ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT
A. GELEJI

TOMUS X FASCICULI 1—2

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1955

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG: BUDAPEST, V. SZÉCHENYI RAKPART 3.

KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY-U. 21.

Az Acta Technica orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok, géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az »Akadémiai Kiadó«-nál (Budapest, V., Alkotmány-utca 21. Bankszámla 04-878-111-46), a külföld számára pedig a »Kultúra« Könyv és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

»Acta Technica« публикует трактаты из области технических наук на русском, французском, английском и немецком языках.

»Acta Technica« выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи (в напечатанном на машинке виде) следует направлять по адресу:

Acta Technica
(Венгрия, Будапешт 62, п/я 440)

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена »Acta Technica« — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет »Kultúra« (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Текущий счет № 43-790-057-181), или его заграничные представительства и уполномоченные.

lité de la loi de Fick a l'intérieur du tissu de betterave. Méthode pour déterminer la constante de diffusion 485

Tóth, G. and *Pósa, V.*: Determination of the Elasticity of Leather — *Тот, Г.* и *Пошa, В.*: Измерение натяга кож — Mesure de l'élasticité du cuir — Die Messung des Standes des Leders 419

Tuschák, R.: Transient Phenomena in the Solid Rotors of Synchronous Machines — *Тушак, Р.*: Переходные процессы синхронных машин с полнотелым ротором Phénomènes transitoires dans les machines synchrones à rotors massifs — Transiente Vorgänge in Synchronmaschinen mit massiven Läufern 457

Vidéky, E.: Tip Relief on Spur Gears — *Видеки, Э.*: Затупление острия вершины зубца лобовых зубчатых колес — Épointage des têtes de la denture droite d'engrenages — Die Zahnflankenzurücksetzung von Stirnradverzahnungen 3

Обзор книг – Book Review — Compte rendu de livres — Buchbesprechung 505

INDEX

Bardócz, Á. and *Vorsatz, B.:* Thermal Purifying Equipment for the Production of Spectroscopic Pure Carbon — *Бардоц, А.* и *Форзац, Б.:* Термическое углеочистительное устройство для получения спектрально чистых углей — Installation de purification thermique pour la production de carbone spectroscopiquement pur — Ein thermischer Reinigungsapparat zur Herstellung von spektralreiner Kohle 289

Boldizsár, T.: The Efficiency of Balanced High-pressure Hydraulic Gear Pumps and Motors — *Больдижар, Т.:* Коэффициент полезного действия уравновешенных шестеренчатых гидравлических насосов высокого давления и моторов — Sur le rendement de pompes et moteurs hydrauliques équilibrés à engrenages et haute pression — Über den Wirkungsgrad von ausgeglichenen hydraulischen Hochdruck-Zahnradpumpen und -Motoren 319

Bélёni, И.: Исследование возможностей усовершенствования молотковых дробилок — *Bölöni, I.:* Possibilities of Improvement of Hammer Mills — Examen des possibilités de perfectionnement des broyeurs a marteaux — Untersuchung der Vervollkommnungsmöglichkeiten von Hammermühlen 355

Craemer, H.: Fallacies and Paradoxa in the Plasticity Theory — *Кремер, Х.:* Ошибки и противоречия в теории пластичной деформации — Erreurs et contradictions dans la théorie de la déformation plastique — Irrtümer und Widersprüche in der Theorie der Plastizität 73

Csonka, P.: Die Stabilität des an seinen Enden aufgehängten, an seiner seitlichen Verschiebung gehinderten Balkens — *Чонка, П.:* Стабильность двухопорной балки, боковой сдвиг которой препятствуется — Stability of the End-supported Laterally Restrained Beam — La stabilité d'une poutre suspendue à ses deux extrémités entravée dans son déplacement latéral 31

Csonka, P.: Results on Shells of Translation — *Чонка, П.:* Об оболочках, формированных соответственного трансляционной поверхности — Sur les voiles à surface de translation — Untersuchungen über Translationsschalen 59

Freud, G.: Über die Stromverdrängung in kreiszylindrischen Leitern — *Фрейд, Г.:* О вытеснении тока, образующегося в проводнике круглого сечения — Current Distribution in Cylindrical Conductors of Circular Cross-section — Distribution du courant dans les conducteurs cylindriques de section circulaire 397

Geleji, A.: Kraftbedarf und Fliessvorgänge beim Strangpressen und beim Pressen im Gesenk — *Гелейи, А.:* Штамповка на прутковом прессе и в матрицах — Power Demand and Forming in Extrusion and Die-forging — Demande de puissance et déformation au refoulement et a l'étampage 187

Gillemot, L.: Design and Operation of Reactors for Titanium Production — *Жильмо, Л.:* Расчет и эксплоатация реакторов, служащих для получения титана — Calcul et fonctionnement de réacteurs pour la fabrication du titane — Entwurf und Betrieb von Reaktoren für Titanherstellung 221

Hazay, I: Die Umrechnung von der stereographischen Projektion und der konformen Zylinderprojektion auf die Gauss-Krügersche Projektion — *Хазаи, И.:* Пересчет со стереографической проекции и с конформной цилиндрической проекции на проекцию Гаусса-Крюгера — Conversion of Stereographic and Conformal Cylindric Projections to the Gauss-Krüger System — Conversion des projections stéréographique et cylindrique-orthomorphique à la projection de Gauss-Krüger 139

Hegedüs, Z.: Data on Copper Oxyarsenate, Copper Nickelcxyarsenate, and Nickel Oxide Inclusions — *Хегедюш, З.:* Данные о включениях оксиарзената меди,медно-никельного оксиарзената и окиси никеля — Données sur les inclusions d'oxyarsenate du cuivre, d'oxyarsenate du cuivre et du nickel et d'oxyde de nickel — Beiträge über die Kupferoxyarsenat-, Kupfernickeloxyarsenat- und Nickeloxydeinschlüsse 117

Hegedüs, Z.: Angaben über die in technischen Kupfern vorkommenden Kupferoxydeinschlüsse — *Хегедюш, З.:* Данные о медно-окисных включениях, встречающихся в технических сортах меди — Data on Copper Oxide Inclusions in Industrial Copper — Données sur les inclusions d'oxide de cuivre dans les cuivres industriels 127

Kollár, L.: Durchbiegungsberechnung von Stahlbetonbrücken mit zwei Hauptträgern — *Коллар, Л.:* Расчет прогиба железобетонных мостов с двумя главными балками — Calculating the Deflection of Reinforced Concrete Bridges with two Main Girders — Calcul de la flèche des ponts en béton armé à deux poutres principales 261

Oplatka, G.: Étude de l'évaporation à multiple effet avec prises de vapeur — *Оплатка, Г.:* О многократной выпарке с отбором экстрапара — A Study on Multiple-stage Evaporator Systems with Vapour-bleeding — Untersuchungen über mehrstufige Verdampfungssysteme mit Bründenentnahme 43

Sályi, I.: Comments on Prof. H. Craemer's Paper: «Fallacies and Paradoxa in the Plasticity Theory» — *Шайи, И.:* К статье Х. Кремера »Ошибки и противоречия теории пластичной деформации« — Remarques sur l'étude du Dr. H. Craemer «Erreurs et contradictions dans la théorie de la déformation plastique »— Bemerkungen zur Arbeit von Dr. H. Craemer «Irrtümer und Widersprüche in der Theorie der Plastizität» 83

Scheffer, V.: Über den Zusammenhang zwischen isostatischen Anomalien und Vergenzen der Gebirgsbildung — *Шеффер, В.:* Связь изостатических аномалий и верген-ций горообразования — Relations between Isostatic Anomalies and Orogenic Vergences — Le rapport entre les anomalies isostatiques et les vergences orogéniques 19

Scheffer, V.: Der isostatische Charakter der ungarischen Niveauveränderungen und die Möglichkeit der zeitlichen Korrektion der Höhenwerte der Nivellementhöhenfestpunkte — *Шеффер, В.:* Изостатический характер изменений нивелира в Венгрии и возможности поправки во времени данных высоты опорных пунктов нивелирования — Isostatic Character of Level Changes in Hungary and the Possibility of Temporally Revaluating the Altitude of Bench Marks — Caractère isostatique des changements de niveau en Hongrie et possibilité de réévaluation temporelle des altitudes des bases de nivellement 247

Schwertner, A.: Dynamics of Girders — *Швертнер, А.:* Динамика балок, трактуемых методом упругих точек — La dynamique des poutres traitées à la base de la méthode des points élastiques — Dynamik der Träger bei Berechnung mit der Methode der elastischen Punkte 155

Seidner, M.: Water-cooled Turbo Generator Rotors — *Зеиднер, М.:* Турбороторы с водяным охлаждением — Turbo-rotors refroidis par l'eau — Wassergekühlte Turborotoren 305

Seress, J.: Joseph Petzval. Inventor of Photo-optics — *Шереши, Я.:* Йожеф Пецвал. Изобретатель фотографической оптики — Joseph Petzval. Inventeur de l'objectiv photographique — Josef Petzval. Erfinder der Photooptik 407

Секер, Д.: Исследование выхода по току при электролизе алюминия — *Szekér, G.:* Research into Current Efficiency in Aluminium Electrolysis — Recherches sur le rendement de courant dans l'electrolyse de l'aluminium — Untersuchung des Stromwirkungsgrades bei der Aluminiumelektrolyse 91

Tegze, M. und Frau *Tegze, M.:* Beweis der Anwendbarkeit des Fickschen Gesetzes auf die Diffusion des Zuckers innerhalb des Rübengewebes — *Тегзе, М.* и *Тегзе, Ю.:* Подтверждение применимости закона Фика к диффузии сахара в свекле. Методика определения коэффициента диффузии — Verification of the Applicability of Fick's Law to the Diffusion of Sugar within the Tissue of the Beet. Method of Determination of the Diffusion Constant — Vérification de l'applicabi-

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT
A. GELEJI

TOMUS X

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1954

TIP RELIEF ON SPUR GEARS

Prof. E. VIDÉKY

D. OF ENG. SO.

[Manuscript received December18, 1952]

Alphabetic list of symbols

c = peripheral speed
e = limiting point of the active length of contact
h = distance
n = number of revolutions per min.
r = radius at unit module
s = tooth thickness
t = circular pitch
v = width of tip relief on crest
z = number of teeth
A = ratio
C = pitch point
E = limiting point of contact
G = root point of the involute
M = module
O = center
R = radius (actual length)

α = pressure angle
ε = length of contact foregone for tip relief
χ = angle defined in *Fig. 1.*
Δ = difference

Subscripts

v = relative to tip relief involute
w = relative to (Willis) pitch circle of gear cutting
ε = relative to start of tip relief
G = relative to base circle
K = relative to addendum circle

Indices etc.

1 or′ = relative to pinion
2 or″ = relative to wheel
$\wedge$ = relative to the point of intersection of right and left tooth profiles
[ ] = arbitrary ; also : litterature references
$\frown$ = corresponding value to be taken from table

The root of the driving tooth entering in engagement strikes against the sharp tip of the driven one. The radius of curvature on the tip, if not relieved, drops suddenly to zero and the Hertzian stress rises consequently to infinite. The preceeding driving tooth, which is simultaneously about to pass out of contact, is more deflected than its driven mate, the leverage on it being greater. The following driving tooth thus reaches the geometrical contact point prematurely, knocking against the sharp-tipped driven tooth. In reduction gears the pinion is driving, in step-up drives, inversely, the wheel, the teeth of which are generally weakened at their roots by usually negative profile displacement.

Thus on reduction gears the impact is generally slighter than on step-up drives. [1] The sharp impact of picking up the load is aggravated by deflection. However, there is also another source of impact, the inevitable errors of gear cutting, which increase the force of the former. The sharpness of the tip alone suffices to break the oil film, this is all the more produced by deflection, and recognition of all this calls for tip relief on the driven tooth.

Regarding the shape and size of relief, the following may be observed:

1. Tip relief shortens the length of contact, therefore its depth should be reasonably small, anyway kept out of the line of action of one pair of teeth, (i. e. of two pairs of teeth, if the ratio of contact exceeds two).

2. The relief should have a smooth transition to avoid vibrations.

3. As for dimensions of the tip relief the following holds:

a) Denoting the width of crest on the unrelieved tooth with: s_K and that of the relieved one with: s_{Kv}, $s_K - s_{Kv} = 2 \cdot v$, where v equals the relief thickness. It should be slightly more than the sum of the deflection of the preceding driving tooth, and of errors of indexing and profile form, all measured on the addendum circle.

b) The depth of the tip relief is characterised by radius R_ε corresponding to $\varepsilon =$ the foregone length of contact. Both of them: v and R_ε depend much on lubrication problems too, which are not yet cleared satisfactorily; this part of the question will be left undiscussed. Another consideration suggests, that in step-up drives the tip relief, now on the pinion teeth, should be slightly greater than required on the wheel teeth in speed reduction, the deflection of wheel-teeth being generally greater that that of pinion teeth, as mentioned already. Due to a further consideration, in reducers the tip relief should be decreased with increasing ratio. In the limit case $A = 1$ both addendum circles cut off the line of contact into symmetrically equal sections with reference to C. In speed reducers, higher ratio, conventional profile displacement supposed, the active half of the line of contact — limited by the intersecting addendum circle of the wheel — decreases, (that of the pinion on the contrary increases); consequently less contact length has to be foregone for tip relief. In speed-up drives the situation is the reverse.

Tip relief can be executed by:

A) Planing (hobbing or shaping)

B) By grinding. (Grinding of originally hard materials is exceptional, and only practicable at a high degree of hardness.)

It will be examined how claims under 1., 2. and 3. can be met by analyzing the working methods.

A) Tip relief by planing

The majority of gear drives serve speed reduction purposes, where the teeth of the wheel are driven. The wheel is generally made of originally hard material, partly because, as experience shows, friction is less between different materials, partly, because hardening wheels of larger dimensions is difficult and undependable. To secure perfect uniform tip relief on all teeth, it is expedient to generate it by an arc of an involute of somewhat greater

pressure angle than that of the tooth profile. Planing tools are : the cutter rack, the worm hob and the cutter pinion.

a) *Tip relief by cutter rack*

The earliest method applied specially modified cutter racks, according to the BSS *(Fig. 2)*. The straight cutting edges are from a distance *h* above

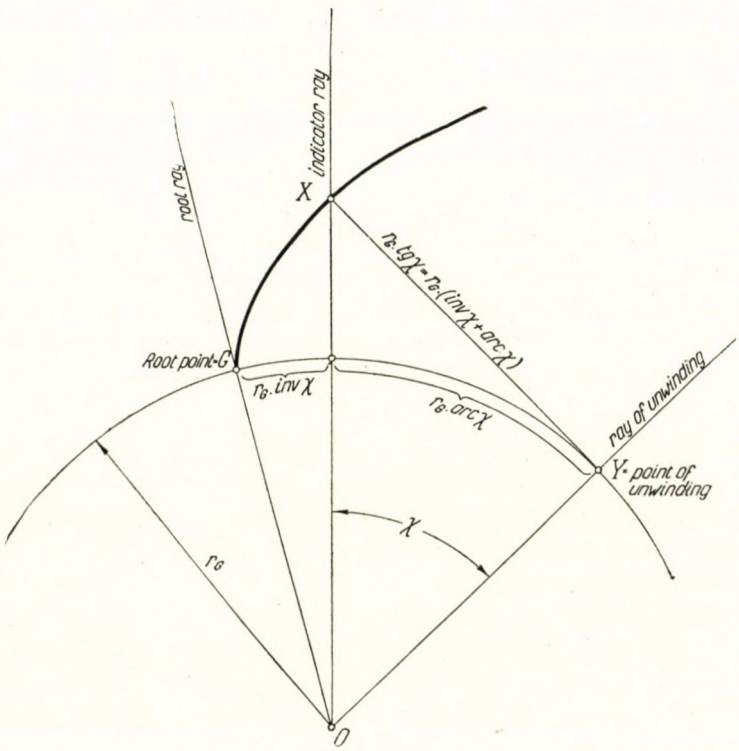


Fig. 1

and under the pitch point gently curved, increasing the thickness of the dedendum of the cutter teeth and decreasing it on the addendum line. The thickened root thus generates the tip relief and the decreased top thickness produces a root rise on the gear teeth in order to prolong the contact at its end, where the addendum of the driving tooth, deflected under load, would so be enabled to keep up contact a little longer as a compensation for the loss caused by tip relief. However, the shape of the gear teeth varies with the number of teeth, thus differently modified cutter profiles would be wanted not alone for all modules,

but for all numbers of teeth per module too. To reduce the great number of required cutter racks, groups were composed of certain numbers of teeth, within which the alteration of the profiles remains negligible, and the same cutter rack may be used.

Small numbers of teeth do not allow large groups, but with large number of teeth the difference is less. (This grouping of tools revokes the method of old times with formed milling cutters.) The size of the tip relief however is not yet settled therewith, [3] as deflection varies also with load, and so differently modified cutters would be wanted for different loads. Load is besides rarely steady, and even in this case, there is always a starting and a stopping period.

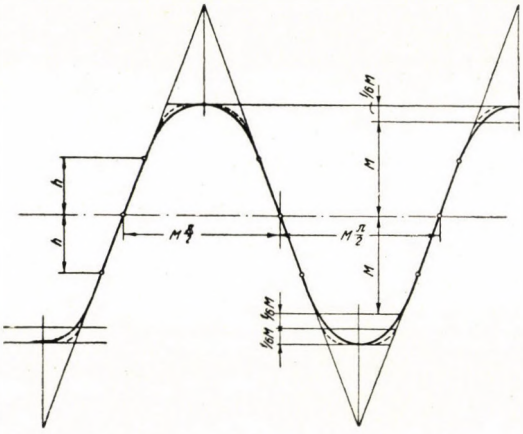


Fig. 2

Apart from the great number of tools needed, and the difficulties of producing such not straight-edged cutters, —briefly: the high costs of the BSS tip relief totally disregarded —, the essential deficiency of its lack of adjustability to a given load maximum remains.

Adjustable and perfect tip relief can be produced much simpler and with only a single straight-edged cutter rack per module, hence decidedly more cheaply, in a way to be exposed later *(Fig. 3)*, which, however, does not produce root rise. The promised prolongation of contact by the BSS root rise may be useful in speed reducers, but is it rather harmful in step-up drives, as there the deflection of the driving wheel-tooth is the greater one. Even speed reducers can profit by it only at a definite load. So root rise can be confidently dispensed with, all the more, as the loss of length of contact is for the most part only theoretical, as it will appear later. The essential of the above mentioned method of execution of tip relief consists in the exchange of the original cutter rack, after finished work, for another of a somewhat greater pressure angle, without changing the set-up, and then to cut around the already finished gear to the wanted depth

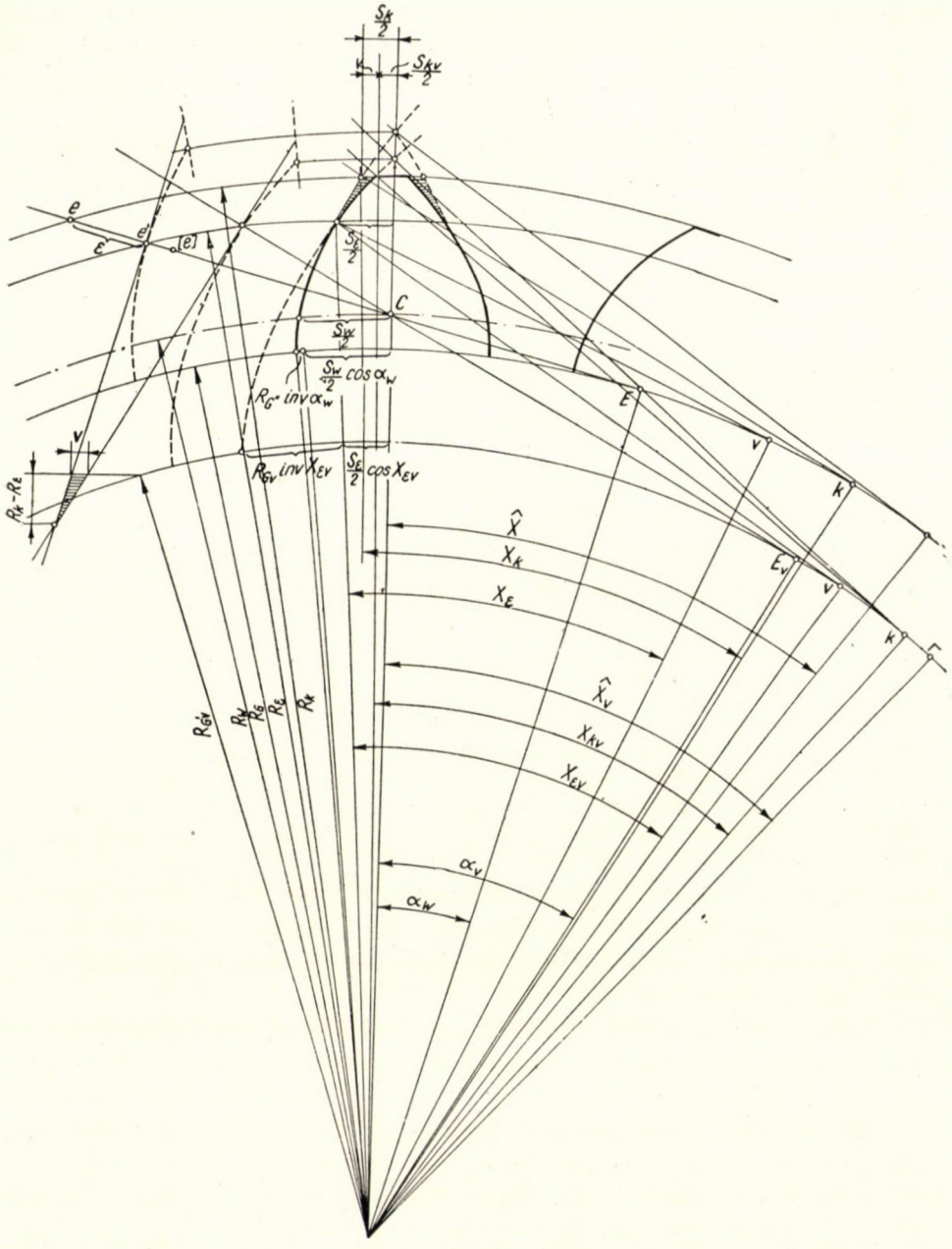


Fig. 3

Before detailing this simple and rapid operation its kinematics and geometry will be treated. The data of the original gear are known, among them the thickness of teeth on the machining (Willis) pitch circle: s_w which depends

on the applied profile displacement, and the provided backlash; further: the thickness of teeth on the base circle: $s_G = s_w \cdot \cos \alpha_w + 2 \cdot r_G \cdot \text{inv}\, \alpha_w$. The pressure angle of the relief cutter: $\alpha_v > \alpha_w$ is also given. The base circle corresponding to α_v would be: $r_{Gv} = r_w \cdot \cos \alpha_v$.

In *Fig. 3* the original involutes of the profile are presented by solid lines, while the involutes, generated by the relief cutter, by dotted ones, both from the origin of the involutes to their point of intersection. The relieved triangle is distinguished by hatching. The original length of active contact (belonging to: α_w) is limited at point e (intersection with the addendum circle).

The conceded loss for tip relief ε is limited by point e' which has to be selected above the limiting point [6] of the line of action of one pair of teeth: *[e]*, the locus of which depends on the point of intersection of the addendum circle of the actual mating-gear, from which it lies at a distance of one circular pitch of the base circle. In *Fig. 3* this point: *[e]* is chosen (as an example) arbitrarily. The radius: R_ε of the circle passing through the chosen point e' is known of course. From this circle the original thickness of the teeth begins to decrease. On the addendum circle the decrement reaches the value of $2 \cdot v = s_K - s_{Kv}$, the calculation of which will be presented further below. (It should be mentioned, that a drawing to proper scale also gives sufficient precision and is simpler and more expedient, especially if inv. tables are not at a hand.) On the work drawing, besides α_v, only the desired final crest measure s_{Kv} is to be marked.

Calculation [2]:

Given data of the original gear:

$$M_w\,;\ R_w\,;\ \alpha_w\,;\ R_K\,;\ \ s_w\,;\ R_G = R_w \cdot \cos \alpha_w.$$

Data of the relief cutter: the same M_w, a somewhat greater pressure angle:

$$\alpha_v\,;\ R_{Gv} = R_w \cdot \cos \alpha_v\,;\ \text{further:}\ R_\varepsilon.$$

$$\text{To determine is:}\ s_{Kv}\ \text{ or: }\ v = \frac{1}{2} \cdot (s_K - s_{Kv})$$

1. s_K may be gauged, but calculated also:

$$s_K = 2 \cdot R_K \cdot (\text{inv}\, \chi - \text{inv}\, \chi_K)$$

a) for: $\text{inv}\, \chi$:

$$\text{inv}\, \chi = \frac{1}{2} \cdot \frac{s_G}{R_G}\,;\ \text{where:}\ s_G = s_w \cos \alpha_w + 2 \cdot R_G \cdot \text{inv}\, \alpha_w$$

b) for: $\text{inv}\, \chi_K$:

$$\cos \chi_K = \frac{R_G}{R_K}\,;\ \text{——} \text{inv}\, \chi_K.$$

2. On the circle of radius R_ε the thickness of the tooth s_ε does not yet diminish by the relief.

For : s_{Kv} :

$$s_{Kv} = 2 \cdot R_K \cdot (\text{inv}\,\hat{\chi}_v - \text{inv}\,\chi_{Kv})$$

a) For $\text{inv}\,\hat{\chi}_v$:

$$\text{inv}\,\hat{\chi}_v = \frac{1}{2} \cdot \frac{s_{Gv}}{R_{Gv}}; \quad \text{where :} \quad s_{Gv} = s_\varepsilon \cdot \cos\chi_{\varepsilon v} + 2 \cdot R_{Gv} \cdot \text{inv}\,\chi_{\varepsilon v}$$

$$\text{but :} \quad \cos\chi_{\varepsilon v} = \frac{R_{Gv}}{R_\varepsilon} \quad \text{——} \quad \text{inv}\,\chi_{\varepsilon v} \text{ and so :}$$

s_{Gv} and with it : $\text{inv}\,\hat{\chi}_v$ also are known.

b) For : $\text{inv}\,\chi_{Kv}$:

$$\cos\chi_{Kv} = \frac{R_{Gv}}{R_K}; \quad \text{——} \quad \text{inv}\,\chi_{Kv}$$

With 1. and 2. we have : $s_K - s_{Kv} = 2 \cdot v$.

In a special case, if α_v (consequently R_{Gv} too), is not fixed, but R_ε and v were fixed, the necessary α_v could be determined from : (*Fig. 3* left).

$$\text{tg}\,\alpha_v \cong \text{tg}\,\alpha_w \cdot \frac{v}{R_K - R_\varepsilon}.$$

Concerning the cutting operation of the tip relief : On the machine the gear, after the cutting is finished, remains set. When drawing out the cutter holder, the tightening bolts of the cutter rack are loosened only. In taking out the rack and replacing it by the relief cutter, the bolts should not yet be tightened, allowing its free and automatic lateral displacement ; the automatic feed is disengaged and the cutter holder slowly approached, driven by hand, toward the teeth of the gear ; the cutter will thus adjust itself automatically. The bolts are then tightened and the generating motion of the machine engaged, but the feed remains hand driven, slowly advancing. During the advance the decrement of the thickness of crest of the teeth should be repeatedly gauged until the prescribed value is attained. Then by stopping the feed and letting the gear make one more full revolution, the uniform tip relief on all teeth is finished.

It should be noticed, that if α_v and v are given, R_ε is already determined, likewise with given α_v and R_ε, v is fixed.

The pressure angle of the relief cutter α_v may be chosen by $5° = \Delta\alpha$ greater than α_w of the original cutter. Thus at $\alpha_w = 15°$, $\alpha_v = 20°$. As such a tool is generally available, no extra tool is needed. If $\alpha_w = 20°$, then of course a special relief cutter is necessary with $\alpha_v = 25°$. But such a special relief cutter does not exact extreme precision (excepting pitch, of course), as the involute of the relief does not mesh in fact. Besides, there is no need of an addendum on the cutter teeth, as only the dedendum is working. Such a simplified tool is

not expensive. The suggested increment : $\Delta a = 5°$ may be contested and judged excessive, as the dimensions of deflection and of tolerances generally would demand much less. The transition of curvature would also become easier at a smaller value of Δa. The suggestion to choose 5°, however, is based on hydrodynamic considerations, but as these are not yet satisfactorily developed, the choice of Δa must be left open for the time being. Ingenious devices with cylinders coupled to produce controllable peripheral speeds, used for hydrodynamical tests, by Prof. Cameron, unfortunately cannot realize the varying depth of intrusion in bulk and of the tips and edges along the line of contact, changing their sense also at the middle point of E_1 E_2 [1]. Theoretically the tip relief could be even produced with the original cutter rack too. A same α_w generates different involutes on different machining pitch circles. The generative motion of the machine is produced by the interposed change gears. If they are calculated instead to R_w tc R_ε (as Willis radius) and substituted into the gear bcx of the generating motion, the involute of the tip relief arises. It is not always possible to find the adequate change gears, and even if such, or fairly adequate ones, were at hand, their calculation and substitution would require much more time and work than the simple exchange of the tool ; so that method is not practicable in planing, but it is applied in grinding the teeth of large wheels, as shown later.

b) Tip relief by hobbing

A worm hob is set with the tangent of its spiral line on the pitch cylinder parallel to the teeth to be cut. Consequently its generating profile, which lies in the gear plane, has not the shape of the standard profile of a cutter rack, but has a quite extraordinary elliptic gear contour *(Fig. 4)*, i. e. the section of the worm hob normal to its helix on the pitch cylinder. This elliptic gear changes the shape of its teeth continually during the revolution of the hob. After every revolution the initial profile is reproduced again. After a half revolution the initial profile becomes tilted upside down. *Fig. 4* presents these two phases of change of profile on a triple-threaded hob. On a single-threaded hob of a diameter large enough, the elliptic profile is elongated very much and the distortions of the shape of its teeth in the zone of the line of action becomes negligible ; but with three threads the distortion is striking already. A worm hob, made to cut spur gear teeth, should have uniform space and thickness of teeth on the pitch cylinder and straight cutting profiles in the section normal to the thread, like a cutter rack. Observation *(Fig. 4)* of the phase *B—B* shows, that this requirement is approached only to some extent (below) in the small middle zone. Right and left the teeth are gradually thickening in the dedendum and slimming in the addendum. After a half revolution, when the top profile is tilted down and starts hobbing, the distortion is maximum, and the root rise of the cutting pro-

file produces tip relief, in the same time the thinner addendum creates root rise, the more, the steeper the thread of the hob, i. e. the shorter the large axis of the ellipse.

In practice only single-threaded hobs of as large diameter as possible are used for the finishing cut ; the small tip relief and root rise produced thereby is of course an appreciable advantage of hobbing. For the rough cut double- or even triple-threaded hobs may be useful as their productivity is about double or triple respectively. But the tip relief becomes so too great and even harmful, because such a hob, with an adequate large diameter (to reduce distortion)

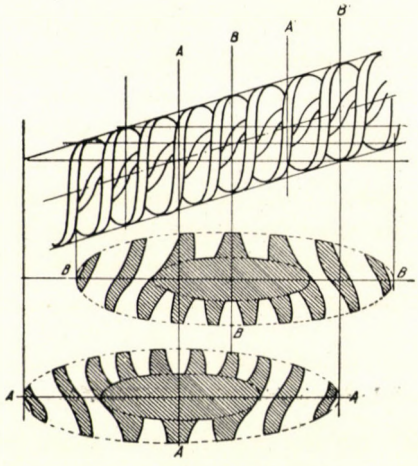


Fig. 4

would be too expensive and difficult to make. For a triple-threaded hob the necessary stock allowance for a due reduction of the tip relief to be executed by the finishing single-threaded hob, would be excessive, and this hob should not take large and numerous chips, not being profile conserving and enduring many sharpenings. The gain attainable with a triple-threaded roughing hob is thus very problematic and it seems better to use only double-threaded worms. The dimensions of the tip relief produced by a worm hob are not adjustable, they are inherent in the tool.

c) *Tip relief by shaping with cutter pinion.* A cutter pinion is not very fit for producing tip relief; it may serve for it only in very great mass production on machines of the special Fellows type. The complicated design, difficult manufacture and short life of such a tool is mostly not profitable. To produce such a particular cutter pinion a special cutter rack must first be designed, and both are unfit for any other number of teeth.

Cutter pinions are not profile conserving and cannot be sharpened often. The teeth of a such particular cutter pinion can be shaped by the BSS method. The geometric calculation may be derived from the already given equations.

B) Tip relief by grinding

The majority of gear drives serve for speed reduction and as the wheels are mostly made of originally hard material, their tip relief is, — as mentioned already — planed, not ground. But there are the step-up drives and reversible drives, where the pinion, made generally of hardened material, demands

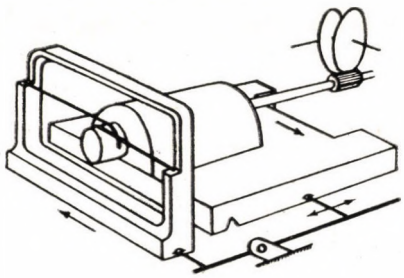


Fig. 5

tip relief to be produced by grinding. On gears of smaller size this is executed best by the Maag-type rollband grinder specially adapted for tip relief. Gears of greater size can be ground on big Maag-type grinders with a change gear box for the generative motion (like that provided on Maag planers), and the tip relief is achieved by an adequate change of the gear set, as already discussed.

1. *Tip relief by rollband-grinding*

The augmentation of the pressure angle for the involute of the tip relief is attained on the same kinematic basis, as already indicated for the relief cutter rack, but by other means. Instead of using a tool with a greater pressure angle, the speed of rolling is correspondingly augmented. In rolling on a radius R_ε (start of the tip relief) ;

$$\cos \chi_\varepsilon = \frac{R_G}{R_\varepsilon} \tag{1}$$

Moving the rollband holder at a certain speed against rolling, the required increment of rolling speed is gained. The scheme of the mechanism is shown in *Fig. 5*. The rollband holder is fed in by the slide support of the gear axis, which trans-

mits the required speed Δc to it by an adjustable balance lever. Δc depends on the chosen R_ε. The radius of the rollband cylinder is R_w and the pheripheric speed of it is c_w; then (denoting the peripheric speed corresponding to R_ε with c_ε:

$$\Delta c = c_\varepsilon - c_w = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} (R_\varepsilon - R_w) \text{ and with (1):}$$

$$\Delta c = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} \cdot R_w \left(\frac{1}{\cos \chi_\varepsilon} - 1 \right).$$

2. *Tip relief by grinding through the intermediate of change gears*

For the calculation of the change gears the circular pitch : t_ε corresponding to R_ε is $t_\varepsilon = t_w \cdot \frac{R_\varepsilon}{R_w}$.

The suitable change gears should be selected and fitted in. Considering that R_ε is not too scrupulously fixed, an acceptable approach may also do, if the precise gears are not at hand.

Internal gearing

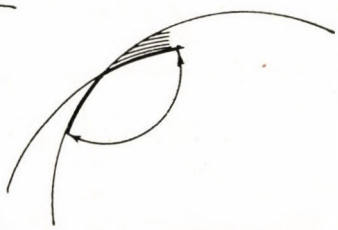
Tip relief on internal gearing is an unsolved problem. The growing interest for planetary drives, however, requires an adequate procedure to lessen the high Hertzian stress at picking up contact. Interior teeth are generated by cutter pinions. To cut away the tip of the teeth would be quite easy. The well known (in literature often treated) phenomenon called «interference», which occurs when the number of teeth on the cutter pinion is higher, than necessary, would of course cut away the tips. So it would suffice to choose a cutter pinion of only one tooth more than the «limit» number. However, the result would be of no use in regard of lessening the Hertzian stress, but on the contrary. The transition of the profil curvature produced by the intersection of two concave curves is sharp-edged. On external gears the tip relief, built up of convex curves, creates an easy transition.

Fig. 6a and 6b point out the difference in a somewhat exaggerated manner. Manufacturers (and literature too) give complicated formulas and tables to find out the «limit» number of teeth for the cutter pinion to avoid interference. This «limit» number is analogous to the well known limit number of external gearing to avoid «undercutting» which is exactly the same phenomenon as the interference of internal gears. The kinematics of both is identical. An examination of this question may suggest the way for solving the principal problem, the diminution of the Hertzian stress. The phenomenon of interference may be made more apparent by a simple consideration. [5] The essence of interference and undercutting is, that the addendum circle of the cutter pinion (or the addendum

line of a cutter rack) cuts the line of contact beyond the limit point. The points of this excluded zone refer to a theoretical contact with the materially non existing phantom branch of the involute arising from its root point again as a reflected image of the real branch. The relative path of the tip of the cutter tooth hits against the obstacle of the profile already cut, and undercutting or, (if instead of a cutter, in mesh with a mating gear) collision occurs. In *Fig.* 7 we can follow the relative path of the tip of an internal tooth. As it is known, the space E_1E_2 is the excluded zone on internal teeth, (the part beyond E_2 falls out by itself). On external gears inversely, E_1E_2 is the only possible length of the line of contact, and an intersection with the path of the tip point (or any other point) beyond the limit, produces undercutting (or interference). The reason is the same in both cases. Hence the determination of the limit number



internal teeth
Fig. 6a.



exrernal teeth
Fig. 6b.

of teeth on a cutter pinion requires the previous determination of the minimal radius of the addendum circle of the internal gear-wheel: $r_{K''}$ (for unit module)

$$r_{K''}^2 = r_{G''}^2 + \overline{E_1E_2}^2; \quad \text{where}: \quad r_{G''} = \frac{z_2}{2} \cdot \cos \alpha_w$$

$$\overline{E_1E_2} = \frac{z_1 - z_2}{2} \cdot \sin \alpha_w = \frac{z_2}{2} \cdot \left(\frac{1 - A}{A} \right) \cdot \sin \alpha_w;$$

$$\text{where } z_2 \text{ and } A = \frac{z_2}{z_1} \text{ are given.}$$

$$\text{So}: \quad r_{K''}^2 = \frac{z_2^2}{4} \cdot \cos^2 \alpha_w + \frac{z_2^2}{4} \cdot \left(\frac{1 - A}{A} \right)^2 \cdot \sin^2 \alpha_w;$$

$$\text{and}: \quad r_{K''} = \frac{z_2}{2} \cdot \left\{ \cos^2 \alpha_w + \left(\frac{1 - A}{A} \right)^2 \cdot \sin^2 \alpha_w \right\}^{1/2}$$

$$\text{and}: \quad z_1 = \frac{z_2}{A}.$$

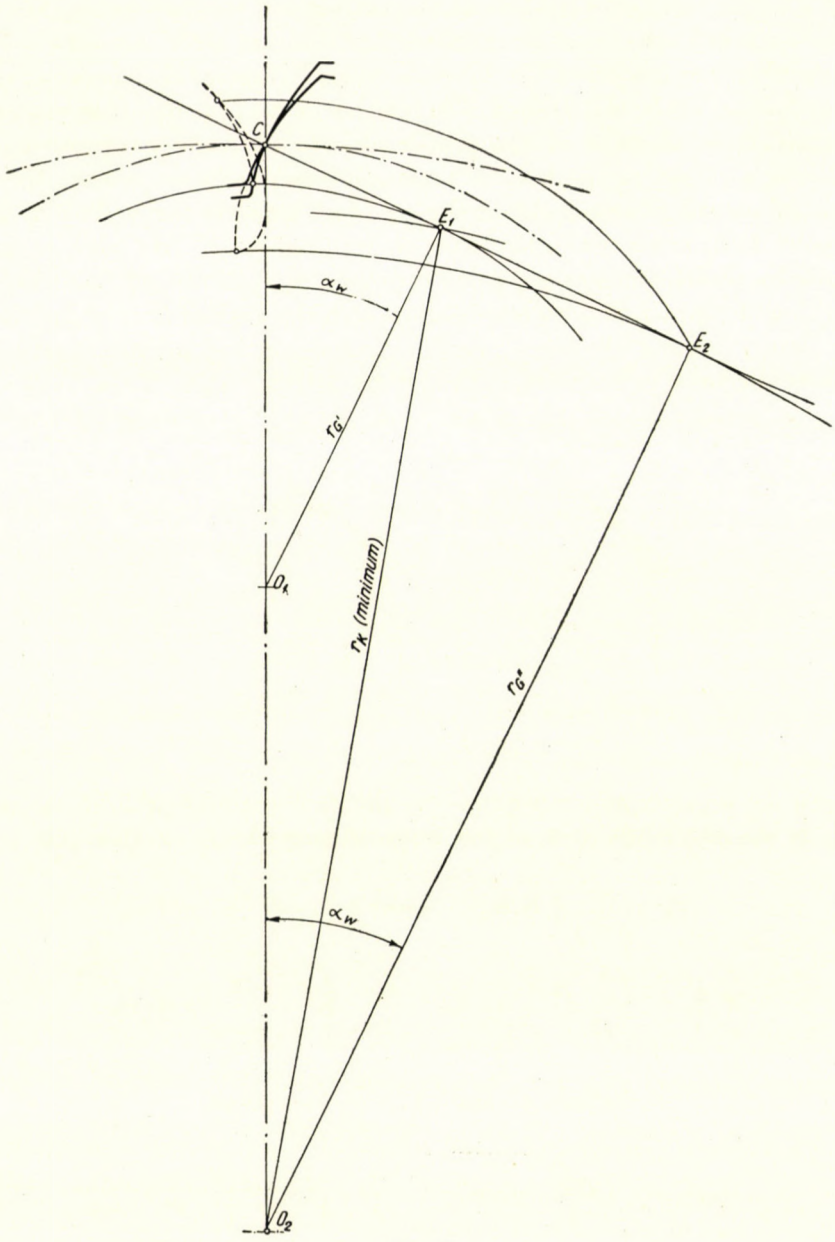


Fig. 7

The principal aim is, however, softening of the Hertzian stress on internal gearing, which can be attained in a way totally opposite to that in the case of external teeth. A small root rise on the teeth of the pinion cutter, executed by a

special root relieving cutter rack of smaller pressure angle than the original one, will answer the problem.

Concerning the execution : it should be done in an inverse succession against the method used for external gears. Roughing with the root relief cutter rack (which is in this case of the conventional type), then planing with the standard cutter rack. The pinion thus produced will receive smooth transition curves. There is no obstacle of principle against this method, however, it could not yet be tested for want of means, so it is to be taken as a suggestion only, open to further discussion. Lately a Maag disk type generating grinder has been brought out, very likely without any adapter for tip relief, for such could be hardly imagined as possible. However grinding is noways excluded by the suggested method.

Tables may be composed containing the values of deflection under unit load for different materials and numbers of teeth, grouped according to the BSS. The sum of tolerances may be likely tabulated to aid the designer in his option in the rather complicated field of dimensioning and execution of the tip relief.

REFERENCES

[1] *Analysis of Gear Friction.* Acta Tech. Acad. Sc. Hung. Tom. VI. Fsc. 3—4, 1953, by the author.

[2] *Kinematic and Geometrical Calculations on Spur gears.* Acta Tech. Acad Sc. Hung. Tom. IX. Fsc. 3—4. 1954, by the author.

[3] *Modifications on Gear Tooth Profiles.* Product Engineering. 1949. IX. P. 126, by D. W. Dudley.

[4] Z. f. Werkzeugmaschinen u. Werkzeuge. 1913. Heft No. 8. S. 362. *Kritischer Vergleich der Stirnrad-Bearbeitungsweisen*, by the author.

[5] Z. d. V. Östr. Ing. u. Arch. 1908 No. 36. *Beiträge zur Berechnung der Zahnräder*, by the author.

[6] V. D. I. Maschinenbau. 1926. Heft No. 8. S. 362. *Beitrag zur Berechnungsweise der Stirnzahnräder*, by the author.

SUMMARY

Analysis of the reason for tip relief on spur gears, tools and methods of execution. Kinematics and geometry. New method of proportioning relief to load. Suggestions for tip relief on internal teeth.

ЗАТУПЛЕНИЕ ОСТРИЯ ВЕРШИНЫ ЗУБЦА ЛОБОВЫХ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

Д-р техн. наук Э. Видеки

Резюме

Деформации, возникающие при нагрузке, а также погрешности при обработке требуют соответствующего затупления острия вершины зубца внешнего зацепления. Однако, теоретические расчеты в связи с вышеупомянутой проблемой, а также известные приемы не являются удовлетворительными решениями и, в первую очередь, в отношении размера применяемого затупления. Подходящего решения для внутренних зацеплений совершенно не существует, хотя необходимость такого решения становится все более и более насущной проблемой в связи со все расширяющейся областью применения планетарных передач.

Данная работа на основе анализа возникающих проблем дает возможность определения, — в случае внешнего зацепления, — размеров и оформления затупления острия зубца, соответствующие прикладываемым нагрузкам и применяемым допускам, а также способа изготовления при помощи более простых и дешевых методов и инструментов, чем применявшихся до настоящего времени, и с результатом, испытанным в течении ряда лет. А в случае внутреннего зацепления дается метод, основывающийся на углублении тригонометрии эвольвенты и являющийся принципиально аналогичным, но при помощи совершенно другого приема достигается тот же результат, как и в случае внешнего зацепления затупление вершины зубца. Далее дает простое объяснение явления интерференции, исключив связанные с этим явлением приведенные в литературе сложные и требующие затраты большого количества времени расчеты.

ÉPOINTAGE DES TÊTES DE LA DENTURE DROITE D'ENGRENAGES

Prof. E. VIDÉKY

Docteur des Sciences Techniques

RÉSUMÉ

Les déformations sous la charge et les erreurs d'usinage demandent un épointage approprié des têtes de la denture extérieure des engrenages. Les calculs théoriques et les procédés d'exécution en usage ne sont pas satisfaisants surtout du point de vue des dimensions de l'épointage. Il n'existe aucune solution pratique pour la denture intérieure, quoique la vaste envergure de l'emploi d'engrenages planétaires en ait grand besoin.

Cette étude analyse tous ces problèmes et donne les solutions suivantes :

Calcul de la géométrie de l'épointage correspondant à la charge et aux tolérances accordées et méthodes d'exécution plus simples et moins coûteuses que celles jusqu'ici employées. Les méthodes suggérées peuvent être exécutées à l'aide d'outils simples et ont donné pleine satisfaction pendant plusieurs années de fabrication.

Pour la denture intérieure la solution proposée — basée sur l'approfondissement de la trigonométrie de la développante — donne le même résultat que l'épointage de la denture extérieure, par un procédé analogue en principe, mais tout à fait différent.

Enfin une explication simple et générale de l'intérference dans l'engrenage est présentée, laquelle élimine les calculs onéreux et compliqués préconisés dans la littérature.

DIE ZAHNFLANKENZURÜCKSETZUNG VON STIRNRADVERZAHNUNGEN

Prof. E. VIDÉKY

Doktor der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Die infolge der Belastung eintretenden Formänderungen sowie die Ungenauigkeiten während der Fabrikation bedingen eine entsprechende Zurücksetzung der Kopfkanten der Aussenverzahnung. Die auf dieses Problem bezüglichen theoretischen Berechnungen sowie die bekannten Ausführungsverfahren stellen indessen keine zufriedenstellende Lösung dar, insbesondere nicht in bezug auf die Abmessungen der Zurücksetzung. Für Innenverzahnungen fehlt eine geeignete Methode sogar gänzlich, obwohl deren Notwendigkeit bei der stets stärkeren Verbreitung der Planetengetriebe lebhaft zutage tritt.

Die vorliegende Abhandlung gibt auf Grund der Analyse der auftretenden Probleme einerseits eine Jahre hindurch erfolgreich erprobte Methode zur Feststellung der der Belastung und der zulässigen Toleranz entsprechenden Abmessungen sowie der Art und Weise der Ausbildung und Herstellung der Aussenverzahnung, u. zw. auf eine weit einfachere und billigere Weise und mit weit einfacheren und billigeren Werkzeugen als bei den bisherigen diesbezüglichen Verfahren ; andererseits bringt sie eine auf der Vertiefung der Evolvententrigonometrie beruhende Methode bei Innenverzahnungen, mit der sich auf eine theoretisch analoge, aber vollständig andere Weise dasselbe Resultat erzielen lässt wie bei der Zahnflankenzurücksetzung bei Aussenverzahnungen. Des weiteren gibt die Arbeit eine allgemein gültige, einfache Erklärung für die Erscheinung der Interferenz, wodurch sich die im diesbezüglichen Schrifttum angeführten langwierigen und verwickelten Berechnungen vermeiden lassen.

ÜBER DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN ISOSTATISCHEN ANOMALIEN UND VERGENZEN DER GEBIRGSBILDUNG *

V. SCHEFFER
KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

In seinen auf die Isostasie bezüglichen, während der letzten Jahre gehaltenen Vorträgen [1, 2] befasste sich der Verfasser mit den Bewegungen einzelner Zonen der Erdkruste, die einen epirogenetischen Charakter aufweisen.

In der vorliegenden Abhandlung stellt sich der Verfasser die Aufgabe, die orogenetischen, überwiegend horizontal gerichteten Krustenbewegungen von dem Gesichtspunkt aus zu untersuchen, ob diese Bewegungen zu dem Bestreben der Erdkruste, sich in ein isostatisches Gleichgewicht zu setzen, in Beziehung stehen.

Somit ist der Gegenstand dieser Arbeit die Untersuchung der horizontal gerichteten Komponenten regionaler Krustenbewegungen vom Gesichtspunkt der Isostasie.

Im «Isostasie» betitelten Vortrag des Verfassers wurde auf den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung wie folgt hingedeutet:

«Die Entstehung der Deckfalten der Appenninen weist auf eine, einer orogenen Periode angehörende Phase des Bestrebens nach isostatischem Gleichgewicht hin. Einige moderne Geologen, sowohl Italiener, wie auch Ausländer [3] stimmen derzeit in der Meinung überein, dass die Deckfalten der Appenninen, die stellenweise eine Schichtenmächtigkeit bis zu 2000 m erreichen, vom Gebiet des Ligurischen Meeres, demnach aus einer Entfernung von mehr als 100 km, durch orogene Kräfte in Bewegung gesetzt, infolge der Wirkung der Schwerkraft an ihren derzeitigen Ort — in die Depressionszone Appenninen-Poebene — Adriatisches Meer — geglitten sind. Es ist leicht einzusehen, dass die Verschiebung der Ligurischen Deckschichten vom Gebiete des Ligurischen Meeres nach ihrem derzeitigen Ort ebenfalls eine Folge des Bestrebens nach isostatischem Gleichgewicht war.

Ebenso lässt sich feststellen, dass der orogene Vorgang, der zur Entstehung der Karpaten führte und die Deckmassen der Karpaten aus der Zone der durch

* Vorgetragen auf dem zwischen 9. und 15. Juni 1952 abgehaltenen geodätisch-geophysikalischen Kongress in Budapest; in ungarischer Sprache erschienen in Mitt. d. Klasse f. techn. Wissenschaften der Ungar. Akad. d. Wiss. (»A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei«) Bd. VII (1952) 519/527.

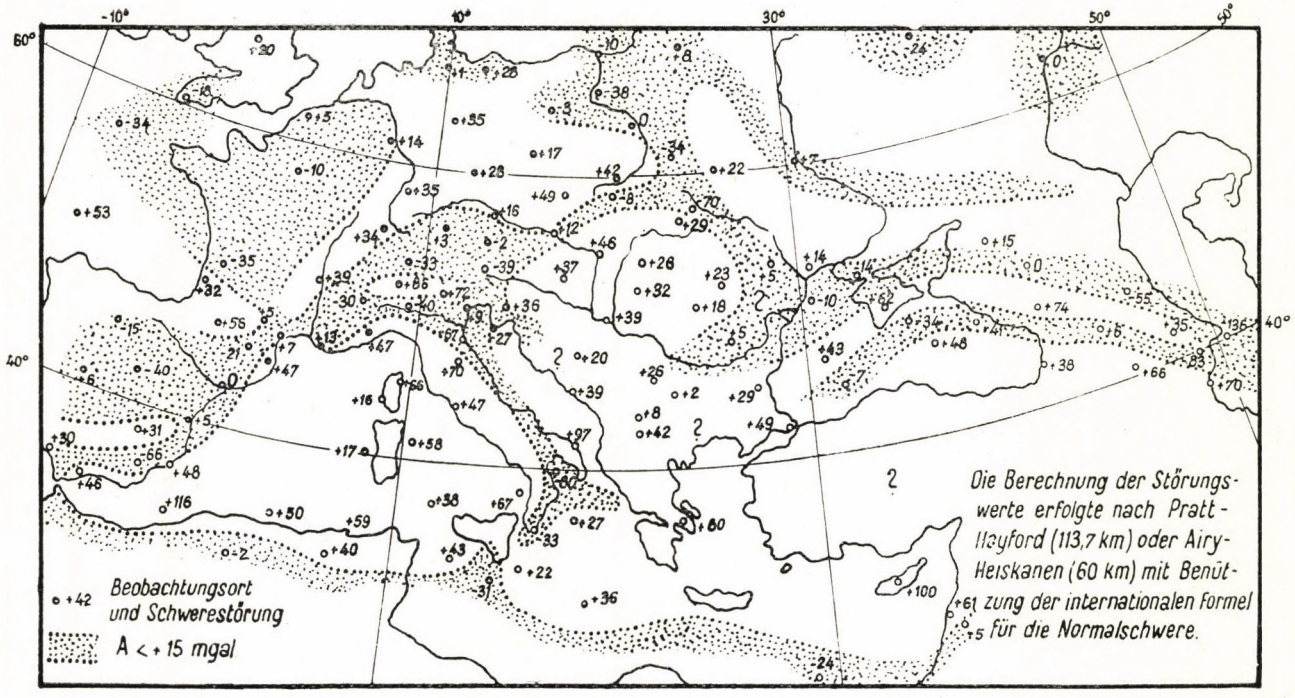


Abb. 1.

Die isostatischen Schwerestörungen in der Zone der mediterranen Kettengebirge nach L. Tanni

die isostatischen Anomalien gekennzeichneten Massenüberschüsse an ihren jetzigen Ort verschob, gleichfalls einen Ausdruck des Strebens der Erdkruste nach isostatischem Gleichgewicht darstellt.»

Die Untersuchung des oben angedeuteten Problems hat der Verfasser seither auf die ganze Zone der mediterranen Kettengebirge ausgedehnt und er beabsichtigt im Rahmen der vorliegenden Arbeit in erster Linie die Beziehungen darzulegen, die zwischen den isostatischen Anomalien einerseits und den gebirgsbildenden Vergenzen, den Richtungen der Faltenbildung der Kettengebirge andererseits bestehen.

Abb. 1. zeigt eine von *Tanni* [4] unter Benutzung der charakteristischen, zonalen Werte entworfene Karte der isostatischen Anomalien der Zone der mediterranen Kettengebirge, auf der die Gebiete, die Schwerkraftsmaxima darstellen, als weisse Flächen erscheinen, wogegen die Zonen der isostatischen Depressionen, deren Anomaliewerte unter dem europäischen Durchschnitt, d. h. unter + 15 *mgal* liegen, punktiert angedeutet sind.

Beobachtet man die auf dieser Karte angegebenen, durch niedrige Anomaliewerte gekennzeichneten Streichrichtungen, so lässt sich feststellen, dass sie den Zonen der mediterranen Kettengebirge folgen.

Diese Sachlage hatte — auf Grund einer Betrachtung der Lage der *Bouguer*-Anomalien — schon *Kossmat* [5] erkannt, der zur Erklärung der geologischen Gründe der Schweredepressionen eine grosszügige Interpretation gab.

Während die Gebiete der negativen Anomalien Streifen darstellen, die mit den Kettengebirgszonen identisch verlaufen, umfasst ein Teil der Massenüberschüsse aufweisenden, durch positive Anomalien gekennzeichneten Zonen, so das westliche Mittelmeerbecken, das Karpatenbecken und der durch wenige Daten definierte, von der Balkanhalbinsel nach Kleinasien gerichtete Zug, grössere, mehr oder minder geschlossene Gebiete.

Es sei hier bemerkt, dass die Gebiete der Pyrenäen, der Südalpen und des Kaukasus, vom Obigen abweichend, durch streifenartig angeordnete, positive Anomalien gekennzeichnet sind.

Abb. 2 stellt die Zonen der mediterranen Kettengebirge gemäss den Vorstellungen von *Kober—Bubnoff* [6,7] dar.

Es sei auch erwähnt, dass die den Vorstellungen von *Bubnoff* entsprechende Linienführung des Systems der Kettengebirge in einzelnen Teilen mit den bisher konstruierten Daten der Karte der isostatischen Anomalien nicht in Übereinstimmung gebracht werden kann und dass es z. B. gemäss diesen Daten keineswegs wahrscheinlich ist, dass die Fortsetzung des Balkangebirges über Anatolien nach dem Antikaukasus führt.

Indessen haben derartige, die Linienführung betreffende, durch verschiedene Autoren verfochtene, voneinander abweichende Ansichten für den Inhalt der vorliegenden Arbeit keine Bedeutung, zumal die hier gezogenen Konsequenzen lediglich auf unbestrittenen, allgemein anerkannten Vergenzrichtungen beruhen.

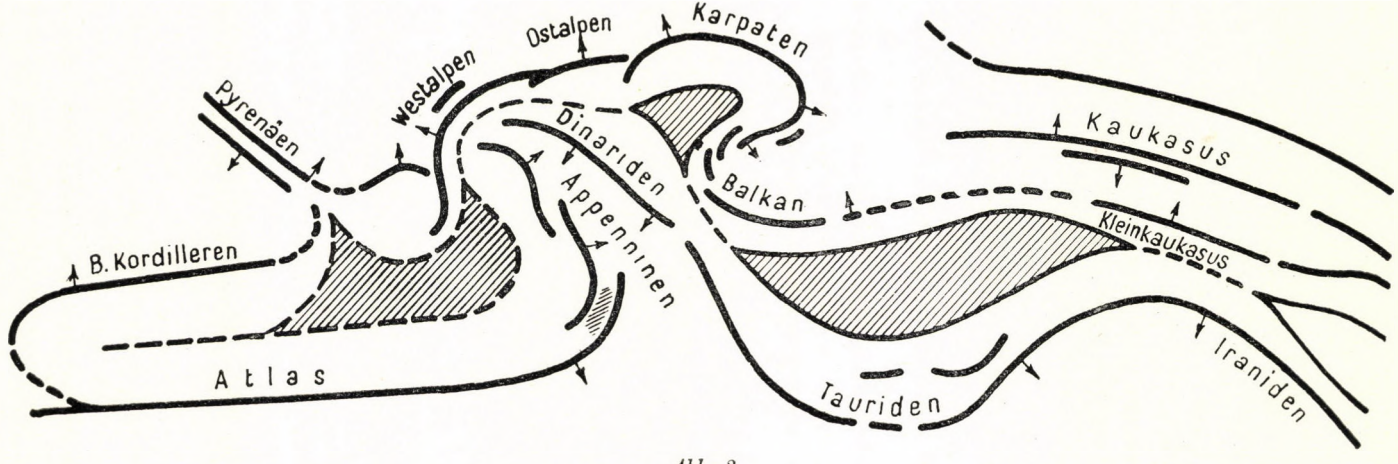


Abb. 2

Die Zonen der mediterranen Kettengebirge nach Kober—Bubhoff

Zur Untersuchung des Zusammenhanges zwischen den isostatischen Anomalien und den Faltungsrichtungen, Vergenzen der mediterranen Kettengebirge wurden auf unserer Karte in *Abb. 3* die von *Tanni* konstruierten isostatischen Depressionszonen und das *Kober—Bubnoff*sche Schema der Kettengebirgszone mit den gebirgsbildenden Vergenzen zusammen dargestellt.

Auf Grund der Karte lassen sich folgende Fesstellungen machen :

Die zwischen die südeuropäischen Gebirgsketten eingekeilten, von *Kober* [7] «Zwischengebirge» genannten Gebirgsmassive stellen durch Massenüberschuss gekennzeichnete Teile der Erdrinde dar. Zu diesen Massiven gehören : die Tyrrhenis oder das Korsisch—Sardinische Massiv, das sich zwischen Appenninen, Atlasgebirge und Betiden erstreckt, das sog. Pannonische Massiv [8] zwischen Karpaten und Dinarischen Alpen, das *Prinz* [9] als Tisia-Massiv bezeichnet, und das von *Bubnoff* «Östliches Zwischengebirge» genannte Massiv, das vom Süden des Balkangebirges ausgeht und im grossen und ganzen das Gebiet von Kleinasien umfasst.

Als wichtig ist die Feststellung anzusehen, dass es auf Grund der Karte der isostatischen Anomalien nicht angeht, die Existenz eines in der Schleife zwischen Südkarpaten und Balkangebirge gelegenen, sog. Präbalkanischen oder Kimmerischen Massivs, bzw. von *Lóczy jun.* [10] Walacheimassiv genannten Blocks anzunehmen. Gleichfalls erscheint die Existenz eines dem Gebiet des Adriatischen Meeres angepassten Blocks, des sog. Adriamassivs, als unwahrscheinlich. Die Wahrscheinlichkeit das Bestehens dieser beiden Massive hatte übrigens auch schon *Bubnoff* verworfen.

Laut der isostatischen Anomalien entsprechen den besprochenen Gebieten Depressionszonen, d. h. Teile der Erdkruste, die Massendefekte aufweisen.

Auf Grund der Untersuchung der in *Abb. 3* gezeigten Karte wird man feststellen können, dass die Zone keine «die Faltung in die eigene Richtung orientierenden, starren Massive» [8] enthält.

Was die Vergenzen anbelangt, so lässt sich die eindeutige Feststellung machen, dass sie sich von den Gebieten der isostatischen Maxima nach den Depressionen richten.

Die das Tyrrhenis-Massiv umgebenden Appenninen, das Atlasgebirge und die Betiden zeigen einen einseitigen Aufbau ; ihre Faltungsrichtungen weisen nach den das Massiv umgebenden und durch Massendefekte gekennzeichneten Depressionsgebieten hin.

Die gleiche Erscheinung ist für die Faltungsrichtungen der das Pannonische Massiv umgebenden Karpatischen und Dinarischen Gebirgsketten feststellbar ; die Faltungsrichtungen werden einerseits durch die sich längs der Karpaten hinziehende Depressionszone, andererseits durch den in der Zone der Adria gelegenen, negative isostatische Anomalien aufweisenden Gebietsstreifen bestimmt.

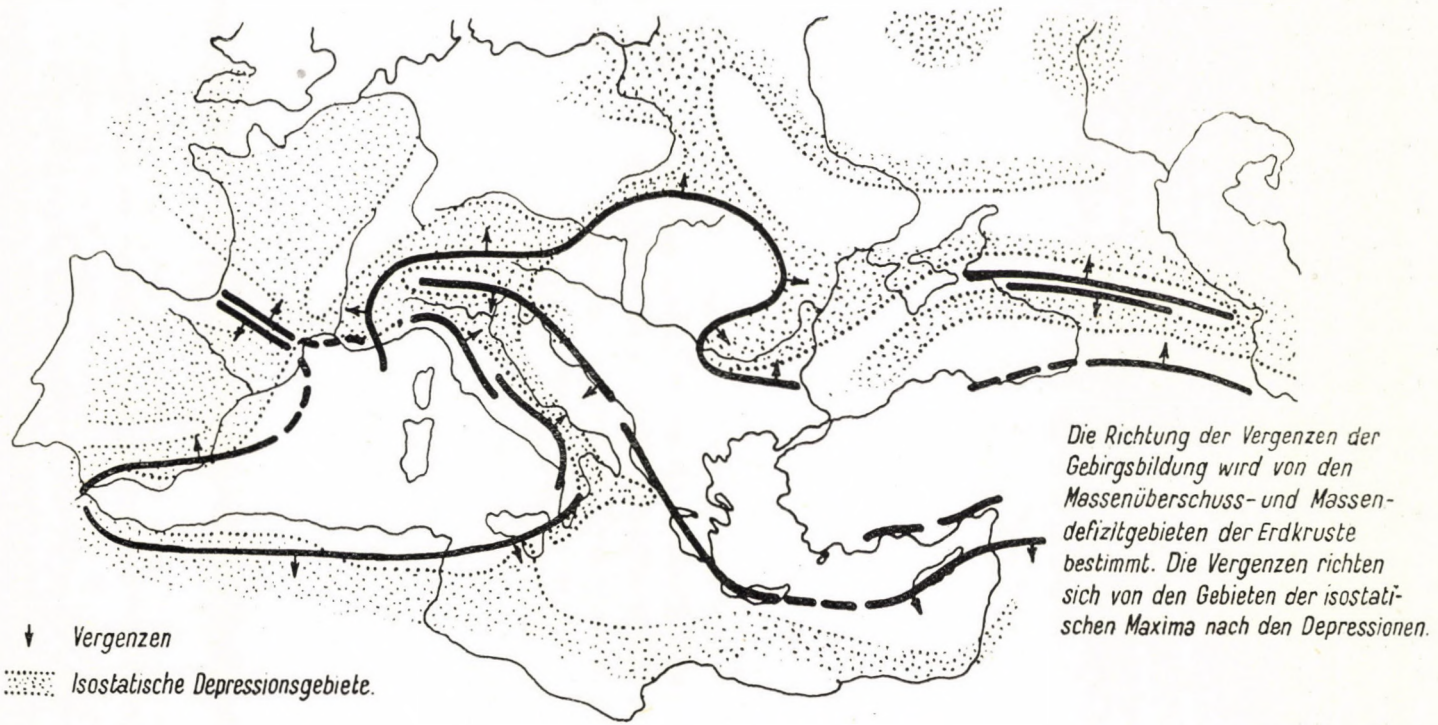


Abb. 3

Der Zusammenhang zwischen isostatischen Anomalien und Vergenzen der Gebirgsbildung in der Zone der mediterranen Kettengebirge

Die Vergenzrichtungen der das Östliche Zwischengebirge im Süden begrenzenden Tauriden und Iraniden werden durch die Lage der im Südteil des Mittelmeeres erkennbaren Schweredepressionen determiniert, wogegen die dem einseitigen Aufbau der in der Nordzone gelegenen Balkan- und Kleinkaukasusgebirge entsprechenden, nach Norden gerichteten Faltungen nach den im Norden dieser Gebirge befindlichen, Massendefekte aufweisenden Zonen orientiert sind.

Für die Vergenzrichtungen der Gebirge mit doppelseitigem Aufbau lassen sich ähnliche, eindeutige Feststellungen machen, und zwar:

Die Pyrenäen erscheinen im Bilde der isostatischen Anomalien als ein Störungsstreifen, der durch positive Werte gekennzeichnet ist. Dieses Gebirge weist einen doppelseitigen Aufbau auf. Die Vergenz seines Nordflügels richtet sich nach der isostatischen Depression des Aquitanischen Beckens hin, die Faltungen der Südzone dagegen nach der Massendefektzone im Gebiet des Ebrobeckens.

Die Vergenzen der West-, Nord- und Südalpen weisen vom isostatischen Maximumgebiet Ivrea—Südalpen, das auf der Karte von *Tanni* unvollkommen dargestellt ist und sich in Wirklichkeit nach Durchlaufen der auf der Karte angegebenen ostwestlichen Streichrichtung nach Süden, in die Richtung zum Ligurischen Meer zu wendet, nach Westen, Norden und Süden, in die Richtung der das Maximumgebiet umsäumenden Depressionszonen.

Das Gebiet des Kaukasus ist auf einem isostatischen Maximumstreifen gelegen. Seinem doppelseitigen Aufbau gemäss sind nördliche und südliche Faltungsrichtungen vorhanden, die nach den das Gebirge im Norden und Süden umsäumenden Depressionszonen hinweisen.

Auf Grund der aufgezählten Fälle lässt sich der Zusammenhang zwischen Vergenzrichtungen und isostatischen Anomalien eindeutig feststellen.

Die Tatsache, dass die Vergenzen von den Gebieten der isostatischen Maxima nach den Depressionen zu gerichtet sind, lässt darauf schliessen, dass die sich bei der Entstehung der Kettengebirge abspielenden, im wesentlichen horizontal gerichteten Krustenbewegungen ebenfalls isostatischer Natur sind.

Es gibt demnach nicht nur Kompensationen von vertikaler Richtung, vielmehr können auch Vorgänge festgestellt werden, die sich anlässlich orogener Krustenbewegungen abspielen und als Beweise des Strebens der Erdkruste nach horizontal gerichteter isostatischer Kompensation aufgefasst werden müssen.

Ein gemeinsamer Charakterzug aller sich auf isostatische Kompensationen in der Vertikalebene beziehenden Hypothesen ist die Voraussetzung, dass die an der Oberfläche in Erscheinung tretenden Massenüberschüsse durch Massendefekte in der Tiefe, an den Gebirgswurzeln kompensiert werden.

Das Wesen der sich in der Horizontalebene abspielenden isostatischen Kompensationsvorgänge ist aber die Erscheinung, dass die gebirgsbildenden

Kräfte aus den Zonen der Massenüberschüsse Gebirge nach jenen Gebieten verschieben, wo Massendefekte bestehen, d. h. nach den Depressionsgebieten, die — um die oben verwendete Ausdrucksweise nochmals zu gebrauchen — als Wurzelregionen ohne Gebirge bezeichnet werden können.

Die von den Geologen derzeit in immer breiteren Kreisen akzeptierte Theorie, wonach die Kettengebirge unter dem Einflusse der Schwerkraft in ihre jetzige Lage geglitten sind, enthält oder setzt stillschweigend alles das voraus, was im obigen dargelegt wurde.

Hier sei erwähnt, dass in der Geologie auch bisher schon Ansichten anzutreffen waren, die den oben gezogenen Folgerungen nahestanden.

Der englische Geologe *Deeley* [11] schrieb im Jahre 1918 eine sehr gründlich durchdachte Arbeit, in der die Vermutung erwähnt wird, dass die Gebirgsbildung eine Folge von Schwerewirkungen sein könnte.

Auf Grund der Untersuchung der isostatischen Anomalien und der Vergenzen lässt sich zwar eine zwischen den Faltungsrichtungen und der Massenverteilung der Erdkruste bestehende Beziehung feststellen, doch können hieraus noch keine eindeutigen Folgerungen über den Grund der Ursprünge der orogenetischen Vorgänge gezogen werden.

Im Rahmen seiner Oszillationstheorie, die in den Jahren nach 1930 grosses Aufsehen erregte, setzt *Haarmann* [12] voraus, dass die orogenetischen Bewegungen einfache, durch die Wirkung der Schwerkraft hervorgerufene Gleitvorgänge seien. Setzt man nun an die Stelle der von *Haarmann* eingeführten Begriffe von Geotumoren und Geodepressionen die Ausdrücke isostatische Maxima und Minima, so werden die Einwände eines Teiles der Gegner der in Rede stehenden Hypothese schon dadurch gegenstandslos.

Es sei hier davon abgesehen, die Namen aller jener Schweizer, deutscher, österreichischer, italienischer, englischer, holländischer und anderen Nationalitäten angehörender Forscher anzuführen, die in ihren Arbeiten die Entstehung der einzelnen Glieder des mediterranen Kettengebirgssystems auf Gleitbewegungen unter Einwirkung der Schwerkraft zurückführen.

Von diesen Arbeiten sollen hier nur jene von zwei Schweizer Forschern, *Lugeon* und *Gagnebin* [13, 14] etwas ausführlicher behandelt werden, zumal ein Teil der in diesen Arbeiten geäusserten Voraussetzungen die in der vorliegenden Abhandlung gezogenen Konklusionen näher berührt.

Lugeon und *Gagnebin* setzen voraus, dass die ganze perialpine Depression infolge der Belastung, die einerseits von den grossen Massen der Sedimentgesteine, andererseits von den infolge der Schwerewirkung auf diese Sedimente geglittenen Deckfalten ausgeübt wurde, nach Ablauf der Gebirgsbildung isostatisch abgesunken ist.

Dies entspricht im wesentlichen der Ansicht von *Kossmat*, dass nämlich die sog. «Randsenke» am Tragen der Gebirgslast beteiligt ist. Diese Ansicht würde einen Zusammenhang anderer Art zwischen isostatischen Anomalien

und den Vergenzrichtungen der Kettengebirge begründen. Eine eingehendere Untersuchung der isostatischen Anomalien beweist jedoch, dass die geschilderte Voraussetzung nicht zutrifft.

Der durch die Richtungen der Faltung bestimmte äussere Vorraum der Kettengebirge ist im allgemeinen durch hohe negative Werte der isostatischen Anomalien gekennzeichnet. Wäre das Absinken des Vorraums ein postorogener Vorgang gewesen, so hätte der Grösse der negativen Anomalien gemäss überall in den Vorräumen eine Überkompensation von bedeutendem Ausmass eintreten müssen. Dies wäre aber höchst unwahrscheinlich.

Unter den Depressionszonen, die bis zum Vorraum der Kettengebirge reichen, gibt es solche, die grosse Flächenräume einnehmen. Zu diesen gehören die im Nordosten der Pyrenäen gelegene isostatische Depression, die sich im grossen und ganzen auch über die Zone des Plâteau Central erstreckt, die im Westen der Pyrenäen gelegene, das Gebiet des spanischen Meseta in sich schliessende Depression, sowie das ausgedehnte negative Schwerestörungsgebiet, das Nordafrika und den Südteil des Mittelmeeres umfasst. Es geht nicht an anzunehmen, dass diese Depressionen infolge postorogener isostatischer Wirkungen entstanden sind.

Bei der Untersuchung der Anomalienprofile der der Gestalt der Kettengebirge angepassten und mit diesen die gleiche Streichrichtungen verfolgenden Schweredepressionen lässt sich — wie bei der Behandlung der Gleichgewichtsverhältnisse der Appenninen und Nordostkarpaten bereits erwähnt — feststellen, dass die Orte der Depressionen nicht mit jenen der Deckfalten zusammenfallen : die Gebirge reichen im allgemeinen nur bis zur Mittellinie der Depressionszonen. Zieht man diese Sachlage und die Symmetrie der Profile der Schwereanomalien in Betracht, so gelangt man zur Feststellung, dass die auf der Depressionszone einseitig aufliegenden Deckfalten bei der Ausgestaltung des Bildes der isostatischen Anomalien nur eine Rolle zweiten Ranges spielen konnten.

Im Gegensatz zu den oben dargelegten Anschauungen *Lugeons* und *Gagnebins* darf man also als wahrscheinlich annehmen, dass die Ausgestaltung der die Vergenzen orientierenden Depressionszonen in die Zeit vor der Entstehung der Kettengebirge zu verlegen ist.

Gleichzeitig scheint das dargelegte Material — im Gegensatz zur Auffassung *Kossmats* — darauf hinzudeuten, dass nicht der Vorraum die Gebirgslast tragen hilft, sondern dass das Gebirge dem Vorraum bei dessen Streben nach Erreichung der isostatischen Gleichgewichtslage zu Hilfe kommt.

Die Ausbildung der Vorräume der Kettengebirge lässt sich teils auf epirogenetische, teils auf orogenetische Kraftwirkungen zurückführen.

Im vorhergehenden wurde gezeigt, dass sich das Bestreben der Erdkruste zur Erreichung des isostatischen Gleichgewichts sowohl in vertikalen wie in horizontalen Krustenbewegungen äussern kann, die die entsprechenden Komponenten der wirklichen isostatischen Krustenbewegungen repräsentieren.

SCHRIFTTUM

1. *V. Scheffer* und *K. Kántás:* Regionale Geophysik von Transdanubien. Acta Technica Hung. Bd I. Heft 2, Budapest, 1951 und Acta Technica Hung. Bd III. Heft 1—2, Budapest 1952.

2. *V. Scheffer:* Isostasie. Acta Technica Hung. Bd. IX. (1954) 253/276. Budapest.

3. *G. Dal Piaz:* L'influenza della gravità nei fenomeni orogenetici, Accademia delle Scienze, Torino, 1943.

4. *L. Tanni:* On the isostatic structure of the earth's crust in the Carpathian countr es and the related phenomena. Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Ser. A. III. Geologica-Geographica, 4. Helsinki, 1942.

5. *F. Kossmat:* Die mediterranen Kettengebirge in ihrer Beziehung zum Gleichgewichtszustande der Erdrinde, Abhandl. d. Math. Phys. Kl. d. Sächsischen Akad. d. Wiss. Bd. 38, Nr. 2. Leipzig, 1921.

6. *S. v. Bubnoff:* Einführung in die Erdgeschichte, Halle (Saale), 1949.

7. *L. Kober:* Bau der Erde, Wien, 1921.

8. *K. Telegdi-Róth:* Magyarország geológiája. (Die Geo ogie Ungarns. Nur ungar.) Pécs, 1926.

9. *Gy. Prinz:* Magyarország geográfiája. (Die Geographie Ungarns. Nur ungar.) Pécs, 1926.

10. *L. Lóczy jun.:* Die Rolle der paläozoischen und mesozoischen Orogenbewegungen im Aufbau des Inner-Karpatischen Beckensystems. Sofia, 1940.

11. *R. M. Deeley:* Mountain Building, The Geological Magazine (VI)V London, 1918.

12. *E. Haarmann:* Die Oszillationstheorie. Eine Erklärung der Krustenbewegungen von Erde und Mond. Stuttgart, 1930.

13. *M. Lugeon* et *E. Gagnebin:* Observations et vues nouvelles sur la géologie des Préalpes romandes. Mémoires de la Soc. vaudoise des Sc. natur. N. 47, Lausanne, 1941.

14. *M. Lugeon:* Une hypothèse sur l'origine du Jura, Bull. Soc. vaudoise des Sc. natur. vol. 61 N. 256, Lausanne, 1941.

ZUSAMMENFASSUNG

Auf Grund des Studiums der Karte der isostatischen Anomalien Europas und der Vergenzen der Kettengebirge des Mittelmeergebietes stellt der Verfasser für die untersuchte Zone eine gesetzmässige Beziehung fest, die zwischen den Vergenzen der Kettengebirge und den isostatischen Anomalien besteht.

Demnach richten sich die gebirgsbildenden Vergenzen im allgemeinen von den Maximumzonen ausgehend, die auf der Karte der isostatischen Anomalien als Massenüberschussgebiete gekennzeichnet sind, nach den einen Massendefekt aufweisenden Depressionsgebieten.

Die gekennzeichnete Gesetzmässigkeit stellt einen Beweis für die Behauptung dar, dass sich die Erdrinde auch im Wege horizontal gerichteter Krustenbewegungen in das isostatische Gleichgewicht zu setzen bestrebt ist.

СВЯЗЬ ИЗОСТАТИЧЕСКИХ АНОМАЛИЙ И ВЕРГЕНЦИЙ ГОРООБРАЗОВАНИЯ

Канд. техн. наук В. Шеффер

Резюме

Автор, изучая карту изостатических аномалий Европы и вергенции средиземноморских горных цепей, определяет такую закономерность исследованной зоны, которая существует между вергенциями горных цепей и изостатическими аномалиями.

Соответственно вышеупомянутой закономерности вергенции горообразования вообще направлены из стороны, указывающей на изостатических картах аномалий избыток масс (зоны максимумов), — в сторону депрессий, т. е. недостатка масс.

Рассмотренная в статье закономерность служит доказательством стремления к достижению изостатического равновесия земной коры посредством движения коры в горизонтальном направлении.

RELATIONS BETWEEN ISOSTATIC ANOMALIES AND OROGENIC VERGENCES

V. SCHEFFER
Candidate of Eng. Sc.

SUMMARY

Correlating the map of European isostatic anomalies and the vergences of Mediterranean chains, the author has established a relationship between the vergences of mountain chains and isostatic anomalies.

According to this conformity, orogenic vergences generally trend from zones of maximum of the isostatic anomaly map, denoting excesses of mass, toward depressions, that is parts presenting deficits of mass.

The conformity demonstrated produces evidence of the trend of the Earth's crust toward isostatic equilibrium through horizontal crustal movements.

LE RAPPORT ENTRE LES ANOMALIES ISOSTATIQUES ET LES VERGENCES OROGÉNIQUES

V. SCHEFFER
Candidat des Sciences Techniques

SOMMAIRE

En étudiant la carte des anomalies isostatiques d'Europe et les ridements des chaînes méditerrannéennes, l'auteur établit un rapport entre les vergences des chaînes et les anomalies isostatiques dans la zone étudiée.

Selon ce rapport les vergences des ridements se dirigent en général des zones maxima de la carte d'anomalies isostatiques, indiquant des excédants de masses, vers les dépressions indiquant des manques de masses.

Le rapport indiqué fournit une preuve de l'effort de l'écorce terrestre à atteindre un équilibre isostatique par des mouvements horizontaux.

DIE STABILITÄT DES AN SEINEN ENDEN AUFGEHÄNGTEN, AN SEINER SEITLICHEN VERSCHIEBUNG GEHINDERTEN BALKENS

Prof. P. CSONKA

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
LEHRSTUHL FÜR FESTIGKEITSLEHRE DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT FÜR BAUINDUSTRIE, BUDAPEST

[Eingegangen am 5. Dezember 1953]

Einleitung

Im Rahmen dieser Zeitschrift befassten sich mehrere Arbeiten [1, 2] mit der Frage der Stabilität eines an einem oder zwei Punkten aufgehängten, bohlenartigen, geradachsigen, hochkant gestellten Balkens von rechteckigem Querschnitt. Diese Arbeiten untersuchten alle den Gleichgewichtszustand eines Balkens, der *durch keinerlei Stützkonstruktion* an seiner Auskippung gehindert wird.

Im Gegensatz zu den erwähnten Arbeiten bespricht der vorliegende Aufsatz die Stabilität eines an seinen beiden Enden aufgehängten oder gestützten Balkens, der an drei Punkten gegen eine seitliche Verschiebung festgehalten ist *(Abb. 1)*. Die Untersuchung beschränkt sich hierbei auf den Fall der entlang der Balkenachse gleichmässig verteilten vertikalen Belastung von der Intensität g. Das Ziel der Untersuchung ist festzustellen, ob infolge der Erhöhung der Belastung die in *Abb. 2* veranschaulichte Auskippung des ursprünglich hochkant gestellten Balkens eintreten kann.

Annahmen, Bezeichnungen

Die hier geschilderten Untersuchungen beziehen sich auf einen prismatischen Balken von rechteckigem Querschnitt. Die Länge des Balkens beträgt ein Vielfaches seiner Querschnittsabmessungen, während die Höhe des Querschnitts höchstens das Zehnfache der Breite ausmacht. Das Material des Balkens wird als homogen, isotrop und völlig elastisch betrachtet.

Es wird angenommen, dass der Balken an seiner vertikalen Mittelebene durch unendlich lange Gelenkstäbe, und zwar durch zwei vertikale und drei horizontale Stäbe befestigt ist *(Abb. 3)*, weiterhin, dass sich — wenn der Balken unbelastet ist — die zwei vertikalen, sowie die zwei äusseren horizontalen Stäbe in der Ebene der beiden Endquerschnitte des Balkens befinden. Der dritte horizontale Stab sei in der Ebene des mittleren Querschnittes angenommen. Es wird ausserdem vorausgesetzt, dass sich die Stützpunkte der vertikalen Stäbe

in einer Höhe von $e > 0$ über der Balkenachse, diejenigen der horizontalen Stäbe in einer Höhe von $e_0 > 0$ über der Balkenachse befinden. Von den horizontalen

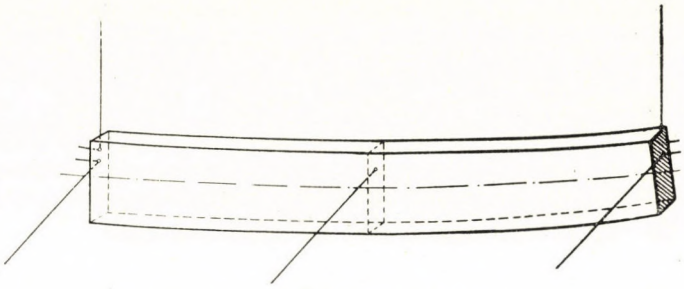


Abb. 1. Form des Balkens vor der Kippung

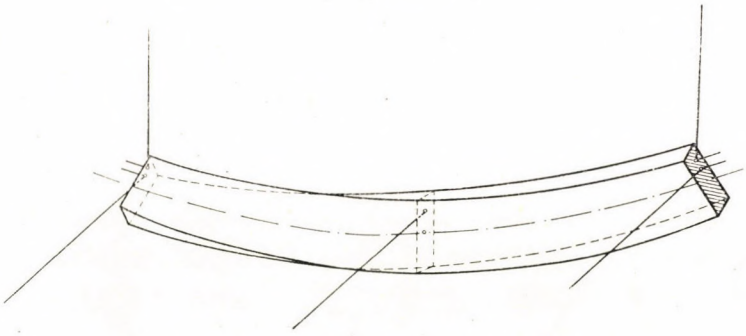


Abb. 2. Form des Balkens nach der Kippung

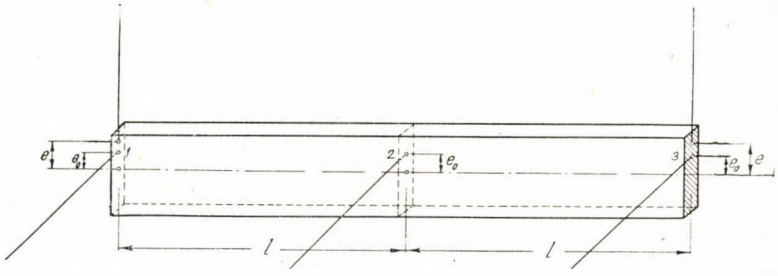


Abb. 3. Der Balken und seine Stützstäbe

Stäben sei noch angenommen, dass bei ihnen der Wert der Stabkraft gleich Null ist.

Selbstverständlich können die erwähnten Stützstäbe des Balkens auch durch andere, eine ähnliche Stützung gewährleistende Konstruktionen ersetzt werden. Statt der vertikalen Stützstäbe können biegsame, aufgehängte Seile, statt der horizontalen die in *Abb. 4* dargestellte Stützkonstruktion verwendet

werden. Die Elemente dieser Konstruktion seien hier als starre Stäbe ohne Spannung angesehen.

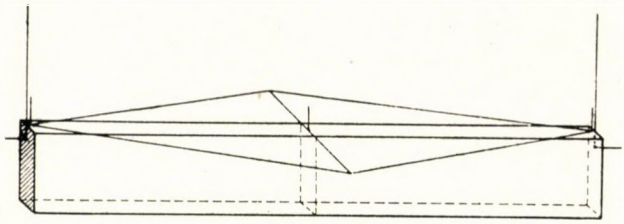


Abb. 4. Der Balken und seine Spannkonstruktion

Bei den nachstehenden Untersuchungen wird ein rechteckiges Koordinatensystem benutzt, dessen Anfangspunkt 0 am Schwerpunkt des Mittelquerschnittes des Balkens befestigt ist. Als x-Achse dieses Koordinatensystems sei die Tangente des Anfangspunktes der Balkenachse, als y- bzw. z-Achse die Hauptachsen des Mittelquerschnittes gewählt *(Abb. 5)*.

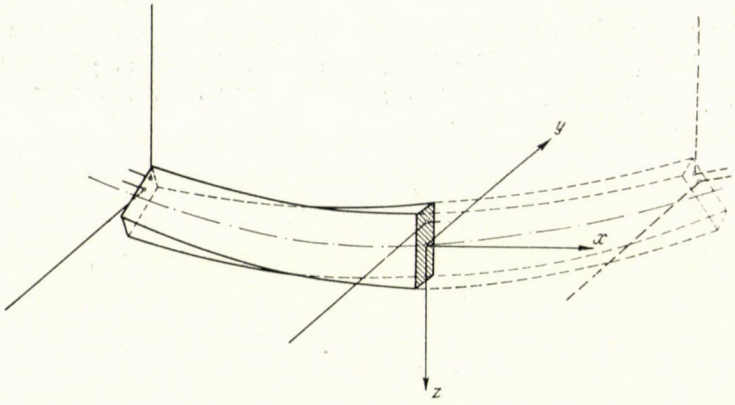


Abb. 5. Das Koordinatensystem

Bezüglich der Formänderung des Balkens werden hier dieselben Bedingungen gestellt wie in der unter [1] erwähnten Arbeit. Was die Bezeichnung der Formänderungen, Beanspruchungen, Querschnittswerte und Elastizitätskonstanten anbelangt, seien hier ebenfalls die im Aufsatz [1] eingeführten Bezeichnungen verwendet.

Die Grundgleichung der Aufgabe

Infolge der Auskippung verdrehen sich die Balkenquerschnitte aus ihrer ursprünglichen Lage um die x-Achse in einem Winkel $\varphi = \varphi(x)$. Gleichzeitig verschieben sich die Achsenpunkte des Balkens in der Richtung y bzw. z um $\eta = \eta(x)$ bzw. $\zeta = \zeta(x)$.

Die mit der Verschiebung einhergehende Winkelverdrehung φ wird durch die *Prandtl*sche Grundgleichung

$$GI_1 EI_3 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + M_2^2 \varphi = 0 \tag{1}$$

bestimmt. Der Wert M_2 stellt das Biegungsmoment im Querschnitt des Balkens dar, und zwar im Zustand vor der Auskippung

$$M_2 = \frac{gl^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Nach dem Einsetzen dieses Wertes M_2, sowie der Einführung der Bezeichnung

$$\alpha = \frac{g^2 l^6}{4GI_1 EJ_3} > 0\,, \tag{2}$$

kann Gl.(1) folgendermassen angeschrieben werden:

$$\frac{l^2}{\alpha} \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2 \varphi = 0\,. \tag{3}$$

Es ist zu bemerken, dass der durch Gl. (2) bestimmte Faktor α im Falle von Querschnitten, bei denen das Verhältnis der Seiten $h : b \leq 10$ ist, kleiner ist als eins, vorausgesetzt, dass die grösste Durchbiegung des Balkens den in der Praxis zugelassenen Wert von

$$f = \frac{2l}{500}$$

nicht übersteigt. Zur Bestätigung dieser Aussage sei Gl. (2) in der Form

$$\alpha = 5{,}76 \frac{E}{G} \cdot \frac{I_2^2}{I_1 I_3} \cdot \frac{f^2}{l^2}$$

angeschrieben. Führt man nun in dieser Formel die Substitution

$$\frac{E}{G} = \frac{7}{3}, \qquad \frac{f}{l} \leq \frac{2}{500}$$

durch, so ergeben sich für den Wert des Faktors α — in Abhängigkeit vom Verhältnis der Seiten $h : b$ — die in *Tabelle II* zusammengefassten oberen Schranken. Aus dieser Tabelle geht hervor, dass der Faktor α, solange $h : b \leq 3{,}5$ ist, weit weniger als eins beträgt, auch im Falle des Extremwertes $h : b = 10$ kleiner als eins bleibt.

Die Lösung der Grundgleichung

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3) lässt sich mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten leicht ermitteln. Begnügt man sich

TABELLE I

Obere Schranken des Faktors α

h/b	$\alpha \leq$
1,0	0,000 127
1,2	0,000 224
1,5	0,000 463
2,0	0,001 250
2,5	0,002 810
3,0	0,005 520
4,0	0,016 600
5,0	0,038 500
10	0,574 000
∞	∞

bei α mit den Gliedern ersten Grades, so kann die Lösung folgendermassen angeschrieben werden:

$$\varphi(x) = A\left|1 - \alpha\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{6}\frac{x^4}{l^4} + \frac{1}{30}\frac{x^6}{l^6}\right) + - \dots\right| +$$

$$+ B\left|\frac{x}{l} - \alpha\left(\frac{1}{6}\frac{x^3}{l^3} - \frac{1}{10}\frac{x^5}{l^5} + \frac{1}{42}\frac{x^7}{l^7}\right) + - \dots\right|. \qquad (5)$$

A und B sind hier Konstanten.

In Kenntnis der Funktion $\varphi(x)$ ist es möglich, die Verdrehungsmomente M_1 bzw. die Verschiebungen η mit Hilfe der in Aufsatz [1] erwähnten Zusammenhänge

$$M_1 = GI_1 \frac{d\varphi}{dx},$$

bzw.

$$EI_3 \frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{gl^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)\varphi$$

zu berechnen. Das so erhaltene Ergebnis ist

$$M_1(x) = \frac{GI_1}{l} A\left|-\alpha\left(\frac{x}{l} - \frac{2}{3}\frac{x^3}{l^3} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{l^5}\right) + - \dots\right| +$$

$$+ \frac{GI_1}{l} B\left|1 - \alpha\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{l^4} + \frac{1}{6}\frac{x^6}{l^6}\right) + - \dots\right|, \qquad (6)$$

bzw.

$$\eta(x) = -\frac{gl^4}{2EI_3} A\left[C_0 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{12}\frac{x^4}{l^4} - \right.$$

$$\left. - \alpha\left(\frac{1}{24}\frac{x^4}{l^4} - \frac{1}{45}\frac{x^6}{l^6} + \frac{1}{280}\frac{x^8}{l^8} - \frac{1}{2700}\frac{x^{10}}{l^{10}}\right) + - \dots\right] -$$

$$- \frac{gl^4}{2EI_3} B\left[C_1\frac{x}{l} + \frac{1}{6}\frac{x^3}{l^3} - \frac{1}{20}\frac{x^5}{l^5} - \right.$$

$$\left. - \alpha\left(\frac{1}{120}\frac{x^5}{l^5} - \frac{2}{315}\frac{x^7}{l^7} + \frac{13}{7560}\frac{x^9}{l^9} - \frac{1}{4620}\frac{x^{11}}{l^{11}}\right) + - \dots\right], \qquad (7)$$

wo C_0 und C_1 Integrationskonstanten sind.

Anfangsbedingungen

Die Funktionen $\varphi(x)$, $\eta(x)$ bzw. $M_1(x)$ müssen bestimmten Anfangsbedingungen genügen.

1. *Aus der besonderen Lage des Koordinatensystems stammende Anfangsbedingungen :*

$$\eta(0) = 0, \qquad \frac{d\eta(0)}{dx} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich bei Benutzung der Formel (7) für die Integrationskonstanten die Werte

$$C_0 = 0, \quad C_1 = 0\,. \qquad (8)$$

2. *Aus der horizontalen Stützung des Balkens stammende Anfangsbedingung .*

$$\eta_1 + \eta_3 = 2\eta_2\,.$$

In dieser Gleichung bezeichnen η_1, η_2 bzw. η_3 die Verschiebung der Stützpunkte *1*, *2* bzw. *3* (*Abb. 3*) in der Richtung y. Diese Verschiebungen können mit den Verschiebungsangaben der Achsenpunkte des Balkens bzw. mit dem Verdrehungs winkel der Balkenquerschnitte folgendermassen ausgedrückt werden :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta(-l) + e_0\varphi(-l), \\ \eta_2 &= \eta(0) \quad + e_0\varphi(0)\,, \\ \eta_3 &= \eta(+l) + e_0\varphi(+l). \end{aligned} \qquad (9)$$

Setzt man nun diese Werte in die vorige Gleichung ein, so erhält man die Bedingungsgleichung

$$-e_0\,[\varphi(-l)+\varphi(+l)-2\varphi(0)]=\eta(-l)+\eta(+l)-2\eta(0). \tag{10}$$

Die in obiger Gleichung stehenden Werte von φ lassen sich mit Hilfe von Gl. (5) berechnen:

$$\varphi(\pm l)=A\left(1-\frac{11}{30}\alpha+-\ldots\right)\pm$$

$$\pm B\left(1-\frac{19}{210}\alpha+-\ldots\right), \tag{11}$$

$$\varphi(0)=A\,.$$

Dagegen können die Werte von η aus Gl. (7) unter Berücksichtigung von Gl. (8) bestimmt werden:

$$\eta(\pm l)=-\frac{gl^4}{2EI_3}A\left(\frac{5}{12}-\frac{107}{4725}\alpha+-\ldots\right)\mp$$

$$\mp\frac{gl^4}{2EI_3}B\left(\frac{7}{60}-\frac{29}{8316}\alpha+-\ldots\right), \tag{12}$$

$$\eta(0)=0.$$

Da nunmehr die Werte von (11) und (12) bekannt sind, kann man auf die Untersuchung der Anfangsbedingung (10) übergehen. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden, u. zw. je nachdem ob $A=0$ oder $A\neq 0$ ist.

Im Falle $A=0$ — in dem die Formänderung des Balkens zum mittleren Querschnitt antimetrisch ist — gelangt man nach Einsetzung von (11) und (12) in Gl. (10) zum Ergebnis, dass die Bedingung unabhängig von der Grösse von e_0 in jedem Falle erfüllt wird.

Im Falle $A\neq 0$ verhält sich die Sache anders. Hier kann die Bedingung (10) nur dann befriedigt werden, wenn

$$e_0=\frac{gl^4}{EI_3}K_0\,. \tag{13}$$

In dieser Gleichung ist

$$K_0=-\frac{\frac{5}{12}-\frac{107}{4725}\alpha}{\frac{11}{30}\alpha}, \tag{14}$$

bzw. bei genauerer Berechnung

$$K_0 = -\frac{\frac{5}{12} - \frac{107}{4725}\alpha + \frac{115}{226\,112}\alpha^2 - + \dots}{\frac{11}{30}\alpha - \frac{6617}{415800}\alpha^2 + \frac{5\,008\,723}{19\,297\,278\,000}\alpha^3 - + \dots}. \qquad (14')$$

Der mit Gl. (14') berechnete Wert des Faktors K_0 wird in *Tabelle II* bzw. im Diagramm von *Abb. 6* angegeben.

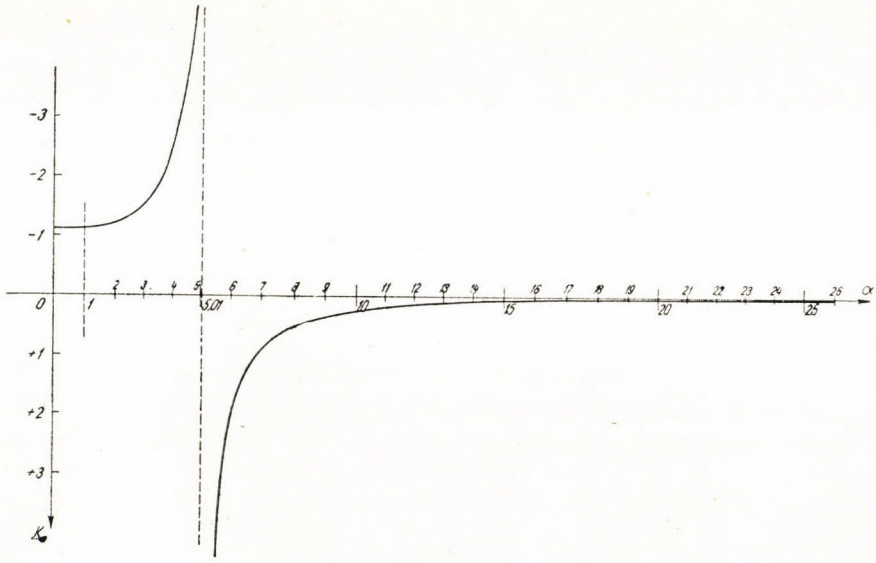


Abb. 6. Die Werte des Faktors K_0

TABELLE II

Die Werte des Faktors K_0

α	K_0
0	$-\infty$
0,01	— 113,624
0,10	— 11,351
1,00	— 1,124
5,01	— 0,215
10,0	— 0,103
15,0	— 0,069
20,0	— 0,055
25,0	— 0,051

Aus der Tabelle bzw. aus dem Diagramm geht hervor, dass der Wert des Faktors K_0 im Rahmen der hier gemachten Annahmen, d. h. im Falle $\alpha < 1$, immer negativ ist. In solchen Fällen ist also $e_0 < 0$. Da diese Möglichkeit aus den vorliegenden Untersuchungen a priori ausgelassen wurde, ist es überhaupt nicht notwendig, sich im weiteren mit dem Fall $A \neq 0$ — welcher innerhalb der gestellten Bedingungen ja gar nicht vorkommen kann — zu beschäftigen.

Es genügt also, im folgenden nur den Fall $A = 0$, d. h. eine auf den mittleren Querschnitt des Balkens antimetrische Formänderung zu besprechen. Hier kann man anstatt der Gl. (5) bzw. (6)

$$\varphi(x) = B\left|\frac{x}{l} - \alpha\left(\frac{1}{6}\frac{x^3}{l^3} - \frac{1}{10}\frac{x^5}{l^5} + \frac{1}{42}\frac{x^7}{l^7}\right) + - \quad\right|, \tag{15}$$

bzw.

$$M_1(x) = \frac{GI_1}{l} B\left|1 - \alpha\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{l^4} + \frac{1}{6}\frac{x^6}{6}\right) + - \quad\right| \tag{16}$$

anschreiben.

3. *Aus der vertikalen Unterstützung der Balkenenden stammende Anfangsbedingung :*

$$M_1(\pm l) = \mp gl \cdot e\varphi\ (\pm l)\ .$$

Diese Bedingungsgleichung bedeutet, dass an den Balkenenden, d. h. den Querschnitten $x = \pm l$, die durch Gl. (16) bestimmten Verdrehungsmomente den aus den äusseren Kräften unmittelbar abgeleiteten Verdrehungsmomenten gleich sein müssen. Da gemäss Gl. (15) bzw. (16)

$$\varphi(\pm l) = \pm B\left(1 - \frac{19}{210}\alpha + - \ldots\right),$$

bzw.

$$M_1(\pm l) = \frac{GI_1}{l} B\left(1 - \frac{1}{6}\alpha + - \quad .\right)$$

ist, kann die erwähnte Bedigungsgleichung folgendermassen angeschrieben werden:

$$\frac{GI_1}{l}\left(1 - \frac{1}{6}\alpha + - \ldots\right) = -gle\left(1 - \frac{19}{210}\alpha + - \ldots\right).$$

Von hier

$$e = \mp \frac{GI_1}{gl^2} K\ . \tag{17}$$

In dieser Formel ist der Wert des Faktors K

$$K = -\frac{1 - \frac{1}{6}\alpha}{1 - \frac{19}{210}\alpha}, \tag{18}$$

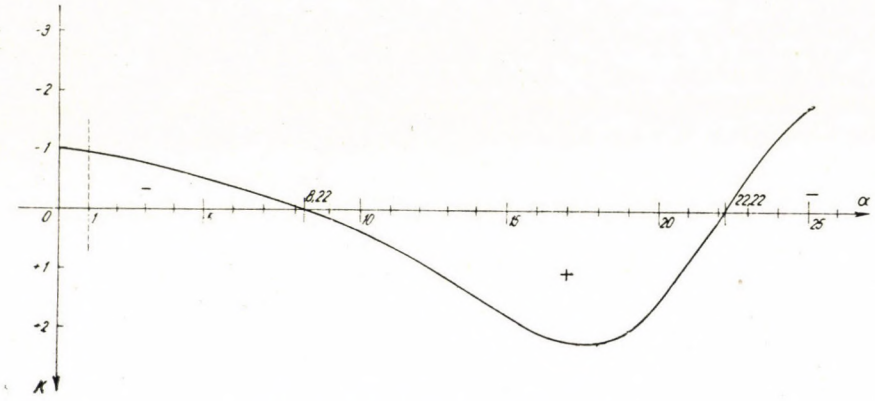


Abb. 7. Der Wert des Faktors K

bzw. genauer

$$K = -\frac{1 - \frac{1}{6}\alpha + \frac{23}{4\,200}\alpha^2 - + \ldots}{1 - \frac{19}{210}\alpha + \frac{12\,161}{5\,405\,400}\alpha^2 - + \ldots}. \tag{18'}$$

Die mit der Formel (18′) berechneten Werte von K sind in *Tabelle III* bzw. im Diagramm von *Abb. 7* angegeben.

TABELLE III
Die Werte des Faktors K

α	K
0	− 1,000
0,01	− 0,999
0,10	− 0,992
1,00	− 0,920
5,00	− 0,503
10,0	+ 0,371
15,0	+ 1,792
20,0	+ 1,504
25,0	− 1,790

Aus Gl. (17) ist ersichtlich, dass e nur dann positiv sein kann, wenn auch der Faktor K positiv ist, das ist aber nur der Fall, wenn

$$1 - \frac{1}{6}\alpha + \frac{23}{4\,200}\alpha^2 - + \ldots > 0,$$

bzw. wenn

$$\alpha < 8{,}22 .$$

Da aber in dem hier behandelten Fall, wo $h:b \leq 10$ ist, der Wert $\alpha < 1$ und so K gemäss Gl. (18) negativ ist, könnte der untersuchte Balken nur dann auskippen, wenn seine vertikalen Unterstützungen nicht in Punkten oberhalb der Balkenachse, sondern unterhalb dieser angebracht wären. Diese Möglichkeit wurde jedoch aus den vorliegenden Betrachtungen von vornherein ausgeschlossen.

Demgemäss kann also der Balken in dem hier untersuchten Fall, d. h. wenn er in seitlicher Richtung in drei Punkten gestützt wird und wenn seine Enden in Punkten *oberhalb* seiner Achse aufgehängt oder unterstützt werden, keinesfalls aus seiner eigenen Ebene auskippen.

SCHRIFTTUM

1. *P. Csonka:* Die Stabilität der an ihren Enden aufgehängten prismatischen Stäbe von rechteckigem Querschnitt. Acta Technica Hung. **8**, 1954. S. 79—90.

2. *P. Csonka:* Die Stabilität des an einem Punkte aufgehängten geraden Balkens. Acta Technica Hung. **8**, 1954. S. 389—397.

3. *E. Bölcskei:* Die Stabilität des an zwei Punkten aufgehängten geraden Balkens. Acta Technica Hung. **8**, 1954. S. 243—256.

4. *I. Böröcz:* Két végén felfüggesztett gerenda tartó kibicsaklása. (Die Ausknickung eines an seinen Enden aufgehängten Balkenträgers. Nur ungar.). Mélyépterv Műszaki Közlemények (1953) S. 28—56.

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Abhandlung untersucht die Stabilität eines an seinen beiden Enden aufgehängten bzw. unterstützten bohlenartigen, hochkant gestellten Balkens von rechteckigem Querschnitt, der in seitlicher Richtung durch drei horizontale Stäbe gestützt ist, für den Fall einer gleichmässig längs der Balkenachse verteilten Belastung g.

Es wurde angenommen, dass sich die Aufhänge- bzw. Stützpunkte des Balkens in gleicher Höhe über der Balkenachse und die Stützpunkte der zur seitlichen Stützung dienenden horizontalen Stäbe auf einer oberhalb der Balkenachse und mit dieser parallel verlaufenden Geraden befinden.

Gemäss den Untersuchungen kann der Gleichgewichtszustand des oben beschriebenen horizontalen Balkens, dessen Höhe nicht mehr als das Zehnfache seiner Breite beträgt, mit der Steigerung der Belastung nicht labil werden. Die Stabilität des Balkens wird durch die Höhe der Aufhänge- bzw. Stützpunkte über der Balkenachse bzw. durch die Höhenlage der seitlichen Stützung überhaupt nicht beeinflusst.

СТАБИЛЬНОСТЬ ДВУХОПОРНОЙ БАЛКИ, БОКОВОЙ СДВИГ КОТОРОЙ ПРЕПЯТСТВУЕТСЯ

Д-р техн. наук П. Чонка

Резюме

В статье исследуется стабильность прямоугольной балки четырехугольного сечения, подвешенной или же подпертой на двух её концах и укрепленной тремя горизонтальными раскосами, в случае равномерно распределяющейся и действующей вдоль всей длины нагрузки g.

Предполагается, что точки подвешивания или же подпирания балки располагаются на идентичных отметках над осью балки, а в отношении точек опоры горизонтальных раскосов, служащих для предотвращения бокового сдвига, принимается, что они должны располагаться на прямой, параллельной оси балки — над осью балки.

На основе проведенных исследований, состояние равновесия горизонтальной балки (имеющей максимально в десять раз большую высоту, чем ширину) с ростом нагрузки не может стать нестабильным. Высота точек подвешивания или же подпирания над осью балки, а также положение, занимаемое по высоте распорной конструкцией, служащей для предотвращения бокового сдвига, не оказывают совершенно никакого действия на стабильность балки.

STABILITY OF THE END-SUPPORTED LATERALLY RESTRAINED BEAM

Prof. P. CSONKA

D. of Eng. Sc.

SUMMARY

The stability problem of a beam suspended or supported at both ends and strutted by three horizontal bars is investigated in the case of continuous, uniformly distributed load g.

Points of suspension or of support are assumed at equal height above the axis of the beam; points of horizontal backing are supposed to lie on a line parallel to the beam axis above the latter.

Results of investigations: Equilibrium conditions of the beam cannot become unstable unless its depth-to-width ratio exceeds 10. The height of the points of suspension or of support above the axis of the beam, and the height of the lateral constraining structure have no effect whatever on its stability.

LA STABILITÉ D'UNE POUTRE SUSPENDUE À SES DEUX EXTRÉMITÉS ENTRAVÉE DANS SON DÉPLACEMENT LATÉRAL

P. CSONKA

Docteur des Sciences Techniques

RÉSUMÉ

L'étude examine la stabilité d'une poutre à section rectangulaire, suspendue resp. appuyée à ses deux extrémités et étayée par trois barres d'appui horizontales, au cas d'une charge continue et uniformément répartie.

Il est supposé que les points de suspension resp. d'appui se situent à la même hauteur au-dessus de l'axe de la poutre et que les points d'appui des barres horizontales servant de liaison latérale sont sur une droite parallèle à l'axe de la poutre et au-dessus de celle-ci.

Selon le témoignage des recherches, l'équilibre de la poutre horizontale dont la hauteur est au maximum le décuple de sa largeur, ne peut pas devenir instable en conséquence de l'augmentation de la charge. La hauteur des points de suspension resp. d'appui, au-dessus de l'axe de la poutre, voire la position en hauteur de la liaison latérale n'exerce aucune influence sur la stabilité de la poutre.

ÉTUDE DE L'ÉVAPORATION À MULTIPLE EFFET AVEC PRISES DE VAPEUR

G. OPLATKA

DOCTEUR DES SCIENCES TECHNIQUES

INSTITUT DE RECHERCHE DE L'INDUSTRIE SUCRIÈRE HONGROISE

[Présenté le 18. mars 1954]

1. Introduction

L'industrie chimique fait souvent usage des systèmes d'évaporation à multiple effet avec prises de vapeur, systèmes garantissant une économie de vapeur avantageuse. Pour les calculer, on connaît quelques formules, présentant des relations entre la quantité de dissolvent à évaporer (V), la quantité de vapeur exigée pour le chauffage du système (G), le nombre de corps (n), et les vapeurs prises des différents corps (R_i). Les formules les plus importantes sont :

$$G = \frac{1}{n}\left| V + \sum_{i=1}^{n-1} (n - i)\, R_i \right| \tag{1}$$

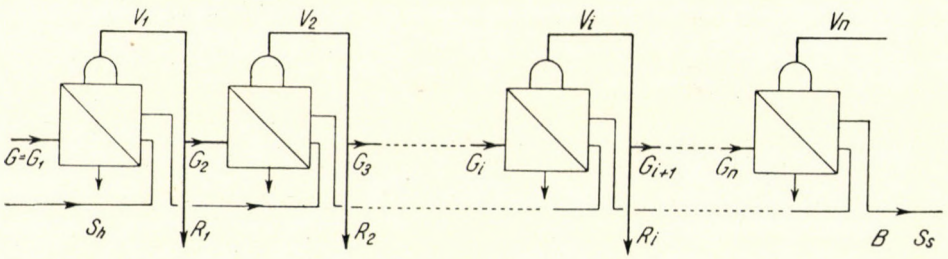


Fig. 1

qui donne la vapeur de chauffage, et

$$V = A\left(1 - \frac{s_h}{s_s}\right) \tag{2}$$

indiquant la quantité de dissolvent à évaporer (A représente le poids de la solution diluée, s_h resp. s_s la concentration des jus légers et denses). La figure 1. représente la vue schématique.

Ces équations ne sont valables que dans certaines conditions simplifiant le problème. En somme ces simplifications — assez nombreuses d'ailleurs —

s'expriment par

$$G_i = V_i \tag{3}$$

Nous les traiterons en détail au chapitre 2.1.

En dépit des simplifications, l'équation (1) est suffisamment exacte pour la pratique, et a encore l'avantage d'être simple et de fournir vite le résultat. Il est tout au moins d'une valeur discutable de prétendre à une exactitude plus poussée, si on se rend compte du fait, qu'en usine, l'effet de la variation temporelle des facteurs déterminant le problème est plus grand que celui des erreurs commises par les simplifications.

Pour déterminer la surface de chauffe (F) d'un i-ième corps, on emploie la formule

$$V_i = G_i = \frac{\varkappa_i F_i \Delta t_i Z}{r_i} \tag{4}$$

où r représente la chaleur de condensation de la vapeur de chauffe, $\varkappa$ le coefficient de translation de la surface de chauffe, Δt_i la différence de température moyenne entre la vapeur de chauffe et la solution en ébullition, se trouvant au côtés respectifs de la surface, températures supposées fixes indépendemment de l'endroit, enfin Z le temps pendant lequel la quantité de vapeur G se condense. Souvent il semble être avantageux de rapporter les poids de vapeur, de liquide et même le temps à l'unité de la matière première travaillée. Ainsi p. e. dans l'industrie sucrière Z pourrait désigner le temps, pendant lequel l'usine travaille 1 kg ou 1 tonne de betteraves.

Or, toutes ces équations — celles que nous avons citées, ainsi que les équations semblables de la littérature — ont le défaut commun, de ne pas donner de relations générales entre les données caractéristiques d'un corps d'évaporateur, les températures, les poids de la vapeur de chauffe et le dissolvent évaporé. Plus précisement: la littérature ne traite pas des questions suivantes: comment s'échelonnera la chute de température totale disponible (ΔT) entre les divers corps, comment variera cette distribution, si les surfaces de chauffe s'incrustent, de combien faut-il augmenter ΔT afin de maintenir le même rendement. On manque également de réponse quant à l'échelonnage de la chute de température, le rendement, et la vapeur de chauffe nécessaire, pour un système d'évaporation, dont nous comptons regrouper les corps, ou augmenter leur nombre. De même, on ne connaît pas l'influence des prises de vapeur sur l'échelonnement de la chute de température.

Pourtant la solution de ces problèmes serait très importante pour la disposition, la construction, la reconstruction d'un poste d'évaporation. Il est également important pour l'ingénieur de service de pouvoir calculer l'effet d'une cause d'insuffisance de rendement d'une évaporation, dûe p. e. à une incrustation ou à une autre faute.

L'étude présente se propose de donner la reponse à ces questions. Dans ce but des relations générales sont établies concernant l'évaporation à multiple effet avec prises de vapeur ; à la base de ces relations, on peut déduire certaines conclusions également générales. Les formules sont appliquées ensuite à une évaporation à quadruple effet ; quelques résultats pratiques sont illustrés par des exemples numériques.

2. Relations générales

2.1. Suppositions préliminaires

Pour les calculs généraux nous supposons que :

Le dissolvent et la vapeur de chauffe sont de la même matière. Dans un même corps la chaleur de condensation de la vapeur de chauffe et la chaleur d'évaporation du dissolvent sont identiques. Les pertes de chaleur par convection et radiation à l'air ambiant et par l'évacuation des gaz non condensables sont contrebalancées par l'auto-évaporation et par la chaleur de dilution. Toutes ces conditions s'expriment par $V_i = G_i$. — La température de la solution entrant dans le premier corps est identique à la température d'ébullition de la solution dans le corps. Toutes les quantités sont indépendantes du temps, donc on envisage le cas stationnaire. On exige qu'il n'y ait ni de chute de température entre la vapeur de jus et la chambre de chauffe du corps subséquent, ni augmentation du point d'ébullition. Il faut tout de même remarquer que les formules restent exactes — en cas d'une augmentation du point d'ébullition — si on les interprête de façon que ΔT désigne la chute de température totale efficace. Finalement, il faut que $\varkappa$ et r soient des constantes qui ne dépendent ni de la charge de la surface, ni de la température.

Dans ce qui suit, nous employons les mêmes signes que dans le chapitre précédent.

La quantité totale du dissolvent évaporé

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i \tag{5}$$

La chute de température totale

$$\Delta T = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \tag{6}$$

Une abréviation appropriée — on pourra la nommer »la résistance calorique« d'un évaporateur

$$\varrho_i = \frac{r_i}{\varkappa_i F_i Z} \tag{7}$$

Les signes i, j, k, l, m, p, q s'appliquent par la suite aux sommes.

2.2 La déduction des relations fondamentales

2.21 Δt_i ; la chute de température au i-ième corps

Nous partons de la relation tirée de fig. 1.

$$V_i = R_i + G_{i+1} = R_i + V_{i+1} \tag{8}$$

La quantité de dissolvent évaporé peut être exprimée par la formule (4) en faisant usage de l'abréviation (7)

$$\frac{\Delta t_i}{\varrho_i} = R_i + \frac{\Delta t_{i+1}}{\varrho_{i+1}} \tag{9}$$

En considérant cette expression comme une formule de récursion, nous exprimons toutes les chutes de température entre 1 et n avec la chute de température du i-ième corps, c'est-à-dire avec Δt_i et avec les valeurs de ϱ et R.

La chute de température au j-ième corps sera

pour $j > i$

$$\Delta t_j = \varrho_j \left(\frac{\Delta t_i}{\varrho_i} - \sum_{l=i}^{j-1} R_l \right) \tag{10}$$

pour $j = i$

$$\Delta t_j = \Delta t_i \tag{11}$$

pour $j < i$

$$\Delta t_j = \varrho_j \left(\frac{\Delta t_i}{\varrho_i} + \sum_{l=j}^{i-1} R_l \right) \tag{12}$$

La somme de celles-ci nous fournit, tout en tenant compte de la formule (6

$$\Delta T = \sum_{j=1}^{i-1} \Delta t_j + \Delta t_i + \sum_{j=i+1}^{n} \Delta t_j \tag{13}$$

Nous introduisons les expressions (10) et (12), exprimons la valeur cherchée, c'est-à-dire Δt_i, et obtenons :

$$\Delta t_i = \frac{\varrho_i}{\sum_{k=1}^{n} \varrho_k} \left(\Delta T + \sum_{l=i}^{n-1} R_l \sum_{m=l+1}^{n} \varrho_m - \sum_{p=l}^{i-1} R_p \sum_{q=1}^{p} \varrho_q \right) \tag{14}$$

Cette formule représente le premier résultat, qui nous donne la chute de température dans le i-ième corps d'un système d'évaporation, avec prises de vapeur, caractérisé par les valeurs de ϱ, les prises étant arbitraires, et la chute

totale ΔT. La formule semble être difficile à appliquer à cause des doubles séries, mais si n et i ont des valeurs numériques déterminées, on obtient des formules courtes et facilement évaluables. — En tout cas une certaine précaution sera justifiée quand on développe les séries et détermine leurs limites.

Pour un système d'évaporation sans prises de vapeur, qui est donc caractérisé par $R_i \equiv 0$, on a la forme très simple :

$$\Delta t_i = \frac{\varrho_i}{\sum_{k=1}^{n} \varrho_k} \Delta T \tag{15}$$

2.22 V_i ; le dissolvent évaporé dans le i-ième corps

Le dissolvent évaporé dans le i-ième corps est d'après la formule (4)

$$V_i = \frac{\Delta t_i}{\varrho_i} \tag{16}$$

En introduisant pour Δt_i les expressions des formules (14) resp. (15), on en obtient immédiatement les résultats.

2.23 V ; La quantité totale du dissolvent évaporé

Nous introduisons dans la formule (5) l'expression (16)

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta t_i}{\varrho_i} \tag{17}$$

Il faut donc faire la somme de toutes les chutes Δt_i divisées par les ϱ_i, de *1* à n, les Δt_i étant déjà calculés par la formule (14).

Le calcul ne se heurte en principe à aucune difficulté, mais il est plutôt long, c'est pourquoi nous nous bornons à en donner la marche. Le facteur commun des membres à additionner est $\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \varrho_k}$ qui, ne dépend pas de i ; il peut donc se placer devant la paranthèse. Le premier membre, ΔT, est simplement à additionner n-fois, il fournit donc $n \cdot \Delta T$. En ce qui concerne les doubles sommes, il faut déterminer le coefficient de chaque valeur de R_j. On développe pour chaque i les séries et on cherche le coefficient de chaque j-ième terme, et on fait la somme de ceux-ci. La i-ième série de la première somme fournit comme j-ième terme $R_j \sum_{m=j+1}^{n} \varrho_m$, jusqu'à ce que $i \leq j$; pour $i > j$ les j-ièmes termes sont identiquement zéro. Quant à la seconde somme, le j-ième terme de la i-ième série est identiquement zéro, jusqu'à ce que $i \leq j$; si $i > j$, on obtient la valeur $- R_j \sum_{q=1}^{j} \varrho_q$.

Le coefficient de la première somme, est à prendre j-fois, tandis que celui de la seconde $(n—j)$ fois. Ainsi le coefficient de R_j sera :

$$j \sum_{m=j+1}^{n} \varrho_m — (n—j) \sum_{q=1}^{j} \varrho_q$$

On peut simplifier cette expression. En faisant la somme pour tous les R, on obtient la formule pour la quantité totale de dissolvent évaporé :

$$V = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \varrho_k} \left[n \, \Delta T + \sum_{j=1}^{r-1} R_j \left(j \sum_{l=1}^{n} \varrho_l — n \sum_{p=1}^{i} \varrho_p \right) \right] \tag{18}$$

Cette formule — représentant un second résultat important — donne la quantité de dissolvent évaporé avec un système d'évaporation travaillant avec une chute de température totale de ΔT et dont chaque corps est caractérisé par les valeurs de ϱ resp. R. On peut calculer p. e. de combien il faut augmenter ΔT, si la transmission de chaleur décroît (c'est-à-dire ϱ croît) par suite de l'incrustation des surfaces, pour que le rendement du système total soit maintenu.

On peut conclure ensuite que le rendement de l'évaporation — les valeurs ΔT et ϱ étant données — ne dépendra que de la prise de vapeur, c'est-à-dire des différents R. Si le coefficient de R_j, déterminé uniquement par des valeurs de ϱ, est positif — comme c'est le cas en général — l'augmentation des prises de vapeur augmentera le rendement et vice versa. Au contraire : si le coefficient est négatif, l'augmentation des prises de vapeur fera décroître le rendement. Ce résultat est tout nouveau, n'était pas évident et ne pourrait pas être prévu sans calculs.

Pour un système d'évaporation sans prises de vapeur, la formule se réduit à la forme

$$V = \frac{n \, \Delta T}{\sum_{k=1}^{n} \varrho_k} \tag{19}$$

Il est intéressant de remarquer, que cette formule est encore valable, si tous les ϱ sont égaux entre eux, une condition, qui, en tout cas, n'est que très rarement satisfaite dans la pratique.

2.24 G ; la vapeur de chauffe

Nous nous servons de la formule (1), en introduisant pour la valeur de V l'expression (18). Les calculs donnent

$$G = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \varrho_k} \left(\Delta T + \sum_{i=1}^{r-1} R_i \sum_{=i+1}^{n} \varrho_l \right) \tag{20}$$

resp. pour l'évaporation sans prises

$$G = -\frac{\Delta T}{\sum_{k=1}^{n} \varrho_k} \tag{21}$$

La formule (20) montre — le coefficient de R_i étant toujours positif — que si on augmente les prises, il faut introduire en tout cas un surplus de vapeur de chauffe. Ceci reste vrai même dans le cas traité au chapitre précédent, quand avec l'augmentation des prises le rendement de l'évaporation décroîssait.

2.3 L'analyse des formules

2.31 La formule (18)

Tandis que l'influence de R est immédiatement visible dans la formule (18) il faut, pour étudier l'influence de ϱ, former la dérivée partielle de la fonction par ϱ_i.

Supposons que seulement le i-ième ϱ varie (p. e. formation d'incrustations), tous les autres ϱ restent constants. Nous formons la dérivée :

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho_i} = \frac{-n}{\left(\sum_{k=1}^{n} \varrho_k\right)^2} \left(\Delta T + \sum_{l=i}^{n-1} R_l \sum_{m=i+1}^{n} \varrho_m - \sum_{p=1}^{i-1} R_p \sum_{q=1}^{p} \varrho_q \right) \tag{22}$$

Comparant ce résultat à la formule (14) on voit qu'il existe une forme plus simple :

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho_i} = \frac{-n}{\sum_{k=1}^{n} \varrho_k} \cdot \frac{\Delta t_i}{\varrho_i} = \frac{-n}{\sum_{k=1}^{n} \varrho_k} \cdot V_i \tag{23}$$

La dérivée est toujours négative, puisque les valeurs, au côté droit, sont toutes positives. Cela signifie que l'augmentation de tous les ϱ, c'est-à-dire un décroissement de la transmission de chaleur, fait décroître le rendement de l'évaporation, — résultat qualitativement bien connu. Le décroissement de la transmission de chaleur aura une influence d'autant plus grande sur le rendement, que les côtés droits des formules (22) resp. (23) auront une valeur absolue plus grande; en d'autres termes : plus, la valeur moyenne des ϱ sera petite (les surfaces grandes et les coefficients de translation élevées), plus la quantité évaporée dans le corps envisagé (V_i) sera grande. En comparant les formules (22) et (23), on remarquera encore que la grande paranthèse en (22) doit toujours rester positive.

L'incrustation aura une influence toute différente sur l'évaporation, selon qu'elle se forme dans un des premiers corps (petits indices) ou vers la fin (grands

indices) de l'évaporation. Si l'incrustation apparaît dans les derniers corps — comme d'habitude — i se rapproche de n et la première somme dans la grande paranthèse de la formule (22) décroît rapidement, tandis que l'autre somme, de signe négatif, augmente. Ainsi en valeur absolue toute la paranthèse — et avec elle la dérivée — décroît rapidement. Cela signifie, qu'une incrustation aura — toutes choses égales — une influence d'autant plus faible sur la quantité d'eau évaporée, que sa formation sera reculée vers le dernier corps (grand indice). Il faut ajouter — et ce fait est intéressant — que l'influence de l'incrustation peut être compensée, jusque'à un certain degré, par une prise de vapeur augmentée; celle-ci doit être effectuée sur un corps précédent le corps incrusté. L'explication en est immédiatement fournie par la formule (22): l'augmentation d'une prise R d'indice inférieur à i augmentera la somme dont le signe est négatif et ainsi la dérivée décroît.

Si, au contraire, l'incrustation se forme dans un des premiers corps, $i = 1$ ou 2 (p. e. par une couche d'huile entrainée par la vapeur de retour), la première somme de signe positif de la formule (22) augmentera, la seconde décroîtra, ou même pour le cas extrême $i = 1$ disparaîtra. Il s'en suit que l'influence sur l'évaporation sera relativement plus grande. On aurait dans ce cas avec une prise de vapeur augmentée un résultat tout contraire ; c'est-à-dire le rendement de l'évaporation décroîtra à plus forte raison.

2.32 La formule (14)

Un changement en ϱ cause une variation dans la distribution de température des différents corps. Par conséquent la température des vapeurs prises variera aussi, ce qui exercera une influence sur leur utilisation. Pour étudier l'influence du changement en ϱ sur la température, nous formons la dérivée $\frac{\partial \Delta t_i}{\partial \varrho_j}$; elle a trois valeurs différentes, selon que $i \gtrless j$.

Si $i > j$:

$$\frac{\partial \Delta t_i}{\partial \varrho_j} = \frac{-1}{\sum_{l=1}^{n} \varrho_k} \left(\Delta t_i + \varrho_i \sum_{l=j}^{i-1} R_l \right) \tag{24}$$

Si $i = j$:

$$\frac{\partial \Delta t_i}{\partial \varrho_i} = \Delta t_i \left(\frac{1}{\varrho_i} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \varrho_k} \right) \tag{25}$$

Si $i < j$:

$$\frac{\partial \Delta t_i}{\partial \varrho_j} = \frac{-1}{\sum_{k=1}^{n} \varrho_k} \left(\Delta t_i - \varrho_i \sum_{l=i}^{j-1} R_l \right) \tag{26}$$

De l'équation (25) dont le côté droit est toujours positif, il ressort immédiatement, que la chute de température augmente toujours dans le corps, dans lequel une incrustation s'est formée. Cette augmentation — bien connue — se forme au dépens des chutes des autres corps. Si le décroissement de la translation de chaleur a lieu dans les premiers corps, la chute de température sera plus petite dans tous les corps d'indice supérieur, parce que dans l'équation (24) le côté droit est toujours négatif. Un tel cas influencera toutes les prises de vapeur dans un sens défavorable, car les températures décroîssent, ce qui rendra plus difficile l'emploi des prises. Cet inconvénient pourra être compensé à un certain degré en restreignant les quantités de vapeur prises. — Si, d'autre part, la transmission diminue dans un des corps à indice supérieur, son influence sur les températures des vapeurs d'indice plus petit sera moins forte, car la paranthèse de l'équation (26) est plus petite que celle de l'équation (24).

3. Application à une évaporation à quadruple effet

3.1 Nous faisons usage de nos résultats (équations (14), (18) et (20)) dans le cas d'un système d'évaporateur à quadruple effet.

Pour un corps quelconque, i, l'équation (14) prend la forme :

$$\Delta t_i = \frac{\varrho_i}{\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4} \left(\Delta T + \sum_{l=i}^{3} R_l \sum_{m=+1}^{4} \varrho_m - \sum_{p=1}^{i-1} R_p \sum_{q=1}^{p} \varrho_q \right) \tag{27}$$

On déduit de celle-ci la chute pour les corps déterminés :

$$\Delta t_1 = \frac{\varrho_1}{\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4} \left[\Delta T + R_1 (\varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4) + R_2 (\varrho_3 + \varrho_4) + R_3 \varrho_4 \right] \tag{28}$$

$$\Delta t_2 = \frac{\varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4} \left[\Delta T + R_2 (\varrho_3 + \varrho_4) + R_3 \varrho_4 - R_1 \varrho_1 \right] \tag{29}$$

Pour Δt_3 et Δt_4 on obtient des formules semblables.

La quantité de dissolvent évaporé d'après la formule (18) sera

$$V = \frac{1}{\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4} \left[4\, \Delta T + R_1 (\varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 - 3\varrho_1) + \right.$$
$$\left. + 2 R_2 (\varrho_3 + \varrho_4 - \varrho_1 - \varrho_2) + R_3 (3 \varrho_4 - \varrho_1 - \varrho_2 - \varrho_3) \right] \tag{30}$$

Enfin pour le chauffage on exigera la quantité de vapeur d'après la formule (20)

$$G = \frac{1}{\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4} \left[\Delta T + R_1 (\varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4) + R_2 (\varrho_3 + \varrho_4) + R_3 \varrho_4 \right] \tag{31}$$

Nous illustrons par quelques exemples numériques l'application pratique des formules.

3.2 Supposons que dans une usine une évaporation à quadruple effet ait les données suivantes :

	Surface de chauffe F m^2	Coefficient de translation de chaleur $\varkappa$ Cal/m^2h°C
1. corps	1000	2000
2. corps	800	1250
3. corps	500	1000
4. corps	400	500

Supposons ensuite, que dans chaque corps uniformément $r = 540$ Cal/kg et que $Z = 1{,}08 \cdot 10^{-5}$ heures. (Ces données peuvent bien être celles d'une sucrerie moyenne ; Z représente le temps, pendant lequel 1 kg de betteraves est travaillé.)

Les valeurs de ϱ calculées par la formule (7) seront respectivement 25, 50, 100, 250 °C/kg.

Supposons ensuite qu'on exige pour l'usine les prises de vapeur suivantes (pendant le temps Z) $R_1 = 0{,}16$; $R_2 = 0{,}1$; $R_3 = 0{,}08$ kg. La chute totale de la température soit $\Delta T = 50$ °C.

D'après les formules (18) resp. (30) la quantité totale de dissolvent évaporé sera :

$$V = \frac{1}{25 + 50 + 100 + 250} \Big[4 \cdot 50 + 0{,}16\,(50 + 100 + 250 - 3 \cdot 25) +$$

$$+ 2 \cdot 0{,}1\,(100 + 250 - 25 - 50) + 0{,}08\,(3 \cdot 250 - 25 - 50 - 100) \Big] = 0{,}83 \text{ kg}$$

La vapeur de chauffe calculée par les formules (20) resp. (31) est $G = 0{,}3975$ kg et les chutes de température par les formules (27) et suivantes seront respectivement : $\Delta t = 9{,}94$; 11,89 ; 13,77 ; 14,40 °C.

Les résultats calculés sont représentés dans figure 2.

Au moyen de la formule (4) on peut contrôler les valeurs de Δt.

3.3 Si la chute de température totale (ΔT) dont nous disposons, croît, le rendement et en même temps la vapeur de chauffe augmente également. Supposons maintenant que ΔT soit consécutivement 30, 40, 60 et 70 °C, alors le même système évaporera $V = 0{,}643$; 0,736 ; 0,924 ; 1,020 kg et exigera $G = 0{,}35$; 0,374 ; 0,421 et 0,444 kg. On voit donc, que nous avons établi numériquement le rendement et la vapeur de chauffe en fonction de la chute de température,—un résultat qui auparavant n'était connu que qualitativement.

3.4 Supposons que dans le troisième corps le coefficient de translation de chaleur tombe à 800, puis à 572 Cal/m²h °C. Calculons l'augmentation de la chute de température totale nécessaire, au cas où on exige, qu'avec les mêmes prises le rendement total ($V = 0{,}83$ kg) ne change pas. Si la transmission de cha-

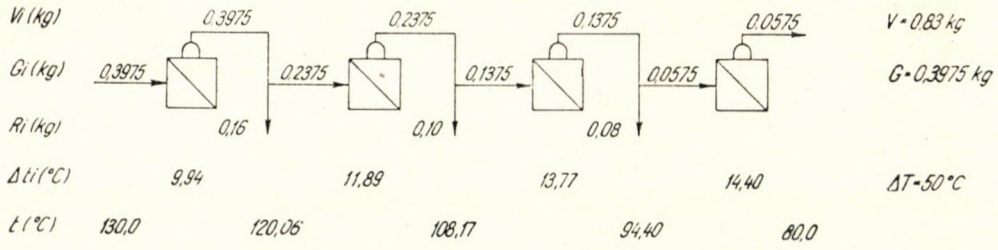


Fig. 2

leur décroît, ϱ augmente et atteind les valeurs 125, resp. 175 °C/kg. La chute de température cherchée se calcule par la formule (30), d'où on exprime ΔT. Nous arrivons aux résultats $\Delta T = 53{,}4$ pour le premier et $\Delta T = 60{,}25$ °C pour le second cas. Puisque les prises et le rendement restent invari-

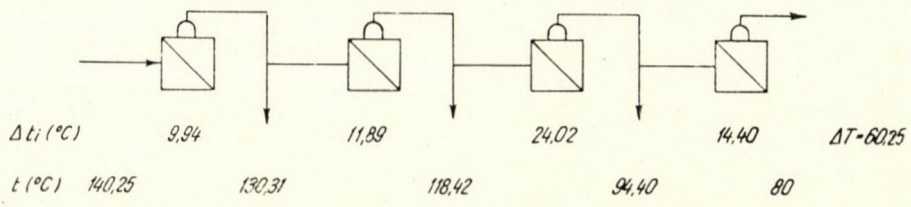


Fig. 3

ables, la vapeur de chauffe ne change forcément non plus. Ceci se vérifie par l'équation (31) : si on remplace les nouvelles valeurs de ΔT *et* ϱ, on obtient exactement les mêmes valeurs, que nous avons calculées au chapitre 3.2. On n'a donc pas besoin d'un surplus de vapeur, mais — si la limite inférieure de la chute de température ne peut pas être abaissée — il faut que la vapeur de chauffe soit plus chaude. Ainsi au point de vue de l'énergie, le surplus d'énergie est insignifiant, mais si la vapeur provient d'une machine à vapeur, il faut bien se rendre compte du désavantage dû à une contre-pression de vapeur plus élevée. De même, il faut examiner, si la température élevée ne cause pas de dommages dans la solution à évaporer (p. e. en sucrerie la décomposition du sucre).

Les chutes de température ont été calculées par la formule (27). Les résultats sont représentés dans figure 3.

On voit que le surplus de chute de température se retrouve au troisième corps. Les vapeurs du premier et second corps sont devenues plus chaudes. On

peut donc faire une économie de vapeur, si pour certains chauffages, fonctionnant avec la vapeur de premier corps, on se sert de la vapeur du deuxième corps.

3.5 Supposons maintenant qu'on ne puisse pas augmenter la chute de température totale, $\varrho_3 = 175$ °C/kg (les autres ϱ restent invariables) et malgré tout il faut atteindre la même quantité évaporée ($V = 0{,}83$ kg). On peut résoudre ce problème en augmentant les prises de vapeur, à condition — bien entendu — qu'on ait la possibilité de les employer économiquement.

Nous cherchons d'abord à augmenter la prise du troisième corps, étant donné que la production de cette vapeur coute le moins en vapeur de chauffe. On résoudra l'équation (30) pour R_3 et obtient que $R_3 = 0{,}162$ kg. Toutefois

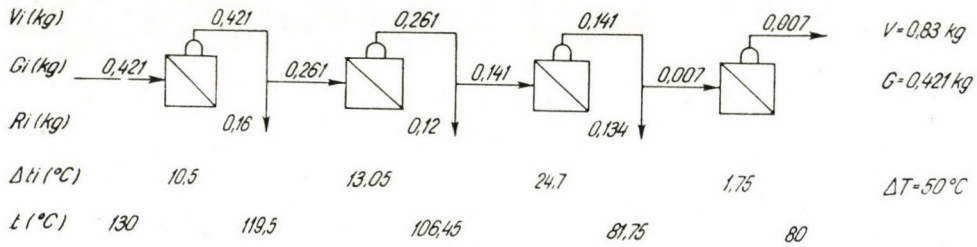


Fig. 4

cette solution n'est pas réelle, R_3 est trop grand et par conséquent on ne peut pas satisfaire à la condition d'après laquelle il faut que

$$\sum_{i=1}^{n-1} i R_i < V \tag{32}$$

Ainsi on sera obligé de transférer une partie de la prise sur le deuxième corps. Admettons donc que $R_2 = 0{,}12$ kg. Compte tenu de cette valeur, l'équation (30) nous fournit pour $R_3 = 0{,}134$. La vapeur à chauffer sera d'après (31) $G = 0{,}421$ et les chutes de température d'après l'équation (27) respectivement : 10,5 ; 13,05 ; 24,7 ; 1,75 °C. Les résultats sont représentés dans figure 4.

On constate d'abord que nous avons réussi à obtenir le résultat desiré. La vapeur de chauffe augmente de 0,02 kg ; la température des vapeurs du premier et second corps sont un peu plus basses (1—2 degrés) ; la chute de température est très forte au troisième corps ; le quatrième corps travaille à peine.

Une alternative de cette solution serait une augmentation de prise du premier corps. Les résultats calculés sont démontrés sur figure 5. Cette solution exige un fort surplus de vapeur de chauffe.

En tenant compte des circonstances de l'usine, il faudra choisir la solution la plus économique.

3.6 Examinons maintenant un système d'évaporation, qui a la particularité signalée au chapitre 2.33, c'est-à-dire qu'avec l'augmentation des prises, le rendement diminue, bien que le système exige un surplus en vapeur de chauffe.

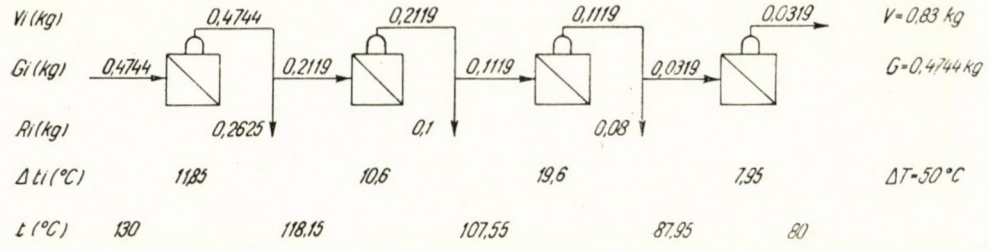


Fig. 5

Admettons que ϱ soit respectivement : 40, 10, 20 et 20° C/kg. Par ces valeurs le système d'évaporation est déterminé. Son unique particularité est que la transmission de chaleur du premier corps est relativement faible. Toutes les autres données d'usine peuvent être choisies arbitrairement, elles n'influenceront pas la propriété de l'évaporation, en question. Soient $\Delta T = 30°$ C, $R_1 = 0{,}2$; $R_2 = 0{,}1$; $R_3 = 0{,}08$ kg.

On calcule $V = 1{,}147$ kg et $G = 0{,}507$ kg.

Augmentons maintenant la prise du second corps de 0,1 à 0,3, p. e. On obtient pour $V = 1{,}102$ kg et $G = 0{,}5955$ kg. On voit donc qu'en augmentant la prise, le rendement de l'évaporation diminue et en dépit de ce fait la vapeur

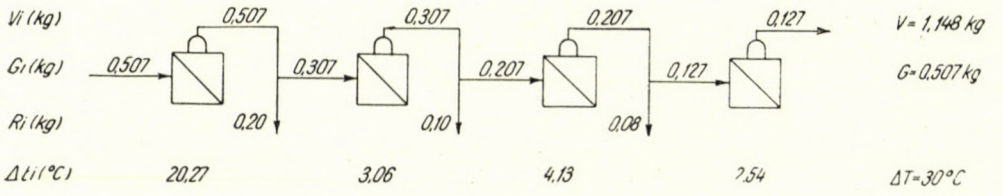


Fig. 6

de chauffe augmente. Les données correspondantes sont comprises dans figures 6. et 7.

On observera exactement le même effet, si on augmente la prise non pas au second corps, mais n'importe où.

Une telle évaporation donne un rendement plus élevé, si on réduit les prises et exigera — fait paradoxal — moins de vapeur de chauffe. Si on supprime complètement les prises — c'est bien entendu le cas extrême — l'évaporation sera $V = 1{,}333$ kg et il faudra que $G = 0{,}333$ kg.

3.7 Dans l'exemple précédent l'augmentation de n'importe quelle prise diminuait le rendement de l'évaporation. On peut construire des systèmes, dans

lesquels certaines prises diminuent, d'autres augmentent le rendement. Cela dépend toujours du signe de R_i en formule (18). (Voir chapitre 2.23).

On aura un tel évaporateur, si on prend $\varrho_1 = 20°$ C/kg et tous les autres ϱ restent tels que dans l'exemple précédent, c'est-à-dire $\varrho_2 = 10$, $\varrho_3 = \varrho_4 = 20°$ C/kg. Dans ce système l'augmentation de R_1 fait décroître le rendement — le coefficient de R_1 étant négatif, $\varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 - \varrho_1 = 50 - 3 \cdot 20$ — tandis que l'accroissement de toutes les autres prises augmente le rendement, puisque les coefficients des R sont positifs.

3.8 Supposons enfin que nous faisons un nouveau groupement des surfaces du système décrit au chapitre 3.2, de façon que nous joignons au premier corps

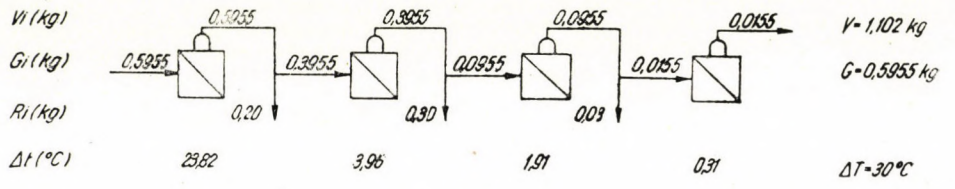


Fig. 7

un appareil du second corps, avec une surface de chauffe de 200 m². Le coefficient de translation de chaleur est conformément au premier corps — 2000 cal/m²h°C.

Ainsi $F_1 = 1200$ m², $\varkappa_1 = 2000$ Cal/m²h°C et $\varrho_1 = 20{,}8°$ C/kg, puis $F_2 = 600$ m², $\varkappa_2 = 1250$ Cal/m²h°C et $\varrho_2 = 66{,}7$°C/kg.

Au moyen des formules, on obtient : $V = 0{,}818$ kg et $G = 0{,}394$ kg.

On constate que le nouveau groupement est désavantageux, parce que le rendement est plus petit. Ceci est d'autant plus remarquable, que nous avons attribué à l'appareil un coefficient de translation plus élevé, c'est-à-dire 2000 au lieu de 1250 Cal/m²h°C. Il faudra donc refaire les calculs pour pouvoir trouver une meilleure solution.

*

Remarque. On a mis au point un instrument électro-analogique, qui permet d'évaluer les formules précédentes en quelques minutes avec une exactitude suffisante pour la pratique. Nous en rendrons compte à la prochaine occasion.

LITTÉRATURE

Ollé, L. : Energiamegtakarítás lehetőségei cukorgyárakban (Les possibilités d'une économie d'énergie en sucrerie), Budapest, Magyar Cukorgyárosok Országos Egyesülete, 1943.

Brajnesz, Ja. M. : Vegyipari műveletek, gépek és készülékek (Opérations, machines et appareils de l'industrie chimique), Budapest, Nehézipari könyvkiadó, 1951.

Kaszatkin, A. G. : Alapműveletek, gépek és készülékek a vegyiparban (Opérations fondamentales, machines et appareils dans l'industrie chimique), Budapest, Nehézipari könyvkiadó, 1953.

Oplatka, Gy.: Energiagazdálkodás az élelmiszeriparban (Économie d'énergie dans les industries alimentaires), Budapest, Élelmezési és Begyűjtési Könyv- és Lapkiadó, 1954.

RÉSUMÉ

Nous avons établi les formules générales d'un système d'évaporation à multiple effet avec prises de vapeur, grâce auxquelles on peut calculer la température qui régnera dans chaque corps, la quantité d'eau évaporée, ainsi que la consommation de vapeur de chauffe, à condition de connaître les données suivantes : coefficients de translation, prises de vapeur et chute de température totale.

À l'aide des formules on peut analyser l'effet de chacun des facteurs. On peut, par exemple, démontrer que l'incrustation du premier corps diminuant la transmission de la chaleur, influence le rendement de l'évaporation de façon bien plus sensible qu'au cas d'une incrustation du dernier. Nous citons encore, comme fait intéressant, la constatation qu'il existe des stations d'évaporation dont le rendement en eau évaporée diminue, quoique les prises de vapeur sur les corps et la consommation de vapeur du système augmentent. Dans ces systèmes, on peut augmenter le rendement et réduire la consommation en diminuant les prises de vapeur. Nous avons appliqué les résultats généraux à un quadruple effet avec prises de vapeur et complété l'étude par de nombreux exemples numériques.

О МНОГОКРАТНОЙ ВЫПАРКЕ С ОТБОРОМ ЭКСТРАПАРА

Д-р техн. наук Г. Оплатка

Резюме

Выведено общее уравнение для расчета многократной выпарки с отбором экстрапара. Зная данные, характеризирующие теплопередачу, отборы экстрапара и общий перепад температуры, можно произвести расчет перепадов температур для отдельных корпусов, производительности и расхода пара выпарного аппарата. Выведенные уравнения позволяют осуществить анализ роли отдельных факторов. Например, оказалось, что пригары (ухудшающие теплопередачу) в первом корпусе значительно сильнее влияют на производительность выпарного аппарата, чем образование накипи в последнем корпусе. Следует подчеркнуть определение (как особо интересный факт), что существуют такие выпарные системы, у которых производительность по выпарке падает с повышением отбора экстрапара, несмотря на то, что возрастает расход пара. Для таких выпарных аппаратов в интересах повышения производительности следует снижать отбор экстрапара, что, в свою очередь, связано со снижением расхода подогревного пара. Общие результаты автор применил к расчету четырехкорпусного выпарного аппарата и дополнил рядом цифровых примеров.

A STUDY ON MULTIPLE-STAGE EVAPORATOR SYSTEMS WITH VAPOUR-BLEEDING

G. OPLATKA

D. of Eng. Sc.

SUMMARY

A series of general equations concerning multiple-stage evaporator systems with vapour-bleeding has been established and may be used to determine the temperature drop between individual stages as well as the capacity and heating-steam requirements of the evaporator, provided characteristical data of heat transmission, vapour-bleeding and the entire available heat-drop are known. The equations will serve to analyze the influence of the individual factors. It has been shown f. i. that evaporator scales, impairing heat transfer, influence evaporator capacity in a much more incisive measure, if scale formation takes place in the first stage instead of in the last one. It may be emphasized as a statement of special interest that there are evaporator systems where increasing vapour-bleeding reduces capacity in spite of rising heating-

steam requirements. Here capacity increase may be attained by bleeding less vapour which leads to diminishing heating-steam requirements. The general results of the investigation have been applied to a four-stage evaporator with vapour-bleeding. A number of examples for calculation are given.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER MEHRSTUFIGE VERDAMPFUNGSSYSTEME MIT BRÜDENENTNAHME

G. OPLATKA

Doktor der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Abhandlung werden allgemeine Gleichungen bezüglich mehrstufiger Verdampfungssysteme mit Brüdenentnahme abgeleitet, mit deren Hilfe sich in Kenntnis der für die Wärmeübertragung des Verdampfers charakteristischen Angaben, der Brüdenentnahmen und des zur Verfügung stehenden Wärmegefälles die in den einzelnen Stufen entstehenden Temperaturgefälle, ferner die Leistung und der Heizdampfbedarf des Verdampfers ermitteln lassen. Auf Grund dieser Gleichungen ist es dann möglich den Einfluss der einzelnen Faktoren zu analysieren. So kann z. B. nachgewiesen werden, dass der die Wärmeübergabe beeinträchtigende Belag die Leistung des Verdampfers viel empfindlicher beeinflusst, falls er in der ersten Stufe anstatt in der letzten entsteht. Als besonders interessant sei erwähnt, dass es Verdampfungssysteme gibt, bei denen sich die Leistung bei Erhöhung der Brüdenentnahme verringert, obwohl ein erhöhter Heizdampfbedarf zu verzeichnen ist. Eine Leistungssteigerung dieser Verdampfer kann durch Verringerung der Brüdenentnahme erzielt werden, was gleichzeitig einen Rückgang des Heizdampfbedarfes zur Folge hat. Schliesslich wurden die allgemeinen Ergebnisse auf einen vierstufigen Verdampfer mit Brüdenentnahme angewandt und mit einer Anzahl von Zahlenbeispielen ergänzt.

RESULTS ON SHELLS OF TRANSLATION

Prof. P. CSONKA

D. OF ENG. SC.

DEPARTMENT FOR STRUCTURAL ANALYSIS, UNIVERSITY OF BUILDING SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript presented on April 13, 1954]

1. Introduction

The calculation of shells of translation *(Fig. 1)* is known to be very cumbersome, in general. This explains why these shells have hitherto found very rare practical use in spite of their economy and shapely form.

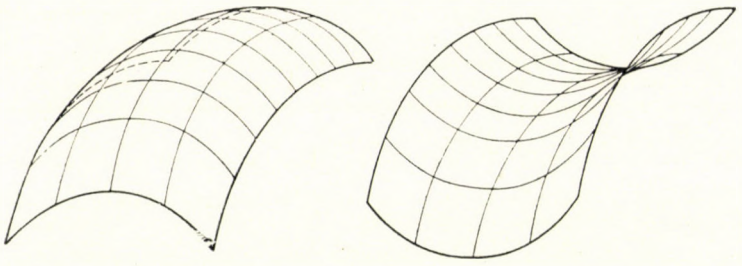


Fig. 1. Shells shaped according to surfaces of translation

The aim of this paper is to demonstrate that the otherwise considerable difficulties connected with the calculation of such shells can be eliminated by a proper choice of the generating curves of the surfaces of translation. Recognition and proof of this may substantially contribute to their future application.

2. Assumptions

Investigations will cover such a shell over rectangular ground plan as has two vertical planes of symmetry *(Fig. 2)*. The shell is supported on its edges by vertical walls or arches. Vertical loads, distributed symmetrically relative, to these planes of symmetry, are acting on the shell only.

It is assumed that the shell is in the state of a stressed membrane, and its supporting walls or arches are resistant against forces acting in their own planes only. Disturbing effects inconsistent with the stressed membrane state, due to different deformations of the heterogeneous structures at the junction of the shell and of its supporting walls or arches, will be disregarded.

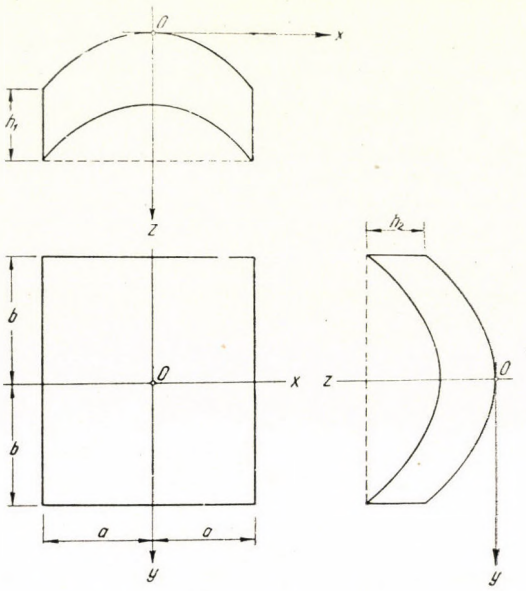


Fig. 2. Translation surface shell on a rectangular base

3. Differential equation of the problem

The system of rectangular co-ordinates $O(x, y, z)$ used in the investigations is presented in *Fig. 2.* Its origin lies on the middle surface of the shell ; axes x and y are horizontal and parallel to the supporting walls of the shell. Axis z is positive downward. In this system of co-ordinates the equation of the middle surfaces of the shell shaped according to a surface of translation

$$z = f(x, y) = f_1(x) + f_2(y). \tag{1}$$

For the statement of the conditions of equilibrium a shell element is supposed to be cut out, the middle surface of which presents itself in projection on plane x, y as rectangle with sides dx, dy *(Fig. 3).*

For characterizing internal forces acting on the faces of the element of shell projections of these forces on the axes, x, y are used. Specific values of these components referred to the side lengths of the projection rectangle of sides dx, dy are denoted by symbols n_x, n_y, n_{xy}, n_{yx}. Their values are regarded positive if their arrows on the faces visible from the positive axis ends point toward the positive axis directions.

The specific value of the vertical load referred to projection area dx, dy is denoted by letter symbol Z. With arrow pointed downward it is considered positive.

With the above symbols the conditions of equilibrium of the element of shell considered as a free-body may be stated [1] :

$$\left.\begin{aligned} &n_{xy} - n_{yx} = 0, \\ &\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} = 0, \\ &n_x \frac{d^2 f_1}{dx^2} + n_y \frac{d^2 f_2}{dy^2} + Z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

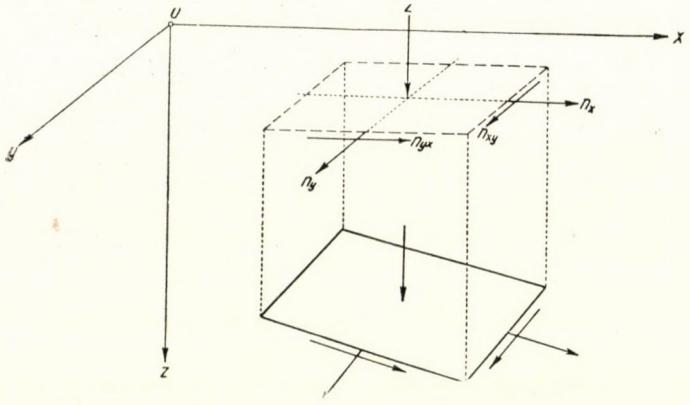


Fig. 3. Middle surface of an element of shell and its projection

It is known that the above system of equations is essentially simplified, if for the characterization of the stress condition of the shell a *stress function* $F(x, y)$ is introduced which is in the following relation to the internal forces :

$$\left.\begin{aligned} n_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ n_{xy} &= n_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

In this case the first three equations of equilibrium are in advance satisfied and the fourth equation sets the following condition for function $F(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{d^2 f_1}{dx^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{d^2 f_2}{dy^2} + Z = 0. \tag{4}$$

Besides this, of course, function $F(x, y)$ has to fulfill border conditions of the problem. Since the supporting walls or arches of the shell have to resist only

forces acting in their planes, border conditions have to state that along borders $y = \pm b$

$$n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \tag{5a}$$

and along borders $x = \pm a$

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0. \tag{5b}$$

4. Solution of the problem

In case of given functions $f_1(x)$ and $f_2(y)$ the solution of differential equation (4) in conformity with border conditions is confronted with almost insurmountable difficulties. Therefore functions $f_1(x)$ and $f_2(y)$ determining the shape of the shell will not be considered as given. The aim is to produce a case in which partial differential equation (4) can be decomposed into two ordinary differential equations.

This is the case, e. g., if the first or the second member of differential equation (4) is a function of parameter x, or y respectively only:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{d^2 f_1}{dx^2} &= G_1(x), \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{d^2 f_2}{dy^2} &= G_2(y). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Besides this for attaining this aim with security it is also necessary that the third member of differential equation (4), namely load function $Z(x, y)$ be decomposable into two parts one of which is a function of x and the other of function y only:

$$Z(x, y) = Z_1(x) + Z_2(y). \tag{7}$$

The possibility of decomposition is in practical cases always at hand at least with good approximation.

In case conditions (6) and (7) are satisfied *partial* differential equation (4) may be written in the form

$$G_1(x) + G_2(y) + Z_1(x) + Z_2(y) = 0, \tag{8}$$

and it can accordingly be substituted by two *ordinary* differential equations:

$$\left.\begin{aligned} G_1(x) + Z_1(x) &= 0, \\ G_2(y) + Z_2(y) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Relations (9) substituted into equations (6) yield the following formulae:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{d^2 f_1}{dx^2} &= -Z_1(x), \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{d^2 f_2}{dy^2} &= -Z_2(y). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

From these it is evident that in the present case expressions $\partial^2 F/\partial y^2$, and $\partial^2 F/\partial x^2$ can be only functions of x or of y respectively. Accordingly function $F(x, y)$ can have only the form:

$$F(x, y) = (k_1 + l_1 x + m_1 x^2) \cdot (k_2 + l_2 y + m_2 y^2). \tag{11}$$

Here k_1, k_2, l_1, l_2, m_1, m_2 represent constants. However, the constants in question cannot be freely selected because of border conditions (5a) and (5b), namely

$$\begin{aligned} l_1 &= 0, & m_1 &= -k_1/a^2, \\ l_2 &= 0, & m_2 &= -k_2/b^2, \end{aligned}$$

and thus

$$F(x, y) = k_1 (1 - x^2/a^2) \cdot k_2 (1 - y^2/b^2).$$

From this with notation

$$\frac{K}{2} \equiv \frac{k_1 \cdot k_2}{a^2 \cdot b^2},$$

results

$$F(x, y) = \frac{K}{2} (a^2 - x^2) \cdot (b^2 - y^2). \tag{12}$$

In this formula parameter K can equal zero only if the shell is unloaded. According to (3) namely:

$$\left.\begin{aligned} n_x = -K(a^2 - x^2), \qquad n_y &= -K(b^2 - y^2), \\ n_{xy} = n_{yx} &= -2Kxy. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

With function $F(x, y)$ known, equations (10) are recurred to. After substitution of relations (12) into the latter the following ordinary differential equations are obtained:

$$-Ka^2 (1 - x^2/a^2) \frac{d^2 f_1}{dx^2} = -Z_1(x),$$

$$-Kb^2 (1 - y^2/b^2) \frac{d^2 f_2}{dy^2} = -Z_2(y).$$

From these equations $f_1(x)$ and $f_2(y)$ can be determined already

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{Ka^2}\iint \frac{Z_1(x)}{1-x^2/a^2}\,dx\,dx, \\ f_2(y) &= \frac{1}{Kb^2}\iint \frac{Z_2(y)}{1-y^2/b^2}\,dy\,dy, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

and thus on the basis of relation (1) function $f(x, y)$ characterizing the shape of the shell can also be defined:

$$f(x,y) = \frac{1}{Ka^2}\iint \frac{Z_1(x)}{1-x^2/a^2}\,dx\,dx + \\ + \frac{1}{Kb^2}\iint \frac{Z_2(y)}{1-y^2/b^2}\,dy\,dy. \tag{15}$$

Integrations in the above formula are simply achievable if functions $Z_1(x)$ and $Z_2(y)$ are rational whole functions, the following discussions will therefore be restricted to that simple case. Then in consequence of the assumed symmetry of loading:

$$Z_1(x) = \sum_{k=0}^{m} A_{2k}\, x^{2k}/a^{2k},$$

$$Z_2(y) = \sum_{k=0}^{n} B_{2k} y^{2k}/b^{2k}.$$

If these values are substituted into formula (15) and the double integration is executed as well as the border conditions are satisfied, the following formula is obtained for the function $f(x, y)$ sought for:

$$f(x,y) = \frac{1}{K}\left[Z_1(a)\cdot R(x/a) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\sum_{i=k}^{m} A_{2i}}{2k\,(2k-1)}\cdot\frac{x^{2k}}{a^{2k}}\right] + \\ + \frac{1}{K}\left[Z_2(b)\cdot R(y/b) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=k}^{n} B_{2i}}{2k\,(2k-1)}\cdot\frac{y^{2k}}{b^{2k}}\right]. \tag{16}$$

In this formula

$$R(t) = \frac{1}{2}[(1+t)\ln(1+t) + (1-t)\ln(1-t)]. \tag{17}$$

Table I and *Fig. 4* give information on values of function $R(t)$.

TABLE I

Values of function R(t)

± t	R(t)
0,0	0,0000
0,1	0,0050
0,2	0,0201
0,3	0,0457
0,4	0,0823
0,5	0,1308
0,6	0,1927
0,7	0,2704
0,8	0,3681
0,9	0,4946
1,0	0,6931

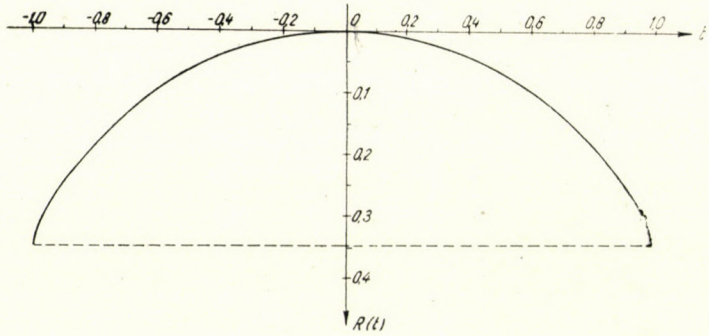


Fig. 4. Values of function (*Rt*)

5. Case of uniformly distributed load

In this loading case

$$Z_1(x) = A_0, \qquad Z_2(y) = B_0,$$

that is,

$$m = n = 0.$$

In such case the general equation under (16) may be written thus :

$$f(x,y) = \frac{1}{K}\left[A_0 R(x/a) + B_0 R(y/b)\right]. \tag{18}$$

Such is mostly the case with strongly arched shells, for from the slopes of such shells the snow slides down at least in part. On their backs, however, where the own weight of the vault referred to unit area of the horizontal projection is minimum, the full snow load is effective, while at the haunches, where the own weight has its maximum value, relatively light snow load is present. As a result, the total load on the shell, that is, the sum of own weight and of snow load may be regarded as fairly uniform [2]. The case may be the same with flat shells if its vertically measured wall thickness is uniform.

Of course, if a shell of specified arching has to be produced, parameters A_0 and B_0 are selected so that the generating curves parallel to axis planes xz and yz should have specified heights h_1 and h_2 respectively. These conditions are expressed by equations

$$f(a,\ b) - f(0,\ b) = h_1,$$
$$f(a,\ b) - f(a,\ 0) = h_2.$$

With regard to (18) these equations yield the following values for parameters A_0 and B_0

$$A_0 = K\ h_1/R\,(1), \qquad B_0 = K\ h_2/R\,(1). \tag{19}$$

Equation (18) may accordingly be written :

$$f(x, y) = \frac{1}{R\,(1)}\,[h_1 R\,(x/a) + h_2 R\,(y/b)]. \tag{20}$$

Finally the value of parameter K in formula (12) of the stress function is to be determined. This can be done on basis of the relation

$$A_0 + B_0 = q.$$

Values under (19) substituted into this formula yield the result

$$\frac{K}{R(1)}\,(h_1 + h_2) = q.$$

Hence

$$K = \frac{q\,R(1)}{h_1 + h_2}\,. \tag{21}$$

Hereafter with the aid of formula (13) the characteristics of internal forces can also be calculated already.

6. Case of load varying in quadratic ratio to distance from the plane of symmetry

In this case the functions of loading take the following form

$$Z_1(x) = A_0 + A_2 \frac{x^2}{a^2}, \qquad Z_2(y) = B_0 + B_2 \frac{y^2}{b^2}, \tag{22}$$

that is,

$$m = n = 1.$$

In such case equation (16) of the middle surface assumes the following simple form :

$$f(x,y) = \frac{1}{K}\left[(A_0 + A_2) R(x/a) - \frac{A_2 x^2}{2a^2}\right] + \\ + \frac{1}{K}\left[(B_0 + B_2) R(y/b) - \frac{B_2 y^2}{2b^2}\right]. \tag{23}$$

The case now treated can occur when the shell is relatively flat, because in this case the snow does not slide down from it, and one of the two load components, snow load p referred to unit area of the horizontal projection is uniform, while the own weight increases toward the corners.

