MAGYAR

AKADEMIAI ÉRTESÍTŐ.

A MATHEMATIKAI,

ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI OSZTÁLYOK

KÖZLÖNYE.

AZ AKADEMIA RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

GYŐRY SÁNDOR,

AKAD. R. TAG.

ELSŐ KÖTET.

PEST,
EMICH GUSZTÁV KÖNYVNYOMDÁJA.
1860.

MAGYAR

AKADEMIAI ÉRTESÍTŐ.

A MATHEMATICAI

ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI

OSZTÁLYOK KÖZLÖNYE.

I. KÖTET. 1860. I. SZÁM.

A GABONA-, KÜLÖNÖSEN VÍZ- ÉS GŐZMALMOKRÓL.

SZÉKFOGLALÓLAG OLV. JAN. 16. 1860.

TOMORI ANASZTÁZ. L T.

Tisztelt Akademia!

Azon kitüntetésben, melyben a mathematikai osztály levelező tagjává lett megválasztatásom által részesültem, jutalmat fogadtam el, melyet nem szóval kell megköszönnöm a tisztelt Akademiának, és kötelességeket vállaltam el, melyeket csak kiváltságos tehetségek teljesíthetnek. Ily megtiszteltetés előzményei csak a tiszta érdemek lehetnek, s annak hálás viszonzása csak ezen érdemek folytonos öregbítésében állhat. Bocsásson meg a tisztelt Akademia, ha nekem mindenek előtt az említett előzményeket kell kipótolnom, s legyen irántam kegyes türelemmel, ha azon érdemek tetézéséhez talán nagyon sokáig vagy soha sem juthatnék.

A mathematikai tudományok odább vitelére, elméleti és gyakorlati fejtegetéseinek azon magasztos terére, a hol eddig nem ismert örök igazságok, elvek s a nagy rendszer bámulandó titkai jőnek napvilágra, csak a lángész van hivatva; e magasztos tért tisztelt szaktársaim jeleseinek engedvén át: czélomúl a mathematikai tudomány körül inkább csak ennek a gyakorlati életbe átvitelét és terjesztését tűzhetem ki, mindig szem előtt tartván azon elvet, hogy valamint a lelkesedés, úgy a tudomány is ott nyújtson mindenek előtt segédkezet, a hol a haza érdekei azt leginkább igénybe veszik.

Székfoglaló értekezésem tárgyáúl, azt hiszem, jól választám egyikét azon nagy fontosságú gépeknek, melyek földmívelő államunk nyers terményeinek földolgozására szolgálnak. Nagy fontosságú gépnek nevezem azt, mert azon terményeket adja át a közvetlen használatnak, s teszi iparczikkekké, melyektől hazánk anyagi jóléte van nagy részben föltételezve. — Ezen gép a gabnamalom. Bocsássanak meg tisztelt szaktársaim, hogy értekezésem folytában a kevésbé szakértők iránt is figyelemmel viseltetem.

A gabona-malmok, különösen a víz- és gőzmalmokról.

A malmok a legrégibb találmányok közé tartoznak. Mózes már törvényeiben is említi a malmokat, mikor azoknak elzálogolását szigorúan megtiltja. — Legelőször a kézi malmok voltak használatban. Ezen készület kezdetben egy egyszerű kő-mozsár-ból állott, melyben a gabna megtöretett; mely készület azonban későbben sok módosuláson ment át. Ezen gabnaőrlési munkát többnyire nők, leginkább rabszolganők végezék. Plinius szerint a rómaiaknál előbb a gabna jól megszáríttatván, a mozsárban dörzsölés által lehüvelyeztetett, s újabb dörzsölés által azután lisztté őröltetett; a római hadsereg kenyér helyett gabonát kapván, azt kézimalom segítségével őrlé meg. Ezt legközelebb az ökör- és lóerőre alkalmazott malmok követték. — A vízerő hatása már a negyedik században alkalmaztatott gépek hajtására. Azon nevezetes tizennégy vízvezetéken, melyek Rómát vízzel látták el, gabnamalmok valának fölállítva. Midőn a 6-ik században 536-ban a góthok Rómát ostromolták, s az említett tizennégy vízvezetéket elzárták, a malmok működni szükségkép megszűntek. Hogy a rómaiak ezen zavarán segítve legyen, Belizár akkori hadvezér a malmokat járműveken a Tiber folyóra viteté át, mi által hajómalmok keletkeztek, melyeknek föltalálójáúl eszerint Belizár római hadvezér tekintethetik. Azonban Ausonius, ki a 4-ik században élt, történetében egy malomról tesz említést, mely bizonyos kis folyón, mely a Mosellal egyesül, volt fölállítva; ebből az következik, hogy a víz-malmok Németországban voltak legelőször használatban. Nem valószínütlen azonban, hogy a vízimalmok Kr. előtt is ismertettek, miután már Vitruv említi azokat, Palladius pedig ajánlja oly mezei jószágokra, melyek folyóvízzel bírnak.

A szélmalmok a 12-ik században találtattak föl. Ugyanis egy, Mabillon által megismertetett régi okirat szerint, Frankhon bizonyos kolostorában az említett időszakban már létezett ilyféle malom. 1143-ban Angolország bizonyos erdejében volt építve az első szélmalom. Frankfurt városa 1442-ben — állítólag — már új szélmalmot épített. A legelső szélmalom Spanyolországba Hollandiából jött át 1549-ben. (Midőn a szélmalmok használata terjedni kezdett, a papság azoktól dézmát követelt, miből keserű viszály támadt, mely Czelesztín pápa által a papság javára lőn eldöntve).

A legelső gőzmalom Londonban állíttatott föl 1783-ban. És most alig van állam Európában, a hol eféle gyárak ne volnának.

Jelen értekezés tárgya a víz- és gőzmalom gépezetének részbeni kifejlődése és szerkesztésének rövid ismertetése levén, minden egyéb erőre alkalmazott malom tárgyalása itt mellőzve leend.

Hogy a vízmalmok szerkezete a rómaiaknál elég tökéletlen volt, kitetszik azon malmokból, melyek még most is használatban vannak a románoknál s kanál-malmoknak neveztetnek. A románok ugyanis utódai levén a rómaiaknak, nevezett malmok szerkezetét ezektől örökölték. Ezen malmok szerkezete következő: Egy függőleges tengely kerületén több kanál-alakú lapát van alkalmazva, úgy hogy ezen lapátok síkja körülbelül 45°-nyi szöget képez a függőleges tengelylyel; a víz ezen lapátok fölületére csatorna által merőleges irányban vezettetik. Ha az ily irányban ható víznek ereje két oly mellék erőre bontatik, melyek egyike függőleges tehát nem használ, vagyis a tengely forgatására nem szolgál, másika pedig vízirányos és a lapátok súlypontja által leírt kör érintőjének irányában hat: akkor láthatjuk, hogy a tengely egyedül ezen utóbbi erő által hajtatik. Hogy ezen malmok által nem nagy eredmény nyerhető, következik abból, hogy az alkalmazott kis erő által a tengely s az ezzel közvetlen összeköttetésben álló forgókő nem mozog oly sebességgel, mely finom liszt előhozására megkívántatik.

Elismertetvén a vízerőnek az ily alkalmazással járó nagy vesztesége, a vízi kerekeknek szükségképen újabb, czélszerűbb szerkesztéséről kellett gondoskodni. Az első eszme ez volt: a kerék tengelye vízirányosan helyeztetett, s körüle sík lapátok alkalmaztattak, melyekre a vízcsatorna úgy vezették, hogy a beeső víznek iránya a lapátokra merőleges volt, s egyszersmind a kerék érintőjének irányával majdnem összeesett. A tengely másik végén egy fogas kerék alkalmaztatott, melynek fogai által egy függőleges tengelyü orsó és ezzel összeköttetésben álló forgókő hozatott mozgásba. A mondottakból könnyen beláthatni, hogy e szerkesztés sokkal czélszerübb volt az előbbinél; mindamellett e szerkezetnél sem lehetett nagy átmérőü forgóköveket alkalmazni, mert ilyenek hajtására a meglevő erő elégséges nem vala.

Ezen utóbbi szerkezetnél azonban könnyen észre lehetett venni azon hibát, hogy a ható víz erejének kis emeltyüje vala; és miután minden erőnek hatása nem csak az erőnek benségétől, hanem azon emeltyünek hosszától is függ, melyre az erő hat: a legközelebbi javításnak szükségkép abban kellett állni, hogy a ható vízerőnek emeltyüje nagyobbíttassék; mi csak úgy történhetett, hogy az említett vízirányos tengely egy kerékkel láttatott el, melynek szerkezete következő: a tengely négy vagy hat karral bírt, melyeknek végén egymástól bizonyos távolban eiálló két kör-alakú koszorú volt erősítve; ezen koszorúk fenékkel voltak ellátva, s a lapátok a kerék sugarainak irányaiban a két koszorú közé voltak téve, a vízi csatorna pedig úgy vezették a kerékre, hogy a víz a kerék legmagasb pontján esett be. A most leírt szerkezet használatánál csakhamar feltünt azon jelentékeny erővesztegetés, miszerint a lapátok közötti víz, ezeknek irányánál fogva nagyon hamar kiesik vagyis rövid ideig szolgál a mozgatásra; ezért későbben a két koszorú közötti lapátok úgy tétettek be, hogy a kerék kerületével képzett szög ferde volt s a víz nem oly hamar esett le, mint az előbbi szerkezetnél. Tökéletesebb vízikerék mindazonáltal csak akkor jött létre, mikor a keréktádák két külön lapátból készíttettek, vagyis, midőn azon keréknek a szerkezete találtatott föl, mely *fölülcsapó* kerék neve alatt ismertetik. Ezen lapátok újabb időben fém-lemezből is készíttetnek, és pedig jó sikerrel, mert az által a kerék súlya, s így a surlódás is kisebbíttetik.

A fölülcsapó kerekek, melyekre a víz fölülről esve hat, a beeső víznek súlya által hozatnak mozgásba, midőn tudniillik a keréknek félkerülete vízzel terheltetik, a másik félkerület üres maradván, egyik részről túlsúly hozatik létre, mely a keréknek tengely-körüli mozgását okozza. Nagy eredménynyel ezen kerekek csak ott alkalmaztatnak, a hol a víznek nagy esése van; ez által határoztatik meg a kerék átmérője is, melynek az összes esésnél mindig valamivel kisebbnek kell lenni. A vízmennyiség közönségesen nem nagy szokott lenni, mivel nagy esés csak kisebbszerű patakoknál található; de azt, mi a vízmennyiségben hiányzik, a nagyobb esés teljesen pótolja.

Azon folyók, melyek tetemesen nagy vízmennyiséget vezetnek, már közönségesen nagy eséssel nem bírnak; azért azoknál fölülcsapó kerekek nem is alkalmazhatók. Hogy tehát ezen vizeket is lehessen kerekek hajtására használni — miután a vízesés hiányát a nagyobb vízmennyiség pótolja — a kerekeknek másféle szerkezete kívántatik, melynél már a nagy vízmennyiségben fekszik a mozgató erő. Az ily esetben használt kerekek *alúlcsapó* kerekeknek neveztetnek, 12—24 lábnyi átmérővel bírnak, és két bizonyos távolságban egymástól elálló koszorúval vannak ellátva, melyek között azon lapátok, melyekre a víz ütést gyakorolván a kerék mozgásba hozatik, súgár-irányban erősíttetnek meg. Legújabb időben jobbnak találtatott a lapátokat ferde szög alatt úgy alkalmazni, hogy a vízből fölmerülő lapát függőleges legyen és így vizet magával föl ne emeljen.

Az *alúl-* és *fölül-csapó* kerekek között tehát csak az a különbség, hogy az alúlcsapó kerék a víz ütése vagyis a víz eleven ereje, a fölülcsapó kerék pedig a víz súlya által hajtatik. Az alúlcsapó keréknek hatása tehát annál nagyobb leend, minél nagyobb a csapó vízmennyiség, és minél nagyobb azon sebesség, melylyel a víz a lapátokra foly. Az alúlcsapó kerekek közönségesen a csatornába beletétetnek, ennek torkolata zsilippel láttatik el, mely előtt a víz a lehető legnagyobb magasságban tartatik, hogy a zsilip fölhúzatván, a víz minél nagyobb sebességgel folyjon a kerékre. A víznek zsilip-előtti magassága nyomómagasságnak neveztetik, és a víz színétől a nyílás súlypontjáig számíttatik. A mi azon magasságot illeti, melyre a zsilip fölhúzandó, annak minden esetre kisebbnek kell lenni a lapát magasságánál, úgy hogy ha a lapát magassága másfél lábnyi volna, akkor elég, ha a zsilip 10 hüvelyknyi magasságra húzatik föl; minek oka abban áll, hogy a víz a lapátokra ütést gyakorolván, sebességének egy részét elveszti, minek az a következménye, hogy a víz földagad s a lapát fölületén kiterjed, és mindamellett, hogy a víz a csatornában kisebb magasságban foly, mégis a lapát egész fölületére nyomást gyakorol; holott, ha a víz a lapát magasságában folyna le a csatornában, az a lapát előtt feldagadván azon túlcsapna, s a víz hatásának egy része elvesztetnék.

Mondottuk fentebb, hogy az alúlcsapó kerék hatása először a ható vízmennyiségtől, másodszor pedig azon sebességtől függ, melylyel a víz ütést gyakorol a lapátokra. Miután pedig ezen sebesség a nyomó víz magasságától, a nyomómagasság pedig a folyó természetes esésétől függ: következik, hogy az alúlcsapó kerék szerkesztésénél a nyerhető vízmennyiség és a folyó esése azon két nevezetes tényező, melyektől az egész gépezet szerkezete függ. Az említett két tényező mindig közvetlen mérés által meghatározandó, és pedig a vízmennyiség vízműtani elvek szerint, a folyó esése pedig azon mértani műtétel által, mely estelésnek neveztetik.

Hasonlóképen a fölülcsapó kerék hatása is mindig 1-ör) a ládákba beeső vízmenyiségtől, és 2-or) a víz természetes esésétől függ, mely utóbbi 12—30 lábnyi is szokott lenni.

Szinte a kerekek harmadik neménél is, azaz a *középcsapó* vagy *gégekerekeknél*, melyekre a víz középen hat, a hatás csak az említett két tényezőtől függ. És így általánosan állíthatjuk, miszerint minden képzelhető vízi keréknek a hatása a vízmennyiségtől és ennek természetes esésétől függ.

Ha tehát a folyó víz hatása vizsgálat alá vétetik, az erőműtan elveit alkalmazván, a szükséges számítás után bármiféle víz összes hatásának számára e következő mathematikai kifejezés állítható föl:

$$E = \gamma. M. h.$$

melyben $\gamma = 56, 4$ ℔ a víz fajsúlya, (M) a minden másodperczunyi vízmennyiség, és (h) a víz esését vagy nyomómagasságát jelenti. Ezen képlet gyakorlati használatára tudnunk kell, hogy az által a folyó víz összes hatása avagy munkája állíttatik elő. Mivel azonban a víznek ezen összes munkája a kerékkel, melyre az hat, egészen soha sem közölhető, hanem ezen munkának csak bizonyos része, azért mindenféle kerék részére tudnunk kell azon törtszámot, melylyel a fentebbi képlet szorzandó, hogy a kerék által gyakorolt munka meghatároztathassék. Tapasztalás útján ezen törtszámok különféle kerekek részére ekként állapíttattak meg: a csatornában álló alúlcsapó kerekek részére 0, 5. törtszám szolgál a gyakorolt munka meghatározására, azaz: az alúlcsapó kerék által gyakorolt munka a víz összes munkájának csak felét teszi. — A szabad vízben álló alúlcsapó kerekek részére, a mint azok a hajómalmoknál találtatnak, a kérdéses törtszám csak 0, 33 részt tesz, azaz a hajómalmok által a víz munkájának alig harmad része gyakoroltatik.

Poncelet kereke által, mely szinte alúlcsapó, de különös szerkezetű kerék, a víz munkájának 0, 65 része nyerhető meg; minek oka abban áll, mert ezen kerék görbe lapátokkal van ellátva, melyekre a víz inkább csak nyomást, mint ütést gyakorol; hogy pedig a nyomásból eredő hatás mindig nagyobb az ütésből eredő hatásnál, következik abból, mert a nyomás folytonos, az ütés pedig pillanati erőnek tekintendő.

A fölülcsapó kerekek által gyakorolt munka meghatározására 0, 6. törtszám használandó; miből látni, hogy a fölülcsapó kerék alkalmazása nagyobb előnyt nyújt az alúlcsapóénál. Ennek oka szinte csak a víz súlyának hatás-módjában keresendő.

Azon tapasztalati szabályhoz, mely szerint a csatornában álló alúlcsapó kerekek a víz hatásának 0, 5. részével működnek, még azt kell megjegyeznünk, hogy ezen hatás csak azon föltétel alatt nyerhető meg, ha a kerék kerületén elég lapát alkalmaztatik. Erre megkivántatik, hogy egyidejüleg legalább 5—8 lapát legyen viz alatt; hogy igy semmi viz le ne folyjon hiába; mert ha ennyi lapát mindig viz alatt van, akkor a lefolyó viznek minden része fölfogatik egyik vagy másik lapát által. Ezen nevezetes körülmény azon gyakorlati szabályhoz vezet bennünket, miszerint a kerék körülete 2, 5-szer annyi lapátot kap, ahány láb a kerék átmérőjében foglaltatik.

Ezeket előre bocsátván, nagyon érdekesnek tartom példában megmutatni, hogy az előbb felállitott képlet, $E = \gamma$. M. h, a gép szerkesztésére miként használandó gyakorlatban, mihelyt tudniillik (M) és (h) közvetlen mérés által meghatározvák. E végre jó leend még a malom gépezetének rövid leirását előadni. Ezen gépezet egyszerü vagy összetett szokott lenni. Egyszerü, melyben csak egy fogaskerék fordúl elő, s ezen kerék fogai már azon orsót mozgatják, melynek tengelyén a forgókő van alkalmazva. Összetett gépnek az mondatik, melynél két fogaskerék és két orsó fordúl elő, és a szerkezet abban áll, hogy a vizi kerék tengelyén egy csillagos kerék van alkalmazva, melynek fogai által egy második tengelyen megerösitett orsó hozatik mozgásba, és e második tengelyen azon fogas éspedig fésüs kerék van alkalmazva, melynek fogai által már a forgókő tengelyének orsója hajtatik. Általános szabály, mindig oda törekedni bármily czélra épitendő gépnél, hogy az egyszerü legyen, s az összetett gépeket csak ott használjuk, a hol már azokat elkerülni nem lehet. Ugyanezen szabály a malmoknál is szem előtt tartandó; csakhogy ez mindig a vizi kerék egy percz alatti forgásainak számától van föltételezve. Tapasztalásból tudjuk, hogy nem mindegy az, bármily sebességgel forgattassék a müködő vagyis forgókő; mert ha a sebesség kellőnél kisebb, a gabnaszemek eléggé össze nem zúzatnak és a nyert liszt durva lesz, ha pedig a forgókő kellőnél nagyobb sebességgel forog, akkor a liszt megégési veszélynek van kitéve és akkor nem használható. Innen következik, hogy a forgókő sebességének meghatározottnak kell lenni, éspedig tapasztalás által, melyből tudatik, hogy a forgókő sebessége akkor kedvező, ha szélének sebessége egy másodpercz alatt 24—30 lábat teszen. Miután pedig ez a sebesség megint a forgókőnek egy percz alatti forgásai számától függ, következik, hogy minden nagyságú forgókő részére az egy percz alattti forgások számát kell tudnunk, mely is az angoloknál divatozó e következő szabály szerint található föl mindig : *a 480. állandó szám elosztandó a forgókőnek lábakban számított átmérőjével.* Ezen szabály így bizonyíttatik be :

Ha a forgókő átmérője d, akkor annak kerülete πd. Ha feltesszük, hogy az minden perczben n fordulatot tesz, akkor szélének ezen idő alatti útja $= \pi dn$. Ámde ezen út úgyis kifejeztethetik, ha a forgókő szélének a sebessége c egy percben foglalt másod-perczek számával *60*-al szoroztatik, leend tehát ezen út $= 60. c$, mely két kifejezés ezen egyenletet adja :

$$\pi dn = 60. c.$$

Itt c helyett 25 tétetvén, lesz az eredmény

$$n = \frac{480}{d.}$$

Egy 4 láb átmérőü forgókő tehát 120 fordulatot fog tenni egy percz alatt, hogy kellő sebességgel forogjon. Fölvevén tehát, hogy egy alúlcsapó kerék által 4 lábnyi forgókő hajtandó, és a megmért tényezők szerint a vízi keréknek egy percz alatti fordulatai száma 5 volna, akkor az, hogy ezen esetben egyszerü vagy összetett gép építendő-e, a következőkből fog kitünni : Minthogy a forgókőnek egy percz alatt 120 fordulatot kell tenni, következik, hogy a vízi kerék minden egyes fordulatánál a forgókő 24 fordulatot fog tenni; ha tehát egyszerü gépet akarnánk alkalmazni, akkor e 24 fordulatot csak az által nyerhetjük meg, ha a fésüs keréknek 24-szer annyi fogat adunk, a hány lécz találtatik az orsóban; ha tehát az orsónak csak 8 lécz adatik, a fogas kerék 24. 8 $=$ 192 foggal leend ellátandó, mi is a gyakorlatban nem alkalmazható, mert az által a fogas kerék drága és oly nagy lenne, hogy a malom-épületben talán el sem férne. Mert fölvevén azt, hogy a kerék fából készíttetik és az osztás csak 4 hüvelyknyinek tétetik föl, akkor a fogaskerék átmérője 22 lábnyi lenne, melynek alkalmazása alig czélszerü és lehetséges.

Ha azonban itt egy összetett gépet alkalmazunk, akkor a szükséges két fogaskerék átmérője e következő módon találtatik föl. Áll minden kerékmünél ezen géptani szabály: *a leggyorsabb résznek azon idő alatti fordulatai száma, mely idő alatt a leglassúbb rész egy fordulatot tesz, föltaláltatik; ha a kerekek fogai számainak szorzata elosztatik az orsók léczei számainak szorzatával.* Vagyis képletben előállítva:

$$U = \frac{N.\ N'}{n.\ n'}\ \text{azaz esetünkben}:\ 24 = \frac{N.\ N'}{n.\ n'}$$

a hol N és N′ a kerekeknek adandó fogak száma, n és n′ pedig az orsóknak adandó léczek száma. Ha tehát n = 12, és n′ = 8-nak vétetik, akkor az eredmény lesz 24. 8. 12 = N. N′ avagy 48. 48 = N. N′ azaz a fogaskerekek mindegyike csak 48 fogat kap; miből láthatni, hogy ez esetben mindkét kerék nem igényel oly nagy tért mint előbb azon egy 22 lábnyi átmérőü kerék. Mindezekből a gyakorlatra az következik, hogy az egyszerü vagy összetett gép alkalmazása azon sebességtől függ, melylyel a vízi kerék mozog. Ezeket tudván, ha valamely pataknak minden másod perczbeni vízmennyisége 30 köb lábnyi és az összes esés 6 lábnyi, akkor a víz munkája lesz

$$E = 56,4.\ 30.\ 6 = 10152\ \text{l. fontnyi};$$

azonban, ezen munkának csak fele ruháztathatván át a vizi kerékre, leszen a kerék munkája E = 5076 l. fontnyi. — Hogy az ezen munka által kellő mozgásba hozható forgókő találtassék föl, mindenek előtt azon sebességet kell ismernünk, melylyel a vízi kerék mozog. Azon sebesség pedig 6 lábnyi nyomó magasság mellett leend:

$$c = 2\sqrt{gh} = 2\sqrt{15,5.\ 6} = 19,2\ \text{láb.}$$

a vízi kerék tehát ismert szabályunk szerint ezen sebesség felével azaz 9, 6 lábnyi sebességgel fog mozogni. Ha tehát azt akarjuk, hogy ezen kerék 5 másod percz alatt egy fordulatot tegyen, akkor kerületének 5. 9, 6 = 48 lábnyinak kell lenni, honnan ezen kerék átmérője $= \frac{48}{3,14} = 15,3$ lábnyi. Miután ezen kerék minden perczben szám szerint 12 fordulatot fog tenni, az alkalmazandó gépezet *egyszerü* szerkezete nyilván elégséges leend.

A forgókő nagyságának meghatározására tudnunk kell, hogy a fentebbi 5076 l. fnyi munka nemcsak a forgókő hajtására, hanem a hasztalan ellenállások legyőzésére is szolgál; ezen utóbbira annak egy negyedrésze kívántatván, marad $\frac{3}{4}$. 5076 = 3807 l. fontnyi munka, mely a vízi keréktől a forgókőig szaporodván, ennek kerületére mint hasznos munka hatást gyakorol. Ezek után a forgókő nagyságának meghatározására még tudjuk tapasztalásból, hogy egy lábnyi sugárú forgókő hajtására annak kerületén érintő irányában 25 fontnyi erő kívántatik; mivel pedig azon munka, mely valamely forgókő hajtására szükséges, ennek törő felületével egyenes viszonyban áll, és ezen felületek a sugarak négyzetével egyenes viszonyban vannak, következik, hogy más R sugarú forgókő hajtására szükséges munka $= 25R^2$ leend, és miután annak kerülete 25 lábnyi sebességgel forog, lesz az ezen kerületen gyakorolt munka $= 25.\ 25.\ R^2$. Tehát a kérdéses forgókő föltalálására áll ezen egyenlet: $3807 = 25.\ 25.\ R^2$; innen $R = 2,46$ láb, azaz a forgókő átmérője majdnem 5 lábnyi leend; annak minden perczbeni fordulatai száma tehát $= \frac{500}{5} = 100$ fog lenni. Mivel továbbá a vízi kerék minden perczben 12 fordulatot tesz, a forgókő a vízi kerék minden egyes fordulatával $\frac{100}{12} = 9$ fordulatot teend, mi végre a gépnek egyszerű szerkezete elégséges leend; ha t. i. az orsónak 8 lécz adatik, akkor a fésűs kerék $8.\ 9 = 72$ fogat kap; és ha az osztás 4 hüvelyknyinek vétetik, a fésűs kerék kerülete leend $= 4.\ 72 = 288$ hüvelyknyi, ennek átmérője tehát $= \frac{283}{3,14} = 91,7$ hüv. $= 7,6$ lábnyi, mely kerék még az által is kisebbíthető, ha fakerék helyett vaskerék alkalmaztatik, melyhez a fent említett osztásnak csak fele kívántatik.

Hogy még a kerék fogainak vastagsága is meghatároztassék, mely szerint a rájok ható nyomást biztosan kitartsák, arra nézve tudjuk, hogy a vízikerék kerülete 9,6 lábnyi sebességgel forog, a kerék sugara 7,6 lábnyi, a fésűs kerék sugara pedig 3,8 lábnyi, mivel pedig ezen sebességek a sugarakkal egyenes viszonyban állanak, a fésűs kerék sebessége megkapható ezen arányzatból: $7,6 : 3,8 = 9,6 : x$; honnan x = 4,8 láb. Most pedig azon nyomás, mely a fogakra gyakoroltatik, p-nek neveztetvén, leend 4,8.p a fogas kerék kerületén gyakorolt munka; áll tehát ezen egyenlet

$$3807 = 4,8.\,p\text{; innen } p = 800 \text{ fontnyi.}$$

Ezek után a fog vastagsága e következő képletből kapható meg:

$$Q = m\,\frac{bh^2}{l} \text{ honnan } h = \sqrt{\frac{Ql}{mb}}\text{; hol } Q = 800 \text{ font}$$

a föltalált nyomás. Ha most a fog hossza l egy hüvelyknyinek, szélessége b pedig 3-nak vétetik, és a fog tölgyfából készíttetik, mely esetben a szilárdsági tényező m = 1404, leend annak vastagsága

$$h = \sqrt{\frac{800}{140.\,3}} = 1,5 \text{ hüv.}$$

A szilárdsági tényezőnek csak 10-ed része hozatik számításba, hogy a fog szilárdsága annál biztosabb legyen.

Ezen eredmény segítségével a kívántató osztás is könnyen föltalálható; ezen osztás t. i. közönségesen hét egyenlő részre szokott véghezvitetni és a fog vastagságára három olyféle rész fordíttatik. Ha tehát az osztás t-vel jegyeztetik, álland ezen egyenlet:

$$1,5 = \tfrac{3}{7}\,t\text{; honnan } t = 3,5 \text{ hüv.}$$

ennéljogva a kerék kerülete leend $= 72.\,3,5 = 252$ hüv. $= 21$ láb; tehát átmérője lesz $= \frac{21}{3,14} =$ közel 7 láb.

Létezik a vízi kerekeknek még egy más faja is, mely vízirányos kerekek neve alatt ismertetik. Ezek szerkezete újabb időben a tökéletesség legnagyobb fokát érte el, annyira, hogy ezek hatása a víz hatásának sokkal nagyobb részét gyakorolja, mint a többi függőleges kerekeké. Ennek oka abban keresendő, hogy 1) a víz rájok nem ütés, hanem nyomás által hat; 2) hogy a víz a kerék kerületének nemcsak egyrészére, hanem az egész kerületre egyenletesen hat. Ezen kerekek közönségesen bámulandó sebességgel mozognak, miért *sebes kerekek* nevét is viselik. Átmérőjök ritkán nagyobb 5 lábnál; nagy hatásuknál fogva egész gyárak gépezetét mozgatják, és sebes forgásuk miatt, mely gyakran zsilip által mérsékeltetik, vasból készíttetnek. Ezen kerekek hatása tapasztalás után a víz hatásának 0,7 — 0, 8 részét teszi, miből látszik, hogy ezen kerekeknél a víz hatásának csak kis része vesztetik el.

Két faja van különösen ezen keréknek, melyek tökéletességök miatt nagy kiterjedésű alkalmazást nyertek: a *Fourneyron* és *Jonval* kereke. A Fourneyron kereke vízirányos és hengeres, melynek körülete görbe lapátokkal van ellátva; ezen kerék koszorúja egy köralakú és erősen álló lap körül forog, mely lap az úgy nevezett irányzó-lapátokkal van ellátva; ezen lapátok a fölülről lefutó víznek azon irányt adják, melylyel annak a vízi kerék koszorújába kell beesnie.

Ezen kerék szerkesztésénél legelőször is a vízi kerék belső sugara, avagy a fenemlített köralakú lap sugara meghatározandó, melynek nagysága a rendelkezésünkre álló vízmennyiségtől függ. Ennél így kell eljárnunk: az említett lap területe $= \pi r^2$ (ha t. i. r annak sugara) az M vízmennyiséggel egyenes viszonyban áll; maga az *r* sugár tehát a vízmennyiség második gyökerével álland egyenes viszonyban. Ha tehát μ egy tapasztalati tényező, akkor r sugár meghatározására mindig ezen egyenlet szolgál: $r = \mu \sqrt{M}$, melyben μ helyébe vagy 0, 326 vagy 0, 54 teendő. Így például egy 36 köblábnyi vízmennyiség részére lenne $r = 0,326 \sqrt{36} = 1,956$, azaz a vízi kerék belső sugarának majdnem 4 lábnyinak kell lenni; honnan egyszersmind azt is látjuk, hogy kis vízmennyiségeknek csak kis átmérőű kerekek felelnek meg. Egyébiránt már tudva van előttünk, hogy a kis vízmennyiséget a nagyobb esés pótolja.

Miután ezen keréknek a hatása a víz hatásának $^3/_4$—$^4/_5$ részét teszi, ha elégséges vízmennyiséggel bírunk, és a kerék hatása már előre ismeretes előttünk: ezekből a szükséges vízmennyiséget mindig ezen általános képlet által határozzuk meg:

$$E = \tfrac{3}{4}\,\gamma.\,M.\,h;\ \text{honnan}\ M = \frac{4\,E}{3\,\gamma\,h.}$$

Ha például h = 20 lábnyi esésnél 4000 lábfontnyi munka kívántatnék, akkor az arra kívántató vízmennyiség lenne:

$$M = \frac{4.\ 4000}{3.\ 56,\ 4.\ 20} = \text{közel 5 köb láb.}$$

Ismervén az r sugarat, a megerősített lapon alkalmazott irányzó-lapátok görbülete mindig $\frac{1}{2}$ r sugárral íratik le.

A kerék külső sugarának meghatározására e következő képlet szolgál :

$R = r\,(1 + 0{,}0065\,\frac{\beta}{\sqrt[3]{r}})$ a hol β azon szöget jelenti fokokban, melyet a kerék lapátjai a kerék belső körületével képeznek, mely szög közel 90' foknyi szokott lenni, minélfogva képletünk még így is álland :

$$R = r\,(1 + \frac{0{,}585}{\sqrt[3]{r}})$$

Föltalált kerekünk belső sugara eszerint lenne $=$ 2 láb ; külső sugara pedig :

$$R = 2\,(1 + \frac{0{,}585}{\sqrt[3]{2}}) = 2{,}\,9 \text{ láb.}$$

a kerék koszorújának a szélessége tehát 0, 9 lábnyi lenne.

Az irányzó-lapátok száma 20—30 között választandó, ezekhez aránylag a vízi kerék lapátjainak száma 1, 2-szeresnek szokott felvétetni. Ha például 25 irányzó lapát volna, akkor a vízi keréknek 30 lapátot kell adni.

A kerék mindezen részei vasból készíttetnek, és ezen részek erőssége, ha az általok viendő nyomás adatik, azon szabályok szerint határoztatik meg, melyeket a testek szilárdságának elmélete állít föl. Igy a fenemlített, irányzó-lapátokkal ellátott lapnak vastagsága a következő képlet által kapható meg :

$s = 0{,}\,148\; r\,\sqrt{h} + 0{,}\,33$, melyben r a lap sugara, h pedig a lapon álló vízmagasság. A fent előhozott példában volt $r = 2$, és $h = 20$, tehát :

$s = 0{,}\,148.\;2\,\sqrt{20} + 0{,}\,33 = 1{,}\,63$ hüvelyknyi, ha t. i. a lap vasból készíttetik.

