in the trash content.

It may be computed by simple arithmetics that the decrease in the absolute trash amounts to 32,4 per cent, thus at low speeds, the impurities removed by the flats are less.

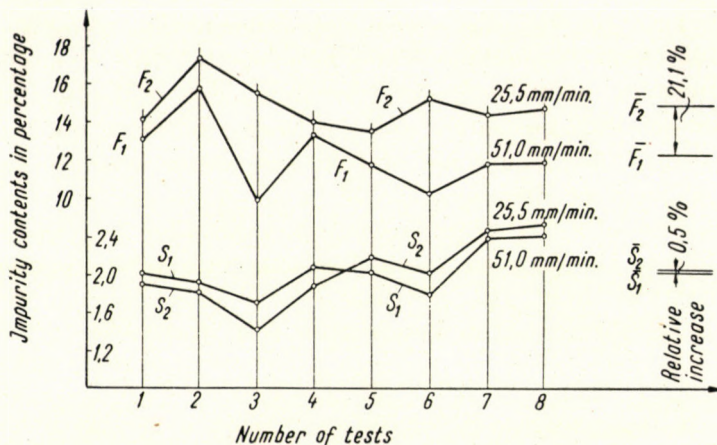


Fig. 9. Diagram comparing the impurities contained in the card web and in the strips

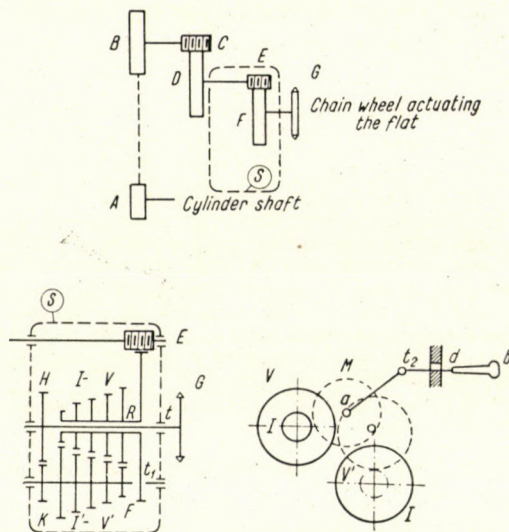


Fig. 10/a. Principle of the flat drive

Fig. 10/b, c. Design of speed-change gear for insertion into the flat drive

In spite of that, the trash content of the card web — as will be seen from diagram W_1 and W_2 in Fig. 9. — respond with but a negligible variation to the decrease of the flat speed. The purity of the card web and of the sliver sustain no practically significant modification.

Practical method of strips control

Results of Part I of this paper lead to the conclusion that the variation of flat speed permits a more accurate control, and within a wider range, of the amount of strips than the customary plate control.

It appears expedient to insert a gear control of 5–6 speeds in the flat drive, by which the desired flat speed between maximum and minimum speed limits can be set at closest plate-cylinder clearance and fixed front plate.

An example for the solution of principle of such a device is given in Fig. 10/a, b and c.

Fig. 10/a shows an arrangement generally found on older units: chain wheel G actuating the flats is rotated by the cylinder shaft through belt pulleys A, B, and worm drives CD and EF. Keeping the original layout, we build gear box S to worm wheel F by mounting it on hollow shaft R which rotates spur wheels I—II—III—IV—V (see Fig. 10/b).

The rotation is transmitted by toothed wheel M to spur gears I'—II'—III'—IV'—V keyed on shaft t_1 . Speed adjustment and variation is effected by the two armed levers a—b, which can be shifted on shaft t_2 and can be fixed in slot d (see Fig. 10/c).

Shaft t_1 transmits the speed changes to chain wheel G actuating the flats by means of spur gears K—H through shaft t .

Building the device into old cards and rearranging the remaining parts to meet operating requirements or designing it for new cards is a task of the design engineer. Naturally, any layout other than the construction in Fig. 10 that satisfies the principles of flat control, is suitable.

If we regard the reduction of the amount of strips as a direct saving of raw material, the problem of strips control will present itself as a task of great industrial importance. Our research was meant to be a contribution towards the solution of that problem.

II

Comments on the theory of air currents

Specifically of carding tests, the various processes cannot be treated separately. Thus the experiments made with the accelerated lick-in invited our attention to the theoretic conclusions and experimental results published in 1949 by PETER M. STRANG in his treatise "Influence of Air Currents on Carding". (The American Wool and Cotton Reporter LXIII. Nos. 33, 34, 35.)

Essentially, the author attributed all phenomena encountered in carding to the action of the layers of air moving with the revolving cylinders, and based the theory of carding on the effect of the shearing force of the air layers moving the fibres.

E. G. STRANG claims that the work of the lick-in is efficient, in other words fibre transfer from the lick-in to the cylinder is complete when the surface speed of the cylinder is substantially higher than that of the lick-in, for in that case the boundary layer of air rotating with the cylinder practically strips the wires of the lick-in.

Our own experiments, as well as the experiments referred to in chapter 2 of Part I contradict Strang's theorem.

Specifically, in our experiments the transfer of fibres occurred invariably even at very low relative cylinder-licker-in speed (54 m/min), without failure. Hence, the phenomenon cannot depend on the relative speed of the air layers, but may be attributed simply to the mechanical stripping effect of the relative movement of the crosswise directed wires.

The empirical findings concerning the action of the licker-in induced us to examine the influence of air currents also on other processes of carding.

The theory of air currents postulates in respect of the main carding operation essentially that the work of carding should be done by the shearing force of the air layers moving between the cylinder and the flats. The shearing force arises from the great speed difference occurring in the clearance between the wire clothing surfaces. The shearing force of the air acting on the fibres, — which depends on the kinetic viscosity of the air, the velocity of the air layers and the clearance between the wire clothing surfaces — was compared by P. M. STRANG with the centrifugal force acting on the fibre; according to his calculations, the latter was about 50 000-times smaller than the force of the air current. His calculations disclosed that the extent of the shearing force of the air referred to a single fibre was 8,7 dyns, which compared to the magnitude of the actual forces acting between the wires proved to be a low value.

The following experiments were performed at the Department for Textile Technology I, Budapest Technical University, to prove that the value of the carding force in order of magnitude must be substantially higher than the above shearing force. (The relative tests were made by Ing. F. FALUDI, and the relative data are on the files of the Department for Textile Technology.)

Cotton clumps consisting of matted fibre were taken from the picker lap. The clumps were suspended on a torsion balance, and a single fibre was pulled out of each by gripping its projected end.

The pulling force needed for tearing out the fibre was measured on the torsion balance, deducting therefrom the weight of the clump, for the fibre was pulled in the direction of the force of gravity. The difference gives the magnitude of the force required for pulling out the fibre. The average value derived from 100 measurements is 572 dynes.

The carding force derived by STRANG amounts to not more than 1/65th part hereof.

It should, however, be considered that in carding, the wires pull out the fibres by instantaneous action. The passage of one card wire through the carding zone lasts about 0,1 sec. Thus a 20 mm long fibre is pulled out in about 0,0020 sec.

On the above premises, we considered it correct to compute the carding force from the impulse produced by the wires.

By using the known formula of mechanics

$$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} P \cdot dt = P(t_2 - t_1)$$

where :

P = mean value of the carding force (in kg),
 m = mass of the fibre ($\text{kg} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{m}^{-1}$),
 t_1 = begin of the acceleration of the mass (sec),
 t_2 = end of the acceleration of the mass (sec),
 v_1 = initial velocity of the mass ($\text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$),
 v_2 = velocity of the mass after acceleration ($\text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$).

In cards of the cotton industry, flat speed is negligible as compared to the cylinder surface speed, hence

$$v_1 = 0$$

and when beginning to pull out the fibre

$$t_1 = 0.$$

Writing t for t_2 and v_d (cylinder speed) for v_2 , the carding force may be computed as follows :

$$P \cdot t = m \cdot v_d$$

wherefrom

$$P = \frac{m \cdot v_d}{t}$$

Assuming — with reservation — that the duration of the impulse is proportionate to the length of the fibre and calculating the time for pulling out the entire length of the fibre

$$t = \frac{l}{v_d}.$$

Substituting the above :

$$P = \frac{m \cdot v_d^2}{l} = \frac{G v_d^2}{g \cdot l} = \frac{\varrho^2 \cdot \pi \cdot l \cdot \gamma \cdot v_d^2}{g \cdot l} = \frac{\varrho^2 \cdot \pi \gamma \cdot v_d^2}{g}$$

Assuming the values to be the following :

$\varrho = 10 \mu$ (fibre radius),
 $\gamma = 1500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (specific gravity of the fibre),
 $v_d = 12 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}$ (cylinder surface speed),
 $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$ (acceleration of gravity),
 and substituting them into the above equation, converted into dynes

$$P = 6,78 \text{ dynes}$$

It should, however, not be overlooked, first that the P force under the integral is a mean value; secondly, that the time required for accelerating the mass of the fibre is undoubtedly less than the time calculated on the basis of the fibre length.

For the moment, we cannot determine the time required for the acceleration, even its estimate is most difficult. Presumably it is so instantaneous that it amounts to 1/100th or even 1/1000th of the time derived according to the above.

The maximum pulling force can therefore be even higher than the 100-fold or possibly 1000-fold of the above 6,78 dynes value. The value of the maximum pulling force is naturally influenced by the grip of the fibres, frictional conditions, the tension of the fibres etc.

It is an empirical finding that the fibres break in large numbers only at comparatively high cylinder speed, at speeds of 10–12 m/sec breaking is less prevalent. On this basis it may be concluded that under normal mill conditions the carding force fluctuates somewhere between 500 and 2000 dynes.

It is evident from the calculations that the pulling force arising in the process of carding can be greater than the above derived value, but never smaller. This observation will gather momentum for the following calculations.

Let us compare our results with the pulling forces exerted by air drag, which were calculated by the two methods given below:

1. According to the formula known from the study of air currents, the pulling force derived from shearing

$$P = \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot F \cdot \frac{1.328}{\sqrt{R}}$$

where

P = pulling force (kg),

ρ = density of air ($\text{kg} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{m}^{-4}$),

v = speed of air current ($\text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$),

F = friction surface (m^2),

R = Reynolds number = $\frac{v \cdot l}{\nu}$, where

l = fibre length (m),

ν = kinematic viscosity of the air ($\text{m}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$).

Taking the following numerical values:

$$\rho = 0,125 \text{ (kg} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{m}^{-4}\text{)}$$

$$v = 12 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}$$

$$\vartheta = 20 \mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$F = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$$

$$\nu = 14 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{sec}^{-1},$$

and substituting them into the above equation :

$$P = \frac{0.125 \cdot 12^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1.328}{2 \cdot \sqrt{1.66 \cdot 10^4}} =$$

$$= 1.17 \cdot 10^{-7} \text{ kg} = 0.117 \text{ mg},$$

therefore :

$$P = 0.115 \text{ dynes.}$$

2. P. M. STRANG refers to GOLDSTEIN's formula, according to which the shearing force of the air stream

$$P = \mu \cdot \frac{v}{h} \cdot F$$

where

P = pulling force (kg)

μ = kinematic viscosity of air (in poises)

v = velocity of the air current ($\text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$)

h = thickness of the air layer (m)

F = friction surface (m^2)

Taking the following numerical values :

$$\mu = v \cdot \varrho = 14 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 0.125 = 1.8 \cdot 10^{-6} \text{ (poises)}$$

$$h = 0.15 \text{ mm} = 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$v = 12 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}$$

$$F = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$$

and substituting them into the above equation :

$$P = \frac{1.8 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}{1.5 \cdot 10^{-4}} = 1.82 \cdot 10^{-7} \text{ kg} = 0.182 \text{ mg}.$$

hence

$$P = 0.178 \text{ dynes}$$

(In the above calculations, air density and kinematic viscosity were referred to 760 mm Hg pressure and 15° C temperature.)

In connection with the above formula we wish to point out that the assumption of linear speed variation is arbitrary, because the correct formula for the specific pulling force is

$$P_f = \mu \cdot \frac{dv}{dh}$$

To calculate with the latter, it would be necessary to know the function $v = f(h)$.

By comparing the pulling forces, it appears to us that the theory of P. M. STRANG attributes too great a role to the shearing force of air currents in the process of carding. Compared against the results derived from our experiments and calculations, it will be clear that the average carding force reckoned on the basis of the impulse is about 40-times greater than the shearing force of air currents, while the pulling force derived from the experiments exceeds by about 4000-fold the shearing force of the air current.

REFERENCES

- R. CHENG—W. E. MORTON: *Journal of the Textile Institute* 1951. No. 8. P. 442—456.
I. F. BOGDAN—IVAN Y. T. TENG: *Textile World* 1952. No. 5. P. 91—107.
PETER M. STRANG: *The American Wool and Cotton Reporter* LXIII. No. 33., 34., 35.
I. F. BOGDAN: *Textile Research Journal* XXV. No. 5. P. 377—385.
GÁBOR MERÉNYI: Fejezetek a pamutkártolás elméletéből. Mérnöki Továbbképző Intézet. 1952. (Chapters from the Theory of Cotton Carding. Post-graduate Engineering Institute. In Hungarian.)

SUMMARY

1. In Chapter 1 of Part I the author exposed that flat strips in cotton carding could not be competently controlled by means of the front plate of cards, because by setting the clearance between front plate and cylinder, strips control would be effected in such an over-sensitive zone where the control would be impracticable. As a practical method of strips control variation of the flat speed is recommended.

2. The author demonstrated that an almost linear relation existed between the average strips weight and the flat speed, though subject to variation according to the quality of the raw material; this relation substantially simplified the practical method and realization of the control (Chapters 2—3 of Part I).

During elaboration of the present paper, a treatise was published in the May 1955 issue of the *Textile Research Journal* by J. F. BOGDÁN, wherein the author derived the same conclusions as set forth in points 1. and 2. of this paper (*Textile Research Journal*, Vol. XXV. No. 5 pp. 377—386).

3. After stripping, the loading of the flats that stay longest in the carding zone, is lowest, whereas immediately before stripping, it is highest (Chapter 4, Part I).

4. The author failed to demonstrate a consistent relation between the average flat charge and the flat speed. The average flat loads probably depend mainly on the raw material and the condition of the card (Chapter 5. Part I).

5. The effect of the accelerated licker-in is manifest in the lower nep contents of the card web; against this, reduced flat speed is accompanied by a slight increase in the nep contents, other conditions being unchanged (Chapter 6, Part I).

6. At reduced flat speed, the fibre lengths were found to decrease slightly, because of the longer duration of the flats passage in the working zone. Such average fibre shortening (0,25 mm) has, however, no importance (Chapter 7, Part I).

7. In spite of the fact that at low flat speed, the absolute value of impurities in the strips per unit time decreased, the absolute amount of impurities in the card web or in the sliver per unit time remained unchanged (Chapter 8, Part I).

8. In contrast to P. M. STRANG's theory of carding, the author proved that the frictional force exerted by air currents did not amount to the magnitude of the pulling force actually arising during carding (Part II).

ВЛИЯНИЕ УМЕНЬШЕННОЙ СКОРОСТИ ШЛЯПКИ НА ЧЕСАНИЕ ХЛОПЧАТКИ

Г. МЕРЕНЬИ

РЕЗЮМЕ

1. В первой главе первой части статьи показано, что при помощи регулирующей отходы планки невозможно осуществить регулирование количества шляпочных очесов (соответственно требованиям) на хлопчатобумажных чесальных машинах, т. к. изменение шляпочных очесов (путем изменения расстояния между планкой и барабаном происходит в такой исключительно чувствительной зоне, в которой практически нельзя осуществить регулирование. В качестве целесообразного решения можно рекомендовать способ отбора шляпочных очесов пропорционально скорости шляпки.

2. Доказано, что соотношение между средним весом шляпочных очесов и скоростью шляпки в зависимости от качества материалов может быть различным, но во всех случаях приближенно линейным, что сильно упрощает решение и выполнение регулирования.

При разработке данной работы в журнале «Textile Research Journal» за май м-ц была опубликована статья И. Ф. Богдана, в которой автор пришел к таким же самым выводам, какие изложены в пунктах 1 и 2 данной статьи. («Textile Research Journal», т. XXV, № 5, стр. 377—385.)

3. Игольчатые шляпки, которые после очистки остаются в зоне чесания дольше всего, имеют наименьшую нагрузку, а игольчатые шляпки, выходящие непосредственно перед очисткой, — наибольшую (ч. I, гл. 4).

4. Между средней нагрузкой и скоростью шляпки не удалось установить закономерной зависимости. Средняя нагрузка шляпки, по всей вероятности, является функцией состава сырья и состояния машины (ч. I, гл. 5).

5. Влияние ускоренного подготовительного разрыхлителя выражается в снижении содержания непы в чесанной ватке, но уменьшенная скорость шляпки при различных условиях приводит к некоторому росту содержания непы (ч. I, гл. 6).

6. При уменьшенной скорости шляпки наблюдается некоторое сокращение длины волокна вследствие того, что в таком случае шляпка остается в рабочей зоне в течение более длительного времени. Все же такое среднее сокращение длины волокна (0,25 мм) не имеет никакого значения (ч. I, гл. 7).

7. Несмотря на то, что при небольшой скорости шляпки абсолютная величина содержания сорных примесей в шляпочных отходах на единицу времени уменьшается, абсолютная величина засорения в ватке, или в чесанной полосе на единицу времени остается неизменной (ч. I, гл. 8).

8. В противоположность теории П. М. Штранга доказано, что сила трения потоков воздуха не создает силу тяги такой по порядку величины, которая в действительности имеет место при чесании (ч. II).

INFLUENCE D'UNE VITESSE RÉDUITE DES CHAPEAUX
SUR LE CARDAGE DU COTON

G. MERÉNYI

RÉSUMÉ

1. Dans la première partie de son étude, l'auteur démontre que l'on ne peut pas régler par le plateau régulateur, les débouffures de carde suivant les besoins, car la régulation de la quantité des débouffures par variation de la distance entre le plateau et le tambour se fait dans une zone si sensible que le réglage est pratiquement impossible. Comme bonne solution on peut recommander la séparation des débouffures proportionnellement avec la vitesse des chapeaux.

2. L'auteur démontre qu'entre le poids moyen des débouffures et la vitesse des chapeaux il existe une relation, toujours approximativement linéaire, mais différente suivant la qualité de la matière, relation qui simplifie grandement la solution pratique de la régulation (I^{ère} partie, chapitres 2—3).

Pendant l'élaboration de l'étude présente, a paru le travail de J. F. Bogdan dans le Textile Research Journal de mai 1955, où l'auteur arrive aux mêmes conclusions que celles communiquées aux chapitres 1 et 2. (Textile Research Journal Vol. XXV. No. 5., p. 377—385.)

3. Dans la zone de cardage, la charge des chapeaux qui y restent le plus longtemps est la moindre, celle des chapeaux sortant immédiatement avant le nettoyage est la plus grande (I^{ère} partie, chapitre 4).

4. L'auteur n'a pas réussi à trouver une loi reliant la charge moyenne des chapeaux à leur vitesse. Les charges moyennes des chapeaux sont probablement fonctions du mélange des matières premières et de l'état de la machine (I^{ère} partie, chapitre 5).

5. L'influence de l'accélération du briseur se montre dans une réduction de la teneur en boutons du voile, mais la vitesse de chapeau réduite entraîne une certaine augmentation de la teneur en boutons, toutes circonstances égales par ailleurs (I^{ère} partie, chapitre 6).

6. À vitesse de chapeau réduite, la longueur des fibres diminue un peu, car alors les chapeaux restent pendant un temps plus long dans la zone de travail. Mais cette réduction moyenne de la longueur des fibres (0,25 mm) n'a pas d'importance (I^{ère} partie, chapitre 7).

7. Malgré la réduction de la teneur en impuretés (mesurée en valeur absolue par unité de temps), à vitesse de chapeau petite, la quantité absolue par unité de temps des impuretés dans le voile, — ou dans le ruban cardé — reste inchangée (I^{ère} partie, chapitre 8).

8. Contredisant la théorie du cardage de P. M. STRANG, l'auteur prouve que la force de traction produite par la force de friction des courants d'air n'est pas dans l'ordre de grandeur de la force qui apparaît en réalité pendant le cardage (II^{ème} partie).

DER EINFLUSS DER VERRINGERTEN DECKELGESCHWINDIGKEIT AUF DAS KREMPELN VON BAUMWOLLE

G. MERÉNYI

ZUSAMMENFASSUNG

1. Im 1. Kapitel des I. Teils der vorliegenden Arbeit wird dargelegt, dass man mit der Stripsregulierplatte einer Baumwollkrepelmaschine die Stripsmenge nicht den Anforderungen entsprechend regulieren kann, da die Regelung durch Veränderung der Entfernung zwischen der Platte und der Trommel in einer derart überempfindlichen Zone erfolgt, dass die Regelung dort praktisch undurchführbar ist. Als zweckentsprechende Methode kann eine der Deckelgeschwindigkeit proportionale Abfallausscheidung empfohlen werden.

2. Es wurde gezeigt, dass zwischen dem durchschnittlichen Stripsgewicht und der Deckelgeschwindigkeit ein je nach Materialqualität verschiedener, jedoch stets angenähert linearer Zusammenhang besteht, der die praktische Verwirklichung der Regulierung sehr einfach gestaltet (I. Teil, 2.—3. Kapitel).

Während der Ausarbeitung der vorliegenden Arbeit erschien der Aufsatz von J. F. BOGDAN in der Mainnummer 1955 des Textile Research Journal, wo dieser Forscher in interessanter Weise zu den gleichen Feststellungen gelangt wie hier im 1. und 2. Abschnitt. (Textile Research Journal, Vol. XXV. No. 5, S. 377—385.)

3. Die Belastung der am längsten nach der Reinigung in der Krepelzone verweilenden Deckel ist am kleinsten, während die Belastung der in der Zeit unmittelbar vor der Reinigung auslaufenden Deckel am grössten ist (I. Teil, 4. Kapitel).

4. Es ist nicht gelungen, einen gesetzmässigen Zusammenhang zwischen der durchschnittlichen Deckelbelastung und der Deckelgeschwindigkeit nachzuweisen. Wahrscheinlich sind die durchschnittlichen Deckelbelastungen hauptsächlich Funktionen des Rohstoffgemisches und des Zustandes der Maschine (I. Teil, 5. Kapitel).

5. Die Wirkung des beschleunigten Vorreissers zeigt sich in der Verringerung des Noppengehalts des gekrepelten Vlieses, die herabgesetzte Deckelgeschwindigkeit führt jedoch, bei ansonsten gleichen Verhältnissen, zu einer gewissen Erhöhung des Noppengehalts (I. Teil, 6. Kapitel).

6. Bei verringerter Deckelgeschwindigkeit ist eine kleine Verringerung der Faserlänge festzustellen, da sich dann die Deckel längere Zeit in der Arbeitszone aufhalten. Diese durchschnittliche Faserverkürzung (0,25 mm) ist jedoch nicht von Bedeutung (I. Teil, 7. Kapitel).

7. Trotzdem in den Strips bei kleiner Deckelgeschwindigkeit weniger Verunreinigungen (ausgedrückt in auf die Zeiteinheit bezogenen absoluten Werten) enthalten sind, bleibt die auf die Zeiteinheit bezogene absolute Menge der im Vlies bzw. im gekrepelten Band enthaltenen Verunreinigungen unverändert (I. Teil, 8. Kapitel).

8. Im Gegensatz zur Theorie des Krepelvorgangs von P. M. STRANG wurde nachgewiesen, dass die Reibungskraft der Luftströmungen keine so grosse Zugkraft entfaltet, wie sie beim Krepeln in Wirklichkeit auftritt (II. Teil).

THE INFLUENCE OF BOUNDARY SURFACE DISCHARGES ON THE DIMENSIONING OF INSULATION

J. EISLER

D. OF ENG. SC.

INSTITUTE FOR ELECTRIC POWER AND RAILWAYS, TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received 12th September, 1955]

1. Introduction

It is practical to classify insulation according to three groups.

To the *first group* belongs the embedded electrode type insulation characterized by the fact that each electrode is in contact only with one kind of insulant. Fig. 1 shows an example of this type.

Such insulation (two wires in air, insulation of cables etc.) must be dimensioned for disruptive breakdown. By the methods of electrostatics the maxi-

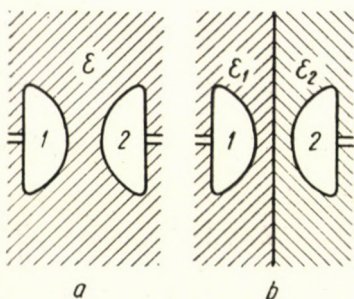


Fig. 1

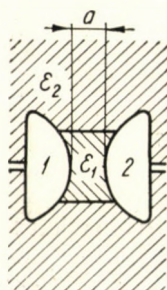


Fig. 2

mum field strength is determined as a function of voltage and dimensions. In the formula found in this way, the maximum field strength is replaced by the permitted field strength of the insulating material to be used, which is determined from the dielectric strength of the material and the coefficient of safety. Resolving this equation for dimensions, the dimensioning of the insulation is accomplished. Utilization of the insulating material (or materials) is the better, the more homogeneous is the field and the less is the difference between the dielectric constants.

To the *second group* belongs the supporting insulator type. A characteristic example is shown on Fig. 2. Each electrode is in contact with at least two kinds of insulating material. The dielectric strength of the whole is determined

by the material of lower dielectric strength, which can be approached but not attained, because of the surface being soiled and of the imperfect contact in the corners of the material with higher dielectric constant, which generally cannot be avoided.

The method of dimensioning is the following: we determine the minimum distance (a_s string distance) in the material of *lower* dielectric strength as the sum of straight parts of lines, so that it corresponds to the test voltage, when introduced into the empirical formula for arrangements of the concerned type. Such an empirical formula for air is

$$U = 3,05 a_s + 10 \text{ kV} \quad (1)$$

where a_s is the string distance (Fig. 3).

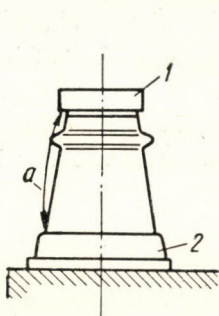


Fig. 3

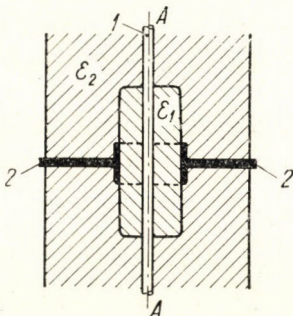


Fig. 4

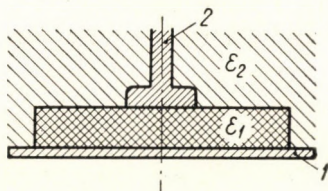


Fig. 5

It is obvious that the material of higher dielectric strength is not fully utilized.

Finally, to the *third group* belongs the bushing type insulation. Its characteristic form is shown in Fig. 4. It may be seen that here, too, each electrode is in contact with at least two kinds of insulating material. It is obvious that the arrangement shown in Fig. 5 must be considered as a bushing type insulation as well, because it has been produced by cutting the arrangement of Fig. 4 by the plane A-A and turning it by 90°. At a first glance, the bushing type insulation looks like a combination of the embedded electrode type and the supporting insulator type, therefore it seems that it could be dimensioned in two steps:

a) The insulation between the two electrodes is dimensioned for disruptive breakdown, as it has been done in the case of embedded electrode type insulation.

b) After that, we determine from the voltage, on the base of the above empirical formula, the necessary string distance between electrodes 1 and 2, as it has been done for the support type electrodes. But if an insulation which

has been dimensioned by this method is manufactured and tested, we will see at once that the dimensions which received, are necessary but by far not sufficient. On the part of our insulation which is located between the two electrodes there will be no disruption indeed during a short-time test, perhaps there will be no flash-over either, but on the edge of the second electrode which is in contact with the two insulating materials, discharges will appear. They may be more or less innocent sparkling discharges, or creeping brush discharges which cannot be tolerated by any means.

The bushing type insulation must therefore be dimensioned so that these surface discharges do not occur at all at operating voltage, and at the test voltage only to such an extent that they do not damage the material during testing.

Subsequently, we shall consider the conditions for this.

2. Conditions for the appearance of surface discharges

Experience proves that the voltage for the beginning of surface discharges (initial voltage) can be computed from the following formula (KAPPELER):

$$U_i = \frac{k_1}{c^{0,45}} \text{ kV} \quad (2)$$

where k_1 is a number which characterizes the surrounding medium of dielectric constant ϵ_2 ; its value is $1,06 \cdot 10^{-5}$ for air and $3,18 \cdot 10^{-5}$ for oil, c is the capacitance of unit surface, farad/cm², measured on the place where the discharge starts. This formula has been deduced by SISMAN and MANTROV, Soviet research workers, in a slightly different form, by theoretical methods as well.

The starting voltage for brush discharges is much higher and is given by the following formula:

$$U_{ib} = \frac{k_2}{c^{0,44}} \text{ kV} \quad (3)$$

where the value of k_2 is $1,355 \cdot 10^{-4}$ for air, while the exact value for oil is not known (it is very difficult to determine it exactly). This second formula is due to TOEPLER. For plane arrangements, or which may be considered as plane, the capacitance of unit surface is

$$c = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{a} \text{ farad/cm}^2 \quad (4)$$

where ε_1 is the dielectric constant of the (usually solid) material with higher dielectric constant, a is the thickness of the layer between the two electrodes, $\varepsilon_0 = 0,0885 \cdot 10^{-19}$ the dielectric constant of vacuum. A formula due to ROTH gives the initial voltage of the brush discharges,

$$U_{ib} = 91 \sqrt{\frac{a}{\varepsilon_1}} \text{ kV} \quad (5)$$

Formulae (2) and (5) furnish the *third* condition for the dimensioning of bushing type insulation, in addition to the conditions *a*) and *b*) discussed in section 1.

3. Conclusions

3.1. Let us examine first the significance of the third condition found in the preceding section from the point of view of *dimensioning*. It can be seen that in the formula for the initial voltage the string distance a_s does not appear at all. Obviously this is purely a neglect, valid only in the case of the usual dimensions, i. e. if $a \ll a_s$. If this condition is not fulfilled, the initial voltage will be still lower, its reduction may be determined by approximate calculation as well as by experiment, and we will not consider any longer this case of no practical interest.

It appears therefore from formulae (2) and (3) that increase of the string distance can not be used in practice for increasing the initial voltage. However long a bushing may be, if the conditions of formulae (2) and (3) are not fulfilled, discharges will appear at the 2. electrode (in the case of bushings at the flange). This obviously means that in case of a given material, and thus of given ε_1 , dimension a must be chosen according to this circumstance. Expressing a from formulae (2) and (3):

$$a = \left(\frac{U_i}{k_1} \right)^{\frac{1}{0,45}} \varepsilon_1 \varepsilon_0 \quad (2/a)$$

or

$$a = \left(\frac{U_{ib}}{k_2} \right)^{\frac{1}{0,44}} \varepsilon_1 \varepsilon_0 \quad (3/a)$$

In case of an arrangement, which can be considered as plane, and of air

$$a = \left(\frac{U_i}{8,1} \right)^{2,2} \varepsilon_1 \quad (2/b)$$

or

$$a = \left(\frac{U_{ib}}{91} \right)^2 \varepsilon_1 \quad (5/b)$$

It is of interest to have a look at the numerical values resulting from the formulae.

Let the operating voltage U_0 be 22 kV, then from formula (2/b) $a = 45$ cm (on the base of $\varepsilon_1 = 5$), which obviously is an abnormally large dimension. Of course this is valid when the bushing is made of solid porcelain. The bodies of the bushings are hollow also for the purpose of reducing the resulting ε_1 ; e. g. in the case of the bushing shown in Fig. 7,

$$\varepsilon_{1e} = \frac{\ln \frac{r_k}{r_b}}{\frac{\ln \frac{r_k}{r}}{\varepsilon_1''} + \frac{\ln \frac{r}{r_b}}{\varepsilon_1'}} < \varepsilon_1'', \quad \text{if} \quad \varepsilon_1'' > \varepsilon_1'$$

because in this way the initial voltage is increased.

Exact calculation, which takes into consideration that the capacitance per unit surface is low because we are concerned not with a plane, but with a cylinder, which, in addition, is hollow, shows that this condition is fulfilled in case of standard bushings.

In case of higher voltages (above 35 kV) this condition can be fulfilled, without getting too large diameters, by condenser-type bushings only.

Frequently it will be necessary to make a compromise on the initial discharges, and strive only to avoid brush discharges, naturally also at test voltage. In this case, we will dimension according to formula (5/b). The test voltage of the bushing for 22 kV phase-voltage, and 35 kV line-voltage, which has been mentioned, is 97 kV, and therefore

$$a = \left(\frac{U_{ib}}{91} \right)^2 \varepsilon = \left(\frac{97}{91} \right)^2 \cdot 5 = 5,68 \text{ cm} \quad (6)$$

If thus we permit the initial discharges (which are not dangerous for porcelain) at operating voltage, but no brush discharges at test voltage, the dimension a (in the case of solid porcelain as in our example) should be kept between 45 and 5,68 cm.

It can be seen that dimensioning for initial discharges leads to very large dimensions and solid insulating materials cannot be utilized to full extent. If we dimension for brush discharges, we have seen in case of the 35 kV bushing

that the stress on the solid insulating material of ϵ_1 dielectric constant will be only

$$E = \frac{97}{5.68} = 17 \text{ kV/cm} \quad (7)$$

although the dielectric strength of porcelain is 150–200 kV/cm.

But dimensioning for surface discharges is not limited to bushings in the strict sense of the word, but in any case of bushing *type* insulation this method must be used. A bushing type insulation is also the usual terminal insulation of transformers and even the insulation of phase shifting condensers, as is shown in Fig. 6.

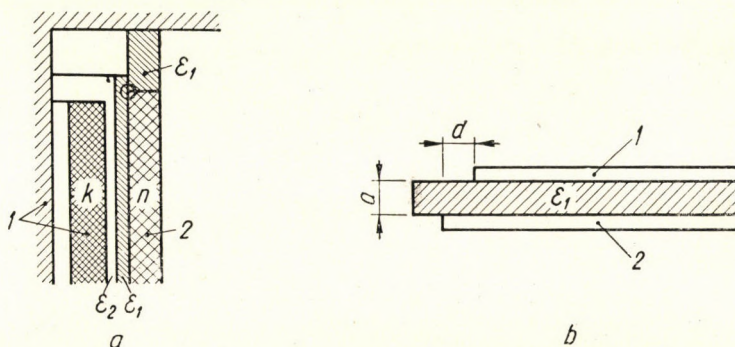


Fig. 6.

Fig. 6/a shows that, e. g., on the occasion of an insulation test, the iron core and the coil k which is connected for that time to it, form one electrode (marked 1) while coil n forms the second electrode (marked 2). On the place marked by a circle, surface discharges will appear, if the distances given by above formulae are *not respected*. Fig. 6/b clearly shows that if the edges of the electrodes are not facing each other exactly (which is very difficult to comply with), but there is between them a distance d comparable with the thickness a , this arrangement will be of the bushing type insulation as well.

Let us investigate for this latter case, which is easier to calculate, the orders of magnitude and also the conditions for full utilization of the solid insulating material as well. The permitted stress of condenser paper in oil is 10–15 kV/mm. Let us take the lower value, 10 kV/mm = 100 kV/cm. From the formulae we can determine that maximum voltage which must not be exceeded if we want to make full use of the dielectric strength of the paper and to avoid surface discharges too. For complete utilization of the insulating material it is necessary that the operating voltage

$$U_0 = a E_p \quad (8)$$

E_p is the stress permitted from the point of view of breakdown.

For avoiding discharges it is necessary that

$$U_o \leq U_i$$

When calculating U_i one must take into account that the constant from formula (2/b), which is 8,1 in case of air, has now become 24,3 because of the use of oil. Taking this into account,

$$U_i = 24,3 \left(\frac{a}{\varepsilon_1} \right)^{0,45} \quad (9)$$

To calculate the limit case let there be

$$U_o = U_i = 24,3 \left(\frac{a}{\varepsilon_1} \right)^{0,45} \quad (10)$$

If we replace a by its value from equation (8),

$$a = \frac{U_o}{E_p} \quad (11)$$

the limit voltage will become

$$U_i = 24,3 \left(\frac{U_o}{\varepsilon_1 E_p} \right)^{0,45} \quad (12)$$

From there the condition of full utilization is

$$U_o = \frac{24,3^{1,82}}{(\varepsilon_1 E_p)^{0,82}} = \frac{330}{(\varepsilon_1 E_p)^{0,82}} \quad (13)$$

If the dielectric constant of paper is $\varepsilon_1 = 4$, then

$$U_o = U_i = 2,44 \text{ kV}$$

If the operating voltage is larger than this, the electric strength of the paper cannot be utilized fully. The paper thickness corresponding to 2,44 kV will be

$$a_k = \frac{U_i}{E_p} = \frac{2,44}{100} = 0,0244 \text{ cm} = 0,244 \text{ mm}$$

In reality we cannot go until that value, because of the necessary safety. Here we see the reason for which it is not advisable to use paper in thickness over $10 \sim 12 \times 0,01$ mm.

3.2. In the preceding section we have seen what consequences must be drawn from our considerations on surface discharge from the point of view of *dimensioning*. The most important consequence is that we cannot utilise the dielectric strength of solid insulating materials with high dielectric constants, used in thick layers. This difficulty can be overcome by using several layers as in case of the condenser type bushings, or by embedding the elec-

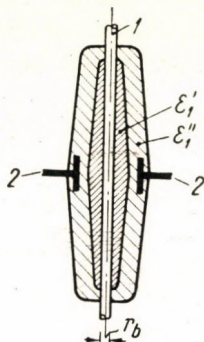


Fig. 7.

trodes in the solid insulating material. A bushing of this type is shown in Fig. 7. In this case too it is advisable to use hollow bushings, in order to reduce the resulting ϵ_1 . But it is worth while to examine also the importance of the conclusions regarding surface discharges from the point of view of *selecting* and of *testing the material*. Obviously we would like to increase the initial voltage of the surface discharges. As formula

$$U_i = \frac{k_1}{c^{0,45}} = \frac{K_1}{\epsilon_0^{0,45}} \left(\frac{a}{\epsilon_1} \right)^{0,45}$$

shows, first of all it is necessary to have the dielectric constant of the material surrounding the electrodes, ϵ_1 , as low as possible, and the dielectric strength of the surrounding material of lower strength (normally oil or air) as high as possible. The dielectric strength of the material situated between the electrodes is of less importance; this material should rather show constancy and low losses, in order to avoid thermal breakdown. We have seen also that surface discharges can be avoided economically at best at operating voltage, and that they will appear at test voltage. A further requirement is therefore, that the surrounding material as well as the material between the electrodes should withstand these discharges for a short time without damage.

3.3. There are remarkable consequences also as far as the *testing of materials* is concerned. If we cannot utilize the dielectric strength of the material between the electrodes, it seems not essential to know its exact value. Therefore it is superfluous to make numerous breakdown tests the used solid insulating material. It seems to be sufficient to submit the material for several hours to the stress which occurs during service, and for some minutes to the stress occurring when testing the insulation. For sake of safety, this latter stressing of several minutes duration might be somewhat more intense than the one occurring at testing. Therefore it becomes possible to test the material itself used for manufacture, and for faultless material the test will be safe and non-destructive. On the occasion of testing, as far as possible the same geometrical and voltage conditions should be applied as will occur later on the accomplished insulation.

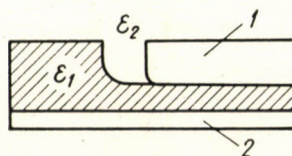


Fig. 8.

4. In what has been said, we have supposed that we want to prevent the appearance of surface discharges. According to certain views this is neither necessary nor economical; therefore let us examine this question as well. Doubtless the appearing of surface discharges is not followed immediately by either breakdown or arcing, but these occur only after a prolonged time. From this point of view it would be enough to prevent only the appearing of bush discharges, because these attack the surface of the material even after a very short time, cause development of considerable heat and soon provoke breakdown or arcing. It is easy to prevent a rapid development of breakdown from surface sparking by an appropriate design of the insulation, e. g. according to Fig. 8. This is basically the same as e. g. the so-called corner ring insulation used on transformers.

Obviously breakdown will occur only when the slow destructive action of the surface sparking has ruined the insulating material of ϵ_1 dielectric constant, which action takes longer time in the case shown in Fig. 8, than in the case of the arrangement shown in Fig. 5. At this point it is worth while to remark that the usual testing of materials, in case of larger thickness, is in reality measuring the destructive action of the surface discharges instead of the dielectric strength of the material. This will be understood at once if we have a look at Fig. 9 which shows the usual arrangement. It can be seen that this test setup intended for measuring the dielectric strength of the insulating

material of thickness a , really is a bushing type insulation. If we reach the threshold of sparking, and later of brush discharges, then the discharges will determine the result and not only the dielectric strength of the material situated between the electrodes. It is for this reason that the testing time and the speed of voltage increase are so important, because they determine the time of exposure to the destructive action of the discharges. The thicker the material, the less is the value of the breakdown voltage characteristic of the dielectric strength. For this reason the IEC Recommendation permits this method for thicknesses up to 1 mm only. The numeric example on page 341 shows that even this thickness is too large. The correct application of the method obviously consists in increasing the voltage only until the appearance of spark discharges and of brush discharges. The first value characterizes the permanent stress, the second one the stress allowable during the test. These voltages ought to be con-

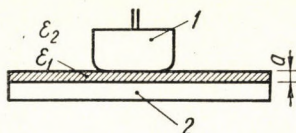


Fig. 9.

sidered as authentic breakdown voltages of the material for continuous operation and for short-time stresses, in case of a given thickness and a given surrounding medium.

It follows from the above that in case of machines and apparatuses containing bushing type insulations, the determination of the initial voltage is very important. It is reasonable to lay down as a condition for continuous operation that the initial voltage should be above the operating voltage. The measuring methods suitable for controlling the fulfilment of this condition, which are based on the observation of the high-frequency oscillations accompanying the discharge, are known; the general introduction of this method is desirable. The measurements are simple and do not endanger the insulation, as the overvoltage tests do.

5. What has been developed so far seems to authorize one more consequence, which at present is still hypothetical.

We have seen that initial voltage, which in case of continuous operation must be considered as being equal to the breakdown voltage, is in case of plane electrodes

$$U_i = \frac{k_1}{c^{0,45}} = \frac{k_1}{(\epsilon_1 \epsilon_0)^{0,45}} \cdot a^{0,45}$$

According to the original WAGNER formula for thermal breakdown, the breakdown voltage is proportional to the square root of the thickness. The frequently

used FISCHER—HINNEN formula gives a breakdown voltage proportional to $2/3$ power of the thickness. As to a large extent for the measurements electrode arrangements similar to Fig. 9 have been used, the obvious supposition, which has been expressed by others already, is the following : frequently we declare a thermal breakdown such as is in reality due to surface discharges, without any direct relation whatsoever with the thermal instability arising in the interior of the material. Accordingly we can safely consider as thermal breakdowns only those which occur in part of the material situated between the two electrodes.

REFERENCES

1. WHITEHEAD : Dielectric Breakdown of Solids 1953.
2. A. ROTH : Hochspannungstechnik. Springer, 1950. S. 244.
3. KAPPELER : Gleitentladungen bei vorgeschobenen Elektroden, Micafil-Nachrichten 1945. S. 10.
4. TOEPLER : Über die phys. Grundgesetze der in der Isolatortechnik auftretenden el. Gleiterscheinungen A. f. El. Bd. 10. S. 157. 1921.
5. М. И. Мамтров : Электрические разряды на поверхности диэлектриков. «Электричество» 1940. № 9, стр. 54.
6. Шшиман : Величина напряжения. «Вестник Электропромышленности» 1949. № 7, стр. 19.

SUMMARY

After discussing the three fundamental types of insulations (with embedded electrodes, supporting insulators and bushings), the author treats the characteristics of the surface discharges occurring on bushing type insulations. Obviously, surface discharges cannot be tolerated during operation, therefore dimensioning must consider chiefly these discharges. Using the known formulae for initial voltages, the author shows that the dielectric strength of solid insulating materials can be fully utilized only in case of very thin layers. It is just for this reason that it ought to be considered if asking for great dielectric strength is worth while where for other reasons thicker insulating material must be used than needed for avoiding surface discharges, or if one should rather aim at a dielectric constant as low as possible, because it increases the initial voltage. Analysis of the characteristics of bushing type insulations seems to confirm those opinions, according to which in all places, where this is possible at all, bushing type insulations should be replaced by the embedded electrode type.

РОЛЬ РАЗРЯДОВ НА ГРАНИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПРИ РАСЧЕТЕ ИЗОЛЯТОРОВ

Д-р техн. наук Я. ЭЙЗЛЕР

РЕЗЮМЕ

После рассмотрения трех основных типов изоляторов (изоляторов с утопленным в материал изоляторов электродом, опорных изоляторов, проходных изоляторов) автор разбирает характерные свойства поверхностных разрядов, возникающих в случае изоляторов проходного типа. Очевидно, что поверхностные разряды, вообще, недопускаются при эксплуатации, поэтому, по существу, расчет следует проводить исходя из поверхностных разрядов. С использованием формул, применяемых для расчета предельных напряжений поверхностных разрядов, доказано, что электрическая прочность твердых изоляционных материалов может быть использована только в случае очень небольших

толщин изоляционных слоев. Именно поэтому необходимо обдумать, что в случаях, — когда из-за прочих причин необходимо применять изоляционный слой толще необходимого для устранения поверхностных разрядов, — стоит ли стремиться к высокой электрической прочности, или же достигнуть возможно меньшей диэлектрической постоянной, так как от этого возрастает предельное напряжение. Анализ свойств изоляторов проходного типа подтверждает то мнение, что во всех таких местах — где только это возможно — следует применять вместо них изоляторы с утопленным в изолятор электродом.

LE RÔLE DES DÉCHARGES AUX SURFACES LIMITES DANS LE CHOIX DES DIMENSIONS DES ISOLATIONS

Prof. J. EISLER

Docteur des sc. techniques

RÉSUMÉ

Après avoir traité des trois types fondamentaux des isolations (à électrodes noyées, isolateurs de support et traversées), l'auteur s'occupe du caractère des décharges de surface apparaissant aux isolations du type «traversée». En service, on ne peut évidemment pas tolérer, en général les décharges de surface, c'est pourquoi il faut dimensionner en principe pour ceux-ci. En utilisant les formules connues pour calculer les tensions de seuil des décharges de surface, l'auteur démontre que la rigidité diélectrique des matières isolantes n'est utilisée pleinement qu'en cas de couches très minces. C'est pour cette raison qu'il faut douter si là, où pour d'autres raisons il faut employer des matières isolantes plus épaisses qu'il n'est nécessaire pour éviter les décharges de surface, il vaut la peine d'en demander une rigidité diélectrique élevée, ou s'il ne faut pas plutôt aspirer à une petite constante diélectrique, qui augmente la tension de seuil. L'analyse des propriétés des isolations du type «traversée» paraît confirmer l'opinion de ceux, qui recommandent l'emploi d'isolations à électrodes noyées partout où c'est possible.

DIE ROLLE DER ENTLADUNGEN AN GRENZFLÄCHEN IN DER BEMESSUNG VON ISOLATIONEN

Prof. J. EISLER

Doktor der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Nach Erörterung der drei Grundtypen der Isolationen (mit eingebetteten Elektroden, Stützisolatoren, Durchführungen) beschäftigt sich der Verfasser mit dem Charakter der an Isolationen des Durchführungstyps auftretenden Oberflächenentladungen. Es ist offenbar, dass Oberflächenentladungen in Betriebe im allgemeinen nicht zugelassen werden können, daher ist im wesentlichen mit Rücksicht auf diese zu dimensionieren. Unter Benutzung der bekannten Formeln für die Berechnung der Schwellenspannungen der Oberflächenentladungen weist der Verfasser nach, dass die elektrische Festigkeit des festen Isoliermaterials nur im Falle sehr kleiner Schichtstärken ausgenutzt werden kann. Ebendeswegen ist zu bedenken, ob es dort, wo man aus anderen Gründen ein dickeres Isoliermaterial als zur Vermeidung der Oberflächenentladungen notwendig verwenden muss, der Mühe wert ist, von diesem eine hohe elektrische Festigkeit zu verlangen, oder ob eher eine je kleinere Dielektrizitätskonstante anzustreben ist, da diese die Schwellenspannung erhöht. Die Untersuchung der Eigenschaften der durchführungsartigen Isolationen scheint diejenigen Meinungen zu bestätigen, wonach überall dort, wo dies überhaupt möglich ist, an ihrer Stelle Isolationen mit eingebetteten Elektroden zu verwenden sind.