If weight g referred to unit middle surface of the shell is uniform, the own weight per unit area of its horizontal projection can be expressed by the following formula :

$$g\left[1 + 2\left(\frac{h_1^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2} + \frac{h_2^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{b^2}\right)\right].$$

Thus the total load referred to unit area of the horizontal projection

$$Z(x,y) = p + g\left[1 + 2\left(\frac{h_1^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2} + \frac{h_2^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{b^2}\right)\right].$$

This function of loading will serve in the following as a basis of further analysis. In the given case

$$A_0 + B_0 = p + g \tag{24}$$

and

$$A_2 = 2g\ h_1^2/a^2, \qquad B_2 = 2g\ h_2^2/b^2. \tag{25}$$

Values of parameters A_0 and B_0 are again found like formerly :

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{Kh_1 + gh_1^2/a^2}{R(1)} - 2gh_1^2/a^2, \\ B_0 &= \frac{Kh_2 + gh_2^2/b^2}{R(1)} - 2gh_2^2/b^2. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

If these as well as values under (25) are substituted into equation (22), after some rearrangement it will be found that

$$f(x,y) = \left(h_1 + \frac{g}{K} \cdot \frac{h_1^2}{a^2}\right) \frac{R(x/a)}{R(1)} - \frac{g}{K} \cdot \frac{h_1^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2} + \\ + \left(h_2 + \frac{g}{K} \cdot \frac{h_2^2}{b^2}\right) \frac{R(y/b)}{R(1)} - \frac{g}{K} \cdot \frac{h_2^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{b^2}. \tag{27}$$

Finally the still unknown parameter K can be determined from relation (24) by substitution of values under (26) :

$$K = \frac{(p+g)\,R(1)}{h_1 + h_2} + g\,\frac{(h_1^2/a^2) + (h_2^2/b^2)}{h_1 + h_2}\,[2R(1) - 1]. \tag{28}$$

With values of K known ordinates of the middle surface of the shell can be computed by formula (27), and characteristics of internal forces by formula (13).

7. Numerical example

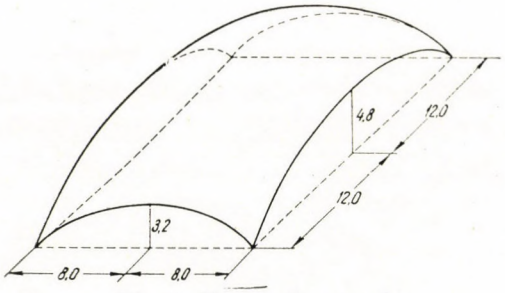


Fig. 5. Numerical example

To take an example the shell illustrated in Fig. 5 will be examined. Let the wall thickness of the shell be

$$d = 0{,}04 \ m,$$

its weight per unit surface

$$g = 120 \ \text{kg/m}^2,$$

and the snow load to be taken into account

$$p = 80 \ \text{kg/m}^2.$$

This shell being strongly arched, formulae of case $m = n = 0$ will be made use of. In this case the load assumed to be uniformly distributed

$$q = g + p = 200 \ \text{kg/m}^2$$

and the dimensions of the shell

$a = 8{,}0$ m, $h_1 = 3{,}2$ m, $h_1/a = 0{,}4$,
$b = 12{,}0$ m, $h_2 = 4{,}8$ m, $h_2/b = 0{,}4$.

Function $f(x, y)$ is first written down with the aid of formula (20) or of Table I.:

$$f(x, y) = \frac{1}{0{,}6931} [3{,}2\, R(x/a) + 4{,}8\, R(y/b)].$$

Hence after some rearrangement

$$f(x, y) = 4{,}6166 \cdot R(x/a) + 6{,}9250\ R(y/b).$$

Accordingly the equations of the generating curves sought for:

$$f_1(x) = 4{,}6166\, R(x/a),$$
$$f_2(y) = 6{,}9250\, R(y/b).$$

From these formulae the ordinates of the generating curves are already calculable with the aid of Table I. Their values are listed in Table II.

TABLE II

Ordinates of the Generating Curves

x	f_1	y	f_2
0	0,0000	0	0,0000
0,8	0,0231	1,2	0,0347
1,6	0,0930	2,4	0,1394
2,4	0,2110	3,6	0,3165
3,2	0,3799	4,8	0,5698
4,0	0,6039	6,0	0,9059
4,8	0,8898	7,2	1,3347
5,6	1,2485	8,4	1,8728
6,4	1,6992	9,6	2,5488
7,2	2,2835	10,8	3,4253
8,0	3,2000	12,0	4,8000

Hereafter the value of parameter K is determined by formula (21):

$$K = \frac{200 \cdot 0{,}6931}{3{,}2 + 4{,}8} = 17{,}3287 \text{ kg/m}^3.$$

After substitution of these values the internal forces can be calculated by formulae (13):

$$n_x = -17{,}3287\,(8{,}0^2 - x^2),$$
$$n_y = -17{,}3287\,(12{,}0^2 - y^2),$$
$$n_{xy} = n_{yx} = -2 \cdot 17{,}3287\, xy.$$

The normal stresses at $x = 0$, $y = 0$ are

$$\sigma_x = \frac{n_x(0,0)}{d} = -\frac{,3287 \cdot 8{,}0^2}{0{,}04} = -22\,726\ \mathrm{kg/m^2},$$

$$\sigma_y = \frac{n_y(0,0)}{d} = -\frac{17{,}3287 \cdot 12{,}0^2}{0{,}04} = -62\,383\ \mathrm{kg/m^2}.$$

The maximum shearing stress is produced at the corner points. E. g. at corner point

$$x = a,\ y = b,$$

the value of the shearing stresses is

$$\tau_{xy} = \frac{n_{xy}(a,b)}{d} = -\frac{2 \cdot 17{,}3287 \cdot 8{,}0 \cdot 12{,}0}{0{,}04} = -83\,178\ \mathrm{kg,m^2}.$$

REFERENCES

1. *B. Laffaille:* Mémoire sur l'étude générale de surfaces gauches minces. Mémoires de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes. **3** (1935), pp. 295—332.

2. *A. Aas—Jakobsen:* Sur le calcul de la voûte cylindrique circulaire. Travaux **19** (1937), pp. 529—535.

3. *I. Menyhárd:* Theory of Shell Structures, Part II. Publications of the Institute of Post-Graduate Training (Hungarian), **49** (1942).

4. *K. Szmodits:* Statics of Shell Structures (Hungarian). Budapest (1953), Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences.

SUMMARY

Analysis of shells with translation surfaces over rectangular bases; the form and loading of the shells are symmetrical relative to two vertical planes normal to each other. The paper demonstrates that the calculation of such shells, a very complicated problem in general, can be simplified very much by an adequate choice of the shell shape. Condition of application of the method is that the load on the shell should be vertical and resolvable into two components, one of which is a rational whole function of one horizontal co-ordinate, and the other such function of the other horizontal co-ordinate only.

Calculation is especially simplified if the specific loading of the shell referred to unit area of the base is constant or quadratically increasing with distance from the planes of symmetry. Formulae are developed for such cases.

A numerical example closes the paper, evidencing the utility and handiness of the method.

ОБ ОБОЛОЧКАХ, ФОРМИРОВАННЫХ СООТВЕТСТВЕННО ТРАНСЛЯЦИОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Д-р. техн. наук П. Чонка

Резюме

Статья разбирает такие оболочки с трансляционной поверхностью, построенные над прямоугольными четырехугольниками, форма и нагрузка которых в отношении двух перпендикулярно отвесных плоскостей, является симметричной.

Показано, что расчет таких оболочек, — что вообще представляет собою очень сложную задачу, — в случае выгодного выбора оболочек может быть исключительно упрощен. Условие применимости метода заключается в том, чтобы действующая на оболочку нагрузка была бы отвесной и ее можно было бы разбить на такие две части, одна

из которых представляла бы рациональную целую функцию только одной горизонтальной координаты, а другая только другой.

Расчет сильно упрощается, если удельная нагрузка, отнесенная на проекционную площадь оболочек, является постоянной, или же, удаляясь от плоскостей симметрии, имеет квадратичный рост. Для этих случаев в статье приведены соответствующие формулы.

В конце статьи дается числовой пример; числовой пример подтверждает целесообразность и простоту применения метода.

SUR LES VOILES À SURFACE DE TRANSLATION

Prof. P. CSONKA

Docteur des Sciences Techniques

RÉSUMÉ

L'étude traite des voiles à surface de translation, couvrant une zone rectangulaire, de forme et de charge symétriques par rapport à deux plans perpendiculaires.

Il est démontré que le calcul de ces voiles — problème fort compliqué en général — devient extrêmement simple au cas où l'on choisit convenablement la forme du voile. La condition de l'application du procédé est que la charge appliquée au voile soit verticale et puisse être divisée en deux parties, dont l'une est un polynôme rationnel seulement de l'une, l'autre seulement de l'autre coordonnée horizontale.

Le calcul se simplifie particulièrement, si la charge spécifique rapportée à la surface de projection du plan du voile est constante, ou croissante selon les carrés de la distance des plans de symétrie. L'auteur indique les formules relatives à ses cas.

L'étude se termine par un exemple numérique témoignant de l'importance du procédé et de la simplicité de son application.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER TRANSLATIONSSCHALEN

Prof. P. CSONKA

Doktor der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Der vorliegende Aufsatz befasst sich mit der Berechnung von Translationsschalen mit rechteckigem Grundriss, deren Form und Belastung in bezug auf zwei senkrecht aufeinander stehende, lotrechte Ebenen symmetrisch ist.

Es wird nachgewiesen, dass die Berechnung solcher Schalen — die im allgemeinen eine recht verwickelte Aufgabe darstellt — durch eine entsprechende Wahl der Schalenform ausserordentlich vereinfacht werden kann. Die Bedingung für die Anwendbarkeit der hier vorgeschlagenen Methode ist, dass die auf die Schale einwirkende Belastung lotrecht sei und in zwei Komponenten zerlegt werden könne, von denen die eine nur eine rationelle ganze Funktion der einen waagerechten Koordinate und die andere nur eine solche der anderen waagerechten Koordinate ist.

Die Berechnung vereinfacht sich besonders dann, wenn die auf die Grundrissfläche bezogene spezifische Belastung der Schale konstant ist oder sich bei zunehmender Entfernung von den Symmetrieebenen quadratisch erhöht. Für diese Fälle werden Formeln abgeleitet.

Zum Schlusse wird ein Zahlenbeispiel vorgeführt, das die Zweckmässigkeit und einfache Anwendbarkeit der vorgeschlagenen Methode veranschaulicht.

FALLACIES AND PARADOXA IN THE PLASTICITY THEORY

Prof. Dr. Ing. H. CRAEMER

MOGHALPURA COLLEGE OF ENGINEERING AND TECHNOLOGY, LAHORE, PAKISTAN

[Manuscript received April 23. 1954]

In order to reach a closer agreement between theoretical prediction and actual behaviour of structures in the range at and before failure, the plasticity theory has been established which, in its simplest form, assumes a relation between stress, σ, and strain, ε, as given by the solid line of *Fig. 1*. This paper is not concerned with the question whether or not this idealisation which neglects, among others, the usually occurring curvature of the stress-strain-line near the yield-point as shown dotted in the figure, is admissible for the different

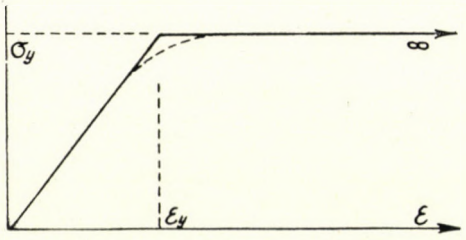


Fig. 1

materials. Possible instability as well as effects due to inhomogenity of the material and plastification due to shear stresses will also be disregarded.

Once an idealisation has been adopted as a base of a theory, it should be carried through consistently. But there are statements frequently repeated in publications and even looked upon as fundamentals of the plasticity theory which, in the author's view, are in contradiction with the adopted stress-strain-law.

1. *Cross-sections under bending.* After, in a rectangular cross-section $b \cdot h$, the yield point has been reached at the edge, $\varepsilon_e \geq \varepsilon_y$, it carries a moment $M = \left(1 - \frac{\varepsilon_y^2}{3\,\varepsilon_e^2}\right) \frac{\sigma_y\, b\, h^2}{4}$ as can readily be derived from *Fig. 2*. The full plastic moment is $M_y = \sigma_y b\, h^2/4$, corresponding to $\varepsilon_e = \infty$ and a rectangular stress distribution. As a utilisation factor of the cross-section we may define

the term

$$\nu = M/M_y, \text{ thus} \tag{1}$$

$$\varepsilon_e = \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{3(1-\nu)}}, \quad \varepsilon_y \leqq \varepsilon_c \leqq \infty, \text{ whereas} \tag{2}$$

$$\varepsilon_e = \frac{3}{2}\nu\,\varepsilon_y, \quad \varepsilon_e \leqq \varepsilon_y \text{ in the elastic domain. The limiting cases are} \tag{3}$$

$$\nu_y = 2/3, \quad \varepsilon_e = \varepsilon_y \text{ when yield starts at the edge, and} \tag{4}$$

$$\nu_y = 1, \quad \varepsilon_e = \infty \text{ at full plastification.} \tag{5}$$

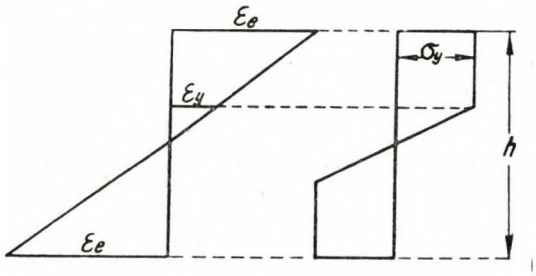


Fig. 2

In *Fig. 3*, ν is plotted against $\varepsilon_e/\varepsilon_y$ by a solid curve having a horizontal asymptote. In strain measurements, similar curves are often recorded and ex-

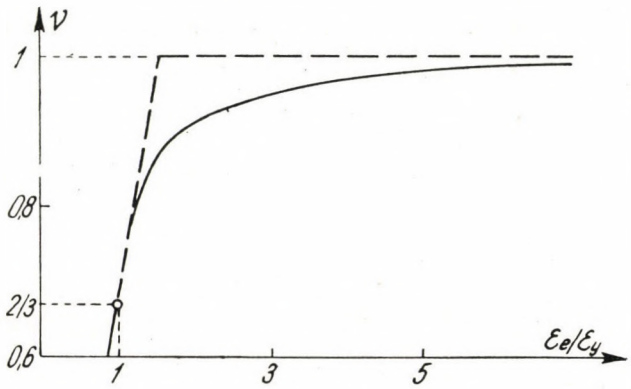


Fig. 3

plained as a necessary consequence of an actual shape of the stress-strain-line as dotted in Fig. 1. This is *misleading* since Fig. 3 is derived from the idealised broken stress-strain line.

As a fictitious extreme case we will consider what may be termed an ideal I-beam, i. e. with infinitely thin web and flanges but *infinite width*. As its whole material is concentrated in the outer fibres there can be no redistribution of stresses ; thus, when yield starts, no more increase of load is possible and full plastification is reached under the same load ; the strain can then have any value between ε_y and infinity :

$$\nu'_y = \nu_y = 1, \quad \varepsilon_y \leq \varepsilon_e \leq \infty, \text{ see the dashed line in Fig. 3.} \tag{6}$$

2. *Deflection of statically determinate beams.* The relative rotation of 2 cross-sections at a distance dx, i. e. the angular weight of an element is

$$d\varphi = \frac{2\,\varepsilon_e}{h}\,dx. \text{ Inserting either eq. (3) or (2)} \tag{7}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{3\,\nu\,\varepsilon_y}{h}, \quad \nu \leq \frac{2}{3} \tag{8}$$

and

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\,\varepsilon_y}{\sqrt{3\,(1-\nu)}}, \quad 2/3 \leq \nu \leq 1. \tag{9}$$

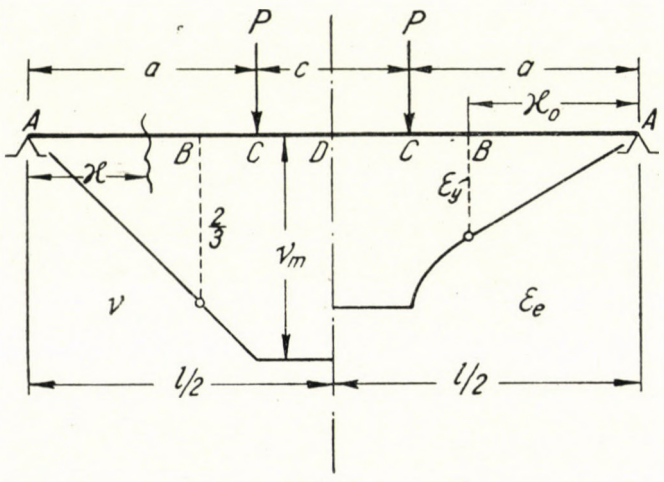


Fig. 4

Fig. 4 shows a beam working in the elasto-plastic range with its ν and ε_e values. Let x be the distance of any cross-section from the support, x_0 that of the section with $\nu = 2/3$ and ν_m the utilisation of the most stressed sections.

By expressing ν by ν_m and x, inserting into eqs. (8) and (9) and integrating we find the angle changes between A, B, C and D respectively:

$$\begin{cases} \varphi_{AB} = \dfrac{2\,a\,\varepsilon_y}{3\,\nu_m\,h}, \\ \varphi_{BC} = \dfrac{4}{\nu_m}\left(\dfrac{1}{3} - \sqrt{\dfrac{1-\nu_m}{3}}\right)\dfrac{a\,\varepsilon_y}{h}, \\ \varphi_{CD} = \dfrac{c}{a}\dfrac{1}{\sqrt{3\,(1-\nu_m)}}\dfrac{a\,\varepsilon_y}{h}. \end{cases} \tag{10}$$

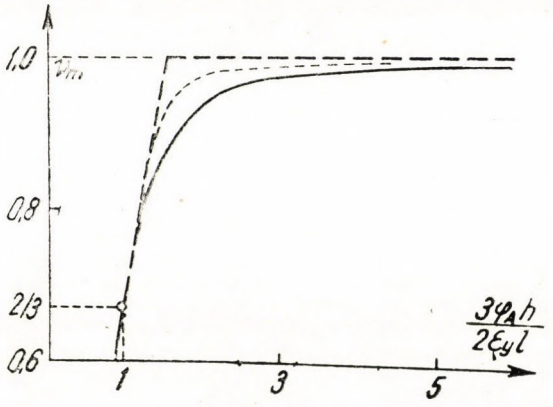


Fig. 5

The slope at the support is, therefore

$$\varphi_A = \left[\frac{2}{\nu_m}\left(1 - 2\sqrt{\frac{1-\nu_m}{3}}\right) + \frac{c}{a\sqrt{3(1-\nu_m)}}\right]\cdot\frac{\varepsilon_y\,a}{h}. \tag{11}$$

It is seen that, under full plastification, $\nu_m = 1$, the slope becomes infinite and the same is true for the deflection or any other deformation. Thus, the deformation necessary to bring about full utilisation of the bearing capacity of a system is not only great but, theoretically, *infinite* which is frequently overlooked. For loads in the third points, $l = 3$ a, the solid line in *Fig. 5* indicates φ_A as a multiple of $2\,\varepsilon_y l/3$ h.

Of course, one could object against the above computation that, under large deflections, the beam is subjected to tensile forces within AC; this, however does not affect the general conclusions.

The ideal I-beam, again, is an exception. As it obeys Hooke's law till $\nu_m = 1$, it follows the broken line of the figure. Actual I-beams with finite depth

exhibit a behaviour corresponding to a dotted line between the solid and dashed ones and experimentators often explain the deviation between the dashed and dotted types as induced by the dotted curve in Fig. 1. This, too, is a *misinterpretation* as the latter feature is not taken into account in the ideal plastic theory.

3. *A paradoxon.* Let now the 2 loads be united to one at the centre, $l = 2$ a. Then, in eq. (11), the last member will vanish and the slope, now denoted by φ_A and expressed in terms of $\varepsilon_y l/2$ h, will follow the solid line in Fig. 6. According to this, the slope at failure would be just twice that at first yield ; by shifting the loads from the third points to the centre the deformation thus appears to be reduced from infinity to a small finite value. The simplest experiment, however, proves that the value is too small.

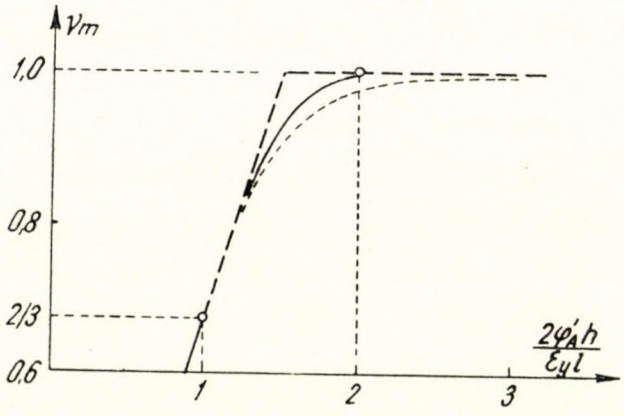


Fig. 6

Mathematically, this paradoxon is due to the fact that only the last member of eq. (11) leads to an infinitesimal term or, in other words, that, although ε_e at C is infinite for $\nu_m = 1$, the area of the strains below AC is finite.

Now, in this case, a concentrated load is an inadmissible idealisation. If, instead, the single load is distributed over a length however small but finite, the deformation for $\nu_m = 1$ will be infinity. The same can be proved with less arithmetic if 2 loads with a small distance, say $c = 0{,}02\ l$, are assumed ; then the last member in eq. (11) will reappear and yield the dotted line of *Fig. 6*. Thus the paradoxity is removed.

4. *The nature of the plastic hinges.* It is seen from eq. (10) that, for $\nu_m = 1$, and any finite value c, the mutual rotation of the sections C and D becomes infinity although the bending moment as well as the stresses remain finite, i. e. the part of the beam between C and D acts as a hinge. In view of this, the plastic hinges are not a more or less arbitrary auxiliary concept but a *necessary consequence* of the very base of the plasticity theory, viz. *Fig. 1.*

Moreover, the elastic parts, AB, as well as those, BC, with partial plastification have finite angle changes which, therefore, vanish with respect to those in the fully plastified parts. Thus, the frequently made statement that the curvature in the elastically and the partly plastically strained parts is «*practically* neglectable» in comparison with that in the fully plastified ones, is misleading.

It should be noted that the plastic hinges form but under the full plastic moment ; inversely, the latter is always accompanied by an infinite curvature, except for the ideal I-beam.

5. *Statically indeterminate systems ; compatibility condition.* In the opinion of some authors, the compatibility condition is no more valid in the plastic domain. This, of course, is a *fallacy* since in any case the geometrical continuity

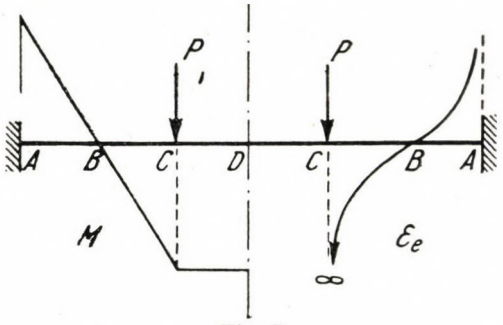


Fig. 7

of the structure must be preserved which has nothing to do with the particular shape of the stress-strain-law.

Fig. 7 shows a symmetrically loaded built-in beam with constant cross-section. At full yield the moments at the supports and between the loads are equal and the diagram of the edge strains has infinite ordinates at A and between C and D. The compatibility condition in this case runs

$$\int_A^D \varepsilon_e \, dx = 0. \tag{12}$$

Now, for reasons pointed out in connection with eqs. (10) and (11), the integral between A and B is finite and, as $AB = BC$, that between B and C is of same magnitude but opposite sign. As further the integral between C and D is infinite, the value expressed in eq. (12) is not zero but infinity.

The redistribution resp. equalisation of moments thus appears to be in complete contradiction to compatibility. Papers which tried to prove that the compatibility condition is fulfilled in this and other cases contain mistakes. On the other hand, experiments prove clearly that the equalisation takes place.

This further paradoxon is a logical consequence of that dealt with in the 3*rd* paragraph and it can be avoided in the same way. Let us examine *Fig. 8* in which, for convenience, a periodical system with an infinity of panels is assumed instead of the clamped one. Now, in the final stage, $v_A = v_D = 1$, and the ε_e — values within AE and CD become infinity as well as the corresponding areas ; thus the integral (12) appears in the indeterminate form $\infty - \infty$ which can well be equal to zero. A closer investigation will deliver interesting results.

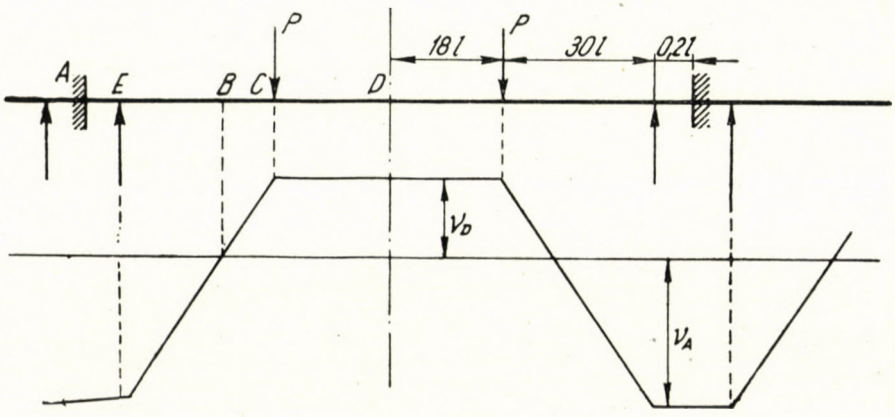


Fig. 8

If v_A and v_D are absolute values and ε_A and ε_D the strains belonging to them, the compatibility condition (12) will read

$$0{,}02\ \varepsilon_A\, l + \int_B^E \varepsilon_e\, dx = \int_B^C \varepsilon_e\, dx + 0.18\ \varepsilon_D\, l \text{ or, as } \frac{dx}{dv} = \frac{0{,}30\ l}{v_A + v_D},$$

$$\int_B^E \varepsilon_e\, d\,v - \int_B^C \varepsilon_e\, d\,v = (v_A + v_D)\ (0{,}60\ \varepsilon_D - 0{,}067\ \varepsilon_A). \tag{13}$$

In the purely elastic state we find from eqs. (3) and (13)

$$v_D = 0{,}515\ v_A, \qquad v_D < v_A \leqq 2/3. \tag{14}$$

The first yield in the structure thus will occur within AE. Hereafter we have to use eq. (3) within BCD and the elastic part of BE but eq. (2) within AE and the rest of BE. This delivers

$$1 - 2\sqrt{\frac{1 - v_A}{3}} - \frac{3}{4}\, v_D^2 = (v_A + v_D)\left(0{,}60\ v_D - 0{,}067\ \sqrt{\frac{1}{3(1 - v_A)}}\right), \tag{15}$$

$$v_D \leqq 2/3 \leqq v_A.$$

In the last stage both ε_A and ε_D obey eq. (2) and we arrive at

$$-(1-\nu_A)\sqrt{1-\nu_D}+(1-\nu_D)\sqrt{1-\nu_A}=(\nu_A+\nu_D)(0{,}30\sqrt{1-\nu_A}- \tag{16}$$
$$-0{,}034\sqrt{1-\nu_D}),\quad 2/3\leqq\nu_D\,\nu_A\leqq 1.$$

It is seen that this equation holds good for $\nu_D=\nu_A=1$, i. e. the consideration of compatibility leads to the equalisation of moments once the pitfall dealt with in Fig. 7 is avoided.

By

$$\omega=\frac{P}{P_y} \tag{17}$$

we may define the utilisation of the structure itself, P_y be-

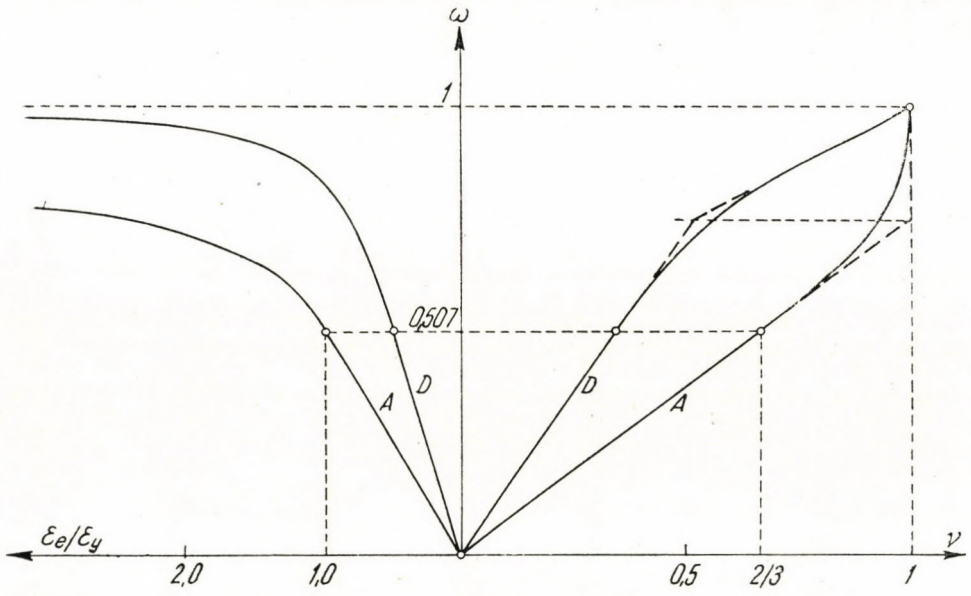


Fig. 9

ing the load at full plastification within both AE and CD. In our case, a consideration of part EC delivers

$$\omega=\tfrac{1}{2}(\nu_A+\nu_D). \tag{18}$$

This makes possible the plotting of what may be termed a utilisation diagram, see right part of *Fig. 9*, full lines. On its left side, the corresponding values $\varepsilon_e/\varepsilon_y$, derived from eqs. (2) and (3), are plotted. Similar diagrams could, of course, be derived for other cases of loading.

Important conclusions can be drawn from the figure. First according to several authors, the equalisation of moments may be utilized but the plasti-

fication of the cross-sections should not. This, however, is a rose without thorns since, up to the first yield in one section, the whole structure is elastic and no redistribution can take place, viz. $\nu_A = 2/3$ in the figure.

Other authors believe that redistribution begins only after one cross-section is stressed with the *full* plastic moment. This, too, is a fallacy as both ν_A and ν_D become unity simultaneously. Full plastification within AE involves infinite negative curvature ; but, in a statically indeterminate system, for purely geometrical reasons, this can only exist if there are also parts with positive infinite curvature, i. e. CD.

Only an ideal I-beam will behave differently, see the dashed lines in the figure. Indeed, part AE is fully plastified before part CD. Now, *nearly* the same has been observed in tests on actual I-beams. This has lead to the above criticised wrong interpretation. This is another warning that interpretations of empirical data should always be based on sound theoretical notions.

For several details connected with the topic see also the author's German papers ; Ingenieurarchiv *13* (1943) pg. 285 and *20* (1952) pg. 126.

SUMMARY

In contradiction to several authors the following statements are made. The curves representing the relation between *a)* stress and strain in the tensile test, *b)* load and edge strain in bending and *c)* load and deformation in bending, are often confused. Plastic hinges below single loads can only be correctly interpreted if the load is assumed to be distributed along a small but finite length. Compatibility conditions are valid for any stress-strain law. In statically indeterminate structures *full* plastification occurs simultaneously in the most stressed sections, not in one after another. Not before this state is reached, equalisation of moments can occur.

ОШИБКИ И ПРОТИВОРЕЧИЯ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Х. Кремер (Пакистан)

Резюме

В статье — в противоречие с мнением ряда авторов — показано, что часто смешивают кривые, указывающие на соотношения между а) растягивающим усилием и растяжением при работе на растяжение, б) нагрузкой и растяжением крайней струны при изгибе и в) нагрузкой и деформацией при изгибе. Пластические шарниры под концентрированной нагрузкой могут быть определены безошибочно только в том случае, если предполагается, что нагрузка распределяется на хотя и небольшой, но конечной длине. Условия совместимости действительны для любых закономерностей, выражающих зависимость между напряжением и деформацией. В случае статически неопределенных конструкций абсолютная пластификация наступает одновременно во всех сечениях, находящихся под наибольшим напряжением, а не поочередно. Перед достижением этого состояния не может наступить уравнивание моментов.

ERREURS ET CONTRADICTIONS DANS LA THÉORIE DE LA DÉFORMATION PLASTIQUE

Prof. H. CRAEMER (LAHORE)

RÉSUMÉ

L'auteur — contrairement à plusieurs autres spécialistes de la question — démontre qu'il est courant de confondre les courbes représentant *a)* en traction, la relation de l'effort de traction et de l'allongement, *b)* en flexion, celle de la charge et de la déformation. Les articulations plastiques sous une charge concentrée ne peuvent être intreprétées d'une manière exacte que si la charge est supposée répartie sur une longueur réduite, finie. Les conditions de compatibilité sont valables pour n'importe quelle loi exprimant la relation entre la tension et la déformation. Dans les constructions hyperstatiques, l'état de plastification complète se produit simultanément et non successivement dans les sections soumises aux plus grands efforts. Jusqu'à ce que cet état n'est pas atteint, l'égalisation des moments ne peut pas avoir lieu.

IRRTÜMER UND WIDERSPRÜCHE IN DER THEORIE DER PLASTIZITÄT

Prof. Dr. ing. H. CRAEMER (LAHORE)

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird — im Gegensatz zu einigen Autoren — festgestellt, dass die Kurven, die die Verhältnisse zwischen *a)* Dehnungsbeanspruchung und Zugspannung (bei Zug), *b)* Belastung und Längenausdehnung der Randfasern (bei Biegung) und *c)* Belastung und Deformation (bei Biegung) darstellen, des öfteren mit einander verwechselt werden. Imaginäre plastische Gelenke unter Einzelbelastungen können nur dann richtig behandelt werden, wenn die Belastung als auf eine zwar kleine, doch immerhin endliche Strecke einwirkend aufgefasst wird. Die Berechnungsvoraussetzungen sind für alle Dehnungsbeanspruchung-Zugspannung-Gesetzmässigkeiten von Gültigkeit. In statisch unbestimmten Konstruktionen beginnt die *volle* Plastifikation in den am meisten beanspruchten Profilen simultan, und nicht der Reihe nach. Eine Kompensation der Momente kann nicht eintreten, bevor dieser Zustand erreicht wurde.

COMMENTS ON PROF. H. CRAEMER'S PAPER: «FALLACIES AND PARADOXA IN THE PLASTICITY THEORY»*

Prof. I. SÁLYI,

CANDIDATE OF ENG. SC.

DEPARTMENT FOR TECHNICAL MECHANICS, TECHNICAL UNIVERSITY FOR THE HEAVY INDUSTRY, MISKOLC, HUNGARY

[Manuscript received 16th July, 1954]

In his paper entitled «Fallacies and paradoxa in the plasticity theory» Dr. Craemer points out, elucidates and removes some contradictions arising when the plasticity theory is being applied to beams under bending.

His paper, however, fails to touch on all the sources of contradiction that really arise in the practical application of theoretical considerations.

In order to elucidate the origin of these contradictions we have to reach back to the basic notions underlying plastic deformation as applicable to beams under bending. Let us assume — employing an approximation generally admitted in plasticity theory —, that fibres of the straight beam element under a bending moment curve into arcs, while their distance z from the neutral fibre remains unchanged and the cross sections remain plane figures at right angles to the neutral fibre *(Fig. 1)*.

On this assumption, the specific stress of fibre AB can be written :

$$\varepsilon_z = \frac{(\varrho + z)\, d\varphi - \varrho\, d\varphi}{\varrho\, d\varphi} = \frac{z}{\varrho}, \tag{1}$$

consequently

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{dx}. \tag{2}$$

These rapports, however, cannot be valid without limitation. The length of each fibre remaining always positive,

$$1 + \varepsilon_z > 0, \text{ i. e.}$$

$$\varepsilon_z > -1.$$

This means, that in the edge fibres

$$-\frac{e}{\varrho} > -1,$$

* Acta Technica *10* (1954) p. 73.

or, otherwise, that

$$\varrho > e.$$

This would mean, in other terms, that the centre of curvature O *(Fig. 1)* cannot lie within the cross-section. *Formulae* (*1*) *and* (*2*) *thus become void of any kind of*

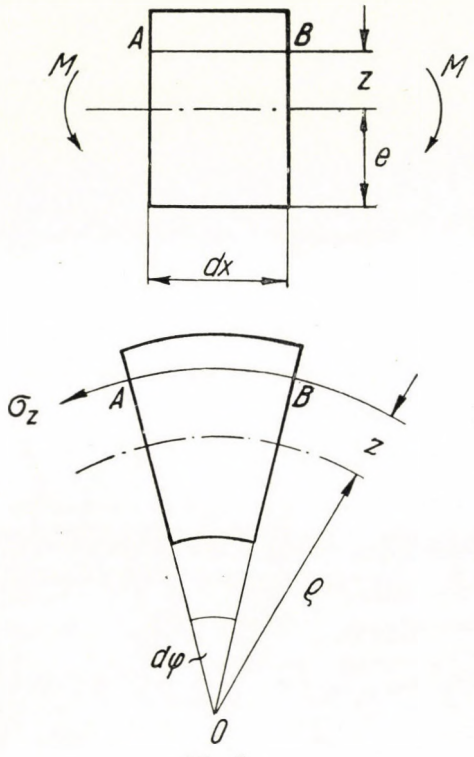


Fig. 1

physical reality, whenever they contain values of

$$\varrho \leq e.$$

If follows from the above, that, with symmetrical cross-sections, the relation

$$\varepsilon_e < 1$$

remains valid in tensile edge fibres too. This is the reason for the absence of any physical sense whatsoever in the boundary transition $\varepsilon_e \to \infty$. Naturally, a boundary transition executed only formally is bound to lead, in some cases at least, to contradictions.

Let us consider now the computation of stresses. The rapport between stress and specific strain, under uniaxial stress, as has been assumed and displayed

in *Fig. 2*, represents but an approximation, quite workable with structural materials possessing a definite yield point, provided ε has a reasonable value, for instance

$$\varepsilon < \varepsilon_0.$$

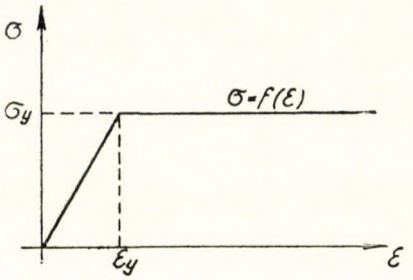


Fig. 2

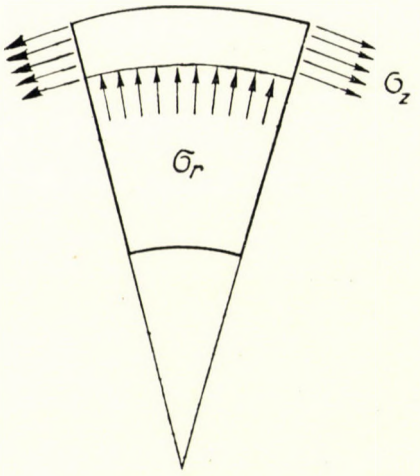


Fig. 3

Surely $\varepsilon = 0{,}1$ ($\varepsilon = 10\%$) is a ceiling for the ε_0 value. Within the chosen limits we may write therefore with fair approximation *(Fig. 1)*, as follows:

$$\sigma_z = f(\varepsilon_z) = f\left(\frac{z}{\varrho}\right). \quad (|\varepsilon_z| < \varepsilon_0).$$

To extend the validity range of this formula would be dangerous for more than one reason. Due to bending, the stress state necessarily becomes multiaxial, for there arises between the curved layers *(Fig. 3)* a radial stress σ_r. Materials under uniaxial stress (pure tension or compression), behaving the way represen-

ted in *Fig. 2*, will flow under multiaxial stress — e. g. according to the Mohr theory — if

$$\sigma_z - \sigma_r = \sigma_y ,$$

so that in parts of the cross section undergoing plastic deformation

$$\sigma_z = \sigma_y + \sigma_r \neq \sigma_y .$$

It should finally be taken into account that at marked bendings (greater elongations) one can no longer disregard alterations in the shape of cross sections.

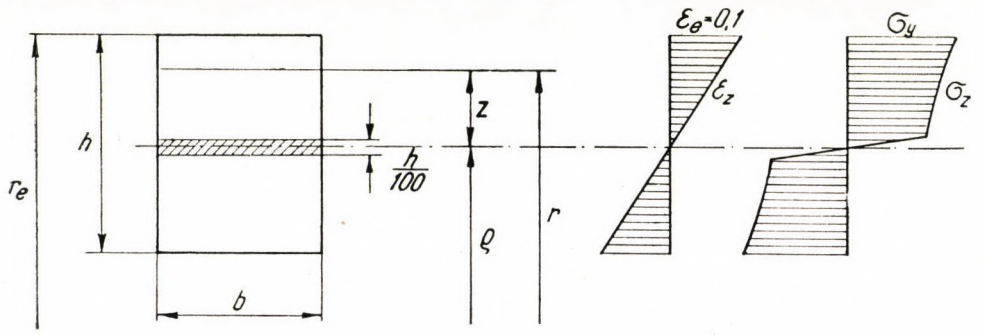


Fig. 4

With steel beams of rectangular cross-section *(Fig. 4.)*, if for instance in the edge fibre

$$\varepsilon_\varepsilon = \frac{h}{2\,\varrho} = 0{,}1,$$

n other words, if

$$\varrho = 5\ h$$

and at the elasticity limit

$$\varepsilon_y = 0{,}001,$$

then — with the exception of the narrow band shaded in Fig. 4. — almost the entire cross-sectional area undergoes plastic deformation.

If we employ for the outer plastic zone the relation applying to thick-walled tubes, and write

$$\frac{d\,(r\sigma_r)}{dr} - \sigma_t = 0 = r\,\frac{d\,\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_t$$

where, according to Mohr

$$r\,\frac{d\,\sigma_r}{dr} = \sigma_t - \sigma_r = \sigma_y = \text{ const.},$$

then, as from the above

$$\sigma_r = \sigma_y \ln \frac{r}{r_e},$$

it also follows, that

$$\sigma_z = \sigma_y + \sigma_r = \sigma_y \left(1 + \ln \frac{r}{r_e}\right).$$

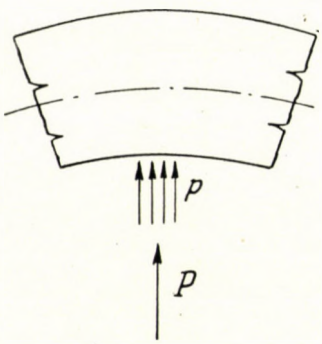


Fig. 5

In other terms, in the edge fibre $\sigma_e = \sigma_y$, but at the inner boundary of the plastic zone $\sigma_z = 0{,}90\ \sigma_y$ *(Fig. 4)*.

This computation, naturally, is no more than approximative, as the shape of the cross-section is bound to change considerably. Assuming the volume of the structure to remain unchanged during plastic deformation, the area of the surface elements of the upper zone decreases by 0,1—10 per cent, i. e. by 5 per cent on the average, while — inversely — the area of the lower plastic range increases by 5 per cent. Thus it is demonstrated, that in the case of a rectangular cross section we considerably deviate, already at a strain value of $\varepsilon = 0{,}1$, from the usual, simplified theoretical assumptions. *Formulae, which may be derived from the theory, generally fail to reflect actual conditions even approximately in the* $\varepsilon > 0{,}1$ *range, in other words, they cannot be used in it.*

Reflection on *Fig. 3* allows the probability, that the distribution of stresses σ_z and σ_r undergoes, in the environment of beam loads which in reality are always distributed, further modifications *(Fig. 5)*.

Dr. Craemer is right in pointing out (in paragraph, 3. of his paper) that when computing deformations, a concentrated beam load is an inadmissible idealization. The value of specific compression p *(Fig. 5)* can in no way exceed that of σ_y.

The usually employed simple relations referring to deformation of beams and resulting from the following routine approximations (doubtlessly justifiable with minute deformations) :

$$\frac{1}{\varrho} \approx \frac{d^2 y}{dx^2}, \text{ respectively } \quad \frac{dx}{ds} \approx 1, \tag{3}$$

should also be used with utmost caution only. Both approximations mean that $\mathrm{tg}^2 \varphi$, i. e. the value of the second power of the slope, is negligibly small in comparison to unity. In the range of plastic deformations this boundary is soon overstepped.

Let us now consider the simple case of a beam of length l, built-in at one end and loaded at the free end by a bending couple. The neutral line curves into an arc. If the beam's cross section is a rectangle (*Fig. 4*) and, as in the preceding example

$$\varepsilon_e = 0{,}1, \text{ respectively } \varrho = 5h,$$

then the angle change of the free end can be written as follows

$$\psi = \frac{l}{\varrho} = 0{,}2 \frac{l}{h},$$

respectively :

$$\psi^\circ = 36 \frac{l}{h\pi}.$$

Even with quite short beams, not longer — for instance — than $l = h\pi = 3{,}14\, h$,

$$\psi^\circ = 36^\circ$$

and

$$\mathrm{tg}^2 \psi^\circ = 0{,}53.$$

This simple example may serve to call our attention to the fact, that whenever computations within the domain of plastic deformation have been based on approximations as per (3), it is advisable to check the results in order to find out, wether the employment of the approximations has been admissible.

SUMMARY

All relations presented in Dr. Craemer's paper are valid within the range of small ε-s, i. e. in the domain of small deformations. With greater deformations, however, the formulae lose their concrete meaning and become void of any physical reality. In this range, naturally they may lead to contradictions. All such contradictions can be avoided with certainty, if mathematical considerations are employed within the domain only where their validity is still assured with a satisfactory degree of precision.

К СТАТЬЕ Х. КРЕМЕРА »ОШИБКИ И ПРОТИВОРЕЧИЯ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ«

Канд. техн. наук И. Шайи

Резюме

Все установленные Кремером зависимости являются сами собою правильными в области небольших значений ε, т. е. в области небольших деформаций. Однако, следует сказать, что в области более значительных деформаций не соответствуют действительности, т. е. эти зависимости не имеют физического смысла. Естественно, что в этой области зависимости Кремера могут привести также к противоречиям. Любое противоречие может быть обойдено, если зависимости, выведенные при помощи математического аппарата, будут использованы только в области, где их действительность еще обеспечена с точностью, удовлетворяющей требования практики.

REMARQUES SUR L'ÉTUDE DU DR. H. CRAEMER «ERREURS ET CONTRADICTIONS DANS LA THÉORIE DE LA DÉFORMATION PLASTIQUE»

Prof. I. Sályi

Candidat des Sciences Techniques

RÉSUMÉ

Toutes les relations établies par M. Craemer sont correctes en elles-mêmes, dans le domaine des petits ε, c'est-à-dire des petites déformations. Dans le domaine des plus grandes déformations, par contre, elles se détachent de la réalité, elles n'ont plus de contenu physique. Dans ce domaine elles peuvent bien entendu conduire à des contradictions. Toute contradiction peut être évitée de manière certaine, si les relations déduites à l'aide des mathématiques ne sont employées que dans les domaines où leur vérification peut être assurée avec une précision satisfaisant aux exigences de la pratique.

BEMERKUNGEN ZUR ARBEIT VON DR. H. CRAEMER «IRRTÜMER UND WIDERSPRÜCHE IN DER THEORIE DER PLASTIZITÄT»

PROF. I. SÁLYI

Kandidat der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Sämtliche von *Craemer* festgestellten Zusammenhänge sind an sich richtig, doch nur im Bereiche von kleinen ε, d.h. der kleinen Formänderungen. Bei grösseren Formänderungen stimmen sie indessen mit der Wirklichkeit nicht mehr überein, haben keinen physikalischen Gehalt mehr. In diesem Bereiche führen sie selbstverständlich auch zu Widersprüchen. Jeder Widerspruch lässt sich jedoch mit Sicherheit vermeiden, wenn man die mit Hilfe der Mathematik geschriebenen Zusammenhänge nur in jenem Bereiche anwendet, wo ihre Gültigkeit — mit einer die Ansprüche der Praxis befriedigenden Genauigkeit — noch gewährleistet ist.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫХОДА ПО ТОКУ ПРИ ЭЛЕКТРОЛИЗЕ АЛЮМИНИЯ

Канд. техн. наук Д. СЕКЕР

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АЛЮМИНИЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ МИНИСТЕРСТВА ХИМИЧЕСКОЙ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

(Поступила 15 мая 1954 г.)

Электролиз алюминия в промышленных масштабах был осуществлен в Венгрии почти 20 лет тому назад. Несмотря на крупную сырьевую базу в стране, производство алюминия в Венгрии до ее освобождения не имело значительного развития.

Освобождение Венгрии и бескорыстная помощь, оказываемая Советским Союзом, создали необходимые условия для развития отечественной алюминиевой промышленности.

Пятилетний народнохозяйственный план Венгерской Народной Республики на 1950—1954 гг. предусматривает значительное по масштабам развитие алюминиевой промышленности.

Для развития отечественной алюминиевой промышленности большое значение имеет снижение расхода электроэнергии на тонну алюминия. Следовательно, повышение выхода по току является важным фактором в деле дальнейшего развития производства алюминия в Венгерской Народной Республике.

Производство алюминия электролизом криолито-глиноземных расплавов было начато в конце прошлого столетия и, несмотря на то, что в настоящее время мировое производство алюминия составляет около двух миллионов тонн, до настоящего времени в достаточной мере не производилось систематического исследования такого важного фактора, как выход по току при электролизе алюминия.

В данном труде исследуются, по возможности, все важнейшие факторы, влияющие на выход по току, и, прежде всего, те, которыми в настоящее время интересуются алюминиевые заводы, т. е. состав электролита, содержание криолита в глиноземе, влияние некоторых окислов (V_2O_5, P_2O_5); в последнем особо заинтересована отечественная алюминиевая промышленность.

Настоящий труд ставит перед собою цель рекомендовать режим электролиза криолито-глиноземных расплавов, обеспечивающий высокий выход по току.

Исследование выхода по току при электролизе алюминия производилось в следующих направлениях.

1. Изучение потерь алюминия в зависимости от состава электролита и температуры.

2. Изучение выхода по току в зависимости от состава электролита, междуполюсного расстояния, температуры и плотности тока.

3. Изучение связи между выходом по току и составом анодных газов.

Исследование вопроса по вышеприведенной схеме дало возможность подойти к всестороннему изучению выхода по току при электролизе алюминия в зависимости от ряда факторов.

Влияние различных факторов на потери алюминия, выход по току и состав анодных газов

Изучение потерь алюминия осуществлялось в графитовых тиглях с железным кожухом. Выход по току определялся в графитовых тиглях с интеркорундовой изоляцией.

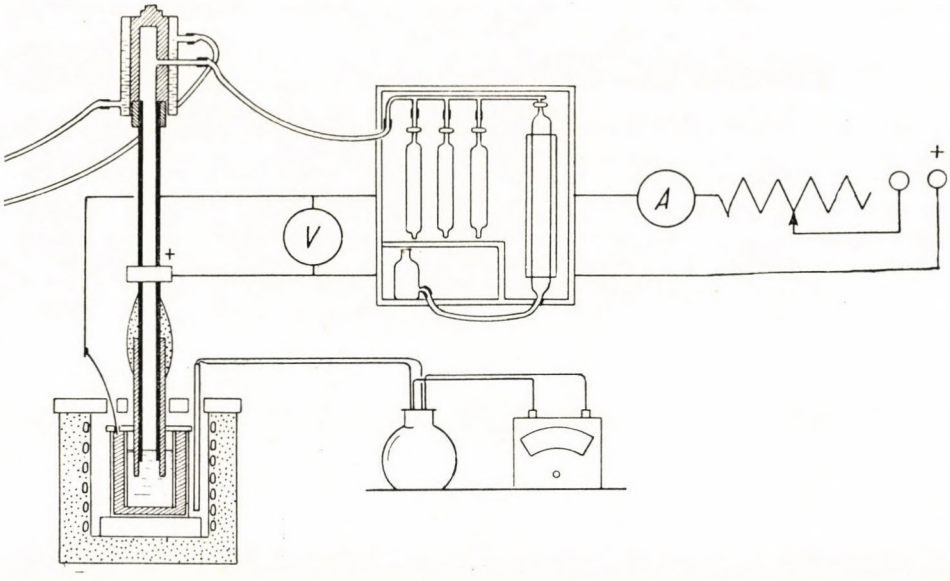


Рис. 1, Схема установки для улавливания анодных газов.

Для определения выхода по току и состава анодных газов использовался графитовый тигель с железным кожухом и с интеркорундовой изоляцией. Анод—графитовая труба, внутри которой имеется труба из нержавеющей стали. На конце трубы имеется »головка« с водяным охлаждением для сбора анодных газов (рис. 1, 2).

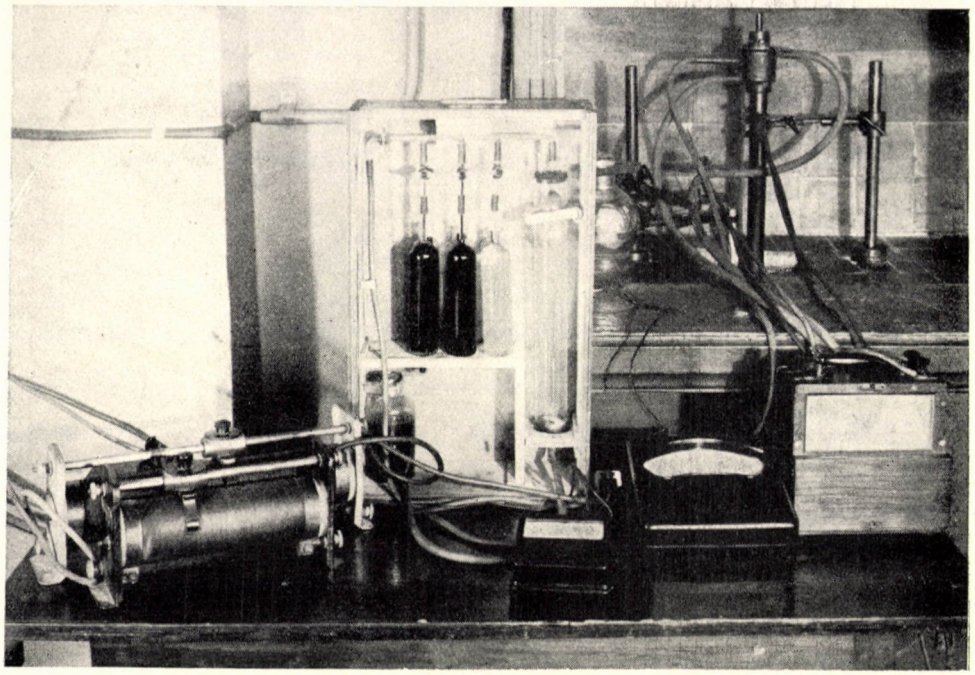


Рис. 2. Установка для улавливания анодных газов

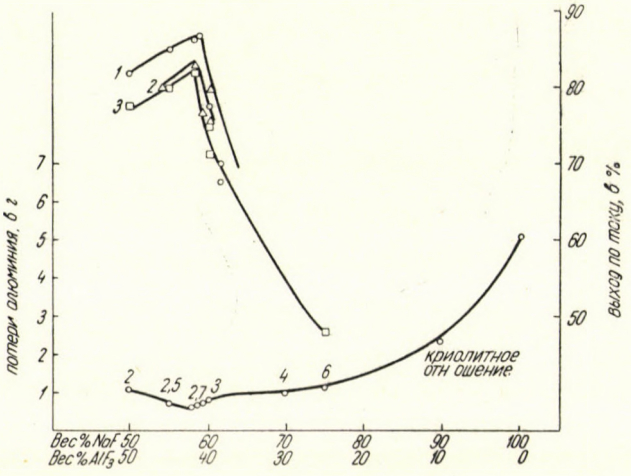


Рис. 3. Потери алюминия и выход по току в зависимости от криолитного отношения

1 — 10% Al_2O_3 + 5% MgF_2
2 — 10% Al_2O_3 + 5% CaF_2
3 — 10% Al_2O_3

I. Состав электролита

а) Криолитное отношение является одним из важнейших факторов, влияющих на выход по току. Изучая потери алюминия, постоянно наблюдались характерные вспышки (факелы). В кислых электролитах яркие вспышки с потрескиванием, в щелочных электролитах — желтые вспышки. В минимальном количестве вспышки появлялись при криолитном отношении 2,7; как в кислом, так и щелочном расплаве потери алюминия повышаются (рис. 3, табл. 1).

Максимум выхода по току получался там, где наблюдался минимум потерь алюминия, то есть при криолитном отношении 2,7. Следует заметить, что выход по току составил при

кр. о. = 2,7 — 82%,

а при

кр. о. = 3,0 — 72%.

При понижении криолитного отношения (избыток AlF_3) выход по току падает. При повышении криолитного отношения (избыток NaF) выход по току падает еще сильнее.

Добавление 5 вес. % фтористого кальция несколько повышает выход по току (на 1—2%). Добавление 5 вес. % фтористого магния значительнее повышает выход по току, примерно на 6—7%. Разница в поведении фтористого кальция и фтористого магния объясняется меньшей поверхностной активностью фтористого магния, под влиянием которого увеличивается поверхностное натяжение на границе электролит-металл.

То, что именно в слабо кислой среде получается минимум потерь металла и максимум выхода по току, объясняется тем, что те реакции, которые обусловливают потери алюминия, здесь происходят с минимальной вероятностью. В кислом расплаве протекает реакция

$$AlF_3 + 2\,Al \rightleftarrows 3\,AlF \qquad (1)$$

Константа разновесия для этой реакции при 1000°С равна $7{,}0 \cdot 10^{-5}$.

Эта реакция интенсифицируется тем, что AlF непрерывно распадает на AlF_3 и Al. Полученный таким образом алюминий сгорает на поверхности расплавленной соли.

При избытке фтористого натрия происходит реакция вытеснения натрия из фтористого натрия алюминием.

$$3\,NaF + Al \rightleftarrows AlF_3 + 3\,Na \qquad (2)$$

Константа равновесия этой реакции при 1000°С будет 10^{-11}. Эта реакция тоже сдвигается вправо, потому что натрий сгорает на поверхности расплавленной соли.

ТАБЛИЦА 1

Потери алюминия (в г/100 г расплавленной соли за 45 минут, t = 1010—1020°С) и выход по току (l = 2,5 см, D = 2,3 а/см², t = 970°С) в зависимости от криолитного отношения.

Криолитное отношение		2	2,5	2,7	2,8	2,9	3,0	4,5	6	18	NaF
Потери алюминия (средние) в г		1,05	0,845	0,77	0,83	0,834	0,875	0,89	1,02	2,35	5,15
Выход по току в % %	10 вес. % Al_2O_3	77,6	80,0	81,8	—	—	71,6 75,3	—	47,8	—	—
	10 вес. % Al_2O_3 5 вес. % CaF_2	—	80,1	83,1	76,0	—	75,5 80,0	—	—	—	—
	10 вес. % Al_2O_3 5 вес. % MgF_2	82,4	85,3	86,3	86,8	—	77,5	—	—	—	—

При криолитном отношении равном 2,7 вероятность протекания вышеуказанных реакций минимальна; именно этим объясняется наличие минимума потерь алюминия и максимума выхода по току при электролизе алюминия.

Характеристика потерь алюминия в зависимости от криолитного отношения, в свою очередь, говорит о том, что переход алюминия в расплав происходит не за счет возникновения »металлического тумана«, а за счет химических реакций, происходящих между компонентами расплавленной соли и жидким алюминием.

б) Содержание глинозема в электролите влияет на потери алюминия, на выход по току и состав анодных газов.

В сильно щелочных расплавах (криолитное отношение равно 6—12) с повышением содержания глинозема потери алюминия в расплаве линейно падают. С понижением криолитного отношения с 3-х—до 2-х, потери алюминия (в зависимости от содержания глинозема в криолите) проходят через максимум (табл. 2).

ТАБЛИЦА 2

Потери алюминия в г/100 г расплавленной соли за 45 минут, в зависимости от содержания Al_2O_3, t = 1010—1020°C, и при разных криолитных отношениях

Криолитное отношение		2	2,7	3	6	12
Al_2O_3 в вес. %	0	1,05	0,77	0,87	1,02	2,10
	2,5	1,25	1,13	—	—	—
	5	1,21	1,17	1,08	0,83	1,73
	10	0,98	0,98	1,09	0,93	1,35
	15	0,34	0,58	0,88	0,64	0,89
	20	0,19	0,23	0,25	—	0,70

Характеристика выхода по току в зависимости от содержания глинозема имеет явно выраженный минимум. Этот минимум получается при 5—6 вес. % Al_2O_3 (кр. о. = 2,7); выход по току при более низких и при более высоких концентрациях окиси алюминия в электролите — повышается (рис. 4).

Для объяснения этого явления приведем следующие данные, известные из литературы. Кэтберстон и Уэддингтон, Ложкин и Твердовский нашли, что э. д. с. поляризации в криолито-глиноземных расплавах в зависимости от содержания Al_2O_3 при 4—5 вес. % проходит через минимум. Факты, что э. д. с. поляризации минимальна при 4—5 вес. % Al_2O_3, т. е. деполяризация анода максимальна там, где выход по току минимален,

хорошо соответствуют друг другу, но ничего не говорят о причине этого явления.

Г. А. Абрамов утверждает, что электродные потенциалы катода или анода могут проходить через минимум только в том случае, если концентрация ионов Al^{3+} будет проходить через максимум. Прохождение концентрации ионов Al^{3+} через максимум возможно только в том случае, если Al_2O_3 в электролите диссоциацирует на ионы и если степень диссоциации уменьшается с увеличением концентрации Al_2O_3 в криолите. Одновременное увеличение концентрации Al_2O_3 в криолите и уменьшение степени элек-

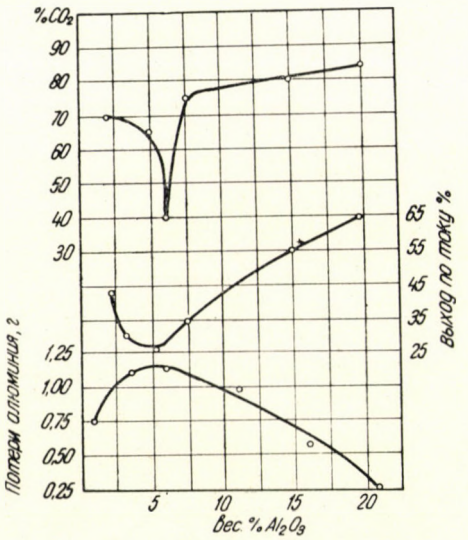


Рис. 4. Потери алюминия, выход по току и содержание CO_2 в анодных газах в зависимости от содержания Al_2O_3 в электролите.

тролитической диссоциации Al_2O_3 на ионы приводят к тому, что концентрация ионов Al^{3+} проходит через максимум.

Криоскопические данные тоже говорят о диссоциации глинозема. Несмотря на то, что такие расчеты слишком приблизительны, поскольку они не учитывают сильных электрических полей вокруг ионов, они все-таки ориентировочно показывают, что одновременное увеличение содержания Al_2O_3 в криолите и уменьшение степени электролитической диссоциации Al_2O_3 на ионы приводят к тому, что концентрация ионов Al^{3+} проходит через максимум.

Объяснить максимум потерь алюминия и деполяризации анода при электролизе, т. е. объяснить минимум э. д. с. поляризации и выхода по току

можно лишь тем, что в этом случае с максимальной интенсивностью протекает реакция:

$$Al^{3+} + 2Al \rightleftarrows 3Al^{+} \qquad (3)$$

Из закона действующих масс следует, что реакция сдвигается вправо с повышением концентрации ионов трехвалентного алюминия.

О протекании реакции (3) говорят и анализы анодных газов. За счет реакции восстановления углекислоты алюминием низшей валентности объясняется, в основном, изменение состава анодных газов:

$$CO_2 + Al^{+} \rightleftarrows Al^{3+} + CO + O'' \qquad (4)$$

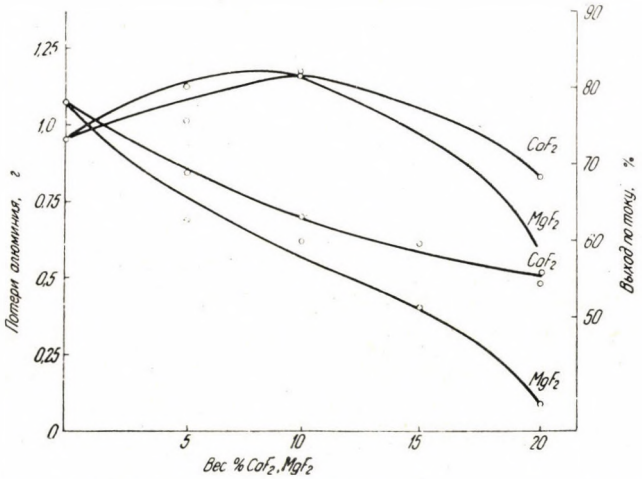


Рис. 5. Потери алюминия и выход по току в зависимости от содержания CaF_2 и MgF_2 в электролите

Поэтому, чем больше количество ионов Al^{+} в электролите, тем интенсивнее происходит и восстановление углекислоты до окиси углерода. Протеканием реакции (4) объясняется минимум CO_2 в анодных газах при содержании Al_2O_3 в электролите равном 5—6 вес. % (рис. 4, табл. 3).

в) Содержание фтористого кальция и фтористого магния уменьшают потери алюминия в криолите, причем фтористый магний действует сильнее как поверхностно менее активный компонент (рис. 5).

Выход по току под влиянием этих фторидов проходит через максимум прибл. при 10 вес. % CaF_2 и MgF_2. При содержании более 10 вес. % этих фторидов выход по току уменьшается, вероятно за счет повышения удельного веса и вязкости электролита.

ТАБЛИЦА 3

Изменение выхода по току и состава анодных газов с разным содержанием глинозема в электролите, кр. о. = 2,7, l = 30 мм, t = 1010—1020°С, D_A = 3,5 а/см², D_K = 1,25 а/см²

Газ взят после электролиза через	Процентное содержание газа	Содержание глинозема в электролите, в вес. %					
		2	5	6,3	7,5	14,5	20
60 мин.	CO_2	80,5	79,0	73,5	77,5	80,5	89,0
	CO	19,5	21,0	26,5	22,5	19,5	11,0
75 мин.	CO_2	75,5	76,0	60,0	80,0	80,5	87,0
	CO	24,5	24,0	40,0	20,0	19,5	13,0
90 мин.	CO_2	72,0	67,0	51,0	77,5	79,5	85,5
	CO	28,0	33,0	49,0	22,5	20,5	14,5
105 мин.	CO_2	70,0	65,0	41,0	80,0	79,0	87,0
	CO	30,0	35,0	59,0	20,0	21,0	13,0
Выход по току, %		73,3	73,3	66,8	66,0	80,5	78,0

г) Содержание окислов V_2O_5, P_2O_5, Fe_2O_3, SiO_2, TiO_2 в электролите.

Наряду с основными компонентами (криолитом, глиноземом) электролит содержит и другие вещества. Эти вещества переходят в электролит из глинозема и криолита, или из золы анодов. Все окислы, кроме CaO, повышают потери алюминия за счет восстановления их алюминием. Некоторые окислы (P_2O_5, V_2O_5, TiO_2) сильно меняют поверхностные свойства электролита, а переходя в алюминий в виде соответствующих металлов, сильно изменяют и его поверхностное свойство. На рис. 6 (табл. 4) показано влияние этих окислов на потери алюминия (верхние кривые) и на выход по току (нижние кривые).

ТАБЛИЦА 4

Выход по току в зависимости от содержания различных окислов, кр. о. = 3, 10% Al_2O_3, t = 970°, l = 2,5 см., D = 2,3 а/см²

V_2O_5		P_2O_5		TiO_2		Fe_2O_3		SiO_2	
вес. %	Выход по току, %	вес. %	Выход по току, %	вес. %	Выход по току, %	вес. %	Выход по току, %	вес. %	Выход по току, %
0,0	73,5	0,0	73,5	0,0	75,3	0,0	75,3	0,0	75,3
0,10	62,0	0,10	76,5	0,25	76,5	0,25	68,0	0,25	70,5
0,25	56,0	0,50	51,0	0,75	54,2	0,75	55,6	0,75	73,0
0,75	25,0	1,50	32,6	1,00	10,0	1,50	60,0	1,50	66,0

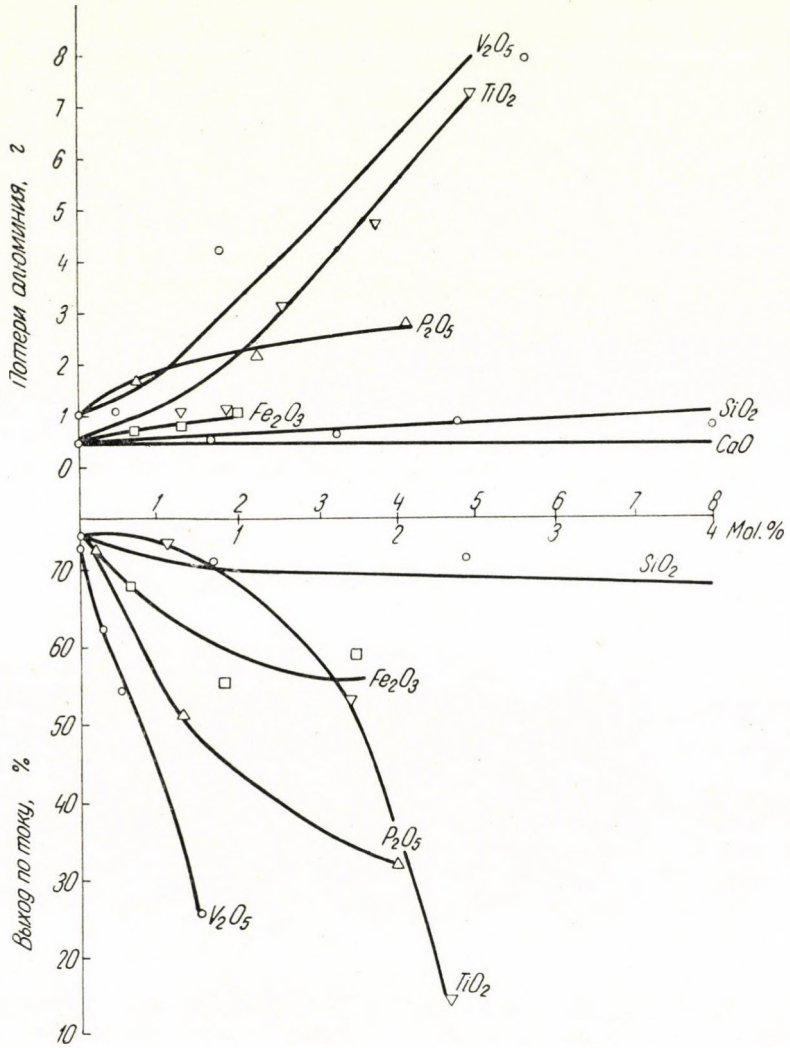


Рис. 6. Потери алюминия и выход по току в зависимости от содержания окислов в электролите

Для суждения о вероятности протекания реакций вытеснения металлов из их окислов алюминием необходимо рассчитать изменение свободной энергии следующих реакций при 1000°С:

$$TiO_2 + 4/3\ Al = 2/3\ Al_2O_3 + Ti \quad (5)$$
$$SiO_2 + 4/3\ Al = 2/3\ Al_2O_3 + Si \quad (6)$$
$$2/3\ Fe_2O_3 + 4/3\ Al = 2/3\ Al_2O_3 + 4/3\ Fe \quad (7)$$
$$2/5\ P_2O_5 + 4/3\ Al = 2/3\ Al_2O_3 + 4/5\ P \quad (8)$$
$$2/5\ V_2O_5 + 4/3\ Al = 2/3\ Al_2O_3 + 4/5\ V \quad (9)$$

Изменение свободной энергии образования окислов при 1000°С частично было рассчитано нами и частично заимствовано из литературы.

Изменение свободной энергии окислов рассчитывалось следующим образом.

Изменение теплоемкостей дается как алгебраическая сумма теплоемкостей продуктов и теплоемкостей исходных веществ.

$$\Delta C_p = \Sigma C_p \text{ продукт} - \Sigma C_p \text{ исходн.}$$

Истинная теплоемкость для реакции образования окисла из элементов выражается степенным рядом:

$$\Delta C_p = a + \text{в}T - \text{с}T^{-2}$$

Из уравнения изменения теплового эффекта реакции от температуры определяется тепловой эффект образования окисла из элементов при 1000°С.

$$\Delta H^\circ_{1273} = \Delta H^\circ_{298} + \int_{298}^{t_1} \Delta C_p \, dT \pm \Delta H \text{ агр} + \int_{t_1}^{1273} \Delta C_p \, dT$$

где: $\Delta H_{\text{агр}}$ — тепловой эффект агрегатного превращения (плавление, изменение модификации);

t_1 — температура агрегатного превращения.

Изменение энтропии при 1000°С с учетом энтропии агрегатных превращений:

$$\Delta S^\circ_{1273} = S^\circ_{298} + \int_{298}^{t_1} \frac{\Delta Cp}{T} \, dT \pm \Delta S_{агр} + \int_{t_1}^{1273} \frac{\Delta Cp}{T} \, dT$$

где: $\Delta S_{\text{агр}}$—изменение энтропии при агрегатном превращении.

Изменение свободной энергии образования окислов из элементов рассчитано по уравнению Гиббса-Гельмгольца:

$$\Delta F^\circ_{1273} = \Delta H^\circ_{1273} - T \Delta S^\circ_{1273}$$

Суммируя значения свободных энергий образования окислов при соответствующих температурах

$$\Delta F^\circ_T = \Sigma \Delta F^\circ \text{продукт} - \Sigma \Delta F^\circ \text{исходн.}$$

получается изменение свободных энергий для реакции вытеснения металлов из окислов алюминием. Эти данные приводятся в табл. 5. Зависимость

изменения свободных энергий реакций восстановления окислов алюминием от температуры дана на рис. 7. На этом рисунке видно, что все окислы (кроме *CaO* и *MgO*) восстанавливаются алюминием при температуре электролиза. Константа равновесия для реакций вытеснения металлов из окислов алюминием имеет довольно большие значения, что говорит о возможной вероят-

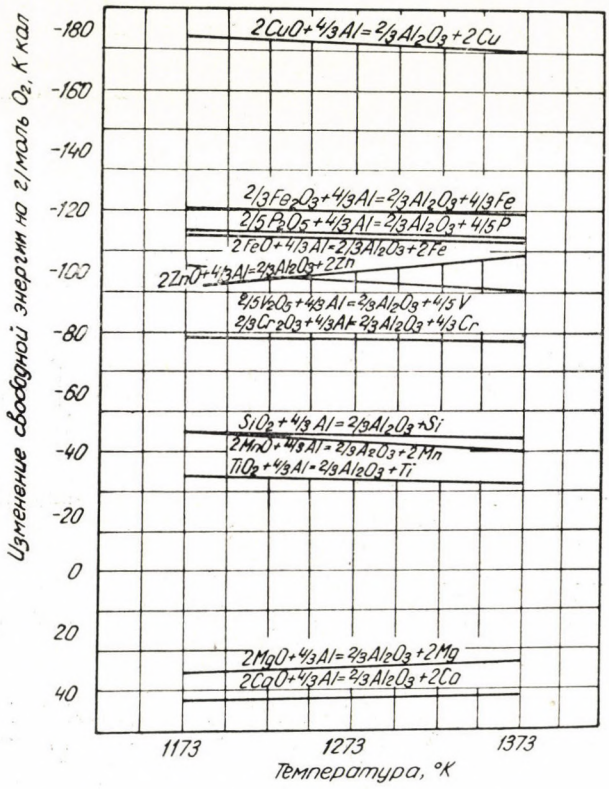


Рис. 7. Изменение свободной энергии для реакции восстановления окислов алюминием.

ности протекания этих реакций. Экспериментальные данные говорят о большой скорости протекания этих реакций.

Реакция вытеснения элементов из их окислов алюминием может происходить на поверхности жидкого алюминия. Но удельная поверхность расплавленного алюминия слишком мала для протекания реакции с большой скоростью. Диспергированный алюминий в электролите может возникать только за счет распада субфторида алюминия. Реакция вытеснения должна протекать во всем объеме расплавленной соли. По современным представлениям потери алюминия в криолите объясняются возникновением

субфторида алюминия. Поэтому можно предполагать, что именно он должен восстанавливать окислы до металла во всем объеме электролита:

$$MeO + AlF \rightleftarrows {}^1/_3\, Al_2O_3 + {}^1/_3\, Al\, F_3 + Me \qquad (10)$$

Для того, чтобы убедиться в возможности протекания реакции, необходимо выполнить соответствующие термодинамические расчеты.

В литературе не имеется данных о величине свободных энергий образования субфторида алюминия и фтористого алюминия. Поэтому на основе новейших литературных данных рассчитаны свободные энергии образования этих фторидов.

Изменение свободной энергии для реакции образования субфторида алюминия из элементов определяется реакцией:

$$Al + {}^1/_2\, F_{2\text{газ}} = Al\, F_{\text{газ}}.$$

Тепловой эффект этой реакции при 1000°С

$$\Delta H^\circ = -54730 \text{ кал}.$$

Изменение энтропии реакции при 1000°С

$$\Delta S^\circ \ 14{,}30 \text{ кал/град},$$

откуда свободная энергия при 1000°С

$$\Delta F^\circ_{AlF} = -72{,}930 \text{ кал}.$$

Изменение свободной энергии для реакции образования фтористого алюминия из элементов определяется реакцией:

$$Al_{\text{ж}} + 1\,{}^1/_2\ F_{2\text{ газ}} = AlF_{3\text{тв}}$$

Тепловой эффект этой реакции при 1000°С

$$\Delta H^\circ = -330\,250 \text{ кал}.$$

Изменение энтропии реакции при 1000°С

$$\Delta S^\circ \ -67{,}04 \text{ кал/град},$$

откуда свободная энергия при 1000°С

$$\Delta F^\circ_{AlF_3} = -244\,950 \text{ кал}.$$

ТАБЛИЦА 5

Изменение свободной энергии для реакции вытеснения металлов из окислов алюминием

Реакция	Константа равновесия при 1273°К
$TiO_2 + 4/3\ Al = 2/3\ Al_2O_3 + Ti$	$9{,}4 \cdot 10^{6}$
$SiO_2 + 4/3\ Al = 2/3\ Al_2O_3 + Si$	$2{,}4 \cdot 10^{8}$
$2/3\ Fe_2O_3 + 4/3\ Al = 2/3\ Al_2O_3 + 4/3\ Fe$	$2{,}2 \cdot 10^{21}$
$2/5\ P_2O_5 + 4/3\ Al = 2/3\ Al_2O_3 + 4/5\ P$	$1{,}0 \cdot 10^{19}$
$2/5\ V_2O_5 + 4/3\ Al = 2/3\ Al_2O_3 + 4/5\ V$	$6{,}3 \cdot 10^{17}$
$2\ ZnO + 4/3\ Al = 2/3\ Al_2O_3 + 2\ Zn$	$1{,}1 \cdot 10^{17}$
$2\ MnO + 4/3\ Al = 2/3\ Al_2O_3 + 2\ Mn$	$3{,}9 \cdot 10^{8}$
$2\ CuO + 4/3\ Al = 2/3\ Al_2O_3 + 2\ Cu$	$1{,}4 \cdot 10^{30}$
$2/3\ Cr_2O_3 + 4/3\ Al = 2/3\ Al_2O_3 + {}^4/_3 Cr$	$1{,}0 \cdot 10^{13}$
$2\ FeO + 4/3\ Al = 2/3\ Al_2O_3 + 2\ Fe$	$1{,}4 \cdot 10^{19}$
$2\ MgO + 4/3\ Al = 2/3\ Al_2O_3 + 2\ Mg$	$2{,}8 \cdot 10^{-6}$
$2\ CaO + 4/3\ Al = 2/3\ Al_2O_3 + 2\ Ca$	$1{,}6 \cdot 10^{-8}$

С помощью значений свободных энергий для субфторида алюминия и фтористого алюминия можно было рассчитать константы равновесия для реакции типа (10).

Эти данные приведены в таблице 6.

Сопоставляя полученные константы равновесия с данными таблицы 6, видно, что *AlF* с точки зрения термодинамики может служить восстановителем для интересующих нас окислов. Выше уже отмечалось, диспергированный алюминий может появляться в объеме электролита только за счет распада *AlF*. Количество образовавшегося таким образом диспергированного алюминия, однако, не может быть значительным, поскольку распад субфторида будет происходить главным образом на поверхности расплав-

ТАБЛИЦА 6

Изменение свободной энергии и константы равновесия при реакции вытеснения металлов из окислов субфторидом алюминия

Реакции	$\Delta F°$ при 1000°С	Константа равновесия при 1000°С
$TiO_2 + 2\ AlF = 2/3\ Al_2O_3 = 2/3\ AlF_3 + Ti$	— 46770	$9{,}7 \cdot 10^{9}$
$SiO_2 + 2\ AlF = 2/3\ Al_2O_3 + 2/3\ AlF_3 + Si$	— 61900	$5{,}6 \cdot 10^{11}$
$2/3\ Fe_2O_3 + 2\ AlF = 2/3\ Al_2O_3 + 2/3\ AlF_3 + 4/3\ Fe$	—137400	$5{,}4 \cdot 10^{24}$
$2/5\ P_2O_5 + 2\ AlF = 2/3\ Al_2O_3 + 2/3\ AlF_3 + 4/5\ P$	—127900	$1{,}0 \cdot 10^{22}$
$2/5\ V_2O_5 + 2AlF = 2/3\ Al_2O_3 + 2/3\ AlF_3 + 4/5\ V$	—111700	$9{,}0 \cdot 10^{20}$

ленной соли. Поэтому восстановление окислов, в основном, объясняется с помощью субфторида алюминия в небольшой степени диспергированным алюминием, полученным за счет распада $A'F$. Конечно, восстановление в незначительной степени происходит и на поверхности жидкого алюминия.

Изучение свободной энергии дает возможность сделать заключение только о вероятности протекания данной реакции, но ничего не говорит о кинетике этой реакции. Например, на основе констант равновесия, рассчитанных из свободных энергий соответствующих реакций, нельзя объяснить, почему TiO_2 вызывает очень большие потери алюминия, сильно снижает выход по току, несмотря на то, что константа равновесия реакции вытеснения титана из окиси меньше всех других реакций вытеснений. Окись железа незначительно повышает потери алюминия, умеренно снижает выход по току, но константа равновесия реакции восстановления окиси железа алюминием — одна из наибольших.

Кажущееся разногласие между термодинамическими данными для реакций вытеснения металлов из своих окислов, с одной стороны, и потерями алюминия или снижением выхода по току под влиянием этих окислов, с другой, объясняется, повидимому, двумя причинами, а именно:

1. при вышеприведенных расчетах и рассуждениях не были приняты во внимание результаты кинетических данных и

2. не учитывались значения активности при термодинамических расчетах.

При восстановлении TiO_2 и V_2O_5 расходуется в несколько раз (3—6 раз) больше алюминия, чем это должно было бы быть по формулам реакций. Этому факту можно дать следующее объяснение. Те металлы, которые склонны давать несколько степеней окисления (как ванадий и титан), присутствуя в расплаве в форме высших окислов, даже в отсутствии электролиза могут восстанавливаться алюминием до низшей степени окисления. Эти низшие окислы окисляются вплоть до высшей степени окисления на границе с воздухом, затем опять восстанавливаются алюминием и т. д. Этот процесс, естественно, приведет к значительному расходу алюминия, чем и можно объяснить большие потери алюминия в присутствии в электролите TiO_2 и V_2O_5. Это объяснение подтверждают и эксперименты. Барботируя через электролит азот, тем самым уменьшая возможность окисления, получены меньшие потери алюминия, несмотря на то, что конвекция расплавленной соли благоприятно влияет на повышение потерь алюминия.

Необходимо обратить внимание также на свободную энергию растворения окислов в криолито-глиноземном расплаве. Если известны свободные энергии образования окислов из элементов при температуре электролиза, то при переходе к растворам этих веществ в расплавах следует учитывать свободную энергию образования растворов из твердого окисла и расплава растворителя.

При восстановлении окисла до металла

$$lMeO + mAl \rightleftarrows xAl_2O_3 + yMe$$

предполагается на основе идеального закона действующих масс, что MeO не реагирует с окисью алюминия, т. е. не образует алюмината. Кроме того, предполагается, что восстановленный металл не растворяется в алюминии. Но в расмотренных случаях нужно считаться и с образованием алюмината и растворением восстановленного металла в алюминии.

Из сказанного следует, что рассчитанные выше данные равновесия необходимо считать только в качестве ориентировочных.

II. Междуполюсное расстояние

С увеличением расстояния между электродами выход по току возрастает, содержание CO_2 в анодных газах повышается (рис. 8).

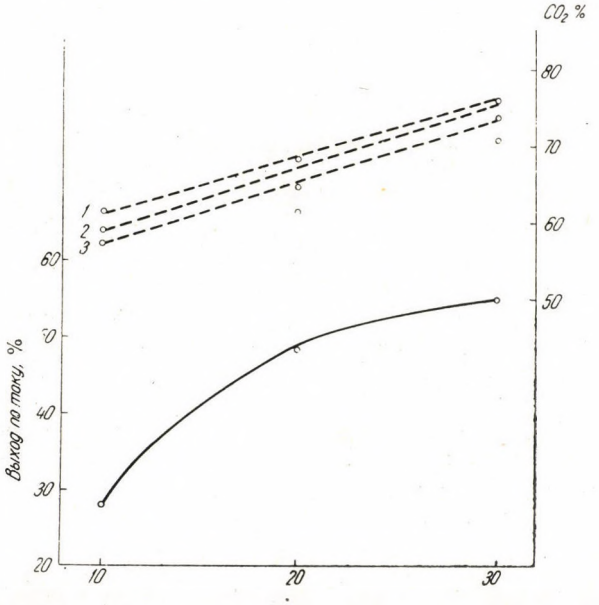


Рис. 8. Выход по току и содержание CO_2 в анодных газах в зависимости от междуполюсного расстояния

1 — газ отобран через 60 минут после начала электролиза; 2 — газ отобран через 90 минут после начала электролиза; 3 — газ отобран через 105 минут после начала электролиза

Изменение состава анодных газов с увеличением междуполюсного расстояния говорит о том, что при приближении анода к катоду в большей

степени будет протекать реакция восстановления CO_2 ионами Al^+, что приводит к обогащению анодного газа окисью углерода.

III. Плотность тока

Плотность тока на катоде и на аноде изменялась путем изменения поверхности электродов, т. е. без изменения силы тока. Как катодная,

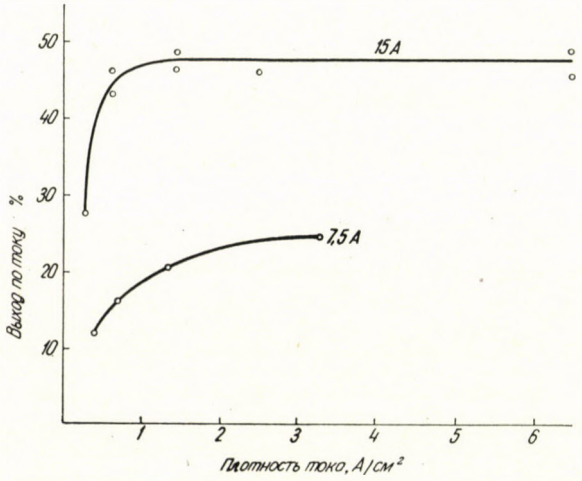


Рис. 9. Выход по току в зависимости от катодной плотности тока.

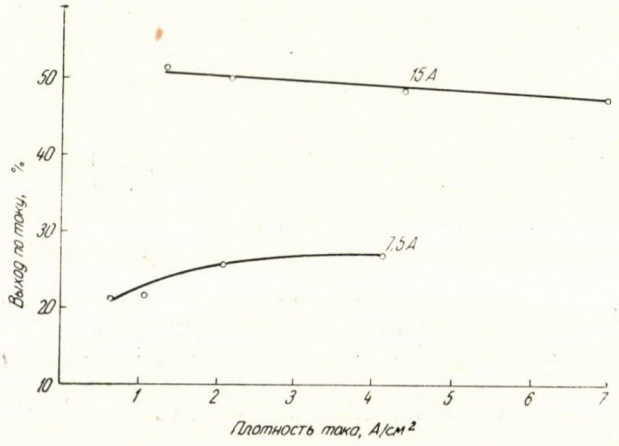


Рис. 10. Выход по току в зависимости от анодной плотности.

так и анодная плотность тока влияют на выход по току; с их повышением выход по току возрастает до определенного предела (рис. 9 и 10).

Для объяснения влияния, отдельно анодной и катодной плотности тока, а также концентрации тока и поверхности электродов на выход по току изучалось влияние всех этих факторов на потери алюминия. Результат графической обработки этих экспериментальных данных следующий:

1. Скорость растворения алюминия на катоде не одинакова: наибольшего значения достигает она в центре катода, т. е. непосредственно под анодом. По периферии потери алюминия уменьшаются.

2. С увеличением концентрации тока и поверхности катода потери алюминия — увеличиваются.

IV. Температура

С повышением температуры потери алюминия повышаются, выход по току уменьшается, содержание CO_2 в анодных газах также уменьшается (рис. 11).

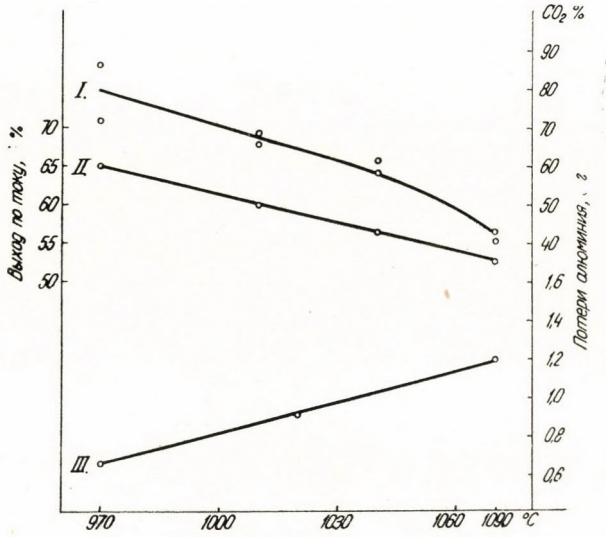


Рис. 11. Потери алюминия, выход по току и содержание CO_2 в анодных газах в зависимости от температуры.
I. — Изменение содержания CO_2; II. — Выход по току; III. — Потери алюминия.

Уменьшение содержания CO_2 в анодных газах с ростом температуры объясняется:

1. развитием реакции Будуара;

2. взаимодействием углекислоты с алюминием низшей валентности (реакция 4). Это подтверждается и соответствующими термодинамическими расчетами.

В литературе существуют различные мнения о том, что́ является первичным анодным продуктом — CO_2 или CO. Имеются разные доказательства о первичности выделения CO_2 при электролизе алюминия.

Этот вопрос разбирается на основе имеющихся литературных данных по термодинамике полного и неполного горения угля и на основе кинетических данных по сгоранию угля. Эти данные показали, что при электролизе алюминия вполне возможно первичное выделение почти 100%-ного содержания CO_2.

Критический разбор математических формул для определения выхода по току

В литературе известны следующие уравнения определения выхода по току при электролизе расплавленных солей:

$$\eta = 1 - \frac{K}{I^n} \qquad \text{(Лоренц)}$$

$$\eta = 1 - \frac{C}{Iq} \qquad \text{(Дроссбах)}$$

$$\eta = K^{\frac{1}{Dl}} \qquad \text{(Абрамов)}$$

$$\eta = 1 - \frac{b}{D_k} \qquad \text{(Алабышев)}$$

$$\eta = 1 - \frac{A^k \cdot e^{\frac{-Bk}{T}}}{l^k \cdot D^k} \qquad \text{(Ротинян)}$$

где A, k, n, b, c — константы;
D — плотность тока, а/см²;
I — сила тока, а;
q — электрохимический эквивалент;
l — междуполюсное расстояние.

В литературе довольно тщательно рассматриваются преимущества и недостатки вышеуказанных уравнений. Здесь указывается лишь на общий недостаток всех формул, определяющих выход по току при электролизе криолитоглиноземных расплавов.

Общий недостаток всех формул заключается в том, что они не учитывают влияния состава электролита на выход по току при электролизе алю-

миния, или считают его »константой«. Как следует из данных данной статьи, значение этой »константы« не является постоянным, а меняется в зависимости от содержания Al_2O_3 в электролите, поскольку содержание глинозема в криолите колеблется между 0,5—10 вес. %. В соответствии с этим, формулы для определения выхода по току отражают только общую сумму выходов по току, зависящую от изменения концентрации Al_2O_3 в криолито-глиноземном расплаве.

Значение этих формул оценивалось с точки зрения возможности использования их для определения выхода по току при электролизе алюминия. Конечно, при электролизе других расплавленных солей они могут иметь большее значение.

ЛИТЕРАТУРА

Эрне Герэ: Положение венгерского народного хозяйства в 1952 г. и задачи его дальнейшего развития. 1952 г.

Закон о внесении изменений в закон № XXV от 1949 года — »Закон о пятилетнем народнохозяйственном плане 1950—1954 гг.«

П. П. Федотьев: Электролиз в металлургии. Ч. П. 1934 г. ОНТИ.

П. П. Федотьев и В. П. Ильинский: Изв. Политехнического института XVIII. 147. 1912.

П. П. Федотьев: Сборник исследовательских работ. ОНТИ, 1935 г.

А. И. Журин: »Легкие металлы«. 1937 № 5—6.

Л. Н. Ложкин: Исследование э. д. с. поляризации и потерь алюминия в расплавах взаимной системы из фтористых солей и окислов алюминия и натрия (Диссертация). Ленинград. 1950.

Г. А. Абрамов и М. А. Бровман: Растворимость и потери алюминия в криолито-глиноземных расплавах. Цветные металлы № 5, 1951 г.

R. Lorenz: Pirozole. 1926.

Н. А. Белозерский: Система металл-соль в расплавленном состоянии Сборник работ по электрохимии расплавленных солей. 1940.

Eitel u. *Lange:* Z. anorg. u. allg. Chemie 171, 168 (1926), 178, 108 (1929).

П. Ф. Антипин и др.: Электрохимия расплавленных солей. 1937.

R. Lorenz: Die Elektrolyze geschmolzener Salze, II, 1905.

P. Drossbach: Z. Elektroch. 40, 180, 1934, Metall und Erz 17, 437, 1928.

Г. А. Абрамов: Металлург 9, 13, 1936.

А. Л. Ротинян: Выход по току при электролизе расплавленных солей. Журнал прикладной химии № 7. 1948, стр. 755.

А. Ф. Алабышев: Закон Фарадея и выход по току при электролизе расплавленных солей. Ж. прикл. химии № 7, 1947. стр. 517.

А. Ф. Алабышев: Закон Фарадея и выход по току при электролизе расплавленных солей. Ж. прикл. химии № 6, 1947. стр. 558.

А. Л. Ротинян: Уравнение зависимости выхода по току от плотности тока, расстояния между электродами и температуры при электролизе расплавленных солей. »Цветные металлы«, № 5, 1948. стр. 45.

Г. А. Абрамов: Некоторые заметки к статье Ротиняна, опубликованной в »Журнале прикладной химии« и в журнале »Цветные металлы«. Ж. прикл. химии № 9, 1950. стр. 942.

Ю. В. Баймаков: Электролиз в металлургии, том II и III, Металлургиздат, 1944 и 1947.

Металлургия цветных металлов. Ленинградский политехнический институт им. Калинина. Труды № 2. 1951.

Труды Ленинградского индустриального института. № 4. 1940. Раздел металлургии. Выпуск. 1.

Г. А. Абрамов: Влияние катодной и анодной плотности тока на выход по току при электролизе расплавленного хлористого свинца. Журнал прикладной химии № 10. 1950. стр. 1056.

P. Drossbach: Z. Elektrochem. Bd. 42. No. 2. 1936.

T. Pearson and *Y. Waddington:* Discussions of the Faraday Soc. Electrode processes. No. 1. 1947. 307.

И. П. Журин: Журнал прикладной химии 5, 1932, 307.

Машовец, Догромаджи–Флеринская: Исследование состава анодных газов при электролизе криолито-глиноземных расплавов. Журнал прикладной химии № 9. 1952, стр. 955.

О. А. Есин и П. В. Гельд: Физическая химия пирометаллургических процессов. Металлургиздат. 1950. (120–237).

А. И. Беляев: Физико-химические процессы при электролизе алюминия. Металлургиздат. 1947.

M. Rolin: Revue de Metallurgie No. 3. 1951. p. 182.

A. Vajna: Alluminio. 1950. No. 6.

A. Vajna: Alluminio. 1950. No. 2.

В. А. Пазухин: Кристаллохимические представления в приложении к выплавке алюминия электролизом. Успехи химии. 1952. № 3.

И. П. Гупало и Р. В. Свободы: ВАМИ, 1951. Отчет.

I. W. Cuthberston–Y. Waddington: Trans. Faraday Soc. XXXII. 1936.

Твердовский и Молчанов: Журнал прикладной химии. 10. 1937.

М. М. Ветюков: Отчет по теме 2076. Разд. III. Кафедра Э. Ц. М. Л. П. И. 1949 г.

M. de Kay Thompson: The total and free energies of formation of the oxides of thirthy two metals 1942.

В. П. Елютин, Ю. В. Павлов, Б. Е. Левин: Ферросплавы. Металлургиздат. 1951.

The chemistry and metallurgy of miscellaneous materials (Edited by Laurence) 1950.

O. Kybaschewsky: Metallurgical Thermochemistry. 1953.

Г. А. Абрамов: Труды Л. П. И. № 2. 1951. стр. 27.

А. И. Беляев, М. Б. Рапопорт и Л. А. Фирсанова: Электрометаллургия алюминия. 1953. Металлургиздат.

Е. С. Артоболевская и З. Г. Равинская: Электролиз фосфорсодержащего глинозёма. Труды ВАМИ № 13.

В. А. Соколов: Анализ газов. 1950. Госхимиздат.

А. И. Беляев, Н. Н. Разумов, М. С. Сидоренко: Влияние фторида магния на процесс электролиза криолито-глиноземных расплавов. Интенсификация процессов в металлургии цветных металлов. Труды Минцветметзолото. 1945.

Л. А. Фирсанова: Исследование причин негаснущих анодных эффектов (Отчет, 1953). Москва, Минцветмет

Г. А. Абрамов и Н. А. Калужский: Влияние фтористых солей на критическую плотность тока и на скорость растворения Al_2O_3. Журн. »Цветные металлы« № 4. 1952.

Ю. В. Баймаков и др.: Исследование электролитического контакта между расплавленным алюминием и угольным блоком. Металлургия цветных металлов. Выпуск 2, 1951. Л. П. И.

Szentiványi Gy.: Az áramhatásfok javítása az alumínium elektrolízisben. Alumínium № 3. 1953. Д. (Повышение выхода по току при электролизе алюминия.)

Г. А. Абрамов и П. М. Перлов: Влияние плотности тока, расстояния между электродами и температуры на выход по току при электролизе хлористого свинца. Труды Л. П. И. № 4, 1940. Раздел металлургии.

Г. А. Абрамов и Л. Н. Ложкин: Влияние плотности тока, расстояния между электродами и температуры на выход по току при электролизе хлористого цинка. Труды Л. П. И. № 4, 1940. Раздел металлургии. Выпуск 1.

А. М. Эпштейн: Электролизник алюминиевых заводов. Металлургиздат. 1950.

А. И. Беляев: Криоскопии криолитовых расплавов. Цветные металлы. № 4, 1953.

Г. А. Абрамов, М. М. Вешюков, И. П. Упало, А. А. Костюков, Л. Н. Ложкин: Теоретические основы электрометаллургии алюминия. Металлургиздат. 1953.

ВЫВОДЫ

1. Минимум потерь алюминия в криолитовых расплавах имеет место при криолитном отношении, равном 2,7, соответственно выход по току в этом случае будет максимальным. Введение в электролит 5 вес.% фтористого кальция на 1—2% фтористого магния повышает выход по току на 6—7%.

2. Для криолитовых расплавов с криолитным отношением 2—3 величина потерь алюминия проходит через максимум в зависимости от концентрации Al_2O_3 в электролите. Соответственно значения выхода по току проходят через минимум, который лежит в электролите с кр. о. = 2,7 между 5—6% Al_2O_3. Этот минимум выхода по току ярко отражается и на изменении состава анодных газов в зависимости от содержания глинозема в электролите.

3. Фтористый кальций и фтористый магний до 10 вес. % содержания их в электролите понижают потери алюминия в криолито-глиноземном расплаве, и, следовательно, повышают выход по току.

4. Окислы V_2O_5, P_2O_5, Fe_2O_3, SiO_2, TiO_2 увеличивают потери алюминия, уменьшают выход по току за счет их термического и частично электрохимического восстановления. Особенно вредными примесями являются ванадий, титан и фосфор. В случае присутствия вышеуказанных окислов в электролите анодные газы обогащаются CO_2.

5. С понижением температуры электролита потери алюминия понижаются, выход по току повышается. С повышением температуры повышается содержание углекислоты в анодных газах.

6. С увеличением междуполюсного расстояния выход по току повышается и анодные газы обогащаются углекислотой.

7. При повышении анодной и катодной плотности тока выход по току повышается до определенного предела. На выход по току, помимо катодной и анодной плотности тока, влияет также концентрация тока и поверхность электродов.

8. Опытные данные, полученные в данной работе, показывают, что действие всех факторов, влияющих на выход по току, отражается на составе анодных газов. По составу анодных газов можно определить ориентировочно выход по току на катоде данного электролизера в любой момент.

9. Оптимальным составом электролита при электролизе в криолито-глиноземных расплавах по лабораторным опытам является кр. о. = 2,7, или 2,5—2,6 в случае содержания в электролите фторидов щелочноземельных металлов. Полезно содержание 5% фтористого кальция и еще лучше 5 вес. % фтористого магния в электролите для повышения выхода по току. Для обеспечения максимального выхода по току полезно работать при максимальном содержании Al_2O_3 в криолите при данном составе электролита и температуре.

Нецелесообразно работать с содержанием глинозема 5—6 вес.% в электролите из-за пониженного значения выхода по току.

10. Указанный состав электролита, особенно при низкой рабочей температуре электролита, требует осуществления загрузки глинозема в меньших порциях из-за худшей растворимости глинозема в этих электролитах или лучше — непрерывного питания ванн глиноземом. В противном случае образуются подовые глиноземистые настылы и осадки, могущие обусловить возникновение »негаснущих« анодных эффектов.

11. Опубликованные в литературе формулы для определения выхода по току имеют ряд недостатков, и поэтому не полно и не всегда правильно отражают изменение выхода по току в зависимости от различных факторов при электролизе криолито-глиноземных расплавов.

RESEARCH INTO CURRENT EFFICIENCY IN ALUMINIUM ELECTROLYSIS

GY. SZEKÉR
Candidate of Eng. Sc.

SUMMARY

The minimum Al-loss in cryolite melts is at cryolite ratio ($NaF : AlF_3$) of 2,7, accordingly current efficiency in this case is maximum. Addition of 5% CaF_2 to the electrolyte boosts current efficiency by 1—2%; addition of 5% MgF_2 increases it by 6—7%.

At cryolite ratio of 2—3 Al-losses pass through a maximum, depending on the Al_2O_3 content of the electrolyte. In conformity with this the value of current efficiency passes through

a minimum, which is, for cryolite ratio 2,7, at 5—6% Al_2O_3 content. This minimum is evident from the composition of anode gases depending on the Al_2O_3 content of the electrolyte.

CaF_2 and MgF_2 reduce Al-losses in the cryolite-alumina melt and boost current efficiency up to a %-age of 10 of these fluorides. At a higher %-age of these fluorides current efficiency diminishes because of the increase of viscosity and density of the molten salts.

V_2O_5, P_2O_5, Fe_2O_3 and TiO_2 increase metal loss and reduce current efficiency by their thermic and partly electrochemical reduction. Especially harmful impurities are V, Ti and P. In presence of their oxides the CO_2 content of anode gases increases.

With sinking temperature of the electrolyte Al-losses fall, current efficiency rises. With decreasing temperature the CO_2 content of anode gases increases.

With increasing distance between electrodes current efficiency increases ; the CO_2 content of anode gases rises.

With increasing anode and cathode current density, current efficiency increases to a definite value. Besides cathode and anode current density the intensity of the electrolysing current and the electrode surface also affect current efficiency.

The experimental results arrived at show that the variation of all factors affecting current efficiency is evidenced by changes in the composition of anode gases. The composition of anode gases gives information on conditions of current efficiency in any period of the electrolysis.

In the electrolysis of alumina-cryolite melts, according to laboratory tests, the cryolite ratio of 2,7 is the best ; or possibly ratios of 2,5—2,6, if the electrolyte contains also fluorides of the alkaline earth metals. Addition of 5% of CaF_2, or rather of 5% of MgF_2 is favourable for boosting current efficiency. To attain maximum current efficiency it is most useful to work the process at maximum Al_2O_3 content depending on the composition and the temperature of the electrolyte.

It is not expedient to work with an electrolyte containing 5—6% Al_2O_3, because current efficiency will then be minimum.

To the last mentioned electrolyte, especially at low temperatures, the Al_2O_3 is to be fed in smaller lots because of the low solubility of the alumina ; or a continuous feed of alumina should be applied.

Formulae advocated in literature for the determination of current efficiency contain many errors, therefore they do not reflect perfectly and correctly the variation of current efficiency in the electrolysis of cryolite-alumina melts.

RECHERCHES SUR LE RENDEMENT DE COURANT DANS L'ELECTROLYSE DE L'ALUMINIUM

GY. SZEKÉR
Candidat des Sciences Techniques

RÉSUMÉ

Dans les fusions d'alumine en cryolithe on a un minimum de perte d'Al pour un rapport de NaF : ALF_3, qu'on appellera «rapport cryolithe», de l'ordre de 2,7 ; par conséquent le rendement de courant dans ce cas, atteint son maximum. L'addition à l'électrolyte de 5% de CaF_2 augmente le rendement de courant de 1—2%, celle de 5% de MgF_2 l'accroît de 6—7%.

Pour un rapport cryolithe de 2,3% les pertes d'Al passent par un maximum dépendant de la teneur en Al_2O_3 de l'électrolyte. La valeur du rendement de courant passe donc par un minimum correspondant à un rapport cryolithe de 2,7 et a une teneur en Al_2O_3 de 5—6%. Ce minimum se reflète bien dans la composition des gaz anodiques en fonction de la teneur en Al_2O_3 de l'électrolyte.

Le CaF_2 et le MgF_2 réduisent les pertes d'Al dans le bain cryolithe-alumine et augmentent le rendement de courant jusqu'à une teneur de 10% de ces fluorides. Pour un pourcentage plus élevé de ces fluorides le rendement de courant décroît en conséquence de l'augmentation de la viscosité et de la densité de l'électrolyte.

Le V_2O_5, le P_2O_5, le Fe_2O_3 et le TiO_2 augmentent la perte de métal et réduisent le rendement de courant par leur réduction thermique et en partie électrochimique. Le V, le Ti et le P sont des impuretés particulièrement nuisibles. En présence de ces oxydes la teneur en CO_2 des gaz anodiques augmente. Avec la réduction de la temperature les pertes d'Al diminuent, la teneur en CO_2 des gaz anodiques augmente.

L'augmentation de la distance interpolaire fait acroître le rendement de courant et la teneur en CO_2 des gaz anodiques.

Avec la croissance de la densité des courants anodique et cathodique le rendement de courant augmente jusqu'à une valeur définie. Outre la densité des courants cathodique et anodique l'intensité du courant et la surface d'électrode affectent aussi le rendement de courant.

Les résultats expérimentaux obtenus démontrent que la variation de tous les facteurs influant sur le rendement de courant se reflète dans la composition des gaz anodiques. Cette composition donne des renseignements sur la variation du rendement de courant dans toutes les phases de l'électrolyse.

Dans l'électrolyse des solutions cryolithe-alumine l'optimum est le rapport cryolithe de 2,7, éventuellement les rapports de 2,5—2,6 si l'électrolyte contient aussi des fluorides de métaux alcalinoterreux. L'addition de 5% de CaF_2 ou de préférance de 5% de MgF_2 est utile en vue d'augmenter le rendement de courant. Pour atteindre un rendement de courant maximal on a intérêt à travailler à une teneur en alumine maximale dépendant de la composition et de la température de l'électrolyte.

Il n'est pas pratique de travailler avec un électrolyte de 5—6% de Al_2O_2, vu qu'alors le rendement de courant est minimal.

Dans un tel électrolyte, surtout à des températures basses, le dosage d'alumine doit se faire par petites quantités ; l'alimentation continue en alumine est encore plus avantageuse.

La littérature donne des formules pour la détermination du rendement de courant. Des formules contiennent beacoup d'erreurs, c'est pourquoi elles ne reflètent pas de manière complète et correcte dans tous les cas la variation du rendement de courant dans l'électrolyse des solutions cryolithe-alumine.

UNTERSUCHUNG DES STROMWIRKUNGSGRADES BEI DER ALUMINIUM-ELEKTROLYSE

GY. SZEKÉR
Kandidat der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

1. In den Kryolithschmelzen sind die Aluminiumverluste bei einer Kryolithverhältniszahl von 2,7 am geringsten und dementsprechend ist der Stromwirkungsgrad bei dieser Zahl am grössten. Der Stromwirkungsgrad kann durch Zugabe von 5% CaF_2 zum Elektrolyt um 1—2%, bzw. durch Zugabe von 5% MgF_2 zum Elektrolyt um 6—7% erhöht werden.

2. Untersucht man die Aluminiumverluste bei verschiedenen Al_2O_3-Gehalten des Elektrolyts, so erreichen sie ihr Maximum je nach dem Al_2O_3-Gehalt bei Kryolithverhältniszahlen zwischen 2 und 3. Dementsprechend beträgt der Wert des Stromwirkungsgrades ein Minimum, das sich bei einem Al_2O_3-Gehalt von 5—6% bei der Kryolithverhältniszahl 2,7 befindet. Dieses Minimum spiegelt sich je nach dem Tonerdegehalt des Elektrolyts in der Zusammensetzung der Anodengase wider.

3. Zugaben bis zu 10% von CaF_2 und MgF_2 verringern den Aluminiumverlust der Kryolith-Tonerdeschmelze und erhöhen den Stromwirkungsgrad. Übersteigt jedoch die Zugabe dieser Fluoride 10%, so sinkt der Stromwirkungsgrad infolge der Zunahme der Viskosität und Dichte der Salzschmelze.

4. V_2O_5, P_2O_5, F_2O_3 und TiO_2 erhöhen den Metallverlust und verringern den Stromwirkungsgrad infolge ihrer thermischen und teilweise elektrochemischen Reduktion. Besonders schädliche Verunreinigungen sind Vanadium, Titan und Phosphor. Das Vorhandensein ihrer Oxyde erhöht den CO_2-Gehalt der Anodengase.

5. Beim Senken der Temperatur des Elektrolyts verringern sich die Aluminiumverluste und erhöht sich der Stromwirkungsgrad, während der CO_2-Gehalt der Anodengase zunimmt.

6. Mit der Vergrösserung des Elektrodenabstandes erhöhen sich der Stromwirkungsgrad und der CO_2-Gehalt der Anodengase.

7. Bei Erhöhung der Anoden- und Kathodenstromdichte wächst der Stromwirkungsgrad bis zu einem bestimmten Wert. Ausser der Kathoden- und Anodenstromdichte beeinflussen auch die Stromstärke und die Grösse der Elektrodenflächen den Stromwirkungsgrad.

8. Versuchsergebnisse beweisen, dass sich jede Veränderung der den Stromwirkungsgrad beeinflussenden Faktoren in der Zusammensetzung der Anodengase widerspiegelt. Auf Grund der Zusammensetzung der Anodengase kann man zu jedem Zeitpunkt der Elektrolyse Aufschluss über die Grösse des Stromwirkungsgrades erhalten.

9. Nach Laboratoriumsversuchen erwies sich bei Elektrolyse von Kryolith-Tonerdeschmelzen eine Kryolithverhältniszahl von 2,7 als optimal. Dieses Optimum konnte auch bei 2,5—2,6 liegen, wenn nämlich der Elektrolyt auch Erdalkalimetallfluoride enthielt. Zur Erhöhung des Stromwirkungsgrades ist es zweckmässig, 5% CaF_2 oder noch besser 5% MgF_2 beizumischen. Zur Erreichung eines maximalen Stromwirkungsgrades ist es vorteilhaft, mit einem je nach der Zusammensetzung des Elektrolyts und je nach der Temperatur maximalen Tonerdegehalt zu arbeiten. Dagegen ist es unzweckmässig, einen Elektrolyt von 5—6% Al_2O_3-Gehalt zu benutzen, weil dann der Stromwirkungsgrad am kleinsten ist.

10. Wegen seiner schlechten Löslichkeit soll die Tonerde obigem Elektrolyt, besonders bei niedrigen Temperaturen, nur in kleineren Mengen zugegeben werden. Noch vorteilhafter ist es, eine kontinuierliche Tonerdezufuhr zu verwirklichen.

11. Die im Schrifttum angeführten Formeln zur Bestimmung des Stromwirkungsgrades enthalten viele Fehler und spiegeln deshalb die Änderung des Stromwirkungsgrades bei der Elektrolyse von Kryolith-Tonerdeschmelzen nur unvollständig und nicht immer richtig wider.

DATA ON COPPER OXYARSENATE, COPPER NICKELOXYARSENATE, AND NICKEL OXIDE INCLUSIONS

Z. HEGEDÜS

[Manuscript received May 17, 1954]

These non-metallic inclusions are found only in alloys containing more than 0,2% As, As and Ni, or Ni only. Such alloys are generally used for firebox sheets, and such inclusions have been found at works laboratory tests as well.

Literature seldom furnishes sporadic data on copper oxides containing arsenic ; e. g. books and publications of Hanson-Maryat, Smithels-Hessenbruch, Schimmel and Berglund-Meyer.

These authors describe in alloys containing more than 0,2% As and O_2 bluish inclusions, taken for copper oxyarsenate ; in case of nickel content Cu-Ni oxyarsenate should also be formed. They describe shape, colour, etching and some physical properties of the copper oxyarsenate, and mention only the name of Cu-Ni-oxyarsenate. These data are partly unreliable, partly contradictory, therefore their revision was necessary, also for correcting some errors. For the study of these two inclusions, to alloys containing various quantities of arsenic, different amounts of copper oxide and nickel respectively, were added ; besides these As-free alloys containing Ni and O_2, were also prepared. Contents of the series of alloys prepared were the following :

1	As = 3,15 %	Ni = trace	O_2 = 0,1 %
2	As = 3,00 «	Ni = trace	O_2 = 0,8 «
3	As = 0,74 «	Ni = 0,05 %	O_2 = 0,05 «
4	As = 0,42 «	Ni = 0,15 «	O_2 = 0,5 «
5	As = 0,29 «	Ni = ∅ «	O_2 = 0,1 «
6	As = 3,05 «	Ni = 1,00 «	O_2 = 0,1 «
7	As = ∅ «	Ni = 0,50 «	O_2 = 0,15 «
8	As = ∅ «	Ni = 2,00 «	O_2 = 0,3 «

The determination of low contents of O_2 in the alloy was difficult, therefore the %-ages of O_2, listed in the above table, are calculated from the amounts of the CuO alloyed.

The Ni-free alloys obtained, showed in micrographs inclusions similar to Cu_2O, of sky blue colour, spherical, or dendritic, forming eutectics. After Smithels-Hessenbruch, if the As : O_2 ratio is near 10 : 1 grey inclusions are formed, taken

by them for copper oxyarsenate. They do not mention the shape of these inclusions. These data are incorrect, and the examination of the nickel containing alloy proved that the inclusion they described was, in fact, nickel oxide.

Optical properties of the copper oxyarsenate inclusion

Colour sky blue, with strong light-reflecting capacity. Under dark field illumination and by polarized light gleams in ruby red colour. Anisotropy could not be observed because of abundance of ruby red inner reflexes. With oil immersion the colour of the inclusion darkened. Optical properties are perfectly identical with those of Cu_2O.

Physical properties

Spherical or drop shape ; forms primary dendrites similar to those of Cu_2O, in case of higher O_2 content. In each examined alloy there was more or

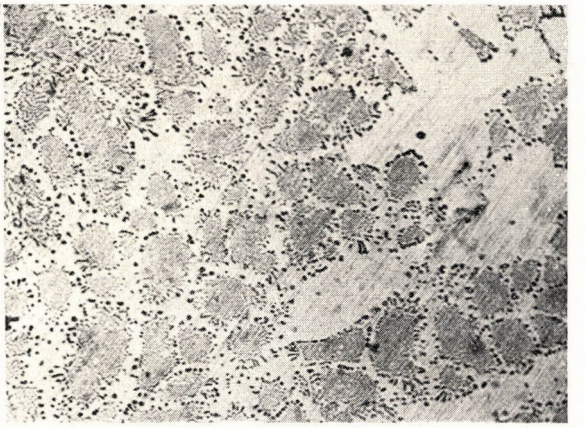


Fig. 1. Copper oxyarsenate eutectics in copper containing 0,74% As ; × 150

less eutectic *(Fig. 1*, taken of an alloy containing 0,74% As,). This observation is contrary to the opinion of Smithels-Hessenbruch, who after Hanson's works stated, that the presence of As alters the distribution of CuO_2, and with growing content of As the eutectic agglomerates to bigger grains. They prove this by micrographs of alloys containing 0,11% O_2, 0,09% As and 0,09% O_2, 0,84% As *(Fig. 2)*. In contradiction to this, in *Fig. 4*, in some places, beside nickel oxide inclusions, considerable quantities of eutectics are found even in alloys containing 3,15% As.

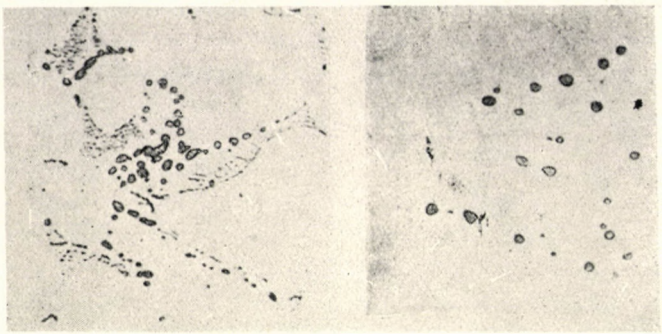


Fig. 2. Inclusions of copper alloys containing 0,11% O_2, 0,09% As and 0,09% O_2, 0,84% As, after Hanson ; × 300

Etching of inclusions (during 60 sec.)

1 : 3 HNO_3 : ..... blackens and dissolves
ammoniacal $CuCl_2$: ..... does not attack
hydrocloric acid-$FeCl_3$: ..... blackens and dissolves
20%-HF : ..... blackens and dissolves
1 : 3 NH_4OH : ..... does not attack
10% $(NH_4)_2S_2O_8$: ..... does not attack

Distinction from other inclusions of copper

External appearance and optical behaviour of Cu_2O are identical with those of copper oxyarsenate, and their distinction is only possible by etching with 1 : 3 HNO_3 ; CuO_2 remains unattacked while copper oxyarsenate blackens and dissolves. Blue spherical Cu_2S, Cu_2Se, Cu_2Te can be distiguished by etching with HF. The sulphide, selenide, telluride remain unattacked or are only feebly coloured, while the copper oxyarsenate blackens and dissolves.

Angular gray SnO_2, ZnO, NiO; CuO-black under dark field illumination —, cannot be mistaken for copper oxyarsenate.

Technological defects caused by the inclusion

The inclusion is only found in As-rich firebox sheet bars ; if present in considerable quantities, it may cause breaks during rolling or edging.

Cu-Ni-oxyarsenate and Ni-oxide

To decide whether Cu-Ni-oxyarsenate exists at all, and if so, what its characteristics are, artificial alloys were produced.

Photomicrographs of alloys containing 3,05% As, 1% Ni, 0,1% O_2, displayed, besides spherical and eutectic copper oxyarsenate, greyish-blue angular

inclusions too *(Fig. 3)*. Solution of Ni in Cu took a comparatively long time and this resulted in the decrease of the As content ; therefore, in the following a solid piece of Ni was put into the melt, which was rapidly cooled after an inter-

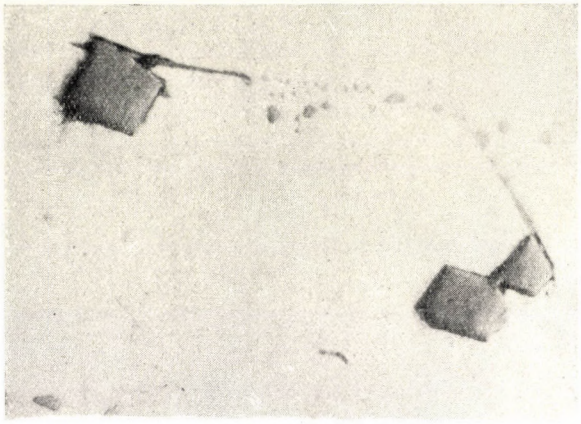


Fig. 3. Dark grey angular inclusions in copper alloy containing 3,05% As, 1% Ni, 0,1% O_2 ; × 600

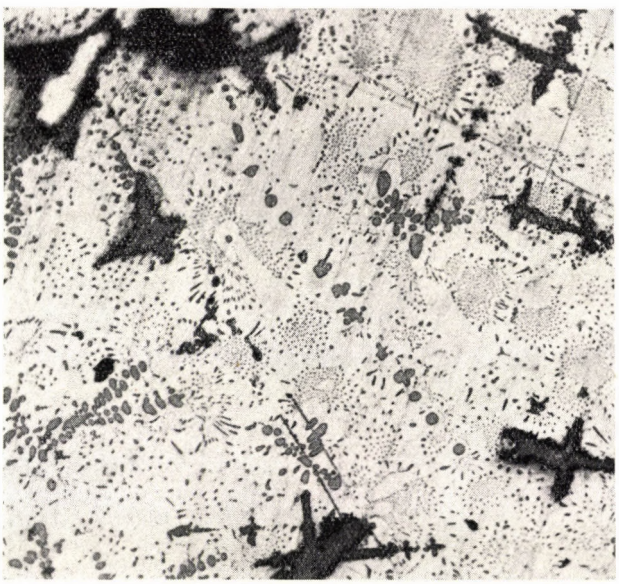


Fig. 4. Dark grey NiO inclusions of large size of aeroplane and star shape, with primary and eutectic copper oxyarsenate near the residues of undissolved nickel (white spot in the corner of the figures) ; black spots are hollows ; × 150

val of 5 min. Hereby the Ni melted only partly, and in its immediate proximity numerous aeroplane-, star-shaped or angular inclusions appeared, while at 5—6 mm distance from the unmolten piece no more such inclusions were found.

In alloys thus produced inclusions of large size are formed, favourable for metallographic tests, *(Fig. 4)* while with Ni perfectly dissolved, the inclusions are of very small size. In the corner of the micrograph the residue of the Ni piece is still visible, with aeroplane- and star-shaped inclusions around it amid much primary and eutectic copper oxyarsenate. At 3 mm distance from the Ni residue, the inclusions are much smaller and there is also less copper oxyarsenate eutectics. The explanation of this is that along with the Ni piece a portion of the superficial oxide film may also have found its way into the melt. At 6 mm distance only copper oxyarsenate is present, angular cristals are no more found there.

The greyish-blue inclusions obtained in artificial arsenical alloys may be either the Cu-Ni-oxyarsenate mentioned in literature, or pure NiO only. To settle the question As-free alloys were produced with various contents of Ni and O_2. Inclusions formed in these alloys were similar to those found in arsenical alloys both in shape and colour, and the most careful optical test could not find any difference between the inclusions of the two kinds of alloys. The NiO appears in copper, because of its higher melting point and insolubility, in a shape unlike to that usually found in metallic nickel. Therefore the optical and physical behaviour of the NiO inclusion will be more closely investigated.

Optical behaviour of the NiO inclusion

Colour: bluish-grey, with medium ligh-reflecting capacity. Isotropic. Extinction unobservable by polarized light which shows the inclusion mostly in black colour. Orange brown internal reflexes are visible especially with oil-immersion. Under dark field illumination the inclusion is black, and only sporadically do especially twin cristals shine forth in orange brown colour in consequence of internal reflexes.

Physical properties

The NiO inclusion is very hard, takes polish with strong relief. Its hardness approaches that of SnO_2. Its sp. gr. being below that of the melt, it emerges to the surface of the latter, where it is found in large amounts, while it appears only sporadically in the interior of the melt *(Fig. 5)*. Its low sp. gr. and insolubility explains its very rare occurrence in furnace-refined copper. Cristallizes in the cubic system, forms angular, quadrangular, or star-and aeroplane-shaped crystals *(Fig. 6, 7)*. Six-armed or star-shaped crystals are twins *(Fig. 8)*. The structure of the twin crystal becomes visible by polarized light or under dark field illumination. The twin-lamellar structure of the thicker portion is evident in the micrograph. Angular inclusions are formed if little Ni is present and it is perfectly dissolved in the melt, but even in such case star-shaped crystals may

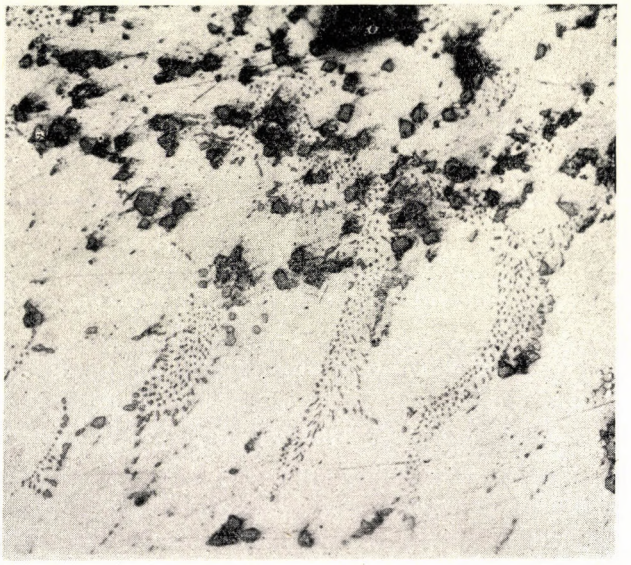


Fig. 5. Dark grey, angular NiO accumulated on the surface of the alloy ; × 150

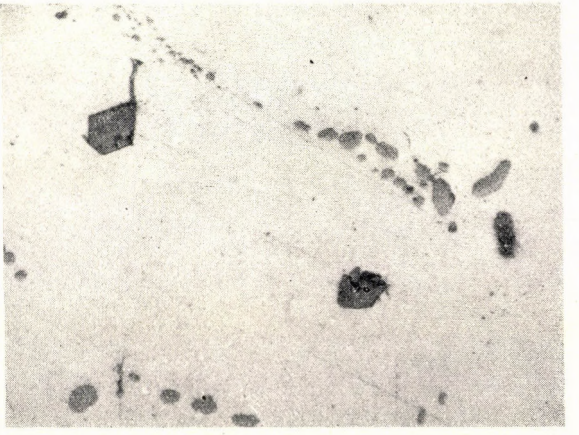


Fig. 6. Dark grey angular NiO, with some copper oxyarsenate ; × 400

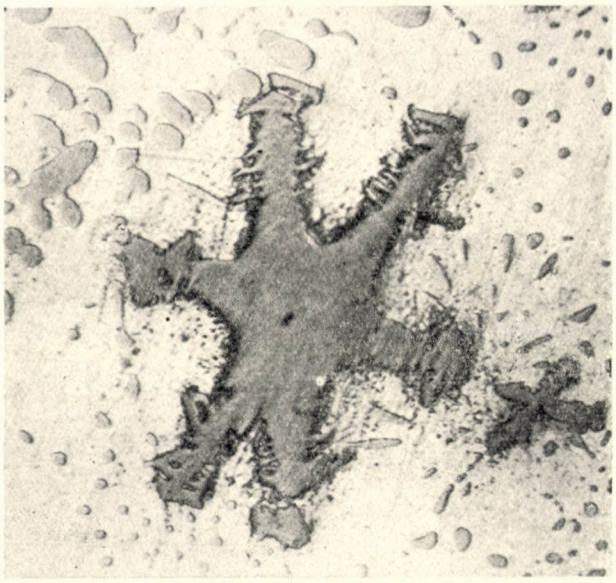


Fig. 7. Nickel oxide inclusion of star shape ; × 600

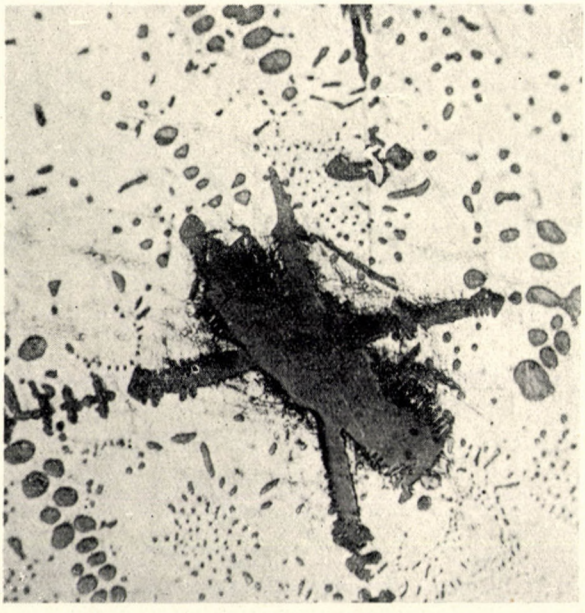


Fig. 8. Twin crystals of nickel oxide in As-free alloys. Spherical inclusion of Cu_2O, in the figure light grey, in reality blue ; × 600

be found sporadically. Large-sized twin crystals mostly appear in the immediate proximity of the undissolved Ni, although angular inclusions are also found there in smaller amounts.

Etching

Etching during one minute by conventional reagents does not attack the NiO inclusion.

Distinction from other inclusions of copper

By its angular shape and bluish-grey colour it is easily distinguishable from blue, speherical inclusions of copper. The ZnO inclusion is pale gray, of



Fig. 9. The inclusion of the former figure under dark field illumination ; × 600

characteristic shape, shines forth yellow by polarized light and does not occur in copper containing As or Ni. The SnO_2 inclusion resembles most the NiO. The colour of SnO_2 is dark grey without bluish shade. With oil immersion it becomes black. By polarized light it shines in orange brown colour and is anisotropic. Its shape is angular or the characteristic hollow rhombus. Sometimes SnO_2 also forms twin crsytals of bird or aeroplane shape *(Fig. 10)*, but these always contain the residue of the hollow rhombus.

The colour of the NiO inclusion is bluish-grey, it generally does not gleam by polarized light, does not form hollow crystals, and the character of twin crystals is entirely different from those of SnO_2.

In the distinction of the two inclusions the knowledge of the chemical composition of the copper is also helpful. Sn possesses toward O_2 higher affinity than Ni or Cu. In alloys containing Sn, CuO_2 can be formed only when the Sn content of the alloy has been practically oxidized to SnO_2. On the other hand, simultaneously with NiO, Cu_2O is also formed, even before the total oxidation of the Ni-content. If but little O_2 enters into the alloy, the NiO will be in excess (*Fig. 5*). Cu possesses toward As and S too, higher affinity than Ni; in arsen-



Fig. 10. Aeroplane-shaped SnO_2 twin in tin-bronze; × 400

ical alloys copper oxyarsenate and NiO are formed at the same time under the effect of O_2, while under the effect of SO_2, Cu_2S and NiO are obtained.

REFERENCES

Hanson—Maryat: J. Ins. Met. 121, 1927.
Smithels—Hessenbruch: Beimengungen und Verunreinigungen der Metalle 1931.
A. Schimmel: Metallographie der technischen Kupferlegierungen 1931.
T. Berglund—A. Meyer: Handbuch der metallographischen Schleif-Polier- und Ätzverfahren 1940.
P. Széki—Z. Hegedüs: SnO_2 inclusions in refined Copper: Acta Technica. T. IV. (1952) 293.

SUMMARY

To control literature on copper oxyarsenate artifical inclusions in alloys of various composition were prepared. It was found that the inclusion held for copper nickeloxyarsenate is in reality NiO. The optical and physical behaviour of the NiO inclusions, their cristallization and their distinction from other non-metallic inclusions of copper, as well as conditions of their formation were examined.

ДАННЫЕ О ВКЛЮЧЕНИЯХ ОКСИАРЗЕНАТА МЕДИ, МЕДНО-НИКЕЛЬНОГО ОКСИАРЗЕНАТА И ОКИСИ НИКЕЛЯ

З. Хегедюш

Р е з ю м е

При помощи искусственных включений, полученных в различных по составу сплавах, были проверены приводимые в литературе данные по медному оксиарзенату. Установлено, что включение, считаемое медно-никельным оксиарзенатом, в действительности представляет собою NiO. Исследованы оптические и физические свойства NiO включения, а также кристаллизация, отличие от других неметаллических включений меди и, наконец, условия образования.

DONNÉES SUR LES INCLUSIONS D'OXYARSENATE DU CUIVRE, D'OXYARSENATE DU CUIVRE ET DU NICKEL ET D'OXYDE DE NICKEL

Z. HEGEDÜS

RÉSUMÉ

A l'aide d'inclusions artificielles produites dans des alliages de composition différente, on a vérifié les données de la littérature concernant l'oxyarsenate du cuivre. Il a été constaté que l'inclusion qu'on avait supposé être de l'oxyarsenate du nickel et du cuivre était en réalité du NiO. Les caractéristiques optiques et physiques, de l'inclusion de NiO, la cristallisation et la distinction des autres inclusions non-métalliques du cuivre, ainsi que les conditions de sa formation ont été examinées.

BEITRÄGE ÜBER DIE KUPFEROXYARSENAT-, KUPFERNICKELOXYARSENAT- UND NICKELOXYDEINSCHLÜSSE

Z. HEGEDÜS

ZUSAMMENFASSUNG

Die auf das Kupferoxyarsenat bezüglichen Angaben des Schrifttums wurden an Hand von künstlichen Einschlüssen überprüft, die in Legierungen von verschiedener Zusammensetzung hergestellt wurden. Hierbei konnte festgestellt werden, dass der als Kupfernickeloxyarsenat angesehene Einschluss in Wirklichkeit Nickeloxyd ist. Daraufhin wurden die optischen und physikalischen Eigenschaften des NiO-Einschlusses, seine Kristallisierung und seine Unterscheidung von den übrigen nichtmetallischen Einschlüssen des Kupfers sowie seine Entstehungsverhältnisse untersucht.

ANGABEN ÜBER DIE IN TECHNISCHEN KUPFERN VORKOMMENDEN KUPFEROXYDEINSCHLÜSSE

Z. HEGEDÜS

[Eingegangen am 17. Mai 1954]

Das Kupferoxyd (CuO) gehört zu den seltener vorkommenden Einschlüssen des Kupfers. Sein Erkennen ist für die Praxis überaus wichtig, da hierdurch technologische Fehler, die mit seiner Bildung in Verbindung stehen, festgestellt werden können.

Im Gleichgewichtszustand kann das CuO im metallischen Kupfer nicht vorkommen, da es bei hoher Temperatur, entsprechend der Reaktion $CuO + Cu \rightarrow Cu_2O$, reduziert wird. Es bildet mit Cu_2O ein bei 1075° C schmelzendes eutektisches Gemisch, dessen Zusammensetzung 32% CuO und 68% Cu_2O ist *(Abb. 1)*.

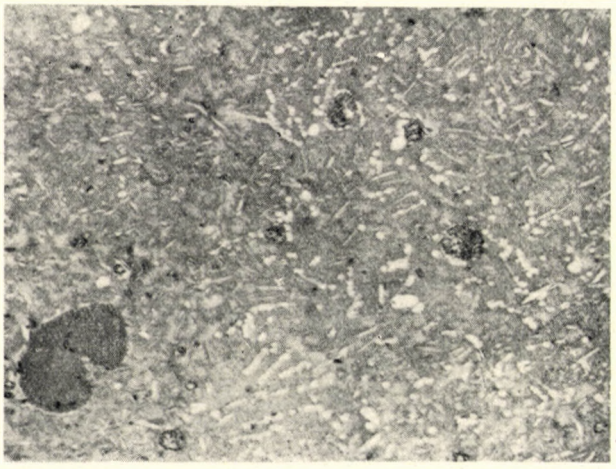


Abb. 1. Teil eines Einschlusses in dem aus $Cu_2O + CuO$ bestehenden Eutektikum in im Schmelzfluss raffiniertem Kupfer. Das dunkelgraue runde Korn ist ein Silikat. V = 600 ×

In Kupfer und in Schlacken, in denen auch fremde Metalle vorhanden sind, enthält das CuO oft auch andere Metalle in fester Lösung.

Seiner Entstehung nach unterscheidet man primäre und sekundäre Einschlüsse. Die primären Einschlüsse entstehen im geschmolzenen Metall, sind ziemlich selten und hauptsächlich in Proben zu finden, die aus der Oxydations-

periode der Kupferraffinierung genommen wurden, weiterhin in grösseren Schlakkenkörnern der Ofenschlacke und der Ofenauskleidung. Die sekundären Einschlüsse entstehen dagegen in der festen Phase infolge irgendeines technologischen Fehlers.

Optische Eigenschaften der Einschlüsse

Obzwar die zahlreichen Kratzer und Ausbröckelungen die optische Untersuchung ziemlich erschweren, bleibt diese dennoch die entsprechendste Methode zum Erkennen der Einschlüsse. Die optischen Eigenschaften der Einschlüsse verändern sich im geringen Masse in Abhängigkeit von den gelösten Verunreinigungen.



Abb. 2. Adernförmiges CuO und dendritartiges bzw. kugelförmiges Cu_2O in einer Probe aus der Oxydationsperiode der Kupferraffinierung. V. = 400 ×

Die Farbe des CuO ist blau mit blassgrauem Ton und von mittlerem Reflexionsvermögen. Diese Farbe ist etwas dunkler als die des Cu_2O, doch ist der für das Cu_2O charakteristische rötliche Ton selbst bei starker Vergrösserung nicht wahrnehmbar. In Ölimmersion wird die Farbe dunkelblau, innere Reflexe sind nicht festzustellen. Bei Drehung zwischen gekreuzten Nicolen ändert sich die Farbe von grau-blau bis bräunlich. Die Anisotropie ist besonders bei Anwendung von Ölimmersion auffallend. In Dunkelfeldbelichtung zeigt das CuO eine schwarze Farbe. Die optischen Eigenschaften des CuO stimmen mit jenen des Tenorits überein.

Die primären Einschlüsse kommen in mannigfaltiger Gestalt vor, von denen aber keine als charakteristisch bezeichnet werden kann. Verhältnismässig selten sind die adernförmige Einschlüsse *(Abb. 2)*. Da der Einschluss während des Erstarrens teilweise zu Cu_2O reduziert wird, ragen aus dem Kupferoxyd Cu_2O-Dendrit-Auswüchse heraus. Viel häufiger sind die tropfenförmigen

Einschlüsse *(Abb. 3)*. Der Rand des in Abb. 3 gezeigten Einschlusses wurde zu Cu_2O reduziert. Letzteres enthält auch noch SnO_2 und etwas Silikat, was darauf hinweist, dass ein Schlackentropfen in den Metallstrahl geraten war. In Ofen-

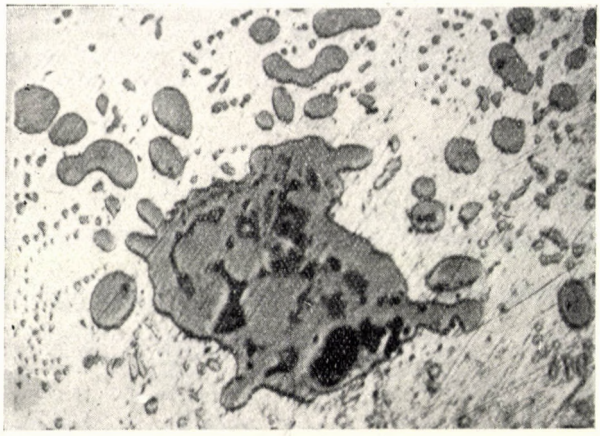


Abb. 3. Tropfenförmiger, zusammengesetzter CuO-Einschluss in im Schmelzfluss raffiniertem Kupfer. Der dunkelgraue, luckige, eckige Einschluss ist SnO_2, die dunkelgrauen, unregelmässigen Teile sind Silikate, während der schwarze Fleck ein Hohlraum ist. Die kleinen kugelförmigen Einschlüsse sind Cu_2O. V = 600 ×

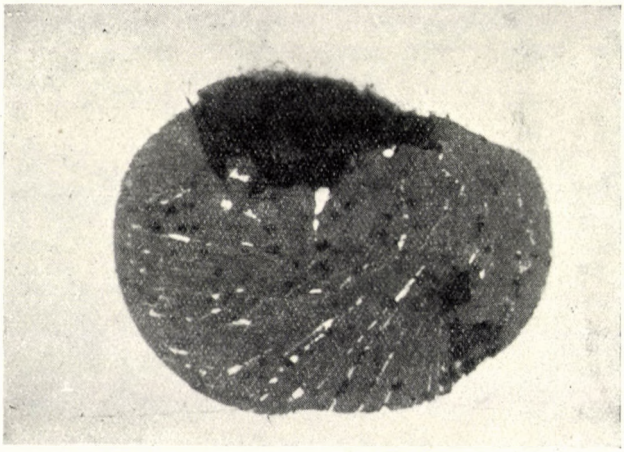


Abb. 4. Nadelförmige CuO-Kristalle und geringe Menge Cu_2O + CuO-Eutektikum im Schlackentropfen eines Feuerbuchskupfers. Die schwarzen Teile sind Hohlräume. V = 600 ×

auskleidungen sowie in einzelnen Schlackentropfen findet man häufig auch nadelförmige Kristalle. *Abb. 4* und *5* zeigen in dem im Schmelzfluss raffinierten Kupfer einen Einschluss, der aus CuO und aus dem eutektischen Gemisch von Cu_2O + CuO besteht. Das nadelförmige primäre CuO ist besonders in Dunkelfeldbelichtung auffallend.

In einigen eisenhaltigen Schlacken kann man von den üblichen abweichende, graublaue, eckige CuO-Einschlüsse finden (*Abb. 6*). Die optischen Eigenschaften dieses Einschlusses weichen von denen des reinen CuO teilweise

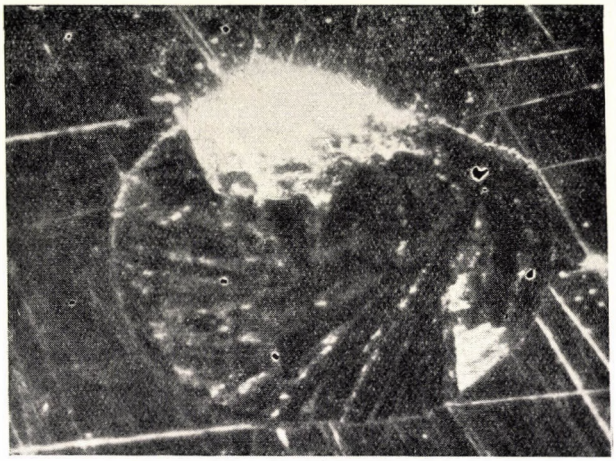


Abb. 5. Der in Abb. 4 sichtbare Einschluss in Dunkelfeldbelichtung. Das CuO ist schwarz. V = 600 ×

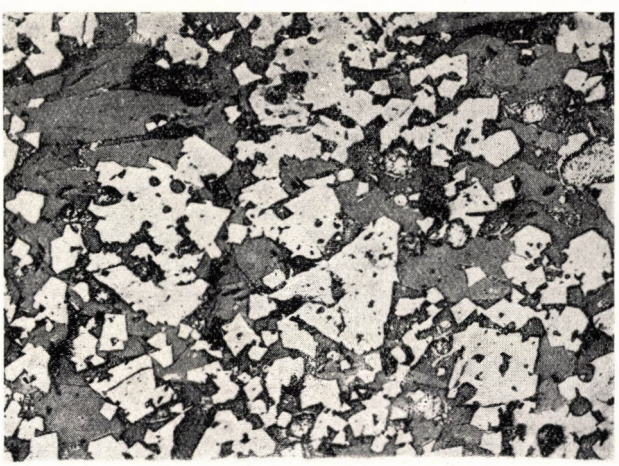


Abb. 6. Eckige Oxydkörner im grossen Schlackeneinschluss einer Anodenplatte. Die dunkelgrauen Teile sind Silikate, die kleinen, dendritartigen Einschlüsse sind Cu_2O, der kugelförmige Einschluss mit rauher Oberfläche ist ein Kupfertropfen. V = 150 ×

ab. Seine Farbe ist graublau mit mittlerem Reflexionsvermögen. Die optischen Eigenschaften der Einschlüsse, ihr struktureller Aufbau und ihre Menge ändern sich je nach dem Eisengehalt der Schlacke.

In dem grossen Schlackeneinschluss einer gegossenen Kupferanode, die viel Fe (20,1% F_2O_3) und im Vergleich dazu wenig Cu (13,4% CuO) enthielt,

fand man hauptsächlich würfelförmige Kristalle. In der Mitte der Kristalle befand sich ein stärker anisotroper Kern von dunkelgrauer Farbe, während

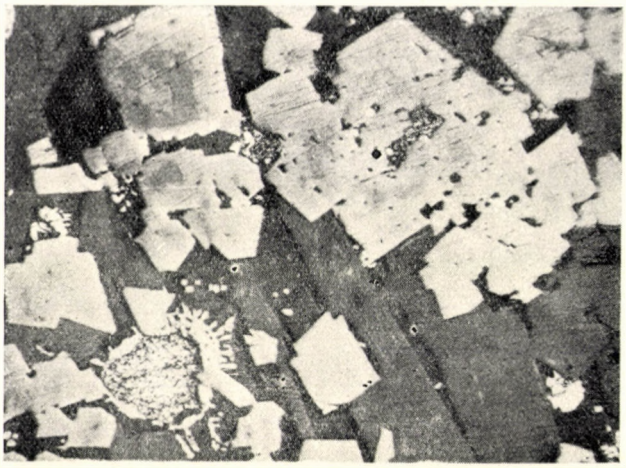


Abb. 7. Dunkler gefärbter Kern in der Mitte der eckigen Einschlüsse. V = 600 ×

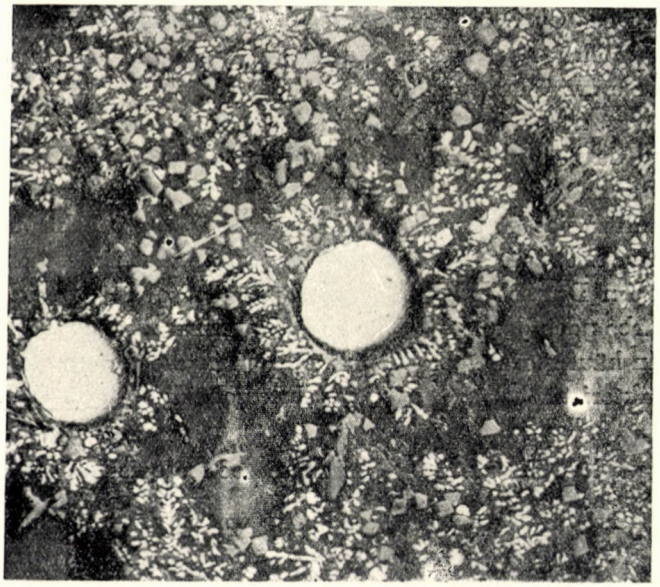


Abb. 8. Mikrotextur einer Kupferschlacke. Weisse kugelförmige Kupfertropfen, weisses dendritartiges Cu_2O, eckiges $CuFeO_2$, dunkelgraue, eckige Silikate. V = 150 ×

der Rand heller, bläulicher war *(Abb. 7)*. In einer Ofenschlacke, die hingegen viel Kupfer (34% CuO) und wenig Eisen (2,2% FeO) enthielt, fand man neben metallischen Kupfertropfen und Cu_2O auch einige eckige Einschlüsse *(Abb. 8)*.

Diese eckigen Einschlüsse waren homogen, wobei sich in ihrem Innern auch keine Farbenunterschiede feststellen liessen.

Auf Grund dieser Untersuchungen kann angenommen werden, dass der dunklere graue Kern bzw. die homogenen Kristalle aus $CuFeO_2$ bestehen, während der äussere, hellere, weniger anisotrope Teil eine feste Lösung von $CuFeO_2$ und FeO darstellt.

Ätzen des CuO-Einschlüsses

1 : 3 HCl	schwärzt und löst teilweise
10%iges $FeCl_3$	schwärzt und löst
1 : 3 HNO_3.....	greift nicht an
30%iges HF	greift nicht an

Da das CuO teilweise zu Cu_2O reduziert wird, ist das Ätzen ziemlich unsicher und besitzt daher für die Bestimmung des Einschlusses keine besondere Bedeutung.

Unterscheidung des CuO von anderen Kupfereinschlüssen

Die Farbe des Cu_2O ist der des CuO ähnlich, doch leuchtet das Cu_2O im Dunkelfeld und polarisierten Lichte rubinrot, während das CuO schwarz bleibt bzw. seine Farbe zwischen blaugrau und braungrau ändert. HF löst das Cu_2O rasch aus, während es das CuO nicht angreift.

Das dem CuO ähnliche Sulfid, Selenid, Tellurid und Kupferoxyarsenat leuchtet im Dunkelfeld rubinrot, während das CuO schwarz bleibt.

SnO_2 ist dunkelgrau, leuchtet im Dunkelfeld orangefarbig und ist infolge seiner charakteristischen Form leicht von CuO zu unterscheiden. ZnO ist tauben. grau, leuchtet im Dunkelfeld orangefarbig und ist dadurch leicht erkennbar. NiO ist der Farbe nach dem CuO sehr ähnlich, im Dunkelfeld bleibt es schwarz, doch kann man häufig orangebraune innere Reflexe beobachten, die gemeinsam mit der charakteristischen Form eine Unterscheidung ermöglichen.

Durch den Einschluss verursachte technologische Fehler

Primäres CuO enthaltendes Kupfer ist spröde und bricht leicht sowohl bei der Warm- als bei der Kaltverformung. *Abb. 1* zeigt den primären eutektischen CuO + Cu_2O-Einschluss eines Feuerbuchskupfers.

Viel häufiger als die primären sind die sekundären Einschlüsse, die die verschiedenartigsten technologischen Fehler verursachen können. *Abb. 9* zeigt den sekundären CuO-Einschluss eines Elektrolytkupfers mit beerenförmigen Auswüchsen. Infolge des ausbröckelnden, spröden Einschlusses war die Vorbereitung des Anschliffes besonders schwierig.

Häufig findet sich das sekundäre CuO in überhitzten, verbrannten Stücken. In solchen Fällen bildet es dünne Adern an den Kristallgrenzflächen und das Kupfer zerfällt bei der Warmverformung in grosse Stücke *(Abb. 10* und *11)*.

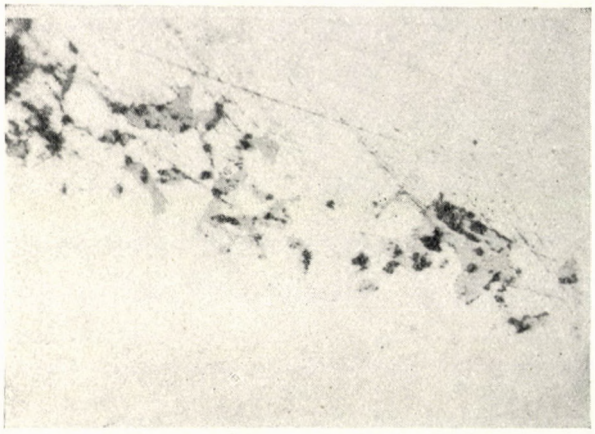


Abb. 9. Sekundäres CuO in Elektrolytkupfer. Die schwarzen Flecke sind Ausbröckelungen. V = 150 ×

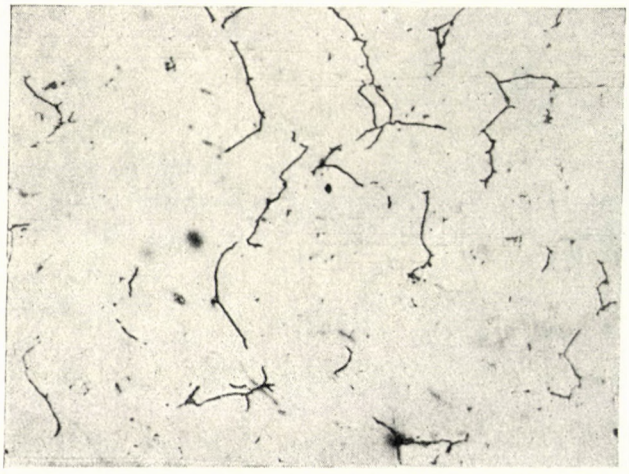


Abb. 10. An der Kristallgrenze gebildetes CuO in verbranntem, Cd-haltigem elektrischem Leitungsdrahtmaterial. V = 75 ×

Besonders Cd-und Sn-haltiges Leitungsdrahtmaterial neigt zur Oxydation an den Kristallgrenzen.

Sekundäres CuO findet man oft auch am Ende beim Einwalzen bzw. Einpressen des Zunders, eines Warmrisses oder der Walzlappung. Die Gestalt dieses Einschlusses ist charakteristisch und weist auf die Entstehungsumstände

hin *(Abb. 12)*. Beim Warmwalzen wird das in das Metall gelangte CuO infolge der Einwirkung von Hitze und Druck durch das metallische Kupfer zu Cu_2O

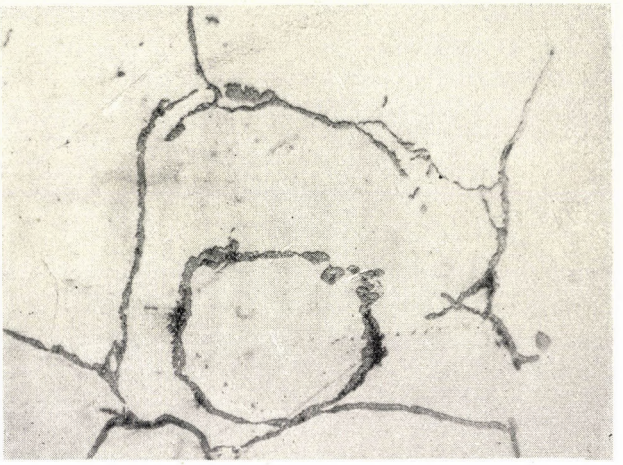


Abb. 11. An der Kristallgrenze gebildetes CuO in einem verbrannten, Cd + Sn-haltigen elektrischen Leitungsdrahtmaterial. V = 150 ×

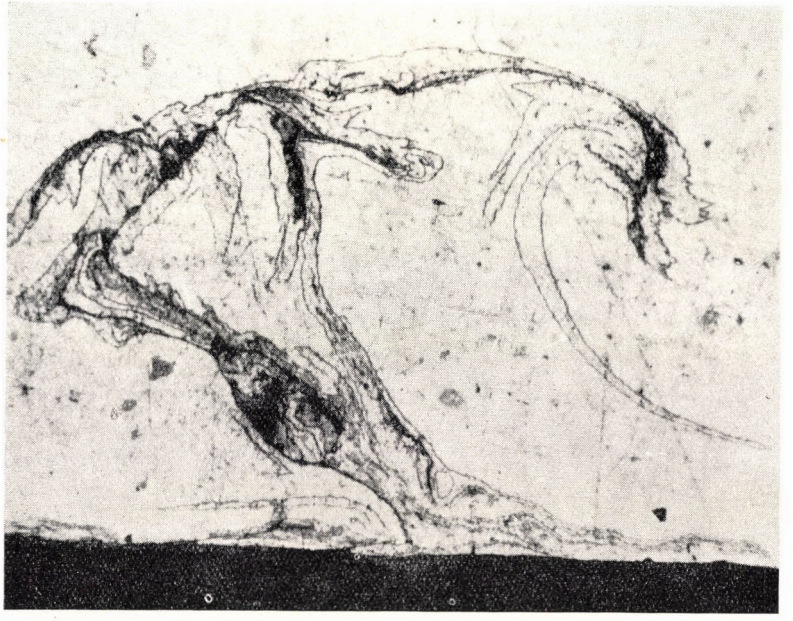


Abb. 12. Sekundärer Einschluss, entstanden durch Warmwalzlappung. V = 30 ×

reduziert. Die Überlappungen können zwar verschweissen, doch wird der verschweisste Teil beim letzten Stich oder bei der letzten Kaltverformung neuer-

dings aufreissen. In solchen Fällen findet man im Boden des Risses Cu_2O anstelle von CuO, doch kann man aus der Gestalt und Lage des Einschlusses sicher auf dessen Ursprung schliessen. Infolge Einwalzens des Zunders kann das teil-

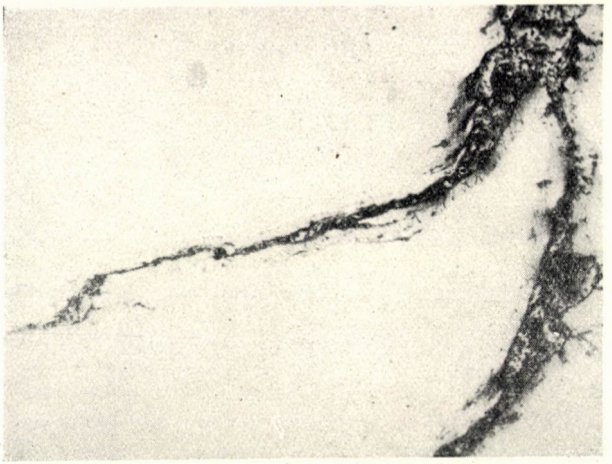


Abb. 13. Cu_2O + CuO-Einschluss mit rauher Oberfläche, umgeben von Kupfer, das sekundäres SnO_2 in Form von kleinen stäbchenförmigen Einschlüssen enthält. V = 75 ×

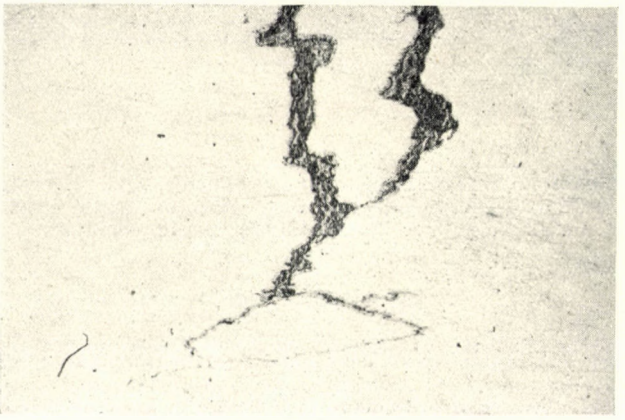


Abb. 14. Sekundärer CuO + Cu_2O-Einschluss in einer 5%igen Zinnbronze. V = 20 ×

weise zu Cu_2O reduzierte CuO selten auch in 5%igen phosphorarmen Zinnbronzen vorkommen. Da die Affinität des Sn zu O_2 grösser ist als die des Cu, reduziert das Sn die Oberfläche des Einschlusses unter Bildung von sekundären SnO_2 zu metallischem Kupfer. Dadurch bildet sich längs des sekundären Einschlusses ein rötlich gefärbter Hof *(Abb. 13)*. Die Reduktion des CuO + Cu_2O-Einschlusses ist nur geringfügig, da im Kupfer die Diffusionsgeschwindigkeit des

Sn äusserst gering ist und die Reaktion nach erfolgter Entzinnung der Berührungsflächen zum Stillstand kommt. Beim Ätzen umgibt das reduzierte Kupfer, da es weniger angegriffen wird, den sekundären Einschluss als ein glänzender Hof *(Abb. 14* und *15)*. Die dünneren Teile der CuO + Cu_2O-Einschlüsse werden vollständig reduziert und ihre Stelle bezeichnet noch nur das sekundäre SnO_2.

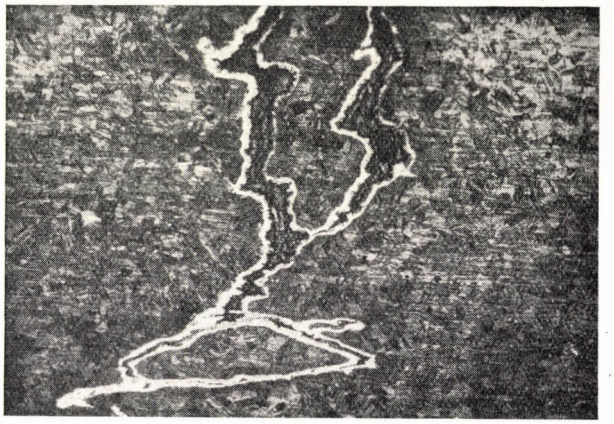


Abb. 15. Längs eines sekundären CuO + Cu_2O-Eutektikums reduziertes Kupfer in einer 5%igen Zinnbronze. Ätzen mit salzsäurehaltigem $FeCl_3$. V = 20 ×

Dagegen bleiben die dickeren Einschlüsse erhalten, und in ihrer Umgebung findet sich viel hautartiges sekundäres SnO_2 vor.

SCHRIFTTUM

Vogel, R. und *Pocher, W.*: Zeitschrift für Metallkunde 1927, H. 10, S. 333.
Ramdohr, P.: Erzmineralien und ihre Verwachsungen, Berlin 1951.
Bernhoft, K. und *Wunder, W.*: Zeitschrift für Metallkunde 1930.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wurden optische Eigenschaften des CuO-Einschlusses, seine Unterscheidung von anderen, nichtmetallischen Einschlüssen des Kupfers und die durch ihn verursachten technologischen Fehler untersucht und festgestellt. In eisenhaltigen Schlacken kommt neben Cu_2O und CuO auch $CuFeO_2$ vor. Das sekundäre CuO wird im Laufe der Warmverformung zu Cu_2O reduziert, während in phosphorarmen, Sn-haltigen Bronzen das CuO unter Bildung von SnO_2 zu Cu_2O und metallischem Kupfer reduziert wird.

ДАННЫЕ О МЕДНО-ОКИСНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СОРТАХ МЕДИ

З. Хегедюш

Резюме

Исследованы и определены оптические свойства CuO включения, его отличия от других неметаллических включений меди, а также технологические дефекты, вызываемые включением. В содержащих железо шлаках, наряду с Cu_2O и CuO встречается также

$CuFeO_2$. Первичная CuO при обработке восстанавливается до Cu_2O, а в это же время в бронзах, содержащих Sn и бедных P, восстанавливается до CuO, Cu_2O и металлической меди наряду с образованием первичной окиси SnO_2.

DATA ON COPPER OXIDE INCLUSIONS IN INDUSTRIAL COPPER

Z. HEGEDÜS

SUMMARY

Optical behaviour of the CuO inclusion, its distinction from other non-metallic inclusions of copper as well as technological defects caused by the inclusion have been examined. In ferruginous slags $CuFeO_2$ also occurs besides Cu_2O and CuO. During hot working secondary CuO is reduced to Cu_2O, while in brasses low in P, containing Sn, the CuO is reduced to Cu_2O and metallic copper with formation of secondary SnO_2.

DONNÉES SUR LES INCLUSIONS D'OXIDE DE CUIVRE DANS LES CUIVRES INDUSTRIELS

Z. HEGEDÜS

RÉSUMÉ

Les propriétés optiques de l'inclusion CuO, sa distinction des autres inclusions non-métalliques du cuivre, ainsi que les fautes technologiques causées par l'inclusion ont été examinées. Dans les scories ferrugineuses le $CuFeO_2$ apparaît également à côté du Cu_2O et du CuO. Pendant le travail à chaud le CuO secondaire est réduit en Cu_2O, tandis que, dans les bronzes pauvres en P, contenant du Sn, le CuO est réduit en Cu_2O en Cu métallique à côté de la formation de SnO_2 secondaire.

