ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT
A. GELEJI

TOMUS XII FASCICULI 1—2

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1955

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY U. 21

Az Acta Technica orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok, géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az «Akadémiai Kiadó»-nál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla: 04-878-111-46), a külföld számára pedig a «Kultúra» Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VI., Sztálin út 21. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, французском, английском и немецком языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи (в напечатанном на машинке виде) следует направлять по адресу:

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» – 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest, VI., Sztálin út 21. Текущий счет № 43-790-057-181), или его заграничные представительства и уполномоченные.

INDEX

Tomus XII.

Almásy, A.: Über die Sulfatverminderung der Grundwasser. — *А. Алмаши:* К снижению содержания сульфатов в грунтовых водах. — Reduction of Sulphate Content of Ground Water — Sur la diminution de la teneur en sulphate des nappes d'eau souterraines 139

Barta, J.: Sur l'estimation de la rigidité de torsion des prismes multicellulaires à parois minces. — *Й. Барта:* Об оценке жесткости на кручение тонкостенных многоячейковых призм. — On the Estimation of the Torsional Rigidity in Thin-walled Multicellular Bars. — Über die Abschätzung der Verdrehungssteifigkeit von dünnwandigen vielzelligen Prismen 333

Blaise, P.: Sur la résolution numérique du problème de la torsion des prismes multicellulaires à parois minces. — *П. Блез:* О числовом решении здачи на кручение тонкостенных многоячейковых призм. — On the Numerical Solution of the Torsional Problem of Thin-walled Multicellular Bars. — Über die numerische Lösung des Verdrehungsproblems von dünnwandigen vielzelligen Prismen 327

Bella, E.: Untersuchung der wichtigeren mechanischen Eigenschaften von verformbaren ($\alpha + \beta$)-Sondermessingen in Abhängigkeit von der Wärmebehandlung. — *Э. Белла:* Исследования важнейших механических свойств специальных пластичных латуней $\alpha + \beta$ в функции термообработки. — Examination of the More Important Mechanical Properties of Special Ductile ($\alpha + \beta$) Brasses as a Function of Heat Treatment. — Les propriétés principales mécaniques des laitons $\alpha + \beta$ malléables spéciaux en fonction du traitement thermique 351

Csáki, F.: Influence of Series Capacitors on the Operation of Synchronous Machines. — *Ф. Чаки:* Влияние последовательно соединенного конденсатора на режим работы синхронной машины. — Influence des condensateurs série sur le fonctionnement des machines synchrones. — Der Einfluss von Reihenkondensatoren auf den Betrieb von Synchronmaschinen 49

Csonka, P.: Die Knickung geradachsiger Stäbe bei Behandlung mit der Methode der elastischen Punkte. — *П. Чонка:* Решение прогиба прямоосных стержней методом эластичных точек. — Buckling of Straight-Axis Bars Treated by the Elastic Point Method. — Flambage de barres à axe droit traitè à l'aide de la méthode des points élastiques 275

Csonka, P.: La torsion des prismes multicellulaires en treillis. — *П. Чонка:* Кручение многоячейковых решетчатых призм. — Torsion of Multicellular Trussed Prisms. — Die Verdrehung mehrzelliger prismatischer Fachwerke 339

Domony, Á. and *Vassel, K. R.:* The Influence of some Alloying Constituents on the Structure of Cast Aluminium. — *А. Домонь* и *К. Р. Васель:* Влияние отдельных легирующих элементов на структуру литого алюминия. — L'effet de quelques éléments constitutifs sur la structure de l'aluminium fondu. — Die Wirkung einiger Legierungsbestandteile auf die Gussstruktur von Aluminium 157

Fonó, A.: On Ram Jet Propulsion. — *А. Фоно:* О реактивных двигателях. — Sur la commande par tuyère thermo-propulsive. — Über Staubstrahltriebwerke 383

Harmathy, T.: Theory of Throughput in Extraction Spray Towers. — *Т. Хармати:* Теория пропускной способности оросительных колонн для экстракции жидкостей. — Étude sur le passage de débits en colonnes d'extraction à dispersion — Theorie des Durchsatzes von Extraktionsprühtürmen 209

Heller, Gy.: Sur les caractéristiques de freinage des véhicules de chemin de fer. — *Дь. Хеллер:* О показателях торможения железнодорожных подвижных средств. — Braking Characteristics of Railway Vehicles — Über die Bremskennzahlen von Eisenbahnfahrzeugen 121

Hornung, A.: General Method for the Determination of Cutting Force and Required Power, by Specific Cutting Resistance. — *А. Хорнунг:* Общая методика определения усилия резания и мощности на основе удельного сопротивления резания. — Méthode générale pour la détermination de l'effort de coupe et de la puissance de coupe, basée sur la résistance de coupe spécifiques. — Allgemeine Methode zur Bestimmung der Hauptschnittkraft und Schnittleistung auf Grund des spezifischen Zerspanungswiderstandes 289

Monostori, A.: Theoretic Examination of the Working of Combing Segments Used in Heilmann Combers. — *А. Моношторн:* Теоретическое исследование работы цилиндрических гребней на гребнечесальных машинах системы Гельмана. — Étude théorique du peigne rotatoire des peigneuses du système Heilmann — Theoretische Untersuchung der Arbeit des Rundkammes bei Kämmaschinen System Heilmann 3

Oplatka, G. et *Tegze, M.:* La résistance hydrodynamique d'une colonne de matière déformable. — *Д. Оплатка* и *М. Тегзе:* Гидродинамическое сопротивление колонн, наполненных деформируемым материалом. — Hydrodynamic Resistance of Columns Filled with Deformable Substances. — Hydrodynamischer Widerstand von Säulen, die mit deformierbarem Material gefüllt sind 85

Rósa, J.: Calculation of D. C. Motor Drives Fed by Thyratrons and by Grid-Controlled Mercury-Arc-Rectifiers. — *Я. Роша:* Расчет моторного привода постоянного тока, питаемого от тиратронного выпрямителя с сеточным управлением. — Le dimensionnement des commandes par moteur à courant continu alimentées par des redresseurs à thyratron et à commande par grille. — Die Dimensionierung eines durch eine Thyratronröhre bzw. einen Gittergesteuerten Gleichrichter gespeisten Gleichstromantriebs 187

Schwertner, A.: Die Knickung im Lichte der Methode der elastischen Punkte. — *А. Швертнер:* Прогиб балок на основе метода эластичных точек. — Buckling of Beams Treated by the Method of Elastic Points. — Le flambage des poutres traités à l'aide de la méthode des points élastiques 245

Tarján, G.: Principles of Gravity Concentration. — *Г. Тарьян:* Общие принципы обогащения по удельному весу. — Théorie générale de l'enrichissement de minerais basé sur le poids spécifiques. — Allgemeine Grundsätze der Aufbereitung nach dem spezifischen Gewicht 311

Вустер, В. А.: Ретиграф — рентгеновский гониометр, обеспечивающий прямую проекцию. — *Wooster, W. A.:* A Retigraph (Direct Projection X-ray Goniometer) — Un rétigraphe (Goniomètre radiographique pour projection directe) — Der Retigraph (Ein Röntgengoniometer mit Direktabbildung) 165

Вустер, В. А.: Автоматический самопишущий микроденситометр — *Wooster, W. A.:* An Automatic Recording Microdensitometer. — Microdensitomètre à enregistrement automatique. — Ein automatisch registrierender Mikrodensitometer 177

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XII

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

BUDAPEST, 1955

THEORETIC EXAMINATION OF THE WORKING OF COMBING SEGMENTS USED IN HEILMANN COMBERS[1]

A. MONOSTORI

NATIONAL WORSTED YARN AND WEAVING LTD., BUDAPEST

[Manuscript received 18th May, 1954]

1. In this paper, it is attempted to establish numerical relations with the aid of which the combing segments of Heilmann combers could be designed and controlled for correct working.

2. Let us assume that the combing machine is fed with a sliver lap of width B, consisting of m slivers of G_0 weight per unit length each ; the number of fibres contained in one cross section of the sliver lap will in this case amount to

$$N_0 = \frac{m \cdot G_0}{\frac{\pi \delta^2}{4} \cdot \gamma} \quad (= m \cdot G_0 \cdot \mathfrak{N}_0). \tag{1}$$

In the above formula, δ stands for the average fibre diameter, γ for the specific weight of the fibre material to be combed, $\mathfrak{N}_0$ for the average fineness of the fibres.[2]

3. The following *idealizations* — more or less satisfied in reality — have been made in respect of the fibre material to be combed, applicable also to the *tuft* hanging out of the nippers :

a) The *slivers* forming the lap are perfectly *homogenous* in structure as well as *uniform relative to each other ;* besides, they are conducted through the feeder apparatus (consisting of a fluted pair of rollers, lap plate and the feeding comb) in such a manner that the *lap* shall be *uniform* throughout its entire width B. According to this, the number of fibres in any part of the tuft of unit width (1 cm) measured along the nipping — n_0 — is the same, viz. — from the value of N_0 determined above :

$$n_0 = \frac{N_0}{B}. \tag{1a}$$

[1] Lecture held at the Graduate Training Course for Engineers, May 1954. Budapest

[2] If G_0 is expressed in g/m, δ in mm, γ in kg/dm^3 then $\mathfrak{N}_0$ will be the metric fineness, i. e. its dimension will be m/g.

b) In the individual slivers and in the tuft to be combed, the fibres lie perfectly *parallel*, and even the short fibres to be combed out lie lengthwise in the tuft.

c) As an effect of the operations preparatory to combing, the *short fibres* — giving the noil — are evenly distributed throughout the various cross-sections of the lap, and in the tuft itself. Therefore, if prior to combing the total number of fibres in a cross-section of the lap is N_0, and the number of the short fibres to be combed out therefrom F_0, the number of the short fibres at a unit width of the lap along the nippers — f_0 — would be the same, viz :

$$f_0 = \frac{F_0}{B} .$$

Taking $F_0 = \varepsilon \cdot N_0$,[3] then of course,

$$f_0 = \varepsilon \cdot n_0 . \tag{2}$$

d) The *fibres are* assumed to be completely *loosened from their tangled state*, in other words, the single fibres are assumed to be separated from and parallel to each other. Accordingly, the idealized combing process consists merely in removing the short fibres, without removing any neps at the same time.[4]

4. Due to the pressure exerted, the fibres of the gripped cross section of the lap are closely packed between the nippers, so that the number of fibres contained in one layer of the complete width B is

$$\frac{B}{\delta} .$$

Therefore, considering that the number of fibres in one cross section of the lap is N_0, and in one cm of lap width n_0, the *number of layers in the gripped cross section* will be

$$r_0 = \frac{N_0}{B} \cdot \delta = n_0 \cdot \delta . \tag{3}$$

The above arrangement of the fibres in the *tuft* to be combed will be subject only to the following modification. Along the width of the tuft, the tight

[3] Accordingly, ε is the specific noil ratio related to the fibre number (in lieu of the weight as is more usually done).

[4] In a broader sense, the combing out of neps may also be regarded as a removal of short «fibres». In this case, however, the length of the «short» fibres is negligible compared to the normal length of the short fibres, while their thickness is many times that of the average fibre diameter and both are equivalent to the «diameter» of the approximately spherical nep.

packing of the fibres will be preserved, i. e. the number of fibres per unit of length in a single layer remains $\frac{1}{\delta}$; the arrangement of the fibres in depth will, however, become looser owing to the resilience of the compressed fibres.

5. Apart from the two extreme sides of the tuft containing fibres of different arrangement at a presumably negligible ratio of the whole fibre material, the number of fibres per unit of volume — σ — can be assumed to be constant along the full width of the tuft. The intensity of internal pressure — β — generating interfibre friction, and essentially resulting from concentrated actions of forces on single contact points, can, in the mass of fibres loosened up again to a certain degree, be assumed to be proportional to the compactness of the fibre arrangement, i. e. to the above quantity σ. According to this, it can be written

$$\frac{\beta}{\sigma} = \text{constant.} \tag{4}$$

Consequently, as long as the packing of the fibre arrangement, in other words the *specific fibre density* σ remains unchanged, the internal friction of the slivers will also remain unchanged.[5]

6. On the Heilmann combers — and generally on all combers, (hecklers, etc.) the short fibres are removed by rows of needles ; in the case of the Heilmann comber's combing segment, this is done by straight rows of needles (needle bars) mounted along the generatrices of a cylindrical mantle. The characteristics of such a row of needles (needle bar) are the following :

number of needles per unit length	z
diameter of the needles[6]	d
needle gap[6]	$h = \frac{1}{z} - d \quad \left(= \frac{1}{k}\right)$
free length of needles	l_0

7. For simplicity, let us first examine the case of combing done with a single row of needles. Let the number of needles per unit length be z_1, and the needle diameter d_1 ; the following statements can be made :

[5] By extensive generalization, formula (4) can also be written :

$$\beta^x . \sigma^y = \text{constant,} \tag{4a}$$

where x and y are arbitrary, positive or negative real quantities. Incidentally, in formula (4), $x = 1$, $y = -1$.

[6] Considering that the needles are tapered, the above values of the needle diameter and likewise of the gap means the so-called equivalent needle diameter and gap. In other words, the nominal needle diameter shall be the width of an oblong, the height of which is $l \leq l_0$ — i. e. the free length of the needle in contact with fibres — and the area of which is equal to that of the lengthwise section of the working portion of needle (i. e. the portion in contact with the fibres during combing). The determination of the equivalent gap can be made by analogy.

When the needle row pierces the sliver lap to be combed in its full width, i. e. simultaneously with all its needles, in a more or less perpendicular direction, to move away thereafter from the nips lengthwise of the fibres, thus combing the tuft, it will necessarily force the fibres of the pierced tuft to rearrange. Namely, the intruding needles take up a total length of $z_1 \cdot d_1$ in the unit width. Consequently the fibres tightly packed side by side between the nips have to settle in the needle gaps in more layers than, prior to the penetration of the needles, between the nips and also in the sliver lap before combing. The modified number of layers — r_1 — can be computed by formula

$$r_1 = \frac{n_0}{\frac{1 - z_1 \cdot d_1}{\delta}} = \frac{n_0 \cdot \delta}{1 - z_1 d_1} . \tag{5}$$

Of course, if during the process of combing several needle rows have already performed combing in succession, the number of fibres contained in the tuft cross section and in the unit width will no longer be n_0 but less, in general n. Accordingly, for an arbitrary needle row, the number of layers in its gaps is given by :

$$r = \frac{n_0 \cdot \delta}{1 - z \cdot d} . \tag{5a}$$

8. The actual number of layers has, according to the above, been determined by assuming that the *fibres have re-arranged at an invariable specific fibre density* — at an invariable value of σ — ; i. e. that the rearrangement is of a *purely geometrical* character. By implication, the inter-fibre friction — and consequently the internal friction of the tuft — is invariable during the entire combing process, and also the friction between the combing needles and the fibres rubbing against their lateral surfaces remains unchanged.

Summing up : the retarding force acting on the fibres during combing, exerted by the adjoining fibres is invariable, and so is the frictional force necessary to remove the short fibres, as well as the frictional force between the needles and the fibres, because specific fibre density — σ — has remained constant.

It should be noted that the above hold good for the assumed condition only that *the needles have sufficient length* to penetrate the entire depth of the tuft without even the bottom fibres of the tuft coming into contact with the bottom of the gaps, and consequently friction to fibres is confined to the lateral surfaces of the needles.

9. For simplicity, conditions will be examined for a strip of the sliver lap of unit width (1 cm along the nipping line), and the corresponding section of the needle row. At a moment of the combing process, let us assume

the actual number of the fibres in the unit width to be n,

the number of the still remaining short fibres (from the above n) f,

the number of the short fibres already combed out from the unit width of the tuft since the beginning of combing $\varphi = f_0 - f$

where — as indicated above — f_0 is the number of short fibres contained in the unit width ($f_0 = \varepsilon n_0$) before combing. Naturally, $n = n_0 - \varphi$.

The combing effect of a needle-row (needle bar) — in other words, the number of short, ungripped fibres combed out by the unit width (1 cm) of the needle row in a single combing period — will be the greater, the more the short fibres are likely to establish frictional contact with the needles, or more accurately, with the two lateral, active surfaces of the needles.

Obviously, the probability of this is the greater,

a) the larger the number of the short fibres yet to be combed out from the unit of width ($f = f_0 - \varphi$),

b) the greater the number of the needles per unit of needle row width (z),

c) the greater the number of fibre strata $\left(r = \frac{n \cdot \delta}{1 - zd}\right)$ is in the needle gaps.

Accordingly, the quantity of the short fibres — $\Delta\varphi$ — combed out in a single stroke by the unit width of the needle row shall be

$$\Delta\varphi = A \cdot f \cdot z \cdot r = A \cdot (f_0 - \varphi) \cdot z \cdot \frac{n \cdot \delta}{1 - z \cdot d} =$$

$$= A \cdot \delta \cdot (f_0 - \varphi) \cdot (n_0 - \varphi) \cdot \frac{z}{1 - z \cdot d}, \tag{6}$$

where A is a proportion factor to be experimentally determined, and naturally an absolute, dimensionless, positive, real number.

In the above formula, no explicit rôle has been assigned to *frictional conditions* governing the removal of the fibres (inter-fibre friction and friction between needles and fibres). As has been stated before, they are dependent on the tightness of the fibre arrangement, and it has been demonstrated above that the specific fibre density remains unchanged during the entire combing process in spite of any rearrangement. The fibres are rearranged without modification of their specific density σ.

The value of

$$k = \frac{z}{1 - z \cdot d} = \frac{1}{\frac{1}{z} - d} \left(= \frac{1}{h}\right) \tag{7}$$

in the above equation, yielding the specific combing effect of a single needle-

row, may be called the «*needle-row characteristic*», as it contains solely the data characterising the needle-row. Naturally, $\frac{1}{z}$ being the pitch of the needles, the needle-row characteristic is actually the reciprocal value of the gap dimension h (see par. 6).

The next task is the determination of the interdependence of the specific combing effect and the needle-row characteristic for the entire combing segment.

10. With the above in view, the following assumption is made concerning the *combing segment*. Let us imagine a combing segment, with needle bars infinitely increased in number, while the distance between them is infinitely diminished. In this manner, a mathematical abstraction of an imaginary segment is arrived at consisting of an infinite number of needle-bars *independent* from each other in their combing action, placed infinitely close to each other over a finite length of arc corresponding to the central angle of the real combing segment.

The central angle corresponding to the whole segment shall be adopted for unity. The place of any needle-bar shall be assigned by the arc distance α measured from the needle-bar coming first into action. Accordingly, the value of $\alpha = 0$ corresponds to the first needle-bar, and $\alpha = 1$ to the last one, whereas $\alpha = \alpha\ (0 \leq \alpha \leq 1)$ will locate any arbitrary needle-bar. The values n, f, φ, and k are, of course, *functions of the co-ordinate* α.

It stands to reason that for this imaginary combing segment, the amount of short fibres that can be removed by a single needle-bar — $\Delta\varphi$ — will be substituted by a differential increase $d\varphi$ of the number of short fibres already combed out, corresponding to the arc $d\alpha$. As formula (6) gives $\Delta\varphi$ as a function of α, it follows that $d\varphi = \varphi\,(\alpha) \cdot d\alpha$. Hence, from equations (6) and (7) the fundamental *differential equation* expressing the specific combing effect of a combing segment having an *infinite number of needle-bars* will be :

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = A \cdot \delta \cdot (f_0 - \varphi) \cdot (n_0 - \varphi) \cdot k\,(\alpha). \tag{8}$$

Writing

$$K = K\,(\alpha) = A \cdot \delta \cdot k\,(\alpha)^{7} \tag{9}$$

differential equation (8) can be written in the simpler form :

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = K\,(\alpha) \cdot (f_0 - \varphi) \cdot (n_0 - \varphi) = K\,(\alpha) \cdot (n_0 \cdot \varepsilon - \varphi) \cdot (n_0 - \varphi) = \\ = K\,(\alpha) \cdot n_0^2 \cdot \left(\varepsilon - \frac{\varphi}{n_0}\right) \cdot \left(1 - \frac{\varphi}{n_0}\right). \tag{10}$$

[7] K, like the proportion factor A, is a dimensionless, positive, real number.

11. Expressing the number of combed out short fibres (φ) as a fraction (ϱ) of the initial total fibre number (n_0), and considering that :

$$\frac{\varphi}{n_0} = \frac{f_0 - f}{n_0} = \varrho ,$$

the final form of the above differential equation will be

$$\frac{d\varrho}{d\alpha} = K(\alpha) \cdot n_0 \cdot (1 - \varrho) \cdot (\varepsilon - \varrho) . \tag{11}$$

Separating the variables :

$$\frac{d\varrho}{(1 - \varrho) \cdot (\varepsilon - \varrho)} = n_0 \cdot K(\alpha) \cdot d\alpha ;$$

further writing the left as a sum of partial fractions :

$$\left(\frac{C_1}{1 - \varrho} + \frac{C_2}{\varepsilon - \varrho} \right) \cdot d\varrho = n_0 \cdot K(\alpha) \cdot d\alpha .$$

C_1 and C_2 are constants, the values of which are given by :

$$C_1 = - \frac{1}{1 - \varepsilon}$$

and

$$C_2 = \frac{1}{1 - \varepsilon} .$$

Substituting the values of C_1 and C_2,

$$- \frac{d\varrho}{1 - \varrho} + \frac{d\varrho}{\varepsilon - \varrho} = n_0 \cdot (1 - \varepsilon) \cdot K(\alpha) \cdot d\alpha .$$

Integrating both sides (and introducing the integration constant $\overline{K}$)

$$\log (1 - \varrho) - \log (\varepsilon - \varrho) = n_0 \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \int_0^{\alpha} K(\alpha) \cdot d\alpha + \log \overline{K} ,$$

whence

$$\log \frac{1-\varrho}{\overline{K}\cdot(\varepsilon-\varrho)} = n_0\cdot(1-\varepsilon)\cdot\int_0^{\alpha} K(\alpha)\cdot d\alpha$$

and

$$\frac{1-\varrho}{\varepsilon-\varrho} = \overline{K}\cdot e^{n_0\cdot(1-\varepsilon)\cdot\int_0^{\alpha} K(\alpha)\cdot d\alpha}.$$

From the initial condition for determining integration constant $\overline{K}$ ($\alpha = 0$ $\varrho = 0$) :

$$\overline{K} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Resubstituting this value :

$$\frac{1-\varrho}{\varepsilon-\varrho} = \frac{1}{\varepsilon}\cdot e^{n_0\cdot(1-\varepsilon)\cdot\int_0^{\alpha} K(\alpha)\cdot d\alpha}, \tag{12}$$

whence after introducing the abbreviated denotation of

$$E^8 = e^{n_0\cdot(1-\varepsilon)\cdot\int_0^{\alpha} K(\alpha)\cdot d\alpha}, \tag{13}$$

the number of short fibres combed out by the needle-rows corresponding to the arc α, as a fraction of the initial total fibre number n_0, may be computed from equation

$$\varrho = \varrho(\alpha) = \varepsilon\cdot\frac{E-1}{E-\varepsilon}. \tag{14}$$

12. It will be seen from equation (14) that *perfect combing* cannot be assured by a finite portion (between $\alpha = 0$ and $\alpha = \alpha$) of the full segment, in other words, the fulfilment of the condition $\varrho = \varepsilon$ at a given value of α cannot be secured, except when the value of E becomes infinitely large. Namely, the equation determining ϱ can also be written in the form

$$\varrho = \frac{1-\frac{1}{E}}{\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{E}}, \tag{14a}$$

[8] E is naturally a dimensionless, positive, real number, because the exponent of e is likewise composed of positive, real, absolute numbers.

wherefrom evidently $\varrho = \varepsilon$ will set in only on the condition of E becoming infinite. This involves, of course, that the value

$$\int_0^a K(\alpha) \cdot d\alpha$$

must become infinitely great, i. e. in general, the needle-row characteristic for a finite section of the segment pertinent to the central angle α — or at least for its last needle-row — must become infinite. It goes without saying that perfect combing is not feasible even with the entire segment ($\alpha = 1$) unless the needle-row characteristic in any finite section of it, or at least of a single — possibly of its last — needle-row is ∞ (in general : $\int_0^1 K(\alpha)\, d\alpha = \infty$).

As the needle-row characteristic gives the reciprocal value of the width of the needle-gaps, perfect combing would require the use of a segment having infinitely reduced gaps.

As the construction of such a comb is practically impossible, perfect combing can be achieved with the complete segment also by certain approximation only. Introducing

$$\tau_0 = \frac{|\varrho|_{a=1}}{\varepsilon} \tag{15}$$

to denote the *degree of* the *combing* action of the whole segment, it will appear from equation (14) yielding ϱ that in practice, the value of τ_0 can be extremely close to unity, as the positive powers of e are rapidly increasing.

Evidently, the notion of the degree or intensity of combing can be readily generalised. Namely, it can be written as a function of the co-ordinate α :

$$\tau = \tau(\alpha) = \frac{\varrho}{\varepsilon} . \tag{15a}$$

13. By means of the relations derived above, the following data for a combing segment built up of needle-bars of given needle-row characteristics can be readily determined :

a) *The number of short fibres*, φ_0, combed out from the unit of width of the total segment in a single stroke, indicative also of the degree or intensity of the *total combing action*, τ_0, and similarly any desired intermediate value of φ and of $\tau = \frac{\varrho}{\varepsilon}$ [9] respectively.

[9] According to equation (14) obviously :

$$\tau = \tau(\alpha) = \frac{E-1}{E-\varepsilon} .$$

b) The participation of the individual needle-bars in the combing out of the short fibres can also be readily stated. The rate of the «*repartition of combing action*» along the segment is actually given by the value of the differential quotient

$$\frac{d\varrho}{d\alpha} = \frac{d\varrho}{dE} \cdot \frac{dE}{d\alpha}$$

as a function of the co-ordinate α. More explicitely, as from equations (13) and (14)

$$\frac{dE}{d\alpha} = n_0 \cdot (1 - \varepsilon) \cdot K(\alpha) \cdot E \tag{16a}$$

and

$$\frac{d\varrho}{dE} = \varepsilon \cdot \frac{1 - \varepsilon}{(E - \varepsilon)^2}, \tag{16b}$$

$$\frac{d\varrho}{d\alpha} = n_0 \cdot \varepsilon \cdot E \cdot K(\alpha) \cdot \left(\frac{1 - \varepsilon}{E - \varepsilon}\right)^2, \tag{16}$$

i. e. in general a value variable along the combing segment.

c) From the point of the mechanical stress in the segment, the amount of the mechanical force necessary for a needle bar to perform its combing work is of importance.

Obviously, this force S is the resultant of the frictional forces arising between the active lateral surfaces of the needles and the surfaces of the individual fibres lying in the gaps between them. Referred to a unit width of a needle-row (1 cm), the following relation holds good for the extent of the force in question, using the denotations employed before :

$$S = a \cdot 2 \cdot z \cdot r \cdot \beta \cdot \mu_1 = 2a \cdot z \cdot \frac{n \cdot \delta}{1 - z \cdot d} \cdot \beta \cdot \mu_1, \tag{17}$$

where μ_1 stands for the coefficient of sliding friction between the needles and the fibres and a is another proportion factor.

Writing for simplicity

$$2a \cdot \beta \cdot \mu_1 = \varkappa, \tag{17a}$$

and taking into consideration that, in virtue of the definition of ϱ, $n = n_0 (1 - \varrho)$, the value of the specific combing force — S — as a function of the co-ordinate α will be

$$S = S(\alpha) = \varkappa \cdot \delta \cdot n_0 \cdot (1 - \varrho) \cdot \frac{z}{1 - z \cdot d}. \tag{18}$$

From equations (7) and (9)

$$\frac{z}{1 - z \cdot d} = k(\alpha) = \frac{K(\alpha)}{A \cdot \delta},$$

hence

$$S = \frac{\varkappa}{A} \cdot n_0 \cdot (1 - \varrho) \cdot K(\alpha). \tag{18a}$$

Substituting into the above expression the value of ϱ as determined before (14), the extent of the specific combing force[10] acting on the individual needle bars of a combing segment having needle-rows of any given characteristics will be

$$S = \frac{\varkappa}{A} \cdot n_0 \cdot \frac{1 - \varepsilon}{E - \varepsilon} \cdot E \cdot K(\alpha) \tag{19}$$

or, taking into consideration expression (16a) :

$$S = \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{\frac{dE}{d\alpha}}{E - \varepsilon}. \tag{19a}$$

d) Once the specific combing force is known, the amount of the *mechanical work* required for combing can be readily determined for a single needle-row or for the entire segment (or for any finite part of it), provided the following restrictive assumptions are considered :

α) The needles are of sufficient length to permit the middle layer of the tuft to settle, during the combing action of any needle-row, invariably at the same level in the needle gaps.

β) This of course, implies that the resultant of the frictional forces acting on the individual needles as an evenly distributed system of concentrated forces, acts invariably at the same level measured from the needle sockets, independently of the different needle-rows momentarily in action. (Putting it differently, the torque calculated on the axis of the segment as an effect of the frictional forces invariably acts on the same torque arm, identical with the mean radius of the needle segment.)

γ) For further simplification, let us assume that each needle-row penetrates into the tuft perpendicularly, and travels at right angles to it throughout the entire combing process.

[10] This force gives the stress in the soldered joints of the needle-bars, whereas the value of the bending force acting on the individual needles is obviously $q = \frac{S}{z}$.

Hence, as each needle-row covers an equal distance (s) during its combing action, and as the tangent to its movement always coincides with the direction of the combing force — S — acting on the needle-rows, a differential section of the segment pertaining to the differential $d\alpha$ will perform in a single combing stroke the mechanical work :

$$dm = (S \cdot d\alpha) \cdot s$$

to remove the short fibres.

Accordingly, the «*absolute*» combing work performed by a finite section of the segment, corresponding to a given value of α will be in the unit of the segment width :

$$m = s \cdot \int^{\alpha} S \cdot d\alpha \tag{20}$$

i. e. it is proportional to the definite integral $\int_0^{\alpha} S \cdot d\alpha$.

The definition of combing work can be made even more characteristic by determining the mechanical work absorbed by the unit amount of removed noil : $\varrho = \tau \cdot \varepsilon$, from the segment portion considered i. e. by introducing the so-called «*specific*» *combing work :*

$$m_0 = \frac{m}{\varrho} = \frac{s}{\varrho} \int_0^{\alpha} S \cdot d\alpha = \frac{s}{\tau \cdot \varepsilon} \cdot \int_0^{\alpha} S \cdot d\alpha . \tag{21}$$

The peripheral force acting on a unit width of a needle-row being

$$S = \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{\dfrac{dE}{d\alpha}}{E - \varepsilon} \tag{19a bis}$$

and as $\dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{1}{\tau \cdot \varepsilon}$ is given by

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{E - \varepsilon}{E - 1}, \tag{14 bis}$$

it follows that :

α) the absolute mechanical work of combing (for the unit width of the segment) done by the initial portion of the segment subtending the central angle α is given by

$$\left.\begin{aligned} m &= s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \int_0^{a} \frac{dE}{E-\varepsilon} = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \int_1^{E} \frac{dE}{E-\varepsilon} \\ &= s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \log \frac{E-\varepsilon}{1-\varepsilon} \end{aligned}\right\} . \tag{22a}$$

Applied to the entire segment, denoting the value corresponding to $a = 1$, i. e. $e^{n_0 \cdot (1-\varepsilon) \cdot \int_0^1 K(a) \cdot da}$ in the expression $E = e^{n_0(1-\varepsilon) \cdot \int_0^a K(a) da}$ by E_0, it follows :

$$M = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \log \frac{E_0 - \varepsilon}{1-\varepsilon} . \tag{22b}$$

β) The «specific» mechanical combing work (for unit width) done by an initial portion of the segment corresponding to a given value of α is

$$\begin{aligned} m_0 &= s \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{E-\varepsilon}{E-1} \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \int_0^{E} \frac{dE}{E-1} \\ &= s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{E-\varepsilon}{E-1} \cdot \log \frac{E-\varepsilon}{1-\varepsilon} . \end{aligned} \tag{23a}$$

Clearly, the specific combing work done by the entire segment will be

$$M_0 = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{E_0 - \varepsilon}{E_0 - 1} \cdot \log \frac{E_0 - \varepsilon}{1-\varepsilon} . \tag{23b}$$

e) For any *given circular comb* concerning which the functions $K(\alpha)$ — and thereby also $E = E(\alpha)$ — are known, all values that crucially determine combing can be promptly defined.

14. *Segment achieving a prescribed degree of combing.* — When the problem is reversed, i. e. the task is to design a segment most appropriate for combing a given material (of given ε and n_0) — which, of course, involves again the determination of the function $K = K(\alpha)$ — the following procedure can be adopted.

The amount of short fibres to be removed by the combing action of the entire segment as a fraction of the total initial number of short fibres should be specified in advance ; i. e. the value of τ_0 shall be prescribed to say

$$\tau_0 = \theta \ . \tag{24}$$

Of course,

$$0 \leq \theta \leq 1$$

the theoretic limits being 0 and 1, but at $\theta = 0$ no short fibres are removed, so that this case is of no practical interest, while for $\theta = 1$ — in accordance with par. 12 — «infinitely densely set» needle-rows would be necessary, so that this case is illusory (for an idealized segment!). Otherwise, the value of θ may be theoretically chosen as near 1 (the case of perfect combing) as desired.

Once the degree of combing — θ — has been specified, from formula (14) and definition $\varrho_0 = \varepsilon \cdot \theta$ it follows necessarily

$$(\varrho_0 =)\ \varepsilon\theta = \varepsilon \cdot \frac{E_0 - 1}{E_0 - \varepsilon} \ ,$$

where E_0 once more denotes the quantity $e^{n_0 \cdot (1-\varepsilon) \cdot \int_0^1 K(\alpha) \cdot d\alpha}$. In order to secure the prescribed θ, the relations

$$\theta = \frac{E_0 - 1}{E_0 - \varepsilon} \ , \tag{25}$$

or

$$(E_0 =)\ e^{n_0 \cdot (1-\varepsilon) \cdot \int_0^1 K(\alpha) \cdot d\alpha} = \frac{1 - \varepsilon \cdot \theta}{1 - \theta} \tag{26}$$

must hold good.

If this can be secured by an adequate choice of $K(\alpha)$, in other words by satisfying the relation

$$\int_0^1 K(\alpha) \cdot d\alpha = \frac{1}{n_0 \cdot (1 - \varepsilon)} \cdot \lg \frac{1 - \varepsilon \cdot \theta}{1 - \theta} \ , \tag{27}$$

then the desired degree of combing θ for the total segment will be also obtained by its action.

Where the prescribed value θ for τ_0 has been secured by an appropriately chosen $K(\alpha)$ function, there, of course, E_0 is a strictly determined quantity.

Accordingly, also the absolute combing work yielded by equation

$$M = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \lg \frac{E_0 - \varepsilon}{1 - \varepsilon} = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \log \frac{1}{1 - \theta} \qquad \text{(22b/bis)}$$

will be strictly determined and, in accordance with equation (22b), independently of the variation of $K(\alpha)$, invariable ; the same applies to the specific combing work given by equation

$$M_0 = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{E_0 - \varepsilon}{E_0 - 1} \cdot \log \frac{E_0 - \varepsilon}{1 - \varepsilon} = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot \theta} \cdot \log \frac{1}{1 - \theta} . \qquad \text{(23b/bis)}$$

Generally, for combing segments of otherwise differing construction, giving an equal degree of combing — θ — on the same material (at the same values of ε), the amounts of absolute combing work done and their specific values respectively are the same.

The above statement can be mathematically expressed also in the following manner. The value of the definite integral

$$\int_0^1 K(\alpha)\, d\alpha \qquad (28)$$

being the same independently of the variation of $K(\alpha)$[11], the degree of combing attained by the different segments will be the same and so will the value of the absolute and specific mechanical combing work done. The value of the definite integral in question, according to equation (27) must be

$$\frac{1}{n_0 \cdot (1 - \varepsilon)} \cdot \log \frac{1 - \varepsilon \cdot \theta}{1 - \theta} . \qquad (29)$$

There is another evidence proving that perfect combing ($\theta = 1$) would require a segment having in general infinitely great needle-row characteristics over a finite section, so that the definite integral (28) could also be ∞.

15. The following valuable *practical conclusions* can be drawn from the statements made in par. 14.

a) In accordance with equation (22b/bis), the *absolute* mechanical combing work required for the same degree of combing is independent from the characteristics of the material to be combed, specifically from n_0 and ε ; it depends solely from the degree of combing (θ) itself.

b) Besides the degree of combing, the *specific* combing work is determined only by the value of the initial noil ratio (ε) contained in the sliver.

[11] Naturally, $K(\alpha)$ can only have positive values and can at the utmost be identically 0 in the whole range of $\alpha = 0 \sim 1$ or over some finite portion or portions of it.

c) Let the same material be subjected to successive combings (with the same or with any other segment) — this being the general case of re-combing or double combing, of practical importance. Let the specified degree of combing θ be the same for the successive combings. Then, in spite of the fact that naturally, the residual amount of the initial short fibres $-\varepsilon-$ available for combing is gradually diminishing,

α) every combing process will involve the same amount of absolute mechanical work, whereas

β) the specific combing work — i. e. the work necessary for the removal of an equal number of short fibres — will increase in each succeeding combing operation, exactly in inverse proportion to the residual amount of short fibres.

γ) If e. g. at the first combing passage the prescribed value of θ at a noil ratio of $\varepsilon = 0{,}1$ was $\theta = 0{,}9$, the removal, in the re-combing (second or follow-up combing) operation, of the 90% of the residual number of short fibres ($\varepsilon = 0{,}01$), i. e. of the incremental noil fraction 0,009, will require the same amount of mechanical work as the one needed for the removal of the noil ratio of 0,09 in the first operation.

On the other hand, the value of the specific combing work will increase in the second passage to $\frac{1}{0{,}1} = 10$-fold its first value: the removal of a noil ratio of the value of 0,009 requires 10-times as much specific work as was necessary in the first operation for removing a noil ratio of the magnitude of 0,09.

16. *Other aspects of combing segment design.* — The degree of combing — θ — specified as basis for dimensioning combing segments, does not in itself, strictly determine the segment — in other words, the function $K(\alpha)$. Namely, formula (27) can be satisfied with an infinite variety of functions $K(\alpha)$, in other words, the same combing effect can be achieved by an infinite number of segments.

At this juncture, we can introduce additional rational points of view, and make further restrictions in the design of the segments. In the following, four such aspects involving additional restrictions will be discussed, viz:

a) the needle-row characteristics should be the same throughout the whole segment,

b) the rate of the noil removal should be the same throughout,

c) the amount of the combing force should have the same value throughout,

d) the absolute value of the mechanical combing work to be done should be likewise the same throughout.

Condition *a)* has a mere theoretic importance, with hardly any practical value; it is merely dealt with for its mathematical simplicity, and was meant only to serve by way of example.

In the author's concept, the application of the principle under *b)* above appears to be most practical and serviceable.

Provisions *c)* and *d)* are essentially identical; in general, they do not necessarily provide a solution for every case. (See par. 19/c below.)

17. *Segment of constant needle-row characteristic.* Mathematically, the simplest case is where $K = K(\alpha) = K_0 = constant.$[12]

a) Its value is determined — in accordance with formula (26) — by the following equation:

$$(E_0 =)\ e^{n_0 \cdot (1-\varepsilon) \cdot K_0} = \left| \frac{1 - \varepsilon \cdot \tau}{1 - \tau} \right|_{\alpha=1} = \frac{1 - \varepsilon \cdot \theta}{1 - \theta} \ . \tag{30}$$

Solving for K_0:

$$K_0 = \frac{1}{n_0 \cdot (1 - \varepsilon)} \cdot \log \frac{1 - \varepsilon \cdot \theta}{1 - \theta} = \frac{\log \zeta}{n_0 \cdot (1 - \varepsilon)} \ , \tag{31}$$

where

$$\zeta = \frac{1 - \varepsilon \cdot \theta}{1 - \theta} \ . \tag{31a}$$

b) In the following, this value of K_0 shall be used. The first thing to be determined is the distribution of the *noilage load* along the segment.

With this in mind, the value of $\frac{d\varrho}{d\alpha}$ is to be expressed.

The value (31) of K_0 gives

$$E = \left(\frac{1 - \varepsilon \cdot \theta}{1 - \theta} \right)^{\alpha} = \zeta^{\alpha} \ . \tag{32}$$

On the other hand, according to equation (16)

$$\frac{d\varrho}{d\alpha} = n_0 \cdot \varepsilon \cdot K_0 \cdot E \cdot \left(\frac{1 - \varepsilon}{E - \varepsilon} \right)^2 .$$

i. e.

$$\frac{d\varrho}{d\alpha} = \varepsilon \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \frac{\zeta^{\alpha}}{(\zeta^{\alpha} - \varepsilon)^2} \cdot \log \zeta \ . \tag{33}$$

Evidently, where the complete segment is required to perform a certain degree of combing ($0 < \theta < 1$), the rate of noil removal will not be the same along the segment of constant needle-row characteristic of required value. At the front-row of the segment (where $\alpha = 0$), the rate of removal amounts to

$$\left| \frac{d\varrho}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{\varepsilon}{1 - s} \cdot \log \zeta = \frac{\varepsilon}{1 - s} \cdot \log \frac{1 - \varepsilon \cdot \theta}{1 - \theta} \ , \tag{34}$$

[12] Of course, constant needle-row characteristic does not nesessarily mean that the segment consists entirely of identical rows of needles. Between the values of z and d, parameters of the single needle-rows, and K_{ℓ}, evidently the following relations exist:

$$d = \frac{1}{z} - \frac{A \cdot \delta}{K_0} \qquad \text{I.}$$

and

$$z = \frac{1}{\frac{A\delta}{K_0} + d} \ . \qquad \text{II.}$$

Hence, both needle-row parameters may be variable functions of α, but any variation of either of them, whether given or perscribed, determines the variation of the other (according to I. or II).

The condition $K(\alpha) = K_0 = $ constant can, however, undoubtedly be most simply realized with the same needle-gauge and pitch throughout the entire segment.

at its end, (where $\alpha = 1$) to

$$\left| \frac{d\varrho}{d\alpha} \right|_{\alpha=1} = \varepsilon \cdot (1-\varepsilon) \cdot \frac{\zeta}{(\zeta-\varepsilon)^2} \cdot \log \zeta = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot (1-\varepsilon\cdot\theta) \cdot (1-\theta) \cdot \log \frac{1-\varepsilon\cdot\theta}{1-\theta}, \quad (34a)$$

so that the noilage load decreases from front to end of the segment.

Generally, the rate of the decrease is given by:

$$1 : (1-\varepsilon\cdot\theta) \cdot (1-\theta).$$

c) In virtue of equation (19) the *peripheral force* acting on the single needle bars of the segment

$$S = n_0 \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot (1-\varepsilon) \cdot \frac{\zeta^\alpha}{\zeta^\alpha - \varepsilon} \cdot \frac{\log \zeta}{n_0 \cdot (1-\varepsilon)},$$

that is

$$S = \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{\zeta^\alpha}{\zeta^\alpha - \varepsilon} \cdot \log \zeta. \quad (35)$$

Evidently, the peripheral force also varies for each needle-row, between the limits

$$S_{\alpha=0} = \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \log \frac{1-\varepsilon\theta}{1-\theta} \div S_{\alpha=1} = \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1-\varepsilon\theta}{1-\theta} \cdot \log \frac{1-\varepsilon\theta}{1-\theta}.$$

In general, the rate of the variation (decrease) may be expressed by the ratio: $1 : (1-\varepsilon\cdot\theta)$.

d) With the aid of the relations derived, the absolute *mechanical work* and its «*specific*» value can also be determined indirectly, for a check.

For doing so, equations (22a) and (23a) are to be employed, naturally substituting E from expression (32) in the form

$$E = \zeta^\alpha = \left(\frac{1-\varepsilon\cdot\theta}{1-\theta} \right)^\alpha. \quad (32\text{ bis})$$

First, the total mechanical work is

$$m = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \log \frac{E-\varepsilon}{1-\varepsilon} = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \log \frac{\zeta^\alpha - \varepsilon}{1-\varepsilon}. \quad (36)$$

Clearly, its value at $\alpha = 0$ will be $m = 0$, while at $\alpha = 1$:

$$m_{\alpha=1} = M = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \log \frac{\zeta-\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

or, by re-substituting ζ

$$M = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \log \frac{1}{1-\theta}. \quad (36a)$$

The value of the specific mechanical work (see equation 23a) for an initial section of the segment corresponding to the co-ordinate α, can be readily expressed as

$$m_0 = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\zeta^\alpha - \varepsilon}{\zeta^\alpha - 1} \cdot \log \frac{\zeta^\alpha - \varepsilon}{1-\varepsilon}. \quad (37)$$

The specific mechanical work done during the whole combing process can be directly written down as the value of m_0 from (37) computed for $\alpha = 1$, that is by substituting $\alpha = 1$ into equation (37), or by dividing directly equation (36a) by $\varrho_0 = \varepsilon \cdot \theta$:

$$M_0 = \frac{M}{\varepsilon\cdot\theta} = |m_0|_{\alpha=1} = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\varepsilon\cdot\theta} \cdot \log \frac{1}{1-\theta}. \quad (37a)$$

Thus, the generally valid equations written up in advance in par. (15) — (22 b/bis) and (23 b/bis) — have actually been arrived at.

e) Finally, it will be interesting to examine the distribution of the *mechanical work* over the various parts of the segment. Relevant in this respect are the differential quotients

$$\frac{dm}{d\alpha} \quad \text{and} \quad \frac{dm_0}{d\alpha} ,$$

respectively.

α) The first of these, viz. $\frac{dm}{d\alpha}$ yields essentially the peripheral force, the variation of which is known as a function of α (see equation 35). This variation gives at the same time the variation in the distribution of the total mechanical work. It can therefore be stated that in a segment of constant needle-row characteristic, the absolute mechanical work is not evenly distributed over the needle-rows, but it is larger at the front end of the segment than at its rear end.

β) As far as the distribution of the specific mechanical work is concerned, the variation of $\frac{dm_0}{d\alpha}$ shall be examined.

Differentiating equation (37) with respect to α — omitting mathematical details that are of no interest here — results in

$$\frac{dm_0}{d\alpha} = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\zeta^\alpha}{(\zeta^\alpha - 1)^2} \cdot \left[(\zeta^\alpha - 1) - (1 - \varepsilon) \cdot \log \frac{\zeta^\alpha - \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right] \cdot \log \zeta \tag{38}$$

or, in a different form :

$$\frac{dm_0}{d\alpha} = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot (\log \zeta) \cdot \frac{\zeta^\alpha \cdot \left[(\zeta^\alpha - 1) - (1 - \varepsilon) \log \frac{\zeta^\alpha - \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right]}{(\zeta^\alpha - 1)^2} . \tag{38a}$$

Like the absolute mechanical work, the specific combing work will not be evenly distributed over the individual needle-rows (or more accurately : along the segment) either.

Namely, at the front end of the segment, $(\alpha = 0)$ the value of $\frac{dm_0}{d\alpha}$ is

$$\frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\log \zeta}{1 - \varepsilon}$$ [13]

whereas at the rear end of it $(\alpha = 1)$:

$$s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\zeta}{(\zeta - 1)^2} \cdot \left[(\zeta - 1) - (1 - \varepsilon) \cdot \log \frac{\zeta - \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right] \cdot \log \zeta .$$

f) Naturally, the rational design of the segment cannot be guided merely by the simplicity of its mathematical treatment, as in the case of constant needle-row characteristic.

[13] When substituting $\alpha = 0$, (38a) will yield the indefinite form $\frac{0}{0}$. Substituting for simplicity x for ζ^α, expression (38a) can be written

$$\frac{dm_0}{d\alpha} = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot (\log \zeta) \cdot \frac{x \cdot [(x - 1) - (1 - \varepsilon) \cdot \log (x - \varepsilon) + (1 - \varepsilon) \cdot \log (1 - \varepsilon)]}{(x - 1)^2} =$$

$$= s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot (\log \zeta) \cdot \frac{f_1(x)}{f_2(x)} .$$

By applying the l'Hopital formula twice in succession, the fractional function $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ will yield at $x = 1$ (i. e. $\alpha = 0$) the value : $\left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|_{x=1} = \frac{1}{2(1 - \varepsilon)}$

One of the reasons why this could not be done is the substantial disadvantage of this kind of segments — indicated above — that their various needle-rows work under materially differing conditions due to the different degree of noil load and consequent clogging sustained by them, so that their basic function is performed under widely differing circumstances.

18. *Combing segment of uniform noilage loading.* For the above reason, in the following a segment will be discussed, each «needle-row», i. e. each element of which removes an equal amount of noil, so that its so-called *noilage load* is constant.

a) The basic mathematic formula expressing the above condition is :

$$\frac{d\varrho}{d\alpha} = \text{constant} = \eta\,, \tag{39}$$

i. e. first of all

$$\varrho = \eta \cdot \alpha\,^{14}\,. \tag{40}$$

Furthermore, as

$$\frac{d\varrho}{d\alpha} = \frac{d\varrho}{dE} \cdot \frac{dE}{d\alpha}\,,$$

and from equation (16b)

$$\frac{d\varrho}{dE} = \varepsilon \cdot \frac{1-\varepsilon}{(E-\varepsilon)^2}$$

it follows that

$$\left(\frac{d\varrho}{d\alpha} =\right) \eta = \varepsilon \cdot (1-\varepsilon) \cdot \frac{\dfrac{dE}{d\alpha}}{(E-\varepsilon)^2}\,.$$

Separating the variables:

$$\frac{\eta}{\varepsilon \cdot (1-\varepsilon)} \cdot d\alpha = \frac{dE}{(E-\varepsilon)^2}\,.$$

Integrating on the right side from $E = 1$ to $E = E$, and on the left side from $\alpha = 0$ to $\alpha = \alpha$:

$$\frac{\eta}{\varepsilon \cdot (1-\varepsilon)} \cdot \alpha = \left| \frac{1}{E-\varepsilon} \right|_E^1 = \frac{1}{1-\varepsilon} - \frac{1}{E-\varepsilon}\,,$$

hence

$$E = \varepsilon \cdot \frac{1-\eta \cdot \alpha}{\varepsilon - \eta \cdot \alpha}\,. \tag{41}$$

[14] Strictly speaking, $\varrho = \eta\alpha +$ *constant*, but as at $\alpha = 0$, $\varrho = 0$, the constant $= 0$.

Considering that E has been substituted for the expression

$$e^{n_0 \cdot (1-\varepsilon) \cdot \int_0^{\alpha} K(\alpha)\, d\alpha},$$

it follows :

$$n_0 \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \int_0^{\alpha} K(\alpha) \cdot d\alpha = \log \varepsilon \cdot \frac{1 - \eta \cdot \alpha}{\varepsilon - \eta \cdot \alpha}$$

and

$$K(\alpha) = \frac{1}{n \cdot (1 - \varepsilon)} \cdot \frac{d}{d\alpha} \log \varepsilon \cdot \frac{1 - \eta \cdot \alpha}{\varepsilon - \eta \cdot \alpha},$$

hence

$$K(\alpha) = \frac{\eta}{n_0} \cdot \frac{1}{(1 - \eta \cdot \alpha) \cdot (\varepsilon - \eta \cdot \alpha)}. \tag{42}$$

Naturally, the inverse method must also confirm this result. It should therefore be examined whether the value of $\frac{d\varrho}{d\alpha}$ is indeed constant. First let the value of ϱ be written according to equation (14). Using the value of E given in equation (41),

$$\varrho \left(= \varepsilon \cdot \frac{E - 1}{E - \varepsilon} \right) = \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon \cdot \frac{1 - \eta \cdot \alpha}{\varepsilon - \eta \cdot \alpha} - 1}{\varepsilon \frac{1 - \eta \cdot \alpha}{\varepsilon - \eta \cdot \alpha} - \varepsilon} = \eta \cdot \alpha \tag{43}$$

It will be seen that ϱ increases proportionately to α between 0 and η, and the factor of proportionality happens to be η, proving that $\frac{d\varrho}{d\alpha}$ is indeed constant and equal to η.

b) Also the *peripheral force* — S — acting on a single row of a segment working with a uniform noilage load can be easily determined.

By substituting the value of ϱ and $K(\alpha)$ obtained from equations (40) and (42) respectively into equation (19), we have

$$S = n_0 \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot (1 - \eta \cdot \alpha) \cdot \frac{\eta}{n_0} \cdot \frac{1}{(1 - \eta \cdot \alpha) \cdot (\varepsilon - \eta \cdot \alpha)} = \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\frac{\varepsilon}{\eta} - \alpha}. \tag{44}$$

As ratio $\frac{\eta}{\varepsilon}$ has been denoted before with τ_0[15], i. e. the degree of combing

[15] From the relation $\varrho = \eta \cdot \alpha$ the amount of the total specific noil (ϱ_0) is

$$\varrho_0 = |\varrho|_{\alpha=1} = \eta.$$

On the other hand,

$$\varrho_0 = \tau_0 \cdot \varepsilon.$$

Hence in fact

$$\tau_0 \cdot \varepsilon = \eta.$$

Accordingly, in the event of perfect combing ($\tau_0 = 1$),

$$\frac{d\varrho}{d\alpha} = \eta = \varepsilon.$$

for the complete process, equation (44) can be written as follows :

$$S = \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tau_0} - a} \,. \tag{44a}$$

c) In par. 14, the degree of combing performed by the whole segment has been specified in advance, to serve as basis for the design of the segment.

The predetermined degree of combing being $\tau_0 = \theta$, the combing force can be directly written from formula (44a) as function of θ, viz :

$$S = \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\theta} - a} \,. \tag{44b}$$

d) Similarly, the formula (42) for $K(a)$ can also be transcribed directly to

$$K(a) = \frac{1}{n_0} \cdot \frac{\theta}{(1 - \varepsilon \cdot \theta \cdot a) \cdot (1 - \theta \cdot a)} \,. \tag{42a}$$

Substituting the above value of $K(a)$ into the equation of condition (27) of par. 14, i. e. into relation

$$\int_0^1 K(a) \cdot da = \frac{1}{n_0 \cdot (1 - \varepsilon)} \cdot \log \frac{1 - \varepsilon \cdot \theta}{1 - \theta} \tag{27 bis}$$

one arrives indeed at an identity.[16]

[16] The value of the definite integral

$$\int_0^1 K(a) \cdot da = \frac{\theta}{n_0} \cdot \int_0^1 \frac{da}{(1 - \varepsilon \cdot \theta \cdot a) \cdot (1 - \theta \cdot a)}$$

can be determined in the following principal steps :

I. $$\frac{1}{(1 - \varepsilon \cdot \theta \cdot a) \cdot (1 - \theta \cdot a)} = \frac{A}{1 - \varepsilon \cdot \theta \cdot a} + \frac{B}{1 - \theta \cdot a}$$

where

II. $$A = -\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad B = \frac{1}{1 - \varepsilon} \,.$$

Hence

III. $$\int_0^1 K(a) \cdot da = \frac{\theta}{n_0} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon} \left\{ -\varepsilon \cdot \int_0^1 \frac{da}{1 - \varepsilon \cdot \theta \cdot a} + \int_0^1 \frac{da}{1 - \theta \cdot a} \right\}$$

$$= \frac{\theta}{n_0} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon} \left| \left[\frac{1}{\theta} \cdot \log (1 - \varepsilon \cdot \theta \cdot a) - \frac{1}{\theta} \cdot \log (1 - \theta \cdot a) \right] \right|_0^1$$

$$= \frac{1}{n_0 \cdot (1 - \varepsilon)} \left| \log \frac{1 - \varepsilon \cdot \theta \cdot a}{1 - \theta \cdot a} \right|_0^1 = \frac{1}{n_0 \cdot (1 - \varepsilon)} \log \frac{1 - \varepsilon \cdot \theta}{1 - \theta}$$

Accordingly, the function

$$K(\alpha) = \frac{1}{n_0} \cdot \frac{\theta}{(1 - \varepsilon \cdot \theta \cdot \alpha) \cdot (1 - \theta \cdot \alpha)}$$

determines in fact a segment capable to perform the combing of a material (characterized by n_0 and ε) to the desired degree θ.

e) The combing (peripheral) force yields at the same time — as has been pointed out above — also the differential quotient for α of the absolute mechanical combing work, so that in case of a required degree of combing for the whole process — θ —, formula (44b) yields

$$\frac{dm}{d\alpha} (= s \cdot S) = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\theta} - \alpha} . \tag{45}$$

Hence, neither the *combing work*, nor the peripheral force are constant along such a segment, but both increase from the front end of the segment to its rear end at the rate

$$1 : \frac{1}{1 - \theta} .$$

It will be seen that where highly perfect combing (i. e. of θ very close to 1) is required, both the combing force and the combing work will indefinitely increase towards the rear end of the segment, similarly to the value of $K(\alpha)$ in equation (42a).

f) The mechanical combing work — both in its absolute and specific value — necessary for obtaining a given degree of combing, can be written as follows :[17]

The absolute mechanical work of combing is, from equation (45)

$$m = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \int_0^{\alpha} \frac{\theta \cdot d\alpha}{1 - \theta \cdot \alpha}$$

that is

$$m = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \log \frac{1}{1 - \theta \cdot \alpha} . \tag{46}$$

[17] Naturally, the end results are known in advance, according to par. 14. (See equations 22b/bis and 23b/bis.)

The total absolute combing work done during the entire combing period ($\alpha : 0 \rightarrow 1$) is given by

$$M = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \log \frac{1}{1 - \theta} . \tag{46a}$$

It will be seen that where an extremely high degree of combing is required, the necessary mechanical work will increase without limit.

The *specific combing work* can be derived as the quotient of m given by formula (46) and of the value of $\varrho = \eta \cdot a = \varepsilon \cdot \theta \cdot a$, i. e.

$$m_0 \left(= \frac{m}{\varrho} \right) = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot \theta} \cdot \frac{1}{a} \cdot \log \frac{1}{1 - \theta \cdot a} . \tag{47}$$

At the front end of the segment, the value of the specific combing work will, by application of the l'Hopital principle, be

$$| m_0 |_{a=0} = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot \theta} , \tag{48a}$$

whereas at the rear end of the segment it is

$$| m_0 |_{a=1} = M_0 = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot \theta} \cdot \log \frac{1}{1 - \theta} . \tag{48b}$$

The above two values of the specific combing work are related in the ratio :

$$1 : \log \frac{1}{1 - \theta} .$$

Equation (48b) can also be written directly, by dividing equation (46) by $\varrho_0 = \varepsilon \cdot \theta$.

In this manner, we arrived again at the generally valid relations of par. 14 (22b/bis and 23b/bis).

g) In the following, two more aspects shall be discussed as bases for the design of combing segments, having considerable practical influence on the efficiency and economy of their operation.

19. *Segments of uniform combing force.*

a) The following requirement may serve as a basis for the rational design of combing segments :

The segment to be built, shall be so designed that each of its needle-rows be exposed to the same *combing force* (peripheral force) during combing.

The soldered joints of such a segment are subjected in each needle-row to the same force, consequently the joints are in each row uniformly stressed, and the segment itself is with respect of its soldered joints a *uniformly loaded* segment.

Another case of uniformly loaded segments will be dealt with later. (See par. 22 below.)

In mathematical formulation, the equation of condition for this kind of a segment is

$$S = \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{\frac{dE}{d\alpha}}{E - \varepsilon} = \text{constant} = \lambda_0 \qquad (19a/bis)$$

or, introducing the denotation

$$\frac{A}{\varkappa} \cdot \lambda_0 = \lambda \qquad (49)$$

in simpler form :

$$\frac{1}{E - \varepsilon} \cdot \frac{dE}{d\alpha} = \lambda .$$

Separating the variables and integrating (for E from 1 to E, for α from 0 to α), we have

$$E = \varepsilon + (1 - \varepsilon) \cdot e^{\lambda . \alpha} . \qquad (50)$$

Furthermore, from the relation

$$(E =) e^{n_0 . (1-\varepsilon) . \int_0^{\alpha} K(\alpha) . d\alpha} = \varepsilon + (1 - \varepsilon) \cdot e^{\lambda . \alpha}$$

$$K(\alpha) = \frac{1}{n_0} \cdot \frac{\lambda}{(1 - \varepsilon) + \varepsilon \cdot e^{-\lambda . \alpha}} . \qquad (51)$$

b) It is both interesting and worth while to determine first of all the *amount of noil* removed i. e. the function $\varrho = \varrho(\alpha)$ by means of the above value of $K(\alpha)$.

Substituting E from formula (50) into equation (14) giving ϱ we obtain

$$\varrho = \varrho(\alpha) = \varepsilon(1 - e^{-\lambda . \alpha}). \qquad (52)$$

Herefrom, the distribution of the noilage load along the segment

$$\frac{d\varrho}{d\alpha} = \varepsilon \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda . \alpha}, \qquad (53)$$

the rate of which decreases exponentially towards the rear end of the segment, starting from the value $\varepsilon \cdot \lambda$ (at $\alpha = 0$) and reaching to the rear end of the segment ($\alpha = 1$) the value of

$$\varepsilon \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda} .$$

Introducing the degree of combing (τ) we can write

$$\varrho = \tau \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot (1 - \varepsilon^{-\lambda \cdot \alpha}),$$

that is

$$\tau = 1 - \varepsilon^{-\lambda \cdot \alpha} \tag{54}$$

so that generally, from (51)

$$K(\alpha) = \frac{\lambda}{n_0} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon \cdot \tau} . \tag{55}$$

Naturally, both the absolute and specific combing work done by a segment working under constant combing force can be derived by means of equations (50) and (51), from formulae (22a), (22b), (23a) and (23b), either as a function of α or for the entire segment.

c) Prescribing — in accordance with the principle of design laid down in par. 14 — θ for the degree of combing in the complete combing process, equation (54) gives for the entire segment (i. e. for $\alpha = 1$)

$$\theta = 1 - e^{-\lambda}$$

i. e.

$$\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{A}{\varkappa} = \log \frac{1}{1 - \theta} \tag{56}$$

and

$$\lambda_0 = \frac{\varkappa}{A} \cdot \log \frac{1}{1 - \theta} . \tag{56a}$$

It will be seen that specifying the degree of combing (θ) and at the same time prescribing the combing force to remain constant, this constant value of the force itself — λ_0 — is by these two conditions wholly determined.

Consequently, in general, the value of the uniform combing force acting on the soldered joints of the needle bars cannot be prescribed at will (or more accurately : with respect to the strength of the soldered joints). In other words, in this respect the design is, in general, redundant. This was already indicated in a remark of par. 16.

Thus, the principle of segment design involving the maintaining of uniform load on the soldered joints can only be applied in practice where the constant load (λ_0) acting on the joints is appropriately prescribed. Hereafter, the degree of combing (θ) attainable with the total segment can be calculated by means of equation (56a), and finally the function $K(\tau)$ determined for this degree of combing as follows. (See expression 59.)

With the aid of the above value of λ, from expression (52)

$$\varrho = \varepsilon \cdot [1 - (1 - \theta)^{\alpha}] \tag{57}$$

and from expression (53)

$$\frac{d\varrho}{d\alpha} = \varepsilon \cdot (1 - \theta)^{\alpha} \cdot \log \frac{1}{1 - \theta}. \tag{58}$$

Using relations (56) and (56a) derived above, the variation of the needle-row characteristic of a segment working under constant combing force can be determined so that it should attain a given degree of combing (θ).

Namely, setting the value given by equation (56) into expression (51) for λ, we obtain

$$K(\alpha) = \frac{1}{n_0} \cdot \frac{\log \frac{1}{1 - \theta}}{1 - \varepsilon \cdot [1 - (1 - \theta)^{\alpha}]}.^{18} \tag{59}$$

Hence

$$K(0) = \frac{1}{n_0} \cdot \log \frac{1}{1 - \theta}, \qquad K(1) = \frac{1}{n_0} \cdot \frac{\log \frac{1}{1 - \theta}}{1 - \varepsilon \cdot \vartheta}$$

i. e. $K(\alpha)$ increases from the front end of the segment towards its rear end ; in general the rate of the increase is

$$\left(1 - \frac{1}{1 - \varepsilon \cdot \theta}\right) \times 100\,(\%)\,.$$

20. *Segment of uniform distribution of absolute combing work.* — According to formula (20), the peripheral force needed for the combing :

$$= \frac{1}{s} \cdot \frac{dm}{d\alpha}.$$

It is proportional to the first derivative for α of the total mechanical work performed in combing, and in the ratio 1: s it is identical with it. In other words, it is proportional to the variation with α of the total combing work. It follows from the above that the segment discussed in par. 19 functioning with a uniformly distributed combing force will, at the same time, be characterised by a uniform distribution of the combing work.

For such a segment,

$$\frac{dm}{d\alpha} = \text{constant} = \nu_0\,. \tag{60}$$

[18] It can be proved that this function $K(\alpha)$ satisfies the equation of condition (27), par. 14, so that such a segment actually gives a degree of combing θ on a material characterized by n_0, ε.

Of course, as referred to above, in general it is uncertain whether the λ_0 appropriate for this (otherwise constant for the entire segment) will have the prescribed value, or one usable at all.

a) Obviously, the problem of such a segment may be considered as solved by the results under par. 19.

Introducing for analogy the constant

$$\nu = s \cdot \frac{A}{\varkappa} \cdot \nu_0 \tag{60}$$

it will be seen that the two new constants — ν_0 and ν —are related respectively to constants λ_0 and λ of par. 19 according to

$$\left.\begin{aligned} \nu_0 &= \frac{1}{s} \cdot \lambda_0 \\ \nu &= \frac{1}{s} \cdot \lambda \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

b) Evidently, the expressions referring to a segment of uniform distribution of combing work are readily obtainable by writing $s \cdot \nu$ or $s \cdot \nu_0$ for λ or λ_0 in the corresponding formulae of par. 19.

Therefore, specifying the degree of combing to be obtained with the whole segment of uniform distribution of combing work to be θ, the following expression may be derived from equations (56a) and (62) for the determination of the constant ν_0 :

$$\nu_0 = s \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \log \frac{1}{1-\theta} \tag{63}$$

and naturally

$$\nu = \frac{1}{s} \cdot \log \frac{1}{1-\theta} . \tag{63a}$$

c) For an initial portion of the segment (for a given α) the absolute combing work done can be obtained directly from equation (60) as a trivial relation in the form

$$m = \nu_0 \cdot \alpha . \tag{64}$$

Accordingly,

$$M = \nu_0, \tag{64a}$$

therefore ν_0 is actually the entire, absolute combing work performed by such a segment. Evidently, the work done is proportional to α as a measure of the magnitude of the segment section performing the work.

21. *Comparison of the segments discussed.* The segments designed according to the four principles discussed in the above — each of which can be applied so as to give the same degree of combing — are obviously equivalent as far as the amount of combing work is concerned ; therefore, from this viewpoint, neither is superior to the rest.

In the use of a segment of constant needle-row characteristic, neither the peripheral force acting on the individual needle-rows, nor the rate of noil removal, nor the distribution of the mechanical work are constant.

The second type of segment, working under uniform noilage load, but with variable peripheral force, owing to which neither the combing work (whether absolute or specific) is uniformly distributed, has the advantage that, due exactly to the uniform noilage load, the needle rows become clogged and soiled by the noil uniformly. They grow unfit for proper combing at an even rate over the whole segment, so that none of the needle-rows is relatively overloaded or become more rapidly clogged leading to impure combing.

The loading of the needle rows of a segment working under uniform peripheral force (and similarly, where absolute mechanical work is uniformly distributed) is naturally constant. Consequently, as far as the loosening of the needles from their soldered joints in bulk is concerned, the single needle rows work under identical conditions throughout the whole segment. Individual needles are, however, exposed to differing degrees of loading, causing them to possibly break off, bend or wear. Nor are the rate of the noil removal and the specific combing work constant with this kind of segment.

22. *Determination of the specific number of needles and of their diameter in general ; segment having needles of equal strength.*

a) Naturally, by determining the function $K(\alpha)$ for the needle-row characteristic, the design of the segment is by no means complete. Next follows the determination of the specific number (per cm) of needles $z(\alpha)$ and of the needle diameter $d(\alpha)$ in the single needle-rows, both as functions of α.

b) The relation to start out from is evidently equation (7) and (9) defining the needle-row characteristic :

$$k(\alpha) = \frac{K(\alpha)}{A \cdot \delta} = \frac{z(\alpha)}{1 - z(\alpha) \cdot d(\alpha)}. \qquad (7\text{bis})$$

For the segments discussed, $k(\alpha)$ is known, inasmuch as the degree of combing τ_0 has been specified to be θ. Therefore, in order to determine the two unknowns — $z(\alpha)$ and $d(\alpha)$ — another relation should have to be found among the quantities in question.

c) Instead, the following method may also be applied.

In accordance with the usual procedure, let us assume $d(\alpha)$ to be *monotonously decreasing*, otherwise theoretically optional. In this manner, the needle diameters employed commonly should be so selected that the needles in the front row should be the thickest, and subsequent rows continuing the work of combing should be built of needles gradually finer in size.

By complying with the above, the variation of $z(\alpha)$ will be readily given by equation (7bis) in such a manner as to permit $k(\alpha)$ to meet additional re-

quirements underlying segment design, given in par. 16 and specified degree of combing θ.

A certain amount of practical sense, or some slight guesswork will invariably enable us to determine a serviceable variation of $z\,(\alpha)$ and $d\,(\alpha)$ as functions of α by the above method.

d) We can, however, adopt the course of setting up a further, rational relation for the two unknowns: $z\,(\alpha)$ and $d\,(\alpha)$. The basic principle herefor is the dimensioning of the needles for *equal strength*. That means that the needles in the various needle-bars of the segment should have such diameters that the bending stresses arising in the single needles should be the same over the entire segment.

Apart from wear resulting from superficial friction, the loading of the needles is primarily a bending moment due to the peripheral forces arising during combing. The needles can be regarded as long, encastered beams having relatively negligible cross-sectional dimensions — i. e. of negligible shearing stress, and of approximately prismatic form with circular cross sections.

As indicated in par. 13c above, we must distinguish between the load acting on a single needle (q) and the «peripheral» or «combing» force (S) that has been primarily discussed hitherto. The former is the z-th part of the latter, that is: $q = \frac{S}{z}$.

Whereas $q = \frac{S}{z}$ characterizes the stress in individual needles, S denotes the stress in the soldering seam joining the needles to the needlebars.

The principle of uniform strength which is now to be applied should be clearly distinguished from the principle underlying the design of segments of uniform combing (peripheral) force. In a certain sense, such segments are also of uniform strength, not, however, as far as their individual needles are concerned, but in respect of the soldered joints of the single needle-rows. Naturally, a segment of uniform strength in both respects is also imaginable.

In line with assumptions made in par. 13d the resultant (q) of the (peripheral, and frictional) bending forces acting on the individual needles, invariably attacks the needles at the same distance t, the arm of the bending moment measured from the needle sockets. Consequently, the bending moment is given by $q \cdot t = \frac{1}{z} \cdot S \cdot t$ and the maximum bending stress (σ) arising in a single needle, in accordance with the formula well known in statics:

$$\sigma = \frac{\frac{1}{z} \cdot S \cdot t}{\frac{1}{32} \cdot \pi \cdot d^3} \cdot \tag{65}$$

Substituting the value of S from equation (18)

$$\sigma = \frac{32}{\pi} \cdot \varkappa \cdot \delta \cdot n_0 \cdot t \cdot \frac{1-\varrho}{1-z \cdot d} \cdot \frac{1}{d^3}. \tag{65a}$$

Denoting the value of the prescribed bending stress desired to be constant, by p, and for the sake of brevity, the factor

$$\frac{32}{\pi} \cdot \varkappa \cdot \delta \cdot n_0 \cdot t = \frac{32}{\pi} \cdot 2a \cdot \beta \cdot \mu_1 \cdot \delta \cdot n_0 \cdot t$$

by ξ,

$$p = \xi \cdot \frac{1-\varrho}{1-z \cdot d} \cdot \frac{1}{d^3}. \tag{65b}$$

Equation (65b) combined with equation (7) will permit the determination of the values $z = z(\alpha)$ and $d = d(\alpha)$ at the various points of the segment, as functions of α. In the following, we shall discuss in detail the design of the single needle-rows of a segment of uniform noilage load only.

23. *Design of the individual needle-rows of a segment of uniform noilage load.*

To obtain a given degree of combing θ, the needle-row characteristic of a segment of uniform noilage load will, in virtue of equation (42a) and (7), be :

$$k(\alpha) = \frac{1}{A \cdot \delta \cdot n_0} \cdot \frac{\theta}{(1-\varepsilon \cdot \theta \cdot \alpha) \cdot (1-\theta \cdot \alpha)} = \frac{1}{\frac{1}{z} - d}. \tag{42a/bis}$$

a) The reciprocal value of the expression on the right gives the *width of the gap* — h — between the needles ; hence, the relation giving the variation of the size of the gap for such a segment is

$$h = h(\alpha) = n_0 \cdot \frac{A \cdot \delta}{\theta} \cdot (1-\varepsilon \cdot \theta \cdot \alpha) \cdot (1-\theta \cdot \alpha), \tag{66}$$

wherefrom

$$h = n_0 \cdot A \cdot \delta \cdot \left\{ \frac{1}{\theta} - (1+\varepsilon) \cdot \alpha + \varepsilon \cdot \theta \cdot \alpha^2 \right\}. \tag{66a}$$

According to this, the width of the gap in a segment of uniform noilage load decreases from the front to the rear end, as a quadratic function of the co-ordinate α.

The widest gap at the front of the segment is

$$h_0 = n_0 \cdot \frac{A \cdot \delta}{\theta}$$

whereas the narrowest gap at its rear end is :

$$h_1 = n_0 \cdot \frac{A \cdot \delta}{\theta} \cdot (1 - \theta) \cdot (1 - \varepsilon \cdot \theta).$$

(This is another evidence that for perfect combing, $\theta = 1$, the last needle row would have to be theoretically built with gaps of zero size, i. e. it would have to be «infinitely close set».)

The quadratic function (66a) giving the variation of h, i. e. of $\frac{1}{z} - d$ has a minimum value which, from the equation of condition

$$\frac{dh}{da} = n_0 \cdot A \cdot \delta \cdot \left\{ 2\varepsilon \cdot \alpha - (1 + \varepsilon) \right\} = 0 \tag{67}$$

lies at

$$\alpha = \frac{1}{2\theta}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{68}$$

i. e. generally outside the point $\alpha = 1$, (as $\theta \leq 1$ and $\varepsilon \leq 1$) and can only be located on the segment itself (more exactly at point $\alpha = 1$) when in relation

$$1 + \frac{1}{\varepsilon} = 2\theta \tag{68a}$$

$\varepsilon = 1$ and $\theta = 1$, in other words, the material consists of nothing but noil and this must be completely removed by combing. Namely, to each $\theta < 1$ pertain, from (68a), the absurd values of $\varepsilon > 1$, and vice versa, to each $\varepsilon < 1$ pertain values of θ larger than unity, which is likewise an absurdity.

At the place of the minimum — which lies generally outside the segment — the minimum value of the gap width, i. e. of the function $\frac{1}{z} - d$ is obviously

$$h_{\min} = n_0 \cdot A \cdot \delta \cdot \left\{ \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \right\} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\theta}{2} \right\}. \tag{69}$$

b) Following the procedure generally employed in practice, and assuming $d(\alpha)$ to *decrease monotonously* but otherwise at will, from equation (42a/bis) :

$$\frac{1}{z(\alpha)} = d(\alpha) + n_0 \cdot \frac{A \cdot \delta}{\theta} \cdot (1 - \varepsilon \cdot \theta \cdot \alpha) \cdot (1 - \theta \cdot \alpha) \ . \tag{70}$$

Accordingly, the reciprocal value of the number of needles per unit length — i. e. the pitch of the needles — consists of two addable members, each of which decreases with increasing α. (See remarks in connection with equation 66a). Therefore, the specific number of the needles increases, while the size of the gaps decreases monotonously in a segment of needles of growing fineness ; in other words, we arrive at the customary construction of segments.

c) If, on the other hand, the design of the segment is to follow the principle of equal strength, taking the value of $1 - \varrho$ from the relation $\varrho = \eta \cdot \alpha = \varepsilon \cdot \theta \cdot \alpha$, we ultimately get the form of equation (65b) applicable in this case to be :

$$p = \xi \cdot \frac{1 - \varepsilon \cdot \theta \cdot \alpha}{(1 - z \cdot d) \cdot d^3} \,. \tag{71}$$

Combining this with equation (42a/bis) given at the beginning of this paragraph, the resulting system of two equations

$$\left.\begin{aligned} p &= \xi \cdot \frac{1 - \varepsilon \cdot \theta \cdot \alpha}{(1 - z \cdot d) \cdot d^3} \\ A \cdot \delta \cdot \frac{z}{1 - z \cdot d} &= \frac{\theta}{n_0 \cdot (1 - \varepsilon \cdot \theta \cdot \alpha) \cdot (1 - \theta \cdot \alpha)} \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

enables us to theoretically determine both functions $z = z(\alpha)$ and $d = d(\alpha)$.

Multiplying the two equations under (72) with each other, and introducing for simplicity the denotation

$$\xi_0 = \xi \cdot \frac{1}{A \cdot \delta \cdot n_0 \cdot p} = \frac{32}{\pi} \cdot \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{t}{p} \; (> 0) \tag{73}$$

then

$$z \cdot d^3 = \xi_0 \cdot \frac{\theta}{1 - \theta \cdot \alpha}, \tag{74}$$

whence

$$z = \frac{\xi_0}{d^3} \cdot \frac{\theta}{1 - \theta \cdot \alpha} \,. \tag{75}$$

Substituting this into the second of the system of equations (72), and rearranging, a cubic equation in d is obtained, viz :

$$d^3 - \frac{1}{\frac{1}{\theta} - \alpha} \cdot \xi_0 \cdot d - A \cdot \delta \cdot \xi_0 \cdot \left(\frac{1}{\theta} - \varepsilon \cdot \alpha\right) = 0 \tag{76}$$

or more simply

$$d^3 - P(\alpha) \cdot d - Q(\alpha) = 0, \tag{76a}$$

where $P(\alpha)$ and $Q(\alpha)$ are positive, real quantities in the full range of $0 \leq \alpha \leq 1$.

From equation (76), the value of $d = d(\alpha)$ can be determined, and with the aid of it from (75) $z = z(\alpha)$ can be calculated.

c) If equation (76) has for each α in the range $0 \leq \alpha \leq 1$, at least one single positive, real solution for the needle diameter, the needles of the segment of uniform noilage load can be made of equal strength.

Generally speaking, the increasing or decreasing character of the needle fineness from the front to the rear end of the segment cannot be stated in advance, but depends on the actual value of $A \cdot \delta$ and ξ_0 (at a given degree of combing θ and at a given specific number of short

fibres ε). It is equally possible that a segment should perform its duty with a uniform noilage load while each of its needles is under the same bending stress, irrespective of their growing gradually finer or thicker along the segment.

Naturally, the specific number of needles — as shown in formula (75) — increases towards the rear end of a segment, the needles of which grow finer ; where the needles grow thicker, safe conclusions cannot be drawn from relation (75) only ; once more, it depends on the actual value of $A \cdot \delta$ and ξ_0 whether the specific needle number — $z(\alpha)$ — increases or decreases.

In either event, the segment itself will be of uniform noilage load, and will remove the desired rate θ of the full initial amount of short fibres, while the size of the gaps — h — will invariably decrease monotonously towards the rear end of the segment, in accordance with a quadratic parabola.

24. The procedure described in par. 22—23 above may be followed also when e. g. the segment works under uniform peripheral force — due to its design.

a) This time, the value of ϱ and $K(\alpha)$ must be substituted into expressions (65b) and (7) from equations (57) and (59) respectively. Thus, the system of equations governing the design for equal strength will be

$$\left.\begin{aligned} p &= \xi \cdot \frac{1-\varepsilon \cdot [1-(1-\theta)^{\alpha}]}{(1-z \cdot d) \cdot d^3} \\ A \cdot \delta \cdot \frac{z}{1-z \cdot d} &= \frac{1}{n_0} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon \cdot [1-(1-\theta)^{\alpha}]} \cdot \log \frac{1}{1-\theta}, \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

where ξ stands invariably for the factor $\frac{32}{\pi} \cdot \varkappa \cdot \delta \cdot n_0 \cdot t$. If, on the other hand, according to formula (76) $\xi_0 = \xi / A \cdot \delta \cdot n_0 \cdot p$, then multiplying the two equations with each other

$$z \cdot d^3 = \xi_0 \cdot \log \frac{1}{1-\theta}$$

that is

$$z = \frac{\xi_0}{d^3} \cdot \log \frac{1}{1-\theta} \cdot \tag{78}$$

Substituting this value of z into the first of equations (77), after rearrangement we get

$$d^3 - \left(\xi_0 \cdot \log \frac{1}{1-\theta}\right) \cdot d - A \cdot \delta \cdot \xi_0 \cdot \left\{1-\varepsilon \cdot [1-(1-\theta)^{\alpha}]\right\} = 0, \tag{79}$$

or in simpler form

$$d^3 - U \cdot d - V(\alpha) = 0, \tag{79a}$$

where U and V are positive, real quantities in the range $0 \leq \alpha \leq 1$.

Where the cubic equation (79) has at least one positive, real root for each value of α in the range $0 \leq \alpha \leq 1$, in other words, where $d = d(\alpha)$ is invariably a positive, real number within the range in question, $z = z(\alpha)$ will be a positive, real quantity along the whole segment. In this case, it is therefore theoretically possible to build a segment of uniform peripheral combing force, providing a degree of combing θ on a material having a noilage ratio ε, while each of its needles sustains the same bending stress. However, it is not certain whether such a segment can be actually constructed ; it might become necessary to give up the prescribed value of bending

stress — p — on the individual needles, the stress remaining otherwise the same throughout the segment.

b) The existence of positive, real roots of equation (79) implies that the segment designed for uniform peripheral force — that is to say, in a certain sense, for equal strength — can be made, at least in theory, for equal strength also concerning the stress in its individual needles.

c) If, on the other hand, following the method described in par. 22 c, i. e. chosing the function $d(\alpha)$ to be *monotonously decreasing*, but otherwise arbitrarily and abandoning the unconditional application of the principle of equal strength concerning the needles, it will be seen from the second of equations (77) that the value of $1/z$[19] consists of two addable members, each of which decreases monotonously in the range $0 \leq \alpha \leq 1$; viz. $d(\alpha)$ decreases owing to its choice, and the other member due to its structure. Accordingly, the number of the needles per unit length, in the single rows of a segment built of needles growing gradually finer towards the rear end, must be continuously increased ; that means that once again, we obtain the usual segment model, this time combing with uniform peripheral force, but having needles not generally equally stressed.

d) Merely by assuring that the peripheral force be uniform, it can be achieved (in principle) that the stress in the ***soldered*** (or otherwise fastened) joints of the needle rows on the needle bars should be the same all over the segment. In this manner, the probability of single rows of needles, or of certain sections of them, coming loose due to bending — one of the causes of the breakdown of segments — is the same over the entire segment.

If, therefore, the risk of certain needle-rows coming loose at their joints is greater than the risk of the bending or breaking of the needles themselves, it may be satisfactory to design the segment for uniform peripheral force only.

Viewed from this angle, the *soldered* (or otherwise fastened) *joints* of segments of uniform peripheral force are automatically of equal strength, their individual needles are, however, not. Pars. 24a and 24b deal precisely with the method of providing for this condition.

e) The joints of the single «needle-rows» of a segment of uniform noilage load are, in accordance with equation (44b) :

$$S = \frac{\varkappa}{A} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\theta} - \alpha} \qquad (44b/bis)$$

under gradually increasing stress, tending to separate or splint off a group of needles in bulk, for force S increases with growing α. Naturally, the more perfect combing is prescribed — i. e. the higher the value of θ — (practically of course, $\theta < 1$), the more rapid will be the increase of the peripheral force S, particularly in the vicinity of the rear end of the segment. In other words, the risk of the failure of the joints will grow towards the rear end of the segment, and will be the greatest on the last needle row.

[19] Namely, the equation in question can also be written in the form :

$$\frac{1}{z} = d + \frac{A \cdot \delta}{\log \frac{1}{1-\theta}} \cdot n_0 \cdot \left\{1 - \varepsilon \cdot [1 - (1-\theta)^{\alpha}]\right\}$$

25. For completeness, it should be mentioned that theoretically, it is possible to design even a segment of *constant needle-row characteristic* with needles of equal strength. The soldered joints of such a segment are, however, not uniformly stressed, just the same as with a segment of uniform noilage load ; in the former type of a segment, however, the joints of the front needle-row are subjected to greater stresses. (See equation (35)).

If a segment of constant needle-row characteristic is built up in such a way that the function $d(\alpha)$ is monotonously decreasing, but otherwise arbitrarily chosen, it is clear from relation

$$\frac{1}{z(\alpha)} = d(\alpha) + \frac{A \cdot \delta}{K(\alpha)} \tag{7/bis}$$

— where, by assumption $K(\alpha) = K_0 = \text{constant}$ — that the specific number of needles must be growing towards the rear end of the segment. This again is in accordance with the usual principle governing the construction of the segments.

26. *Practical calculations.* So far, we have employed the abstraction of an imaginary segment of an infinite number of needle-rows placed infinitely close to each other over a finite length of arc. In reality, segments have a finite number of needle rows. In the following, we wish to briefly demonstrate how calculations can be applied to real cases.

a) First we demonstrate the examination of the *conditions of an arbitrarily chosen segment* equipped with a *finite and given number of needle-rows* of known characteristics, with regard to the most important point, viz. the *amount of noil* (short fibres) removed by the single rows and by the entire segment respectively.

Let the number of the needle rows be m, and the needle diameters and the number of needles per unit length in the 1st, 2nd, 3rd, ...m-th needle-row :

$$d_1, d_2, \ldots d_k \ldots d_m \text{ and } z_1, z_2, \ldots z_k \ldots z_m$$

respectively. From the relation obtained from equations (7) and (9)

$$K_k = A \cdot \delta \cdot k_k = A \cdot \delta \cdot \frac{z_k}{1 - z_k \cdot d_k} = A \cdot \delta \cdot \frac{1}{\frac{1}{z_k} - d_k} \left(= A \cdot \delta \cdot \frac{1}{h_k} \right), \tag{80}$$

the value of $K_1, K_2, K_3 \ldots K_m$ can be readily computed (providing the factor A is experimentally determined, and besides the average fibre diameter — δ — in the tuft is known).

By applying in succession equation (6), the noil ratio combed out by the individual needle bars (i. e. the so-called noilage loads of the needle bars concerned) can be calculated.

The first needle bar — N° 1 — combs out

$$\Delta\varphi_1 = K_1 \cdot f_0 \cdot n_0 = K_1 \cdot \varepsilon \cdot n_0^2 \tag{6/1}$$

short fibres, the second needle bar an additional amount of

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi_2 &= K_2 \cdot f_1 \cdot n_1 = K_2 \cdot (f_0 - K_1 \cdot f_0 \cdot n_0) \cdot (n_0 - K_1 \cdot f_0 \cdot n_0) \\ &= K_2 \cdot f_0 \cdot n_0 \cdot (1 - K_1 \cdot n_0) \cdot (1 - K_1 \cdot f_0) \\ &= K_2 \cdot \varepsilon \cdot n_0^2 (1 - K_1 n_0) \cdot (1 - K_1 \cdot \varepsilon \cdot n_0).\end{aligned}\right\} \tag{6/2}$$

When the third needle bar comes into action, the total number of the remaining fibres is

$$n_2 = n_0 - \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = n_0 \cdot \left\{1 - f_0 [K_1 + K_2 \cdot (1 - K_1 \cdot n_0) \cdot (1 - K_1 \cdot f_0)]\right\}$$

from which the remaining number of short fibres amounts to

$$f_2 = f_0 - \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = f_0 \cdot \left\{1 - n_0 \cdot [K_1 + K_2 \cdot (1 - K_1 \cdot n_0) \cdot (1 - K_1 \cdot f_0)]\right\}$$

Therefore, the noil quantity removed by the third needle row

$$\Delta\varphi_3 = K_3 \cdot n_2 \cdot f_2 =$$

$$= K_3 \cdot n_0 f_0 \cdot \left\{1 - n_0 \cdot [K_1 + K_2 \cdot (1 - K_1 \cdot n_0) \cdot (1 - K_1 \cdot f_0)]\right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{1 - f_0 \cdot [K_1 + K_2 \cdot (1 - K_1 n_0) \cdot (1 - K_1 n_0) \cdot (1 - K_1 f_0)]\right\}$$

$$= K_3 \cdot \varepsilon \cdot n_0^2 \left\{1 - n_0 \cdot [K_1 + K_2 \cdot (1 - K_1 \cdot n_0)(1 - K_1 \cdot \varepsilon \cdot n_0)]\right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{1 - \varepsilon \cdot n_0 \cdot [K_1 + K_2 \cdot (1 - K_1 \cdot n_0) \cdot (1 - K_1 \cdot \varepsilon \cdot n_0)]\right\}.$$

The total number of fibres and the number of short fibres left over for the fourth needle row will be :

$$n_3 = n_0 - \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_3 = n_0 - \sum_{i=1}^{3} \Delta\varphi_i$$

$$f_3 = f_0 - \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_3 = f_0 - \sum_{i=1}^{3} \Delta\varphi_i = \varepsilon \cdot n_0 - \sum_{i=1}^{3} \Delta\varphi_i$$

therefore the noilage load on row No. 4 :

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi_4 &= K_4 \cdot n_3 \cdot f_3 = K_4 \cdot \left(n_0 - \sum_{i=1}^{3} \Delta\varphi_i\right) \cdot \left(f_0 - \sum_{i=1}^{3} \Delta\varphi_i\right) \\ &= K_4 \cdot n_0^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n_0} \cdot \sum_{i=1}^{3} \Delta\varphi_i\right) \cdot \left(\varepsilon - \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{3} \Delta\varphi_i\right).\end{aligned}\right\} \tag{6/4}$$

In general, the noilage load of needle bar N° k :

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi_k = K_k \cdot n_{k-1} f_{k-1} = K_k \cdot \left(n_0 - \sum_{i=1}^{k-1} \Delta\varphi_i\right) \cdot \left(f_0 - \sum_{i=1}^{k-1} \Delta\varphi_i\right) \\ = K_k \cdot n_0^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n_0} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \Delta\varphi_i\right) \cdot \left(\varepsilon - \frac{1}{n_0} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \Delta\varphi_i\right). \end{aligned}\right\} \quad (6/\mathbf{k})$$

Introducing the denotations $\Delta\varrho_i = \frac{\Delta\varphi_i}{n_0}$ and $\varrho_{k-1} = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{k-1} \Delta\varphi_i$ (to be interpreted similarly to $\varrho = \frac{1}{n_0} \cdot \varphi$ in par. 11), we can write, completely in formal concordance with equation (11)

$$\Delta\varphi_k = K_k \cdot n_0 \cdot (1 - \varrho_{k-1}) \cdot (\varepsilon - \varrho_{k-1}). \quad (6/\mathbf{k'})$$

b) It is clear that the values of

$$\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \Delta\varphi_3, \ldots \Delta\varphi_k, \ldots \Delta\varphi_m$$

or, after dividing by n_0, of their specific values : $\Delta\varrho_1, \Delta\varrho_2, \Delta\varrho_3, \ldots \Delta\varrho_k, \ldots \Delta\varrho_m$ thus obtained represent the distribution of the noilage load, i. e. its variation along the segment. The occurrence of extremely high values points at the heavy loading of the needle row involved, due to which it is apt to become clogged rapidly, whereas extremely low values indicate that the needle row concerned takes practically no part in the combing.

It is also clear that the sum $\sum_{i=1}^{m} \Delta\varphi_i$ yields the total number of short fibres removed by the whole segment, i. e. the entire noilage.

It is but incidentally that this sum agrees with the initial total number of the removable short fibres, f_0 ; in this case, combing is complete — $\tau_0 = 1$ — and to obtain this, the entire segment was necessary.

a) In general,

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta\varphi_i < f_0$$

that is, combing will not be complete and the degree of combing — τ_0 — will be

$$\tau_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \Delta\varphi_i}{f_0} < 1 .$$

β) On the other hand, it may happen that the noil removable by a needle-row, say the k-th is equal to the number of the entire amount of short fibres residual from the initial f_0, or eventually greater than that. In such a case, only the first $k - 1$ rows of the segment are fully active, the k-th needle-row itself is only partially loaded, while the remaining $m - k$ needle-rows are not needed for combing that particular material. It is self-evident that combing in such a case is perfect, i. e. $\tau_0 = 1$.

c) The inverse operation, i. e. the *design of the segment* in practice will be discussed only for a single type of segment, viz. that of uniform noilage load.

The method to be employed is as follows. The total number of short fibres to be removed (f_0) and the number of the needle-rows (m) are known. Obviously, each needle row must remove the $\frac{1}{m}$ part of the short fibres in order to meet the specified condition of uniform noilage load.

For the first needle-row

$$\frac{f_0}{m} = K_1 \cdot n_0 \cdot f_0 = K_1 \cdot \varepsilon \cdot n_0^2 \tag{81/1}$$

therefore its needle-row characteristic must be

$$K_1 = A \cdot \delta \cdot k_1 = \frac{1}{m \cdot n_0}. \tag{82/1}$$

For the second row, only a total of $n_0 - \frac{f_0}{m}$ fibres and $f_0 - \frac{f_0}{m}$ short fibres are left over; herefrom, however, the second row must also remove an additional $\frac{1}{m}$ part of the initial short fibres; thus we can write:

$$\frac{f_0}{m} = K_2 \cdot \left(n_0 - \frac{f_0}{m}\right) \cdot \left(f_0 - \frac{f_0}{m}\right) = K_2 \cdot \varepsilon \cdot n_0^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{m}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) \tag{81/2}$$

from which the necessary needle-row characteristic

$$K_2 = A \cdot \delta \cdot k_2 = \frac{1}{n_0 \cdot (m-1) \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{m}\right)}. \tag{82/2}$$

In this manner, the necessary values of characteristics for the consecutive needle-rows can be determined successively.

Generally, however, the characteristic can also be evaluated for any k-th needle-row directly. Namely, the remainder of the total number of fibres and of the short fibres is known from the circumstance that each of the $k - 1$ rows preceding k removed a $\frac{1}{m}$ part of the initial short fibres; accordingly

$$\frac{f_0}{m} = K_k \cdot \varepsilon \cdot n_0^2 \cdot \left(1 - \frac{k-1}{m} \cdot \varepsilon\right) \cdot \left(1 - \frac{k-1}{m}\right) \tag{81/k}$$

and so

$$K_k = A \cdot \delta \cdot k_k = \frac{1}{n_0 \cdot [m - (k-1)] \left[1 - (k-1)\frac{\varepsilon}{m}\right]}. \qquad (82/\mathrm{k})$$

For the last needle-row, obviously

$$K_m = A \cdot \delta \cdot k_m = \frac{1}{n_0 \cdot \left(1 - \frac{m-1}{m} \cdot \varepsilon\right)}. \qquad (82/\mathrm{m})$$

The members of the series of characteristics being known, we can proceed to evaluate the members of series $z_1, z_2, \ldots z_k \ldots z_m$, and $d_1, d_2, \ldots d_k, \ldots d_m$.

The simplest method is to assume a monotonously decreasing series of usual values for $d_1, d_2 \ldots d_m$, and then compute to it the members of the monotonously increasing series $z_1, z_2 \ldots z_m$.

In choosing the values of $d_1, d_2 \ldots d_m$, clearly, the average fibre diameter of the material to be combed should be borne in mind. For thick, coarse fibres, the values of d should be correspondingly greater than in case of fine fibres.

Naturally, it can be attempted to determine the needle diameters and the corresponding specific needle numbers by applying the principle of equal needle strength.

27. It seems indicated at this point, to make some comments on the last needle-row characteristic mentioned in par. 6, viz. the *free length* of the needles (l_0).

Evidently, the needles must be long enough to penetrate completely the tuft to be combed, without the needle bars themselves contacting its bottom layers, in order to allow the short fibres to get into frictional contact with the lateral surfaces of the needles only.

Therefore, naturally, the free needle length must at least be equal to the actual layer number of the tuft multiplied by the average fibre diameter. Expressed in the terms of formula (5a),

$$l_0 \geqslant r \cdot \delta = n \cdot \frac{\delta^2}{1 - z \cdot d} = n \cdot \frac{k}{z} \cdot \delta^2, \qquad (83)$$

where

$$n = n_0 \cdot (1 - \varrho).$$

The above formula is equally serviceable for examining the needle rows in an existing segment concerning the free needle length, and for the dimensioning of the needles in the design of segments.

Obviously, the above formula can be applied to a real combing segment consisting of a finite number of needle bars as well as to an idealized one having an infinite number of needle-rows. In the former case, n, z, and d (or n, z, and k respectively) must be known for the single needle-rows, whereas in the latter the quantities must be known as functions of the co-ordinate α.

28. In the above, we have introduced certain *factors* of proportionality considered as constants, *characteristic* in some respect *of the material* to be combed. The actual, numerical values of these must be experimentally determined in order to obtain values usable for the calculations described above.

In ultimate analysis, these factors are embodied in the following two :

1. factor of proportionality A first used in expressions (6) and (8), representing the specific combing effect of a needle-row ;

2. factor of proportionality $\varkappa$ defined by equation (17a) :

$\varkappa = 2.a.\beta.u_1$.

In the following, a brief comment is given of the principles of experiments for determining the values of the above two constants characterizing the material.

29. *Factor of the specific combing effect.* The following *experimental method* is recommended for determining the factor denoted by A.

The weight percentage of the noil — x — at the desired écartement for the material to be combed is first determined by means of the diagram of fibre length distribution.[20] Adjusting the comber for that écartement, and using a specially constructed segment with only one needle-row of appropriately chosen characteristic, the comber is put to work and the quantity of noil measured (in percentage of the weight : x').

In performing such experimental combings, it is advisable to stop the work of the top comb. It is true, that the «comb sliver» thus produced will be unusable as far as quality is concerned (it must be recombed), but the noil it yields will be exclusively the result of the function of the segment consisting of one needle-row, which was the sole purpose of the experiment.[21]

The noil percentage (x') established by direct measurement with the aid of an experimental segment having a single needle-row, combing — otherwise in the usual manner — over a comparatively long period related to the percentage value of the initial noilage will yield approximately the fraction of the total initial number of short fibres combed out by a single needle-row of known characteristic k. Thus, using the denotations introduced earlier,

[20] The total noil percentage (in weight) — x — of a fibre material can be approximately determined also by a common, regular combing with the specified écartement.

[21] For the approximate determination of the actual short fibre percentage of a fibre material to be combed (expressed as a weight percentage (x) with the aid of a common, normal combing process in lieu of the diagram of fibre length distribution, it is also advisable to stop the top comb and allow only the segment to work.

$$\frac{x'}{x} \cong \frac{\Delta\varphi}{f_0}. \tag{84}$$

However, according to formulae (6) and (7)

$$\Delta\varphi = A \cdot \delta n_0 \cdot f_0 \cdot k \qquad \left(k = \frac{z}{1 - z \cdot d}\right),$$

therefore

$$A = \frac{1}{n_0 \cdot \delta \cdot k} \cdot \frac{\Delta\varphi}{f_0} = \frac{1}{n_0 \cdot \delta \cdot k} \cdot \left(\frac{x'}{x}\right). \tag{85}$$

It should be mentioned that where the determination of A serves for control purposes, the single needle row of the experimental segment should be selected for practical purposes so that its characteristic data agree with those of the average needle row of the segment to be examined. This means that besides the same numerical values of the two needle row characteristics, also the pitch and the wire gauge of the needles (i. e. also the gap dimensions) should be the same.

The method outlined above involves the following sources of error :

a) In establishing the amount of noil combed out by a single needle-row, we calculated with the weight percentage of the noil (x', x) instead of the number of the fibres. As, however, the average length and diameter of the short fibres to be found in the tuft and the ones actually combed out will presumably show no essential difference, the error due to this source cannot be significant.

b) The actually removed noil (or rather its value in weight percentage x') contains also the neps removed by combing, although factor A has been meant to be specific only of the combing operation proper, i. e. of the removal of «short» fibres from a lap free from neps. Accordingly, the above experimental determination is the more accurate, the more the material to be combed is free from neps.

c) In the foregoing, we have tacitly assumed that the needles in the individual rows completely penetrate the tuft, further that the successive needle rows do not dislodge the fibres upward while penetrating into the tuft, so that not a single fibre escapes the combing action.

Due to the actual construction of the segments, in particular to the decreasing needle pitch in the successive needle rows and to the circumstance that the tuft is simultaneously combed by at least two needle rows, the chance of the fibres deviating upward is practically eliminated, so that no part of the tuft will be left uncombed.[22] Additional safety can be derived in this respect from a device dabbing the tuft in the last needle rows, which contain the most densely set and finest needles.

Where, however, combing is done by a single needle-row, the means preventing the tuft from deviating upwards are largely lacking, in other words, the needles of the single row may not completely penetrate the tuft ; consequently, some of the short fibres would certainly be left unremoved in the tuft.

To avoid this, and to prevent gross inaccuracy in the determination of the specific combing effect, it is advisable :

α) to work with as light feeding weight as possible,

β) to fit the single needle bar into the segment so that the dabbing mechanism could be operated during the experiment, and the tuft completely forced into the needle gaps, and intimate combing attained.

[22] The necessary condition herefor is that the needles should have a free length sufficient to pierce the tuft completely. In this connection reference is made to the general statements contained in par. 27.

30. *Experimental determination of the factor* $\varkappa$

From formula (18)

$$S = \varkappa \cdot \delta \cdot n \cdot k \qquad \left(= \varkappa \cdot \delta \cdot n_0 \cdot (1 - \varrho) \cdot \frac{z}{1 - z \cdot d} \right) \qquad (18/\text{bis})$$

the theoretic procedure follows obviously.

One of the grip jaws — say the upper one — of a tensile test apparatus, e. g. of a Schopper-pendulum type yarn testing device, must be adapted for nipping a sliver end hanging out to a free length corresponding to the écartement set on the comber. The sliver, a few centimetres in width, must be of the same material as the ones making up the tuft in the comber, and of equal specific fibre density[23] and weight per unit length.

Inserting the only needle bar of the experimental segment of par. 29 — of known and appropriately chosen needle-row characteristic (k) — between the lower grip jaws, the free end of the sliver must be placed by hand among the needles. Of course, while doing so, the lower grip jaws must be brought sufficiently close to the upper jaws.

When the testing apparatus is started, the single needle row begins to «comb» the gripped sliver end. The force (S) required herefor — i. e. the value of the combing force per unit width, — S — multiplied by the actual width (b) of the tuft in cm ($\mathbf{S} = S \cdot b$) is indicated on the dynamometer scale of the apparatus.

Multiplying formula (18/bis) on either side by the width of the nipped tuft b, the left side of the equation will yield the full force (S), on the right the product $n \cdot b$ gives the entire fibre number (**n**), so that

$$\varkappa = \left(\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{n}} \right) \cdot \frac{1}{\delta \cdot k} . \qquad (86)$$

As **n** (the total fibre number) can be calculated from the weight of the sliver per unit length and the average fibre diameter (δ), $\varkappa$ can be directly evaluated (k is naturally the needle-row characteristic).

Accuracy of the test results depends again on
α) the full penetration of the needles into the tuft, and on
β) fibre friction confined to the lateral surfaces of the needles only — according to the assumption in par. 8 — without the bottom of the needle gaps coming into contact with the fibres.

31. *Conclusions.* — In the introductory, the scope of this paper has been restricted to the examination of combing segments of Heilmann combers only.

In the author's opinion, the methods and principles underlying the treatment of the subject are easily adaptable to the examination of the processing of

[23] As defined in par. 8.

fibrous materials on any kind of device equipped with needles ; primarily to other straight combers, especially to their top combs and segments further to circular combers and heckler machines.

The principles worked upon are also adaptable for examining the conditions of all sorts of carding operations.

REFERENCES

Preu, R. : Die Kammgarnspinnerei. Berlin, G. Borntraeger, 1920.
Priestman, H. : Principles of Worsted Spinning. London, Longmans, Green & Co.
Barker, A. F. : Woollen & Worsted Spinning. New York, 1922.
Beaumont, R. : Woollen & Worsted. 4. ed. London, G. Bell. 1920.

SUMMARY

On the premises of certain obvious abstractions and restricting the notion of combing to the removal of fibres shorter than a pre-set length only, the author determines the number of layers in the sliver lap to be combed, and its variation during the process of combing, working on the assumption of a purely geometric fibre re-arrangement, i. e. at invariable specific fibre density, involving constant interfibre friction.

For simpler mathematical treatment, the notion of the idealized segment having an infinite number of needle-rows set infinitely close to each other is introduced. For this, the differential equation of the specific combing effect has been established. Integrating this, the author determines the specific amount of short fibres removed, the degree of combing attained, and the variation of the rate of short fibre — i. e. noil — removal along the segment.

The basic relation for the peripheral combing-force due to interfibre friction acting on the individual needle-rows and on the single needles respectively is described, and formulae giving the absolute mechanical combing work and its specific value — related to a unit of the noil removed — as well as their variation along the segment are derived.

The equation of condition of a segment yielding a pre-determined degree of combing has been deduced, and therefrom the relation between the combing work and the desired degree of combing derived.

Considering the rational design of segments, various types, viz. segments of constant needle row characteristic, of uniform noilage load, of uniform combing force, and of uniform absolute combing work are discussed, and a critical comparison of the four kinds of segments commented upon.

The basic principles determining the design specifications of needle rows (pitch and diameter of needles) have been dealt with and the principle of design of equal strength (with respect to the needles), primarily for segment of uniform noilage load is introduced.

The application of these calculations to segments of a finite number of needle rows are discussed, and finally the principle of experimental methods for determining the values of the two principal proportion factors figuring in the theoretic deductions is established.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ГРЕБНЕЙ НА ГРЕБНЕЧЕСАЛЬНЫХ МАШИНАХ СИСТЕМЫ ГЕЛЬМАНА

А. МОНОШТОРИ

Резюме

Автор после определенных очевидных идеализирующих предположений, или же при таком ограничении понятия гребнечесания, что гребнечесание означает только удаление элементарных волокон, которые короче некоторой определенной длины, определяет число слоев, образующих расчесываемого холста и изменение холста в процессе

расчесывания, а именно при предположении чисто геометрического характера перераспределения волокон, т. е. неизменной удельной плотности волокон и, таким образом, одновременно неизменного внутреннего трения ленты.

В интересах упрощения математической трактовки автор вводит идеализацию цилиндрических гребней с бесконечным рядом игл, на основе чего выводится дифференциальное уравнение удельного эффекта расчесывания. Интегрированием этого уравнения определяется удельное количество удаленных коротких волокон, далее степень расчеса (степень чистоты расчесывания), соответственно изменения этих факторов и темпа удаления гребенного очеса вдоль цилиндрических гребней.

Затем выводится основное уравнение для игловых рядов, выражающее величину усилия, действующего на одну единственную иглу, т. е. окружного (расчесывающего) усилия, возникающего вследствие внутреннего трения ленты, затем абсолютной и удельной, — т. е. падающей на единицу удаленного гребенного очеса, — механической работы расчесывания и соответственно их изменений — вдоль цилиндрических гребней.

Далее выводится уравнение насадки цилиндрических гребней, обеспечивающее необходимую степень расчеса, на основе чего выводятся зависимости между необходимой степенью расчесывания и работой расчесывания.

Затрагивается вопрос рациональных основных принципов расчета цилиндрических гребней, далее рассматриваются случаи цилиндрических гребней с неизменной характеристикой игольчатого ряда, работающих с неизменной нагрузкой гребенного очеса, неизменным усилием расчесывания, т. е. неизменной абсолютной работой расчесывания, затем дается их критическое сравнение.

Разбирается вопрос определения принципиальных основ отдельных показателей игольчатых рядов (число игл и толщина игл); вводится применение принципа равного сопротивления, и впервую очередь для случая цилиндрических гребней с равномерной нагрузкой по гребенному очесу.

Затем читатель знакомится с производством расчетов для случая цилиндрических гребней с конечным числом игольчатых рядов и, наконец, описывается принцип опытной методики определения двух ключевых постоянных, фигурирующих в теоретических выводах.

ÉTUDE THÉORIQUE DU PEIGNE ROTATOIRE DES PEIGNEUSES DU SYSTÈME HEILMANN

A. MONOSTORI

RÉSUMÉ

Après quelques suppositions idealisées, voire avec la limitation de la notion du peignage au simple écartement de fibres plus courtes d'une certaine longueur, le nombre des couches de la fourrure à peigner est déterminé, ainsi que la variation de ce nombre au cours du peignage. Ce calcul est fait à la base de la supposition d'un réarrangement purement géométrique des fibres, c'est à dire d'une densité spécifique de fibres invariable et ainsi d'une friction intérieure constante du ruban.

Pour un traitement mathématique simple l'auteur introduit l'idéalisation d'un peigne aux barres d' aiguilles d'un nombre et densité infinie, puis écrit l'équation differentielle de l'effet peigneur. Par l'intégration de cette dernière la quantité spécifique de fibres courtes écartées est déterminée, ainsi que le degré du peignage (degré de la propreté de peignage), resp. la variation de ces facteurs et de la mesure de l'écartement de la peignure le long du peigne rotatoire.

Pour les files d'aiguilles individuelles il exprime la force périférique peigneuse produite par la friction interne du ruban, puis le travail mécanique absolu et spécifique — c'est à dire référé à l'unité de la peignure écartée — ainsi que le changement de ces quantités le long du peigne rotatoire.

Il déduit l'équation conditionnelle du peigne rotatoire assurant le degré de peignage demandé, et de celle-ci les relations entre le travail et le degré de peignage demandé.

Les principes rationnels de dimensionnement du peigne rotatoire sont établis. Les cas du peigne aux caractéristiques de files d'aiguilles constantes, du peigne travaillant à une charge de peignure constante, et de même à force et travail de peignage uniforme sont traités et critiquement comparés.

Après avoir traité des principes de la détermination des paramètres individuels des files d'aiguilles (nombre et épaisseur des aiguilles) il introduit le principe de la résistance uniforme ce dernier spécialement pour le cas du peigne rotatoire à une charge de peignure uniforme.

L'exécution du calcul sur des peignes rotatoires réels, c'est à dire à un nombre fin de barres d'aiguilles est présentée. Finalement l'auteur décrit la méthode de principe de détermination expérimentale des deux constantes clefs des déductions théoriques.

THEORETISCHE UNTERSUCHUNG DER ARBEIT DES RUNDKAMMES BEI KÄMMASCHINEN SYSTEM HEILMANN

A. MONOSTORI

ZUSAMMENFASSUNG

Nach gewissen selbstverständlichen idealisierenden Annahmen bzw. nach Einschränkung des Begriffes »Kämmen« auf das Entfernen der sog. Kurzfasern wird die Anzahl der das zu kämmende Vlies bildenden Schichten und ihre Veränderung während des Kämmens bestimmt, u. zw. bei Annahme einer rein geometrischen Umordnung der Fasern, d. h. einer unveränderten spezifischen Faserndichte und somit einer ständigen inneren Bandreibung.

Zur Vereinfachung der mathematischen Behandlung wird eine Idealisierung des Rundkammes mit unendlich vielen, unendlich dicht nebeneinander gesetzten Nadelreihen eingeführt, für die dann die Differentialgleichung der spezifischen Kämmwirkung aufgestellt wird. Durch Integrieren dieser Gleichung werden die spezifische Menge der ausgekämmten Kurzfasern (Kämmlinge), das Mass der Auskämmung (der Reinheitsgrad des Kämmens) bzw. die Änderungen dieser Werte sowie des Ausmasses der Entfernung der Kurzfasern längs des Rundkammes bestimmt.

Des weiteren werden die Gleichungen für die auf die einzelnen Nadelreihen wirkende, aus der inneren Reibung des Bandes herrührende Tangentialkraft bzw. für die absolute und spezifische — also auf die Einheit der entfernten Kurzfasern bezügliche — mechanische Kämmarbeit bzw. für deren Änderungen längs des Rundkammes aufgestellt.

Es wird die Bedingungsgleichung für den eine gewünschte Auskämmung gewährleistenden Rundkamm hergeleitet, wonach aus dieser die Zusammenhänge zwischen der Kämmarbeit und dem festgesetzten Mass der Auskämmung gewonnen werden.

In der Abhandlung werden die rationellen Grundlagen der Bemessung der Rundkämme erörtert und die Fälle des Rundkammes mit konstanter Nadelreihencharakteristik, mit konstanter Kämmlingsbelastung, mit konstanter Tangentialkraft bzw. mit konstanter absoluter Kämmarbeit behandelt und kritisch miteinander verglichen.

Die Abhandlung befasst sich ferner mit den prinzipiellen Grundlagen der Bestimmung der einzelnen Nadelreihenkennzahlen (Nadelzahl und Nadelstärke) und führt dann die Anwendung des Grundsatzes der gleichförmigen Belastung ein, u. zw. in erster Linie für den Fall des Rundkammes mit konstanter Kämmlingsbelastung.

Schliesslich wird die Durchführung der Berechnungen bei Rundkämmen mit endlicher Nadelreihenzahl geschildert und die prinzipielle Versuchsmethode der Bestimmung der in den theoretischen Ableitungen vorkommenden zwei Schlüsselkonstanten beschrieben.

INFLUENCE OF SERIES CAPACITORS ON THE OPERATION OF SYNCHRONOUS MACHINES

F. CSÁKI

INSTITUTE FOR THE THEORY OF OPERATION OF ELECTRICAL MACHINERY, UNIVERSITY OF TECHNICAL SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received 23rd June, 1954]

The equations of the synchronous machine, developed by *Park* [1] and by *Goriev* [2] have been extended by *Crary* [3] and by *Levinstein* [4] for the case where there is a capacitance in the armature circuit of the machine. Both authors have considered in the first place a synchronous machine on the rotor of which there is only one winding : the field winding.

The present paper further develops the theory of the system consisting of a synchronous machine and a series capacitor : 1) the fundamental equations are reduced to a simpler, clearer and more intuitive form ; 2) the influence of the amortisseur is considered, not only that of the field winding ; 3) by the use of various simplifications, an attempt is made to give a generalized solution.

1. Assumptions

Our investigations will concern the «idealized two-pole synchronous machine», as defined by literature [1, 2]. We do not take into account iron saturation and hysteresis. We assume the stator provided with a symmetrical three-phase Y-connected winding. On the rotor, we imagine the magnetic circuit and all windings to be symmetrical with respect to both the direct axis d, being in line with the pole axis, and the quadrature axis q, which is at right angles to it. We suppose that the current of any winding produces in the air gap a space wave of mmf which is sinusoidal. Any mmf wave may be resolved into components along the two axes. The various components of the mmf produce flux waves of the same direction distributed also sinusoidally. In salient-pole machines permeance is different along the two axes. In the calculations we will employ the widely used system of relative units.

In addition to these generally accepted assumptions, we assume that on the rotor are placed, besides the field winding in the direct axis, one amortisseur in the direct axis and another in the quadrature axis. After *Kron* [5] and *Adkins* [6], we assume that the mutual inductances between any two of the following: the stator winding, the excitation circuit and the direct-axis amor-

tisseur are *equal* : L_{ad}. In the quadrature axis the mutual inductance is L_{aq}, in a salient-pole machine $L_{aq} \neq L_{ad}$. The total inductance of each circuit will be expressed as the sum of the mutual and of the leakage inductance.

Moreover, we make three further assumptions :

In contradiction to the theory of the synchronous machine, and in accordance with Hungarian literature [7], we choose the positive direction of the flux linkage, the voltage and the current to be the same. (E. g. Ohm's law will be expressed by $u = ir$ and not by $u = -ir$.) If the sign of the voltage and of the current is the same, the sign of power is positive, it means power taken from the mains, power consumed. Negative power means power delivered to the mains.

The anti-clockwise direction of rotation is taken as positive : the rotor rotates in this direction. The order of the phase coils is a, b, c. The positive direction of the quadrature axis q is 90° ahead of the positive direction of the d axis, the succession of the axes is therefore d, q.

Finally, in this paper the synchronous angular frequency $\omega_0 \neq 1$, and accordingly time is measured in seconds and not in radians. In this way the physical meaning of the equations is better visualized (we avoid such inconvenient equations like $u = \psi$ etc.). In consequence, we distinguish between reactance x and inductance L, so the operational inductance will be $l(p)$ instead of $x(p)$.

We also remark that instead of the Laplace-transformation we use Heaviside's operational calculus.

2. Fundamental equations of the system consisting of a synchronous machine and a series capacitor

If in the armature circuit of a synchronous machine there is a series capacitor immediately after the machine terminals, the phenomena in the stator circuits are described by the following equations :

$$u_m = p\psi_m + r\, i_m + \frac{1}{Cp}\, i_m \qquad (m = a, b, c) \tag{1}$$

where u = phase voltage behind the series capacitor
ψ = total flux linkage in one stator phase (u, ψ, i are instantaneous values)
i = phase current
a, b, c subscripts refer to the three phases
C = series capacitance
r = resistance (r and C are equal in each of the three phases)
p = derivative operator
$\frac{1}{p}$ = integrating operator

The voltage equation of the rotor circuits is:

$$u_n = p\psi_n + r_n i_n$$

$$(n = f, h, k), \tag{2}$$

where f subscript refers to the field winding
h « « « « direct-axis amortisseur
k « « « « quadrature-axis amortisseur

As the inductances which provide connections between the flux linkages ψ and the currents i are, in general, periodic functions, the system of equations (1) and (2) leads to differential equations with variable coefficients. Just for this reason is it useful to transform the quantities in the phases a, b, c, expressed in a stationary system of co-ordinates, to the system of co-ordinates d, q, 0 rotating partly with the rotor.

If v is an arbitrary variable: $v = u, \psi, i$, the *Park—Goriev* transformation can be written in the form of a vector equation:

$$\underline{v_R} = \underline{\underline{S}}\,\underline{v_S} \tag{3}*$$

or

$\underline{v_R} = \underline{\underline{S}}\underline{v_S}$	v_a	v_b	v_c
v_d	$\frac{2}{3}\cos\theta$	$\frac{2}{3}\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$	$\frac{2}{3}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$
v_q	$-\frac{2}{3}\sin\theta$	$-\frac{2}{3}\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$
v_0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(3)

where $\underline{v_S}$ is the vector in the stationary system of co-ordinates a, b, c:

$$\underline{v_S} = \left| v_a \;\middle|\; v_b \;\middle|\; v_c \right| \tag{4}$$

and $\underline{v_R}$ the vector written in the partially rotating system of co-ordinates d, q, 0:

$$\underline{v_R} = \left| v_d \;\middle|\; v_q \;\middle|\; v_o \right| \tag{5}$$

* Simple underlining signifies a vector, double underlining a tensor.

The tensor $\underline{\underline{S}}$ of transformation is :

$$\underline{\underline{S}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{2}{3}\cos\theta & \frac{2}{3}\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{2}{3}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \hline -\frac{2}{3}\sin\theta & -\frac{2}{3}\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\frac{2}{3}\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline \end{array} \tag{6}$$

The angle θ is the one between the axis of the stator phase a and the axis d of the rotor : $\theta = \theta_0 + \omega t$, where ω is an arbitrary but *constant* angular velocity.

Knowing the quantities d, q and 0, the quantities a, b, c may be determined by the inverse transformation :

$\underline{v_S} = \underline{\underline{R}}\underline{v_R}$	v_d	v_q	v_o
v_a	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	1
v_b	$\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$	$-\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$	1
v_c	$\cos\left(\theta + \frac{2}{3}\right)$	$-\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$	1

(7)

The tensors $\underline{\underline{S}}$ and $\underline{\underline{R}}$ of these equations are the inverse of each other : $\underline{\underline{SR}} = \underline{\underline{RS}} = \underline{\underline{I}}$. The fundamental equations of the synchronous machine itself with the use of the transformation (3), and expressed in co-ordinates, have been given by *Park* and *Goriev* (with somewhat different symbols) as follows [1, 2] :

$$\begin{aligned} u_d &= p\psi_d - \omega\psi_q + r\,i_d \\ u_q &= p\psi_q + \omega\psi_d + r\,i_q \\ u_o &= p\psi_o + r\,i_o. \end{aligned} \tag{8}$$

The relation between the six flux linkages and the six currents may now be expressed by constant inductances :

$\underline{\psi}=\underline{\underline{L}}\underline{i}$	i_d	i_f	i_h	i_q	i_k	i_o
ψ_d	$L_{ad}+L_s$	L_{ad}	L_{ad}			
ψ_f	L_{ad}	$L_{ad}+L_f$	L_{ad}			
ψ_h	L_{ad}	L_{ad}	$L_{ad}+L_h$			
ψ_q				$L_{aq}+L_s$	L_{aq}	
ψ_k				L_{aq}	$L_{aq}+L_k$	
ψ_o						L_0

(9)

where L_s is the leakage inductance of the stator, L_f that of the field circuit, L_h that of the direct-axis amortisseur, L_k that of the quadrature-axis amortisseur. L_{ad} and L_{aq} are the mutual inductance in the direct and in the quadrature axis respectively ; L_0 is the zero sequence inductance.

Crary [3] generalizes the system of equations (8) for the case of a series capacitor inserted in the armature circuit of the synchronous machine, in the following form :

$$
\begin{aligned}
& p\,(u_d - p\psi_d + \omega\psi_q - r\,i_d) - \\
& - \omega\,(u_q - p\psi_q - \omega\psi_d - r\,i_q) - \frac{1}{C}\,i_d = 0 \\
& p\,(u_q - p\psi_q - \omega\psi_d - r\,i_q) + \\
& + \omega\,(u_d - p\psi_d + \omega\psi_q - r\,i_d) - \frac{1}{C}\,i_q = 0 \\
& p\,(u_o - p\psi_o - r\,i_o) - \frac{1}{C}\,i_0 = 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

In this form the u_d, u_q, u_0 voltage components are included implicitely, so there is little resemblance with the fundamental equation of the synchronous machine (8), and it is difficult to give a physical interpretation of the system of equations (10).