DETERMINATION OF THE YIELD POINT OF STEELS BY MAGNETIZATION

P. RÉTI

CAND. OF ENG. SC.

MÁTYÁS RÁKOSI IRON AND METAL WORKS, DEPARTMENT FOR TESTING OF MATERIALS

[Manuscript received 7th October 1955]

Object

The mechanical properties of metals, and the changes occurring in them constitute in our days an important branch of the physics of metals, and the relationships existing between their magnetic and mechanical properties are receiving a growing amount of attention from investigators engaged in the study of these problems.

Serious difficulties in testing of materials can be overcome if, by means of non-destructive tests, those changes which occur in the structure and inner stress of ferromagnetic materials are elucidated. This purpose seems to be best served by observing and recording the changes occurring in the permeability of the said materials. Valuable methods for practice can be obtained by establishing unequivocal relations between the characteristics of a given phenomenon and a corresponding change in permeability. It is attempted here to establish such relations for certain groups of ferromagnetic materials.

Fundamental principles of measurement

Steels with low C-contents, further Cr, Cr-V and Mn steels were used for the present experiments. Certain relations were ascertained in order to determine the yield point of test specimens exposed to tensile stresses.

Direct current permeameters being best suited to an accurate determination of permeability, this instrument was employed in the tests. Since the flux density (B), necessary for the determination of permeability, can be measured accurately with the aid of a ballistic galvanometer or a fluxmeter, it is only the computation of the magnetomotive force (H) that appears to present some difficulty. This difficulty consists in the fact that demagnetizing poles are formed on the surface of the material where the flux enters and leaves, and that not infrequently the fields from these poles are equal to the applied magnetizing field.

By preparing the test pieces in the form of a closed magnetic path, such as a ring, an ellipsoidal sample or a very slender rod, the field from the poles may be computed. However, samples of this kind are rare and difficult to prepare.

A part of the standard permeameters cannot be used but for the measurement of materials of low permeability, for the results obtained with their

aid are erroneous beyond a 10^4 order of magnitude. Their use requires, moreover, test pieces at least 30 cm long whose cross sectional area is disproportionately large in comparison to their length.

To eliminate these difficulties a permeameter has been developed, capable of measuring H without regard to the small size of the sample, and allowing the measurement of materials up to 10^5 permeability. Fig. 1 illustrates the fundamental construction of the instrument in question. It shows part of the magnetized material with leakage flux coming out at the surface. Taking the case of a closed path with no enclosed current, and denoting the path by $a-b-c-d$, we obtain from the existing relation $\oint Hdl = 0$ the following formula :

$$M_{ab} + M_{bc} + M_{cd} + M_{da} = 0$$

as the sum of the magnetizing forces.

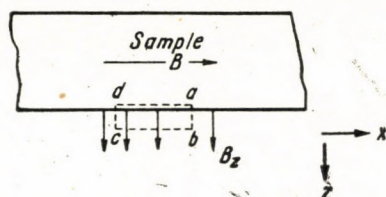


Fig. 1

If values of M_{ab} and M_{cd} reduce to zero, we can write :

$$M_{bc} = -M_{da}$$

This gives the point of departure for our measurements since, as is well known, the tangential component of the magnetic-field intensity passes continuously in and out of the test piece. The magnitude and direction of the H -lines on the surface of the material or in its immediate vicinity are therefore identical with those in the interior of the material.

Wiring diagram of the instrument

Fig. 2 shows the circuit diagram of the permeameter used in our tests, in which an audio oscillator excites the core element at 4000 cycles. The filter serves to suppress the second harmonic distortion of the oscillator. It was found impossible to ascertain the magnitude of this second harmonic voltage by means of the available harmonic analyzer.*

* The instrument, prepared in the Institute for Measurement Technique and Instruments of the Hungarian Academy of Sciences, was described in detail by Gy. László, research engineer (Publications of the Technical Section of the Hungarian Academy of Sc. Vol. XVI, Nos. 2—4, pp. 365—374).

The measuring element

For constructional diagram see Fig. 3. — The element in question is composed of two parts :

1. a solenoid wound over a quartz tube,
2. a permalloy strip of diminutive size.

The small-dimensioned measuring element consists of a solenoid wound over a quartz tube of a length of 35 mm and a diameter of 2 mm ; an iron core, in the present case permalloy C, of a length of 16 mm and a diameter of 0,06 mm,

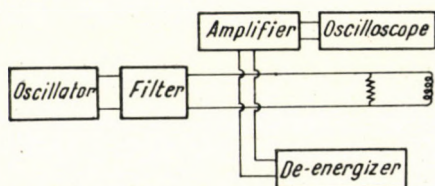


Fig. 2

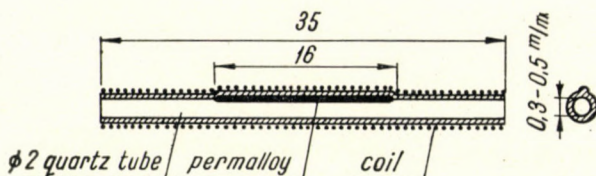


Fig. 3

placed upon the quartz tube, the coil being excited by audiofrequency current. Since no premagnetization has taken place yet, the permalloy core of the measuring element is magnetized by the current to an equal degree in both directions on the magnetization curve. On placing the measuring element in the field excited by a direct current by, say, attaching it to the surface of the magnetized material, the zero point of the alternating-current magnetization will suffer a displacement on the magnetization curve. The displacement will cause the voltage at the poles of the coil to be likewise asymmetric relatively to the time axis, so that it will contain even harmonics. We shall have to select for the purposes of indication that of these harmonics whose frequency is twice as high as the exciting fundamental frequency, because amplitudes are known to decrease with ascending harmonics.

The second harmonic voltage at the poles of the winding increases in proportion to the field strength if the latter is very small as compared to the saturation-field strength of the magnetized element of the measuring instrument.

The small size of our measuring element makes it preferable to all other instruments in use for measuring permeability, for it is its very smallness which gives the possibility to study any changes in the intensity of the magnetic field over very small areas. It is especially suitable for the testing of materials because, besides being small, it can be directly coupled with indicators.

The following technology was employed in preparing the measuring element :

The quartz tube containing the permalloy wire was soldered after expelling the air from the bore by heating. A hydrogen flame was used for the purposes of soldering. By drawing the permalloy to a diameter of 0,06 mm it was exposed to a very heavy mechanical stress ; in order to recover the magnetism the permalloy possessed prior to the exposure, it had to be heat-treated together with the entire measuring element at 1100° C, i. e. the temperature suitable for permalloy C. It was just because of this high temperature that the use of a quartz tube was indicated.

To measure the field strength with the greatest possible accuracy it is necessary for the quartz tube to retain a uniform cross section after the process of drawing, as otherwise the magnetic field produced by the solenoid, an enamel wire of 0,01 mm diameter wound over the tube, cannot be expected to be homogeneous. After winding the wire over the measuring element, the latter is fixed on a fitting chosen in accordance with the nature of the desired test.

Determination of the yield point of steels

The yield point of structural steels may be determined with the aid of diagrams obtained from tensile-test machines, by means of mechanical tensometers, or by using Martens' mirror instrument.

If a steel has a well-defined yield point the task is easily solved because all that is necessary is to watch the hand of the indicator. The procedure must, of course, be in accordance with the standards so that the load to be determined should always correspond to, and therefore indicate, a definite permanent extension. The Hungarian standards prescribe 0,2% as the permanent extension for which loads have to be determined.

Employing the above-described permeameter, a process has been elaborated which enables us to determine the yield point of steel samples from the alterations that occur in their permeability and are conditioned by simultaneous alterations in their length.

Fig. 4 shows how it was put into practice.

Essentially, the arrangement is this : a magnetic coil is installed at the two ends of the test rod. The coils consist of two pluggable half coils embedded in plastics ; the permeameter element in the middle part of the test piece is fixed in a bakelite casing which can be opened and closed.

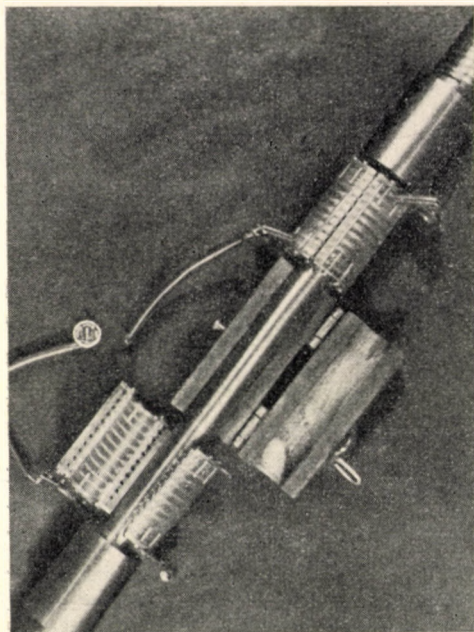


Fig. 4

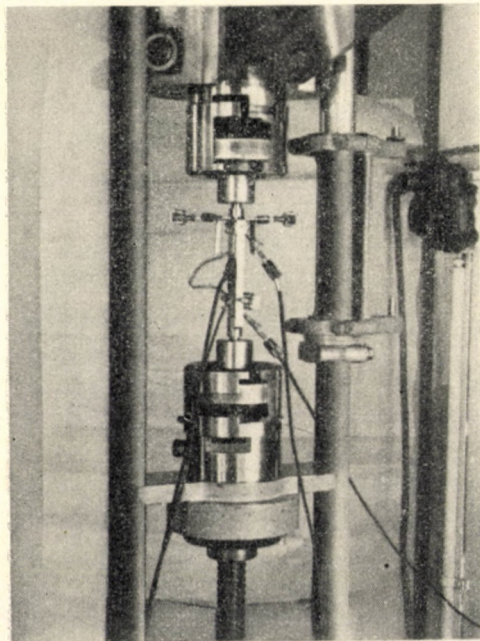


Fig. 5

The complete permeameter consists thus of three separate units, each of which can be easily mounted on, and dismantled from, the test piece. Fig. 5 illustrates the whole construction.

It should be noted that every sample had to be subjected to each of the three tests so as to enable us to compare the results from our permeameter with the values obtained by means of the Martens-instrument on the one hand, and with those of the diagram given by the tensile-test machine on the other.

Fig. 6 shows the shape of the test piece devised for the purpose. The middle part of the piece, with a diameter of 10 mm, is the length to be tested, and it is to this part that the tripartite permeameter was attached, while on the head pieces, which were not subject to extension, the rails of the mirror

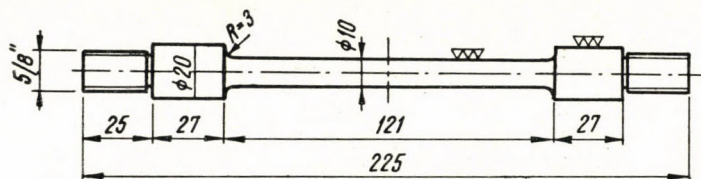


Fig. 6

of the Martens-instrument were fixed. At the same time a diagram was prepared by means of a tensile-test machine.

The experiments were always made by a gradual increase of the stress on the sample gripped by the tensile-test machine and a simultaneous recording of the position of the mA-meter coupled with the permeameter. Thus, it was by the measurement of one of the components of the field strength H that the indications from the instrument were obtained.

Curves indicating connected pairs of values, together with the corresponding rupture diagrams, and further the results of the Martens tests can be seen in Figs. 7 to 9.

Conclusions

1. Unalloyed C steels, further Cr, Cr-V and Mn steels were used in the present experiments. About 60 experiments were made, and there appeared a marked yield point in all diagrams obtained from the permeameter, irrespective of whether steels with or without well-defined yield points were tested. A part of the serial permeameter diagrams is represented in Fig. 10, while the corresponding numerical values appear in Table II.

2. The yield point appears in the majority of the cases as the load corre-

Table I*Permeameter—Martens Experiment*

Record IV., p. 6. Executed: Sept. 10, 1954.

Martens Experiment

Loading	Reading			
	left	right	average	increment
kg	$\frac{1}{500}$ mm	$\frac{1}{500}$ mm	$\frac{1}{1000}$ mm	$\frac{1}{1000}$ mm
3150	258,0	139,2	354,0	—
4000	300,0	161,0	439,2	85,2
4500	337,0	96,0	498,0	58,8
5000	380,0	185,8	568,8	67,8
5100	392,0	191,0	583,0	17,2
5200	401,0	197,0	598,0	15,0
5300	412,0	203,0	615,0	17,0
5400	425,0	209,7	634,7	19,7
5500	440,0	216,9	656,9	22,2
5600	458,0	225,8	683,8	26,9
5700	482,0	237,0	119,0	35,2
5800	—	258,0	—	—

deviation

 $\sigma_F = 76,5$ permeameter $\sigma_F = 76,5$ Martens $\varnothing$ $\sigma_F = 74,6$ rupture

— 2,48%

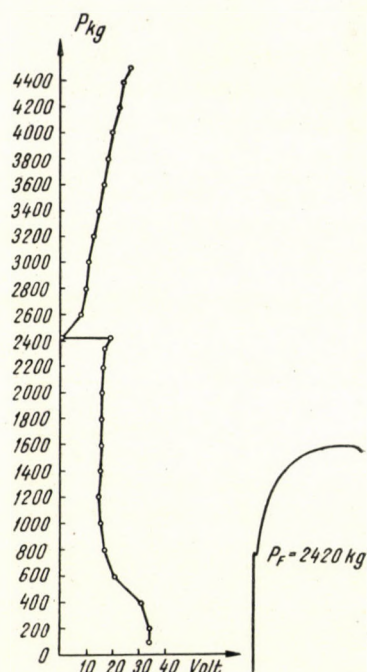


Fig. 7

Chemical composition

C	Si	Mn	S	P	Cu	Cr	Ni	V	Mo
0,30	0,30	0,57	0,017	0,021	0,32	1,10	2,38	0,37	0,29

sponding to the horizontal straight portion of the diagram, while — in some cases — this value is represented only by a sharp knee of the curve.

3. Judging by the position of the pointer of the indicator, the direction of the said horizontal portions of the permeameter diagrams can equally have increasing and decreasing tendencies which may be due to the different magneto-elastic behaviour of different kinds of steel.

4. The yield point as determined by means of the permeameter invariably represents the so called upper yield point provided that the steel has a well-defined yield point.

Table II
Permeameter Martens Experiment
 Record IV., p. 18. Executed: Sept. 20, 1954.
Martens Experiment

Loading	Reading			
	left	right	average	increment
kg	$\frac{1}{500}$ mm	$\frac{1}{500}$ mm	$\frac{1}{1000}$ mm	$\frac{1}{1000}$ mm
200	0	0	0	—
1000	2,5	62,0	64,5	64,5
1200	11,0	73,0	84,0	19,5
1400	20,6	82,2	102,8	18,8
1600	30,2	91,5	121,7	18,9
1800	40,7	100,9	141,6	19,9
2000	51,0	112,0	163,0	21,4
2100	67,8	137,7	205,5	42,5
2200	89,1	173,0	262,1	56,6
2220	96,0	181,0	277,0	14,9
2240	105,8	191,5	297,3	20,3
2260	118,7	204,0	324,7	27,4
2280	126,8	212,1	338,9	14,2
2300	138,0	224,2	362,2	23,3

deviation

$$\begin{array}{llll}
 \sigma_F = 29,3 \text{ kg/mm}^2 \text{ rupture} & 0 & -1,01 \\
 \sigma_F = 29,0 \text{ kg/mm}^2 \text{ permeameter} & -1,02 & -2,07 \\
 \sigma_F = 29,6 \text{ kg/mm}^2 \text{ Martens method} & +1,02 & 0
 \end{array}$$

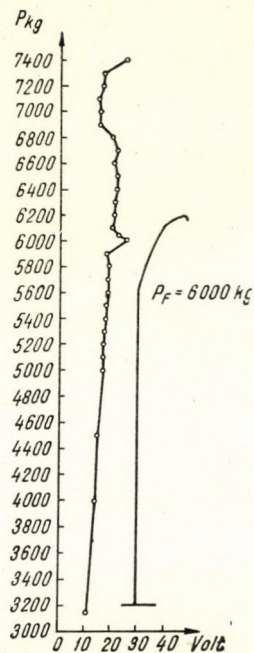


Fig. 8

5. The yield point in the diagrams from the permeameter is well pronounced even if no marked yield point can be seen in the corresponding rupture diagrams.

6. The data resulting from a comparison of the values of the rupture diagrams, those obtained by means of the Martens-instrument, and those given by the permeameter, are collected in Tables I—III. It can be seen that, compared to the values as given by the diagram prepared by means of the tensile-test machine, the maximum deviations of the other values remain within limits of approximately $\pm 10\%$ which, considering the uncertainty of the values of the yield points as appearing in the tensile-test machine diagrams and in view of the experimental errors, may be said to be acceptable.

Table III
Permeameter—Martens Experiment
 Record IV., p. 13. Executed: Sept. 16, 1954.
Martens Experiment

Loading kg	Reading			
	left	right	average	increment
	$\frac{1}{500}$ mm	$\frac{1}{500}$ mm	$\frac{1}{1000}$ mm	$\frac{1}{1000}$ mm
200	0	0	—	—
400	4,0	11,3	15,3	15,3
600	9,6	20,9	30,5	15,2
800	17,0	30,0	47,0	16,5
1000	25,0	38,4	63,4	16,4
1200	32,3	47,4	79,7	16,3
1400	40,0	56,0	96,0	17,3
1600	47,5	65,4	112,9	16,9
1800	55,0	74,3	129,3	16,4
2000	63,0	83,5	146,5	17,2
2200	71,6	93,0	164,6	18,1
2400	140,0	174,0	314,0	149,4

$\sigma_F = 30,8$ permeameter
 $\sigma_F = 30,6$ Martens
 $\sigma_F = 30,8$ rupture

deviation
 $\varnothing$
 $+ 3,4\%$
 $\varnothing$

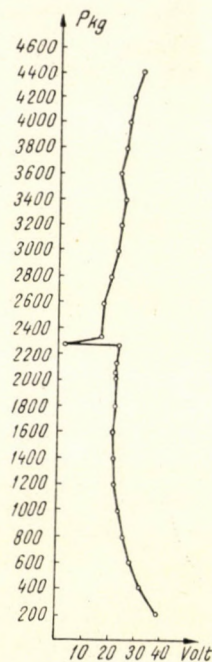


Fig. 9

Chemical composition

C	Si	Mn	S	P
0,40	0,26	0,82	0,052	0,043

Further experiments with the permeameter are planned in order to determine the magnitude of the changes in the yield point as caused by processes of cold forming and shaping, and further to ascertain how far test results are influenced by the rigidity of the tensile-test machine.

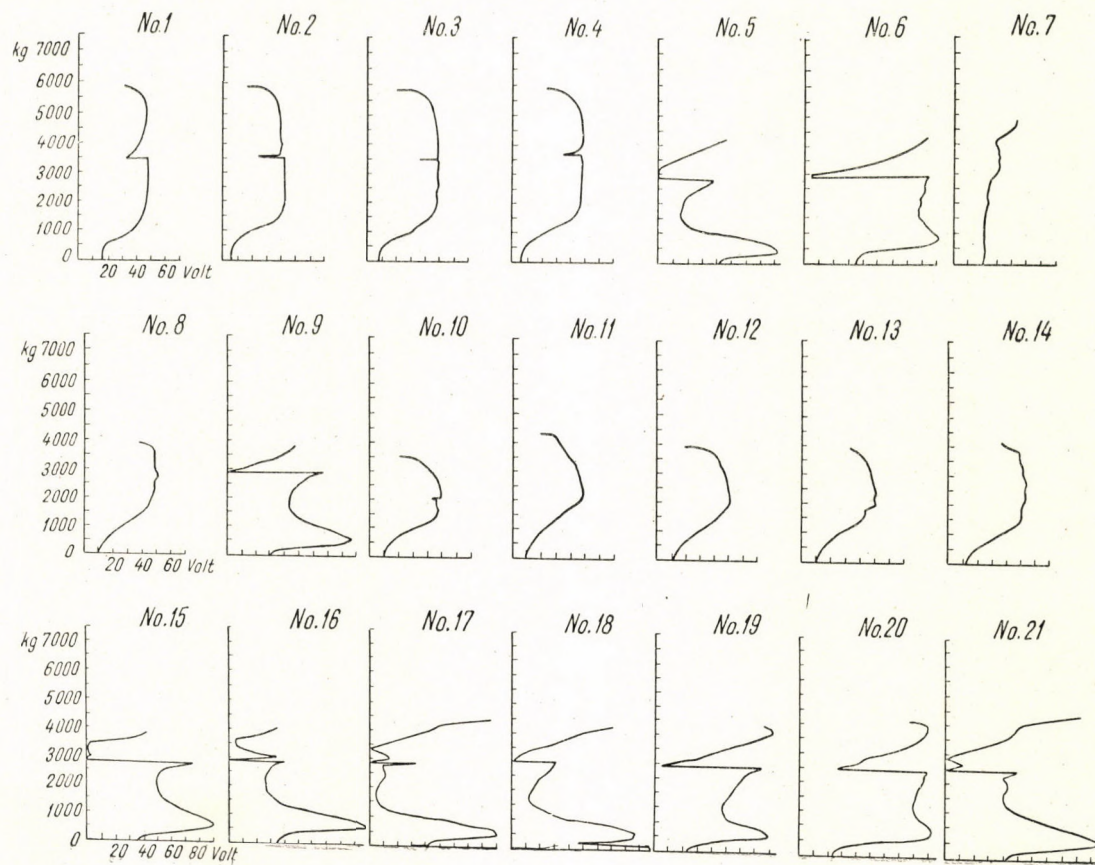


Fig. 10

REFERENCES

1. SVENSSON, I. (Stockholm): The Ferrometer, an Apparatus for Testing the Quality of Steel (Ericsson Communications.)
2. KÜHNE, R.: Magnetfeldmessung mit Eisenkern-Magnetometer nach dem Oberwellenverfahren. *ATM V* 392—1. 1952. VIII.
3. CARR, W. J., JR.: A New D. C. Permeameter. Magnetic Department, Research Laboratories, Westinghouse Electric Corp. Symposium of Magnetic Testing (ASTM 1948).
4. BOSORTH, R. M. and CHAPIN, D. M.: Demagnetising Factors of Rods. *Journal of Applied Physics*. Vol. 13, 320, p. 1942.
5. SPOONER, T.: Properties and Testing of Magnetic Materials. Mc Grow-Hill Book Co. 1927.
6. SNECK, J. L.: The Influence of Eddy Currents on the Apparent Hysteresis Loop of Ferromagnetic Rods. *Physica*. Vol. 8, p. 426, 1941.
7. KOHLRAUSCH, F.: *Praktische Physik*. 19th edit., 1950, Vol. 2, p. 93.
8. BUTTERWORTH, A.: A Sensitive Recording Magnetometer. *Journ. Inst. El. Eng.*, 1947, II, p. 94.
9. DR. FÖRSTER, F.: *Berichte der Deutschen Akademie für Luftfahrtforschung. Vorträge auf der Arbeitstagung*. Juli, 1942.
10. VACQUIER-SIMONS, R. F.—HULL, A. W.: A Magnetic Airborne Detector Employing Magnetically Controlled Gyroscopic Stabilization. *Rev. Sc. Instr.*, Vol. 18, 1947, p. 483.
11. TOLLES, W. E.: Applications of the Saturable Core Magnetometer. *Proc. Nat. Electronics Congr.*, Chicago III, Vol. 3 (Nov., 1947), p. 504.
12. FELDTKELLER, R.: Zur Berechnung der Magnetfeldmessgeräte mit Förstersonden. Unpublished report, July 15th, 1943.
13. WILLIAMS, F. C.: The Fundamental Limitations of the Second-harmonic Type of Magnetic Modulator. *Proc. Inst. Electrical Engrs. II*. 97 (Aug. 1950), p. 445.
14. WARM, M.: Beiträge zur Theorie des Feldstärkedifferenzmessers für magnetische Felder nach Förster. *Zeitschr. für angew. Phys.*, 2/1950, p. 210.
15. CROW, R.: Saturating Core Devices. *Scientif. Book Publ. Co.*, Vincennes, In., N. S. A. 1949.
16. KELLY, J. M.: Magnetic Field Measurements with Peaking Strips. *Rev. Scient. Instr.*, 22 (April, 1951), p. 256.
17. PALMER, T. M.: A Small Sensitive Magnetometer. *The Proc. of the Institute of Electr. Eng.*, Oct. 1953, No. 77, p. 545.
18. FRÖHLICH, B.: Magnetometr s magnetickou Sondou. (*Elektrotechn. Obz.* 42 (1953) čís. 6.)
19. BJELEW, K. P.: Erscheinungen in ferromagnetischen Metallen. VEB Verlag Technik Berlin, 1953.

SUMMARY

Mechanic characteristics of metals are usually determined by static tests (tension, compression, bending). The precise determination of some of these characteristics is extremely difficult, e. g., that of the yield point, especially if the metal to be tested has no "well-defined" yield point. A method has therefore been elaborated by the author in respect of ferromagnetic substances by means of which the yield point of structural steels can be ascertained by magnetization. Samples of C, Cr, CrV and Mn steels were used in the present experiments in the course of which it was attempted to establish a relationship between the changes occurring in the magnetic permeability of the test pieces and the corresponding tensile loads applied in the tests.

Diagrams illustrating the connection between the values indicated by the permeameter and those of the loads to which the test pieces were exposed have proved the changes in permeability during the tensile-strength tests to be so characteristic that it was possible to derive unequivocal values for the yield point from the diagrams.

A specially prepared direct-current permeameter was employed in the experiments under review; its small size, allowing it to be closely fitted on the test pieces, as also its high sensitivity, made it eminently suitable for the accurate determination of the yield point of steels with or without "well-defined" yield points.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ СТАЛЕЙ МАГНИТНЫМ МЕТОДОМ

Канд. техн. наук П. РЕТИ

РЕЗЮМЕ

В настоящее время вообще для определения механических свойств металлов применяются только механические способы испытания прочности (растяжение, сжатие, изгиб и т. д.). Точное определение большинства определяемых на основе испытаний свойств так, например, предела текучести, является исключительно тяжелой задачей, и в особенности тогда, когда идет разговор о материале, не обладающем т. н. «выраженным пределом текучести». Поэтому автор статьи для ферромагнитных материалов разработал такую методику испытаний, при помощи которой предел текучести сталей может быть определен магнитным методом. Испытания проводились на образцах С, Cr, CrV и Mn сталей путем установления зависимости между изменениями магнитной проницаемости материалов и напряжениями, возникающими в материалах при испытаниях на растяжение и нагрузками.

При испытаниях на растяжение изменение магнитной проницаемости в зависимости от изменения предела текучести при нагрузке является столь характерным, что предел текучести может быть определен точно и однозначно на основе диаграммы, отображающей зависимость между индикацией и нагрузкой.

Для определения существующей зависимости использовался прибор постоянного тока специальной конструкции для измерения магнитной проницаемости, небольшие размеры которого позволили установить прибор плотно на испытуемом образце, далее — вследствие высокой его чувствительности — точно определить пределы текучести сталей, обладающих выраженным и не обладающих выраженным пределом текучести.

DÉTERMINATION DE LA LIMITE DE FLUAGE DES ACIERS PAR L'ÉTUDE
[DES PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES]

P. RÉTI

Candidat des sc. techniques

RÉSUMÉ

Actuellement, ce ne sont que les essais de résistance mécanique (essais de traction, de compression, de flexion etc.) qui sont d'une application générale pour la détermination des caractéristiques mécaniques des métaux. La détermination expérimentale de plusieurs des caractéristiques comme par exemple la mesure de la limite de fluage est extraordinairement difficile, surtout s'il ne s'agit pas de matériaux possédant une limite de fluage dite «prononcée». C'est pourquoi l'auteur a étudié pour des matières ferro-magnétiques une méthode permettant de déterminer exactement la limite de fluage des aciers par des essais de magnétisme. Il a essayé des spécimens en acier au C, Cr, CrV et Mn, en cherchant une relation entre le changement de la perméabilité magnétique de l'acier et les tensions produites dans la matière pendant l'essai de traction.

Pendant l'essai de traction le changement de la perméabilité à la limite de fluage est tellement caractéristique que la limite de fluage peut être déterminée précisément et sans ambiguïté à partir du diagramme représentant la relation entre l'indication de l'instrument et la charge.

La relation a été déterminée à l'aide d'un perméamètre spécial à courant continu. Ses dimensions réduites ont permis de l'ajuster de près au spécimen, et grâce à sa sensibilité élevée, la limite de fluage des aciers avec ou sans limite de fluage prononcée, a pu être déterminée exactement.

BESTIMMUNG DER FLIESSGRENZE VON STÄHLN AUF MAGNETISCHEM WEGE

P. RÉTI

Kandidat der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Zur Bestimmung der Festigkeitswerte von Metallen werden derzeit nur die Festigkeitsprüfungen (Zerreiß-, Druck-, Biegeversuch usw.) allgemein angewendet. Die genaue Bestimmung eines Teiles der experimentell bestimmbaren Kennwerte ist ausserordentlich schwierig, insbesondere wenn es sich nicht um einen Werkstoff mit sogenannter »ausgesprochener« Fliessgrenze handelt. Deshalb hat der Verfasser für ferromagnetische Stoffe ein Verfahren ausgearbeitet, mit dem die genaue Bestimmung der Fliessgrenze von Stählen auf magnetischem Wege möglich ist. Vom Verfasser wurden C, Cr, Cr-V und Mn enthaltende Probestäbe untersucht und ein Zusammenhang gesucht, der für den betreffenden Werkstoff zwischen der Änderung der magnetischen Permeabilität und den während des Zerreißversuchs auftretenden Spannungen bzw. der Belastung besteht.

Während des Zerreißversuchs ist die Änderung der Permeabilität bei Belastung an der Fliessgrenze so charakteristisch, dass die Fliessgrenze aus dem Diagramm, das den Zusammenhang zwischen dem vom Instrument gemessenen Wert und der Belastung darstellt, genau und eindeutig festgestellt werden kann.

Zur Feststellung des Zusammenhange diente ein besonders ausgebildetes Gleichstrompermeameter, dessen kleine Abmessungen es ermöglichten, es eng an den Probekörper anzupassen. Seine grosse Empfindlichkeit ermöglichte es ferner, sowohl die Fliessgrenze von Stählen mit ausgeprägter Fliessgrenze wie auch von Stählen ohne eine solche genau zu bestimmen.



NEUE METHODE ZUR BESTIMMUNG DER VERUNREINIGUNGEN, INSBESONDERE DES SAUERSTOFF- UND KOHLENSTOFFGEHALTES VON VERSCHIEDENEN TITANPROBEN*

T. MILLNER

KORRESP. MITGLIED DER UNGAR. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

A. J. HEGEDÜS und M. DVORSZKY

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR FERNMELEDETECHNIK, BUDAPEST

Es ist bekannt, dass der Sauerstoff vom metallischen Titan sehr begierig in fester Bindung aufgenommen wird. Davon stammen einerseits die bekannten Schwierigkeiten der Herstellung von sauerstoffarmen metallischen Titansorten, und auf denselben Umstand ist andererseits auch die Tatsache zurückzuführen, dass man auch heute über keine in jeder Hinsicht entsprechende analytische Methode für die Bestimmung von Sauerstoff (und anderen Verunreinigungen) im metallischen Titan verfügt.

Eine solche Methode ist aber für die Entwicklung der Titanmetallurgie unentbehrlich, da die Härte, Verfestigung und Bearbeitbarkeit von Titan sehr stark und ungünstig auch schon von kleinen Sauerstoffmengen (z. B. schon von 0,01—0,5% Sauerstoffgehalt) beeinflusst werden.

Ist im Titanmetall ausser Sauerstoff keine andere Verunreinigung vorhanden, so kann man den Sauerstoffgehalt einfach durch Härtemessung [1] oder aus der Vergrößerung der Gitterkonstanten des Metalles [2] bestimmen, weil sich diese Metalleigenschaften zwischen den angegebenen Grenzen parallel zum Sauerstoffgehalt ändern. Die technischen Titanmetallsorten enthalten jedoch neben Sauerstoff auch andere Verunreinigungen. Fast alle enthalten z. B. Stickstoff und häufig auch Kohlenstoff, Eisen, Magnesium usw. Die Anwesenheit dieser Verunreinigungen macht deshalb eine direkte Bestimmung des Sauerstoffgehaltes nötig. Bisher haben sich zwei direkte Methoden eingebürgert.

Die richtigere ist das sogenannte *Vakuumschmelzverfahren*. Bei diesem wird die Titanprobe mit Zinnpulver zusammengepresst oder in eine Zinnfolie eingewickelt und mit Graphitpulver in einem Graphittiegel im Vakuum auf 1900°—2000° C erhitzt. Die Probe schmilzt und der Sauerstoffgehalt des Metalles vereinigt sich mit Graphitkohlenstoff zu Kohlenoxyd. Dieses wird dann mittels eines Katalysators (bestehend aus Kupferoxyd, Oxyden seltener Erden und Kaolin) zu Kohlendioxyd oxydiert und volumetrisch gemessen [3]. Zu dieser Methode bedarf es bedeutender vakuumtechnischer Erfahrungen und ausgewählter Graphitsorten. Das Verfahren ist nicht einfach, hat aber den Vorteil, dass der Sauerstoffgehalt von allen anderen verunreinigenden Elementen abgesondert, in Form der charakteristischen CO-Verbindung gemessen wird.

Die andere Methode ist das sogenannte *Chlorieren*. Nach dieser Methode wird das Titanmetall im Chlorstrom auf etwa 400° C erhitzt. Die entstandenen Chloride werden verflüchtigt und der Titangehalt des Rückstandes nach einem Aufschluss mit Kaliumbisulfat gravimetrisch, z. B. mit Kupferron, bestimmt [4]. Vorausgesetzt, dass der Sauerstoffgehalt des metallischen Titans im Rückstand vollständig zurückbleibt und dort mit einer gegebenen Titanmenge verbunden ist (also z. B. als TiO_2 zurückbleibt), kann aus dem Titangehalt des Rückstandes der Sauerstoffgehalt des Metalles berechnet werden. Diese Methode ist ziemlich einfach und genügend rasch, lässt aber den Umstand ausser acht, dass falls die Metallprobe auch Kohlenstoff (z. B. als Karbide) enthält, sich ein Teil des Sauerstoffgehaltes der Bestimmung entziehen kann, da daraus flüchtiges Phosgen entsteht [4], [14].

Zur Bestimmung des Sauerstoffgehaltes und anderer Verunreinigungen des metallischen Titans wurde von uns eine neue Methode ausgearbeitet, die man als *Vakuumbromierung* bezeichnen kann. Die neue Methode ist viel einfacher als das Vakuumschmelzverfahren und arbeitet richtiger als das Chlorie-

*Vorgetragen von T. Millner korresp. Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, am Kongress für Leichtmetalle Budapest, am 29. September 1955.

ren, da es frei vom Phosgenfehler ist, weil Brom und Kohlenstoff mit Sauerstoff keine phosgenanaloge Verbindung ergeben [5]. Der Sauerstoffgehalt wird bei dieser Methode ebenso wie beim Chlorieren aus dem Titangehalt des nichtflüchtigen Rückstandes berechnet. Die Methode soll hier im folgenden ausführlich geschildert werden.

Vorher ist aber zu erwähnen, dass CODELL und NORWITZ [5] vor einigen Monaten ein umständlich ausgearbeitetes Sauerstoffbestimmungsverfahren veröffentlicht haben, nach dem das mit Kohle vermischte metallische Titan im Bromstrom auf 825° C erhitzt und der Sauerstoffgehalt aus dem gebildeten und in CO₂ übergeführten Kohlenoxyd bestimmt wird. Heute lässt es sich noch kaum entscheiden, ob dieses Verfahren gegenüber dem einfachen Vakuumbromieren einen Vorteil besitzt.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, dass neuerdings auch radioaktive und massenspektroskopische Methoden zur Bestimmung des Sauerstoffgehaltes im metallischen Titan ausgearbeitet wurden [6, 7]; auch ein vakuumspektroskopisches Verfahren wurde zu diesem Zweck herangezogen [8]; die Arbeit von CODELL und NORWITZ lässt jedoch vermuten, dass sich diese Methoden in der analytischen Praxis noch nicht durchgesetzt haben.

Das Vakuumbromieren

Auf der Suche nach einer besseren und trotzdem einfacheren Methode als das Chlorieren des metallischen Titans, wurde von uns das Chlor durch Jod ersetzt. Das Jod reagiert aber mit unseren metallischen Titansorten in dem analytisch günstigen Temperaturbereich nicht genügend intensiv. Aus diesem Grunde wurde zum Bromieren übergegangen. Hierbei stellte es sich heraus, dass die Bromdämpfe mit inerten Gasen (z. B. mit Argon) verdünnt zu langsam reagierten. Andererseits reagiert flüssiges Brom mit metallischem Titan so heftig, dass sich dabei die Titanstückchen bis zum Glühen erhitzen. Auf Grund dieser Beobachtungen wurde schliesslich eine einfache, sich selbst regulierende Methode gefunden, mit der eine Titanprobe in einem geschlossenen, evakuierten Glasgefäss mit Bromdampf in kurzer Zeit ohne lästige Überhitzung vollständig in Titanbromid umgewandelt werden kann. Die Verunreinigungen lassen sich dann in dem geschlossenen Glasgefäss selbst vom Titanbromid trennen und im Rückstand bestimmen.

Diese Methode sei nun an Hand der Abb. 1 beschrieben.

Die genau abgewogene Titanprobe von 0,1—1,0 g Gewicht wird durch die verengte Öffnung des Teiles *b* in den Teil *a* des Glasgefässes (Abb. 1) eingeführt. Um bei der Vorbereitung der Metallprobe eine Erwärmung und Oxydation des Metalles zu vermeiden, muss man zur Zerkleinerung grösserer Metallstücke Juweliersäge, Zwickzange u. dgl. verwenden. Wenn nötig, kann die Oberfläche der Titanstücke mechanisch von der Oxydschicht befreit und mit CCl₄ oder Benzol entfettet werden, nur muss man dann auf die vollständige Verdampfung des Lösungsmittels achten. Die Temperatur darf dabei 150° C nicht überschreiten, da sich das metallische Titan oberhalb dieser Temperatur schon merklich oxydieren kann. In den Schenkel *b* des Apparates giesst man durch einen entsprechenden Trichter 5 ml flüssiges Brom hinein und bringt es mittels einer Kältemischung aus Kohlensäureschnee und Alkohol zum Gefrieren. Der Teil *b* darf dabei nur bis zum Bromniveau in die breiige Kältemischung hineinragen, da sonst zu viel Luftfeuchtigkeit auf die innere Wand des Teiles *b* ausfriert. Dann wird mit einem Glasstab ein Glaswollebausch etwa 1 cm über das erstarrte Brom eingeführt, darauf durch einen Papiertrichter rasch eine etwa 5 mm dicke Phosphorpentoxyschicht eingefüllt, dann wieder

ein Glaswollebausch eingeschoben und schliesslich die Öffnung des Teiles *b* bei der Verengung abgeschmolzen. Dabei darf sich das Brom nicht verflüssigen. Danach wird der Teil *b* des Gefässes etwa bis zu der Phosphorpentoxydschicht in die Kältemischung gesenkt und das Gefäss durch die Öffnung *c* mit einer Quecksilber-Diffusionspumpe evakuiert. Zwischen dem Gefäss und der Diffusionspumpe müssen mindestens zwei Ausfriergefässe mit flüssiger Luft eingeschaltet werden, um den Bromdampf vom Quecksilber vollkommen fernzuhalten. Während der Evakuierung erhitzt man die Titanprobe langsam mit freier Flamme auf 100—200° C, um die Oberflächenverunreinigungen besser entfernen zu können. Ist ein Vakuum von etwa 10^{-5} Hg mm erreicht — wozu man etwa 10—12 Minuten braucht —, so schmilzt man das Gefäss beim eingegengten Teil des Rohres *c* ab, nimmt es aus der Kältemischung heraus und befestigt es derart in die Klemme eines Bunsenstativs, dass der Teil *d* waagrecht oder ein wenig nach *a* geneigt steht. Nachdem der Bromvorrat geschmolzen ist, beginnt die Oberfläche der Titanprobe in der Bromdampf-atmosphäre zu glänzen und sich leicht zu erwärmen. Es setzt eine lebhaft, aber nicht stürmische Titanbromidbildung ein, während aus dem Teil *b* immer mehr und mehr Bromdampf nach dem Teil *a* hinüberdestilliert. Überlässt man die Probe sich selbst, so verflüssigt sie sich in einigen Stunden restlos. Wenn eine rasche Schüttelung gesichert werden kann, läuft die Reaktion noch rascher ab. Man kann die Reaktion auch dadurch beschleunigen und die Ergebnisse der Sauerstoffbestimmung gleichmässiger gestalten, dass man in den Teil *a* des Gefässes eine Platin- oder Reingoldkugel von etwa 6 mm Durchmesser unterbringt und damit

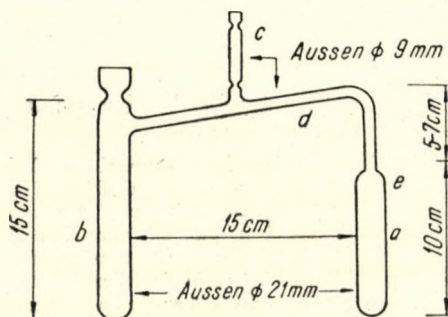
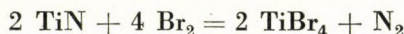


Abb. 1. Vakuumbromierungsapparat aus feuerfestem, titanfreiem Hartglas

die noch festen Teilchen während des Reaktionsablaufes öfters zerdrückt. Bei unreinen Titanproben, die im Bromdampf zu langsam reagieren, lässt sich durch Abkühlung des Schenkels *a* in diesem mehr oder weniger Brom verflüssigen und dadurch eine heftigere Reaktion hervorrufen. Auch bei reineren Titansorten kann man durch diesen Griff die Reaktion am Ende beschleunigen.

Das dunkelbraune Reaktionsgemisch, das durch die Einwirkung von Brom entstanden ist, enthält neben Titanbromid die meisten metallischen Verunreinigungen der Titanprobe als Bromide. Die Anwesenheit dieser Bromide hemmt den vollständigen Ablauf der Reaktion nur dann, wenn die Bromide in dem Brom-Titanbromidgemisch schwer löslich sind. Meistens sind aber die Metallverunreinigungen im metallischen Titan nicht in einer so grossen Menge vorhanden, dass ihre Anwesenheit den Reaktionsablauf stören würde. Es wurde aber beobachtet, dass ein Kohlenstoffgehalt, der oberhalb 1% liegt, die Reaktionsgeschwindigkeit merklich herabsetzt und manchmal die Umwandlung sogar ganz verhindert. Normalerweise bleibt der Kohlenstoff nach dem Bromieren in dem Reaktionsgemisch feinverteilt zurück, wobei er an seiner Oberfläche Bromide, besonders Titanbromid, stark adsorbiert zurückhält. Dadurch kön-

nen grössere Kohlenstoffmengen nicht nur das Bromieren, sondern auch die weiter unten ausführlich beschriebene Sauerstoffbestimmung merklich stören. Grössere Stickstoffmengen, besonders über 0,5%, können die Bromierung ebenfalls hemmen. Auch ein höherer Sauerstoffgehalt kann hemmend wirken. Die hemmende Wirkung von Stickstoff und Sauerstoff macht sich besonders dann bemerkbar, wenn sie an der Oberfläche des Metalles eine mehr oder weniger dicke Nitrid- oder Oxydschicht bilden. Kleine Stickstoff- (Nitrid-) Mengen stören nach unseren Beobachtungen die Sauerstoffbestimmung nicht, weil sie beim Bromieren unter Freigebung von elementarem Stickstoff vielleicht nach der Formel



zersetzt werden.

Die Absonderung des Rückstandes

Nach der beendeten Reaktion zwischen der Titanprobe und den Bromdämpfen stellen wir den Teil *b* des Reaktionsgefässes zuerst in eine Kochsalz-Eis-Kältemischung und nach einiger Zeit in eine Kohlensäureschnee-Alkohol-Kältemischung, um aus dem Bromid-Brom-Gemisch das überschüssige Brom in den Teil *b* herüberzulocken. Dies muss langsam geschehen. Bei zu rascher Kühlung stösst die Flüssigkeit im Teil *a* sehr stark. Das muss man aber unbedingt vermeiden, weil dadurch auch ungelöste Teilchen in den Arm *d* hinübergeschleudert werden, wodurch dann die Sauerstoffbestimmung verfälscht wird. Die in dem Reaktionsgemisch vorhandenen Polybromide zersetzen sich ohne Erwärmung kaum, man muss aber, um das Stossen zu vermeiden, zuerst das freie Brom bei Zimmertemperatur langsam abtreiben und die Polybromide erst nachher durch Erwärmung zersetzen. Zu diesem Zwecke wird der Teil *a* des Gefässes derart in einen Rohofen gesenkt (innerer Durchmesser etwa 26 mm, Länge 130—150 mm, auf 70—100° C vorerwärmt), dass das Bromidgemisch unten aus dem Ofen herausragt. Dabei muss Teil *b* des Gefässes ständig in der Kältemischung bleiben. Jetzt wird Teil *a* des Gefässes vorsichtig und stufenweise derart in die Höhe gehoben, dass dadurch das Bromidgemisch allmählich in die Heizzone des Ofens gelangt. Mit dieser von oben angefangenen Erwärmung können die Polybromide zersetzt und das grünlich-gelbe Titanbromid ohne Stossen abdestilliert werden. Im Teil *d* erstarrt das Titanbromid gewöhnlich mit rötlicher Farbe. Es ist dort meistens durch Verunreinigungen rötlich gefärbt. Aus diesem Teil lässt sich das Titanbromid mit freier Flamme vorsichtig in den Teil *b* treiben. Nach einigen Minuten, sobald der Boden des Teiles *a* die Mitte des Ofens erreicht hat, bewegt man das Gefäss langsam abwärts, um das Kondensat von der inneren Wand des Teiles *a* rückstandslos in den sich nach *a* neigenden Teil *d* überführen zu können. Hat man dies erreicht, so wird die Kältemischung vom Teile *b* entfernt. Der Teil *a* wird mit den Rückständen wieder in die warme Zone des Ofens geschoben, die Temperatur des Ofens auf etwa 500° C erhöht und der graue Rückstand eine Stunde lang den Bromdämpfen ausgesetzt. Dadurch werden die von den schwerer verdampfenden Bromiden eventuell eingeschlossenen Titanreste vollständig in Titanbromid übergeführt und entfernt.

Nach einstündigem Bromieren bei 500° C wird der Teil *b* in flüssige Luft getaucht und der Teil *a* — ohne die flüssige Luft zu entfernen — nach einigen Minuten aus dem Ofen herausgenommen. Sind alle Dämpfe ausgefroren, so entfernt man die flüssige Luft und zerschneidet das Gefäss im Punkte *c* in zwei Teile. Man gibt dann in den Teil *a* 3 ml 20%ige HF-Lösung, um die stark haftenden Rückstände von der Glaswand zu entfernen. Den Inhalt des Teiles *a* spült man darauf in eine Platinschale über, fügt 10 ml 1 : 1 Schwefelsäure hinzu und dampft dann zuerst mit einer Infrarotlampe, später mit freier Flamme soweit ein, bis Schwefeltrioxyddämpfe erscheinen. Dadurch erreicht man eine klare Auflösung aller Rückstände. Die klare Lösung ergänzt man in einem Messkolben auf 50 ml und benutzt aliquote Teile dieser Lösung zur Bestimmung von Titan (d. h. von Sauerstoff), Magnesium und Stickstoff.