DIE UMRECHNUNG VON DER STEREOGRAPHISCHEN PROJEKTION UND DER KONFORMEN ZYLINDER-PROJEKTION AUF DIE GAUSS-KRÜGERSCHE PROJEKTION

Prof. I. HAZAY

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

LEHRSTUHL FÜR ANGEWANDTE GEODÄSIE, TECHNISCHE UNIVERSITÄT, SOPRON

[Eingegangen am 17. Mai 1954]

Die ungarische Landesvermessung benutzt bei der Darstellung der geodätischen Messergebnisse seit dem Jahre 1857 das Prinzip der konformen Doppelprojektion. Als Originalfläche dient das *Bessel*sche Ellipsoid, hiervon wird mittels der *Gauss*schen konformen Kugelprojektion von minimaler Längenverzerrung auf eine dem Ellipsoid zugeordnete Kugel von mittlerem Krümmungshalbmesser in der geographischen Breite von 46°32′ 43,410 41″ auf die sogenannte ungarische *Gauss*-Kugel (deren Halbmesser $R = 6\,378\,512{,}966$ m ist) übergegangen. Von hier erfolgt die Projektion auf die Ebene, u. zw. war diese bis zum Jahre 1908 die stereographische Projektion, wird aber seither auch auf Grund der Prinzipien der schiefachsigen konformen Zylinderprojektion durchgeführt. In Ungarn umfasst sowohl die stereographische als auch die Zylinderprojektion je drei Projektionssysteme.

Zum erstenmal auf der Welt wurde die Doppelprojektion in Ungarn angewandt, und zwar unter der Bedingung der Konformität. Die Fläche Ungarns ist verhältnismässig klein, so dass sich hier jener Vorteil der Doppelprojektion gut auswirkte, dass die Oberfläche des Ellipsoids auf einer kleineren Fläche und die Oberfläche der dem Ellipsoid zugeordneten Kugel mit einem mittleren Krümmungshalbmesser etwa in der Mitte dieser Fläche nur wenig voneinander abweichen. Auf diese Weise war es bereits bei einem grossen Teil der Messungen höherer Geodäsie möglich, die Ellipsoidoberfläche durch die Kugeloberfläche zu ersetzen. Dementsprechend können die Ergebuisse der erwähnten Messungen sowie die auf die Kugeloberfläche bezogenen Ergebnisse niedrigerer Messungen unmittelbar in das vom Ellipsoid auf die Kugel projizierte System höherer Messungsergebnisse eingeschaltet werden. Die mathematischen Zusammenhänge zwischen Kugel und Ebene sind bedeutend einfacher als die zwischen Ellipsoid und Ebene, daher bedeutete es im allgemeinen eine Arbeitsersparnis, dass die schwerfälligeren ellipsoidischen Zusammenhänge nur bei den höchsten Messungen berechnet werden mussten.

Die Bedeutung dieses Umstandes ist heute, wo man im allgemeinen mit Rechenmaschinen arbeitet, viel geringer und die unmittelbare Projektion vom Ellipsoid auf die Ebene ist besonders bei der *Gauss—Krüger*schen Projektion,

bei deren Berechnung schon einfach zu handhabende Reihen und entsprechende Tabellen zur Verfügung stehen, leicht ausführbar. Es ist bekannt, dass die meisten Kulturstaaten bereits auf die *Gauss—Krüger*sche Projektion übergegangen sind bzw. übergehen und ihnen schliesst sich auf diesem Gebiete auch Ungarn an. Die ungarische Landesvermessung führt diesen Übergang im Zusammenhange mit der im Gange befindlichen Ausweitung des neuen Haupttriangulierungsnetzes aus und wählt gleichzeitig anstelle des *Bessel*schen Ellipsoides eine andere Originalfläche : das *Krasowsky*sche Ellipsoid.

Bei einem Übergang von einem Projektionssystem zu einem anderen erhebt sich offensichtlich das Problem, wie die Koordinaten der im alten Projektionssystem bestimmten geodätischen Fixpunkte auf die möglichst einfache Weise in das neue Projektionssystem umzurechnen sind. Diese Frage muss selbstverständlich sowohl *theoretisch* als auch *praktisch* untersucht werden. Die auf den Prinzipien der Projektionslehre beruhende theoretische Untersuchung geht von der Voraussetzung aus, dass sowohl im alten als auch im neuen Projektionssystem die Punkte *desselben Triangulierungsnetzes* dargestellt werden. Demgemäss *bezieht sich die theoretische Untersuchung auf rein projektionsumrechnungsartige, rechnungstechnische Lösungen.* Bei der praktischen Untersuchung müssen jedoch auch die örtlichen Umstände in Betracht gezogen werden, in Ungarn namentlich der Umstand, dass hier die *Gauss—Krüger*sche Darstellungsweise im Zusammenhange mit der Ausweitung des neuen Haupttriangulierungsnetzes eingeführt wird und dass das neue Netz sowie die hieraus erfolgenden weiteren geodätischen Ergebnisse mit deren Hilfe dargestellt werden sollen. Das neue Haupttriangulierungsnetz wird nun deshalb entwickelt, da das alte nicht mehr den heutigen Genauigkeitsanforderungen entspricht. Das abweichende Basissystem und die abweichende Orientierung des neuen Netzes einerseits und die erhöhte Messgenauigkeit des neuen Netzes im Verhältnis zum alten andererseits haben zur Folge, dass das neue Haupttriangulierungsnetz und die auf Grund dessen erfolgenden weiteren geodätischen Operationen mathematisch mit dem alten Netz nicht im Einklang stehen werden. Einen Zusammenhang zwischen dem alten und dem neuen Netz bildet nur die Tatsache, dass die meisten Punkte im alten und neuen Haupttriangulierungsnetz die gleichen in der Natur gewählten Punkte sind. Unter solchen Umständen kann die einfache Projektionsumrechnung keine präzisen Resultate ergeben. Von einem präzisen, richtigen Verfahren könnte man hier dann sprechen, wenn man auf der I. Projektion, von der man die Umrechnung ausführen will, mit Hilfe von Projektionswinkelreduktionen aus den Winkeln, die durch die die Punkte des Netzes verbindenden Netzseiten eingeschlossen sind, die auf die Originalfläche bezüglichen Winkel berechnet und diese Winkel als Messergebnisse betrachtet. Geht man nun von jenen geodätischen Fixpunkten aus, die die Punkte beider Triangulierungsnetze bilden, so müssen die Koordinaten der umzurechnenden Punkte für das im II. Projektionssystem dargestellte Triangulierungsnetz auf Grund der als

Messergebnisse betrachteten und mit Winkelreduktionen im System der II. Projektion korrigierten Winkelwerte durch Ausgleichung bestimmt werden.

Trotz der angedeuteten praktischen Lösung ist jedoch auch die Untersuchung der theoretischen Lösung der Umrechnung von Interesse, da sowohl beim Entwurf staatlicher Originalkarten im Massstabe von 1 : 5000 als auch bei topographischen Karten kleineren Massstabes annähernd genau und rasch zum Ergebnis führende Umrechnungen notwendig sein werden. *Bei dieser Anwendung ergibt sich nun der so seltene Fall, dass das mathematisch exakte Verfahren approximativ wird.* Das im folgenden geschilderte Verfahren ist nämlich vom Standpunkt der Projektion aus gesehen ein Umrechnungsverfahren, das eine Genauigkeit innerhalb der Grenzen eines Zentimeters gewährleistet; die «*Ungenauigkeit*» (angenäherter Wert) der Ergebnisse in Ungarn rührt bloss davon her, dass die «präzis» umgerechneten Koordinaten der Punkte des alten ungarischen Triangulierungsnetzes nicht in das System des neuen Triangulierungsnetzes hineinpassen. Die hieraus stammende «*Ungenauigkeit*» kann unserer Schätzung nach selbst einige Dezimeter erreichen. Trotz alledem entsprechen jedoch die umgerechneten Koordinaten den Anforderungen des Massstabes von 1 : 5000 bzw. eines noch kleineren Massstabes.

Zwischen zwei Projektionssystemen können die Umrechnungen mit Hilfe verschiedener Methoden vorgenommen werden. Diese Verfahren lassen sich im allgemeinen in drei Gruppen einreihen. Die Umrechnung kann auf Grund der geographischen Koordinaten erfolgen, wenn man aus den auf der einen Projektion gegebenen Ebenenkoordinaten die auf die Originalfläche bezüglichen geographischen Koordinaten mit Hilfe der entsprechenden Gleichungen (Reihen) ausrechnet und danach aus diesen mit Hilfe der auf die andere Projektion bezüglichen Gleichungen (Reihen) die Ebenenkoordinaten auf der anderen Projektion ermittelt. Bei der zweiten Lösung stellt man zwischen den zu den zwei Projektionssystemen gehörenden Ebenenkoordinaten mathematische Reihen auf. Die dritte Methode ist die sogenannte Reduktionsmethode, bei der die Umrechnung bei Heranziehung des in beiden Projektionssystemen bekannten Koordinatenanschlusspunktes und mit Hilfe der Richtungsreduktionen, der Projektionsmeridiankonvergenzen sowie der Faktoren der Längenverzerrung erfolgt.

Dem Anschein nach stellt die Methode der geographischen Koordinaten das einfachste der drei Verfahren dar. In der Praxis ist sie jedoch die langwierigste Methode. Noch langwieriger ist sie dann, wenn die beiden Projektionssysteme, wie in Ungarn, zu verschiedenen Ellipsoiden gehören (wie bereits erwähnt, ist die Originalfläche unserer stereographischen und Zylinderprojektionssysteme eine zum *Bessel*schen Ellipsoid gehörende Kugel mit mittlerem Krümmungsradius, während die Oberfläche unserer *Gauss—Krüger*schen Projektionssysteme das Ellipsoid nach *Krasowsky* ist); in diesem Falle muss nämlich bei jedem einzelnen umzurechnenden Punkt auch die Abweichung von

den zu den zwei Ellipsoiden gehörenden geographischen Koordinaten in Betracht gezogen werden. Obwohl diese Abweichungen durch Interpolation aus jenen Abweichungen bestimmt werden können, die zwischen den den beiden Ellipsoiden zugeordneten geographischen Koordinaten der geodätischen Fixpunkte auftreten, die im alten und neuen Haupttriangulierungsnetz einzeln bestimmt, in der Natur jedoch identisch sind, bedeutet der Umstand, dass die Interpolation für jeden einzelnen Punkt ausgeführt werden muss, viel Arbeit.

Der Nachteil der Umrechnung mit mathematischen Reihen ist, dass auch die höheren Potenzen der Koordinaten in Betracht gezogen werden müssen. Eine Vereinfachung dieses Verfahrens lässt sich dagegen erzielen, wenn man nach einem gewissen System Anschlusspunkte annimmt und für sie die Koeffizienten der Reihen in einer Tabelle zusammenfasst. Die Umrechnung bleibt jedoch auch in diesem Falle noch ziemlich schwerfällig und langwierig.

Schneller als diese beiden Methoden führt die Reduktionsmethode zum Ziele, wenn es gelingt ihr eine Form zu geben, bei der ein Arbeiten mit der Rechenmaschine möglich ist, und wenn die Anschlusspunkte gleichfalls entsprechend und systematisch gewählt werden.

Die erste hier vorgeführte solche Methode diente zur Umrechnung zwischen den benachbarten *Gauss—Krüger*schen Streifen. Eine frühere Nummer der «Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae» [1] enthält eine eingehende Beschreibung dieser Methode in deutscher Sprache. Die Methode wurde dann zur Umrechnung der schmäleren *Gauss—Krüger*schen Streifen (z. B. von 2°- oder 3°-igen) auf breitere (z. B. 6°- oder 10°-ige) Streifen weiterentwickelt [2], dann wurde sie mit entsprechenden Modifikationen bei den Umrechnungen zwischen benachbarten konformen Zylinderprojektionssystemen angewandt, bei denen die verzerrungsfreie Linie (der Berührungskreis des Zylinders und der Kugel) der auf denselben Meridian senkrechte grösste Kugelkreis ist [3].

Die Prinzipien dieser Methode können zweckmässig bei der Umrechnung sowohl der stereographischen Projektion als auch der schiefachsigen konformen Zylinderprojektion auf die *Gauss—Krüger*sche Projektion angewandt werden, wobei man auch noch den Umstand in Betracht ziehen kann, dass das als Originalfläche gewählte Ellipsoid eventuell — so wie in Ungarn — bei der *Gauss—Krüger*schen Projektion anders ist als jenes Ellipsoid, zu dem die als Originalfläche gewählte Kugel mittleren Krümmungshalbmessers bei der stereographischen bzw. Zylinderprojektion gehört.

Es sei hier davon abgesehen, sämtliche Grundableitungen der Umrechnungsmethode zu wiederholen. Diesbezüglich sei hier auf die obenerwähnten Abhandlungen verwiesen, in erster Linie auf Abhandlung [1]. Nichtsdestoweniger dürfte es angezeigt sein, die Prinzipien der Umrechnung auch hier kurz zu erwähnen.

Der umzurechnende Punkt (er sei hier mit P, der Punkt auf dem I. Projektionssystem mit P_1, der auf dem II. Projektionssystem mit P_2 bezeichnet)

wird im I. Projektionssystem mit einem Anschlusspunkt P_0 verbunden. Auf Grund der Koordinaten der beiden Punkte kann die Entfernung $P_0P_1 = d_1$, der Richtungswinkel (δ_1) der Richtung P_0—P_1, die zur Linie P_0—P_1 beim Punkt P_0 gehörende zweite Richtungsreduktion (Δ_1) und der Faktor der Längenverzerrung der Entfernung P_0P_1 (m_1) bzw. dessen reziproker Wert berechnet werden. Aus diesen Daten und in Kenntnis der Projektionsmeridiankonvergenz des I. Systems des Anschlusspunktes (μ_{01}) kann auf der Originalfläche des I. Projektionssystems das Azimut (α) der Richtung P_0P und die Entfernung (s) von P_0P berechnet werden :

$$\begin{aligned} \alpha &= \delta_1 - \Delta_1 + \mu_{01} \\ s &= \frac{1}{m_1} d_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Es wird einstweilen vorausgesetzt, dass die Originalfläche des II. Projektionssystems dieselbe Form hat wie die des I. Projektionssystems ; wenn man nun beim II. Projektionssystem die angenäherten Koordinaten des Punktes P und mit deren Hilfe die zweite Richtungsreduktion Δ_2 sowie den auf das II. Projektionssystem bezüglichen Längenverzerrungsfaktor m_2 ausrechnet, wenn man weiterhin die auf dieses System bezügliche Projektionsmeridiankonvergenz (μ_{02}) des Anschlusspunktes kennt, dann lässt sich der Richtungswinkel (δ_2) der Richtung P_0—P_2 und die Entfernung (d_2) von P_0P_2 aus den Formeln

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \alpha + \Delta_2 - \mu_{02} \\ d_2 &= m_2 s \end{aligned} \tag{2}$$

berechnen. Fasst man die Formeln (1) und (2) zusammen, so erhält man :

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \delta_1 - \Delta_1 + \Delta_2 + \mu_{01} - \mu_{02} \\ d_2 &= \frac{m_2}{m_1} d_1 = m\, d_1 \end{aligned} \tag{3}$$

wobei der Quotient des Faktors der Längenverzerrung beider Systeme mit m bezeichnet wurde.

Aus den Koordinaten des Anschlusspunktes im II. System sowie mit den auf Grund der Formel (3) berechneten Werten können nunmehr die Koordinaten des Punktes P im II. System berechnet werden.

Bei aufmerksamer Betrachtung der Formeln (3) lässt sich die Umrechnung in drei Phasen zerlegen :

1. im II. System weicht die Richtung P_0—P um einen der Differenz der Projektionsmeridiankonvergenzen des Anschlusspunktes entsprechenden Winkel (μ_{01}—μ_{02}) im Vergleich zu ihrer Lage im I. System ab ;

2. im II. System verändert sich die Entfernung P_0P gegenüber der entsprechenden Entfernung des I. Systems im Verhältnis der Faktoren der Längenverzerrung, d. h. je nach dem Wert von m;

3. im II. System dreht sich die Richtung P_0—P noch weiter um einen Winkel $(\Delta_2—\Delta_1)$, welcher der Differenz der Richtungsreduktionen entspricht.

Hinsichtlich der näheren Untersuchung dieser drei Phasen sei auf die allgemeinen Ergebnisse der Abhandlung [1] Bezug genommen und hier bloss erwähnt, dass die erste Phase, die einer einfachen Koordinatentransformation in einer Ebene entspricht, die angenäherten Koordinatendifferenzen des II. Systems liefert, die im folgenden mit (Δy) und (Δx) bezeichnet werden sollen.

In den vorliegenden Untersuchungen ist das I. Projektionssystem die stereographische oder schiefachsige konforme Zylinderprojektion, das II. Projektionssystem hingegen die *Gauss—Krüger*sche Projektion. Bei der stereographischen bzw. Zylinderprojektion seien die Koordinaten des umzurechnenden Punktes mit η und ξ, die des Anschlusspunktes mit η_0 und ξ_0, bei der *Gauss—Krüger*schen Projektion hingegen mit y und x bzw. mit y_0 und x_0 bezeichnet.

Laut der Ergebnisse der Abhandlung [1] ist die praktische Umrechnung in folgenden sieben Schritten auszuführen:

1. $\Delta\eta = \eta - \eta_0$ $\qquad$ $\Delta\xi = \xi - \xi_0$
2. $(\Delta y) = p\Delta\eta + q\Delta\xi$ $\qquad$ $(\Delta x) = -q\Delta\eta + p\Delta\xi$
3. Berechnung des Wertes m
4. $\Delta y' = m\,(\Delta y)$ $\qquad$ $\Delta x' = m\,(\Delta x)$
5. Berechnung des Wertes $d\delta = (\Delta_2 - \Delta_1)$
6. $\Delta y'' = \Delta x'\,d\delta$ $\qquad$ $\Delta x'' = -\Delta y'\,d\delta$
7. $y = y_0 + \Delta y' + \Delta y''$ $\qquad$ $x = x_0 + \Delta x' + \Delta x''$

wo

$$p = \cos\,(\mu_{01} - \mu_{02}) \qquad q = \sin\,(\mu_{01} - \mu_{02}).$$

Der Umstand, dass die Originalfläche der stereographischen Projektion bzw. der Zylinderprojektion eine dem Ellipsoid zugeordnete Kugel mit mittlerem Krümmungshalbmesser ist, während die Originalfläche der *Gauss—Krüger*schen Projektion das Ellipsoid selber ist, muss beim Wert m in Betracht gezogen werden, während der Umstand, dass die erwähnte Kugel mit mittlerem Krümmungshalbmesser zu einem anderen Ellipsoid gehört als die *Gauss—Krüger*sche Projektion, in den Werten m und $d\delta$ zum Ausdruck kommen wird.

*

Es sei zuerst der Fall behandelt, wo *das I. System die konforme Zylinderprojektion ist* und vorläufig die Ellipsoidveränderung ausser acht gelassen, bzw. angenommen wird, dass die Originalfläche der Zylinderprojektion die Kugel

mit mittlerem Krümmungsradius desselben Ellipsoides ist, zu dem die *Gauss—Krüger*sche Projektion gehört. Als Anschlusspunkte sollen auf dem ganzen Gebiete alle Punkte dienen, die auf den Meridianen des Ellipsoides mit rundem Gradwert bei genau jeder zehnten Minute der geographischen Breite liegen. Es wird stets jener Anschlusspunkt benutzt, der sich am nächsten zum umzurechnenden Punkte befindet.

Bei der *Gauss—Krüger*schen Projektion ist der Faktor der Längenverzerrung [4, 5, 6]:

$$m_2 = 1 + ey_k^2 + f\Delta y^2 + gy_k^4 \tag{4}$$

Bei der konformen Zylinderprojektion hingegen lautet der reziproke Wert des Faktors der Längenverzerrung [6]:

$$\frac{1}{m_1} = 1 - e\xi_k^2 - f\Delta\xi^2 + 5\ g\xi_k^4 \tag{5}$$

wo

$$e = \frac{1}{2R_k^2} \qquad f = \frac{1}{24\,R_k^2} \qquad g = \frac{1}{24\,R_k^4}$$

$$y_k = \frac{y + yo}{2} \qquad \Delta y = y - y_0$$

$$\xi_k = \frac{\xi + \xi_0}{2} \qquad \Delta\xi = \xi - \xi_0$$

des weiteren noch:

$$\Delta x = x - x_0 \qquad \Delta\eta = \eta - \eta_0.$$

Der mit R_k bezeichnete Wert ist bei der *Gauss—Krüger*schen Projektion bei dem mit den Koordinaten y_k und x_k charakterisierten Punkte der mittlere Krümmungsradius des Ellipsoids, während er bei der Zylinderprojektion dem Halbmesser der als Originalfläche der Projektion dienenden Kugel gleich ist.

Bei der obenerwähnten Annahme der Anschlusspunkte ist $\Delta\eta$ und Δy maximal 40 000 m, $\Delta\xi$ und Δx maximal 10 000 m, der höchste Wert von y, wenn man die Breite der *Gauss—Krüger*schen Streifen höchstens mit 3° annimmt, 120 000 m, wogegen bei den geodätischen Zwecken dienenden Zylinderprojektionssystemen ξ höchstens 100 000 m beträgt. Somit macht also, wenn das letzte Glied der Gleichungen (4) und (5) weggelassen wird, selbst die grösste Vernachlässigung bloss anderthalb Millimeter aus.

Die Koeffizienten e und f in der Gleichung (5) sind innerhalb des ganzen Zylinderprojektionsstreifens konstant, da sie Funktionen der Kugel mit mittlerem Krümmungsradius sind, welche die Originalfläche des Systems bildet. Die

Koeffizienten in der Gleichung (4) sind hingegen veränderlich, da sich der mittlere Krümmungshalbmesser beim Ellipsoid je nach der geographischen Breite ändert. Nimmt man anstelle der veränderlichen Werte innerhalb des auf dem Zylinderprojektionsstreifen dargestellten Gebietes Mittelwerte an und benutzt man dieselben Werte auch bei Gleichung (5), so liegt die Vernachlässigung bloss auch im äussersten Falle in der Grössenordnung von einigen Millimetern. Wenn man daher Mittelwerte für e und f annimmt, ferner den Unterschied zwischen der Kugelentfernung und der entsprechenden elliptischen Entfernung einstweilen nicht berücksichtigt und gleichzeitig die Glieder vierter Ordnung weglässt (dies bedeutet im äussersten Fall eine Vernachlässigung von 1 mm), dann erhält man für den Quotienten der Faktoren der Längenverzerrung den Ausdruck

$$m = \frac{m_2}{m_1} = (1 + e y_k^2 + f \Delta y^2)\ (1 - e \xi_k^2 - f \Delta \xi^2) =$$
$$= 1 + e\,(y_k^2 - \xi_k^2) + f(\Delta y^2 - \Delta \xi^2). \tag{6}$$

Es seien nun die Koordinaten beider Systeme des Anschlusspunktes eingeführt:

$$m = 1 + e\left(y_0 + \frac{\Delta y}{2} + \xi_0 + \frac{\Delta \xi}{2}\right)\left(y_0 + \frac{\Delta y}{2} - \xi_0 - \frac{\Delta \xi}{2}\right) +$$
$$+ f(\Delta y + \Delta \xi)\,(\Delta y - \Delta \xi). \tag{7}$$

Nach Ordnen der Gleichung gelangt man zum Zusammenhang

$$m = 4 \cdot 10^{-15}\,(\Delta y + \Delta \xi)\,(\Delta y - \Delta \xi) + A\,\Delta y + B\,\Delta \xi + C \tag{8}$$

wo

$$A = e\,y_0 \qquad B = -e\xi_0 \qquad C = 1 + e(y_0^2 - \xi_0^2). \tag{9}$$

Der Multiplikator des ersten Gliedes der Gleichung (8) stammt daher, dass angenähert gilt:

$$\frac{e}{4} + f \sim 4 \cdot 10^{-15}. \tag{10}$$

Zwischen der als Originalfläche der konformen Zylinderprojektion dienenden Kugel und dem Ellipsoid stellt in Ungarn — wie bereits erwähnt — die *Gauss*sche konforme Kugelprojektion mit minimaler Längenverzerrung die Verbindung dar. In Ungarn beträgt die grösste Abweichung des Linearmoduls von der Einheit bloss etwa 1/4 000 000. Dementsprechend ist auch bei der durch die Werte $\Delta\eta_{\max} = 40\,000$ m und $\Delta\xi_{\max} = 10\,000$ m bestimmten grössten Entfernung $d_{\max} \sim 41\,400$ m die Differenz zwischen der Kugel- und elliptischen Entfernung im äussersten Falle bloss 10 mm.

Diese geringe Differenz darf wohl unter den erwähnten Umständen in Ungarn vernachlässigt werden. Wollte man sie aber dennoch in Betracht ziehen, so ist der Koeffizient A, B und C des unter (8) ausgedrückten Wertes m noch mit dem auf den Anschlusspunkt bezüglichen Linearmodul der *Gauss*schen konformen Kugelprojektion zu dividieren. Es ist überflüssig, die Division auch mit dem ersten Glied der Formel für m auszuführen.

Die Formel der Richtungsreduktion auf der *Gauss—Krüger*schen Projektion [4, 5, 6] lautet wie folgt:

$$\Delta_2 = -a y_k \Delta x + b \Delta x \Delta y + \ldots \tag{11}$$

Die Richtungsreduktion der Zylinderprojektion [6] ist:

$$\Delta_1 = +a \xi_k \Delta\eta - b \Delta\xi \Delta\eta - \ldots \tag{12}$$

wobei

$$a = \frac{\varrho''}{2R_k^2} \quad \text{und} \quad b = \frac{\varrho''}{12R_k^2}$$

ist.

Die weiteren Glieder der Formel der Richtungsreduktion können weggelassen werden und bei den Werten a und b kann auch — ebenso wie bei den Werten e und f — ein mittlerer Wert benutzt werden (äusserste Vernachlässigung 1 mm). Der Unterschied der Richtungsreduktion beträgt demnach:

$$d\delta = \Delta_2 - \Delta_1 = -a(y_k \Delta x + \xi_k \Delta\eta) + b(\Delta x \Delta y + \Delta\xi \Delta\eta) =$$

$$= -a\left[\left(y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x + \left(\xi_0 + \frac{\Delta\xi}{2}\right)\Delta\eta\right] +$$

$$+ b(\Delta x \Delta y + \Delta\xi \Delta\eta). \tag{13}$$

Wenn mann die Gleichung jetzt ordnet und in Betracht zieht, dass

$$\frac{1}{\varrho''}\left(b - \frac{a}{2}\right) \sim -4 \cdot 10^{-15} \tag{14}$$

dann ist die Differenz der Richtungsreduktionen:

$$d\delta = -[A\Delta x + B\Delta\eta + 4 \cdot 10^{-15}(\Delta y \Delta x + \Delta\xi \Delta\eta)]. \tag{15}$$

In dieser Gleichung wurde berücksichtigt, dass

$$\frac{a}{\varrho''} = e \tag{16}$$

Der grösste Wert des letzten Gliedes der Gleichung (15) kann 0,000 004 sein. Die dementsprechende lineare Abweichung bei der Entfernung $d_{\max} \sim$ 41 400 m ist 17 cm. Gegebenenfalls kann daher bei angenäherten Berechnungen von diesem Gliede abgesehen werden.

Die Abweichung zwischen dem Azimut der Kugel und dem des Ellipsoids ist so gering, dass man sie jedenfalls vernachlässigen darf.

Bei der Berechnung des Wertes m in der Gleichung (8) können anstelle des Wertes Δy der im 2. Schritt der Umrechnung bestimmte vorherige Wert (Δy), bei Berechnung von $d\delta$ in der Gleichung (15) anstelle der Werte Δy und Δx die im 4. Schritt der Umrechnung bestimmten Werte $\Delta y'$, bzw. $\Delta x'$ benutzt werden. Bei der Berechnung von m und $d\delta$ sind die erwähnten Koordinatendifferenzen in auf Meter ab- oder aufgerundeten Werten in Betracht zu ziehen. Zu den Umrechnungen ist eine Tabelle zusammenzustellen, in der die Werte η_0, ξ_0, p, q, A, B, C, y_0 und x_0 für jeden einzelnen Anschlusspunkt in gesonderten Reihen angegeben werden müssen. Die Werte A, B und C der Tabelle sollen bereits den Übergang zwischen Kugel und Ellipsoid enthalten.

*

Es sei jetzt der Fall betrachtet, wo *das I. System die stereographische Projektion ist*, wobei auch hier die Ellipsoidveränderung einstweilen ausser acht gelassen werden soll. Die Anschlusspunkte sind genau so anzunehmen wie im vorherigen Falle.

Bei einer stereographischen Projektion ist der reziproke Wert des Faktors der Längenverzerrung für die zwei Punkte verbindende Entfernung [7, 6] :

$$\frac{1}{m} = 1 - h\,(\xi_2^2 + \xi_1\,\xi_2 + \xi_1^2 + \eta_2^2 + \eta_1\,\eta_2 + \eta_1^2) \tag{17}$$

wobei

$$h = \frac{1}{12\,R^2}\,. \tag{18}$$

Bezeichnet man die Koordinaten des Anschlusspunktes auf der stereographischen Projektion mit η_0 und ξ_0, so werden die Bezeichnungen der Gleichung (17) für das den Anschlusspunkt mit dem umzurechnenden Punkt verbindende gerade Stück folgendermassen lauten :

$$\xi_1 = \xi_0 \qquad \xi_2 = \xi_0 + \Delta\xi \qquad \eta_1 = \eta_0 \qquad \eta_2 = \eta_0 + \Delta\eta \tag{19}$$

und somit wird

$$\frac{1}{m_1} = 1 - h\,(3\xi_0^2 + 3\xi_0\,\Delta\xi + \Delta\xi^2 + 3\eta_0^2 + 3\eta_0\Delta\eta + \Delta\eta^2). \tag{20}$$

Es seien nun die Ausdrücke (4) und (20) miteinander multipliziert, wobei jedoch in Betracht gezogen werden soll, dass bei der *Gauss—Krüger*schen Projektion $y_k = y_0 + \frac{\Delta y}{2}$ ist und dass das letzte Glied von (4) vernachlässigt werden darf. Beim so erhaltenen Produkt werden dann die Glieder vierter Ordnung weggelassen. Bei der stereographischen Projektion tritt der zulässige Maximalwert von 1/10 000 der Längenverzerrung bereits in einer Entfernung von 127 km vom Anfangspunkt in Erscheinung, bei der stereographischen Projektion kann demnach als höchster Wert von ξ_0 und η_0 im allgemeinen 130 000 m angenommen werden. Das Maximum der weiteren Entfernungswerte im Produkt stimmt mit der nach der Gleichung (5) angeführten entsprechenden Daten überein. Diese Vernachlässigung liegt somit selbst im äussersten Falle bloss in einer Grössenordnung von einigen Millimetern. Es ist zwar zu erwähnen, dass in Ungarn im Budapester System der stereographischen Projektion der höchste Wert von $\xi_0 = 200\,000$ m und der höchste Wert von $\eta_0 = 300\,000$ m beträgt, doch selbst bei diesen Extremwerten bedeutet die betreffende Vernachlässigung bloss 10 Millimeter. Das Produkt lautet, wenn die Glieder vierter Ordnung weggelassen werden:

$$m = \frac{m_2}{m_1} = A + B\Delta y + C\Delta y^2 + D\Delta\xi + E\Delta\eta + F\Delta\eta^2 + F\Delta\xi^2 \qquad (21)$$

wo

$$A = 1 + e\,y_0^2 - 3h\,(\xi_0^2 + \eta_0^2)$$

$$B = e\,y_0 \qquad C = \frac{e}{4} + f = 4 \cdot 10^{-15} \qquad (22)$$

$$D = -3h\xi_0 \qquad E = -3h\eta_0 \qquad F = -h.$$

Für das Verhältnis zwischen Kugel- und elliptischer Entfernung gilt dasselbe, was bereits in bezug auf Gleichung (8) festgestellt wurde. Bei der Aufstellung der Tabelle können auch die Koeffizienten *A—F* des Ausdruckes (21) mit dem auf den Anschlusspunkt bezüglichen Linearmodul der *Gauss*schen konformen Kugelprojektion dividiert werden.

Die Richtungsreduktion bei der stereographischen Projektion lautet in analytischer Masseinheit [7, 6] für eine Richtung, die zwei Punkte verbindet:

$$\Delta = k\,(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) \qquad (23)$$

wo

$$k = \frac{1}{4R^2}. \qquad (24)$$

Wenn man nun die Zusammenhänge (19) einführt, dann wird die Richtungsreduktion für die Richtung $P_0 - P_1$:

$$\Delta_1 = k[\xi_0(\eta_0 + \Delta\eta) - (\xi_0 + \Delta\xi)\eta_0] \tag{25}$$

Der Unterschied der Richtungsreduktionen aus den Gleichungen (11) und (25) ist:

$$d\delta = \Delta_2 - \Delta_1 = (G - 4 \cdot 10^{-15}\Delta y)\Delta x + H\Delta\eta + K\Delta\xi \tag{26}$$

wo

$$G = -\frac{a}{\varrho''}y_0 = -B \qquad H = -k\xi_0 \qquad K = k\eta_0. \tag{27}$$

Das letzte Glied der Gleichung (21) kann im allgemeinen, das zweite Glied aus der Klammer der Formel (26) bei angenäherten Berechnungen weggelassen werden, da der grösste Effekt des ersteren bei der ungarischen stereographischen Projektion insgesamt nur 1 cm und der des letzteren nur 10 cm beträgt.

Die entsprechenden Daten des Anschlusspunktes sind auch hier in eine Tabelle zusammenzufassen. Die in die Tabelle aufzunehmenden Werte A, B, C, D, E und F sollen schon den Übergang zwischen Kugel und Ellipsoid enthalten. Bei der Berechnung des Wertes m wird in der Gleichung (21) anstelle des Wertes Δy der im 2. Schritt der Umrechnung bestimmte vorhergehende Wert (Δy), bei Berechnung von $d\delta$ in der Gleichung (26) anstelle der Werte Δy und Δx die im 4. Schritt der Umrechnung bestimmten Werte $\Delta y'$ bzw. $\Delta x'$ angewandt. Zur Berechnung von m und $d\delta$ müssen die erwähnten Koordinatenunterschiede in Metern auf- oder abgerundet in Betracht gezogen werden.

*

Wenn der positive Arm der x-Achse des Zylinderprojektionssystems bzw. des stereographischen Projektionssystems in die entgegengesetzte Richtung zeigt als der positive Arm der x-Achse des *Gauss—Krüger*schen Projektionssystems (dies ist in Ungarn der Fall, wo der positive Arm der x-Achse der stereographischen und Zylinderprojektionssysteme nach Süden, der der *Gauss—Krüger*schen Systeme hingegen nach Norden weist), dann ist

$$p = \cos(\mu_{01} - \mu_{02} + 180°) \qquad q = \sin(\mu_{01} - \mu_{02} + 180°). \tag{28}$$

Wenn die Originalfläche der Zylinderprojektion bzw. der stereographischen Projektion eine einem anderen Ellipsoid zugeordnete Kugel mit mittlerem Radius ist als jenem Ellipsoid, zu dem das *Gauss—Krüger*sche System gehört, dann tritt noch eine geringe Veränderung der im obigen abgeleiteten Ergebnisse ein. Die eine Veränderung stammt daher, dass sich dasselbe Triangulierungsnetz, wenn man es von einem Ellipsoid auf das andere überträgt, im allgemeinen

verdreht, d. h. dass sich die Azimute der Netzseiten und dementsprechend auch ihre Richtungswinkel verändern. Der Gleichung (28) gegenüber gilt daher:

$$p = \cos(\mu_{01} - \mu_{02} + \varepsilon + 180^\circ) \qquad q = \sin(\mu_{01} - \mu_{02} + \varepsilon + 180^\circ) \quad (29)$$

bzw. wenn im I. und II. System der positive Arm der x-Achse in die gleiche Richtung weist:

$$p = \cos(\mu_{01} - \mu_{02} + \varepsilon) \qquad q = \sin(\mu_{01} - \mu_{02} + \varepsilon), \quad (30)$$

wo ε der Wert des Winkels der erwähnten Verdrehung beim Anschlusspunkt ist. Die zweite Veränderung ergibt sich daraus, dass die Entfernung zweier einander entsprechender Punkte auf dem einen Ellipsoid anders ist als auf dem anderen. Dies kann so berücksichtigt werden, dass die Koeffizienten der Gleichungen (8) bzw. (21) bei der Zusammenstellung der Tabelle noch mit dem Quotienten der beim Anschlusspunkt den zwei Ellipsoiden zugeordneten mittleren Krümmungshalbmessern multipliziert werden.

Im Falle zweier verschiedener Ellipsoide nimmt man die Anschlusspunkte auf den Meridianen mit rundem Gradwert des einen Ellipsoides an, u. zw. zweckmässig auf denen des als Originalfläche der *Gauss—Krüger*schen Projektion gewählten Ellipsoides. Selbstverständlich muss für jeden einzelnen Anschlusspunkt die Abweichung zwischen den zu den zwei Ellipsoiden gehörenden geographischen Koordinaten festgestellt werden. Sowohl dies als auch der Wert des Drehungswinkels ε lässt sich durch Interpolation zwischen den im alten und neuen Triangulierungsnetz einzeln bestimmten, in der Natur jedoch identischen Punkten berechnen. Die Interpolation braucht jedoch bloss für die verhältnismässig geringe Anzahl der Anschlusspunkte ausgeführt zu werden und nicht für jeden auszurechnenden Punkt; sie wird übrigens auch durch die regelmässige Anordnung der Anschlusspunkte vereinfacht, wobei diese Regelmässigkeit in der Anordnung auch als Kontrolle der auf die Anschlusspunkte bezüglichen tabellarischen Daten dient.

*

Als Beispiel seien schliesslich die auf einer schiefachsigen konformen Zylinderprojektion bestimmten Koordinaten eines geodätischen Fixpunktes auf jenen *Gauss—Krüger*schen Projektionsstreifen umgerechnet, der der Stelle des Punktes entspricht. Die Originalfläche der Zylinderprojektion ist eine dem *Bessel*schen Ellipsoid zugeordnete Kugel mit mittlerem Krümmungsradius, während die Originalfläche der *Gauss—Krüger*schen Projektion das *Krasowsky*sche Ellipsoid ist.

Die Koordinaten der Zylinderprojektion des umzurechnenden Punktes lauten:

$\eta = -206\,305{,}750$ m $\qquad \xi = -75\,104{,}160$ m.

In der Tabelle finden sich für den am nächsten zum Anschlusspunkt gelegenen Punkt die folgenden Daten:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= -\ 218\,212{,}989 & \xi_0 &= -\ 78\,288{,}029 \\ p &= -\ 0{,}999\,703\,345 & q &= -\ 0{,}024\,356\,151 \\ A &= +\ 920\,062 \cdot 10^{-15} & B &= +\ 962\,113 \cdot 10^{-15} \\ & C = +\ 0{,}999\,993\,560 & & \\ y_0 &= +\ 74\,866{,}275 & x_0 &= 5\,300\,473{,}726 \end{aligned}$$

(Die Berechnung von p und q geschah mit Gleichung (29) auf Grund der Daten $\mu_{01} = +\ 2^\circ\ 08'\ 10{,}7398''$, $\mu_{02} = +\ 0^\circ\ 44'\ 28{,}4261''$ und $\varepsilon = +2{,}0000''$. Die Werte von A, B, und C enthalten bereits den Effekt des Überganges von der Kugel auf das *Bessel*sche Ellipsoid und von diesem auf das *Krasowsky*sche Ellipsoid.)

Die Umrechnung erfolgt in den zu ihrer praktischen Ausführung mitgeteilten sieben Schritten.

1. *Schritt* (Berechnung der Koordinatenunterschiede auf der Zylinderprojektion):

$$\Delta\eta = +\ 11\,907{,}239 \qquad \Delta\xi = +\ 3\,183{,}869$$

2. *Schritt* (nach erfolgter Transformation Berechnung der vorhergehenden Koordinatenunterschiede auf dem *Gauss—Krüger*schen Projektionsstreifen):

$$(\Delta y) = -\ 11\,981{,}253 \qquad (\Delta x) = -\ 2\,892{,}910$$

3. *Schritt* (Berechnung des Wertes m):

$$\begin{aligned} 4 \cdot 10^{-15}[(\Delta y) + \Delta\xi]\,[(\Delta y) - \Delta\xi] &= +\ 0{,}000\,000\,534 \\ A(\Delta y) &= -\ 0{,}000\,011\,023 \\ B(\Delta x) &= +\ 0{,}000\,003\,063 \\ C &= +\ 0{,}999\,993\,560 \\ \hline m &= 0{,}999\,986\,134 \end{aligned}$$

4. *Schritt* (Berücksichtigung des Wertes m):

$$\Delta y' = -\ 11\,981{,}087 \qquad \Delta x' = -\ 2\,892{,}870$$

5. *Schritt* (Berechnung des Wertes $d\delta$):

$$\begin{aligned} A\Delta x' &= -\ 0{,}000\,002\,662 \\ B\Delta\eta &= +\ 0{,}000\,011\,456 \\ 4 \cdot 10^{-15}(\Delta y'\,\Delta x' + \Delta\eta\,\Delta\xi) &= +\ 0{,}000\,000\,290 \\ \hline d\delta &= -\ 0{,}000\,009\,084 \end{aligned}$$

6. *Schritt* (Berücksichtigung des Wertes $d\delta$):

$$\Delta y'' = +\ 0{,}026 \qquad \Delta x'' = -\ 0{,}109$$

7. *Schritt* (Berechnung der *Gauss—Krüger*schen Koordinaten):

$$\begin{aligned} y_0 &= +\ 74\,866{,}275 & x_0 &= 5\,300\,473{,}726 \\ \Delta y' &= -\ 11\,981{,}087 & \Delta x' &= -\ 2\,892{,}870 \\ \Delta y'' &= +\ 0{,}026 & \Delta x'' &= -\ 0{,}109 \\ \hline y &= +\ 62\,885{,}214\ \text{m} & x &= 5\,297\,580{,}747\ \text{m} \end{aligned}$$

Die Umrechnung von der stereographischen Projektion auf die *Gauss—Krüger*sche Projektion geschieht auf ähnliche Weise, selbstverständlich unter Benutzung der diesbezüglichen Tabelle und der entsprechenden Formeln zu Berechnung von m und $d\delta$.

SCHRIFTTUM

1. *I. Hazay:* Zur Umrechnung der Gauss-Krügerschen Koordinaten von einem Projektionsstreifen in den benachbarten. Acta Technica Hung. I. 2, 1951.

2. *I. Hazay:* Die Transformation Gauss-Krügerscher Koordinaten zwecks Darstellung in kleinem Massstabsverhältniss. Acta Technica Hung. IV. 1—4, 1952.

3. *I.Hazay:* Mathematische Grundlage zur einheitlichen Tabelle verschieden angeordneter winkeltreuer Zylinderprojektionen. Acta Technica Hung. VIII. 3—4, 1954.

4. *Wl. K. Hristow:* Die Gauss-Krügerschen Koordinaten auf dem Ellipsoid. Leipzig, 1943.

5. *I. Hazay—A. Tárczy-Hornoch:* A Gauss—Krüger koordináták számítása (Die Berechnung der Gauss-Krügerschen Koordinaten. Nur ungar.). Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951. SS 47 und 49.

6. *I. Hazay:* Földi vetületek (Die Netzentwürfe der Erde. Nur ungar.). Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954, SS 339, 350, 392, 394.

7. *Jordan—Eggert:* Handbuch der Vermessungskunde, III. Band. I. Halbband, 9. Auflage, Stuttgart, 1948, SS. 421 und 422.

ZUSAMMENFASSUNG

In Ungarn wurde bis jetzt bei den geodätischen Arbeiten die stereographische Projektion und die schiefachsige konforme Zylinderprojektion verwendet, auf die vom *Bessel*schen Ellipsoid mit der konformen Doppelprojektion übergegangen wurde. Im Zusammenhange mit der Entwicklung des neuen Haupttriangulierungsnetzes geht man jetzt auf die *Gauss—Krüger*sche Darstellungsweise über, wobei als Originalfläche das Ellipsoid nach *Krasowsky* gewählt wurde. Es stellt sich nun das Problem, auf welche Weise die Umrechnung vom alten Projektionssystem auf das neue am einfachsten und schnellsten ausgeführt werden kann. Die unter [1] angeführte Arbeit enthält die Prinzipien, die in den Abhandlungen [2] und [3] weiterentwickelt wurden; diese werden jetzt zur Umrechnung von der stereographischen Projektion bzw. von der konformen Zylinderprojektion auf die *Gauss—Krüger*sche Projektion ausgedehnt. Hierbei wurde auch der Umstand in Betracht gezogen, dass die Originalfläche unserer stereographischen und Zylinderprojektionssysteme eine einem anderen Ellipsoid zugeordnete Kugel mit mittlerem Krümmungshalbmesser ist, also jenes Ellipsoid, das die Originalfläche unserer auf der *Gauss—Krüger*schen Projektion beruhenden Systeme bildet.

ПЕРЕСЧЕТ СО СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ И С КОНФОРМНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ НА ПРОЕКЦИЮ ГАУССА—КРЮГЕРА

Д-р техн. наук И. Хазаи

Резюме

До настоящего времени в Венгрии в геодезии применялись стереографическая проекция и криволинейная конформная цилиндрическая проекция, переход на которые с эллипсоида Бесселя осуществлялся при помощи двойной конформной проекции. Сейчас одновременно с развитием новой государственной триангуляционной сети осуществляется переход на систему отображения по Гауссу—Крюгеру, и в качестве базисной поверхности берется эллипсоид Красовского. Возникает вопрос, каким образом можно проще и быстрее всего осуществить пересчет со старых систем проекций, применявшихся в Венгрии, на новую систему проекций. Принципы, — излагавшиеся в работе, обозначенной цифрой [1] в списке литературы, и развитые в работах [2] и [3], — сейчас распространены на пересчеты со стереографической проекции и с конформной цилиндрической проекции на проекцию Гаусса—Крюгера. Принято во внимание и то обстоятельство, что базисная поверхность систем со стереографической проекцией, а также цилиндрической проекцией является шаром со средним радиусом, относящимся к эллипсоиду, отличному от эллипсоида шара, представляющего собою базисную поверхность систем проекций Гаусса—Крюгера.

CONVERSION OF STEREOGRAPHIC AND CONFORMAL CYLINDRIC PROJECTIONS TO THE GAUSS—KRÜGER SYSTEM

Prof. I. HAZAY

D. of Eng. Sc.

SUMMARY

Hungarian geodetic work has hitherto applied the stereographic and the conformal cylindric projection with oblique axis, by conversion to these systems through conformal double projection from the Bessel ellipsoid. Along with the development of the new first-order triangulation network the Gauss—Krüger projection method has been adopted and the Krasowsky ellipsoid chosen for surface of reference. The problem arises how conversion from the old projection systems to the new one could be simplified and made more expeditious. Principles exposed under [1] of References, developed in papers [2] and [3], are extended in this paper to conversions from stereographic and conformal cylindric projections to the Gauss—Krüger system as well. It has been considered also that the surface of reference of our stereographic and cylindrical projection systems is a sphere of medium radius corresponding to an ellipsoid different from that forming the surface of reference of our Gauss—Krüger projection system.

CONVERSION DES PROJECTIONS STÉRÉOGRAPHIQUE ET CYLINDRIQUE-ORTHOMORPHIQUE À LA PROJECTION DE GAUSS—KRÜGER

I. HAZAY

D^{eur} des Sc. Techn.

RÉSUMÉ

Les travaux géodésiques de la Hongrie ont appliqué jusqu'à maintenant la projection stéréographique et de la projection cylindrique-orthomorphique à axe oblique auxquelles on avait passé partant de l'ellipsoïde de Bessel par double projection orthomorphique. En développant le réseau de triangulation de premier ordre, on a adopté le système de projection de Gauss—Krüger et choisi l'ellipsoïde de Krasowsky comme surface de référence. Il se pose le problème comment la conversion des anciens systèmes des projection au nouveau système peut être effectuée de la manière la plus simple et la plus rapide. Les principes exposés sous [1], développés plus avant dans les études [2] et [3], sont étendus ici aux conversions des projections stéréographiques resp. cylindriques-orthomorphiquesà la projection de Gauss—Krüger. On a également tenu compte du fait que la surface de référence de nos systèmes de projection stéréographique et cylindrique-orthomorphique est une sphère au rayon moyen appartenant à un ellipsoïde différent de celui qui sert de surface de référence à notre système de projection Gauss—Krüger.

DYNAMICS OF GIRDERS

TREATED BY THE METHOD OF ELASTIC POINTS

A. SCHWERTNER

CANDIDATE OF ENG. SC

[Manuscript presented June 28, 1954]

1. Introductory

The structural designer, who not unfreqeuntly meets problems correlated with the dynamics of girders, usually solves these by empirical and roughly approximating calculations, in great contrast to the refined analysis with which he treats even minor statical problems. This different emphasis laid on problems of statics and dynamics is due to his educational background; neither college nor postgraduate training of civil engineers deals adequately with the dynamics of girders, and if literature on this subject ever reaches the practical designer, it remains incomprehensible to him.

Mechanics has long furnished the necessary basis for girder dynamics, and the mechanical engineer, whose problems are more closely related with dynamics, has successfully solved some problems. On the other hand, the introduction of dynamics into structural engineering practice has been retarded by the lack of simple formulations of solution methods, close to the sphere of thought of the civil engineer. Dynamics will become a handy tool of the structural designer, when built up on theorems and relationships of kinematics applied by him in statics as well, and thus made familiar to him. This paper aims at developing a skeleton of such interpretation of dynamics, or rather at the examination of the possibilities of such development.

The basis of treatment is the «Elastic Point Method of Frame Analysis». This method too, is not sufficiently familiar to civil engineers, but its basic principle, the analysis of girders fixed at both ends, with the aid of point σ, is commonplace. The following treatise is mostly based on this principle. In this method, point σ is the prototype of elastic points, and it is therefore hoped that this treatise of the dynamics of girders will be understood without a thorough knowledge of the method of elastic points. Coupling elastic points in parallel and in series, one of the essentials of this method, may perhaps cause no difficulties in dynamics, because mechanics and the theory of vibrations conventionally investigate springs connected in this manner. Knowledge of basic principles of mechanics and of the theory of vibrations is of course presupposed, and these principles will not be further developed and verified.

2. The prime girder

The concept of the prime girder will also be introduced in dynamics. This is a cantilever girder fixed in at one end *(Fig. 1)* and subject to dynamic effect only on end B. Point B is weightless and is coupled by a rigid bar to point σ, which is the centre of gravity of elastic forces ds/EJ, ds is an elemental section, and EJ is the flexural stiffness of that section of the girder. Through this linkage any movement and vibration of point B is closely linked to movements and vibrations of point σ. Movements of one of the points ensue without any other influence directly from motion of the other point, and any impulse, like a force, affecting point B, may be regarded as acting at point σ.

A known feature of point σ is that forces acting along its principal axes can move their point of attack only along their own line of action and cannot

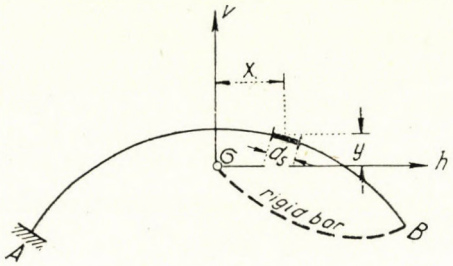


Fig. 1

produce any rotational effect at this point. On the other hand, moments acting on point σ produce there but rotation and no translatory effect. The relation between movements Δh, Δv, and $\Delta\varphi$ of point σ produced by force components H and V acting in the direction of main axis h and v respectively, as well as by moment M:

$$\begin{matrix} cm & t & cm/t \\ \Delta h = H \cdot J_h & \Delta v = V \cdot J_v & \Delta\varphi = M, \end{matrix} \tag{1}$$

where

$$J_h = \int_A^B y^2 \cdot \frac{ds}{E \cdot J} \quad J_v = \int_A^B x^2 \cdot \frac{ds}{E \cdot J} \frac{cm^3}{tcm^2} \quad \varphi = \int_A^B \frac{ds}{E \cdot J}. \tag{2}$$

Movements of point σ are consequences of elastic deformation of girder A—B, but formulae under (1) establish relations between loads and specific

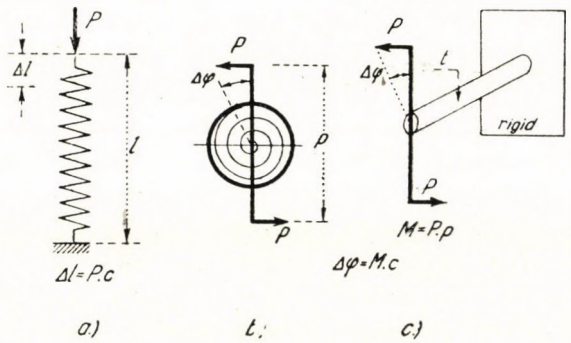


Fig. 2

deformations of simple springs *(Fig. 2)*. The relation between force and the movement produced by it is demonstrated by the linear spring in *Fig. 2a*, and

the moment and the rotation caused by it is visualized by the relationship between the load on the spiral spring in *Fig. 2b* and the deformation of the latter evidenced by angular rotation. Bar t under torsional stress in *Fig. 2c* is also such simple spring (torsion spring). J_h, J_v and φ are the spring constants. In mechanics and in the theory of vibrations their reciprocal values are conventional, that is, the relation

$$P = c \cdot e$$

between load P on a spring and its characteristic deformation e is used, but this treatise departs from this and uses formulae under (1) current in engineering statics. It is correct to state that if only movements of point σ are

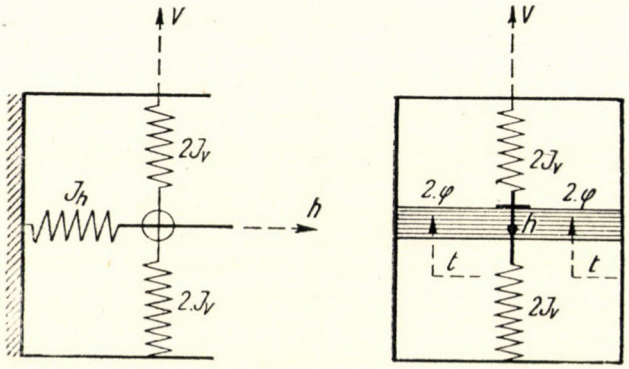


Fig. 3

sought for, the girder may be substituted by springs built into a case according to *Fig. 3*. The conception of such a spring case will be very helpful in the following treatise, even if everything cannot be imagined in connection with it. This remark refers to masses connected with vibrations to be dealt with, which cannot be placed regularly into the spring case, because another mass belongs to each spring.

If small motions are only in question, force H acting in the direction of main axis h stresses only the spring effective in this direction, and similarly force V affects only springs in the direction of principal axis v. The moment acts only on two small bars t under torsional load. These are joined to the walls of the spring case in a manner allowing them to move both in direction h and in direction v and offer resistance to rotation only. Such a system is conceivable without difficulty. Parts of the spring case drawn in solid lines are perfectly rigid.

In the analysis of motions of point σ under static load attacking at point B or σ the girder may be replaced by the spring case. This replaceability subsists also if a vibratory motion takes place for which the weightless girder, or the

case of point σ provides the spring system. The case is different if movements produced by some external effect are analyzed, for instance, by displacement of point in direction h through a distance h. The beam that also possesses mass, starting from such position, enters into harmonic vibration, if the internal resistance of the material is disregarded, that is, if an ideally elastic girder is supposed. The case of a weightless spring is different, therein no kinetic energy can be stored up for lack of mass, and the spring cannot pass into vibration either. However, the spring case can replace the girder in vibration too, if proper masses are joined to the ends of the individual springs. The magnitude of such mass will be sought.

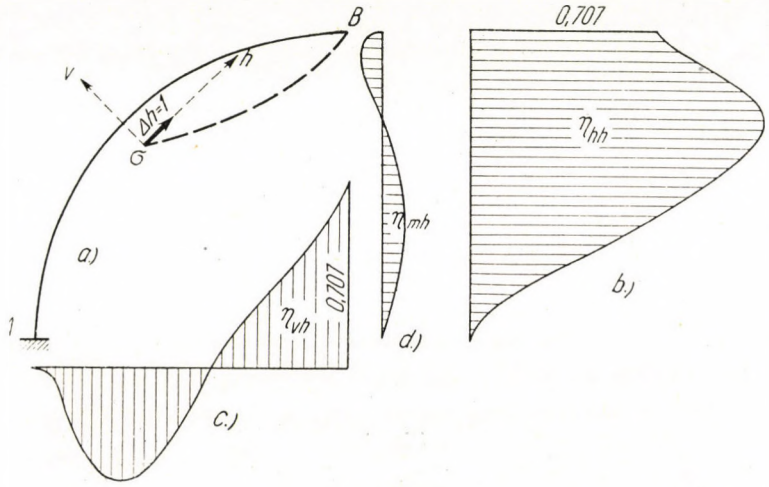


Fig. 4

To answer the question, the «free» vibration will be investigated, which point σ, rigidly fixed to the beam, but under no other restraint, has to perform, if displaced from its position in direction h through distance $\Delta h_o = a$, and the translatory force is made to cease at this place *(Fig. 4)*.

According to pertinent principles of the theory of vibrations, but also because of the special position of point σ in a statical sense, it is doubtless that this point performs the vibratory motion

$$\Delta h = a \,.\, \cos \omega t \tag{3}$$

on axis h, where

$$\omega = 2\,\pi \,.\, f \tag{4}$$

is the angular velocity, and

$$f = \frac{1}{T} \tag{5}$$

the frequency, or number of oscillations per unit time. Here T is the period or time spent on one vibration.

Vibration is produced by potential energy accumulated in the form of internal stresses during displacement Δh_o. The magnitude of this energy is equal to the work performed during displacement, that is,

$$A_o = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{J_h}. \tag{6}$$

In case of undamped oscillations (such has been supposed above) work is not lost, but is present in different vibration phases, in different amounts of potential and kinetic energy.

Proportional to the movement of point σ are the horizontal, vertical and rotational components of motion of arbitrary point K of the girder *(Fig. 4)*, measured by ordinates of the corresponding influence lines *(Fig. 4b, 4c,* and *4d,)* η_{vh} η_{hh}, and η_{mh}. Displacements of point K from its original position in directions v and h, and its rotation at the start of vibration, that is, at the position when point σ is displaced by distance a measured on the h axis

$$a_{vK} = \eta_{vh} \cdot a \quad a_{hK} = \eta_{hh} \cdot a \quad a_{\varphi K} = \eta_{mh} \cdot a, \tag{7}$$

where η_{vh}, η_{hh}, and η_{mh} are horizontal and vertical displacements, or translations of point K for $a = 1$ cm.

If there is no phase shift between vibrations of individual points of the girder, resulting from internal resistances in the course of vibration, the motion of point K will have three components

$$\begin{aligned} v_K &= \eta_{vh} \cdot a \cdot \cos \omega t \\ h_K &= \eta_{hh} \cdot a \cdot \cos \omega t \\ \varphi_K &= \eta_{mh} \cdot a \cdot \cos \omega t. \end{aligned} \tag{8}$$

Point K, in contrast to point σ, possesses mass too. This quantity, variable along the girder, has the value of $m_K \cdot ds$ at point K. During motion kinetic energy is accumulated in this mass. However, this mass will acquire velocity only in the directions of the two components of translatory motion ; the mass of point behaviour, placed in the centre of rotation, gains no velocity from rotation.

If velocity as first derivative of distance with respect to time is denoted with symbols

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}_K &= \frac{dv_K}{dt} = -\eta_{vh} \cdot a \cdot \omega \cdot \sin \omega t \\ \dot{h}_K &= \frac{dh_K}{dt} = -\eta_{hh} \cdot a \cdot \omega \cdot \sin \omega t, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

then, in general, in a certain phase of the vibration, at point K the magnitude of kinetic energy

$$dE_K = \frac{m_K}{2} (\dot{v}^2_K + \dot{h}^2_K) \cdot ds . \tag{10}$$

Point K has no potential energy and possesses only kinetic energy when, in the course of vibration, it arrives at its original, pre-oscillatory position, that is, if

$$\omega \cdot t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2} \cdot \pi, \frac{5}{2},$$

when

$$\dot{v}_K = - \eta_{vh} \cdot a \cdot \omega \quad \dot{h}_K = - \eta_{hh} \cdot a \cdot \omega \cdot \tag{11}$$

In this position the kinetic energy of any point K of the girder has to be identical with the potential energy under (6), or

$$A_o = \int_A^B dE_K = \frac{a^2 \cdot \omega^2}{2} \cdot \int_A^B (\eta^2_{vh} \cdot m_K + \eta^2_{hh} \cdot m_K) \, ds . \tag{12}$$

This integral assumes a simple form if multiplied and divided by value g of the acceleration of gravity. In this case

$$\int_A^B (\eta^2_{vh} \cdot m_K + \eta^2_{hh} \cdot m_K) \, ds = \frac{1}{g} \cdot \int_A^B (\eta^2_{vh} + \eta^2_{hh}) \, dG = S_h \tag{13}$$

where dG is the weight of a girder element of ds length. In the statical sense the integral is $1/g$ times the effort (mass of a weight) calculable from the loading of the girder with the aid of an influence line the ordinates of which have the values of

$$\eta = \eta^2_{vh} + \eta^2_{hh} . \tag{14}$$

Finally as a result

$$A_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{J_h} = \frac{a^2 \cdot \omega^2}{2} \cdot S_h \tag{15}$$

and, starting from this formula, the still missing characteristics of vibration generated by displacement $\Delta h_0 = a$ of point σ

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{J_h \cdot S_h}} \tag{16}$$

and the number of revolutions made in unit time :

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{J_h \cdot S_h}}. \tag{17}$$

Finally the question of what mass is to be assigned to the spring of direction h and constant J_h placed into the case of point φ to tune its oscillation to that of the girder, may be answered. It is known from the theory of spring oscillation that during oscillation of a spring of mass m_{rh}, the relation between angular velocity and spring constant

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m_{rh} \cdot J_h}}.$$

From result under (16) follows

$$m_{rh} = S_h. \tag{18}$$

Structural engineering practice generally calculates with sections of finite value Δs and with larger or smaller concentrated loads. In this case the integral of equation under (13) degenerates to summation and

$$m_{rh} = S_h = \frac{1}{g} \cdot \sum_{A}^{B} (\eta^2_{vh} + \eta^2_{hh}) \cdot G. \tag{19}$$

It needs no explanation that the spring of point σ, of axial direction v may replace the girder in case of vibration too, if it possesses a mass the value of which is *(Fig. 5)*

$$m_{rv} = S_v = \frac{1}{g} \cdot \sum_{A}^{B} (\eta^2_{vv} + \eta^2_{hv}) \cdot G. \tag{20}$$

The vibration of the girder will still be examined in the case when angular rotation $\Delta\varphi_0 = \alpha$ produced at point σ induces vibration. The moment necessary for producing angular vibration

$$M = \frac{\alpha}{\varphi}$$

and the work to be performed to produce motion

$$A_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\varphi} \cdot a = \frac{a^2}{2\varphi}.$$

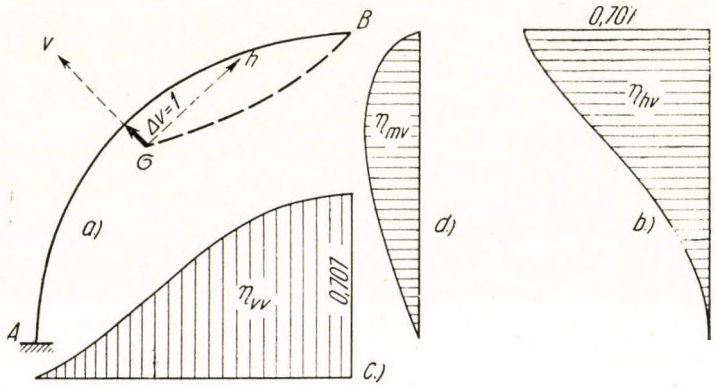


Fig. 5

Motion components of point K are then *(Fig. 6)*

$$a_{vK} = \eta_{vm} \cdot \alpha \qquad a_{hK} = \eta_{mh} \cdot \alpha \qquad a_{\varphi K} = \eta_{mm} \cdot \alpha.$$

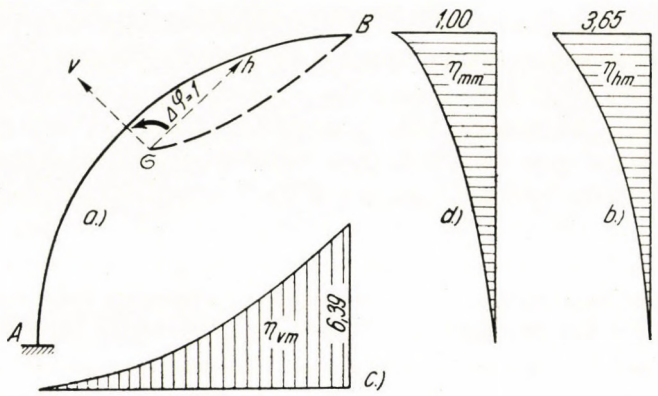


Fig. 6.

Further calculations pursued like in the case of displacement $\Delta h_0 = a$ give beyond doubt the result that the vibration is perfectly described by the vibration of the spiral or torsion spring of point σ if the mass of the spring

$$m_{rm} = S_m = \frac{1}{g} \cdot \sum_{A}^{B} (\eta^2_{vm} + \eta^2_{hm}) \cdot G. \tag{21}$$

However, this formula is incorrect in its dimensions. While in case of forces, the ordinates of influence lines are undefined numbers, ordinates η_{vm} and η_{hm} are dimensional quantities, the dimension being unit length. This is the case of rotary motion, where the mass is known to be replaced by its moment of inertia. And indeed, m_{vm} is the moment of inertia of a mass, if η_{vm} and η_{hm} are lengths. For the sake of uniform notation symbol m_{vm}, or the concept of mass with an incorrect dimension will be retained, for this introduces no error in this case, but, conversely, helps to generalize formulae.

Vibration of the simple cantilever beam has thus been reduced to the very simple and illustrative vibrations of springs of the spring case of point σ. Vibrations of girders of more intricate buildup can hereafter also be calculated simply, if the girder can be subdivided into several prime girders coupled to each other. With the prime girder demonstrated this requirement cannot be complied with in all cases. Other prime girders are obtained if the ends of the girders are not fixed, but are hinged or supported by roller carriages. In such case the prime girder is of special type in so far as point σ coincides with the hinge, or the hinge of the roller carriage. The determination of principal axes and of spring constants, as well as the statical solution of the prime girder is treated by the method of elastic points for the calculation of frames. This treatise will disregard these special cases of the general one, its aim being the explanation of basic principles.

3. Dynamic effects

The prime girder can be affected by dynamic impulses in several ways, but in each case it will be supposed that such effect takes place only at free end B of the girder. The dynamic effect may be due to the sudden attack or removal of the load, to its surge from O to Q, or to its decrease from Q to O in an infinitesimal time, to the rythmic variation of load, in which case the magnitude and the direction of the load may be a function of time, it may be caused also by dropping a weight from a certain height on the girder. In all cases of dynamic effect only the movements of simple springs of adequate mass located in spring case of point σ are in question, since these movements univocally determine stresses as well as motions of the girder. The most important problem to be solved is the distribution of the effect on point B on to the three springs of the spring case of point B; this known, the problem reduces to the determination of forces and movements of simple springs generated by dynamic effects, a simple task of vibration mechanics.

No doubt, the load of static character has to be transferred from point B to point σ, according to laws of statics. The two points being rigidly coupled, it is quite indifferent at which point of the rigid bar the force attacks. In case of the girder of *Fig. 7* the components of force Q attacking at point B transferred to point σ are

$$H = Q \cdot \cos \alpha \qquad V = Q \cdot \sin \alpha \qquad M = Q \cdot p\,. \qquad (22)$$

These forces suddenly load the springs of point σ, if load Q attacks abruptly, or vanish therefrom in an infinitely short time, at the same rate as force Q does, that is, such forces attack the springs at the same rate at which load Q varies.

From the theory of vibrations of simple springs it is known that the stress produced by sudden relieving of the spring is not greater than that generated by sudden removal of a static load. On the other hand, sudden loading produces

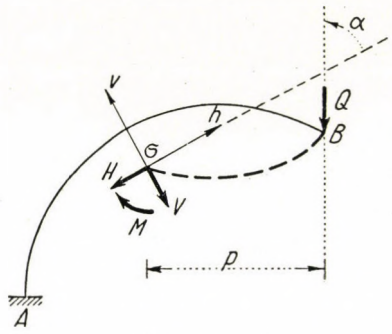


Fig. 7

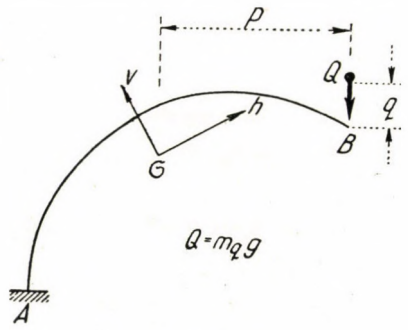


Fig. 8

stress on the spring double of that generated by a gradually applied static load. From this follows that if the load is applied suddenly to the prime girder, the stress in it will also be double of that produced by static loading. An essential difference between sudden removal and sudden application of the load is that, when the load is removed, the springs of point σ only possess masses calculable by formulae (19), (20) and (21), whereas at sudden loading the mass obtained from the quoted formulae for the load at point B has also to be considered. This mass, however, affects only vibration subsequent to loading.

It is similarly known from the vibration theory of simple springs, that the stress on a spring increases infinitely, if the fluctuation of force Q is in phase with the natural frequency of the spring, of value f under (17). From this may be inferred relative to the girder, that the dangerous state of resonance subsists

already, if the fluctuation of force Q coincides with the fundamental frequency of one of the springs of point σ. By the way it has to be pointed out that a girder does not unconditionally fail in case of resonance, for the pertinent calculations hold only for oscillations of small amplitude, and after the development of certain larger movements the structure would be put out of tune, even in the case of disregard of untuning by internal resistances of the girder.

The case when the girder is stressed by load Q dropped from height q, calls for special examination *(Fig. 8)*. At the start of loading, therefore, load Q

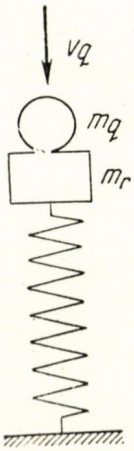


Fig. 9

possesses kinetic energy as well, and its work at the instant of its impact on the girder

$$A_0 = Q \cdot q = \frac{m_q \cdot \dot{v}^2}{2}. \tag{23}$$

A special case of impact will be examined first on the simple spring. The case is that of the solution of the problem of *Fig. 9*. The spring possesses mass m_r. Mass m_q drops on it and has velocity $\dot{v}_q$ at the instant of the impact. The problem is to determine the motion of the spring under the impact.

At the instant before the impact mass m_q possesses kinetic energy

$$E_q = \frac{m_q \cdot \dot{v}^2{}_q}{2}.$$

Work cannot be lost, therefore the aggregate kinetic energy of both masses, of the magnitude of

$$E = \frac{m_q + m_r}{2} \cdot \dot{v}^2$$

must be equal to that previously calculated, from which follows that the square of the common velocity of the two masses

$$\dot{v}^2 = \frac{m_q}{m_q + m_r} \cdot \dot{v}^2{}_q \,. \tag{24}$$

Vibratory motion of the combined masses starts at initial velocity $\dot{v}$. At the instant of impact the mass has only kinetic energy, because the balanced spring may be considered as unloaded. Therefore, the work exciting vibration

$$A_{or} = \frac{1}{2} \cdot (m_q + m_v) \cdot \dot{v}^2 = \frac{1}{2} m_q \cdot \dot{v}^2{}_q \,. \tag{25}$$

Further analysis is derived from the theory of spring vibrations. If the spring constant is c, the amplitude of the induced harmonic motion, the value of which is independent of mass m_r put in motion at the impact:

$$a = \sqrt{2 \cdot A_{or} \cdot c} \tag{26}$$

and the angular velocity of oscillation:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{(m_q + m_r)\, c}} \tag{27}$$

which is already a function of the above mentioned mass too. In the course of vibration the maximum force developed by the spring

$$P = \frac{a}{c} = \sqrt{\frac{2 \cdot A_{or}}{c}} \,. \tag{28}$$

This load will be of zero value, if $\dot{v}_q = 0$, and therewith $A_{or} = 0$, that is, the formula does not include the limit case, when the load is applied on the spring without drop, and the static load has to be considered separately. Force Q applied without dynamic effect produces the motion

$$a_1 = c \cdot Q$$

on the spring, and this movement yet complements the value a to the actual value of $a_2 = a_1 + a$. Moreover, the dynamic factor, or the numerical ratio between the dynamic effect and the effort of the static load Q is the ratio of the changes of length a_2 and a_1 of the spring. With value $Q = m_q \cdot g$ substituted

$$\mu = \frac{a_2}{a_1} = 1 + \sqrt{\frac{2 A_{or} \cdot c}{Q^2 \cdot c^2}} = 1 + \frac{\dot{v}_q}{g} \cdot \sqrt{\frac{1}{m_q \cdot c}} \,. \tag{29}$$

The same result is obtained if value P under (28) is increased by force q and the thus complemented force is divided by Q.

Now the original problem of impact in context with the prime girder can be formulated in the following way. At point σ of the rigid body with end points σ and B there is a spring case the three springs of which possess constants J_h, J_v and φ, and masses m_{rh}, m_{rv}, and m_r calculated from the dead weight of the girder. Mass m_q drops on point B from height q. The problem is how momentum $m_q \cdot \dot{v}$ is distributed on the three springs of point σ, because the solution of this problem involves the solution of the motion problem of point σ therewith the determination of the stress conditions of the girder.

At the impact masses m_{qh}, m_{qv}, and m_q collide with masses m_{rh}, m_{rv}, and m_r of the springs of point σ, and at the instant of the impact the velocity of the former is $\dot{v}_{qh}$, $\dot{v}_{qv}$, and $\dot{v}_q$. The masses, already possessing velocity, are derived, as known, from mass m_q of the load Q dropped by formula

$$m_{qn} = (\eta^2_{vn} + \eta^2_{hn})\, m_q = \varrho_n \cdot m_q \ . \tag{30}$$

However, in connection with the spiral or torsion spring of point σ this formula is incorrect, as it has already been pointed out in context with formula (21). Notwithstanding notation m_q will be retained here too, and the following will not cause any more difficulty, if attention is paid to the formula

$$A = \frac{m_{q\varphi} \cdot \omega^2}{2} = m_{q\varphi} \cdot \frac{\dot{v}^2}{2p^2} .$$

by which the work in connection with mass m_q has to be calculated hereafter, since the angular velocity computed from velocity $\dot{v}$ active at distance p from the spring, $\omega = \dot{v}/p$.

At the impact the sum of work available for stressing the springs must equal the work gained by dropping load Q (formula 23), therefore

$$\frac{\varrho_h \cdot m_q \dot{v}^2_{qh}}{2} - \frac{\varrho_v \cdot m_q \dot{v}^2_{qv}}{2} + \frac{\varrho_\varphi m_q \dot{v}^2_q}{2p^2} = \frac{m_q \cdot \dot{v}^2}{2} , \tag{31}$$

and after simplification

$$\varrho_h \cdot \dot{v}^2_{qh} + \varrho_v \cdot \dot{v}^2_{qv} + \frac{\varrho_\varphi}{p^2} \cdot \dot{v}^2_{q\varphi} = \dot{v}^2 . \tag{32}$$

This condition can be fulfilled by innumerable ways. A further postulate is, however, that the dynamic increment should be distributed to the springs in the same proportions as the static load. With other words, the elastic point and therewith the girder can have only one dynamic factor.

If the last stipulation is not satisfied for the time being, and dynamic factors are computed for each of the three springs of point σ separately by form-

mula (28), and springs are calculated for supposed loads P_h, P_v, and M due to dynamic effect, and for components of static load under (22), the following results are obtained:

$$\mu_h = \frac{Q \cdot \cos\alpha + P_h}{Q \cdot \cos\alpha} = 1 + \frac{1}{Q \cdot \cos\alpha} \cdot \sqrt{\frac{m_{qh} \cdot \dot{v}_{qh}^2}{J_h}} = 1 + \frac{\sqrt{m_q}}{Q} \sqrt{\frac{\varrho_h \cdot \dot{v}_{qh}^2}{J_h \cdot \cos^2\alpha}}$$

$$\mu_v = \frac{Q \cdot \sin\alpha + P_v}{Q \cdot \sin\alpha} = 1 + \frac{1}{Q \cdot \sin\alpha} \cdot \sqrt{\frac{m_{qv} \cdot \dot{v}_{qh}^2}{J_v}} = 1 + \frac{\sqrt{m_q}}{Q} \sqrt{\frac{\varrho_v \cdot \dot{v}_{qv}^2}{J_v \,.\, \sin^2\alpha}}$$

$$\mu_\varphi = \frac{Q \cdot p + M}{Q \cdot p} = 1 + \frac{1}{Q \cdot p} \cdot \sqrt{\frac{m_{q\varphi}\, \dot{v}_{q\varphi}^2}{p^2 \cdot \varphi}} = 1 + \frac{\sqrt{m_q}}{Q} \sqrt{\frac{\varrho_\varphi \,.\, \dot{v}_{q\varphi}^2}{p^4 \,.\, \varphi}}\,.$$

The stipulation that $\mu_h = \mu_v = \mu_\varphi$, yields an equation including two postulates:

$$\frac{\varrho_h \,.\, \dot{v}_{qh}^2}{J_h \cdot \cos^2\alpha} = \frac{\varrho_v \,.\, \dot{v}_{qv}^2}{J_v \cdot \sin^2\alpha} = \frac{\varrho_\varphi \,.\, \dot{v}_{q\varphi}^2}{p^2 \cdot \varphi}\,. \tag{34}$$

The two equations are joined by that under (32), and the determination of velocities $\dot{v}_{qn}$ is already a univocal problem. With factor

$$\boxed{J_B = J_h \cdot \cos^2\alpha + J_v \cdot \sin^2\alpha + \varphi \cdot p^2} \tag{35}$$

results

$$\varrho_h \cdot \dot{v}_{qh}^2 = \dot{v}^2 \frac{J_h \cdot \cos^2\alpha}{J_B} \quad \varrho_v \cdot \dot{v}_{qv}^2 = \dot{v}^2 \frac{J_v \cdot \cos^2\alpha}{J_B} \quad \frac{\varrho_\varphi \cdot \dot{v}_q^2}{p^2} = \dot{v}^2 \frac{\varphi \cdot p^2}{J_B}\,. \tag{36}$$

On the other hand, with consideration of the value of $Q = m_q \cdot g$, the dynamic factor is obtained uniformly for all springs

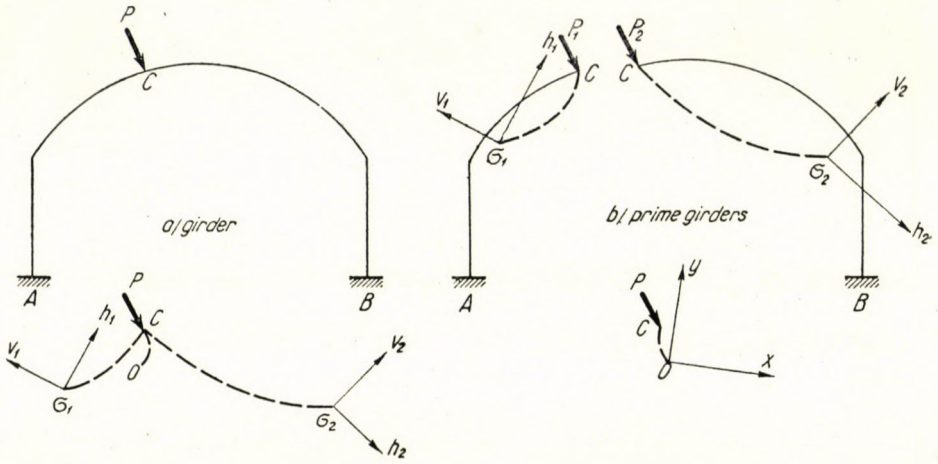
$$\boxed{\mu = 1 + \frac{\dot{v}}{g} \cdot \sqrt{\frac{1}{m_q \cdot J_B}},} \tag{37}$$

where q is the height of drop.

4. Coupled frames

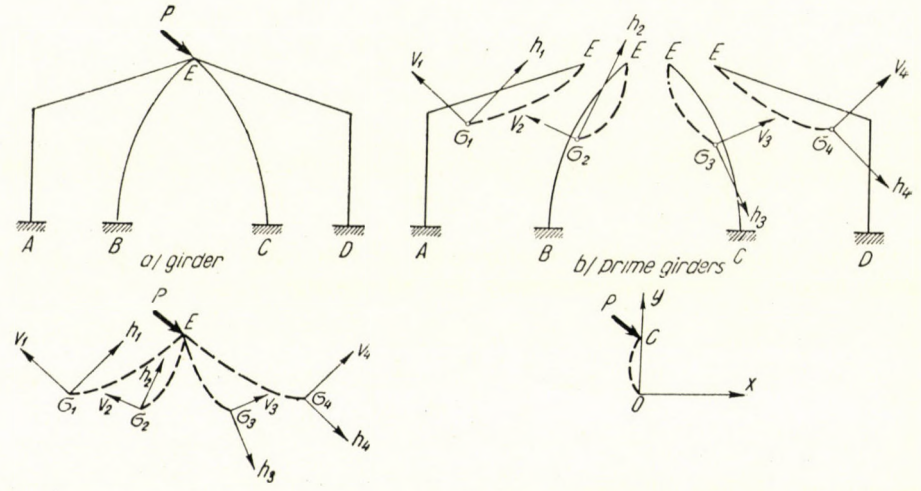
Under coupled frame is understood in the following a structure with all supports fixed, loaded by only one force with dynamic effect, for the time being also of a type which is dissectible into prime girders dealt with in the previous

chapter, by cutting it along an infinitely small circle at the point of the dynamic effect. Such are the frames in *Fig 10a* and *11a*. The frame *Fig. 10*a is built



c/ first replacement by elastic point system d/ elastic point replacing girder

Fig. 10



c/ first replacement by elastic point system d/ elastic point replacing girder

Fig. 11

up of prime girders 1. and 2. drawn separately too in *Fig. 10b*, and the frame of *Fig. 11a* is composed of four prime girders *(Fig. 11b)*, i. e. is the result of coupling four prime girders.

The solution of the problem of the frame in *Fig. 10a* with static load can be obtained by the σ point method, but in case of dynamic loading this frame has also to be built up of two prime girders. Each of the prime girders has one point σ_n. Symbols for principal directions at point σ_n are h_n and v_n. The last presented formulae hold for the case in which the positive direction v_n is obtained by counter-clockwise rotation of the positive direction h_n by angle $\pi/2$. At each σ_n point there is a spring case. Symbols of spring constants are J_{hn}, J_{vn} and φ_n. Each σ point is rigidly coupled to the node, under which is understood the junction of the prime girders. Such are point C in *Fig. 10a* and point E in *Fig. 11a*. Since the movements of the springs of point σ perfectly determine the play of forces of the prime girders, if the cantilevers, called prime girders — this condition being satisfied for all of them — are attacked by forces only on their free ends, the prime girders may be replaced for analysis by the elastic systems in *Fig. 10c*, and *11c*, both in case of static and of dynamic loading.

These elastic systems consist of rigid bars, drawn in dotted lines in the figures, rendered elastic by the springs of point σ. The problem to be solved is the distribution of load P on to the springs of point σ_n, or in case of dynamic effect, the mode of motion perfcrmed by these springs. The problem is identical both for static and for dynamic loading, and it is essentially answered by the elastic point method of frame analysis. The rather lengthy derivations are not repeated here,* and only their results are briefly explained. The crux of the problem is that the motion of the rigid bar system is perfectly depicted by that of one of its points, or by the motion of any other point rigidly connected with the system, and by so-called parallel coupling of points σ_n, a single elastic O point is obtained, which, with the proper springs mounted on it, is fit to be investigated as a sole elastic point. Therefore this point is also rigidly connected to the nodal point.

Consequently if the above conditions are fulfilled, the springs of point σ_n can be replaced by three springs of point O. Calculation has to deal therefore only with one elastic point, i. e. on elements of *Fig. 10d* and *11d* the same problems can be and must be solved as already treated in context with point σ and the force attacking at point B. The locus of point O and the spring constants are obtained by the following calculations according to rules of the elastic point method.

a) The angle of principal directions of point O measured from an arbitrary direction x is given by formula

$$\operatorname{tg} 2\Delta\alpha = \frac{\Sigma D_n \cdot \sin 2\alpha'_n}{\Sigma D_n \cdot \cos 2\alpha'_n}. \tag{38}$$

* See Chapt. 71. of the book: Statics of Reinforced Concrete Structures (Hungarian) By Dr. Schwertner.

Here

$$D_m = \frac{1}{J_{hn}} - \frac{1}{J_{vn}}$$

are values computed from spring constants of points σ_n, connected in parallel, and angle α_n' is subtended by main direction h_n and direction x' *(Fig. 12)*.

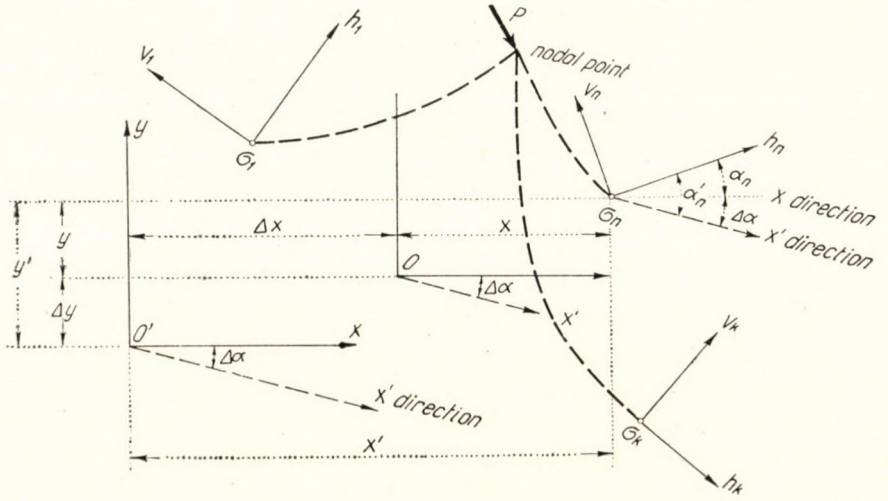


Fig. 12

b) In the system of coordinates x, y taken at an arbitrary point $0'$ and defined by main directions determined according to *a)*, the locus of point O is determined by the following coordinates :

$$\Delta x = \frac{\sum x_n' \cdot \left(\frac{\sin^2 \alpha_n}{J_{hn}} + \frac{\cos^2 \alpha_n}{J_{vn}}\right) - \sum y_n', D_n \sin \alpha_n \cdot \cos \alpha_n}{\sum \left(\frac{\sin^2 \alpha_n}{J_{hn}} + \frac{\cos^2 \alpha_n}{J_{vn}}\right)} \tag{39}$$

$$y = \frac{\sum y_n' \cdot \left(\frac{\cos^2 \alpha_n}{J_{hn}} + \frac{\sin^2 \alpha_n}{J_{vn}}\right) - \sum x_n' \cdot D_n \cdot \sin \alpha_n \cdot \cos \alpha_n}{\sum \left(\frac{\cos^2 \alpha_n}{J_{hn}} + \frac{\sin^2 \alpha_n}{J_{vn}}\right)}. \tag{40}$$

In these formulae x'_n and y'_n are coordinates of points σ_n in the system x, y, of point O, and angles α_n are subtended by positive directions x and positive directions x and positive directions h_n, that is,

$$\alpha_n = \alpha_n' - \Delta\alpha.$$

c) The following are such constants of the springs of the case at point O in the case of application of which the force at the node produces the same motion with no regard whether the calculation is made with all springs of point σ or only with those of point O.

$$\varphi_0 = \frac{1}{\Sigma\left(\frac{1}{\varphi_n} + \frac{\eta_n^2}{J_{nh}} + \frac{\xi_n^2}{J_{nv}}\right)} \tag{41}$$

$$J_{x\sigma} = \frac{1}{\Sigma\left(\frac{\cos^2 \alpha_n}{J_{hn}} + \frac{\sin^2 \alpha_n}{J_{vn}}\right)} \tag{42}$$

$$J_{yo} = \frac{1}{\Sigma\left(\frac{\sin^2 \alpha_n}{J_{hn}} + \frac{\cos^2 \alpha_n}{J_{vn}}\right)} . \tag{43}$$

Here under η_n and ξ_n are understood coordinates of point O in the system $h_n\ v_n$ of point σ_n.

d) The elastic point method of frame analysis has not dealt with dynamic loading and therefore gives no indication how from masses m_{nh}, m_{nv} and m_{nm} of the springs of point σ_n the masses m_{ox}, m_{oy}, and m_{om} of the springs of point O are to be calculated so that point O should replace the totality of points σ_n connected in parallel, even in case of dynamic effect. However, the solution of the problem has been simplified by the foregoing, since the question is answered by the same reasoning which furnished the masses of springs of point σ from the mass of the girder. With knowledge of the derivation of formula (13) may be stated that the sought masses of springs of point O of directions x and y are nothing but the sum of products of the squares of movements of point σ_n in directions h_n and v_n, released by movements $\Delta x = 1$ in direction x, and $\Delta y = 1$ in direction y, and of the masses associated with these directions. This is formulated as follows :

$$m_{ox} = \Sigma(\cos^2 \alpha_n \cdot m_{nh} + \sin^2 \alpha_n \cdot m_{nv}) \tag{44}$$

$$m_{oy} = \Sigma(\sin^2 \alpha_n \cdot m_{nh} + \cos^2 \alpha_n \cdot m_{nv}) . \tag{45}$$

Rotation of point O, or a rotary oscillation produced there, affects also spiral springs of points σ. Rotation is identical at all points of the rigid bar system, and with observation of this

$$m_{om} = \Sigma\,(m_{nm} + \eta_n^2 \cdot m_{nh} + \xi_n^2 \cdot m_{nv}) . \tag{46}$$

With this, all data are available already for the dynamic analysis of frames built up in a similar way. A frame of more complicated build-up, under dynamic load P, like that of *Fig. 13a* is simply solvable by the method of elastic points. It is doubtless that the prime girders of this frame under dynamic load, are the two girders drawn in *Fig. 13b*. These girders may also be replaced by an elastic point each, with symbols Ω_I and Ω_{II}, and the further analysis will deal only with the connection in parallel of these two points, as in the case of the frame of *Fig. 10*. Elastic points of symbols Ω_I and Ω_{II} may be obtained by the couplings:

$$O_I \equiv \sigma_1 + \sigma_2 \qquad \Omega_I \equiv O_I - \sigma_5$$
$$O_{II} \equiv \sigma_3 + \sigma_4 \qquad \Omega_{II} \equiv O_{II} - \sigma_6$$

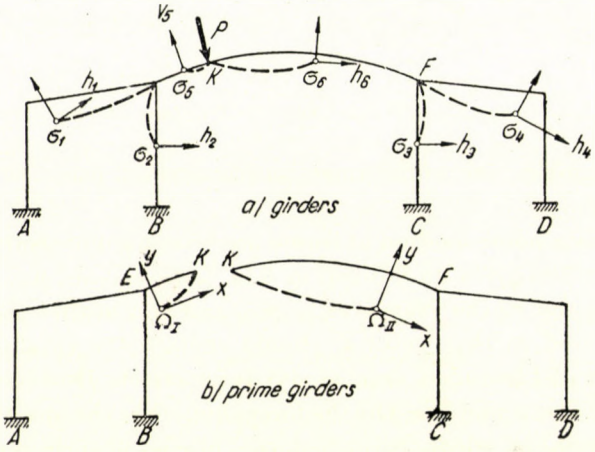


Fig. 13

where in the symbolic manner of writing the positive sign means parallel connection, the negative sign coupling in series. The latter will not be treated in this paper because it would lead to no new results, and the aim here is the demonstration of general principles. The following numerical examples enlighten the application of these principles.

5. Numerical example I

The beam fixed at both ends of Fig. 14a is under dynamic effect at point K. The steel beam of 300 *mm* depth is of I shape, sectional area $F = 69{,}1\ cm^2$, moment of inertia $J = 9800\ cm^4$, section modulus $K = 653\ cm^3$, weight 54,2 *kg/m*. The two prime girders of the beam valid under dynamic load, with elastic points σ_1 and σ_2 are presented in Fig. 14b.

Of the spring constants of point σ_1 $J_{1h} = 0$ and if $E = 2\ 100\ 000\ kg/cm^2$

$$\varphi_1 = \int_A^K \frac{dx}{E \cdot J} = \frac{300}{2{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot 10^9} = 14{,}577 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{kg}^{-1} \cdot cm^{-1}$$

$$J_{1v} = \int_{A}^{K} \frac{x^2 \cdot dx}{E \cdot J} = \frac{300^3}{12 \cdot 2{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot 10^9} = 10{,}933 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg^{-1}\,cm}.$$

Of the spring constants of point σ_2, $J_{2h} = 0$ and the other two

$$\varphi_2 = \frac{500^3}{2{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot 10^9} = 24{,}295 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{kg^{-1} \cdot cm^{-1}}$$

$$J_{2v} = \frac{500^3}{12{,} \cdot 2{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot 10^9} = 50{,}615 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg^{-1} \cdot cm}.$$

The result of parallel connection of the two points σ is the elastic point of symbol O. This also lies along the axis of the beam and its position is determined by the postulate that it has to

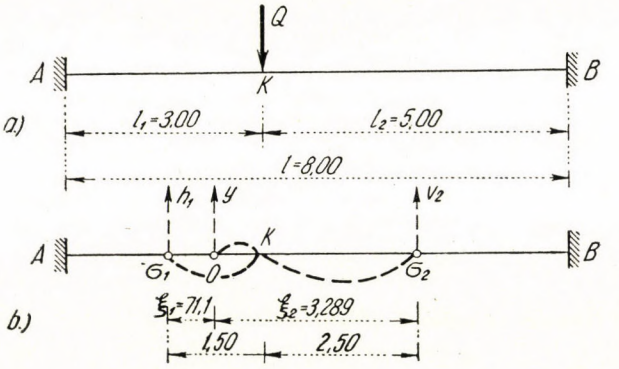


Fig. 14

lie along the line of action of the resultant of forces at point σ released by vertical motion $\Delta v = 1$ *cm* of point K. Forces released by motion

$$V_1 = \frac{1}{J_{1v}} = \frac{10^5}{10{,}933} = 9146\ \mathrm{kg}$$

$$V_2 = \frac{1}{J_{2v}} = \frac{10^5}{50{,}615} = 1976\ \mathrm{kg}$$

$$V_1 + V_2 = 11\,122\ \mathrm{kg}.$$

The distance of point O from point σ_1

$$x_0 = \xi_1 = \frac{1976 \cdot 4{,}00}{11\,122} = 0{,}711\ m.$$

Spring constants of point O, computed by formulae (41), (42) and (43).

$$\frac{1}{\varphi_1} = \frac{10^9}{14{,}577} = 6{,}860\,122 \cdot 10^7$$

$$\frac{\xi_1^2}{J_{1v}} = \frac{71{,}1^2 \cdot 10^5}{10{,}933} = 4{,}623\,809 \cdot 10^7$$

$$\frac{1}{\varphi_2} = \frac{10^9}{24{,}295} = 4{,}116\,073 \cdot 10^7$$

$$\frac{\xi_2^2}{J_{vv}} + \frac{(400-71{,}1)^2 \cdot 10^5}{50{,}615} = \frac{21{,}373\,431 \cdot 10^7}{36{,}973\,435 \cdot 10^7}$$

$$\varphi_0 = \frac{10^{-7}}{36{,}973\,435} = 2{,}705 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{cm}^{-1}.$$

$\alpha_1 = 0$ as well as $\alpha_2 = 0$. Therefore from formula (42) $J_{x0} = 0$ and from (43)

$$\frac{\cos^2\alpha_1}{J_{1v}} = \frac{10^5}{10{,}933} = 9{,}146\,620 \cdot 10^3$$

$$\frac{\cos^2\alpha_2}{J_{2v}} = \frac{10^5}{50{,}615} = \frac{1{,}975\,699 \cdot 10^3}{11{,}122\,319 \cdot 10^3}$$

$$J_{y0} = \frac{10^{-3}}{11{,}122\,319} = 8{,}991 \cdot 10^{-5} kg^{-1} \cdot cm.$$

With spring constants known, reactions of the beam to statical load attacking at point K can be calculated in the following manner. Loadings at point O due to load O and the movements at point O released by them

$$Q_0 = -1000\ \mathrm{kg} \qquad l_{0v} = Q_0 \cdot J_{y0} = -8{,}991 \cdot 10^{-2}\ cm$$

$$M_0 = -1000 \cdot (150 - 71{,}1) = -78\,900\ kg\ cm$$

$$\omega_0 = M_0 \cdot \varphi_0 = -78{,}9 \cdot 2{,}705 \cdot 10^{-6} = -213{,}424 \cdot 10^{-6}.$$

By division of loadings at point O results for point σ_1

$$M_1 = \frac{\omega_0}{\varphi_1} = -\frac{213{,}424 \cdot 10^{-6}}{14{,}577 \cdot 10^{-9}} = -14\,641\ kg\ cm$$

$$V_1 = \frac{1}{J_{1v}}(e_{0v} - \xi_{10} \cdot \omega_0) = \frac{10^5}{10{,}933} \cdot (-8{,}991 \cdot 10^{-2} + 71{,}1 \cdot 213{,}424 \cdot 10^{-6} = -684\ kg$$

and the load components of point σ_2

$$M_2 = \frac{\omega_0}{\varphi_2} = -\frac{213{,}424 \cdot 10^{-6}}{24{,}295 \cdot 10^{-9}} = -8785\ \mathrm{kg\ cm}$$

$$V_2 = \frac{1}{J_{2v}}(e_{0v} + \xi_{20} \cdot \omega_0) = \frac{10^5}{50{,}615}(-8{,}991 \cdot 10^{-2} - 328{,}9 \cdot 213{,}424 \cdot 10^{-6}) = 316\ kg.$$

The computed load components, with opposite signs, are components of beam reactions at point σ. Therefore at section K the moment

$$M_K = 0{,}864 \cdot 1{,}50 - 0{,}146 = +0{,}880\ tm$$

and at the same place the maximum stress in the beam

$$\sigma = \frac{88\,000}{653} = 135\ kg/cm^2.$$

For the dynamic investigation of the beam the masses of the springs of points σ will be calculated by formulae (19), (20) and (21). The individual points of the rectilinear girder perform

only vertical movements, no horizontal motion. Vertical beam motion resulting from movements $\Delta v = 1\ cm$ and $\Delta\varphi = 1$, influence lines of components of reactions at point σ of the beam fixed at both ends, are presented in *Fig. 15*. Inscribed in the figures are also values of $\sum_1^9 \eta_{vv}^2$ and $\sum_1^9 \eta_{vm}^2$. At points 1—9 namely, beam weights are identical, while at point 10, the weight has half value only. On the portion of the beam belonging to point, σ_1 $G_1 = 0{,}3 \cdot 54{,}2 = 16{,}26$ kg

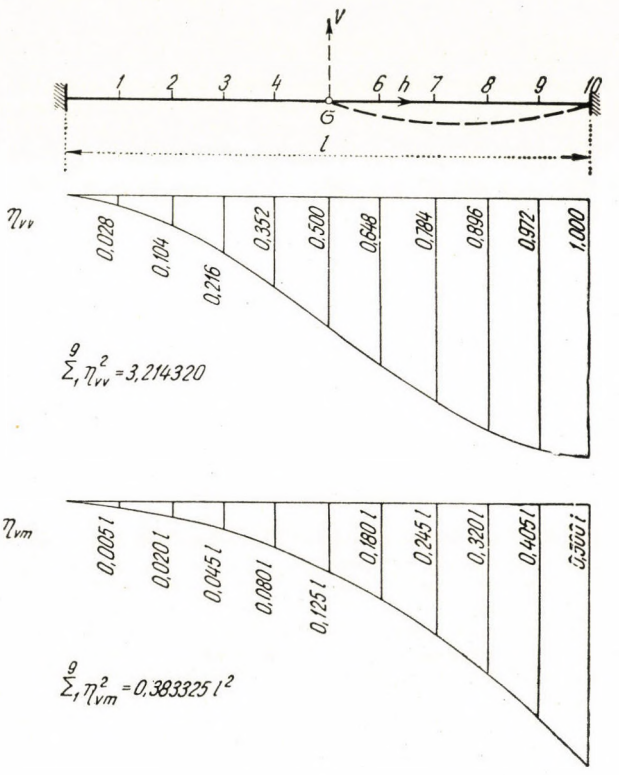


Fig. 15

and along the section belonging to point σ_2 $G_2 = 0{,}5 \cdot 54{,}2 = 27{,}10$ *kg*. With observation of this as well as of the value of $g = 981\ cm/sec^2$ of the acceleration of gravity, the masses at point σ_1

$$m_{1v} = \frac{1}{981} \cdot (3{,}2143 \cdot 16{,}26 + 1{,}00^2 \cdot 8{,}13) = 61{,}565 \cdot 10^{-2}\ kg \cdot cm^{-1} \cdot sec^2$$

$$m_{1m} = \frac{300^2}{981} \cdot 0{,}3833 \cdot 16{,}26 + 0{,}50^2 \cdot 8{,}13) = 758{,}1 \cdot kg \cdot cm \cdot sec^2.$$

The masses of springs of point O, computed from formulae under (45) and (46), with consideration of $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$$m_{oy} = (61{,}565 + 102{,}608) \cdot 10^{-2} = 164{,}173 \cdot 10^{-2}\ kg \cdot cm^{-1} \cdot sec^2$$

$$m_{om} = (758{,}1 + 1263{,}5) = 2021{,}6\ kg \cdot cm \cdot sec^2.$$

Natural frequences of springs of point O, identical with those of the beam (formula under 17)

$$f_v = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{J_{y_0} \cdot m_{oy}}} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}1415} \cdot \sqrt{\frac{10^7}{8{,}991 \cdot 164{,}173}} = 13 \cdot 1 \ sec^{-1}$$

$$f_m = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{\varphi_0 \cdot m_{om}}} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}1415} \cdot \sqrt{\frac{10^9}{2{,}705 \cdot 2021{,}6}} = 68{,}06 \ sec^{-1}.$$

Dangerous for resonance is therefore a pulsator placed on the beam at point K which repeats loading $60 \cdot 13{,}1 = 786$ or $60 \cdot 68{,}06 = 4114$ times per minute.

Finally from formula (37) is calculated the loading increment due to a load of $Q = 1000\ kg$ dropping on the beam from a height of q. According to formula (35) values of J_B are found by the following calculation. In this case $\alpha = 90°$ (see *Fig. 7*) and $p = 150{,}0 = 71{,}7 = 78{,}9\ cm$

$$J_B = 8{,}991 \cdot 10^{-5} + 2{,}705 \cdot 78{,}9^2 \cdot 10^{-9} = 10{,}6749 \cdot 10^{-5}\ kg^{-1} \cdot cm.$$

The sought dynamic factor computed by formula (37), since $Q = 1000\ kg$

$$\mu = 1 + \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot 10^5}{1000 \cdot 10{,}6749}} = 1 + 4{,}3285 \cdot q.$$

The weight of $Q = 1000\ kg$ dropped from a height of $q = 1\ cm$ produces a maximum stress of $\sigma = 5{,}3285 \cdot 135 = 719\ kg/cm^2$ in the beam, and if the same load drops from a height of $q = 10\ cm$, the maximum stress increases to $(1 + 4{,}3285 \cdot 3{,}1623) \cdot 135 = 1983\ kg/cm^2$ already.

6. Numerical example II

Object of analysis is the frame shown in *Fig. 16*, which is part of the foundation of a turbine generator. The weight of the turbine generator and the force due to vacuum suction are considered to be uniformly distributed on the horizontal cross-piece of the frame. The rotating mass, with dynamic effect, is supposed to be concentrated in the middle of the crosspiece of the frame. The value of the possible static load $q = 151/7{,}30 = 20{,}685\ t/m$, and the weight of rotating masses $Q_1 = 21\ t$. The number of revolutions of the machine $fg = 3000/min$. The machine foundation may also be loaded by the moment of short circuit exerted by a force of $\pm 34\ t$ acting on an arm of $r = 3{,}30\ m$.

Corners of the frame and of its prime girders are supposed to be perfectly rigid *(Fig. 17)*. This means that for frame sections between points $5-6$ and $6-7$ $J = \infty$. The moment of inertia of the columns

$$J_0 = \frac{2{,}34^4}{12} = 2{,}332\ m^4,$$

and of the cross beams

$$J_g = \frac{1{,}00 \cdot 2{,}70^3}{12} = 1{,}640\ m^4.$$

At elastic points σ_0 of the elastic parts of the columns, if the modulus of elasticity of concrete $E_b = 300\,000\ kg/cm^2 = 0{,}03\ t/m^2$, $J_{h0} = o$ and

$$\varphi_0 = \frac{l_0}{J_0 \cdot E_b} = \frac{5{,}30}{2{,}332 \cdot 0{,}03} = 0{,}075\,76 \cdot 10^{-3} \cdot t^{-1} \cdot m^{-1}$$

$$J_{v0} = \frac{l_0^3}{12 \cdot J_0 \cdot E_b} = \frac{5{,}30^3}{12 \cdot 2{,}332 \cdot 0{,}03} = 0{,}177\,34 \cdot 10^{-3} \cdot t^{-1} \cdot m.$$

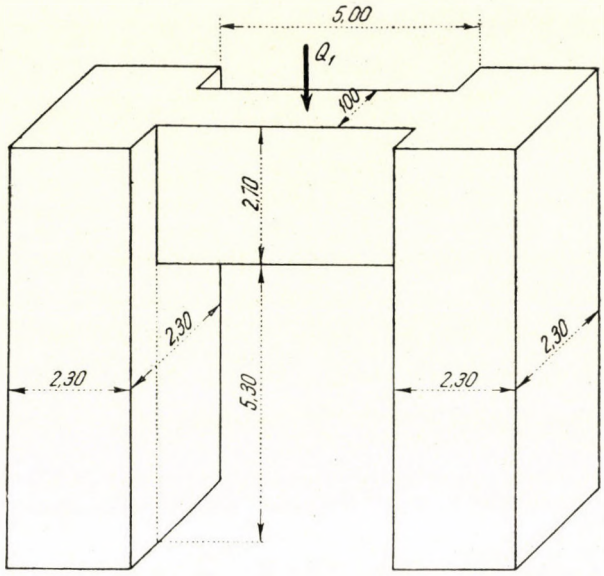


Fig. 16

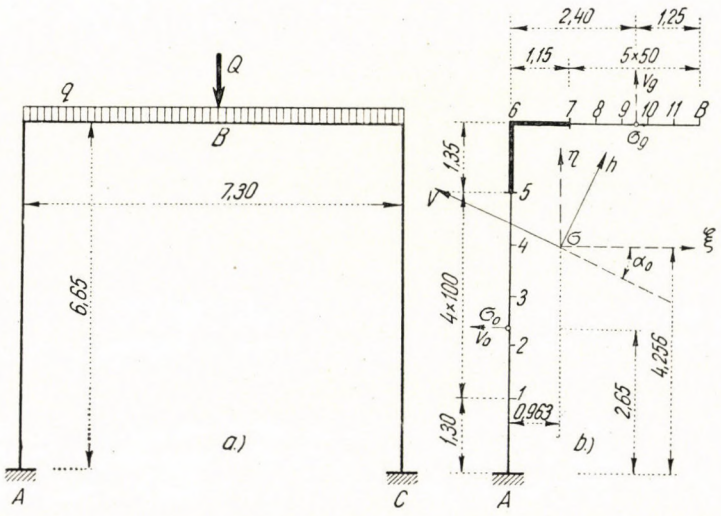


Fig. 17

At the elastic point of the cross beam of symbol σ_g these values are the same, $J_{hg} = o$ and

$$\varphi_g = \frac{l_g}{J_g \cdot E_b} = \frac{2{,}50}{1{,}640 \cdot 0{,}03} = 0{,}05081 \cdot 10^{-3} \cdot t^{-1} \cdot m^{-1}$$

$$J_{vg} = \frac{l_g^3}{12 \cdot J_g \cdot E_b} = \frac{2{,}50^3}{12 \cdot 1{,}640 \cdot 0{,}03} = 0{,}02647 \cdot 10^3 \cdot t^{-1} \cdot m.$$

Vertical and horizontal distances from A of point $\sigma \equiv \sigma_0 - \sigma_g$ obtained by coupling in series,

$$y_A = \frac{0{,}07576 \cdot 2{,}65 + 0{,}05081 \cdot 6{,}65}{0{,}7576 + 0{,}05081} = 4{,}256 \ m$$

$$x_A = \frac{0{,}05081 \cdot 2{,}40}{0{,}07576 + 0{,}05081} = 0{,}963 \ m.$$

Second degree moments about horizontal (ξ) and vertical (η) axes of point σ are according to known formulae of mechanics

$$J_\xi = (0{,}17734 + 0{,}07576 \cdot 1{,}606^2 + 0{,}05081 \cdot 2{,}394^2) \cdot 10^{-3} = 0{,}66394 \cdot 10^{-3} \ t^{-1} \cdot m$$

$$J_\eta = (0{,}02647 + 0{,}07576 \cdot 0{,}963^2 + 0{,}05081 \cdot 1{,}437^2) \cdot 10^{-3} = 0{,}20165 \cdot 10^{-3} \ t^{-1} \cdot m$$

$$C_{\xi\eta} = (0{,}07576 \cdot 1{,}606 \cdot 0{,}063 + 0{,}05081 \cdot 2{,}394 \cdot 1{,}437) \cdot 10^{-3} = 0{,}29197 \cdot 10^{-3} \ t^{-1} \cdot m.$$

The slope of main axis of point σ, of direction v, calculated by the known formula of mechanics and not from formula (38)

$$\operatorname{tg} \ 2\alpha_0 = -\frac{2 \ C\xi\eta}{J\xi - J\eta} = -\frac{0{,}58394}{0{,}46229} = -1{,}263\,146$$

$$\cos \ \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}595\,538}} = 0{,}620\,707$$

$$\cos \ \alpha_0 = \sqrt{\frac{1 + \cos \ 2\alpha_0}{2}} = \sqrt{0{,}810\,354} = 0{,}900\,197$$

$$\sin \ \alpha_0 = \sqrt{\frac{1 - \cos \ 2\alpha_0}{2}} = \sqrt{0{,}189\,647} = 0{,}435\,485$$

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{\sin\alpha_0}{\cos \alpha_0} = 0{,}483\,766.$$

Spring constants of point σ, that is, sums of values φ, as well as their moments of inertia about the main axes are as follows

$$\varphi_1 = (0{,}07576 + 0{,}05081) \cdot 10^{-3} = 0{,}12627 \cdot 10^{-3} \cdot t^{-1} \cdot m^{-1}$$

$$J_{h1} = \frac{1}{2} \ (J_\xi + J_\eta) - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_\xi - J_\eta)^2 + 4 \ C_{\xi\eta}^2} =$$

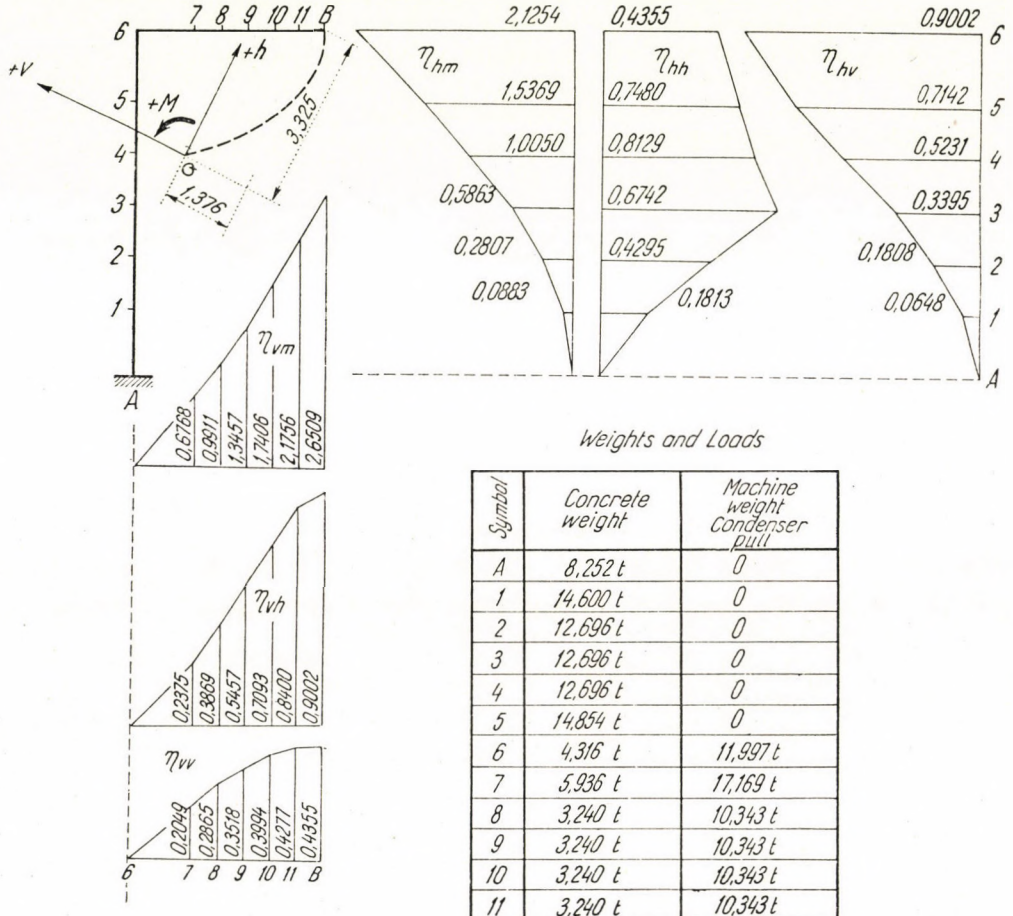
$$= (0{,}43280 - 0{,}37289) \cdot 10^{-3} = 0{,}05991 \cdot 10^{-3} \ t^1 \cdot m$$

$$J_{v1} = \frac{1}{2} \ (J_\xi + J_\eta) + \frac{1}{2} \sqrt{(J_\xi - J_\eta)^2 + 4 \ C_{\xi\eta}^2} =$$

$$= (0{,}43280 + 0{,}37289) \cdot 10^{-3} = 0{,}80569 \cdot 10^{-3} \cdot t^{-1} \cdot m.$$

For further calculations are required the vertical and horizontal motions of the individual points of the prime girder frame of Fig. 17b, induced by rotational and main directional movements of point σ, $\Delta\varphi = 1$, $\Delta h = 1$ and $\Delta v = 1$. These movements are identical with the influ-

ence lines of the components at point σ of reaction B of the frame, valid for the case of vertical and horizontal loads. The system of calculation of these movements is generally known and will not be treated here, but results are shown in *Fig. 18*. The same figure has demonstrated the distribution of the dead weight of the frame (G), the weight of the machine and the condenser pull (Q) on individual members of the frame.



Weights and Loads

Symbol	Concrete weight	Machine weight Condenser pull
A	8,252 t	0
1	14,600 t	0
2	12,696 t	0
3	12,696 t	0
4	12,696 t	0
5	14,854 t	0
6	4,316 t	11,997 t
7	5,936 t	17,169 t
8	3,240 t	10,343 t
9	3,240 t	10,343 t
10	3,240 t	10,343 t
11	3,240 t	10,343 t
B	1,620 t	5,172 t

Fig. 18

Components at point σ of reaction B on the prime girder of *Fig. 18* fixed at B too, are determined with the aid of influence lines.

$$\left.\begin{aligned} H_B &= \Sigma\,(G+Q)\cdot\eta_{vh} = +\,45{,}300\ t \\ V_B &= \Sigma\,(G+Q)\cdot\eta_{vv} = +\,27{,}596\ t \\ M_B &= \Sigma\,(G+Q)\cdot\eta_{vm} = +\,118{,}577\ tm. \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

Horizontal, vertical and moment components of reaction at point B, forces acting from left to right and upward, as well as counter-clockwise acting moments regarded as positive

$$B_h = H_B \cdot \sin \alpha_0 - V_B \cdot \cos \alpha_0 = -5{,}114 \ t$$

$$B_v = -H_B \cdot \cos \alpha_0 - V_B \cdot \sin \alpha_0 = -52{,}796 \ t \qquad (48)$$

$$M = M_B - H_B \cdot 1{,}376 - V_B \cdot 3{,}325 = -35{,}513 \ tm.$$

Masses of springs of point σ are determined by formulae (19), (20) and (21). Values of

$$(\eta_{vn}^2 + \eta_{hn}^2) \cdot (G + Q)$$

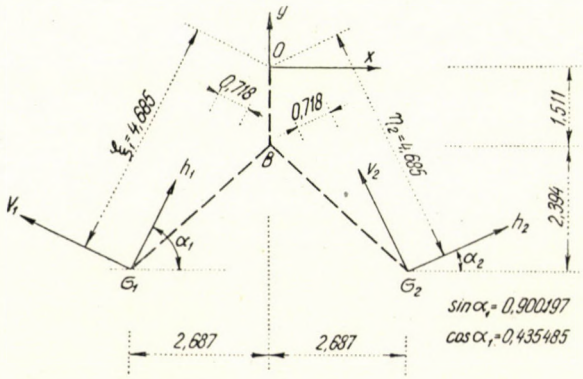


Fig. 19

necessary for computing masses have been tabulated *(Table I)*. With value of $g = 9{,}81 \ m/sec^2$ of the acceleration of gravity masses of the springs of point σ

$$m_{1m} = \frac{709{,}2672}{9{,}81} = 72{,}300 \ t \cdot m^{-1} \cdot \sec^2$$

$$m_{1h} = \frac{73{,}6549}{9{,}81} = 7{,}508 \ t \cdot m^{-1} \cdot sec^2$$

$$m_{1v} = \frac{104{,}1711}{9{,}81} = 10{,}619 \ t \cdot m^{-1} \cdot sec^2 \ .$$

Hereafter elastic points σ_1 and σ_2 of frames with end points AB and CB are coupled in parallel. The result of coupling, elastic point of symbol O,will under any circumstances lie on the axis of symmetry of the frame ; and in consequence of symmetry, one main axis will be horizontal and the other vertical. Distance y_0 of point O from point B can de determined from the condition that the resultant of forces released from the spring systems of rigidly coupled points σ_1 and σ_2 by horizontal movement $\Delta h{=}1$ has to pass through point O. Horizontal and vertical components of forces at points σ_1 and σ_2 produced by this motion and distance y_0 are obtained by the following calculations *(Fig. 19)*.

$$H_1 = H_2 = \frac{\cos^2 \alpha_1}{J_{h1}} + \frac{\sin^2 \alpha_1}{J_{v1}} = \left(\frac{0{,}189467}{0{,}05991} + \frac{0{,}810354}{0{,}80569} \right) \cdot 10^3 = 4168{,}3 \ t$$

$$V_1 = -V_2 = \left(\frac{1}{J_{h1}} - \frac{1}{J_{v1}} \right) \cdot \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1 = 15{,}4506 \cdot 0{,}392\,022 \cdot 10^3 = 6057{,}0 \ t$$

$$y_0 = 2 \cdot \frac{4168{,}3 \cdot 2{,}394 - 6057{,}0 \cdot 2{,}687}{2 \cdot 4168{,}3} = 1{,}511 \ m$$

TABLE I

Sign	$\frac{G+Q}{t}$	$\alpha = \eta_{vm}^2 + \eta_{hm}^2$	$\beta = \eta_{vh}^2 + \eta^2{}_{hh}$	$\gamma = \eta_{vv}^2 = \eta_{hv}^2$	α (G+Q)	β (G+Q)	γ (G+Q)
A	8,252	0	0	0	0	0	0
1	14,600	0,00780	0,03287	0,00420	0,11388	0,47990	0,06132
2	12,696	0,07879	0,18447	0,03269	1,00032	2,34203	0,41503
3	12,696	0,34375	0,45455	0,11526	4,36425	5,77097	1,46334
4	12,696	1,01003	0,66081	0,27363	12,82334	8,38964	3,47401
5	14,854	2,36206	0,55950	0,51008	35,08604	8,31081	7,57673
6	16,313	4,51733	0,18966	0,81036	73,69120	3,09392	13,21940
7	23,105	4,97539	0,24607	0,85234	114,95639	5,68544	19,69332
8	13,583	5,49961	0,33858	0,89244	74,70120	4,59893	12,12201
9	13,583	6,32824	0,48745	0,93412	85,95648	6,62103	12,68815
10	13,583	7,54702	0,69277	0,96988	102,51117	9,40989	13,17388
11	13,583	9,25057	0,89526	0,99329	125,65049	12,16032	13,49186
B	6,792	11,54482	1	1	78,41242	6,79200	6,79200
Σ					709,26718	73,65488	104,17105

Coordinates of point O in the system of coordinates of points σ_1, σ_2

$$\xi_1 = \eta_2 = \sin\ \alpha_1 \cdot 3{,}905 + \cos\ \alpha_1 \cdot 2{,}687 = 4{,}685\ m$$

$$\eta_1 = \xi_2 = -\cos\alpha_1 \cdot 3{,}905 + \sin\alpha_1 \cdot 2{,}687 = 0{,}718\ m.$$

Spring constants of point O, calculated by formulae (*41*), (*42*) and (*43*), with consideration that $\varphi_2 = \varphi_1$, $J_{h2} = J_{v1}$, $J_{v2} = J_{h1}$, $\cos\ \alpha_2 = \sin\ \varphi_1$ and $\sin\ \alpha_2 = \cos\ \alpha_1$

$$\frac{1}{\varphi_0} = 2\left(\frac{1}{\varphi_1} + \frac{\eta_1^2}{J_{h4}} + \frac{\xi_1^2}{J_{v1}}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{0{,}12627} + \frac{0{,}718^2}{0{,}05991} + \frac{4{,}685^2}{0{,}80569}\right) \cdot 10^3 = 87{,}53456 \cdot 10^3$$

$$\varphi_0 = \frac{10^{-3}}{87{,}53456} = 1{,}1424 \cdot 10^{-5} \cdot t^{-1} \cdot m^{-1}.$$

Value of J_{x0} is half of the value of the denominator included in formula (42), already calculated. Herewith

$$J_{x0} = \frac{1}{2 \cdot 4168{,}3} = 0{,}11995 \cdot 10^{-3} \cdot t^{-1} \cdot m.$$

The denominator of formula (43) and its value

$$2\left(\frac{\sin^2\alpha_1}{J_{h1}} + \frac{\cos^2\alpha_1}{J_{v1}}\right) = 2\left(\frac{0{,}810354}{0{,}05991} + \frac{0{,}189647}{0{,}80569}\right) \cdot 10^3 = 27{,}5232 \cdot 10^3\ t$$

$$J_{y0} = \frac{10^{-3}}{27{,}5232} = 0{,}03633 \cdot 10^{-3} \cdot t^{-1} \cdot m.$$

From statical loads, without dynamic effects, the loadings on section B of the coupled frame of *Fig. 17a* are calculated hereafter as follows. Horizontal and moment components of reactions at cross sections B of prime girders AB and CB balance each other. Unbalanced is, however, the vertical force, the value of which is double of that found under (48), that is, $B = 2 \cdot 52{,}796 = 105{,}592\ t$. This one presents itself as a free force, hence acting downward, after the restraint of fixed-end condition at point B has been released. Release of restraint is in connection with girder motion. The symmetrical frame point B suffers only vertical displacement and the value of this movement, calculated with the aid of spring constant J_{y_0} of point O

$$e_v = B \cdot J_{y_0} = 105{,}592 \cdot 0{,}13633 \cdot 10^{-3} = 3{,}836 \cdot 10^{-3}\ m\,.$$

By the application of the elastic point method it is found that after releasing the restraint at point B, the alterations of forces at point calculated under (47), (signs are evident)

$$\Delta H_B = -\frac{e_v \cdot \sin\alpha_1}{J_{h_1}} = -\frac{3{,}836 \cdot 0{,}900197}{0{,}05991} = -57{,}639\ t$$

$$\Delta V_B = -\frac{v \cdot \cos\alpha_1}{J_{v_1}} = -\frac{3{,}836 \cdot 0{,}435485}{0{,}80569} = -2{,}073\ t.$$

These forces modify internal efforts on cross section B computed under (4) to the following:

$$\left.\begin{aligned} H_{B_0} &= -5{,}114 - 57{,}639 \cdot \sin\alpha_0 + 2{,}073 \cdot \cos\alpha_0 = -28{,}349\ t \\ V_{B_0} &= -52{,}796 + 57{,}639 \cdot \cos\alpha_0 + 2{,}073 \cdot \sin\alpha_0 = 0 \\ M_0 &= -35{,}513 + 57{,}639 \cdot 1{,}376 + 2{,}073 \cdot 3{,}325 = +50{,}691\ tm. \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

Formulae under (44), (45) and (46) yield the masses of springs of point O, namely

$$m_{0x} = 2 \cdot (0{,}189647 \cdot 7{,}508 + 0{,}810354 \cdot 10{,}619) = 20{,}058\ t \cdot m^{-1} \cdot sec^2$$

$$m_{0y} = 2 \cdot (0{,}810354 \cdot 7{,}508 + 0{,}189647 \cdot 10{,}619) = 16{,}196\ t \cdot m^{-1} \cdot sec^2$$

$$m_{0m} = 2 \cdot (72{,}300 + 0{,}718^2 \cdot 7{,}508 + 4{,}685^2 \cdot 10{,}619) = 618{,}499\ t \cdot m^{-1} \cdot sec^2.$$

Natural frequencies of the frame are as follows (formula under 17), if the source of vibration is at point B.

$$f_h = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{J_{0x} \cdot m_{0x}}} = \frac{1}{6{,}283} \cdot \sqrt{\frac{1000}{0{,}11995 \cdot 20{,}058}} = 3{,}245/sec = 195/min.$$

$$f_v = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{J_{y_0} \cdot m_{0y}}} = \frac{1}{6{,}283} \cdot \sqrt{\frac{1000}{0{,}03633 \cdot 16{,}196}} = 6{,}561/sec = 394/min\,.$$

$$f_m = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{\varphi_0 \cdot m_{0m}}} = \frac{1}{6{,}283} \cdot \sqrt{\frac{1000}{1{,}1424 \cdot 6{,}185}} = 1{,}685/sec = 101/min\,.$$

Frequencies are all far from the number of revolutions of 3000/min. of the machine ; there is no danger of resonance for the frame of the machine foundation examined.

In the following the dynamic effect of the rotating mass will be investigated with the aid of formula (37). For the application of the formula the dynamic factor laid down in formula (35) is required. Already in the calculation of the latter it is not irrelevant from which direction the rotating mass falls upon the girder. Under drop of the mass is understood in this case possible

knocking of the machine due to small excentricity of the rotating mass which is of similar effect to that resulting from the drop of a weight. If there is a vertical drop, in formula under (35) $\cos^2\alpha = 0$, $\sin^2\alpha = 1$ and

$$J_{Bv} = J_{y0} \cdot \sin^2\alpha = 0{,}03633 \cdot 10^{-3} \cdot t^{-1} \cdot m\,,$$

and if the drop is horizontal, $\cos^2\alpha = 1$, $\sin^2\alpha = 0$ and

$$J_{Bh} = J_{x0} \cdot \cos^2\alpha + \varphi_0 \cdot p^2 = (0{,}11995 + 1{,}1424 \cdot 10^{-2} \cdot 1{,}511^2) = 0{,}14603\ t^{-1}\ m\,.$$

The weight of the rotating mass Q_1=21 *t*, and therewith from formula under (37), in case of vertical drop

$$\mu_v = 1 + \sqrt{\frac{2q}{Q_1 \cdot J_{Bv}}} = 1 + \sqrt{\frac{2000\ q}{21 \cdot 0{,}03633}} = 1 + 50{,}023\sqrt{q},$$

and for horizontal drop

$$\mu_h = 1 + \sqrt{\frac{2q}{Q_1 \cdot J_{Bv}}} = 1 + \sqrt{\frac{2000\ q}{21 \cdot 0{,}14603}} = 1 + 25{,}538\sqrt{q}.$$

Supposed, that the turbine foundation is to be calculated also for the unexpected case, when in consequence of a great error the rotating mass has an excentricity of *1 mm*, that is, a knock of $q = 0{,}001\ m$ has to be reckoned with

$$\mu_v = 1 + 50{,}023 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{10} = 2{,}58$$

$$\mu_h = 1 + 25{,}538 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{10} = 1{,}81\,.$$

Present engineering practice multiplies this value by a further »fatigue« factor, the value of which is $\nu = 2$ when the machine can no more be kept in operation. That is, dynamic factors of $\mu_{v0} = 5{,}18$ and $\mu_{h0} = 3{,}62$ are to be reckoned with.

In normal operation the value of $\nu = 3$ is recommended, but in this case knocks may not probably be greater than *0,1 mm* or $q = 10^{-4}$, and further values of the dynamic factors for this case of the example under investigation are

$$\mu_{v0} = 3 \cdot (1 + 50{,}023 \cdot 10^{-2}) = 4{,}50$$

$$\mu_{h0} = 3 \cdot (1 + 25{,}538 \cdot 10^{-2}) = 3{,}77\,.$$

The vertical effect of the rotating mass has therefore to be considered as that of a static load of $Q_1' = \pm 5{,}18 \cdot 21 = \pm 108{,}78\ t$. Components at point σ_1 of the reaction on point *A* released by the load are calculated in the following manner by the elastic point method

$$e_v = Q_1' \cdot J_{y0} = \pm 108{,}78 \cdot 0{,}03633 \cdot 10^{-3} = \pm 3{,}952 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$H_A = \pm \frac{e_v \sin\alpha_1}{J_{hl}} = \pm \frac{3{,}952 \cdot 0{,}900\,197}{0{,}05991} = \pm 59{,}382\ t$$

$$V_A = \pm \frac{e_v \cos\alpha_1}{J_{v1}} = \pm \frac{3{,}952 \cdot 0{,}435\,485}{0{,}80569} = \pm 2{,}136\ t.$$

In calculating the horizontal effect of the rotating mass the vertical load is $Q_1 = 21\ t$, to which is added the horizontal force $H = \pm 3{,}77 \cdot 21 = \pm 79{,}17\ t$. Components at point σ_1 of reaction A are $1/5{,}18 = 0{,}1931$ times those previously computed.

The horizontal force produces the following efforts and movements at elastic point O.

$$H_0 = \pm 79{,}17\ t$$

$$e_h = \pm H_0 \cdot J_{x_0} = \pm\ 79{,}17 \cdot 0{,}11995 \cdot 10^{-3} = \pm 9{,}496 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$M_0 = \pm 79{,}17 \cdot 1{,}511 = 119{,}626\ tm$$

$$\omega_0 = \pm\ M_0 \cdot \varphi_0 = \pm 119{,}626 \cdot 1{,}424 \cdot 10^{-5} = \pm\ 1{,}703 \cdot 10^{-3}.$$

Division of efforts leads to the following values of the components at points σ_1 of reaction A

$$M_A = \pm\ \frac{\omega_0}{\varphi_1} = \pm\ \frac{1{,}703}{0{,}126\ 27} = \pm 13{,}487\ tm\ .$$

$$H_A = \frac{1}{J_{h_1}} \cdot (\pm e_h \cdot \cos\alpha_1 \mp \omega_0 \cdot 0{,}718) = \frac{1}{0{,}05991}\ (\pm\ 0{,}435485 \cdot 9{,}496 \mp 1{,}703 \cdot 0{,}718) =$$

$$= \pm\ 48{,}595\ \text{t}$$

$$V_A = \frac{1}{J_{v1}}\ (\pm\ e_h \cdot \sin\alpha_1 \mp \omega_0 \cdot 4{,}685) = \frac{1}{0{,}80569}\ (\mp\ 0{,}900\ 197 \cdot 9{,}496 \mp 1{,}703 \cdot 4{,}685) =$$

$$= \pm\ 20{,}509\ t.$$

Finally it has to be pointed out that the moment of short-circuit is considered as a suddenly applied load, and according to the foregoing its dynamic effect may be calculated with the double value of the moment, but hereafter it is dealt with as a static load.

REFERENCES

Szily : Mechanics, Vol. II. (Hungarian).
Lehr : Schwingungstechnik.
Hohenemser—Prager : Dynamik der Stabwerke.
Rausch : Maschinenfundamente.
Korenew : Dynamik von Baukonstruktionen.
Schwertner : Elastic Point Method of Frame Analysis (Hungarian).

SUMMARY

The elastic point method of frame analysis is a calculatory method solving the problem of the manifold-hyperstatic girder without equation systems. There are springs at the elastic points. Spring dynamics is a simple problem already solved, therefore this method yields a novel and simple solution of the problem of girder dynamics. However, springs can perform oscillations only if they possess masses. Determination of these masses is the crucial problem of the paper. Application of the method is shown on examples. It is pointed out that the dynamic effect of weights dropped on girders is also simply calculable by the method.

ДИНАМИКА БАЛОК, ТРАКТУЕМЫХ МЕТОДОМ УПРУГИХ ТОЧЕК

Канд. техн. наук А. Швертнер

Резюме

Метод упругих точек при расчете рам является таким методом расчета, который дает решение многократно статически неопределенной балки без использования систем уравнений. На упругих точках имеются пружины. Динамика пружин является простой и уже решенной задачей, и поэтому этот метод дает простое новое решение динамики балок. Однако, пружины могут приходить в колебательное движение только в том случае, если они обладают массой. Определение этих масс составляет суть этой работы. Применение демонстрируется примерами. В статье подчеркивается, что динамическое воздействие грузов, сброшенных на балки, также легко определить при помощи рассмотренного автором метода.

LA DYNAMIQUE DES POUTRES TRAITÉES À LA BASE DE LA MÉTHODE DES POINTS ÉLASTIQUES

A. SCHWERTNER
Candidat des Sciences Techniques

RÉSUMÉ

La méthode des points élastiques destinée au calcul des portiques est un procédé résolvant la poutre multiplement hyperstatique sans systèmes d'équations. Des ressorts sont placés aux points élastiques. La dynamique des ressorts est un problème simple et résolu, de sorte que cette méthode fournit une nouvelle et simple solution de la dynamique des poutres. Cependant les ressorts ne peuvent vibrer que s'ils possèdent une masse. La détermination de ces masses constitue le problème essentiel de l'étude. L'application du procédé est illustrée par des exemples. Pour terminer, l'auteur démontre que la méthode permet de déterminer d'une manière très simple l'effet dynamique des poids tombant sur les poutres.

DYNAMIK DER TRÄGER BEI BERECHNUNG MIT DER METHODE DER ELASTISCHEN PUNKTE

A. SCHWERTNER
Kandidat der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Die Methode der elastischen Punkte ist eine Methode zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen, die es ermöglicht, die Berechnung des statisch vielfach unbestimmten Trägers ohne Anwendung von Gleichungssystemen durchzuführen. An den elastischen Punkten befinden sich Federn. Da die Dynamik der Federn eine einfache und gelöste Aufgabe ist, ergibt diese Methode auch für die Dynamik der Träger eine neue einfache Lösung. Die Federn können indessen nur dann Schwingungen ausführen, wenn an ihnen Massen angebracht sind. Die Bestimmung dieser Massen ist nun die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung. Es werden Beispiele vorgeführt, an denen die Anwendung der Methode veranschaulicht wird. Die Methode ist auch zur Berechnung von dynamischen Wirkungen geeignet, die beim Fallen von Gewichten auf die Träger entstehen.

KRAFTBEDARF UND FLIESSVORGÄNGE BEIM STRANGPRESSEN UND BEIM PRESSEN IM GESENK*

Prof. A. GELEJI

MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 28. Juni 1954]

In dieser Zeitschrift veröffentlichte ich im Jahre 1952 einen Artikel mit dem Titel: «*Strangpressen und Presslochverfahren*» [1, 2]. In diesem Artikel führte ich eine Theorie und ein Rechnungsverfahren zur Bestimmung der auftretenden Kräfte beim Strangpressen vor. Die experimentelle Bestätigung der Richtigkeit und praktischen Brauchbarkeit der Theorie und des Rechnungsverfahrens fand ich in den Strangpressversuchen von *G. Sachs* [3, 4], *Ch. Bernhoeft* [5], *C. E. Pearson* und *I. A. Smythe* [6], insofern ich die berechneten und experimentellen Werte einander gegenüberstellte [1]. Meine jetzige Abhandlung enthält eine weitere Bestätigung meines Rechnungsverfahrens durch eigene Laboratoriumsversuche und die Erweiterung meiner Theorie und meines Rechnungsverfahrens auf das Pressen im Gesenk.

Um diese Abhandlung leichter verständlich zu machen, muss ich meine Theorie und mein Rechnungsverfahren hier kurz wiederholen.

a) Das Strangpressen

Der Vorgang des Strangpressens besteht darin, dass ein erwärmter, in einem Aufnehmer (Rezipienten) befindlicher, meist zylindrischer Block mit Hilfe eines Press-Stempels durch eine Matrize durchgepresst wird. Der Block nimmt dabei das Profil an, das als Öffnung in die Matrize eingearbeitet ist *(Abb. 35/a)*.

Untersucht man denjenigen Fall der bildsamen Verformung der Stange näher, in dem die Stange durch eine Ziehdüse durchgedrückt wird, dann fällt einem sofort auf, dass dieses Problem mit dem des Strangenpressens auf der Strangpresse in erster Annäherung identisch ist [1, 2].

Beim Strangpressen wirkt eigentlich der Boden des Aufnehmers (Rezipienten) als Presswerkzeug. In diesem Boden befindet sich nämlich eine Öffnung, deren Form dem Querschnitt der zu pressenden Stange entspricht. Beim Pressen wird der Block im Aufnehmer durch den Dorn mit der Kraft P gegen die Innenwand des Presswerkzeuges gedrückt. Der bildsame Werkstoff wird dabei durch die Öffnung des Werkzeuges, die den Durchmesser d_2 hat, in Form einer Stange mit gleichem Querschnitt hinausgepresst. Der hinter dem Werkzeug liegende, auf der Zeichnung dicht schraffierte Teil des Blockes ist am Fliessen des Werkstoffes kaum beteiligt. Im Werkstoff selbst entsteht nämlich hinter der Öffnung des Werkzeuges eine kegelige Düse, und der Werkstoff fliesst durch diese der Öffnung zu *(Abb. 35/a)*. Diese Düse kann als eine konische Ziehdüse aufgefasst werden, durch die der Werkstoff durchgedrückt wird.

* Vorgetragen in der am 18. Juni 1954 abgehaltenen Sitzung der Sektion für Technische Wissenschaften der Ungarischen Akademie der Wissenschaften.

Der mittlere Formänderungswiderstand kann in der hinter dem Presswerkzeug entstehenden kegeligen Düse mit Hilfe der folgenden Formel mit guter Annäherung berechnet werden:

$$k_m = \frac{k_f}{1 - 0{,}93\,\frac{F}{f_1}}. \tag{1}$$

In dieser Formel ist k_f die Formänderungsfestigkeit des gepressten Werkstoffes (kg/cm²), h_1 der Durchmesser des Aufnehmers, h_2 der Durchmesser der ausgepressten Stange,

$f_1 = \frac{h_1^2 \cdot \pi}{4}$ der Querschnitt des Aufnehmers (cm²),

$f_2 = \frac{h_2^2 \cdot \pi}{4}$ der Querschnitt der Stange (cm²),

$F = f_1 - f_2$ die Querschnittverminderung, die Abnahme (cm²).

Der durch Formel (1) ausgedrückte Wert von k_m bedeutet den mittleren Formänderungswiderstand in der hinter der Werkzeugsöffnung liegenden Düse des Werkstoffes. Der Formänderungswiderstand ist in der Öffnung des Presswerkzeuges (Querschnitt *II.* in *Abb 35/a*) theoretisch gleich Null. Im Querschnitt *I* muss man demnach mit einem Formänderungswiderstand $k_I = 2k_m$ rechnen.

Der spezifische Axialdruck ist also im Querschnitt *I*:

$$\sigma_3 = p = 2 \cdot k_m - k_f \tag{2}$$

da hier $\sigma_1 \equiv 2k_m$ ist.

Mit Hilfe der Gleichung (2) kann der im Querschnitt *I* wirkende Druck P_1 berechnet werden, der den Werkstoff durch die im Werkstoff selbst vor der Werkzeugsöffnung sich bildende kegelige Düse durchdrückt:

$$P_1 = p \cdot f_1 \text{ [kg]}. \tag{3}$$

Diese Kraft P_1 reicht aber nicht aus, die ganze Pressarbeit zu vollbringen. In der ganzen Masse des zwischen dem Querschnitt *I* und der Pressscheibe befindlichen $l-b$ langen Blockteils treten innere Verschiebungen (Wirbelungen) auf *(Abb. 35)*.

Zum Hervorbringen der inneren Verschiebungen sind grosse Kräfte erforderlich. Diese inneren Verschiebungen werden durch die Kraft P_2 hervorgerufen. Die Kraft P_2 ist proportional zu dem Inhalt V (cm³) des $l-b$ langen Pressblockteils, zu dem spezifischen Druck p (kg/cm²) der im Querschnitt *I* herrscht (Gleichung 2), ferner zu einer Funktion ψ, die von der Pressgeschwindigkeit v_1 (cm/s) und von einer Konstante C abhängt. Diese Kraft ist also:

$$P_2 = \psi \cdot p \cdot V \text{ [kg]}, \tag{4}$$

wo

$$V = (l-b) \cdot f_1 \text{ [cm}^3\text{]}, \tag{5}$$

und

$$\psi = C \cdot \sqrt[4]{\frac{v_1}{l-b}}, \tag{6}$$

wo $C = 0{,}025$ ist, und v_1 in cm/s und $l-b$ in cm in die Gleichung (6) eingesetzt werden.

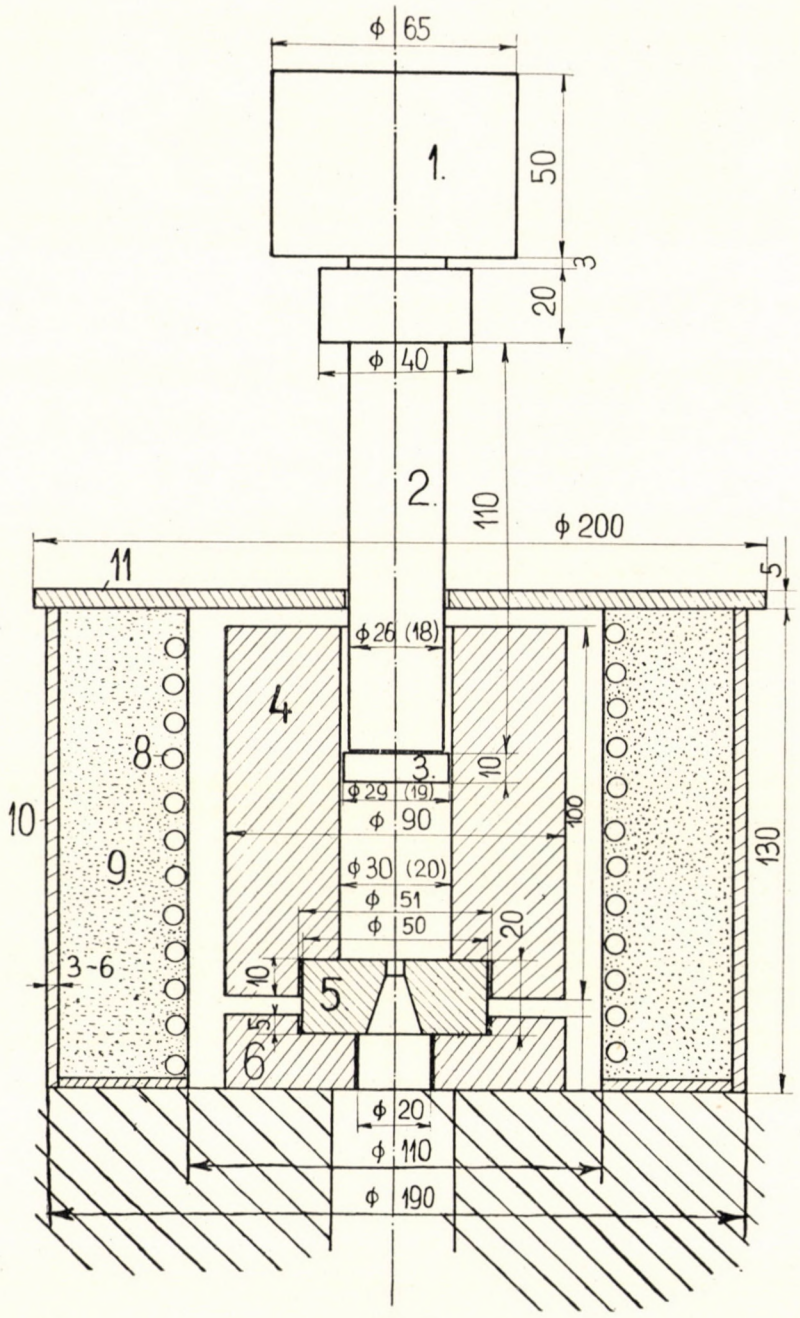

ϕ 65
1.
50
3
20
ϕ 40
2.
110
ϕ 200
11
5
ϕ 26 (18)
4
8
3.
10
ϕ 29 (19)
ϕ 90
100
130
10
9
ϕ 30 (20)
ϕ 51
ϕ 50
20
3-6
10
5
5
6
ϕ 20
ϕ 110
ϕ 190

Abb. 1

Laut der obigen Ausführungen ist die gesamte Presskraft:

$$P = P_1 + P_2 = p \cdot f_1 + \psi \cdot p \cdot V \text{ [kg]}. \tag{7}$$

In der Praxis wird der Quotient

$$p_0 = \frac{P}{f_1} \tag{8}$$

spezifischer Pressdruck genannt. In der Literatur wird meistens dieser Wert angeführt.

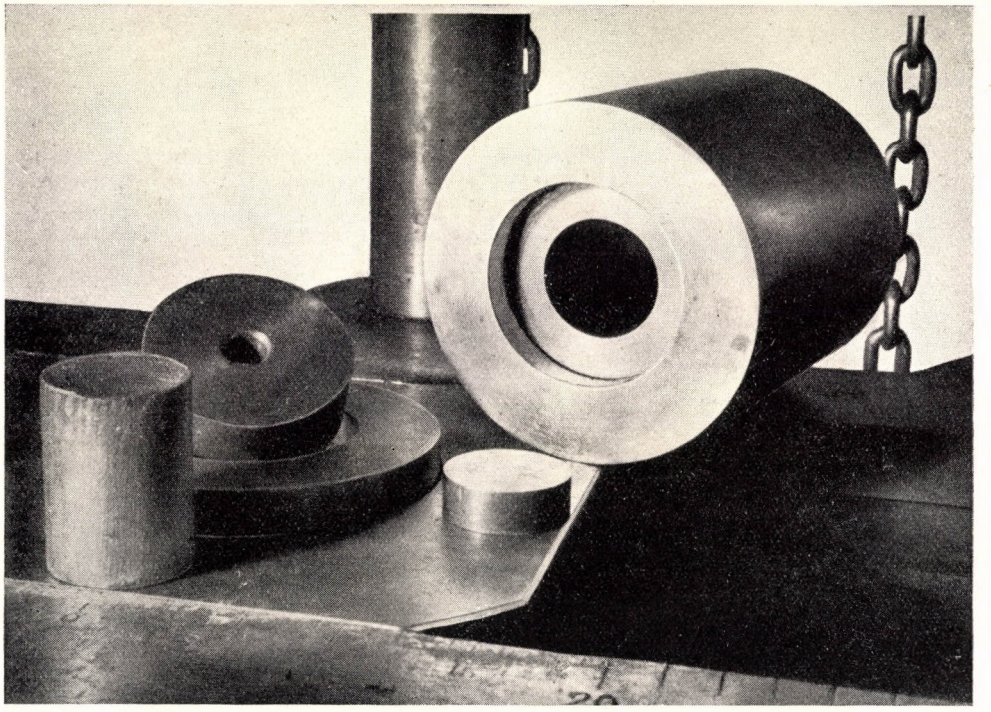


Abb. 2

Sobald die Stirnfläche der Press-Scheibe beim Querschnitt I anlangt, wird $V = 0$ und daher die Presskraft $P = P_1$. Somit weist P hier ein Minimum auf. Sobald die Press-Scheibe den Querschnitt I überschreitet, beginnt der Druck aufs neue anzuwachsen. Das Anwachsen der Kraft kann ebenfalls berechnet werden [1].

Einige Forscher sind der Ansicht, dass ein beträchtlicher Teil der Presskraft P dazu verwendet wird, den Pressblock im Rezipienten in Richtung des Werkzeuges vorwärtszuschieben, ferner, die an der Wand auftretende Reibung zu überwinden. Doch hat hier diese Reibung eine besondere Wirkung: der im Rezipienten befindliche Werkstoff wird nicht vorwärtsgeschoben, sondern kommt zufolge des Auftretens dieser Reibungskraft (Haftung) im Rezipienten in eine innere turbulente Bewegung. Es muss hier auch folgendes bemerkt werden: die Erfahrung zeigt, dass zwischen der Presskraft beim Pressen mit Schale und der Presskraft beim Pressen ohne Schale praktisch kaum ein Unterschied vorhanden ist.

Die experimentelle Bestätigung der Richtigkeit meiner Strangpressen-Theorie findet sich in den Pressversuchen von *G. Sachs* [3, 4], *Ch. Bernhoeft* [5]

und *C. E. Pearson* [6, 11]. Alle diese Versuche wurden auf *Dick*-schen (*Krupp*-schen) Strangpressen von 1500 t Presskraft ausgeführt, bei denen die Block- und Rezipientenabmessungen, Pressgeschwindigkeiten überall beinahe die

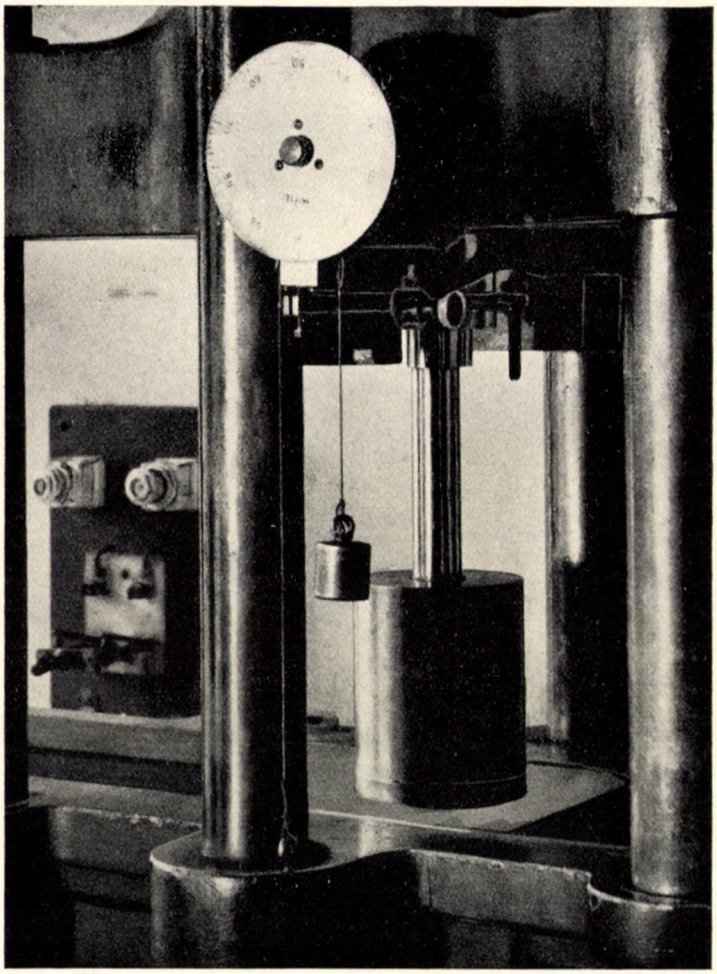


Abb. 3

gleichen waren. Ich wollte aber ermitteln, ob die Gültigkeit meiner Theorie auch unter ganz anderen Verhältnissen, bei anderen Pressgeschwindigkeiten, Blockabmessungen usw. sich beweisen lässt. Zu diesem Zweck liess ich eine Laboratoriumsstrangpressvorrichtung nach *Pearson* [6] herstellen und auf eine Amsler-sche 30 Tonnen Universal-Reissmaschine anbringen. Die Abmes-

sungen der Pressvorrichtung und der Werkzeuge, sowie deren Schaubilder sind in den *Abbildungen 1* und *2* zu sehen. Die auf die Reissmaschine aufmontierte Pressvorrichtung sieht man auf den *Abbildungen 3* und *4*. *Abbildung 5* zeigt die Pressvorrichtung mit einem Rezipientenheizapparat ausgestattet.

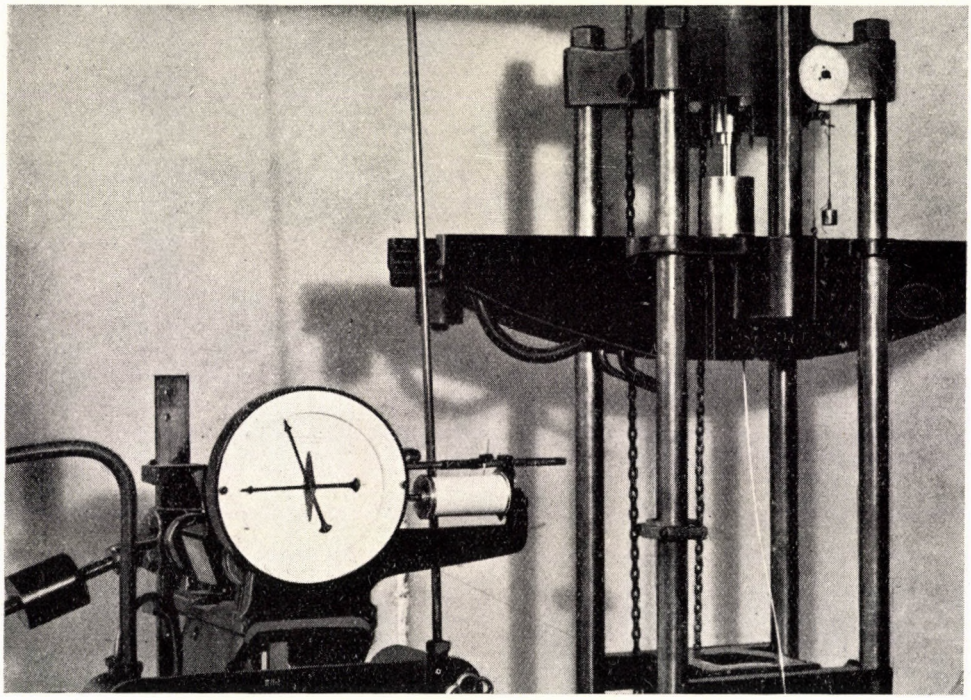


Abb. 4

Die Pressversuche wurden mit Blei kalt und mit Aluminium (Al. 99,5) warm ausgeführt.

Die Kaltpressversuche mit Blei wurden zur Ermittlung des Werkstoffflusses im Rezipienten vorgenommen, u. zw. bei glatten-trockenen, mit Öl geschmierten, ferner aufgerauhten Rezipienteninnenflächen. Zu den Versuchen wurden runde Probestücke verwendet von 30 mm Durchmesser und 80 mm Länge. Die Probestücke wurden in der Längsachse in zwei Stücke geteilt, und in den Längsquerschnitt wurde eine Netzeinteilung von 5 × 5 mm eingeritzt. Die so vorbehandelten Proben wurden dann wie ungeteilte Stücke in den Rezipienten eingesetzt. Da aus der Fachliteratur solche Versuche schon bekannt sind, will ich hier nur drei charakteristische Proben vorführen.

Wird beim Pressen die Rezipienteninnenfläche mit Öl geschmiert, dann deformiert sich der Querschnitt des gepressten Probestückes nur in der Nähe der Ausströmöffnung (Werkzeugöffnung); die Netzeinteilung verzerrt sich

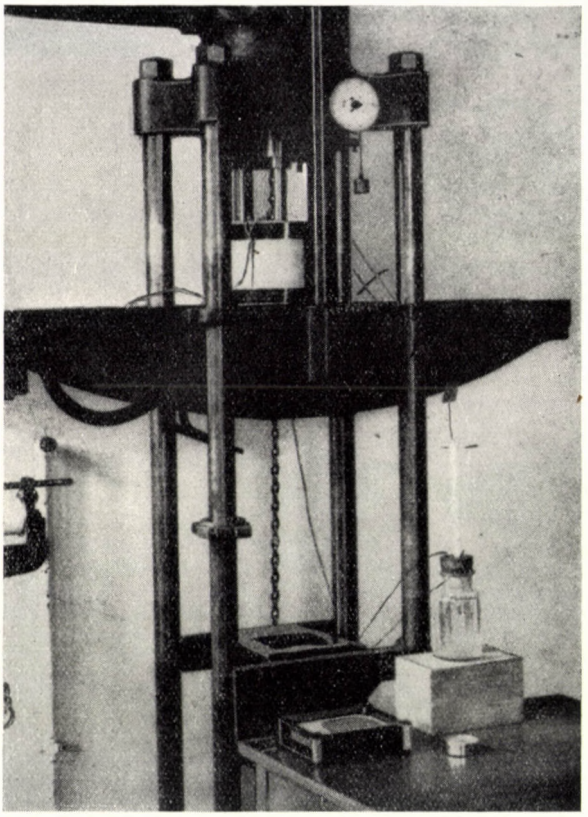


Abb. 5

nur in der Nähe des Rezipientenbodens *(Abb. 6)*; die Ausbildung der toten Ecke ist nicht bestimmt. Wird das Blei aus einem Rezipienten mit trockener Innenfläche ausgepresst, dann ist die Ausbildung der toten Ecke sehr bestimmt ausgeprägt, der Winkel der toten Ecke ist fast genau 45° und die Netzeinteilung in dem Querschnitt ist verzerrt *(Abb. 7)*. Wird die Rezipienteninnenfläche aufgerauht, dann ist die innere Materialverschiebung in der ganzen Masse des Probestückes sowie die Ausbildung der toten Ecke deutlich erkennbar *(Abb. 8)*.

Im allgemeinen ist das Warmpressen der Metallstangen mit dem Fall des Strangpressens mit aufgerauhtem Rezipienten fast identisch. Sowohl die Leichtmetalle wie auch die Buntmetalle haften bei dem Strangpressverfahren an der

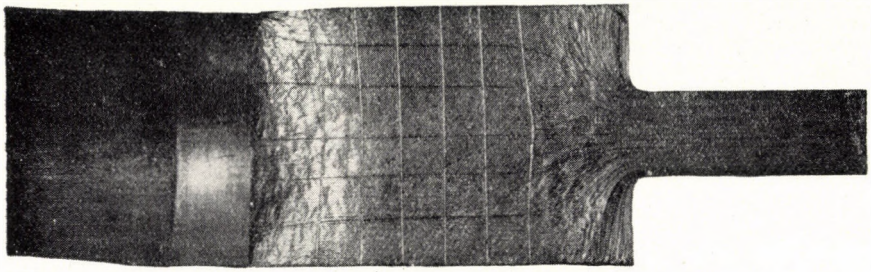


Abb. 8

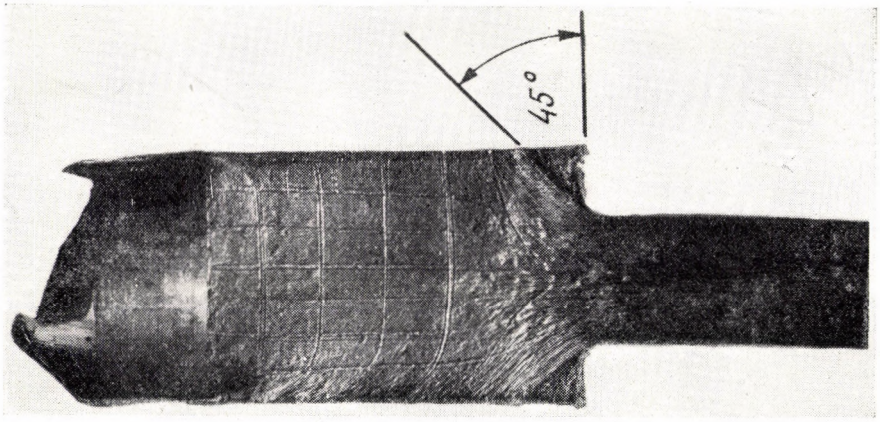


Abb. 7

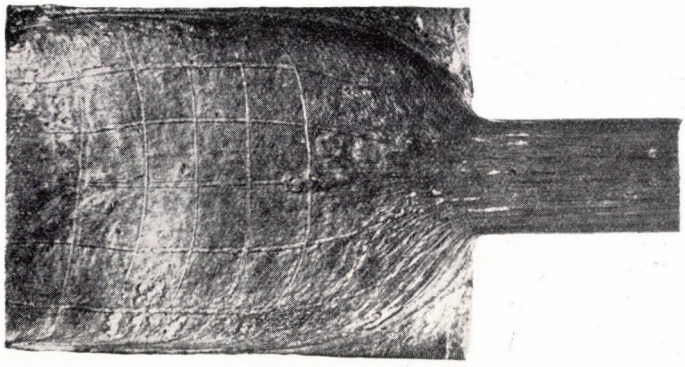


Abb. 6

Rezipienteninnenfläche, da im Betrieb die Rezipienteninnenfläche in kurzer Zeit rauh wird.

Während der Versuche wurde die Presskraft bei geschmierter trockener und aufgerauhter Rezipienteninnenfläche gemessen. Es wurden aus den Probe-

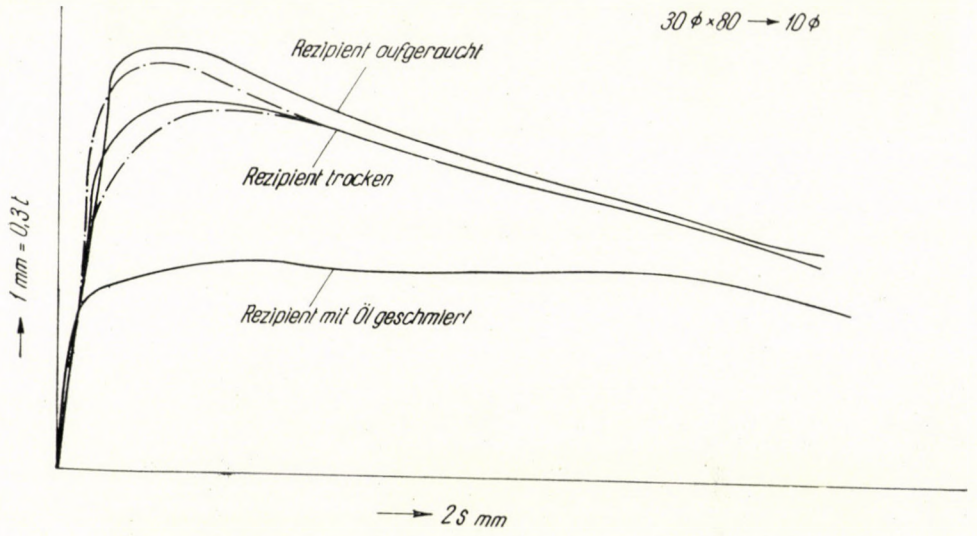


Abb. 9

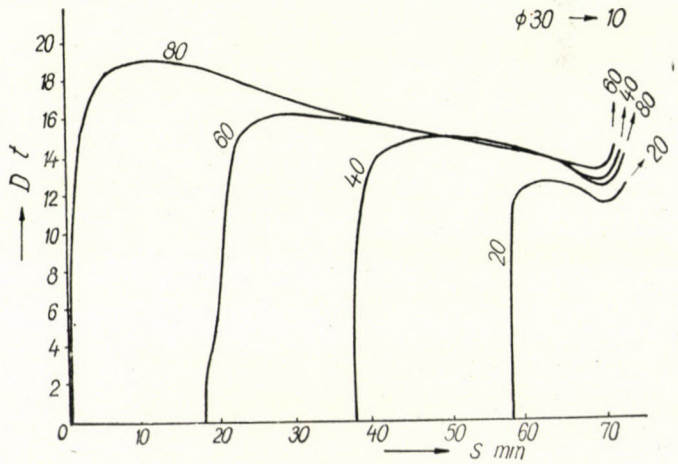


Abb. 10

stücken mit 30 mm Durchmesser und 80 mm Länge runde Stangen mit 10 mm Durchmesser ausgepresst. Die Änderungen der Presskräfte in Abhängigkeit von dem Stempelweg ist auf *Abb. 9* dargestellt.