It is just for that reason that in this paper we bring the system of equations (10) in a form which is much better visualized. Let us divide all three equations by p :

$$(u_d - p\psi_d + \omega\psi_q - r\,i_d) -$$

$$- \frac{\omega}{p}(u_q - p\psi_q - \omega\psi_d - r\,i_q) - \frac{1}{Cp}\,i_d = 0$$

$$(u_q - p\psi_q - \omega\psi_d - r\,i_q) +$$

$$+ \frac{\omega}{p}(u_d - p\psi_d + \omega\psi_q - r\,i_d) - \frac{1}{Cp}\,i_q = 0$$

$$u_o - p\psi_0 - r\,i_0 - \frac{1}{Cp}\,i_0 = 0.$$

The third equation may be considered to be of definite form. We multiply the second equation by $\frac{\omega}{p}$ and add it to the first; then we multiply the first equation by $-\frac{\omega}{p}$ and add it to the second one. The two equations obtained in this way are multiplied by $p^2/(p^2 + \omega^2)$ and with the exception of the voltages u_d and u_q all members are brought to the right side:

$$u_d = p\psi_d - \omega\psi_q + r\,i_d + \frac{p}{C(p^2+\omega^2)}\,i_d + \frac{\omega}{C(p^2+\omega^2)}\,i_q$$

$$u_q = p\psi_q + \omega\psi_d + r\,i_q + \frac{p}{C(p^2+\omega^2)}\,i_q - \frac{\omega}{C(p^2+\omega^2)}\,i_d \qquad (12)$$

and furthermore

$$u_0 = p\psi_0 + r\,i_0 + \frac{1}{Cp}\,i_0.$$

The advantages of the system of equations (12) are: 1) the voltage components u_d, u_q, u_0 are contained in explicit form. 2) the system of equations (8) of the synchronous machine itself may be obtained immediately by substituting $\frac{1}{C} = 0$, so the change brought about by the series capacitor is thrown into relief, 3) the character of the different voltage components is clearly seen.

E. g. in the first equation:

$p\psi_d$ = induced voltage component produced by the direct-axis currents

$-\omega\psi_q$ = direct-axis voltage component produced by the quadrature-axis currents through rotation

$\frac{p}{C(p^2+\omega^2)}$ = capacitive voltage component produced by current i_d

$\frac{\omega}{C\ (p^2+\omega^2)}$ = capacitive voltage component produced by current i_q in the d axis, as a consequence of rotation

$r\,i_d$ = ohmic voltage component as a result of the current i_d.

The second equation may be interpreted in quite a similar manner.

It may be proved (see appendix 1) that the system of equations (12) is identical with the vector equation

$$\underline{u_R} = \underline{\underline{S}}\,p\,\underline{\underline{R}}\,\underline{\psi_R} + r\,\underline{i_R} + \underline{\underline{S}}\,\frac{1}{Cp}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{i_R} \tag{14}$$

written in co-ordinate form, which latter results from the vector equation

$$\underline{u_S} = p\,\underline{\psi_S} + r\,\underline{i_S} + \frac{1}{Cp}\ \underline{i_S}. \tag{13}$$

Furthermore, it can be proved that the first two lines of the equation system (12) are the real form of the complex equation

$$\overline{u_R} = (p + j\omega)\,\overline{\psi_R} + r\,\overline{i_R} + \frac{1}{C(p+j\omega)}\,\overline{i_R} \tag{16}*$$

which is resemblant to the equation

$$\overline{u_S} = p\overline{\psi_S} + r\,\overline{i_S} + \frac{1}{Cp}\,\overline{i_S}. \tag{15}$$

For all these reasons, the equations (12) must be considered to be the generalization of (8).

Making use of the flux-linkages equations (9) and with the aid of (12) and (2), the fundamental relation of the system formed by the synchronous machine and the series capacitor may be given as follows :

* A bar placed over a letter denotes a complex quantity.

$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{Z}}\,\underline{i}$	i_d	i_f	i_h	i_q	i_k	i_0
u_d	$r + p(L_{ad}+L_s) + \frac{p}{C(p^2+\omega^2)}$	pL_{ad}	pL_{ad}	$-\omega(L_{aq}+L_s) + \frac{\omega}{C(p^2+\omega^2)}$	$-\omega L_{aq}$	
u_f	pL_{ad}	$r_f + p(L_{ad}+L_f)$	pL_{ad}			
u_h	pL_{ad}	pL_{ad}	$r_h + p(L_{ad}+L_h)$			
u_q	$\omega(L_{ad}+L_s) - \frac{\omega}{C(p^2+\omega^2)}$	ωL_{ad}	ωL_{ad}	$r + p(L_{aq}+L_s) + \frac{p}{C(p^2+\omega^2)}$	pL_{aq}	
u_k				pL_{aq}	$r_k + p(L_{aq}+L_k)$	
u_0						$r + pL_0 + \frac{1}{Cp}$

(17)

By substituting $\frac{1}{C} = 0$ in the above relations, the fundamental relation of the non-compensated synchronous machine itself may be got immediately.

Starting from the fundamental relation (17), one may discuss any state of operation of a system formed by a synchronous machine and a series capacitor.

For practical calculations the fundamental relation (17) may be simplified considerably. During balanced operation the zero-sequence quantities are zero, therefore the last line and the last column may be neglected. As in most cases only the phenomena in the stator are of interest, it is useful to eliminate the currents i_f, i_h, i_k. If from the second and third line of (17) we calculate the currents i_f and i_h and then substitute them in the first line of (9), ψ_d may be written in the following way :

$$\psi_d = l_d(p)\, i_d + G(p)u_f + H(p)u_h \,. \tag{18}$$

In a similar way, i_k may be calculated from the penultimate line of (17) and substituted in the fourth line of (9) :

$$\psi_q = l_q(p)i_q + K(p)u_k \,. \tag{19}$$

The amortisseurs are short-circuited : $u_h = 0$, $u_k = 0$. In many cases we may neglect, in first approximation, the effect of the voltage regulator of the machine, thus $G(p)u_f = 0$. Thence

$$\psi_d = l_d(p)i_d \tag{18*}$$

$$\psi_q = l_q(p)i_q \,. \tag{19*}$$

If we substitute the expressions (18*) and (19*) in the first two lines of (12), the fundamental relations of the system formed by a synchronous machine nd a series capacitor may be stated as follows :

$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{Z}}\underline{i}$	i_d	i_q
u_d	$pl_d(p) + r + \frac{p}{C(p^2+\omega^2)}$	$-\omega l_q(p) + \frac{\omega}{C(p^2+\omega^2)}$
u_q	$\omega l_d(p) - \frac{\omega}{C(p^2+\omega^2)}$	$pl_q(p) + r + \frac{p}{C(p^2+\omega^2)}$

(20)

By substituting $\frac{1}{C} = 0$, we get from (20) the fundamental relation of the synchronous machine itself. Equation (20) is its generalization for the case of the series capacitor.

Before applying the fundamental equations (17) and (20), we will introduce the equivalent circuit of the system formed by a series capacitor and a synchronous machine, and we will make some remarks concerning the operational impedances $l_d(p)$, $l_q(p)$.

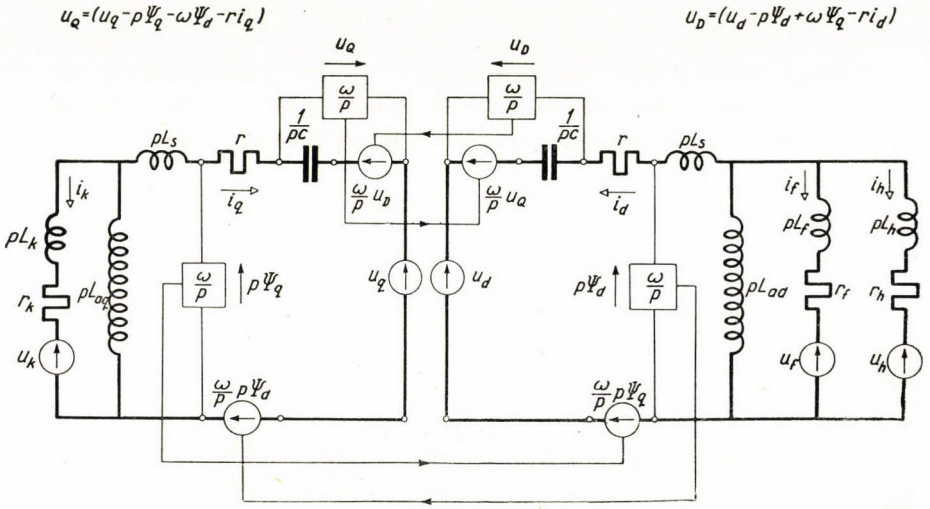


Fig. 1

3. Equivalent circuit of the system consisting of a synchronous machine and a series capacitor

Starting from the first two equations of the system of equations (9), the equivalent circuit of the system in question may be established (Fig. 1). The circles signify voltage sources of zero internal resistance, the squares signify amplifiers. The amplifiers integrate, and amplify ω-times. We assume that the voltage across the amplifier output terminals does not react on the input terminal voltages.

The direct-axis and quadrature-axis circuits are connected fourfold. If we traced the equivalent circuit of the synchronous machine itself, we would find there only a double connection. It is regrettable that Fig. 1 is extraordinarily complicated and hardly suitable for drawing any conclusions. But it gives indeed the complete synthesis, for transient state, of the system consisting of a salient-pole synchronous machine and a series capacitor, and the quantities involved therein e. g. pL, R, $\frac{1}{Cp}$ have a direct physical meaning.

4. The operational inductances

For solving the fundamental equation (20), one must know the values of the operational inductances $l_d(p)$, $l_q(p)$.

The quadrature-axis operational inductance may be given in the following form [6, 8]:

$$l_q(p) = \frac{x_q}{\omega_0} \cdot \frac{p\,T''_q + 1}{p\,T''_{q0} + 1} = \frac{p\,T''_{q0}\,x''_q + x_q}{pT''_{q0} + 1}. \tag{21}$$

For the direct-axis operational inductance we find in the literature, e. g. [8], the following expression (with somewhat different symbols):

$$\omega_0 l_d(p) = x_d - \frac{p^2\,(x_{hh}\,x_{af}^2 - 2\,x_{fh}\,x_{ah}\,x_{af} + x_{ff}\,x_{ah}^2) + p\,(x_{af}^2\,r_h + x_{ah}^2\,r_f)}{p^2\,(x_{hh}\,x_{ff} - x_{fh}^2) + p\,(x_{hh}\,r_f + x_{ff}\,r_h) + r_h\,r_f}.$$

But this expression is by far too complicate and not suitable for practical calculations. In analogy to (21), *Adkins* [6], gives a simple approximate expression:

$$l_d(p) \approx \frac{x_d}{\omega_0} \cdot \frac{(p\,T''_d + 1)\,(pT'_d + 1)}{(p\,T''_{dc} + 1)\,(pT'_{d0} + 1)}. \tag{22}$$

In this paper the direct-axis operational inductance is given in the following form (see appendix 2):

$$l_d(p) = \frac{x_d}{\omega_0} \cdot \frac{p^2\,T''_d\,T'_d + p\,(T'_d + T') + 1}{p^2\,T''_{d0}\,T'_{d0} + p\,(T'_{d0} + T'_0) + 1} \tag{23}$$

or else

$$l_d(p) = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{p^2\,T''_{d0}\,T'_{d0}\,x''_d + p\,(T'_{d0}\,x'_d + T'\,x_d) + x_d}{p^2\,T''_{d0}\,T'_{d0} + p\,(T'_{d0} + T'_0) + 1}. \tag{24}$$

Although this expression is somewhat more complicate than the one given by *Adkins*, it is more exact, theoretically more correct, and may be used even in the case when the time constant of the direct-axis amortisseur T'_0 is of the same order of magnitude as the time constant T'_{d0} of the field circuit. If T'_0 is by orders of magnitude smaller than T'_{d0}, then $T'_0 \approx T''_{d0}$, $T' \approx T''_d$ substitutions provide the means to pass to the simpler equation (22) at any latter step.

5. Steady-state operation

The steady-state equations may be got from the fundamental relation (17) in the following way : the zero-sequence values may be neglected, because of balanced operation ; $\omega = \omega_0$ because the machine is rotating synchronously. The amortisseurs are short-circuited, thus $u_h = 0$, $u_k = 0$. Let us substitute $p = 0$ in (17) ; from the second line we get :

$$u_f = r i_f. \tag{25}$$

Let us introduce by means of

$$\omega_0 L_{ad}\, i_f = \omega_0 \psi_p = u_p \tag{26}$$

the concepts of pole flux ψ_p and pole voltage u_p. Taking into account (26), we get from the first and fourth lines of (17) :

$$u_{d0} = r\, i_{d0} - (x_q - x_c) i_{q0} \tag{27}$$

$$u_{q0} = (x_d - x_c)\, i_{d0} + r i_{q0} + u_p,$$

where $x_c = \dfrac{1}{C\omega_0}$ and $x_d = \omega_0(L_{ad} + L_s)$, $x_q = \omega_0(L_{aq} + L_s)$. Comparing equations (27) with the non-compensated case, we see that the influence exerted by the series capacitor is shown by the fact that the reactances x_d and x_q are replaced with the reactance-differences $x_d - x_c$ and $x_q - x_c$. From (27) the current components are

$$\begin{aligned} i_{d0} &= \frac{r\, u_{d0} + (x_q - x_c)\,(u_{q0} - u_p)}{r^2 + (x_d - x_c)\,(x_q - x_c)} \\ i_{q0} &= \frac{-(x_d - x_c)\, u_{d0} + r\,(u_{q0} - u_p)}{r^2 + (x_d - x_c)\,(x_q - x_c)}. \end{aligned} \tag{28}$$

If δ_0 is the phase angle between the voltage behind the series capacitor (not the terminal voltage of the machine) and the pole voltages u_p, so :

$$\begin{aligned} u_{d0} &= u_0 \sin \delta_0 \\ u_{q0} &= u_0 \cos \delta_0. \end{aligned} \tag{29}$$

If in the known power formula (e. g. [8])

$$P = i_{d0}\, u_{d0} + i_{q0}\, u_{q0} + 2 i_0\, u_0 \tag{30}$$

we substitute the expressions (28) and take into account (29),

$$P = - \frac{u_p u_0 [(x_q - x_c) \sin \delta_0 + r \cos \delta_0] - u_0^2 r + \frac{1}{2} u_0^2 (x_d - x_q) \sin 2\delta_0}{r^2 + (x_d - x_c)(x_q - x_c)} . \quad (31)$$

By neglecting the resistance r of the stator we get

$$P = - \left[\frac{u_p u_0}{x_d - x_c} \sin \delta_0 + \frac{1}{2} u_0^2 \left(\frac{1}{x_q - x_c} - \frac{1}{x_d - x_c} \right) \sin 2\delta_0 \right] . \quad (31^*)$$

This expression differs from the usual power formula of course again by the presence of $x_d - x_c$ and $x_q - x_c$ in the places of x_d and x_q, respectively.

Let us further define the voltage components behind the sub-transient reactances in the usual manner :

$$\begin{aligned} u_d'' &= - (x_q - x_q'') \, i_{q0} \\ u_q'' &= u_p + (x_d - x_d'') \, i_{d0} . \end{aligned} \quad (32)$$

Taking into account (32), we obtain from (27) :

$$\begin{aligned} u_{d0} &= r \, i_{d0} - (x_q'' - x_c) \, i_{q0} + u_d'' \\ u_{q0} &= (x_d'' - x_c) \, i_{d0} + r \, i_{q0} + u_q'' \end{aligned} \quad (33)$$

and from (33) the current components :

$$\begin{aligned} i_{d0} &= \frac{r (u_{d0} - u_d'') + (x_q'' - x_c)(u_{q0} - u_q'')}{r^2 + (x_d'' - x_c)(x_q'' - x_c)} \\ i_{q0} &= \frac{- (x_d'' - x_c)(u_{d0} - u_d'') + r (u_{q0} - u_q'')}{r^2 + (x_d'' - x_c)(x_q'' - x_c)} . \end{aligned} \quad (34)$$

These expressions will be needed later on.

6. Self-excitation of the synchronous machine

If there is a capacitor in the armature circuit of a synchronous machine self-excitation may occur. In literature this problem has been treated in detail (e. g. [3, 4] etc.) In this paper we will examine the influence of the amortisseurs on the range of self-excitation.

The question of self-excitation can be decided by examining the determinant $Z(p)$ of the tensor $\underline{\underline{Z}}$ appearing in the fundamental equation (20) :

$$Z(p) = \left[p\, l_d(p) + r + \frac{p}{C(p^2+\omega_0^2)} \right] \left[p\, l\ (p) + r + \frac{p}{C(p^2+\omega^2)} \right] + \\ + \left[\omega_0 l_d(p) - \frac{\omega_0}{C(p^2+\omega_0^2)} \right] \left[\omega_0\, l_q(p) - \frac{\omega_0}{C(p^2+\omega_0^2)} \right] \tag{35}$$

here we have written everywhere ω_0 in the place of ω because we examine a machine which is rotating synchronously.

Let us substitute in the equation (35) the operational inductances according to (21) and (24); after resolving and introducing $q = \frac{p}{\omega_0}$ as a new variable we get :

$$Z(q) = \frac{P_7(q)}{Q_5(q)},$$

where $P_7(q)$ is a polynomial of the seventh and $Q_5(q)$ a polynomial of the fifth degree, which have no common factor.

If the equation $P_7(q)=0$ has a right-hand side root (the real part of which is positive), self-excitation will occur. The coefficients of the polynomial

$$P_7(q) = a_0 q^7 + a_1 q^6 + a_2 q^5 + a_3 q^4 + a_4 q^3 + a_5 q^2 + a_6 q + a_7$$

are :

$$a_0 = \omega_0^3\, T'_{d0}\, T''_{d0}\, T''_{q0}\, x''_d\, x''_q$$

$$a_1 = \omega_0^3\, T'_{d0}\, T''_{d0}\, T''_{q0}\, (x''_d + x''_q)\, r + \\ + \omega_0^2\, T'_{d0}\, T''_{d0}\, x''_d\, x_q + \omega_0^2\, T'_{d0}\, T''_{q0}\, x'_d\, x''_q + \omega_0^2\, T'\, T''_{q0}\, x_d\, x''_q$$

$$a_2 = \omega_0^3\, T'_{d0}\, T''_{d0}\, T''_{q0}\, [2x''_d\, x''_q + (x''_d + x''_q)\, x_c + r^2] + \\ + \omega_0^2\, T'_{d0}\, T''_{d0}\, (x''_d + x_q)\, r + \omega_0^2\, T'\, T''_{q0}\, x_d\, r + \\ + \omega_0^2\, T'_0\, T''_{q0}\, x''_q\, r + \omega_0^2\, T'_{d0}\, T''_{q0}\, (x'_d + x''_q)\, r + \\ + \omega_0\, T'_{d0}\, x'_d\, x_q + \omega_0\, T'\, x_d\, x_q + \omega_0\, T''_{q0}\, x_d\, x''_q$$

$$a_3 = \omega_0^3\, T'_{d0}\, T''_{d0}\, T''_{q0}\, [(x''_d + x''_q)\, r + 2x_c\, r] + \\ + \omega_0^2\, T'_{d0}\, T''_{d0}\, [2x''_d\, x_q + (x''_d + x_q) x_c + r^2] + \\ + \omega_0^2\, T'_{d0}\, T''_{q0}\, [2x'_d\, x''_q + (x'_d + x''_q) x_c + r^2] + \\ + \omega_0^2\, T'\, T''_{q0}\, [2x_d\, x''_q + x_d\, x_c] + \omega_0^2\, T'_0\, T''_{q0}\, [x''_q\, x_c + r^2] + \\ + \omega_0\, T'_{d0}\, (x'_d + x_q)\, r + (\omega_0\, T'\, x_d + \omega_0\, T'_0\, x_q)\, r + \omega_0\, T''_{q0}\, (x_d + x''_q)\, r + x_d\, x_q$$

$$
\begin{aligned}
a_4 = {} & \omega_0^3\, T'_{d0}\, T''_{d0}\, T''_{q0}\, [(x''_d - x_c)(x''_q - x_c) + r^2] + \\
& + \omega_0^2\, T'_{d0}\, T''_{d0}\, [(x''_d + x_q) r + 2x_c\, r] + \omega_0^2\, T'_{d0}\, T''_{q0}\, [(x'_d + x''_q) r + 2x_c\, r] \\
& + \omega_0^2\, T'\, T''_{q0}\, x_d\, r + \omega_0^2\, T'_0\, T''_{q0}\, [x''_q\, r + 2x_c\, r] + \\
& + \omega_0\, T'_{d0}\, [2x'_d\, x_q + (x'_d + x_q) x_c + r^2] + \\
& + \omega_0\, T''_{q0}\, [2x_d\, x''_q + (x_d + x''_q) x_c + r^2] + \\
& + \omega_0\, T'\, [2x_d\, x_q + x_d\, x_c] + \omega_0\, T'_0\, [x_q\, x_c + r^2] + (x_d + x_q) r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_5 = {} & \omega_0^2\, T'_{d0}\, T''_{q0}\, [(x'_d - x_c)(x''_q - x_c) + r^2] + \\
& + \omega_0^2\, T'_{d0}\, T''_{d0}\, [(x''_d - x_c)(x_q - x_c) + r^2] + \\
& + \omega_0^2\, T'\, T''_{q0}\, x_d\, (x''_q - x_c) + \omega_0^2\, T'_0\, T''_{q0}\, [x_c\, (x_c - x''_q) + r^2] + \\
& + \omega_0\, T'_{d0}\, [(x'_d + x_q)\, r + 2x_c\, r] + \omega_0\, T''_{q0}\, [(x_d + x''_q)\, r + 2x_c\, r] + \\
& + \omega_0\, T'\, x_d\, r + \omega_0\, T'_0\, [x_q\, r + 2x_c\, r] + 2x_d\, x_q + (x_d + x_q)\, x_c + r^2
\end{aligned}
\tag{36}
$$

$$
\begin{aligned}
a_6 = {} & \omega_0\, T'_{d0}\, [(x'_d - x_c)(x_q - x_c) + r^2] + \\
& + \omega_0\, T''_{q0}\, [(x_d - x_c)(x''_q - x_c) + r^2] + \\
& + \omega_0\, T'\, [(x_q - x_c) x_d] + \omega_0\, T'_0\, [x_c(x_c - x_q) + r^2] + (x_d + x_q + 2x_c)\, r
\end{aligned}
$$

$$
a_7 = (x_d - x_c)(x_q - x_c) + r^2
$$

Before passing to the examination of the polynomial $P_7(q)$, let us investigate how it degenerates if we consider only one winding on the rotor of the machine, the field winding. This case is derived from the general case by writing zero in the place of all time constants except $T'_{d0} \cdot P_7(q)$ is then simplified to a fifth degree polynomial (which is given by [3]):

$$
P_5(q) = b_0 q^5 + b_1 q^4 + b_2 q^3 + b_3 q^2 + b_2 q + b_5 \tag{37}
$$

The coefficients of this polynomial are simpler:

$$
b_0 = \omega_0\, T'_{d0}\, x'_d\, x_q
$$

$$
b_1 = \omega_0\, T'_{d0}\, (x'_d + x_q)\, r + x_d\, x_q
$$

$$
b_2 = \omega_0\, T'_{d0}\, [2x'_d\, x_q + (x'_d + x_q) x_c + r^2] + (x_d + x_q)\, r
$$

$$
b_3 = \omega_0\, T'_{d0}\, [(x'_d + x_q)\, r + 2x_c\, r] + 2x_d\, x_q + (x_d + x_q) x_c + r^2
$$

$$
b_4 = \omega_0\, T'_{d0}\, [(x'_d - x_c)(x_q - x_c) + r^2] + (x_d + x_q + 2x_c)\, r
$$

$$
b_5 = (x_d - x_c)(x_q - x_c) + r^2
$$

In order to settle the question of self-excitation, we must find out whether $P_7(q) = 0$ or $P_5(q) = 0$ respectively, has a right-hand side root. The general

solution, in explicit form, of seventh or fifth degree equations is impossible; although there are known approximate methods for computing the roots, practically they can be used only if the coefficients of the equation are arithmetical numbers. But without computing the roots, we may decide the question with the aid of the Routh—Hurwitz criterion (this criterion gives the necessary and sufficient condition for the existence of right-hand side roots). But the coefficients of the equations are now so complicated that we cannot draw generalized conclusions even from the Hurwitz chain of determinants, because we should have to calculate the sixth or fourth order determinants respectively, formed by the coefficients of the equations. This way is thus not practicable either.

In the present case we must be contented with the sufficient condition for self-excitation: if amongst the coefficients of the equation there is but a single negative one, a right-hand side root exists. With this the investigation of the self-excitation is greatly simplified, although we do not get all possible domains of self-excitation.

By the way we must remark that *Crary*, in his investigations regarding a machine with a single rotor winding [3] has greatly simplified the coefficients of the $P_5(q)$ polynomial for special cases, by substituting $r = 0$, $T'_{d0} = 0$ and $T'_{d0} = \infty$, respectively; and thus it has become possible to make use of the complete Routh—Hurwitz criterion. However, the result for these two cases is the same as that which we derive here in a considerably simpler way from the said sufficient condition. This sufficient condition makes possible that the much more complicate case of the machine with amortisseurs can be examined at all.

Before turning to the examination of the coefficients of $P_7(q)$ and $P_5(q)$, we communicate the typical parameters of a turbine-generator and of a hydrogenerator (Table I). The time constants and the reactances have been calculated from the formulae of appendix 2.

Amongst the coefficients of $P_7(q)$ or $P_5(q)$, respectively, the first four are always positive. Thence we get in the general case four, and by neglecting the amortisseurs, two conditions for self-excitation. Let us examine these conditions in greater detail:

1. The last coefficient will be negative in both cases, if

$$(x_d - x_c)(x_q - x_c) + r^2 < 0 \tag{38}$$

i. e.

$$x_c^2 - x_c(x_d + x_q) + x_d x_q + r^2 < 0 \tag{38a}$$

or

$$\left[x_c - \frac{1}{2}(x_d + x_q)\right]^2 + r^2 < \left[\frac{1}{2}(x_d - x_q)\right]^2. \tag{38b}$$

If with constant x_d and x_q we consider r as an independent and x_c as a dependent variable, so from a geometrical point of view this condition may be interpreted, on the basis of (38b), as follows:

TABLE I

Typical parameters of generators

	Hydro-generator with amortisseur	Turbine-generator
x_{ad}	1,00	1,60
x_{aq}	0,60	1,55
x_s	0,20	0,10
x_f	0,25 p. u.	0,125 p. u.
x_h	0,12	0,04
x_k	0,20	0,07
r_f	0,001	0,001
r_h	0,02 p. u.	0,003 p. u.
r_k	0,03	0,003
x_d	1,20	1,70
x'_d	0,40	0,216
x''_d	0,275	0,13
x_q	0,80 p. u.	1,65 p. u.
x''_q	0,35	0,187
x_2	0,31	0,15
T'_{d0} ($\omega_0 T'_{d0}$)	3,98 sec (1250 rad)	5,5 sec (1725 rad)
T'_d ($\omega_0 T'_d$)	1,33 sec (417 rad)	0,71 sec (222 rad)
T'_0 ($\omega_0 T'_0$)	0,178 sec (56 rad)	1,74 sec (547 rad)
T' ($\omega_0 T'$)	0,046 sec (14,3 rad)	0,142 sec (44,7 rad)
T''_{d0} ($\omega_0 T''_{d0}$)	0,051 sec (16 rad)	0,166 sec (52 rad)
T''_d ($\omega T''_d$)	0,035 sec (11 rad)	0,1 sec (31,4 rad)
T''_{q0} ($\omega T''_{q0}$)	0,085 sec (26,7 rad)	1,72 sec (540 rad)
T''_q ($\omega_0 T''_q$)	0,037 sec (11,7 rad)	0,174 sec (54,7 rad)

If the point with the abscissa $r > 0$ and the ordinate $x_c > 0$ is situated within the half-circle whose center is $\left(0, \frac{1}{2}(x_d + x_q)\right)$ and whose radius is $\frac{1}{2}(x_d - x_q)$, self-excitation will occur (Fig. 2).

It is worth mentioning that the condition $a_7 < 0$, $b_5 < 0$ is of exactly the same shape. This domain of self-excitation is therefore not influenced at all by the amortisseur. As the time constants are not involved at all in the

condition (38), this kind of self-excitation may occur even in the case of an open field circuit ($T'_{d0} = 0$).

2. Let us examine the penultimate coefficients. Neglecting the amortisseur, the condition for self-excitation is expressed by

$$b_4 < 0.$$

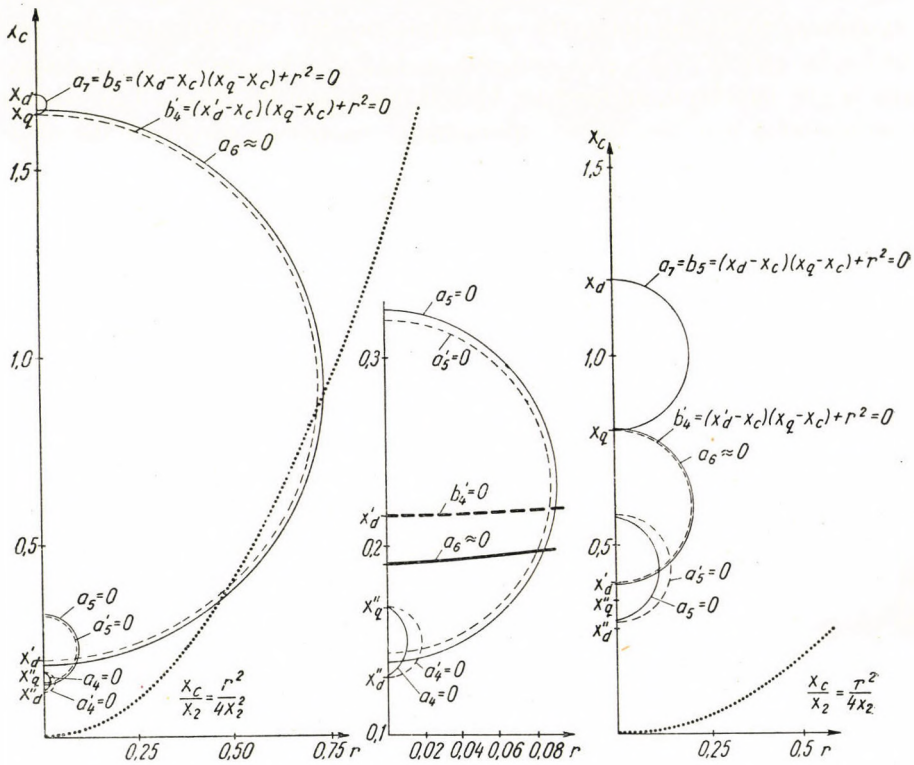


Fig. 2

As in the case of larger machines the value of $\omega_0 T'_{d0}$ is of the order of thousands, the condition $b_4 < 0$ may very well be approximated by

$$b'_4 = (x'_d - x_c)(x_b - x_c) + r^2 < 0. \tag{39}$$

This is of the same composition as (38), the difference is only that the part played by x_d is taken over by x'_d. For self-excitation, the point with the coordinates $r > 0$, $x_c > 0$ now must not be within the half-circle drawn above the diameter connecting the points $(0, x_d)$ and $(0, x_q)$, but within the half-circle determined by the points $(0, x'_d)$ and $(0, x_q)$ (Fig. 2).

It should be remarked that (39) defines a somewhat greater self-excitation range than $b_4 < 0$. While the latter unequality is the sufficient condition for self-excitation, $b'_4 < 0$ is no longer that. The exact limit of self-excitation computed from the Routh—Hurwitz criterion certainly does not enter the domain determined by $b_4 < 0$, but it might penetrate into the half-circle determined by $b'_4 < 0$. Strictly speaking, from the approximate condition (39) one may therefore not draw conclusions to self-excitation. But considering that $b_4 < 0$ and $b'_4 < 0$ delimit approximately the same domain, the simpler condition (39) may be used practically very well, and only at the points located in the immediate vicinity of the half-circle defined by $b'_4 = 0$ must care be taken. This remark refers in a similar way also to the approximate conditions which are discussed later on.

Now let us examine the penultimate coefficient of $P_7(q)$. The condition

$$a_6 < 0$$

appears to be very complicate and differs strongly from the condition $b_4 < 0$. But as the time constant $\omega_0 T'_{d0}$ of the field circuit is far greater than the other time constants, the difference will not be important.

E. g. with the characteristics of Table I for the hydro-generator:

$$b'_4 = (x_c - 0{,}600)^2 + r^2 - (0{,}200)^2,$$

while

$$a_6 \approx (x_c - 0{,}602)^2 + r^2 - (0{,}208)^2.$$

For the turbine-generator:

$$b'_4 = (x_c - 0{,}933)^2 + r^2 - (0{,}717)^2,$$

while

$$a_6 \approx (x_c - 0{,}925)^2 + r^2 - (0{,}734)^2.$$

The difference is hardly worth mentioning.

We may thus conclude that the damping coil or amortisseur has no practical influence on this domain of self-excitation.

3. If we neglect the amortisseur, we do not get more sufficient or approximate conditions for self-excitation. But if we take it into account, so

$$a_5 < 0$$

furnishes a new condition. It is regrettable that this condition may not be brought to a form as simple as the former one. With regard to the order of magnitude of the time constants, for a first approximation it will be sufficient, with a hydro-generator, to consider the first two rows of a_5, and with a turbine-

generator, the first four rows of a_5. The half-circles $a'_5 = 0$ calculated this way are shown with broken lines on Fig. 2, while the exact borderline $a_5 = 0$ is such an ellipse with very small excentricity, the axes of which are at an angle of nearly 45° to the r and x_c axes, while its center is somewhat to the left of the x_c axis (Fig. 2, full line).

4. Let us examine finally the coefficient a_4. From the parameters in Table I we get, for a hydro-generator, that there is no such pair of values $r > 0$, $x_c > 0$ for which a_4 would become negative, so a_4 cannot furnish a new domain of self-excitation.

But for a turbine-generator

$$a_4 < 0$$

furnishes a new sphere of self-excitation (Fig. 2, full line). With regard to the order of magnitude of the time constants it is sufficient, as a first approximation, to consider the first line of a_4 and to calculate with the approximate condition

$$a'_4 = (x''_d - x_c)(x''_q - x_c) + r^2 < 0\,. \tag{40}$$

Earlier we have established that the negative coefficients of the polynomial furnish only a sufficient condition for self-excitation. With positive coefficients self-excitation is possible as well, if some Hurwitz determinant is negative.

E. g. in the case of $r = 0$, the examination of $P_5(q)$ with the aid of the chain of Hurwitz determinants shows [3], that not only the cases of

$$b_5 < 0 \qquad x_d > x_c > x_q$$

and

$$b_4 < 0 \qquad x_q > x_c > x'_d$$

lead to self-excitation, but also the case of

$$x'_d > x_c > 0.$$

But already a small value of the resistance r is sufficient for the disappearance of self-excitation in the case of $x'_d > x_c > 0$.

A similar investigation for the coefficients of $P_7(q)$ would be very tedious, even in the case of $r = 0$. Therefore it remains an open question whether there is any self-excitation in the case of $r = 0$ and $x''_d > x_c$. But probably there will be no self-excitation for the values of r which occur in practice, in the case of $x''_d > x_c$.

A similar close investigation of the polynomial $P_5(q)$ would show that there is no self-excitation even in the case of $r = 0$, if $x_c > x_d$. To carry out this investigation for $P_7(q)$ would be very tedious. But probably the consequence

which has just been drawn remains true even if the action of the amortisseur is considered too.

So far, we have not examined the quality of the self-excitation, i. e. how many roots, and which, get to the right-hand side within the various domains. This question may be answered only by closer investigation, but some aspects of the problem may be pointed out already now :

If only the last coefficient of the polynomial $P_5(q)$, or $P_7(q)$, respectively, is negative, then at least one root is on the *right-hand side* and this root is *real.*

On the contrary, if the penultimate coefficient of the polynomial $P_5(q)$ is negative, or any intermediate coefficient of $P_7(q)$ or two neighbouring coefficients are negative, then *at least two roots are on the right-hand side :* either there are two real, positive roots, or the real part of a conjugate complex pair of roots is positive (which case occurs, depends first of all on the pair of values r, x_c). Thus there is an essential difference between the first and any further domain of self-excitation.

7. Three-phase short-circuit of a synchronous machine with series capacitor in the armature circuit

In this chapter we will examine what changes are brought about by the presence of the series capacitor from the point of view of the development of short circuits.

Crary [3] has given the general operational expression for the short-circuit current, but he has calculated the time function of the short-circuit current only numerically, and considered only the simplest case : the short-circuit starts from no-load, the amortisseurs, as well as the resistances of the stator and the rotor are neglected. In this paper we try to establish general rules for the time function of the three-phase short-circuit current.

The short-circuit is supposed to be behind the series capacitor, and for the sake of simplicity we suppose that there is no special protection device on the latter. During the short-circuit the speed of the machine is supposed to be constant :

$$\omega = \omega_0.$$

The short circuit is taken into account by applying behind the capacitor a voltage $-u_0$ equal but opposite to the voltage which has been there before the short circuit. If the short circuit occurs during no-load operation (and there is no charge on the condenser), the components of the applied voltage are

$$\begin{aligned} u_d &= 0 \\ u_q &= -u_{q0} = -u_0 \end{aligned} \tag{41}$$

If the short-circuit occurs under load, the applied voltage components are:

$$\begin{aligned} u_d &= -u_{d0} = -u_0 \sin \delta_0 \\ u_q &= -u_{q0} = -u_0 \cos \delta_0 , \end{aligned} \tag{42}$$

where δ_0 is the phase angle between the voltage behind the series capacitor and the pole voltage.

While in the first case we get the total short-circuit current, in the second case we obtain only a superposed part of it, to which the initial load current must be added, in order to determine the total short-circuit current. As the first case is easily obtained from the second by substituting $\delta_0 = 0$ and $u_p = u_0$, we will examine first of all the short circuit occurring under load.

If we substitute the expression (42) in the fundamental equation (20) and resolve the latter for the current components, we find the following expressions:

$$\begin{aligned} i_d &= -\frac{\left[p\, l_q(p) + r + \frac{p}{C(p^2+\omega_0^2)}\right] u_{d0} + \left[\omega_0 l_q(p) - \frac{\omega_0}{C(p^2+\omega_0^2)}\right] u_{q0}}{Z(p)} \\ i_q &= \frac{\left[\omega_0 l_d(p) - \frac{\omega_0}{C(p^2+\omega_0^2)}\right] u_{d0} - \left[p\, l_d(p) + r + \frac{p}{C(p^2+\omega_0^2)}\right] u_{q0}}{Z(p)} , \end{aligned} \tag{43}$$

where $Z(p)$ is given by (35).

(43) and (35) show at first glance one difference against the case of the synchronous machine with no capacitor in the armature circuit. In certain cases, which we have examined in the preceding chapter, $Z(p) = 0$ may have a right-hand side root, so the components of the short-circuit current do not decay but — theoretically — they grow indefinitely. In what is to follow we will not deal with the case of self-excitation.

By introducing numerical values we may calculate from (43) the current components, but because of the high degree of the equations, the calculation is very tiresome. Therefore we try to gain, by certain simplifying assumptions, a picture of the physics of the short-circuit current:

a) If $r = 0$ and $\frac{1}{C} = 0$, an important simplification may be used for computing the short-circuit current: i_d is influenced only by $l_d(p)$, i_q only by $l_q(p)$. A similar «independence» cannot be obtained in the case of $\frac{1}{C} \neq 0$. Therefore the simplification $r = 0$ does not bring us nearer to our goal.

b) If we neglect the resistance of the rotor circuits and that of the stator as well, the denominator $Z(p)$ will be considerably simplified :

$$Z(p) = \left[\frac{p}{\omega_0} x''_d + \frac{p}{C(p^2+\omega_0^2)}\right]\left[\frac{p}{\omega_0} x''_q + \frac{p}{C(p^2+\omega_0^2)}\right] + \tag{44}$$

$$+\left[x''_d - \frac{\omega_0}{C(p^2+\omega_0^2)}\right]\left[x''_q - \frac{\omega_0}{C(p^2+\omega_0^2)}\right].$$

By algebraic transformations (44) may be brought into biquadratic form and thus its zero points can be determined :

$$p_k = \pm j\omega_0 \sqrt{\left[1+\left(\frac{1}{x''_d}+\frac{1}{x''_q}\right)\frac{x_c}{2}\right] \pm \sqrt{\left[1+\left(\frac{1}{x''_d}+\frac{1}{x''_q}\right)\frac{x_c}{2}\right]^2 - \left[1-\left(\frac{1}{x''_d}+\frac{1}{x''_q}\right)x_c + \frac{x_c^2}{x''_d x''_q}\right]}} \tag{45a}$$

or

$$p_k = \pm j\omega_0 \sqrt{1+\left(\frac{1}{x''_d}+\frac{1}{x''_q}\right)\frac{x_c}{2} \pm \sqrt{4\left(\frac{1}{x''_d}+\frac{1}{x''_q}\right)\frac{x_c}{2} + \left(\frac{1}{x''_d}-\frac{1}{x''_q}\right)^2 \frac{x_c^2}{4}}} \tag{45b}$$

$$(k = 1, 2, 3, 4)$$

It follows from expression (45a) :

1. if $x''_d < x_c < x''_q$ (or $x''_q < x_c < x''_d$), so two of the four roots are imaginary, two are real. One real root is positive, therefore theoretically one component of the short-circuit current grows indefinitely. We will not consider this case.

2. If the condition which has just been mentioned is not fulfilled, we get four imaginary roots :

$$\pm j(\omega_0 + \nu_1) \qquad \text{and} \quad \pm j(\omega_0 - \nu_2). \tag{46}$$

The action of the sub-transient saliency $x''_d \neq x''_q$ will show by $\nu_1 \neq \nu_2$. In general the difference between ν_1 and ν_2 is not great.

Taking into account the transformation (7), we find the difference against the ordinary L, C series circuit, that instead of one component of

angular frequency ν, there will now be in the stator circuit four components with the angular frequencies ν_1, ν_2, $2\omega_0 + \nu_1$, $2\omega_0 - \nu_2$.

The difference against the case of $\frac{1}{C} = 0$ is essential too, because now there are not in the stator circuit a d. c. component and one of twice the synchronous frequency, but four components of different frequencies.

Usually the difference between the sub-transient reactances is not important :

$$x''_d \approx x''_q \approx x_2 , \tag{47}$$

where x_2 is the negative-sequence reactance of the machine. With the approximation (47), a simple expression for the roots may be gained from (45b) :

$$p_k = \pm j\omega_0 \left(1 \pm \sqrt{\frac{x_c}{x_2}}\right) = \pm j\,(\omega_0 \pm \nu). \tag{48}$$

The analogy with the simple L, C circuit is obvious.

If the amortisseurs are neglected, then the previous considerations may be repeated word by word, only in the place of x''_d must be put everywhere x'_d and in the place of x''_q, x_q . But in this case the equation (48) must be considered only as a rough approximation.

Now let us take into account the resistance of the stator, continuing to neglect the resistance of the rotor circuits. The denominator $Z(p)$ may be brought into the following form :

$$\begin{aligned} Z(q) = \frac{x''_d x''_q}{1+q^2}\Bigg\{ & q^4 + q^3\left(\frac{1}{x''_d} + \frac{1}{x''_q}\right) r + \\ & + q^2\left[2 + \frac{r^2}{x''_d x''_q} + \left(\frac{1}{x''_d} + \frac{1}{x''_q}\right) x_c\right] \\ & + q\left[\left(\frac{1}{x''_d} + \frac{1}{x''_q}\right) r + \frac{2 r x_c}{x''_d x''_q}\right] + \\ & + 1 - \left(\frac{1}{x''_d} + \frac{1}{x''_q}\right) x_c + \frac{x_c^2}{x''_d x''_q} + \frac{r^2}{x''_d x''_q}\Bigg\} \end{aligned} \tag{49}$$

where $q = \dfrac{p}{\omega_0}$.

The zero points of the expression within the curved brackets can not be determined by a general method, but if we accept the approximation (47), so the zero points may be determined :

$$p_k = -\frac{r\omega_0}{2x_2} \pm j\omega_0 \left(1 \pm \sqrt{\frac{x_c}{x_2} - \frac{r^2}{4x_2^2}}\right) \tag{50}$$

$$(k = 1, 2, 3, 4).$$

We suppose that $\frac{x_c}{x_2} > \frac{r^2}{4x_2^2}$. In all cases of practical importance this condition is usually fulfilled (see dotted curves of Fig. 2). So (50) may also be written :

$$p_k = -\alpha \pm j(\omega_0 \pm \nu). \tag{51}$$

The analogy with the series R, L, C circuit is obvious.

It is worth attention that in the determination of the damping coefficient α, as well as in that of the angular frequency ν, the x_2 negative sequence reactance plays a part.

If we were able to consider the sub-transient saliency, we should obtain two different α_1 and α_2 damping coefficients and two angular frequencies ν_1 and ν_2. The difference against α and ν would not be important.

c) If we neglect the stator transients (by this we understand the components of the phase current which have a frequency differing from ω_0), we must carry out the following substitutions :

$$p\, l_d(p) = 0 \qquad\qquad p\, l_q(p) = 0$$

$$\frac{p}{C(p^2 + \omega_0^2)} = 0 \qquad \text{and} \qquad \frac{\omega_0}{C(p^2 + \omega_0^2)} = \frac{1}{C\omega_0} = x_c .$$

Then we get from (43) :

$$i_d = -\frac{r\, u_{d0} + [\omega_0 l_q(p) - x_c]\, u_{q0}}{r^2 + [\omega_0 l_d(p) - x_c][\omega_0 l_q(p) - x_c]}$$

$$i_q = \frac{[\omega_0 l_d(p) - x_c]\, u_{d0} - r\, u_{q0}}{r^2 + [\omega_0 l_d(p) - x_c][\omega_0 l_q(p) - x_c]} . \tag{52}$$

If the amortisseur is neglected too :

$$\omega_0 l_q(p) - x_c = x_q - x_c \tag{53}$$

and

$$\omega_0 l_d(p) - x_c = \frac{pT'_{d0}x'_d + x_d}{pT'_{d0} + 1} - x_c = \tag{54}$$

$$= \frac{pT'_{d0}(x'_d - x_c) + (x_d - x_c)}{pT'_{d0} + 1}.$$

Paying attention to (53), (54) and (42), we get from (52), by use of Heaviside's expansion theorem, the time function of the current components:

$$i_d = -\left[\left(\frac{1}{r^2 + (x'_d - x_c)(x_q - x_c)} - \frac{1}{r^2 + (x_d - x_c)(x_q - x_c)}\right) e^{-\frac{t}{T'_{dc}}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2 + (x_d - x_c)(x_q - x_c)}\right]\left[r \sin\delta_0 + (x_q - x_c)\cos\delta_0\right] u_0 \tag{55}$$

and

$$i_q = \left[\left(\frac{1}{r^2 + (x'_d - x_c)(x_q - x_c)} - \frac{1}{r^2 + (x_d - x_c)(x_q - x_c)}\right) e^{-\frac{t}{T'_{dc}}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2 + (x_d - x_c)(x_q - x_c)}\right]\left[(x_d - x_c)\sin\delta_0 - r\cos\delta_0\right] u_0 -$$
$$- \frac{(x_d - x_c) - (x'_d - x_c)}{r^2 + (x'_d - x_c)(x_q - x_c)} e^{-\frac{t}{T'_{dc}}} u_0 \sin\delta_0,$$

where

$$T'_{dc} = T'_{d0}\frac{r^2 + (x'_d - x_c)(x_q - x_c)}{r^2 + (x_d - x_c)(x_q - x_c)}. \tag{56}$$

From these current components i_d, i_q come the components of angular frequency of the phase currents i_a, i_b, i_c (making use of the transformation (7)). Comparing the solution (55) with the case of $\frac{1}{C} = 0$ we may state that the action of the series capacitor manifests itself only by the fact that in the place of the reactances x_d, x_q, x'_d there are everywhere, in the current and in the time constant, the reactance differences $x_d - x_c$, $x_q - x_c$, $x'_d - x_c$. It is interesting to note that the damping of the currents i_d and i_q is determined by the same time constant T'_{dc}.

Let us suppose now that there is a quadrature-axis amortisseur, but not a direct-axis one. Let us neglect at first also the resistance of the stator, so (52) is simplified to

$$i_d = -\frac{u_{q0}}{\omega_0 l_d(p) - x_c} \qquad i_q = \frac{u_{d0}}{\omega_0 l_q(p) - x_c} \tag{57}$$

where $\omega_0 l_d(p) - x_c$ is given by (54) and now:

$$\omega_0 l_q(p) - x_c = \frac{pT''_{q0}(x''_q - x_c) + (x_q - x_c)}{pT''_{q0} + 1}.$$

The time functions can be determined easily:

$$i_d = -\left[\left(\frac{1}{x'_d - x_c} - \frac{1}{x_d - x_c}\right) e^{-\frac{t}{T'_{dc}}} + \frac{1}{x_d - x_c}\right] u_0 \cos\delta_0$$

$$i_q = \left[\left(\frac{1}{x''_q - x_c} - \frac{1}{x_q - x_c}\right) e^{-\frac{t}{T''_{qc}}} + \frac{1}{x_q - x_c}\right] u_0 \sin\delta_0, \tag{58}$$

where

$$T'_{dc} = T'_{d0}\frac{x'_d - x_c}{x_d - x_c} \qquad \text{and} \qquad T''_{qc} = T''_{q0}\frac{x''_1 - x_c}{x_q - x_c}. \tag{59}$$

Strictly speaking this solution is valid only in the case of $x_c > x_d$, and it is of approximate validity in the case of $x''_q > x_c$ only, because with $x_d > x_c > x''_q$, self-excitation will occur. In the solution (58) and in the time constants (59) appear again the reactance differences. Comparing (55) and (58) an interesting difference appears: in the latter case the damping of currents i_d and i_q is determined by different time constants, T'_{dc} does not depend on T''_{q0} and T''_{qc} depends not on T'_{d0}.

Now let us consider also the resistance of the stator. In order to determine the roots of the denominator we must solve the following second-degree equation:

$$\begin{aligned} &p^2 T'_{d0} T''_{q0}[r^2 + (x'_d - x_c)(x''_q - x_c)] + \\ &+ pT'_{d0}[r^2 + (x'_d - x_c)(x_q - x_c)] + pT''_{q0}[r^2 + (x_d - x_c)(x''_q - x_c)] + \\ &+ [r^2 + (x_d - x_c)(x_q - x_c)] = 0. \end{aligned}$$

In the case of an average resistance r, there appear in both roots T'_{d0} and T''_{q0} and only in the case of $r = 0$ and $r = \infty$ is one root independent of T''_{q0}, the other of T'_{d0}. (In the case of $r = 0$ the roots are the negative reciprocal

values of (59); in the case of $r = \infty$ they are the negative reciprocals of the no-load time constants T'_{d0} and T''_{q0}, respectively). In the case of an average stator resistance thus both i_d and i_q decay according to the same two time constants. These two time constants are not equal. The coefficients of the exponential expression are of course different for the direct axis and for the quadrature axis.

If we consider, besides the stator resistance, both amortisseurs, the denominator of (52) is of the third degree and thus i_d and i_q currents decay according to the same time constants in three steps. In all three time constants a part is played by the direct-axis and by the quadrature-axis no-load time constants and other parameters. The coefficients of the exponential members containing the time constants are different for the direct axis and for the quadrature axis.

E. g., when passing to the limit $p \to \infty$, the initial current components are from (52):

$$i''_d = -\frac{r\,u_{d0} + (x''_q - x_c)\,u_{q0}}{r^2 + (x''_d - x_c)\,(x''_q - x_c)}$$

$$i''_q = \frac{(x''_d - x_c)\,u_{d0} - r\,u_{q0}}{r^2 + (x''_d - x_c)\,(x''_q - x_c)}, \tag{60}$$

while by substituting $p = 0$, the steady-state current components are from (52):

$$i_{ds} = -\frac{r\,u_{d0} + (x_q - x_c)\,u_{q0}}{r^2 + (x_d - x_c)\,(x_q - x_c)}$$

$$i_{qs} = \frac{(x_d - x_c)\,u_{d0} - r\,u_{q0}}{r^2 + (x_d - x_c)\,(x_q - x_c)}. \tag{61}$$

The complete expression for the short-circuit current cannot be established in general form. But with the above approximations, and considering also equation (7) one may visualize the short-circuit currents of a machine with amortisseur in the following way:

The component of angular frequency ω_0 of the current in, e. g., phase a decays in three steps from its initial value of

$$i''_d \cos(\omega_0 t + \theta_0) - i''_q \sin(\omega_0 t + \theta_0),$$

(where i''_d and i''_q are given by (60)), to the steady-state value of

$$i_{ds} \cos(\omega_0 t + \theta_0) - i_{qs} \sin(\omega_0 t + \theta_0)$$

(i_{ds}, i_{qs} can be calculated from (61)). All three time constants which determine the decay depend on the resistance r, the reactance x_c, the direct-axis and quadrature-axis reactances and on the rotor no-load time constants.

In the phase currents there will be (with the practically possible values of the resistance r) four transient components of different frequency. The four components together garantee that the current is not subjected to an abrupt change when the short-circuit occurs.

Each two components decay according to the same time constant. The angular frequencies and the time constants may be determined also, in addition to the parameters r, x_c, x''_d, x''_q, by the rotor time constants, but the influence of these latter is probably not big.

Thus the short-circuit current for the case of $x_c \neq 0$ differs substantially from the short-circuit current when $x_c = 0$.

Until now we have only examined that part of the short-circuit current occurring under load, which is a consequence of the voltage change. To this superposed part must yet be added the initial current.

Adding (28) to (61) and considering also (7), it is ascertained that the steady-state value of the *complete* short-circuit current is :

$$-\frac{u_p}{r^2 + (x_d - x_c)(x_q - x_c)}(x_q - x_c)\cos(\omega_0 t + \theta_0) +$$

$$+\frac{u_p}{r^2 + (x_d - x_c)(x_q - x_c)} r \sin(\omega_0 t + \theta_0) \quad .$$

The sustained short-circuit current is thus determined by the pole voltage u_p, the resistance r and the compensated synchronous reactances $x_d - x_c$, $x_q - x_c$.

In a similar way it may be shown by addition of (60) and (34) and consideration of (7), that the component of the short-circuit current with ω_0 angular frequency is at the initial instant :

$$-\frac{r\,u''_d + (x''_q - x_c)\,u''_q}{r^2 + (x''_d - x_c)(x''_q - x_c)} \cos(\omega_0 t + \theta_0) -$$

$$-\frac{(x''_d - x_c)\,u''_d - r\,u''_q}{r^2 + (x''_d - x_c)(x''_q - x_c)} \sin(\omega_0 t + \theta_0) \, .$$

It may be seen from this that the ω_0-angular-frequency component of the short-circuit current at the initial instant may be calculated according to the principle of constancy of voltage behind the sub-transient reactances u''_d, u''_q, like in the case where there is no series capacitor in the armature circuit ; the difference is only that now the compensated sub-transient reactances $x''_d - x_c$, $x''_q - x_c$ must be considered.

The stator transients are not influenced by the superposition of the component deriving from the initial load current.

Appendix 1

A) The system of equations (1) may be written in the form of a vector equation :

$$\underline{u_S} = p\,\underline{\psi_S} + r\,\underline{i_S} + \frac{1}{Cp}\,\underline{i_S} \tag{13}$$

Making use of the relation (7) :

$$\underline{\underline{R}}\,\underline{u_R} = p\,\underline{\underline{R}}\,\underline{\psi_R} + r\,\underline{\underline{R}}\,\underline{i_R} + \frac{1}{Cp}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{i_R}.$$

If both sides are multiplied in front with $\underline{\underline{S}}$, considering $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}}$:

$$\underline{u_R} = \underline{\underline{S}}\,p\,\underline{\underline{R}}\,\underline{\psi_R} + r\,\underline{i_R} + \underline{\underline{S}}\,\frac{1}{Cp}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{i_R}. \tag{45}$$

By using Heaviside's shifting theorem it may easily be shown that

$$\underline{\underline{S}}\,p\,\underline{\underline{R}} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline p & -\omega & \\ \hline \omega & p & \\ \hline & & p \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{\underline{S}}\,\frac{1}{Cp}\,\underline{\underline{R}} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \dfrac{p}{C(p^2+\omega^2)} & \dfrac{\omega}{C(p^2+\omega^2)} & \\ \hline -\dfrac{\omega}{C(p^2+\omega^2)} & \dfrac{p}{C(p^2+\omega^2)} & \\ \hline & & \dfrac{1}{Cp} \\ \hline \end{array}$$

By the use of these relations it is just (12) we obtain from (14).

B) Let us introduce complex vectors. Let there be

$$\overline{v_S} = \frac{2}{3}\left(v_a + \bar{a}\,v_b + \bar{a}^2\,v_c\right)$$

$$(v = u,\ \psi, i),$$

where

$$\bar{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\bar{a}^2 = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Taking into consideration this, (1) may be written

$$\overline{u_S} = p\,\overline{\psi_S} + r\overline{i_S} + \frac{1}{Cp}\,\overline{i_S}\,. \tag{15}$$

The transformation between the stationary and the rotating system of co-ordinates may be given in complex form by

$$\overline{v_R} = e^{-j\theta}\,\overline{v_S} \qquad \overline{v_S} = e^{j\theta}\overline{v_R}$$

$$(v = u,\ \psi\ i),$$

where $\theta = \theta_0 + \omega t$.

With the aid of this last expression

$$e^{j\theta}\,\overline{u_R} = p\,e^{j\theta}\,\overline{\psi_R} + r\,e^{j\theta}\,\overline{i_R} + \frac{1}{Cp}\,e^{j\theta}\,\overline{i_R}$$

Using Heaviside's shifting theorem, and simplifying by $e^{j\theta}$ on both sides:

$$\overline{u_R} = (p + j\omega)\,\overline{\psi_R} + r\overline{i_R} + \frac{1}{C(p + j\omega)}\,\overline{i_R}\,.$$

If

$$\overline{v_R} = v_d + j\,v_q \qquad (v = u, \psi, i)$$

it is just (12) we get by separating the real and the imaginary parts.

Appendix 2

The operational direct-axis inductance used in (18) is:

$$l_d\,(p) = \frac{\begin{array}{c}p^2\,[L_{ad}L_sL_h + L_{ad}L_s\,L_f + L_{ad}L_f\,L_h + L_sL_fL_h] + \\ + p\,[r_f(L_{ad}L_s + L_{ad}L_h + L_sL_h) + r_h\,(L_{ad}L_s + L_{ad}L_f + L_sL_f)] + r_f\,r_h\,(L_{ad} + L_s)\end{array}}{p^2\,[L_{ad}L_f + L_{ad}L_h + L_fL_h] + p\,[r_f(L_{ad} + L_h) + r_h\,(L_{ad} + L_f)] + r_f\,r_h}\,.$$

The operational quadrature-axis inductance used in (19) is:

$$l_q\,(p) = \frac{p\,(L_{aq}L_s + L_{aq}L_k + L_sL_k) + r_k\,(L_{aq} + L_s)}{p\ (L_{aq} + L_k) + r_k}\,.$$

The reactances of the machine are defined in the following way (ω_0 is the synchronous angular frequency):
the direct-axis synchronous reactance is:

$$x_d = \omega_0(\,L_s + L_{ad})$$

the direct-axis transient reactance is:

$$x'_d = \omega_0\left(L_s + \frac{1}{\dfrac{1}{L_{ad}} + \dfrac{1}{L_f}}\right)$$

the direct-axis sub-transient reactance is:

$$x''_d = \omega_0\left(L_s + \frac{1}{\dfrac{1}{L_{ad}} + \dfrac{1}{L_f} + \dfrac{1}{L_h}}\right),$$

the quadrature-axis synchronous reactance is :

$$x_q = \omega_0 (L_s + L_{aq})$$

the quadrature-axis sub-transient reactance is :

$$x''_q = \omega_0 \left(L_s + \frac{1}{\frac{1}{L_{aq}} + \frac{1}{L_k}} \right).$$

The time constants of the machine are defined as follows :

No load time constants :

The time constant of the field circuit, if the stator circuit is open and if we neglect the amortisseur :

$$T'_{d0} = \frac{1}{r_f} (L_f + L_{ad}).$$

The time constant of the direct-axis amortisseur circuit, if both the stator circuit and the field circuit are open :

$$T'_0 = \frac{1}{r_h} (L_h + L_{ad}).$$

The time constant of the direct-axis amortisseur circuit, if the stator circuit is open and the field circuit is short circuited, but its resistance is neglected :

$$T''_{d0} = \frac{1}{r_h} \left(L_h + \frac{1}{\frac{1}{L_{ad}} + \frac{1}{L_f}} \right).$$

The time constant of the quadrature-axis amortisseur circuit, if the stator circuit is open :

$$T''_{q0} = \frac{1}{r_k} (L_k + L_{aq}).$$

Short circuit time constants :

The time constant of the field circuit, if the stator is short-circuited (the resistance r of the armature is neglected), without taking into account the amortisseur :

$$T'_d = \frac{1}{r_f} \left(L_f + \frac{1}{\frac{1}{L_{ad}} + \frac{1}{L_s}} \right).$$

The time constant of the direct-axis amortisseur circuit, if the armature circuit is short-circuited (and $r = 0$), and the field circuit is neglected :

$$T' = \frac{1}{r_h} \left(L_h + \frac{1}{\frac{1}{L_{ad}} + \frac{1}{L_s}} \right).$$

The time constant of the direct-axis amortisseur circuit, if both the stator circuit and the field circuit are short-circuited (and $r = 0$, $r_f = 0$) :

$$T''_d = \frac{1}{r_h} \left(L_h + \frac{1}{\frac{1}{L_{ad}} + \frac{1}{L_f} + \frac{1}{L_s}} \right).$$

The time constant of the quadrature-axis amortisseur circuit, if the armature circuit is short-circuited and its resistance is neglected:

$$T''_q = \frac{1}{r_k}\left(L_k + \frac{1}{\frac{1}{L_{aq}} + \frac{1}{L_s}}\right).$$

Between the no-load time constants and the short-circuit time constants there exist the following relations:

$$T'_d : T'_{d0} = x'_d : x_d \qquad T''_d : T''_{d0} = x''_d : x'_d \qquad T''_q : T''_{q0} = x''_q : x_q.$$

If the numerator and the denominator of $l_d(p)$ and of $l_q(p)$ are divided by $r_f r_h$ and by r_k respectively, just the relations (23) or (24), respectively (21) are obtained, by consideration of the above definitions and proportions.

For the sake of completeness we also give the expression for $G(p)$:

$$G(p) = \frac{L_{ad}}{r_f} \frac{p\frac{L_h}{r_h} + 1}{p^2 T''_{d0} T'_{d0} + p(T'_0 + T'_{d0}) + 1}.$$

We do not give $H(p)$ and $K(p)$, as there is no need for them.

REFERENCES

1. *R. H. Park:* Two Reaction Theory of Synchronous Machines, I—II. AIEE, Transactions, 1929, p. 716; AIEE Transactions, 1933, p. 352.

2. *A. A. Горев:* Переходные процессы синхронной машины. Госэнергоиздат, 1950 г. (Transient Processes of Synchronous Machines).

3. *S. B. Crary:* Two Reaction Theory of Synchronous Machines. Electrical Engineering Transactions. 1937, p. 27.

4. *М. Л. Левинштейн:* Явление параметрического резонанса при работе синхронной машины на емкостную погрузку. Труды Л. П. И. 1948 Но. 3. (Phenomenon of Parametric Resonance of the capacitively loaded Synchronous Machine).

5. *G. Kron:* Short Course in Tensor Analysis for Electrical Engineers. John Wiley—Chapman-Hall, 1942.

6. *B. Adkins:* Transient Theory of Synchronous Generators Connected to Power Systems Proceedings of IEE, 1951, p. 510.

7. *J. Liska:* Vector Diagrams of Electrical Machines (Hungarian), Institute for Post-graduate Education of Engineers. Budapest, 1944.

8. *C. Concordia:* Synchronous Machines. Theory and Performance. John Wiley—Chapman-Hall, 1951.

9. *K. P. Kovács—I. Rácz:* Transient Phenomena of A. C. Machines (Hungarian), Publisher of the Hungarian Academy of Sc., Budapest, 1954.

SUMMARY

This paper, which has been written making use of part of a candidate dissertation concerning a similar subject matter, further develops the already known theory of the system formed by a synchronous machine and a series capacitor:

a) it brings the fundamental equations to a simpler form which is much better visualized,

b) in order to attain a better approximation of reality it tries to consider also the action of the rotor amortisseurs,

c) by various simplifying assumptions, it arrives at general solutions for certain cases.

The new form of the fundamental equations is given by (12). In connection with these, the tensor method and the complex-vector method of calculation are presented, with their fundamenta equations (14) and (16). The system of equations (12) can be brought to the form (17) and then to (20). The operational impedances of this latter are given by the known expression (21) and by the newly developed expression (23). The equivalent-circuit diagram of the synchronous machine and the series capacitor, for transient state, may be drawn (Fig. 1) on the base of the fundamental equations.

The question of self-excitation has been investigated for the case where there is an amortisseur too, on the rotor of the synchronous machine. It may be proved that the presence of the amortisseur does not influence at all the first domain of self-excitation of the machine without amortisseur, and that the amortisseur has practically no influence upon the second domain of self-excitation. But the presence of the amortisseur may create new spheres of self-excitation.

The author examines the influence of the series capacitor on the development of the short-circuit current of the synchronous generator. By various simplifications he tries to approximate the complete phenomena in the machine for the case where there is no self-excitation. For several cases complete approximate expressions are found for the component with ω_0 angular frequency of the stator short-circuit current; on the other hand the author has succeeded in giving approximate expressions for the angular frequency of the free oscillations and their time constant. Although the complete expression for the short-circuit current cannot be given, a picture can be drawn of its development.

ВЛИЯНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННОГО КОНДЕНСАТОРА НА РЕЖИМ РАБОТЫ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ

Ф. ЧАКИ

Резюме

Данная статья, — написанная с использованием части материала диссертационной работы автора по схожей теме, — посвящена дальнейшему развитию известной теории системы, состоящей из синхронной машины и последовательно соединенного конденсатора:

а) Даются более простые и наглядные виды основных уравнений теории.

б) В интересах возможно наибольшего приближения к истине сделана попытка учета также эффекта демпферных обмоток ротора.

в) Затем с использованием различных упрощающих предположений для определенных случаев даются общие решения.

Приводится новый вид (12) основных уравнений. Демонстрируется связь основного уравнения с основными уравнениями тензорного и комплекс-векторного методов исчисления (14), (16). Система уравнений (12) может быть преобразована в уравнение вида (17), а затем — (20). Выражение операторных индуктанций, фигурирующих в последнем уравнении, определяется выражениями (21), известным уже ранее, и — (23), выведенным вновь. Используя основные уравнения, можно построить эквивалентную схему (рис. 1) системы, — состоящей из синхронной машины и последовательно соединенного конденсатора, — для режима переходных процессов.

Вопрос самовозбуждения исследовался для случая наличия на роторе синхронной машины демпферной обмотки. Установлено, что наличие демпферной обмотки совершенно не влияет на первую область самовозбуждения синхронной машины, не имеющей демпферной обмотки, а на вторую область самовозбуждения практически не влияет. Однако, из-за наличия демпферной обмотки могут возникнуть дополнительные области самовозбуждения.

Исследовался вопрос воздействия последовательно соединенного конденсатора на протекание процесса тока короткого замыкания синхронного генератора. При помощи различных упрощающих предположений была сделана попытка приближения к протекающим в машине сложным процессам для случая отсутствия самовозбуждения. В ряде случаев удалось вывести приближенные выражения для составляющей круговой частоты ω_0 тока короткого замыкания статора; кроме того удалось вывести приближенные выражения круговой частоты и постоянной времени свободных колебаний. Несмотря на то, что не имеется возможности дать полное выражение тока короткого замыкания, на основе приближений можно описать схематически протекание процесса тока короткого замыкания.

INFLUENCE DES CONDENSATEURS SÉRIE SUR LE FONCTIONNEMENT DES MACHINES SYNCHRONES

F. CSÁKI

SOMMAIRE

Cet article, utilisant une partie d'une thèse de candidature traitant d'un sujet semblable, approfondit la théorie du système constitué par une machine synchrone et un condensateur série. L'auteur indique

a) une forme plus simple et plus claire des équations fondamentales,

b) pour mieux approcher la réalité, il essaie de considérer aussi les amortisseurs,

c) finalement, par des hypothèses de simplification diverses, il donne des solutions générales pour certains cas.

La nouvelle forme des équations fondamentales est donnée en (12), et les méthodes de calcul tensoriel et complexe-vectoriel sont introduites avec leurs équations fondamentales (14) resp. (16). Le système d'équations (12) peut être écrit dans la forme (17), puis (20). Les inductances opératoires qui figurent dans cette dernière équation sont définies par l'expression connue (21) et l'expression nouvelle (23). Partant des équations fondamentales, le schéma équivalent du système formé par une machine synchrone et un condensateur série, pour le régime transitoire, peut être tracé (Fig. 1).

La question d'auto-excitation est examinée pour le cas où il y a aussi un amortisseur dans le rotor de la machine synchrone. On constate que la présence de l'amortisseur n'a aucune influence sur la première région d'auto-excitation, et pas d'influence pratique sur la deuxième. Par contre, la présence de l'amortisseur engendre des nouvelles régions d'auto-excitation.

L'auteur examine l'influence du condensateur série sur le développement du courant de court-circuit du générateur synchrone. Par diverses simplifications il essaye d'approcher les phénomènes compliqués qui se déroulent dans la machine, et ceci pour le cas où il n'y a pas d'auto-excitation. Pour quelques cas il réussit de trouver des expressions explicites pour la composante de pulsation ω_0 du courant de court-circuit dans le stator ; d'autre part il déduit des expressions approximatives pour la pulsation et la constante de temps des oscillations libres. Bien que la formule complète pour le courant de court-circuit n'ait pas pu être développée, les approximations permettent de décrire le comportement du courant de court-circuit.

DER EINFLUSS VON REIHENKONDENSATOREN AUF DEN BETRIEB VON SYNCHRONMASCHINEN

F. CSÁKI

ZUSAMMENFASSUNG

Der vorliegende Beitrag, der unter teilweiser Benutzung einer Kandidaturdissertation über ein ähnliches Thema verfasst wurde, entwickelt die bekannte Theorie des aus einer Synchronmaschine und einem Reihenkondensator bestehenden Systems weiter :

a) die Grundgleichungen werden in eine einfachere und anschaulichere Form gebracht,

b) zur besseren Annäherung an die Wirklichkeit wird angestrebt, auch die Wirkung der Läuferdämpferwicklungen zu berücksichtigen,

c) schliesslich werden, mit Hilfe verschiedener vereinfachender Annahmen, für gewisse Fälle allgemeingültige Lösungen angegeben.

Für die Grundgleichungen wird eine neue Form (12) abgeleitet. In diesem Zusammenhang werden die tensorielle und die komplex-vektorielle Rechnungsmethode eingeführt, u. zw. mit den Grundgleichungen (14) bezw. (16). Das Gleichungssystem (12) kann in die Form (17) und weiterhin in die Form (20) gebracht werden. Der Ausdruck für die in der letzteren Gleichung benutzten Operatorinduktanzen ergibt sich aus der bekannten Gleichung (21) und aus der neu abgeleiteten Gleichung (23). Die Grundgleichungen ermöglichen, die Ersatzschaltung (Abb. 1) des aus

einer Synchronmaschine und einem Reihenkondensator bestehenden Systems für transiente Betriebszustände aufzuzeichnen.

Die Selbsterregung wird für den Fall untersucht, wo im Läufer der Synchronmaschine auch eine Dämpferwicklung vorhanden ist. Die Anwesenheit der Dämpferwicklung beeinflusst den ersten Selbsterregungsbereich der dämpferlosen Maschine überhaupt nicht, und den zweiten Selbsterregungsbereich in praktisch vernachlässigbarem Ausmass. Infolge der Anwesenheit der Dämpferwicklung kommen jedoch ausser den angeführten Selbsterregungsbereichen noch weitere solche Bereiche zustande.

Der Verfasser untersucht ferner, in welcher Weise der Reihenkondensator den Verlauf des Kurzschlussstromes eines synchronen Generators beeinflusst. Mit Hilfe verschiedener vereinfachender Annahmen versucht er, die komplizierten Vorgänge in der Maschine näherungsweise zu behandeln, und zwar für den Fall, dass keine Selbsterregung auftritt. Für einige Fälle ist es gelungen, für die Komponente des Statorkurzschlussstromes von der Kreisfrequenz ω_0 angenäherte Ausdrücke von geschlossener Form zu finden ; andererseits ist es gelungen, für die Kreisfrequenz und die Zeitkonstante der freien Schwingungen Näherungswerte zu ermitteln. Obwohl die vollständige Formel für den Kurzschlussstrom nicht angegeben werden konnte, so erlaubten die Näherungen dennoch, den Verlauf des Kurzschlussstromes zu skizzieren.

LA RÉSISTANCE HYDRODYNAMIQUE D'UNE COLONNE DE MATIÈRE DÉFORMABLE

LA RÉSISTANCE D'UNE COLONNE DE COSSETTES DANS UNE BATTERIE DE DIFFUSION EN SUCRERIE

G. OPLATKA DOCTEUR DES SC. TECHN. et M. TEGZE

INSTITUT DE RECHERCHE DE L'INDUSTRIE SUCRIÈRE HONGROISE

(Manuscrit présenté le 2 août 1954)

1. Introduction

On constate souvent que la quantité de liquide, passant par une colonne de matière déformable, décroît avec le temps. De même, la vitesse de passage d'un liquide à travers d'une couche ou surface filtrante, décroît, même si l'épaisseur de la couche filtrante reste constante (fait dénommé en littérature : effet de filtration). On a en outre constaté que bien souvent, une augmentation de pression, dépassant une certaine limite, reste absolument sans effet sur la vitesse de filtration, ce qui semble paradoxal.

La littérature ne fournit pas d'explication suffisante pour ces faits et se contente plutôt de les ramener à des causes secondaires.

En sucrerie le problème nous intéresse en premier lieu au point de vue de l'extraction du sucre. Les propriétés hydrodynamiques de la cossette de betterave se trouvant dans les vases d'extraction, dits diffuseurs, ou d'après de nouveaux procédés, dans une tour, jouent un rôle prépondérant dans la détermination des dimensions, et du calcul de capacité de l'appareillage.

En sucrerie et dans la littérature de la sucrerie on se plaint souvent de difficultés de circulation dans la batterie Robert. On entend par là que la résistance hydrodynamique est forte ou de moins plus élevée que de coutume. Ce fait est nuisible, car la capacité de la batterie et, par suite, le tonnage de betteraves travaillées par jour, diminue. Il va de soi qu'on a cherché à remédier au mal, d'autant plus qu'en cas défavorables, la circulation est pratiquement arrêtée. Nous savons par expérience qu'une augmentation de pression ne suffit pas pour surmonter la difficulté.

Il y a 20—30 ans qu'on s'occupe d'augmenter la vitesse de circulation de jus à travers la masse de cossettes. Depuis lors le problème est à l'ordre du jour et dans la littérature on trouve de nombreux articles y relatifs et diverses propositions en vue de sa solution : bougies Schultze, ou constructions Gutwirt et Pokorny, poches Lehne, «arbres de Noël» etc. On a employé des poutres en sens vertical, des rails, des chaînes en nombre varié, accrochées de diverses façons dans le diffuseur. On a en outre essayé d'augmenter la surface des tamis du fond en les ondulant ou en ajoutant des tamis placés plus ou moins verticalement sur le pourtour de manteau du diffuseur, système Wallig. En général, ces solutions n'étaient qu'imaginaires et tendaient plutôt à remédier aux difficultés de circulation en formant, surtout au fond du diffuseur, des court-circuits hydrodynamiques, qui certes soulagent la circulation, mais nuisent à l'épuisement et à son homogénité. Nous ne citons pas les divers articles à ce sujet car aujourd'hui nous savons déjà qu'à l'exception des chaînes, les autres systèmes ne sont pas satisfaisants et n'ont pas fourni de solution.

Pareils problèmes se présentent dans d'autres industries faisant circuler du liquide à travers des couches de matière déformable. Ceci est le cas, par exemple, pour une colonne de résine artificielle échangeur d'ions [1], et pour n'importe quel procédé d'extraction, dans lequel la phase solide est déformable. On pourra de même mentionner le cas de certaines filtrations dans lesquels le tourteau d'écume est comprimable [2].

La question est également intéressante à d'autres points de vue. La question de savoir si le courant d'un liquide, à travers un vase empli de matière solide en général, sera turbulent ou laminaire, fut encore fort discutée dans les derniers temps. Ainsi *Popov* [3] a trouvé que dans un diffuseur empli de cossettes, le courant est turbulent, quoique son nombre Reynolds soit de beaucoup inférieur à 2300. D'après *Chilton* et *Colburn* [4] pour une colonne d'empli, le nombre Reynolds critique est environ 40. A une valeur inférieure le courant serait laminaire,

tandis que dépassant 40, il serait turbulent. Dernièrement *Slavičck* [5] a essayé d'évaluer la chute de pression occasionnée par une colonne de cossettes avec un polynome de second degré.

En général la résistance des colonnes d'empli a fourni un ample sujet de discussion [6]. On trouve dans la littérature plusieurs formules qui toutefois ne sont pas valables au cas où le corps d'empli est déformable. Nous verrons plus tard que dans ce cas les lois toutes différentes régissent le phénomène.

En 1939 nous avions déjà prétendu [7] que la cause de la résistance hydrodynamique d'une batterie de diffusion devait, en premier lieu, être cherchée dans le fait qu'au fond du vase, sous l'influence du poids des couches supérieures, la masse de cossettes est comprimée, ce qui provoque un retrécissement des interstices entre les cossettes elles-mêmes.

Broager [8] plus tard a exprimé la même idée et allant plus loin, il a démontré que pour chaque colonne de cossettes il y a une vitesse limite qui ne pourra pas être dépassée quelle que soit la pression employée.

Dans l'article présent nous nous proposons de rendre compte de nos recherches concernant les phénomènes se déroulant dans une colonne de matière déformable ; nous indiquons les relations entre les données déterminant le problème, décrivons nos essais en laboratoire et en usine, qui ont montré la validité de nos théories. Nous avons déduit des formules pratiques concernant les colonnes et spécialement les colonnes de cossettes en batterie de diffusion de sucrerie.

2. Théorie

2.1 Description du phénomène

L'explication qualitative du problème en question se résume comme suit. Sous l'effet d'une chute de pression un courant de liquide passant par une colonne (p. e. de cossettes de betteraves) agit avec une certaine force sur chaque cossette en particulier, essayant de déplacer celles-ci dans le sens du courant. Les cossettes plus proches de l'entrée du liquide, transmettent cette force aux cossettes se trouvant immédiatement sous elles, ces dernières la transmettent aux couches sous-jacentes et en fin de compte la force agit sur le tamis placé à la sortie du courant. Il en résulte que la force va en augmentant de l'entrée du liquide vers la sortie du courant. Sous l'influence de cette force les particules de cossettes se déplacent et les interstices entre celles-ci diminuent de volume. Le tassement le plus fort, c.-à-d. la plus petite section libre, se trouvera dans les environs de la sortie du jus. A cet endroit la vitesse du courant doit augmenter, ce qui aura pour conséquence ultérieure un accroissement de force agissant sur l'empli et ceci tend à déplacer encore les particules. Finalement il s'établit un équilibre, dont les caractéristiques dépenderont de plusieurs circonstances entre autres des propriétés mécaniques des particules et de la vitesse du courant. Les circonstances peuvent être tellement défavorables que malgré tout accroissement de la pression on ne puisse pas maintenir le courant à la vitesse désirée. Dans ce cas les cossettes se tassent tellement qu'il se forme une couche imperméable et en même temps la hauteur de la colonne subit une diminution.

2.2 Définitions

Nous examinons une colonne, de section f, contenant une matière déformable dont le volume réel, Q, est d'abord supposé constant durant le procédé.

La charge spécifique de la colonne, ϱ, varie, sous l'influence du courant, en lieu et en temps. Ces variations sont dues à la déformation des particules de volume constant et à leur déplacement par rapport aux particules voisines. La valeur numérique de ϱ désigne non seulement la charge, mais aussi la partie de la section occupée par la matière solide.

Le courant entre à l'une extrémité de la colonne et la quitte à l'autre, où un tamis retient la matière. Le point zéro de la coordonnée du lieu, désignée par x, coïncide avec la surface de la charge se trouvant au voisinage de l'entrée du liquide, mais il faut tenir compte du fait que la longueur de la colonne de matière variera avec la vitesse du courant et par conséquent le point zéro se déplacera par rapport au tamis.

La déformation de la substance et la variation de la longueur de la colonne sont des phénomènes exigeant un certain temps et tendant vers un équilibre. Dans ce qui suit nous ne traitons que le cas stationnaire après la fin de la variation temporaire. Le cas non stationnaire est beaucoup plus compliqué et de moindre importance pour la pratique.

Soit h la longueur de la colonne en équilibre, W la quantité de liquide passant dans l'unité de temps par la colonne, w detto, rapporté à l'unité de section de la colonne, v la vitesse linéaire moyenne entre les particules dans une section quelconque de la colonne, cette dernière variant le long de la colonne.

On peut écrire les relations suivantes :

$$v = \frac{w}{1-\varrho} = \frac{W}{(1-\varrho)f}. \tag{1}$$

Nous entendons par pression en général la moyenne statistique de la pression pour une section perpendiculaire à l'axe. Il est nécessaire de définir la pression de cette manière, vu qu'aux divers points d'une section la pression peut varier par suite du désordre statistique de la section où l'on trouve en certains points de la matière solide, en d'autres du liquide. Nous désignons la pression par p, et remarquons qu'elle varie le long de la colonne.

Puisque la pression hydrostatique n'exerce aucune influence sur le courant, nous ne l'introduisons pas dans nos calculs. Nous désignons donc proprement dit par p la pression effective diminuée par la pression hydrostatique.

Cette pression atteint sa plus grande valeur à l'entrée du liquide. Nous la désignons par p_o, valeur qui en même temps donne la résistance hydrodynamique de la colonne. D'autre part nous nous arrangeons de façon que la pression soit zéro à la place où le liquide quitte la colonne, place déterminée par $x = h$. Fig. 1 montre schématiquement la variation de la pression au long de la colonne.

Pour simplifier les calculs, nous supposons encore que le poids spécifique de la matière et du liquide sont identiques, l'influence de la gravitation est donc exclue. Dans la plupart des cas pratiques on trouvera cette simplification bien justifiée. Nous supposons ensuite que les particules sont — tout au moins dans un sens statistique — en chaque point de la même grandeur ; que les dimensions des particules sont réduites par rapport à celles de la colonne et que les forces de frottement entre les particules et la paroi sont négligeables.

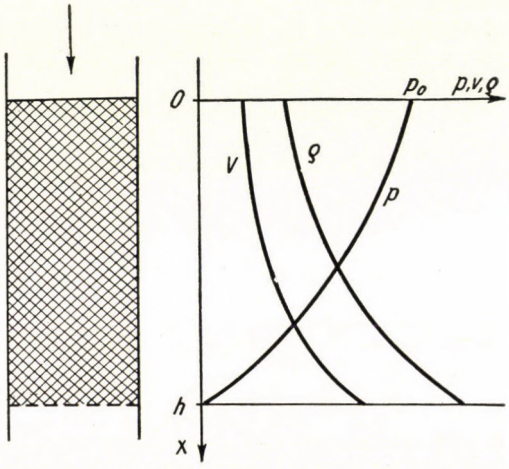


Fig. 1

Enfin pour simplifier le mode d'expression, nous parlerons toujours d'un courant de haut en bas. Cette simplification n'influence absolument pas le problème au sens physique, puisque nous nous sommes débarrassés de l'influence de la gravitation. Également, pour simplifier, nous parlerons toujours des cossettes (des cossettes de betterave) ce qui n'empêche pas nos résultats d'être applicables à une colonne de matière déformable quelconque.

2.3 Conception mathématique générale du phénomène

L'équilibre des forces agissantes sert de base aux calculs. Une couche d'épaisseur Δx, dont la surface est f, contient partiellement des cossettes, partiellement du liquide courant. Suivant le degré de charge, les cossettes occupent la surface ϱf et le liquide $(1 - \varrho)f$. Soit la pression agissant sur la surface supérieure p_1. La pression p_2 au dessous de la couche Δx sera plus petite, due au fait que chaque particule produit une résistance de pression et une résistance de frottement. On posera donc $p_2 = p_1 - \Delta p$. Sur les cossettes et le jus se trouvant dans la couche Δx agissent donc d'en haut la force $P_1 = p_1 f$, et d'en bas

la force $P_2 = p_2 f$. Sur la surface supérieure agira en outre une force, P_3, qui est la résultante des forces hydrodynamiques agissant sur chaque particule se trouvant dans la partie supérieure de la colonne. La surface inférieure de la couche Δx est soutenue par des cossettes se trouvant au-dessous d'elle. Il se produit donc ici une force de réaction P_4. Bien que ces forces soient des forces distribuées sur la surface, sur fig. 2 nous les désignons pour simplifier par des flèches simples. Les forces hydrostatiques — comme nous l'avons déjà dit — n'influencent pas les calculs.

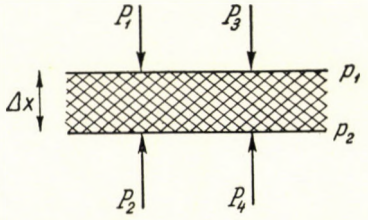


Fig. 2

Ces forces sont dans le cas stationnaire en équilibre et pour leur valeur absolue on peut poser

$$P_1 + P_3 = P_2 + P_4$$

respectivement

$$P_1 - P_2 = P_4 - P_3 \tag{2}$$

En d'autres termes, la différence des résultantes des forces extérieures est égale à la chute de pression causée par le courant.

En se servant de la transformation $P_1 - P_2 = (p_1 - p_2)f = \Delta p f$, on peut tirer la conclusion que la force résultante du haut de la colonne jusqu'à la place x, s'exprime par $f\Sigma\Delta p$, où il faut faire la sommation pour chaque couche entre ces deux limites. On peut donc écrire pour cette force $(p_0 - p)f$, si p_0 désigne la pression à l'entrée de la colonne.

Sous l'influence de la pression les particules se déforment plus au moins selon leurs propriétés mécaniques. En d'autres termes les cossettes se déplacent dans la section envisagée, elles s'enfoncent partiellement dans les espaces libres. Par conséquence, ces espaces deviennent plus étroits, le tassement augmente. Ceci est exprimé par l'équation (3), d'après laquelle ϱ est une fonction unique (F) de la différence de pression.

$$\varrho = F(p_0 - p) \tag{3}$$

Il faut bien remarquer que la déformation ne signifie pas le changement de volume géométrique des cossettes, nous supposons plutôt que sous l'influence des forces le jus n'est pas pressé hors de la cossette.

Puisque les fonctions cherchées, v et ϱ, ne dépendent que de la chute de pression $p_0 - p$ se formant entre les points zéro et x, mais sont indépendantes de la valeur absolue de la pression, il sera avantageux d'introduire pour les calculs l'abréviation

$$\Pi = p_0 - p \tag{4}$$

La valeur de Π augmente donc avec x dans le sens du courant. Ses valeurs extrêmes sont $\Pi = 0$ pour $x = 0$ et $\Pi = p_0$ pour $x = h$.

Avec l'abréviation (4) l'expression (3) prend la forme :

$$\varrho = F(\Pi) \tag{5}$$

D'autre part une chute de pression se formant aux deux extrémités d'une couche d'épaisseur dx, est proportionelle à l'épaisseur de la couche et à une quantité qui est une fonction — désignée par Φ — dépendant essentiellement de la vitesse du liquide et de l'espace libre entre les cossettes. Ce dernier est en somme déterminé par ϱ. On pourra donc écrire l'expression suivante :

$$dp = -\Phi(w, \varrho)\, dx \tag{6}$$

Le signe négatif exprime que la pression décroît dans le sens du courant, c.-à-d. avec l'accroissement de x. Puisque d'après la formule (4) $dp = -d\Pi$, on obtient :

$$d\Pi = \Phi(w, \varrho)\, dx \tag{7}$$

L'intégration de l'équation (7) donne une relation entre la longueur de la colonne et la chute de pression totale pour le cas stationnaire :

$$h = \int_0^{\Pi_0} \frac{d\Pi}{\Phi(w, \varrho)} . \tag{8}$$

Enfin on trouvera une relation entre le volume total des cossettes et les données géométriques de la colonne

$$Q = f \int_0^h \varrho dx \tag{9}$$

Par les équations (5) et (7) le problème est en principe déterminé. Il sera résolu, si en connaissance des fonction F et Φ et en se servant de la chute de pression totale p_0, du volume de cossettes total Q et de la section transversale de la colonne f, on exprime d'une part la vitesse moyenne linéaire du liquide, v, la charge

ϱ et la pression p, tous en fonction du lieu x, et d'autre part on calcule la quantité de liquide passant par la colonne, w, et la longueur de la colonne déformée, h.

2.4 La solution détaillée

Tout d'abord il faut connaître les fonctions F et Φ des équations (5) resp. (7).

Nous nous servons de formules empiriques, formules que pour le moment nous supposons être aptes à résoudre le problème ; nous justifierons leur emploi dans la partie expérimentale.

Pour établir la fonction F, nous supposons que sous l'influence des forces les cossettes se déforment dans le sens du courant et — puisque nous avons supposé constant le volume géometrique des cossettes — l'espace entre les cossettes décroit. Plus exactement, nous supposons que le changement de l'espace entre les cossettes est proportionnel à l'espace même et au changement de la force par unité de surface, c.-à-d. au changement de pression. En correspondance, si nous désignons l'espace libre entre les cossettes par $g = 1 - \varrho$, on aura :

$$dg = - agd\Pi \tag{10}$$

a est un facteur de proportionnalité, qu'on pourra nommer le facteur de compressibilité de la charge. Le signe négatif montre qu'en augmentant la pression, l'espace libre entre les cossettes décroît.

L'intégration de l'équation (10) fournit

$$g = g_0 e^{-a\Pi} \tag{11}$$

d'où en substituant l'expression de la charge

$$1 - \varrho = (1 - \varrho_0) e^{-a\Pi} \tag{12}$$

Dans cette expression ϱ_0 est la constante d'intégration qu'on pourra déterminer en se servant de la condition de limite, d'après laquelle $\varrho = \varrho_0$ pour $\Pi = 0$. Dans le sens physique ϱ_0 désigne une charge qui se forme s'il n'y a pas de force agissant sur les cossettes, comme p. e. dans la couche supérieure de la colonne. Les valeurs de ϱ_0 et a caractérisant la qualité des cossettes se déterminent expérimentalement. D'après la formule (12) ϱ tend vers l'unité, si la pression tend vers l'infini, c.-à-d. pour une très grande pression les cossettes remplissent complètement l'espace.

Pour la fonction Φ de l'équation (7) nous employons la formule hydrodynamique connue

$$\Phi(w, \varrho) = k' \frac{v^n}{d} \tag{13}$$

Dans cette équation k' désigne un facteur de proportionnalité, d une valeur caractéristique moyenne linéaire pour l'espace entre les cossettes et n l'exposant de la vitesse. D'après la littérature les valeurs extrêmes de n sont 1 et 2, selon que le courant est laminaire ou turbulent. Pour nos calcules nous avons supposé que la valeur de n — qui devra être déterminée expérimentalement — est constante pour chaque partie de la colonne, quoique dans les diverses couches de la colonne la charge et par conséquence la vitesse linéaire, sont différentes.

Puisque $1 - \varrho$ est caractéristique pour l'espace libre entre les cossettes, il faut que

$$1 - \varrho = md^2 \tag{14}$$

Le facteur de proportionnalité m dépend en somme de la dimension des cossettes. On pourra exprimer d et en l'introduisant dans l'équation (13), on obtient :

$$\Phi = k' m \frac{v^n}{\sqrt{1-\varrho}} = k \frac{v^n}{\sqrt{1-\varrho}} . \tag{15}$$

Pour simplifier, nous remplaçons $k'm$ par k, que nous appelons facteur de résistance. Celui-ci dépend des données géometriques, et de la qualité de la surface des cossettes. Nous introduisons dans la formule (15) la vitesse w définie par formule (1) qui est indépendante de la coordonnée du lieu. L'équation (7) se transforme ainsi

$$d\Pi = k \frac{w^n}{(1-\varrho)^{n+0,5}} dx \tag{16}$$

On est donc arrivé au point où le problème peut être résolu avec les méthodes mathématiques connues. Nous introduisons dans l'équation (16) la valeur de $1 - \varrho$, déterminée par l'équation (12). Nous obtenons une équation différentielle reliant Π et x :

$$d\Pi = k \frac{w^n}{(1-\varrho_0)^{n+0,5}\, e^{=(n+0,5)a\Pi}} dx \tag{17}$$

En tenant compte de la condition de limite, d'après laquelle $\Pi = 0$ pour $x = 0$, on obtient, l'intégration achevée, pour la fonction Π :

$$\Pi = -\frac{1}{\alpha (n + 0{,}5)} ln\,(1 - Ax) \tag{18}$$

Dans cette formule nous nous sommes servis d'une abréviation :

$$A = \frac{k\alpha w^n (n + 0{,}5)}{(1 - \varrho_0)^{n+0{,}5}} \tag{19}$$

qui ne contient que des constantes pour un système donné. Nous remarquons que d'après des considérations physiques il faut que $Ax < 1$. (Voir aussi chapitre 2.5).

Nous cherchons ensuite la fonction $\varrho\ (x)$, qu'on obtient si on remplace, en équation (12) la valeur Π par l'expression (18) .

$$\varrho = 1 - (1 - \varrho_0)\,(1 - Ax)^{\frac{1}{n+0{,}5}} \tag{20}$$

et en se servant de la formule (1)

$$v = \frac{w}{(1 - \varrho_0)\,(1 - Ax)^{\frac{1}{n+0{,}5}}} . \tag{21}$$

Pour la solution complète il faut connaître la longueur de la colonne de cossettes et le volume total des cossettes. On obtient la longueur de la colonne, si on remplace dans la formule (18) x par h, en tenant compte qu'à la limite $\Pi = p_0$. En exprimant h, on obtient :

$$h = \frac{1}{A} [1 - e^{-(n+0{,}5)\alpha p_0}] \tag{22}$$

La formule donne une relation entre la longueur de la colonne, h, la vitesse w et la chute de pression, p_0.

La quantité totale de cossettes se calcule d'après la formule (9), si on remplace ϱ par la valeur déterminée par la formule (12) :

$$Q = f \int_0^h \left[1 - (1 - \varrho_0)\,(1 - Ax)^{\frac{1}{n+0{,}5}}\right] dx \tag{23}$$

L'intégration achevée et remplaçant h par l'expression (22), on obtient

$$Q = \frac{f}{k\alpha w^n} \left\{ \frac{(1 - \varrho_0)^{n+0{,}5}}{n + 0{,}5} [1 - e^{-(n+0{,}5)\alpha p_0}] - \frac{(1 - \varrho_0)^{n+1{,}5}}{n + 1{,}5} [1 - e^{-(n+1{,}5)\alpha p_0}] \right\} \tag{24}$$

L'expression dans la grande paranthèse $\{\}$ ne dépend, pour une colonne de cossettes donnée, par ϱ_0, α et n, que de la pression p_0. Pour abréger, nous désignerons dans ce qui suit, cette paranthèse par $\varphi(p_0)$.

On introduit la longueur originale de la colonne, h_0, par l'équation suivante :

$$Q = h_0 \varrho_0 f \tag{25}$$

En se servant de cette expression, on obtiendra pour la vitesse d'après la formule (24) :

$$w^n = \frac{1}{k a h_0 \varrho_0} \varphi(p_0) \tag{26}$$

Cette dernière expression nous donne une relation entre la vitesse du courant, la chute de pression et les données caractéristiques de la colonne.

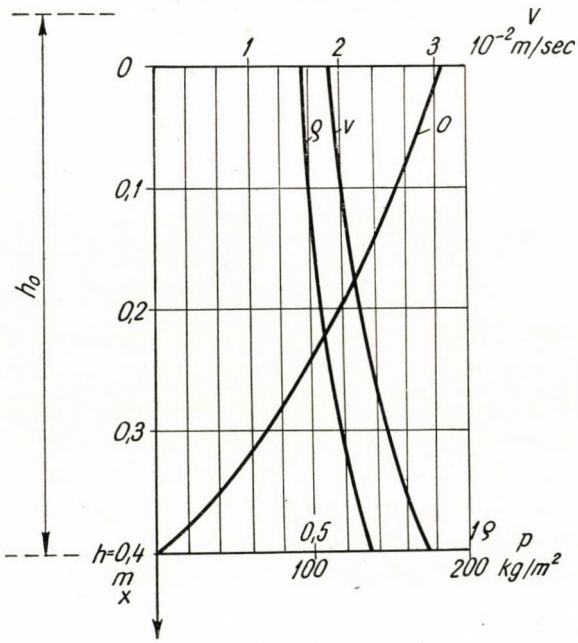


Fig. 3

2.5 Analyse des formules

On a obtenu la variation de Π, ϱ et v, en fonction de x, par les formules respectives (18), (20) et (21). La simplicité de ces formules nous dispensent de les analyser en détail. Les résultats d'un exemple numérique sont démontrés dans fig. 3. Il est à signaler que pour les grandes valeurs de x le tassement augmente très rapidement et comme, par conséquence, les espaces entre les

cossettes deviennent plus étroits, la vitesse linéaire augmente aussi, et en même temps la courbe représentant la chute de pression devient très raide.

Examinons de plus près les expressions (24—26). Si dans l'équation (24) p_0 est supposé constant, l'expression de la grande paranthèse $\{\ \}$ devient elle-même constante, d'où on tire que

$$w^n h_0 = \text{constant} \tag{27}$$

ou en d'autres termes

$$w = \frac{\text{const.}}{\sqrt[n]{h_0}} . \tag{28}$$

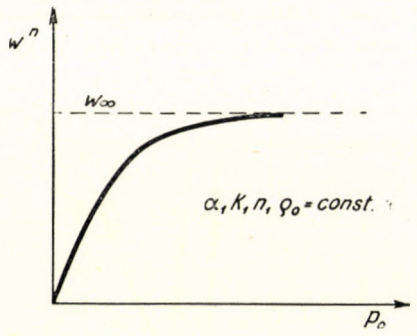


Fig. 4

On a donc obtenu une simple relation entre la longueur originale de la colonne et la vitesse du courant pour une pression constante.

Examinons l'équation (26) et plus spécialement le changement de w^n en fonction de la pression. Fig. 4. présente qualitativement cette courbe.

On peut vérifier que la courbe de l'équation (26), partant de l'origine, augmente monotonement, mais de façon que — au moins pour les cas pratiques — la mesure de l'augmentation décroît sans cesse.

Si nous formons la première dérivée, nous obtenons :

$$\frac{d(w^n)}{dp_0} = \frac{1}{h_0 \varrho_0 k} [(1-\varrho_0)^{n+0,5} e^{-(n+0,5)\alpha p_0} - (1-\varrho_0)^{n+1,5} e^{-(n+1,5)\alpha p_0}] . \tag{29}$$

L'expression dans la paranthèse angulaire [ ] et avec elle la dérivée est toujours plus grande que zéro, puisque — vu que $\varrho_0 < 1$ et $n \geqq 1$ — il est évident que

$$(1-\varrho_0)^{n+0,5} > (1-\varrho_0)^{n+1,5}$$

et

$$e^{-(n+0,5)\alpha p_0} > e^{-(n+1,5)\alpha p_0} .$$

La seconde dérivée est :

$$\frac{d^2(w^n)}{dp_0^2} = \frac{\alpha}{h_0 \varrho_0 k}\left[-(1-\varrho_0)^{n+0,5}(n+0,5)\,e^{-(n+0,5)\alpha p_0} + \right. \\ \left. + (1-\varrho_0)^{n+1,5}(n+1,5)\,e^{-(n+1,5)\alpha p_0}\right]. \tag{30}$$

La paranthèse angulaire [ ] et avec elle la seconde dérivée est toujours négative. Ceci se voit facilement, si on divise l'expression dans la paranthèse angulaire par l'expression positive $(1-\varrho_0)^{n+0,5}(n+0,5)e^{-(n+0,5)\alpha p_0}$ La paranthèse devient :

$$-1+(1-\varrho_0)\frac{n+1,5}{n+0,5}\,e^{-\alpha p_0}$$

Dans le domaine pratique cette expression est toujours négative. Le second membre de l'expression est toujours inférieur à l'unité, sauf dans le cas extrême — ne se présentant pas à réalité — si $\alpha p = 0$, $n = 1$ et $\varrho_0 \leq 0,4$. Or, l'expression et avec elle la seconde dérivée est toujours négative. On a donc vérifié que la courbe de l'expression (26) augmente toujours, mais à mesure diminuante.

Si p_0 devient de plus en plus grand, et tend vers l'infini, w^n tend vers une valeur bien déterminée :

$$\lim_{p_0 \to \infty} w^n = w_\infty^n = \frac{(1-\varrho_0)^{n+0,5}\,[1+\varrho_0(n+0,5)]}{k\alpha h_0 \varrho_0 (n+0,5)(n+1,5)} \tag{31}$$

Cette valeur de la vitesse que nous appelons «vitesse limite» est désignée par w_∞. (D'après Broager «vitesse critique» [8].)

On en tirera la conclusion que dans un système, déterminé par les valeurs ϱ_0, h_0, k, α et n, la vitesse ne peut pas dépasser une certaine limite, même si on augmente la pression à une valeur arbitrairement haute. En pratique cela signifie que dans la proximité de la vitesse limite il est vain d'augmenter la pression.

Il sera avantageux à écrire l'expression de la vitesse limite sous la forme suivante :

$$w_\infty^n = \frac{R(n, \varrho_0)}{k\alpha h_0} \tag{32}$$

où R n'est fonction que de n et ϱ_0. Les trois facteurs dans le dénominateur ont un caractère commutatif ; on les prendra pour des paramètres, ce qui est avantageux pour la représentation graphique. D'après les essais (voir chapitre 3.14) n est constant pour une colonne de cossettes, et a la valeur 1,85, de sorte que la représentation peut se faire à l'aide d'une famille de courbe à un paramètre

(Fig. 5). Ce nomogramme a une importance spéciale pour la détermination pratique de w_∞. Nous y reviendrons au chapitre 3.223.

Il est intéressant d'analyser la formule (26) afin de voir comment se comportent la vitesse et la pression, si on subdivise la colonne en parties. On entend par subdivision en parties l'application de constructions mécaniques dans la colonne telles qu'elles empêchent les forces hydrodynamiques, se produisant au-dessus de la construction, de se transmettre sur les couches de cossettes se trouvant au-dessous d'elles, et les dérivent sur les parois du vase.

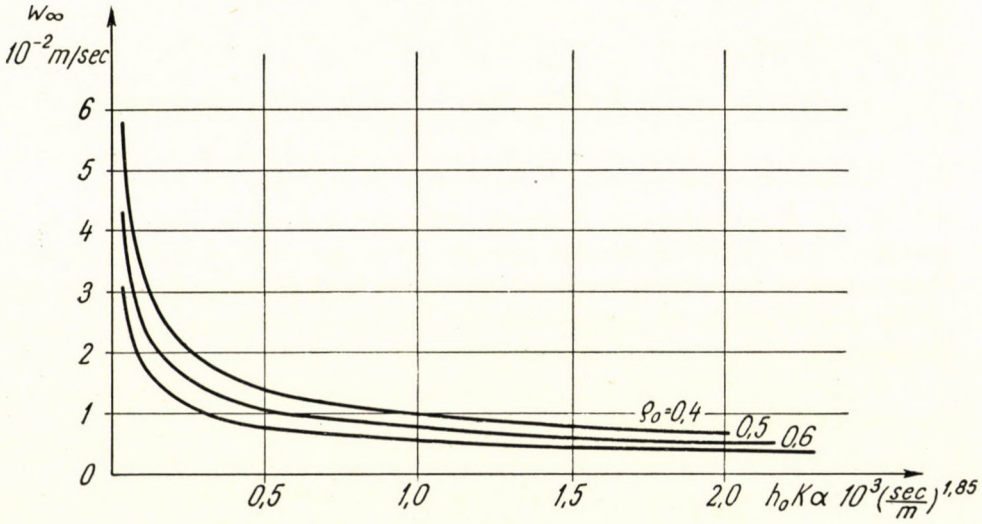


Fig. 5

Nous allons prouver que sans changer la pression, mais en subdivisant la colonne, le débit de liquide augmente. En subdivisant la colonne en ν parties égales, — ν étant un nombre positif entier — la vitesse changera et atteindra une valeur nouvelle désignée par w_ν. Les subdivisions étant au point de vue du courant égales entre elles, la chute de pression deviendra pour chaque partie p_0/ν. La formule correspondante sera donc :

$$w_\nu^n = \frac{1}{k\alpha \frac{h_0}{\nu} \varrho_0} \varphi\left(\frac{p_0}{\nu}\right). \tag{33}$$

Si on divise maintenant cette équation par la formule (26) et tire la n-ième racine, on obtient pour le rapport des vitesses :

$$\frac{w_\nu}{w} = \sqrt[n]{\frac{\nu \varphi\left(\frac{p_0}{\nu}\right)}{\varphi(p_0)}} \tag{34}$$

On peut constater que la fraction sous la racine est plus grande que l'unité ce qui est une conséquence de la convexité de la courbe (voir fig. 6.). Grâce à la subdivision de la colonne le débit de liquide sera augmenté bien que la pression soit restée identique.

On déduit ensuite de la figure qu'en subdivisant la colonne, la vitesse du courant pourra être supérieure à la vitesse limite correspondant à la colonne totale, fait d'une grande importance pratique. On voit ensuite que l'augmentation de la vitesse est d'abord grande en subdivisant la colonne, mais l'augmentation devient plus petite en continuant à subdiviser la colonne et n'aura

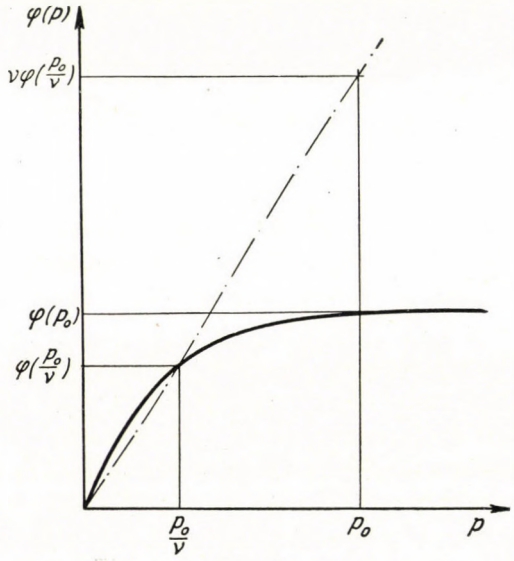


Fig. 6

plus d'effet, quand le point de la courbe correspondant à l'abscisse p_0/ν, se trouve sur la partie presque droite de la courbe. On en concluera aussi qu'une subdivision en parties n'a pratiquement aucun avantage, si on travaille déjà sur la branche presque droite de la courbe.

La pratique pourra aussi exiger de diminuer la pression (p. e. pour des causes mécaniques) sans changer la vitesse du courant. La subdivision de la colonne donnera aussi pour ce cas — entre certaine limites bien entendu — un résultat convenable. Le calcul se fait comme au cas précédent.

En connection avec la formule (26) il vaut la peine de constater encore que si $\alpha p_0 \ll 1$, la formule prend la forme qu'on emploie en général pour des colonnes de matières non comprimables. En effet, si on développe les expressions exponentielles se trouvant dans la grande paranthèse $\{\ \}$ en séries et néglige les

membres dont l'exposant est supérieur à l'unité, l'expression (26) prendra la forme suivante simple :

$$w^n = \frac{(1-\varrho_0)^{n+0,5}}{k} \frac{p_0}{h_0} = \text{const.} \frac{p_0}{h_0} . \tag{35}$$

La chute de pression est donc linéaire le long de la colonne et la subdivision en parties n'exercera aucune influence.

3. Partie expérimentale

3.1 Essais en laboratoire

3.11 Essais préliminaires

Pour chaque essai, pour ceux du laboratoire, ainsi que pour ceux de l'usine, nous avons employé des cossettes de betteraves. Le principe des essais était de faire circuler de l'eau par un récipient cylindrique rempli de cossettes, mesurant en même temps la différence de pression entre les deux extrémités du cylindre.

Les essais préliminaires ont démontré que la reproduction des résultats est fort difficile, surtout pour des vitesses poussées. Une cause de ces incertitudes était l'influence de la paroi, même si le diamètre du cylindre était un multiple de la longueur d'une cossette. On a trouvé ensuite de grandes différences entre les cossettes fraîches et épuisées, et les résultats étaient extrêmement inéxactes, si par suite de la plasmolyse causée par la température élevée 50 à 70°C, les propriétés mécaniques des cossettes se modifiaient au cours des essais. Pour éviter ces inconvéniants, nous nous sommes bornés à faire des essais avec de cossettes plasmolysées et épuisées, qu'on a tenues à une température constante, d'environ 20°C.

Au cours des essais préliminaires, nous avons aussi constaté qu'un nouvel équilibre dû à un changement de pression, ne s'établit pas d'un moment à l'autre, mais exige un certain temps. Le phénomène s'explique d'une part par le fait que la matière de la betterave est plastoélastique, d'autre part par le rangement différent des cossettes à la suite d'un changement du courant. Pour certaines vitesses élevées la résistance augmentait très rapidement à tel point que nous ne pouvions maintenir le courant avec la vitesse désirée. Dans tous ces cas nous avons trouvé au fond de la colonne une couche de cossettes complètement calfeutrée. Ce phénomène n'est pas entièrement réversible et même dans les cas moins poussés, quand le calfeutrage des cossettes au fond était plus léger, après interruption du courant les cossettes ne se sont plus relâchées.

Les essais préliminaires n'ont pas éclairé non plus la question si, le courant dans la colonne est dans le sens classique, laminaire ou turbulent? Nous n'avons pas pu trancher cette question ni par la dépendance entre vitesse et pression (linéaire ou quadratique), ni en colorant les veines de liquide.

3.12 Description de l'appareil de laboratoire

Il fallait donc construire un appareil qui pouvait fournir des résultats bien reproduisibles. On voulait éviter avant tout l'influence de la paroi, se manifestant par le fait que les cossettes s'appuyant à la paroi, transmettaient par la friction une partie des forces, de sorte que les déformations causées par le courant ne se produisaient pas librement.

Une telle influence peut être négligée si les appareils ont des dimensions d'usine. Pour que les dimensions de l'appareil de laboratoire ne soient pas trop grandes, on avait construit un appareil, dont la paroi se déforme dans le sens du courant, de la même façon que les cossettes. Dans ce but la paroi du vase cylindrique, désigné en fig. 7. par *A*, est faite d'une membrane de PVC flexible et imperméable pour le liquide. Pour éviter sa dilatation et pour maintenir le diamètre constant, il fallait appliquer à l'intèrieur et à l'extérieur du cylindre des cerceaux de fil de cuivre. Ainsi la paroi se déformait comme un soufflet.

Le volume du cylindre était, d'après des mesures faites, proportionnel à sa hauteur. Les deux cerceaux à l'extrémité portaient des tamis : l'inférieur était fixe, le supérieur mobile. Le cylindre était couvert d'une cloche désignée dans la fig. 7. par *B*. Les orifices *C* et *D* servaient à l'introduction et la sortie du liquide. Le manomètre différentiel pour la détermination de la pression était connecté aux points *E* et *F*. Afin de pouvoir observer le changement de hauteur de la colonne, on a appliqué des regards sur la cloche. Un instrument approprié servait à déterminer le débit de liquide. L'appareil était complété par une tige reposant sur le tamis supérieur et muni d'un plateau pour la réception de divers poids afin de pouvoir comprimer à désir la masse. Cet accessoire n'est pas représenté dans le dessin. (Fig. 7.)

3.13 Description des essais

Les cossettes nécessaires à l'essai ont été coupées par un petit coupe-racines avec des couteaux pressés (du type Goller) de division de 6 mm. Nous nous sommes efforcés de produire des cossettes de qualité identique à celles employées en usine. En se tenant à la pratique de la sucrerie, les cossettes

étaient caractérisées suivant Siline* par leur longueur et par le pourcentage de râpure. La plupart des essais a été faite avec des cossettes épuisées et on n'a employé qu'exceptionellement des cossettes fraîches. Les cossettes épuisées ont été obtenues de la façon suivante. Une quantité déterminée de cossettes était placée pendant 30 minutes dans de l'eau de température 75 °C, lavée ensuite avec de l'eau froide courante jusqu'à épuisement total. Les cossettes épuisées ont un poids spécifique très proche de celui de l'eau. C'est pourqoui on a pu supprimer l'influence de la gravitation pendant les essais. Afin d'obtenir une charge de cossettes uniforme, on a d'abord rempli d'eau l'appareil cylindrique et posé ensuite couche par couche les cossettes dans l'eau.

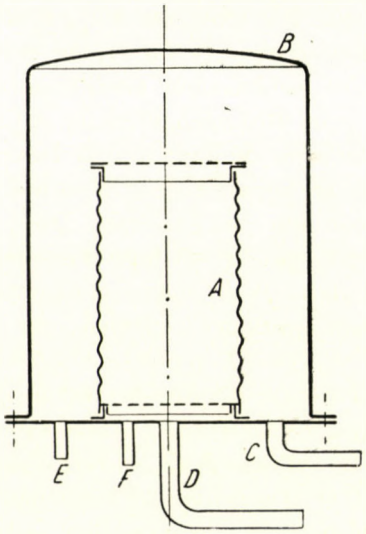


Fig. 7

Avec l'appareil on a mesuré les valeurs α et ϱ_0 de l'équation (12) et la valeur k de l'équation (16).

Pour déterminer le facteur de compressibilité, α, nous avons mesuré la déformation de la colonne de cossettes en fonction de la pression. La déformation est indépendante de l'origine de la force qui la produit. Pratiquement on peut donc procéder de façon à appliquer un poids sur le plateau pressant sur le tamis supérieur. Après un bref laps de temps l'équilibre s'établit et on peut mesurer la déformation. Pour éviter l'influence de la gravitation, les interstices entre les cossettes étaient remplis d'eau qui correspondait librement avec l'atmosphère.

* D'après Siline on a une mesure pour l'épaisseur des cossettes, si on détermine la longueur de 100 g de cossettes posées bout à bout.

Puisque la pression provient d'une force extérieure et qu'il n'y a pas de force agissant dans la colonne elle-même (il n'y a pas de courant), la déformation et le changement de tassement sont constants tout au long de la colonne. Cela fut vérifié expérimentalement. Dans les vases, dont la paroi est rigide, la déformation était à cause du frottement sur la paroi plus grande dans les couches supérieures, où la force extérieure agissait directement.

Pour déterminer le coefficient de résistance, k, défini par l'équation (16), l'appareil après l'avoir chargé de cossettes fut rempli d'eau, puis on a mis le courant en marche. On a mesuré la vitesse du courant et la chute de pression le long de la colonne. Cette dernière augmentait avec le temps. Pour les calculs nous avons employé les chiffres enregistrés après que l'équilibre dynamique s'était établi. Les essais ont été faits dans un domaine de vitesse, dans lequel l'équilibre stable s'établissait dans un temps relativement court. Si la vitesse se rapprochait de la vitesse limite, la résistance commençait à augmenter très rapidement. Dans ce cas on n'a pas pu maintenir la vitesse désirée et on était obligé de renoncer aux mesures. (Il faut remarquer qu'on peut imaginer une vitesse supérieure à w_∞, avant l'établissement de l'équilibre stationnaire.)

Par suite des propriétés du système, les résultats étaient assez dispers et afin de diminuer les erreurs on était obligé d'augmenter le nombre des essais. C'est pourquoi il paraissait convenable de se servir des mêmes cossettes. Mais — comme nous l'avons déjà mentionné — les cossettes forment un calfeutrage irreversible dans la colonne sous l'influence du courant. Pour rétablir l'état initial, il fallait donc retirer les cossettes de la colonne, les relâcher et remplir la colonne de nouveau. Procédant de cette façon les essais consécutifs montraient des résultats de bonne concordance.

3.14 Résultats des essais

3.141 Avant d'exposer les résultats relatifs à la détermination de la valeur numérique de a, ϱ_0, n et k, et les preuves de la validité de la théorie, il semble nécessaire de faire quelques remarques préliminaires.

Chaque essai a montré que l'équilibre ne s'établit qu'après un certain temps. A titre d'illustration fig. 8 représente quelques courbes, de la chute de pression en fonction du temps. Les courbes *a* et *b* indiquent les cas, où l'état stable s'établissait en 15, resp. 20 minutes. La courbe *c* se rapporte à un système labil, pour lequel la résistance a augmenté d'une façon extraordinaire.

Dans les essais destinés à déterminer a, on a également constaté que les cossettes pressées par un poids, exigeaient également un certain temps, — quoique plus court — pour l'établissement de l'équilibre. Une des courbes qui démontrent la déformation de la colonne de cossettes en fonction du temps, est donnée en fig. 9.

Il était déjà question du comportement irréversible de la masse de cossettes. Une certaine irréversibilité a été constaté d'une part au cours des essais exécuté pour la détermination de α, quand la colonne de cossettes était déformée par un poids extérieur, et d'autre part durant les essais avec un courant de liquide. Si, au cours de ces derniers on a fait d'abord passer le courant avec la vitesse a,

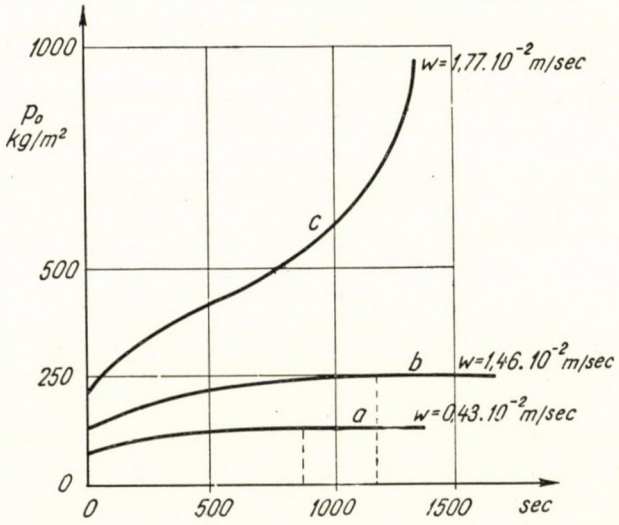


Fig. 8

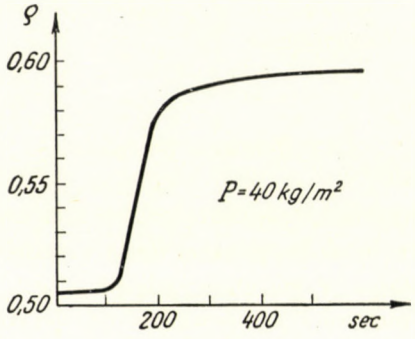


Fig. 9

puis celle-ci a été élevée à une valeur b, la chute de pression (la résistance) après l'établissement de l'équilibre était identique à celle obtenue au cas où on aurait commencé tout de suite avec la vitesse b. Mais la thèse n'est pas vraie inversement. Si, après avoir marché avec la plus grande vitesse b, on la réduit à la valeur a, on obtient une valeur supérieure à celle obtenue en commençant immédiatement avec la vitesse a. Ce phénomène est dû d'une part à la propriété plasto-élastique de la betterave, d'autre part au déplacement des cossettes. Le compor-

tement plastoélastique de la colonne de cossettes est expliqué par le diagramme de fig. 10 qui était tracé en soumettant des morceaux de betterave de forme bien définie à l'influence d'une force. Dans ce diagramme — tiré d'un travail de Vukov non encore publié — les chiffres cités auprès des courbes donnent la pression en kg/m². [9]

3.142 On a fait de nombreux essais pour déterminer a et ϱ_0 et pour prouver la réalité de la supposition décrite par formule (10). Le diagramme de la fig. 11 montre le logarithme de l'espace libre entre les cossettes en fonction de la pression. On voit que jusqu'à une certaine limite les valeurs mesurées se trouvent assez

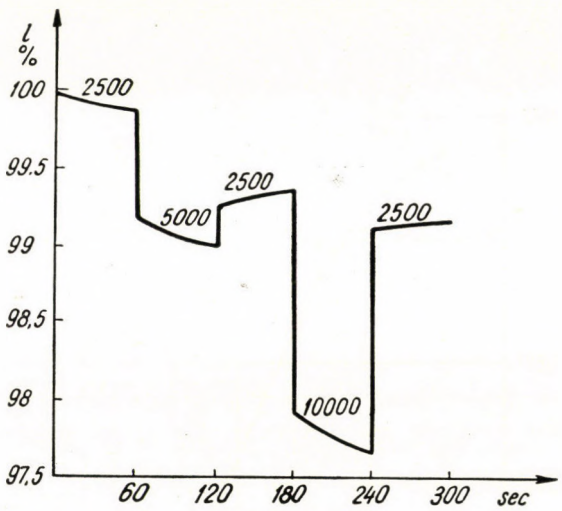


Fig. 10

exactement sur une ligne droite. D'autres essais ont donné des résultats pareils. La valeur réciproque de la tangente prise avec un signe inverse est proportionelle à a. On obtient la valeur de ϱ_0, si on fait l'extrapolation de la droite, jusqu'à la pression zéro.

On pourra tirer la conclusion que la fonction exponentielle, postulée au chapitre 2.4, par la formule (10) resp. (12), décrit bien le phénomène, jusqu'à la limite supérieure d'environ $\varrho = 0{,}7 - 0{,}8$. La formule est donc exacte dans le domaine pratique, mais elle n'est pas applicable au-dessus d'une certaine limite, où des phénomènes secondaires se produisent (p. e. le volume géométrique des cossettes change, par suite de la sortie du liquide de la cossette elle-même).

Pour les cossettes épuisées dont la longueur était entre 14 et 28 m/100 g et qui contenaient 1 à 12% de râpure, nous avons obtenu les chiffres suivants :

$$a = 1{,}1 - 2{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{kg},$$

en cas exceptionnel $3{,}5 \cdot 10^{-3}$ m²/kg

$$\varrho_0 = 0{,}44 - 0{,}46 \text{ m}^3/\text{m}^3,$$

en cas exceptionnel 0,41 — 0,51 m³/m³.