In der Tabelle I werden die spektrographisch gefundene Zusammensetzung eines Bromierungsrückstandes und gewisse Eigenschaften der betreffenden Bromide angegeben.

Tabelle I

Im Bromierungsrückstand spektrographisch festgestellte Elemente		Farbe	Schmelzpunkt	Siedepunkt
Element	Relative Intensität	der Bromide der im Rückstand gefundenen Elemente		
Ti	(5)	grünlichgelb	39° C	230° C
Mg	(4)	weiss	700° C	—
Si	(2)	farblos	5° C	153° C
Fe	(2)	bordeaux	sublimiert	
Ca	(1)	weiss	765° C	810° C
Al	(1)	weiss	97° C	263° C
Cu	(1)	schwarz	498° C	—
Mn	(1)	rosa	zerfällt	
Ni	(1)	gelblichbraun	zerfällt	
Co	(1)	grün	zerfällt	
Cr	(1)	rötlichschwarz	sublimiert	
V	(<1)	grünlichschwarz	—	—
B	(<1)	farblos	—46° C	90° C

Titanbestimmung im Rückstand und Berechnung des Sauerstoffgehaltes der Titanprobe

Die Titanbestimmung wird aus einem aliquoten Teil der Stammlösung des Rückstandes mit der wohlbekannten Wasserstoffsuperoxydmethode durchgeführt [9, 10]. Dazu führt man 5 ml Stammlösung in einen Messkolben von 50 ml über, fügt 4 ml 1 : 1 Schwefelsäure, 1 ml 1 : 1 Phosphorsäure und 5 ml 3%ige H_2O_2 -Lösung hinzu, füllt bis zur Marke auf und kolorimetriert die Lösung bei 436 $m\mu$.

Aus den Titanwerten berechnet man dann den Sauerstoffgehalt der Titanprobe auf Grund der begründeten Voraussetzung, dass der Sauerstoffgehalt der Titanprobe als TiO_2 im Bromierungsrückstand enthalten ist.

Magnesiumbestimmung

Zur Magnesiumbestimmung wurde anstatt der weniger empfindlichen komplexometrischen Titrierung die kolorimetrische Titangelbmethode gewählt [11]. In einen Messkolben von 50 ml wird ein 40—250 μg Mg entsprechender Teil der Stammlösung übergeführt und 5 ml

0,15%ige KCl-Lösung, 5 ml 2%ige Polyvinylalkohol-Lösung, 0,5 ml wässrige 0,2%ige Titan-gelblösung hinzugefügt. Dann wird der Kolben bis etwa 40 ml mit destilliertem Wasser aufgefüllt und unter langsamem Rühren 5 ml 2N NaOH-Lösung tropfenweise hinzugegeben. Dann wird bis zur Marke aufgefüllt, 40 Minuten stehen gelassen und schliesslich bei 530 m μ kolorimetriert. Alle Lösungen sind vor jeder Serienbestimmung frisch zuzubereiten. Dementsprechend müssen auch die Messkurven vor jeder Serienbestimmung neu aufgenommen werden. Zu den Vergleichslösungen muss man dieselbe Titanmenge hinzugeben, die in der Stammlösung enthalten ist, denn durch eine im Vergleich zur Magnesiummenge doppelte Titanmenge wird die Extinktion schon merklich geändert.

Eisenbestimmung

Die Eisenbestimmung wird sowohl in der Stammlösung des Bromierungsrückstandes als auch in einer Auflösung des Metalles mit der wohlbekannten Rhodanidmethode durchgeführt [12]. Aus der Stammlösung oder aus einer Lösung des metallischen Titans in 6 N Schwefelsäure führt man eine 10–300 μ g Eisen entsprechende Menge in einem Nesslerzylinder über und fügt 50 ml destilliertes Wasser, 2 ml 1 : 1 Schwefelsäure und tropfenweise soviel 0,1 N Permanganatlösung hinzu, bis sich die Lösung schwach rosa färbt. In einem gleichen Nesslerzylinder gibt man 50 ml destilliertes Wasser, 2 ml 1 : 1 Schwefelsäure und soviel 0,1 N Permanganatlösung, bis sich die Lösung eben rosa färbt. Dann wird in beide Gefässe 5 ml 40%ige Kaliumrhodanidlösung gegeben und die Blindprobe mit einer Messlösung von 10 μ g Fe³⁺/ml soweit titriert, bis die zwei Lösungen bei gleichem Volumen die gleiche Farbintensität aufweisen.

Stickstoffbestimmung

Zur Stickstoffbestimmung wird ein SCHULEK—VASTAGH-Apparat [13] benutzt. In den 250-ml-Kolben des Apparates führt man einen 0–100 μ g Stickstoff entsprechenden Teil der Stammlösung oder der direkten Auflösung eines metallischen Titans über, gibt 10 ml 1 : 1 Schwefelsäure hinzu und verdünnt den Inhalt auf etwa 60 ml. Dann gibt man in einen Erlenmeyerkolben 10 ml 0,17%ige Borsäurelösung und 4 Tropfen einer Mischindikatorlösung, die 0,034% Methylrot und 0,166% Bromkresolgrün in Äthylalkohol gelöst enthält. Man taucht darauf das Ende des Kühlers in diese Lösung hinein, gibt zu dem Inhalt des Kolbens langsam 30 ml 30%ige NaOH-Lösung hinzu und destilliert mit freier Flamme etwa 15 ml Flüssigkeit aus dem Apparat in den Erlenmeyerkolben. Schliesslich titriert man den Inhalt des Erlenmeyerkolbens mit 0,007 N Schwefelsäure. Die Methode wird mit einer 10 μ g N/ml enthaltenden Ammoniumchlorid-Eichlösung eingestellt. Diese für die Bestimmung kleiner NH₃-Mengen gut bewährte Methode stammt von THOMPSON [12].

Kohlenstoffbestimmung

Es ist allgemein gebräuchlich, den Kohlenstoffgehalt eines Metalles dadurch zu bestimmen, dass man das Metall verbrennt und die entstandene Kohlensäure misst. Meistens lassen sich in dieser Weise auch geringe Kohlenstoffgehalte genau bestimmen. Die Kohlensäure wird dabei in einer Ba(OH)₂-Lösung aufgefangen und der Laugenüberschuss mit Säure zurückgemessen. Hier ist aber zu bemerken, dass die Absorption von CO₂ in Ba(OH)₂-Lösungen bei geringen CO₂-Konzentrationen nur sehr langsam vor sich geht. Das bringt in diesem Fall folgende analytische Schwierigkeiten mit sich. Wird das Verbrennen des metallischen Titans in raschem Sauerstoffstrom durchgeführt, so läuft zwar die Verbrennung vollständig ab, ein Teil des Kohlendioxydes geht aber unverschluckt durch die Ba(OH)₂-Lösung hindurch. Versucht man es andererseits, die Titanprobe in langsamem Sauerstoffstrom zu verbrennen, so erreicht man eine vollständige Absorption, doch wird die Metallprobe nicht vollständig verbrannt. In beiden Fällen bekommt man zu niedrige, falsche Kohlenstoffwerte.

Es wurde daher von uns eine Verbrennungsmethode entwickelt, bei der das Verbrennen der Metallprobe in raschem Sauerstoffstrom stattfindet, die plötzlich entstehende grössere CO₂-Menge aber zuerst an tiefgekühltem Silikagel adsorbiert und von diesem durch Erwärmen so langsam ausgetrieben wird,

dass die vollständige Absorption in einer $\text{Ba}(\text{OH})_2$ -Lösung gesichert werden kann.

Zu derartigen Bestimmungen wird der in der Abb. 2 dargestellte Apparat benutzt. Man wägt etwa 0,5 g Titanspäne in das Schiffchen 11 ein und schiebt dieses mit dem Eisenstab 8a (mit Hilfe eines Magnets) so tief in das Quarzrohr 9 hinein, bis es vor die Öffnung des Ofens gelangt. Jetzt wird das Quarzrohr 9 bei 7 geschlossen und durch das Rohr Argongas mit einer Geschwindigkeit von 10 l/St. durchgelassen. Nach 15 Minuten wird das Ausfriergefäß 14 (mit Silikagelfüllung) mit Kohlensäureschnee-Alkoholalkältemischung 15 umgeben. In das Gefäß 21 bringt man einen Tropfen einer alkoholischen Lösung von 1,2%

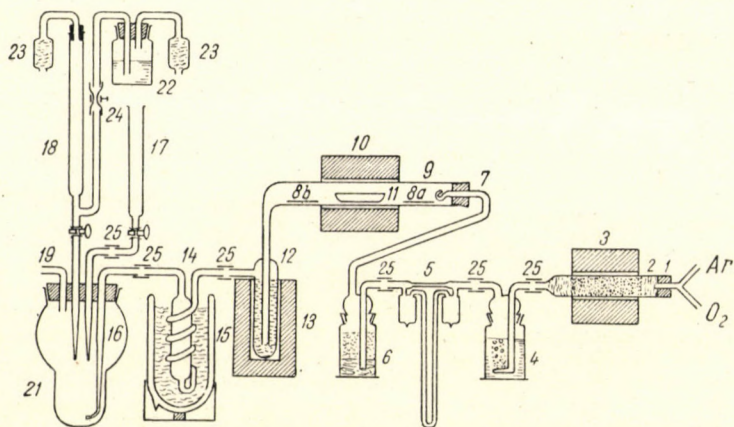


Abb. 2. Kohlenstoffbestimmungsapparat

Phenolphthalein und 0,8% Methylenblau ein und schiebt dann das Gefäss auf den grossen Pfropfen 20 auf. Die mit 0,01 N Oxalsäure- (17) und 0,02 N Ba(OH)₂- (18) Lösungen beschickten Büretten müssen schon vorher auf Null eingestellt werden. Die Bürette 18 wird aus einer Vorratflasche 22 beschickt. Vorratflasche und Bürette 18 werden mit Askarit vor CO₂-Zutritt bewahrt. Dann schiebt man das Schiffchen mittels 8a in die bis auf 1200—1300° C erhitzte Heizzone des Ofens hinein, zieht 8a zurück und tauscht den Argonstrom in 30 Minuten allmählich auf einen Sauerstoffstrom von 15—20 l/St. aus. Der Sauerstoff wird mit erhitztem CuO 3, Chromschwefelsäure 4 und Askarit 6 gereinigt und die Strömungsgeschwindigkeit der benutzten Gase mit Hilfe des Manometers 5 eingestellt. Nachher werden in das Gefäss 21, entsprechend der erwarteten Kohlensäuremenge, 5—10 ml Ba(OH)₂-Lösung hineingelassen, worauf dann der Sauerstoffstrom auf 0,3 l/St vermindert wird. Jetzt muss man auf die Regelmässigkeit der langsamen Blasenbildung am Ende des Rohres 16 besonders acht geben. Ist der Sauerstoffstrom richtig eingestellt, so nimmt man die Kältemischung von 14 ab und tauscht sie auf ein bis 150° C erhitztes Ölbad um.

Während der darauffolgenden Desorption der Kohlensäure vom Silikagel schiebt man das Schiffchen mit dem Eisenstab *8b* aus der Heizzone heraus. Nach 30 Minuten rührt man den Inhalt des Gefäßes *21* mit einem lebhafteren Sauerstoffstrom um und titriert die $\text{Ba}(\text{OH})_2$ -Lösung aus der Bürette *17* mit Oxalsäure soweit, bis die Indikatorfarbe von grünlichblau auf violettblau umschlägt.

Wenn man den Kohlenstoffgehalt eines Bromierungsrückstandes bestimmen will, verfährt man in ähnlicher Weise. Der Bromierungsrückstand wird mit HF-Lösung in ein Aluminiumoxydschiffchen übergespült und eingetrocknet. Da in dieser Weise auch gewisse Bromverbindungen der Verunreinigungen usw. in den Verbrennungsraum gelangen und durch den Sauerstoffstrom mitgeführt werden können, ist es in diesem Falle notwendig, das mit Silberspänen gefüllte Gefäß *12* mit dem Ofen *13* auf $400\text{--}500^\circ\text{C}$ zu erhitzen, um die Bromspuren dem Sauerstoffstrom entziehen zu können. Im übrigen verfährt man genau so, wie oben für Titanmetall beschrieben wurde, nur kann man hier statt des Argonstroms auch einen Sauerstoffstrom anwenden.

Alle unsere Bestimmungen wurden mit zweimal destilliertem Wasser und sorgfältig gereinigten Gasen durchgeführt. Dadurch konnten immer sehr kleine, konsequente Leerwerte erreicht werden. Die Brauchbarkeit der Apparatur und der Methode wurde durch Verbrennen von spektralreinem Graphit kontrolliert und bewiesen. Einige unserer diesbezüglichen Messwerte sind in der Tabelle II zusammengestellt.

Tabelle II

Eingewogener Kohlenstoff μg	Gefundener Kohlenstoff μg	Fehler	
		μg	%
338	337	— 1	— 0,3
194	197	+ 3	+ 1,5
287	281	— 6	— 2,1
610	614	+ 4	— 0,75
643	670	+ 27	+ 4,0
735	700	— 35	— 5,0
1080	1070	— 10	— 0,9
1112	1182	+ 70	+ 6,2

Die analytischen Vorteile der Vakuumbromierung

Das oben beschriebene Vakuumbromieren und die geschilderte Kohlenstoffbestimmung sind unserer Meinung nach analytische Methoden, die noch weiterentwickelt werden sollten. Sie geben aber schon heute wertvolle Angaben

über die Verunreinigungen der verschiedenen Titansorten. Dies ist u. a. aus der Tabelle III ersichtlich. Alle Angaben dieser Tabelle wurden an ein und derselben inländischen Rohtitanprobe gewonnen. Der C-, N-, Fe- und Mg-Gehalt wurde sowohl direkt im Metall wie auch indirekt im Bromierungsrückstand bestimmt. Der Sauerstoffgehalt wurde ebenfalls durch Vakuumbromierung gemessen.

Die Angaben der Tabelle III lassen einige wichtige Folgerungen zu.

1. Die Bromierungsmethode ergibt konsequente Sauerstoffwerte, falls ein Nachbromieren bei 400–500° C durchgeführt wird.

2. Der Kohlenstoffgehalt beeinflusst die Sauerstoffwerte bei dieser Methode nicht. Man findet denselben Kohlenstoffgehalt unabhängig davon, ob man das Metall oder seine Bromierungsrückstände analysiert.

3. Die Bindung von Stickstoff im metallischen Titan kann durch eine oberhalb 400° C durchgeführte Nachbromierung aufgehoben werden.

4. Eisenbromid bleibt während einer bei 250° C durchgeführten Nachbromierung im Rückstand zurück.

Tabelle III

Bestimmung der Verunreinigungen eines inländischen Rohtitanmetalles einerseits aus dem Metall, andererseits aus dem Bromierungsrückstand des Metalls

Direkte Bestimmung %				Bestimmung aus dem Bromierungsrückstand								
C	N	Fe	Mg									
				Temperatur der Abtrennung (a) und des Nachbromierens (b) °C		Menge %	Bromierungsrückstand					
							Einzelne Betsandteile in %					
				(a)	(b)		(Ti)	O	C	N	Fe	Mg
0,089	0,010	0,50	0,22	200	250	3,42	0,79	0,53	0,092	0,011	0,45	0,23
						3,13	0,82	0,55		0,008	0,53	0,22
0,086	0,013	0,54	0,25	200	400	3,48	0,71	0,47	0,088	0,003	0,42	0,20
						3,41	0,61	0,41		0,004	0,47	0,17
0,088	0,012	0,49	0,25	200	550	3,36	0,66	0,44	0,085	0,005	0,43	0,21
						3,65	0,63	0,42		0,003	0,40	0,17

Die weiteren Bestandteile des Rückstandes sind hauptsächlich Brom und geringe Mengen anderer Elemente.

5. Magnesiumbromid bleibt während einer bei 500° C durchgeführten Nachbromierung im Rückstand zurück.

6. Alle angeführten Verunreinigungen können mit einer praktisch hinreichenden Genauigkeit bestimmt werden.

Diese Folgerungen — die sogleich für die Möglichkeit einer weiteren Verfeinerung der Methode sprechen — werden auch durch die Angaben der Tabelle IV bestätigt. In dieser Tabelle sind die durch Vakuumbromieren gewonnenen Sauerstoffwerte von fünf verschiedenen inländischen Titanproben angegeben, aus denen hervorgeht, dass die beschriebene Vakuumbromierung ein geeignetes Verfahren zur Bestimmung von Sauerstoffgehalten verschiedener Titanmetallsorten darstellt. Es ist einfacher als das Vakuumschmelzverfahren und fehlerfreier als das Chlorieren. Es ist auch weniger kompliziert als das bei 825° C in Gegenwart von Kohlenstoff durchgeführte Bromieren, weil die besonderen Massnahmen dieser Methode, die zur Fernhaltung von Feuchtigkeit und Luft-sauerstoff dienen, bei der mit geschlossenen Gefässen arbeitenden Vakuum-bromierung völlig überflüssig sind.

Tabelle IV

	Jodtitan	Kroll-Blech			Kroll-Späne
		Nr 1	Nr 2	Nr 3	Nr 4
Sauerstoffgehalt.....	0,01	0,60	0,50	0,24	0,44
				0,25	0,42
				0,22	0,43
				0,23	0,42

SCHRIFTTUM

1. Titanium Metals Corp. of America, New York, N. Y. »Handbook of Titanium Metal«, 1952.
2. S. KONCZ, S. SZÁNTÓ und H. WALDHAUSER: Naturwiss. **42** (1955). S. 368.
3. D. I. WALTER: Anal. Chem. **22** (1950). S. 297.
4. J. A. CARBETT: Analyst **76** (1955). S. 652.
5. M. CODELL und G. NORWITZ: Anal. Chem. **27** (1955). S. 1083.
6. Armour Research Foundation, Illinois Inst. of Techn. Chicago, »Proceedings of Symp. on Analysis and Metallography of Titanium«, Juni 1951.
7. A. D. KIRSHENBAUM, R. A. MOSSMANN und A. V. GROSSE: Trans. Am. Soc. Metals **46** (1954). S. 525.
8. K. L. YUDOWITCH: »Quantitative Spektrographic Analysis for Oxygen in Titanium Metal«, Armour Research Foundation, Illinois Inst. of Techn., Chicago, NP-4486. Juli 1952.
9. E. B. SANDELL: Colorimetric Determination of Traces of Metals, Interscience Publ., New York—London, 1950. S. 572.
10. W. FRESENIUS und G. JANDER: Handbuch der analytischen Chemie, Teil III., Band IV. b., Springer Verl. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1950. S. 82.
11. O. GLEMSER und W. DAUTZENBERG: Z. anal. Chem. **136** (1952). S. 254.
12. J. M. THOMPSON: Anal. Chem. **25** (1953). S. 1231.
13. E. SCHULEK und G. VASTAGH: Z. anal. Chem. **84** (1931). S. 167.
14. A. J. HEGEDÜS: Zárványelemzés, Mérnöki Továbbképző Intézet 3516. sz. Budapest, 1956.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird eine — wenn man die Literaturangaben bis Anfang 1955 berücksichtigt — neue analytische Methode zur Bestimmung der Verunreinigungen, insbesondere zur Messung des Sauerstoff- und Kohlenstoffgehaltes verschiedener Titanmetallproben angegeben. Das Aufschliessen der Titanprobe erfolgt in einem evakuierten, geschlossenen Hartglasgefäß. Hier wirken die Dämpfe von flüssigem Brom in einem sich selbst regulierenden Vorgang auf das Metall ein. Das entstandene Titanbromid wird durch Erwärmen bis auf etwa 200° C abdestilliert und ausgefroren. Im Rückstand findet man dann einerseits die Bromide der metallischen Verunreinigungen des Metalles und andererseits bleibt ein dem O-Gehalt der Probe entsprechender TiO_2 -Rückstand und eine dem Kohlenstoffgehalt der Probe entsprechende Menge elementarer Kohlenstoff zurück. Der Gehalt an Mg, Fe usw. und der dem Sauerstoffgehalt äquivalente Titan-gehalt wird mit Hilfe bekannter analytischer Methoden bestimmt. Für die Ermittlung des Kohlenstoffgehaltes wird eine für die Bestimmung sehr kleiner CO_2 -Mengen geeignete Verbrennungsmethode angegeben. Mit der neuen analytischen Methode kann man Sauerstoffgehalte von 0,01—0,60% mit einer Genauigkeit von $\pm 5\%$ und Kohlenstoffgehalte in der Nähe von 0,1% mit einer Genauigkeit von $\pm 5\%$ bestimmen.

НОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИМЕСЕЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ТИТАНА, В ОСОБЕННОСТИ СОДЕРЖАНИЯ КИСЛОРОДА И УГЛЕРОДА

Член-Корр. АН Венгрии Т. МИЛЬНЕР, А. Й. ХЕГЕДЮШ и М. ДВОРСКИ

РЕЗЮМЕ

Авторы сообщают о новом — по сравнению с описанными в международной литературе до начала 1955 года — аналитическом методе определения примесей титана и, в первую очередь, содержания кислорода и углерода. Выделение титана осуществляется в закрытом тугоплавком стеклянном сосуде под вакуумом при помощи пара жидкого брома саморегулирующейся реакцией. Образующийся бромид титана можно отделить от металлических примесей титана, например, от бромидов Mg, Fe и т. д., а также от примеси кислорода, остающейся в виде TiO_2 , и примеси углерода, остающейся в виде углерода путем нагрева до 200° C, с последующей дистилляцией и вымораживанием. Согласно детально описанного метода после этого остаток вновь подвергается бромированию в закрытом сосуде при температуре 400° C. Открыв сосуд, содержание в остатке Mg, Fe и содержание Ti, пропорциональное содержанию кислорода, определяются при помощи общеизвестных аналитических методов, а содержание углерода — методом сжигания, модифицированным для определения очень небольшого содержания CO_2 . Последним методом при помощи непосредственного сжигания также можно определить содержание углерода в металлическом титане. В образцах титана отечественного происхождения при помощи этого метода можно определять содержание кислорода в пределах 0,01—0,6% с погрешностью $\pm 5\%$ и прилб. 0,1% содержание углерода с погрешностью $\pm 5\%$.

NEW METHOD FOR DETERMINING IMPURITIES IN TITANIUM PARTICULARLY OXYGEN AND CARBON

T. MILLNER

Corresponding Member of the Hungarian Academy of Sc.

A. J. HEGEDÜS and M. DVORSZKY

SUMMARY

The authors describe an analytical process, new if judged in the light of international literature down to the beginning of the year 1955, for determining impurities in titanium, — oxygen and carbon principally. Titanium is attacked in evacuated, closed, hard glass vessels, by bromine vapour, in a self regulating process. The titanobromide thus produced may be segregated from metallic elements contaminating the titanium, like the bromides of Mg, Fe and others and from oxygen-impurity left behind in the form of TiO_2 and carbon impurities in the form of elementary carbon, by a process of gradually heating

the titano-bromide to 200 °C, by distilling and freezing it. According to the process, a complete specification of which is given, the residue is again brominated in the closed vessel at 400 °C. On opening the vessel, Mg, Fe and the Ti contents left over in the residue — the latter to an extent proportionate to the oxygen — can be determined by the well known analytical methods, and the carbon contents by a combustion method suitable for determining very small amounts of CO₂. This process of combustion may be applied directly also for determining carbon in titanium-base alloys. By this process titanium samples of domestic origin were found to have oxygen contents between 0,01 to 0,6 p. c. with an error of ± 5 p. c. and about 0,1 p. c. carbon contents with an error of ± 5 p. c.

NOUVELLE MÉTHODE POUR LA DÉTERMINATION DES IMPURETÉS, PARTICULIÈREMENT DE LA TENEUR EN O ET C DU TITANE MÉTALLIQUE

T. MILLNER membre corresp. de l'Acad. Hongr. des Sciences, A. J. HEGEDÜS et M. DVORSZKY]

RÉSUMÉ

Les auteurs font connaitre un procédé analytique, non encore mentionné dans la littérature internationale jusqu'au début de l'année 1955, pour la détermination des impuretés, en premier lieu de la teneur en O et C du titane métallique. L'extraction du titane métallique s'effectue dans un vase clos évacué, en verre dure, par la vapeur de brome, dans un processus auto-régulateur. Par chauffage jusqu'à 200 °C, distillation et refroidissement, le bromure de titane peut être séparé des bromures des éléments métalliques souillant le titane, comme par ex. le Mg, le Fe etc. et des impuretés d'oxygène en forme de TiO₂, ainsi que des impuretés de carbone, en forme de carbone élémentaire. Selon le procédé exposé en détail, le résidu est soumis ensuite de nouveau au bromage à 400 °C, en espace close. La teneur en Mg, Fe et Ti, cette dernière proportionnelle à l'oxygène, du résidu peut être déterminée par les méthodes analytiques connues, celle en C par une méthode de cuisson, permettant de déterminer de très petites quantités de CO₂. A l'aide de cette dernière méthode, la teneur en carbone des métaux de titane peut être établie aussi par cuisson directe. Dans des échantillons de titane hongrois on a pu déterminer par ce procédé des teneurs en oxygène de 0,01 à 0,6%, avec une erreur de $\pm 5\%$ et une teneur en carbone d'environ 0,1%, avec une erreur de $\pm 5\%$.

THE PLASTIC CALCULATION OF MOMENTS ON CONTINUOUS REINFORCED CONCRETE BEAMS

PROF. J. PELIKÁN

CAND. OF ENG. SC.

DEPARTMENT OF FRAME-WORKS, UNIVERSITY FOR BUILDING SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received 11th October, 1955]

While the Theory of Elasticity unequivocally yields the moments acting on continuous beams under constant loading, the Plasticity Theory permits an arbitrary shift of limited extent of the basic line of the moment diagram and thus gives moments ambiguously. From this facility of moment calculation on the basis of plasticity economic advantages can be drawn, and at the same time an unequivocal moment calculation method can be built up on the specification that from all possible basic lines that one is to be chosen to which corresponds a minimum area of the moment diagram. This also implies a minimum quantity of main tensile reinforcement for the beam under design.

In other terms this means that besides the elastic moment calculation based on the postulate

$$\int M^2 ds = \min!$$

by setting up the requirement

$$\int |M| ds = \min!$$

a plastic moment calculation method can be established, which is as unequivocal as the elastic analysis, but allows of a more economical utilization of reinforcement.

The procedure will be presented on beams of uniform cross section loaded with uniformly distributed constant loads in the spans, which conditions can almost without exception be met in practice.

It is moreover supposed that adjacent spans of the beam, and loads acting on these spans, differ only to such extent that no negative moment develops all over any of the spans, while all moments at supports are negative. The symbols used are :

$0, 1, 2, \dots, n$ (subscripts)	= cross sections at the supports
$M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$	= moments at the supports
$l_1, l_2, \dots, l_n$	= beam spans
$q_1, q_2, \dots, q_n$	= loads

The method of calculation of the area of the moment diagram of an arbitrary span is visualized in Fig. 1.

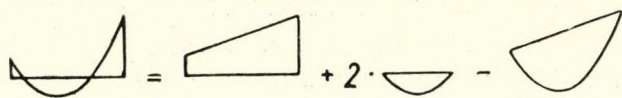


Fig. 1

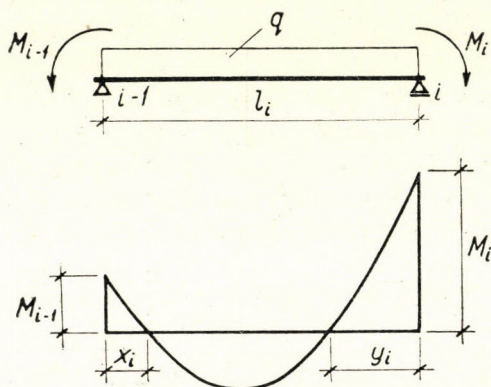


Fig. 2

If this procedure is followed the total area of the moment diagram can be written with notations of Fig. 2 as shown.

$$F = \sum_{i=1}^n \frac{M_{i-1} + M_i}{2} l_i + 2q_i \frac{(l_i - x_i - y_i)^3}{12} - q_i \frac{l_i^3}{12}.$$

Since the position of the extreme values of a function does not change, when a constant is added to it, or when the function is multiplied by a constant, let $\sum_{i=1}^n q_i \frac{l_i^3}{12}$ be added to F and let it afterwards be multiplied by 6. The function thus obtained,

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^n 3(M_{i-1} + M_i) l_i + q_i (l_i - x_i - y_i)^3$$

which may be called the 'characteristic area' of the moment diagram, has its extreme values where function F has them.

Values of x , y and M figuring in $\bar{F}$ are of course not independent of one another. Among these quantities in case of an m -times hyperstatical beam there are only m quantities independent of one another; the others can be expressed

in terms of the former. The m quantities considered as independent variables may be chosen at will; however, it is advisable to select such of them as independent variables which most simplify the calculation. Unfortunately the values of M cannot be chosen for this reason. The following procedure is most expedient: First of all in the centre span of the beam, or if there exists no such, in one of the spans adjacent to the centre support dimensions x and y (let them be called 'zero-point distances') are assumed as independent variables. The two end moments of the span are therewith determined already; in the next span only one of the zero-point distances can be arbitrarily chosen, because the end moment in common with the previous span is already determined. With the independent variables so far dealt with, the other zero-point distance and the other end moment of the span can be expressed. This refers to the consecutive spans as well. Of course progressing from the point of start the expressions of end moments and of zero-point distances are getting more and more complicated. Therefore start has been made from the centre of the beam. The necessary relationships are tabulated as follows:

1. Given: x_i and y_i $M_{i-1} = \frac{q_i}{2} x_i (l_i - y_i)$; $M_i = \frac{q_i}{2} (l_i - x_i) y_i$
2. Given: x_i and M_{i-1} $y_i = l_i - \frac{2 M_{i-1}}{q_i x_i}$; $M_i = \left(\frac{q_i}{2} l_i - \frac{M_{i-1}}{x_i} \right) (l_i - x_i)$
3. Given: x_i and M_i $y_i = \frac{2 M_i}{q_i (l_i - x_i)}$; $M_{i-1} = \left(\frac{q_i}{2} l_i - \frac{M_i}{l_i - x_i} \right) x_i$
4. Given: y_i and M_{i-1} $x_i = \frac{2 M_{i-1}}{q_i (l_i - y_i)}$; $M_i = \left(\frac{q_i}{2} l_i - \frac{M_{i-1}}{l_i - y_i} \right) y_i$
5. Given: y_i and M_i $x_i = l_i - \frac{2 M_i}{q_i y_i}$; $M_{i-1} = \left(\frac{q_i}{2} l_i - \frac{M_i}{y_i} \right) (l_i - y_i)$.

A necessary and in the present case also a sufficient condition of the minimum of the moment diagram area is that the partial derivative of $\bar{F}$ with respect to all independent variables be zero. Thus for the determination of m unknown quantities m equations are available. Unfortunately these equations are non-linear in their independent variables. However, their solution presents no particular difficulty, because independent variables x_i and y_i can be estimated well. In practical cases

$$x_i \approx 0,25 l_i \quad \text{and} \quad y_i \approx 0,25 l_i.$$

From these approximate values the precise ones can be obtained with comparatively not much work by Newton—Raphson's method. Another iteration method will be presented in connection with the numerical examples.

Numerical example 1.

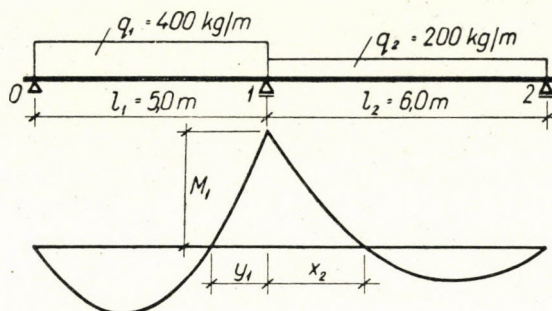


Fig. 3

As independent variable is regarded y_1 (Fig. 3). From the tabulated relationships

$$M_1 = \frac{400}{2} 5 y_1 = 1000 y_1 ; \quad x_2 = \frac{2 M_1}{200.6} = \frac{5}{3} y_1 ,$$

$$\bar{F} = 3 \cdot 1000 y_1 (5 + 6) + 400 (5 - y_1)^3 + 200 \left(6 - \frac{5}{3} y_1 \right)^3 ,$$

$$\frac{d\bar{F}}{dy_1} = 33000 - 1200 (5 - y_1)^2 - 600 \left(6 - \frac{5}{3} y_1 \right)^2 \frac{5}{3} = 0 .$$

Arranged :

$$y_1^2 - 8.04 y_1 + 8.30 = 0 ,$$

whence

$$y_1 = 1.22 \text{ m.}$$

The support moment sought for : $M_1 = 1220 \text{ mkg}$

Numerical example 2.

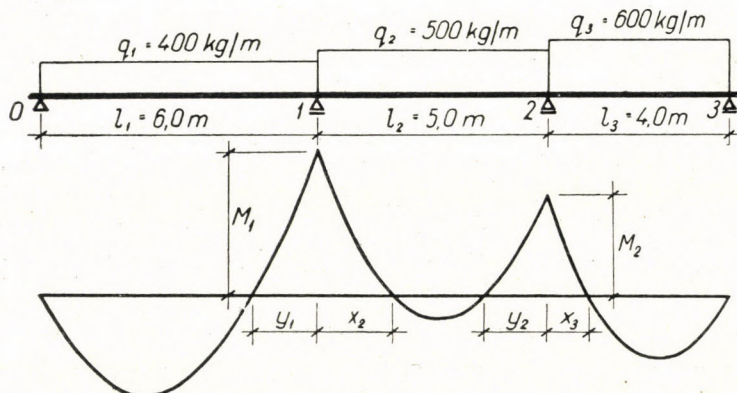


Fig. 4

As independent variables are regarded x_2 and y_2 (Fig. 4). From the table :

$$M_1 = 250 x_2 (5 - y_2); \quad M_2 = 250 (5 - x_2) y_2,$$

$$y_1 = 5 x_2 \frac{5 - y_2}{24}; \quad x_3 = 5 y_2 \frac{5 - x_2}{24};$$

$$\begin{aligned} \bar{F} = & 3 \cdot 250 [x_2 (5 - y_2) (6 + 5) + (5 - x_2) y_2 (5 + 4)] + 400 \left(6 - 5 x_2 \frac{5 - y_2}{24} \right)^3 + \\ & + 500 (5 - x_2 - y_2)^3 + 600 \left(4 - 5 y_2 \frac{5 - x_2}{24} \right)^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_2} = & 750 [11 (5 - y_2) - 9 y_2] - 1200 \left(6 - 5 x_2 \frac{5 - y_2}{24} \right)^2 5 \frac{5 - y_2}{24} - 1500 (5 - x_2 - y_2)^2 + \\ & + 1800 \left(4 - 5 y_2 \frac{5 - x_2}{24} \right)^2 5 \frac{5 - x_2}{24} y_2 = 0. \end{aligned}$$

Arranged :

$$\begin{aligned} 30(11 - 4 y_2) - 2(5 - y_2) \left(6 - 5 x_2 \frac{5 - y_2}{24} \right)^2 - 12(5 - x_2 - y_2)^2 + \\ + 3 y_2 \left(4 - 5 y_2 \frac{5 - x_2}{24} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_2} = & 750 [-11 x_2 + 9(5 - x_2)] + 1200 \left(6 - 5 x_2 \frac{5 - y_2}{24} \right)^2 5 \frac{5 - y_2}{24} x_2 - 1500(5 - x_2 - y_2)^2 - \\ & - 1800 \left(4 - 5 y_2 \frac{5 - x_2}{24} \right)^2 5 \frac{5 - x_2}{24} = 0. \end{aligned}$$

Arranged :

$$\begin{aligned} 30(9 - 4 x_2) + 2 x_2 \left(6 - 5 x_2 \frac{5 - y_2}{24} \right)^2 - 12(5 - x_2 - y_2)^2 - \\ - 3(5 - x_2) \left(4 - 5 y_2 \frac{5 - x_2}{24} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

The solution of the system consisting of equations (1) and (2) can be attained e. g. in the following way : Equation (1) is set up with the approximate value of the independent variable of higher power, that is with

$$y_2 = 0,25 \quad l_2 = 1,25$$

Thus the following equation, quadratic with respect to x_2 , is obtained :

$$x_2^2 - 10,02 x_2 + 14,10 = 0,$$

whence

$$x_2 = 1,69,$$

the second radical cannot be taken in consideration.

Thereupon the value found is substituted into equation (2). Thus the following equation, quadratic with respect to y_2 is obtained

$$y_2^2 - 8,85 y_2 + 9,96 = 0,$$

whence

$$y_2 = 1,32.$$

When this is again substituted into equation (1) the result is obtained:

$$x_2 = 1,70.$$

Further iteration does not change the first three figures, thus :

$$x_2 = 1,70 \text{ m} \quad ; \quad y_2 = 1,32 \text{ m}$$

and the support moments :

$$M_1 = 1564 \text{ mkg} \quad ; \quad M_2 = 1089 \text{ mkg}.$$

Remarks:

a) For a beam supported at one end, built-in at the other, and *arbitrarily* loaded, the distance of the zero-point from the fixed-in end

$$l = \frac{l}{\sqrt{2}} = 0,293 l.$$

Verification : the moment diagram area F has extreme value when, whether the fixed end moment M be increased or reduced by value dM , the area of the moment diagram does not change, that is, the increment on one side of the zero-point corresponds to the decrement on the other side. Herefrom according to Fig. 5 the above result is obtained.

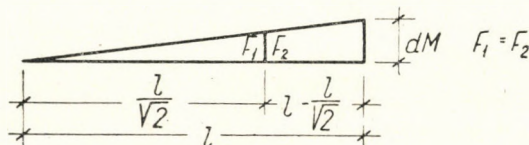


Fig. 5

b) Zero point distances of *symmetrically* loaded beams built in at both ends :

$$x = y = 0,25 l.$$

Verification can be obtained in exactly the same way as above.

c) Short of other basis, in first approximation the former values may be used as zero point distances.

d) The area of the plastic moment diagram of the uniformly loaded beam fixed at both ends being by 2,5% smaller than that of the elastic moment diagram, the economy attainable in main tensile reinforcement may be taxed at the same value.

e) The procedure is without modification applicable to the positioning of hinges assuring minimum reinforcement for prefabricated hinged continuous reinforced concrete beams.

f) If the cross section of the beam is uniform spanwise only, but differs in the various spans, then less main tensile reinforcement corresponds to the moment diagram of the same area in the span of higher cross section, than in the span of lower cross section.

In such case the area of the moment diagram is not proportional to the amount of main tensile reinforcement. However, if the ordinates of the moment diagram are divided by the lever arm z a 'reduced' moment diagram is obtained, the area of which will be proportional to the main tensile reinforcement. If with fair approximation it is supposed that the lever arm z is proportional to the effective depth h of the individual cross sections, the 'characteristic moment diagram area' of the beam of spanwise uniform cross section can be written :

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^n \frac{3(M_{i-1} + M_i) l_i + q_i (l_i - x_i - y_i)^3}{h_i}$$

Otherwise the procedure is the same.

SUMMARY

Besides the elastic moment calculation of continuous beams, based on the postulate $\int M^2 ds = \min!$ another — plastic — moment calculation can be built up on the condition $\int |M| ds = \min!$ This postulate implies the minimum area of the moment diagram and thus, in case of reinforced concrete beams, the minimum amount of main tensile reinforcement. With the aid of the method about 2% of the quantity of main tensile reinforcement calculated on the basis of the elastic analysis can be saved.

The procedure can be applied unaltered to the positioning of hinges assuring minimum reinforcements for prefabricated hinged continuous reinforced concrete beams.

ПЛАСТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ МОМЕНТА МНОГООПОРНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК

Канд. техн. наук. Й. ПЕЛИКАН

РЕЗЮМЕ

Наряду с упругим расчетом момента многоопорных балок, основывающимся на условии $\int M^2 ds = \min!$ возможно построить другой — пластический расчет момента, исходящий из условия $\int |M| ds = \min!$ Это условие соответствует минимуму площади

опоры моментов и, таким образом, также минимальному количеству необходимой основной арматуры. С помощью предлагаемого метода можно сэкономить до 2% количества основной арматуры, рассчитанной упругим методом.

Метод без каких-либо изменений может быть применен также для определения мест размещения шарниров сборных многоопорных шарнирных балок с минимальным расходом арматуры.

CALCUL PLASTIQUE DE POUTRES CONTINUES EN BÉTON ARMÉ

Prof. J. PELIKÁN

Candidat des sciences techniques

RÉSUMÉ

À côté du calcul élastique des moments des poutres continues, basé sur le postulat $\int M^2 ds = \min!$, un autre calcul — plastique — peut être établi, fondé sur la condition $\int |M| ds = \min!$. Ce dernier implique le minimum de la surface du diagramme des moments et — en cas de poutres en béton armé — aussi le minimum d'armature principale nécessaire. Par cette méthode on peut réaliser une économie de 2 p. c. environ de l'armature principale calculée d'après la méthode élastique.

Le procédé se prête aussi sans modification à la détermination des articulations des poutres continues préfabriquées en béton armé exigeant le minimum d'armature.

PLASTISCHE MOMENTENBERECHNUNG VON STAHLBETON-DURCHLAUF-TRÄGERN

Prof. J. PELIKÁN

Kandidat der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Neben der elastostatischen Momentenberechnung von Durchlaufträgern, die auf der Anforderung $\int M^2 ds = \min!$ beruht, kann eine andere — plastische — Momentenberechnung auf das Postulat $\int |M| ds = \min!$ aufgebaut werden. Diese Anforderung bedingt zugleich für Stahlbetonträger das Minimum an notwendiger Hauptbewehrung. Mit Hilfe dieses Verfahrens lassen sich etwa 2% der nach der elastostatischen Methode errechneten Hauptbewehrung einsparen.

Das Verfahren kann ohne Abänderung auch zur Bestimmung der Gelenkstellen von im Fertigbau hergestellten durchlaufenden Gelenkträgern verwendet werden.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СИЛОВЫХ УСЛОВИЙ ПРИ ПРЕССОВАНИИ СПЛОШНЫХ КРУГЛЫХ ПРОФИЛЕЙ ИЗ АЛЮМИНИЯ И ЕГО СПЛАВОВ ЧЕРЕЗ ОДНО И МНОГООЧКОВУЮ МАТРИЦУ

Канд. тех. наук И. КОЧИШ

(РАБОТА ВЫПОЛНЕНА ПОД НАУЧНЫМ РУКОВОДСТВОМ ПРОФЕССОРА И. Л. ПЕРЛИНА
В 1952—1953 гг.)

Поступило 13. X. 1955 г.

Расчетное определение усилий, возникающих при прессовании различных профилей и труб, имеет большое практическое значение, так как позволяет выбирать необходимое оборудование без излишних запасов в его мощности и размерах и наиболее эффективно использовать имеющееся оборудование.

Несмотря на сравнительную давность применения процесса прессования, методы расчетов рабочих напряжений, возникающих при этом процессе, разработаны еще недостаточно. Предложенные для расчетного определения рабочих напряжений при прессовании формулы С. И. Губкина (1), А. Д. Томленова (4), А. А. Ильюшина (3), И. Л. Перлина (5), А. Гелейи (14), Э. Зибеля (16) и Г. Закса (17) не дают возможности получать результаты с достаточной для практики точностью.

В табл. 1 даны результаты расчетов для определения напряжения прессования у прессшайбы по формулам различных исследователей. Из сравнения этих результатов видно, что по формуле С. И. Губкина результаты расчетов отличаются от экспериментальных данных от — 66% до — 84%, по формуле И. Л. Перлина от — 43% до — 59%, по формуле А. Д. Томленова от 0% до — 74% и по формуле А. Гелейи от + 5% до — 35%.

Это обстоятельство можно объяснить тем, что в литературе нет единого общего мнения о таких важных вопросах прессования, как :

1. О влиянии различных факторов (температура, скорость и степень деформации) на сопротивление деформированию, величина которого входит во все формулы, определяющие рабочие напряжения при прессовании.

2. О напряжении трения, возникающего на контактной поверхности контейнера при прессовании методом прямого истечения.

3. О критерии правильности формул, определяющих рабочие напряжения при прессовании.

Кроме того, в формулы входят такие коэффициенты, определение которых зависит от индивидуального подхода каждого исследователя к вопросу (так, например, коэффициент β в формулах С. И. Губкина, зависящий от наличия или отсутствия объемов металла в контейнере).

Исходя из изучения литературных данных можно сделать следующее заключение.

1. Сопротивление деформированию учитывается в формулах, определяющих рабочие напряжения при прессовании с помощью истинного предела текучести при растяжении (σ_0), величина которого при одном и том же металле зависит от разных факторов, а именно : от степени деформации, от скорости и температуры процесса обработки.

Ввиду того, что относительно влияния вышеуказанных факторов на сопротивление деформированию в настоящее время в литературе нет единого общего мнения, а также отсутствуют удовлетворительные методы расчета для определения влияния этих факторов, и пока еще не имеется достаточное количество данных по величине σ_0 для различных металлов и сплавов и условий прессования, использование существующих формул для определения рабочих напряжений затруднено.

Кроме этого, определение сопротивления деформирования (σ_0) экспериментальным путем в настоящее время также очень затруднено, вследствие нераздельности многих факторов, влияющих на эту величину.

2. Силы внешнего трения в формулах, определяющих рабочие напряжения при прессовании, одни исследователи (С. И. Губкин, Г. Закс, Э. Зибель) учитывают по закону

Амонтона—Кулона, т. е. с помощью постоянного коэффициента трения, а другие (А. Д. Томленов, И. Л. Перлин) с помощью закона постоянного напряжения трения.

Кроме того, по мнению одних исследователей, при прессовании методом прямого истечения между силами внешнего трения на стенках контейнера и величиной контактной поверхности имеется линейная зависимость, а по мнению других — экспоненциальная.

В опубликованных работах различных авторов нет единого общего мнения относительно влияния степени деформации, скорости и температуры процесса обработки на величину сил внешнего трения.

3. Точно также не существует единого общего мнения о критериях правильности формул, определяющих рабочие напряжения при прессовании, хотя большинство исследователей (Э. Зибель [16], Г. Закс [17], А. А. Ильющин [3], Л. В. Прозоров [6], И. Л. Перлин [5]) считает, что при отсутствии внешнего трения на стенках контейнера и на калибрующей части матрицы напряжение прессования (σ_M) должно быть пропорционально

натуральному логарифму степени деформации $\left(\ln \frac{S_H}{S_K}\right)$, т. е.

$$\sigma_M = C_1 \ln \frac{S_H}{S_K} \quad (1)$$

где C_1 — коэффициент пропорциональности.

О коэффициенте пропорциональности также имеются разные представления, т. е.

$$C_1 = \sigma_d [5] [3] [16] [17], \quad C_1 = \gamma^{\sigma d} [7] \text{ и } C_1 = C\sigma_B [6].$$

Таким образом, современное состояние теории пластической деформации и физики твердого тела не позволяет вести расчеты для определения рабочих напряжений при прессовании алюминия и его сплавов чисто аналитическим путем. Это обстоятельство вызывает необходимость постановки ряда экспериментов для получения таких величин, которые с достаточной для практики точностью смогли бы восполнить наблюдающийся пробел.

На основании сказанного ранее кажется целесообразным:

а) Определить при прессовании путем моделированных экспериментов такую величину при различных режимах прессования, знание которой позволит производить расчеты с точностью, удовлетворяющей практическим потребностям. Эту величину при прессовании обозначим через букву «К» и назовем *средним напряжением на прессшайбе у начала основного очага деформации на единицу степени деформации при заданных степенях деформации, температурах и скоростях прессования*, и математически она выражается:

$$K = \gamma \cdot \beta \cdot C \cdot \sigma_d, \quad (2)$$

где γ — коэффициент, учитывающий увеличение напряжения от неравномерности деформации, связанной с формой очага деформации;

β — коэффициент, учитывающий трение на контактной поверхности очага деформации;

C — коэффициент упрочнения, зависящий от степени деформации и продолжительности процесса.