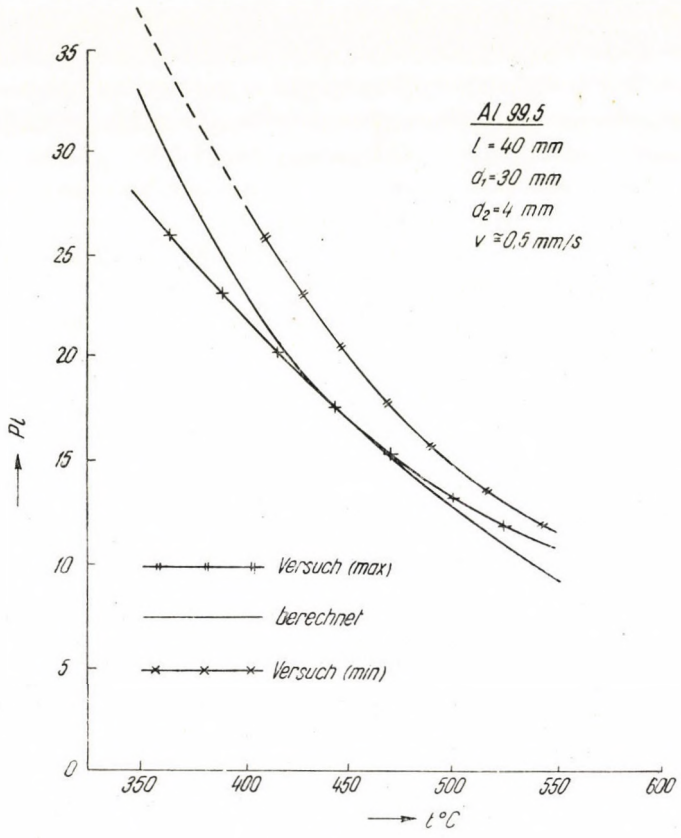

Al 99,5
l = 40 mm
d1 = 30 mm
d2 = 4 mm
v ≈ 0,5 mm/s
Pl
35
30
25
20
15
10
5
0
Versuch (max)
berechnet
Versuch (min)
350
400
450
500
550
600
t °C

Abb. 11

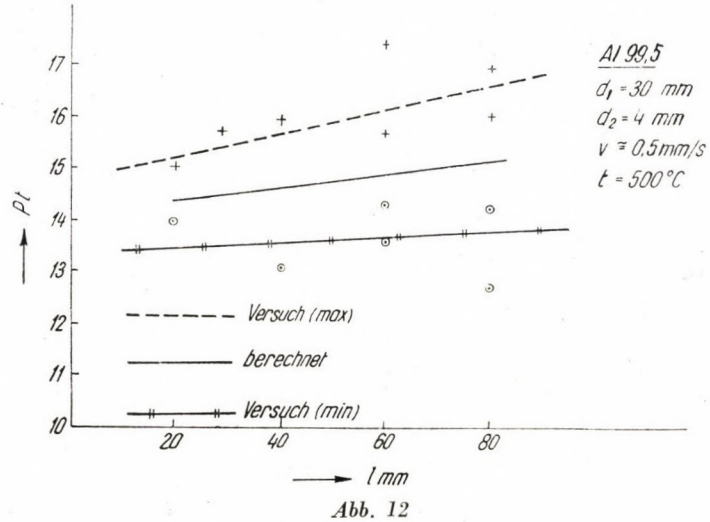

Al 99,5
d1 = 30 mm
d2 = 4 mm
v ≈ 0,5 mm/s
t = 500 °C
Pl
17
16
15
14
13
12
11
10
Versuch (max)
berechnet
Versuch (min)
20
40
60
80
l mm

Abb. 12

Auf *Abb. 6* haben wir bereits gesehen, dass beim Pressen des Probekörpers die Netzeinteilung des Längsschnittes, wenn der Rezipient mit Öl geschmiert wird, sich sehr wenig deformiert. Folglich ist in diesem Fall die Kraft, die zum Hervorbringen der inneren Materialverschiebungen nötig ist, klein, was aus *Abb. 6* deutlich zu erkennen ist. Die inneren Materialverschiebungen treten — wie gesagt — nur in der Nähe des Presswerkzeugs auf, so bezieht sich das Volumen V in der Gleichung (4) nur auf einen Bruchteil des Gesamtblockvolumens.

Bei den Versuchen wurde auch der Einfluss der Blocklänge auf den Kraftverlauf beim Pressen ermittelt *(Abb. 10)*.

Mit derselben Einrichtung habe ich auch Aluminium-Warmpressversuche durchgeführt. In einer Versuchsreihe wurden Probestücke bei verschiedenen Presstemperaturen ausgepresst. Der Durchmesser der Aluminiumprobestücke betrug 30 mm und deren Länge 40 mm ; der Durchmesser der ausgepressten Stangen war 4 mm, die Pressgeschwindigkeit 0,5 mm/s. Die Ergebnisse der Pressversuche sind in *Abbildung 11* zusammengefasst. Aus dieser Abbildung ist deutlich zu erkennen, dass die Versuchsergebnisse und die berechneten Werte gut mit einander übereinstimmen.

In einer anderen Versuchsreihe wurden gleichfalls aus Aluminium-Probestücken mit 30 mm Durchmesser und 40 mm Länge Rundstangen mit 4 mm Durchmesser warm ausgepresst. Die Presstemperatur war 500° C. Die berechneten und Versuchsergebnisse stimmen auch hier gut überein *(Abb. 12)*.

Die beiden letzten Versuchsreihen beweisen demnach, dass mein Rechnungsverfahren (Gleichungen 1—7) auch bei ganz verschiedenen Pressverhältnissen zu befriedigenden Ergebnissen führt.

b) Pressen im Gesenk

Bis jetzt ist das Problem der Berechnung der Kräfte beim Pressen (Schmieden) im Gesenk ganz ungelöst. Ausser einigen in ihrer Gültigkeit stark begrenzten empirischen Formeln und Daten bietet die Fachliteratur kaum etwas zur Lösung dieses Problems. Systematische Versuche wurden in dieser Richtung kaum ausgeführt, und die ausgeführten Versuche bezogen sich hauptsächlich auf die Erklärung des Materialflusses im Gesenk während des Pressens (Schmiedens), aber die Frage der Berechnung der Presskraft blieb dabei ungelöst [7]. Der Hauptfehler dieser Versuche bestand darin, dass der Einfluss der mit der Gratbildung gleichzeitig auftretenden sogenannten Gratreaktion nicht ausgeschaltet wurde, wodurch man von den Versuchsergebnissen stets nur ein unklares Bild erhielt. Beim Pressen im Gesenk setzt sich nämlich die Gesamtpresskraft aus mehreren Kräften zusammen *(Abb. 13)*. Aus der Kraft P_1, welche die Hauptverformung hervorbringt und den Grat aus dem Gratspalt hinausdrückt, aus der Kraft P_2, welche den Grat zusammendrückt, und aus der Kraft P_3, welche die freie Ausdehnung des Grates hindert. Will man also die Änderungen der

Kraft P_1 während des Pressens von jeder Störwirkung frei erfassen, so muss man das Pressen in einem Gesenk vornehmen, in dem keine Gratreaktion auftritt. Die Forscher, die sich bisher mit dieser Frage befassten, liessen diesen Umstand ausser acht, und so kamen sie zu keinen theoretisch erfassbaren Versuchsergebnissen.

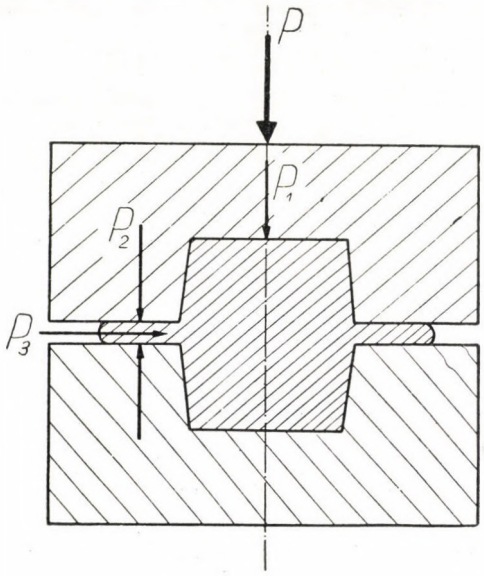


Abb. 13

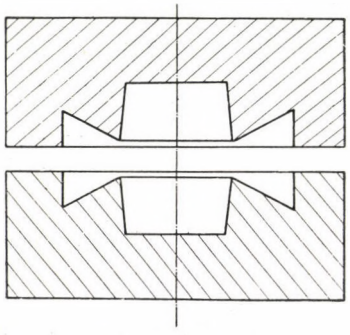


Abb. 14

Damit wir die Kraft P_1 ohne die Störwirkungen untersuchen können, müssen wir unsere Versuche in einem Gesenk ausführen, in dem keine Gratreaktion auftritt. Ein solches Presswerkzeug ist auf *Abb. 14* ersichtlich. An diesem Werkzeug ist die Gratnut so ausgebildet, dass weder die Kraft P_2 noch P_3 auftreten kann. Beim Pressen in einem solchen Presswerkzeug spielt sich der

Pressvorgang so ab, wie es in *Abb. 10* wiedergegeben ist. *Abb. 15/a* zeigt den Beginn des Pressvorganges, auf *Abb. 15/b* ist das Gesenk ausgefüllt und die Gratbildung beginnt, auf *Abb. 15/c* ist der Grat aus dem Gratspalt herausgetreten, auf *Abb. 15/d* ist der Pressvorgang beendet.

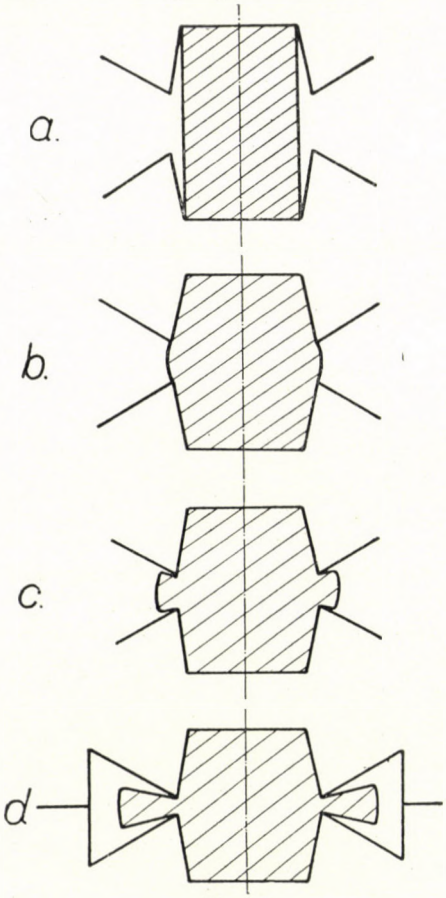


Abb. 15

Zur Ermittlung der Presskräfte habe ich ein in *Abb. 16* abgebildetes Gesenk konstruiert und das fertiggestellte Werkzeug auf unsere 30 Tonnen *Amsler*sche Universal-Reissmaschine angebracht.

Das ausgeführte Gesenk ist auf *Abb. 17* und *Abb. 18*, das auf die Reissmaschine montierte Presswerkzeug auf *Abb. 19* zu sehen.

Mit diesem Werkzeug bzw. mit dieser Einrichtung wurden die Versuche durchgeführt, welche dem in *Abb. 15* demonstrierten Pressvorgang entsprechen. Dabei wurde selbstverständlich die Presskraft gemessen.

Bei der ersten Versuchsreihe habe ich verschiedene Pressstücke zusammengedrückt *(Abb. 20, 21 und 22)*. Zu den Versuchen wurden runde Bleikörper von 40 mm Durchmesser und verschiedenen Höhen (50—85 mm) angewendet.

Die Änderungen der Presskräfte während des Pressvorganges bei verschiedenen Anfangshöhen sind in den *Abbildungen* 23—28 zu sehen. Bei dem ersten Versuch *(Abb. 20 und 23)* bei dem die Ausgangshöhe des Probekörpers nur 55 mm betrug, trat aus dem Gratspalt noch kein Grat heraus ; hier wurde nur noch das Gesenk mit dem Werkstoff völlig ausgefüllt. War der Ausgangsprobekörper 60 mm hoch *(Abb. 21* und *25)*, dann trat schon aus dem Gratspalt beim Pressen ein Grat heraus. Das Diagramm des Kraftverlaufes *(Abb. 25)* zeigt bereits die Punkte, welche den Pressvorgang auf begrenzte Abschnitte aufteilen.

Punkt *a* bedeutet die Kraft, bei deren Auftreten das Hohl des Gesenks vom Werkstoff völlig ausgefüllt wird. Bei Punkt *b* beginnt das Austreten des

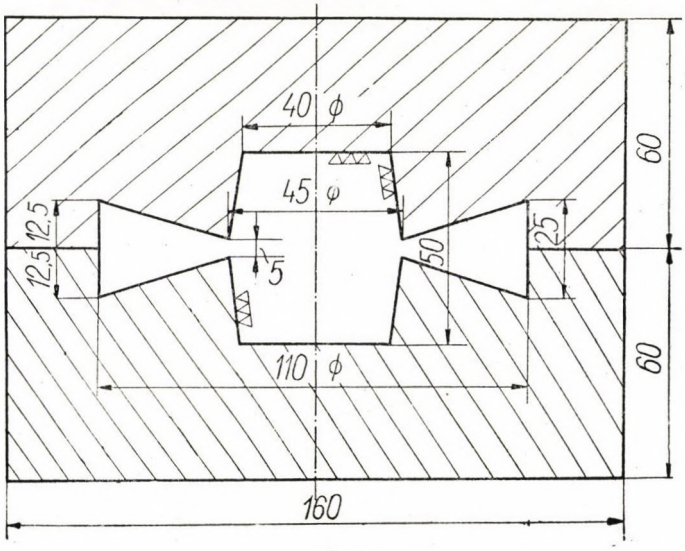


Abb. 16

Werkstoffes aus dem Gratspalt, bei Punkt (Kraft) *c* ist der Grat aus dem Gratspalt bereits herausgetreten. Bei Punkt (Kraft) *d* hat sich das Werkzeug geschlossen : eine weitere Verformung ist unmöglich.

Die Diagrammreihe 23—28 zeigt, dass der Unterschied zwischen den Kräften, welche durch die Punkte *b* und *c* dargestellt sind, desto grösser ist, je dünner der aus dem Gratspalt heraustretende Grat ist ; d. h. der Unterschied ist desto kleiner, je dicker der Grat ist. Es kann weiters beobachtet werden: der Linienteil *b—c* ist desto steiler, je dünner der aus dem Gratspalt heraustretende Grat im Augenblick des Heraustretens ist, und desto weniger steil, je dicker der Grat im Augenblick des Heraustretens ist. Abschnitt *c—d* ist desto länger, je dicker der Grat im Augenblick des Heraustretens aus dem Gratspalt ist.

Bei den Versuchen wurde der Materialfluss im Innern des gepressten Stückes ebenfalls beobachtet. Um Aufschlüsse über den Werkstoffffluss im Innern der Probekörper zu gewinnen, wurden eine Reihe von Bleiproben in der Sym-

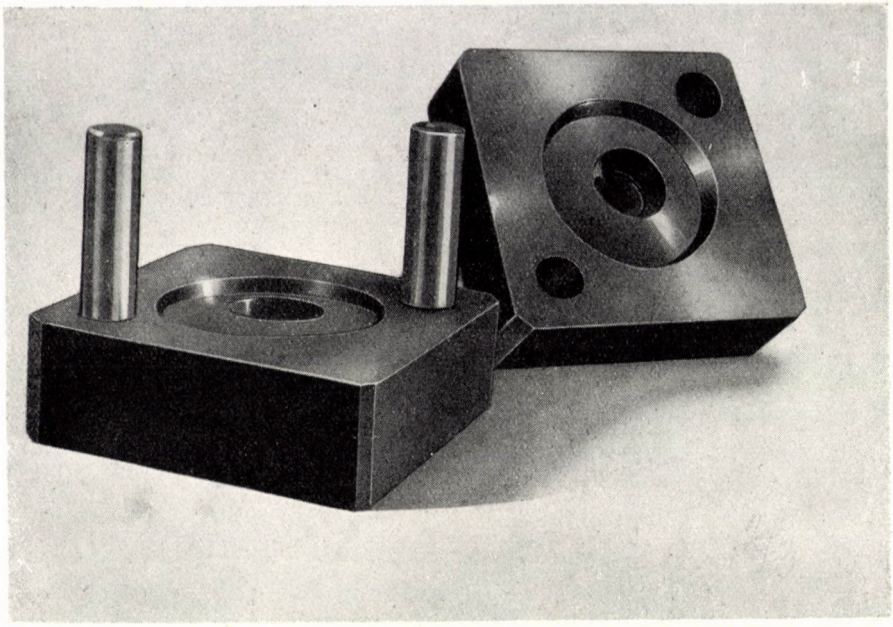


Abb. 17

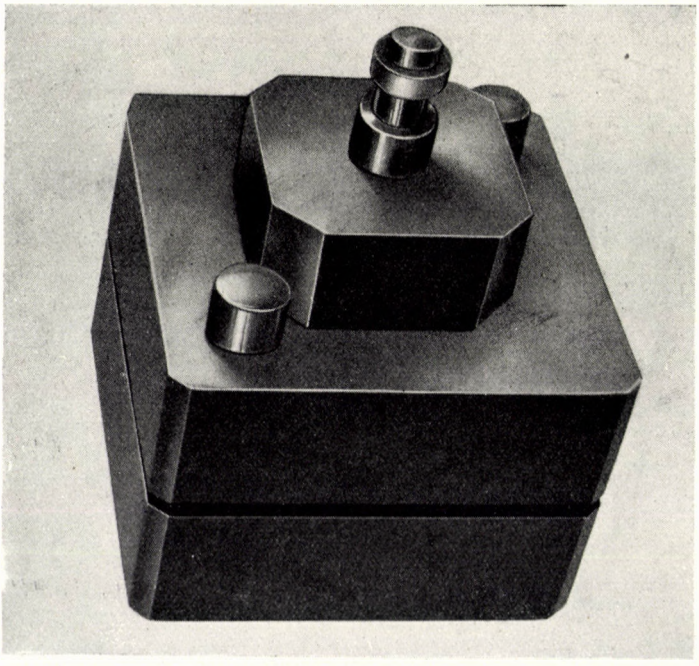


Abb. 18

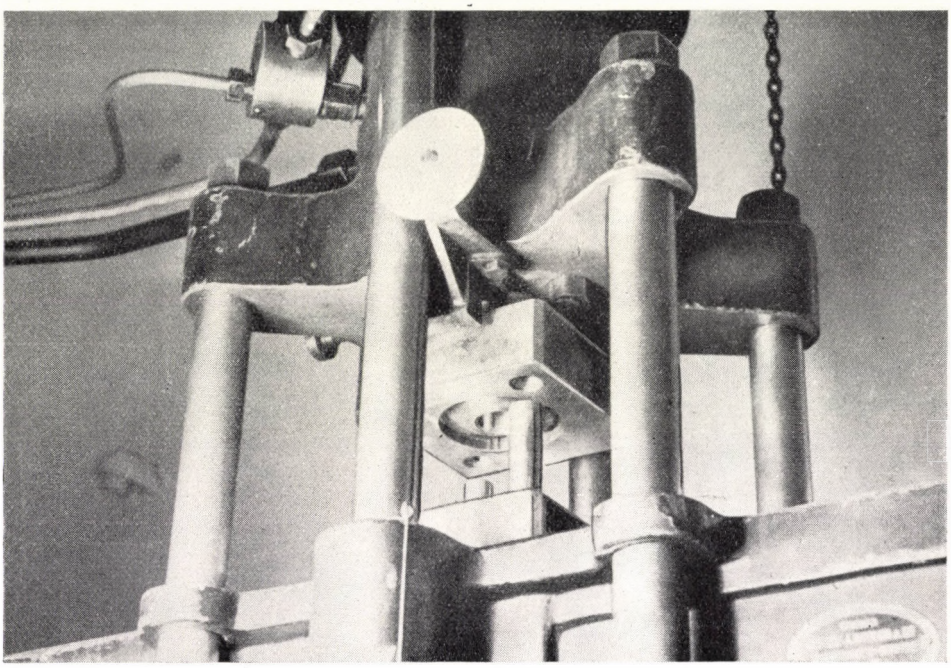


Abb. 19



Abb. 20



Abb. 21



Abb. 22

metrieebene geteilt und auf der Teilungsfläche mit einem eingeritzten, rechtwinkligen Liniennetz von 5 mm Abstand versehen. Die so vorbehandelten Proben wurden dann unter der Presse wie ungeteilte Probestücke in die Gesenke

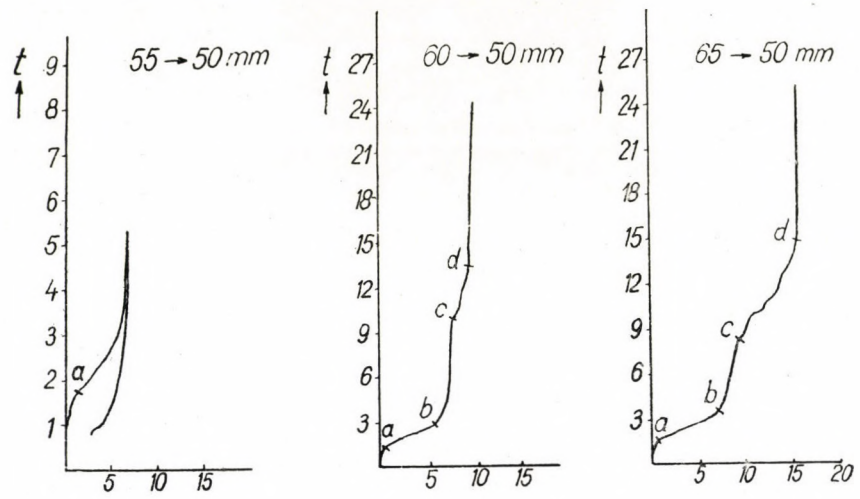


Abb. 23, 24, 25

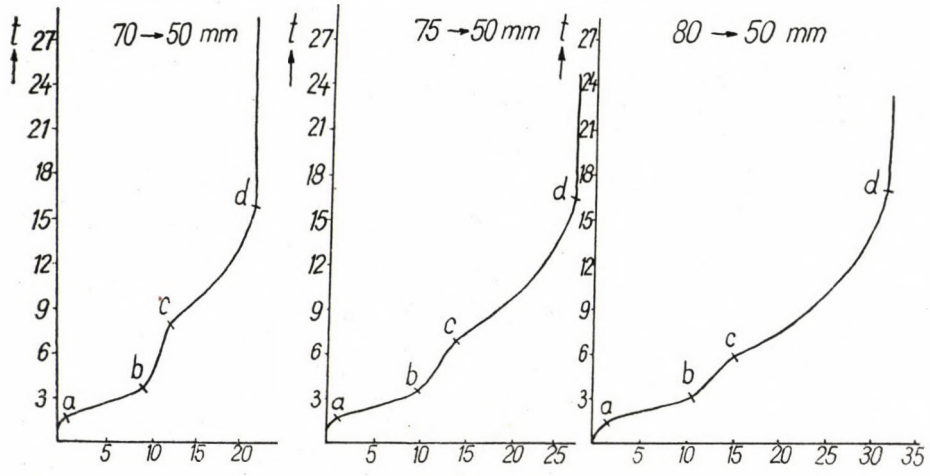


Abb. 26, 27, 28

gepresst. Der innere Materialfluss ist in den *Abbildungen 29—32* zu sehen. Bei diesen Versuchen wurde das Gesenk bis zur völligen Ausbildung des Grates zusammengedrückt. Es wurde auch das Anfangsstadium der Gratbildung beo-

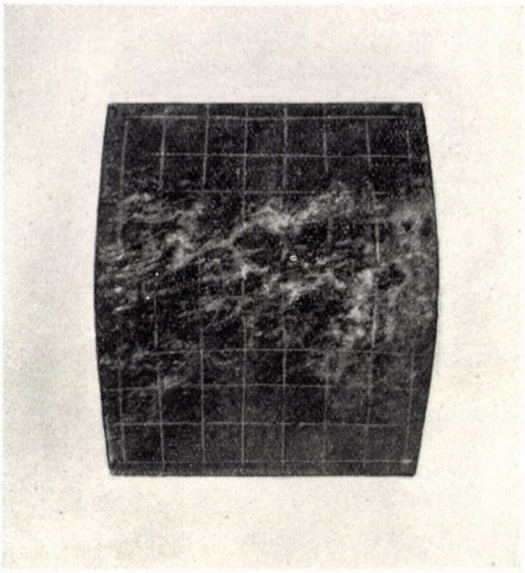


Abb. 29

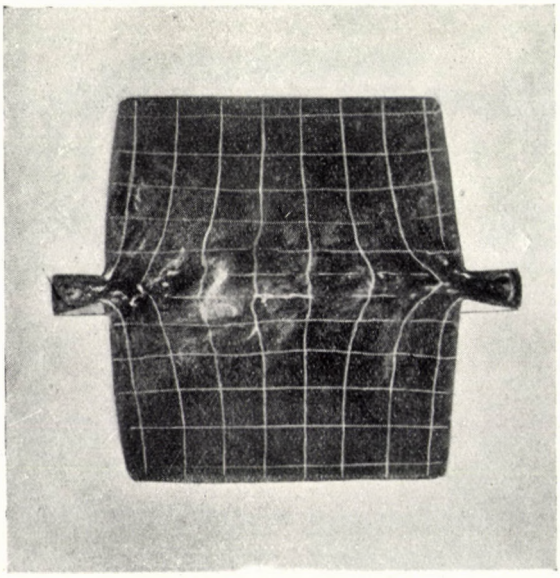


Abb. 30

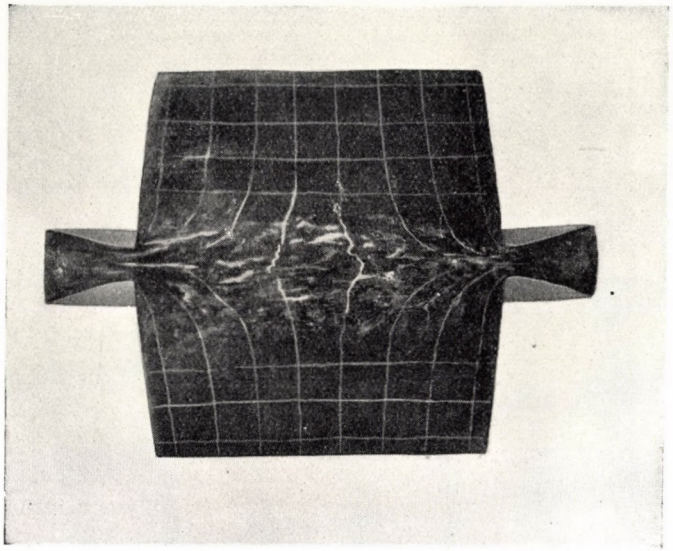


Abb. 31

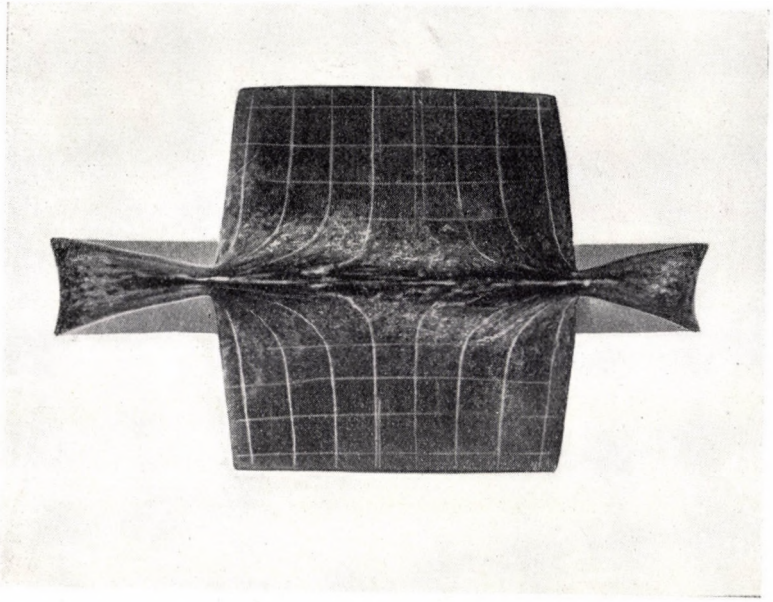


Abb. 32

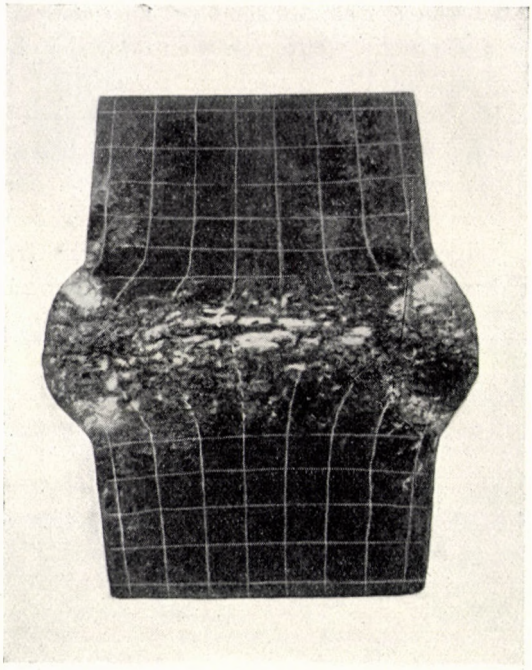


Abb. 33

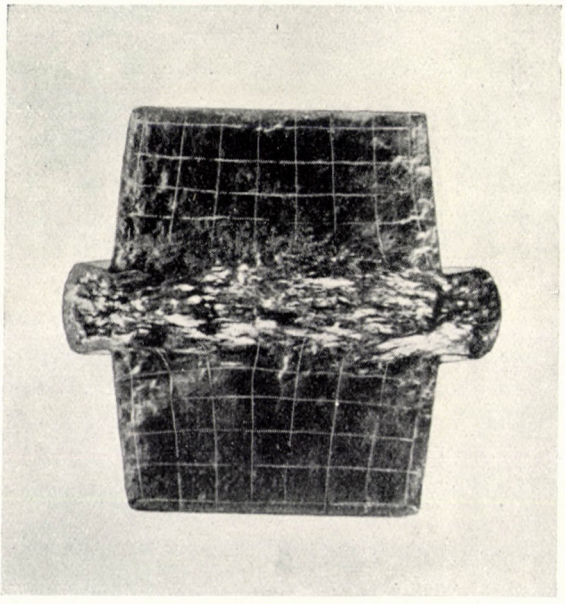


Abb. 34

bachtet *(Abb. 33 und 34)*. In beiden letzten Fällen wurden solche Probekörper zusammengedrückt, bei welchen ein dicker Grat zu erwarten war.

Im Laufe meiner Versuche wollte ich nicht nur den Werkstoffffluss beobachten, sondern mir auch darüber Aufschluss verschaffen, wie sich die Presskraft in Abhängigkeit von dem Deformationsweg ändert. Ich wollte ferner ermitteln, wie man die Grösse der Presskraft rechnerisch bestimmen kann. Auf den *Abbildungen 23—28* weisen die Diagramme vier besonders wichtige Punkte *(a, b, c, d)* auf. Die grösste Bedeutung haben für unseren weiteren Gedankengang, der Punkt *c., d.* h. diejenige Kraft bei der der Grat aus dem Gratspalt heraustritt und die Linie *c—d*, deren jeder Punkt berechnet werden kann.

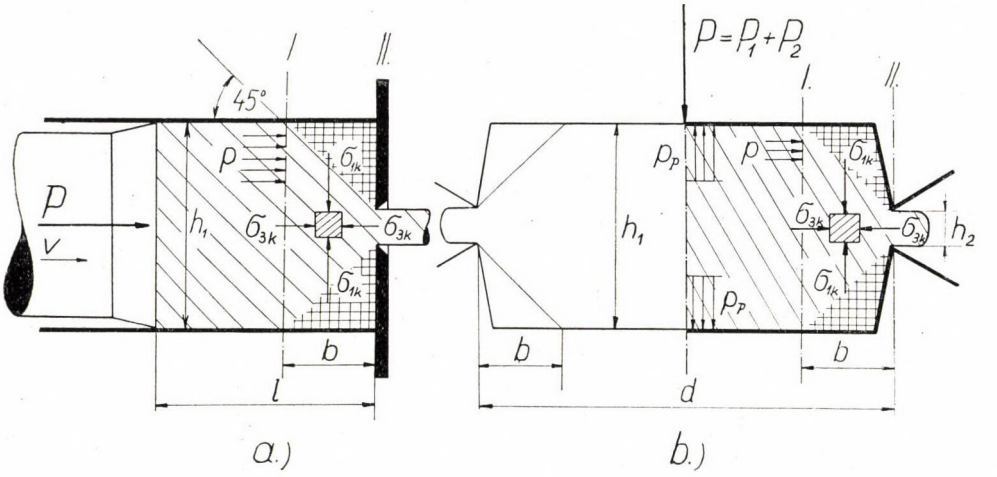


Abb. 35

Jetzt wollen wir die Kräfte in dem einfachen Fall des Gesenkpressens, die wir zum Gegenstand unserer Untersuchungen gemacht haben, durch Berechnung bestimmen.

Dieses Problem kann auf das Problem des Strangpressens zurückgeführt werden. Werfen wir einen Blick auf *Abb. 35*. Hier sind die prinzipielle Darstellung des Strangpressens und das Pressen im Gesenk nebeneinander gestellt. Die Identität der beiden Verformungsvorgänge liegt auf der Hand. Bei beiden drückt die im Querschnitt *I—I* wirkende Spannung p den Werkstoff durch die hinter der h_2 hohen Austrittsöffnung im Werkstoff selbst sich bildende kegelige Düse («Ziehdüse») heraus.

Die Spannung p ist laut Gleichung 2 :

$$p = 2 \cdot k_m - k_f .$$

Der mittlere Verformungswiderstand in der hinter dem Presswerkzeug bzw. Gratspalt entstehenden kegeligen Düse ist [1]:

$$k_m = \frac{k_f}{1 - 0{,}93 \cdot \frac{F}{f_1}}. \tag{1}$$

Beim Pressen in dem von uns gewählten einfachen Gesenk *(Abb. 35/b)* ist

$$f_1 = (d - 2 \cdot b) \cdot h_1 \cdot \pi \tag{9}$$

und die Fläche des Gratspaltes:

$$f_2 = d \cdot \pi \cdot h_2 . \tag{10}$$

In diesen Gleichungen ist d der Durchmesser des Gesenkes in der Gratebene, h_1 die Entfernung der beiden Gesenkböden, h_2 die Höhe des Gratspaltes. h_1 und h_2 ändern sich während des Pressens fortwährend bzw. sie werden immer kleiner.

Die Abnahme F ist beim Pressen im Gesenk *(Abb. 35/b)*:

$$F = f_1 - f_2 = (d - 2 \cdot b) \cdot h_1 \cdot \pi - d \cdot \pi \cdot h_2. \tag{11}$$

Wie gesagt, wird der Grat durch den Gratspalt durch die Spannung p, welche an der Zylinderfläche I—I (f_1) wirkt, bzw. durch die Kraft

$$P_0 = h_1 \cdot (d - 2 \cdot b) \cdot \pi \cdot p \tag{12}$$

herausgedrückt.

Diese Kraft P_0 wird aber durch die Kraft

$$P_1 = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot p_P \tag{13}$$

hervorgebracht, welche an den Bodenflächen a—a und b—b des Gesenkes wirkt. p_P ist die Spannung die längs der Bodenflächen a—a und b—b auftritt.

Laut *O. Mohrs* Theorie ist in erster Annäherung

$$p_P = p + k_f, \tag{14}$$

das heisst

$$p_P = (2 \cdot k_m - k_f) + k_f = \frac{2 \cdot k_f}{1 - 0{,}93 \cdot \frac{F}{f_1}}, \tag{15}$$

$$p_P = 2 \cdot k_m, \tag{16}$$

und so ist

$$P_1 = 2 \cdot k_m \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}. \tag{17}$$

Während des Pressens im Gesenk finden im Innern des gepressten Werkstoffes Materialverschiebungen statt. Das Werkstoffvolumen, in welchem die Materialverschiebungen stafttinden, ist von der Form und von den Abmessungen des Gesenkes abhängig. Zur Hervorbringung dieser Materialverschiebungen ist eine Kraft P_2 nötig. Diese Kraft kann in der gleichen Weise ausgerechnet werden, wie bei dem Strangpressen, folglich :

$$P_2 = \psi \cdot p_P \cdot V \tag{18}$$

wo

$$\psi = C \cdot \sqrt[4]{\frac{v}{h_1}}. \tag{19}$$

In diesen Gleichungen ist V (cm^3) das Werkstoffvolumen in welchem innere Materialverschiebungen stattfinden, v (cm/s) ist die Pressgeschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit, mit der die beiden Gesenkboden sich nähern, h_1 ist die jedesmalige Entfernung der beiden Gesenkboden, $C = 0{,}025$ eine Konstante.

Die Kraft, welche erforderlich ist, den Grat durch den Gratspalt herauszudrücken ist :

$$P = P_1 + P_2 \tag{20}$$

daher

$$P = 2 \cdot k_m \cdot \left[\frac{d^2 \cdot \pi}{4} + \psi \cdot V\right]. \tag{21}$$

P ist also diejenige Kraft, die nötig ist, damit der Grat aus dem völlig ausgefüllten Gesenk heraustrete, wenn dabei keine Gratreaktion auftritt. Die Kraft vergrössert sich während des Schliessens des Werkzeuges. Nach der Schliessung des Werkzeuges steigt plötzlich die Druckkraft.

Die Querschnitte der gepressten Probestücke lassen feststellen, dass nachdem die Tiefe des Gesenkes ein bestimmtes Mass überstiegen hat, die Werkstoffverschiebungen während des Herauspressens des Grates nicht in dem das Gesenk ausfüllenden ganzen Volumen des gepressten Werkstoffes entstehen *(Abb. 36)*. Es kann im allgemeinen beobachtet werden, dass nur in jenem Teil des das Gesenk ausfüllenden Materials innere Werkstoffverschiebungen entstehen, dessen Querschnitt in *Abb. 37* mit dem Achteck *ABCDEFGH* eingeschlossen ist. Der Werkstoff kann nämlich nur aus dem durch den 45° Winkel der toten Ecken bestimmten kegeligen Volumen *(AID* bzw. *EKH)*

herausfliessen. Es kommt aber nicht der gesamte Kegelinhalt in Bewegung sondern nur das durch die beiden Kugelflächen mit Radius R begrenzte Volumen, welches sich bei A und D bzw. bei E und H tangential an die beiden Kegelflächen AID bzw. EKH schmiegt. Das Volumen V in welchem bei der Heraus-

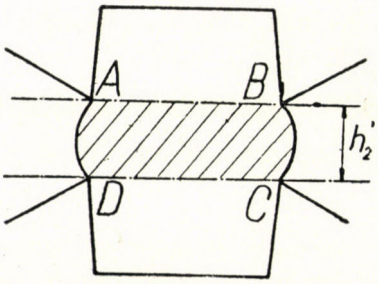


Abb. 36

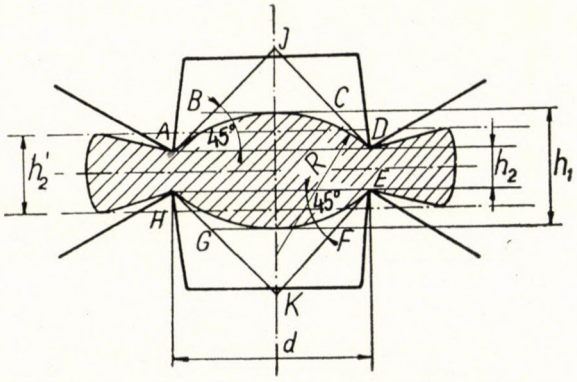


Abb. 37

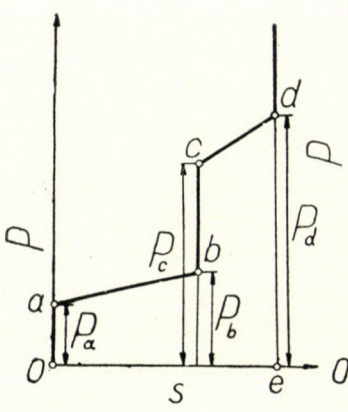


Abb. 38/a

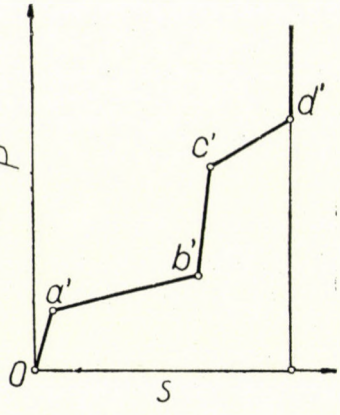


Abb. 38/b

pressung des Grates innere Werkstoffverschiebungen auftreten, wird also durch die Entfernung (h_1) der beiden Kugelflächen, durch die Grösse der toten Ecken und durch den Durchmesser (d) der Gratebene bestimmt *(Abb. 37)*.

Laut der obigen Ausführungen kann der Kraftverlauf in Abhängigkeit des Deformationsweges in dem von uns gewählten einfachen Fall des Pressens im Gesenk berechnet werden.

Auf *Abb. 38/a* bedeutet Punkt a auf dem Presskraft-Verformungsweg-Diagramm die Druckkraft, welche im Anfangsmoment der Verformung auftritt.

Diese Kraft ist $P_a = k_f \cdot f_0$ *(Abb. 38/a)*. Mit dem Fortschreiten der Verformung vergrössert sich der Querschnitt des gepressten Stückes. Bei der Ausfüllung des Gesenkes ist der grösste Querschnitt des Stückes f_2, und die Druckkraft kann annähernd zu $P = k_f \cdot f_2$ angenommen werden.

Bei weiterer Schliessung des Gesenkes fliesst der Grat aus dem Gratspalt heraus, wobei er sich immer mehr verjüngt. Mit der Verdünnung des Grates

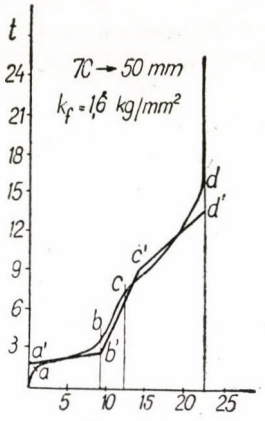


Abb. 39

wird die Presskraft immer grösser. Die dem Punkt *d* entsprechende Presskraft P_d entsteht bei der kleinsten Gratdicke *(Abb. 39/e)*. Bei diesem Punkt schliesst sich das Gesenk. Soweit die Presse weiter wirkt, steigt die Presskraft plötzlich, es entsteht aber weiter keine Verformung.

Die Fläche *oabcdeo* auf *Abb. 38* ist proportional zu der Verformungsarbeit.

In Wirklichkeit springt die Kraft bei der Bildung des Grates nicht plötzlich von P_b auf P_c, sondern steigt zwar steil aber doch allmählich.

Auf *Abb. 39* sieht man den berechneten und den experimentell festgestellten Verlauf der Presskraft beim Pressen von Blei-Probekörpern, deren Höhe 70 mm und deren Durchmesser 40 mm war. Gepresst wurde in dem Versuchsgesenk nach *Abb. 16*.

In *Abb. 40* sind die experimentell und rechnerisch ermittelten *c* Punkte gegenübergestellt beim Auspressen im Versuchsgesenk von Probekörpern mit verschiedenen Anfangshöhen.

Bisher wurde der Fall des Gesenkpressens ohne Gratreaktion untersucht. Im nachstehenden soll der Fall des Gesenkpressens untersucht werden, bei dem Gratreaktion auftritt.

Die Gratreaktion entsteht, wenn der Grat während seiner Bildung unter Druck steht *(Abb. 41)*. In diesem Fall vergrössert sich die zum Herausdrücken

des Grates aus dem Gratspalt nötige Kraft, und dabei ist noch eine Kraft zum zusammendrücken des Grates erforderlich.

Für die Untersuchung dieses Falles liess ich zwei Gesenke mit gleichen Abmessungen herstellen, aber das eine wurde mit offener Gratnut, in der keine Gratreaktion auftreten kann (*42/a*), das andere dagegen mit einer Gratnut versehen, bei der der Grat während der Gratbildung immer unter Druck stand

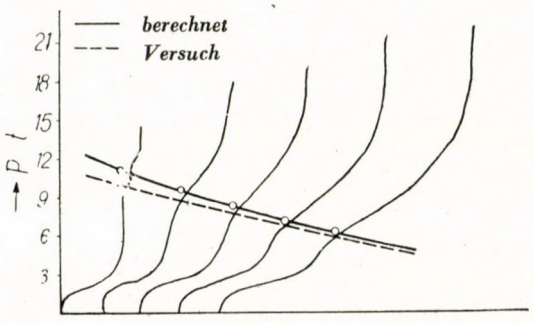


Abb. 40

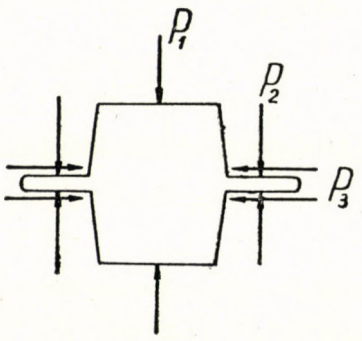


Abb. 41

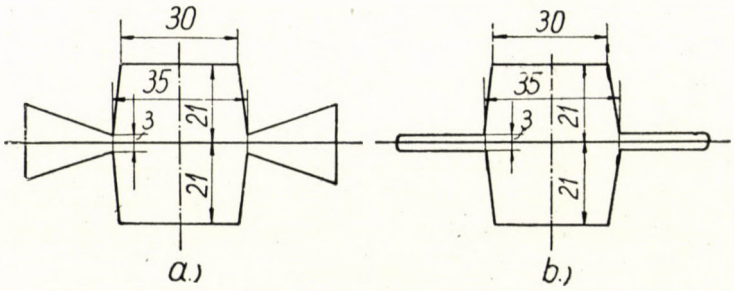


Abb. 42

(Abb. 42/b). Die Versuche wurden auf der 30 t *Amsler*schen Universal-Reissmaschine durchgeführt, mit runden Bleikörpern von 30 mm Durchmesser, deren Verformungsfestigkeit $kf = 1{,}6$ kg/mm² war. Die Lichtbilder der ausgepressten Probekörper sind auf den *Abbildungen 43—46* zu sehen.

Aus der Vielzahl der Versuche werde ich hier nur zwei parallele Proben vorführen. In *Abb. 47/a—b* sind die Kraftverlaufdiagramme zweier Pressversuche mit Probekörpern von 58 mm Anfangshöhe wiedergegeben. In *Abb. 47/a* sieht man den Presskraftverlauf während des Pressens mit offener Gratnut, in *Abb. 47/b* den Presskraftverlauf während des Pressens bei dem die Gratbildung sich unter Druck vollzog. In *Abb. 47/a* sind die Punkte *a*, *b*, *c*, *d* deutlich zu erkennen. Dagegen ist in *Abb. 47/b* der Punkt *d* verschwunden, da die Kraft von Punkt *c* an rapid steigt. Die maximale Druckkraft konnte ich nicht feststellen, da die Druckkraft der 30 Tonnen-Presse nicht so weit ausreichte.

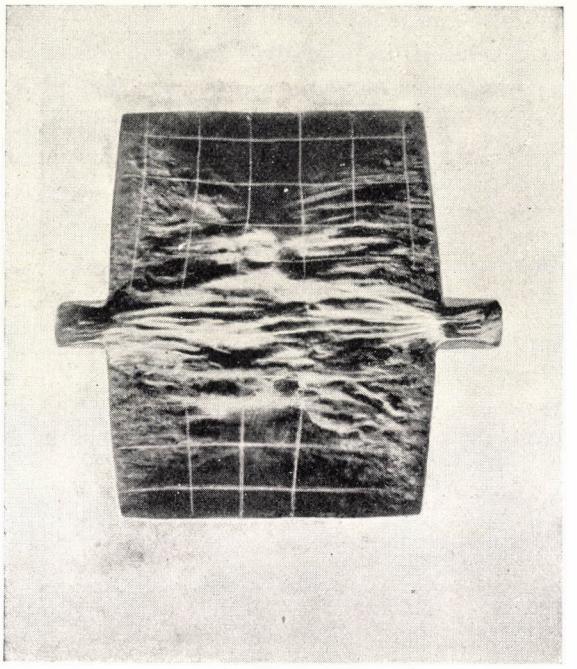


Abb. 43

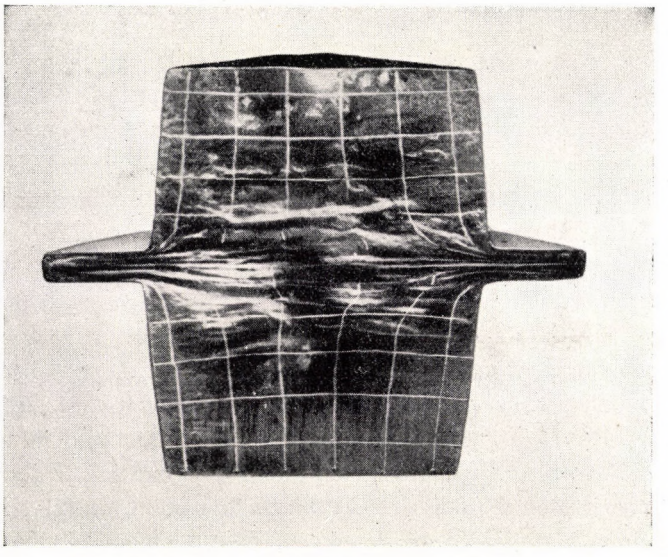


Abb. 44



Abb. 45

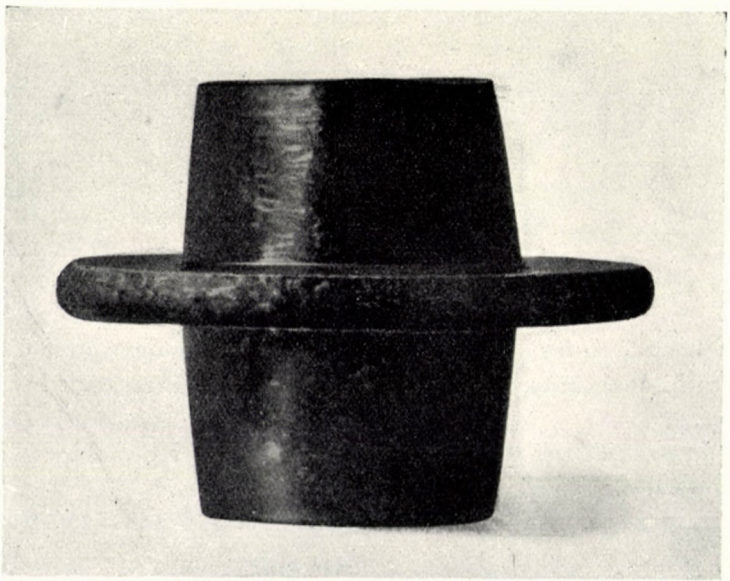


Abb. 46

Auf den *Abbildungen 48/a—b* sieht man den Abbildungen *47/a—b* ähnliche Kraftverlaufdiagramme. Hier war die Anfangshöhe der Bleiprobekörper 55 mm.

In *Abb. 49* wurden die Diagramme *48/a und 48/b* aufeinander gezeichnet, wobei der zwischen der Presskraft und der Pressarbeit vorhandene Unterschied deutlich hervortritt. Der längere Deformationsweg in *Abb. 48/b* ergibt sich aus der elastischen Deformation der Reissmaschine.

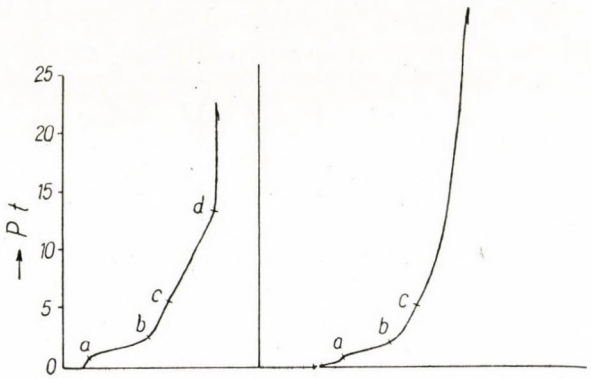


Abb. 47

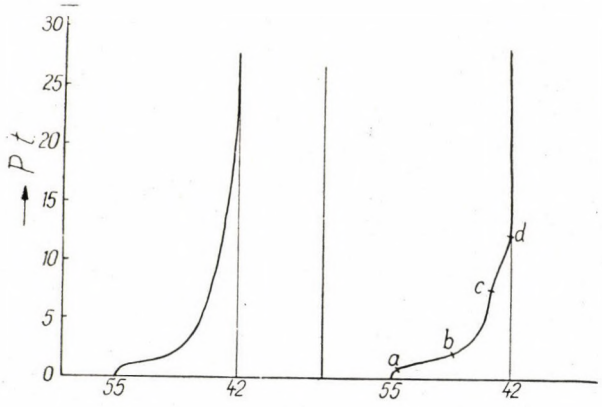


Abb. 48

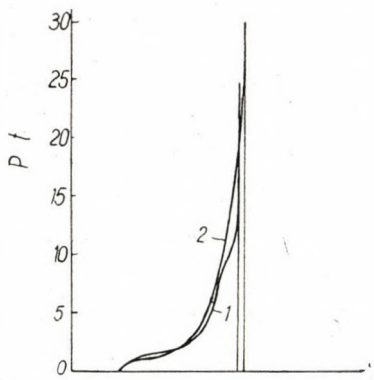


Abb. 49

Im allgemeinen ist aus diesen Versuchen zu erkennen, dass die Presskraft bei der Gratbildung unter Druck das Mehrfache der Presskraft bei freier Gratbildung ist.

Die Presskraft bei auftretender Gratreaktion kann folgenderweise ausgerechnet werden:

Die zum Zusammendrücken des Grates nötige Kraft ist *(Abb. 50)*:

$$P_3 = k_{grm} \cdot \left(\frac{D^2 - d^2}{4} \right) \cdot \pi \ , \qquad (22)$$

wo k_{grm} in erster Annäherung den beim Zusammendrücken des Grates auftretenden mittleren Verformungswiderstand bedeutet:

$$k_{grm} = \frac{k_f}{1 - \mu \cdot \frac{x}{h}} \quad , \tag{23}$$

oder genauer:

$$k_{grm} = k_f \cdot \frac{h_2}{2 \cdot \mu \cdot x} \cdot \left(e^{\frac{2\mu}{h_2} \cdot x} - 1\right) \tag{24}$$

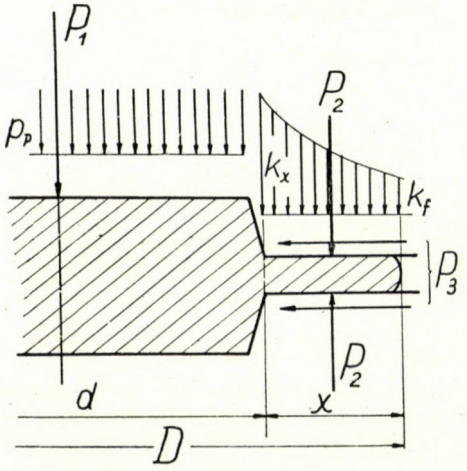


Abb. 50

In diesen Gleichungen ist D der äussere und d der innere Durchmesser des kreisförmigen Grates. $\frac{D^2 - d^2}{4} \cdot \pi$ ist also die gedrückte Oberfläche des Grates, μ der Reibungskoeffizient im Gratspalt.

Gegen das Ausfliessen des Werkstoffes aus dem Gratspalt wirkt die Kraft

$$2 \cdot P_2 \cdot \mu$$

welche in dem h_2 hohen $d \cdot \pi$ langen Gratspalt σ_r Spannung hervorruft. Im allgemeinen kann geschrieben werden *(Abb. 51)*:

$$\sigma_r \cdot h_2 \cdot d \cdot \pi = 2 \cdot P_2 \cdot \mu \quad , \tag{25}$$

oder

$$\sigma_r \cdot h_2 \cdot d \cdot \pi = 2 \cdot k_{grm} \cdot \left(\frac{D^2 - d^2}{4}\right) \cdot \pi \cdot \mu \; . \tag{26}$$

Daraus ist die im Gratspalt auftretende Spannung:

$$\sigma_r = k_{grm} \cdot \mu \cdot \frac{D^2 - d^2}{2 \cdot d \cdot h_2} \,. \tag{27}$$

Hinter dem Gratspalt in der «Ziehdüse» ruft diese Gratspannung eine

$$\sigma_{rm} = \frac{\sigma_r}{2} \cdot \left(1 + \frac{f_2}{f_1}\right) \tag{28}$$

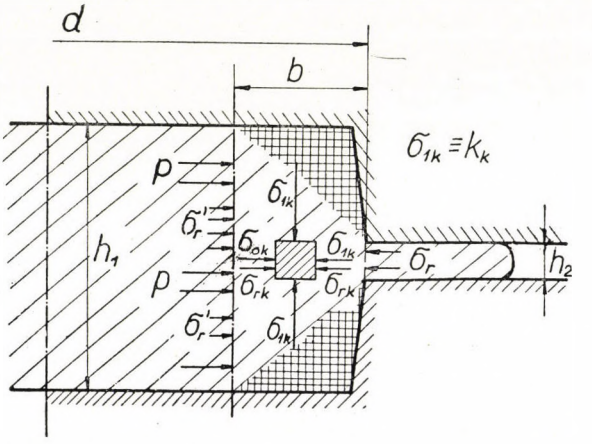


Abb. 51

mittlere Spannung hervor. In dieser Gleichung ist

$$f_1 = h_1 \cdot (d - 2 \cdot b) \cdot \pi \,, \tag{9}$$

$$f_2 = h_2 \cdot d \cdot \pi \,, \tag{10}$$

und so kann diese mittlere Spannung folgenderweise aufgeschrieben werden:

$$\sigma_{rm} = \frac{\sigma_r}{2} \cdot \left[1 + \frac{d \cdot h_2}{(d - 2 \cdot b) \cdot h_1}\right]. \tag{29}$$

Diese mittlere Spannung σ_{rm} addiert sich bei der Verformung zu der mittleren dritten Hauptspannung σ_{rm}. Die Fliessbedingung ist also:

$$k_f = k_m - (\sigma_{3m} + \sigma_{rm}) \tag{30}$$

und der mittlere Verformungswiderstand im «Ziehhol»:

$$k_m = \frac{k_f + \sigma_{rm}}{1 + 0{,}93 \cdot \dfrac{F}{f_1}} \,. \tag{31}$$

Die nötige Presskraft ist also, wenn Gratreaktion auftritt:

$$P = 2 \cdot k_m \cdot \left(\frac{d^2 \cdot \pi}{4} + \psi \cdot V \right) + k_{grm} \cdot \left(\frac{D^2 - d^2}{4} \right) \cdot \pi \,. \qquad (32)$$

In dieser Gleichung muss der mittlere Verformungswiderstand k_m mit der Gleichung (31) und der mittlere Verformungswiderstand k_{grm} mit der Gleichung (23) bzw. (24) berechnet werden.

SCHRIFTTUM

1. *Geleji, A.:* Strangpressen und Presslochverfahren. Acta Technica, 7 (1952) S. 273/283.
2. *Geleji, A.:* Die Berechnung der Kräfte und des Kraftbedarfs bei der Formgebung im bildsamen Zustande der Metalle (deutsch). Akadémiai Kiadó (Akademischer Verlag), Budapest, 1952. S. 164. u. 187.
3. *Handbuch der Metallphysik, Bd. 2. Sachs, G.:* Spanlose Formung der Metalle, Leipzig, 1937. Akademische Verlagsgesellschaft, S. 70.
4. *Eisbein, W.* und *Sachs, G.:* Kraftbedarf und Fliessvorgänge beim Strangpressen. Mitt. dtsch. Mat. Prüf. Anst. Sonderheft 16 (1931).
5. *Bernhoeft, Ch.:* Arbeitsverhältnisse einer direkt angetriebenen 1500 t Strangpresse. Z. f. Metallkunde 24/1932. S. 213/219.
6. *Pearson, C. E.* und *Smythe, I. A.:* The influence of pressure and temperature on the extrusion of metals. J. Inst. Metals. 45/1931. I. S. 345/381.
7. *Pomp, A., Münker, Th.* und *Lueg, W.:* Arbeitsbedarf und Werkstoffffluss beim Schmieden im Gesenk. Mitt. d. Kais. Wilhelm. Inst. f. Eisenfsch. Bd. XX., 1938. Abh. 363. S. 265/291.
8. *Gubkin, S. I.:* Mechanik plastisch deformierbarer Körper (Stangenpressen von Duralumin (Forsch. Inst. Maschinenb. Metallbearb. Moskau, 1931. S. 363—390 (russ.).
9. *Siebel, E.:* Die Formgebung im bildsamen Zustande. Verl. Stahleisen, Düsseldorf, 1932. S. 48/60.
10. *Portevin, A.:* Les essais à chaud des métaux et alliages par compression et par filage. Rev. Métallurg. 26 (1924), 435/443. old.
11. *Sachs, G.:* Praktische Metallkunde, II. Verl. J. Springer, Berlin, 1934. S. 111. Abb. 120.
12. *Sachs, G.:* Praktische Metallkunde, II. Verl. J. Springer, Berlin, 1934. S. 176. Abb. 197.
13. *Siebel, E.:* Formgebung im bildsamen Zustande. Verl. Stahleisen. Düsseldorf, 1932. S. 59. Zahlentafel 10.
14. *Schweissguth, P. H.:* Schmieden und Pressen. Verl. J. Springer, Berlin, 1923. S. 96/104.

ZUSAMMENFASSUNG

Im ersten Teil der Abhandlung sind Laboratoriumsuntersuchungen über den Kraftbedarf und über die Fliessvorgänge beim Strangpressen und Pressen im Gesenk mitgeteilt, die beweisen, dass die vom Verfasser früher aufgestellte Theorie und Rechnungsverfahren zur Bestimmung der Kräfte beim Strangpressen (Acta Technica 4 (1952) S. 273/293) bei jeder Strangpressabmessung und Pressgeschwindigkeit praktisch sehr gute Ergebnisse liefern. Die Gegenüberstellung der, beim Warmpressen von Messing, Kupfer und Aluminium gewonnenen betrieblichen Ergebnisse und der rechnerisch ermittelten Werte, ist bereits in dem oben erwähnten Artikel enthalten. Die hier vorgeführten Laboratoriumsversuche wurden mit Blei kalt und mit Aluminium warm durchgeführt und wurden rechnerisch verfolgt.

Im zweiten Teil der angestellten Laboratoriumsuntersuchungen über den Kraftbedarf und die Fliessvorgänge beim Pressen im Gesenk wurde festgestellt, dass beim Pressen im Gesenk die Presskraft im Anfangsmoment der Gratbildung plötzlich steigt und die grösste Presskraft während der Gratbildung entsteht. Diese Versuche wurden kalt mit Blei durchgeführt. Im Laufe der Versuche wurde weiters bewiesen, dass zwischen dem Pressen im Gesenk und dem Strang-

pressen eine Analogie besteht, und so die Presskraft beim Pressen im Gesenk auf ähnlichen Grundlagen berechnet werden kann, wie beim Strangpressen. Es wird am Ende des Artikels ein Rechnungsverfahren zur Bestimmung der Presskraft im Gesenk entwickelt und durch Versuche kontrolliert.

ШТАМПОВКА НА ПРУТКОВОМ ПРЕССЕ И В МАТРИЦАХ
(СООБЩЕНИЕ О ПРОВЕДЕННЫХ В 1954 г. ОПЫТАХ)

Академик А. Гелеи

Резюме

В первой части статьи дается доказательство теории автора по штамповке в прутковом прессе (созданной уже ранее) в лабораторных масштабах, т. к. эта теория на основе данных производственных опытов была доказана уже ранее. Вторая часть статьи посвящена опытному определению и расчету сил, возникающих при штамповке в матрицах.

POWER DEMAND AND FORMING IN EXTRUSION AND DIE-FORGING
(REPORT ON TESTS EXECUTED IN 1953)

Prof. A. GELEJI

Member of the Hungarian Academy of Sciences

SUMMARY

The first part of the paper verifies the theory of extrusion, — formerly established by the author, — by laboratory tests, after earlier confirmation of his theory by experiments on works scale. The second part deals with the experimental determination and with calculation of forces developed in die-forging.

DEMANDE DE PUISSANCE ET DÉFORMATION AU REFOULEMENT ET A L'ÉTAMPAGE
(COMPTE RENDU D'ESSAIS EXÉCUTÉS EN 1953)

Prof. A. GELEJI

Membre de l'Académie Hongroise des Sc.

RÉSUMÉ

La première partie de l'étude donne à l'aide des essais de laboratoire la confirmation de la théorie du refoulement (extrusion) établie par l'auteur; une preuve de sa thèse a été fournie antérieurement par des essais exécutés sur l'échelle industrielle. La seconde partie traite de la détermination expérimentale et du calcul des forces se produisant à l'étampage.

DESIGN AND OPERATION OF REACTORS FOR TITANIUM PRODUCTION

Prof. L. GILLEMOT

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

INSTITUTE OF MECHANICAL TECHNOLOGY, TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received June, 1954]

1. Introductory

In 1910 *Hunter* [1] first succeeded in producing metallic titanium in a purity required for hot working. *Ti* has great affinity towards *O* and *N*, and already very small contents of *O* or of *N* make it brittle and fragile. There are no exact data on the *O* content of the *Ti* produced by Hunter, because only *P. Ehrlich* [2] succeeded in the determination of *O* in *Ti* in 1941. Hunter reduced $TiCl_4$ by *Na* in a thick-walled bomb. The same way was followed by *Gaiev* [3] too. Essentially on the basis of Hunter's method the Degussa firm (Deutsche Gold und Silberscheideanstalt) was producing *Ti* already on a larger scale during the last war, but this metal was not cold-workable and was only used for vacuum tube getters and as an alloying element in not *Ti*-base alloys.

Ti chemically pure and thus well workable in the cold state was first produced by *van Arkel* and *de Boer* [4]. Their process was based on the disproportioning of TiJ_4 on a tungsten wire glowing at 1200° C. Though *Ti* of highest purity is for the present still prepared by this process, its implementation on a works scale has failed for the last 30 years.

The first industrial process of *Ti* production was elaborated by *Kroll* [5], based on the reduction of $TiCl_4$ by *Mg* (*Ca* or *Na*). Kroll's experimental setup is illustrated in *Fig. 1*. Iron crucible 1 is provided with molybdenum lining 2. The crucible is placed in silica tube 5 and is heated by high-frequency coil 6. The *Mg* 4 is put in the *Mo*-lining. The apparatus is evacuated through tube 10 to a pressure of 0,1 mm *Hg*, afterwards argon is fed from rubber ball 11. By an arc struck across *Ca*-sticks 17 the last traces of impurities can be removed from *Ar*, while for the removal of remnants of water vapour some drops of $TiCl_4$ can be inducted by auxiliary feeding device 9. Tank 14 serves for the $TiCl_4$ feed.

Kroll's original experiment was made with 360 g of *Mg*, for which the necessary amount of $TiCl_4$ was fed during 110 min. At the start of the reaction the temperature was 720° C ; it rose to 1060° C due to heat developed by the reaction. After completion of the reaction the vessel was cooled down in an atmo-

sphere of protective gas, the spongy *Ti* and the $MgCl_2$ formed in the crucible were chipped off by a machine tool. The reaction products thus obtained in chip form were treated with water or with diluted *HCl*; the $MgCl_2$ and *Mg* were thus

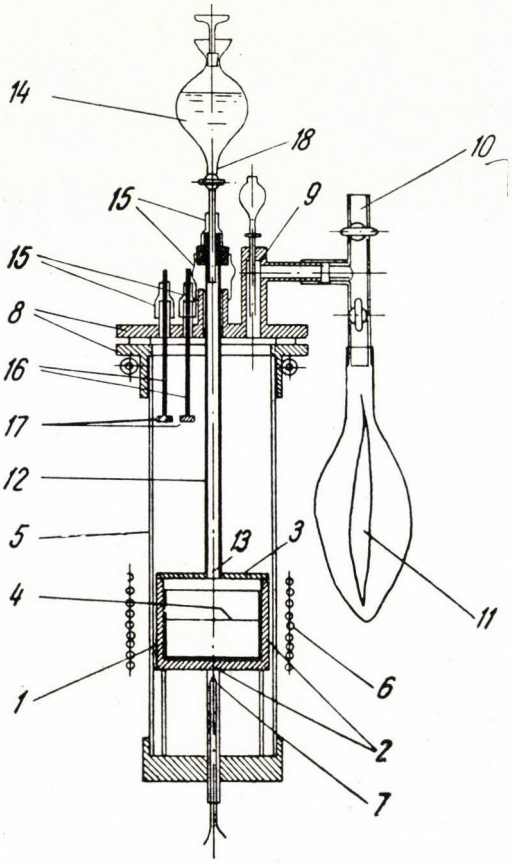


Fig. 1. Reactor used by Kroll

1. Iron crucible
2. Mo-lining
3. Iron cover
4. Mg
5. Silica tube
6. High-frequency coil
7. Thermo-couple
8. Water-cooled cover
9. Pipe fitting to Ar tank
10. Connecting piece to pump
11. Rubber ball for argon feed
12. Pipe for $TiCl_4$ feed
13. Orifice of pipe 12
14. $TiCl_4$ tank
15. Flexible pipes
16. Electrodes
17. Ca-sticks
18. Auxiliary $TiCl_4$ feed

dissolved, and *Ti* in powder and spongy form was obtained suitable for further treatment.

This process originally developed by Kroll for reduction by *Mg* or *Ca* was developed by *Wartman* [6] to works scale. It is interesting that the industrial

production of *Ti* started only in 1951 and has developed on a substantial scale practically during the last three years. Data on world production [7] are as follows :

1950..... works experiments
1951..... 550 tons
1952..... 1100 «
1953..... 3400 «
1954..... 7000 « (target)

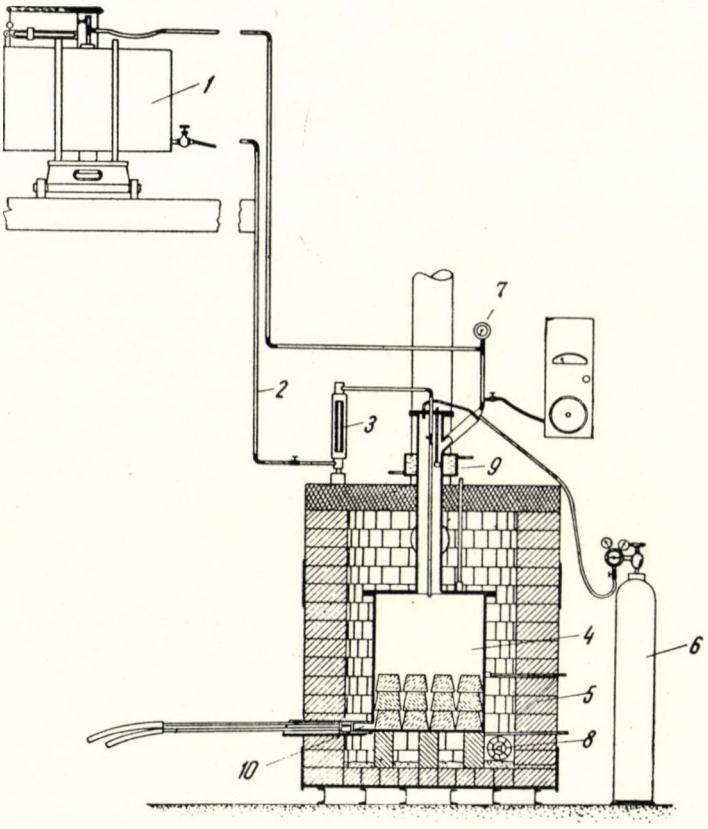


Fig. 2. Wartmann's Reactor

1. $TiCl_4$ tank
2. Pipe line
3. Measurement of $TiCl_4$
4. Iron reactor
5. Furnace walling
6. Helium tank
7. Pressure gauge
8. Gas burner
9. Water cooling
10. Mg drain orifice

Industrial production is practically still based on Kroll's process. Reactors at present used have mostly developed in dimensions only ; they have not displayed any essential changes of design during the last years [8]. The sketch of

actual industrial reactors is shown in *Fig. 2*. The $TiCl_4$ flows from tank 1 through tube 2 and measuring device 3 into welded iron reactor 4. The reactor is placed in an oil-fired furnace. Helium is used to keep up a protective gas atmosphere [6]. Aperture 10 serves for drawing off reaction products. After use this reactor has to be cut open to remove the *Ti* produced during the reaction ; after refilling, it has to be welded together again.

Since the original experiment of Kroll the technolgy of *Ti* production has developed more in dimensions alone, there is an only change of principle in the

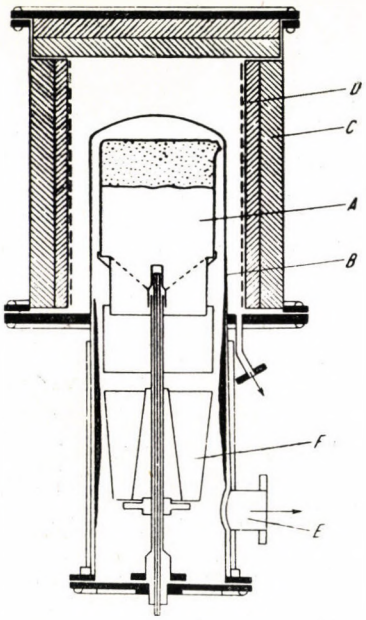


Fig. 3. Ti-Sponge heating furnace
A Reactor vessel with reaction products
B Inner iron mantle
C Furnace walling
D Electric heating jacket
E Pipe flange for pump
$MgCl_2$ collecting tank

separation of reaction products. For that purpose no more washing with water or *HCl* is applied, but the heating arrangement shown in *Fig. 3* is used to make the $MgCl_2$ and the remaining metallic *Mg* run off or evaporate from the *Ti* sponge [9]. Thereby the hardness of the *Ti* produced by Kroll's method has been reduced to Brinell hardness 160—180 on the average, further to Brinell hardness 130 in works tests, and thus the hardness of the physically pure iodide-*Ti* has been approached. By washing with water and *HCl* samples of 180—220 Brinell hardness were obtained.

During the last years several trials have been made to dispense with unhandy reactors. Several researchers have endeavoured to make the process continuous. Thus *Maddex* and *Eastwood* [10] developed the reactor of the type of *Fig. 4*, in which vessel *A* is filled with $TiCl_4$ vapours, and pump *D* feeds

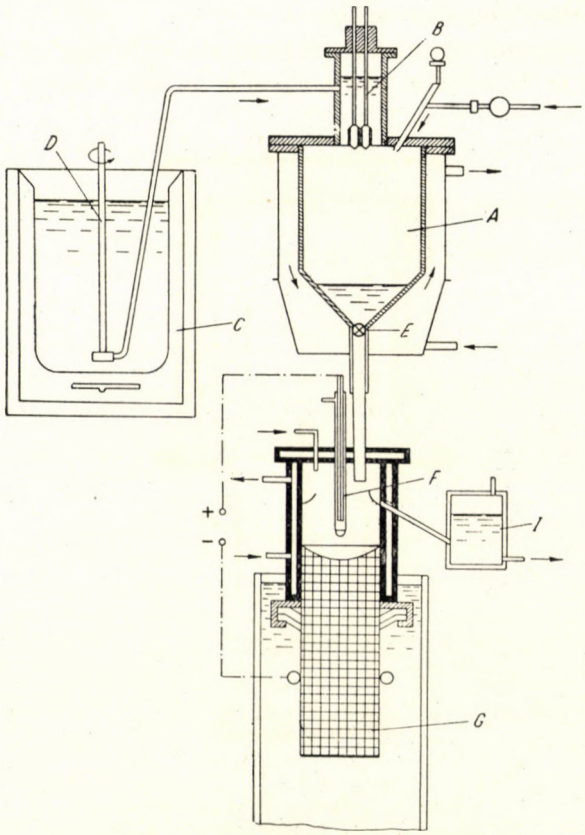


Fig. 4. Continuous Reactor
A Vessel filled with $TiCl_4$ vapour
B Mg-feed valves
C Mg-tank
D Mg-pump
E Valve
F Electrode
G Ti-ingot
I Mg and $MgCl_2$ collecting vessel

liquid *Mg* from tank *C* through valve *B* into the system. The *Mg* fed reacts with the $TiCl_4$, and the $MgCl_2$, the *Mg* in excess, and the *Ti* itself should pass through valve *E* directly into the electric arc furnace, where the *Mg* and the $MgCl_2$ are vapourized and the *Ti*-sponge melts into a small ingot. However, reports published in the meantime have pointed out [8] that the method has not fulfilled the

expectations and the continuous reactor has not been realized, in the first place because the *Ti*-sponge adheres very strongly to the wall of the vessel at the reaction temperature, and its conveyance could not be solved. Therefore industrial production is still going on with the old reactors, one disadvantage of which is that the system has to be cooled down after every reaction, the reactor split up, products removed by washing or heating, finally the reactor has to be refitted for work by welding.

On this basis the author's experiments aimed at the design of a disassemblable reactor automatically controlling the reaction, the disassembly and reassembly of which is made without welding, and which permits at least semi-continuous if not continuous operation. Besides this, conditions of pressure and temperature reigning in the reactor, the problem of optimum recovery and all principles of design of industrial reactors were to be cleared.

2. Experimental setup

The disassemblable reactor used in the experiments is diagrammatically shown in *Fig. 5*, its photo is presented in *Fig. 6*. It consists of two vessels, outer vessel 1 is screwed to lid 2 with rubber packing between them. The lid is water-cooled to keep the rubber packing always cool. Inner vessel 3 is heated by electric heating jacket 4. To prevent the heating jacket from being attacked by $TiCl_4$ the inner vessel is ground together with the closing flange of the transit pipe, welded to the lid of the outer vessel, to form a conical fit [8]. To assure tight closure in the course of experiments the inner vessel was cooled with solid CO_2 and forced into the lid collar where it was warmed up and expanded to form a very tight and durable fit. For precisely controlled feed the $TiCl_4$ was filled into cu. cm-graduated bottle 5, where under the pressure of *Ar* led in through pipe 6 it flowed into the reactor through needle valve 7 at controlled speed. On the basis of experience gathered in experiments with the original Kroll setup the expanding rubber vessel was left off, whereby continuous feed was realized.

In the above reactor, the inner vessel of which had a cubical capacity of 3600 cu. cm, experiments were conducted with a fill of 300 g of *Mg* at different temperatures. Pressure conditions in the reactor were registered by a Hg-manometer. In the course of the experiments the amount of $TiCl_4$ was measured as a function of time, and pressure was gauged in terms of time too. Temperature was kept constant by controlling the electric heating.

If c is the velocity of flow of $TiCl_4$, p_K the pressure of *Ar* in feed bottle 5, and p_B is the pressure in the reactor, then, with neglect of the geodetic head, according to Bernoulli's theorem

$$\frac{p_K - p_B}{\gamma} = \frac{c^2}{2g} + \xi \frac{c^2}{2g}, \tag{1}$$

where ξ is the coefficient of fluid friction developed in the entire system, and the amount of $TiCl_4$ flowing in per unit time

$$v = c \cdot f,$$

where f is the cross section of the tube.

Ar pressure p_K was gauged by a special manometer, and pressure difference p_K—p_B could be kept constant during the experiments within error limits of ± 15 mm *Hg*.

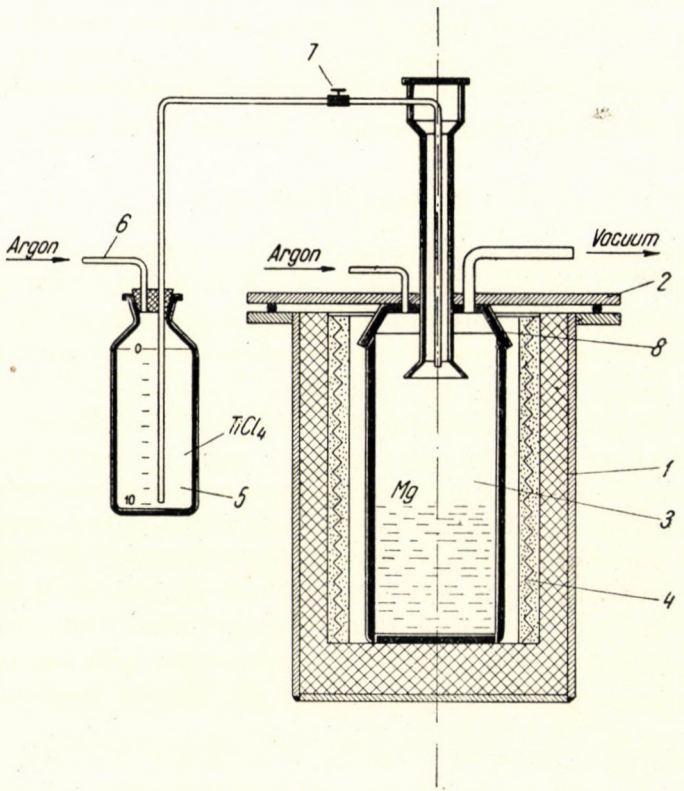


Fig. 5. Sketch of experimental reactor

Temperature was measured on the side wall of vessel 3, which is strictly speaking not identical with the temperature of the inner space, but indicates the actual temperature in the reaction space always with a time lag because of the lower heat conductivity of reaction products.

To eliminate this source of error the reactor heated up to the temperature of the experiment was kept at that temperature for 1/2—1 hour before the start of the experiment in order to attain perfect heat equilibrium. Afterwards electric heating jacket 4 was regulated for an output that the heat produced by the reac-

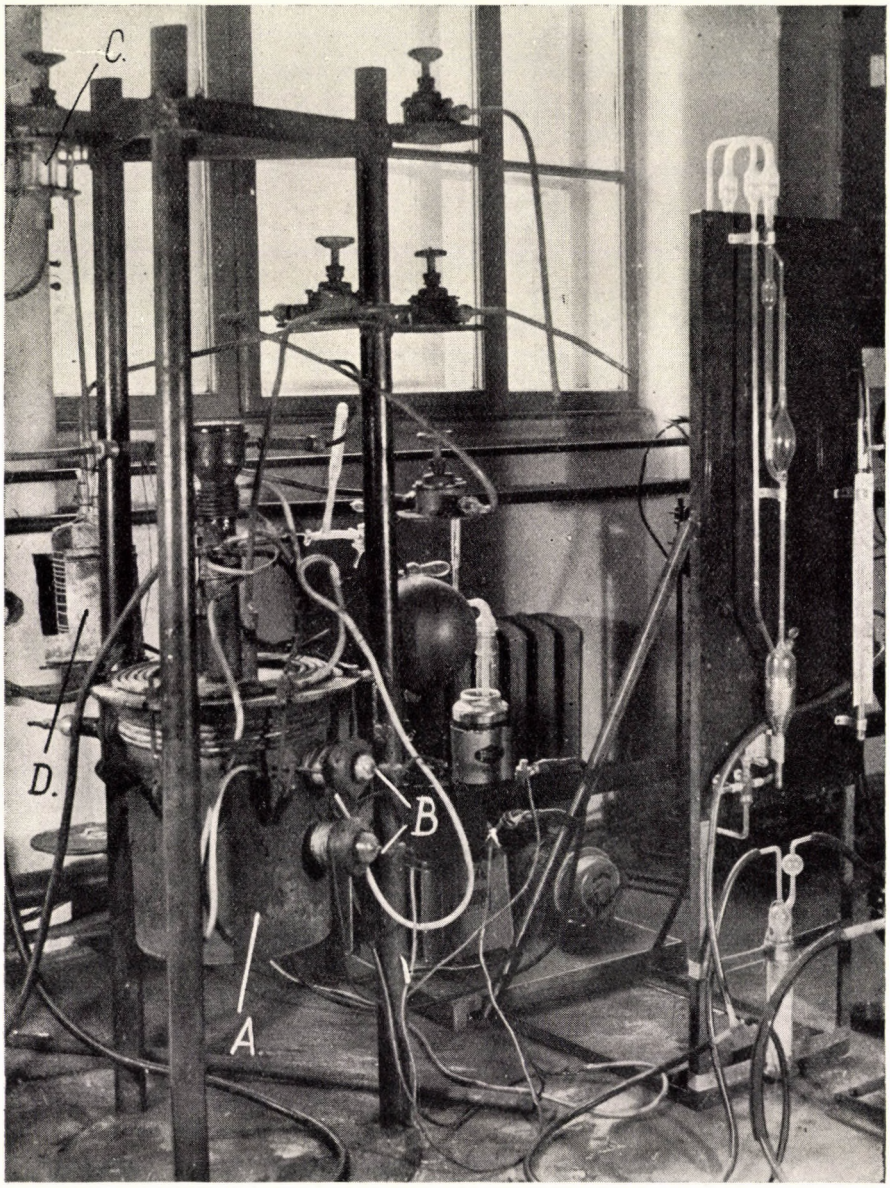


Fig. 6. Experimental reactor (photo)

tion should just cover the heat transmitted through the walls of the reactor. The temperature was thus kept constant with fluctuations of $\pm 10°$ C.

The pressure in the inner reactor space [3] should in principle be higher than the outer atmospheric pressure in order to prevent air penetrating in through

possible leakages. The initial pressure in the course of the experiments was always 760 mm *Hg*, with no regard whether the internal pressure was in the course of some experiments lower than atmospheric pressure.

Calculation of the reactor for strength and the determination of its heat balance were executed according to principles to be explained later and also served for their control. The deformation of vessel 3 was so slight that the ground fit of the vessel and flange cover had to be reground only after 40 reactions.

3. Execution of experiments

a) Measurements were made at three different temperatures : 960, 850 and 800° C. The initial pressure in the reactor was always set at 760 mm of *Hg* ;

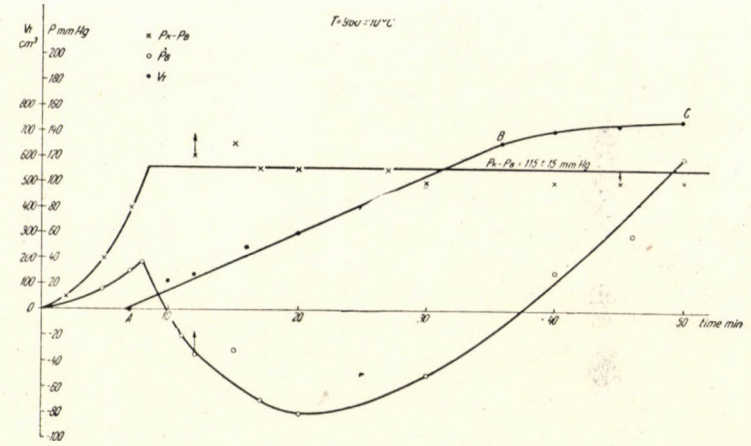


Fig. 7. Amount of $TiCl_4$ (V_T) fed into the reactor, difference of external and internal pressure $p_K - p_B$, and internal pressure of the reactor (p_B) as functions of time

pressure p_K was adjusted slowly to the desired value, and afterwards value $p_K - p_B$ was kept constant.

The quantity of $TiCl_4$ (V_T) measured as a function of time, the internal pressure (p_B) were plotted in a diagram *(Fig. 7)* along the horizontal axis of which time is indicated in minutes ; on the vertical axis are plotted quantities of $TiCl_4$ fed in cu. cm, moreover the pressure in mm of *Hg*. On the axis of pressure, 760 mm of *Hg* is at the point of origin of the coordinates, and on the ordinate axis the differences against 760 mm of *Hg* are plotted.

Internal pressure increases slowly at the beginning ; after a decreasing section it begins to rise again.

The value of V_T changes along curve *ABC*. In reaction No. 36, graphed in the diagram, as well as in the other measurements, curve $V_T = f(t)$ could

be dissected with very good approximation into two straight sections. These are sections AB and BC in *Fig. 7*.

Let the amount of $TiCl_4$ fed in per minute, which can just partake of the reaction, be expressed in V_r cm³/min. Within time interval defined by section AB the velocity of inflow of the $TiCl_4$ $v = \frac{V_T}{t}$ is no doubt smaller than, or at most equal to V_r and thus the inflow of $TiCl_4$ will be determined by equation (1). On section BC the velocity of inflow of $TiCl_4$ is less than the value fixed by equation (1), therefore here the speed of reaction V_r will be valid, and thus $V = V_r$ independently of the velocity determined by pressure difference p_K—p_B. For the investigation of the process into inner vessel 3 of *Fig. 6* a thin-walled lining was placed which in some experiments had a flat bottom, in others it had a hemispherical bottom. The bottom plate of the latter was provided with bores of 1—1,3 mm through which the $MgCl_2$ formed in the course of the reaction partly flowed off, while the Mg was retained because of its greater surface tension. Thus in the series of experiments made at different temperatures and with different bore diameters, different amounts of chlorides were filtered off. Accordingly the point also varied where the velocity of feed slowed down.

Let η be in the following the amount of $TiCl_4$ fed referred to the quantity of $TiCl_4$ required for the complete reaction, further let K be the amount of chlorides drawn off through the filter, expressed in percentage of the total of chlorides formed. With the reactor dimensions applied at the experiments the relationships were as follows :

K%	η
15,7	0,59
20,0	0,71
21,0	0,68
31,0	0,74
67,0	0,92

These data show that the more chlorides could be removed, the longer it was possible to keep up uniform velocity of feed of $TiCl_4$. The break at B of curve $V_T = f(t)$ shown in *Fig. 7* is therefore due to shielding of the surface of the materials taking part of the reaction by the reaction products formed. The phenomenon is still more striking if the experimental data are plotted not as functions of time but in terms of the above defined ratio η *(Fig. 8)*. Here data of two reactions are compared. One diagram is drawn from data of reaction No. 36 presented in *Fig. 7* in which 67% of chlorides flowed through the filter, and thus velocity v of the feed of $TiCl_4$ was constant up to $\eta = 0{,}92$, that is, almost up to the theoretically required amount of $TiCl_4$. In the second reaction No. 42, however, only 15,7% of the chlorides were removed by filtering and here the velocity of feed of $TiCl_4$ slowed down abruptly already at $\eta = 0{,}59$.

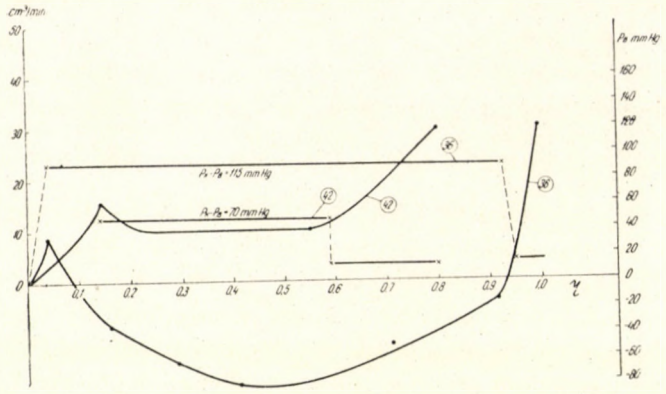


Fig. 8. Amount of $TiCl_4$ (V_T) fed into the reactor and change of internal pressure (p_B) as functions of the degree of completion of the reaction

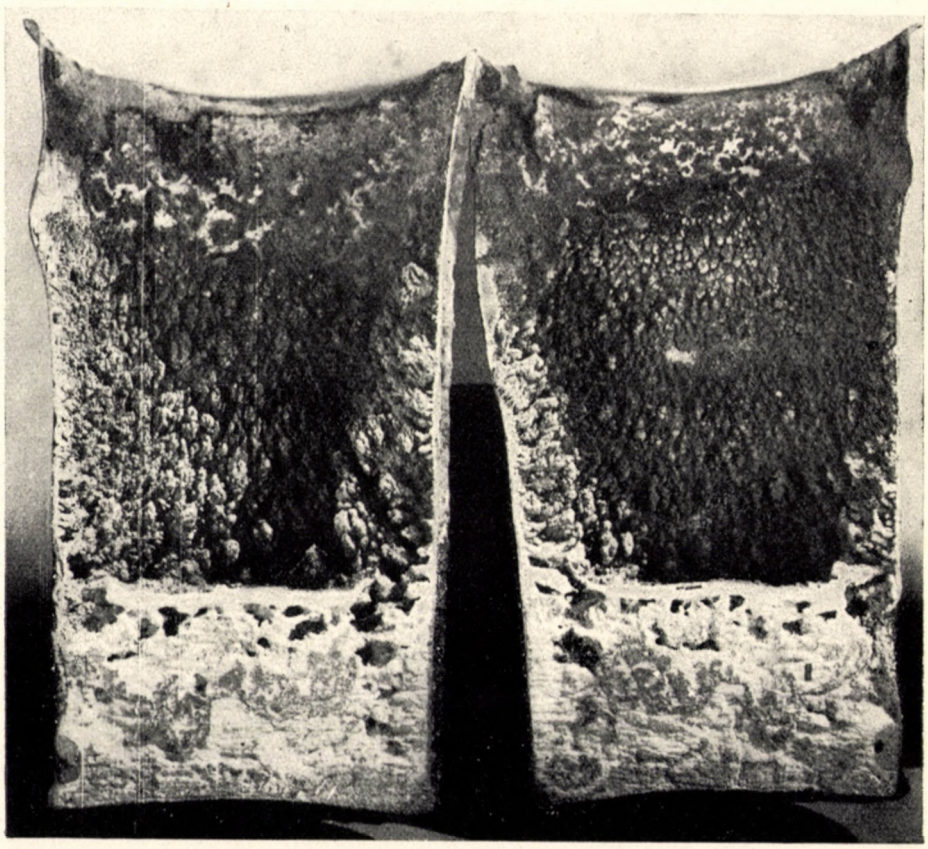


Fig. 9. Reactor lining with reaction products



Fig. 10 a) Lining with filter and reaction products

Some such inner linings split up show clearly the arrangement of reaction products. *Fig.* 9 is a flat bottomed lining without filter. Here white $MgCl_2$ entirely covers grey *Ti* and *Mg*, while in the lining of *Fig. 10*, where 67% of chlorides flowed down the filter, the *Mg* and $MgCl_2$ are layered below spongy *Ti*.

The position of reaction products can be explained in the following way. At the reaction temperature the $TiCl_4$ in the vapour state reacts with *Mg* partly



Fig. 10 b) Lining with filter after extraction of part of the $MgCl_2$ with water

in the liquid, partly in the vapour phase theoretically according to the following equations :

$$TiCl_{4vap} + 2Mg_{vap} = 2MgCl_{2liqu} + Ti \quad (2)$$

$$TiCl_{4vap} + 2Mg_{liqu} = 2MgCl_{2liqu} + Ti \quad (3)$$

and

$$MgCl_{2liqu} \rightarrow MgCl_{2vap} \quad (4)$$

The speed of the reaction described by equation (2) is determined by the reaction

$$Mg_{liqu} \rightarrow Mg_{vap} \quad (5)$$

which is, as will be shown later, lower than the speed of reaction (2). Therefore, the reaction can proceed at the attainable maximum speed as long as the $TiCl_4$ vapour can keep undisturbed contact with the surface of liquid *Mg*.

If for sake of simplicity the reaction described by equation (2) is disregarded for the present, the speed of reaction (3) must remain uniform as long as reaction products do not shield more or less the surface of liquid *Mg*. The sp. gr. of *Mg* is at 750° C, 1,47 g/cm³ (11), that of $MgCl_2$ is 1,67 (12). Thus the $MgCl_2$ would take place below the *Mg*. However, the formation of *Ti* sponge starts on the surface of *Mg* and thus impedes the mutual change of place of the *Mg*—$MgCl_2$; besides this the *Ti*-sponge includes also some *Mg* and thus obstructs to some extent the reaction taking place in the liquid phase. In that case the reaction according to equation (2) prevails already, the speed of which is determined as aforesaid by the speed of reaction (5). In the end therefore, when the reaction products impede the change of place of *Mg* and $MgCl_2$, that is, when liquid *Mg* is only found included in *Ti* sponge, the speed of reaction slows down well measurably, but until this point it remains constant. This circumstance yields further on the possibility of the determination of reaction speed with the precision required for the design of reactors.

b) Literature on the mechanism of the reaction generally supposes that the reduction of $TiCl_4$ with *Mg* is determined by equations (2), (3), and (4). To clear the actual process of reaction the quantities of metallic *Ti* and of the *Mg* included in the *Ti*-sponge were determined after each reaction, as well as chlorides soluble in water. If according to the foregoing η denotes the ratio of $TiCl_4$ fed in during the reaction and of the quantity of $TiCl_4$ theoretically requied according to equations (2) and (3), and $\varkappa$ symbolizes the amount of actually formed *Ti* related to the amount calculated by equations (2) and (3), it can be ascertained that $\varkappa$ decreases with increase of η.

To the value of $\eta = 1$ pertain values of $\varkappa$ spreading from 73,5 to 75,5

At $\eta = 0{,}9$	$\varkappa$	0,81 and
« $\eta = 0{,}8$	$\varkappa$	0,95—0,97.

The above data indicate that if the degree of completion of the reaction approaches *1*, the specific recovery of *Ti* decreases. This evidently indicates that the reaction does not proceed purely according to equations (2) and (3) but when the amount of *Mg* in the reactor already decreases the reaction

$$TiCl_4 + Ti \rightleftarrows 2TiCl_2 \qquad (6)$$

may also take place.

It is difficult to decide the question, for conditions are also complicated by the reaction

$$2TiCl_3 \rightleftarrows TiCl_4 + TiCl_2. \qquad (7)$$

It seems probable, that at the reaction temperature, between 800—900° C, the reaction described by equation (6) also takes place. According to investigations of *R. Schmidt* (13) the equilibrium of reaction (7) is shifted above 600° C so far to the right, that $TiCl_3$ is no more present. Reaction (6) between 800—900°C at atmospheric pressure yields according to *Klemm* and *Grimm* [14] $TiCl_2$ almost in quantitative proportion, but this reaction is rather slow. On the other hand, according to *Stähler* [15], between 800 and 1100° C at 1 mm Hg pressure, that is, in case of continuous exhaustion of the $TiCl_4$, the $TiCl_2$ yields 74—94% metallic *Ti*. The above relationships of η and $\varkappa$ confronted with pertaining measurements of Klemm and Grimm permit the supposition that if the η-value of the reaction approaches 1, that is, the *Mg* is present in but small amount already, the formation of $TiCl_2$ starts according to (6), which means that the amount of metallic *Ti* in the reactor will no more increase under the effect of $TiCl_4$ feed, but will perhaps decrease.

During cooling down of the reactor, under 600° C there is possibility of formation of $TiCl_2$ according to equation (7). The $TiCl_2$ is a black crystalline solid substance. In moist air it turns into TiO_2 and *HCl*, or into *Ti*-oxychloride. The formation of $TiCl_2$ will thus not only affect recovery figures, but if reaction products are extracted by washing, it may also notably deteriorate the quality of metallic *Ti* produced because of the formation of TiO_2. The existence of reaction (6) and the quality of *Ti* produceable thereby was investigated after the method of Klemm and Grimm by heating *Ti* and $TiCl_4$ in stoichiometrical proportions in a closed silica tube at 800—900° C for a longer period. The metallic *Ti* filled in the silica tube consisted of grains of 1 mm selected by screening. After cooling down of the silica tube and exhaustion of the excess of $TiCl_4$, the obtained product almost entirely passed through the DIN 100 sieve, evidencing that the reaction had taken place in both directions and also indicating that the metallic *Ti* obtained from splitting the $TiCl_2$ yields a very fine powder. Since the reactor has necessarily to be cooled down in an atmosphere of protective gas, that is, under pressure, the dissociation of $TiCl_2$ into $TiCl_4$ and metallic *Ti* does not take place quantitatively, therefore it has to be reckoned with that the *Ti* powder will contain $TiCl_2$ too.

The reaction of $TiCl_2$ with water or moist air explains that *Ti* of substantially higher quality is obtained if the separation of *Ti*-sponge and of reaction products is made in the heating furnace shown in *Fig. 3*, because there, with heating in high vacuum, reaction (6) takes place to the left and no more $TiCl_2$ remains in the system. Though heating the reaction products in high vacuum yields much better results, yet researches were directed towards the development of the washing technique, because in Hungary the heating technique involving high energy consumption (40—50 KWh/kg sponge) is a costly process to be restricted to the production of metallic *Ti* for special purposes only.

In the washing and grinding experiments reaction products were first washed in water containing 2% *HCl*; following this, after grinding for a definite constant period, screen analyses were executed. Result of one screen analysis is quoted as an example in *Fig. 11.* Dashed line indicates the grain distribution corresponding to the first grinding. It can be observed in this and in the further figure that the grain distribution shows two maxima, one at about 0,3 mm; another between 0,06 and 0,1 mm. Results obtained by further grinding are

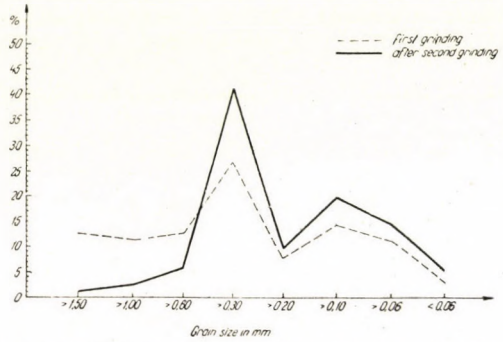


Fig. 11. Ti-sponge grain size distribution after first grinding for 15 minutes (dashed line), after second grinding for 15 min. (thick solid line)

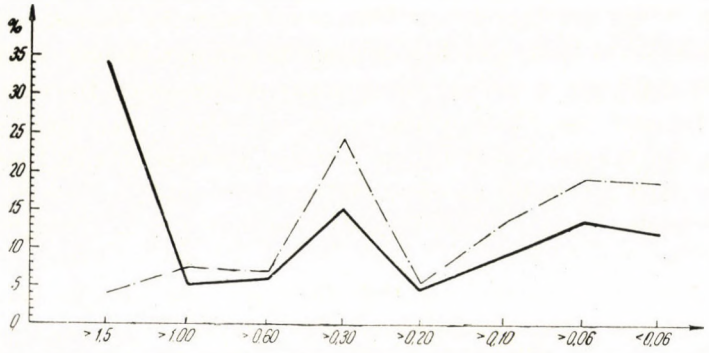


Fig. 12. Grain size distribution of *Ti*-sponge after grinding

shown by the thick solid line, indicating that the amount of grains above 0,6 mm is greatly reduced by further grinding, but both peaks previously mentioned continue to rise, indicating that these two characteristic peaks are not results of grinding, but have developed already in the reactor in more or less definite grain sizes. There was in general no change in the character of the curves, when grinding was done in mills of different type.

Similar results are presented in *Fig. 12* too, where the thick solid line shows results after first grinding, while the dash-dotted curve is the result of grinding the plus 0,6 mm grain size and adding it to the previous milled product. Both diagrams, as well as grain analyses executed on products from different types

of ball mills, uniformly show that the grain distribution is essentially fixed by the reaction process and is only very little affected — at least in its character — by grinding. It is most probable that very fine grains (minus 0,2 mm) are partly formed in the gas phase, partly they are products of the decomposition of $TiCl_2$. This is also made probable by the fact that the hardness of metal bodies made up of very fine powder is generally greater than that of bodies built up of grains of 0,2—0,6 mm. The distribution of *Mg* among the different grain sizes depends very much on the degree of completeness of the reaction. In the following are tabulated data on three reactions.

η	% Mg in grains of		
	less than 0,1 mm	0,1—0,6 mm	over 0,6 mm
1	8,02	5,96	5,65
0,9	7,57	7,18	8,02
0,8	12,65	9,06	12,10

In the coarsest fraction the *Mg* content rises with decreasing η, which is explained by the fact that if less $TiCl_4$ is fed than the theoretically required amount, *Mg* remains back, which is difficult to grind, whereby the *Mg* content of the coarse grain size as well as the quantity of the coarse fraction grow. The case is similar with the 0,1—0,6 mm grain size, where with decreasing values of η the *Mg* content also shows regular increase, while with very fine pulverous material no such regularity is observable.

The amount of grains larger than 0,6 mm is at $\eta = 1$, 20,2%, at $\eta = 0{,}9$, 23,8%, and at $\eta = 0{,}8$, 29%.

From the above two series of data the conclusion may be drawn that at decreasing value of η the quantity and *Mg*-content of the plus 0,6 mm grain increase. These coarse grains can be reduced to finer size by second grinding or by the extraction of *Mg* with *HCl* followed by subsequent milling. Of course this involves substantial consumption of *HCl* as well as further manipulations.

According to the foregoing the reaction can be pursued only up to $\eta = 0{,}7$—0,8, or else the specific recovery of *Ti* will decrease. At $\eta = 0{,}7$—0,8 further processing of the coarse fraction is lengthy and costly, therefore the method was developed to feed back the high-*Mg* fraction to the next reaction, whereby the *Mg* contained therein could be very well made use of again.

These two factors, namely the necessity of keeping η at 0,7—0,8 and feeding back the coarsest grain into the reactor requires the design of a reactor, which if it is not continuous in operation, at least makes possible the execution of several reactions one after another.

c) *Pressure conditions in the reactor.* The pressure reigning in the reactor is given by the sum of the different partial pressures. The internal pressure in the reactor

$$p_r = p_A + p_{TiCl_4} + p_{MgCl_2} + p_{Mg}. \tag{8}$$

Of course, this subsists only as long as the presence of $TiCl_2$ in the reactor is not to be reckoned with; this, however may be supposed up to $\eta = 0{,}8$ according to the aforementioned data.

Equilibrium vapour pressures were computed by Dr. Z. Horváth on the basis of data found in literature and the author is indebted to him for communication by letter. Pressures corresponding to the state of equilibrium are shown for practical reaction limits in the following table :

Temperature		p_{TiCl_4}	p_{Mg}	p_{MgCl_2}
K°	C°	mm Hg		
1050	777	$2{,}89 \cdot 10^{-16}$	16,65	1,025
1100	827	$3{,}23 \cdot 10^{-15}$	34,80	2,350
1150	877	$3{,}02 \cdot 10^{-14}$	56,30	4,920
1200	927	$2{,}58 \cdot 10^{-13}$	123,—	10,01
1250	977	$2{,}04 \cdot 10^{-12}$	209,8	17,8

Beside the partial pressures of Mg and $MgCl_2$ the partial pressure of $TiCl_4$ is negligible and pressure conditions are expressed by the relation

$$p_r = p_A + p_{Mg} + p_{MgCl_2} \tag{9}$$

Since the experimental reactor is entirely closed, in the course of feed of $TiCl_4$ the partial pressure of Ar will increase according to Boyle—Mariotte's law. Let V_r be the aggregate volume of reaction products, V_{Mg} the volume of Mg, V_0 the total volume of the inner space of the reactor, further p_0 the total pressure reigning in the reactor before the start of the reaction. Then

$$p_r = p_{Mg} + p_{MgCl_2} + (p_0 - p_{Mg}) \frac{V_0 - V_{Mg}}{V_0 - V_r}. \tag{10}$$

With consideration of equations (2), (3) and sp. gr. data already stated

$$V_r = V_{Mg} + 0{,}82\ V_T, \tag{11}$$

where V_T is the volume of $TiCl_4$ fed into the reactor.

From stoichiometrical and sp. gr. data, respectively

$$V_T \cong 4 \cdot \eta \cdot V_{Mg}. \tag{12}$$

On substitution of this and of $\frac{V_0}{V_{Mg}} = X$ the internal pressure in the reactor

$$p_r = p_{Mg} + p_{MgCl_2} + (p_0 - p_{Mg}) \frac{X-1}{X-1-3{,}28 \cdot \eta}. \tag{13}$$

The internal pressure of the reactor thus depends on the initial pressure (p_0), on temperature, since values of p_{Mg} and p_{MgCl_2} are fixed by temperature, further on η and on the volume (V_{Mg}) of *Mg* fed into the reactor. It has to be pointed out, however, that in reality this formula cannot even be regarded as exact for equilibrium conditions, because for reasons of construction the upper part of the reactor is cooled and the distribution of *Mg* and of $MgCl_2$ vapours along the section where the heated space passes into the cooled portion is evidently not uniform, therefore the number of *Mg* and $MgCl_2$ moles present in the gas volume is less than would correspond to temperature and the available gas volume. Notwithstanding its approximateness just pointed out, this formula gives means of approximate computation of pressures in the reactor and of its calculation for strength.

At reaction temperatures of 800—1000° C, according to experience, no-notable deformation is observed even after 100 hours of operation, unless the stress in the wall of the reactor exceeds the limit of 1 kg/mm². From this condi tion of strength, and from the former approximate formula, with consideration of the necessity of maintaining $\eta = 0{,}8$ according to the above, ratio X of the gas volume of the vessel and of the volume of *Mg* fill can be determined with sufficient accuracy for practical purposes. With consideration of these the ratio of $X = 15$—20 is found as a value with which reasonable wall thickness and weight are obtained for the reactor.

Fig. 8 shows two curves for the determination of actual pressure conditions of the reactor. One is that of reaction No 36, that took place at 960° C up to $\eta = 1$ under the effect of pressure difference $p_K - p_B = 115$ mm Hg at the rate of 23 cm³ of $TiCl_4$ fed in per min. The second reaction took place under the effect of $p_K - p_B = 70$ mm Hg pressure difference at the rate of 12 cm³ $TiCl_4$ fed per min. up to a value of $\eta = 0{,}8$. In both reactions the internal pressure of the reactor increased initially a little, afterwards it decreased very much in reaction 36, less in reaction 42 ; finally it rose again beyond a certain point in both reactions. These three characteristic sections of the internal pressure curve can be explained thus. The small amount of $TiCl_4$ fed in at the start of the reaction is vapourized at those parts of the reactor the temperature of

which is higher than the temperature of vapourization of the $TiCl_2$ but lower than that of Mg, without the reaction starting, whereby at the start of the reaction a certain increase of pressure sets in. Further increase of pressure is indicated by the appearance of the partial pressure of $MgCl_2$ at the beginning of the reaction. Under the effect of further feed of $TiCl_4$ the reaction starts, which partly uses up the Mg vapour. Thus in reaction No 36 taking place at the rate of feed of 23 cm^3/min the pressure, instead of rising according to equation (13) first falls very much to about $\eta = 0{,}45$, from that point it increases up to $\eta = 0{,}9$ according to a hyperbola parallel to the hyperbola defined by equation (13). In reaction No 42 such great decrease of pressure could not be observed, the evident explanation of which is the lower rate of feed.

The change of the internal pressure can thus be summed up as follows :

In consequence of the increase of volume of reaction products the internal pressure of the reactor should increase according to a hyperbolic law. However, if the rate of feed of $TiCl_4$ is sufficiently high, the latter partly consumes the Mg vapour, because the speed of this reaction taking place in the gas phase is higher than the rate of vapourization of the Mg. In this case, therefore, the reaction takes place practically according to equation (2) between liquid Mg and $TiCl_4$ vapour. Curves of internal pressure show therefore further steep rising trend, where the rate of feed suddenly falls for reasons already explained (shielding of liquid Mg by reaction products). But the internal pressure gauged at the end of the reaction did not exceed the value calculable from equation (13) but was always somewhat lower than that. This shows that equation (13) yields for the computation of the maximum pressure reigning in the reactor, if not accurate, then at all events dependable values.

To prevent the internal pressure from falling below atmospheric, the initial reaction pressure has to be chosen that

$$p_0 = 760 \text{ mm } Hg + p_{Mg}, \tag{14}$$

where p_{Mg} is the partial pressure of Mg at the chosen reaction temperature. The maximum decrease of pressure gauged in the course of experiments relative to theoretical values was always lower than the partial pressure of equilibrium of Mg pertaining to that temperature.

d) *Automatic feed.* According to the previous table the partial pressure of $TiCl_4$ varies within the order of magnitude of $10^{-12} - 10^{-16}$, i. e., it is negligible in comparison to the partial pressures of $MgCl_2$ and of Ar. If the reaction takes place at constant temperature a change of pressure in the system can only take place in consequence of the change of volume of the Ar cushion, or because of the change of partial pressure of the Mg vapour. From given volume ratio X the change of pressure of the Ar cushion can be determined in terms of η. Fluctuation of the Mg pressure is, on the other hand, possible between

zero and the vapour tension of equilibrium. From these two conditions the minimum and the maximum values of pressure can be calculated, which can occur at all. The value of minimum pressure is evidently

$$p_{\min} = p_0 - p_{Mg}\,, \tag{15}$$

and the value of maximum pressure is obtained from equation (13) after substitution of η.

If the value of volume ratio X is chosen so that $p_{\min}$ and $p_{\max}$ should fall between two given limits, and if the external pressure is kept at a pre-set constant value, the speed of the inflowing $TiCl_4$ will fluctuate within the limits of

$$c_{\min} = \sqrt{\frac{2g\,(p_K - p_{\max})}{\gamma}} \tag{16}$$

and

$$c_{\max} = \sqrt{\frac{2g \cdot (p_K - p_{\min})}{\gamma}}. \tag{17}$$

Accordingly with the choice of the value of X the speed of inflow of $TiCl_4$ can be confined between two limits. If the speed of the $TiCl_4$ feed is higher than the rate of its consumption in the course of the reaction, the pressure in the system surges, and the internal pressure will be higher than the external one, and it will thus push the inflowing column of $TiCl_4$ back into the feed tank. As long as $TiCl_4$ fed into the vessel is consumed in the reaction, the pressure can fluctuate only between the above given limits of $p_{\min}$ and $p_{\max}$, and the rate of feed will also vary very little. Should the rate of feed, however, be for any reason higher than the reaction speed, the pressure in the described system will be immediately equalized, and further feed will cease. This arrangement has made possible the development of the reactor with automatic feed.

e) *Determination of the reaction speed.* Experiments having been conducted at most different p_K—p_B values, that reaction speed was determined, which could no more be exceeded by further boosting of the external pressure, considering that the reactor could not be operated at a feed rate higher than the reaction speed on the basis of automatic control described above. Since according to the aforesaid the cushion of *Mg vapour* practically vanishes entirely at a definite speed, the reaction speed thus measured is approximately the rate of reaction described by equation (2), which was found to be 1,13 g/min/cm² at 850° C.

f) *Heat balance of the reactor.* The reduction of $TiCl_4$ with *Mg* is of strongly exothermic character, reaction heats in cal/gr$_{TiCl_4}$ are tabulated in the following:

At	750° C	340
«	850° C	312
«	950° C	290

With knowledge of the cross section of the reactor, of the above given reaction speed and reaction heat, the maximum amount of heat produceable per unit time in the reactor can be determined. Let Q be the heat generated by the reaction in unit time, Q_1 the heat conducted through the walls in unit time, Q_2 the heat dissipated in unit time by the cooling water. Reaction will take place at constant temperature (disregarding the time rate of heat conduction), if $Q = Q_1 + Q_2$. Heat equilibrium is conjointly assured by geometric dimensions of the reactor, by its heat insulation and the rate of feed.

g) On the basis of experiments a working type of reactor was designed considering the following points of view.

The volume of reaction products is calculable by the equation

$$V_r = V_{Mg} + 0{,}82 \; V_T. \tag{11}$$

X is determinable by equation (13) from the condition that the maximum pressure occurring in the reaction should not produce permanent deformation even in continuous operation. From a known value of X, V_0, the entire inner volume of the reactor is determinable. In general the value of X is found to be 15—20 depending on the wall thickness of the reactor. However, this relatively large volume is not to be built into the heated space, for the large gas volume arrived at from this point of view serves only to prevent too high gas compression during reaction. It is therefore sufficient to proportion the heated space only large enough to accomodate therein the reaction products produced in the course of one reaction, the volume of which is computable by equation (11). The difference between the necessary vessel volume and the volume of reaction products can be located in a separate unheated volume. The reactor of novel type designed by the author is presented in *Fig. 13*. The volume of the innermost vessel with bulging, perforated bottom corresponds to the volume of reaction products. The necessary gas volume has been incorporated in a separate vessel not shown in the figure ; this vessel is joined to the reactor by a pipe. Underneath the reactor is placed a second heatable container linked to the reactor through the intermediate of a rubber-packed, water-cooled joint. This container serves for the storage of $MgCl_2$. After the completion of one reaction the upper vessel should theoretically be filled with reaction products. By raising the temperature after the reaction the $MgCl_2$ is drained off through the filter into the container below. The metallic *Ti* charged into the upper vessel fills but a small part of its volume so that from two heatable containers shown in the top right corner of the Fig. (one is behind the other) a fresh charge of *Mg* can be fed into the reaction space ; the reaction can thus twice be repeated. With this arrangement without the insertion of valves or other organs, potential sources of leakage at high temperature, it was made possible to complete three subsequent reactions in the same reactor. Accordingly, though continuous reactor

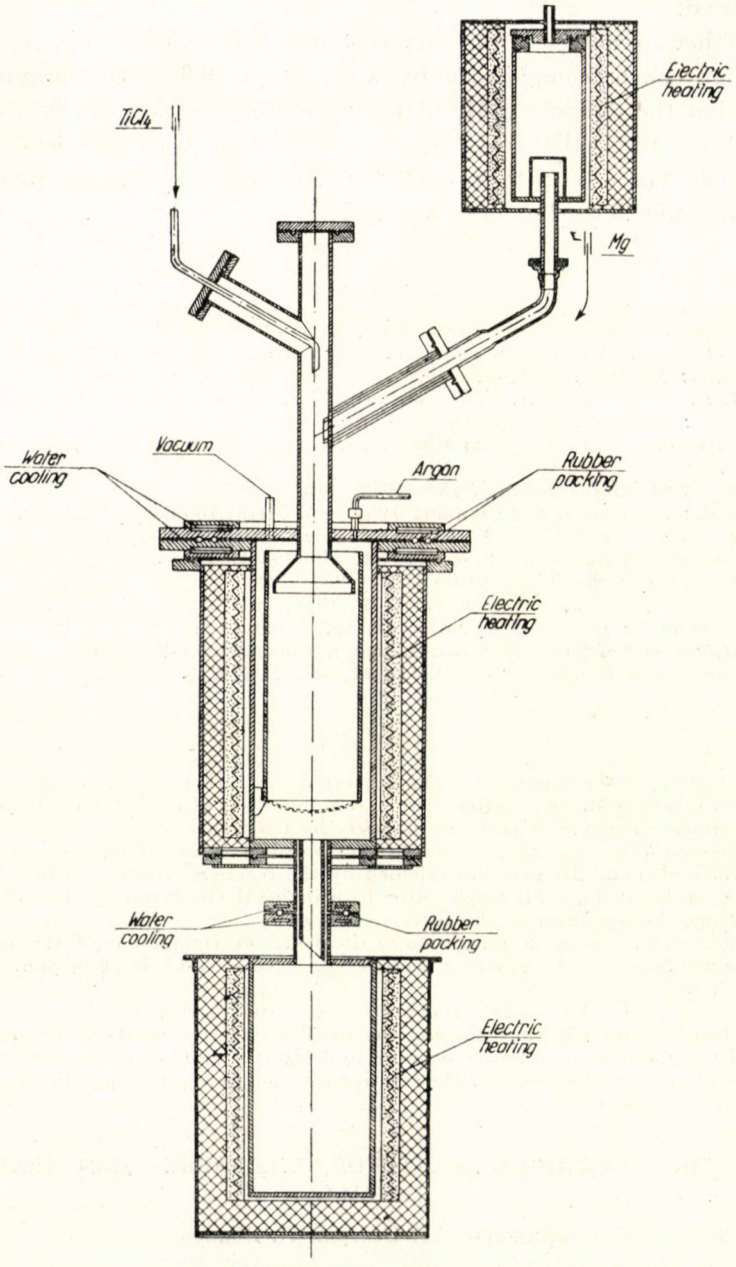


Fig. 13. Reactor designed after experiments

operation has not been realized, a very efficient utilization of working time has been attained.

A further advantage is the very economic utilization of *Mg*, since though each reaction can be completed only as far as $\eta = 0{,}8$, in the second and the third reaction the remaining *Mg* of the preceding reaction can be recharged; the result is, as if the first two reactions had been completed as far as $\eta = 1$ and the last one up to $\eta = 0{,}8$. The *Mg* loss related to the total output of *Ti* is thus not 20%, but only about 6%.

REFERENCES

1. *Hunter:* Journal of Am. Chem. Soc. 32 (1910) p. 330.
2. *P. Ehrlich:* Zeitschr. für anorg. u. allg. Chemie. Vol. 247 (1941), p. 53.
3. *Gajev:* Metallurg. 9 (1934). 19.
4. *A. E. van Arkel* and *J. H. de Boer:* Zeitschr. für anorg. u. allg. Chemie, 148 (1925).
5. *Kroll:* Transact. Electrochem. Soc. 78 (1940). 35.
6. *Wartmann:* U. S. Bureau of Mines R. I. 4519 (1949). ref. Kroll: Zeitschr. f. Metallkunde (1954).
7. Eng. and Mining Journal, 154 (1954) 142.
8. *Kroll:* Zeitschr. f. Metallkunde, 1954. and Metal Industry (1952) 29.
9. *M. A. Cook* and *P. S. Wartmann:* Light Metals (1952) 339.
10. *Maddex* and *Eastwood:* Journal of Metals (1950) 634.
11. *Armdt:* Zeitschr. Phys. Chem. 130 (1927) 184.
12. *Klemm:* Zeitschr. Anorg. Chem. 152 (1926) 235.
13. *R. Schmidt:* Ber. d. Chem. Ges. 58 (1925) 400.
14. *Klemm* und *Grimm:* Zeitschr. f. anorg. Chem. 249 (1942) 199.
15. *Stähler* and *Bachram:* Ber. d. Chem. Ges. 44 (1911), p. 291.

SUMMARY

In the course of the experiments demonstrated the author has succeeded to develop a type of reactor in which several reactions can be completed one after another, with intermittent feed but continuous removal of reaction products by filtering.

In the course of measurements it has been established that the $TiCl_4$ can be fed uniformly until the surface of liquid *Mg* becomes shielded by the reaction products formed. To prevent this the $MgCl_2$ has been removed through a filter by utilizing the higher surface tension of *Mg* that prevents it from flowing through the filter.

The value of *Ti* recovery as a function of the degree of completion of the reaction decreases very much from $\eta = 0{,}8$ onward; therefore the feed of $TiCl_4$ is permissible only up to $\eta = 0{,}75-0{,}8$.

On the basis of elucidation of internal pressure conditions reigning in the reactor automatic feed control has been designed and thereby the speed of reaction has been determined. With knowledge of the reaction speed it was possible to design the reactor so that the reaction heat produced should just cover heat losses. The reaction can thus be executed practically at constant temperature.

РАСЧЕТ И ЭКСПЛОАТАЦИЯ РЕАКТОРОВ, СЛУЖАЩИХ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ТИТАНА

Член-корр. АН Венгрии Л. Жильмо

Резюме

В процессе опытов удалось разработать такой вид реактора, в котором представляется возможным осуществить друг за другом целый ряд реакций при прерывной подаче материала, но при непрерывном удалении продуктов реакции — путем фильтрирования.

Измерениями установлено, что четыреххлористый титан может подаваться через определенные промежутки времени равномерными порциями вплоть до тех пор, пока поверхность жидкого магния не покроется продуктами, образующимися при реакции. В интересах предотвращения этого явления хлористый магний следует удалять через фильтр, используя явление, вследствие которого магний не проходит через фильтр из-за своего большего поверхностного натяжения.

Выход титана в функции степени полноты реакции, начиная от $\eta = 0{,}8$, сильно падает, поэтому подача четыреххлористого титана должна быть прекращена выше $\eta = 0{,}75-0{,}80$.

На основе данных режимов давлений, господствующих внутри реактора, удалось сконструировать автоматическое регулирование дозировки материала и при помощи этого устройства определить скорость реакции. Зная скорость реакции, возможно рассчитать реактор так, чтобы образующаяся теплота реакции только-что покрывала тепловые потери, следовательно, реакция практически может протекать при неизменной температуре.

CALCUL ET FONCTIONNEMENT DE RÉACTEURS POUR LA FABRICATION DU TITANE

Prof. L. GILLEMOT

Membre correspondant de l'Acad. Hongr. des Sciences

RÉSUMÉ

Les résultats d'une série d'expériments ont abouti au développement d'un type de réacteur à alimentation périodique, mais au décharge continu des produits de réaction par filtrage permettant l'exécution de plusieurs réactions successives.

Des mesures ont établi que le dosage du $TiCl_4$ peut se faire uniformément jusqu'à ce que la surface du Mg liquide n'est pas couverte des produits de réaction développés. Pour prévenir à cela le $MgCl_2$ a été déchargé par un filtre, où l'on s'est servi du fait que la plus grande tension superficielle du Mg empêche celui-ci de couler à travers le filtre.

Le rendement en Ti en fonction du degré d'achèvement de la réaction décroît très fortement à partir de $\eta = 0{,}8$, c'est pourquoi l'alimentation en Ti ne doit pas être poursuivie au delà de $\eta = 0{,}75-0{,}8$.

L'éclaircissement des conditions de pression dans l'intérieur du réacteur a conduit à la construction d'un régulateur automatique du dosage, lequel a permis la détermination de la vitesse de réaction. En connaissance de cette vitesse il a été possible de dimensionner le réacteur de manière que la chaleur de réaction dégagée compense justement les pertes de chaleur, c.-à.-d. que la réaction puisse être exécutée à une température en pratique constante.

ENTWURF UND BETRIEB VON REAKTOREN FÜR TITANHERSTELLUNG

Prof. L. GILLEMOT

Korresp. Mitglied d.Ungarischen Akademie der Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Auf Grund der Ergebnisse einer Versuchsreihe gelang es, einen Reaktortyp zu entwickeln, des bei periodischer Beschickung, aber kontinuierlichem Austrag der Reaktionsprodukte durch Filtrierung die Durchführung mehrerer Reaktionen nacheinander ermöglicht.

Messungen ergaben, dass sich das $TiCl_4$ solange gleichmässig aufgeben lässt, bis die Oberfläche des flüssigen Mg durch die gebildeten Reaktionsprodukte verdeckt wird. Um diese Verdeckung zu verhindern, wurde das $MgCl_2$ abfiltriert, wobei man sich jener Eigenschaft des Mg bediente, dass es infolge seiner grösseren Oberflächenspannung nicht durch das Sieb fliesst.

Der Wert des Ti-Ausbringens sinkt in Abhängigkeit vom Vollendungsgrade der Reaktion stark von $\eta = 0{,}8$ angefangen, weshalb die $TiCl_4$-Aufgabe nur bis zu $\eta = 0{,}75-0{,}8$ fortzusetzen ist.

Auf Grund der Bereinigung der inneren Druckverhältnisse des Reaktors konnte eine selbsttätige Beschickungsregelung entworfen werden, welche die Bestimmung der Reaktionsgeschwindigkeit ermöglichte. In Kenntnis der Reaktionsgeschwindigkeit konnte der Reaktor derart bemessen werden, dass die erzeugte Reaktionswärme eben nur die Wärmeverluste deckt, so dass sich die Reaktion bei beständiger Temperatur durchführen lässt.

INDEX

Acta Technica, Tomus X, Fasc. 1—2.

Vidéky, E.: Tip Relief on Spur Gears — Э. Видеки: Затупление острия вершины зубца лобовых зубчатых колес — Épointage des têtes de la denture droite d'engrenages — Die Zahnflankenzurücksetzung von Stirnradverzahnungen 3

Scheffer, V.: Über den Zusammenhang zwischen isostatischen Anomalien und Vergenzen der Gebirgsbildung — В. Шеффер: Связь изостатических аномалий и вергенций горообразования — Relations between Isostatic Anomalies and Orogenic Vergences — Le rapport entre les anomalies isostatiques et les vergences orogéniques 19

Csonka, P.: Die Stabilität des an seinen Enden aufgehängten, an seiner seitlichen Verschiebung gehinderten Balkens — П. Чонка: Стабильность двухопорной балки, боковой сдвиг которой препятствуется — Stability of the End-supported Laterally Restrained Beam — La stabilité d'une poutre suspendue à ses deux extrémités entravée dans son déplacement latéral 31

Oplatka, G.: Étude de l'évaporation à multiple effet avec prises de vapeur — Г. Оплатка: О многократной выпарке с отбором экстрапара — A Study on Multiple-stage Evaporator Systems with Vapour-bleeding — Untersuchungen über mehrstufige Verdampfungssysteme mit Brüdenentnahme 43

Csonka, P.: Results on Shells of Translation — П. Чонка: Об оболочках, формированных соответственно трансляционной поверхности — Sur les voiles à surface de translation — Untersuchungen über Translationsschalen 59

Craemer, H.: Fallacies and Paradoxa in the Plasticity Theory — Х. Кремер: Ошибки и противоречия в теории пластичной деформации — Erreurs et contradictions dans la théorie de la déformation plastique — Irrtümer und Widersprüche in der Theorie der Plastizität 73

Sályi, I.: Comments on Prof. H. Craemer's Paper »Fallacies and Paradoxa in the Plasticity Theory« — И. Шайи: К статье Х. Кремера »Ошибки и противоречия в теории пластичной деформации« — Remarques sur l'étude du Dr. H. Craemer «Erreurs et contradictions dans la théorie de la déformation plastique» — Bemerkungen zur Arbeit von Dr. H. Craemer »Irrtümer und Widersprüche in der Theorie der Plastizität« 83

Секер, Д.: Исследование выхода по току при электролизе алюминия — *Szekér, Gy.:* Research into Current Efficiency in Aluminium Electrolysis — Recherches sur le rendement de courant dans l'electrolyse de l'aluminium — Untersuchung des Stromwirkunsgrades bei der Aluminiumelektrolyse 91

Hegedüs, Z.: Data on Copper Oxyarsenate, Copper Nickel Oxyarsenate and Nickel Oxide Inclusions — З. Хегедюш: Данные о включениях оксиарзената меди, медно-никельного оксиарзената и окиси никеля — Données sur les inclusions d'oxyarsenate du cuivre, d'oxyarsenate du cuivre et du nickel et d'oxyde de nickel — Beiträge über die Kupferoxyarsenat-, Kupfernickeloxyarsenat und Nickeloxydeinschlüsse 117

Hegedüs, Z.: Angaben über die in technischen Kupfern vorkommenden Kupferoxydeinschlüsse — З. Хегедюш: Данные о медно-окисных включениях, встречающихся в технических сортах меди — Data on Copper Oxide Inclusions in Industrial Copper — Données sur les inclusions d'oxyde de cuivre dans les cuivres industriels 127

Hazay, I.: Die Umrechnung von der stereographischen Projektion und der konformen Zylinderprojektion auf die Gauss—Krügersche Projektion — И. Хазаи: Пересчет со стереографической проекции и с конформной цилиндрической проекции на проекцию Гаусса—Крюгера — Conversion of Stereographic and Conformal Cylindric Projections to the Gauss—Krüger System — Conversion des projections stéréographique et cylindrique-orthomorphique à la projection de Gauss—Krüger 139

Schwertner, A.: Dynamics of Girders — А. Швертнер: Динамика балок, трактуемых методом упругих точек — La dynamique des poutres traitées à la base de la méthode des points élastiques — Dynamik der Träger bei Berechnung mit der Methode der elastischen Punkte 155

Geleji, A.: Kraftbedarf und Fliessvorgänge beim Strangpressen und beim Pressen im Gesenk — А. Гелеи: Штамповка на прутковом прессе и в матрицах — Power Demand and Forming in Extrusion and Die-forging — Demande de puissance et déformation au refoulement et à l'étampage 187

Gillemot, L.: Design and Operation of Reactors for Titanium Production — Л. Жильмо: Расчет и эксплоатация реакторов, служащих для получения титана — Calcul et fonctionnement de réacteurs pour la fabrication du titane — Entwurf und Betrieb von Reaktoren für Titanherstellung 221

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1954. VIII. 27. — Terjedelem: 21¼ (A/5) ív, 163 ábra

33234/54 — Akadémiai nyomda, V., Gerlóczy-u. 2. — Felelős vezető: ifj. Puskás Ferenc

Les Acta Technica paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction et écrits à la machine à l'adresse suivante

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur des Livres et Journaux »Kultúra« (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Compte-courant No.: 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

The Acta Technica publish papers on technical subjects in Russian, French, English and German.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up one volume.

Manuscripts should be typed and addressed to:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica, is 110 forints a volume. Orders may be placed with »Kultúra« Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest VI., Sztálin-út 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in russischer, französischer, englischer und deutscher Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

62,— Ft.

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

S. GELEJI

TOMUS X FASCICULI 3–4

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

BUDAPEST, 1955

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok, géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az »Akadémiai Kiadó«-nál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 04-878-111-46), a külföld számára pedig a «Kultúra» Könyv és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VI., Sztálin út 21. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

»Acta Technica« публикуют трактаты из области технических наук на русском, французском, английском и немецком языках.

»Acta Technika« выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи (в напечатанном на машинке виде следует направлять по адресу:

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена »Acta Technica« — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет »Kultúra« (Budapest, VI., Sztálin út 21. Текущий счет № 43-790-057-181), или его заграничные представительства и уполномоченные.

DER ISOSTATISCHE CHARAKTER DER UNGARISCHEN NIVEAUVERÄNDERUNGEN UND DIE MÖGLICHKEIT DER ZEITLICHEN KORREKTION DER HÖHENWERTE DER NIVELLEMENTHÖHENFESTPUNKTE

V. SCHEFFER

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 3. April 1953]

In einem früheren Aufsatz [1] hatte der Verfasser die ungarischen Niveauveränderungen vom geologischen Gesichtspunkt behandelt. Dabei stellte er einerseits einen engen Zusammenhang zwischen den Niveauveränderungen des vom Karpatengürtel umgebenen Gebietes und den isostatischen Anomalien, anderseits den regionalen Charakter der Senkung dieses Gebietes und die Unterschiede hinsichtlich der Bewegungsintensität der in der Senkung teilnehmenden Gesteinsmassen in geologischer Beziehung fest.

In dieser Arbeit wurde darauf hingewiesen und an Hand des Beispieles des Bakonygebirges sogleich konkret gezeigt, dass man bei der Untersuchung der isostatischen Natur der Krustenbewegungen die Schwereanomalien von der durch die verschiedene Dichte der Oberflächenmassen verursachten Wirkung zu »befreien« hat, d. h. dass man an den Anomalien, wo es sich als notwendig erweist, die sog. oberflächliche oder geologische Reduktion vornehmen muss, um zu erreichen, dass sich in ihnen die Massenverteilung der tieferen Schichten der Erdkruste widerspiegelt.

In einer anderen Arbeit des Verfassers [2] wurde dann bei der Behandlung des isostatischen Charakters der norditalienischen Niveauveränderungen festgestellt, dass auf dem behandelten Gebiete nicht nur die regionale Niveauveränderung einen isostatischen Charakter aufweist, sondern dass einige durch lokale geologische Strukturen verursachte Massenüberschüsse und Massendefekte, die im Profil der Schwereanomalien in Form von Maxima und Minima auftreten, selbständige isostatische Bewegungen lokalen Charakters ausführen. Es wurde hierbei hervorgehoben, dass bei Berücksichtigung der Grösse dieser Niveauveränderungen die Nivellementhöhenfestpunkte in den Zonen solcher regelmässiger Krustenbewegungen nur dann ihre Aufgabe vollkommen zu erfüllen vermögen, wenn man die jährliche Grösse ihrer Höhenveränderungen genau bestimmt und diesen Wert bei der späteren Benutzung der Höhen der einzelnen Festpunkte als zeitliche Korrektion anwendet.

In der vorliegenden Abhandlung soll nun über das Ergebnis derjenigen Untersuchungen berichtet werden, die die Klärung der Frage bezweckten, ob die auf dem Gebiete Ungarns festgestellten Niveauveränderungen auch auf

kleineren Gebietseinheiten, d. h. im lokalen Sinn einen isostatischen Charakter besitzen oder nicht.

Diese Frage lässt sich auch in folgender Form stellen: ist es möglich, zwischen den Gravitationsanomalien und den Niveauveränderungen einen derartigen Zusammenhang festzustellen, bei dem das Vorzeichen und der zahlenmässige Wert der Niveauveränderungen durch die Wertveränderungen der Gravitationsanomalien bedingt werden?

Falls nun ein solcher Zusammenhang vorhanden ist, dann bestand ein weiteres Ziel darin, die Möglichkeit der Feststellung einer Verhältniszahl zu prüfen, die das Verhältnis zwischen der Grösse der Schwereanomalien und dem Wert der jährlichen Niveauveränderung zum Ausdruck bringt und mit deren Hilfe die zeitlichen Höhenveränderungen der Nivellementfestpunkte in Kenntnis der Schwereanomalien ausgerechnet werden können.

Als Grundlage dieser Untersuchungen dienten folgende Quellenwerke: zur Feststellung der Schwereanomalien die in den Jahresberichten des Ungarischen Staatl. »Roland Eötvös« Geophysikalischen Instituts [3—8] sowie in den Abhandlungen von *Tanni* [9], *Facsinay* [10], *Szurovy* [11] und *Vajk* [12] veröffentlichten Angaben bzw. die sich aus ihrem Vergleich ergebenden Werte.

Zur Veranschaulichung des Verlaufes der benutzten Schwereanomalien wird in *Abb. 1* die Übersichtskarte der Gravitationsanomalien Ungarns vorgeführt, in der die Anomalien nach *Bouguer* angegeben sind. Auf eine ausführliche Besprechung dieser Karte soll später zurückgekommen werden.

Die Untersuchungen erstreckten sich sowohl auf die *Bouguer-* als auch auf die zur Verfügung stehenden *Fayes*chen und isostatischen Anomalien.

Die Höhenveränderungen der alten Nivellementhöhenfestpunkte wurden aus der in der wertvollen Arbeit von *Gárdonyi* [13] veröffentlichten Niveauveränderungskarte übernommen (*Abb. 2*). Diese Arbeit enthält allerdings kein Ortsverzeichnis der Nivellementfestpunkte und aus der Karte selbst lassen sich nur die mit Nullkreisen bezeichneten Höhenfestpunkte mit entsprechender Sicherheit indentifizieren. Infolgendessen wurden die Untersuchungen im allgemeinen bloss für diese Punkte durchgeführt. In der Abhandlung von *Bendefy (Benda)* [14] über die Krustenbewegungen werden dagegen unter anderem auch die Orte der hydrographischen Höhenfestpunkte längs der Theiss angegeben. Diese Angaben, in erster Linie die mit Eisentafeln bezeichneten Höhenmarken, wurden hier ebenfalls in Betracht gezogen.

Die Realität der Angaben von Gárdonyi wird auch von *Rédey* [15] anerkannt, und *Regőczi* [16] stellt im Zusammenhang mit dieser Frage fest, dass die alten Nivellementwerte bei entsprechender Anwendung eine reelle Grundlage zur Untersuchung der Höhenveränderungen der Festpunkte abgeben.

Im ersten Teil der Untersuchungen wurden jene Gebiete Ungarns einer Prüfung unterzogen, wo die Oberfläche von einer älteren, dichteren Gesteinsmasse bedeckt wird. Auf diesen Gebieten ist, wie schon eingangs erwähnt, die

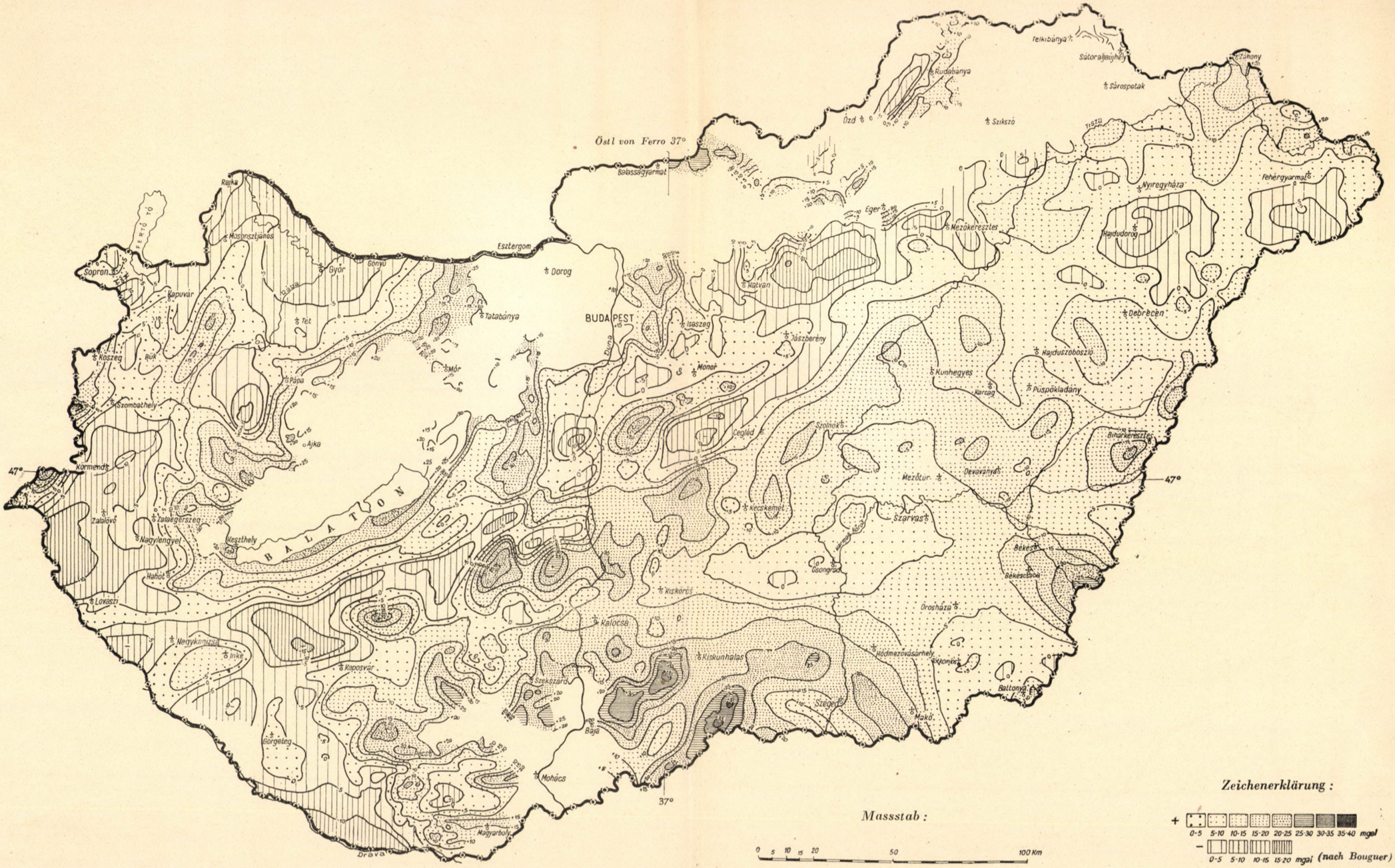


Abb. 1.
Übersichtskarte der Schwereanomalien Ungarns
Wertedistanz der Isoanomalinien : 5 milligal

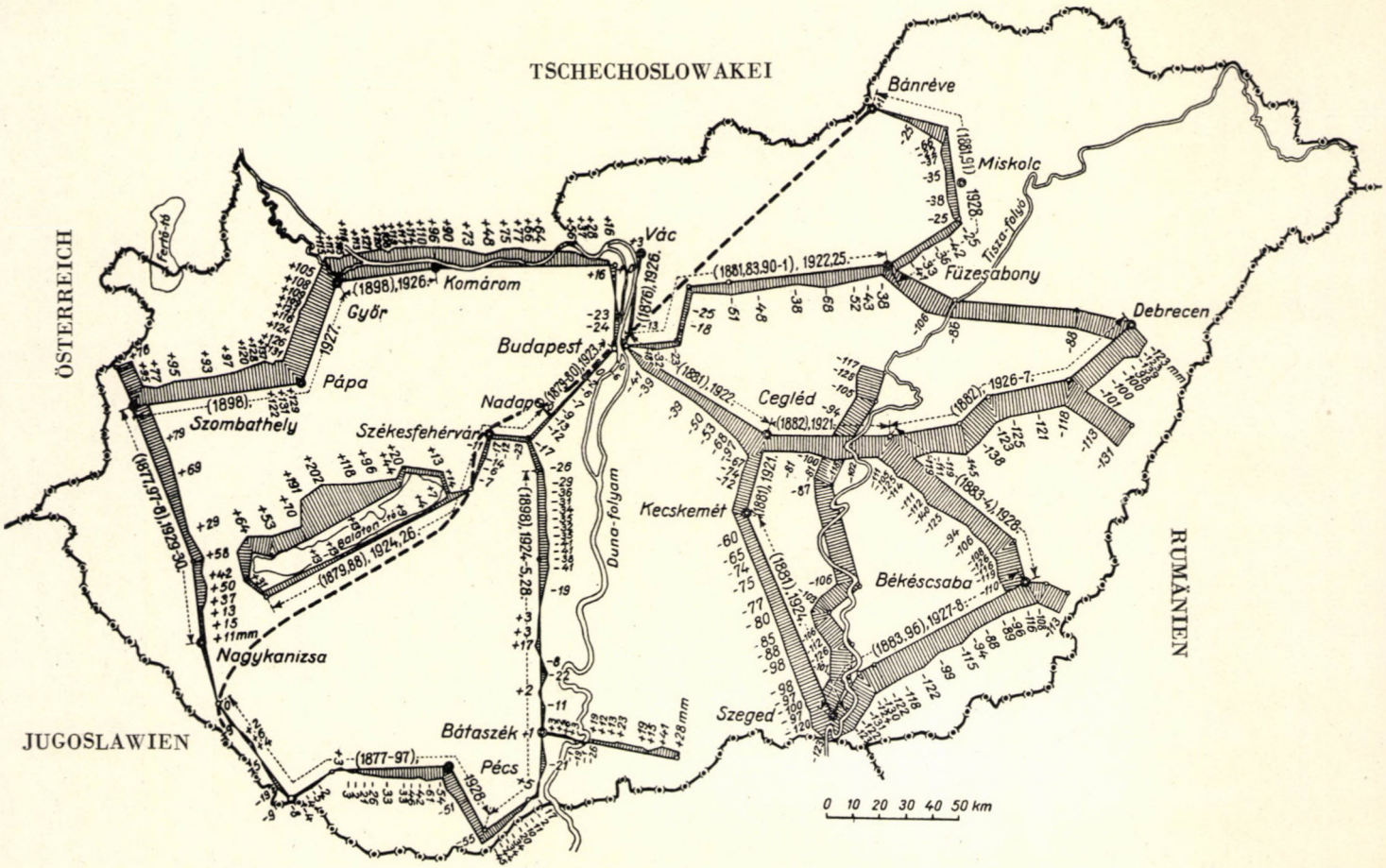


Abb. 2. Die Höhenveränderungen der alten Nivellierfestpunkte in Ungarn, nach I. Gárdonyi

durch die Oberflächenmassen hervorgerufene Wirkung zu bestimmen und von den Schwereanomalien abzuziehen. Diese Operation wird in der isostatischen Praxis geologische Reduktion genannt.

Nach Ausführung der geologischen Reduktion spiegeln die Schwereanomalien bereits die Massenverteilung der tieferen Schichten wider und eignen sich zu einem unmittelbaren Vergleich mit den Niveauveränderungen, aus dem sich dann Rückschlüsse auf den isostatischen Charakter der Krustenbewegungen ziehen lassen.

Wie erwähnt, wurde diese Reduktion für die Oberflächenmassen des Bakonygebirges bereits in einer früheren Arbeit des Verfassers vorgenommen, wobei festgestellt wurde, dass die im Bakonygebirge messbaren Niveauveränderungen einen isostatischen Charakter besitzen.

Mit der Schilderung der Untersuchungsergebnisse soll der Einfachheit halber auf jenen Gebieten des Landes begonnen werden, auf denen es keine Oberflächenwirkungen gibt und auf denen infolgedessen die Schwereanomalien unmittelbar mit den Niveauveränderungen verglichen werden können. Diese Gebiete sind laut der geologischen Karte Ungarns [17] folgende: die südlich der Linie Ráckeve—Jászberény—Kisvárda gelegene Zone der Grossen Ungarischen Tiefebene und des Landes zwischen Donau und Theiss, in der Kleinen Ungarischen Tiefebene die Umgebung der Stadt Győr und im südwestlichen Teile Transdanubiens die Gebiete um Vasvár, Zalalövő, Nagykanizsa, Barcs und Nagyatád.

Als Untersuchungsmethode wurde dasselbe Verfahren angewandt, das vom Verfasser bereits bei der Bestimmung des isostatischen Charakters der norditalienischen Niveauveränderungen benutzt wurde. Demgemäss wurden also die im Laufe wiederholter Nivellements festgestellten Höhenveränderungen der Festpunkte unmittelbar mit den den Orten der einzelnen Nivellementfestpunkte entsprechenden Schwereanomalienwerten verglichen, u. zw. auf Grund der Überlegung, dass wenn die festgestellten Niveauveränderungen der Festpunkte isostatische Krustenbewegungen anzeigen, der Charakter des Ablaufes der Niveauveränderungskurve mit dem Spiegelbild des Ablaufes der Schwereanomalienkurve übereinstimmen muss.

Die hier vorgeführten Abbildungen wurden nach dem obigen Verfahren längs der Linien der einzelnen Nivellementfestpunkte konstruiert. Die aus ihnen ziehbaren Folgerungen sollen nun im nachstehenden besprochen werden.

Die so zu Vergleichszwecken konstruierten Sektionen

Cegléd—Törökszentmiklós—Kisújszállás—Karcag—Kaba—Debrecen

Cegléd—Kecskemét—Szeged *(Abb. 3)*

Szeged—Mindszent—Tiszavárkony—Tiszasüly

Törökszentmiklós—Békéscsaba

Kaba—Berettyóújfalu *(Abb. 4)*

die den auf dem Gebiete der Grossen Ungarischen Tiefebene befindlichen Linien

der Nivellementfestpunkte entlang verlaufen, beweisen eindeutig, dass die Höhenfestpunkte der zum Gegenstand der Untersuchung gewählten Zone Bewegungen in vertikaler Richtung ausführen, die dem Bestreben der Erdkruste entsprechen, in das isostatische Gleichgewicht zu gelangen.

Die Gebiete der einzelnen lokalen Gravitationsmaxima sinken, während sich in den Minimumzonen ein verhältnismässiges Emporsteigen beobachten lässt.

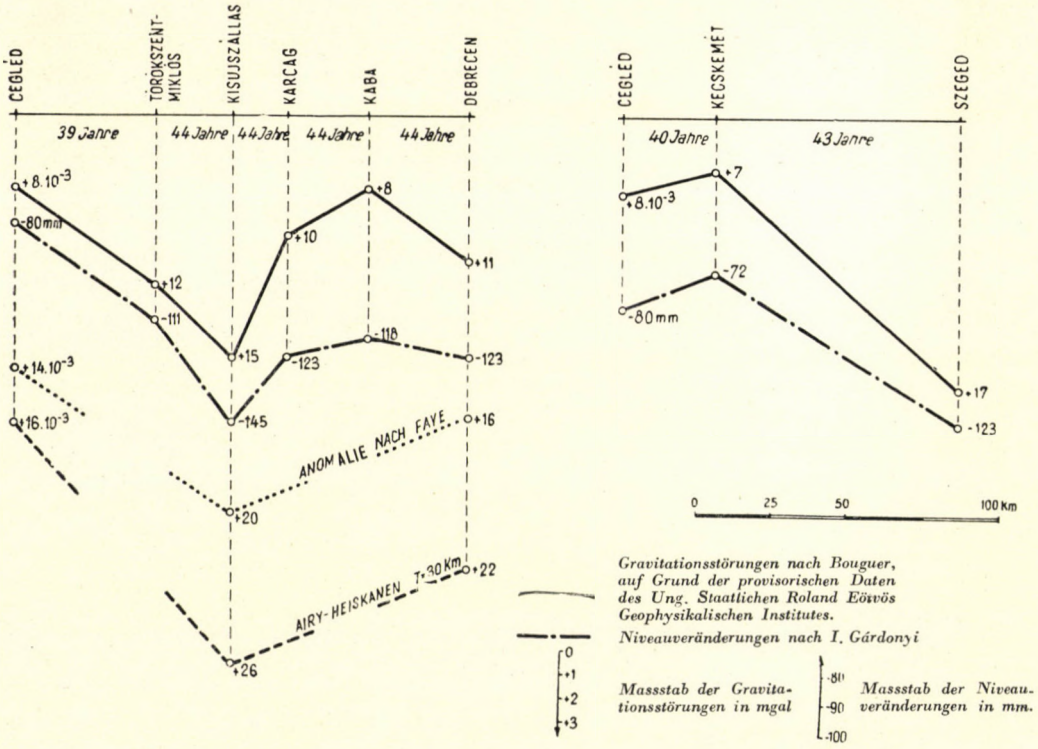


Abb. 3. Der isostatische Charakter der Niveauveränderungen in Ungarn

Dieselbe Feststellung kann auch auf Grund der Sektion

Nagykanizsa—Győr *(Abb. 5)*

gemacht werden, die zwei Gebiete Transdanubiens miteinander verbindet, in denen keine aus oberflächlichen Wirkungen herrührenden Anomalien vorhanden sind.

Die bisher geschilderten Sektionen wurden längs der Linien der neunivellierten Basispunkte gezogen.

Die hier gleichfalls zu Vergleichszwecken vorgeführten Profile

Győr—Kecskemét—Békéscsaba und

Nagykanizsa—Szeged *(Abb. 5)*

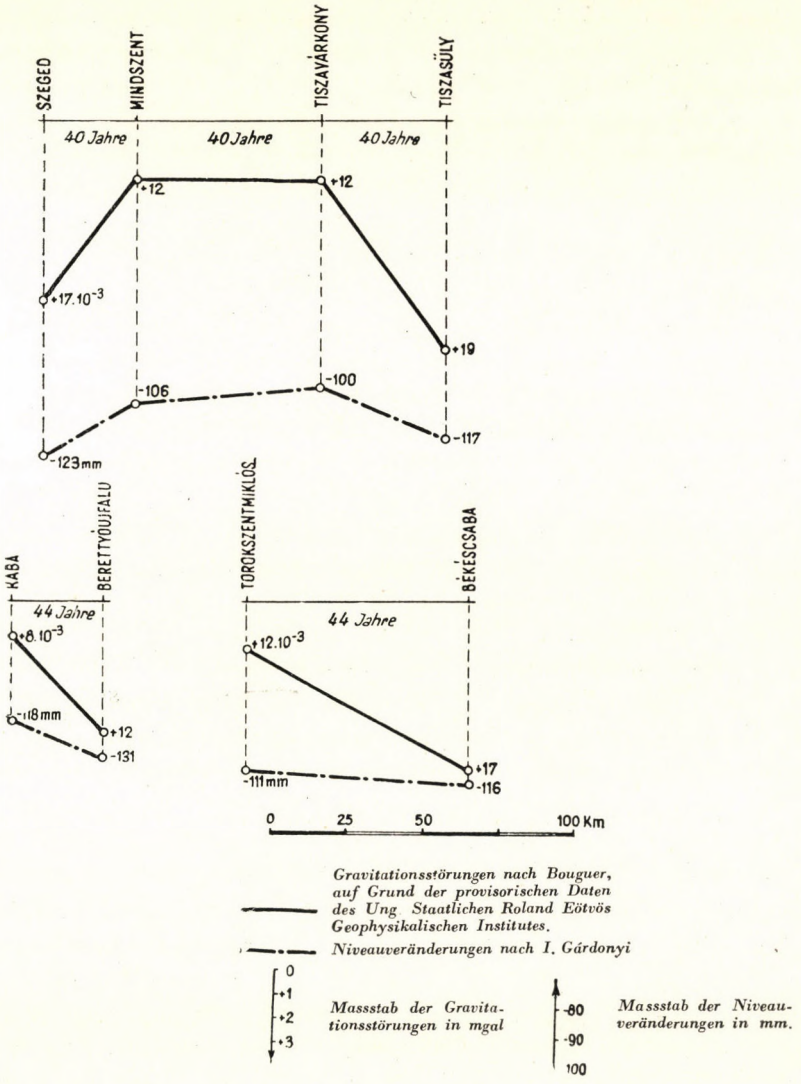


Abb. 4. Der isostatische Charakter der Niveauveränderungen in Ungarn

folgen nicht der Linienführung des Zuges der Nivellementfestpunkte, sondern durchschneiden unabhängig von diesen das Land.

Vergleicht man die auf die Höhe des Landesnivellement-Fundamentalpunktes Nadap bezogenen, zu verschiedenen Zeitpunkten gemessenen und aus den Ergebnissen der nach verschieden langer Zeit wiederholten Nivellierungen berechneten Niveauveränderungen mit den Schwereanomalien, so lässt sich hieraus ebenfalls der isostatische Charakter der Niveauveränderungen ersehen.

Die vergleichenden Untersuchungen wurden nicht nur für die bei den Sektionen im allgemeinen angegebenen *Bouguer*-Anomalien, sondern für das Gebiet Ungarns auch für die von verschiedenen Forschern berechneten und mitgeteilten *Faye*schen und isostatischen Anomalien durchgeführt. Hierbei konnte festgestellt werden, dass sowohl die relativen Veränderungen der *Faye*-schen Anomalien als auch die der isostatischen Anomalien keine wesentlichen Abweichungen von den Veränderungen der *Bouguer*-Anomalien zeigen, so dass sich auch die *Bouguer*-Anomalien zu vorliegenden Untersuchungen eignen.

Zur Veranschaulichung dieser Übereinstimmung wurden auf das Profil Cegléd—Törökszentmiklós—Kisújszállás—Karcag—Kaba—Debrecen auch die Werte der für Cegléd, Kisújszállás und Debrecen bestimmten und zur Verfügung stehenden *Faye*schen und isostatischen Anomalien aufgetragen, des weiteren auch auf das Profil Nagykanizsa—Szeged.

Es ist auch auf Grund der hier gezeigten Abbildungen ersichtlich, dass der Verlauf der *Faye*schen und isostatischen Anomalien auf dem untersuchten Gebiet praktisch mit dem Verlauf der *Bouguer*-Anomalien übereinstimmt.

Bisher wurde der isostatische Charakter der Niveauveränderungen auf jenen Gebieten Ungarns untersucht, auf denen keine oberflächlichen Gravitationswirkungen auftreten. Im folgendem wurden nun diese Untersuchungen auf diejenigen Zonen ausgedehnt, deren Oberfläche von Gesteinsmassen von verschiedener Dichte bedeckt ist und an deren Schwereanomalienwerten infolgedessen eine geologische Reduktion durchgeführt werden muss, wenn man sie mit den Niveauveränderungen vergleichen will.

Von den untersuchten Sektionen wurden seinerzeit in dem am 27. November 1952 vor dem Geodätischen und Geophysikalischen Hauptausschuss der Ungarischen Akademie der Wissenschaften gehaltenen Vortrag des Verfassers zwei vorgeführt, die auf einem von Oberflächenwirkungen freien Gebiete beginnen und auf einem Gebiete enden, das Obeflächenwirkungen aufweist. In den von Oberflächenwirkungen freien Abschnitten dieser Sektionen konnte die isostatische Natur der Niveauveränderungen sofort erkannt werden, während sie sich in den darauffolgenden Abschnitten nur bei Berücksichtigung der Werte der geologischen Reduktion, die an den Schwereanomalien der Festpunkte vorgenommen werden musste, feststellen liess. Über die geologische Reduktion soll im nachstehenden noch ausführlicher die Rede sein.

In der seit 1952 verflossenen Zeit, als der Verfasser die Ergebnisse der hier geschilderten Untersuchungen zuerst veröffentlichte, wurden im Laufe der vom Staate durchgeführten Hauptnivellierungen die Züge der alten Nivellementfestpunkte Transdanubiens neuerdings nivelliert. Die Resultate dieser Neunivellierungen sind bislang noch nicht publiziert worden, doch scheinen die nach den vom Leiter der staatlichen Nivellements, von *L. Bendefy*, erhaltenen persönlichen Informationen zu bestätigen, dass die vom Wiener Militärgeographischen Institut durchgeführten alten Nivellements mit systematischen Fehlern behaftet waren. Diese Fehler rührten nach der Ansicht von *Bendefy* vom Gebrauche von nicht komparierten Nivellierlatten her und gelangten in den Ergebnissen der Nivellements von grösseren Höhenunterschieden zum Ausdruck.

In Anbetracht dieser persönlichen Information wird nun hier auf eine Veröffentlichung der beiden obenerwähnten, über Hügelland gezogenen und stellenweise einen mehr als 100 m betragenden Höhenunterschied aufweisenden Sektionen abgesehen.

Da dieser systematische Fehler bei den übrigen hier untersuchten, über ebenes Gebiet gezogenen und nur einige wenige Meter Höhendifferenz aufweisenden Sektionen nicht vorkommen kann, darf auf Grund der Neunivellements die Behauptung aufgestellt werden, dass die bisher in Ungarn festgestellten Niveauveränderungen isostatischer Natur sind. Im folgenden sei nun eine zahlenmässige Untersuchung der Gesetzmässigkeiten dieser Niveauveränderungen vorgenommen.

Es wurde gezeigt, dass zwischen den Schwereanomalien und den Werten der Niveauveränderung ein deutlicher Zusammenhang besteht. Es sollen nun für die einzelnen Abschnitte der Züge der Nivellementfestpunkte die Werte der durch die Schwereanomalieneinheit verursachten jährlichen Niveauveränderungen ermittelt werden. Die auf diese Weise gewonnene Verhältniszahl drückt die Intensität der Niveauveränderung aus. Die Dimension dieser Verhältniszahl beträgt $\frac{\text{mm}}{\text{Jahr}}/\text{mgal}$. Das Vorzeichen dieser Massgrösse der Niveauveränderungsintensität ist im Falle von Krustenbewegungen isostatischen Charakters negativ.

Auf Grund der zur Verfügung stehenden Angaben wurden die Massgrössen bestimmt und auf die in *Abb. 6* gezeigte Karte der durch die Schwereanomalieneinheit verursachten jährlichen Niveauveränderungen in Ungarn aufgetragen.

Aus der Karte ist zu ersehen, dass die Grössen ausnahmslos ein negatives Vorzeichen aufweisen und dass sich in ihrer Grössenordnung keine grösseren Wertschwankungen feststellen lassen. Diejenigen Werte, bei denen infolge der zwischen dem Nivellement und Neunivellement verstrichenen Zeit oder infolge der Notwendigkeit einer Oberflächenkorrektion eine gewisse Unsicherheit herrscht und die infolgedessen nur als Näherungswerte anzusehen sind, wurden in Klammern gesetzt.

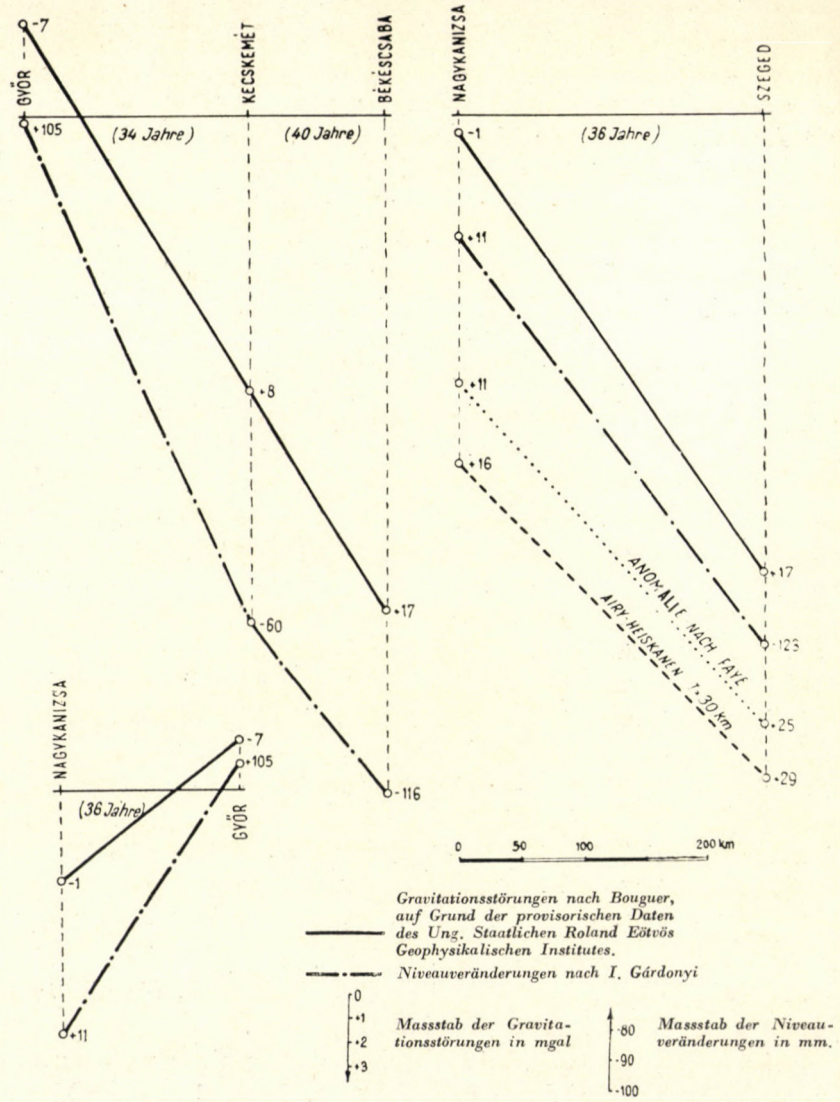


Abb. 5. Der isostatische Charakter der Niveauveränderungen in Ungarn.