Különös szerkezettel bír a fent említett Jonval kereke, melynél a vezető lapátok készülete a kerék fölött áll és csonkított kúp alakkal bír ; ez alatt maga a vízi kerék van alkalmazva ; mindkettőben a lapátok csavar-görbületű alakkal bírnak. Ezen keréknek azon előnyös tulajdonsága is van, hogy nem csak a fölülről rárohanó víz, hanem részben a lég nyomása által is hajtatik. A kerék t. i. egy lefelé menő és léghatlanúl zárt csővel van összeköttetésben, mely cső a kerék mozgása alatt vízzel levén tele, ezen vízoszlop tartása által, az alsó víz színére nyomó lég, nyomásából a vízoszlop magasságához képest veszt; e szerint az alsó víz színére kisebb nyomás gyakoroltatik a lég által mint a felsőére; tehát a felső víz színére ható légnyomásnak egy része a kerék forgatására szolgál hasznos munkáúl.

A gőzmalmok és vízimalmok közötti különbség csak a hajtó erőben fekszik és azon fontos körülményben, hogy a gőzmalmok mindenütt, vízimalmok pedig csak ott állíthatók föl, a hol azok hajtására elégséges víz találtatik. Továbbá a gőzmalomnál a futó kövek száma tetszőlegesen vagy a körülményeknek megfelelőleg választathatik, míg a vízmalmoknál a hajtandó kövek száma mindig a rendelkezésünkre álló vízerőtől függ. Már tudva van, hogy oly pataknál, melynek vízmennyisége minden másod-perczben 6 köblábot tesz, és 20 lábnyi használható eséssel bír, 6 három-lábnyi átmérőü forgókő kellő mozgásba nem hozható, mivel 6 köbláb víznek a súlya = 338, 4 ℔ ez pedig az adott 20 lábnyi eséssel szoroztatván 6768 lábfontot ad, mint a víznek összes munkáját; ha pedig még ennek negyedrésze a hasztalan ellenállások részére levonatik, a hasznos munka létrehozására csak 5076 lábfontnyi hatás marad hátra, mely hatás által nem 6 hanem csak 2, 3 láb átmérőü forgókő hozható kellő mozgásba, miután a malmok elméletéből tudva van, hogy egy olyféle kő hajtására 2270 lábfontnyi munka kívántatik. Ha pedig 6 forgókövet akarnánk alkalmazni, akkor mindegyikére csak 849 lábfontnyi munka jutna, mely által a forgókövek nem hajtatnának oly sebességgel, a milyen finom eredmény előhozására megkívántatik; ugyanis a forgókövek sebessége ezen egyenlet szerint:

$$849 = 25.\ c.\ (1,5)^2 \text{ lenne } c = 15 \text{ láb}$$

azaz a forgókövek széle csak 15 lábnyi sebességgel mozogna, holott finom liszt nyerésére azon sebességnek legalább 24 lábnyinak kell lenni.

Tudván azt, mily nagy munka kívántatik valamely adott átmérőü forgókő hajtására, már a gőzmalom szerkesztése nem nagy nehézséggel jár. Tegyük föl, hogy egy 12 forgókővel működő gőzmalom szerkesztendő, a forgókövek átmérője 3 lábnyi legyen, akkor tapasztalás szerint minden forgókő hajtására 3000 lábfontnyi munka kívántatik, mely számban nemcsak azon erő foglaltatik, melyet a hasztalan ellenállások igénybe vesznek, hanem azon erő is, mely bizonyos mellékgépek hajtására kívántatik; innen 12 forgókő hajtására nyilván 36,000 lábfontnyi munka szükségeltetik; és most ezen fontos kérdés merül föl : ha a gőz feszítő ereje úgy mint a köldök sebessége is tetszőlegesen fölvétetnék, mily nagynak kellene lenni a gőzhenger átmérőjének, hogy benne valóban 36,000 lábfontnyi munka állíttassék elő ? Ezen kérdésnek megfejtésére tegyük föl, hogy a használandó gőz feszítése 3 légnyomású legyen, avagy 38 ℔-nyi minden □ hüvelykre, mely nyomásból azonban körülbelül 1, 5 ℔ levonandó, ha sürítő gép is van mellékelve, azon visszhatás miatt, mely a sürítőből a köldökre gyakoroltatik : akkor a nyomás minden □ hüvelykre nyilván csak 36, 5 fontnyi leend. Föltevén továbbá, hogy a görbe csap épen 1 lábnyi hosszú, a fő tengely pedig minden másodperczben egy fordulatot tesz, akkor a köldök nyilván 4 lábnyi sebességgel fog mozogni, avagy a hajtóerő 4 lábnyi sebességgel müködni. Ha tehát a gőzhenger ismeretlen átmérője *d*-vel jegyeztetik, leend a köldök fölülete $= \frac{1}{4}\,\pi d^2$ és a gőznek erre gyakorolt nyomása $= 36,5.\frac{1}{4}.\,\pi d^2$, ha t. i. *d* hüvelykekben helyettesíttetik; tehát a köldök által gyakorolt munka $= 36,5.\frac{1}{4}\,\pi d^2.\,4$. És most állni kell a következő egyenletnek :

$$36{,}000 = 4.\,36,5.\,\tfrac{1}{4}\,\pi d^2.$$ Honnan

$$d = 18'' = 1,5 \text{ láb}.$$

azaz : ha a köldöknek másfél-lábnyi átmérő adatik, akkor a hengerben a kívánt munka valóban meg lesz nyerve. Ha pedig a géphez sürítő nincs mellékelve, hanem a használt gőz szabadba bocsáttatik, a mint az a magas nyomású gőzgépeknél közönségesen szokásban van : akkor a gőzkatlanban kifejtett gőznek négy légnyomással kell bírnia, mivel a külső légnyomás által egy egész légnyomás megsemmíttetik.

Ezek után a gépezetet könnyen lehet már oly szerkezettel ellátni, hogy a forgókövek kellő sebességgel mozogjanak, vagyis, hogy 1 percz alatt 160 fordulatot tegyenek. E végre a vízirányosan fekvő főtengely annyi kúpkerékkel ellátandó, a hány forgókő van; azért a tengelynek elég hosszúnak s több helyen megtámasztottnak kell lenni. A kúpkerekek nyilván a forgókövek középpontjainak egymástóli távolságai szerint helyeztetnek el. Ezen kúpkerekek fogai által ugyanannyi, de kisebb és vízirányosan álló kúpkerekek forgattatnak, melyeknek függőleges tengelyein már magok a forgókövek alkalmazvák. Miután tehát a görbe csap s így a főtengely is, melynek végén a görbe csap áll, 60 fordulatot tesz minden perczben, a forgókő 160 fordulatot egy percz alatt akkor fog tenni, ha a nagyobb kúpkerekek, melyek a főtengelyen vannak alkalmazva, $2\frac{2}{3}$-szor több fogat kapnak mint a kisebb kúpkerekek. Ha tehát ezen kerekek mindegyike 12 foggal láttatik el, akkor a nagyobb kúpkerekek mindegyike 32 foggal látandó el. Ezen szerkesztési mód által a forgókövek fordulatainak kellő száma teljes biztossággal meg lesz nyerve.

A gőzmalmoknál újabb időben forgókövek helyett fémhengerek alkalmaztatnak, honnan azután maga a malom is hengermalomnak neveztetik. Ily hengerek alkalmazása nagy előnnyel bír a forgókövek ellenében, mivel először az egész dolgozó gép sokkal kisebb tért foglal el, másodszor pedig a létrehozott liszt sokkal tisztább és finomabb. Vegytani vizsgálatok után tudjuk, hogy a hengermalmi lisztnek 2 százalékkal több tápereje van mint a forgókövek által készült lisztnek; minek oka természetesen abban keresendő, hogy a forgókövek által előállított lisztben a kőkopás és egyéb szerkezeti körülmények következtében sok idegen anyag foglaltatik. — A hengermalom szerkezete abban áll, hogy a gőzgép által hajtott főtengely több egymás fölé helyezett vízirányosan fekvő hengerpárt forgat. Közönségesen három henger-pár szokott egymás fölé helyeztetni. A két egymás mellett levő henger ellenkező irányban de egymásfelé forog. A legfelsőbb hengerpár legnagyobb egymástóli távolban alkalmaztatik, mely távolság a megőrlendő szemek nagyságától függ; a következő hengerpár már kisebb egymástóli távolsággal bír, minthogy az első hengerpártól leeső szemeket már finomabbra kell zúznia; a harmadik hengerpár egymástóli távola még kisebb, mivel az már tetemesen összedarált szemeket fogad el. Az így megőrlött gabnaszemek bizonyos emelő mű által új, egymáshoz közelebb álló hengerekre bocsáttatnak, míg végre ezen munkának ismétlése által azon legfinomabb darát nyerjük, melyből az úgynevezett 0 számu liszt készíttetik. — Ezen fémhengerek hossza alig több egy lábnyinál; közönségesen 6 hüvelyknyi átmérővel bírnak, és a forgókövekhez aránylagos sebességgel forognak, mely sebesség tehát 4—5 lábat teszen.

Ezeken kivül minden gőzmalom még sok más készülettel van ellátva, melyeknek egy része a gabna tisztítására, más része pedig különféle lisztfajok elválasztására szolgál.

A GÓRCSŐ TÖRTÉNELMÉNEK S ALKALMAZÁSÁNAK VÁZLATA.

DORNER JÓZSEF lev. tag.

SZÉKFOGLALÓ ÉRTEKEZÉSE.

Valamint a népek mivelődéstörténelmében, időről-időre gyenge csirából fejlődött nagy események merülnek föl, melyek ellenkező érdekek hosszas harcztüzében megérlelve az emberiséget fölrázzák, s a lerontott előitéletek romjain keresztül a haladásnak új útakat törnek : ép úgy tünnek föl időnként a tudomány szellemi terén is bizonyos epochális események, ellentétben levő vélemények és nézetek heves harczában érlelt fölfödözések, melyek mint lángoló meteorok föllobbanván, a tünetek tömkelegét földerítik, új meg új eszméket gyüjtanak, s a természet titkaiban új útakat jelölnek. Ilyen messzeragyogó fénypontok *Copernikus, Galilei, Kepler, Harvey Newton* nagykövetkezésü fölfedezései, *Linné, Lavoisier, Cuvier* új tanai által jelölt korszakok, melyek a szellemeket fölvillanyozván, a búvárkodásba új életet öntöttek s annak új irányt adtak.

Alig lehet a természettudomány körében egy találmányt nevezni, mely nagyobb következményeket bírna felmutatni, mint a távcső föltalálása. Ezen optikai készület tudományos alkalmazása egy új hajnalnak ébredését jelöli, mely a középkor sötét éj-szakának karjaiban szunnyadozó szellemeket felkölté.

Galilei számos irigylői s ellenei vajmi nagyot gondoltak véghez vinni, midőn fölriasztva az első nagyszerű távcsői fölfedezései által, az első bámulatos eszköz készítésének dicsőségét tőle megtagadták. S némileg igazuk lehetett. Csakhogy nem ott fekszik a kérdés veleje, vajjon ki készítette az első távcsőt, mely bizonyosan csak játéknak szolgálhatott, hanem abban, hogy ki vezette azt be a tudományba, s ki tette tudományos használatra alkalmassá? S itt az elsőség mindenesetre Galileit illeti. Ő volt az, ki a készület fontosságát felfogva, azt tudományos czélokra alkalmassá tenni tanította, s ki az első távcsőt, melynek összeállítása hosszas fáradság után 1609-ben szerencsésen sikerült, azonnal az ég felé irányozta.

Első fölfedezései után a sok irigy tudósok közt egy nevetséges vita támadt, mely a tudomány kertjében izzadozó napszámosok mivoltát leghívebben jellemzi. — Wenn die Könige bauen, haben die Kärner zu thun. — Midőn t. i. *Galilei* az 1610-ik évi Január 7-én a Jupiter holdjait, az általa *Medicei csillagoknak* czímzett mellékbolygókat feltalálta, a legnagyobb befolyású férfiak hiú balgatagnak nevezték. Az érintett csillagokat eleinte nem bírták föllelni, azt hirdetvén, miszerint a távcsővel mindent lehet meglátni, mit az ember akar. *Galileit* hízelgőnek mondták, ki a kérdéses csillagokat egyedül csak hatalmas pártfogója *Medici* kedvére találta volna föl. Később a tudósok a holdakat rég akarták ismerni, mások 5, némelyek épen 9 holdat láttak, mire *Galilei* rövidlátását nevetve gúnyolták. — S így jártak a nagy búvárok mind, midőn új tényeket és új eszméket vetettek a tudósok közé, kik megrögzött tanaik kényelmeiből fölrázva, ügyetlenségöket palástolni s vérökkel összeforrt előitéleteiket mindennemű fegyverrel védni igyekeztek. A távcső ezen alkalmazásával kezdődik a legmeglepőbb s legtermékenyebb találmányok hosszú sora, melyek egymást támogatva a legkülönbözőbb tünetek csodálatos összeköttetését lassanként leleplezék, s új meg új tények és igazságok fölismerésére vezetének.

Alig irányozta volt *Galilei* első távcsövét a holdra, csodálatos hegyeit nemcsak hogy azonnal fölismerte, hanem meg is mérte, oly időben, melyben a földhegyek magossági viszonyairól még a legferdébb s a legtúlságosabb képzeletek uralkodtak. S a mint később Jupiter holdjait is föltalálta, fölismerte azt is, miszerint eme holdak fogyatkozásai a földtani hosszúság meghatározására a legbiztosabb módot nyújtandják. Utána a híres dán búvár, *Römer*, ugyanazon tünetből a világosság mozgását és sebességét számította ki 1675-ben, s a remek gondolatot követte az irányferdülés (aberratio), úgymint az álló csillagok évi időszakokban ismételt látszólagos mozgásainak *Bradley* által történt fölfedezése, melynek kitalálásával nemcsak *Römernek* a világosság felett nyilvánított eszméje lőn a legfényesebben igazolva, hanem a már *Copernikus* által hirdetett s *Galileitől* állhatatosan védelmezett földmozgás is legszembetünőbben kimutatva.

Így vezetett a természetes tünetek összefüggésénél fogva az észlelő szellem felébredésénél egy szerencsés gondolat új igazságok és tények fölismerésére, miknek messzeható fénye elől az óvilágtól öröklött s a középkor homályaiban nagyra nevelt babonaság sötét szellemei lassadán letüntek. S a szüz természet nem vonakodott az elfogulatlan, szabad gondolkodású búvár előtt fátyolát emelni, mely soha nem hervadó gyönyöreit leplezé, s nyájasan nyitotta meg egyik ajtót a másik után, mely óriási templomának szentélyébe vezet.

S eme szerencsés idő a távcső feltalálójával *Galileivel* kezdődik. Ugyanis korszakával kezdődnek az alapos kutatások az égitestek s földünknek mozgásairól, a testeknek nehézségéről, a melegség különféle viszonyairól, a vér s egyéb állati nedvek forgásáról, a növénytest benső alkotásáról, s számtalan más fontos kérdésekről, s mindez oly sikerrel, hogy — mint már *Humboldt* igen helyesen megjegyzé — két évezred kutatásai, *Aristotelestől* egész *Galileiig*, eredményeikben sokkal csekélyebbek, mint az alig 70 éves, *Galileitől Newtonig* számítandó időszak törekvései. A természettudománynak ezen gyorsan növekedő meggazdagodásából nemcsak a szellemi ember merített dús és magasztos élvezetet, hanem a socialis és anyagi érdekekre is kiszámíthatlan nyeremény háramlott.

A tudományba fölvett távcső keblében hordta az összetett paránycső föltalálását. A távcső két üvegét csak föl kelle cserélni, s az optikai eszköz készen volt. Alkalmazása a tudományban szinte egy új epochának kezdetét jelöli. Csakhogy a távcső szerencsésebb vala a parányesőnél; mert míg amaz egy régóta mívelődött, tapasztalásokban gazdag tudományra talált, melynek bajnokai az eszközt a legnagyobb érdekkel fogadták, a parányeső ellenkezőleg egy, még csak póláiban fekvő tudománynak jutott segédeszközül, mely azt helyesen felhasználni s javításáról gondoskodni még nem igen vala képes. Az eszköz ezen mostoha körülmények közt sokáig gyámoltalan maradt.

Míg a távcső az égnek kimérhetetlen távolban fekvő mélyeit nyitotta meg előttünk, a parányeső megfordítva egy szemeinkhez legközelebb fekvő láthatatlan világnak csodáit tárta ki, melyről az emberiségnek egész a XVII. századig legkisebb sejtelme sem volt. Megnyitotta előttünk az organicus élet rejtelemteljes műhelyét, melyben egynéhány alapanyagból a legtarkább anyagok s a legkülönbözőbb alakok bámulatos vegyülete készül.

A gömbidomú üvegek gyújtó és nagyító tulajdonát már a régiek is ismerték. *Seneca* világosan szól vízzel töltött üveggolyókról, miken át a tárgyak nagyítva láttatnak. *Plinius* lencséket is említ. Ennél azonban sokkal érdekesebb *Brewster Dániel* a híres skót opticus a brit. Assoc-ban 1853-ban tett közleménye, melynélfogva Niniveh úgynevezett kincstári házában egyéb tárgyak közt egy az ismeretes hegyi jegeczből készült lencse találtatott *). *Brewster* a lencsét pontos vizsgálat alá vette. Alakja általában domborlapos volt, felső lapja a 6 oldalú quarzjegecz eredeti lapjaiból vala faragva. *Brewster* nézete szerint a lencsét nem a mostani mód szerint, azaz nem csészemintában csiszolhatták, hanem inkább kőmetszőkerékkel idomíthatták. Továbbá az okokat is előadta, melyeknélfogva ő nagyon valószinűnek tartja, miszerint a lencsét nem ékszerül, hanem optikai czélokra használták.

De emez egyszerű, bizonyosan legtökéletlenebb gyűjtőlencsék, s a tudományos használatra alkalmas lencsék közt egy felette hosszú út feküdt, miután maga a főtünet, melyen

---

*) Centralblatt f. Naturwissenschaft und Anthropologie v. Dr. Theod. Fechner 1853. Nro. 21. pag. 407.

a lencsék hatása alapszik, úgymint a fénytörés viszonyai, egész a XII. századig mély homályban rejlettek. A régiek, kik a tünetet ismerték — hisz mindenütt és mindennap találkozunk vele — csak azon egy naív következtetést vonták le belőle, miszerint a világban mi sem oly csalékony mint a látás. S bizonyos tekintetben igazuk is volt. Még mai nap is igen sokan vannak, kik nem is sejdítik, mennyire egyszerü az, mit a szemlencse mutat, s mennyit kell a látideg hártyájára vetített képen kiegészítnünk, hogy a kivülünk létező tárgyakról helyes itéletet nyerhessünk. A láthártyakép különféle távolságból s irányból jövő fénysugarak által idéztetik elő, melyek a nevezett hártyán különféle világosságú fénypontokat képeznek, s minthogy ezen pontok a hártya lapidomú terjedésénél egy síkban fekszenek, s úgy is éreztetnek, mindazt, mi a tárgyak testi terjedésére, a tárgyak egyes részeinek kölcsönös fekvésére s távolságára vonatkozik, különféle körülmények egybevetése által kell kipótolnunk. A szemlélet által nyert összbenyomás ennélfogva nem puszta érzés, hanem bizonyos physikai és szellemi tékonyság összemüködéséből nyert ismeret. E szerint szabad szemmel is szintúgy kell gyakorlat útján látni tanulnunk, mint a paránycsővel, mely alatt a tárgyak ismét más körülmények alatt mutatkoznak. — Mi ennélfogva épen nem fogunk csodálkozni, hogy a nagyítóknak eleinte hitelt nem akartak adni, rólok még nagyobb mértékben állítván azt, miszerint csodás mutatványai csupa phantastikus képek.

A sugártörést egy arab mathematikus, *Alhagen*, ki 1100 körül élt, fogta fel legelőször józanon. Nagy alaposságot mutató kísérletei később *Roger Baco* s utána *Vitellio*, egy lengyel tudós által folytattattak nagyobb kiterjedésben. *Roger Baco* (+ 1294.) Oxfordban, hol egy ferenczrendi zárdában mint barát élt, hir szerint egy nagyítóüveget készített, mely oly rendkivüli tárgyakat mutatott, hogy a szerzetes testvérei által idejének fogalmait túlhaladó tudománya miatt üldözött férfiú, korszakának nézetmódja szerint ördöngös tehetségekkel fölruházott bűvésznek nyilváníttatott, valamint mai nap is megtörténik, hogy a természetbúvárok, bizonyos oldalról, minden hitet s üdvösnek vallott előitéletet fölforgató istentagadóknak kürtöltetnek. *Socrates,* ki az igazságért szinte megitta a méregpoharat, tanítványait mégis oda intette, hogy eszökkel az égitestek viszonyainak fürkészése után ne járjanak, mert oly dolgok földerítése, milyeneket az istenek az emberiség előtt titokban tartani kívántak, kedves előttük nem lehet.

A távcsö föltalálása- s alkalmazásával a sugártörés tünete is új érdeket nyert, s midőn *Suell* a leydeni tanár 1621-ben a törés oly egyszerü szabályát kitalálta, az akkori idő legjelesbb physikusai siettek a refractióval összekötött különféle tüneteket részletesen tanulmányozni, nevezetesen a színitüneteket értelmezni s magyarázni, mi a gravitatio feltalálójának, a Nagy *Newton*nak 1672-ben oly serencsésen sikerült. De míg egyrészt a gyüjtőlencsék színképei *Newtonnak* oly sok oldalról megtámadt színtanát legszebben igazolták; a tünet másrészt a táv- s a parányesö használatánál mint felette alkalmatlan, a nagyított képek tisztaságát érzékenyen zavaró körülmény tünt föl.

Ennek valamiképeni kiegyengetése lőn most a főkérdés. *Newton* maga lehetetlennek mondta, azon hamis következtetésből indúlván ki, miszerint egyenlő fénytörésnél a színszóródás is egyenlő marad. A dolgok ezen állásánál a színszóródás alkalmatlansága tükrök által mellőztetett. A catoptricus távcsövek nagy tökélyre hozattak, nevezetesen az idösb *Herschel* által, ki 20 és 40 lábnyi eszközökkel tett fölfedezéseivel nevét örök időkre bevéste a csillagos ég boltozatába.

Ily nagyszerü eredmények daczára a búvárok nem szüntek meg a színtelenítés fölött tovább is elmélkedni, mire a költséges tükörcsövek idomtalansága s nehéz kezelése, a tükröknek csekély tartóssága által buzdíttattak.

Színtelenítő lencsék előállításának lehetősége szemünk képei által vala adva, melyek, mint tudva van, majdnem tökéletesen színtelenek. Ezen körülményre *Euler* figyelmeztetett legelőször 1747-ben, ki mathematikai számítás által igyekezett a lencse kellő alakját meghatározni. Közben egy szerény férfiú jött a tudománynak segítségül, ki a legegyszerübb gyármunkásból leghíresebb optikussá emelkedett. Mit 60 évvel ezelőtt a genialis *Newton* lehetlennek mondott, azt *John Dol-*

lond, *Euler* és *Klingenstierna* számitásai által indítva, lehetővé tette. Több évi fáradalmas kísérletek után 1758-ban mutatta be a londoni kir. tud. társulatnak öt lábnyi gyútávolságú első színtelenitő távcsövét, mely ólom- és koronaüvegből összetett kettős tárgyüveggel levén ellátva, öt lábnyi gyútávolságú volt.

A színtelenítés ezen szerencsés kivitele egész Europában nagy érdekkel fogadtatott, de a paránycsőnél a dolog sehogy sem akart sikerülni. Az első microscopikus búvárok, *Hook*, *Malpighi*, *Grew*, *Leeuwenhoek* leginkább egyszerü gyüjtőlencsékkel dolgoztak. *Robert Hook* a londoni kir. tud. társaság egyik alapítója vezette be 1660-ban a parányesőt a tudományba. Első eszköze négy egymásba tolható csőben foglalt három domború lencséből (egy apró tárgyüveg, egy szemüveg s egy a kettő közé helyezett gyüjtőüvegből) állott. Evvel megkezdvén kutatásait, 1655-ben már egy nagy munkával lepte meg a világot, melyben csodadolgokat hozott napfényre *). A növények sejtszövetéről részletes tudósítást közlött, s a nagyítás meghatározására nézve oly egyszerü és helyes útmutatást adott, hogy azt még mai nap is használjuk. Végre részletesen tanítja, hogy kelljen üvegcseppekből nagyító lencséket késziteni. Olaszhonban *Divini* és *Campani* dolgoztak az összetett parányeső tökélyesedésén. Eszközeik által elért nagyítások 150-ig (vonalira) terjedtek. Később (1698) *Bonani* Fülöp eszközei nyertek általános elismerést. De minden kísérletek daczára az összetett parányesők a növekedő igényeknek megfelelni nem birtak. A 17. és 18-ik század leghiresebb microscopicus búvárai *Leeuwenhoek* Delftben és *Lieberkühn*, a napnagyító föltalálója, Berlinben, egyszerü lencsékkel dolgoztak. Ők ezeket legnagyobb ügyességgel készítették s csiszolták, még pedig annyi érdekkel és gonddal, hogy majdnem minden egyes megvizsgálandó tárgyhoz egy külön készületet alkalmaztak. *Leeuwenhoek* a londoni társulatnak 26 ilyen nagyitót hagyott hátra.

*) Micrographia or some physiological descriptions of minute bodies made by magnifying glasses, with observations and inquiries thereupon. Lond. 1665 (fol).

Legnagyobb mértékben *Lieberkühn Nathanael* 1738-ban készített napimicroscopja vonta magára a tudósok figyelmét. Az eszköz mai nap csak mulattatásra szolgál, de tükrével, mely átlátszatlan tárgyak megvilágitására szolgált, állandó érdemet szerzett magának. Legremekebb vizsgálatait azonban ő is az egyszerü nagyitóval tette. Külön lencsékkel ellátott microscopi készitményei a berlini muzeumban őriztetnek mint remekmüvek.

Lieberkühn után a parányosö javitása körül kevés történt, s Dollond nagyszerü találmánya sem birt befolyással lenni. *Linné* rendező szelleme a tudománynak más irányt adott. A nagy mester, ki a tudománynak új törvényt szabott, a nagyitót félre vetette. *Malpighi, Grew, Leeuwenhoek* remek viszgálatainak daczára az anatomokat és physiologusokat a kertészek, orvosok, gazdák és költőkkel vetette össze egy sorba, *botanophili* czimmel jelölvén őket, „qui varia de vegetabilibus tradiderunt, licet ea non proprie ad scientiam botanicam spectent“ *). *Hammen* nevü leydeni tanuló által (1677-ben) észrevett s *Leeuwenhoek* által tovább kutatott ondófonalak (Spermatozoïden) fölött hozott itéletét ama határozott, a nagy classificátort hiven jellemző szavakkal mondta ki: „Vermiculi seminales Leeuwenhoekii non entia sunt; sunt tamen corpuscula, sed non viva per se, interdum foecundant“ (Phil. bot. p. 89.), mely néhány szavakban egy józanon fölfogott igazság (sunt corpuscula non viva per se) s utána egy nagy ellenmondás (interdum foecundant) foglaltatik.

Dollond és fiának sikeres müködése sem birt a parányosö tökélyesedésére befolyással lenni,noha az ügyet az új század legelső opticusai *Wollaston, Brewster, Biot, Amici,* legnagyobb részvéttel nyomozták. S ismét a munkások sorából lépett ki egy férfiú a síkra, az útat jelölendő, melyen a régóta hasztalan keresett czél el vala érendő. Eme férfiú *Fraunhofer József,* egy szegény üveges fia volt, ki, elhagyván atyja mesterségét, a nagyhirü *Utzschneider*féle physikai és astronomiai mühelybe lépett át, hol nemsokára nevének s a mühelynek hirét örökre megalapitotta. Az intézet még *Benediktbayernben* volt, midőn

*) Philosophia bot. Ed. II. p. 15.

1816-ban Fraunhofer kezéből az első színtelenítő parányeső került ki. Az eszköz felette tiszta képeket adott, s a nagy kérdés megoldottnak tekintetett, különösen *Fraunhofer* által. Tárgyüvegei azonban gyengék valának, úgy hogy már százszori nagyításon túl erős szemüvegekhez kellett folyamodni, melyek a tárgyüveg ki nem kerülhető hibáit túlságosan nagyították, s a búvárok már csüggedni kezdtek. *Wollaston,* kinek a kettős lencsék, az úgynevezett *dublettek* tökélyesedését köszönhetjük, oda nyilatkozott, miszerint az összetett parányeső soha sem fogja az egyszerű nagyítót pótolhatni, míg *Amici* Modenában, a lencsekészítők legügyesbike, visszatért az általa oly nagy tökélyben készített catoptricus parányesövekhez.

A szakértők azonban nem nyugodtak, s a dolog egy új stádiumba lépett, midőn *Selligue,* a franczia optikus, 1824-ben azon szerencsés gondolatra jött, a két lencséből álló Fraunhoferféle tárgyüveg helyett úgynevezett lencserendszereket, azaz két és több színtelenítő lencsepárból összetett tárgyüveget alkalmazni. Ezen lencserendszerekkel egyes részeinek helyes összeállítása mellett nemcsak sokkal erősebb nagyításokat lehetett elérni, hanem a különféle lencsék lapjaiban elegendő mód nyújtatott a gömb- és színeltérés lehető legnagyobb kiegyengetésére.

Amici az új eszmét legélénkebben ragadta meg. Tárgyüvegei optikai tekintetben még ma is a legtökélyesebbek, s a világításban tett javításai is nagy reformot idéztek elő. Utána *Oberhäuser* eszközei vívták ki magoknak az elsőséget. Bécsben *Plössl Simon,* ki fiatal korában szegény asztalos legény volt, tüntette ki magát, Berlinben *Pistor* és *Schick.* Újabb időben *Nachet* és *Nobert* merült föl, s az angolok sem maradtak hátra. *Ross, Beck* és *Smith* eszközei a legjelesebbek közé tartoznak.

Jelenleg nem az erős nagyításban keressük a microscop főbecsét, hanem a tárgyüveg beható erejében, ha t. i. valamely tárgynak részleteit csekély nagyításnál legtisztábban s legélesebben mutatja. De a nevezett optikusok kitűnő műveivel a parányeső tökélyesedése befejezve még nincsen. Csak nem rég kezd a sarkító parányeső érdekesb lenni, mióta *Hugo Mohl,* a nagy tübingai búvár remek dolgozatai által újból figyelmeztetett reá.

Ezek volnának a paránycső történelmének fővonásai, azon eszköznek, melynek helyes és ügyes alkalmazásához az élettan legfontosabb s legkényesebb kérdéseinek szerencsés megoldása szorosan van kötve. Alkalmazása napról-napra általánosabb és fontosabb lesz; mert nemcsak hogy megismertet minket az organicus testek benső alkatával, különféle formabeli elemeinek minőségével, hanem nagy mértékben elősegíti a vegetatív életfolyam legnevezetesebb s legrejtélyesebb functiójának — az oly bámulatos változatosságban feltünő anyagváltozásnak földerítését. A boncztani késen s a vegyész mérlegén kivül a parányesö a physiologusnak legnevezetesebb eszköze. Ezt bizonyítja különösen az állati élettan újabb menete, mely a növényinél jóval előbbre van.

Jelenleg már tényképen áll előttünk, miszerint az organicus szövetek működése kapcsolatban áll azoknak vegyészi szerkezetével. Ezen szerkezet kiderítése e szerint mint fő dolog tünik föl. S e téren is a parányeső nyitja meg előttünk az útat. Az újabb időben tett kísérletek bebizonyították, miszerint az eszköz a chemiában is nagy szolgálatot teszen, ott is nyújtván bizonyos anyagok jelenlétéről fölvilágosítást, hol a legérzékenyebb kémszerek minket elhagynak. „A microchemia — úgymond *Lehmann* — nyújtja nekünk az élettani vegyészethez a kulcsot, melyel az állati szövetek alkatának észszerü kutatására vezető útat megnyithatjuk; mert midőn egyrészt a chemiailag egynemüt s a chemiailag különnemüt megkülönböztetni engedi, gyakran kijelöli nekünk a módot egy chemiai bontásnak nagybani megindítására, melynek nyomán a tulajdonképi szövetelemek tiszta chemiai kémezéséhez juthatunk. A macrochemiai vegybontás csak a microchemiai után következhet"*).

A parányeső azonban még más tekintetben is a legérdekesb és legtanulságosabb optikai eszköznek mondható. A

*) Handbuch der physiologischen Chemie mit besonderer Berücksichtigung der zoochemischen Dokimastik, v. Dr. C. G. Lehmann. Leipzig 1859. pag. 299.

különféle fénytünetekkel legszorosabb összefüggésben levén, részletesben mutatja fokonkénti fejlődésében a fénytan különféle phásisait mint maga a távcső, míg másrészt a soknemű fénytünetek s a látás sajátságos menetének tanulmányozására s értelmezésére legtöbb alkalmat nyújt.

A GYOMORALKATI KÜLÖNBSÉGEKRŐL A MADARAKNÁL,

SZÉKFOGLALÓLAG ÉRTEKEZETT

NAGY JÓZSEF.

Életemnek ezen egyik legünnepélyesebb napján, minekelőtte székfoglaló értekezésemhez kezdenék, kötelességemnek tartom a t. t. Akademiának levelező-taggá lett megválasztásomért hódoló köszönetemet kijelenteni; csak ezen mélyen érzett kötelességemnek teljesítésével, járúlok egymagában véve tán igen is egyszerű, de az ornithologiának jelen állásánál fogva mégis nem érték-nélküli tárgy előadásához.