3.143 Pour déterminer l'exposant n, nous nous sommes servis des résultats obtenus en mesurant des valeurs correspondantes de w et h_0, pour un p_0 constant. On écrit l'équation (28) dans la forme

$$n \log w = \text{const.} - \log h_0$$

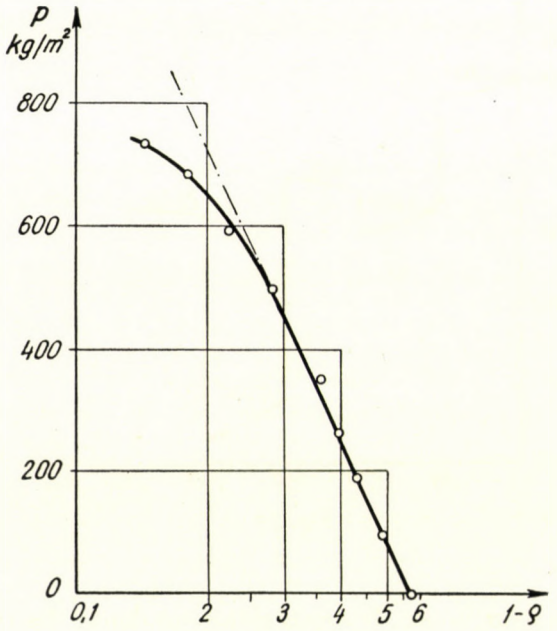


Fig. 11

qui se laisse facilement employer pour un diagramme, dans lequel la pente de la droite fournit immédiatement la valeur cherchée de n. Les résultats de deux séries de mesures sont donnés dans la fig. 12. On constate que dans le domaine examiné, qui est en même temps le domaine pratique des sucreries, les valeurs se trouvent sur une ligne droite, ce qui en outre est une preuve pour la realité de la théorie. La valeur numérique de n est 1,85. Il est intéressant de remarquer que ce chiffre est exactement le même que celui trouvé par Chilton et Colburn pour l'exposant de la vitesse dans le cas d'un courant turbulent passant par une colonne [4].

Le courant en dépit d'un nombre Reynolds bas (10 —50) n'est pas laminaire, mais il serait faux de le déclarer turbulent, tout au moins dans le sens classique.

En accord avec les auteurs cités, nous sommes de l'avis, que la distinction des deux courants de caractère différent perd son sens. Le courant est probablement laminaire dans le voisinage des particules, tandis que des tourbillons, dus au changement soudain de direction et de section des espaces libres se produisent dans le noyau du courant. Il serait toutefois vain de s'astreindre à déterminer le caractère d'un pareil courant, car les dimensions des interstices sont différentes et la vitesse linéaire moyenne elle-même change au long de la colonne. Ainsi, si pour s'exprimer plus simplement on emploie le mot turbulent, comme le font Chilton et Colburn, il faut se rendre compte que le caractère du courant est dans notre cas tout différent d'un courant turbulent passant par un tuyau cylindrique.

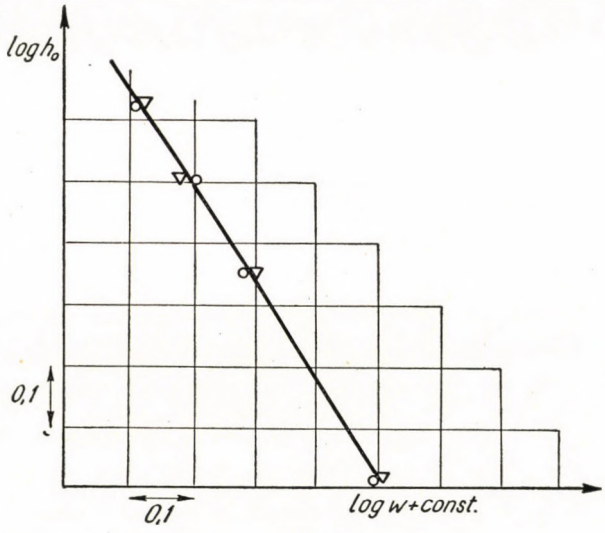


Fig. 12

3.144 Dans ce qui suit nous rendons compte des essais qui avaient pour but la détermination de k et la démonstration de la réalité de la théorie.

C'étaient des essais faits avec de l'eau traversant la colonne de cossettes. Les valeurs de a et ϱ_0 ont été déterminées d'avance. En connaissance de n et en mesurant la chute de pression et la vitesse du courant, on a le moyen de déterminer la valeur de k par la formule (26).

Les essais ont été faits dans le domaine de vitesse, où $w = 4 - 18 \cdot 10^{-3}$ m/sec. Pour des essais exécutés avec les mêmes cossettes, mais en variant la vitesse et la longueur initiale de la colonne, nous avons trouvé pour k des valeurs qui excepté les cas extrêmes ne variaient pas plus de $\pm$ 10%. Voilà encore une preuve pour la réalité de la théorie. Pour des cossettes de diverse qualité on a trouvé des valeurs de k différentes.

D'après les essais les valeurs de k varient pour différentes betteraves entre $0{,}2-0{,}6 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \cdot \left(\frac{\text{sec}}{\text{m}}\right)^{1{,}85}$. Mais on a trouvé quelquefois et surtout pour les cossettes faites des betteraves non mûres des valeurs extrêmes jusqu'à $1{,}0 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \cdot \left(\frac{\text{sec}}{\text{m}}\right)^{1{,}85}$.

Quant à l'exactitude des essais, on a constaté qu'en augmentant la vitesse, la reproductibilité devient plus faible. Fig. 13 montre les résultats d'une série d'essais relativement défavorables à ce point de vue. La ligne épaisse est la courbe théorique reliant la vitesse à la pression, tandis que la surface hachurée aux deux côtés de cette courbe montre les divergences. Celles-ci croissent rapide-

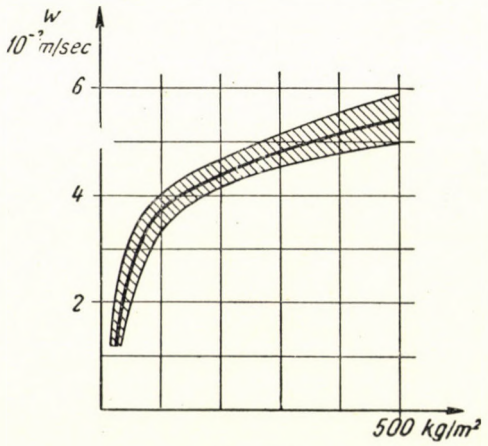


Fig. 13

ment avec la vitesse, mais — bien entendu — les erreurs commises ne sont pas dues au décroissement de l'exactitude des essais, elles proviennent plutôt du fait que la résistance dépend en somme de la distribution accidentelle des cossettes, et on comprend facilement que l'influence de cette inhomogénité est plus grande, si on augmente la vitesse.

Quelques essais, plutôt qualitatifs, ont été faits pour pouvoir se rendre compte du déplacement des couches de cossettes envisagées. On a constaté qu'après l'établissement de l'équilibre la déformation était plus grande dans les parties inférieures que dans les parties supérieures. Cela suffisait pour nous montrer que le déplacement se produisait conformément à la théorie.

3.145 Les résultats des essais ont été evalués du point du vue de l'influence de la qualité des cossettes, du traitement thermique et de la provenance de la betterave, sur les valeurs de α et k. On attend d'avance que les cossettes plus fines se déforment d'avantage et que leur valeur k soit plus grande, surtout si elles contiennent beaucoup de râpure. La tableau suivant montre les moyennes des

Longueur de cossettes m/100 g	Râpure %	$\alpha \cdot 10^3$ $\frac{m^2}{kg}$	$k \cdot 10^{-6}$ $\frac{kg}{m^3} \cdot \left(\frac{sec}{m}\right)^{1,85}$
20	12	1,3	0,35
21	1	1,8	0,45
24	4	2,7	0,20
28	8	2,4	0,55

valeurs trouvées ; les essais ont été faits avec les cossettes provenant des betteraves saines bien qu'ensilées longtemps.

On peut constater qu'il n'y a pas de corrélation prononcée entre la longueur de cossettes et les valeurs α et k. Même si les cossettes sont très fines (p. e. 28 m/100 g), on ne voit pas de différence remarquable. Au cours d'une autre série d'essais faits avec des cossettes beaucoup plus grosses (jusque 14 m/100 g), des résultats pareils ont été obtenus : nulle corrélation ne pouvait être démontrée, et seules les cossettes très épaisses donnaient des valeurs un peu différentes. On en tire la conclusion qu'évidemment les méthodes employées actuellement pour qualifier les cossettes — c.-à-d. la longueur de 100 g et le pourcentage de râpure — ne sont pas aptes à caractériser les propriétés hydrodynamiques. La cause en est double : d'une par la méthode est très subjective, d'autre part elle ne tient pas compte de l'irrégulité des cossettes, bien que celle-ci influence très fortement les propriétés mécaniques et hydrodynamiques.

Les valeurs α et k dépendent aussi de la maturité de la betterave, ce qui se voit du tableau suivant. On a comparé les valeurs des betteraves mûres, ensilées, saines, avec celles des betteraves arrachées vers le commencement de l'été, qui étaient donc dans une période de forte croissance.

	Longueur de cossettes m/100 g	Râpure %	$\alpha \cdot 10^3$ $\frac{m^2}{kg}$	$k \cdot 10^{-6}$ $\frac{kg}{m^3}\left(\frac{sec}{m}\right)^{1,85}$
Betteraves ensilées	22,2±1,0	5	2,9±0,3	0,3±0,05
Betteraves non mûres	18,8±0,8	3	5,4±0,7	0,75±0,10

On voit que les propriétés hydrodynamiques des cossettes des betteraves non mûres sont très inférieures. Il faut remarquer qu'on ne travaille jamais des betteraves pareilles en usine.

Le traitement thermique abaisse considérablement le module d'élasticité de la betterave [10]. Ainsi on peut s'attendre à ce que la valeur de α et par suite

la déformabilité de la colonne de cossettes soit plus forte pour les cossettes plasmolysées que pour les cossettes fraîches.

Le tableau suivant montre que la déformabilité d'une cossette plasmolysée et épuisée est d'environ un ordre de grandeur plus élevée. En même temps la valeur k décroit un peu, ce qui signifie que les forces de frottement sont plus petites. Il est probable, bien que non encore prouvé, que le traitement thermique rend la surface des cossettes plus glissante.

Série d'essai	Traitement	$\alpha \cdot 10^3 \frac{m^3}{kg}$	$k \cdot 10^{-6} \frac{kg}{m^3}\left(\frac{sec}{m}\right)^{1,85}$
1	Non traitées...	0,3	0,9
	Épuisées	2,4	0,6
2	Non traitées ..	0,3	0,6
	Épuisées	1,8	0,45

3.2 Essais en usine

Ces recherches ont été faites pour obtenir une réponse aux question suivantes : la théorie décrit-elle bien les phénomènes de l'usine ; peut-on constater l'avantage de la subdivision de la colonne ; quelle est la résistance du tamis des diffuseurs ; se forme-t-il une couche de cossettes immédiatement au-dessus du tamis ayant une résistance accentuée et enfin la résistance hydrodynamique dépend-elle de la direction du courant, plus spécialement augmente-t-elle, si le courant passe d'en bas vers le haut.

3.21 Description de l'installation

L'appareil, qui servait aux essais, était installé dans une sucrerie, de façon qu'un vase cylindrique était mis en circuit parallèlement à un diffuseur de la batterie. Afin déviter une influence de la paroi, le cylindre avait un diamètre de 1 m. Deux tamis, en haut et en bas, étaient placés à une distance de 2 mètres l'une de l'autre, leurs perforations étaient de 12×12 mm. On avait le moyen de suspendre de façons différentes des chaînes dans le cylindre.

Fig. 14 montre le dessin schématique de l'appareil, ses dimensions essentielles et sa mise en circuit avec la batterie de diffusion. Le jus est obtenu de la batterie ; travaillant de cette façon-là, les cossettes placées dans le cylindre passent par toutes les phases en même temps que les cossettes se trouvant dans le diffuseur correspondant de la batterie ; le jus passant par le cylindre est ramené au diffuseur suivant. — On peut changer la direction du jus passant à travers le cylindre. L'essai peut être effectué avec de l'eau.

La quantité de jus ou d'eau qui passe a été mesurée. Pour déterminer la résistance, on mesure la pression à 5 points : 2 à chaque côté des tamis et un au milieu de la colonne. Ces points étaient reliés par des tuyeaux à un tableau central portant les manomètres différentiels à mercure qui permettait de lire les différences de pression entre deux points de mesure consécutifs et la chute de pression totale.

Les tuyaux reliant les manomètres avec les cylindres d'essai aboutissent dans des membranes de caoutchouc qui transmettent la pression sans que les liquides se mélangent. Le système total de mesure a été rempli avec de l'eau bouillie.

Au cours des essais préliminaires nous avons déterminé la résistance du cylindre vide et des tamis. Nous avons trouvé que ces résistances étaient négligeables.

Pour les essais on a employé des cossettes identiques à celles de la batterie. On contrôlait le poids des cossettes et prenait soin de ce que le tassement soit le même en chaque couche. Quand le diffuseur correspondant de la batterie était à son tour rempli, on a fait les maneuvres identiques à tous les deux. Durant l'épuisement on enregistrait les valeurs de pression et de vitesse du jus. Cette dernière fut réglée à une valeur constante. Souvent après avoir épuisé les cossettes, on continuait les mesures avec de l'eau.

3.22 Résultats des essais

3.221 Les essais faits dans les usines, sont d'un certain point de vue différents de ceux exécutés en laboratoire. En premier lieu il faut noter que la température du jus passant varie. Le jus provenant de la batterie a tout d'abord

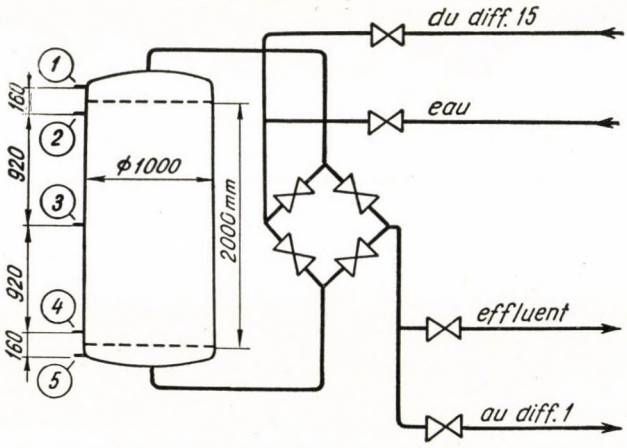


Fig. 14

une température basse, qui augmente ensuite pour rester constante pendant un certain temps, puis décroît et atteint la température de l'eau de diffusion. Ainsi la viscosité du jus change également. Le changement de concentration du jus cause à son tour un changement — quoique plus faible — de la viscosité.

Les cossettes fraîches justement remplies sont relativement rigides (leur α est petit), mais par l'influence de jus chaud elles se transforment bientôt, la plasmolyse se produit et leurs propriétés mécaniques changent, elles deviennent plus molles. Ce changement tout en diminuant progressivement dure pendant tout le procédé.

Ainsi le cas stationnaire, qu'on pouvait bien réaliser au cours des essais en laboratoire prenant soin de garder les circonstances constantes, ne pouvait être qu'approché, et cela même seulement vers la fin du procédé.

Nous montrons en fig. 15. les résultats d'une telle série de mesure. Les courbes marquées par 1 et 2 montrent les résistances partielles, la courbe 3 la résistance totale.

3.222 Les cossettes devenues molles se déforment sous l'influence du courant, conformément à la théorie. Nous avons fait nos observations y relatives en nous servant d'un appareil auxiliaire. Nous avons posé sur la surface des cossettes un tamis mobile muni d'un indicateur aboutissant par le couvercle dans un tuyau de verre fermé au bout. Les observations ont été faites pendant que le courant passait du haut en bas ; les chaînes ont été supprimées.

On pouvait voir que la surface des cossettes commencait à tomber soudainement, dès que la plasmolyse était achevée; plus tard ce déplacement devenait plus lent et la surface tendait vers une limite. Si on augmentait la vitesse du courant, la colonne se déformait encore et un nouveau équilibre se produisait

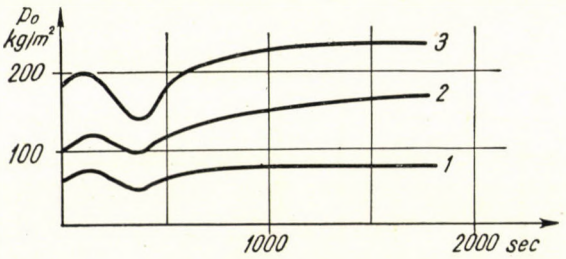


Fig. 15

correspondant à un déplacement plus poussé du niveau de cossettes. Ces déformations étaient irréversibles.

En augmentant la vitesse jusqu'à approcher la vitesse limite, on constatait une déformation aussi forte que le tiers supérieur de la colonne était vide, conformément à quoi on retrouvait dans la partie inférieure de la colonne le calfeutrage des cossettes presque imperméable, dont nous avons déjà plusieurs fois fait mention.

3.223 Dans le chapitre 2.5 on a donné la définition de la vitesse limite et pour la calculer, on a déduit la formule (31). Des essais ont été fait en vue de déterminer expérimentalement la vitesse limite, ou en autres termes : on a cherché le domaine de vitesse dans lequel la couche de cossettes imperméable se produit. Etant donné que l'origine de chaque phénomène qui ne tend pas vers un équilibre, dépend d'une petite inhomogénité, d'une petite asymétrie du courant, d'une irrégularité dans la distribution des cossettes, il semble plus avantageux pour la pratique de parler d'un domaine de vitesse dans lequel ce phénomène peut se produire, que de la vitesse limite elle-même. Il faut donc pouvoir indiquer à l'usine une telle limite supérieure de la vitesse au-dessous de laquelle ce phénomène ne se produit certainement pas.

Il faut remarquer que souvent on réussit à empêcher le calfeutrage dans les couches inférieures pas encore développées complètement, en changeant temporairement la direction du courant.

Nous avons cherché à déterminer le domaine de la vitesse limite dans une colonne de cossettes de hauteur de 2 mètre, non subdivisée en parties. Les cossettes provenaient de betteraves fraîches, leur longueur changeait entre 20 et 24 m par 100 g. Nous avons trouvé qu'en général l'augmentation soudaine de la résistance survenait si la vitesse atteignait des valeurs de $9—13 \cdot 10^{-3}$ m/sec. En cas exceptionnel on pouvait dépasser cette valeur. D'autre part avec des betteraves altérées, gelées, p. e. la résistance augmente déjà, si la vitesse atteint la valeur de $8 \cdot 10^{-3}$ m/sec, même si les cossettes sont épaisses : p. e. 14 m/100 g.

Si on calcule maintenant, pour comparer, la vitesse correspondante d'après la formule (31), avec les valeurs $\varrho_0 = 0{,}45$, $\alpha = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^2/kg}$, $k = 0{,}2 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \left(\frac{\mathrm{sec}}{\mathrm{m}}\right)^{1{,}85}$, et $h_0 = 2$ m, on trouve $w_\infty = 11 \cdot 10^{-3}$ m/sec. Ce résultat est non seulement en ordre de grandeur, mais même numériquement en accord avec les résultats des essais. Voilà encore une preuve pour la réalité de la théorie des colonnes contenant de la matière déformable. (Nous remarquons que la valeur de α, prise pour les calculs est la moyenne des essais en laboratoire et pour k on a pris la valeur la plus petite, les cossettes de l'usine en question étant très fines, bien coupées et contenant peu de râpure.)

On peut donc tirer la conclusion que les valeurs données en fig. 5. peuvent être employées dans la pratique. Tout de même, tenant compte du fait qu'il s'agit d'un système labile, il faut par précaution appliquer un facteur de sûreté. Nous proposons de prendre une valeur d'environ 0,5—0,7 comme diviseur pour le côté droit de l'équation (31).

3.224 Une autre série de mesure avait pour but de contrôler l'influence des chaînes. D'une part nous avons voulu vérifier, si la résistance totale de la colonne décroît effectivement, selon la théorie, par suite de subdivision en parties, et d'autre part nous avons voulu voir, si quelques chaînes placées horizontalement l'une près de l'autre, étaient vraiment aptes à subdiviser la colonne en parties, si elles pouvaient porter le poids et si elles empêchaient effectivement les forces d'agir à travers de la couche de chaînes.

Fig. 16 représente schématiquement le mode d'emploi des chaînes. Elles sont fixées à 40 cm hauteur l'une de l'autre, et les supérieures, resp. les inférieures sont à 20 cm des tamis. Les chaînes n'étant pas tendues, ces deux couches à l'extrémité ont une épaisseur moyenne un peu différente. Dans chaque couche 4 chaînes pouvait être fixées.

Les essais ont été faits avec des cossettes ordinaires d'usine. Le courant passait du haut vers le bas, avec une vitesse de $10 \cdot 10^{-3}$ m/sec, qui était approximativement la vitesse usuelle à l'usine. Pour éliminer l'influence de l'inégalité des cossettes les essais ont été répétés plusieurs fois en changeant cycliquement les différentes dispositions des chaînes. Par ce moyen nous avons réussi à éliminer l'influence de l'inégalité des cossettes et les effets mesurés sont

bien plus grands que les erreurs commises. Les résultats sont indiqués dans le tableau suivant :

Arrangement des chaînes	Résistance de la colonne en mm Hg	Résistance de la partie inférieure de la colonne en %
5 couches de chaînes, distribution égale	14±0,5	47±5
3 couches de chaînes, dans la partie supérieure	14±1	58±4
3 couches de chaînes, dans la partie inférieure	17±1	39±5
Sans chaîne	22±6	75±3

Les valeurs du tableau sont des moyennes d'au moins 7 essais pour le cas stationnaire. Les déviations sont déterminées par le carré des moyennes

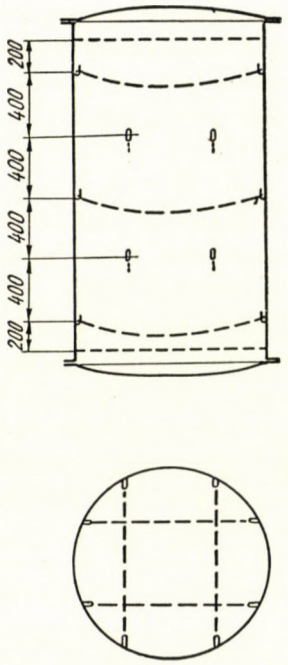


Fig. 16

des écarts. On voit que la résistance de la colonne est beaucoup plus grande, si on n'emploie pas de chaînes et que dans ce cas le ¾ de la résistance se produit dans la partie inférieure de la colonne. Dans les deux cas, où on n'a fixé que 3 couches de chaînes, on trouve environ 60% de la résistance totale, dans la moitié non subdivisée en parties. Enfin avec 5 couches de chaînes les résistances sont égales dans les 2 moitiés.

L'essai a aussi prouvé que des chaînes horizontales sont en effet capables de diviser la colonne de cossettes en parties hydrodynamiquement indépendantes. Il fallait encore déterminer le nombre de chaînes nécessaires dans une couche pour que la subdivision soit satisfaisante. Cette fois on a effectué les essais de manière à remplir la moitié inférieure du cylindre avec des cossettes ; les chaînes étaient fixées au niveau de cette couche. Le courant passait d'en bas vers le haut ; on mesurait les résistances des deux moitiés.

Nous avons constaté que plus que 90% de la résistance était toujours dans la partie inférieure ce qui prouve que les chaînes ont bien retenu les cossettes dans cette moitié. Ce résultat ne changeait pas quand on diminuait le nombre des chaînes et restait encore le même quand toutes les chaînes — sauf une — étaient éloignées. Une seule chaîne pouvait donc retenir tout la colonne de cossettes. Si, enfin cette dernière était éloignée, le courant poussait la masse de cossettes dans la partie supérieure.

Ces recherches nous ont apporté la preuve que pour un cylindre de diamètre de 1 m il suffit une seule chaîne pour subdiviser la colonne de cossettes en parties. On ne peut tirer de ce fait une conséquence immédiate pour les diffuseurs de l'usine qui ont un diamètre beaucoup plus grand et il sera nécessaire de faire des essais speciaux dans le but de savoir combien de chaînes doivent être appliquées dans les diffuseurs de diamètres variant de 1,8 à 2,3 m. Indépendemment de ces essais, nous savons par expérience d'usine qu'en général on peut se contenter de chaînes horizontales parallèles, distantes d'environ 40 cm.

3.225 Les techniciens de sucrerie sont souvent de l'avis que les tamis de fond des diffuseurs représentent une résistance très importante et qu'il est indiqué d'augmenter leur surface libre ou bien la surface totale des tamis. D'après les résultats de nos essais nous avons constaté que cette opinion n'est pas justifiée, et que l'ordre de grandeur de la résistance du tamis n'est pas supérieur à celle d'une couche de cossette de même épaisseur. Il est tout de même vrai que la plus grande résistance spécifique (résistance par unité de longueur) se trouve immédiatement au-dessus du tamis, si dans le diffuseur on n'emploie pas de chaînes, et qu'elle devient surtout grande, si la vitesse du courant s'approche de la vitesse limite.

Nous avons deux résultats qui prouvent que la résistance du tamis fixé au pied de la colonne, où le liquide la quitte, n'est pas importante. Le tableau suivant montre des valeurs moyennes de résistance en mm de mercure trouvées au cours de différents essais, faits avec la même vitesse de jus, mais en différentes circonstances. La limite d'erreur est d'environ $\pm$ 1 mm. Les chiffres indiquant les points de mesure sont présentés dans la fig. 14.

On remarque qu'on ne peut démontrer avec sûreté une résistance à la place où le liquide entre dans la colonne. Par contre on trouve une résistance remarquable à l'autre extrémité, mais seulement si la colonne de cossettes n'est pas soutenue par des chaînes. Si le tamis est protégé par des chaînes, même à

	Résistance en mm de mércure entre les points de mesure		
	1—2	4—5	1—5
Sans chaînes, direction du courant de haut en bas	0	3	23
5 couches de chaînes, la même direction	0	0	15
Sans chaînes, direction du courant de bas en haut	6	1	36
5 couches de chaînes, la même direction	2,5	1	22

cette place on ne peut pas la constater. Si la résistance du tamis était importante, il faudrait qu'une grande chute de pression se développe dans ces parties, indépendemment du nombre des chaînes. En évaluant ces résultats, il faut tenir compte du fait que les points de mesure sont à environ 5 cm du tamis.

La seconde preuve nous est fournie par le tableau donné au chapitre 3.224. Si on emploie 5 couches de chaînes, la résistance est partagée en deux moitiés égales se trouvant dans la partie supérieure resp. inférieure. Le courant passe de haut en bas, le tamis supérieur n'est donc pas chargé, et au cours des essais on ne pouvait pas démontrer à cette place une résistance mesurable. Si la résistance du tamis inférieur était importante, il faudrait que la résistance de la demi-colonne inférieure soit beaucoup plus grande que celle de la moitié supérieure. Ce fait même constitue déjà une preuve. Mais les deux lignes suivantes du tableau prouvent également le même fait: la résistance est toujours plus petite dans la partie, où on trouve des chaînes. Ce sont donc les chaînes elles- mêmes qui causent la diminution de la résistance, et le tamis n'y joue aucun rôle.

Il est encore important de remarquer qu'au diffuseur de vidange par le fond la construction exige que le diamètre de l'ouverture inférieure soit plus petit que celui de la partie cylindrique. Ainsi on est obligé à construire entre ces deux partiesun cône. Cette forme est au point de vue de la résistance à plus forte raison désavantageuse. Nous avions constaté tout à l'heure qu'un courant de liquide passant de haut en bas, cause dans les parties inférieures des déplacements, les interstices entre les cossettes deviennent plus petits et la vitesse linéaire augmente. Si maintenant nous diminuons encore la surface de section de la colonne de cossettes, la vitesse linéaire et avec elle la chute de pression augmentera encore davantage. On en tire la conclusion que le danger de calfeutrage des cossettes est plus grand dans la partie conique des diffuseurs et que la vitesse limite sera atteinte à des valeurs plus basses que de coutume. Il faut donc éviter des constructions pareilles. Tout au contraire, le cone à la partie supérieure des diffuseurs n'a presque aucune influence désavantageuse, la charge étant relativement petite dans ces parties.

3.226 Reste à déterminer si la résistance dépend de la direction du courant, s'il est en effet plus favorable de faire passer le courant de haut en bas, comme

d'habitude en sucrerie. A première vue on croirait qu'une telle différence ne peut pas exister, la gravitation étant éliminée, les cossettes et le jus ayant approximativement le même poids spécifique. En dépit de ce fait on était de l'avis dans les usines qu'un courant passant de bas en haut provoque une résistance augmentée. On trouve dans la littérature différentes expliquations, qui toutefois en général n'ont pas de bases expérimentales convenables. Dans ce qui suit, nous décrirons nos recherches qui avaient pour but la solution de ce problème.

Au cours des essais on a d'abord rempli le diffuseur de cossettes, puis expulsé l'air en introduisant le jus au bas du diffuseur comme d'habitude (dans la langue sucrière : meichage) ; ensuite on a changé plusieurs fois le sens du courant. On a fait des essais, où le sens du jus était renversé immédiatement après que le diffuseur avait été rempli du jus, et d'autres, où cette opération manquait. On a fait les mesures chaque fois que le courant devenait stationnaire. Pour ces essais les chaînes étaient éloignées du diffuseur. On a pu observer que le résultat dépendait essentiellement de la vitesse du meichage.

Durant la première série d'essais, la vitesse du meichage était plus petite que celle rencontrée habituellement en usine : $w < 8 \cdot 10^{-3}$ m/sec.

Le résultat d'environ 30 essais faits en partie avec du jus brut, en partie avec de l'eau montrent que dans le cas où le jus passe de bas en haut, la résistance totale de la colonne est pratiquement la même ($98\% \pm 2\%$) que la résistance moyenne de tous les essais. On n'a donc pas pu constater de différence.

Au cours d'une autre série d'essais la vitesse du jus pendant le meichage était plus élevée, d'environ $14 \cdot 10^{-3}$ m/sec. Ces recherches ont montré qu'avec ou sans chaînes, la résistance au courant de bas en haut est beaucoup plus forte, si toutes conditions égales, la vitesse de meichage s'est accrue.

Les phénomènes peuvent s'expliquer de la manière suivante : une vitesse augmentée durant le meichage provoque des forces hydrodynamiques plus fortes, qui pressent les cossettes contre le tamis supérieur, où une résistance relativement forte se développe. Les forces correspondant à une vitesse plus petite, sont plus faibles. Or, si ayant terminé le meichage avec une vitesse poussée, et le sens du courant reste le même — selon les considérations des chapitres précédents — la résistance primaire développée devant le tamis augmentera d'avantage. Si, au contraire, on renverse le sens du courant après le meichage, un certain déplacement aura lieu dans les cossettes et la résistance primaire devant le tamis supérieur disparaîtra.

On s'imaginait que la résistance supplémentaire est peut-être due aux râpures nageant vers la surface pendant la période du meichage, bouchant les couches supérieures. Mais on a pu démontrer que cette explication est erronnée, puisque les échantillons de cossettes prises de la partie supérieure de la colonne ou en un point quelconque, contenaient la même quantité de râpure.

4. Conséquences pratiques

4.1 La résistance hydrodynamique des colonnes remplies de matières déformables se comporte autrement que les résistances hydrodynamiques usuelles (p. e. courant en tuyaux). Le caractéristique de telles colonnes est que la chute de pression n'est pas constante au long de la colonne, ni même dans le cas stationnaire, mais augmente vers le tamis soutenant la colonne. A part de ce fait, la résistance est une fonction du temps : l'état stationnaire ne se développe qu'après un certain temps qui dépend des données de la charge et du courant. La classification usuelle : courant laminaire ou turbulent perd son sens ; le courant ne peut pas être caractérisé par le nombre Reynolds.

4.2 Pour les colonnes en question une limite de vitesse du courant peut être définie. Elle ne peut être surpassée dans le cas stationnaire — les données de la colonne étant fixées — en dépit d'une augmentation de pression arbitraire.

Cette vitesse limite correspond à une couche fortement calfeutrée et pratiquement imperméable, qui se développe au bas de la colonne en conséquence des forces hydrodynamiques. La vitesse limite peut être calculée. Dans la pratique on fera mieux d'employer un facteur de sûreté, afin de tenir la vitesse assez basse. Un calfeutrage en train de se développer peut être supprimé, en changeant le sens du courant, ce qui causera un certain relâchement de la couche tassée. En retournant ensuite le courant dans le sens originel, on pourra le faire circuler sans difficulté à une vitesse plus basse.

4.3 On a un avantage à subdiviser la colonne en plusieurs parties indépendantes au point de vue hydrodynamique. Par la subdivision la résistance totale de la colonne décroît, ou bien la vitesse du courant augmente sans qu'on soit obligé de changer la pression. La vitesse limite passe à des valeurs élevées. On peut en conclure qu'il est impossible que de hautes colonnes (p. e. des tours de diffusion) puissent fonctionner sans être subdivisées en parties.

4.4 La subdivision de la colonne a un optimum pratique. Surtout les premières subdivisions ont une grande influence, en les multipliant, l'effet devient de plus en plus petit.

4.5 Pour la subdivision des colonnes de cossettes des diffuseurs de sucreries, des couches de chaînes horizontales — les chaînes étant parallèles et à environ 40 cm l'une de l'autre — ont été employées avec succès.

4.6 La littérature attribue trop d'importance à la résistance des deux tamis placés au deux extrémités de la colonne. D'après les essais, la résistance des tamis n'est pas sensible. Il est donc erronné de vouloir augmenter les surfaces des tamis avec des tamis le long de la paroi ou avec des surfaces ondulées, car ces court-circuits hydrodynamiques sont au point de vue technologique très désavantageux.

4.7 A l'aide des formules théoriques données on peut déterminer d'avance la résistance hydrodynamique d'une colonne. On peut décider si, et à quel degré

une subdivision est nécessaire. Les constantes qu'on exige pour les calculs, peuvent être déterminées par quelques essais de laboratoire simples.

4.8 Les propriétés hydrodynamiques de la charge sont avantageuses, si le facteur de compressibilité de celui est bas. Cette valeur peut être influencée entre certaines limites, p. e. par les dimensions des particules, l'uniformité de la charge, etc.

4.9 Il restait à décider, si la résistance d'une colonne dépend du sens du courant. Les essais ont montré que — pourvu que le meichage se fasse avec une vitesse assez faible pour empêcher que pendant cette période une déformation se produise dans la colonne — la résistance est indépendante du sens du courant. — En dépit de ce fait, dans la pratique le meichage se fait avec une vitesse plus élevée et, par conséquent, la résistance est plus grande si le courant passe de bas en haut, que dans le cas contraire.*

LITTÉRATURE

1. (Mme) *V. Gryllus :* Vizsgálatok ioncserélő oszlopon. Oszlopmagasság és áramlási sebesség befolyása. (Essais sur colonnes d'échangeurs d'ions. Effet de la hauteur de la colonne et de la vitesse du courant.) Cukoripari Kutatóintézet Közleményei **1,** 1954. 112—116.
2. *A. Brieghel—Müller :* Über Filtrationsuntersuchungen. Kjőbenhavn, 1940. (Plusieurs passages cités.)
3. *I. I. Попов:* Сборник работ по аппаратуре ... Труды ЦИНС-а 1934. Вып. 19, том. I. 62.

Cité par: С. Ф. Дронов: Динамическая теория извлечения сахара из свеклы диффузионным методом. (Théorie dynamique de l'extraction du sucre de la betterave par diffusion.) Moscou, 1952. p. 9.

4. Chilton et Colburn: Voir p. e. Chemical Engineer's Handbook. Ed. Perry. New York, 1950. p. 393.
5. *E. Slavíček :* Kterymi faktory je určen výkon difusní baterie Robertovy? (Par quels facteurs le fonctionnement de la batterie de diffusion Robert est-il déterminé?) Listy cukrovarnické **70,** 1954. p. 135—137.
6. Voir p. e. Chemical Engineer's Handbook. Ed. Perry. New York, 1950. 393. Der Chemie-Ingenieur. Ed. Eucken-Jakob. Leipzig, 1935. I/1. p. 132.
7. *G. Oplatka :* Über die Möglichkeiten und Vorteile der schnellen Diffusionsarbeit. Centralbl. f. d. Zuckerind. **47,** 1939. 334—337.
8. *P. Broager :* Chain Fixtures in Diffusers. Socker, Handlingar II. **7,** 1951. 47—51.
9. *K. Vukov :* Propriétés élastiques de la tissue de betterave. (Communication de l'auteur)
10. *K. Vukov*—(Mme) *M. Tegze :* A meszezés hatása a répaszeletre. (L'effet d'un traitement à chaux sur les cossettes fraîches.) Cukoripar **6,** 1953. p. 213—215.

RÉSUMÉ

Une colonne chargée de matière déformable, comme les cossettes de betterave, se comporte, au point de vue hydrodynamique, autrement qu'une couche de matière indéformable. Nous déduisons des relations entre les données caractéristiques du courant à travers la colonne et de la colonne elle-même, ainsi qu'entre les dimensions et les constantes du corps d'empli. Les conclusions théoriques sont générales et, grâce à l'introduction de constantes adéquates applicables à des colonnes remplies de corps se déformant de manière différente. Afin de contrôler l'exactitude de la théorie et de poursuivre la marche du phénomène, nous avons vérifié les résultats par des essais au laboratoire et en usine sur des cossettes de betterave. Les calculs et les mesures, conduisant à des résultats pratiques, sont traitées de façon détaillée.

* La partie expérimentale de cet ouvrage a été exécutée par nos collaborateurs Mme V. Gryllus, Mme M. Tegze et M. B. Pataky. Nous tenons à exprimer ici nos remerciements les plus chauds pour leur collaboration.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ КОЛОНН, НАПОЛНЕННЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫМ МАТЕРИАЛОМ. СОПРОТИВЛЕНИЕ СТОЛБА СТРУЖКИ В ДИФФУЗИОННОЙ БАТАРЕИ САХАРНОГО ЗАВОДА

Д-р техн. наук. Д. ОПЛАТКА и М. ТЕГЗЕ

Резюме

Гидродинамически колонны, наполненные, например, свекловичной стружкой, ведут себя в отличии от колонн, наполненных недеформируемым материалом, совершенно другим образом. Выведены зависимости между данными, характерными для протекания через колонну, размерами колонны, а также объемом и постоянными материалов, заполняющих колонну. Теоретические данные имеют общий характер и, зная соответствующие постоянные, они могут быть использованы для любых колонн, наполненных деформируемым материалом. В лабораторных условиях и на производстве проводились соответствующие опыты для ознакомления с протекающими процессами и контроля достоверности теории. На основе расчетов и данных измерений возможно сделать выводы, которые непосредственно можно использовать на практике.

HYDRODYNAMIC RESISTANCE OF COLUMNS FILLED WITH DEFORMABLE SUBSTANCES. RESISTANCE OF A COLUMN OF COSSETTES IN THE DIFFUSION-BATTERY OF BEET-SUGAR FACTORIES

G. OPLATKA, D. Eng. Sc. and M. TEGZE

SUMMARY

Columns filled with substances liable to deformation — e. g. beet-cossettes — differ in hydrodynamic behaviour from those containing material not subject thereto. Correlations have been found between the data characteristic of the flow in the column and the values relating to the dimensions and material constants of the column and the filling. The theoretical results of the investigation are of a general character and can be applied to any column filled with deformable substances, provided the appropriate constants are known. There have been carried out laboratory and factory tests with cossettes in order to detect the processes taking place, as well as to control the soundness of the theoretical results. Calculations and measurements led to a number of results directly applicable in practice.

HYDRODYNAMISCHER WIDERSTAND VON SÄULEN, DIE MIT DEFORMIERBAREM MATERIAL GEFÜLLT SIND. DER WIDERSTAND VON SCHNITZELSÄULEN IN ZUCKERFABRIKDIFFUSEUREN

G. OPLATKA Doktor der Technischen Wissenschaften, und M. TEGZE

ZUSAMMENFASSUNG

Säulen, die mit deformierbarem Material, etwa mit Rübenschnitzeln gefüllt sind, unterscheiden sich hinsichtlich ihres hydrodynamischen Verhaltens von solchen, die nur nichtdeformierbares Schüttgut enthalten. Es werden Zusammenhänge zwischen den für die Strömung in der Säule charakteristischen Daten, ferner zwischen den Abmessungen und Materialkonstanten der Säule und der Füllung abgeleitet. Die theoretischen Ergebnisse sind allgemeiner Natur und können in Kenntnis der entsprechenden Konstanten auf jegliche, mit deformierbarem Material gefüllte Säule angewendet werden. Es wurden Laboratoriums- und Betriebsversuche mit Rübenschnitzeln zur Ermittlung der sich abspielenden Vorgänge und zur Prüfung der Richtigkeit der Theorie durchgeführt. Aus den Berechnungen und Messungen wurden eine Reihe von für die Praxis unmittelbar anwendbaren Ergebnissen gewonnen.

SUR LES CARACTÉRISTIQUES DE FREINAGE DES VÉHICULES DE CHEMIN DE FER

GY. HELLER
CHEMINS DE FER HONGROIS, DIRECTION GÉNÉRALE, BUDAPEST

[Manuscrit présenté 23 août 1954]

Les dispositifs de freinage des véhicules des chemins de fer sont destinés à permettre le réglage désiré en sens négatif de la vitesse des trains circulant, compte tenu des prescriptions de service en vigueur. Ceci n'est possible que si l'on connaît l'effet de freinage du dispositif de freinage d'un véhicule (ou d'un système de véhicules) dans des conditions de service données, autrement dit les caractéristiques du freinage d'un véhicule ou d'un système de véhicules. Les caractéristiques du freinage peuvent être déterminés par la voie théorique ou par la voie expérimentale ; dans la pratique les méthodes théoriques et expérimentales sont appliquées en général alternativement. Il est évident que l'exécution des essais longs et couteux, est nécessaire — du moins dans une certaine mesure — à cause de la défectuosité de nos connaissances théoriques, par conséquent les spécialistes de chemin de fer, s'occupant de freins ont intérêt à connaître de la manière la plus approfondie la théorie du freinage. Non moins de considérations théoriques sont exigées pour juger du degré de sûreté des résultats d'un essai ou d'une série d'essais, pour prévoir les déviations possibles en service, enfin pour déterminer en quelle mesure il est permis d'interpoler ou d'extrapoler à la base des résultats. Dans l'intérêt de la sécurité de la circulation, une théorie moderne du freinage doit donc donner de réponse satisfaisante à deux groupes de questions :

a) quels sont les caractéristiques du freinage d'un véhicule (système de véhicules) dans des conditions de service données ;

b) en quelle mesure les caractéristiques du freinage (déterminés soit à l'aide d'une méthode théorique correcte, soit par la voie expérimentale) sont-ils soumis à des variations pour des conditions de vitesse et de voie identiques.

L'article présent traite de ces deux problèmes. Vu leur importance et l'espace relativement restreint qui est à notre disposition, nous n'entrerons nulle part dans les détails et tout en supposant connues les conditions fondamentales de la théorie du freinage, nous serons obligés de nous contenter de donner un aperçu succint de l'importance de principe de chaque raisonnement suivi.

1. Détermination des caractéristiques du freinage d'un véhicule (système de véhicules) par la voie théorique

Les caractéristiques du freinage sont d'habitude déterminés théoriquement à partir de l'équation d'énérgie

$$-C_1 \cdot \frac{Qv^2}{2g} = \mu_m \cdot P \cdot s \quad \text{(mkg)} \tag{1}$$

où Q kg est le poids, v m/sec la vitesse du véhicule, g m/sec^2 l'accélération de la pesanteur, C_1 un facteur de multiplication, introduit par égard au surplus d'énergie accumulé dans les masses rotatives, μ_m kg/kg le facteur de frottement glissant moyen entre le sabot et le bandage, P kg la somme des pressions aux sabots, enfin S m la longueur du parcours d'arrêt. L'équation 1. dans cette forme-ci est très simple, mais en général ne se prête pas à l'emploi pratique. En effet d'une part la valeur de μ_m n'est pas connue, puisqu'elle peut varier entre de larges limites, d'autre part dans les systèmes de frein en service la valeur de P dans la majorité des cas n'est non plus constante.

Nous pouvons écrire

$$P = f_1(t) \quad \text{(kg)} \tag{2}$$

où t sec est le temps calculé à partir du début du freinage. Nous savons en outre que conformément à la conception de Metzkow

$$\mu = f_2(p, v) \quad \text{(kg/kg)} \tag{3}$$

où p kg/cm^2 est la pression spécifique superficielle du sabot de frein. Au cas d'un sabot de frein donné, la valeur de p est en raison directe avec P, par conséquent, compte tenu de l'éq. (2)

$$\mu = f_3(t, v) \quad \text{(kg/kg)} \tag{4}$$

Il s'ensuit que l'éq. (1) en forme différentielle se modifie de la manière suivante :

$$-C_2 \cdot d(v^2) = f_3(t, v) \cdot f_1(t)\, ds \quad \text{(mkg)} \tag{5}$$

On voit que l'intégration se heurte à des difficultés ; et ceci explique aussi le fait que le calcul exacte des caractéristiques du freinage ne puisse pas encore être considéré comme résolu. Ainsi par ex. *Rielaender*,[1] dans son étude récente,

[1] *Rielaender :* Über die Berechnung des Bremsweges von Eisenbahnfahrzeugen. (Glasers Annalen 1953, Nov.)

résumant les résultats de la littérature allemande relative à ce problème, estime qu'il est douteux que l'on puisse trouver pour la valeur de μ une relation analytiquement facile à manier, de sorte que pour déterminer la longueur du parcours d'arrêt il recourt même à un appareil d'intégration. L'étude de *Poulet*[2] résumant les nouveaux résultats français (et dont les raisonnements sont suivis par certains arrêts UIC concernant la détermination du poids du frein) contient des relations dont l'utilisation, vu leur caractère empirique, ne fournit de résultats correctes qu'entre certaines limites t et v, en négligeant de plus plusieurs circonstances (par ex. l'effet du nombre des essieux). *Müller*[3] évite les difficultés par une lourde méthode graphique.

Nous sommes d'avis qu'il est possible de déterminer les caractéristiques du freinage, sinon selon un principe impeccable, du moins avec une bonne approximation, à l'aide d'une méthode dont le point de départ est la relation de *Karvackij*[4]

$$\mu = \frac{7 \cdot 9}{(v + 11 \cdot 1)\sqrt{p}} \qquad \text{(kg/kg)} \tag{6}$$

dans sa forme modifiée par nous

$$\mu = \frac{6 \cdot 7}{(v + 11 \cdot 1)\sqrt[3]{p}} \qquad \text{(kg/kg)} \tag{7}$$

Nous supposons en plus que les valeurs momentanées de P et p sont fournies par les produits

$$P_a = \alpha^3 \cdot P_{\max} \text{ (kg)} \qquad (8) \qquad \text{et} \qquad p_a = \alpha \sqrt[3]{p_{\max}} \text{ (kg/cm}^2\text{)} \qquad (9)$$

où les valeurs $P_{\max}$ et $p_{\max}$ appartiennent à l'effet de freinage pleinement développé. Eq. (5) peut donc être écrite dans la forme suivante

$$-C_1 \frac{Q}{2g} \cdot d(v^2) = \frac{6 \cdot 7}{(v + 11 \cdot 1)\,\alpha \sqrt[3]{p_{\max}}} \cdot \alpha^3 \cdot P_{\max} \cdot ds \cdot \text{ (mkg)} \tag{10}$$

Après avoir substitué $C_3 = C_1 \cdot \frac{1}{6 \cdot 7 g}$ et $q = \frac{P_{\max}}{Q}$ et rangé l'équation (10), la nouvelle forme en sera

$$-ds = C_3 \cdot \frac{\sqrt[3]{p_{\max}}}{\alpha^2 q}(v^2 + 11 \cdot 1\, v)\, dv \quad \text{(m)} \tag{11}$$

[2] *Poulet :* Braking of trains (Bulletin of the I. R. C. A. 1951. nov.).
[3] *Müller :* Fahrdynamik der Verkehrsmittel (Berlin 1940).
[4] *Karvackij :* Автоматические тормоза (Moscou 1951).

On notera en passant que l'éq. (11) fait ressortir la faute que *Haiduk*[5] a commise en adoptant la conception simplifiée: $R_{bm} = f(v)$, où R_{bm} kg/kg est la force de freinage moyenne.

En divisant éq. (11) par dt et en la transformant on aura

$$-a^2\,dt = C_3 \cdot \frac{\sqrt[3]{p_{max}}}{q}(v + 11 \cdot 1)\,dv \text{ (sec)}. \qquad (12)$$

La valeur a^2 figurant au côté gauche de l'éq. (12) est — comme on le sait — $a^2 = f(t)$ et peut être déterminée pour n'importe quel système de frein,

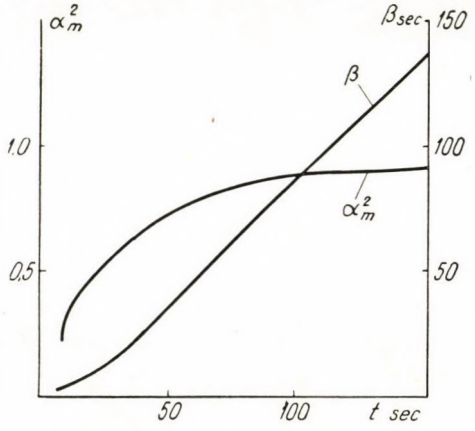


Fig. 1

à partir de la courbe du développement dans le temps de la pression aux sabots. Le côté gauche peut être intégré graphiquement selon t, le côté droit algébriquement selon v. Ainsi donc

$$\beta = a_m^2 \cdot t = C_3 \frac{\sqrt[3]{p_{max}}}{q}\left(\frac{v^2}{2} + 11 \cdot 1\,v\right) \text{ (sec)}. \qquad (13)$$

où β sec est l'équivalent de la durée du parcours d'arrêt. Dans le cas du *système de freinage donné* de fig. 1, on peut déterminer t et a_m^2 en connaissant β. Ayant obtenu a_m^2, on écrit l'éq. 11. dans sa forme intégrée

$$s = C_3 \frac{\sqrt[3]{p_{max}}}{a_m^2 \cdot q}\left(\frac{v^3}{3} + 5 \cdot 55\,v^2\right). \qquad \text{(m)} \qquad (14)$$

[5] *Haiduk:* Der Einfluss der Bremszylinderfüllzeit und der Durchschlagszeit auf den Bremsweg (Glasers Annalen 1939 II.)

La relation (14) est en principe incorrecte, car pour pouvoir accomplir l'intégration, il aurait fallu porter la valeur de a^2 en fonction de s au côté gauche. Néanmoins l'expérience nous montre que la relation (14) signifie en général une bonne approximation.

La sûreté de nos équations pourra être augmentée par l'introduction de quelques facteurs de correction comme

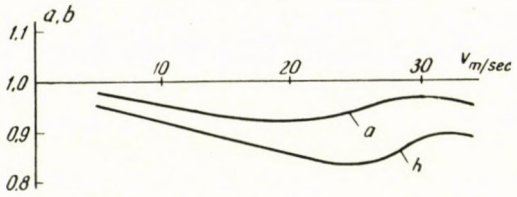


Fig. 2

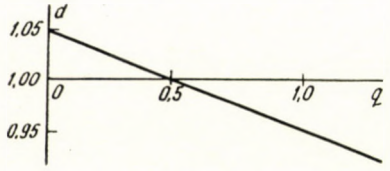


Fig. 3

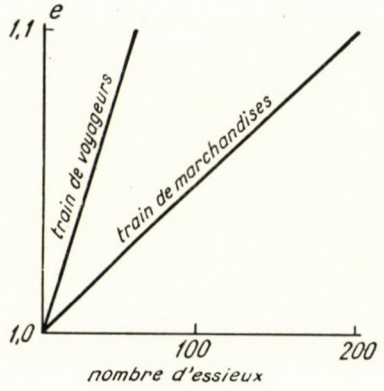


Fig. 4

$$\beta = a \cdot d \cdot e \cdot C_3 \frac{\sqrt[3]{p_{max}}}{q} \left(\frac{v^2}{2} + 11 \cdot 1\, v \right) \text{ (sec)} \tag{15}$$

et

$$s = b \cdot d \cdot e \cdot C_3 \frac{\sqrt[3]{p_{max}}}{a_m^2\, q} \cdot \left(\frac{v^3}{3} + 5 \cdot 55\, v^2 \right) \text{(m)} \tag{16}$$

où a et b sont des multiplicateurs donnés par les valeurs de la vitesse *existant dans le moment initial* de l'effet de freinage (fig. 2), d est fonction du pourcentage de la pression aux sabots (fig. 3), e celle du nombre des essieux (fig. 4). L'introduction de la valeur de e est nécessaire avant tout parce que la résistance de l'air en kg/t revenant à 1 tonne du véhicule, en cas de trains composés d'un nombre différent de véhicules, n'est pas la même.

Jusqu'à présent nous avons supposé tacitement que sur les véhicules examinés il ne s'exerce aucune force à part celle qui est créée par le dispositif de freinage. Bien entendu ceci ne correspond pas à la vérité ce qui nous oblige à corriger les résultats obtenus.

On sait que la valeur du parcours d'arrêt, s, est en raison inverse avec la force de freinage spécifique moyenne, R_{bm} kg/t (et *non* avec la pression aux sabots). Si par conséquent à côté de la force de freinage agissent également des forces provenant de la résistance du train et des descentes et montées éventuelles ainsi que des courbes de la voie, le parcours d'arrêt calculé de l'éq. (16) serait

$$s' = \frac{R_{bm}}{R_{bm} + R_{zm}} \cdot s \qquad \text{(m)} \qquad (17)$$

au cas où la valeur de R_{bm} était constante en fonction de la durée du parcours d'arrêt. Cependant vu que la valeur de a_m^2 étant variable, la valeur de R_{bm} se modifie également, la valeur de s' devra être déterminée correctement de l'éq.

$$s' = \frac{R_{bm}}{R_{bmx} + R_{zm}} \cdot s \qquad \text{(m)} \qquad (18)$$

On trouvera la valeur de R_{bm} à l'aide de la relation transformée de l'éq. (1)

$$R_{l\,m} = C_4 \cdot \frac{v^2}{s} \qquad \text{(kg/t)} \qquad (19)$$

Pour calculer t', le temps qui relève de la valeur s', on devra recourir à des considérations spéciales. On a vu que

$$t = a \cdot d \cdot e \cdot C_3 \frac{\sqrt[3]{P_{max}}}{a_m^2\, q} \left(\frac{v^2}{2} + 11 \cdot 1\, v \right) \text{(sec)} \qquad (20)$$

Au cas d'une vitesse et d'une installation de frein données, la durée du parcours d'arrêt est en raison directe avec la valeur du facteur $\frac{C_5}{a_m^2}$ qui caractérise la force de freinage. Si au cours du procéssus de freinage il se développe — en consé-

quence des forces de freinage supplémentaire — la force totale de freinage $R_{bmx}+$ $+ R_{zm}$ au lieu de la valeur originale de R_{bm}, on pourra interpréter le phénomène aussi en disant que le facteur de multiplication a_m^2 caractérisant le retard du système de freinage se transforme en

$$a_m''^2 = a_m^2 + \Delta_1 a_m^2 + \Delta_2 a_m^2 \quad (1) \tag{21}$$

Le membre $\Delta_1 a_m^2$ figurant au côté droit de la relation est la modification de la valeur originale de a_m^2 due à la valeur transformée de t, tandis que $\Delta_2 a_m^2$ est un accroissement égale à l'effet de la valeur des forces de freinage supplémentaire, qui en même temps se substitue à celle-ci. Les valeurs de $\Delta_1 a_m^2$ et $\Delta_2 a_m^2$ peuvent bien entendu être positives ou négatives, mais leur signe est toujours opposée.

Au cas où la valeur de a_m^2 se transforme en $a_m'^2$ l'éq. (20) prend la forme suivante :

$$\frac{a_m^2}{a_m'^2} \cdot t = \frac{C_5}{\frac{a_m'^2}{a_m^2} \cdot a_m^2} \left(\frac{v^2}{2} + 11 \cdot 1 \; v \right) \quad \text{(sec)} \tag{22}$$

c. à d. si a_m^2 devient $a_m'^2/a_m^2$, la valeur de t qui l'accompagne devient $a_m^2/a_m'^2$ fois la valeur originale. Vu qu'il est évident que la relation

$$\frac{a_m^2}{a_m'^2} = \frac{a_m^2}{a_m^2 + \Delta_1 a_m^2 + \Delta_2 a_m^2} = \frac{R_{bm}}{R_{bmx} + R_{zm}} \quad (1) \tag{23}$$

subsiste,

$$t' = \frac{R_{bm}}{R_{bmx} + R_{zm}} \cdot t = z \cdot t. \quad \text{(sec)} \tag{24}$$

Notons que dans des cas extrêmes, la valeur de z peut ne pas être exacte en ca sd'un pourcentage de frein réduit et d'une pente élevée, à cause de l'inexactitude de principe de l'éq. (14). C'est pourquoi il peut se présenter la nécessité de l'introduction d'un facteur de correction.

Cependant même les valeurs de s' et t' ne donnent pas les valeurs caractéristiques pouvant être déterminées à l'aide de mesures, car jusqu'à présent on n'a pas tenu compte des excédents de la longueur et de la durée du parcours d'arrêt qui se composent de différents facteurs, tels que retard personnel, jeu mort de la timonnerie, vitesse de propagation limitée dans le train de la dépression de la conduite principale. Leur détermination dans des conditions données

n'exige aucune considération spéciale, de sorte qu'ici nous n'indiquerons que — bien entendu —

$$t'' = \sum t_i \qquad \text{(sec)} \tag{25}$$

et

$$s'' = \sum t_i \cdot v \qquad \text{(m)} \tag{26}$$

où $\sum t_i$ sec est la somme des retards dus à des causes différentes, v m/sec en général la vitesse existant au moment initial du freinage. Il s'ensuit donc que la longueur totale du parcours d'arrêt est

$$S = s' + s'' = z \cdot b \cdot d \cdot e \cdot C_3 \cdot \frac{\sqrt[3]{p_{max}}}{\alpha_m^2 q}\left(\frac{v^3}{3} + 5 \cdot 55\, v^2\right) + \sum t_i \cdot v \text{ (m)} \tag{27}$$

et la durée totale du parcours d'arrêt

$$T = t' + t'' = z \cdot a \cdot d \cdot e \cdot C_3 \frac{\sqrt[3]{p_{max}}}{\alpha_m^2 q}\left(\frac{v^2}{2} + 11 \cdot 1\, v\right) + \sum t_i \text{ (sec)} \tag{28}$$

Introduisons maintenant les notations suivantes :

$$\varepsilon = b \cdot C_3\left(\frac{v^3}{3} + 5 \cdot 55\, v^2\right)$$

$$\delta = a \cdot C_3\left(\frac{v^2}{2} + 11 \cdot 1\, v\right)$$

$$u = d \cdot e \frac{\sqrt[3]{p_{max}}}{q}$$

nos relations prendront les formes suivantes plus simples :

$$S = z \cdot \frac{\varepsilon \cdot u}{\alpha_m^2} + s'' \qquad \text{(m)} \tag{29}$$

$$T = z \cdot \frac{\delta \cdot u}{\alpha_m^2} + t'' \qquad \text{(sec)} \tag{30}$$

où δ et ε caractéristiques de la vitesse peuvent être calculés en fonction de la vitesse, la valeur de z pour un système de freinage donné, en fonction des valeurs

de $R_{bm}/R_{tm} + R_{zm}$ et α_m^2, la valeur de s'' en fonction du nombre des véhicules et de la vitesse, enfin la valeur de t'' en celle du nombre des véhicules. La valeur de u, caractéristique du train peut être déterminé pour un train donné moyennant un calcul numérique insignifiant.

Dans les éq. (29) et (30) nous avons donc obtenu une méthode de portée générale, qui tout en nous obligeant à un minimum de négligence est facile à manier. La formation des valeurs de α_m^2 en fonction du temps sera différent selon le système de freinage, par conséquent les résultats des formules s'adaptent à la réalité. En cas d'une grande vitesse et d'un train de voyageurs freinant toutes les voitures, nos équations peuvent être simplifiées davantage, puisque cette fois $z/\alpha_m^2 \approx 1$ de sorte que

$$S = \varepsilon \cdot u + s'' \text{ (m)} \tag{31}$$

$$T = \delta \cdot u + t'' \text{ (sec)} \tag{32}$$

En ce qui concerne les freins des trains rapides, nos relations y peuvent être également appliquées avec les modifications nécessaires, cependant nous ne nous étendons pas sur cette question. On notera tout au plus qu'à cause du réchauffement considérable du sabot dû aux grandes pressions superficielles spécifiques, il sera nécessaire d'introduire en ce cas un facteur de correction en fonction de la pression superficielle spécifique.

La méthode basée sur la connaissace de la valeur de la pression aux sabots peut être également appliquée si — et c'est bien le cas en service — on connaît les poids des freins, et non la pression aux sabots.

Quant aux *systèmes de frein des trains de marchandises*, on sait que

$$B = P_{\max} \cdot \frac{10}{7} \cdot \gamma_p \quad \text{(kg)} \tag{33}$$

Etant donné que pour un système de frein donné la valeur de γ_p est uniquement fonction de la pression aux sabots, il est évident qu'en connaissant d'abord la somme de toutes les pressions aux sabots, ensuite la valeur de q, puis le nombre n des sabots, on peut déterminer la pression moyenne aux sabots, finalement la valeur de $p_{\max}$. (C'est ici qu'on notera qu'en utilisant des valeurs moyennes de P/n et p, valables pour le train entier, valeurs obtenues par la moyenne arithmétique, c'est à dire en divisant toutes les pressions aux sabots par toutes les surfaces de sabot, on commet une négligence numériquement peu importante.) La détermination des valeurs est de beaucoup simplifiée par l'emploi du nomogramme de fig. 5, à l'aide duquel on obtient directement $P_{\max}/n$, la pression moyenne maximum aux sabots.

Vu que beaucoup de chemins de fer utilisent plusieurs systèmes de freins sur les trains de marchandise, il semble opportun de tracer les courbes de fig. 5

pour le cas d'un système de frein fictif disposant des caractéristiques correspondant à un train de composition moyenne.

Le poids du frein des traines de voyageurs doit en général être déterminé par la voie expérimentale. En cas de besoin il est cependant permis d'avoir recours au calcul, en utilisant la relation

$$B = P_{\max} \cdot k \ \text{(kg)} \tag{34}$$

où la valeur de k est indépendante du système de frein et fonction uniquement de

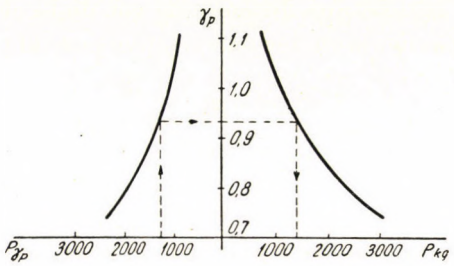


Fig. 5

$P_{\max}/n$, la pression aux sabots. En partant de la valeur B en considération de la relation (34), les valeurs nécessaires à nos calculs pourraient être déterminées d'une manière absolument semblable à celle indiquée sur fig. 5 ; on ne doit cependant pas oublier que les valeurs k figurant dans les résolutions correspondantes du UIC sont telles qu'en les utilisant on obtient en général des poids de frein inférieurs d'environ 10% à ceux déterminés expérimentalement. Par conséquent s'il s'agit de véhicules dont le poids de frein a été déterminé empiriquement, les valeurs des pressions aux sabots obtenues à l'aide d'un nomogramme construit avec le facteur k et en principe identique à fig. 5 doivent être diminuées d'environ 10%.

La méthode de calcul qui vient d'être exposée peut donc être utilisée de façon générale et en même temps exige un minimum de concessions en ce qui concerne la simplicité ou la justesse de principe.

2. Variations possibles des caractéristiques données du freinage

Comme on le sait du chap. 1. au cours du freinage les véhicules sont soumis à la force de freinage spécifique moyenne

$$R_{bm_\lambda} + R_{z_m} = R_{gm} \ \text{(kg/kg)} \tag{35}$$

Cette valeur est évidemment nominale et en réalité pourra prendre la valeur quelque peu différente

$$R_{gm} \pm \Delta R_{gm} = R_{tmx} \pm \Delta R_{tmx} + R_{zm} \pm \Delta R_{zm} \text{ (kg/kg)} \tag{36}$$

où les membres munis du signe Δ représentent l'erreur absolue de la valeur réelle calculée à partir de la valeur considérée dans le calcul. La valeur absolue de l'erreur maximum absolue pouvant se produire est

$$|\Delta R_{gm,\max}| = |\Delta R_{tmx,\max}| + |\Delta R_{zm\max}| \text{ (kg/kg)} \tag{37}$$

Il est par contre naturel que du point de vue de la sûreté des calculs c'est la valeur absolue du maximum de l'erreur relative possible

$$|\sigma_{\max}| = \left| \frac{\Delta R_{gm\max}}{R_{gm}} \right| \text{ (1)} \tag{38}$$

qui est décisive. Il est donc nécessaire d'examiner quels sont les cas où la valeur de $|\sigma_{\max}|$ peut augmenter dans une plus grande mesure.

On distingue les trois cas principaux suivants :

a) si la valeur de R_{tmx} et de R_{zm} sont presque identiques en même temps que la valeur de $\left|\frac{\Delta R_{zm}}{R_{zm}}\right|$ est relativement grande ;

b) si la valeur de $\left|\frac{\Delta R_{mx}}{R_{bm}}\right|$ et par conséquent celle de $\left|\frac{\Delta R_{gm}}{R_{gm}}\right|$ est également grande ;

c) enfin si R_{tmx} et R_{zm} sont de signes opposés et la valeur absolue de R_{tmx} n'est pas beaucoup plus grande que celle de R_{zm}.

Nous avons donc reconnu là un fait important : *dans des conditions différentes les variations possibles des caractéristiques du freinage pour une vitesse, des conditions de voie, et un train de freinage nominalement identiques peuvent être de grandeur différente.* Quelles en sont les conséquences pratiques?

ad a) Les conditions de service correspondant à ce cas se produisent en premier lieu si la force de freinage même (R_{tmx}) — à cause du bas pourcentage de frein — est petite par rapport à la force de freinage supplémentaire (R_{zm}). La valeur de l'erreur relative

$$\frac{\Delta R_{zm}}{R_{zm}}$$

sur des parcours en plaine dépend en effet entièrement ou dans une mesure prépondérante de la résistance du train, dont la valeur est loin d'être la même dans tous les cas. Si en même temps par suite du bas pourcentage de frein la valeur

de R_{zm} est élevée par rapport à R_{bmx}, la valeur absolue de la variation de valeur correspondant a l'erreur relative

$$\frac{\Delta R_{gm}}{R_{gm}}$$

peut également s'accroitre de beaucoup. La tolérance possible des caractéristiques de freinage se trouvera particulièrement augmentée au cas où la vitesse est très réduite (10—20 km/h), puisque la valeur de s'' (cf. chap. 1) — distance sur laquelle avec quelqu'approximation ce n'est que la résistance du train variant de cas en cas qui se fait valoir — est grande par rapport au parcours d'arrêt total.

ad b) Le cas mentionné sous a) s'apparente aussi à celui-ci : dans un train à pourcentage de frein réduit il n'y a en général qu'une ou deux voitures à frein, par conséquent aucune possibilité de ce que la faute individuelle de chaque installation de freinage s'égalisant, les caractéristiques correspondant à l'état moyen du train entier se fassent valoir.

C'est ici qu'il faut cependant mentionner un autre cas très important : les installations de freinage du train ont beau être dans un état parfait, si pour une raison quelconque la valeur du facteur de frottement glissant est anormale. Une diminution considérable de la valeur de μ se produit comme on le sait, avant tout sur des rails humides, quand elle peut atteindre 10 à 15%. Au cas où les valeurs du parcours d'arrêt sont fixées en considération de la sécurité désirée, il faut évidemment compter à priori avec la diminution de la valeur de μ dans une mesure prévue en service. Au cas de calculs à posteriori cette source d'erreur peut bien entendu être considérablement réduite, si on est à même d'évaluer convenablement la variation de la valeur de μ.

ad c) Le troisième cas est d'une importance décisive. En effet si R_{bmx} et R_{zm} sont de signes contraires, en même temps que la valeur absolue de R_{zm} représente une part considérable de celle de R_{bmx}, même peut être l'approche sensiblement, il peut arriver que l'erreur relative

$$\left| \frac{\Delta R_{bmx}}{R_{bmx}} \right|$$

ne soit pas significative, cependant, vu que

$$R_{tmx} + R_{zm} = R_{gm} \ll R_{tmx} \text{ (kg/kg)} \tag{39}$$

l'erreur maximum relative possible de toutes les forces de freinage

$$\left| \frac{\Delta R_{gm\,\max}}{R_{gm}} \right| = \frac{|\Delta R_{bmx\,\max}| + |\Delta R_{zm\,\max}|}{|R_{gm}|} \quad (1) \tag{40}$$

peut atteindre une valeur élevée. *Ceci explique les fuites de train causant tant d'accidents tragiques sur les lignes de montagne.* En ce cas le fonctionnement défectueux des freins d'un ou de deux véhicules, l'épuisement du frein continu, un certain dépassement de la vitesse de base (ce qui signifie bien entendu une diminution de la valeur de μ) réduisent chacun séparément, ou plutôt ensemble la valeur de R_{bmx} de telle façon que R_{gm} change de signe et au lieu d'une force de freinage, il se présente dans le train une force d'accélération. Un tel train ne peut plus être freiné. L'essence du phénomène fort dangereux est très bien illustré par fig. 6.

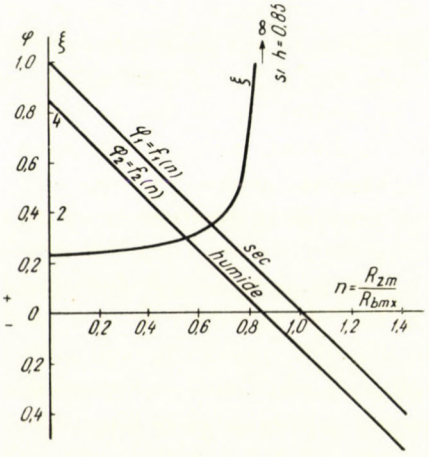


Fig. 6

Fig. 6 indique pour un temps normal et pour un temps humide (valeurs de μ diminuées de 15%) toutes les forces de freinage engendrées dans un train, de voyageurs au cas d'installations de freinage et de conditions de descente différentes. On a porté sur l'axe X le rapport de la valeur absolue nominale de la force de freinage supplémentaire et de celle engendrée par l'installation de freinage, le nombre proportionnel

$$n = \frac{|R_{zm}|}{|R_{mx}|} \quad (1) \tag{41}$$

où la valeur de R_{zm} sur une ligne de montagne est bien entendu toujours négative. Sur l'axe Y on a porté le nombre proportionnel

$$\varphi = \frac{R_{bmx} + R_{zm}}{R_{bmx}} = \frac{R_{gm}}{R_{bmx}} \quad (1) \tag{42}$$

où la valeur de R_{bmx} — avec une négligence permise en service pour des

trains de voyageurs — est considérée constante, celle de R_{zm} — conformément aux différentes pentes, — variable. La droite φ_1 montre donc de combien la force de freinage originale, engendrée par les installations de *frein du* train se réduit sous l'effet conjoint de la résistance de train et la pente. C'est ainsi qu'on a également interprété la droite valable pour des rails humides. Introduisons finalement la notation

$$\xi = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \qquad (1) \qquad (43)$$

Si on trace dans la figure la courbe indiquant la variation de ξ en fonction de n, la valeur de ξ, en supposant un train donné, peut être déterminée pour n'importe quelle pente, c. à d. que l'on peut calculer le taux de l'augmentation sur des rails humides de la valeur correspondant à des rails secs du parcours d'arrêt du train. Le caractère de la courbe s'élévant hyperboliquement de l'éq. (43) prouve que le danger de la fuite se présente de façon inattendue et sournoise, par suite d'une cause relativement insignifiante. N'oublions pas que sur la figure on n'avait pris en considération que l'effet du temps humide, cependant qu'en service d'autres moments troublants peuvent aussi exercer leur influence.

Une autre circonstance désagréable est le fait que le phénomène qui vient d'être décrit se présente avant tout sur les trains de voyageurs. En effet, comme on le sait, dans le cas des freins des trains de marchandises, la valeur de R_{tm_x} n'est pas identique à la valeur momentanée de R_{tx} ; la valeur de α_m^2 qui s'est accrue pendant la durée du parcours d'arrêt prolongée égalise au moins en partie la valeur diminuée pour quelque raison de la force spécifique de freinage.

3. Evaluation des résultats de nos recherches

Au début de cette étude nous avons élaboré une méthode censée de permettre la détermination des caractéristiques du freinage dans des conditions de service données. Dans la suite nous avons insisté sur un fait de haute importance : pour de conditions de service différentes, les valeurs obtenues à l'aide de calculs possèdent un degré de sûreté différent.

En connaissance de tout ce qui a été dit, il est donc motivé de poser la question : a) la détermination de la valeur des caractéristiques du freinage par la voie théorique est-elle oui ou non possible? b) dans l'affirmative, quelles sont les possibilités de l'application pratique des méthodes théoriques?

a) En ce qui concerne la première question, on peut constater qu'il est possible d'élaborer une méthode qui — quoique relativement facile à manier — se sert de négligences qui permettent de déterminer avec une exactitude suffisante entre de larges limites la valeur *nominale* du caractéristique du freinage.

Les valeurs nominales obtenues ne peuvent cependent pas être utilisées sans toute critique, puisque les erreurs relatives maximum dans des conditions de service différentes sont loin d'être identiques.

Quelles sont les circonstances qui permettent de réduire l'erreur relative possible? 1. une installation de freinage bien entretenue, ne ménageant aucune surprise désagréable ; 2. un grand train dans lequel les fautes $\pm$ des freins d'un grand nombre de véhicules freinés selon toute probabilité se compensent à peu près ; 3. parcours en plaine, où la valeur de R_{zm} est réduite ; 4. un pourcentage de frein considérable pour lequel la variation de la résistance du train de valeur incertaine est déja négligeable ; 5. temps sec, c. à d. valeur μ normale ; 6. temps calme. Ces conditions remplies, on ne constate que de petits écarts (de quelques pourcents) des valeurs normales obtenues par la voie théorique. Dans ce cas les résultats éventuellement plus divergeants de la pratique sont les signes de ce qu'une des valeurs a été incorrectement posée au départ. L'autre cas extrême est celui dans lequel c'est le contraire des conditions 1. — 6. qui est réalisé; cette fois on ne peut pas avoir recours à de calculs théoriques, mais en même temps il n'y a pas moyen non plus de conclure à partir de quelques essais au cas qui se présentera. Bien entendu ces deux extrêmes ne se présentent jamais ou du moins que très rarement dans la pratique. C'est à l'ingénieur de déterminer à l'aide des connaissances théoriques nécessaires et compte tenu de toutes les circonstances, non seulement la valeur nominale des caractéristiques de freinage dans les conditions données, mais encore les limites d'erreur possible. *On ne peut parler correctement de caractéristique de freinage qu'en indiquant en même temps sa limite d'erreur probable.*

b) Les méthodes servant à la détermination par la voie théorique des caractéristiques du freinage ne peuvent bien entendu pas prétendre à éliminer les essais pratiques. C'est une tendance parfaitement erronnée. Nous sommes d'avis que la méthode théorique et la méthode expérimentale doivent être utilisées conjointement. Ainsi par ex. en élaborant les tableaux de freins des véhicules de construction nouvelle, la performance nécessaire du frein doit être déterminée par la voie théorique, compte tenu des conditions de service ; une fois le véhicule construit il est cependant recommandable de contrôler expérimentalement les valeurs attendues, car cela permet de se rendre compte des conditions mal posées lors de l'étude, ainsi que des négligences dépassant la mesure tolérée. Il est cependant naturel que dans ces essais il faut bien en avance réduire au minimum les variations éventuelles des valeurs, tout en assurant dans la mesure du possible les conditions 1.—6. mentionnées à l'alinéa a.).

La méthode théorique a également une grande importance du point de vue de l'évaluation de la sûreté des valeurs obtenues par la voie expérimentale. Il est évident que les données obtenues de cette manière-là ne peuvent pas être utilisées sans critique, sinon elles risquent de conduire à des conclusions erronnées. Sans bases théoriques on ignore en effet dans quelle partie du champs de

dispersion se trouve le résultat expérimental obtenu, on ne connaît même pas la grandeur de ce champs. Ainsi par ex. lors des essais nécessaires à la préparation des nouveaux tableaux de freins, la détermination de la valeur du pourcentage de frein appartenant à la pente maximum pour une vitesse minimum exige un travail beaucoup plus approfondi que la détermination expérimentale de la valeur appartenant à $0^0/_{00}$ pour une vitesse maximum, parce qu'au premier cas la valeur absolue de l'erreur relative possible est un maximum, tandis qu'au deuxième elle est un minimum.

Avec ces deux cas tirés de la pratique nous sommes loin d'avoir épuisé les possibilités de la relation entre la théorie et l'expérience. Cependant le premier de ces cas (véhicule de construction nouvelle) montre fort bien comment la pratique peut venir en aide de la théorie, tandis que le deuxième (nouveaux tableaux de freins) fournit un exemple de la situation inverse.

LITTÉRATURE

Bericht des Unterausschusses für die durchgehende Güterzugbremse Ergebnisse der Versuche mit der Hildebrand—Knorr Bremse (1935).

Haiduk : Der Einfluss der Bremszylinderfüllzeit und der Durchschlagszeit auf den Bremsweg. (Glasers Annalen 1939. febr.)

Heller : Vasúti járművek fékezési elmélete (1954).

Hildebrand : Die Entwicklung der selbsttätigen Einkammer Druckluftbremse bei den europäischen Vollbahnen (Berlin, 1927, Ergänzungsband, 1939.)

Karvackij : Avtomaticseszkije tormoza (Moszkva, 1951).

Müller, W. : Fahrdynamik der Verkehrsmittel (Berlin, 1940).

Poulet : Braking of trains (Bulletin of the I. R. C. A. 1951. nov.).

Rielaender : Über die Berechnung des Bremsweges von Eisenbahnfahrzeugen (Glasers Annalen 1953. XI.).

RÉSUMÉ

L'auteur traite des questions relatives aux caractéristiques du freinage des véhicules de chemin de fer.

Dans la première partie il élabore une méthode à l'aide de laquelle les caractéristiques du freinage peuvent être déterminés sans trop de complications mathématiques et avec une exactitude suffisante entre des limites relativement larges.

Dans la deuxième partie il expose le problème du taux de variation des caractéristiques du freinage d'un véhicule donné. Au cours de son analyse il aboutit au résultat que la valeur des caractéristiques du freinage, dans des conditions de service différentes, peut varier dans une mesure différente.

Enfin dans le troisième chapitre il évalue les résultats des examens précédents et constate que la détermination des caractéristiques du freinage doit avoir lieu à l'aide de l'utilisation conjointe des méthodes théoriques et expérimentales.

О ПОКАЗАТЕЛЯХ ТОРМОЖЕНИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ПОДВИЖНЫХ СРЕДСТВ

Дь. ХЕЛЛЕР

Резюме

Статья посвящена проблемам, связанным с показателями торможения железнодорожных подвижных средств. Прежде всего кратко излагаются затруднения, которые препятствуют определение показателей торможения. После чего сделана попытка создания такого метода, который не является слишком сложным и при этом отступления

от теоретической строгости являются не слишком большими ; в дальнейшем этот метод распространяется автором также на понятие тормозного груза.

Во второй части исследуются возможные изменения показателей торможения при данных эксплоатационных условиях. При этом автор устанавливает, что при различных эксплоатационных условиях значения показателей, соответствующие данным тормозным устройствам, могут изменяться в различной степени. Заключение этой части теоретически рассматривает опасности, которые могут возникнуть на участках железнодорожных путей в гористых местностях.

Третья часть статьи посвящена связи между теорией и практикой. В результате автор приходит к выводу, что ни теория и ни практика самостоятельно не могут служить для соответствующего решения возникающих проблем. Правильным путем решения возникающих проблем является совместное применение теории и практики.

BRAKING CHARACTERISTICS OF RAILWAY VEHICLES

GY. HELLER

SUMMARY

The paper deals with problems in content with braking characteristics of railway vehicles. The difficulties are first enumerated, which complicate in general the determination of these characteristics. Afterwards the establishment of a method is attempted, which, besides being not too complicated, makes comparatively few concessions so the detriment of theoretical correctness ; later this method is extended to the concept of the brake weight.

The second part investigates possible fluctuations of braking characteristics under given operational conditions. This leads to the statement that under different conditions of operation the value of characteristics of a given braking equipment may vary in a different manner. The conclusion of this chapter indicates the danger of mountain railways from a theoretical point of view.

The third part treats correlations of theory and practice. As a result the conclusion is drawn that neither theory nor practice is alone capable of solving the problems with exactness. The proper way is the joint application of both theory and practice.

ÜBER DIE BREMSKENNZAHLEN VON EISENBAHNFAHRZEUGEN

GY. HELLER

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Abhandlung werden die Probleme der Bremskennzahlen von Eisenbahnfahrzeugen behandelt. Zuerst werden kurz die Schwierigkeiten beschrieben, die im allgemeinen die Bestimmung der Bremskennzahlen erschweren. Danach wird versucht, eine Methode zu entwickeln, die neben dem Vorteil, nicht allzu kompliziert zu sein, nur wenig Zugeständnisse zu Lasten der theoretischen Richtigkeit macht ; im weiteren wird diese Methode auch auf den Begriff des Bremsgewichtes ausgedehnt.

Der zweite Teil untersucht die möglichen Schwankungen der Bremskennzahlen unter gegebenen Betriebsverhältnissen. Es wird hierbei festgestellt, dass der Wert der den gegebenen Bremsvorrichtungen entsprechenden Kennzahlen je nach den verschiedenen Betriebsverhältnissen in verschiedenem Ausmass schwanken kann. Der Schlussabschnitt dieses Teils weist vom theoretischen Standpunkt auf die Gefahren der Bergstrecken hin.

Der dritte Teil behandelt das Verhältnis von Theorie und Praxis. Als Ergebnis wird die Schlussfolgerung gezogen, dass weder die Theorie noch die Praxis allein imstande ist, die Probleme entsprechend zu lösen. Der richtige Weg ist vielmehr die gemeinsame Anwendung von Theorie und Praxis.

ÜBER DIE SULFATVERMINDERUNG DER GRUNDWASSER

A. ALMÁSY

INSTITUT FÜR MINERALOGIE UND GEOLOGIE DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT, BUDAPEST*

[Eingegangen am 16. September 1954]

In einer früheren Mitteilung [1] wurde über die ersten Versuche der künstlichen Verminderung des dem Beton schädlichen Sulfatgehaltes der Grundwasser berichtet.

Wie aus dieser Arbeit hervorgeht, ist es auf Grund der im Laboratorium und in der Natur — im grösseren Massstab — ausgeführten Versuche gelungen, den Sulfatgehalt der Grundwasser bedeutend zu vermindern.

Zur Ergänzung der dort veröffentlichten Ergebnisse wurden die Untersuchungen weitergeführt. In unserer ersten Mitteilung ist festgestellt worden, dass der Sulfatgehalt der Grundwasser durch organische Abfallstoffe künstlich herabgesetzt wird. Die im folgenden besprochenen Versuche führten zur Feststellung, dass dieser Vorgang äusserst kompliziert ist und von den benutzten Stoffen und von den Umständen stark beeinflusst wird.

Aus den zusammengesetzten Prozessen der Sulfatverminderung folgt, dass es schwierig ist, reaktionskinetische Angaben über diese Erscheinungen zu erhalten, hauptsächlich darum, weil die Zahl der möglichen Veränderlichen zu gross ist. Trotzdem gelang es, wertvolle Angaben über die Wirkung der Laubholzsägespäne zu ermitteln und den Mechanismus mehr oder weniger zu klären.

Diese Versuchsergebnisse förderten die Verwirklichung der praktischen Ausführung, da sich aus ihnen ergab, dass mit dieser Methode eine beträchtliche Verminderung des dem Beton schädlichen hohen Sulfatgehalts der Grundwasser ohne gleichzeitige Sulfiderzeugung zu erzielen ist. Dies ist deshalb von Bedeutung, weil sich der Sulfidgehalt des Grundwassers schädlich auf die Eisenbestandteile und Rohrleitungen auswirkt.

Im folgenden sollen nun die angewandten Methoden und die Ergebnisse der mit Sägespänen und Kohlenschiefern ausgeführten Versuche kurz besprochen werden.

* Gegenwärtig: Forschungsinstitut für die Chemische Schwerindustrie, Veszprém.

I. Bestimmungsmethoden

1. *Die Bestimmung des Sulfatgehaltes der Wasserproben*

Hydrochemische Arbeiten im Schrifttum [2, 3] behandeln die Schwierigkeiten der Sulfatbestimmung im Wasser. In der vorhergehenden Mitteilung wurde schon darauf hingewiesen, dass ausser den im Schrifttum besprochenen Fehlerquellen auch die klassische $BaCl_2$-Methode in Gegenwart von Luft zu fehlerhaften Ergebnissen führt, wenn in der Lösung Schwefelverbindungen niedriger Oxydationsstufen vorhanden sind. In diesem Falle wird nämlich das Gleichgewicht zwischen den Schwefelverbindungen und dem Sauerstoff infolge des Einflusses der überflüssigen $BaCl_2$-Menge in der Richtung der Sulfaterzeugung verschoben.

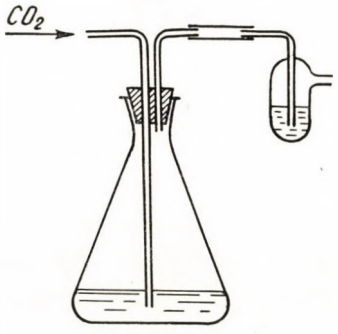


Abb. 1

Weitere Fehlerquellen wurden von einigen organischen Verbindungen verursacht, die während der Versuche — aus den organischen Stoffen (Sägespäne usw.) — in das Wasser gelangten. Ein Teil dieser Stoffe bildet nämlich mit $BaCl_2$ in Salzsäure unlösliche Verbindungen.

Zur Beseitigung dieser Fehlerquellen wurde ein Verfahren gewählt, das die störenden Bestandteile vor dem Niederschlagen des Sulfats entfernt. Die Bestimmungen erfolgten also nach folgender Methode :

In einem Erlenmeyerkolben mit geschliffenem Glasstopfen, durch den zwei Rohre führen (Abb. 1), wird durch das bis zum Boden reichenden Rohr CO_2-Gas eingebracht. Nachdem der Kolben mit CO_2 gefüllt ist, werden die Wasserprobe und einige ml cc. HCl eingegossen. Nachher wird der Kolben schnell wieder mit dem Stopfen verschlossen. Bei Aufrechterhaltung des CO_2-Stromes wird der Inhalt des Kolbens aufgekocht und 5 bis 10 Minuten sieden gelassen, um das eventuell anwesende H_2S und SO_2 zu vertreiben. Danach wird der ausgeschiedene organische Niederschlag filtriert. Dann scheidet man mit der bekannten Methode, heiss, mit heisser $BaCl_2$-Lösung das Sulfation ab.

Nach 24 Stunden filtriert man den Niederschlag durch einen feinporigen gesinterten Glasfilter und trocknet bei 130° C.

2. *Bestimmung des Gesamtschwefelgehaltes der Wasserproben*

Ein aliquoter Teil der Wasserprobe wird mit einigen Tropfen cc. HCl angesäuert, Bromwasser in grossem Überschuss zugefügt und das Gemisch am Wasserbade bis zur völligen Entweichung des Br_2 erhitzt. Der ausgeschiedene flockige Niederschlag wird filtriert und der Gesamtschwefelgehalt im reinen Filtrat als Sulfat wie oben (Punkt I/1) bestimmt.

Im nachstehenden ist die Menge des Sulfats und Gesamtschwefels in Form von SO_3 ausgedrückt, wie dies im Tiefbau üblich ist.

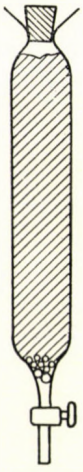


Abb. 2

II. Versuchsmethoden zur Sulfatverminderung

1. Apparatur

Bei unseren Versuchen ging das Bestreben dahin, die in der Natur ablaufenden Vorgänge nachzuahmen. Eine grössere Sulfatkonzentration bildet sich nur bei langsam oder gar nicht strömendem Grundwasser [1]. In diesen Fällen treten schädliche Wirkungen auf. Deshalb wurde versucht, auch bei unseren Experimenten dieses langsame Strömen zu reproduzieren, doch wurde das Strömen, um die Versuche zu vereinfachen, periodisch gemacht.

Zu diesem Zweck wurden die zur Sulfatabbindung dienenden Stoffe in ein 40 cm langes Glasrohr mit einem Durchmesser von 5 cm eingefüllt (Abb. 2). Das Rohr ist unten mit einem Glashahn, oben mit einem Gummipfropfen absperrbar. In die untere Verengung der Röhre wurde Quarzsand als Filterschicht gefüllt.

2. Einfüllung und Vorbereitung der zur Abbindung benutzten Stoffe

Der zur Abbindung benutzte Stoff wurde im lufttrockenen Zustande gewogen und lose in das Rohr gefüllt. Danach wurde die Luft mit einem von unten eingeführten langsamen Wasserstrom ausgetrieben. Darauf wurde der Stoff während einer Nacht von oben nach unten mit Leitungswasser (50—60 mg SO_3/l) gewaschen, und zwar so, dass der Stoff nicht mehr mit Luft in Berührung kam. Am Ende spülte man den Apparat mit der Wasserprobe durch, wiederum so, dass der Stoff nicht mit Luft in Berührung kam; dann wurde der untere Hahn abgesperrt, der Apparat mit der Wasserprobe entsprechend (ohne Luft) gefüllt und oben vorsichtig verschlossen, so dass keine Luftblase unter dem Gummipfropfen blieb.

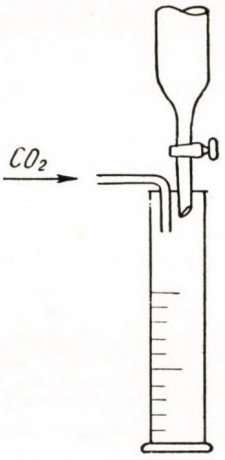


Abb. 3

3. Die untersuchten Wasserproben

Die zu unseren Versuchen gebrauchten Wasserproben wurden aus einem natürlichen Bitterwasser der Budapester Hunyadi János-Bitterwasserquelle (Quelle No. 128. mit 12 000 mg SO_3/l) durch Verdünnung mit destilliertem Wasser bereitet. Dieses Wasser wurde — um den natürlichen Verhältnissen nahezukommen — mit Luft normal gesättigt in das Rohr gefüllt.

4. Probeentnahme und Nachfüllung

Die Probeentnahme und die Nachfüllung wurden gleichzeitig durchgeführt. Zu diesem Zweck wurde unter das Rohr eine 100-ml-Mensur (Abb. 3) gestellt und mit CO_2-Gas gefüllt. Durch gleichzeitiges Öffnen des Hahnes und des Gummipfropfens liess man das Wasser im langsamen Strom in die Mensur fliessen. Inzwischen wurde das Rohr oben mit der neuen Probe nachgefüllt

(ohne Luft). So wurde eine Wasserprobe von 60 ml unter CO_2-Atmosphäre entnommen und eine gleiche Menge neuer Probe in das Rohr nachgefüllt. Danach wurde der Hahn abgesperrt und der Gummipfropfen so zurückgesteckt, dass unter ihm keine Luftblase zurückblieb.

In die Mensur (über die Wasserprobe) wurde solange CO_2-Gas eingeführt, bis die Probe zur Sulfatbestimmung entnommen wurde.

III. Versuchsserien mit Laubholzsägespänen

In unserer obenerwähnten Mitteilung [1] wurde über die einerseits im Laboratorium (Seite 135 und 140) und anderseits im Freien im grösseren Massstab (Seite 142 und 145) durchgeführten Versuche berichtet, in denen eine starke Sulfatverminderung durch Laub- und Nadelholzsägespäne erreicht wurde. Die geringe Anzahl der Versuche bietet aber nur wenig Möglichkeit, um Gesetzmässigkeiten aus den Umständen der Reaktion abzuleiten. Deswegen entschlossen wir uns, unsere Versuche bezüglich des Verhaltens der Laubholzsägespäne gegenüber den sulfathältigen Wassern nach den oben angegebenen Methoden weiterzuführen.

Das Ziel dieser Versuche war, die Abhängigkeit des Prozesses der Sulfatbindung von einzelnen physikalischen Faktoren zu klären. So wurde die Abhängigkeit von der Zeit untersucht, erstens ob das Alter des zur Sulfatbindung benutzten Laubholzsägespäne-Bettes den Verlauf beeinflusst oder nicht, und zweitens, wie sich die Kontaktzeit auf die Erscheinung auswirkt. Ferner wurden unsere Versuche auf die Frage des Zusammenhanges von Sulfatkonzentration und Sulfatbindung sowie auf die Abhängigkeit der Sulfatbindung von einem fremden Ion (Fe^{++}) ausgedehnt. Am Ende wurde die Einwirkung des Lichtes untersucht. Eine Prüfung der Abhängigkeit von der Temperatur erschien unnötig, da es unmöglich ist, die Temperatur der unter der Oberfläche gelegenen Schichten zu beeinflussen. Diese Versuche erfolgten immer bei Zimmertemperatur. Es wurden auch Versuche ausgeführt, um klarzustellen, ob die Erscheinung als eine einfache Reduktion verläuft oder aber der Schwefel des Sulfations gebunden wird.

1. Versuchsreihe

Um eine Antwort auf die oben gestellten Fragen zu erhalten, wurden die folgenden Versuche ausgeführt:

In ein Rohr (Abb. 2) wurden 61 g lufttrockene Laubholzsägespäne eingefüllt, zuerst mit Leitungswasser und dann mit dem zu prüfenden Wasser ausgewaschen (Teil II/2). Nach dem Auswaschen wurde das mit dem zu prüfenden Wasser angefüllte Rohr oben und unten verschlossen. (Dieser Zeitpunkt soll hier »Anfang der Versuchsserie« und gleichzeitig »Beginn des ersten Versuches«

genannt werden). Dann wurde das Rohr 7 Tage lang stehen gelassen (dies sei hier als »Versuchsdauer« bezeichnet; s. Tabelle I, Spalte 2). Am Ende des Versuches wurden 60 ml Wasserprobe aus dem Rohr abgelassen und gleichzeitig 60 ml neue Wasserprobe oben eingefüllt (nach Punkt II/4), wonach das Rohr wieder verschlossen wurde. Damit war der erste Versuch beendet und gleichzeitig ein neuer (der zweite) Versuch begonnen. Das Rohr wurde jetzt 22 Tage lang verschlossen aufbewahrt usw.

TABELLE I

Versuchsreihe mit Laubholz-Sägespänen
Im Versuchsrohr 61 g Laubholz-Sägespäne und 170 ml Wasser

Versuchs Nr.	Versuchsdauer Tage	Sulfatkonzentration		Gesamtschwefelkonzentration des Wassers im Rohr bei Versuchsende SO_3 mg/l
		der eingefüllten 60 ml Wasserprobe bei Versuchsbeginn mg/l	des Wassers im Rohr bei Versuchsende mg/l	
1	2	3	4	5
1.	7	272	232	238
2.	22	272	45	88
3.	13	272	23	36
4.	7	272	26	26
5.	7	272	43	59
6.	14	272	14	14
7.	7	550	18	19
8.	7	550	22	22
9.	1	550	38	77
10.	1	550	170	174
11.	1	550	310	310
12.	1	550	358	372
13.	10	550	247	269
14.	23	550	80	116
15.	9	281	48	135
16.	6	281	36	133
17.	8	281	59	—
18.	7	281	89	—
19.	72	281	—	—
20.	7	204	132	—
21.	153	204	0	—
22.	7	204	0	—
23.	7	204	0	—
24.	7	204	38	—
25.	7	204	36	—

TABELLE II

Versuchsreihe mit Laubholz-Sägespänen. Leistungsdaten aus Tabelle I berechnet

Versuchs Nr.	Anfangsdaten des Versuches						Versuchsdauer Tage	Enddaten des Versuchs			Bemerkung
	Alter des Bettes Tage	gebundenes SO_3 der vorigen Versuche SO_3 mg	SO_3-Gehalt des Wassers im Rohr nach Einfüllung von 60 ml neuer Wasserprobe		Anfangs-SO_3-Konzentration des Wassers im Rohr			Sulfatgehalt des Wassers im Rohr SO_3 mg	Gesamtschwefelgehalt des Wassers im Rohr SO_3 mg	Abgebundenes SO_3 während des Versuches SO_3 mg	
			Sulfat SO_3 mg	Gesamtschwefel SO_3 mg	Sulfat SO_3 mg/l	Gesamtschwefel SO_3 mg/l					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.	0	0,0	46,2	46,2	272	272	7	39,4	40,5	5,7	
2.	7	5,7	41,8	42,5	246	254	22	7,7	15,0	27,5	
3.	29	33,2	21,3	26,0	125	153	13	3,9	6,1	19,9	
4.	42	53,1	18,8	20,3	111	120	7	4,4	4,4	15,9	
5.	49	69,0	19,2	19,2	113	113	7	7,3	10,0	9,2	
6.	56	78,2	21,0	22,8	124	135	14	2,4	2,4	20,4	
7.	70	98,6	34,5	34,5	203	203	7	3,1	3,2	31,3	
8.	77	129,9	35,0	35,1	206	207	7	3,7	3,7	31,4	
9.	84	161,3	35,4	35,4	208	208	1	6,5	13,1	22,3	
10.	85	183,6	37,2	41,5	219	244	1	28,9	29,6	11,9	
11.	86	195,5	51,7	51,7	304	304	1	52,7	52,7	— 1,0	
12.	87	194,5	67,1	67,1	394	394	1	60,8	63,2	3,9	
13.	88	198,4	72,4	72,9	426	434	10	42,0	45,8	27,1	
14.	98	225,5	60,2	62,6	354	368	23	13,6	19,7	42,9	
15.	121	268,4	25,7	29,7	151	174	9	8,2	23,0	6,7	
16.	130	275,1	22,2	31,7	131	186	6	6,1	22,6	9,1	
17.	136	284,2	20,1	—	123	—	8	10,0	—	10,1	
18.	144	294,3	23,4	—	138	—	7	15,1	—	8,3	
19.	151	302,6	26,7	—	157	—	72	—	—	—	Versuchs-
20.	223	—	—	—	—	—	7	22,5	—	—	fehler
21.	230	—	26,7	—	157	—	153	0,0	—	26,7	
22.	383	~330	12,2	—	72	—	7	0,0	—	12,2	
23.	390	~343	12,2	—	72	—	7	0,0	—	12,2	
24.	397	~355	12,2	—	72	—	7	6,5	—	5,7	
25.	404	~362	16,4	—	97	—	7	6,1	—	10,3	

In der entnommenen 60-ml-Wasserprobe wurde (aus 20 ml) nach Auskochen mit HCl die Sulfatkonzentration (s. Punkt I/1) und aus 20 ml nach Kochen mit Br_2-Wasser der Gesamtschwefelverbindungs-Gehalt (s. Punkt I/2) bestimmt. Diese Werte sind in Tabelle I in Spalte 4 und 5 angeführt. Diese

Angaben wurden auch auf 170 ml (Tabelle II, Spalte 9 und 10) umgerechnet, also auf das Volumen des im Rohr neben den Sägespänen befindlichen Wassers.

Bei den Anfangsdaten wurde der Sulfatgehalt der im Rohr verbliebenen 110 ml Wasser aus der Sulfatkonzentration des am Ende des vorigen Versuches zurückgebliebenen Wassers berechnet. Gleichzeitig wurde der Sulfatgehalt der 60 ml zugegossenen neuen Wasserprobe (Tabelle I, Spalte 3) in mg dazugerechnet (Tabelle II, Spalte 4 und 5) und schliesslich auf 170 ml umgerechnet (Spalte 6 und 7).

Zwischen den SO_3-Mengen des Anfangs- und Endstadiums zeigte sich immer ein Unterschied, nämlich im Ausmass der durch den Füllungsstoff gebundene Sulfatmenge. Diese Menge ergibt sich aus der Differenz der 5. und 10. (bei Versuch 17—25 der 5. und 9.) Spalte der Tabelle II. Diese Werte sind in Spalte 11 angegeben. Das »Vorleben« des Bettes zeigen die Werte der Spalten 2 und 3. Unter »Alter« des Bettes wird die seit dem Anfang des ersten Versuches verflossene Zeitdauer verstanden (Summe der Werte der Spalte 8). Die Werte des gebundenen SO_3 der vorigen Versuchen ergeben sich aus der Summierung der Werte der Spalte 11.

Bei diesen Berechnungen wurde vorausgesetzt, dass die Zusammensetzung des Wassers im Augenblick der Probeentnahme im ganzen Rohr homogen war. Diese Voraussetzung ist — nach unserem Verfahren — bei den sich zumindest über eine Woche erstreckenden Versuchen erfüllt, während die Ergebnisse bei den eintägigen Versuchen weniger genau sind.

Die aus den Angaben der Tabelle I und II gezogenen Schlussfolgerungen werden in den nachstehenden Abschnitten besprochen.

2. Einfluss des Alters des Sägespänebettes

Zur Untersuchung dieses Einflusses wurden jene Versuche ausgewählt (Nr. 5, 18, 22—25) deren Umstände möglichst ähnlich waren.

Die Angaben dieser Versuche sind in Tabelle III zusammengestellt.

In den einzelnen Spalten werden die Versuchs-Nr. nach Tabelle II, das Alter des Rohres, die bis zu Beginn des gegebenen Versuches abgebundene SO_3-Menge und schliesslich die Leistungsdaten der Abbindung angegeben.

Jeder in Tabelle III angeführte Versuch dauerte sieben Tage.

Aus den Angaben der Tabelle III ist nicht zu bestimmen, ob das Alter oder die früher gebundene Schwefelmenge des Bettes einen massgeblichen Einfluss auf den Prozess ausübt. Andere Faktoren üben jedenfalls wesentlich grössere Wirkungen aus, so dass dieser kleine Einfluss neben diesen Wirkungen vernachlässigt werden kann.

TABELLE III

Versuchs Nr.	Alter des Bettes bei Versuchsbeginn Tage	Bis zum Versuchsbeginn abgebundenes SO_3 mg	Anfangs-sulfatkonzentration des Wassers SO_3 mg/l	Sulfatgehalt des Wassers bei Versuchsende SO_3 mg/l	Abgebundenes Sulfat Während des Versuches mg
4.	42	53	111	26	15,9
5.	49	69	113	43	9,2
18.	144	294	138	89	8,3
22.	383	$\sim$ 330	72	0	12,2
23.	390	$\sim$ 343	72	0	12,2
24.	397	$\sim$ 355	72	38	5,7
25.	404	$\sim$ 362	97	36	10,3

3. Leistungsfähigkeit, Erschöpfung und Regenerierung des Sägespänebettes

Aus den Angaben der Tabelle III geht hervor, dass das Bett nach einer 404tägigen Versuchsreihe und nach dem Abbinden von 0,4 g (0,6 Gewichts-%) SO_3 noch kein Zeichen der Erschöpfung zeigt: die Leistungsfähigkeit des Bettes ist noch unverändert. Allerdings gelang es, während der Versuchen Nr. 9 bis 12 nachzuweisen, dass die Leistungsfähigkeit des Bettes rasch abnimmt, wenn man täglich 60 ml 550 mg/l SO_3-haltiges Wasser aufgiesst. Die obere Grenze der tadellosen Leistungsfähigkeit des Bettes wird von den Werten der Versuche Nr. 7 und 8 gezeigt, nach denen das Bett in 7 Tagen den Sulfatgehalt des Wassers von 550 mg SO_3/l auf 20 mg SO_3/l senkt. Die Leistungsfähigkeit ist in diesem Falle 0,24 SO_3 mg $\cdot$ cm^{-2} $\cdot$ Tag^{-1}. Beispiele für die selbsttätige Regenerierung des Bettes stellen die Versuche Nr. 13 und 14 dar. Nach den Ergebnissen der Versuche Nr. 9 bis 12 erhält das überlastete und dadurch unwirksam gewordene Bett seine Leistungsfähigkeit wieder zurück, sobald die Überlastung vermieden wird.

Die Veränderung der Leistung während der Versuche Nr. 7 bis 14 ist in Abb. 4 und 5 wiedergegeben.

4. Einfluss der Versuchsdauer

In der Versuchsserie wurde die Zeitdauer der einzelnen Versuche verschieden gewählt, um die Wirkung auch dieses Faktors zu bestimmen. Einer gleichzeitigen planmässigen Wahl der Ausgangskonzentration stehen die im II. Abschnitt angegebenen Schwierigkeiten im Wege, da die Ausgangskonzentration

erst nach der Bestimmung der entnommenen Probe bekannt wird. Es erwies sich als notwendig, die mit ungefähr gleichem Sulfatgehalt ausgeführten Versuche nachträglich in Kategorien zusammenstellen. Um genügend viel Ver-

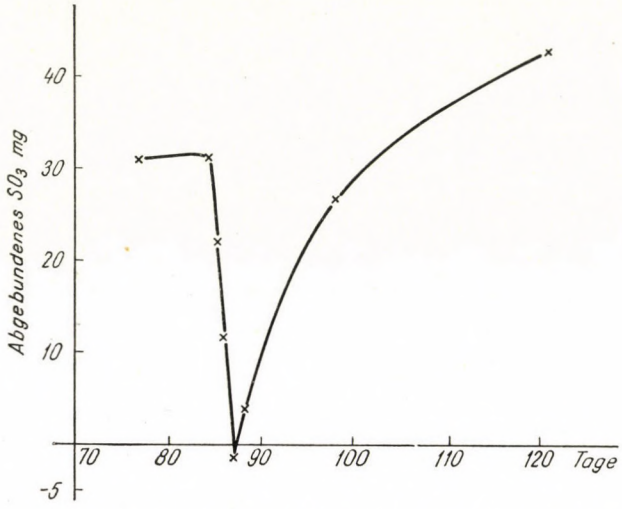


Abb. 4. Sulfatbindung in den Versuchen Nr. 7—14

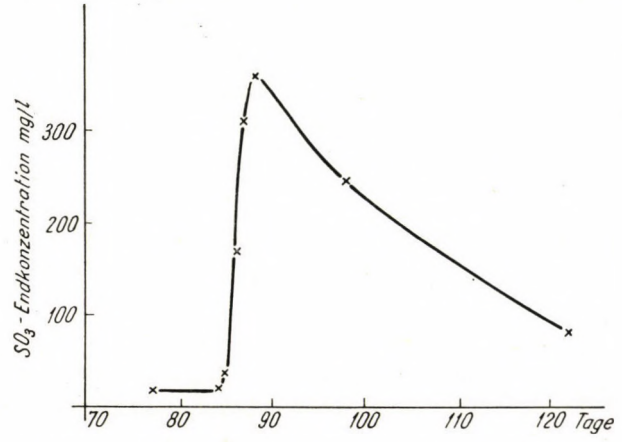


Abb. 5. Endkonzentration in den Versuchen Nr. 7—14

gleichsangaben zu erhalten, mussten die Kategorien stark ausgedehnt werden. Die Werte der so gruppierten Versuche sind in Tabelle IV angegeben. Dieselbe Angaben sind in Abb. 6, 7 und 8 auch graphisch dargestellt.

TABELLE IV

Zusammenhang zwischen Versuchsdauer und Sulfatbindung

Konzentrationskategorien	Versuchs-Nr. in Tabelle I	Versuchsdauer Tag	Sulfatgehalt bei Versuchsbeginn SO_3 mg/l	Sulfatgehalt bei Versuchsende SO_3 mg/l	Abgebundenes SO_3 mg	Abgebundenes SO_3 %
72—97 mg/l	22	7	72	0	12,2	100
«	23	7	72	0	12,2	100
«	24	7	72	38	5,7	57
«	25	7	97	36	10,3	63
111—157 mg/l	16	6	131	36	9,1	72
«	4	7	111	26	15,9	77
«	5	7	113	43	9,2	62
«	18	7	138	89	8,3	35
«	17	8	123	59	10,1	52
«	15	9	151	48	6,7	68
«	3	13	125	23	19,9	93
«	6	14	124	14	20,4	99
«	21	153	157	0	26,7	100
203—246 mg/l	9	1	208	38	22,3	92
«	10	1	219	170	11,9	22
«	7	7	203	18	31,3	91
«	8	7	206	22	31,4	90
«	2	22	246	45	27,5	92
304—426 mg/l	11	1	304	310	—1,0	~0
«	12	1	394	358	3,9	9
«	13	10	426	247	27,1	42
«	14	23	354	80	42,9	77

Die Punkte der kleineren Konzentrationswerte (Abb. 6 und 7) liegen nicht einer Linie entlang ; trotzdem ist es möglich, aus ihnen gewisse Folgerungen zu ziehen. So stellt sich heraus, dass der zeitliche Ablauf des Prozesses — wie das auch zu erwarten ist — vom Sulfatgehalt des Wassers abhängt. Ein Sulfatgehalt von 100 mg SO_3/l wird in 7 Tagen, ein solcher von 100—150 mg/l in 13—14 Tagen völlig abgebunden, bei Konzentrationen zwischen 200 und 250 mg/l sind die Ergebnisse bis 22 Tagen unsicher, dagegen bleibt noch eine bedeutende Menge Sulfat bei einer Konzentration von über 300 mg/l selbst nach 23 Tagen übrig.

Bei einer genügend hohen Konzentration stören andere Faktoren nicht, so dass man einen eindeutigen Zusammenhang zwischen Versuchszeit und Konzentration erhält (Abb. 8).

5. *Wirkung der Anfangskonzentration*

Zur Klarstellung dieser Frage wurden Versuche mit gleicher Zeitdauer — zweckmässig mit 7 Tagen — gewählt. Das aus den Angaben der Tabelle IV zusammengesetzte Graphikon ist aus Abbildung 9 ersichtlich. Die Werte der

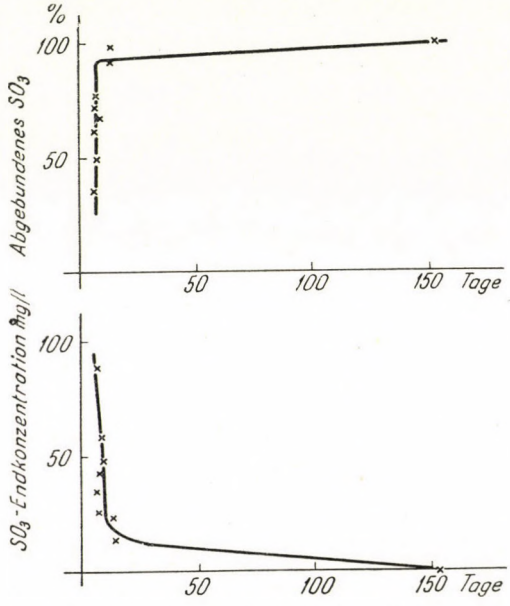


Abb. 6. Sulfatbindung als Funktion der Zeit. Anfangskonzentration 111—157 mg/l

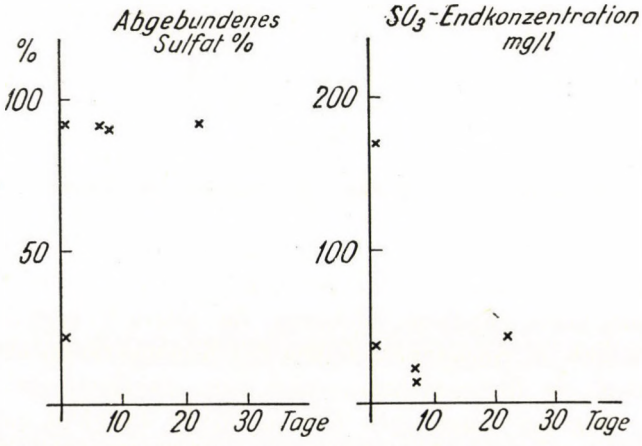


Abb. 7. Sulfatbindung als Funktion der Zeit. Anfangskonzentration 203—246 mg/l

Konzentration 350 mg/l ergeben sich durch Interpolation der Linien von Abb. 8.

Die Punkte der Abb. 9 zeigen Streuung, so dass es nicht möglich ist, eine Linie zu ziehen. Immerhin kann man aber feststellen, dass nach sieben Tagen

die Reduktion der Proben mit 100 mg/l praktisch vollständig ist, dass zwischen den Anfangskonzentrationen von 100 bis 250 mg/l die Endwerte unbestimmt sind und dass bei höheren Konzentrationen diese Zeit zur vollständigen Abbindung nicht genügt.

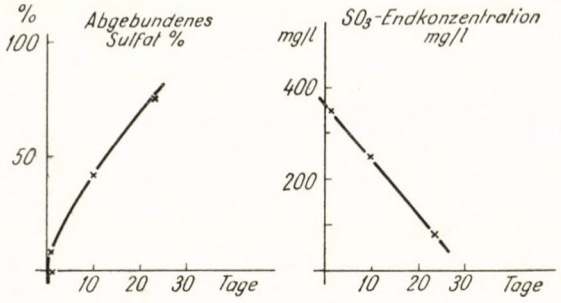


Abb. 8. Sulfatbindung als Funktion der Zeit. Anfangskonzentration 304—426 mg/l

6. Reaktionskinetische Untersuchung

Die Versuchsergebnisse wurden auch vom Gesichtspunkt der Reaktionskinetik ausgewertet.

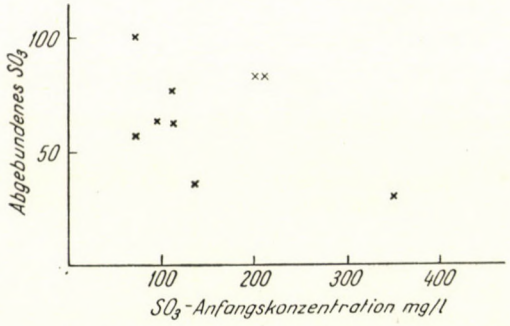


Abb. 9. Wirkung der Anfangskonzentration. Dauer der Versuche: 7 Tage

Zuerst sollte die Reaktionsordnung der (Brutto-) Reaktion der Sulfatbindung bestimmt werden. Die ersten drei Konzentrationsgruppen der Tabelle IV liefern dazu keine Angaben, doch zeigt die vierte Gruppe (304—426 mg/l, dargestellt in Abb. 8) ein lineares Fallen der Konzentration als Funktion der Zeit, das heisst, die Bruttoreaktion sollte 0-ter Ordnung sein. Natürlich ist diese einzige Serie zur endgültigen Klärung dieses Problems nicht genügend; deshalb ist beabsichtigt, die Versuche auch in dieser Richtung weiterzuführen.

Es wurden auch Untersuchungen ausgeführt, um festzustellen, in welchen Stufen sich die Sulfatbildung vollzieht. Zu diesem Zweck wurde neben dem Sulfatgehalt auch der Gesamtschwefel der entnommenen Proben systematisch

bestimmt. Der Unterschied zwischen diesen beiden Werten zeigt die Menge der löslichen Schwefelverbindungen niedriger Oxydationsstufen. Die Sulfat- und Gesamtschwefelgehalte der Proben sind als Funktion des Alters des Bettes graphisch in Abb. 10 dargestellt. Auffallend ist, dass die aufsteigenden Abschnitte beider Kurven beisammen verlaufen, wogegen die horizontalen und abfallenden Abschnitte weit voneinander entfernt sind.

Diese Erscheinung zeigt, dass der Prozess der Sulfatverminderung in mehreren Stufen vor sich geht. Es scheint, dass das Sulfation zuerst in eine unlösliche Form übergeführt wird, und nur später teilweise in die lösliche Form niedriger Verbindungen übergeht. Unsere Versuche zeigen, dass in letzterem

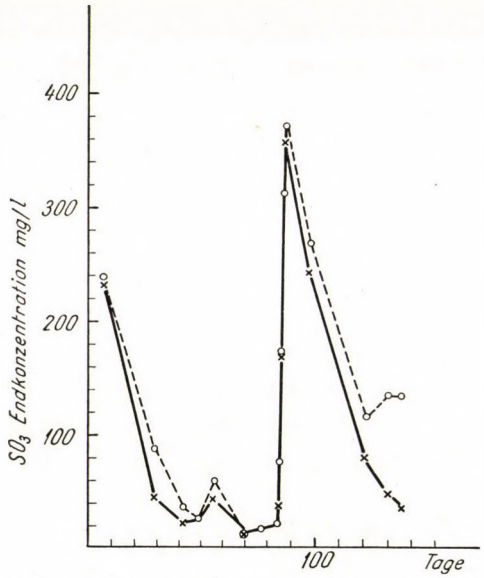


Abb. 10. Sulfat- und Gesamtschwefel-Endkonzentration in den Versuchen Nr. 1—16

Falle bei einigen Versuchen gleichzeitig neben Schwefel(IV)verbindungen auch ein wenig Schwefel(II)verbindungen vorhanden sind — da eine sehr schwache opalisierende Schwefelausscheidung im Wasserverschluss der Apparatur erscheint (Abb. 1) —, in den meisten Fällen bilden sich aber nur Schwefel(IV)-verbindugen. Äusserst wichtig ist die in unseren Versuchen gemachte Feststellung, dass — unter gewissen Umständen — Sulfat ohne Bindung von Sulfidionen aus dem Wasser entfernt wird.

Das Sulfation hat ein so hohes Redoxpotential, dass eine einfache Reduktion durch organische Abfallstoffe nicht vorstellbar ist. Auch auf Grund des Schrifttums [2], [4], [5] muss man annehmen, dass an diesem Prozess Bakterien teilnehmen, so dass das verwendete Laubholzsägespäne-Bett eigentlich nur ein vorteilhafter Nährboden ist. Obwohl zu den hier mitgeteilten Versuchen keine bakteriologischen Untersuchungen gehören, wurden dennoch einige

Proben aus dem Bett unter dem Mikroskop geprüft, wobei es gelang, verschiedene Bakterien zu finden. Natürlich sind zu einer eindeutigen Identifizierung der Bakterien noch genaue — so auch präparative — Versuche nötig.

7. Wirkung von Eisen(II)verbindungen

Schon in unserer früheren Mitteilung [1] wurde die Möglichkeit erwähnt, dass die Eisen(II)verbindungen den Prozess der Sulfatbindung eventuell fördern können. Sulfid- und Hydrosulfidionen bilden nämlich unter den gegebenen Umständen schwerlösliche Verbindungen. Da aber die Ergebnisse der dort besprochenen Versuche nicht eindeutig waren, bemühten wir uns, auch diese Frage zu klären. Nach der weiter oben angegebenen Methode wurden ungefähr 60 g während 24 Stunden in $FeCl_2$-Lösung getränkte Laubholz-Sägespäne in ein Rohr eingefüllt (Abb. 2) und nach Auswaschen mit Leitungswasser die Versuche ausgeführt.

TABELLE V

Versuche mit Fe(II)-haltigen Laubholz-Sägespänen

Nr.	Versuchsdauer Tag	Alter des Bettes Tag	Sulfatgehalt des aufgegossenen Wassers SO_3 mg/l	Sulfatgehalt Anfang SO_3 mg	Sulfatgehalt Anfang SO_3 mg/l	Sulfatgehalt Ende SO_3 mg	Sulfatgehalt Ende SO_3 mg/l	Abgebundener Sulfatschwefel SO_3 je Versuch mg	Abgebundener Sulfatschwefel SO_3 insgesamt mg	Bemerkung
1.	7	7	550	36,3	214	7,0	41	29,4	29,4	
2.	13	20	550	37,5	221	22,0	129	15,6	45,0	
3.	23	43	550	47,2	278	20,7	122	26,5	71,5	
4.	9	52	281	30,3	178	19,9	117	10,4	81,9	
5.	7	59	281	29,7	175	20,0	118	9,7	91,6	
6.	7	66	281	29,8	175	17,4	106	12,4	104,0	
7.	7	73	281	28,9	168	—	—	—	—	Versuchsfehler
8.	72	145	281	—	—	—	—	—	—	
9.	7	152	204	—	—	25,8	152	—	—	
10.	153	305	204	28,9	170	18,3	108	9,6	—	
11.	7	312	204	24,1	142	9,2	54	14,9	—	

Die Angaben dieser Versuchsreihe sind in Tabelle V angegeben.

Aus den Ergebnissen geht hervor, dass die Sulfatverminderung in diesem Fall viel langsamer abläuft als bei den Versuchen ohne Fe(II).

Auf Grund dieser Versuchsreihe lässt sich feststellen, dass das Fe(II)ion den Prozess nicht oder vermutlich in ungünstiger Richtung beeinflusst.

8. Die Wirkung des Lichtes

Um diese Frage zu klären, wurde nach Punkt II/2 ein Rohr mit einer Sägespänefüllung vorbereitet, mit schwarzem Papier mehrmals umwickelt und so vom Licht abgeschlossen.

Die Versuche wurden ebenso ausgeführt wie diejenigen in Punkt III/1. Die Angaben dieser Versuchsreihe sind in Tabelle VI zusammengestellt.

TABELLE VI

Versuche mit Laubholz-Sägespänen im Dunkeln

Nr.	Versuchsdauer Tag	Alter des Bettes Tag	Sulfatgehalt des aufgegossenen Wassers SO_3 mg/l	Sulfatgehalt Anfang SO_3 mg	Sulfatgehalt Anfang SO_3 mg/l	Sulfatgehalt Ende SO_3 mg	Sulfatgehalt Ende SO_3 mg/l	Abgebundener Sulfatschwefel SO_3 je Versuch mg	Abgebundener Sulfatschwefel SO_3 insgesamt mg
1.	17	17	281	40,3	237	12,6	74	27,7	27,7
2.	7	24	281	25,0	147	1,4	8	23,6	51,3
3.	72	96	281	17,8	104	11,2	66	6,6	57,9
4.	7	103	204	19,5	114	7,7	45	11,9	69,8
5.	153	256	204	17,1	100	0,0	0	17,1	86,9
6.	7	263	204	12,2	72	0,0	0	12,2	99,1
7.	7	270	204	12,2	72	0,0	0	12,2	111,3
8.	7	277	204	12,2	72	0,0	0	12,2	123,5
9.	7	284	204	12,2	72	0,0	0	12,2	135,7
10.	7	291	204	12,2	72	0,0	0	12,2	149,9

Die hier erhaltenen Angaben genügen allein nicht, um Schlussfolgerungen ziehen zu können, es ist aber möglich, durch Vergleiche mit den vorigen Untersuchungsreihen zu gewissen Feststellungen zu gelangen.