Im Zusammenhang mit der Genauigkeit der Massgrössen sei noch folgendes vorausgeschickt: die benutzten Werte der Schwereanomalien sind bloss als vorläufige Näherungswerte zu betrachten, deren Genauigkeit sich in den einzelnen untersuchten Abschnitten der Hauptnivellementlinien auf etwa $\pm$ 1 Milligal beläuft. Erst nach Beendigung der vom Ungarischen Staatl. »Roland Eötvös« Geophysikalischen Institut in Angriff genommenen und gegenwärtig im Gange befindlichen Gravitationslandesvermessungen und erst nach der genauen Ausgleichung und Korrektion der gemessenen Angaben werden völlig exakte Anomalienwerte zur Verfügung stehen. In den Aufgabenkreis dieses Institutes würde auch die geologische Reduktion der den Nivellementfestpunkten entsprechenden Schwereanomalienwerte fallen.

Stellenweise verursachte auch die Korrelation der auf der Karte von *Gárdonyi* angegebenen Nivellierungsdaten mit den Werten der Schwereanomalien eine gewisse Unsicherheit, da die Gravitationsbeobachtungen nicht am Orte der Nivellementfestpunkte erfolgten und die Interpolationen im allgemeinen nicht fehlerfrei sein können.

Die bei Berücksichtigung der obigen Ausführungen angegebenen Grössen sind aus diesem Grunde bloss als Näherungswerte anzusehen, so dass es noch verfrüht wäre, die Gesetzmässigkeit ihrer Veränderungen auf dem ganzen Gebiete Ungarns einer eingehenden Untersuchung zu unterziehen. In bezug auf ihre praktische Verwendbarkeit sei indessen folgendes erwähnt.

Die meisten und verlässlichsten Masszahlen stehen aus dem Gebiet zwischen Donau und Theiss und aus der Grossen Ungarischen Tiefebene zur Verfügung. Wenn man ohne jede Ausgleichung den arithmetischen Mittelwert dieser Zahlen bildet, dann erhält man als Massgrösse der für diese grosse Flächeneinheit gültigen Niveauveränderungsintensität einen Wert von

$$-0{,}1\,\frac{\text{mm}}{\text{Jahr}}\,/\text{mgal}.$$

Ermittelt man nun bei Anwendung dieser Grösse — wenn nur die Schwereanomalienwerte bekannt sind — die durchschnittlichen Niveauveränderungen der Festpunkte des Gebietes während 40 Jahre durch Berechnung, so zeigen sich zwischen den berechneten und den tatsächlich gemessenen Angaben im Durchschnitt bloss Wertdifferenzen von einer Grössenordnung, die nicht grösser ist als jene des mittleren Fehlers der Nivellierungen.

Es ist also die Möglichkeit der Einführung einer neuen geodätischen Methode gegeben, deren Wesen darin besteht, dass bei genauer Kenntnis des Bildes der Schwereanomalien die jährlichen Niveauveränderungen eines Gebietes berechnet werden können, wodurch die zeitliche Korrektion der Höhenwerte der Nivellementfestpunkte zu einer lösbaren Aufgabe wird.

Schliesslich seien noch einige Bemerkungen über die geologische Reduktion angebracht. Die Bestimmung der oberflächlichen oder geologischen Wirkung

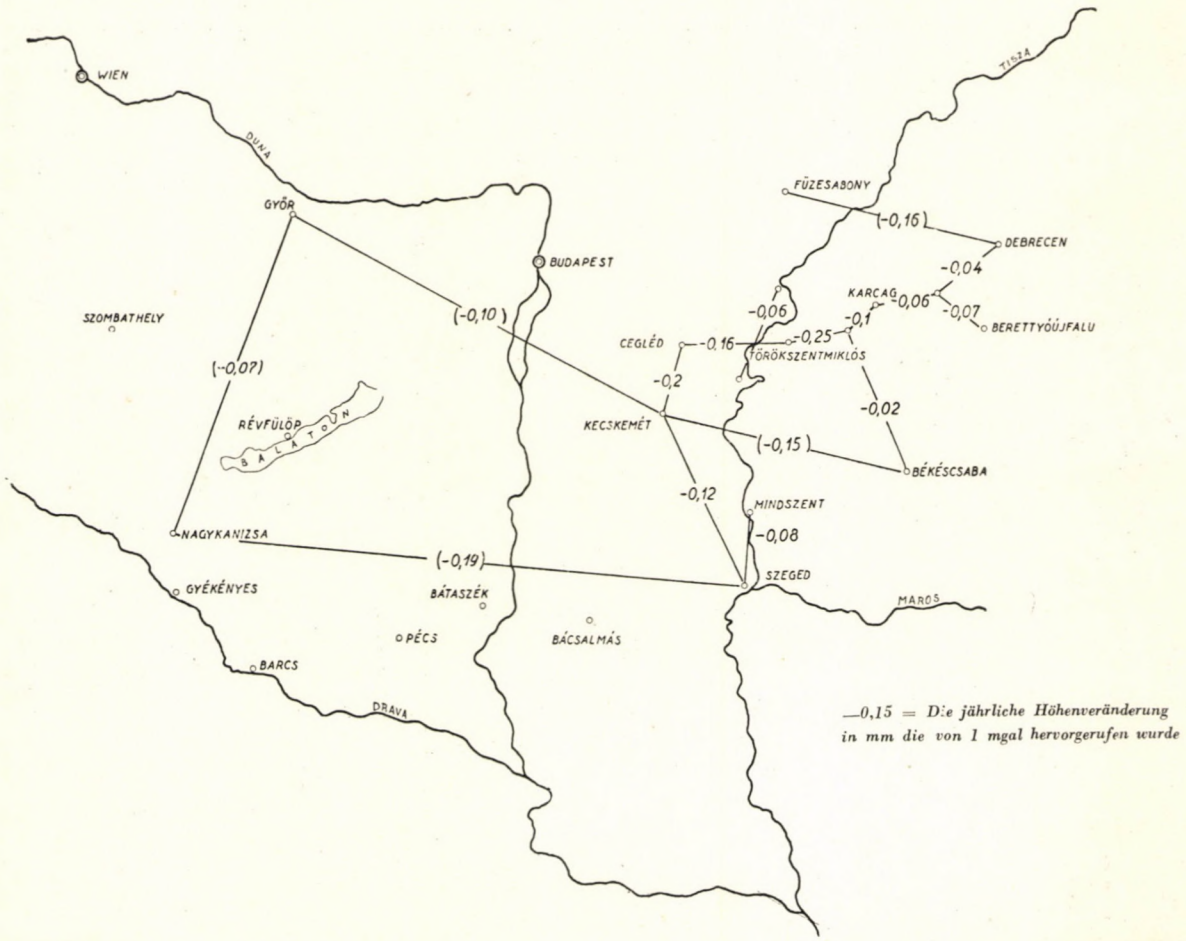


Abb 6. Die von der Schwerestörungseinheit verursachten jährlichen Höhenveränderungen in Ungarn

durch Berechnung ist eine Operation, die viel Umsicht und einen grossen Arbeitsaufwand erfordert und die nur in Gebieten, die durch Bohrungen gut aufgeschlossen sind, mit der notwendigen Genauigkeit ausgeführt werden kann. Im entgegengesetzten Fall ist nämlich die Annahme der Dichteverteilung in der Tiefe auf Grund von Schätzung mit viel Ungewissheit verbunden.

Auf Grund der obigen Ausführungen erscheint es möglich, die geologische Korrektion mit einer neuen, sog. geodätischen Methode auf jenen Gebieten zu bestimmen, auf denen die Niveauveränderungen einen isostatischen Charakter zeigen. Demgemäss wird man also in Zonen, deren Schwereanomalienbild bekannt ist, in denen eine Neunivellierung der Basispunkte stattgefunden hat und in denen die Niveauveränderungen isostatischer Natur sind, die geologische Korrektion eines Festpunktes auf die folgende Weise erhalten :

Es müssen die Massgrösse der Niveauveränderungsintensität der betreffenden Zone, die Höhenveränderung des untersuchten Basispunktes im Vergleich zu einem aussenstehenden Nivellementfestpunkt, die zwischen der Nivellierung und der Neunivellierung verstrichene Zeit und die ohne geologische Reduktion gebildeten Schwereanomalien der Zone bekannt sein. Hernach lässt sich die dem untersuchten Festpunkt entsprechende Schwereanomalie auf Grund der Massgrösse der Niveauveränderungsintensität auf den aussenstehenden Festpunkt bezogen berechnen. Zieht man sodann die so berechnete Schwereanomalie vom Werte der geologisch nicht reduzierten Schwereanomalie ab, so erhält man den Wert der geologischen Korrektion selbst.

Die vorstehenden Ausführungen wurden vor zwei Jahren geschrieben. In der Zwischenzeit hat das Ungarische Staatl. »Roland Eötvös« Geophysikalische Institut die Vermessung des Gravitationsbasisnetzes Ungarns beendet und die Ergebnisse der alten Gravitationsmessungen auf die neu festgestellten Gravitationsfestpunktwerte ausgeglichen.

Die auf diese Weise konstruierte Karte der Schwereanomalien Ungarns mit Wertdifferenzen von 5 mgal wird in Abb. 1 vorgeführt. Infolge der neuen Ausgleichung haben sich die den Nivellementfestpunkten entsprechenden Schwereanomalienwerte verändert und zeigen gewisse Abweichungen im Vergleich zu den Schwereanomalienwerten in den Abbildungen 3, 4 und 5. Der Verlauf der Schwereanomaliensektionen erfährt aber auch bei Anwendung der neuen Anomalienwerte keine Veränderung und bezeugt, insoferne die von *Gárdonyi* veröffentlichten Niveauveränderungsangaben richtig sind, unverändert den isostatischen Charakter der ungarischen Niveauveränderungen.

In den in Abb. 4 zu Vergleichszwecken gezeigten Sektionen wurden die Niveauveränderungen der Festpunkte Győr und Nagykanizsa auf Grund der Angaben *Gárdonyis* eingetragen. Die von *Bendefy* für diese beiden Festpunkte zur Verfügung gestellten Angaben weichen zwar stark von den obigen Werten ab, sprechen indessen gleichfalls für Niveauveränderungen isostatischer Natur. Aus diesem Grunde wurden in Abb. 4 die *Gárdonyi*schen Angaben

belassen, während bei der Konstruktion der Karte in *Abb. 6.* für die beiden Festpunkte bereits die neuen Angaben *Bendefys* herangezogen wurden.

Die Ausführungen dieser Abhandlung weisen darauf hin, dass die Niveauveränderungen in Ungarn infolge der Schwereanomalien, d. h. infolge der Massenüberschüsse und Massendefekte der Erdkruste entstehen. Die Erkenntnis dieser Tatsache besitzt sowohl vom geotektonischen als auch vom geomechanischen Gesichtspunkt eine besondere Bedeutung, doch soll hier auf sie angesichts der geodätischen Themastellung der vorliegenden Abhandlung nicht näher eingegangen werden.

SCHRIFTTUM

1. *V. Scheffer* und *K. Kántás:* Regionale Geophysik von Transdanubien. Acta Techn. Hung. **I.** Nr. 2, 1950, S. 83—105 und **III.** No. 1—2, 1951, S. 1—22.

2. *V. Scheffer :* Isostasie. Acta Techn. Hung. **IX** (1954). S. 253/276.

3. *D. Pekár :* Rapport présenté à la Quatrième Assemblée Générale de l'Union Géodésique et Géophysique Internationale à Stockholm en Août 1930. Budapest, 1939.

4. *J. Fekete :* Jelentés az Eötvös Lóránd Geofizikai Intézet működéséről az 1939. évben. Budapest, 1940. (Bericht über die Tätigkeit des »Roland Eötvös« Geophysikalischen Instituts im Jahre 1939. Nur ungar.)

5. *J. Fekete :* Jelentés az Eötvös Loránd Geofizikai Intézet működéséről az 1940. évben. (Bericht über die Tätigkeit des »Roland Eötvös« Geophysikalischen Instituts im Jahre 1940. Nur ungar.) Budapest, 1941.

6. *J. Fekete :* Jelentés az Eötvös Loránd Geofizikai Intézet működéséről az 1941. évben. (Bericht über die Tätigkeit des »Roland Eötvös« Geophysikalischen Instituts im Jahre 1941. Nur ungar.) Budapest, 1942.

7. *I. Bassó :* Jelentés az Eötvös Loránd Geofizikai Intézet működéséről az 1942. évben. (Bericht über die Tätigkeit des »Roland Eötvös« Geophysikalischen Instituts im Jahre 1942. Nur ungar.) Budapest, 1943.

8. *I. Bassó :* Jelentés az Eötvös Loránd Geofizikai Intézet működéséről az 1943. évben. (Bericht über die Tätigkeit des »Roland Eötvös« Geophysikalischen Instituts im Jahre 1943. Nur ungar.) Budapest, 1944.

9. *L. Tanni :* On the isostatic structure of the earth's crust in the Carpathian countries and the related phenomena. Helsinki, 1942.

10. *L. Facsinay :* Isostatic anomalies of Transdanubia (Hungary) according to the gravity meter measurements. Milano 1948.

11. *G. Szurovy :* Geological structure of the southern part of the Great Hungarian Plain. Budapest, 1948.

12. *R. Vajk :* Geophysical Exploration of Southwest Hungary, Geophysics Vol. **XVII.** 1952.

13. *I. Gárdonyi :* A régi felsőrendű szintezési alappontok magasságainak változásai. (Die Höhenveränderungen der alten Nivellementfestpunkte erster Ordnung. Nur ungar.) Budapest, 1932.

14. *L. Benda :* Belsőkontinentális kéregmozgások Csonkamagyarország területén. (Innerkontinentale Krustenbewegungen auf dem Gebiete Rumpfungarns. Nur ungar., Pécs, 1932.)

15. *I. Rédey :* A földkéreg izosztatikus egyensúlya. (Das isostatische Gleichgewicht der Erdkruste. Nur ungar.) Budapest, 1942.

16. *E. Regőczi :* Magyarország régi elsőrendű szintezési hálózata. (Das alte Nivellierungsnetz erster Ordnung Ungarns. Nur ungar.) Budapest, 1949.

17. *L. Lóczy Sen.* und *K. Papp :* A Magyar Birodalom és a szomszédos országok területeinek földtani térképe. 1 : 900 000. (Geologische Karte des Ungarischen Reiches und der Gebiete der Nachbarländer. 1 : 900 000.) Budapest, 1922.

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Abhandlung stellt auf Grund eines Vergleiches der Karte der Schwereanomalien Ungarns und der während 40 Jahre eingetretenen Niveauveränderungen der Nivellementfestpunkte fest, dass die Niveauveränderungen in Ungarn einen isostatischen Charakter aufweisen. Für die Grösse der Niveauveränderungen wird die durch die Schwereanomalieneinheit verursachte jährliche Niveauveränderung als Masszahl eingeführt. Diese Masszahl beträgt in der Grossen Ungarischen Tiefebene zur Zeit etwa $-0{,}1\ \frac{\text{mm}}{\text{Jahr}}$/mgal.

ИЗОСТАТИЧЕСКИЙ ХАРАКТЕР ИЗМЕНЕНИЙ НИВЕЛИРА В ВЕНГРИИ И ВОЗМОЖНОСТИ ПОПРАВКИ ВО ВРЕМЕНИ ДАННЫХ ВЫСОТЫ ОПОРНЫХ ПУНКТОВ НИВЕЛИРОВАНИЯ

Кандидат техн. наук. В. ШЕФФЕР

Резюме

На основе сравнения карты гравитационных аномалий Венгрии и изменений нивелира опорных пунктов нивелирования в течение 40 лет устанавливается, что изменения нивелира в Венгрии носят изостатический характер. Для величины изменений нивелира автор вводит параметр — годовое изменение нивелира, вызванное единицей гравитационной аномалии.

В настоящее время эта величина для Венгерского Альфлёльда составляет около

$$-\ 0{,}1\ \frac{\text{мм}}{\text{год}}\ \text{мгал.}$$

ISOSTATIC CHARACTER OF LEVEL CHANGES IN HUNGARY AND THE POSSIBILITY OF TEMPORALLY REVALUATING THE ALTITUDE OF BENCH MARKS

V. SCHEFFER
Candidate of techn. sc.

SUMMARY

On the basis of the gravity anomaly chart for Hungary and by comparing 40 years, changes in the altitude of bench marks it is concluded in this preliminary study that the leve' changes in Hungary are of an isostatic character. To assess the magnitude of level changes, the author introduces, as a measure, the annual level change caused by the unit of gravity anomaly.

This value is for the Great Hungarian Plain actually about $-0{,}1\ \frac{\text{mm}}{\text{year}}$ /mgal.

CARACTÈRE ISOSTATIQUE DES CHANGEMENTS DE NIVEAU EN HONGRIE ET POSSIBILITÉ DE RÉÉVALUATION TEMPORELLE DES ALTITUDES DES BASES DE NIVELLEMENT

V. SCHEFFER
Candidat des sc. techn.

RÉSUMÉ

A la base des anomalies de gravité en Hongrie et par comparaison de variations d'altitude de points de base de nivellement pendant 40 ans, cette étude préliminaire établit que les changements de niveau en Hongrie sont de caractère isostatique. Pour l'évaluation de la grandeur des changements de niveau l'auteur a introduit, comme mesure, le changement de niveau annuel, produit par l'unité d'anomalie de gravité.

Cette valeur est à présent pour la Grande Plaine de la Hongrie de l'ordre de $-0{,}1\frac{\text{mm}}{\text{an}}$ /mgal.

DURCHBIEGUNGSBERECHNUNG VON STAHLBETON-BRÜCKEN MIT ZWEI HAUPTTRÄGERN

L. KOLLÁR

LEHRSTUHL FÜR MECHANIK DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT, BUDAPEST

[Eingegangen am 17. November 1953]

1. Einleitung

Es ist allgemein bekannt, dass bei der Probebelastung von Stahlbeton-Strassenbrücken mit zwei oder mehr Hauptträgern die beobachtete Durchbiegung geringer als die berechnete ist. Von den bei der Messung möglichen Irrtümern abgesehen hat diese Erscheinung zwei Ursachen : einerseits die fehler-

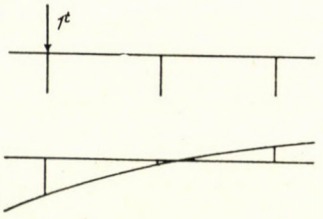


Abb. 1. Der untere Teil veranschaulicht die auf die Hauptträger wirkenden Kräfte

hafte Bestimmung des Elastizitätsmoduls (deren breitere Behandlung den Rahmen dieser Arbeit überschreiten würde), andererseits das Zusammenwirken der Fahrbahnplatte mit den Hauptträgern. Dieses Zusammenwirken wird bei der Berechnung der Durchbiegung im allgemeinen nicht in Betracht gezogen.

Das Zusammenwirken setzt sich aus drei Komponenten zusammen :

a) Bei Brücken mit mehr als zwei Hauptträgern verursacht die *Biegesteifigkeit des Querträgers* Zusammenwirkung *(Abb. 1)*, d. h. wenn die Belastung direkt auf einen Hauptträger wirkt, dann überträgt der Querträger einen Teil von ihr auf die übrigen Hauptträger. Dies ist die im Schrifttum ausführlich behandelte sog. Trägerrostwirkung, siehe z. B. die Arbeiten von *Leonhardt* [1], [2], [3].

b) Der *Verdrehungswiderstand* der Hauptträger. Dieser tritt in der Praxis nur dann in Erscheinung, wenn die Belastung nicht in der Symmetrieachse des Brückenquerschnittes wirkt. Diese Belastung will nämlich den Brückenquerschnitt verdrehen *(Abb. 2)*, infolge der Drehsteifigkeit der Hauptträger

treten aber Verdrehungsmomente auf und mit diesen zusammen ein Kräftepaar $q \cdot b$, das den Hauptträger „a" entlastet. *Palotás* hat für die Berechnung des Verdrehungswiderstandes ein genaues Verfahren ausgearbeitet [4], [6] und er hat gemeinsam mit dem Verfasser des vorliegenden Aufsatzes hierfür auch ein Annäherungsverfahren entwickelt [5], [6]. Im Ausland haben sich mit diesem Problem *Schöttgen* [7] und *Homberg* [8] befasst.

c) Schliesslich beeinflusst auch das *Zusammenwirken der Fahrbahnplatte mit den Hauptträgern* die Durchbiegung, nach Wissen des Verfassers ist aber dieses Problem noch nicht geklärt.

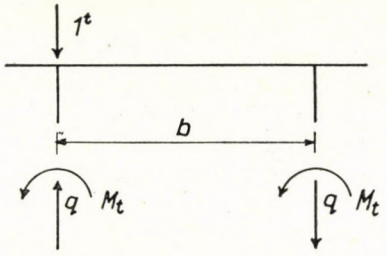


Abb. 2. Unten werden die auf die Hauptträger gelangenden additionalen Verdrehungskräfte gezeigt

Das Ziel dieser Arbeit ist, den von der Mitwirkung der Fahrbahnplatte auf die Durchbiegung ausgeübten Einfluss zu untersuchen. In erster Linie werden Brücken mit zwei Hauptträgern behandelt, weshalb auf das unter *a)* erwähnte Zusammenwirken nicht eingegangen werden soll. Die unter *b)* geschilderte, durch Verdrehung verursachte Mitwirkung wird hier nur in dem Umfang besprochen, wie dies für *c)* erforderlich ist.

2. Untersuchung des Kräftespiels bei Belastung mit 1 t

Als erstes Beispiel diene der folgende einfache Fall: die Brücke hat zwei frei aufliegende Hauptträger, ist senkrecht, das Trägheitsmoment der Haupt-

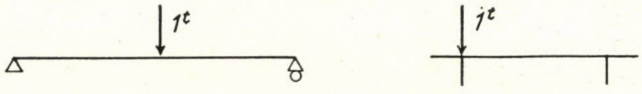


Abb. 3. Seitenansicht und Querschnitt

träger ist konstant, in der Mitte und an den beiden Enden sind Querträger, und auf die Mitte des einen Hauptträgers wirkt die Belastung von 1 t *(Abb. 3)*. Die Belastung wird in einen symmetrischen (I) und einen antimetrischen (II) Teil zerlegt *(Abb. 4)*.

Das Kräftespiel und die Deformation der Brücke ist in beiden Belastungsfällen grundverschieden. Im Fall I gelangt nämlich auf die beiden Hauptträger eine gleich grosse Belastung, und der Brückenquerschnitt erleidet keine Verdrehung. Die Fahrbahnplatte wirkt mit den Hauptträgern zusammen, weist aber nicht in voller Breite die gleiche Druckspannung wie über den Hauptträgern

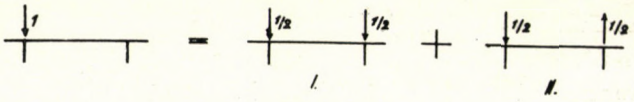


Abb. 4

auf, sondern die Druckspannung verringert sich mit der Entfernung von den Hauptträgern. Da die Querträger auf Biegung in lotrechter Ebene bemessen

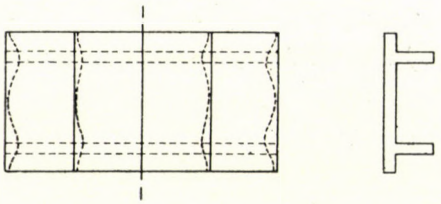


Abb. 5

sind, können nämlich die die beiden Enden der Fahrbahnplatte stützenden Querträger den waagrechten Druck der Fahrbahnplatte nicht aufnehmen.

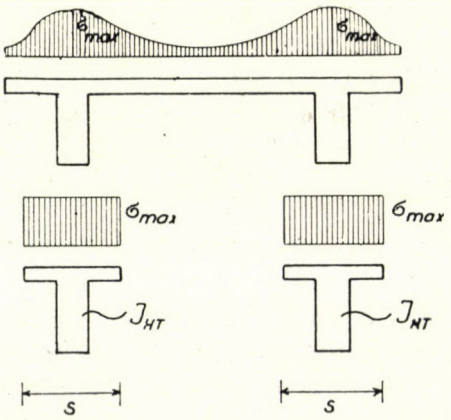


Abb. 6

(Dieser bedeutet für die beiden Querträger eine Biegebelastung in waagrechter Richtung.) Die beiden Querträger können also den Druck der Platte nur zu einem

sehr geringen Teil aufnehmen, und deshalb verbiegen sich die in unbelastetem Zustand ebenen Plattenquerschnitte *(Abb. 5)*.

In der Praxis kann man das so berücksichtigen, dass man auf der Platte eine sog. *mittragende Breite (s)* bestimmt und annimmt, dass innerhalb dieser Breite *(s)* überall in der Fahrbahnplatte die gleiche Druckspannung wie über den Hauptträgern entsteht; das Spannungsschaubild wird demnach ein Viereck gleichen Flächeninhaltes *(Abb. 6)*. Diese Breite *s* wurde auf Grund theoretischer Ableitungen und Versuchsangaben in den Normvorschriften festgesetzt, und mit diesem Wert kann das Trägheitsmoment des Hauptträgers und damit die Durchbiegung berechnet werden. Hier ist für den Belastungsfall I das Kräftespiel der Brücke als geklärt anzusehen.

Ganz anders verhält es sich aber beim Belastungsfall II.

Bei dieser Belastungsart pflegt man in der Praxis die Brücke so zu berechnen, dass man den Zusammenhang zwischen den beiden Hauptträgern unberücksichtigt lässt und dass jeder Hauptträger mit der für den Fall I gültigen mittragenden Plattenbreite *(s)* die auf ihn gelangende Last von je einer halben Tonne trägt.

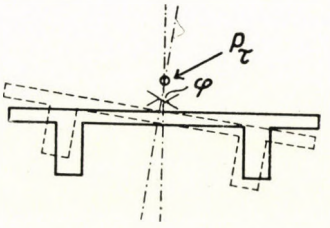


Abb. 7. P_τ = Schubmittelpunkt

So wirkt auf den belasteten Hauptträger insgesamt 1 t und auf den anderen bichts. In Wirklichkeit verhält es sich aber anders. Auf die Brücke bezogen nedeutet nämlich der Belastungsfall II ein reines Verdrehungsmoment, das um den Schubmittelpunkt des Brückenquerschnittes eine Verdrehung verursacht *(Abb. 7)*.

Die Folge davon ist, dass die beiden Hauptträger in lotrechter Richtung und die Fahrbahnplatte in waagrechter Richtung auf Biegung beansprucht werden, ausserdem verdrehen sich die Hauptträger ebenso wie die Platte gemäss der in *b)* und *c)* erwähnten Mitwirkung. Es wirkt also :

1. die Biegesteifigkeit der beiden Hauptträger in senkrechter Richtung,
2. die Biegesteifigkeit der Fahrbahnplatte in waagrechter Richtung,
3. die Verdrehungssteifigkeit der beiden Hauptträger und
4. die Verdrehungssteifigkeit der Fahrbahnplatte.

Bei der weiteren Behandlung dieses Themas kann nach zwei voneinander völlig verschiedenen Methoden vorgegangen werden. Die erste Theorie (siehe [9],

[10] und [11]) setzt voraus, dass *jeder* Querschnitt seine *Form* beibehält, d. h. dass die Brücke unendlich viele vollkommen starre Querträger besitzt. (Natürlich verhält es sich in Wirklichkeit nicht so, bei mehreren Querträgern stellt aber diese Annahme eine gute Näherung des wirklichen Zustandes dar.) Auf diese Weise kann die Differentialgleichung der Formänderung der Träger aufgestellt werden. Durch Lösung der Differentialgleichung und durch Erfüllung der Randbedingungen bekommt man bei gegebenem Verdrehungsmoment den Verdrehungswinkel φ und aus diesem die Durchbiegung. Als erster leitete *Timoshenko* die Differentialgleichung der Verdrehung von Trägern ab [9], die dann von *Stüssi* auf [-Träger verallgemeinert wurde [10]. Dieses Verfahren soll hier nunmehr *Timoshenko—Stüssi*sche Theorie genannt werden.Die vorliegende Arbeit führt die Verallgemeinerung weiter, damit sie auch auf Brückenquerschnitte angewandt werden kann.

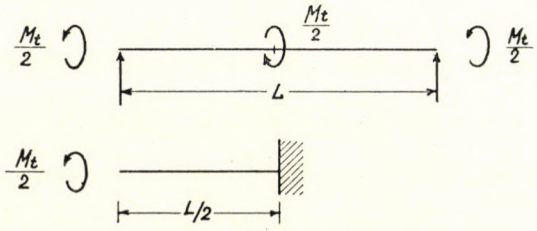


Abb. 8

Die andere, neue Methode nimmt nicht unendlich viele vollkommen starre Querträger als vorhanden an, d. h. sie setzt nicht voraus, dass jeder Brückenquerschnitt seine Form beibehält, sondern es wird ein mittlerer Querträger (bzw. später mehrere) angenommen. Obgleich dies auf den ersten Blick als komplizierter erscheint, so wird es sich später zeigen, dass man auf diese Art die Biegungswiderstände (1, 2) von den Verdrehungswiderständen (3, 4) trennen, die Differentialgleichung vermeiden und die Wirkungen der Biegung und der Verdrehung superponieren kann. So gelangt man zu praktisch leicht zu handhabenden Formeln.

Im nachstehenden wird vorerst die verallgemeinerte *Timoshenko-Stüssi*sche Differentialgleichung der mit dem reinen Verdrehungsmoment belasteten Brücke (Belastungsfall II) aufgestellt, deren Lösung ausgewertet und aus dem so erhaltenen Ergebnis das zweite, neue Verfahren abgeleitet.

Es sei vorausgesetzt, dass die Fahrbahnplatte nur einen Biegungswiderstand in waagrechter Richtung und einen Verdrehungswiderstand besitzt, sonst aber vollkommen biegsam ist und nur Zug, Druck und Schub aufzunehmen vermag. Bei den Hauptträgern wird bloss angenommen, dass der Biegungswiderstand des Hauptträgersteges in horizontaler Ebene im Vergleich zu dem der Fahrbahnplatte vernachlässigt werden kann. (Jede dieser Annahmen stellt eine gute Näherung an die Wirklichkeit dar.)

Für die Berechnung stelle man sich der Einfachheit halber den Träger im verdrehten Zustand so vor, als ob er in der Mitte eingespannt wäre (was wegen der Symmetrie berechtigt ist), wobei man die Reaktionskräfte, die gleich dem halben belastenden Verdrehungsmoment sind, auf den eingespannten Träger von der Länge von L/2 wirken lässt *(Abb. 8)*.

Das auf den Träger bewirkende Verdrehungsmoment setzt sich aus zwei Teilen zusammen [10]:

Der erste Teil besteht aus dem Moment m'_t, das von den Verdrehungswiderständen aufgenommen wird, und der zweite Teil aus m''_t, der von den Biegungswiderständen der Hauptträger und der Fahrbahnplatte aufgenommen wird:

$$\frac{M_t}{2} = m'_t + m''_t \tag{1}$$

Da der Querschnitt der Brücke offen und aus länglichen, rechtwinkeligen Vierecken zusammengesetzt ist, kann sein Verdrehungswiderstand nach fol-

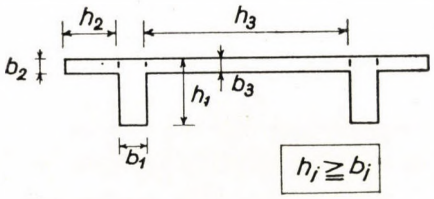


Abb. 9

gender bekannter Formel berechnet werden. (Unter Verdrehungswiderstand versteht man das Verdrehungsmoment, dass ein Brückenelement von der Länge eins um $\varphi = 1$ verdreht. Siehe Hütte, Band I. S. 688.)

$$G \cdot J_t = G \cdot \Sigma \frac{h_i \cdot b_i^3}{k_i} \tag{2}$$

wo (s. *Abb. 9*)

h_i = die längere Seite des Querschnittselementes,

b_i = die kürzere Seite des Querschnittselementes ist und

k_i = bei $h_i/b_i > 2{,}5$ mit einer max. Toleranz von 8,5% aus folgender Formel berechnet werden kann:

$$k_i = 3 + 1{,}8 \cdot b_i/h_i \tag{3}$$

Die Gl. (3) lässt sich auch im Falle $1 \leq h_i/b_i \leq 2{,}5$ verwenden, wobei jedoch bei dem betreffenden Querschnittselement der Fehler bis zu 48%anwachsen kann. (Für die Berechnung von *Drillspannungen* weist die Formel (3) immer eine hinlängliche Genauigkeit auf.)

So lautet der Zusammenhang des Verdrehmomentes m_t' mit dem Verdrehungswinkel φ:

$$m_t' = G \cdot J_t \frac{d\varphi}{dz} \tag{4}$$

wo z die zur Brückenachse parallele Koordinatenachse bedeutet.

Um das durch m_t'' hervorgerufene Kräftespiel erfassen zu können, sei der Träger durch die in *Abb. 10* eingezeichneten Schnitte statisch bestimmt gemacht.

Man bezeichne die das Kräftepaar m_t'' bildenden beiden Kräfte mit T. Diese wirken auf die zwei in der Mitte eingespannten Hauptträgerstege der jetzt statisch bestimmten Konstruktion und verursachen auf jedem Hauptträgersteg das Biegungsmoment M_z.

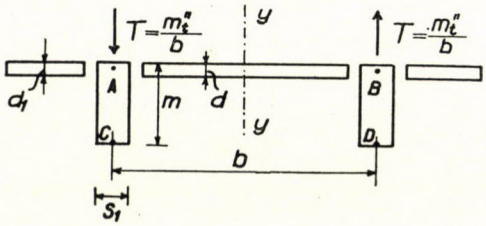


Abb. 10

Durch Einwirkung der beiden Kräfte $T = m_t''/b$ verbiegen sich die beiden Hauptträgerstege nach oben bzw. unten, wodurch in der Höhe der Mittellinie der Platte die Spannung

$$\sigma_{0Ht} = \frac{M_z}{J_1}\left(\frac{m}{2} - \frac{d}{2}\right) \cong \frac{M_z}{J_1} \cdot \frac{m}{2} = \frac{M_z}{W_{Ht}} \tag{5}$$

entsteht. Hier bedeutet

$$J_1 = \frac{s_1 \cdot m^3}{12} \tag{6}$$

das Trägheitsmoment des Hauptträgersteges und

$$W_{Ht} = \frac{s_1 \cdot m^2}{6} \tag{7}$$

das Widerstandsmoment des Hauptträgersteges.

Will man den Zusammenhang zwischen den zerschnittenen Teilen wieder herstellen, so muss man in den Punkten A und B solche entgegengesetzt gerichtete Kantenkräfte auf den Hauptträgersteg und auf die Fahrbahnplatte wirken lassen, die die Spannungen σ des Hauptträgers und der Platte in den entsprechenden Punkten gleich gross machen, d. h. also, die die gleichen Dehnungen ε_z

im Hauptträger und in der Fahrbahnplatte (die Wirkung der Belastung mitinbegriffen) hervorrufen. Als Besonderheit ist hier nur zu beachten, dass die zerschnittene Fahrbahnplatte als ein einziger gebogener Querschnitt anzusehen ist, womit das Trägheitsmoment der Fahrbahnplatte in bezug auf die Achse y-y

$$J_{Pl} = J_{P1}^{voll} - 2 \cdot s_1 \cdot d \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \tag{8}$$

beträgt. J_{Pl}^{voll} bedeutet hier das Trägheitsmoment des schraffierten Teiles in *Abb. 11*.

An den beiden Hauptträgern sind die Kantenkräfte X infolge der Antimetrie gleich gross und entgegengesetzt gerichtet und ergeben deshalb für die

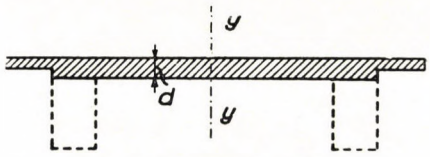


Abb. 11

Platte ein Kräftepaar von der Grösse $X.\ b$. Die Spannungen in A bzw. B, die durch die Kantenkräfte entstehen, lauten in der Fahrbahnplatte:

$$\sigma_{XPl} = \frac{X \cdot b}{W_{Pl}} \tag{9}$$

wo

$$W_{Pl} = \frac{J_{Pl}}{b/2} \tag{10}$$

Hier bedeutet W_{Pl} eigentlich nicht das Widerstandsmoment, weil $b/2$ nicht der Abstand der äussersten Faser von der Neutralachse ist. Um die Übereinstimmung mit *Stüssi* [10] zu wahren, wird die Bezeichnung W jedoch beibehalten. Im Hauptträger ist die Spannung

$$\sigma_{xHt} = -\frac{X}{s_1 \cdot m} - \frac{X \cdot m}{2 \cdot W_{Ht}} = \frac{2}{3}\frac{X \cdot m}{W_{Ht}} \tag{11}$$

$$\left[\text{weil nach Gl. (7) } W_{Ht} = \frac{s_1 \cdot m^2}{6}\right].$$

Wenn man die Spannungen einander gleichsetzt:

$$\sigma_{0Ht} + \sigma_{XHt} = \sigma_{XPl} \tag{12}$$

und die Ausdrücke (5), (9), und (11) in diese Gleichung einsetzt, dann lässt sich X mit dem auf den Hauptträgersteg wirkenden Moment M_z ausdrücken :

$$X = M_z \frac{3 \cdot W_{Pl}}{3 \cdot b \cdot W_{Ht} + 2 \cdot m W_{Pl}} \tag{13}$$

Jetzt können mit Hilfe des bekannten X die in den oberen und unteren Fasern des Hauptträgersteges entstehenden Spannungen berechnet werden. Mit Hilfe dieser Spannungen kann man die Differentialgleichung der Durchbiegungslinie des Hauptträgers aufstellen und gelangt damit zur Differentialgleichung des Verdrehungswinkels des Hauptträgers :

$$\frac{M_t}{2} = G J_t \frac{d\varphi}{dz} - E \cdot \psi \cdot J_1 \frac{b^2}{2} \frac{d^3\varphi}{dz^3} \tag{14}$$

wo

$$\psi = \frac{6 b W_{Ht} + 4 m W_{Pl}}{6 b W_{Ht} + m W_{Pl}} \tag{15}$$

Die Herleitung wird hier deshalb nicht in ihren Einzelheiten angeführt, weil sie bei *Stüssi* ([10] S. 301) nachzulesen ist. Auch die Bezeichnungen sind gleich, von folgenden Abweichungen abgesehen :

Bei Stüssi	*Hier*
W_{Fl}	W_{Ht}
W_{St}	W_{Pl}
b	m
h	b

Die Gl. (14) ist die verallgemeinerte *Timoshenko-Stüssi*sche Differentialgleichung, die die Beziehung zwischen dem belastenden Verdrehungsmoment und der Verformung des Trägers ausdrückt. Mit der Bezeichnung

$$a = \sqrt{\frac{E}{G} \frac{\psi J_1}{J_t} \frac{b^2}{2}} \tag{16}$$

ist ihre allgemeine Lösung (siehe [9] S. 258) :

$$\varphi = C_1 + C_2 \cdot e^{\frac{z}{a}} \; C_3 \cdot e^{-\frac{z}{a}} + \frac{M_t}{G \cdot J_t} z$$

Im vorliegenden Fall lauten die Randbedingungen wie folgt *(Abb. 12)* :

1.) $z = 0$	2.) $z = 0$	3.) $z = \frac{L}{2}$
$\varphi = 0$	$\frac{d\varphi}{dz} = 0$	$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$

Die dritte Bedingung bedeutet, dass das am Ende des Trägers auf die Hauptträgerstege wirkende *Biegungsmoment* gleich Null ist, weil $\varphi \frac{b}{2} = \eta$.

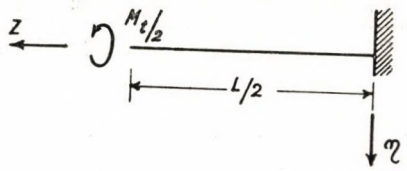


Abb. 12

Bei Beachtung dieser Ergebnisse beträgt die Verdrehung des Trägerendpunktes (siehe [9]) :

$$\varphi\left(z = \frac{L}{2}\right) = \frac{M_t}{2} \frac{1}{G \cdot J_t} \frac{L}{2}\left(1 - \frac{2 \cdot a}{L} th \frac{L}{2 \cdot a}\right) \tag{17}$$

($M_1 = 1/2.\ b$, laut Belastungsfall II, siehe Abb. 4.) Bei Stahlbeton, mit $m = 1/6$ gerechnet, ergibt sich : $G = 0{,}430.\ E$.

Die Durchbiegung lässt sich aus der Formel $\eta = \varphi \frac{b}{2}$ ermitteln.

Bei Zusammenfassung der bisherigen Ausführungen gelangt man zum Ergebnis, dass im Falle einer Belastung von 1 t über dem einen Hauptträger die Durchbiegung des mittleren Querschnittes des belasteten Hauptträgers aus zwei den Belastungsfällen entsprechenden Teilen wie folgt berechnet werden kann :

$$e = e_{\mathrm{I}} + e_{\mathrm{II}} \tag{18}$$

wo

$$e_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2} \frac{L^3}{48 \cdot E \cdot J_{Ht}} \tag{18a}$$

(J_{Ht} ist das Trägheitsmoment eines Hauptträgers, das den amtlichen Bestim-

mungen gemäss mit der mitwirkenden Plattenbreite berechnet wurde) und

$$e_{II} = \frac{b^2 \cdot L}{16 \cdot G \cdot J_t} \left(1 - \frac{2 \cdot a}{L} \, th \, \frac{L}{2 \cdot a}\right) \tag{18b}$$

Man sieht also, dass die Lösung nach *Timoshenko-Stüssi* eigentlich das Kräftespiel der Verdrehung durch die Wirkung der Biegungswiderstände der Hauptträger und der Fahrbahnplatte korrigiert. Dem technischen Gefühl entspricht es aber besser, wenn man den Biegungswiderstand mit dem Verdrehungswiderstand korrigiert. Das zweite, neue Verfahren will dieser Forderung Geltung verschaffen.

Der Grundgedanke des neuen Verfahrens ist : man trenne den Biegungs- und Verdrehungswiderstand, bestimme zunächst den gemeinsamen Biegungswiderstand der Hauptträger und der Fahrbahnplatte und berücksichtige nachher die Wirkung des Verdrehungswiderstandes.

Wäre die Drehsteifigkeit des Brückenquerschnittes gleich Null, so müsste man in die verallgemeinerte *Timoshenko-Stüssi*sche Gleichung (14) $G \cdot J_t = O$ einsetzen. In diesem Fall würde die Differentialgleichung folgende Form annehmen :

$$\frac{M_t}{2} = -E \cdot \psi J_1 \frac{b^2}{2} \frac{d^3\varphi}{dz^3}$$

Wenn man die Substitutionen

$$\frac{M_t}{2} = T \cdot b$$

und

$$\varphi = \frac{2\eta}{b}$$

durchführt, dann gelangt man zu

$$T = -E \cdot \psi J_1 \frac{d^3\eta}{dz^3} \tag{19}$$

und wegen

$$T = \frac{dM_z}{dz}$$

zu

$$M_z = -E \cdot \psi J_1 \frac{d^2\eta}{dz^2} \tag{20}$$

Das ist jedoch die Differentialgleichung der elastischen Linie des gebogenen Trägers, wenn sein Trägheitsmoment $\psi\ J_1$ ist, d. h., dass die Mitwirkung der *Fahrbahnplatte* bei antimetrischer Belastung (Abb. 4, II) bedeutet, dass das *Trägheitsmoment des Hauptträgers nicht* J_{Ht} (mit der vorschriftsmässigen mitwirkenden Breite gerechnet), *sondern* $\psi\ J_1$ ist. In den allermeisten Fällen ist dieses grösser als J_{Ht}.

Mit anderen Worten: bei antimetrischer Belastung ist die mitwirkende Plattenbreite anders (grösser) als bei symmetrischer Belastung. Das ist von der Stützungsart der Plattenenden (Endquerträger) völlig unabhängig, weil in der *Timoshenko-Stüssi*schen Gleichung (14) keine Beziehung zwischen $\psi\ J_1$ und der Belastung besteht und weil das Trägheitsmoment des Hauptträgers bei beliebiger Verteilung von M_t immer $\psi\ J_1$ sein wird.

Die durch die Mitwirkung der Fahrbahnplatte hervorgerufene Vergrösserung des Trägheitsmomentes (im folgenden kurz Plattenwirkung genannt) wird durch den Faktor ψ in Gl. (15) ausgedrückt, oder richtiger, durch das Verhältnis $\psi\ J_1/J_{Ht}$. Dieses wird um so grösser,

1. je kleiner der Hauptträgersteg oder je stärker die Fahrbahnplatte ist (in Grenzfällen ist dies jedoch nicht immer der Fall, weil bei J_{Ht} die Bestimmungen für die mitwirkende Breite $8d$ vorsehen, so dass diese auch mit der Plattenstärke wächst. Bei verhältnismässig kleinen Hauptträgerstegen kann es vorkommen, dass das mit der vorgeschriebenen mitwirkenden Breite von 8 d berechnete Trägheitsmoment J_{Ht} so gross wird, dass $\psi\ J_1$ kleiner bleibt. Diese Tatsache stellte sich bei der Berechnung von Zahlenbeispielen heraus);

2. je kleiner der Abstand der Hauptträger voneinander (b) bei gleichbleibender Plattenbreite ist, weil dann in der Formel

$$W_{Pl} = \frac{J_{Pl}}{b/2}$$

nicht nur b kleiner, sondern J_{Pl} auch grösser wird [s. Gl. (8) und die Formel (15) für ψ];

3. die Plattenwirkung wächst beträchtlich, wenn bei der Berechnung des Trägheitsmomentes der Fahrbahnplatte auch die Bordschwelle mit einbezogen wird (was in einigen Fällen zulässig ist).

Und nun das wichtigste Ergebnis: im Falle antimetrischer Belastung verringert die Plattenwirkung die Durchbiegung, *aber nicht dadurch, dass sie den belasteten Hauptträger entlastet* und einen Teil der Belastung auf den anderen Hauptträger überträgt (wie das Zusammenwirken infolge der Verdrehung), *sondern so, dass sie das Trägheitsmoment der Hauptträger vergrössert* (die mitwirkende Plattenbreite wird grösser). Hierüber soll bei Behandlung der Verdrehung noch die Rede sein.

Nun sei untersucht, wie die Mitwirkung infolge der *Verdrehung* die Durchbiegung des belasteten Hauptträgers beeinflusst. Dazu müssen die inneren

Kräfte des statisch unbestimmten Tragwerkes der *Abb. 13a* für den Belastungsfall II berechnet werden.

Die Stützung der beiden Hauptträger ist — wie normalerweise bei Brücken auf zwei Stützen — dergestalt, dass ihre Endquerschnitte in der senkrechten Ebene frei verdrehbar sind, sich jedoch nicht um ihre Längsachse drehen können. Die an den beiden Enden der Brücke angeordneten Querträger verhindern nämlich fast völlig das Verdrehen des Endquerschnittes um die Längsachse des Trägers. Bei Untersuchung des Verdrehungskräftespiels betrachtet man den mittleren Querträger, ähnlich wie die beiden Endquerträger, als auf Biegung vollkommen starr. (Die Zahlenbeispiele beweisen, dass diese Näherungen nur einen Fehler von 1—2% darstellen.) In der Mitte des mittleren Querträgers ist

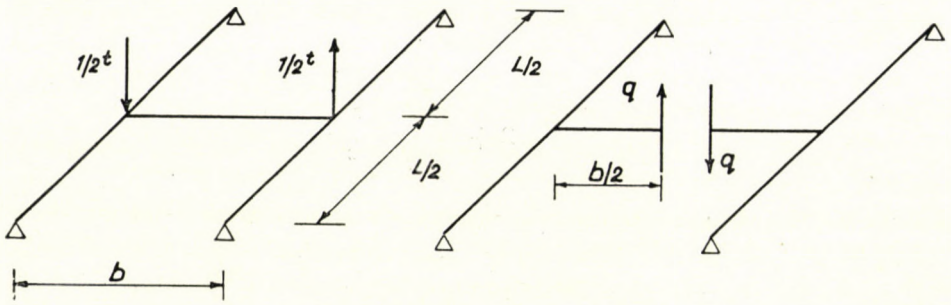


Abb. 13/a-b

das Biegungsmoment infolge der Antimetrie gleich Null, so dass nur Scherkraft entsteht *(Abb. 13b)*. Hier durchschneidet man den Querträger, errechnet die relative Verschiebung der beiden Trägerhälften und hieraus die Kraft q, die zum Zusammenfügen der beiden nötig ist. Infolge des antimetrischen Kräftespiels muss man das Biegungsträgheitsmoment der Hauptträger mit ψJ_1 annehmen.

Die relative Verschiebung beträgt

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L^3}{48 E \psi J_1} \tag{21}$$

Die durch die Scherkraft q verursachte relative Verschiebung ist

$$2\left[q \frac{L^3}{48 E \psi J_1} + \frac{qb}{2} \frac{1}{2} \frac{L}{2} \frac{1}{G \cdot 0{,}5 \cdot J_t} \frac{b}{2}\right] \tag{22}$$

Das erste Glied in der Klammer beschreibt die aus der Durchbiegung des Hauptträgers entspringende Verschiebung, das zweite Glied bedeutet, dass sich der

Hauptträger infolge des Verdrehungsmomentes $q \cdot \frac{b}{2}$ verdreht, wodurch sich das Ende des als starr anzunehmenden Querträgers durchbiegt.

$G \cdot 0{,}5\ J_t$ bezeichnet den Verdrehungswiderstand des halben Brückenquerschnittes, d. h. den des einen Hauptträgers zusammen mit der Fahrbahnplatte [siehe Formel (2)].

Setzt man (21) und (22) einander gleich, so erhält man q wie folgt:

$$q = \frac{1}{2 + \frac{12 E \varphi J_1}{G J_t} \frac{b^2}{L^2}} \tag{23}$$

Bei Stahlbeton wird genommen $G = 0{,}430\ E$, und damit

$$q = \frac{1}{2 + \frac{28 \varphi J_1}{J_t} \frac{b^2}{L^2}} \tag{24}$$

Dies ist die Kraft, die infolge der Verdrehung von dem mit 1 t belasteten Hauptträger auf den unbelasteten Hauptträger übertragen wird. Der Verdrehungswiderstand der Hauptträger *entlastet* also tatsächlich den belasteten Hauptträger (nicht so wie die Plattenwirkung), und infolgedessen verringert sich auch seine Durchbiegung.

Bei Zusammenfassung des bisher Gesagten kann man also feststellen, dass die Durchbiegung *(e)* infolge der auf die Mitte des einen Hauptträgers wirkenden Belastung von 1 t wie folgt berechnet werden kann *(Abb. 3* und *4)*.
Aus dem Belastungsfall I:

$$e_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2} \frac{L^3}{48 E J_{Ht}} \tag{25a}$$

(wie bei *Timoshenko-Stüssi)*

Aus dem Belastungsfall II:

$$e_{\mathrm{II}} = \left(\frac{1}{2} - q\right) \frac{L^3}{48 E \varphi J_1} \tag{25b}$$

Hier sei nochmals darauf hingewiesen, dass die Berücksichtigung der Plattenwirkung nur das Trägheitsmoment des Hauptträgers vergrössert (beim antimetrischen Belastungsfall), den Hauptträger aber nicht entlastet. Dies ist besonders bei der Auswertung von Probebelastungen oder Modellversuchen von Bedeutung.

Jetzt scheint es angezeigt, *die Ergebnisse der beiden Berechnungsmethoden der Durchbiegung an Hand eines ausführlichen Zahlenbeispiels zu vergleichen.*

Die Brücke hat zwei frei aufliegende Hauptträger, ihre Stützweite beträgt $L = 20$ m und ihr Querschnitt ist auf *Abb. 14* zu sehen. Es ist die infolge der auf die Mitte des einen Hauptträgers wirkenden Belastung von 1 t hervorgerufene Durchbiegung des belasteten Hauptträgers zu berechnen.

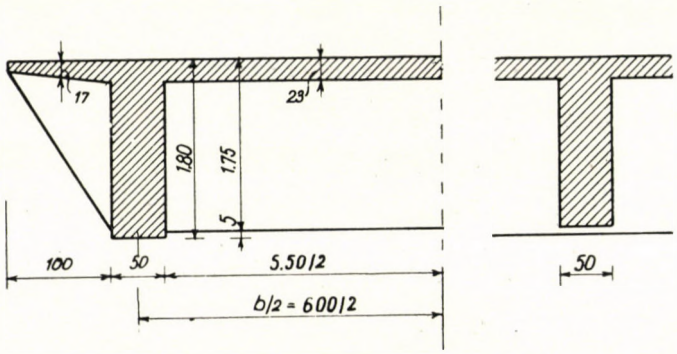


Abb. 14

1. *Timoshenko-Stüssische Methode :*

I. Aus dem symmetrischen Belastungsanteil :
$J_{Ht} = 0{,}410$ m⁴ (mit der vorschriftsmässigen mitwirkenden Plattenbreite gerechnet)

$$E \cdot e_I = \frac{1}{2} \frac{20^3}{48 \cdot 0{,}410} = 203 \text{ tm}^3 \quad \text{[Gl. (18a)]}$$

II. Aus dem antimetrischen Belastungsanteil :

$$G = 0{,}430 \cdot E$$

$J_t = 0{,}1480$ m⁴ Gl. (2)

$J_1 = 0{,}242$ m⁴ Gl. (6)

$W_{Ht} = 0{,}306$ m³ Gl. (7)

$J_{Pt} = 8{,}04$ m⁴ Gl. (8)

$W_{Pt} = 2{,}68$ m³ Gl. (10)

$\psi = 1{,}87$ Gl. (15)

$a = 11{,}3$ m Gl. (16)

Mit diesen Werten auf Grund der Gl. (18b) :

$$Ee_{II} = \frac{6^2 \cdot 20}{16 \cdot 0{,}430 \cdot 0{,}1480} \left(1 - \frac{2 \cdot 11{,}3}{20} th \frac{20}{2 \cdot 11{,}3}\right) = 141 \text{ tm}^3$$

$E \cdot e = 203 + 141 = 344$ tm³

2. *Nach dem neuen Verfahren :*

I. Aus dem symmetrischen Belastungsanteil :

$E \cdot e_I = 203$ tm³ (wie bei *Timoshenko-Stüssi)*

II. Aus dem antimetrischen Belastungsanteil: die aus der Verdrehung stammende Scherkraft q wird nach Gl. (24) berechnet:

$$q = \frac{1}{2 + \frac{28 \cdot 1{,}87 \cdot 0{,}242}{0{,}1480} \frac{6^2}{20^2}} = 0{,}102$$

und die Durchbiegung nach Gl. (25b):

$$Ee_{II} = \left(\frac{1}{2} - 0{,}102\right) \frac{20^3}{48 \cdot 1{,}87 \cdot 0{,}242} = 147 \quad \text{tm}^3$$

Die totale Durchbiegung beträgt:

$$E \cdot e = 203 + 147 = 350 \text{ tm}^3$$

Zum Vergleiche betrachte man noch folgende zwei Berechnungen:

3. *Wenn man nur die Verdrehung berücksichtigt, nicht aber die Plattenwirkung,* dann muss in den Formeln für q (24) und für e_{II} (25b) ψJ_1 durch J_{Ht} ersetzt werden. Dann wird

$$q = 0{,}110$$

$$Ee_{II} = 158 \text{ tm}^3$$

und die totale Durchbiegung:

$$E \cdot e = 203 + 158 = 361 \text{ tm}^3$$

4. *Wenn man weder die Verdrehung, noch die Plattenwirkung* berücksichtigt:

$$E \cdot e = 2 \cdot E \cdot e_I = 406 \text{ tm}^3$$

Die Resultate sind in Tabelle I. zusammengefasst

TABELLE I

Berechnungsmethode	$E \cdot e$	Prozentuale Verringerung der Durchbiegung in bezug auf 4
1. Nach *Timoshenko-Stüssi*	344	15,2
2. Neues Verfahren	350	13,8
3. Ohne Plattenwirkung, mit Verdrehung	361	10,9
4. Ohne Plattenwirkung und Verdrehung	406	—

Auch hieraus ist zu ersehen, dass die Resultate des *Timoshenko-Stüssi*schen und des neuen Verfahrens gut miteinander übereinstimmen. Die nach *Timoshenko-Stüssi* errechnete Durchbiegung ist etwas geringer als die nach dem neuen Verfahren ermittelte, dies muss aber auch so sein, denn beim *Timoshenko-Stüssi*schen Verfahren werden unendlich viele vollkommen starre Querträger angenommen, weshalb dann die Steifigkeit des Brückenquerschnittes gegen Verdrehung grösser ist.

Bei diesem Beispiel hat die Plattenwirkung die Durchbiegung nur in einem kleinen Mass verringert, weil die Trägerhöhe verhältnismässig gross ist. Aus den am Ende dieses Aufsatzes vorgeführten Zahlenbeispielen (die sich auf fertiggestellte Brücken beziehen) wird man allerdings ersehen, dass bei geringerer Hauptträgerhöhe die Mitwirkung der Fahrbahnplatte eine viel grössere Rolle spielt.

Es sei noch auf folgendes hingewiesen: Wenn man — wie aus dem Zahlenbeispiel ersichtlich — die Verdrehung in Rechnung stellt, verringert die Berücksichtigung der Plattenwirkung die Durchbiegung im Vergleich zu der Durchbiegung der ohne Plattenwirkung berechneten Brücke, während die auf den Hauptträger gelangende Belastung vergrössert wird. (Vgl. den Wert q, der im Berechnungsbeispiel die Entlastung bedeutet.) Die Durchbiegung ist

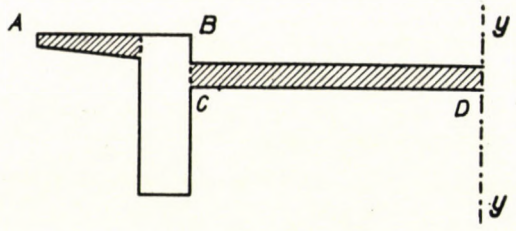


Abb. 15

also keineswegs der Belastung proportional. Die Erklärung hierfür ist die folgende:

Die Biegesteifigkeit und die Drehsteifigkeit »teilen sich« im Tragen der Belastung. Wenn die Biegesteifigkeit wächst und die Drehsteifigkeit unverändert bleibt, gelangt auf die letztere ein geringerer Belastungsanteil, so dass die Biegebeanspruchung grösser wird. Die Lage ist ähnlich wie bei den Durchlaufträgern: vergrössert man das Trägheitsmoment bei der Stütze, so »zieht« es dadurch das Biegungsmoment »zu sich«, während die Deformation kleiner wird.

Es könnte die Frage auftauchen, ob infolge der in der waagrechten Ebene erfolgenden Biegung der Platte nicht *so grossse Zugspannungen an den Plattenrändern* auftreten, dass eine Bewehrung des Randes nötig wird. Die Untersuchung ergibt, dass in den allermeisten Fällen die entstehende Zugspannung nicht die Zugfestigkeit des Betons erreicht. Wird diese in einem ungünstigen Fall überschritten, so genügen die aus Konstruktionsgründen ohnehin angebrachten Stahleinlagen zur Aufnahme des Zuges.

Die *Platten* der in der Praxis vorkommenden Brückenquerschnitte liegen oft nicht in einer Ebene, wie dies in *Abb. 10* dargestellt ist, sondern sie sind der *Abb. 15* gemäss ausgebildet. Da der senkrechte Abstand zwischen den Plattenteilen AB und CD in der Regel klein ist (ca. 20 cm), wirken bei einer Biegung

in waagrechter Ebene die Konsolplatte AB und die Fahrbahnplatte CD zusammen : infolgedessen kann das Trägheitsmoment (J_{Pl}) des in Abb. 15 schraffierten Flächenteils in bezug auf die y-Achse so berechnet werden, als ob es in einer Ebene läge.

3. Verallgemeinerungen

Den bisherigen Ausführungen liegen folgende Annahmen zugrunde:

1. Die Brücke besitzt nur einen einzigen Querträger in der Mitte.
2. Auf den Kreuzungspunkt des einen Hauptträgers und des Querträgers wirkt die Belastung von 1 t.
3. Die Brücke hat zwei Hauptträger.
4. Die Hauptträger sind frei aufliegende Einfeldträger.
5. Die Brücke ist senkrecht.
6. Das Trägheitsmoment der Hauptträger ist konstant. (Die Voraussetzung, dass die Hauptträger an den Stützen gegen Verdrehung fixiert sind, kann in der Praxis bei jeder Brücke als erfüllt angenommen werden.)

Im folgenden wird nun die Möglichkeit der Verallgemeinerung obiger Voraussetzungen der Reihe nach untersucht.

1. Brücke mit mehreren Querträgern

Die Plattenwirkung [d. i. der Wert ψ, siehe Gl. (15)] ist die gleiche wie bei einem einzigen Querträger, ist doch in ihrer Ableitung die Anzahl der Querträger nicht genannt. Die Entlastung infolge Verdrehung [q, siehe Gl. (24)] verändert sich zwar, doch kann die Gl. (24) für q, die nur eine Abweichung von einigen Prozenten aufweist, als Näherung beibehalten werden (siehe [5], [6]). Dies trifft auch in solchen Fällen zu, wo sich in der Brückenmitte kein Querträger befindet.

2. Anstatt der ruhenden 1-t-*Belastung wirkt eine sich fortbewegende Lastgruppe auf die Brücke*

Auf die Plattenwirkung hat das keinen Einfluss, sondern nur auf die Verdrehung, u. zw. bewegt sich

a) die Resultierende der Lastgruppe in der *Längsrichtung* der Brücke. In diesem Fall verändert die Anzahl der Querträger wie auch der Angriffspunkt der Kräfte schon spürbar die Verdrehungsentlastung. Die Abweichung wird sich indessen auch jetzt noch innerhalb der Grenzen einiger weniger Prozente bewegen (ausführlicher [1], [2], [3], [5], [6]). Das bis jetzt angewandte ein-

fache Verfahren kann auch hier als Näherung benutzt werden, nur muss der Ausdruck $\frac{L^3}{48\ EJ}$, der in Gl. (25*a*) und Gl. (25*b*) die von der in der Mitte wirkenden Kraft hervorgerufene Durchbiegung bedeutet, durch diejenige Durchbiegung ersetzt werden, die dem Angriffspunkt der Kräfte entspricht.

b) Die Last bewegt sich in *Querrichtung*. Es wurde bereits erwähnt, dass die auf die Mitte des Brückenquerschnittes wirkende Last (Belastungsfall I, siehe *Abb. 14)* weder Verdrehung noch Plattenwirkung verursacht. Zweckmässig geht man also so vor, dass man die Resultierende der Belastung auf das Zentrum

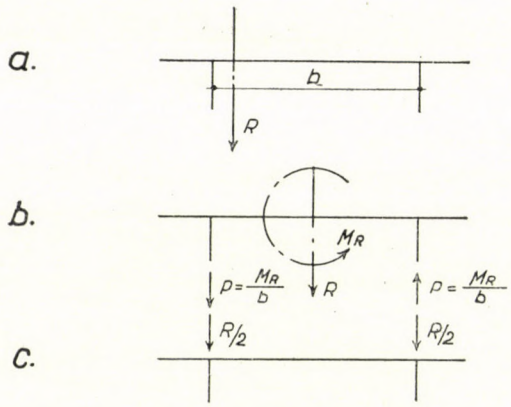


Abb. 16

des Brückenquerschnittes reduziert *(Abb. 16)* und aus der Resultierenden nach Gl. (25*a*) die »gewöhnliche« Durchbiegung e_{I} errechnet.

$$e_{\mathrm{I}} = \frac{R}{2}\,\frac{L^3}{48EJ_{Ht}} \tag{26a}$$

wogegen e_{II} aus dem Verdrehungsmoment M_R nach Gl. (25*b*) berechnet wird (siehe *Abb. 16b—c)*.

$$e_{\mathrm{II}} = P\left(\frac{1}{2} - q\right)\frac{L^3}{48E\psi J_1} \tag{26b}$$

3. *Brücke mit mehreren Hauptträgern*

Bei mehreren Hauptträgern ändert sich die Plattenwirkung insofern, als sich der Wert von ψ [Gl. (15)] in geringem Ausmass verändert. Auch die Mitwirkung infolge der Verdrehung verändert sich, worüber aber jetzt nicht die

Rede sein soll. Bei mehreren Hauptträgern besteht nämlich eine viel bedeutendere Abweichung im Vergleich zu einem Tragwerk mit zwei Hauptträgern: hier verursacht auch die Biegung der Querträger ein Zusammenwirken der Hauptträger (»Trägerrostwirkung«), was die Durchbiegung des belasteten Hauptträgers in viel grösserem Ausmass verringert als die Verdrehung oder die Plattenwirkung. Eine ausführliche Behandlung der Trägerrostwirkung findet man in zahlreichen Fachbüchern ([1], [2], [3], [6]).

4. Die Hauptträger sind Durchlaufträger oder Rahmenkonstruktionen

Die *Plattenwirkung* ist die gleiche wie bei Hauptträgern auf zwei Stützen. Die Verdrehungsentlastung verändert sich auch nur insofern, als in den Ausdrücken (21) und (22) für q [und natürlich auch in Gl. (25*a*) und Gl. (25*b*)] anstelle von $\frac{L^3}{48\,EJ}$ der tatsächliche Durchbiegungswert eingesetzt werden muss.

5. Schiefe Brücken

Darüber ist nur zu sagen, dass die im Abschnitt II abgeleitete Methode als Näherung angewandt werden kann, doch ist die Näherung um so unverlässiger, je schiefer die Brücke ist.

6. Hauptträger mit veränderlichem Trägheitsmoment

Die *Plattenwirkung* kann ebenso wie die *Verdrehungsentlastung* angenähert auf Grund der durchschnittlichen Höhe des Trägers berechnet werden. Ist nur an beiden Enden der Spannweite eine Voute vorhanden, so kann man auch mit dem allerkleinsten (am grössten Teil der Spannweite konstanten) Trägheitsmoment rechnen. In die Formeln (25*a*) und (25b) muss selbstverständlich die wirkliche (mit veränderlichem Trägheitsmoment gerechnete) Durchbiegung eingesetzt werden.

Bei allen diesen Annäherungen darf man nicht übersehen, dass die in der Berechnung der Plattenwirkung (ψ) oder der Verdrehungsentlastung (q) begangenen verhältnismässig grossen Fehler (10—20%) bei der *totalen* Durchbiegung nur Fehler von wenigen Prozenten verursachen. Der Einfluss der Plattenwirkung und der Verdrehung beträgt nämlich insgesamt ungefähr 10—30% der totalen Durchbiegung.

4. Sicherheit und Materialsparnis

Aus den bisherigen Darlegungen ist zu erkennen, dass sowohl der Verdrehungswiderstand wie die Plattenwirkung die Durchbiegung verringern; die Verdrehung verringert die Durchbiegung des belasteten Hauptträger dadurch,

dass sie ihn *tatsächlich entlastet* und die Plattenwirkung dadurch, dass sie, obwohl sie den belasteten Hauptträger *nicht entlastet*, die mitwirkende Plattenbreite und somit auch sein Trägheitsmoment vergrössert.

Im folgenden müssen Stahlbetonträger und homogene (vorgespannte) Betonträger getrennt behandelt werden.

a) Bei der Durchbiegung von *Stahlbetonträgern* entstehen an mehreren Stellen im gezogenen Teil des Trägers Haarrisse, dadurch wächst die Spannnung im Stahl in der Länge von einigen zehntel Millimetern auf den auf Grund des eingerissenen Querschnittes berechneten Wert an. Im grössten Teil des Trägers arbeitet jedoch der ganze Betonquerschnitt, und deshalb ist für die *Durchbiegung* das Trägheitsmoment des ganzen Betonquerschnittes massgebend. Vom Gesichtspunkt der *Bemessung* müssen aber die eingerissenen Querschnitte berücksichtigt werden und deshalb wächst infolge der Plattenwirkung die mitwirkende Plattenbreite vergeblich an : der Hebelarm der inneren Kräfte bleibt unverändert und damit verringert sich infolge des Gleichgewichtes der äusseren und inneren Kräfte auch die Stahlmenge nicht. Es hat also nur die durch die Verdrehung verursachte tatsächliche Entlastung eine Stahlersparnis zu Folge, nicht aber die Plattenwirkung. Deshalb folgt auch aus der bei der Probebelastung wahrgenommenen kleineren Durchbiegung *nicht*, dass die *Sicherheit* des Trägers im selben Ausmass grösser ist, wie die Durchbiegung abnimmt. Die Sicherheit wird nur durch die tatsächliche Entlastung infolge der Verdrehung grösser, nicht aber durch die Plattenwirkung.

Der Grund für diesen auf den ersten Blick merkwürdig erscheinenden Widerspruch liegt in der diesen Berechnungen innewohnenden Duplizität : die Durchbiegung wird auf Grund des ganzen homogenen Betonquerschnittes, die inneren Kräfte und der Stahlbedarf jedoch auf Grund des eingerissenen Querschnittes berechnet.

b) Anders ist die Lage bei *homogenen Trägern* (vorgespannten Beton- und Stahlträgern). Da es hier keine Risse gibt, berechnet man sowohl die Spannungen wie die erforderliche Stahlmenge auf Grund des totalen Trägheitsmoment des homogenen Trägers ; wenn sich also dieses erhöht, dann verringert sich nicht nur die Durchbiegung, sondern mit dieser auch die erforderliche Stahlmenge. Wenn man also bei dem antimetrischen Belastungsanteil den Stahlbedarf mit Hilfe des Trägheitsmomentes ψJ_1 bestimmt und auch die Verdrehungsentlastung berücksichtigt, wird man beachtliche Stahlersparnisse erzielen können.

5. Zahlenbeispiele von fertiggestellten Brücken

Im folgenden werden die bei der Probebelastung von drei Brücken gemessenen Durchbiegungen mit den Durchbiegungswerten verglichen, die ohne Berücksichtigung der Mitwirkung bzw. unter Berücksichtigung der Verdrehung und der Plattenwirkung berechnet wurden. Bei diesen Brücken wird zuerst das Verhältnis zwischen der gemessenen Durchbiegung (e_m)

und der vom Konstrukteur ohne Mitwirkung berechneten Durchbiegung (e_r) angegeben. Hierauf berechnet man gemäss Abschnitt II aus den Gleichungen (25a) und (25b) die infolge der Plattenwirkung und Verdrehung verringerte Durchbiegung (e_z) bzw. ihr Verhältnis zur Durchbiegung e_r wie folgt:

$$\frac{e_z}{e_r} = \frac{\frac{1}{2}\frac{L^3}{48\ EJ_{Ht}} + \left(\frac{1}{2} - q\right)\frac{L^3}{48E\psi J_1}}{\frac{L^3}{48\ EJ_{Ht}}} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - q\right)\frac{J_{Ht}}{\psi J_1} \tag{27}$$

Hierauf untersucht man, um wieviel dies eine bessere Näherung an den Wert $\frac{e_m}{e_r}$ bedeutet bzw. wie gross der zahlenmässige Einfluss der Verdrehung und der Plattenwirkung auf die Durchbiegung ist.

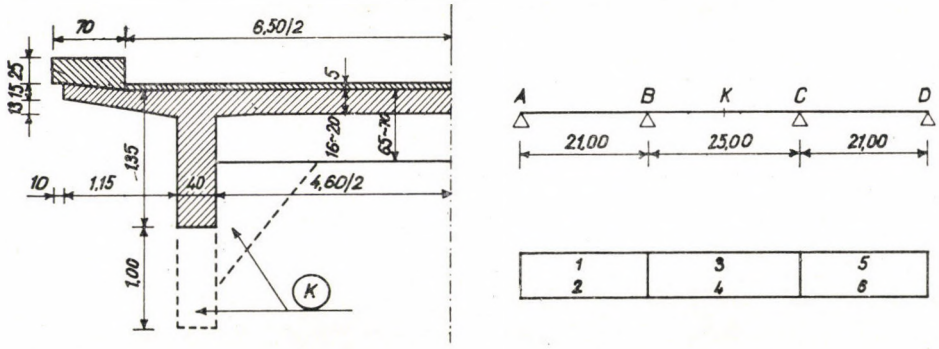


Abb. 17

K = Vouten über den Stützen C und D
Abstand der Querträger 4,20 m
Die in den Grundriss eingesetzten Zahlen bezeichnen die Stellen der gemessenen Durchbiegungen

Bei jeder Brücke wurde der Berechnung die Annahme E = 300 000 kg/cm² zugrunde gelegt. Über den wirklichen Elastizitätsmodul der Brücken »B« und »C« standen keinerlei Angaben (Würfelfestigkeit usw.) zur Verfügung. Wohl wurde für die Brücke »A« die »Bruchfestigkeit des Probebalkens« angegeben, es ist aber ungewiss, in welchem Zusammenhang diese zur Würfelfestigkeit steht. Bei der Brücke »A« wurde für alle Fälle aus der Bruchfestigkeit der Elastizitätsmodul berechnet und mitgeteilt.

Bei der Auswertung muss noch beachtet werden, dass eigentlich nicht die nach Gl. (25) bzw. Gl. (27) berechnete Durchbiegung mit dem Verhältnis der berechneten und gemessenen Durchbiegung zu vergleichen ist, weil sie sich auf die Last über dem einen Hauptträger bezieht, sondern dass der wirkliche Ort der Resultierenden des belastenden Fahrzeuges berücksichtigt werden muss. Da aber aus den zur Verfügung stehenden Angaben der Standort des Fahrzeuges in Querrichtung nicht genau festzustellen ist, da ausserdem E nur mit begrenzter Genauigkeit bestimmt werden kann und da man infolge der Durchlaufträger, des veränderlichen Trägheitsmomentes und der Schiefheit der Brücke ohnehin nur zu angenäherten Ergebnissen gelangt, wird der Einfachheit halber mit Gl. (27) gerechnet.

Brücke »A« (Abb. 17)

Bei dieser Brücke wird die Berechnung in ihren Einzelheiten vorgeführt, bei den beiden anderen werden nur die Endresultate gegeben.

Die vom Konstrukteur der Berechnung zugrunde gelegten Trägheitsmomente (mitwirkende Plattenbreite laut amtlicher Bestimmung 1,60 m) betragen

$$J_{Hl\,A} = J_{Hl\,K} = 0{,}1335 \text{ m}^4$$

$J_{Hl\,B} = 0{,}6370$ m^4, was aber vom Konstrukteur bei der Berechnung wegen der Einrissgefahr um 15% gekürzt wurde, so dass er also mit $J_{Hl\,B} = 0{,}541$ m^4 rechnete.

Das Verhältnis des berechneten und gemessenen Wertes der Durchbiegung unter der Belastungsstelle beträgt:

Standort des belastenden Fahrzeuges	1	2	3	4	5	6
$\frac{e_m}{e_r}$	0,53	0,53	0,725	0,545	0,51	0,54

(Der einzige unverhältnismässige Wert ist die an der 3. Stelle gemessene Durchbiegung.)

Die wirkliche Durchbiegung beträgt also im Durchschnitt 53% der berechneten.

Bei Berücksichtigung der Mitwirkung, wenn nur die Stahlbetonteile in Betracht gezogen werden (man rechnet mit dem Hauptträgerquerschnitt ohne Voute), erhält man:

a) Plattenwirkung:

$$J_1 = \frac{0{,}4 \cdot 1{,}35^3}{12} = 0{,}0817 \text{ m}^4 \qquad \text{nach Gl. (6)}$$

$$W_{Hl} = \frac{0{,}0817}{0{,}675} = 0{,}121 \text{ m}^3 \qquad \text{nach Gl. (7)}$$

$$J_{Pl} = \frac{0{,}18 \cdot 7{,}7^3}{12} - 2 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}6 \cdot 3{,}55^2 - 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}18 \cdot 2{,}5^2 = 5{,}48 \text{ m}^4 \qquad \text{nach Gl. (8)}$$

(Das zweite Glied ist deshalb nötig, weil der Kragarm der Platte in einer Länge von 0,6 m um 3 cm dünner ist als anderswo.)

$$W_{Pl} = \frac{5{,}48}{2{,}5} = 2{,}19 \text{ m}^3 \qquad \text{nach Gl. (10)}$$

$$\psi = \frac{6 \cdot 5 \cdot 0{,}121 + 4 \cdot 1{,}26 \cdot 2{,}19}{6 \cdot 5 \cdot 0{,}121 + 1{,}26 \cdot 2{,}19} = 2{,}29 \qquad \text{nach Gl. (15)}$$

$$\psi . J_1 = 0{,}1870 \text{ m}^4$$

b) Verdrehung:

$$k_{Hl} = 3 + 1{,}8 \frac{0{,}4}{1{,}35} = 3{,}53 \qquad \text{nach Gl. (3)}$$

$$J_t = 2 \frac{1{,}35 \cdot 0{,}4^3}{3{,}53} + \frac{4{,}6 \cdot 0{,}18^3}{3{,}0} = 0{,}0580 \text{ m}^4 \qquad (2)$$

(Die Konsolplatte wurde nicht mit eingerechnet, weil sie mit den Hauptträger nicht steif verbunden ist.)

$$q = \frac{1}{2 + \frac{28 \cdot 1{,}65 \cdot 0{,}1870}{0{,}0580} \frac{5^2}{22{,}5^2}} = 0{,}1067 \qquad (24)$$

(Für die Durchbiegung des durchlaufenden Hauptträgers wurde der 1,65fache Wert der Durchbiegung des entsprechenden Trägers auf zwei Stützen genommen, deshalb wurde ψJ_1 mit 1,65 multipliziert.)

So ist das Verhältnis der mit Mitwirkung gerechneten Durchbiegung zu jener ohne Mitwirkung gerechneten nach Gl. (27):

$$\frac{e_z}{e_r} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - 0{,}1067\right)\frac{0{,}1335}{0{,}1870} = 0{,}781$$

d. h. die Plattenwirkung und die Verdrehung vermindern die Durchbiegung um 21,9%. (Davon entfällt auf die Plattenwirkung 14% und auf die Verdrehung 7,9%).

Versuchsweise sei jetzt die 5 cm starke Verschleissdecke der Fahrbahn und die Bordschwelle mit eingerechnet. (Diese werden beim Bau der Brücke zusammen mit der Stahlbetonkonstruktion betoniert, so dass sie bis zu einem gewissen Grade als mitwirkend angesehen werden können). So ist

$J_{Ht} = 0{,}1850$ m⁴

$\psi J_1 = 0{,}2590$ m⁴

$q = 0{,}0956$ (verringert sich deshalb, weil die Biegesteifigkeit des Hauptträgers unverhältnismässig stärker zunahm als die Verdrehungssteifigkeit).

$$\frac{e_z}{e_r} = 0{,}5\,\frac{0{,}1335}{0{,}1850} + (0{,}5 - 0{,}0956)\,\frac{0{,}1335}{0{,}2590} = 0{,}568$$

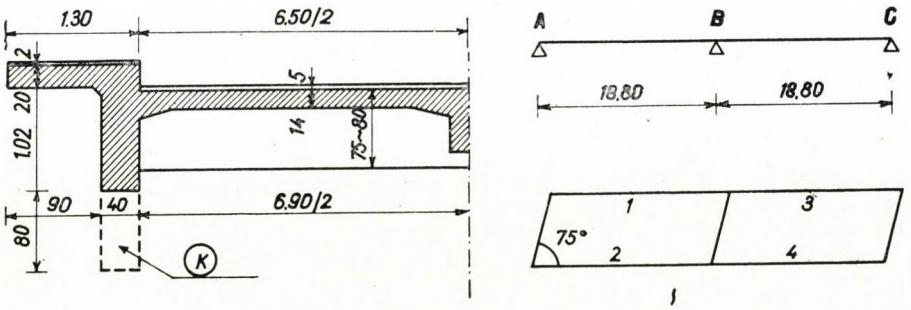


Abb. 18. K = Voute über der Stütze B
Die Querträger sind senkrecht, ihr Abstand ist 3,96 m

Das stimmt fast genau mit dem Resultat der Probebelastung überein. Der aus der Bruchfestigkeit der Probebalkens berechnete Elastizitätsmodul beträgt $E = 340\,000$ kg/cm², was also gleichfalls die Durchbiegung um 12% verringert.

Die verhältnismässig gute Übereinstimmung mit der Probebelastung bedeutet natürlich nicht, dass man mit der Berechnung das *wirkliche* Kräftespiel *genau* erfassen kann, da ja viele Näherungen benutzt wurden und auch die Bestimmung des Elastizitätsmoduls unsicher ist. Es steht jedoch fest, dass durch die Berücksichtigung der Verdrehung und der Plattenwirkung die Berechnung dem wirklichen Zustande viel näher gebracht wird.

Brücke »B« (Abb. 18)

Die als Grundlage für die Berechnungen des Konstrukteurs dienenden Trägheitsmomente betragen:

$J_{Ht\,A} = 0{,}094$ m⁴

$J_{Ht\,B} = 0{,}275$ m⁴ (ohne die mitwirkende Fahrbahnplatte berechnet!)

Das Verhältnis der gemessenen zur berechneten Durchbiegung:

Standort des belastenden Fahrzeuges	1	2	3	4
$\frac{e_m}{e_r}$	0,575	0,555	0,532	0,532

Bei Berücksichtigung der Mitwirkung ergibt sich:

$\psi J_1 = 0{,}1288$ m⁴

$q = 0{,}0553$

und :

$$\frac{e_z}{e_l} = 0{,}825$$

d. i. eine 17,5%ige Durchbiegungsverringerung. (Davon entfällt auf die Plattenwirkung 13,5% und auf die Verdrehung 4%).

Versuchsweise wurde die 2 cm starke Betondecke des Gehsteiges und die 5 cm dicke Verschleissdecke der Fahrbahn mit eingerechnet, wobei sich jedoch die Durchbiegung nur um weitere 2,4% verringerte.

Über den tatsächlichen Wert des Elastizitätsmoduls standen keinerlei Angaben zur Verfügung.

Die Durchbiegung wird in Wirklichkeit noch dadurch verringert, dass beim Biegungsträgheitsmoment (J_{HtB}) nicht nur der Steg des Hauptträgers, sondern trotz der eventuell auftretenden Risse auch die Fahrbahnplatte mit einbezogen werden muss (siehe Abschnitt IV).

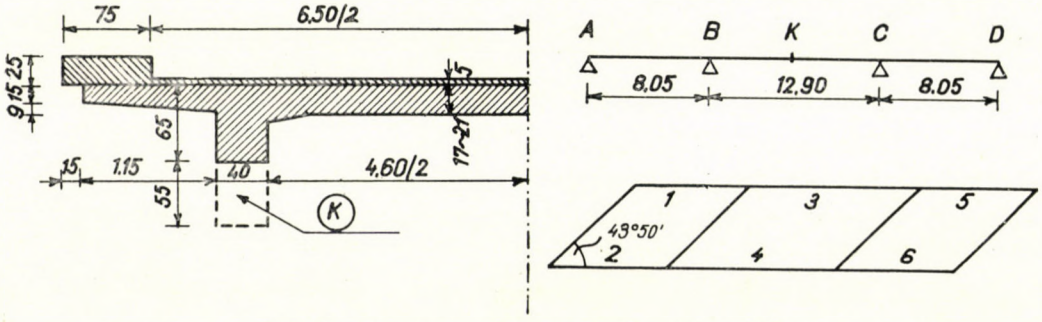


Abb. 19. K = Vouten über den Stützen B und C
Die Querträger sind senkrecht, ihr Abstand beträgt 4,30 m

Bei dieser Brücke ergaben sich zwar keine so guten Übereinstimmungen wie bei der Brücke »A«, doch führte die Berücksichtigung der Mitwirkung der Fahrbahnplatte und der Verdrehung zu einer erheblich besseren Annäherung der berechneten Durchbiegung an die gemessene.

Brücke »C« (Abb. 19)

Die als Grundlage für die Berechnung des Konstrukteurs dienenden Trägheitsmomente betragen :

$$J_{Ht\,A} = J_{Ht\,K} = 0{,}0162 \text{ m}^4$$

$$J_{Ht\,B} = 0{,}0941 \text{ m}^4$$

Das Verhältnis der bei der Probebelastung unter der Last gemessenen Durchbiegung zu der ohne Mitwirkung berechneten :

Standort des belastenden Fahrzeuges	1	2	3	4	5	6
$\frac{e_m}{e_r}$	0,65	0,607	0,353	0,366	0,523	0,452

Bei Berücksichtigung der Mitwirkung ergibt sich (nur die Stahlbetonteile sind in die Rechnung eingesetzt) :

$$\psi J_1 = 0{,}0263 \text{ m}^4$$

$$q = 0{,}0903$$

und

$$\frac{e_z}{e_r} = 0{,}752$$

An der um 24,8% verringerten Durchbiegung ist die Plattenwirkung mit 19% und die Verdrehung mit 5,8%beteiligt. Über den tatsächlichen Elastizitätsmodul stehen keine Angaben zur Verfügung. Die erhebliche Schiefheit der Brücke beeinträchtigt das Kräftespiel beträchtlich.

6. Schlusswort

Man kann also ersehen, dass die Berücksichtigung der Plattenwirkung und der Verdrehung Resultate ergibt, die der Wirklichkeit erheblich näher kommen, als wenn man die Mitwirkung vernachlässigt. Mit diesem Aufsatz wurde eben das Ziel verfolgt, zuverlässigere Berechnungsgrundlagen als bisher für die Auswertung der Probebelastungen und der Modellversuche zu schaffen.

Zum Schluss dankt der Verfasser *Dr. L. Palotás*, Professor an der Technischen Universität, Budapest, für die Anregung zu dieser Arbeit und ebenso gilt des Verfassers Dank der Abteilung für Brücken des Ungarischen Verkehrs- und Postministeriums, sowie dem Staatlichen Tiefbau-Planungsamt für die Unterstützung, die ihm durch die Überlassung der Brückenbaupläne und der Protokolle von Probebelastungen gewährt wurde.

SCHRIFTTUM

1 *Fr. Leonhardt:* Die vereinfachte Berechnung zweiseitig gelagerter Trägerroste. Berlin, 1939.

2 *Fr. Leonhardt:* Anleitung für die vereinfachte Trägerrostberechnung. Berlin, 1940.

3 *Fr. Leonhardt—W. Andrä:* Die vereinfachte Trägerrostberechnung. Stuttgart, 1950.

4 *L. Palotás:* Egyszerű tartórácsok számítása a csavarás figyelembevételével. (Die Berechnung einfacher Trägerroste bei Berücksichtigung der Verdrehung. Nur ungar.) Magyar Közlekedés, Mély- és Vízépítés, 1949.

5 *L. Palotás—L. Kollár:* Tartórácsok közelítő számítása a csavarás figyelembevételével. (Annähernde Berechnung von Trägerrosten mit Berücksichtigung der Verdrehung. Nur ungar.) Mélyépítéstudományi Szemle, 1951.

6 *L. Palotás:* Tartórácsok számítása. (Die Berechnung von Trägerrosten. Nur ungar.) Budapest, 1953.

7 *J. Schöttgen:* Bautechnik-Archiv 1947.

8 *H. Homberg:* Kreuzwerke. Berlin, 1951.

9 *St. Timoshenko:* Theory of Elastic Stability. New-York, 1936.

10 *Fr. Stüssi:* Vorlesungen über Baustatik. Basel, 1946.

11 *В. З. Власов:* Строительная механика тонкостенных пространственных систем. Москва, 1949.

12 *H. Schwyzer:* Statische Untersuchung der aus ebenen Tragflächen zusammengesetzten räumlichen Tragwerke. Zürich, 1920.

ZUSAMMENFASSUNG

Bei Stahlbetonbrücken mit zwei Hauptträgern wird die über dem einen Hauptträger wirkende Last von 1 t in einen zum Querschnitt symmetrischen und in einen antimetrischen Teil zerlegt. Die beiden Hauptträger tragen selbständig und im gleichen Mass den symmetrischen Teil. Der antimetrische Teil bedeutet für die Hauptträger nur Verdrehung, wobei einesteils die Biegefestigkeit der Fahrbahnplatte in waagrechter Ebene, anderenteils der Verdrehungswiderstand der Hauptträger eine Rolle spielt. Diese Widerstände verringern in grossem Mass die Durchbiegung des belasteten Hauptträgers.

Der Verfasser untersucht in erster Linie auf Grund der *Timoshenko*schen Theorie (Verdrehung von Trägern mit Flanschbiegung) die Wirkung der Fahrbahnplatte und arbeitet ein einfaches Verfahren zur praktischen Berechnung der Durchbiegung aus. Die Ergebnisse werden für durchlaufende Hauptträger, wandernde Lastgruppen u. a. m. verallgemeinert. Schliesslich werden die Berechnungsergebnisse mit den Angaben der Probebelastung von drei fertiggestellten Brücken verglichen.

РАСЧЕТ ПРОГИБА ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ МОСТОВ С ДВУМЯ ГЛАВНЫМИ БАЛКАМИ

Л. КОЛЛАР

Резюме

В случае железобетонных мостов с двумя главными балками нагрузка в одну тонну над одним из главных балок разбивается по сечению на симметричную и одну антисимметричную части. Симметричная часть нагрузки действует отдельно на каждую главную балку. Антисимметричная часть нагрузки представляет собою чистое кручение, действующее на главную балку, и вследствие этого проявляются, с одной стороны, жесткость на изгиб в горизонтальной плоскости путевой плиты, а с другой, сопротивление кручению главных балок. Они в значительной мере уменьшают прогиб нагруженной главной балки. Автор в первую очередь исследует действие путевой плиты на основе теории Тимошенко (кручение двутавровых балок при изгибе поясов), разрабатывает простую методику практического расчета прогиба. Полученные результаты обобщаются для многоопорных главных балок, движущейся силовой группы и т. д. Наконец, расчетные данные сравниваются с данными пробных нагрузок трех возведенных мостов.

CALCULATING THE DEFLECTION OF REINFORCED CONCRETE BRIDGES WITH TWO MAIN GIRDERS

L. KOLLÁR

SUMMARY

In the case of reinforced concrete bridges with two main girders the l-ton load placed above one of the girders is resolved into a component symmetric to the cross-section, and into an antimetrical one. The symmetrical part causes bending in the two girders. The antimetrical part sets up pure torsion in the girders, thus the bending stiffness of the floor slab in the horizontal plane plays a role, as well as the torsional resistance of the main girders. These reduce considerably the deflection of the loaded girder. The author studies primarily the effect of the floor slab on the basis of Timoshenko's theory (torsion of I-beams with bending of flanges) and works out a simple method for the practical calculation of deflection. Results are generalized for multi-span continuous girders, live load groups, etc. Finally, the calculated results are compared to the load-test data of three erected bridges.

CALCUL DE LA FLÈCHE DES PONTS EN BÉTON ARMÉ À DEUX POUTRES PRINCIPALES

L. KOLLÁR

RÉSUMÉ

Dans le calcul des ponts en béton armé à deux poutres principales on décompose la charge de 1 tonne agissant sur une des poutres principales en une composante symétrique par rapport à la section transversale et en une autre asymétrique. La composante symétrique est supportée indépendamment par les deux poutres principales. La composante asymétrique sollicite les poutres principales en pure torsion; la rigidité de flexion horizontale du tablier de même que la résistance des poutres principales à la torsion se font donc valoir en même temps. Ceci réduit considérablement la flèche de la poutre principale chargée. L'auteur en s'appuyant sur la théorie de Timoshenko (torsion des poutres en I avec flexion des ailes) analyse d'abord l'effet du tablier et élabore une méthode simple pour le calcul de la flèche. Les résultats sont généralisés pour les poutres principales continues, pour les groupes de surcharges mobiles, etc. Enfin les résultats du calcul sont comparés avec les données de la charge d'essai de 3 ponts déjà construits.

THERMAL PURIFYING EQUIPMENT FOR THE PRODUCTION OF SPECTROSCOPIC PURE CARBON

Á. BARDÓCZ and B. VORSATZ

HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS, DEPARTMENT FOR SPECTROSCOPY, BUDAPEST, HUNGARY

[Manuscript received 2nd December, 1953]

Introduction

In scientific and practical spectroscopy considerable quantities of spectroscopic pure carbon or graphite are used, mostly in the form of rods of 3—7 mm in diameter. Discs 3—5 mm thick, about 12 mm in diameter and graphite powder are used as well.

The simplest application of spectroscopic pure carbon or graphite is to use it for counter-electrodes. Recently this procedure has enjoyed wide-spread use in flat surface sparking technique. If the material to be analysed is available in the form of powder it is placed in a recess of the pure carbon electrode. For the analysis of solutions spectroscopic pure carbon is used in several forms. In the Scheibe—Rivas method [8] and in the solution analysis procedure described by Bardócz and Varsányi [34] solid carbon rods of several millimeters in diameter are employed. Cup-shaped electrodes are used in Feldman's solution analysis method with porous cup electrodes [25] and carbon discs with the rotating disc method [14, 24]. Spectroscopic pure carbon or graphite powder is used partly for bricketting purposes, partly as a buffer or diluting material.

In carbon or graphite electrode excitation cyanogen bands appear, which are sometimes disturbing. Investigations made to eliminate the cyanogen bands, however, show that by admixing suitable substances to the materials to be excited [12, 31], or securing proper protective gas atmosphere for the arc and spark [9, 26, 28, 29], respectively the cyanogen bands can be considerably reduced, and in some cases almost quite eliminated.

The aim of this paper is to survey the procedures now in use for purifying spectroscopic carbons, including the latest methods. As a result of preliminary experiments conducted on the basis of literature a carbon purifying epuipment suitable for continuous production of spectroscopic pure carbon is described.

Purifying methods for the production of spectroscopic pure carbons

The data of present practice offer three methods to the purification of materials for carbon or graphite electrodes for the purposes of spectrum analysis. One of them is of entirely chemical nature [10, 11, 16]. The second method consists in a purification by heating which can be, either locally [4, 5, 7, 9, 27, 30] or for a thorough purification the whole mass of the electrodes. This can be done in furnaces [1], under atmospheric pressure (in certain cases in a neutral gas atmosphere) or in vacuo [15, 32]. Another way of heating the carbon rods is to let current flow through them [1, 3, 6, 17—23]. In addition to the above two kinds of purification, joint thermal, and chemical purification procedures are also in use [2, 7].

A simple and effective procedure is afforded by resistance-heating purification [3, 6, 17—23], which consists in letting high current flow through the carbon or graphite rods of 150—300 mm length and 3—7 mm in diameter. This heats the electrode material up to the high temperature desired, while the impurities evaporate. The purifying equipment described below operates on the same principle. The physical processes taking place in this procedure are dealt with by several authors [3, 6, 17—27], we shall therefore not discuss them here

The carbon or graphite material to be purified may contain components which cannot be removed by either of the chemical, physical or combined methods. Carbon material of highest purity can be obtained by the thermal decomposition of watergas, CH_4, C_6H_6 etc. [13]. To this end synthetized hydrocarbons are used as binding material.

Thermal purifying equipments hitherto used

Literature offers relatively few data concerning the design of resistance-heating thermal carbon purifiers. In the equipment of *Russanow* [3] the 5 mm diameter carbon rods to be purified were held in solid water-cooled iron blocks. The current was connected through clamping blocks. *Preuss* [6] used graphite blocks to hold the carbon rods in vertical position. The upper holding device was suspended on a spring so that it could follow the expansion of the carbon rods during heating. In Gatterer's equipment [17] the vertical carbon rods were clamped between graphite blocks. In the carbon purifiers of *Trombe*, *Fox* and *Bardet* [18] the arrangement of the carbon rods was likevise vertical, the rods being held at their upper end by graphite clamping blocks surrounded by water-cooled iron blocks. The lower end of the carbon rods were dipped in a tin bath. *Hoogland* [19] held the horizontal carbon rods with their ends pressed against graphite blocks. In *Mukherjea*'s [22] equipment the rods were arranged horizontally and held by copper blocks.

Our first experimental carbon purifier was made on the model of the equipment described by *Gatterer* [17] but as this description failed to give some of the details, the missing parts were designed by the authors as described below.

During purification the carbon rods were arranged vertically and held by their upper and lower ends in graphite blocks of rectangular shape and bearing a recess corresponding to the diameter of the carbon rods at their fastenings. The graphite blocks were mounted in a copper holding frame, which consisted of two parts joined by an articulated joint around which they were held together by a spring. This spring served also for holding the carbon rod to be purified.

Both sides of the copper frames possessed elongated arms by which they could be opened against spring action. The current was connected to the copper frames holding the graphite blocks. One half of the upper holding frame was fixed to a vertical rod moving in vertical direction. This rod was suspended on a spring in a way that while the carbon was heated, the upper carbon holding frame could follow the play of longitudinal expansion of the carbon rod. To secure an easy hold of the carbon rods of various lengths the height of the fixed end of the spring could be adjusted accordingly.

The carbon purifying stand described above was connected to a transformer of a voltage of 380/150 volts with taps at every 10 volts on its 150 volts side. The constant output of the transformer was 45 kVA but it could be triply overloaded for about a minute. The transformer was connected to the mains through a remote controlled magnet switch of 600 amperes.

The very first experiments have shown that a carbon purifying stand of the above construction is not suitable for purifying carbon in continuous operation. The first difficulty consists in that the equipment becomes extremely hot owing to the predominantly radiant heat produced by the carbon rods raised to a temperature of about 3000° C and also to the heat of conduction. The temperature of the components is still increased by the rising of hot gases. After the treatment of a few carbon rods none of the component parts can be touched by hand, with the entire mass of the graphite blocks glowing. This is inconvenient for operators, due to the heat radiating from the hot apparatus, and to the fact that in taking carbon rods in and out, very hot components must be touched. The handling arms of the holding frames can only be touched through an insulating material. The components to be touched by hand cannot be covered by a heat insulating material because any such material would burn.

Running longer operations, the detrimental effects of heat may result in destroying the apparatus. The riveted, screwed and fitted joints become loose owing to the oxidization of the surface as a consequence of the constantly varying heat. This makes the hold of especially the upper clamping blocks

together with the carbon rods unsteady, which may cause their break during heating.

In a carbon heating stand of the above design the clamping graphite blocks wear rapidly due to the high heat strain caused by the transition resistance between the heated carbon rod and themselves, then by their direct contact with the glowing carbon rods, and finally by radiant heat. The wear of the graphite blocks is also increased due to the fact that their contact with the copper frames holding them is reduced practically to a few points where small arcs will form. The temperature of the graphite blocks in continuous operation reaches 800—900° C, owing to which burning is significant and after a comparatively short period of time necessary to heat about 30—40 carbons the graphite blocks become so thin that they must be replaced by new ones.

Moreover, the use of graphite blocks involves an even more inconvenient disadvantage. Owing to the transition resistances it is impossible even at the most careful holding to avoid the formation of small arcs between the carbon rods and the clamping blocks. These small arcs produce so high a temperature at the place of the clamping that the carbon rod and the graphite blocks weld together.

When the heating has been done and the carbon rods are removed, a smaller or larger piece of carbon remains welded to the graphite block and the same occurs with almost all the rods treated.

The size of the carbon piece thus separated from the heated carbons and welded to the graphite blocks may amount to several millimeters in all directions. Recesses applied in the graphite blocks, to receive carbon rods to be fitted in them will be filled up with the carbon pieces so much that in order to obtain precise clamping, the blocks ought to be cleaned after the treatment of each rod, which means that the blocks should be removed each time from the apparatus. The carbon pieces welded on are very hard and when removed a smaller or larger piece of the graphite block breaks off with them which results in distorting the clamping recess. Thus it is found more convenient to use graphite blocks without any recesses, which however does not mean that welding of the heated carbon rod to the graphite blocks may thereby be avoided, but that within certain limits the place of the clamping can be freely chosen.

To eliminate some of the above inconveniences, part of the carbon heating stand has been provided with water cooling. By this alteration we have attempted to eliminate also the unsteadiness of the graphite blocks by placing both the upper and lower holding device on a copper panel $200 \times 200 \times 15$ mm in size. The lower panel rests on three foot-screw-legs adjustable in height and has a cooling tank, soldered to its bottom, in which cooling water circulates. The graphite clamping blocks with the copper frames holding them together rest on the upper surface of the panel. The holding frames have articulated joints to a pin fixed to the copper panel. The construction of the upper table is

quite similar to that of the lower one with the difference that there is a hole in it to provide access from below for the carbon rod to the clamping blocks on the upper surface. To give room to the hole, there were two cooling tanks arranged on the upper table. The arrangement of the equipment is similar to that of *Figs. 2* and *3*.

In this modification of the stand the suspension of the upper clamping blocks has also changed. Instead of the spring suspension previously used, a counterweight has been applied *(Fig. 2)*. The rod holding the upper copper table hangs on a wire rope which is led over a pulley. The equilibrium is maintained by the counterweight keeping the carbon rods slightly pulled.

A further modification consisted in that the copper frame holding the clamping blocks together was not opened by the arm projecting from the frame and exposed to heat, but by means of a separate opening device removed from the stand during the heating period.

The modification of the stand described above essentially improved the apparatus, the average temperature of which was greatly decreased by means of the cooling of the two copper tables supporting the clamping blocks. The cooling of the tables was very effective so that immediately after the heating of the carbon rods, the tables could be touched by hand. The graphite clamping blocks and copper holding frames resting on the tables cooled down rapidly. As the upper graphite blocks were not exposed to radiant heat except for an area corresponding to a bore hole of 25 mm in diameter, their durability was essentially increased. The lower graphite blocks were invariably exposed to radiant heat in this arrangement too, thus their lifetime remained limited. The lower clamping blocks were at a disadvantage with respect to the upper ones from still another point of view, namely the carbon rod being slightly pulled during heating, the pulling force tended to press the upper blocks against their table and lift the lower ones from theirs. In the case of the upper blocks this resulted in better cooling. By this arrangement the welding between the carbon rod and the graphite blocks was not relevantly decreased, a circumstance which was felt to be decisively inconvenient, so that it had to be eliminated.

From the point of view of the following considerations a phenomenon observed in the modified arrangement is also worth mentioning. Running longer operations it was observed that on the surface of the copper tables supporting the graphite blocks, strong corrosions occurred, stronger on the surface of the lower table than on the upper one. These corrosions were the results of the current passing through, i. e. of the arc formation between the holding tables and the graphite blocks. The current was connected to the copper tables. The two halves of the copper frame had articulated joints to the pin fastened to the copper tables. The corrosion phenomena mentioned above showed that a current connection of similar design to the graphite blocks was not satisfactory.

As no smooth and uninterrupted operation could be secured by the modification described above, further modifications were necessary. Apart from some minor details these modifications consisted first of all in replacing the graphite clamping blocks by cooled copper ones. The solution of these questions of detail led to the final form of the equipment, which is described as follows.

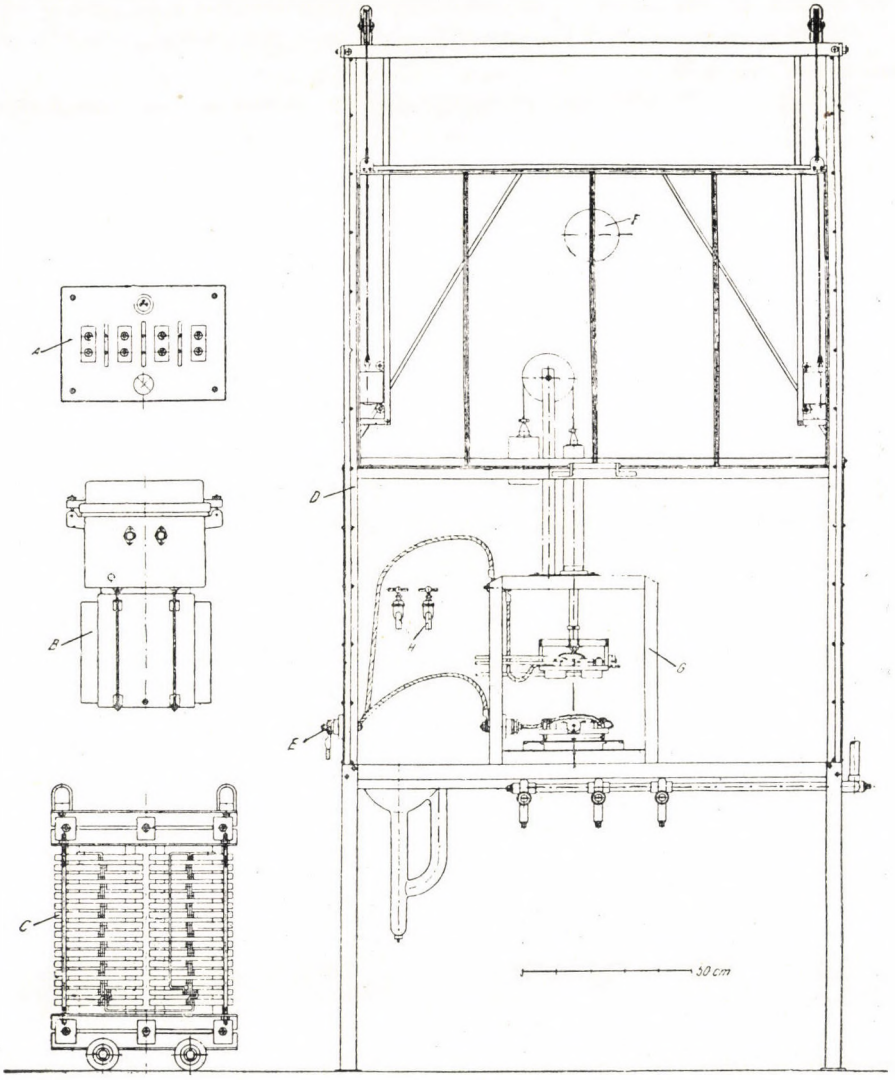


Fig. 1. Thermal purifying equipment for the production of spectroscopic pure carbon

A	= current connection	*E*	= current connection
B	= magnet switch	*F*	= ventilating orifice
C	= transformer	*G*	= carbon purifying stand
D	= fume hood	*H*	= cooling water inlet

The new carbon purifying equipment

The general arrangement of the new carbon purifying equipment, the carbon purifying stand and the details of the clamping device are shown in *Figs. 1—4.*

The carbon purifying stand indicated by *G* in *Fig. 1* is in the fume hood *D*. Outside of the fume hood is the transformer *C*, which may be connected to the mains by the magnet switch *B*. The terminals of the mains are mounted on the connector table *A*. The transformer *C* and the carbon purifying stand *G* are connected at *E*.

The current is led to the holding devices shown in *Fig. 3* through the flexible copper cables *16*. The cables connect directly to the copper tables *13* carrying the clamping blocks *10* and *12*. Size of the copper tables: $200 \times 200 \times 15$ mm. The carbon rod *19* to be purified is fastened between the clamping blocks *10* and *12*. The clamping blocks *12* are fixed to the tables *13* with screws while the blocks *10* can be moved between the guides formed of the rails *11*. The moving clamping blocks *10* are pressed against the carbon rod to be held, by the springs *21* sunk in them. The holding springs *21* are supported by the pieces *9* in which they are partly sunk. Further details are displayed in *Fig. 4*. The blocks *10* are moved by the spindle *20* (see also *Fig. 4.*) which is connected to the blocks *10* by a thread. To the end of the spindle *20*, the disc *6* is fixed, bearing the support pin *7* with a thread. The end of the support pin *7* rests on the disc surface *5* bounded by a slanting plate. The disc *6* is rotated by a rod fitting into the hole *8* bored into its mantle. This rod is not indicated in the figure. If the supporting pin *7* is in its lower position the carbon rod is fixed, because the block *10* is pressed against it by action of springs *21*. In the upper position of the supporting pin the springs *21* do not press the block, thus allowing the carbon rod to be removed. The support pin *7* has a thread and thereby it is adjustable so as to allow the distance between the blocks *10* and *12* to be adjusted to the thickness of the carbon rod. To obtain better current conduction, the moving clamping blocks *10* have an additional connection to the current connection *16* by cable *18*.

The lower copper table *13* rests on the foot-screws *22* on base panel *23*. Thus the table *13* can be moved on base panel *23* as required and its plane can be set in a slanting position by the adjusting foot-screws *22*. It is necessary to secure movement to the table because the carbon rods to be purified may be not quite straight and in such cases by properly shifting the lower table *13* or by tilting its plane the carbon rods may be fixed without much strain. It may occur that the clamping blocks do not wear evenly, which may cause the carbon rods to take an oblique position. This may also be compensated for in the above manner. The strain in the carbon rods can further be eliminated by setting the upper and lower holding devices so that the gaps formed by the clamping blocks are perpendicular to each other *(Fig. 3)*.

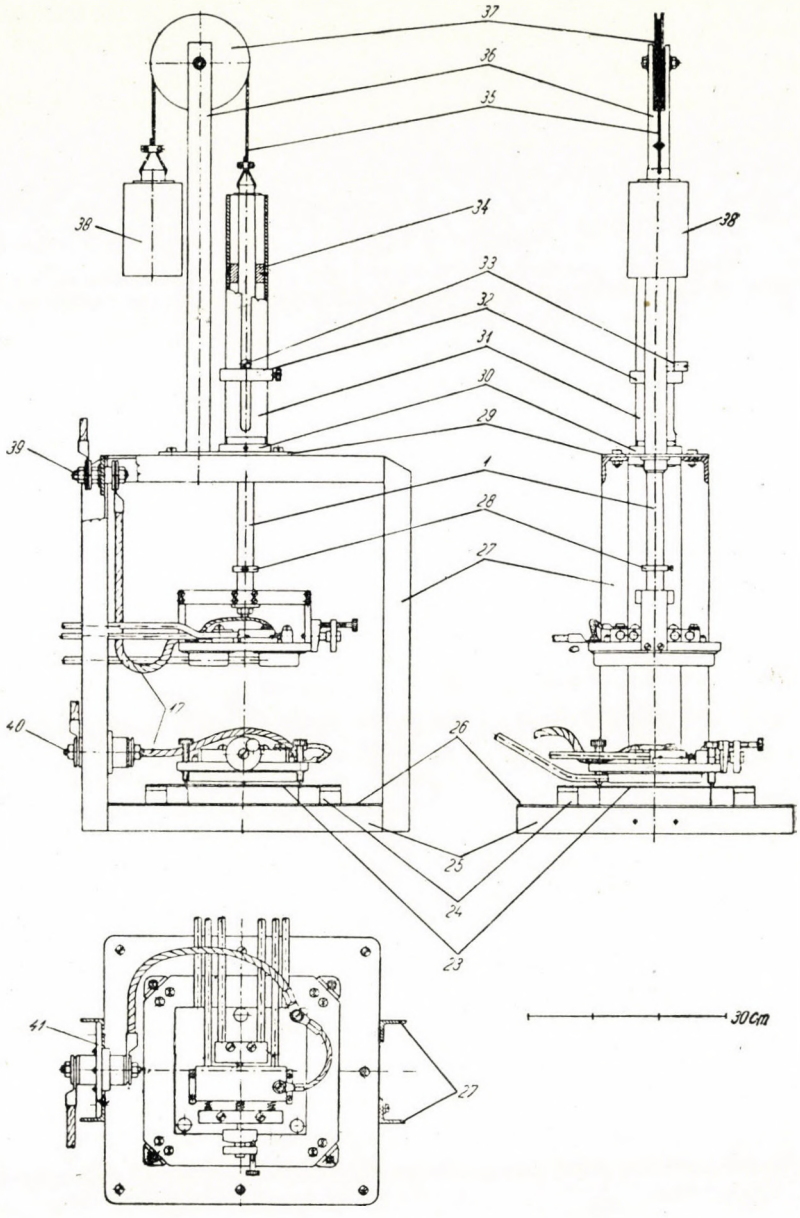


Fig. 2. Purifying stand for the production of spectroscopic pure carbons

The difference between the upper and lower copper tables *13* in *Fig. 3* is that in the centre of the upper table there is a bore hole, 25 mm in diameter, for the carbon rods to pass through.

The upper table *13* in *Fig. 3* is suspended on the rod *1* by the pieces *2*, *3* and *4*.

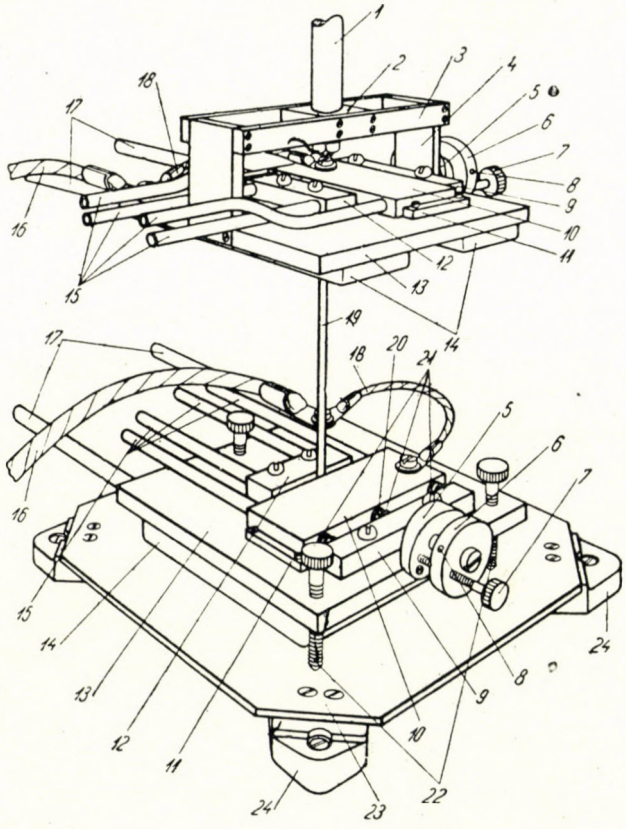


Fig. 3. Holding device of the carbon purifying equipment

The tables *13* as well as the clamping blocks *10* and *12* are cooled by a strong water stream. The tables *13* have cooling tanks *14* made of sheet and soldered to their base plate. To leave room to the hole, the upper table is fitted with two cooling tanks. Inlet and outlet of water to and from the cooling tanks *14* are secured through the copper pipes *17*. The cooling water is led to the clamping blocks *10* and *12* by the copper pipes *15*. The way passed by the cooling water is shown in detail in *Fig. 4* where the inlet and outlet of the cooling water is marked by arrows.

In the carbon purifying stand the clamping device in *Fig. 3* takes the position shown in *Fig. 2*. The base panel *23* shown in *Figs. 2* and *3* rests on the porcelain

insulator legs *24* which are mounted on the panel *26* supported by the iron frame *25* (*Fig. 2*). To the base iron frame *25* the double iron frame *27* is attached, which holds the standard *36* carrying the upper holding device by rod *1*. The upper holding device is suspended on the wire rope *35*. Equilibrium is maintained by the counterweight *38* with the rope wheel *37* inserted. Rod *1* is guided in bush *34* and another one in the lower part of the tube *31* (not shown in the figure) so as to secure a smooth low friction guiding. The tube *31* carrying the above bushes is fixed to panel *29*, to which the standard *36* is also attached. The pin *33* fastened to bar *1* and moving in the slit of the tube *31* prevents the upper holding device from turning aside.

The upper and lower positions of the upper holding device are determined by the adjustable rings *28* on the rod *1* and respectively *32* on the tube *31* (knocking against the pin *33*). When purifying carbon rods of various lengths, the ring *32* is to be fixed in the required position.

The current is connected to the apparatus at the terminals *39* and *40* of *Fig. 2*. At the point *39* the current is directly connected to the panel fixed to the double frame *27*, thus except for the lower holding device the equipment is at the potential of this point. At the terminal *40* the current conduction is insulated from the other parts of the apparatus by a porcelain insulator and is connected only to the lower holding device also insulated by porcelain insulators *24*.

The fume hood in *Fig. 1* is of conventional design. It is important to provide it with good ventilation so as to divert gases and fumes, produced by heating, through the ventilating shaft. In heating carbons containing a larger amount of sulphur, the sulphurdioxide developed may be most inconvenient for the operators. During the heating process the door of the hood is pulled down.

To the heating stand *G* in the hood (*Fig. 1*), the current is connected at the insulators *E* in an aluminium sheet, 4 mm thick, and fixed to the side of the hood.

The cooling pipes are connected to the water taps *H* (of the water supply) by rubber tubes. The water leaves the hood through a plug hole.

The hood was first covered with the usual glass cover. Later, to keep back radiative heat and light, the glass cover was painted grey, which caused it to break to pieces. Finally we used an aluminium sheet covering provided with ventilating slits. There is a coloured glass peeping window in the side of the hood facing the transformer to allow inspection for the operator of the equipment into the purifying process.

An adequate covering of the fume hood is also important for the prevention of accidents. The heated carbons sometimes explode and their fragments flying to distances of several meters may cause mechanical injuries and burns. A metal sheet offers better protection from flying carbon pieces than glass.

General remarks

The carbon purifying equipment described here has proved in every respect suitable to produce pure carbons in continuous operation, as it has been running for two years in its form described here and many thousands of carbon rods have been purified by it. The time required for the purification is determined by the time necessary for heating and exchange of the carbon rods. With only one operator, the heating and changing of each carbon rod takes about three minutes altogether.

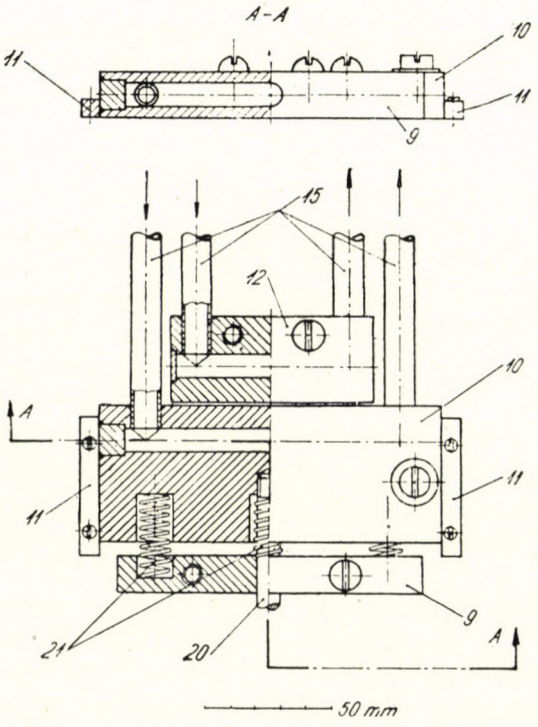


Fig. 4. Water-cooled clamping blocks of the carbon purifying equipment

Continuous operation is made possible first of all by the application of metal clamping blocks and an adequate cooling. The application of metal blocks eliminates all the difficulties inherent in the use of graphite blocks. Copper blocks do not wear off their thickness at all, some wearing appears however at the fixing place of the carbon rods due partly to natural wear, partly to the formation of small arcs unavoidable at the place of clamping and causing the corrosion of the block surfaces. The arcs formed at the place near the clamping blocks where the carbon rods occasionally break, contribute more to the wear of the blocks. Wear of the holding blocks is also promoted by cleaning their clamping

surface from time to time. The degree of wear resulting from several reasons is however so small that in the case of a continuous every day operation one file or milling per month suffices to repair the clamping surfaces. To increase the lifetime of the clamping blocks, there are no holes in them so as to allow the carbon rods to be fastened to them anywhere. Using copper clamping blocks the welding between the carbon rods and the clamping blocks is entirely eliminated. Clamping blocks strongly worn at the place of fastening need not be thrown away; they can still be used by lining them with copper plate inserts soldered with silver. The cooling of the tables *13* and of the clamping blocks *10* and *12* as well as that of the components attached to them is so effective that they can be touched by hand immediately after the heating has stopped. The copper components cooled by water do not oxidize at all. The dimensions of the tables *13* offer good protection from radiation for the components behind them. By making pipes *15* and *17* conducting cooling water sufficiently long the rubber tubes connecting them may be placed at a distance from hot places and in addition they may be protected by screening aluminium sheets. The insulation of the copper cables outside of the heating equipment but inside of the fume hood are protected from burning by an aluminium strip coating, 0,2 mm thick. Inside of the heating frame, bare copper cables are used, the oxidization of which can be decreased by wrapping them up in asbestos yarn.

In the previous arrangements the springs of the clamping blocks were not protected from heat radiation. In the present equipment the protection of the springs in *Figs. 3* and *4* can be considered as entirely sufficient; there has not been anything wrong with them so far.

From the point of view of comfortable handling, the counterweight suspension as well as the method we adopted for opening and closing the clamping blocks proved to be very advantageous. Counterweight suspension allows the pulling force to be regulated very precisely. Suspending the upper movable holding device on a spring, the support of the spring must be shifted for carbon rods of various lengths. Spring suspension however does not offer as easy a way of adjusting the upper holding device to vertical position as in the case of counterweight suspension.

To enable the upper holding device and the counterweight in *Fig. 2*, to follow the movements of expansion and contraction of the carbon rods, the suspended rod *1 (Fig. 2)* should be very precisely guided and the rope wheel *37* should be running in ball bearings. With this condition fulfilled, the carbon rods do not break even with the large bulks moved.

The procedure adopted for fitting in and taking out the carbon rods exhibits essential advantages over the previous procedures. Turning the discs *6* in *Fig. 3* by the small rod thrust in their bore hole *8* requires but very little effort. As the turning rod can be taken out of the bore hole, it is not in the apparatus during heating and thus it does not warm up.

The carbon purifying equipment requires hardly any maintenance except for the occasional filling and milling of the holding block surfaces. In some rare cases the aluminium sheets protecting the tubes from heat radiation or the asbestos coating protecting the cables need repairing or changing.

It is very important to keep the carbon purifying equipment clean because a dirty equipment can easily contaminate the purified carbon rods. As can be seen from the data of the literature [17] and is shown by direct experience the rising smoke produced in the heating will condense especially on the upper parts of the equipment. These condensations originate mainly from the impurities leaving the carbon. After longer operations a thick layer of deposits covers particularly the bottom of the table *13* in *Fig. 3* and the cooling tanks *14* fitted on it. The more often the equipment is cleaned, the lesser the danger of contamination will be.

The solid parts falling off during heating, small fragments of carbon produced from rods broken during heating, pieces of carbon from the end of the rods broken off by the mechanical strain when fastened, as well as carbon powder accumulate between the clamping blocks *10* and *12* of the lower holding device. Such accumulations stop the way not only of the proper fastening of the carbon rods, but also of the moving block *10*, and must be frequently removed. This is an important condition of smooth operation.

From the fact that carbon rods purified in vertical position may be contaminated by impurities falling from the components of the purifying device above them, the question arises whether it is more suitable to clean the carbon rods in a vertical position than in a horizontal one. Treating the question as a matter of principle it must be stated that in a properly built heating device the possibility of a recontamination of the carbon rods once purified is smaller with the carbon rods fastened horizontally. More precisely, this holds mainly for the middle part of the rods, because the parts near the fixing place may be contaminated as likely as in the case of vertical position. The question which of the two methods is really more advantageous can only be decided by experiment. In case of a horizontal arrangement, however, the bending of the rods must be taken into account.*

REFERENCES

1. *G. Heyne*, Z. ang. Chem. 43, 1930, 311.
2. *G. Heyne*, Ang. Chem. 45, 1932, 612.
3. *A. K. Rusanov*, Z. anorg. allg. Chem. 219, 1934, 332.
4. *T. Zürrer* and *N. D. Treadwell*, Helvet. Chim. Acta, 18, 1935, 1181.
5. *H. Moritz*, Zbl. Min. Geol. Pal. (A) Nr. 9. 1935, 284.
6. *E. Preuss*, Chem. Erde, 9, 1935, 365.
7. *G. Standen* and *L. Kovach*, Proc. Amer. Soc. Test. Mat. 35, 1935, 79, II.

* Our thanks are due to F. Varsányi, K. Kántor, J. Bajcsy, T. Hausladen and F. Pintér for co-operation in the development of the carbon purifying equipment and in performing the experiments.

8. *G. Scheibe* and *A. Rivas*, Ang. Chem. 49, 1936, 443.
9. *W. Gerlach* and *W. Rollwagen*, Metallwirtschaft 16, 1937, 1083.
10. *F. Cholak* and *R. V. Story*, Ind. Eng. Chem. Anal. Ed. 10, 1938, 619.
11. *A. H. Staud* and *A. E. Ruehle*, Ind. Eng. Chem. Anal. Ed. 10, 1938, 59.
12. *F. L. Ashton*, J. Soc. Chem. Ind. 58, 1939, 185.
13. *G. Dobke*, German Patent No 695 588, 1940.
14. *M. Pierucci* and *L. Brabanti Silva*, Nuovo Cimento 17, 1940, 275.
15. *J. D. Hanawalt* and *C. E. Nelson*, USA Patent No 2 260 746, 1941.
16. *J. Cholak* and *R. V. Story*, J. Opt. Soc. Am. 31, 1941, 730.
17. *A. Gatterer*, Spectrochim. Acta,2, 1941, 49.
18. *F. Trombe*, *M. Fox* and *J. Bardet*, Ann. Chim. 20, 1945, 701. C. R. Acad. Sci. Paris 220, 1945, 691 ; Abstract : Spectrochim. Acta 3, 1949, 255 and 629.
19. *P. L. Hoogland*, Rec. Trav. Chim. Pays-Bas 65, 1946, 257.
20. *R. Schmidt*, Rec. Trav. Chim. Pays-Bas 65, 1946, 265.
21. *H. W. Deinum*, Rec. Trav. Chim. Pays-Bas 65, 1946, 270.
22. *B. Mukherjea*, Indian J. Phys. 21, 1947, 119 ; Abstract : Spectrochim. Acta 3, 1949, 631.
23. *A. K. Rusanov*, Spectroscopic Analysis of Ores and Minerals, Moscow-Leningrad 1948.
24. Applied Research Laboratories, Spectrographer's News Letter 2, 1948, No. 9 ; 2, 1949, No. 10 ; 5, 1953, No. 11.
25. *C. Feldman*, Anal. Chem. 21, 1949, 1041.
26. *D. M. Smith* and *G. M. Wiggins*, Analyst 74, 1949, 101.
27. *C. Harvey*, Spectrochemical Procedures. Applied Research Laboratories, Glendale 1950.
28. *L. E. Oven*, J. Opt. Soc. Am. 41, 1951, 139.
29. *J. Y. Ellenburg* and *L. E. Oven*, Anal. Chem. 23, 1951, 1512.
30. *E. Preuss*, Spectrochim. Acta 5, 1952, 327.
31. *R. G. Keenan* and *C. E. White*, Anal. Chem. 25, 1953, 887.
32. *J. S. Owens*, Ind. Eng. Chem. Anal. Ed. 10, 1938, 64.
33. *R. L. Mitchell*, The Spectrographic Analysis of Soils, Plants and Related Materials. Commonwealth Bureau of Soil Science, Harpenden, England, 1948.
34. *Á. Bardócz* and *F. Varsányi*, Acta Chimica Hungarica (to be published).

SUMMARY

The importance of spectroscopic pure carbon and graphite is pointed out and the different ways of their use are described. Various carbon purifying procedures are discussed. The results of the preliminary experiments to produce spectroscopic pure carbons are presented as well as a detailed description of the final design of the thermal carbon purifying equipment consisting of a 45 kVA transformer capable to be triply overloaded, a magnet switch of 600 amperes and a carbon purifying stand in a fume hood. During purification the carbons are held in a vertical position by copper blocks intensively cooled by water. The upper holding device is suspended against a rope wheel counterweight, so that the expansion of the carbons during heating can be compensated for. An account is given of the development of carbon purification and of the experiences gathered with the equipment.

ТЕРМИЧЕСКОЕ УГЛЕОЧИСТИТЕЛЬНОЕ УСТРОЙСТВО ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНО ЧИСТЫХ УГЛЕЙ

А. БАРДОЦ и Б. ФОРЗАЦ

Резюме

В введении приведены различные виды применения спектрально чистых углей и графита. Затем излагаются различные процессы по очистке угля. Достижения начальных опытов, преследовавших получение спектрально чистых углей, и детальное описание окончательной конструкции термической углеочистительной установки. Углеочистительная установка состоит из трансформатора на 45 ква, допускающего трехкратную перегрузку, магнитного выключателя на 600 а и углеочистительной колонки. В процессе очистки куски угля расположены в вертикальном положении. Размещенные в колонках куски угля захватываются в охлаждаемые водой медные захваты. Верхний захват связан с противовесом, чтобы можно было бы уравновесить расширение углей при их прокалке. В концестатьи излагается опыт технологии углеочистки и работы установки.

INSTALLATION DE PURIFICATION THERMIQUE POUR LA PRODUCTION DE CARBONE SPECTROSCOPIQUEMENT PUR

Á. BARDÓCZ et B. VORSATZ

RÉSUMÉ

L'article rappelle d'abord les différents champs d'application du carbone et du graphite spectroscopiquement purs. Divers procédés de purification du carbone sont traités. Résultat. des essais préliminaires et description de l'installation définitive pour la purification thermique des charbons. Cette installation est composée d'un transformateur de 45 kVA supportant les surcharges triples, d'un disjoncteur de 600 A à commande électro-magnétique et d'un bâti de purification placé dans une hotte. Les charbons sont placés verticalement et serrés par des mâchoires en cuivre refroidis énergiquement à l'eau. Le dispositif de serrage supérieur est fixe par une suspension à contre-poids qui compense la dilatation des charbons pendant le recuité Description du mode opératoire et resumé des expériences acquises au cours de l'exploitations de l'installation.

EIN THERMISCHER REINIGUNGSAPPARAT ZUR HERSTELLUNG VON SPEKTRALREINER KOHLE

Á. BARDÓCZ und B. VORSATZ

ZUSAMMENFASSUNG

In der Einleitung wird auf die verschiedenen Verwendungsmöglichkeiten von spektralreiner Kohle und spektralreinem Graphit hingewiesen, worauf eine Besprechung der einzelnen Reinigungsverfahren folgt. Es wird eine kurze Übersicht über die Ergebnisse der zur Herstellung spektralreiner Kohlen durchgeführten bisherigen Versuche gegeben. Dann wird auf die ausführliche Beschreibung der neuen, endgültigen thermischen Kohlenreinigungsanlage übergegangen. Diese besteht aus einem dreifach überlastbaren 45 kVA-Transformator,einem 600 A-Magnetschalter sowie aus dem in einen Abzugschrank untergebrachten Reinigungsgestell. Während der Reinigung werden die Kohlen mit einem wassergekühlten Klemmbackenpaar aus Kupfer in vertikaler Lage gehalten. Die obere Einspannvorrichtung ist derart auf ein Seilrollengegengewicht aufgehängt, dass die im Laufe der Erhitzung eintretende Ausdehnung der Kohlenstücke ausgeglichen wird. Schliesslich werden die Ausführung der Reinigung und die mit der Anlage erzielten Ergebnisse geschildert.

WATER-COOLED TURBO-GENERATOR ROTORS

M. SEIDNER

D. ENG. SC.

[Manuscript received 14th December, 1953]

The output of two-pole turbo-generators is limited by the rotor performance expressed in terms of diameter D and length L by the formula $C \cdot D^2 \cdot L$, where C is the characteristic of the given type of construction. The external diameter of the stator can be increased within economic limits.

The performance of the rotor can best be raised by increasing its diameter, because output changes with the square of the diameter. However, with the increase of the diameter of the rotor, mechanical stresses rise, and so do at a steep rate windage losses in the air gap. At 3000 r. p. m., e. g., the weight of each kg of the periphery of a rotor of 1 m diam. is increased to about 5000 kg by centrifugal force, and air windage losses may amount to 50% of the total loss in the generator. The designer of electric machinery therefore aims rather at the reduction of the rotor diameter, though this involves quadratic increase of its length. Increase of the length of the rotor body results also in particular advantages. In a 2-pole generator it is the faces of the machine, where connections of rotor coil ends and those of stator windings are located, which form the onerous and expensive passive parts of the machine. With the increase of the rotor length the ratio of active material built-in to that of the passive material increases, and so does therewith the value of C, characteristic of the type of the machine.

The output of the rotor can also be boosted by the increase of the cross section of the windings built into it. In the parallel-slot rotors built by the Ganz Electric Works at Budapest there is a comparatively narrow cross section available for coils because of constructional features ; in the recently introduced crossed-parallel slot rotors considerably more slot space can be used for windings in comparison to the plain parallel-slot arrangement, whereby the rating of the rotor is increased by about 20%. In rotors with radial slots the teeth between slots taper radially outward ; in some new types the slots are wedge-shaped in order to make use of the mechanically and magnetically inactive parts of the teeth for increasing the space factor of copper in the slots, that is for boosting the performance of the rotor.

A general means of raising rotor performance is increasing the effectiveness of cooling by a proper choice of the coolant and by a design most adapted to the peculiarities of the cooling medium. The length of large turborotors of 3000 r. p. m. is conventionally taken for about 4 times their diameter: the coolant has thus to be an agent the surface heat transfer coefficient and heat transport ability of which adapt themselves to these particular proportions, and which medium cools rotor windings to a fairly uniform temperature all along their length.

1. *Air-cooling.* In the initial stage of development of turbine-generators the cylindrical surface of the rotor, increased by fins in some cases, was cooled by air flowing into the air gap axially from the faces of the machine. With the increment of the rotor length the air gap was widened, and the amount of air flowing into the gap was increased by air passed through radial ducts formed in the laminated stator core from the outer cylindrical surface of the core. With increasing rotor diameter cooling of its cylindrical surface no more suffices, for the kW rating of the rotor rises in a quadratic ratio, while its cylindrical surface increases only in direct ratio to the diameter.

The cylindrical cooling surface is therefore supplemented by internal cooling of the rotor body by introducing cooling air from the rotor faces through inner ducts formed in the rotor body. The effectiveness of this internal cooling of the rotor body is increased if the air stream washes against the external surface of the insulation of the windings. Perfect cooling of coils can be attained, however, if the air flow is brought in direct contact with bare material conductors.

The quantity of air flowing in axially from the two rotor faces is independent of its length, therefore with increasing rotor length the effectiveness of the cooling air flowing in axially through the air gap as well as the effect of inner axial cooling decrease. Therefore the temperature of windings increases as a matter of course toward the middle of the rotor axis. Air-cooling is thus more efficient in short than in long turborotors.

2. *Hydrogen-cooling.* The effectiveness of cooling is substantially increased by replacing air with hydrogen. At atmospheric pressure the weight of hydrogen is 1/14-th of that of air, its heat conductivity is 7 times, its surface heat transfer rate about 1,5 times, its sp. heat referred to weight is about 14 times higher than the corresponding values for air. Because of these excellent cooling features of hydrogen the heat drop in turbine-generators cooled with hydrogen at atmospheric pressure decreases : between copper conductors and core teeth, crosswise through the stator laminations, on heat transfer surfaces as well as on the surface of the cooler ; the required coolant weight is less, a greater volume of cooling medium can flow through the air gap as well as through internal ducts in the rotor body, ventilation losses decrease, and friction loss in the air gap is reduced. As a result, cooling with hydrogen at atmospheric pressure produces about 10—20% higher output according to the type of construction and to the rotor diameter and allows a substantial increase of the rotor diameter.

Hydrogen-cooling was developed in the USA because at 3600 r. p. m. friction and ventilation losses rapidly increased with rotor diameter and generators over 15—20 MW rating could be built only with 4 and 6 poles. At 3000 r. p. m. this necessity arises only at substantially larger ratings. Works of the Soviet Union e. g. built an air-cooled turbine generator rated at 100 MW, 3000 revs. per min. in 1938. [1]

Hydrogen-cooled rotors are provided, besides cooling of the cylindric surface, with internal cooling as well. Such internal cooling is, in consequence of the excellent cooling features of hydrogen, much more effective than internal air-cooling, though in some constructions ducts needed for the hydrogen flow require a cross sectional area corresponding to 20—30% of the slot space available for copper conductors. This reduction of the slot space that can be used for conductive material is compensated by the heat transferred through the slot insulation. In long rotors a substantial temperature drop is produced between the middle of the rotor axis and the two faces. According to data of *D. S. Snell*, excellent turbine designer of the General Electric [2], this temperature difference amounted in the air gap of a 83 MW generator cooled with hydrogen at atmospheric pressure to 14° C. Hydrogen-cooling, though it allows axially longer rotors in comparison to air-cooled machines, is yet more suitable for the construction of shorter than of longer turborotors.

A serious burden on hydrogen cooling is explosion danger. Equipment necessary for its elimination increases the weight and cost of turbine-generators. Manufacturers endeavour to balance surplus costs by savings due to higher efficiency and lower costs for coal. The Siemens Schuckert Works built first a 10 MVA, afterwards a 50 MVA generator cooled with hydrogen at atmospheric pressure for the study of hydrogen cooling. *W. Leukert* in his very thorough paper [3] on test results finds that the same ratings can be attained at the same efficiency and the same fabrication cost by an air-cooled machine of 10% lighter weight, so that the advantage of hydrogen cooling begins to make itself felt from 60 MVA onward by gradual increase of efficiency.

3. *Water cooling.* The excellent cooling capacity of water against air is shown by the following data :

From 1 m^2 surface are transferred in one hour at 1° C temperature difference :

by air flowing at 50 m per sec about 140 kcal,
by water flowing at 2 m per sec about 2800 kcal.

Through an orifice of 1 cm^2 are transferred in one hour at 1° C temperature rise :

by air flowing at 50 m per sec about 4,5 kcal,
by water flowing at 2 m per sec about 720 kcal.

Water with its excellent heat transfer capacity and its great specific heat is especially suitable for cooling electric machine rotors ; the compact structure of turborotors on the other hand allows a plain construction of the

water-cooling system. For cooling coils embedded in the iron core according to Fig. 1. 5—6 mm wide, radially deep ducts can be milled out in teeth between slots in which cooling water flows axially, without increasing mechanical or magnetic stresses on the teeth.

Water cooling of electric machine rotors has long been known and applied. In the phase converters of the 32 Ganz—Kandó electric locomotives in service between Budapest—Hegyeshalom namely the stator is oil-cooled and the rotor is water-cooled according to BP. 172 015 and USA P. 1 448 700 of the author. Water-cooling allows a current density of 8 A against the conventional 4—5 A per mm^2 of copper conductor of these phase converter rotors. During

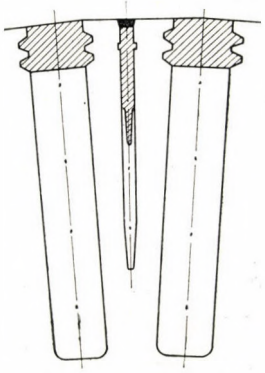


Fig. 1. Water-cooling of rotor coils

20 years service water-cooling of these rotors has proved perfectly dependable so that rotors of 20 electric locomotives in production for the Budapest—Hatvan line are also water-cooled in the same way, without change of design.

Favourable economic and service results attained with water-cooled phase converter rotors induced the Ganz Electric Works in 1935 to plan water-cooling of turborotors with parallel slots. Water-cooling of parallel-slot rotors would namely make possible very effective cooling not only of active conductive material but also of the connections of coils similarly embedded in the steel core. No records are available on pertaining experiments made by Mr. *Bláthy*, Chief Engineer of Ganz Electric Works at that time, but since water-cooling of turborotors has not been realized, the experimental results presumably failed to be satisfactory.

Favourable results obtained in the USA with hydrogen-cooling induced the author in 1945 to attempt at the constructional adaptation of the claim of his patent relative to rotor water-cooling to the constructional problem of cooling turborotors as well. The theoretical investigations, however, led to the conclusion that only rotors with radial slots can be water-cooled ; parallel- and cross-wound rotors produced by the Ganz works are not amenable to water

cooling, because the distribution of cooling water in parallel ducts would not be uniform. This statement also explains the failure of Mr. Bláthy's experiments. This finding is confirmed by the following investigation.

A is the front face,

B the rear face of the rotor.

I, *II*, *III* present the median and the two lateral cooling-water ducts on the faces.

Cooling water flows axially inward through the hollow shaft of front face *A*, is distributed to ducts *I*, *II*, *III* on the face and passes through the axial ducts along the cylindrical surface and through ducts *I*, *II*, *III* on the

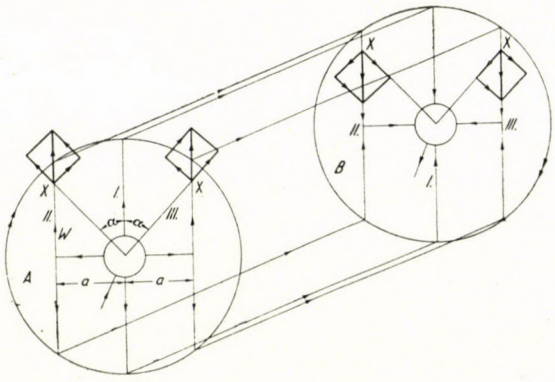


Fig. 2. Flow of cooling water on rotor faces

rear face is collected for discharge through the axial bore of the rear shaft end. Direction of flow is indicated by arrows. The rotor rotates clockwise as indicated by double arrows.

At some point x of radius r_x of duct II*A* of the front face of the rotor of 3000 r. p. m. the tangential velocity is $v_x = 2 \cdot r_x \cdot \pi \cdot 50$ m/sec. The tangential component of velocity w m/sec of the cooling water is $w \cdot \sin \alpha_x$ m/sec. The resultant tangential velocity of cooling water flow at point x of front duct II*A* is consequently $(v_x + w \cdot \sin \alpha_x)$. The rotational velocity of water at point x of the front duct *IIA* is thus greater than the rotational velocity of the same point x of the rotor.

In rear duct *IIB* the cooling water flows inward. The tangential velocity of flow at point x pertaining to radius r_x is, according to the vector diagram drawn, $(v_x - w \cdot \sin \alpha_x)$. The rotational velocity of cooling water at point x of rear duct *IIB* is therefore less than the rotational velocity of the same point x of the rotor.

In the same way the resultant tangential velocity of the cooling water at point x of front duct *IIIA* is, according to the vector diagram, $(v_x - w \sin \alpha_x)$, that is the rotational velocity of water at point x of front duct *IIIA* is less than

the velocity of the same point x of the rotor. The water flowing at point x of rear duct $III B$ rotates according to the vector diagram at velocity $(v_x + w \cdot \sin\alpha_x)$ that is, its rotational velocity is greater than that of the same point x of the rotor.

The centrifugal force generated by the flowing water is at any point x $G \cdot v_x^2 : 9{,}81 \cdot r_x$, where G is expressed in kg, 9,81 in m/sec and r_x in m.

The front and rear parts of duct II are coupled through the axial passage milled out along the cylindrical surface of the rotor. The resultant of the centrifugal forces generated at the front and rear points x of duct II is thus :

$$PII_x = G[(v_x + w \cdot \sin\alpha_x)^2 - (v_x - w \cdot \sin\alpha_x)^2] \; : \; 9{,}81 \cdot r_x =$$

$$= G \cdot 4 \; w \cdot v_x \; \sin\alpha_x : 9{,}81 \cdot r_x \, \text{kg}$$

Since $\sin\alpha_x = a : r_x$ and at 3000 $r.\ p.\ m.$ $v_x = 100 \cdot \pi \cdot r_x m/\text{sec}$

$$PII_x = + G \cdot 400 \cdot \pi \cdot w \cdot a : 9{,}81 \cdot r_x \text{ kg}$$

In the same way the resultant of centrifugal forces developed at the front and rear points x of duct III :

$$PIII_x = - G \cdot 400 \cdot \pi \cdot w \cdot a : 9{,}81 \cdot r_x \, \text{kg}$$

In case of radial duct I, $a = 0$, therefore the resultant of centrifugal forces generated at the front and rear points x of this duct

$$PI_x = 0$$

According to the above in a parallel-slot rotor the resultant of centrifugal forces developed at the front and rear points x of duct II lagging in the sense of rotation is of a direction conformal with the flow of cooling water, that is, it promotes flow, while the resultant of centrifugal forces produced in the front and rear points x of duct III leading relative to the sense of rotation is of a direction opposing the flow of cooling water, therefore it retards flow. In radial duct I no centrifugal force develops that would affect the flow of cooling water. Therefore in duct II lagging in the sense of rotation more cooling water will circulate relative to radial duct I, and the leading duct III will convey less water than the radial duct I. Cooling of rotor coils by duct II will thus be more effective than along duct III.

Absolute values of centrifugal forces are obtained by the following calculation. The summarized centrifugal force in ducts $IIAB$ and $IIIAB$

$$P = G \cdot 400 \pi \cdot w \cdot a : 9{,}81 \cdot r_k \text{ kg/cm}^2$$

where G. the weight of water column of 1 cm² base and 430—260 mm radius

$$= 0{,}01 \cdot 1{,}7 = 0{,}017 \text{ kg/cm}^2$$

w = the velocity of cooling water flowing in the duct in m/sec,
a = the distance of duct *II* and of duct *III* from median duct I,
r_k = average of radii r_x in m,
r = radius of the cylindrical surface of the rotor.

In parallel-slot rotors the distance of extreme slots is usually 0,55 times the diameter $2r$. In case of water-cooling, therefore, the distance of two extreme ducts is about 0,6 times the diameter. E. g. if the diameter of the water-cooled

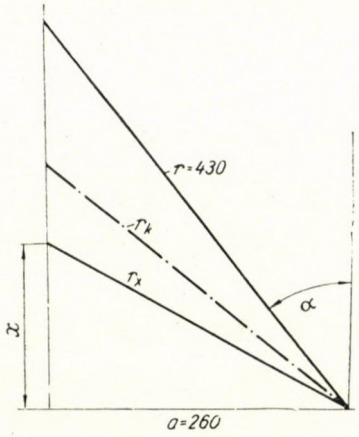


Fig. 3. Calculation of mean value r_k.

parallel-slot rotor is 0,86 m, $r = 0{,}43$ m and $a = 0{,}26$ m. Let the velocity of flow of water be: $w = 2$ m/sec.

According to the above the absolute value of the resultant centrifugal forces

$$P = (0{,}017 \cdot 400 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 0{,}26) : 9{,}81 \cdot r_k = 1{,}13 : r_k \text{ kg/cm}^2$$

Mean value r_k is calculable from *Fig. 3.*

According to *Fig. 3.*

$$(90 - \alpha_x) = \text{arc} \cdot \text{tg} \cdot \frac{x}{260}$$

$$r_x = \frac{260}{\cos\left(\text{arc} \cdot \text{tg} \cdot \dfrac{x}{260}\right)}$$

$$r_k = \frac{1}{343} \int_0^{343} \frac{260}{\cos\left(\text{arc} \cdot \text{tg} \cdot \frac{x}{260}\right)} \, dx$$

Executed integration results in

$$r_k = 344 \text{ mm.}$$

Accordingly, the resultant centrifugal force

$$P = 1{,}13 : 0{,}344 = 3{,}28 \text{ kg/cm}^2$$

3,28 atm. is thus the pressure that furthers the flow of water in duct *IIAB* or retards it in duct *IIIAB*, respectively.

Experimental check of the calculation would have been superfluous, because water-cooling of parallel slot and of cross-wound rotors also involves constructional difficulties.

Centrifugal forces generated in front *A* and rear *B* portions of duct *I* balance each other:

$$PI = \int_0^r \frac{G}{9{,}81} \cdot \frac{v_x^2}{r_x} \, dr_x = \int_0^r \frac{10\,000\,\pi^2}{9{,}81} \cdot r_x d\, r_x = 92 \cdot 5 \text{ kg/cm}^2$$

This pressure acts upon the welded joints of the ducts.

Water-cooled phase-converter rotors have radial slots in the ducts of which the distribution of cooling-water is uniform. According to service experience these rotors run at 1500 r. p. m. smoothly, without vibrations. To test water intake and discharge, welding of cooling-water ducts, the resistance of water flowing at 3000 r. p. m. an experimental unwound rotor was made. The effectiveness of water-cooling was not to be checked at 3000 r. p. m. namely, because it had sufficiently been confirmed on phase converters during 20 years' experience.

Tests were made at the pump test station of the Ganz Car- and Engineering Works. *Fig. 4* is the diagram of the test setup; *Fig. 5* shows its photograph.

The tests have proved that water-cooling of 3000 r. p. m. turborotors can be accomplished with the same simple cooling system and the same reliability of service as proved by 20 years experience on 1500 r. p. m. rotors.

Water-cooling of turborotors has been implemented practically also. *C. A. Parsons* [4] built at the beginning of 1920, 8 turbine-generators with rotors water-cooled through pipes embedded in ducts at the bottom of the slots. These machines were in service for years but made it possible to increase kW ratings by 10—15% only, because water-cooling in slot bottom ducts was only

supplementary to air-cooling of the cylindrical rotor surface. The author's system of water-cooling according to *Fig. 1* makes air-cooling superfluous and, as it will be shown in the next chapter, very substantially increases the output of the rotor.

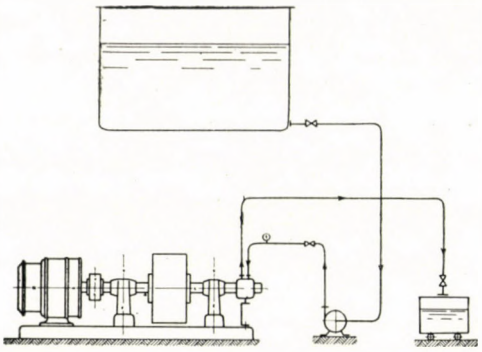


Fig. 4. Diagram of the turborotor water-cooling test setup

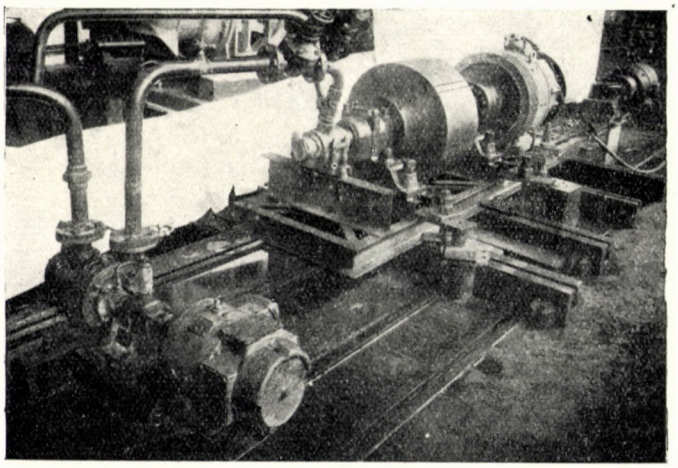


Fig. 5. Photograph of the turborotor water-cooling test setup

4. Performance of turborotors with air-, hydrogen- and water-cooling

Electric engineering works of the Soviet Union are much experienced in air- and hydrogen-cooling of turbine-generators and usually publish their results in literature too. *N. A. Poliak* [5] published in No. 1. 1951 of Electrichestvo a paper containing valuable data on temperature rise in air- and hydrogen-cooled turborotors. The following tabulation is based on these data.

TABLE I

Heating of turborotors with mica slot insulation

Cooling Media	Air			Hydrogen at 1,035 atm. abs. pressure		
Rotor diam. mm.	600	800	1000	600	800	1000
Loading amp/mm²	4,14	3,72	3,24	4,53	4,16	3,8
Temperature rise in C° :						
Mica slot insulation	49	42	36	41	33	26
Teeth.....	19	20	21	24	28	32
Heat transfer from cylindrical surface	7	11	17	5	8	11
Cooling medium	16	16	16	18	18	18
Temperature rise of copper .	91	89	90	88	87	87

With water-cooled rotor and air-cooled stator the combined temperature rise of teeth, of the surfaces and of the coolant is at most 10° C, that is, in case of 90° C permissible temperature rise current loading can be boosted until the temperature of the slot insulation reaches 80° C. Accordingly the admissible ampere loadings can be calculated by the formula

$$\sqrt{\frac{90 - 10^\circ}{\text{temperature rise of slot insulation}}}$$

The calculated values are according to data of Table I as follows :

TABLE II

Permissible loadings of turborotor conductors with mica slot insulation

Cooling Media =Rotor water-, stator air-cooled			
Rotor diam. mm.	600	800	1000
Rotor loading amp/mm²	5,27	5,10	4,83

From Tables I—II the following Table III has been composed in which ampere loadings of the air-cooled rotor of Table I are taken for 100. Loadings of hydrogen-cooled rotors as per Table I and of water-cooled rotors according to Table II are referred to this percentage basis.

TABLE III

Performance of turborotors with mica slot insulation

Cooling Media	Air			Hydrogen at 1,035 atm. abs.			Stator : Air Rotor : Water		
Rotor diam. mm.	600	800	1000	600	800	1000	600	800	1000
Rotor performance %	100	100	100	100	112	118	127	140	150

According to Table III hydrogen-cooling at 1,035 atm. abs. increases the output of the air-cooled rotor of 1 m diam. by 18%, while air-cooling of the stator and water-cooling of the rotor makes it possible to increase output by 50%. From the point of view of rotor performance Table III univocally shows the superiority of water-cooling over air-cooling or cooling with hydrogen at 1,035 atm. abs. pressure. Another advantage of water-cooling is that rotor coils are almost of uniform temperature all along their lengths ; the difference being hardly 2—3° C. The great advantage of water-cooling is also that it facilitates the design and construction of long turbo-generators. According to Table III, water-cooling makes itself paid at a rotor diam. of 600 mm already.

In the comparative Tables I—II the cooling effect of hydrogen has been calculated at 1,035 atm. abs. pressure, but the increase of output of 10—18% as per Table III is boosted very much by increasing the pressure of hydrogen. With absolute pressure increases namely the sp. gr. in direct ratio, with the 0,75th power of pressure increases the surface heat transfer rate, and by the increase of the pressure a larger amount of coolant can thus be passed through the air gap and through narrow vent ducts milled in the rotor body. *E. Wiedemann* [6] investigates numerically the effect of hydrogen-cooling on rotor performance at elevated pressures.

In Tables I—III ratings of air-cooled and atmospheric pressure hydrogen-cooled rotors have been calculated, supposing mica slot insulation. Wiedemann's calculations are based on slot insulation of glass-base material, the heat conductivity of which is 2-fold of that of mica slot insulation. In comparing the effectiveness of increased-pressure hydrogen-cooling, water-cooling of the rotor is also to be computed on the basis of glass-base slot insulation of higher heat conductivity.

According to Wiedemann, in larger turbine-generators with only surface air-cooling, in case of 90° C temperature rise admitted, the calculated and experimentally proved heat drop between copper and steel is 22° C with slot insulation of glass-base material. Based upon this heat drop the above-quoted paper computes in detail turborotor ratings with plain surface cooling and as an alternative for the case if the rotor conductors are cooled directly by passing hydrogen of 1,035, 2 and 3 atm. abs. pressure through internal ducts in *hollow* conductors.

The heat drop necessary for the transfer of heat transmitted through the insulation to the surface of the teeth, through the teeth and from the surface of the latter to the cooling water, including the temperature rise of the water, amounts to about 10° C against a heat drop of $90-22 = 68°$ C necessary for air-cooling. Accordingly, with water-cooling conductors can be loaded with a current $\sqrt{\frac{80}{22}} = 1{,}9$-times the amperage permissible with surface air-cooling.

Table IV finally lists rotor ratings for air, increased-pressure hydrogen- and water-cooling. In this tabulation the performance of the rotor with surface air-cooling is taken for 100.

TABLE IV

Output ratios of turborotors with slot insulation of glass-base material

Cooling Media	Air	Hydrogen		Stator: air Rotor: water cooled
		1,035 ata	3 ata	
Mode of cooling:				
a) Cylindrical surface is cooled	100	111	127,5	—
b) Cooling through internal ducts in hollow conductors	—	109	180	190

Table IV shows the surprising result that *water-cooling* of turborotors is more effective and promises higher power output even compared to internal hydrogen-cooling through ducts in hollow conductors at 3 atm. abs. gas pressure.

Previous research on the efficiency of water-cooling has supposed that the water-cooled rotor rotates in an air-cooled stator. However, if the water-cooled rotor is rotated in a stator cooled with hydrogen at 1,035 atm. abs. pressure, its output is further raised in case of mica slot insulation by about 20%, in case of slot insulation of glass-base material by about 35%. In consequence of this performance increase, the maximum practical rating of turbo-generators is no more limited by the rotor but by the stator, because of steeply rising additional losses.

REFERENCES

1. Electrichestvo, 1940, No. 10.
2. Transactions of the A. I. E. E. 1950, Volume 69.
3. Gesichtspunkte für die Wahl der technischen Daten von Turbogeneratoren. Elektrizitaetswirtschaft, 1951 April.
4. High Speed Alternators. Institution of Electrical Engineers Journal. Volume 61, April, 1923.
5. Heating and Electrical Characteristics of Hydrogen cooled Turbine-Generators. Electrichestvo, No. 1, 1951.
6. Wasserstoffkühlung für Turbogeneratoren. Brown Boveri Mitteilungen No. II. III. 1954.

SUMMARY

Ratings of 2-pole generators can be boosted either by increasing dimensions or by improving the effectiveness of cooling. Mechanical stresses set an extreme limit to increasing dimensions. However, the increase of the diameter of air-cooled rotors is sooner limited by windage losses in the air gap; in the case of the substantially more effective hydrogen-cooling, the increase of rotor length is impeded by excessive temperature rise of hydrogen flowing axially. Owing to its high heat transfer capacity and conductivity water is particularly suitable for cooling turborotors. Hydrogen-cooling at atmospheric pressure boosts the ratings of the air-cooled rotor by 10—20%; against this, stator air-cooling and rotor water-cooling increase ratings by 25—50%. Water cooling of rotors rotating in air-cooled stators promises higher performance even against direct hydrogen-cooling of hollow conductors with gas at 3 ata pressure. Water-cooling of the rotor combined with hydrogen-cooling of the stator at atmospheric pressure boosts rotor performance by 20—35% above that of direct cooling the conductors with 3 ata hydrogen.

ТУРБОРОТОРЫ С ВОДЯНЫМ ОХЛАЖДЕНИЕМ

д-р техн. наук, М. ЗЕЙДНЕР

Р е з ю м е

Мощность двухполюсных трубороторов можно повысить, с одной стороны, увеличением габаритных размеров ротора, а с другой, значительным улучшением охлаждения. Предел увеличения габаритных размеров определяется механическими нагрузками. В случае применения воздушного охлаждения увеличение диаметра ротора ограничивается потерями от трения в воздушном зазоре ; в случае же более эффективного водородного охлаждения увеличение длины ротора припятствуется перегревом водорода, движущегося в осевом направлении.

Вода — вследствие характерных для нее высоких значений теплоемкости и теплопроводности — является очень подходящим материалом для охлаждения трубороторов. Водород при атмосферном давлении повышает мощность в сравнении с воздушным охлаждением на 10 – 20% ; при этом при охлаждении статора воздухом, а ротора водой мощность ротора увеличивается примерно на 25 – 50%. Охлаждение водой турборотора, установленного в статор воздушного охлаждения, обещает дать бóльшую мощность и в том случае, если ротор с водородным охлаждением будет иметь обмотку из полых проводников, и проводники будут охлаждаться непосредственно водородом давлением 3,5 атм. Комбинируя статор водородного охлаждения (атмосферного давления) с ротором водяного охлаждения, возможно дальнейшее увеличение мощности на 20 – 35% по отношению к мощности ротора водородного охлаждения с давлением 3 атм.

TURBO-ROTORS REFROIDIS PAR L'EAU

M. SEIDNER,

Docteur des Sc. Techniques

RÉSUMÉ

La puissance de turbo-rotors à deux pôles peut être augmentée d'une part par l'accroissement des dimensions, d'autre part, par l'amélioration de l'effet du refroidissement. La fatigue mécanique du rotor impose une limite aux dimensions. Cependant, en cas de refroidissement par l'air l'augmentation du diamètre du rotor est déjà limitée par la perte par frottement dans l'entrefer ; en cas de l'emploi — d'ailleurs beaucoup plus efficace — de l'hydrogène comme réfrigérant, la surchauffe de l'hydrogène coulant dans une direction axiale, met un terme à l'agrandissement de la longeur du rotor.

L'eau par sa grande capacité de réception et de transmission de chaleur se prête bien à l'utilisation comme réfrigérant de turbo-rotors. L'hydrogène à la pression atmosphérique augmente l'effet du refroidissement de 10 à 20% par rapport à l'air, tandis que la puissance du rotor s'accroît de 25 à 50% par refroidissement à l'air du stator et par refroidissement à l'eau du rotor. Le refroidissement par l'eau du rotor tournant dans un stator refroidi par l'air promet une plus grande puissance même comparé au rotor muni de conducteurs creux refroidis directement par hydrogène de 3,0 ata. Le refroidissement par l'eau du rotor combiné avec le refroidissement du stator par l'hydrogène à la pression atmosphérique permet une augmentation supplémentaire de l'ordre de 20 à 35% de la puissance du rotor au delà de la puissance du rotor refroidi par l'hydrogène de 3 ata.

WASSERGEKÜHLTE TURBOROTOREN

M. SEIDNER

Doctor der Technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Die Leistung zweipoliger Turborotoren kann man einerseits durch Vergrösserung der Abmessungen, andererseits durch Verbesserung der Wirksamkeit der Kühlung steigern. Die äusserste Grenze der Vergrösserung der Abmessungen bildet die mechanische Beanspruchung. Bei der Luftkühlung setzt jedoch der im Luftspalt auftretende Reibungsverlust der Vergrösserung des Rotordurchmessers schon früher eine Grenze ; bei der viel wirksameren Wasersstoffkühlung

hingegen wird die Vergrösserung der Rotorlänge durch die Überhitzung des in achsialer Richtung strömenden Wasserstoffs gehemmt.

Das Wasser ist infolge seines grossen Wärmeübertragungs- und -förderungsvermögens zur Kühlung von Turborotoren sehr geeignet. Wasserstoff von atmosphärischem Druck steigert die Luftkühlungsleistung um etwa 10—20%; demgegenüber steigt die Rotorleistung bei Kühlung des Stators mit Luft und Kühlung des Rotors mit Wasser um etwa 25—50%.

Die Wasserkühlung eines in einem luftgekühlten Stator montierten Turborotors verspricht selbst dann eine grössere Leistung, wenn man den mit Wasserstoff gekühlten Rotor mit Hohlleitern versieht und die Leiter unmittelbar mit Wasserstoff von 3,0 Ata kühlt. Die Kombination mit einem Stator, der mit Wasserstoff unter atmosphärischem Druck gekühlt wird, ermöglicht eine noch weitere, etwa 20—35%ige Steigerung der Rotorleistung gegenüber einem Rotor, der mit Wasserstoff von 3 Ata gekühlt wird.

THE EFFICIENCY OF BALANCED HIGH-PRESSURE HYDRAULIC GEAR PUMPS AND MOTORS

BY

Prof. T. BOLDIZSÁR

CANDIDATE OF TECHN. SC.

DEPARTMENT II OF MINING MACHINES, TECHNICAL UNIVERSITY, SOPRON

[Manuscript received 29th December, 1953]

1. Introduction

The concepts in the literature on the determination of the efficiency of hydraulic pumps and motors, especially gear devices, seem insufficiently precise. *E. Johannis* [1] solely dwells upon total over-all efficiency, while, *I. S. Zaichenko* [2] and *W. Ernst* [3] simply speak of volumetric and mechanical efficiency and are inaccurate in their interpretations. *Dr. H. Krug* [4] distinguishes no-load flow losses, mechanical friction losses, slip losses (Schlupfverluste), and corresponding efficiencies. He divides slip losses into leakage losses and filling losses, but fails to investigate the interconnection and course of the different efficiencies publishing only a few practical data concerning over-all efficiency.

V. H. Prokofieff [5] divides over-all efficiency into volumetric and mechanical efficiencies. Of the three it is only the first which he measures determining the volumetric efficiency geometrically or experimentally and the mechanical efficiency is calculated from the over-all efficiency.

To be able to determine more accurately the losses and corresponding efficiencies, the following experiments were conducted on «Trirotor»-type high-pressure, balanced hydraulic gear pump and motor *(Fig. 1)*.