Ha az álattant általában véve azon vád méltán érheti, hogy abban a legújabbi haladásoknak is alapjáúl kitünőleg csak a külső alakzati tanulmányozás szolgál, és hogy annak terén oly búvárokkal mint Hyrtl, Müller, Jones, Milner-Edwards, Burmeister, Bischoff, Agassiz, Leydig, Larger, csak gyéren találkozunk; akkor az a madártanra egész súlyával rámérhető. A madarak benső szervezetének tanulmányozása körül — némely munkákban töredékek gyanánt előforduló egyes értekezéseket kivéve — eddigelé igen kevés történt. Az ornithologok e tekintetben általánosan igen felületes ismeretekkel be szoktak elégedni; míg ellenben a külső alakzati tanulmányozásban túlzó szorgalmat tanusítnak, söt mondhatni, abba legfőbb tudományos értéket helyeznek. Ezen irány vezérlete alatt lettek ők kifogyhatlanokká új meg új fajok teremtésében; mely felesleges szorgalom természettudósok számának szaporítására bő alkalmat szolgáltat ugyan; de nagyobb részint oly csekély téren mozog, hogy eredményeivel a komoly tudománynak nem igen lehet foglalatoskodnia. A komoly észlelő, kit sem az írói, sem az éretlen felfedezési viszketeg nem bánt, az ilynemű működésekre fordított drága időt igen hajlandó eltékozlottnak tekinteni; mert új fajok gyártása az ivari, életkori és éghajlati külső változások pontos isme rete nélkül — már pedig ily helyzetben vagyunk az ornithologiában sok madarakra nézve — bizony csak háládatlan egy munka; melynek a boldog felfedezőre nézve sok esetben csak annyiban lehet tán némi értéke; a mennyiben a tudományos világ az új állatnak pontosabb elnevezéséhez az ő nevét is jellemző ragaszték gyanánt szokta használni. Nem volna-e tudományosabb az ily tisztán tárgyilagos észlelet helyibe, a fajnevek meghagyásával, a változásokat előidéző okok hatását fürkészni?

Én a madártan terén néhány év óta a benső szervezeti különbségekre, mennyire gyakori alkalom, kevés időm és csekély tehetségem engedik, különös figyelmet fordítottam, és némi sajnálkozással kell említnem, hogy míg az ornithologiai külső alakzati tanulmányozás túlzottságának hasztalanságáról meggyőződhettem, sok drága időt elprédáltam, sok érdekes alkalmat elmulasztottam, melyet mostani meggyőződésem szerint az ornithologia terén is hasznosabban felhasználhattam volna. Boncztani vizsgálatim eddigelé inkább csak a benső szerveknek általánosabb és szembeötlőbb különbségeire még ezen némileg felületes irányban is elég tenni való van. Munkálatim folytán az emésztési szervek különbségeiti lletőleg, következő eredményekhez jutottam: 1-ször. Az emésztési szervek különbségei a madaraknál lényegesek. 2-szor. Azok és a küllemi különbségek közt feltűnő összhangzás uralkodik. 3-szor. A madaraknak állandó és igen természetes felosztási rendszere, az emésztési szervek különbségei szerint is volna felállítható, mely egyszersmind nagyobb tudományos értékkel bírna, és általa a bonczés élettani vizsgálatok egy az ornithologiában igen is szükséges általános lendítést nyernének. 4-szer. Azon felosztási rendszerekben, melyek csak egyes külső életművek, mint: lábak, csőrök, alaki hasonlatossága után szerkesztvék, benszervezetileg. Különböző madarak egy osztály alá szoríttatnak, és a természetes felosztási rendszer, mely általános küllemi hasonlatosságra van alapítva, benső szervezeti tekintetben is természethűbb. 5-ször. Az állattanokban nincsenek az emésztési szervek különbségei kellő tudományos figyelemre méltatva, és fontosságukhoz képest kellő részletes pontossággal leírva. 6-szor. A magevő madaraknak izomgyomra — vagyis a zúz — a madárgyomornak prototypja, mert avval különb fokozatú kifejlettségben legtöbb madarak ellátvák, és sajátszerű alkatminősége, habár rudimentalis képletek alakjában is, de még a tömlőalakú gyomorral bíró madaraknál is megkülönböztethető.

Ezen utólsó pont értelménél fogva, hogy összehasonlítás útján a fokozatos csökkenésből eredt különbségeket élénkebben kiemelhessem — minthogy jelen értekezésemben mellőzve az emésztési egyéb szervek különbségét, csak az izomgyomor alkatminőségi változásait leírni törekszem — mindenekelőtt szükséges, hogy a magevő madarak izomgyomrát — melynek népszerű magyar neve *zúz*, igen is helyes és élettani jelentőségű — boncztani vázlatokban leírjam.

A tábla I. ábra 1. egy házi kakasnak emésztési szerveit tünteti elénkbe. A bárzsing. B begy. C előgyomor. D zúz. E nyombél. A zúznál következő alkatrészek és alkatviszonyok figyelembe veendők: 1-ször az előgyomornak világosan megkölönböztethető elkülönítése a zúztól — *a.* 2-szor, mint a mellső, úgy a hátsó felületen a zúz közepén elterjedt fehérkékes színű, ezüst csillámú erős inas szövet, mely a két oldal felé legyező alakban több ágakra szétoszlik — *inas központ, centrum tendineum* — *b.* 3-szor, a zúz alsó és felső szélén az inas központ felett és alatt tömlőalakú kidudorodás, e két tömlőn átvonúlnak egyik felületről a másikra. Az inas központ felső és alsó széléből eredő, és az ellenkező felület inas központjának két széléig terjedő függőleges irányú, élénk vörös színű, laza szövetű izomrostok — *kis zárizom cc.* 4-szer. Mindkét oldalon a kis zárizom rostjainak irányával ellenkező, vízszínleges izomrostokból álló, kemény, tömött, ruganyos, majdan egy újnyi vastag, kékvörös színű izomtömeg, mely az inas központ oldalagos szálaival a zúz mindkét felületén egyesül, és a zúznak két oldalrészét kitölti — *nagy zárizom dd.* Ezen hatalmas izom alkatjáról megjegyzendő, hogy annak rostjai a zúz közepétől az oldalszélek felé mindinkább rövidebbek és lazábban összefüggők, ily módon a zúznak két, oldala két a zúz közepétől a szélek felé futó lejtő-síkból áll, miért is a nagy zárizom alakja vízszínleges átmetszetben rendetlen alakú fekvő kúp, I. T. 2. ábra — A kis zárizom átmetszete. A tőle fedett tömlőnek egyik felével I. T. 3. ábra — Közönségesen csak két zárizom különböztetik meg, de ha az inas központot önálló képletnek tekinteni hajlandók vagyunk — mire szövetének sajátszerűségén kivül még az is feljogosít, hogy az inas központ a két zárizom ragaszpontja, és nem az izmoknak inas része—tulajdonképen 4 félzárizom volna megkülönböztetendő, egyébiránt értekezésem folytában én is mindenütt csak két zárizmot említendek. 5-ször. Megjegyzendő továbbá, hogy a nagy zárizom harántékos irányban ellenkező két ponton I. T. 1. ábra *e e* egyesül a kis zárizommal, e két ponton rostjai a vízszínlegesből mindinkább harántékos irányúakká válnak, míg végre a kis zárizom függőleges rostjaival összeolvadnak; ellenben ismét harántékos irányban ellenkező két ponton I. T. 1. ábra *f f.* a kis zárizomtól elválik, és evvel csak laza kötszövet által egyesül, minek következtében a zúz körszélén két majd a zúz közepéig terjedő hézag támad. 6-szor. Felnyitván a zúzt, azt belülről egész kiterjedésében egy szaruállományú, kemény, érdes hártyával kibélelve találjuk, mely ily módon egy zacskót képez két nyílással, mindkettő a kis zárizomtól fedett felső tömlőben létez, ezen nyílásokban, — vagyis határozottabban mondva az előgyomor és nyombél torkolatában, — a szaruhártya emelkedett, ágasbogas, egyenes határszéllel rögtön megszünik I. T. 4. ábra *a a*, és az említett két szerv takhártyájába rögtön átmegy; a zúz oldalainak megfelelőleg a nagy zárizom alatt pedig hosszúkás concentricus redőkre emelkedik, mely két helyen legkeményebb, legérdesebb, legvastagabb, és két tárcsát képez, melyek *őrlő tárcsáknak — disci triturantes* — neveztetnek. I. T. 4. ábra *b b.*; a kis zárizom által fedett tömlőkben állománya finomabb, puhább és kevesbé érdes, és rendetlen redőkre összezsugorodott. I. T. 4. ábra *c c.* Érdessége a felületén, de főleg az őrlő tárcsák redőin erősebben kifejlett számtalan, hegyes, kemény, szömörcsök által okoztatik; melyek — mint ismeretes — a siketfajd kakasnál oly élesek, hogy velük üveget karczolni lehet.

Nem czélom itt a zúz szövetének minőségét pontosabban leírni, mért is azt az I. T. 5. ábra csak vázlatban, miként tudniillik belülről kifelé a nagy zárizom táján vízszínlegesen metszett, és az ábrában függőlegesen helyezett vékony szeletkében górcső alatt kivehető, előterjesztem a) őrlőtárcsa szövet, b) follicularis szövet, c) kötszövet, d) nagy zárizom rostjai, e) külső takaró hártya.

Le levén már most a zúznak alkatja röviden írva, működése alkatrészeinek egymáshozi viszonyaiból igen egyszerűen magyarázható : A magból álló kemény táplálék a begyben és az előgyomorban az ezen szervekben elválasztott nedvek hatása által fellágyíttatik, és egyszersmind az ezen szervekben helyt lelő emésztés vegytani hatása által megváltoztatik, lejő innét a zúzba, és itt annak megőrlése, zúzása, vagy ha úgy akarjuk megrágása vitetik véghez, és pedig a nagy zárizmok és az őrlőtárcsák működése által. Az őrlőtárcsák ugyanis a nagy zárizom alatt ennek kidomborodási alatt I. T. 1. ábra *g g* helyen, tehát harántékosan ellenkező két ponton levén helyezve, azoknak egymáshozi közelítése, és ily módon a táplálék őrlése csak úgy eszközölhető, ha a nagy zárizomnak összehúzódása alatt annak mindkét fele befelé az inas központ felé, és egyszersmind egyik fele felülről lefelé, a másik alúlról felfelé húzódik össze, és ily módon az inas központ, mint tengely körül, majd negyedkörnyi keringő mozgás hozatik létre. Az I. T. 1. ábra alatti rajzban az első változás, tudniillik : a kerengő mozgás felülről lefelé a *g* 1. a második alúlról felfelé a *g* 2. pont alatti izomféllel történik. Ezen egyidőleges kétféle mozgás a nagy zárizom alkatjából magyarázható: A vízszínleges rostjainak összehúzódásával tudniillik : az őrlőtárcsák befelé az inas központ felé vonatnak, míg azon alkatminőségénél fogva, hogy I. T. 1. ábra *f f* hézagokban a kis zárizomtól elválik, és *e e* pontokon ennek rostjaival egyesül, mely utóbbi pontokon rostjai is már harántékos irányúakká válnak, összehúzódása alatt egyidőleg egy oldalon fel, és a másikon lefelé húzódik össze; tehát az őrlő-tárcsák is egyidőleg egy oldalon fel , a másikon lefelé vonatnak , mely mozgásnak létrehozhatása lehetségessé tétetik azonkivül , még a nagy zárizomnak *f f* pontok alatti hézagokban , a kis zárizomtóli elválása által is. Csak így eszközölhető az említettem negyedkörnyi kerengő mozgás, és ennek ismétlésével az őrlő tárcsák által a tápszer őrlése, zúzása vagyis megrágása; mert ha a nagy zárizom csak befelé az inas központ felé húzódnék össze, az előhozott hatás nem őrlő, de sajtoló volna, és a kemény tápanyag összezúzása nem jöhetne létre. A hatalmas nagy zárizomnak összehúzódása által a zúz-üreg közepére okozott erős nyomásnak az inas központ erős szöveténél fogva ellentállani képes. Az őrlőtárcsák működése elősegíttetik a táplálékkal bevett homokszemek, kövecs darabocskák által; megsérülésök átlyukasztásuk szövetüknek erős minőségén kivül akadályoztatik még az által is, hogy a majd egy ujjnyi vastagságú nagy zárizom által fedvék. De ha az őrlő működés alatt csak a nagy zárizom húzódnék össze, természetes, hogy a táplálèknak a kis zárizomtól fedett tömlőkbe I. T. 1. ábra *c c*, és innét az előgyomorba kellene vissza nyomatnia; egyidőleg összehúzódik tehát a kis zárizom is, mi által nem csak a tápanyag nyomatik és tartatik a zúz-üreg közepében, de az előgyomor és nyombél nyilás is szükíttetik; minthogy pedig az előgyomor torkolatán annak körizomrostjai a látható összefüzési helyen zárizommá egyesülnek, a zúzizmok működése alatt az előgyomor zárizma is összehúzódik, és az előgyomor torkolatát tökéletesen elzárja; úgy hogy azon a megőrlött tápanyag sem mehet át; míg ellenben az a zárizommal el nem látott, és csak bizonyos fokig szükített nyombél nyiláson a kis zárizom összehúzódásai által egyszersmind kiüzetik is. A bizonyos fokig megőrlött tápanyag tehát a nyombél torkolatán át folytonosan kiömlik a nyombél üregébe; minélfogva kettős hatása van a kis zárizomnak a nyombél torkolatára; első: ennek szükítése bizonyos fokig, hogy azon át a meg nem őrlött tápanyag keresztül ne mehessen; második: a bizonyos fokig szükített torkolaton a megőrlött tápanyag folytonos kihajtása.

Az emésztés ügye tehát a zúzzal bíró madaraknál az egyszerü gyomorral bíró emlősökkel összehasonlítólag megfordítva megy véghez: a madaraknál tudniillik a táplálék előbb emésztetik, és azután megrágatik. Mert ha meg is engedném, hogy a zúz benső szaruhártyája még némi emésztési nedveket is képes elválasztani: annyi bizonyos, hogy a zúznak fő müködése hasonló az emlősök szájüregének működésével, tudniillik: a tápanyag megrágása.

Az előadottakból következtethető, hogy a tápanyag minőségéhez képest a madaraknál az emésztési művek, de főleg a zúz alkatminősége, igen különböző. Jelen értekezésemben egyelőre csak a madárgyomor különbségeinek vázlatos előadására szorítkozom, azon megjegyzéssel: hogy bár mily érdekesnek találtam is ezen tárgyat; az ornithologiának tágas literaturájában mindazonáltal kevés, vagy csak használhatatlan segélyadatokra akadtam; és ily módon mintegy kénytelenítttettem értekezésemet nagyobb részint önészleletim és tapasztalatim után szerkeszteni, és abban önálló nézeteket kifejteni, mit elöleges mentségül felhozni szükségesnek véltem. Nem tagadhatom ugyan, hogy egyes madarak emésztési szervei, különösen Bischoff, Müller, és legújabb időkben Molin által finomabb bonczolat és górcsői vizsgálat alá vonva, és kitűnő tudományossággal leírva nem lettek volna; de egy általános pontos ismerete, áttekintete és tudományos, állattani értékű rendszeresítése a madarak emésztési szerveik különbségeinek, még mindig óhajtandó. Hogy minő fokon áll még a benső szervezeti tanulmányozás — minden tudományos gőg daczára is — az ornithologiában, azt szabad legyen a „Cabanis Journal für Ornithologie" czimű híres lapból csak három példának felhozásával — a számtalanok közöl — megmutatnom: *Garrulus cristatus*: *Innere Theile:* Luftröhre unterhalb der Stimmritze weit, verengt sich, indem sie hinabsteigt Bronchial-Larynx eng und klein, Magen muskulös mit zerbissenen Samen angefüllt. *Sturnella Ludoviciana, Innere Theile:* Lufröhre ohne abweichenden Bau, oben ein wenig weiter als unten. Magen rund von den Seiten zusammengedrückt etwas metallglänzend mit Resten von Insecten angefüllt. *Quiscalus ferrugineus. Innere Theile:* Im Magen dieser Vögel fanden wir Snecken, Körner, Insecten und Sand. Ilynemű haladások nyomait követve nem juthatunk messze az ornithologiában!

Tekintetes Tudományos Akademia! Ha tehát én, ki távol levén a tudományos segédeszközöktől, és az igen is szükséges közelebbi tudományos közlekedéstől, ily járatlan észleleti térre bocsátkoztam; ezen merényt csak azért követem el, mert állattani fontosságát ismervén, megpendíteni akartam, és jelentőségét kiemelni inkább, mint csak első vázlatokban is kimeríteni, hogy így ügyesebb és hathatósabb tehetségeknek is, mint az enyimek, figyelmét értekezésem tárgyára fordíthassam. Ilynemű törekvésnek legyen kegyes a Tekintetes Tudományos Akademia értekezésemnek mint előbocsátott, úgy következő részét is tekinteni:

A madaraknál a zúz fejlettségi állapota mindig a táplálék könnyebb vagy nehezebb, emészthetősége szerint változik. Minél keményebb és nehezebben emészthető a tápszer, annál hatalmasabban kifejlett a zúz; — és megfordítva: az őrlőtárcsák keménysége, tömöttsége, érdessége, az izmok fejlettsége, tömöttsége csökken; minél puhább és könnyebben emészthető a tápszer, annyira, hogy a húsevőknél a gyomor már izomhártyás tömlő, mely a szaruhártya helyett takhártyával van kibélelve, és az egyszerű gyomorral bíró emlősök gyomrához hasonló. A rovar és kisebb gerincztelen állatokkal élőknél a zúz fejlettsége igen változékony, a menynyire tudniillik ezen osztálybeli madarak közöl többen magvakkal is élnek; különben pedig a rovarok petéi, lárvái sokszor kemény és nehezebben emészthető táplálékot képeznek. A rovarevők közt p. o. a harkályok oly kifejlett zúzzal bírnak, mint a magevők; én gyomrukban rovar-tojásokon és lárvákon kivül találtam fakéreg-, makk- és mohdarabokat, és egyéb meg nem határozható kemény anyagokat. Az emésztés ügye a madaraknál nem mehet egy és ugyanazon módon véghez. A tökéletesen kifejlett zúzzal bíró madaraknál a zúzban csak a kemény táplálék megőrlése történik, miért is ezeknél a gyomort kibélelő hártyát mindig szaruállományúnak, keménynek, érdesnek találjuk, de találunk továbbá egy világosan kifejlett begyet, és a zúztól elkülönített előgyomort, és mint a begyet, úgy az előgyomort is számtalan emésztési nedveket elválasztó mirígyek nyílásival ellátva; az előgyomornak takhártyája különösen sajátszerű vastag, szöveténél fogva, melyen az elválasztó mirígyek tövisek alakjában kiállanak, első pillanatra feltünik. Mindezen jelenségek csak arra mutatnak, hogy ezen madaraknál az emésztés ügye előlegesen történik, azaz: a begybe és előgyomorba, és hogy a zúz működése inkább csak erőművi. Minél inkább csökkenni kezd az izmok fejlettsége, a madárgyomornál; annál puhább a szaruhártya, a begy vagy hiányzik, vagy csak egyszerű bárzsing kitágulás alakjában tűnik fel, — míg a valódi begy egy a bárzsingtól elválasztott önálló tömlőt képez, — az előgyomor nincs a zúztól világosan elkülönítve, üregeik mindinkább összefolynak, és az előgyomor takhártyája mindinkább veszt sajátszerű alkatminőségéből. Ezen madaraknál tehát nem csak a zúz örlő hatása gyengébb — minthogy erősebbet a táplálék puha minősége nem is igényel, — de az emésztési ügy is annyiban változik, hogy ennek vegytani működése is az előgyomor és a gyomor üregeinek egygyé olvadásánál fogva, már mintegy közös üregben történik. Míg végre a hártyás gyomorral bíróknál a gyomoralkat feljogosít bennünket azon állításra, hogy ezen madaraknál az emésztési ügy az egyszerű gyomorral bíró emlősökkel összehasonlítva hasonló módon megy véghez.

A mondottak alaposságának bővebb kiderítése végett, mindenekelőtt hasonlítsunk össze egy magevő zúzát egy rovarerő zúzával, és pedig hasonló testnagyságú madarakét. A 2. tábla, 6. ábra és 7. ábra alatti rajzhoz használt gyomrok délutáni 4 és 5 óra közt lőtt madarakból — tehát oly időszakban, mikor mindkettőnek gyomra táplálékkal meg van telve — kimetszettek, és pedig meglövés után azonnal. 6. ábra veréb zúza, 7. ábra csalogányé. A csalogány zúza különbözik a verébétől 1-ször alakja által: a csalogányé körte-alakú, a verébé két oldal felé feszített, mintegy mandula alakú. 2-szor. A csalogánynál az előgyomor a zúztól csak homályosan van elkülönítve, és mondhatni hogy ürege a zúzéval majd közös, 7. ábra *a*; ellenben a verébnél az előgyomor a zúztól világosan el van különítve, és mint a kakasnál zárizom által összefűzve, 6. ábra *a*. 3-szor. A csalogánynál a kis zárizom által fedett tömlők csak rudimentalis állapotban láthatók, a kis zárizom rostjai alig különböztethetők meg, 7. ábra *b. b.*; ellenben a verébnél ezen tömlők világosan kifejtvék, rajtuk a kis zárizom rostjai világosan megkülönböztethetők, 6. ábra *b. b.* 4-szer. A csalogánynál a nagy zárizom sokkal gyöngébben kifejlett, rostjai lazán összefüggők, és általában harántos irányúak, az izom szövete petyhüdt puha, színe vörösszürkés; ellenben a verébnél a nagy zárizom erősen kifejlett rostjai erősen összefüggők, a közép rostokon megkülönböztethető a vízszíntes irány, az izom szövete tömött, kemény, ruganyos, feszült, színe kékvörös és élénkvörös. — A nagy zárizom rostjainak vízszíntes iránya, tömöttsége, feszültsége, ruganyossága, alkotó oka a zúz két oldal felé kidomborúlt sajátszerű és jelleges alakjának; míg ellenben a rovarevőknél a nagy zárizom rostjainak harántos iránya, petyhüdtsége, lazasága körte-alakot ad a gyomornak. — II. T. 8. ábra egy verébzúz nagy zárizmának, 9. ábra csalogányénak átmetszete. Ezeken kivül különbözik a két zúz egymástól minden hártyás részek gyöngesége, finomsága által a csalogánynál, ennél az inas központ vékony lemezke, az őrlőtárcsák valamint az egész szaruhártya sokkal puhább, simább, vékonyabb; míg a verébnél minden tekintetben az ellenkezőt tapasztaljuk.

Tökéletesen kifejlett — tehát valódi zúznak — csak oly madárgyomor lenne nevezendő, melynél a kakas-zúznál említett alkatrészek, és azoknak egymáshozi viszonyaik világosan megkülönböztethetők. A zúznak működése levén a kemény táplálék megőrlése; jellemző és őt más madárgyomortól különböztető tulajdonok is, csak azon hatalmas működést eszközlő és létrehozó sajátszerű alkat és alkatrészek egymáshozi viszonyaiba helyezendők. Tökéletesen kifejlett zúzzal bírnak a légi és földi madarak közt: a tyúkok, túzokok (kiket vízi madarakhoz nem számítok), galambok, pintyek, sármányok, vastagcsőrüek. — A pacsirták és harkályok átmeneti osztályt képeznek. A vízi madarak közt: a kacsák, — ezen rendben a lúdnemnél azon különös tüneményt tapasztaljuk, hogy az inas központ a zúz állományától mintegy elválik, és hídalakban van annak közepén átfeszítve. I. T. 10. ábra *a.*; némileg hasonló alkatot tapasztalunk a fogolynál is. II. T. 11. ábra *a.*; — továbbá a szárcsák. A partiramok és szalonkák átmeneti osztályokat képeznek a hártyás gyomrúakhoz.

A III. T. egynéhány magevő zúzának ábráit tünteti elénkbe. 12. ábra fürj, 13. ábra házi galamb, 14. ábra czitromsármány, 15. ábra kenderike, 16. ábra vasorrú pinty. III. T. 17. ábra búbos pacsírta, 18. áb. közép harkály, 19. áb. kék facsúsz. II. T. 32. ábra házikacsa, 33. áb. közönséges haris, 34. áb. zöldlábú hóda.

A tökéletlenül kifejlett zúzzal bíró madaraknál, melyeknek száma nagy, a zúz alkatminősége változékony Ezen madaraknál észlelhető az átmeneti fokozat a zúztól a hártyás gyomorig. Minden változékonyság daczára közösek mindazonáltal ezen osztálybeli madaraknál mindazon különböztető tulajdonok, melyeket a veréb- és csalogány-zúz közt felhoztunk, és melyeket rajzokban ábrázolni nehéz feladat. Élettani értékü jelenségnek tekintendő főleg az elögyomornak homályos vagy épen helyt nem lelö elkülönítése a gyomortól; ezen jelenség állati tápanyaggal élő madaraknál állandó jelleg gyanánt tekinthető, és fokozatos átmenetet képez a húsevő madarak gyomrához, melyeknél az elögyomor a gyomorral össze olvad, és egy üreget képez, mint a ragadozóknál és még világosabban a gémeknél.

A kevert táplálékkal, magvakkal, bogyókkal, rovarokkal élök legközelebb állnak — gyomoralkati minőségüknél fogva — a magevőkhöz, láttuk ezt a pacsirtánál és harkályoknál, melyek még tökéletesen kifejlett zúzzal is ellátvák; ezekhez közelednek a varjak és a rigók. IV. T. 20. ábra csergő szarka, 21. áb. teleki varjú, 22. áb. éneklő rigó. Ezen madarak gyomrán megkülönböztethetök ugyan még a zúz alkatrészei, de fejlettségi csökkenésök már nagy fokú, az izmok szövete laza, petyhüdt, a hártyás részek vékonyak, a gyomor körte-alakú az elögyomor csak homályosan van elkülönítve a gyomortól.

Még nagyobb fejlettségi csökkenést látunk a rovar és kisebb gerincztelen állatokkal és a magvak bennékével élöknél. Ezeknek gyomoralakja már csak mintegy két félből öszszetettnek látszik, a kis zárizomtól fedett tömlők alig különböztethetők meg, különösen a felső tömlő; az elögyomor a gyomortól már csak igen homályosan van elkülönítve, az izmok szövete petyhüdt, vékony, laza, a benső szaruhártya puha, miért is a táplálék festanyagait mohón felszívja. III. T. ezen osztálybeli egynéhány madarak gyomrának ábráit tartalmazza. 23. ábra barnika sziklár, 24. ábra poszáta zenér, 25. ábra csigoly zenér, 26. ábra kék czinege, 27. ábra szénczinege, 28. ábra füstös fecske.

A gébicsek mint életmódjoknál, úgy gyomoralkatjoknál fogva is átmenetet képeznek a ragadozókhoz, gyomruk már mint ezeknél izomhártyás, tehát mindenesetre nevezetes izomfejlettségi csökkenés, a többi rovarevőkkel összehasonlítva. III. T. 29. ábra kis gébics gyomra. 29. ábra *a*. ennek benső felülete, *b*. a vékony izomfal. Hasonlít ugyan a gébics gyomra alakjára nézve még a zúzhoz, de izomfalainak vékonyságánál fogva világos átmenetet képez a hártyás gyomorhoz, benső szaruhártyája is puha félig takhártya szövetű.

A ragadozók gyomra izomhártyás redős tömlő, az egyszerű gyomorral bíró emlősökhez nagy részben hasonlít; mint alakjára, úgy főleg alkatjára nézve egészen eltér az eddig leírt madárgyomrok alkatminőségétől, és az inas központot kivéve, azon semmi egyéb zúzalkati viszonyok nem láthatók. Az elõgyomor összeolvad a gyomorral, hiányzanak a zúznál leírt zárizmok, és helyökbe körizomrostok lépnek, a nyombél a gyomor körszélén torkollik a gyomorba, nagyobb távolságban az elõgyomor torkolatától, és nem mint a zúznál vagy zúzféle gyomornál a gyomor felső részén közel az elõgyomor torkolatához. A ragadozók gyomrának benső felületét már nem szaru- de takhártyával találjuk kibélelve. Ezen takhártya kétféle szövetű, az egyik vastag, tömött, síma felületü; ez a gyomorral egy üreggé olvadt elõgyomornak takhártyája; a másik vékonyabb, laza redős, ez a tulajdonképeni gyomor takhártyája; mindkettõn, de főleg az elõgyomorén, nyákmirígyek csatornácskáinak számtalan nyílásai láthatók. A ragadozók gyomra üres állapotban összezsugorodott redős, telt állapotban síma és nagy fokig kitágúlható.

IV. T. 30. ábra nádi bagoly gyomra. a) inas központ, b) körizomrostok, c) elõgyomor, d) nyombél-torkolat. 30. ábra *A*. benső felülete, a) elõgyomor takhártyája, b) gyomor takhártyája, c) izomfalak.

IV. T. 31. ábra közönséges kánya gyomra. a) inas központ, b) körizomrostok, c) elõgyomor, d) nyombéltorkolat. 31. ábra *A*. benső felülete, a) elõgyomor takhártyája, b) gyomor takhártyája, c) izomfalak. A napi ragadozóknál tehát az elõgyomor a gyomorral egy üreget képez; az éji ragadozóknál ellenben attól el van még némileg különítve.

A vízimadaraknál azt tapasztaltam, hogy náluk a tökéletesen kifejlett zúztól a hártyás gyomorig nem annyira fokozatos az átmenet, mint a légieknél és földieknél. Nem csak egy és ugyanazon rendben, de nemben is különböző gyomoralkatú fajokra akadunk. IV. T. 35. ábra csoportos szalonka, 36 ábra erdei szalonkának gyomra. Első pillanatra feltűnő a nagy különbség. A csoportos szalonka gyomra alkatjára és alakjára nézve is hasonlít még a zúzhoz; ellenben az erdei szalonkáé mint alakjára úgy alkatjára nézve már izomhártyás gyomornak nevezhető. A csoportos szalonkánál az előgyomor el van különítve, habár homályosan is, a zúztól IV. T. 35. ábra *a.*; az erdei szalonkánál az előgyomor a gyomorral összeolvad, és összeolvadási helyét egy inas fehér gyürü jeleli kivülről, 36 ábra *a.* A csoportos szalonkánál megkülönböztethetők a zárizmok, a kis zárizomtól fedett tömlők, 35. ábra *b.b.*; az erdei szalonkánál csak körizomrostok láthatók már, és a gyomor végén az alsó tömlő sajátszerü alkatminőségben 36. ábra *b.* A csoportos szalonkánál megvannak a két zárizom közti hézagok, 35. ábra *c. c.*; az erdei szalonkánál ezeknek semmi nyoma. A két gyomor benső felülete is lényegesen különbözik egymástól. A csoportos szalonka gyomra hasonló minőségben van kibélelve egy puhább szaruállományú hártyával, mint a kakas gyomra. Az erdei szalonka gyomrának benső felületén következő jelenségekre akadunk: 36. ábra *A.* Benső felülete az erdei szalonka gyomrának *a)* az előgyomor takhártyája, tömött vastag szövetü, sima felületén nyákmirigyek számtalan nyilásai láthatók, b) az előgyomor és gyomor közti redős határszél, mely a gyomor takhártyája által képeztetik, és kivülről a látható fehér gyürü által van jelelve, c) a gyomor rendetlen redőzetü, laza takhártyája, d. d.) őrlőtárcsák, melyek a gyomor vége felett a puha takhártyából rögtön emelkednek, és pedig oly módon, hogy egyiknek félholdalakú széle lefelé, a másiknak felfelé van irányozva *di. di.* Ezen őrlőtárcsák legyező-alakban egymás mellett álló kemény, szarúállományú, érdes redőkből képezvék, e) az izomfalak, f. f.) a gyomor végén látható és ketté vágott tömlő, mely puha redős takhártyával van kibélelve. Ilyen feltünő gyomoralkati különbségeket találtam általjában a partiramok, szalonkák, evezőlábúak, csüllők és búvárok közt, és pedig egyes fajok közt is. Nem levén azonban mindeddig ezen rendbeli vízimadarak gyomoralkata körül szükségelt tapasztalatom, részint mert vidékünkön a vízimadarak, különösen a legutólsóbb száraz években, csak igen gyéren fordúltak meg; részint, mert meggyőződvén arról, miként a vízimadaraknál az egyfajbeliek közt is sokszor feltűnő a gyomoralkati különbség, söt mint tapasztaltam, ez még a különböző életkor szerint is némileg változik; ennélfogva minden elővélt következtetéseket még egy fajbeli példány gyomoralkatjából is a többi fajbeliekére igazságszerető észlelőhöz nem illő merénynek lenni hiszem, és azt tartom, hogy valamint általjában, úgy különösen a vízimadaraknál szükséges e tekintetben minden megszerezhető egyes fajokat, és a menynyire lehetséges különböző életkorú példányokat is figyelmes boncztani szemle alá vonni, mihez hosszabb idő és sok kedvező alkalom szükségeltetik. Ez volt oka mély tiszteletem és hálás köszönetem jeléül szerkesztett székfoglaló értekezésem késő benyújtásának; napról napra halasztottam annak beküldését, remélvén, hogy juthatok tán még oly kívánt példányok birtokába, melyeknek bonczolata megfejtésül szolgált volna több felmerült kétségek eloszlatására, és lehetségessé tette volna munkálatim azon részének felvételét is jelen értekezésembe, melyet most hallgatással mellőzni kényteleníttetem. — A felhozott két szalonkafaj gyomoralkati különbségének némi magyarázatához a tápszer különbségét megemlíteni szükségesnek vélem. Az erdei szalonka gyomrában agyagos iszapot, földi gilisztákat és kisebb héjanczokat találtam mindig; míg a csoportos szalonkáéban rovarokat, petéket, lárvákat, pióczákat, fű- és kákadarabokat, és vízinövények magvait.