Так как коэффициенты γ , β и C пока разделить не удалось, поэтому определена величина «К» экспериментально.

б) При прессовании методом прямого истечения определять характер и величину сил трения, возникающих на стенках контейнера в зависимости от условий прессования, т. е. при различных степенях деформации, температурах и скоростях прессования, по возможности близких к таким, которые применяются на практике при прессовании алюминия и сплавов на алюминиевой основе.

в) Проверить экспериментально закономерность о критерии правильности формул, определяющих рабочие напряжения при прессовании, и определить величину коэффициента пропорциональности при прессовании сплавов на алюминиевой основе при различных условиях прессования.

г) На основании этих проверенных данных выбирать или рекомендовать по возможности несложный метод расчета для определения рабочих напряжений при прессовании круглых сплошных профилей через одну и многоочковую цилиндрическую матрицу.

В дальнейшем применяются следующие основные обозначения:

- S_H — начальное поперечное сечение слитка после запрессовки;
- S_K — конечное поперечное сечение прессуемого профиля;
- D_H — начальный наружный диаметр слитка после запрессовки (диам. контейнера);
- D_K — конечный наружный диаметр прессуемого профиля;
- L — длина слитка после запрессовки;
- L_K — длина калибрующей части матрицы;
- σ_M — напряжение у матрицы;
- σ_π — рабочее напряжение прессования у прессшайбы, т. е. напряжение на заднем торце слитка;
- σ_K — напряжение, необходимое для продвижения металла через калибрующую часть матрицы;
- σ_f — напряжение трения.

Прочие обозначения указываются по ходу их изложения.

1. Методика экспериментов и ее обоснование

а) Общие соображения относительно определения характера и величины сил трения, возникающих на стенках контейнера при прессовании методом прямого истечения

В основу определения характера и величины изменения напряжения трения на боковой поверхности контейнера положены следующие соображения:

1. При прессовании сплошного круглого профиля методом прямого истечения усилие прессования (P_{np}) складывается из следующих составляющих усилий (рис. 1/а):

$$P_{np} = P_M + P_{f1} + P_{f2} + P_{f3}, \quad (3)$$

где P_M — равнодействующая элементарных сил, возникающих у начала основного очага деформации, т. е. у матрицы;

P_{f1} — усилие трения, возникающее на калибрующей части матрицы;

P_{f2} — усилие трения, возникающее между поверхностями слитка и контейнера;

P_{f3} — усилие трения, возникающее между поверхностями прессшайбы и контейнера.

При прессовании методом обратного истечения усилие прессования ($P_{обр}$) складывается из следующих составляющих усилий:

$$P_{обр} = P'_M + P'_{f1} + P'_{f3}, \quad (4)$$

где

P'_M — равнодействующая элементарных сил у матрицы;

P'_{f1} — усилие трения у матрицы;

P'_{f3} — усилие трения у прессшайбы.

Если степень деформации, температура и скорость прессования выбраны одинаковыми при прессовании методом прямого и обратного истече-

ния, а размеры прессшайбы, используемой при прессовании методом прямого истечения, одинаковы с размерами матрицы при прессовании методом обратного истечения, то можно предположить, что

$$P_M \cong P'_M, P_{f1}, P_{f1} = P'_{f1} \text{ и } P_{f3} = P'_{f3}. \quad (5)$$

Однако, следует отметить, что существует разница между характером течения прессуемого металла, а следовательно и формой очага деформации при прессовании методом прямого и обратного истечения.

При прессовании методом прямого истечения деформируемый металл поступает в основной очаг деформации уже в деформированном состоянии, т. е. частично в упроч-

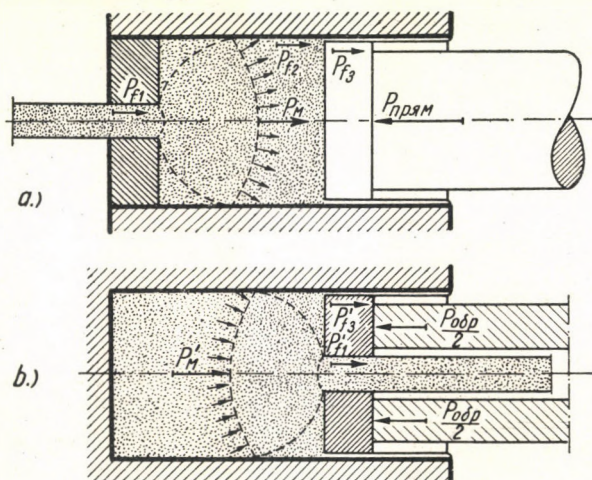


Рис. 1. Схемы прессования:

- а) методом прямого истечения,
б) методом обратного истечения

ненном состоянии, так как в этом случае металл деформируется не только вблизи матрицы, а почти по всему объему слитка. В противоположность этому при обратном методе истечения очаг деформации занимает не весь объем слитка, а расположен лишь вблизи матрицы. Исходя из этого, можно было бы предположить, что

$$P_M > P'_M. \quad (6)$$

С другой стороны, из изучения течения металла методом координатной сетки следует, что течение металла при прессовании методом обратного истечения затруднено по сравнению с прямым истечением. Это затруднение вызывается тем, что траектории движения металла при обратном истечении изгибаются вблизи матрицы почти под прямым углом к направлению прессования (рис. 2). При методе прямого истечения имеется значительная мертвая зона, и траектории наклонены к направлению прессования всего лишь под острыми углами, часто меньшими 45° (рис. 3), что требует приложения меньших усилий, чем при обратном истечении, поэтому можно было бы предполагать, что

$$P_M < P'_M. \quad (7)$$

Таким образом, с одной стороны, необходимые усилия в основном очаге деформации меньше чем должны были бы быть при прессовании методом прямого истечения, а с другой

стороны, при обратном. Наши опыты, описанные ниже, показали, что эти два взаимно-противоположные факторы компенсируют друг друга, и так при вышеуказанных условиях прессования

$$P_M \cong P'_M.$$

Определив экспериментально изменение силы P_{f2} вдоль поверхности контейнера, можно расчетным путем определить среднюю величину напряжения трения на боковой поверхности контейнера и установить характер его изменения.

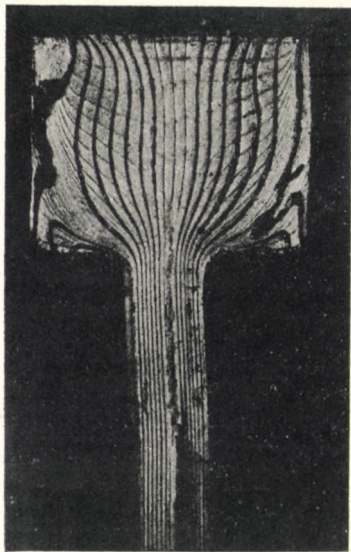


Рис. 2. Изменение координатной сетки при прессовании сплава D1 методом прямого истечения ($D_H = 40$ мм, $D_K = 10$ мм, $L_{сл} = 70$ мм, $t_{прес} = 400^\circ$ С)

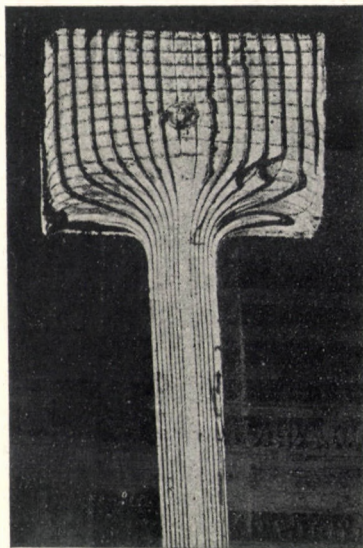


Рис. 3. Изменение координатной сетки при прессовании сплава D1 методом обратного истечения ($D_H = 40$ мм, $D_K = 10$ мм, $L_{сл} = 70$ мм, $t_{прес} = 400^\circ$ С)

б) Общие соображения относительно определения величины «К» при прессовании сплошных круглых профилей через цилиндрическую матрицу

За основу для определения величины «К» и рабочих напряжений при прессовании круглых сплошных профилей принято предположение, что при отсутствии внешнего трения на стенках контейнера и на калибрующей части матрицы напряжение у матрицы пропорционально натуральному логарифму степени деформации, т. е.

$$\sigma_M = C_1 \ln \frac{S_H}{S_K}.$$

Это предположение, как мы видели ранее, подтверждается рядом исследователей (А. А. Ильюшин, Л. В. Прозоров, И. Л. Перлин, Э. Зибель,

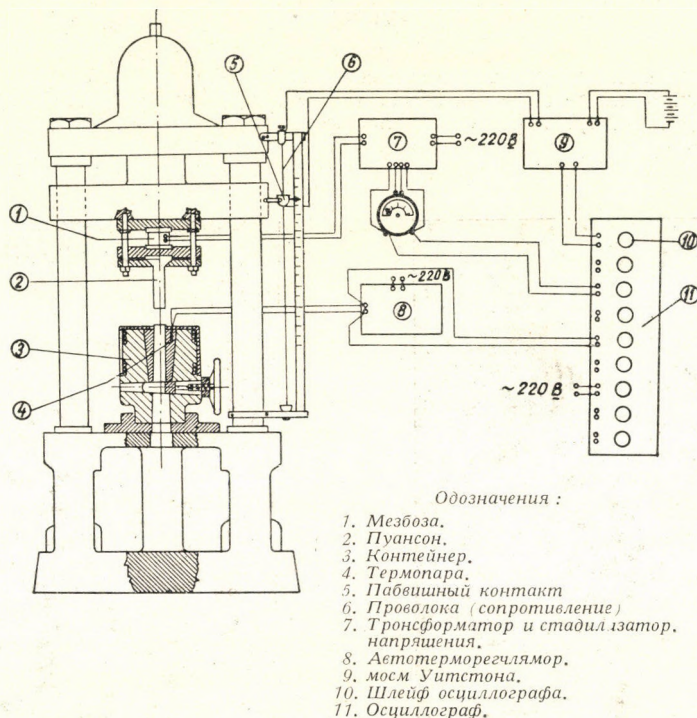


Рис. 4. Схема включения экспериментальной установки

Г. Закс) и оправдывается также экспериментами, описанными у П. С. Истомина (2).

Величина коэффициента пропорциональности, как это следует из определения термина «К», равна K , т. е.

$$\sigma_M = K \ln \frac{S_H}{S_K} \quad (8)$$

Для определения величины «К» при разных условиях прессования применялся метод прессования с обратным истечением, так как в этом случае силы внешнего трения на стенках контейнера отсутствуют. Таким образом, напряжение у матрицы выражается по формуле :

$$\sigma_M = K \ln \frac{S_H}{S_K} + \sigma_{Ka} \quad (9)$$

или

$$\sigma_M = K \ln \frac{S_H}{S_K} + \sigma_f \frac{4 l_K}{D_K}. \quad (9/a)$$

Определив экспериментально σ_M и σ_f при различных условиях прессования и зная соответствующие размеры прессуемого материала, величину «К» можно определять на основании уравнения 9, откуда

$$K = \frac{\sigma_M - \sigma_K}{\ln \frac{S_H}{S_K}}. \quad (9/b)$$

в) Описание экспериментальной установки

Для экспериментального определения изменения величины и характера силы трения на стенках контейнера, а также для определения величины напряжений прессования методами прямого и обратного истечения в зависимости от различных условий прессования, разработан такой экспериментально-измерительный метод, с помощью которого можно измерить и зафиксировать одновременно изменение усилия прессования непосредственно у прессшайбы или у матрицы, изменение скорости, температуры и времени прессования в течение процесса обработки.

Для этой цели применялась установка, схема которой показана на рис. 4.

На вертикальном гидравлическом прессе над пуансоном была установлена индуктивная мездоза, которая во время прессования измеряла усилие прессования у прессшайбы или у матрицы в зависимости от метода прессования.

Изменение усилия прессования регистрировалось с помощью шлейфового осциллографа.

Величина хода пуансона во время прессования регистрировалась на осциллограмме с помощью специального устройства, состоящего из подвижного ртутного контакта, мостика Уитстона и из нихромовой нити диаметром 0,15 мм.

Термопары, вмонтированные в контейнер, и автоматический терморегулятор обеспечивали постоянную температуру прессования и ее запись на осциллограмме.

На осциллограмме регистрировалось также время движения пуансона с помощью переменного тока 220 в и 50 гц.

Одновременная работа этих устройств позволила записать процесс прессования и получить результаты в виде следующих кривых на осциллограмме.

а) Кривая изменения усилия прессования у прессшайбы или у матрицы.

б) Кривая величина хода пуансона.

в) Кривая изменения температуры прессования.

г) Кривая отсчета времени прессования.

На основании кривых б и г можно определить среднюю и истинную скорость прессования, а при помощи расчетов и скорость деформации.

г) Выбор сплавов и его обоснование

Сплавы, выбранные нами для производства опытов, по своим механическим свойствам охватывают почти все легкие сплавы на алюминиевой основе, обрабатываемые прессованием в производственных условиях. Таким образом, эксперименты было решено проводить с тремя типами легких сплавов.

1. Технически чистый алюминий А1, как наиболее мягкий материал.

2. Сплавы АМц и D1, как материалы, обладающие средней прочностью.

3. Сплав D16 — как высокопрочный материал из сплавов на алюминиевой основе.

Такой комплекс сплавов дает возможность обобщить полученные закономерности в области рабочих напряжений прессования и использования полученных закономерностей в производстве.

При составлении программы экспериментальных лабораторных работ мы имели в виду принципы моделирования экспериментов.

Согласно вышесказанному степень деформации, температуры и скорости прессования были выбраны такими, которые используются вообще на практике.

При определении первоначальных размеров слитка и диаметра выпрессованных профилей учитывалось, что на практике величина вытяжки

$\lambda \geq 12$ и отношение длины слитка $L_{\text{сл}}$ к его диаметру ($D_{\text{сл}}$) $\frac{L_{\text{сл}}}{D_{\text{сл}}} \geq 1,5$, в

зависимости от мощности пресса и прессуемых изделий.

Эти условия моделирования, обеспечивающие одинаковые с практическими скоростями деформации, должны показать рабочие напряжения и закономерности, близкие к имеющим место на производственных установках. Это убедительно доказал С. И. Губкин (9) в своем ответе А. А. Ильюшину, предложившему в своей работе (10) производить моделирование с характерными скоростями обратно пропорциональному отношению характерных размеров моделей и натуре.

В данной работе близость лабораторных условий к практическим усиливается тем обстоятельством, что во время прессования температура

контейнера моделировалась такой же, как и температура прессуемого образца, что исключило его быстрое охлаждение.

II. Описание и результаты экспериментов

1. Описание лабораторных экспериментов

Лабораторная работа предусматривала:

- а) прессование сплошных круглых профилей через одноочковую цилиндрическую матрицу и
- б) прессование сплошных круглых профилей через многоочковую цилиндрическую матрицу.

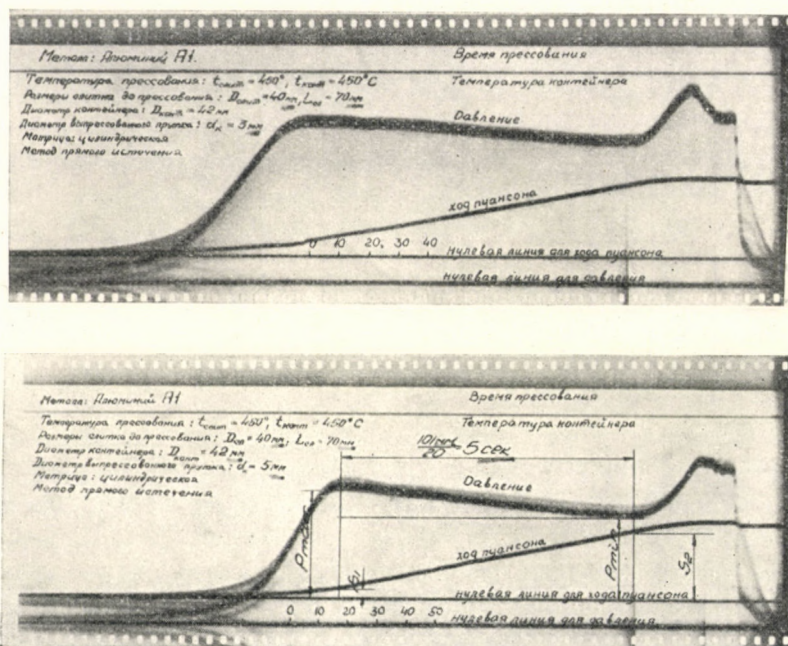


Рис. 5/а, б. Некоторые типичные осциллограммы, полученные при прессовании А1 через одноочковую цилиндрическую матрицу методом прямого истечения при различных степенях деформации и при температуре 450°C

Прессование проводилось в каждом случае без смазки, чтобы избежать неточности, которая получается вследствие неравномерности смазывания и, кроме того, чтобы получить нужные результаты при самых тяжелых условиях прессования и с учетом того обстоятельства, что алюминий и его сплавы, за редким исключением, прессуются без смазки и в цилиндрических матрицах.

Сравнение расчетных и экспериментальных

	Прессуемый металл или сплав	Размеры слитка до прессования		Размеры слитка после запрессовки		Размеры готового профиля		Температура С°		Деформация		Средняя скорость прессования $v_{ср}$ мм/сек	Профиль матрицы	
		Диаметр мм	Длина мм	Диаметр мм	Длина мм	Диаметр мм	Сечение S_k мм²	Слитка	Контейнера	$\frac{S_H}{S_K}$	$\ln \frac{S_H}{S_K}$		Цилиндрическая	t_K мм
1	Al	40	70	42	63	12	119	400	400	12,2	2,5	9~12	„	3
2	„	40	70	42	63	5	19,6	400	400	70,5	4,25		„	3
3	„	40	70	42	63	12	119	450	450	12,2	2,5		„	3
4	„	40	70	42	63	3	7,0	450	450	196	5,27		„	3
5	„	40	70	42	63	12	119	500	500	12,2	2,5		„	3
6	„	40	70	42	63	3	7,0	500	500	196	5,27		„	3
7	Al 99,6	220	876	227	805	13,5	125,3	450	420	393	5,77	10,7	„	3
8	„	220	800	227	736	13,5	125,3	400	420	323	5,77	12,3	„	3
9	„	220	765	227	703	23,4	430	520	425	94	4,54	3,4	„	3
10	„	220	760	227	699	23,4	430	510	425	94	4,54	3,3	„	3
11	„	220	775	227	713	23,4	430	545	440	94	4,54	2,1	„	3
12	„	220	760	227	699	23,4	430	525	445	94	4,54	13,6	„	3
13	Al 99,5	—	—	165	780	50	1962	510	—	11	2,4	12,8	„	3
14	„	„—	—	165	380	25	489	510	—	43,7	3,77	126	„	3

Образцы для прессования Al1 и D1 изготовлялись из прессованных прутков, а для прессования AMц и D16 — из заготовок, полученных методом полунепрерывного литья. Заготовки, полученные методом полунепрерывного литья, обтачивались до требуемых размеров. Слитки нагревались перед прессованием в электропечи сопротивления в течение 4—6 час, что заведомо достаточно для полного прогрева; соответствующая температура проверялась контактной термопарой.

Контейнер, матрицы и прессшайбы нагревались до температуры прессуемого слитка.

Прессование в большинстве случаев проводилось с незначительными прессостатками, позволяющими определять минимальное усилие прессования на индикаторной диаграмме.

Каждый эксперимент повторялся трижды для подтверждения достоверности результатов.

До начала регистрируемых экспериментов предварительно отпрессовывалось 2—3 слитка с целью создания теплового равновесия.

Таблица 1

данных по формулам различных исследователей

Экспериментальные данные		Расчетные данные по формуле С. И. Губкина [1] [2]				Расчетные данные по формуле И. Л. Перлина [5]				Расчетные данные по формуле А. Д. Томленова [4]		Расчетные данные по формуле А. Гелейи [14]		Величина σ_2 при расчетах кг/мм^2	Величина коэффициента трения при расчете
Напряжен. у прессшайбы σ_{π} кг/мм^2	Напряжен. у матрицы σ_M кг/мм^2	Напряжен. у прессшайбы σ_{π} кг/мм^2	$\frac{\sigma_{\pi} - \sigma_{\pi}'}{\sigma_{\pi}} \cdot 100$	Напряжен. у матрицы σ_M кг/мм^2	$\frac{\sigma_M - \sigma_M'}{\sigma_M} \cdot 100$	σ_{π}' кг/мм^2	$\frac{\sigma_{\pi} - \sigma_{\pi}'}{\sigma_{\pi}} \cdot 100$	σ_M' кг/мм^2	$\frac{\sigma_M - \sigma_M'}{\sigma_M} \cdot 100$	σ_{π}' кг/мм^2	$\frac{\sigma_{\pi} - \sigma_{\pi}'}{\sigma_{\pi}} \cdot 100$	σ_{π}' кг/мм^2	$\frac{\sigma_{\pi} - \sigma_{\pi}'}{\sigma_{\pi}} \cdot 100$		
26,3	19,1	8,24	-68	3,76	-80	13,7	-48	9,45	-50	6,7	-74	20,5	-22	1,4	0,28
42,3	33,2	14,3	-65	7,0	-79	20,8	-45	16,6	-50	15,4	-62	35,0	-15	1,4	0,28
19,8	14,8	6,03	-68	2,76	-80	11	-43	6,8	-57	4,8	-74	14,0	-25	1,0	0,28
43,3	35	13,6	-68	6,81	-80	19	-55	15,2	-56	17,1	-60	27,9	-35	1,0	0,28
15,8	12,3	4,8	-68	2,2	-80	9	-44	6,1	-50	4,4	-71	11,2	-30	0,8	0,25
34,3	28	10,9	-67	5,45	81	18,2	-45	13,6	-51	15,5	-56	22,4	-32	0,8	0,25
54,7	34,2	14,3	-74	5,97	-82	22	-59	14,9	-56	43,1	-21	43,8	-21	1,0	0,28
58,1	37,6	19,3	-66	8,36	-83	30	-48	20,8	-44	55,7	-4	50,5	-13	1,4	0,28
80,8	20,5	8,0	-74	3,7	-82	14,2	-53	9,3	-54	16,1	-46	28,0	-9	0,8	0,25
30,8	20,5	8,0	-74	3,7	-82	14,2	-53	9,3	-54	16,0	-46	28,0	-9	0,8	0,25
27,3	17,1	5,9	-82	2,8	-84	10,8	-60	7,0	-59	12,8	-53	20,3	-25	0,8	0,25
34,2	20,5	8,0	-76	3,7	-82	14,2	-58	9,3	-54	16,2	-52	31,5	-8	0,8	0,25
21,5	—	5,2	-75	1,96	—	12,6	-41	—	—	11,7	-45	22,6	-2	0,8	0,25
28	—	4,3	-84	2,04	—	11,4	-59	—	—	8,5	-70	28,7	5	0,8	0,25

Все приборы, применяемые для измерения различных технологических параметров прессования во время экспериментирования систематически подвергались госпроверке или тарировке точно в таких же условиях, при каких происходило экспериментирование.

Усилие, температура, ход пуансона, время прессования регистрировались с помощью шлейфового осциллографа, в результате чего был получен ряд осциллограмм. Некоторые типичные осциллограммы, полученные при различных условиях прессования, показаны на рис. 5/а,б, 6/а,б.

2. Описание заводских экспериментов

В заводских условиях проводились эксперименты, главным образом на алюминий 99,5.

Проводилось прессование сплошных круглых профилей через одно и многоочковую цилиндрическую матрицу без смазки.

Слитки для прессования изготавливались путем полунепрерывного

литья с диаметром 220 мм и нагревались перед прессованием в электропечи сопротивления с воздушной циркуляцией в течение приблизительно 6 час.

Температура слитков перед прессованием измерялась контактной термомпарой.

Температура контейнера в большинстве случаев была несколько ниже температуры слитков.

Прессование проводилось на горизонтальном гидравлическом прессе мощностью 3500 т, с прессостатками 8—10%.

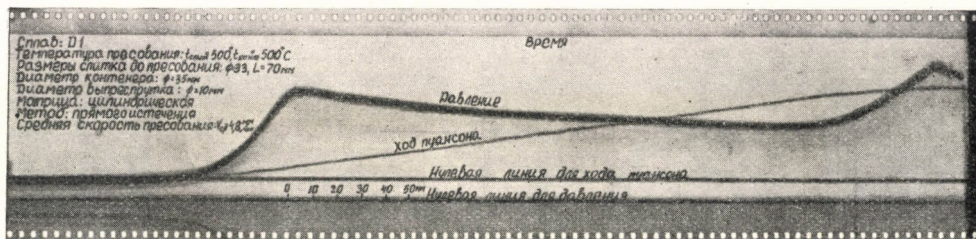
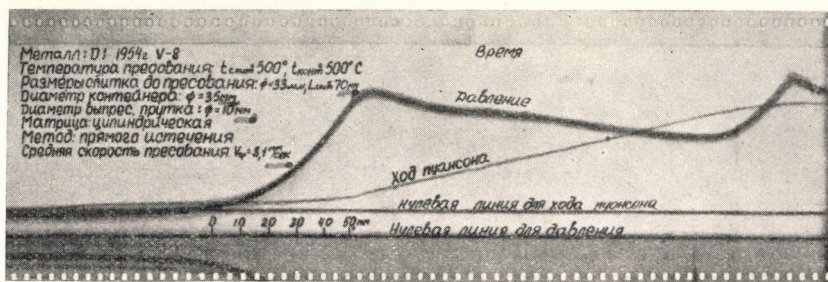


Рис. 6/а, б. Некоторые типичные осциллограммы, полученные при прессовании сплава Д1 через одноочковую цилиндрическую матрицу методом прямого истечения при различных степенях и скоростях деформации и температурах прессования

Давление прессования измерялось у главного цилиндра пресса образцовым манометром и с точностью ± 2 атм.

Средняя скорость прессования определялась прибором Шлемана и, кроме того, хронометром.

III. Обсуждение результатов экспериментов

1. О влиянии первоначальной структуры прессуемого слитка на усилие прессования

В результате экспериментов, проведенных при одинаковых условиях прессования для литых и прессованных заготовок, были получены осцил-

лограммы (рис. 7/а и б). На подлинных осциллограммах, полученных при прессовании слитков литейной структуры, величина ординаты, характеризующая максимальное усилие прессования $P_{\max} = 42,5$ мм, величина орди-

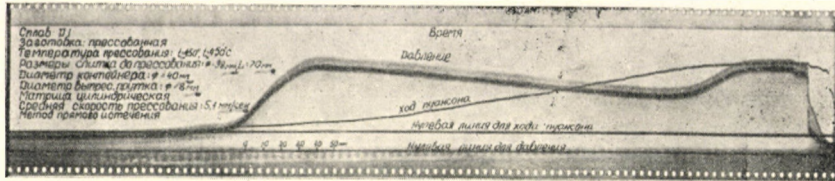


Рис. 7/а. Осциллограмма, полученная при прессовании сплава D1 методом прямого истечения; исходная заготовка: литая

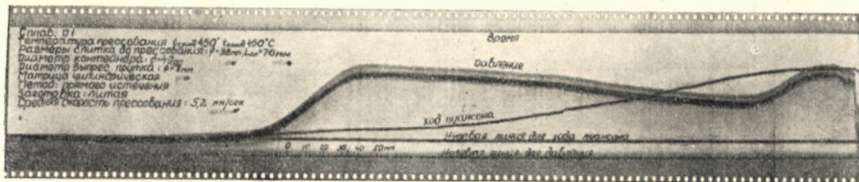


Рис. 7/б. Осциллограмма, полученная при прессовании сплава D1 методом прямого истечения; исходная заготовка: прессованная

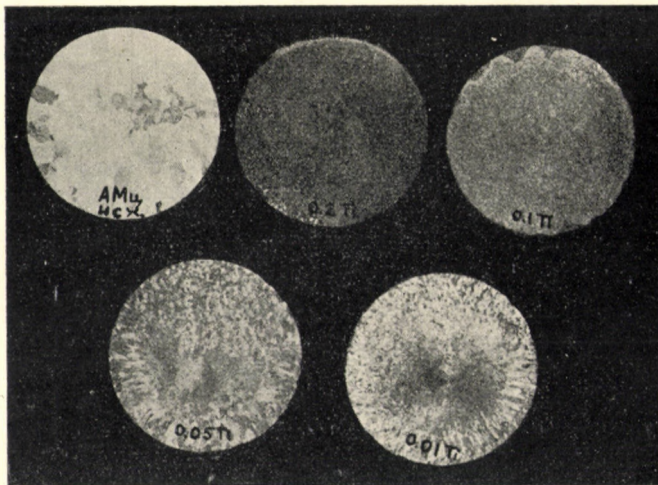


Рис. 8. Изменение первоначальной структуры прессуемых заготовок АМц в зависимости от добавления Ti в различных количествах

наты, характеризующая минимальное усилие прессования $P_{\min} = 26$ мм, а при прессовании слитков, изготовленных из прессованных прутков, $P'_{\max} = 43$ мм и $P'_{\min} = 26$ мм.

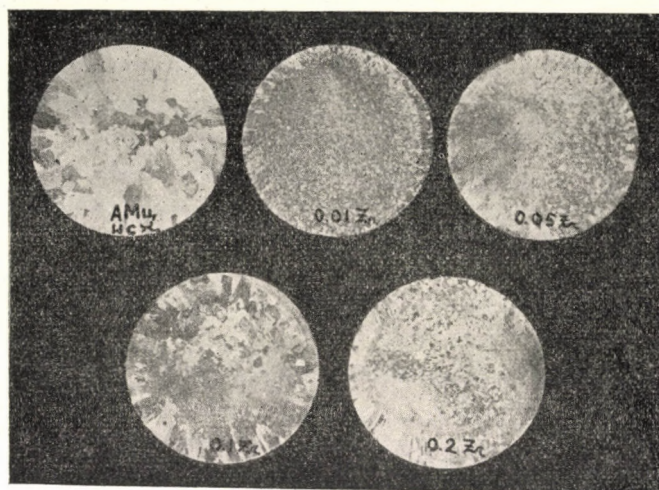


Рис. 9. Изменение первоначальной структуры прессуемых заготовок АМц в зависимости от добавления Zr в различных количествах

Зависимость усилия прессования от
определение величины „К” при прессовании сплюсн
прямого истечения через одноочковую

Прессуемый ме- талл или сплав	Химический сост. $Mg = 1,38$ $Cu = 0,03$ $Fe = 0,5$ $Al = R$ $Si = 0,13$				Размеры слитка до прес- сования		Размеры слит- ка после за- прессовки			Размеры готового профиля		Деформа- ция	
	Ti	Ta	B	Zr	Диаметр мм	Длина мм	Диаметр мм	Длина мм	Сечение S_H мм ²	Диаметр мм	Сечение S_K мм ²	$\frac{S_H}{S_K}$	$\ln \frac{S_H}{S_K}$
АМц	0,05	—	—	—	38	65	42	58,5	1385	10	78,5	17,6	2,8
„	0,1	—	—	—	38	65	42	58,5	1385	10	78,5	17,6	2,8
„	0,2	—	—	—	38	65	42	58,5	1385	10	78,5	17,6	2,8
„	—	0,05	—	—	38	65	42	58,5	1385	10	78,5	17,6	2,8
„	—	0,1	—	—	38	65	42	58,5	1385	10	78,5	17,6	2,8
„	—	0,2	—	—	38	65	42	58,5	1385	10	78,5	17,6	2,8
„	—	—	0,05	—	38	65	42	58,5	1385	10	78,5	17,6	2,8
„	—	—	0,1	—	38	65	42	58,5	1385	10	78,5	17,6	2,8
„	—	—	0,2	—	38	65	42	58,5	1385	10	78,5	17,6	2,8
„	—	—	—	0,05	38	65	42	58,5	1385	10	78,5	17,6	2,8
„	—	—	—	0,1	38	65	42	58,5	1385	10	78,5	17,6	2,8
„	—	—	—	0,2	38	65	42	58,5	1385	10	78,5	17,6	2,8

Расхождение между $P_{\max}$ и $P'_{\max}$ составляет 1%, этой разницей практически можно пренебречь.

Незначительные расхождения получились также при прессовании сплава АМц с различными первоначальными структурами вследствие добавления в эти сплавы некоторых элементов (Ti , Ta , V и Zr) в различных количествах.

Первоначальные структуры некоторых из этих заготовок показаны на рис. 8 и 9.

Из табл. 2 видно, что максимальное расхождение между максимальными усилиями прессования составляет 5% и между минимальными усилиями — 3%. Однако это расхождение незакономерно по структуре слитка, поэтому возможно практически пренебречь влиянием первоначальной структуры прессуемого слитка на усилие прессования.

Следует отметить, что подобные результаты показали эксперименты, проведенные В. Кузиным (11). На странице 42 он пишет: «режим прессования труб размером 16×11 мм из литых заготовок мало отличается от режима прессования тех же труб из предварительно продеформированных заготовок».

Таблица 2

первоначальной структуры слитка и
ных круглых профилей из сплава АМц методом
матрицу при температуре 450°C .

Температура °C		Смазка	Профиль матрицы		Средняя скорость движения пуан- сона $U_{\text{ср.}}$ мм/сек	$P_{\max}$ т	$P_{\min}$ т	$P_{\max} - P_{\min}$ т	σ_T кг/мм ²	$\sigma_M + \sigma_K$ кг/мм ²	Рабочая длина слитка L_1 мм	σ_f кг/мм ²	K кг/мм ²
Слитка	Контей- нера		Цилин- дрическая	I_K мм									
450	450	Нет	Ц	3	11~13	50,0	36	14	36,1	25,9	44,6	2,38	8,21
450	450	„	„	3	9~11	50,5	36,	14,5	36,4	25,9	44,6	2,4	8,21
450	450	„	„	3	9,8—10	49	35	14	35,4	25,2	44,6	2,38	7,98
450	450	„	„	3	9,3	49,	35,5	13,5	35,4	25,6	44,6	2,29	8,50
450	450	„	„	3	8,2—9	48,5	35,5	13	35,0	25,6	44,6	2,20	8,2
450	450	„	„	3	10	50,5	36	14,5	36,4	25,9	44,6	2,4	8,21
450	450	„	„	3	10,1	50,5	36,5	14	36,4	26,3	44,6	2,38	8,4
450	450	„	„	3	10	49	35	14	35,4	25,2	44,6	2,38	7,97
450	450	„	„	3	11	51	36	15	36,8	25,9	44,6	2,5	8,18
450	450	„	„	3	9,8	48,5	36	12,5	35,0	25,9	44,6	2,1	8,35
450	450	„	„	3	9,8	48	36	12	34,7	25,9	44,6	2,03	8,4
450	450	„	„	3	10~11	51	36	15	36,8	25,9	44,6	2,5	8,18

Таким образом, на основании вышесказанного можно заключить, что при прессовании алюминия и его сплавов при практически применяемых условиях прессования первоначальная структура прессуемого слитка практически мало влияет на усилие прессования, и в расчетах это влияние можно не учитывать.

2. О характере кривых изменения усилия при прессовании методами прямого и обратного истечения

При прессовании методом прямого истечения, как это видно на осциллограммах, полученных для различных сплавов на алюминиевой основе

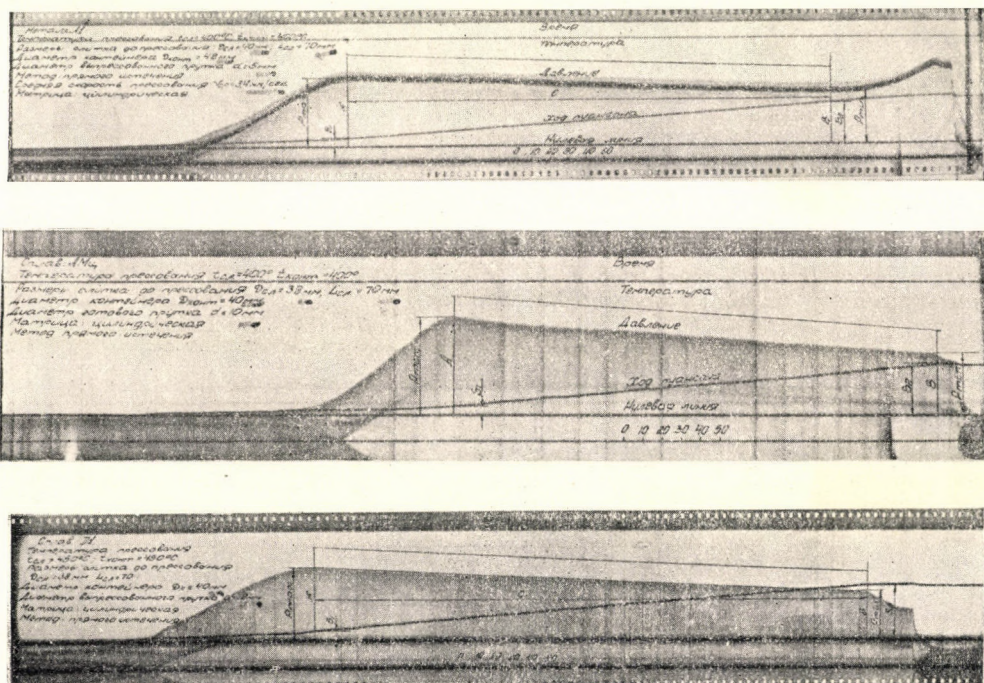


Рис. 10/а, б, в. Некоторые типичные осциллограммы, полученные при прессовании алюминия А1 и сплавов АМц, D1 через одноочковую цилиндрическую матрицу методом прямого истечения при различных условиях прессования

при разных условиях прессования (рис. 10/а, б, в) усилие прессования достигает максимума ($P_{\max}$) к моменту окончания запрессовки, а с началом истечения по мере уменьшения длины слитка падает по прямой, показывающей минимум ($P_{\min}$) перед окончанием прессования.

При прессовании же по методу обратного истечения усилие прессования также растет, достигая максимальной величины к моменту окон-

чания запрессовки, а с началом истечения остается постоянным ($P_{\text{пост}}$) до некоторого момента, предшествующего окончанию прессования (рис. 11/а, б, в). Однако, падение усилия прессования по прямой по мере уменьшения длины слитка, а также постоянство кривой усилия прессования

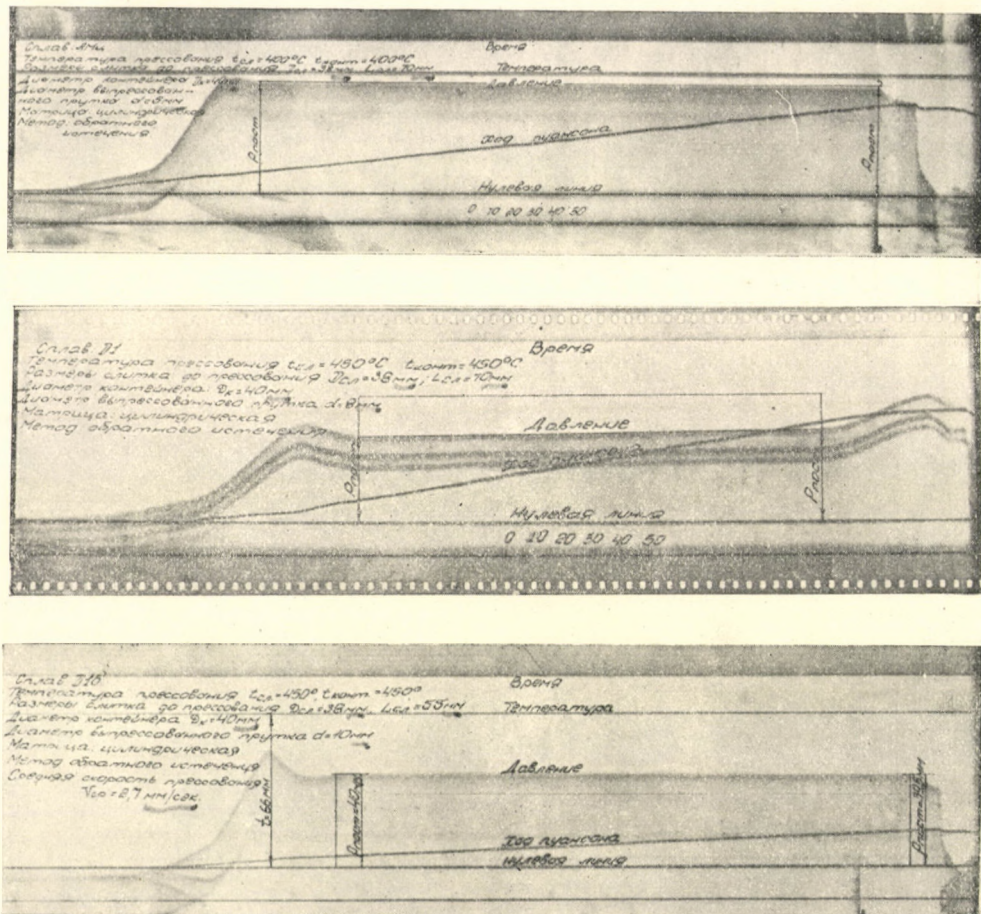


Рис. 11/а, б, в. Некоторые типичные осциллограммы, полученные при прессовании сплавов АМс, D1 и D16 через одноочковую цилиндрическую матрицу методом обратного истечения при различных условиях прессования

методом обратного истечения получается лишь в том случае, если в течение процесса прессования температура и скорость прессования не изменяются. Всякое изменение скорости и температуры прессования сразу отражается на усилиях прессования.

На осциллограммах рис. 12/а, б, в, полученных при экспериментах с изменением скорости в процессе прессования, — проводившихся специально

для доказательства вышеуказанного обстоятельства, — видно, что при быстром изменении скорости прессования (изменение скорости прессования видно на кривой хода пуансона) усилие прессования также значительно изменяется.

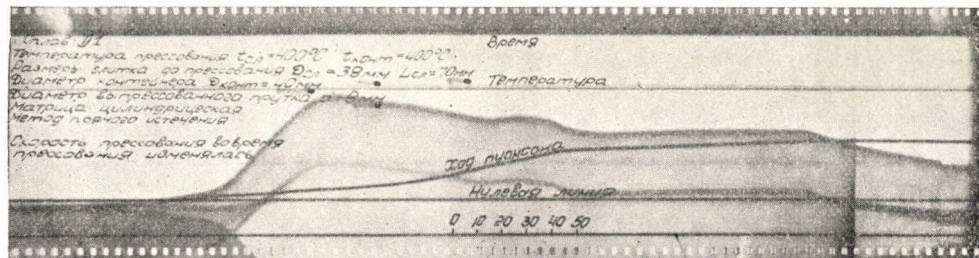
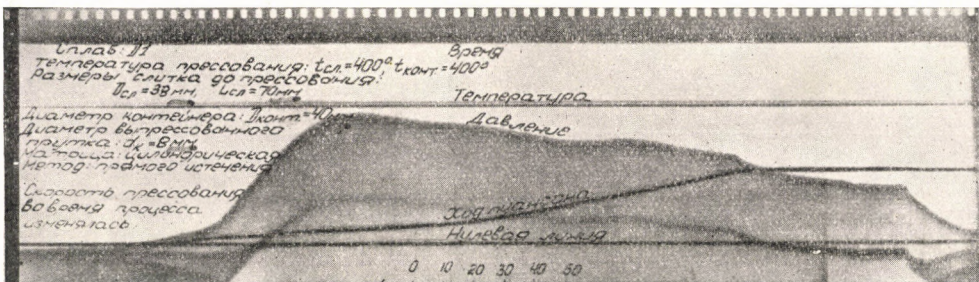
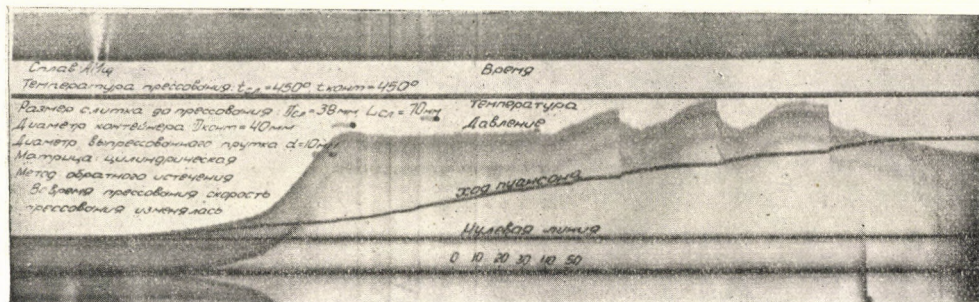


Рис. 12/а, б и в. Некоторые осциллограммы, полученные при прессовании, когда скорость прессования специально изменялась во время процесса

Этим можно объяснить существование так называемых «горбиков» в начале индикаторных диаграмм прессования. На осциллограммах рис. 13/б можно заметить, что во время образования «горбиков» происходит сильное изменение скорости прессования, а на осциллограммах (рис.13/а, б), где нет быстрого изменения скорости прессования, «горбик» не получается. Если степень деформации, скорость и температура прессования выбраны одина-

ковыми при прессовании методами прямого и обратного истечения, а размеры прессшайбы, используемой при прессовании методом прямого истечения, одинаковы с размерами матрицы при прессовании методом обратного истечения, то, как показали эксперименты, усилие $P_{\min}$ при методе прямого истечения и усилие $P_{\text{пост}}$ при методе обратного истечения практически совпадают по величине. На рис. 14/а, б, в показаны осциллограммы.

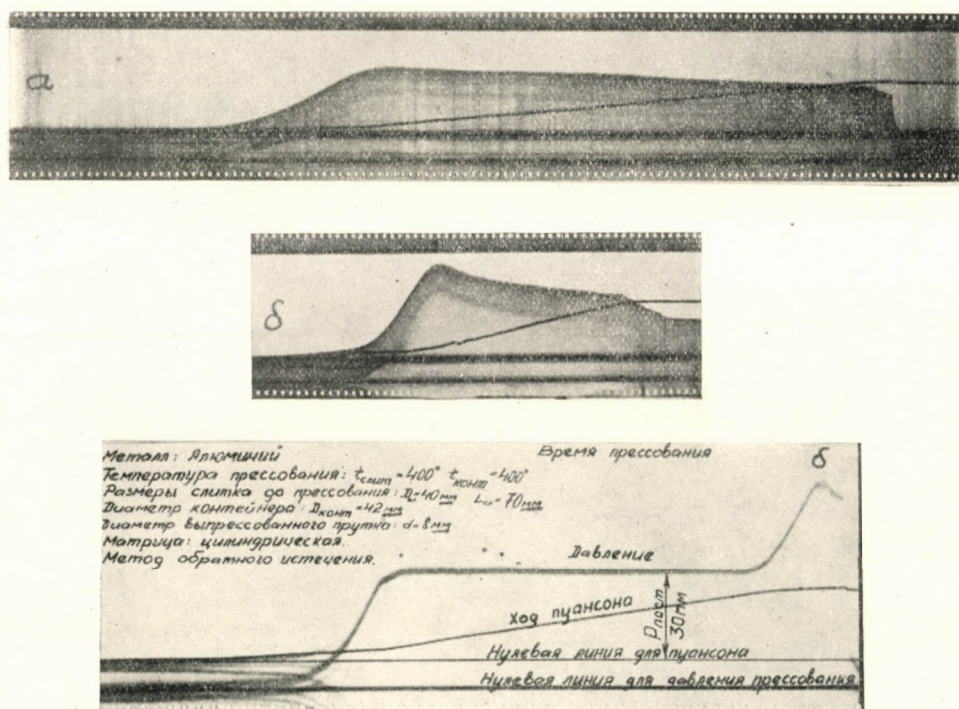


Рис. 13/а, б. Осциллограммы, на которых показано влияние изменения скорости прессования на возникновение «горбиков» (сплав Д1 $D_{\text{н}} = 40 \text{ мм}$, $D_{\text{к}} = 8 \text{ мм}$, $t_{\text{пресс}} = 450^\circ \text{С}$ матрица цилиндрическая, метод прямого истечения)

подтверждающие эту закономерность совпадения $P_{\min}$ и $P_{\text{пост}}$ при вышеуказанных условиях прессования для некоторых сплавов на алюминиевой основе.