Hydraulic pressure balancing is the fundamental prerequisite of using high pressure pumps in hydraulic drives. The object of balancing is to counteract the resultant of the pressures acting on the periphery of the gears by an adequate opposing hydraulic pressure. — In first approximation — the acting and opposing pressure can be considered as increasing linearly from the suction channel to the discharge channel, and the unbalanced pressure bends the gear shafts and loads the bearings. Lately two or three gears mating with the central gear are employed for this purpose, by which provision no unbalanced pressure acts on the main shaft which conveys the torque to the pump (or from the motor, respectively).

However, in applying this method it is necessary to have the mating gears balanced. This triple gear arrangement was first introduced by *A. Vrolix* [6]. The gear pump and motor named «Trirotor», designed and constructed in the

Mining Research Institute under the author's guidance *(Fig. 1)* and used in the experiments under review, bears some resemblance to the Vrolix device.

2. Description of experimental equipment and of measurements

The hardened and ground gears of the hydraulic pump (respectively motor) «Trirotor» *(Fig. 2)* run inside a casing of modified grey casting (meehanite). The side plates are of ground unalloyed high carbon steel: A—70—11, $\sigma_B = 70$ kg/mm^2.

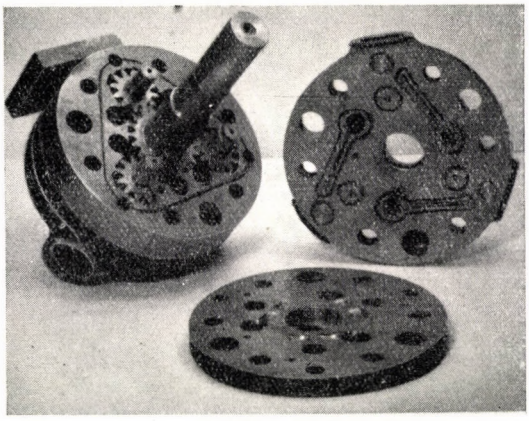


Fig. 1

Clearances both at the gear sides and top lands are 0,02 mm. Experiments were conducted with smaller clearance, but the outcome was that the gears got repeatedly seized with the side plates after 1 to 40 hours of running. With clearances of 0,02 mm on either side continuous operation could be maintained. The main gear is mounted on a shaft running on deep-grooved ball bearings, while the mating gears are running on floating bronze bearing bushes. These are mounted on hardened and ground journals and are lubricated through bores and grooves.

Measurements were carried out by the Department of Hydraulic Machinery of the Technical University of Budapest [7]. *Fig. 3* shows the experimental equipment set up. The hydraulic pump was driven by a D. C. motor of known characteristics. The speed could be changed by regulating the Ward-Leonard type feeding generator. The high-pressure oil discharge of the pump operated the hydraulic motor, identical in size with the pump. The amount of the circulating fluid was measured by determining weight and time, while the output of the hydraulic motor was measured by coupling of a D. C. dynamo of known characteristics. Tested Bourdon-type and mercury U-tube manometers were used

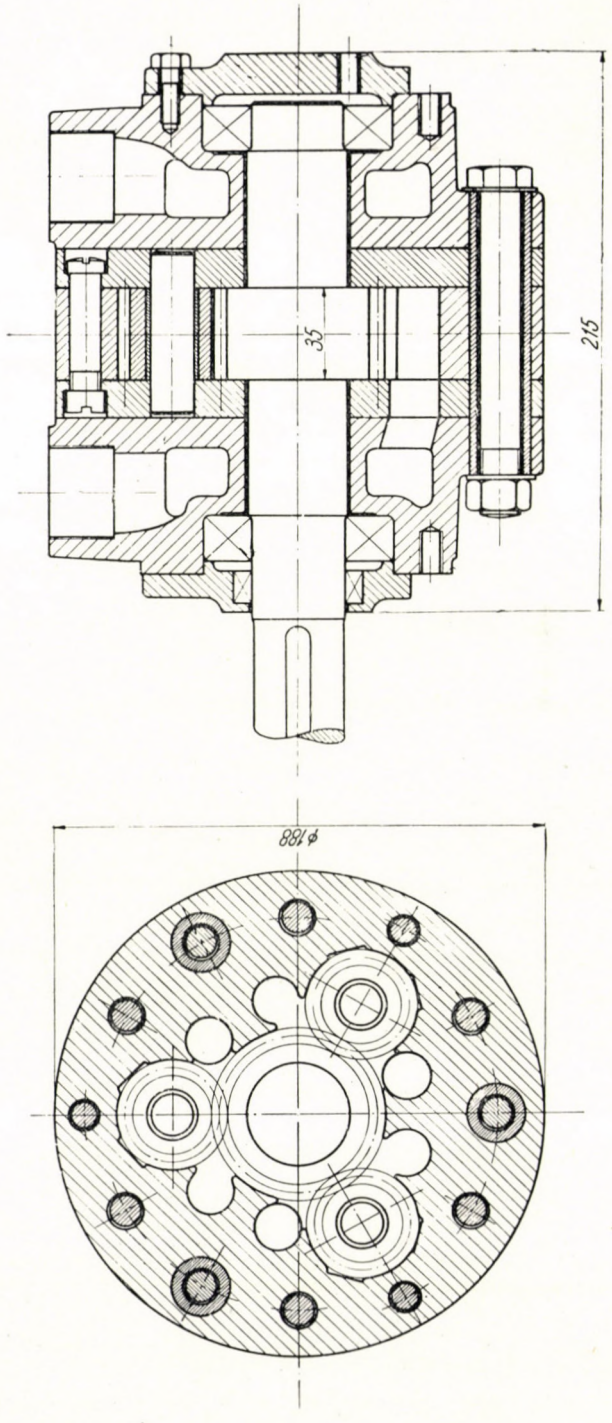


Fig. 2

to measure pressures. The piping between pump and motor was so short, that no pressure loss could be measured. Speed was measured by means of a tested tachometer. The result of the measurements, taken with a high grade of precision, are displayed in Tables I and II. The discrepancies between output and efficiency data taken before and after the endurance test of 480 hours lie well within the limits of measurement errors. In some instances efficiency proved to be higher after the endurance test than before it. On the basis of the results of the experiments the range of applicability can be determined both for the pump and the motor *(Figs. 4, 5, 6)*.

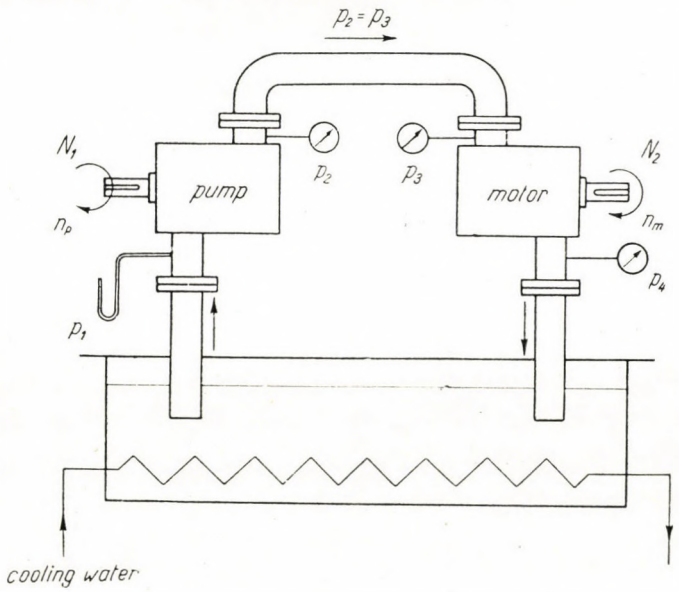


Fig. 3

In possession of detailed data we may now proceed to the determination of the pump and motor efficiency and the over-all efficiency of the aggregate. From the series of measurements (Tables I and II) the efficiencies η_p η_m and η_{agg} can be determined as functions of pressure and speed. *Figs. 7, 8* and *9* display the curves representing the over-all efficiency of the pump, motor and aggregate.

3. Detailed examination of efficiencies

Figs. 7, 8 and *9* only show over-all efficiencies. They indicate neither the position nor nature of the losses, and fail to give information in which part how much loss occurs. For this reason it is necessary to analyse the over-all efficiencies and subject them to a detailed examination. As a first step, we must

TABLE I

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
			Pressure			Power			Speed		Efficiency			Note
No.	t	Q	$p_2 = p_3$	p_4	$p_2 - p_4 = p_3 - p_4$	input, N_1	hydraulic N_H	output, N_2	η_{agg} / n_p^2	motor n_m	pump η_s	motor η_m	aggregate η_{agg}	
	°C	litres per min.	kg/cm²			HP			min⁻¹					
1	51,—	45,22	0	0,18	0	0,420	—	—	398	350	—	—	—	
2	50,—	40,41	14,75	0,18	14,57	1,589	1,31	1,135	401	292	0,811	0,865	0,701	
3	50,—	38,36	20,75	0,18	20,57	2,356	1,753	1,436	401	250	0,737	0,819	0,603	
4	48,5	33,88	34,—	0,17	33,83	3,786	2,573	1,593	405	182	0,677	0,619	0,419	
5	49,5	32,69	38,—	0,17	37,83	4,305	2,761	1,198	398	121	0,636	0,434	0,276	
6	49,—	25,47	45,5	0,16	45,34	1,774	2,565	0,745	396	43	1,445	0,291	—	erroneous measurement
7	49,—	69,83	4,25	0,21	4,04	1,037	0,627	0,730	601	539	0,598	1,164	—	« «
8	49,—	69,35	4,25	0,21	4,04	0,975	0,663	—	597	540	0,634	—	—	« «
9	49,—	65,93	13,25	0,20	13,05	2,432	1,912	1,77	601	492	0,782	0,925	0,723	
10	48,—	62,88	22,25	0,20	22,05	3,824	3,08	2,559	600	440	0,802	0,831	0,666	
11	48,—	58,23	32,50	0,195	32,30	5,393	4,17	3,25	600	380	0,773	0,779	0,602	
12	47,5	54,05	41,50	0,19	41,31	6,972	4,96	3,55	603	324	0,710	0,716	0,508	
13	48,—	48,92	51,—	0,18	50,82	8,444	5,53	3,372	602	251	0,647	0,610	0,394	
14	48,5	42,92	61,—	0,18	60,82	10,300	5,81	2,611	605	157	0,563	0,449	0,253	
15	51,5	38,86	64,75	0,175	64,59	11,875	5,58	1,617	599	100	0,470	0,289	0,136	
16	52,—	93,10	6,75	0,25	6,50	1,880	1,344	—	800	729	0,718	—	—	
17	50,5	89,75	12,50	0,245	12,25	3,130	2,441	1,946	800	692	0,777	0,797	0,619	
18	50,—	86,98	22,50	0,235	22,26	5,359	4,58	3,779	803	632	0,803	0,825	0,662	
19	49,—	81,26	33,25	0,22	33,03	8,296	5,97	4,698	800	561	0,721	0,787	0,568	
20	49,—	76,47	41,50	0,215	41,28	9,362	7,03	5,449	798	501	0,748	0,774	0,579	
21	48,—	71,30	52,75	0,19	52,56	11,832	8,327	5,737	801	415	0,702	0,689	0,483	
22	50,—	65,89	63,—	0,19	62,81	14,089	9,19	5,495	801	328	0,651	0,598	0,390	
23	51,—	61,47	69,75	0,16	69,59	15,482	9,51	4,726	800	253	0,612	0,497	0,304	
24	55,—	52,52	80,15	0,15	80,—	17,806	9,34	2,604	800	128	0,522	0,279	0,145	
25	55,—	104,49	7,25	0,26	699,—	2,307	1,621	—	899	819	0,706	—	—	
26	53,—	101,58	12,50	0,26	12,24	3,572	2,76	2,122	900	784	0,777	0,769	0,598	

TABLE I/a

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
			Pressure			Power			Speed		Efficiency			Note
No.	t	Q	$p_2 = p_4$	p_4	$p_2-p_4 = p_3-p_4$	input, N_1	hydraulic, N_H	output, N_2	pump n_p	motor n_m	pump η_s	motor n_m	aggregate η_{agg}	
	°C	litres per min.	kg/cm²			HP			min⁻¹					
27	52,—	57,18	23,75	0,25	23,50	6,473	2,99	4,143	902	700	0,461	1,385	0,638	erroneous measurement
28	51,—	92,03	33,25	0,23	33,02	8,629	6,82	5,346	900	639	0,782	0,784	0,613	
29	52,—	88,09	41,5	0,22	41,28	10,693	8,08	6,222	900	573	0,754	0,769	0,579	
30	52,—	81,86	52,—	0,21	51,79	13,156	9,42	6,699	902	494	0,712	0,711	0,506	
31	53,—	74,62	63,50	0,195	63,30	16,039	10,50	6,582	902	389	0,652	0,627	0,408	
32	53,—	69,62	73,50	0,18	73,32	18,275	11,36	5,707	903	297	0,620	0,505	0,313	
33	52,—	65,33	80,15	0,165	79,98	19,938	11,588	4,534	903	217	0,579	0,392	0,277	
34	55,—	61,51	87,85	0,16	87,69	21,803	11,95	3,176	906	144	0,548	0,264	0,145	
35	55,—	113,07	34,60	0,235	34,36	23,755	8,62	5,350	900	637	0,363	0,621	0,225	
36	54,—	112,95	8,25	0,24	8,01	2,796	2,01	—	968	879	0,717	—	—	
37	51,—	108,27	22,25	0,27	21,98	6,326	5,32	3,987	960	798	0,835	0,747	0,624	
38	49 —	103,72	31,75	0,27	31,48	8,773	7,25	5,584	959	748	0,825	0,771	0,636	
39	49,—	99,95	42,75	0,27	42,48	11,667	9,44	7,261	959	678	0,810	0,769	0,622	
40	48,—	97,51	50,50	0,25	50,25	13,755	10,906	9,189	960	641	0,720	0,748	0,597	
41	48,5	91,79	60,25	0,24	60,01	16,330	12,247	9,061	960	581	0,750	0,740	0,560	
42	48,—	84,58	73,50	0,20	73,30	19,936	13,777	9,257	962	472	0,687	0,672	0,462	
43	48,—	79,11	81,15	0,19	80,96	21,784	14,22	8,449	961	392	0,650	0,594	0,386	
44	49,—	72,84	90,35	0,18	90,17	24,198	14,59	6,817	960	294	0,603	0,467	0,282	
45	48,—	137,55	11,75	0,36	11,39	4,794	3,478	1,570	1200	1099	0,737	0,452	0,333	
46	48,—	135,22	21,75	0,35	21,40	8,218	6,43	4,512	1190	1020	0,785	0,702	0,551	
47	48,—	130,84	33,25	0,33	32,92	11,762	9,57	6,915	1200	967	0,822	0,722	0,593	
48	47,5	128,96	42,—	0,32	41,68	14,587	11,95	8,860	1197	920	0,824	0,743	0,612	
49	49,—	121,11	54,—	0,30	53,70	18,938	14,45	10,942	1200	814	0,765	0,757	0,580	
50	49,5	115,74	60,25	0,29	59,96	20,806	15,41	11,579	1195	752	0,721	0,751	0,541	
51	49,—	112,89	68,75	0,28	68,47	23,420	17,24	11,98	1200	677	0,733	0,694	0,508	
52	50,—	106,30	83,50	0,25	83,25	26,050	19,66	11,65	1200	532	0,753	0,594	0,447	
53	52,—	95,57	91,—	0,23	90,77	21,300	19,27	9,942	1200	413	0,619	0,516	0,318	

TABLE II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
			Pressure			Power			Speed		Efficiency			Note
No.	t	Q	$p_3 = p_5$	p_4	$p_2-p_4 = p_5-p_4$	input, N_1	hydraulic, N_H	output, N_2	pump n_p	motor n_m	pump η_s	motor η_m	aggregate η_{agg}	
	°C	litres per min.	kg/cm²			HP			min^{-1}					
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
2	48,—	32,44	2,25	0,15	2,10	0,121	0,152	0,243	280	260	—	1,6	—	erroneous measurement
3	46,—	27,51	12,50	0,14	12,36	0,885	0,750	0,680	274	190	0,845	0,909	0,768	« «
4	45,—	23,32	22,75	0,14	22,61	0,725	1,179	0,829	280	169	0,674	0,709	0,478	
5	45,—	19,56	33,—	0,14	32,86	2,53	1,433	0,552	285	68	0,561	0,386	0,216	
6	44,5	18,33	35,50	0,14	35,36	2,73	1,440	0,432	285	50	0,525	0,300	0,157	
7	44,—	46,83	2,50	0,16	2,34	0,435	0,243	0,419	399	369	0,534	1,720	0,918	« «
8	44,—	41,84	12,50	0,16	12,34	1,41	1,146	1,060	388	306	0,805	0,925	0,745	« «
9	44,—	37,87	22,50	0,15	22,35	2,54	1,880	1,516	393	249	0,736	0,805	0,591	
10	44,—	33,09	33,75	0,14	33,65	3,64	2,470	1,905	390	178	0,678	0,772	0,523	
11	44,—	29,19	42,50	0,14	42,36	4,70	2,745	1,310	400	120	0,581	0,460	0,267	
12	45,—	25,92	48,65	0,14	48,51	5,68	2,800	0,798	402	68	0,493	0,285	0,141	
13	45,—	72,02	5,—	0,19	4,81	1,08	0,770	0,757	611	568	0,704	0,982	0,691	« «
14	45,—	67,99	13,25	0,19	13,06	2,37	1,973	1,730	614	518	0,828	0,876	0,724	
15	44,5	63,39	22,—	0,18	21,82	3,87	3,079	2,660	603	457	0,794	0,865	0,686	
16	44,—	56,06	32,25	0,17	32,08	5,52	4,—	3,360	608	401	0,725	0,839	0,608	
17	44,—	54,15	41,75	0,17	41,58	6,97	5,—	3,550	597	323	0,716	0,710	0,508	
18	44,—	50,25	53,—	0,16	52,84	8,74	5,910	3,580	610	261	0,679	0,605	0,411	
19	44,—	44,64	61,50	0,16	61,34	10,60	6,100	2,720	603	169	0,571	0,445	0,256	
20	45,—	40,22	69,25	0,15	69,10	11,80	6,200	1,726	609	97	0,522	0,278	0,145	
21	46,—	91,70	6,75	0,23	6,52	1,87	1,328	1,136	795	730	0,715	0,855	0,611	
22	46,—	87,93	13,25	0,22	13,03	3,16	2,550	2,120	780	674	0,808	0,830	0,671	
23	45,5	85,65	22,—	0,21	21,79	5,22	4,150	3,500	792	632	0,795	0,841	0,669	
24	45,5	83,12	32,50	0,20	32,30	7,54	5,975	4,760	807	578	0,792	0,795	0,630	
25	46,—	77,12	42,—	0,20	41,80	9,46	7,150	5,780	799	509	0,758	0,860	0,611	

TABLE II/a

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
			Pressure			Power			Speed		Efficiency			Note
No.	t	Q	$p_3=p_3$	p_4	$p_3-p_4 = p_3-p_4$	input, N_1	hydraulic, N_H	output, N_2	pump n_p	motor n_m	pump η_s	motor η_m	aggregate η_{agg}	
	°C	litres per min.	kg/cm²			HP			min⁻¹					
26	47,—	72,71	51,—	0,17	50,83	11,16	8,225	5,710	794	443	0,737	0,694	0,511	
27	48,—	65,63	62,25	0,17	62,08	13,85	9,025	5,300	802	328	0,652	0,587	0,383	
28	48,—	59,12	71,75	0,168	71,58	11,83	9,400	4,210	800	229	0,593	0,448	0,266	
29	49,—	53,93	80,50	0,155	80,34	18,—	9,650	2,800	811	135	0,534	0,290	0,155	
30	50,—	51,76	79,50	0,155	79,34	17,65	9,100	2,330	800	114	0,518	0,256	0,133	
31	50,—	102,83	7,25	0,25	7,—	2,25	1,592	1,352	902	828	0,738	0,849	0,672	
32	—	—	—	—	—	—	—	—	904	834	—	—	—	
33	42,—	100,82	7,75	0,25	7,50	2,56	1,682	1,370	901	834	0,660	0,810	0,633	
34	43,—	101,14	13,25	0,25	13,—	3,75	2,930	2,336	899	798	0,782	0,796	0,610	
35	44,—	98,79	22,—	0,24	21,76	6,04	4,790	3,980	899	743	0,795	0,830	0,662	
36	44,—	—	32,75	0,225	32,53	8,51	—	5,570	900	686	—	—	—	
37	44,—	91,61	41,50	0,22	41,28	10,70	8,420	6,690	898	632	0,787	0,795	0,626	
38	44,—	86,62	53,—	0,205	52,80	13,33	10,200	7,770	898	550	0,766	0,756	0,679	
39	44,—	81,49	62,40	0,195	62,21	15,62	11,280	7,580	895	470	0,719	0,675	0,485	
40	45,—	76,60	72,—	0,187	71,85	17,90	12,180	7,310	900	389	0,678	0,601	0,408	
41	47,—	69,83	79,—	0,17	78,83	19,90	12,200	5,800	900	281	0,622	0,475	0,295	
42	48,—	61,11	89,50	0,16	89,34	22,20	12,300	3,650	898	158	0,550	0,297	0,165	
43	50,—	111,88	8,25	0,25	8,—	2,66	1,980	1,400	952	873	0,754	0,706	0,532	
44	50,—	107,77	12,50	0,255	12,25	3,84	2,930	2,350	856	844	0,769	0,803	0,617	
45	50,—	104,20	22,25	0,25	22,00	6,34	5,080	4,190	957	779	0,805	0,825	0,664	
46	49,—	102,10	32,90	0,23	32,67	8,90	7,400	5,780	960	717	0,832	0,781	0,649	
47	49,—	95,25	42,—	0,22	41,78	11,50	8,850	6,700	950	649	0,802	0,756	0,606	
48	48,—	89,64	52,75	0,21	52,54	13,94	10,560	7,610	950	568	0,754	0,720	0,542	
49	48,—	83,23	61,50	0,20	61,30	16,40	11,660	7,850	958	482	0,713	0,674	0,481	
50	48,—	78,42	72,—	0,18	71,82	18,80	12,500	7,240	950	386	0,665	0,579	0,383	

TABLE II/b

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
			Pressure			Power			Speed		Efficiency			Note
No.	t	Q	$p_2=p_3$	p_4	$p_2-p_4=p_3-p_4$	input, N_1	hydraulic, N_H	output, N_2	pump n_p	motor n_m	pump η_s	motor η_m	aggregate η_{agg}	
	°C	litres per min	kg/cm²			HP			min⁻¹					
51	48,—	72,06	81,—	0,170	80,83	21,20	12,94	6,05	950	288	0,613	0,467	0,286	
52	53,—	63,43	90,50	0,155	90,34	23,60	12,72	3,25	950	137	0,543	0,255	0,138	
53	54,—	118,54	9,25	0,320	8,93	3,65	2,34	1,40	1102	1007	0,680	0,604	0,410	
54	53,—	125,63	13,75	0,300	13,45	4,80	3,76	2,36	1108	986	0,792	0,628	0,497	
55	51,—	121,47	23,50	0,290	23,25	7,90	6,28	4,70	1102	885	0,798	0,748	0,594	
56	50,—	118,94	32,75	0,275	32,47	9,50	8,60	6,51	1108	848	0,906	0,758	0,686	erroneous measurement
57	49,—	112,38	42,75	0,260	42,49	13,54	10,60	8,15	1104	783	0,784	0,768	0,602	
58	49,—	—	51,75	0,250	41,50	16,—	—	—	1100	710	—	—	—	
59	49,—	102,65	61,75	0,230	61,52	19,30	14,05	9,74	1107	624	0,725	0,694	0,504	
60	49,—	96,69	70,75	0,220	70,53	21,80	15,10	9,50	1100	528	0,696	0,630	0,436	
61	51,—	90,40	79,—	0,200	78,80	24,60	15,83	8,46	1101	409	0,642	0,534	0,345	
62	52.—	81,04	88,75	0,190	88,56	27,40	15,95	6,59	1097	288	0,582	0,414	0,241	
63	56,—	71,91	92,75	0,180	92,57	28,60	14,80	4,61	1105	194	0,520	0,312	0,162	
64	55,—	137,43	9,50	0,295	9,20	4,04	2,80	1,45	1191	1088	0,703	0,521	0,366	
65	53,—	135,93	14,—	0,320	13,68	5,27	4,14	2,38	1198	1067	0,794	0,576	0,457	
66	51,—	133,88	23,50	0,310	23,19	8,61	6,90	4,96	1205	1000	0,815	0,720	0,587	
67	51,—	126,75	33,25	0,300	32,95	11,58	9,30	6,94	1192	928	0,803	0,748	0,601	
68	51,—	122,77	41,50	0,280	41,22	14,40	11,28	8,42	1189	859	0,783	0,787	0,584	
69	51,—	119,—	52,75	0,265	52,48	18,20	13,88	10,10	1209	788	0,765	0,730	0,560	
70	51,—	111,86	62,25	0,250	62,—	21,30	15,40	10,87	1200	694	0,724	0,708	0,512	
71	51,—	109,40	70,75	0,240	70,51	24,30	17,15	12,31	1209	616	0,706	0,720	0,507	
72	51,—	102,88	80,75	0,220	80,53	27,50	18,40	10,60	1202	510	0,670	0,577	0,386	
73	52,—	94,97	90,50	0,200	90,30	30,40	19,10	9,15	1202	396	0,630	0,480	0,303	
74	53,—	150,07	11,—	0,325	10,67	5,02	3,54	1,53	1290	1183	0,721	0,433	0,312	
75	53,—	148,69	13,25	1,330	12,92	6,10	1,27	2,17	1316	1197	0,708	0,506	0,358	
76	52,—	143,41	23,50	0,330	23,17	9,50	7,40	5,01	1294	1101	0,783	0,678	0,530	

reconsider our fundamental concepts, since the partial efficiencies in literature, whether correct or not, cannot be derived from results of the measurements. The over-all efficiency of a hydraulic drive composed of a hydraulic pump and a motor may obviously be written thus :

$$\eta = \frac{N_m}{N_p} = \frac{M_m n_m}{M_p\, n_p} \tag{1}$$

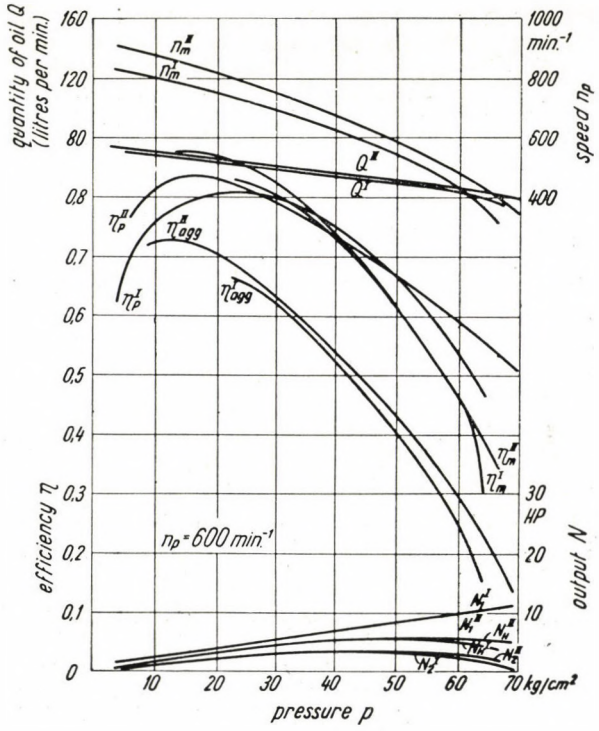


Fig. 4

It is clear at first glance, that the over-all efficiency can be divided into two parts. If we denote the value of $\frac{n_m}{n_p}$ by η_v, and the value of $\frac{M_m}{M_p}$ (the torque efficiency) by η_T, then

$$\eta = \eta_T \eta_v \tag{2}$$

We shall discuss and interprete η_v later on.*

* In the case under review, where motor and pump are of identical construction and size there is no reduction. Where reduction occurs, it has to be taken into account.

Let us, for the present, subject the torque efficiency to a detailed analysis. How can the torque of a hydraulic pump and motor be determined? Let us consider a hydraulic motor first. Departing from the hydraulic power supplied to the motor, the theoretical torque will be :

$$M = \frac{10}{2\pi} qp \quad mkg, \tag{3}$$

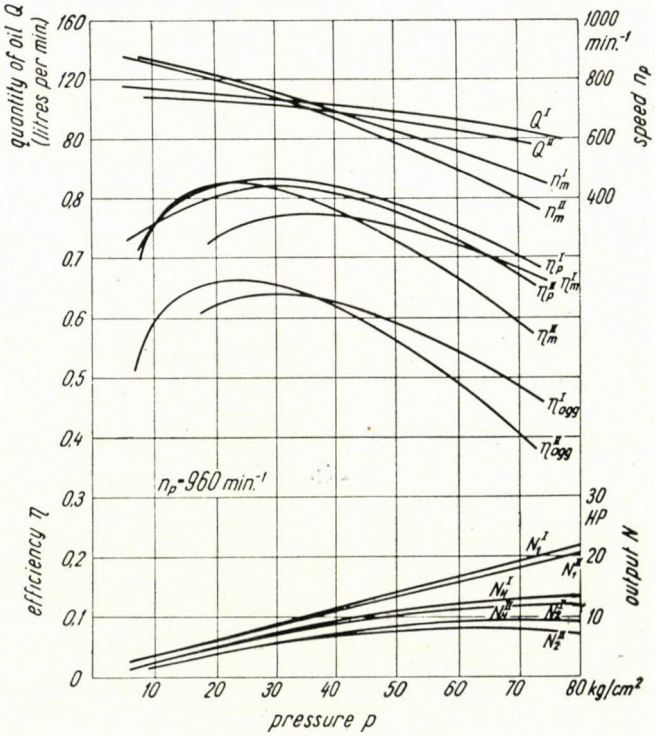


Fig. 5

where q stands for the ideal geometrical fluid transport in litres per revolution, p for the pressure in kg/cm² [8]. The geometrical fluid supply being steady in the same equipment, theoretically the torque depends solely on pressure, while the actual output torque of the motor is less. The difference between the two values is the torque loss. In other words : the torque efficiency of the pump and the motor, respectively, can be interpreted as the ratio of two torques or two equivalent pressures :

$$\eta_T = \frac{M_2}{M_1}.$$

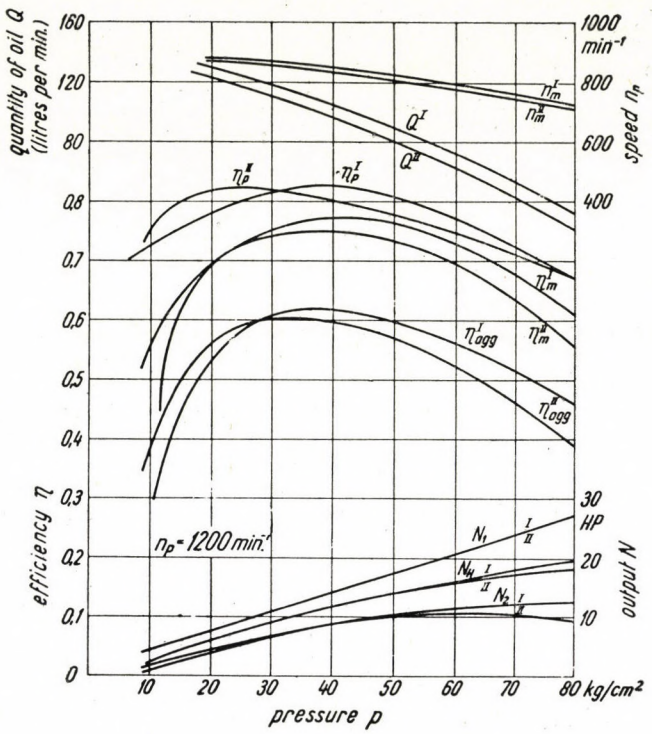

quantity of oil Q (litres per min.)
160
120
80
1000 min⁻¹
800
600
400
speed n_p
Q^I
Q^{II}
η_p^{II}
η_p^I
η_m^I
η_m^{II}
η_{ogg}^I
η_{ogg}^{II}
efficiency η
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
n_p = 1200 min⁻¹
30
HP
20
10
output N
N_1
N_{II}
N_2
I
II
10 20 30 40 50 60 70 80 kg/cm²
pressure p

Fig. 6

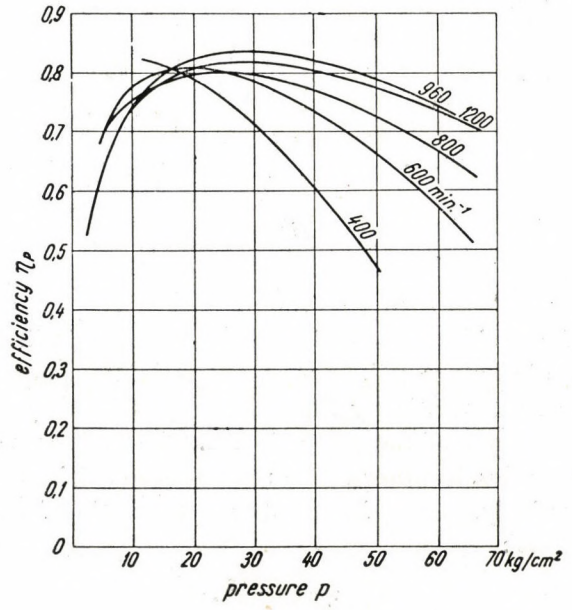

efficiency η_p
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
960 1200
800
600 min⁻¹
400
10 20 30 40 50 60 70 kg/cm²
pressure p

Fig. 7

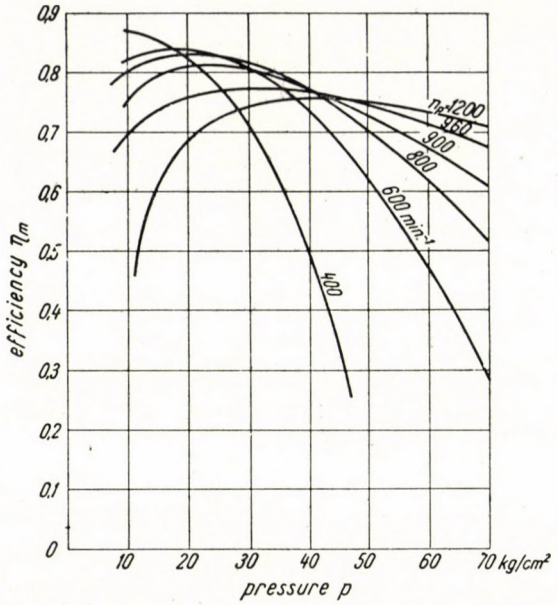

0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
efficiency η_m
10
20
30
40
50
60
70 kg/cm²
pressure p
n_g=1200
960
900
800
600 min⁻¹
400

Fig. 8

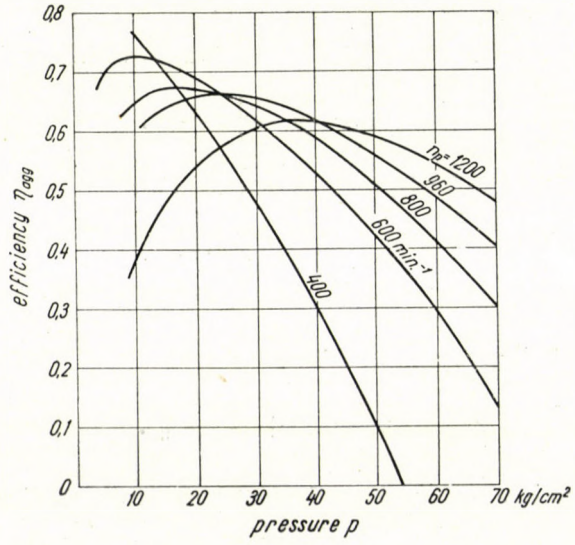

0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
efficiency η_{oag}
10
20
30
40
50
60
70 kg/cm²
pressure p
n_g=1200
960
800
600 min⁻¹
400

Fig. 9

In the case of pumps the torque efficiency : $\eta_{Tp} = \frac{M_H}{M_{IN}}$ i. e. the quotient of the resulting hydraulic output torque and of the input torque on the pump shaft. In the case of motors, $\eta_{Tm} = \frac{M_{OUT}}{M_H}$ i. e. the torque efficiency equals the quotient of the torque measured on the motor shaft and the torque of the hydraulic power supplied to the motor.

If p_3 and p_4, respectively, denote the pressure before and after the motor, then, owing to the linear relation between torque and pressure, we can write according to equation (3) :

$$M = \frac{10}{2\pi} q (p_4 - p_3) \quad .$$

From the torque measured on the motor shaft a theoretical pressure can be computed, which is less than $p_4 - p_3$:

$$p = \frac{2\pi}{10q} M_{OUT} \quad .$$

Quite obviously, torque efficiency can be expressed by a quotient of pressures, and consequently, in our case we can write for hydraulic motors :

$$\eta_{Tm} = \frac{p}{p_4 - p_3} \quad . \tag{4}$$

Since p is the value of the pressure utilized in a motor for the effective torque, it is possible to compute a theoretical pressure loss, which can be written :

$$p_{loss} = p_4 - p_3 - p \quad . \tag{4a}$$

For pumps, on the same basis, according to *Fig. 3 :*

$$\eta_{Tp} = \frac{p_2 - p_1}{p} \tag{5}$$

and the theoretical pressure loss is

$$p_{loss} = p + p_1 - p_2 \quad . \tag{5a}$$

This torque loss and the equivalent pressure loss directly proportional to it, both in motors and pumps comes from bearing friction, stuffing-box and packing-ring friction, from the friction of the rotating gear surfaces in oil, and

finally from flow losses. The torque of these friction forces, together with the torque of the fluid friction of the gears reduce the motor torque.

It is this reduction of torque that we have brought into relationship with the reduction of pressure as interpreted above. Flow losses are indeed actual pressure drops, while the others constitute loss of torque. Pressure drop can be converted into torque loss and vice-versa.

In order to elucidate the essence of the value $\eta_v = \frac{n_m}{n_p}$ let us examine thoroughly, how volumetric losses arise in transmissions consisting of a hydraulic

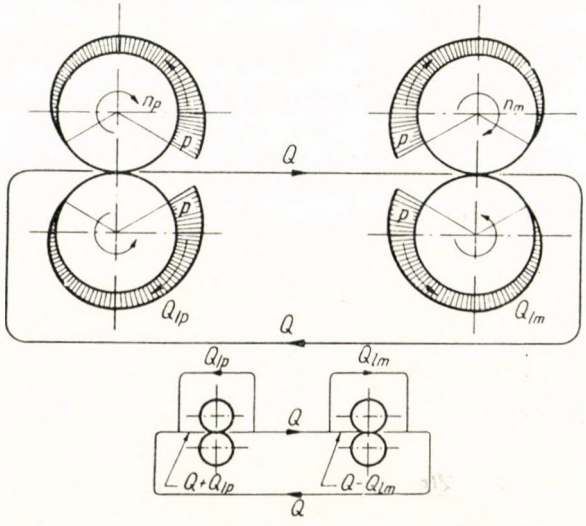


Fig. 10

motor and a pump. Although the amount of oil circulating in the closed system is always the same (disregarding the negligible amount of oil escaping at the shaft exits), yet the actual oil quantity passing through the pump and the motor differs. In other words, compared with the measurable quantity of oil (Q) the pump sucks up more and the motor consumes less. This directly unmeasurable difference results from the amount of oil leaking back through the clearance between gears and casing, i. e. from internal oil short circuits. *Fig. 10* presents the diagram of the pressure and leakage conditions for one pair of gears. In the pump, the oil flows back through the 0,02 to 0,025 mm wide clearance between gear and casing from discharge side towards suction side. This means, that the pump conveys less oil than it is due to its speed and geometrical proportions ($Q_x = q \cdot n_x$). The oil escaping through the clearances flows in a direction opposite to the oil transport in the pump. In the motor the case is reversed. The direction of the main flow is contrary to the leak flow. Here a part of the oil flowing into the motor leaks through the clearances leaving less to drive the gears.

Let Q be the quantity of oil in the flow-circuit per unit time, Q_p the amount entering the pump, i. e. the amount increased by leakage losses, Q_m the amount entering the motor (i. e. the amount reduced by leakage losses), and Q_{lp} and Q_{lm} the quantities of oil passing through the clearances of the pump and the motor respectively, per unit time. Then we can write :

$$Q_p = Q + Q_{lp} \text{ and } Q_m = Q - Q_{lm} \quad .$$

Consequently, the total leakage loss is :

$$Q_p - Q_m = Q_{lp} + Q_{lm} = Q_l \quad .$$

The amount of intake oil in pump per unit time, increased by short circuit, is obviously

$$Q_p = q_p \cdot n_p \quad ,$$

and in motor reduced by the short circuit

$$Q_m = q_m \cdot n_m \quad .$$

In the case under review the dimensions of motor and pump are perfectly identical, that is to say : $q_p = q_m = q = 0{,}1138$ litres per revolution.*

Accordingly, the volumetric efficiency of the pump can be established as follows :

$$\eta_{vp} = \frac{Q_p - Q_{lp}}{Q_p} = \frac{Q}{Q_p} = \frac{Q}{Q + Q_{lp}} = \frac{Q}{n_p q} = \frac{Q}{q} \cdot \frac{1}{n_p} \quad .$$

If we introduce $\frac{Q}{q} = n$ as the ideal number of revolutions, i. e. the number of revolutions at which the pump ought to be driven if it were to deliver an oil amount of Q in unit time without any leakage («theoretical no load running speed»), then

$$\eta_{vp} = \frac{n}{n_p} \tag{6}$$

and for motors, on the same assumptions :

$$\eta_{vm} = \frac{Q - Q_{lm}}{Q} = \frac{Q_m}{Q} = \frac{n_m q}{Q} \quad .$$

* According to Table I, Q = 45,3 litres per minute, $n_p = 398$ min.$^{-1}$ and consequently $q = \frac{45{,}3}{398} = 0{,}1138$ litres per revolution.

Introducing the ideal speed

$$\frac{q}{Q} = \frac{1}{n},$$

we arrive at

$$\eta_{vm} \quad \frac{n_m}{n} \quad . \tag{6a}$$

On these considerations the volumetric efficiency of the aggregate can be written as follows :

$$\eta_v = \eta_{vp} \cdot \eta_{vm} = \frac{n}{n_p} \cdot \frac{n_m}{n} = \frac{n_m}{n_p} \quad . \tag{7}$$

It appears, that in equation (2) η_v is identical with the volumetric efficiency of the aggregate. Equation (7) deserves our attention, for it offers a most simple, yet very accurate procedure for the determination of volumetric efficiency by means of revolution counting. It is easy and simple to establish the number of revolutions both for the motor and the pump with a high grade of accuracy.

The volumetric efficiency of gear pumps has been determined by *R. Ammann* [9] and *E. M. Haimovitch* [10] as the ratio of the fluid transport of no load and load conditions. *E. M. Haimovitch* draws attention to the fact, that the volume of fluid under no-load conditions, as determined by experiments, depends on the viscosity and the speed of the oil. From this it follows, that only a geometrical method can lead to unambigous values. It is a correct method to determine the geometrical volume with great accuracy and to determine experimentally the no-load volumes at different grades of viscosity and at different speeds, and expressing it as function of viscosity and speed. This accomplished, the volumetric loss can be subdivided into

1. filling loss (without any power loss) and
2. leakage loss (with power loss).

We have seen, that in high-pressure hydraulic gear pumps and motors the total over-all efficiency can be reduced to two clearly defined efficiencies : torque efficiency and volumetric efficiency. It is particularly simple to determine the latter with accuracy in a closed system consisting of a motor and a pump of identical design and dimensions (1).

Before we turn our attention to a further analysis of efficiencies, let us consider in our experimental equipment the trends of the torque and of the volumetric efficiencies. Equation (7) permits us to compute the values of η_v on the basis of Tables I and II, while the value of η_p can be derived from equation (2).

The results of these operations are given in columns of Tables III and IV.

TABLE III

Number	Volumetric efficiency	Torque efficiency	Number	Volumetric efficiency	Torque efficiency	Number	Volumetric efficiency	Torque efficiency
1.	0,879	—	19.	0,701	0,810	37.	0,831	0,751
2.	0,728	0,963	20.	0,628	0,922	38.	0,780	0,815
3.	0,623	0,968	21.	0,518	0,932	39.	0,707	0,880
4.	0,449	0,933	22.	0,409	0,953	40.	0,668	0,894
5.	0,304	0,908	23.	0,316	0,962	41.	0,605	0,926
6.	0,110	—	24.	0,160	0,906	42.	0,491	0,941
7.	0,896	—	25.	0,911	—	43.	0,408	0,946
8.	0,904	—	26.	0,871	0,686	44.	0,306	0,921
9.	0,818	0,884	27.	0,776	—	45.	0,916	0,363
10.	0,733	0,908	28.	0,710	0,863	46.	0,857	0,643
11.	0,633	0,951	29.	0,635	0,912	47.	0,806	0,736
12.	0,537	0,945	30.	0,548	0,923	48.	0,768	0,797
13.	0,417	0,945	31.	0,431	0,947	49.	0,678	0,855
14.	0,259	0,976	32.	0,329	0,951	50.	0,629	0,860
15.	0,167	0,814	33.	0,240	0,946	51.	0,564	0,901
16.	0,911	—	34.	0,159	0,912	52.	0,543	1,009
17.	0,865	0,716	35.	0,708	0,318	53.	0,344	0,924
18.	0,787	0,841	36.	0,908	—			

TABLE IV

Number	Volumetric efficiency	Torque efficiency	Number	Volumetric efficiency	Torque efficiency	Number	Volumetric efficiency	Torque efficiency
1.	—	—	27.	0,409	0,936	52.	0,144	0,958
2.	0,928	—	28.	0,286	0,930	53.	0,914	0,449
3.	0,693	—	29.	0,165	0,939	54.	0,890	0,558
4.	0,603	0,793	30.	0,146	0,911	55.	0,803	0,740
5.	0,238	0,907	31.	0,918	0,687	56.	0,765	—
6.	—	—	32.	0,923	—	57.	0,709	0,849
7.	0,925	—	33.	0,927	0,683	58.	0,645	—
8.	0,789	—	34.	0,888	0,687	59.	0,564	0,894
9.	0,633	0,934	35.	0,826	0,801	60.	0,480	0,908
10.	0,456	—	36.	0,762	—	61.	0,371	0,930
11.	0,300	0,890	37.	0,704	0,890	62.	0,263	0,916
12.	0,169	0,834	38.	0,612	—	63.	0,176	0,920
13.	0,930	—	39.	0,525	0,924	64.	0,914	0,400
14.	0,844	0,858	40.	0,432	0,944	65.	0,891	0,511
15.	0,758	0,904	41.	0,312	0,946	66.	0,830	0,706
16.	0,660	0,921	42.	0,176	0,940	67.	0,779	0,772
17.	0,541	0,939	43.	0,917	0,580	68.	0,722	0,810
18.	0,429	0,958	44.	0,883	0,699	69.	0,652	0,859
19.	0,280	0,914	45.	0,814	0,816	70.	0,578	0,886
20.	0,159	0,912	46.	0,747	0,869	71.	0,510	0,994
21.	0,918	0,666	47.	0,683	0,887	72.	0,424	0,910
22.	0,864	0,777	48.	0,598	0,906	73.	0,329	0,921
23.	0,798	0,838	49.	0,503	0,956	74.	0,918	0,340
24.	0,716	0,880	50.	0,406	0,943	75.	0,910	0,394
25.	0,637	0,959	51.	0,303	0,944	76.	0,851	0,625
26.	0,588	0,916						

4. Analysis of losses

Regarding centrifugal pumps, *Stepanoff* [11] summarizes clearly defined losses, which are also valid for hydraulic gear pumps and motors without alterations :

1. Hydraulic losses,
   a) Skin friction losses,
   b) Eddy and separation losses,
2. Leakage loss,
3. Disk friction loss,
4. Mechanical loss,

The torque loss is entirely due to losses 1, 3 and 4 while the volumetric loss is partly caused by the loss under 2. Volumetric loss is partly due to filling loss. This kind of loss appears, when the oil entering the pump — especially at high speeds and heavy suction — fails to fill the clearance between gear teeth [12]. The loss can be almost wholly eliminated by letting the oil entering the pump, whenever possible, under an adequate pressure. In hydraulic motors practically no filling losses appear. Filling losses cause no efficiency drop but can be responsible for cavitation phenomena.

There is not much to say about the hydraulic losses. It seems impossible to describe flow conditions theoretically. From the point of view of hydrodynamics, hydraulic gear pumps and motors do not present, on account of their stocky shape and for other features of design, streamlined constructions and therefore show relatively high flow losses.

The value of flow pressure loss can be written thus :

$$p_l = \zeta \gamma \frac{v^2}{2g} \quad .$$

As there is a linear relation between oil velocity and pump speed, we can say, taking the value of ζ as constant, that

$$p_l = C_1 n_p^2 \tag{8}$$

and, further, that the pertinent torque loss equals

$$M_l = C_2 n_p^2 \quad . \tag{8a}$$

Mechanical losses appear in our case in three places :

1. the deep-grooved ball bearings of the main shaft,
2. the floating bearing bushes of the mating gears, and
3. the shaft packings.

The value of the friction coefficient in deep-grooved ball bearings is independent of speed and is equal to about $f = 0{,}0018$. The amount of energy required to overcome friction losses in ball bearings is negligibly small within our range of measurements, this is the more so as shaft loads are balanced. Loads on the sliding bearing of the three mating gears are also balanced, although here balancing is less efficient than at the main shaft. According to *McKee* [13] the friction coefficient of sliding bearings equals

$$f = \varphi\left(\frac{\mu n}{p}\right),$$

where μ denotes the absolute viscosity of the lubricant, n the speed of the shaft, p the load per unit surface of the bearings. The value of f varies between 0,01 and 0,03.

The load and the friction coefficient of the packing ring are uncertain. No reliable values can be obtained.

We take the mechanical losses of the pump and the motor for constant within the experimental range of speed (440 to 1200 r. p. m.) and assume a total value of 2 per cent to represent a fair first approach under our conditions. This would mean a mechanical efficiency of 0,98.

$$\eta_m = 0{,}98 = \text{const.} \tag{9}$$

The torque loss can be written thus :

$$M_2 = (1 - \eta_m) M \quad . \tag{9a}$$

Disk friction

We owe the exact differential equations of disk friction to *Kármán* [14]. His formula for the disk friction torque for one side of the circular disk revolving in infinite space, taking friction and inertia forces into account, is given as

$$M = 0{,}92\, a^4 \sqrt{\varrho \nu \omega^3} \tag{10}$$

where a denotes the disk radius. Kármán's value has been well substantiated by *Kempf's* experiments [15], who also demonstrated that at values of R under 8.10^4 to 10^5 the flow is laminar. Kármán also introduced the dimensionless mean friction coefficient of the disk and determined its value to be :

$$C_f = \frac{1{,}47}{\sqrt{R}},$$

where R stands for the Reynolds number : $R = \dfrac{a^2\omega}{\nu}$

By analogy, Kármán computed the mean disk-friction coefficient for turbulent flow

$$C_f = \frac{0{,}058}{\sqrt[5]{R}} \quad .$$

The disk-friction torque using C_f

$$M = C_f \gamma \frac{a^5 \omega^2}{2g} = C_f \gamma a^3 \frac{\mu^2}{2g} \quad . \tag{11}$$

Like Kempf, *Ippen* [16] in his experiments arrived at slightly smaller values for C_f. His values are :

$$C_f = \frac{1{,}30}{\sqrt{R}}$$

for laminar, and

$$C_f = \frac{0{,}0418}{\sqrt[5]{R}}$$

for turbulent flow.

The discrepancy between experimental and theoretical values is due to the fact, that both Kempf and Ippen employed in their experiments disks of finite thickness.

In his publication quoted previously, Kármán further points out that when in engineering examinations the value of C_f is assumed to be constant relative to an element of surface, this is not precise, for the value of the dimensionless friction coefficient relative to an element of surface depends on flow conditions, the position of the surface element, and the geometry of the surface. For a given arrangement, therefore, only a mean value can be introduced for C_f.

The disk used in his detailed examinations by *Zumbusch* [17] revolved in a casing. The values for R obtained during these experiments ($R = 10^7$ to 10^9) show, that the value of the disk-friction coefficient is influenced by the width of the clearance. The smallest disk friction appears at a definite value of the s/D ratio, which latter represents a function of the Reynolds number. The disk-friction coefficient reaches its minimum at $s/D = 0{,}005$ and $\log R = 8{,}5$. Let us establish the minimum s/D ratio in our case ($\log R = 5$) by extrapolation in the Zumbusch diagramm. We arrive at $s/D \sim 0{,}025$.

The value of s/D in Trirotor gears is about 0,0003. In other terms, the disk-friction coefficient is far from the minimum value and is within the zone of laminar flow.

Theoretical considerations as well as experimental researches of *Schultz* and *Grunow* [18] yielded data agreeing with those of *Zumbusch*. According to these authors in case of laminar flow

$$C_f = \frac{1{,}344}{\sqrt{R}}$$

represents the disk-friction coefficient for a disk revolving within a housing, while

$$C_f = \frac{0{,}0311}{\sqrt[5]{R}}$$

in case of turbulent flow.

In case of turbulent flow the computed value of C remained by 17 per cent under the measured value.

In order to determine the torque of disk friction analytically, we can employ in our case Kármán's formula (11) according to which for a given equipment the torque loss is proportional to the second power of the pump speed.

$$M_3 = C_3 n_p^2 \,. \tag{12}$$

Adding up all losses causing a decrease of torque and utilizing equations (8/*a*), (9/*a*) and (12) we can write:

$$M_{loss} = C_2 n_p^2 + (1 - \eta_m) M + C_3 n_p^2 = (1 - \eta_m) M + C_4 n_p^2$$

$$\eta_T = 1 - \frac{M_{loss}}{M} = \eta_m - \frac{C_4 n_p^2}{M} \,.$$

Substituting

$$M = \frac{10}{2\pi} qp$$

into the preceding equation, we arrive at

$$\eta_T = \eta_m - C_5 \frac{n_p^2}{p} \,. \tag{13}$$

It is to be noted that in the correct equations (8/*a*) and (12), n respectively n_p and n_m should appear in the place of n_p. However, the value of n_p can be accepted as a permissible approximation.

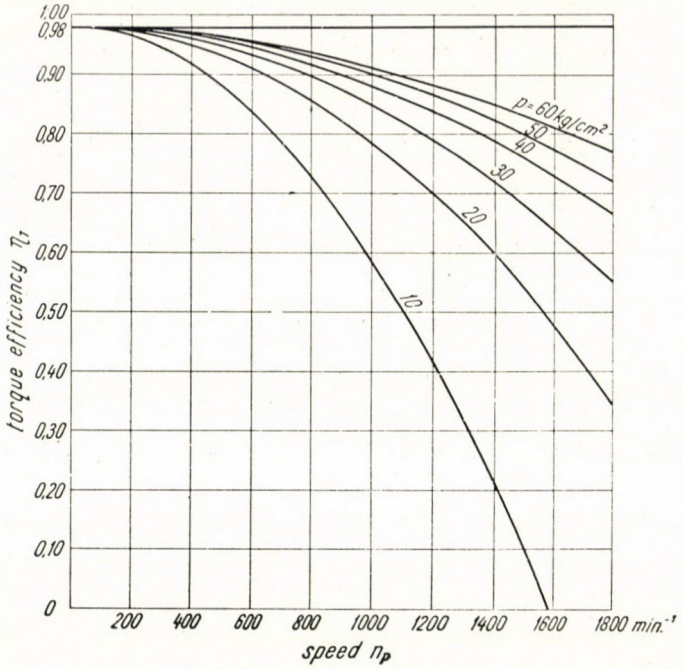

1,00
0,98
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0
torque efficiency η_T
p=60 kg/cm²
50
40
30
20
10
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800 min.⁻¹
speed n_p

Fig. 11

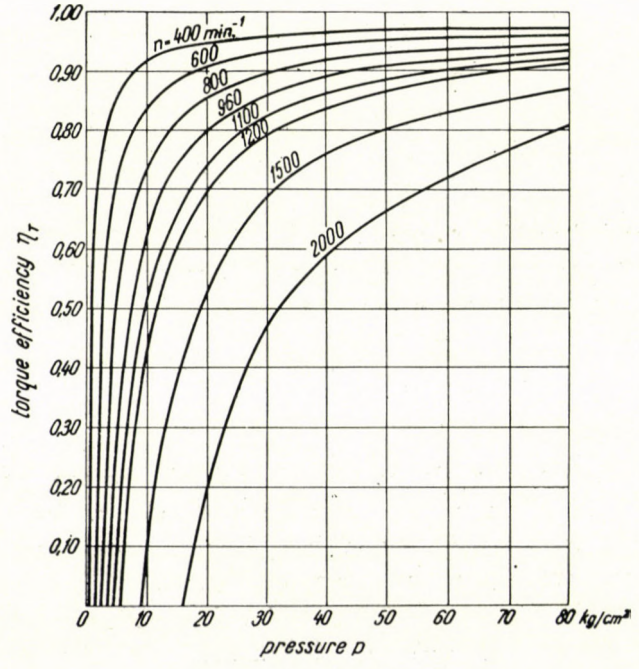

1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
torque efficiency η_T
n=400 min.⁻¹
600
800
960
1100
1200
1500
2000
0
10
20
30
40
50
60
70
80 kg/cm²
pressure p

Fig. 12

If the torque efficiency is expressed according to (13), n and p can be chosen for independent variables. If so, η_T can be represented by a bundle of curves, which are parabolas or hyperbolas, depending on whether speed or pressure have been chosen as independent variables.

Fig. 11 displays a bundle of curves at constant pressure values. When n equals zero, then $\eta_T = \eta_m$; when $n \overset{\max}{_l} = \sqrt{\frac{p\eta_m}{C_5}}$, then $\eta_T = 0$, or — in other terms — : at a given viscosity the equipment fails to transmit any torque, after a maximum speed of the pump has been attained.

Fig. 12 displays a bundle of curves plotted at constant speed values. When $p = 0$, then $\eta_T = -\infty$; when $p_{\min} = \frac{C_5 n_p^2}{\eta_m}$, then $\eta_T = 0$. $p_{\min}$ is equal to the no-load pressure.

The curves plotted on the basis of theoretical considerations are in accordance with experimental data. The constant value of C_5 can be computed on the basis of the series of experimental measurements, utilizing equation (13). On this basis we obtained as the most probable value of C_5 :

$$C_5 = 3{,}91 \cdot 10^{-6} \quad .$$

The torque efficiency at a given viscosity can be written thus :

$$\eta_T = 0{,}98 - 3{,}91 \cdot 10^{-6} \frac{n_p^2}{p} \quad . \tag{13a}$$

Leakage loss

Between each face of the gear and the casing there is a clearance of 0,02 to 0,025 mm. Leakage loss considered as output loss equals the product of the oil quantity leaking across the gap per unit time and the pressure

$$N_l = \frac{Q_l p}{450} \quad HP \quad ,$$

where Q appears in litres per minute and p in kg/cm^2. The concept of laminar flow between parallel plates is applied to the leakage flow. According to the *Poiseuille—Hagen* law, the quantity of fluid flow between parallel plates in unit time and expressed in the cgs-system is

$$Q = BD^3 \frac{p_2 - p_1}{12 \mu L} \quad \text{cm}^3/\text{sec} \quad , \tag{14}$$

where B denotes the breadth of the plate, D the width of the gap, L the length of the gap, $p_2 - p_1$ the pressure difference and μ the absolute viscosity of the fluid. In one and the same gear pump or gear motor, respectively, the value of $\frac{BD^3}{L}$ can be taken as constant, while the value of μ remains unchanged at the same temperature. If — in addition — we neglect the minute change in viscosity that arises within the range of experimental pressures, then we can say that the pressure of oil leaking through the gaps rises linearly with the increase of pressure differences. As the

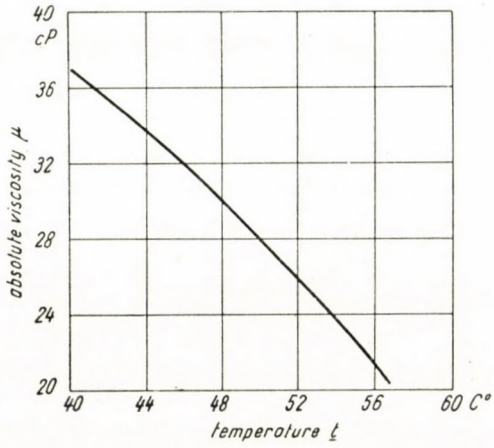


Fig. 13

value of p_1 is identical with the atmospheric pressure (which condition should be maintained during the experiment), the amount of escaping oil depends, at a given temperature and with a certain type of oil, on pressure alone. The relation is linear:

$$Q_1 = C_6 p,$$

where $C_6 = \frac{BD^3}{L} \cdot \frac{1}{12\mu}$. If the value of μ at a constant temperature is known, we can compute the value of $\frac{BD^3}{L}$ which is a characteristic value for hydraulic motors or pumps and which depends only on the geometry of the equipment and especially on the width of the clearance.

According to equation (7) $\eta_v = \frac{n_m}{n_p}$. By multiplying the numerator and the denominator by q, we obtain:

$$\eta_v = \frac{n_m q}{n_p q} = \frac{Q_m}{Q_p}.$$

The ratio of the amount of oil escaping through the gaps and of Q_p can be expressed as

$$\lambda = \frac{Q_p - Q_m}{Q_p} = \frac{Q_{lp} + Q_{lm}}{Q_p} = C_6 \frac{p}{Q_p}.$$

Considering that $\eta_v = 1 - \lambda$, we can write:

$$\eta_v = 1 - C_6 \frac{p}{Q_p}. \tag{15}$$

Volumetric efficiency apparently decreases linearly with increasing pressure.

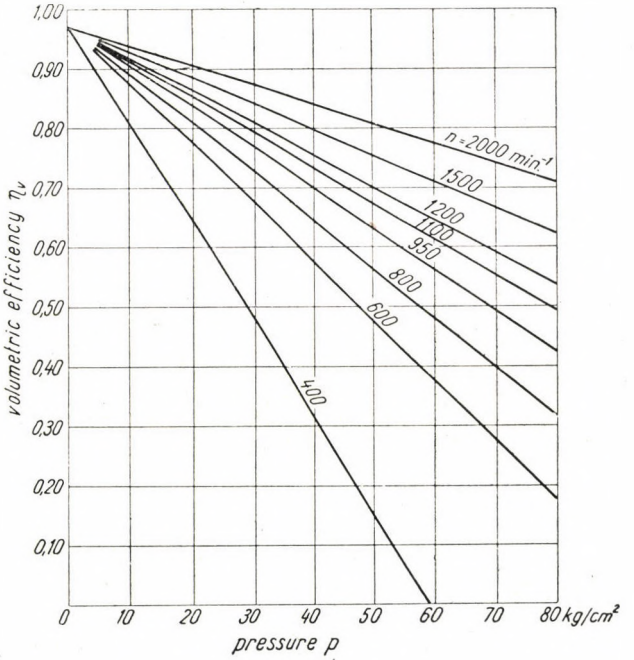


Fig. 14

To facilitate comparing the *tables* and *diagrams* containing the result of our measurements, let us switch over to the usual units of measurement, and express pressure in kg/cm², volume in litres and speed in r. p. m., but remain for the rest within the *cgs*-system

$$\eta_v = 1 - \frac{60 \cdot 981\,000}{12\,000} \cdot \frac{BD^3}{L} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{q n_p} p = 1 - C_7 \frac{p}{n_p}. \tag{15a}$$

In this expression $C_7 = \frac{4905}{\mu q} \cdot \frac{BD^3}{L}$.

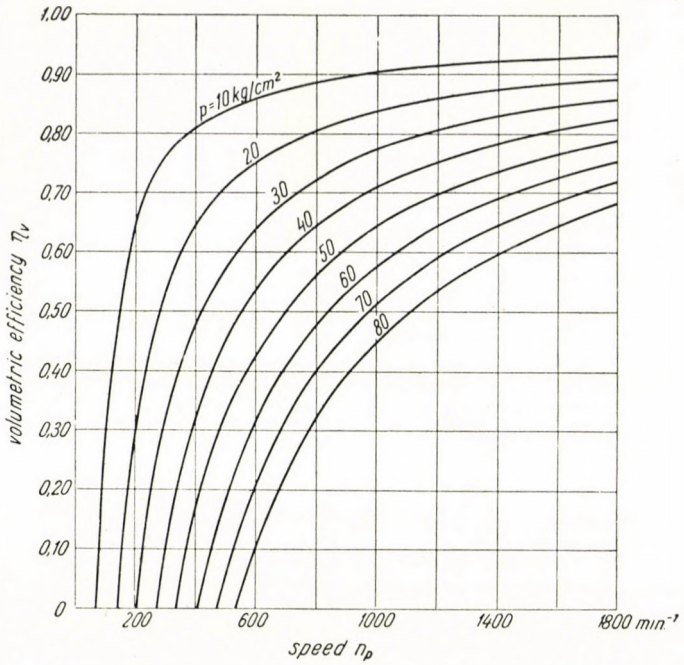

1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0
volumetric efficiency η_v
p=10 kg/cm²
20
30
40
50
60
70
80
200
600
1000
1400
1800 min⁻¹
speed n_p

Fig. 15

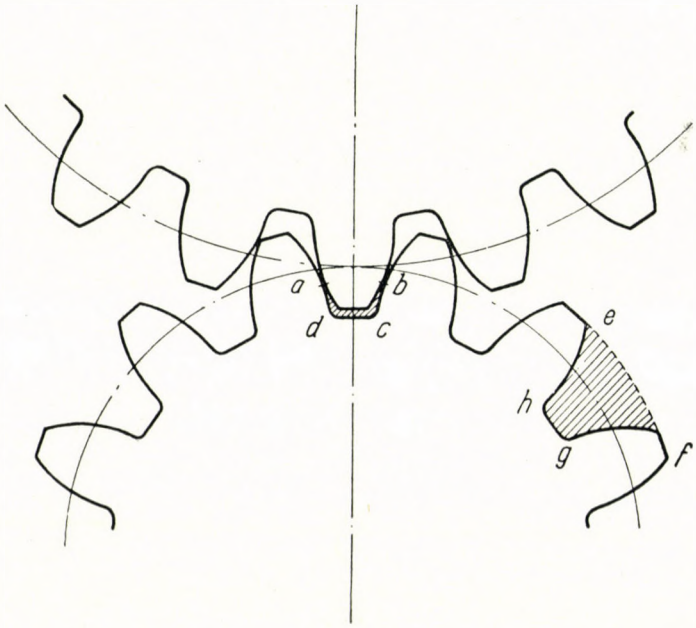

a
b
c
d
e
f
g
h

Fig. 16

Figs. 14 and *15* have been plotted on the basis of the data of Table III and IV. Experimental values of volumetric efficiency plotted as functions of pressure, in fact decrease linearly with increasing pressures, while as the function of speed they appear as hyperbolas.

The sloping lines however are not originating from the locus $\eta_v = 1$, $p = 0$, for when $p = 0$, then $\eta_{vo} = 0{,}97$. The chart further reveals, that at pressures over 50 kg/cm^2 the relation ceases to remain a linear one. On a detailed examination of gear pumps and motors it becomes evident, that the amount of oil remaining in the gap between the top and bottom gland of mating teeth represents leakage loss, because it conveys oil from the high pressure side to the suction side. This process causes only volumetric loss, and not power loss. This is the reason why at a value of $p = 0$ the volumetric efficiency equalling η_{vo} differs from unity. In order to determine the value of η_{vo} we have to resort to *Fig. 16* from which η_{v_0} is equal to the ratio of the areas *abcd* and *efgh*. On these considerations, the equation expressing the volumetric efficiency is

$$\eta_v = \eta_{v_0} - C_7 \frac{p}{n_p} . \tag{16}$$

This formula expresses the fact, that under the experiment conditions the laws determining the leakage of oil through the gaps in all part of the equipment are characterized by viscosity, while the mass forces can be neglected. The flow really is of laminar character.

If we compute the mean value of C_7 from the experimental data, we obtain :

$$C_7 = 6{,}535.$$

On the basis of measured data we obtain for the volumetric efficiency at $p = 0$ the value of

$$\eta_{v_0} = 0{,}971.$$

Under the conditions of our experiments, within the pressure range of 5 to 55 kg/cm^2, we arrive at :

$$\eta_v = 0{,}971 - 6{,}535 \frac{p_{\mathrm{kg/cm^2}}}{n_{p\,\mathrm{sec}^{-1}}} . \tag{16a}$$

Returning to equation (15/*a*) we can now write :

$$C_7 = \frac{4905}{\mu q} \cdot \frac{BD^3}{L} = 6{,}535 ,$$

wherefrom — μ and q being known — the value of $\frac{BD^3}{L}$ can be computed.* The viscosity-temperature function of the oil employed in our experiment (*Fig. 13*) was determined by means of a Höppler-viscosimeter.

Equation (16a) is represented — as function of pressure — by a bundle of straight lines (*Fig. 14*). If we substitute zero for the volumetric efficiencies, then

$$p_{\max} = \frac{\eta_{v_0} n_p}{C_7} ,$$

where $p_{\max}$ denotes the highest pressure. Over this value the motor ceases to rotate. This value is valid but at a given viscosity.

If equation (16a) is examined under constant pressure and n_p is chosen as the independent variable, we obtain an equation that can be represented by a bundle of hyperbolas (*Fig. 15*). The points of intersection of the curves with the abscissa are of special interest; they indicate for each pressure the minimum speed of the pump required to keep the motor running. Expressed analytically

$$\eta_v = \eta_{vo} - \frac{C_7 p}{n_p} = 0 ,$$

hence

$$n_p^{\min} = \frac{C_7 p}{\eta_{vo}} .$$

The minimum speed of the motor increases linearly with the rise of the pressure.

If we plot the curves representing the torque efficiency, and those representing the volumetric efficiency of the set, as functions of pressure, in a common chart (*Fig. 17*), then the points of intersection of the curves representing the identical speed, indicate the loci of the maximum efficiency of the unit (see the broken line). To obtain the numerical value of the over-all efficiency, we have to extract the square root of the indicated value.

For a hydraulic transmission comprising a motor and a pump, *Figs. 18*, *19* and *20* show how torque, volumetric, and over-all efficiencies derived on basis of theoretical consideration agree with measured data.

It can be observed a good agreement between derived and measured data. At pressures higher than 55 to 60 kg/cm^2, volumetric efficiency lags behind the theoretical value. Experimental examinations are still needed to find the full explanation for this fact. It is probable that at a greater pressure the oil flowing

* $\frac{BD^3}{L} = \frac{6{,}535}{4905} \cdot \mu q = \frac{6{,}535}{4905} \cdot 0{,}0279 \cdot 0{,}1138 = 4{,}231 \cdot 10^{-6}$ cm^3

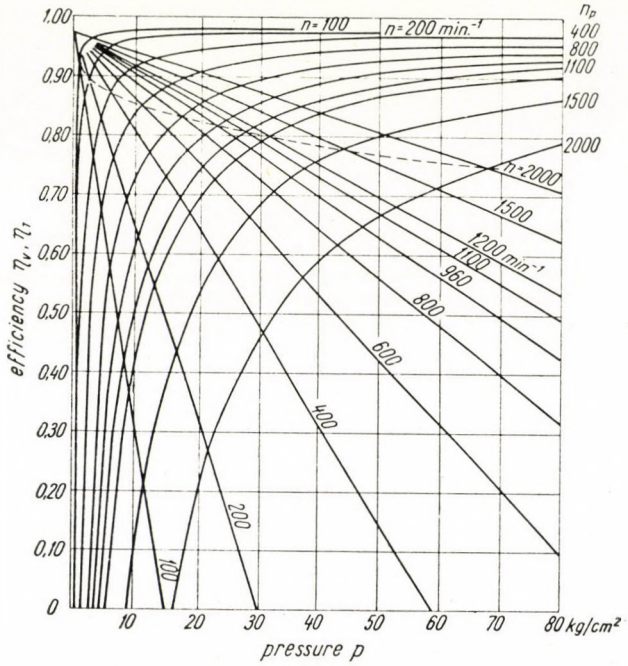

efficiency η_v, η_t
pressure p
80 kg/cm²
n = 100
n = 200 min.⁻¹
n_p
400
800
1100
1500
2000
n = 2000
1500
1200 min.⁻¹
1100
960
800
600
400
200
100

Fig. 17

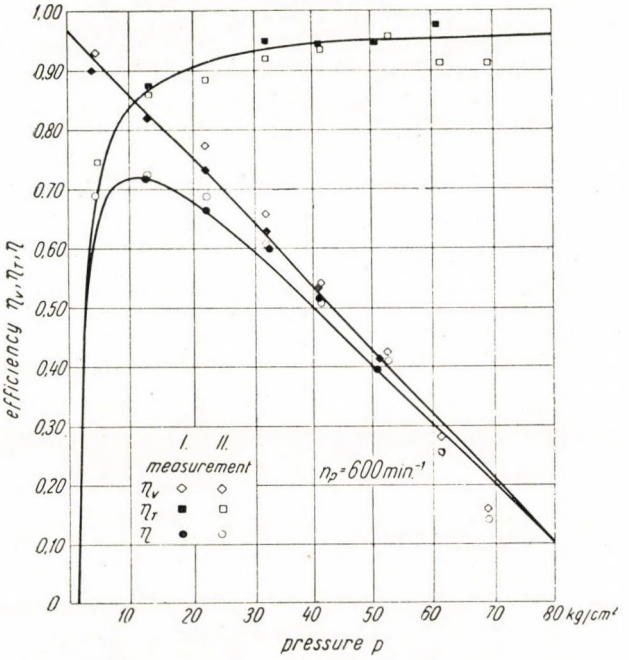

efficiency η_v, η_t, η
pressure p
80 kg/cm²
I. II.
measurement
η_v
η_t
η
n_p = 600 min.⁻¹

Fig. 18

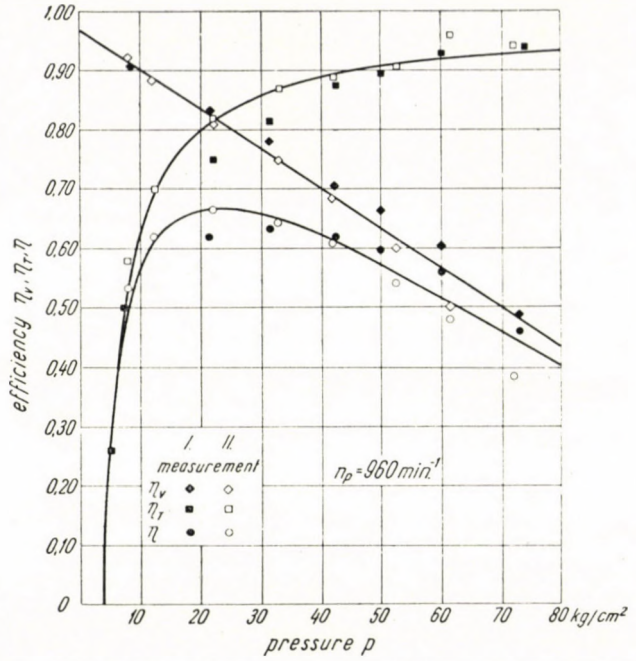

1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0
efficiency η_v, η_r, η
10
20
30
40
50
60
70
80 kg/cm²
pressure p
I. II.
measurement
η_v
η_r
η
n_p=960 min.⁻¹

Fig. 19

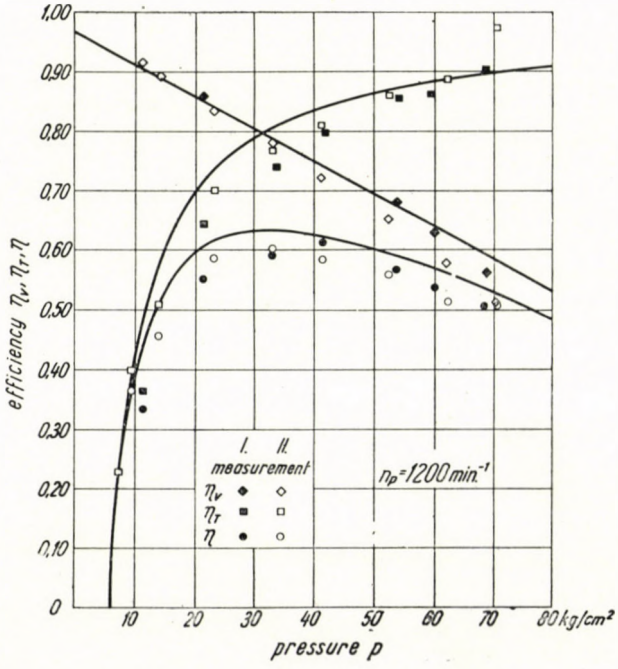

1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0
efficiency η_v, η_r, η
10
20
30
40
50
60
70
80 kg/cm²
pressure p
I. II.
measurement
η_v
η_r
η
n_p=1200 min.⁻¹

Fig. 20

across the gaps gets heated to an extent where the leakage loss will increase because of decreased viscosity. In our experiments, oil temperatures have been taken in the tank only, and local heating of the circulating oil could not be checked. Further experiments will also have to extend to oil temperature measurements in the clearances.

5. Analysis of the over-all efficiency

The over-all efficiency is derived from formulae (13) and (15*a*) :

$$\eta = \eta_T \eta_v = \left(\eta_m - C_5 \frac{n_p^2}{p}\right)\left(1 - C_7 \frac{p}{n_p}\right). \tag{17}$$

By multiplication, we obtain the following expression :

$$\eta = \eta_m - C_5 \frac{n_p^2}{p} - C_7 \eta_m \frac{p}{n_p} + C_5 C_7 n_p. \tag{18}$$

This equation with two variables has no extreme value,* but from the saddle point onwards the function ascends monotonously with decreasing n and p values. Between 5 and 55 kg/cm^2 there is a good agreement with measured data, while at very low and very high pressures the surface becomes deformed.

The curves in *Figs. 21* and *22* represent the sections of the surface by planes rectangular to the n_p and p axes, and indicate an efficiency increasing with a decrease of pressure and speed. The envelop curves of the peak efficiencies (broken line) indicate correlated p and n_p values. It is a characteristic feature of these curves, that where they display a higher maximum efficiency (these are the curves pertaining to low pressures and speeds), efficiency decreases sharply to the right and to the left of the peak, while at higher pressures and speeds— although the peak efficiency is lower — it changes but slowly within broad limits. It is instructive to compare *Fig. 21* with *Fig. 9*, which was plotted on the basis of measured data.

A good representation of the η-surface can be gained by a top-view, plotting the lines indicating equal efficiencies. At a given efficiency, the relation between pressure and speed can be implicitely written on the basis of equation (18) thus :

$$An^3 + Bp^2 + Cpn^2 + Dpn = 0 \ . \tag{19}$$

* $$\frac{\partial^2 \eta}{\partial n_p^2} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial p^2} - \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial n_p \, \partial p}\right)^2 = -17 \ C_5^2 \cdot C_7$$

At the saddle point of the function : $p = \frac{\eta_m}{C_5 C^2_7}$: $n_p = \frac{\eta_m}{C_5 C_7}$: $\eta = 0$.

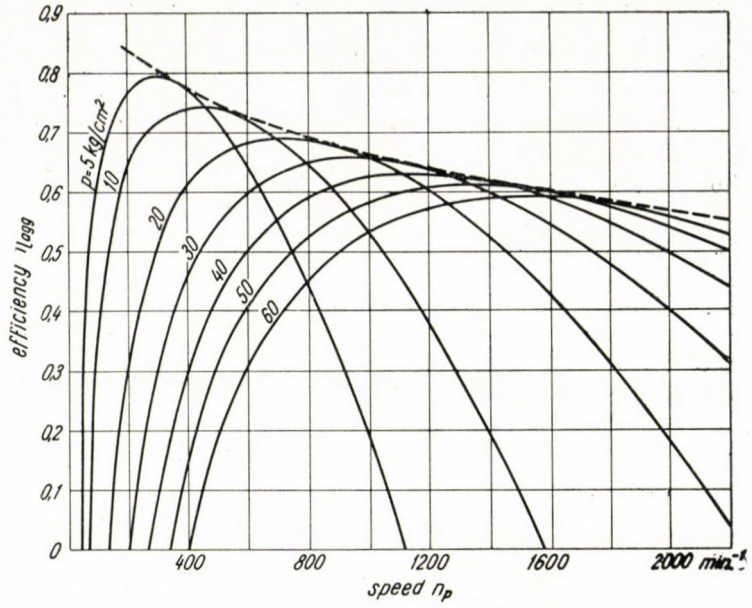

0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
efficiency ηogg
p=5 kg/cm²
10
20
30
40
50
60
400
800
1200
1600
2000 min⁻¹
speed nₚ

Fig. 21

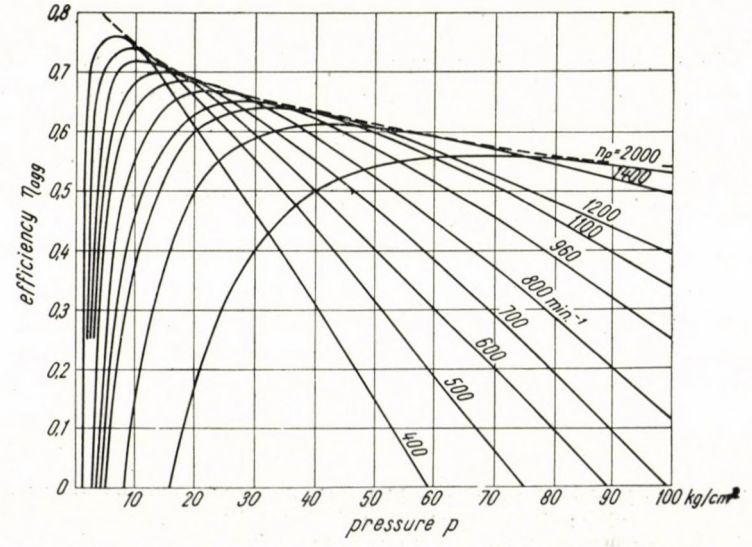

0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
efficiency ηogg
nₚ=2000
1400
1200
1100
960
800 min⁻¹
700
600
500
400
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100 kg/cm²
pressure p

Fig. 22

If $\eta = 0$, the relation between p and n_p can be determined from equation (17) quite simply. As has been shown already.

$$p_{\max} = \frac{\eta_{vo}}{C_7} n_p, \quad \text{and} \quad p_{\min} = \frac{C_5}{\eta_m} n_p^2 .$$

Fig. 23 shows the pressure-speed curves of the unit according to equation (19) each for a chosen efficiency. The performance of the unit is best characterized by this bundle of curves. The chart permits direct reading of pressure and speed

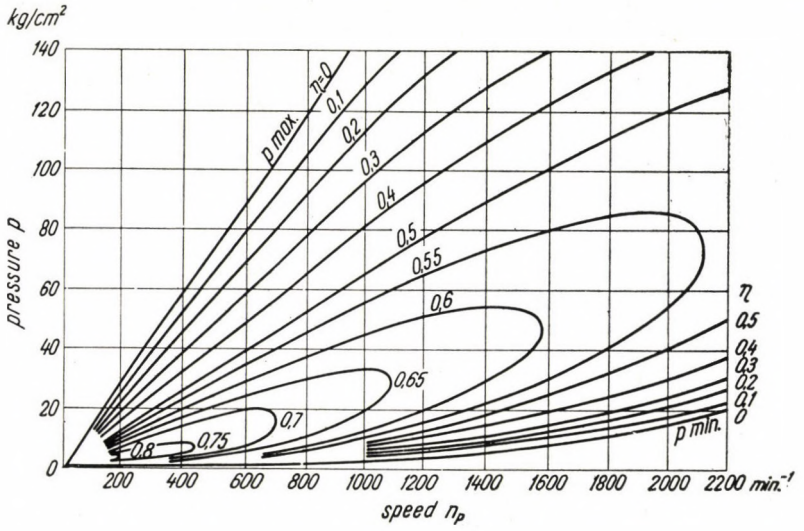


Fig. 23

values pertaining to the required efficiency. On the «p—n_p» plane between $p_{\max}$ and $p_{\min}$ (the straight and parabolic lines, respectively), is the region where the motor of the unit can be kept running.

Further experiments are required to separate torque efficiency and volumetric efficiency in the pump and motor. These will be discussed elsewhere.*

* The author is pleased to express his gratitude to his collegues participating in the investigations under review : first among them to his first assistant *O. Hoffmann*, to Dr. Elisabeth *Müller* of the Department and to L. *Csengődy* of the Mining Research Institute.

They all collaborated actively in the calculations and the preparation of the charts.

REFERENCES

1. *E. Johannis:* Bestimmung des Wirkungsgrades von Zahnrad-Hochdruckpumpen in Abhängigkeit vom Arbeitsdruck und von der Drehzahl. Konstruktion 3 (1951) Heft 7. p. 219.
2. *Je. A. Csudakov:* Gépipari Enciklopédia, Vol 9. p. 128. Cyclopedia of Eng. Industry translated from Russian original of the work cited under (5) 9., p. 219.
3. *W. Ernst:* Oil Hydraulic Power and Its Industrial Applications. New York 1949. McGraw-Hill p. 72 and 164.
4. *Dr. H. Krug:* Das Flüssigkeitsgetriebe bei spanenden Werkzeugmaschinen. Berlin 1951. J. Springer p. 42—50.
5. *Е. Чудаков:* Машиностроительный энциклопедический справочник, Том 12. Москва 1949, II. 398.
6. *Dr. H. Krug:* Das Flüssigkeitsgetriebe bei spanenden Werkzeugmaschinen. Berlin 1951. J. Springer. p. 58
7. *Dr. G. Pattantyus:* Vizsgálati jegyzőkönyv a Trirotor hidraulikus szivattyú és motor méréseiről. (Kézirat). Budapest 1952. Dr. G. Pattantyus, Tests on the «Trirotor hydraulic pump and motor.» (Manuscript). In Hungarian.
8. *T. Boldizsár:* Korszerű bányagépek. Budapest 1951. p. 169. (Up to date mining machinery. In Hungarian.)
9. *R. Ammann:* Zahnradpumpen mit Evolventenzahnung. Mitt. des Hydr. Inst. der Techn. Hochschule München, Heft 1. Oldenburg München u. Berlin 1926.
10. *Е. М. Хаймович:* Гидравлические приводы металлорежущих станков, Москва 1951.
11. *A. J. Stepanoff:* Centrifugal and Axial Flow Pumps. New York 1948 Wiley p. 193.
12. Op. cit. under (10), p 456.
13. *L. S. Marks:* Mechanical Engineers' Handbook. New York 1951. Mc Graw-Hill p. 968
14. *Th. v. Kármán:* Über die Oberflächenreibung von Flüssigkeiten. Kármán-Levi-Civita: Vorlesungen. Berlin 1924. Springer p. 172.
15. *G. Kempf:* Über Reibungswiderstand rotierender Scheiben. Kármán-Levi-Civita: Vorlesungen. Berlin 1924. Springer. p. 168.
16. *A. T. Ippen:* The Influence of Viscosity on Centrifugal Pump Performance. Trans. ASME Vol. 68. No. 8. 1946. p. 823.
17. *O. Zumbusch—H. Behren—H. Behr:* Über die Oberflächenreibung umlaufender Scheiben, Zylinder und Zellenkörper. Zeitschr. für Angewandte Mathematik und Mechanik.17. (1937). p. 356
18. *Schultz-Grunow:* Der Reibungswiderstand rotierender Scheiben. Zeitsch. für angewandte Mathematik und Mechanik. 15 (1935). p. 191

SUMMARY

The concepts and methods for the determination of hydraulic pump and motor efficiency are insufficient and lacking accuracy. According to the investigations under review the efficiency of equipment of this kind can be expressed by the product of two well defined values: torque efficiency and volumetric efficiency. The latter can be measured simply and with high precision. An analytic expression of efficiencies is established and characteristic numerical values are computed. Theory and measured data are in good agreement.

КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ УРАВНОВЕШЕННЫХ ШЕСТЕРЕНЧАТЫХ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ НАСОСОВ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ И МОТОРОВ

Канд. техн. наук, проф. Т. БОЛЬДИЖАР

Резюме

Определение к. п. д. гидравлических насосов и моторов является нестрогим и неполным. На основе исследований сообщаемых в данной работе, к. п. д. оборудования может быть выражен как серия правильно определенных к. п. д. в качестве серии к. п. д. момента и волюметрического момента к. п. д. Измерение последнего осуществляется

простым и строгим методом. Удалось определить аналитическое выражение к. п. д. и характерные для оборудования числовые значения. Теоретические и опытные данные дают хорошее совпадение.

SUR LE RENDEMENT DES POMPES ET MOTEURS HYDRAULIQUES ÉQUILIBRÉS À ENGRENAGES ET HAUTE PRESSION

Prof. T. BOLDIZSÁR
Candidat des sciences techniques

RÉSUMÉ

La définition du rendement des pompes et moteurs hydrauliques n'est pas assez précise dans la littérature et comporte des lacunes. Selon les recherches dont cette étude rend compte, le rendement de ces installations peut être exprimé par le produit de deux rendements bien définis : du rendement des moments et du rendement volumétrique. La mesure du premier est simple et précise. On a réussi à mettre en équation l'expression analytique des rendements et à déterminer les valeurs numériques caractéristiques de l'installation. Les valeurs théoriques et expérimentales sont en bon accord.

ÜBER DEN WIRKUNGSGRAD VON AUSGEGLICHENEN HYDRAULISCHEN HOCH DRUCK-ZAHNRADPUMPEN UND -MOTOREN

Prof. T. BOLDIZSÁR
Kandidat der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Die Bestimmung des Wirkungsgrades von hydraulischen Pumpen und Motoren wird im-Fachschrifttum nur mangelhaft und ungenau erörtert. Nach den in der vorliegenden Abhandlung mitgeteilten Untersuchungen kann man den Wirkungsgrad dieser Vorrichtungen als Produkt zweier gut definierter Wirkungsgrade ausdrücken, u. zw. als Produkt des Momenten- und des volumetrischen Wirkungsgrades. Die Messung des letzteren kann einfach und präzis erfolgen. Es gelang auch, den analytischen Ausdruck der Wirkungsgrade und die für das Aggregat kennzeichnenden Zahlenwerte zu bestimmen. Die theoretisch ermittelten Werte zeigen eine gute Übereinstimmung mit den experimentell bestimmten Werten.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ МОЛОТКОВЫХ ДРОБИЛОК

ОПЫТЫ ПО ПОВЫШЕНИЮ ОКРУЖНОЙ СКОРОСТИ МОЛОТКОВ

И. БЁЛЁНИ

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ МАШИН, БУДАПЕШТ

[Поступило 22 января 1954 г.]

1. Литературный обзор

Специальная литература по теме может быть разбита на две части. К одной части относятся работы теоретического характера, а к другой — сообщения о результатах проведенных опытных исследований.

Теоретическая часть рассматривает предмет почти что независимо от молотковой дробилки. Процессы измельчения и дробления рассматриваются в этой части независимо от машины, но выводы относятся и действительны также для работы молотковых дробилок.

Теоретические основы энергоемкости при измельчении были созданы *Ритингером* в 1857 году. По Ритингеру работа, затраченная при измельчении, пропорциональна площади вновь образовавшейся поверхности — в процессе измельчения.

По теории Кирпичева [1] и Кика [2] энергия, затрачиваемая при измельчении или же деформации, обратно пропорциональна объемам или весам полученных вследствие измельчения частиц.

По Хенигу [2] при дроблении принципы Ритингера и Кика противоречивы между собою, и в то же время при давлении, т. е. в случае измельчения получаются совпадающие результаты.

Первая математическая зависимость, которая, собственно говоря, является функцией фракционирования измельченного материала по его крупности, связана с именами Розина и Рамлера [3]. Зависимость определяет связь между ситовым остатком и крупностью частиц.

Математическая теория измельчения, которая полностью применима также к молотковым дробилкам, создана советским математиком *Андреем Николаевичем Холмогоровым* [4]. Математическая теория Холмогорова основывается на исчислении вероятности. Результатом теоретической работы Холмогорова является определение, что фракционирование частиц измельченного материала соответствует логарифмической функции крупности зерен. Действительность теории Холмогорова для случая измельчения хрупких каменных пород доказана д-ром Реньи [5]; Реньи далее детально

разработал математические зависимости между теоретическим и практическим фракционированием — с указанием связи параметров теоретического фракционирования с моментами практического фракционирования, а также с энергорасходом при измельчении.

Литературные труды, излагающие практические и опытные данные, опубликованы в большом числе как в Советском Союзе, так и в других странах. Выдающимся трудом следует отметить исследования советского инженера А. А. Зеленева [6], который, кстати, рассматривает возможности повышения окружной скорости молотков молотковых дробилок.

Среди работ венгерских авторов, занимающихся молотковыми дробилками, следует отметить труды д-ра Имре Вёрёша [7], в которых дается ряд математических выражений, действительных для отношений между удельным расходом энергии и тонкостью помола. Тонкость помола определяется автором по A. S. A. E. модулем тонкости помола, который находится в тесной зависимости со средней крупностью частиц (крупы).

Математическая связь указанного выше модуля тонкости помола со средней крупонстью частиц (крупы) была выведена мною в опубликованной ранее моей работе [8].

Исследования Ф. Ц. Фентона и Ц. А. Логана [9], проведенные в 1931 году, также показывают, что в результате повышения числа оборотов барабана возрастает производительность и падает удельный расход энергии.

По данным Е. А. Сильвера [10] при неизменной тонкости помола производительность связана с потребной приводной мощностью линейной зависимостью.

2. Цель исследований

Цель, ставившаяся перед исследованиями сверх зависимостей, которые можно подыскать в литературных источниках в интересах усовершенствования и дальнейшего развития молотковых дробилок, заключалась также в определении общих закономерностей, при этом обращая особое внимание повышению окружной скорости молотков и в связи с этим определению изменений производительности, потребной мощности, удельного расхода энергии и тонкости помола.

Полученные данные следовало оценить не только с конструктивной и эксплоатационной точек зрения, но и с точки зрения требований животноводства, т. е. насколько удовлетворяет крупа, полученная при работе молотковой дробилки, требованиям, предъявляемым животноводством.

Ввиду того, что в процессе проведенных ранее исследований [8] не удалось найти числовой зависимости для фракционирования крупы, то данными опытами ставилась цель — найти и исследовать эти закономерности.

3. Опытное оборудование

Опытное оборудование, установленное в лаборатории Исследовательского института сельскохозяйственных машин, показано на рис. 1.

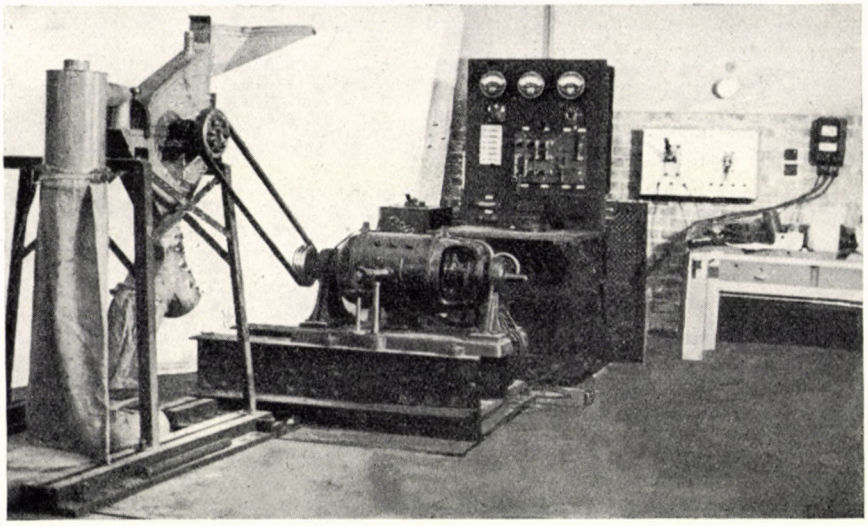


Рис. 1. Опытное оборудование

При опытах была использована молотковая дробилка марки W—12, основные конструктивные данные которой приведены ниже.

1. Число молотков	12 шт.
2. Число оборотов ротора (конструктивное)	2855 об/мин
3. Диаметр внешней окружности молотков	440 мм
4. Окружная скорость самой крайней точки молотков (n = 2855 об/мин)	65,5 м/сек.
5. Живое сечение решет:	
диам. отв. 3 мм	15,53%
диам. отв. 5 мм	22,53%
диам. отв. 10 мм	36,60%

Для дробилки в качестве двигателя использовалось тормозное динамо постоянного тока. Для привода применялась сдвоенная клиноременная передача с передаточным отношением 1 : 1. Номинальная мощность при напряжении электросети в 220 вольт составляла 21,6 квт (29,4 л. с.). Перед мотором был подключен счетчик на 50 квт.

При выборе опытного оборудования в основном преследовалась цель: возможно проще изменять число оборотов ротора молотковой дробилки, то есть, другими словами, окружную скорость молотков.

4. Методика проведения опытов

Нахождение связи между факторами, определяющими режим работы молотковой дробилки, осуществлялось при помощи соответствующих измерений, т. е. в процессе исследований изменялся один какой-либо фактор (напр., окружная скорость молотков, т. е. число оборотов), а затем исследовалось изменение остальных факторов — потребляемой мощности, производительности и тонкости помола.

Тонкость помола определялась снятием кривой фракционирования крупности крупы, то есть производством ситового анализа.

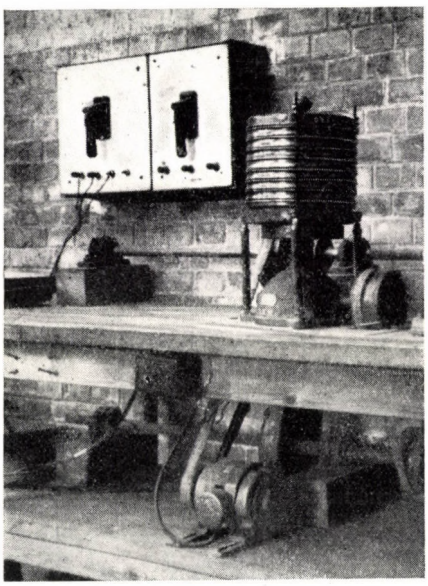


Рис. 2. Сито на деке

При ситовом анализе использовалось около 200—250 г измельченного материала. Это количество просеивалось на трясильной машине в течение около одной минуты (см. рис. 2).

Вес ситовых остатков определялся с точностью до 0,01 г. Желая устранить погрешность, которая происходит от влияния на результат оставшихся на сите частиц размером менее диаметра отверстий сита, в каждом отдельном случае сита встряхивались над листом чистой бумаги до тех пор, пока проваливание частиц не прекращалось полностью. Провалившиеся частицы пересыпались с бумажного листа на сито следующего по порядку номера.

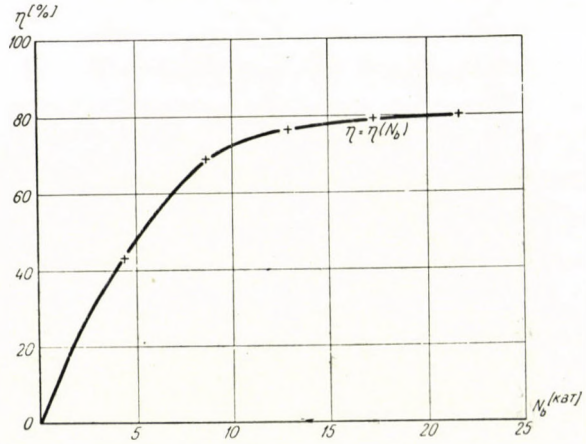
В порядке убывания значения диаметра отверстий применялись следующие номера сит:

1. диам. отв. 3,6 мм
2. диам. отв. 2,6 мм
3. диам. отв. 2,2 мм
4. диам. отв. 1,8 мм
5. диам. отв. 1,4 мм
6. диам. отв. 0,8 мм
7. диам. отв. 0,3 мм
8. диам. отв. 0,0 мм

При определении тонкости помола за основу были взяты средняя крупность частиц и удельная площадь поверхности частиц ($см^2/г$).

5. Условия и проведение опытов

Опыты проводились в две серии при использовании двух продуктов — соответственно ячменя и кукурузы. Дробилка была укомплектована решетами трех различных номеров (диам. отв. 3 мм, диам. отв. 5 мм и диам.



Диагр. 1. Коэффициент полезного действия двигателя в функции всего количества поданной мощности

отв. 10 мм). Однако, кроме опытов, проведенных с использованием вышеуказанных трех решет, проводились опыты по дроблению кукурузы без применения решета. Использованные при опытах ячмень и кукуруза имели идентичную влажность и были взяты из одних и тех же сортов этих продуктов. Влажность использованного при опытах ячменя была равна 10,8%, а кукурузы — была относительно высокой и составляла 18,8%.

Число оборотов двигателя устанавливалось с таким расчетом, чтобы окружная скорость молотков по желанию в отдельных случаях равнялась бы 50,0; 60,0; 70,0; 80,0 и 90,0 м/сек.

Перед началом производства опытов на дробилке осуществлялся замер потребной мощности холостого хода. С одной стороны, определялись время и количество расходованной электроэнергии, а с другой — динамное равновесие и число оборотов.

Коэффициент полезного действия использованного в качестве двигателя молотковой дробилки тормозного динамо определялся замером потерь.

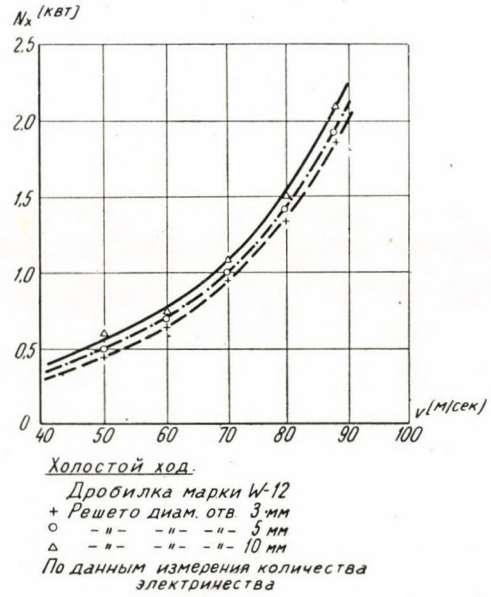
Значения изменения к. п. д. мотора откладывались на диаграмме в функции нагрузки (общего количества поданной мощности, что, собственно, измерялось счетчиком) (см. диагр. 1.). Значения к. п. д. в процессе замеров при холостом ходе и при дроблении отсчитывались просто с диаграмм.

6. Числовые данные замеров

Числовые данные количеств, действительно измеренных в процессе опытов:

1. Число оборотов диска счетчика.

2. Время, необходимое для поворота диска счетчика на вышеуказанное определенное число оборотов.



Диагр. 2. Изменение потребляемой мощности холостого хода молотковой дробилки W—12 в функции окружной скорости молотков

3. Количество крупы, полученной за это же время.

4. Число оборотов ротора молотковой дробилки за это же время.

5. Усилие, необходимое для достижения равновесия якоря динамомашины.

6. Средняя крупность частиц крупы и рассев фракций полученной крупы (на основе данных ситового анализа).

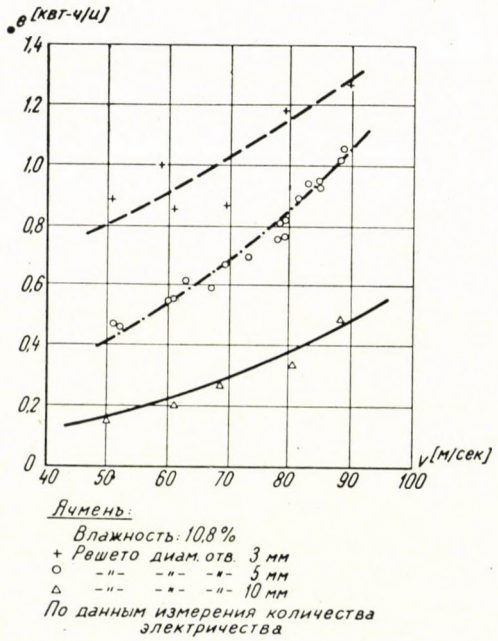
7. Удельная площадь поверхности полученной крупы ($см^2/г$).

а) Замеры при холостом ходе дробилки

Потребляемая мощность измерялась двояким путем. С одной стороны, измерением количества электроэнергии, израсходованной за определенное время, а с другой — момента, действующего на якорь динамомашины.

Значения потребляемой мощности в функции окружной скорости молотков приведены на диаграмме 2.

Данные замера момента хорошо совпадают с данными счетчика.



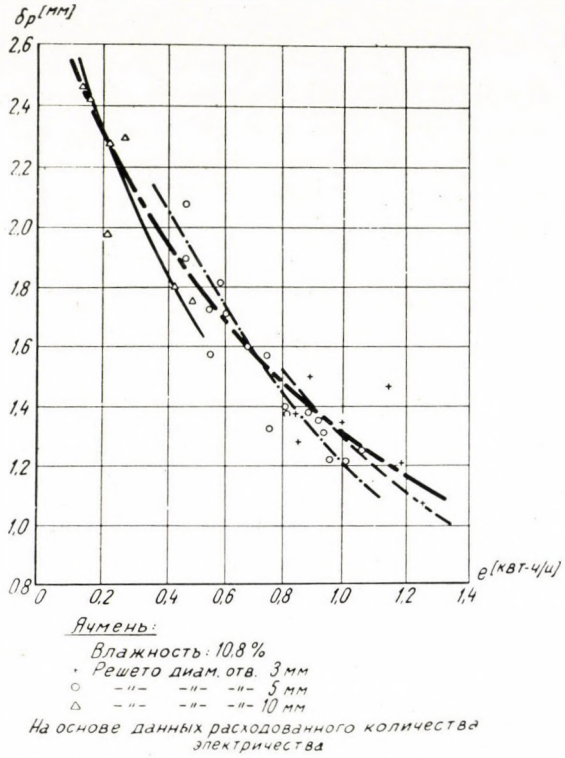
Диагр. 3. Удельный расход энергии для ячменя в функции окружной скорости молотков

б) *Замеры при работе дробилки*

I. Ячмень

Данные измерений приведены диаграммами. На диаграмму, в первую очередь, были отложены удельные расходы электроэнергии в функции окружной скорости молотков, так как удельный расход электроэнергии объединяет потребляемую мощность и производительность в один фактор. Характер зависимости хорошо виден при рассмотрении кривой, действительной для решета с диаметром отверстий 5 мм (см. диагр. 3).

Удельный расход энергии зависит сверх того также от тонкости помола. Зависимость средней крупности частиц, характерная для тонкости помола и удельного расхода энергии, дается на диаграмме 4.



Диагр. 4. Изменения средней крупности для ячменя в функции удельного расхода энергии

На диаграммах 5, 6 и 7 даны зависимости потребляемой мощности, производительности и средней крупности частиц крупы от окружной скорости молотков дробилки.

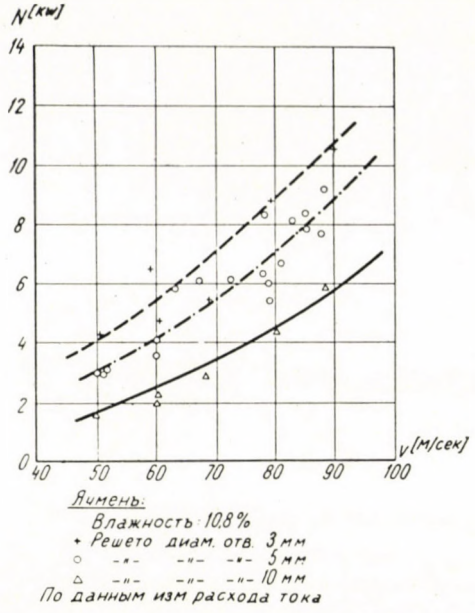
Здесь следует еще отметить, что в процессе проведенных исследований средняя крупность фракций определялась по формуле

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot f_i$$

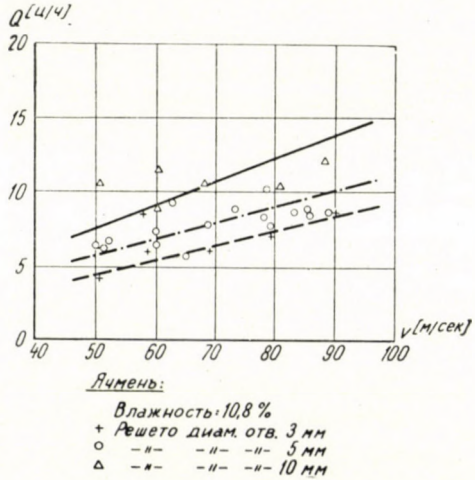
а рассев фракций

$$\sigma = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot f_i$$

где: μ — средняя крупность частиц;
x_i — средняя крупность частиц для i-ного интервала вариации;
f_i — относительная частота;
k — порядковые номера сит;
σ — рассев.

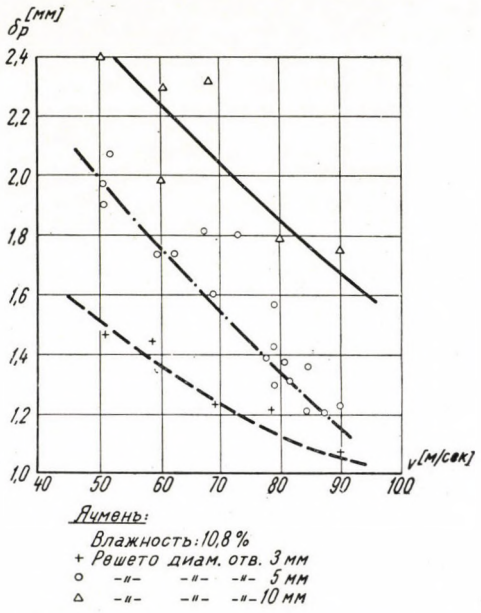


Диагр. 5. Изменение потребной мощности привода для ячменя в функции окружной скорости молотков



Диагр. 6. Изменение производительности для ячменя в функции окружной скорости молотков

В то время, как при расчете средней крупности и рассева тонкость помола характеризуется двумя факрами, удельная площадь поверхности ее (тонкость помола) — одним фактором.



Диагр. 7. Изменение средней крупности крупы для ячменя в функции окружной скорости молотков

Значение удельной площади поверхности определяется по зависимости

$$F = \frac{6}{\gamma \cdot a \cdot e^{\frac{5b^2}{2}}}$$

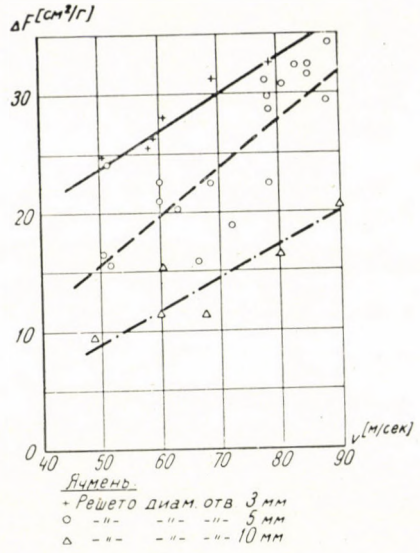
где: F — удельная площадь поверхности ($см^2/г$);
γ — удельный вес ($г/см^3$);
a и b — параметры фракций по Холмогорову, которые детально будут рассматриваться в 8 главе.

Удельный рост площади поверхности (ΔF) рассчитывался как разность удельной площади поверхности перед (F_0) и после (F) процесса дробления.

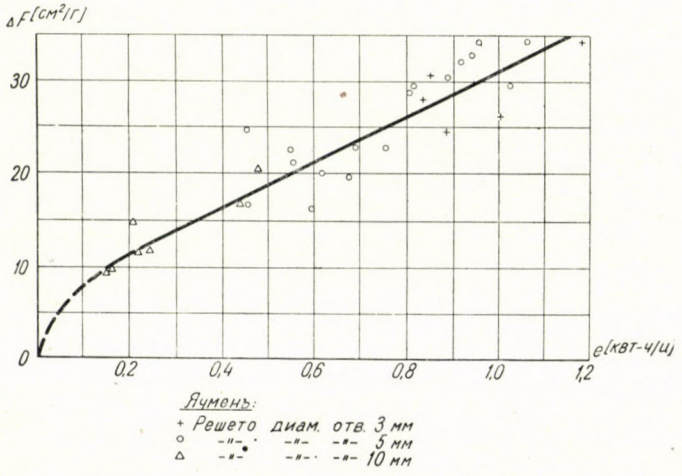
Перед дроблением удельная площадь поверхности ячменя равнялась

$$F_o = 11{,}28 \text{ см}^2/\text{г}.$$

Рост удельной площади поверхности сначала откладывался в функции окружной скорости молотков (см. диагр. 8), а затем — в функции удельного расхода энергии (см. диагр. 9).



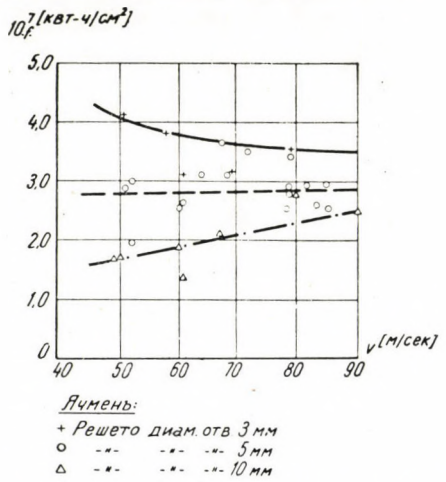
Диагр. 8. Рост удельной площади поверхности для ячменя в функции окружной скорости молотков



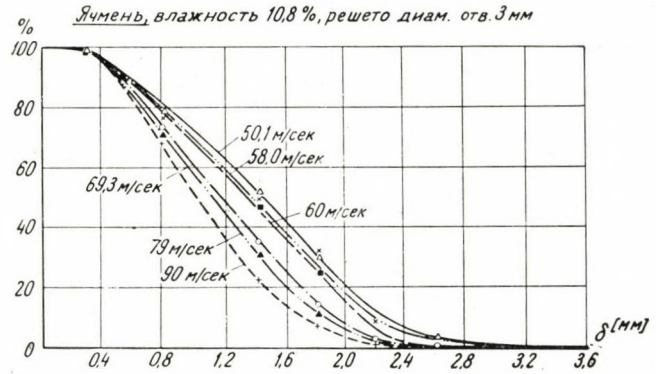
Диагр. 9. Зависмость между ростом удельной площади поверхности и удельным расходом энергии для ячменя

Для доказаэательства, что рост удельного расхода энергии в случае повышения окружной скорости молотков происходит вследствие роста площади вновь образовавшихся при дроблении поверхностей или же снижения

средней крупности, было рассчитано, какое количество энергии необходимо при различных значениях окружной скорости молотков для получения одного квадратного сантиметра новой площади поверхности.



Диагр. 10. Удельная потребная энергия разрыва в функции окружной скорости для ячменя



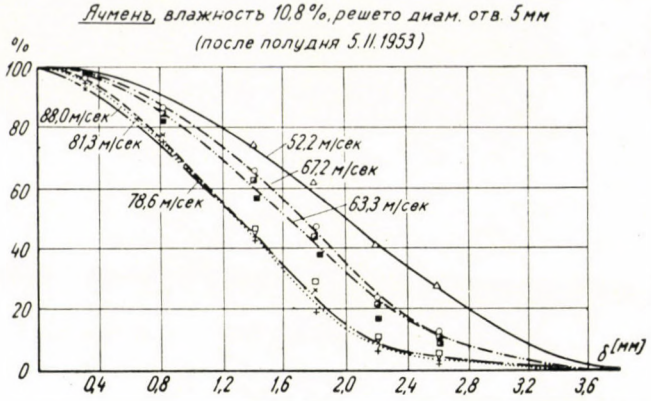
Диагр. 11. Кривые фракционирования ячменной крупы, полученной с применением решета диаметром отверстий 3 мм при различных значениях окружной скорости молотков

Расчет производился по зависимости:

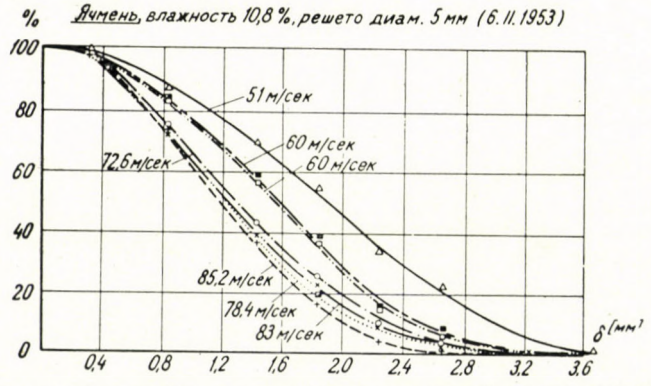
$$f\,(\text{квт} - \text{ч/см}^2) = 10^{-5} \cdot \frac{e}{\Delta F}\left(\frac{\text{квт} - \text{ч/ц}}{\text{см}^2/\text{г}}\right),$$

где: f — удельная разрывная энергия (квт-ч/см²);
e — удельный расход энергии (квт-ч/ц);
ΔF — рост удельной площади поверхности (см²/г).

Удельная разрывная энергия дана в зависимости от окружной скорости молотков в 10^{-7} квт-ч/см² на диаграмме 10.



Диагр. 12. Кривые фракционирования ячменевой крупы, полученной с применением решета диаметром отверстий 5 мм при различных значениях окружной скорости молотков (5. III. 1953)

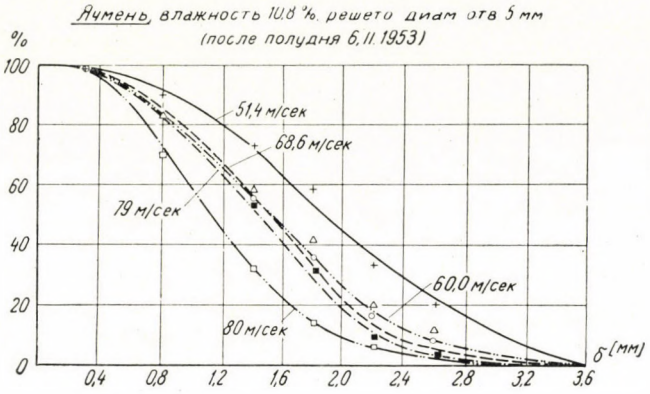


Диагр. 13. Кривые фракционирования ячменевой крупы, полученной с применением решета диаметром отверстий 5 мм при различных значениях окружной скорости молотков (до полдня 6. II. 1953)

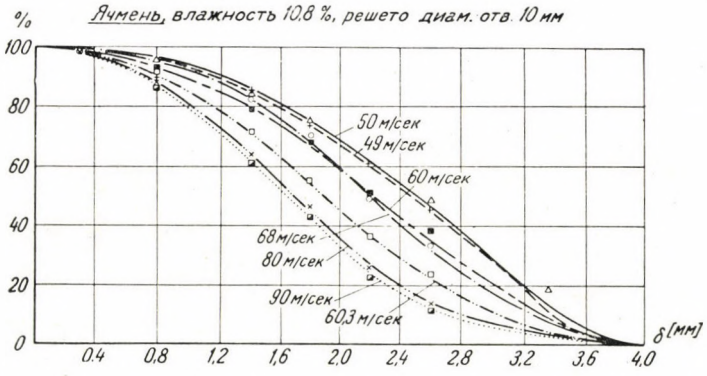
Действие повышения окружной скорости молотков на увеличение тонкости помола наглядно видно сдвигом влево кривых фракцинирования.

Кривые фракционирования, группируя их по времени снятия кривых, даются отдельно для каждого номера решета (см. диагр. 11, 12, 13, 14 и 15).

Под кривой фракционирования соответственно математической трактовке понимается кривая ситовых остатков (R), точка её сечения ординаты и показывает для определенной крупности, какой процент крупы больше указанной крупности частиц. Таким образом, при значении крупности частиц крупы, равном нолю — кривая восходит к 100%.



Диагр. 14. Кривые фракционирования ячменевой крупы, полученной с применением решета диаметром отверстий 5 мм при различных значениях окружной скорости молотков (после полудня 6. II. 1953)

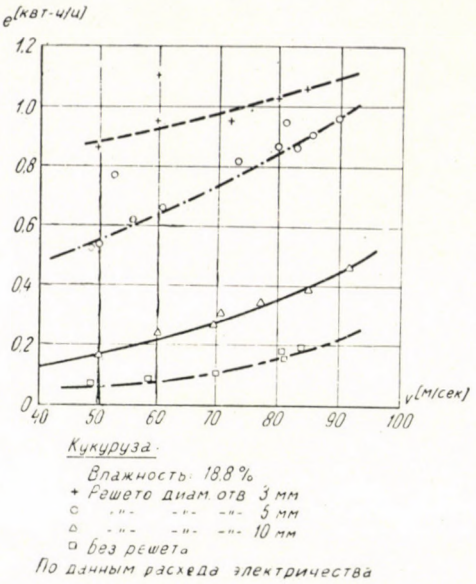


Диагр. 15. Кривые фракционирования ячменевой крупы, полученной с применением решета диаметром отверстий 10 мм при различных значениях окружной скорости молотков

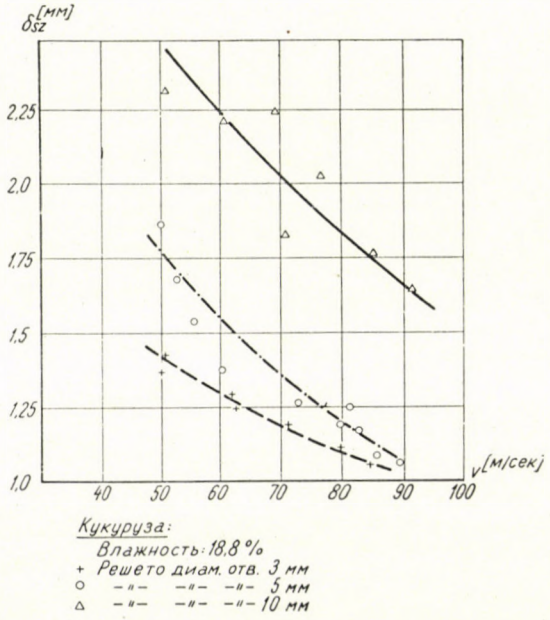
II. Кукуруза

При опытах с кукурузой была исследована также возможность дробления без применения решета. Замеры при этом дали зависимости, аналогичные по своему характеру зависимостям, полученным при опытах с ячменем (см. диагр. 16—23).

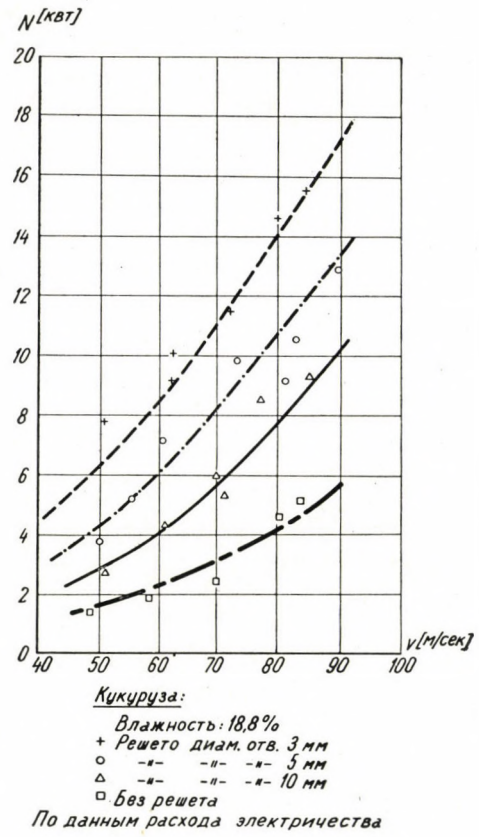
Отклонение (влево) кривых фракционирования наблюдается при повышении окружной скорости молотков также, как и в случае опытов с ячменем (см. диагр. 24, 25 и 26).



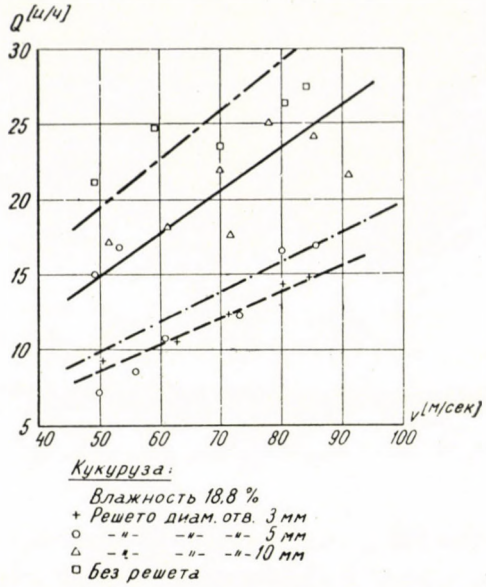
Диагр. 16. Удельный расход энергии для кукурузы в функции окружной скорости молотков



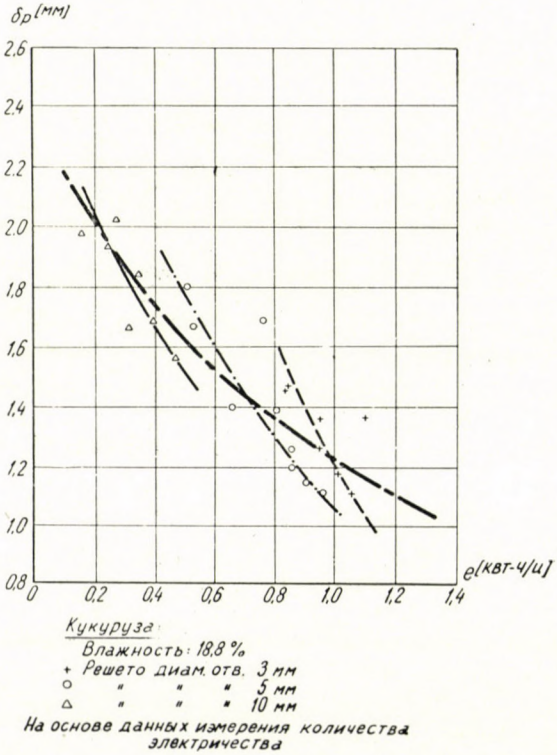
Диагр. 17. Изменение средней крупности дробленного зерна кукурузы в функции окружной скорости молотков



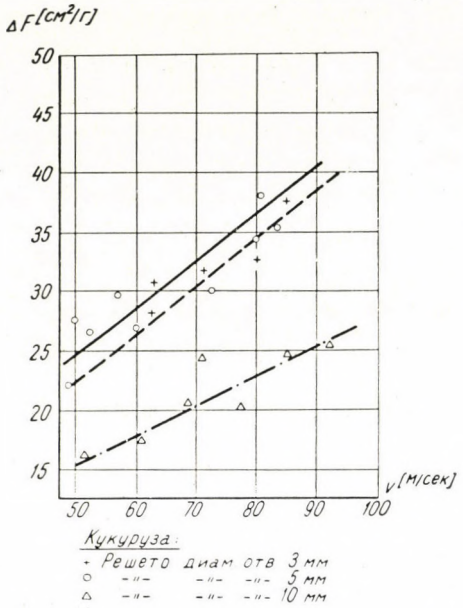
Диагр. 18. Изменение потребной мощности привода для кукурузы в функции окружной скорости молотков



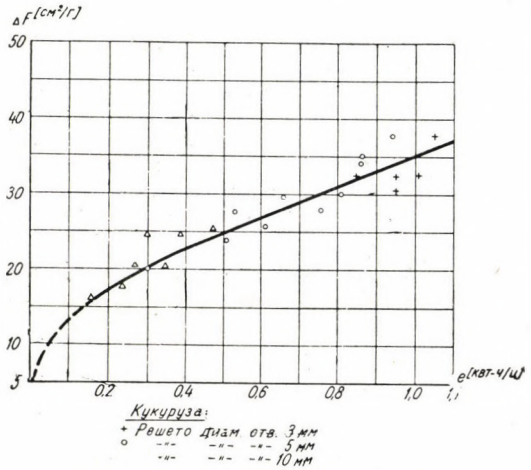
Диагр. 19. Изменение производительности для кукурузы в функции окружной скорости молотков



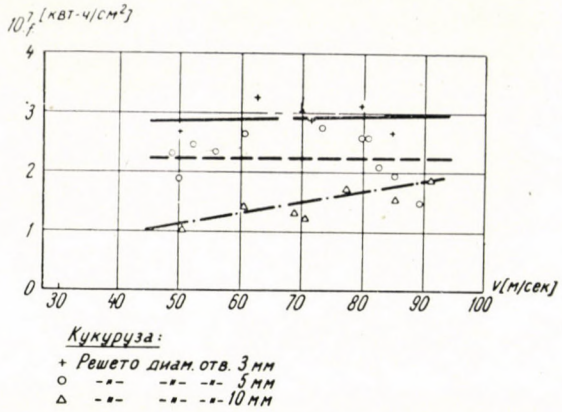
Диагр. 20. Изменение средней крупности для кукурузы в функции удельного расхода энергии



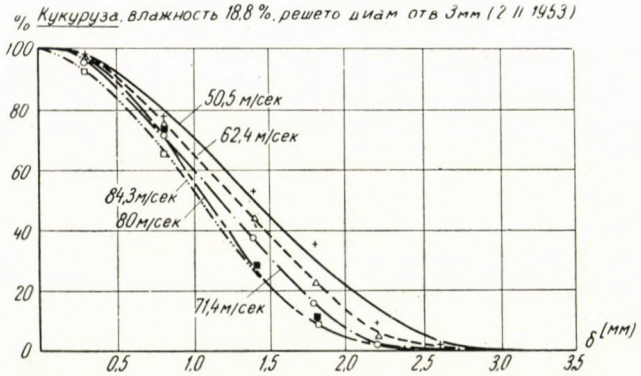
Диагр. 21. Рост удельной площади поверхности для кукурузы в функции окружной скорости молотков



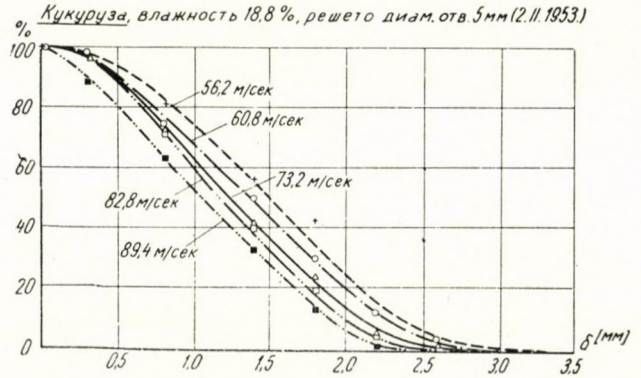
Диагр. 22. Зависимость между ростом удельной площади поверхности и удельным расходом энергии для кукурузы



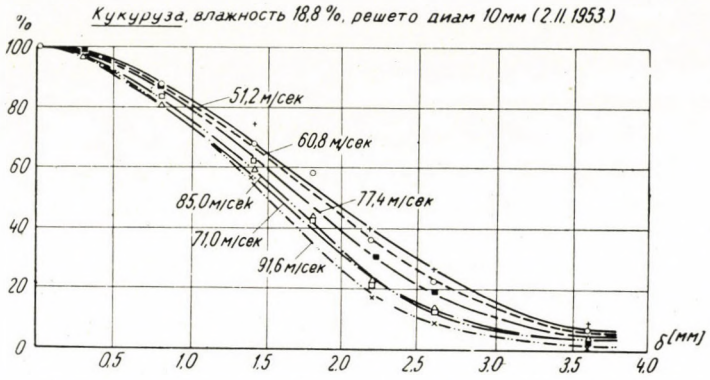
Диагр. 23. Удельная потребная энергия разрыва в функции окружной скорости молотков для кукурузы



Диагр. 24. Кривые фракционирования раздробленного кукурузного зерна, полученного с применением решета с диаметром отверстия 3 мм при различных значениях окружной скорости молотков



Диагр. 25. Кривые фракционирования раздробленного кукурузного зерна, полученного с применением решета с диаметром отверстий 5 мм при различных значениях окружной скорости молотков



Диагр. 26. Кривые фракционирования раздробленного кукурузного зерна, полученного с применением решета с диаметром отверстий 10 мм при различных значениях окружной скорости молотков

7. Оценка опытных данных

а) С технической точки зрения

Холостой ход

Цифровые данные показывают, что потребляемая мощность при холостом ходе молотковой дробилки приближено пропорциональна второй степени окружной скорости молотков (см. диагр. 2).

Исходя из того, что дробилки в основном работают с решетом диаметром отверстий 3 мм и проектная окружная скорость молотков дробилки марки *W—12* равна 65 м/сек, потребная мощность дробилки при холостом ходе составляет около 0,8 квт $\simeq$ 1,1 л. с. и возрастает при окружной скорости $v = 90{,}0$ м/сек до около 2,0 квт $\simeq$ 2,72 л. с. Эта мощность, отнесенная к потребной мощности холостого хода при $v = 65$ м/сек, означает рост прибл. в 2,5 раза.

При применении для дробилки решет с различными диаметрами отверстий получались различные значения мощности холостого хода, а именно — по зависимости — в случае решета с более крупным диаметром отверстий — большая мощность холостого хода.

Дробление

Перед более детальным исследованием следует отметить, что, в связи со стабилизацией режима работы дробилки, при опытах наблюдалось ряд затруднений.

Ясно, что установление постоянных значений производительности или потребной мощности, или же тонкости помола является не легкой задачей. В процессе опытов очень часто наблюдалось изменение производительности и было обращено особое внимание на то, чтобы питание машины продуктом осуществлялось в высшей степени равномерно.

Тенденция роста производительности с окружной скоростью молотков видна на диагр. 6 и 19. При использовании кукурузы кривая возрастает быстрее, чем при опыте с ячменем. Соответственно распределению точек в исследованной области, зависимость приближено может быть выражена прямой.

При исследованиях, в основном, будут рассматриваться зависимости, действительные для крупы, полученной с решетом диам. отверстий 3 мм, так как — как это видно будет в дальнейшем — крупа, полученная с использованием решета диам. отверстий 3 мм, лучше всего удовлетворяет требованиям, предъявляемым животноводством. Сравнения, сделанные с точки зрения изменения окружной скорости, рассматриваются для $v = 65{,}0$ м/сек, так как изготовляемые в настоящее время 12 молотковые дробилки имеют такую же окружную скорость.

В числовом выражении рост производительности и удельного расхода энергии в случае решета диам. отверстий 3 мм дает следующую картину.

Окружная скорость молотков, м/сек	Производительность				Удельный расход энергии			
	Ячмень		Кукуруза		Ячмень		Кукуруза	
	ц/ч	%	ц/ч	%	квт-ч/ц	%	квт-ч/ц	%
65,0	6,0	100	11,0	100	1,03	100	0,88	100
90,0	8,4	140	15,0	137	1,27	123	1,13	128

Указанный выше значительный рост удельного расхода энергии вызывается повышением тонкости помола, а также само собою разумеющимся ростом потерь при трении.

Снижение числового значения средней крупности, характерной для тонкости помола, для решета с диаметром отверстий 3 мм (см. рис. 7 и 17) характеризуют следующие данные.

Окружная скорость молотков, м/сек	Средняя крупность частиц для решета с диаметром отверстий 3 мм			
	Ячмень		Кукуруза	
	мм	%	мм	%
65,0	1,32	100	1,25	100
90,0	1,07	81	1,04	83

Диаграммы 4 и 20 показывают, что между средней крупностью частиц и удельным расходом энергии существует гиперболическая зависимость.

На основе двух вышеуказанных диаграмм можно сделать заключение, что для получения крупы идентичной крупности при помоле ячменя во всех случаях удельный расход энергии выше, чем при помоле кукурузы. В случае же идентичных удельных расходов энергии тонкость помола ячменевой крупы будет меньше, а кукурузной — больше. Числовые данные можно взять из диаграмм 4 и 20.

На диаграммах 4 и 20 три кривые (тонкие линии) характеризуют работу молотковой дробилки при её работе с решетами с диам. отверстий 3, 5 и 10 мм, а кривая с жирной линией — зависимость между средней крупностью и удельным расходом энергии независимо от диаметра отверстий решет. Таким образом, можно принять, что к теоретической зависимости имеет место приближение в различных областях для решет с различными диаметрами отверстий.

В отношении потребной приводной мощности на основе диаграмм 5 и 18 можно сделать следующий вывод.

Окружная скорость молотков, м/сек	Потребная приводная мощность					
	Ячмень			Кукуруза		
	квт	л. с.	%	квт	л. с.	%
65,0	6,2	8,42	100	9,7	13,16	100
90,0	10,7	14,5	173	17,0	23,4	175

Значительный рост потребной мощности вызывается, с одной стороны ростом производительности, а с другой — ростом тонкости помола, кроме того увеличиваются также и механические потери.

Удельную площадь поверхности следует считать более подходящей для определения тонкости помола, чем среднюю крупность частиц раздробленного материала, так как удельная площадь поверхности частиц объединяет в один фактор как среднюю крупность частиц, определяющую фракционирование, так и рассев. Согласно расчетам, проведенным в связи с этим (см. диагр. 8 и 21), рост удельной площади поверхности вследствие измельчения имеет характер роста в функции окружной скорости молотков.

Согласно диагр. 8 и 21 рост удельной площади поверхности в случае применения решета с диам. отверстий 3 мм в цифровом выражении дает следующую картину.

Диаграммы 9 и 22 дают зависимости между ростом удельной площади поверхности и удельным расходом электроэнергии.

Окружная скорость молотков, м/сек	Рост удельной площади поверхности			
	Ячмень		Кукуруза	
	см²/г	%	см²/г	%
65,5	28,5	100	30,0	100
90,0	36,3	135	40,4	135

Проводились опыты для выяснения того, стоит ли повышать окружную скорость молотков дробилки с точки зрения всего комплекса факторов и, далее, уравновешивает ли рост тонкости помола рост удельного расхода энергии. В качестве параметра взята величина количества потребной энергии для получения одного квадратного сантиметра новой площади поверхности, методика расчета чего рассматривалась выше. Этот фактор (f) откладывался затем в функции окружной скорости молотков (см. диагр. 10 и 23).

Первое определение, которое можно сделать на основе диагр. 10 и 23, опять-таки относится к той разности порядка величин, которая имеет место в отношении удельной потребной энергии разрыва для ячменя и кукурузы. Этот фактор рассматривается аналогично прочности разрыва или излома. Однако, следует подчеркнуть, что по проведенным до настоящего времени опытам наблюдается разница при дроблении с решетами с различными диаметрами отверстий. Удельная энергия разрыва в случае решета с диам. отверстий 10 мм как для ячменя, так и для кукурузы имеет явно выраженную тенденцию роста в функции окружной скорости молотков.

Рассев точек — относительно большой, порядок рассева таков, что в исследованной области (50—90 м/сек) превышает значения изменений удельной энергии разрыва. Таким образом, в отношении величины удельной энергии разрыва в функции окружной скорости молотков в случае дробления с решетами с диаметрами отверстий 3 и 5 мм в конечном счете можно сделать определение, — являющееся на практике наиболее существенным, — что она имеет неизменное значение. То есть условия измельчения при высоких значениях окружной скорости являются более благоприятными, так как — несмотря на повышенный рост потерь трения — в то же время практически требуется такое же количество энергии при больших значениях окружной скорости молотков для получения одного квадратного сантиметра новой площади поверхности, чем это имеет место при меньших значениях окружной скорости молотков — как для ячменя, так и для кукурузы.

Важнее всего, что из вышесказанного можно сделать заключение, по которому с одной и той же машиной при окружной скорости в 90 м/сек — вместо 65 м/сек — количество продуктов, обработанных дробилкой, возрастает на 30—40%, и в то же время тонкость помола, — если принять во внимание рост удельной площади поверхности, — возрастает, например, при дроблении с применением решета с диаметром отверстий 3 мм также на 35%.

д) С точки зрения животноводства

Одна из важнейших точек зрения при оценке работы молотковых дробилок заключается в том, насколько тонкость помола удовлетворяет требования, предъявляемые животноводством, или же при каких режимах работы молотковой дробилки удовлетворяются эти требования в высшей степени.

По мнению Исследовательского института животноводства

для скотоводства:

крупность раздробленного кукурузного зерна до 90% всего его количества должна быть менее 1,0 мм;

крупность ячменевой крупы до 90% всего её количества должна быть менее 1,5—2,0 мм;

для свиноводства:

крупность раздробленного кукурузного зерна до 90% всего его количества должна быть менее 0,3 мм;

крупность ячменевой крупы до 90% всего её количества должна быть менее 0,5 мм.

Другими словами, для указанных выше номеров сит ситовой остаток должен быть менее 10%. Если фракционирование зерен будет отличаться от указанного выше, животные не будут в состоянии полностью переварить ячменевую крупу и раздробленное кукурузное зерно, следовательно, значительная часть этих продуктов будет пропадать даром в животноводческом отношении.

В отношении требований скотоводства получаются следующие данные

для раздробленного кукурузного зерна:

при 65 м/сек — 35%, а при 90 м/сек — 47% частиц раздробленного кукурузного зерна будет иметь крупность менее 1 мм, 90% — менее 1,8 мм (при 90 м/сек) и менее 2,3 мм (при 65 м/сек). (Соответственно значений окружной скорости молотков.);

для ячменевой крупы:

при 65 м/сек — 60%, а при 90 м/сек — 85% частиц ячменевой крупы будет иметь крупность менее 1,5 мм, 90% — менее 1,7 мм (при 90 м/сек) и менее 2,1 мм (при 65 м/сек).

Таким образом, дробилка в этом отношении удовлетворяет приведенные выше требования.

В отношении требований свиноводства получаются следующие данные для раздробленного кукурузного зерна:

при 65 м/сек — 3%, а при 90 м/сек — 8% частиц раздробленного кукурузного зерна будет иметь крупность менее 0,3 мм.

для ячменевой крупы:

при 65 м/сек — 6%, а при 90 м/сек — 10% частиц ячменевой крупы будет иметь крупность менее 0,5 мм.

Следовательно, при таких режимах работы современные системы молотковых дробилок не могут полностью удовлетворять все требования, предъявляемые животноводством. Повышение окружной скорости молотков, что в значительной степени повышает тонкость помола, является положительным мероприятием при усовершенствовании молотковых дробилок.

8. Закономерности фракционирования крупы, полученной при помощи молотковых дробилок

В процессе проведенных в прошлом году исследований по теме удалось найти определенные закономерности фракционирования крупы, однако этот вопрос не удалось разработать численно — на теоретической основе.

Дальнейшие исследования оказались небезуспешными, и нашло определението, что закономерность фракционирования крупы выражена нормальной логарифмической зависимостью.

В отношении дробления хрупких каменных пород в Институте прикладной математики Академии наук Венгрии в 1950 году проводились соответствующие исследования, и согласно полученных во время этих исследований результатов фракционирование кусков раздробленной каменной породы соответствует логарифмической функции крупности кусков.

Теория исчисления вероятности дробления, как уже об этом выше говорилось, создана советским математиком А. Н. Холмогоровым. Действительность этой теории для дробления хрупких материалов была доказана д-ром Альфредом Реньи упомянутыми выше исследованиями.

Проведенные в нашем институте исследования, в свою очередь, показали, что и при дроблении по своей структуре неоднородных, частично вязких и частично хрупких зернистых продуктов фракционирование крупности частиц происходит также по теории Холмогорова.

Теория Холмогорова предполагает, что дробление является результатом действия различных дробящих эффектов (удар, раздавливание и т. д.),

следующих друг за другом, и величина отдельных эффектов по сравнению к общей сумме мала. По теории Лапласа—Ляпунова при сложении влияний независимых друг от друга событий их сумма будет имет приближено нормальное распределение.

Если результат элементарных дробящих эффектов измеряется путем определения, какую дробную часть представляет собою крупность (линейный размер) куска, получающегося из куска определенной крупности (x), от крупности первоначального куска, тогда здесь мы имеем не сумму, а произведение этих эффектов. Однако, исследуя логарифм крупности кусков, получается, что эффекты, действующие на $ln\ x$, слагаются вследствие того, что логарифм произведения является суммой логарифма факторов. Следовательно, и $ln\ x$ в отношении распределения приближается к нормальному распределению, если число элементарных дробящих эффектов является довольно высоким.

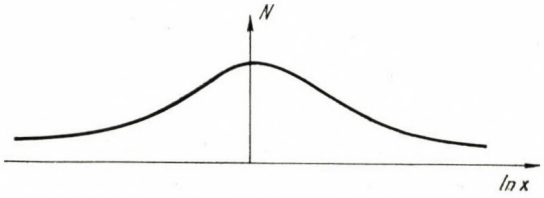


Рис. 3. Кривая частоты нормального логарифмического распределения

В конечном счете, из доказательства теории Холмогорова можно сделать вывод, что функция логарифма крупности кусков *(ln x)* число кусков (N) имеет нормальное распределение, следовательно функция N, $ln\ x$ является функцией плотности Гаусса (см. рис. 3).

Перед тем, как перейти к детальному рассмотрению вопроса, следует отметить, что, как известно, функция плотности вероятности (или же частоты вероятности) нормального распределения со средним значением равным нолю и единичным рассевом имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Функция же плотности вероятности нормального распределения со средним значением μ и рассевом σ имеет вид

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

В первом случае функция распределения будет вида

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx,$$

а в последнем случае

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{x} \cdot e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx$$

После чего по теории Холмогорова функция частоты вероятности измельченной массы материала со средним значением $ln\ a$ и рассевом b будет иметь следующий вид

$$n(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi} \cdot b \cdot x} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln\frac{x}{a}}{b}\right)^2}$$

где: a — средняя крупность кусков при фракциоинировании кусков материала по крупности;

b — рассев при этом же фракционировании;

N — число всех кусков материала.

Функция распределения кусков по крупности будет

$$N(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi} \cdot b \cdot x} \int_{0}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln\frac{x}{a}}{b}\right)^2} \cdot dx$$

В данном понимании $N(x)$ представляет собою число кусков размером менее x.

Однако, в практике определяется не число кусков (так как определение числа кусков является очень трудной задачей), а вес кусков, входящих в отдельные фракции крупности (между x и $x + \Delta x$) путем ситового анализа. Следовательно, возможно легко и быстро определить фракционирование весовых групп кусков по размерам.

Однако, при помощи теории Холмогорова возможно вывести фракционирование весовых групп кусков по размерам — функцию плотности вероятности, т. е. можно принять, что куски материала имеют форму кубика. В этом случае функция плотности вероятности фракционирования весовых групп материала по размеру будет:

$$s(x) = \gamma \cdot x^3 \cdot n(x)$$

где: γ — удельный вес измельченного материала.

Подставляя :

$$s(x) = \frac{\gamma \cdot N}{\sqrt{2\pi} \cdot b} \cdot x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{-ln \cdot \frac{x}{a}}{b}\right)^2}$$

таким образом, общий вес измельченного материала будет :

$$S = \int_0^\infty s(x) \cdot dx$$

Следовательно :

$$S = \frac{\gamma \cdot N}{\sqrt{2\pi} \cdot b} \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln \frac{x}{a}}{b}\right)^2} \cdot dx$$

Интеграл может быть определен подстановкой следующим образом :

Пусть

$$y = \frac{ln \frac{x}{a}}{\sqrt{2}\, b};$$

тогда

$$dx = a \cdot \sqrt{2} \cdot b \;\; e^{\sqrt{2} \cdot b \cdot y} \cdot dy,$$

так как

$$y\sqrt{2} \cdot b = ln \frac{x}{a} \quad \text{и} \quad e^{y \cdot \sqrt{2} \cdot b} = \frac{x}{a}$$

то есть

$$x = a \cdot e^{y\sqrt{2} \cdot b}.$$

Следовательно

$$S = \frac{\gamma \cdot N}{\sqrt{2\pi} \cdot b} \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \cdot e^{2 \cdot \sqrt{2} \cdot b \cdot y} \cdot e^{-\frac{1}{2} 2y^2} \cdot a\sqrt{2}b \cdot e^{\sqrt{2} \cdot by} \cdot dy$$

$$S = \frac{\gamma \cdot Na^3 \cdot \sqrt{2}b}{\sqrt{2\pi} \cdot b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2 \cdot \sqrt{2} \cdot b \cdot y + \sqrt{2} \cdot by - y^2} \cdot dy =$$

$$= \frac{\gamma \cdot Na^3 \cdot \sqrt{2}b}{\sqrt{2\pi} \cdot b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(y^2 - 3\sqrt{2}by + \frac{9b^2}{2} - \frac{9b^2}{2}\right)} dy$$

К показателю степени e в интересах операции было прибавлено и вычтено

$$\frac{9b^2}{2}$$

Продолжая дальнейшие операции в показателе степени за скобки выносится дробь $\frac{9b^2}{2}$

$$S = \frac{\gamma \cdot Na^3 \cdot \sqrt{2}b}{\sqrt{2\pi} \cdot b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(y^2 - 3 \cdot \sqrt{2}by + \frac{9b^2}{2} + \frac{9b^2}{2}\right)} dy$$

Таким образом, выражение в скобках представляет собою полный квадрат:

$$S = \frac{\gamma \cdot Na^3 \cdot \sqrt{2}b}{\sqrt{2\pi} \cdot b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(y - \frac{3b}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot e^{\frac{9b^2}{2}} \cdot dy$$

Дробь $\frac{9b^2}{2}$ может быть изъята из интеграла, так как представляет собою константу.

Далее подставляя

$$z = \sqrt{2}\left(y - \frac{3 \cdot b}{\sqrt{2}}\right); \quad y = \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{3 \cdot b}{\sqrt{2}}$$

$$\text{и} \quad dy = \frac{dz}{\sqrt{2}}$$

Вес измельченного материала будет

$$S = \frac{\gamma \cdot Na^3 \sqrt{2}b}{\sqrt{2\pi}b \cdot \sqrt{2}} e^{\frac{9b^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz$$

Произведя сокращение константы на $\sqrt{2} \cdot b$, и так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz = 1$$

в результате получаем:

$$S = \gamma \cdot Na^3 \cdot e^{\frac{9b^2}{2}}$$

После чего обозначая через $q(x) . \Delta x$ отношение весов кусков материала крупностью между x и $x + \Delta x$ по отношению веса всего дробленного материала — как это практикуется при ситовом анализе — тогда функция частоты весовых фракций кусков по крупности будет:

$$q(x) = \frac{s(x)}{S} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot ba^3 \cdot e^{\frac{9b^2}{2}}} \cdot x^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln\frac{x}{a}}{b}\right)^2}$$

А функция фракционирования (записывая ситовой остаток сита определенного номера)

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot ba^3 \cdot e^{\frac{9b^2}{2}}} \int_x^\infty x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln\frac{x}{a}}{b}\right)^2} dx$$

Проведя интегрирование вышеуказанным образом, получается

$$Q(x) = \frac{ba^3 \cdot e^{\frac{9b^2}{2}}}{ba^3 \cdot e^{\frac{9b^2}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz$$

следовательно

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz$$

где:

$$z = \sqrt{2}\left(y - \frac{3b}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{ln\frac{x}{a}}{\sqrt{2} \cdot b} - \frac{3b}{\sqrt{2}}\right)$$

$$z = \frac{ln\frac{x}{a}}{b} - 3b$$

Значения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz$$

могут быть взяты из таблицы интегралов.

Следовательно, по доказательству фракционирование весовых фракций дробленного материала по его крупности и функция частоты зависят от двух констант *(a* и *b)*, значения которых указаны выше. Значения величин *a* и *b* зависят от физических свойств дробленного материала, конструкции дробилки (в нашем случае молотковой дробилки), установки дробилки и прочих ее показателей.

Значения величин *a* и *b* могут быть определены методом моментов. На основе данных ситового анализа моменты практического распределения крупности, отнесенные на исходную точку, то есть

$$M_1 = \int_0^\infty x \cdot p(x) \cdot dx$$

и соответственно

$$M_2 = \int_0^\infty x^2 \cdot p(x) \cdot dx$$

могут быть легко рассчитаны.

Однако, поскольку теорема Холмогорова соответствует действительности, то моменты распределения плотности $q(x)$, выведенные теоретическим путем, будут равны также моментам M_1 и соответственно M_2. А в этом случае

$$M_1 = \int_0^\infty x \cdot q(x) \cdot dx$$

и

$$M_2 = \int_0^\infty x^2 \cdot q(x) \cdot dx$$

Определяя первый и второй моменты $q(x)$ интегрированием, получается

$$M_1 = a \cdot e^{\frac{7b^2}{2}}$$

и соответственно

$$M_2 = a^2 \cdot e^{8b^2}$$

Уравнивая эти зависимости с моментами практического распределения, получается система уравнений с двумя неизвестными — для определения значений величин *a* и *b*.

Решение этой системы уравнений выглядит следующим образом

$$M_1 = a \cdot e^{\frac{7b^2}{2}}$$

$$M_2 = a^2 \cdot e^{8b^2}$$

Из первого уравнения получается

$$a = \frac{M_1}{e^{\frac{7b^2}{2}}}$$

тогда

$$M_2 = \frac{M_1^2}{e^{7b^2}} e^{8b^2} = M_1^2 \cdot e^{b^2}$$

то есть

$$e^{b^2} = \frac{M_2}{M_1^2}; \text{ и } b = \sqrt{ln \frac{M_2}{M_1^2}}$$

Значение величины a будет:

$$a = \frac{M_1}{e^{\frac{7}{2} ln \frac{M_2}{M_1^2}}} = \frac{M_1}{\left(e^{ln \frac{M_2}{M_1^2}}\right)^{7/2}} = \frac{M_1}{\left(\frac{M_2}{M_1^2}\right)^{7/2}} = \frac{M_1}{\left(\sqrt{\frac{M_2}{M_1^2}}\right)^7}$$

$$a = \frac{M_1}{\frac{\left(\sqrt{M_2}\right)^7}{M_1^7}} = \frac{M_1^8}{\left(\sqrt{M_2}\right)^7}$$

В дальнейшем исследовались данные ситового анализа крупы целого ряда различных продуктов, крупа которых изготовлялась, различными методами, при этом определялись параметры a и b. Данные, действительные для этих параметров, были подставлены в уравнение функции распределения в целях определения, насколько соответствует это уравнение кривой фракционирования, определяемой непосредственно из данных ситового анализа. Расчетные кривые фракционирования хорошо совпадают с практическими кривыми фракционирования.

В качестве примера следует привести образец ячменевой крупы, который был получен при помощи молотковой дробилки марки W—12, использованной при опытах, при окружной скорости молотков $v = 90{,}0$ м/сек и диаметре отверстий решета 3 мм. Из данных ситового остатка моменты рассчитывались по таблице (см. табл. I).

ТАБЛИЦА I

Данные ситового анализа, расчет моментов

№ сита	Диаметр отв. сита (мм)	Средний размер частиц (x) (мм)	Ситовой остаток (г)	Ситовой остаток [p(x)·dx] (%)	x. p(x). dx	x^2	$x^2\,p(x)dx$	Значение кривой фракционирования %
7	3,6							
6	2,6	3,1	0,35	0,35	1,08	9,60	3,36	0,35
5	2,2	2,4	0,95	0,97	2,32	5,76	5,50	1,32
4	1,8	2,0	6,20	6,33	12,66	4,00	25,32	7,65
3	1,4	1,6	14,45	14,76	23,61	2,55	37,63	22,43
2	0,8	1,1	44,70	45,68	50,24	1,21	55,27	68,11
1	0,3	0,55	30,90	31,57	17,36	0,302	9,53	99,70
0	0	0,15	0,30	0,30	0,0045	0,0225	0,006	100,00
			97,85	99,96	M_1=107,315		M_2=136,696	100,00

Значения величин M_1 и M_2, — ввиду того, что в таблице применялось процентное исчисление, — будут следующими:

$$M_1 = 1{,}07315 \text{ и } M_2 = 1{,}36696$$

Параметры, или же среднее значение (средняя крупность) и рассев при фракционировании крупности кусков будут иметь значение:

$$a = 0{,}592 \text{ (средняя крупность)},$$

соответственно

$$b = 0{,}414 \text{ (рассев)}.$$

Значение величины $Q(x)$ исчислялось также табличным методом (см. табл. II). Функция распределения $Q(x)$ и практическое фракционирование, полученное на основе данных ситового анализа, отложены на общую диаграмму (см. диагр. 27). Разность между двумя кривыми является незначительной.

Возможно рассчитать кривую частоты и, таким образом, сравнить ее с практическими значениями. Исчисление функции частоты $q(x)$ дается в табл. III.



Диагр. 27. Практические и расчетные кривые фракционирования ячменевой крупы, полученной с применением решета с диаметром отверстий 3 мм при окружной скорости молотков $v = 90{,}0$ м/сек (с молотковой дробилкой марки W—12)

ТАБЛИЦА II

Исчисление функции распределения

Номер сита	Диам. отв. сита (мм)	Средний размер частиц (x) (мм)	$\frac{x}{a}$	$\ln\frac{x}{a}$	$\frac{\ln\frac{x}{a}}{b}$	$\frac{\ln\frac{x}{a}}{b}-3b$	Q(x) (%)	Практич. кривая распр. %
7	3,6	5,3	6,08	1,805	4,360	3,118	0,09	0
6	2,6	3,1	4,39	1,480	3,575	2,333	1,00	0,35
5	2,2	2,4	3,72	1,315	3,180	1,938	2,66	1,32
4	1,8	2,0	3,041	1,112	2,690	1,448	7,38	7,65
3	1,4	1,6	2,365	0,863	3,085	0,843	20,00	22,43
2	0,8	1,1	1,353	0,3028	0,7315	0,5105	69,48	68,11
1	0,3	0,55	0,507	0,676	1,630	2,872	99,78	99,70

N. B. : $a = 0{,}592$; $b = 0{,}414$; $3b = 1{,}242$

Для исчисления величины $q(x)$ сначала определяется значение постоянной по выражению

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot b\cdot a^3 e^{\frac{9b^2}{2}}}\cdot x^2\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\frac{x}{a}}{b}\right)^2},$$

ТАБЛИЦА III
Исчисление функции частоты

Номер сита	По ситовому анализу: Относит. частота $q(x).\Delta x$	$q(x) = \frac{q(x).\Delta x}{\Delta x}$	Δx (мм)	x (мм)	x^2	$\frac{x}{a}$	$\ln\frac{x}{a}$	$\left(\ln\frac{x}{a}\right)^2$	$2{,}93\left(\ln\frac{x}{a}\right)$	$2{,}158 . x^2$	$e^{2{,}93\left(\ln\frac{x}{a}\right)^2}$	$q(x) = 2{,}158 . x^2 \cdot e^{-2{,}93\left(\ln\frac{x}{a}\right)^2}$
7				3,6	12,96	6,08	1,805	3,25	9,51	28,00	13,300	0,0021
6	0,0035	0,0035	1,0	2,6	6,76	4,39	1,480	2,18	6,38	14,57	580	0,0257
5	0,0097	0,02425	0,4	2,2	4,84	3,72	1,315	1,725	5,05	10,45	154	0,0679
4	0,0633	0,1581	0,4	1,8	3,24	3,041	1,112	1,235	3,62	6,99	37,1	0,1885
3	0,1476	0,3690	0,4	1,96	2,365	0,863	0,863	0,744	2,176	4,23	8,76	0,483
2	0,4568	0,7615	0,6	0,8	0,64	1,353	0,3028	0,0915	0,268	1,38	1,307	1,057
1	0,3157	0,6320	0,5	0,3	0,09	0,807	0,676	0,456	1,335	0,193	3,8	0,0508
0	0,0030	0,010	0,3	0,0	0	0	$-\infty$	$-\infty$	—	0.	$-\infty$	0

подставляя в дробь

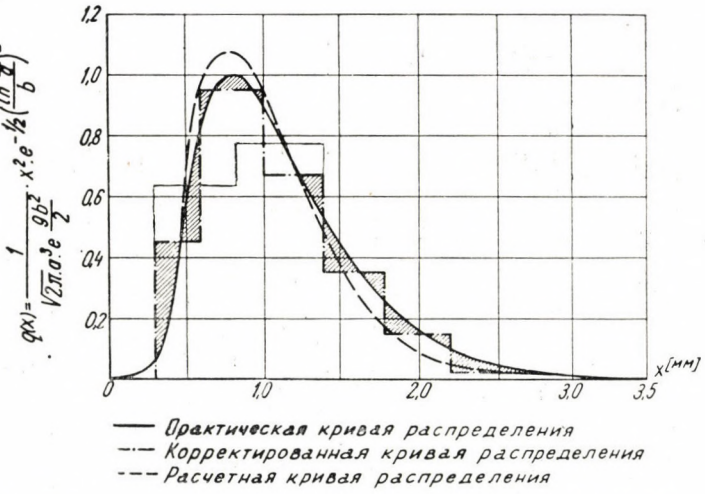
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot b\cdot a^3\cdot e^{\frac{9b^2}{2}}}$$

для значения величин a и b получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot b\cdot a^3\cdot e^{\frac{9b^2}{2}}} = \frac{}{\sqrt{6{,}28\cdot 0{,}414}\ 0{,}592^3\cdot e^{\frac{9\cdot 0{,}1707}{2}}} = 2{,}158$$

Однако, в показателе степени e имеем

$$\frac{1}{2\cdot b^2} = \frac{1}{2\cdot 0{,}1707} = \frac{1}{0{,}3414} = 2{,}930$$



Диагр. 28. Практические и расчетные кривые частоты ячменевой крупы, полученной применением решета с диаметром отверстий в 3 мм при окружной скорости молотков $v = 90{,}0$ м/сек (с молотковой дробилкой марки W— 12)

Между кривыми частоты (см. диагр. 28) имеет место бóльшая разница, чем в случае кривых распределения, однако, характер обоих кривых одинаков. Рассев расчетной кривой меньше, чем практической, и соответственно чему максимальное значение ординаты получается также большим.

Рядом с расчетной кривой частоты на диаграмме 28 дается также корректированная практическая кривая частоты — принимая по практи-

ческой кривой распределения меньшие интервалы крупности кусков. Как известно, ситовой анализ из-за слишком больших интервалов вариации не отражал действительного характера кривой частоты.

Зная функцию $q(x)$, возможно определить значения абсциссы (крупность), соответствующие максимальной ординате, т. е. место максимума кривой.

Определяем первую производную функции $q\ (x)$:

$$\frac{d}{dx}\cdot q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot b\cdot a^3\cdot e^{\frac{9b^2}{2}}}\cdot\left[2x\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln\frac{x}{a}}{b}\right)^2} - x^2\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln\frac{x}{a}}{b}\right)^2}\cdot ln\,\frac{x}{a}\cdot\frac{1\cdot 2}{2\cdot b^2}\cdot\frac{1}{x}\right]$$

В месте максимума при значении первого производного равном нолю получается

$$2x_0\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln\frac{x_0}{a}}{b}\right)^2} = ln\,\frac{x_0}{a}\cdot x_0^2\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{ln\frac{x_0}{a}}{b}\right)^2}\cdot\frac{1}{b^2\cdot x_0}$$

$$2\cdot b^2 = ln\,\frac{x_0}{a}\quad,$$

то есть

$$e^{2b^2} = \frac{x_0}{a}$$

соответственно

$$x_0 = a\cdot e^{2b^2}\quad.$$

А максимальное значение $q(x)$ будет

$$q(x)_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot b\cdot a^3\cdot e^{\frac{9b^2}{2}}}\cdot x_0^2\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln\frac{x_0}{a}}{b}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot b\cdot a\cdot e^{\frac{5b^2}{2}}}$$

В данном случае получается

$$x_0 = a\cdot e^{2b^2} = 0{,}592\cdot e^{2\cdot 0{,}1707} = 0{,}592\cdot e^{0{,}3414} = 0{,}831$$

$$q(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot b\cdot a\cdot e^{\frac{5b^2}{2}}} = \frac{}{\sqrt{6{,}28}\cdot 0{,}414\cdot 0{,}592\cdot e^{\frac{5\cdot 0{,}1707}{2}}} = 1{,}067$$

$$q(x_0) = 1{,}067$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шапошников—Булавин:* Машины и аппараты силикатной промышленности. Промстройиздат, Москва 1950.
2. *Hönig:* Grundgesetze der Zerkleinerung. VDI Forschungsheft. 378. Berlin, 1936.
3. *Rosin-Rammler:* Gesetzmässigkeiten in der Kornzusammensetzung des Zementes. Zement 1933/427.
4. *А. Н. Холмогоров:* Доклады Академии наук СССР. 31. (1941) стр. 99–101.
5. Dr. Rényi Alfréd: Az aprítás matematikai elméletéről. Építőanyag 2. (1950.) *Д-р Альфред Реньи:* О математической теории дробления, Строительные материалы, 2, 1950, стр. 177.
6. *А. А. Зеленев:* Применение повышенных скоростей при работе молотковых кормодробилок. Сельхозмашина, 2, 1952, стр. 17–21.
7. *Dr. Vörös Imre:* A darálás finomságának mérése és kísérleti eredményei kalapácsos rendszerű darálógépeknél. Molnárok Lapja. 1937. Budapest. *(Др. Имре Вёрёш:* Измерение тонкости измельчения при дроблении и опытные данные дробления молотковых дробилок.)
8. *Bölöni István:* Jelentés kalapácsos darálóval készitett dara szemcseeloszlási vizsgálatáról. Budapest, 1952. M. G. I. *(Иштван Бёлёни:* Сообщение об исследованиях фракционирования крупности крупы, полученной при помощи молотковой дробилки.)
9. *F. C. Fenton—C. A. Logan:* Farm Grinding of Grain and Forage. Canses State College Bulletin. 1931. Number 7.
10. *E. A. Silver:* Feed Grinder Investigation. Ohio Agricultural Experiment Station. 1931. october, Bulletin 490.