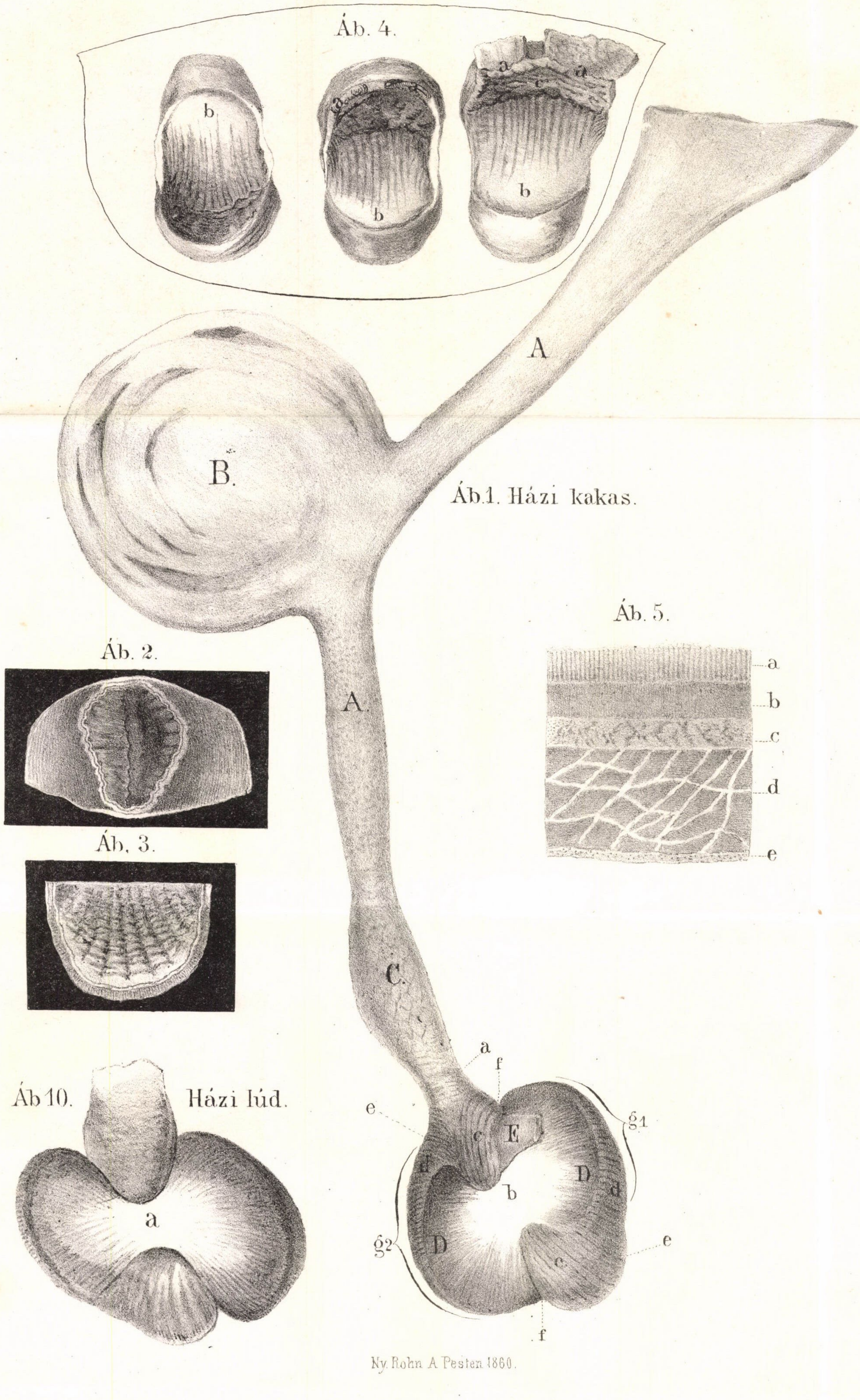
A gémeknél, mint a légi madarak közt a ragadozóknál, a gyomor izomhártyás tömlő, az izomrétegek mindazonáltal sokkal gyöngébben kifejlettek, mint a ragadozóknál, miért is a gémek gyomra üres állapotban is tágasabb, külső felülete sima és nem redős mint a ragadozóknál, az előgyomor tökéletesen özszeolvad a gyomorral, némely fajoknál azonban külsőleg az előgyomor a gyomortól egy az alsó szélen látható bevágás által el van különítve, és még azáltal is jelelve, hogy külső felületének a falain átlátszó mirígyek pettyegetett színezetet adnak; a nyombél mint az emlősöknél az előgyomor torkolatától távolabban torkollik a gyomor üregébe, a nyombél torkolatánál azonkivül egy tömlőalakú szerv látható, melynek élettani jelentősége ismeretlen. A gyomor bensőleg két különböző szövetű takhártyával van kibélelve.

V. T. 37. ábra vörös gém emésztési készülete. A) begyféle kitágulás, B) bárzsing, C) gyomor. Ezen megkülönböztetendők a) hosszúkás izomrostok — előgyomor területe, — b) inas központ, c) körizomrostok — gyomor területe — d) a nyombél torko latánál levő tömlőalakú szerv, e) nyombél. 37. ábra. *A* gyomor benső felülete, a) bárzsing torkolata, b) az előgyomor takhártyája, c) a gyomor takhártyája, d) nyombél torkolatnál levő tömlő-alakú szerv benső ürege, e) nyombél, f) izomfal.

V. T. 38. ábra dobos gém gyomra. a) előgyomor, b) az elögyomornak a gyomorbani átmenetét külsőleg jelelő bevágás, c) a gyomor, d) inas központ, e) tömlő-alakú szerv ürege a nyombél-torkolatnál, f) nyombél. 38. ábra. *A* gyomor benső felülete, a) bárzsing torkalata, b) előgyomor takhártyája, c) gyomor takhártyája, d) tömlőalakú szerv a nyombél torkolatánál, e) nyombél benső felülete, f. f.) izomfalak.

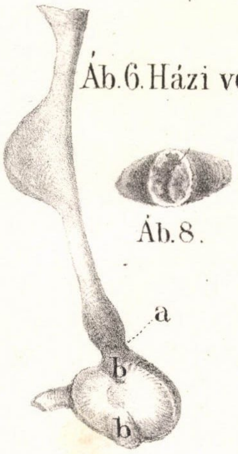
A madarak osztályában előforduló gyomoralkati különbségeket általános vázlatokban leírván; még jelenleg, kellő adatok hiánya végett valamint részletesebb leírásokba, úgy az egésznek pontosabb rendszeresítésébe nem bocsátkozhattam, mindazonáltal értekezésemet azon fogadással fejezem be, hogy ezen észleleti téren folytatandó működéseimnek eredményeit a Tekintetes Tudományos Akademia színe elébe időszakonként terjeszteni kötelességemnek tekintendem.

T. I.



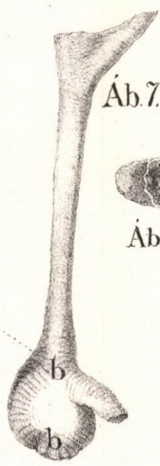
Ny. Rohn A. Pesten 1860.

T. II.



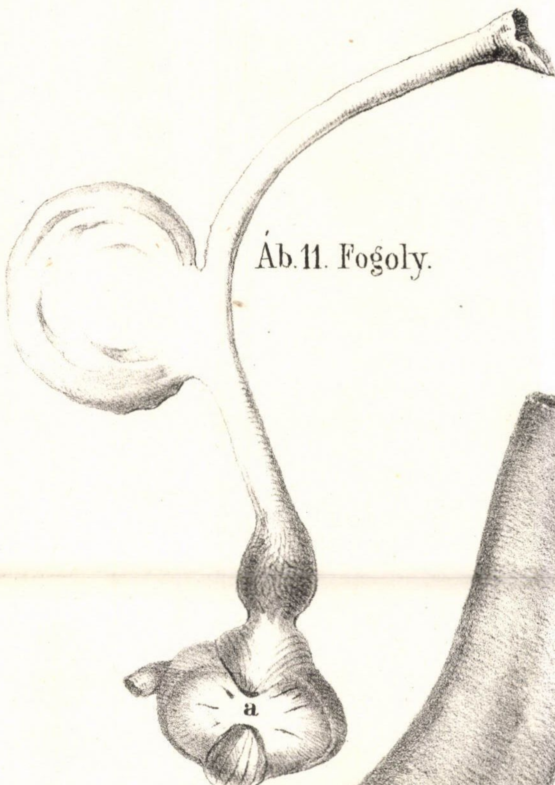
Áb. 6. Házi veréb.

Áb. 8.

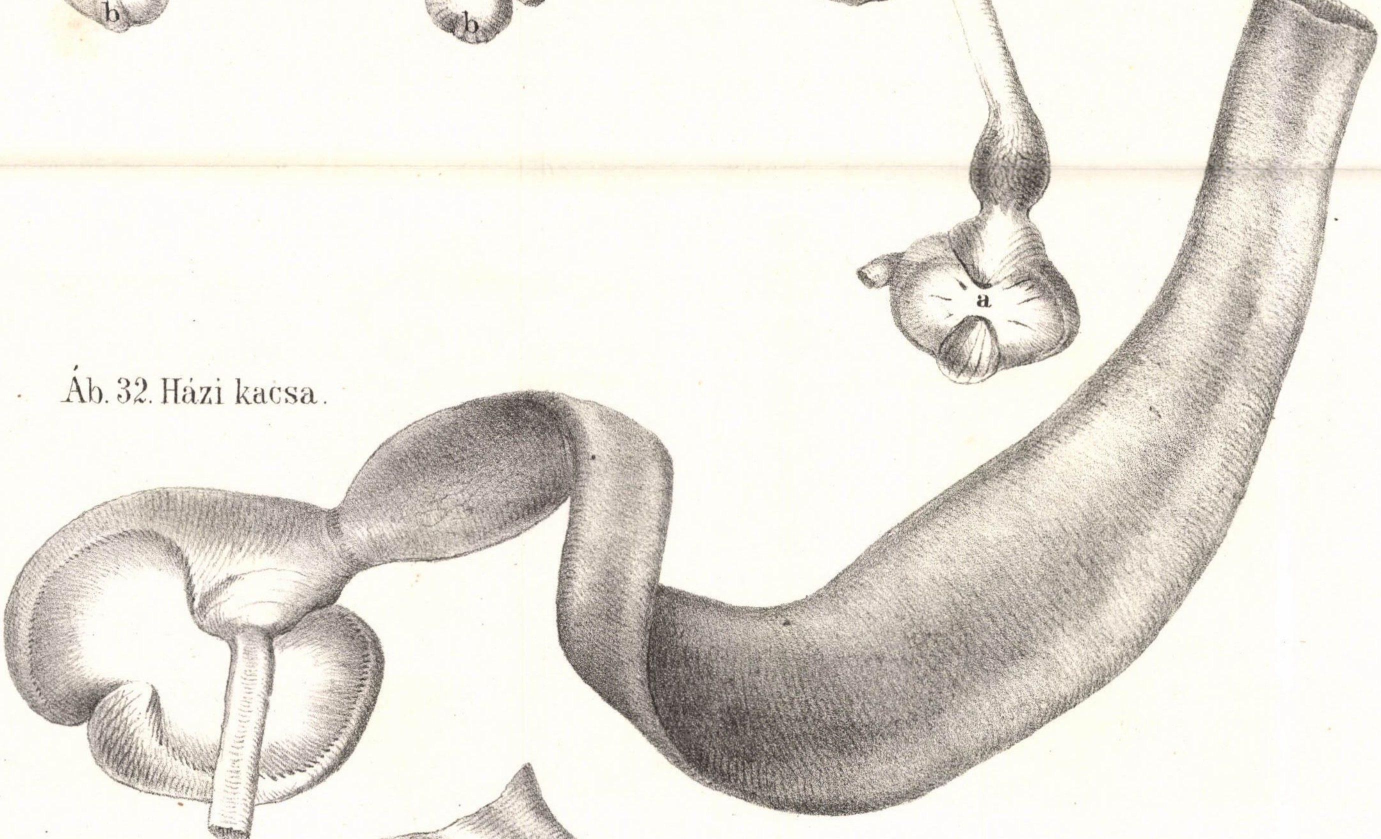


Áb. 7. Csalogány.

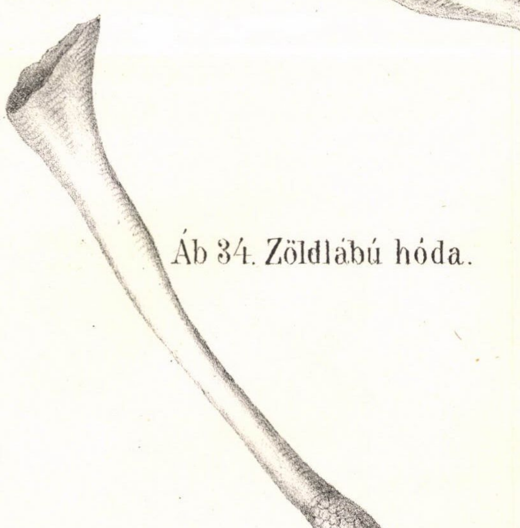
Áb. 9.



Áb. 11. Fogoly.



Áb. 32. Házi kacsa.

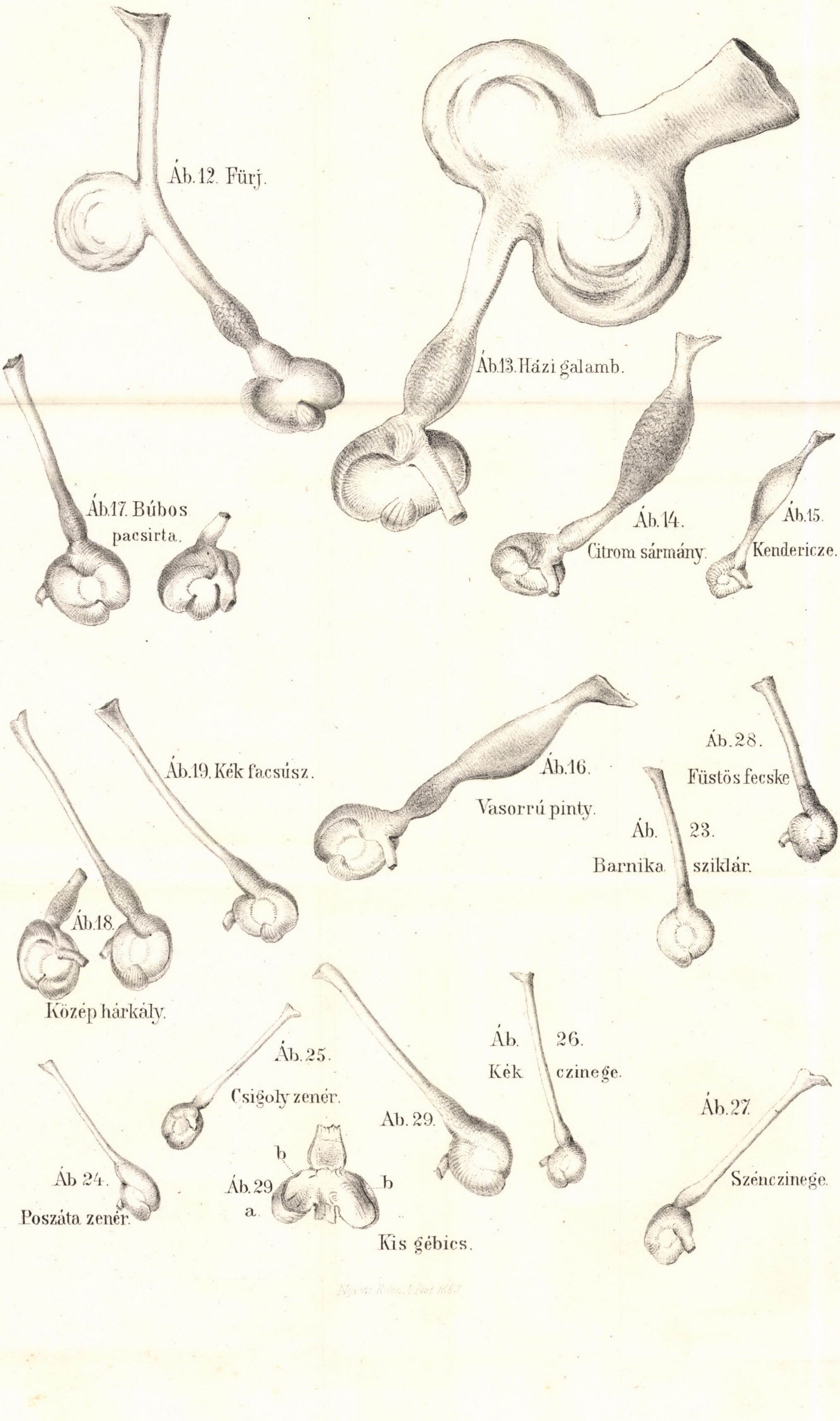


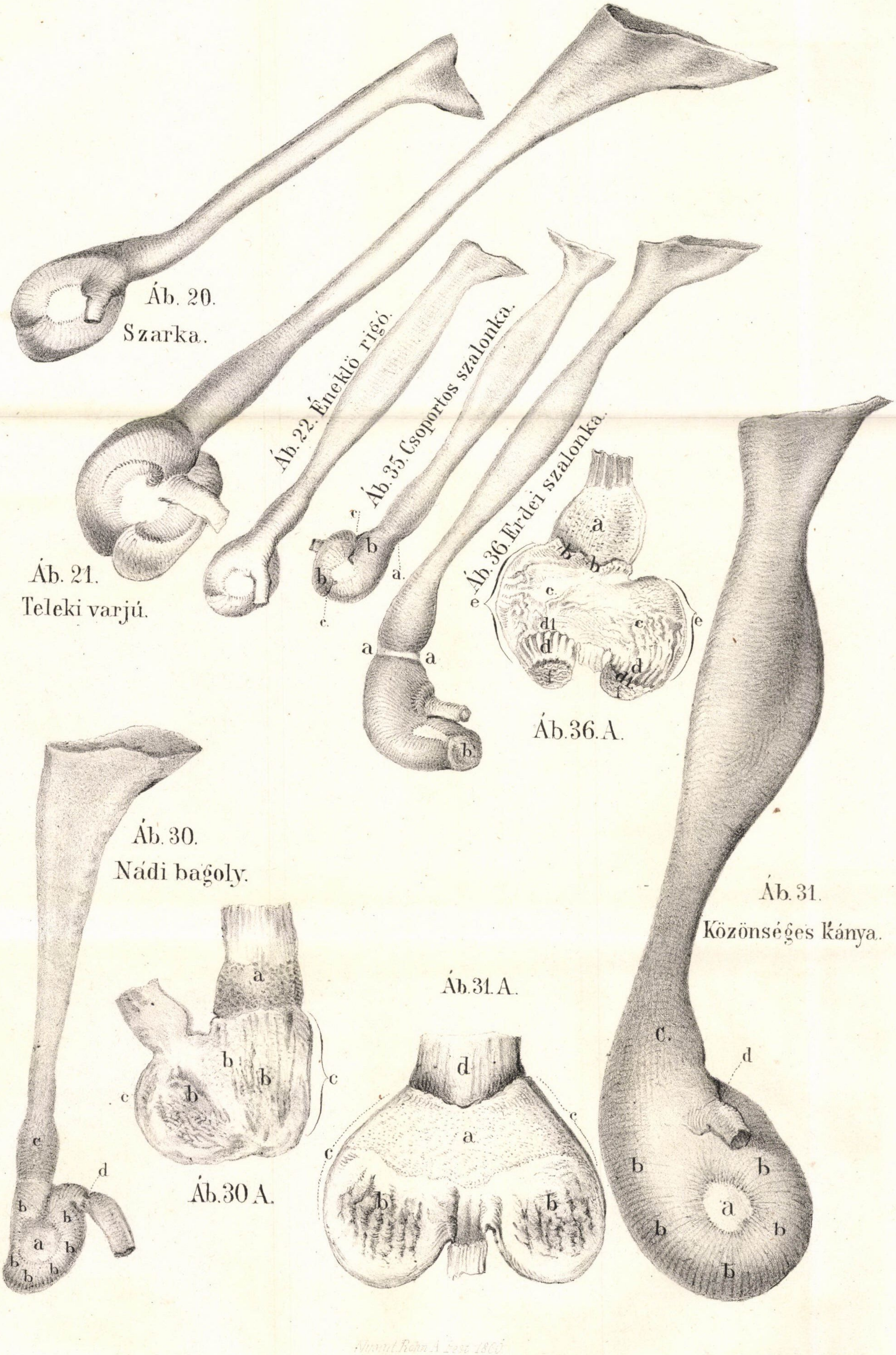
Áb. 34. Zöldlábú hóda.

Áb. 33. Haris.

Ny. Rohn A. Pesten 1860.

T. III.


Áb. 12. Fürj.
Áb. 13. Házi galamb.
Áb. 17. Búbos pacsirta.
Áb. 14. Citrom sármány.
Áb. 15. Kendericze.
Áb. 19. Kék facsúsz.
Áb. 16. Vasorrú pinty.
Áb. 28. Füstös fecske
Áb. 23. Barnika sziklár.
Áb. 18. Közép hárkály.
Áb. 25. Csigoly zenér.
Áb. 26. Kék czinege.
Áb. 29.
Áb. 27. Szénczinege.
Áb 24. Poszáta zenér.
b
b
Áb. 29 a.
Kis gébics.


Áb. 20.
Szarka.
Áb. 21.
Teleki varjú.
Áb. 22. Éneklö rigó.
Áb. 35. Csoportos szalonka.
Áb. 36. Erdei szalonka.
Áb. 36. A.
Áb. 30.
Nádi bagoly.
Áb. 30 A.
Áb. 31. A.
Áb. 31.
Közönséges kánya.

MAGYAR

AKADEMIAI ÉRTESÍTŐ.

A MATHEMATIKAI,

ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI

OSZTÁLYOK KÖZLÖNYE.

I. KÖTET. 1860. II. SZÁM.

A LEVEGŐI NYIRKOSSÁG NÉMELY ÉGALJI BEFOLYÁSA.

BERDE ÁRON l. t.

SZÉKFOGLALÓJA. OLV. MART. 12. 1860.

Ha a légköri nyirkosság, vagy relatív gözmennyiség némely, eddigelé nem ismert, égalji befolyásának tárgyalása merészségnek tetszenék azért, mert e tárgyat sem hírneves meteorologok, sem a természet ismerte hatalmától gyámolított oknyomozó gazdák nem tették tanulmányozás tárgyává : vállalkozásomat indokolja az, hogy a légköri nyirkosság égalji befolyásai nem mutatkoznak oly tisztán sem *Dove* sem *Boussingault* honában, mint a magyarok hazájában.

Köztudomású dolog, hogy Magyarország és Erdély nevesebb szölöhegyei 10 C. fok évi, és 20 C. fok nyári közép meleg mellett nemesebb, minden esetre szeszesebb bort termenek, mint a minőt akár déli Frankhon (Bordeaux) 13.9 C. fok évi és 21.7 C. fok nyári, akár Lombárdia (Milano) 12.9 C. fok évi és 22.8 C. fok nyári közép hévmérséklet mellett termeni képesek.

Az angolhoni gabona szalmája általán véve, úgy áll a szemterméshez, mint . . . . 3 : 2,
Frankhonban és Németországban mint . . . 5 : 2 *);
Kolozsvár vidékén az általam tett vizsgálatok szerint általában véve mint . . . . 6: 2-hez **).

Mindazok, kik a növény-fejlődés magyarhoni lépcsőzetét a nyugoteurópai országok növényfejlődésével összehasonlították, bámulva tapasztalták, hogy nálunk a fák és gabonafélék más renddel fejlenek, mint akár Németországban, vagy Frankhonban, akár Angliában, vagy Svédhonban. Nálunk köztudomás szerint a gyümölcsfák, söt még a vadgesztenye is, már virágzanak, a mikor a rozs és búza még fejét sem hányják, annál kevésbbé virágzanak; holott Nyugoteurópában a rozs csak május vége felé virágzik, a gyümölcsfák június folytán, és a vadgesztenye csak július elején virágzanak, a mikor a gabona már érni indúl ***).

Honnan vannak ezen egyenlőtlenségek különböző vidékeken? Minő hatalom képes felruházni a magyar, jelesen a tokaji és ménesi bort, oly tulajdonnal, melyet a tenyészés ideje alatt uralkodó meleg-mennyiség egymaga nem adhat? Mi eszközli, hogy a magyar gabona szalmája a szemhez képest rendesen két annyi, mint az angol gabonáé? Mi szab Európában keleten más egymásutánt a különböző növények fejlődésében, mint nyugoton? Oly kérdő pontok ezek a bú-

---

*) Dr. Emil Wolf. Die naturgesetzlichen Grundlagen des Ackerbaues. 3-te Aufl. 845. l.

**) A *kolozsvári* és Kolozsvár mellett a *szucsági* határon 1858-ban jobb minőségü földeken termett rozsot és búzát vizsgálván meg, kitünt, hogy a szalma a szemhez úgy aránylott, a szucsági rozsnál, mint . . . . 6 : 2.

szucsági búzánál mint	. . .	5 : 2.
A kolozsvári rozsnál „	. . .	7 : 2.
„ búzánál „	. . .	6 : 2.
1859-diki kolozsvári rozsnál „	. . .	10 : 2.
„ búzánál „	. . .	4 : 2.
bozsi (mezőség) búzánál „	. . .	4 : 2.
	közép	= 6 : 2.

***) Wahlenberg. Flora Carpathorum. Göttingen. 1814.

vár szellemhez, melyeket felelet nélkül magától el nem utasíthat. Mivel pedig a természet által elénkbe állított talányokat nem szabad elmés ráfogások által felderítni akarni, hanem azt kell kifejteni, a mit a természet burkolt be a jelenség leple alá: mindenek előtt jó lesz magától az égaljtól kérnünk felvilágosítást az elönkbe tett kérdésekről.

Ámde az égalj különböző tényezők származéka levén, szükség a közremunkáló hatóságokat külön-külön tenni vizsgálat tárgyává, és kérdeni: minő eredménynyel dolgozik a naptól kapott meleg-mennyiség az égalj természeti tulajdonai létrehozásában? mi része van abban a főbb uralkodó szeleknek? mi a légtenger fenekének, a föld-felszínnek? mi az ez által felfogott világosság fokozatának? mi a légköri — úgynevezett — relatív gőzmennyiség vagy levegői nyirkosság fokának? stb.

Habár jól tudom, hogy hazánkban egy évtized óta az égalji tényezők sem egyike sem másika nem lőn tudományos nyomozás tárgyává téve, még sem használhatom fel ezen, reám nézve ünnepélyes alkalmat égaljunk minden tényezői feletti szemletartásra, hanem megelégszem, ha a légköri relatív gőzmennyiség némely égalji hatását úgy deríthetem fel, hogy tárgyalásom méltó legyen ez alkalomhoz, midőn a magyar tudományos akademiában helyet foglalok.

Mióta *Dutrochet* az általa *endosmos*nak nevezett jelenségben felfedezte azt, hogy különböző tömöttségű oszlatok, különböző tömöttségökben egyensúlyt állítandók be, oly erős vonzalmat tanusítanak az egymássali egyesülésre, hogy ezen vonzalomnál fogva a hígabb folyadék a tömöttebb felé még nevezetes tavolságból is, még növényi vagy állati hártyákon át is oda siet: azóta a tápnedvnek felvonulása a növényekbe, valamint a növénynedv felhágása is, oly tiszta dolognak tűnik fel, mintha ahhoz már szó sem férhetne. És mégis az endosmos-féle vonzás a növénynedv felhágásának csak első megindítója, közvetetlen közvetítője, s a mi magának az endosmos-féle vonzásnak is tartós nedvvonzó munkásságot kölcsönöz, mint alább látni fogjuk, az nem egyéb, mint azon erő, mely most szárazon és vizen szélgyorsasággal röpít embert és portékát, az a *vízgőz*, mely légkörünkben foglalt állásából még akkor is felidézte a tápnedvet a növényekbe, a mikor az ember még nem is sejtette a gőz mozgató erejét. Mert habár Dutrochet kísérleteiből ismerjük is némely anyagok, jelesen a czukor és fehérnye (albumin) oszlatának nedvvonzó képességét, mely az oszlat tömöttsége esetében $2^1/_2$ légkör-nyomással is egyenlő lehet; tudjuk továbbá azt is, hogy a növényekben nem csekély mennyiségű albumin, általában proteintestek fordúlnak elő czukor, mézga s más nedvvonzó anyagok társaságában, tehát számos tényező dolgozik a növényekben az endosmos-féle vonzás létrehozására : mind a mellett is könnyen beláthatni, hogy mihelyt a földből annyi nedv vonúl fel a növénybe, mennyivel a növénynedv elegyülés útján a hígság azon fokára jut, melyben van a földből fölveendő tápnedv, vagy ha a szívó növénynedv és vonzott tápnedv a tömöttségben egyensúlyra jutnak, az endosmos-féle vonzás legott megszünik, a növénynedv felvonulása megakad. E következtetést minden e tárgyban tett kísérletek igazolják, de érvényét ismerik magok a gazdák is, tudván, hogy a tápanyagokkal teljes trágyaléveli öntözés megfúlasztja a növényt, helyesebben: az egyenlő tömöttségű tápnedv és növénynedv között nem levén endosmos-féle vonzás, a tápnedv nem juthat fel a növénybe; a növénynedvnél tömöttebb tápnedv pedig magát a növénynedvet vonza le a növényből, hogy a Dutrochet által exosmosnak nevezett jelenséget hozza létre, s ez által a növényt a pusztúlás elébe vezesse.

Ámde hogy az endosmos-féle vonzás s ezzel együtt a növénytáplálkozás műfolyama meg ne szakadjon, s az endosmos helyett épen az exosmos ne vegye át a munkásságot, mint védszellem nyújt segédkezet a légkör, *nyirkossági állapotának* hatalmával, követelvén, hogy a növény, kigőzölgés útján, adja vissza az anya-légkörnek azon nyirkot, melyet emez csak azért kölcsönzött volt a földnek, hogy tápanyagokat vigyen a földből a növénybe; és ekkép maga a növénynedv is részt vegyen a víz által követni szokott elgőzölgésben. És e követelés pontosan is van teljesítve, mert a kísérletek pontosan tanusítják, hogy a növény teste egész felszínén szakadatlanúl vizet gőzölög ki kedvező körülmények közt, olyannyira, hogy a növények által kigőzölgött vízmennyiség még a nyirkos légű Angliában is jóval meghaladja az eső, hó és harmat alakban lehullani szokott vízmenynyiséget.

Ámde az elgőzölgés mekkorasága még ugyanazon egy helyen sem állandó; hanem különböző időben nevezetes változásoknak van alávetve, a szerint, a mint a levegő nyirkossági állapota változik. Ezen tény alapossága a természettan ismerői előtt inkább el van ismerve, hogysem még az *August*-féle nyirokmérőre (Psychrometer) is kelljen hivatkoznom, mely épen a levegő szárazságával arányos elgőzölgési sebességre van alapítva; s ha felemlítem azon mindennapi tényt, hogy a vizes ruha megszáradása, vagy a ruhára tapadt víz elgőzölgése száraz időben mily gyorsan történik a nedves időbelihez képest: legott senki sem fog kétkedni az elgőzölgésnek a levegő száraz állapotától függő sebességén. Ebből aztán önként következik az is, hogy a növények kigőzölgése is mindig erélyesebb oly időben és helyeken, a mikor és a hol a légkörben kevesebb vízgőz-mennyiség szokott előfordúlni.

S mivel a kigőzölgés műfolyama által a növénynedv tömöttülése is folytonosan eszközölve van, abból ismét következik, hogy a kigőzölgés a növénynedvet mindinkább tömöttítvén, ez által egyszersmind az endosmos-féle vonzás ébrentartását munkálja, azt eszközölvén, hogy a növény a kigőzölgés által elvesztett nedv helyett gyökerei által a földből más nedvet vehessen föl magába.

Igen, de a növény-táplálkozás tanából tudva van az is, hogy a növények által felszívott nyirok nem csak az által szolgál javára a növényeknek, hogy saját alkatrészeivel gyámolítja, növeli a növénytestet, hanem az által is, hogy magával más anyagokat, jelesen szénsavanyt, ammoniakot, és ásványanyagokat viszen a növényekbe. Ebből aztán az következik, hogy a növénytenyészésben a nyirok bő és sebes felszívása a gazdag és gyors táplálkozással egyjelentőségű. A hol tehát száraz léggel, a nedv gyors forgása mozgatójával együtt hatályos meleg és világosság-sugarak is gyámolítják a nem szegény és nem száraz talaj növényzetét, ott erőteljes és nagy növényegyének származnak.

Mindezek után el kell ismernünk, hogy a tápanyagok felvonulása a földből a növényekbe, a légkör nyirkossági állapotának közvetett eszközlése; el kell ismernünk, hogy a növény táplálkozás mozgatója és kormányzója (motòra és moderatora) a légkör, mely nyirkossága által az adott tápanyagok lassú, száraz volta által pedig gyors felvételét hajtja végre. Ha a vízgőz csak a meleg hatalma által nyeri mozgató erejét, az endosmos-féle vonzás csak a légkörnek elgőzölgésre kényszerítő képessége által vonza fel maradandólag a tápnedvet a növényekbe. — A teremtői bölcsesség a növény-táplálkozás kormányzását épen azon hatalom kezébe tette le, a mely az állat-táplálkozást is kormányozza; csakhogy az állat által felemésztett tápszer az általa beszívott légköri élenynyel arányos, a növények által felvett tápanyag pedig a légkör szárazságával viszonyos.

Ha már az égalji vizsgálatok azon tényt hozták napfényre, hogy Európában az atlanti tengertől kezdve kelet felé a légkör mind általán, mind pedig a levegő hőmérsékéhez képest kevesebb vízgőzt tartalmaz: önkényt következik, hogy Európában a tápnedv felnyomulása a növénybe jóval gyorsabb a keleti, mint a nyugoti országokban. Mind a tétel, mind pedig a következtetés igazolására szolgáljanak a következő, nem kiválasztott, hanem általam feltalálhatott adatok:

A légkör relatív gőzmennyisége, vagy nyirkossága századrészekben.

Londonban *)		Halleban **)	Budán ***)
Január	1.19.	0.85.	0.97.
Febr.	1.17.	0.80.	0.96.
Mart.	1.09.	0.76.	0.74.
Apr.	1.02.	0.71.	0.61.
Maj.	0.88.	0.69.	0.69.

*) A gőzkör feszültségét Daniell három évi kisérletei alapján Dove számította ki. Kämtz. Lehrbuch der Meteorologie 1. B. 332. l. Abból a nyirok, vagy relatív gőzmennyiséget én számítottam.

**) Pouillet's Lehrbuch der Physik v. Müller. 1844. II. B. 546. l.

***) Az én számításom az 1842-ben végbevitt kisérletek alapján.

Jún.	0.87.	0.70.	0.56.
Júl.	0.85.	0.67.	0.54.
Aug.	0.92.	0.66.	0.53.
Sept.	0.99.	0.73.	0.72.
Oct.	1.06.	0.79.	0.88.
Nov.	1.17.	0.85.	0.92.
Dec.	1.25.	0.86.	0.95.

Ha ezen adatok alapján apr. máj. jún. júl. aug. sept. és oct. hónapoknak megfelelő közép nyirok mennyiséget kifejtjük, teszen :

Londonban : 0.94.