Совпадение $P_{\min}$ и $P_{\text{пост}}$ при указанных условиях прессования соответствует теоретическим предположениям, ибо такие же отношения между этими величинами отмечены и другими исследователями (18) стр. 7 рис. 10.

Кроме того, совпадение $P_{\min}$ и $P_{\text{пост}}$ подтверждает правильность нашего допущения о том, что разницей, существующей между характерами очагов деформации при прессовании методами прямого и обратного истечения, с точки зрения определения усилия прессования можно пренебречь.

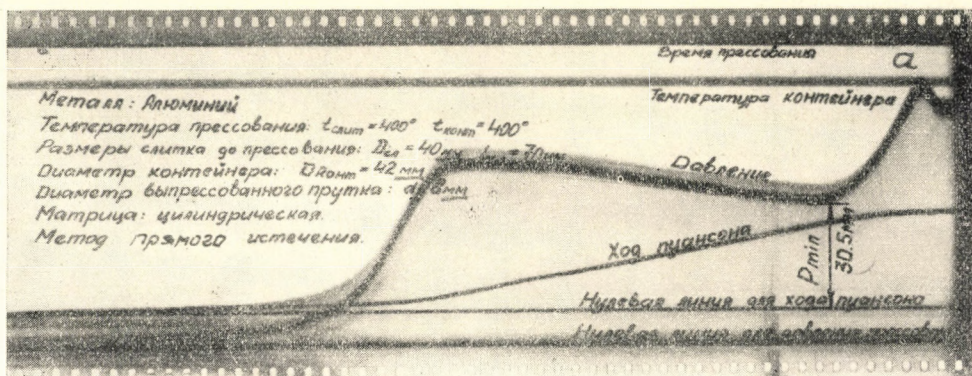


Рис. 14/а. Осциллограммы, полученные при прессовании алюминия А1 через одноочковую цилиндрическую матрицу при одинаковых условиях прессования и характеризующие практическое совпадение усилий: $P_{\min}$ и $P_{\text{пост}}$

- а) метод прямого истечения,
- б) метод обратного истечения

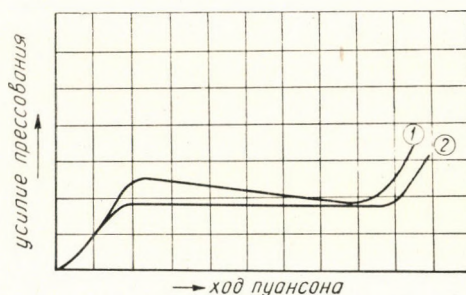


Рис. 14/в. Кривые изменения давления прессования методом прямого (1) и обратного (2) истечения при одинаковых условиях прессования (кривые, построенные на основании осциллограмм 14/а и 14/б)

3. Об определении характера и величины напряжения трения на контактной поверхности контейнера и о недействительности закона Кулона в практических условиях прессования сплавов на алюминиевой основе

Установленное падение усилия при прессовании методом прямого истечения по прямой указывает на существующую линейную зависимость

между силами трения на стенках контейнера и величиной контактной поверхности и является доказательством практического постоянства напряжения трения на контактной поверхности контейнера при постоянной скорости и температуре прессования.

Совпадение $P_{\min}$ и $P_{\text{пост.}}$ при ранее упомянутых условиях прессования сделало излишним проводить прессование по методу прямого и обратного истечения для нахождения разницы $P_{\text{пр}} - P_{\text{обр}} = P_{f2}$, так как эта разница получается из ординат $P_{\max} - P_{\min}$ при одном методе прямого истечения, т. е. $P_{\max} - P_{\min} = P_{f2}$.

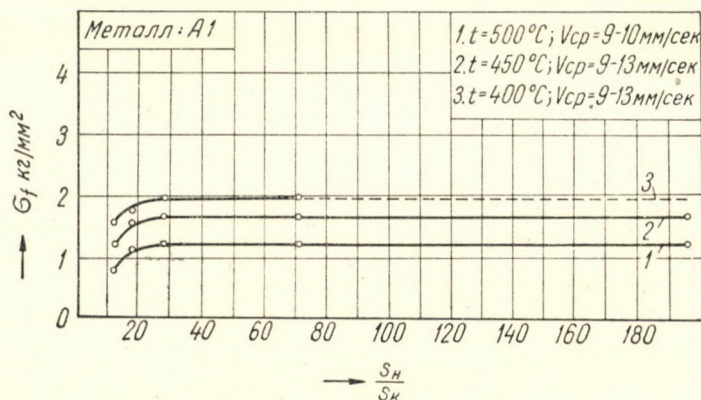


Рис. 15. Зависимость напряжения трения алюминия (А1) от степени деформации при типовой скорости и различных температурах прессования

Поэтому напряжение трения определяется по выражению :

$$\sigma_f = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{\pi \cdot D_H \cdot L_1}, \quad (10)$$

где L_1 — рабочая длина слитка, которая участвует в трении о стенки контейнера от участка $P_{\max}$ до участка, соответствующего $P_{\min}$.

На основании результатов лабораторных экспериментов по определению величины напряжения трения построены диаграммы зависимости напряжения трения от степени деформации, температуры и средней скорости прессования (средней скорости движения пуансона — $V_{\text{ср}}$).

Как видно из диаграмм рис. 15 и 16 при прессовании алюминия и его сплавов методом прямого истечения напряжение трения на боковой поверхности контейнера при больших нормальных давлениях практически не зависит от повышения нормальных напряжений, т. е. достигает своего максимума. Вследствие этого закон Кулона при нормальных давлениях, имеющих место при прессовании алюминиевых сплавов, не действителен.

Это подтверждается также следующими расчетами: если принять, что нормальное напряжение на боковой поверхности контейнера вблизи прессшайбы равно нормальному давлению на прессшайбе σ_π (в действительности немного меньше $\sigma_\pi - \sigma_\partial$), то коэффициент трения на этом участке определяется отношением

$$f = \frac{\sigma_f}{\sigma_\pi - \sigma_\partial} \quad (11)$$

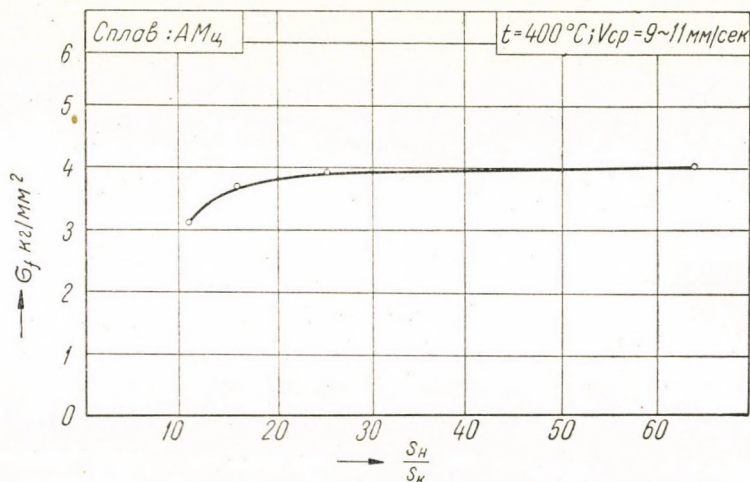


Рис. 16. Зависимость напряжения трения сплава АМц от степени деформации при типовой скорости прессования и температуре 400°С

В табл. 3 приведены некоторые значения этого коэффициента для момента начала прессования. Величины коэффициента f , как видно из таблицы, колеблются в пределах 0,046~0,088.

Следует отметить, что А. Гелейи на основании своих опытов установил, что среднее значение коэффициента трения на боковой поверхности контейнера при прессовании методом прямого истечения равно 0,05 (15) стр. 97.

Как следует из диаграмм (рис. 17, 18, 19, 20, 21) напряжение трения с изменением скорости прессования изменяется. С увеличением скорости прессования сначала напряжение трения сильно возрастает, а потом, когда скорость прессования достигает некоторой величины (в зависимости от температуры и прессуемого металла), почти не изменяется, т. е. практически его можно считать постоянным.

Такой характер кривой напряжения трения в зависимости от средней скорости прессования аналогичен характеру кривой напряжения среза, в зависимости от скорости резания.

Таблица 3

Температура °С	400	450	500	Металл или сплав
σ_f кг/мм ²	1,95	1,65	1,20	А1
σ_π кг/мм ²	42,2	34,7	26,7	
σ_∂ кг/мм ²	1,36	1,0	0,8	
$V_{ср}$ мм/сек	10,2	10,0	9,5	
S_H/S_K	70,5	70,5	70,5	
$f = \frac{\sigma_f}{\sigma_\pi - \sigma_\partial}$	0,047	0,049	0,046	
σ_f кг/мм ²	3,71	2,4	—	АМ _μ
σ_π кг/мм ²	54,7	36,4	—	
σ_∂ кг/мм ²	2,3	1,8	1,5	
$V_{ср}$ мм/сек	10,9	9~11	—	
S_H/S_K	16	17,6	—	
$f = \frac{\sigma_f}{\sigma_\pi - \sigma_\partial}$	0,070	0,068	—	
σ_f кг/мм ²	4,3	3,53	3,3	D1
σ_π кг/мм ²	63,6	54,5	46,1	
σ_∂ кг/мм ²	4,1	3,2	2,8	
$V_{ср}$ мм/сек	4,4	9,3	12,2	
S_H/S_K	25	25	25	
$f = \frac{\sigma_f}{\sigma_\pi - \sigma_\partial}$	0,072	0,068	0,076	
σ_f кг/мм ²	—	4,8	—	D16
σ_π кг/мм ²	—	57,7	—	
σ_∂ кг/мм ²	—	3,2	—	
$V_{ср}$ мм/сек	—	4,1	—	
S_H/S_K	—	25	—	
$f = \frac{\sigma_f}{\sigma_\pi - \sigma_\partial}$	—	0,088	—	

Таким образом, эти эксперименты также подтверждают то предположение, что при прессовании сплавов на алюминиевой основе сила трения проявляется в близком к срезу виде.

Следует отметить, что С. Н. Тарантов, определяя величину напряжения трения при прессовании сплава D1 при температуре около 360° С (скорость и степень деформации не указаны), получил, что эта величина (4,54 кг/мм² [12] стр. 10) близко подходит к значениям сдвигающего напряжения, полученного для этого сплава путем испытания на срез при высоких температурах.

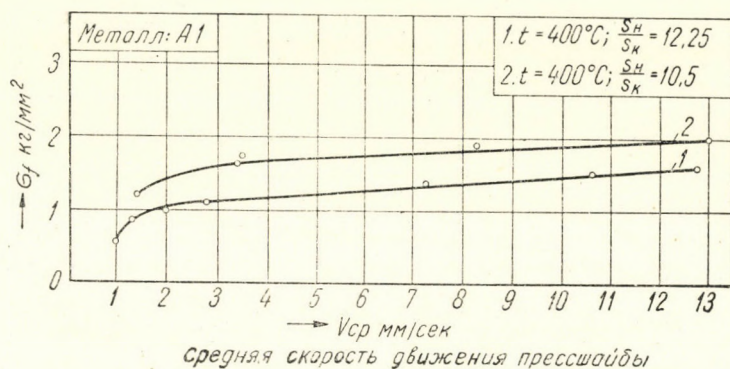


Рис. 17. Зависимость напряжения трения алюминия (А1) от средней скорости прессования при различных степенях деформации и температуре 400°C

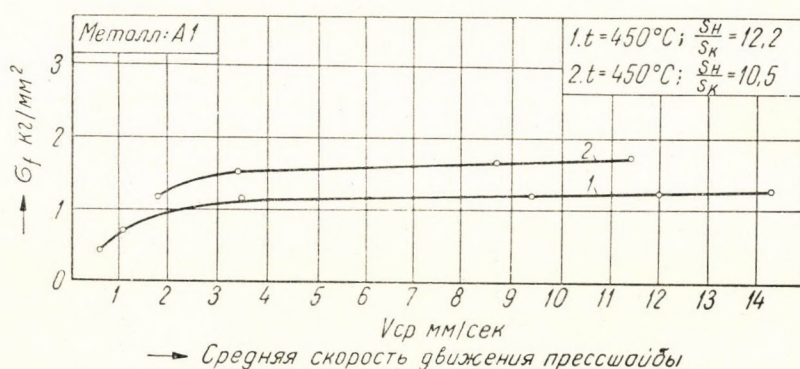


Рис. 18. Зависимость напряжения трения алюминия А1 от средней скорости прессования при различных степенях деформации и температуре 450°C

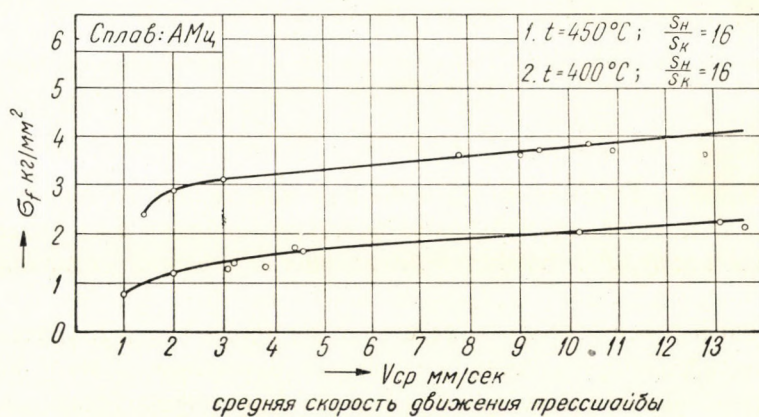


Рис. 19. Зависимость напряжения трения сплава АМц от средней скорости прессования при температурах 400 и 450°C

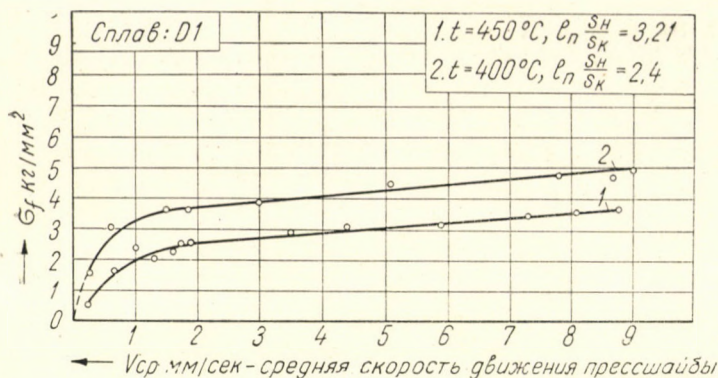


Рис. 20. Зависимость напряжения трения сплава D1 от средней скорости прессования при разных степенях деформации и температуре 450°C

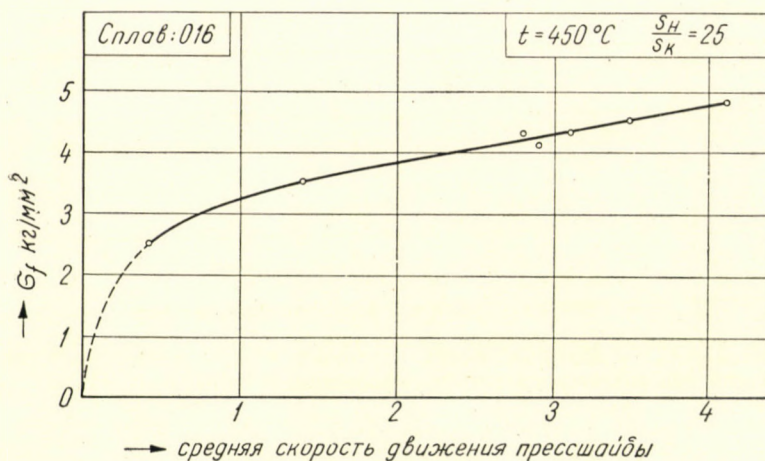


Рис. 21. Зависимость напряжения трения сплава D16 от средней скорости прессования при температуре 450°C

4. Об определении величины σ_M и «К» при прессовании сплошных круглых профилей через одноочковую цилиндрическую матрицу и их зависимость от температуры и скорости прессования и степени деформации

Для экспериментального определения величины σ_M и К сначала проводились эксперименты по методу обратного истечения, а после установления закономерности совпадения $P_{\min}$ и $P_{\text{пост}}$ проводились эксперименты только по методу прямого истечения при различных условиях прессования. После определения $P_{\min}$ и $P_{\text{пост}}$ величины К определялись расчет-

ным путем по формуле :

$$K = \frac{\sigma_M - \sigma_K}{\ln \frac{S_H}{S_K}}, \quad (9/6)$$

где

$$\sigma_M = \frac{P_{\min}}{\frac{D_H^2 \pi}{4}} \quad \text{и} \quad \sigma_K = \sigma_f \frac{4 l_K}{D_K}.$$

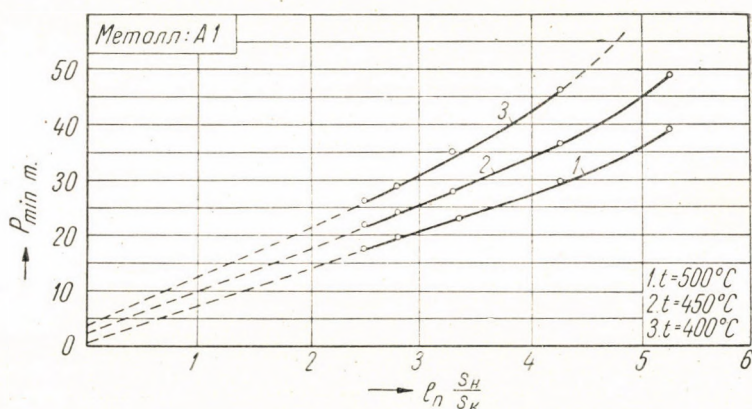


Рис. 22. Зависимость минимального усилия прессования ($P_{\min}$) алюминия А1 от натурального логарифма степени деформации при температурах 400°, 450° и 500° С

На основании величин $P_{\min}$ и K , полученных при различных условиях прессования для А1, АМц, Д1 и Д16 были построены диаграммы для установления характера зависимости этих величин от температуры и скорости прессования и степени деформации.

Как следует из диаграмм (рис. 22, 23, 24) зависимость величины $P_{\min}$ от натурального логарифма степени деформации характеризуется прямолинейной закономерностью, особенно в области практически применяемых деформаций.

Отклонение полученных нами кривых в области очень большой степени деформации от строго прямолинейной зависимости можно объяснить, с одной стороны, влиянием сил внешнего трения на калибрующей части матрицы (так как полученные нами экспериментально величины $P_{\min}$ или $P_{\text{пост}}$ включают в себя также величину сил трения на калибрующей части матрицы, чего практически избежать невозможно), а с другой стороны, влиянием степени деформации на величину сопротивления деформированию.

Наличием сил трения на калибрующей части матрицы объясняется также то обстоятельство (не учитывая влияния упругих деформаций), что

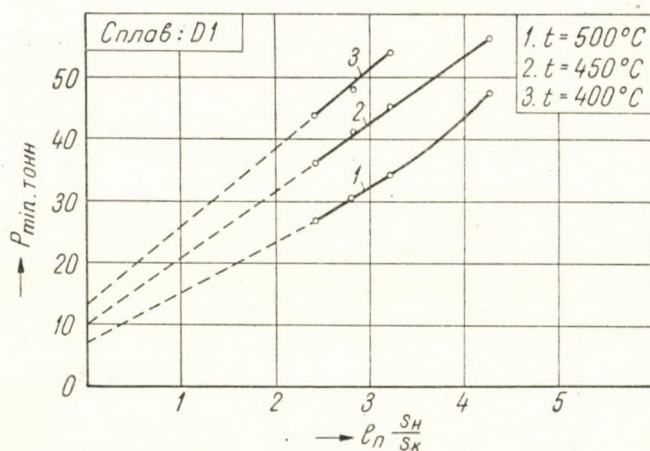


Рис. 23. Зависимость минимального усилия прессования ($P_{\min}$) сплава D1 от натурального логарифма степени деформации при температурах 400°, 450° и 500° С

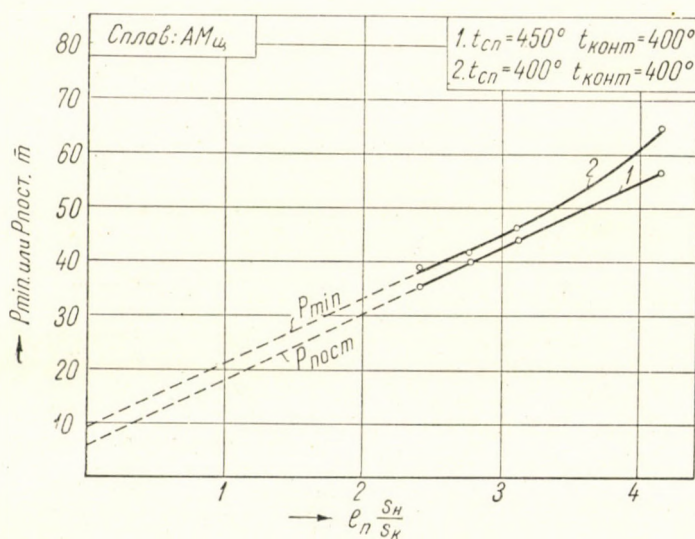


Рис. 24. Зависимость минимального усилия прессования ($P_{\min}$) сплава AMц от натурального логарифма степени деформации при температурах 400 и 450° С

полученные нами кривые не проходят через начало координат. Это следует из элементарного математического анализа уравнения 9/а.

Таким образом, на основании экспериментальных данных и учитывая объяснение о влиянии сил трения на калибрующей части матрицы и

степени деформации на сопротивление деформированию, можно согласиться с выводами А. А. Ильюшина, Л. В. Прозорова, И. Л. Перлина, Э. Зибеля и Г. Закса, из которых следует, что при отсутствии сил трения на стенках контейнера на калибрующей части матрицы напряжение у матрицы должно быть пропорционально натуральному логарифму степени деформации, т. е.

$$\sigma_M = K \ln \frac{S_H}{S_K}. \quad (8)$$

Для определения характера зависимости величины «К» от скорости прессования использовались результаты экспериментов, проведенных при

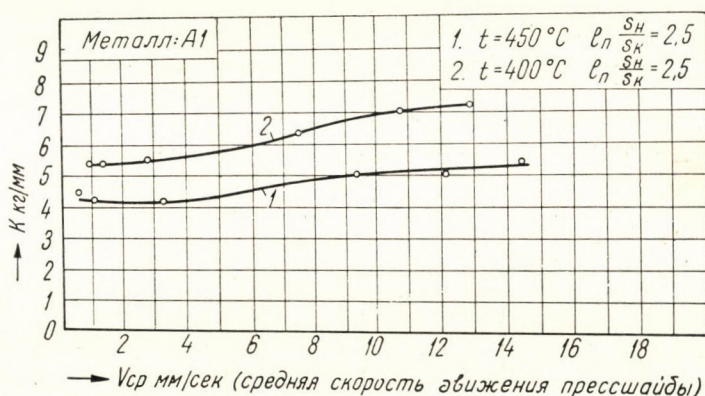


Рис. 25. Зависимость величины «К» для алюминия А1 от средней скорости прессования

одинаковых температурах прессования и степенях деформации, но с различными скоростями прессования.

Из диаграммы (рис. 25) видно, что при уменьшении средней скорости прессования в 23 раза (от 14,3 мм/сек до 0,6 мм/сек) величина «К» для алюминия А1 (при температуре 450°C и степени деформации $\frac{S_H}{S_K} 12,2$) уменьшается на 18%. Подобную картину получаем о влиянии скорости прессования при температуре 400°C для алюминия А1.

Однако характер влияния скорости прессования для сплавов D1, АМц и D16 является другим, а именно: с уменьшением скорости прессования величина К значительно не изменяется, и поэтому практически можно считать постоянной.

Таким образом, можно сделать вывод, что при прессовании алюминия и его сплавов при температурах 400°C и выше с увеличением скорости прессования величина К увеличивается или, в крайнем случае, остается посто-

янной. Этот результат соответствует теоретическим предположениям теории обработки металлов давлением, что в случае горячей деформации, когда скорость обработки позволяет металлу полностью разупрочниться, скоростной коэффициент не может заметно превысить единицу (13).

Эксперименты, проведенные при различных температурах для определения влияния температуры прессования на величину «К», показали, что с увеличением температуры прессования величина К в каждом случае и для всех испытываемых алюминиевых сплавов уменьшается (рис. 26).

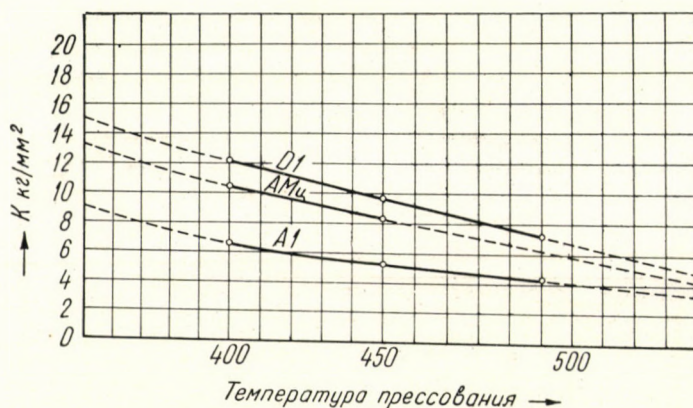


Рис. 26. Зависимость величины «К» для алюминия А1 и сплавов АМц и Д1 от температуры при типовых скоростях прессования

5. О характере процесса и рабочих напряжениях при прессовании сплошных круглых профилей через многоочковую матрицу

Эксперименты, проведенные для установления характера процесса и определения усилия прессования сплошных круглых профилей через многоочковую матрицу, показали, что характер процесса прессования через многоочковую матрицу аналогичен характеру процесса прессования через одноочковую матрицу, т. е. индикаторная диаграмма имеет ту же самую форму, как и при прессовании через одноочковую матрицу (см. осциллограммы, показанные на рис. 27/а,б).

Если учесть уменьшение степени деформации вследствие увеличения числа очков матрицы (при одинаковых первоначальных размерах слитков и одинаковых условиях при прессовании через одно и многоочковую матрицу), то усилие прессования у прессшайбы ($P_{\max}$) практически совпадает с соответствующими точками кривых максимальных усилий, полученных для случая прессования через одноочковую матрицу при прочих равных условиях прессования (рис. 28).

Таким образом, при практических расчетах для определения усилия прессования через многоочковую матрицу считается возможным использовать величины «К» и σ_f , полученные при прессовании через одноочковую матрицу.

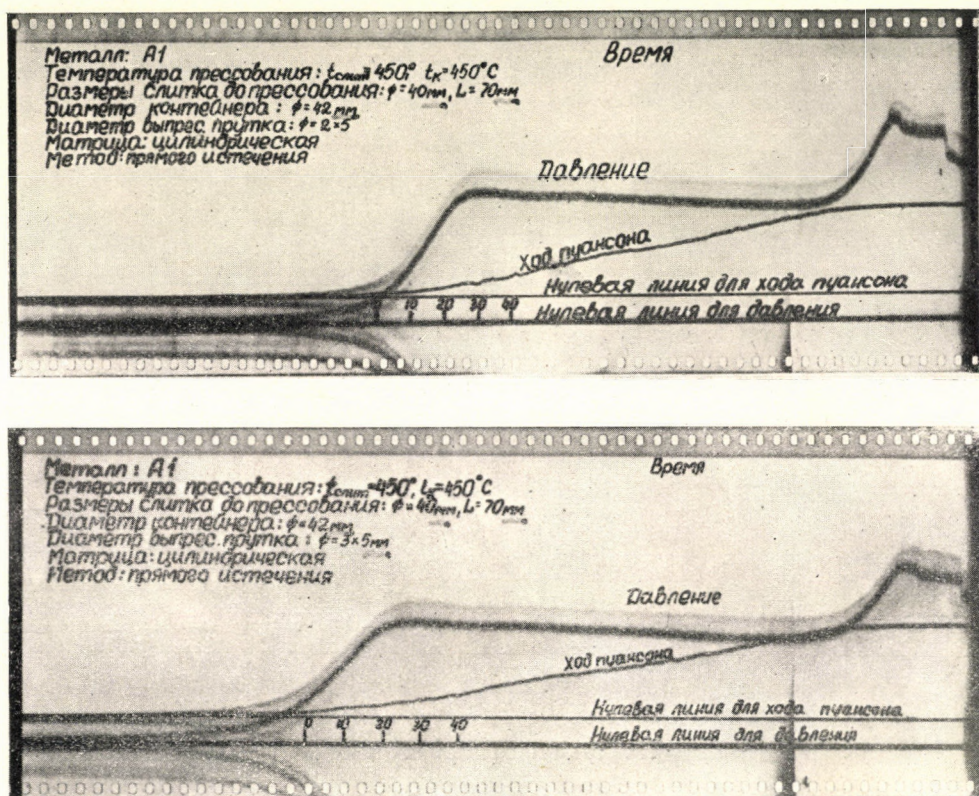


Рис. 27./а, б. Некоторые типичные осциллограммы, полученные при прессовании алюминия А1 через многоочковую (а и б) матрицу

О критерии правильности формул, определяющих рабочие напряжения при прессовании сплошных круглых профилей

Любая теоретическая формула должна удовлетворять следующим основным требованиям:

а) расчетные данные, полученные по формуле, должны совпадать с экспериментальными величинами;

б) правильность методики, которая положена в основу вывода формулы;

в) правильность самого вывода формулы на основе данной методики ;
 г) формула не должна содержать большое числа коэффициентов, трудно или вовсе неопределимых экспериментальным путем.

Помимо этих основных требований, формулы, определяющие рабочие напряжения при прессовании методом прямого истечения, должны отражать действие на прессуемый металл в процессе прессования следующих 3 основных групп сил в контейнере и матрице.

1. Силы, вызывающей основную деформацию, т. е. силы чистого сжатия.
2. Силы внешнего трения на контактной поверхности контейнера.
3. Силы внешнего трения на калибрующей части матрицы.

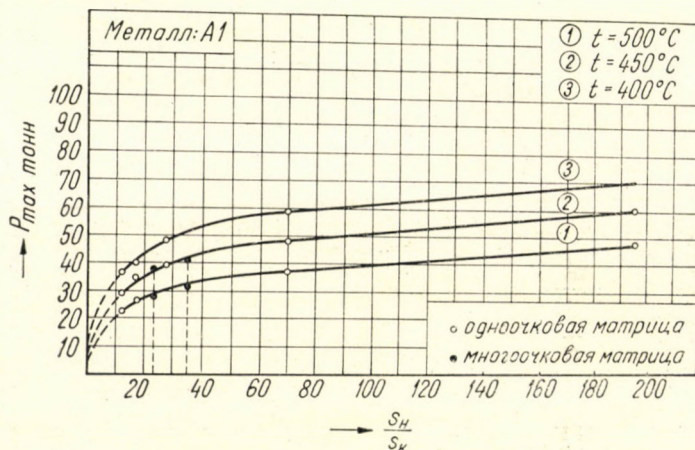


Рис. 28. Зависимость максимального усилия прессования ($P_{\max}$) алюминия А1 методом прямого истечения через одно и многооточковую матрицу от степени деформации при температурах 400°, 450° и 500° С

В дальнейшем рассматривается, каким образом должны учитываться формулы для определения рабочих напряжений прессования действия вышеуказанных 3 основных групп сил.

1. При прессовании существует напряженное состояние трехосного сжатия, когда два главных напряжения равны между собой. В этом случае, при полном отсутствии внешнего трения на стенках контейнера и на калибрующей части матрицы, как показали проведенные эксперименты, напряжение прессования должно быть пропорционально натуральному логарифму степени деформации, т. е.

$$\sigma_M = K \ln \frac{S_H}{S_K} . \quad (8)$$

2. Как было доказано в пункте 2, при прессовании методом прямого истечения без смазки существует линейная зависимость между силами

внешнего трения, возникающего на поверхности контейнера и слитка и длиной слитка, и кроме того напряжение трения на контактной поверхности контейнера и слитка во время процесса при постоянных скорости и температуры прессования является постоянной величиной, и поэтому в формулах, определяющих рабочие напряжения прессования, — должны отражаться вышеуказанные закономерности.

3. Формула должна учитывать силы трения на калибрующей части матрицы так, что увеличение поверхности трения должно приниматься во внимание.

Таким образом, критериями правильности формул, определяющих рабочие напряжения при прессовании, будут:

1. При отсутствии внешнего трения на контактной поверхности контейнера и на калибрующей части матрицы:

$$\sigma_M = K \ln \frac{S_H}{S_K} . \quad (8)$$

2. Формула должна отражать линейную зависимость между силами внешнего трения на стенках контейнера и длиной слитка при прессовании методом прямого истечения.

3. Формула должна учитывать силы трения на стенках контейнера по закону постоянного напряжения трения.

4. Формула должна учитывать силы внешнего трения на калибрующей части матрицы и отражать их рост с увеличением поверхности трения вышеуказанной части.

Предлагаемые формулы для определения рабочих напряжений при прессовании сплошных круглых профилей

Учитывая сказанное в предыдущем пункте о критериях правильности формул при прессовании, на основании изучения различных формул (1), (4), (3), (5), (14), (16), (17), фигурирующих в настоящее время в литературе, этим требованиям лучше всего удовлетворяют формулы, предложенные И. Л. Перлиным (5). Однако, ввиду того, что в эти формулы входит σ_0 , величина которого при разных условиях прессования пока еще не определена или неопубликована в литературе, в расчетах, проведенных по этим формулам, также получают заниженные результаты (см. табл. 1), и поэтому следует отказаться от рекомендации безусловного использования этих формул.

Используя метод вывода формул И. Л. Перлина, для определения рабочих напряжений при прессовании легких металлов и сплавов рекомендуем следующие формулы:

1. При прессовании сплошных круглых профилей через одноочковую цилиндрическую матрицу:

а) методом прямого истечения:

$$\sigma_{\pi} = \sigma_f \frac{4L}{D_H} + K \ln \frac{S_H}{S_K} + \sigma_f \frac{4l_K}{D_K}, \quad (12)$$

б) методом обратного истечения:

$$\sigma_{\pi} = K \ln \frac{S_H}{S_K} + \sigma_f \frac{4l_K}{D_K}. \quad (13)$$

2. При прессовании сплошных круглых профилей методом прямого истечения через многоочковую цилиндрическую матрицу:

$$\sigma_{\pi} = \sigma_f \frac{4L}{D_H} + K \ln \frac{S_H}{S_K m} + \sigma_f \frac{4ml_K}{D_K}, \quad (14)$$

где m — количество очков матрицы.

В табл. 4 даны результаты расчетов, произведенных по формулам 12 и 14 для некоторых алюминиевых сплавов в различных условиях прессования (разные первоначальные размеры слитков, разные скорости и температуры прессования, разные степени деформации).

Экспериментальные данные взяты, с одной стороны, из заводских измерений, а с другой стороны, из различных литературных источников. Величины σ_f и K определены по соответствующим фигурам.

Как видно из сравнения экспериментальных и расчетных величин отклонения от экспериментальных данных колеблются в пределах от -8 до $+16\%$, но в большинстве случаев расчетные данные немного завышены по сравнению с экспериментальными данными, поэтому можно считать, что эти результаты соответствуют практическим требованиям.

Основные итоги и выводы

1. Разработана методика одновременного измерения и фиксирования нескольких технологических параметров прессования и определения характера процесса в различных случаях прессования.

На основании этой методики можно определить характер и величину напряжения трения на контактной поверхности контейнера и величины « K » в зависимости от различных условий прессования не только при прессовании алюминия и его сплавов, но и при прессовании других металлов и сплавов.

*Результаты расчетов определе
прессовании сплошных круглых профилей через*

№ № пп	Прессуемый металл или сплав	Размеры слитка до прессования		Размеры слитка после запрессовки			Размеры гото- вого профиля		Температу- ра °C	
		Диа- метр мм	Дли- на мм	Диа- метр мм	Дли- на мм	Сечение S_H мм ²	Диаметр мм	Сечение S_K мм ²	Слитка	Контей- нера
1	Al 99,6	220	875	227	805	40450	13,45	125,3	450	420
2	"	220	790	227	754	40450	13,45	125,3	430	420
3	"	220	800	227	768	40450	13,45	125,3	396	420
4	"	220	765	227	734	40450	23,4	430	520	425
5	"	220	760	227	729	40450	23,4	430	515	425
6	"	220	760	227	729	40450	23,4	430	510	425
7	"	220	790	227	754	40450	23,4	430	520	430
8	"	220	760	227	729	40450	23,4	430	525	445
9	"	220	765	227	734	40450	23,4	430	525	445
10	"	220	775	227	713	40450	23,4	430	545	440
11	"	220	840	227	772	40450	2×9,6	2×72	500	440
12	"	220	840	227	772	40450	2×9,6	2×72	510	445
13	"	220	840	227	772	40450	2×9,6	2×72	480	445
14	"	220	860	227	791	40450	2×9,6	2×72	460	445
15	"	—	—	165	780	21371	50	1962	510	—
16	"	—	—	165	380	21371	25	489	510	—
17	Al	200	340	210	306	34618	2×7,3	83,6	500	—
18	"	200	340	210	306	34618	2×7,3	83,6	450	—
19	"	200	340	210	306	34618	2×7,3	83,6	400	—
20	"	200	340	210	306	34618	2×5,7	50,7	450	—
21	"	200	340	210	306	34618	2×5,7	50,8	500	—
22	D1	220	455	227	419	40450	33,3	872	420	400
23	"	220	450	227	414	40450	33,3	872	410	400
24	"	220	460	227	423	40450	33,3	872	440	440
25	"	220	455	227	419	40450	33,3	872	410	400
26	"	220	455	227	419	40450	33,3	872	440	400
27	"	220	450	227	414	40450	33,3	872	410	400
28	"	220	830	227	764	40450	130	13345	400	400
29	"	220	800	227	736	40450	130	13345	400	400
30	"	220	780	227	718	40450	140	14386	400	400
31	"	220	820	227	755	40450	140	14386	400	400
32	"	220	780	227	718	40450	56	2461	380	400
33	"	220	570	227	525	40450	4×30	4×676	385	400
34	"	—	—	306	500	74000	170	22800	400	—
35	"	—	—	205	440	32800	41	1320	400	—
36	"	—	—	200	425	31400	100	7800	400	400
37	"	—	—	200	425	31400	55	2600	400	400
38	"	—	—	200	425	31400	40	1250	450	400
39	D16	220	400	227	368	40450	6×11,3	601,4	450	400
40	"	220	400	227	368	40450	6×11,3	601,4	460	400

Таблица 4

ния рабочих напряжений при
одно и многоочковую матрицу по формулам 12 и 14

Деформация		Смазка	Средняя скорость прессования $V_{\text{ср}}$ мм/сек	Экспери- менталь- ные данные	Расчетные дан- ные по форму- лам 12 и 14		K кг/мм ²	σ_f кг/мм ²	Профиль матрицы		
$\frac{S_H}{S_K}$	$\ln \frac{S_H}{S_K}$				Напряже- ние у пресс- шайбы σ_r кг/мм ²	Напряже- ние у пресс- шайбы σ_{π} кг/мм ²			Коли- чество очков	Ис. кат.	Цилинд- рическая
323	5,77	Н	10,7	54,7	54,68	0	5,3	1,65	1	3	
323	5,77		10,1	54,7	56,9	+3	5,7	1,75	1	3	"
94	5,77		12,3	58,1	65,2	+12	6,6	1,95	1	3	"
94	4,54		3,4	30,8	31,2	+1	3,9	1,0	1	3	"
94	4,54		3,8	30,8	31,2	+1	3,9	1,0	1	3	"
94	4,54		3,3	30,8	33,0	+7	4,0	1,1	1	3	"
94	4,54		3,1	27,3	31,4	+14	3,9	1,0	1	3	"
94	4,54		13,6	34,2	30,75	-8	3,8	1,0	1	3	"
94	4,54		11,3	34,2	30,75	-8	3,8	1,0	1	3	"
94	4,54		2,1	27,3	26,84	-1	3,5	0,8	1	3	"
277	5,6		7,0	41,0	43,3	+5	4,3	1,2	2	3	"
277	5,6		6,0	39,1	40,0	+2	4,0	1,1	2	3	"
277	5,6	Н	6,5	51,3	49,5	-3	4,7	1,45	2	3	"
277	5,6		6,8	51,3	52,2	+1	5,0	1,55	2	3	"
11	2,4		128	21,5	23,5	+9	4,3	1,2	1	3	"
43,7	3,77		126	28,0	27,9	0	4,3	1,2	1	3	"
415	6		14-36	33	36,1	+9	4,3	1,2	2	3	"
415	6		14-36	40,5	46,3	+14	5,3	1,65	2	3	"
415	6		14-36	50,5	56,0	+10	6,6	1,95	2	3	"
617	6,42		16-24	47,5	50,8	+7	5,3	1,65	2	3	"
617	6,42		16-24	35	40	+14	4,3	1,2	2	3	"
46,4	3,8		0,5	53	60,3	+11	11,0	2,5	1	3	"
46,4	3,8		0,7	55,0	64	+14	11,8	2,6	1	3	"
46,4	3,8		0,55	51,6	51	+1	10	1,8	1	3	"
46,4	3,8	Н	0,65	56,4	64	+11	11,8	2,6	1	3	"
46,4	3,8		0,57	51,6	52	+1	10,0	1,8	1	3	"
46,4	3,8		0,70	55,0	64	+14	11,8	2,6	1	3	"
3,03	1,11		4,1	61,6	67,2	+9	12,0	4,0	1	3	"
3,03	1,11		5,2	58,1	66,5	+14	12,0	4,1	1	3	"
2,81	1,03		4,1	58,1	62,4	+7	12,0	4,0	1	3	"
2,81	1,03		5,0	58,1	65,3	+12	12,0	4,1	1	3	"
16,4	2,78		2,3	71,8	78,2	+8	12,0	3,8	1	3	"
14,9	2,70		1,8	71,8	72,48	+1	12,0	3,7	4	3	"
3,24	1,18		0,5	32,5	32,08	-1	12,0	2,7	1	5	"
25	3,1		0,2	53,5	50,5	+2	12,0	1,5	1	3	"
4	1,38		0,5-0,7	38,5	38,5	+6	12,0	2,7	1	4	"
12	2,44		0,5-0,7	44,0	49,8	+13	11	2,7	1	3	"
25	3,22	Н	0,5-0,7	46,0	44,8	-2	9,8	1,5	1	3	"
67,2	4,2		0,42	72,8	74,3	+2	10,3	2,5	6	3	"
67,2	4,2		0,42	75,3	74,3	-1	10,3	2,5	6	3	"

2. При различных условиях прессования определены величины напряжения трения на стенках контейнера при прессовании алюминия (А1) и сплавов D1, АМц и D16 методом прямого истечения и установлен характер его изменения, а именно :

а) Напряжение трения при прессовании алюминия и его сплавов методом прямого истечения без смазки в практически применяемых условиях проявляется в близком к напряжению сдвига.

б) Напряжение трения зависит от степени деформации, следовательно, от давления истечения и с увеличением степени деформации сначала растет, а затем, достигнув определенной величины, остается практически постоянным.

в) Напряжение трения зависит от скорости движения пуансона (скорости прессования); с увеличением скорости прессования напряжение трения сначала сильно растет, достигнув определенной величины, зависящей от температуры и прессуемого металла, затем остается практически постоянным.

3. При прессовании алюминиевых сплавов методом прямого истечения существует линейная зависимость между силами трения на стенках контейнера и длиной слитка.

4. Эксперименты показывают, что при расчетах рабочих напряжений следует отказаться от безусловного использования постоянного коэффициента трения (закона Кулона) при обработке металлов давлением и при больших нормальных давлениях, как и при прессовании, которое ведется с большими степенями деформации, целесообразно учесть силы трения по закону постоянного напряжения трения.

5. Определена величина «К» при прессовании алюминия (А1) и его сплавов D1, АМц и D16 при различных условиях прессования и установлено влияние различных факторов на эту величину.

а) При прессовании алюминиевых сплавов на величину «К» влияет степень деформации, особенно в областях больших деформаций.

б) Величина «К» с увеличением скорости прессования растет или, в крайнем случае, остается практически постоянной при прессовании алюминия и его сплавов при температурных режимах 400° С и выше.

в) Величина «К» с увеличением температуры уменьшается по некоторой экспоненциальной кривой.

6. Установлено, что при прессовании сплошных круглых профилей через многоочковую цилиндрическую матрицу методом прямого истечения характер процесса прессования аналогичен характеру процесса прессования через одноочковую матрицу.

Для определения рабочих напряжений при прессовании сплошных круглых профилей через многоочковую матрицу методом прямого истечения предлагаем использовать величины σ_f и «К», полученные при прессовании сплошных круглых профилей через одноочковую матрицу при прочих равных условиях прессования.

7. На основании результатов экспериментов рекомендуются критерии правильности формул, определяющих рабочие напряжения при прессовании методом прямого истечения, а именно :

а) При отсутствии внешнего трения на контактной поверхности контейнера и на калибрующей части матрицы

$$\sigma_M = K \ln \frac{S_H}{S_K}.$$

б) Формула должна отражать линейную зависимость между силами внешнего трения на контактной поверхности контейнера и длиной слитка.

в) Формула должна учитывать силы внешнего трения на калибрующей части матрицы и отражать их рост с увеличением поверхности трения на вышеуказанной части.

8. Для определения рабочих напряжений при прессовании сплошных круглых профилей через одноочковую цилиндрическую матрицу нами рекомендуются формулы :

а) в случае метода прямого истечения :

$$\sigma_\pi = \sigma_f \frac{4L}{D_H} + K \ln \frac{S_H}{S_K} + \sigma_f \frac{4l_K}{D_K};$$

б) в случае метода обратного истечения

$$\sigma_\pi = K \ln \frac{S_H}{S_K} + \sigma_f \frac{4l_K}{D_K};$$

в) при прессовании сплошных круглых профилей через многоочковую цилиндрическую матрицу :

$$\sigma_\pi = \sigma_f \frac{4l}{D_H} + K \ln \frac{S_H}{mS_K} + \sigma_f \frac{4ml_K}{D_K}.$$

Предложенные формулы дают практически точные результаты при определении рабочих напряжений прессования сплошных круглых профилей в различных условиях прессования.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Губкин: Теория обработки металлов давлением (Металлургиздат 1947).
2. П. С. Истомина: Прессование металлов (Металлургиздат 1944).
3. А. А. Ильющин: Пластичность (Огиз 1948).
4. А. Д. Томленов: Теория пластической деформации металлов (1951).
5. И. Л. Перлин: Расчет рабочих напряжений при прессовании сплошных круглых профилей (Цветные металлы 1951 № 6).
6. П. В. Прозоров: Прессование стальных профилей и труб (Машгиз 1951).
7. И. Л. Перлин: К вопросу о методах расчета рабочих напряжений при прессовании и волочении профилей (Цветные металлы № 1 1954).
8. И. Л. Перлин: О силах внешнего трения при обработке металлов давлением (Технология цветных металлов, сборник научных трудов № 23. Metallurgizdat 1952).
9. С. И. Губкин: Моделирование горячих и скоростных процессов обработки металлов давлением. По поводу статей член корр. А. Н. СССР А. А. Ильющина (Известия А. Н. СССР, № 4 1953).
10. А. А. Ильющин: Моделирование горячих и скоростных процессов обработки металлов давлением (сборник статей: Прогрессивная технология кузнечно-штамповочного производства. Книга 31., вшитомаш Ленинградское отделение 1952).
11. В. Кузин: Исследование процесса прессования труб из алюминиевых сплавов через язычковые матрицы (Диссертация 1954).
12. С. Н. Тарантов: Исследование процесса истечения легких сплавов в связи с образованием в прутках. (Труды Московского авиационного технологического института, Выпуск 21, 1951).
13. И. Л. Перлин: К теории определения истинных и средних значений сопротивления пластическому деформированию.
14. Geleji Sándor: Rúdcsatlósítás és tuskólyukasztás. [MT. A. Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei, VII. kötet 1—3 szám. 1952] (А. Гелейи: Прессование прутков и прошивка слитка. Доклады Отделения технических наук А. Н. Венгрии, № 1—3, том VII, Будапешт, 1952).
15. Geleji Sándor: A fémek képlékeny alakításánál fellépő erők és erőszükséglet meghatározása számítás útján (А. Гелейи: Расчет усилий при пластической деформации. Будапешт 1948).
16. Э. Зибель: Обработка металлов в пластическом состоянии (Металлургиздат 1939).
17. Г. Закс: Практическое металловедение часть II, 1938.
18. E. J. Ripling. The Theory of Tube Producing Methods' Institut of Metals Division Symposium Series, Volume 4 New-Jork 1951.