РЕЗЮМЕ

На основе опытных данных возможно сделать нижеследующие теоретические и практические определения и выводы в отношении работы и усовершенствования молотковых дробилок.

а) *С теоретической точки зрения*

Соответственно теории Холмогорова можно принять доказанным, что и фракционирование кусков, полученных при дроблении неоднородных по своей структуре материалов, в функции крупности кусков имеет нормальный логарифмический характер. Другими словами функция частоты имеет следующий вид:

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot b\cdot a^3\cdot e^{\frac{9b^2}{2}}}\cdot x^2\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\frac{x}{a}}{b}\right)^2}$$

в это же время функция распределения имеет вид

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_z^\infty e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot dz,$$

где: $z = \dfrac{\ln\dfrac{x}{a}}{b} - 3b$

В этом выражении x — размер частиц a и b — параметры, характеризирующие фракционирование и которые могут быть определены путем ситового анализа.

Зная параметры a и b, можно легко определить очень важный в нашем случае фактор — удельную площадь, зависящую от фракционирования.

б) *С точки зрения практики*

1. Молотковые дробилки при их современном режиме работы (исходя из окружной скорости молотков в 65 м/сек) удовлетворяют требования животноводства только в очень небольших масштабах, так как как с точки зрения скотоводства, так и свиноводства полученная крупа по крупности в общих чертах не удовлетворяет предъявляемые требования.

Следовательно, при усовершенствовании дробилок одной из важнейших точек зрения следует считать возможно большее повышение тонкости помола.

2. В случае повышения окружной скорости молотков возрастают как потребная мощность, так и удельный расход энергии. (см. табл. на стр. 375. и 376.)

3. В случае повышения окружной скорости молотков, производительность возрастает линейно, тонкость помола также возрастает. Являющиеся размерными для тонкости помола факторы изменяются в значительной степени, а именно: средняя крупность частиц уменьшается, а удельная площадь поверхности, соответственно, возрастает (см. табл. на стр. 375 и 377).

4. Количество энергии, необходимой для получения одного квадратного сантиметра новой площади поверхности при дроблении продуктов, можно считать практически независимым от окружной скорости молотков.

В числовом выражении эта удельная энергия разрыва в исследованном случае при применении решета с диаметром отверстий 3 мм имеет следующие значения:

Для ячменя влажностью 10,8%

$$3{,}6-4{,}2 \cdot 10^{-7} \text{ квт-ч/см}^2 \quad .$$

Для кукурузы влажностью 18,0%

$$2{,}8-3{,}2 \cdot 10^{-7} \text{ квт-ч/см}^2 \quad .$$

5. В отношении дробления без решета можно сказать, что хотя возможно достигнуть очень высокой производительности, тонкость помола даже при окружной скорости порядка 90,0 м/сек не соответствует показателям, которые, хотя бы приближено, удовлетворяли требования животноводства.

POSSIBILITIES OF IMPROVEMENT OF HAMMER MILLS

I. BÖLÖNI

SUMMARY

On the basis of test results the following theoretical and practical conclusions may be drawn relative to the work and development of hammer mills (grinders):

a) *Theoretical Statements:*

In conformity with Kolmogorov's theory it may be accepted as proved that the distribution of particles produced in the desintegration of in homogeneous materials as a function of grain size is also logaritmically normal. Their frequency has the following form:

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot b \cdot a^3 \cdot e^{\frac{9b^2}{2}}} \cdot x^2 \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln\frac{x}{a}}{b}\right)^2}$$

while the distribution function:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{z}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz, \text{ where } z = -\frac{ln\frac{x}{a}}{b} - 3b$$

Here x = grain, size a and b are parameters characterizing distribution, determinable by screen analysis.

With knowledge of parameters a and b, factors depending on distribution — like specific surface of great importance in this case — are simply calculable.

b) *Practical conclusions*

1. Hammer mills in their present working system (considering a peripheral hammer speed of 65 m/sec) can meet requirements of stock farming to a small degree only; specifications of

horned cattle breeding

as well as of

pig breeding

as regards the size distribution of bruised grain are not satisfied.

In the development of hammer bruisers the most important requirement is to increase as much as possible the fineness of the finished product.

2. By boosting the peripheral speed of the crushing hammers *power demand and specific energy consumption are increased.* (See tables on pp. 375—376).

3. By boosting the peripheral speed of the hammer the *output* is about linearly stepped up while the *fineness of the discharge is also increased.*

The average grain size characteristic of the fineness of the discharge and the specific surface are also increased. (See tables on pp. 375—377).

4. Energy demand for producing one squ. cm. of new surface may be considered as practically independent of the peripheral hammer speed.

This specific disintegrating energy is in the case investigated for a screen of 3 mm diam :

For barley of 10,8% humidity	$3{,}6—4{,}2 \cdot 10^{-7}$ kWh/cm^2
For maize of 18,0% humidity	$2{,}8—3{,}2 \cdot 10^{-7}$ kWh/cm^2

5. For *grinding without screen* it was established that though the output was very high, the fineness of the finished product did not approach stock farming requirements even at 90,0 m/sec peripheral hammer speed.

EXAMEN DES POSSIBILITÉS DE PERFECTIONNEMENT DES BROYEURS A MARTEAUX

I. BÖLÖNI

RÉSUMÉ

A la base des résultats expérimentaux les conclusions théoriques et pratiques suivantes peuvent être déduites pour le travail et le perfectionnement de broyeurs à marteaux :

a) *Du point de vue théorique :*

Conformément à la théorie de Kolmogorov on peut admettre que la répartition des particules produites au cours du broyage de matériaux non homogènes est aussi normale en fonction des dimensions des grains. C'est-à-dire leur fonction de fréquence assume la forme suivante :

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot b \cdot a^3 \cdot e^{\frac{9b^2}{2}}} \cdot x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln\frac{x}{a}}{b}\right)^2}$$

tandis que la fonction de répartition

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz \text{ où } z = \frac{ln\frac{x}{a}}{b} - 3b$$

où x = la dimension du grain,

a et *b* sont des paramètres caractérisant la répartition et pouvant être déterminés par l'essai de tamisage.

En connaissance des paramètres *a* et *b*, les facteurs, fonctions de la répartition — comme la surface spécifique extrêmement importante dans ce cas — se calculent facilement.

b) *Du point de vue pratique :*

1. Les broyeurs à marteaux dans leur système de travail actuel (considérant une vitesse périphérique des marteaux de l'ordre de 65 m/sec) ne peuvent satisfaire aux exigeances de la zootechnie que dans une faible mesure parce que la répartition des grains de la pouterie produite par ces appareils de concassage ne remplit, en général, ni les stipulations de l'élevage

du bétail à cornes

ni celles

des porcheries.

Dans le perfectionnement des broyeurs à marteaux un point de vue des plus importants est l'augmentation aussi grande que possible de la finesse de broyage.

2. L'augmentation de la vitesse périphérique des marteaux accroît la puissance absorbée et *la consommation spécifique d'énergie.* (Voir les tableaux sur pp. 375—376.)

3. Le débit de broyage augmente à peu près linéairement avec l'accroissement de la vitesse périphérique des marteaux, tandis que la *finesse de la pouture* s'accroît également. (Voir les tableaux sur pp. 375. et 377.)

4. L'énergie de broyage par cm^2 de surface nouvelle produite (à partir du grain initial) peut être considérée comme pratiquement indépendante de la vitesse périphérique des marteaux.

Numériquement cette énergie spécifique de rupture est dans le cas examiné pour le tamis de 3 mm diam :

Pour l'orge de 10,8% d'humidité $3{,}6—4{,}2 \cdot 10^{-7}$ KWh/cm^2
Pour le maïs de 18% d'humidité $2{,}8—3{,}2 \cdot 10^{-7}$ KWh/cm^2

5. Pour le *broyage sans tamis* on a pu établir que, quoique le rendement de broyage soit très grand, la finesse de la mouture même à une vitesse périphérique des marteaux de 90,0 m/sec est loin d'approcher les exigences de la zootechnie.

UNTERSUCHUNG DER VERVOLLKOMMNUNGSMÖGLICHKEITEN VON HAMMERMÜHLEN

I. BÖLÖNI

ZUSAMMENFASSUNG

Auf Grund der Versuchsergebnisse können hinsichtlich der Arbeit und Weiterenwicklung der Hammermühlen nachstehende theoretische und praktische Feststellungen und Folgerungen gemacht bzw. gezogen werden :

a) *Vom theoretischen Gesichtspunkt :*

Entsprechend der *Kolmogorow*schen Theorie kann man als erwiesen annehmen, dass auch die Verteilung der im Laufe der Zerstückelung von Stoffen inhomogener Struktur entstehenden Teilchen als Funktion der Kornabmessung logarithmisch normal ist. Das heisst, ihre Häufigkeitsfunktion weist nachstehende Form auf :

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot b \cdot a^3 \cdot e^{\frac{9b^2}{2}}} \cdot x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln \frac{x}{a}}{b}\right)^2}$$

während die Verteilungsfunktion

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz, \text{ wo } z = \frac{\ln \frac{x}{a}}{b} - 3b$$

lautet, wo x die Kornabmessung bezeichnet und a und b die Verteilung kennzeichnende Parameter sind, die durch die Siebungsanalyse bestimmt werden können.

In Kenntnis der Parameter a und b kann man die von der Verteilung abhängenden Faktoren, wie z. B. die im vorliegenden Falle sehr wichtige spezifische Fläche einfach berechnen

b) *Vom praktischen Gesichtspunkt:*

1. Die Hammermühlen vermögen in ihrem gegenwärtigen Arbeitssystem (unter Berücksichtigung einer Schlaghammer-Umfangsgeschwindigkeit von 65 m/sec) den Anforderungen der Viehzucht nur in sehr geringem Masse zu entsprechen, weil im allgemeinen die Kornverteilung des Mahlgutes weder vom Gesichtpunkte der

Rinderzucht

noch von dem der

Schweinezucht

den Anforderungen entspricht.

Bei der Weiterentwicklung der Hammermühlen ist also einer der allerersten Gesichtspunkte die je grössere Steigerung der Feinheit des Mahlgutes.

2. Bei Steigerung der Umfangsgeschwindigkeit nehmen der *Leistungsbedarf* und der *spezifische Energieaufwand* allmählich zu (s. die Tabelle auf den Seiten 375—376).

3. Bei Erhöhung der Umfangsgeschwindigkeit des Schlaghammers wächst die *Stundenleistung* etwa linear, wobei auch die *Feinheit* gesteigert wird. Die durchschnittliche Korngrösse, die hinsichtlich der Feinheit als massgebend betrachtet werden kann, sowie auch die spezifische Fläche erfahren eine bedeutende Erhöhung (s. Tabellen auf S. 375—377).

4. Die Energiemenge, die erforderlich ist, um bei der Zerkleinerung des Produktes eine neue Fläche pro cm^2 zu erzeugen, kann als praktisch unabhängig von der Umfangsgeschwindigkeit des Schlaghammers betrachtet werden.

Zahlenmässig beträgt diese spezifische Reissenergie im untersuchten Falle, bei Verwendung eines ∅ 3 mm Lochsiebes

bei 10,8% Feuchtigkeit enthaltender Gerste 3,6—4,2 · 10^{-7} kWh/cm^2
bei 18% Feuchtigkeit enthaltendem Mais 2,8—3,2 · 10^{-7} kWh/cm^2

5. Hinsichtlich der *Schrotung ohne Siebmantel* konnte festgestellt werden, dass die Feinheit, obwohl die Stundenleistung sehr gross ist, selbst bei einer Schlaghammer-Umfangsgeschwindigkeit von 90,0 m/sec den Anforderungen der Viehzucht nicht einmal annähernd entspricht.

ÜBER DIE STROMVERDRÄNGUNG IN KREIS-ZYLINDRISCHEN LEITERN

G. FREUD

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 13. März 1954.]

Das Problem der Stromverteilung in einem einzigen Leiter mit kreisförmigem Querschnitt wurde von *Sommerfeld* [3] gelöst. Die *Sommerfeld*schen Rechnungen fanden mannigfache Anwendungen in der Technik. Man kann sie in jedem Fall benutzen, wo das magnetische Feld der benachbarten Leiter sich als wesentlich kleiner erweist als das magnetische Eigenfeld des Leiters selbst. Das ist sicher der Fall, wenn der Leiter nicht in der unmittelbaren Nähe von anderen stromführenden Leitern und fern von Eisenteilen verläuft.

Ganz andere Verhältnisse entstehen, falls es sich um einen Einzelleiter eines Bündels handelt, besonders wenn in der Nähe des Leiters sogar magnetisiertes Eisen vorhanden ist. Dann kann das äussere magnetische Feld wesentlich grösser sein als das Eigenfeld des Leiters. Sind die Durchmesser der einzelnen Leiter des Bündels nicht zu gross, so kann das äussere magnetische Feld in der Nähe eines Leiters als homogen angesehen werden. Es genügt also, folgende Aufgabe zu betrachten : man setze in ein räumlich homogenes, in der Zeit sinusartiges magnetisches Wechselfeld einen unendlichen stromdurchflossenen kreiszylindrischen Leiter. Es soll die Stromverteilung im Draht bestimmt werden. Ist diese bekannt, so kann man den *Joule*schen Wärmeverlust im Leiter berechnen. Wie gezeigt werden wird, verlieren unsere Formeln ihre Gültigkeit nicht, wenn das magnetische Feld wellenartig längs des Leiters fortschreitet.

In mathematischer Hinsicht handelt es sich um einen Grenzfall (aber keinen Spezialfall) eines anderen Problems, das von *Maneback* [2] gelöst wurde: man bestimme die Verteilung der Wirbelströme, die ein paralleler Stromfaden in einem unendlichen kreiszylindrischen Leiter erzeugt. *Maneback* löst das Problem mit Hilfe einer Integralgleichung. In der hier gegebenen Darstellung wird keine Integralgleichung benutzt, so dass sie dadurch an Verständlichkeit und Übersichtlichkeit gewinnt. Wie vom Verfasser an anderer Stelle gezeigt wurde [1], kann auch das Problem von *Maneback* in unserer vereinfachten Form behandelt werden. Es gelingt sogar, den Einfluss der Magnetisierung des Leiters zu berücksichtigen, falls diese nach einem linearen Gesetze verläuft.

I. Die Stromdichte i im Leiter kann aus zwei Komponenten zusammengesetzt werden. Die eine Komponente besteht aus dem Eigenstrom des Leiters,

der auch ohne Aussenfeld vorhanden ist. Den zweiten Teil erhält man aus der Wirbelstromverteilung, die vom äusseren magnetischen Feld erzeugt wurde. Diese beiden Komponenten können linear superponiert werden. Die Verteilung des Eigenstromes wurde von *Sommerfeld* [3] berechnet. Mit der Bezeichnung

$$\xi = \frac{\sqrt{2a}}{\delta}$$

wo a der Halbmesser des Leiters und δ die Eindringungstiefe des Leitermaterials bei der vorhandenen Frequenz ist, lautet die Stromdichte i_1 im Abstand r von der Mittellinie des Zylinders :

$$i_1(r) = \frac{I}{2\pi a^2} \sqrt{-j\xi}\, \frac{J_o\left(\sqrt{-j\xi}\,\frac{r}{a}\right)}{J_1(\sqrt{-j\xi})} \tag{1}$$

Hier sind J_o und J_1 die *Bessel*schen Funktionen nullter bzw. erster Ordnung. Für Argumente von der Form $\sqrt{-j}\,\xi$ wurden diese von *Tölke* [4] tabelliert[1].

II. Es sollen hier kurz einige bekannte Beziehungen aus der Elektrodynamik rekapituliert werden. Die *Maxwell*schen Gleichungen im MKS-Mass-System lauten:

$$\begin{aligned} \text{rot } H &= i + \frac{\partial D}{\partial t} \\ \text{rot } E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \end{aligned} \tag{2}$$

mit

$$D = \varepsilon E \quad B = \mu H$$

Die differenzielle Form des *Ohm*schen Gesetzes ist

$$i = \gamma E \tag{3}$$

wobei γ die Leitfähigkeit des Drahtmaterials bedeutet. Die zweite *Maxwell*sche Gleichung kann durch Einführung eines Vektorpotentials befriedigt werden :

$$B = \text{rot } A, \quad E = -\frac{\partial A}{\partial t} \tag{4}$$

[1] Eine kurze Tafel ist auch in *Jahnke-Emde* : Tafeln höherer Funktionen 5. Aufl. Verl. Teubner, Leipzig 1952. S. 240—263 enthalten.

Damit auch die erste *Maxwell*sche Gleichung befriedigt werde, muss das Vektorpotential folgender partiellen Differentialgleichung genügen:

$$\text{rot rot } A = \text{grad div } A - \Delta A = -\mu\gamma \frac{\partial A}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \tag{5}$$

Da sich im Inneren des Leiters keine elektrische Ladungen sammeln können, ist

$$\text{div } D = 0$$

Diese Beziehung ist sicher erfüllt, falls

$$\text{div } A = 0 \tag{6}$$

vorausgesetzt wird. Also folgt aus (5) und (6)

$$\Delta A - \mu\gamma \frac{\partial A}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \tag{7}$$

Es sollen nun solche Lösungen betrachtet werden, die in der z-Richtung fortschreitende Wellen darstellen (vgl. *Abb. 1*):

$$A = A_0(x,y) e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\Lambda} z\right)} \tag{8}$$

Hier bedeutet Λ ide Wellenlänge der fortschreitenden Welle. Aus (7) erhält man

$$\Delta A_0 - \left(\frac{2j}{\delta^2} + \frac{4\pi^2}{\Lambda^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right) A_0 = 0 \tag{9}$$

In dieser Gleichung ist $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ der *zweidimensionale Laplace*-Operator. Es ist ferner

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

die Wellenlänge einer ebenen elektromagnetischen Welle in einem isolierenden Material, dessen Dielektrizitätskonstante und Permeabilität mit den entsprechenden Daten des Leiters übereinstimmt. Man kann die weiteren Rechnungen erheblich vereinfachen, wenn man berücksichtigt, dass für die üblichen Leitermaterialien von den kleinsten Frequenzen bis zu den Frequenzen der Zentimeterwellen

$$\delta << \Lambda \text{ und } \delta << \lambda$$

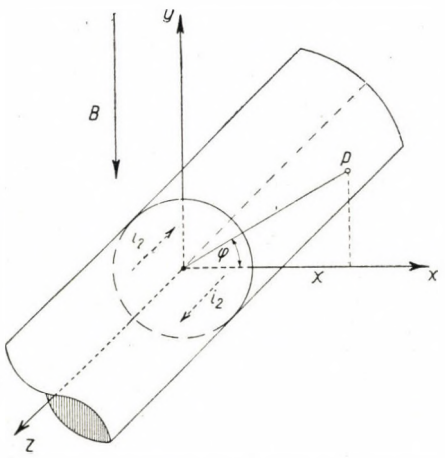
gelten.

Also kann man statt (9) die gekürzte Gleichung

$$\Delta A_0 - \frac{2j}{\delta^2} A_0 = 0 \tag{10}$$

behandeln.

Die Bedeutung dieser Vereinfachung besteht darin, dass in der Lösung von (10) nur solche Argumente der *Bessel*schen Funktionen auftreten, für die berechnete Tabellen vorhanden sind ([4] und Fussnote 1). Über die physikalische Bedeutung der durchgeführten Vernachlässigungen sei noch folgendes erwähnt. Das Streichen des Gliedes $\frac{4\pi^2}{\lambda^2}$ bedeutet, dass man das Feld als quasistationär betrachtet. Indem man das Glied $\frac{4\pi^2}{\Lambda^2}$ fallen lässt, wird die Wirkung



der wellenartigen Fortpflanzung des Feldes in der Z-Richtung vernachlässigt. Somit wird es genügen, das Feld in der Ebene xy zu untersuchen. Das Vektorpotential wird hiermit sowohl im Leiterinneren wie auch ausserhalb des Leiters nur eine Komponente in der Z-Richtung haben, die im folgenden als ein Skalar A_0 bezeichnet wird[2].

III. Das Vektorpotential des äusseren magnetischen Feldes sei $B_1 x$. Das bedeutet, dass ein homogenes magnetisches Feld mit der Induktion B_1 vorhanden ist, dessen Pfeil in die $-y$-Richtung weist. (Vgl. *Abb.* 1.) Es sollen nun die Polarkoordinaten r, φ in der Form

$$x = r \cos \varphi \qquad y = r \sin \varphi$$

eingeführt werden.

[2] Im weiteren soll als Vektorpotential schlechthin der um den exponentiellen Faktor gekürzte Wert genannt werden.

Der Ursprung des Koordinatensystems soll auf der Mittellinie des Leiters liegen, die mit der Z-Achse zusammenfällt. Das Vektorpotential des Feldes im Leiterinneren sei in der Form

$$A_0 = C_1 J_1\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right)\cos\varphi = C_1 J_1\left(\sqrt{-j}\,\xi\,\frac{r}{a}\right)\cos\varphi \tag{11}$$

angesetzt. Somit ist die partielle Differentialgleichung (10) befriedigt. Infolge der Symmetrie des Feldes ist *(vgl. Abb. 1)*

$$i_2(-x,y) = -i_2\ (x\,y)$$

Die Rückwirkung, die die Wirbelströme im Leiter auf das Aussenfeld ausüben, hat somit die Form eines ebenen magnetischen Dipols : $C_2\frac{\cos\varphi}{r}$. Daher erhält man für das Vektorpotential des Aussenfeldes den Ausdruck

$$A_0^* = B_1 r\ \cos\varphi + C_2\frac{\cos\varphi}{r} \tag{12}$$

Dieses Vektorpotential erfüllt ausserhalb des Leiters die *Laplace*sche Gleichung $\Delta A_0^* = 0$.

Um die Konstanten C_1 und C_2 zu bestimmen, muss man die Grenzbedingungen an der Leiteroberfläche $r=a$ betrachten[3] :

$$(A_0)_{r=a} = (A_0^*)_{r=a}$$

und

$$\left(\frac{\partial A_0}{\partial r}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial A_0^*}{\partial r}\right)_{r=a}$$

Indem man die Ausdrücke von A_0 und A_0^* in diese Bedingungsgleichungen einsetzt, erhält man ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten C_1 und C_2:

$$C_1 J_1(\sqrt{-j}\,\xi) - C_2\frac{1}{a} = B_1\ a$$

$$C_1\sqrt{-j}\,\frac{\xi}{a} J_1'(\sqrt{-j}\,\xi) + C_2\frac{1}{a^2} = B_1$$

Die Lösung für C_1 lautet :

$$C_1 = \frac{2a\,B_1}{J_1(\sqrt{-j}\xi) + \frac{1}{\xi} J_1'(\sqrt{-j}\xi)} = \frac{2a\,B_1}{\sqrt{-j}\,\xi\,J_0(\sqrt{-j}\,\xi)} \tag{13}$$

[3] Hierbei wurde die magnetische Permeabilität des Leitermaterials als gleich der Permeabilität des angrenzenden isolierenden Mediums (Luft) angenommen. Man kann aber auch die Brechung der magnetischen Kraftlinien infolge des Permeabilitätsunterschiedes berücksichtigen, wie vom Verfasser an anderer Stelle [1] gezeigt wurde.

Hierbei wurde die Identität $J_1'(t) = -\frac{1}{t} J_1(t) + J_0(t)$ berücksichtigt.

Der Ausdruck von C_2 ist für unsere Zwecke belanglos. Für die Stromdichte der Wirbelströme im Leiter ergibt sich hieraus:

$$i_2 = \gamma E = -\gamma \frac{\partial A}{\partial t} = -j\omega\gamma A_0,$$

also[4]

$$i_2 = \frac{2\sqrt{-j\omega\gamma a B_1}}{\xi J_0(\sqrt{-j}\,\xi)} J_1\left(\sqrt{-j}\,\xi \frac{r}{a}\right) \cos\varphi \tag{14}$$

IV. Nun lässt sich der effektive *Joule*sche Verlust ω in einer Sekunde je Längeneinheit des Drahtes bestimmen. Die Stromdichte kann man in die Stromdichte des Leiterstromes und in die der Wirbelströme zerlegen:

$$i = b_0 J_0\left(\sqrt{-j}\,\xi \frac{r}{a}\right) + b_1 J_1\left(\sqrt{-j}\,\xi \frac{r}{a}\right) \cos\varphi \tag{15}$$

wo man b_0 aus (1) und b_1 aus (15) erhalten kann. Hier hängt b_0 vom Leiterstrom I ab und ist von dem äusseren magnetischen Felde B_1 unabhängig, dagegen ist b_1 von I unabhängig, aber abhängig von B_1. Es ist

$$W = \frac{1}{2\gamma}\int |i|^2\, df = \frac{1}{2\gamma}\Bigg\{ |b_0|^2 \int_0^{2\pi}\int_0^a \left| J_0\left(\sqrt{-j}\,\xi \frac{r}{a}\right)\right|^2 r\, dr\, d\varphi + \tag{16}$$

$$+ |b_1|^2 \int_0^{2\pi}\int_0^a \left| J_1\left(\sqrt{-j}\,\xi \frac{r}{a}\right)\right|^2 r\, dr\, d\varphi \Bigg\}$$

Der Faktor von $b_1 b_2$ ist infolge $\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0$ verschwunden. Diese Tatsache hat die merkwürdige Konsequenz, dass man *w aus zwei Gliedern zusammensetzen kann, von denen das eine nur vom Leiterstrom I abhängt, aber vom Aussenfeld unabhängig ist, während das andere Glied von B_0 abhängt und von I unabhängig ist.* Das Integral in (16) kann man aus folgender bekannten Formel bestimmen*:

$$\int_0^a r J_n(\alpha r) J_n(\beta r)\, dr = \frac{a}{\beta^2 - \alpha^2}\left[\alpha J_n(\beta a) J_n'(\alpha a) - \beta J_n(\alpha a) J_n'(\beta a)\right]$$

[4] Mit einem zeitabhängigen Faktor $e^{j\omega t}$ (Vgl. Fussnote 2.).

* Hier ist $\left(\frac{dJ_1(t)}{dt}\right)_{t=\sqrt{-jx}} = J_1'(\sqrt{-jx})$

wobei $\alpha = \sqrt{j}\,\frac{\xi}{a}$, $\beta = \sqrt{j}\,\frac{\xi}{a}$ gesetzt werden muss. Für den Verlust infolge des Leitungsstromes erhält man in dieser Weise

$$W_1 = I_{eff}^2 R_0 g(\xi) \tag{17}$$

wo $R_0 = \frac{1}{\gamma \pi a^2}$ den Gleichstromwiderstand der Längeneinheit des Leiters bedeutet und

$$g(\xi) = \frac{\xi}{2} \frac{Im\{\sqrt{-j} J_0(\sqrt{j}\,\xi) J_0'(\sqrt{-j}\xi)\}}{|J_1(\sqrt{-j}\xi)|^2} \tag{18}$$

Dieser Teil des Resultates erweist sich nach einigen Umformungen als mit der *Sommerfeld*schen Widerstandsformel

$$R = Re\left\{\frac{\sqrt{-j}\xi}{2} \frac{J_0(\sqrt{-j}\xi)}{J_1(\sqrt{-j}\xi)}\right\}$$

identisch, d. h. es ist $g(\xi) = R/R_0$. Es lässt sich aber auch der infolge des äusseren magnetischen Feldes entstandene zusätzliche Verlust W_2 berechnen:

$$W_2 = \frac{B_1^2}{\gamma} h(\xi) \tag{19}$$

Hier bedeutet B_1 den Höchstwert der magnetischen Induktion des Aussenfeldes, und es ist

$$h(\xi) = 2\pi\xi \frac{Im\{\sqrt{-j} J_1(\sqrt{j}\,\xi) J_1'(\sqrt{-j}\xi\}}{|J_0(\sqrt{-j}\xi)|^2} \tag{20}$$

V. Zusammenfassend kann man sagen, dass der *Joule*sche Verlust in einer Sekunde je Längeneinheit des Drahtes

$$W = I_{eff}^2 R_0 g(\xi) + \frac{B_1^2}{\gamma} h(\xi)$$

beträgt, wo R_0 den Gleichstromwiderstand der Längeneinheit des Drahtes und γ die spezifische Leitfähigkeit des Leitermaterials bedeutet, ferner

$$\xi = \frac{\sqrt{2}\,a}{\delta}$$

ist, wo a den Halbmesser des Leiters und δ die Eindringungstiefe des Leitermaterials bezeichnet.

I_{eff} ist der Effektivwert des Leiterstromes und B_1 der Höchstwert der Induktion des äusseren magnetischen Wechselfeldes. Die Eindringungstiefe δ erhält man aus der Formel

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}}$$

wobei ω die Kreisfrequenz des Stromes und des Wechselfeldes[5] und μ die absolute Permeabilität des Leiters (für nicht ferromagnetische Stoffe also $\sim 4\pi \cdot 10^{-7}$ MKS Einheiten) bedeutet.

Die Funktionen $g(\xi)$ und $h(\xi)$ wurden mit Hilfe der Tabelle von *Tölke* [4] berechnet:

ξ	g(ξ)	h(ξ)
0,0	1,0000	0,0000
0,2	1,0001	0,0006
0,4	1,0005	0,0101
0,6	1,0007	0,0505
0,8	1,0021	0,1588
1,0	1,0052	0,3820
1,2	1,0110	0,7532
1,4	1,0198	1,3591
1,6	1,0330	2,1695
1,8	1,0524	3,1781
2,0	1,1357	4,3342
2,5	1,1753	7,4110
3,0	1,3184	10,1750
3,5	1,4919	12,5328
4,0	1,6778	14,6826
4,5	1,8626	16,8091
5,0	2,0428	18,9156
5,5	2,2190	21,1838
6,0	2,3928	23,4225
6,5	2,5682	25,6480
7,0	2,7437	27,8804
7,5	2,9213	30,0792
8,0	3,0948	32,3308
8,5	3,2708	34,5545
9,0	3,4097	36,7850
9,5	3,6243	38,9898
10,0	3,7975	41,2429

[5] Die Formeln (17) und (19) sind auch dann gültig, wenn die Frequenz des Aussenfeldes von der Frequenz des Leitungsstromes verschieden ist. Dann müssen aber natürlich in (17) bzw. in (19) für x zwei verschiedene Werte eingesetzt werden. Es bleibt aber $W = W_1 + W_2$.

Für grosse Werte des Argumentes ξ erhält man aus den asymptotischen Formeln der *Bessel*schen Funktionen

$$g(\xi) = \frac{\xi}{2\sqrt{2}}\left\{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\xi} + \frac{3}{8}\frac{1}{\xi^2} + \ldots\right\} \sim 0{\cdot}3536\,\xi + 0{\cdot}25 + 0{\cdot}1326\,\frac{1}{\xi}$$

und

$$h(\xi) = \pi\sqrt{2}\,\xi\left\{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\xi} - \frac{1}{8}\frac{1}{\xi^2} + \ldots\right\} \sim 4{\cdot}443\,\xi - 3{\cdot}1416 - 0{\cdot}5554\,\frac{1}{\xi}$$

Für kleine Argumente liefern die Potenzreihen der *Bessel*schen Funktionen

$$g(\xi) = 1 + \frac{1}{12}\left(\frac{\xi}{2}\right)^4 - \frac{1}{180}\left(\frac{\xi}{2}\right)^8 + \ldots$$

und

$$h(\xi) = 4\pi\left(\frac{\xi}{2}\right)^4\left\{\frac{1}{2} - \frac{11}{48}\left(\frac{\xi}{2}\right)^4 + \ldots\right\}$$

SCHRIFTTUM

1. *G. Freud:* Körkeresztmetszetű vezetőben fellépő áramkiszorításról. (Über die Stromverdrängung in Leitern mit kreisförmigem Querschnitt. Ungar. mit deutscher und russ. Zusammenf.) MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei, II. (1953).

2. *Ch. Maneback:* An integral equation for skineffect in parallel conductors. Journal of Math. and Phys. Massachusett's Inst. for Techn. 1922.

3. *A. Sommerfeld:* Elektromagnetische Schwingungen. Abschnitt V. in *Franck—Mises:* Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Bd. II. 2. Aufl. Verl. Vieweg. Braunschweig, 1935.

3. *Fr. Tölke:* Besselsche und Hankelsche Zylinderfunktionen. Verl. Wittwer. Stuttgart 1936.

ZUSAMMENFASSUNG

In ein homogenes magnetisches Wechselfeld wird ein stromdurchflossener kreisförmiger Leiter hineingesetzt. Die Stromverteilung und der *Joule*sche Verlust der Längeneinheit dieses Leiters werden berechnet.

О ВЫТЕСНЕНИИ ТОКА, ОБРАЗУЮЩЕГОСЯ В ПРОВОДНИКЕ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Г. ФРЕЙД

Резюме

Определяются распределение и плотности тока в проводнике круглого сечения, находящегося в однородном синусоидально изменяющемся магнитном поле, при помощи чего определяются джоулевы потери, возникающие в проводнике на единицу измерения.

CURRENT DISTRIBUTION IN CYLINDRICAL CONDUCTORS OF CIRCULAR CROSS-SECTION

G. FREUD

SUMMARY

In a homogeneous alternating magnetic field is introduced a conductor through which flows a current. The distribution of this current and the heat generated by Joule effect, per unit length, are calculated.

DISTRIBUTION DU COURANT DANS LES CONDUCTEURS CYLINDRIQUES DE SECTION CIRCULAIRE

G. FREUD

RÉSUMÉ

Dans un champ magnétique alternatif homogène est introduit un conducteur cylindrique de section circulaire, traversé par un courant. La distribution du courant et la chaleur produite par effet Joule — par unité de longueur — sont calculées.

JOSEPH PETZVAL

INVENTOR OF PHOTO-OPTICS

1807—1891

J. SERESS

[Manuscript received 6th April 1954]

Joseph Maximilian *Petzval*, professor of mathematics and physics, doctor of philosophy, «geometer approbatus», the inventor of photographic optics, of the dissolving views projection apparatus (Nebelbildapparat), etc., was born on January 6, 1807, in a small North-Hungarian town, Szepes-Béla. He was the oldest son of a catholic schoolmaster and «regens chori».

He was brought up under poor circumstances, although his father Frederic was a man of many gifts, a sort of "Jack of all trades". In spite of them, he remained poor and had to struggle hard to maintain his family consisting of wife and six children.

Joseph Petzval went to elementary school at Késmárk, and later proceeded to Podolin to the secondary school of the Piarist Order, where he spent three years studying in the grammar classes. As a point of curiosity, he almost had to give up learning, for failing in mathematics.

In those days, teaching was strictly dogmatic. All subjects were taught by one schoolmaster, consequently the teachers did not take the trouble of providing explanations, and the students had to commit the material contained in the textbooks to memory. The language of teaching was Latin.

Petzval himself described contemporary instruction methods as follows: the day began with a half hour of prayers, followed by the rigorous control of homework and the execution of corporal punishment on the disciples whose work was not correct. Next came the assignment of new lessons, and the day closed with another half hour of grace.

Petzval — who later became a light in contemporary mathematics — nearly became a shoemaker's apprentice, for his father was advised to take him out of school, as he lacked any gift for learning.

But for Petzval's mother, who prevailed on her husband to give the boy another chance and send him to repeat his examination, his scientific career would have foundered.

During the summer, the boy came across a book in his father's library, entitled: «Analytical discussion of the elements of mathematics», by Lt. Matthews Hauser, written for the Military Academy. The ingenious book written in

a simple style, roused Petzval's mathematical sense, and when the day of the examinations arrived, Petzval not only passed, but he showed such a high degree of mathematical skill which stunned the members of the jury. Petzval was presented a copy of Pasquich's «Mathematical Analysis», as a reward.

Thereafter Petzval went to Lőcse and finished the fourth grammar class, and the two years of humaniora studies.

After graduation, he was admitted to the philosophical class of the College at Kassa, following which he registered at the Institutum Geometricum of Pesth — now Budapest — the first Engineering Highschool of the world, — being a department of the Royal University in Buda. The diplomas issued by the Institutum bore the hand and seal of the professors of the University as well.

Petzval, who was an eminent scholar, was soon appointed lecturer. After completing the first four terms, he obtained his diploma and became a chartered «Geometer approbatus» (Approved geometer). His work as lecturer was accepted as equivalent to the two years of practical training required.

In 1828, Petzval entered the service of the Municipality of Pesth.

Professor Wolfstein, Petzval's master in mathematics, called chief engineer Jacob Degen's attention to this young scholar. Degen welcomed the services of Petzval, who was attached to the Building Department of the Municipality.

At the time, the Building Department was kept busy carrying out the rebuilding plans made by the *Embellishment Committee.*

One of the most urgent and important jobs was the re-planning of the old district "Leopoldstadt," and its canalization.

Petzval's work was to draw the plans and maps, and to control the relative calculations. In the beginning, his work aroused surprise, and provoked debate. In a well documented report he contended that *flood prevention was useless as long as districts of the town were situated below flood level.*

To help this, he urged the filling up of the ground. He demonstrated by exact levelling that some districts were 4—7 feet lower than the Danube level. Thus, in the event of highwater, the dams would provide but inadequate protection against the flood, and the water backing up the sewer system would overflow the districts lying lower than the waterlevel.

The aldermen, fearing the costs, vetoed the project. But when in 1830 and 1832, the Danube threatened to overflow the city, Petzval was called in, and put in charge of the emergency works.

Petzval's action saved Pesth, but got him into trouble. He was charged with *offending against written instructions, and with neglecting financial provisions.* He was summoned before a disciplinary court, but got away with a stern warning.

He continued to urge the building of a channel, to abduct the surplus waters of the Danube. After having made a thorough geological exploration of the outskirts of the town, Petzval worked out a project wherein he emphasized

the *importance of the navigableness of the channel.* It was his idea to build factories, mills, warehouses along its banks. He went further still: finding that the soil in the northern outskirts was sandy, he suggested to install an irrigation plant for its fertilization, at the same time providing protection against dust for the town.

Petzval's project was greatly admired, and the Council decided to submit it directly to the competent government organs with an urgent request for its prompt forwarding to the Palatine's Chancellery in Pressburg. Petzval, who did not trust the municipal Council, wrote a special application to the Palatine, Archiduke Joseph. The Palatine approved of the project, the Chancellery gave the necessary authorisation, *recommending an early start of the works.* The Palatine addressed a personal letter to Petzval expressing his appreciation and congratulating him on his scheme.

The channel was never built. The plans and charts were filed in the City archives. They were taken out once more in 1865, when the problem came up again for consideration — but of no avail ; they are still buried in the archives. Petzval annoyed, left municipal service, and returned to the University, resuming his scientific work as assistant professor of physics and mathematics.

Ha had been working for three years at the University, when he applied for the chair of higher mathematics left vacant by Professor Wolfstein. The competition was proclaimed on August lst, 1833, and although Petzval was unanimously appointed for the chair, his official appointment was confirmed only two years later.

Meanwhile, the Vienna University invited applications for the chair of higher mathematics. Petzval was sent a personal invitation.

He passed all tests and examinations with honours, and although two out of three jurors recommended him in first place, his appointment followed only three years later. In the background were the intrigues of the aulic circles, who objected to the appointment of the Hungarian Petzval to the Vienna University.

Joseph Petzval's appointment to the Vienna University appeared in the Official Gazette on November 19, 1836; at the time he was aged 29.

Petzval proceeded to Vienna.

*

His fellow professors did not give him a very encouraging welcome. He responded by withdrawing from their company. Beyond official contact, he avoided all private intercourse with them, with the sole exception of Professor von Ettinghausen — the one who had invited Palatine Joseph's attention to Petzval, and followed the brilliant young man with deep concern throughout his entire carreer.

Petzval was a queer man, quicktempered but kindhearted. He was popular with his pupils, and his classes were always crowded, although he never made

use of the hateful roll-calls. He did not take a flat in the city, but resided in a suburb of Vienna on the Kahlenberg, in part of the former convent of the Camaldolite Friars. There he set up his studio, his laboratories and workshop where he made all the tools and instruments he needed, by his own hands. As the place was remote from the city, and there was no communication, Petzval had a black Arab stallion, on the back of which he rode every day to the University. He was a strange sight : a top-hatted professor riding to town, the folds of his wide cloak floating behind.

His stable was decorated with swords and other weapons, as he was a great swordsman and gymnast. Up on the hill, he worked on his optical instruments. Petzval's optical lenses were considered by the experts of the German optical factories to be superlative. He also constructed a piano with a special set of keys, based on his own sound system, and installed a photographic studio with a laboratory.

*

Petzval, who was used to fill in the curriculum of his classes, did not like the limited and strictly mapped out teaching system of the Vienna University; however, as the control of the studies had been reserved for the Educational Committee of the Court, he had to submit, but never failed to criticise it. It was no sooner than in 1850, after the freedom of teaching had been proclaimed, that Petzval began his teaching and experiments which made him famous.

When the professors of the University had been allowed to decide on the themes and methods of their classes, Petzval began his lectures on *applied mathematics*. His lectures were always on a strictly scientific standard, yet the simplicity and clarity of his style made him most popular.

Petzval was a scientist and mathematician, but not of the cut and dry type. He applied mathematics merely for the sake of unveiling the laws of Nature, but did not regard it as an ultimate aim, *it was only a means* — he said — *with the aid of which mankind will be enabled to make life and living easier.*

«*Mathematics* — emphasized Petzval — *is vocated to explain the powers of the spirit — which are hidden in its formulas — and to analyze the solitary laws of Nature in the most possibly simplest ways and bring them nearer to the man's comprehension.*»*

That thesis of Petzval enabled him to reach the height of his achievement. It is a pity that Petzval's lectures did not appear in print, and have only been preserved in some notes of his pupils. Petzval's lectures covered the integration of linear and differential equations with variable coefficients, and in connection with it, the vibration of strained chords; the equilibrium of elastic bodies and their movement ; variation calculus ; dioptrics ; the theory of higher mathematical equations, and of equations on higher degree. He dealt further with

* On the Camera Obscura. By Joseph Petzval. The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1859.

the theory of circular motion (astromechanics), and with the movement of waves. In dealing with the latter, he exposed a physical law, i. e. the law of the duration of the vibration periods.

*

In Vienna, he met Baron von Uchatius — the famous artillery man — who took a keen interest in photography. The encounter led Petzval to study the theory of shooting and of ballistics. By 1840, his studies were so far advanced that the artillery and engineering staff detailed a number of artillery officers to assist Petzval in working out a shooting chart, based on the law of air resistance.

General Wuich, who attended Petzval's lectures on ballistics, wrote that Petzval was the first to prove *the coincidence of the trajectories of projectiles, under certain conditions, which theory is known in ballistics as the law of the «polarisation of the trajectories»*.

Wuich further verified Petzval's second theory according to which *the elastic curve of a pole deflected aslant, under a certain load, was equal to the trajectory described by the load centre of the projectile.*

Petzval's ballistic theories were all based on *Euler's law* and on the principles of the German General *Otto.*

Not less interesting were his studies concerning the mathematical theory of the sound system. In this connection, he strongly opposed *D'Alambert's*, *Rameau's* and *Helmholtz's* theories.

Petzval was the first to raise the problems of the sound system, to fix the laws ruling it based on existing knowledge and on speculation. Entirely novel and interesting were his results in a special subject which he called «*Analytical Mechanics*». Beyond trying to prove his theories and the results he obtained, he found means of proving their practical application.

Still, photography was the field where Petzval earned his reputation by improving the primitive Niépce-Daguerre «camera obscura» to a photo camera.

*

Petzval's portrait objective accomplished in 1841 was sixteen-times more photo-sensitive than that of Chevallier, the maker of the objective for the Niépce-Daguerre camera. Petzval shortened the time of exposure from 30—50 minutes to 1.4 seconds.

The photo-sensitivity of the French objective was $f = 14$, that of the Petzval objective only $f = 3.7$.

Petzval's results were based on purely mathematical calculations. His lenses were cut by himself with tools he had also made in his own studio. He also prepared a *landscape* objective, but as it lacked sharpness, he put it aside in 1840, and improved it only later.

The *Petzval objective* is the *achromatic double objective*. It is a tribute to the genius of Petzval that the lines he laid down in 1841 in respect of the portrait lens are still generally followed in making lenses commonly used for portrait photography, though naturally, improvements have since been introduced by famous opticians in the latest years.

In modern studios, the portrait-objective is being replaced by the anastigmatic lens system, the wide aperture of which places it on a level with Petzval's device in point of speed, while its improvements and range render it specially serviceable in taking studio groups. In simple portraiture, extreme flatness of the field is not desirable, and a curvature of the field gives better modelling, for good portraiture does not necessarily require needle sharpness.

The Petzval lens — introduced by Voigtlaender in 1841 — is a rapid portrait lens, its characteristics are : the sum of the focal powers of the individual lenses in photographic combination, multiplied by the reciprocals of their respective indices, should be equal to zero ; or $\Sigma \frac{I}{\mu f} = 0$.

*

This pioneer portrait lens consisted of two dissimilar achromatic combinations set wide apart ; the front piece was planoconvex, composed of a biconvex lens of crown glass cemented to a planoconcave flint glass lens, while the rear element was a double convex set, composed of a biconvex lens of crown glass, separated by air space from a convex flint glass lens.

Petzval never revealed his experiments to anyone. Presumably, however, it was Dolond's telescope objective that lead him to his lens combination theory.

He postulated that it takes two components to achieve a higher photo sensitivity, viz ; 1. enlarging the aperture, and 2. diminishing the focal distance, i. e. reducing the image.

«*Both of these* — he emphasized — *can only be achieved by the application of two or more lenses instead of one.*»

Where there are no obstacles, the lenses have to be placed near each other. It appeared, however, that these theoretically juxtaposed lens systems could give no absolutely sharp image where the total of the lens curves gave the impression of plane glass. In other words, a sharp image could be obtained only in the case when at an infinite distance, and infinitely large picture was to be taken.

This result made Petzval dismount his lens system. He realized that over smaller distances, the objective effect had to be brought closer to the plane of the plane parallel.

This procedure required the achromatization of the dismounted lenses, to make them meet the two conditions of achromatization. For that purpose, the different achromatic images had to be projected into the adequate place, in order to be equal in size.

*

Petzval's discovery created great sensation. He entrusted Voigtlaender, the well known optician, to carry out his scheme ; he put all his calculations and drawings at the optician's disposal, but omitted to make a contract with him. This lead to a break between the two. The camera appeared in the market on Christmas day, in 1840, which day marks the beginnings of the history of photography.

After the breach, Petzval had to look for a new optician whose task it would have been to build his new landscape camera, called the «Orthoscope». Voigtlaender tried to make difficulties, but experts declared Petzval's Orthoscope superior to his apparatus. Petzval's new partner, Charles Dietzler, presented the new camera in 1857.

Another of Petzval's constructions was a projector, which he called «Nebelbild-Apparat» (dissolving view apparatus). For its purposes, he had to find a conveniently strong light source. He ascertained that the available light sources were unsatisfactory, as 2/3rds of their power was lost. The projector was illuminated by Drummond light, therefore Petzval's first attempt was to find a device by means of which 60% of the light could be utilized. Dr. Schroeder described the «Petzval lamp.» According to him, it was a combination of a hollow mirror and a double convex lens, thus it was *catoptrical-dioptric*. The hollow mirror was made of two parts, a spherical and an ellyptical one, the focus of the latter coinciding with the center of the curvature of the spherical mirror. The light sources were placed near the center, at equal distances — corresponding to the length of the spherical deviation of the lenses — thus the lights were directly thrown on to the lenses, and were amplified by the reflection thrown back from the corresponding part of the mirror.

The stray beams of the lights thus reflected, which failed to pass through the numerical apertures of the lenses, hit the ellyptical part of the hollow mirror which threw them towards the lenses, with double radiance, the polar center of which corresponded to the ellypsoid's focus through an angle equal to the one at which it would have emanated from the same acme as a central ray.

By this invention, Petzval succeeded in utilizing light up to 100 per cent. In 1847, when he came out with his projectors, he reached a light intensity of 12,000 stearin candles. The lime cylinder installed in the projector, glowed by oxyhydrogen, had a light power of only 1000 candles.

This experiment led Petzval to the problem of reflectors ; he was soon commissioned by the Artillery Directory in Vienna to construct reflectors suiting their purposes. He laid down the thesis : *the radiancy power of glowing bodies is stronger than that of flaring gases.*

*

Petzval, who never published his works, was at length persuaded to edit his notes. When he was given clerical help, he announced at a meeting in the

Academy of Sciences in Vienna in 1853 that he had begun recording his works which he planned to incorporate in five volumes. The book never appeared.

Mathematicians like *Euler*, *De la Cail*, *Gauss*, *Biot*, *Schleiermacher*, *Littrow*, *Stamper and Glimert* were in their days, also studying the problems elaborated by Petzval, but they never reached the point he did. The explanation lies simply in the fact that they lacked the technical means which Petzval possessed.

Professor Dr. Schroeder wrote in connection with Petzval's literary work as follows : «Professor Petzval, who showed such high skill in his method of scientific training and was capable of writing such books — as he planned to — gave merely an outline of his books which, unfortunately, have never been published. Those works could have been most useful for the future, as Petzval's theories were not only based on science, but also on his well made experiments.»

Petzval's literary work was restricted to two treatises dealing with his portrait and landscape objectives. Following that, he published only as much of his work as was absolutely necessary.

His few works were published solely by the Vienna Academy of Sciences, save his first book which appeared in Budapest.

*

One of Petzval's most important and valuable works was «*The Integration of the Differential Equation with Permanent and Variable Coefficients.*» In this work he tried to prove the results of his calculations and experiments. Petzval's first book was published only in 1853, though the manuscript was ready in 1850.

*

It would take long to deal with Petzval's activities in detail. He was a great man, a fine brain, an explorer, scholar, professor and inventor, but one thing he was not ; he was no polyhistor.

He was a mathematician who had imagination, blessed with manual skill, an enthousiast of applied mathematics and one of its early pioneers.

*

Petzval's private life ran parallel to his scientific work. He loved the sciences dealing with Nature, and his friends were all of a kindred spirit. He married at an advanced age, but after a short and happy matrimonial life, his wife died. Petzval retired from public life. He did not see anyone, with the exception of two of his close friends, and died a lonely man in 1891.

Petzval's activity was greatly honoured and appreciated ; he became Knight of the Francis Joseph Order in 1849 ; in 1870, when he retired from his chair at the University, he became Court Councillor ; the Hungarian Academy

of Sciences invited him as „guest member;" he was a member of the Vienna Academy, and of many foreign scientific institutions. In spite of the honours piled on him, he died a lone, forsaken and broken man. He could never get over the disappointment that Voigtlaender had caused him.

Petzval's nationality was disputed for a long time, until recently, the writer of this biography succeeded in finding in the Archives of the Hungarian Academy of Sciences, Petzval's original letter in his own handwriting, giving thanks for having been elected a member of the Academy. In that letter, he emphasized his unfaltering loyalty to the Hungarian mother country, which he would never give up. The letter eliminates all doubts on the subject, and in the last meeting of the Technicohistorical Committee it was pointed out that on the strength of the documents produced by the writer of the present paper, the said Committee finds the problem to be definitely cleared and settled.

*

Petzval is buried in the Zentral Friedhof in Vienna. The City of Vienna granted him an honorary grave, and erected a monument for him. The University of Vienna put up a memorial tablet, bearing his relief portrait. There is also a Petzval Gasse in Vienna keeping his memory.

SUMMARY

The paper deals with the life and work of Joseph Petzval, engineer of Hungarian descent, the inventor of photo-optics. He was born at Szepesbéla in North Hungary, in 1807. He became professor at the »Institutum Geometricum« of Pest, and was later engaged by the municipality of Pest to work on tasks ranging from city planning to canalisation ; on two occasions — in 1830 and 1832 — he saved the Hungarian capital from the flood.

In 1836, he was appointed professor of mathematics at the Vienna University. He was a pioneer of applied mathematics, both in Pest and in Vienna.

The treatise gives a review of Petzval's theoretic and practical achievements, such as his optical experiments and inventions, his studies in ballistics, lighting techniques and vibrations. His most important inventions are the folding photo camera, the 12 000 candle-power «Petzval lamp», and the improved telescope.

Petzval's private life is told in great outlines.

ЙОЖЕФ ПЕЦВАЛ
ИЗОБРЕТАТЕЛЬ ФОТОГРАФИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Я. ШЕРЕШШ

Резюме

Труд автора, с одной стороны, занимается инженерным трудом Йожефа Пецвала, происходящего из Венгрии, профессора университета, являющегося изобретателем фотооптики, а с другой, — его деятельностью в области теоретической оптики.

Йожеф Пецвал родился в Венгрии в 1807 году. Образование Йожеф Пецвал получил в Венгрии, между прочим, в стенах Пештского (в настоящее время Будапештского) университета, а именно в »Institutum Geometrikum«, созданного в 1782 году, — первой высшей школы во всем мире, которая давала общую инженерную подготовку по металлургии и горному делу и перед которой была создана лишь горная академия в Шель-

мецбанья в 1763 году, — и в 1828 году он получил диплом инженера. Позднее он стал профессором в »Institutum Geometr'kum«. Как инженер города Пешт (1828—1835) он проявлял большую инициативу и дважды спас столицу Венгрии от наводнения (1830, 1832), составил план градостроительства и сооружения дунайского канала.

В 1832 году при Пештском университете Йожеф Пецвал сдал докторскую диссертацию по высшей математике. При университете он сначала работал в качестве адъюнкта, а позднее в качестве доцента. В университете он был профессором в 1835—1836 годах. Затем был приглашен в университет в Вену в качестве профессора на кафедру высшей математики. Как в Пештском, так и в Венском университете он ввел курс прикладной математики; одновременно был одним из ученых, умеющих ломать старое и прокладывать новые пути.

Далее, в труде, посвященном жизни и деятельности Пецвала, трактуется его практическая и теоретическая работа; в основном труд занимается его исследованиями и изобретениями в области оптики, а также его теорией фотокопирования, и в связи с которыми, также баллистикой, осветительной техникой и теорией колебаний. К его изобретениям относится фотокамера с растяжным мехом, лампа Пецвала на 12 000 свечей и его система телескопа, которая является его наиболее выдающимся изобретением.

JOSEPH PETZVAL

INVENTEUR DE L'OBJECTIVE PHOTOGRAPHIQUE

J. SERESS

RÉSUMÉ

L'étude s'occupe d'une part de l'activité d'ingénieur en Hongrie, d'autre part des recherches sur le territoire de l'optique scientifique de Joseph Petzval, professeur d'université, l'inventeur de l'objective photographique.

Né en 1807 à Szepesbéla et après avoir fait ses études primaires, de lycée et d'université en Hongrie, Petzval acquit son diplôme d'ingénieur au célèbre Institut Géometrique (Institutum Geometricum) en 1828. Cette école polytechnique — première de ce genre au monde — a été fondée en 1782 et développait son activité au giron de l'Université de Pest (aujourd 'hui Budapest). Plus tard il devint professeur de l'Institut. Ingénieur municipal de Pest, Petzval sauva, deux fois-même la capitale de l'inondation du Danube. Il a conçu des plans pour l'urbanisme et pour un canal danubien.

En 1832 il a soutenu sa thèse de doctorat des mathématiques supérieures à l'Université Royale des Sciences de Pest. Il était d'abord adjoint, plus tard chargé de cours, enfin — en 1835—36 — professeur de cette Université. En 1836 l'Université des Sciences de Vienne l'appela à la chaire des mathématiques supérieures. C'est lui qui a introduit les mathématiques appliquées à ces universités.

L'étude rend compte ensuite de l'activité théorique et pratique de Petzval, surtout de ses recherches et de ses inventions, fait connaître ses théories d'optique, de ballistique, d'éclairage et d'acoustique. D'entre ses inventions le soufflet de la caméra photographique, la fameuse «lampe Petzval» d'une force de 12 000 bougies et la modification de téléscope sont les plus remarquables.

JOSEF PETZVAL

ERFINDER DER PHOTOOPTIK

J. SERESS

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Studie befasst sich einesteils mit der Ingenieurstätigkeit: von Josef Petzval, dem Erfinder der Photooptik, während seines Aufenthaltes in Ungarn und andernteils mit seinen Forschungen auf dem Gebiete der wissenschaftlichen Optik und anderer Wissenschaftszweige.

Petzval wurde 1807 in Ungarn geboren. Seine Universitätsstudien absolvierte er in Ungarn und erwarb im Jahre 1828 das Ingenieurdiplom am berühmten »Institutum Geometricum«. Diese im Jahre 1782 gegründete, im Rahmen der Pester (zur Zeit Budapester) Universität wirkende Hochschule war die erste auf der Welt, welche Ingenieure ausbildete. Später wurde er dann selber Professor am »Institutum Geometricum«.

Seine mannigfaltige Tätigkeit als Ingenieur der Stadt Pest (1828—1835) erstreckte sich von der Anfertigung von Plänen zur Regelung des Städtebaus bis zur Projektierung eines

Donaukanals. Bei zwei Gelegenheiten (1830, 1832) rettete er die ungarische Hauptstadt vor der Überschwemmung durch die Donau.

Im Jahre 1832 legte er an der Königlichen Universität in Pest die Doktorprüfung für höhere Mathematik ab. An dieser Universität wirkte er zunächst als Adjunkt, später als Dozent und in den Jahren 1835—1836 als Professor.

Im Jahre 1836 wurde Petzval auf Grund eines Wettbewerbes als Professor auf den Lehrstuhl für höhere Mathematik der Wiener Universität berufen. Er war es, der als einer der ersten Bahnbrecher der angewandten Mathematik diese sowohl an der Pester als auch an der Wiener Universität einführte.

Im weiteren berichtet die vorliegende Studie über die theoretischen und praktischen Ergebnisse der Tätigkeit Petzvals, vor allem über seine Untersuchungen und Erfindungen auf dem Gebiete der Optik, sowie über seine bahnbrechenden Arbeiten auf dem Gebiete der Photographie, über seine Abhandlungen und Versuche in so verschiedenen Wissenschaftszweigen wie Ballistik, Beleuchtungstechnik und Schwingungslehre. Unter seinen Erfindungen sind in erster Linie die ausziehbare Photokamera, die Petzval-Lampe mit einer Lichtstärke von 12 000 Kerzen und seine Teleskopmodifikationen zu nennen.

Die Nationalität Petzvals ist in einem Teil des ausländischen Schrifttums umstritten. Im Archiv der Ungarischen Akademie der Wissenschaften liegt indessen eine eigenhändige Erklärung Petzvals aus dem Jahre 1873 vor, laut der er sich mit Nachdruck zu seiner ungarischen Nationalität bekennt.

DETERMINATION OF THE ELASTICITY OF LEATHER

G. TÓTH D. Chem. Sc. and V. PÓSA*

TEST ASSISTANTS: J. ZILLES and J. KERESE

LEATHERWORKS, PÉCS, and HUNGARIAN RESEARCH INSTITUTE

FOR THE LEATHER INDUSTRY, BUDAPEST

[Manuscript received 22nd April 1954]

1. Survey of literature

Firmness, temper and elasticity are valuable properties in leather, the relation of which to quality has been known for a long time. Yet, no standard method of measuring, nor even a generally adopted definition has been worked out up today concerning the elasticity of leather. *Tchernov*'s definition [1] of the firmness being the elasticity of leather in relation to bending appears to be most appropriate.

Firmness was first measured by *Wilson* [2], according to whom relative firmness was the force in terms of pounds, needed for bending a leather strip of given dimensions on a tensile strength machine. *Jablonski and Waigand* [3] attempted to define the tensile and bending of elasticity of leather. *English* [4] examined the temper of upper leathers. Besides them, *Mihaylov* [5], *Kutyanin* [6], *Platunov and Zakatova* [7], *Fridland* [8], *Herfeld* [9], *Conabere* [10], *Cheshire* [11], *White and Caughley* [12], *Dwyer* [13], *Mrs. Halász* [14], *Tóth and Kerese* [15], *Tóth and Pósa* [16] and others studied the problem in its details. Reports were published on several appliances constructed for the measurement of firmness, such as *Naumann-Schopper*'s stiffness tester [9], the firmness tester of the *Tinius Olsen* machine factory [17], *Zilles*' sole leather fatigue test appliance [18], and *Pósa*'s durometer]19].

In order to compare the values of elasticity obtained on the diverse meters, standard terms are required. From the moduli that have been in use, the bending modulus of elasticity first applied by *Jablonski and Waigand* [3], *Cheshire* [11] and by *Fridland* [8], appears to lend itself best to be adopted for the standard determination of the elasticity of leather. Other indices, like those referring to relative firmness, rigidity, hardness, temper, elasticity, etc. give only the values obtained by certain special methods.

However vast is the literature available on the subject, it fails to provide sufficient information concerning the relation of the elasticity of leather to tanning and currying, to the size and span of the leather, to fatigue operations, etc. Therefore, a couple of years ago the authors started a series of experiments to clarify the factors involved in the determination of elasticity.

This paper deals with the bending modulus of elasticity of leather. Elasticity toward other stresses (tension, compression) in relation to the bending modulus of elasticity will form the subject of a separate paper.

2. The relation of deflection and of the size of the leather specimen to the bending force

Due to its fibrous structure, leather is not a perfectly homogenous material. The authors therefore first examined the relation of deflection to load on homogenous bodies. The deflection of elastic steel, wood and glass plates under various loads and of diverse lengths of span is shown in *Fig. 1*. It will be seen that where

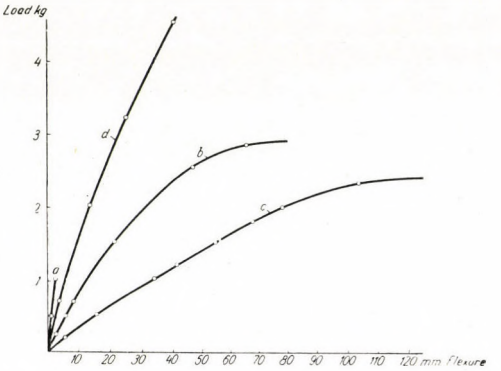


Fig. 1. a) Glass plate 32.5 mm in width, 2.03 mm thick at 25 cm test span
b) Steel plate 24.0 « « 0,90 « « 25 « «
c) Wooden ruler 54.0 « « 2.80 « « 50 « «
d) « « 54.0 « « 2,80 « « 30 « «.

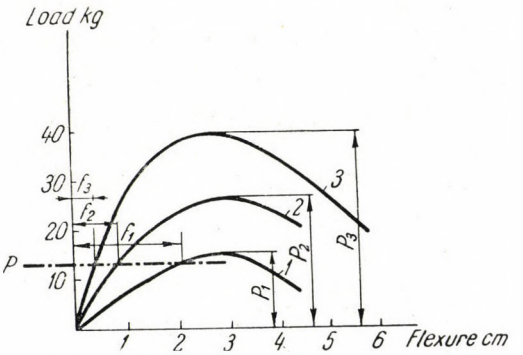


Fig. 2 Relation of the load on various sole leathers to flexure on Rejtő's breaking (tensile) test appliance. Test span 9.0 cm. 1.) Finders' bend, 6.5 mm thick, 80 mm in width. 2.) Finders' bend 5.0 mm thick, 80 mm in width. 3.) Manufacturers' bend, 5,3 mm thick, 80 mm in width

the deflection is slight, it shows linear relation to the load, i. e. *Hooke*'s formula according to which the deformation is proportional to the stress, holds good. Where the deflection is greater, the straight section of the diagram gradually flattens, and ultimately goes over into horizontal (maximum load) at the point where the deflection is so great that the beam resting on knife edges slips down between the two supports. By drawing a tangent from the initial straight sec-

tion of the graph, the elasticity modulus E may be derived by means of known formulae.

In the case of leather, however, it is just this initial section that cannot be measured with the accuracy required, for it is often very flat and begins to rise appreciably only later. Where deflection produced by greater weight *(Fig. 2 f_1, f_2, f_3)* is measured, — for which *Hooke*'s formula is no longer valid, — at equal load (P), a different section of the curve should be taken into account for every leather, to determine its firmness. With leathers of low elasticity, this would be close to the maximum load P_1 at which the leather still maintains equilibrium, whereas with comparatively thick and stiff leathers, the initial section of the curve should be taken into account, where any weight increment would produce substantial additional deflection.

More accurate values can be obtained if the deflection [16] is set in such manner that the measured weight is on a level with the horizontal tangent of the curve ; in other words. the maximum weight *(Fig. 2 P_1, P_2, P_3)* is measured, under the effect of which the leather strip would already slip through between the supports. This generally sets in when the ends of the leather strip are bent through an angle of about 90°. In such a case, the force acting on the supports can be divided into two components at right angles to each other *(Fig. 6)*, one of which presses the supports downward, while the other endeavours to push them horizontally apart. Where the sides of the leather strip bend through an angle of 45° to the horizontal, the two components are almost equal, so that under further loading, the strip would slip through.

This method of measurement can be employed with the *Wilson* [2] or *Herfeld* firmness tester [9], *Tóth*'s apparatus *(Fig. 17)*, with the tensile test appliance *(Figs. 18* and *20)*, and with the *Zilles* apparatus *(Fig. 22)*.

According to theory, there is a linear relation between the width of the leather strip and the flexure. To verify this theory, the authors measured the load required for bending a 12 cm broad leather strip through an angle of 90° after fatiguing it to obtain a constant value ; they then cut it into 3 strips of 4 cm width each, and made repeated measurements of the load. According to their expectation, the total load acting on the strips was equal to the load acting on the original width of the test specimen.

The next point to be cleared was the relation between the firmness and thickness of the leather. In accordance with strength tests, the flexure (f) of a centrally loaded beam of uniform rectangular cross section supported on both ends, at a slight deflection, was

$$f = \frac{P \cdot 1^3}{48\, I \cdot E} = \frac{P 1^3}{4 E a b^3}, \tag{1}$$

where P is the force acting at the centre of the beam (kg), l = length of the beam (cm), I = the moment of inertia, E = elasticity modulus, a = the width

of the beam and b = depth of the beam in cm. The above formula was deduced by *Bernoulli* (20, 21, 22).

If the extent of the flexure and the length of span are assumed to be constant throughout, and specimens of equal width are tested of the same material, the formula is simplified :

$$P = \text{const. } b^3. \qquad 2)$$

This relation has been verified by the statistical examination of a large number of leather samples. *Fig. 3* shows the relation of the thickness of sole leather butts produced from raw hides of the same source but of variable thickness to the loads causing slipping through. It will be seen thereon that the force needed for bending butt specimens of given sizes, between 4—6,5 mm thickness varies approximately according to formula

$$P = 0.06\ b^3, \qquad (3)$$

where b stands for thickness in mm, and P for the load needed for bending the leather through an angle of 90°, in kg.

The extent of the deflection is affected also by the length and own weight of the test specimen. Where the span is short, the effect of the own weight is negligible within the accuracy of the measurement. The edges of the specimen should not project greatly beyond the supporting rollers lest the cantilever weight thus arising diminish the flexure.

3. Departures from the behaviour of homogenous, absolutely elastic bodies

In contrast to homogenous materials, the elasticity of leather is generally different whether stressed on the flesh side or on the grain side. Most authors reported on the results of stress applied on the flesh side.

At the slight flexure of oxhide soles, a difference in the loading applied on the flesh and on the grain side respectively is hardly noticeable, but when the deflection forms an angle of 90°, the stress required on the flesh side is only about half of the stress on the grain side producing the same effect. The explanation herefore lies in the top grain layer being made up of fine fibre bundles which can be compressed and stretched like felt, while the fibre structure of the flesh side consists of bundles parallelly oriented with the surface of the hide, the tensibility of which is considerably less, on the other hand they are compressible. To be sure, loading on the flesh side corresponds also to natural stress acting in the live animal. In pigskins, the difference between the stress on the two sides is substantially less.

Apart from the elasticity, width and thickness of the leather, the extent of the deflection depends also on the frequency of flexure performed earlier. The results of consecutive stiffness measurements effected on 3 butts, loaded on

the grain side are shown in Table I. The values of the bending moduli of elasticity obtained from consecutive measurements show a decreasing trend, depending on the quality of the leather.

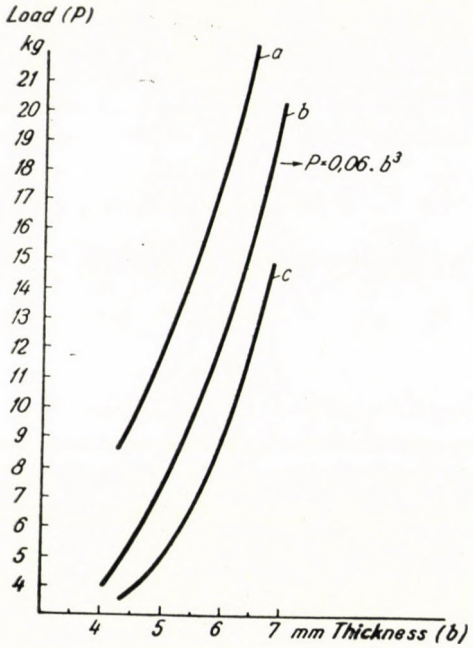


Fig. 3. The thickness of sole leather bends plotted against the load required for their 90° deflection. *a)* Result of the initial test of bends loaded on the grain side. Test span 50 cm. *b)* Average of 10 consecutive tests made with 30×12 cm finders' bend specimens loaded on the grain side. Test span 15 cm. *c)* Result of the tenth test wih finders' bends loaded on the flesh side. Test span 50 cm

TABLE I

	Thickness mm	Load at 15 cm span	Consecutive measurements in kgs.									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Manufacturers' bend ..	5,0	on grain side	9,0	8,5	7,5	7,5	7,0	7,0	7,0	6,5	6,5	6,2
Finders' bend	5,0	«	12,0	9,5	8,5	7,5	7,0	7,0	7,0	6,5	6,5	6,0
Finders' bend	6,5	«	26,5	23,5	21,5	20,5	19,5	18,5	18,5	18,5	17,5	17,5
Manufacturers' bend ..	5,0	on grain side	8,0	—	7,5	—	7,2	—	7,0	—	6,5	—
		on flesh side	—	4,5	—	3,5	—	3,5	—	3,5	—	3,0

Firmness values are dependent also on the arc of flexure of the leather strip : the sharper the curvature, the greater the fatigue acting on the leather.

In order to spare time, it is advisable to begin measurements after having fatigued the leather to a certain degree ; this is also recommendable in order to dissociate the test results from the pretreatment of the leather specimen as far as possible. Following a comparatively long period of rest, fatigue symptoms will strongly diminish. Thus, e. g. after one or two hours of rest, the firmness of

wet sole leather will recover its original value. Against this, the firmness of dry leather does not usually regain its original value even after long rest.

In examining fatigue symptoms, attention should be paid to moisture contents, because the elasticity of leather measured in dry state is a function of the moisture it contains. The elasticity data reported in this paper refer either to 14% moisture content, or to a state following 24 hours of soaking.

For brief notation, in the following the words »dry« or »wet« will be shown as an index of E, together with the number of the flexures performed. E. g. the elasticity modulus measured after 24 hours' soaking and 10 flexures will be expressed as follows: E_{10}^{wet}. The result of the first measurement at 14% moisture contents shall be E_1^{dry}.

The fatigue of leather described above is connected with its plasticity, relaxation (23) and hysteresis. These symptoms shall be discussed but briefly in this report.

With absolutely elastic materials, the deformation ceases promptly and completely upon cessation of the stress. The plastic properties of leather are, however, far more involved, its behaviour resembles rather that of rubber-like materials and plastics. Going out from the equation expressing Hooke's law where σ stands for tension, ε for specific deformation and E for the

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{4}$$

modulus of elasticity, and examining the role of time, we arrive to phenomena summed up under the name: relaxation. As E is independent from the time, it can be written

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{d\varepsilon}{dt}. \tag{5}$$

This equation is called the Maxwell equation, and experience has shown that it is applicable to absolutely elastic materials.

For plastic materials, experiments frequently proved the validity of the following equation:

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma}{\varrho} \tag{6}$$

where ϱ is called relaxation time.

For leather, relaxation time is not constant, but it is increasing.

The relaxation of leather is illustrated by the following example:

The 23% constant stretch of a 25 cm long strip of kidskin, of 0,50 cm^2 cross sectional area, requires at first 65 kg. load, which is diminishing gradually in accordance with Table II.

TABLE II

t (sec)	P (kg)	ϱ (sec)
0	65	—
3	64	1,000
10	62,6	1,400
30	60,6	2,300
100	58,5	5,000
1 000	54,1	29,000
10 000	48,—	174,000
100 000	38,—	1,000,000

The tensional modulus of elasticity derived from the initial stress was 565 kg/cm² ; after 28 hours, it declined to 330 kg/cm².

After repeated stressing, also hysteresis phenomena are noted on the leather [3]. Plotting the relation of load (P) to deformation (λ) in stretching or bending the leather, and plotting the diagrams also for the reduction of the load, the curves will be found to diverge *(Fig. 4)*. In line with similar phenomena in other fields of physics, this behaviour of the leather is called elastic hysteresis [24].

The area between the two curves is proportional to the work lost during the elastic cycle. E. g. according to *Fig. 4*, when loading on the flesh side, only about 1/3rd (0,33 kgcm) of the work input (1,10 kgcm) is recovered.

In order to clear up precisely the relation between the above described phenomena and the fatigue of leather, further tests will be necessary. The relative experiments are in progress.

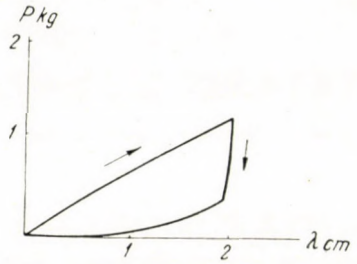


Fig. 4

4. Relation of load to the length of span at comparatively large deflections

According to formula No. 1, the forces needed for bending the same beam to the same extent are in inverse ratio to the third power of the length of span. That formula holds good, however, only for slight deflections. The experiments conducted by the authors confirmed that at deflections where the beam just slipped down between the supports, the bending stress was inversely related to the square of the length of span. Table III shows the bending loads of highly elastic steel bands until their complete slippage, at various spans, derived from tests made by the authors.

TABLE III

Width of steel band	Thickness of steel band	Load	Measured length of span cm	Span computed on the basis of square root ratio according to formula $23{,}5\sqrt{\frac{20}{\text{load}}}$	Span computed on the basis of third root ratio according to formula $23{,}5\sqrt[3]{\frac{20}{\text{load}}}$
mm	mm				
13,0	0,2	20 g	23,5	23,5 cm	23,5 cm
13,0	0,2	50 g	15,2	14,9	17,3
13,0	0,2	100 g	10,5	10,5	13,7
13,0	0,2	200 g	7,5	7,4	11,0
13,0	0,2	500 g	4,7	4,7	8,0
13,0	0,2	1000 g	3,3	3,3	6,4

The relation between bending force and length of span shall be computed according to the following considerations.

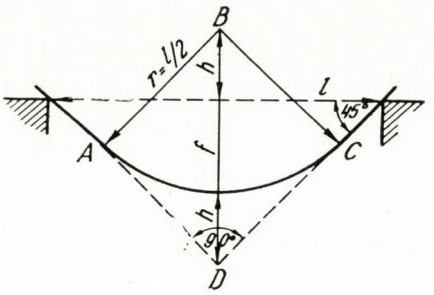


Fig. 5

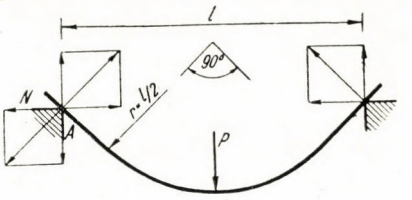


Fig. 6

If the beam is bent to an extent that its ends include an angle of 90°, speaking of an elastic steel band, the shape of the beam very closely resembles an arc, the radius of which is $l/2$, and the ends of the beam run as its tangents. The diagonal of the rectangle A, B, C, D is shown in Fig. 5.

$$a = 2h + f \quad \text{and} \quad 2r^2 = a^2$$

$$f = r - h = 2r - r\sqrt{2} = 0{,}2925\ l\,, \tag{7}$$

therefore according to formula (1), for the same beam :

$$f = 0{,}2925 l = \frac{Pl^3}{\text{const}} \quad \text{and} \quad P = \frac{\text{const}}{l^2}\,.$$

Accordingly, the ratio of the bending forces acting on the same beam, at two different spans is

$$P_1 : P_2 = l_2^2 : l_1^2 \quad \text{and} \quad l_1 = l_2 \sqrt{\frac{P_2}{P_1}}\,. \tag{8}$$

The above quadratic ratio is applicable not only to elastic steel bands, but also to leather. In putting this to test, the authors bent a 10×30 cm sole specimen twenty times in succession between rollers mounted at 5 cm distance, in order to obtain approximately constant values in succeeding measurements ; they then measured the loads at which the beam slipped down at variable spans. The results are shown in Table IV below.

TABLE IV

Span	Measured load	Load computed on the basis of ratio	
		quadratic	cubic
15,0 cm	2,3 kg	2,3 kg	2,3 kg
12,0	3,9	3,6	4,5
10,0	5,6	5,2	7,8
8,0	8,6	8,1	15,2
5,0	19,6	20,6	62,0

The fact that at a point where the beam almost slips off, the stress is inversely related to the second power of the span, can also be proved theoretically (Formula 15).

By putting a gradually increasing load on the centre of the beam, it should be bent to such extent that its ends form an angle of 90° *(Fig. 6)*. Under the combined effect of the load (P) and the flexure, reactions arise at the points of support ; these forces can be resolved into two components by a parallelogram of forces. One force does not allow the beam to sag, while the other tends to bend its ends inward. At a point where the ends of the beam form an angle of 45° to horizontal, the two forces are in equilibrium, and the beam manages to stay in position over the fulcra. Where the load is smaller and consequently the ends of the beam form an angle to the horizontal, less than 45°, the perpendicular force is greater than the horizontal component, and equilibrium is produced under the effect of the tensions created by flexure, as a result of which the beam does not sag further.

Where, however, the load imposed is greater, so that the angle enclosed by the ends of the beam with the horizontal is greater than 45°, the horizontal reaction overpowers the friction caused by the perpendicular force, i. e. the friction caused by the perpendicular force is not strong enough to uphold the beam, it will begin to sag between the points of support with increasing velocity. In other words, the load must be reduced in order to maintain the beam in equilibrium. In a state of equilibrium, the load is maximum when the ends of the beam form an angle of 45° to the horizontal.

Slippage off sets in exactly because the stress pressing the knife edges downward (A) and the stress forcing them horizontally apart (N) (see Fig. 6) are equal, or because the former force is smaller than the latter.

On centrally loaded beams in equilibrium, the bending moment (M) is

$$M = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4} . \tag{9}$$

Where the deflection is comparatively large, the value of l in the above formula does not quite agree with the length of the span, but is slightly smaller (l') and its value can be trigonometrically determined. The reason for this is that in superposed layers, the actual points of support are closer to each other in the upper layers. Where the depth of the beam (b) is negligible as compared to the span, l may be written instead of l'.

The value of M can also be expressed in terms of the moment of inertia (I) and the stress in the extreme layers (σ).

$$M = \sigma \frac{I}{e} , \tag{10}$$

where e is the distance of the extreme layer from the neutral layer.

Substituting into equation (9)

$$\frac{Pl}{4} = \sigma \frac{I}{e} .$$

The stress (σ) can be expressed also as follows :

$$\sigma = E \frac{\lambda}{l''} \text{ therefore } \frac{Pl}{4} = \frac{E \cdot I \cdot \lambda}{l'' \cdot e} \text{ from which } P = \frac{4 \cdot I \cdot E \cdot \lambda}{l \cdot l'' \cdot e} , \tag{11}$$

where λ stands for the elongation of the outside layer, l'' for the portion of the beam to which elongation λ is referred.

As in homogeneous beams of rectangular cross section $I = \frac{ab^3}{12}$ and $e = \frac{b}{2}$,

$$P = \frac{ab^3 \cdot E \cdot \lambda}{3 \cdot l \cdot l'' \cdot e} = \frac{2\ ab^2 \cdot E \cdot \lambda}{3\ l \cdot l''} . \tag{12}$$

The elongation of the extreme layer, λ can be expressed as follows:

Where the deflection is at right angle, the central portion of the beam forms an arc corresponding by close approximation to one quadrant of a circle having a radius of $l/2$; the ends of the beam form tangents to the arc *(Fig. 7)*. The top layers of the beam are compressed when bent, while the bottom layers are correspondingly stretched, providing it is assumed according to the above that the neutral axis as far as elongation is concerned, is situated in the middle of the beam ($e = b/2$). The elongation of the neutral layer is therefore 0, while the strains of the outside layers are equal, but with opposite sign. The length of the quadrant arc measured on the bottom surface of the beam is

$$\frac{2(r+b)\pi}{4},$$

while the length of the quadrant arc in the neutral layer is $\dfrac{2\left(r+\dfrac{b}{2}\right)\pi}{4}$.

The difference between the lengths of the two arcs corresponds to the elongation and/or compression of the extreme layers:

$$\lambda = \frac{2r\pi}{4} + \frac{2b\pi}{4} - \frac{2r\pi}{4} - \frac{b\pi}{4} = \frac{b\pi}{4}. \tag{13}$$

Actually, the bent beam is not exactly a circular arc having a radius of $l/2$, but a slightly divergent parabolic arc. The ends of the beam are therefore not perfectly straight at the points of support. As the curvature of the ends of the beam is extremely small, the elongation of the extreme layer varies in reality but very slightly from the value λ that has been taken into account when speaking of the quadrant arc. The portion of the beam (l'') to which elongation λ has been referred, is accordingly slightly longer than the arc of the quadrant having a radius of $l/2$.

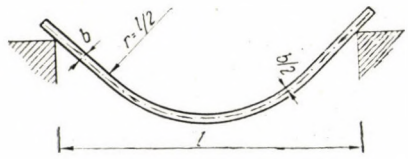


Fig. 7

Measurements made on highly elastic steel bands showed that the value of l'' was approximately equal to l. Therefore, according to formulae (12), and (13),

$$P = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{E a b^3}{l^2} = 0{,}52\ E \frac{ab^3}{l^2}. \tag{14}$$

If the beam resting on two knife edges is bent so that its ends form an angle of 90° (slipping off), the bending modulus of elasticity is

$$E = \frac{1{,}92 \cdot P \cdot l^2}{ab^3}. \tag{15}$$

Computed from small and large deflections, the values of E are identical according to either formulae (1) or (15).

The above formulae have been verified by a great number of measurements effected on elastic bodies of various sizes (Table V). For control purposes, the tensional elasticity modulus of a steel band of $2{,}0 \times 0{,}015 = 0{,}03$ cm^2 cross

section has also been established on a tensile testing appliance; it shows a fair degree of agreement with the results compiled in Table V:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{510/0{,}03}{0{,}40/57} = 2.09 \cdot 10^6. \qquad (4)$$

The thickness of the steel springs examined is negligible in comparison to the length of span. If, however, this condition is not met, formula (15) must be corrected. In making measurements on leather, the length of span is generally assumed to be 25-times the thickness, in which case the correction referred to above amounts to 3—5% according to calculations not detailed in this paper.

TABLE V

Material	Length of span cm	Deflection cm	Width of beam cm	Thickness of beam cm	Load kg	Formula applied	Bending modulus of elasticity (E) — kg/cm²
Steel	11,4	until slippage	2,00	0,015	0,060	No. 15	$2{,}10 \cdot 10^6$
«	8,9	«	2,00	0,015	0,097	«	$2{,}18 \cdot 10^6$
«	9,9	0,34	2,00	0,015	0,020	No. 1	$2{,}11 \cdot 10^6$
«	23,5	until slippage	1,30	0,020	0,020	No. 15	$2{,}05 \cdot 10^6$
«	25,0	«	1,60	0,049	0,300	«	$2{,}00 \cdot 10^6$
«	28,0	«	2,40	0,090	2,30	«	$2{,}04 \cdot 10^6$
«	25,0	«	2,40	0,090	2,90	«	$2{,}05 \cdot 10^6$
«	25,0	0,21	2,40	0,090	0,20	No. 1	$2{,}12 \cdot 10^6$
«	10,0	0,33	9,00	0,020	0,200	«	$2{,}10 \cdot 10^6$
«	10,0	0,50	9,00	0,020	0,300	«	$2{,}08 \cdot 10^6$
«	20,6	0,56	9,00	0,020	0,038	«	$2{,}05 \cdot 10^6$
«	9,4	until slippage	9,00	0,020	0,855	No. 15	$2{,}02 \cdot 10^6$
«	17,2	«	9,00	0,020	0,262	«	$2{,}07 \cdot 10^6$
«	29,4	«	9,00	0,020	0,090	«	$2{,}07 \cdot 10^6$
«	30,5	«	2,00	0,156	9,10	«	$2{,}15 \cdot 10^6$
«	25,0	0,50	2,00	0,156	2,10	No. 1	$2{,}16 \cdot 10^6$
Pine	30,0	0,11	5,40	0,280	0,200	«	$10{,}3 \cdot 10^4$
«	30,0	until slippage	5,40	0,280	6,50	No. 15	$9{,}8 \cdot 10^4$
Copper	13,2	0,13	1,40	0,152	1,10	No. 1	$9{,}9 \cdot 10^5$
Glass	25,0	0,25	3,25	0,203	1,00	«	$0{,}57 \cdot 10^6$
Plywood	28,3	until slippage	3,90	1,28	0,77	No. 15	$1{,}42 \cdot 10^4$

If the leather is not bent between parallel knife-edges but between rollers, the length of the span will not be identical with the distance between the axes where the deflections are strong, but it will be smaller.

The actual length of span between the rollers when the beam is bent through an angle of 90° can be easily determined by trigonometry.

E. g. between rollers of 8 mm diameter, according to *Fig. 8*, when the axes of the rollers are 120 mm removed from each other, the actual length of span is

$$120 - 2a = 120 - \frac{2r}{\sqrt{2}} = 114{,}4 \text{ mm} . \tag{16}$$

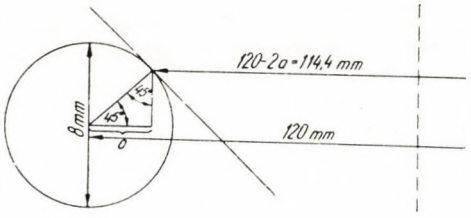


Fig. 8

5. Effect of the position of the neutral zone on the force required for bending leather

Measurements of the force required for bending leather will yield different values according to whether the leather is loaded on the flesh- or on the grain side. The explanation herefor is that the fibre structure of leather is not homogeneous throughout its cross section, and consequently the moment of inertia is not invariably conform to formula $I = ab^3/12$ deduced for beams having a homogeneous rectangular cross section. As formula (15) has been deduced on the base of the above relation, a correct value for the elasticity modulus can obviously be obtained only where the neutral zone is situated in the middle. For enlightening this problem, the elongation of the extreme layers and the moment of inertia should first be examined.

It can be proved that the mean value of the elongation and of the compression of the extreme layers is invariably

$$\lambda = \frac{b\pi}{4}$$

irrespective of the situation of the neutral axis.

According to *Fig. 9*, assuming that the neutral zone is situated at xb distance from one surface, inside the cross section of the support, the compression of the top layer can be expressed by

$$\lambda_1 = \frac{2(r+xb)\pi}{4} - \frac{2r\pi}{4} = \frac{xb\pi}{2} ,$$

and the elongation of the bottom fibres by

$$\lambda_2 = \frac{2(r+b)\pi}{4} - \frac{2(r+xb)\pi}{4} = \frac{b\pi}{2}(1-x).$$

I. e. the average difference in the length of the extreme layers relative to those of the neutral layer is in either case:

$$\lambda = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} = \frac{b\pi}{4}(x+1-x) = \frac{b\pi}{4}.$$

The value of the moment of inertia depends on the position of the neutral axis. Where the neutral axis lies exactly in the middle of the beam, $I = \frac{ab^3}{12}$.

Where the neutral zone lies at one of the surfaces *(Fig. 10)*, it can be deduced (25) that $I = ab^3/3$.

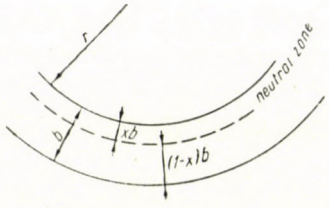


Fig. 9

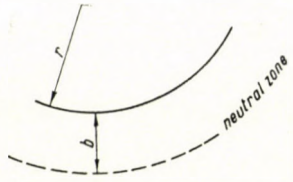


Fig. 10

In any other case where the neutral zone is not situated in the middle, $I = ab^3/y$, where the value of y is between 12 and 3. As it will be seen from formula (11)that at an equal degree of deflection the value of P is in direct ratio to I, and E is a constant characteristic of the quality which is unaffected by the load acting on either side, the value of P will be lowest where the neutral zone lies in the middle. In any other case, bending the beam will require greater force.

By the fact that loading soles on the grain side requires about twice as great force than loading on the flesh side, it can be inferred that when the load is imposed on the grain side, the neutral zone is displaced by about $^1/_5$th of the thickness as compared to its position when loaded on the flesh side. It will be readily seen namely that where

$I = ab^3/12$ when the neutral zone lies in the middle,
$I = ab^3/6$ when the neutral zone lies at about 1/5th depth
$I = ab^3/3$ when the neutral zone lies at one surface

the forces required for bending are in the ratio 1 : 2 : 4. In other words, the dislocation of the neutral zone by about 1/5th of the depth doubles the force needed for bending.

As the flesh layers also have some slight elongation, the neutral zone would not be located at the surface of the leather when loaded on the grain side, but somewhat deeper. As the double strength requirement entails additional displacement by 1/5th of the depth, when loaded on the flesh side, the neutral zone lies at about the middle of the soles, and the value of E computed by means of formula (15) is very close to the actual elasticity modulus.

There are, however, leathers which require smaller force for bending on the grain side than on the flesh side. This occurs when the flesh layer is removed

by splitting, or when one surface of the leather is given a stiff coat of paint Therefore, when computing the modulus of elasticity by formula (15), the lower load should invariably be taken into account, for it more closely approaches the real value.

6. Variation of the modulus of elasticity beyond the elasticity limit

Formula 15 has been deduced for an absolutely elastic body. Where the deformation produced by bending is partly elastic and partly permanent,

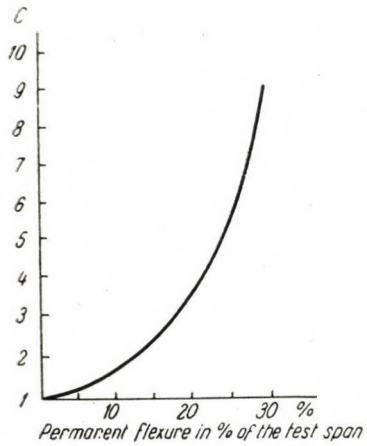


Fig. 11

only the force required for the elastic deformation shall be measured when bending the ends of the beam through an angle of 90°, because the work producing permanent deformation is transformed into heat, and only the work of elastic deformation can be recovered as potential energy after lifting the load. Where, after the removal of the load, the beam does not jump back into its original horizontal shape, the elongation of the extreme layers is not conform to the degree taken into account in formula (15).

By applying formula (15), the total deformation is taken into account, yielding a smaller modulus than if only the elastic deformation were reckoned with.

Calculations not detailed herein yielded a correctional factor ; multiplying the elasticity modulus derived from the total deformation by this factor, the modulus of elasticity pertaining to elastic deformation is obtained. The value of the correction factor is shown in *Fig. 11* as a function of the deflection (in percentage of the length of span), after the load has been lifted.

For the purposes of continuous control tests, the complicated measurements as shown in *Fig. 11* are rather inconvenient. Instead, the value of the modulus of elasticity obtainable from the total deformation appears to be more appropriate for tests of the leather industry. Leather is anyway no homogeneous matter, and the measurements effected on the flesh and the grain side respectively do not yield even values; therefore formula (15) appears to be more suitable for stating the modulus of elasticity than the calculations based on the more involved *Fig. 11*.

In measuring the elasticity of leather, the elastic limit is generally transgressed. Where, in diverse measurements, the specific elongation of the superficial fibres is not equal, due to which the elastic limit is exceeded in variable degree, the value of E will also change.

In order to obtain comparable values, it is necessary that the specific elongation of the superficial fibres should always be equal. As, in bending the ends of the beam through an angle of 90°, according to formula (13), the specific elongation is

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \frac{b\pi}{4l} = 0{,}785\ \frac{b}{l}\ . \tag{17}$$

Thus the specific elongation is proportional to the value of b/l. The smaller the b/l ratio, the less the specific elongation, and the less will be exceeded the elastic limit.

TABLE VI

Length of span cm	b/l	Number of inflections	Diameter cm	E derived from total deformation, by formula 15		Permanent deformation after lifting the load		Multiplication factor according to Fig. 11	E computed from elastic deformation kg/cm²
						cm	% of the length of span		
25	0,024	0	—	3,900	—	—	—	—	—
25	0,024	20	25	—	2,950	0,6	2,5	1,10	3,250
20	0,030	without further bending		3,200	—	—	—	—	—
20	0,030	20	20	—	2,320	1,0	5,0	1,25	2,920
15	0,040	without further bending		2,600	—	—	—	—	—
15	0,040	20	15	—	2,300	0,8	6,0	1,33	3,050
12	0,050	without further bending		1,980	—	—	—	—	—
12	0,050	20	12	—	1,760	0,6	5,0	1,25	2,200
10	0,060	without further bending		1,700	—	—	—	—	—
10	0,060	20	10	—	1,400	0,7	7,0	1,45	2,030
12	0,050	without further bending		—	1,460	0,8	6,7	1,40	2,060
15	0,040	«	«	—	1,400	1,0	6,6	1,38	1,940
20	0,030	«	«	—	1,460	1,3	6,5	1,37	2,000
25	0,024	«	«	—	1,480	1,6	6,5	1,37	2,050

E. g. when a sole is bent by stepwise reducing the lengths of span without having been subjected to repeated flexure, and the values of E are calculated in accordance with formula (15), they will be found to be diminishing. If, however, the leather is first subjected to repeated bending in a sharp curve, and the forces necessary for bending are subsequently measured at increasing lengths of span, the values of E according to formula (15) will be found to be constant. To verify this, the elasticity modulus of a 6,0 mm thick finders' bend was measured at 25 cm span, without previous repeated flexure. Hereafter, the leather was bent twenty times on a roller of 25 cm diameter, and the value of E was once more measured. The test was repeated at 20, 15, 12 and 10 cm span, and the permanent deformation was recorded in every case. The values of the moduli derived from the total deformation and from the elastic strain were compiled in Table VI. It will be seen from the table that where the length of the span is decreased on the sole leathers, the elasticity modulus will diminish in line with the increasing extent of fatigue of the leather. If, however, the leather is bent after some rather strong deformation at gradually increasing spans, in accordance with the behaviour of elastic bodies the bending force will change in inverse ratio to the square of the span, and the value of E will be constant at any length of span.

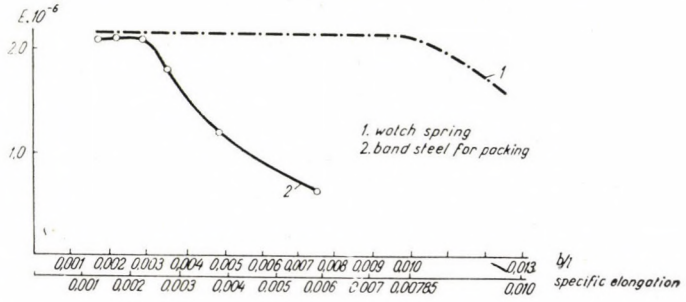


Fig. 12. Diagram of the elasticity limit of steel bands

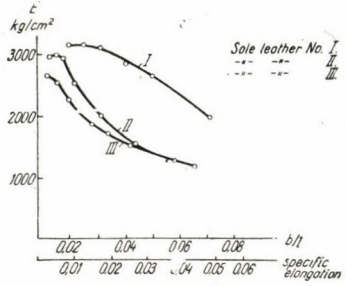


Fig. 13. Diagram of the elasticity limit of sole leathers

By measuring the bending force at diverse spans, the elastic limit can be established. If a highly elastic steel band (a watch spring) is bent at variable lengths of span, the value of E will invariably be found identical in accordance with formula (15). An elastic steel band may be bent within very broad limits, without visible permanent deformation, as far as $b/l = 0{,}01 \sim 0{,}03$. A high-grade steel knife will sustain only a bend up to $b/l = 0{,}006$, and band steel used for packing up to $b/l = 0{,}003$ only without permanent deformation. Where there is a permanent deformation, the value of E computed by formula (15) will be less than its actual value.

It will be seen that the moduli of elasticity measured at diverse b/l ratios give reliable information concerning the elastic limit, thus the elastic limit can be plotted on a diagram, for it lies at the break of the curve.

As according to page 433 the b/l ratio is proportional to the specific elongation, the elastic limit may be numerically expressed by the specific elongation where the modulus of elasticity begins to decrease (computed by formula 15).

Fig. 12 shows the E values of various steels, derived from the bending force by formula (15), as a function of b/l. *Fig. 13* illustrates the elastic limit of high-grade sole leathers subjected to bending. A comparison of the two will show that the elastic limit of high-grade sole leather is greater than that of band steel used for packing, and approximates the elastic limit of a high-grade steel spring despite the fact that at first aspect, the substantially thicker leather appears to have a lower elastic limit.

7. Measuring the modulus of elasticity of soaked sole leathers

The firmness of leathers measured in dry state depends also on their contents of water soluble matter. After soaking for 24 hours, the value of «wet

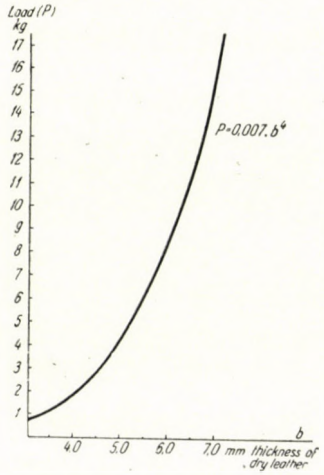


Fig. 14. The load of 30 × 12 cm finders' bend samples plotted against their thickness after 24 hours' soaking, measured on the device shown in Fig. 15

firmness» no longer depends on the water soluble contents, and is apt to enlighten the structural properties of the leather as well as the processes of liming and tanning.

It has been experimentally proved that the force needed for bending soaked leathers is in direct ratio to the width of the leather sample. The force required for bending the leather is in theory, likewise a third power function of

its thickness. Due, however, to the longer time necessary for tanning thicker leathers, the relation was found to be of higher than third power. According to statistical data obtained by testing 250 pieces of leather, the relation between the thickness (mm) and the load acting on the soaked leather (kg) corresponds to formula

$$P = 0.007\ b^4. \tag{18}$$

The measurements were made with the device constructed by *Tóth-Kerese* (*Fig. 15*) by bending the leathers in semi-circular arc, taking into account

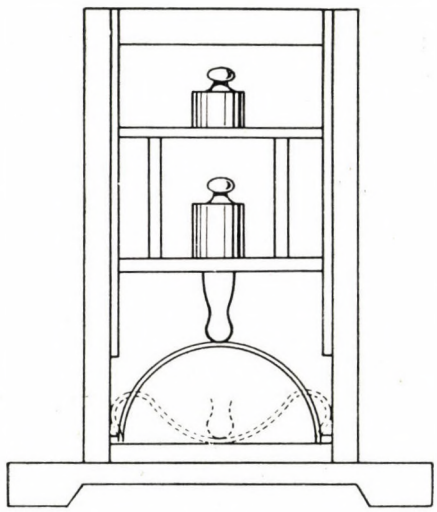


Fig. 15

the average of ten consecutive measurements of firmness in wet condition. In order to eliminate the high degree of dispersion noted in the individual measurements, the leathers were sorted into bundles according to thickness at a variance of 0,3 mm. The thickness refers to soaked leathers.

An explanation for the relation being of higher than third power will be found in the more compact fibre structure of the thicker leathers, and partly in the fact that due to the longer time thick leathers require to be tanned through, they come into contact with more fresh astringent liquor, thus becoming harder in the process of tanning. The greater stiffness of the outside layers further increases the stiffness of the average cross section.

Stiffness in wet state gradually increases during tanning, and reaches its peak when finishing has been accomplished. To demonstrate this increase, specimens of 30×12 cm were cut from the tensile test sampling part of the butt of various hides, and were subjected to the industrial tanning process common in Hungary. Their wet firmness was measured in the handler vats, in the layer yard, in the drum, in the hot pit and in finished state after soaking. The results are shown in *Fig. 16* which clearly illustrates that firmness increases gradually in the process of tanning. It will further be seen that the wet firmness of choice quality goods is higher, and that there is an increment in wet firmness in the hot pit, during drying and finishing.

The authors proved experimentally that the ratio of the loads needed for deflecting a strip of leather bent in a semicircular arc, and for bending horizontal strips was 5 : 1 where the length of the span was equal.

The modulus of elasticity of wet leather is accordingly computed by formula (15) by substituting 1/5th of the weight for P measured on the *Tóth-Kerese* device (*Fig. 17*), viz :

$$E = \frac{1.9 \cdot P/5 \cdot 1^2}{ab^3} = \frac{0.38\, P1^2}{ab^3} . \qquad (19)$$

The thickness of soaked sole leathers is by some 5—20% more than that of dry leathers. In computing the modulus of elasticity of soaked leathers,

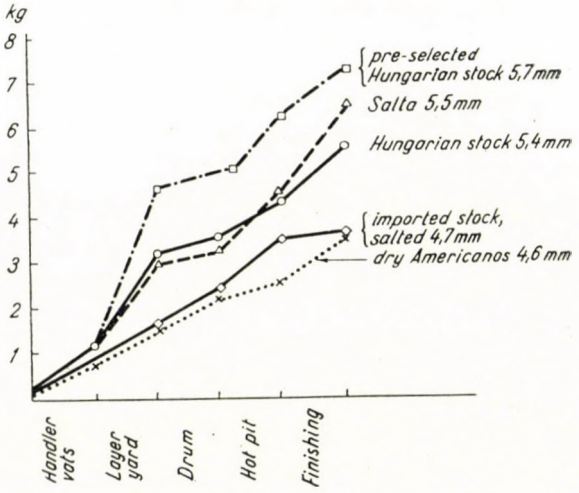


Fig. 16. Variation of the wet firmness of 30 × 12 cm finders' bend samples in the tannery process, on the *Tóth—Kerese* test appliance

the thickness of the wet leathers should be reckoned with rather than that of the dry leathers ; this stands to reason also because strong swelling unfavorably affects the quality of sole leathers.

8. Measuring the modulus of elasticity on the Tóth appliance

a) Sampling

For purposes of measuring the bending modulus of elasticity, samples are usually taken from the spots where physical samples are taken from. In such manner, in testing butts and shoulders, the tests are made on denser parts of the hide, yielding about maximum values for the piece of leather examined. Other parts of it will show a correspondingly lower modulus.

The values of the modulus of elasticity generally fluctuate strongly even within the same lot worked up. Standard deviation amounts to 100—200%, so that typical values can only be obtained from a large number of tests. The number of the samples taken can be computed by means of formula $0{,}7\sqrt{x}$, but at least ten samples should be taken from each lot to be examined.

After determining the modulus of elasticity of sole leathers in dry state, it is advisable to repeat the determination of the modulus on the same samples after soaking for 24 hours; what is more, the value obtained after drying the same samples again is characteristic of the quality of the leather.

b) Size of samples

The size of the samples is chosen in such manner as to allow the measurements to be don, with a satisfactory degree of accuracy. As the length of the span is generally 25-times the thickness: only the width of the sample can be increased for the sake of greater accuracy. By way of informaion, the approximate dimensions of samples taken from various kinds of leather are given belowe

Thickness mm	Kind of leather	Length of sample cm	Width of sample cm
5—6	Sole	20—24	4—5
3—4	«	13—17	5—6
2—3	«		
	Insole	10—13	6—8
	Counter		
	Welt		
4,5—5,5	Belting & Technical	18—22	5—7

c) Preparation of Samples for Testing

The value of the modulus of elasticity is determined at definite water contents. Before proceeding with the determinations in dry condition, the samples are hung up for 48 hours in an atmosphere containing 65% relative humidity, at 20° C temperature. In testing wet samples, the water contents will be indicated along with the findings.

Preparatory to testing, the thickness of the sample and its adequate fatigue shall be established. Average thickness is determined in the place where the stress is greatest, i. e. along the bisectrix of the longitudinal axis of the samples. Thickness is read off at three points, with 0,005 cm accuracy, and the arithmetic mean of the readings is taken. The width of the sample is then measured along the bisectrix of its longitudinal axis, with 0,05 cm accuracy.

Repeated bending of the samples greatly reduces the modulus of elasticity. As afterwards it cannot be stated whether the samples have been subjected to bending after sampling, they should be bent repeatedly until they reach a stage where additional flexure no longer affects the modulus of elasticity. Generally, a constant value is obtained after 15—30 deflections.

In the course of their experiments, the authors generally subjected the leather specimens to twenty flexures. Bending was performed on a roller, with a diameter of 25-times the thickness of the leather, so that the specific elongation of the outer layers should always be equal. Bending can most simply be performed between rollers set at an appropriate distance, by gripping the sample in the middle and bending it to and fro between the rollers.

For determining the modulus of elasticity in wet leather, the sole leathers are soaked for 24 hours in five times their weight of distilled water of 20° C temperature in such manner that both sides should be flooded equally. The soaked sole leather is also subjected to bending on a roller 15-times its thickness in diameter; bending shall be repeated six times alternately from the grain and the flesh side.

In counter and welt leathers, it is practical to establish the modulus of elasticity also in the condition in which the leather is worked up for footwear. The modulus is usually measured on counters after soaking for 30 seconds and 3 minutes of rest, on welts after 5 minutes' soaking and 2 hours of rest in damp atmosphere.

In other kinds of finished leather, the modulus is generally measured only on dry leather.

d) *Practical measuring of the modulus of elasticity*

To determine the actual length of span, correctional value *a* is first determined by formula (16). This value is standard for each testing unit, and its double should invariably be deducted from the distance between axes.

E. g. The task is to determine the modulus of elasticity in a 6 mm thick specimen of eather. If the diameter of the rollers is 10 mm,

$$a = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{5}{1.41} = 3{,}5 \text{ mm.}$$

The actual length of span must be set at $0{,}6 \times 25 = 15$ *cm*, and the distance between the axes at $15{,}0 + 0{,}7 = 15{,}7$ *cm*.

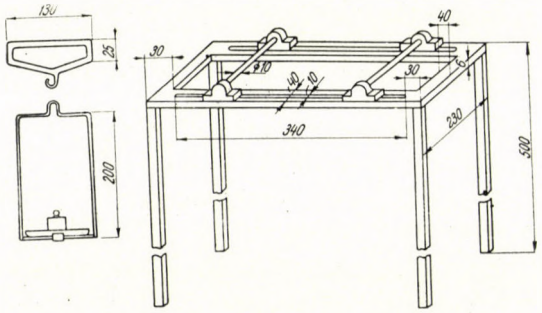


Fig. 17

The sample conditioned to the desired moisture contents and subjected to bending in the prescribed manner is straightened out. It is then pulled through the bridle of the appliance shown in *Fig. 17*, and is placed on rollers flesh-side up so that the bisectrix of its longitudinal axis shall be at equal distance from the two rollers, and should run parallel to them. The pan is hung up and is gradually loaded with weights until the sample slips off between the rollers.

The weights are put into the pan so that about ½ of ¾th of the required load is put in right at the start, and is then increased at the rate of first 0,2—0,5 kg, and later of 0,05—0,1 kg, added at intervals of 10 seconds, so that the entire measurement should last 1—1,5 minute.

Sole leathers can be measured with ±0,2 kg accuracy, lighter leathers with ±0,05—0,1 kg precision. The weights put on the pan and the weight of the empty pan shall be recorded. After the measurement has been accomplished, remove the sample from the appliance, straighten it and repeat the measuring process by placing it grain side up on the rollers. In accordance with the contents of page 432, in computing the modulus of elasticity, the lower value should always be taken into account. The following example is given to calculate the results.

Example 1.

If it is certain that the sample has not been bent after sampling, the diminution of the modulus as a result of the flexure can also be studied.

The width of a leather butt specimen of 0,550 cm average thickness is 4,50 cm.

Actual length of span 14,0 cm.

The result of the first measurement, loaded on the flesh side, was 7,0 kg including pan and bridle.

After 20 flexures, the load causing the sample to slip off was 3,4 kg on the flesh side. According to formula (15):

$$E_{10}^{dry} = \frac{1{,}92 \cdot 7{,}0 \cdot 14{,}0^2}{4{,}50 \cdot 0{,}55^3} = 3{,}530 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{20}^{dry} = \frac{1{,}92 \cdot 3{,}4 \cdot 14{,}0^2}{4{,}50 \cdot 0{,}55^3} = 1{,}720 \text{ kg/cm}^2.$$

The modulus of elasticity can analogously be measured also on the *Wilson* [2] or *Herfeld* [9] appliance. The modulus of sole bends can be analogously measured on a set similar to the one shown in Fig. 17, but built to larger scale.

9. Determination of the modulus of elasticity by dynamometer

The modulus of elasticity can be derived from the bending diagram taken by the tensile testing machine:

a) based on the tangent to the initial section of the diagram,

b) from the maximum load.

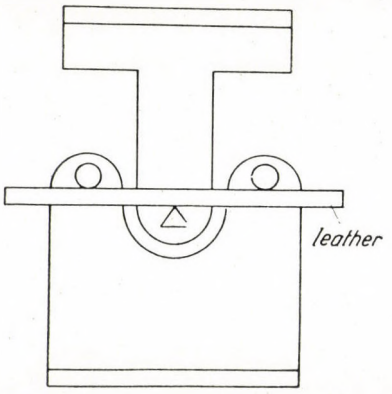


Fig. 18

In most cases, however, the diagrams thus plotted can only be evaluated with an adjustment. Namely, the actual length of span between the bending rollers gradually diminishes with the progressing flexure. This is responsible for the curve becoming steeper, so that its subsequent sections yield an apparently greater force than would have been required for the same deflection at the original length of span. Nor does the deflection measured on the tensile tester correspond precisely to the actual deflection, but it is slightly larger, for the leather is drawn in between the rollers.

Also, the Bernoulli formula is valid only for extremely slight deflections, while the ratio of the force required for greater deflections decreases gradually, as may be seen in *Fig. 1*. It appears that the value of E derived according to this formula from a greater deflection is lower. Table VII contains e. g. the actual length of span between bending rollers of 100 mm axial distance and 15 mm in diameter*, the actual deflection, as well as practically derived factors which, multiplied by the E values computed according to formula (1), yield the actual modulus of elasticity.

* The gripping jaws and the bending rollers (for Gillemot tensile machine)were designed by András Theil, after the model: Gost, Paper Ind. Soviet Union.

TABLE VII

Apparent deflection in % of the span	Actual deflection in % of the orginal span	Actual span mm	Multiplication factor to calculate the actual modulus of elasticity by formula (1)
2,0	2,0	99,2	1,085
4,0	3,9	98,4	1,16
8,5	8,3	95,6	1,33
13,2	12,7	93,6	1,50
18,8	18,0	92,0	1,67
23,0	22,0	90,8	1,85
28,5	26,8	89,4	2,10

Table VII has been compiled by constructing with elastic steel band relationships between the different deflection angles and deflections measured in mm as well as expressed in percentage, and computing the actual spans and actual deflections pertaining to the different deflection angles on the basis of trigonometrical relationships.

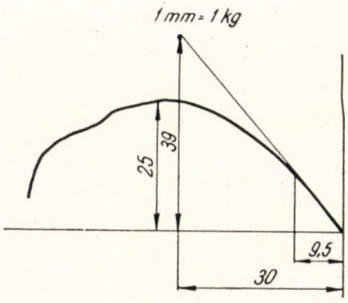


Fig. 19

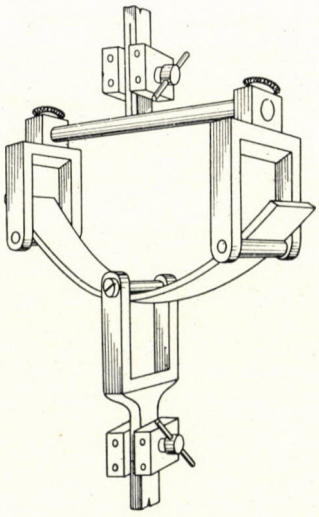


Fig. 20

The modulus of elasticity can be computed far more simply by formula (15), without Table VII, from the maximum load *(Fig. 19)*. Namely, in the application of that formula, the same correction must invariably be applied to the length of span, since the actual span, by formula

$$l' = 1 - 2\frac{r}{\sqrt{2}}$$

is

$$10{,}0 - 1{,}06 = 8{,}94 \text{ cm.}$$

According to the first measurement, in line with formula (15):

$$E_1^{dry} = \frac{1{,}92 \cdot 25 \cdot 8{,}94^2}{5{,}79 \cdot 0{,}610^3} = 2920 \text{ kg/cm}^2 ,$$

whereas the result of measurement No. 20 :

$$E_{20}^{dry} = \frac{1{,}92 \cdot 12 \cdot 9{,}92^2}{5{,}79 \cdot 0{,}610^3} = 1400 \text{ kg/cm}^2 .$$

On thinner leathers, the force cannot be measured by this appliance with satisfactory accuracy, therefore the more sensitive Schopper tensile testing machines are used for testing thinner leathers, with the clamping jaws outlined in *Fig. 20* [14], which resembles the Wilson's appliance.

Small deflections may be measured without any correction, if the edges of the test specimen are firmly gripped. This method has the additional advantage that greater force is required, increasing the accuracy of the measurement. The forces required for bending to the same extent a beam of uniform cross-section with its ends firmly gripped, or freely supported on two ends are in ratio 4 : 1.

With firm clamping-in, the beam's length of span does not vary, and the diagram drawn by the tensile testing appliance shows the deflection without correction. If the Gillemot tensile testing unit is equipped with the grip jaws of the ball burst measurement method [26], *(Fig. 21)*, this kind of measurement can be easily carried out. The diagrams of the ratio of deflection and the force needed for the deformation can be plotted with the draft mechanism of the appliance, and the value of P/f can be computed by drawing the tangent to its initial section. The modulus can be computed by formula (24).

To give an example, tests on sole leather are repo t · below.

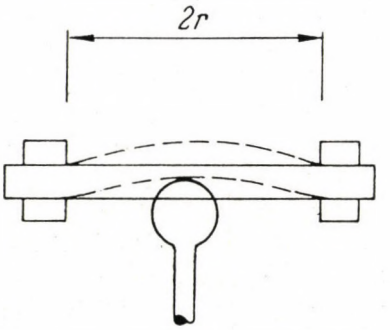


Fig. 21

The disk shape leather specimen is 0,510 cm thick. The samples were not flexured previously.

Inside radius of the disk r = 2,00 cm.

By drawing the tangent, P/f = 195 kg/cm.

By formula (24),

$$E = \frac{0{,}48 \cdot 2{,}0^2}{0{,}51^3} \cdot 195 = 2{,}800 .$$

This method, however, yields higher values than can be derived from formula (15), partly because there is no fatigue effect at small bends, and partly since the stress is not merely of bending, but also of tensional character. Besides, under repeated stress, the modulus of elasticity increases with decreasing elongation.

10. Determination of the modulus of elasticity of sole leathers on the Zilles appliance

The modulus of elasticity of sole leathers can be determined on the Zilles appliance by fatigue test.

A disk, 15 cm in diameter, is cut out of the leather, its center is punched and it is placed into the appliance outlined in *Fig. 22*. The load imposed on the leather is calculated according to formula $P = 8\,b^3$, where b is the thickness of the leather in mm. The rod transferring the load is placed with its nod (B) resting lightly on the leather, and *m-m* line *(Fig. 23)* is drawn with the writing mechanism. The pencil is placed on the cylinder, and the device is started. The pencil draws the *o-o* line on the paper. After rotating for ten minutes, the device is laid off, the weights (S) removed, and after one minute the *n* point is recorded by touching the rod lightly against the disk which is no longer under load, and drawing the pencil along the paper. The *n* point is taken up parallel to the backbone line marked on the disk, and perpendicularly to it the two locations show a certain difference. This is why two *n* points have been drawn in the sketch.

The weights are replaced, the appliance is filled up with water, and the downward line continuing *o-o* curve is recorded. After half an hour, the loads are removed, and the elastic recovery is measured. Finally, the leather is pressed completely against the metal ball, and *p-p* line is drawn.

The leather is then removed from the unit and is soaked in five times its weight of water for 24 hours. It is then put back into the unit and fatigued by rotation, with a load of $P=2b^3$ grams over a period of 30 minutes while the *r-t* curve is recorded.

According to Zilles, the dry firmness of the leather is $\frac{op}{mp} \cdot 100\%$, and its dry elasticity $\frac{no}{mo} \cdot 100\%$.

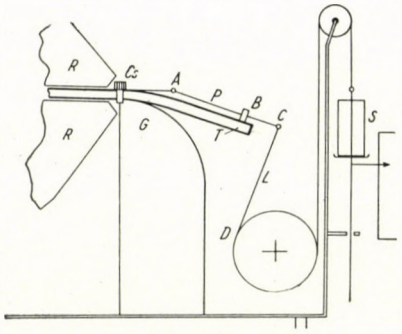


Fig. 22

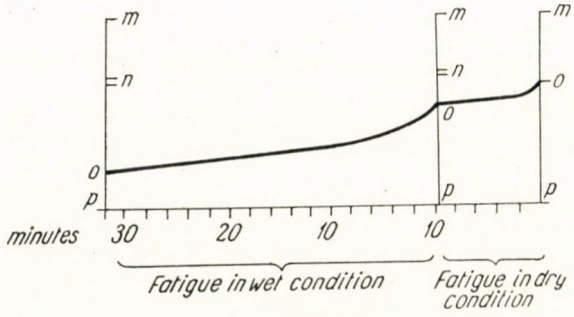


Fig. 23

In computing the modulus of elasticity, the following points should be borne in mind.

1. Theoretically, the modulus of elasticity of leather is computed by equation

$$E = \frac{4P1^3}{fab^3} \tag{20}$$

applicable to beams fixed-in at one end.

2. Force P represents the weights put on. To convert it into the perpendicular force acting on the leather at point B, it must be multiplied by conversion factor $\frac{AC}{AB}$ (which, according to *Fig. 22* is 1,5) and $\sin \beta$. The value of β can be calculated for each deflection from the dimensions of the appliance, and can be tabulated.

3. f is the deflection read off the diagram, which is not identical with the actual deflection measured at point B. The actual deflection is equal to $AB \cdot \sin \alpha$. The slope of the rod relative to the horizontal (α) was computed from the dimensions of the device.

4. The test body is circular, therefore its width a is not constant. The authors stated that as far as deflection is concerned, the circular test specimen behaves like a beam of 12 cm fictitious width.

5. Finally, *Hooke*'s Law is not accurately valid for larger deflections, where it also requires correction.

If P's multiplication factor is marked k_1, f's factor by k_2, and the correctional factor of *Hooke*'s Law by k_3, formula (20) would be as follows :

$$E = \frac{4Pk_1k_3l^3}{fk_2 12b^3} \tag{21}$$

$l = 7$ *cm* ; the value of $\frac{k_1 \cdot k_3}{k_2}$ was found to be very close to 2,25. Substituting the above numerical values,

$$E = \frac{257P}{b^3 f} . \tag{21}$$

This equation was verified by cutting a semicircular disk of 0,20 mm thick steel plate, and recording its deflection under variable loads.

The thickness of the steel plate b was 0,020 cm, and the value of l 6,20 cm. Accordingly the modulus of elasticity of steel

$$E = \frac{4 \cdot 0{,}100 \cdot 2{,}25 \cdot 237}{12 \cdot 8 \cdot 10^6} = 2{,}2 \cdot 10^6 .$$

11. Conversion of the data measured on the English device to the modulus of elasticity

The temper of soft leathers is generally measured with the English device. For a comparison of the temper of upper leather with that of other leathers, it is necessary to express the results of the English tests in terms of the modulus of elasticity. With this in mind, the authors made tests with elastic steel bands to clarify the relation of flexure, load and modulus of elasticity. They found that the *Bernoulli* formula can be applied here too, with some slight modifications.

Where plates bent into the form of cylinder mantles are compressed, the length of the span changes along with flexure. Therefore the constant in formula (1) is a function of flexure. In tests made on the *English* device, the force needed for 10 mm deflection is invariably measured, so that the value of the constant can be determined. In tests made on steel cylinder mantles of variable diameter, it was found that at deflections amounting to 31,8% of the diameter, the value

of the constant was 3,2, moreover that the deflection f was proportional to the third power of the diameter d. Accordingly, the value of the modulus of elasticity can be easily calculated from the results of the *English* temper tests, by means of formula

$$E = \frac{Pd^3}{3.2ab^3 \cdot f} \quad . \tag{22}$$

The value of the constant varies but very slightly where deflections amount to 20—40% of the diameter. Table VIII is a chart showing the relations of deflection and load of a steel band (thickness 0,15 mm, width 20 mm) bent into the shape of a cylinder mantle, and the constant.

It may be seen that where the deflection corresponds to 20—40% of the diameter, the value of the constant C is 3,2. It can be experimentally proved also that at 0% and/or 100% deflection, the value of C will vary between 4,0 and 3,1.

On the basis of this ratio, the *English* temper value (Stand) can be converted into the modulus of elasticity. In accordance with the English formula

$$E = \frac{P}{b^3 \cdot f} \cdot \frac{3{,}18^3}{3{,}2 \cdot 3{,}0} = 3{,}33 \cdot \frac{P}{b^3} \quad . \tag{23}$$

The moduli of elasticity of various leathers determined on the basis of English data and of the data measured by the authors, are listed in Table IX.

TABLE VIII

d Diameter of cylinder in mm	P Load g	f Flexure mm	$\frac{f}{d} \times 100$	Value of C in formula 22
203	30	56	28	C = 3,15
180	50	66	36	3,13
186	30	40	21	3,38
165	50	49	30	3,25
148	60	43	29	3,20
159	80	54	34	3,20
122	100	40	33	3,22
100	200	43	43	3,25
94	200	36,5	39	3,21
78	200	21	27	3,19
64	300	18	28	3,10
45	500	10	22	3,21
35	1500	14	34	3,25

Average : ... 3,2

TABLE IX

	Thickness mm	$\frac{P}{b^3}$ (Stand.)	Modulus of Elasticity E kg/cme²
Sheepskin garment leather	—	2,3	7,7
Glacé kid	—	5,9	19,6
Walrus leather	—	22,4	75
Calf garment leather	1,2	36,4	120
Kidskin	—	60,0	200
Box calf	1,5	95,0	316
Vegetable tanned calf leather	1,8	211,0	703
Upholstering hides	1,8	371,0	1230
Vegetable tanned Cap goatskin	—	641,0	2140
Pigskin leather	1,3	38,9	129
Pigskin grain lining leather	1,0	59,8	198
Chrome side leather	1,2	50,1	167
Vegetable tanned upper leather	2,8	45,0	150

12. Testing the modulus of elasticity by durometer

For tests performed on the durometer, diskshape leather samples are used. The samples are laid up on a ring with inner radius r, loaded with force

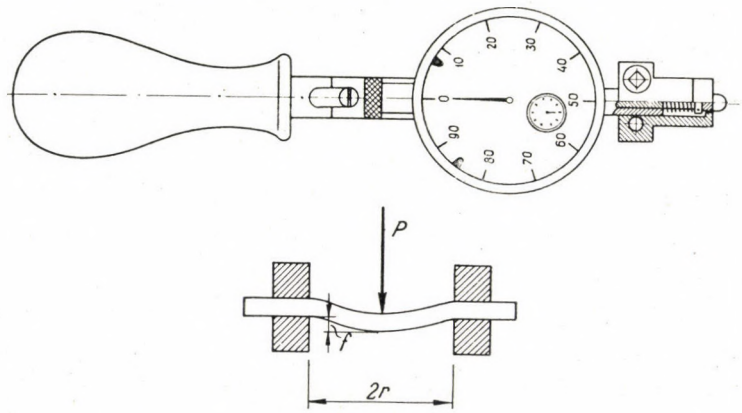


Fig. 24

P, and the value of the deflection produced f is measured *(Fig. 24)*. If the edges of the sample specimen are firmly clamped, the value of the deflection is

$$f = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{Pr^2}{Eb^3} \text{ wherefrom } E = \frac{0.48 \cdot P \cdot r^2}{f \cdot b^3} . \qquad (24)$$

This test can be performed without cutting out from the leather, by laying up the whole piece of leather on the ring, and imposing load P over the center of the ring. By doing this, it will not be necessary to clamp the leather — except extremely pliable leathers. Thus the sample must not be cut out from the leather, and the firmness of any part can be controlled in any phase of its working up.

Essentially, the durometer consists of the following elements :

1. a smooth plate of metal with a hole in the centre, through which a hard steel ball is pressed by spring action against the surface below;

2. an accurate gauge indicating the passage of the ball with 0,01 mm precision;

3. a ring of a given size, upon which the leather is laid up.

The firmness test is carried out as follows. The metal ring is placed on the table and is covered with the leather and the metal plate of the durometer in a position that the ball should be above the centre of the metal ring. The device is then pressed by hand until the three red lines marked on the instrument are on one level. The pointer is read off at this position. The pressure of the ball on the leather is tested by a special blind test, by laying the leather on a smooth surface instead of on the ring, and reading off the compression. This compression shall be deducted from the deflection of the leather specimen. The modulus of elasticity is computed on the basis of formula (24).

The durometer [27] has been constructed for textile industrial tests, and has a comparatively weak spring. Therefore it is suited only for testing rather thin and not very stiff leathers. An apparatus with a stronger spring is under construction.

The firm grip of the sample's edges is responsible for the rise of tensile stress in addition to bending stress. Therefore the values of the moduli of elasticity measured by the durometer are between the values of the bending and tensional moduli of elasticity.

13. Determination of the elasticity of leather with a pendulum firmness tester

The basic principle of this method is to clamp stiffly one end of a leather specimen of b thickness and a width as shown in *Fig. 25*, to attach a pendulum to its lower end, and measure the time of its swinging and damping. The length of the free part of the leather shall be l, that of the pendulum L, and weight G shall be attached to its end ; it swings describing angle α. While the unit swings as a pendulum, the leather is bent back and forth. By determining the time of oscillation T and its damping ($\wedge$ logarithmic decrement of damping), the modulus of elasticity will be obtained from these data and from the dimensions of the leather specimen in accordance with formula (28).

The following equation is valid for any vibrating system:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}} \tag{25}$$

where T is the time of oscillation,
I the system's moment of inertia referring to the axis of rotation,
D the directional force tending to bring back the oscillating system into balance,
$\wedge$ the natural logarithm of the quotient of two consecutive beats of the pendulum (logarithmic damping).

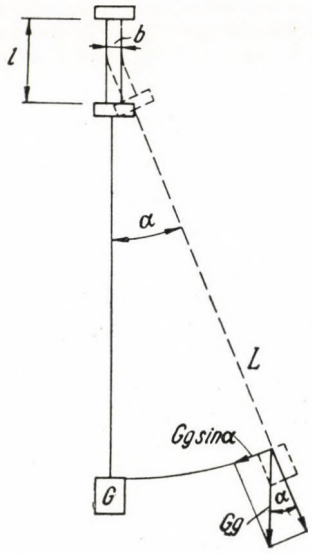


Fig. 25

Introducing the time of oscillation reduced to the undamped state (T_0),

$$T = T_0 \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}$$

therefore

$$D = 4\pi^2 \frac{I}{T_0^2} \cdot \tag{26}$$

The directional force is composed of two parts. One of these is the torque of the tangential component of the load attached to the end of the rod ($GgL \sin\alpha$) which works like on any common mathematical pendulum. But there is another force acting in a similar sense which is due to the flexure of the gripped leather sample when oscillating and its tendency is to recover its original shape. Both forces act in equal sense, i. e. following displacement from the state of equilibrium, they tend toward equilibrium, and where amplitudes are small, they are both proportional to the angle of swing.

In equation (26) the sum of the two directional forces figures; in the physical sense, the directional force is no force in the proper sense of the word, but the limit value of the quotient

of the torque and the pertaining angle of swing. Let D_1 be the directional force component created by the flexure of the leather, and D_2 the component produced by the oscillating load; in this case

$$D = D_1 + D_2 .$$

The value of D_2 can be computed from the dimensions of the unit, for where the angle α is small,

$$D_2 = \frac{G \cdot g \cdot L \cdot \sin\alpha}{\alpha} = G \cdot g \cdot L . \tag{27}$$

D_1 is in the following relation to the modulus of elasticity and dimensions of the sample:

The leather specimen gripped is essentially a beam fixed-in at one end, because one end is firmly gripped, while the other is movable. Therefore, formula (20) holds good in this case. *Kohlrausch* [28] postulated that formula (20) be also convertible so that the value of $f/1$ be expressed by the tangent of the angle included by the tangents drawn to the ends of the beam.

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{6\ Pl^2}{E\ ab^3} \text{ and } \frac{P}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{E\ ab^3}{6\ l^2} .$$

Where the angle is a small one, the tangent may be assumed to be equal to the angle, so that the directional force

$$D_1 = \frac{Pl}{\alpha} = \frac{Eab^3}{6\ l} ,$$

wherefrom

$$E = \frac{D_1\ 6\ l}{ab^3} . \tag{28}$$

Dwyer [13] was the first to perform firmness tests with a pendulum on wet soles, but he did not derive the moduli of elasticity from the data measured. The authors carried out these calculations subsequently, using the data reported by *Dwyer* and the dimensions of the apparatus, and obtained highly realistic values well in agreement with data obtained in other ways.

On the basis of *Dwyer*'s data, the moment of inertia $I = 350 \times 102{,}5{,}^2$ taking into account the suspension rod, should be in round figures 37.10^5.

$4 \cdot \pi^2 \cdot I = 148{,}10^6$
$D_2 = LGg = 102{,}5 \cdot 350 \cdot 981 = 35 \cdot 10^6$
$l = 5$ cm, $a = 5$ cm

Extreme values of $1/T^2$: 0,28 and 0,30.

Accordingly, the extreme values of D:

$148 \cdot 10^6 \cdot 0{,}28 = 41{,}4 \cdot 10^6$
and $148 \cdot 10^6 \cdot 0{,}30 = 44{,}4 \cdot 10^6$
$D_1 = D\text{-}D_2 = 6{,}4 \cdot 10^6$ and/or $9{,}4 \cdot 10^6$

Dwyer does not talk about the thickness of the leather, but no grave error can be committed by assuming that the thickness of the test specimen (b) is in the average 5 mm. Substituting this value into formula (28) and converting it into kg/cm², $E = \frac{30\ D_1}{0{,}625}$ = between the values 308 and 452 kg/cm² (rounding up g to 1000 in lieu of 981).

It should be noted that in the pendulum firmness tester, the leather sample is bent either way. As in accordance with page 430 the moments of

inertia are not equal when the leather is bent alternately, the values yielded for the modulus of elasticity will be somewhat higher with the *Dwyer* method than when recorded on the *Herfeld* or *Tóth* devices.

The authors made tests with provisional constructions on various leathers, the results of which approximately agreed with *Dwyer*'s data. These experiments are being carried on.

14. Comparing the moduli of elasticity of diverse kinds of leather

Table X shows the results of a large number of tests made on various leathers, illustrating also the dispersion of their respective bending elasticity moduli, even when equally dressed hides show a dispersion of 100—200% according to kinds and even according to sex and age of animals. Therefore, standard modulus of elasticity values can only be given at average rates applicable to lots. The tests were performed on finished goods made from Hungarian and Argentinian hides, on the Tóth device. The test span was 25-times the thickness of the leather, the number of the deflections and the water contents was indicated according to the method described on page 439. Column 4 of Table X shows the average modulus of elasticity of various finished leathers made from high-grade hides, which may be adopted for standards. For some leathers, also the tensional modulus of elasticity has been indicated. The difference between the moduli of the two kinds of stress is, in some instances, a substantial one ; the reason for this will be followed up.

Table X shows also the moduli of specimens of hides dressed inner sole fashion, illustrating the circumstance that the difference between the various parts of the leather is particularly marked when the leather is wet. Mellow parts adsorb more filling during impregnation, producing greater firmness. After soaking, however, the moduli of the mellow parts will be substantially lower, corresponding to their fibre structure.

15. Relation of the modulus of elasticity to the quality of sole leathers

The bending modulus of elasticity is related to the firmness stated by manually testing the leather. Although manual tests are fit only for displaying the resistance of the leather to bending, highly experienced technicians are able to relate that force to thickness, and to give a correct appraisal of the elastic properties of the leather. Table XI is a schedule of the physicomechanical indices of three sole leather specimens processed by the same technology ; by manual testing, the specimens were found stiff, medium and loose respectively. It will be seen that the results of the manual tests were confirmed by the modulus of elasticity, both in dry condition and after 24 hours' soaking.

TABLE X

Showing the bending moduli of elasticity of various kinds of leather

Kind of Leather	Average thickness, mm	E_1^{dry}	E_{20}^{dry}		E_6^{wet}		Test appliance	Tensional modulus of elasticity (1)
			average	dispersions	average	dispersions		
Finders' bend	6,5	3,500	1,700	1,000—2,600	400	150—800	See figure 17	—
Finders' bend for stitching	5,5	2,500	1,300	900—2,200	300	150—700	«	2,000
Manufacturers' bend	4,6	1,800	1,100	700—2,000	250	100—600	«	—
Counter from neck for boots	4,0	2,500	1,300	900—2,000	—	—	«	2,600
Insole belly	2,6	1,800	1,100	600—1,800	—	—	«	—
Insole neck for welted shoes	3,5	1,700	900	700—1,600	—	—	«	1,560
Pigskin insole	2,3	1,900	850	700—1,500	—	—	«	—
Insole leather side, vegetable tanned: Backbone part	4,5	—	750	—	86	—	«	—
Borderline of neck and butt	3,8	—	1,100	—	70	—	«	—
Cheek	4,0	—	1,300	—	27	—	«	—
Flank, rear	2,8	—	990	—	20	—	«	—
Welting butt for stapling process	3,0	2,000	1,400	700—1,700		—	«	1,200
Welting butt for goodyear process	2,7	400	200	100—400	—	80	« «	— —
Belting butt, cold stuffed	6,0	600	450	300—800	—	—	«	1,000
Russet upper leather	2,7	140	100	50—200	—	—	«	500
Chrome side leather	1,2	300	250	—	—	—	English	350
Box calf	1,0	160	100	—	—	—	«	250
Pig chrome upper leather	1,4	85	—	—	—	—	«	—
Pigskin lining leather, coated	1,1	280	—	—	—	—	«	200

At manual tests, sole leathers are usually bent in substantially greater curve than when measuring the modulus of elasticity, consequently the softening effect of the deflections is less. Therefore the firmness observed at the manual test changes more in line with the modulus of elasticity of the unfatigued leather. Soaking the sole leather for 24 hours gives information, after removal of the soluble contents, chiefly on the fibre structure of the raw hide, its liming and the tanning intensity. The modulus of elasticity measured after 24 hours' soaking depends mainly on the same factors.

The relation between the modulus of elasticity and wear resistance [29, 30, 31, 32] is only generally applicable. In comparing the statistical average of

TABLE XI

Indices	Unit of quantity	Manual test findings		
		stiff	medium	loose
Bending modulus of elasticity of dry leather, test span 25-times the thickness of the specimen	kg/cm²	2,040	1,360	660
Bending modulus of elasticity after 24 hours' soaking, test span 15-times the thickness of the specimen ...	«	360	200	110
Bending modulus of elasticity of leather dried after 24 hours' soaking, test span 25-times the thickness	«	700	670	380
Test of tearing out nails from dry leathers (nail diameter 2 mm).....	kg/mm	9,0	6,6	7,1
Tearing out nails in wet condition	«	9,0	6,7	7,6
Water absorbed after 24 hours	%	30,—	27,—	30,—
Wearing time of 0,2 mm, on the Sólyom tester	mp	103,—	94,—	85,—
Thickness of the specimen	mm	6,1	5,7	5,1

TABLE XII

Bending modulus of elasticity		Dry modulus of elasticity / Wet modulus of elasticity		Classification
dry	wet			
high	high	about	4,5.....	Good quality hide, good tanning, normal hot pit and impregnation process
high	high	below	4,5.....	Good quality hide, protracted tanning, normal hot pit and impregnation treatment
high	high	above	4,5.....	Good quality hide, good tanning, strong hot pit and impregnation treatment
high	medium	above	4,5.....	Medium grade hide, good tanning, strong hot pit and impregnation treatment
high	low	above	4,5.....	Poor quality hide, careful tanning, strong hot pit and impregnation treatment
medium	medium	about	4,5.....	Medium grade hide, good tanning, normal hot pit and impregnation treatment
medium	high	below	4,5.....	Good quality hide, good tanning, weak hot pit and impregnation treatment
medium	low	above	4,5.....	Poor quality hide, proper tanning, right hot pit and impregnation treatment
low	medium	below	4,5.....	Medium grade hide, good tanning, impregnated without hot pit treatment
low	high	below	4,5.....	Good quality hide, well tanned, impregnated without hot pit treatment
low	low	about	4,5.....	Poor quality hide, well tanned, weak hot pit treatment, weak impregnation
low	low	below	4,5.....	Poor quality hide, well tanned, impregnated without hot pit treatment
low	low	above	4,5.....	Poor quality hide, brief tanning, normal hot pit treatment

several hundred firmness and wearing tests, the authors' findings confirmed that in most instances firm leathers were more wear-resistant, but some of the results were contradictory. Therefore it cannot be maintained that a firm leather is invariably more resistant to wear than a mellower leather, for it would be useless to tan the loose belly parts to a firm consistency, they would never approach the durability of butts. It is the fibre structure of the hide that should be mainly responsible for the compactness of the leather, and solid, thorough tanning should but complete it.

The values of the wet and dry bending moduli of elasticity and their mutual ratio give important information concerning the quality and origin of the hides, and their processing. These relations were compiled in Table XII based on several thousand test results.

Tables XI and XII confirm that the bending modulus of elasticity is an appropriate numerical index of the firmness noted by manual tests, and that useful conclusions may be derived from it in judging the quality of sole leathers.

REFERENCES

1. *Tchernov, N. V.:* A bőrgyártás technológiája. (Technology of Leather Manufacturing) Vol. III. P. 68, 1952.
2. *Wilson, J. A.:* Modern Practice in Leather Manufacture. 1941. Pp. 690.
3. *Jablonski, L. Waigand, F.:* Collegium 1932, 416.
4. *English, F.:* Collegium 1931, 201 and 1932, 917.
5. *Mihaylov, A. N.:* A bőrgyártás fiziko-kémiai alapjai. (Physico-chemical Bases of Leather Manufacture.) 1951. Pp. 137.
6. *Kutyanin, G. J.:* Legkaya Promishlennost. 1951, 5, 42.
7. *Platunov, K., Zakatova, N. D.:* l. c. 1., Tehernov N. V. P. p. 67.
8. *Fridland, A. A.:* A bőrgyártás mechanikai kikészítő műveletei (Mechanical Finishing Processes in Leather Manufacturing) 1951. 91.
9. *Herfeld:* Die Qualitätsbeurteilung von Leder usw. (The Determination of the Quality of Leather, etc.) Berlin 1950.
10. *Conabere, G. O.:* ISLTC. 1944, 25.; 1943, 39 and 59.
11. *Cheshire, A.:* ISLTC. 1944, 44.
12. *White, P., Caughley, F. G.:* ISLTC. 1945, 148.
13. *Dwyer, P. J.:* ISLTC. 1942, 119.
14. *Halász, Dr. I-né:* Bőrök fizikai vizsgálata. (Physical Testing of Leather.) Engineering Post-Graduate Training Inst. Budapest, 1954.
15. *Dr. Tóth, G.* and *Dr. Kerese, I.:* Lecture delivered at the Scientific Institute of Leather Technicians on March 9, 1949.
16. *Dr. Tóth, G., Krassó, J.:* Újítók Lapja (Reformers' Magazine), May 5, 1952. Dr. Tóth, G., Dr. Pósa, V.: Lecture delivered at the Scientific Institute of Leather Technicians on October 20, 1953. Dr. Tóth G. And Dr. Kerese I.: Bőr és Cipőtechnika 1955, I. (Leather and Shoe Technology.)
17. *Laughlin, Theis:* The Chemistry of Leather Manufacture. 1945, 774.
18. *Zilles, J.:* Hungarian patent applied for, No. 2251/ZJ—50/2.
19. *Dr. Pósa, V.:* Innovation suggested to the Hungarian Ministry for Light Industry under No. X—1768/1953.
20. *Bach, Baumann:* Elastizität und Festigkeit. Berlin, 1924. (Elasticity and Firmness)
21. *Joos, G.:* Lehrbuch d. theoretischen Physik. (Handbook of Theoretical Physics) Leipzig, 1950.
22. *Muschelisvili, N. J.:* A rugalmasság matematikai elméletének néhány alapvető problémája. (Some fundamental problems of the mathematical theory of elasticity) Publ. by Academy of Sciences of the Soviet Union, Moscow, 1954.
23. L. c. 1., p. 59.

24. Progress in Leather Science. London, 1948. Pp. 284.
25. *Groth, W.:* Dynamik. Leipzig, 1952. Pp. 117.
26. *Maeser:* IALCA. 1953, 208.
27. *Szirtes* and *Tarján:* Textile innovation: Bobbin stiffness tester.
28. *Kohlrausch, F.:* Lehrbuch d. praktischen Physik. Leipzig, 1951, Vol. I. Pp. 80 (Handbook of Practical Physics)
29. L. c. 24., p. 295.
30. *Reinberger, G.:* Das Leder (The Leather). 1952.
31. L. c. 1. p. 12.
32. *White, P. Caughley, F. G.:* ISLTC. 1937, 429.

SUMMARY

The most appropriate index characterising the firmness and temper of leather is the bending modulus of elasticity (E), a constant not dependent on the size. For comparing the various literary data, the authors examined the relations between the size of the sample, the test span and the force required for the deflection. *Hooke*'s Law holds good only for slight flexures; where the deflections are comparatively great, the curve plotted to show the ratio of strength to deflection becomes flat and reaches its peak where the ends of the beam bend through an angle of 90°. The modulus of elasticity can be more accurately determined from that peak (formula 15) than from the tangent drawn to slight deflections.

The authors proved by a large number of statistical data that the force required for the deflections increased with the third power of the thickness. At an angle of 90°, the ratio between load and span was quadratic; this was proved by measurements as well as by theoretic deduction. This relation is clearly demonstrated by the leather after its adequate exposure to fatigue.

Leather shows numerous phenomena which depart from the behaviour of homogenous, absolutely elastic bodies. Thus the loads producing equal flexures are dissimilar on the grain and on the flesh side, furthermore when the deflections are repeated, strong relaxation and hysteresis set in. The elongation of the outside layers of the leather when bent depends also on the deflection curve, therefore the elasticity modulus should invariably be determined at the same specific elongation. The limit of elasticity in high-grade leather is equal to that of steel. Due to variable compactness of the fibre structure, the value of E varies according to the part of the hide the specimen came from. The value of E is far lower in soaked sole leathers than in dry ones.

The authors describe the method of measuring the bending modulus of elasticity on the *Herfeld*, *Tóth*, *Zilles*, *Pósa*, *English* appliances, and on the one built by the Hungarian Research Institute for the Leather Industry. The values of E in different kinds of leather, and their dispersions have been tabulated. The value of E is essentially related to the quality of sole leathers and their manufacturing method.

ИЗМЕРЕНИЕ НАТЯГА КОЖ

д-р хим. наук Г. ТОТ и В. ПОША

Резюме

Для характеристики натяга кож наиболее подходящим показателем является модуль упругости при изгибе (Е), который является независимой от размеров постоянной. Для возможности сравнения различных литературных данных были исследованы зависимости, существующие между размерами образца кожи, расстоянием между концами кожи и силой, необходимой при изгибе. Закон Гука действителен только для случая небольших изгибов, при больших изгибах кривая, характеризующая зависимость между усилием и изгибом, становится пологой и достигает максимума — в момент, когда концы балки будут расположены по отношению друг к другу под углом 90°. Измерение модуля упругости может быть определено с большей точностью на основе максимума (формула 15), чем на основе касательной, построенной для небольших изгибов.

Многочисленными статистическими данными доказано, что необходимое для изгиба усилие возрастает с третьей степенью толщины материала. При изгибе на 90° между нагрузкой и пролетом существует квадратичная зависимость, что подтверждено данными измерений и теоретическими выводами. Для кожи, после ее соответствующей тренировки упомянутая зависимость точно выражает существующее положение.

Кожа обладает целым рядом таких свойств, которые отличаются от свойств однородных, абсолютно упругих тел. Так, например, нагрузки, необходимые для идентичных по величене изгибов, в случае мездровой или лицевой сторон являются различными, далее при многократных изгибах наступает сильные гистериз и релаксация. Растяжение внешних слоев изогнутой кожи зависит также от радиуса закругления, поэтому определение модуля упругости всегда производится при идентичных значениях удельного растяжения. Предел упругости высококачественных подошвенных кож равен по величине пределу упругости стали. В зависимости от плотности волокнистой структуры значение величины E изменяется с топографией кожи. Значение величины E для отмоченных подошвенных кож будет значительно меньшим, чем в сухом их состоянии.

Дается точное описание методик измерения модуля упругости при изгибе по Герфельду, Тоту, Зиллешу, Энглишу и Исследовательского института кожевенной промышленности. Отклонение значений величины E для различных сортов кож дается таблицами. Значение величины E находится в тесной зависимости от качества подошвенных кож и технологии их производства.

MESURE DE L'ÉLASTICITÉ DU CUIR

G. TÓTH, docteur des sc. chim. ET V. PÓSA

RÉSUMÉ

Le meilleur indice de la consistance du cuir est le module d'élasticité à la flexion, E qui est une constante indépendante des dimensions. Pour pouvoir comparer les différents renseignements qui ont été publiés, les auteurs ont examiné les relations entre les dimensions de l'échantillon, la distance d'appui et la force de flexion. La loi de Hooke n'est valable que pour des petites flexions, pour des flexions plus importantes la courbe représentant la relation des forces et des flexions s'aplatit et atteint un maximum quand les bouts de l'échantillon forment un angle de 90°. Le module d'élasticité peut être déterminé avec plus de précision au maximum de la force (Fig. 16) que par les tangentes tracées aux points de petite flexion.

Les auteurs ont prouvé par un grand nombre de données statistiques que la force de flexion croît avec la troisième puissance de l'épaisseur. En cas de déformation de 90°, la relation entre la charge et la distance d'appui est du deuxième degré, ce qui est confirmé et par des mesures et par la théorie. Après une fatigue suffisante, le cuir montre cette relation exactement.

Le cuir produit nombre de phénomènes qui devient du comportement d'un corps homogène élastique idéal. Par exemple, pour des flexions égales, les charges ne le sont pas, si elles sont appliquées une fois côté poil, une fois côté chair ; en plus en cas de flexions répétées apparaissent une relaxation importante et l'hystérésis. L'allongement des couches superficielles du cuir fléchi dépend aussi du rayon de courbure, c'est pourquoi les auteurs ont déterminé le module d'élasticité toujours avec le même allongement spécifique. La limite d'élasticité des bons cuirs à semelles est du même ordre de grandeur que celle de l'acier. La valeur de E change de place en place, suivant la consistance du système fibreux. Le module E du cuir à semelles mouillé est de beaucoup plus petit que la valeur mesurée à sec.

Des descriptions précises sont communiquées concernant les méthodes pour la mesure du module d'élasticité à la flexion élaborées par Herfeld, Tóth, Zilles, Pósa, English et l'Institut de Recherches de l'Industrie des Cuirs (Budapest). Des tableaux indiquent les valeurs de E et de ses écarts, pour des différentes sortes de cuir. Il y a des relations importantes entre la qualité des cuirs à semelles, le procédé de fabrication et E.

DIE MESSUNG DES STANDES DES LEDERS

G. TÓTH, Doktor der chem. Wissenschaften und V. PÓSA

ZUSAMMENFASSUNG

Der geeignetste Index zur Charakterisierung des Standes des Leders ist der Biegungselastizitätsmodul (E), der unabhängig von den Abmessungen des Leders konstant ist. Um die verschiedenen Schrifttumsangaben vergleichen zu können, wurden die Zusammenhänge zwischen den Abmessungen der Lederprobe, der Spannweite und der zur Biegung notwendigen Kraft einer Untersuchung unterworfen. Das *Hooke*sche Gesetz erwies sich nur bei kleineren

Einbiegungen als gültig, bei grösseren Einbiegungen verflacht sich nämlich die den Zusammenhang zwischen der Kraft und der Einbiegung darstellende Kurve und erreicht ihr Maximum dann, wenn die Enden des Trägers einen Winkel von 90° einschliessen. Die Messung des Elastizitätsmoduls kann beim Maximum (Gl. 15) genauer erfolgen als auf Grund der für kleine Einbiegungen konstruierten Tangente.

Es konnte durch zahlreiche statistische Angaben bestätigt werden, dass die zur Einbiegung notwendige Kraft in der dritten Potenz mit der Dicke zunimmt. Im Falle einer 90°igen Einbiegung besteht zwischen Belastung und Spannweite ein quadratischer Zusammenhang, was durch Messungen und theoretische Ableitungen bewiesen wurde. Nach entsprechender Ermüdung des Leders lässt sich dieser Zusammenhang genau nachweisen.

Das Leder weist zahlreiche Eigenschaften auf, die vom Verhalten der homogenen, absolut elastischen Körper abweichen. So sind die von der Fleisch- und Narbenseite bei gleicher Einbiegung gemessenen Belastungen nicht gleich gross, ferner treten bei mehrmaliger Biegung Relaxation und Hysteresis auf. Die Dehnung der Randschichten des gebogenen Leders hängt auch vom Krümmungsbogen ab, weshalb auch die Bestimmung des Elastizitätsmoduls stets bei gleicher spezifischer Dehnung durchgeführt werden soll. Die Elastizitätsgrenze von hochwertigem Sohlenleder liegt in der gleichen Grössenordnung wie die des Stahls. Da der Wert von E von der Dichte der Faserstruktur abhängt, verändert er sich je nach der Topographie des Leders. Bei aufgeweichtem Sohlenleder ist der Wert von E wesentlich kleiner als der im trockenen Zustand gemessene Wert.

Es werden schliesslich die verschiedenen, von *Herfeld*, *Tóth*, *Zilles*, *Pósa*, *English* bzw. vom Lederforschungsinstitut in Budapest ausgearbeiteten Methoden zur Messung des Biegungselastizitätsmoduls eingehend beschrieben. Die Streuung der Werte von E für verschiedene Ledersorten ist in gesonderten Tabellen angegeben. Der Wert von E steht in einem engen Zusammenhang mit der Qualität des Sohlenleders und der Fabrikationsmethode.

TRANSIENT PHENOMENA IN THE SOLID ROTORS OF SYNCHRONOUS MACHINES

R. TUSCHÁK

DEPARTMENT OF THE THEORY OF OPERATION OF ELECTRICAL MACHINERY, UNIVERSITY OF TECHNICAL SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received 22nd June, 1954]

List of symbols

$\mathbf{A}(t)$	Amplitude of ampère-conductors per unit of circumference in the stator (A/m)
$\mathbf{A}(p)$	Laplace transform of $\mathbf{A}(t)$
$\mathbf{A}_1(t)$, $\mathbf{A}_1(p)$	Ampère-conductors per unit of circumference of the stator and its Laplace transform
$\mathbf{B}_r, \mathbf{B}_\varphi, \mathbf{B}_z$ $\mathbf{B}_y, \mathbf{B}_x, \mathbf{B}_z$	Radial, tangential and axial components of the flux density in a coordinate system fixed to the rotor (Vsec/m^2)
C	$6N_1^2 \xi_1^2 \frac{\mu l}{\pi}$
$\mathbf{E}$	Axial component of the electric field strength in a coordinate system fixed to the rotor (V/m)
$\mathbf{E}(r)$, $\mathbf{E}(y)$	Space amplitude of the electric field strength
$\mathbf{H}_r, \mathbf{H}_\varphi, \mathbf{H}_z$ $\mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y, \mathbf{H}_z$	Radial, tangential and axial components of the magnetic field strength
$\mathbf{H}_r(r), \mathbf{H}_\varphi(r)$ $\mathbf{H}_x(y), \mathbf{H}_y(y)$	Space amplitude of the magnetic field strength components at radius r and depth y
$\mathbf{I}_1$	Primary current vector in the coordinate system fixed to the stator
$\mathbf{I}_f$	Primary current vector in the coordinate system fixed to the rotor
$J_a(w)$	Bessel function of the order a and the argument w
K	Abbreviation according to equation (41)
L_0	Main field inductance (Hy)
L_1	Leakage inductance of the stator
$L_2(p)$	Operational inductance of the rotor
L_2''	Rotor leakage inductance in the case of s = 1
$L(p)$	$L_1 + L_2(p)$
M	Abbreviation according to equation (59)
N_1	Number of turns per phase of the stator
R_1	Resistance of the stator
R_2	Rotor resistance reduced to the stator
R_2''	Rotor resistance in the case of s = 1
S	Abbreviation according to equation (64)
T_s	Time constant of the aperiodic part of the stator short-circuit current (sec)
$\mathbf{U}_1$	Voltage vector of the armature in the coordinate system fixed to the stator
$\mathbf{U}_f$	Voltage vector of the stator in the coordinate system fixed to the rotor
U_a, U_b, U_c	Instantaneous value of stator phase voltages
X_2	Rotor reactance
$\mathbf{Z}_2$	Rotor impedance
$\mathbf{Z}_2''$	Rotor impedance in the case of s = 1
a	Number of pole pairs
d	Radial dimension of rotor (m)
$\mathbf{e}(r)$	Laplace transform of $\mathbf{E}(r)$
$\mathbf{h}_r(r)$, $\mathbf{h}_\varphi(r)$ $\mathbf{h}_x(y)$, $\mathbf{h}_y(y)$	Laplace transforms of $H_r(r)$, $H_\varphi(r)$, $H_x(y)$ and $H_y(y)$ respectively.

$\mathbf{i}$	Axial component of the eddy current density
$\mathbf{i}_f$	Laplace transform of I_f
k	Abbreviation according to equation (61)
l	Rotor length (m)
p	Laplace transform variable
r_k	Rotor radius
s	Slip
$\mathbf{u}_f$	Laplace transform of U_f
v_k	$= \sqrt{-js\omega_0 \mu\sigma r_k^2}$
w	$= \sqrt{-p\,\mu\sigma r^2}$
w_k	$= \sqrt{-p\,\mu\sigma r_k^2}$
$\boldsymbol{\Psi}_1$	Stator flux vector in the coordinate system fixed to the stator
$\boldsymbol{\Psi}_f$	Stator flux vector in the coordinate system fixed to the rotor
$\boldsymbol{\Psi}_f(p)$	Laplace transform of $\boldsymbol{\Psi}$
α	Abbreviation according to equation (48)
γ	Abbreviation according to equation (68)
δ	Length of air gap (m)
λ	$= \sqrt{\alpha^2 + p\,\mu\sigma}$
μ	Permeability of iron
μ_0	Permeability of air
ϱ	Specifical resistance of iron
σ	$= 1/\varrho$
ω_0	Synchronous angular frequency (1/sec)
τ	Pole pitch
ξ_1	Stator winding factor

1. Introduction

If the three phases windings of an excited synchronous generator in no-load condition are suddenly short-circuited, the short-circuit current developing in the stator contains a periodic and an aperiodic component. At the instant of establishing the short circuit, the two components are equal and of opposite sign in each phase. The resulting phase currents are therefore zero at the instant of the short circuit. The subsequent development of the two current components is independent of each other. The aperiodic, or — according to the usual terminology — D.-C. component decays exponentially to zero from its initial value, according to the time constant determined by the resistance of the stator. The periodic, or in other words, A.-C. component, diminishes exponentially from its initial sub-transient value to the steady state short-circuit current according to one or more time constants, which are essentially determined by the resistance of the rotor circuits. The course of the short circuit may be characterized by the initial values of the components and the time constants.

For the analysis of short circuits in generators having a cylindrical rotor, it is generally assumed that there are two circuits in the rotor : the exciting-coil circuit and a damping circuit. This latter is considered to include also the damping effect of the solid iron body of the rotor. Under such conditions, the well-known result is obtained, in the case of a symmetrical three-phase short circuit, that the alternating current in the stator decays from its initial sub-transient value first according to a smaller, so-called sub-transient time constant, and after several periods according to a considerably larger, socalled transient time constant. During this time, the direct current diminishes according to one single time constant.

To characterize the A.-C. component, in addition to the synchronous reactance which determines the steady state short-circuit current, the sub-transient and transient reactances are used. The most reliable way for determining them, as well as for the determination of the time constants is the measurement of a sudden three-phase short circuit. The sub-transient and transient reactances can be calculated from the voltage before the short circuit and the current obtained by extrapolating the envelope of the A.-C. components to the instant $t = 0$. The A.-C. amplitude can be also computed from the value extrapolated to $t = 0$ of the three armature direct currents and with the help of it, the sub-transient reactance. According to this conception, the sub-transient reactances calculated from D.-C. values and from A.-C. intensity must be equal.

The theory which previously has been developed strictly applies only to machines having laminated rotors fitted with damper windings and for them, it yields results which are a very good approximation of reality. In solid-rotor machines the transient phenomena are related to the eddy current phenomena in the rotor, therefore the rotor cannot be replaced by one single damper winding. Notwithstanding this, in order to avoid mathematical difficulties, eddy current phenomena are generally not considered, and the short circuit of solid-rotor machines is analysed in a way similar to the analysis of laminated-rotor machines. The effect of the eddy currents induced in the iron body of the rotor is important, especially in those turboalternators where the exciting-coil slots are closed by steel wedges.

In the engineering literature, detailed examinations of transient phenomena in solid iron cores are to be found, so far, only for switching on and off iron-core coils of square and circular cross-section [3—8]. Subsequently, we shall extend these investigations to cylindrical rotors as well and we shall determine the effect produced by the solid rotor at the transient phenomena in synchronous machines.

To simplify the discussions and to get a general view of the whole question, we shall first consider a hypothetical machine, the rotor of which is a completely smooth, long, solid steel cylinder without exciting coil. We shall examine the transient phenomena in the case of the rotor turning at synchronous speed,

and alternating voltage being switched suddenly on the stator. It is well known that when a three-phase short circuit occurs on the terminals of a no-load, excited synchronous generator, the same stator currents arise as when a voltage of equal value but of opposite direction to the voltage before the short circuit is switched on the unexcited, but synchronously rotating machine. By this method our analysis will finally apply to the short circuits of solid-rotor generators, with the simplification that we neglect the influence of the exciting coil. The exciting coil makes a particularly high influence on the transient part of the short-circuit current, while it is of small influence on the sub-transient part

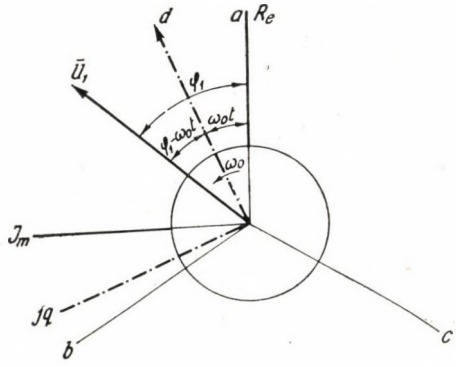


Fig. 1a

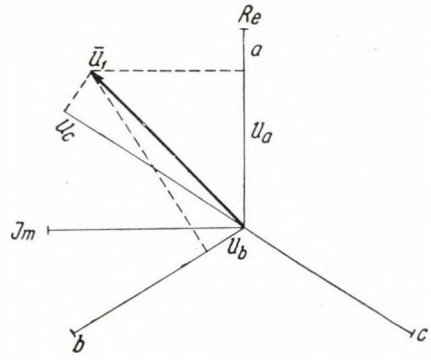


Fig. 1b

of it. On the other hand, the eddy currents in the solid iron body are of high influence immediately after the instant of short-circuiting, i. e. during the sub-transient period of the short-circuit.

The differential equation of the short circuit we use in the Park transformed vector form [1—2]. In the coordinate system fixed to the stator

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{I}_1 R_1 + \frac{d\boldsymbol{\Psi}_1}{dt} \quad , \tag{1}$$

where $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{I}_1$ and $\boldsymbol{\Psi}_1$ are the three so-called three-phase vectors which are formed from the instantaneous values of voltage, current and flux. The projections of this vector on the axis of each phase give the instantaneous values of the phase quantities, if the plane at right angle to the axis of the machine is considered to be the plane of the complex numbers. Thus, e. g.

$$\mathbf{U}_1 = \frac{2}{3}\left(U_a + U_b\, e^{j120^\circ} + U_c\, e^{j240^\circ}\right) \quad . \tag{2}$$

Equation (1) we transform to the coordinate system adherent to the rotor *(Fig. 1b)*. The vectors written in the rotor coordinate system we denote by the subscript f.

$$\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_1 \, e^{-j\omega_0 t} \tag{3a}$$

$$I_f = \mathbf{I}_1 \, e^{-j\omega_0 t} \tag{3b}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_f = \boldsymbol{\Psi}_1 \, e^{-j\omega_0 t} \quad . \tag{3c}$$

Substituted into equation (1):

$$\mathbf{U}_f = \mathbf{I}_f R_1 + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_f}{\mathrm{d}t} + j\omega_0 \boldsymbol{\Psi}_f \tag{4}$$

We pass now to the Laplace transforms of the mentioned quantities. The Laplace transformation we will use in the form introduced by K. W. Wagner, thus, if $F(t)$ is the time function and $f(p)$ the transformed function, the relation between the two is

$$f(p) = p \int_0^\infty F(t) \, e^{-pt} dt \quad . \tag{5}$$

Taking into account that at the instant $t = 0$ all quantities are zero, the transformed form of equation (4) is

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{i}_f R_1 + (p + j\omega_0) \boldsymbol{\Psi}_f(p) \quad . \tag{9}$$

The flux is produced by simultaneous excitation by the stator current and by the rotor current. Therefore we must first determine the distribution of eddy currents in the rotor.

2. Distribution of eddy currents in a solid rotor

We have assumed that the rotor is a smooth solid steel cylinder. We further assume that the length of the rotor, as compared with its diameter, is so great that it may be considered of infinite length in our computations, i. e. the influence of the ends may be neglected. This means that the distribution of the field is homogenous in axial direction. Magnetic field strength and flux density have only radial and tangential components, eddy current density has only an axial component. We further presume that both components of the flux density and the field strength in the air gap of the machine and in the rotor are distributed sinusoidally along the circumference and that the half-wavelength of the sine is equal to the pole pitch. The permeability of the rotor iron is assumed to be constant. We imagine the primary winding to be distri-

buted continuously along the circumference and we consider the circumferential fundamental harmonic of the ampère-conductors per unit of circumference. We furthermore use the usual approximation which consists in neglecting the magnetic potential of the stator and introducing its influence by a convenient selection of the dimensions of the air gap.