Halleban : 0.71.

Budán : 0.64. század részt; ezen adatokat azért szükség épen a kitettem hónapok közép relatív gőzmennyiségéből fejteni ki; mert a növénytenyészés műfolyama az ezen hónapok által megjelölt időn túl nem szokott terjedni, jelen czélom pedig épen azt igényli, hogy a növénytenyészés ideje alatt tapasztalt nyirok-mennyiséget hasonlítsam öszsze a növénytest mekkoraságával: ezt a gabonafélékre vonatkozólag az által tehetem, ha tény gyanánt fogadom el az angol, frank és német gazdák amaz adatait, melyek szerint a gabonaszem úgy aránylik a gabonaszalmához

Angliában, mint 2 : 3.

Frankhonban és

Németországban, mint 2:5.

Alsó-Austriában

Kleyle szerint és

Kolozsvár vidékén, mint 2:6 *)

Ezek szerint az angolhoni gabona-szalma a németországihoz s ez az alsó-austriaihoz és Kolozsvár környékihez úgy van, mint 3:5:6; itt az első tag a középsőtől 2-vel különbözik, míg ez a különbség a közép és utólsó tag között csak 1-et teszen.

*) Buda környékén a gabonaszemnek szalmáhozi arányát nem ismervén, a helyett Bécs melletti adatokat használok, a mit annyival inkább vélek tehetni, minthogy a magasabb fekvésű Kolozsvár is ugyanazon viszonyt mutatván, feltehetni, hogy az Budán sem sokat különbözik.

Ha már a fenebb közöltem londoni, hallei és budai nyirokmennyiséget egymással összehasonlítjuk, kijő, hogy amaz adatoknál a közbülső tag az elsőtől 20-al, s ugyanettől a harmadik csak 10-el különbözik, tehát a nyirokmennyiség épen oly különbségek szerint változik, minőket ezen helyeken a gabonaszem és szalma viszonyai közt megismerénk. Ebből látható, hogy az idézett helyeken a nyirokmennyiség és gabonaszál-mekkoraság közti összefüggés oly kitűnő, hogy ne mondjam, kézzel fogható, mikép meg vagyok győződve, hogy számosabb vidékekre terjedő légköri nyirkosság, s a szalmának szemhezi viszonyára vonatkozó vizsgálatok törvény gyanánt fogják azt felismertetni, miszerint *a gabonaféle növények növési sebessége és tömegmennyisége a légköri nyirokmennyiségtől függ, s ezzel visszás arányú.* Más szavakkal: minél nagyobb valahol a légkör relatív szárazsága, annál erélyesebb a növények növése, a szerves és szervetlen anyagokat annál élénkebbül sajátítják el; természetesen mindig feltevén azt, hogy a föld nyirka elegendő a tápanyagok feloszlatására s a növényekbe vezetésére.

Az Európában tett égalji nyomozásokból az derül ki, hogy a Rajnától keletre eső országokban az eső-, hó- és harmat-alakban lehulló vízmennyiség több, mint a mennyit ezen országok elgőzölgés útján magok adhatnak levegőjöknek. Az a többség, melylyel a lehulló vízmennyiség az elgőzölgőt fölülmúlja valamely országban, idegen származású, Európában az atlanti, és földközi tengerekből eredő. Könnyen gondolhatni, hogy minél távolabb esik valamely ország a vízgőz ezen eredeti kútfejeitől, ott annál inkább csökken a vízgőznek mind mennyisége, mind befolyásai, a mit elárul egyfelől az évenként lehullani szokott csekélyebb esőmennyiség, másfelől a légköri vízgőz kisebb feszültsége. Ez utólsó Budán még képes a légsúlymérő havi közép állásait összekötő vonalat az év melegebb szakában sülyedés helyett felemelni; de Erdélyben már gyengébb, hogysem feszültsége által a légsúlymérő állásában nyári állandó felhágást hozhasson létre. Erdélyben általán véve a lehulló évi esőmennyiség magassága is csak 18″, Budán 20″, Kasanban csak 15″.

S mivel a növénytest növekvését feltételező ásványféle tápszerek feloszlató nedv nélkül nem juthatnak a növényekbe, következik, hogy oly vidék növényei, a hol az évi esőmennyiség csekélyebb, hogysem a talajban foglalt ásványtápszereket elegendő mértékben vigye magával a növényekbe, ezek mindig kisebbek maradnak, mint a hol a talajbeli tápszerek feloszlatására elegendő vizmennyiség jut a termőföldnek. E szerint Keleteurópa száraz vidékein a gabonaféléknek, mint általában minden növényeknek kisebbeknek kell hogy legyenek, mint közép Európában, sőt gyakran kisebbeknek, mint nyugoti Európában. Mert habár keleten az elgőzölgés sebessége az endosmos-féle munkásságot éber tevékenységre inti is; de mert a talajnak nem jut elég nyirok az endosmos-féle vonzás kivánata teljesitésére, a növény-táplálkozás munkája gyakran fenakad, s a növénytest kicsiny marad.

A légkör szárazsága, az elgőzölgés sebesitése által, csak addig gyakorolhat kedvező hatást a növényzetre, míg a légköri szárazság az esőmennyiséggel kellő arányban van. De miben áll a kellő arány? ez az elhatárzandó kérdés.

Az én összehasonlításaimból az jö ki, hogy a hol megszünik azon égalj, mely alatt a vízgöz feszültsége képes a légsúlymérő havi középállásait összekötö nyári lehajlását meggátolni, sőt fölemelni, és kezdődik az az égalj, a hol ezen vonal lehajlik: ott fejlődnek legnagyobbra a gabonaféle növények.

Ezen határvonal épen Magyarországon vonúl át *), mi által égalja oly kedvező befolyást nyer a növényfejlesztésre, minővel Európában kevés ország dicsekedhetik.

Mivel a légkör göztartó képessége s ekkép az elgőzölgés sebessége is a hőmérsék növekvésével növekszik, abból azon következtetést vonták le, hogy esőzés múltával a levegő melegülése után következni szokott eröteljes növénynövekvés a meleg egyenes munkája volna; holott itt a melegnek csak közvetett szerepe van, az egyenes tényező pedig a légkör nyirkossági állapota.

A légköri nyirkosság befolyásának ily felfogása után

---

*) Berde Á. Légtüneménytan. 2. R. 155. l.

számos égalji jelenségek vetkezik le talányos természetöket, s bontakoznak ki a természet titokteljes leple alól.

Ha a növények ugyanazon évi vagy nyári melegvonaljárta vidékeken is gyakran különböznek egymástól tömegre, és az egyének milyenségére nézve, nem kénytelen a búvár legott ismeretlen helybeli viszonyokhoz, vagy a talaj problematicus befolyásához folyamodni magyarázatért, hanem fenmarad számára még a légkör nyirkossági állapotának kérdőre vonása.

Hadd lássuk, vajjon hazai növényzetünk némely feltűnő jelenségei felderítésére is nem szolgálhat-e vezér-csillagúl.

Tokaji borunk világszerte ismert jelessége még maig is talány, még nincs felderítve, hogy Magyarországon az éjszaki szélesség 48. fokán túl is mi varázsolja a szőlőt oly finommá, hogy levéből a híres tokaji bor áll elé?

Legtöbben e jótékony befolyást a talajnak tulajdonítják. De legyen szabad kérdenem : mi által gyakorolja a talaj ezen jótékony befolyást? tán alkatrészei által? A Hegyalja szőlőhegyei talaja Wahlenberg szerint porphyr-málladékból*) áll,mely természetesen a porphyr alkatrészeinek : a mezőpátnak, kevés csillámnak és a kovarcznak alkatrészeiből áll. Az ily talaj csak *kali*, *magnesia*, *mészföld* s tán *vas* tartalma által gyámolíthatja a szőlő kifejlését. Melyiknek tulajdonitsuk ezek közől a varázs hatást?

A *kali* nagy jelentőségét a szőlőkifejlésre kétségbe vonni nem lehet; de a tokaji bor jóságát a talaj kali-tartaltalmától származtatni még sem lehet; mert hiszen ugyanezen talaj másutt is előfordúl, jelesen, hogy többet ne említsek, Erdélyben a szilágy-somlyói *Magura* is porphyr-málladék, s kali szintoly mértékben áll itt is a szőlő rendelkezésére; de azért bora még sem versenyezhet a tokajival. Aztán ha a talajnak bő kali-tartalma magában elég hatályos tényező volna zamatos és dús czukortartalmú szőlő létrehozására, azon esetben csak kali-tartalmú trágyával kellene a talajt meggazdagítani, hogy a szőlő finomsága eszközölve legyen. Ámde a tapasztalás azt mutatja, hogy a kalitartalmú trágya, a hamú,

*) Wahlenberg. Flora Carp. XCVII. l.

az elmállasztott televényes föld stb. a szőlő kifejlését segitik ugyan, de a finom epithetont még nem ruházzák reá.—

A magnesia és mészföld felválthatják részben a kalit a szőlőben, hanem ezt nem csak a Hegyalján, hanem még inkább végrehajthatják a meszes talajú Egerben és sok másutt, a nélkül azonban, hogy a tokaji bor-példa ismétlődnék.

Vagy tán a talaj physikai tulajdonaiban rejlik a varázs ok? A porphyr-málladék mindig bizonyos mennyiségű agyagföldet is tartalmaz kisebb-nagyobb mennyiségü mész- és kovarczczal keverve. Ha az agyag túlnyomó, azon esetben a talaj rosz meleg-nyelő és vezető képességgel bir, a lég és világosság behatásának bajosan enged, víztartó képessége nagy, s mindezek következtében hideg, a növénykifejlést késlelteti, tehát a szőlő korafejlésének sem kedvez; ha pedig az agyagtartalomhoz a kovarcz és mészföld feltűnő arányban járúlnak, a talaj meleg- és víztartó képességét lényegesen módosítják, a lég és világosság behatását könnyítik, szóval: az ily talaj a szőlőkifejlésre kedvezőbb; igen de e tulajdonokkal minden úgynevezett könnyü föld bír, söt az Alföld homokjának e tulajdon még inkább tulajdona, s mégis a tokaji bor nem az alföldi meleg talajon terem.

Igen de egy felkapott bécsi analysis a tokaji borban több phosphorsavanyt talált, mint találtak más borokban; tehát, úgy vélik némelyek, a phosphorsavany-tartalomban volna a tokaji bor finomságának kútfeje. Vizsgáljuk meg ez állítás alaposságát. Noha még nem vagyunk abban a helyzetben, hogy a növényekben végbemenő különbféle testalakúlásokat mind megfejthessük, némelyekről mégis kielégítő ismereteink vannak. Tudjuk, hogy azót-tartalmú, úgynevezett protein testeknek különben egymással rokon vegyszerkezetében csak az eszközöl változatosságot, hogy az egyikben több phosphor vagy kén van, mint a másikban, habár az a proteintesthez képest ritkán teszen egy századrésznél többet. Tudjuk, hogy ezen testek, melyeket gerjanyagoknak (Ferment) is neveznek, az élő test műszervezetében fontos szerepet játszanak, hogy a növényekben történő test-képződés és anyag-átalakulásoknál tulajdonképen ezek a mozgatók és szabályozók; hogy ezek jelenléte nélkül nem képződhetik sem növénysejt, sem czukor, sem amylon, sem semmi növényanyag.

Tudjuk továbbá azt is, hogy phosphor, vagy kén nélkül protein testek egyáltalában nem alakúlhatnak, és hogy, mint az eddig végbevitt növény-analysisekből következtetni lehet, a phosphorsavany és alkaliak mennyiségével a proteinanyagok mennyisége is hág a növényekben.

Ámde Dutrochet kísérleteiből tudva van az is, hogy a protein-testek nagyobb endosmosféle vonzó képességgel bírnak, mint az amylon, dextrin és cellulose, mely tulajdonnál fogva a proteintestek kezdik meg a növények életmunkásságát; az életnek csak lehetőségével bíró magba ezek lehelik az első élet-szikrát. A növények magvában az *azót*-tartalmú részek kezdik előbb magokhoz vonzani a nyirkot, s ha magok megteltek, közlik szomszédaikkal, hogy ekkép a tenyészés munkája mindenhol útnak indúljon.

A vízzel megtelt mag szabad tért nyit a vegytani munkásságnak, az anyagok egymásra hatásának. Ezt a munkásságot a nyilvánúlni akaró növényéletben is az éleny kezdi meg, mely az egész természetben a vegymunkásság indítója. Az éleny a mag *azót*-tartalmú részébe, a *sikerbe* (Kleber) kap belé, s ezzel egyesülvén, létrehozza a *diastast*, a mely aztán a kapott vegytani hatást a többi nem *azót*-tartalmú részekre is, jelesen, az amylonra, átviszi.

A növénytápszerek, a szénsavany, víz és ammoniák felbomlott alkatrészeiből bizonyosan elébb egyszerű, a tápszerek vegyszerkezetéhez közel álló szerves testek alakúlnak a növényekben, minők a sóskasavany ($C_2\ O_3$, v. $C_4\ O_6$) és a hangyasavany ($C_2\ HO_3$), melyek radicaljai később az összetettebb növénysavanyok és az úgynevezett szénhydratok alakulásában vesznek részt; a szénhydratok különböző alakúlás után olajokat, gyantákat és zsírnemű anyagokat nemzenek, vagy pedig az ammoniák alkatrészeinek felvétele által proteintestekké változnak. Ha képzeljük, hogy a sóskasavany ($C_4\ O_6$) 2 arányrész élenyt elbocsát, s a helyett 4 arányrész hydrogent veszen fel (pl. $C_4\ O_6 - O_2 + H_4. = C_4\ H_4\ O_4$) egy szénhydrat alakúl, mely többülés (Polimerisirung) útján (t. i. $3\ (C_4\ H_4\ O_4) = C_{12}\ H_{12}\ O_{12}$) a gyümölcsczukrot (Glucose) adja; s ez ha egy rész víz elemeit elveszti, nemzi a celluloset, amylont, dextrint, mézgát (C_{12} H_{10} O_{10}), ha pedig egy rész víz elemeit elsajátítván, egy rész vízzel egyesül, eredményezi a szölőczukrot ($=C_{12}$ H_{12} O_{12} $+$ HO).

Ha egész bizonyossággal nem tudjuk is kimutatni, hogy a testek átváltozását a növényekben mely anyagok és műfolyamok eszközlik: de bizonyos, hogy egynél többnek van befolyása. Abban nincs kétség, hogy dextrin, vagy czukor soha sem alakúl ott, hol azót-tartalmú, proteintestek és ásványféle egyletek egyáltalában nem fordúlnak elő; mert eddigelé minden vizsgálat oly sejtszövetekben, melyekben dextrin, amylon, czukor vagy cellulose alakúl, mindig proteintesteket, tűzálló ásványanyagokat, vagy legalább alkaliákat és phosphorsavanyt is talált. Támaszkodva tehát az eddig tett kísérletekre és tapasztalásokra, fel kell tennünk, hogy a phosphorsavany és kénsavany kiváltképen a protein-testek alakulását eszközli és mozdítja elő; ellenben az alkaliak sói az azót-nélküli testek, jelesen a szénhydratok képződését feltételezi és sietteti. Ugyanis az tény, hogy a phosphorsavany nagyobb mennyiségben mindig ott jelenik meg, hol a proteintestek szokottabb gyűlhelye van, példáúl, a magvakban; ezt mutatja az is, hogy a proteintestek a phosphorsavanynyal, vagy az ebben foglalt phosphorral vegyileg egyesülten szoktak előfordúlni. Ellenben az alkaliak, s főképen ezeknek szénsavanyos sói, számos tapasztalatok tanubizonysága szerint, mindig a növénylevelek, szárak, gyümölcshúsok stb. alakulását gyámolítják, hacsak a körülmények ez ellen nem dolgoznak.

Igen, de a szőlőjóság főelve, a czukor, nem proteintest, hanem szénhydrat, képződésére tehát a phosphorsavany feltünőleg kedvező befolyást nem gyakorolhat; miből aztán önként következik, hogy a tokaji bor finomságát a phosphorsavanytól föltételezni nem lehet.

Aztán, hogy a tokaji borban több phosphor-rész van, mint más borokban, az abból következik, hogy a tokaji bor éveken át marad seprőjén. S mivel a szőlőmag ásványféle alkatrészének általában 27, a szőlőhéjban 19 századrészét teszi a phosphorsavany : igen természetes, hogy ezekből több év alatt többet oszlat fel, s vesz magába a bor Tokajon, mint másutt, hol hamarább lehúzzák a bort seprőjéről.

És ha a talaj nem derít kellő világot azon kérdésre: hogy Tokajnál miért fejlettebb a szőlő, mint azon geogr. szélességnél bárhol másutt? hová fordúlhatnánk felvilágosításért máshová, mint a levegőhöz.

A Hegyalja, mint általában Magyarország jobb szőlőhegyei, úgy feküsznek, hogy lábaiknál száraz levegővel biró térség terül el, hátaikat pedig esőcsináló hegylánczoknak vetik, s ekkép a rajtok tenyésző szőlő kellő nyirkos talajra támaszkodik tápvonzó gyökereivel, a szőlőtest pedig oly levegőben terül ki, mely szárazsága által a gyors táplálkozásnak kiváltképen kedvez. A lég szárazsága által gyámolított erélyesebb elgőzölgés sebesebb táplálkozást, a növényanyagok gyorsabb alakulását eszközölvén, itt ugyanazon idő alatt jóval több növényanyag alakúl, mint tovább akár keletre, hol a talaj nem szolgáltat elég nyirkot a tápszerek feloszlatására és felvezetésére a növénybe; akár nyugoton, hol a levegő nagyobb nyirkossága lassúbb elgőzölgés eszközlése által a növények tunyább táplálkozását, s ekkép csekélyebb gyarapulását eszközli.

Azon kedvező körülményt, hogy a növény meleg és száraz levegő befolyása mellett egyszersmind elég nyirkos talaj hatásának van kitéve, Európában tán egyedül Magyarország nyújthatja az alföldi és feldunai térségeket rámázó hegyvonalok és csúcsok oldalain termő szőlőinek. Ezen körülményen alapszik Tokaj, Érmelléke, Ménes, Badacson, Somlyó stb. borainak hírneve, ezért terem Erdélyben is az az erőteljes növény, melynek nedve az alsófejéri, küküllő és hunyadmegyei tüzes borok.

Az elgőzölgésnek szőlőre gyakorlott jótékony befolyását némelyek már akkor sejtették, mikor azt magoknak megfejteni még nem tudták. *Columella* dicséri a szelek befolyását a szőlőre; *Pilgramm* állítja, hogy a tapasztalás a szeleket és szárazságot a szőlőre nézve még akkor is hasznosnak tanusítja, mikor azok más növényeknek károsak (Pilgramm's Wetterkunde. 1. 361—378). És miben rejlenék e jótékonyság, másban, mint a szőlőtáplálkozásnak a sebes elgőzölgés általi elömozdításában!

Tokaj kedvező körülménye a szőlőre nézve abban áll, hogy talaja bő kalitartalmú, elég nyirkos a Kárpátokkali öszszeköttöttség és levegője elég száraz és meleg az alföldi térség szomszédsága miatt.

Légkörünk nyirkossági állapota fejti meg teljesen azt is, hogy nálunk a gyümölcsfák és a gabonafélék nem egyszerre virágzanak, mint Nyugoteurópában. Tudva van, hogy a légkör hőmérsékének változásai a földtalajra is kiterjednek, a tél és nyár hatalmát a föld felső rétegei csaknem egy időben érzik a légkörrel; de a föld rossz melegvezető tulajdona hozza magával, hogy bizonyos mélységen alól a földkéregben a tél uralma akkor kap lábra, mikor a földszínén a nyár attól már megfosztotta, és megfordítva, a lentebbi földkéregben akkor van nyár, mikor a földszínén a tél tartja kezében a hatalmat. Ezt a jó pinczék téli melege és nyári hidege elég világosan tolmácsolja. Az a határ, meddig a tél és nyár hőmérséke behat, nálunk, hol az évi hőmérsék-ingadozás 50 fokra hág, mélyebben esik, mint az alig 35 fok hőmérsékváltozást érző Nyugoteuropában; nálunk tehát mind a nyár, mind kiváltképen a tél erélyesebben védi jogát következőjével szemben, mint nyugoton; vagyis nyugoton a tavasz napsugárai a földet könnyebben feloldozzák a tél gyöngébb fagykötelékei alól, mint Magyarországon és Erdélyben. — A frank gazda már február végén, de minden esetre martius elején elkezd szántani, mikor nálunk a földet még fagy tartja kötve. Nyugoteurópában tehát a föld felső kérgéből táplálkozó gabonafélék fejlődése már messze haladott, mikor az nálunk csak kezdetét veszi. A gyümölcsfákra nézve máskép áll a dolog. Ezek tápmezeje már kiterjedettebb; rövidebb és hosszabb gyökereik segélyével most a felsőbb, majd az alsóbb földrétegekből vehetnek fel tápszert fejlődésökre; tehát a felső földkéreg hőmérséki állapota nem oly döntő befolyású, mint a gabonafélékre. A fák életmunkásságánál a légkör nyirkossági állapota a döntő befolyású, ez eszközölvén a föld által adott tápszerek gyorsabb, vagy tunyább felvételét. Magyarország száraz levegője azt eszközli, hogy a fák, terjedelmes testök egész felszínén élénk kigőzölgést folytatnak; ez által gyökereiket a szerves és ásványféle tápszerek bő felvételére képesítik, gazdag táplálkozásra nyújtanak kedvező alkalmat, gyors kifejlődés munkáját közvetítik. A kifejlődés más egyenlő körülmények közt az elgőzölgés sebességétől függvén, nagyon természetes, hogy a nedvesebb légkörű, s így az elgőzölgésnek kevésbbé kedvező vidékek fái később fejlődnek. Ugyanis, fel lehet tenni, hogy két minden tekintetben egyenlő fa, egyenlő körülmények közt, hogy a kifejlődés bizonyos fokáig jusson, egyenlő mennyiségű nyirkot gőzölög el; de azon nyirokmennyiséget rövidebb idő alatt elgőzölgi természetesen az, mely a száraz levegőjü Magyarországon foglalna helyet, mint netalán Nyugoteurópa valamely vidékére helyzett párja. — Az a különbség, mely két helynek elgőzölgési sebessége közt mutatkozik, közel megegyez azon két hely növényfejlődése időkülönbségével. Ha Páris vidékén 40 nap alatt gőzölög el annyi nyirok, mint Buda környékén 30 nap alatt, természetesnek látszik, hogy ott a különben egyenlő körülmények közt tenyésző növény 10 nappal későbben jusson a fejlettség ugyanazon fokára, mint itt. Szóval: szárazabb lég a fák gyorsabb fejlődését eszközölvén, igen természetes, ha nálunk a fák hamarább virágzanak, mint Nyugoteurópában. Ellenben a gabonafélék virágzása, részint mert a termőföld hőmérséki viszonya miatt ezek nyugoton csaknem egy hónappal elébb kezdik a fejlés műfolyamát, részint mert az elgőzölgésnek kisebb tért is nyújtanak, nálunk és nyugoton csaknem azon időben fordúl elő.

Ha ama tüneményt akarjuk megérteni, miszerint nálunk a gabonafélék szalmája a szemhez másképen aránylik, mint Nyugoteuropában, azt kell megvizsgálnunk, ha vajjon bírunk e oly kísérleti adatokkal, melyek jogosítanak azon feltételre, hogy a növények által a földből felvett tápszer és az általok elgőzölgött víz mennyiségei között összefüggés létezik; és hogy az elgőzölgés mekkorasága mértékül szolgál a növények által elsajátított anyagok mennyiségének. Ide vágó kísérleteket *Lawes* és *Gilbert* vittek végbe; a búza, árpa, paszuly és borsó-növények által elgőzölgött vízmennyiséget, s ennek arányát az elsajátított szerves és ásvány-féle anyagokhoz tűzvén ki a nyomozás tárgyáúl.

Szerintök a gyarapodott száraz növényanyag aránya az elgőzölgött víz mennyiségéhez a következő (a száraz növényanyag mennyisége 100,000 súlyrész vízhez hasonlítva):

	szerves anyag súlyrész	ásványféle anyag s. r.		együtt
Búzánál	372,0	32,1	=	404,1
Árpánál	349,6	38,3	=	387,9
Paszulynál	435,2	43,7	=	478,9
Borsónál	346,4	39,6	=	386,0

A kísérletek ezen adatai mutatják, hogy az a növényanyag, melylyel 100,000 súlyrész víz gőzölgése alatt gyarapúlt a növény, a búzánál, árpánál és borsónál 386 és 404 súlyrész közt ingadoz, a mely aránylag csekély ingadozás mutatja, hogy a víznek növényeken való átmenése és némely növénytápszereknek növénytestté változása közt bizonyos viszony létezik. A paszuly e tekintetben elüt a többi növényektől; mert ennél a gyarapúlt száraz növényanyag 479 súlyrészt teszen; tehát csaknek $^1/_4$-del többet, mint a többieknél. Ha már meggondoljuk, hogy a paszulyban mennyivel több az azót tartalom, mint a felhozott többi növényekben, átlátjuk, hogy a paszulynak az elgőzölgött vízhez képesti nagyobb gyarapúltsága ennek nagyobb azót-tartalmával van összeköttetésben; és ezen tapasztalat mit akarna egyebet tolmácsolni, mint azt, hogy a növények által elgőzölgött víz a nem-azóttartalmú növényrészekkel szorosabb mennyiségi kapcsolatban van, mint annak azót-tartalmú alkatrészeivel. Igen, de tudomás szerint a gabona szalmája jóval szegényebb azóttartalmú, mint a magja, és így önkényt következik, hogy a sebesebb elgőzölgés kiváltképen a szalma nagyobb gyarapodását vonja maga után. Ezért van, hogy a sebes elgőzölgésnek kedvező száraz légü Magyarországban a gabona-szalma aránya a szemhez nagyobb, mint a nyirkos levegőjü Nyugoteuropában.

Azonban a légköri nyirkosság kitünő befolyása hazánkban, nem szorítkozik csupán az említett növénytenyészési feltűnő jelenségekre, hanem hatalma a növényzet más tüneményeire is kiterjed. Magyarország, jelesen pedig a Bánság termékenysége európai hírű. E termékenység kútfejét a termőföld physikai és vegytulajdonaiban felkeresendő, a bécsi cs. k. földtani intézet, tudomás szerint, hét különböző helyen gyűjtött talajt *Hauer* által vegybontás alá vétetett *). A talált alkatrészek, a nagy mennyiségű szerves anyagokat nem tekintve, semmi különös okot nem szolgáltatnak arra, hogy ezen talajok termékenységét alkatrészeik együletének tulajdonítsuk; a növényzetre különös hatást gyakorló kali és phosphorsavany nem mutatkoznak oly nagy mértékben, mint példáúl déli Oroszország kitűnő termékenységű úgynevezett fekete-földében. *Hauer* tehát úgy véli, hogy ezen talajok jóságát, termékenységét az éghajlat és fekvés előnyös befolyásain kivül főképen a különösen kedvező physikai tulajdonságok okozzák, és ő a szerves anyagok nagy mennyiségét tekinti a kedvező physikai tulajdonok egyik alkotója gyanánt, úgy vélvén, hogy azok a talajnak nagyobb melegedési képességet, a gyökerek behatásának a talajba nagyobb mezőt, s ekkép az ásványféle tápanyagok felvételének nagyobb lehetőséget kölcsönöznek.

A „Mezei gazdaság könyve“ írói *Hauer* közlött nézeteit közölvén, és azokban tökéletesen osztozván, kiemelik még a bánsági talajok termékenysége okai közt annak felette nagy porforma finomságát, mint a mi nagyrészben okozza azon talajok termékenységét.

Ily vélemények önkénytelenül is ama hosszasan divatozott theoriát juttatják eszünkbe, mely szerint a deret a hold csinálja; a mit ma már senki sem hiszen, tudván, hogy a dérképződésnek a hold csak történetes szemtanúja, nem pedig okozója.

Ha *Hauer* megfontolja, hogy a talaj physikai tulajdonságainak jóságát az szabja meg, ha a talaj képes a benne levő tápanyagokat a nyirok, a lég, a meleg és világosság könnyű bebocsátása által olylyá változtatni át, hogy a növények által felvehető legyen; ha meggondolja, hogy e tulajdonokkal a talajt a gondos mívelés mindenütt fel-

---

*) Jahrbuch der k. k. geographischen Reichsanstalt. 185?. 4. füz. 81—90. l. L. „Mezei gazdaság könyve“ I. köt. 240. l.

ruházhatja; ha meggondolja, hogy nem csak a szerves anyagok nagy mennyiségét, hanem a növényzetre különös hatást gyakorló kali és phosphorsavany-tartalmat is a cseh vagy német gazda még nagyobb mértékben is beviheti termőföldjébe, mint a minőben azok a bánáti talajban előfordúlnak, a nélkül azonban, hogy amazok növényzete a bánátival mérközhessék; ha mondom, mindezeket meggondolja *Hauer*, a bánáti föld kitünő termékenysége kielégítő okát magában a talaj alkatrészeiben nem találván, átlátta volna, hogy a talajon kivül még más elem is van, mely a termékenység minőségére lényeges befolyást gyakorol; ezen elem pedig nem egyéb, mint maga a légkör, a mely nemcsak hőmérséke, hanem szintúgy nyirkossági állapotának hatalmával is kormányozza a növényzet kifejlését. Magyar-, Oláh- és déli Oroszország száraz levegője ezen országok termékenységére épen oly döntő befolyást gyakorol, mint talajuk jó minősége. A Nílus iszapja Egyiptom száraz levegője nélkül a példabeszéddé vált egyiptomi termékenységet nem eszközölhetné. Avagy Angolhon guanózott, csontlisztezett talaja miért nem mutat bánáti növényzetet? mert nyirkos légköre a növények bő táplálkozásának nem kedvez, s nem teszi képesekké a talaj gazdag tápszereinek felvételére. Dús növényzet létrejöhetése nem csak dús tápszerek jelenlétét, hanem ezek bő felszivódhatását is igényli, tehát nemcsak gazdag talajt, hanem kedvező égalji meleg- és nyirkossági viszonyokat is követel.

Még kevésbbé megtartható a „Mezei gazdaság könyve“ írói által pártolt Dr. *Madden*-féle vélemény*) a fínom porforma anyag nagy jelentőségéről a talaj termékenyítésében. A fínom porforma anyagok physikai és vegytani hatása sokkal inkább ki van tisztázva, hogysem az iránt homályban lehetnénk; tudjuk, hogy az tulajdonképen az erélyes nedvvonzás, meleg-befogadás, gázsürítés közvetítésében nyilvánúl; tehát eszközlésében annak, hogy a talajbeli tápanyagok a növények által felvehető állapotba menjenek át. A porforma anyag igenis tápkészítő eszköz, de nem egyszersmind a felszivódás serkentője; tápszert készít a növénynek a nélkül, hogy ezt annak

*) Mezei gazdaság könyve. I. k. 240. l.

felvételére bírhatná. A porforma anyagban tehát rendkivűli termékenység főfő okát rejleni vélni, egyoldalú felfogás. A természet a hozzá intézett egyoldalú kérdésre egyoldalú feleletet ad!

Ha Magyarország egyszerre oly nyirkos légkör birtokába jutna, milyennel Angolhon bír: mind tokaji és más jeles borai dicsősége, mind pedig a bánáti talaj hírneves termékenysége nagy mértékben devalválódnék. Ha a délnyugoti szél a tengermelléki égalj jellemét ruházza légkörünkre, s azt a növénytenyészés egész ideje alatt megtartja, a nedves és borús napok sem jó szőlőt, sem gazdag gabona-termést nem hoznak létre. Ha a szűk esztendők időjárására visszagondolunk, azt látjuk, hogy azok kitűnő nyirkosság által tűntek ki, s lettek szomorúan emlékezetesek. — Avagy az $181\frac{6}{7}$-iki éhség nem ezen évek rendkivüli nyirkosságában találja-e nemző okát? S ugyan mit hirdetne ez egyebet, mint azt, hogy légkörünk közép, vagy szokott nyirkossági állapota döntő befolyást gyakorol hazánk jótékony égalja meghatározásában.

A mondottakban, úgy vélem, ki van mutatva:

1. Hogy az endosmos-féle munkásságot a légkör nyirkossági állapota szabályozza.

2. Hogy a növények gyarapodására szolgáló anyagok mennyisége az azok által elgőzölgött víz mennyiségével öszszefügg, s mindkettő a légkör nyirkosságával visszás arányban van.

3. Hogy szárazabb levegő, dúsabb növénytáplálkozás eszközlése által a talaj elég nyirkos volta mellett, dúsabb növényzetet és erőteljesebb növényegyéneket hoz létre.

4. Hogy hazánk némely növénytenyészési jelenségei, melyek eddigelé nem voltak megfejtve, légkörünk nyirkossági állapotában találják magyarázatukat.

SZABÓ JÓZSEF ÉS KOVÁCS GYULA II. tt.

ÉSZREVÉTELEIK EZ ELŐADÁSRA.

I.

Tekintetes Akademia!

Az imént hallott értekezést egy a haza előtt ismeretes meteorolog írta; érdemeit a meteorologia terén nem csak ismeri az Akademia, hanem méltányolni is volt alkalma. Tesz azonban kitéréseket értekezése folytán a földtan, a talajisme, a vegytan körébe oly modorban, söt néha annyira alap nélkül, hogy megjegyzéseket tenni kötelességemnek ismerem.

A földtanra nézve Tokaj vidékéről azt állítja, hogy ott a *porphyrképlet* van kifejlődve, hogy a szőlőhegyi talaj *porphyrmálladékból* áll!

Mindenkitől megkivánhatni, hogy ha valami tárgyról ír a dolog valódi állását, a mennyire csak lehet, kitudni igyekezzék. Itt értekező egy nem menthető múlasztásnak bünével vádolható. Beudant munkájának megjelenése, tehát 1820. óta mindenki tudhatja, hogy Tokaj környékén nem a porphyr, hanem a *trachytképlet* van kifejlődve.