РЕЗЮМЕ

Первая часть статьи посвящена принятой при опытах методике и описанию опытной установки для одновременного измерения и фиксирования нескольких важных технологических параметров прессования и для определения характера процесса в различных случаях прессования.

Вторая часть посвящена описанию достигнутых при опытах результатов. Полученные при опытах осциллограммы являются основным экспериментальным материалом, на основе которых сделаны почти все выводы.

Третья часть содержит оценку полученных при производстве опытов результатов, а именно:

1. О влиянии первоначальной структуры прессуемого слитка на усилие прессования;
2. О характере кривых изменения усилия при прессовании методом прямого и обратного истечения;
3. Об определении характера и величины напряжения трения на контактной поверхности контейнера в зависимости от различных условий прессования;
4. О характере процесса и рабочих напряжений при прессовании прутков через многоочковую матрицу.

Здесь же излагаются предлагаемые автором формулы, предназначенные для определения рабочих напряжений при прессовании сплошных круглых профилей, и результаты расчетов, проведенных при помощи этих формул.

SOME PROBLEMS OF THE RESEARCH ON FORCES ARISING DURING THE EXTRUSION OF ALUMINIUM OR ALUMINIUM ALLOY RODS THROUGH ONE OR MORE DIE APERTURES

J. KOCSIS
Cand. of Eng. sc.

SUMMARY

The first part of the paper deals with the method used for the experiments and with the description of the experimental setup, which served for measuring and recording of some important technological parameters of extruding, as well as for determining the character of the process for various methods of extrusion.

In the second part the results of the experiments are published. The oscillograms which were obtained at the experiments are the basic experimental proof from which nearly all conclusions are drawn.

In the third part the results of the experiments are evaluated, i. e.:

1. Influence of the initial structure of the billet on the extrusion force;
2. Character of the force diagram at direct and at inversed extrusion;
3. Value of the friction stresses originating between the die during and the billet surface, for the various extrusion conditions;
4. Determination of the character of the extrusion process and of working stresses during extrusion through dies with more than one aperture. Here are found also the formulae recommended by the author for calculating the working stresses in extrusion of circular full shapes, as well as the results of the computations executed with these formulae.

CONSIDÉRATIONS SUR LES FACTEURS CONDITIONNANT L'EXTRUSION DE BARRES EN ALUMINIUM OU ALLIAGES D'ALUMINIUM PAR MATRICES À UN OU PLUSIEURS TROUS

J. KOCSIS
Cand. des sciences techn.

RÉSUMÉ

La première partie de l'étude traite de la méthode expérimentale adoptée et donne la description des dispositifs d'essai utilisés d'une part pour la mesure et l'enregistrement de quelques paramètres technologiques importants et d'autre part pour la détermination des caractéristiques du processus conditionné par les différents modes d'extrusion.

La deuxième partie rend compte des résultats des expériences. Les oscillogrammes relevés au cours de celles-ci fournissent ici la preuve fondamentale, dont ont pu être tirées la plupart des conclusions.

La troisième partie donne l'interprétation des résultats, et notamment:

1. l'influence de la structure primaire de la billette sur la pression d'extrusion;
2. les caractéristiques de la courbe des variations dans les opérations d'extrusion directe et le refoulement;
3. la détermination de la valeur et du caractère des efforts de friction exercés entre la matrice et celle de la billette, suivant les conditions d'extrusion;
4. la détermination de la charge pratique et des caractéristiques du processus, dans l'extrusion des barres par matrice plusieurs trous. Des formules préconisées par l'auteur pour la détermination des charges pratiques dans l'extrusion de profils pleins de section circulaire, suivies d'un compte rendu des résultats de calculs effectués à l'aide de ces formules terminent l'étude.

EINIGE FRAGEN DER KRÄFTEVERHÄLTNISSE BEIM PRESSEN
VON STANGEN AUS ALUMINIUM ODER AUS SEINEN LEGIERUNGEN MIT MATRIZEN
MIT EINER ODER MEHREREN ÖFFNUNGEN

J. KOCSIS

Kandidat der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Der erste Teil der Arbeit befasst sich mit der Beschreibung der Versuchsmethode und der Versuchseinrichtung, mit der einerseits einige wichtige technologische Parameter des Pressvorganges gemessen und registriert wurden, andererseits der Einfluss der verschiedenen Pressverfahren auf den Charakter des Vorganges festgestellt wurde.

Im zweiten Teil werden die Versuchsergebnisse mitgeteilt. Die bei den Versuchen erhaltenen Oszillogramme sind das grundlegende experimentelle Material, aus dem sich fast alle Folgerungen ergeben.

Der dritte Teil enthält die Auswertung der Versuchsergebnisse, und zwar :

1. Einfluss des ursprünglichen Gefüges des Pressblocks auf die Presskraft ;
2. Charakter der Kraftänderungskurve bei direktem und bei umgekehrtem Pressen ;
3. Bestimmung des Charakters und des Wertes der verschiedenen Reibungsspannungen zwischen dem Rezipienten und der Oberfläche des Blocks, in Abhängigkeit von verschiedenen Bedingungen beim Pressen ;
4. Bestimmung des Charakters des Arbeitsvorganges und der Arbeitsspannungen beim Strangpressen durch Matrizen mit mehreren Öffnungen.

Hier finden sich auch die vom Verfasser empfohlenen Formeln zur Bestimmung der beim Pressen von vollen Kreisprofilen entstehenden Arbeitsspannungen sowie die mit Hilfe dieser Formeln erhaltenen Berechnungsergebnisse.

EXAMEN DE LA STABILITÉ DES PORTIQUES EN CAS DE BARRES À MOMENT D'INERTIE VARIABLE

K. SZMODITS

CAND. DES SC. TECHN.

INSTITUT DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE DU BÂTIMENT, BUDAPEST

[Manuscrit présenté le 2 Novembre, 1955]

Au cours de l'examen de la stabilité des portiques, on détermine — comme il est connu — un facteur de la charge donnée du portique. Sous l'effet de la charge multipliée par ce facteur, l'état d'équilibre devient indifférent, de sorte que le flambement peut survenir. Ce facteur n'est autre que le taux de sécurité de la stabilité de la construction.

Le procédé exposé plus loin se rapporte aux portiques contenant des barres dites élancées, en cas de flambement élastique pur, ce qui fait que dans les calculs les déformations plastiques peuvent être négligées. En outre, pour faciliter la compréhension, on se sert des simplifications employées pour la déduction de la formule d'Euler, qui consistent à négliger les déformations dues aux forces axiales et aux forces de cisaillement et à exprimer la courbure de la barre par la deuxième dérivée. Dans ces conditions, en appliquant le procédé à des cas simples, on obtient les formules d'Euler bien connues. Étant donné qu'en cas de ces approximations, la charge perpendiculaire aux barres n'exerce, comme on le sait, aucune influence sur la valeur de la force critique, on ne tiendra compte que des forces axiales.

Au point de vue méthodique, le procédé est dit „cinématique” parce qu'il considère comme inconnues les données cinématiques (de déformation) de la construction et c'est de celles-ci qu'il détermine la charge critique cherchée. L'état de tension des constructions hautement hyperstatiques pouvant être déterminé à la base d'un nombre de données de déformation inférieur au nombre des quantités caractérisant les efforts intérieurs, la solution nécessite beaucoup moins d'équations linéaires dans la méthode cinématique, qui est par conséquent plus avantageuse au point de vue du calcul des portiques hautement hyperstatiques. Pour déduire relations fondamentales, examinons une barre générale de la construction de portique et écrivons-en l'équation différentielle (fig. 1.).

Désignons les noeuds aux extrémités de la barre par 1 et 2, le moment agissant dans le noeud 1 par M_{12} , celui agissant dans le noeud 2 par M_{21} , la pression axiale par P , le déplacement des points 1 et 2 resp. par v_1 et v_2 , la rotation des extrémités par φ_1 resp. φ_2 et enfin la rotation de l'axe de la barre par ψ_{12} .

Les déformations et moments indiqués sur la fig. sont positifs, de sorte qu'on peut établir une convention des signes, à savoir que les moments sont positifs s'ils tournent dans le sens des aiguilles d'une montre, φ_1 et φ_2 sont positifs s'ils sont produits par une rotation dans le sens de la montre, tandis que ψ_{12} est positif s'il est engendré par une rotation en sens inverse (fig. 1.).

On fixe l'origine du système des coordonnées u, v au lieu du noeud 1 considéré avant la déformation. L'axe u coïncide avec l'axe de la barre d'avant la déformation. Après déformation, le moment de flexion dans un point u, v de la barre est

$$M = M_{12} - Qu - P(v - v_1).$$

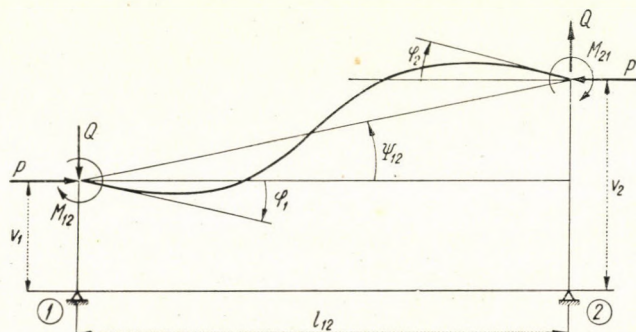


Fig. 1

Si on élimine Q , compte tenu de la condition d'équilibre $M_{12} + M_{21} = Ql + P(v_2 - v_1)$ de la barre, l'équation du moment devient

$$M = M_{12} \left(1 - \frac{u}{l}\right) - M_{21} \frac{u}{l} + P \frac{u}{l} (v_2 - v_1) + Pv_1 - Pv$$

L'équation différentielle $\frac{d^2 v}{du^2} = \frac{M}{EJ(u)}$ de la ligne élastique de la poutre ayant un moment d'inertie variable $J(u)$ sera

$$EJ(u) \frac{d^2 v}{du^2} + P_v - \left[M_{12} \left(1 - \frac{u}{l}\right) - M_{21} \frac{u}{l} + P \frac{u}{l} (v_2 - v_1) + Pv_1 \right] = 0$$

La solution générale de cette équation différentielle a la forme suivante

$$v = C_1 F_1(u) + C_2 F_2(u) + \frac{1}{P} \left[M_{12} \left(1 - \frac{u}{l}\right) - M_{21} \frac{u}{l} + P \frac{u}{l} (v_2 - v_1) + Pv_1 \right]$$

où C_1 et C_2 sont des constantes et $F_1(u)$ et $F_2(u)$ les solutions particulières supposées connues de l'équation différentielle homogène $EJ(u) \frac{d^2 v}{du^2} + P v = 0$.

Selon les conditions au contour au lieu $u = 0$ $v = v_1$ et au lieu $u = l$, $v = v_2$. Ces conditions exprimées par la solution indiquée plus haut sont

$$v_1 = c_1 F_1(0) + C_2 F_2(0) + \frac{M_{12}}{P} + v_1,$$

$$v_2 = c_1 F_1(l) + C_2 F_2(l) + \frac{M_{21}}{P} + v_2$$

c'est-à-dire

$$c_1 F_1(0) + c_2 F_2(0) = -\frac{M_{12}}{P},$$

$$c_1 F_1(l) + c_2 F_2(l) = -\frac{M_{21}}{P}$$

En résolvant les équations par rapport aux constantes C_1 et C_2

$$C_1 = \frac{F_2(l) M_{12} + F_2(0) M_{21}}{P [F_1(l) F_2(0) - F_1(0) F_2(l)]}; \quad C_2 = -\frac{F_1(l) M_{12} + F_1(0) M_{21}}{P [F_1(l) F_2(0) - F_1(0) F_2(l)]}$$

Si l'on introduit les notations suivantes :

$$\varrho = F_1(l) F_2(0) - F_2(0) F_2(l)$$

$$\omega_1 = \frac{F_2(l)}{\varrho} l; \quad \omega_1^* = \frac{F_2(0)}{\varrho} l; \quad \omega_2 = \frac{F_1(l)}{\varrho} l; \quad \omega_2^* = \frac{F_1(0)}{\varrho} l$$

les constantes C_1 et C_2 peuvent s'écrire sous la forme

$$C_1 = \frac{1}{Pl} (\omega_1 M_{12} + \omega_1^* M_{21}); \quad C_2 = -\frac{1}{Pl} (\omega_2 M_{12} + \omega_2^* M_{21})$$

En partant de la solution obtenue, formons les rotations d'extrémités $\varphi_1 = -\frac{dv}{du} \Big|_{u=0}$ et $\varphi_2 = -\frac{dv}{du} \Big|_{u=l}$. Si l'indice de virgule supérieure signifie une différentiation selon u

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{v_1 - v_2}{l} + \frac{1}{Pl} [1 - \omega_1 F_1'(0) + \omega_2 F_2'(0)] M_{12} + \\ &+ \frac{1}{Pl} [1 - \omega_1^* F_1'(0) + \omega_2^* F_2'(0)] M_{21} \end{aligned}$$

$$\varphi_2 = \frac{v_1 - v_2}{l} + \frac{1}{Pl} [1 - \omega_1 F'_1(l) + \omega_2 F'_2(l)] M_{12} + \\ + \frac{1}{Pl} [1 - \omega_1^* F'_1(l) + \omega_2^* F'_2(l)] M_{21} .$$

En substituant les valeurs indiquées des constantes C_1 et C_2

$$\frac{dv}{du} = C_1 F'_1(u) + C_2 F'_2(u) + \frac{1}{Pl} [P(v_2 - v_1) - M_{12} - M_{21}]$$

et

$$\varphi_1 = -C_1 F'_1(0) - C_2 F'_2(0) - \frac{1}{Pl} [P(v_2 - v_1) - M_{12} - M_{21}]$$

$$\varphi_2 = -C_1 F'_1(l) - C_2 F'_2(l) - \frac{1}{Pl} [P(v_2 - v_1) - M_{12} - M_{21}]$$

Si nous affectons les coefficients entre parenthèses des moments dans l'ordre de leur succession des signes α_1 , $-\beta_1$, $-\beta_2$ et α_2 , nous obtenons

$$\varphi_1 = -\psi_{12} + \frac{\alpha_1}{Pl} M_{12} - \frac{\beta_1}{Pl} M_{21}; \quad \varphi_2 = -\psi_{12} - \frac{\beta_2}{Pl} M_{12} + \frac{\alpha_2}{Pl} M_{21},$$

Les paramètres introduits détaillés sont

$$\alpha_1 = 1 - \frac{F_2(l) F'_1(0) - F_1(l) F'_2(0)}{q} l;$$

$$\alpha_2 = 1 - \frac{F_2(0) F'_1(l) - F_1(0) F'_2(l)}{q} l;$$

$$\beta_1 = -1 + \frac{F_2(0) F'_1(0) - F_1(0) F'_2(0)}{q} l;$$

$$\beta_2 = -1 + \frac{F_2(l) F'_1(l) - F_1(l) F'_2(l)}{q} l$$

Si, à partir des formules des rotations d'extrémités on exprime les moments d'extrémités en fonction des déformations, on a

$$M_{12} = Pl \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2} \varphi_1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2} \varphi_2 + \frac{\alpha_2 + \beta_2}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2} \psi_{12} \right) \\ M_{21} = Pl \left(\frac{\beta_2}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2} \varphi_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2} \varphi_2 + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2} \psi_{12} \right).$$

En affectant les coefficients entre parenthèses des déformations, dans l'ordre de leur succession, des lettres A_{12} , B_{12} , C_{12} et B_{21} , A_{21} , C_{21}

$$M_{12} = Pl (A_{12} \varphi_1 + B_{12} \varphi_2 + C_{12} \psi_{12})$$

$$M_{21} = Pl (A_{21} \varphi_2 + B_{21} \varphi_1 + C_{21} \psi_{12}).$$

Pour déterminer les paramètres A , B , C , il est nécessaire de connaître la solution particulière de $F_1(u)$ et $F_2(u)$. Ne connaissant pas la solution particulière de l'équation différentielle homogène du problème pouvant être écrite à l'aide de formules linéairement indépendantes, on cherche la solution par la voie numérique, en remplaçant l'équation différentielle par une équation des différences. L'idée fondamentale mathématique du procédé consiste donc à produire la solution générale de l'équation différentielle exprimant le problème, par la combinaison linéaire de deux solutions particulières calculées numériquement.

Au cours de la détermination des fonctions $F_1(u)$ et $F_2(u)$ on établit les valeurs correspondant aux valeurs équidistantes u (Δu étant la distance) des solutions tendant vers des valeurs arbitraires v et v' au lieu $\mu = 0$, c'est-à-dire on résout des problèmes de valeur initiale. Le procédé consiste à développer le tableau des différences contenant les valeurs initiales, en partant de ces dernières. On remplit les rubriques de façon à ce que le quotient de $\Delta \mu$ et de la différence de deux valeurs superposées (quotient des différences finies) vienne se placer dans la colonne suivante dans la rubrique se trouvant entre les deux valeurs. Les valeurs $\frac{\Delta^2 v}{\Delta u^2}$ dans la dernière colonne du tableau sont calculées à l'aide des valeurs v_n déjà déterminées à partir de l'équation homogène des différences

$$\frac{\Delta^2 v_n}{\Delta u^2} + \frac{P v_n}{EJ(u)} = 0.$$

Dans le tableau suivant, pour simplifier, $\Delta u = 1$ et approximativement $v'_{0,5} \sim v'_0$

u	$v \sim F(u)$	$\frac{\Delta v}{\Delta u} \sim F'(u)$	$\frac{\Delta^2 v}{\Delta u^2}$
0	v_0		v''_0
1	$v_0 + v'_0$	v'_0	v''_1
2	$v_0 + 2 v'_0 + v''_1$	$v'_0 + v''_1$	v''_2
3	$v_0 + 3 v'_0 + 2 v''_1 + v'''_1$	$v'_0 + v''_1 + v'''_1$	

Si on continue de remplir le tableau jusqu'à $u = l$, on arrive à déterminer les valeurs $F_1(0)$, $F_1'(0)$, $F_1(l)$, $F_1'(l)$ nécessaires au calcul des paramètres. C'est de la même façon qu'on détermine, à partir d'autres valeurs initiales choisies arbitrairement, les valeurs $F_2(0)$, $F_2'(0)$, $F_2(l)$, $F_2'(l)$ de l'autre solution particulière.

Vu que la relation entre les moments d'extrémités M_{12} et M_{21} et les déformations φ_1 , φ_2 , ψ_{12} a la même forme qu'en cas de barres à moment d'inertie constant et que seules les valeurs des paramètres A , B , C sont différentes, la méthode cinématique servant à l'examen de la stabilité des portiques constitués de barres à moment d'inertie constant peut être directement appliquée à l'analyse de portiques constitués de barres à moment d'inertie variable.

Pour compléter, nous indiquerons la relation entre les moments d'extrémités et les déformations, dans les deux cas particuliers suivants.

Si l'extrémité 2. est parfaitement encastree et l'extrémité 1. partiellement $\varphi_2 = 0$, ainsi

$$M_{12} = Pl(A_{12}\varphi_1 + C_{12}\psi_{12})$$

$$M_{21} = Pl(B_{21}\varphi_1 + C_{21}\psi_{12})$$

Si l'extrémité 2. est articulée et l'extrémité 1. partiellement encastree, $M_{21} = 0$. En éliminant φ_2 des équations générales de M_{12} et M_{21} , on obtient

$$M_{12} = Pl \left[\left(A_{12} - \frac{B_{12}B_{21}}{A_{21}} \right) \varphi_1 + \left(C_{12} - \frac{B_{21}C_{21}}{A_{21}} \right) \psi_{12} \right].$$

On poursuit l'examen de la façon suivante : on écrit la condition d'équilibre du portique à l'aide des paramètres A , B , C , calculés des forces axiales critiques évaluées et avec les déformations inconnues. Cette condition est constituée par deux groupes d'équations, celles dites de moment et celles de déplacement.

Les équations de moment expriment l'équilibre des noeuds qui, en fonction des moments, peuvent être écrits de la manière suivante

$$\sum_{ni} M_{ni} = 0$$

où n est le signe du noeud examiné, i les extrémités opposées aux noeuds des barres n_i se rejoignant dans le noeud.

Les équations de déplacement expriment l'équilibre des barres déplacées (fig. 2.). La force causant le déplacement des noeuds, transmise au cours du flambement des colonnes perpendiculaires ni aux poutres horizontales, est à partir du moment agissant aux extrémités des poutres et de la force de traction axiale où les noeuds n des colonnes ni correspondent aux extrémités des barres horizontales déplacées (fig. 2.).

En fonction des déformations les équations de moment et de noeud for-

ment donc un système d'équations homogène, ne nécessitant une solution non triviale que si le déterminant des coefficients disparaît. Ce déterminant, condition de la disparition du déterminant dit de flambage, est le critère de l'équilibre indifférent. Le système de forces axiales pour lequel cette condition est réalisée, ne peut être déterminé qu'indirectement, par évaluation de la charge critique et par justification expérimentale de la condition de disparition du déterminant. À l'aide du théorème de réciprocité de Maxwell on peut justifier que $B_{12} = B_{21}$.

Au cas spécial où le moment d'inertie de la barre examinée est constant,

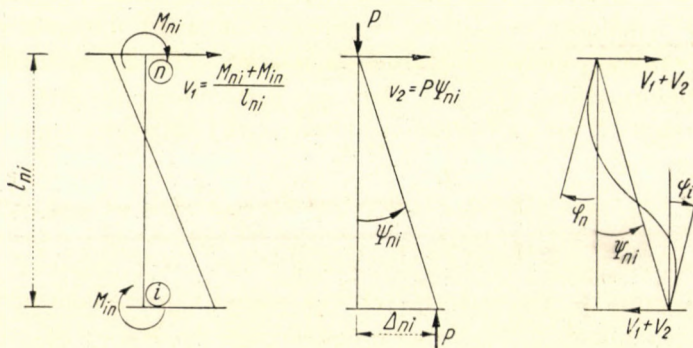


Fig. 2

les fonctions A , B , C de la force axiale P peuvent être établies en forme close. Les fonctions correspondant aux barres ayant un moment d'inertie constant, au lieu d'être obtenues à l'aide du procédé numérique décrit, peuvent être calculées au moyen de formules, ou obtenues par utilisation de tableaux.

Pour l'utilisation de la méthode cinématique dans l'examen de la stabilité des portiques à étages constitués de barres à moment d'inertie constant (voir CHWALLA : Stahlbau 1941). L'élaboration détaillée et la généralisation de la même méthode, complétée par les tableaux des fonctions employées dans les calculs et des exemples numériques, fera l'objet d'une publication de l'Institut Scientifique de la Recherche du Bâtiment, intitulée „Examen de la stabilité des systèmes de barres”. (Sous presse.).

Exemple numérique

Appliquons le procédé exposé à l'examen de la stabilité d'un portique encastré, à deux colonnes et à moment d'inertie variable. Épaisseur du portique $b = 15$ cm, béton armé, $E = 250\,000$ kg/cm², valeur évaluée de la force critique $P = 97$ t. La colonne à moment d'inertie variable a une section linéairement décroissante. Sa largeur supérieure est de 40 cm, sa largeur inférieure de 20 cm (fig. 3).

Avec ces données on détermine par la voie numérique indiquée la ligne élastique $u = F(u)$ de la colonne. En partant des valeurs initiales arbitraires $F(0)$ et $F(0,5)$ et en répétant le procédé deux fois, on obtient les deux solutions différentes $F_1(u)$ et $F_2(u)$. Les deux opérations numériques sont représentées par les tableaux I. et II.

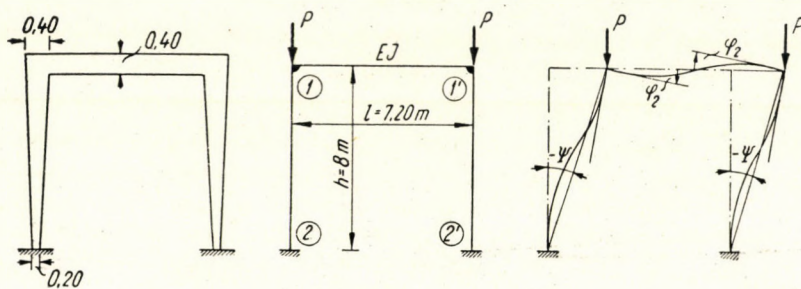


Fig. 3

Table I

$$v'' = -\frac{P}{EI(u)} v$$

u m	$v = \psi(u)$ m	$v' = \psi'(u)$	$v'' = \psi''(u) \frac{1}{m}$	$-\frac{P}{EI(u)} \frac{1}{m^2}$
0	+ 1,00	+ 0,32425	— 0,04850	— 0,04850
1	+ 1,30	+ 0,30	— 0,07652	— 0,05886
2	+ 1,52348	+ 0,22348	— 0,11028	— 0,07239
3	+ 1,63668	+ 0,11320	— 0,14799	— 0,09042
4	+ 1,60189	— 0,03479	— 0,18415	— 0,11496
5	+ 1,38295	— 0,21894	— 0,20639	— 0,14925
6	+ 0,95762	— 0,42533	— 0,19024	— 0,19866
7	+ 0,34205	— 0,61557	— 0,09321	— 0,27251
8	— 0,36673	— 0,70878	+ 0,14229	— 0,38800
		— 0,63763		
		— 0,56649		

Après avoir rempli les tableaux, on détermine les valeurs de $\psi'_1(0)$, $\psi'_1(l)$ et $\psi'_2(0)$, $\psi'_2(l)$ par interpolation.

Les valeurs ainsi obtenues sont pour $\mu = 0$ et $u = l$

$$\begin{aligned}
 F_1(0) &= + 1,000 \text{ m} & F_2(0) &= + 1,200 \text{ m} \\
 F'_1(0) &= + 0,32425 & F'_2(0) &= + 0,52910 \\
 F_1(l) &= - 0,36673 \text{ m} & F_2(l) &= - 0,35510 \text{ m} \\
 F'_1(l) &= - 0,63763 & F'_2(l) &= - 0,99910
 \end{aligned}$$

Table II

$$v'' = -\frac{P}{EI(u)} v$$

u m	$v = \psi(u)$ m	$u' = \psi'(u)$	$v'' = \psi''(u) \frac{1}{m}$	$-\frac{P}{EI(u)} \frac{1}{m^2}$
0	+ 1,20	+ 0,52910	- 0,05820	- 0,04850
1	+ 1,70	+ 0,50	- 0,10006	- 0,05886
2	+ 2,09994	+ 0,39994	- 0,15201	- 0,07239
3	+ 2,34787	+ 0,24793	- 0,21229	- 0,09042
4	+ 2,38351	+ 0,03564	- 0,27401	- 0,11496
5	+ 2,14514	- 0,23837	- 0,32016	- 0,14925
6	+ 1,58661	- 0,55853	- 0,31519	- 0,19866
7	+ 0,71289	- 0,87372	- 0,19427	- 0,27251
8	- 0,35510	- 1,06799		
		- 0,99910	+ 0,13778	- 0,38800
		- 0,93021		

En substituant ces valeurs des formules correspondantes

$$\alpha_1 = + 8,42756, \quad \alpha_2 = + 23,02660, \quad \beta_1 = \beta_2 = + 12,17924$$

d'où

$$A_{12} = + 0,50360, \quad B_{12} = B_{21} = + 0,26636$$

$$A_{21} = - 0,18431, \quad C_{12} = 0,76996, \quad C_{21} = 0,45067$$

Les formules de moment du portique sont

$$M_{12} = Ph (A_{12} \varphi_1 + C_{12} \psi_{12}); \quad M_{21} = Ph (B_{21} \varphi_1 + C_{21} \psi_{12})$$

$$M_{11} = \frac{GEJ}{l} \varphi_1$$

À cause de la symétrie de la construction, au cas de la forme flambée correspondant à la plus petite force critique, $\varphi_1 = \varphi_{1,1'}$ de sorte qu'il suffit d'écrire une équation de moment pour le noeud 1. En outre, on écrit l'équation de déplacement exprimant l'équilibre de la barre 1, 1'. Ces équations sont

$$M_{12} + M_{11'} = 0$$

$$\frac{2}{h} (M_{12} + M_{21} - Ph \psi_{12}) = 0$$

Après substitution des formules de moment et la simplification une fois faite,

$$A_{12} + \frac{6EI}{Phl} + C_{12}\psi_{12} = 0$$

$$(A_{12} + B_{12})\varphi_1 + (C_{12} + C_{21} - 1)\psi_{12} = 0$$

où
$$\frac{6EI}{Phl} = 2,18.$$

Le déterminant des coefficients écrit après substitution des valeurs numériques des coefficients est

$$\begin{vmatrix} 2,68 & 0,77 \\ 0,77 & 0,220 \end{vmatrix} = 0$$

Il s'ensuit que la force critique évaluée $P = 97t$ est correcte.

RÉSUMÉ

L'auteur applique la méthode cinématique à l'examen de la stabilité des portiques constitués de barres à moment d'inertie variable. Le procédé préconisé résout par la voie numérique l'équation différentielle du deuxième ordre à coefficient variable, s'appliquant à la ligne élastique des barres sollicitées par une force axiale et des moments d'extrémités et utilise les valeurs initiales de la solution pour écrire les équations d'équilibre exprimées par les déformations. La valeur de la force critique peut être déterminée de la façon habituelle, à partir de la condition de disparition du déterminant des coefficients des équations d'équilibre.

L'avantage du procédé est de pouvoir être facilement appliqué aussi au cas où le moment d'inertie ne varie pas de façon continue.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАМ В СЛУЧАЕ СТЕРЖНЕЙ С ПЕРЕМЕННЫМ МОМЕНТОМ ИНЕРЦИИ

Канд. техн. наук К. СМОДИЧ

РЕЗЮМЕ

В статье для анализа устойчивости рам, состоящих из стержней с переменным моментом инерции, применяется анализ устойчивости при помощи метода движения рамных конструкций. Предложенный метод решает цифренно дифференциальное уравнение второй степени с переменным коэффициентом упругой линии стержней, нагруженных осевым усилием и конечным моментом, и крайние значения решения используются для вывода уравнений равновесия, выраженных деформациями. Величина критических сил может быть определена обычным методом на основе условий исчезания детерминанта коэффициентов уравнений равновесия.

Преимущество предлагаемого метода заключается в том, что метод может быть легко использован также в случае стержней с любым, даже не постепенно изменяющимся моментом инерции.

STABILITY ANALYSIS OF FRAMES WITH BARS OF VARIABLE MOMENTS OF INERTIA

K. SZMODITS
Cand. of Eng. Sc.

SUMMARY

The paper applies the motion method of stability analysis of frames to the examination of the stability of frames containing bars of varying moments of inertia. The proposed method solves numerically the differential equation of second order with variable coefficients of the elastic line of bars loaded by axial forces and end moments. The border values of the solution are used for setting up the equations of equilibrium expressed by deformations. The value of the critical force is determinable in the conventional way from the condition of disappearance of the coefficient determinant of the equations of equilibrium. An advantage of the method is that it is easily applicable in the case of bars of any kind with not continuously varying moments of inertia.

STABILITÄTSUNTERSUCHUNG VON RAHMEN AUS STÄBEN
MIT VERÄNDERLICHEM TRÄGHEITSMOMENT

K. SZMODITS
Kandidat der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz wendet die Stabilitätsuntersuchung von Rahmenkonstruktionen nach der Formänderungsmethode auf die Stabilitätsprüfung von Rahmen aus Stäben mit veränderlichem Trägheitsmoment an. Das vorgeschlagene Verfahren löst zahlenmässig die Differentialgleichung der elastischen Linie von Stäben, die durch axiale Kräfte und Endmomente belastet werden, wobei diese Differentialgleichung zweiter Ordnung veränderliche Koeffizienten hat. Die Randwerte der Lösung werden zur Aufstellung der durch Formänderungen ausgedrückten Gleichgewichtsgleichungen verwendet. Der Wert der kritischen Kraft lässt sich auf die übliche Weise auf Grund der Forderung berechnen, dass die Knickdeterminante zu verschwinden hat. Der Vorteil des Verfahrens besteht darin, dass es auch im Falle von Stäben beliebiger Art, deren Trägheitsmomente sich nicht stetig verändern, leicht anwendbar ist.

MEASUREMENTS OF ROTOR HEATING ON SCALE MODELS OF AIR-COOLED TURBINE-GENERATORS

D. KERÉNYI

CENTRAL LABORATORY OF THE "KLEMENT GOTTWALD" ("GANZ") ELECTRIC WORKS, BUDAPEST

[Manuscript received 2nd Nov. 1955]

Introduction

From the standpoint of heating, the rotor of a turbine-generator is in a less favourable position than the stator. That the heat is more intense in the rotor is due not only to the fact that it is surrounded by the stator, heated by iron- and copper losses, but also to the comparatively high rate of heat dissipation from the rotor surface. It is namely on the surface of the rotor that, in many turbine-generators, the entire rotor heating, much the larger part of which is generated by excitation or copper losses, is being transferred to the cooling medium. The rate of heat dissipation from the surface may attain from 1,4 to 1,6 w/cm², a considerably higher rate than that encountered in the rotor of other kinds of machines. Rotors with exclusive surface cooling are applied nowadays in low-power machines only, while ventilating bores and ducts serve to improve cooling in the rotors of up-to-date high-power turbine-generators. Although it is only part of the losses that is dissipated from the surface of these rotors it is still considerable, while surface-heat transfer has become quite insignificant in the latest types of hydrogen-cooled machines provided with hollow conductors.

The purpose of the present experiments, made on a scale model, was to study the factors that influence surface cooling, as also to compare a number of ventilating systems from the standpoint of rotor cooling.

Measuring apparatus

A 1:4,5 scale model of a 44 MVA two-pole turbine-generator was used in the experiments. Its stator consisted of 10 mm-wide discs of wood corresponding to the packages of lamination. Plastics vent spacers were placed between the discs. There were no windings in the stator: this simplified the apparatus on the one hand, and made it easier to follow the conditions of heating on the other. The interaction of stator and rotor cannot, of course, be disregarded when applying the results of the measurements to turbine-generators, but all other factors affecting the cooling of the rotor can conveniently be studied on the simplified model.

Direct current was fed to the windings of the rotor, and the average overheating of the coils determined on the basis of the resistance calculated from the values of the voltage and current. An outside fan provided the cooling air which was piped to the rotor through three tubes. Orifice meters in the tubes served to determine the volume of air.

Both rotors with a smooth and such with a grooved surface were used in the experiments. A steel wire was wound over the rotor surface, with the pitch of the winding corresponding to the spacing of the grooves, since this solution was easier on a small-scale model than actual grooving. Although this

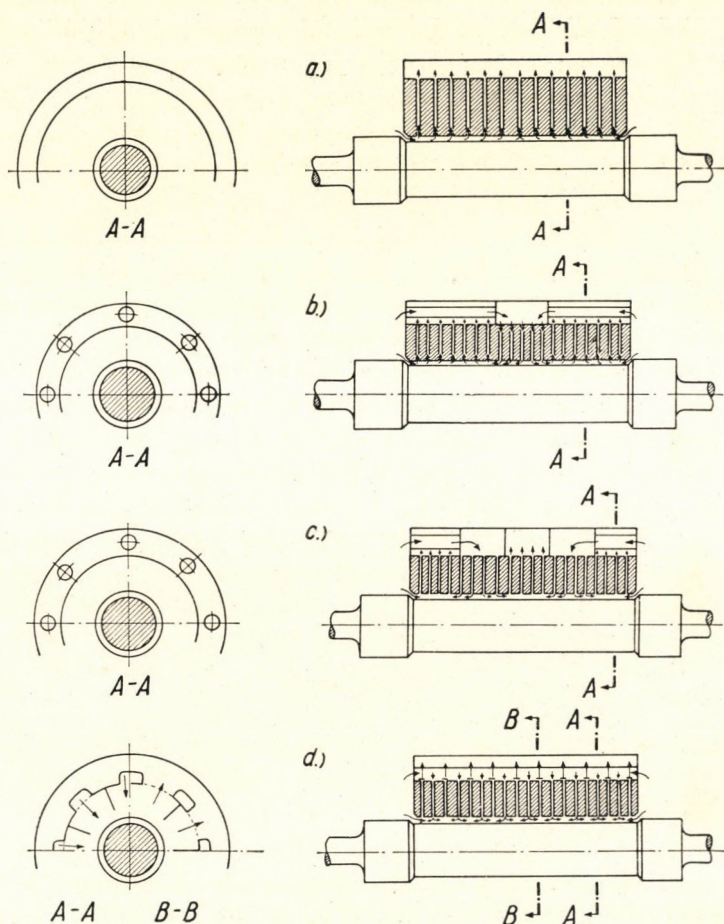


Fig. 1 Ventilating systems:

a) air-gap cooling, b) zonal ventilation with one intake belt, c) zonal ventilation with two intake belts, d) meander cooling

arrangement was not an exact imitation of actual conditions, it furnished nevertheless a convenient basis for the comparison of the various ventilating systems.

Four such systems were studied with the aid of the model.

Air-gap cooling. All the cooling air was fed directly in the air gap through two pipes placed along the two sides of the machine, and discharged in its enti-

rety through the vent ducts of the stator. Thus, in this system, all vent ducts of the stator served for the outlet of the cooling air.

Zonal ventilation with one intake belt. The vent ducts of the stator were axially divided into three zones: the cooling air entered through the ducts of the middle zone, streamed into the air gap, from which it discharged into the atmosphere through the vents of the first and third zones, together with the cooling air that had entered the air gap directly at the two ends of the rotor.

Zonal ventilation with two intake belts. Here, the stator was divided into five zones: the cooling air was let in through the ducts of the second and fourth, and out through those of the first, third, and fifth zones. As in the system with one intake belt, cooling air was let into the air gap directly also in this system. To conduct the cooling air to the vent ducts of the stator in the zonal systems, jackets — designed in accordance with the particular ventilating system — were mounted on the statorframe, while the intermediate pipe of the fan was responsible for the air supply to the intake belts.

"Meander" cooling. Here, the vent holes of the stator served alternately as intake and outlet ducts. After travelling in the longitudinal channels along the outer periphery of the stator, the cooling air was conducted to the intake ducts whence it reached the air gap: it flowed here only as far as the next vent duct through which it escaped. Fig. 1 shows a sketch of the four ventilating systems, Fig. 2 the photograph of the scale model with a two-belt zonal ventilation, and Fig. 3 the entire experimental equipment with a one-belt zonal ventilating system.

Measurements

These were of two kinds: (1) We ascertained the average overheating of the rotor in each of the ventilating systems, and (2) studied the axial distribution of the rotor's temperature.

(1) *Average overheating.* This value, as has already been said, was obtained by measuring the resistance of the thermal coils of the rotor. Temperatures were measured with different volumes of air in the case of both stationary rotors and those revolving at a speed of 1000 and 2000 revs. per min. The heating power was 1000 w in every case. The results of the measurements in respect of the zonal ventilation with one intake belt are plotted in Fig. 4. — It shows the value of steady-state overheating, attained under the given conditions, as a function of the volume of cooling air, the number of revolutions chosen for parameter. Only the curves for the stationary rotor and that with 2000 r. p. m. are shown in the diagram. Overheating was referred to the cooling air entering the machine. The solid lines represent the characteristic curves of cooling in rotors with a smooth, the dotted lines those of rotors with a grooved surface. The characteristic curves of the three other ventilation systems are simi-

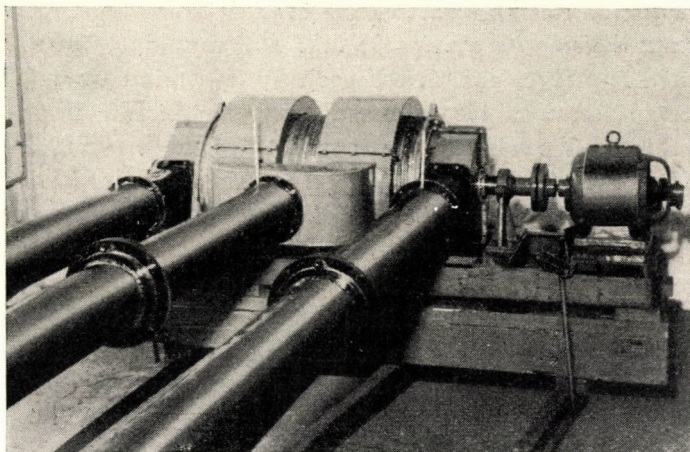


Fig. 2. Photograph of the scale model with zonal ventilation (two intake belts)

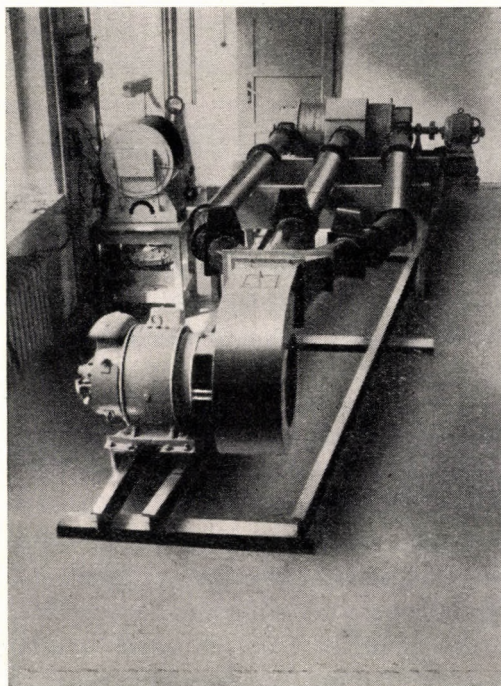


Fig. 3. Photograph of the measuring apparatus with zonal ventilation (one intake belt)

lar to those shown in the diagram, with the only difference that — as will be brought out further below — their plots are above or below the curves here represented. From the characteristic cooling curves we can ascertain the effect upon the conditions of heating as exercised by the three principal factors that influence surface cooling, viz. the volume of cooling air, the peripheral velocity, and the condition of the surface.

Although an increase in the *volume of cooling air* is naturally followed by a decrease in the overheating of the rotor, such decrease was found to be rather insignificant with the volumes of air studied by us. If we increase the volume of cooling air in the initial section of the cooling curve, i. e. at smaller

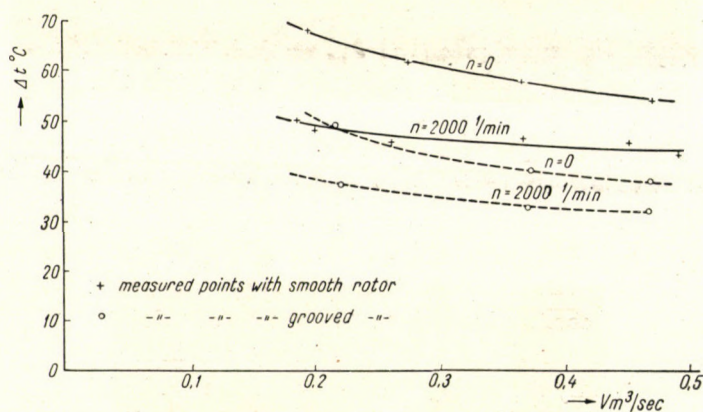


Fig. 4. Average overheating of rotor with one-intake-belt zonal ventilation; heating power of rotor 1000 w

amounts of air, we shall obtain a comparatively higher cooling effect than by doing so in the strongly flattening section of the characteristic curve. The conclusion for practice is that it is not worth while to increase the volume of the cooling air of turbine-generators beyond a certain limit because, once that limit is passed, additional quantities of cooling air will bring about but a slight further drop of temperature. The limit question has to be ascertained separately for each type of machine, and it must be the object of further experiments to plot the characteristic cooling curves for each particular type.

The characteristic cooling curves in respect of 1000 and 2000 r. p. m. run considerably lower than those plotted for rotors at standstill. This means that the *peripheral speed of the rotor* exerts a great effect upon heating. Any change in the peripheral speed is, as a matter of fact, a change in the relative velocity of the cooling medium and the rotor surface, and it is on this account that an increase thereof will decrease overheating. In cases of rotors with a high peripheral speed, the velocity-component of the cooling medium, due to rotation,

is considerably higher than the axial component, determined by the system of ventilation. In cases of this kind, the rotor actually cools itself, and all the cooling air furnished by the ventilators has to do is to remove, or replace, the air heated up around the rotor.

A further important factor in influencing the cooling of rotors is the condition of the *surface of heat transfer*, i. e. that of the rotor. A comparison of Fig. 4 with characteristic cooling curves not represented in this paper reveals the fact that, using rotors with a smooth surface and letting in identical volumes of cooling air, overheating will be lowest in the case of air-gap cooling, higher in zonal ventilations, and the comparatively highest if meander cooling is applied. However, as long as smooth rotors are used the differences between the curves characteristic of the different ventilating systems are not significant. The use of rotors with grooved surfaces improves matters very considerably: the rate of the overheating of a grooved rotor is not more than from 65 to 85% of that of a smooth one. Though improving conditions, grooving has not the same effect in the different ventilating systems: its improving effect is much more marked when meander cooling and zonal ventilations are applied than in the case of air-gap cooling. With 2000 r. p. m., for instance, the overheating of a grooved rotor is not more than from 74 to 75% of that of a smooth one if cooling is effected by the meander or the zonal systems, while it reaches from 80 to 82% if air-gap cooling is applied. The reason of this difference is that the air blown on to the rotor through the vent ducts can better penetrate into the grooves than the axially streaming air. Grooved rotors offer thus a larger effective cooling surface in zonal ventilation or meander cooling than in the case of air-gap cooling. Moreover, the improving effect of grooved rotor surfaces is higher with stationary rotors than with those revolving at a speed of 2000 r. p. m., so that grooving will be found to be more useful at low than at high peripheral velocities.

(2) *Axial distribution of rotor temperature.* This was determined indirectly. Measuring the temperature of the air escaping through the vent ducts of the stator, we plotted the values so obtained on a diagram, as the function of the length of the machine (Fig. 5). Since the cooling air, passing through the vent ducts, was heated in our arrangement only through the frictional losses occurring in these ducts, and as the effect of such losses was found to be negligible, the temperature-distribution curves represented also the axial distribution of the temperature of the cooling air streaming through the air-gap. Now, the temperature of the rotor follows that of the surrounding air pretty closely, although the temperature-distribution curve of the rotor runs, of course, well above that of the air, the considerable distance between the two plots corresponding to the difference between the temperature of the rotor surface and that of the surrounding air. Another difference between the two curves is that, owing to the good longitudinal thermal conductivity of the rotor, the peaks on its tempe-

temperature-distribution curve are not so sharp as the corresponding peaks on the air curve.