Den Schlussfolgerungen im Punkte III/2 gegenüber ist das Alter des Bettes nicht zu vernachlässigen, seine Wirkungsfähigkeit wächst ausgesprochen mit der Zeit. Die Versuchsdauer wirkt sich ebenso aus, wie im Punkte III/4 : bei einem Sulfatgehalt von weniger als 100 mg/l ist die Abbindung in 7 Tagen immer 100%ig, zwischen 100—150 mg/l sind jedoch die 7 Tage schon etwas wenig, die Abbindung während dieser kurzen Zeit ist unsicher. Das Ergebnis des 72tägigen Versuches stimmt mit den bisherigen Ergebnissen nicht überein, es handelt sich hier wahrscheinlich um einen Versuchsfehler.

Die Ergebnisse stehen auch mit den Versuchen der Punkte III/5 und III/6 im Einklang, so dass die Folgerung zulässig erscheint, dass das Licht bei unseren Versuchsbedingungen keine wesentliche Wirkung ausübt.

IV. Versuche mit Kohlenschiefer

Unter den für eine Sulfatbindung als geeignet erscheinenden organischen Abfallstoffen wurde auch der Kohlenschiefer untersucht. Die Wahl fiel auf einen — in ungarischen Verhältnissen als schwefelarm angesehenen — aus der Kohlengrube »Nagykovácsi« stammenden Kohlenschiefer. Dieser wurde zu

einer Korngrösse von 1—2 mm zerkleinert, der dabei entstandene Staub ausgesiebt und nach Punkt II/2 in ein in Abb. 2 dargestelltes Rohr gefüllt und ausgewaschen.

Durch dieses Rohr wurden — nach Methode III/1 — verschiedene sulfathaltige Wasser durchfliessen gelassen, wonach der Sulfatgehalt der durchgeflossenen Wasser bestimmt wurde.

Die Angaben dieser Versuchsreihe sind in Tabelle VII enthalten.

TABELLE VII

Versuche mit Kohlenschiefer

Nr.	Versuchsdauer Tag	Alter des Bettes Tag	Sulfatgehalt des aufgegossenen Wassers SO_3 mg/l	Sulfatgehalt Anfang SO_3		Sulfatgehalt Ende SO_3		Abgebundener Sulfatschwefel SO_3	
				mg	mg/l	mg	mg/l	je Versuchs mg	insgesamt mg
1.	21	21	550	35,8	550	26,2	403	9,6	9,6
2.	23	44	550	37,8	582	32,7	503	— 5,1	4,5
3.	8	52	281	20,8	320	33,7	518	— 12,9	— 8,4
4.	14	66	281	20,9	322	29,9	460	— 9,0	— 17,4
5.	7	73	281	20,6	317	19,2	245	1,4	— 16,0
6.	72	145	281	19,8	305	24,5	377	— 4,7	— 20,7
7.	7	152	204	15,2	234	23,3	359	— 8,1	— 28,8
8.	153	305	204	15,1	232	20,1	309	— 5,0	— 33,0
9.	7	312	204	14,8	228	19,3	297	— 4,5	— 37,5
10.	7	319	204	14,8	228	20,5	316	— 5,7	— 43,2
11.	7	326	204	14,9	229	21,1	324	— 6,2	— 49,4
12.	7	333	204	14,9	229	16,1	248	— 1,2	— 50,6

Die Ergebnisse dieser Versuchsreihe zeigen, dass der Kohlenschiefer unter den angegebenen Verhältnissen praktisch keine sulfatbindende Wirkung ausübt, während der Sulfatgehalt des durchgeflossenen Wassers anwächst, vermutlich infolge der Lösung des im Kohlenschiefer enthaltenen Gipses.

Der Kohlenschiefer scheint also als ungeeignet, um den schädlichen hohen Sulfatgehalt des Grundwassers zu vermindern.

Schliesslich sei der beste Dank des Verfassers der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und dem Forschungsinstitut für Chemische Schwerindustrie (Veszprém), die die Ausführung der Versuche ermöglichten, sowie Akademiker Dr. Aladár Vendl für seine wertvollen Ratschläge und meiner Mitarbeiterin Frau Valéria Almásy, für ihre genaue Arbeit ausgesprochen.

SCHRIFTTUM

[1] *A. Vendl—A. Almásy:* Über sulfathaltige Grundwasser. Acta Technica Hung. V. 1952. S. 125—152.

[2] *В. А. Приклонский — Ф. Ф.Лаптев* : Физические свойства и химический состав подземных вод. Госгеолиздат, Москва—Ленинград 1949.
[3] *A. Heller* und Mitarbeiter : Wasser und Luft. Untersuchung und Beurteilung des Wassers. I. Hdb. d. Lebensmittelchemie, Springer-Verlag, Berlin, 1940, S. 93—96.
[4] *С. Н. Виноградский* : Микробиология почвы. Москва 1952.
[5] *W. M. Fedorow :* Mikrobiológia (Übersetzung aus d. Russ.). Mezőgazdasági Kiadó, Budapest, 1951.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Versuche zur künstlichen Verminderung des schädlich hohen Sulfatgehaltes der Grundwasser wurden mit organischen Abfallstoffen weitergeführt. Es wurde eine Versuchstechnik zur Bestimmung der voraussichtlichen Sulfatverminderungsfähigkeit im Boden ausgearbeitet, wobei als Versuchsstoffe Laubholz-Sägespäne und Kohlenschiefer Verwendung fanden. Kohlenschiefer zeitigte keine Wirkung, während die Sägespäne eine starke Verminderung des Sulfatgehaltes zur Folge hatten. Diese war in vorteilhaften Fällen so stark, dass im Wasser keine Schwefelverbindungen bleiben. Versuche mit Torf sind derzeit im Gange.

К СНИЖЕНИЮ СОДЕРЖАНИЯ СУЛЬФАТОВ В ГРУНТОВЫХ ВОДАХ

А. АЛЬМАШИ

Резюме

Исследования по искусственному снижению содержания сульфатов в грунтовых водах с высоким и вредным их содержанием продолжались с применением для этой цели органических отходов. Была разработана методика исследований для определения предполагаемой способности веществ исследований, то есть опилок лиственных пород древесины и углистых сланцев в отношении снижения содержания сульфатов в почве. В результате проведенных исследований было установлено, что углистые сланцы не оказывают никакого влияния, в то же время опилки дают сильное снижение содержания сульфатов ; при благоприятных условиях получается такое сильное снижение их содержания в грунтовых водах, что в воде совершенно не остается никаких серных соединений. Опыты с торфом продолжаются дальше.

REDUCTION OF SULPHATE CONTENT OF GROUND WATER

A. ALMÁSY

SUMMARY

Tests were made to reduce the harmful high sulphate content of ground water with organic waste products. A test method was elaborated for the determination of the potential reduction of the sulphate content in the soil, whereby saw dust of leaf-wood and coal shale were used. Coal shale did not have any effect, while saw dust reduced sulphate content considerably. Under favourable conditions this reduction was so strong that no sulphur compounds remained in water. Tests with peat are being conducted.

SUR LA DIMINUTION DE LA TENEUR EN SULPHATE DES NAPPES D'EAU SOUTERRAINES

A. ALMÁSY

RÉSUMÉ

Les essais visant à la diminution artificielle de la trop grande et, par là, nuisible teneur en sulphate des nappes d'eau souterraines ont été continués avec des déchets organiques. Il a été élaboré une technique d'essai en vue de déterminer la capacité de diminution de la teneur en sulphate dans le sol. Comme matériaux d'essai on a employé de la sciure de bois feuillu et du schiste de charbon. Tandis que ce dernier ne développa aucun effet, la sciure de bois produisit une forte diminution de la teneur en sulphate. Cette diminution — dans des cas favorables — fut tellement forte qu'il ne resta pas de composés de soufre dans l'eau. Des essais avec de la tourbe sont en cours d'exécution.

THE INFLUENCE OF SOME ALLOYING CONSTITUENTS ON THE STRUCTURE OF CAST ALUMINIUM

A. DOMONY

CANDIDATE OF THE TECHNICAL SCIENCES

and

C. R. VASSEL

RESEARCH INSTITUTE OF NON-FERROUS METALS, BUDAPEST

[Received 1st November, 1954]

1. Introduction

It is a long known fact, that the grain size of cast metals is strongly influenced by the composition of the alloy in question and further by the parameters of the casting process such as temperature, duration, nature and speed of heat extraction [3, 11, 12 and 14]. These questions are gaining nowadays an ever increasing importance in the technology of aluminium and its alloys. It is because the cast structure markedly influences the workability and properties of the billets to be rolled or extruded, the flawless production of mould castings and is of great importance in welding semi-finished products too.

The effect of the factors influencing the freezing of melts is very complex and not yet cleared, neither practically, nor even theoretically. The present paper and the investigations herein discussed had the purpose to clear up some of the questions related to the composition, i. e. the effect of the alloying elements and impurities on one another and thereby on the grain-size, and further to throw some new light on the theoretical side of the outstanding grain refining role of the added titanium.

2. Experimental materials and methods

Altogether 220 samples were cast, in the following combinations :

a) super-pure aluminium (99, 99%) ;

b) binary aluminium-copper, aluminium-iron, aluminium-magnesium, aluminium-manganese, aluminium-silicon and aluminium-zinc alloys, with an alloying content of 0-1, 0-2, 0-4, 0-6 and 0-13 weight per cent respectively ;

c) the same as under *b)*, with titanium of 0,1 resp. 0,5% ;

d) super-pure aluminium, aluminium-magnesium alloys with 4% magnesium, aluminium-silicon alloys with 13% silicon, aluminium-copper-magnesium alloys with 4% copper and 0,7% magnesium and aluminium-manganese alloys with 1,2% manganese, to all of which were added simultaneously iron and silicon, in different quantities ;

e) the same as under *d)*, with added titanium of 0,1 resp. 0,5% ;

f) aluminium-magnesium-silicon alloys, with Mg + Si content corresponding to, greater, resp. less than the Mg : Si ratio of the Mg_2Si compound; with simultaneously added iron ;

g) the same as under *f)*, with titanium of 0,1 resp. 0,5%.

The base material of all samples was the same, super-pure aluminium (99,99%). The alloying constituents were introduced as pure metallic elements, in the case of copper, iron, manganese and silicon of course in the form of master alloys. Titanium was introduced with exception of two cases by the reduction of potassiumfluotitanate ; in these latter two cases pure metallic titanium-powder resp. an aluminium-titanium master alloy with 3% titanium were added.

The melting process was the same for each sample. Melting was done in graphite crucibles and in an electrical resistance-type furnace. Strictly uniform casting temperatures, holding times and casting process were adopted, with casting into an iron mould of 50 mm diameter, previously preheated to the same temperature. Each melt weighed 400 g.

3. Test results and discussion

The samples were grouped into six classes, according to their grain-size. These groups were the following :

a) grain area greater than 10 mm^2 ;

b) grain area between 1 and 5 mm^2 ;

c) grain area between 0,5 and 1,0 mm^2 ;

d) grain area between 0,1 and 0,5 mm^2 ;

e) grain area between 0,05 and 0,10 mm^2 and

f) grain area less than 0,05 mm^2.

The results of this grouping were discussed in detail in an earlier work [16], the summary is reported in *Table I.*

Along with measuring of the grain-size were conducted investigations relating to the determination of the shape of the individual grains — whether columnar or equiaxial.

These latter findings can be shown to bear the following relation between the crystallization mode of the parent metal (aluminium) and the influence of the added alloying elements or of impurities :

1. The grain refining action of titanium of 0,1% is very much greater, than the effect of any amount of any other added metallic element :

2. Titanium of an amount of even 0,1% eliminates the columnar grain shape of solidifying aluminium ; the metal freezes with equiaxial grains ;

TABLE I

Summary of grain-sizes of the investigated aluminium samples

< 10 mm²	> 1 mm²	$> 0{,}5$ mm²	$> 0{,}1$ mm²	$> 0{,}05$ mm²	$< 0{,}05$ mm²
	0—1% Si, Fe	0,1% T + Si, Fe		—	0,5% Ti+ (Si, Fe)
	0—2% Zn	—	0,1% Ti+Zn	—	0,5% Ti+Zn
	—	0,4% Mg+ (Si, Fe)	0,1% Ti+Mg+ (Si, Fe)	0,5% Ti+Mg+(Si, Fe)	
	—	0—2% Mn (Si, Fe)	0,1% Ti+Mn (Si, Fe)	—	0,5% Ti+Mn+ (Si, Fe)
	—	—	0—6% Cu	0,1% Ti+Cu	0,5% Ti+Cu
	—	—	2—13% Si± 0,1% Ti	0,5% Ti+2—13% Si	
99,99% Al	—	—	—	99,99% Al + 0,1% Ti	99,99% Al+ 0,5% Ti
	—	—	—	Cu-Mg(Fe+Si) ±0,1% Ti	0,5% Ti+Cu-Mg-(Fe, Si)
	—	—	Cu-Si-(Fe)	0,1% Ti+Cu-Si-(Fe)	0,5% Ti+Cu-Si-(Fe)
	—	Mg_2Si+Si	Mg_2Si+Si(Fe)	0,1% Ti+ +Mg_2Si+Si(Fe)	0,5% Ti+Mg_2Si +Si(Fe)
	—	—	Mg_2Si±(Fe)	0,1% Ti+ +Mg_2Si±(Fe)	0,5% Ti+Mg_2Si ±(Fe)
	Mg_2Si+Mg	Mg_2Si+Mg+(Fe)	0,1% Ti+Mg_2Si+Mg+(Fe)		0,5% Ti+Mg_2Si +Mg(Fe)

3. The effect of each alloying element on the solidification and macrostructure of aluminium can be tabulated in the following way — assuming equal melting and casting temperatures for each alloy :

Columnar structure	Equiaxial (uniform, polyhedral) structure
aluminium-iron	aluminium-copper (Cu more than 1%)
aluminium-manganese	aluminium-silicon (Si more than 4%)
aluminium-zinc	aluminium-magnesium (Mg more than 4%)
aluminium-copper-silicon	
aluminium-magnesium-silicon	

Our experiments do not produce any evidence of the earlier hypothesis [8], that the iron, resp. some aluminium-silicon-iron compounds exert a greater grain refining action on the virgin aluminium than the other alloying elements.

4. The outstanding grain refining action of titanium of 0,1% occurs with any aluminium alloy (with the exception of aluminium-copper-magnesium) although that effect is less than in the case of super-pure aluminium.

5. The addition of titanium of 0,1% exerts the following effect on the influence of the individual alloying elements on the solidification and macrostructure of aluminium — assuming always the same melting and casting temperature :

Columnar structure	Equiaxial (uniform, polyhedral structure)
aluminium-iron	aluminium-copper (Cu more than 0,5%)
aluminium-manganese	aluminium-magnesium
	aluminium-silicon
	aluminium-zinc (Zn more than 0,4%)
	aluminium-copper-magnesium
	aluminium-magnesium-silicon

6. The addition of titanium of 0,5% has the same grain refining and crystallization controlling effect (i. e. promoting the formation of equiaxial grains) on super-pure aluminium and any other aluminium alloy.

Adopting, on the basis of our experiments, the conclusions of W. S. *Pellini* [12] relating to the crystallization of metals in general, to the solidification and high-temperature strength of light metals, we may infer that the addition of the following metallic elements *does not* eliminate the columnar — from the point of view of hot-strength detrimental — crystallization of aluminium :

copper (Cu less than 1%)
iron (Fe between 0—1,2%)
magnesium (Mg less than 4%)
manganese (Mn between 0—0,3%)
silicon (Si less than 4%)
zinc (Zn between 0—0,8%).

The introduction of titanium has not only the very favourable effect of reducing considerably the grain-size, but besides eliminates effectively — when added in an amount of more than 0,1% — the formation of columnar structure. The latter structure is very detrimental to the high-temperature strength of the aluminium alloys, because it is associated with the apparition and presence of large, coherent eutectic i. e. low-melting segregates, which may be absorbed by diffusion into the grains of the base metal very much slower than in the case of finer, uniformly distributed eutectic segregates [13]. The addition of titanium eliminates the latter detrimental action too.

4. Theoretical explanation of the grain-refining action of titanium

The pertinent literature accepted three theories for the explanation of the uncommon grain refining action of titanium as exhibited during the crystallization of aluminium and its alloys, without explaining the full background of this phenomenon. These theories are the following :

1. *Theory of the peritectic reaction* [14]. Its high improbability in the case discussed above was shown already by various authors [1, 3, 4 and 15] and the discussion of the same may therefore be omitted.

2. *Theory of nucleation by titaniumcarbide particles* [13, 11]. Its improbability was discussed too by various authors [4, 15], among them by ourselves [5]. It is namely very improbable that in the molten aluminium of about 700° C any titaniumcarbide could be formed and be present in sufficient quantities. Besides this it is not yet fully proved that the very stable titaniumcarbide compound — which forms and breaks down very slowly — could be made to «decompose to its constituents» by simple superheating to about 900° C and should be «formed again» during rapid cooling from 900 to 700° C. It is very improbable too that there should be in the potassiumfluotitanate, used by ourselves for the introduction of titanium, some titaniumcarbide, or that the same could have been formed during the relatively short alloying and melting conducted at lower temperatures.

3. *Theory of the remnant crystal lattice fragments* [15]. The results of our former investigations here published seem to contradict this theory too. Alloying with titanium was made by reducing the same from salts, and there were therefore no crystal lattice fragments, which could reach the metal by this way. The grain refining action of the titanium added this way was nevertheless the same as that of titanium introduced by an aluminium-titanium master alloy or that introduced in the form of metallic titanium [16]. It is beyond all question that the remnant crystal lattice fragments play an important role and exert a favourable grain refining action, but they cannot give a full explanation of the phenomenon in question.

Our advanced theory is, as against the above ones, that the grain refining action of titanium — outstanding among that of the other metallic alloying elements of aluminium — can be attributed to a favourable equilibrium of the forces and energies acting between the molten aluminium atoms of about 600—700° C temperature and the existing titanium atoms. The titanium atoms are not present according to our conception in the form of the well-known Al_3Ti *compound but there is a strongly favourable interaction of the field of forces existing between the individual aluminium and titanium atoms respectively.* This is proved by investigations of E. *Gebhardt* and co-workers [9] too, conducted in related fields and showing that the internal friction of the aluminium-titanium alloys differs very markedly from that of other binary aluminium alloys. According to B. *Chalmers* [2] there occurs

the transition of an atom from the solid to the liquid phase or reversely only «if it has some energy in excess of some definite value, which is higher than the average energy of the atoms in either the liquid or the solid». It seems probable, according to E. *Gebhardt* that the binding forces which lead to the formation of solid compounds exist in the liquid phase too, at least partly and effect a preferred arrangement of the liquid atoms. The favourable meeting of these atomic groupings could then give that excess energy which is according to B. *Chalmers* needed for the setting on of crystallization. The titanium atoms present in the molten aluminium effect in the temperature range around the melting-point of aluminium according to our assumption such a variation of the field of forces of the molten aluminium that the equilibrium of energy is shifted towards the atoms in the solid phase — i. e. to those having no free thermal movement — and there is therefore a much greater probability that the individual aluminium atoms become bound to the solid atomic groupings.

The action of the field of energies of the aluminium and titanium atoms on each other could throw a light not only on the grain refining mechanism of titanium but would give an explanation of the retarding effect of the titanium atoms present, causing the elimination of the columnar structure.

The forces which are determining the arrangement of the different atoms are namely in the case of formation of columnar structure generally much smaller than the orienting effect of heat extraction. The strong binding forces between the aluminium and titanium atoms seem however even stronger than the orienting effect of heat extraction [2], and that is the cause why the freezing of aluminium alloyed with titanium and cast otherwise under the same conditions appears in polyhedral structure.

The interaction of the field of forces and energies of the aluminium and titanium atoms diminishes when the temperature reaches greater values. This gives an acceptable explanation why the grain refining action of titanium diminishes when the temperature is increased, although this diminishing action is still much greater than that of any other alloying element.

The differing grain refining action of titanium of 0,1% on binary and ternary aluminium alloys can be explained by the action of the titanium and other alloying elements on each other. The action of these fields of forces is partly as favourable as between the aluminium-titanium atoms, but partly less favourable because the effect of the alloying metal on the titanium atom diminishes the favourable action of the aluminium and titanium atoms on each other thereby producing a reduced grain refining effect.

REFERENCES

1. *H. Bernstein :* Journal of Metals, 6 (1954) 603.
2. *B. Chalmers :* Journal of Metals, 6 (1954) 519.
3. *A. Cibula :* Journal Inst. of Metals, LXXVI (1949), 321.
4. *F. A. Crossley* and *L. F. Mondolfo :* Journal of Metals, Vol. 3. (1951), 1143 ; with discussion by *F. R. Morral, M. D. Eborall, A. Cibula, W. R. Opic, H. Bernstein, I. Morgan, P. G. England, D. Turnbull* and *J. H. Hollomon :* ibid. 4 (1952), 1190.
5. *A. Domony* and *C. R. Vassel :* M. T. A. VI. Műszaki Osztály Közleményei, VIII (1953), No. 3—4, 629. Publications of Eng. Section of the Hung. Academy of Sc.
6. *M. D. Eborall :* Journal Inst. of Metals, LXXVI (1949), 295.
7. *W. L. Fink* et al. : Physical Metallurgy of Aluminium Alloys, ASM, Cleveland, 1949.
8. *V. Fuss :* Die Metallographie von Aluminium und seiner Legierungen, Eplinger, Berlin, 1943.
9. *E. Gebhardt, M. Becker, S. Dorner :* Zeitschrift für Metallkunde, 45 (1954), 510 and 573.
10. *I. E. Gorskov :* Lit'e szlitkov cvetnüh metallov i szplavov, Metallurgizdat, Moscou, 1952.
11. *V. Kondic* and *F. Shutt :* Journal Inst. of Metals, LXXVIII (1950), 105.
12. *W. S. Pellini :* Welding Journal, 33 (1954), 83-s.
13. *W. S. Pellini :* American Foundryman, November 1953, 28.
14. *E. Scheil :* Giesserei Techn.-Wiss. Beihefte, I (1949—1953), 201.
15. *J. Verő :* M. T. A. VI. Műszaki Osztály Közleményei, IX (1953), No. 1—4, 187. Publ. of the Eng.Section, Hung. Acad. of Sc.
16. *A. Domony* and *C. R. Vassel :* M. T. A. VI. Műszaki Osztály Közleményei, Publ. of the Eng. Section, Hung. Acad. of Sc. In course of Publication.

SUMMARY

Experiments were conducted to show the effect of the various alloying elements and impurities of aluminium on the primary grain size of the cast metal.

The grain size and the mode of crystallization depend according to the experiments conducted under the same melting and casting conditions to the greatest extent on the kind of the alloying element present in the molten metal, further on the presence of other metallic alloying elements or impurities and finally on the amount of the same.

The greatest action, far surpassing that of any other element, exhibited titanium among all investigated elements, in accordance with expectations. The outstanding grain refining and the mode of crystallization governing action of titanium cannot be explained, according to the opinion of the authors, by any of the three well-known theories pronounced thereon — peritectic reaction, nuclei of titaniumcarbide particles and remnant crystal lattice fragments — ; a much better explanation is shown to be associated with the assumption of a favourable equilibrium of the forces and energies acting between the aluminium and titanium atoms existing in a melt of about 700° C temperature.

ВЛИЯНИЕ ОТДЕЛЬНЫХ ЛЕГИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА СТРУКТУРУ ЛИТОГО АЛЮМИНИЯ

Канд. техн. наук А. ДОМОНЬ и К. Р. ВАССЕЛЬ

Резюме

Проводились опыты в интересах определения влияния важнейших легирующих элементов, примесей и присадок алюминия на первичную крупность зерен алюминиевой чушки.

Измерениями установлено, что крупность зерен и вид кристаллизации — при прочих идентичных условиях плавки и разливки металла — зависят преимущественно от вида легирующего элемента, присутствующего в расплаве, а также от наличия прочих металлических примесей или легирующих добавок и, наконец, от количества перечисленных.

Из числа исследованных добавок на крупность зерен наиболее сильное влияние — как и ожидалось — оказывает титан ; это влияние по своей интенсивности превосхо-

дит влияние других металлических элементов. По мнению авторов, повышенное влияние на степень измельчения зерен и процесс кристаллизации невозможно однозначно объяснить при помощи известных трех теорий, т. е. перитектической реакцией, образованием зародышей карбида титана или остатками решетки ; более правильную картину происходящих явлений можно построить при предположении выгодных силовых и энергетических условий между атомами титана и расплава алюминия при температуре порядка 700° С.

L'EFFET DE QUELQUES ÉLÉMENTS CONSTITUTIFS SUR LA STRUCTURE DE L'ALUMINIUM FONDU

A. DOMONY, Candidat des Sciences Techniques et C. R. VASSEL

RÉSUMÉ

Des expériments ont été faits en vue de la recherche de l'action des éléments les plus importants constitutifs et des impuretés sur la grosseur primaire des grains du métal fondu.

Les expériments ont montré, que la grosseur des grains et le mode de cristallisation dépendent — supposant les mêmes conditions pour la fusion et le coulage — premièrement de la nature de l'élément se trouvant dans le métal fondu, ensuite de la présence des autres constituants ou d'impuretés et finalement de leur quantité.

L'effet le plus intense comme on s'y attendait fut constaté dans le cas du titane, et la grosseur des grains était dans ce cas de beaucoup inférieure que dans le cas de chacun des autres éléments examinés. Suivant les auteurs aucune des théories bien connues ne peut expliquer l'effet éminent du titane sur la diminution de la grosseur des grains et gouvernant la cristallisation irréprochable — la réaction péritectique, des germes du carbure du titane, ou les remanents du réseau cristallin — ; on peut se former une image plus correcte en supposant l'existence de conditions favorables de force et d'énergie entre les atomes de l'aluminium fondu d'une température d'environ 700°C et les atomes du titane.

DIE WIRKUNG EINIGER LEGIERUNGSBESTANDTEILE AUF DIE GUSSSTRUKTUR VON ALUMINIUM

A. DOMONY, Kandidat der technischen Wissenschaften und K. R. VASSEL

ZUSAMMENFASSUNG

Es wurden Versuche durchgeführt, um die Wirkung der wichtigsten Legierungs- und Begleitelemente des Aluminiums auf die primäre Korngrösse des gegossenen Metalls zu klären.

Die Versuche zeigten, dass bei immer gleichem Schmelz- und Giessvorgang die Korngrösse und Art der Kristallisation in erster Linie von der Art des in der Schmelze vorhandenen Legierungselementes, weiterhin von gegebenenfalls anwesenden anderen metallischen Legierungs- und Begleitelementen und schliesslich von deren Menge abhängen.

Von den untersuchten Elementen übte erwartungsgemäss das Titan die stärkste Wirkung auf die Korngrösse aus. Diese Wirkung war um mehrere Grössenordnungen grösser als die der anderen Legierungselemente. Nach Meinung der Verfasser kann man diese hervorragende kornverfeinernde und die Art der Kristallisation beherrschende Wirkung des Titans mit keiner der drei bekannten Theorien (der peritektischen Reaktion, der Titankarbidkeime und der Kristallgitterüberreste) einwandfrei erklären ; ein viel besseres Bild erhält man dagegen bei Annahme von günstigen Kräfte- und Energieverhältnissen zwischen den Atomen der ungefähr 700 °C Temperatur betragenden Aluminiumschmelze und des vorhandenen Titans.

РЕТИГРАФ — РЕНТГЕНОВСКИЙ ГОНИОМЕТР, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЙ ПРЯМУЮ ПРОЕКЦИЮ*

Проф. В. А. ВУСТЕР (Кембридж)

Развитие ретиграфов

В 1938 году де Джонг и Боумен описали такой рентгеновский гониометр, при помощи которого любая плоскость сетки обратной решетки может быть спроектирована без искажений на планфильм. Авторы назвали новый

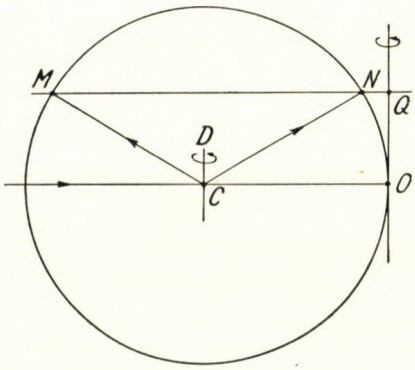


Рис. 1. Схема первого варианта ретиграфа де Джонга—Боумена. CD — ось вращения кристалла; CQ — ось вращения пленки; отмеченные отражения ограничены конусом MCN

прибор «ретиграфом», т. е. прибором, рисующим решетку. В приборе как кристалл, так и пленка вращаются вокруг вертикальных осей, взаимное положение которых показано на рис. 1. На указанном рисунке отрезок CO дает направление пучка падающих рентгеновских лучей, точка C является центром, вокруг которого описывается сфера ONM, представляющая собою отражающую сферу, MNQ — исследуемая плоскость обратной решетки и одновременно плоскость пленки, CD — ось вращения кристалла и OQ — ось вращения обратной решетки. Если радиус отражающей сферы принять

*Доклад от 4-го октября 1954 г. на Конгрессе по технике измерений, созванном Академией Наук Венгрии.

за единицу, тогда OQ можно положить равным ζ. Известно, что для всех лежащих на отражающей сфере точек обратной решетки действительно уравнение Брэгга, и что отраженные рентгеновские лучи идут в направлении прямых, соединяющих точку C и соответствующие точки обратной решетки. Центр круглой рентгеновской пленки находится в точке Q, плоскость пленки перпендикулярна к оси OQ, и пленка вращается с той же скоростью и в том же направлении, как и кристалл. При таких условиях распределение пятен на снимке является просто проекцией плоскости обратной решетки MNQ. При помощи этого устройства можно сфотографировать лишь плоскости решетки порядка выше ноля, и в центре снимка образуется

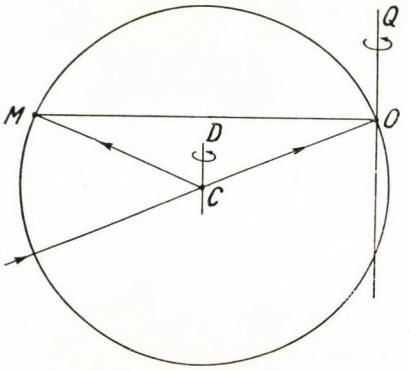


Рис. 2. Схема ретиграфа де Джонга, Боумена и Ланге

слепое пятно с радиусом NQ, внутри которого не может быть отражений. Притом расстояние между пленкой и кристаллом (OQ) в случае заданного увеличения является функцией ζ. Этот метод был усовершенствован еще в 1938 году де Джонгом, Боуменом и Ланге установкой на приборе коллиматора, угол наклона которого к оси CD можно изменять. Общая схема этого усовершенствованного прибора показана на рис. 2. Из рисунка видно, что при применении новой схемы можно изучить ряд плоскостей сетки, параллельных экваториальной плоскости, однако рентгеновские лучи падают на пленку под небольшим углом MOC. Этот метод был подробно разобран в 1942 году Бюргером ; он же разработал прибор такого типа, который хорошо оправдал себя на практике (рис. 3).

На указанном рисунке видно, что кронштейн может быть сдвинут по желанию в боковом направлении. Ось кристалла и ось камеры параллельны друг другу и укреплены на общем кронштейне, который можно вращать по отношению к основанию. Бюргер избрал эту схему, так как по его мнению прибор выгоднее всего использовать в случае постоянного угла раствора конуса отраженных лучей и постоянного же расстояния между кристаллом и пленкой. Предлагаемый Бюргером метод имеет следующие недостатки:

за исключением нолевого слоя, каждый слой имеет слепое пятно; далее, при помощи этого прибора можно исследовать только такие плоскости сетки, для которых значение величины ζ не превышает определенного, сравнительно малого значения. В 1944 году Бюргером был разработан прецессионный метод, при помощи которого без искажений можно спроектировать плоскость сетки обратной решетки.

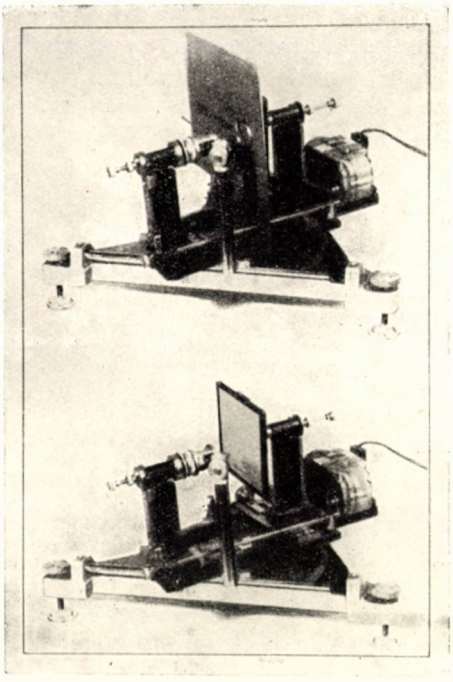


Рис. 3. Модель ретиграфа де Джонга, Боумена и Ланге, переконструированная Бюргером

Принцип этого метода демонстрируется на рис. 4.

Плоскость обратной решетки, соответствующая на рис. 4 отрезку AB, не вращается, а обкатывается по поверхности конуса, для которого угол COA является половинным углом раствора. На рис. 4 изображено четыре следующих друг за другом положения плоскости обратной решетки AB, а также сечения этой плоскости и рефлектирующей сферы. Чтобы получить неискаженную проекцию, на место, занимаемое плоскостью AB, кладется светочувствительная пленка, которая приводится в движение, повторяя движение исследуемой плоскости обратной решетки. Таким образом, исследуемая плоскость обратной решетки остается параллельна плоскости светочувствительной пленки. Этот прибор хорошо приспособлен для изучения экваториальной плоскости обратной решетки. При исследовании белков и

других кристаллов с высоким значением постоянной решетки угол COA может быть доведен почти до 90°, так, что за кратчайшее время можно зарегистрировать все возникающие отражения. Однако, метод лучше всего подходит для исследования нолевой плоскости, так, как при исследовании других плоскостей сетки неизбежно образуется большое слепое пятно. В 1951 году Торроха, Парахес и Аморес разработали ретиграф с неподвижным конусом, который служил той же цели, как и модель, описанная в 1942 году Бюргером. Однако, схема расположения отдельных деталей была изменена. На Конгрессе по кристаллографии, состоявшемся в Париже в

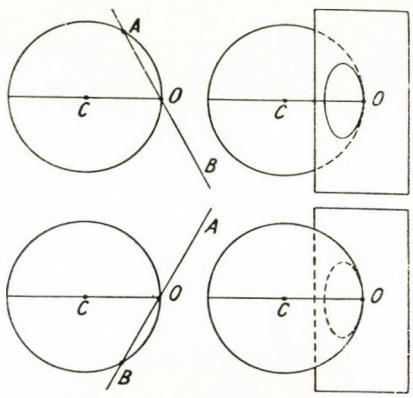


Рис. 4. Схема изображает четыре следующих друг за другом положения плоскости обратной решетки. Плоскость обратной решетки обкатывается по поверхности конуса с раствором COA. (Кинематика прецессионного ретиграфа Бюргера)

июле 1954 года, демонстрировались три различных типа ретиграфа де Джонга—Боумена: повидимому, это означает в какой-то мере возвращение к этому более старому прибору.

Требования, предъявляемые к ретиграфу

Прежде чем перейти к описанию предлагаемого прибора, было бы целесообразным сначала перечислить, чего, собственно говоря, ожидают кристаллографы от такого прибора.

1. Прибор должен регистрировать нолевую плоскость, с одной стороны, внутри небольшого круга, описанного вокруг начальной точки (для кристаллов с высокой постоянной решетки), а с другой стороны, внутри круга с возможно большим радиусом (для кристаллов с небольшой постоянной решетки).

2. Прибор должен регистрировать без слепых пятен плоскости обратных решеток с возможно наибольшим значением величины ζ.

3. Увеличение снимков, изготовленных для одного и того же кристалла со следующих друг за другом плоскостей решетки, должно быть неизменным.

4. Должна иметься возможность изменения увеличения — в соответствие с исследуемым кристаллом.

Ретиграф де Джонга—Вустера

Большинство перечисленных требований удалось удовлетворить путем усовершенствования разработанного в 1942 году прибора Бюргера. Описываемый ниже прибор отличается от упомянутого ранее прибора

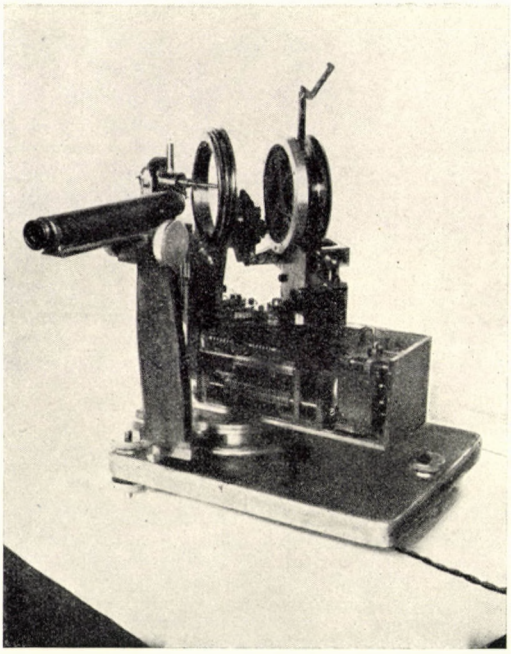


Рис. 5. Снимок ретиграфа де Джонга—Вустера, изображающий установку гониометрической головки в радиальном направлении и камеру диаметром 10 *см*. Кольцеобразная диаграмма сдвинута так, что хорошо видна камера

следующими тремя существенными особенностями: методом укрепления кристалла, измененным креплением камеры и возможностью изменения расстояния между кристаллом и камерой.

1. Укрепление кристалла

Кронштейн кристалла можно закрепить двояким образом, т. е. в радиальном и осевом направлениях. На рис. 5 показан общий вид прибора; здесь кристалл укреплен в радиальном направлении. На рис. 6 рядом друг

с другом показаны оба вида укрепления кристаллов. Головка гониометра состоит из трех салазок и трех дуг, при помощи которых кристалл может быть установлен в любом положении. Головка гониометра укреплена на вертикальном кругу, вокруг которого ее можно вращать. Эта схема позволяет изучать нолевую плоскость и в непосредственной близи к начальной точке сетки. Изучение нолевой плоскости сетки ограничивается лишь конечной толщиной вертикального круга. Угол, заключенный между нор-

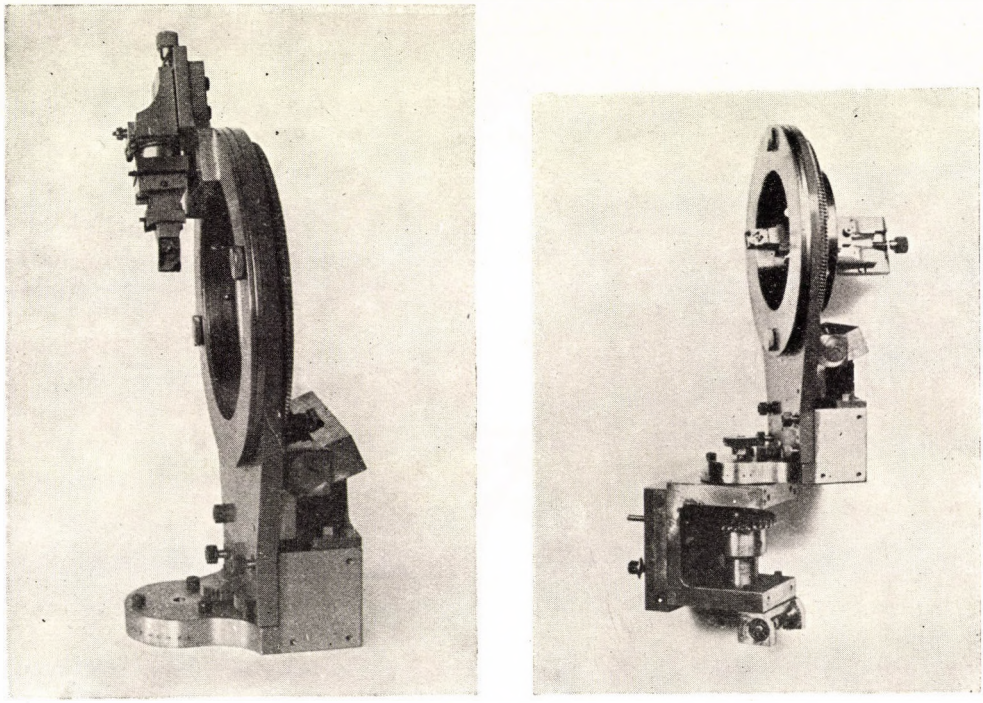


Рис. 6. Снимок с правой стороны показывает установку гониометрической головки в радиальном направлении, а с левой стороны — в осевом направлении

малью плоскости вертикального круга и пучком падающих лучей, может равняться макс. 45°. Благодаря этому, при радиусе отражающей сферы, принятой равной единице, максимальное значение величины ζ может быть доведено до 1,4. Для иллюстрации сказанного на рис. 8 приводится снимок экваториальной плоскости решетки гипса ($CaSO_4 . 2H_2O$).

Аксиальная установка кристалла, приведенная на рис. 6, соответствует схеме прибора Бюргера, построенного в 1942 году.

Эта конструкция позволяет регистрировать без слепых пятен плоскости даже очень высокого порядка.

2. *Установка осей камеры и вертикального круга*

Своими выгодными свойствами рассмотренный выше прибор обязан применению нового метода крепления осей вертикального круга и камеры.

Метод крепления двух упомянутых выше осей показан наглядно на рис. 9. Литая деталь U-образной формы, обозначенная цифрой *1*, прикреплена к вертикальной стенке четырехугольной коробки. Эта деталь несет вертикальную ось *2*, на которой закреплена шестерня *3*. При помощи этой шестерни вертикальный круг одной части и пленочная камера другой части

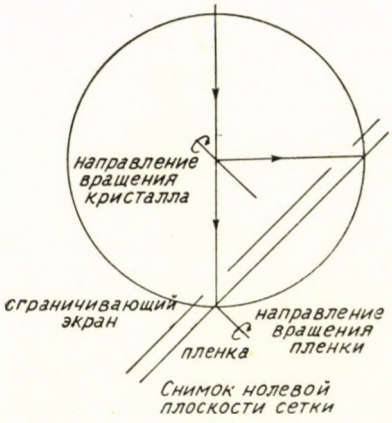


Рис. 7. Схема прибора, при которой с нолевой плоскости сетки можно получить наиболее крупные снимки ($\xi = 1{,}4$)

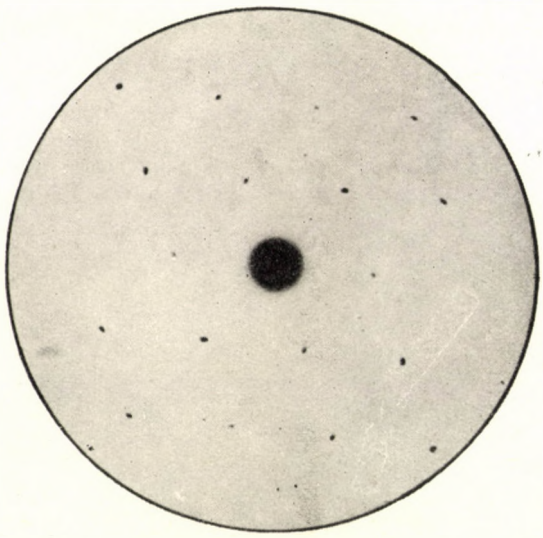


Рис. 8. Снимок с нолевой плоскости сетки, сделанный прямой проекцией. Исследованное вещество — гипс ($CaSO_4 . 2H_2O$)

выдерживаются параллельными, а угол их отклонения от продольной оси четырехугольной коробки может изменяться в пределах приблизительно 90°. Внутри трубчатой оси *2* имеется валик, который приводится во вращение косозубой шестерней *4*. Шестерня *4*, в свою очередь, приводится во вращение от показанного на общем виде прибора длинного зубчатого вала посредством шестерни *5*. Валик, вращаемый шестерней *4*, приводит во вращение систему шестерен, обозначенную цифрой *6*, которая, в свою очередь, вращает большую шестерню *7*, на которой укреплен вертикальный круг. Шестерни как кронштейна камеры, так и кронштейна кристалла располагаются тождественно, и обе системы приводятся во вращение одним и тем же длинным зубчатым валом.

Использование длинного зубчатого вала выгодно тем, что при изменении расстояния между камерой и кристаллом в пределах 5—10 *см* не нарушается сцепление между шестернями и валом.

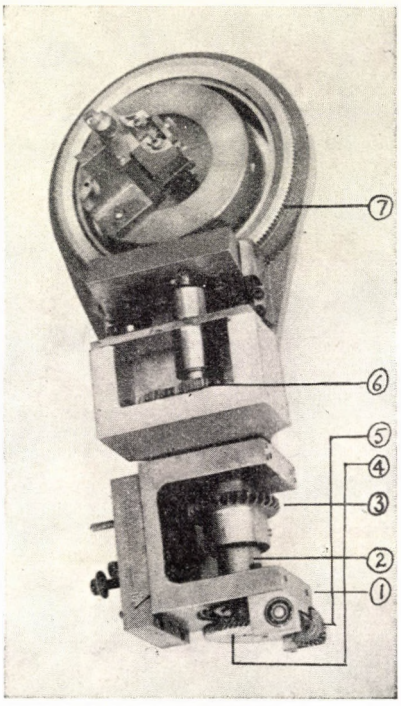


Рис. 9. Шестеренчатая передача и укрепление вертикального круга

Изучение плоскостей сеток высших порядков, соответствующих высоким значениям ζ

На рис. 10 ясно видна причина возможности спроектирования плоскостей сеток высших порядков без образования слепых пятен. Плоскость пленки (как это видно из снимка) устанавливается с таким расчетом, чтобы ось четырехугольной коробки была параллельна рефлектированному пучку, следующему к центру пленки. Эта установка называется положением равного угла наклонения. Если расстояние между осями, несущими вертикальный круг и камеру, постоянно, радиус рефлектирующей сферы не изменяется. На кронштейне камеры имеются одни салазки, при помощи которых это расстояние можно изменять в пределах 5—10 *см*. Если выбрать расстояние между вертикальным кругом и камерой равным 10 *см*, тогда

на снимках экваториального участка и равного угла наклонения расстояния от центра пленки непосредственно дают расстояние соответствующей обратной решетки. Таким образом, отражению, расположенному на расстоянии 5 *см* от центра снимка, на обратной решетке соответствует значение величины $\xi = 0{,}5$. Кроме того, ряды точек, видные на снимке, образуют углы, которые точно равны углам между соответствующими рядами точек обратной решетки.



Рис. 10. Схема прибора, используемая для плоскостей сетки высших порядков, соответствующих большим значениям величины ζ

Исследование промежуточных плоскостей сетки

При помощи описанного выше прибора промежуточные плоскости сетки могут быть исследованы двояким образом — в зависимости от способа укрепления кристалла. На рис. 11 приведены две схемы, из которых левая соответствует укреплению кристалла в радиальном направлении, а правая — в осевом направлении. Вертикальная ось камеры в одном случае расположена слева внутри рефлектирующей сферы, а в другом случае — справа вне рефлектирующей сферы; небольшая коррекция, требующаяся вследствие этого, может быть достигнута простым перемещением салазок, на которых укреплена камера. Заштрихованные участки на рис. 11 показывают те области, куда не может попасть нормаль вертикального круга. Это ограничение имеет чисто геометрическую причину: как известно, вертикальный круг не должен пересекать коллиматор. На рис. 11 одновременно видно и то, что при применении данного метода также возникает небольшое слепое пятно, однако это слепое пятно в редких случаях означает

серьезные потери. Области, которые можно регистрировать при различных способах укрепления, приведены в табл. 1. Из таблицы видно, что в экваториальной плоскости (т. е. нолевой плоскости) решетки значение величины ξ может доходить до 1,4, что в большинстве случаев является достаточным, и в особенности при использовании лучей Мо $K\alpha$. Однако, в сравнении с методом Вейсенберга это весьма недостаточно и, таким образом, для точного определения постоянных решетки эта система не подходит. Зато при исследовании плоскостей сетки высших порядков, т. е. вплоть до $\zeta = 1{,}6$ прибор дает лучшие результаты, чем почти любой другой прибор. Допускаемое

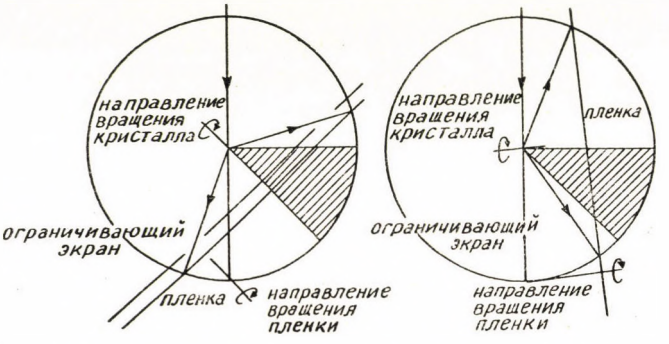


Рис. 11. Схема прибора, предназначенная для исследования промежуточных плоскостей сетки. Схема слева показывает радиальное размещение кристалла, а справа — осевое размещение

исследованию наибольшее значение величины ζ в несколько раз выше, чем у прецессионного прибора системы Бюргера и примерно в два раза выше, чем у лучших гониометров Вейсенберга. Однако, недостатком по сравнению с гониометром Вейсенберга является слепое пятно, которое достигает максимальных размеров при $\zeta = 0{,}5$.

Таблица 1

Наибольшие возможные значения величин ξ и ζ прибора

ζ	Укрепление кристалла		закрытая ξ область
	в радиальном направлении	в осевом направлении	
0,0	x		0,0 – 1,4
0,0	x		0,0 – 1,4
0,6	x		0,3 – 1,3
0,6		x	0,1 – 1,9
1,6		x	0,0 – 1,0

Некоторые дополнительные замечания по описанному прибору

На большинстве снимков прибора в интересах более наглядного показа камеры удален кольцеобразный экран, служащий для выбора плоскости сетки. Экран укреплен на диске диаметром около 20 *см*, который, в свою очередь, укреплен на общей станине с камерой и расположен на расстоянии ок. 5 *мм* от плоскости пленки. Ввиду невозможности изменения расстояния между экраном и пленкой прибор снабжен 12-ю сменными экранами. Кольцеобразный зазор на каждом из экранов выбран с таким расчетом, чтобы при помощи этих зазоров можно было проектировать определенную область углов наклонения. С использованием этих колец можно производить запись углов падения до 30°. (Угол измеряется не по отношению к нормали плоскости пленки, а по отношению к плоскости самой пленки.)

Прибор снабжен двумя камерами — одна диаметром 20 *см*, а другая – 10 *см*. Камера диаметром 20 *см* служит для исследования экваториальной плоскости (т. е. нолевой плоскости решетки) и промежуточных плоскостей, а камера диаметром 10 *см* — для плоскостей решетки, соответствующих высоким значениям величины ζ.

Прибор снабжен также реверсивным механизмом, при помощи которого кристалл можно покачивать в пределах 10°. Это выгодно для точной установки кристалла перед производством снимков.

ЛИТЕРАТУРА

Buerger, M. J.: «X-Ray Crystallography» New York, John Wiley and Sons Inc. 1942.
Buerger, M J.: «The Photography of the reciprocal lattice» ASXRED Monograph No. 1, 1944.
de *Jong, W. F.* és *Bouman, J.:* Zeit Krist (1938) **98,** 456. Das Photographieren von reziproken Kristall-Netzen mittels Röntgenstrahlen.
de *Jon, W. F., Bouman, J.* és de *Lange, J. J.:* Physica (1938) **5,** 188.
X-ray photography of zero-order reciprocal net planes of a crystal.
Torroja, J. M., Pajares, E. sé *Amoros, J. L.:* Journ. Sci. Instru. (Lond.) (1951) **28,** 44.
A single crystal X-ray camera for direct recording of the reciprocal lattice.

Резюме

В статье рассматривается такой ретиграф, который имеет относительно более сложную конструкцию, значительно облегчающую производство оценки снимков. Это обстоятельство особо важно для промышленности. Промышленность нуждается в таких приборах, которые позволяют производить оценку данных возможно проще. Другой существенный принцип заключается в том, чтобы была сведена до минимума возможность возникновения неполадок. Поэтому прибор сконструирован с использованием только одного электромотора. В отдельных образцах ретиграфов используется два синхронных мотора; в случае же описанного выше прибора совместная работа двух осей обеспечивается механическим путем; таким образом, кристалл и камера во время съемок не могут сместиться по отношению друг к другу.

A RETIGRAPH (DIRECT PROJECTION X-RAY GONIOMETER)

Prof. DR. W. A. WOOSTER (Cambridge)

SUMMARY

The paper describes a retigraph which at the cost of additional complications considerably simplifies the interpretation of radiographs. In industry it is especially important to have apparatus which gives results which require as little interpretation as possible. It is also important that the apparatus should have as few possibilities of breakdown as possible. For this reason, among others, the design has been based on the use of one electric motor only. Two motors synchronised by the electric supply are used in some other retigraphs, but the arrangement used here is purely mechanical and no relative movement of the crystal and the camera is possible during the exposure.

(Paper read before the Congress for Measurement Technics organized by the Hungarian Academy of Sc., on October 4, 1954.)

UN RETIGRAPHE (GONIOMÈTRE RADIOGRAPHIQUE POUR PROJECTION DIRECTE)

Prof. Deur W. A. WOOSTER (Cambridge)

RESUME

L'étude décrit un radiographe, lequel au prix de complications additionnelles simplifie beaucoup l'interprétation des radiographies. L'industrie a surtout besoin d'un appareil donnant des résultats ayant besoin d'un minimum d'interprétation. L'appareil doit aussi être soumis à peu ou point de pannes. Pour cette raison, entre autres, la commande à un seul moteur électrique a été choisie. Deux moteurs synchronisés au moyen du réseau électrique sont en usage dans quelques autres rétigraphes, mais l'arrangement de la synchronisation des deux axes est ici purement mécanique, et pas de mouvement relatif du crystal et de la camera est possible pendant la pose.

(Conférence faite au Congrès de la Technique du Mesurage organisé par l'Académie des Sc., de Hongrie le 4 octobre 1954.)

DER RETIGRAPH (EIN RÖNTGENGONIOMETER MIT DIREKTABBILDUNG)

Prof. DR. W. A. WOOSTER (Cambridge)

ZUSAMMENFASSUNG

Im vorliegenden Aufsatz wird ein Retigraph beschrieben, bei dem trotz der verhältnismässig komplizierten Konstruktion des Gerätes eine wesentlich vereinfachte Auswertung der Aufnahmen möglich ist. Eine weitere wesentliche Anforderung, die an das Gerät gestellt wird, ist die Möglichkeit von Betriebsstörungen auf ein Minimum zu reduzieren. Bei Berücksichtigung dieser Anforderung wurde das Gerät mit einem Motor konstruiert. Bei einzelnen Retigraphtypen gelangen Synchronmotore zur Anwendung ; bei dem beschriebenen Gerät wurde das Gleichlaufen der beiden Wellen auf mechanischem Weg gesichert, wodurch eine gegenseitige Verrückung von Kristall und Kamera ausgeschlossen wird.

(Diese Arbeit wurde am 4. Oktober 1954 auf dem Kongress für Messtechnik in Budapest, als Vortrag gehalten.)

АВТОМАТИЧЕСКИЙ САМОПИШУЩИЙ МИКРОДЕНСИТОМЕТР*

Проф. В. А. ВУСТЕР (Кембридж)

История микроденситометров насчитывает около сорока лет. Сорок лет тому назад впервые начали применять фотоэлементы для измерения света небольшой силы. С тех пор создано ряд различных конструкций фотометров, используемых для определения почернения фотографических эмуль-

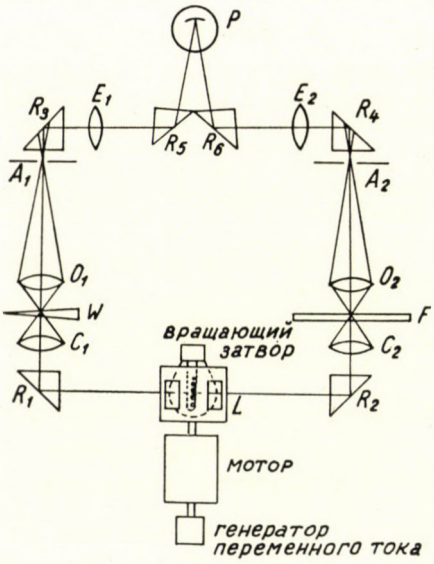


Рис. 1

сий вследствие их облучения светом, рентгеновскими и прочими лучами. Рассмотренный ниже фотометр является дальнейшим усовершенствованием прибора Добсона (1923 г.). Оптическая схема работы прибора приведена на рис. 1. Из рисунка видно, что прибор имеет лишь одну лампочку накаливания (L) и один фотоэлемент (P). Свет попадает на фотоэлемент по двум

*Доклад от 4-го октября 1954 г. на Конгрессе по технике измерений, созванной Академией Наук Венгрии.

различным путям. С одной стороны, свет проходит через калиброванный фотографический клин W, а с другой стороны, — через небольшой участок F поверхности исследуемой пленки. Фотографический клин изготовляется предварительным засвечиванием пленки, тождественной по своему качеству с исследуемой пленкой, причем время экспозиции равномерно возрастает вдоль клина. В нижней части рисунка виден затвор, с помощью которого можно направить пучок света в ту или другую сторону. В первом варианте прибора Добсона затвор приводился в действие от руки, электрическая же часть прибора включала и электрометр Линденмана, при помощи которого измерялся статический потенциал одного из электродов фотоэлемента. Клин передвигался от руки, пока перекидка затвора не перестала отзываться на потенциале электрода фотоэлемента. У рассматриваемого в

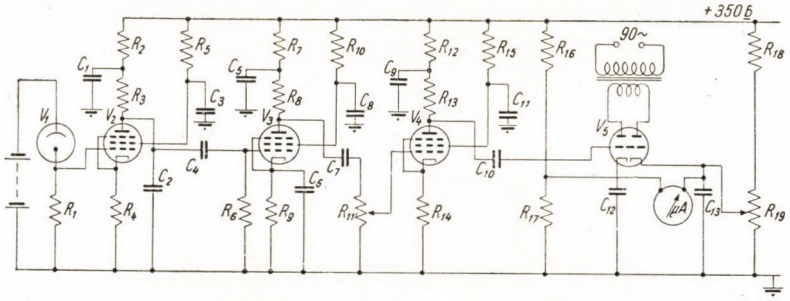


Рис. 2

данной статье прибора цилиндрический затвор вращается непрерывно, а фотоэлемент V_1 соединен с усилителем переменного тока (рис. 2). Если интенсивность обоих пучков света не одинакова, на сетку первой лампы усилителя (V_2) попадает напряжение переменного тока. Это напряжение усиливается настолько, что разность интенсивности обоих пучков в 1% дает на выходе усилителя напряжение в несколько вольт. Теперь перейдем к рассмотрению конструктивной особенности прибора, которая позволяет преодолеть целый ряд затруднений. Часто выражалось мнение, что лампочка накаливания должна питаться от аккумулятора во избежание колебаний силы света, излучаемой лампочкой накаливания, — соответственно частоте сетевого напряжения. Однако, аккумуляторы неудобны в обращении и требуют постоянного ухода. У рассматриваемого прибора лампочка накаливания питается от переменного тока частотой 50 *гц*, а скорость вращения затвора выбрана с таким расчетом, чтобы на выход усилителя поступало напряжение переменного тока частотой ок. 90 *гц*. Благодаря этому, колебания интенсивности света частотой 50 *гц* не будут влиять на выходное напряжение частотой 90 *гц*. На выходе усилителя переменный ток выпрямляется при помощи приведенного на рис. 2 двойного триода V_5. Аноды

двойного триода питаются от небольшого генератора переменного тока, работающего на частоте 90 *гц* и сидящего на общей оси с затвором, показанным на рис. 1. Фазу этого анодного напряжения можно привести в совпадение с фазой выходного напряжения усилителя, т. е. так, чтобы постоянный ток, протекающий через микроамперметр (рис. 2), имел направление слева направо, когда интенсивность левого пучка света выше интенсивности правого пучка света и наоборот. Это дает возможность питать лампочку накаливания от сетевого напряжения частотой 50 *гц*, устраняя влияние фона усилителя от напряжения сети на постоянный ток, протекающий через микроамперметр.

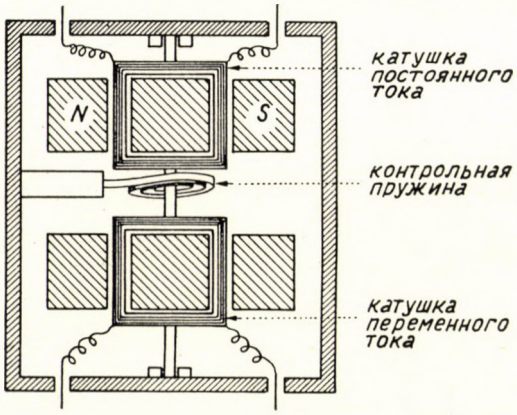


Рис. 3

Сервомеханизмы

Следующая проблема заключается в усилении постоянного тока в несколько микроампер до величины, достаточной для приведения в действие мотора. Эта проблема нашла также новое решение — при помощи т. н. уравнивающего устройства. Схема этого устройства приведена на рис. 3. По существу уравнивающее устройство состоит из двух коаксиально смонтированных микроамперметров. Катушка одного из них вращается в силовом поле постоянного магнита, представляя собой обычный микроамперметр. Вторая катушка механически соединена с первой, так что они вращаются совместно; однако, в электрическом отношении обе катушки полностью изолированы друг от друга. Вторая катушка вращается между полюсными башмаками железного сердечника в магнитном поле, возбуждаемом переменным током сетевого напряжения (частотой 50 *гц*), подаваемым на обмотку железного сердечника. Когда в первой катушке постоянный ток равен нолю, плоскость второй катушки параллельна силовым

линиям. Если первая катушка поворачивается по часовой стрелке, выходное напряжение второй катушки растет пропорционально углу поворота катушки и имеет некоторую фазу, которую можно принять равной нолю. Если же первая катушка повернется против часовой стрелки, фаза выходного напряжения второй катушки будет равна 180°. Если через первую катушку протекает ток силой в $5 \cdot 10^{-6} a$, выходное напряжение на второй катушке можно довести до 0,01 *в*. Это напряжение после усиления подается на двухфазный т. н. уравнивающий мотор. Этот мотор вращается по часовой стрелке или против нее, в зависимости от фазы выходного напряжения второй катушки (0° и 180°). Мотор вращается приблизительно с макси-

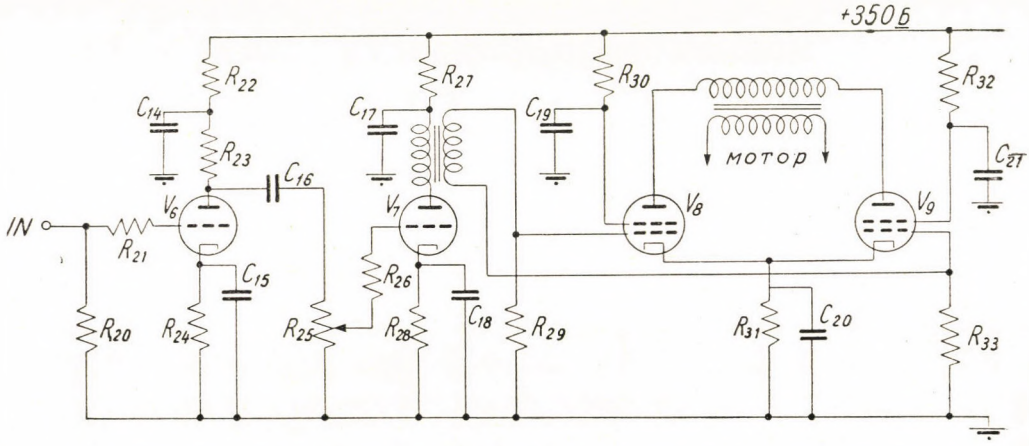


Рис. 4

мальной скоростью при напряжении 10 *в* и силе тока 0,2 *а*. Такого режима легко достигнуть при усилении выходного напряжения второй катушки уравнивающего устройства. Уравнивающий мотор приводит в движение клин — в таком направлении, чтобы выравнивалась интенсивность двух пучков света. Схема усилителя, обеспечивающего работу мотора и работающего на частоте 50 *гц*, приведена на рис. 4. Как видно из рисунка, здесь применена обычная простая схема без каких-либо специальных связей.

Контроль сервомеханизмов

Рассмотренное выше устройство склонно к самовозбуждению, которое заключается в том, что мотор переводит клин за положение, соответствующее состоянию равновесия, вследствие чего уравнивающий мотор изменяет направление своего вращения, а клин переходит через положение равновесия в противоположном направлении. Это колебание затем непре-

рывно повторяется, если не позаботиться об устранении этого эффекта применением соответствующего демпфирования и обратной связи. Демпфирование достигается благодаря тому, что уравнивающим мотором приводится в движение вентилятор, число оборотов которого в несколько раз превышает число оборотов мотора. Обратная связь создается при помощи приведенной на рис. 5 схемы. Когда на уравнивающий мотор поступает некоторое напряжение, от цепи обратной связи поступает на вход уравнивающего устройства напряжение противоположного знака. Тем самым контур обратной связи противодействует быстрым изменениям напряжения на

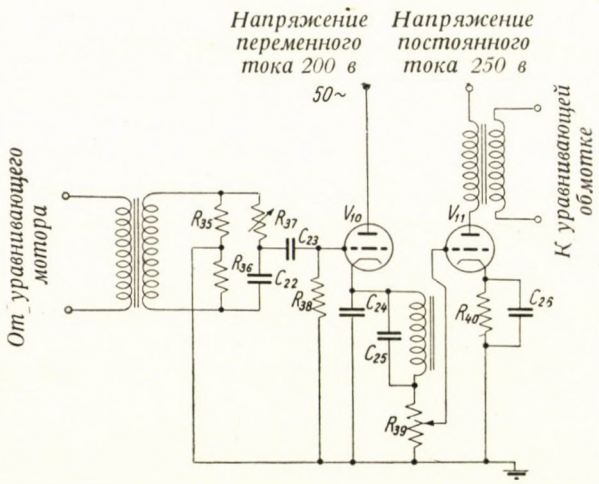


Рис. 5

входе уравнивающего устройства, не оказывая значительного влияния на изменения напряжения, наступающие в течение более продолжительных отрезков времени. Обратная связь повышает частоту колебаний клина, но в то же время снижает амплитуду колебаний. Практически амплитуда колебаний клина равна ок. 0,5 *мм*.

Автоматическое регистрирование движения клина

В связи с широким распространением автоматических самописцев для регистрации данных микроденситометра используется обычный самописец системы Гониуэлл—Браун. Перо этого прибора движется вверх и вниз по бумажной ленте шириною 28 *см*. Оно приводится в действие особым мотором, притом так, чтобы поперечные отклонения регистрирующего пера на ленте были пропорциональны напряжению, подаваемому на самописец. Максимальное отклонение имеет место при напряжении ок. 10 *мв;* для

этого максимального пути перу требуется ок. 2 *сек.* Напряжение, необходимое для приведения в действие самописца, подается от потенциометра, положение движка которого изменяется вращением последнего. Движок потенциометра вращается той же шестерней, которая приводит в движение также клин; вследствие этого отклонения регистрирующего пера на бумаге пропорциональны сдвигу клина. Скорость движения бумажной ленты может быть изменена в пределах 1,2—5,0 *см/мин.*

Укрепление светочувствительной пленки на столике микроденситометра

Используемый на практике небольшой размер пленки соответствует размеру пленки камеры Дебая—Шеррера диаметром 19 *см.* Пленка помещается в камеру двумя кусками — каждый длиной по 27 *см.* Столик, на котором размещается пленка, может перемещаться по перпендикулярным друг к другу направляющим. В направлении x столик допускает сдвижения на 28 *см,* а в направлении y — на 12,5 *см.* Снимки, полученные осцилляционным методом, и снимки по Вейсенбергу обычно достаточно малы для того, чтобы можно было изучить их при одной единственной установке. На снимках по методу Дебая—Шеррера почернение изменяется вдоль колец преимущественных направлений. Это почернение можно изучать путем укрепления пленки на столике и вращением столика с пленкой — в результате этого под объектив микроскопа поочередно попадают различные части кольца. Столик, на котором укрепляется пленка, может приводиться в движение с равномерной скоростью в направлении x — справа налево и наоборот. Синхронный мотор снабжен переключателем скорости, при помощи которого можно установить следующие средние скорости движения столика: 1, 2, 4, 8, 16 и 32 *мм/мин.* Скорость устанавливается по желанию — передвижением простого рычага. Столик передвигается в направлении y от руки — вращением головки винта. Смещения столика в направлениях x и y можно отсчитать по снабженным нониусами миллиметровым шкалам с точностью до 0,05 *мм.* Миллиметровые шкалы проектируются при помощи оптической системы на стеклянный экран.

Точность измерения интенсивности рентгеновских лучей

Для оценки степени почернения измеряемого пятна на рассмотренном выше микроденситометре обычно применяется три различных клина со следующей градацией почернения: 0—0,75; 0—1,5; 0—3,0. Клинья

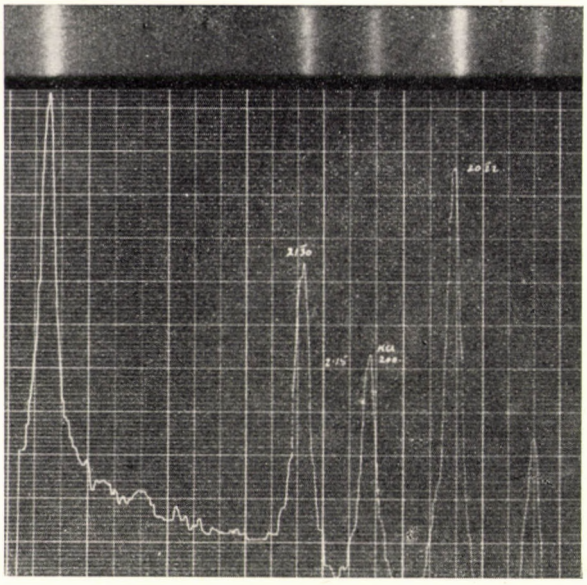


Рис. 6

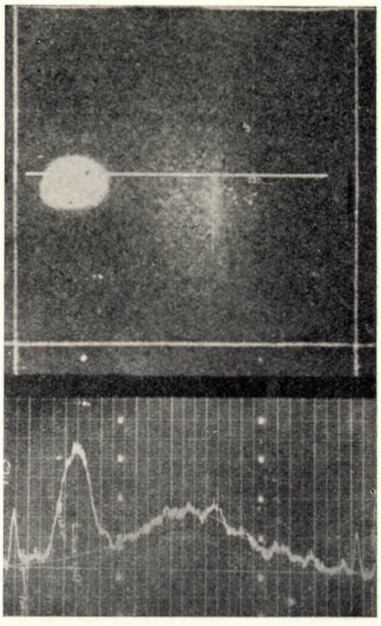


Рис. 7

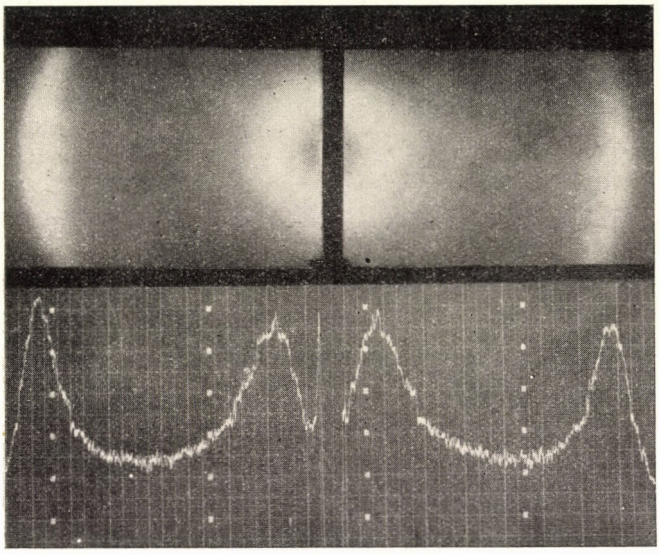


Рис. 8

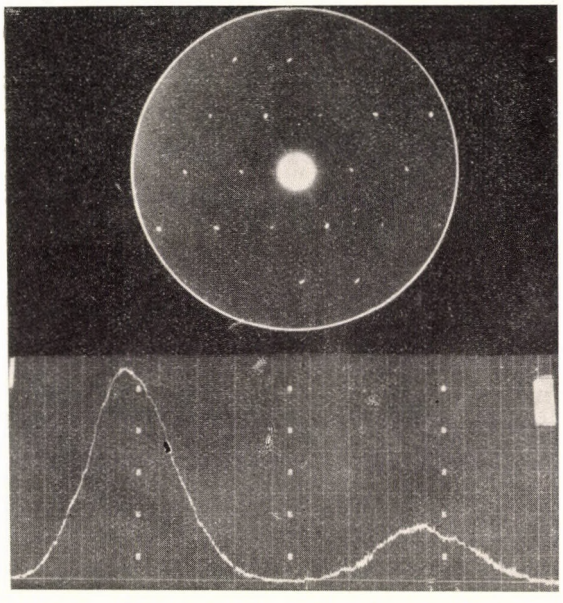


Рис. 9

изготовляются таким образом, что микроденситометр располагается на расстоянии 2—3 *м* от рентгеновской трубки (или же — в случае исследования оптических спектров — от источника света), на столик кладется полоска пленки, затем столик с равномерной скоростью выдвигается из-за поглощающего экрана. Таким образом, время экспозиции в любой точке пленки пропорционально расстоянию соответствующей точки от края абсорбирующего экрана. Выбором скорости движения столика можно получить клинья с заданной градацией. При помощи проекционного микроскопа

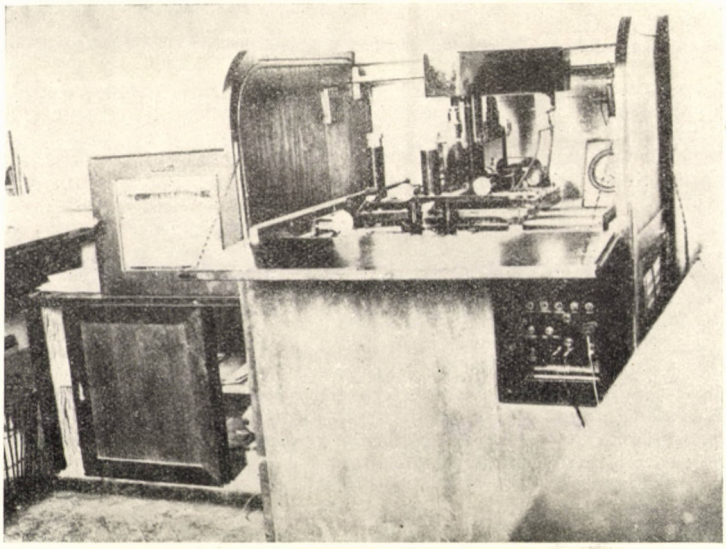


Рис. 10

можно определить положение клина с точностью до 0,05 *мм*; максимальное смещение клина равно 5 *см*. Максимальная точность отсчета при смещении клина от руки равна ок. 2%. Точность измерения ограничивается крупностью зерен используемых рентгеновских пленок.

Области применения прибора

В дальнейшем для демонстрации сказанного выше приводится несколько рентгеновских снимков и изготовленных по этим снимкам микроденситограмм. На рис. 6 приведен снимок по методу Дебая—Шеррера и соответствующая денситограмма. На рис. 7 демонстрируется изменение зачерненности размытого пятна вдоль прямой, помеченной на рисунке. На рис. 8 дается результат оценки микроденситометром снимка с образца каменного

угля. По форме кривой почернения с помощью гармонического анализа можно определить распределение атомов. На рис. 9 дается рентгеновский снимок отражений типа Okl в гипсе, снятый при помощи ретиграфа. Под рентгеновским снимком приводится результат оценки двух пятен при помощи микроденситометра. Наконец, на рис. 10 дается общий вид прибора.

ЛИТЕРАТУРА

G. M. B. Dobson : Proc. Roy. Soc. (Lond.) A. (1923) **104.** 248.

Резюме

Рассматривается усовершенствованный автором микроденситометр, пригодный для автоматической оценки степени почернения рентгеновских снимков. Прибор облегчает и ускоряет процесс производства оценки.

Прибор более чувствителен и точен, чем известные до сих пор аналогичные приборы. В производственных условиях прибор имеет ряд положительных сторон.

AN AUTOMATIC RECORDING MICRODENSITOMETER

Prof. DR. W. A. WOOSTER (Cambridge)

SUMMARY

The paper describes a microdensitometer further developed by the author, suitable for the interpretation of darkening of radiographs.

The apparatus facilitates and speeds up the work of interpretation ; it is more sensitive and more precise than hitherto known instruments and is of great advantage to industrial practice.

MICRODENSITOMÈTRE À ENREGISTREMENT AUTOMATIQUE

Prof. DR. W. A. WOOSTER (Cambridge)

RÉSUMÉ

L'étude décrit un microdensitomètre perfectionné par l'auteur, lequel rend possible l'interprétation de l'obscurcissement des radiographies.

L'appareil facilite et accélère le travail d'interprétation : il est plus sensitif et plus précis que les instruments jusqu'ici connus et offre bien d'avantages aux travaux industriels.

EIN AUTOMATISCH REGISTRIERENDER MIKRODENSITOMETER

Prof. DR. W. A. WOOSTER (Cambridge)

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit wird ein vom Verfasser weiterentwickelter Mikrodensitometer beschrieben, mit dessen Hilfe die Schwärzung der Röntgenaufnahmen automatisch ausgewertet werden kann. Der Apparat erleichtert und verkürzt die Auswertungsarbeit, ist ausserdem empfindlicher und genauer als die bisher bekannten ähnlichen Apparate und weist auch im industriellen Gebrauch zahlreiche Vorzüge auf.

(Diese Arbeit wurde am 4. Oktober 1954 auf dem Kongress für Messtechnik in Budapest als Vortrag gehalten.)

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1955. III. 4. — Terjedelem: 16 (A/5) ív, 55 ábra

35855/55 Akadémiai Nyomda, V., Gerlóczy u. 2. — Felelős vezető: ifj. Puskás Ferenc

Les Acta Technica paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction et écrits à la machine à l'adresse suivante :

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest, VI., Sztálin út 21. Compte-courant No.: 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

The Acta Technica publish papers on technical subjects in Russian, French, English and German.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up one volume.

Manuscripts should be typed and addressed to :

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica, is 110 forints a volume. Orders may be placed with «Kultúra» Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI., Sztálin út 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in russischer, französischer, englischer und deutscher Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden :

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen «Kultúra» (Budapest, VI., Sztálin út 21. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

INDEX

Monostori, A.: Theoretic Examination of the Working of Combing Segments used in Heilmann Combers — *A. Моноштори:* Теоретическое исследование работы цилиндрических гребней на гребнечесальных машинах системы Ге льмана — Étude théorique du peigne rotatoire des peigneuses du système Heilmann — Theoretische Untersuchung der Arbeit des Rundkammes bei Kämmaschinen System Heilmann 3

Csáki, F.: Influence of Series Capacitors on the Operation of Synchronous Machines — *Ф. Чаки:* Влияние последовательно соединенного конденсатора на режим работы синхронной машины — Influence des condensateurs série sur le fonctionnement des machines synchrones — Der Einfluss von Reihenkondensatoren auf den Betrieb von Synchronmaschinen 49

Oplatka, G. et *Tegze, M.:* La résistance hydrodynamique d'une colonne de matière déformable — *Д. Оплатка* и *М. Тегзе:* Гидродинамическое сопротивление колонн, наполненных деформируемым материалом. — Hydrodynamic Resistance of Columns Filled with Deformable Substances. — Hydronamischer Widerstand von Säulen, die mit deformierbarem Material gefüllt sind. 85

Heller, Gy,: Sur les caractéristiques le freinage des véhicules de chemin de fer — *Дь. Хеллер:* О показателях торможения железнодорожных подвижных средств — Braking Characteristics of Railway Vehicles — Über die Bremskennzahlen von Eisenbahnfahrzeugen 121

Almásy, A.: Über die Sulfatverminderung der Grundwasser — *А. Алмаши:* К снижению содержания сульфатов в грунтовых водах — Reduction of Sulphate Content of Ground Water — Sur la diminution de la teneur en sulphate des nappes d'eau souterraines 139

Domony, A. and *Vassel, K. R.:* The Influence of Some Alloying Constituents on the Structure of Cast Aluminium — *А. Домонь* и *К. Р. Васель:* Влияние отдельных легирующих элементов на структуру литого алюминия — L'effet de quelques éléments constitutifs sur la structure de l'aluminium fondu — Die Wirkung einiger Legierungsbestandteile auf die Gussstruktur von Aluminium 157

В. А. Вустер: Ретиграф — рентгеновский гониометр, обеспечивающий прямую проекцию — *Wooster, W. A.:* A Retigraph (Direct Projection X-ray Goniometer) — Un rétigraphe (Goniomètre radiographique pour projection directe) — Der Retigraph (Ein Röntgengoniometer mit Direktabbildung) 165

В. А. Вустер: Автоматический самопишущий микроденситометр — *Wooster, W. A.:* An Automatic Recording Microdensitometer — Microdensitomètre à enregistrement automatique — Ein automatisch registrierender Mikrodensitometer 177

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT
A. GELEJI

TOMUS XII FASCICULI 3—4

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1955

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY U. 21

Az Acta Technica orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet. Évenként 2—4 kötet jelenik meg.

A közlésre szánt kéziratok, géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az «Akadémiai Kiadó»-nál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla: 04-878-111-46). a külföld számára pedig a «Kultúra» Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VI., Sztálin út 21. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, французском, английском и немецком языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи (в напечатанном на машинке виде) следует направлять по адресу:

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает Предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest, VI., Sztálin út 21. Текущий счет № 43-790-057-181), или его заграничные представительства и уполномоченные.

CALCULATION OF D.C. MOTOR DRIVES FED BY THYRATRONS AND BY GRID-CONTROLLED MERCURY-ARC-RECTIFIERS

J. RÓSA

CENTRAL RESEARCH LABORATORY OF THE ELECTRICAL INDUSTRY, BUDAPEST

[Manuscript received 11th December 1953]

Nomenclature

a(1)	Speed coefficient of rectifier drive
a_0(1)	Speed coefficient of rectifier drive if there is no counter e. m. f. in the circuit
A(1)	Coefficient for the calculation of the anode voltage of the armature circuit rectifier in case of discontinuous conduction
A'(1)	Coefficient for the calculation of the anode voltage of the armature circuit rectifier in case of continuous conduction
b(1)	Overload factor
B(1)	Coefficient for the calculation of the peak- and form-factor of the rectified current in case of discontinuous conduction
B'(1)	Coefficient for the calculation of the peak- and form-factor of the rectified current in case of continuous conduction
$C\left(\frac{v}{mx}\right)$	Coefficient
D(1)	Coefficient for the determination of the ignition and extinction angles in case of discontinuous conduction
D_{crit}(1)	Value of D corresponding to the limit case of discontinuous and of continuous conduction
F(1)	Coefficient for the determination of the anode voltage of the field rectifier
i(amp)	Instantaneous value of the rectified current
$\bar{I}$(amp)	Smooth armature current (at n speed) at which the steady state temperature of the winding is Tmax, that is, the nominal armature current of the motor at n speed
$\bar{I}_{n\ min}$(amp)	Value of $\bar{I}$ at n_{min} speed
$\bar{I}_{n\ nom}$(amp)	Value of $\bar{I}$ at n_{nom} speed
$\bar{I}_{n\ max}$(amp)	Value of $\bar{I}$ at n_{max} speed
$\hat{I}_{av}$(amp)	Average armature current corresponding to given torque at n speed in case of rectifier drive
$\hat{I}$(amp)	R. m. s. value of current of $\hat{I}_{av}$ average value
$\hat{I}_{n\ max\ av}$	Value of $\hat{I}_{av}$ at n_{max} speed
$\hat{I}_{crit}$(amp)	Value of $\hat{I}_{av}$ in the limit case between continuous and discontinuous conduction
$\hat{I}_0$(amp)	See (25)
$\bar{I}_g$(amp)	Nominal field current of motor
$\hat{I}_{g\ av}$(amp)	Average value of rectified field current

$\hat{I}_p$(amp)	Peak value of rectified (armature or field) current
$\hat{I}_{avo}$(amp)	Average value of load current of one tube, or of one anode
k_f(1)	Form-factor of rectified current
k_c(1)	Peak-factor of rectified current
L_a(hy)	Inductance of motor armature circuit
m(1)	Number of phases of the rectifier
n(1/min)	Speed of the d. c. motor
n_{min}(1/min)	Lower limit of the speed control range of the d. c. motor
n_{nom}(1/min)	Nominal speed of the d. c. motor
n_{max}(1/min)	Upper limit of speed control range of the d. c. motor attainable by field control
$\overline{P}(w)$	Power of the d. c. motor fed from supply net at n speed
$\hat{P}(w)$	Power of the d. c. motor fed by a rectifier at n speed
$\hat{P}_{nom}(w)$	Rated power of the d. c. motor fed by a rectifier
R_a(ohms)	Resistance of the motor armature circuit at temperature T_{max}
R_g(ohms)	Resistance of motor field circuit at temperature T_{max}
T(rad)	Conduction period of one tube or one anode
T_{max}(°C)	Maximum permissible temperature of the motor winding
$U_a(v)$	Counter e. m. f. of the d. c. motor at n speed
$U_{a\ min}(v)$	Counter e. m. f. of the d. c. motor at n_{min} speed
$U_{a\ nom}(v)$	Counter e. m. f. of the d. c. motor at n_{nom} speed
$U_{va}(v)$	Anode voltage of the armature circuit rectifier
$U_{vg}(v)$	Anode voltage of the field rectifier
$U_0(v)$	Arc-voltage drop of the rectifier
α_f (°, or rad.)	Ignition angle of the rectifier
α_s (°, or rad.)	Extinction angle of the rectifier
$\alpha_{f\ min}$(°, or rad.)	Lower limit of the ignition angle in case of fixed rectifier phase number and speed coefficient
$\alpha_{f\ crit}-\alpha_{s\ crit}$ (°, or rad)	Pair of critical ignition and extinction angles at which discontinuous conduction passes into continuous one
φ(°)	Phase angle of the armature circuit of the d. c. motor
Φ(mx)	Main flux of the d. c. motor

A d. c. motor for a given duty (determined by the supply voltage, power, speed, torque, degree of intermittence, cooling etc.) — if it is fed from a d. c. net of smooth voltage — may be selected on the basis of catalogues and output tables by simple comparison of data, and the choice of the motor does not present any difficulty.

If the motor is to be fed by thyratron- or by grid-controlled mercury-arc-rectifiers (the two cases are identical from the point of view of calculation) the choice of the suitable type of motor cannot be made by the above mentioned simple comparison of data for the followings reasons :

1. Under the same mechanical load conditions the heating of the motor and the peak voltages will be greater than in the case of a motor of similar

duty fed from a smooth d. c. supply. Armature and field currents, moreover armature and field voltages are namely not constant but pulsating quantities whose frequency depends on the supply frequency and on the number of phases of the rectifier. Consequently their average values determining the motor output are smaller than their r. m. s. values, which on the other hand determine the thermic state (losses) of the motor. At the same time, the peak values are of particular interest from the point of view of the commutator and the rectifier.

2. While in the case of a d. c. supply the voltage is a fixed quantity, in case of rectifier drive the d. c. voltage and other data (phase number, possible filtering etc.) are determined by the designer. Since in case of rectifier drive the value of the d. c. voltage is governed by the transformer voltage ratio, there are no restrictions as regards the nominal voltage of an otherwise suitable motor. In practice, however, the voltage should be chosen within comparatively narrow limits, because low-voltage rectifiers are expensive (for the same output a rectifier of higher current rating has to be used) ; on the other hand, higher voltages are limited by considerations of safety and by the rated inverse voltage of the rectifier.

The above statement of course does not refer to the otherwise economic solution, when the rectifier is directly connected to the a. c. supply without the intermediate of a power transformer.

The calculation starts from the following considerations :

For the service life of the motor it is important that the temperature of the motor (more correctly that of the winding) should not exceed the permissible T_{max} value at any working conditions. On the other hand, full exploitation of the motor demands to load it at any speed up to that T_{max} temperature. Suppose that the load on the motor and the ambient temperature are constant, the T_{max} steady-state temperature can be reached at different speeds, in general, with different armature currents. If the armature current ($\bar{I}$) pertaining to any speed (n) is determined, Fig. 1 is obtained, which is the basis of calculations of a variable speed drive.

By way of explanation it has to be remarked that n_{min} is the minimum speed at which speed control should still be maintained ; n_{nom} is the speed corresponding to the rated armature voltage (U_{nom}) and the nominal field current (I_g), and n_{max} is the maximum speed attainable by field control. If no field weakening is applied for speed control, values of n_{nom} and n_{max} are identical and the current values $\bar{I}_{n\,nom}$ and $\bar{I}_{n\,max}$ are likewise the same.

Values of $\bar{I}$ shown in Fig. 1 are catalogue ratings of the motor, i. e. are referred to smooth d. c. In the course of calculation a motor suitable as regards power and torque on the basis of ratings has to be checked also for thermic and voltage limits. Moreover the necessary rectifier anode voltage (U_v) has to be determined by considering an economic arrangement of the rectifiers.

The calculation is correct if at any speed n the r. m. s. values of the field and armature currents ($\hat{I}$) do not exceed the permissible smooth d. c. values ($\bar{I}$) related to the same speed, while the motor develops the rated torque determined by the armature current of $\hat{I}_{av}$ average value. For proper exploitation of the motor it is also desirable that at least at one speed the value of $\hat{I}$ should agree with $\bar{I}$.

It has to be noted here that — especially in the case of operation with field control — the permissible maximum armature current is limited not by temperature rise but by conditions of commutation. Of course the calculation method exposed in this paper may be extended to this case as well.

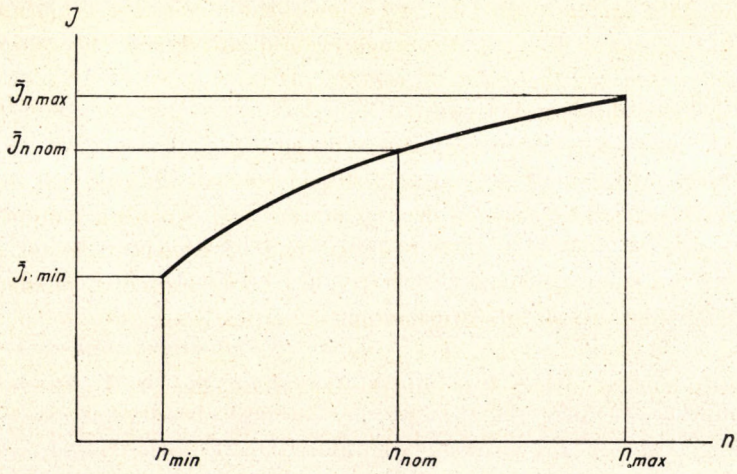


Fig. 1

If the above outlined requirements are satisfied, the r. m. s. value of the rectified field and armature current ($\hat{I}$) is at any speed equal or nearly equal to the nominal current ($\bar{I}$) of the motor. It is therefore evident that the average value of the current ($\hat{I}_{av}$), and the torque proportional to it, is less than the nominal torque corresponding to current intensity $\bar{I}$, i. e. at any speed the motor can develop only a power ($\hat{P}$) lower, than in the case of direct supply from a d. c. net. For this reason the actual power output of the motor ($\hat{P}_{nom}$) will be lower in case of rectifier drive than the catalogued power rating ($\bar{P}_{nom}$).

According to the exposed calculation method an apparently suitable motor of higher power than the actual demand is checked for heating at any presumed critical speed and also as regards higher duties of commutation and voltage.

In effect the motor is thus selected by trial and error, and only control calculations will show whether the choice is correct. To simplify the originally complicated calculation a graphic method has been elaborated.

Data needed for calculation

a) Test data of the machine to be used :

$n_{\min}$ n_{nom} $n_{\max}$	speeds
$I_{n\,\min}$ $\bar{I}_{n\,\text{nom}}$ $\bar{I}_{n\,\max}$	maximum (smooth) armature currents corresponding to temperature $T_{\max}$
$U_{a\,\min}$ $U_{a\,\text{nom}}$	Counter e. m. f.-s corresponding to nominal field current
$\bar{P}_{n\,\min}$ $\bar{P}_{n\,\text{nom}}$ $\bar{P}_{n\,\max}$	Nominal power outputs of the motor
R_a, L_a	Resistance and inductivity of the armature circuit at $T_{\max}$
$\bar{I}_g$	Nominal field current of the motor
R_g, L_g	Resistance and inductivity of the field circuit at $T_{\max}$

b) Power demand of the drive :

$\hat{P}_{n\,\min}$ $\hat{P}_{n\,\text{nom}}$ $\hat{P}_{n\,\max}$

If the data under a) and b) are known, the necessary armature currents $\hat{I}_{n\,\min\,\text{av}}$, $\hat{I}_{n\,\text{nom}\,\text{av}}$ and $\hat{I}_{n\,\max\,\text{av}}$ (average values) satisfying the power demand may be calculated for the case of rectifier drive.

The designer has to determine :

a) the type of rectifier (number of phases)

b) the overload $b \cdot \bar{I}_{n\,\max}$ at which grid control should still be possible. Overload factor b is determined by estimating the working conditions.

Evidently in case of a motor under load of nearly nominal value and subjected to frequent overloads, a lower overload, hence a smaller b factor is permissible than in case of intermittent operation and unfrequent overloads.

The analysis of this problem is beyond the scope of this paper. It is pointed out only that with the ignition angle of the rectifiers reduced to a minimum the motor has to carry even the permitted overload $b \cdot \hat{I}_{n\,\max\,\text{av}}$ and this requirement has to be considered in the calculation of the rectifier anode voltage.

With the aid of the nomenclature listed at the beginning of the paper the tasks of calculation may be summed up as follows :

1. Determination of U_{vg} to secure I_g.
2. Determination of U_{va} to secure $b \cdot \hat{I}_{n\,\max\,\text{av}}$
3. To check criterion $\hat{I}_{\text{av}} \leqq \bar{I}$ at any speed (this calculation has to be executed in general only at the speed most unfavourable as regards temperature rise).

The method of calculation exposed in the paper starts from results of the literature quoted under References. Deduction and explanation of the mathematical relations published in the literature are omitted, and the relations made use of are listed only to make available these basic formulas for the reader.

The minimum angle of ingnition of an m-phase grid-controlled rectifier (with unretarded firing), if there is no counter e. m. f. in the load circuit ($U_a = 0$)

$$\alpha_{f\,\min} = \frac{m-2}{2\,m} \cdot \pi \,. \tag{1a}$$

If there is counter e. m. f. in the load circuit two cases should be distinguished relating to the speed coefficient a

a) if $a < \sin \frac{m-2}{2m}\pi$, i. e. a is smaller than the sine of the natural commutation angle,

$$\alpha_{f\,\min} = \frac{m-2}{2m} \cdot \pi \tag{1b}$$

b) if $a > \sin \frac{m-2}{2m} \cdot \pi$

$$\alpha_{f\,\min} = \arcsin a\,. \tag{1c}$$

Considering the case of m-phase rectification and denoting the anode voltage with U_{vg}, the ignition angle with α_f and the ohmic component of the circuit impedance with R_g, moreover supposing no counter e. m. f. in the load circuit, the average value of the rectified current becomes

$$\hat{I}_{g\,av} = \frac{\sqrt{2}\,U_{vg} \cdot m}{\pi R_g}\left[\sin\frac{\pi}{m} \cdot \sin\left(\alpha_f + \frac{\pi}{m}\right) - a_0\frac{\pi}{m}\right], \tag{2}$$

where $a_0 = \frac{U_0}{\sqrt{2}\,U_{vg}}$ and U_0 is the arc-voltage drop of the rectifier.

The speed coefficient of a rectifier drive is

$$a = \frac{U_a + U_0}{\sqrt{2}\,U_{va}}, \tag{3}$$

where U_{va} is r. m. s. value of the anode voltage,
U_a the counter e. m. f. and U_0 the arc-voltage drop of the rectifier.

If there is no counter e. m. f. in the circuit ($U_a = 0$), the speed coefficient becomes

$$a = \frac{U_0}{\sqrt{2}\,U_{va}} = a_0\,. \tag{3a}$$

From formula (3) it is evident that the speed coefficient a is a dimensionless quantity related to the counter e. m. f. of the d. c. motor and thus to its speed. If arc-voltage drop U_0 is neglected, there exists a proportional relation ebtween a and the speed. Coefficient a indicates the proportional value of the

sum of the counter e. m. f. introduced into the circuit and of the arc-voltage drop. If there is no counter e. m. f. in the circuit (3a) the speed coefficient a assumes a ficticious character, but may be invariably used in the calculation as the proportion of arc-voltage drop to anode voltage.

Denoting the r. m. s. value of the anode voltage with U_{va}, the angle of ignition with α_f, the speed coefficient of the circuit with a, its power factor with $\cos\varphi$, and its resistance with R, in the case of discontinuous conduction the instantaneous value of the rectified current becomes

$$i(\omega t) = \frac{\sqrt{2}\,U_{va}}{R} \cdot \{\cos\varphi \cdot \sin(\omega t - \varphi) - a + \\ + [a - \cos\varphi \cdot \sin(\alpha_f - \omega t) \cdot e^{-(\omega t - \alpha_f)/tg\varphi}]\}. \tag{4}$$

In the case of rectifier drive the power factor $\cos\varphi$ in this expression is the power factor of the armature circuit including the series smoothing choke, if there is any, ($tg\varphi = \omega L/R$) where ω is the angular frequency of the supply feeding the rectifier transformer ($\omega = 2\pi f$). The reactance ωL of the armature circuit may be measured with an accuracy sufficient for calculation by connecting across the circuit terminals an a. c. voltage of a few volts. The value sought is obtained as the quotient of the voltage on the terminals and of the current flowing in the circuit. Since the motor field appreciably affects this value, the measurement is to be executed at nominal excitation.

If the anode voltage of the m-phase rectifier is U_{va}, its angle of ignition α_f, and the resistance of the d. c. circuit R, in the case of continuous conduction the average value of the rectified current becomes :

$$\hat{I}_{av} = \frac{\sqrt{2} \cdot U_{va} \cdot m}{\pi \cdot R} \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{m} + \alpha_f\right) \cdot \sin\frac{\pi}{m} - a\,\frac{\pi}{m}\right]. \tag{5}$$

The method of calculation is as follows :

1. Anode transformer of the field rectifier

In the course of calculation the r. m. s. value (U_{vg}) of the anode voltage has first to be determined so that the possibility of nominal excitation $\hat{I}_{g\,av} = \bar{I}_g$ shall subsist even at the lowest supply voltage occurring.

The necessary field current $\hat{I}_{g\,av}$ is supplied by the rectifier at ignition angle $\alpha_{f\,min}$ when according to (1a) :

$$\alpha_{f\,min} = \frac{(m-2) \cdot \pi}{2m}. \tag{1a}$$

Conduction is continuous even in the case of single-phase full-wave rectification.

The mean value of the rectified current at ignition angle $\alpha_{f\,\min}$ is according to (2):

$$\hat{I}_{g\,\mathrm{av}} = \frac{\sqrt{2} \cdot U_{\mathrm{vg}} \cdot m}{\pi \cdot R_g} \left[\sin \frac{\pi}{m} \cdot \sin \left(\alpha_{f\,\min} + \frac{\pi}{m} \right) - a_0 \frac{\pi}{m} \right]. \tag{2}$$

The value of $\alpha_{f\,\min}$ substituted, the anode voltage is found to be:

$$U_{vg} = \frac{\pi \cdot \hat{I}_{g\,\mathrm{av}} \cdot R_g}{\sqrt{2} \cdot m \,(\sin \pi/m - a_0 \cdot \pi/m)}. \tag{6}$$

If $\hat{I}_{g\,\mathrm{av}}$ is fixed with sufficient margin of safety, a_0 may be neglected (see (3a))

and

$$U_{vg} = \frac{\pi \cdot \hat{I}_{g\,\mathrm{av}} \cdot R_g}{\sqrt{2}\, m \cdot \sin \pi/m} = \mathrm{F.\ U}_g \tag{7}$$

where $U_g = \hat{I}_{g\,\mathrm{av}} \,.\, R_g$ is the nominal field voltage of the motor. The relation between F and m is shown in the following table:

m	F
2	1,11
3	0,85
6	0,74

Thermic check of the field circuit may be omitted, because the form factor of the field current is even in the case of single-phase full-wave rectification slightly above 1. However, there is no objection to adopting the thermic control method expounded in §. 3 to the field circuit as well.

2. Anode transformer of the armature circuit rectifier

The r. m. s. value (U_{va}) of the anode voltage of the rectifier has first to be determined. U_{va} has to be high enough to make grid control possible even at maximum speed ($U_a = U_{a\,\mathrm{nom}}$) and at the lowest supply voltage up to overload $b \cdot \hat{I}_{n\,\max\,\mathrm{av}}$ formerly defined. It has to be considered, however, that in the choice of U_{va}, too high degree of safety in not justified, because the higher U_{va} the greater the form factor (k_f) of the armature current, i. e. the temperature rise at the same torque becomes greater. An optimal motor chosen implies:

a) maximum exploitation from the thermic point of view,

b) possibility of control up to $b \cdot \hat{I}_{n\,\max\,\mathrm{av}}$.

Mathematical relations necessary for th e calculation of U_{va} are deduced as follows :

According to (3) speed coefficient $a = \dfrac{U_{a\,nom} + U_0}{\sqrt{2}\,U_{va}}$ corresponds to the maximum speed. From this voltage U_{va} is determined which secures in case of ignition angle $\alpha_{f\,min}$ and speed n_{max} the mean value of the current to be $b \cdot \hat{I}_{n\,max\,av}$, where $\hat{I}_{n\,max\,av}$ is the armature current corresponding to the torque to be developed at n_{max}. On the basis of (1c) at an arbitrary speed n, i. e. in case of counter e. m. f. U_a :

$$\alpha_{f\,min} = \text{arc sin a} = \text{arc sin } \frac{U_a + U_0}{\sqrt{2}\,U_{va}} . \tag{1c}$$

The mean value of the current for discontinuous conduction at the above minimum angle of ignition is calculated from the instantaneous value ($i = i\,[\omega t]$) by (3) and (4) :

$$\hat{I}_{n\,max\,av} = \frac{m}{2\pi} \int_{\alpha_{fmin}}^{\alpha_s} \text{i. d } (\omega t) \tag{8}$$

$$\hat{I}_{n\,max\,av} = \frac{(U_a + U_0) \cdot m}{2\pi \cdot R_a} \cdot \left\{ \frac{[\cos(\alpha_{f\,min} - \varphi) - \cos(\alpha_s - \varphi)] \cdot \cos\varphi}{a} + \right. \tag{9}$$

$$\left. + \frac{a\,(\alpha_{f\,min} - \alpha_s) + tg\varphi\,[a - \cos\varphi \cdot \sin(\alpha_{f\,min} - \varphi)] \cdot [1 - e - (\alpha_s - \alpha_{f\,min})/t_g\varphi]}{a} \right\} .$$

$$\text{Finally } \hat{I}_{n\,max\,av} = \frac{(U_a + U_0) \cdot m}{2\pi \cdot R_a} \cdot A \text{ where } A = A(a, \varphi) . \tag{10}$$

Fig. 2 shows values of a as functions of A pertaining to different values of $\cos\varphi$. With the aid of this diagram the calculation of U_{va} is very simple.

Substituting the value of $U_a = U_{a\,nom}$ corresponding to the nominal speed into formula (10) and taking into consideration overload factor b :

$$A = \frac{b \cdot \hat{I}_{n\,max\,av} \cdot R_a \cdot 2\pi}{(U_{a\,nom} + U_0) \cdot m} . \tag{11}$$

The quantities on the right side are known. To value of A computed from (11) a may be obtained from the diagram, and a once known, the anode voltage (phase voltage) of the anode transformer will be $U_{va} = \dfrac{U_{a\,nom} + U_0}{\sqrt{2}\,a}$. *This method of calculation of the anode voltage is suitable only for the case of discontinuous conduction.*

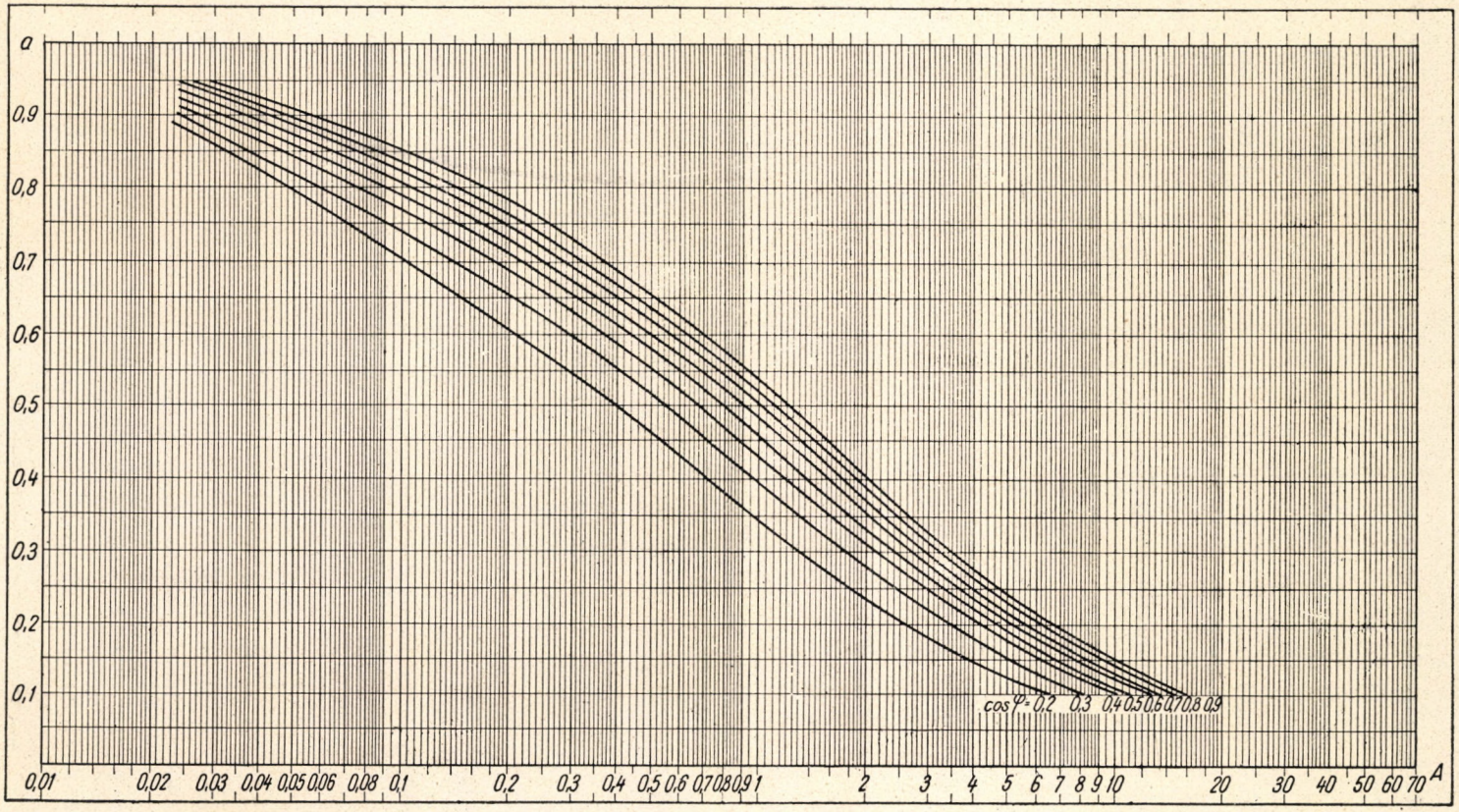

a
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
cos φ = 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9
0,01 0,02 0,03 0,04 0,05 0,06 0,08 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 20 30 40 50 60 70 A

Fig. 2

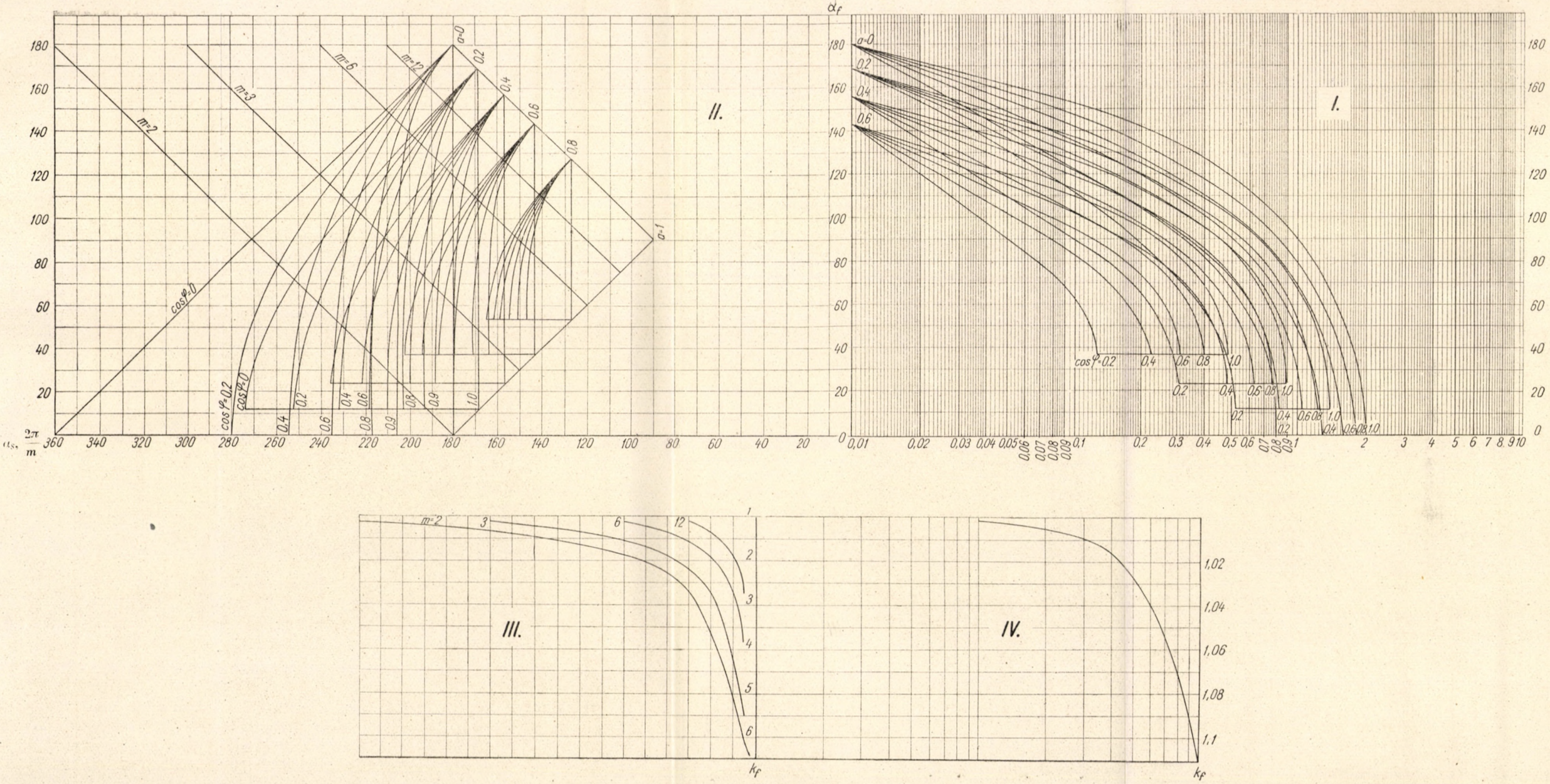


Fig. 3

The following reasoning serves for deciding whether conduction is discontinuous at the values of a, $\cos\varphi$ and $\alpha_{f\,\min}$, dealt with.

The current is discontinuous if the conduction period per tube, or per anode

$$T = \alpha_s - \alpha_f < \frac{2\pi}{m} . \tag{12}$$

If $T = \frac{2\pi}{m}$ (13), conduction becomes continuous. In quarter II of diagram 3 the relation $\alpha_s\,(\alpha_f)$ is graphed with parameters $\cos\varphi$ and a. With a and $\cos\varphi$ known $\alpha_{f\,\min}$ and the corresponding α_s can be directly read off, and on the basis of equation (12) it can be calculated whether the conduction is continuous or discontinuous. This check can be executed graphically too :

In quarter II the point corresponding to the calculated values of $\alpha_{f\,\min}$, a and $\cos\varphi$ must be located. The family of curves is intersected by straight lines marked $m = 2$, 3, 6 and 12 inclined at 45° to the axes of coordinates. If the point located is on the right side of the straight line corresponding to the given phase number m, conduction will be discontinuous and the value obtained for U_{va} is correct. Otherwise the value obtained for U_{va} does not correspond to the actual situation. In this case the determination of U_{va} is executed as follows :

The mean value of the armature current in the case of continuous conduction and ignition angle $\alpha_{f\,\min}$ is according to (5) :

$$\hat{I}_{n\,\max\,av} = \frac{(U_a + U_0)\cdot m}{R_a \cdot \pi} \cdot \frac{\sin(\pi/m + \alpha_{f\,\min})\cdot \sin\pi/m - a\,\pi/m}{a} =$$

$$= A' \cdot \frac{(U_a + U_0).m}{R_a \cdot \pi}\,{}^{1}/_{4}, \tag{14}$$

where $A' = A'$ (a, m). For carrying out the calculation graphically values of a as function of A' at different phase numbers are graphed in diagram 4. U_{va} may now be calculated by the method applied to discontinuous conduction. With the necessary

$$A' = \frac{b \cdot \hat{I}_{n\,\max\,av} \cdot R_a \cdot \pi}{(U_{a\,\mathrm{nom}} + U_0)\cdot m} \tag{15}$$

and the value of a, pertaining to this A' and to phase number m, known, the anode voltage to be chosen is :

$$U_{va} = \frac{U_{a\,\mathrm{nom}} + U_0}{\sqrt{2}\,a} .$$

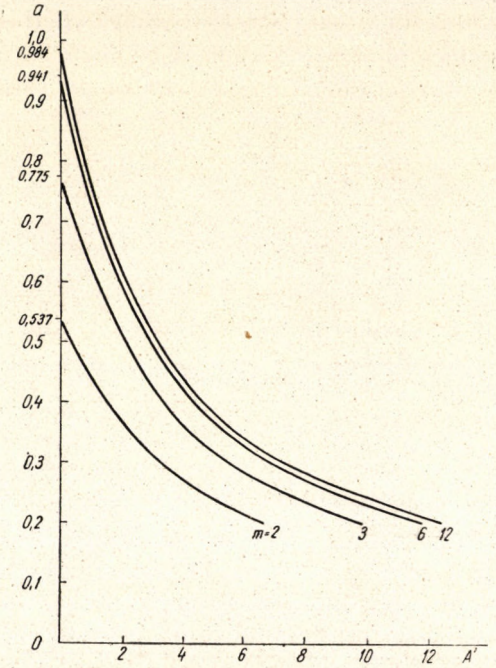


Fig. 4

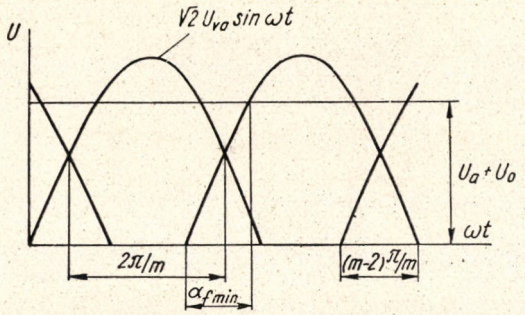


Fig. 5/a

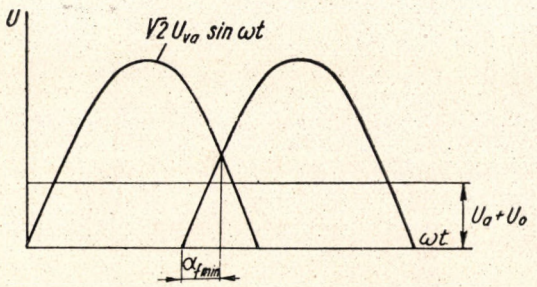


Fig. 5/b

In the case of continuous conduction the following reasoning leads to the determination of $\alpha_{f\,\min}$ at given values of a and m (Fig. 5a and 5b):

In the case of Fig. 5a

$$U_a + U_0 > \sqrt{2}\, U_{va} \cdot \sin \frac{(m-2) \cdot \pi}{2m} \tag{16}$$

that is

$$a > \sin \frac{(m-2) \cdot \pi}{2m} . \tag{17}$$

In this case $\alpha_{f\,\min} = \text{arc}\sin a$.
In the case of Fig. 5b

$$a < \sin \frac{(m-2) \cdot \pi}{2m} \tag{18}$$

and ignition takes place at the instant of natural commutation, that is

$$\alpha_{f\,\min} = \frac{(m-2) \cdot \pi}{2m} . \tag{19}$$

Note that the limit condition of continuous conduction is in case of $\cos \varphi = 0$, according to (14),

$$\sin\left(\frac{\pi}{m} + \alpha_f\right) \cdot \sin \frac{\pi}{m} = a \cdot \frac{\pi}{m} . \tag{20}$$

Herefrom by substitution of $a = \sin \alpha_f$

$$\alpha_f = \frac{\text{arc cotg}\, \pi/m - \sin \pi/m \cdot \cos \pi/m}{\sin^2 \pi/m} , \tag{21}$$

wherefrom critical values of a may be calculated. Following table lists critical values of a corresponding to different phase numbers:

m	a
2	0,537
3	0,775
6	0,941
12	0,984

These values indicate the number of revolutions above which there is no continuous conduction. Since in practical cases the power factor of the armature circuit is always greater than zero (the circuit cannot be purely inductive), values of a tabulated may be considered as upper limits.

It is evident that the value of U_{va} obtained by the previous calculations is the terminal voltage of the anode transformer at a load corresponding to $b \cdot \hat{I}_{n\ max\ av}$ rectified current, while the no-load voltage can only be determined with observation of the voltage drop of the transformer.

3. Thermic check of the armature

After determination of anode voltage U_{va} the next step is the thermic check of the motor. As before mentioned, it is examined at critical speed whether

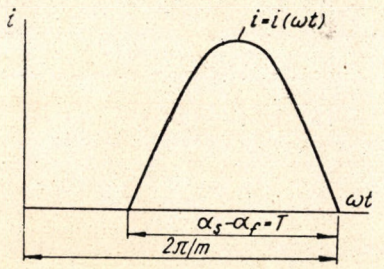


Fig. 6

the r. m. s. value $\hat{I}$ of the rectified current $\hat{I}_{av}$ corresponding to the rated torque does not exceed the catalogued ratings (I) corresponding to the speeds and working conditions in question.

The elaborated procedure does not directly result in $\hat{I}$ but it makes possible the determination of the form factor $k_f = \hat{I}/\hat{I}_{av}$ of any current $\hat{I}_{av}$. The calculation of the form factor is executed with the following approximate assumptions :

a) The conduction is discontinuous at current $\hat{I}_{av}$ (Fig. 6).

The time function of the current is substituted by a half sine wave, the equation of which is : $\sin \frac{\pi}{T} \cdot \omega t$. With a practically permissible error the sine curve may be supposed to be identical with the current curve, and its average and r. m. s. values related to the periode $2\pi/m$ to be proportionate to the average and r. m. s. current values.

Curve $i = i(\omega t)$ is substituted by $\sin \frac{\pi}{T} \cdot \omega t$ and notation $\frac{2\pi}{m} = B$. T applied (22)

$$k_f = \frac{\hat{I}}{\hat{I}_{av}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{B} \tag{23}$$

where

$$B = \frac{2\pi}{m(\alpha_s - \alpha_f)} . \tag{24}$$

b) The conduction is continuous at current $\hat{I}_{av}$ (Fig. 7).

The time function of the current is substituted by a half sine wave superposed upon d. c. According to the assumption the average value of the half sine wave is proportional to that value $\hat{I}_{av}$ which subsists at the transition from continuous to discontinuous conduction ($\hat{I}_{crit}$). It is assumed moreover, that

$$\hat{I}_{av} = \hat{I}_{crit} + I_0. \tag{25}$$

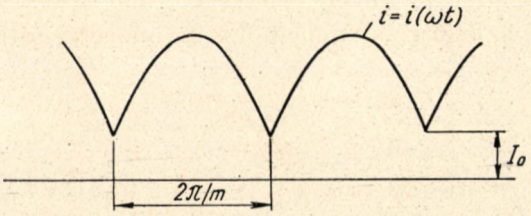


Fig. 7

With notation

$$\frac{\hat{I}_{crit}}{\hat{I}_{av}} = B' \tag{26}$$

$$k_f = \frac{\hat{I}}{\hat{I}_{av}} = \sqrt{1 + 0{,}23\, B'^2}. \tag{27}$$

Ignition angle α_f and extinction angle α_s known, the coefficient k_f may be calculated at any speed and it may be checked whether the motor satisfies the postulate $\hat{I} = k_f \cdot \hat{I}_{av} \leq I$, i. e. that the size of the motor has been correctly chosen from the thermic point of view. Thereto knowledge of angles α_f and α_s pertaining to the given speed and to current intensity $\hat{I}_{av}$ is necessary.