For writing down the equations, we use the polar coordinate system adherent to the rotor, shown in *Fig. 2*. The fundamental harmonic of ampere-

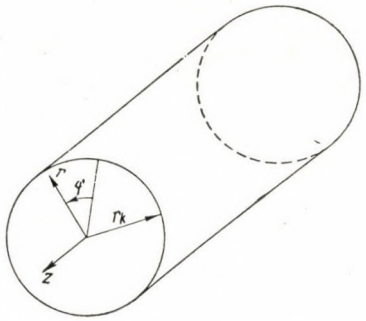


Fig. 2

conductors per unit of circumference in the stator is expressed in the following form :

$$\mathbf{A}_1(t) = \mathbf{A}(t)\, e^{-ja\varphi} \quad , \tag{7a}$$

where a is the number of pole pairs, A(t) an arbitrary time function. The Laplace transform of equation (7a) is

$$\mathbf{A}_1(p) = \mathbf{A}(p)\, e^{-ja\varphi} \, . \tag{7b}$$

The distribution of the eddy current and the field strength in the rotor is computed from Maxwell's equations. The displacement currents are neglected, quasi-stationary phenomena being examined. The equations are expressed in the MKS system of units.

$$\text{rot}\ \mathbf{H} = \mathbf{i} \tag{8a}$$

$$\text{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{8b}$$

$$\text{div}\ \mathbf{B} = 0 \tag{8c}$$

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{E}}{\varrho} \tag{8d}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{8e}$$

Re-writing the equations in the polar coordinate system of *Fig. 2* and paying attention to $\mathbf{i}_\varphi = \mathbf{i}_r = \mathbf{H}_z = 0$, we obtain the following system of differential equations :

$$\sigma\mathbf{E} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\mathbf{H}\varphi) - \frac{\partial \mathbf{H}r}{\partial \varphi}\right] \tag{9a}$$

$$-\mu\frac{\partial \mathbf{H}_r}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \varphi} \tag{9b}$$

$$\mu\frac{\partial \mathbf{H}\varphi}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r}. \tag{9c}$$

We are searching for such a solution of the system of differential equations, which is periodical along the circumference. Let us assume therefore that the solution may be written in the following form :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(r)\, e^{-ja\varphi}. \tag{10a}$$

$$\mathbf{H}_r = \mathbf{H}_r(r)\, e^{-ja\varphi} \tag{10b}$$

$$\mathbf{H}_\varphi = \mathbf{H}_\varphi(r)\, e^{-ja\varphi} \tag{10c}$$

In order to eliminate the time variable we pass to the Laplace transform of the time functions. Thus the (9a—c) system becomes, considering also (10a—c) equations :

$$\sigma\mathbf{e}(r) = \frac{1}{r}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r\mathbf{h}_\varphi(r)] + ja\,\mathbf{h}_r(r)\right\} \tag{11a}$$

$$\mathbf{h}_r(r) = \frac{ja\,\mathbf{e}(r)}{rp\mu} \tag{11b}$$

$$\mathbf{h}_\varphi(r) = \frac{1}{p\mu}\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}(r)}{\mathrm{d}r}. \tag{11c}$$

Introduced into equation (11a) :

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{e}(r)}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}(r)}{\mathrm{d}r} - \left[p\mu\sigma + \frac{a^2}{r^2}\right]\mathbf{e}(r) = 0\ . \tag{12}$$

By introducing $w = \sqrt{-p\mu\sigma r^2}$ as a new variable, this equation can be changed into a Bessel-type differential equation, the solution of which is :

$$\mathbf{e}(r) = C_1 J_a(w) + C_2 N_a(w) \tag{13}$$

J_a and N_a are the Bessel and Neumann functions, respectively, of the order a. At $r = 0$, $\mathbf{e}(r)$ must be finite and this is only possible if $C_2 = 0$. The solution is therefore

$$\mathbf{e}(r) = C_1 J_a(w) \,. \tag{14}$$

On the base of equations (11b—c)

$$\mathbf{h}_r(r) = \frac{ja\,C_1}{p\mu r} J_a(w) \tag{15}$$

$$\mathbf{h}_\varphi(r) = \frac{C_1\sqrt{-p\mu\sigma}}{p\mu}\left[J_{(a-1)}(w) - \frac{a}{w} J_a(w) \right]. \tag{16}$$

C_1 constant is determined from the boundary condition prescribed for $r = r_k$. In order to be generally valid, let there be at $r = r_k$

$$\mathbf{H}_\varphi = \mathbf{H}_\varphi(r_k) e^{-ja\varphi} \,. \tag{17}$$

The Laplace transform of this is $\mathbf{h}_\varphi(r_k)\, e^{-ja\varphi}$. From equation (16), introducing $w = w_k = \sqrt{-p\mu\sigma r_k^2}$:

$$C_1 = \mathbf{h}_\varphi(r_k) \frac{p\mu r_k}{w_k J_{(a-1)}(w_k) - a J_a(w_k)} \,. \tag{18}$$

From this

$$\mathbf{h}_\varphi(r) = \mathbf{h}_\varphi(r_k) \frac{r_k}{r} \frac{w\, J_{(a-1)}(w) - a\, J_a(w)}{w_k J_{(a-1)}(w_k) - a\, J_a(w_k)} \tag{19}$$

$$\mathbf{h}_r(r) = j\,\mathbf{h}_\varphi(r_k) \frac{r_k}{r} \frac{a\, J_a(w)}{w_k J_{(a-1)}(w_k) - a\, J_a(w_k)} \,. \tag{20}$$

$$\mathbf{e}(r) = p\mu r_k\, \mathbf{h}_\varphi(r_k) \frac{J_a(w)}{w_k J_{(a-1)}(w_k) - a\, J_a(w_k)} \tag{21}$$

The variation, as a function of time of electric and magnetic field strength, including the transient phenomena, is described by these equations, inverse-transformed and multiplied by $e^{-ja\varphi}$.

The relation between $\mathbf{H}_\varphi(r_k)$ and the primary ampere-conductors per unit of circumference may be written on the basis of *Fig. 3*. Writing down the law of excitation for the closed path shown on the figure and assuming that the radial component of flux density in the air gap does not change

along the length of the air gap, ($\delta \ll r_k$), and the field strength in the stator is zero, we get the following expression :

$$\mathbf{A}(t)e^{-ja\varphi} = -\left[\mathbf{H}_\varphi(r_k)\, e^{-ja\varphi} + \frac{\delta\mu}{\mu_0 r_k}\frac{d}{d\varphi}\left[\mathbf{H}_r(r_k)\, e^{-ja\varphi}\right]\right],$$

and from this

$$\mathbf{A}(t) = -\left[\mathbf{H}_\varphi(r_k) - j\,\frac{a\delta}{\mu_0 r_k}\,\mu\mathbf{H}_r(r_k)\right]. \tag{22}$$

Passing to the Laplace transform and paying attention to the relation between $\mathbf{h}_\varphi(r_k)$ and $\mathbf{h}_r\,(r_k)$ as laid down by equations (19) and (20),

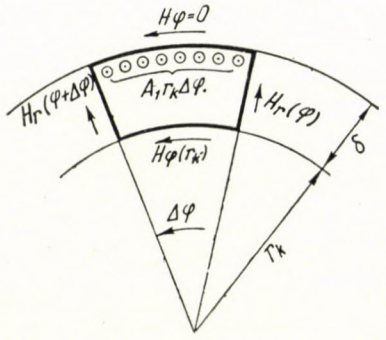


Fig. 3

$$\mathbf{A}(p) = -\mathbf{h}_\varphi(r_k)\left[1 + \frac{\delta\mu a^2}{\mu_0 r_k}\,\frac{J_a(w_k)}{w_k J_{(a-1)}(w_k) - a\,J_a(w_k)}\right]. \tag{23}$$

From the calculations made until now, the flux entering the rotor may be computed :

$$\Phi_f(p) = \frac{2}{\pi}\,\mu l\tau\,\mathbf{h}_r(r_k) = 2j\mathbf{h}\varphi\,(r_k)\mu l r_k\,\frac{J_a(w_k)}{w_k J_{(a-1)}(w_k) - aJ_a(w_k)}. \tag{24}$$

Introducing the value of $\mathbf{h}_\varphi\,(r_k)$ from equation (23) into equation (24) and considering that in the coordinate system adherent to the rotor the following relation exists between the ampère-conductors per unit circumference and the primary current :

$$\mathbf{A}(p) = j\,\frac{3N_1\xi_1\mathbf{i}_f}{a\tau}, \tag{25}$$

we obtain the flux of the stator winding from the following formula :

$$\Psi_f(p) = N_1\xi_1\Phi_f(p) + L_1\mathbf{i}_f = \mathbf{i}_f \left[L_1 + \frac{\dfrac{6N_1^2\xi_1^2\mu l}{\pi} \cdot J_a(w_k)}{J_a(w_k)\left| a^2 \dfrac{\mu\delta}{\mu_0 r_k} - a \right| + w_k J_{(-1)}(w_k)} \right] =$$

$$= \mathbf{i}_f[L_1 + L_2(p)] \ . \tag{26}$$

Expression (26) yields the Laplace transform of the flux excited by the stator and the rotor currents, as a function of the primay current. L_1 is the leakage inductance of the primary circuit, L_2(p) is the resulting operational inductance of the solid rotor and the air gap.

3. The impedances of solid rotors

From the expression for $L_2(p)$ we can determine the impedance of the solid rotor under different conditions of operation.

By substituting $p = 0$ we get the case of the secondary frequency being zero. Then no eddy current is flowing, $L_2(O)$ is the inductance of the main field of the machine :

$$L_2(0) = L_0 = 6N_1^2\xi_1^2 \frac{l\mu}{\pi} \frac{1}{a\left(1 + \dfrac{\delta\mu}{\mu_0 r_k} a\right)} \ . \tag{27}$$

Introducing $p = js\omega_0$ corresponds to that stationary state, when the stator of the machine is fed by three-phase current of angular frequency ω_0 and the rotor is running with the slip s. The resulting impedance of the rotor and the air gap is then :

$$\mathbf{Z}_2 = j\omega_0 L_2(js\omega_0) = j\omega_0 6N_1^2\xi_1^2 \frac{l\mu}{\pi} \frac{J_a(v_k)}{J_a(v_k)\left| \dfrac{\delta\mu a^2}{\mu_0 r_k} - a \right| + v_k J_{(a-1)}(v_k)} \ . \tag{28}$$

$$\text{where } v_k = \sqrt{-j\, s\, \omega_0\, \mu\, \sigma\, r_k^2} \ .$$

From (28) can be determined the impedance of solid-rotor asynchronous motors as a function of the slip.*

* It is only after writing the present article that I procured knowledge of an article by Mc Connell, where he deducts a similar expression for the impedance of solid-rotor induction motors (Mc Connell : The Polyphase Induction Machine With Solid Rotor. Transactions, 1953).

In the case of $s = 1$ the equation (28) yields the shortcircuit impedance of the solid rotor, in the case of $s = 2$ its negative sequence impedance. For dimensions usual with larger machines, the absolute value of v_k is so big that the Bessel functions may be approximated by asymptotic representation. For large values of v_k

$$\frac{J_{a-1}(v_k)}{J_a(v_k)} \to j \ .$$

Thus

$$\mathbf{Z}_2 = j\omega_0 L_2(js\omega_0) = j\omega_0 6N_1^2\xi_1^2 \frac{l\mu}{\pi} \frac{1}{a\left(\frac{a\delta\mu}{\mu_0 r_k} - 1\right) + j\sqrt{-j\omega_0 s\mu\sigma r_k^2}} \ . \tag{29}$$

In the case of the usual dimensions the first member of the denominator may be neglected. This essentially means neglecting the magnetizing current. The impedance of the rotor is then:

$$\mathbf{Z}_2 = j\omega_0 L_2(js\omega_0) = 6N_1^2\xi_1^2 \frac{l}{r_k\pi}\sqrt{\frac{j\omega_0\mu\varrho}{s}} = \frac{R_2}{s} + jX_2 \ . \tag{30}$$

In the case of $s = 1$

$$\mathbf{Z}_2'' = j\omega_0 L_2(j\omega_0) = 6N_1^2\xi_1^2 \frac{l}{r_k\pi}\sqrt{j\omega_0\mu\varrho} = R_2'' + j\omega_0 L_2'' \ . \tag{31}$$

The phase angle of the impedance is 45°. The impedance depends on the value of μ which changes with saturation. The computations have been made under the assumption of a constant μ. But a similar result is obtained if the dependence of the permeability on saturation is taken into account by the method recommended by Dreyfuss [10]. A detailed method similar to this one has been worked out recently by Nejman [9] for the one-dimensional case. The result resembles equation (31). The place of μ is taken by the A.—C. permeability, which occurs at the place of maximum circumferential field strength and the values of $R''$and $j\omega_0\mathbf{L}''$ calculated in this way must be multiplied by the coefficients f_1 and f_2 indicated by Nejman; consequently the phase angle of the impedance will be smaller than 45°. The coefficients f_1 and f_2 depend on the quality of the material. For the usual types of iron, they are 1,2—1,4 and 1~0,95, respectively.

Up to now, our developments have been related to smooth steel cylinders. In the case of stationary operation it is rather simple to compute the impedances of slotted rotors, taking into account the saturation as well. Our examinations concerning this subject are to be published in a later article.

4. Stator currents at switching-on

Turning back to the analysis of the switching-on phenomenon, we substitute equation (26) into equation (6) :

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{i}_f \{R_1 + (p + j\omega_0)[L_1 + L_2(p)]\} = \mathbf{i}_f[R_1 + (p + j\omega_0)L(p)] \ . \quad (32)$$

For the sake of simplicity we will confine the analysis to two-pole machines. We introduce the following notation :

$$C = 6N_1^2\xi_1^2\frac{\mu l}{\pi} \ .$$

Making use of equation (27), there is in the case of $a = 1$:

$$L_2(p) = \frac{CJ_1(w_k)}{J_1(w_k)\left[\frac{C}{L_0} - 2\right] + w_k J_0(w_k)} \ . \quad (33)$$

If the «a» phase voltage switched on the machine can be expressed in the form of $U_a = U\cos\ (\omega t + \alpha)$ then

$$\mathbf{U}_1 = Ue^{j(\omega_0 t + \alpha)} = \mathbf{U}e^{j\omega_0 t} \quad (34a)$$

$$\mathbf{U}_f = Ue^{j\alpha} = \mathbf{U} \ . \quad (34b)$$

With this the expression of the stator current, taking into account equation (33) as well, becomes

$$\mathbf{i}_f = \frac{\mathbf{U}}{R_1 + (p + j\omega_0)\left[L_1 + \dfrac{CJ_1(w_k)}{J_1(w_k)[C/L_0 - 2] + w_k J_0(w_k)}\right]} \ . \quad (35)$$

The inverse transformation is carried out with the aid of the expansion theorem. In order to simplify the calculations, we make use of the usual procedure of neglecting, in a first approximation, the resistance of the stator. This produces only an insignificant change of the various components of the stator current amplitude, but the aperiodic component will appear as an un-damped direct current, equal, during the whole time of the short circuit, to the value at the time $t = 0$. The damping of the aperiodic component will be taken into account later.

By substituting $R_1 = 0$ into equation (35) we get

$$\mathbf{i}_f = \mathbf{U} \frac{J_1(w_k)[C/L_0 - 2] + w_k J_a(w_k)}{(p + j\omega_0)\{J_1(w_k)[(C/L_0 - 2)L_1 + C] + w_k J_0(w_k) L_1\}} . \tag{36}$$

The denominator of equation (35) finally contains only whole powers of p — this we may check by developing the Bessel functions into series — therefore the fraction has a singularity only at the zero point of the denominator. We must remark that $w_k = 0$, and therefore $p = 0$, the function does not have a singularity, because $\frac{J_1(w_k)}{w_k}$ is here regular.

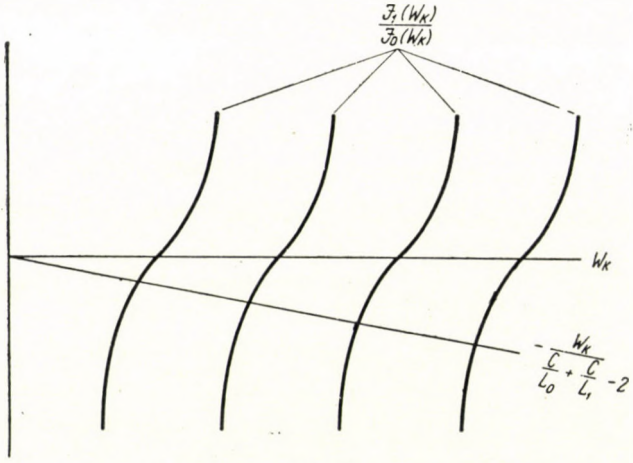


Fig. 4

The zero points of the denominator are given by

$$p = -j\omega_0 \tag{37}$$

and the roots of the following equation:

$$\frac{J_1(w_k)}{J_0(w_k)} = -\frac{w_k}{C/L_0 + C/L_1 - 2} . \tag{38}$$

The roots of equation (38) can be computed by a very simple graphical method, because they can be determined from the points of intersection of the function $\frac{J_1(w_k)}{J_0(w_k)}$ and the straight line $-\frac{w_k}{C/L_0 + C/L_1 - 2}$ (*Fig. 4*). The point of intersection belonging to $w_k = 0$ must not be considered, as has been established already.

Let us designate the places of the points of intersection by $w_{k\nu}$. The values belonging to them are

$$p_\nu = -\frac{-w_{k\nu}^2 \varrho}{\mu r_k^2} \quad . \tag{39}$$

To the negative values of $w_{k\nu}$ belong the same values p_ν as to the positive ones, therefore it will be sufficient to determine the positive roots of equation (38).

With the aid of the expansion theorem the equation (36) is transformed back to time coordinates and will take the form of:

$$\mathbf{I}_f = \frac{\mathbf{U}}{j\omega_0(L_1+L_0)} + \frac{\mathbf{U}e^{-j\omega_0 t}}{-j\omega_0[L_1+L_2(-j\omega_0)]} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty}{}' \frac{2\mathbf{U}}{(p_\nu+j\omega_0)L_1} \frac{C/L_1 e^{p_\nu t}}{K^2+2K+w_{k\nu}^2} = \frac{\mathbf{U}}{j\omega_0(L_1+L_0)} + \frac{\mathbf{U}e^{-j\omega_0 t}}{R_2''-j\omega_0[L_1+L_2'']} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty}{}' \frac{2\mathbf{U}}{(p_\nu+j\omega_0)L_1} \frac{C/L_1 e^{p_\nu t}}{K^2+2K+w_{k\nu}^2} \tag{40}$$

$$K = \frac{C}{L_0} + \frac{C}{L_1} - 2 \quad . \tag{41}$$

Passing to armature coordinates:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{U}e^{j\omega_0 t}}{j\omega_0(L_1+L_0)} + \frac{\mathbf{U}}{R_2''-j\omega_0(L_1+L_2'')} +$$

$$+ \sum_{\nu=}^{\infty}{}' \frac{2\mathbf{U}}{(p_\nu+j\omega_0)L_1} \frac{C/L_1 e^{(p_\nu+j\omega_0)t}}{K^2+2K+w_{k\nu}^2} \quad . \tag{42}$$

The first member of the expression represents the steady-state part of the alternating current. The second member is the aperiodic component of the short-circuit current which now — the stator damping having been neglected — is a direct current. The value of the direct current at the instant of short circuit is equal to the A.C. amplitude. Therefore the impedance $R_2''-j\omega_0(L_1+L_2'')$ is the sub-transient impedance which can be determined from the aperiodic component. According to the former

$$R_2''-j\omega_0(L_1+L_2'') = -j\omega_0[L_1+L_2(-j\omega_0)] \quad . \tag{43}$$

The equation expresses that the sub-transient impedance which has been computed in this way, is equal to the conjugate of the 50 cycle impedance

of the machine at standstill supposing the same saturation. This definition of the sub-transient impedance, which is already known from the theory of machines fitted with an amortisseur winding, is valid also for solid-rotor machines. In this case, too, measurement carried out at standstill provides information about the expected value of the sub-transient impedance. But saturation must be considered as well. The total impedance is composed from two parts : the stator impedance and the rotor impedance. There are large air gaps in the path of the lines of force and consenquently, the stator leakage impedance depends only very little on saturation. The resistance of the rotor does not affect very much the total impedance, therefore it is sufficient to consider its inductive part only. In the sense of equation (31) the rotor leakage depends on the same factors, as the resistance of the rotor. Taking into account a great number of ampere-conductors per unit of circumference which appears in case of a short circuit, it can be stated that the permeability of the surface layer of the rotor and, together with it, the rotor impedance, will be much smaller than the results of a measurement made at standstill with a small current. In the case of a three-phase short circuit, the conditions of saturation in the surface layer of the rotor are best compared to the conditions of two-terminal negative-sequence resistance measurement. Therefore it is obvious to suppose that the part of the sub-transient impedance which is due to the rotor, changes approximately in the same way, with circumferential ampère-conductors, as the negative-sequence resistance.

The influence of saturation is particularly important if the exciting coil slots are closed by steel wedges. In the case of wedges made from anti-magnetic material, the rotor eddy currents have less influence on the sub-transient phenomena because of the currents conduced by the wedges, and therefore the change of the permeability of the iron appears to a lesser degree in the change of the sub-transient impedance.

The third member of the right-hand side of equation (42) is the difference between the short-circuit alternating current and the steady-state alternating current. It can be seen that in even the simplest of cases, this part of the alternating current consists of an infinite number of members, decreasing according to different time constants. Thus the difference arising between the various ordinates of the envelope of the short-circuit A. C. and the amplitude of the steady-state short-circuit current, drawn on simply-logarithmic paper, as a function of time, will produce the graph of *Fig. 7*, the straight part of which corresponds to the member with the largest time constant.

With regard to the fact that the short-circuit current being the sum not of two, but of infinite number of currents decaying always logarithmically, the distinction between the sub-transient and the transient current and their time constants is not sufficient for description of the phenomenon. If, for the sake of simplicity and in accordance with the usual method, in the case

of solid-rotor machines, we nevertheless distinguish, only these two components of the short-circuit alternating current, in addition to the steady-state current, so this means that the graph of *Fig. 7*, has been approximated by the sum of two exponential functions, and that these functions have been declared to be the transient and the sub-transient components, respectively. Their amplitudes and their time constants are chosen for getting the most perfect approximation. This means that the transient time constant is the average time constant of the slowly decaying members of the short-circuit current, while the sub-transient time constant is the average time constant of the rapidly decaying members. It is obvious that the determination of the two components is not unequivocal and contains very many subjective moments. Depending on which parts of the envelope are considered to be transient or sub-transient, respectively, we get different values from the same measurement. The uncertainty is also enhanced by the changes in saturation.

Under such circumstances it is more suitable to determine the initial value of the short-circuit current from the aperiodic component, because this decreases according to only one time constant (there is only one circuit in the stator) and its value, extrapolated to $t = 0$, is conform to the initial value of the alternating current.

The presence of the exciting coil changes the phenomena quantitatively, but not qualitatively. The exciting coil has very little influence on the initial value of the short-circuit current, because at the moment of short-circuit the iron body screens off the exciting coil to a great extent. Later on the influence of the exciting coil increases and exerts a strong action on the magnitude and the time constant of the a—c. components. But in this case too, the a.—c. component of the short-circuit current consists of an infinite number of members having different time constants.

The analytical method which we have worked out for the analysis of the exciting coil and the solid iron body will be published as the second part of this article; therefore we will not consider in detail the quantitative aspects of the action of the exciting coil.

The time constant of the aperiodic member is determined approximately by the following method: $p = -j\omega_0$ is only an approximate root of the denominator of equation (35), in case we consider also the resistance R_1 of the armature. But its true value must be near to $-\omega_0$, because of the small value of R_1. We may improve on the solution by using Newton's method of approximation, starting from $-j\omega_0$. If p_0 is an approximate root of the equation $f(p) = 0$, a better approximation is the root p_1 given by

$$p_1 = -\frac{f(p_0)}{f'(p_0)} + p_0, \tag{44}$$

$f'(p)$ is the differential coefficient of $f(p)$ function. In our case

$$f(p) = R_1 + (p + j\omega_0)[L_1 + L_2(p)] = R_1 + (p + j\omega_0)\, L(p)$$

$$p_0 = -j\omega_0$$

$$f(p_0) = R_1$$

$$f'(p_0) = L_1 + L_2(-j\omega_0) = L(-j\omega_0) = -\frac{R_2''}{j\omega_0} + L''$$

Substituted into equation (44) :

$$p_1 = -j\omega_0 + \frac{R_1 j\omega_0}{R_2'' + jX''} = -j\omega_0 + j\omega_0 \frac{R_1 R_2''}{R_2''^2 + X''^2} - \frac{\omega_0 R_1 X''}{R_2''^2 + X''^2}. \quad (45)$$

The second member of p_1 expresses the well-known phenomenon, that the primary resistance influences the frequency of the aperiodic member as well, so really we do not get direct current, but a very low-frequency alternating current. This frequency is expressed by the formula which we have mentioned. From this, the time constant of the stator is

$$T_s = \frac{R_2''^2 + X''^2}{\omega_0 R_1 X''} \sim \frac{X''}{\omega_0 R_1}. \quad (46)$$

5. Distribution of the eddy current if the rotor is considered as a plane layer

Mathematical treatment of the transient phenomena is greatly simplified if the rotor is considered to be a solid body of finite thickness, limited by plane surfaces, and if the methods which have been shown are applied to this case. Although the numerical results will depart somewhat from the results obtained for the cylindrical rotor, we get qualitative information on the course of events which will be as correct as before. At the same time, mathematical advantages are brought into evidence, because instead of cylinder functions, hyperbolic and trigonometric functions are used which are much easier to handle. These advantages are conspicious when the presence of the exciting coil is considered as well, and if thus more complicated relations must be established than has been the case before. In order to demonstrate the method of calculation, we will now discuss briefly the case of a rotor without exciting coil.

Let us imagine therefore that the rotor is sliced up along a generatrix and developed in a plane. Let us fix the coordinate system so that the tangential

direction corresponds to the x axis (*Fig. 5*) and that $y = 0$ signifies the surface of the rotor. Let there be the dimension of the rotor, in y direction, d. The other symbols are analogous to the symbols which have been used formerly. The dimension of the rotor in the z direction we will consider to be very large.

$$\mathbf{A}_1(t) = \mathbf{A}(t)e^{-j\alpha x}, \tag{47}$$

where

$$\alpha = \frac{\pi}{\tau}. \tag{48}$$

The system of differential equations (8) we write according to the coordinate

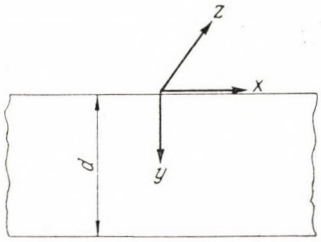


Fig. 5

system shown in *Fig. 5* and we suppose that the solution may be expressed in the following form :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(y)e^{-j\alpha x} \tag{49a}$$

$$\mathbf{H}_x = \mathbf{H}_x(y)e^{-j\alpha x} \tag{49b}$$

$$\mathbf{H}_y = \mathbf{H}_y(y)e^{-j\alpha x}. \tag{49c}$$

The system of differential equations is solved by a method resembling to the one shown in detail in par. 2. The Laplace transform of the amplitude of the magnetic field strength is the following :

$$\mathbf{h}_x(y) = \mathbf{h}_x(0)\,\frac{\mathrm{ch}\lambda(d-y)}{\mathrm{ch}\lambda d}\,, \tag{50a}$$

$$\mathbf{h}_y(y) = -j\,\frac{\alpha}{\lambda}\,\mathbf{h}_x(0)\,\frac{\mathrm{sh}\lambda(d-y)}{\mathrm{ch}\lambda d}\,, \tag{50b}$$

where $\mathbf{h}_x(0)$ is the Laplace transform of $\mathbf{H}_x(y)$ at $y = 0$, and

$$\lambda = \sqrt{\alpha^2 + p\mu\sigma}\,. \tag{51}$$

The relation between $\mathbf{h}_x(0)$ and amper conductors of circumference we get again from Ampère's law, applied to the air gap, in a way similar to equations (22) and (23) *(Fig. 6)*.

$$\mathbf{A}_1(p) = -\mathbf{h}_x(0)\left|1 + \frac{\delta\mu a^2}{\mu_0\lambda}\operatorname{th}\lambda d\right|. \tag{52}$$

With this the flux entering the rotor, changed according to the number of turns of the stator winding :

$$\boldsymbol{\Psi}_f(p) = -\frac{2}{\pi}N_1\xi_1\mu l\tau\mathbf{h}_y(0) = 6N_1^2\xi_1^2\frac{\mu l}{a\tau}\frac{\operatorname{sh}\lambda d}{\lambda\operatorname{ch}\lambda d + \dfrac{\mu\delta a^2}{\mu_0}\operatorname{sh}\lambda d}\mathbf{i}_f \quad . \tag{53}$$

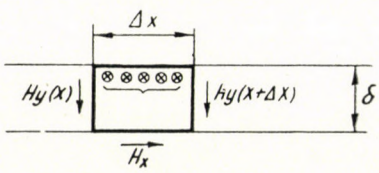


Fig. 6

The operational impedance of the rotor and the air gap is :

$$L_2(p) = 6N_1^2\xi_1^2\frac{l\mu}{a\tau}\frac{\operatorname{sh}\lambda d}{\lambda\operatorname{ch}\lambda d + \dfrac{\mu\delta a^2}{\mu_0}\operatorname{sh}\lambda d}. \tag{54}$$

If $p = 0$, $\lambda = a$. In this case we obtain the main-field inductance of the machine.

$$L_2(0) = L_0 = 6N_1^2\xi_1^2\frac{l\mu}{a\tau}\frac{1}{\operatorname{cth}ad + \dfrac{\mu\delta a}{\mu_0}}. \tag{55}$$

Paying attention to the fact, that in the case of a rotor having a radius r_k, $a = \dfrac{a}{r_k}$, it results from the comparison of equations (55) and (27) that the two expressions are equal if $ad \to \infty$, i. e. cth $ad = 1$. But in practice, for values of ad near to 1 the coincidence is quite good, because then cth ad is already sufficiently near to 1. We nevertheless must remark that if we use equation (55) or (27), respectively, under such conditions of saturation as occur in the steady state, in both cases the first member of the denominator may be neglected with respect to the second one, and so the two expressions are equal without regard to the choice of ad. The neglection means that the excitation necessary for the rotor may be neglected in face of the air gap excitation, thus the rotor data do not influence the inductances.

By substituting $p = js\omega_0$ we get the inductance of the rotor and the air gap as functions of the slip. One can see from what has been stated already, that the case of $s = 1$ is important from the standpoint of short-circuit phenomena. Then

$$\mathbf{Z}_2(j\omega_0) = j\omega_0 L_2(j\omega_0) = \frac{j\omega_0 \, 6N_1^2 \xi_1^2 \frac{\mu l}{a\tau}}{\sqrt{\alpha^2 + j\omega_0\mu\sigma}\,\mathrm{cth}\left(\sqrt{\alpha^2 + j\omega_0\mu\sigma}\,d\right) + \frac{\mu\delta\alpha^2}{\mu_0}}. \tag{56}$$

Apart from machines with very small pole pitch, α^2 may be neglected in the square root, being small compared with the second member. In that case the absolute value

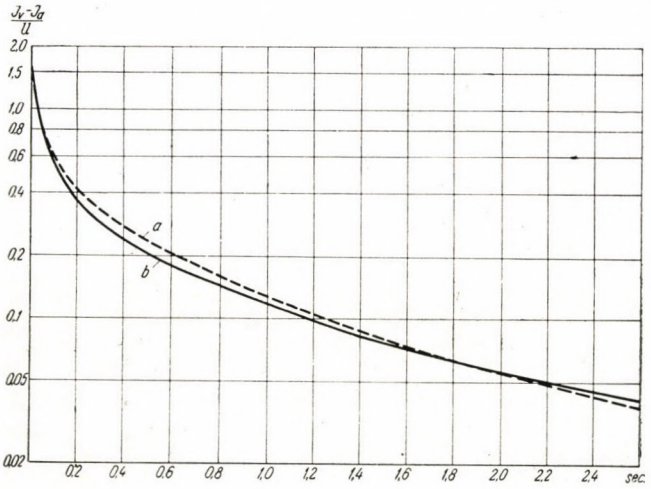


Fig. 7

of the quantity in the square root is proportionate to the reciprocal of the so-called penetration depth. The penetration depth is even in case of a very strong saturation (small permeability) of the rotor iron not larger than 1 cm, therefore the real part of $\sqrt{j\omega_0\sigma\mu}d$ is so large, that the value of the cth $\sqrt{j\omega_0\sigma\mu}d$ function may be taken as being equal to unity. Moreover, the second member of the denominator of equation (56) may be neglected as well.

$$\mathbf{Z}_2'' = 6N_1^2\xi_1^2 \frac{l}{a\tau} \sqrt{j\omega_0\mu\varrho} = R_2'' + j\omega_0 L_2''. \tag{57}$$

This equation is equal to equation (31), i. e. the subtransient impedances are the same whether we consider the rotor to be plane or to be cylindrical. The simple explanation of this fact is, that at the synchronous angular frequency

of ω_0 the eddy currents, essentially, only flow in the thin surface layer limited by the depth of penetration. This layer is so thin compared with the radial dimension of the rotor, that it makes no difference whether the rotor is considered to be plane or to be cylindrical. The second member of the equation (56) shows the influence of the air gap. Neglecting it is equivalent to neglecting the magnetizating current necessary at a short circuit, in face of the short-circuit current itself.

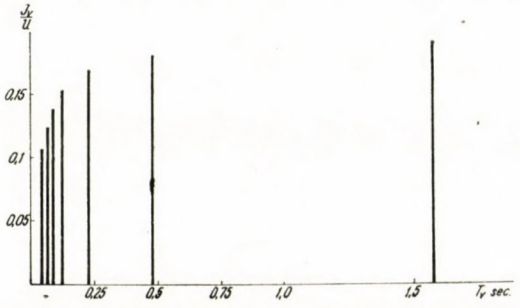


Fig. 8

We may treat the switching-on phenomena in the way described in par. 4). Substituting equation (53) into equation (6) :

$$\mathbf{i}_f = \frac{\mathbf{U}}{R_1 + (p + j\omega_0)[L_1 + L_2(p)]} =$$

$$= \frac{\mathbf{U}}{R_1 + (p + j\omega_0)\left[L_1 + M \dfrac{\operatorname{sh} \lambda d}{\lambda \operatorname{ch} \lambda d + \dfrac{\mu \delta \alpha^2}{\mu_0} \operatorname{sh} \lambda d}\right]} \tag{58}$$

where

$$M = 6N_1^2 \xi_1^2 \frac{\mu l}{a\tau} . \tag{59}$$

The singular values of equation (58) are furnished by the zero places of the denominator. Neglecting again the primary resistance, the denominator has a zero place at

$$p = -j\omega_0,$$

and at the roots of this characteristic equation :

$$\operatorname{tg} k = - \frac{k}{d\left[\dfrac{M}{L_1} + \dfrac{\mu \delta \alpha^2}{\mu_0}\right]}, \tag{60}$$

where

$$k = j\lambda d \quad . \tag{61}$$

The νth root of equation (60) we mark by k_ν. The p_ν value corresponding to this is :

$$p_\nu = -\left[\frac{k_\nu^2}{d^2} + \alpha^2\right]\frac{\varrho}{\mu}. \tag{62}$$

The inverse transformation is solved by the expansion theorem :

$$\mathbf{I}_f = \frac{\mathbf{U}}{j\omega_0(L_1 + L_0)} + \frac{\mathbf{U}e^{-j\omega_0 t}}{-j\omega_0[L_1 + L_2(-j\omega_0)]} + \\ + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mathbf{U}e^{p_\nu t}}{p_\nu(p_\nu + j\omega_0)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}[L_1 + L_2(p)]_{\,p=p_\nu}}. \tag{63}$$

Carrying out the necessary substitutions and returning to the coordinate system fixed to the armature, the armature current is expressed by :

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{U}e^{j\omega_0 t}}{j\omega_0(L_1 + L_0)} + \frac{\mathbf{U}}{R_2'' - j\omega_0(L_1 + L_2'')} + \\ + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\mathbf{U}e^{(p_\nu + j\omega_0)t}\,\dfrac{Md}{L_1}}{L_1(p_\nu + j\omega_0)\left(1 + \dfrac{\alpha^2 d^2}{k_\nu^2}\right)[S^2 + S + k_\nu^2]} \tag{64}$$

where

$$S = d\left[\frac{M}{L_1} + \frac{\alpha^2\mu\delta}{\mu_0}\right]. \tag{65}$$

As for the definitions explaining the various members of this expression, they have been given in par. 4).

Immediately after the occurrence of the short circuit the A.—C. component may be calculated in explicite form as a function of time. It is known, that to large values of p correspond small values of the time variable. If therefore in place of the exact value of $L_2(p)$ we use its expression which is valid for large values of p, we obtain the armature current immediately after switching-on. If p is large, α^2 in equation (51) may be neglected with respect to the second member. We may neglect also the second member of the denominator of equation

(54). The absolute value and the arcus of λd being large, cth $\lambda d \sim 1$ and equation (54) thus becomes

$$L_2(p) = 6N_1^2 \xi_1^2 \frac{l\mu}{a\tau} \frac{1}{\sqrt{p\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{2\omega_0}{p}} L_2'', \tag{66}$$

where L_2'' is the leakage inductance of the rotor according to equation (57). The current is

$$\mathbf{i}_f = \frac{\mathbf{U}}{(p + j\omega_0)\left(L_1 + \sqrt{\frac{2\omega_0}{p}} L_2''\right)} = \frac{\mathbf{U}}{L_1} \frac{p}{p + j\omega_0} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} + \gamma} \frac{1}{p}, \tag{67}$$

where

$$\gamma = \frac{\sqrt{2\omega_0} L_2''}{L_1} . \tag{68}$$

Inverse transformation is accomplished by convolution and the final result is, in the coordinate system fixed to the stator :

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{U}}{L_1} \frac{1}{\gamma^2 + j\omega_0} \left[e^{(j\omega_0 + \gamma^2)t} \operatorname{erfc}(\gamma\sqrt{t}) + \sqrt{\frac{2}{\omega_0}} \gamma^2 \hat{F}(\omega_0 t) - 1 \right]. \tag{69}$$

Here

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx .$$

F is the conjugate of the so-called Fresnel function.*

$$\hat{F}(x) = \int_0^x \frac{e^{jx}}{\sqrt{2\pi x}} dx$$

Subtracting from the above expression the D—C component :

$$I_{1v} = \frac{\mathbf{U}}{L_1} \frac{1}{\gamma^2 + j\omega_0} \left[e^{(j\omega_0 + \gamma^2)t} \operatorname{erfc}(\gamma\sqrt{t}) + \gamma \sqrt{\frac{2}{\omega_0}} f(\omega t) \right], \tag{70}$$

where

$$f(\omega t) = \hat{F}(\omega t) - \frac{e^{j45^\circ}}{\sqrt{2}} \tag{71}$$

* Jahnke—Emde, Tafeln Höherer Funktionen. 1952. Teubner, Leipzig. p. 35—36.

Acknowledgement

Finally, I wish to thank professor Dr K. P. Kovács for the valuable advice given in the course of work, as well as lecturer I. Rácz, who has helped with much useful counsel.

Example

The following example serves to compare the methods shown in par. 2. and 5.
Let there be the characteristics of a solid-rotor synchronous generator the following :

xz

$$r_k = 0{,}46 \text{ m} \qquad \mu = 20 \cdot 10^{-6} \text{ Hy/m}$$

$$l = 2{,}8 \text{ m} \qquad \varrho = 2 \cdot 10^{-7} \ \Omega\, m$$

$$a = 1 \qquad \omega_0 = 314/\text{sec}$$

$$N_1\xi_1 = 16{,}5 \qquad \delta = 0{,}025 \text{ m}$$

$$\omega_0 L_1 = 0{,}4 \ \Omega \qquad R_1 = 0{,}0114 \ \Omega$$

If we consider the rotor to be cylindrical, according to par. 2 and 4 :

$$C = 2{,}9 \cdot 10^{-2} \text{ Hy}$$

$$L_0 = \frac{C}{1 + \dfrac{\mu\delta}{\mu_0 r_k}} = 1{,}55 \cdot 10^{-2} \text{ Hy}$$

$$X_0 = \omega_0 L_0 = 4{,}85 \ \Omega$$

$$\frac{C}{L_1} = 22{,}9 \qquad \frac{C}{L_0} = 1{,}87$$

$$K = \frac{C}{L_0} + \frac{C}{L_1} - 2 = 22{,}77$$

With these values, equation [38] becomes :

$$\frac{J_1(w_k)}{J_0(w_k)} = -\frac{w_k}{22{,}7}$$

The first six roots of the equation, calculated with the values p_ν and $T_\nu = |1/p_\nu|$ are contained in the following table :

ν	$w_{k\nu}$	$w_{k\nu}^2$	p_ν	T_ν
1	3,675	13,5	— 0,635	1,57
3	6,73	45,5	— 2,15	0,465
8	9,775	95,45	— 4, 5	0,222
4	12,82	164	— 7, 7	0,119
5	15,87	250	—11, 8	0,085
6	18,93	340	—16	0,0625

The sub-transient impedance is, according to equations (43) and (31):

$$R'' - j\omega_0(L_1 + L_2'') = (1-j)\frac{C}{r_k\mu}\sqrt{\frac{\omega_0\mu\varrho}{2}} - j\omega_0 L_1 = 0{,}0785 - j\ 0{,}4785.$$

The time constant of the armature is according to equation (46):

$$T_S = \frac{X_1 + X_2''}{\omega_0 R_1} = 0{,}135 \text{ sec} .$$

If **U** is the stator voltage, the complete expression for the short-circuit current according to equation (42) is

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{U}\left\{(0{,}335 + j\,2{,}04)\,e^{-\frac{t}{0{,}135}} - e^{j\omega_0 t}\,[j0{,}19 + j0{,}193e^{-0{,}635t} + (0{,}0012 - j0{,}183)e^{-2{,}15t} + \right.$$
$$+ (0{,}0024 + j0{,}17)e^{-4{,}5t} + (0{,}0038 + j0{,}154)e^{-7{,}7t} + (0{,}0052 + j0{,}138)e^{-11{,}8t} +$$
$$\left. + (0{,}0063 + j0{,}125)e^{-16t} + \ldots]\right\} .$$

The envelope of the a.—c. components, after deduction of the ordinates of the steady-state current, is shown by curve »a« of Fig. 7, in a simply-logarithmic coordinate system. When drawing the curve, we have considered only the imaginary part of the components.

It can be seen that the amplitude of the first six members of the alternating current is of the same order and their sum amounts to approximately half the value of the initial value of the alternating current. The other members decay according to a time constant which is much smaller then 0,0625 sec, therefore they disappear within one or two periods after the advent of the short circuit. We must remark that the small value of permeability after the short circuit corresponds to high saturation. As the short-circuit current decreases, the saturation of the rotor decreases too and the permeability increases.

If we consider the rotor to be a plane layer of thickness d, we get the following data according to par. 5): Let there be $d = 0{,}9\, r_k = 0{,}44$ m. With these, equation (60) will be

$$\operatorname{tg} k = -\frac{k}{21{,}4} .$$

The first six roots of the equation can be found, with the corresponding values of p_ν [equation (62)] and $T_\nu = \left|\frac{1}{p_\nu}\right|$ in the following table:

ν	k_ν	k_ν^2	p_ν	
1	3,002	9	— 0,565	1,76
2	6,008	36	— 2,14	0,476
3	9,028	81,5	— 4,75	0,21
4	12,048	145	— 8,43	0,119
5	15,09	228	— 13,2	0,076
6	18,14	328	— 19	0,052

The sub-transient reactance is the same as in the former case. For calculating the steady-state current, we calculate the synchronous reactance. According to equation (55)

$$L_0 = \frac{C}{\text{cth } 0{,}9+0{,}87} = 1{,}28 \text{ Hy}$$

$$X_0 = 4{,}02 \ \Omega \qquad X_1 = 0{,}4 \qquad X_1 + X_0 = 4{,}42 \ .$$

The time constant of the aperiodic member is the same as before. The complete expression for the short-circuit current is:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{U} \left\{(0{,}335+2{,}04\text{j})\text{e}^{-\frac{t}{0{,}135}} - \text{e}^{j\omega_0 t}[j0{,}226 + j0{,}173\text{e}^{-0{,}565t} + (0{,}0012 + j0{,}178)\text{e}^{-2{,}14t} + \right.$$
$$+ (0{,}0025 + 0{,}165j)\text{e}^{-4{,}75t} + (0{,}0043 + j0{,}15)\text{e}^{-8{,}42t} + (0{,}0054 + j0{,}132)\text{e}^{-13{,}2t} +$$
$$\left. + 0{,}007 + j0{,}115)\text{e}^{-19t} + \ldots]\right\}$$

The envelope of the alternating current, after deduction of the steady-state current, is shown by the curve »b« of Fig. 7.

REFERENCES

1. *Kovács—Rácz:* Váltakozóáramú gépek tranziens folyamatai. (Transient phenomena in A—C. machines). Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.

2. *Веников-Шуков:* Переходные процессы в электрических системах, Госэнергоиздат, 1953, Ленинград. [Venikov-Shukov: Transient phenomena in electric systems. 1953, Leningrad]

3. *Rüdenberg:* Transient Performance of A. C. Power Systems. New-York, 1951.

4. *K. W. Wagner:* Über eine Formel von Heaviside zur Berechnung von Einschaltvorgängen. (About a formula by Heaviside, for the computation of switching-on phenomena). Archiv für Elektr. 1916.

5. *E. Weber:* Field Transients in Magnetic Systems. Transactions of AIEE, 1931.

6. *G. Wagner:* Transients in Magnetic Systems. El. Eng. 1934.

7. *Дунаевский:* Влияние вихревых токов на процесс установления потока. Электричество. 1951. [Dunaïevskij: The influence of eddy currents on the consolidation of flux. Elektritchestvo, 1951].

8. *Heller, B.:* Prechodné jevy v masivnim Zeleze (Transient phenonema in solid iron) Elektrotechnicky Obsor 1953.

9. *Нейман:* Поверхностный эффект в ферромагнетных телах. Госэнергоиздат. 1949, Москва. [Nejman: Surface effects in ferro-magnetic bodies. Groszenergoizdat. 1949. Moscow].

10. *Dreyfuss:* Über die Erregung eines massiven magnetischen Kreises. (About the excitation of a magnetic circuit). Archiv für Elektr. 1916.

SUMMARY

We have determined the distribution of the magnetic fields and the eddy currents in a solid rotor of infinite length, without exciting coil, in the case of an arbitrary variation of the primary current. We have computed the operational impedance of such a rotor, and with its aid we have solved the differential equations describing the switching-on of the machine. From the results we may draw following conclusions as for the short-circuit phenomena of solid-rotor machines:

1. The sub-transient impedance computed from the maximum value of the aperiodic component is equal, in case of the same saturation, to the impedance opposing three-phase current at standstill. The time constant of the aperiodic member is determined with good approximation by the inductive component of this impedance and the resistance of the stator.

2. The A.—C. component of the short-circuit current may be developed into the sum of an infinite number of exponentially damped functions, thus splitting it into a transient and a sub-transient current is only an approximation and not unequivocal.

In the course of the computations the permeability of iron has been assumed to be constant. In reality, the permeability changes highly during the transient phenomena and therefore the results are chiefly qualitative ones, which correctly show the influence of the various factors. In those conclusions which refer to the steady state, it can be taken into account the variations of permeability depending on saturation, using the method which has been shown in par. 3. The application of these methods to transient phenomena demands still further investigation.

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ СИНХРОННЫХ МАШИН С ПОЛНОТЕЛЫМ РОТОРОМ

Р. ТУШАК

Р е з ю м е

Для полнотелого ротора, не имеющего обмотку возбуждения и предполагаемого бесконечно длинным, предварительно определяется распределение магнитных полей и вихревых токов при любых изменениях первичного тока. Установлен операторный импеданс такого рода ротора, при помощи чего решено дифференциальное уравнение включения машины. На основе полученных результатов можно сделать в отношении явлений замыкания машин с полнотелым ротором следующие определения.

1. Сверхпереходный импеданс, определяемый по максимальному значению апериодического члена, в случае идентичных условий насыщения является идентичным импедансу, имеющему место для трехфазного тока в неподвижном состоянии. Постоянная времени апериодического члена с хорошим приближением определяется слагающей индуктивности этого импеданса и омическим сопротивлением статора.

2. Переменная слагающая тока замыкания может быть выражена как сумма бесконечного числа экспоненциально апериодических функций, таким образом разложение на переходные и сверхпереходные токи является лишь приближением и не является однозначным. Поэтому начальную переменную слагающую целесообразнее определять по апериодическому члену, чем производить экстраполяцию огибающей переменной слагающей для точки $t = 0$.

В процессе исследований проницаемость стали была принята постоянной. В действительности же при переходных процессах очень сильно изменяется проницаемость стали, вследствие чего полученные результаты имеют, в основном, качественный характер, которые правильно показывают, какое действие оказывают отдельные факторы. В выводах-которые на основе полученных автором результатов относятся к установившемуся состоянию, можно учесть — указанным в п. 3 образом — зависимость проницаемости от насыщения. Для определения возможности применения этих методов, для изучения переходных процессов необходимо производить еще дальнейшие исследования.

PHÉNOMÈNES TRANSITOIRES DANS LES MACHINES SYNCHRONES À ROTORS MASSIFS

R. TUSCHÁK

RÉSUMÉ

La distribution des champs magnétiques et des courants de Foucault dans les rotors massifs, sans enroulement inducteur, supposés de longueur infinie, est déterminée pour les cas de changement arbitraire du courant primaire. L' impédance opérationnelle d'un tel rotor est calculée, et à l'aide de celle-ci est résolue l'équation différentielle de la fermeture du circuit de la machine. En ce qui concerne les phénomènes de court-circuit dans les machines à rotor massif les résultats permettent de tirer les conclusions suivantes :

1. L'impédance sous-transitoire, qui peut être déterminée de la valeur maximum du membre apériodique, est égale, en cas de saturation égale, à l'impédance qui apparaît en face d'un courant triphasé, la machine étant arrêtée. La constante de temps du membre apériodique est déterminée avec une bonne approximation, par la composante inductive de cette impédance et la résistance ohmique du stator.

2. La composante alternative du courant de court-circuit peut être mise sous la forme d'une somme indéfinie de fonctions diminuant des lois exponentielles, de sorte que la décomposition en composantes transitoire et sous-transitoire n'est qu'une approximation, non sans équivoque.

Au cours des calculs la perméabilité du fer a été supposée constante. En réalité, la perméabilité change beaucoup pendant les phénomènes transitoires ; c'est pourquoi les résultats sont surtout de nature qualitative et montrent correctement l'influence des différents facteurs. Dans les résultats ayant trait au régime permanent, on peut tenir compte, moyennant la méthode mentionnée au 3ème chapitre, de la dépendance de la perméabilité de la saturation. L'application de ces méthodes aux phénomènes transitoires demande toutefois encore des recherches ultérieures.

TRANSIENTE VORGÄNGE IN SYNCHRONMASCHINEN MIT MASSIVEN LÄUFERN

R. TUSCHÁK

ZUSAMMENFASSUNG

Für einen als unendlich lang angenommenen massiven Zylinderläufer ohne Erregerwicklung wird die Verteilung der magnetischen Felder und der Wirbelströme für den Fall willkürlicher Änderungen des Primärstromes bestimmt. Nach Ermittlung der operatorischen Impedanz eines solchen Läufers wird mit ihrer Hilfe die Differentialgleichung für die plötzliche Einschaltung der Maschine gelöst. Auf Grund der Ergebnisse lassen sich in bezug auf die Kurzschlussvorgänge in Maschinen mit massiven Läufern die folgenden Schlüsse ziehen :

1. Die subtransitorische Impedanz, die aus dem Grösstwert des aperiodischen Glieds des resultierenden Stromes bestimmt werden kann, ist im Falle gleicher Sättigung gleich der bei stillstehender Maschine gegenüber symmetrischem Drehstrom auftretenden Impedanz. Die Zeitkonstante des aperiodischen Glieds wird in guter Näherung aus der induktiven Komponente der ubtran itorischen Impedanz und dem Ohmschen Widerstand des Stators berechnet.

2. Die Wechselstromkomponente des Kurzschlussstromes kann in die Summe von unendlich vielen, exponentiell abklingenden Funktionen entwickelt werden, weshalb die Zerlegung in transienten und subtransienten Strom nur eine Näherung und nicht eindeutig ist.

Im Verlauf der Ableitung wurde die Permeabilität des Eisens als konstant vorausgesetzt. In Wirklichkeit ändert sich die Permeabilität stark während der transienten Vorgänge, daher sind die Ergebnisse hauptsächlich qualitativer Natur und zeigen auf richtige Weise den Einfluss der einzelnen Faktoren. In jenen Schlussfolgerungen jedoch, die sich auf den stationären Zustand beziehen, kann man mittels der im 3. Kapitel erwähnten Methode auch die Abhängigkeit der Permeabilität von der Sättigung berücksichtigen. Die Anwendung dieser Methoden auf transiente Vorgänge beansprucht noch weitere Untersuchungen.

BEWEIS DER ANWENDBARKEIT DES FICKSCHEN GESETZES AUF DIE DIFFUSION DES ZUCKERS INNERHALB DES RÜBENGEWEBES

METHODE ZUR BESTIMMUNG DER DIFFUSIONSKONSTANTE

M. TEGZE und Frau M. TEGZE

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR ZUCKERINDUSTRIE, BUDAPEST

[Eingegangen am 22. Juli 1954]*

In vorherigen Veröffentlichungen des Forschungsinstituts für Zuckerindustrie in Budapest [1] wurden jene Zusammenhänge bekanntgegeben, welche die Konzentrationsverhältnisse der sich in Gegenstrom-Diffusionssystemen abspielenden Vorgänge beschreiben. Die Grundlage der dort angeführten Ableitungen bildete die Voraussetzung, dass die *Fick*schen Gesetze für die Konzentrationsänderungen innerhalb der auszulaugenden Substanz pflanzlichen Ursprungs, des näheren: innerhalb der Rübenschnitte gültig sind. Schon im erwähnten Aufsatz wurde darauf hingewiesen, dass der experimentelle Beweis dieser Voraussetzung im Rahmen einer besonderen Arbeit veröffentlicht werden wird.

In der vorliegenden Arbeit werden demnach die bezüglichen Messungen, ferner eine zu diesen Untersuchungen ebenfalls erforderliche Laboratoriumsmethode angegeben, durch die der Wert der Diffusionskonstante mit verhältnismässig grosser Genauigkeit bestimmt werden kann. Vorerst soll jedoch die bereits in der erwähnten Arbeit erörterte Deutung der Diffusionskonstante kurz wiederholt werden.

Als Diffusionskonstante im klassischen Sinn wird jene Konstante bezeichnet, die den durch Diffusion erfolgenden Konzentrationsausgleich einer Substanz in einer homogenen Flüssigkeit charakterisiert. Diese Konstante ist zahlenmässig jener Substanzmenge gleich, die bei einem Einheitskonzentrationsgradienten während der Zeiteinheit die Flächeneinheit passiert. Dieselbe Deutung ist von uns auch auf die Diffusion von Zucker innerhalb der Rübe übertragen worden, mit der Voraussetzung jedoch, dass wir die Rübe als homogene Substanz betrachten und die durch offensichtlich verschiedene Widerstände erfolgende Diffusion innerhalb der Zellen und durch die Zellwände durch eine einzige Konstante beschreiben. Man muss sich natürlich darüber im klaren sein, dass die auf diese Weise gedeutete Diffusionskonstante nicht der Diffusionskonstante des Zuckers im Wasser — unter ansonsten identischen Verhältnissen — gleich ist, sondern selbstredend immer geringer sein muss. Ferner ist bekannt,

* Diese Arbeit wurde bereits im Jahre 1952 eingereicht, doch konnte sie erst im obigen Zeitpunkt der Redaktion druckfertig übergeben werden.

dass die klassische Diffusionskonstante stark von der Viskosität, deshalb stark von der Temperatur und in gewissem Grade von der Konzentration abhängig ist. Zur starken Abhängigkeit von der Temperatur gesellt sich hier jedoch noch ein zweiter Faktor: die Diffusionskonstante ist auch von der individuellen Beschaffenheit der Rübe (Sorte, Reifezustand usw,) abhängig, und kann sogar bei jeder einzelnen Rübe einen anderen Wert aufweisen. Auch das »Vorleben« der Rübe ist von entscheidendem Einfluss: die Wärmebehandlung, ihre Dauer, die chemische Behandlung usw., kurz jeder Faktor, der den Zustand der Zellwände verändert, worauf bereits in einem anderen Aufsatz hingewiesen wurde [2].

Ausser den Messungen, die zur experimentellen Unterstützung der in der erwähnten Arbeit [1] angeführten Ableitungen dienen sollen, hat das Forschungsinstitut auch die experimentelle Untersuchung weiterer Fragen in sein Programm aufgenommen. Da die Grösse der Diffusionskonstante die gesamte Auslaugung stark beeinflusst, ist es von besonderem Interesse, wie weit gewisse Faktoren (Art der Wärmebehandlung, chemische Behandlung) einen Einfluss auf die Diffusionskonstante ausüben, damit die Verfahren zur Verbesserung der Auslaugung praktisch verwertet werden können. Eine weitere Aufgabe bildet die Festsetzung des verschiedenen Ausmasses, in dem die einzelnen Rübensorten auslaugbar sind, um darauf bei der Rübenzüchtung Rücksicht zu nehmen.

Gewisse Erfahrungen haben ergeben, dass sich der Wert der Diffusionskonstante auch während der Vegetationsperiode und der Lagerung der Rübe verändert, was ebenfalls zu untersuchen ist. All diese Fragen und auch andere Faktoren können jedoch nur dann untersucht werden, wenn eine entsprechend genaue Methode zur Bestimmung der Diffusionskonstante zur Verfügung steht.

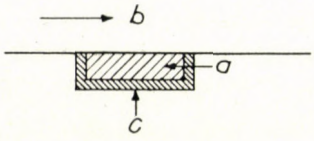
Grundsätzliche Erwägungen zur Ausarbeitung der Untersuchungsmethode

Die Messung der Diffusionskonstante erfolgt in der Weise, dass Rübenkörper von gegebener geometrischer Form und bekannter Zuckerkonzentration unter genau definierten Verhältnissen ausgelaugt werden und die Diffusionskonstante aus den im System entstandenen Konzentrationsveränderungen berechnet wird. Bei der Auswahl der Auslaugungsverhältnisse stehen uns hinsichtlich der Anwendung der Auslaugeflüssigkeit praktisch zwei Möglichkeiten zur Verfügung:

a) Die Auslaugung im sog. geschlossenen System [2], die im wesentlichen darin besteht, dass die zu untersuchenden Rübenkörper mit einer Auslaugeflüssigkeit von konstanter Menge und bekannter Anfangskonzentration in Berührung gebracht werden, wo also die im System vorhandene Zuckermenge während der Versuchsdauer unverändert bleibt.

b) Auslaugung mittels Flüssigkeit von unendlicher Menge, d. h. eine Extraktion, wo das Lösungsmittel der Rübe gegenüber in solcher Menge verabreicht wird, dass die aus der Rübe herausdiffundierende Zuckermenge nur in unwesentlichem Masse die Zuckerkonzentration des Lösungsmittels verändert. Während der Untersuchungsdauer darf also die Zuckerkonzentration des Lösungsmittels (Wassers) als konstant betrachtet werden. (In der Praxis ist die Zuckerkonzentration zweckmässig Null.)

Zur Bestimmung der Diffusionskonstante müssen (besonders wenn auch die Wirkung der Art und Geschwindigkeit der Flüssigkeitsströmung auf die Auslaugung untersucht werden soll) auch hydrodynamisch genau definierte Verhältnisse geschaffen werden. Bei den aus der Rübe in der Praxis leicht herstellbaren Rübenkörpern, die in allen drei Richtungen von endlicher (kleiner) Dimension sind, sind die Strömungsverhältnisse unzulänglich definiert. Die praktischen Erfahrungen haben gelehrt, dass die einfache Methode, die Aus-



a = Rübenkörper
b = Flüssigkeitsströmung
c = Isolierstoff

Fig. 1

strömung des Zuckers auf eine einzige glatte Fläche des Rübenkörpers zu beschränken (s. *Abb. 1*), mit hinlänglicher Genauigkeit experimentell unausführbar ist.

Eine vollkommene Abdichtung und Isolierung der übrigen Flächen des Rübenkörpers von der Auslaugeflüssigkeit ist nämlich nicht möglich, da die Rübe bei den in der Praxis angewandten Temperaturen eine Volumveränderung erfährt [3], ferner aber auch deshalb nicht, weil infolge der Zellenstruktur die Oberfläche nicht vollkommen glatt, ausserdem aber auch feucht ist, was das Anhaften der Abdichtung vereitelt.

So muss notwendigerweise ein Körper gewählt werden, wo diese Schwierigkeiten nicht bestehen, dabei jedoch der Vorgang mathematisch einfach erfasst, der Körper leicht hergestellt werden kann und auch vom hydrodynamischen Standpunkt aus als geeignet erscheint.

Den bisher geschilderten Forderungen entspricht am besten ein Zylinder von — im Vergleich zu seiner Länge — geringem Durchmesser, der so angeordnet ist, dass die Strömung der Auslaugeflüssigkeit parallel zu den Erzeugenden des Zylinders verläuft. Noch offen bleibt die Frage, ob die Rübenzylinder im

geschlossenen System oder mittels Flüssigkeit von unendlicher Menge ausgelaugt werden sollen. Die Wahl der Methode erfolgte auf Grund folgender Überlegung:

Bei der praktischen Bestimmung der Diffusionskonstante wird diese u. a. aus den zu Beginn der Behandlung (Auslaugung) gemessenen $c(o)$ und nach der Zeitdauer t erfolgten Auslaugung bestimmten $\bar{c}(t)$ (Durchschnitts-) Konzentrationen bei jedem Verfahren mittels eines Zusammenhanges von folgender Form berechnet:

$$\frac{\bar{c}(t)}{c(0)} = F\left(D,t,\frac{1}{l_1^2},\frac{1}{l_2^2},\frac{1}{l_3^2}\right) \tag{1}$$

wo F einen einstweilen noch nicht näher bestimmten funktionellen Zusammenhang, l_1, l_2, l_3 dagegen die drei rechtwinkeligen Abmessungen des parallelepipedonförmigen Rübenschnittes (Rübenkörpers) bedeuten. (Bei anderen, z. B. zylindersymmetrischen Körpern ergibt sich ebenfalls ein ähnlicher Ausdruck, mit reziproken Abmessungsquadraten.) Ist die eine Abmessung, z. B. l_3, den beiden anderen gegenüber gross $\left(\frac{1}{l_3^2} \ll \frac{1}{l_1^2} \text{ und } \frac{1}{l_2^2}\right)$, so wird sich der Körper hinsichtlich der Diffusion bis auf die unmittelbare Umgebung der beiden Enden des langen Körpers so verhalten, als wenn er zweidimensional wäre.

Vorausgesetzt, die Auslaugung erfolgte mittels Flüssigkeit von unendlicher Menge und der Wert $\bar{c}(t)$ würde genügend entfernt von den Enden bestimmt, so kann der Einfluss dieser dritten Abmessung vernachlässigt werden. Im geschlossenen System wird dagegen der am Ende des langen Körpers herausströmende Zucker infolge seiner den anderen Teilen gegenüber abweichenden Menge die Konzentration des Saftes in schwer berechenbarer Weise erhöhen. Aus diesem Grunde soll zwecks genauer Messungen das Verfahren mit einem Lösungsmittel von »unendlicher« Menge angewandt werden.

Methode zur zahlenmässigen Bestimmung der Diffusionskonstante aus den gemessenen Konzentrationswerten

Den Zusammenhang zur Beschreibung der Konzentrationsveränderungen, die sich während des Versuches im Rübenzylinder abspielen, erhält man auf Grund eines hier nur knapp gefassten Gedankenganges:

Den Konzentrationsausgleichsvorgang innerhalb des Rübenkörpers beschreibt, für den allgemeinen Fall, folgende Gleichung (II. *Fick*sches Gesetz):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 c}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 c}{\partial^2 z}\right), \tag{2}$$

wo x, y, z die rechtwinkeligen Ortskoordinaten, $c \equiv c\,(t, x, y, z)$ die Konzentration innerhalb des Rübenkörpers im Zeitpunkte t an der Stelle x, y, z bezeichnen.

Bei zylinderförmigen Rübenkörper ist es zweckmässig, in die Differentialgleichung (2) Polarkoordinaten einzuführen (s. [4]). Die umgebildete Gleichung :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial^2 r} + \frac{1}{r}\frac{\partial c}{\partial r}\right) \tag{3}$$

wo bereits in Betracht gezogen wurde, dass (da von einem »unendlich langen« Zylinder die Rede ist) der Konzentrationsgradient in der Richtung der z-Achse identisch Null ist. In der Gleichung bezeichnet r die polare Ortskoordinate. Der Halbmesser des Zylinders soll mit R bezeichnet werden. Es gilt die Funktion $c(r,t)$ bei folgender Grenzbedingung aufzufinden :

$$c(R,t) = s \quad (t>0 \text{ und } c(0,t) \text{ endlich}), \tag{4}$$

wo s die konstante Konzentration der Auslaugeflüssigkeit bezeichnet. Diese Bedingung will bedeuten, dass auf der Grenzfläche des Rübenzylinders die Konzentration stets der Konzentration der Auslaugeflüssigkeit gleich ist. Als Anfangsbedingung wird angenommen, dass die Konzentration im Zeitpunkte $t = 0$ innerhalb des ganzen Rübenkörpers konstant ist ; dies soll mit c_0 bezeichnet werden :

$$c(r,0) = c_0 \tag{5}$$

Zur Lösung sei eine neue Funktion $\xi\,(r,t)$ eingeführt, die durch folgenden Zusammenhang definiert ist :

$$c(r,t) = A + B\xi(r,t) \tag{6}$$

Die Werte A und B müssen derart gewählt werden, dass dieser Zusammenhang die Anfangs- und Grenzbedingungen erfüllt. Diese sind erfüllt, wenn

$$A = s \tag{7a}$$

und

$$B = c_0 - s \tag{7b}$$

Die neuen Anfangs- und Grenzbedingungen sind :

$$\xi(R,t) = 0 \tag{8}$$

$$\xi(r,0) = 1 \tag{9}$$

Unser Lösungsansatz ist :

$$\xi = a \cdot e^{-\gamma^2 Dt} \cdot f(r) \tag{10}$$

wo a und γ Konstanten $f(r)$ dagegen eine noch zu bestimmende Funktion sind.

Werden die hieraus mit Rücksicht auf (6) gebildeten Ableitungen in die Differentialgleichung (3) wiedereingesetzt, so erhält man für die bislang noch unbekannte Funktion $f(r)$ folgenden Zusammenhang :

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr} + \gamma^2 f(r) = 0 \tag{11}$$

Dividiert man mit γ^2 und führt man die neue Variable $r\gamma = \eta$ ein, so erscheint die Differentialgleichung von wohlbekannter Form

$$\frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{df(\eta)}{d\eta} + f(\eta) = 0 \tag{12}$$

deren Lösung

$$f(\eta) = J_0(\eta) + bN_0(\eta)$$

ist. Hier bedeuten J_0 und N_0 die *Bessel*schen Funktionen nullter Ordnung und erster bzw. zweiter Art. Da jedoch laut (4) $b = 0$, gestaltet sich die Lösung zu

$$f(\eta) = J_0(\eta) = J_0(r\gamma) \tag{13}$$

Die Funktion ξ muss laut Grenzbedingung (8) bei $r = R$ den Wert Null haben d. h. es ist notwendig, dass

$$J_0(\gamma R) = 0 \tag{14}$$

bestehe. Führt man die Abkürzung $\gamma R = k_m$ ein (k_m bedeutet die m-te Wurzel der Gleichung $J_0(k) = 0$), so ergibt sich für den Wert von γ^2

$$\gamma^2 = \frac{k_m^2}{R^2}$$

Wird dieser Wert in die Gleichung (10) eingesetzt, so erhält man als partikulare Lösung der Differentialgleichung (2) :

$$\xi_m(r,t) = a_m \cdot e^{-k_m^2 \frac{Dt}{R^2}} \cdot J_0\left(k_m \frac{r}{R}\right) \tag{15}$$

Hieraus wird die allgemeine Lösung durch lineare Kombination der einzelnen partikularen Lösungen gewonnen:

$$\xi(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-k_m^2 \frac{Dt}{R^2}} \cdot J_0\left(k_m \frac{r}{R}\right) \tag{16}$$

wo die Koeffizienten a_m so zu bestimmen sind, dass die Funktion die Anfangsbedingungen von (9), d. h. den Zusammenhang

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\left(k_m \frac{r}{R}\right) \tag{17}$$

erfüllt. Im Sinne der *Fourier*schen Zerlegungsformeln:

$$a_m = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{R} J_0\left(k_m \frac{r}{R}\right) r\, dr\, d\varphi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{R} J_0^2\left(k_m \frac{r}{R}\right) r\, dr\, d\varphi} \tag{18}$$

Nach Durchführung der Integration gelangt man zu:

$$a_m = \frac{2}{k_m J_1(k_m)} \tag{19}$$

Die Konzentrationsfunktion ist also (indem wir von der Funktion ξ zur Funktion c zurückkehren):

$$c(r,t) = s + (c_0 - s)\cdot 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k_m J_1(k_m)} \cdot e^{-k_m^2 \frac{Dt}{R^2}} \cdot J_0\left(k_m \frac{r}{R}\right) \tag{20}$$

wo m sämtliche, positive, ganzzahlige Werte annimmt. Die Funktion (20) erfüllt — wie man sich hiervon durch eine einfache Berechnung überzeugen kann — sowohl die Differentialgleichung wie auch die Anfangs- und Grenzbedingungen.

In der Praxis kann lediglich die Durchschnittskonzentration bestimmt werden. Sie wird auf folgende Weise berechnet:

$$\bar{c}(t) = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{R} c(r,t) r\, dr\, d\varphi}{R^2\pi} \tag{21}$$

Nach Durchführung der Integration erhält man:

$$\bar{c}(t) \equiv \bar{c} = s + (c_0 - s) \cdot 4 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k_m^2} e^{-k_m^2 \frac{Dt}{R^2}} \tag{22}$$

In der Praxis wird als Auslaugeflüssigkeit reines Wasser benützt (s = 0), wodurch der zur Auswertung der Messungen dienende Zusammenhang wie folgt erscheint:

$$\frac{\bar{c}}{c_0} = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k_m^2} e^{-k_m^2 \frac{2Dt}{R^2}} \tag{23}$$

Im Falle von praktischen Messungen ist jedoch eben der inverse Ausdruck

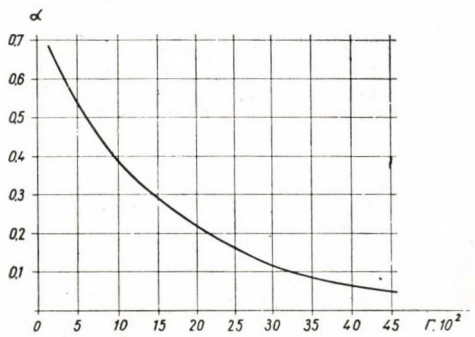


Fig. 2

erforderlich, da wir D gerade aus den gemessenen Werten $\bar{c}$ bzw. $\frac{\bar{c}}{c_0}$ zu ermitteln wünschen. Der Ausdruck der inversen Funktion kann jedoch analytisch nicht angegeben werden, es ist hier eine graphische Lösung heranzuziehen. Es sollen im weiteren die Werte $\frac{\bar{c}}{c_0}$ mit α, $\frac{Dt}{R^2}$ mit Γ bezeichnet werden. Es ist leicht einzusehen, dass Γ eine eindeutige Funktion von α ist (Die numerischen Werte von k_m siehe unter[5].) Nach Feststellung der zu verschiedenen, angenommenen Γ-Werten gehörenden α-Werte mittels Berechnung können die zusammengehörenden Wertpaare in einem Diagramm durch eine Kurve dargestellt werden. Das Diagramm wird in *Abb. 2* veranschaulicht.

Umgekehrt können aus diesem Diagramm die zu beliebigen α-Werten gehörigen Γ-Werte abgelesen werden. Das Auswertungsverfahren der Versuche ist also sehr einfach. Aus den gemessenen $\bar{c}$- und c_0-Werten wird α gebildet; das Diagramm ergibt hieraus den Wert von Γ, woraus unter Zuhilfenahme des Definitionszusammenhanges $D = \frac{\Gamma R^2}{t}$ durch Einsetzung der Werte R und t der Wert D ermittelt wird.

Ermittlung der optimalen Versuchsverhältnisse durch Fehlerberechnung

Der Einfluss der Wirkung der Messfehler auf den Wert von D ist offensichtlich sehr stark der Wahl der Versuchsverhältnisse (R und t) unterworfen. Im Sinne der elementaren Sätze der Fehlerrechnung wird im Falle von kleinen Messfehlern

$$(dD)^2 = \left(\frac{\partial D}{\partial t}\,dt\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial R}\,dR\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha}\,d\alpha\right)^2$$

wo dt, dR und $d\alpha$ den Fehler von t bzw. R und α darstellen.

Es soll hier lediglich das für den Grossteil der Fehler verantwortliche dritte Glied erörtert werden, da der Wert dt und dR durch Anwendung geeigneter Messverfahren sehr verringert werden kann (s. weiter unten). Von $d\alpha$ lässt sich dies nicht sagen. Streng genommen entsteht $d\alpha$ aus den Fehlern von $\bar{c}$ bzw. c_0, d. i. aus $d\bar{c}$ und dc_0; zunächst empfiehlt es sich jedoch mit dem Werte $d\alpha$ zu rechnen und erst dann auf die Fehler der Konzentrationsbestimmungen überzugehen. Der Wert $\dfrac{\partial D}{\partial \alpha}$ kann nicht unmittelbar ermittelt werden, sondern nur durch Zuhilfenahme des Zusammenhanges

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha} = \frac{1}{\dfrac{\partial \alpha}{\partial D}}$$

Der Wert von $\dfrac{\partial \alpha}{\partial D}$ lässt sich durch Differenzieren des Ausdrucks (23) erhalten. Da die durch gliedweises Differenzieren gewonnene Reihe gleichmässig konvergent ist, ist es gestattet, gliedweise zu differenzieren. Das Ergebnis ist:

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha}\,d\alpha = -\frac{D}{4\Gamma \sum_{m=1}^{\infty} e^{-k_m^2 \Gamma}}\,d\alpha \tag{24}$$

Auf die Fehler der Konzentrationen übergehend, erhält man durch Anwendung der allgemein bekannten Regel:

$$d\alpha = d\left(\frac{\bar{c}}{c}\right) = \frac{\bar{c}}{c_0}\sqrt{\left(\frac{d\bar{c}}{\bar{c}}\right)^2 + \left(\frac{dc_0}{c_0}\right)^2} \tag{25}$$

Wird das Verhältnis der Konzentrationsbestimmungsfehler mit dem Parameter β bezeichnet

$$dc_0 = \beta d\bar{c} \tag{26}$$

so erhält man nach einfacher Umformung

$$da = \frac{\bar{dc}}{c_0}\sqrt{1+(\alpha\beta)^2} \tag{27}$$

Werden — wie dies die in der Praxis erreichbaren Messgenauigkeiten gestatten — die dt und dR enthaltenden Glieder vernachlässigt und die Abkürzung

$$\Phi(\alpha,\beta,\Gamma) \equiv \Phi \equiv -\frac{\sqrt{1+(\alpha\beta)^2}}{4\Gamma\sum_{m=1}^{\infty} e^{-k_m^2\Gamma}} \tag{28}$$

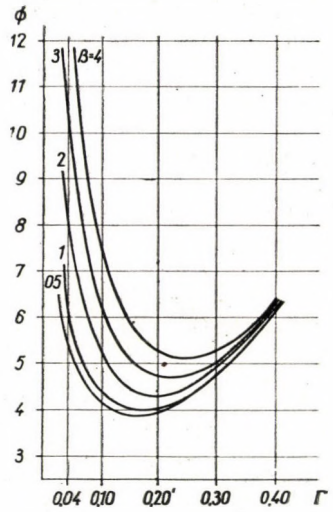


Fig. 3

eingeführt, so ergibt sich für den relativen Fehler der gemessenen bzw. berechneten Diffusionskonstante

$$\frac{dD}{D} = \frac{\Phi}{c_0}\bar{dc} \tag{29}$$

Die Funktion Φ wird in *Abb. 3* veranschaulicht. (Bei der Darstellung wählen wir Γ als unabhängige Variable und β als Parameter.)

Es ist ersichtlich, dass bei zu kleinen und zu grossen Γ-Werten die Fehler ausserordentlich stark (hyperbolisch bzw. exponentiell) ansteigen.

Die Wahl der entsprechenden Versuchsverhältnisse erfolgt daher folgendermassen :

Nach der Feststellung des Wertes von β mittels Schätzung bzw. eventuell mittels Berechnung aus den Versuchsergebnissen, wird auf der entsprechenden Kurve der Kurvenschar der Funktion Φ festgestellt, zwischen welchen Γ-Grenzen man zu arbeiten hat, damit das Produkt von $\frac{\bar{dc}}{c_0}$ mit Φ eine angenommene Grenze nicht überschreite. Aus dem ermittelten Γ-Wert kann in Kenntnis von D und R die anzuwendende Auslaugungszeit berechnet werden:

$$t = \frac{\Gamma R^2}{D}$$

Um t zu berechnen, muss ein Schätzungswert von D ermittelt werden. Der Wert von D ist durch das zu untersuchende Rübenmaterial bedingt und wird von der Versuchstemperatur beeinflusst.

Bei der Wahl des R-Wertes ist es — wie noch später gezeigt wird — vom analytischen Standpunkt aus vorteilhafter, den Zylinderdurchmesser bis zu einer gewissen Grenze zu verringern. (Der Gebrauch von Durchmessern unterhalb von 2,5—3 mm ist jedoch nicht zu empfehlen, da deren Herstellung und Handhabung infolge der geringen mechanischen Festigkeit zu schwerfällig ist).

Technische Ausführung des Versuches

Die zu untersuchenden Rübenzylinder wurden aus der Rübe mittels eines *Herles*-Bohrers erzeugt. Das Bohrrohr eines solchen, früher in Zuckerfabriken zur Bemusterung von Rüben gebrauchten *Herles*-Bohrers wurde jedoch mit einem dünnwandigen, scharf geschliffenen Messingrohr von geeignetem Durchmesser ersetzt. Da — besonders bei dünneren Zylindern — die genaue Bestimmung des Zuckergehaltes wegen der geringen Substanzmenge eines Zylinders äusserst schwierig ist, wurden zur Untersuchung mehrere kongruente Zylinder hergestellt. Diese Zylinder wurden einer gemeinsamen Auslaugung und gemeinsamer Analyse unterworfen. Dementsprechend wurde die Auslaugevorrichtung derart konstruiert, dass sie für den gleichzeitigen Empfang mehrerer Zylinder geeignet war. Die hydrodynamischen Verhältnisse können am ehesten dann bestimmt werden, wenn die Zylinder hintereinander in einen einzigen langen Zylinder gereiht werden. Die Verbindung der Zylinder erfolgte mittels »Stacheln«, wie dies in *Abb. 4* gezeigt wird.

Die Stacheln sind derart ausgebildet, dass auch die Auslaugung der Endflächen der Zylinder bis zu einem gewissen Grade verhindert wird. Dieser lange, aus Rübenzylinderchen bestehende Zylinder wurde in einem Glasrohr untergebracht, u. zw. so, dass er darin eine konzentrische Lage einnahm. Dies wurde durch dünne, den Stacheln angefügte Speichen erreicht, wodurch die Strömung

nur unwesentlich gestört wurde. Die Zu- bzw. Ableitung des Wassers an beiden Enden des Rohres erfolgte über je eine dem Durchmesser des Zylinders entsprechende Röhre, u. zw. über deren seitliche Öffnungen. Die beiden Enden der Zylinderreihe wurden durch je einen an diese Röhren angelöteten Stachel befestigt. Die konstante Temperatur wurde mit einem dem *Liebig*-Kühler ähnlichen Mantel gesichert, worin Wasser von entsprechender Temperatur im Gegenstrom strömte. Die Strömungsgeschwindigkeit wurde durch Ventile reguliert und mit Differentialmanometer und Messblende gemessen bzw. durch Bestimmung der Menge der austretenden Auslaugeflüssigkeit kontrolliert. Zur Auslaugung wurde zweckmässig reines (Leitungs-) Wasser benützt und die Temperatur stets mittels Eintauch-Quecksilberthermometern an der Ein-

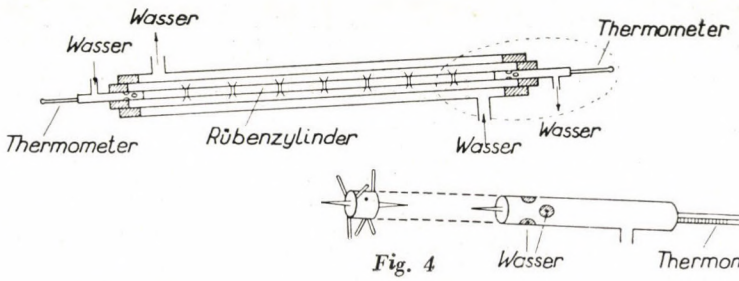


Fig. 4

und Austrittstelle des Wassers kontrolliert. Die Auslaugungsvorrichtung wurde in einem Winkel von etwa 30° zur Waagerechten errichtet, um das Sichentfernen der Gasblasen zu erleichtern. (Das Entstehen und der Einfluss der Gasblasen wird in einer weiteren Arbeit behandelt werden).

Zur Berechnung der Diffusionskonstante ist laut Formel (23) die Bestimmung von t, R, c_0 und $\bar{c}$ erforderlich, deren Messung folgendermassen erfolgte:

Die Dauer der Auslaugung, also der Wert t wurde mittels einer Stoppuhr festgestellt. Als Beginn und Endpunkt der Auslaugungsdauer wurden jene Zeitpunkte angesehen, wo der Wasserstrom in der leeren Vorrichtung die Hälfte der Zylinderreihe erreichte bzw. am Ende des Versuches bei Herablassung bis zu derselben Stelle ablief. Solcherart kann die Feststellung der Zeitdauer als bis auf einige Sekunden genau angesehen werden. Da die kürzeste angewandte Auslaugungszeit etwa 10 Minuten beträgt, ist der Fehler der Zeitmessung max. 1%, was also die Genauigkeit des Wertes der Diffusionskonstante höchstens in demselben Masse beeinflusst. Bei der überwiegenden Zahl der Versuche ist jedoch infolge der längeren Auslaugungszeit der Fehler noch geringer und kann neben den Fehlern, die aus der Ungenauigkeit der Konzentrationsbestimmungen herrühren, vernachlässigt werden.

Zur Bestimmung des Zylinderdurchmessers R wurden in den Vorversuchen Messungen mit einer Schublehre an jedem einzelnen Zylinder vorgenommen, was jedoch keine hinreichende Genauigkeit ergab. Während dieser Messung

wird nähmlich der elastische Rübenkörper ein wenig zusammengedrückt, wodurch der Wirklichkeit gegenüber kleinere Durchmesser erhalten werden.

Eine weitaus höhere Genauigkeit konnte dadurch erreicht werden, dass mehrere (5 bis 10) Zylinder (s. *Abb. 5*) bei parallelen Achsen auf einer schrägen Metallplatte nebeneinander gereiht wurden. Hiernach wurden zwei auf die Platte senkrecht stehende Backen an den Stellen, die der Summe der Zylinderdurchmesser entsprechen, mit Schrauben befestigt und die Entfernung der Backen voneinander mit einer Schublehre gemessen. Die Reproduzierbarkeit dieser Messung, auf den Radius eines Zylinders berechnet, beträgt $\pm 0{,}007$ bis $\pm 0{,}008$ mm. Ein weitaus grösserer Fehler als dieser kann dadurch verursacht werden,

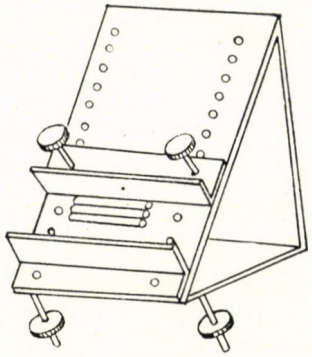


Fig. 5

dass die Schneide des zur Herstellung der Zylinder gebrauchten Bohrers während des Gebrauchs und beim neuerlichen Schleifen eine Deformation erleidet, woraus folgt, dass die Durchmesser der einzelnen Zylinder nicht genau einander gleichen. Die durch die Deformation der Bohrerschneide verursachte maximale Abweichung beträgt auf den Radius berechnet laut Erfahrung 0,04 mm. Bei sorgfältiger Messung kann der maximale Fehler auf den Radius berechnet auf etwa 0,02 mm geschätzt werden. Dies bedeutet bei R (im Falle eines Zylinders von 3 mm Durchmesser) höchstens 1,3%, was bei der Bestimmung von D einen doppelten, also einen Fehler von max. 2,6% verursacht. Da die Fehler vektoriell zu addieren sind, erhöht dieser Fehler, selbst im ungünstigen Fall, den aus der Konzentrationsmessung entstehenden wesentlich grösseren — etwa 4—5% betragenden — Fehler nicht bedeutend.

Es muss ferner in Betracht gezogen werden, dass die Abmessungen der Zylinder im Laufe der Auslaugung eine Veränderung erleiden [3], da sich zu Beginn eine Schwellung von kleinem Ausmass und später eine Kontraktion einstellt. In der soeben erwähnten Arbeit wurde nachgewiesen, dass diese Volumveränderung bei 70° C übersteigenden Temperaturen bereits sehr rasch erfolgt. Bei genauen Messungen müsste man mit einer mittleren Abmessung — zwischen den zu Beginn und zu Ende der Auslaugung festgestellten Abmessungen — rechnen. Wesentlich einfacher ist jedoch, lediglich die Abmessungen

der frischen Rübenzylinder festzustellen (kleinere Deformation bei der Messung). Ist daher nur die Wirkung von Behandlungsunterschieden, Sortenunterschieden usw. von Interesse, so ist es zweckmässiger, mit den Abmessungen des unausgelaugten Rübenzylinders zu rechnen, natürlich im Bewusstsein dessen, dass hierdurch der wirklichen Difussionskonstante gegenüber um einige Prozent höhere Werte erhalten werden. Bei derartigen Vergleichen wünscht man gewöhnlich den Quotienten der erhaltenen Diffusionskonstanten zu ermitteln: eine derartige Vereinfachung lässt immerhin diesen Quotienten praktisch unbeeinflusst.

Die Bestimmung der Anfangskonzentration (c_0) kann natürlich nur indirekt erfolgen. Die praktisch einzig mögliche Methode ist jene, dass aus den nach Ausschneiden der Rübenzylinder verbleibenden Rübenteilen Proben entnommen werden und deren Zuckerkonzentration ermittelt wird. Wie bekannt, ist die Verteilung des Zuckergehaltes in der Rübe nicht gleichmässig [6]: die Gesetzmässigkeiten dieser Verteilung sind jedoch nur in grossen Zügen bekannt. Als Vorversuche zur Wahl der richtigen Bemusterungsmethode und zur Schätzung der Grössenordnung des begangenen Fehlers haben wir auch solche Messungen durchgeführt, wo die ausgeschnittenen Zylinder analysiert und das Resultat mit dem aus der verbleibenden Rübe entnommenen Probe verglichen wurde.

a) Bei Zylindern von 18 mm Durchmesser, die parallel zur Achse der Rübe bzw. in einem Winkel von 45° hierzu gebohrt wurden, haben wir die Zuckerkonzentration je eines Zylinders mit der Konzentration des den Zylinder unmittelbar umgebenden Rübenteiles verglichen. Aus 9 Messungen berechnet beträgt der mittlere Wert von $\frac{dc_0}{c_0}$ (wo dc_0 die Abweichung eines Messungspaares, c_0 die Zuckerkonzentration bezeichnet) $\pm$ 0,053 d. h. $\pm$ 5,3%.

b) Wie aus *Abb. 5* ersichtlich, wurden parallel zur Achse der Rübe 6 Zylinder aus einer Rübe geschnitten, u.zw. so, dass diese an der Peripherie eines Kreises zu liegen kamen. Die Zuckerkonzentration jedes Zylinders wurde jeweils mit der mittleren Zuckerkonzentration der benachbarten Zylinder verglichen. Die Untersuchung von 18 Rüben (6 $\times$ 18 Angaben) ergab bei 18 mm Zylinderdurchmessern einen mittleren Wert von $\frac{dc_0}{c_0} \pm 0{,}039$ (3,9%).

c) Auch eine dritte Methode wurde angewandt, indem Zylinder von 8 mm oder von sogar dünnerem Durchmesser dicht beieinander und parallel zur Rübenachse ausgeschnitten wurden: die durchschnittliche Zuckerkonzentration der Zylinder wurde sodann mit der des verbliebenen, ausgelöcherten Rübenblocks verglichen. Achtzehn Messungen ergaben für den Wert $\frac{dc_0}{c_0} \pm 0{,}030$ (3,0%), was jedenfalls der kleinste Fehler unter sämtlichen Methoden ist. Der Fehler ist selbstredend um so geringer, je dichter je kleinere Zylinder ausgeschnitten werden. Für die weiteren Versuche sind wir bei der letzteren Methode geblieben.

Zur Bestimmung der durchschnittlichen Zuckerkonzentration ($\bar{c}$) in ausgelaugten Rübenzylindern musste — wie bereits erwähnt — die Wirkung der bei den Enden der Zylinder unter schlecht definierbaren Verhältnissen erfolgenden Auslaugung ausgeschaltet werden. Deshalb wurden nach Beendigung des Versuches die beiden Enden der Zylinder — ungefähr in dreifachem Radiusabstand — abgeschnitten und die Analyse nur mit dem verbliebenen Mittelteil durchgeführt. Vorerst wurde die Hauptmenge des anhaftenden Wassers von der Oberfläche der in heissem, nassem Zustand aus der Apparatur gezogenen Zylinder entfernt, sodann die Zylinder in einem Einwaagegefäss mit eingeschliffenem Deckel zur Abkühlung hineingelegt. Nachher wurden die Zylinder abgewogen, was nach Entfernung der beiden Enden wiederholt wurde. Jetzt wurde die Analyse an den mittleren Zylinderteilen durchgeführt.

Bezeichnet man das Gewicht der frischen Rübenzylinder vor der Auslaugung mit q_0, das Gewicht der ausgelaugten, abgekühlten und gemessenen ganzen Zylinder mit q_1, das Gesamtgewicht der verbliebenen Rübenmittelteile mit q_2 und die bei der Analyse in den verkürzten Rübenzylindern gefundene Zuckermenge mit Q, so kann $\bar{c}$ mittels folgender Formel bestimmt werden :

$$\bar{c} = \frac{Q}{q_0} \cdot \frac{q_1}{q_2}$$

In dieser Weise sind — da diese Formel den Quotienten $\frac{q_1}{q_2}$ enthält — die Fehler, die durch anhaftendes Wasser und durch Verdunstungsverluste bei den heissen Rübenzylindern verursacht wurden — ausgeschaltet. Gewiss kann man durch diese Berechnungsart die Wirkung der Volum- und Dichteänderung nur zum Teil eliminieren, doch ist dieser systematische Fehler so gering, dass bei diesen, zumeist nur Vergleichszwecken dienenden Messungen die Genauigkeit praktisch nicht beeinträchtigt wird. Wünscht man aus irgendeinem Grunde die genaue Diffusionskonstante zu ermitteln (wo also die Fehler, die durch Abmessungsveränderungen entstehen, auch ausgeschaltet werden müssen), so kann dies immer mittels einer entsprechenden Berechnungsmethode erreicht werden. Es sei lediglich noch bemerkt, dass der so definierte Quotient von $\bar{c}$ und c_0 (mit obigen Einschränkungen) mit dem entsprechenden Konzentrationsquotienten des Saftes in der Rübe, auf den sich die angeführten theoretischen Formeln beziehen, übereinstimmt, so dass bei unseren Berechnungen stets der so definierte Quotient gebraucht wurde.

Die Analyse selbst erfolgte in der Weise, dass die gewogenen frischen bzw. ausgelaugten Rübenkörperchen in einem zu diesem Behufe konstruierten Fräser mit hoher Drehungszahl zerkleinert, sodann quantitativ in einem *Stift*-Kolben eingespült und mit Bleiessig geklärt wurden. Nach Heisswasserdigestion, Auffüllung bis zur Marke, Schütteln und Filtration erfolgte die Polarisa-

tion, wobei der Polarisationswert mit einer dem Gewicht der abgewogenen Rüben entsprechenden Markvolumenkorrektion berichtigt wurde.

Messungsergebnisse

a) Es wurden Messungen zur Kontrolle der Reproduzierbarkeit des Verfahrens unternommen. Bei Proben aus homogenem Rübenmaterial wurde z. B. unter Anwendung von Rübenzylindern von $R = 0{,}143$ cm Radius und von Auslaugezeiten $t = 10{,}2$ bis 10,9 min, eine durchschnittliche Diffusionskonstante $D = 4{,}17 \cdot 10^{-4}$ cm²/min gefunden.

Die mittlere Abweichung einer Messung vom Durchschnitt betrug $\pm$ 0,12, also rund 3%. Diese — sehr zufriedenstellende — Genauigkeit konnte nur nach entsprechender Übung erreicht werden.

b) Die weiter unten angeführten Messungen veranschaulichen, mit welcher Genauigkeit das *Fick*sche Gesetz bzw. die daraus herleitbaren Gesetzmässigkeiten für die Zuckerdiffusion innerhalb der Rübe gelten.

Sämtliche, in weiterem angeführten Versuche wurden bei einer Temperatur von 75 $\pm$ 1 C° durchgeführt, wobei die Strömungsgeschwindigkeit des an den Rübenkörpern vorüberströmenden Auslaugewassers in jedem Falle 1 cm/sec betrug.

Unveränderte Abmessungen, verschiedene Auslaugungszeit.

Zahl der Messungen	R cm	t min	$D \cdot 10^{+4}$ cm²/min
20	0,90	50	6,4 $\pm$ 0,45
18	0,90	100	6,3 $\pm$ 0,3
21	0,90	200	6,2 $\pm$ 0,2

Es sei bemerkt, dass diese Versuchsreihe mit Rüben durchgeführt wurde, die im Jahre 1950 während 8 Monate bei einer niedrigen (oberhalb des Gefrierpunktes liegenden) Temperatur aufbewahrt wurden. Sämtliche übrigen Messungen wurden mit im Jahre 1951 frisch geernteten Rüben durchgeführt, bei denen die Diffusionskonstante um etwa 30% geringer war (durchschnittlich $4{,}5 \cdot 10^{-4}$ cm²/min).

Es ist ersichtlich, dass selbst bei sehr unterschiedlichen Auslaugezeiten die gemessenen Diffusionskonstanten innerhalb der Fehlergrenzen identisch sind. Die hervortretenden grösseren Fehler sind zumeist auf die individuelle Verschiedenheit der einzelnen Rüben zurückzuführen.

Um die individuellen Verschiedenheiten der Rüben tunlichst auszuschalten, wurde bei den weiteren Versuchen folgendes Bemusterungs- und Auswertungsverfahren angewandt:

Für je eine zu Vergleichszwecken dienende Messungsgruppe (wie z. B. zur Auslaugung durch drei verschiedene Strömungsgeschwindigkeiten) wurden lediglich aus einer einzigen Rübe systematisch ausgeschnittene Zylinder benützt, bzw. wenn eine Rübe nicht genügte, dann wurden die aus mehreren Rüben geschnittenen Zylinder derart verwendet, dass bei jeder Messungsgruppe aus jeder Rübe eine gleiche Zahl von Zylindern benützt wurde. So konnten die systematischen Abweichungen zwischen den einzelnen Messungen grösstenteils ausgeschaltet werden. Die in dieser Weise als Resultat von je zwei bzw. drei zusammengehörigen Messungen erhaltenen Diffusionskonstanten (D_1, D_2, D_3) wurden aufeinander bezogen, d.h. die Quotienten D_1/D_2, D_1/D_3 usw. gebildet. Sodann wurde der Mittelwert dieser Quotienten ermittelt. Im Falle der Gültigkeit des *Fick*schen Gesetzes müssen die Abweichungen der Quotienten vom Werte eins innerhalb der Fehlergrenzen bleiben.

Die hier angeführte Messungsreihe wurde bereits nach dieser Methode für Zylinder von verschiedenen Durchmessern bei gleichbleibenden Auslaugungszeiten durchgeführt:

Zahl der Messungen	t min	R cm	D_1/D_2
8	20,0	0,143	$0{,}922 \pm 0{,}033$
8	20,0	0,262	

Ferner wurden Messungen durchgeführt, wo Zylinder von verschiedenen Durchmessern verschieden lang ausgelaugt wurden:

Zahl der Messungen	t min	R cm	
17	10	0,143	$D_2/D_1 = 1{,}004 \pm 0{,}033$
17	25	0,260	$D_2/D_3 = 0{,}962 \pm 0{,}034$
17	40	0,396	$D_1/D_3 = 0{,}965 \pm 0{,}034$

Aus diesen beiden Messungsreihen ist ersichtlich, dass die Mittelwerte der durchschnittlichen Quotienten der Diffusionskonstanten um ungefähr 4% vom Werte eins abweichen, was als sehr geringfügig angesehen werden darf. Die Abweichung liegt jedoch um ein weniges oberhalb der Fehlergrenzen und beruht wahrscheinlich nicht auf einem Zufall. Die physikalische Erklärung für diese Abweichung wird in unserer nächsten Arbeit vorgelegt werden.

Zusammenfassend darf man feststellen, dass die von uns ausgearbeitete Methode zur Bestimmung der Diffusionskonstante den bisher in der Zuckerfachliteratur veröffentlichten gegenüber wesentlich genauer ist. Die Methode eignet sich vornehmlich für die Ermittlung von Unterschieden, die in der Diffusionskontante infolge individueller oder Sorteneigenschaften oder infolge verschiedener Behandlung der Rübe zum Ausdruck gelangen. Ausserdem wurde die Gültigkeit des *Fick*schen Gesetzes — von äusserst geringen, auf andere Wirkungen zurückzuführenden Abweichungen abgesehen — für die sich in der Rübe abspielenden Diffusionsvorgänge eindeutig bewiesen.

SCHRIFTTUM

1. *G. Oplatka—M. Tegze:* Theorie des Diffusionsprozesses in Zuckerfabriken III. (Ideale Gegenstromextraktion. Das Robertsche System.) Acta Chimica Hung. *2* (4) 1952. S. 383—426.

2. *G. Oplatka—K. Vukov:* Теоретические и опытные исследования системы закрытых диффузий. Acta Chimica Hung. *1* (1) 1950. 215—229.

3. *Frau M. Tegze:* A répa diffuziós állandójának meghatározását befolyásoló tényezők. (Faktoren, die die Bestimmung der Diffusionskonstante der Rübe beeinflussen.Nur ungarisch.) Cukoripar *5*, (1952) S. 20—23.

4. *G. Oplatka—Frau S. Szőke:* Hővezetőképesség mérése a répán. (Wärmeleitfähigkeitsmessung an Rüben. Nur ungarisch.) A Cukoripari Kutatóintézet Évkönyve 1950. Budapest, 1951. S. 107—118.

5. *Jahnke—Emde:* Tafeln höherer Funktionen. Bearb. F. Emde. Leipzig, 1948.

6. *Frau M. Vajna-Papp:* A cukor és rost eloszlása a répában. (Verteilung des Zuckers und des Markgehaltes in der Rübe. Nur ungarisch.) Cukoripar *4* (1951) S. 14—18.

ZUSAMMENFASSUNG

Zur Bestimmung der Diffusionskonstante *D*, welche in den mathematischen Ausdrücken, die die Zuckerfabriksdiffusionsvorgänge beschreiben, erscheint (und welche Konstante für die Geschwindigkeit der Zuckerdiffusion innerhalb der Rübe charakteristisch ist), ist eine Methode ausgearbeitet und eine Apparatur konstruiert worden. Es werden die aus der Rübe hergestellten, langen, dünnen, zylinderförmigen Körperchen mit grossen Mengen warmen Wassers ausgelaugt, wonach aus den vor und nach der Auslaugung bestimmten Anfangs- und Endkonzentrationen die Diffusionskonstante auf graphischem Wege ermittelt wird. Eine Methode wird zur Feststellung jener Versuchsverhältnisse gegeben, bei denen die Messungsfehler eine minimale Wirkung auf das Resultat ausüben. Durch diese Versuche wurde die Gültigkeit des *Fick*schen Gesetzes — von äusserst geringen, auf andere Wirkungen zurückzuführenden Abweichungen abgesehen — für die sich in der Rübe abspielenden Diffusionsgänge eindeutig bewiesen.

ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ПРИМЕНИМОСТИ ЗАКОНА ФИКА К ДИФФУЗИИ САХАРА В СВЕКЛЕ. МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ

М. ТЕГЗЕ и Ю. ТЕГЗЕ

Резюме

Авторами разработаны способ и аппаратура для определения коэффициента диффузии сахара в свекле (по закону Фика). Определение сопровождается экстракцией тонких, длинных и цилиндрических свекловичных срезов, большим количеством горячей воды. Коэффициент диффузии определяется по концентрациям цельной и экстрагированной свеклы графическим методом. Разработан метод определения оптимального режима исследования, при котором погрешности измерения в минимальной степени влияют на конечный результат.

Работая по описанному способу, авторы экспериментальным путем пришли к выводу, что для диффузии в сахарной свекле действителен закон Фика, за исключением только очень незначительных отклонений, имеющих место вследствие прочих воздействий.

OF VERIFICATION OF THE APPLICABILITY OF FICK'S LAW TO THE DIFFUSION SUGAR WITHIN THE TISSUE OF THE BEET. METHOD OF DETERMINATION OF THE DIFFUSION CONSTANT

M. TEGZE & (Mrs.) M. TEGZE

SUMMARY

For the determination of the diffusion constant D (characteristic of the rate of diffusion of sugar within the beet) figuring in mathematical expressions describing the diffusion processes in beet sugar factories, a method has been elaborated and a device designed. According to this method long, thin cylindrical slices cut from the beet are soaked in a large quantity of warm water and the diffusion constant is graphically determined from the initial concentration and the concentration after extraction. Test conditions are defined under which errors of measurement have minimum influence on results. Tests executed by this method have established that Fick's Law holds good for diffusion processes taking place in sugar beet, very slight discrepancies, traceable to other effects, excepted.

VÉRIFICATION DE L'APPLICABILITÉ DE LA LOI DE FICK A L'INTÉRIEUR DU TISSU DE BETTERAVE. MÉTHODE POUR DÉTERMINER LA CONSTANTE DE DIFFUSION

M. TEGZE et MME M. TEGZE

RÉSUMÉ

Les auteurs ont donné une méthode et construit un appareil pour déterminer la constante de diffusion — indiquée dans les expressions mathématiques, visant à écrire les procès de diffusion en sucrerie, par D—qui caractérise la vitesse de la diffusion de sucre à l'intérieur de la betterave. Extraction est faite des cylindres longues et minces de betterave avec de l'eau chaude à l'excès, et on détermine la constante de diffusion graphiquement en partant des concentrations initiales et ceux d'après l'extraction. De plus, une méthode est donnée pour déterminer les circonstances d'expérience où l'effet des erreurs de mesure en vue du résultat est minimum.

Il a été constaté, à l'aide des expériences conduites selon la méthode, que la loi de Fick — à l'exception de quelques déviations minima à attribuer à des effets divers — est valable pour les procès de diffusion à l'intérieur de la cossette de betterave.

ОБЗОР КНИГ — BOOK REVIEW — COMPTE RENDU DE LIVRES — BUCHBESPRECHUNG

Эмиль Шиманек:

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭНЕРГИИ В ТЕПЛОСИЛОВЫХ МАШИНАХ

(Schimanek Emil: Energiaátalakulás hőerőgépekben)

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954, 208 стр., 79 рис., 40 фор.

Профессор, доктор технических наук Эмиль Шиманек более 50 лет руководил Кафедрой теплосиловых машин при Будапештском политехническом институте, и за это время воспитал и подготовил несколько поколений инженеров в области теплосиловых машин.

За успешную работу в течение продолжительного времени правительство Эмилю Шиманеку среди первых присудило премию имени Кошута.

В 1953 году Эмилю Шиманеку исполнилось 80 лет, он полон здоровья и сил. По этому случаю его бывшие ученики организовали в честь юбиляра торжественный вечер, на котором доктор технических наук Альберт Фоно выступил с поздравительной речью, посвященной выдающемуся ученому.

В текущем — 1954 году он обогатил венгерскую техническую литературу новым крупным трудом — книгой »Преобразования энергии в теплосиловых машинах«.

Труд, судя по названию, кажется чисто теоретическим трудом; вследствие приведения богатого материала, объясняющего тему, и в особенности рассмотрения некоторых осуществленных конструкций является исключительно полезным пособием для широких кругов читателей, занимающихся вопросом теплосиловых машин. Об этом говорит и сам автор труда следующими словами: »Я желаю оказать помощь новаторам и повысить эффективность работы конструкторов и работников предприятий».

Труд посвящен поршневым паровым машинам, газовым моторам, паровым и газовым турбинам и рассматривает циклические процессы этих машин. Общий анализ связывается с демонстрацией числовых примеров. Особенно широко рассматривает автор газовые турбины, с которыми у нас занимается много специалистов. Профессор Шиманек говорит, что более обстоятельное рассмотрение этих видов машин »требуется потому, чтобы исправить ряд ошибок, связанных с этой системой машин, и этим препятствовать тому, чтобы часть времени и работы исследователей была бы обращена на исследование таких задач, излишность которых можно определить заблаговременно«.

Большое развитие, достигнутое в нашей стране во время первого трехлетнего плана, а затем в течение пятилетки, сделало необходимым постоянно повышать число подготавливаемых инженерно-технических кадров, большая часть которых занята энергохозяйством в области теплосиловых машин или же теплосиловых станций. Энергохозяйство, ставшее в настоящее время общераспространенным и развившееся в больших размерах, естественно, распространилось во всех областях хозяйственной жизни. Однако, первостепенную важность имеет то, чтобы имеющиеся в нашей стране энергоресурсы были бы использованы с наибольшим хозяйственным эффектом, что во многих случаях возможно лишь при детальном и глубоком знании всех сложных теплотехнических процессов.

В этом отношении данный труд имеет особое значение, так как наряду с целесообразностью построения и понятливостью языка, а также относительно небольшом

объеме в книге даются все основные сведения, которые необходимы для хорошо подготовленного инженера, занимающегося теплосиловыми машинами или же вообще энергохозяйством.

Написанием этого труда, — который восполняет имевшийся до настоящего времени недочет в этой области, венгерской технической литературе, — профессор Шиманек выполнил выдающуюся работу, с которой он сильно способствует дальнейшему повышению достигнутых до настоящего времени результатов в энергохозяйстве нашей страны.

А. Юрек

E. Schimanek :

ENERGY CONVERSION IN HEAT ENGINES

(Schimanek Emil : Energiaátalakulás hőerőgépekben)

Akadémiai Kiadó, Budapest 1954, 208 pp., 79 figs. Price: Ft 40.

Prof. Schimanek held the Chair of Heat Engines at the Technical University of Budapest for over half a century and trained in that period a series of generations of Hungarian engineers in the Science of Heat Engines.

First of all excellent Hungarian engineers, he was awarded the high governmental distinction of the Kossuth Prize for a lifetime's successful work.

In 1953 he completed his 80-th year in vigorous health and was greeted on his 80-th birthday at a cordial ceremony arranged by his former students, on which occasion Dr. A. Fonó addressed the excellent scientist.

This year he has enriched our technical literature in its vigorous development by a work of great importance here reviewed.

By its title the book appears to be a purely theoretical work, but ample explanations and especially the presentation of executed designs make it very useful for a very wide circle of heat engine technicians. The author alludes to this as follows: »I endeavour to help innovators and boost the efficiency of engine design and operation«.

Piston steam and gas engines, steam and gas turbines and their working cycles are treated in the book. General investigations are elucidated by numerical examples too. Especially the treatment of the gas turbine is extensive, in which problem many experts of this country are engaged. The author remarks thereon : «More detailed treatment is necessary to correct numerous errors relative to this engine and to dissuade researchers from wasting their time on tasks the futility of which can be foretold.»

In this country first the Three Year Plan, afterwards the Five Year Plan has produced great economic development requiring training of more and more engineers. Many of them will have to deal with power problems of heat engines or of power plants. Power economy imposes itself on all fields of contemporary life. Energy resources of this country have to be utilized with maximum efficiency, and this is only possible with perfect cognition of the complicated thermodynamic processes.

In this special sense manifests itself the great importance of the book. In logical buildup and lucid language a relatively small volume yields all the basic knowledge the engineer needs in dealing with heat engines or, in general, with power problems.

The book fills a gap and will boost the results hitherto attained in our planned utilization of power resources.

A. Jurek

E. Schimanek :

TRANSFORMATION DE L'ÉNÉRGIE DANS LES MACHINES CALORIQUES

(Schimanek Emil: Energiaátalakulás hőerőgépekben)

Akadémiai Kiadó, Budapest 1954, 208 pp. Prix Ft. 40.

Le Professeur dr. Emil Schimanek occupa pendant plus d'un demi siècle la chaire des machines caloriques à la Polytechnique de Budapest et introduisit pendant ce temps plusieurs générations d'ingénieurs dans la science des machines caloriques.

En reconnaissance de son activité fructueuse de plus d'une génération, il fut un des premiers parmi les ingénieurs de mérite auxquels le gouvernement décérna le Prix-Kossuth.

En 1953 le professeur Schimanek féta dans la plénitude de ses forces son 80ème anniversaire et ses anciens élèves profitèrent de cette occasion pour célébrer le savant éminent. Le discours solennel fut tenu par dr. Albert Fonó.

Cette année, en 1954, le professeur Schimanek enrichit la littérature technique hongroise par une nouvelle oeuvre remarquable, la «Transformation de l'énérgie dans les machines caloriques».

Le titre semble indiquer un ouvrage purement théorique ce qui n'est nullement le cas, le livre étant par la richesse de ses explications et des détails de construction qu'il contient d'une importance capitale pour le grand nombre de ceux qui s'occupent de machines caloriques. L'auteur lui-même le souligne quand il écrit: «. . .Je voudrais apporter une aide à ceux qui veulent améliorer ou transformer ce qui existe et en même temps contribuer à augmenter les résultats des constructeurs et des travailleurs des usines.»

Le livre traite des machines à vapeur à piston, des moteurs à gaz, ainsi que des turbines à vapeur et à gaz et de leur cycles d'operation. Les considérations générales sont complétées par des exemples numériques. Les turbines à gaz faisant l'objet des recherches de beaucoup de spécialistes en Hongrie sont traitées en détail. Le professeur Schimanek écrit: «Il est nécéssaire de nous arrêter plus longuement à ce sujet pour éclaircir les erreurs relatives à ce système de machine. Je désire empêcher que des savants consacrent une partie de leur temps et de leur énérgie à résoudre de problèmes dont l'inutilité peut être d'emblée reconnue.»

Les grands progrès que notre pays a réalisés grâce aux plans triennal et quinquennal exige la formation d'un nombre grandissant d'ingénieurs dont une partie considérable s'occupe des problèmes de machines caloriques et d'usines électriques. L'exploitation d'énérgie qui a connu un immense développement, s'est acquis une importance générale et s'étend aujourd'hui sur toutes les branches de la vie économique. Il est absolument nécéssaire cependant de mettre à profit d'une manière rationnelle les sources d'énérgie qui sont à la disposition de notre pays et ceci, en beaucoup de cas n'est possible que par la connaissance exacte des processus compliqués de la thermodynamique.

L'importance particulière de l'ouvrage réside dans sa structure logique, sa langue claire et le fait qu'il résume les connaissances élémentaires nécéssaires à tout ingénieur de formation approfondie, spécialisé dans les machines caloriques ou travaillant en général dans l'exploitation d'énérgie.

Dans notre littérature technique le livre vient combler une lacune constatée depuis longtemps et permet d'avancer dans un rythme accéléré les performances de notre exploitation d'énérgie.

A. Jurek

E. Schimanek:

ENERGIEUMWANDLUNG IN WÄRMEKRAFTMASCHINEN

(Schimanek Emil: Energiaátalakulás hőerőgépekben)

Akadémiai Kiadó. Budapest 1954. 208 Seiten, 79 Abbildungen. Preis Ft. 40.—

Durch mehr als ein halbes Jahrhundert hatte Professor Dr. Emil Schimanek an der Technischen Universität Budapest den Lehrstuhl für Wärmemaschinen inne und bildete in dieser Zeit Generationen von Ingenieuren in der Wissenschaft der Wärmekraftmaschinen heran.

In Anerkennung seines über ein Menschenalter währenden erfolgreichen Wirkens wurde Professor Schimanek als erster unter den hervorragenden Ingenieuren Ungarns von unserer Regierung durch Verleihung des Kossuthpreises ausgezeichnet.

Im Jahr 1953 konnte Professor Schimanek in voller Frische seinen achtzigsten Geburtstag begehen, und für seine ehemaligen Schüler war dieser Festtag ein willkommener Anlass, den bedeutenden Gelehrten zu feiern, wobei Dr. Albert Fonó die Festrede hielt.

Jetzt, 1954, hat Professor Schimanek unsere aufstrebende ungarische technische Literatur um ein neues und bedeutendes Werk, »Energieumwandlung in Wärmekraftmaschinen«, bereichert.

Der Titel des Buches erweckt den Anschein, als handle es sich um ein rein theoretisches Werk; dem ist aber nicht so, denn es ist dank der Fülle seiner Erläuterungen und der angegebenen Konstruktionseinzelheiten auch für die breite Schicht derjenigen überaus nützlich, die sich mit Wärmekraftmaschinen befassen. Der Autor selbst verweist darauf, indem er schreibt: ». . .Ich möchte denen beistehen, die Vorhandenes verbessern oder neu gestalten wollen und auch dazu beitragen, den Arbeitserfolg der Konstrukteure und der Werktätigen in den Betrieben zu steigern.«

Das Buch behandelt die Kolbendampfmaschinen, Gasmotoren, sowie die Dampf- und Gasturbinen und deren wärmetechnischen Kreislauf. Allgemeine Untersuchungen werden durch Zahlenbeispiele ergänzt. Die Gasturbinen, mit welchen sich auch bei uns viele Fachleute befassen, werden vom Autor sehr eingehend besprochen. Professor Schimanek schreibt dazu: »Es ist eine ausführlichere Behandlung dieses Gegenstandes nötig, um viele auf dieses Maschinensystem bezügliche Irrtümer zu berichtigen. Ich will damit verhindern, dass Gelehrte einen Teil ihrer Zeit und Arbeit für die Erforschung von Aufgaben aufwenden, deren Nutzlosigkeit im vorhinein zu erkennen ist.«

Die grosse Entwicklung, die unser Land dem ersten Dreijahrplan und dem Fünfjahrplan verdankt, macht die Ausbildung einer immer grösseren Zahl von Ingenieuren notwendig, von denen sich ein erheblicher Teil mit der Energiewirtschaft auf dem Gebiet der Wärmekraftmaschinen oder-anlagen befasst. Die heute schon Allgemeingut gewordene und hochentwickelte Energiewirtschaft erstreckt sich begreiflicherweise auf jedes Gebiet des Wirtschaftslebens. Von ausschlaggebender Wichtigkeit ist es aber, die unserem Vaterland zur Verfügung stehenden Energieschätze aufs rationellste auszunutzen, was in vielen Fällen nur durch die genaue Kenntnis der komplizierten Vorgänge der Wärmelehre möglich ist.

Die besondere Bedeutung des besprochenen Werkes liegt darin, dass es mit logischem Aufbau, klarer Sprache und kurz gefasst alle grundlegenden Kenntnisse vermittelt, die dem sich mit Wärmekraftmaschinen oder im allgemeinen mit Energiewirtschaft befassenden gut ausgebildeten Ingenieur nötig sind.

In unserer technischen Literatur füllt dieses Buch eine seit langem empfundene Lücke aus, und Professor Schimaneks hervorragende Arbeit fördert in erheblichem Mass die bisherigen Leistungen unserer Energiewirtschaft.

A. Jurek

Дьёрдь Барта:

ИЗМЕНЕНИЕ СИЛЫ ЗЕМНОГО МАГНЕТИЗМА В ВЕНГРИИ

(Barta György: A földmágnességi erő változásai Magyarországon)

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954, 146 стр., 60 фор.

(Текст опубликован на венгерском, русском и немецком языках)

Геофизическая разведка, как любая другая наука, исходит из данных наблюдений. Геофизическая разведка может быть разбита на 3 части: на сбор данных, на обработку данных (анализ) и на систематизацию собранных данных (синтез).

В геофизике сбор данных, в первую оче ед, означает производство измерений, и если необходимо сделать выводы относительно процессов, происходящих в толще земного шара, тогда измерения необходимо распространить на весь земной шар. Но одновременно опознание происходящего процесса делает необходимым производить наблюдения изменений явления во времени. Исследование изменений во времени является связанным с определенным местом и часто в связи с местом производства измерений предъявляются специальные требования. Эти требования определяют размещение обсерватории и, таким образом, магнитных обсерваторий.

В книге Дьердя Барта »Изменения силы земного магнетизма в Венгрии« дается сводка и анализ наблюдений элементов земного магнетизма в Венгрии. Первая часть труда состоит из четырех глав.

В главе »Изменение силы земного магнетизма во времени — в Венгрии« сначала дается обзор работ, проводившихся в Венгрии в этой области в обсерватории. Эта часть является исключительно интересной и важной и с точки зрения истории развития науки в Венгрии. Данные наблюдений в обсерваториях Венгрии дают такую непрерывную серию за значительное время, что на основе их можно сделать выводы относительно изменений элементов магнетизма за столетие. В этой главе Барта показывает, что изменение элементов за столетие имеет волнообразный характер с периодом в 44 года. Эта волна интересна уже и потому, что период этой волны является как раз четырехкратным периода максимума и минимума солнечных пятен. Наложенная волна имеет место не только в серии наблюдений, проведенных в Венгрии, но и в данных других обсерваторий.

В главе »Изменение магнитных элементов за столетие на основе данных измерений государственного характера« дается отчет об измерениях, проведенных на территории Венгрии, сначала давая исторический обзор по рассматриваемому вопросу, аналогично первой главе, затем на основе обработки данных по элементам H и I за 1949—1950 гг. даются нормальные величины для 1950, O.

Третья глава озаглавлена: »Основание обсерватории земного магнетизма в Будакеси и данные результатов измерений за 1949–1950 гг.».

В этой главе автор рассматривает условия, приборы и данные приборов, необходимых для измерения и регистрации, которые представили основу измерений за 1949–1950 гг. на всей территории страны. Последняя глава озаглавлена »Результаты обработки данных записей магнитных измерений». В этой главе подводится итог обработки данных магнетограмм, отнесенных на суточные изменения и магнитные бури.

Серия таблиц, составляющая вторую часть книги, представляет собою для исследователей-геофизиков очень большую ценность.

Лучше всего о ценности приведенных таблиц можно сделать вывод, если перечислить их названия. Таковыми будут: Изменение магнитного склонения в Венгрии. Магнитное склонение Одьялла—Будапешт—Херень — на основе государственных измерений за 1890 г. Изменение за столетие составляющих силы земного магнетизма в Одьялла. Изменение за столетие магнитного склонения (D) в обсерваториях в Абингере, Осло и Слуцке. серия магнитного склонения в Одьялла (период 22 года). Данные К. Крейла, пересчитанные к периоду времени 1850, О. Данные измерений Гуидо Шенцля, пересчитанные к периоду времени 1875, О. Данные измерений Игнаца Курлендера, пересчитанные к периоду времени 1890, О. Данные измерений Лайоша Штейнера в районе Балатона, пересчитанные к периоду времени 1902, О. Данные измерений Ене Хофгауера магнитных склонений, произведенных в 1934—1936 гг. и в 1941 г., пересчитанные к периоду времени 1936, О и соответственно 1942, О. Данные измерений Дьёрдя Барта и Енё Хофгауера в северной части Трансильвании, сведенные к периоду времени 1943, О. Данные измерений магнитного склонения в Будакеси за 1949—1950 гг. Данные измерений горизонтальных слагающих в Будакеси за 1949–50 гг. Данные измерений вертикальных составляющих в Будакеси за 1949–50 гг. Месячные средние данные слагающих магнитной силы в Будакеси за 1949—1950 гг. Средние часовые величины элементов земного магнетизма за 1949—1950 гг. Сводные таблицы изменений элементов земного магнетизма.

Явления магнитного поля дают все больше и больше возможностей проникнуть в глубь земного шара. На основе их можно получить ответ по таким вопросам, по которым при помощи каких-либо других методов нельзя получить даже приближенного ответа. Книга Дьёрдя Барта является значительным шагом по пути опознания магнитного поля.

Л. Эдьед

Gy. Barta:

TEMPORAL CHANGE OF THE TERRESTRIAL MAGNETIC FORCE IN HUNGARY

(Barta György: A földmágnességi erő változásai Magyarországon)

Akadémiai Kiadó, Budapest 1954. 146 pp. Price: Ft. 70
(Text in Hungarian, Russian and German)

Like all sciences, Geophysical Research starts from observations. Research has thre phases: gathering data, their evaluation (analysis) and arrangement (synthesis).

Gathering geophysical data consists first of measurements; if conclusions have to be drawn to processes in the interior of the Earth, measurement is extended to the entire Earth. However, cognition of the process also implies the observation of the change of the phenomenon in time. Observation of temporal change is locally bound and often sets up specific requirements relative to the place of observation. These requirements determine the location of observatories, and thus of magnetic observatories too.

The book of Gy. *Barta* summarizes and analyzes terrestrial magnetic elements observed in Hungary. Its *First* Part consists of four chapters.

Chapter «Temporal Variation of the Terrestrial Magnetic Force in Hungary» yields first a review of observatory work done in Hungary, very interesting and important also from the point of view of the history of Science in Hungary. Data of Hungarian observatories give such a long continuous series of observations that permit conclusions to the secular variation of magnetic elements already. The author reveals here a wave of 44 years periodicity superposed on the secular variation of magnetic elements. It is of special interest, because this frequency exactly corresponds to four times the sun spot cycle. The superposition of this wave does not only appear in the series of observations made in Hungary, but also in data of other observatories.

Chapter «Secular Variations of Magnetic Elements Based upon National Surveys» exhibits field observations, gives first a historical review analogous to that in Chapter the First ; afterwards normal values of horizontal intensities and inclinations based on evaluation of the National Survey of 1949-50 are given referred to 0 hour, 1950.

Chapter the Third entitled «Establishment of the Budakeszi Observatory of Terrestrial Magnetism and Results of Measurements of 1949—50» deals with conditions of measurement, measuring and registration instruments and their data relative to the National Survey of 1949—50. Chapter»Results of Interpretation of Magnetic Observations«summarizes results of evaluation of magnetograms relative to diurnal variations and magnetic disturbances.

Tabulations of the Second Part of the book are a veritable treasury of Geophysical Reserch as shown by a quotation of titles :

Change of magnetic declination in Hungary. Magnetic declination of Ógyalla—Budapest—Herény, based on the 1890 National Survey. Secular variation of magnetic declination (D) at the Abinger, Oslo and Slutzk observatories. Series of magnetic declination over a period of 22 years at Ógyalla. Results of measures of K. Reil reduced to 0 h., 1850. Results of measurements of G. Schenzl reduced to 0 h., 1875. Results of measurements of I. Kurländer reduced to O h., 1890. Results of measurements of L. Steiner executed in the Lake Balaton area, reduced to 0 h., 1902. Results of declination measurements of J. Hofhauser executed in 1934—36 and in 1941, reduced to 0 h, 1936 and 1942 respectively. Measurements in North Transsylvania made by Gy. Barta and J. Hofhauser reduced to 0 h., 1943. Magnetic declination measurements at Budakeszi in 1949—50. Measurements of horizontal intensity at Budakeszi in 1949—50. Measurements of vertical intensity at Budakeszi in 1949—50. Mensual mean components of magnetic force in 1949—50 at Budakeszi. Hourly averages of terrestrial magnetic elements in 1949—50. Summarizing tables of the change in terrestrial magnetic elements.

Phenomena of the magnetic space allow more and more insight into processes of the interior of the Earth. They offer answers to questions to which other research methods cannot reply even approximately. The book of Gy. Barta is an essential step toward the cognition of the magnetic space.

L. Egyed

Gy. Barta :

LES VARIATIONS DU MAGNÉTISME TERRESTRE EN HONGRIE

(Barta György : A földmágnességi erő változásai Magyarországon)

Akadémiai Kiadó, Budapest 1954, 146 p. Prix : Ft. 60
(Texte en hongrois, russe et allemand)

La recherche géophysique, comme toute science part de l'observation et peut être divisée en trois parties : le recueil des données, leur élaboration (analyse) et leur rangement (synthèse).

Le recueil des données signifie dans la géophysique en premier lieu des mesures, et si l'on désire conclure aux procéssus s'opérant dans l'intérieur de la terre, il faut étendre les mesures à toute la terre. La connaissance exacte du procéssus nécéssite cependant l'observation de ses variations dans le temps. L'étude de la variation temporelle est attachée à un lieu déterminé et bien souvent pose des conditions spéciales quant à l'endroit de la mesure. Ce sont ces conditions qui déterminent l'emplacement des observatoires, en particulier celui des observatoires magnétiques.

Dans son livre intitulé «Les variations de magnétisme terrestre en Hongrie», György Barta nous donne la somme ainsi que l'analyse des éléments du magnétisme observés en Hongrie. La I^{e} partie de l'ouvrage comprend 4 chapitres.

Dans le chapitre traitant de la variation temporelle du magnétisme terrestre en Hongrie, il esquisse le tableau des travaux d'observatoire effectués sur le territoire de la Hongrie. Cette partie présente beaucoup d'intérêt aussi du point de vue de l'histoire de la science hongroise. Les données des observatoires de Hongrie constituent une si longue série ininterrompue d'observations qu'elles permettent même de conclure aux variations séculaires des éléments magnétiques. Dans ce chapitre Barta démontre que dans la variation séculaire des éléments on retrouve une onde superposée d'une période de 44 ans. Ce qui constitue l'intérêt de cette onde c'est que sa période est précisément le quadruple de celle de l'activité des taches solaires. L'onde superposée n'apparaît pas seulement dans les séries d'observations faites en Hongrie, mais encore dans les données d'autres observatoires.

Dans le chapitre suivant, intitulé «La variation séculaire des éléments magnétiques, à la base des mesures nationales», l'auteur analyse les mesures régionales, en donnant, comme au

chapitre précédent, une revue historique, puis communique les valeurs normales des éléments H et I. relative à 0 h 1950, obtenues de l'élaboration des mesures magnétiques effectuées en 1949—50.

Le troisième chapitre porte le titre «La création de l'observatoire de magnétisme terrestre à Budakeszi et les résultats des mesures effectuées en 1949—50».

L'auteur y décrit des circonstances, les instruments nécéssaires à la mesure et à l'enregistrement qui avaient formé la base de la mesure nationale de 1949—50. Le dernier chapitre «Résultats de l'élaboration des enregistrements magnétiques» résume les résultats obtenus de l'analyse de magnétogrammes concernant les variations journalières et les agitations magnétiques.

Les tableaux constituant la deuxième partie du livre sont un véritable trésor pour les chercheurs de la géophysique.

On en dira le plus en énumérant leurs titres : La variation de la déclinaison magnétique en Hongrie. La déclinaison magnétique de Ógyalla—Budapest—Herény à la base des mesures nationales effectués en 1890. La variation séculaire des composantes du magnétisme terrestre à Ógyalla. La variation séculaire de la déclinaison magnétique (D) dans les observatoires de Abinger, Oslo et Slutzk. La série bloxamée de la déclinaison magnétique à Ógyalla (intervalle de bloxamage : 22 ans). Résultats de Károly Kreil réduits à 0 h 1850. Résultats des mesures de Guido Schenul réduits à 0 h 1875. Résultats des mesures de Ignác Kurländer réduits à 0 h 1890. Résultats des mesures effectuées aux environs du Balaton par Lajos Steiner réduits à 0 h 1902. Résultats des mesures de la déclinaison magnétique effectuées en 1934—36 et 1941 par Jenő Hofhauser, réduits à 0 h 1936 resp. 0 h 1942. Mesures effectuées au Nord de la Transylvanie par György Barta et Jenő Hofhauser réduites à 0 h 1943. Mesures des déclinaisons magnétiques à Budakeszi en 1949—50. Mesures de la composante horizontale à Budakeszi en 1949—50. Mesures de la composante horizontale à Budakeszi en 1949—50. Moyennes mensuelles de la force magnétique à Budakeszi en 1949—50. Valeurs moyennes horaires des éléments de magnétisme terrestre en 1949—50. Tableaux résumant les variations des éléments du magnétisme terrestre.

Les phénomènes de l'espace magnétique nous permettent de voir de plus en plus clair dans les procéssus de l'intérieur de la terre. Nous en obtenons de réponses à des questions auxquelles les autres méthodes sont loin de pouvoir répondre. Le livre de György Barta marque une étape importante sur le chemin vers la connaissance de l'espace magnétique. *L. Egyed*

Gy. Barta :

DIE VARIATIONEN DER ERDMAGNETISCHEN KRAFT IN UNGARN

(Barta György : A földmágnességi erő változásai Magyarországon)

Akadémiai Kiadó, Budapest 1954, 146 S. Preis 60 Ft. (Vollständiger Text in ungarischer, russischer und deutscher Sprache).

Die geophysikalische Forschung geht — wie jede Wissenschaft — von der Beobachtung aus und lässt sich demzufolge in drei Teile gliedern : in das Sammeln, in das Aufarbeiten und, in das Ordnen der Angaben.

Das Sammeln von Angaben bedeutet in der Geophysik in erster Linie Messungen ; will man nun auf die sich im Inneren der Erde abspielenden Prozesse folgern, so sind die Messungen auf die ganze Erde auszudehnen. Die Erforschung dieser Prozesse erfordert aber auch gleichzeitig die Beobachtung der zeitlichen Veränderung der Erscheinungen. Die Untersuchung der zeitlichen Veränderung ist ortsgebunden und stellt häufig besondere Anforderungen, die mit dem Ort der Messung zusammenhängen. Diese Anforderungen bestimmen dann die Lage der Observatorien und somit auch der erdmagnetischen Observatorien.

In dem hier besprochenen Buche gibt Gy. Barta eine Zusammenfassung und Analyse der in Ungarn beobachteten erdmagnetischen Elemente. Der erste Teil des Buches besteht aus vier Kapiteln.

Im Abschnitt »Die zeitliche Variation der erdmagnetischen Kraft in Ungarn« gibt der Verfasser zuerst eine Übersicht über die auf dem Gebiete Ungarns durchgeführten Observatoriumsarbeiten. Dieser Teil ist auch vom Gesichtspunkt der ungarischen Wissenschaftsgeschichte ausserordentlich interessant und bedeutungsvoll. Die von den ungarischen Observatorien gesammelten Angaben stellen eine so lange und kontinuierliche Reihe von Beobachtungen dar, dass es möglich ist, aus ihnen Folgerungen über die Säkularvariation der erdmagnetischen Elemente zu ziehen. In diesem Kapitel weist der Verfasser nach, dass die Säkularvariation von

einer Welle überlagert ist, deren Periode etwa 44 Jahre beträgt. Diese Welle ist deswegen von Interesse, weil ihre Periode gerade das Vierfache der Periode der Sonnenfleckentätigkeit ausmacht. Diese superponierte Welle ist nicht nur aus den ungarischen Beobachtungsreihen, sondern auch aus den Angaben der übrigen Observatorien ersichtlich.

Der Abschnitt »Die Säkularvariation der magnetischen Elemente auf Grund der Landesmessungen« berichtet über die magnetischen Messungen auf dem Gebiete Ungarns. Zuerst wird, ähnlich wie im vorigen Kapitel, ein historischer Überblick über die Frage gegeben, um schliesslich zu den aus den magnetischen Landesmessungen der Jahre 1949—50 ermittelten Normalwerten der Elemente H und I für den Zeitpunkt 1950, 0 zu gelangen.

Der Titel des dritten Abschnittes lautet: »Die Errichtung des erdmagnetischen Observatoriums in Budakeszi und die Ergebnisse der 1949—50 ausgeführten Messungen«. In diesem Abschnitt werden jene Umstände, jene zur Messung und Registrierung benutzten Instrumente und Instrumentenangaben beschrieben, die die Grundlage der Landesmessungen der Jahre 1949—50 bildeten.

Der vierte Abschnitt, »Die Ergebnisse der Bearbeitung der magnetischen Registrierungen«, fasst die aus der Aufarbeitung der Magnetogramme stammenden Ergebnisse über die täglichen Veränderungen und über die magnetischen Unruhen zusammen.

Der zweite Teil des Buches, der die Abbildungen und Tabellen enthält, stellt eine wahre Schatzkammer für die Geophysiker dar. Eine einfache Aufzählung der Tabellenüberschriften sagt mehr über diesen Teil aus als eine eingehende Besprechung:

Die Variation der magnetischen Deklination in Ungarn. — Die magnetische Deklination in Ógyalla, Budapest und Herény auf Grund der 1890er Landesmessung. — Die Säkularvariation der Komponenten der erdmagnetischen Kraft in Ógyalla. — Die Säkularvariation der magnetischen Deklination (D) in den Observatorien von Abinger, Oslo und Slutzk. — Bloxamierte Reihe der magnetischen Deklination in Ógyalla (Bloxamierungsintervall: 22 Jahre). — Die auf den Zeitpunkt 1850,0 umgerechneten Messungsergebnisse von Károly Kreil. — Die Messungsergebnisse von Guido Schenzl, auf den Zeitpunkt 1875, 0 umgerechnet. — Die Messungsergebnisse von Ignác Kurländer, auf den Zeitpunkt 1890,0 umgerechnet. — Die Messungsergebnisse von Lajos Steiner aus der Plattenseegegend, auf den Zeitpunkt 1902,0 umgerechnet. — Die Ergebnisse der in den Jahre 1934—36 und 1941 ausgeführten magnetischen Deklinationsmessungen von Jenő Hofhauser, auf den Zeitunkt 1936,0 bzw. auf 1942,0 umgerechnet. — Die Messungen von György Barta und Jenő Hofhauser in Siebenbürgen, reduziert auf 1943,0. — Messungen der magnetischen Deklination in Budakeszi in den Jahren 1949—50. — Messungen der horizontalen Komponente in Budakeszi in den Jahren 1949—50. — Messungen der vertikalen Komponente in Budakeszi in den Jahren 1949—50. — Die Monatsmittel der Komponenten der erdmagnetischen Kraft in Budakeszi in den Jahren 1949—50. — Die Stundendurchschnittswerte der erdmagnetischen Elemente in den Jahren 1949—50. — Zusammenfassende Tabellen der Variation der erdmagnetischen Elemente.

Die Erscheinungen des magnetischen Feldes gewähren immer mehr Einblicke in die sich in der Tiefe der Erde abspielenden Prozesse. Sie geben Antwort auf Fragen, auf die andere Methoden nicht einmal eine annähernde Antwort zu geben imstande sind. Das Buch von Gy. Barta bedeutet einen wesentlichen Schritt auf dem Wege zur Erforschung des magnetischen Feldes.

L. Egyed

К. П. Ковач и И. Рац:

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ МАШИН ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

(Kovács K. Pál—Rácz István: Váltakozó áramú gépek tranziens folyamatai)

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954, 556 стр., 100 рис., 100 фор.

Выход из печати труда К. П. Ковача и И. Раца »Переходные процессы машин переменного тока« является выдающимся событием в электротехнике Венгрии. Книга точно отражает развитие, а также достижения научно-преподавательской работы высокого уровня, которую развернул К. П. Ковач — руководитель кафедры »Эксплоатация электрических машин« при Будапештском политехническом институте в процессе своей немноголетней деятельности. Первая книга профессора Ковача «Эксплоатация электрических машин, 1«, вышедшая из печати в 1952 г., была также значительным по своей ценности трудом. Рецензируемая книга является как бы продолжением первой книги и

распространяется на рассмотрение всех сложных явлений, которые возникают вследствие внезапных изменений эксплоатационных и аварийных режимов синхронных и асинхронных машин. Авторы рассматривают обширный материал при помощи наиболее современных строгих математических методов, но — в каждом отдельном случае не упуская из виду физическую суть явлений — исходя из единого взгляда. Схожая книга, претендующая на полноту собранного материала, нам не встречалась в известной зарубежной технической литературе.

В первой части книги даны математические методы анализа переходных процессов электрических машин и необходимые прочие основные понятия.

Во второй части книги после исследования установившихся режимов синхронных машин рассматриваются переходные процессы внезапных симметричных и асимметричных коротких замыканий и различные методы измерения постоянных машин при этих режимах. Возникновение при асимметричных замыканиях высших гармоник тока и напряжения исследуется при помощи очень остроумных вспомогательных схем. Часть, посвященная синхронным машинам, оканчивается глубоким изучением вопросов стабильности и колебаний.

В III части книги излагаются переходные процессы асинхронных машин. Эта часть книги посвящена изменению во времени напряжений, токов, моментов и числа оборотов при прерывах тока, процессах включения, переключениях звезда — треугольник и замыканиях. Далее рассматриваются явления электрических валов и вопросы колебаний асинхронных машин. Эта часть — труд Иштвана Рац — рассматривает также ряд таких вопросов, которые — в трактовке материала — единым и новым методом — неизвестны из имеющейся в распоряжении зарубежной технической литературы.

После трех основных частей книги дается обширное приложение, в котором сверх нескольких выводов дается целый ряд числовых примеров, таблиц с необходимыми даными, далее краткое изложение формул и методик расчета, необходимых при применении теории на практике.

Несмотря на то, что книга издана Издательством АН Венгрии, первые две части книги служат в качестве учебника по предмету »Эксплоатация электрических машин и сетей« для Будапештского политехнического института, она может быть успешно использована инженерами, работающими по этой специальности.

М. Вайта

P. K. Kovács — I. Rácz:

TRANSIENT PHENOMENA OF ALTERNATING CURRENT MACHINES

(Kovács K. Pál — Rácz István: Váltakozóáramú gépek tranziens folyamatai)

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954. 556 pp., 100 figs. Price: Ft 100

The appearance of the book of Dr. P. K. Kovács and I. Rácz entitled: «Transient phenomena of alternating current machines» is an outstanding event in Hungarian Electrical Engineering. This book is a true reflection both of the development and the results of the high-level scientific-educational work carried out by Dr. Kovács during the few years of his activity as leader of the Department for Science of the Operation of Electric Machines at the Budapest Technical University. Already the first book of Prof. Dr. Kovács, «Theory of Operation of Electric Machines, Vol. I.» published in 1952 has been a noteworthy achievement; the present work can be considered a continuation of the former, comprising the discussion of all the complex phenomena originating from sudden changes of condition in synchronous and asynchronous machines during regular and irregular operation. The authors discuss the ample material by most up-to-date exact mathematical methods but at the same time carefully point out the physics of the phenomena. The vast material has been compiled with a thoroughness pretending to completeness which is unparalleled even in the foreign literature known to us.

The first part of the book deals with the mathematical methods of the analysis of transient phenomena and other necessary rudiments.

The second part — after having examined the steady state conditions of synchronous machines — treats the transient phenomena of symmetrical and asymmetrical sudden short-circuits and the various measuring methods of the machine constants during the mentioned transients. The generation of current and voltage higher harmonics by asymmetrical short-

circuits are examined by higly illustrative equivalent circuit diagrams. This part dealing with synchronous machines is concluded by the close investigation in hunting phenomena and transient stability.

The third part discusses the transient phenomena of asynchronous machines the time functions of voltages currents, moments and speed variations occurring during interruption, switching-in, delta-star switching, and short circuits. The phenomena of selsyns and the hunting phenomena of asynchronous motors are also discussed. This particular section — the work of I. Rácz — deals with a number of topics which — at least in the present new and integral mode of discussion — are mostly unknown even in the accessible foreign literature.

The three main parts are followed by an abundant appendix which contains beside a few deductions, numerical examples, tabulated data and the summary of those formulas and numerical methods which are indispensable for the practical application of the theory.

Published though by the Akadémiai Kiadó, the first two parts of the book serve as textbook also to the lectures : «Theory of Operation of Electrical Machines» ; but engineers interested in the same subject may obtain many a new idea from it. *M. Vajta*

K. P. Kovács—István Rácz :

LES PROCÉSSUS NON-STATIONNAIRES DES MACHINES À COURANT ALTERNATIF

(Kovács K. Pál — Rácz István : Váltakozóáramú gépek tranziens folyamatai)

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954, 536 pp. 100 fig. Prix : Ft. 100

La parution de l'ouvrage intitulé «Les procéssus non-stationnaires des machines à courant alternatif» du dr. K. Pál Kovács et István Rácz est un événement important du monde électrique hongrois. Le livre reflète fidèlement le développement et les résultats de cette activité scientifique et pédagogique d'un niveau élevé que K. Pál Kovács a déployée au cours de quelques années en tant qu'ordinaire de la chaire de la «Théorie de l'exploitation des machines électriques» à la Polytechnique de Budapest. Le premier livre du professeur Kovács portant le titre «Théorie de l'exploitation des machines électriques» I., paru en 1952, fut déjà une oeuvre significative ; elle est en quelque sorte complétée par l'ouvrage présent qui contient l'analyse de tous les phénomènes compliqués provenant des changements d'état subits des machines synchrones et asynchrones survenus en régime régulier ou irregulier. Les auteurs traitent le vaste sujet selon une conception unie, à l'aide des méthodes mathématiques les plus modernes, tout en attachant en même temps une grande importance à la physique des phénomènes. Par la richesse du matériel réuni pouvant prétendre à l'intégralité, le livre n'a pas de pareil dans la littérature étrangère connue.

La première partie comprend la méthode mathématique de l'analyse des phénomènes non-stationnaires et les autres notions fondamentales nécessaires.

Dans la deuxième partie l'auteur, après avoir examiné l'état stabilisé des machines synchrones, passe à l'analyse des procéssus non-stationnaires des courts-circuits symétriques et asymétriques se présentant subitement, ainsi que des différentes méthodes de la mesure des constantes de machine y figurant. La naissance des harmoniques supérieurs aux courts-circuits symétriques est illustrée par des schémas ingénieusement conçus. La partie traitant des machines synchrones se termine par l'examen approfondi des problèmes de la »chasse« de la stabilité non-stationnaire.

Dans la troisième partie l'auteur s'occupe des procéssus non-stationnaires des machines asynchrones et entre autres du déroulement temporel des tensions, courants, moments et nombres de tours créés par l'interruption, la mise en circuit, la connection en étoile-triangle et les courts-ciruits. Cette partie contient également l'exposé des phénomènes des axes électriques et des questions de l'oscillation des moteurs asynchrones. L'auteur, István Rácz s'étend sur un grand nombre de questions qui, tout au moins traitées d'une façon aussi détaillée et nouvelle, ne se trouvent nulle part dans la littérature technique connue.

Les trois parties principales sont suivies d'un appendix comprenant, en dehors de quelques déductions, des tableaux et les équations et méthodes de calcul nécéssaires à l'application de la théorie.

Quoique le livre ait été publié par les Editions Académiques, les deux premières parties servent de manuel d'enseignement à la matière «Science de l'opération des machines électriques» à la Polytechnique, mais les ingénieurs travaillant dans cette branche de la technique le liront également avec profit. *M. Vajta*

K. P. Kovács — I. Rácz:

AUSGLEICHSVORGÄNGE BEI WECHSELSTROMMASCHINEN

(Kovács K. Pál — Rácz István: Váltakozóáramú gépek tranziens folyamatai.)

Akadémiai Kiadó, Budapest 1954. 556 Seiten, 100 Abbildungen. Preis: Ft. 100

Ein überragendes Ereignis auf dem Gebiete der Elektrotechnik Ungarns bedeutet das Erscheinen des Buches von Dr. K. P. Kovács und I. Rácz: »Ausgleichsvorgänge bei Wechselstrommaschinen.« Das Werk spiegelt getreu die Entwicklung einer Arbeit wider, die von hohem wissenschaftlichen und pädagogischen Wert ist. Es weist zugleich auf die Ergebnisse der Arbeiten hin, die Dr. K. P. Kovács im Laufe der kurzen Zeitspanne von einigen Jahren als Leiter des Lehrstuhles für Betriebslehre elektrischer Maschinen an der Technischen Universität in Budapest geleistet hat.

Bereits im Jahre 1952 erschien das ausgezeichnete Buch von Professor Dr. Kovács »Betriebslehre der elektrischen Maschinen I.« als dessen Fortsetzung das vorliegende Werk angesehen werden kann, indem darin die komplizierten Vorgänge angeführt und erklärt werden, die durch plötzliche Zustandsänderungen im Betrieb wie auch bei Betriebsstörungen an Synchron- und Asynchronmaschinen auftreten.

Die Verfasser bearbeiteten den reichhaltigen Stoff von einem einheitlichen Gesichtspunkte aus, nach fortschrittlichen mathematischen Methoden, ohne dabei die begriffliche Darstellung der physikalischen Phänomene ausser acht zu lassen.

Die tiefschürfende Behandlung des Stoffes kann als nahezu vollständig angesehen werden, u.zw. in einer Weise, wie sie bisher von uns im ausländischen Schrifttum noch nicht angetroffen wurde.

Der erste Teil des Buches behandelt die mathematische Methode bei Analyse der Ausgleichsvorgänge und erläutert die zu diesem Bereich gehörigen Grundbegriffe.

Der zweite Teil behandelt die Untersuchung des stationären Zustandes von Synchronmaschinen, ferner die Ausgleichsvorgänge, die bei symmetrischen und asymmetrischen Kurzschlüssen plötzlich auftreten; ferner werden die verschiedenen Messmethoden für die hierbei vorkommenden Maschinenkonstanten erläutert. Das Entstehen von Strom- und Spannungsoberharmonischen wird auf originelle Weise, durch Ersatzschaltungen veranschaulicht. Der Abschnitt über Synchronmaschinen wird mit eingehenden Untersuchungen über Stabilitäts- und Schwingungsfragen abgeschlossen.

Der dritte Teil behandelt die Ausgleichsvorgänge bei Asynchronmaschinen, den zeitlichen Ablauf der Spannungen, Ströme, Momente und Umdrehungszahlen, die beim Unterbrechen, Einschalten und Umschalten von Stern-auf Dreieckschaltung auftreten. Als Abschluss des dritten Teiles werden die Erscheinungen der elektrischen Wellen und Schwingungsfragen der Asynchronmotoren behandelt. Auch erläutert der dritte Teil — von I. Rácz bearbeitet — zahlreiche Fragen, die in der für uns zugänglichen ausländischen Literatur — in solch einheitlicher und neuartiger Darstellungsweise noch nicht entwickelt worden sind.

Dem dritten Teil folgt ein ausführlicher Anhang, der ausser einigen Ableitungen auch Rechenbeispiele, Tabellen und für die praktische Anwendung brauchbare Formeln und Berechnungsverfahren in sich schliesst.

Wenn auch der erste und zweite Teil des Buches an der Technischen Universität in der Vortragsreihe »Betrieb von elektrischen Maschinen und Netzen« als Lehrbuch benutzt wird, dürften die sich mit diesem Themenkreis befassenden Ingenieure ihr Wissen bestimmt um viele neue Erkenntnisse bereichern.

M. Vajta

Я. Эрдейи:

КОНСТРУИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ КРИСТАЛЛОВ

(Erdélyi János: Kristályszerkesztés és kristályszámítás)

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954, 255 стр., 54 рис., 50 фор.

Кристаллографические исследования требуют от исследователя серьезной теоретической и методической подготовки и большой умственной сосредоточенности — для производства трудоемких и детальных измерений, построений и расчетов, и при этом ценность полученных результатов заключается в их точности, а не в общих заключениях. Более широкое использование и более усиленное расширение большого комплекса данных кристаллографической литературы, раскрывающего глубокие зависимости, и кото-

рый необходимо оценить также согласно новым направлениям минералогичесих и геохимических исследований, несомненно тормозилось отсутствием до настоящего времени систематизированного и методизированного справочника.

Книга Яноша Эрдейи дает ясную, логическую и недвусмысленную трактовку всего комплекса данных, которые необходимы и важны для кристаллографа, желающего посвятить себя науке или же повысить свои знания. Эти данные собраны обработкой всей специальной литературы, с использованием опыта и результатов углубленных кристаллографических исследований в течение многих десятилетий — на основе современных методов оценки. Книга, опираясь на кристаллографические и геометрические элементарные знания, без каких-либо логических скачков выводит или же объясняет даже наиболее сложные зависимости общепонятным языком, так что они легко понятны как для начинающих, так и для несведующих в кристаллографических исследованиях специалистов.

В первой части книги излагается методика и выполнение кристаллографических построений. Детально излагаются основные зависимости стереографической и гномической проекций, иллюстрированные мастерски построенными фигурами, далее осуществимые задачи на построение, трансформации. Углубленно излагается построение картины кристалла в обеих проекциях.

Часть книги, посвященная расчетам по кристаллографии, состоит из двух глав. В первой главе дается вывод общих уравнений кристаллографических расчетов последовательным и систематическим изложением геометрических зависимостей. Во второй главе детально рассматривается применение важнейших уравнений кристаллографических расчетов для расчета элементов кристаллов, углов и индексов в случае различных кристаллических систем. В случае использования книги в качестве справочника эта часть, — которая приведением важнейших формул, освящением существующих зависимостей может служит в качестве вспомогательного пособия для кристаллографических расчетов, — будет особо ценной.

В дополнение к книге в качестве приложения приводится под редакцией Ласло Токоди методика построения кристаллов без применения шаровых проекций. Трактовка построения кристаллов »языком« начертательной геометрии дает ряд ценных указаний для кристаллографов, привыкших обращаться с шаровыми проекциями, и означает значительное сблегчение для специалистов, привыкших к приемам начертательной геометрии, в отношении облегчения понимания специфических методов кристаллографии.

Труд является очень ценным вкладом в деле расширения венгерской минералогической литературы. Ясный язык изложения делает возможным использовать книгу также в качестве учебника, хотя удовлетворяет более высоким требованиям. В этой области кристаллографии венгерская техническая литература обогатилась отличной, систематизированной и основательной, охватывающей всю область книгой, которая недоставала не только у нас, но и зарубежом. Надеемся, что плодотворное действие знаний, которые даны ясной и единой трактовкой, следовательно легче усвояемы, покажется как по линии учебы, так и по линии усовершенствования.

Г. Панто

J. Erdélyi :

CRYSTAL DESIGN AND CALCULATION

(Erdélyi János: Kristályszerkesztés és kristályszámítás)

Akadémiai Kiadó, 1954, 255 pp. 54. fig. Price 50 Ft

Investigations in crystallography require from the research worker to be thoroughly versed in its theory and methods ; the working out of meticulous measurements, constructions and calculations put a great strain on his mind while the value of the results does not present itself in grandeur but in its exactitude. The lack of a methodical manual comprising all the data of crystallographic literature which reveal great and deep relations and which still wait to be evaluated according to the newest investigating methods of mineralogy and geochemistry doubtlessly has put a restraint on the wide-spread application and quicker extension of the said data.

The work of János Erdélyi contains in logical and clear-cut summarization the totality of material obtained from the knowledge of the whole literature and from the experiences and

results of long years of study spent deeply engaged in crystallography, all the knowledge that might be necessary or important for a crystallographic research worker at the beginning of his career or his development. Further merit of the book is that it gives — based on crystallographic and geometrical rudiments — a simple, comprehensible deduction or explanation of the more complex relations and thus enables easy understanding even to the beginners or specialists of other branches, who are not versed in the matter.

The first part of the book gives an account of the methods of crystallographic constructions and their execution. The basic relations of stereographic and gnomonic projection, the construction tasks to be completed, transformations are discussed in detail illustrated by exemplary sketches. The construction of the crystal image from both projections is thoroughly dealt with.

The part of the book concerning crystal calculation consists of two chapters. In the first of these we get the general deductions of crystal calculation, discussing consistently and methodically the geometrical relations. The second chapter informs us in detail about the application of the most important equations of crystal calculation in various crystal systems for computing crystal elements, angles and indexes. Employed as a manual — for it may serve as such by virtue of its enumeration of the more important formulas and of pointing out the relations — this part will prove exceptionally valuable.

The book is successfully completed by the annex of László Tokody, containing the methods of crystal construction without application of spherical projection. The discussion of crystallographic construction in the «language» of descriptive geometry means useful instruction for crystallographers accustomed to spherical projections and facilitates the understanding of the specific methods of crystallography to experts used to descriptive geometry.

This book is a most valuable contribution to the Hungarian literature on mineralogy. On account of its lucid manner of discussion it may also be utilized as a text-book, though having greater importance than that. We gained an excellent, methodical thorough summary in this book in that special field of crystallography which was missing until now not only from the Hungarian literature but from that of abroad too. We nourish the hope that the informations imparted in that lucid and integral manner and therefore easily to be understood will exert a fruitbearing influence on technical education and postgraduate training as well.

G. Pantó

J. Erdélyi :

CONSTRUCTION ET CALCUL DE CRISTAUX

(Erdélyi János: Kristályszerkesztés és kristályszámítás)

Akadémiai Kiadó, Budapest 1954, 255 pp. 54 fig. Prix Ft. 50

Les recherches crystallographiques demandent des connaissances theoriques et méthodologiques approfondies du chercheur, une grande concentration pour l'exécution des petites mesures fatiguantes des constructions et calculs, et la valeur des résultats ne se traduit pas par leur importance, mais bien par leur exactitude. L'utilisation générale et l'élargissement de la multitude des données de la littérature crystallographique révélant des relations profondes et leur évaluation à la base des nouvelles recherches minéralogiques et géochimiques ont été certainement entravés par le manque d'un manuel systématique et méthodique.

Le livre de János Erdélyi représente la somme logique et claire de toutes les connaissances acquises à l'aide de recherches approfondies, d'expériences et résultats de plusieurs dizaines d'années, ainsi que de l'étude de toute la littérature technique relative, connaissances qui sont nécessaires et importantes au chercheur au début de sa carrière scientifique ou au crystallographe désirant approfondir sa formation. A la main des notions fondamentales de la crystallographie et de la géométrie, l'auteur déduit et explique d'une manière compréhensible, et strictement logique les relations les plus compliquées, de sorte que celles-ci deviennent intelligibles à tout spécialiste même s'il est débutant ou éloigné des recherches crystallographiques.

La première partie du livre comprend les méthodes et l'exécution des constructions crystallographiques. L'auteur y donne une analyse détaillée, illustrée par des figures exemplaires, des relations fondamentales des projections stéréographiques et gnomoniques, des problèmes, des constructions et des transformations possibles. Il s'occupe d'une manière approfondie de la construction de la figure de crystal à partir de toutes les deux projections.

La partie traitant du calcul des crystaux se divise en deux chapitres. Dans le premier l'auteur déduit les équations générales du calcul, tout en exposant systématiquement les relations géométriques. Le deuxième chapitre analyse en détail l'application des équations les plus importantes au calcul des éléments de crystal, des angles et des index dans les différents systèmes crystallographiques. Employée comme manuel aux travaux de calcul, cette partie, comprenant les équations les plus importantes et l'explication des relations, s'avérera particulièrement précieuse.

Une heureuse idée fut de compléter le livre par un appendix contenant les méthodes de construction des crystaux sans l'utilisation des projections sphériques. L'exposé de la construction des crystaux dans la «langue» de la géométrie descriptive fournit d'utiles renseignements aux crystallographes habitués aux projections sphériques et facilite la compréhension des méthodes particulières de la crystallographie pour les spécialistes habitués à la géométrie descriptive.

Le livre est une oeuvre de grande valeur de notre littérature crystallographique. Par la clarté de sa façon de traiter le sujet il se prête à l'emploi comme manuel d'enseignement, tout en étant beaucoup plus que cela. Nous avons reçu un excellent ouvrage systématique et approfondi tel qu'il n'en existait ni dans la littérature technique hongroise, ni dans celle de l'étranger. Espérons que l'effet fécondant des connaissances exposées d'une manière si claire et par là plus faciles à s'approprier se fera sentir et dans le domaine de l'enseignement et dans celui de la formation professionnelle.

G. Pantó

J. Erdélyi :

KRISTALLKONSTRUKTION UND KRISTALLBERECHNUNG

(Erdélyi János : Kristályszerkesztés és kristályszámítás)

Akadémiai Kiadó, Budapest 1954. 255 S., 54 Abb. Preis 50 Ft.

Die kristallographischen Untersuchungen erheischen vom Forscher ein gründliches theoretisches und methodisches Wissen, grosse geistige Konzentration, minutiöse Messungen zur Ausführung der Konstruktionen und Berechnungen, wobei der Wert der Ergebnisse nicht so sehr in ihrer Grosszügigkeit als in ihrer Genauigkeit in Erscheinung tritt. Eine ausgedehntere Anwendung und raschere Erweiterung der gewaltigen, tiefgreifende Zusammenhänge andeutenden Angabenmasse des kristallographischen Fachschrifttums, die auch im Sinne der neueren Forschungsrichtungen der Mineralogie und Geochemie auszuwerten wäre, wurde bisher zweifellos durch das Fehlen eines entsprechenden systematischen und methodischen Handbuches beeinträchtigt.

Das hier besprochene Buch enthält in leicht verständlicher logischer und kristallklarer Zusammenfassung all das Kenntnismaterial, das bei Übersicht des gesamten Schrifttums, bei Anwendung der Erfahrungen und Ergebnisse jahrzehntelanger kristallographischer Forschungsarbeit in moderner Bewertung für jeden notwendig oder wichtig ist, der die wissenschaftliche Laufbahn eines Kristallographen einschlägt oder sich als solcher weiterbilden will. Das Buch leitet — gestützt auf die kristallographischen und geometrischen Grundkenntnisse — ohne jede logischen Sprünge selbst die verwickeltsten Zusammenhänge ab oder erklärt sie in so gemeinverständlicher Weise, dass diese sowohl für den Anfänger als auch für den kristallographischen Untersuchungen fernerstehenden Fachmann leicht verständlich werden.

Der erste Teil des Buches beschreibt die Methoden und Ausführung der kristallographischen Konstruktionen. An Hand von mustergültig konstruierten Abbildungen werden die grundlegenden Zusammenhänge der stereographischen und gnomischen Projektion, die zu lösenden Konstruktionsaufgaben und Transformationen ausführlich behandelt. Eingehend wird auch die Konstruktion des Kristallbildes aus beiden Projektionen geschildert.

Der sich mit der Kristallberechnung befassende Teil des Buches zerfällt in zwei Abschnitte. Im ersten werden die allgemeinen Gleichungen der Berechnung der Kristalle auf Grund einer konsequenten und systematischen Behandlung der geometrischen Zusammenhänge hergeleitet. Der zweite Abschnitt behandelt ausführlich die Anwendung der wichtigsten Gleichungen der Kristallberechnung zur Ermittlung der Kristallelemente, der Winkel und der Indizes. Bei der Benutzung des Werkes als Handbuch wird sich dieser Teil — der auf Grund seiner Aufzählung der wichtigsten Formeln und der Beleuchtung der Zusammenhänge als Hilfsbuch bei Kristallberechnungen benutzt werden kann — als besonders wertvoll erweisen.

Als glückliche Ergänzung zu den Ausführungen des Buches gibt *L. Tokody* im Anhang eine Zusammenstellung der Methoden der Kristallkonstruktion ohne Gebrauch der Kugelprojektion. Die Behandlung der Kristallkonstruktion in der »Sprache« der darstellenden Geometrie bietet dem an Kugelprojektion gewohnten Kristallographen zahlreiche nützliche Hinweise und stellt für die an die darstellende Geometrie gewohnten Fachleute eine grosse Erleichterung zum Verständnis der spezifischen Methoden der Kristallographie dar.

Das vorliegende Buch darf als ein äusserst wertvolles Fachwerk des ungarischen mineralogischen Schrifttums bezeichnet werden. Auf Grund seiner klaren Darstellungsweise wird man es auch als Lehrbuch benutzen können, obwohl es weit mehr bietet als ein solches. Es stellt ein ausgezeichnetes, systematisches und gründliches zusammenfassendes Fachbuch dieses speziellen Gebietes der Kristallographie dar, das bislang nicht nur im ungarischen, sondern auch im ausländischen Schrifttum gefehlt hat. Es ist zu hoffen, dass die in diesem Fachbuch in klarer und einheitlicher Darstellung gebotenen und deshalb leichter anzueignenden Kenntnisse ihre befruchtende Wirkung sowohl bei der Ausbildung als auch bei der Weiterbildung von Studierenden und Fachleuten zeitigen werden.

G. Pántó

A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1954. XI. 4. — Terjedelem: 24 (A/5) ív, 128 ábra, melléklet

Akadémiai nyomda, Gerlóczy-u. 2. — 34269 — Felelős vezető: ifj. Puskás Ferenc

Les Acta Technica paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des ravaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés ê la rédaction et écrits à la machine a l'adresse suivante.

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur des Livres et Journaux »Kultúra« (Budapest, VI., Sztálin út 21. de Compte-courant No.: 43-790-057-181 ou à líétranger chez tous les représentants ou dépositaires.

The Acta Technica publish papers on technical subjecis in Russian, French, English and German.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up one volume.

Manuscripts should be typed and addressed to :

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publischers should be sent to the same address.

The rate sof subscription to the Acta Technica, is 110 forints a volume. Orders may be placed with »Kultúra» Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI., Sztálin út 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in russischer, französischer, englischer und deutscher Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, mit Maschine geschrieben, a folgende Adresse zu senden :

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band 110 Forint Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen «Kultúra» (Budapest, VI., Sztálin út 21. Bankkonto Nr. 43-790-057-181 oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

INDEX

Scheffer, V.: Der isostatische Charakter der ungarischen Niveauveränderungen und die Möglichkeit der zeitlichen Korrektion der Höhenwerte der Nivellementhöhenfestpunkte *Шеффер, В.:* Изостатический характер изменений нивелира в Венгрии и возможности поправки во времени данных высоты опорных пунктов нивелирования — Isostatic Character of Level Changes in Hungary and the Possibility of Temporally Revaluating the Altitude of Bench Marks — Caractère isostatique des changements de niveau en Hongrie et possibilité de réévaluation temporelle des altitudes des bases de nivellement 247

Kollár, L.: Durchbiegungsberechnung von Stahlbetonbücken mit zwei Hauptträgern — *Коллар, Л.:* Расчет прогиба железобетонных мостов с двумя главными балками — Calculating the Deflection of Reinforced Concrete Bridges with two Main Girders — Calcul de la flèche des ponts en béton armé à deux poutres principales 261

Bardócz, Á. and *Vorsatz, B.:* Thermal Purifying Equipment for the Production of Spectroscopic Pure Carbon — *Бардоц, А.* и *Форзац, Б.:* Термическое углеочистительное устройство для получения спектрально чистых углей — Installation de purification thermique pour la pruduction de carbone spectroscopiquement pur — Ein thermischer Reinigungsapparat zur Herstellung von spektralreiner Kohle 289

Seidner, M.: Water-cooled Turbo Generator Rotors — *Зеиднер, М.:* Турбороторы с водяным охлаждением — Turbo-rotors refroidis par l'eau — Wassergekühlte Turborotoren 305

Boldizsár, T.: The Efficiency of Balanced High-pressure Hydraulic Gear Pumps and Motors — *Гольдижар, Т.:* Коэффициент полезного действия уравновешенных шестеренчатых гидравлических насосов высокого давления и моторов — — Sur le rendement de pompes et moteurs hydrauliques équilibrés à engrenages et haute pression — Über den Wirkungsgrad von ausgeglichenen hydraulischen Hochdruck-Zahnradpumpen und -Motoren 319

Бёлёни, И.: Исследование возможностей усовершенствования молотковых дробилок — *Bölöni, I.:* Possibilities of Improvement of Hammer Mills — Examen des possibilités de perfectionnement des broyeurs a marteaux — Untersuchung der Vervollkommnungsmöglichkeiten von Hammermühlen 355

Freud, G.: Über die Stromverdrängung in kreiszylindrischen Leitern — *Фрейд, Г.:* О вытеснении тока, образующегося в проводнике круглого сечения — Current Distribution in Cylindrical Conductors of Circular Cross-section — Distribution du courant dans les conducteurs cylindriques de section circulaire 397

Seress, J.: Joseph Petzval. Inventor of Photo-optics — *Шереши, Я.:* Йожеф Пецвал. Изобретатель фотографической оптики — Joseph Petzval. Inventeur de l'objectiv photographique — Josef Petzval. Erfinder der Photooptik 407

Tóth, G. and *Pósa, V.:* Determination of the Elasticity of Leather — *Тот, Г.* и *Поша, В.:* Измерение натяга кож — Mesure de l'élasticité du cuir — Die Messung des Standes des Leders 419

Tuschák, R.: Transient Phenomena in the Solid Rotors of Synchronous Machines — *Тушак, Р.:* Переходные процессы синхронных машин с полнотелым ротором — Phénomènes transitoires dans les machines synchrones à rotors massifs — Transiente Vorgänge in Synchronmaschinen mit massiven Läufern 457

Tegze, M. und *Frau Tegze, M.:* Beweis der Anwendbarkeit des Fickschen Gesetzes auf die Diffusion des Zuckers innerhalb des Rübengewebes — *Тегзе, М.* и *Тегзе, Ю.:* Подтверждение применимости закона Фика к диффузии сахара в свекле. Методика определения коэффициента диффузии — Verification of the Applicability of Fick's Law to the Diffusion of Sugar within the Tissue of the Beet. Method of Determination of the Diffusion Constant — Vérification de l'applicabilité de la loi de Fick a l'intérieur du tissu de betterave. Méthode pour déterminer la constante de diffusion 485

Обзор книг — Book Rewiew — Compte rendu de livres — Buchbesprechung 505