It should be mentioned that there exists a close correlation between the distribution of temperature and the longitudinal distribution of the velocity at which the air travels axially along the rotor. The longitudinal speed-component varies along the rotor in consequence of the in- and outflow of air through the ventilating ducts. Where the cooling air travels at a high speed along the rotor, cooling will be better and the temperature accordingly lower; where,

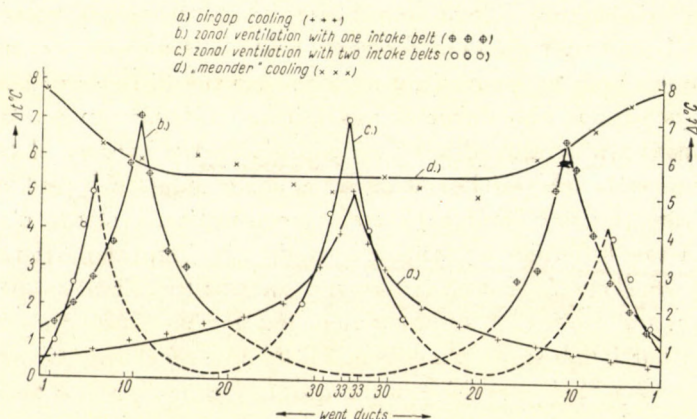


Fig. 5. Distribution of cooling-air temperature in the different ventilating systems at 2000 revs. per min.

a) air-gap cooling ($P = 1480$ w, $V = 0,38$ m³/sec), b) zonal ventilation with one intake belt ($P = 1065$ w, $V = 0,362$ m³/sec), c) zonal ventilation with two intake belts ($P = 954$ w, $V = 0,202$ m³/sec), d) meander cooling ($P = 980$ w, $V = 0,1$ m³/sec). The bracketed figures mean the power taken by rotor heating and the total volume of cooling air, respectively

on the other hand, the speed of air sinks to zero, a peak, i. e. a maximum, will appear on the temperature-distribution curve. There is one such peak in the case of air-gap cooling, and as many peaks in the case of zonal ventilation as the number of outlet belts. With zonal ventilation, it was only possible to measure the temperature distribution in the outlet zones by the above-described method, and we had to plot the distribution-curves for the inlet zones by way of estimate based on the distribution of air speed. With meander cooling, the distribution of the temperature is approximately uniform, except at the margins where temperature is somewhat higher owing to the less favourable cooling conditions at the coil ends.

The cooling of the coil ends requires special care. While cooling does not present a serious problem in the case of cross-wound rotors, it becomes more difficult in radially grooved rotors where the coil ends, not embedded in an iron body — i. e. a good thermal conductor, — have to transfer their heat to the cooling air through the insulation of the coils. The cooling of the coil ends

is comparatively well taken care of by the air-gap system of cooling : here, all the cooling air has to pass the coil ends before getting into the air-gap. We find the comparatively least favourable conditions in this respect with the meander-cooling system : here, the air — streaming into the machine from the outer periphery of the stator — avoids the coil ends of the rotor, and it is for this reason that in this system it is advisable to let the air also directly into the air-gap. Temperature will be more evenly distributed and the mean temperature of the rotor reduced in this way.

In comparing the different ventilating systems we must not disregard the problem of the *power demand for ventilation*. The power necessary to force a given volume of air through a given machine varies in accordance with the ventilating system applied. Other things being equal, air-gap cooling requires the highest power which, in this system, is directly proportional to the cube of the machine length. Here, the entire volume of cooling air has to be conducted into the air-gap : since this has a small cross-section, a strong air resistance will result. In zonal ventilations and in meander cooling, there are many parallel paths for the flow of air, to wit, the vent ducts ; the air resistance is consequently lower, and so is, therefore, the required power which, in these systems, is directly proportional to the machine length. A too high ventilation loss impairs the efficiency of the machine and requires the use of special fans.

The conclusions we can draw from the above considerations are, then, the following : —

It is advisable to use air-gap cooling if the machine to be cooled is short. Long machines should be cooled by zonal ventilation or meander cooling : it makes not much difference which of these systems is chosen. The systems of zonal ventilation offer the following advantages : better cooling of the coil ends, lower mean temperature of the rotor, and simpler design. Meander cooling, on the other hand, has the advantage of an even distribution of the temperature of the rotor, and requires less power. We may add that, as regards the cooling of the stator, meander cooling is somewhat superior to zonal ventilation. In selecting the most appropriate system of ventilation, our choice will have to be governed by a global consideration of the electrical, heating, air-flow, and constructional aspects of the case.

REFERENCES

1. B. G. LAMME: Ventilation and Temperature in Large Turbo-Generators. Transactions A. I. E. E. June 1920. pp. 915—949.
2. W. J. FOSTER: Temperatures in Large Alternating-Current Generators. Transactions A. I. E. E. June 1920. pp. 951—964.
3. C. J. FECHHEIMER: An Experimental Study of Ventilation of Turbo-Alternators. Transactions A. I. E. E. Febr. 1924. pp. 476—501.
4. C. J. FECHHEIMER: Ventilation of Turbo Alternators. Concluding Study. Transactions A. I. E. E. Febr. 1926. pp. 253—267.
5. G. E. LUKE: Surface Heat Transfer in Electric Machines with Forced Air Flow. Transactions A. I. E. E. June 1926. pp. 1036—1047.
6. C. E. PECK: Heat Flow in Turbine Generator Rotors. Electrical Engineering. Oct. 1934. pp. 1359—1365.
7. J. PREVOST: Von Erwärmung und Ventilation elektrischer Maschinen. Brown-Boveri Mitteilungen. Dec. 1944. pp. 383—392.
8. Н. А. Монозон: Тепловой расчет синхронных турбогенераторов. Сборник Электросила. 1950.
9. D. S. SNELL—R. H. NORRIS—MRS. B. O. BUCKLAND: Surface Heat Transfer Coefficients for Hydrogen Cooled Rotating Electric Machines. Transactions A. I. E. E. 1950. pp. 174—185.

SUMMARY

The paper describes experiments made in the Central Laboratory of the "Klement Gottwald" Electric Works, Budapest, on a 1:4,5-scale model of a 44 MVA two-pole turbine-generator. The experiments had the purpose to study the factors that influence the cooling of rotor surfaces, and to compare different ventilating systems (air-gap cooling, zonal ventilation with one intake belt and two intake belts, meander cooling) from the standpoint of rotor cooling. Measurements described in the paper have made it evident that the volume of the cooling air (at least within the range of air volumes used in the experiments) is of secondary importance as regards its effect on the average overheating of the rotor, whereas the latter is decisively influenced by the rotor's peripheral speed and the condition of the rotor-surface. The longitudinal distribution of the temperature of the rotor is a function of the ventilating system. In making comparisons between the different ventilating systems neither the question of the cooling of the coil ends nor the problem of power consumption must be left out of consideration. The paper concludes by suggesting that air-gap cooling should be applied if the machine to be cooled is short, while zonal ventilation and meander cooling are of approximately equal value for the cooling of long machines.

ИЗМЕРЕНИЯ НАГРЕВА НА МОДЕЛИ ОХЛАЖДАЕМОГО ВОЗДУХОМ РОТОРА
ТУРБОГЕНЕРАТОРА

Д. КЕРЕНИ

РЕЗЮМЕ

В Центральной лаборатории электротехнического завода им. Клемента Готвальда проводились экспериментальные опыты на модели (масштаб 1:4,5) двухполюсного турбогенератора мощностью 44 мвта. Опыты проводились с целью исследования факторов, действующих на поверхностное охлаждение ротора, а также сравнение некоторых систем вентиляции (охлаждение через воздушные зазоры, поучастковая вентиляция через один или два пояса втока, меандрическое охлаждение) с точки зрения охлаждения ротора. На основе данных измерений установлено, что на общий перегрев ротора количество охлаждающего воздуха (для данных количеств воздуха) влияет только в незначительной, а окружная скорость ротора и форма поверхности, в свою очередь, влияют в значительной степени. Распределение температуры ротора в продольном направлении является

функцией системы вентиляции. При сравнении отдельных систем вентиляции следует принять во внимание охлаждение лобовых частей обмотки, а также вопрос мощности вентиляции. На основе вышесказанного для охлаждения коротких машин наиболее подходящим является охлаждение через воздушные зазоры, а для охлаждения длинных машин поучастковая вентиляция и меандрическое охлаждение могут прийти в расчет примерно в одинаковой степени.

MESURES D'ÉCHAUFFEMENT SUR UN MODÈLE RÉDUIT DE TURBO-ROTOR

D. KERÉNYI

RÉSUMÉ

Au laboratoire central des usines électrotechniques «Klement Gottwald» un modèle de turbo-rotor, réduit à l'échelle d'environ 1:4,5, a été essayé. Le but de ces essais était d'examiner les facteurs qui influencent le refroidissement superficiel du rotor, ainsi que de comparer, du point de vue du refroidissement du rotor, quelques systèmes de ventilation (refroidissement de l'entrefer, ventilation à sections à une ou deux ceintures d'amenée de l'air, refroidissement à méandre). Les mesures ont permis de constater que tandis que l'échauffement moyen du rotor n'est que peu influencé par la quantité de l'air de refroidissement (aux quantités d'air étudiées), il dépend dans une mesure considérable de la vitesse circonférentielle du rotor et l'arrangement de sa surface. La répartition longitudinale de la température du rotor est fonction du système de ventilation. En comparant les différents systèmes de ventilation, il faut également tenir compte du refroidissement des têtes de bobines, ainsi que de la question de la puissance de ventilation. En partant de toutes ces considérations c'est le refroidissement de l'entrefer qui convient le mieux pour des machines courtes, pour les machines longues par contre le refroidissement par sections et le refroidissement à méandre sont de valeur à peu près égale.

ERWÄRMUNGSMESSUNGEN AN MODELLEN VON TURBOROTOREN

D. KERÉNYI

ZUSAMMENFASSUNG

Im Zentrallaboratorium der elektrotechnischen Fabrik »Klement Gottwald« wurden an einem ungefähr im Verhältnis 1:4,5 verkleinerten Modell eines 44-MVA-Turbogenerators Versuche ausgeführt. Das Ziel der Versuche war die Untersuchung der die Oberflächenkühlung des Läufers beeinflussenden Faktoren, sowie der Vergleich einiger Lüftungsanordnungen (Luftspaltkühlung, abschnittsweise Kühlung mit ein oder zwei Lufteintrittsgürteln, Mäanderkühlung) vom Standpunkt der Läuferkühlung aus. Auf Grund der Messungen wurde festgestellt, dass die durchschnittliche Erwärmung des Läufers (bei den untersuchten Luftmengen) nur in geringem Ausmass von der Kühlluftmenge, jedoch wesentlich von der Umfangsgeschwindigkeit des Läufers und von der Ausbildung seiner Oberfläche beeinflusst wird. Die Längsverteilung der Läuftertemperatur ist eine Funktion des Lüftungssystems. Beim Vergleich der einzelnen Lüftungssysteme muss die Kühlung der Spulenköpfe sowie die Frage der Lüftungsleistung mit in Betracht gezogen werden. Auf Grund aller dieser Faktoren ist für die Kühlung von kurzen Maschinen die Luftspaltkühlung am besten geeignet, während für lange Maschinen die abschnittsweise Kühlung und die Mäanderkühlung als ungefähr gleichwertige Anordnungen in Frage kommen.

ÜBER DIE BERECHNUNG DER ZULÄSSIGEN DRUCKKRAFT DES ELASTISCHEN STABES

J. BARTA

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

INSTITUT FÜR DIE BAUWISSENSCHAFTEN, BUDAPEST

[Eingegangen am. 9. November 1955]

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Frage: Wie kann man die zulässige Druckkraft des elastischen Stabes aus der zulässigen Druckspannung des Werkstoffes berechnen?

I. Voraussetzungen und Bezeichnungen

Der Querschnitt des Stabes ist veränderlich oder konstant. Die Achse des Stabes ist im unbelasteten Zustande eine Gerade oder eine schwachgekrümmte Kurve (Abb. 1), charakterisiert durch eine gegebene Funktion $\eta(x)$, so dass für $\eta \leq x \leq l$

$$\eta \geq 0, \quad \eta \neq 0 \quad (1)$$

gilt. Wir schliessen also den Fall, wo der im unbelasteten Zustande gerade Stab an seinen Enden zentrisch belastet wird, von unseren Erörterungen aus. Der Stab besitzt eine Symmetrieebene, z. B. die Zeichenebene der Abb. 1. Wir beschränken uns auf Fälle, wo $\eta(x)$ klein ist. Die Druckkraft wirkt in der Symmetrieebene, und zwar schwach exzentrisch oder zentrisch. Die kleinen konstanten negativen Werte $\eta(0)$ und $\eta(l)$ sind also gegebene Exzentrizitäten.

Die Ausbiegung $\eta(x)$ erfolgt in der Symmetrieebene und erfüllt die Randbedingung

$$y(0) = y(l) = 0. \quad (2)$$

x ist die unabhängige Veränderliche (Abb. 1), l die Länge des Stabes. $EJ(x)$ bezeichnet die Biegesteifigkeit, $F(x)$ die Querschnittsfläche, $W(x)$ das Widerstandsmoment des Querschnittes, P die Druckkraft des Stabes und σ_z die zulässige Druckspannung des Werkstoffes. Ferner ist P_z die zulässige Druckkraft des Stabes (siehe Abschnitt 2), P_k die kritische Druckkraft des Stabes (siehe Abschnitt 3). P_{zk} ist der kleinere (genauer gesagt: nichtgrössere) der Werte P_z , P_k . Die Zeichen $[\dots]_{\min}$ und $[\dots]_{\max}$ bedeuten den kleinsten und den grössten Wert von $[\dots]$ im Intervall $0 \leq x \leq l$.

Die Druckkraft P wirkt statisch, d. h. sie wächst langsam und stetig von Null bis zu ihrem Endwert an, wobei sie die gegebenen Exzentrizitäten $\eta(0)$ und $\eta(l)$ behält bzw. zentrisch bleibt.

Es sollen sowohl kleine (genauer gesagt: infinitesimal kleine) als auch grosse (genauer gesagt: endlich grosse) Ausbiegungen $y(x)$ berücksichtigt werden.

Um die Darlegungen nicht allzu weitläufig zu gestalten, seien $EJ(x)$, $F(x)$, $W(x)$, $\eta(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq l$ als stetige Funktionen von x angenommen. Wo es notwendig ist, wird auch die Differenzierbarkeit vorausgesetzt. (Sind die Funktionen im Intervall nur abschnittsweise stetig und differenzierbar, so kann man demselben Gedankengang folgen.)

2. Die Definition der zulässigen Druckkraft

Akzeptieren wir die Definition: »Unter der zulässigen Druckkraft P_z wollen wir jenen Wert der von Null an langsam und stetig wachsenden Druckkraft P verstehen, für welchen die maximale Druckspannung an der inneren Seite des ausgebogenen Stabes dem vorgegebenen Wert σ_z gleich ist.«

Hier ist die zulässige Druckkraft P_z nur mit Rücksicht auf die Festigkeit, also ohne Rücksicht auf die Stabilität definiert (über die Stabilität und über die kritische Druckkraft P_k siehe Abschnitt 8). Mithin ist sowohl ein Fall denkbar, wo $P_z < P_k$ ist, als auch ein solcher, wo $P_z' > P_k$ ist. Bei einem sehr schlanken Stab liegt offenbar der letztere Fall vor. Allerdings braucht der Statiker nur den kleineren der Werte P_z, P_k zu kennen. Deshalb wollen wir im Abschnitt 4 einen Einschliessungssatz angeben, der sich auf den kleineren der Werte P_z, P_k bezieht. Eine kritische Bemerkung über die jetzt eingeführte Definition der zulässigen Druckkraft wird im Abschnitt 10 gegeben.

Bemerkung: Statt »zulässiger Druckkraft« bzw. »zulässiger Druckspannung« pflegt man manchmal auch »Grenzdruckkraft« bzw. »Grenzdruckspannung« zu sagen. Die letzteren Benennungen können hier wie folgt begründet werden. In unserem Falle wird σ_z als genug gross angenommen. Würde nämlich σ_z als zu klein angenommen, so würde im Falle $P = P_z$ die Sicherheit gegen Bruch bedeutend grösser als 1 sein. Dagegen ist im Falle $P = P_k$ die Sicherheit gegen Ausknickung nur genau 1.

3. Das analytische Problem

Aus der Definition folgt, wie bekannt, dass die zulässige Druckkraft P_z dem kleinsten positiven Wert von P gleich ist, wenn P der Parameter des Problems

$$\left| \left[\frac{P}{F} + \frac{P(\eta + y)}{W} \right] \right|_{\max} = \sigma_z, \quad (3)$$

$$-EJy'' = P(\eta + y), \quad (4)$$

$$y(0) = y(l) = 0 \quad (5)$$

ist. Das analytische Problem besteht also in der Ermittlung des kleinsten positiven Parameterwertes, den wir der Einfachheit halber ebenfalls mit P_z bezeichnen wollen. Das Problem (3), (4), (5) ist ein inhomogenes lineares Problem. Sein Parameter P spielt eine ähnliche Rolle wie der Eigenwert eines homogenen linearen Problems. (Ist für die Druckkraft das langsame stetige Wachsen von Null an nicht vorgeschrieben, so sind Gleichgewichtszustände auch für grössere Werte von P denkbar, z. B. nach Abb. 2. Diese Gleichgewichtszustände interessieren uns nicht, da sie sich als labile Gleichgewichtszustände zeigen.)

Die Gültigkeit der Gleichungen (3), (4), (5) ist auf Fälle beschränkt, wo nur kleine Ausbiegungen $y(x)$ entstehen. Das heisst, die Gleichungen (3), (4), (5) dürfen zur Berechnung von P_z nur dann benutzt werden, wenn jene Ausbiegung, bei der die zulässige Druckspannung des Werkstoffes erreicht wird, noch klein ist. Da wir in dieser Abhandlung auch die grosse Ausbiegung $y(x)$ berücksichtigen wollen, müssen wir uns beim Beweis der Formel (11) die Gleichungen (3), (4), (5) auch in der strengeren Gestalt vorstellen, wo statt y'' eine genauere Formänderungsformel gebraucht wird (vom Anschreiben der genaueren Formänderungsformel können wir absehen, es genügt, sie sich vorzustellen).

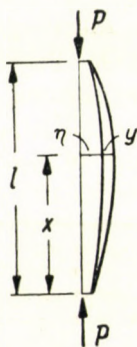


Abb. 1

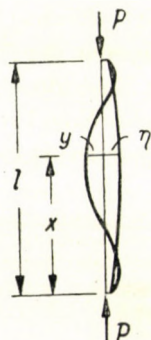


Abb. 2

Die Formeln des Abschnittes 4 bleiben aber auch in diesem Falle in ihrer unveränderten Gestalt gültig.

4. Die Abschätzung des kleineren der Werte P_z , P_k

Um den kleineren der Werte P_z , P_k abzuschätzen, d. h. um eine untere und obere Schranke für den kleineren der Werte P_z , P_k zu erhalten, verfahren wir wie folgt. Wir nehmen eine Funktion $u(x)$ an, die im Intervall $0 \leq x \leq l$ zweimal stetig differenzierbar ist, im Intervall $0 < x < l$ die Ungleichung

$$u > 0 \quad (6)$$

erfüllt, der Randbedingung

$$u(0) = u(l) = 0 \quad (7)$$

genügt und sonst beliebig ist. Wir berechnen die drei Werte

$$\frac{\sigma_z}{\left[\frac{1}{F} + \frac{\eta + u}{W} \right]_{\max}} \quad (8)$$

$$\left[\frac{-EJu''}{\eta + u} \right]_{\min} \quad (9)$$

$$\left[\frac{-EJu''}{\eta + u} \right]_{\max} \quad (10)$$

Der kleinste dieser drei Werte sei mit P_{zk}^* , der grösste mit P_{zk}^{**} bezeichnet, und der kleinere (genauer gesagt: nichtgrössere) der Werte P_z , P_k mit P_{zk} . Dann benutzen wir den *Einschliessungssatz*: »Für P_{zk} gilt die Formel

$$P_{zk}^* \leq P_{zk} \leq P_{zk}^{**} \quad (11)$$

P_{zk}^* ist also eine untere Schranke, P_{zk}^{**} eine obere Schranke für P_{zk} .

5. Der Beweis der Formel (11)

Vorläufig sei vorausgesetzt, dass jene Ausbiegung, bei der die zulässige Druckspannung des Werkstoffes erreicht wird, noch klein ist. Unter dieser Voraussetzung gelten die Gleichungen (3), (4), (5). Betrachten wir zuerst das Randwertproblem (4), (5), in dem P ein Parameter ist. Im Falle $P = 0$, d. h. im unbelasteten Zustande, ist $y = 0$. Wenn P von Null an stetig wächst und kleiner als die kritische Druckkraft P_k bleibt, oder im Grenzfalle gleich P_k wird, so wird $y(x)$ an jeder Stelle des Intervalls $0 < x < l$ ebenfalls von Null an stetig wachsen. (Die Richtigkeit dieser Behauptung geht schon aus der Anschauung hervor und lässt sich auch mathematisch beweisen, z. B. so: Man benutzt die zum Intervall $0 \leq x \leq l$ gehörige GREENSche Funktion $G(x, \xi)$ des Operators d^2/dx^2 . Man wählt als Ausgang $y_{(0)} = 0$, verwendet das Iterationsverfahren — die Konvergenz ist in der Literatur [1] bewiesen —, führt die Iterationsschritte unter Benutzung der Formel

$$y_{(n+1)} = \int_0^l G \frac{P}{EJ} (\eta + y_{(n)}) d\xi$$

aus und beachtet schliesslich, dass für

$$0 < x < l, \quad 0 < \xi < l$$

die Ungleichung $G > 0$ besteht.) Es gelten daher für das Randwertproblem (4), (5) an jeder Stelle des Intervalls die Ungleichungen

$$y > 0, \quad (12)$$

$$-y'' > 0 \quad (13)$$

Die letztere Formel folgt aus den Formeln (1), (4), (12).

Und jetzt betrachten wir das Problem (3), (4), (5). Die zum Wert P_z gehörige Funktion bezeichnen wir mit $y_z(x)$. Zuzufolge der Formel (5) haben wir jetzt

$$y_z(0) = y_z(l) = 0 \quad (14)$$

Aus (12) und (13) folgt, dass an jeder Stelle des Intervalls $0 < x < l$ die Ungleichungen

$$y_z > 0, \quad -y_z'' > 0 \quad (15)$$

bestehen. Aus der Gleichung (4) folgt

$$\frac{-EJy_z''}{\eta + y_z} = P_z \quad (16)$$

das heisst

$$\frac{-EJy_z''}{\eta + y_z} = \text{konstant.} \quad (17)$$

Als Folge der Formel (3) lässt sich

$$\frac{\sigma_z}{\left[\frac{1}{F} + \frac{\eta + y_z}{W} \right]_{\max}} = P_z \quad (18)$$

anschreiben. Die Gleichung

$$\frac{-EJy_z''}{y_z} = \frac{-EJu''}{u} + EJ \frac{u''y_z - uy_z''}{uy_z} \quad (19)$$

ist eine Identität. Fassen wir den Nenner und den Zähler des letzten Bruches ins Auge. Der Nenner ist, wie aus (6) und (15) hervorgeht, im Intervall $0 < x < l$ positiv. Es gibt sicher eine solche Stelle $x = a$ im Intervall $0 < x < l$, dass für $x = a$ der Zähler verschwindet, denn das aus dem Zähler gebildete Integral ergibt

$$\int_0^l (u''y_z - uy_z'') dx = \int_0^l (u'y_z - uy_z')' dx = (u'y_z - uy_z')_0^l = 0$$

was aus (7) und (14) folgt. Der letzte Bruch der Gleichung (19) fällt daher an der Stelle $x = a$ zu Null aus. Wir können also darauf schliessen, dass sich eine

Stelle $x = a$ im Intervall $0 < x < l$ derart angeben lässt, dass die Beziehung

$$\left[\frac{-EJu''}{u} \right]_{x=a} = \left[\frac{-EJy_z''}{y_z} \right]_{x=a} \quad (20)$$

besteht. Was die Funktion $u(x)$ anbelangt, dürfen wir während des Beweises die folgenden drei Fälle unterscheiden. Im ersten Falle besteht an jeder Stelle des Intervalls $0 < x < l$ die Beziehung

$$u \leq y_z \quad (21)$$

Im zweiten Falle besteht an jeder Stelle des Intervalls $0 < x < l$ die Ungleichung

$$u > y_z \quad (22)$$

Im dritten Falle besteht das Intervall $0 \leq x \leq l$ aus Teilintervallen, so dass ein jedes der Teilintervalle entweder durch die Aussage (21) oder durch die Aussage (22) charakterisiert ist.

Aus der Beziehung (20) folgt im ersten Falle unter Berücksichtigung von (6), (15) die weitere Beziehung

$$\left[\frac{-EJu''}{\eta + u} \right]_{x=a} \leq \left[\frac{-EJy_z''}{\eta + y_z} \right]_{x=a} \quad (23)$$

(Um dies einzusehen, überlege man wie folgt : Wenn A eine reelle Zahl, B, C, D positive Zahlen, η eine nichtnegative Zahl, $A/B \leq C/D$ und $B \leq D$ sind, so folgen durch Multiplikation die Formeln $A \leq C$, $A\eta \leq C\eta$, $AD \leq CB$ und durch Addition die Formel $A\eta + AD \leq C\eta + CB$, woraus sich $A/(\eta + B) \leq C/(\eta + D)$ ergibt.) Wir können daher schreiben :

$$\left[\frac{-EJu''}{\eta + u} \right]_{\min} \leq \left[\frac{-EJy_z''}{\eta + y_z} \right]_{x=a}$$

oder mit Rücksicht auf (16) und (17) :

$$\left[\frac{-EJu''}{\eta + u} \right]_{\min} \leq P_z \quad (24)$$

Im zweiten Falle ist die Gültigkeit der Formel

$$\overline{\left[\frac{1}{F} + \frac{\eta + u}{W} \right]_{\max}^{\sigma_z}} \leq \overline{\left[\frac{1}{F} + \frac{\eta + y_z}{W} \right]_{\max}^{\sigma_z}}$$

offensichtlich. Hieraus folgt mit Rücksicht auf (18)

$$\frac{\sigma_z}{\left[\frac{1}{F} + \frac{\eta + u}{W} \right]_{\max}} \leq P_z \quad (25)$$

Die Formeln (24) und (25) bezeugen gemeinsam, dass die Formel

$$P_{zk}^* \leq P_z \quad (26)$$

sowohl im ersten als auch im zweiten Falle gültig ist. P_{zk}^{**} bedeutet den kleinsten der Werte (8), (9).

In analoger Weise ergibt sich im zweiten Falle die Formel

$$P_z \leq \left[\frac{-EJu''}{\eta + u} \right]_{\max}$$

und im ersten Falle die Formel

$$P_z \leq \frac{\sigma_z}{\left[\frac{1}{F} + \frac{\eta + u}{W} \right]_{\max}}$$

Hierdurch stellt sich heraus, dass die Formel

$$P_z \leq P_{zk}^{**} \quad (27)$$

sowohl im ersten als auch im zweiten Falle gültig ist. P_{zk}^{**} bedeutet den grössten der Werte (8), (10).

Es wurde bisher bewiesen, dass die Beziehung (11) sowohl im ersten als auch im zweiten Falle gültig ist. Es bleibt noch übrig zu beweisen, dass die Behauptung (11) auch im dritten Falle gültig ist. Hierzu genügt es, den von der Formel (23) bis zur Formel (27) verfolgten Gedankengang jetzt auf dasjenige Teilintervall anzuwenden, das die Stelle $x = a$ enthält. Auf diese Weise stellt es sich heraus, dass die Behauptung (11) auch im dritten Falle gültig ist.

Unsere bisherige Beweisführung muss durch folgende Bemerkung ergänzt werden: Wir legten der bisherigen Beweisführung die Annahme $P_z \leq P_k$ zugrunde. Dass diese Annahme (unter der Voraussetzung, dass jene Ausbiegung, bei der die zulässige Druckspannung des Werkstoffes erreicht wird, noch klein ist) berechtigt ist, sei wie folgt bewiesen. Die Formeln (34), (36) sagen aus, dass

$$\left[\frac{-EJu''}{u} \right]_{\min} \leq P_k$$

ist. Für $u(x)$ darf $y_z(x)$ geschrieben werden. So ist

$$\left[\frac{-EJy_z''}{y_z} \right]_{\min} \leq P_k$$

woraus

$$\left[\frac{-EJy_z''}{\eta + y_z} \right]_{\min} \leq P_k$$

oder, mit Rücksicht auf (16) und (17),

$$P_z \leq P_k \quad (28)$$

folgt.

Was die Grössenordnung jener Ausbiegung anbelangt, bei der die zulässige Druckspannung des Werkstoffes erreicht wird, haben wir bisher vorausgesetzt, dass sie klein ist (genauer gesagt: sie kann als infinitesimal klein angesehen werden). Jetzt wollen wir voraussetzen, dass sie gross ist (genauer gesagt: sie soll als endlich gross betrachtet werden). Zu diesem Zweck stellen wir uns die Gleichungen (3), (4), (5) in ihrer strengeren Gestalt vor (siehe die Ausführungen am Ende des Abschnittes 3). Stellen wir uns jetzt auch den zugehörigen Wert P_z vor. Es ist leicht zu sehen, dass dieser Wert P_z kleiner als das bisherige P_z ist. Hieraus und aus der Formel (27) folgt die Beziehung $P_z \leq P_{zk}^{**}$, worin P_z der der strengeren Gestalt der Gleichungen zugehörige Wert ist. P_{zk}^{**} ist wieder der grösste der Werte (8), (10). Mit Rücksicht auf die Beziehung $P_{zk} \leq P_z$ finden wir die weitere Beziehung

$$P_{zk} \leq P_{zk}^{**}$$

wo P_{zk} der kleinere (genauer gesagt: nichtgrössere) der Werte P_z , P_k ist. Laut (38) haben wir $P_k \leq P_z$, woraus $P_k = P_{zk}$ folgt. Aus (9), (34), (36) ergibt sich $P_{zk}^* \leq P_k$. Mithin haben wir

$$P_{zk}^* \leq P_{zk}$$

Wir sind also wieder zur Beziehung (11) gelangt.

6. Praktische Bemerkung zur Benutzung der Formeln (6) bis (11)

Die beliebige Funktion $u(x)$ wird zweckmässig so gewählt, dass sie die Ausbiegungsform ungefähr wiedergibt. Sie wird mithin nach Gefühl gewählt oder als eine angenäherte Lösung der Gleichungen (3), (4), (5) gewonnen. Dabei achtet man darauf, dass sie die Randbedingungen erfüllt und für $0 < x < l$ positiv ist. Um eine angenäherte Lösung der Gleichungen (3), (4), (5) zu fin-

den, empfiehlt sich unter anderem das Iterationsverfahren (auch »Verfahren der schrittweisen Näherungen« genannt), dessen Einzelheiten im folgenden Zahlenbeispiel erläutert werden. Selbstverständlich ist das Iterationsverfahren auch dann anwendbar, wenn man die Gleichungen (3), (4), (5) in ihrer strengeren Gestalt benutzt. Es ist allerdings zu bemerken, dass gegenwärtig noch keine Bedingung für die Konvergenz des Iterationsverfahrens vorliegt. Vorläufig ist also die Konvergenz des Iterationsverfahrens nur auf Grund der Anschauung zu vermuten. Der Einschliessungssatz selbst ist aber, ohne Rücksicht auf die Konvergenz des Iterationsverfahrens, immer gültig.

7. Zahlenbeispiel

Als Zahlenbeispiel für die Benutzung des durch die Formeln (6) bis (11) ausgedrückten Einschliessungsverfahrens sei ein stählerner Stab von konstantem Querschnitt betrachtet. Der Querschnitt ist ein Rechteck mit den Seitenlängen 2,4 cm und 1,8 cm. Die Exzentrizität der Kraft beträgt an beiden Enden des Stabes 1 cm. Die Stabachse ist im unbelasteten Zustande eine Parabel mit der Sehne 100 cm und mit einer Höhe von 1 cm, das heisst

$$l = 100 \text{ cm}, \quad \eta(0) = \eta(l) = 1 \text{ cm}, \quad \eta = 2 - (0,02x - 1)^2.$$

Der Elastizitätsmodul ist $E = 2\,100\,000 \text{ kg/cm}^2$. Die zulässige Druckspannung sei $\sigma_z = 2000 \text{ kg/cm}^2$ (siehe hierüber die Bemerkung am Ende des Abschnittes 2). Schätzen wir nun den Wert P_{zk} ab.

Wir haben jetzt $F = 2,4 \cdot 1,8 = 4,32 \text{ cm}^2$, $W = 2,4 \cdot 1,8^2/6 = 1,296 \text{ cm}^3$, $J = 2,4 \cdot 1,8^3/12 = 1,1664 \text{ cm}^4$, $EJ = 2\,100\,000 \cdot 1,1664 = 2\,449\,440 \text{ kg cm}^2$. Das Iterationsverfahren wenden wir auf die Gleichungen (3), (4), (5) wie folgt an. Als Ausgangspunkt für den ersten Schritt benutzen wir einen der Randbedingung (5) genügenden nichtnegativen Ansatz, sagen wir

$$y(0) = 1 - (0,02x - 1)^2. \quad (29)$$

Führen wir in die Gleichung (3) den Ausdruck (29) statt $y(x)$ ein. Auf diese Weise lässt sich der Wert $P_{(1)} = 786 \text{ kg}$ aus der Gleichung (3) berechnen. In die rechte Seite der Gleichung (4) schreiben wir den Ausdruck $1 - (0,02x - 1)^2$ für $y(x)$ und den Wert 786 für P . Dann folgt aus der Gleichung (4) durch zweimalige Integration, unter Berücksichtigung der Randbedingung (5),

$$y_{(1)} = 1,07 - 4,82(0,01x - 0,5)^2 + 2,16(0,01x - 0,5)^4.$$

Diese Funktion dient als Ausgangspunkt für den zweiten Schritt, der auf die gleiche Weise wie der erste Schritt durchgeführt wird. Der zweite Schritt liefert den Wert $P_{(2)} = 770 \text{ kg}$ und die Funktion

$$y_{(2)} = 1,0635 - 4,82(0,01x - 0,5)^2 + 2,32(0,01x - 0,5)^4 - 0,224(0,01x - 0,5)^6.$$

Jetzt setzen wir das Iterationsverfahren nicht fort, sondern wählen für $u(x)$ den Ausdruck $y_{(2)}(x)$. Wird dieser in (8), (9), (10) eingesetzt, so finden wir die Werte

770,68... kg	für (8),
761,77... kg	für (9),
770,78... kg	für (10).

Mithin sind $P_{zk}^* = 761,77 \dots \text{kg}$, $P_{zk}^{**} = 770,78 \dots \text{kg}$. Nach (11) gilt also die Beziehung

$$761,77 \text{ kg} < P_{zk} < 770,79 \text{ kg}.$$

Das arithmetische Mittel ist

$$766,28 \text{ kg}.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass sich der Wert 766,28 kg um weniger als 6% von dem strengen Wert von P_{zk} unterscheidet.

8. Die Stabilität des Gleichgewichtes

Die Stabilität des Gleichgewichtes sei hier nur ganz kurz erwähnt, da sie in der einschlägigen Literatur schon ausführlich behandelt worden ist. Benutzen wir die am Anfang der Abhandlung gemachten Voraussetzungen und betrachten wir den Gleichgewichtszustand des gedrückten Stabes (Abb. 1). Dieser Gleichgewichtszustand ist, wie man aus der Stabilitätstheorie weiss, dann und nur dann stabil, wenn die Druckkraft P kleiner als der kleinste Eigenwert P_k des Eigenwertproblems

$$\begin{cases} -EJy'' = Py, \\ y(0) = y(l) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

$$y(0) = y(l) = 0 \quad (31)$$

ist. (Diese Feststellung gilt vor allem für gedrückte Stäbe, die im unbelasteten Zustande gerade waren und zentrisch belastet sind, und dann für solche gedrückte Stäbe, die im unbelasteten Zustande gerade waren und schwachexzentrisch belastet sind, sowie für solche Stäbe, die im unbelasteten Zustande schwachgekrümmt waren und zentrisch oder schwachexzentrisch belastet sind.) P_k wird in der Literatur die kritische Druckkraft genannt. Um den Wert P_k abzuschätzen, pflegt man wie folgt zu verfahren. Man nimmt eine Funktion $u(x)$ an, die im Intervall $0 \leq x \leq l$ zweimal stetig differenzierbar ist, im Intervall $0 < x < l$ die Ungleichung

$$u > 0 \quad (32)$$

erfüllt, der Randbedingung

$$u(0) = u(l) = 0 \quad (33)$$

genügt und sonst beliebig ist. Man berechnet die Werte

$$P_k^* = \left[\frac{-EJu''}{u} \right]_{\min} \quad (34)$$

$$P_k^{**} = \left[\frac{-EJu''}{u} \right]_{\max} \quad (35)$$

und benutzt dann den in der Literatur [2, 3] nach G. TEMPLE (auch nach H. A. SCHWARZ) benannten *Einschliessungssatz* : »Für die kritische Druckkraft P_k gilt die Formel

$$P_k^* \leq P_k \leq P_k^{**} \cdot \alpha \quad (36)$$

P_k^* ist also eine untere Schranke und P_k^{**} eine obere Schranke für P_k . Auffallend ist die Ähnlichkeit zwischen den Formelgruppen (6) bis (11) und (32) bis (36).

9. Die Rolle der Stabilität

Das im Abschnitt 3 gestellte analytische Problem war, vom Gesichtspunkt der Statik aus, ein Festigkeitsproblem ; es war also kein Stabilitätsproblem. Doch gewann im Laufe der Behandlung des Festigkeitsproblems (siehe Abschnitt 5) auch die Stabilität eine Rolle.

Wir haben im Abschnitt 5 bewiesen, dass die Formel $P_z \leq P_k$ gilt, aber nur unter der Voraussetzung, dass es sich ausschliesslich um Fälle handelt, wo jene Ausbiegung, bei der die zulässige Druckspannung des Werkstoffes erreicht wird, noch klein ist.

In Anbetracht der Grössenordnung jener Ausbiegung, bei der die zulässige Druckspannung des Werkstoffes erreicht wird, wollen wir zwei Gruppen von Stäben unterscheiden. Bei der ersten ist diese Ausbiegung noch klein (genauer gesagt : sie kann als infinitesimal klein angesehen werden). Bei der zweiten ist sie gross (genauer gesagt : sie soll als endlich gross betrachtet werden). Für die erste gilt also die Beziehung

$$P_z \leq P_k \quad (37)$$

und für die zweite die Beziehung

$$P_z \geq P_k \quad (38)$$

Die letztere Beziehung lässt sich wie folgt beweisen. Es ist bekannt, dass die Stabilität des in dieser Abhandlung erörterten Stabes so definiert werden kann : Der Gleichgewichtszustand ist dann und nur dann stabil, wenn die Ausbiegung $y(x)$ noch klein ist (genauer gesagt : wenn sie als infinitesimal klein angesehen werden kann). Hieraus erhellt die Gültigkeit der Formel (38).

Im Abschnitt 2 wurde schon erwähnt, dass für sehr schlanke Stäbe offenbar die Ungleichung $P_z > P_k$ gilt. Für den im Abschnitt 7 behandelten Fall gilt die Ungleichung $P_z < P_k$, denn dort erhielten wir $P_{kz} < 770,79$ kg und die EULERSche Formel ergibt $P_k = \pi^2 EJ/l^2 = \pi^2 2\,449\,440/100^2 = 2417, \dots$ kg.

10. Rückblick auf die Voraussetzungen. Ausblick auf die Weiterführung der Theorie

Die Gültigkeit des Einschliessungssatzes, der durch die Formel (11) ausgedrückt wurde, ist an zwei wichtige Umstände gebunden. Der eine ist die Definition der zulässigen Druckkraft, der andere die Formel (1). In der Definition der zulässigen Druckkraft wurde nämlich die zulässige Spannung für die innere Seite des Stabes vorgeschrieben. Bei einer Weiterführung der Theorie soll die zulässige Spannung (Zugspannung) auch für die äussere Seite des Stabes vorgeschrieben werden. Durch die Formel (1) wurden jene Fälle, wo die Funktion $\eta(x)$ verschiedene Vorzeichen besitzt, aus den Erörterungen schon von vornherein ausgeschlossen. Bei einer Weiterführung der Theorie soll daher die Voraussetzung (1) weggelassen werden.

SCHRIFTTUM

1. L. COLLATZ: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen (1949) S. 194.
2. Ibidem S. 126., 129., 150.
3. H. A. SCHWARZ: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. I, S. 252. — G. TEMPLE: Proc. London Math. Soc., Ser. 2, Vol. 29, (1929) S. 270. — P. FUNK: Mitt. des Hauptvereins deutscher Ingenieure in der ČSR (1931). — J. BARTA: Math. u. Naturw. Anzeiger d. Ungar. Akad. d. Wiss., Bd. 55 (1937). — L. COLLATZ: Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 19 (1939). — L. COLLATZ: Math. Zeitschr. Bd. 46 (1940). — K. MARGUERRE: Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs (1950), S. 175. — E. KAMKE: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden, Lösungen. Aufl. 4. Bd. 1 (1951), S. 231. — C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL: Technische Dynamik, Aufl. 2, (1953) S. 181.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Abhandlung enthält theoretische Erörterungen, deren Ziel der Beweis des durch die Formeln (6) bis (11) angegebenen Einschliessungsverfahrens ist. Die beiden Enden des Stabes sind frei drehbar, sein Querschnitt veränderlich oder konstant. Im Laufe der Erörterungen werden eine kleine anfängliche Krümmung des Stabes und eine kleine Exzentrizität der Kraft laut Formel (1) berücksichtigt. Das Einschliessungsverfahren wird an einem Zahlenbeispiel erläutert und mit einem Iterationsverfahren verknüpft. Der durch die Formel (11) ausgedrückte Einschliessungssatz ist verwandt mit jenem bekannten Einschliessungssatz, der durch die Formel (36) ausgedrückt wird und in der Literatur nach G. TEMPLE (und auch nach H. A. SCHWARZ) benannt ist.

К ВОПРОСУ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА ДОПУСКАЕМОГО УСИЛИЯ СЖАТИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ НА ОСНОВЕ ДОПУСКАЕМОГО НАПРЯЖЕНИЯ СЖАТИЯ МАТЕРИАЛА

Докт. техн. наук Я. БАРТА

РЕЗЮМЕ

В статье приведены теоретические рассуждения, которые преследуют цель доказательства метода оценочного расчета на основе формул (6), ..., (11). Стержень опирается на оба конца так, что может свободно поворачиваться. Предполагается, что ненагруженный стержень несколько искривлен, и нагрузка приложена с небольшой эксцентричностью, как это видно из формулы (1). Сечение стержня является переменным или по-

стоянным. Детали методики оценочного расчета иллюстрируются числовым примером; при этом используется также метод постепенного приближения. Теорема оценочного расчета, выраженная формулой (11) напоминает теорему Г. Темпла (Х. А. Шварц), известную из технической литературы и выраженную формулой (36).

ON THE CALCULATION OF THE PERMISSIBLE COMPRESSIVE LOAD ON THE ELASTIC BAR

J. BARTA
D. of Eng. Sc.

SUMMARY

This paper contains theoretical considerations, the purpose of which is to prove the limiting process expressed by formulas (6), . . . , (11). Both ends of the bar allow free rotation. Small initial curvature of the bar and small eccentricity of the loading force will be considered, according to formula (1). The cross section of the bar is variable or constant. A numerical example elucidates the details of the limiting process, and use is made of the method of successive approximation. The limiting theorem expressed by formula (11) is analogous to the limiting theorem described by formula (36) and known under the name of G. TEMPLE (and H. A. SCHWARZ, too).

CONTRIBUTION AU PROBLÈME DU CALCUL DE LA COMPRESSION ADMISE DES BARRES ÉLASTIQUES

J. BARTA
Docteur des sciences techniques

RÉSUMÉ

L'article contient des considérations théoriques dont le but est la justification du procédé de limitation, exprimé par les formules (6), . . . , (11). La barre est articulée à ses deux extrémités. Une faible courbure initiale de la barre et une petite excentricité de la charge, selon la formule (1), sont considérées. La section transversale de la barre est variable ou constante. Les détails du procédé de limitation sont illustrés par un exemple numérique, dans lequel la méthode des approximations successives est également employée. Le théorème de limitation exprimé par la formule (11) a beaucoup de ressemblance avec le théorème de limitation qui est exprimé par la formule (36), et porte le nom de G. TEMPLE (et aussi celui de H. A. SCHWARZ).



INFLUENCE OF SERIES CAPACITORS ON THE OPERATION OF SYNCHRONOUS MACHINES

(CONTINUED*)

SYNCHRONIZING AND DAMPING TORQUES

F. CSÁKI

INSTITUTE FOR THE THEORY OF THE OPERATION OF ELECTRICAL MACHINERY,
UNIVERSITY OF TECHNICAL SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received 10th November 1955]

In the previous article on the same subject [1] we gave the fundamental equations of the system formed by a synchronous machine and a series capacitor, in a more clear-cut and simplified form. We paid attention not only to the effect of the field circuit but also to that of the damping or amortisseur circuits, and, finally, with the aid of several simplifying assumptions, we tried to find a general solution for cases like short-circuit and self-excitation. In this second part of the article, we propose to examine the behaviour of the system consisting of a series capacitor and a synchronous machine when the rotor of the synchronous machine is performing angular oscillations of small amplitude.

The differential equation describing the behaviour of a synchronous machine in the case of rotor oscillations, is not a linear one. Just for this reason, the usual procedure observed in examining the question is to confine oneself to small angular variations and then to compute the torque-variations of the machine and, further, the so-called synchronizing and damping torque respectively, for a given harmonic angular rotor-oscillation.

This procedure was observed by PARK [2] whereas CRARY [3] outlined the possibility of a generalization for the case when there is a series capacitor in the armature circuit of the synchronous machine. The progress we propose to accomplish in this article is to actually compute the variation of torque as the operational function of the angular variation and present it in such a clear-cut form as to appear a direct generalization of the case free from series capacitor. Then in a few cases we shall determine the synchronizing and damping torque. In the course of our investigations, we will direct our attention mainly to two points.

1. What is the change caused by the presence of the series capacitor, in reference to the case $x_c = 0$?

2. What further change will result from the consideration given to amortisseur circuits if compared with a machine having a field-coil only.

* Part I. was published in Tom. XII, Fasc. 1—2, pp. 49—84, of this periodical.

8. The torque of a synchronous machine if connected to the network through a series capacitor

Before dealing with the points to be discussed, we shall derive the torque formula of the synchronous machine for the case when its stator is connected to the network through a series capacitor. Obviously, the instantaneous output of the system is as follows :

$$P = \frac{2}{3} (i_a u_a + i_b u_b + i_c u_c) . \quad (62)$$

By making use of the inverse transformation (7), (62) may be reduced to the following formula :

$$P = i_d u_d + i_q u_q + 2 i_0 u_0 \quad (63)$$

By substituting the value of the voltage components from the basic relation (12) into this one, expression (63) can be given the following form :

$$\begin{aligned} P = & (i_d p \psi_d + i_q p \psi_q + 2 i_0 p \psi_0) + \omega (i_q \psi_d - i_d \psi_q) + r (i_d^2 + i_q^2 + 2 i_0^2) + \\ & + \left(i_d \frac{P}{C(p^2 + \omega^2)} i_d + i_d \frac{\omega}{C(p^2 + \omega^2)} i_q + \right. \\ & \left. + i_q \frac{P}{C(p^2 + \omega^2)} i_q - i_d \frac{\omega}{C(p^2 + \omega^2)} i_q + 2 i_0 \frac{1}{Cp} i_0 \right) \quad (64) \end{aligned}$$

The foregoing expression may be interpreted as follows :

$$\begin{aligned} & (\text{Output of the system}) = \\ & = (\text{Variation of the magnetic energy in unit time}) + \\ & + (\text{Mechanical output}) + \\ & + (\text{Winding-loss of the stator circuit}) + \\ & + (\text{Variation of the electrostatic energy in unit time}). \end{aligned}$$

We obtain the torque by dividing mechanical output by the angular velocity. Accordingly,

$$T = \psi_d i_q - \psi_q i_d \quad (65)$$

In other words, the *expression* of the torque has exactly the same form as that with a stator circuit without a series capacitor. (See for example [4]). The value of the flux-linkages and that of the currents will, of course, be different.