For the calculation of angles α_f and α_s required for the conduction of current of mean value $\hat{I}_{av}$ the following mathematical relation can be deduced :

Formula (9) transformed :

$$\hat{I}_{av} = \frac{\sqrt{2}\, U_{va} \cdot m}{2\pi \cdot R_a} \Big\{ [\cos(\alpha_f - \varphi) - \cos(\alpha_s - \varphi)] \cdot \cos\varphi + a(\alpha_f - \alpha_s) +$$

$$+ \operatorname{tg}\varphi\, [a - \cos\varphi \cdot \sin(\alpha_f - \varphi)] \cdot [1 - e^{-(\alpha_s - \alpha_f)/\operatorname{tg}\varphi}] \Big\} . \tag{28}$$

$$\hat{I}_{av} = \frac{\sqrt{2}\, U_{va} \cdot m}{2\pi \cdot R_a} \cdot D \quad \text{where} \quad D = D(a, \alpha_f, \varphi). \tag{29}$$

From this relation D may be calculated directly. The determination of α_f and of α_s can thus be executed in the following way: by substitution of the known values, D is calculated from relation (29). In quarter I of Fig. 3 the relation $\alpha_f(D)$ has been plotted with parameters a and $\cos\varphi$. After calculation of D, with knowledge of a and $\cos\varphi$ the ignition angle α_f necessary for the given speed and for the current $\hat{I}_{av}$ (proportional to the specified torque) can be directly read off this diagram. By the method exposed in connexion with the determination of U_{va} it has to be established whether the conduction is discontinuous.

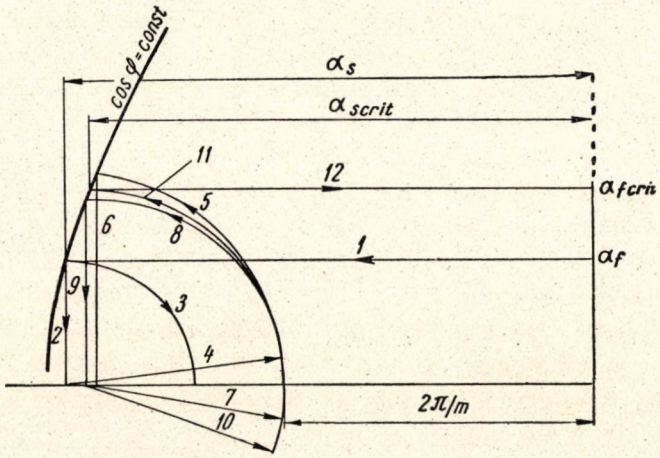


Fig. 8

a) If conduction is discontinuous the further course of checking is the following. From quarter II of the group of diagrams in Fig. 3 *a* corresponding to α_f previously determined is sought. Along axis α_s, proceeding from the origin, section $T = \alpha_s - \alpha_f$ is measured off. The perpendicular intercept drawn at the terminal point of this section will cut off in quarter III the sought value of k_f. The latter group of diagrams shows the value of k_f as function of $T = \alpha_s - \alpha_f$ with parameter m.

b) If in the course of construction the conduction is found to be continuous in the case of current $\hat{I}_{av}$, starting from α_s determined by the above procedure and from $2\pi/m$ known, the pair of critical extinction angle $\alpha_{s\,crit}$ and ignition angle $\alpha_{f\,crit}$, at which continuous conduction passes into discontinuous one, may be found by step-by-step approximation. Going on with the construction in the reverse sense the critical value of D (D_{crit}) belonging to $\alpha_{f\,crit}$ is determined. (See Fig. 8)

Herefore holds, that

$$\hat{I}_{c\,it} = \frac{\sqrt{2}\,U_{va} \cdot m}{2\pi \cdot R_a} \cdot D_{crit}. \tag{30}$$

According to formula (27), for continuous conduction

$$k_f = \sqrt{1 + 0{,}23\,B'^2}, \qquad \text{where} \qquad B' = \frac{\hat{I}_{crit}}{\hat{I}_{av}} = \frac{D_{ci\,it}}{D}. \tag{31}$$

The value of k_f for continuous conduction is obtained from diagram 3 by the following way: Since D is plotted to logarithmic scale on the abscissa, section D has to be subtracted graphically from D_{crit}, whereby value $B' = D_{crit}/D$ is obtained. The magnitude of the form factor k_f corresponding to the value of B' obtained can be directly read off the diagram $k_f\,(B')$ in quarter IV.

The output of the motor is $\hat{P} = M.\,n. = C.\,\hat{I}.\,\Phi/k_f = C.\,\hat{I}_{av}.\,\Phi$, where in the case of optimal calculation $\hat{I} = \bar{I}$. In case of electronic drive the motor can carry a load of $\hat{P} = \bar{P}/k_f$, where $\bar{P}$ is the nominal rating of the motor at the speed investigated, and k_f is the form factor of the armature current at the same speed. In the determination of the value of $\hat{P}$ the additional losses of electronic drive (iron losses in the first place) have been neglected. The value of k_f depends on the number of phases of the rectifier, on the magnitude of overload factor b, on the proportion of minimum and nominal speed, and on the power factor of the armature circuit.

To approach the required motor power as much as possible to the nominal rating (small k_f factor) i. e. to reduce overdimensioning to a minimum, a choke coil may be inserted in the armature circuit of low-power motors; for higher outputs multi-phase rectification and forced cooling may be applied.

4. Checking the rectifier

The rectifier feeding the d. c. motor is checked on the basis of:

a) the anode voltage,

b) the d. c. required by the motor.

a) The rated inverse voltage of the rectifier has to be higher than the double of the anode peak voltage. Inverse voltage of such peak value can namely occur under working conditions between the cathode and the anode of the tube in the non-conduction half cycle.

b) From the point of view of the current conduction the average and the peak value of the rectifier current are alike critical. These ratings of the tube must not be surpassed without risk to its warranted service life. The following

will show that the danger of exceeding the peak value is especially present in multi-phase rectifiers.

The average value of the current per tube in the single-anode rectifier, or the current per anode in the multi-anode rectifier is $\hat{I}_{avo} = \hat{I}_{av}/m$, or the fraction per phase of the average value of the total armature current.

The peak value of the current per tube, or the current per anode, which is identical with the peak value of the armature or of the field current, is determined by peak factor $k_c = \hat{I}_p/\hat{I}_{av}$. The value thereof is determined by the approximate method expounded for form factor k_f.

a) In case of discontinuous conduction

$$k_c = \frac{\hat{I}_p}{\hat{I}_{av}} = \frac{\pi^2}{T \cdot m} = B\frac{\pi}{} . \tag{32}$$

b) In case of continuous conduction

$$k_c = 1 + B' \frac{\pi - 2}{2} = 1 + 0{,}57\, B' . \tag{33}$$

On the basis of (32) and (33) the peak value of the current load on the rectifier tube can be determined for any service condition of the motor.

Numerical example

Electronic drive is to be calculated for an output of $\hat{P}_{nom}$ = 2 h. p. with facilities of speed control between n_{min} = 160 and n_{nom} = 800 r. p. m. The nominal torque determined by the rated power and speed of the motor should be obtainable within the whole range of speed control. Furthermore also an overload factor b = 1,25 has to be considered. Nominal ratings of the available motor are as follows :

$\bar{P}_{nom}$ = 2,5 h. p.
U_{nom} = 500 volts
n_{nom} = 800 r. p. m.
$\bar{I}_{n\,nom}$ = 4 amp (with forced cooling this value may be increased to 5 amp)
Other data of the motor :
$U_{a\,nom}$ = 470 volts
R_a = 15 ohms
cos φ = 0,291
R_g = 487 ohms
$\bar{I}_g$ = 0,5 amp

The actual power demand is only 2 h. p., therefore the armature current of the motor will be reduced proportionally :

$$\hat{I}_{av} = 4 \cdot \frac{2}{2{,}5} = 3{,}2 \text{ amp} .$$

This current intensity corresponds to the required nominal torque, which is to be developed within the whole range of speed control.

Rectification is effected both in the armature and in the field circuits by single phase full-wave rectifiers.

1. The anode voltage of the field rectifier is :

$$U_{vg} = 1{,}11 \cdot I_g \cdot R_g = 1{,}11 \cdot 0{,}5 \cdot 487 = 270 \text{ volts}$$

2. Calculation of the armature circuit rectifier :

$$A = \frac{b \cdot \hat{I}_{av} \cdot 2\pi \cdot R_a}{(U_{a\,nom} + U_0) \cdot m} - \frac{1{,}25 \cdot 3{,}2 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15}{(470 + 20) \cdot 2} = 0{,}385.$$

According to Fig. 2, $a' = 0{,}56$ (if $A = 0{,}385$, $\cos\varphi = 0{,}291$) and

$$U_{va} = \frac{U_{a\,nom} + U_0}{\sqrt{2} \cdot a} = \frac{470+20}{1{,}41 \cdot 0{,}56} = 620 \text{ volts} .$$

Let be controlled whether conduction is discontinuous. According to quarter II of Fig. 3 with $a = 0{,}56$, $\alpha_{f\,min} = 34{,}5°$ the resultant $\alpha_s = 195°$, therefore $\alpha_s - \alpha_{f\,min} < \frac{2\pi}{m}$; the value obtained for U_{va} is correct, because conduction is discontinuous.

3. Thermic check of the armature.

Check is made at $n_{min} = 160$ r. p. m., because the form factor is maximum at minimum speed.

$$U_{a\,min} = \frac{n_{nom}}{n_{min}} \cdot U_{a\,nom} = \frac{800}{160} \cdot 470 = 96 \text{ volts}, \quad a_{min} = \frac{96 + 20}{\sqrt{2} \cdot 620} = 0{,}132$$

$$D = \frac{2\,\pi \cdot R_a \cdot \hat{I}_{av}}{\sqrt{2} \cdot U_{av} \cdot m} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 \cdot 3{,}2}{1{,}41 \cdot 620 \cdot 2} = 0{,}172$$

According to quarter I of diagram 3

$$\alpha_f = 106° \text{ (if } D = 0{,}172, \ \cos\varphi = 0{,}291, \ a = 0{,}132)$$

Conduction is discontinuous.

According to quarter III of diagram 3 $k_f = 1{,}4$ whence

$$\hat{I} = k_f \cdot \hat{I}_{av} = 1{,}4 \cdot 3{,}2 = 4{,}5 \text{ amp, i. e. less than 5 amp.}$$

The armature current therefore is permissible from the thermic point of view.

4. Check of the rectifiers.

a) Field. Ratings of the applied tubes :

Max. inverse voltage : 1000 volts

$\hat{I}_{avo\,max}$: 0,25 amp

$\hat{I}_{p\,max}$: 1,0 amp

Peak value of the inverse voltage becomes :

2. $\sqrt{2} \cdot U_{vg} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 300 = 850$ volts < 1000 volts. Mean value of current per tube :

$$\hat{I}_{avo} = \frac{\hat{I}_{av}}{m} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25 \text{ amp} .$$

This value is just suitable, but overexcitation of the motor with this type of tube is not possible.

b) Armature. Ratings of the applied tubes :

Max. inverse voltage : 2000 volts

$\hat{I}_{avo\,max}$: 6,4 amp

$\hat{I}_{p\,max}$: 40 amp

The peak value of the inverse voltage becomes :

$$2.\sqrt{2} \cdot U_{va} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 620 = 1748 \text{ volts} < 2000 \text{ volts}$$

Mean value of current per tube :

$$\hat{I}_{avo} = \frac{b \cdot \hat{I}_{av}}{m} = 2 \text{ amp} < 6{,}4 \text{ amp.}$$

Peak value of current per tube (at n_{min}) :

$$\hat{I}_p = \frac{\pi^2}{T \cdot m} \cdot b \cdot \hat{I}_{av} = \frac{\pi^2}{2 \cdot 2{,}23} \cdot 1{,}25 \cdot 3{,}2 = 8{,}8 \text{ amp} < 40 \text{ amp} .$$

(Value of D corresponding to $b \cdot \hat{I}_{av}$: 0,215 and hence

$$\alpha_f = 98^\circ$$
$$\alpha_s = 226^\circ$$
$$T = \alpha_s - \alpha_f = 128^\circ = 2{,}23).$$

Values previously calculated are gathered :

U_{vg}	270 volts + 10%
U_{va}	620 volts + 5%

Value of $\hat{I}$ at n_{min} r. p. m. and at $\hat{I}_{av}$ load : 4,5 amp.

REFERENCES

O. A. Маевский: Обобщенная диаграмма работы ионного электропривода. Электричество, 1950. Ном. 10. (General Diagram of Electronic Drive, Russian).

K. P. Puchlowski : Voltage and Current Relations for Controlled Rectification with Inductive and Generative Loads. AIEE. 1945. pp. 255—260. Vol 64.

L. Vitályos : Rácsvezérlésű egyenirányítókkal táplált e. á. motor üzemi viszonyai. Elektrotechnika, 1952. 7. sz. (Working Conditions of D. C. Motor Powered by Grid-Controlled Rectifiers, Hungarian.)

SUMMARY

The paper presents the calculation of electronic d. c. motor drives satisfying specified service conditions. Basic mathematical relations published in technical literature on electronic motor drives are summed up. These relations having been developed and completed in the further treatise, the general method of calculation of electronic drives is elaborated. Dimensionless families of curves are drawn to simplify calculation very much. A numerical example completes the description of the method.

РАСЧЕТ МОТОРНОГО ПРИВОДА ПОСТОЯННОГО ТОКА, ПИТАЕМОГО ОТ ТИРАТРОННОГО ВЫПРЯМИТЕЛЯ С СЕТОЧНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Я. РОША

РЕЗЮМЕ

Излагается методика расчета электронного электропривода постоянного тока, удовлетворяющего данные производственные требования. В начале дается обзор математических зависимостей электронных приводов, опубликованных в технической литературе. В дальнейшем, развивая и дополняя эти математические зависимости, разрабатывается общая методика расчета этого вида электроприводов. Для значительного упрощения расчетов предлагаемая методика использует семейства безмерных диаграмм. Изложение методики расчета дополняется числовым примером.

LE DIMENSIONNEMENT DES COMMANDES PAR MOTEUR À COURANT CONTINU ALIMENTÉES PAR DES REDRESSEURS À THYRATRON ET À COMMANDE PAR GRILLE

J. RÓSA

RÉSUMÉ

L'article traite du dimensionnement de commandes électroniques de moteurs à courant continu (electronic d. c. motor drive) satisfaisant à des conditions d'exploitation données. Au début, il résume les relations mathématiques concernant les commandes électroniques, qui ont paru jusqu'ici dans la littérature. Dans la suite, il développe ces relations et établit les méthodes généralisées pour le dimensionnement de ce type de commande. Pour simplifier les calculs, des familles de courbes sont employées. L'étude de la méthode de dimensionnement est complétée par un exemple numérique.

DIE DIMENSIONIERUNG EINES DURCH EINE THYRATRONRÖHRE BZW. EINEN GITTERGESTEUERTEN GLEICHRICHTER GESPEISTEN GLEICHSTROMANTRIEBES

J. RÓSA

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit wird die Dimensionierung eines gegebene Betriebsansprüche befriedigenden elektronischen Gleichstromantriebes (electronic d. c. motor drive) geschildert. Als Einleitung werden diejenigen auf elektronischen Antrieb bezüglichen mathematischen Zusammenhänge zusammengefasst, die im technischen Schrifttum bisher erschienen sind. Im weiteren werden dann diese Zusammenhänge weiterentwickelt und ergänzt und dann auf dieser Grundlage ein allgemeines Dimensionierungsverfahren dieses Antriebtyps ausgearbeitet. Dieses Verfahren benutzt zur Vereinfachung der Rechenarbeit dimensionslose Kurvenscharen. Die Beschreibung des Dimensionierungsverfahrens wird durch ein Zahlenbeispiel ergänzt.

THEORY OF THROUGHPUT IN EXTRACTION SPRAY TOWERS

By
T. HARMATHY

RESEARCH INSTITUTE FOR THE HEAVY CHEMICAL INDUSTRY, VESZPRÉM, HUNGARY

[Manuscript received 3rd June, 1954]

Notation

A	cm^2	total interfacial surface between phases
A_s	cm^{-1}	specific interfacial surface between phases (contact area per unit volume of tower)
d	cm	diameter of drops (diameter of a sphere of identical volume)
D	cm	diameter of tower
D_N	cm	diameter of distributor nozzles
f	cm^2	maximum cross sectional area of drops in a plane perpendicular to the direction of motion
f_D	cm^2	portion occupied by drops of the cross sectional area of tower
$\bar{f}_D$	cm^2	portion occupied by «enlarged» drops of the cross sectional area of tower
F	cm^2	cross sectional area of tower
g	cm sec^{-2}	gravitational constant
H	cm^3	total volume holdup of dispersed phase
H_s	—	fractional volume holdup of dispersed phase
K	cm^3	effective volume of tower
L	cm	effective height of tower
p	—	number of distributor nozzles
U_C, U_D	cm sec^{-1}	superficial velocity (volume flow rate per unit cross sectional area of tower) of continuous and dispersed phases, respectively
v	cm^3	drop volume
v_e	cm^3	volume of drop environment
v_{vf}	cm^3	volume of eddying fluid following the moving drop
V_C, V_D	cm^3 sec^{-1}	volume flow rate of continuous and dispersed phases, respectively
V_{Cr}	cm^3 sec^{-1}	volume flow rate of continuous phase recirculating within tower
w	cm sec^{-1}	terminal velocity of swarm of drops, velocity of the dispersed phase in a stationary continuous phase (in ideal case)
w_∞	cm sec^{-1}	terminal velocity of a drop in a liquid of infinite extent
w_C	cm sec^{-1}	velocity of continuous phase
$\bar{w}_C$	cm sec^{-1}	main body velocity of continuous phase
w_{CN}	cm sec^{-1}	velocity of continuous phase near the distributor
w_D	cm sec^{-1}	velocity of swarm of drops, velocity of the dispersed phase in a continuous phase flowing countercurrently
w_{DN}	cm sec^{-1}	velocity of dispersed phase through distributor nozzles
α	—	maximum fractional restriction of tower's cross sectional area
η_C, η_D	g cm^{-1} sec^{-1}	viscosity of continuous and dispersed phases, respectively
Θ	sec	time interval between the issue of two consecutive drops from the same nozzle
$\varkappa$	—	specific volume environment of drops
ϱ_C, ϱ_D	g cm^{-3}	density of continuous and dispersed phases, respectively
$\Delta\varrho$	g cm^{-3}	$= \lvert \varrho_C - \varrho_D \rvert$
σ	g sec^{-2}	interfacial tension
Φ	—	function defined by equation (51)
δ, ζ, λ, φ	—	factors defined by equations (2), (32), (54) and (38), respectively

Subscripts :

a	value determined by distributor characteristics
$\frac{a}{b}^e$	value relating to a particle of the shape of an oblate spheroid with an axis ratio of a/b
g	value relating to a particle of spherical shape
K	value pertaining to critical condition
m	mean value characteristic of the whole tower
t	value relating to the narrowest cross sectional area of tower

1. Introduction

Although during the last two decades a considerable number of papers have been published dealing directly or indirectly with problems of the throughput in extraction spray towers [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], the terminology cannot be said to have been definitely settled. For this reason it would appear expedient to give by way of introduction a glossary of at least the terminology to be used in this work, in respect of which the views in the literature are at variance.

Fig. 1/a presents the sketch of a spray tower of the older design. In order to improve flow conditions, the end pieces of the towers nowadays are usually designed in the way described by BLANDING and ELGIN [3, 9, 10]. Such a spray tower of the Elgin design is shown in Fig. 1/b. The lower conical end attachment is called spray chamber, the upper cylindrical attachment settling chamber.

These towers can be used for dispersion of the light phase. Any of them — constructed in upside down fashion — can be used in case the heavy phase is dispersed.

During normal operation there arise three zones within the equipment. In the lower zone, *a*, nothing but the heavy phase is present. In the intermediate *b* zone both the heavy and the light phase are to be found, the latter — in columns like those presented in Fig. 1 — dispersed into drops. The upper *c* zone, finally, again is a single-phase zone, the zone of the light phase. (To simplify matters, let us neglect the possible case in which the heavy phase is the dispersed one. Our conclusions, of course, hold good for this as well.)

Mass transfer, obviously, can take place within the two-phase zone only, and it is for this reason that the volume of the intermediate zone (surrounded in the figure by a broken line) is called the *effective volume* of the extraction tower (K). On the same considerations we call the distance between the distributor and the upper one-phase zone, L, the *effective height* of the tower.

At relatively low flow rates for both phases, the drops of the dispersed phase rise at fairly even speed and spread evenly throughout the continuous phase flowing countercurrently. No coalescence of the drops can be observed ; the tower operates «smoothly».

As the flow rates are increased, the velocity of the drops gradually decreases, thus bringing about an increase in the holdup of the dispersed phase as well as in the interfacial surface between the phases.

As the flow rate of any of the phases is further increased, the velocity of the drops decreases sharply in the vicinity of the upper one-phase zone and consequently the drops crowd in the upper region. (The drops, as a rule, start crowding at the entrance of the settling chamber in Elgin-towers, but near the distributor in towers of the older design.) According to Blanding and Elgin [3] the flow rates, at which the drops commence to crowd, determine the beginning of *flooding*.

Without further increasing the flow rate of either phase, the crowding of drops slowly extends downwards until — after a short time — it covers the entire intermediate zone.

In this state of flooding the tower usually continues to operate smoothly, but with a further increased flow rate of the phases the motion of the drops becomes highly erratic, and the column of crowded drops sinks to the entry cone.

But even at this stage the throughput of the tower still subsists, in fact a slight increase in the flow rates is possible until very strong eddying in the spray chamber commences, which results in coalescence of the drops, and large quantities of the light liquid are carried out through the lower exit pipe for the continuous phase. MINARD and JOHNSON [7] call this state *rejection* and regard it — instead of Elgin's flooding — as the limiting state in the operation of the tower.

It will be seen, however, that differing from the view of both Blanding and Elgin, and Minard and Johnson, the stage at which the drops begin their erratic motion, should be regarded as the limiting state of the tower's operation. This stage we propose to call the *critical condition* of the tower, and the flow rates which determine it, *critical flow rates*. Below it will also be

shown that, unlike to flooding and rejection, there is a most demonstrative mathematical interpretation of the critical condition.

Although of all liquid extraction columns spray towers are admittedly the most simple, the processes taking place in them are still too intricate to allow their laws to be given in exact mathematical formulation. To achieve any results in this respect it is unavoidable to neglect several less important features of the process. In investigating problems connected with the throughput of the tower, the simplification is generally permissible to consider mean values

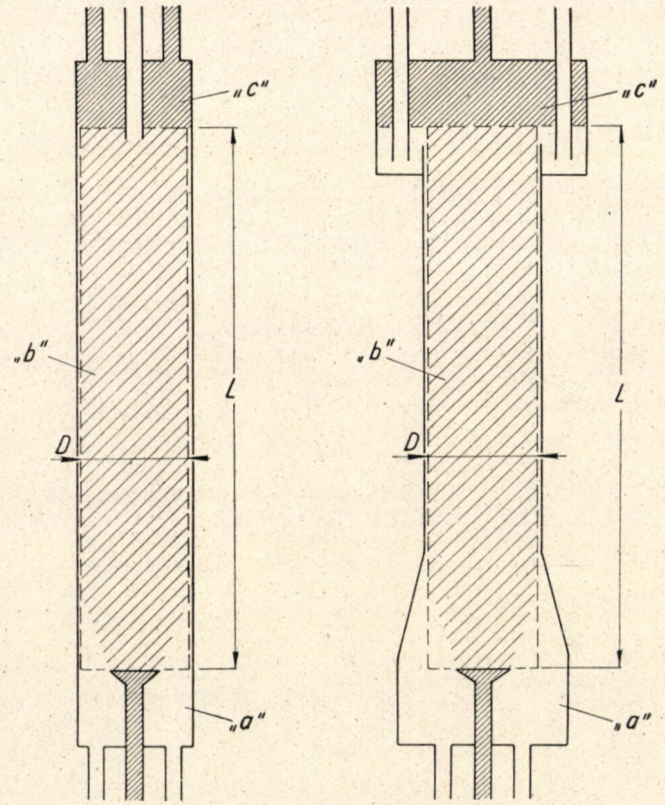


Fig. 1

for the solute concentration of both phases, according to the probable ranges of variation, and to regard these mean values as constant characteristics of the phases. In this manner the presence of a third component (i. e. the solute) needs only to be considered in the numerical calculations, and can be neglected when formulating the general laws. It is not surprising therefore that the majority of the reported holdup and flooding studies refers to two-phase, two-component, so to say «pseudo-extraction» systems.

Although there has been a considerable advance in the field of the theory of spray extraction towers, when designing equipment we still have to resort to model experiments.

Determining tower dimensions is still far from being definite. It is generally accepted that the diameter of the tower depends on the throughput data, its height on the rate of the mass transfer, but the mutual interdependence of these two dimensions is often not realized with sufficient clarity. It is a fact, however, that the diameter's dependence on the height is of lesser importance and can be wholly eliminated, if we employ the above mentioned simplification,

i. e. use mean values for the solute concentration of the phases for our computations. Consequently, it is better to begin with the determination of the diameter.

In the following a novel theory of the throughput of spray towers is propounded. This theory enables us to determine all data relative to the tower and concerning its operation, which can be held to be approximately independent of the height of the tower, without having to resort to experiments or to special data in the literature.

2. Size and terminal velocity of drops

Recently published papers of SIEMES [11, 12] contain most valuable theoretical considerations concerning some of the problems we are dealing with at present. Unfortunately — Siemes having concentrated exclusively on problems connected with gas bubbles — lacking a sufficient number of experi-

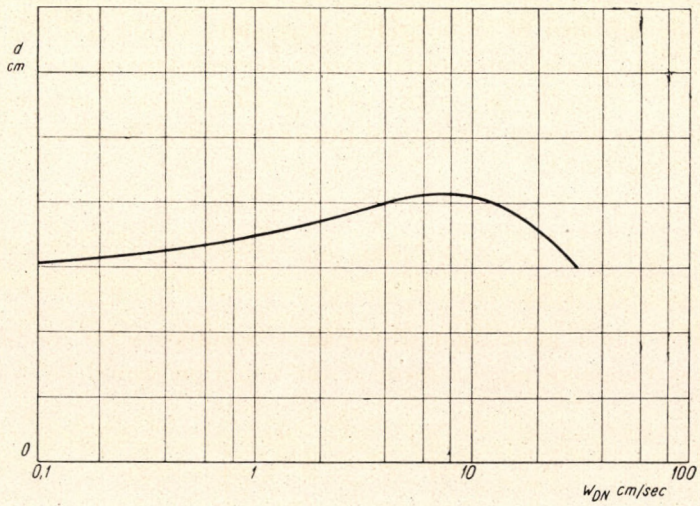


Fig. 2

mental data — for the time being we cannot hope to utilize his results for our problems relative to drops.

Concerning the size of drops forming in liquids, extensive investigations by HAYWORTH and TREYBAL [9, 13] have been reported. Utilizing the results of over one thousand measurements, they established a relationship in which, in addition to the diameter of the distributor nozzles and the physical characteristics of the phases, the velocity of the dispersed phase through the nozzles also appears as a variable influencing the size of the drops. The relation between the latter and the drop diameter is like that shown in Fig. 2.

The drop diameter d^*, which is an approximate value pertaining to $w_{DN}=1$, can be computed by the relatively simple formula derived from the Hayworth—Treybal equation :

$$d^* = \sqrt[3]{0{,}0040\,\frac{\sigma D_N}{\Delta\varrho} + 0{,}0204\left[\frac{D_N^{0{,}747}\,(100\,\eta_C)^{\,0{,}186}}{\Delta\varrho}\right]^{\frac{3}{2}}}. \qquad (1)$$

(Symbols are listed at the beginning of the text.)

Equation (1) contains every variable that determines the size of the drops excepting the velocity of the dispersed phase inside the nozzles, and the velocity of the continuous phase flowing perpendicularly to the distributor head. (This latter variable does not even appear in the original Hayworth—Treybal equation.) Consequently, should we wish to express the drop diameter with the aid of a factor δ by way of

$$d = \delta d^*, \qquad (2)$$

then δ can be assumed to be entirely independent of the variables appearing on the right hand side of equation (1), and to depend only on the velocity of the dispersed phase through the nozzles and on the dynamic pressure generated by the continuous phase on the face of the distributor. Therefore, in accordance with our assumption :

$$\delta = \delta\left(w_{DN},\ \varrho_C\,\frac{w_{CN}^2}{2}\right). \qquad (3)$$

(It should be borne in mind, that all variables in equation (3) are dimensionless quantities, as the more precise form of the equation would be

$$\delta = \delta\left(\frac{w_{DN}}{w_{DN1}},\ \frac{\varrho_C\dfrac{w_{CN}^2}{2}}{p_0}\right),$$

where $w_{DN1} = 1$ cm/sec, and $p_0 = 1.013.250$ dyne/cm$^2 = 1$ physical atm.)

Experimental data permit the conclusion that, at practical values of the flow rates, δ remains within the range of 0,6 to 1,5. Not infrequently even the approximations $\delta \approx 1$, $d \approx d^*$ render sufficiently precise results.

The drops leaving the distributor will accelerate until the frictional drag of the fluid balances the gravitational force (i. e. the weight of the drop immersed in the continuous phase). Although theoretically this state of balance is reached after infinite time, the velocity of the drops, after having travelled 5—15 cm, can be already considered as constant. Thus the error, arising from the simplifying assumption that the velocity of the drops is constant during their whole course, is practically of no consequence.

This constant velocity, of course, depends on the velocity of the continuous phase and is maximum, when the continuous phase ceases flowing countercur-

rently. The velocity of drops — and, in general, of rising or falling bodies — travelling in a stagnant medium is called in hydrodynamics «terminal velocity».

Let us now study the value of this terminal velocity that would arise, if a single drop were travelling within a homogeneous continuous phase of infinite extent in all directions. Obviously, of all possible terminal velocities of the drop, this terminal velocity defined for a medium of infinite extent is maximum.

Hydrodynamics offer well known formulae for the computation of the terminal velocity of spheres travelling in media of infinite extent. These computations can be further simplified by the use of charts and tables published by various authors [14, 15, 16].

Fig. 3 shows the variation of the terminal velocity of fictitious ethylene dichloride spheres moving in a water medium of infinite extent, as a function of the diameter (curve drawn in full line). The curve was plotted on the assumption that the ethylene dichloride drops behave in water like solid spheres. With a different pair of phases the curve may appear more or less steep, but is much of the same shape.

The curve can also be expressed analytically over the respective intervals [14, 15, 17].

If
$$0{,}12 < d \sqrt[3]{\frac{g\varrho_C \Delta\varrho}{\eta_C^2}} < 3{,}3, \tag{4}$$

then
$$w_{\infty g} = \frac{g\Delta\varrho}{18\eta_C} d^2. \tag{5}$$

If
$$3{,}3 \leq d \sqrt[3]{\frac{g\varrho_C \Delta\varrho}{\eta_C^2}} < 43{,}5\,, \tag{6}$$

then
$$w_{\infty g} \approx \frac{0{,}153\, g^{0,71}\, \Delta\varrho^{0,71}}{\varrho_C{}^{0,29}\, \eta_C^{0,43}} d^{1,14}. \tag{7}$$

And, finally, if
$$43{,}5 \leq d \sqrt[3]{\frac{g\varrho_C \Delta\varrho}{\eta_C^2}} < 2360, \tag{8}$$

then
$$w_{\infty g} \approx 1{,}74 \sqrt{\frac{g\Delta\varrho}{\varrho_C}} \sqrt{d}\,. \tag{9}$$

Relation (5) is called Stokes's law, relation (7) intermediate law, and relation (9) Newton's law.

In Fig. 3 the curves corresponding to equations (7) and (9) are also illustrated in order to permit readers to form an idea of the accuracy of computations based on the above formulae.

The terminal velocity curve of real drops usually differs considerably from that of spheres. One of the reasons is that shearing stresses arising from

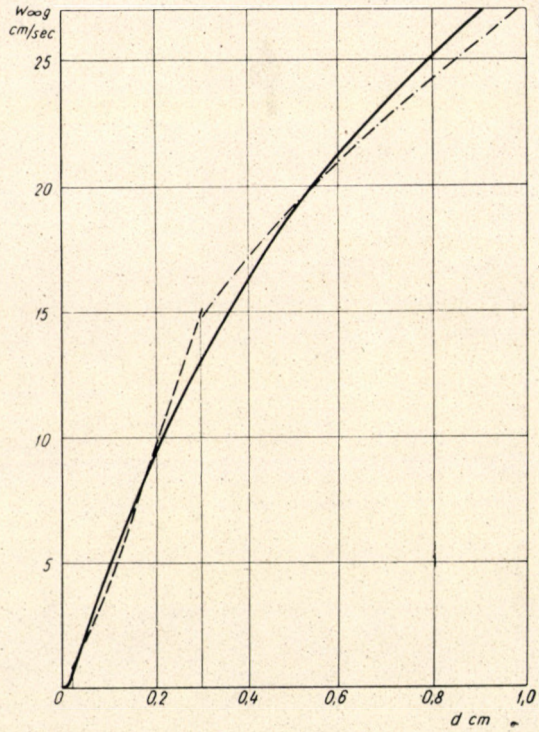


Fig. 3

fluid friction cause circulation inside the drops and therefore, as has been shown by RYBCZYNSKI [18], HADAMARD [19, 20] and BOND and NEWTON [21], the resistance to their motion becomes less than the value valid for solid spheres.

Another reason for the difference is undoubtedly to be found in the distortion of the drops. According to observations, only the small droplets can be regarded as being approximately spheres. Slight distortion is visible even to the naked eye at drops greater then 2—3 mm in size. They take the form of an oblate spheroid having its major axis perpendicular to the direction of the motion. Such drops travel no longer along vertical, but mostly along helical paths. Still larger drops take saucer shapes and their irregular helical path becomes still more conspicuous.

Distortion of the drops results in increase of the drag, consequently exerts an influence on the terminal velocity contrary to that of the circulation inside the drops.

A number of observations indicate that within range (4) both the circulation of the interior and the deformation are insignificant ; the validity of equation (5) therefore is not restricted to solid spheres, but can be extended to liquid drops as well. This cannot be said, unfortunately, for equation (7), although it happens occasionally that the effect of the internal circulation and the distortion compensate each other perfectly, at least in the first half of range (6). Within range (8), and this range is of primary importance for the problems under discussion, the skin friction drag is small compared with the form drag, therefore the influence of the inside circulation on the terminal velocity remains insignificant. The distortion, in turn, takes place in an increased degree because of the larger sizes, and results in a decreased terminal velocity, substantially lower than that of solid spheres of the same volume and density.

If drops could be considered as true oblate ellipsoids with axis ratios 4 : 3, their terminal velocity in a medium of infinite extent could be expressed by the following equation :

$$w_{\infty \frac{4}{3} e} \approx 1{,}353 \sqrt{\frac{g \Delta \varrho}{\varrho_C}} \sqrt{d} \,. \tag{10}$$

This equation is approximately valid for range (8). Comparing with equation (9) we obtain

$$\frac{w_{\infty \frac{4}{3} e}}{w_{\infty g}} = 0{,}778 \,. \tag{11}$$

A more general equation similar to (11) can also be written :

$$\frac{w_{\infty \frac{a}{b} e}}{w_{\infty g}} = c, \tag{12}$$

which is valid for any kind of oblate spheroid with an axis ratio of $a : b$, within the range where the drag coefficient of both the sphere and the spheroid are independent of the Reynolds number. The value of c here appears as a constant, characteristic of the axis ratio $a : b$.

As drops of medium size (approximately 2—7 mm) can generally be regarded as regular oblate ellipsoids, equations (9) and (12) would permit the determination of the terminal velocity of drops in infinite media by computation, if the relationship between the volume and the shape (oblateness) of drops (travelling at their terminal velocity) were known.

TABLE I

(Data at 25° C)

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	Dispersed phase	Continuous phase	ϱ_D g/cm³	ϱ_C g/cm³	η_D Poise	η_C Poise	σ dyne/cm	D_N cm	d_{gk} cm	d^* cm	$w_{\infty g}$ cm/sec	$w_{\infty}\frac{4}{3}e$ cm/sec	w_{∞} cm/sec
1.	Ethylene dichloride	Water	1,249	1,000	0,00765	0,00893	27,—	0,193	0,300	0,477	18,8	14,6	13,3
2.	Ethylene dichloride	Water	1,249	1,000	0,00765	0,00893	27,—	0,305	0,300	0,558	20,3	15,8	16,8
3.	Water	Ethylene dichloride	1,000	1,249	0,00893	0,00765	27,—	0,102	0,251	0,382	15,0	11,7	10,0
4.	Water	Ethylene dichloride	1,000	1,249	0,00893	0,00765	27,—	0,152	0,251	0,438	16,1	12,5	12,6
5.	Water	Ethylene dichloride	1,000	1,249	0,00893	0,00765	27,—	0,193	0,251	0,475	16,8	13,0	13,8
6.	Water	Ethylene dichloride	1,000	1,249	0,00893	0,00765	27,—	0,226	0,251	0,503	17,2	13,4	14,5
7.	Water	Ethylene dichloride	1,000	1,249	0,00893	0,00765	27,—	0,264	0,251	0,529	17,7	13,7	16,0
8.	Water	Ethylene dichloride	1,000	1,249	0,00893	0,00765	27,—	0,305	0,251	0,557	18,1	14,1	17,7
9.	Carbon tetrachloride	Water	1,595	1,000	0,00897	0,00893	36,—	0,193	0,200	0,376	25,8	20,0	20,8
10.	V. M. & P. solvent	Water	0,744	1,000	0,00608	0,00893	44,—	0,193	0,297	0,539	20,2	15,7	15,6
11.	Amsco «C» solvent	Water	0,825	1,000	0,00572	0,00893	36,—	0,193	0,338	0,586	17,5	13,6	12,5
12.	Carbon tetrachloride	Glycerine sln. Nr. 1	1,595	1,204	0,00897	0,36000	23,—	0,193	2,848	0,433	5,9	—	9,8
13.	Carbon tetrachloride	Glycerine sln. Nr. 2	1,595	1,198	0,00897	0,27200	31,—	0,193	2,356	0,452	7,3	—	9,4
14.	Carbon tetrachloride	Glycerine sln. Nr. 3	1,595	1,188	0,00897	0,18500	25,—	0,193	1,812	0,422	7,9	—	11,6
15.	Carbon tetrachloride	Glycerine sln. Nr. 4	1,595	1,165	0,00897	0,09650	25,—	0,193	1,160	0,405	10,5	—	11,5
16.	Solvent mixture No. 1	Water	1,439	1,000	0,00867	0,00893	39,—	0,193	0,243	0,429	23,6	18,4	20,3
17.	Solvent mixture No. 2	Water	1,326	1,000	0,00880	0,00893	38,—	0,193	0,274	0,474	21,4	16,6	16,9
18.	Solvent mixture No. 3	Water	1,090	1,000	0,00901	0,00893	39,—	0,193	0,420	0,765	14,3	11,1	10,4

In order to establish this relationship, in the near future studies will be undertaken, aiming primarily to develop Siemes's work [11, 12]. Lacking such a relationship, we cannot do better than to plot the curve of $w_\infty = w_\infty(d)$ by way of experimental data or of approximate estimations.

Plotting the curve we may be guided by Table I, which has been compiled on the basis of MINARD and JOHNSON's experimental data [7].

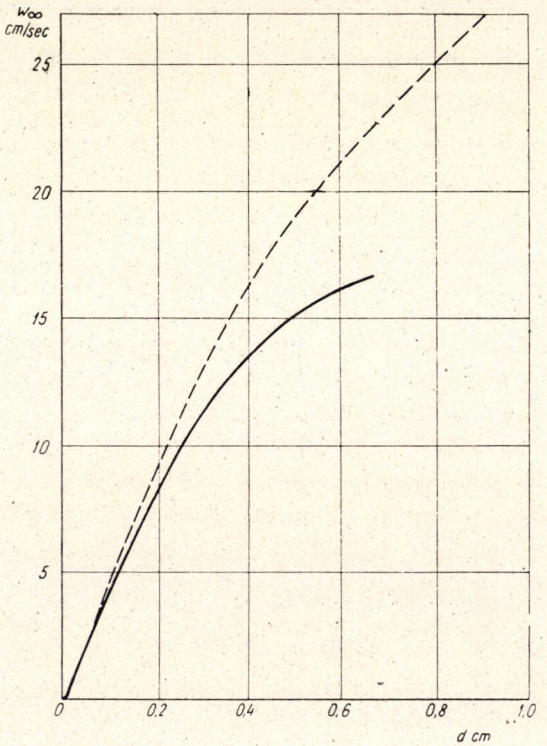


Fig. 4

The first eight columns of this table contain the names and physical properties of the phases as well as the diameter of the distributor nozzles. In column 9 d_{gk} stands for the sphere diameter corresponding to the lower end point of interval (8), while column 10 lists the values of drop diameter d^* calculated by equation (1). The terminal velocity values given in column 11 refer to spherical, those shown in column 12 to spheroidal drops with an axis ratio of 4 : 3. Finally, column 13 summarizes values of the terminal velocities determined from Minard and Johnson's experimental data concerning rejection. These values are supposed to represent the terminal velocities of real drops travelling within stagnant media of infinite extent. (The method of determination will be mentioned in the closing chapter of this study.)

If the curve of $w_\infty = \mathrm{w}_\infty(d)$ is to be plotted by way of estimation, we are well advised to plot first the curve $w_{\infty\,g} = \mathrm{w}_{\infty g}(d)$ relating to spherical drops. Fig. 4 shows the curve for ethylene dichloride drops travelling in water, determined by estimation. The fictitious curve for spherical drops is represented by a broken line.

If the medium round the travelling drop is not of infinite extent in every direction, the resistance to its motion is observed to increase. Concerning the terminal velocity of spheres travelling within a cylindrical room, or along a plane surface, relationships have been worked out by LADENBURG, FAXÉN, LORENTZ and STOCK [22]. These, however, can only be used within the interval over which Stokes's law can be applied. At higher Reynolds numbers calculation of the terminal velocity for a single drop travelling within the tower can be carried out by means of the wind tunnel correction formula used in aeronautical engineering.

The effect of drop interference has also been investigated by several authors, among them RICHARDSON and ZAKI [24], HAPPEL and EPSTEIN [25], and UCHIDA [26]. Unfortunately, all of them approached the problem primarily with regard to sedimentation and fluidization, so that their relationships either can be applied to the laminar region of flow only, i. e. within range (4), or are not sufficiently exact to be used for liquid extraction.

Turbulent flow is, however, rather a complicated process, therefore a theoretical approach to the solution of the problem is not hoped to be feasible. On the other hand, an experimental approach seems to promise a very simple solution even for the case of fully turbulent flow.

Accepting the experimental approach, first of all we have to decide on the independent variable, as a function of which the terminal velocity of drops in mutual interaction is intended to be studied. In the wind tunnel correction formula mentioned above, the ratio f/F figures as the independent variable, because changes in the drag (and accordingly in the terminal velocity) of the bodies are primarily caused by a restriction of the extent of the continuous phase in a plane perpendicular to the course of the body. It is obvious, however, that when a drop is surrounded from all sides by other drops, the extent of the continuous phase is restricted in space, and consequently we have to look for an independent variable of the dimension $\mathrm{cm}^3/\mathrm{cm}^3$, instead of $\mathrm{cm}^2/\mathrm{cm}^2$.

The assumption that the ratio

$$\varkappa = \frac{v_e}{v} \tag{13}$$

should be regarded as the independent variable, has been found to be mostly suitable. In this expression v_e denotes the environment of the drop (the volume of continuous phase surrounding the drop), which extends to the envi-

ronment of the neighbouring drops. It is proposed to call the ratio (13) the specific environment of the drop, or in short, *environment*. If the drops in the two-phase zone are roughly of the same size, their environments are approximately equal. In such cases the specific environment of the drops can be expressed by means of the holdup, which is characteristic of the entirety of drops.

$$\varkappa = \frac{K - H}{H} = \frac{1 - H_s}{H_s} . \tag{14}$$

It should be noted, howewer, that there are also drops in the tower, which are not surrounded from all sides by other drops. In case of the drops travelling along the wall of the tower the wall effect also plays a prominent part. Hence it is evident that in a relationship expressing the average terminal velocity of the entirety of drops, the influence of the ratio f/F, which characterizes the wall effect, cannot be wholly neglected.

By the aid of methods of the dimensional analysis the following functional relationship can be written for the terminal velocity of drops of equal size, and travelling in a continuous phase of finite extent along parallel courses (for particulars see [24] p. 37) :

$$\frac{w}{w_\infty} = \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}_\infty}\left(Re_\infty, \varkappa, \frac{f}{F}\right), \tag{15}$$

where Re_∞ is the Reynolds number for drops travelling at terminal velocity in a medium of infinite extent. It can further be established that in the laminar and the fully turbulent regions of flow the Reynolds number does not appear in the functional relationship, i. e.

$$\frac{w}{w_\infty} = \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}_\infty}\left(\varkappa, \frac{f}{F}\right). \tag{16}$$

An attempt was made to determine the dependence of the terminal velocity ratio $\frac{w}{w_\infty}$ on the value of $\varkappa$ with the aid of the holdup data reported by MINARD and JOHNSON [7], and ELGIN and FOUST [5]. The experimental data were recalculated by means of equation (53) in chapter 5. Lack of sufficient experimental data prevented evaluation of the presumably modest role of the ratio $\frac{f}{F}$ which was found to vary but from 3/1000 to 8/1000.

Fig. 5 is a comparison of the terminal velocity ratios calculated from the holdup data, with those calculated from the following empirical equation:

$$\frac{w}{w_\infty} \approx \frac{\left(\frac{\varkappa}{\varkappa+1}\right)^{\frac{1}{4}}}{1+2{,}7\left(\frac{1}{\varkappa+1}\right)^{\frac{3}{4}}} \equiv \frac{w}{w_\infty}(\varkappa). \tag{17}$$

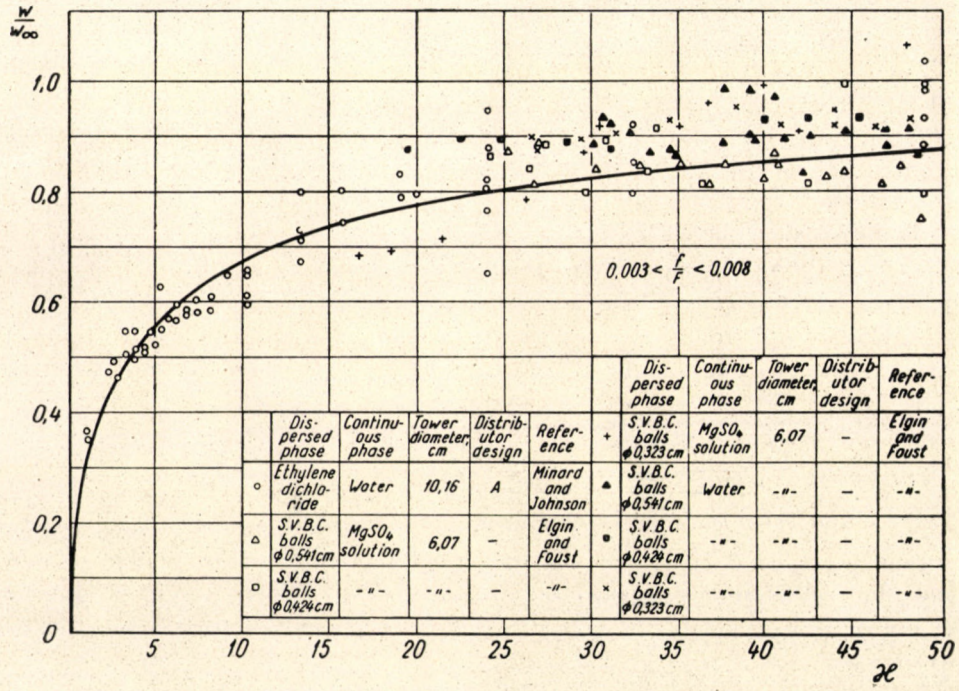


Fig. 5

Although within the interval $19<\varkappa<50$ the majority of points is situated slightly above the curve corresponding to the equation (17), a great number of further experimental data allowed to form the conclusion that the correction of the curve would have to depend on the results of experiments carried out at a considerably higher degree of precision.

3. Portion occupied by drops of the cross sectional area of the tower

Extension of the relationships valid for single drops to the entirety of drops would be quite a simple procedure, provided all the drops could be characterized by numerically identical data. Although this condition can never be perfectly

fulfilled, yet it seems expedient to confine our considerations to this ideal limiting case only. Those conditions substantially differing from the ideal, would involve us in statistical operations, the complexity of which would not be at all in proportion to the higher accuracy attainable by them.

Results show, however, that confining our considerations to the ideal limiting case does not force the validity of the conclusive relationships in too narrow limits. On the contrary, the relationships obtained for the ideal case proved valid for the majority of practical cases.

In designing an apparatus we have to approach the ideal conditions as near as possible, not only in order to obtain results in good agreement with theoretical computations, but also because the tower offers the most efficient operation close to the ideal case. Below it will be seen that the degree of approaching the ideal case mainly depends on the characteristics of the distributor.

Now, as a first step, we have to determine the portion occupied by the drops of the dispersed phase out of the cross sectional area of the tower. Let us begin with the treatment of a «superideal» case, i. e. let us assume besides that the drops are to be characterized by the same numerical data, also that they are perfectly spherical and leave the distributor at regular intervals.

If the drops from the same nozzle issue at Θ intervals and p is the number of the distributor nozzles, then — by our assumption — the interval between two consecutive drops leaving the distributor is equal to $\frac{\theta}{p}$, and they travel at a distance of $\frac{\theta}{p} w_D$ between one another in vertical direction.

Let us take a coordinate system moving along with the drops at velocity w_D, and place its origin in the centre of one of the drops (Fig. 6). Let us now locate horizontal planes intersecting the spheres at different z distances from the origin, and calculate the sum of the cross sectional areas as a function of distance z.

First of all it will be seen that the number of intersected spheres depends on the position of the intersecting plane, moreover that the maximum number of intersections can only exceed the minimum number by one. The following relationships can be written :

The number of intersections is n or $(n-1)$,

if

$$\frac{d}{n} \leqq \frac{\theta}{p} w_D < \frac{d}{n-1}, \tag{18}$$

namely n, if

$$(k+n-1)\frac{\theta}{p} w_D - \frac{d}{2} < z < k \frac{\theta}{p} w_D + \frac{d}{2} \tag{19}$$

and $(n-1)$, if

$$k\frac{\theta}{p}w_D+\frac{d}{2}\leqq z\leqq(k+n)\frac{\theta}{p}w_D-\frac{d}{2}, \tag{20}$$

where $k=0,\pm1,\pm2,\ \ldots$

It is obvious that the ranges of n and $(n-1)$ intersections alternate periodically with each other. The period is $\frac{\theta}{p}w_D$.

Consequently the function expressing the sum of the cross sectional areas of the spheres over the above ranges must also be periodic, i. e.

$$f_D(z)=\mathrm{f_D}\left(z\pm k\frac{\theta}{p}w_D\right). \tag{21}$$

This being so, it is sufficient to determine the function over the interval of a single period. Let the interval be composed of the part-intervals (19) and (20) at the value of $k=0$.

$$(n-1)\frac{\theta}{p}w_D-\frac{d}{2}<z<\frac{d}{2} \tag{22}$$

$$\frac{d}{2}\leqq z\leqq n\frac{\theta}{p}w_D-\frac{d}{2}. \tag{23}$$

Hence the interval of the whole period is :

$$(n-1)\frac{\theta}{p}w_D-\frac{d}{2}<z\leqq n\frac{\theta}{p}w_D-\frac{d}{2}. \tag{24}$$

Over the part-interval (22), where the plane intersects n spheres, the function f_D can be expressed as follows (see Fig. 6) :

$$\begin{aligned}f_{D(n)}=\pi\Bigg\{&\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2-z^2\right]+\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{\theta}{p}w_D-z\right)^2\right]+\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(2\frac{\theta}{p}w_D-z\right)^2\right]+\\&+\ldots+\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left((n-1)\frac{\theta}{p}w_D-z\right)^2\right]\Bigg\}=\\&=\pi\Bigg\{n\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2-z^2\right]+2\frac{\theta}{p}w_D\left[1+2+\ldots+(n-1)\right]z-\\&-\left(\frac{\theta}{p}w_D\right)^2\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right]\Bigg\}=\\&=\pi\left\{n\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2-z^2\right]+n\,(n-1)\frac{\theta}{p}w_D\,z-\frac{n\,(n-1)\,(2n-1)}{6}\left(\frac{\theta}{p}w_D\right)^2\right\}.\end{aligned} \tag{25}$$

Within the part-interval (23) the number of intersections is $(n-1)$. Following the above procedure, the final result for f_D in this part-interval is

$$f_{D(n-1)} = \pi \left\{ (n-1) \left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 - z^2 \right] + n(n-1) \frac{\theta}{p} w_D z - \right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \left(\frac{\theta}{p} w_D \right)^2 \right\}. \tag{26}$$

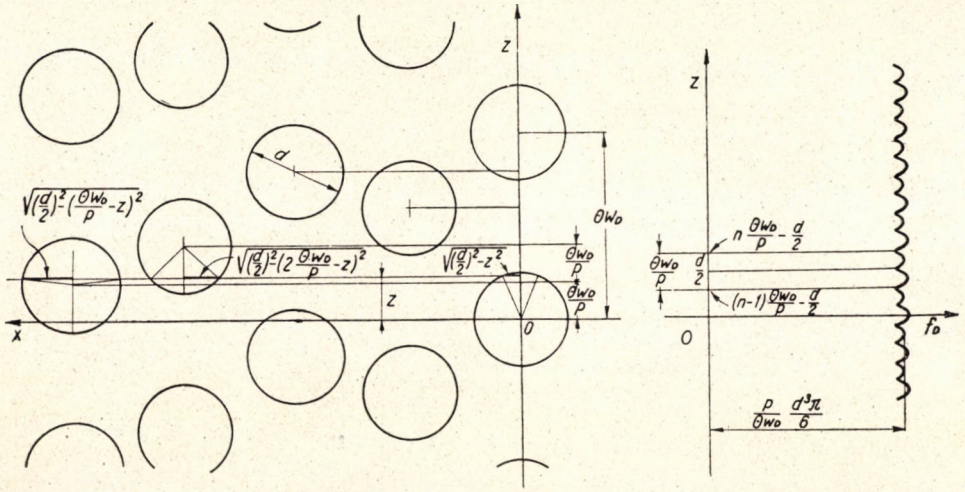


Fig. 6

Fig. 6 also shows the function $f_D = f_D(z)$ corresponding to the conditions prevailing there. It can be seen to be periodic and over each period to be composed of two continuously joining curve sections described by equations (25) and (26).

Let us now proceed to the determination of the mean of f_D.

$$f_{Dm} = \frac{1}{\frac{\theta}{p} w_D} \cdot \left[\int_{(n-1)\frac{\theta}{p} w_D - \frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} f_{D(n)} \, dz + \int_{\frac{d}{2}}^{n\frac{\theta}{p} w_D - \frac{d}{2}} f_{D(n-1)} \, dz \right]. \tag{27}$$

This leads to

$$f_{Dm} = \frac{\frac{d^3 \pi}{6}}{\frac{\theta}{p} w_D}. \tag{28}$$

On the other hand, we can write :

$$\frac{p\dfrac{d^3\pi}{6}}{\theta} = V_D \tag{29}$$

and so we obtain

$$f_{Dm} = \frac{V_D}{w_D} . \tag{30}$$

If we take the plane intersecting the spheres for stationary at a height in the tower, substitution of $z = w_D\, t$ in equations (25) and (26) gives the portion occupied by drops of the tower's cross sectional area as a function of time. The mean of this portion, as expressed by equation (30), is however much more simply calculable. The validity of this latter equation is undoubtedly independent of whether the drops issue from the nozzle at regular or irregular intervals, or whether they are spherical or not. Moreover, equation (30) would retain its validity even for drops of different sizes as long as their velocity remained identical.

Unfortunately, due primarily to the wall effect already mentioned, the velocity of drops is not strictly identical, even though they are exactly of the same size. In such cases, however, average deviation is negligible, and therefore with drops of identical sizes conditions present a notable approach of the ideal case. Obviously, the validity of equation (30) is confined to such cases.

It remains to be examined, whether a distributor is capable of issuing drops of identical sizes and, if so, under what conditions? Hayworth and Treybal's studies [13] show drop sizes to be almost fully identical until the velocity of the dispersed phase through the distributor nozzles reaches 10 cm/sec. With velocity increased above 10 cm/sec the average deviation of the mean drop size increases first slowly, then rapidly. Measurements prove that velocities of about 18—20 cm/sec constitute the ceiling, up to which it is permissible to regard the conditions as closely resembling the ideal ones and to approximate the volume of each individual drop by the mean volume of all the drops leaving the distributor.

4. Velocity of continuous phase

As has been stated, the velocity of drops of the dispersed phase depends on the velocity of the continuous phase flowing countercurrently. In spray towers, however, the velocity of the continuous phase varies within an exceedingly wide range, therefore it is not easy to decide how to define that particular velocity, which determines the motion of the drops.

The first assumption, that the motion of the drops could be determined by the velocity of the continuous phase defined as follows

$$w_{Cm} = \frac{V_C}{F - f_{Dm}} = \frac{U_C}{1 - \dfrac{U_D}{w_D}}, \tag{31}$$

which therefore indicates the mean value characteristic of the whole tower, failed to stand the test. Another assumption that seems to be serviceable, is based upon the following reasoning.

As shown in Fig. 7, the drops do not move through the liquid without disturbance, but create upward currents at their rear. These eddy currents,

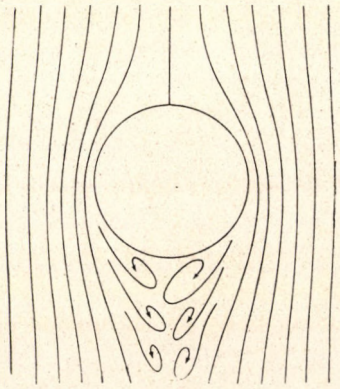


Fig. 7

while following the upward movement of the drops, act like foreign bodies towards the main body of the continuous phase, whereas they quasi «enlarge» the drops, thus decrease the cross sectional area of the tower available for the main body of continuous phase. After the drops have coalesced reaching the upper single-phase zone, these eddy currents leave the drops and by recirculation increase the main body flow of the continuous phase.

Experimental data prove on the whole the correctness of the assumption that the velocity of drops is determined by the mean velocity of the countercurrently flowing main body of continuous phase. Let us start to find the relation for this mean velocity.

To characterize the apparent enlargement of the drops let us introduce the factor ζ and write

$$\zeta = \frac{v + v_{vf}}{v}. \tag{32}$$

For the computation of v_{vf} the following equation is available :

$$v_{vf} = c \frac{\Delta\varrho}{\varrho_C} v^2 , \tag{33}$$

which is an empirically corrected form of an equation published by DATTA [27].

Calculations on basis of the holdup data of Minard and Johnson give the value of about 10/cm³ for the constant c. With this value

$$\zeta \approx 1 + 10 \frac{\Delta\varrho}{\varrho_C} v . \tag{34}$$

With the aid of this factor and equation (30), we can express the mean portion occupied by the «enlarged» drops of the tower's cross sectional area.

$$\bar{f}_{Dm} = \zeta f_{Dm} = \zeta \frac{V_D}{w_D} . \tag{35}$$

The flow rate of the recirculating continuous phase is obviously

$$V_{Cr} = (\zeta - 1) V_D . \tag{36}$$

The mean velocity of the main body of continuous phase, characteristic of the whole tower is therefore

$$\bar{w}_{Cm} = \frac{V_C + V_{Cr}}{F - \bar{f}_{Dm}} = \frac{V_C + (\zeta - 1) V_D}{F - \zeta \frac{V_D}{w_D}} = \frac{U_C + (\zeta - 1) U_D}{1 - \zeta \frac{U_D}{w_D}} . \tag{37}$$

It will be seen, however, that near the critical throughput, in addition to this mean velocity, the momentary velocity values may also become of importance, especially in some narrow cross section of the tower (narrow in the hydrodynamical sense of the word). This clearly justifies the extension of our studies to these momentary values.

In a cross section of the tower the momentary value of the main body velocity of continuous phase depends on, and varies parallel with the momentary value of the portion occupied by drops of the tower's cross sectional area.

As has been pointed out, provided the drops were exactly of the same size and left the distributor at regular intervals, f_D would be a periodic function of time. Unfortunately, these conditions are never fulfilled in reality, moreover — as mentioned — there is some diversity in the velocity of drops. The function $f_D(t)$ consequently cannot display a regular periodicity similar to that in Fig. 6.

The maxima follow each other irregularly, and they generally have different values.

Since the mean portion occupied by the drops of the tower's cross sectional area is very simply expressed by equation (30), the momentary value of this portion seems also expedient to be expressed by the mean, with the aid of the factor φ:

$$\varphi = \frac{f_D}{f_{Dm}} . \tag{38}$$

Under the conditions shown in Fig. 6 the value of φ varies from 0,960 to 1,032, while under actual conditions this range is, as a rule, considerably wider. It grows narrow as the holdup increases, and near flooding usually remains within the mentioned range.

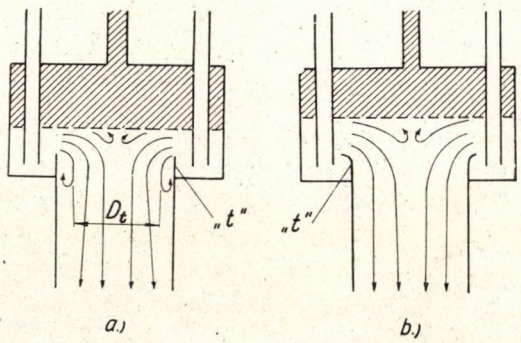


Fig. 8

The fluctuations of the velocity of continuous phase endanger the operation of the tower primarily in those cross sections, in which the velocity of continuous phase steadily exceeds the mean velocity characteristic of the whole tower. These local maxima evidently arise at such zones of the tower, where, as the consequence of an incorrect design, its cross sectional area becomes restricted.

The so called «restrictions» in the cross sectional area do not necessarily mean actual changes in it. E. g. in spray towers of the Elgin design the throat «t» protruding into the settling chamber (Fig. 8a) does not indicate an actual restriction. From the point of view of hydrodynamics, however, such restriction does exist, since at the edge of the throat the boundary layer of the continuous phase separates from the wall, and a ring-formed turbulent liquid body arises there. The latter acts like a foreign body towards the main body of the continuous phase — similarly to that, already mentioned, at the rear of the travelling drops — and hereby reduces the serviceable cross sectional area of the tower.

If we introducc a factor a for characterizing the maximum fractional restriction of the tower's cross sectional area, we can write for the throat «t» of Elgin towers, according to Fig. 8a,

$$a = \frac{F_t}{F} = \left(\frac{D_t}{D}\right)^2. \tag{39}$$

In spray towers of the older design the distributor face causes an actual restriction of the cross sectional area. Here the fractional restriction is considerably higher than in the throat of Elgin towers.

Using the notations introduced, the (mean) velocity of the main body of continuous phase at the minimum cross section of the spray tower is

$$\bar{w}_{Ct} = \frac{V_C + V_{Cr}}{F_t + \overline{f_D}} = \frac{V_C + (\zeta - 1) V_D}{aF - \zeta\varphi \dfrac{V_D}{w_D}} = \frac{U_C + (\zeta - 1) U_D}{a - \zeta\varphi \dfrac{U_D}{w_D}}. \tag{40}$$

This equation, however, owing to the indeterminate value of φ, is merely of theoretical importance.

5. Holdup and interfacial surface between phases

Let us revert to equation (30) and with its aid express the holdup and the interfacial surface between phases.

If the drops occupy a mean portion f_{Dm} of the tower's cross sectional area, the volume of all the drops in the effective volume of the tower, i. e. the holdup of the dispersed phase is

$$H = f_{Dm} L = \frac{V_D}{w_D} L \tag{41}$$

and the fractional holdup is

$$H_s = \frac{H}{K} = \frac{\dfrac{V_D}{w_D} L}{FL} = \frac{U_D}{w_D}. \tag{42}$$

As the total number of drops in the intermediate zone of the tower is $\dfrac{H}{v}$, the interfacial surface between the phases will be

$$A = \frac{H}{v} d^2 \pi = \frac{6Hd^2\pi}{d^3\pi} = H\frac{6}{d} \tag{43}$$

and the specific interfacial surface is expressed as follows:

$$A_s = \frac{A}{K} = \frac{H}{K}\frac{6}{d} = H_s\frac{6}{d} = \frac{U_D}{w_D}\frac{6}{d}\,. \tag{44}$$

(The difference between the surface area of real drops and that of spheres of the same volume is practically negligible. E. g. the surface area of an oblate ellipsoid with an axis ratio of 4 : 3 exceeds that of a sphere of the same volume by not more than 1,54%.)

Both the holdup and the interfacial surface between the phases can be expressed by means of the specific drop environment, since from equation (14)

$$H_s = \frac{1}{\varkappa + 1} \tag{45}$$

and using equation (44)

$$A_s = \frac{1}{\varkappa + 1}\frac{6}{d}\,. \tag{46}$$

This means that for the computation of the holdup and the interfacial surface between phases we have to know either the drop velocity (w_D), or the specific environment of the drop ($\varkappa$).

The fundamental relationship permitting the determination of the specific environment of drops (or the drop velocity) can be derived from the following simple equation:

$$w_D + \overline{w}_{Cm} = w\,, \tag{47}$$

which expresses the well known fact that the drop velocity relative to the continuous phase is equal to the terminal velocity. (The reason why the mean velocity of the main body has been regarded as the velocity of the continuous phase, has already been stated in the previous chapter.)

Since we have to do with the ideal case only, w_D and w in formula (47) signify not only the velocity and terminal velocity, respectively, of the single drops, but those of the entirety of drops (i. e. of the dispersed phase) as well.

Substituting for $\overline{w}_{Cm}$ and w, respectively, their values from (37) and (16), we have

$$w_D + \frac{U_C + (\zeta - 1)\,U_D}{1 - \zeta\dfrac{U_D}{w_D}} = w_\infty \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}_\infty}\left(\varkappa, \frac{f}{F}\right). \tag{48}$$

This equation can easily be reduced to contain only one of the two variables $\varkappa$ and w_D, since combining equations (42) and (45) we obtain the following relation between these two variables :

$$w_D = U_D (\varkappa + 1) . \tag{49}$$

Elimination of w_D from equation (48) seems to be more advisable. After substitution we finally obtain

$$\frac{U_C}{w_\infty} + \frac{U_D}{w_\infty} \varkappa = \frac{\varkappa - (\zeta - 1)}{\varkappa + 1} \cdot \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}_\infty} \left(\varkappa, \frac{f}{F} \right), \tag{50}$$

or, if we define the term on the right-hand side of the equation a function Φ of three variables,

$$\Phi = \frac{\varkappa - (\zeta - 1)}{\varkappa + 1} \cdot \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}_\infty} \left(\varkappa, \frac{f}{F} \right) \equiv \Phi \left(\varkappa, \zeta, \frac{f}{F} \right), \tag{51}$$

then

$$\frac{U_C}{w_\infty} + \frac{U_D}{w_\infty} \varkappa = \Phi \left(\varkappa, \zeta, \frac{f}{F} \right) . \tag{52}$$

Solving equation (50) for $\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}_\infty} \left(\varkappa, \frac{f}{F} \right)$ and eliminating $\varkappa$ from the right-hand side of the equation by substituting from (14), we have finally

$$\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}_\infty} \left(\varkappa, \frac{f}{F} \right) = \frac{1}{w_\infty} \cdot \frac{U_C - U_D + \dfrac{U_D}{H_s}}{1 - \zeta H_s} . \tag{53}$$

Accordingly, if the drop size is known, equation (53) makes possible to have the function $\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}_\infty} \left(\varkappa, \frac{f}{F} \right)$ determined on the basis of holdup data.

As has already been mentioned, the points of Fig. 5 representing experimental data were located with the aid of equation (53). Unfortunately, their position can be thought but approximately proper, for failing data, w_∞ was treated as constant value, although the relationship between drop diameter and terminal velocity makes evident, that w_∞ is a function of the variables in equation (3), i. e. of the flow rates. It is easy to prove that when w_∞ is expressed by means of a factor λ,

$$w_\infty = \lambda w_\infty^* \tag{54}$$

— where w_∞^* stands for the value of the function $w_\infty = \mathrm{w}_\infty(d)$ pertaining to d^* — then λ can be written analogously to equation (3), as follows :

$$\lambda = \lambda\left(w_{DN},\ \varrho_C \frac{w_{CN}^2}{2}\right). \tag{55}$$

Substitution of (54) and (55) in equation (53) results in

$$\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}_\infty}\left(\varkappa, \frac{f}{F}\right) = \frac{1}{w_\infty^*} \cdot \frac{1}{\lambda\left(w_{DN},\ \varrho_C \frac{w_{CN}^2}{2}\right)} \cdot \frac{U_C - U_D + \frac{U_D}{H_s}}{1 - \zeta H_s}. \tag{56}$$

Thus, with w_∞ regarded as constant, the right-hand side of equation (53) will not yield the values of the function $\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}_\infty}\left(\varkappa, \frac{f}{F}\right)$, but those of a more intricate function : $\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}_\infty}\left(\varkappa, \frac{f}{F}, w_{DN}, \varrho_C \frac{w_{CN}^2}{2}\right)$. There is no doubt that this fact accounts mostly for the spread of points in Fig. 5.

Unfortunately, for the time being we must give up the idea of taking into account the variation of w_∞, yet it must be remembered that the approximation $w_\infty \approx w_\infty^* = \text{constant}$ often leads to considerable errors.

Since the distributor characteristics, as already shown, approximately determine the values of w_∞, ζ and $\frac{f}{F}$, the general form of equation (52) is

$$\mathrm{F}(U_C, U_D, \varkappa) = 0. \tag{57}$$

In practice we generally know the flow rates and have to determine the value of $\varkappa$ that we wish to use for calculation of the holdup and the interfacial surface.

The simplest method to solve equation (52) for $\varkappa$ is a graphical one, but carrying this out, it is necessary to know the function $\Phi\left(\varkappa, \zeta, \frac{f}{F}\right)$, which, with values specified for ζ and $\frac{f}{F}$ by the distributor characteristics, reduces to a function of one independent variable : $\Phi\left[\varkappa, \zeta_a, \left(\frac{f}{F}\right)_a\right]$.

For the time being equation (17) may be used to plot this function. In accordance with several hundred measurement data, this equation can be regarded as a fairly good approximation, in spite of its neglecting the influence of $\frac{f}{F}$.

Substitution of (17) in equation (51) gives

$$\Phi \approx \frac{\varkappa - (\zeta - 1)}{\varkappa + 1} \cdot \frac{\left(\frac{\varkappa}{\varkappa + 1}\right)^{1/4}}{1 + 2{,}7\left(\frac{1}{\varkappa + 1}\right)^{3/4}} \equiv \Phi(\varkappa, \zeta). \tag{58}$$

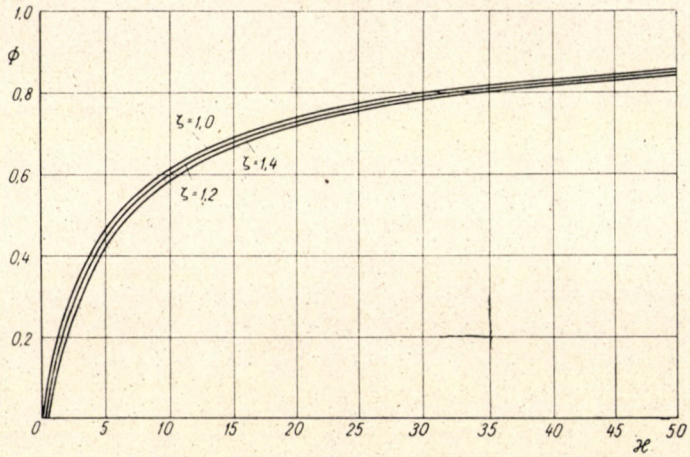


Fig. 9

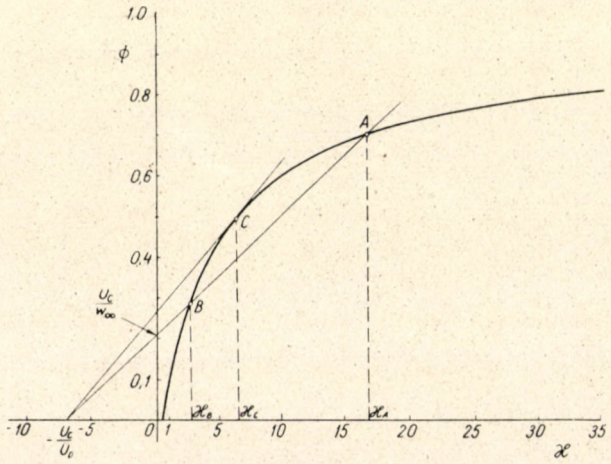


Fig. 10

Values of this function are given in Table II, and Fig. 9 shows a plot of Φ vs. $\varkappa$ for three values of ζ.

The graphical method of solving equation (52) for $\varkappa$ is shown in Fig. 10. The left-hand side of the equation is a linear function of $\varkappa$, represented in the

figure by a straight line with the intercepts $-\frac{U_C}{U_D}$ and $\frac{U_C}{w_\infty}$ on the abscissa and ordinate axes, respectively.

This straight line generally has two common points with the curve $\Phi\left[\varkappa, \zeta_a, \left(\frac{f}{F}\right)_a\right]$ — in our case with the approximate curve $\Phi(\varkappa, \zeta_a)$ (points A and B in the figure). The values of $\varkappa$ pertaining to these two points ($\varkappa_A$ and $\varkappa_B$) yield the roots of equation (52). (Table II permits to find the roots without this graphical procedure, by interpolation.)

The fact that there are two values of $\varkappa$ capable of satisfying equation (52), seems rather striking at first sight, for it means that at given flow rates the drops can have two different velocities, i. e. two different holdups and two different interfacial surfaces are possible in spray towers. All the more surprising is this, as there are no published data to be found in the literature indicating that the lower one of the two different velocities has ever been observed, or rather recognized as such. It is easy, however, to account for this. Fig. 10 reveals that the lower $\varkappa$ value (in the figure : $\varkappa_B$), i. e. the lesser velocity value according to relation (49), is close to zero, and under such circumstances smooth operation of the tower can probably not be secured unless by the most careful procedure. Yet this lower velocity does undoubtedly exist and — as we shall see — often arises necessarily, even without being intentionally brought about.

6. Flooding and critical throughput

As the flow rate of either the continuous or the dispersed phase is increased, the two intersections of the straight line represented by the left-hand side of the equation and of the curve $\Phi\left[\varkappa, \zeta_a, \left(\frac{f}{F}\right)_a\right]$ approach each other more and more.

The maximum flow rates, at which throughput in the tower is still conceivable, are determined by the characteristics (i. e. the slope and the intercept on the ordinate axis) of that straight line, which possesses but one point common with the curve $\Phi\left[\varkappa, \zeta_a, \left(\frac{f}{F}\right)_a\right]$, i. e. touches the curve. [In Fig. 10 this is the line touching the $\Phi(\varkappa, \zeta_a)$ curve at point C.] From this it would follow that the flow rates determined by the characteristics of the tangent ought to agree with the critical flow rates.

Observations show that in spray towers of the Elgin design the agreement between them is satisfactory, but there appear deviations, sometimes considerable ones, in towers of the older design. The question may arise why equation (52) cannot be used unconditionally for the determination of the critical flow rates?

Let us first study equation (47), from which we started deriving expression (52). In equation (47) the mean velocity of the main body of continuous phase, characteristic of the whole tower has been applied for the velocity of continuous phase. Consequently, equation (52) derived from (47) is only suitable to compute data, which are termed means characteristic of the whole tower. Such are, e. g. the holdup and the interfacial surface.

But whenever those flow rates are studied, which induce flooding or critical state, the fact cannot be left out of consideration that, in spray towers not adequately designed, the velocity of the continuous phase may considerably exceed the mean, owing to some restriction in the cross section of the tower. Because of this here the drops are bound to move more slowly, than at any other place of the tower, wherefore in the region of this particular cross section a steady maximum of the holdup arises. As the flow rates are increased, the critical condition will obviously appear first at the restricted cross section, and this is why, when determining the critical flow rates, we must rely upon a relationship including the main body velocity of the continuous phase at the restricted cross section. This relation can be written analogously to equation (47)

$$w_D + \bar{w}_{Ct} = w. \tag{59}$$

Combining equations (49), (40), (16) and (59) we have finally

$$\frac{U_C - U_D\,[(1-a)+\zeta\,(\varphi-1)]}{a w_\infty} + \frac{U_D}{w_\infty}\,\varkappa = \frac{\varkappa - \left(\dfrac{\zeta\varphi}{a} - 1\right)}{\varkappa + 1} \cdot \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}_\infty}\left(\varkappa, \frac{f}{F}\right). \tag{60}$$

If the tower design is hydrodynamically perfect, there is no restriction of the cross section, consequently $a = 1$. In such a case only an outstanding value of φ may figure as a factor diminishing the critical flow rate of the phases. With careful operation and at high holdup even this outstanding value is not significant, and therefore equation (60) may practically always be substituted by equation (52). The Elgin tower is very satisfactory from the point of view of hydrodynamics, in spite of the fact that — as shown in Fig. 8*a* — the cross sectional restriction is not eliminated at the throat. Differences between the critical flow rates observed, and those calculated from equation (52), usually remain less than the errors of the measurements. On the other hand in towers of the older design cross sectional restriction caused by the distributor is considerable, wherefore the decrease in the critical throughput not infrequently exceeds 30%.

An additional reason, why equation (52) must be used for the calculation of critical flow rates in towers of the Elgin design, is that φ of equation (60) is as yet not more than a factor of uncertainty. Accordingly, equation (60) is of no great significance, but useful in making a few interesting comments connected with the behaviour of spray towers near the critical condition.

Increasing the flow rates, we arrive at values that still permit smooth operation for the most part of the tower, while at the restricted cross section the throughput stops for some instants under the effect of an outstanding φ value. Although a subsequent decrease in the φ value will generally restore throughput, the drops at the restricted cross section will not regain their former velocity, but henceforth will move at the lower one. This sudden change in the velocity of drops from the higher to the lower value is obviously due to the fact that the lower velocity is that, which is nearer the velocity pertaining to the critical point.

Owing to their reduced velocity, crowding of the drops can be observed at the restricted cross section, causing an increase in the velocity of the continuous phase flowing among them. Subsequent drops proceeding towards this cross section already meet this higher velocity of the continuous phase, so their own velocity is bound to decrease according to equation (59). But, since at given flow rates they can travel only at one of the two velocities corresponding to the two $\varkappa$ roots, their velocity does not decrease gradually, but falls suddenly to the lower value. Thus the drops,each in turn, will reduce the velocity of those in their wake. From this it is obvious that this process, once started at some section of the tower, cannot be stopped from extending over the entire intermediate zone.

Comparing all that has been said with Blanding and Elgin's comments on flooding, it will be easily understood that *flooding is really a sudden change in the velocity of drops of the dispersed phase from the higher to the lower value.*

These considerations at the same time offer a satisfactory explanation for the fact that flooding usually starts from the distributor in towers of the older design, but from the throat in Elgin towers. It seems possible that, in case of the latter, flooding could be somewhat retarded by having throat edges rounded off, as shown in Fig. 8b.

Operating the tower in the state of flooding would certainly result in highly increased mass transfer. Unfortunately, it is unlikely that such a state could be preserved steadily. With unfavourable conditions arising at the restricted cross section, flooding might come to an end even without any increase or decrease in the flow rate of phases. Should erratic motion of the drops occur even for a short while, this will be bound also to extend over the whole tower.

On the beginning of the erratic movement of drops the tower arrives at the critical condition and ceases to put through — at least the drops formed prior to this condition. Even though there be some measurements [3, 7], tending to prove that throughput can slightly be increased after reaching the critical condition, they find their explanation in that the rapid flow of continuous phase among the crowded drops in the spray chamber forces the drops to coalesce near the distributor face, and for these larger drops the critical flow rates are somewhat higher.

We can see then, why it was necessary to have the critical condition defined in addition to flooding and rejection, and why this is the most suitable to specify the limiting condition of a spray tower.

Let us now revert to the study of the critical throughput characteristics and, for the above reasons, perform it on the basis of equation (52).

The straight line defined by the left-hand side of equation (52) will be a tangent to the curve $\Phi\left[\varkappa, \zeta_a, \left(\frac{f}{F}\right)_a\right]$, if the slope of the straight line becomes equal to that of the tangent. On this condition we arrive at the equation defining the critical flow rate of the dispersed phase :

$$\frac{U_{DK}}{w_\infty} = \frac{\partial \Phi\left(\varkappa, \zeta, \frac{f}{F}\right)}{\partial \varkappa}. \tag{61}$$

Substitution into equation (52) gives a relationship for the critical flow rate of the continuous phase :

$$\frac{U_{CK}}{w_\infty} = \Phi\left(\varkappa, \zeta, \frac{f}{F}\right) - \varkappa \frac{\partial \Phi\left(\varkappa, \zeta, \frac{f}{F}\right)}{\partial \varkappa}. \tag{62}$$

Since neither (61), nor (62) can be solved for $\varkappa$, relation between U_{CK} and U_{DK} cannot be given by a single equation. The corresponding values of U_{CK} and U_{DK} may be tabulated by substituting identical values for $\varkappa$ into equations (61) and (62).

It is customary in the literature to treat the ratio of the critical flow rates, $\frac{U_{CK}}{U_{DK}}$, as an independent variable, instead of the critical flow rate of one of the phases. This procedure, as well as the use of logarithmic coordinates for plotting critical flow data, was suggested by COLBURN [28] and, despite Elgin's criticism [29], became general throughout the world.

The other suggestion of Colburn that the ratio $\frac{U_{DK}}{\Delta\varrho}$ should be regarded as dependent variable, has met with far less approval, because curves plotted on these coordinates spread markedly depending on the properties of the distributor and the phases (e. g. viscosity, interfacial tension).

Dividing equation (62) by equation (61) gives the term of the independent variable suggested by Colburn :

$$\frac{U_{CK}}{U_{DK}} = \frac{\Phi\left(\varkappa, \zeta, \frac{f}{F}\right)}{\frac{\partial \Phi\left(\varkappa, \zeta, \frac{f}{F}\right)}{\partial \varkappa}} - \varkappa \tag{63}$$

On the other hand, it appears more reasonable to take $\frac{U_{DK}}{w_\infty}$, termed by equation (61), for dependent variable instead of $\frac{U_{DK}}{\Delta\varrho}$.

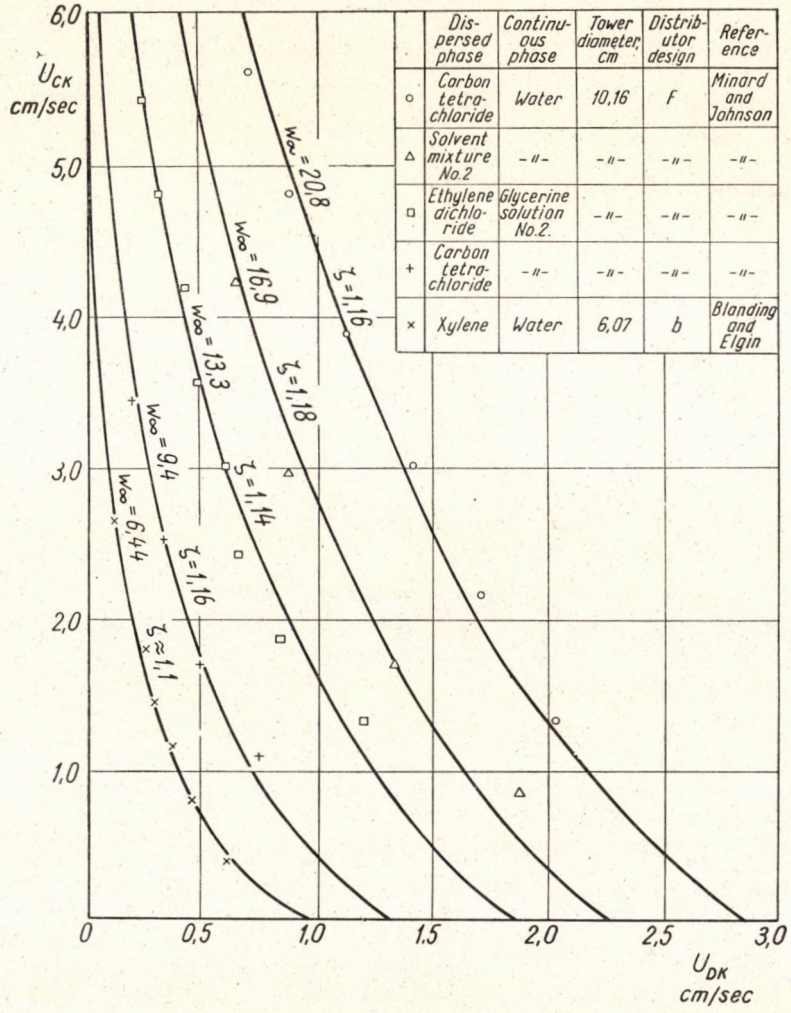


Fig. 11

The corresponding values of $\frac{U_{CK}}{U_{DK}}$, $\frac{U_{DK}}{w_\infty}$ and $\varkappa$ are also tabulated in Table II. The data have been computed on the basis of equation $\Phi \approx \Phi\ (\varkappa, \zeta)$ of approximate validity [see equation (58)].

TABLE II

x	$\frac{w}{w_\infty}(x)$	$\zeta = 1$			$\zeta = 1{,}1$			$\zeta = 1{,}2$			$\zeta = 1{,}3$			$\zeta = 1{,}4$			x
		$\Phi(x,\zeta)$	U_{CK}/U_{DK}	U_{DK}/w_∞	$\Phi(x,\zeta)$	U_{CK}/U_{DK}	U_{DK}/w_∞	$\Phi(x,\zeta)$	U_{CK}/U_{DK}	U_{DK}/w_∞	$\Phi(x,\zeta)$	U_{CK}/U_{DK}	U_{DK}/w_∞	$\Phi(x,\zeta)$	U_{CK}/U_{DK}	U_{DK}/w_∞	
0	0	0	0	0	0	0	$-\infty$	0	0	$-\infty$	0	0	$-\infty$	0	0	$-\infty$	0
0,25	0,2036	0,04073	−0,02362	0,1799	0,02444	−0,10884	0,1731	0,00815	−0,20102	0,1663	−0,00815	−0,25511	0,1595	−0,02444	−0,41002	0,1527	0,25
0,50	0,2540	0,08465	0,00011	0,1693	0,06772	−0,09993	0,1693	0,05079	−0,19996	0,1693	0,03386	−0,29998	0,1693	0,01693	−0,40000	0,1693	0,50
0,75	0,2916	0,1250	0,06534	0,1533	0,1083	−0,05149	0,1551	0,09165	−0,16566	0,1568	0,07499	−0,27727	0,1586	0,05832	−0,38640	0,1604	0,75
1,00	0,3227	0,1614	0,1681	0,1381	0,1452	0,03393	0,1405	0,1291	−0,09590	0,1428	0,1130	−0,22157	0,1451	0,09682	−0,34329	0,1474	1,00
1,25	0,3496	0,1942	0,3057	0,1248	0,1787	0,1538	0,1273	0,1631	0,00756	0,1297	0,1476	−0,13323	0,1322	0,1321	−0,26892	0,1346	1,25
1,50	0,3732	0,2239	0,4759	0,1133	0,2090	0,3059	0,1157	0,1941	0,1429	0,1181	0,1792	−0,01362	0,1205	0,1642	−0,16405	0,1229	1,50
1,75	0,3944	0,2510	0,6770	0,1034	0,2367	0,4889	0,1057	0,2223	0,3087	0,1080	0,2080	0,1359	0,1103	0,1936	−0,02982	0,1126	1,75
2,00	0,4137	0,2758	0,9079	0,09483	0,2620	0,7012	0,09699	0,2482	0,5035	0,09914	0,2344	0,3142	0,1013	0,2206	0,1327	0,1034	2,00
2,25	0,4312	0,2985	1,1674	0,08735	0,2852	0,9419	0,08937	0,2720	0,7263	0,09138	0,2587	0,5201	0,09340	0,2454	0,3226	0,09541	2,25
2,50	0,4473	0,3195	1,4545	0,08080	0,3067	1,2100	0,08268	0,2940	0,9764	0,08456	0,2812	0,7529	0,08644	0,2684	0,5389	0,08832	2,50
2,75	0,4622	0,3390	1,7686	0,07502	0,3267	1,5048	0,07677	0,3143	1,2527	0,07853	0,3020	1,0117	0,08028	0,2897	0,7810	0,08204	2,75
3,00	0,4761	0,3571	2,1089	0,06989	0,3452	1,8255	0,07153	0,3333	1,5548	0,07317	0,3214	1,2960	0,07481	0,3095	1,0483	0,07645	3,00
3,50	0,5012	0,3898	2,8658	0,06123	0,3786	2,5425	0,06266	0,3675	2,2337	0,06410	0,3564	1,9384	0,06553	0,3452	1,6558	0,06696	3,50
4,00	0,5232	0,4186	3,7213	0,05421	0,4081	3,3572	0,05547	0,3977	3,0092	0,05673	0,3872	2,6764	0,05799	0,3767	2,3577	0,05926	4,00
4,50	0,5429	0,4442	4,6721	0,04843	0,4343	4,2660	0,04955	0,4245	3,8779	0,05066	0,4146	3,5065	0,05178	0,4047	3,1508	0,05290	4,50
5,00	0,5606	0,4672	5,7156	0,04360	0,4578	5,2665	0,04459	0,4485	4,8372	0,04559	0,4391	4,4261	0,04659	0,4298	4,0324	0,04758	5,00
5,50	0,5766	0,4879	6,8492	0,03951	0,4791	6,3562	0,04041	0,4702	5,8846	0,04130	0,4613	5,4329	0,04219	0,4524	5,0001	0,04309	5,50
6,00	0,5913	0,5068	8,0710	0,03602	0,4983	7,5331	0,03682	0,4899	7,0183	0,03763	0,4814	6,5251	0,03844	0,4730	6,0523	0,03925	6,00
6,50	0,6046	0,5240	9,3793	0,03300	0,5160	8,7954	0,03373	0,5079	8,2364	0,03447	0,4998	7,7007	0,03520	0,4918	7,1868	0,03593	6,50
7,00	0,6170	0,5399	10,773	0,03038	0,5321	10,142	0,03104	0,5244	9,5377	0,03171	0,5167	8,9584	0,03238	0,5090	8,4026	0,03305	7,00
7,50	0,6284	0,5544	12,249	0,02807	0,5471	11,571	0,02869	0,5397	10,920	0,02930	0,5323	10,296	0,02991	0,5249	9,6978	0,03052	7,50
8,00	0,6390	0,5680	13,807	0,02604	0,5609	13,080	0,02661	0,5538	12,383	0,02717	0,5467	11,714	0,02773	0,5396	11,071	0,02829	8,00
8,50	0,6488	0,5805	15,446	0,02424	0,5737	14,669	0,02476	0,5669	13,924	0,02528	0,5600	13,209	0,02580	0,5532	12,522	0,02632	8,50
9,00	0,6580	0,5922	17,166	0,02263	0,5857	16,338	0,02311	0,5791	15,544	0,02359	0,5725	14,781	0,02407	0,5659	14,049	0,02455	9,00
9,50	0,6667	0,6032	18,963	0,02119	0,5968	18,084	0,02164	0,5905	17,240	0,02208	0,5841	16,430	0,02253	0,5778	15,651	0,02297	9,50
10,00	0,6748	0,6135	20,839	0,01989	0,6073	19,908	0,02031	0,6012	19,013	0,02072	0,5951	18,154	0,02114	0,5889	17,328	0,02155	10,00
11,00	0,6897	0,6322	24,820	0,01765	0,6264	23,781	0,01801	0,6207	22,783	0,01837	0,6150	21,823	0,01874	0,6092	20,900	0,01910	11,00
12,00	0,7030	0,6489	29,103	0,01579	0,6435	27,952	0,01611	0,6381	26,847	0,01643	0,6327	25,784	0,01674	0,6273	24,761	0,01706	12,00
13,00	0,7149	0,6639	33,679	0,01422	0,6588	32,415	0,01451	0,6537	31,199	0,01479	0,6485	30,029	0,01507	0,6434	28,902	0,01536	13,00
14,00	0,7258	0,6774	38,546	0,01289	0,6726	37,167	0,01314	0,6677	35,836	0,01340	0,6629	34,555	0,01365	0,6581	33,324	0,01391	14,00
15,00	0,7357	0,6897	43,696	0,01175	0,6851	42,195	0,01198	0,6805	40,748	0,01221	0,6759	39,357	0,01243	0,6713	38,014	0,01266	15,00
16,00	0,7448	0,7010	49,130	0,01076	0,6966	47,504	0,01097	0,6922	45,939	0,01118	0,6878	44,430	0,01138	0,6834	42,973	0,01159	16,00
17,00	0,7531	0,7113	54,839	0,009901	0,7071	53,087	0,01009	0,7029	51,399	0,01028	0,6987	49,774	0,01046	0,6945	48,202	0,01065	17,00
18,00	0,7608	0,7208	60,821	0,009145	0,7168	58,941	0,009316	0,7128	57,126	0,009488	0,7088	55,378	0,009659	0,7048	53,690	0,009831	18,00
19,00	0,7680	0,7296	67,073	0,008477	0,7258	65,062	0,008634	0,7219	63,122	0,008791	0,7181	61,244	0,008949	0,7142	59,438	0,009106	19,00
20,00	0,7747	0,7378	73,598	0,007882	0,7341	71,449	0,008027	0,7304	69,373	0,008172	0,7267	67,374	0,008317	0,7230	65,441	0,008462	20,00
25,00	0,8021	0,7713	110,10	0,005709	0,7682	107,22	0,005810	0,7651	104,45	0,005911	0,7620	101,77	0,006011	0,7690	99,193	0,006111	25,00
30,00	0,8227	0,7962	152,88	0,004354	0,7936	149,21	0,004428	0,7909	145,69	0,004502	0,7882	142,27	0,004576	0,7856	138,95	0,004650	30,00
35,00	0,8389	0,8156	201,69	0,003446	0,8132	197,18	0,003503	0,8109	192,79	0,003560	0,8086	188,61	0,003616	0,8062	184,49	0,003673	35,00
40,00	0,8519	0,8311	256,30	0,002805	0,8290	250,87	0,002850	0,8270	245,63	0,002895	0,8249	240,58	0,002940	0,8228	235,63	0,002985	40,00
45,00	0,8627	0,8439	316,53	0,002334	0,8420	310,11	0,002371	0,8402	304,04	0,002407	0,8383	298,05	0,002444	0,8364	292,15	0,002481	45,00
50,00	0,8717	0,8546	382,34	0,001977	0,8529	374,99	0,002007	0,8512	367,89	0,002037	0,8495	360,85	0,002068	0,8478	354,20	0,002097	50,00

The following figures may serve to illustrate the various methods of plotting critical flow rate data. Two figures in addition to predicted curves also show the points calculated from measured data. The agreement between the predicted and observed data is seen to be satisfactory. In some instances deviations proved to be due to errors of measurement.

(The measured data reported by Minard and Johnson generally refer to the beginning of rejection, and not of flooding. On this account, in accordance

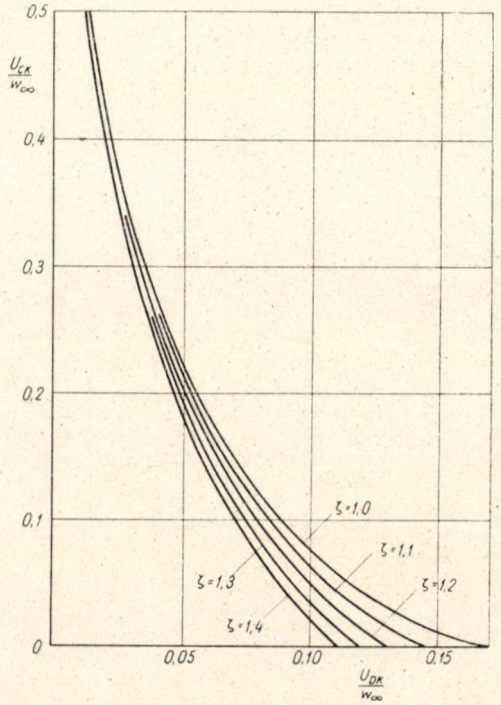


Fig. 12

with their measurement method, dispersed phase flow rate values have been reduced by 7% for the calculations.)

Fig. 11 presents a plot of U_{CK} against U_{DK} for various values of w_∞ and ζ.

Fig. 12 shows a new method of plotting. The family of curves represents a more logical system of corresponding values of the critical flow rate data.

Fig. 13 presents a method of plotting on modified Colburn coordinates. The points are seen to follow closely the course of the predicted curves, with the exception of those denoted by $+$ and $\times$.

Table III lists the characteristics of the distributors mentioned in the figures.

If corresponding values of the critical flow rates are known (e. g. from measurements), the curves in Fig. 12 or 13 permit a simple procedure of deter-

mining the terminal velocity of drops of the dispersed phase in an infinite medium. The values listed in column 13 of Table I were determined by this method. (With the knowledge of the terminal velocity the diameter of drops present in the tower can also be computed.)

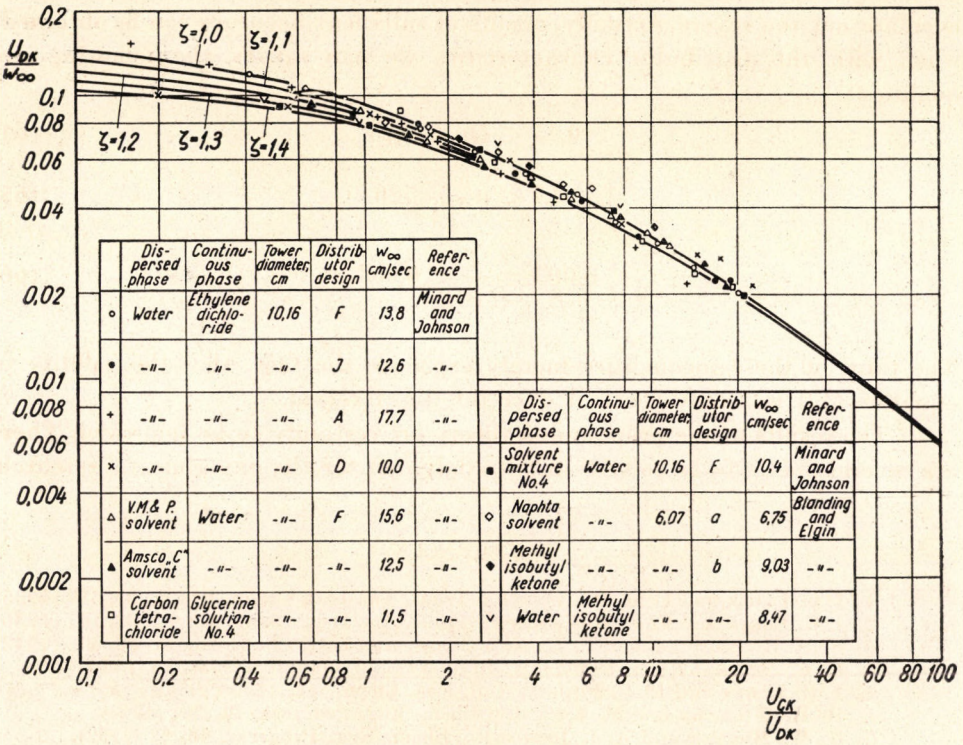


Fig. 13

TABLE III

Distributor design	No. of nozzles	Diameter of nozzles cm	Total cross sectional area of nozzles cm
A	97	0,305	7,087
D	97	0,102	0,793
F	97	1,193	2,838
G	97	0,226	3,891
H	97	0,264	5,310
J	97	0,152	1,760
a	100	0,107	0,899
b	?	0,107	?

Both the curves of Figs. 9, 12, or 13 and the values listed in Table II offer simple methods to determine all data connected with the throughput of a spray tower. It must be borne in mind, however, that these curves and values were obtained by means of simplifying assumptions and neglections, therefore they cannot be expected to hold well without restrictions. These restrictions, however, are not too severe. Actually, results of sufficient accuracy can be obtained, when with the distributor characteristics we can satisfy the following inequalities :

$$0{,}15 < D_N < 0{,}25 \tag{64}$$

$$0{,}1 < w_{DN} < 20 \tag{65}$$

$$0{,}003 < \frac{f}{F} < 0{,}008. \tag{66}$$

The third of these inequalities merely expresses the fact that the validity of equation (17) was only checked over the (66) interval.

The results of the propounded theory are certainly to be improved. There are several points to be solved in the study, left for the experimental research.

REFERENCES

1. J. C. Elgin and F. M. Browning : Trans. Am. Inst. Chem. Engrs., **31,** 639 (1935).
2. J. C. Elgin and F. M. Browning : Trans. Am. Inst. Chem. Engrs., **32,** 105 (1936).
3. F. H. Blanding and J. C. Elgin : Trans. Am. Inst. Chem. Engrs., **38,** 305 (1942).
4. *E. C. Экель* и *K. H. Шабалин:* Журнал прикладной химии, **23,** 155 (1950).
5. J. C. Elgin and H. C. Foust : Ind. Eng. Chem., **42,** 1127 (1950).
6. R. H. Wilhelm and M. Kwauk : Chem. Eng. Progress, **44,** 201 (1948).
7. G. W. Minard and A. I. Johnson : Chem. Eng. Progress, **48,** 62 (1952).
8. B. C. Sakiadis and A. I. Johnson : Ind. Eng. Chem., **46,** 1229 (1954).
9. R. E. Treybal : Liquid Extraction, 1st ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New-York, 1951.
10. J. C. Elgin : U. S. Pat. 2.364.892.
11. W. Siemes : Chemie-Ing.-Techn., **26,** 479 (1954).
12. W. Siemes : Chemie-Ing.-Techn., **26,** 614 (1954).
13. C. B. Hayworth and R. E. Treybal : Ind. Eng. Chem., **42,** 1174 (1950).
14. A. G. Kaszatkin : Alapműveletek, gépek és készülékek a vegyiparban [Basic processes, machines and equipment in chemical industry (in Hungarian)] p. 109. Nehézipari Könyv- és Folyóiratkiadó Vállalat, Budapest, 1953.
15. J. H. Perry : Chemical Engineers' Handbook, 2nd ed., p. 1850, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York and London.
16. H. Heywood : J. Imp. Coll. Chem. Eng. Soc., **4,** 17 (1948).
17. N. D. Papalekszi : Fizika, I., [Physics (in Hungarian)] p. 203. Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.
18. W. Ryczynski : Bull. Acad. Sci. (Cracovie), **1,** 40 (1911).
19. J. Hadamard : C. R. Acad. Sci. (Paris), **152,** 1735 (1911).
20. J. Hadamard : C. R. Acad. Sci. (Paris), **154,** 109 (1912).
21. W. N. Bond and D. A. Newton : Phil. Mag., **5,** 794 (1928).
22. W. Wien and F. Harms : Handbuch der Experimentalphysik. IV/2. Hydro- und Aerodynamik, Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H. Leipzig, 1932.
23. J. Gruber and M. Blahó : Folyadékok mechanikája [Hydrodynamics (in Hungarian)] p. 330. Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.

24. J. F. Richardson and W. N. Zaki : Trans. Inst. Chem. Engrs., **32,** 35 (1954).
25. J. Happel and N. Epstein : Ind. Eng. Chem., **46,** 1187 (1954).
26. S. Uchida : Rept. Inst. Sci. and Technol., Univ. Tokyo, **3,** 97 (1949), extracted in : Ind. Eng. Chem. **46,** 1194 (1954).
27. R. L. Datta : J. Imp. Coll. Chem. Eng. Soc., **4,** 157 (1948).
28. A. P. Colburn : Trans. Am. Inst. Chem. Engrs., **38,** 336 (1942).
29. J. C. Elgin : Trans. Am. Inst. Chem. Engrs., **38,** 337 (1942).

SUMMARY

A novel theory of throughput in extraction spray towers is propounded. In designing new towers, or determining and checking operational data of existing ones, this theory enables us to proceed independently of experimental data or special data in the literature.

Chapter 1 gives definition of some terms and a short general survey of the problems involved. Chapter 2 offers a simplified version of the Hayworth—Treybal formula for the determination of the size of drops leaving the distributor. Methods for calculation of the terminal velocity of single drops and drops travelling in groups, are also shown. In Chapter 3 a study is made of the portion occupied by the drops of dispersed phase out of the cross sectional area of the tower. These studies constitute a basis for Chapter 4, where the mean velocity of the main body of continuous phase, characteristic of the whole tower and of the most restricted cross section of the tower, are discussed. Chapter 5 contains a suggestion of a graphical method to determine the holdup and the interfacial surface between phases. There is demonstrated the fact that at given flow rates, drops of the dispersed phase can travel at two different velocities, i. e. two different holdups and two different interfacial surfaces between phases can be brought about. In Chapter 6 flooding is demonstrated to be nothing else but a sudden change in the velocity of drops of the dispersed phase from the higher to the lower value. The graphical method is being developed, and a procedure to determine the characteristics of the critical flow rates is suggested. A survey of the various methods of plotting critical flow rate data concludes the paper.

ТЕОРИЯ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ ОРОСИТЕЛЬНЫХ КОЛОНН ДЛЯ ЭКСТРАКЦИИ ЖИДКОСТЕЙ

Т. ХАРМАТИ

РЕЗЮМЕ

В общих чертах излагается новая теория пропускной способности оросительных колонн для экстракции жидкостей. Теория, с одной стороны, в области проектирования новых колонн, а с другой стороны, в области определения или же контроля производственных данных работающих колонн дает возможность рассматривать эти данные независимо от опытных и литературных данных. Первая глава посвящена определению используемых понятий, а также обзору различных групп вопросов. Во второй главе сообщается упрощенный вид того эмпирического уравнения Хайворта и Трейбела, который применим для определения размеров капель, отрывающихся от оросительной головки ; затем рассматривается вопрос предельных скоростей капель, движущихся изолированно и группами. В третьей главе исследуется вопрос величины занимаемой площади капель разделенной фазы от сечения колонны. Эти данные необходимы для исследований, излагаемых в четвертой главе. В процессе этих исследований разбирается вопрос характерной, с одной стороны, для всей колонны, а с другой, для наиболее узкого сечения колонны средней скорости основной массы сплошной фазы. В пятой главе приводится графический метод, который служит для определения хольдупа и поверхности соприкосновения фаз. Доказывается, что при данных потоках фаз капельки разделенной фазы могут двигаться с двоякой скоростью, то есть в колонне может иметь место двоякий хольдуп и между фазами двоякая поверхность соприкосновения. В шестой главе показано, что хольдуп является ничем иным, как переходом разделенной фазы с высших скоростей на низшие скорости. Вышеприведенный графический метод развивается дальше, и приводится методика определения показателей критического состояния. В завершении излагается методика графического построения соответствующих данных критических потоков фаз.

ÉTUDE SUR LE PASSAGE DE DÉBITS EN COLONNES D'EXTRACTION À DISPERSION

T. HARMATHY

RÉSUMÉ

L'étude présente une nouvelle théorie sur le passage de débits des colonnes d'extraction à dispersion. Cette théorie permet d'une part le calcul des colonnes nouvelles, d'autre part le contrôle des colonnes en opération, sans l'étude des données expérimentales ou spéciales publiées dans la littérature. Chapitre 1 contient la détermination de la nomenclature et un aperçu de l'ensemble des problèmes. Chapitre 2 présente une simplification de l'équation empirique de Hayworth—Treybal laquelle se prête aux calculs des dimensions des gouttes se séparant du distributeur de solvant. Ensuite la vitesse limitée des gouttes courant individuellement et en groupe est étudiée. Chapitre 3 examine la fraction de la section de colonne occupée par la phase dispersée. Cette dernière quantité est nécessaire à l'analyse (Chapitre 4) de la vitesse moyenne de masse principale de la phase continue, caractéristique d'une part de la colonne entière et d'autre part de la section la plus étroite de cette dernière. Chapitre 5 expose une méthode graphique de la détermination de la fraction de volume occupée par la phase dispersée et de la surface de contact. Il est démontré qu'aux débits de phases données, les gouttes peuvent avancer à deux vitesses différentes, c'est à dire que deux genres de la fraction volumétrique de phase dispersée et de la surface de contact peuvent être réalisés. Chapitre 6 démontre que l'engorgement n'est rien d'autre qu'une brusque transition des gouttes de la vitesse plus grande à la vitesse moindre. La susdite méthode graphique est développée, et le procédé de la détermination des caractéristiques de l'état critique est présenté. Finalement les méthodes de la représentation des valeurs correspondant des débits critiques (des vitesses d'engorgement) sont traitées.

THEORIE DES DURCHSATZES VON EXTRAKTIONSSPRÜHTÜRMEN

T. HARMATHY

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird eine neue Theorie der Durchsatzberechnung für Extraktionssprühtürme dargelegt. Aus diesen theoretischen Erwägungen lässt sich eine Methode entwickeln, die sich einerseits zum Entwurf neuer Kolonnentypen, anderseits zur Bestimmung der Betriebsangaben bereits funktionierender Kolonnen, sowie zu deren Kontrolle eignet und ausserdem die Verwendung experimenteller Angaben und einen Rückgriff auf die Fachliteratur unnötig macht. Abschnitt 1 enthält eine Definition der Begriffe, sowie eine kurze Übersicht über die Frage. Abschnitt 2 bietet eine vereinfachte Form der Hayworth—Treybal'schen Formel zur Berechnung der Dimensionen der von dem Düsenkopf abreissenden Tropfen, sowie die Methode zur Bestimmung der Grenzgeschwindigkeit der sich einzeln oder gruppenweise fortbewegenden Tropfen. Abschnitt 3 befasst sich mit der Berechnung der von den Tropfen der dispersen Phase besetzten Kolonnenquerschnitte. Deren Kenntnis wird in Abschnitt 4 notwendig, wenn die Durchflussgeschwindigkeit der Hauptmasse der kontinuierlichen Phase sowohl für die ganze Kolonne wie für deren engsten Querschnitt berechnet wird. In Abschnitt 5 wird eine graphische Methode zur Bestimmung des Holdups und der Berührungsfläche zwischen den Phasen geboten. Es wird nachgewiesen, dass bei gegebenen Phasendurchflussmengen die Tropfen der dispersen Phase zweierlei Geschwindigkeiten aufweisen können, dass also zweierlei Holdups sowie zweierlei Berührungsflächen zwischen den Phasen möglich sind. Abschnitt 6 bringt den Nachweis, dass Flooding mit dem Übertritt der Tropfen der dispersen Phase von der höheren zu der niedrigeren Geschwindigkeit gleichbedeutend ist. Die bereits behandelte graphische Methode wird weiterentwickelt und eine Methode zur Bestimmung der Kennzahlen des kritischen Zustandes vorgeführt. Zum Abschluss werden Darstellungsmethoden der kohärenten Werte der kritischen Phasendurchflussmenge besprochen.

DIE KNICKUNG IM LICHTE DER METHODE DER ELASTISCHEN PUNKTE

A. SCHWERTNER

[KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 12. Juli 1954]

1. Einleitung

Seit EULER im Jahre 1744 als erster das Knickproblem löste, kam es zu vielen Versuchen eine bessere und für die verschiedenen Arten von Trägern in gleicher Weise gültige Theorie der Knickung aufzustellen. Diese zahlreichen Arbeiten klärten die Frage der Knickung in vielen Richtungen, zur Ruhe gelangte aber die Frage nicht. In der Praxis wird auch heute noch zum grössten Teil die Theorie EULERS angewandt und in vielen Fällen mit der Hilfe von theoretisch abgeleiteten Näherungsformeln gearbeitet. Dies bringt Unsicherheiten mit sich und führt wegen der notwendigen Vorsicht zu Überdimensionierung.

Die Theorie der elastischen Punkte zur Berechnung von Trägern und Rahmen beleuchtet die Frage der Knickung von Stäben und Trägern von einer neuen Seite. Diese Methode ersetzt die Träger — im Falle von gewissen Belastungen — durch starre Stäbe, die durch elastische Punkte unterbrochen werden. Unter einem elastischen Punkte verstehen wir ein als beliebig klein vorstellbares Gehäuse mit Federn, wie es in Abb. 1c schematisch dargestellt ist.

Ein allgemein bekannter Typ des elastischen Punktes ist der sogenannte Punkt σ des einseitig eingespannten Trägers. Die vorliegende Abhandlung stützt sich hauptsächlich auf diese Grundlage, da die Methode der elastischen Punkte zur Berechnung von Trägern ein noch wenig bekanntes Thema ist. In der Abhandlung geht es nicht um eine alle Einzelheiten umfassende Lösung der Frage der Knickung, sondern um die Vorführung einer neuen, von der EULERschen Theorie vollkommen unabhängigen Behandlung der Frage, die imstande ist, die Knickung weitgehend zu klären und die Berechnungen zu vereinfachen.

Der Kragträger in Abb. 1a wird durch die Kraft P belastet. Dieser Träger knickt aus, wenn die Kraft P den kritischen Wert P_k erreicht. Ohne Knickung sind die Formänderungen des Stabes durch jene Bewegungen der Federn des Punktes σ eindeutig bestimmt, die an Hand der Abb. 1b bestimmt werden können. Die gestrichelt gezeichneten Stäbe der Abbildung sind vollkommen starr. Im dargestellten Falle wird das starre Stabsystem an einer Stelle durch einen elastischen Punkt unterbrochen. In den weiteren Abbildungen werden die elastischen Punkte mit einem oder zwei nebeneinander gelegenen Punkte bezeichnet. Im letzteren Falle stellt jeder Punkt einen Teil des Federgehäuses dar. Die beiden Teile des Federgehäuses können durch Deformation der Federn ihre gegenseitige Lage verändern. Im Falle von Abb. 1b ist der durch σ_A bezeichnete Teil des Federgehäuses starr festgehalten, so dass nur der durch σ_B bezeichnete Teil des Gehäuses und der mit ihm verbundene starre Stab Bewegungen ausführen können.

Das Federgehäuse hat drei Federn und jede von ihnen wird nur durch jene Kraft beansprucht, die in ihrer eigenen Richtung wirkt. Die Lage des Punktes σ und die mit den Richtungen der Federn identischen Richtungen h und v sind so gewählt, dass die Bewegungen des Trägers in einfacher Weise durch die Bewegungen im Punkte σ bestimmt werden. Die Konstanten der in den Hauptrichtungen h und v liegenden Spiralfedern und die der Torsionsfedern werden durch J_k, J_v und φ bezeichnet. Die aus Abb. 1a ersichtlichen drei Komponenten der Kraft P im Punkte σ sind

$$H = P\cos\alpha \qquad V = P\sin\alpha \qquad M = P\,.\,p \tag{1}$$

und die auf den festgehaltenen Punkt σ_A bezogene Bewegung des Punktes σ_B in den Richtungen h und v sowie seine Drehung sind:

$$\Delta h = H\,.\,J_h \qquad \Delta v = V\,.\,J_v \qquad \Delta\varphi = M\,.\,\varphi \tag{2}$$

Die Federkonstanten sind Trägheitsmomente der elastischen Kräfte dk = ds/EI auf die Hauptachsen bzw. die Summen der elastischen Kräfte. Es sind :

$$J_h = \int_A^B y^2 \frac{ds}{EJ}$$

$$J_v = \int_A^B x^2 \frac{ds}{EJ} \tag{2a}$$

$$\varphi = \int_A^B \frac{ds}{EJ}$$

Die Richtung der Kraftkomponenten ist durch die Anschauung bestimmt, wobei die Bewegung in derselben Richtung erfolgt.

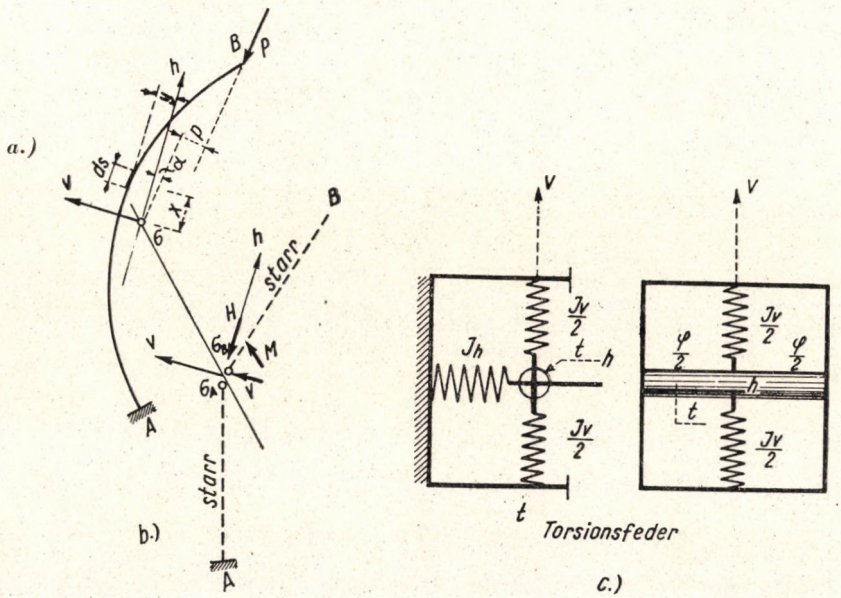


Abb. 1

Es wird hier behauptet, dass die kritische Knickkraft P_k mit Hilfe des in Abb. 1b dargestellten, von einem elastischen Punkte unterbrochenen starren Stabsystems bestimmt werden kann.

2. Die Knickung des geraden Stabes

Abb. 2 zeigt diejenigen Grundfälle der Knickung des geraden Stabes, die von den Theorien in erster Linie behandelt werden. Sie Stäbe sind im geknickten Zustande dargestellt. Ist der Querschnitt der Stäbe konstant, so sind die kritischen Kräfte nach EULER

$$\left.\begin{aligned} P_{Ka} &= \frac{\pi^2}{4}\frac{EJ}{l^2} = 2{,}47\,\frac{EJ}{l^2} \\ P_{Kb} &= \pi^2\frac{EJ}{l^2} = 9{,}87\,\frac{EJ}{l^2} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} P_{Kc} &= 4\pi^2\frac{EJ}{l^2} = 39{,}48\,\frac{EJ}{l^2} \\ P_{Kd} &= \qquad\quad = 20{,}16\,\frac{EJ}{l^2} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Der elastische Punkt des geraden Stabes mit gleichbleibendem Querschnitt (Abb. 3) befindet sich in der Mitte des Stabes. Die Konstanten des elastischen Punktes sind

$$\varphi = \int_A^B \frac{dx}{EI} = \frac{l}{EI} \tag{4}$$

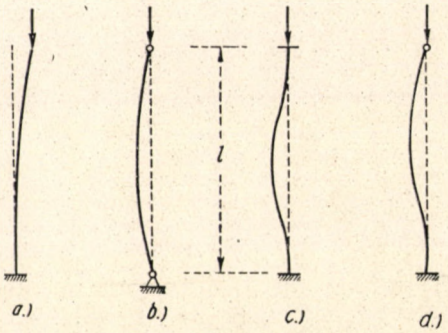


Abb. 2

$$J_n = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{x^2}{EI}\,dx = \frac{l^3}{EI} \tag{5}$$

und $J_v = 0$. Letzteres bedeutet, das keine Feder vorhanden ist, dass sich also die Länge des Stabes nicht ändert, wie gross auch die in der Richtung v wirkende Kraft sein mag. Dies bedeutet, dass auch hier — wie in anderen Fällen der Statik — die aus reinen Druckkräften stammenden Längenänderungen des Stabes vernachlässigt werden. In den Formeln bedeuten E den Elastizitätsmodul des Materials, I das Trägheitsmoment des Trägerquerschnittes, bezogen auf die für die Ausbiegung ausschlaggebende Achse.

Im folgenden sollen die zwei ersten Grundfälle der Knickung mit der Methode der elastischen Punkte behandelt werden. Von einer eingehenden Diskussion der übrigen Fälle wird an dieser Stelle abgesehen, da diese Diskussionen keine weiteren prinzipiellen Fragen aufwerfen würden und da sie ohne eingehende Kenntnis der Methode der elastische Punkte — besonders der Reihen- und Parallelschaltung von elastischen Punkten — ohnehin uninteressant sind.

a) *Die Knickung des an einem Ende eingespannten, am anderen Ende freien Stabes.*

Abb. 3b zeigt einen starren Stab, der von einem elastischen Punkt unterbrochen ist. Wird der Punkt B nach B' verschoben, so wirkt die belastende Kraft mit der Exzentrizität e_0. Die Verschiebung der Kraft geschieht allein durch eine Drehbewegung im Punkte σ. Die starren Stabteile $A\sigma$ und $B\sigma$ verdrehen sich zueinander um den Winkel

$$\Delta\varphi_0 = \frac{e_0}{a}$$

wobei die Drehung nach Formel (2) ein Moment von der Grösse

$$M = \frac{\Delta\varphi_0}{\varphi} = \frac{e_0}{a\varphi} \tag{6}$$

benötigt.

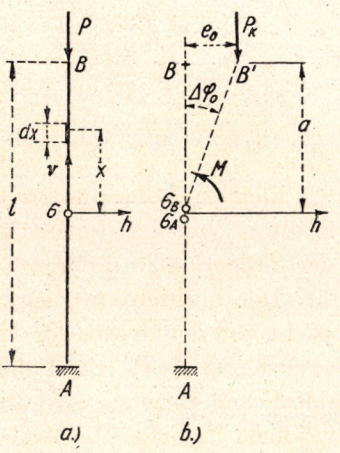


Abb. 3

Zur Durchführung der Bewegung e_0 wird also die Torsionsfeder im Punkte σ mit dem Momente M gespannt. Wird nun der Zwang beseitigt, so liefert die Feder das Moment in die Gegenrichtung. In Abb. 3b weist das Moment diese Richtung auf. Wenn B unbelastet oder sein Wert

$$P < \frac{M}{e_0}$$

ist, so wird der Stabteil $B\sigma$ durch die Feder in Schwingungen versetzt, wenn diese auch über eine Masse verfügt. Nach der Dämpfung gelangt der Stab in seine

ursprüngliche gerade Lage zurück. Die Kraft besitzt aber einen kritischen Wert P_k, bei dem die beschriebene Schwingung und die Rückkehr des Stabes in eine Gerade nicht mehr eintritt. Die kritische Kraft wird durch eine statische Gleichgewichtsuntersuchung ermittelt. Im elastischen Punkte ist der im Winkel $\Delta\varphi_0$ gebrochene Träger (Abb. 3b) dann im Gleichgewicht, wenn

$$P_K \cdot e_0 = M \tag{7}$$

ist. Mit dem unter Gl. (6) angegebenen Werte des Momentes gilt allgemein

$$\boxed{P_K = \frac{1}{a\varphi}.} \tag{8a}$$

und im Spezialfalle des Stabes mit unveränderlichem Querschnitt

$$\boxed{P_K = 2\,\frac{EJ}{l^2}.} \tag{8b}$$

Dieser Wert ist um 19% kleiner als der aus der Eulerschen Formel berechnete, er ist aber ebenso wie dieser von der Exzentrizität e_0 unabhängig. Unter dieser Last befindet sich der Träger im indifferenten Gleichgewichtszustande, an der Grenze der Labilität. Der indifferente Zustand wird dadurch gekennzeichnet, dass das Gleichgewicht von der Grösse der Exzentrizität e_0 unabhängig ist. Unter einer etwas grösseren Kraft als P_k tritt Labilität und Bruch ein.