A szőlőhegyek talajára nézve pedig Zeuschner krakkói tanár, ki a Kárpátokat Krakkótól kiindúlva évek folytán át vizsgálta egész Tokajig, a „Jahrbuch der Geol. Reichsanstalt“ valamelyik füzetében, a *löszről* értekezve, határozottan mondja, hogy a szőlők talaja *lösz*, azaz egy bizonyos neme a laza agyagnak, mely egész földtani képletet alkot, s mely többi közt a szegszárdi szőlők talaját is kizárólag, a budaiakét pedig helyenként képezi.

Különben is gyenge dolog azt bizonyítani akarni, hogy a bor finomsága a talajhoz szorosan kötve nincs, hisz ez minden bővebb iskolakönyvben foglaltatik. Ez a szakemberek közt általánosan ismert tény.

Eger vidékéről azt mondja, hogy ennek meszes talaja van.

Ez csak igen is részben áll, mert meszes talajon csak az egyetlen Eged déli oldalán díszlenek a szőlők, mi az egész szőlőcomplexnek kis töredéke, a többi talaj vagy tajtkő-törgyület, vagy *neogén-homok*, vagy *lösz*. Ezt saját észlelésem után mondhatom.

Itt nem nézetkülönbségről van szó, T. Akademia, hanem alaphiányról a kiindúlásban, tényekről melyek nem állnak, és a melyekre okoskodások építtetnek s következtetések vonatnak.

Lehetetlen azonban megállani, hogy a modorra nézve is néhány észrevételt ne tegyek.

Szól a szerző egy *felkapott* bécsi analysisről. A ki ezen munkát kellőleg felfogja, az kellőleg méltányolja is, és az nem szólhat róla mint valami divatdologról, hogy felkapták vagy nem kapták fel; hanem szoros kötelességének ismeri azt, mert ismeretünket hatalmasan segíti elő, minden alkalommal fel is használni.

Végre csak egyet emelek még röviden ki. Szerző Hauer és a M. Gazdaság Könyve írói nézete ellen kel ki. Ezt, ha ellennézetben van, mindenki teheti, de a modorra nézve van szabály, bizonyos fokozat, mely ellen vétenünk nem szabad. Hauer és a M. Gazdaság Könyvének írói egész szerényen bevallva, hogy a bő termés feltételeit a tudomány jelen állásában kellőleg kimagyarázni nem lehet, de mivel azt a vegytani összetétel nem fejti meg, tehát az éghajlat és fekvés előnyös befolyásain kivül a physikai tulajdonságokban keresendő. A M. Gazd. Könyvének írói még ezen kivül a fínom por-alakot emelték ki.

Értekező úr erre így felel: „ily vélemények önkénytelenül azon theoriát juttatják eszünkbe, hogy a deret a hold csinálja", és átmegy Hauer leczkézésére ily modorban „ha Hauer megfontolja „ezeket és ezeket" akkor átlátta volna" stb. Ezt úgy, mint a M. Gazdaság Könyve íróinak felfogását egyoldalúnak mondja, és mindezekre kimondja, hogy a talajon kivül a légkör hőmérséke és nyirkossági állapota is foly be a növényzet kifejlésére.

Ez, így a maga általánosságában, oly két kiállítás, hogy azt kétségbe vonni senkinek sem jutott eszébe; de értekezőtől, mint meteorologtól, ennek a tényezőnek részletes mennyileges befolyását szeretnők tanulni.

II.

Osztozván az előttem szólott Szabó barátom nézeteiben, saját észlelésem után mondhatom, hogy a Hegyalja szőlőinek talaja legnagyobb részben egy, sajátságos, homokkal és mészszel kevert agyag, mely Magyarországon és Erdélyben felette elterjedett, és melyet a geologusok „*lösz*"-nek neveznek. Egypár helyen a szőlők, különösen azoknak felső vége perlit-, trachyt- vagy tajtkő-tuff málladék ugyan, de ezek csak kivételek, s nevezetesen Tokajban a lösz nagyon kifejlett képlet.

A KÜLÖNMÉRETŰ VETÜLETEK MENNYISÉGTANI MEGALAPÍTÁSA.

Előadta martius 12. 1860.

WEISZ JÁNOS ARMÍN l. t.

ELŐSZÓ.

A vetületek eszméje már a legrégibb időkben ismeretes vala, alkalmazása azonban eleinte csak kizárólag az építészetben fordúlt elő, s ott is csak egyszerűbb elemeiben, mint a tervek alaprajzaiban, hossz- és kereszt-szelvényekben, stb.

Mint rendszerezett tudomány csak a múlt század végén, a nagy eszmékben dús franczia forradalom ideje alatt tűnik először föl; Monge Gáspár volt az első, a ki az akkoron felállitott párisi műegyetemnél az általa rendszerezett vetülettant előadva, azt a tudományok sorába emelte, s széles alkalmazását, kivált az erőditésekre kimutatta.

Követője Hachette e tudományt felkarolva, azt tetemesen megbővítette és nyomozásait egy nagyobb munkában közölvén, a vetülettan csakhamar megkedveltetett; csak hogy a későbbiek azután többet is kivántak tőle, mint a mit az valóban nyújthat; e tan segítségével ugyanis most már többen igyekeztek a mennyiségtan feladatait szerkesztés által könnyebben és egyszerűbben feloldani, mint az számítás útján lehetséges; és ezen működés valóban nagy részt sikerült is, de nem kell megfeledkeznünk, hogy az ily úton nyert eredményektől csak annyi pontosságot várhatunk, a mennyit egy jól meghegyzett rajzón általában adhat. Alig vagyunk ugyanis képesek a legnagyobb szorgalom mellett egy bécsi hüvelyk hosszuságú vonalra rajzónnal 400 pontot egymás mellé rakni, így tehát egy oly kör kerületén, a melynek sugara egy bécsi hüvelyk, minden legfinomabb pontnak legalább egy $8\frac{1}{2}$ percznyi középponti szög felel meg, kisebb sugarú köröknél a hiba természetesen aránylag növekedik.

Legnagyobb érdemet szerzett magának a vetülettan körül Olivier 1842-ben megjelent nagy munkája által, melyet valóban a vetülettan első tekintélyének lehet tartani.

Újabb időben az e tárgybani dolgozatok körül legnevezetesebbek Leroi, Adhemar, Gugler, Möllinger, Kaufman, Hönig, Mossbrugger stb. munkái.

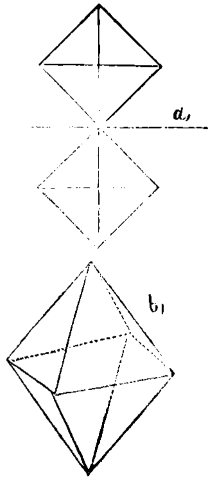
Honunkban még eddig e tudománynak csak nyomára is alig akadunk, noha ez képzi alapját az építészettannak, és a századunk haladása egyik fő tényezőjének, a géptannak.

Tekintve azért e tudomány fontosságát, kötelességemnek tartom azt, a mennyire csekély erőmtől kitelik, legalább egyes részleteiben megismertetni, s e czélból választám jelen értekezésem tárgyáúl a külön méretü vetületeket.

1. §.

A vetülettan elvei szerint minden térmennyiség két vetület által szorosan meg van határozva, elannyira, hogy ezen vetületekből a térmennyiségnek nem csak alakjára, hanem annak minden egyes méretére is biztos következményt lehet vonni.

Gyakorta megtörténik azonban, hogy a testek vetítése alkalmával két vagy több határzó vonal egymást elfedi, és ilyenkor néha még a gyakorlott szem is alig képes a nyert vetületből a test valódi alakját maga elé idézni; annyival kevésbbé, minthogy némelykor még ugyanazon vetületnek, különböző megnevezés folytán, különbző alak is felelhet meg. Így például a köbnek mindkét vetülete rendes négyszöget képez; ámde ugyanezen vetületeknek megfelelhet egy épszögű négyszög is, mely mind a két vetületi síkhoz 45 fok alatt van meghajtva, és a melynek kisebb oldala úgy viszonylik a hosszabbikához, mint egy a kettőből vont négyzet-gyökhöz.



Igy hasonlóan az (a) alatti mellékelt idom egy rendes nyolczlap vetületeit ábrázolja, s nehézség nélkül meg fogja engedni mindenki, hogy a (b) alatt előállított *egy* vetülete ugyanazon testnek sokkal tisztább fogalmát nyújtja, mint az előbbi *két* vetület; s ha még hozzáteszszük, hogy a vonalak méreteit a (b) alatti vetületből szintoly pontossággal le lehet venni, mint amazokból, könnyen kivilágl ik ez utóbbi előállítási módszer czélszerűsége.

2. §.

Az ilyféle vetületek szerkesztésénél az egész eljárás azon egyszerü megjegyzésen alapúl, hogy minden test czélszerü forgatás által oly állásba hozathatik, melyben a határvonalak vetületei egymást el nem fedvén, a vetületből a test alakját könnyü szem elé idézni.

E forgatás végbevitelére először egy függélyes tengely vétetik fel a testen keresztül, vagy azon kivül is, a mely tengely körül a test úgy mozdíttatik, hogy annak minden pontja egy adott, vagy tetszőlegesen választott szögnek megfelelő körívet írjon le. De ezen egy fordítás elegendő nem lesz, mert ez által a felvett tengelyre merőleges síkok irányukat nem változtatják; szükséges lesz tehát az első forgatás végbevitele után még egy másik az előbbitől különböző irányú tengelyt felvenni, s e körül a testet másod ízben talán β szög alatt fordítani el. — Ezen második tengely legczélszerűbben úgy választatik, hogy a vetületi tengelylyel legyen párhuzamos, mi által azt érjük el, hogy a test vetülete a fordítás által nem veszti el függőleges irányát; ha ugyanis egy vonal, melynek mindkét vetülete merőleges a vetületi tengelyre, ez utóbbi, vagy oly vonal körül fordíttatik, mely ezzel párhuzamos, akkor a vetületek iránya nem változik.

3. §.

Hogy bármely térmennyiséget hasonszerü eljárás által legyünk képesek előállítani, vonatkoztassuk azok határzó pontjait három egymásra merőleges összrendezői tengelyre, forgassuk magát ezen tengely-rendszert a rajtok már megjelölt metszékekkel és rendezőkkel együtt az említett α és β szögek alatt; határozzuk meg azután az összrendezőknek megfelelő pontokat, akkor ezek összeköttetése a test vetületét a kivánt forgatás után tünteti elő.

Legyenek tehát (1. ábr.) AB és AC a metszéki tengelyek, melyek már a harmadik, vagyis a rendezői tengely körül α szög alatt el vannak fordítva. Minthogy az AB és AC tengelyek legegyszerübben a fekvetületi síkban magában vétetnek fel, függvetületök az alapmetszbe esik; a harmadik függélyes rendezői tengely a fekvetületben A-ban pontosúl, függvetülete pedig A′ által van képviselve.

A második forgás végbevitelére szolgáljon az A ponton keresztül, az alapmetszettel párhuzamosan vezetett gh vonal (A) pont, mint a forgási tengelynek egy pontja változatlan marad, a BAC sík pedig úgy szinte az AF tengely β szög alatt hajtatnak meg.

Hogy az AB és AC tengelyek emelkedéseinek megfelelő vetületeket szerkeszteni lehessen, czélszerü lesz bennök bizonyos pontokat felvenni, talán az egység távolában, legyenek ezek B és C. Ezen pontok a forgatás alkalmával a gh vonalra merőleges köríveket írnak le, melyek fekvetülete Bg és Ch, függvetülete pedig b′g′ és b′h′ vonalak által adatnak. Hogy a β szögnek megfelelő emelkedést tekintetbe vehessük, szolgál a forgási tengelyre merőlegesen felvett MN segédsík, mely síkban ugyanis a forgatási ívek, valódi nagyságokban tűnnek elő. Az ezen sík által meghatározott b″ és c″ pontok tehát visszavetítve a b′ és c′ pontokat fogják megadni, melyeknek A-vali összeköttetése a tengelyek fekvetületét fogják képezni a fordítás után. Az A′b′ és A′c′ függvetületeket pedig az által szerkesztjük legegyszerübben, ha a g′b′ és h′c′ merőlegesekre a B és C pontok magasságait átvisszük a segéd MN vetületből. — A mi végre a magassági tengelyt illeti, ez szintúgy határoztatik meg a segédsík használatával, mint az előbbi két tengely, mint azt az ábra egyszerü megtekintése mutatja.

Ennek következtében a tengelyek új állásának fekvetületei: Ab, Ac és Af; függvetületei pedig: A'b', A'b' és A'f'.

Ez utóbbi vetületek a test oldalnézetét, az előbbiek pedig az ugyanazon állásnak megfelelő felülnézetét fogják megadni. A felülnézet azonban csak igen ritkán szokott használtatni, az oldalnézet elégséges levén arra, hogy az illető testről magunknak tiszta fogalmat szerezzünk.

4. §.

Ha a fordulási α és β szögek advák, akkor a tengelyek minél egyszerübb szerkesztésére nézve szükséges leend azon x és y szögek meghatározása az adott α és β szögek függvényeiben, melyeket a tengelyek függvetületei, úgy szinte azon w és z szögek meghatározása, melyeket ugyanazon tengelyek fekvetületei képeznek az alapmetszettel.

Az 1-ső ábrában AB egységül vétetett fel, minek következtében:

$$Ah = Bg = ab'' = \mathrm{Cos}\alpha$$
$$Ag = Ch = ac'' = \mathrm{Sin}\alpha;$$
$$b'g' = ab''\ \mathrm{Sin}\beta = \mathrm{Cos}\alpha\ \mathrm{Sin}\beta$$
$$c'h' = ac''\ \mathrm{Sin}\beta = \mathrm{Sin}\alpha.\ \mathrm{Sin}\beta;$$
$$\text{továbbá: } bg = ab''\ \mathrm{Cos}\beta = \mathrm{Cos}\alpha.\ \mathrm{Cos}\beta$$
$$\text{és } ch = ac''\ \mathrm{Cos}\beta = \mathrm{Sin}\alpha.\ \mathrm{Cos}\beta;$$
$$\text{tehát: } tgx = \frac{b'g'}{A'g'} = \frac{\mathrm{Cos}\alpha.\ \mathrm{Sin}\beta}{\mathrm{Sin}\alpha} = \mathrm{Sin}\beta\ \mathrm{Cot}\alpha \quad \ldots 1$$
$$tgy = \frac{c'h'}{A'h'} = \frac{\mathrm{Sin}\alpha.\ \mathrm{Sin}\beta}{\mathrm{Cos}\alpha} = \mathrm{Sin}\beta\ \mathrm{tg}\alpha \quad \ldots 2$$
$$tgw = \frac{bg}{Ag} = \frac{\mathrm{Cos}\alpha.\ \mathrm{Cos}\beta.}{\mathrm{Sin}\alpha} = \mathrm{Cos}\beta.\ \mathrm{Cot}\alpha \quad \ldots 3$$
$$\text{és } tgz = \frac{ch}{Ah} = \frac{\mathrm{Sin}\alpha.\ \mathrm{Cos}\beta.}{\mathrm{Cos}\alpha} = \mathrm{Cos}\beta.\ \mathrm{tg}\alpha \quad \ldots 4$$

mely képletek által az x, y, w és z szögek vannak határozva, az összrendezők tengelyeit tehát mind a két vetületben szerkeszteni lehet; de még tudni szükség, hogy mily arányban kell az illető tengelyekre felrakni a metszékeket és rendezőket; a valódi nagyságok helyett most ugyanis csak a vetületek veendők, a melyek, mint az ábra mutatja, minden tengelyen más-más rövidítésben fordúlnak elő, a miért is az ilyféle vetületek, hol α és β egészen tetszőleges, *háromméretű* vetületeknek neveztetnek.

Az idomból ismét a függvetület részére:

a szélesség $A'b' = \sqrt{Sin^2\alpha + Cos^2\alpha \; Sin^2\beta} = \sqrt{1 - Cos^2\alpha \; Cos^2\beta}$ 5

a hossz $A'c' = \sqrt{Cos^2\alpha + Sin^2\alpha \; Sin^2\beta} = \sqrt{1 - Sin^2\alpha \; Cos^2\beta}$ 6

Végre a magasság $A'f' = Cos\beta$ 7

ugyanis AB a szélességi, AC a hosszúsági, és AF a magassági tengelynek szokott neveztetni.

De A'b' szélességet még máskép is ki lehet fejezni, ha t. i. benne β szög helyett az α szög függvénye hozatik számításba, mi által ered a sokkal egyszerübb, és az alantabb leirandó szerkesztésre alkalmasabb minta:

$A'b' = Sin\alpha . \; Sec x$ 8

hasonlóan A'c' mintából β szöget kiküszöbölvén, s helyébe az y szög függvényét hozván bele, álland:

$A'c' = Cos\alpha . \; Sec y$ 9

Hasonló eljárás által találtatnak a fekvetületre nézve is e következő minták:

a szélesség $Ab = \sqrt{Sin^2\alpha + Cos^2\alpha \; Cos^2\beta} = \sqrt{1 - Cos^2\alpha \; Sin^2\beta}$ 10

vagy $Ab = Sin\alpha . \; Sec w$ 11

a hossz $Ac = \sqrt{Cos^2\alpha + Sin^2\alpha \; Cos^2\beta} = \sqrt{1 - Sin^2\alpha \; Sin^2\beta}$. 12

vagy $Ac = Cos\alpha . \; Sec z$ 13

végre a magasság $Af = Sin\beta$ 14

a kifejtettek folytán tehát minden vetületre négy lépték szükségeltetik; az *első* hossza egy tetszőleges egység; a többi *három* hossza pedig a felvett egységhez képest a nyert 7, 8 és 9, vagy a 11, 13 és 14 alatti képletek szerint határozandó meg.

Használatkor a test vetületeinek méretei vagy az adott egyszerü vetületekből (mint alaprajz és kereszt-szelvény) vagy ha lehet a testről magáról is levétetnek, hosszaságaik az egység-léptéken megméretnek, s a többi lépték segítségével megkurtítva az illető tengelyekre felrakatnak; nevezetesen a hossz és szélesség az A'b' és A'c' (vagy Ab, Ac) tengelyekre, a magasság pedig az ezen két metszék által meghatározott rendezőre a függvetületre nézve felfelé, a fekvetület részére pedig lefelé.

Az ily úton nyert eredmények, mint már említve volt, háromméretüeknek neveztetnek, mert mind a három tengelynek külön mérete vagyis külön léptéke levén, a megkurtítás is mindegyik tengelyen különböző.

Jegyzet. Az elmélet kiegészítésére nézve szükségesnek véltük a képleteket a fekvetületre szintúgy, mint a függvetületre lehozni, de ismételve kell arra figyelmeztetnünk, hogy gyakorlatban az oldalnézet tökéletesen elégséges arra, hogy magunknak a kivánt térmennyiségről tiszta fogalmat szerezzünk, s ezen okból a későbbi alkalmazásoknál, úgy szinte a mellékelt rajzokban mindenütt csak ezen egy vetület vétetett tekintetbe.

5. §.

A tengely-rendszer azonban kétméretű is lehet, ha t. i. a hosszasági és szélességi léptékek egyenlők, a mi nyilván csak akkor létesülhet, ha az első, vagyis az elfordulási α szög 45 foknyinak vétetett fel; az 5- és 6-ik mintából ugyanis könynyen következik, hogy A'b' és A'c' csak akkor egyenlők, ha $\alpha = 45^0$. Helyettesítvén tehát α helyett 45 fokot a talált mintákba, erednek ezen egyszerübbek:

$$tgx = tgy = Sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15$$

$$A'b' = A'c' = \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\,Cos^2\beta} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,Secx \quad \ldots\ldots \quad 16$$

$$\text{a magasság marad } A'f' = Cos\beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 17$$

mely mennyiségek már most, mint látjuk, csupán a hajlási β szög függvényei.

6. §.

De lehet végre a tengely-rendszer egyméretű is, ha ugyanis mind a három tengely csak egy lépték szerint kurtíttatik meg. Minthogy ezen rendszernél a hossz és szélesség ismét egyenlő, az elfordulási α szög szinte 45 foknyi leend, és csak az a kérdés támad, mennyire kell a testet meghajtani, hogy az egységnek megfelelő magasság épen annyira kurtúljon meg, mint a szélesség vagy a hossz; vagyis kerestetik β szög azon feltétel alatt, hogy

$$A'b' = A'c' = A'f'$$

De a 16-ik és a 17-ik képlet azonosításából következik:

$$\sqrt{1 - \tfrac{1}{2}Cos^2\beta} = Cos\beta$$

$$\text{és innét: } Cos\beta = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

mi által $tgx = tgy = \frac{1}{\sqrt{3}}$ vagy $Sinx = Siny = \frac{1}{2}$

és így $x = y = 30^0$

és $A'b' = A'c' = A'f = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Jegyzet. Az egyméretű vetületeknél tehát az elfordulási α szög mindig 45^0, a hajlási β szög pedig $= 35^0, 15' 51{,}8''$.

7. §.

Meg kell még említenünk, hogy a két- és háromméretű vetületek részére lehozott minták némi módosítást szenvednek a végre, hogy a szerkesztésnél könnyebben kezeltethessenek.

Gyakorlatban ugyanis a szögekkel, és azok függvényeiveli bánás igen alkalmatlan levén, az elfordulási α szög nem fokokban szokott adatni, hanem inkább azon viszony által, melyben keble áll pótkebléhez, vagyis adatik e következő arány :

$$Sin\alpha : Cos\alpha = p : q$$

hol p és q két adott szám; ezen arányból azután könnyen következik :

$$Sin\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}; \quad \text{és } Cos\alpha = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

mely értékek már csak a fent lehozott mintákban volnának helyettesítendők.

A hajlási β szög pedig úgy vétetik fel, hogy keble végszerű törtet képezzen; az ilyen szöget ugyanis legkönnyebb rajzban előállítani.

A p és q viszonyszámok, úgy szinte a β szög czélszerű megválasztásától függ a nyert alakok czélszerű állása is. Ha $p : q = 1 : 3$ és $Sin\beta = \frac{1}{8}$, akkor az ezen adatok segítségével alakúlt vetületek *Mohs*-féle vetületeknek neveztetnek, minthogy ezen adatokat használta Mohs a jegecz-minták előállítására; minthogy azonban ezen adatok bármely térmennyiség előállítására is igen alkalmasak, azért azok a vetülettanban általánosan el vannak fogadva.

Ezen vetületeknél $Cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$; és $Sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$

S innét: $tgx = \frac{3}{8}$; $tgy = \frac{1}{24}$

az elfordulási α szög tehát $= 18^0\ 26'\ 5,''8$
az emelési β szög pedig $= 7^0\ 10'\ 50,''7$
a szélesség léptékének hossza $= \frac{1}{8}\sqrt{7\cdot3} = 0\cdot33773\ldots$
hossz „ „ $= \frac{1}{8}\sqrt{57\cdot7} = 0\cdot949506\ldots$
és a magasság „ „ $= \frac{1}{8}\sqrt{63} = 0\cdot99216\ldots$

Jegyzet. Minthogy a magasság léptékének hossza csak $\frac{1}{125}$-el kisebb az egység léptékénél, azért gyakorlatban, ha a rajzok nem nagy mértékben készítendők, ez utóbbi lépték egészen mellőztetik, s helyette szinte az egység léptéke használtatik.

8. §.

A mi azonban a léptékek szerkesztését illeti, ez az előbbeniek szerint legegyszerűbben következőkép vitetik végbe:

Az OP egyenesre, 2-ik ábr. felrakunk O-tól kezdve tetszőleges nagyságú, de egyenlő 24 részt; az utolsó rész R végpontján emelt merőlegesre ismét 8 részt O-ig, azután O-t Q-val összekötve, lesz OQ az egység hossza, QOR szög pedig $=\alpha$; minthogy tang $QOR = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

Az RQ merőlegesre, továbbá feltevén 1 részt N-ig lesz ON a *hoszlépték* nagysága, mert $ON = OR$. Sec. NOR; de $OR = Cos\alpha$, mert OQ az egység, NOR szög pedig $=y$, mert tang $NOR = \frac{1}{24}$; helyettesítve az értékeket, lesz $ON = Cos\alpha$. Secy; a mi a 9-ik képlettel egyez meg.

R-től O-felé felrakván 3 részt L-ig, lesz OL a *szélesség* léptékének nagysága, mert $QL = QR$ Sec. LQR: de $QR = Sin\alpha$, LQR szög pedig $=x$, mert tang $LQR = \frac{3}{8}$; és így $QL = Sin\alpha$. Secx; a mi a 8-ik képlettel egyez meg.

Végre R-től Q-felé felrakván 3 részt K-ig, K ponton keresztül párhuzamost húzván OP-hez, míg az OR sugárral leírt RT körívet T-ben nem metszi, leaz TOR szög $=\beta$, minthogy keble $= \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$; ezen szög OM pótkeble tehát az OQ egységre nézve lesz a 7-ik képlet szerint, a *magasság* léptékének hossza.

Ha már most a 2-ik ábrában az OQ egyenesre átvitetik az egység, O középpontból ON *hoszszal* körív iratik le, melyet Q-ból QL *szélességgel* átmetszünk, ered az ONR háromszög melyben OQ=I; ON=*hossz*; és QN=*szélesség*; továbbá: az OM *magassággal* O-ból írt körívet, Q-ból szinte QL *szélességgel* metszvén, lesz OMQ háromszögben ismét OQ=I, OM= magasság és MQ=szélesség.

Húzzunk már most QM és QN vonalakhoz csekély távolságokban párhuzamosokat, ezek minden tetszöleges egységnek megfelelö *hosszat*, *szélességet* és *magasságot* fognak az illető léptékeken kijelölni.

9. §.

A kétméretű vetületeknél gyakorlatban β szög keblét $\frac{1}{6}$-nak szokás venni, mi által:

$$\text{tang}x = \text{tang}y = \tfrac{1}{6}$$

ezen vetületeknél tehát $\alpha = 45^{\circ}$, β pedig $= 9^{\circ}\, 35'\, 38,''6$

$$A'b' = A'c' = \tfrac{1}{6}\sqrt{18\cdot8} = 0\cdot71686\,..$$

$$A'f' = \tfrac{1}{6}\sqrt{35} = 0\cdot98601\,..$$

A lépték szerkesztésére nézve felrakunk a 3-ik ábrában OP egyenesre O-tól kezdve hat egyenlő részt R-ig, az R-beni merőlegesre szinte 6 részt Q-ig, és legyen az összeköttetési OQ vonal az egység hossza, akkor $OR = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Felrakunk továbbá RQ merőlegesre *egy* részt N-ig, lesz ON a *hossz* és *szélesség* léptékének nagysága, mert

$$ON = OR \text{ Sec. } NOR$$

de NOR szög=y, mert tang NOR=$\frac{1}{6}$, és azért

$$ON = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \text{ Sec}x.$$

a mi a 16-ik képlettel egyez meg.

Húzzunk most még N ponton keresztül párhuzamost OM-el, míg az OR sugárral leírt RT ívet T-ben nem metszi, lesz TOR szög=β, minthogy keble $=\frac{1}{6}$; ezen szögnek tehát OM pótkeble az OQ egységre nézve nem egyéb, mint a *magasság* léptékének hossza, a 17-ik képlet szerint.

Ha tehát a 3-ik ábrában átvitetik OQ egyenesre az egység hossza Q-ig, O-ból OM *magasság* sugárral körív vonatik, melyet Q-ból ON *szélesség* sugárral N pontban metszünk, akkor OQN háromszögben az NQ-hoz vont párhuzamosak az egységnek megfelelő magasság, hossz és szélesség megrövidítéseit fogják kijelölni az illető léptékeken.

10. §.

Végre az egyméretű tengelyrendszer léptékének szerkesztésénél képeztetik (3-ik ábra) O-nál egy 45 és egy 30 foknyi ív, úgy hogy QOR=45°, HOR=30°, és ha még RQ merőleges OR-re, lesz OR=I; OH=*hossz, szélesség* és *magasság*, mert

$$ON = OR. \text{Sec. } 30^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}. \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

mint lennnie kell (lásd 6. §.).

Szerkesztvén tehát a 3^b ábrában OQN háromszögöt, melyben OQ=I; ON=*hossz*, QN pedig tetszőleges, akkor a QN-hez vont párhuzamosak az egységnek megfelelő kurtított méretét fogják meghatározni az ON vonalon.

Fontos azonban az egyméretű vetületeknél, hogy itt a lépték egészen mellőzhető, minthogy minden méret egyenlő arányban rövidül meg. A léptékkel és lépték nélkül készült vetületek tehát egymástól csupán nagyságra nézve lehetnek különbözők; az előbbiek ugyanis úgy viszonylanak az utóbbiakhoz, mint $\sqrt{3}$: $\sqrt{2}$.

11. §.

Az előbbiekben kifejtett elvek alkalmazására szolgáljon, két egymáson nyugvó egyenes egyenközlap, négyzet alappal, melyeknek felül- és oldalnézete a 4-ik ábrában van előállítva. Az ezen test alaprajzában előfordúló AC és AB oldalak, melyek egymásra merőlegesek, szolgálhatnak egyúttal az öszrendezői tengelyekül.

Ezen testnek Mohs-féle vetülete a 4^a ábrában látható; itt ugyanis bc egyenes tetszőleges A pontjában meghúzatott az AF merőleges, azután A-tól balra felrakatott 8 egyenlő rész b-ig, a b-beni merőlegesre 3 oly rész B-ig; továbbá A-tól jobbra felvitetett 24 egyenlő rész, c-ig, a c-beni merőlegesre egy ilyen rész C-ig; ezek által meg van határozva a tengelyek iránya. Megméretett azután AC hossz a 2^a lépték egység vonalán és a hossz-vonaloni megrövidítés AC vonalra átvitetett, az AB méret pedig a szélesség szerint rövidülve AB-re; az alap negyedik pontja már párhuzamosok által határoztathatott meg. Az így nyert alap négy sarkpontjaiban AF-hez vonatnak párhuzamosak, melyekre a megrövidített magasság vitetik fel, s így tovább.

4^b-ben ugyanazon testnek két méretű vetülete szerkesztetett. Itt A-tól mindkét oldalra 6 egyenlő rész vitetett fel b és c-ig, az itt emelt merőlegesekre egyrész B és C-ig. A tengelyek iránya ily módon meg levén határozva, a többi eljárás azonos az előbb leírottal.

Ugyanez áll a 4^c-ben szerkesztett egyméretű vetületről is, csakhogy itt az AB és AC tengelyek 30 foknyi hajlással bírnak.

Ha az adott test alaprajzában alkalmas épszög nem fordúl elő, akkor az alapvetületen kivül vétetik fel az épszögű összrendezők tengelye, mint az 5-ik ábrában, mely négy mértani test csoportozatát állítja elő; ugyanis két henger közt van egy köb, és ezen alakzaton kivül egy egyenközlap, mely az előbbiek vetett árnyékát felfogja. A világossági sugár mindkét vetületben 45^0 hajlással vétetett fel a vetületi tengelyhez. — 5^a-ban vagyon e csoportozat Mohsféle vetülete előállítva, melyre nézve csak még azt szükség megjegyezni, hogy a benne előforduló körívek vetületének megnyerésére nézve a kör tetszőleges (talán 8) részre osztatik, az osztópontok vetületei azután az előbbi eljárás szerint határoztatnak meg, melyek végre folytonos görbe által összekötve, a kivánt vetületet fogják megadni.

12. §.

A különméretű vetületek alkalmazására igen czélszerűek az úgynevezett Archimedes-féle részarányos testek, melyek elméletét és kiszámítását Hirsch Meier fedadati gyüjteményeinek második részében tárgyalja, s melyek közöl az *egyszerűbbeket* már vetítve is fel lehet találni Kaufman és Schwenk vetülettani feladataikban; a miért is a mellékelt rajzokban ezen *utóbbiak* elhagyattak.

Ezen testek vetítésénél nagy könnyebbséget ad azon észrevétel, hogy valamennyi részarányos test csak a rendes testeknek mintegy módosítása vagy egybevetése.

Így a 6 és 6^a alatt vetített test a rendes 12 lapból úgy ered, ha ennek tömörszögei úgy metszetnek le, hogy a bezáró ötszögek, rendes tízszögekké alakúljanak. Áll tehát ezen test

12 tízszögből, és 20 háromszögből. Minden tömörszöge két 144° és egy 60° szög által képeztetik.

Szintazon módon ered a rendes 20 lapból a 7 és 7a alatt előállított test. A tömörszög levágása által erednek a rendes ötszögek, a bezáró lapok pedig 6 szögekké alakúlnak. Áll tehát ezen test 20 hatszögből és 12 ötszögből, tömörszöge képeztetik két 120° és egy 108° szög által.

A 8 és 8a alatti test ismét a rendes 12 szög tömörszögeinek elmetszése által ered; áll ezen test 12 ötszögből és 20 háromszögből, tömörszöge képeztetik két 108° és két 60° szög által, melyek felváltólag következnek egymásra.

A 9 és 9a alatti egybevetési test ered a rendes 12 lapból, élei és tömörszögei levágása által, és ennek folytán áll: 12 ötszögből, 30 négyszögből és 20 háromszögből; egy tömör szög képzésére egy 108°, két 90° és egy 60° szög egyesül.

A 10 és 10a alatti vetületek egy olyféle testhez tartoznak, mely a köbből az által eredt, hogy először élei, azután tömörszögei metszettek le. Áll ennek folytán 6 nyolczszögből 8 hatszögből és 12 négyszögből.

Szinte ezen eljárás szerint ered a rendes 12 lapból a 11 és 11a alatt ábrált test, mely 12 tízszögből, 30 négyszögből és 20 hatszögből áll. A tízszögek a régi ötszögek irányával azonosak, az élek helyett a négyszögek, a tömörszögek helyett pedig a hatszögek állottak elő.

Végre a 14 és 15 alatti két test szinte a rendes testekből eredt, és pedig az előbbi a köbből, az utóbbi a rendes 12 lapból, de még eddig nem sikerült feltalálnom azon összeköttetést, melyben a 4 szöget és illetőleg az 5 szöget koszorúként befogó háromszögek egymáshoz állanak. Mind a két test kezelése igen bajos, minthogy a lapok hajlási szögeinek háromszögtani függvényei csak harmad-fokú egyenlet által fejezhetők ki, s már Hirsch Meyer is mellőzi ezen okból a végképi kiszámítást, mint olyat, mely igen kényelmetlen hosszú mintákra vezet. — Vetülettani előállítása is ezen két testnek csak az által sikerült, hogy az említett hajlási szögek szerkesztés által közelítési úton határoztattak meg. A 14-ik alatti test áll 6 négyszögből és 32 háromszögből, de úgy, hogy az egyik négyszög oldala a többi négyszög oldalainak bármelyikével se párhuzamos. A 15-ik alatti test áll 12 rendes ötszögből és 80 háromszögből.