9. Variation of the torque as the operational function of angular variation in the case of oscillation of small amplitude

Let us suppose that the synchronous machine is connected to an "infinite" network through a series capacitor and its rotor makes oscillations of small amplitude around a mean position. (The quantities referring to the mean position are marked by index 0. This will not make any confusion as there are no quantities of zero sequence figuring in the picture). If the rotor, in relation to the no-load position has δ_0 for its angle (within the synchronous rotating coordinate system) and if this changes by angle $\Delta\delta$:

$$\delta = \delta_0 + \Delta\delta \quad (66)$$

the angular velocity will likewise undergo a change

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega = \omega_0 + p\Delta\delta \quad (67)$$

and the same applies to the direct-axis and quadrature-axis components of the flux-linkage, voltage and current.

$$\begin{aligned} \psi_d &= \psi_{d0} + \Delta\psi_d & \psi_q &= \psi_{q0} + \Delta\psi_q \\ u_d &= u_{d0} + \Delta u_d & u_q &= u_{q0} + \Delta u_q \\ i_d &= i_{d0} + \Delta i_d & i_q &= i_{q0} + \Delta i_q \end{aligned} \quad (68)$$

As a consequence, the torque also undergoes a change:

$$T = T_0 + \Delta T \quad (69)$$

By considering (68) and (69) and neglecting the members of secondary order, the following is obtained from expression (65):

$$\Delta T = \psi_{d0} \Delta i_q + i_{q0} \Delta \psi_d - \psi_{q0} \Delta i_d - i_{d0} \Delta \psi_q \quad (70)$$

If during the process of oscillation, the excitation is supposed to be permanent, (18') and (19') will be valid. From these relations, by the formation of differences, we obtain:

$$\Delta \psi_d = l_d(p) \Delta i_d \quad (71)$$

$$\Delta \psi_q = l_q(p) \Delta i_q$$

Substituting expressions (71) in (70), we obtain :

$$\Delta T = [\psi_{do} - i_{do} l_q(p)] \Delta i_q - [\psi_{qo} - i_{qo} l_d(p)] \Delta i_d \quad (72)$$

In order to define the variation of the torque, we have to compute the value of Δi_d and Δi_q . By a repeated application of the rule on the formation of differences, the following is obtained from the re-arranged form of equation system (10) :

$$\begin{aligned} & (\Delta u_d - p \Delta \psi_d + \psi_{qo} p \Delta \delta + \omega_0 \Delta \psi_q - r \Delta i_d) - \\ & - \frac{\omega_0}{p} (\Delta u_q - p \Delta \psi_q - \psi_{do} p \Delta \delta - \omega_0 \Delta \psi_d - r \Delta i_q) - \\ & - \frac{p \Delta \delta}{p} (u_{qo} - \omega_0 \psi_{do} - r i_{qo}) - \frac{1}{Cp} \Delta i_d = 0 \end{aligned} \quad (73)$$

and

$$\begin{aligned} & (\Delta u_q - p \Delta \psi_q - \psi_{do} p \Delta \delta - \omega_0 \Delta \psi_d - r \Delta i_q) + \\ & + \frac{\omega_0}{p} (\Delta u_d - p \Delta \psi_d + \psi_{qo} p \Delta \delta + \omega_0 \Delta \psi_q - r \Delta i_d) + \\ & + \frac{p \Delta \delta}{p} (u_{do} + \omega_0 \psi_{qo} - r i_{do}) - \frac{1}{Cp} \Delta i_q = 0 \end{aligned}$$

From equation system (12) by substituting $p = 0$ and $\omega = \omega_0$, we obtain :

$$\begin{aligned} u_{do} + \omega_0 \psi_{qo} - r i_{do} &= \frac{1}{C\omega_0} i_{qo} \\ u_{qo} - \omega_0 \psi_{do} - r i_{qo} &= -\frac{1}{C\omega_0} i_{do} \end{aligned} \quad (74)$$

Now let us consider relations (74) and multiply the second of equations (73) by (ω_0/p) and add the product to the first. Next we will multiply the first of equations (73) by $(-\omega_0/p)$ and add the product to the second. The two equations thus obtained will be multiplied by expression $p^2/(p^2 + \omega_0^2)$. Finally, let us substitute the following expressions (75) obtainable by difference formation from formula (29).

$$\begin{aligned} \Delta u_d &= u \cos \delta_o \cdot \Delta \delta = u_{qo} \Delta \delta \\ \Delta u_q &= -u \sin \delta_o \cdot \Delta \delta = -u_{do} \Delta \delta \end{aligned} \quad (75)$$

Subsequent to arrangement, we obtain the following system of equations on current variations Δi_d and Δi_q :

$$\begin{aligned}
 & \left[p l_d(p) + r + \frac{P}{C(p^2 + \omega_0^2)} \right] \Delta i_d - \left[\omega_0 l_q(p) - \frac{\omega_0}{C(p^2 + \omega_0^2)} \right] \Delta i_q = \\
 & = \left[u_{q0} + \psi_{q0} p + \frac{1}{C\omega_0} \frac{p^2}{p^2 + \omega_0^2} i_{d0} + \frac{P}{C(p^2 + \omega_0^2)} i_{q0} \right] \Delta \delta \\
 \text{and} \quad & \left[\omega_0 l_d(p) - \frac{\omega_0}{C(p^2 + \omega_0^2)} \right] \Delta i_d + \left[p l_q(p) + r + \frac{P}{C(p^2 + \omega_0^2)} \right] \Delta i_q = \\
 & = - \left[u_{d0} + \psi_{d0} p + \frac{P}{C(p^2 + \omega_0^2)} i_{d0} - \frac{1}{C\omega_0} \frac{p^2}{p^2 + \omega_0^2} i_{q0} \right] \Delta \delta
 \end{aligned} \tag{76}$$

If by computation the current variations are determined from the system of equations (76) and resubstituted in (72), the torque variation as a function of the angular change is obtained :

$$\begin{aligned}
 & [\psi_{d0} - i_{d0} l_q(p)] \times \\
 & \times \left[\left(u_{d0} + \psi_{d0} p + \frac{1}{C} \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} i_{d0} - \frac{1}{C\omega_0} \frac{p^2}{p^2 + \omega_0^2} i_{q0} \right) \times \right. \\
 & \quad \times \left(p l_d(p) + r + \frac{1}{C} \frac{P}{p^2 + \omega_0^2} \right) + \\
 & \quad + \left(u_{q0} + \psi_{q0} p + \frac{1}{C\omega_0} \frac{p^2}{p^2 + \omega_0^2} i_{d0} + \frac{1}{C} \frac{P}{p^2 + \omega_0^2} i_{q0} \right) \times \\
 & \quad \left. \left(\omega_0 l_d(p) - \frac{1}{C} \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \right) \right] - \\
 & \quad - [\psi_{q0} - i_{q0} l_d(p)] \times \\
 & \times \left[\left(u_{d0} + \psi_{d0} p + \frac{1}{C} \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} i_{d0} - \frac{1}{C\omega_0} \frac{p^2}{p^2 + \omega_0^2} i_{q0} \right) \times \right. \\
 & \quad \times \left(\omega_0 l_q(p) - \frac{1}{C} \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \right) - \\
 & \quad - \left(u_{q0} + \psi_{q0} p + \frac{1}{C\omega_0} \frac{p^2}{p^2 + \omega_0^2} i_{d0} + \frac{1}{C} \frac{P}{p^2 + \omega_0^2} i_{q0} \right) \times \\
 & \quad \left. \times \left(p l_q(p) + r + \frac{1}{C} \frac{P}{p^2 + \omega_0^2} \right) \right] \\
 \Delta T = & - \frac{\text{above expression}}{\Delta \delta}
 \end{aligned} \tag{77}$$

Although the numerator of (77) admits of certain simplifications, it is advisable to preserve this form to have the symmetry of the expression come out clearly. It is to be noted that the denominator of (77) is $Z(p)$ as defined by formula (35).

By substituting $1/C = 0$ in (77), we obtain as follows :

$$\begin{aligned} & [\psi_{do} - i_{do} l_q(p)] \times \\ & \times [(u_{do} + \psi_{do} p)(p l_d(p) + r) + (u_{qo} + \psi_{qo} p) \omega_0 l_d(p)] - \\ & - [\psi_{qo} - i_{qo} l_d(p)] \times \\ & \times [(u_{do} + \psi_{do} p) \omega_0 l_q(p) - (u_{qo} + \psi_{qo} p)(p l_q(p) + r)] \\ \Delta T = & \frac{\quad}{(p l_d(p) + r)(p l_q(p) + r) + \omega_0 l_d(p) \omega_0 l_q(p)} \Delta \delta \end{aligned} \quad (78)$$

The expression in (78) was given by *Park* [2] with somewhat different symbols. Accordingly, relation (77) represents a generalization of (78) for the case where there is a series capacitor in the armature circuit. By a substitution of numerical values, the variation of torque can be figured out on any angular variation (of a small amplitude). Regrettably, formula (77) is an extremely complicated one.

A certain simplification can be ensured when computing the variation of torque of a synchronous condenser, equipped with a series capacitor and by neglecting the resistance r of the stator.

$$\begin{aligned} & [\psi_{do} - i_{do} l_q(p)] \times \\ & \times \left[\left(\psi_{do} p + \frac{1}{C} \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} i_{do} \right) \left(p l_d(p) + \frac{1}{C} \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right) + \right. \\ & \left. + \left(u_{qo} + \frac{1}{C \omega_0} \frac{p^2}{p^2 + \omega_0^2} i_{do} \right) \left(\omega_0 l_d(p) - \frac{1}{C} \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \right) \right] \\ \Delta T = & \frac{\quad}{\quad} \Delta \delta \quad (79) \\ & \left(p l_d(p) + \frac{1}{C} \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right) \left(p l_q(p) + \frac{1}{C} \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right) + \\ & + \left(\omega_0 l_d(p) - \frac{1}{C} \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \right) \left(\omega_0 l_q(p) - \frac{1}{C} \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \right) \end{aligned}$$

The case deserves attention since there has been an example of the installation of a series capacitor in conjunction with a synchronous condenser [5] and it might come into consideration in long-distance power transmission too [6].

On the other hand, a considerable simplification can be effected in (77), if we are interested in the variations of torque at no-load only.

$$\Delta T = -\frac{u^2}{\omega_0} \frac{\left(p l_d(p) + r + \frac{1}{C} \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right) + \left(\omega_0 l_d(p) - \frac{1}{C} \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \right)}{\left(p l_d(p) + r + \frac{1}{C} \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right) + \left(\omega_0 l_d(p) - \frac{1}{C} \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \right)} \Delta \delta \quad (80)$$

$$\begin{aligned} & \left(p l_d(p) + r + \frac{1}{C} \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right) \left(p l_q(p) + r + \frac{1}{C} \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right) + \\ & + \left(\omega_0 l_d(p) - \frac{1}{C} \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \right) \left(\omega_0 l_q(p) - \frac{1}{C} \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \right) \end{aligned}$$

The reason why this case deserves attention is that synchronous machines tend to oscillate especially in the proximity of no-load. This is borne out by operational experience.

Of course, by substitution of $1/C = 0$, the behaviour of the synchronous machine itself is described by the relations (79) or (80) when there is no series capacitor in the stator circuit.

The relations between torque variation (77) and angular change (79) may be given in this form:

$$\Delta T = -f(p) \Delta \delta \quad (81)$$

Function $f(p)$ will be investigated further on.

10. Method of determining the synchronizing and damping torques

It has been pointed out by PARK [2] that in the case of rotor oscillations of small amplitude, the function $f(p)$ may be used for determining the synchronizing and damping torque, respectively. Variation of torque depends on the angular change itself, on the one hand, and, on the other hand, on the differen-

tial quotient of the angular variation in time, i. e., on the angular velocity change.

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial \delta} \Delta \delta + \frac{\partial T}{\partial \omega} \Delta \omega \quad (82)$$

By taking a comparison from the field of mechanics, $\partial T / \partial \delta$ may stand for the spring constant and $\partial T / \partial \omega$ for that of damping. Their definition is as follows :

$$\frac{\partial T}{\partial \delta} = -T_s \quad \text{and} \quad \frac{\partial T}{\partial \omega} = -T_d \quad (83)$$

where T_s means the so-called synchronizing torque and T_d signifies the so-called damping torque. (Literature has adopted these expressions although, strictly speaking, they are not of the nature of a torque from the point of view of physics as it may be seen from (83). The first has the character of a torque /angle and the second that of a torque/angular-velocity. For this reason, we will often use the expressions $\omega_0 T_d$ and $\omega_0 T_d$ will likewise be called damping torque). In (83) it is necessary to introduce a negative sign, as the torque variation is in opposite direction to the angular variation and the angular velocity change.

In giving attention to formulae (83) and (67), (82) may be given the following form :

$$\Delta T = -T_s \Delta \delta - T_d \Delta \omega = -T_s \Delta \delta - T_d p \Delta \delta \quad (84)$$

If we confine ourselves to oscillations of small amplitude, and if instead of the real form of the angular variation

$$\Delta \delta = (\Delta \delta)_m \sin \nu t \quad (85a)$$

we, as it is usual, adopt the complex form

$$\overline{\Delta \delta} = (\Delta \delta)_m e^{j\nu t} \quad (85b)$$

then (84) may be described as follows :

$$\overline{\Delta T} = -T_s \overline{\Delta \delta} - T_d p \overline{\Delta \delta} = -T_s \overline{\Delta \delta} - j\nu T_d \overline{\Delta \delta} \quad (86)$$

In giving consideration to form (85b) and by confining ourselves to the "steady-state" component of torque variation, (81) may be given this form :

$$\overline{\Delta T} = -f(j\nu) \overline{\Delta \delta} \quad (87)$$

The combination of (86) and (87) produces the following form.

$$T_s = \operatorname{Re} f(j\nu) \quad T_d = \operatorname{Im} f(j\nu) \quad (88)$$

For the determination of the synchronizing and damping torque, we have to employ $p = j\nu$ as substitute in $f(p)$ and separate the real and imaginary parts of $f(j\nu)$.

The procedure outlined before has been known for quite a long time [2], but has seldom been adopted in literature. The explanation is that considerable difficulties are met in computing $\operatorname{Re} f(j\nu)$ and $\operatorname{Im} f(j\nu)$. In one respect, one has to express the components i_{do} , i_{qo} , ψ_{qo} , ψ_{do} in the nominator $f(p)$ with the aid of voltage components $u_{do} = u \sin \delta_0$ and $u_{qo} = u \cos \delta_0$. (This may be accomplished through formulae $\omega_0 \psi_{do} = u_p + x_d i_{do}$ and $\omega_0 \psi_{qo} = x_q i_{qo}$ in respect of the flux-linkages and by expression (28) in respect of the currents). On the other hand, $l_d(j\nu)$ and $l_q(j\nu)$ are rather complicated complex quantities. Finally, the separation of the real and imaginary parts of $f(p)$ is extremely troublesome. The difficulties assume a still greater proportion in the present case where we have not the comparatively simpler expression (78) to start from but on account of the presence of the series capacitor we have to resort to the much more complicated expression (77).

Of course, in possession of the numerical values of the machine parameters and the capacitive reactance, the procedure described before lends itself much more easily to application with formulae (77), (79) and (80). For this reason, a description of these formulae may be considered as a useful contribution to literature where — to the author's knowledge — it has not been made available until now.

11. Synchronizing and damping torques with neglect of the influence of stator resistance and amortisseur coils

In order to make the difficulties outlined before more manifest, the synchronizing and damping torque is computed in a general form for a comparatively simple case, neglecting at the same time the influence of stator resistance and amortisseur coils.

With the latter assumption, $T_{do} \neq 0$ but $T_{do}'' = 0$ and $T_{qo}'' = 0$, etc., and so from expressions (21) and (24), respectively,

$$j\omega_0 l_q(j\nu) = j x_q$$

and

$$j\omega_0 l_d(j\nu) = R_d + j X_d$$

(89)

$$\text{where } R_d = \frac{\nu T'_{do} (x_d - x'_d)}{(\nu T'_{do})^2 + 1} \quad \text{and} \quad X_d = \frac{(\nu T'_{do})^2 x'_d + x_d}{(\nu T'_{do})^2 + 1}. \quad (89a)$$

Let us further introduce the ratio angular velocity of oscillation and of synchronous angular velocity :

$$s = \frac{\nu}{\omega_0} \quad (90)$$

and make use of the following expression :

$$X_c = \frac{x_c}{1 - s^2} \quad \text{where} \quad x_c = \frac{1}{C \omega_0} \quad (91)$$

The foregoing having been considered, the denominator of $f(j\nu)$ can be formulated as follows :

$$Z(j\nu) = Z(j s \omega_0) = X - j R \quad (92)$$

where

$$R = R_d (x_q - X_c) - s^2 R_d (x_q + X_c)$$

and

$$X = (X_d - X_c) (x_q - X_c) - s^2 (X_d + X_c) (x_q + X_c)$$

These formulae taken into account and the currents and flux-linkages expressed in terms of voltage components and, further, if the real and imaginary parts of $f(j\nu)$ are separated, the final expressions arrived at are as follows :

$$\begin{aligned} T_s = & \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{R^2 + X^2} \times \\ & \times \left\{ \frac{s^2 (x_q - x_c)}{(x_d - x_c)^2} [X [X_d (x_c + X_c) + X_c (x_c + X_d)] + R R_d (x_c + 2 X_c)] u_p^2 + \right. \\ & + \left[\frac{s^2 (x_d - x_q)}{(x_d - x_c)^2} [X [X_d (x_c + X_c) + X_c (x_c + X_d)] + R R_d (x_c + 2 X_c)] + \right. \\ & + \frac{x_q - x_c}{(x_d - x_c)^2} [X [X_d (x_d - X_c) - s^2 X_d (x_d + X_c) - X_c (x_d - x_c) - s^2 x_d X_c] + \\ & \left. \left. + R R_d [(x_d - X_c) - s^2 (x_d + X_c)] \right] \right] u_p u \cos \delta_0 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [X(X_d - x_q) + RR_d] \frac{X_c(x_q - X_c) - x_q(x_q - X_c) + s^2(x_q + 2X_c)x_q}{(x_q - x_c)^2} u^2 \sin^2 \delta_0 + \\
& + \frac{x_d - x_q}{(x_d - x_c)^2} [X[X_d(x_d - X_c) - s^2 X_d(x_d + X_c) - X_c(x_d - X_c) - s^2 x_d X_c] + \\
& + RR_d [(x_d - X_c) - s^2(x_d + X_c)]] u^2 \cos^2 \delta_0 \} \quad (93)
\end{aligned}$$

The damping torque can be computed from the following relation :

$$\begin{aligned}
vT_d &= s\omega_0 T_d = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{R^2 + X^2} \times \\
& \times \left\{ \frac{s^2(x_q - x_c)}{(x_d - x_c)^2} [R[X_d(x_c + X_c) + X_c(x_c + X_d)] - XR_d(x_c + 2X_c)] u_p^2 + \right. \\
& + \left[\frac{s^2(x_d - x_q)}{(x_d - x_c)^2} [R[X_d(x_c + X_c) + X_c(x_c + X_d)] - XR_d(x_c + 2X_c)] + \right. \\
& + \frac{x_q - x_c}{(x_d - x_c)} [R[X_d(x_d - X_c) - s^2 X_d(x_d + X_c) - X_c(x_d - x_c) - s^2 x_d X_c] - \\
& - XR_d[(x_d - X_c) - s^2(x_d + X_c)]] \Big| u_p u \cos \delta_0 + \\
& + [R(X_d - x_q) - XR_d] \frac{X_c(x_q - x_c) - x_q(x_q - X_c) + s^2(x_q + 2X_c)x_q}{(x_q - x_c)^2} u^2 \sin^2 \delta_0 + \\
& + \frac{x_d - x_q}{(x_d - x_c)^2} [R[X_d(x_d - X_c) - s^2 X_d(x_d + X_c) - X_c(x_d - x_c) - s^2 x_d X_c] - \\
& - XR_d[(x_d - X_c) - s^2(x_d + X_c)]] u^2 \cos^2 \delta_0 \} \quad (94)
\end{aligned}$$

By substituting $x_c = 0$, $X_c = 0$ in the expressions (93) and (94) as above, the synchronizing and damping torques of the synchronous machine are obtained for the case when there is no series capacitor in the armature circuit. After a few algebraic transformations we get as follows :

$$\begin{aligned}
T_s &= \frac{u_p u}{\omega_0 x_d} \cos \delta_0 + \frac{u^2}{\omega_0} \left(\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right) \cos^2 \delta_0 + \\
& + \frac{u^2}{\omega_0} \left(\frac{X_d}{R_d^2 + X_d^2} - \frac{1}{x_q} \right) \sin^2 \delta_0
\end{aligned} \quad (95)$$

and

$$vT_d = s\omega_0 T_d = \frac{u^2}{\omega_0} \frac{R_d}{R_d^2 + X_d^2} \sin^2 \delta_0$$

With due attention to the expressions R_d and X_d (89a), (95) may be given a form similar to equations (21), (22) of reference [7].

$$T_s = \frac{u_p u}{\omega_0 x_d} \cos \delta_0 + \frac{u^2}{\omega_0} \left(\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right) \cos 2\delta_0 +$$

$$+ \frac{u^2}{\omega_0} \left(\frac{1}{x'_d} - \frac{1}{x_d} \right) \frac{1}{1 + \frac{1}{(\nu T'_d)^2}} \sin^2 \delta_0$$

(96)

and

$$\nu T_d = \frac{u^2}{\omega_0} \left(\frac{1}{x'_d} - \frac{1}{x_d} \right) \frac{1}{(\nu T'_d) + \frac{1}{(\nu T'_d)}} \sin^2 \delta_0$$

Taken the case when there is no series capacitor, the relations (96) clearly show the influence of the initial loading angle δ_0 and the angular velocity of oscillation ν on the synchronizing and damping torques. (It can, for example, be established that if we have angular velocity of oscillation ν other than zero, T_s cannot be arrived at as the derivative of the power taken according to δ_0 but an accessory member which is dependent on angular velocity ν , also presents itself.) Expressions (93) and (94) are generalizations of (95) and (96) respectively, for the case when there is a series capacitor in the armature circuit of the synchronous machine. Unfortunately, the form of expressions (93) and (94) is an extremely complicated one and it is difficult to draw an immediate conclusion on the influence of the series capacitor in the case of various loading angles and oscillation frequencies. Expressions (93) and (94) if compared with expressions (95) and (96) respectively, clearly point to the difficulties which make themselves felt when computing the synchronizing and damping torques in the case of a series capacitor. No sight should be lost of the fact that — taken comparatively — it was the simplest case examined and we neglected the stator resistance and the amortisseur circuits. Using no simplification, the difficulties will be still greater. For this reason, it will be advisable to ascertain what the synchronizing and damping torques will amount to, in the case of a few specially selected oscillation angular velocities ($\nu \approx 0, \omega_0, \infty$) and under exceptional operational conditions (no load). It should be pointed out that for the inertia of the rotor, significance can be attributed virtually to the case of slow oscillations only. The case of synchronous and very rapid oscillation is dealt with only for the reason that it likewise can be computed easily and that certain conclusions may be drawn on how far the synchronizing and damping torques depend on oscillation frequencies.

12. Synchronizing and damping torques in some specific cases

Leaving away lengthy details of computations, it is intended to state final results only on the synchronizing and damping torques. We accept the simplifying suppositions made in the preceding paragraph on any initial loading condition ($\delta_0 \neq 0$) but when dealing with no-load ($\delta_0 = 0$) we will take the stator resistance and the influence of the amortisseur coils into account too.

a) The stator resistance and the influence of the amortisseurs will be neglected. In the case of slow rotor-oscillation ($\nu \approx 0$) the synchronizing torque is from (93) as follows :

$$T_s = \frac{u_p u}{\omega_0} \frac{1}{x_d - x_c} \cos \delta_0 + \frac{u^2}{\omega_0} \left(\frac{1}{x_q - x_c} - \frac{1}{x_d - x_c} \right) \cos 2\delta_0 \quad (97)$$

It should be noted that this formula may also be obtained from the derivative according to δ_0 of formula (31*) when divided by ω_0 .

As to damping torque from (94), we have the following :

$$\omega_0 T_0 = \frac{u^2}{\omega_0} \frac{x_d - x'_d}{(x_d - x_c)^2} \omega_0 T'_{d0} \sin^2 \delta_0 \quad (98)$$

In substituting $\nu = 0$ in expression (96) and comparing the products so obtained with expressions (97) and (98), we shall find that in the case of slow rotor oscillation the influence of the series capacitor is revealed in that the compensated reactances $x_d - x_c$, $x_q - x_c$ prevail.

In the case of very rapid oscillations ($\nu \approx \infty$), the synchronizing torque from (93) is as follows :

$$\begin{aligned} T_s = & -\frac{u_p^2}{\omega_0} \frac{x_q - x_c}{(x_d - x_c)^2} \frac{x_c}{x_q} + \frac{u_p u}{\omega_0} \left[\frac{x_q - x_c}{(x_d - x_c)^2} \cdot \frac{x_d}{x_q} - \right. \\ & \left. - \frac{x_d - x_q}{(x_d - x_c)^2} \frac{x_c}{x_q} \right] \cos \delta_0 - \frac{u^2}{\omega_0} \frac{x'_d - x_q}{(x_q - x_c)^2} \cdot \frac{x_q}{x'_d} \sin^2 \delta_0 + \\ & + \frac{u^2}{\omega_0} \frac{x_d - x_q}{(x_d - x_c)^2} \frac{x_d}{x_q} \cos^2 \delta_0 \end{aligned} \quad (99)$$

Whereas the damping torque from (94) is :

$$\omega_0 T_d = 0 \quad (100)$$

In the case of no load, the foregoing formulae are considerably simpler.

If rotor oscillation is slow :

$$T_s = \frac{u^2}{\omega_0} \frac{1}{x_q - x_c} \quad (97a)$$

$$\omega_0 T_d = 0 \quad (98a)$$

If the rotor oscillation is very rapid :

$$T_s = \frac{u}{\omega_0 x_q} \quad (99a)$$

$$\omega_0 T_d = 0 \quad (100a)$$

It is noteworthy that (99a) contains reactance x_q only and not the compensated one $x_q - x_c$.

We will further supply the synchronizing and damping torques for synchronous angular velocity oscillation, limited, however, to no load only :

$$T_s = \frac{u^2}{\omega_0} \frac{X_d + x_q - \frac{1}{2} x_c}{\left(X_d + x_q - \frac{x_c}{2} \right)^2 + R_d^2} \quad (101a)$$

and

$$\omega_0 T_d = \frac{u^2}{\omega_0} \frac{R_d}{\left(X_d + x_q - \frac{x_c}{2} \right)^2 + R_d^2} \quad (102a)$$

We should notice that $x_c/2$ figures in the formulae. Expressions of X_d and R_d are given by (89a), following the substitution by $\nu = \omega_0$. As a good approximation :

$$X_d \approx x'_d \quad \text{and} \quad R_d \approx \frac{x_d - x'_d}{\omega_0 T'_{do}}$$

b) Taken into account the influence of the amortisseurs and the resistance of the stator, the formulae grow complicated to a considerable extent. We will, therefore, examine the simplest case only, that of no load. We can then complete our computations on the basis of formula (80).

As regards slow ($\nu \approx 0$) oscillations and as a generalization of (97a), the synchronizing torque is as follows :

$$T_s = \frac{u^2}{\omega_0} \frac{x_d - x_c}{r^2 + (x_d - x_c)(x_q - x_c)} \quad (97b)$$

whereas as a generalization of (98a), the damping torque is as follows :

$$\omega_0 T_d = \frac{u^2}{\omega_0} \frac{r^3 - r^2 [\omega_0 T'_{do} (x_d - x'_d) + (\omega_0 T'_0 - \omega_0 T') x_d] - r (x_d - x_c) (x_d + 3 x_c) + (x_d - x_c)^2 \omega_0 T''_{qo} (x_q - x''_q)}{[r^2 + (x_d - x_c) (x_q - x_c)]^2} \quad (98b)$$

It is to be noted that the damping torque is not zero, due to the presence of the quadrature amortisseur circuit, not even in the case of $r = 0$:

$$\omega_0 T_d = \frac{u^2}{\omega_0} \frac{\omega_0 T''_{qo} (x_q - x''_q)}{(x_q - x_c)} \quad (99c)$$

Another point to be mentioned is that from the numerator of (99b) it can be established under what condition the damping torque becomes negative, that is to say under what condition prevails the possibility of self-exciting oscillations. The following inequality shows the lowest approximate value of resistance at which this condition sets in :

$$r > (x_d - x_c) \sqrt{\frac{\omega_0 T''_{qo} (x_q - x''_q)}{\omega_0 T'_{do} (x_d - x'_d)}} \quad (103)$$

In the case of very rapid rotor oscillations, as a generalization of (99a), the synchronizing torque is as follows :

$$T_s = \frac{u}{\omega_0 x''_q} \quad (99b)$$

It is worth noticing that x''_q plays its part whether there is a series capacitor and stator resistance or not. The physical explanation for this is that in face of high frequency currents the capacitive reactance is nearly zero. On the other hand, inductive reactance predominates at high frequencies compared with resistance.

In case of rapid rotor oscillation, the damping torque, in analogy to (100a) is nearly zero.

$$\omega_0 T_d = 0$$

As before, the explanation we have is grounded on that with high frequency currents the amortisseur circuit behaves almost as mere inductivity.

Supposing we have to deal with oscillations of synchronous angular velocity, as a generalization of (101a) and (102a), the synchronizing and damping

torques are as follows :

$$T_s = \frac{u^2}{\omega_0} \frac{X_d + X_q - \frac{x_c}{2}}{\left(X_d + X_q - \frac{x_c}{2}\right)^2 (R_d + R_q + r)^2} \quad (101b)$$

and

$$\omega_0 T_d = \frac{u^2}{\omega_0} \frac{R_d + R_q + r}{\left(X_d + X_q - \frac{x_c}{2}\right)^2 + (R_d + R_q + r)^2} \quad (102b)$$

In these formulae now approximately :

$$X_q \approx x_q'' \quad R_q \approx \frac{x_q - x_{q0}''}{\omega_0 T_{q'}}'$$

and

$$X_d \approx x_d'' \quad R_d \approx \frac{T_{d0}' x_d' + T' x_d - x_d'' (T_{d0}' + T_o')}{\omega_0 T_{d0}' T_{d0}''} \approx \frac{x_d' - x_d''}{\omega_0 T_{d0}''}$$

The formulae (101b) and (102b) as far as numerical value is concerned differ but little from formulae (99b) and (100b). The explanation is that the oscillation of ω_0 angular velocity can be regarded as very rapid already. From the formulae (101b) and (102b) it may be seen that for the purpose of having the synchronizing and damping torques defined, the competent impedance is the arithmetical mean of the direct-axis and quadrature-axis impedances as shown by the system consisting of series capacitor and synchronous machine toward the double-frequency stator currents .

$$\frac{1}{2} \left[\left(2j\omega_0 l_d (j\omega_0) + r + \frac{1}{2j\omega_0 C} \right) + \left(2j\omega_0 l_q (j\omega_0) + r + \frac{1}{2j\omega_0 C} \right) \right]$$

The case oscillation of synchronous angular velocity reveals certain analogy with that case of a synchronous operation where the machine makes just half the r. p. m.

*

If there is a series capacitor in the armature circuit of the synchronous machine and if the rotor of the latter makes oscillations, the processes taking place are extremely complicated. In the case of oscillations of small amplitude only, we tried to approach these processes by a number of assumptions simpli-

fying them. It is regrettable that the expressions of the synchronizing and damping torques give a clearcut result in the most simple cases only.

In a general way, however, there may be concurrence on the following points: As in the case of oscillation of angular velocity ν , there are currents of circular frequency $\omega_0 - \nu$ and $\omega_0 + \nu$ flowing through the stator; the capacitive reactance of the series capacitor is $1/(\omega_0 C) = x_c$ when the oscillation is slow ($\nu \approx 0$), whereas when oscillation is very rapid ($\nu \approx \infty$) the capacitive reactance should be zero and in the case of oscillation of synchronous angular velocity ($\nu = \omega_0$), the stator would have current of double circular frequency. (Direct current cannot flow!) The capacitive reactance should therefore be

$1/2(\omega_0 C) = \frac{1}{2} x_c$. When oscillation is slow, it is the synchronous reactances and

if oscillations are very rapid, it is the sub-transient reactances that prevail. As a consequence of this, in the case of slow oscillations, $x_d - x_c$ and $x_q - x_c$ reactance differences play a part; in the case of very rapid oscillations, it is reactance x_d'' and x_q'' (without x_c) that prevails, while in the case of synchronous circular frequency oscillation, the reactance differences are approximately

$2x_d'' - \frac{1}{2}x_c$ and $2x_q'' - \frac{1}{2}x_c$. If the rotor of the synchronous machine has

no amortisseurs then the place of x_d'' is taken by x_d' and the place of x_q'' is taken by x_q . The above statements can be best controlled on the basis of the formulae relating to no-load. When the synchronous machine is loaded, $x_d - x_c$ and $x_q - x_c$ play their parts even in such cases of rapid oscillation (See (99) as an example) since currents i_{d0} and i_{q0} depend on these reactances.

In case of slow rotor oscillations which is of the highest importance in daily practice, the synchronizing torque can be computed as when there was no series capacitor. Its influence may afterwards be considered by taking the compensated reactances $x_d - x_c$ and $x_q - x_c$ into account instead of the synchronous reactances. Although strictly taken this holds good in respect of the oscillation of angular velocity $\nu = 0$ only, it can be regarded as a fairly good approximation if oscillations are slow. This method of approximate computation may be made use of also in determining the damping torque, particularly if we neglect the resistance of the stator and the amortisseurs. (Formula (98)).

REFERENCES

1. F. CSÁKI: Influence of Series Capacitors on the Operation of Synchronous Machines. *Acta Technica* XII. 1—2, p. 49.
2. R. H. PARK: Two-Reaction Theory of Synchronous Machines. I—II AIEE Transactions 1929, p. 716; AIEE Transactions 1933, p. 352.
3. S. B. CRARY: Two-Reaction Theory of Synchronous Machines. *Electrical Engineering Transactions* 1937, p. 27.
4. C. CONCORDIA: Synchronous Machines. Theory and Performance. John Wiley — Chapman — Hall, 1951.

5. R. L. WIETZKE—E. L. MICHELSON: Technical Problems Associated with the Application of a Capacitor in Series with a Synchronous Condenser. AIEE. Transactions p. 519.
6. Д. И. Азарьев, Б. А. Веников, Н. Н. Схолов: Схемы дальних электропередач большой пропускной способности (Circuit diagrams of long distance power transmission of great capacity.) Электричество 1953. No. 12.
7. W. WAGNER: Beitrag zur Berechnung der dynamischen Stabilität von Synchronmaschinen. (Observations on the computation of the dynamic stability of synchronous machines.) Bulletin SEV. 1937. S. 41.

SUMMARY

In the foregoing — as a continuation of a previous article — we have made the behaviour of the system formed by the series capacitor and synchronous machine the subject of our examination for the case where the rotor of the synchronous machine makes an angular oscillation of small amplitude, around a mean position. We have determined the torque variation as the operational function $f(p)$ of angular variation in a form which would seem to be an immediate generalization of the case without capacitor. Function $f(p)$ has been presented in respect of a few simple cases (like the synchronous condenser, no-load condition) with the series capacitor in the armature circuit.

The real part of function $f(j\nu)$ supplies the synchronizing torque whereas its imaginary part the damping torque. Complete computation has been made in respect of the simplest case only by neglecting the stator resistance and the influence of the amortisseur circuits. Even in this simple case when there is a series capacitor present, the synchronizing torque T_s and the damping torque T_d as the function of the angular velocity of oscillation ν and initial loading angle δ_0 are of an extremely complicated form. For this reason, we have computed the value of T_s and T_d for a few special cases such as slow oscillation ($\nu \approx 0$), very rapid oscillation ($\nu \approx \infty$) and synchronous oscillation ($\nu = \omega$).

It ought to be added that only the first case has a practical significance. All the second and third cases permit it to draw some inference on the dependence of oscillation frequencies on the torques examined. Expressions T_s and T_d lose much of their complicated character, in case of no load. To be able to make a comparison, we have determined the value of T_s and T_d for the case of no load in considering the resistance of the stator and the influence of the amortisseurs. Finally, the expressions obtained have been supported by physical explanations.

ВЛИЯНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННОГО КОНДЕНСАТОРА НА РЕЖИМ РАБОТЫ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ

(Продолжение)

Синхронизирующие и демпфирующие моменты

Ф. ЧАКИ

РЕЗЮМЕ

В данной части (в качестве продолжения предыдущей статьи) исследуется режим работы системы, состоящей из последовательно соединенного конденсатора и синхронной машины, в случае, когда ротор производит угловое колебаний небольшой амплитуды вокруг промежуточного положения. Изменение момента определено в качестве операторной функции $f(p)$ изменения угла в такой форме, которая кажется непосредственным обобщением случая без конденсатора. Для некоторых простых случаев (синхронный компенсатор, холостой ход машины) также приводится функция $f(p)$ для случая с последовательно соединенным конденсатором.

Вещественная часть функции $f(j\nu)$ дает синхронизирующий момент, а мнимая часть — демпфирующий момент. Полный расчет выполнен только для простейшего случая (при пренебрежении влиянием сопротивления статора и демпфирующих цепей). Даже и в этом простейшем случае, когда имеется последовательно соединенный конденсатор, синхронизирующий момент T_s и демпфирующий момент T_d в качестве функции угловой скорости колебаний ν и угла начальной нагрузки δ_0 имеют исключительно

сложную форму. Именно поэтому для некоторых специальных случаев как, например, медленное колебание ($\nu = 0$), очень быстрое колебание ($\nu = \infty$) и синхронное колебание ($\nu = \omega$) определены значения величин T_s и T_d .

Следует отметить, что практическое значение имеет лишь первый случай, а в связи со вторым и третьим случаем можно сделать лишь определенное заключение в отношении зависимости исследованных моментов от частоты колебаний. В случае холостого хода выражение величин T_s и T_d значительно упрощается. В интересах сравнения определены значения величин T_s и T_d для случая холостого хода, учитывая при этом влияние активного сопротивления статора и демпфирующей обмотки. Полученные выражения подтверждены, наконец, физическим толкованием.

L'INFLUENCE DE CONDENSATEURS SÉRIE SUR LE FONCTIONNEMENT DES MACHINES SYNCHRONES

(Suite)

Moments synchronisant et amortisseur

F. CSÁKI

RÉSUMÉ

En suite d'un article antérieur l'auteur étudie dans cette étude le fonctionnement d'un système formé par un condensateur série et une machine synchrone pour le cas où l'oscillation angulaire du rotor de la machine synchrone a une petite amplitude autour d'une position médiane. On a déterminé le changement de moments comme fonction opératoire $f(p)$ du changement angulaire dans une forme qui paraît une généralisation immédiate du cas sans condensateur. Pour quelques cas plus simples (compensateur synchrone, machine marchant à vide) la fonction $f(p)$ est présentée pour le condensateur série.

La partie réelle de la fonction $f(j\nu)$ donne le moment synchronisant; sa partie imaginaire représente le moment amortisseur. Le calcul complet a été exécuté seulement pour le cas le plus simple (avec négligence de la résistance du stator et de l'effet des circuits amortisseurs). Même dans ce cas simple, si un condensateur série est présent, le moment synchronisant T_s et le moment amortisseur T_d comme fonctions de la vitesse angulaire oscillatoire ν et de l'angle de charge initiale δ_0 ont une forme très compliquée. Voilà pourquoi les valeurs de T_s et de T_d ont été calculées pour quelques cas spéciaux aussi, comme l'oscillation lente ($\nu = 0$), l'oscillation très rapide ($\nu = \infty$) et l'oscillation synchrone ($\nu = \omega$).

Il faut remarquer que seul le premier cas est d'importance pratique; du deuxième et troisième cas on ne peut tirer que quelques conclusions concernant la dépendance des moments examinés de la fréquence oscillatoire. En marche à vide l'expression de T_s et de T_d devient bien simple. Pour faire une comparaison on a déterminé les valeurs de T_s et de T_d pour marche à vide, en tenant compte de la résistance ohmique du stator et de l'effet des bobines amortisseurs. Enfin les expressions obtenues sont soutenues par une explication physique.

DER EINFLUSS DES REIHENKONDENSATORS AUF DEN BETRIEB VON SYNCHRONMASCHINEN

(Fortsetzung)

Synchronisierende und Dämpfungsmomente

F. CSÁKI

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Teile wird als Fortsetzung eines früheren Aufsatzes das Verhalten eines aus einem Reihenkondensator und einer Synchronmaschine bestehenden Systems untersucht, wenn der Läufer der Synchronmaschine eine Schwingung von geringer Amplitude um eine Mittellage ausführt. Es wird die Momentenveränderung als Operatorenfunktion $f(p)$ der Winkelveränderung in einer Form bestimmt, die als unmittelbare Verallgemeinerung des Falles ohne Kondensator erscheint. Für einige einfachere Fälle der Anordnung mit Serienkondensator (Synchronphasenschieber, leerlaufende Maschine) wird die Funktion $f(p)$ ebenfalls angegeben.

Der reelle Teil der Funktion $f(j\nu)$ liefert das Synchronisiermoment, ihr imaginärer Teil das Dämpfungsmoment. Die vollständige Berechnung wird nur für den einfachsten Fall (bei Vernachlässigung des Ständerwiderstandes und der Wirkung der Dämpferstromkreise) durchgeführt. Sogar in diesem einfachen Falle, wo ein Serienkondensator vorhanden ist, hat das Synchronisiermoment T_s und das Dämpfungsmoment T_d als Funktion der Schwingungswinkelgeschwindigkeit ν und des Anfangsbelastungswinkels δ_0 eine sehr verwickelte Form. Deshalb werden die Werte von T_s und T_d für einige Sonderfälle, u. zw. langsame Schwingung ($\nu = 0$) sehr schnelle Schwingung ($\nu = \infty$) und Synchronschwingung ($\nu = \omega_0$) berechnet.

Es ist zu bemerken, dass nur der erste Fall von praktischer Bedeutung ist; aus dem zweiten und dem dritten Falle können höchstens einige Folgerungen auf die Abhängigkeit der untersuchten Momente von der Schwingungszahl gezogen werden. Bei Leerlauf vereinfachen sich die Ausdrücke von T_s und T_d bedeutend. Vergleichshalber werden die Werte von T_s und T_d für den Fall von Leerlauf bestimmt, wobei der Ohmsche Ständerwiderstand und der Einfluss der Dämpferwicklungen in Betracht gezogen werden. Schliesslich wird für die erhaltenen Gleichungen eine physikalische Erklärung gegeben.

INDEX

- A. Zajta*: Untersuchungen über die Verallgemeinerung der Newton—Raphsonschen Wurzelapproximation — *A. Зайта*: Исследования в области обобщения Ньютона—Рафсоновского метода приближенного определения корней — Investigation on the Generalization of the Newton—Raphson Root Approximation Method — Recherches sur la généralisation de la méthode de Newton et Raphson de l'approximation des racines 233
- V. Lovass-Nagy*: On an Application of Egerváry's Hypermatrix-algorithm to the Mathematical Investigation of Polyphase Transformers — *В. Ловаши-Надь*: Применение гиперматричного алгоритма Эгervари для математического анализа многофазных трансформаторов — Application de l'hypermatrice-algorithme de Egerváry à l'étude mathématique de transformateurs polyphasés — Anwendung des Egerváry'schen Hypermatrix-Algorithmus zur mathematischen Untersuchung von Mehrphasentransformatoren 261
- A. Csernátöny-Hoffer and G. Karády*: Abnormal Overvoltages in Regulating Auto-transformers — *А. Чернатони-Хоффер и Г. Каради*: Специальные перенапряжения, возникающие в регулировочных автотрансформаторах — Sur-tensions spéciales dans les auto-transformateurs de réglage — Besondere Über-spannungen in „Regel-Spartransformatoren” 287
- G. Merényi*: The Effect of Reduced Flat Speed on Cotton Carding — *Г. Мереньи*: Влияние уменьшенной скорости шляпки на чесание хлопчатки — Influence d'une vitesse réduite des chapeaux sur le cardage du coton — Der Einfluss der verringerten Deckelgeschwindigkeit auf das Krempeln von Baumwolle 311
- J. Eisler*: The Influence of Boundary Surface Discharges on the Dimensioning of Insulation — *Я. Эйслер*: Роль разрядов на граничных поверхностях при расчете изоляторов — Le rôle des décharges aux surfaces limites dans le choix des dimensions des isolations — Die Rolle der Entladungen an Grenzflächen in der Bemessung von Isolationen 335
- P. Réti*: Determination of the Yield Point of Steels by Magnetization — *П. Рети*: Определение предела текучести сталей магнитным методом — Détermination de la limite de fluage des aciers par l'étude des propriétés magnétiques — Bestimmung der Fließgrenze von Stählen auf magnetischem Wege 347
- T. Millner, A. J. Hegedüs und M. Dvorsky*: Neue Methode zur Bestimmung der Verunreinigungen, insbesondere des Sauerstoff- und Kohlenstoffgehaltes von verschiedenen Titanproben — *Т. Милльнер, А. Й. Хегедюш и М. Дворски*: Новый метод определения примесей металлического титана, и в особенности содержания кислорода и углерода — New Method Determining Impurities in Titanium Particularly Oxygen and Carbon — Nouvelle méthode pour la détermination des impuretés, particulièrement de la teneur en O et C du titane métallique 361
- J. Pelikán*: The Plastic Calculation of Moments on Continuous Reinforced Concrete Beams — *Й. Пеликан*: Пластический расчет момента многоопорных железобетонных балок — Calcul plastique de poutres en béton armé — Plastische Momentenberechnung von Stahlbeton-Durchlaufträgern 373

- И. Кочиш*: Некоторые вопросы исследования силовых условий при прессовании сплошных круглых профилей из алюминия и его сплавов через одно и много-очковую матрицу — *J. Kocsis*: Some Problems of the Research on Forces Arising during the Extrusion of Aluminium or Aluminium Alloy Rods Through one or more die Apertures — Considérations sur les facteurs conditionnant l'extrusion de barres en aluminium ou alliages d'aluminium par matrices à un ou plusieurs trous — Einige Fragen der Kräfteverhältnisse beim Pressen von Stangen aus Aluminium oder aus seinen Legierungen mit Matrizen mit einer oder mehreren Öffnungen 381
- К. Сзмодитс*: Examen de la stabilité des portiques en cas de barres à moment d'inertie variable — *К. Сзмодич*: Анализ устойчивости рам в случае стержней с переменным моментом инерции — Stability Analysis of Frames with Bars of Variable Moments of Inertia — Stabilitätsuntersuchung von Rahmen aus Stäben mit veränderlichem Trägheitsmoment 421
- Д. Керényи*: Measurements of Rotor Heating on Scale Models of Air-cooled Turbine-generators — *Д. Керёныи*: Измерения нагрева на модели охлаждаемого воздухом ротора турбогенератора — Mesures d'échauffement sur un modèle réduit de turbo-rotor — Erwärmungsmessungen an Modellen von Turborotoren 433
- Ж. Барта*: Über die Berechnung der zulässigen Druckkraft des elastischen Stabes — *Й. Барта*: К вопросу методики расчета допускаемого усилия сжатия упругого стержня на основе допускаемого напряжения сжатия материала — On the Calculation of the Permissible Compressive Load on the Elastic Bar — Contribution au problème du calcul de la compression admise des barres élastiques 443
- Ф. Чáки*: Influence of Series Capacitors on the Operation of Synchronous Machines. (Continued) — *Ф. Чáки*: Влияние последовательно соединенного конденсатора на режим работы синхронной машины (Продолжение) Синхронизирующий и демпфирующий моменты — L'influence de condensateurs série sur le fonctionnement de machines synchrones. (Suite). Moments synchronisant et amortisseur — Der Einfluss des Reihenkondensators auf den Betrieb von Synchronmaschinen. (Fortsetzung). Synchronisierende und Dämpfungsmomente 457

Les Acta Technica paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction et écrits à la machine à l'adresse suivante.

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest, VI., Sztálin út 21. Compte-courant No. : 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

The Acta Technica publish papers on technical subjects in Russian, French, English and German.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up one volume.

Manuscripts should be typed and addressed to :

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica, is 110 forints a volume. Orders may be placed with „Kultúra” Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI., Sztálin út 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in russischer, französischer, englischer und deutscher Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band. Jährlich erscheinen 2—4 Bände.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden :

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest, VI. Sztálin út 21. Bankkonto Nr.43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

61,— Ft