Die Annahme eines plötzlichen Bruches wird aber durch die Experimente widerlegt. Dies hat seine natürliche Ursache. Die Methode der elastischen Punkte — wie im allgemeinen alle unseren Trägerberechnungen — versteht unter Biegungsmoment das auf den ursprünglichen Ort des Querschnittsschwerpunktes bezogene Moment. Im Falle einer Knickung unter einer zentrischen Last ist aber der Arm der Kraft klein und wird durch die Formänderung des Trägers wesentlich verändert. Dies führt dazu, dass bei Experimenten der Bruch der Träger infolge von Knickung kein plötzliches, sondern nur ein relativ schnell vor sich gehendes Ereignis ist. Diese Vernachlässigung kann eventuell als Nachteil der Theorie bewertet werden, wenn sie der Eulerschen Theorie gegenübergestellt wird; denn diese versteht das Biegungsmoment auf die Lage des Querschnittsschwerpunktes *nach* der Deformation. Unserer Meinung nach ist aber ein auf dieser Überlegung beruhender Vergleich unrichtig. Die geistreiche Eulersche Theorie ist auf die Annahme der Formänderung angewiesen, die kritische

Kraft ist jedoch davon völlig unabhängig, denn der Träger befindet sich unter der kritischen Last an der Grenze der Labilität, gleichgültig ob er deformiert ist oder nicht.

Die Gefahr der Knickung ist unabhängig davon, ob sie wirklich eintritt oder nicht. Die Gefahr wird durch den indifferenten Zustand des Gleichgewichts gekennzeichnet. Die Knickung tritt in diesem Zustande solange nicht ein, als keine Ursache dazu besteht, wie z.B. eine anfängliche Exzentrizität der Kraft oder die Erzitterung des Trägers. Diese Argumente lassen die hier erörterte neue Auffassung der Knickung unbedingt richtiger erscheinen als die Eulersche. Der Zustand, in dem sich der Träger unter der kritischen Last befindet, wird durch die Diskussion in Abschnitt 3 auf dynamischer Grundlage, also auch von einer anderen Seite beleuchtet. Vorgreifend auf das Ergebnis dieser Diskussion sei schon hier festgestellt, *dass die Gefahr der Knickung dann besteht, wenn der Träger in den indifferenten Gleichgewichtszustand gelangt, was auch dadurch gekennzeichnet ist, dass in diesem Zustand seine Eigenschwingungszahl Null beträgt.*

Es bedarf keiner weiteren Erklärung, dass sich der Wert der kritischen Kraft nicht ändert, wenn die Kraft exzentrisch wirkt. Das Moment $P.e$ der exzentrisch wirkenden Kraft wird nämlich bei jeder Exzentrizität durch ein ebenso grosses, jedoch in der entgegengesetzten Richtung wirkendes Moment im Punkte σ im Gleichgewicht gehalten. Dieses Moment kann weder eine Labilität verursachen noch kann sie das Eintreten der Labilität beeinflussen.

Die bekannte Tatsache, dass ein Störmoment keinen Einfluss auf die kritische Kraft hat, wird durch die Methode des elastischen Punktes anschaulich gemacht. Dies war, solange man auf der Grundlage der Eulerschen Theorie stand, eine lange umstrittene Frage, und der Einklang zwischen Theorie und Praxis konnte hierbei sozusagen nur durch mathematische Kunstgriffe aufrechterhalten werden.

Wenn die Frage auf Grund der Eulerschen Theorie behandelt wird, kann das Verfahren, nach dem das Moment auf die Lage des Querschnittsschwerpunktes nach der Deformation verstanden wird, durch nichts gerechtfertigt werden, da die durch die Knickung verursachte kleine Bewegung den Kraftarm der Kraft nicht wesentlich beeinflussen kann. Im Falle von grossen Formänderungen hingegen besitzt die Theorie Eulers ebensowenig Gültigkeit wie die Methode der elastischen Punkte.

Die kritische Kraft ist durch die Formel (8a) vollständig bestimmt, falls der Querschnitt des Stabes veränderlich ist. Bei Stäben, die keine auf ihre Richtung senkrechte Symmetrieachse besitzen, befindet sich der Punkt σ nicht im Halbierungspunkt des Stabes, sondern in der Schwerlinie der elastischen Kräfte $dx|EJ$.

Die Knickung eines einseitig eingespannten, sich am anderen Ende frei bewegenden, statisch bestimmten Stabes und ihre kritische Last ist der Fall,

auf den sich kompliziertere Fälle aufbauen lassen. Aus diesem Grunde wird dieser Stab hier als Grundfall bezeichnet.

Schliesslich sei bemerkt — dies ist zum Verständnis der weiteren Ausführungen wesentlich —, dass die geknickte Form des Stabes nach der neuen Theorie nicht mehr die Eulersche Sinuslinie ist, sondern eine Kurve, die durch das die elastischen Kräfte umschliessende Seileck bestimmt ist. Bei Stäben mit gerader Achse und gleichbleibendem Querschnitt ist der auf die Längeneinheit bezogene Wert $\varkappa = 1/E.J$ der elastischen Kraft konstant, und der Träger nimmt im Laufe der Knickung eine Parabelform an. Mit anderen Worten: die Form des ausgebogenen Trägers ist die gleiche wie die eines Trägers, dessen jeder Querschnitt durch das konstante Moment $M = P_k \cdot e_0$ belastet ist. Im Falle der zentrischen Belastung trifft dies nicht einmal annähernd zu; dies ist aber sozusagen voll-

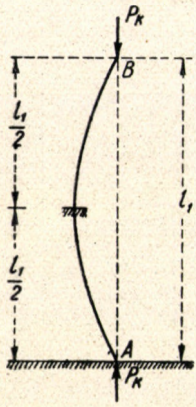


Abb. 4

ständig richtig, wenn die Kraft P_k exzentrisch wirkt und die Formänderung des Trägers im Vergleich zur Exzentrizität vernachlässigt werden kann.

Das Ausmass der Exzentrizität hat keinen Einfluss auf die kritische Last, und so kann die geknickte Form des Trägers mit Recht als von der Sinuslinie abweichend angenommen werden. Es unterliegt aber auch keinem Zweifel, dass die experimentell ermittelte kritische Last des zentrisch belasteten Stabes näher zum Eulerschen Wert als zu dem durch die neue Theorie ermittelten liegt und dass sich dies ändert, wenn die Kraft exzentrisch wirkt.

b) *Die Knickung des an beiden Enden gelenkig gelagerten Stabes*

Die Knickung des an beiden Enden gelenkig gelagerten Stabes kann in einer oder in mehreren Wellen eintreten.

Erfolgt die Knickung *in einer Welle* und ist der Stab symmetrisch, so folgt die kritische Kraft aus dem vorher behandelten Fall ohne weiteres im Sinne von

Abb. 4 aus den Formeln (8a) und (8b), wenn dort $a = a_1$ bzw. $l = l_1/2$ eingesetzt wird. Im Falle des veränderlichen Querschnittes ist

$$P_K = \frac{1}{a_1 \varphi} \tag{9a}$$

Es bedeutet φ die Konstante der Torsionsfeder des halben Stabes und a_1 den Abstand des für den halben Stab verstandenen Punktes σ vom Gelenk.

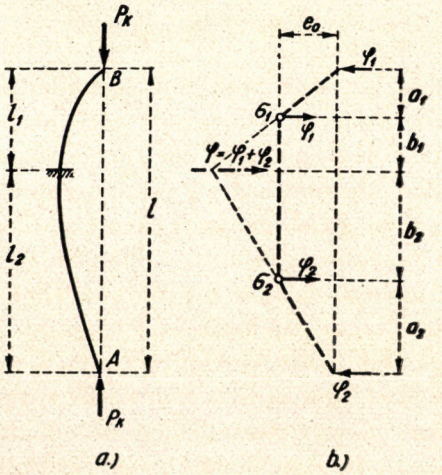


Abb. 5

Im Falle des gleichbleibenden Querschnittes ist

$$P_K = \frac{2EJ}{\left(\frac{l_1}{2}\right)^2} = \frac{8EJ}{l_1^2} \tag{9b}$$

Anders ist der Fall, wenn sich der Querschnitt des Stabes vom Gelenk A gegen das Gelenk B zu in beliebiger Art verändert und der Stab keine auf die Richtung des Stabes senkrechte Symmetrieachse hat. In diesem Falle muss man den Stab so in die zwei Abschnitte l_1 und l_2 teilen (siehe Abb. 5a), dass die unter a) erörterte Berechnung für beide Stababschnitte die gleiche kritische Kraft liefert.

Die noch unbekannten elastischen Punkte der Stababschnitte l_1 und l_2 mögen sich in der Entfernung a_1 bzw. a_2 von den Gelenken B bzw. A befinden. Die Federkonstanten der elastischen Punkte sind φ_1 und J_{h1} bzw. φ_2 und J_{h2}. Es sind nun — nach Formel (9a) — folgende Bedingungen zu erfüllen :

$$P_k = \frac{1}{a_1 \varphi_1} = \frac{1}{a_2 \varphi_2} \tag{10}$$

$$a_1 \varphi_1 = a_2 \varphi_2 = e_0$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{a_2}{a_1} . \tag{11}$$

Hieraus folgt, dass bei dem Stab mit veränderlichem Querschnitt die grösste Ausbiegung sich in jenem Querschnitt entwickelt, der den Stab so in zwei Abschnitte teilt, dass die Konstanten der Torsionsfedern der Stababschnitte verkehrt proportional den Abständen der Punkte σ von den Gelenken sind. Die kritische Last des Stabes ist gleich der kritischen Last der Stababschnitte, und diese können nach den Ausführungen unter a) berechnet werden.

Es ist leicht einzusehen, dass es die Wirkungslinie der Resultante $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, also die Resultante der horizontal wirkend angenommenen elastischen Kräfte ist, die den Stab in die Abschnitte l_1 und l_2 teilt. Diese Feststellung bedarf keines Beweises. Der Beweis ist schon darin enthalten, dass so wie im Grundfalle auch bei den aus zwei Grundfällen aufgebauten, an beiden Enden gelenkig gelagerten Trägern die Knicklinie ein auf die elastischen Kräfte gezeichnetes Seileck, d. h. die Momentenlinie der elastischen Kräfte am Einfeldträger ist. Die Winkeldrehungen in den Gelenkpunkten A und B sind durch die Bedingung (10) vollständig bestimmt und sie sind gleich den Reaktionen aus der Belastung. Mit solchen Reaktionen, die also den Wert φ_1 und φ_2 haben, ist die Scherkraft in der Wirkungslinie der Kraft $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ Null, das Moment erreicht also dort einen Maximalwert. Dieser Querschnitt verschiebt sich ohne Drehung während der Ausbiegung parallel zu sich selbst, er verhält sich also derart, als ob er eingespannt wäre.

c) *Die Knickung des beiderseitig eingespannten Stabes*

Wie in dem Falle des an beiden Enden gelenkig gelagerten und in zwei Wellen ausgeknickten Stabes, kann der Stab auch im vorliegenden Falle in vier derartige Teile geteilt werden, deren eines Ende eingespannt und deren anderes Ende frei ist. In Abb. 6 sind diese mit 1, 2, 3 und 4 bezeichnet. Ist der Querschnitt des Stabes überall konstant, so kann die kritische Last aus den Ergebnissen der vorher besprochenen Fälle abgeleitet werden.

Der mittlere, $\frac{l}{2}$ lange Stababschnitt knickt so aus, wie der beiderseitig gelenkig gelagerte Stab. Die kritische Last muss sich also mit der Substitution $l_1 = \frac{l}{2}$ aus der Formel (9b) herleiten lassen. Aus dieser Überlegung ergibt sich

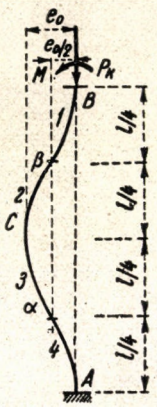


Abb. 6

die kritische Last des beiderseitig eingespannten Stabes mit gleichbleibendem Querschnitt zu

$$P_k = \frac{8EJ}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{32EJ}{l^2}. \tag{12}$$

Die kritische Last wird durch die Methode der elastischen Punkte auch in jenem Falle auf eine einfache Art geliefert, wo sich der Querschnitt des Stabes beliebig ändert. Der geknickte Stab weist in jedem Falle vier einseitig eingespannte Träger auf (Abb. 7a). Jeder von diesen besitzt einen elastischen Punkt σ. Abb. 7b veranschaulicht die durch die elastischen Punkte unterbrochene starre Stabkette im geknickten Zustande.

Die kritische Last aller einseitig eingespannten Träger muss den gleichen Wert aufweisen, woraus sich dann nach Formel (8a) die kritische Last zu

$$P_k = \frac{1}{a_1 \varphi_1} = \frac{1}{a_2 \varphi_2} = \frac{1}{a_3 \varphi_3} = \frac{1}{a_4 \varphi_4} \tag{13}$$

ergibt. Die Werte φ_n sind die Konstanten der Torsionfeder der einseitig eingespannten Träger l_n. Die freien Endpunkte sind die Inflexionspunkte α und β

des ausgeknickten Trägers in Abb. 6 und 7. Die Abstände a_n der Punkte σ_n sind von den freien Enden an zu verstehen.

Die Besprechung soll nun nicht bei Berücksichtigung aller Einzelheiten weitergeführt werden, denn alles weitere ergibt sich von selbst aus einfachen statischen und geometrischen Überlegungen. Die auf die elastischen Gewichte

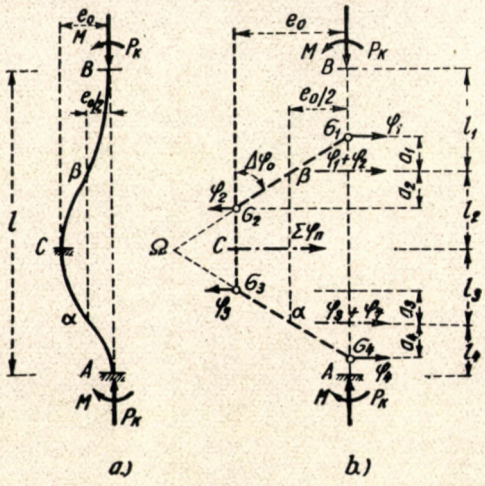


Abb. 7

gezeichnete Seilkurve liefert nämlich auch in diesem Falle die Knicklinie des Stabes.

3. Die Knickung des krummachsigen Kragträgers

Abb. 8a zeigt einen Kragträger, der mit beliebigen Kräften P belastet ist und in dessen Querschnitten die vorherrschende Beanspruchung der exzentrische Zug und Druck sind. Hierbei ist die Biegung massgebend und der Druck — wenn ein solcher auftritt — kann keine Knickung verursachen. Wenn aber zur Belastung P eine an der Stelle B angreifende Kraft hinzutritt, die die Momente vermindert und die Querschnitte stark auf Druck beansprucht, dann besteht für den Kragträger die Gefahr der Knickung. Mit den in Abb. 8a dargestellten Kräften liegt eine solche Lage vor. Die Kräfte befinden sich im Gleichgewicht, was durch das geschlossene Krafteck in Abb. 8c bewiesen wird. Es soll nun untersucht werden, bei welcher Steigerung des Kräftesystems eine Knickung eintritt.

Schon die Formulierung der Frage weist darauf hin, dass es sich um die Bestimmung einer Verhältniszahl handelt. Deshalb ist bei diesem Knickproblem nur der kritische Wert einer einzigen Kraft fraglich, und es unterliegt keinem

Zweifel, dass dies die mit B bezeichnete und am freien Ende des Kragträgers angreifende Kraft ist, denn sie war es ja, die den Träger in die Gefahr der Knikkung brachte.

Der in A eingespannte Kragträger besitzt einen elastischen Punkt σ. Der eine Teil des Federgehäuses ist mit dem Punkte A, der andere mit dem Punkte B durch starre Stäbe verbunden. Wenn sich im Federgehäuse keine Federn befinden, dann ist jede Bewegung des Punktes B durch diejenigen Bewegungen vollständig bestimmt, die die beiden Teile des Federgehäuses im Verhältnis zueinander ausführen.

Eine solche Bewegung kann auch jenen Federkräften zugeschrieben werden, von denen zwei in den Richtungen der Hauptachsen des elastischen Punktes

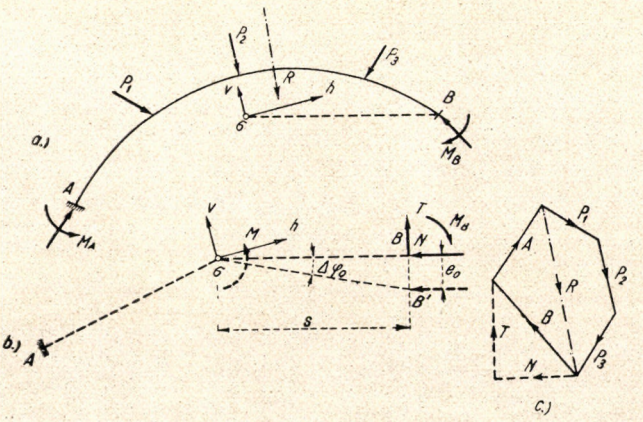


Abb. 8

σ wirken und von denen die dritte ein Moment ist, das durch eine Torsionsfeder ausgeübt wird. Die Konstanten der in den Hauptachsenrichtungen angebrachten Federn sind J_h und J_v, die Konstante der Torsionsfeder ist φ.

Die Dynamik der Träger lehrt,* dass ein Träger unter der Belastung P — falls es sich um seine Schwingungen handelt — vollständig durch das in Abb. 10b dargestellte, von dem elastischen Punkte σ unterbrochene, starre Stabsystem ersetzt werden kann. Im Falle solcher Untersuchungen gehören zu

* Die dynamische Grundlage hierfür gibt die Abhandlung von A. SCHWERTNER: «Dynamik der Träger bei Berechnung mit der Methode der elastischen Punkte». (Acta Technica Hung., Band X, Heft 1—2. S. 155/186.) Es sei jedoch bemerkt, dass die dynamische Seite der Knickung schon bei anderen Verfassern Gegenstand von richtigen Vermutungen war. Ein diesbezüglicher Hinweis findet sich bei LEHR: Schwingungstechnik, Band I, Abschnitt 11. (Julius Springer Berlin, 1930.)

den Federn jedoch auch Massen, und diese Massen kann man aus den Massen m der Belastungen laut folgender Formel berechnen :

$$\begin{aligned} m_{rh}^{P} &= \sum \left(\eta_{vh}^{2} + \eta_{hh}^{2}\right) m \\ m_{ro}^{P} &= \sum \left(\eta_{vv}^{2} + \eta_{hv}^{2}\right) m \\ m_{rm}^{P} &= \sum \left(\eta_{vm}^{2} + \eta_{hm}^{2}\right) m \end{aligned} \tag{14}$$

In diesen Formeln sind die Werte η die vertikalen und horizontalen Bewegungskomponenten an den Stellen der Massen des Trägers, die durch die Bewegungen von der Grösse 1 im Punkte σ in den Hauptachsenrichtungen und in der Drehrichtung verursacht werden. Der erste Index weist auf die vertikale (v) oder horizontale (h) Richtung der Bewegungskomponenten hin, der zweite bezeichnet jene Hauptachsenrichtung bzw. im Falle m die Drehrichtung, in der die Bewegung von der Grösse 1 im Punkte σ erfolgte.

Es lässt sich nun die gemachte Behauptung beweisen, dass die Last P allein keine Ursache der Knickung sein kann. Denn zu was für eine Schwingung man auch immer die Federn im Punkte σ zwingt, so wird deren freie Schwingung durch nichts gehemmt, abgesehen von der Dämpfung, die infolge von Innenwiderständen während der Schwingung auftritt. Die Schwingungen bilden aber nicht die Ursache dafür, dass der Stab seine Stabilität verliert.

Während der Schwingungen ist jedoch die Masse im Punkte B bzw. die mit ihr verbundene Last in einer Ausnahmsstellung. Um dies zu beleuchten, seien die in Abb. 9 dargestellten mathematischen Pendel untersucht, deren Drehungspunkt sich in σ befindet und bei denen bei B die nach der Formel

$$B = m_B\, g \tag{15}$$

aus der Masse m_B und der Gravitationsbeschleunigung $g = 9{,}809$ m sec^{-2} berechnete Last B wirkt. Eine Besonderheit dieses Pendels ist, dass der Drehpunkt ein Federgehäuse ist, dessen Federn die Konstanten J_h, J_v, φ und die Massen m_{rh}, m_{ro}, m_{rm} besitzen. Deshalb gerät der Pendel auch ohne die Masse m_B in Schwingungen. Seine Schwingung setzt sich aus drei Teilen zusammen : sie folgen den Hauptachsen h und v bzw. der Drehrichtung. Die Eigenschwingungszahlen sind

$$\nu_h = \sqrt{\frac{1}{J_h\, m_{rh}^{P}}} \qquad \nu_v = \sqrt{\frac{1}{J_o\, m_{ro}^{P}}} \qquad \nu_m = \sqrt{\frac{1}{\varphi\, m_{rm}^{P}}} \tag{16}$$

Bei dem in Abb. 9 dargestellten Pendel ist für den behandelten Fall nur der Wert von ν_m von Interesse.

Es schlage der Pendel in Abb. 9a um den Winkel $\Delta\varphi_0$ aus und im Federgehäuse befinde sich vorläufig keine Feder ($\varphi = \infty$). Wenn die Länge des mathematischen Pendels a beträgt, dann verlaufen die Schwingungen nach der wohlbekannten Formel

$$\nu = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\frac{g}{a}}\,. \tag{17}$$

Hier bedeutet T die Periode und ν die Winkelgeschwindigkeit bzw. Eigenschwingungszahl der harmonischen Schwingung. Diese ist — wie man sieht — unabhängig von der Masse und von

dem Winkel $\Delta\varphi_0$, doch ist die Formel nur für kleine Ausschläge gültig. Nun sei untersucht, wie dieser Pendel durch eine im Federgehäuse des Punktes σ angebrachte Masse und durch eine Torsionsfeder ersetzt werden kann.

Es besteht kein Zweifel, wie gross die gesuchte Masse ist. Die letzte der Formeln (14) gibt hierauf die Antwort. Nach ihr ist:

$$m_{rm}^{B} = \eta^2 m_B = a^2 m_B \tag{18}$$

denn $\eta = a$ ist die Bewegung im Punkte B, die sich aus der Drehung vom Werte 1 im Punkte σ ergibt. Zur gesuchten Konstante der Torsionsfeder gelangt man dadurch, dass man die Ergebnisse in (16) und (17) einander gleichsetzt. Es wird also gefordert, dass bei Berücksichtigung der Masse m_{rm}^{B} und der gesuchten Konstante φ_i der Torsionsfeder

$$\sqrt{\frac{1}{\varphi_i m_{rm}^{B}}} = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

werde. Aus obiger Gleichung folgt

$$\varphi_i = \frac{a}{g m_{rm}^{B}} = \frac{a}{g a^2 m_B} = \frac{1}{aB} . \tag{19}$$

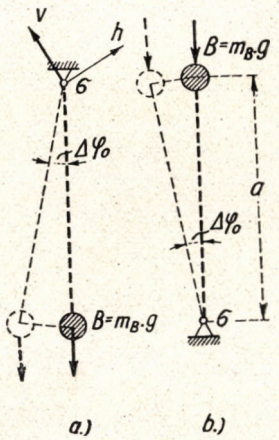


Abb. 9

Wenn man dem Federgehäuse des Punktes σ der Abb. 9a Federn und Massen zuschreibt, die die Federkonstanten und Massen aus den Kräften P und B vereinigen, dann bleiben die Werte J_h, J_o, m_{rh}^{P}, m_{rv}^{P} unverändert und es ist

$$m_{rm} = m_{r}^{P}{}_{m} + m_{r}^{B}{}_{m}$$

Zwei Federn müssen parallel geschaltet werden, in welchem Falle

$$\frac{1}{\varphi_l} = \frac{1}{\varphi} + \frac{a}{g} = \frac{g + a\varphi}{g\varphi}$$

ist. Man kann aber auch die Masse m^P_{rm} mit ihrem unveränderten Werte in die Berechnung einführen, in diesem Falle is jedoch die Konstante der Torsionsfeder

$$\frac{1}{\varphi_t} = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi_i} = \frac{1}{\varphi} + aB = \frac{1 + a\varphi B}{\varphi} . \tag{20}$$

Die Eigenschwingungszahl dieses Pendels ist

$$\nu = \sqrt{\frac{1}{\varphi_t m^P_{rm}}} = \sqrt{\frac{a\varphi B + 1}{\varphi m^P_{rm}}} . \tag{21}$$

Es bedarf keiner weiteren Erklärung, dass bei dem Pendel in Abb. 9b die Kraft B die Schwingungen der Torsionsfeder im Punkte σ hemmt, so dass in diesem Falle

$$\frac{1}{\varphi_t} = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi_i} = \frac{1 - a\varphi B}{\varphi}$$

ist. Die Eigenschwingungszahl dieses Pendels is dann

$$\nu = \sqrt{\frac{a\varphi B - 1}{\varphi m^P_{rm}}} . \tag{23}$$

Dieser Pendel wird schwingungsunfähig, wenn der Zähler des Bruches unter dem Wurzelzeichen Null wird. Dieser Fall tritt dann ein, wenn

$$B_k = \frac{1}{a\varphi} \tag{24}$$

Wenn die kritische Kraft B_k wirkt, befindet sich der Pendel im indifferenten Gleichgewichtszustande, wobei eine kleine Steigerung der Kraft genügt, um Labilität zu verursachen, wonach dann der Pendel die stabile Lage nach Abb. 9a einzunehmen bestrebt ist. Streng genommen besteht aber der indifferente Zustand nur bei kleinen Ausschlägen $\Delta\varphi_0$, denn für grössere gelten die Formeln des mathematischen Pendels nicht.

Nach dieser erläuternden Abschweifung sei wieder die ursprüngliche Frage der Knickung des krummachsigen Stabes untersucht, also der in Abb. 8b dargestellte, durch einen elastischen Punkt unterbrochene starre Stab. Die Kraft B wurde in Komponenten zerlegt, von denen die eine (N) die durch die Punkte σ und B bestimmte Richtung aufweist und die andere (T) auf sie senkrecht steht. Die Kraft T und das Moment M können die Schwingungen der Federn im Punkte σ ebensowenig beeinflussen wie die Kräfte P. Sowohl die

Kraft N wie auch die Kraft T verursachen bleibende Ausschläge des Federgehäuseteiles σ_B und rufen zusammen mit dem Moment auch eine bleibende Drehung hervor. Solche Bewegungen werden dort auch von den Kräften P hervorgerufen. Hierdurch verschiebt und verdreht sich der Stab als Pendel um einen kleinen Wert, doch wird das Wesen des Pendels durch diese Bewegung nicht verändert.

Kritisch wirkt am Pendel nur die Kraft N, und zwar so wie die Kraft B in Abb. 9b. Der einzige Unterschied ist, dass die Kraft B durch das Gravitationsfeld hervorgerufen wird, während die Kraft N das Ergebnis einer anderen Wirkung ist. Im übrigen wirkt aber die Kraft in beiden Fällen unter den gleichen Umständen auf den Pendel, und es ist daher zweifellos, dass der einseitig eingespannte, am anderen Ende frei bewegliche krummachsige Stab dann ausknickt, wenn die an seinem freien Ende angreifende Kraft eine Komponente in der Richtung nach σ von der Grösse

$$N_k = \frac{1}{a\varphi} \tag{25}$$

hat. Diese Kraft ist unabhängig von den übrigen Lasten des Trägers. Der Kragträger kann aber bei jeder Last P enden, d. h. die Stababschnitte AP_1, AP_2 und AP_3 müssen gesondert auf Knickung untersucht werden.

Es sei hier betont, dass es sich hier um die Anwendung von Formeln und Grundsätzen des mathematischen Pendels handelte. Es wurde jede Masse den Federn des Punktes σ zugeschrieben, mit Ausnahme jener, die man aus der in der Richtung $B\sigma$ wirkenden Kraft durch Division mit einer beliebigen Beschleunigung g erhält. Diese Masse befindet sich in einer Ausnahmslage ; denn sie wird durch kleine Drehungen im Punkte σ in der Richtung der Beschleunigung g nicht bewegt. Deswegen fehlt sie als Masse in der Formel der Eigenschwingungszahl und spielt nur als Kraft eine Rolle.

Die Diskussion auf dynamischer Grundlage hat die Frage der Knickung von einer neuen Seite beleuchtet. Im Wesen handelt es sich jedoch lediglich um die schon wohlbekannte einfache Gleichgewichtsuntersuchung. Wenn der Punkt B der Abb. 8b mit der kleinen Bewegung e_0 in den Punkt B′ verschoben wird, kann dies durch die Anwendung eines Momentes

$$M = \frac{\Delta\varphi_0}{\varphi}$$

im Punkte σ durch äusseren Zwang erfolgen. Es kann aber $\Delta\varphi_0$ beliebig klein sein und so ist

$$\Delta\varphi_0 = \frac{e_0}{a},$$

wo a die Länge des starren Stabes mit den Endpunkten σ und B bedeutet.

Nach der Beseitigung des Zwanges wirkt das Moment M in der entgegengesetzten Richtung als ursprünglich (in Abb. 10b ist das Moment bei σ mit dieser Richtung dargestellt), und der verschobene Punkt B kehrt in seine ursprüngliche Lage zurück, wenn

$$M > Ne_0$$

ist. Der Träger gerät in Knickgefahr, wenn mit der kritischen Kraft

$$N_k e_0 = M = \frac{e_0}{a \cdot \varphi}$$

gilt. Aus dieser Gleichung ergibt sich, in Übereinstimmung mit der Gleichung (25),

$$N_k = \frac{1}{a \cdot \varphi}$$

Die Knickung des Trägers tritt mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein, unabhängig davon, ob die Formänderung den Träger weiter krümmt oder seine Krümmung vermindert, denn die Annahme von $\Delta\varphi_0$ in der entgegengesetzten Richtung ändert das Ergebnis in keiner Weise. Dies ist eine Feststellung, die zum Verständnis der Knickung von Bögen überaus wichtig ist. Bei dieser Frage spielt der einseitig eingespannte, am anderen Ende freie Träger ebenso die Rolle des Grundfalles wie der gerade Kragträger, von dem als Grundfall die Knickung der verschieden gestützten Träger abgeleitet wurde.

Wird die Frage der Knickung von Bögen mit der Methode des elastischen Punktes behandelt, so sind die Ableitungen zur Bestimmung der kritischen Kraft ebenso einfach wie bei dem geradachsigen Stab. Eine andere Frage ist es, ob sich die Befriedigung der Bedingungen ebenso einfach gestaltet. Diese Frage sei aber hier nicht weiter untersucht, da sie das Wesen der neuen Knicktheorie nicht berührt.

4. Die kritische Last bei Überschreitung der Proportionalitätsgrenze durch die Spannung

In den vorstehenden Ausführungen wurde stillschweigend angenommen, dass der Träger auch unter der kritischen Last noch vollkommen elastisch ist. Von den Federn des elastischen Punktes und insbesondere von der Torsionsfeder wurde vorausgesetzt, dass bei ihr das Moment M selbst unter der kritischen Last der Winkeländerung $\Delta\varphi_0$ proportional, also

$$M = \frac{\Delta\varphi_0}{\varphi} \tag{26}$$

ist, wo φ eine Konstante darstellt. Diese Voraussetzung ist aber selten erfüllt. In den meisten Fällen überschreitet die Spannung schon unter der kritischen Last im ganzen Träger oder in gewissen Teilen des Trägers die Proportionalitätsgrenze des Materials, in welchem Falle zu den elastischen Deformationen noch plastische, bleibende Deformationen hinzutreten. Dadurch wird die kritische Last wesentlich beeinflusst. Diese Tatsache wurde durch die Experimente von TETMAJER und durch die Theorien von ENGESSER und KÁRMÁN entsprechend beleuchtet. Im weiteren sollen nur ihre Feststellungen entsprechend umgewertet und die Frage von einer neuen Seite betrachtet werden.

Das Verhältnis der elastischen Längenänderung zur plastischen ist bei den verschiedenen Materialien und selbst bei demselben Material starken Änderungen unterworfen. Deshalb sollen im Laufe der weiteren Ausführungen in erster Linie Grundsätze niedergelegt werden. Als Grundlage für die weitere Diskussion dient ein Träger aus einem Material mit bestimmter Proportionalitäts- und Fliessgrenze, bei dem sich das Druckdiagramm zwischen diesen Grenzen einer gegebenen Kurve entsprechend ändert (Abb. 10a). Es sei weiterhin angenommen, dass die elastischen Längenänderungen auch zwischen den Proportionalitäts- und Fliessgrenzen demselben Gesetze gehorchen wie im Falle von Spannungen unter der Proportionalitätsgrenze. Es soll also

$$\sigma = E\varepsilon'$$

gelten, wenn ε' den elastischen und ε'' den bleibenden Teil der ganzen Längenänderung ε bezeichnet. Schliesslich sei angenommen, dass das Material — wenn es einmal über die Proportionalitätsgrenze belastet war — unter erneuten Belastungen bis zur Grenze der vorhergehenden Belastung vollkommen elastisch arbeitet.

Die gestellten Bedingungen werden am besten durch die Stahlarten der Eisenkonstruktionen erfüllt ; bei diesen ist an der Fliessgrenze nach Versuchen $\varepsilon'_f = \varepsilon''_f = 2‰$.

Wenn der zentrisch gedrückte Stab der Abb. 10b mit einer die Proportionalitätsgrenze σ_a überschreitenden Spannung belastet, d. h. $\sigma > \sigma_a$ ist, dann kann für das Folgende die kritische Kraft in zwei Teile

$$P_k = P_{ka} + \Delta P_k \tag{27}$$

zerlegt werden.

Hier bedeutet P_{ka} jene kritische Kraft, die unter reinen elastischen Spannungen entsteht. Sie gehorcht der Formel

$$P_{ka} = \frac{1}{a \cdot \varphi}$$

und ihr Extremwert ist

$$P_{ka} = F_{\min} \cdot \sigma_a \,. \tag{28}$$

Zu diesem Ergebnis tritt der Wert ΔP_k dann hinzu, wenn — mit dem kleinsten Querschnitte $F_{\min}$ des Stabes gerechnet —

$$\sigma = \frac{P_k}{F_{\min}} = \frac{1}{a \cdot \varphi \cdot F_{\min}} > \sigma_a$$

ist.

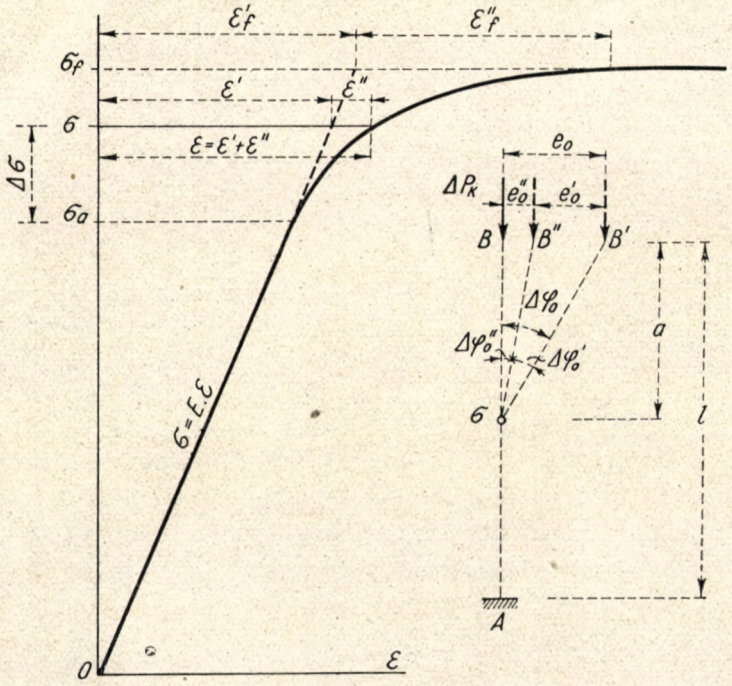


Abb. 10

Der Teil P_{ka} der kritischen Kraft wird durch keine Störmomente beeinflusst, und an dieser Tatsache ändert auch nichts, dass bei weiteren Belastungen Spannungen über der Proportionalitätsgrenze auftreten ; dies ist deswegen der Fall, weil das Material in der Zone zwischen Proportionalitäts- und Fliessgrenze nach dem gleichen Gesetze elastisch ist wie unterhalb der Proportionalitätsgrenze.

Die Stabilisation der Kraft P_{ka} wird durch das Teilmoment $\Delta M'$ der Torsionsfeder des Federgehäuses im Punkte σ bewirkt. Der durch einen elastischen Punkt unterbrochene starre Stab verliert im Falle der zusätzlichen Last

ΔP_k solange nicht seine Stabilität, als die aus der Ablenkung e_0 folgenden Ansprüche des Gleichgewichtes (Abb. 10b) kleiner sind als das Moment

$$\Delta M'' = M - \Delta M' = \frac{e_0}{a \cdot \varphi} - F_{\min}\, \sigma_A\, e_0$$

der Torsionsfeder.

Unter der Kraft ΔP_k erleidet das Material bereits bleibende Formänderungen, wenn der Punkt B im Sinne der Abb. 10b nach B' verschoben wird. Die Winkeländerung im Punkte σ, die durch den Wert e_0 der Verschiebung bestimmt ist, kann in zwei Teile zerlegt werden :

$$\Delta\varphi_0 = \Delta\varphi_0' + \Delta\varphi_0'' , \tag{29}$$

wo das eine Glied elastischen, das andere bleibenden Formänderungen zugeschrieben wird. Die Gefahr der Knickung droht solange nicht, als das durch die Formel (29) bestimmte Moment $\Delta M''$ sowohl das im Sinne der Abb. 10b wirkende Moment

$$\Delta M_1'' = \Delta P_k \cdot e_0$$

zu überwinden als auch den schon bleibend verbogenen Stab gerade zu richten imstande ist.

Diese letztere Arbeit geht in einem vollkommen elastischen Zustande des Stabes vor sich, denn nach unserer Annahme verhält sich das schon einmal über seine Proportionalitätsgrenze hinaus beanspruchte Material bei einer erneuten Belastung bis zu dieser Grenze vollkommen elastisch. Aus diesem Grunde — und wenn der Winkel $\Delta\varphi_0''$ bekannt wäre — kann das zum Geraderichten notwendige Teilmoment nach der Formel

$$\Delta M_2'' = \frac{\Delta\varphi_0''}{\varphi}$$

bestimmt werden.

Setzt man die beiden letzteren Ergebnisse in Gl. (29) ein, so gelangt man unter der Voraussetzung eines Stabes mit gleichbleibendem Querschnitt zur Gleichung

$$\frac{e_0}{a \cdot \varphi} - F\, \sigma_h\, e_0 = \Delta P_k\, e_0 + \frac{\Delta\varphi_0''}{\varphi} .$$

Die Annahme ist logisch, dass bei Spannungen über der Proportionalitätsgrenze das Verhältnis zwischen dem Winkel $\Delta\varphi_0''$ und der ganzen Abweichung $\Delta\varphi_0$

gleich dem Verhältnis $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon}$ ist, also aus dem Diagramm der Abb. 10a ermittelt werden kann. Es gilt demnach

$$\Delta\varphi_0'' = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon}\Delta\varphi_0 = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon}\cdot\frac{e_0}{a}.$$

Wenn man diesen Wert in die vorhergehende Gleichung einsetzt, erhält man nach Kürzung mit e_0

$$\Delta P_k = \frac{1}{a\cdot\varphi} - F\sigma_a - \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'\cdot a\cdot\varphi}. \tag{30}$$

Im Sinne der Gl. (27) erhält man, wenn man auch die Gl. (28) in Betracht zieht, für die gesuchte kritische Kraft die Formel

$$\boxed{P_k = \frac{1}{a\cdot\varphi} - \frac{1}{a\cdot\varphi'},} \tag{31}$$

wo

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi' &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon''}\varphi = \int\frac{dx}{E'\cdot J}\\ E' &= \frac{\varepsilon''}{\varepsilon}\cdot E.\end{aligned}} \tag{32}$$

Die Formel (31) ist nicht unbeschränkt gültig. Es wird nämlich gefordert, dass

$$P_k \leqq F\cdot\sigma_F \tag{33}$$

sei. Dies bedarf keiner weiteren Erklärung, da die Erstarrungszone nach dem Fliessen nicht berücksichtigt wird und da die kritische Last nicht grösser sein kann als diejenige, die der Stab ohne Knickung zu tragen vermag.

Die Formel (31) lässt sich nur auf Grund von vorherigen Proben anwenden. Dies erfolgt so, dass man die Last P_k schätzt und die Spannung $\sigma = P_k/F$ berechnet ; in Kenntnis dieser Werte ermittelt man aus dem Diagramm der Abb. 10a die Verhältniszahl $\frac{\varepsilon}{\varepsilon''}$ und damit den Wert von φ'. Mit diesem gibt Gl.

(31) einen Wert für P_k und mit ihr muss die Rechnung wiederholt werden, falls der so gewonnene Wert für P_k mit dem geschätzten Wert nicht übereinstimmt.

Für die Praxis bedeutet die Formel (31) nur eine neue Erkenntnis, nicht aber eine Änderung, wenn man das Ergebnis der Versuche TETMAJERS zum Ausgangspunkt weiterer Betrachtungen macht. In diesem Falle ergibt sich nämlich aus Gl. (31) nach Division mit F

$$\sigma_K = \frac{1}{a \cdot F \cdot \varphi} - \frac{1}{a \cdot F \cdot \varphi'} = f(\lambda) \cdot$$

Hier ist f (λ) die bekannte Formel TETMAJERS, in der $\lambda = \frac{l}{i}$ die Schlankheit bedeutet. Die Gleichung liefert für den reziproken Wert φ':

$$\frac{1}{\varphi'} = \frac{1}{\varphi} - a \cdot F \cdot f(\lambda) \ .$$

Die Formel (31) besitzt auch im Falle eines Stabes oder Trägers mit veränderlichem Querschnitt Gültigkeit, doch bedarf das bei Gl. (32) Gesagte noch einer Erklärung. Es seien gegeben: ein solcher Stab von veränderlichem Querschnitt, seine Belastung P und die gegen Knicken geforderte Sicherheit mit dem Werte der Sicherheitszahl n. Die Frage ist nun, ob die Kraft $n \cdot P$ grösser oder kleiner als P_k oder ihr gleich ist.

Der Stab ist auf Knicken richtig dimensioniert, wenn

$$n \cdot P \leqq P_K$$

ist. Im Falle der Gleichheit lassen sich die Spannungen σ der Querschnitte aus der Kraft $n \cdot P$ berechnen. Dann wird für jeden Stababschnitt Δx oder dx auf Grund der Formel (32) aus dem Spannungsdiagramm ein Wert E' ermittelt. Der Federwiderstand φ' wird in diesem Falle durch eine der Formeln

$$\varphi' = \int \frac{dx}{E'J} \qquad \text{oder} \qquad \varphi' = \sum \frac{\Delta x}{E'J} \tag{34}$$

geliefert. Ist die auf Grund dieses Wertes nach Gl. (31) bestimmte kritische Kraft kleiner als die Kraft $n \cdot P$ oder ihr gleich, so ist der Stab entsprechend.

Im Falle von bleibenden Formänderungen sind die Störmomente nicht mehr gleichgültig. Wenn die Spannung im Material bei Einbeziehung der Störmomente die Fliessgrenze überschreitet, wird unter ihrem Einfluss der Punkt B (Abb. 10b) von seinem ursprünglichen Orte bleibend verschoben. Die

Druckkraft P wirkt dann exzentrisch, es treten auch grössere Spannungen auf als die mit der Formel P/F berechneten und die bleibenden Formänderungen nehmen zu. Dies bedeutet wiederum, dass das zweite Glied in der Formel (31) zunimmt. Da bei den Druckstäben in der technischen Praxis Exzentrizitäten immer zu erwarten sind, ist eine Modifizierung der Formel (31) auf die Gestalt

$$P_k = \frac{1}{a \,.\, \varphi} - \frac{n_1}{a \cdot \varphi'}, \tag{35}$$

zu empfehlen; hier ist $n_1 > 1$ eine Zahl, die die Unsicherheit der Berechnung berücksichtigt. Der Wert dieser Zahl lässt sich allein durch Überlegungen nicht ermitteln.

Schliesslich sei noch eine dynamische Feststellung besprochen. Die Forme (31) kann auf die Form

$$P_k = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi'}\right] = m_p \cdot g$$

gebracht werden. Hier bedeutet m_p eine Masse, die die Gravitationsbeschleunigung g bestimmt. In dem in Klammern stehenden Ausdruck erkennt man die Parallelschaltung zweier Federn, die gegeneinander arbeiten. Die Schaltung zeitigt eine Feder, wobei der reziproke Wert ihrer Federkonstanten

$$\frac{1}{\varphi_1} = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi'}$$

ist. Die Eigenschwingungszahl dieser Feder Gl. (16) lautet:

$$\nu = \sqrt{\frac{1}{\varphi_i m_p}}. \tag{36}$$

Die gegenwärtige hochentwickelte Messtechnik ermöglicht es, den Wert von ν leicht zu ermitteln. Daher kann aus der Formel (36) bei einer Untersuchung im Laboratorium, wenn φ_i bekannt ist, und bei dem zweifelhaft belasteten Stabe einer technischen Konstruktion — in Kenntnis von φ_i — der Wert von m_p und dann von $P = m_p \cdot g$ ermittelt werden. In jedem Falle bedeutet $\nu = 0$ Knickung.

5. Zusammenfassende Auswertung

Die in den Formeln (31) und (32) enthaltenen Ergebnisse gelten sowohl für die sogenannte elastische als auch für die plastische Knickung. Bei dem zentrisch belasteten Stabe mit gleichbleibendem Querschnitte sind diese Knickfälle durch die Proportionalitätsgrenze des Materials scharf voneinander getrennt. Man unterscheidet also eine elastische bzw. plastische Knickung, je nachdem ob die aus der kritischen Kraft berechnete Spannung kleiner oder grösser ist als die Proportionalitätsgrenze des Materials. Im elastischen Zustande ist $\varepsilon'' = 0$ und $\varphi' = \infty$ und das zweite Glied in Gl. (31) Null.

Im plastischen Zustande wurde von der Annahme ausgegangen, dass

$$\Delta\varphi_0'' = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon}\Delta\varphi_0 = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon}\frac{e_0}{a} \tag{37}$$

ist. Die Richtigkeit dieser Annahme kann vielleicht bestritten werden. Schon deshalb ist es also zu untersuchen, wie sich diese Ergebnisse unseren bisherigen Kenntnissen gegenüber verhalten. Die beste Vergleichbasis stellt der an beiden Enden gelenkig gelagerte, zentrisch belastete gerade Stab mit gleichbleibendem Querschnitt dar, denn die Technik betrachtet diesen als Grundfall, auf den die übrigen Fälle aufgebaut sind.

Wie allgemein bekannt ist die kritische Spannung als Funktion der Schlankheit $\lambda = l/i$. Zum Vergleiche wird die Formel (31) auf diese Form gebracht. Man dividiert die Formel (31) durch den Querschnitt F und erhält

$$\sigma_K = \frac{P_k}{F} = \frac{1}{a \cdot \varphi \cdot F} - \frac{1}{a \cdot \varphi' \cdot F},$$

In dieser Formel ist im gegebenen Falle

$$a\varphi = \frac{l^2}{8 \cdot E \cdot J} \qquad a\varphi' = \frac{1}{8}\frac{l^2}{\frac{\varepsilon''}{\varepsilon} EJ}$$

und mit diesen Werten erhält man

$$\sigma_K = \frac{8EJ}{l^2 F} - \frac{8\varepsilon'' EJ}{\varepsilon l^2 F}.$$

Indem man die Werte

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} \qquad \lambda = \frac{l}{i} \qquad \varrho = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon}$$

einsetzt, gelangt man zu

$$\sigma_K = \frac{8E}{\lambda^2}(1-\varrho)\,. \tag{38}$$

Dieses Ergebnis dient zum Vergleich mit dem in der Technik allgemein bekannten und benutzten Zusammenhange zwischen σ_k und λ.

An der Grenze der elastischen und der plastischen Knickung ist die kritische Spannung durch die Spannung der Proportionalitätsgrenze gegeben. Beim Weichstahl mit der Fliessgrenze $\sigma_F = 2400$ kg/cm² betrachtet die heutige Technik $\lambda = 100$ oder einen zu diesem naheliegenden Wert als zur Spannung an der Proportionalitätsgrenze gehörig. Die EULERsche Formel

$$\sigma_K = 9{,}87\,\frac{E}{\lambda^2} \tag{39}$$

liefert, wenn $E = 2\,100\,000$ kg/cm² der Wert des Elastizitätsmodulus ist, für die Proportionalitätsgrenze

$$\sigma_a = \sigma_K = 9{,}87\,\frac{2\,100\,000}{100^2} = 2073 \text{ kg/cm}^2.$$

Übrigens ist die Formel (39) in Abb. 11 durch die Hyperbel mit der Aufschrift »EULER« dargestellt. An diese schliesst sich an der Stelle $\lambda = 100$ eine gebrochene Linie an, die bei $\lambda = 40$ einen Knick aufweist. Die Linie zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = 40$ ist horizontal. Dies bedeutet, dass Stäbe mit solchen Schlankheiten so stark sind, dass sie nur unter Spannungen über der Fliessgrenze ausknicken würden. Solche Spannungen sind aber unmöglich.

Bezugnehmend auf die Versuche TETMAJERS sei angenommen, dass sich die kritische Spannung mit dem Wert der Schlankheit gemäss einer Geraden ändert, wenn man λ-Werte zwischen 100 und 40 annimmt.

Die Formel (38) ist in Abb. 11 durch die Linie mit der Aufschrift »Methode der elastischen Punkte« dargestellt. Bei der Ermittlung der Linie wurde angenommen, dass die Proportionalitätsgrenze der Stahles $\sigma_a = 1800$ kg/cm² beträgt. Diese Proportionalitätsgrenze ist wahrscheinlicher als der aus der EULERschen Formel berechnete Wert von 2070 kg/cm². An der Proportionalitätsgrenze gilt

$$\lambda = \sqrt{\frac{8E}{\sigma a}} = \sqrt{\frac{1\,680\,000}{1800}} = 96{,}6$$

Der Faktor ϱ wird an der Fliessgrenze durch eine Überlegung ermittelt, deren sich die Technik auch in anderen Fällen bedient. Dieser Annahme gemäss ist an der Fliessgrenze die bleibende Längenänderung (Abb. 11a).

$$\varepsilon_F'' = 2{}^0/_{00}$$

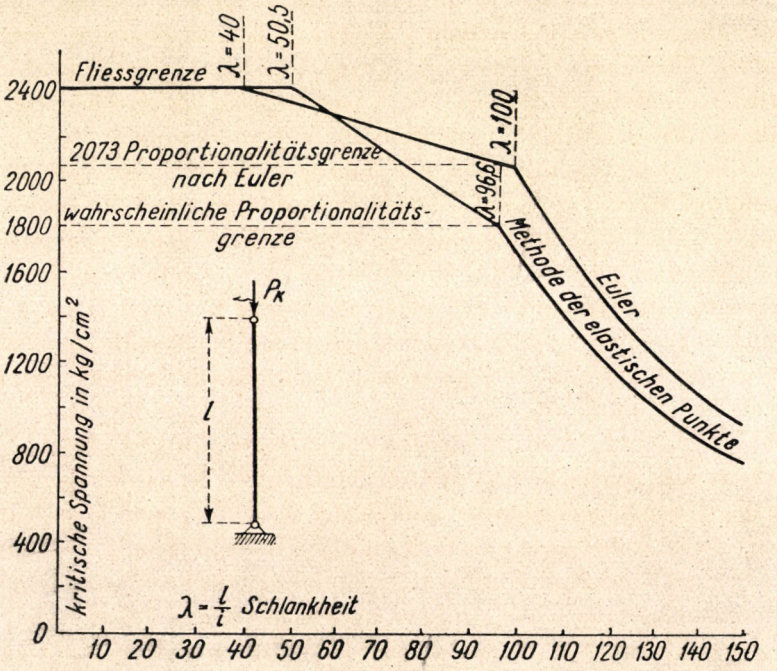


Abb. 11

Da ferner dort die elastische Längenänderung

$$\varepsilon_F' = \frac{\sigma_F}{E} = \frac{2\,400}{2\,100\,000} = 1{,}143{}^0/_{00}$$

ist, erhält man für den Wert von ϱ aus der Formel (38) an der Fliessgrenze

$$\varrho_F = \frac{\varepsilon_F''}{\varepsilon_F' + \varepsilon_F''} = \frac{2}{2\,000 + 1{,}143} = 0{,}636.$$

Die kritische Spannung erreicht die Fliessgrenze im Falle einer Schlankheit, die auch die Gleichung

$$\sigma_K = \sigma_F = \frac{8E}{\lambda^2_F}(1 - \varrho_F) = \frac{6\,115\,000}{\lambda^2_F}$$

befriedigt. Hieraus folgt:

$$\lambda_F = \sqrt{\frac{6\,115\,000}{2400}} = 50{,}5.$$

Zwischen den Schlankheitsgraden 50,5 und 96,6 ist die kritische Spannung kleiner als die Fliessgrenze und grösser als die Proportionalitätsgrenze. Es ist zweifellos, dass mit entsprechenden ϱ-Werten jede zwischen die Proportionalitäts- und die Fliessgrenze gezeichnete Kurve in Abb. 11a reelle kritische Spannungen liefert, weil die Endpunkte der Kurve mit den entsprechenden ϱ-Werten bestimmt wurden. Die Gl. (37) ist also reell und anerkennbar. Der Zusammenhang zwischen dem Schlankheitsgrade und dem Werte ϱ ist aber ein solcher, dass zugehörige Werte von λ und ϱ nur durch Probieren ermittelt werden können. Diese Arbeit soll hier nicht einmal versucht werden, denn angefangen damit, dass die Proportionalitäts- und die Fliessgrenze des Materials keine unveränderlichen Konstanten sind, erschweren auch noch viele andere Unsicherheiten diese Arbeit. Es ist daher völlig gerechtfertigt, wenn die Technik den Zusammenhang zwischen kritischer Spannung und Schlankheit in dem besprochenen Bereich als linear annimmt.

Das Diagramm in Abb. 11 zerstreut wohl jeden Zweifel, der gegen die auf die Methode der elastischen Punkte aufgebaute Knicktheorie aufkommen konnte. Bei dem besprochenen Grundfalle der Knickung kam kein Widerspruch oder Zweifel auf, wobei sich unsere Kenntnisse noch dadurch erweiterten, dass klar jene Schlankheit erkannt werden konnte, oberhalb der der Stab so stark ist, dass keine Knickgefahr mehr droht. Daher können die Folgerungen, die sich aus der neuen Theorie für die Knickung von Stäben und Bögen mit veränderlichem Querschnitte ergeben, mit Recht angewandt werden. Für diese liefert nämlich die EULERsche Theorie keine reelle Vergleichsgrundlage, da sie diese Fälle der Knickung nicht in beruhigender Weise zu lösen vermag.

In Abb. 11 ist auffällig — was schon am Anfang unserer Ausführungen betont wurde —, dass die auf die Methode der elastischen Punkte aufgebaute Theorie bei Knickung in der elastischen Zone beinahe um 20% kleinere kritische Kräfte und Spannungen liefert als die EULERsche. Auf die Ursache dieser Abweichung wurde bereits hingewiesen und als Grund erkannt, dass die eine Theorie das Moment auf die ursprüngliche Lage der Schwerpunkte der Querschnitte, die andere auf die ausgeknickte Lage des Schwerpunktes bezieht. Vom Standpunkte der Technik aus bedeutet diese Abweichung lediglich, dass mit einer anderen Sicherheit gerechnet werden muss, wenn die zulässige Spannung oder die Grenzspannung auf Grund der neuen Theorie berechnet wird. Dies ist der Fall, weil die Grösse der Last, die ein Stab mit völliger Sicherheit tragen kann, in der Praxis ermittelt wurde und an dieser Erfahrung eine neue Theorie ohne neue Erfahrungen nichts ändern kann.

In der plastischen Zone setzt sowohl die alte wie auch die neue Theorie voraus, dass sich die kritische Spannung linear mit der Schlankheit ändert. Das Verhältnis der beiden Werte ist aber nicht mehr konstant wie in der elastischen Zone. Der Unterschied ist bei sehr starken Stäben unwesentlich, solange also $\lambda < 50$ ist. Von da an nimmt die Abweichung sukzessive zu und erreicht an der Grenze der elastischen Knickung 20%.

Die Technik wird auch durch diese verschiedenen Abweichungen nicht im Wesen betroffen. Sie bestimmt nämlich im plastischen Bereich mit veränderlichen Sicherheitszahlen die zulässigen oder Grenzspannungen. Dies ergab sich von selbst, denn die Praxis hatte verschiedene Sicherheiten sowohl für den starken, von der Knickung nicht bedrohten als auch für den schlanken Stab ausgebildet. Der selbstverständliche Platz für den Übergang zwischen den Sicherheiten ist die Zone der plastischen Knickung.

Zum Schluss darf wohl festgestellt werden, dass die Theorie der Knickung, die die Methode der elastischen Punkte zur Grundlage hat, unsere Kenntnisse in ihrem Wesen nicht ändert, dass sie aber die Theorie der Knickung vereinfacht und leicht Knickprobleme löst, die mit Hilfe der EULERschen Theorie nur von Forschern mit grossen mathematischen Kenntnissen gelöst und verstanden werden konnten.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Abhandlung erörtert eine neue Fassung der Knickung mit Hilfe der Methode der elastischen Punkte, mit der der Verfasser die Berechnung von Rahmen ohne Gleichungssysteme und die Dynamik der Träger bereits gelöst hatte. Die Methode ersetzt die Träger durch ein starres Stabsystem, das von elastischen Punkten unterbrochen ist. Die Gefahr der Knickung besteht dann, wenn das erwähnte Stabsystem in den indifferenten Gleichgewichtszustand gelangt, was auch dadurch gekennzeichnet ist, dass die Eigenschwingungszahl des Stabes Null wird. Die Methode liefert die kritische Kraft für Träger mit gleichbleibendem oder veränderlichem Querschnitte sowohl in der elastischen wie auch in der plastischen Zone der Knickung ohne höhere Mathematik. Diese Werte der kritischen Kraft sind zwar ungefähr um 20% niedriger als die der EULERschen Theorie, sie stehen aber mit den Versuchen und den Erfahrungen der Technik im vollen Einklang.

ПРОГИБ БАЛОК НА ОСНОВЕ МЕТОДА ЭЛАСТИЧНЫХ ТОЧЕК

Канд. техн. наук А. ШВЕРТНЕР

РЕЗЮМЕ

Излагается новая трактовка прогиба балок при помощи метода эластичных точек, дающего возможность решить расчет рамок без применения систем уравнений, при помощи которого автор уже решил динамику балок. Методика использует замещение балок системой жестких стержней, прерываемых эластичными точками. Опасность пригиба имеет место в том случае, когда указанная система стержней достигает индифферентного равновесного состояния, которое характеризуется также и тем, что частота собственных колебаний стержня будет равна нолю. Метод распространяется на балки с постоянным и переменным сечением и критическое усилие можно определить без применения методов высшей математики как для случая эластичного, так и для пластичного прогиба. Полученные значения вообще на 20% ниже значений, полученных при помощи теории Эйлера, но результаты полностью согласуются с проведенными опытами и с данными инженерной практики.

BUCKLING OF BEAMS TREATED BY THE METHOD OF ELASTIC POINTS

A. SCHWERTNER

SUMMARY

The paper describes a new approach to the problem of buckling by the method of elastic points, by which the author has already solved, without systems of equations, the calculation of frames and the dynamics of beams. The method replaces beams by rigid bars, interrupted by elastic points. The danger of buckling arises if the system of bars gets into indifferent state of equilibrium, which is also characterized by the natural frequency of the system becoming equal to zero. The method is equally valid for beams of constant or of variable cross-section, and permits to calculate the critical force without recurring to higher mathematics, for the case of elastic as well as of plastic buckling. The values thus calculated are in general lower by 20% than the values calculated by EULER's theory, but they agree fully with the experiments and with engineering practice.

LE FLAMBAGE DES POUTRES TRAITÉS À L'AIDE DE LA MÉTHODE DES POINTS ÉLASTIQUES

A. SCHWERTNER

SOMMAIRE

L'étude expose une nouvelle conception du flambage à l'aide de la méthode des points élastiques, par laquelle l'auteur avait déja résolu le calcul des portiques sans systèmes d'équations et la dynamique des poutres. La méthode remplace les poutres par des barres rigides, interrompues par des points élastiques. Il y a danger de flambage si les barres atteignent un état d'équilibre indifférent, caractérisé entre autre par le fait que la fréquence propre des barres est zéro. La méthode permet de calculer la force critique sans avoir recours à la haute mathématique des poutres à section constante et à section variable, pour le flambage élastique, comme pour le flambage plastique. La valeur de cette force est en général de 20% plus basse que celle fournie par la théorie d'Euler, mais les résultats sont en bon accord avec les essais et les expériences pratiques des ingénieurs.

DIE KNICKUNG GERADACHSIGER STÄBE BEI BEHANDLUNG MIT DER METHODE DER ELASTISCHEN PUNKTE

Prof. P. CSONKA

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
LEHRSTUHL FÜR FESTIGKEITSLEHRE DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT FÜR DIE BAUINDUSTRIE, BUDAPEST

[Eingegangen am 15. April 1955]

1. Einleitung

Im vorhergehenden Aufsatz der vorliegenden Zeitschrift veröffentlicht A. SCHWERTNER eine neuartige Näherungsmethode zur Lösung des Knickproblems von Stäben mit gerader oder gekrümmter Mittellinie und gleichbleibendem oder veränderlichem Querschnitt [1]. Da diese neue Näherungsmethode — die Methode der elastischen Punkte — sehr einfach und anschaulich ist, erscheint es wünschenswert klarzustellen, wie gross der Fehler ist, der sich bei Anwendung der neuen Methode für die gesuchte Knicklast ergibt. Im nachstehenden soll versucht werden, diese Frage im Zusammenhang mit der Untersuchung des Grundfalles der Knickung zu beantworten.

2. Annahmen

Die nachstehenden Erörterungen beziehen sich auf geradachsige Stäbe mit gleichbleibendem oder veränderlichem Querschnitt, die hinsichtlich der durch die Stabachse hindurchgehenden zwei Ebenen sowie hinsichtlich der Ebene des mittleren Querschnittes symmetrisch sind. An den Stabenden werden reibungsfreie räumliche Gelenke angenommen.

Das Material des hier untersuchten Stabes sei als homogen, isotrop und vollkommen elastisch vorausgesetzt. Als Belastung werden Druckkräfte angenommen, die in der Achsenrichtung auf die Stabenden wirken. Von diesen Kräften wird ferner angenommen, dass sie auch nach dem Ausknicken des Stabes in der Verbindungslinie der Gelenke wirken. Die nachstehenden Untersuchungen beziehen sich auf das Anfangsstadium der Knickung. Unter Knicklast wird hier jene Kraft verstanden, auf deren Wirkung der Gleichgewichtszustand des Stabes bei Zunahme der Belastung zum erstenmal indifferent wird.

3. Vergleich der Methode der elastischen Punkte mit der Methode der elastischen Gelenkkette

Zur näherungsweisen zahlenmässigen Bestimmung der Knicklast elastischer Gebilde ist eine ganze Reihe verschiedener Verfahren bekannt [2—9]. Von

diesen Verfahren ist in zahlreichen Fällen jenes das zweckmässigste, das vom kürzlich verstorbenen sowjetischen Gelehrten H. HENCKY stammt [9] und das im internationalen Schrifttum als *Methode der elastischen Gelenkkette* bekannt ist. Da diese Methode — die im Wesen auf der geometrischen Behandlung einer der Differentialgleichung der Knickung analogen Differenzengleichung beruht — eine gewisse Ähnlichkeit mit der *Methode der elastischen Punkte* aufweist, scheint es von Interesse, die beiden Methoden miteinander zu vergleichen.

Die Methode der elastischen Gelenkkette teilt bei der Bestimmung der Knicklast des geraden Stabes diesen in als starr angesehene Stababschnitte, wobei aber zwischen den einzelnen Stababschnitten — Kettengliedern — elastische Gelenke vorauszusetzen sind. Die Elastizitätskonstante der Gelenke muss so angenommen werden, dass die Formänderung der Stabkette ähnlich der Formänderung des ursprünglichen Stabes sei. Hierzu ist es notwendig, dass die Winkelverdrehung, die jeweils zwischen zwei benachbarten Kettengliedern infolge der Wirkung des Biegemomentes M eintritt, die Grösse

$$\Delta\varphi = \frac{M}{EJ}\Delta s \tag{1}$$

aufweise. Hier bedeutet Δs die Länge des Kettengliedes und EJ die Biegesteifigkeit des durch keine Gelenke unterbrochenen Stabes an der Stelle der späteren Gelenke. Im Laufe der Berechnung werden die Gelenke in beliebiger Weise, aber bei Einhaltung der Anfangsbedingungen aus ihrer ursprünglichen Gleichgewichtslage etwas verschoben. Bei der so zustande gekommenen virtuellen Verschiebung entstehen zwischen den benachbarten Kettengliedern relative Winkelverdrehungen $\Delta\varphi$. Um zu erreichen, dass der Gleichgewichtszustand des Stabes indifferent werde, ist es notwendig, dass sich der Stab auch noch nach der virtuellen Verschiebung im Gleichgewicht befinde. Um dies zu gewährleisten, ist eine Gleichung anzusetzen, nach der die Gleichgewichtsbedingung (1) zwischen den benachbarten Kettengliedern trotz der virtuellen Verschiebung erfüllt ist. Die auf diese Weise ansetzbaren Gleichgewichtsgleichungen bilden ein homogenes, lineares Gleichungssystem, das nur dann eine vom Trivialen abweichende Lösung hat, wenn die Determinante des Gleichungssystems Null ist. Aus dieser Bedingung lassen sich dann jene Belastungswerte ermitteln, die eine Knickung hervorzurufen imstande sind. Der kleinste unter ihnen ist die gesuchte kritische Last.

Besonders einfach gestaltet sich die Berechnung, wenn die virtuelle Formänderung des Stabes mit einem einzigen freien Parameter beschrieben werden kann, wie z. B. im Falle des in Abb. 1. dargestellten gelenkig gelagerten geradachsigen Stabes mit gleichbleibendem Querschnitt. Teilt man diesen Stab in drei Stababschnitte von der Länge

$$\Delta s = l/3$$

und beschränkt man die Untersuchung bloss auf den Fall der symmetrischen Knickung, so kann man sich die Formänderung des Stabes entsprechend der gestrichelten Linie in Abb. 1 vorstellen. In diesem Fall ist die Winkelverdrehung zwischen den Kettengliedern

$$\Delta\varphi = \frac{y}{\Delta s}.$$

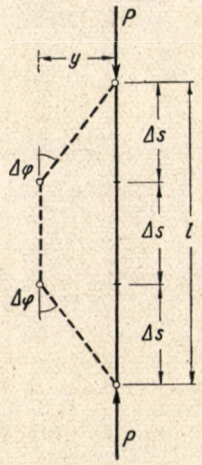


Abb. 1. Beispiel für die Anwendung der Methode der elastischen Gelenkkette

Diese Winkelverdrehung muss mit dem durch die Gleichgewichtsgleichung (1) bestimmten Wert

$$\Delta\varphi = \frac{M}{EJ}\Delta s = \frac{Py}{EJ}\Delta s$$

übereinstimmen, d. h. dass

$$\frac{Py}{EJ}\Delta s = \frac{y}{\Delta s}$$

zu sein hat. Hieraus ergibt sich als Wert der kritischen Last:

$$P = \frac{EJ}{\Delta s^2} = \frac{EJ}{(l/3)^2} = \frac{9EJ}{l^2}.$$

Dieser Lastwert ist um 8,8% kleiner als der Eulersche Wert

$$P_E = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Die Methode der elastischen Punkte teilt zur Lösung der gleichen Aufgabe den Stab in zwei Abschnitte. Da es sich um einen Stab handelt, der hinsichtlich der Ebene des mittleren Querschnittes symmetrisch ist, weisen beide Stababschnitte dieselbe Länge auf. Die elastischen Gelenke werden im Gegensatz zur vorherigen Methode nicht in den Teilungspunkten, sondern im elastischen Mittelpunkt der einzelnen Stababschnitte angenommen. Diese Punkte fallen bei Stäben von gleichbleibendem Querschnitt in den geometrischen Mittel-

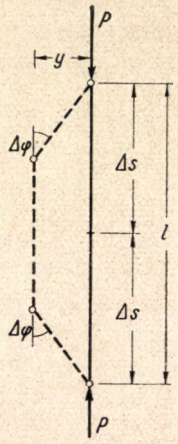


Abb. 2. Beispiel für die Anwendung der Methode der elastischen Punkte

punkt der Stababschnitte. Als virtuelle Verschiebung wird das in Abb. 2 dargestellte Verschiebungssystem eingeführt. In diesem Falle gilt

$$\Delta\varphi = \frac{y}{\Delta s/2} = \frac{2y}{\Delta s}$$

bzw. nach der Gleichgewichtsgleichung (1)

$$\Delta\varphi = \frac{M}{EJ}\Delta s = \frac{Py}{EJ}\Delta s\,.$$

Setzt man die rechte Seite der beiden letzten Gleichungen einander gleich, so gelangt man zum Zusammenhang

$$\frac{Py}{EJ}\Delta s = \frac{2y}{\Delta s}$$

und von diesem zum Wert der kritischen Last

$$P = \frac{2EJ}{\Delta s^2} = \frac{2EJ}{(l/2)^2} = \frac{8EJ}{l^2}\,.$$

Dieser Wert weicht von dem genauen Eulerschen Wert um 18,94% ab.

Aus dem Vergleich der hier vorgeführten zwei Berechnungen lässt sich feststellen, dass im Falle des untersuchten einfachen Beispiels die Methode der elastischen Punkte bei einer gleich grossen Rechenarbeit ein weniger genaues Ergebnis liefert als die Methode der elastischen Gelenkkette.

Die Genauigkeit der Methode der elastischen Punkte kann allerdings durch eine gewisse Modifizierung des Verfahrens unschwer gesteigert werden. Dazu ist natürlich die Vermehrung der Zahl der Teilungspunkte notwendig. Im Falle dieser Modifizierung ist es zweckmässig, den Stab so in Abschnitte zu teilen, dass die beiden äusseren Stababschnitte die halbe Länge aufweisen (Abb. 3). Bei diesem Vorgehen sind die Gelenke der äusseren Stababschnitte an den Stabenden und die der mittleren Abschnitte im elastischen Mittelpunkt der

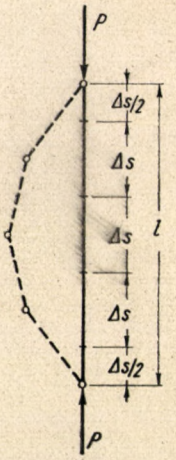


Abb. 3. Die Vereinigung der beiden Methoden

betreffenden Stababschnitte anzunehmen. Hierbei werden die äusseren Gelenke als vollkommene Gelenke und die mittleren Gelenke als elastische Gelenke vorausgesetzt. Die durch das Moment $M = 1$ verursachte Winkelverdrehung in den mittleren Gelenken ist mit dem Wert

$$\int_{(\Delta s)} \frac{1}{EJ}\, dx$$

in Rechnung zu stellen.

Die hier vorgeschlagene Modifizierung der Methode der elastischen Punkte stellt zugleich auch eine vervollkommnete Variante der Methode der elastischen Gelenkkette dar. Ihre Anwendung erscheint vor allem dann angezeigt, wenn sich der Querschnitt des Stabes stark verändert. Bei Stäben mit unverändertem Querschnitt ist die modifizierte Methode mit der Methode der elastischen Gelenkkette identisch.

4. Der Sinn des Fehlers bei Anwendung der Methode der elastischen Punkte

Im nachstehenden soll die Methode der elastischen Punkte in der von *Schwertner* vorgeschlagenen ursprünglichen Form angewandt und die Frage geklärt werden, in welcher Richtung der sich für die Knicklast ergebende Näherungswert von dem genauen *Euler*schen Wert abweicht.

Der Stab wird als ein an der Stelle des mittleren Querschnittes eingespannter Kragträger betrachtet, an dem zuerst die grösste Knickordinate bestimmt wird (Abb. 4):

$$y_{\max} = \int_0^{l/2} \frac{M}{EJ}\left(\frac{l}{2} - x\right) dx = P \int_0^{l/2} \frac{y}{EJ}\left(\frac{l}{2} - x\right) dx.$$

Hieraus ist

$$P = \frac{1}{\int_0^{l/2} \frac{1}{EJ} \cdot \frac{y}{y_{\max}}\left(\frac{l}{2} - x\right) dx},$$

und so ergibt sich

$$P > \frac{1}{\int_0^{l/2} \frac{1}{EJ}\left(\frac{l}{2} - x\right) dx}.$$

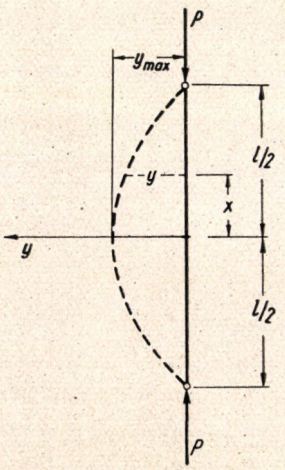


Abb. 4. Der auf Knickung beanspruchte Stab als in der Mitte eingespannter Kragträger

Der Nenner der letzten Formel ist nun nichts anderes als das für das Ende des Kragträgers angeschriebene statische Moment der reduzierten Momentenfläche. Dieses Moment kann aber auch derart berechnet werden, dass man die reduzierte Momentenfläche φ mit dem Abstand a des Schwerpunktes dieser Fläche vom Stabende multipliziert. Auf diese Weise erhält man, dass

$$P > \frac{1}{\varphi a}.$$

Die rechte Seite dieses Ausdrucks ist nichts anderes als der sich aus der Methode der elastischen Punkte ergebende Näherungswert der Knicklast. Wird diese mit P_S bezeichnet, so lässt sich die vorhergehende Ungleichung folgendermassen schreiben:

$$P > P_S.$$

Wie ersichtlich liefert die Methode der elastischen Punkte im Falle eines geradachsigen, an beiden Enden gelenkartig gelagerten Stabes, der hinsichtlich der Ebene seines Mittelquerschnittes symmetrisch ist, stets einen kleineren Lastwert als den genauen Wert.

5. Die Grösse des aus der Anwendung der Methode der elastischen Punkte herrührenden Fehlers

Die Grösse des Fehlers, der sich durch die Anwendung der Methode der elastischen Punkte ergibt, lässt sich durch einen Vergleich zwischen dem für die Knicklast gewonnenen Näherungswert und dem genauen Wert bestimmen. Da ein solcher Vergleich im Falle des gegebenen Stabes auf Schwierigkeiten stösst, sei nicht von einer bestimmten Form des Stabes, sondern von der ausgebogenen Achsenlinie als Grundlage ausgegangen und von hier ein Rückschluss auf die Regel gezogen, nach der sich das Trägheitsmoment der Stabquerschnitte ändert.

Es sei von der bekannten Differentialgleichung des Knickproblems, d. h. von dem Zusammenhang

$$y'' + \frac{Py}{EJ} = 0$$

ausgegangen und dieser nach P gelöst:

$$P = -\frac{Ey''}{y} J.$$

Es ist offenbar, dass man in jenem Falle, wo sich das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes nach der Formel

$$J = -\frac{\pi^2 y}{l^2 y''} J_0, \qquad J_0 = \text{Konst.} \tag{2}$$

ändert, die kritische Last P sehr einfach wie folgt berechnen kann:

$$P = -\frac{Ey''}{y}\left(-\frac{\pi^2 y}{l^2 y''} J_0\right) = \frac{\pi^2 E J_0}{l^2} = P_E.$$

In diesem Falle ist also, wie ersichtlich, die kritische Last gerade so gross, wie sie dann wäre, wenn das Trägheitsmoment der Stabquerschnitte überall den Wert J_0 aufwiese.

Im Gegensatz zu diesem genauen Wert beträgt der nach der Methode der elastischen Punkte — bei Teilung in zwei Stababschnitte — ermittelte Näherungswert der Knicklast

$$P_S = \frac{1}{\int_0^{l/2} \frac{1}{EJ}\left(\frac{l}{2} - x\right) dx}.$$

Hieraus gelang man bei Benutzung von Gleichung (2) zu

$$\frac{1}{P_S} = -\frac{l^2}{\pi^2 E J_0} \int_0^{l/2} \frac{y''}{y}\left(\frac{l}{2} - x\right) dx = -\frac{1}{P_E} \int_0^{l/2} \frac{y''}{y}\left(\frac{l}{2} - x\right) dx.$$

Demgemäss ergibt sich bei Einführung der Bezeichnung

$$\frac{l}{2} \equiv \lambda$$

der Zusammenhang

$$\frac{P_E}{P_S} = -\int_0^{\lambda} \frac{y''}{y} (\lambda - x)\, dx. \tag{3}$$

Ist dieser Quotient bekannt, so lässt sich der aus der Anwendung der Methode der elastischen Punkte herrührende Fehler F bereits leicht wie folgt ermitteln:

$$F = \frac{P_E - P_S}{P_E} = 1 - \frac{P_S}{P_E}. \tag{4}$$

Im Falle der obigen Berechnung kann man die Form der ausgebogenen Mittellinie, d. h. die Ordinate y, die eine Funktion der Variablen x darstellt, nicht beliebig annehmen, sondern man hat hier in erster Linie die Anfangsbedingung

$$y(\pm\lambda) = 0$$

einzuhalten. Ausserdem hat man darauf zu achten, dass

$$\frac{y}{y''} \leqq 0$$

sei, weil sich sonst nach der Formel (2) für das Trägheitsmoment der Stabquerschnitte ein negativer Wert ergeben würde, was unmöglich ist. Schliesslich ist noch, da die kleinste Knickkraft bestimmt werden soll, darauf zu achten, dass y'' nirgends sein Vorzeichen ändere.

Um vorzuführen, einen wie grossen Fehler man bei der Anwendung der Methode der elastischen Punkte bei einem geradachsigen, an beiden Enden gelenkig gelagerten, hinsichtlich der Ebene seines mittleren Querschnittes symmetrischen Stab erhält, seien im nachstehenden einige Zahlenbeispiele angegeben.

Beispiel Nr. 1. Es sei

$$y = c \cos\frac{\pi x}{l}, \qquad y'' = -c\frac{\pi^2}{l^2}\cos\frac{\pi x}{l}.$$

In diesem Falle ergibt sich bei Berechnung nach Formel (2)

$$J = J_0 = \text{konst.},$$

d. h. dass der Stab einen gleichbleibenden Querschnitt aufweist und dass nach Gleichung (3)

$$\frac{P_E}{P_S} = \frac{\pi^2}{l^2}\int_0^{l/2}\left(\frac{l}{2} - x\right)dx = \frac{\pi^2}{8}$$

gilt. So beträgt der Fehler, der sich infolge der Anwendung der Methode der elastischen Punkte ergibt, laut Gleichung (4)

$$F = 1 - \frac{P_S}{P_E} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \approx 18{,}94\,\%.$$

Beispiel Nr. 2. Es sei als Knickkurve die durch die Gleichung

$$y = c(\lambda^2 - x^2), \qquad \lambda \equiv \frac{l}{2}$$

angegebene Parabel gewählt. In diesem Falle ist

$$y'' = -2c,$$

und nach der Gleichung (2)

$$J = \frac{\pi^2}{8\lambda^2}(\lambda^2 - x^2) J_0 .$$

Der in Rede stehende Fall kommt also dann vor, wenn das Trägheitsmoment der Stabquerschnitte an den Stabenden Null ist und sich zwischen diesen Endpunkten fortlaufend parabolisch ändert. In diesem Falle ist nach Gleichung (3)

$$\frac{P_E}{P_S} = 2\int_0^{\lambda} \frac{1}{\lambda + x}\, dx = 2\Big[\ln(\lambda + x)\Big]_0^{\lambda} = 2\ln 2 ,$$

und infolgedessen der Wert des sich so ergebenden Fehlers

$$F = 1 - \frac{1}{2\ln 2} \approx 27{,}87\ \%.$$

Beispiel Nr. 3. Es sei angenommen, dass

$$y = c(\lambda^4 - x^4) , \qquad \lambda \equiv \frac{l}{2} .$$

In diesem Falle ist

$$y'' = -12\, c\, x^2 ,$$

und infolgedessen

$$J = \frac{\pi^2}{48\,\lambda^2 x^2}(\lambda^4 - x^4) J_0 .$$

Wie ersichtlich, ist also im gegebenen Falle das Trägheitsmoment der Stabquerschnitte an den Stabenden Null und in der Mitte unendlich gross. Jetzt ist

$$\frac{P_E}{P_S} = \int_0^{\lambda} \frac{12\, x^2 (\lambda - x)}{\lambda^4 - x^4}\, dx = 6\int_0^{\lambda} \left(\frac{1}{1+\lambda} - \frac{\lambda - x}{\lambda^2 + x^2}\right) dx =$$

$$= 6\left[\ln(\lambda + x) + \frac{1}{2}\ln(\lambda^2 + x^2) - \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\lambda}\right]_0^{\lambda} = 9\ln 2 - \frac{3}{2}\pi ,$$

so dass der sich aus der Berechnung ergebende Fehler

$$F = 1 - \frac{1}{9\ln 2 - \frac{3}{2}\pi} \approx 34{,}47\ \%$$

beträgt.

Beispiel Nr. 4. Es sei schliesslich

$$y = \frac{2}{2-k}\left(1 - \frac{|x|}{\lambda}\right), \text{ wenn } |x| \geq k\lambda ,$$

und

$$y = 1 - \frac{1}{k(2-k)} \cdot \frac{x^2}{\lambda^2}, \text{ wenn } |x| \leq k\lambda .$$

In diesem Falle besteht die Knickkurve aus drei Abschnitten, die sich tangential aneinander anschliessen. Die beiden äusseren Abschnitte sind Geraden, der mittlere hat die Form einer Parabel. Jetzt ist

$$y'' = 0\,, \qquad \text{wenn } |x| \geq k\lambda\,,$$

und

$$y'' = -\frac{2}{k(2-k)\lambda^2}\,, \qquad \text{wenn } |x| \leq k\lambda\,.$$

Auf diese Weise ist das Trägheitsmoment der Stabquerschnitte an den äusseren Abschnitten unendlich gross, während es sich im mittleren Abschnitt parabolisch ändert. Im vorliegenden Falle ist also

$$\frac{P_E}{P_S} = \int_0^{k\lambda} \frac{\dfrac{2(\lambda-x)}{k(2-k)\lambda^2}}{1-\dfrac{1}{k(2-k)}\dfrac{x^2}{\lambda^2}}\,dx + \int_{k\lambda}^{\lambda} \frac{0\,(\lambda-x)}{\dfrac{2}{2-k}\left(1-\dfrac{x}{\lambda}\right)}\,dx\,.$$

Hieraus erhält man nach einigem Umordnen

$$\frac{P_E}{P_S} = 2\lambda \int_0^{k\lambda} \frac{1}{k(2-k)\lambda^2 - x^2}\,dx + \int_0^{k\lambda} \frac{-2x}{k(2-k)\lambda^2 - x^2}\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{c\,(2-c)}} \ln \frac{\lambda\sqrt{k(2-k)} + x}{\lambda\sqrt{k(2-k)} - x}\right]_0^{k\lambda} + \left[\ln\left(k(2-k)\lambda^2 - x^2\right)\right]_0^{k\lambda} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k(2-k)}} \ln \frac{\sqrt{2-k} + \sqrt{k}}{\sqrt{2-k} - \sqrt{k}} + \ln \frac{2-2k}{2-k}\,.$$

In dem Sonderfall $k \to 0$ ergibt sich

$$\frac{P_E}{P_S} \longrightarrow \infty\,.$$

In dem betreffenden Sonderfall — der natürlich in der Praxis nicht verwirklicht werden kann — beträgt also der begangene Fehler

$$F = \underline{100\%}.$$

Wie aus den obigen Beispielen hervorgeht, kann sich der infolge der Anwendung der Methode der elastischen Punkte begangene Fehler zwischen weiten Grenzen bewegen. Dieser Umstand lässt bei Anwendung dieser Methode in ihrer ursprünglichen Form eine gewisse Vorsicht geboten erscheinen.

SCHRIFTTUM

1. A. SCHWERTNER : Die Knickung im Lichte der Methode der elastischen Punkte. Acta Technica Hung. Tom. XII, (1955), pp. 245—273.
2. L. VIANELLO : Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure 50, (1906) pp. 1753—
3. S. TIMOSHENKO : Theory of Elastic Stability. New York and London 1936, McBraw-Hill Book Company.
4. J. RATZERSDORFER : Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken. Wien 1936, I. Springer.
5. R. V. SOUTHWELL : An Introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicits, Oxford 1941, University Press.
6. L. COLLATZ : Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig 1949, Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig.
7. M. G. SALVADORI—M. L. BARON : Numerical Methods in Engineering, New York 1952, Prentice — Hall.
8. A. PFLÜGER : Stabilitätsprobleme der Elastostatik, Berlin 1950, Springer-Verlag.
9. H. HENCKY : Darmstadt 1920. Habilitationsschrift.

ZUSAMMENFASSUNG

Die von A. SCHWERTNER im vorliegenden Heft veröffentlichte Methode zur Lösung des Knickproblems von Stäben [1] — *die Methode der elastischen Punkte* — teilt bei der Berechnung der Knicklast den an seinen Enden gelenkig gelagerten Stab in zwei Stababschnitte. Diese Abschnitte werden durch eine elastische Kette ersetzt, deren Glieder in den Tangenten der Abschnittsendpunkte liegen. In dieser Hinsicht weist diese Methode eine gewisse Ähnlichkeit mit dem unter dem Namen *Methode der elastischen Gelenk kette* bekannten,von H. HENCKY stammenden Verfahren [9] auf.

Es wird nachgewiesen, dass das neue Verfahren im Falle eines geradachsigen, an seinen Enden gelenkig gelagerten, hinsichtlich der Ebene seines mittleren Querschnittes symmetrischen Stabes stets kleinere Werte für die Knicklast liefert, als der wirkliche Wert beträgt. Die Grösse des begangenen Fehlers kann zwischen recht weiten Grenzen schwanken, weshalb denn bei Anwendung des neuen Verfahrens — in seiner ursprünglichen Form — eine gewisse Vorsicht geboten ist.

Zur Erhöhung der Genauigkeit wird eine Modifikation des ursprünglichen Verfahrens vorgeschlagen. Diese modifizierte Methode eignet sich besonders gut für den Fall von Stäben mit stark veränderlichem Querschnitt. Für den Fall von Stäben mit gleichbleibendem Querschnitt ist die modifizierte Methode mit dem HENCKYschen Verfahren identisch.

РЕШЕНИЕ ПРОГИБА ПРЯМООСНЫХ СТЕРЖНЕЙ МЕТОДОМ ЭЛАСТИЧНЫХ ТОЧЕК

Д-р техн. наук П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

Методика решения прогиба стержней, опубликованная А. Швертнером (1) и являющаяся методом эластичных точек, при рассчете усилия прогиба разбивает стержень, снабженный на обоих концах шарнирами, на два отрезка и отдельные отрезки стержня заменяет эластичной цепью, образованной касательными этих отрезков. В этом отношении упомянутый метод подобен методу, известному под названием метод эластичной стержневой цепи и разработанному Х. Хенкиным (9).

Автов показывает, что новый метод в случае прямоосных стержней, снабженных на концах шарнирами и являющихся симметричными по отношению их сечения в середине стержня, во всех случаях дает меньшее значение усилия прогиба, чем действительное. Величина погрешности изменяестя в очень широких пределах, поэтому новый метод — в его неизменной форме — можно использовать только при соответствующей осторожности.

В интересах повышения точности метода можно предложить введение некоторых изменений предложенного первоначально метода. Измененный метод может дать хорожие результаты в основном в случае стрежней с сильно изменяющимся сечением. В случае же стержней с неизменным сечением, модифицированный метод подобен методу, разработанному Хенкиным.

BUCKLING OF STRAIGHT-AXIS BARS TREATED BY THE ELASTIC POINT METHOD

Prof. P. CSONKA, D. Eng. Sc.

SUMMARY

The procedure of buckling analysis of bars, published by A. Schwertner [1], — *the elastic point method* — bisects the bar, hinged at both ends, into two sections in the calculation of the buckling load and replaces the individual bar sections by elastic chains formed by their asymptotes. In this respect the afore-mentioned method is similar to H. Hencky's procedure [9] known as the elastic chain method.

The author demonstrates that the new method yields, for straight-axis bars, hinged at both ends, and symmetrical relative to the middle cross section, values of buckling load always inferior to the actual one. The value of the error committed may vary within very wide limits, therefore the new method — in its original form — can be applied only with due precaution.

To boost precision a modification of the original method is suggested. The modified method may be helpful especially in the case of bars of variable cross section. In the case of constant cross section, the modified method is identical with Hencky's procedure.

FLAMBAGE DE BARRES À AXE DROIT TRAITÉ À L'AIDE DE LA MÉTHODE DES POINTS ÉLASTIQUES

Prof. P. CSONKA

Docteur des Sciences Techniques

SOMMAIRE

Le procédé exposé par A. Schwertner [1] pour la résolution du problème du flambage de barres — *la méthode des points élastiques* — divise, en calculant la force de flambage, la barre articulée à ses deux extrémités en deux parties de barre, substituant ensuite à chacune des parties une chaîne élastique constituée par leur tangente terminale. De ce point de vue le procédé en question s'apparente à celui de H. Hencky, connu sous le nom de méthode de la chaîne de barre élastique.

L'auteur démontre qu'en cas d'une barre à axe droit, articulée à ses extrémités et étant symétrique à une section médiane, le nouveau procédé fournit une valeur toujours inférieure à la valeur effective de la force de flambage. La grandeur de l'erreur commise peut varier entre de larges limites, de sorte que le nouveau procédé, dans sa forme originale ne doit être employé qu'avec précaution.

En vue d'augmenter la précision, l'auteur propose une certaine modification du procédé original. Dans sa forme modifiée, c'est surtout en cas de barres à section fortement variable que le procédé peut rendre de services utiles. En cas de barres à section invariable le procédé modifié est identique à la méthode de Hencky.

GENERAL METHOD FOR THE DETERMINATION OF CUTTING FORCE AND REQUIRED POWER, BY SPECIFIC CUTTING RESISTANCE

A. HORNUNG
D. ENG. SC.
TECHNOLOGICAL INSTITUTE OF MACHINE INDUSTRY, BUDAPEST

[Manuscript received 12th October, 1954]

1. General remarks

Attempts to determine on the basis of theoretical considerations, the forces at metal cutting, especially the tangential cutting force, as the most important from the point of view of the required power, have not yet been successful. In practice, therefore, empirical formulas are employed. There are, however, too many empirical formulas known, and certain discrepancies prevail between the data of the various researchers; it appears therefore, useful to examine the problem comprehensively, in a manner fit for determining the tangential cutting force and the required power generally, covering the various methods of cutting. As the following examinations were built up on the values derived from empirical formulas, and as there is no space here to review the various theoretical methods, they shall not be discussed in the present paper.

2. Examination of the empirical formulas used for the definition of the tangential cutting forces

In practice, the empirical formulas used for the definition of the most important cutting force, the tangential cutting force, contain more or less variables, depending on the method of cutting. According to the experimental results, the power exponents of these are decimal fractions. The application of such formulas is, however, rather cumbersome, because calculation with decimal fractional exponents is not generally used, especially if the number itself is also a decimal fraction.

Moreover, empirical formulas are often incomplete, because they fail to take into consideration several variables of the tools employed, owing to their standard specification. In employing empirical formulas, it must therefore be very carefully considered, under what circumstances and between what limits they are valid.

Without going into details, a fairly complete list of the relations for the determination of the tangential cutting force may be given as follows :

$$F_t = \varphi\,(K_t, v, K_m, K_\varkappa, K_\gamma, K_\lambda, K_\tau, K_R, K_\Delta, K_h, f, d) \qquad (1)$$

where K_t = the factor characterizing the influence of the quality of tool material,
v = cutting speed m per min.
K_m = the factor characterizing the influence of the quality of the workpiece material
$K_\varkappa$ = coefficient obtained experimentally as a function of the side cutting edge angle varying according to the materials to be cut
K_γ = coefficient obtained experimentally as a function of the side rake angle varying according to the materials to be cut
K_λ = coefficient obtained experimentally as a function of the back rake angle varying according to the materials to be cut
K_τ = coefficient obtained experimentally indicating the influence of the variation of the end cutting edge angle. With the increasing of this angle and of the feed, the underformed cutting area decreases.
K_R = coefficient of the influence of the varying nose radius. This also depends on feed and depth of cut.
K_Δ = factor indicating the influence of tool wear
K_h = coefficient of the influence of the cutting fluid employed
f = feed per rev. in mm and
d = depth of cut in mm

This formula shows the many variables bearing on the tangential cutting force at turning, but it may be even more complex at other cutting methods which are more complicated than turning.

If we examine formula (1) carefully, we must, however, state that feed (f) and depth of cut (d) are not very exact characteristics of the tangential cutting force, in spite of the fact that most of the empirical formulas include the decimal fractional powers of these two factors. This is further proved by the fact that in the experimental formulas of various researchers, the exponents of f and d are different. Besides, in practice it is frequently overlooked that the limits of the applicability of these empirical formulas are not infinite.

One limitation sometimes overlooked in practice is that $d/f > 4$. On the other hand, the various formulas do not take into consideration most of the variables in formula (1) because these have been fixed by standards ; in this case, however, the formulas are only valid for the standardized tools.

It is of great importance that d (depth of cut) and f (feed) in the formulas must not be taken literally. Also, it must be borne in mind that $d/f > 4$. The following experiment will prove this :

The characteristics of the cutting tool are : side cutting edge angle $\varkappa = 0°$; side rake angle $\gamma = 0°$; back rake angle $\lambda = 0°$; end cutting edge angle $\tau = 0{,}5-1°$; while nose radius $R = 0{,}3$ mm. The tool employed is cemented

carbide, the cutting speed $v \approx 120$ m per min. The empirical formula of tangential cutting force converted to steel of 75 kg per sq mm tensile strength is :

$$F_t = 168 f^{0,72} d \text{ kg.} \tag{2}$$

Hence, when $f = 1$ mm per rev. and $d = 3$ mm, $F_t = 504$ kg, which is in accordance with the experiments. But substituting $f = 3$ mm per rev. and $d = 1$ mm into formula (2), we receive $F_t = 370$ kg which is 26,5% less than 504. kg. This, however, does not seem to make sense, because in both cases the chip cutting area is $1 \times 3 = 3 \times 1 = 3$ sq mm, having the same rectangular form. The line and angles involved in cutting are also of equal size. Our experiments have proved that the tangential cutting force is equal in every case and this is the reason why formulas of this type are only valid where $d/f > 4$.

These experiments indicate that other parameters must be found besides f and d which will confirm the results. It is obvious from the above example that the undeformed chip has a width and thickness independent of feed and of depth of cut.

On the basis of this, the following formula, which is valid for both cases, can be written :

$$F_t = 168 t^{0,72} w \text{ kg} \tag{3}$$

where t = undeformed chip thickness
w = undeformed chip width.

When calculating the tangential cutting force with the above formula, variables $K_\varkappa$, K_τ and K_R were eliminated from formula (1), because they concern the form of the undeformed cutting area. This method is, however, applicable only in cases where nose radius R and feed f are small compared to depth of cut so that the form of the undeformed cutting area is approximately a parallelogram.

In all other cases, the undeformed cutting area takes on a shape which is best characterized by calculating with an average chip thickness and average chip width.

Thus, the formula of the cutting area will be as follows :

$$a = fd = tw = TL \tag{4}$$

where T = the average thickness of the undeformed chip
and L = total active length of the cutting edge of the tool, resp. the chip width.

(The interpretation of T and L are in accordance with the «Manual on Cutting of Metals» ASME 1939. [1].) On the basis of these, the following formula is given in the book referred to above for the tangential cutting force :

$$F_t = K_r K_a T^c L^d \tag{5}$$

where K_r = experimentally obtained constant which characterizes the material being cut,

K_a = constant, depending on the true rake angle of a tool, in the direction of chip flow, obtained experimentally,

c and d = exponents determined experimentally, which depend on the material cut.

For steel $c = 0{,}78$; $d = 1{,}10$

for cast iron $c = 0{,}68$; $d = 1{,}00$

Formula (5) — as may be seen — is independent of side cutting edge angle, of end cutting edge angle and of nose radius.

Comparing this formula with another one applied in Soviet practice [2—3], viz.

$$F_t = Cf^{0,75}\ d \text{ kg} \tag{6}$$

which is valid only for accurately standardized tools (side cutting edge angle = = 45°, nose radius $R = 2$ mm, end cutting edge angle = 10°, etc.), the greatest difference will be found in the exponents. In practice, formula (6) gives good, serviceable values for steel and for cast iron, with corresponding value of C, depending on the material cut, and on tool material.

For estimating the values of tangential cutting forces and for comparing the efficiency of different metal cutting methods, it seams practical to introduce the term of specific cutting resistance. This is the resistance to be overcome at any metal cutting method under definite conditions, per one sq mm of any cutting area. This is a characteristic value for any metal cutting method under definite conditions.

The formula for specific cutting resistance k is

$$k = \frac{F_t}{a} = \frac{F_t}{fd} = \frac{F_t}{tw} = \frac{F_t}{TL} \text{ kg per sq mm.} \tag{7}$$

From formula (6), a very simple expression may be derived for k :

$$k = \frac{F_t}{a} = \frac{Cf^{0,75}\,d}{fd} = \frac{C}{f^{0,25}} \text{ kg per sq mm.} \tag{8}$$

This shows that the specific cutting resistance depends on feed f only, under conditions which are valid for formula (6).

In practice, there is little difference between formulas (5) and (6), and therefore *it may be assumed that specific cutting resistance depends chiefly on chip thickness, or on average chip thickness.*

So far, our investigations have been restricted to the tangential cutting force, but the tangential cutting force multiplied by cutting speed and divided by a constant, yields the power required for metal cutting.

The most important formules involved are the following :

$$F_t = ka = kfd \text{ kg} \tag{9}$$

$$fdv = \text{V cu cm per min.} \tag{10}$$

The required metric horse power at the point of the tool for metal cutting is :

$$N_f = \frac{F_t v}{4\,500} = \frac{kfdv}{4\,500} = \frac{kV}{4\,500} \text{ HP.} \tag{11}$$

Formula (11) is valid for any metal cutting method, and thus a very simple formula is obtained compared with formula (1). This has been achieved by condensing all variables in formula (1) in specific cutting resistance k. The method enables us to obtain the most important tangential cutting force and the required power for any metal cutting method, if the characteristic value of specific cutting resistance k is known. This method of calculation permits of the characterisation of all cutting methods by a single value, under arbitrary cutting conditions.

From formula (11), another characteristic value may be derived : the specific chip volume (specific metal removal) V_f which gives the chip volume cut in a single minute by one horsepower in cu cm :

$$V_f = \frac{4\,500}{k} \text{ cu cm per min. per HP.} \tag{12}$$

Evidently, the product of specific cutting resistance k and of specific chip volume V_f is equal to 4,500. This means that the specific chip volume V_f depends only on specific cutting resistance k.

The next task is to determine the values of specific cutting resistance k for the different cutting methods.

3. Determination of specific cutting resistance

It is difficult to give reliable theoretical deductions for the determination of specific cutting resistance k, similarly to the determination of tangential cutting force F_t, because of the many variables involved. One must, therefore, proceed from experimental formulas which have proved correct, in order to obtain formulas suitable for practical application.

Evidently, it follows from the above that as few variables as possible must be chosen to make computation easier. For this reason, it seems most convenient to

calculate with specific cutting resistance k, which incorporates all variables of formula (1), with the exception of the quality of the material. That is why the numerical values of the specific cutting resistance vary for the same material from 1-to 20-or 50-fold the value of k, from rough turning to grinding, according to the different cutting methods and different cutting conditions.

For convenient calculation, another variable should be chosen in the function of which the values of specific cutting resistance k may be best determined for the same material at different cutting methods, as well as under different cutting conditions. This variable — which has already been referred to — is chip thickness, or more generally, the average chip thickness t_a.

Investigations have proved namely that in cutting the same material, chip thickness, or more generally average chip thickness has the greatest influence on the values of the specific cutting resistance. The other variables have only a secondary effect.

From general formula (11) the specific cutting resistance

$$k = \frac{4\,500\,N_f}{V} \text{ kg per sq mm.} \tag{13}$$

Apart from this formula, also the following relation is needed for our purposes :

$$k = \varphi\,(t_a). \tag{14}$$

The solution of formulas (13) and (14) depends on the cutting methods used, and according to the experiments, the diagram in Fig. 1 showing the values of specific cutting resistance k as a function of chip thickness t or of average chip thickness t_a can be plotted in double logarithmic scale, for different metal cutting methods.

The diagram represents the values of k for steel with tensile strength of 75 kg per sq mm. The values plotted have been partly derived from our own experiments and partly from the data of other researchers. The latter will be enumerated in detail later.

The determination of the values of k and t_a at the different cutting methods will also be dealt with later.

For turning, formula (8) drawn up by Soviet authors serves for the determination of the values of k, which agrees well with our own experiments. The numerical value of constant C for steel of 75 kg per sq mm tensile strength is 200 at high speed steel tools (at cemented carbide tools, $C = 191$). Formula (6) is valid only for the tools made as specified above, when $d/f > 4$ and $d/R > 4$. In that case, the average chip thickness will be, with good approximation, $t_a = f \cos 45° = 0{,}71\,f$. In other cases, the average chip thickness must be determined by calculation, or its diagram must be plotted.

The values of k in the function of t_a are shown by line 1 in Fig. 1, which corresponds to formula (6), except that feed f has been substituted on the basis of the above statements by t_a average chip thickness :

$$k = \frac{183}{t_a^{0,25}} \text{ kg per sq mm.} \tag{15}$$

Listing the metal cutting methods according to decreasing average chip thickness, milling follows next, first of all face milling, because next to rough turning, this method yields the greatest chip thickness.

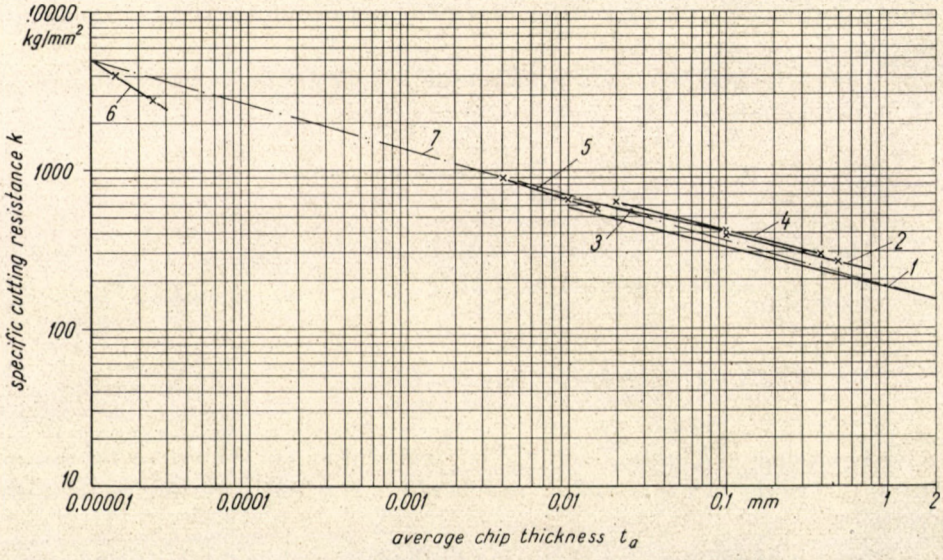


Fig. 1. Values of specific cutting resistance in the function of the average chip thickness at different metal cutting methods. 1. turning ; 2. face milling ; 3. peripheral milling ; 4. drilling with twist drill ; 5. reaming ; 6. grinding ; 7. average of all metal cutting methods. The values in the diagram are valid for the cutting of steel of $\sigma_B = 75$ kg per sq mm tensile strength

With this method, the average chip thickness will be the following :

$$t_a = \frac{f_t d}{L} = \frac{Fd}{nzL} \text{ mm} \tag{16}$$

where

f_t = feed per tooth in mm $\left(f_t = \frac{F}{nz}\right)$

L = length of tooth path mm
d = depth of cut mm
n = revolution per minute of milling cutter
z = number of teeth in the cutter
F = feed per minute in mm.

Formula (16) is valid only in case where at the milling cutter the corner angle is zero and nose radius R is much smaller than the depth of cut. At cutting edges having a different corner angle, the value of t_a derived from formula (16) must be multiplied by the cosinus of the corner angle.

If the cutting edge has a large nose radius or chamfer in relation to the depth of cut, the average chip thickness must be determined by calculation, or by plotting its diagram.

The values of specific cutting resistance k calculated in the manner described above are shown by line 2 in Fig. 1. The calculations were founded on our own experiments with a carbide tipped cutter; axial rake angle — 10 deg, radial rake angle — 10 deg, cutting speed 167 m per min. on A 42,11 steel workmaterial having an average tensile strength of 47 kg per sq mm.

The correction factor K_m from tensile strength 47 to 75 kg per sq mm was calculated as follows:

$$K_m = \left(\frac{75}{55}\right)^{0,75} \left(\frac{55}{47}\right)^{0,35} = 1,261 \cdot 10,565 = 1,33.$$

The values of specific cutting resistance for face milling between feed per tooth 0,1—0,5 mm are derived by formula:

$$k = \frac{225}{t_a^{0,242}} \text{ kg per sq mm.} \tag{17}$$

The values of k for face milling are somewhat higher than those for turning. This is due to the fact that milling is a more complex metal cutting method than turning.

Next in the rank of metal cutting methods according to decreasing average chip thickness, is drilling; it seems, however, more reasonable to investigate peripheral milling first.

While face milling works with an average chip thickness of 80 to 90% of feed per tooth, peripheral milling has only about (0,12 to 0,25) f_t average chip thickness. That is why face milling generally works with a more favorable specific cutting resistance than peripheral milling.

The average chip thickness of peripheral milling may be calculated also from formula (16), but the following formula is much simpler:

$$t_a = f_t \sqrt{\frac{d}{D} - \frac{d^2}{D^2}} = \frac{F}{nz} \sqrt{\frac{d}{D} - \frac{d^2}{D^2}} \text{ mm.} \tag{18}$$

If the angle of arc of the length of tooth path is smaller than 30 deg, at peripheral milling, the second root member may be neglected in calculating the average chip thickness.

In formula (18), D symbolizes the cutter diameter in mm.

If the peripheral milling cutter has no straight teeth but helical ones, in order to determine the true average chip thickness, the values of formula (18) should be multiplied by the cosinus of helix angle of the cutter, taking into consideration the decreasing of the chip thickness.

For the determination of specific cutting resistance, the following formula may be used in both face and peripheral milling :

$$N_f = \frac{kF\,dw}{4\,500\,000} = \frac{kV}{4\,500}\ \text{HP} \tag{19}$$

where w = width of work-piece or of milling in mm.

Herefrom the, value of k may be expressed. Thus, by determining experimentally the required power N_f for any milling condition, the values of k may be calculated from formula (19).

The values of specific cutting resistance k for peripheral milling are shown by line 3 in Fig. 1. The values were plotted on the base of our experiments with helical plain milling cutter as follows : cutter diameter = 106 mm ; true rake angle $\gamma_1 = 8°$; helix angle $\lambda = 46°$; number of teeth in cutter $z = 10$ and cutting speed at high speed steel milling cutter 25 m per min. The work material was again steel A 42,11 and therefore the same correction factor $K_m = 1{,}33$ was used.

The formula received in this manner for peripheral up milling between feed per tooth 0,01—0,2 mm is :

$$k = \frac{246}{t_a{}^{0,212}}\ \text{kg per sq mm}\ . \tag{20}$$

The values of k for peripheral milling are only slightly higher than those for face milling, due to the less favourable operation of the former. The negative rakes of the face milling cutter are compensated by the higher speed, at face milling.

The determination of the values of specific cutting resistance k for drilling — the method next in line — has caused great difficulties. Our own experiments did not deal with the power required for drilling, thus we used the data of other researchers.

On the basis of theoretical assumptions, the torque at drilling with twist drills has been stated [4] to be :

$$T = \frac{kfD^2}{80}\ \text{cm kg}\ . \tag{21}$$

The same result will be obtained if the required power for drilling is drawn up on the basis of the general formula:

$$N_f = \frac{kV}{4\,500} = \frac{kfD^2 n}{5\,730\,000} \text{ HP} \tag{22}$$

where n = number of revolution of the drill per min.
D = diameter of drill in mm.

Combining this formula with the one expressing the torque in general:

$$T = 71\,620 \frac{N_f}{n} \text{ cm kg} \tag{23}$$

we arrive again to formula (21) for the torque. This means that at drilling, the torque is in direct proportion to feed and to the square of the drill diameter.

For the values of k, the following data have been selected from the available literature:

1. the torque for steel of 75 kg per sq mm tensile strength [2]:

$$T = 3{,}38\, f^{0{,}8}\, D^{1{,}9} \text{ cm kg}. \tag{24}$$

2. *Boston* and *Oxford* [5] determined the torque at drilling in the pound-foot system for SAE 6150 steel (chromium vanadium alloy steel) of 187 Brinell hardness. Adapting their formula for the metric system and for steel of 215 Brinell hardness of 75 kg per sq mm tensile strength, the following formula will be obtained:

$$T = 6{,}64\, f^{0{,}78}\, D^{1{,}8} \text{ cm kg}. \tag{25}$$

These formulas do not agree with formula (21) and if they are extrapolated on a wide range, evidently results differing from values met with in practice will be received.

Examining the data tabled on pages 230—233 of [2], covering an extensive range and giving torque values corresponding to drill sizes between 2 to 60 mm diameter and feed within 0,02 and 0,9 mm per rev., applied to steel of 75 kg per sq mm tensile strength, the values in the table will be found to agree with the following formula, with about 1% deviation:

$$T = 3{,}40\, f^{0{,}8}\, D^2 \text{ cm kg}. \tag{26}$$

From formulas (21) and (26), the specific cutting resistance k for steel of 75 kg per sq mm tensile strength is

$$k = \frac{272}{f^{0{,}2}} \text{ kg per sq mm}. \tag{27}$$

At the standard twist drills with a point angle of 118 deg, neglecting the chip particle of the chisel edge, the average chip thickness is :

$$t_a = \frac{f}{2} \cos 31^\circ = 0{,}428 \text{ mm} \ . \tag{28}$$

Herefrom the value of k in the function of the average chip thickness

$$k = \frac{230}{t_a^{0{,}20}} \text{ kg per sq mm} \tag{29}$$

which is in good agreement with formulas (15), (17) and (20) of k for turning, for face milling and for peripheral milling respectively.

The values for specific cutting resistances for drilling computed by formula (29) for steel of 75 kg per sq mm tensile strength are represented by line 4 in Fig. 1.

The metal cutting method following in the rank of chip thickness is reaming. In technical literature, there are but few detailed data available on this subject. The determination of torque in reaming and of specific cutting resistance k was built up on *Schallbroch*'s experiments [6]. The author gave diagrams of the torque for reaming steel of St. 60, 11 with reamer of 30 mm in diameter depth of cut $d = 0{,}27$ and $0{,}07$ mm, and feed $f = 0{,}5$ mm per rev. The specification of the reamer was : chamfer angle = 45 deg., rake angle 0 deg., relief angle = 10 deg., margin = 0,08 mm, number of teeth $z = 12$.

From the above characteristics, the average chip thickness per tooth, $t_a = 0{,}0225$ and $0{,}00583$.

Specific cutting resistance and average chip thickness are derived from the following formulas :

$$k = \frac{2\,T}{Da} = \frac{2\,T}{Dfd} \text{ kg per sq mm} \tag{30}$$

$$t_a = \frac{d}{z} \text{ mm}. \tag{31}$$

The diagram in Fig. 99 of [6], yields the following values for k : 469 and 751 kg per sq mm for steel St. 60, 11 (tensile strength 60 kg per sq mm). Converted to steel of 75 kg per sq mm tensile strength — which has been taken as a basis — these values amount to 556 and 888 kg per sq mm.

From these data, the formula of specific cutting resistance

$$k = \frac{151}{t_a^{0{,}345}} \text{ kg per sq mm}. \tag{32}$$

The values of k from formula (32), within the ranges of average chip thickness given above, are shown by line 5 in Fig. 1.

When comparing equation (32) with the formulas of the other lines in Fig. 1, we see that in the diagram of double logarithmic scale, formula (32) has a relatively larger slope (0,345) than the others. In consequence, formula (32) gives very low values for k at greater chip thickness, lower than the k values of turning. This does not seem probable. That is why formula (32) cannot be extrapolated beyond the given limits. The accurate results of reaming experiments within wider ranges would probably yield a less sloping line in the diagram.

In respect of grinding, — a cutting method working with very small chip thickness, — the determination of specific cutting resistance has been fully discussed [7]. This time, we shall only discuss the formula of average chip thickness per one single grit at plain cylindrical grinding, as well as the value of the true average specific cutting resistance, based on the data derived from several experiments. These data are necessary to complete our discussion.

$$t_a = \frac{e\sqrt{c}}{\sqrt{\frac{Dd}{D+d}}} \frac{v_p}{60\, v_w} \frac{f}{W} \, mm \tag{33}$$

where e = average theoretical distance of grits on the surface of the grinding wheel, in mm ;
c = depth of cut in mm ;
D = Diameter of the grinding wheel in mm ;
d = diameter of the work-piece in mm ;
v_p = surface velocity of work-piece in m per min.
v_w = surface velocity of grinding wheel in m per sec ;
f = feed per work-piece revolution in mm per rev. ;
W = width of grinding wheel in mm.

The theoretical specific cutting resistance may be calculated from formula (11), on the basis of feed, depth of cut, and work-piece velocity, or from formula (13), from the theoretical chip volume cut per min. At grinding, there is, however, considerable difference between theoretic and actual chip volume. Besides, during grinding, the required power increases in consequence of the wear of the cutting edge of grits. Thus, during time t, at average required power N_{fa}, from chip volume cut, V_t in cu cm, the true average specific cutting resistance

$$k_a = \frac{4500\, N_{fa}\, t}{V_t} \tag{34}$$

is obtained.

The values deriving from this formula were plotted in Fig. 1 in the function of the theoretical average chip thickness, computed by formula (33), using the values determined in [7]. See line 6 in Fig. 1.

Our experiments with grinding steel of 83,6 kg per sq mm tensile strength, between values $t_a = 0{,}00001 - 0{,}000024$ mm yielded the following formula for the values of true average specific cutting resistance at average quality aluminum oxide grinding wheels :

$$k_a = \frac{3{,}5}{t_a^{0{,}63}} \text{ kg per sq mm}. \tag{35}$$

Summing up the relations obtained for the specific cutting resistance at the different metal cutting methods, it will be seen that the diagram of the values of k in the function of the average chip thickness t_a shows a general slope. Thus, if we connect the highest k values in the diagram received at grinding with the values corresponding to $t_a = 1$ mm at turning, we receive the following simple general formula for steel of 75 kg per sq mm tensile strength, valid with good approximation for all cutting methods :

$$k = \frac{183}{t_a^{0{,}288}} \text{ kg per sq mm}. \tag{36}$$

This relation is shown in Fig. 1 by line 7.

It is interesting to note that for the different metal cutting methods the deviation of the values of k as given in the foregoing and the values derived by formula (36) is between $\pm 15\%$. Thus, a simple formula like (36) gives such good approximation as can hardly be expected from the most complex formulas pertaining to the most beautiful theories.

4. Conclusions derived from the method of the general determination of specific cutting resistance

It should be borne in mind that the values of k in Fig. 1. derived by formula (36) are valid only for steel of 75 kg per sq mm tensile strength.

Naturally, the influence of work material on the tangential cutting force, or on the specific cutting resistance is not to be neglected. In order to obtain more exact results for materials other than steel with tensile strength of 75 kg per sq mm, formulas similar to (36) may be computed also for other materials. Empirical data concerning hardened steel of 45—50 R_c hardness and aluminum alloy of 58—60 Brinell hardness yield the following formulas for turning with cemented carbide tools and for grinding.

The formula for hardened steel of 45—50 R_c hardness ($\sigma_B = 160$ kg per sq mm)

$$k = \frac{319}{t_a^{0,274}} \text{ kg per sq mm} \tag{37}$$

for aluminum alloy of 58—60 Brinell hardness

$$k = \frac{34,5}{t_a^{0,367}} \text{ kg per sq mm}. \tag{38}$$

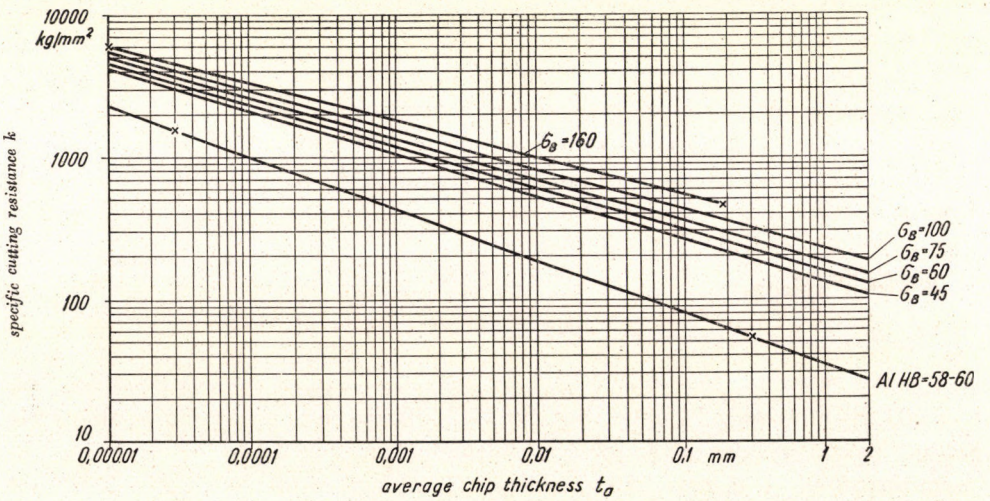


Fig. 2. Average values of specific cutting resistance in the function of the average chip thickness for steels of different tensile strength and for aluminum alloy of 58—60 Brinell hardness

The values of formulas (37) and (38) are shown in Fig. 2, together with those of (36). The values marked by x are the results of the experiments, on which the formulas were built up. By interpolation, formulas for steels of 45, 60 and 100 kg per sq mm tensile strength may be also drawn up.

For steel of 100 kg per sq mm tensile strength

$$k = \frac{227}{t_a^{0,277}} \text{ kg per sq mm}. \tag{39}$$

For steel of 60 kg per sq mm tensile strength

$$k = \frac{155}{t_a^{0,291}} \text{ kg per sq mm}. \tag{40}$$

For steel of 45 kg per sq mm tensile strength

$$k = \frac{137}{t_a\, 0{,}298} \text{ kg per sq mm.} \tag{41}$$

For cast iron, the empirical data on hand are neither sufficient nor reliable, but for cast iron of 190 Brinell hardness the following formula may be used with good approximation :

$$k = \frac{130}{t_a\, 0{,}313} \text{ kg per sq mm.} \tag{42}$$

The decimal fractional powers make, however, the application of these formulas rather cumbersome, therefore the values of specific cutting resistance k in the function of the average chip thickness t_a may be conveniently read off an appropriately scaled diagram, like the one in Fig. 2 with adequate functional precision.

As a point of interest, the harder materials have a smaller slope (e. g. hardened steel 0,274), while softer ones have a larger slope (e. g. aluminum alloy 0,367).

Reverting to Fig. 1, it may be observed that the curves of the different metal cutting methods have different slopes. For the moment, it cannot be determined whether this is due to the inaccuracy of the experimental data used or whether the slope is truly characteristic of the cutting method. Apparently, however, metal cutting methods working with a smaller average chip thickness have a larger slope, e. g. reaming (0,341), and grinding (0,63). Further experiments will have to throw light on this question.

Admitting that the slope is characteristic of the different metal cutting methods and combining it with the variation of the slope denoting the hardness of the materials we arrive to drawing up a diagram of the specific cutting resistance k in the function of average chip thickness t_a, which is more accurate than the diagram in Fig. 2. The diagram will be similar to the one in Fig. 1, but modified according to the hardness of the material. The clarification of these problems requires continued experiments executed with considerable precision and care.

The values of specific cutting resistance for metal cutting methods where no experimental results are available, can be determined by the above method. For example in shaving, average chip thickness is smaller than in reaming but larger than in grinding, therefore the numerical values of k would be on line 7, between grinding and reaming. Or e. g. in lapping, average chip thickness is smaller than in grinding, therefore the numerical values of k will be greater than in grinding.

Similarly, a fair estimate of the correct values of k may be obtained at any metal cutting method.

Finally, let us examine whether calculation with the specific cutting resistance reduces to a minimum the influence of other variables, to yield a degree of accuracy consistent with practical requirements.

Examining the variables on the basis of formula (1), we may make the following statements :

1. The influence of variable K_t (tool material) is not essential in practice. When using cemented carbide and high speed steel tools under invariable metal cutting conditions, there is no difference in practice either in tangential cutting force, in power required and in specific cutting resistance.