Az előbbi testben a négyszögek síkjaik meghosszabbítása által ered a köb, ha pedig a négyszögek középpontjai köttetnek össze, ered a nyolczlap.

Az utóbbinál az összegeken keresztül vezetett síkok adják a rendes 12 lapot, ha pedig az ötszögek középpontjai köttetnek össze, ered a rendes 20 lap.

Végezetül még ezen részarányos testek közé számíttathatik ama két nevezetes test, mely csupa ferdény által létesül, és pedig:

1) A 12 és 12a alatti ferdény 12 lap áll 12 ferdényből, melynek hegyes szöge közel $70\frac{1}{2}^{0}$, a tömörszögei pedig kétfélék, ugyanis egy tömörszög képzésére egyesül felváltva egyszer 4 hegyes, azután 3 tompa szög.

2) A 13 és 13a alatti test áll 30 ferdényből, melyeknél a hegyes szög közel $63\frac{1}{2}^{0}$, a tömörszög képzésére ismét felváltva vagy öt hegyes, vagy három tompa szög egyesül.

AZ Ó-BÉBAI ÁSVÁNYVÍZ VEGYBONTÁSA,

ÉS HAZÁNK ÁSVÁNYVIZEIRŐL ÁLTALÁNOSAN.

Előadta april 16. 1860.

NENDTVICH KÁROLY, rt.

Az ó-bébai ásványvíz dús forrása a múlt évi tavaszszal találtatott fel. Ő méltósága báró Sina bánáti jószágaihoz tartozó Ó-Béba nevü falu tőszomszédságában létezik, Szegedtől mintegy három, Oroszlámostól pedig, mint a temesvári vasút legközelebbi állomásától, csak egy mértföldnyi távolságra esik.

Torontál megye termékenysége által annyira elhíresztelt rónaságán fekszik, mely talajdús, minden mesterséges trágyázást nélkülöző földében a világszerte elhirhedt bánáti búzát termeszti.

A forrás kútba van foglalva, milyeneket a magyar rónaságon mindenütt találunk. E kút mélysége egész fenekéig

4½ ölet mér, hol a víz mintegy három ölnyire felszáll. A kút átmérője felül 12, a vízszínén mintegy 9 lábnyi. Falai téglákkal vannak kirakva, s a víz nem csak fenekéről táplálja a kútat, hanem különböző magasságán oldalvást, és a téglák között is kibuzog. Úgy látszik tehát, mintha több források volnának, melyek különböző alkotással bírván a közös medenczében egyesülnek.

A föld, melyből a forrás kitör, felül egy 1½—2 lábnyi vastag kövér talaj-réteggel van fedve. Erre sárga 3—4 lábnyi vastag mésztartalmú agyag következik, mely alatt kékes agyag fekszik, melyből a forrás kitör. Mily viszonyban állanak a víz alkatrészei a föld alkotásához, melyből az kitör, a föld egyes rétegeinek későbben adandó vegybontása tanusítandja.

A kút az előtte való nap, hogy a víz vegybontásra meríttetett, egész fenekéig kimerve lőn, és másnap reggeli 7 óráig, tehát 12 óra alatt, ismét két harmadára meg lőn telve.

A vegybontásra szánt víz máj. 15-én 1859-ben reggel 7 órakor vala merítve. A légmérséklet 16° C. mutatott.

A víz physikai tulajdonságai.

A víz azon nap reggel, melyen az a vegybontásra merítve lőn, kevéssé zavaros vala, mivel a kút az előtte való nap kimeríttetvén, felzavarodott. E szerint több napi állás után sárgásszürke iszap ülepedett le, miután a víz tökéletesen tisztának és színtelennek látszott. Ha azt hosszabb ideig jól bedugott palaczkokban állni hagyjuk, azoknak belső falai számtalan kisebb-nagyobb sárgás barna pontokkal fedetnek, melyek közelebb vizsgálat után vas- és manganoxydból állani látszottak.

Ha a vizet pohárba öntjük, nem látunk belőle több apró gáz-gyöngyöket felszállani, mint a közönséges forrásvízből. Íze sós és keserűs egyszersmind.

A víz fajsúlya + 16-dik hőfoknál = 1,01124.

Hőmérséke a víznek máj. 15-n 7 órakor reggel 16 foknyi légmérséknél 11.5 C. fokot mutatott.

A víz vegytani tulajdonságai.

A. Minöleges vegybontása.

A habár keveset is gyöngyöző tulajdonsága a víznek, *szabad szénsavra* mutat, mely egyébiránt mészvíz által is bebizonyítható, melynek minden egyes hozzá öntött cseppje fehér felhőcskét idéz elő, mely azonban a többi vízzeli összekeverése által ismét elenyészik.

Ha a vizet felmelegítjük, a szénsav elszáll, s ha hoszszabb ideig forraljuk, megzavarodik, és mangán- és vasoxydtól sárgára festett válmány ülepszik le belőle.

A víznek minöleges vegybontása ennélfogva két részre oszlik :

a. A forralás által képződött válmány vizsgálatára.

b. A forralt, és válmányától megszabadított víznek vegybontására.

a. A forralás által képződött válmány vegybontása.

Ezen válmánynak vegybontása közönségesen ismert szabályok szerint vitetett végbe. Találtattak pedig ennek nyomán következő alkatrészek benne :

Szénsavas mész.

Szénsavas magnesia.

Vasoxyd.

Manganoxyd.

Aluminiumoxyd.

Kovasav.

Phosphorsav.

b. A forralt víz minöleges vegybontása.

A képzett válmányból leszürt víz további befőzés alatt jegeczes válmányt rakott le, mely kénsavas mészoxyd vala, és azon arányban növekedett, melyben a befőzés folytatva lőn. Ebből az következik, miszerint a víz szénsavas égvényt (alkali) nem tarthat magában. A további általános szabályok szerint eszközölt vegybontás következő alkatrészeket mutatott ki :

Aljakat.

Kalit.

Natront.

Ammoniakot.

Meszet és
Magnesiát.
Savakat vagy azokat képviselő sóképzőket :
Kénsavat.
Salétromsavat.
Kovasavat.
Chlort.
Jodot.

Azon alkatrészek kipuhatolására, melyek többnyire csak igen csekély mennyiségben találtatnak valamely ásványvízben, mint : a Baryt, Strontian, Lithion, Phosphorsav, Jod és Brom, következő útat választottam.

10 kilogramme víz szénsavas nátron hozzáadása mellett, míg az kevessé túlnyomó nem lett, és kissé égvényes hatás be nem következett, egy porczelláncsészében egész a szárazságig elpárologtatott.

A száraz maradvány porrá törve, kevessé izzítva, ezután 3 részre *a. b. c.* elosztva.

Az *a* rész vízzel öntetett meg, ezután sósav a túlmennyiségig hozzáadva.

Része az oldatnak vasra kémleltetett, a többi hydrothiongáz által kezelve, ezután 24 óráig veszteg állva hagyatott. A válmány, mely csak kénből állott (mi valamennyi hydrothiongáz által savanyú oldatból kiválasztható érczek távollétére mutatott) leszüretett,és a leszürt folyadék molybdänsavas Ammoniak által phosphorsavra kémleltetett. A csekély mennyiségben képezett sárga válmány *phosphorsavra* mutatott.

A *b.* rész fluorra vizsgáltatott meg. E czélra vízzel hevíttetett meg, s az oldathoz egész addig calciumchlorid adatott, míg válmány képeztetett. A válmány leszüretett, jól kimosatott, megszáríttatott és izzítatott, az izzított maradvány vízzel megöntve, hozzá eczetsav túlságig adva, ezután vízfürdöben egész a szárazságig lepárologtatva vala. A száraz maradvány ezután vízzel kifőzve, az eczetsavas sók oldata pedig leszürve, és az oldatlan rész fluorra vizsgálva vala. Fluor azonban nem mutatkozott.

A *c.* rész,mely az egész száraz maradványnak felét tette, vízzel több ízben kifőzetett, az oldat leszüretett, s a maradvány többször forró vízzel kimosatott. E szerint nyertem vizenyős oldatot α és oldhatatlan maradványt β.

A vizenyős α oldat egész addig elpárologtatott, míg igen töménynyé nem lett és nagyobb része ki nem jegeczedett. A hátramaradt anyalúgból néhány csepp óraüvegre adatott, kevés sósavval megsavanyíttatott, és curcumapapirral bórsavra kémleltetett. Azonban a curcumapapír barnára festve nem lőn, tehát bórsav nem is volt jelen.

A bórsavra vizsgált folyadék maradványa a tálczába visszaadatott, s annak egész tartalma a szárazságig elpárologtatott. A száraz maradvány egyenlő porrá dörzsöltetett, és két részre *aa* és *bb*-re osztatott.

Az *aa* rész 90% borszesszel ismételve vízfürdőben a forrásig hevíttetett, és az oldat még forrón átszűretett. A szeszes kivonat kevés kalioldattal vegyíttetvén, a borszesz róla csak kevés maradványig lepároltatott. A kihülés után kivált jegeczek vízben feloldattak, s a vizenyős oldat Brucin által salétromsavra vizsgáltatott. Ez alatt világos rózsaszínüre lőn festve a folyadék, mi a *salétromsav* nyomait tanusította.

A szeszes oldat maradványa ezek után egész a szárazságig lőn elpárologtatva, és a száraz maradék forró vízment borszesszel kivonatott, a szeszes oldat újra leszürve, a szárazságig elpárologtatott, a száraz maradvány kevés vízben feloldatott, az oldathoz kevés keményítő csiríz vegyíttetett, ezután pedig egykét csepnyi veres füstölgő salétromsav adatott. Az oldat erre ibolyszínüre festetett, mi által a *jod* jelenléte bebizonyíttatott.

Az oldat ezután az ibolyszín eltüntéig chlorvízzel túlmennyiségben vegyíttetvén, aetherrel jól rázatott. Az aether színét nem változtatá, mi a brom távollétét tanusítá.

A *bb* rész lithionra vizsgáltatott. E czélra vízzel, melyhez sósav a savanyú hatásig adva vala, hevíttetett, és csaknem a szárazságig elpárologtatott. A maradvány 90% borszeszszel vegyíttetett, az oldat leszüretett és a szárazságig elpárologtatott. A száraz maradvány vízben, melyhez néhány cseppnyi sósav adatott, feloldatott, az oldathoz kevés vaschlorid, ezután ammon kevés túlmennyiségben, és oxalsavas ammon (a phosphorsav és kevés mésznyomok eltávolítására) adatott, az oldat 12 óra múlva leszüretett, a szárazságig elpárologtatott, és az ammonsók eltávolítására enyhén izzíttatott. Az izzított maradvány kevés chlorvízzel (a jod és brom eltávolítására) és néhány csepp sósavval kezeltetett, ismét a szárazságig elpárologtatott, a maradvány újra vízben felolvasztatott, az oldathoz finomra eloszlatott higanyoxyd (a magnesia elválasztására) adatott, a szárazságig elpárologtatott, a maradvány kevéssé izzíttatott, és borszesznek aetherreli keverékével kezeltetett. A nyert oldat leszüretvén, elpárologtatás által sűríttetett, végre pedig a szeszes oldat meggyújtattatott. Az égő borszesz azonban azon színt fel nem vette, melynek következtében a lithion jelenlétére lehetett volna következtetni.

A vízben oldhatatlan β maradvány (c-től), mely nagyobb részt szénsavas mészből, szénsavas magnesiából, kénsavas mészoxydból, vasoxydból és manganoxydból állott, még barytra és strontiánra vizsgáltatott.

E czélra egy porczellántálczában föleresztett sósavval túlmennyiségben öntetett meg (kénsavat hozzáadni a nagymennyiségű kénsavas mész miatt, mi a kezelendő maradványban volt, szükséges nem vala), és enyhe melegnél a szárazságig elpárologtatott. A maradvány sósavval megnedvesíttetvén, forró vízzel többször kivonatott. Az oldat mész és magnesián kivül vasoxydot, manganoxydot és aluminiumoxydot tartott magában. A vízben oldhatatlan maradvány többnyire kénsavas mész és kovasavból állott, azonban lehetőleg barytot és strontiant is tarthatott magában. Ennek kipuhatolására ötannyi natronkalival platintégelyben megolvasztatott, az olvasztott tömeg vízzel kifőzetett, az oldhatatlan maradvány leszüretett és forró vízzel addig mosatott, míg chlorbarium a mosó vízre reactiót többé nem mutatott, ezután föleresztetett sósavban felolvasztatott, és az átszűrt oldathoz telített gypszoldat adatott. Azonban még 24 óra múlva sem mutatkozott zavarodás, tehát baryt és strontián jelen nem lehetett.

B. Mennyileges vegybontás.

A tűzálló alkatrészek meghatározása.

1. 100 gmm. víz platintégelyben vízfürdőben elpárolog-

tatott, és a száraz maradvány 180 C. fokig hevíttetett, ezután kénsav fölötti kihülés után megméretett. Nyomott 1.364 gmmot, mi 1000 részekre 13,640 tüzálló alkatrészeket tesz.

A kénsav meghatározása.

2. 500 gmm. víz sósav által megsavanyíttatott, ezután chlorbarium egész addig adatott hozzá, míg válmány nem képződött. A képződött válmány tökéletes leülepedése után leszüretett, forró vízzel kimosatott, megszáríttatott, izzíttatott és végre leméretett. Nyomott 6.246 gmmot. Ezek nyomán a kénsav mennyisége 1000 gmm. vízre 4.28594 gmmot tesz.

Egy másik kísérletben 250 gmm. víz ugyanazon kezelésnek lőn alávetve. Nyeretett 3.138 kénsavas bariumoxyd, mely 1000 gmm. vízre 4.30652 gmm. kénsavnak felel meg.

E két kísérletből mint középszám 1000 gmm. vízre 4.29623 gmm. kénsav jő.

A chlor meghatározása.

3. 500 gmm. víz fölеresztett salétromsavval savanyíttaték meg, ezután salétromsavas ezüstoxyd egész addig adatott hozzá, míg válmány nem képződött. A válmány tökéletes leülepedés után leszüretett, kimosatott, száríttatott és porczellántégelyben megolvasztatott. Nyomott 7.764 gmmot. Ebből a víz chlortartalma 1000 részre 3.8396-ra számíttatik.

Egy másik kísérletben 250 gmm. víz hasonló mód szerint kezelve 3,891 gmm. ezüstchloridot adott, mely 1000 gmm. vízre 3,8480 gmmnyi chlornak felel meg.

Mind a két kísérletből tehát a chlorra nézve 1000 résznyi vízre a középszám 3.844 leszen.

A kovasav meghatározása.

4. 1000 gmm. víz lombikban sósavval túlságig vegyíttetvén lassanként csaknem a forrásig hevíttetett, míg minden szénsav ki nem hajtatott, ezután platincsészében egész a szárazságig elpárologtatott. A sósavval kevessé megnedvesíttetett maradvány 12 óra múlva forró vízzel kezeltetett, az oldat leszüretett, a szürő jól kimosatott, száríttatott és elégettetett. A szürő elégetése után hátramaradt hamu nyomott a

szürö hamvának levonása után 0.019 gmm. Kevés sodával, a forrasztócsővel olvasztva tiszta és átlátszó gyöngygyé felolvadt, tehát tiszta kovasavnak tekintendő.

A vas, mangan és az aluminiumoxyd meghatározása.

5. A 4. alatt a kovasavról leszürt oldat előbb szalamiaoldattal, ezután ammoniakkal túlmennyiségben vegyittetvén, egy bedugható üvegbe adatott, melyben még annyi sárga ammoniumkéneggel vegyittetett, hogy az oldat a képzett válmány leülepedése után világos sárga szint mutatott. A jól bedugott üveg kevéssé megrázatott, és 12 órára félre tétetett. A sárgás szürke válmány, mely a vas, mangan és agyagföld egész mennyiségét magában foglalá, leszüretett, ammoniumkéneget tartalmazó vizzel kimosatott, ezután föleresztett sósavban felolvasztatott, az oldathoz néhány csepp salétromsav adatott, újra hevittetett és átszüretett.

Az átszürt oldat üvegbillikomban hevittetett és égvényes kalioldat túlmennyiségben hozzáadatott. A barnaveres válmány tökéletes kihülés után leszüretett és jól kimosatott. E szerint volt egy oldat *a.* és egy válmány *b.* jelen.

a. Az égvényes oldat sósavval túltelittetett, ezután tiszta ammon adatott hozzá addig, míg ez észrevehetően túlnyomó nem vala. A fehér pelyhes válmány tökéletes leülepedése után leszüretett, jól kimosatott és megszáritása után kiizzittatott. Nyomott 0.006 gmmot=aluminiumoxyd (timföld, agyagföld).

b. A barnaveres válmány, mely manganoxyd- és vasoxydból állott, a szürön meleg sósavban olvasztatott, a szürő jól kimosatott, és a sárga oldat ammonnal addig vegyittetett, míg barnásveres szint nem vett fel, és egy kis része a kivált vasoxydnak még a hevités után is tökéletesen fel nem olvadt. Ezen oldathoz borostyánkősavas ammonoldat addig öntetett, míg válmány képeztetett. Ez tökéletes kihülés után leszüretett, hideg vizzel kimosatott, ezután pedig föleresztett ammonnal megöntetvén, a szürőben megszárittatott, izzittatott és megméretett. Nyomott 0.007 gmmot. $= Fe_2\ O_3$.

A borostyánkősavas vasoxydról leszürt oldat minden mangant magában tartott. Ismét ammonnal vegyittetett, a válmány $=$ MnS leszüretett, jól kimosatott, újra sósavban felolvasztatott, és a mangan szénsavas natriumoxyd által meleg oldatból kiválasztatott. A szürön gyüjtött válmány szárítva, és izzítása után megmérve lőn. Nyomott 0.013 gmmot és mint *manganoxyduloxyd* $Mn\,O_1\,Mn_2\,O_3$ hozatott számadásba.

A mész és magnesia egész mennyiségének meghatározása.

6. Az 5-dik szám alatt nyert válmánytól leszürt folyadék az ammonkéneg felbontása végett sósavval túlmennyiségben vegyíttetett és a forrásig hevíttetett, ezután 24 óráig veszteg állva hagyatott, míg minden kivált kén leülepedett, mire átszüretett.

Az átszürt folyadék a mész és magnesia egész mennyiségét foglalá magában.

a. A mész elválasztása.

E czélra a savanyú oldat ammonnal egész az égvényes hatásig vegyíttetett, ezután oxalsavas ammon nagy túlmenynyiségben adatott hozzá. A válmány 24 óra után leszüretett, kimosatott, a szürőben megszáríttatott, ezután platintégelyben az izzás kezdetéig hevíttetett és megméretett. Nyomott 1.458 gmm $=$ $CaO.CO_2$ mi 0.8165 mészoxy dnak felel meg

b. A magnesia elválasztása.

Az oxalsavas mészről leszürt oldat kisebb térfogatra elpárologtatván, előbb ammoniakkal túlmennyiségben, ezután phosphorsavas natronnal vegyíttetett, míg válmány nem képződött. Ez 24 órai állás után 4 szürön gyüjtetett föleresztett ammoniakkal kimosatott, a szürőken száríttatott, ezután izzíttatott és megméretett. Nyomott 5.207 gmmot $=$ $2\,MgO.PO_5$ mi 1,8763 MgO-nak felel meg.

A tartós főzés által támadt válmánynak meghatározása.

7. 1000 gmm. víz, az elpárolgó víznek időnkénti pótlása közben, 2 óráig főzetett, a képzett válmány a tökéletes leülepedés után leszüretett, forró vízzel jól kimosatott, ezután föleresztett sósavban felolvasztatott. Az oldat szalamia-oldattal, ezután ammoniakkal kevés túlmennyiségben, végre kénammo-

niakkal vegyíttetvén, jól bedugott üvegben 24 óráig veszteg állva hagyatott. Sárgásszürke válmány támadt,mely minden vasat,mangant és agyagföldet (aluminiumoxydot)magában foglalt.

A válmányról leszűrt oldat a mész és magnesia azon részét foglalá magában, mely a főzés által a vízből kivált, tehát mint szénsavas sók benne voltak. Az oldat az ammonkénegnek elpusztítása végett sósavval a túlságig vegyíttetett, ezután a hydrothiongáz kihajtása végett a forrásig hevíttetett, az oldat a kivált kénről leszűretett, és belőle a mész és magnesia a fent előadott mód szerint kiválasztatott. E szerint nyeretett : szénsavas mészoxyd 0.481 gmm. és phorphorsavas magnesía 0.132 gmm. mely 0.0999 szénsavas vagy 0.0476 tiszta magnesiának felel meg.

A főzött víz alkatrészeinek meghatározása.

8. A víz forrása által támadt válmányról leszűrt víz meszet, magnesiát, kali és natront kénsav, chlor és jodhoz kötve foglalt magában. Benne csak a mész és magnesia, a 6-dik szám alatt előadott mód szerint, határoztattak meg. A mész mint szénsavas mész 0.992 gmmot, a magnesia mint pyrophosphorsavas magnesia 5.062 gmmot, vagy mint tiszta magnesía 1.8241 gmmot nyomott.

Az égvények (alkáliák) meghatározása.

9. 250 gmm. víz csaknem a forrásig hevítve, bariumoxydhydrat-oldattal túlságig vegyíttetett, mire az oldat a válmányról, annak tökéletes leülepedése után, leszüretett, és a baryt túlmennyiségének kiválasztására szénsavas ammonoldattal vegyíttetett, a képződött válmányról újra leszüretett, és a tiszta oldat platincsészében a szárazságig elpárologtatott, a maradvány kissé izzíttatott, újra vízben felolvasztatott, az oldatlanról leszüretett, sósavval túlságig vegyíttetett, újra szárazságig elpárologtatott, enyhén izzíttatott és megméretett. A chlorégvények összesen véve 1.527 gmmot nyomtak, mi 1000 részre kiszámítva 6.108 gmmot tesz.

A kali elválasztására az izzított sótömeg vízben újra felolvasztatott, az oldat annyi platinchloriddal vegyíttetett, a mennyi megkívántatott, hogy a natriumchlorid is ketted platinsóvá átváltoztassék, ezután csaknem a szárazságig elpárologtatott és 90% alkohollal vegyíttetett. Visszamaradt egy csekély világos sárga válmány oldatlanúl, mely borszeszszel kimosva és 100°-nál szárítva 0.034 gmmot nyomott. Ez 1000 részre 0.136 gmm. kaliumplatínchloridot teszen, mely 0.0415 kaliumchloridnak, vagy 0.0261 kaliumoxydnak felel meg.

0.0415 kaliumchlorid a föntebb nyert 6.108 chloralkaliak összes mennyiségéből levonva, marad a natriumchlorid számára 6.0665 gmm. mely 3.2165 natronnak felel meg.

Az ammon meghatározása.

10. 2000 gmm. víz kevéssé sósavval savanyíttatott meg, ezután görebben kevés térfogatnyira lepároltatott. A maradvány mésztejjel vegyíttetvén, a Liebigféle hűtő segítségével ²/₃ szedőbe lepároltatott, melyben kevés sósav volt öntve. A nyert folyadék egy pár cseppnyi platinchlorid hozzáadása után a vízfürdőben egész a szárazságig elpárologtatott, és a maradvány 90% borszeszszel megöntetett. Hátramaradt igen csekély mennyisége egy világos sárga jegeczes pornak, mely ammoniumplatinchlorid vala, melyet egyébiránt csekély mennyiségénél fogva megmérni nem lehetett, minélfogva az ammon is csak mint nyomok tekintendő.

A phosphorsav és a jod meghatározása.

11. E czélra 10 kilogramme víz, annyi szénsavas natron hozzáadása mellett, hogy az kevessé túlnyomó lett, a szárazságig elpárologtatott, a száraz tömeg egyenlő porrá töretett, s ez ismételve forró 90% borszeszszel kivonatott. E szerint támadt szeszes oldat a. és szeszben oldhatatlan maradvány b.

a. A szeszes oldat kezelése.

A borszesz a még meleg oldatról lepároltatott, miután előbb egy pár cseppnyi tiszta kalioldattal vegyíttetett; a száraz maradvány ezután vízment borszeszszel ismételve kivonatott, a borszesz erre, miután az oldat ismét 2 csepp kalioldattal vegyíttetett, újra lepároltatott, a száraz maradvány kevés vízben felolvasztatott, az oldat platincsészében a szárazságig elpárologtatott, és a maradvány enyhén izzíttatott. Ezután újra vízben felolvasztatott, az oldat sósavval kevessé túlmenynyiségben vegyíttetett, és hozzá palladiumchlorit adatott, míg válmány nem vált ki belőle. Ez 24 óra múlva leszűretett, vizzel kimosatott, és a már előbb megmért szűrőn + 70° C. száríttatott, és megméretett. A nyert palladiumjodűr 0.015 gmmot nyomott. Ez 10.000 részre 0.0105 gmm. jodnak vagy 1000 részre 0.00105 gmm. jodnak felel meg.

b. Az alkoholban oldhatatlan maradványnak kezelése.

12. Miután a vas, mangan és az aluminiumoxyd már az 5-dik szám alatt meghatároztatott, baryt és strontián pedig a víz alkatrészei között nem találtathatott: tehát az alkoholban oldhatatlan maradvány csak a phosphorsav mennyileges meghatározására használtatott. E czélra előbb vízzel, ezután sósavval öntetett meg, míg ez túlmennyiségben jelen nem volt. Az oldat szürés által az oldatlantól elválasztatott, ezután szalamiaoldat, végre ammon túlmennyiségben adatott hozzá, és a nyert válmány, mely minden phosphorsavat, vasoxyd, aluminiumoxyd, és magnesiához kötve magában foglalt, szűrés által elválasztva, jól kimosva, szárítva, elégetve, és a szűrő hamvával együtt szénsavas kalinatronnal pontosan keverve és a platintégelyben olvasztva vala. Az olvasztott tömeg vízzel kifőzetett, az oldat leszűretett, sósavval kevessé túltelíttetett, ammoniak adatott hozzá túlmennyiségben, ezután pedig néhány csepp magnesiumchloriddal vegyíttetett, és erős keverés után 24 óráig veszteg állni hagyatott. Azonban még 24 órányi állás után is oly kevés phosphorsavas ammoniak magnesia rakodott le az üveg falaira, hogy mennyileges meghatározása lehetetlen lőn. A phosphorsav ennélfogva mennyiségére nézve meg nem határoztatott.

Az összes szénsav mennyiségének meghatározása.

13. E czélra két üveg használtatott, mely üvegdugaszszal vala ellátva, s melynek mindegyike mintegy 300 köbcentimetert fogott magában. Mindegyikbe mintegy 50 köbcentimeternyi tiszta ammoniak és mészchloridból álló átszűrt keverék adatott, és a forrásnál kis lopóval 200 köb-centimeternyi épen merített vízzel töltetett meg. Erre az üveg jól bedugatván több napokig veszteg állva hagyatott, míg a

képződött válmány tökéletesen le nem ülepedett. Ezután az üvegek vigyázva felnyittattak, a tiszta folyadék a válmányról leöntetett, mely forró vízzel többször kimosatott, szürőn gyüjtetett, végre azzal együtt Mohr-féle szénsav-határozó készületbe adatott, és a szénsav ismert szabályok mellett meghatároztatott. Az első kísérlet 200 köb-centimeter vízre 0.150 a második 0.145 gmmot adott, s így közép számmal 0.1475 gmm. szénsavat, mi 1000 gmm. vízre 0.7293 gmm. szénsavat teszen.

A közvetetlen kísérletekből származó eredmények összeállítása.

	1000 rész vízre.
Kénsav 2-dik sz. szerint	4.2962.
Chlor 3-dik sz. szerint	3.8440.
Kovasav 4-dik sz. szerint	0.0190.
Aluminiumoxyd (agyagföld) 5-dik sz. sz.	0.0060.
Vasoxyd 5-dik sz. b. szerint	0.0070.
Manganoxyduloxyd 5-dik sz. b. szerint .	0.0130.
A válmány szénsavas mészoxydja 7-dik sz. szerint . . . , . . .	0.4810.
A válmány szénsavas magnesiája 7-dik sz. szerint	0.0999.
A főzött víz mesze (CaO) 8-dik sz. szerint	0.5555.
A főzött víz magnesiája (MgO) 8-dik sz. sz.	1.8241.
Kaliumoxyd (KO) 9-dik sz. szerint . .	0.0261.
Natriumoxyd (NaO) 9-dik sz. szerint. .	3.2165.
Jod 11-dik sz. szerint	0.0010.
A tűzálló alkatrészek összege 1000 részben	14.3893.
Ebből levonandó egy a chlorhoz hasonértékü oxygenmennyiség . . .	0.8662.
tehát lesz a tűzálló részeknek valódi tartalma	13.5231.
Az 1-ső szám szerint pedig tesz a tűzálló alkatrészeknek összege . . .	13.6400.

miből 0.1169-ből álló veszteség tetszik ki, mely részint a meg nem mérhető alkatrészek, részint a ki nem kerülhető veszteségek rovására lesz számítandó, részint pe-

dig kevés víztartalomnak lesz tulajdonítandó, mely 180 foknyi hőmérséknél, melynél a tűzálló alkatrészek tartalma meghatároztatott, a magnesium- és calciumchloridból egészen ki nem hajtathatott.

Az eredmények kiszámítása.

0.0070 vasoxyd ád vasoxydult . . .	0.0063.
mely szénsavat igényel	0.0038.
ennélfogva lesz szénsavas vasoxydul .	0.0101.
0.0130 MnO, Mn_2 O_3 megfelel manganoxydulnak	0.0129.
mely szénsavat igényel	0.0080.
ennélfogva lesz szénsavas manganoxydul	0.0209.
A 7-dik szám szerint a válmány tart meszet	0.2694.
mely szénsavat igényel	0.2116.
ennélfogva lesz szénsavas mészoxyd . . ,	0.4810.
A 7-dik szám szerint 0.0999 MgO. CO_2 tart magában tiszta magnesiát . . .	0.0476.
szénsavat	0.0523.
minélfogva a szénsavas magnesia összege	0.0999.

Ezekből kitetszik a szabad szénsavnak mennyisége.

A szénsav egész mennyisége t. i. a 13-ik sz. szerint		0.7293.
Ebből köt a vasoxydul . .	0.0038	
„ „ a manganoxydul .	0.0080.	
„ „ a mészoxyd . .	0.2116.	
„ „ a magnesia . .	0.0523.	
A kötött szénsav összege . .		0.2757.
Ehhez még egy hasonló szénsavmennyiség a ketted szénsavas sók képeztetésére . .		0.2757.
A szénsav összege a ketted szénsavas sókban . . .		0.5514.
Marad mint szabad szénsav .		0.1779.

A 8-dik sz. szerint tart magában

a főzött víz meszet : . .	0.5555.	
Mely kénsavat igényel . .	0.7396.	
Ennélfogva a kénsavas mésznek összege		1.3491.
A 9-dik sz. szerint van a vízben kali (KO)	0.0261.	
Mely kénsavat igényel . .	0.0222.	
A kénsavas kali összege . .		0.0483.
E szerint még visszamarad a kénsavból	3.4804.	
Mely magnesiából telít . .	1.7402.	
Innét a kénsavas magnesiának összege		5.2206.
A kénsav egész mennyisége a 2-d. sz. szerint	4.2962.	
Ebből igényel a mész . .		0.7936.
„ „ a magnesia . .		3.4804.
„ „ a kali . .		0.0222.
Az aljakhoz kötött kénsav mennyisége :	4.2962.	
A főzött víz magnesiája a 8 dik sz. szerint	1.8241.	
Ebből a kénsavhoz van kötve .	1.7402.	
Marad a magnesiából . .		0.0839.
Mely megfelel magnesiumnak .	0.0553.	
Ez igényel chlorból	0.1636.	
A chlormagnesium összege .		0.2189.
Marad chlor	3.6804.	
Mely igényel natriumból . . .	2.3901.	
A natriumchlorid összege . .		6.0705.
A 11-dik szám szerint tart a víz jódot	0.0010	
Mely igényel magnesiumból .	0.0001.	
A jódmagnesium összege .		0.0011.

Ellenőrség.

A víznek főzése által támadt üledék mesze	0.2693.

A főzött víz mesze a 8-dik szám szerint	0.5555.	
A mésznek összege . . .		0.8248.
A mésznek összes mennyisége a 6-dik szám a szerint .		0.8165.
hiány :		0.0083.
A válmány magnesiája a 7-dik szám szerint	0.0476.	
A főzött víz magnesiája . .	1.8241.	
A magnesia összege . . .		1.8717.
A magnesiának összes mennyisége a 6-dik sz. b. sz.		1.8763.
különbség :		0.0046.
Kénsav találtatott a 2.sz.szerint		4.2962.
Ebből van a mészhez kötve	0.7936.	
„ „ kalihoz	0.0222.	
„ „ magnesiához	3.4804.	
A kötött kénsav összege tehát lesz		4.2962.
Chlor találtatott a 3-dik szám szerint		3.8440.
Ebből van kötve a natriumhoz	3.6804.	
„ „ „ a magnesiumhoz	0.1636.	
A kötött chlornak összege .		3.8440.
Natron találtatott a 9-dik szám szerint	3.2165.	
Melyek megfelelnek natriumnak	2.3863.	
Ez chlorból igényel . . .	3.6802.	
A chlornatrium összege . .		6.0665.
Nyeretett pedig natriumchlorid számítás által		6.0705.
Lesz ennélfogva a különbség		0.0040.

Az egyes határozatok ennélfogva következő eredményt mutatnak:

Szénsavas mészoxyd . . .	0.3810.
„ magnesia . . .	0.0999.

Kénsavas mészoxyd . . .	1.3491.
„ kaliumoxyd . .	0.0483.
„ magnesiumoxyd .	5.2206.
Magnesiumchlorid . . , .	0.2189.
Natriumchlorid	6.0705.
Magnesiumjodid	0.0011.
Vasoxyd	0.0070.
Manganoxyduloxyd . . .	0.0130.
Aluminiumoxyd	0.0060.
Összeg :	13.5154.