Using diamond tools for the turning of copper tubing e.g. requires about one fifth of the tangential cutting force needed with high speed tools, according to *Merchant* [8].

Experiments have sometimes shown a difference in tangential cutting force, comparing cemented carbide tools with ceramic tools. In certain cases, values were found to be about 10% higher for ceramic tools. Much experimental work is still necessary in this field.

2. The influence of cutting speed may be very essential at different metal cutting methods under otherwise equal conditions. Still, recently high speed cutting with carbide tools is performed with negative, or very low rake angles as compared to high speed steel tools, a feature largely compensating for the decreasing effect of increased speed on the specific cutting resistance. Thus, the actual difference is not more than about 5%, in favour of carbide tools.

3. The influence of variable K_m (work material) was taken into consideration in Figs. 2 and 3.

4. The influence of variables $K_\varkappa$ (side cutting edge angle), K_τ (end cutting edge angle), K_R (nose radius) and feed (f) is incorporated in the average chip thickness t_a.

5. The influence of variables K_γ (side rake angle) and K_λ (back rake angle) is incorporated in the values of specific cutting resistance k, as the system was built up on empirical values for standardized tools. The deviations of the side rake angle and the back rake angle from the standards may result in a very slight difference not exceeding about 5% in the values of k.

6. The influence of variable K_Δ (tool wear) is not incorporated in the values of k. This is not consistent with any system or theory.

At turning and at face milling, there are specifications for allowed tool wear at which the deviation in tangential cutting force is estimated to be 10—15%. On the other hand, at methods working with small chip thickness, excessive tool wear might cause more than 100% increase in tangential cutting force.

In the formulas and diagrams, the values generally refer to sharp tools, except at grinding, where the calculus was made with average values.

7. K_h (cutting fluid) may also exert a certain influence on specific cutting resistance ; the values given are valid for high speed steel tools with cutting

fluid, and for carbide tools, without cooling. Deviations in empirical values, if any, would cause no such differences as would essentially affect the applicability of the method.

8. The influence of the depth of cut d is directly proportional to the tangential cutting force, therefore it has no essential influence on specific cutting resistance.

In conclusion, the following statement can be derived : Calculation with specific cutting resistance as a function of the average chip thickness, taking into consideration the influence of work material, yields numerical values for the tangential cutting force and the required power with adequate functional accuracy for any arbitrary metal cutting method under arbitrary conditions. For the time being, these results cannot be emulated by theoretical procedures.

5. Calculation with specific cutting resitance and determination of specific chip volume at metal cutting

The calculus discussed above, which is based on the determination of the specific cutting resistance, yields prompt, simple and dependable results ; these features render it expedient for the control of values calculated by another method. An example of this has already beeen given in chapter 3 with reference to drilling. No more examples can be quoted here due to the lack of space, nevertheless the great significance of this method for checking other calculations should not be overlooked. Specifically, the formulas derived from the various sources may yield incorrect values either in consequence of some mistake or of the excessive extension of ranges.

Another means of checking rests on the determination of specific cutting resistance. It is computation by the specific chip volume (metal removal) V_f cu cm per min. per HP which shows the volume of the material in cu cm removed by a certain metal cutting method by one HP during one minute. Essentially, the value of V_f is the reciprocal of k in accordance with formula (12) and therefore it can also be determined in the function of the average chip thickness.

From the general relations of the values of k specified above, the general formulas for V_f will be the following for various materials :

For aluminum alloy of 58—60 Brinell hardness :

$$V_f = 130\ t_a^{0,367} \text{ cu cm per min. per HP} \tag{43}$$

For cast iron of 190 Brinell hardness :

$$V_f = 34{,}6\ t_a^{0,313} \text{ cu cm per min. per HP} \tag{44}$$

For steel of 45 kg per sq mm tensile strength :

$$V_f = 32{,}8\ t_a^{0,298} \text{ cu cm per min. per HP} \tag{45}$$

For steel of 60 kg per sq mm tensile strength :

$$V_f = 29\ t_a^{0,291} \text{ cu cm per min. per HP} \tag{46}$$

For steel of 75 kg per sq mm tensile strength :

$$V_f = 24{,}6\ t_a^{0,288} \text{ cu cm per min. per HP} \tag{47}$$

For steel of 100 kg per sq mm tensile strength :

$$V_f = 19{,}8\ t_a^{0,277} \text{ cu cm per min. per HP} \tag{48}$$

For steel of 160 kg per sq mm tensile strength (45—50 HR_c) :

$$V_f = 14{,}1\ t_a^{0,274} \text{ cu cm per min. per HP} \tag{49}$$

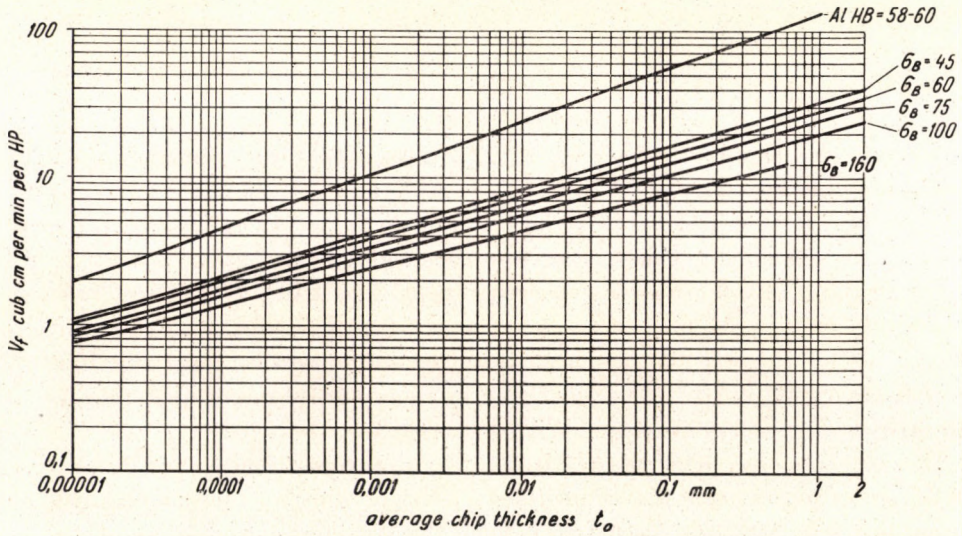


Fig. 3. Average values of specific chip volume (metal removal) in the function of the average chip thickness for steels of different tensile strength and for aluminum alloy of 58—60 Brinell hardness

The values of the above formulas — except the one for cast iron — are represented in Fig. 3. Assuming that the required N_f, of the machine tool for metal cutting is known, the rate of metal removal per minute will be the following :

$$V = V_f\ N_f \text{ cu cm per min.} \tag{50}$$

In practice, it is always possible to determine the stock removal from the rough work-piece or from its former dimensions, computing therefrom the cutting conditions, viz : depth of cut d, feed per rev. f, cutting speed v, angles of the tool, etc. ; thus the average chip thickness can be determined.

The diagrams in Fig. 3 give the values of V_f for any metal cutting method and from the required power of N_f net HP consumed by metal cutting, the rate of metal removal per min. V can be determined. From that value, the cutting time may easily be computed.

It is, however, often more practical to calculate with tangential cutting force and with cutting speed because the first gives information concerning the stress on machine and tool, while the latter estimates the life of the tool.

In general calculations, the tangential cutting force is always an average rate, because under close observation, the cutting forces invariably show a fluctuation. This fluctuation is, however, not indentical with the increase of cutting forces which is characteristic for some metal cutting methods, e. g. for peripheral milling. At that method, namely, the teeth of tool begin work with zero chip thickness, i. e. with zero cutting force, and end with maximum chip thickness and with maximum cutting force.

In the above described rapid calculus of the average cutting force, the characteristics of the metal cutting method should always be taken into consideration when evaluating the cutting force, in order to obtain the highest values.

6. Conclusions

The method discussed above permits the calculation of the tangential cutting forces and of the required power for any metal cutting method under commonly used, arbitrary cutting conditions. The method is built up on calculation with the specific cutting resistance as a function of average chip thickness, taking into account the characteristics of the work material.

The values of specific cutting resistances have been determined from a wholesale recording of the experimental data concerning the power required at highly different methods of metal cutting. The systematic recording of the values of the specific cutting resistance proves the validity of the experimentally derived law that specific cutting resistance depends chiefly on the average chip thickness.

This method of calculation meets practical requirements, by yielding the average tangential cutting force and the power required with about $\pm 15\%$ accuracy.

The method satisfies practical requirements by giving the values of the tangential cutting force and of the power required in a prompt, simple and dependable manner.

The elaboration of this method of calculation does by no means do away with the necessity for continuing theoretical research and the development of the theory of metal cutting. Further research is necessary to obtain a wider knowledge of the phenomena of metal cutting, and to enable us to increase production and reduce production costs with the aid of better tools.

Further experiments and research are needed to develop the method now presented, and to determine the ranges of its applicability. Continued experiments are expected to yield more accurate data improving the precision of the calculus.

REFERENCES

1. Manual on Cutting of Metals. ASME 1939.
2. Rejimi rezaniya metallov instrumentami in bistrorejushtchey stali — Masgiz 1950.
3. Rejimi skorostnovo resaniya metallov — Masgiz 1950.
4. HORNUNG A.: Forgácsoláselmélet és forgácsolószerszámok (Metal Cutting Theory and Tools) Egyetemi Tankönyvkiadó, Budapest, 1953. (Hungarian).
5. O. W. BOSTON and C. J. OXFORD: Torque, Thrust and Power for Drilling. SAE Journal, March 1931, pp. 378—383.
6. SCHALLBROCH: Bohrarbeit und Bohrmaschine. Hanser Verlag, 1951.
7. A. HORNUNG,: Determination of Power Required in Grinding. Acta Technica, No. 3–4 Vol. IX. Budapest.
8. M. E. MERCHANT,: Comparative Cutting Tests of a Diamond Tool and a High Speed Tool. Ind. Diamond Rev., Vol. 4, June 1944.

SUMMARY

In the machine industry employing metal cutting, there has been a call for a simple, dependable and generally applicable method for the determination of the tangential cutting force and of the power required for cutting. Calculation methods and formulas found in the pertinent literature are extremely involved, besides most of them are only applicable within certain limits and under strictly defined conditions, owing to which they are not extensively applied in machine industrial practice. Thus, there is need for a simple, though perhaps less accurate method of calculation which can be conveniently employed by all.

This paper reports on such a calculus, fit to be applied to all cutting methods used in the industry. It has been built up on the determination of the specific cutting resistance and of the specific chip volume as a function of the average chip thickness.

The calculus lends itself well for checking the values of the main cutting force and of the power required determined by some other method.

ОБЩАЯ МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСИЛИЯ РЕЗАНИЯ И МОЩНОСТИ НА ОСНОВЕ УДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ РЕЗАНИЯ

Д-р техн. наук А. ХОРНУНГ

РЕЗЮМЕ

В машиностроении, где металл обрабатывается резанием, очень остро чувствуется отсутствие какого-либо простого в применении, надежного и общего метода расчета, при помощи которого можно определить основное усилие резания (тангенциальное усилие) и мощность, потребляемую при резании. Опубликованные до настоящего времени в технической литературе методики расчета и формулы являются очень сложными, кроме того большинство их применениимо в определенных пределах и при определенных условиях. Поэтому их применение в практике машиностроения не нашло распространения. Следовательно, необходимо иметь методику расчета лучше с меньшей точностью, но простую в обращении, которая может быть общеприменимой.

Такая методика расчета излагается в данной статье. Эта методика может быть применена для всех обычно встречающихся на практике видов обработки резанием. Система построена на основе определения удельного сопротивления резания и удельной мощности, необходимой для резания металла в функции средней толщины стружки.

Предлагаемая методика расчета дает большие преимущества также при контроле данных, полученных при использовании других методов определения основного усилия резания и мощности.

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR LA DÉTERMINATION DE L'EFFORT DE COUPE ET DE LA PUISSANCE DE COUPE, BASÉE SUR LA RÉSISTANCE DE COUPE SPÉCIFIQUE

A. HORNUNG
Docteur des Sciences Techniques

RÉSUMÉ

L'industrie mécanique utilisant la coupe des métaux manque d'une méthode de calcul simple et générale pour la détermination de l'effort de coupe principal (tangentiel) et de la puissance nécessaire pour l'enlèvement des copeaux. Les méthodes de calcul et les formules publiées jusqu'ici sont trés compliquées et ne sont valables que dans des conditions déterminées et entre certaines limites. De ce fait leur emploi ne s'est pas répandu dans l'industrie. On a donc besoin d'une méthode de calcul qui pour être moins précise, est simple et se prête à une application générale.

L'auteur fait connaître une méthode de calcul applicable à toutes les méthodes d'usinage rencontrées dans la pratique. Elle est basée sur la détermination de la résistance de coupe spécifique et de la puissance de coupe spécifique en fonction de l'épaisseur moyenne du copeau.

La méthode de calcul peut en plus être utilement employée pour la vérification des efforts de coupe principaux et des puissances absorbées, calculés à l'aide d'autres méthodes.

ALLGEMEINE METHODE ZUR BESTIMMUNG DER HAUPTSCHNITTKRAFT UND SCHNITTLEISTUNG AUF GRUND DES SPEZIFISCHEN ZERSPANUNGS-WIDERSTANDES

A. HORNUNG
Doktor der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Die mit der spanabhebenden Formung der Metalle arbeitende Maschinenindustrie entbehrt sehr eine einfache, verlässliche und allgemeine Berechnungsmethode, mit der sich die tangentiale, sog. Hauptschnittkraft und die zur Spanabhebung notwendige Leistung bestimmen lassen. Die bisher im Schrifttum veröffentlichten Berechnungsmethoden und Formeln sind überaus verwickelt und besitzen bloss innerhalb gewisser Grenzen und unter bestimmten Verhältnissen Gültigkeit. Aus diesem Grunde konnte sich ihre Anwendung in der Praxis der Maschinenindustrie nicht durchsetzen. Es liegt also das Bedürfnis nach einer Berechnungsmethode vor, bei der man eine geringere Genauigkeit in Kauf zu nehmen gewillt ist, wenn man sie nur infolge ihrer Einfachheit allgemein anwenden kann.

In der vorliegenden Arbeit wird eine solche Rechenmethode beschrieben, die bei sämtlichen in der Praxis üblichen spanabhebenden Verfahren angewandt werden kann. Diese Methode beruht auf der Feststellung des spezifischen Zerspanungswiderstandes und des abgearbeiteten Spanvolumens als Funktionen der mittleren Spandicke.

Die hier geschilderte Berechnungsmethode kann auch äusserst vorteilhaft zur Kontrolle der auf einer anderen Grundlage erhaltenen Werte der Hauptschnittkraft und der Leistung benutzt werden.

PRINCIPLES OF GRAVITY CONCENTRATION

Prof. G. TARJÁN

CORRESP. MEMBER OF THE HUNGARIAN ACAD. OF SC.
INSTITUTE OF MINERAL DRESSING, TECHNICAL UNIVERSITY, SOPRON

[Manuscript received 24th November, 1954]

Recently the differential settlement of minerals in the course of their gravity concentration, has been explained on the basis of the law of entropy. [1, 2] According to this, a system endeavours to reach a state at which its entropy increases while its free energy decreases. Where the grains of diverse specific gravity forming the system can change their mutual position, condition *II*, layered according to specific gravity, will »spontaneously« arise from con-

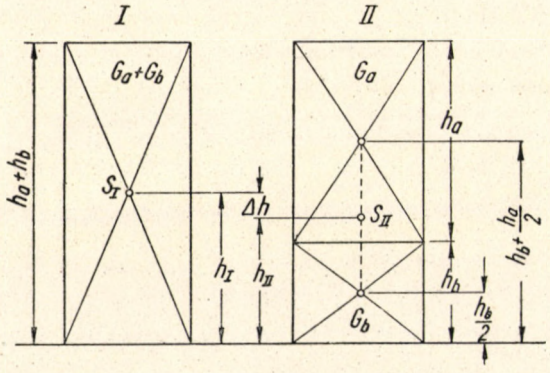


Fig. 1

dition *I*, shown in Fig. 1 where the grains have not yet been arranged, provided condition *II* has less free energy. In this case, the potential energy appears as free energy. Its magnitude in either case is :

$$E_I = \frac{(G_a + G_b)(h_a + h_b)}{2} \quad \text{and} \quad E_{II} = G_a\left(h_b + \frac{h_a}{2}\right) + G_b \frac{h_b}{2}.$$

Settlement in layers will therefore set in where

$$\Delta E = E_I - E_{II} = \frac{1}{2}(G_b h_a - G_a h_b) > 0.$$

Substituting the values $G_a = Fh_a\delta'_a$ and $G_b = Fh_b\delta_b$, where subscript a refers to the component material of lower specific gravity and subscript b to that of higher specific gravity, F is the cross section of the column of material, and δ' the volume weight of the loose material,

$$\Delta E = F\frac{h_a h_b}{2}(\delta'_b - \delta'_a)$$

is obtained. As $\delta'_b > \delta'_a$, $\Delta E > 0$, the material will be arranged in layers according to the specific gravity. This arrangement will be the more rapid, the greater ΔE, i. e. the greater the difference in specific gravity $\delta'_b - \delta'_a$, and the product $h_a h_b$. At equal total height of the layers $h_a + h_b$, this product is greatest where $h_a = h_b$.

Denoting with a the *loose volume percentage* of the lighter grains, and with b that of heavier grains, $h_a = \frac{a}{F}$ and $h_b = \frac{b}{F}$, i. e. $\Delta E = \frac{ab}{2F}(\delta'_b - \delta'_a)$.

As a yardstick of the speed of stratification may be taken after *Kirchberg* [2] also the value of $H = \frac{\Delta h}{h_I} = \frac{h_I - h_{II}}{h_I}$, i. e. the relative difference of the height of the centre of gravity in the unarranged and in the stratified state referred to that in the unarranged, original state. The higher this value, the easier and more perfect will be the arrangement in layers, and the sharper the separation.

$$h_I = \frac{h_a + h_b}{2} \quad \text{and} \quad h_{II} = \frac{h_b}{2} + \frac{(h_a + h_b)h_a\delta'_a}{2(h_a\delta'_a + h_b\delta'_b)}$$

as deduced from the equation of moments

$$\frac{h_b}{2}h_b\delta'_b + \left(h_b + \frac{h_a}{2}\right)h_a\delta'_a = h_{II}(h_b\delta'_b + h_a\delta'_a).$$

Substituting the values of h_I and h_{II}, we obtain

$$\Delta h = h_I - h_{II} = \frac{h_a h_b(\delta'_b - \delta'_a)}{2(h_a\delta'_a + h_b\delta'_b)}; \text{ and}$$

$$H = \frac{\Delta h}{h_I} = \frac{h_a h_b(\delta'_b - \delta'_a)}{(h_a + h_b)(h_b\delta'_a + h_b\delta'_b)}.$$

Substituting $h_a = \frac{a}{F}$ and $h_b = \frac{b}{F}$, we obtain

$$H = \frac{ab(\delta'_b - \delta'_a)}{(a + b)(a\delta'_a + b\delta'_b)}.$$

As $a + b = 100\%$, the value of H in percentage is expressed by formula :

$$H^0/_0 = 100\frac{\Delta h}{h_I} = \frac{ab\,(\delta_b' - \delta_a')}{a\delta_a' + b\delta_b'}\,.$$

Passing from a and b volume percentages to the corresponding weight percentages, and substituting the values $a = \dfrac{A/\delta_a'}{A/\delta_a' + B/\delta_b'}$ and $b = \dfrac{B/\delta_b'}{A/\delta_a' + B/\delta_b}$ expression $H^0/_0 = \dfrac{(AB\,(\delta_b' - \delta_a')}{(A + B)\,(A\delta_b' + B\delta_a')}$ and, taking into account that $A + B = 100\%$, $100\,H^0/_0 = \dfrac{AB\,(\delta_b' - \delta_a')}{A\delta_b' + B\delta_a'}$ is arrived at. Denoting the volume ratio of solid substances of specific gravities of δ_a and δ_b respectively, by σ_a and σ_b, in the mixture of the solid substance and the medium, $\delta_a' = \sigma_a\,\delta_a$ and $\delta_b' = \sigma_b\,\delta_b$. Hence

$$100\,H^0/_0 = \frac{AB\,(\sigma_b\,\delta_b - \sigma_a\,\delta_a)}{A\,\sigma_b\,\delta_b + B\,\sigma_a\,\delta_a}\,.$$

In the layered substance it may be assumed that $\sigma_a \cong \sigma_b$; in that case

$$100\,H^0/_0 = \frac{AB\,(\delta_b - \delta_a)}{A\,\delta_b + B\,\delta_a}\,.$$

If stratification does not take place in air, but in water or some heavy suspension, the buoyancy due to the medium is not to be neglected, and the specific gravity of the solid grains should be reduced by the specific gravity of the medium. In such case, the formula will correctly read :

$$100\,H^0/_0 = \frac{AB\,(\delta_b - \delta_a)}{A\,(\delta_b - \gamma) + B\,(\delta_a - \gamma)} = \frac{AB\,(\delta_b - \delta_a)}{A\delta_b + B\delta_a - 100\,\gamma}\,.$$

It will be seen from the above expression that $H\%$ is the greater — in other words, the separation will be the easier and sharper — the higher the specific gravity of the medium γ, the greater the difference of specific gravity $\delta_b - \delta_a$, and at the same time, the lower the absolute values of δ_b and δ_a. Accordingly separation by specific gravity is accomplished more easily in water than in air ($\gamma_{\text{water}} > \gamma_{\text{air}}$), and in heavy suspension more easily than in water ; it is more easily accomplished with coal, where absolute specific gravities are lower than in ore dressing.

The magnitude of $H\%$ further depends on the relative value of A and B, i. e. of the percentual weight ratio of the components. Equating the derivat-

ive according to A of the function $100\,H\%_0 = \frac{A\,(1-A)\,(\delta'_b - \delta'_a)}{A\,\delta'_b + (1-A)\,\delta'_a}$ to zero, we obtain the value of A to which corresponds the maximum of $H\%$.

The calculus leads to equation $\frac{A^2}{1-2A} = \frac{\delta'_a}{\delta'_b - \delta'_a}$ wherefrom, denoting the right side of the equation by z,

$$z = \frac{\delta'_a}{\delta'_b - \delta'_a} = \frac{\sigma_a\,(\delta_a - \gamma)}{\sigma_b\,(\delta_b - \gamma) - \sigma_a\,(\delta_a - \gamma)} \cong \frac{\delta_a - \gamma}{\delta_b - \delta_a},$$

$A_{opt} = \sqrt{z^2 + z} - z$ expression is deduced.

The optimum A values pertaining to the z values — in other words, the optimum weight ratio of the substance of lower specific gravity — are shown in Table I.

TABLE I

z	A_{opt}	z	A_{opt}
∞	0,500	0,6	0,380
10	0,488	0,5	0,366
5	0,477	0,4	0,348
2	0,450	0,3	0,325
1,5	0,436	0,2	0,290
1	0,414	0,1	0,232
0,8	0,400	0,05	0,179
0,7	0,391	0	0

E. g. in case of hematite ($\delta_b = 5{,}1$) and quartz ($\delta_a = 2{,}6$), the values obtained in water ($\gamma = 1$) would be $z = 0{,}64$, $A_{\text{opt}} = 38{,}5\%$ and $100\,H\%_{\text{max}} = 23{,}1$; against this, if middlings of $\delta_a = 4{,}0$ and $\delta_b = 4{,}5$ specific gravity are to be separated, $z = 6{,}0$, $A_{\text{opt}} = 48{,}1\%$ and $100\,H\% = 3{,}86$ will be obtained. When separation is effected in air ($\gamma \cong 0$), the two $100\,H\%$ values would amount to 16,6 and 2,95 respectively, and e. g. in a suspension of 1,8 specific gravity, the two $100\,H\%$ values would be 33,6 and 5,12 respectively.

Table II shows the variations of the $100\,H\%$ values of the same pairs of specific gravities δ_a and δ_b as functions of $A\%$, in air ($\gamma = 0$), in water ($\gamma = 1$) and in a suspension of $\gamma = 1{,}8$ specific gravity.

The magnitude of $H\%$ is the yardstick of the tendency of unarranged— that is to say, evenly mixed — grains of δ_a and δ_b specific gravity to settle in separate layers. When stratification has already begun, and the bulk of the grains of higher specific gravity is deposited in the lower layer while the grains of lower specific gravity have overwhelmingly settled in the upper layer, no

TABLE II

δ_a / δ_b	γ	100 H %										
		A = 0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
2,6 / 5,1	0	0	7,9	12,9	15,6	16,7	16,2	14,6	12,1	8,7	4,6	0
	1	0	12,2	19,0	22,3	23,0	21,9	19,3	15,7	11,1	5,8	0
	1,8	0	21,4	30,7	33,8	33,3	30,4	26,0	20,6	14,3	7,3	0
4,0 / 4,5	0	0	1,11	1,95	2,52	2,86	2,94	2,79	2,41	1,82	1,01	0
	1	0	1,47	2,58	3,33	3,75	3,84	3,64	3,13	2,35	1,30	0
	1,8	0	2,00	3,48	4,68	5,00	5,10	4,80	4,31	3,08	1,80	0

reliable information can any more be obtained concerning the behaviour of the grains still remaining in the mass of foreign grains from the value of the $H\%$ determined for the original, unarranged mass. In the layer containing grains of lower specific gravity, the value of A in the vicinity of residual grains of high specific gravity has shifted towards 100% as compared to the original status, while in the layer containing grains of high specific gravity, the value of A in the vicinity of the remaining grains of low specific gravity has shifted towards 0%. In the neighbourhood of such grains, the law of entropy is manifested by the heavier of the adjoining spaces — at equal volume — composing a mixture of solid grains+medium, taking the lower position.

Accordingly, in the bed or a medium of the consistency of quick sand, each grain has a buoyancy as though it were immersed in a fluid, the specific gravity of which is equal to the average specific gravity of the surrounding mixture of solid grains plus water, irrespective of whether the solid component of the surrounding medium is made up of fine or of coarse grains.

In Fig. 2 two adjoining spaces of equal volume V are marked I and II respectively. No. I endeavours to move upward with the solid particles included, while No. II seeks to move downward, if the weight of the mixture made up of solid part + water is less in No. I than in No. II, i. e. if $\Sigma G_I < \Sigma G_{II}$. Substituting the values

$$\sum G_I = v_a^I \delta_a + v_b^I \delta_b + (V - v_a^I - v_b^I)\gamma$$

$$\sum G_{II} = v_a^{II} \delta_a + v_b^{II} \delta_b + (V - v_a^{II} - v_b^{II})\gamma,$$

$$v_a^I (\delta_a - \gamma) + v_b^I (\delta_b - \gamma) < v_a^{II} (\delta_a - \gamma) + v_b^{II} (\delta_b - \gamma)$$

and $$(v_a^I - v_a^{II})(\delta_a - \gamma) < (v_b^{II} - v_b^I)(\delta_b - \gamma)$$

inegalities are arrived at as a condition of the upward displacement of space I.

$$\text{Therefrom, } \frac{v_a^I - v_a^{II}}{v_b^{II} - v_b^I} < \frac{\delta_b - \gamma}{\delta_a - \gamma}.$$

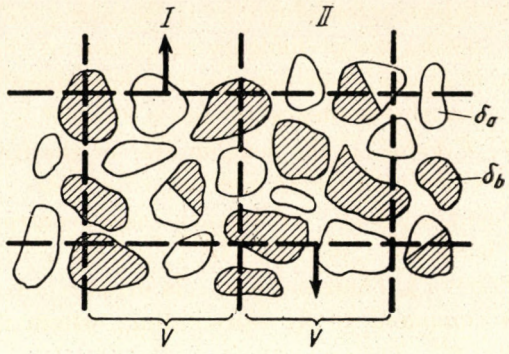


Fig. 2

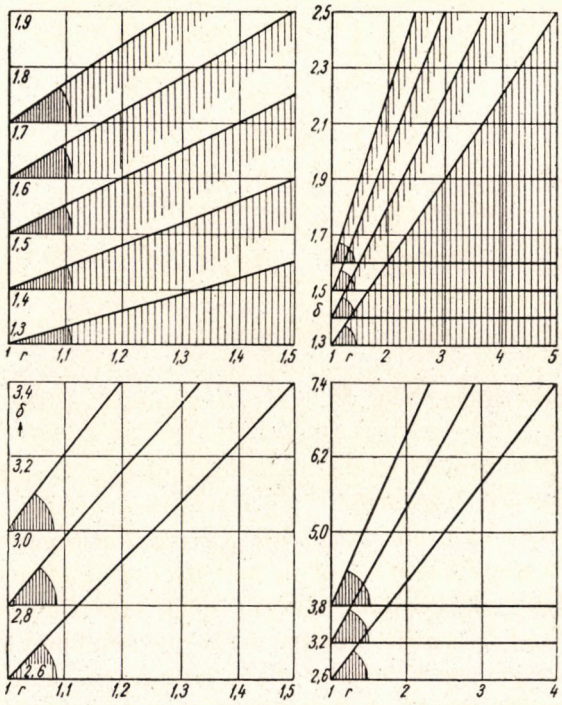


Fig. 3

Expression $r = \dfrac{\delta - \gamma}{\delta_a - \gamma}$ on the right side of the inegality — the ratio of the relative specific weights — is the higher, the greater the difference between δ_b and δ_a, and the less the difference between δ_a and γ.

Fig. 3 yields the δ_b values belonging to the δ_a values of coal (1,3 — 1,7), of the most frequent gangues (2,6 — 3,0) and middlings (3,0 — 3,8) of ore

dressing, at various r values, referred to $\gamma = 1$. Denoting the fraction on the left side of the inegality by E, the preliminary condition of the upward displacement of the I space is $E < r$ — as long as the denominator of fraction E is a positive number — and the tendency to move upward is the stronger, the greater the $M = r - E$ value. If the denominator of the fraction is a negative number, the inegality will change to the opposite sense, and the condition of I's upward movement will be $E > r$. In such cases occurring in practice, however, the value of E is negative, or it may be a positive number less than unity, while r is invariably above 1. Therefore $E < r$, in other words, space I invariably moves downward as compared to its surrounding, where the denominator of expression $E = \dfrac{v_a^I - v_a^{II}}{v_b^{II} - v_b^I}$ is a negative number. The downward tendency

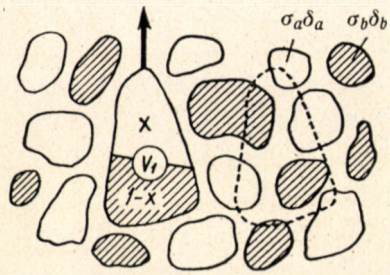


Fig. 4

is all the greater, the higher the $M = E - r$ value, i. e. the greater E, and the smaller $r - E$.

Let us apply the formula to the case shown in Fig. 4, seeking to find the condition of the upward movement of an intergrown grain in the suspension or bed of various grains of δ_a and δ_b specific gravity. Let fraction x of the intergrown grain have a specific gravity of δ_a and its $1-x$ fraction δ_b, and let the volume fraction of the surrounding minerals of δ_a specific gravity be σ_a, and that of the minerals of δ_b specific gravity σ_b. In the neighbouring space II, the volume of which is equal to V volume of the intergrown grain, the volume of the grains of δ_a specific gravity will therefore be $\sigma_a V$, and that of the grains of δ_b specific gravity $\sigma_b V$.

We can therefore write $E = \dfrac{v_a^I - v_a^{II}}{v_b^{II} - v_b^I} = \dfrac{Vx - V\sigma_a}{V\sigma_b - V(1-x)} = \dfrac{x - \sigma_a}{\sigma_b - 1 + x}$.

Let $\sigma_a + \sigma_b = \sigma$ and $\sigma_a = a\,\sigma$, then formula $E = \dfrac{x - a\sigma}{x - a\sigma - 1 + \sigma}$ will be arrived at.

Fig. 5 shows the variation of the value of E as a function of x and a respectively, referred to the case of $\sigma = 0{,}6$ and $\sigma = 0{,}4$. The curves above

the $E = 1$ line pertain to positive denominators. In respect of these, therefore, $x + \sigma > 1 + \alpha\sigma$, or $\sigma > \frac{1-x}{1-\alpha}$, in which case the condition $E < r$ is valid for the upward movement of the intergrown grain. In the family of curves situated below the $E = 1$ line, the denominator is negative, i. e. $\sigma < \frac{1-x}{1-\alpha}$. In this case, the intergrown grain has a sinking tendency, which is the stronger,

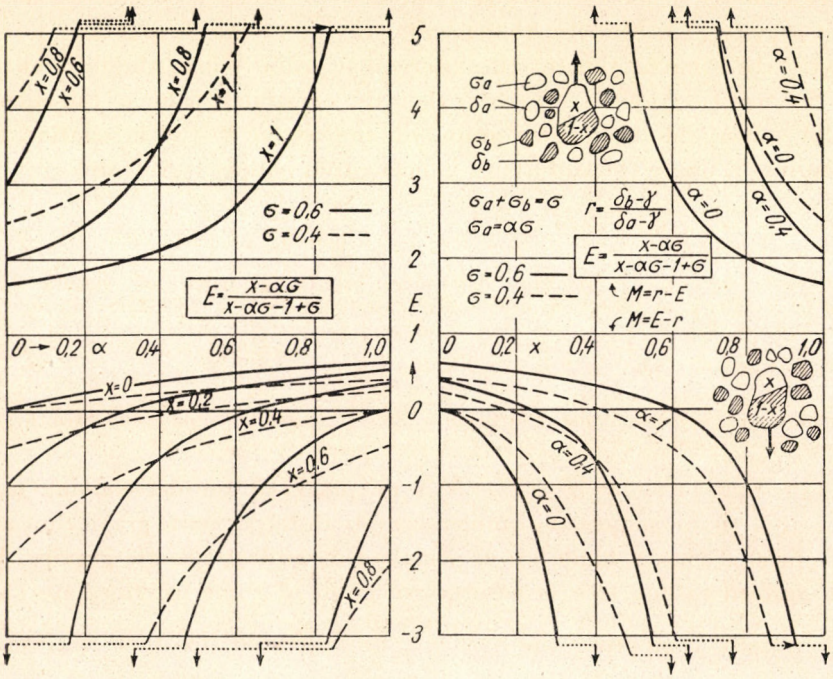


Fig. 5

the greater is E ($E = -0{,}2$ is greater than $E = -2{,}0$, or $-\infty$), and the smaller $r - E$. E. g. where α and σ are constant, E is the greater and $r - E$ is the smaller, the less is x, in other words, the high the specific gravity of the sinking grain. Or e. g. where x and σ are constant, E — i. e. the tendency of the grain to sink — is the greater, the larger α; i. e. the lower the specific gravity of the grains surrounding the grain under examination. The unstable, transient state of sinking or rising is determined by $E = r$; that point pertains to a value of E having a positive denominator, i. e. to the upper curves in Fig. 5. E. g. where $\sigma = 0{,}6$, $\alpha = 0{,}2$ and $x = 0{,}8$, $E = \frac{x - a\sigma}{x - a\sigma - 1 + \sigma} =$

$= \frac{0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}6}{0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 - 1 + 0{,}6} = \frac{0{,}68}{0{,}28} = 2{,}426$. (Positive denominator!) The values

pertaining to $r = 2{,}426$ — referred to $\gamma = 1$ — are e. g. $\delta_a = 1{,}3$ and $\delta_b = 1{,}73$, or $\delta_a = 1{,}5$ and $\delta = 2{,}21$, or $\delta_a = 2{,}6$ and $\delta_b = 4{,}88$ or $\delta_a = 3{,}0$ and $\delta_b = 5{,}85$. In air ($\gamma = 0$), $\sigma = 0{,}6$, $a = 0{,}2$, $x = 0{,}8$ and referred to $E = r = 2{,}426$, e. g. $\delta_b = 3{,}16$ belongs to $\delta_a = 1{,}3$, and $\delta_b = 6{,}31$ to $\delta_a = 2{,}6$. In the event of the above correlated δ_a and δ_b values, an intergrown grain, 80% of the volume of which is of lower specific gravity (δ_a) and 20% of higher specific gravity (δ_b) would be exactly afloat in a bed (or suspension) of 60% density consisting of 20 volume % of minerals of lower specific gravity (δ_a) and of 80 volume % of minerals of higher specific gravity (δ_b). Namely, the specific gravity of the surrounding substance is exactly the same as that of the intergrown grain. Where the difference between the specific gravities is greater than the computed value of the correlated ($\delta_b - \delta_a$) values, the intergrown grain will endeavour to rise in relation to the surroundings ; where the difference is below that value, it will sink.

Or e. g., at $\sigma = 0{,}7$, $a = 0{,}2$ and $x = 0{,}8$, $E = \dfrac{0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}7}{0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}7 - 1 + 0{,}7} = \dfrac{0{,}66}{0{,}36} = 1{,}83.$

In that case, the $E = r$ relation determines correlated pairs of specific weights in water ($\gamma = 1$) e. g. of 1,3—1,55, or 1,5—1,915, or 2,6—3,93, or 3,0—4,66 ; in air ($\gamma = 0$) of 1,3—2,38, or 2,5—4,75.

E. g. where $\sigma = 0{,}6$, $a = 0{,}4$, $x = 0{,}5$, $E = \dfrac{0{,}5 - 0{,}4 \cdot 0{,}6}{0{,}5 - 0{,}4 \cdot 0{,}6 - 1 + 0{,}6} = \dfrac{0{,}26}{-0{,}14}$;

the denominator is negative, consequently the grain will invariably sink, even where the specific gravity is $\delta_b \to \infty$ and $\delta_a \to 1$, i. e. also at $r \to \infty$.

Note that formula $M = r - E$ is not only fit for determining the behaviour of a grain composed of minerals of δ_a and δ_b specific gravity in a mixture of optional density made up of grains of δ_a and δ_b specific gravity, but it can be applied to any free or intergrown grain of some intermediate specific gravity (δ), by computing the $x = \dfrac{\delta_b - \delta}{\delta_b - \delta_a}$ referred to that intermediate specific gravity, by formula $\delta = x\,\delta_a + (1 - x)\,\delta_b$.

E. g. let us examine the behaviour of a sphalerite grain of $\delta = 4$ specific gravity in a watery mixture of galena and quartz grains ($\delta_b = 7{,}5$, $\delta_a = 2{,}6$) of 60% density if $a = 0{,}1$, 0,3, 0,4 or 0,7. $x = \dfrac{7{,}5 - 4}{7{,}5 - 2{,}6} = 0{,}715$, therefore, at $a = 0{,}1$, $E = \dfrac{0{,}715 - 0{,}1 \cdot 0{,}6}{0{,}715 - 0{,}1 \cdot 0{,}6 - 1 + 0{,}6} = \dfrac{0{,}655}{0{,}255} = 2{,}56$; $r = \dfrac{7{,}5 - 1}{2{,}6 - 1} = 4{,}06$. $E < r$, therefore the sphalerite grain will move upwards in the bed consisting overwhelmingly (90%) of galena grains. (At the same time, of course, the quartz grains endeavour still more strongly to emerge from the galena layer!) At $a = 0{,}3$,

$E = \dfrac{0{,}715 - 0{,}3 \cdot 0{,}6}{0{,}715 - 0{,}3 \cdot 0{,}6 - 1 + 0{,}6} = \dfrac{0{,}535}{0{,}135} = 3{,}96$; it is but slightly less than the $r = 4{,}06$ value ; theoretically, the sphalerite grain tends to move upwards, but the force driving it upward is so small that in reality, the sphalerite remains within the layer (as long as the value of a has been adequately reduced as a result of the upward displacement of the quartz grains). Where $a = 0{,}4$, $E = \dfrac{0{,}475}{0{,}075} = 6{,}34$; $E > r$, therefore the sphalerite grain will sink. At $a = 0{,}7$,

$E = \frac{0{,}715 - 0{,}7 \,.\, 0{,}6}{0{,}715 - 0{,}7 \,.\, 0{,}6 - 1 + 0{,}6} = \frac{0{,}295}{-0{,}105}$; the denominator is negative, therefore the sphalerite grain will sink so much more in this case.

Seeking the condition of the upward movement of the mineral component of lower specific gravity in a mixture of grains of low and high specific gravity (e. g. examining the floating up of quartz grains from a mixture of galena and quartz), $x = 1$ should be substituted into the formula for E. Thereby, the formula will be reduced to $E = \frac{1 - \alpha\sigma}{\sigma - \alpha\sigma}$.

E. g. where $\sigma = 0{,}6$ and $\alpha = 0{,}4$, $E = \frac{1 - 0{,}4 \,.\, 0{,}6}{0{,}6 - 0{,}4 \,.\, 0{,}6} = \frac{0{,}76}{0{,}36} = 2{,}11$. At $\sigma = 0{,}6$ and $\alpha = 0{,}7$, $E = \frac{1 - 0{,}7 \,.\, 0{,}6}{0{,}6 - 0{,}7 \,.\, 0{,}6} = \frac{0{,}58}{0{,}02} = 29$. In case of galena and quartz, $r = 4{,}06$; where $\alpha = 0{,}4$, $E < r$, therefore the quartz will tend to rise in a mixture of 60% density of galena and quartz grains, while at $\alpha = 0{,}7$, $E > r$, therefore the quartz will tend to sink. (The tendency of the galena grains to sink is of course, still greater. In this case, $x = 0$ should be substituted into the formula for E, i. e. $E = \frac{-\alpha\sigma}{\sigma - 1 - \alpha\sigma}$ expression is obtained, where the denominator is invariably negative.)

By means of the relation $E = r$, numerous other problems concerning specific gravity concentration may be solved. E. g. what is the extent to which the quartz sludge or clay impurity ($\delta_a = 2{,}6$) of a magnetite suspension of 2,75 specific gravity ($\delta_b = 5{,}1$) can grow, if the volume-density of the suspension cannot be more than 44%? If we wish to float to the surface of the heavy suspension — the solid phase of which consists of fine grains of $\delta_b = 5{,}1$ and $\delta_a = 2{,}6$ specific gravity, — particles of lower than $\delta = 2{,}75$ specific gravity, in the formula for E, x will be $x = \frac{\delta_b - \delta}{\delta_b - \delta_a} = \frac{5{,}1 - 2{,}75}{5{,}1 - 2{,}6} = 0{,}937$. $\sigma = 0{,}44$ and $r = \frac{\delta_b - \gamma}{\delta_a - \gamma} = \frac{5{,}1 - 1}{2{,}6 - 1} = 2{,}56$, i. e. $(E = r)\ \frac{0{,}937 - 0{,}44\ \alpha}{0{,}937 - 0{,}44\ \alpha - 1 + 0{,}44} = 2{,}56$, whereform $\alpha = 0{,}051$; in other words, the quantity of the impurities (quartz or clay) cannot exceed $\alpha\sigma = 0{,}051 \,.\, 44 = 2{,}24$ volume percentage, leaving $44 - 2{,}24 = 41{,}76\%$ of the volume for the magnetite grains. Checking the calculation by formula $\sigma_a \delta_a + \sigma_b \delta_b + (1 - \sigma_a - \sigma_b)\ \gamma = \delta$: $0{,}0224 \,.\, 2{,}6 + 0{,}4176 \,.\, 5{,}1 + 0{,}56 \,.\, 1 = 0{,}06 + 2{,}13 + 0{,}56 = 2{,}75$; this proves that it was correct.

When the suspension contains magnetite alone, $\alpha = 0$; in this case, $E = \frac{x}{x - 1 + \sigma} = r$ expression is obtained, i. e. $\sigma = \frac{x + r - xr}{r}$. Substituting the figures in the above example ($x = 0{,}937$, $r = 2{,}56$), $\sigma = 0{,}428$ will be obtained for the density of the magnetite suspension (at $\delta = 2{,}75$ specific gravity suspension). Or more simply, referred to a grain of $\delta_a = 2{,}75$ specific gravity afloat ($E = r$) in the suspension of magnetite grains of $\delta_b = 5{,}1$ specific gravity where x = 1 and $\alpha = 0$, $E = \frac{1}{\sigma}$ and $r = \frac{\delta_b - \gamma}{\delta_a - \gamma} = \frac{5{,}1 - 1}{2{,}75 - 1} = 2{,}34$; therefore $\sigma = \frac{1}{2{,}34} = 0{,}427$.

Other examples : What is the specific gravity of the pulverized material to be used for preparing a heavy suspension, when its volume-density cannot exceed 40%, wherefrom 5% may be the sludge of the low specific gravity mineral to be separated? Here $x = 1$, $\sigma = 0{,}4$, $\alpha = 5/40 = 0{,}125$, therefore $E = \frac{1 - 0{,}125 \,.\, 0{,}4}{1 - 0{,}125 \,.\, 0{,}4 - 1 + 0{,}4} = \frac{0{,}95}{0{,}35} = 2{,}715$. δ_b specific gravity of the materials to be used for preparing a suspension of δ_a specific gravity can be obtained from the relation $E \leqq r$, i. e. from formula, $2{,}715 = \frac{\delta_b - 1}{\delta_a - 1}$. If e. g. $\delta_a = 1{,}6$, $\delta_b \geqq 2{,}715 \,.\, 0{,}6 + 1 = 2{,}63$; or if e. g. $\delta_a = 2{,}7$, $\delta_b \geqq 2{,}715 \,.\, 1{,}7 + 1 = 5{,}61$. Instead of the formula $E = \frac{x - \alpha\sigma}{x - \alpha\sigma - 1 + \sigma}$

the original $E = \frac{v_a^I - v_a^{II}}{v_b^{II} - v_b^I}$ equation can of course, be used alternatively for the computation. Referred to the above example, v_a^I denotes the volume of one particle of the material of δ_a specific gravity to be raised to the surface of the heavy suspension. The volume of slime of δ_a specific gravity contained in an equal volume of the suspension material of δ_b specific gravity is $v_a^{II} = 0{,}05\ v_a^I$, while the corresponding volume of the suspension material of δ_b specific gravity is $v_b^{II} = 0{,}35\ v_a^I$. Hence

$$E = \frac{v_a^I - 0{,}05\ v_a^I}{0{,}35\ v_a^I - 0} = \frac{0{,}95}{0{,}35} = 2{,}715.$$

2. The jig bed surrounding a grain of quartz of $\delta_a = 2{,}65$ specific gravity contains particles of middlings of an average specific gravity of $\delta_b = 3{,}8$. What is the σ volume density required for the grain of quartz to float out or up from the layer of middlings? Here $v_a^{II} = 0$, $v_b^{II} = \sigma\, v_a^I$, $v_b^I = 0$, i. e. $E = \frac{v_a^I - 0}{\sigma\, v_a^I - 0} = \frac{1}{\sigma} = r = \frac{3{,}8 - 1}{2{,}65 - 1} = 1{,}7$; hence $\sigma \geqq 0{,}59$.

Where, in addition to the grains of 3,8 specific gravity, 1/4th of the total volume of the surrounding medium consists of grains of 2,65 specific gravity, the condition of the large particle of quartz of 2,65 specific gravity floating clear or upward is:

$$\frac{v_a^I - \frac{\sigma}{4}\, v_a^I}{\frac{3\sigma}{4}\, v_a^I - 0} = \frac{\delta_b - \gamma}{\delta_a - \gamma} = \frac{2{,}8}{1{,}65} = 1{,}7\ ;$$ wherefrom $\sigma = 0{,}656$. Where half of the surrounding grains is made up of grains of high specific gravity, $\frac{1 - \frac{\sigma}{2}}{\frac{\sigma}{2} - 0} \leqq 1{,}7$ i. e. $\sigma \geqq 0{,}74$. (The result will be the same where the average specific gravity of the smaller grains of the neighbourhood is $\delta_b = \frac{3{,}8 + 2{,}65}{2} = 3{,}225$; $\frac{v_a^I - 0}{\sigma v_a^I - 0} = \frac{1}{\sigma} \leqq \frac{\delta_b - \gamma}{\delta_a - \gamma} = \frac{2{,}225}{1{,}65} = 1{,}35$; $\sigma = \frac{1}{1{,}35} = 0{,}74$.)

Generally speaking, the condition of a piece of rock of δ_a specific gravity floating clear of the surroundings of an average specific gravity of δ_b, can be calculated by formula $1/\sigma \leqq r$. E. g. on the pneumatic table, a particle of coal of 1,4 specific gravity would «float clear» of the layer of grains of 1,8 average specific gravity at $\sigma \geqq 1/r = \frac{1{,}4 - 0}{1{,}8 - 0} = 0{,}778$ volume fraction. In a looser bed, the particle of coal would tend to sink, similarly to the rest of the grains in the layer of 1,8 specific gravity. The sole difference is that the specific downward trend of granules of higher specific gravity is greater per unity of volume than that of pure coal, which accounts for the stratification by specific gravity of the granules even though the density be below $\sigma = 1/r$ which is specific of the state aloft. Where the density $\sigma > 1/r$, the grain of lower specific gravity would «float clear» of the grains of higher specific gravity irrespective of its size, a phenomenon similar to the principle underlying the heavy media process, this time applied to coarse grains. Where the density $\sigma < 1/r$, the large particle of low specific gravity sinks downward amidst the small granules of higher

specific gravity. In that event, for the sake of stratification according to specific gravity preliminary sizing is necessary, in order that the grains of higher specific gravity should not only have a greater «specific» weight, but should actually be heavier in the medium surrounding them than the granules of lower specific gravity, and should be capable of forcing them out of the deeper layers.

Where $\sigma > 1/r$, the greater σ the upward trend of the grains of lower specific gravity will be the stronger, while in case of $\sigma < 1/r$, their downward trend as compared to the pieces of higher specific will be the weaker ; in other words, the greater σ, the better the results of concentration. On the other hand, the greater σ, the stronger the friction between grains, inhibiting their mobility and thereby retarding their arrangement by specific gravity. A certain degree of loosening up is therefore necessary, despite the fact that the tendency of the substance to settle in layers according to specific gravity lessens with the decrease of σ. It is therefore necessary to find the right terms between the maximum density of the bed serving the quality of separation and the proper degree of mobility of the particles assuring adequate performance. To meet both conditions, in numerous gravity concentration processes — in particular in jig and table work — the principle of oscillation is frequently applied, i. e. the density of the bed is rhytmically varied. The purpose envisaged is invariably to permit the grains to shift their mutual position under conditions close to the maximum density of the bed.

Should the bed be loosened up beyond a certain degree, the grains would be deprived of the possibility of interaction, and the system would become a heap of self-contained, independent grains in which forces working against the stratification determined by the law of entropy (dynamic effect of the movement of the medium, classification according to terminal valocity, etc.) would prevail.

Due to their comparatively small volume, finer granules have less potential energy. Hence, a system made up of such granules must generally be loosened up more effectively to permit the granules to settle according to specific gravity, overcoming the friction and adhesion of the surrounding particles. Besides, finer granules are more sensitive to the dynamic effect of the movement of the medium working against stratification than are coarse grains. As a result, it is harder for the fine granules to settle, and it requires a longer time to arrange themselves in layers during separation according to specific gravity. This accounts for the decreasing performance of gravity separation machines, in line with the decrease of grain size. The time of segregation of fine granules into layers can, however, be very substantially reduced, if in lieu of gravitation, another force, a hundred or even a thousand times greater, viz. the centrifugal force is put to work for causing the granules of diverse specific gravity to arrange themselves in layers ; this is done in the hydrocyclone working with heavy media. In that machine, the difference between the potential energy inherent

in the unarranged and arranged aggregate of material increases in proportion to the centrifugal and gravitation force, and as a result, the aggregate rapidly adopts its stable end condition arranged in layers according to specific gravity.

LITERATURE

1. Mayer, F. W. : Der Entmischungsvorgang als physikalischer Aufbereitungsprozess. Bergbauarchiv Bd. 11/12 (1950), 82/94.
2. Kirchberg, H. : Aufbereitung bergbaulicher Rohstoffe. Bd. I. Wilhelm Gronau Verlag, Jena, 1953. 188/195.

SUMMARY

The law of entropy holds for gravity separation in a sense that the mixture of different minerals tends to reach a potential energy level as low as possible. Therefore the originally uniformly mixed mass of particles arranges itself in a way that high sp. gr. particles sink to the bottom while low sp. gr. grains float to the top. For the yardstick of this «disstratification» the following relation can be deduced :

$$100\ H\% = \frac{A\ B\ (\delta_b - \delta_a)}{A\ \delta_b + B\ \delta_a - 100\ \gamma}\ .$$

(For instance, Kirchberg, H. : Aufbereitung bergbaulicher Rohstoffe. Bd. I., W. Gronau, Jena, 1953, 188/195), where A is the weight % of grains of lower, B that of grains of higher sp. gr., δ_a and δ_b are their sp. gravities respectively, and γ is the sp. gr. of the medium. Disstratification will take place most rapidly if

$$\mathrm{A} = \sqrt{\mathrm{z}^2 + \mathrm{z}} - \mathrm{z},\ \text{where}\ \ \mathrm{z} \cong \frac{\delta_a - \gamma}{\delta_b - \delta_a}\ .$$

If disstratification has already partly taken place, the grain to be found among foreign particles behaves — according to the law of entropy — as if it were surrounded by a fluid of sp. gr. equal to that of a mixture of solid particles in its surroundings and of water. Buoyancy or sinking of the grain will then depend on the relative magnitude of the values :

$$E = \frac{x - \sigma_a}{\sigma_b - 1 + x}\ \text{and}\ \ r = \frac{\delta_b - \gamma}{\delta_a - \gamma}$$

x is the volume proportion of the part of sp. gr. δ_a of the grain in question, σ_a and σ_b are volume ratios of solid particles of sp. gr. δ_a and δ_b in the surroundings of that grain. The grain examined will float upward in case of $E < r$, relative to its surroundings, if the denominator of fraction E is a positive number, but it will tend to sink, if the denominator of fraction E is a negative number. Numerical examples.

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ОБОГАЩЕНИЯ ПО УДЕЛЬНОМУ ВЕСУ

Г. ТАРЬЯН

РЕЗЮМЕ

Закон энтропии при фракционировании по удельному весу проявляется в том, что смесь различных по удельному весу минералов стремится достигнуть возможно минимальных значений энергии положения. Поэтому первоначально равномерно смешанная куча материала фракционируется так, что снизу размещаются зерна с высоким удельным весом, а сверху — с низким. Для расслаивания можно вывести следующую зависимость :

$$100\ H\% = \frac{A\ B\ (\delta_b - \delta_a)}{A\ \delta_b + B\ \delta_a - 100\gamma}$$

(напр., Г. Кирхберг: **Aufbereitung bergbaulicher Rohstoffe. Rd. I. W. Gronau, Jena 1953, 188/195),** где A — весовой процент зерен с низким удельным весом, B — весовой процент зерен с высоким удельным весом ($A + B = 100\%$), δ_a и δ_b — их удельный вес, γ — удельный вес среды. Расслаивание быстрее всего наступает тогда, когда

$$A = \sqrt{z^2 + z} - z, \text{ где } \quad z \cong \frac{\delta_a - \gamma}{\delta_b - \delta_a}.$$

Если расслаивание уже частично осуществилось, зерно, имеющееся между посторонними зернами, ведет себя по закону энтропии как частица, находящаяся в жидкости с удельным весом, соответствующим среднему удельному весу смеси твердых зерен, находящихся в его среде, + воды. Сдвиг зерна вверх или вниз в таком случае определяется взаимным значением величин

$$E = \frac{x - \sigma_a}{\sigma_b - 1 + x} \quad \text{и} \quad r = \frac{\delta_b - \gamma}{\delta_a - \gamma},$$

где x — частное объема части данного зерна с удельным весом δ_a; σ_a и σ_b — частные объема твердых зерен с удельным весом δ_a и δ_b в среде зерна. Исследованное зерно в случае $E < r$ сдвигается вверх по отношению к среде, если знаменатель дроби E положителен, но стремится сдвинуться вниз, если знаменатель дроби E отрицателен. В конце даются числовые примеры.

THÉORIE GÉNÉRALE DE L'ENRICHISSEMENT DES MINERAIS BASÉ SUR LE POIDS SPÉCIFIQUE

G. TARJÁN
Membre correspondant de l'Académie des Sciences

RÉSUMÉ

La loi de l'entropie agit lors de la séparation des minerais suivant le poids spécifique de façon à faire rechercher au mélange des minerais, de différents poids spécifiques, le minimum d'énergie potentielle. C'est pourquoi dans l'ensemble de grains, mélangés uniformément au début les grains à poids spécifique élevé sont finalement situés en bas et les grains à faible poids spécifique en haut. Cette tendance à la stratification est caractérisée par l'expression

$$100\ H\% = \frac{A\ B\ (\delta_b - \delta_a)}{A\ \delta_b + B\ \delta_a - 100\ \gamma}$$

(par ex. H. Kirchberg: Aufbereitung bergbaulicher Rohstoffe. Bd. I., W. Gronau, Jena 1953, 188—195), où A est le pourcentage en poids des grains à faible poids spécifique, B le pourcentage en poids de grains à poids spécifique élevé ($A + B = 100\%$), δ_a et δ_b leur poids spécifiques et γ le poids spécifique du milieu. La stratification est la plus rapide, si

$$A = \sqrt{z^2 + z} - z, \quad \text{où} \quad z \cong \frac{\delta_a - \gamma}{\delta_b - \delta_a}.$$

Si la stratification s'est déjà en partie effectuée, le grain se trouvant entre des grains étrangers se comporte, suivant la loi d'entropie, comme s'il était dans un liquide dont le poids spécifique est égal au poids spécifique moyen du mélange constitué par de l'eau et les grains solides se trouvant dans son entourage. Le déplacement vers le haut ou vers le bas du grain est alors déterminé par la grandeur relative des expressions

$$E = \frac{x - \sigma_a}{\sigma_b - 1 + x} \quad \text{et} \quad r = \frac{\delta_b - \gamma}{\delta_a - \gamma}$$

x est le pourcentage en volume de la partie du grain ayant le poids spécifique δ_a, σ_a et σ_b le pourcentage en volume des grains solides à poids spécifiques δ_a et δ_b dans l'entourage du grain En cas de $E < r$ le grain examiné se meut vers le haut par rapport à son entourage, si le dénominateur de E est un nombre positif, mais il tend à se déplacer vers le bas si le dénominateur de E est négatif. La théorie est illustrée par des exemples numériques.

ALLGEMEINE GRUNDSÄTZE DER AUFBEREITUNG NACH DEM SPEZIFISCHEN GEWICHT

G. TARJÁN
Korresp. Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Das Gesetz der Entropie gelangt bei der Separation nach dem spezifischen Gewicht so zum Ausdruck, dass das Gemisch der Mineralien von verschiedenem spezifischem Gewicht die Erreichung einer je kleineren potentiellen Energie anstrebt. Aus diesem Grunde ordnet sich der ursprünglich gleichmässig vermischte Materialhaufen derart an, dass die Körner mit grossem spezifischem Gewicht nach unten und die mit kleinem spezifischem Gewicht nach oben gelangen. Für die Messung dieses Bestrebens nach Separation in Schichten kann der Zusammenhang

$$100\,H\% = \frac{A\,B\,(\delta_b - \delta_a)}{A\,\delta_b + B\,\delta_a - 100\,\gamma}$$

hergeleitet werden (z. B. H. KIRCHBERG: Aufbereitung bergbaulicher Rohstoffe. Bd. I. W. Gronau, Jena, 1953, 188/195), wo A der Gewichtsprozentsatz der Körner mit dem grösseren spezifischen Gewicht, B der der Körner mit kleinerem spezifischem Gewicht ($A + B = 100\%$), δ_a und δ_b deren spezifisches Gewicht und γ das spezifische Gewicht des Mediums bezeichnen. Die Separation in Schichten tritt dann am raschesten ein, wenn

$$A = \sqrt{z^2 + z} - z \text{ ist, wo } z \cong \frac{\delta_a - \gamma}{\delta_b - \delta_a}.$$

Wenn die Separation schon zum Teil eingetreten ist, verhält sich das zwischen den fremden Körnern befindliche Korn im Sinne des Entropiegesetzes so, als ob es in einer Flüssigkeit wäre, die das gleiche spezifische Gewicht besitzt wie das durchschnittliche spezifische Gewicht des in seiner Umgebung befindlichen Gemisches von festen Körnern + Wasser. In diesem Falle wird die Bewegung des Kornes nach oben oder nach unten durch die gegenseitige Grösse der Werte

$$E = \frac{x - \sigma_a}{\sigma_b - 1 + x} \quad \text{und} \quad r = \frac{\delta_b - \gamma}{\delta_a - \gamma}$$

bestimmt. Hier ist x der Volumquotient des Teiles mit dem spezifischen Gewicht δ_a des betreffenden Kornes, σ_a und σ_b der Volumquotient der festen Körner mit dem spezifischen Gewicht δ_a und δ_b in der Umgebung des Kornes. Das untersuchte Korn bewegt sich im Vergleich zu seiner Umgebung nach oben, wenn $E < r$ und der Nenner des Bruches E eine positive Zahl ist, während es nach unten strebt, wenn der Nenner des Bruches E eine negative Zahl ist. Schliesslich werden die Ausführungen durch Zahlenbeispiele veranschaulicht.

SUR LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME DE LA TORSION DES PRISMES MULTICELLULAIRES À PAROIS MINCES

P. BLAISE
(PARIS)

[Manuscrit présenté le 20 janvier 1955]

Introduction

Les équations auxquelles nous sommes parvenus dans notre étude «La torsion des prismes multicellulaires à parois minces» (Annales des Ponts et Chaussées, 122e année, p. 601, 1952) constituent un système d'équations linéaires en nombre égal au nombre des cellules augmenté d'un, comportant autant d'inconnues. Bien que nous ayons traité en application numérique l'exemple d'une poutre à douze cellules, on pourrait craindre de réelles difficultés dans la résolution numérique dès que le nombre des cellules après utilisation des symétries éventuelles dépasse quatre ou cinq.

Nous allons montrer que la solution peut être approchée par une itération toujours convergente en raison de la forme particulière des équations.

Rappel des notations et résultats

Soit Ω_i l'aire élémentaire découpée sur une section droite de surface totale S du prisme multicellulaire par Γ_i l'une des cellules. L'état de torsion peut être défini par des flux de cisaillement t_i tel que le flux de cisaillement dans une paroi extérieure d'une cellule Γ_i soit t_i et que le flux de cisaillement dans une paroi intérieure commune aux cellules Γ_i et Γ_j compté dans un sens convenable soit $t_{ij} = t_i - t_j$. Soit R la rigidité de torsion du prisme et C le couple de torsion. Les t_i sont liés par les relations

$$C = 2 \sum_{1}^{n} \Omega_i t_i \ , \tag{1}$$

$$t_i I_i + \sum_{j} (t_i - t_j) I_{ij} = 2 \Omega_i \frac{C}{R} . \tag{2}$$

Les I_i et I_{ij} étant les intégrales $\int \frac{ds}{Ge}$ étendues respectivement à la paroi extérieure de Γ_i et à la paroi de Γ_i commune avec Γ_j, e épaisseur de paroi, ds

élément de longueur de la trace de paroi en section droite, G module élastique de cisaillement.

Définition de l'itération

Dans le système des équations (1) et (2) les I_i, I_{ij}, Ω_i, R sont toujours positifs. Nous pouvons supposer le sens des torsions tel que le couple considéré C soit positif. Comme la solution en t_i est évidemment proportionnelle à C, et que les équations (2) sont homogènes en t_i et C/R, on est conduit à substituer aux inconnues t_i, les nouvelles inconnues

$$T_i = \frac{t_i R}{C}. \tag{3}$$

Les équations (1) et (2) deviennent alors

$$R = 2 \sum_i \Omega_i T_i, \tag{4}$$

$$T_i I_i + \sum_j (T_i - T_j) I_{ij} = 2 \Omega_i. \tag{5}$$

Dans un nombre considérable des équations (5) le coefficient positif des T_i est supérieur en valeur absolue à la somme des coefficients négatifs des T_j ; cette remarque conduit à tenter la résolution par itération des équations (5) mises sous la forme

$$T_i = \frac{2 \Omega_i}{I_i + \sum_j I_{ij}} + \frac{\sum_j I_{ij} T_j}{I_i + \sum_j I_{ij}}. \tag{6}$$

La formule d'itération étant

$$T_i^{(P)} = \frac{2 \Omega_i}{I_i + \sum I_{ij}} + \frac{\sum_j I_{ij} T_j^{(p-1)}}{I_i + \sum_j I_{ij}}. \tag{7}$$

Convergence de l'itération

De la formule (7) on déduit

$$T_i^{(p)} - T_i^{(p-1)} = \frac{\sum_j I_{ij} (T_j^{(p-1)} - T_j^{(p-2)})}{I_i + \sum_j I_{ij}}. \tag{8}$$

Les inégalités $T_j^{(p-1)} - T_j^{(p-2)} > 0$ entraîneront donc $T_i^{(p)} - T_i^{(p-1)} > 0$. Si l'on choisit comme départ $T_i^{(o)} = 0$, tous les $T_i^{(1)}$ sont positifs d'où $T_i^{(1)} - T_i^{(0)} > 0$. et par récurrence

$$T_i^{(p)} > T_i^{(p-1)}. \tag{9}$$

Ajoutons maintenant membre à membre les formules (7) préalablement multipliées par le dénominateur des termes du second membre. Ainsi, nous obtenons

$$\sum_i T_i^{(p)} \left(I_i + \sum_j I_{ij} \right) = 2\,S + \sum_i \sum_j I_{ij}\, T_j^{(p-1)}. \tag{10}$$

Ordonnons le deuxième terme du second membre en T_i. Comme I_{ij} ne se distingue pas de I_{ji}, la relation

$$\sum_i \sum_j I_{ij}\, T_j^{(p-1)} = \sum_i T_i^{(p-1)} \sum_j I_{ij} \tag{11}$$

se présente. L'égalité (10) peut alors s'écrire

$$\sum_i T_i^{(p)}\, I_i - 2\,S = \sum_i \left(T_i^{(p-1)} - T_i^{(p)} \right) \sum_j I_{ij}. \tag{12}$$

En vertu de (9) le second membre de (12) est négatif et l'on en déduit l'inégalité

$$\sum_i T_i^{(p)}\, I_i < 2\,S\,. \tag{13}$$

Cette inégalité montre que les $T_i^{(p)}$ des cellules bordant la paroi extérieure sont bornés supérieurement par $2S/I_i$. Des formules (7) on déduirait de même qu'aux cellules contiguës aux cellules bordant la paroi extérieure correspondent des $T_i^{(p)}$ bornés. En raisonnant ainsi de proche en proche vers l'intérieur on prouve que tous les $T_i^{(p)}$ sont bornés supérieurement. Comme les suites des $T_i^{(p)}$ sont croissantes à partir de zéro et bornées supérieurement, elles admettent des limites positives évidemment solution des équations (5). L'itération définie par (7) est donc convergente et fournit la solution du problème.

Remarques sur la rapidité de la convergence

La résolution numérique n'en serait pas avancée si la convergence de l'itération n'était pas rapide. C'est en particulier le cas lorsque certaines parois intérieures sont très minces par rapport aux autres. On se rend compte qu'alors les inconnues T_i et T_j correspondant aux cellules que limitent la paroi très

mince seront très voisines et l'on aura tout avantage pour obtenir une première approximation convenable à supprimer les parois minces. On peut aussi tirer parti du fait que dès que l'itération présente l'allure d'une progression géometrique, on peut obtenir une évaluation convenable de sa limite. Enfin si les rapports des divers termes se stabilisent, on peut tirer parti de relations telles que celles obtenues en ajoutant les diverses équations (5)

$$\sum I_i T_i = 2 S. \tag{14}$$

Conclusion

La résolution numérique du problème de la torsion des prismes multicellulaires, peut dans le cas général, être effectuée par itération étant entendu qu'il pourra y avoir lieu de recourir à divers artifices pour obtenir une convergence rapide.

Application numérique

Pour illustrer les considérations ci-dessus, considérons un prisme multicellulaire dont la section droite est représentée sur la fig. 1. Supposons toutes les parois de même épaisseur. Par un choix convenable des unités de longueur et de force, les valeurs I_i, I_{ij}, $I_i + \sum_j I_{ij}$, $2\Omega_i$ peuvent être calculées suivant le tableau I.

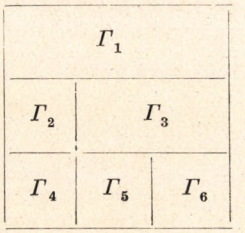


Fig. 1

TABLEAU I

	I_{ij}						I_i	$I_i + \Sigma_j I_{ij}$	$2\Omega_i$
i \ j	1	2	3	4	5	6			
1	—	1	2	—	—	—	5	8	3
2	1	—	1	1	—	—	1	4	1
3	2	1	—	—	1	1	1	6	2
4	—	1	—	—	1	—	2	4	1
5	—	—	1	1	—	1	1	4	1
6	—	—	1	—	1	—	2	4	1

Et maintenant, l'itération conduit aux valeurs

p	$T_1^{(p)}$	$T_2^{(p)}$	$T_3^{(p)}$	$T_4^{(p)}$	$T_5^{(p)}$	$T_6^{(p)}$
1	0,375	0,250	0,333	0,250	0,250	0,250
2	0,490	0,490	0,583	0,375	0,458	0,396
3	0,582	0,612	0,721	0,487	0,589	0,510
4	0,632	0,698	0,813	0,550	0,680	0,578
5	0,666	0,749	0,870	0,595	0,735	0,623
6	0,687	0,782	0,907	0,621	0,772	0,651
7	0,700	0,804	0,930	0,638	0,795	0,670
8	0,708	0,817	0,945	0,650	0,810	0,681
9	0,713	0,825	0,954	0,657	0,819	0,689
10	0,717	0,831	0,960	0,661	0,825	0,693
11	0,719	0,835	0,963	0,664	0,829	0,696
12	0,720	0,837	0,967	0,666	0,831	0,698
13	0,721	0,838	0,968	0,667	0,833	0,700
14	0,722	0,839	0,969	0,668	0,834	0,700
15	0,722	0,840	0,970	0,668	0,834	0,701
16	0,723	0,840	0,970	0,669	0,835	0,701

La convergence est ici voisine de celle de la progression géométrique de raison 0,62 et peut être considérée comme bonne ; on aurait pu aller sensiblement plus vite soit en utilisant les termes déjà calculés de l'itération en cours, soit en évaluant la limite dès la 6e itération par exemple, en assimilant l'itération à une progression géométrique ayant en commun les termes des 4e, 5e et 6e itérations.

RÉSUMÉ

En vue de compléter un article antérieur de l'auteur [Annales des Ponts et Chaussées, 122e année, p. 601 (1952)] renfermant une méthode d'itération pour la résolution du problème indiqué dans le titre, l'article présent prouve la convergence de cette méthode. En ce qui concerne la rapidité de la convergence, l'auteur remarque que l'itération en question présente l'allure d'une progression géométrique. Pour mieux comprendre les raisonnements, un exemple numérique sera résolu.

О ЧИСЛОВОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ НА КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ МНОГОЯЧЕЙКОВЫХ ПРИЗМ

П. БЛЕЗ (Париж)

РЕЗЮМЕ

В работе дается доказательство сходимости для интерационного метода, сообщенного автором в предыдущей его статье (Annales des Ponts et Chaussées, 122e année, p. 601, 1952.) для решения задачи на кручение тонкостенных многоячейковых призм. О степени сходимости устанавливается, что она в случае рассматриваемого итерационного метода соответствует сходимости геометрической прогрессии. Детальные вопрсы методики расчета освещаются числовыми примерами.

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF THE TORSIONAL PROBLEM OF THIN-WALLED MULTICELLULAR BARS

P. BLAISE (Paris)

SUMMARY

This paper prooves the convergency of the iterative method for the solution of the torsional problem of thin-walled multicellular bars, published by the author previously (Annales des Ponts et Chaussées, 122e année, p. 601 1952). As for the measure of the convergency he proves that it corresponds, for the said method, to the convergency of the geometrical progression. Details of the calculations are illustrated by a numerical example.

ÜBER DIE NUMERISCHE LÖSUNG DES VERDREHUNGSPROBLEMS VON DÜNNWANDIGEN VIELZELLIGEN PRISMEN

P. BLAISE (Paris)

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Abhandlung liefert einen Konvergenzbeweis zu der Iterationsmethode, die vom Verfasser zur Lösung des Verdrehungsproblems von dünnwandigen vielzelligen Prismen in einer vorhergehenden Mitteilung (Annales des Ponts et Chaussées, 122e année, p. 601, 1952) veröffentlicht wurde. Über das Ausmass der Konvergenz wird festgestellt, dass es im Falle der hier erörterten Iterationsmethode der Konvergenz einer geometrischen Reihe entspricht. Die Einzelheiten der Berechnung werden an Hand eines Zahlenbeispieles vorgeführt.

SUR L'ESTIMATION DE LA RIGIDITÉ DE TORSION DES PRISMES MULTICELLULAIRES À PAROIS MINCES

J. BARTA
DOCTEUR DES SC. TECHN.

INSTITUT SCIENTIFIQUE DU BÂTIMENT BUDAPEST

[Manuscrit présenté le 20 janvier 1955]

Plusieurs récents articles [1] de J. B. DIAZ, G. PÓLYA et A. WEINSTEIN decrivent des méthodes qui permettent d'estimer la rigidité de torsion des prismes. Dans le présent article nous proposons une méthode qui permet d'estimer la rigidité de torsion des prismes multicellulaires dont les sections transversales sont fermées et les parois sont minces. Cette méthode diffère essentiellement des méthodes employées par les auteurs mentionnés, et elle est basée sur l'application de la formule (4).

Notations

Nous utilisons les notations suivantes :
S est la section transversale du prisme.
n est le nombre des cellules.
s_i est la longueur de la trace sur la section S d'une paroi périphérique,
s_{ij} est la longueur de la trace sur la section S d'une paroi intérieure.
$\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n$ sont les surfaces comprises entre les traces, correspondant respectivement à chacune des cellules.
G est le module d'élasticité au cisaillement.
e est l'épaisseur variable ou constante d'une paroi.
M est le moment de torsion du prisme, considéré comme valeur positive.
R est la rigidité de torsion du prisme, le facteur par lequel on divise le moment M pour obtenir l'angle de torsion par unité de longueur.

Le problème analytique

Considérons un prisme multicellulaire dont la section transversale est fermée et les parois sont minces (fig. 1). Le problème analytique consiste à trouver la valeur R quand les caractéristiques du prisme sont données. Ce problème peut être résolu par un procédé connu qui découle de la théorie usuelle de la torsion des prismes creux. Ce procédé a été récemment appliqué par P. BLAISE [2]. Nous rappelons le procédé : On calculera d'abord les intégrales

$I_i = \int_{S_i} \frac{ds}{Ge}$ correspondant respectivement à chacune des parois périphériques, et les intégrales $I_{ij} = \int_{S_{ij}} \frac{ds}{Ge}$ correspondant respectivement à chacune des parois intérieures. Après, on résoudra les équations

$$T_i I_i + \sum_j (T_i - T_j) I_{ij} = 2 \Omega_i , \tag{1}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) ,$$

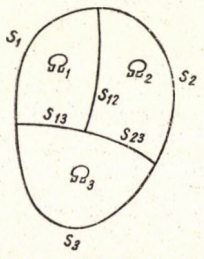


Fig. 1

c'est-à-dire on calculera les valeurs $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Enfin, on portera les valeurs $T_1, T_2, \ldots, T_n$ ainsi obtenues, dans la formule

$$R = 2 \sum_i \Omega_i T_i . \tag{2}$$

Bornes inférieures et supérieures pour la valeur R

Nous voyons que le procédé rappelé exige la résolution des équations (1) dont le nombre est égal à celui des cellules. La résolution rigoureuse des équations (1) devient, en général, très laborieuse, quand le nombre des cellules est élevé. Dans un tel cas, au lieu des valeurs exactes $T_1, T_2, \ldots, T_n$ on se contentera des valeurs positives $T_1^*, T_2^*, \ldots, T_n^*$ approximatives ou arbitraires. (Une méthode qui permet de trouver des solutions approximatives des équations en question, va être employée dans notre exemple numérique.) En utilisant des valeurs positives $T_1^*, T_2^*, \ldots, T_n^*$ approximatives ou arbitraires, nous pouvons estimer la valeur cherchée R comme suit :

Nous calculons les valeurs

$$\frac{T_i^* I_i + \sum_j (T_i^* - T_j^*) I_{ij}}{2 \Omega_i} , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) . \tag{3}$$

Nous désignons la plus petite et la plus grande des valeurs (3) par k et K. Alors, nous nous servons de la formule

$$\frac{2}{K}\sum_i \Omega_i T_i^* \leqq R \leqq \frac{2}{k}\sum_i \Omega_i T_i^* \tag{4}$$

où R est la valeur exacte de la rigidité de torsion. i varie de 1 à n, n étant le nombre des cellules.

La preuve de la formule (4)

Regardons les équations (1). Les valeurs I_i, I_{ij}, Ω_i sont essentiellement positives. En supposant que la plus petite des valeurs $T_1, T_2, \ldots, T_n$ est non positive, et en désignant cette valeur par T_1, nous parvenons à une contradiction, car un des côtés de la première équation devient non positif, et en même temps, son autre côté devient positif. Par un tel raisonnement, on peut voir que les valeurs $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sont positives. Les valeurs $T_1^*, T_2^*, \ldots, T_n^*$ sont, comme nous l'avons supposé, aussi positives. $I_{ij} = I_{ji}$ et, pour cette raison, l'équation

$$\sum_i \frac{T_i^* I_i + \sum_j (T_i^* - T_j^*) I_{ij}}{2\Omega_i} - 2\Omega_i T_i = \sum_i \left\{ T_i I_i + \sum_j (T_i - T_j) I_{ij} \right\} T_i^*$$

est une identité. L'emploi des valeurs k, K et des équations (1) permet de tirer d'ici la relation

$$2K\sum_i \Omega_i T_i \geqq 2\sum_i \Omega_i T_i^* \geqq 2k\sum_i \Omega_i T_i$$

c'est-à-dire

$$\frac{2}{K}\sum_i \Omega_i T_i^* \leqq 2\sum_i \Omega_i T_i \leqq \frac{2}{k}\sum_i \Omega_i T_i^* .$$

De ceci et de l'équation (2), la relation (4) s'en suit.

Exemple numérique

Pour illustrer l'application de la formule (4), considérons un prisme multicellulaire dont la section transversale est représentée sur la fig. 2. Supposons que toutes les parois soient de la même épaisseur. Pour simplifier le calcul nous posons $e = 1$ et $G = 1$. Dans ce cas les valeurs

$I_3 = I_4 = I_6 = I_7 = 1$, $I_5 = 2$, $I_{12} = 3$, $I_{17} = I_{23} = I_{24} = I_{26} = I_{34} = I_{45} = I_{56} = I_{67} = 1$,

$\Omega_1 = \Omega_2 = 3$, $\Omega_3 = \Omega_4 = \Omega_5 = \Omega_6 = \Omega_7 = 1$

se présentent. Par raison de symétrie, le nombre des inconnues est 7. Ainsi, les équations (1) deviennent

$$
\begin{aligned}
&8T_1-6T_2-2T_7 = 6,\\
&8T_2-3T_1-T_3-2T_4-2T_6 = 6,\\
&4T_3-T_2-2T_4 = 2,\\
&4T_4-T_2-T_3-T_5 = 2,\\
&4T_5-T_4-T_6 = 2,\\
&4T_6-T_2-T_5-T_7 = 2,\\
&4T_7-T_1-2T_6 = 2.
\end{aligned}
$$

Pour trouver des valeurs approximatives $T_1^*, T_2^*, \ldots, T_7^*$, nous allons employer la méthode d'itération, et dans ce but, nous mettons les équation sous la forme

$$
\begin{aligned}
T_1 &= 0{,}75 + 0{,}75\ T_2 + 0{,}25\ T_7,\\
T_2 &= 0{,}75 + 0{,}375\ T_1 + 0{,}125\ T_3 + 0{,}25\ T_4 + 0{,}25\ T_6,\\
T_3 &= 0{,}5 + 0{,}25\ T_2 + 0{,}5\ T_4,\\
T_4 &= 0{,}5 + 0{,}25\ T_2 + 0{,}25\ T_3 + 0{,}25\ T_5,\\
T_5 &= 0{,}5 + 0{,}25\ T_4 + 0{,}25\ T_6,\\
T_6 &= 0{,}5 + 0{,}25\ T_2 + 0{,}25\ T_5 + 0{,}25\ T_7,\\
T_7 &= 0{,}5 + 0{,}25\ T_1 + 0{,}5\ T_6.
\end{aligned}
$$

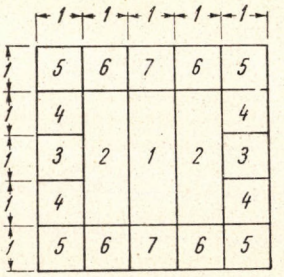


Fig. 2

Pour le départ, nous choisissons les valeurs $T_1 = T_2 = \ldots = T_7 = 3$. (Ce choix est motivé par le raisonnement suivant: $\sum_i T_i I_i = 2 \sum_i \Omega_i$ est la somme des équations (1) d'où la relation

$$T_{\min} \leqq \frac{2 \sum_i \Omega_i}{\sum_i I_i} \leqq T_{\max}$$

suit, et nous écrivons $\dfrac{2 \sum_i \Omega i}{\sum_i I_i} = \dfrac{2 \cdot 25}{20} \sim 3$.) En utilisant une règle à calcul de 25 cm de longueur, l'itération conduit aux valeurs

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
dans le premier pas :	3,75	4,03	3,01	3,01	2,00	2,76	2,82
dans le deuxième pas :	4,48	4,25	3,07	2,83	1,90	2,74	2,99
dans le troisième pas :	4,68	4,28	2,98	2,81	1,89	2,79	3,06
dans le quatrième pas :	4,72	4,29	2,98	2,79	1,89	2,81	3,08

Nous ne continuons pas le procédé itératif, mais nous utilisons les valeurs approximatives obtenues dans le quatrième pas. En introduisant les valeurs

$$T_1^* = 4{,}72,\ T_2^* = 4{,}29,\ T_3^* = 2{,}98,\ T_4^* = 2{,}79,\ T_5^* = 1{,}89,\ T_6^* = 2{,}81,\ T_7^* = 3{,}08$$

dans les expressions (3), nous obtenons, pour les valeurs des expressions,

$$0{,}9766\ldots,\ 0{,}9633\ldots,\ 1{,}025,\ 1,\ 0{,}98,\ 1{,}04,\ 0{,}99.$$

Par conséquent, nous avons

$$k = 0{,}9633\ \ldots\ ,\quad K = 1{,}04$$

et la formule (4) conduit à la relation

$$157{,}65 < R < 170{,}21\,.$$

De ceci nous pouvons conclure que la valeur moyenne 163,93 diffère de la valeur exacte de R, de moins de 4 pour cent.

LITTÉRATURE

1. J. B. Diaz and A. Weinstein, The torsional rigidity and variational methods, American Journal of Mathematics, vol. 70, p. 107 (1948). — G. Pólya and A. Weinstein. On the torsional rigidity of multiply connected cross sections. Annals of Mathematics ser. 2., vol. 52, p. 154 (1950). — A. Weinstein, New methods for the estimation of torsional rigidity, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, vol. 3, p. 141 (1950).—J. B. Diaz, On the estimation of torsional rigidity and other physical quantities. Proceedings of the First U. S. National Congress of Applied Mechanics, p. 259 (1952).
2. P. Blaise, La torsion des prismes multicellulaires à parois minces. Annales des Ponts et Chaussées, 122e année, p. 601 (1952).

RÉSUMÉ

L'article établit des bornes inférieures et supérieures pour la valeur de la rigidité indiquée dans le titre. Les bornes sont exprimées par la formule (4). Les raisonnements sont basés sur la théorie usuelle de la torsion des prismes creux. L'usage de la formule (4) peut être rattaché à la méthode d'itération. Un exemple numérique élucide le procédé.

ОБ ОЦЕНКЕ ЖЕСТКОСТИ НА КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ МНОГОЯЧЕЙКОВЫХ ПРИЗМ

Д-р техн. наук Й. БАРТА

РЕЗЮМЕ

В данной работе устанавливаются верхний и нижний пределы жесткости на кручение тонкостенных многоячейковых призм. Пределы жесткости на кручение выражаются формулой (4). Анализ исходит из общеизвестной теории кручения пустотелых призм. Применение формулы (4) можно связать с итерационным методом. Предлагаемая методика оценки освещается числовым примером.

ON THE ESTIMATION OF THE TORSIONAL RIGIDITY OF THIN-WALLED MULTICELLULAR BARS

J. BARTA D. Eng. Sc.

SUMMARY

This paper gives upper and lower limits for the torsional rigidity of thin-walled multicellular bars. The limits are given by formula (4). The deductions are based on the known theory of the torsion of hollow bars. The use of formula (4) may be combined with the iterative method. The method is illustrated by a numerical example.

ÜBER DIE ABSCHÄTZUNG DER VERDREHUNGSSTEIFIGKEIT VON DÜNNWANDIGEN VIELZELLIGEN PRISMEN

J. BARTA

Doktor der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Arbeit liefert obere und untere Schranken für die Verdrehungssteifigkeit von dünnwandigen vielzelligen Prismen, wobei von der bekannten Theorie der Verdrehung hohler Prismen ausgegangen wird. Die Schranken werden durch die Formel (4) ausgedrückt, deren Anwendung mit einer Iterationsmethode verbunden werden kann. Die vorgeschlagene Methode wird durch ein Zahlenbeispiel beleuchtet.

LA TORSION DES PRISMES MULTICELLULAIRES EN TREILLIS

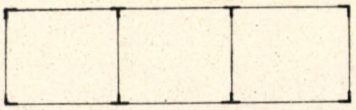
Prof. P. CSONKA

DOCTEUR DES SCIENCES TECHNIQUES

[Manuscrit présenté le 24 Février 1955]

Introduction

Par prisme en treillis on entend une construction dans l'espace composée de *surfaces latérales* à treillis parallèles à l'axe du prisme et de *surfaces terminales* à treillis, normales à l'axe du prisme. Le prisme en treillis, dont les surfaces latérales entourent une ou plusieurs parties de l'espace, est appelé *prisme unicellulaire*, resp. *multicellulaire* (fig. 1).



Fib. 1. Coupe transversale d'un prisme en treillis tricellulaire

Par comparaison avec les prismes en treillis, les prismes ayant des parois minces pleines sont appelés des *prismes unicellulaires* ou *multicellulaires à parois minces*, selon le nombre des parties de l'espace entourées par les parois (fig. 2).

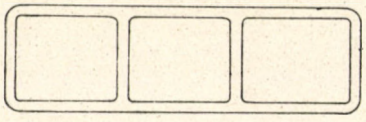


Fig. 2. Coupe transversale d'un prisme tricellulaire à parois minces

La torsion des prismes multicellulaires à parois minces a fait l'objet de plusieurs études [1], [2], entre autres de deux articles [3], [4], qui viennent de paraître dans cette revue. La torsion des prismes à plusieurs cellules en treillis a été exposée dans ses lignes générales dans une étude antérieure de l'auteur [5], qui alors ne s'étendit pas sur l'examen détaillé des prismes multicellulaires en treillis. Le fait, que ce problème n'a été discuté nulle part jusqu' à présent, motive suffisamment, que nous ayons choisi comme sujet de nos recherches le problème de la torsion des prismes multicellulaires en treillis.

2. Hypothèses, conditions

Nos recherches se rapportent à des prismes en treillis isostatiques, c'est à dire à des constructions, qui sans être fixées à un milieu solide, sont indéformables par elles-mêmes.

Nous posons, que les faces latérales soient exécutées avec un treillage de type N, V ou K (fig. 3) et que les panneaux des treillis dans la direction de l'axe

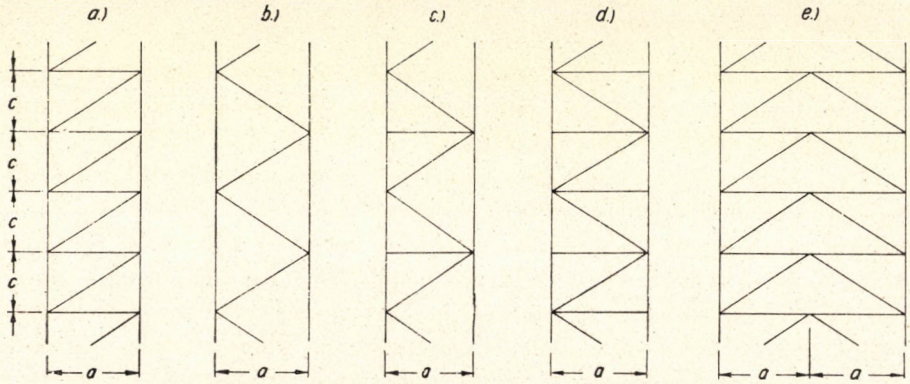


Fig. 3. Treillage des faces latérales

du prisme soient identiques. Nous exigeons, que l'aire de la coupe transversale des barres de position identique soit égale sur toute l'étendue d'une face latérale. A la suite de ces conditions le prisme en treillis peut être considéré comme une série de parties de forme identique, appelées *sections*.

Pour les faces terminales nous posons, que leur treillage soit une triangulation simple (fig. 4). De cette manière-là les faces terminales n'entravent pas

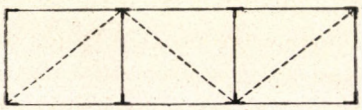


Fig. 4. Face terminale d'un prisme tricellulaire en treillis

l'extension ou la contraction transversale des faces latérales, elle n'empèchent, que le détournement de celles-ci l'une par rapport à l'autre.

Comme charge nous n'admettons que des efforts de torsion agissant dans le plan des faces terminales. Nous posons la condition, que ces efforts se répartissent aux noeuds des faces terminales de façon que sous leur action chaque section du prisme en treillis subisse une déformation identique. Ce mode simple de la torsion est appelé *torsion pure*.

Les déformations dues à la torsion sont supposées petites et proportionnelles au moment de torsion. Les faces latérales et terminales ne sont pas considérées comme résistantes aux forces normales à leur plan, c'est à dire on suppose que celles-ci, de façon semblable aux plaques minces planes, ne résistent qu'aux forces agissant dans leur propre plan.

3. Considérations statiques

3.1 *Equilibre des faces latérales*

Les noeuds des faces terminales en treillis sont reliés selon les règles de la triangulation simple. A chaque noeud correspond une *arête latérale* du prisme en treillis, de sorte que les règles de la formation des triangles définissent l'ordre des arêtes. En considérant les arêtes latérales en sens inverse de l'ordre de la formation, c'est à la dernière arête latérale que nous examinons premièrement l'équilibre. Il n'y a que deux *travées de treillis* contiguës à cette arête. Comme ces deux travées sont de plan différent, l'équilibre n'est possible que dans le cas, où l'arête examinée n'est soumise qu 'aux forces axiales. Mais la même constatation est valable aussi pour toutes les autres arêtes latérales, examinées en sens inverse de l'ordre de formation mentionné. En procédant de cette manière, on constate enfin que les arêtes latérales du prisme en treillis ne peuvent subir des travées contiguës que des forces axiales, de même que les arêtes latérales ne peuvent exercer que de telles forces aux travées de treillis.

3.2 *Equilibre des travées de treillis*

Examinons une partie d'une des travées, limitée par deux droites transversales, situées à une distance correspondant à la longueur d'une section. Sur fig. 5. une telle partie est représentée en pointillé.

A l'endroit où la partie examinée de la travée se joint aux arêtes latérales, il ne s'exerce, d'après ce qui a été dit en 3.1, que des forces axiales V, resp. V'. Le long des lignes de séparation transversales par contre, ce n'est que dans les points congruents, qu'il nait des forces, dont deux toujours sont de grandeur identique, mais de sens opposé :

$$N = N', \qquad T = T'.$$

Dans ces conditions-là, il ne peut y avoir d'équilibre sur la section examinée que si

$$V = V'$$

et en plus

$$Vs = Th\ .$$

Selon cette dernière équation

$$\frac{T}{s} = \frac{V}{h} \equiv t, \tag{1}$$

ce qui signifie, que la valeur spécifique des forces de cisaillement, rapportée à la longueur de l'arête latérale de la section de la travée en treillis examinée, est identique en direction longitudinale et transversale. La valeur t ainsi interprétée — la force de *cisaillement spécifique* — est constante pour toute la travée de treillis.

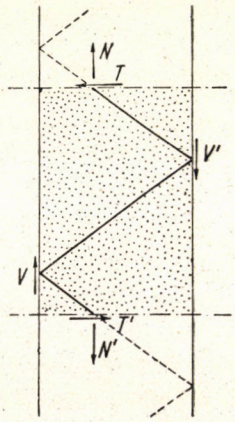


Fig. 5. Partie d'une section

Cette constatation, concernant la force de cisaillement spécifique, est entièrement en accord avec les règles se rapportant aux forces de cisaillement engendrées dans les cloisons des prismes à parois minces.

3.3 *Règles, concernant la flux de cisaillement*

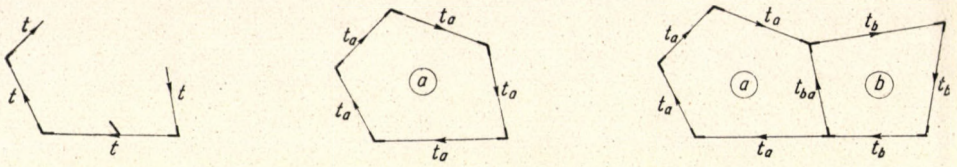
La relation établie ne permet pas de douter de ce que toutes les règles qui se rapportent aux forces de cisaillement engendrées dans les prismes à parois minces, sont également valables en cas de prismes en treillis. C'est pourquoi nous communiquons les règles en question sans justification.

a) *En cas d'un enchaînement simple des faces latérales* (fig. 6) la valeur de la force de cisaillement spécifique est identique dans toutes les travées de treillis. Les forces de cisaillement se présentent sur la figure de la coupe transversale par ces flèches continues. Ce courant des forces de cisaillement transversales est appelé *flux de cisaillement.*

b) *En cas de configurations monocellulaires* (fig. 7) la force de cisaillement spécifique a la même valeur dans toutes les travées de treillis. Le flux de cisaillement est fermé.

c) *En cas de configurations bicellulaires* (fig. 8.) le flux de toutes les deux cellules se forme indépendamment l'un de l'autre. Sur les parties de paroi communes, la différence des deux flux donne la résultante :

$$t_{ba} = t_b - t_a .$$



6 7 8

Fig. 6. Coupe transversale d'un enchaînement de faces
Fig. 7. Coupe transversale d'un prisme monocellulaire en treillis
Fig. 8. Coupe transversale d'un prisme bicellulaire en treillis

Dans cette formule on a appliqué la règle des signes de M. P. BLAISE [2], c'est à dire, on a considéré positifs les flux de cisaillement des deux cellules si leur circulation coïncidait avec le sens des aiguilles de la montre. En désignant la force de cisaillement agissant dans la partie de paroi commune des deux cellules, la première lettre de l'indice double de la force de cisaillement désigne la cellule à laquelle le flux de cisaillement fut considéré de direction positive. Cette règle des signes sera également appliquée par la suite.

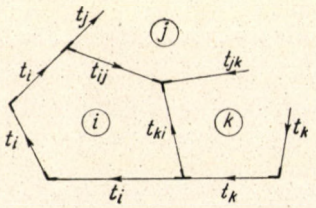


Fig. 9. Coupe transversale d'un prisme polycellulaire en treillis

d) *En cas de configurations polycellulaires* (fig. 9.) il faut appliquer des règles semblables à celles des configurations bicellulaires. Dans chaque cellule le flux de cisaillement se développe indépendamment, et dans les parties de paroi communes se produit la résultante du flux de cisaillement des deux parois contiguës. Par conséquent, si la valeur de la force de cisaillement appartenant à la cellule i, resp. j est t_i, resp. t_j, la force de cisaillement dans la partie de paroi commune des deux cellules est

$$t_{ij} = t_i - t_j . \qquad (2)$$

3.4 *Equilibre des forces extérieures et intérieures*

Coupons en deux un prisme en treillis par un plan normal aux arêtes latérales, et, après avoir éloigné l'une des parties de prisme, faisons la somme des moments des forces agissant sur la section de l'autre partie pour une droite axiale quelconque. En désignant l'aire de la coupe transversale de la cellule i

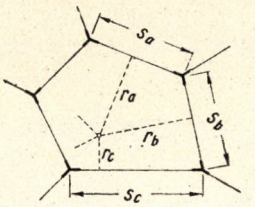


Fig. 10. Coupe transversale de la cellule i

par la lettre Ω_i, le moment du flux de cisaillement t_i, appartenant à la cellule i, peut être exprimé de la manière suivante (fig. 10) :

$$M_i = t_i (r_a s_a + r_b s_b + r_c s_c + \ldots) = 2 t_i \Omega_i .$$

Des formules semblables peuvent être écrites pour les autres cellules aussi. En faisant la somme des valeurs des moments ainsi obtenues, nous aurons le moment des forces intérieures. Cette somme de moments — pour des raisons d'équilibre — doit être égale au moment M du couple de force de torsion s'exerçant sur la face terminale de la partie de prisme enlevée. Si celui-ci est considéré positif dans le sens de rotation correspondant au sens des aiguilles d'une montre, l'égalité mentionnée peut être exprimée de la façon suivante :

$$M = 2 \sum t_i \Omega_i . \tag{3}$$

4. Considérations géométriques

Au cours de la déformation, les points angulaires des faces latérales du prisme en treillis se détournent autour de l'axe de torsion, et en même temps subissent des déplacements plus ou moins grands dans le sens de l'axe. En conséquence de ces déplacements, il se produit un déplacement de cisaillement γ entre les côtés normaux l'un à l'autre de la face latérale examinée (fig. 11.) :

$$\gamma = \alpha + \beta \cong \frac{v}{l} + \frac{u}{s} .$$

Dans la formule ci-dessus, le déplacement v est fonction de l'angle de torsion spécifique ϑ, de la longueur l des arêtes latérales, ainsi que de la distance r mesurée de la face latérale à l'axe de rotation :

$$v = r\, l\, \vartheta\,.$$

Ainsi

$$\gamma = r\,\vartheta + \frac{u}{s}\,,$$

resp.

$$u = \gamma s - \vartheta r s.$$

Bien entendu que, quelles que soient les déformations dues à la torsion, il faut que les contours fermés des parois de cellule restent des lignes continues

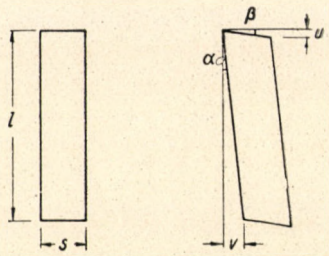


Fig. 11. Face laterale avant resp. après déformation

fermées, même après la déformation. (5). Dans le cas de la cellule i cette condition peut être exprimée par ex. par l'équation

$$\sum u = 0\,,$$

ou bien, en utilisant les relations précédentes, par

$$\sum \gamma s - \vartheta \sum r s = 0\,.$$

Cependant, comme en 3.4,

$$\sum r s = 2\,\Omega_i\,,$$

et ainsi la condition de compatibilité en question peut être écrite aussi de la manière suivante :

$$\sum \gamma s = 2\,\vartheta\,\Omega_i\,. \qquad (4)$$

Cette condition doit être naturellement satisfaite pour toutes les cellules. Si la section du prisme en treillis contient n cellules, on obtient n équations semblables, indépendantes l'une de l'autre.

5. Relations élastiques

Le déplacement de cisaillement γ des faces latérales est proportionnel à la force spécifique de cisaillement revenant aux faces latérales. En général

$$\gamma = \frac{t}{sE} k , \tag{5}$$

où E est le module d'élasticité du matériau de construction, s la largeur de la face latérale, K un paramètre caractérisant la déformabilité du treillage, dépendant des données géométriques du treillage et de l'aire de la coupe transversale des barres. La paramètre a pour valeur dans les cas *a* et *e* de fig. 3.

$$K = \frac{1}{c}\left(\frac{a^3}{F_a} + \frac{A^3}{F_A}\right) \tag{6}$$

et dans les cas *b*, *c* et *d*

$$K = \frac{1}{c} \cdot \frac{A^3}{F_A} . \tag{7}$$

Dans les formules ci-dessus F_a représente l'aire de la coupe transversale des barres de treillis normales aux arêtes latérales, A voire F_A la longueur des diagonales resp. leur aire de coupe transversale.

6. Solution du problème

Pour déterminer les forces de cisaillement spécifiques engendrées dans les sections transversales du prisme en treillis, on doit substituer dans les équations de compatibilité (4) les valeurs γ des déplacements de cisaillement (5). Par là on obtient par ex. en cas de la cellule i la relation

$$\frac{1}{E} \sum t K = 2 \vartheta \Omega_i . \tag{8}$$

Dans cette équation la sommation se rapporte à toutes les parois latérales de la cellule.

Suivant la méthode de M. P. BLAISE [2], les parois latérales d'une cellule peuvent être classées en général en deux groupes, selon qu'elles sont contiguës à d'autres cellules, ou non.

Dans le *premier* groupe des parois latérales, la force de cisaillement t dépend de la force de cisaillement spécifique des deux cellules contiguës. Par ex. sur la partie de paroi commune des cellules i et j

$$t_{ij} = t_i - t_j .$$

Si par conséquence, on désigne la valeur K de la paroi entre les deux cellules en question par la lettre K_{ij}, on peut écrire pour le premier groupe des parois latérales

$$\sum t\,K = \sum_j (t_i - t_j)\,K_{ij} . \tag{9}$$

Dans le *deuxième* groupe des parois latérales, la force de cisaillement est de valeur constante, notamment est égale à la force t_i de cisaillement spécifique de la cellule i, de sorte que pour ce groupe des parois latérales

$$\sum t\,K. = t_i \sum K.$$

Ainsi avec la notation (10)

$$\sum K \equiv K_i$$

nous recevrons

$$\sum t\,K = t_i\,K_i . \tag{11}$$

En utilisant les relations (9) resp. (11), la condition (8) devient finalement

$$t_i\,K_i + \sum (t_i - t_j)\,K_{ij} = 2\,E\vartheta\Omega_i . \tag{12}$$

Une équation semblable peut être écrite pour chacune des n cellules. Par là on obtient n équations dans lesquelles en dehors de n valeurs inconnues de t_i il figure encore la valeur ϑ, donc au total $n + 1$ inconnues. Pour déterminer les inconnues, on doit donc recourir à une autre équation, notamment à celle (3) qui exprime l'égalité des moments des couples de forces extérieures et intérieures. Selon cette équation

$$2 \sum t_i\,\Omega_i = M . \tag{13}$$

On dispose donc de $n + 1$ équations dont les $n + 1$ inconnues peuvent être déterminées sans équivoque.

Ayant déterminé les forces de cisaillement spécifiques t_i, on peut calculer les cisaillements longitudinaux et transversaux à l'aide de la relation (1) et on peut déduire les forces des barres de treillis. Le résultat du calcul dans le cas des treillages de fig. 3, peut être résumé dans des formules très simples. Dans le cas *a* et *e* la force dans les barres de treillis horizontales est at, dans les cas *c* et *d* zéro. La force des barres diagonales est dans tous les cas At et la valeur de la force des barres-membrures est dans tous les cas zéro.

Il faut noter que les équations (12) et (13), que nous venons de déduire, sont en parfait accord avec les équations établies par M. P. BLAISE [2] pour la résolution du problème de torsion des prismes multicellulaires à parois minces. Par suite de cette identité les procédés exposés en [3] et [4], basés également sur les équations de Blaise peuvent être utilisés sans doute non seulement pour des prismes multicellulaires à parois minces, mais aussi pour des prismes multicellulaires à treillis.

7. Exemple numérique

Appliquons le procédé exposé ci-dessus au prisme à trois cellules en treillis, représenté sur fig. 12. Soit

$$M = 1, \qquad E = 1$$

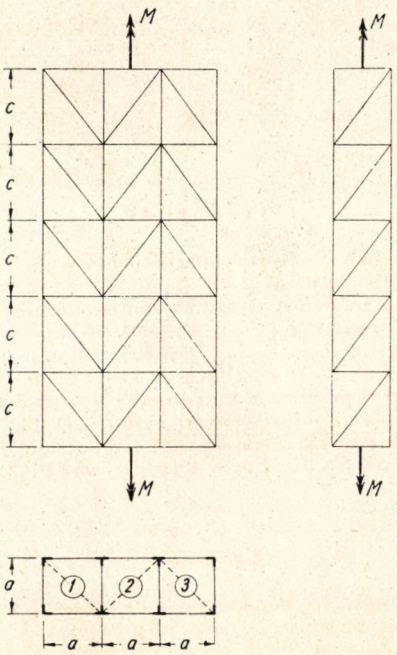


Fig. 12. Prisme à trois cellules

et pour toutes les faces latérales

$$a = 3, \qquad c = 4, \qquad A = 5, \qquad F_a = 9, \qquad F_A = 5.$$

Dans le cas de notre problème toutes les dix travées de treillis sont égales, c'est à dire la valeur K caractérisant leur déformabilité, est également identique :

$$K = \frac{1}{c}\left(\frac{a^3}{F_a} + \frac{A^3}{F_A}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3^3}{9} + \frac{5^3}{5}\right) = 7.$$

Bien entendu que, à cause de la symétrie existante

$$t_1 = t_3, \qquad t_{12} = t_{32},$$

de sorte que pour résoudre la problème, l'équation de compatibilité (12) ne doit être écrite que pour deux cellules. Vu que

$$k_1 = 3K = 21,$$
$$k_{12} = K = 7,$$
$$k_2 = 2K = 14,$$
$$k_{32} = K = 7,$$
$$\Omega_1 = \Omega_2 = 9,$$

l'équation relative à la cellule désignée par 1. resp. 2. sera

$$t_1 21 + (t_1 - t_2) 7 = 2 \cdot 1 \cdot \vartheta \cdot 9,$$
$$t_2 14 + 2(t_2 - t_1) 7 = 2 \cdot 1 \cdot \vartheta \cdot 9$$

et l'équation d'équilibre (13) prendra la forme

$$2(t_1 9 + t_2 9 + t_1 9) = 1.$$

Des dernières trois équations

$$t_1 = \frac{5}{288}, \qquad t_2 = \frac{6}{288}, \qquad \vartheta = \frac{49}{2592}.$$

LITTÉRATURE

1. F. H. Baron : Torsion of Multiconnected Thin-walled Cylinders, *Trans. Am. Sc. Mech. Engrs.*, **64** (1942), p. A-72.
2. M. P. Blaise : La torsion des prismes multicellulaires à parois minces. *Annales des Ponts et Chaussées*, **122** (1952) pp. 601—611.
3. J. Barta : Sur l'estimation de la rigidité de torsion des prismes multicellulaires à parois minces. *Acta Technica* Hung. *12* (1955), pp. 333—337.t
4. M. P. Blaise : Sur la résolution numérique du problème de la orsion des prismes multicellulaires à parois minces. *Acta Technica* Hung. *12* (1955), pp. 327—332.
5. Csonka P. : Rácsos szerkezetek csavarása. (Torsion de constructions à treillis.) *A Magyar Mérnök- és Építész Egylet Közlönye*, **66** (1932), pp. 121—128.

RÉSUMÉ

Les prismes en treillis sont des constructions de trois dimensions composées de faces latérales à membrure rectiligne, parallèles à l'axe du prisme et de faces terminales en treillis normales à l'axe du prisme. La formations de ces constructions est très similaire à la formation des *prismes à parois minces*, d'une section transversale identique. Si le prisme en treillis est

composé des sections identiques et le treillage des faces latérales est d'un type en *N*, *V* ou *K*, enfin, si le treillage des faces terminales est une triangulation simple, il y a une identité parfaite entre le jeu des forces des prismes en treillis et ceux à parois minces. Les efforts des prismes multicellulaires en treillis soumis à la torsion peuvent être calculés d'une manière semblable à celle des prismes multicellulaires à parois minces.

КРУЧЕНИЕ МНОГОЯЧЕЙКОВЫХ РЕШЕТЧАТЫХ ПРИЗМ

Д-р техн. наук П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

Решетчатые призмы представляют собой такие пространственные решетчатые конструкции, которые состоят из решетчатых боковых пластин, параллельных к оси призмы, и из решетчатых торцевых пластин, перпендикулярных к оси призмы. Построение этих конструкций напоминает построение тонкостенных пластинчатых призм с идентичным по своей форме поперечным сечением. Автор показывает, что в том случае, когда решетчатая призма состоит из одинаковых по форме и размерам частей, тогда обрешетка боковых пластин является обычной обрешеткой N– V или же K, а обрешетка торцевых пластин имеет форму треугольников. Решетчатые и пластинчатые призмы работают совершенно аналогично. Работа такого рода решетчатых призм, работающих на кручение, может быть рассчитана таким же образом, как и работа тонкостенных многоячейковых призм.

TORSION OF MULTI-CELLULAR TRUSSED PRISMS

P. CSONKA, D. Eng. Sc.

SUMMARY

Trussed prisms are three-dimensional framed structures consisting of lateral braced frames with parallel chords and of braced terminal faces perpendicular to the prism axis. The build up of these structuresi s very similar to that of thin-walled *lamellar prisms* of identical cross section. The paper demonstrates that, if the trussed prism consists of compartments of equal shape and proportions, and if the lateral bracings are simple *N*-, *V*- or *K*-trusses, and the bracing of the terminal faces is triangular, there is a perfect similarity between the play of forces in the trussed or in the lamellar prisms. Torsion analysis of such trussed prisms can be executed in the same way as that of thin-walled multilamellar prisms.

DIE VERDREHUNG MEHRZELLIGER PRISMATISCHER FACHWERKE

P. CSONKA

Doktor der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Unter *prismatischen Fachwerken* werden Raumfachwerke verstanden, deren Seitenflächen parallel zur Prismenachse verlaufen und parallele Gurten aufweisen und deren Endflächen senkrecht zur Prismenachse angeordnet sind. Der Aufbau dieser Raumfachwerke ist äusserst ähnlich den mehrzelligen dünnwandigen *prismatischen Faltwerken* mit ähnlich gestaltetem Querschnitt. Im Falle, wo das prismatische Fachwerk aus lauter Abschnitten von gleicher Form und gleichen Abmessungen besteht, die Ausfachung der Seitenflächen ein einfaches *N*-, *V*- oder *K*-System darstellt und die Ausfachung der Endflächen durch Dreiecke gebildet ist, zeigt sich zwischen dem Kräftespiel der prismatischen Fachwerke und dem der prismatischen Faltwerke eine völlige Ähnlichkeit. Die Innenkräfte solcher auf Verdrehung beanspruchter prismatischer Fachwerke lassen sich auf dieselbe Weise berechnen, wie bei den mehrzelligen dünnwandigen prismatischen Faltwerken.

UNTERSUCHUNG DER WICHTIGEREN MECHANISCHEN EIGENSCHAFTEN VON VERFORMBAREN ($\alpha + \beta$)-SONDERMESSINGEN IN ABHÄNGIGKEIT VON DER WÄRMEBEHANDLUNG

E. BELLA

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 10. Februar 1955]

Ein gemeinsames Kennzeichen der Sondermessinge ist, dass sie ausser Kupfer und Zink noch einige Prozente eines oder mehrerer anderer Bestandteile enthalten. Durch Zulegieren dieser Bestandteile können gewisse mechanische und physikalische Eigenschaften der Messinge zum Vorteil verändert werden. Zum Beispiel erhöht Nickel die Festigkeit, die Bruchdehnung und die Korrosionsbeständigkeit, Aluminium die Festigkeit und die Korrosionsbeständigkeit usw. Diese Veredelung durch Legieren wird in einem gewissen Bereich der Messinglegierungen (Cu = ca. 54—62%), im sogenannten ($\alpha + \beta$)-Gebiet besonders häufig angewandt. Der Anteil dieser Zusätze überschreitet im allgemeinen nicht 5—7%.

Das Gebiet der Wärmebehandlung, das in vorliegender Abhandlung untersucht werden soll, kann bekanntlich in zwei hauptsächliche Bereiche unterteilt werden, nämlich in das *Weichglühen* und in die *Vergütung*.

Durch das *Weichglühen* wird die Auflösung der bei Kaltverformung entstehenden Spannungen und Verfestigungen sowie die Veränderung der Gefügestruktur erreicht. Hierher gehören die Gebiete der *Entspannung*, der *Entfestigung*, der *Rekristallisation* und der *Grobkristallisation*.

Die *Vergütung* kann wiederum in zwei Gruppen unterteilt werden: in die *Ausscheidungshärtung* und in den *Umwandlungsvorgang*.

Die *Ausscheidungshärtung* beruht darauf, dass das Lösungsvermögen des Grundstoffes gegenüber einem der Legierungsbestandteile mit der Temperatur sinkt und der betreffende Bestandteil zum Teil ausgeschieden wird. Wesentlich ist hierbei die Verhinderung der bei höheren Temperaturen auftretenden gröberen Ausscheidung und die planmässig hervorgerufene feine Ausscheidung bei niedriger Temperatur. Das Ergebnis ist eine Spannungserhöhung und eine Verbesserung der mechanischen Eigenschaften. Typische Beispiele hierfür sind die Aluminiumlegierungen.

Das Hauptkennzeichen des *Umwandlungsvorganges* ist die Veränderung der Atomgitterstruktur oder die Atomumordnung mit oder ohne Gitteränderung. Für die Praxis besteht das Wesen der auf Gitterumwandlung beruhenden Wärmebehandlung in der Verhinderung der bei hoher Temperatur erfolgenden Umwandlung durch rasche Abkühlung (Abschrecken) und das spätere Hervorrufen dieser Umwandlung bei niedriger Temperatur (Anlassen), wodurch eine feinnadelige Kristallstruktur entsteht. Das Ergebnis dieser Behandlung ist Verfestigung. Typische Beispiele hierfür sind die Eisen-Kohlenstofflegierungen und die ($\alpha + \beta$)-Messinge.

Der Umwandlungsvorgang spielt sich bei den ($\alpha + \beta$)-Zweistoffmessingen so ab, dass der bei hoher Temperatur beständige β-Kristall mit raumzentriertem Atomgitter sich innerhalb gewisser Zusammensetzungsgrenzen mit dem Sinken der Temperatur in einen α-Kristall mit flächenzentriertem Atomgitter umwandelt. Infolge der Veränderung des Lösungsvermögens (Abb. 1, Phasenlinie $c—n$) wird jedoch mit sinkendem Kupfergehalt immer weniger β in α umgewandelt. Der Umwandlungsvorgang ist, wie der Vorgang der Vergütung im allgemeinen, umkehrbar ($\beta \rightleftarrows \alpha$), d. h. er lässt sich durch blosse Änderung der Temperatur wiederholen. Das Wesen der ausführbaren Wärmebehandlung besteht zuerst im Glühen über der Linie $c—n$ (Abb. 1) zur Erreichung der vollen β-Phase, dann in der plötzlichen Abkühlung zur Verhinderung der bei hoher Temperatur sonst eintretenden Umwandlung in grobnadelige α-Kristalle (Abschrekken) und schliesslich im Anlassen bei niedriger Temperatur (280°—350° C), um die Bildung eines Gefüges in β-Einbettung mit feinnadeligen α-Kristallen zu erzielen. Dieses martensitartige Gefüge verursacht eine gewisse Verfestigung. Das Verhältnis des α-Gefüges zum β-Gefüge kann bei ein und derselben Legierung durch Glühen bei verschiedenen Temperaturen im ($\alpha + \beta$)-Gebiet und durch plötzliche Abkühlung verändert werden. Es ist zu bemerken, dass die β-Phase unterhalb einer gewissen Temperatur (Abb. 1, Linie $m—n$) nicht stabil ist, bei wie

schneller Abkühlung auch immer sie sich in die β'-Phase umwandelt, so dass man bei gewöhnlicher Temperatur eigentlich immer nur von einer β'-Phase sprechen kann.

Die Gleichgewichtsverhältnisse der binären Messinge, ihr Gefüge und ihre mechanischen Eigenschaften können auf Grund des Zustandsdiagramms sowie der Kurven, die die mechanischen Eigenschaften als Funktion der Zusammensetzung darstellen, gut beurteilt werden.

Die Verhältnisse der Mehrstofflegierungen sind dagegen komplizierter. Die ersten, gründlichen Untersuchungen über den Einfluss des dritten Legierungsbestandteils stammen von GUILLET [1]. Es gelang ihm auch einen gewissen Zusammenhang zu finden, laut dessen die Wirkung des dem binären Messing zugefügten dritten Bestandteils als Änderung des Legierungsverhältnisses von Kupfer und Zink aufgefasst werden kann, die im Zweistoffschaubild eine Verschiebung der Phasenlinien herbeiführt. GUILLET stellte die sogenannten Gleichwertigkeitskoeffizienten der einzelnen Zusätze fest, d. h. diejenigen Zahlen, die angeben, eine wie grosse Menge Zink oder Kupfer durch den dritten Bestandteil ersetzt wird. Auf diese Weise

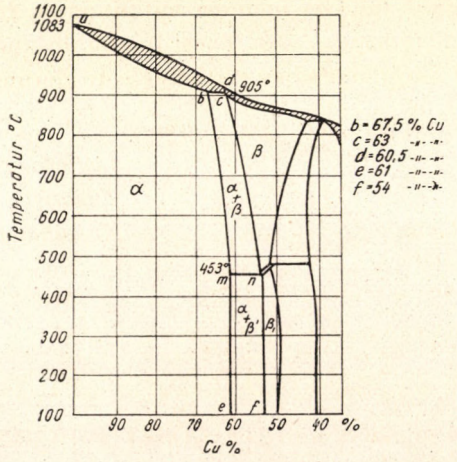


Abb. 1. Zustandsteildiagramm von Kupfer-Zink-Legierungen (BAUER und HANSEN)

kann ein Messing mit drei oder mehr Bestandteilen immer auf einen Zweistoffmessing umgerechnet werden, dessen Kupfergehalt von dem der ursprünglichen Legierung abweicht. Dieser sogenannte scheinbare Kupfergehalt lässt sich mit Hilfe der folgenden Formel berechnen :

$$Cu_y = \frac{100\,A}{100 + q\,(t - 1)}\,.$$

Hier bedeuten :

A = ursprünglicher Cu-Gehalt der Mehrstofflegierung in %.
q = Menge des neuen Legierungsbestandteils in %.
t = Gleichwertigkeitskoeffizient des neuen Bestandteils.

Die Gleichwertigkeitskoeffizienten einiger Legierungszusätze sind nach GUILLET :

Al = 6, Si = 10, Mn = 0,5, Ni = —1,1—1,7, Fe = 0,9, Pb = 1, Sn = 2.

Wie aus der Formel ersichtlich, wird durch den Zusatz im Falle $t > 1$, $Cu_y < A$ das Zink und im Falle $t < 1$, $Cu_y > A$ das Kupfer ersetzt. Dementsprechend verschieben sich dann die Phasenlinien des Diagramms.

Später befassten sich BAUER und HANSEN in ihren grundlegenden Versuchen mit der Untersuchung des dritten Bestandteils von Messinglegierungen [2], und zwar mit der Klarlegung der Gleichgewichtsverhältnisse und der Feststellung der Gefügestruktur. Die von ihnen konstruierten dreidimensionalen Zustandsdiagramme und deren vertikale und horizontale Schnitte bilden ein sehr gutes Hilfsmittel für die Untersuchung der ternären Messinge. Daneben hat sich noch die GUILLETsche Formel in der Praxis als eine ausserordentlich einfache und nützliche Methode erwiesen, um bei Mehrstofflegierungen Schlüsse auf das Gefüge und die mechanischen Eigenschaften ziehen zu können.

Über die Veränderung der mechanischen Eigenschaften von Zweistoffmessingen in Abhängigkeit von der Kaltverformung und vom Weichglühen finden sich im Schrifttum reichliche Angaben [3, 4]. Weniger befasst man sich jedoch mit der Wirkung der Vergütung, wobei sich auch diese Untersuchungen hauptsächlich auf die Feststellung der Gefügestruktur und der Oberflächenhärte beschränken [5, 6, 7, 8, 9, 10].

Über die Abhängigkeit der Festigkeitseigenschaften der verformbaren ($\alpha + \beta$)-Sondermessinge sowohl von der Kaltverformung und dem Weichglühen wie auch insbesondere von der Vergütung sind nur sehr spärliche Angaben zu finden [11, 12]. Deshalb wurde dieses Gebiet zum Gegenstand der im folgenden geschilderten Versuche gewählt. Natürlich war es im Interesse einer erfolgreicheren Arbeit geboten, die Grenzen der Untersuchung enger zu ziehen, so dass sich die Versuche lediglich auf die Gruppen der mit Mangan, Nickel und Aluminium legierten Messinge erstreckten. Auch noch innerhalb dieses Gebietes wurden für die Versuche bloss 4 in der Praxis verwendete Legierungen ausgewählt.

Die Versuchslegierungen waren :

Legierung I. (Sr. M)
Zusatz : Mn
Zusammensetzung :
Cu = 57—60%
Mn = 1—2%
Zn = Rest

Legierung II. (Sr. MA)
Zusatz : Mn, Al
Zusammensetzung :
Cu = 55—58,5%
Mn = 2,5—3,5%
Al = 0,5—1,5%
Zn = Rest

Normen für die Legierungen I und II : GOSZT 1019—47 DIN 1726

Legierung III. (NS III.)
Zusatz : Ni, Mn, Al
Zusammensetzung :
Cu = 52—54%
Ni = 4,5—5,5%
Mn = 0,75—1,25%
Al = 0,3%
Zn = Rest

Legierung IV. (NS I.)
Zusatz : Ni, Mn, Al
Zusammensetzung :
Cu = 57—59%
Ni = 1,5—2,5%
Mn = 0,2—0,6%
Al = 0,2%
Zn = Rest

Die ungarische Norm für die Legierungen III und IV : MNOSZ 8812.

Die Untersuchungen zerfallen in zwei Gruppen :

I. Untersuchung der wichtigeren mechanischen Eigenschaften in Abhängigkeit von der Kaltverformung und vom Weichglühen. Untersuchung der Umstände bei Verfestigung und Entfestigung.

II. Untersuchung der wichtigeren mechanischen Eigenschaften in Abhängigkeit von der Vergütung.

Die Untersuchungen und deren Ergebnisse sollen jetzt kurz im folgenden geschildert werden.

I. Untersuchung der wichtigeren mechanischen Eigenschaften der Versuchslegierungen in Abhängigkeit von der Kaltverformung und dem Weichglühen

Das Ziel des ersten Teiles der Untersuchungen war die Messung einiger wichtigerer mechanischer Eigenschaften der Versuchslegierungen, wie Streckgrenze ($\sigma_{0,2}$ kg/mm^2), Zugfestigkeit (σ kg/mm^2), Bruchdehnung (δ_{10} %) und Brinellhärte ($H_{B\ 250/5/30}$ kg/mm^2) in Abhängigkeit von der Kaltverformung und dem Weichglühen. Zu diesem Zwecke wurden die Werkstoffe — vom geglühten Zustand ausgehend — bei fortschreitender Querschnittsverminderung bis zum Beginn des Auftretens von Rissen kaltgewalzt. Dann wurden die aufgezählten mechanischen Eigenschaften gemessen und aus den Veränderungen der Werte die *Verfestigungskurve der Legierungen* aufgezeichnet. Danach wurden die Legierungen von einem bestimmten, annähernd einheitlichen harten Zustand ausgehend bei immer höheren Temperaturen geglüht, und endlich nach Messung der schon erwähnten mechanischen Eigenschaften aus den die Verminderung der Verfestigung und Erhöhung der Verformbarkeit kennzeichnenden Zahlen die sogenannten *Entfestigungskurven* gezeichnet.

Als Ausgangsmaterial für die Versuche dienten vier Stück gegossene Blöcke von 255×55 mm Querschnitt und 70—80 kg Gewicht. Die chemische Zusammensetzung der Blöcke ist aus Tabelle I. ersichtlich.

TABELLE I

Tatsächliche Zusammensetzung der legierten Blöcke I—IV.

Bezeichnung der Legierung	Charge Nr.	Schmelzofen	Bestandteile %					Scheinbarer Kupfergehalt nach Guillet Cu_y%
			Cu	Mn	Al	Ni	Zn	
I. Sr M	118	Ajax	57,83	1,17	—	—	Rest	58,1
II. Sr MA	1	Tiegel	56,52	2,95	0,95	—	«	54,7
III. NS III	190	Ajax	53,3	0,92	0,51	4,95	«	58,6
IV. NS I	165	Ajax	57,9	0,4	0,2	2,02	«	60,1

Die geschopften, gefrästen, auf 6 mm warmgewalzten und auf 3 mm kaltgewalzten Blöcke wurden bei einer provisorisch festgesetzten Temperatur weichgeglüht. Dieser Zustand war der Ausgangspunkt für die Aufnahme der Verfestigungskurven. Dann wurde das 3 mm dicke, weiche Material bei allen 4 Legierungen bei stets zunehmender Querschnittsverminderung (Stufen von 5%) bis zur Rissbildung kaltgewalzt. Bei jeder Stufe und jeder Legierung erfolgten Zerreissversuche mit je 4 Probestäben, wobei die Veränderung der Streckgrenze, der Zugfestigkeit, der Bruchdehnung und der Brinellhärte untersucht wurden. Aus den Mittelwerten der Ergebnisse konnten so geson-

dert für jede Legierung die Kurven der mechanischen Eigenschaften in Abhängigkeit von der Querschnittsverminderung aufgezeichnet werden. Die Endergebnisse der Versuche sind in den Tabellen II, III, IV und V bzw. in den Abbildungen 2, 3, 4 und 5 zusammengefasst. Bei den Versuchen betrugen die grössten Querschnittsverminderungen bei der Legierung Sr M 64,5%, bei Sr MA 19%, bei NS III 34% und bei NS I 40%.

TABELLE II

Legierung Sr M in verfestigtem Zustand

Mechanische Eigenschaften		Nach 64,5 %iger Kaltverformung	
		Wert	auf den weichen Zustand bezogen
$\sigma_{0,2}$	kg/mm²	64,1	4,8fach
σ	kg/mm²	73,2	1,75fach
H_B	kg/mm²	191	2,1fach
δ%		6,5	13,4%
$\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma}$		0,88	2,82fach

TABELLE III

Legierung Sr MA in verfestigtem Zustand

Mechanische Eigenschaften		nach 19%iger Kaltverformung	
		Wert	auf den weichen Zustand bezogen
$\sigma_{0,2}$	kg/mm²	58	2,34fach
σ	kg/mm²	71	1,37fach
H_B	kg/mm²	213	1,55fach
δ%		5,5	27,4%
$\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma}$		0,82	1,76fach

TABELLE IV

Legierung NS III in verfestigtem Zustand

Mechanische Eigenschaften		nach 34%iger Kaltverformung	
		Wert	auf den weichen Zustand bezogen
$\sigma_{0,2}$	kg/mm²	70,5	3,5fach
σ	kg/mm²	75,6	1,43fach
H_B	kg/mm²	200	1,8fach
δ%		6,5	16%
$\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma}$		0,94	2,5fach

TABELLE V

Legierung NS I in verfestigtem Zustand

Mechanische Eigenschaften	nach 40%iger Kaltverformung	
	Wert	auf den weichen Zustand bezogen
$\sigma_{0,2}$ kg/mm²	62·5	3,9fach
σ kg/mm²	68,5	1,41fach
H_B kg/mm²	191	1,85fach
δ%	9,7	24,5%
$\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma}$	0,91	3fach

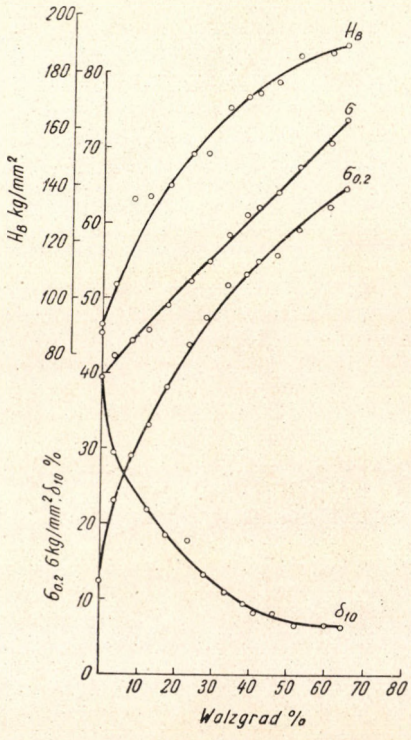


Abb. 2. Veränderung der mechanischen Eigenschaften der Legierung Nr. I (Sr M) in Abhängigkeit von der Querschnittsverminderung bei Kaltwalzung

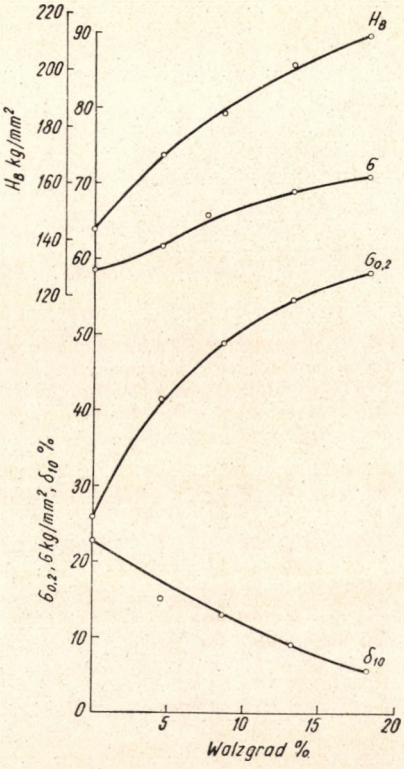


Abb. 3. Veränderung der mechanischen Eigenschaften der Legierung Nr. II (Sr MA) in Abhängigkeit von der Querschnittsverminderung bei Kaltwalzung

Die infolge der Kaltwalzung eintretende Veränderung des nadeligen ($\alpha + \beta$)-Gefüges der gegossenen Blöcke geht aus den Gefügebilder des harten Zustandes hervor (Abb. 6—9).

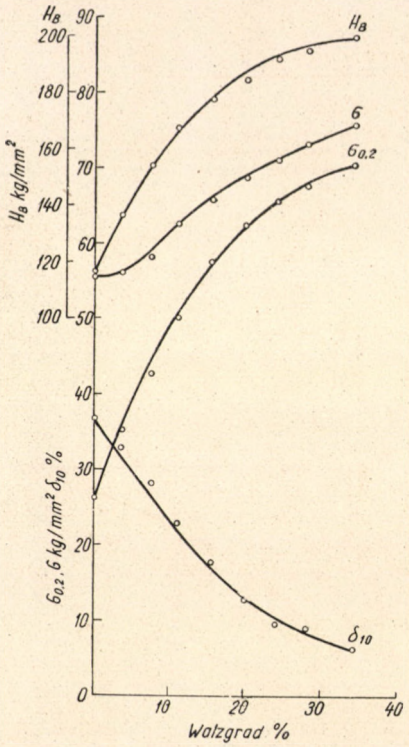


Abb. 4. Veränderung der mechanischen Eigenschaften der Legierung Nr. III (NS III) in Abhängigkeit von der Querschnittsverminderung bei Kaltwalzung

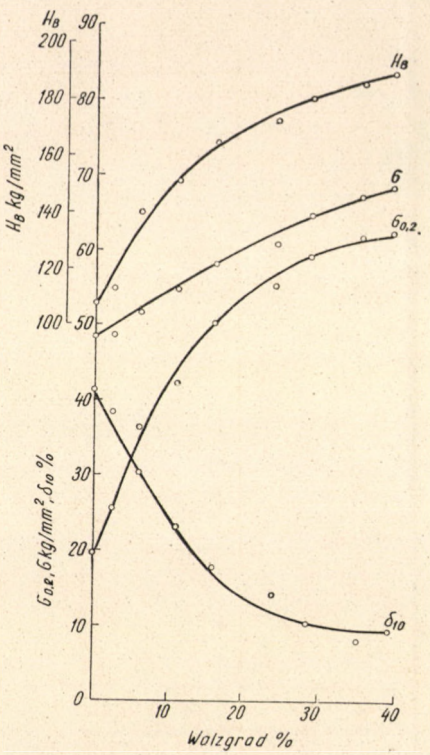


Abb. 5. Veränderung der mechanischen Eigenschaften der Legierung Nr. IV (NS I) in Abhängigkeit von der Querschnittsverminderung bei Kaltwalzung

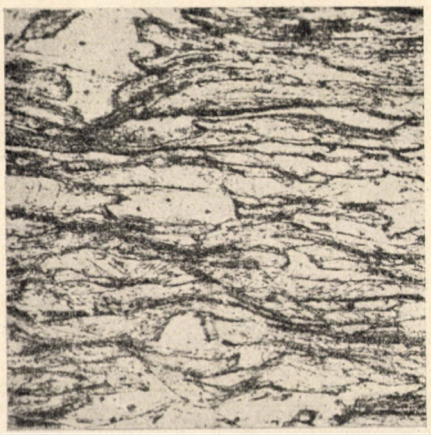


Abb. 6. Gefüge der Legierung Nr. I (Sr M) nach 64,5%iger Querschnittsverminderung durch Kaltwalzen. Orientiertes ($\alpha + \beta$)-Gefüge. 150 x

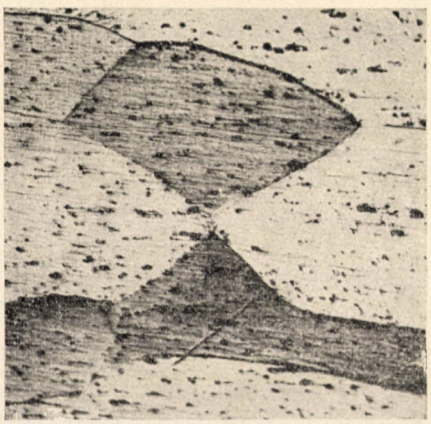


Abb. 7. Gefüge der Legierung Nr. II (Sr MA) nach 19%iger Querschnittsverminderung durch Kaltwalzen. Grobkörniges, wenig orientiertes ($\alpha + \beta$)-Gefüge. 75 x

Bei der Darstellung der Entfestigungskurven war das Bestreben im allgemeinen darauf gerichtet, von einem harten Zustand auszugehen, der nach einem einheitlichen Grundsatz bestimmt war. Dieser Zustand war jener der Querschnittsverminderung durch Kaltwalzen entsprechende Zustand, bei dem sich die Dehnungskurve zu verflachen beginnt. Aus dem so ausgewählten Material wurden je Legierung und je geplanter Entfestigungsstufe stets vier Probestäbe angefertigt, die bei Temperaturen zwischen 100 und 700° C immer 2 Stunden lang in Stufen von 100° C geglüht wurden, wonach die Bestimmung der bereits genannten mechanischen Eigenschaften durch Zerreissversuche erfolgte. Die



Abb. 8. Gefüge der Legierung Nr. III (NS III) nach 34%iger Querschnittsverminderung durch Kaltwalzen. Sehr feines, stark verformtes ($\alpha + \beta$)-Gefüge. 150 x



Abb. 9. Gefüge der Legierung Nr. IV (NS I) nach 40%iger Querschnittsverminderung durch Kaltwalzen. Stark verformtes ($\alpha + \beta$)-Gefüge. 150 x

Mittelwerte der Ergebnisse sind als *Entfestigungskurven* in den Abb. 10—13 eingezeichnet.

Aus dem Vergleich der annähernden Grösstwerte der Bruchdehnungskurve und der annähernden Kleinstwerte der Kurven für die Streckgrenze, die Zugfestigkeit und die Brinellhärte können folgende *Weichglühtemperaturen* als diejenigen bezeichnet werden, bei denen sich die *günstigsten* Werte für die mechanischen Eigenschaften ergeben: für die Legierungen *Sr M* und *Sr MA: 500° C*, für die Legierung *NS III: 550—600° C* und für *NS I: 600° C*. Die Versuchsergebnisse bei den so bestimmten Weichglühtemperaturen sind in Tabelle VI enthalten.

Das Gefüge wurde für den bei der günstigsten Temperatur geglühten Zustand sowie für den bei 100° C höherer Temperatur und bei 100° C niedrigerer Temperatur geglühten Zustand untersucht. Die Gefügebilder der weichgeglühten Legierungen sind aus Abb. 14—17 ersichtlich.

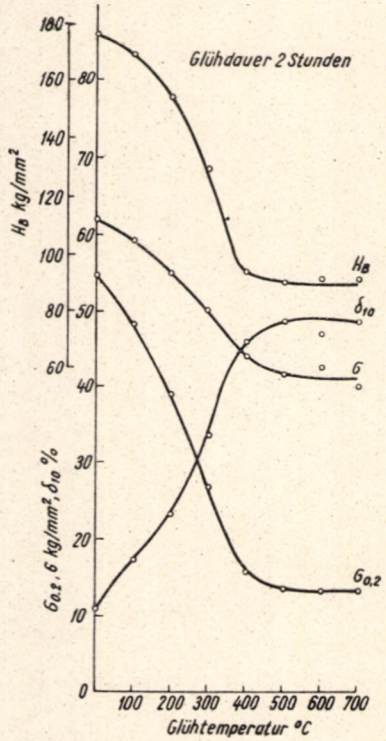


Abb. 10. Veränderung der mechanischen Eigenschaften der Legierung Nr. I. (Sr M) in Abhängigkeit von der Glühtemperatur (Glühzeit = 2 Stunden)

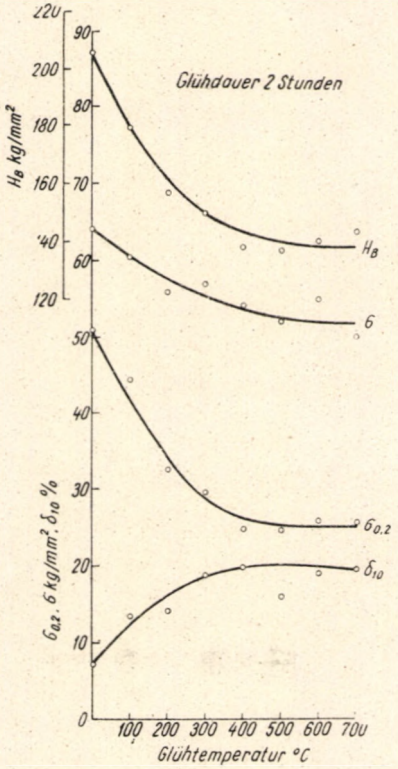


Abb. 11. Veränderung der mechanischen Eigenschaften der Legierung Nr. II (Sr MA) in Abhängigkeit von der Glühtemperatur (Glühzeit = 2 Stunden)

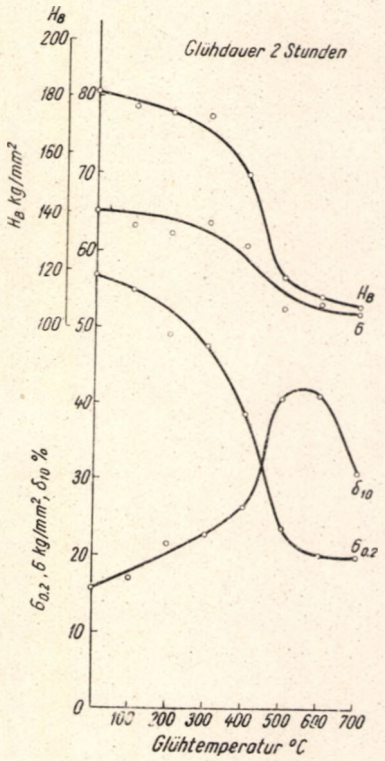


Abb. 12. Veränderung der mechanischen Eigenschaften der Legierung Nr. III (NS III) in Abhängigkeit von der Glühtemperatur (Glühzeit = 2 Stunden)

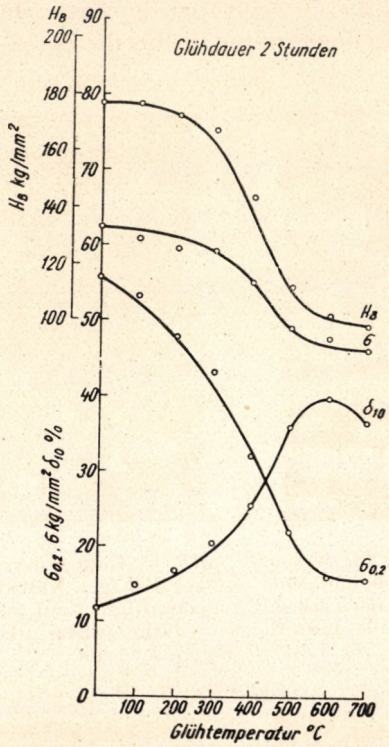


Abb. 13. Veränderung der mechanischen Eigenschaften der Legierung Nr. IV (NS I) in Abhängigkeit von der Glühtemperatur (Glühzeit = 2 Stunden)

TABELLE VI

Mechanische Eigenschaften für den weichgeglühten Zustand

Legierung	$\sigma_{0,2}$ kg/mm²	σ kg/mm²	H_B kg/mm²	δ_{10}%
Sr M 500° C	13,5	41,7	91	48,7
Sr MA 500° C	24,7	52	137	20
NS III 600° C	20	53	111	41
NS I 600° C	16	47,5	102	39,5

Der bei einer um 100° C unter der gewählten Weichglühtemperatur geglühte Werkstoff zeigte noch eine stärkere Orientierung, während das Glühen bei einer um 100° C höheren Temperatur ein gröberes Gefüge zur Folge hatte.

Das Endergebnis der in Abhängigkeit von der Kaltverformung und dem Weichglühen durchgeführten Versuche sind die in den Abb. 2—5 und 10—13 dargestellten Verfestigungs- und Entfestigungskurven, die in allgemeinen die aus dem Schrifttum von anderen Metallen und Legierungen her bekannte charak-

teristische Form aufweisen. Sie ermöglichten die Feststellung derjenigen für die Praxis wichtigen Weichglühtemperaturen, die für die untersuchten mechanischen

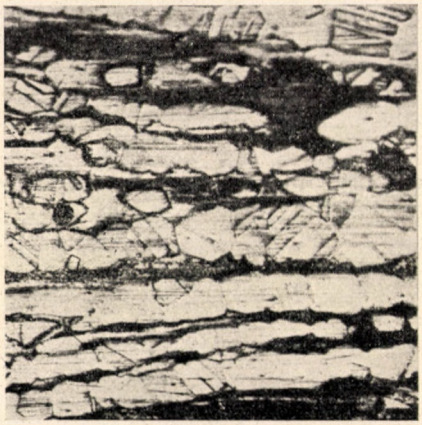


Abb. 14. Gefüge der Legierung I (Sr M) nach 40%iger Kaltwalzung und zweistündigem Glühen auf 500° C. Orientierung noch erkennbar, jedoch polygonale Kristalle. 150 x

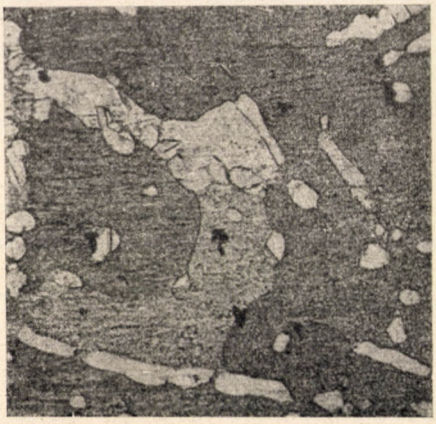


Abb. 15. Gefüge der Legierung II (Sr MA) nach 15%iger Kaltwalzung und zweistündigem Glühen auf 500° C. Polygonales β, darin gröbere α-Umwandlung. 150 x

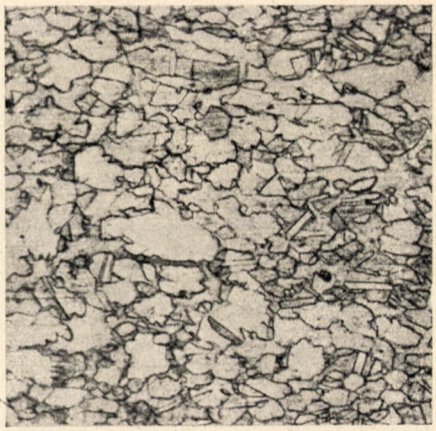


Abb. 16. Gefüge der Legierung III (NS III) nach 20%iger Kaltwalzung und zweistündigem Glühen auf 600° C. Etwas orientiertes, feines ($\alpha + \beta$)-Gefüge. 150 x

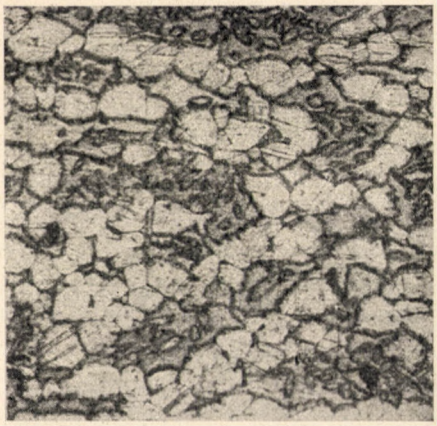


Abb 17. Gefüge der Legierung IV (NS I) nach 26%iger Kaltwalzung und zweistündigem Glühen auf 600° C, polygonales ($\alpha + \beta$)-Gefüge. Innerhalb der β-Kristalle kleine Nadelstruktur. 150 x

Eigenschaften den günstigsten weichen Zustand ergeben. Die metallographischen Gefügebilder bestätigten denn vollauf die Eigenschaften der untersuchten Zustände.

II. Untersuchung der wichtigeren mechanischen Eigenschaften der Versuchslegierungen in Abhängigkeit von der Vergütung

Die Vergütung der ($\alpha + \beta$)-Messinge beruht auf dem *Umwandlungsvorgang*. Bei den Messingen finden sich zwei Arten der Umwandlung. Die *eine* ist die Atomumordnung ohne Gitteränderung, d. i. die *Umwandlung* $\beta \rightarrow \beta'$. Hier ändert sich das körperzentrierte β-Gitter nicht, wogegen sich die bei höherer Temperatur in ungeordnetem Zustand befindlichen Atome bei ungefähr 450° C nach einem bestimmten System ordnen und sich gewisse ihrer physikalischen Eigenschaften ändern (z. B. sinkt der elektrische Widerstand). Das Gefüge und die mechanischen Eigenschaften ändern sich jedoch nicht und daher ist auch keine Vergütung möglich. Die Atomumordnung tritt bei niedriger Temperatur immer ein, so dass im wesentlichen bei gewöhnlicher Temperatur immer die β'-Phase anzutreffen ist.

Die andere Art der Umwandlung ist $\beta \rightarrow \alpha$, die mit einer Gitteränderung einhergeht. Eigentlich beruht die Vergütung der ($\alpha + \beta$)-Messinge auf dieser Art der Umwandlung. Das Wesen des Vorganges ist — wie bereits eingangs erwähnt —, dass sich ein Teil der bei höherer Temperatur beständigen, körperzentrierten β-Phase mit sinkender Temperatur in Abhängigkeit von der Konzentration durch eine sogenannte örtliche Umwandlung in flächenzentrierte α-Kristalle verwandelt. Bei hoher Temperatur spielt sich der Phasenwechsel im festen Zustand ähnlich ab wie beim Erstarrungsvorgang. Nach Überschreiten der β-Phasenlinie (Linie $c—n$, Abb. 1) tritt thermische Keimbildung ein, wobei bei den Keimen infolge des Diffusionsvermögens die Gesetze des Kristallwachstums Gültigkeit besitzen werden. Im Falle von langsamer Abkühlung wird daher das Ergebnis ein grobnadeliges α-Gefüge in β-Grundmetall sein. Wenn jedoch ein aus dem β-Bereich plötzlich abgekühlter Werkstoff bei niedriger Temperatur (280°—350° C) geglüht wird, geht die Umwandlung mangels einer Diffusion durch Gitterverzerrung vor sich, was dann eine Verfestigung verursacht.

Die Umwandlung des regulär-körperzentrierten Gitters in ein regulär-flächenzentriertes Gitter kommt nach den Versuchen von STRAUMANIS und WEERTS mit Messinglegierungen [6, 7] als eine Kombination von Stauchung, Dehnung und Verdrehung zustande. Dies geht so vor sich, dass sich eine der sechs (011)-Ebenen des β-Gitters umwandelt, wodurch die [111]-Richtung des β parallel der [110]-Richtung des α wird. Bei Glühen auf niedriger Temperatur (Anlassen) entsteht mangels einer Diffusion kein grobnadeliger α-Kristall. Die α-Umwandlung geht in der Form von kleinen Platten vor sich, die von den ursprünglichen, und zwar ganz bestimmt orientierten Gitterflächen begrenzt werden. So zeigt das Gefügebild eine gleichförmige, regelmässige feinnadelige Struktur (Abb. 27 und 30).

Eine Umwandlung von ähnlichem Charakter wie die der Messinglegierungen ist die $\gamma \rightarrow \alpha$-Umwandlung der Eisen-Kohlenstofflegierungen. Dort hat

man es aber mit dem umgekehrten Fall zu tun, da die flächenzentrierte γ-Phase mit fallender Temperatur in die körperzentrierte α-Phase übergeht [13, 10]. Dieser Fall ist auch verwickelter, weil das im Mittelpunkt des γ-Gitters befindliche Kohlenstoffatom im körperzentrierten α-Gitter keinen Platz findet. Es entsteht ein intermediärer Zwangszustand, der eine sehr grosse Spannung verursacht. Darauf beruht — wie bekannt — die grosse Härte der gehärteten Kohlenstoffstähle (Martensitgefüge). Das warmbehandelte, feinnadelige Gefüge der Messinge wird gerade wegen dieser Ähnlichkeit auch martensitartiges Gefüge genannt.

Die Beobachtungen im Zusammenhang mit der $\beta \rightarrow \alpha$-Umwandlung der binären Messinglegierungen zielten — laut der Angaben des Schrifttums — in erster Linie auf die Untersuchung der Veränderung des elektrischen Widerstandes ab [8, 9]. Es wurde festgestellt, dass die mit der Gitteränderung verbundene Atomumordnung den elektrischen Widerstand regelwidrig vergrössert, was das Ergebnis der bei hoher Temperatur durch Abschrecken verhinderten und bei niedriger Temperatur ohne Diffusionsvermögen zwangsweise hervorgerufenen Gitterumwandlung oder Gitterverzerrung ist. Zugleich wurde eine gewisse Veränderung der Oberflächenhärte (Brinellhärte) in Abhängigkeit von der Anlassdauer und der Anlasstemperatur festgestellt, und zwar eine Erhöhung, die in einigen Fällen 60% erreichte. Dagegen befasste man sich nicht mit der Beobachtung der Veränderungen der für den Zustand des Werkstoffes in viel höherem Masse kennzeichnenden und genauer messbaren sonstigen wichtigen mechanischen Eigenschaften (wie Streckgrenze, Zugfestigkeit, Bruchdehnung). Auch in bezug auf die Vergütung der Mehrstoffmessinge sind keine derartigen Angaben aus dem Schrifttum bekannt.

Die im folgenden besprochenen Wärmebehandlungsversuche bezweckten ebendeswegen die Klärung der Frage, ob sich die für die binären Messinge aus dem Schrifttum bekannte, jedoch ungenügend untersuchte Vergütung auch mit Erfolg auf die verformbaren ($\alpha + \beta$)-Sondermessinge anwenden lässt.

Vergütungsversuche mit den Legierungen I—IV

Diese Versuche wurden mit denselben mit I—IV bezeichneten Legierungen (Sr M, Sr MA, NS III und NS I) durchgeführt wie die Untersuchungen über Verfestigung und Entfestigung. Die Versuchschargen waren ebenfalls dieselben (Tabelle I). Als Versuchsmaterial dienten auf 6 mm warmgewalzte Blechstreifen.

Vor den eigentlichen Versuchen wurden Wärmebehandlungsversuche mit zehn rein ternären Legierungen angestellt. Die Probeblöcke hierfür wurden so legiert, dass einzelne davon den gleichen Cu-Gehalt und den gleichen Gehalt an Sonderzusätzen aufwiesen wie eine der Legierungen I—IV. Der Temperaturbereich für die Wärmebehandlung der Vorversuchslegierungen liess sich auf Grund der Dreistoffdiagramme genauer feststellen. Auf Grund der in den Vor-

versuchen gewonnenen Temperatur- und Zeitangaben konnten dann die Vergütungsversuche mit den gewählten Mehrstofflegierungen leichter und erfolgreicher ausgeführt werden.

Die Wärmebehandlung bestand aus Glühen im β-Bereich, Abschrecken in Wasser und Anlassen bei niedriger Temperatur. Auf Grund der in den Vorversuchen gewonnenen Erfahrungen betrug die Abschrecktemperatur (Glühtemperatur im β-Bereich) bei allen vier Legierungen 830° C und die Glühdauer 2 Stunden. Der untersuchte Bereich der Anlasstemperaturen erstreckte sich mit Stufen von je 50° von 150° C bis 350° C. Die Anlassdauer war jeweils 3,5, 10 und 15 Stunden. Untersucht wurden der Zustand nach Glühen bei 830° C und Abschrecken in Wasser (gehärteter Zustand) sowie der Zustand nach verschieden langem Glühen auf verschieden niedrigen Temperaturen (angelassener Zustand). Für jeden Zustand wurden an jeweils 2 Zerreissstäben die Zugfestigkeit (σ kg/mm^2), die Bruchdehnung (δ_{10} %) und die Brinellhärte ($H_{B\ 250/5/30}$ kg/mm^2) bestimmt. Ausserdem wurden parallel hierzu kleine Blechstücke zur wiederholten Kontrolle der Brinellhärte und zur Untersuchung des Gefügeaufbaus wärmebehandelt.

Die Ergebnisse der Versuche mit den vier Legierungen können wie folgt zusammengefasst werden:

1. Bei der *Legierung Sr M (I)* trat durch die von einer hohen Temperatur (830° C) ausgehende rasche Abkühlung in Wasser (Abschrecken) und durch das Anlassen bei einer niedrigen Temperatur (150°—350° C) eine Gefügeveränderung ein, wobei in der β-Einbettung α-nadeliges Gefüge entstand (Abb. 18). Infolge der Gefügeveränderung erhöhte sich die Brinellhärte, insbesondere nach dem Anlassen bei 250° C. Die Zugfestigkeit veränderte sich dagegen nicht, während die Bruchdehnung sank. Die Versuche zeigen, dass sich die Wärmebehandlung auf die mechanischen Eigenschaften in beschränktem Masse und teilweise ungünstig auswirkt.

2. Bei der *Legierung Sr MA (II)* ergab die Wärmebehandlung sowohl im gehärteten als auch im angelassenen Zustand ein polygonales β-Gefüge (Abb. 19). Eine mit Gitterumwandlung und Gitterverzerrung verbundene nadelartige α-Umwandlung war nicht zu erzielen. So erfolgte weder eine Erhöhung der Zugfestigkeit noch der Brinellhärte, nur der Wert der Dehnung sank als Folge des reinen β-Gefüges.

3. Bei der *Legierung NS III (III)* waren die Versuche am erfolgreichsten. Hier verursachte das Anlassen bei niedriger Temperatur nach dem Abschrecken immer eine feinnadelige α-Umwandlung im β-Bett (Abb. 20, 21). Daher erhöhten sich die Brinellhärte beim Anlassen bei 300° C und 350° C um ca. 20—70% und die Festigkeit beim Anlassen bei 350° C um 8—15%. Die Dehnung nahm nach dem Anlassen bei einer niedrigeren Temperatur als 350° C stark ab, zeigte jedoch nach Wärmebehandlung bei 350° C annehmbare Werte von 9—15%. Es liess sich also feststellen, dass bei dieser Legierung die wichtigeren mechanischen Eigenschaften durch die Vergütung vorteilhaft beeinflusst werden.

4. Bei der *Legierung NS I (IV)*, einem Werkstoff von verwandtem Charakter wie NS III, zeigten sich ähnliche Ergebnisse wie bei diesem (Abb. 22). Die Legierung ist jedoch so zusammengesetzt, dass sie innerhalb der genormten Toleranzen schon bei kleinen prozentualen Veränderungen in der Zusammensetzung leicht in den α-Bereich oder auf dessen Grenze fällt, so dass dann die $\beta \rightarrow \alpha$-Umwandlung nicht mit Erfolg ausgeführt werden kann und sich auch die Festigkeitseigenschaften nicht vorteilhaft verändern lassen.

Die Gefüge der Legierungen I—IV nach der Wärmebehandlung werden in den Abbildungen 18—22 gezeigt.

Die Versuche ergaben, dass von den vier Legierungen NS III diejenige ist, bei der die angewandte Vergütung am erfolgreichsten durchgeführt werden kann.

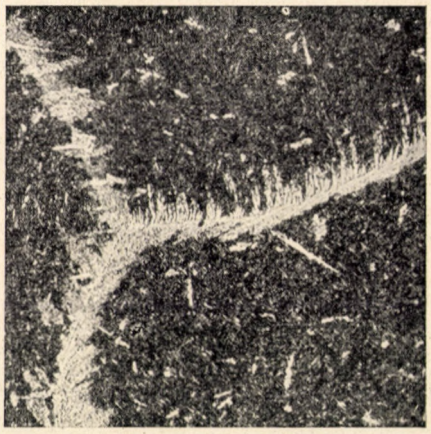


Abb. 18. Legierung Sr M (I) nach 15stündigem Anlassen bei 250° C. Polygonales β, an den Grenzen gröbere, innen sehr feine α-Nadeln. $H_B = 171$. 150 x

Infolgedessen zielten die weiteren Versuche auf die nähere Untersuchung dieser Legierung ab.

Eingehende Untersuchungen über die Vergütung der Legierung NS III

1. *Der erste Teil der Versuche* betraf die Untersuchung des Einflusses der Abschrecktemperatur und der Glühdauer des Abkühlungsverfahrens (Abschrekkens) und der zulässigen Schwankungen in der Legierungszusammensetzung.

a) *Die Versuche über die Abschrecktemperatur und die Glühdauer* bezweckten die Feststellung der günstigsten Abschrecktemperatur und der günstigsten Glühdauer bei dieser Temperatur für die Legierung NS III. Für den gehärteten Zustand wurde ein möglichst homogenes β-Gefüge angestrebt, damit sich die α-Umwandlung bei je niedrigerer Temperatur und daher feinnadelig abspiele. Natürlich ist eine Vorbedingung hierfür, dass das Glühen mit Bestimmtheit im

β-Bereich erfolgt. Eine unnötig hohe Glühtemperatur verursacht jedoch eine überflüssige Vergröberung des Gefüges. Dasselbe bezieht sich auch auf die überflüssig lange Glühdauer. Mit Rücksicht auf diese Gesichtspunkte wurde die

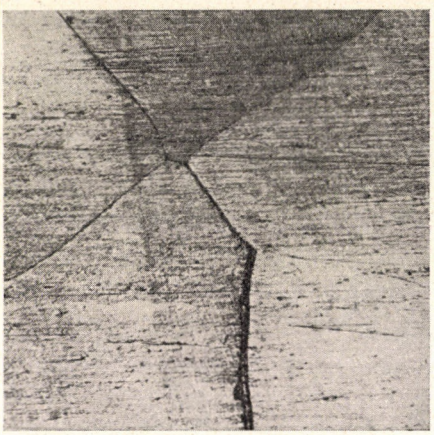


Abb. 19. Legierung Sr MA (II) nach 5stündigem Anlassen bei 250° C. Grosses polygonales β. 150 x



Abb. 20. Legierung NS III (III) in gehärtetem Zustand, polygonales β mit wenig α-Nadeln. 150 x

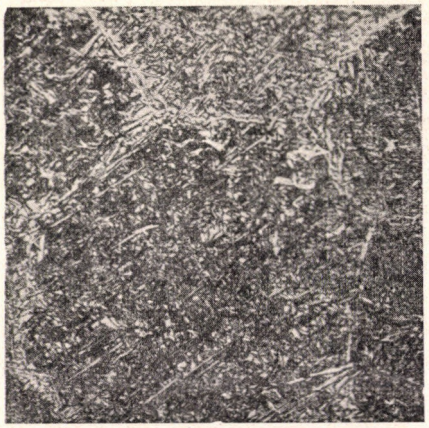


Abb. 21. Legierung NS III (III) nach 10stündigem Anlassen bei 300° C. Polygonales β; an den Grenzen und im Inneren feinnadelige α-Umwandlung. 150 x

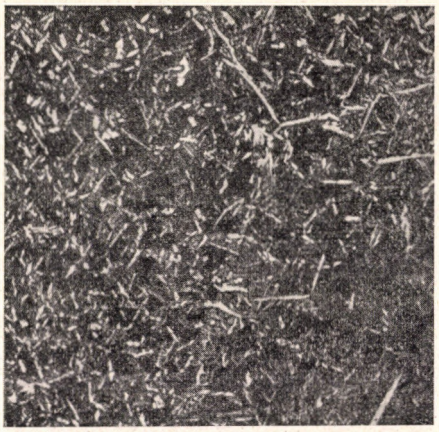


Abb. 22. Legierung NS I (IV) nach 15stündigem Anlassen bei 300° C. Polygonales β, im Inneren feine α-Nadeln. 150 x

Abschrecktemperatur zwischen 710° C und 830° C variiert, um die früher angewandte Temperatur von 830° C verringern zu können. Die Untersuchung erstreckte sich auf die Feststellung der Brinnelhärte und des Gefüges des Ausgangszustandes sowie des gehärteten und des angelassenen Zustandes. Auf

Grund der Ergebnisse wurde als anzuwendende Abschrecktemperatur der Mittelwert der untersuchten Temperaturspanne, nämlich 770° C festgesetzt. Die Glühdauer wurde im Bereich von 15 bis 120 Minuten untersucht und die anzuwendende Glühdauer mit 60 Minuten festgesetzt.

b) *Untersuchung des Abkühlungsverfahrens.* Obwohl zur Fixierung des β-Gefüges eine je schnellere Abkühlung als zweckmässig erschien, wurden demnach ergänzungsweise auch kleinere Abkühlungsgeschwindigkeiten untersucht. Bei konstant gehaltener Abschrecktemperatur (800° C) und Glühdauer (2 Stunden) wurden kaltes Wasser, heisses Wasser und Ölkühlung benutzt und nachher das Anlassen bei konstanter Temperatur (300° C) und bei konstanter Dauer (5 Stunden) durchgeführt. Dann wurden die Streckgrenze, die Zugfestigkeit, die Brinellhärte und die Bruchdehnung gemessen sowie das Gefüge untersucht. Als Vergleichsgrundlage diente der warmverformte Zustand. Die Versuchsergebnisse zeigten, dass die Anwendung von kaltem oder heissem Wasser keinen wesentlichen Unterschied hervorruft und zu einem harten, spröden Werkstoff führt, während bei Ölkühlung ein weniger hartes und weniger sprödes Gefüge entsteht. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Abkühlung in kaltem Wasser am zweckmässigsten ist, wenn man die Umwandlung vorwiegend bei niedriger Temperatur (beim Anlassen) durchführen will.

c) *Einfluss der Zusammensetzung.* Diese Versuche erstreckten sich nicht auf eine systematische Untersuchung des Einflusses sämtlicher Legierungsbestandteile, sondern beschränkten sich auf einige nicht über den Bereich der Zusammensetzungstoleranzen hinausgehende Versuchslegierungen, bei denen der Kupfer- und Aluminiumgehalt bei konstantem Nickel- und Mangangehalt wechselte. Die aus den Versuchschargen angefertigten je 2 Probestäbe wurden in einem auf 6 mm warmgewalzten Zustand geprüft und nach vollständiger Wärmebehandlung (in angelassenem Zustand) ihre Streckgrenze, Zugfestigkeit, Bruchdehnung und Brinellhärte gemessen. Die Wärmebehandlung bestand in einer raschen Abkühlung in Wasser nach einstündigem Glühen bei 770° C und in einem fünfstündigen Anlassen bei 350° C.

Die Versuchsergebnisse führten zu der Feststellung, dass es vom Gesichtspunkt der Wärmebehandlungsfähigkeit nicht genügt, die Legierung ihrer Zusammensetzung nach ins ($\alpha + \beta$)-Gebiet fallen zu lassen, sondern dass sie womöglich nicht zu nahe an die α- und ($\alpha + \beta$)-Phasenlinie bzw. an die ($\alpha + \beta$)- und β-Phasenlinie zu fallen hat. Wenn man jedoch zwischen den beiden Möglichkeiten zu wählen hat, dann ist eher das zu der α- und ($\alpha + \beta$)-Phasenlinie näher liegende Gebiet das günstigere. (Nach neueren Forschungen hat sich die α- und ($\alpha + \beta$)-Phasenlinie im Schaubild der Zweistofflegierung Kupfer-Zink in der Richtung gegen den α-Bereich zu verschoben).

Um eine sicherere Wärmebehandlungsfähigkeit gewährleisten zu können, muss auch so die Zusammensetzungstoleranz der Legierung NS III (für den Kupfergehalt) ein wenig eingeengt werden, so dass für sie folgende Zusammen-

setzung angezeigt ist: Cu = 52—53,5%, Ni = 4,7—5,3%, Mn = 0,7—1,3%, Al = 0,25—0,3% und Zn = Rest.

2. *Der zweite Teil der Versuche* hatte die eingehende Klärung des Einflusses zum Ziel, den die *Anlasstemperatur*, sowie die vorher durch Versuche ermittelte *Abschrecktemperatur* auf die mechanischen Eigenschaften ausüben. Ferner wurden die bisherigen Versuchsergebnisse für die Legierung NS III mit Hilfe einer grösseren Anzahl von Probestäben überprüft und bestätigt. (Halbbetriebsmässige Versuche im Institut für Metallforschung in Budapest.)

Die Probecharge wies folgende Zusammensetzung auf: Cu = 53,49%, Ni = 4,84%, Mn = 1,06%, Al = 0,23%, Zn = Rest (Cu_y = 59,8%).



Abb. 23. Gegossenes Gefüge der Legierung NS III. Gleichmässiges ($\alpha + \beta$). 75 x

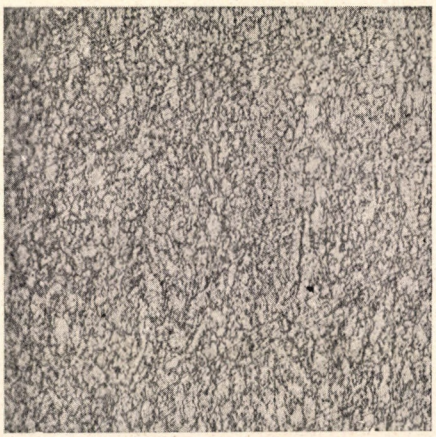


Abb. 24. Legierung NS III, warmgewalzt. Feingebrochenes ($\alpha + \beta$). 150 x

Der gegossene Block hatte einen Querschnitt von 255×55 mm und wog ungefähr 130 kg. Die Ausgangsmaterialien für die Versuche waren aus diesen Blöcken auf 6 mm warmgewalzte Probekörper von 220×30×6 mm. Das gegossene und das warmgewalzte Gefüge sind in Abb. 23 und Abb. 24 ersichtlich.

Jeder Zustand wurde an Hand von 6 Probestäben untersucht. Gegenstand der Untersuchung waren die Streckgrenze, die Zugfestigkeit, die Bruchdehnung und die Brinellhärte sowie das Gefüge.

Die angewandte Wärmebehandlung kann durch folgende Angaben charakterisiert werden:

a) Abschrecktemperatur: 750°, 770° und 800 °C.

b) Glühdauer bei den verschiedenen Abschrecktemperaturen: 1 Stunde.

c) Abkühlungsart: Abschrecken in kaltem Wasser.

d) Anlasstemperatur: 300°, 350°, 400°, 450° und 500° C (letztere nur nach einer Abschrecktemperatur von 770° C). Es ist zu bemerken, dass diese höheren Anlasstemperaturen deshalb gewählt wurden, weil nach den vorangegan-

TABELLE VII

Durchschnittsergebnisse der Vergütungsversuche mit der Legierung NS III

Zustand	$\sigma_{0,2}$		σ		δ		H_B kg/mm²			
	kg/mm²	%	kg/mm²	%	%	Vergleichsweise %	Warmgewalzt	Gehärtet	Angelassen	% bezogen auf den warmgewalzten Zustand
Warmgewalzt	35,1	100	58,3	100	26,5	100	160	—	—	—
Gehärtet bei 750° 1 h	42,3	121	51,3	88	2,2	8	153	187	—	122
« « « 300° 5 h angelassen	47,1	134	66,1	114	9,9	37	154	185,5	187	122
« « « 350° 5 h angelassen	49,3	140	63,6	109	8	30	151	185,5	182	120
« « « 400° 5 h angelassen	47,2	134	65	112	11	41,5	150	184	181	120
« « « 450° 5 h angelassen	42	120	63,2	108,5	17,8	67	149	192	161	108
Gehärtet bei 770° 1 h	44,2	126	55,5	95	3,9	14,7	153	185	—	121
« « « 300° 5 h angelassen	52	148	59,7	102,5	2	8	151	189	210	139
« « « 350° 5 h angelassen	49,2	140	63,5	109	8	30	153	186	194	127
« « « 400° 5 h angleassen	47	134	65,1	112	7,5	28	154	187	191	125
« « « 450° 5 h angelassen	43,4	123	63,2	108,5	15,6	59	149	186	175	117
« « « 500° 5 h angelassen	35,8	102	60,1	103	22,8	86	149	185	173	116
Gehärtet bei 800° 1 h	43,6	124	52,4	90	2,8	11	154	177	—	115
« « « 300° 5 h angelassen	46,2	132	62,9	108	7,6	29	155	185	178	115
« « « 350° 5 h angelassen	48,2	137	64	109,5	7,2	27	149	183	180	121
« « « 400° 5 h angelassen	48,2	137	63,1	108	7,4	28	150	178	182	121
« « « 450° 5 h angelossen	42,2	120	61,2	105	15,8	59,6	149	184	163	109
Gehärtet bei 770° 1 h										
« « « 350° 3 h angelassen	46,3	132	63,6	109	7,5	28	151	187	182	121
« « « 350° 10 h angelassen	46	131	65,6	113	8,2	31	148	186	178	120
« « « 350° 15 h angelassen	46,3	132	65,3	112	7,7	29	149	189	183	123
Gehärtet bei 770° 1 h										
« « « 400° 3 h angelassen	45	128	64,2	111	9	34	150	180	187	125
« « « 400° 10 h angelassen	44,3	126	65,2	112	10	38	152	184	179	118
« « « 400° 15 h angelassen	40,2	115	64,7	111	13,1	49,5	154	181	175	114

genen Erfahrungen Versuche auf dem Gebiet höherer Anlasstemperaturen zweckmässig schienen.

e) Anlassdauer : 3,5, 10 und 15 Stunden.

Die Versuchsreihe betraf — nach Feststellung der Werte für den warmgewalzten Zustand — die Untersuchung des bei 3 verschiedenen Temperaturen abgeschreckten sowie die des 5 Stunden lang auf 4 bzw. 5 verschiedenen Temperaturen angelassenen Werkstoffes. Schliesslich folgte die Untersuchung der bei 770° C abgeschreckten und nachher bei 350° C und 400° C während 3, 10 oder 15 Stunden angelassenen Probestücke. Die Mittelwerte der Versuchsergebnisse sind in Tabelle VII zusammengestellt.

Aus den Versuchen können folgende Schlüsse gezogen werden :



Abb. 25. Bei 800° C gehärtetes NS III. Polygonales β, an den Korngrenzen beginnende α-nadelige Umwandlung. 150 x

a) *Der gehärtete Zustand ist*, im Vergleich zum warmgewalzten Zustand, durch die Erhöhung der Streckgrenze um ungefähr 20—25%, der Brinellhärte um ungefähr 15—20% bei unveränderter Zugfestigkeit und bedeutender Verminderung der Bruchdehnung gekennzeichnet (Tabelle VII). Das Gefügebild zeigt eine reine β-Phase oder in einem polygonalen β-Bett wenige α-Nadeln an den Kristallgrenzen, eventuell auch innerhalb der Kristalle etwas α-Nadeln (Abb. 25).

Im wesentlichen ist der gehärtete Zustand durch grosse Härte und Sprödigkeit gekennzeichnet. Die Ursache dafür liegt teils in dem durch schnelle Abkühlung hervorgerufenen Überwiegen der β-Phase, teils in jener Übersättigung, die eine Folge der verhinderten Umwandlung der körperzentrierten β-Phase von kleinerer Gitterkonstante (2,95 Å) in die flächenzentrierte α-Phase mit grösserer Gitterkonstante (3,7 Å) ist.

b) Der *angelassene Zustand* ist gekennzeichnet durch eine Erhöhung der Streckgrenze um ungefähr 20—40% und der Brinnelhärte um ungefähr 15—40%,

bezogen auf den warmgewalzten Zustand. Zugleich erhöhen sich aber auch die Festigkeit um 8—14% und die Dehnung im Vergleich zum gehärteten Zustand um 10—15% (Tabelle VII).

Beim Anlassen erfolgt die durch das Abschrecken teilweise verhinderte Umwandlung $\beta \rightarrow \alpha$ — in der schon beschriebenen Weise — durch eine geometrische Umwandlung des Atomgitters, wobei aber mangels des Diffusionsvermögens auch eine Gitterverzerrung eintritt, so dass Spannungen entstehen. Die α-Phase ist in Form von feinverteilten Plättchen vorhanden, was im Schliffbild als feinnadeliges Gefüge in Erscheinung tritt (Abb. 27 und 30).

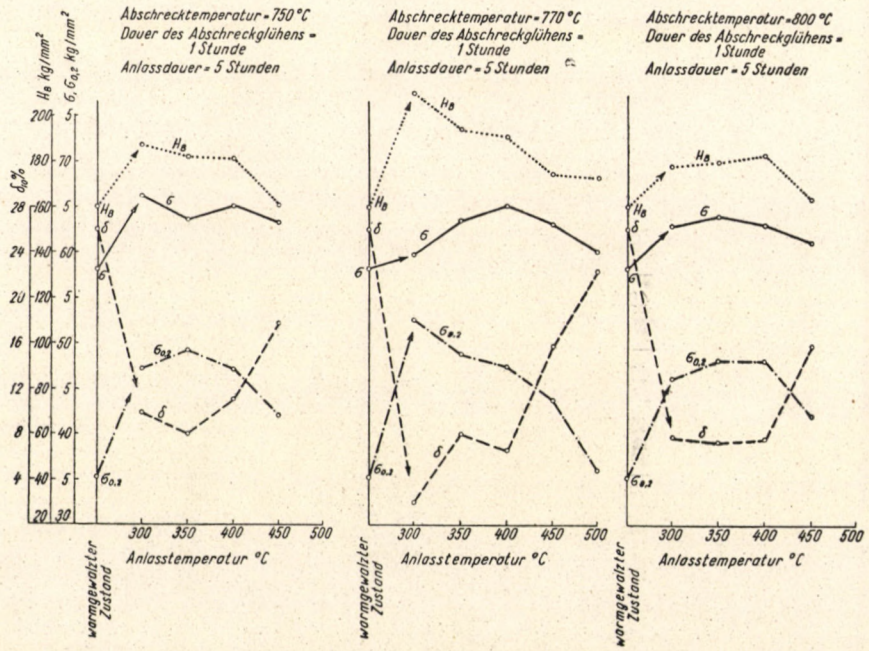


Abb. 26. Mechanische Eigenschaften der Legierung NS III in Abhängigkeit von der Vergütung. (Abhängigkeit von der Anlasstemperatur, bei verschiedenen Abschrecktemperaturen)

Ausser den allgemeinen Feststellungen über den gehärteten und den angelassenen Zustand können in bezug auf die drei wichtigsten Faktoren der Wärmebehandlung, nämlich *Anlasstemperatur*, *Anlassdauer* und *Abschrecktemperatur* die folgenden Bemerkungen gemacht werden:

A. Die systematisch geordneten Ergebnisse der Versuche über die *Anlasstemperatur* gehen aus Tabelle VIII und graphisch dargestellt aus Abb. 26. hervor.

Die untersuchten mechanischen Eigenschaften ändern sich wie folgt:

Die *Streckgrenze* ändert sich nicht wesentlich bei Steigerung der Anlasstemperatur von 300° C bis 400° C (eine Ausnahme bildet die Verringerung des durch Abschrecken bei 770° C und durch Anlassen bei 300° C erzielten höheren

TABELLE VIII

Mechanische Eigenschaften der Legierung NS III in Abhängigkeit von der Anlasstemperatur bei verschiedenen Abschrecktemperaturen, bei 5 Stunden Anlassdauer und 1 Stunde Glühen auf Abschrecktemperatur

Zustand		$\sigma_{0,2}$ kg/mm²	σ kg/mm²	δ %	H_B kg/mm²	Gefüge
Warmgewalzt		35,1	58,3	26,5	160	Feingebrochenes $\alpha+\beta$ (Abb. 24.)
Abschreckglühen bei 750° C 1 Stunde	300°	47,1	66,1	9,9	187	In β-Einbettung feine α-Nadeln
	350°	49,3	63,6	8	182	In β-Einbettung feine α-Nadeln
	400°	47,2	65	11	181	Längere zahlreichere α-Nadeln
	450°	42	63,2	17,8	161	mehr α-Nadeln
Abschreckglühen bei 770° C 1 Stunde	300°	52	59,7	2	210	ausserordentlich feine α-Nadeln (Abb. 27.)
	350[1]	49,2	63,5	8	194	ausserordentlich feine α-Nadeln (Abb. 27.)
	400°	47	65,9	7,5	191	etwas grössere α-Nadeln
	450°	43,4	63,2	15,6	175	längere, dickere, zahlreichere α-Nadeln (Abb. 28.)
	500°	35,8	60,1	22,8	173	mehr α, zum Teil schon nicht nadelig (Abb. 29.)
Abschreckglühen bei 800° C 1 Stunde	300°	46,2	62,9	7,6	178	Lange dünne α-Nadeln
	350°	48,2	64	7,2	180	zahlreiche, manchmal dickere α-Nadeln
	400°	48,2	63,1	7,4	182	zahlreiche, manchmal dickere α-Nadeln
	450°	42,2	61,2	15,8	163	sehr viele, manchmal dickere α-Nadeln

Wertes). Von 450° C angefangen sinkt jedoch die Streckgrenze regelmässig und erreicht bei 500° C das Ausgangsniveau.

In der *Zugfestigkeit* zeigt sich keine wesentliche Änderung zwischen 300° C und 450° C (nach dem Abschrecken bei 770° C erscheint ein kleines Maximum). Bei 500° C fällt die Zugfestigkeit auf das Ausgangsniveau zurück. Die *Brinellhärte* zeigt zwischen 300°—400° C keine wesentliche Änderung (nach dem Abschrecken bei 770° C zeigt sich bei 300° C ein Maximum), von 450° C angefan-

gen nähert sie sich dem Ausgangswert. Die *Bruchdehnung* nimmt verglichen mit der des gehärteten Zustandes mit der Anlasstemperatur zu. Der Dehnungswert von 8—10% ändert sich jedoch kaum zwischen 300° und 400° C (nach dem Abschrecken bei 770° C befindet sich bei 300° C ein Minimum). Nach Anlassen bei 450° C tritt jedoch eine wesentliche Erhöhung des Wertes ein und bei 500° C wird der Ausgangswert fast erreicht.

Wenn parallel zu der Änderung der mechanischen Eigenschaften auch das Gefügebild beobachtet wird (Abb. 27—32), so ergibt sich, dass das Gefüge nach Anlassen bei 300° C weniger, aber dünnere und feinere α-Nadeln enthält und dass es sich bei Erhöhung der Anlasstemperatur allmählich vergröbert. Einer-

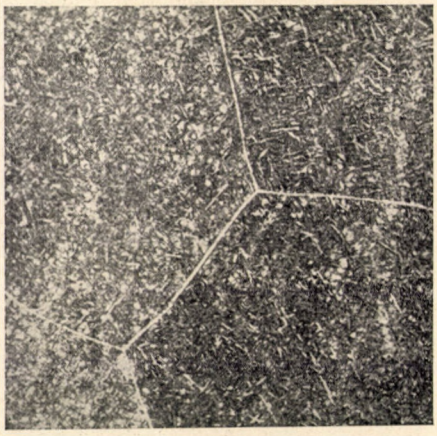


Abb. 27. Nach dem Abschrecken bei 770° C, 5 Stunden lang bei 300 °C angelassen. Ausserordentlich feine α-Nadeln in β-Einbettung. 150 x

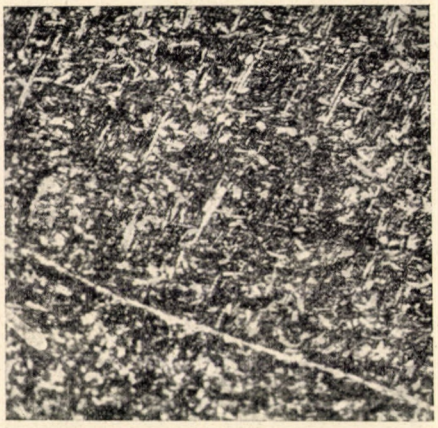


Abb. 28. Nach dem Abschrecken bei 770° C, 5 Stunden lang bei 450° C angelassen. Längere, dickere, zahlreichere α-Nadeln. 150 x

seits nimmt die Menge der α-Nadeln zu und anderseits werden die Nadeln länger und dicker. Die mengenmässige Zunahme der α-Nadeln mit der Temperatur ist durch die im vertikalen Schnitt des Cu-Ni-Zn-Gleichgewichtsdiagrammes sichtbare Krümmung der α- und $(\alpha+\beta)$-Phasenlinie begründet. Die Vermehrung der zäheren und bildsameren α-Phase verursacht die Erhöhung der Bruchdehnung, wobei der Werkstoff bei unbedeutender Änderung der Festigkeit zäher wird. Dies erklärt zugleich die Abnahme der für die Härte kennzeichnenden Werte (Brinellhärte, Streckgrenze).

Eine derartige Veränderung der Kennwerte beim Anlassen bei 450° C und insbesondere bei 500° C wird wirkungsvoll unterstützt von der Erhöhung des Diffusionsvermögens bei steigender Temperatur, die zur Auflösung der von der Gitterverzerrung herrührenden Spannungen mit beiträgt. Das Gefüge nach dem Anlassen bei 500° C zeigt auch grosse, weisse, nichtnadelige α-Inseln, und mit fortschreitender Entfestigung beginnt sich das nadelige Gefüge langsam

umzuwandeln. Im Gefüge des nach Kaltverformung bei 500 ° C geglühten Werkstoffes zeigen sich demgegenüber stärkere Veränderungen. Von vergütbaren Aluminiumlegierungen ist bekannt, dass der vergütete Werkstoff im Vergleich

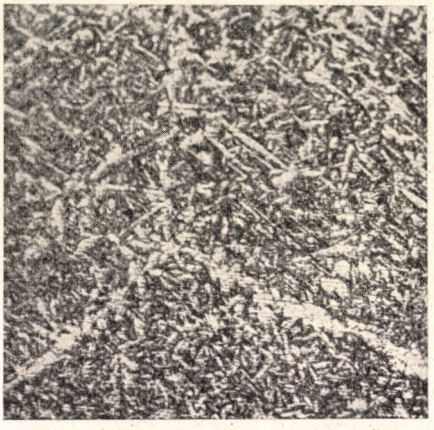


Abb. 29. Nach dem Abschrecken bei 770° C 5 Stunden lang bei 500° C angelassen. In der β-Einbettung noch zahlreicheres, zum Teil schon nicht mehr nadeliges α-Gefüge. 150 x

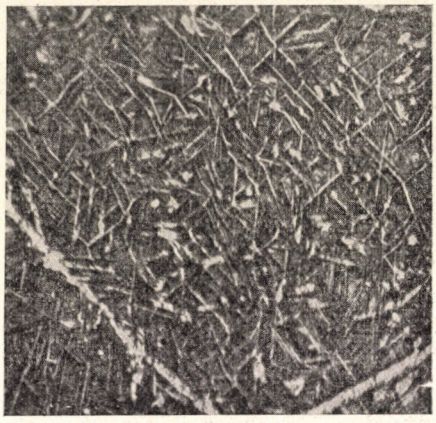


Abb. 30. Dasselbe wie in Abb. 27, jedoch 600 x

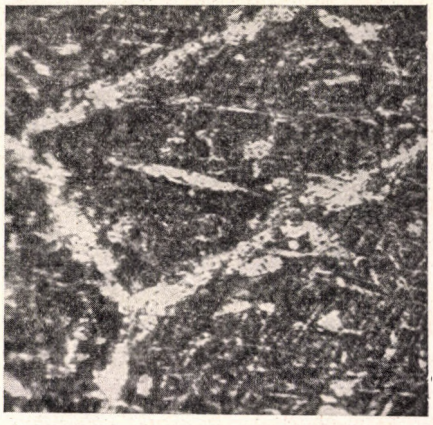


Abb. 31. Dasselbe wie in Abb. 28, jedoch 600 x

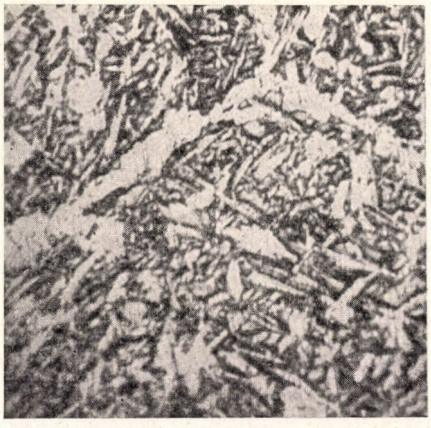


Abb. 32. Dasselbe wie in Abb. 29, jedoch 600 x

zum kaltverformten bei höherer Temperatur weicher wird. Es scheint, dass auch bei der Legierung NS III ein ähnlicher Fall vorliegt.

B. Die systematisch geordneten Ergebnisse der auf die *Anlassdauer* bezüglichen Untersuchungen sind in Tabelle IX zusammengefasst und in Abb. 33 graphisch dargestellt.

TABELLE IX

Mechanische Eigenschaften der Legierung NS III in Abhängigkeit von der Anlassdauer, bei verschiedenen Anlasstemperaturen und bei 1 Stunde Abschreckglühen bei 770° C

Zustand		$\sigma_{0,2}$ kg/mm²	σ kg/mm²	δ %	H_B kg/mm²	Gefüge
Warmgewalzt		35,1	58,3	26,5	160	Feingebrochenes $\alpha+\beta$ (Abb. 24)
Abschreckglühen bei 770° C 1 Stunde und *Anlassen* bei 350°	3 Stunden	46,3	63,6	7,5	182	Ausserordentlich feine α-Nadeln
	5 Stunden	49,2	63,5	8	194	Ausserordentlich feine α-Nadeln
	10 Stunden	46	65,6	8,2	178	zahlreichere und längere α-Nadeln
	15 Stunden	46,3	65,3	7,7	183	längere, dickere α-Nadeln
Abschreckglühen bei 770° 1 Stunde und *Anlassen* bei 400°	3 Stunden	45	64,2	9	187	Feine α-Nadeln
	5 Stunden	47	65,1	7,5	191	etwas grössere α-Nadeln
	10 Stunden	44,3	65,2	10	179	zahlreiche, dickere α-Nadeln
	15 Stunden	40,2	64,7	13,1	175	zahlreiche, lange α-Nadeln

Die Versuchsergebnisse weisen bei keinem der untersuchten mechanischen Kennwerte eine wesentliche Abhängigkeit von der Anlasszeit auf. Die Untersuchung des Gefüges zeigt ein ähnliches Bild wie das des Gefüges in Abhängigkeit von der Anlasstemperatur. Mit Verlängerung der Anlassdauer nehmen auch der Anteil der α-Phase und die Dimensionen der Nadeln zu.

C. Die systematisch geordneten Ergebnisse der die *Abschrecktemperatur* betreffenden Untersuchungen sind aus Tabelle X und den Abb. 34 und 35 ersichtlich.

Ein Vergleich der Werte zeigt, dass die verschiedenen Abschrecktemperaturen im allgemeinen keine wesentliche Veränderung der untersuchten Eigenschaften verursachen. (Die Werte nach dem Abschrecken bei 770° C und dem Anlassen bei 300° C bilden hiervon eine gewisse Ausnahme.)

3. *Ergebnisse der eingehenden Untersuchungen der Legierung NS III.* Die Ergebnisse der eingehenden Untersuchungen der Legierung NS III vom Standpunkt des Vergütungsverfahrens können kurz wie folgt zusammengefasst werden :

I. Die Ergebnisse der früheren Versuche und die daraus gezogenen Schlussfolgerungen wurden durch die mit einer grösseren Anzahl von Probestäben durchgeführten Untersuchungen bestätigt.

II. Der Bereich der Vergütung hatte sich vergrössert, da sich *der untersuchte Werkstoff nach Abschrecken bei 750°—800° C durch Anlassen bei 300°—450° C als warmbehandelbar erwies.*

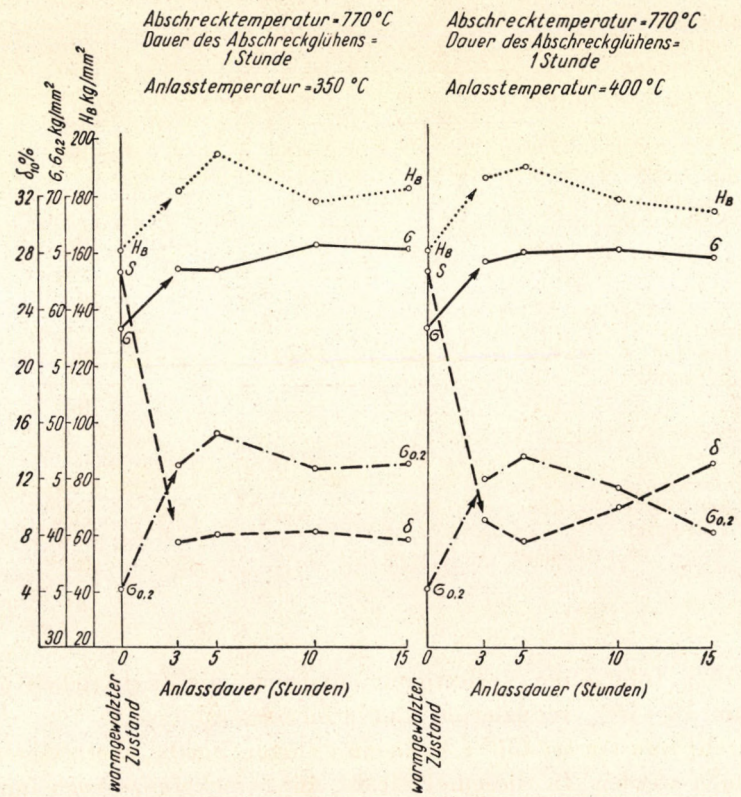


Abb. 33. Mechanische Eigenschaften der Legierung NS III in Abhängigkeit von der Vergütung (Veränderung in Abhängigkeit von der Anlasszeit, nach Abschrecken bei 770° C und Anlassen bei 350° und 400° C)

III. Durch *Untersuchung der wichtigsten Faktoren der Wärmebehandlung* konnte gezeigt werden, dass

1. am entscheidendsten *der Einfluss der Anlasstemperatur* ist. Hier sind zwei Bereiche zu unterscheiden:

a) Durch *Anlassen bei 300°—400° C* wird der Werkstoff härter. Die Streckgrenze ist um 30—40%, die Zugfestigkeit um 8—10%, die Brinellhärte um 15—40% grösser als beim warmgewalzten Material; die Bruchdehnung

TABELLE X

Mechanische Eigenschaften der Legierung NS III in Abhängigkeit von der Abschrecktemperatur bei verschiedenen Anlasstemperaturen, bei 5 Stunden Anlassdauer und 1 Stunde Abschreckglühen

Zustand		$\sigma_{0,2}$ kg/mm²	σ kg/mm²	%	H_B kg/mm²
Warmgewalzt		35,1	58,3	26,5	160
Anlassen bei 300° C 5 Stunden	750°	47,1	66,1	9,9	187
	770°	52	59,7	2	210
	800°	46,2	62,9	7,6	178
Anlassen bei 350° C 5 Stunden	750°	49,3	63,6	8	182
	770°	49,2	63,5	8	194
	800°	48,2	64	7,2	180
Anlassen bei 400° C 5 Stunden	750°	47,2	65	11	181
	770°	47	65,1	7,5	191
	800°	48,2	63,1	7,4	182
Anlassen bei 450° C 5 Stunden	750°	42	63,2	17,8	161
	770°	43,4	63,2	15,6	175
	800°	42,2	61,2	15,8	163

beträgt 7—10%. Infolge der Verfestigung entspricht die Zugfestigkeit ungefähr der eines um 12—16% reduzierten kaltverformten Materials.

b) Durch *Anlassen bei 450° C* kann ein weniger harter, aber zäherer Werkstoff gewonnen werden. In diesem Falle ist die Streckgrenze noch immer um 20%, die Festigkeit um 5—8% grösser als im warmgewalzten Zustand, während die Bruchdehnung wesentlich günstiger ist (ungefähr 16—18%).

2. Der Einfluss der *Anlassdauer* kann für die untersuchten Zeitspannen von 3—15 Stunden als gering bezeichnet werden. Eine Zeitdauer von 5 Stunden ist völlig entsprechend.

3. Der *geeignete Abschrecktemperaturbereich* liegt zwischen 750° und 800° C. Hier kann der erwünschte, überwiegend β-Phase enthaltende gehärtete Zustand erzielt werden. Die *Dauer des Abschreckglühens* beträgt 1 Stunde.

Die zweckmässigste Abkühlungsart ist das Abschrecken in kaltem Wasser.

IV. Die Untersuchung des *Einflusses der Zusammensetzung auf die Wärmebehandlungsfähigkeit* zeigt, dass es empfehlenswert ist, die üblichen Toleranzen

für den Cu-Gehalt etwas einzuengen. Diese Bedingung kann im allgemeinen in der Praxis verwirklicht werden.

V. Die untersuchten *Gefügebilder* bestätigten die obigen Feststellungen im allgemeinen eindeutig.

Schliesslich kann auf Grund sämtlicher Vergütungsversuche festgestellt werden, dass sich bei den knetbaren ($\alpha + \beta$)-Sondermessingen, besonders bei

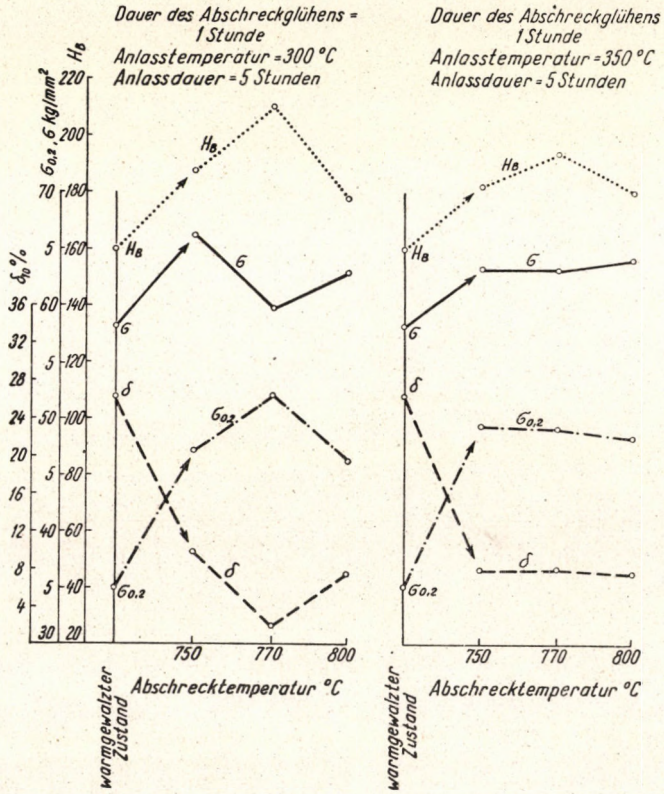


Abb. 34. Mechanische Eigenschaften der Legierung NS III in Abhängigkeit von der Vergütung (Veränderung in Abhängigkeit von der Abschrecktemperatur bei 5stündigem Anlassen bei 300° bzw. bei 350° C).

bestimmten Legierungen (z. B. NS III) eine auf der $\beta \rightarrow \alpha$-Umwandlung beruhende erfolgreiche Wärmebehandlung durchführen lässt, wenn die Legierungen ihrer Zusammensetzung nach den α- und ($\alpha + \beta$)- bzw. ($\alpha + \beta$)- und β-Phasenlinien des Zustandsschaubildes nicht zu nahe liegen. Die Wärmebehandlung verursacht eine Gefügeänderung und dadurch eine Veränderung der wichtigeren mechanischen Eigenschaften.

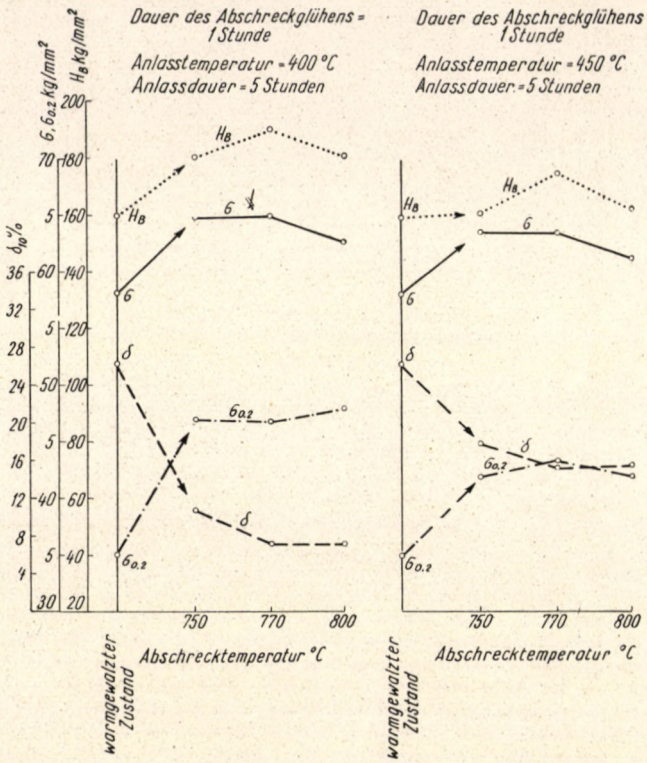


Abb 35. Mechanische Eigenschaften der Legierung NS III in Abhängigkeit von der Vergütung (Veränderung in Abhängigkeit von der Abschrecktemperatur bei 5stündigem Anlassen bei 400° bzw. 450° C)

SCHRIFTTUM

1. a. M. Guillet : Revue de Métallurgie **2** (1905), S. 97 und **3** (1906) S. 243.
   b. I. Capuljev : Leçons sur les alliages métalliques. Paris, 1909. S. 295—313.
2. O. Bauer und M. Hansen : Der Einfluss von dritten Metallen auf die Konstitution der Messinglegierungen : II. Der Einfluss von Nickel. Z. f. Metallkunde **21** (1929) S. 357—67, 406—11. IV. Der Einfluss von Aluminium. Z. für Metallkunde **24** (1932) S. 1—6, 73—76, 104—106. V. Der Einfluss von Mangan. Z. f. Metallkunde **25** (1933) S. 17—22.
3. Werkstoffhandbuch Nichteisenmetalle. VDI-Verlag, Berlin, 1938, 1940.
4. Metals Handbook 1948. American Society for Metals.
5. H. Hanemann u. O. Schröder : Z. f. Metallkunde **23** (1931) S. 269—73, 297—300.
6. M. Straumanis u. J. Weerts : Z. Physik. **78** (1932) S. 1—16.
7. J. Weerts : Z. f. Metallkunde **24** (1932) S. 265—70.
8. M. Hansen : Z. f. Metallkunde **22** (1930) S. 149—54.
9. G. Sachs : Praktische Metallkunde III. 1935 S. 134—36.
10. G. Sachs : Z. f. Metallkunde **24** (1932) S. 241—48.
11. Wilkins : Copper and Copper Base Alloys, 1943.
12. A. Schimmel : Metallographie der technischen Kupferlegierungen. Berlin 1930, Verl. J. Springer. S. 83.
13. G. Kurdjumov u. G. Sachs : Z. Physik **64** (1930) S. 350—76.

Weiteres benutztes Schrifttum :

J. Verő, Metallográfia, Sopron 1942. Általános Metallográfia (Allgemeine Metallographie I.) Akadémiai kiadó, Budapest 1952. Vas- és fémipari anyagvizsgálat (Werkstoffprüfung in der Eisen- und Metallindustrie. Nur ungar.) Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.
A. Geleji: A színes fémek félgyártmányainak technológiája (Technologie der Buntmetall-Halbfabrikate. Nur ungar.) Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.
A. A. Бочвар: Металловедение, Москва 1945.
E. A. Чудаков: Машиностроение, энциклопедический справочник. 4. Москва 1947.
G. A. Kastschenko: Metallográfia alapjai (Grundlagen der Metallographie. Übers. aus d. Russ. ins Ungar.). Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.
N. A. Schaposchnikow: Fémek mechanikai vizsgálata (Mechanische Untersuchung der Metalle. Übers. aus d. Russ. ins Ungar.). Nehézipari könyvkiadó, Budapest, 1952.
G. Masing: Lehrbuch der allgemeinen Metallkunde. Verl. J. Springer, Berlin, 1950.
A. Smekal: Z. f. Metallkunde **24** (1932) S. 121—26.
O. W. Ellis: Z. f. Metallkunde **22** (1930) S. 33.
F. Ostermann: Z. f. Metallkunde **26** (1934) S. 40—44.
E. Gregory: Non Ferrous Metals and Alloys, London 1947, P. Elek.
E. Bella: Színes- és könnyűfémek hőkezelése (Wärmebehandlung der Bunt- und Leichtmetalle. Nur ungar.). Nehézipari kiadó, Budapest, 1952.

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Abhandlung untersucht die Veränderung einiger wichtigerer mechanischer Eigenschaften (Zugfestigkeit, Streckgrenze, Brinellhärte und Bruchdehnung) auf dem Gebiet der knetbaren ($\alpha + \beta$)-Sondermessinge in Abhängigkeit von der Wärmebehandlung. Die Versuche betreffen Messinglegierungen von 54—62% Cu-Gehalt mit Zusatz von Mangan, Nickel und Aluminium und wollen die Verhältnisse bei vier ausgewählten Legierungen klarstellen. Der erste Teil der Abhandlung behandelt die Veränderungen der mechanischen Eigenschaften der vier Legierungen durch Kaltverformung und Weichglühen. Zugleich mit der Konstruktion der Verfestigungs- und Entfestigungskurven werden auch die günstigsten Weichglühtemperaturen festgestellt. Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Frage, mit welchem Erfolg die auf der $\beta \rightarrow \alpha$-Umwandlung der Zweistoffmessinge beruhende Vergütung auf dem hier untersuchten Gebiet der Mehrstoffmessinge angewandt werden kann. Auf Grund der Versuche wird festgestellt, dass sich bei einzelnen Legierungen (z. B. bei der Legierung NS III) unter gewissen Umständen eine erfolgreiche Wärmebehandlung durchführen lässt, die eine Veränderung des Gefüges und der mechanischen Eigenschaften zur Folge hat.

ИССЛЕДОВАНИЯ ВАЖНЕЙШИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПЛАСТИЧНЫХ ЛАТУНЕЙ $\alpha+\beta$ В ФУНКЦИИ ТЕРМООБРАБОТКИ

Канд. техн. наук Э. БЕЛЛА

РЕЗЮМЕ

Исследуются изменения некоторых важнейших механических свойств (твердости по Бринеллю, сопротивления на разрыв, растяжения и т. д.) в области многокомпонентных пластичных латуней $\alpha+\beta$ в зависимости от термообработки. Эксперименты проводились с использованием латуней с содержанием 54—62% меди, легированных марганцем, никелем и алюминием и посвящены исследованию соотношений четырех выбранных сплавов. В первой части работы рассматриваются изменения механических свойств, происшедшие в этих четырех сплавах под воздействием холодной обработки и отпуска отжигом. Наряду со снятием кривых твердения и отпуска устанавливаются наиболее благоприятные температуры отпуска. Вторая часть статьи посвещена вопросу изучения возможности применения облагораживающей термообработки двухкомпонентных латуней, основывающейся на преобразовании $\beta \rightarrow \alpha$ в области исследованных многокомпонентных латуней. На основе проведенных опытов можно установить, что отдельные сплавы (например, сплав NS III) при определенных условиях можно подвергнуть такой термообработке, которая может дать изменение структуры и механических свойств.

EXAMINATION OF THE MORE IMPORTANT MECHANICAL PROPERTIES OF SPECIAL DUCTILE ($\alpha + \beta$) BRASSES AS A FUNCTION OF HEAT TREATMENT

E. BELLA, Cand. of Techn. Sc.

SUMMARY

The author investigates in the domain of ductile, complex ($\alpha + \beta$) brasses the change of some more important mechanical properties (tensile strength, yield point, Brinell hardness and elongation) depending on heat treatment. The experiments investigated brasses containing 54—62% copper and additions of manganese, nickel and aluminium, and dealt with four selected alloys of this type. The first part of the paper describes changes in the mechanical properties of these four alloys due to cold working and annealing. After tracing curves of strength increase and strength decrease, the most favourable annealing temperature is determined. The second part of the paper concerns the question, whether heat treatment of binary brasses based on the $\beta \rightarrow \alpha$ transformation may be successfully applied to that domain of complex brasses which has been investigated. The experiments prove that with certain alloys and under certain conditions, successful heat treatment is possible, which causes changes of structure and of mechanical characteristics.

LES PROPRIÉTÉS PRINCIPALES MÉCANIQUES DES LAITONS $\alpha + \beta$ MALLÉABLES SPÉCIAUX EN FONCTION DU TRAITEMENT THERMIQUE

E. BELLA, Candidat des Sciences Techniques

RÉSUMÉ

L'auteur examine quelques propriétés mécaniques importantes (résistance à la traction, limite élastique, dureté Brinell et allongement) des laitons $\alpha + \beta$ spéciaux malléables à plusieurs constituants, en fonction du traitement thermique. Les essais ont eu pour but l'examen de laitons à 54—62% de cuivre avec additions de manganèse, de nickel et d'aluminium et concernaient plus spécialement les propriétés de quatre alliages choisis. Dans la première partie de son travail, l'auteur étudie les changements des propriétés mécaniques des quatre alliages par suite de l'écrouissement et du recuit. Il trace les courbes de diminution et d'augmentation de la malléabilité et détermine aussi la température de recuit la plus favorable. Dans la deuxième partie du travail, l'auteur pose la question avec quel résultat peut être appliqué le traitement thermique des laitons binaires basé sur la transformation $\beta \rightarrow \alpha$ aux alliages à plusieurs constituants qui ont été examinés. Les essais permettent de constater que certains alliages (par exemple NS III), dans certaines conditions, peuvent être soumis avec succès à un traitement qui modifie la structure et les propriétés mécaniques.

ON RAM JET PROPULSION

A. FONÓ

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received 24th March, 1955]

The engine of propeller aircraft has to develop, besides the ideal propulsive force, also the work required to cover losses. According to experience the efficiency of the airscrew has sunk the deeper, the nearer the cruising speed of the aircraft has approached sonic speed. Therefore it was a great surprise when British Colonel Whittle flew in the 1930-ies the first jet-propelled aircraft that could theoretically attain supersonic speed.

From the following paper of Dr. A. Fonó we learn that he took out in 1928 two German patents for jet-propulsion of flying bodies. The basic patent covering a simple tube, without any moving parts, is only fit for the propulsion of missiles flying at speeds above 2000 km/hour, for instance. However, an additional patent, annexed to the former, secures Dr. Fonó's priority rights for the jet propulsion in very wide use nowadays, including, in addition to the ram jet covered by the basic patent an inserted compressor with its drive as well.

In present jet-aircraft the exhaust gases of the gas turbine, discharged at high velocity, supply the propulsive thrust in the form of reaction. In high-speed aircraft Dr. Fonó uses for compression the kinetic energy of the air streaming into the intake of the tube, whereby the separate compressor has become superfluous and there is no need for a driving engine.

The patents of Dr. Fonó unquestionably show that he was the first to suggest jet-propulsion for aeroplanes and missiles. His priority rights are beyond doubt proved by the German patents. Therefore *Dr. Albert Fonó is the inventor of jet-propulsion.*

It might be remarked that the additional patent of Dr. A. Fonó, covering the jet-propulsion aircraft used in great extension nowadays, represents piston and rotary blade engine for compressor drive while the present turbo-jets use gas turbines. Such remark is not justified, however, for it is indifferent, whether the compressor is piston or rotary blade-engined or turbine driven.

Dr. A. Fonó thus lines up with the great Hungarian inventors — Donát Bánki, Otto Titusz Bláthy, Loránd Eötvös, Kálmán Kandó, Ányos Jedlik etc. — whom we may proudly quote, when we wish to prove the high level of Hungarian technical culture.

Prof. *E. Schimanek* D. Eng. Sc. †

The January, 1955 number of the Journal of the British Institution of Mechanical Engineers «The Chartered Mechanical Engineer» publishes the diagrammatic section (Fig. 1) of the up-to-date missile drive, of the «Ram Jet» that flies at supersonic speed and has no moving part.

It appears of common interest to publish in this context the essentially identical proposal made by the author 40 years ago, during World War I, on February 10, 1915, to the Austro-Hungarian Army Headquarters (A. O. K.). The diagrammatic section of the «air torpedo» copied from the proposal is presented in Fig. 2. The suggestion was rejected at that time ; its short abstract is as follows :

The increase of the range of guns is limited by air resistance rapidly growing with initial velocity. A substantial increase of range, beyond values already attained, by boosting the initial velocity is not probable. The projectile fired from the gun stores energy for overcoming resistances in the form of kinetic energy acquired by its mass accelerated to initial velocity. A greater range requires higher initial velocity. At higher speed substantially higher resistance has to be overcome. According to the proposal the energy needed for the propulsion of the projectile is not stored in the form of kinetic energy but in energy chemically bound in the fuel. The fuel on its way is burnt with air

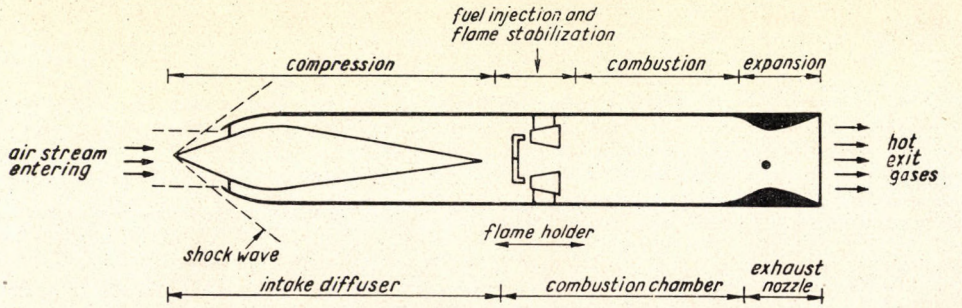
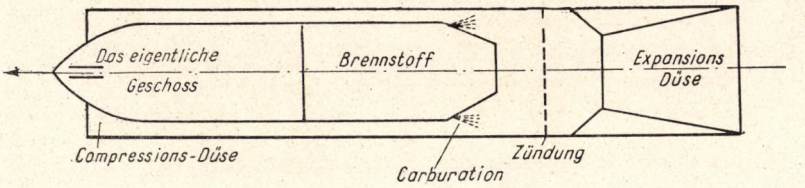


Fig. 1. The Chartered Mechanical Engineer (Journal of the Institution of Mechanical Engineers), January, 1955 publishes the diagrammatic section of the «Ram Jet» power plant of modern supersonic bombers having no mechanical moving parts



Das eigentliche Geschoss = Missile proper Brennstoff = Fuel Expansions-Düse = Expansion nozzle

Compressions-Düse = Compression nozzle Zündung = Ignition

Carburation = Carburation

Fig. 2. Diagram of the «air torpedo» of the proposal of Dr. A. Fonó, submitted to the Austro-Hungarian Army H. Q. on February 10, 1915, during World War I. The proposal was rejected

streaming opposite, and the heat developed is converted to work that overcomes drag. Herewith not only resistances can be overcome but also acceleration during flight is possible, so that the gravity component along the trajectory can also be balanced. The device is thus suitable for long-range firing at low muzzle velocities, and heavy projectiles can be fired from guns of small weight.

The device works so that the heat developed by fuel combustion increases the temperature of the air streaming opposite and thus augments its volume. With proper choice of cross sectional areas the air of increased volume is dis-

charged at higher velocity than the velocity of intake. The difference between intake and exit velocities produces the thrust. Since heat can be with good efficiency converted to mechanical work by introducing it at high pressure and by keeping the final expansion pressure comparatively low, therefore the compression nozzle converts the velocity of entry of the air to as high pressure as possible, and heat introduction is effected by combustion of liquid fuel at this pressure. The pressure of the air heated up is then converted to velocity in the diverging exhaust nozzle from which the air is discharged at increased speed.

To the proposal was annexed a theoretical calculation the results of which are graphed in Fig. 3.

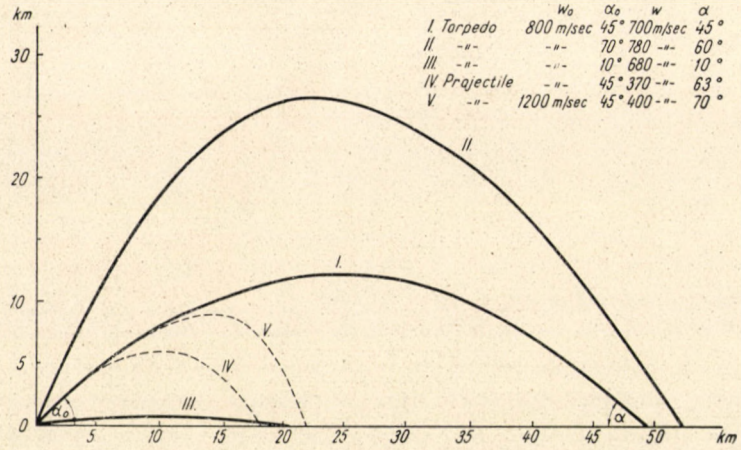


Fig. 3

The Army H. Q. did not accept the proposal. Under this impression the author did not deal with the case for many years afterwards and later elaborated the principle for aircraft propulsion and applied for a patent for the «air-jet engine» in May 1928. The German patent was granted with the former priority date in June 1932. According to the patent specification the engine is suitable for high-altitude supersonic aircraft.

In July 1928 application was made for an additional patent for the power-plant of an aircraft the speed of which is less than that referred to by the basic patent. The principle of this was the insertion of an air compressor that boosts the pressure of air entering through the compression nozzle ; air of high pressure thus produced, used for burning liquid fuel, expands in the engine, exerting as much work as necessary for air compression, so that it enters the expansion nozzle still at high pressure and temperature and is discharged in the rear of the aircraft developing reaction thrust.

This additional patent covers the principle of turbo-jet aircraft in ever growing extension nowadays.

Engines working on the ram jet principle of the original patent are for the time being developed for war purposes only. The following will be expounded thereon :

The air-jet engine consists of an air compression tube aligned in the direction of flight, of an adjoining space in line, where heat is introduced to the compressed air and of an expansion nozzle continuing similarly in line with the former, in which the combustion products, expanding to ambient pressure from the pressure attained at the end of the compression tube, and from the

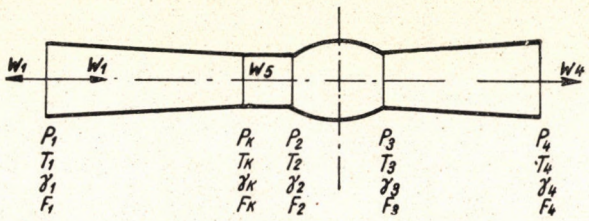


Fig. 4

temperature raised by the introduction of heat, acquire high velocity and by their reaction develop propulsive thrust.

Since the aeroplane dealt with is necessarily high-ceiling aircraft, and since at altitudes more than 10 km above the surface the temperature is constant, about — 50° C, and accordingly the ratio of pressure to density is also constant, relationships are investigated for altitudes above 10 km. Start is made from the following relationships :

$$H - 10 = 15{,}05 \log \frac{2455}{p} \tag{1}$$

$$\frac{p_1}{\gamma_1} = \frac{p_{10}}{\gamma_{10}} = \mathrm{RT}_{10} \tag{2}$$

At 10 km altitude :

$p_{10} = 2455$ kg/m^2

$\gamma_{10} = 0{,}29 \cdot 1{,}293$ kg/m^3

where :

H is the altitude in km

p pressure in kg/m^2

γ sp. gr. in kg/m^3

$T_{10} = 223$ K°

In the following the aircraft will be investigated in steady-state, that is, in a state when the work performed just keeps up stagnant speed. Considering that the ratio of drag to weight of the plane is at horizontal cruising speed characterized by a definite number, and the weight, with negligence of the decrease of the weight of fuel, is supposed to be constant, the drag is also constant and equal to that developed near the surface at lower speed.

The drag is proportional to the square of the speed and to the density of the medium, that is :

$$P = \varphi \frac{w_1^2}{2_g} \gamma_1 = \varphi \frac{w_0^2}{2_g} \gamma_0 \tag{3}$$

$$w_1^2 = w_0^2 \frac{\gamma_0}{\gamma_1} = w_0^2 \frac{\gamma_0}{\gamma_{10}} \frac{P_{10}}{P_1} .$$

From (1) and (2)

$$w_1^2 = w_0^2 \frac{10^{\frac{H-10}{15,05}}}{0,29}, \tag{4}$$

where

P is the drag
φ the frontal area on which drag force acts
w_o near surface speed
w_1 actual speed

Since air pressure is defined by altitude and therefore the unaccelerated speed of a given aircraft is also defined for any service ceiling, this speed depends, besides altitude, only on the speed at which the aircraft would fly in steady-state near the surface.

The power required for aircraft propulsion is at constant drag proportional to speed. Fuel consumption therefore, disregarding thermic efficiency, also increases in proportion to speed, that is, it is invariable relative to the route flown.

In the analysis of characteristics of the aircraft under examination, efficiency is considered first. The overall efficiency is made up of the product of aerodynamic and thermodynamic efficiencies.

The aerodynamic propulsive efficiency is less than unity by the ratio of work lost in exhaust gases, in the form of kinetic energy, to the total work introduced. The mass of combustion products may be taken with very good approximation equal to the air mass, considering the high proportion of surplus air dealt with here.

The relative exit velocity of gas is w_4 ; the absolute exit velocity $(w_4 - w_1)$

$$\eta_{ae} = 1 - \frac{(w_4 - w_1)^2}{w_4^2 - w_1^2} = \frac{2\,w_1}{w_4 + w_1} \tag{5}$$

The thrust overcoming drag is proportional to $(w_4 - w_1)$.

$$P = \frac{F_1 \gamma_1 w_1}{g}(w_4 - w_1).$$

where F_1 is the air intake area

From (3) :

$$P = \varphi \frac{w_1^2}{2g}\gamma_1,$$

$$w_4 - w_1 = \frac{\varphi}{F_1}\frac{w_1}{2}$$

$$w_4 + w_1 = 2\,w_1\left(\frac{\varphi}{4\,F_1} + 1\right)$$

$$\eta_{ae} = \frac{1}{\dfrac{\varphi}{4\,F_1} + 1}. \tag{6}$$

The thermodynamic efficiency is similarly less than unity by the ratio of heat discharged with the exhaust gas to the total heat introduced. Calculation was based on this assumption

$$\eta_{th} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}, \tag{7}$$

where T K°, since

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4}\,;\quad p_3 = p_2,$$

$$T_4 = T_3\frac{T_1}{T_2} \qquad p_4 = p_1.$$

The temperature rise of adiabatic compression $(T_2 - T_1)$ corresponds to the work stored in air entering at w_1 velocity, if the speed in the combustion space is zero.

$$C_v (T_2 - T_1) = \frac{R}{\varkappa - 1} (T_2 - T_1) = \frac{w_1^2}{2g}.$$

With this from (7)

$$\eta_{th} = 1 - \frac{T_1}{T^2} = 1 - \frac{2gRT_1}{2gRT_1 + w_1^2 (\varkappa - 1)}$$

$$\eta_{th} = \frac{w_1^2}{\frac{1}{\varkappa - 1} 2gRT_1 + w_1^2}. \tag{8}$$

The resultant efficiency :

$$\eta = \eta_{ae}\, \eta_{th} = \frac{2w_1}{w_4 + w_1} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_2} \tag{9}$$

$$\eta = \frac{1}{\left(\frac{\varphi}{4F_1} + 1\right) \cdot \left(\frac{2gRT_1}{(\varkappa - 1) w_1^2} + 1\right)}. \tag{10}$$

Though all apparent losses have been considered according to the above, unforeseen losses will be taken account of by multiplying this expression by a provisionally undetermined efficiency factor η_x. Herewith

$$\eta = \frac{\eta_x}{\left(\frac{\varphi}{4F_1} + 1\right) \cdot \left(\frac{2gRT_1}{(\varkappa - 1) w_1^2} + 1\right)}.$$

The above relationships demonstrate that the aerodynamic efficiency is good, if the exit velocity of gases is little higher than the entrance velocity of air. Since, however, work performance is proportional, besides the mass flow of gases to the difference of exit and of entrance velocities of the gases, good efficiency can be obtained only with low performance referred to unit mass of air, that is, only with large masses of air. It is therefore good if the ratio of the area of the air intake to the frontal area on which drag force acts : $\frac{F_1}{\varphi}$ is large.

Accordingly, the thermodynamic efficiency depends on speed alone; since according to the above, speed depends on altitude, the thermodynamic efficiency is defined by the flight altitude and by the speed of the aircraft near the surface. These substituted into the formula, from (10) and (4):

$$\eta = \frac{\eta_x}{\left(\frac{\varphi}{4F_1}+1\right)\left(\frac{2gRT_1\,0{,}29}{w_0^2(\varkappa-1)\,10^{\frac{H-10}{15{,}05}}}+1\right)}. \tag{11}$$

The efficiency for a given aircraft depends on altitude H only. The efficiency of the type of aircraft depends on its speed w_0 near the surface and on the relative size of the nozzle intake F, that is on ratio $\frac{\varphi}{F_1}$.

The efficiency is better with greater F_1 and with higher w_0. Numerical values of general validity substituted:

$$\eta = \frac{\eta_x}{\left(\frac{\varphi}{4F_1}+1\right)\left(\frac{91000}{w_0^2\,10^{\frac{H-10}{15{,}05}}}+1\right)} \qquad \begin{aligned} g &= 9{,}81 \ \text{m/sec}^2 \\ R &= 29{,}4 \\ T_1 &= 223^\circ \\ \varkappa &= 1{,}41 \end{aligned}$$

The variation of efficiency as a function of altitude, with given speed near the surface, and given area of air intake, can be plotted in a curve.

The family of curves in Fig. 5 gives the efficiences of aircraft of 180, 360 and 720 km/hour speed near the surface at different air intake areas, where as unit of air intake area the frontal area, on which drag acts, is chosen for values of $\frac{F}{\varphi} = 1\,;\ 5\,;\ 25$ inscribed in the diagrams.

In spite of that, according to the Introductory, the air becomes thinner with altitude, in consequence of the increase of speed the endpressure of compression still rises at the end of the compression tube, and at the same time the temperature rises as a result of adiabatic compression. The end temperature of compression has to be raised to a degree that the heat introduced be proportional to the work to be performed. If the difference of temperature corresponding to this work is added to the end temperature of compression, the peak temperature occurring is obtained. This temperature is to be limited so that structural materials be capable of bearing it. For all-metal structures, with conventional materials, this limit value can be set at 700° C, up to which temperature is allowed to rise. Since the engine has no moving parts, the high-temperature space can be lined with refractory material, and the temperature

can be raised as far as the refractory lining permits. With special refractory coating, temperature may rise as high as 2000° C. Since, according to the above, the examination of the type of aircraft is practically independent of details of construction, it can be determined to what flight altitude correspond the

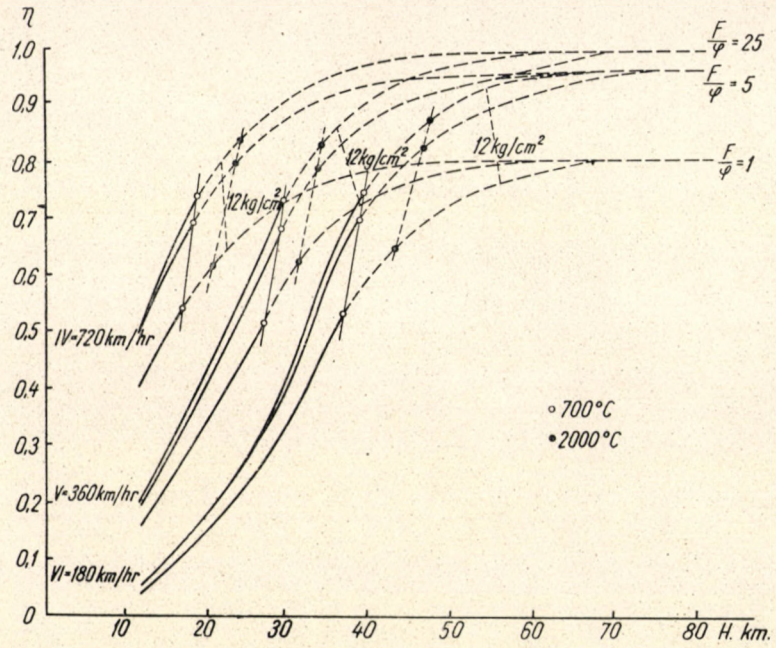


Fig. 5

above temperatures, or what optimum efficiency they afford. The maximum temperature occurring is T_3.

The useful power :

$$Pw_1 = \frac{\eta}{A} F_1 w_1 \gamma_1 c_p (T_3 - T_2); \qquad \frac{R}{\varkappa - 1}(T_2 - T_1) = \frac{w_1^2}{2g}.$$

From (3) :

$$Pw_1 = \varphi \frac{w_1^2}{2g} \gamma_1 w_1.$$

From these :

$$\frac{\varphi w_1^2}{2g} = \frac{\eta}{A} F_1 c_p \left(T_3 - T_1 - \frac{(\varkappa - 1) w_1^2}{2gR} \right)$$

$$\eta = \frac{A\varphi \frac{w_1^2}{2g}}{F_1 c_p \left(T_3 - T_1 - \frac{(\varkappa - 1) w_1^2}{2gR} \right)}.$$

From (10)

$$\frac{A\varphi}{2g}\left(\frac{\varphi}{4F_1}+1\right)\left(\frac{2gRT_1}{\varkappa-1}+w_1^2\right) = \eta_x F_1 c_p (T_3 - T_1) - \frac{A\varphi}{2g}\left(\frac{\varphi}{4F_1}+1\right)\frac{2gRT}{\varkappa-1}$$

$$w_1^2\left[\frac{A\varphi}{2g}\left(\frac{\varphi}{4F_1}+1\right)+\eta_x F_1 c_p \frac{\varkappa-1}{2gR}\right] = \eta_x F_1 c_p (T_3 - T_1) -$$

$$- \frac{A\varphi}{2g}\left(\frac{\varphi}{4F_1}+1\right)\frac{2gRT_1}{\varkappa-1}$$

$$\eta = \frac{\eta_x}{\left(\frac{\varphi}{4F_1}+1\right)\cdot\left(\frac{2gRT_1}{(\varkappa-1)w_1^2}+1\right)}.$$

Therefore

$$w_1^2 = 2g \frac{T_3 - T_1 - \frac{\varphi}{F_1}\frac{A}{\eta_x c_p} RT_1 \left(1+\frac{\varphi}{4F_1}\right)\frac{1}{\varkappa-1}}{\frac{\varkappa-1}{R}+\frac{\varphi}{F_1}\frac{A}{\eta_x c_p}\left(1+\frac{\varphi}{4F_1}\right)}. \tag{12}$$

From (4)

$$w_1^2 = w_0^2 \frac{10^{\frac{H-10}{15{,}05}}}{0{,}29}$$

$$10^{\frac{H-10}{15{,}05}} = \frac{2g\,0{,}29}{w_0^2} \cdot \frac{T_3 - T_1 - \frac{\varphi}{F_1}\frac{A}{\eta_x c_p} RT_1 \left(1+\frac{\varphi}{4F_1}\right)\frac{1}{\varkappa-1}}{\frac{\varkappa-1}{R}+\frac{\varphi}{F_1}\frac{A}{\eta_x c_p}\left(1+\frac{\varphi}{4F_1}\right)}. \tag{13}$$

At the point of optimum efficiency attainable with consideration of temperature, the altitude is calculated according to the above. The computed value is marked in Fig. 5, $\eta_x = 1$ assumed.

The end pressure of compression requires the increase of wall thickness of the construction in the environment of maximum pressure. It is easy to prove

that for given air intake area the weight of the structure is independent of the number and of the diameter of nozzles chosen and depends on the cross-sectional area and on pressure alone. If the pressure of 12 kg/cm² is accepted as a limit, with the assumption that excessive weight of the aircraft is not yet thereby involved, pressure limits are obtained, which are also marked in diagram 5. The pressure is at the end of the compression pipe : p_2.

$$\frac{R}{\varkappa - 1}(T_2 - T_1) = \frac{w_1^2}{2g}$$

$$\frac{p_2}{\gamma_2} = \frac{p_1}{\gamma_1} + (\varkappa - 1)\frac{w_1^2}{2g}; \qquad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{\varkappa};$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 \frac{p_1^{\frac{1}{\varkappa}}}{p_2^{\frac{1}{\varkappa}}}; \qquad \frac{p_2}{\gamma_2} = \frac{p_2^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} p_1^{\frac{1}{\varkappa}}}{\gamma_1} = \frac{p_1}{\gamma_1} + (\varkappa - 1)\frac{w_1^2}{2g}$$

$$p_2^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \frac{\gamma_1}{p_1^{\frac{1}{\varkappa}}}\left(\frac{p_1}{\gamma_1} + (\varkappa - 1)\frac{w_1^2}{2g}\right)$$

$$p_2 = \left[p_1^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} + (\varkappa - 1)\frac{\gamma_1 w_1^2}{2g p_1^{\frac{1}{\varkappa}}} \right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}; \qquad w_1^2 = w_0^2 \frac{\gamma_0}{\gamma_1}$$

$$p_1 = \frac{2455}{10^{\frac{H-10}{15{,}05}}} \qquad p_2 = \frac{\left(\frac{2455}{10^{\frac{H-10}{15{,}05}}} + 0{,}41\frac{w_0^2\gamma_0}{2g}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}}{\left(\frac{2455}{10^{\frac{H-10}{15{,}05}}}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}} \tag{14}$$

Since in consequence of unknown factors velocity is not entirely converted to pressure, this is on the safe side in calculation for strength.

Calculation results, marked on the family of curves referred to, show that the pressure of 12 kg/cm² admitted, the pressure limit permits to attain in each investigated case a higher ceiling than that allowed by the temperature limit of 700° C, while, if a temperature of more than 700° C but not more than 2000° C is admitted for an aircraft of high speed near the surface, and at high $\frac{F}{\varphi}$ value, the 12 kg/cm² pressure limits the attainable speed, that is the attainable optimum efficiency. According to the analysed examples the aircraft

with minimum speed near the surface is the most favourable. If for this the value corresponding to $\frac{F_1}{\varphi} = 25$ is disconsidered, in order that the too large air intake area should not cause difficulties in aircraft design, and the value corresponding to $\frac{F_1}{\varphi} = 5$ is taken, the following results are read off the curve : At 700° C temperature limit, at 40 km altitude, about 70% total efficiency is attainable at about 3300 km flight speed per hour, while with 2000° C admitted, at 47 km altitude, 83% efficiency can be attained at 5600 km/hour speed.

This flight speed is well above sonic velocity, which is in air strata above 10 km altitude about 1080 km per hour. Such aircraft attains sonic speed at 18 km altitude, where its efficiency is but 7%. It is evident that with this system considerable advantages can be attained with increased speed and altitude.

To form a notion of the value of efficiency a comparison will be made with the overall efficiency of a propeller aircraft flying at some km altitude above the surface. If the propeller efficiency is taken for 75%, which is quite a good value, and the consumption of the engine for 200 grams of gasoline per h. p. hour, the overall efficiency of the aircraft will be 23,6%.

Against this the engine of 70% efficiency consumes by more than 66% less fuel on the same route, in spite of substantially higher speed. This comparison, moreover, neglects the fact that for the same run less fuel has to be carried, consequently the gross weight of the aircraft and with this the drag is less. If the fuel forms 1/3 of the gross weight of the aircraft, and 2/3 of the fuel can be spared, then drag and thus fuel consumption are reduced to 78%. This considered in addition to the former, 3,8 times less gasoline consumption is attained against the corresponding propeller aircraft. The structural weight of the simple aeroplane having no moving parts, which has been investigated, is also presumably substantially less than that of piston-engine or turbine propeller aeroplanes, this weight reduction similarly affecting fuel consumption, which will be less than above calculated.

The air flows through the engine examined at very high velocity. Heat has to be introduced into the air during a time of the order of magnitude of 1/1000 sec.

If, for instance, gasoline vaporized is blown into the airjet space, and the speed of combustion is sufficiently high, this can be realized. The speed of combustion and, in general, the speed of chemical reaction grows so rapidly with temperature, that combustion is completed within a small fraction of 1/1000 sec.

This promises to become the aircraft of the future ; for its high speed, simple construction, small weight, low fuel consumption, it will surely take the lead. High flight speed also means low costs of personnel for one trip. More-

over during the same period the aircraft can fly more pay km-s, depreciation of investment is reckoned over a shorter time, so that, no doubt, the extension of this system will reduce flight costs to a fraction of present rates and will open up a new era of aviation and of easy long-distance traffic.

REFERENCES

German Patent Grant :

1. Dr. Ing. Albert Fonó, Budapest, Luftstrahlmotor für Hochflug Nr. 554 906. Nov. 2, 1932. Priority of May **26,** 1928.
2. Dr. Ing. Albert Fonó, Budapest. Luftstrahlmotor für Hochflug Nr. 560 075. Additional patent Nr. 554 906, Nov. 2, 1932. Priority of May **26,** 1928.
3. Trend of aircraft development (Hungarian), by Dr. A. Fonó, Magyar Technika, 1949. Febr. 2.
4. The Chartered Mechanical Engineer, 1955. January.

SUMMARY

The longitudinal section of the Ram Jet used by the British A. F. is essentially identical with the «air torpedo» proposed by the author 40 years ago, during World War I, to the Austro-Hungarian Army H. Q., flying at supersonic speed without having moving parts. The author applied after 13 years for a German Patent for such power plant for high altitude and high speed-aircraft. Afterwards he applied for an additional patent for a power plant completed with air compressor built in, for comparatively lower flight speeds. Careful investigation extended over 4 years established the novelty and the patents were granted. These patents cover the essentials of the turbo-jet aircraft, already common nowadays, and of the reaction-propelled missile gaining ground in war technique. The preliminary examination by the German Patent Office acknowledged its priority, i. e. that this modern type of aircraft is a Hungarian invention.

In the following the maximum speed attainable by this propulsion system is calculated as a function of flight altitude, with consideration of the prevailing pressures and temperatures, limited by the endurance of construction materials.

О РЕАКТИВНЫХ ДВИГАТЕЛЯХ

Член-корр. АН Венгрии, А. ФОНО

РЕЗЮМЕ

Разрез используемого военным ведомством Англии реактивного двигателя «Рем джет», опубликованный в начале текущего года, по существу аналогичен разрезу приводного механизма воздушной торпеды, предложенной автором 40 лет тому назад во время первой мировой войны австро-венгерскому военному ведомству, и для которой характерны отсутствие движущихся деталей и скорости полета, превышающие критическую. Представленное предложение было отвергнуто. Автором через 13 лет этот механизм был запатентован в Германии для привода самолетов на больших высотах и скоростях ; затем автор зарегистрировал дополнение к патенту на механизм, укомплектованный воздушным компрессором и используемым при относительно меньших скоростях полета. Тщательные исследования, проводившиеся в течение четырех лет, установили новшество предложенного механизма, и в результате чего был выдан патент. Эти патенты содержать сут конструкций в настоящее время уже широко распространенных реактивных самолетных двига-

телей и внедряемых в военной технике снарядов с репульсивным приводо. Патентным исследования, проведенные в Германии, установили приоритет за автором и тем самым утвердили, что современный реактивный самолет является венгерским изобретением.

В дальнейшем на основе теоретических рассуждений математическим путем определяются наибольшие возможные скорости при использовании этого вида двигателей в зависимости от высоты полета, учитывая при этом возникающие давления и температуры, которые ограничиваются свойствами применяемых конструкционных материалов.

SUR LA COMMANDE PAR **TUYÈRE THERMO-PROPULSIVE**

A. FONÓ
Membre correspondant de l'Académie des Sciences Hongrois

RÉSUMÉ

Le schéma de la coupe, publié au début de cette année, du type «Ram Jet» employé au haut commandement l'armée de l'air anglaise, est en essence identique à celui du torpédo aérien proposé par l'auteur, il y a 40 ans pendant la première guerre mondiale, à la direction supérieure de l'armée austro-hongroise ; ce torpedo vole avec une vitesse surcritique sans avoir d'éléments mobiles. La proposition ne fut pas acceptée. 13 ans plus tard, l'auteur demanda un brevet allemand pour cette construction servant à actionner un avion en grande hauteur et pour une grande vitesse, puis un brevet supplémentaire pour une construction complété par une compresseur d'air, pour le cas de vitesses relativement plus petites. Un examen approfondi de 4 ans constata la nouveauté de l'invention et le brevet fut délivré. Ces brevets contiennent donc l'essentiel de l'actionnement des avions à turboréacteur répandus de nos jours et de la construction du projectil à répulsion, de plus en plus employé dans la technique militaire. L'examen précédant la délivrance du brevet allemand a prouvé la priorité, c'est à dire le fait que cet avion moderne représente une invention hongroise.

Dans la suite de l'étude l'auteur calcule, à la base de considérations théoriques, le maximum de vitesse réalisable par ce type d'actionnement, en fonction de la hauteur de vol, tenant compte à la pression et à la température, limitées par les propriétés des matériaux de construction.

ÜBER STAUSTRAHLTRIEBWERKE

A. FONÓ
Korresp. Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Das am Anfang dieses Jahres veröffentlichte Querschnittsbild des — von der englischen Luftwaffe benutzten — »Ram Jet« stimmt im wesentlichen mit dem vom Verfasser zur Zeit des ersten Weltkrieges der österreichisch-ungarischen Heeresleitung vorgeschlagenen Lufttorpedo überein, der ohne bewegliche Bestandteile über der kritischen Geschwindigkeit fliegt. Der Vorschlag wurde seinerzeit nicht angenommen. Der Verfasser meldete dann 13 Jahre später diese Konstruktion zum Antrieb von Flugzeugen für grosse Höhen und grosse Geschwindigkeiten zum deutschen Patent an und suchte dann um die Erteilung eines Zusatzpatentes für eine Konstruktion an, die für kleinere Fluggeschwindigkeiten bestimmt und mit einem zwischengeschalteten Luftkompressor ergänzt war. Eine sorgfältige, sich über 4 Jahre erstreckende Voruntersuchung stellte die Neuheit fest, so dass das Patent erteilt wurde. Diese Patente enthalten das Wesentliche des heute bereits verbreiteten Flugzeugantriebs durch Strahlturbinentriebwerke und des in der Kriegstechnik immer stärker in den Vordergrund tretenden Geschosses mit Rückstrahlantrieb. Das deutsche Patentverfahren bestätigte die Priorität dieser Anmeldungen, d. h. die Tatsache, dass dieses moderne Flugzeug eine ungarische Erfindung ist.

In der Arbeit werden dann auf Grund theoretischer Überlegungen die mit diesem Antrieb erreichbaren höchsten Geschwindigkeiten in Abhängigkeit von der Flughöhe berechnet, wobei auch der auftretende Druck bzw. die auftretende Temperatur berücksichtigt werden, deren Grösse durch die verwendeten Werkstoffe begrenzt ist.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki felelős: Farkas Sándor

A kézirat beérkezett: 1955. VI. 17. — Terjedelem: 18½ (A/5) ív, 99 ábra, 2 melléklet

Akadémiai nyomda, Gerlóczy u. 2. — 36765/55. — Felelős vezető: ifj. Puskás Ferenc

Les Acta Technica paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction et écrits à la machine à l'adresse suivante :

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest, VI., Sztálin út 21. Compte-courant No.: 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

The Acta Technica publish papers on technical subjects in Russian, French English and German.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up one volume.

Manuscripts should be typed and addressed to :

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with «Kultúra» Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI., Sztálin út 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in russischer, französischer, englischer und deutscher Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band. Jährlich erscheinen 2—4 Bände.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden :

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen «Kultúra» (Budapest. VI., Sztálin út 21. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

INDEX

J. Rósa: Calculation of D. C. Motor Drives Fed by Thyratrons and by Grid-Controlled Mercury-Arc-Rectifiers. — *Я. Роша:* Расчет моторного привода постоянного тока, питаемого от тиратронного выпрямителя с сеточным управлением. — Le dimensionnement des commandes par moteur à courant continu alimentées par des redresseurs à thyratron et à commande par grille. — Die Dimensionierung eines durch eine Thyratronröhre bzw. einen Gittergesteuerten Gleichrichter gespeisten Gleichstromantriebs 187

T. Harmathy: Theory of Throughput in Extraction Spray Towers. — *Т. Харматн:* Теория пропускной способности оросительных колонн для экстракции жидкостей. — Étude sur le passage de débits en colonnes d'extraction à dispersion — Theorie des Durchsatzes von Extraktionsprühtürmen 209

A. Schwertner: Die Knickung im Lichte der Methode der elastischen Punkte. — *А. Швертнер:* Прогиб балок на основе метода эластичных точек. — Buckling of Beams Treated by the Method of Elastic Points. — Le flambage des poutres traités à l'aide de la méthode des ponts élastiques 245

P. Csonka: Die Knickung geradachsiger Stäbe bei Behandlung mit der Methode der elastischen Punkte. — *П. Чонка:* Решение прогиба прямоосных стержней методом эластичных точек. — Buckling of Straight-Axis Bars Treated by the Elastic Point Method. — Flambage de barres à axe droit traité à l'aide de la méthode des points élastiques 275

A. Hornung: General Method for the Determination of Cutting Force and Required Power, by Specific Cutting Resistance. — *А. Хорнунг:* Общая методика определения усилия резания и мощности на основе удельного сопротивления резания. — Méthode générale pour la détermination de l'effort de coupe et de la puissance de coupe, basée sur la résistance de coupe spécifiques. — Allgemeine Methode zur Bestimmung der Hauptschnittkraft und Schnittleistung auf Grund des spezifischen Zerspanungs-Widerstandes 289

G. Tarján: Principles of Gravity Concentration. — *Г. Таръян:* Общие принципы обогащения по удельному весу. — Théorie générale de l'enrichissement de minerais basé sur le poids spécifiques. — Allgemeine Grundsätze der Aufbereitung nach dem spezifischen Gewicht 311

P. Blaise: Sur la résolution numérique du problème de la torsion des prismes multicellulaires à parois minces. — *П. Блез:* О числовом решении задачи на кручение тонкостенных многоячейковых призм. — On the Numerical Solution of the Torsional Problem of Thin-walled Multicellular Bars. — Über die numerische Lösung des Verdrehungsproblems von dünnwandigen vielzelligen Prismen 327

J. Barta: Sur l'estimation de la rigidité de torsion des prismes multicellulaires à parois minces. — *Й. Барта:* Об оценке жесткости на кручение тонкостенных многоячейковых призм. — On the Estimation of the Torsional Rigidity of Thin-walled multicellular Bars. — Über die Abschätzung der Verdrehungssteifigkeit von dünnwandigen vielzelligen Prismen 333

P. Csonka: La torsion des prismes multicellulaires en treillis. — *П. Чонка:* Кручение многоячейковых решетчатых призм. — Torsion of Multi-Cellular Trussed Prisms. — Die Verdrehung mehrzelliger prismatischer Fachwerke 339

E. Bella: Untersuchung der wichtigeren mechanischen Eigenschaften von verformbaren ($\alpha + \beta$)-Sondermessingen in Abhängigkeit von der Wärmebehandlung. — *Э. Белла:* Исследования важнейших механических свойств специальных пластичных латуней $\alpha + \beta$ в функции термообработки. — Examination of the More Important Mechanical Properties of Special Ductile ($\alpha + \beta$) Brasses as a Function of Heat Treatment. — Les propriétés principales mécaniques des laitons $\alpha + \beta$ malléables spéciaux en fonction du traitement thermique 351

A. Fonó: On Ram Jet Propulsion. — *А. Фоно:* О реактивных двигателях. — Sur la commande par tuyére thermo-propulsive. — Über Staubstrahltriebwerke 383