A nyert eredmények összeállítása.

A május 15-dikén 1859-ben az Ilona-udvarban Ó-Béba mellett merített és vegybontásnak alávetett ásványvíz, ennélfogva következő alkatrészeket foglal magában a hozzá mellékelt mennyileges arányban:

	1000.0000. részben.	1 fontban. *)
Kénsavas kaliumoxydot	0.0483.	0.371.
„ calciumoxydot	1.4891.	10.361.
„ magnesiumoxydot . . .	5.2206.	40.094.
Ketted szénsavas calciumoxydot .	0.6926.	5.319.
„ „ magnesiumoxydot	0.1522.	1.169.
„ „ vasoxydul . . .	0.0139.	0.107.
„ „ manganoxydult .	0.0289.	0.222.
Magnesiumchloridot	0.2189.	1.681.
Natriumchloridot	6.0705.	46.621.
Magnesiumjodidot	0.0011.	0.009.
Aluminiumoxydot (agyagföldet) . .	0.0060.	0.046.
Phosphorsavat	nyomok.	
Ammoniakot		
Salétromsavat		
Szerves anyagokat)		
A tűzálló anyagok összege . . .	13.8021.	106.000.
Szabad szénsav	0.1779.	1.366.

Következtetés.

Az előadott vegybontás eredményéből következik, miszerint az ó-bébai ásványvíz a *sós keserűvizek* sorába tartozik,

*) 1 font 7680 szemer.

mely a benne foglalt keserűsó és magnesiumchlorid kis mennyisége miatt nem számítható ugyan az erősen hashajtó keserű vizek közé, melyekhez például a püllnaui és seidschützi vizek tartoznak; mindamellett azonban alkatrészeinél fogva mint erősen feloldó víz tekintendő, melynek feloldó hatása nemcsak a jelenlevő magnesiasók és a tetemes mennyiségű konyhasó jelenléte által feltételeztetik, hanem főképen a jód-magnesium tartalma által emeltetik. Az ó-bébai ásványvíz ennélfogva sós alkatrészei kisebb tartalma miatt inkább alkalmas hosszabb orvosi használatra, és az altest hosszadalmas bántalmainál, mint akármelyik más keserű víz. E víz ennélfogva haemorrhoidális bántalmakban, májbetegségekben, az altest szerveinek különféle bedugulásaiban (Anschoppungen), hosszadalmas has-szorulásokban, sárgaságban, megrögzött hideglelésben, és minden belőle származó betegségekben okszerű használat mellett kitűnő hatású lehet. Sajátszerű jellemet tulajdonít továbbá e víznek annak tetemes mangantartalma, mely e vízben nagyobb, mint akármely más keserű vízben, söt mint a legtöbb más ásványvizekben.

Ezekből következik, miszerint e víznek alkotása arra jogosít fel bennünket, hogy azt a legkitűnőbb és leghathatósb ásványvizek sorába fölvegyük, és hogy csak néhány kényelmes és jól felszerelt lakház felállítása és egy gondos gyakorló orvos felügyelése kivántatnék, hogy az ó-bébai forrás az ásványvizekben annyira szegény Bánátban sűrün meglátogatott és híres gyógyvízzé átalakíttassék. Ó-Béba e tekintetben a legkedvezőbb helyzetben van, annyira, hogy csak magas tulajdonosa bőkezűségétől függ, hogy belőle gyógyforrás alakíttassék, mely hatására és hírére nézve hazánk legelső gyógyvizei mellé állíttassék.

Szükségesnek találom az orvosokat az ásványvizek vegybontása megitélésénél egy különös körülményre figyelmeztetni, mely azoknál, kik a vegybontás menetét nem ismerik, söt a balneographoknál is, ferde nézetre nyújt alkalmat.

Midőn t. i. a vegyész valamely ásványvizet vegyileg felbont, az egyes alkatrészeket nem azon összeköttetésekben választja ki a vízből, melyben azok benne vannak. Legyen péld. valamely ásványvízben natriumchlorid és kénsavas magnesia, akkor mi nem a natriumchloridot és kénsavas magnesiát mint olyanokat nyerjük a vizből, melyben azok tettleg vannak; hanem meghatározzuk a kénsavat és a chlort külön, szinte úgy a natront és a magnesiát is külön. Midőn azután kész a vegybontás, azaz az egyes alkatrészek mind külön meg vannak határozva, jő a munka második része, t. i. a vegybontás által nyert *eredmények kiszámítása.*

Ámbár e munkánál bizonyos, *általánosan* elfogadott elvek szerint kell eljárnunk, mégis, miután ez elvek változatlanúl elhatározva nincsenek, némely esetben egészen a vegyész belátására van bízva, vajjon miként akar eljárni a savaknak az aljak közti felosztásában. Vegyük péld., hogy valamely ásványvízben a feltalált aljak közől következők vannak:

Calciumoxyd
Kaliumoxyd
Natriumoxyd és
Magnesiumoxyd;

a savak közől pedig kénsav és chlor. Mindkettő összesen véve épen elégséges a feltalált aljak telítésére. A kérdés tehát, mely ezután támad ez: vajjon miként lesznek e savak a feltalált aljak között elosztandók?

A kalium- és calciumoxydra nézve nincsenek kétségben a vegyészek, miután általában el van ismerve, miszerint a kénsav ez aljak iránt a legnagyobb vonzó erővel bir, tehát ezekkel a többiek előtt vegyülve gondoljuk. Ha tehát valamely ásványviz főzött részében calcium- és kaliumoxyd találtatott: akkor ezek mint kénsavas sók gondoltatnak az ásványvízben.

A legtöbb esetben felmarad még egy része a kénsavnak, és az egész chlormennyiség, melyek a natrium és magnesiumoxyd között lesznek elosztandók. Itt most az a kérdés támad: vajjon a natrium- vagy magnesiumoxydnak tulajdonítsuk-e a felmaradt kénsavat?

E kérdésre nézve eltérnek a vegyészek véleményeikben. Némelyek, mint péld., Berzelius, Fresenius és ezek után több mások, a kénsavat előbb a natriumoxyddal vegyítik, s csak azon részét a kénsavnak, mely még ezentúl fenmaradt volna, kötik a magnesiával össze. Ekkor tehát lesz az ásványvízben *kénsavas natriumoxyd*, *kénsavas magnesiumoxyd-* és *magne-*

siumchlorid, de nem lesz benne *natriumchlorid*. Ellenben ha a kénsav nem volna elegendő az egész natriumoxyd telítésére, akkor e czélra a chlor részét használjuk, míg annak hátramaradó része a magnesium telítésére fordíttatik. Ekkor lesz a vízben kénsavas natriumoxyd, natriumchlorid és magnesiumchlorid; de nem lesz kénsavas magnesiumoxyd.

Más vegyészek ellenben, s ezek élén Liebig, azon kénsavat, mely a calcium- és káliumoxyd telítése után fenmaradt, előbb a magnesiával vegyítik, s csak azon részét, mely ezután még megmaradt, a natriumoxyd magfelelő mennyiségével. A többi natrium ellenben chlorral vegyülve gondoltatik. Ekkor lesz a víz alkatrészei között felhozva kénsavas magnesia, kénsavas natriumoxyd és natriumchlorid; de hiányzandik magnesiumchlorid. Ha azonban a kénsav nem volna elegendő a magnesia telítésére, akkor egy része az utóbbinak, valamint a natrium is chlorral telítve vétetik. S ekkor lesz a víz alkatrészei között felhozva: kénsavas magnesia, magnesiumchlorid és natriumchlorid; de hiányzandik kénsavas natriumoxyd.

Látjuk tehát ebből, hogy többnyire csak a vegyész nézetétől függ, vajjon csak kénsavas natron és semmi kénsavas magnesia, ellenben csak magnesiumchlorid; vagy megfordítva csak kénsavas magnesia és semmi kénsavas natron, de helyette csak natriumchlorid hozassék fel az ásványvíz alkat részei között.

Az ebből származó anomalia leginkább feltűnő, ha a legújabb hydrographiákban egymás mellé állított vizek analysisét egymással összehasonlítjuk.

Így tartalmaz péld. Seegen „Hydrographie v. Europa" czimű legújabb munkája szerint az *ivándi* víz Ragszky vegybontása nyomán:

Kénsavas natriumoxydot,

Salétromsavas magnesiát és

Chlormagnesiumot, ellenben semmi kénsavas magnesiát és chlornatriumot.

A *püllnai víz* tartalmaz Struve szerint:

Kénsavas natriumoxydot

„ magnesiumoxydot és

Natriumchloridot; tehát semmi magnesiumchloridot.

Ellenben a *sedlitzi víz* kénsavas magnesiát és

Natriumchloridot, de semmi kénsavas natriumoxydot vagy magnesiumchloridot.

A *saidschützi víz* tart Berzelius analysise szerint:

Kénsavas magnesiát,

Salétromsavas „

Magnesiumchloridot és

Kénsavas natriumoxydot. Hiányzik benne egészen a natriumchlorid.

Míg ellenben a *kissingi ivóvíz* Liebig vegybontása szerint:

Chlornatriumot,

Chlormagnesiumot és

Kénsavas magnesiát, de semmi kénsavas natront.

A kissingi *sósvíz* ellenben Kastner szerint csak

Kénsavas natriumoxydot,

Natriumchloridot és

Magnesiumchloridot, ellenben semmi kénsavas magnesiát nem tartalmaz magában.

E néhány példából tehát azt látjuk, hogy némely ásványvizek vegybontásuk szerint kénsavas natriumoxydot és magnesiumchloridot, ellenben semmi kénsavas magnesiát és natriumchloridot; mások ellenben kénsavas magnesiát és natriumchloridot, ellenben semmi kénsavas natront és magnesiumchloridot, tartanak magokban; ámbár a dolgot megfordítva is lehetett volna adni, miután az alkatrészek egyik vagy másik elv szerinti elrendezése egyedül a vegyész kényétől függ. Innét lesz magyarázható az is, hogy két különböző vegyész egy és ugyanazon ásványvizet felbontván, látszólag különböző eredményre jutand, és különböző alkatrészeket hozand fel analysisében.

Az ilyen eltérés, mint magától következik, különbséget az ásványvíz hatásában nem idéz ugyan elő: de miután az orvosok a concret alkatrészekből itélik meg az ásványvíz gyógyerejét, az alkalmazásra való indicatiót az előadott alkatrészek szerint határozzák meg.

Így olvashatjuk az előbb idézett „Seegen Hydrographiájában“ az ivándi vízről: hogy miután csak kénsavas natront és magnesiumchloridot, ellenben semmi kénsavas magnesiát és natriumchloridot nem tart magában, tehát orvosi hatása lényegesen különbözik azon ásványvizektől, melyek kénsavas magnesiát és natriumchloridot, ellenben semmi kénsavas natront és magnesiumchloridot, tartanak magokban; pedig ép úgy lehetne, mint az előbbiekből kitetszik, a dolgot megfordítni.

Nem fejezhetem be e munkát, a nélkül, hogy néhány szót ne szólanék hazánk ásványvizeiről általánosan, különösen Kovács Endre tagtársunk értekezésére vonatkozólag.

Kovács Endre panaszkodik, miszerint hazánk ásványvizei azon figyelemre nem méltatnak, melyet azok érdemelnek, s ennek fő okát az ásványvizek analysise hiányában keresi. — Ámbár tagadni nem lehet, miszerint az ásványvizek analysise mintegy iránytűül szolgál az orvosnak, mely azt mutatja, vajjon mily betegségekben használandók azok; főleg oly ásványvizeknél, hol a szükséges tapasztalások egészen hiányzanak, még is, nézetem szerint, az analysis hiánya legkisebb részben sem lehet oka a hazai ásványvizek elhanyagoltatásának. Én jeles ásványvizeink elhanyagoltatása fő okát e következő két körülményben keresem:

Az egyik, véleményem szerint, egyedül orvosainkban lesz feltalálható. A mindennapi tapasztalás t. i. és fűszeráruseink raktárai kétségtelenül mutatják, miszerint orvosaink seltersi, máriafürdői, ferenczfürdői, egeri, pirmonti, gleichenbergi s számos más vizeket százanként rendelnek és itatnak betegjeik által; míg saját ásványvizeinkből alig van egy-kettő használatban.

Okát leginkább orvosaink kényelmében hiszem keresendőnek. A külföldi ásványvizek orvosi hatása a külföldi orvosok által meg van határozva és minden kézi könyvben terjedelmesen előadva. Meg vannak többnyire különös monographiákban írva, melyekben az esetek mind fel vannak jegyezve, melyekben a víz sikerrel használható, és már eddig is számtalanszor használtatott.

A mi ásványvizeinkről ellenben eddig vagy kevés, vagy semmi tapasztalások nincsenek, vagy ha vannak is, azok közhírré téve nincsenek, hanem kiki saját tapasztalásait magának tartja. Igen természetes tehát, hogy minden orvos sokkal kényelmesebbnek találja azon ásványvizeket ajánlani betegjeinek, melyeknek orvosi hatása ismeretes és az első rendű orvosok tapasztalásai által van megalapítva; mint ismeretlent, melynek hatása alapos tapasztalások által bebizonyítva még nincsen. De maga a beteg is nagyobb bizodalommal viseltetik ismeretes s csaknem minden ember szájában forgó ásványvízhez, mint ismeretlenhez, vagy legalább olyanhoz, mely általános elismerést eddig ki nem vívhatott magának.

Számtalan ásványvizeink közöl alig van egy-kettő, mely kereskedésbe átment és némely külföldieket kiszorított. Ide tartozik a szulini savanyú víz, ide tartoznak a budai keserű vizek. Azonban ezek is elterjedésöket nem annyira az orvosoknak, mint inkább a kereskedők speculátiójának köszönik. A szulini víz nevezetesen mint kellemes savanyú víz a rohitsit, a budai keserű vizek pedig a püllnai és saidschützi vizet szorították ki a kereskedésből. A budai vizek elterjedését nem csak hazánkban, de a külföldön is, leginkább Unger budai gyógyszerésznek és egyik forrás tulajdonosának köszönhetni, ki már 1854-diki nyárban csak maga forrásából 90,000 üveggel adott el.

A mi pedig a czigelkai vizet illeti, melyet Dr. Kovács Endre értekezése különös tárgyának választott; arra nézve megjegyzendő:

A cigelkai víz tetemes jódtartalma már ezelőtt 20 évvel legelőször Tognio orvoskari tanár által bizonyíttatott be, ki azt épen ezen rendkivüli jódtartalmánál fogva, mint nagy hatású vizet ajánlotta az orvosoknak. Ennek következtében Dr. Sárosi e víz forrását haszonbérbe vette ki, s azt üvegekre töltve Pestre küldte. Itt azonban esztendőkig hevert haszonvétlenül, míg végre Sárosi kénytelen volt vele felhagyni. Orvosaink minden más szert használtak, csak a czigelkai vizet nem. Ajánlják tehát orvosaink a hazai vizeket, alapítsák meg azoknak indicátióját, és nem kételkedem miszerint azok kelni fognak. A beteg, egészsége helyre-állítása kedvéért, azt a vizet iszsza, melyet neki orvosa ajánl. Szükséges pedig, hogy e részben is pesti orvosaink járjanak elől jó példával.

A másik körülmény, melyet én hazai ásványvizeink és fürdőhelyeink elhanyagoltatása okának hiszek, ásványvizeink rossz kezelésében, és fürdőhelyeink minden kényelem nélküli felszerelésében áll. Hány jeles savanyú vizünk van az országban? a bártfai, lublói, szulini, suliguli, borszéki, s számos mások. Mégis mindezek közöl egyedül a szulini volt képes magának általános elismerést kivívni és a rohitsit kiszorítni az országból. A többieket alig ismerik nevök szerint, míg a rohitsi ismeretes az egész országban. Oka ennek részint az ásványvizek rossz kezelésében, részint azoknak drágaságában fekszik.

Hazánkban azon eljárás, mely szerint az ásványvizeket, főleg a savanyú vizeket, palaczkokra kell tölteni, egészen ismeretlen. A szétküldendő palaczkok többnyire rosszúl vannak töltve és rosszúl bedugva; minek azután természetes következése, hogy a víz haszonvehetetlen állapotban érkezik meg rendeltetése helyére. Ekkor azt szokták mondani, hogy a víz távolabb helyre nem hordható, mi semmikép sem áll, mert nincsen tiszta és szerves anyagoktól ment víz, melyet palaczkokban messzebb helyre vinni nem lehetne, ha t. i. a palaczkok töltése és dugaszolása a maga módja szerint történt. A szulíni víz például egy pár év alatt elterjedt az egész országban, mit nem csak jeles tulajdonságainak, de főleg igen jó és czélszerű töltés és dugaszolás módjának köszön. Mind a mellett ennek fogyasztása is évről-évre hanyatlik. Oka rendkivüli drágaságában fekszik, mi a suliguli és borszéki vizek elterjedését is hátráltatja.

A mi pedig fürdőhelyeink elhanyagoltatása okát illeti, azt is két körülménynek kell tulajdonítni :

1-ször. Azon körülménynek, melynél fogva orvosaink egy-két fürdőhelyt kivéve hazánk többi fürdőhelyeit vagy épen nem, vagy igen keveset ismerik.

2-szor. Hogy hazánk legtöbb fürdőhelyei oly rosszúl vannak felszerelve, s oly hiányosan ellátva mindennel, mi a mindennapi kényelemhez, és az úgy nevezett nélkülözhetetlen comforthoz tartozik, hogy nem csuda, ha a nagyobb városok lakosai mintegy irtóznak, ha nekik az orvos hazai fürdőhely használatát rendeli.

Ismert dolog, miszerint a fürdőhelyeken a víz, melyet a betegek isznak, gyakran csak egy kis tényezőjét teszi a beteg felgyógyulásának, s hogy legtöbb esetben a fürdőhelynek kellemes és egészséges fekvése, jó levegője, kényelmes, minden kellemetlen befolyásoktól ment életmód, gyakori, kedves társaságban tett séták, vidám és csak a kedv felderítésére rendezett mulatságok, nagyobb befolyással vannak a fővárosi vendégek felgyógyulására mint a víz maga. S ezen oknál fogva nem is lehet eléggé nagy figyelmet fordítni mindezekre, ha a fürdőhelyet látogatottá és híressé tenni akarjuk.

Füred, Mehádia, Buda fürdőhelyeket ezrenként látogatják minden évben, mert e helyeken gondoskodva van minden kényelemről, még azok számára is, kik nagyobb városokban már bizonyos comforthoz szoktak, s azt nem igen nélkülözhetik.

Legmagasabb fokon állanak e tekintetben a külföld fürdőhelyei: Károlyfürdő, Máriafürdő, Ferenczfürdő és Teplitz Csehországban; Gleichenberg, fiatal ugyan, de felszerelése czélszerűségében első helyen álló fürdőhely Stayerországban; Baden-Baden, Ems, Gastein, Ischl s számos más fürdőhelyek a külföldön, melyek részint vidékök és sétahelyeik gyönyörűsége, részint intézkedéseik kényelmessége és czélszerűsége által annyira kitüntetik magokat, hogy könnyen magyarázható, midőn kiki, a ki orvosságon kivül kedves mulató helyet is keres s azután vágyik, inkább oda tódúl, mintsem a mi elhagyatott, minden finomabb mulatságtól és kényelemtől megfosztott fürdőhelyeinkre.

Hazánk e tekintetben újabb időben nem csak előmenetelt nem tett; sőt inkább több évek óta jóval hátrább ment. Azon hajdan híres fürdőhelyek, melyek nem csak vizeik jelessége, de vidékeik gyönyörűsége által is kitűnők, milyenek Lubló, Bártfa, Trenchin, Vichnye, Szklenó, Ránk, melyek hajdan nem csak a felső magyarországi, hanem a legmagasabb lengyel aristokratiának évenkénti gyülhelyei valának, jelenleg mint elhagyatott romok pusztán állanak, régi fényök és jólétöknek alig tartván fen emlékezetét.

A fürdőhelyek nagyságát és hírét legtöbb esetben nem a víz jósága és orvosi hatása, hanem a magas körökből származó vendégek, kiket kényelmeik és czélszerű intézkedéseik által magokhoz csalni képesek, emelik. E kényelmek és czélszerű intézkedések, finomabb társaság, a fürdőhelyeken anynyira szükséges rend és tisztaság, éjjeli nyugalom, jó és czélszerű vendégfogadók, jó és aránylag nem drága élelem, hazánk legtöbb fürdőhelyein hiányzanak.

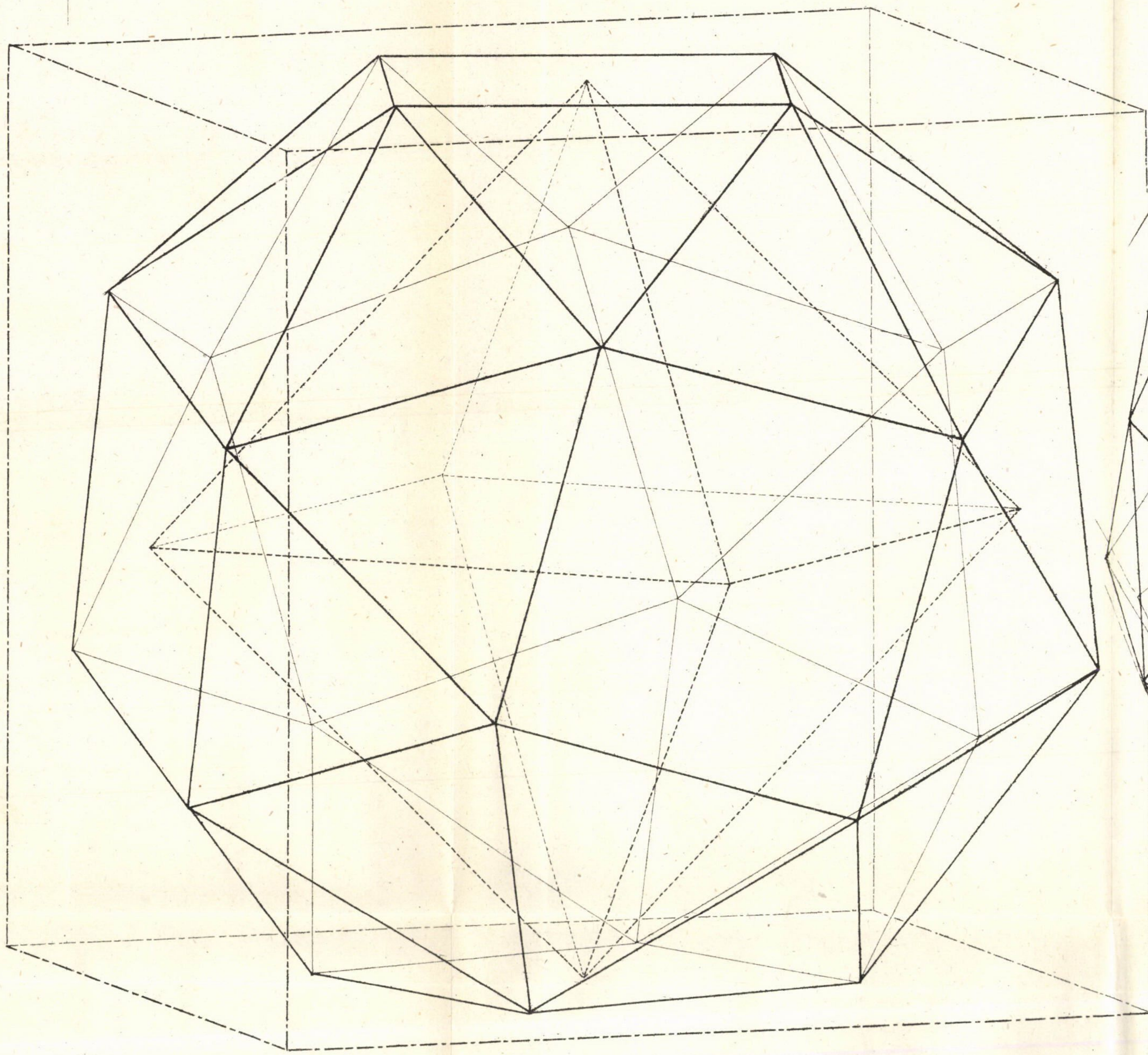
Hogy tehát ásványvizeink, melyek alkatrészeikből itélve orvosi hatásuk által a leghíresebb külföldi ásványvizeket részint felülmúlják, részint velök egy vonalon állanak, és fürdőhelyeink, melyek nagyobb részt a legszebb és legkiesb vidékkel vannak környezve, azon hírre jussanak, melyet tulajdonságaik szerint érdemelnek, arra, nézetem szerint kivántatik, hogy orvosaink ásványvizeinkre és hazai fürdőhelyeinkre nagyobb figyelmet fordítsanak, mint eddig; továbbá, hogy a források és fürdőhelyek tulajdonosai nagyobb gondot és több pénzt fordítsanak azoknak kiállítására és felszerelésére, mint az nálunk eddig nagyobb részt történt.

Igen ferde nézet az, hogy valamely fürdőhely felszerelését azon arányban kell terjeszteni és tágítani, melyben az jövedelmez. A fürdőhelyeket is csak úgy kell tekinteni, mint akármely más jószágot, vagy vállalatot. Ha azt akarjuk, hogy jövedelmezzenek, szükséges, hogy előbb a megkivántató instructiót adjuk meg, hogy a szükséges tőkét fektessük be azoknak kiállítására, czélszerű felszerelésére; csak akkor jövedelmezhetnek azok. De a megkivántató rendtartás, és az orvosok részéröli felkarolás nélkül semmiféle fürdőhely hírre nem kaphat.

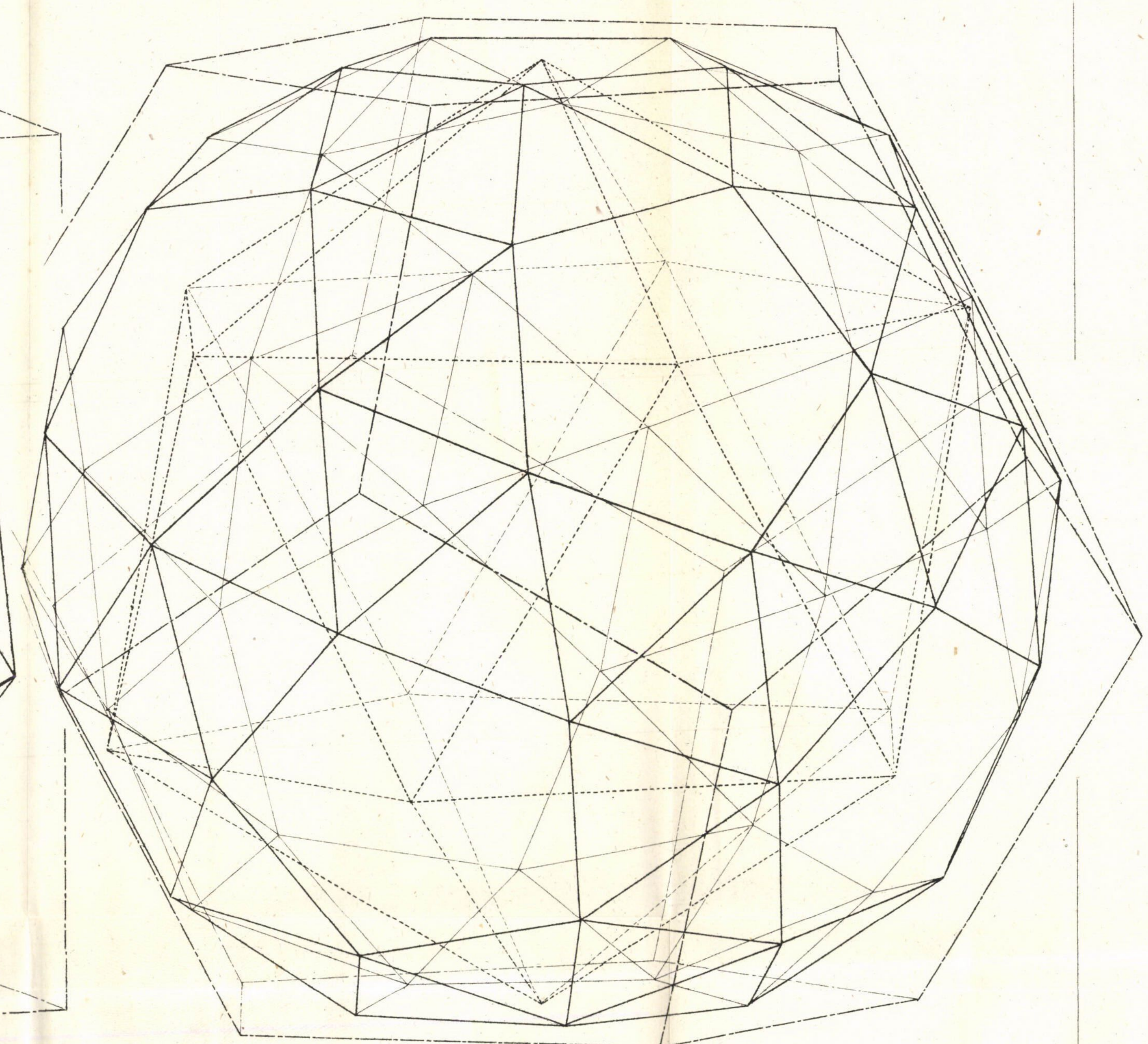
Élő példát szolgáltat e tekintetben a gleichenbergi fürdőhely, mely az előtt egy pár évvel egészen ismeretlen víz vala, míg egyszerre híressé és a társaság minden rétegeiben ismert és kedves fürdőhelylyé lőn. E hírét, melyre egy pár év alatt csak hamar felvergődött, korán sem vizének különös és más, közönséges ásványvizektől eltérő, tulajdonságainak köszöni; hanem egyedül azon gondosságnak, melylyel ott minden intézkedések mindjárt az első években, nagyszerű, szép és czélszerű épületek és vendégfogadók felállítása, kies sétahelyek kiszemelése és elrendezése, történtek, végre azon üzérkedésnek köszöni, melylyel az illető tulajdonosok a gleichenbergi vizet a monarchia minden nevezetesebb városaiban megismertették, az orvosoknak ajánlották, általában minden gondolható módot használtak, mely által annak hírét megalapítni és terjeszteni lehet. Így történt, hogy mindjárt az első években több ezer üveg gleichenbergi víz kelt el csak itt Pesten, hogy orvosaink betegeiket Gleichenbergbe küldötték s i. t.

Csak ily módon, melyet nekünk a külföldiektől kell tanulnunk, szerezhetünk ásványvizeinknek és fürdőhelyeinknek hírt-nevet; csak az által, hogy kedves és könnyen elérhető nyári mulató helyekké teszszük válhatnak azok népes és szívesen látogatott gyógyintézetekké.

14.



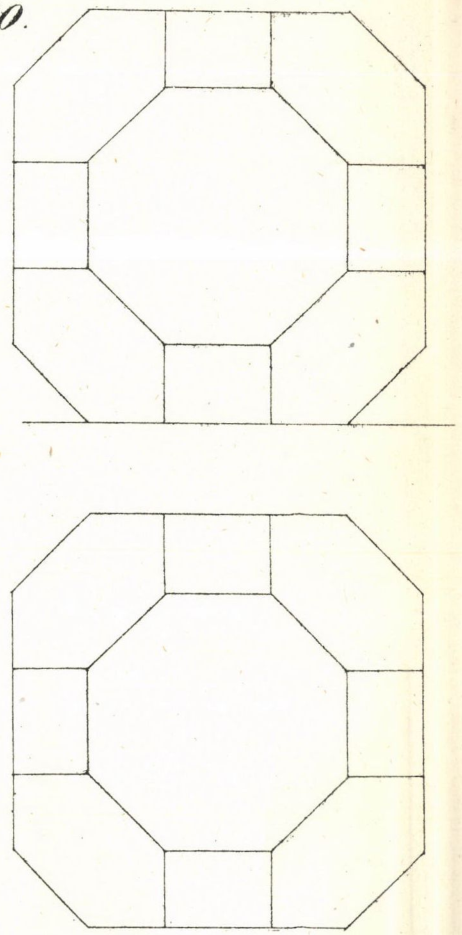
15.



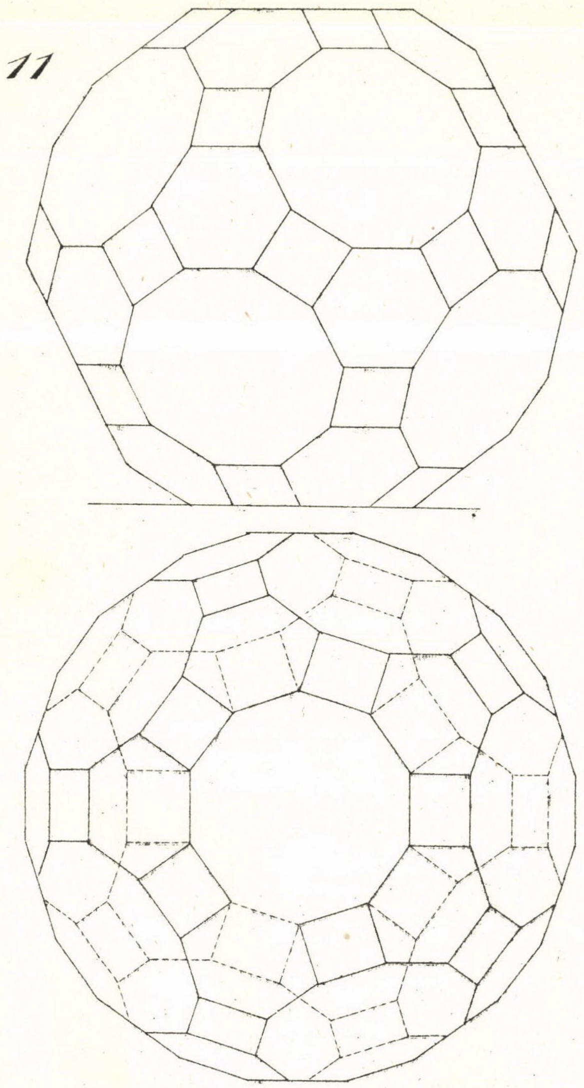
Nyomt. Rohn. Pesten 1860.

IV

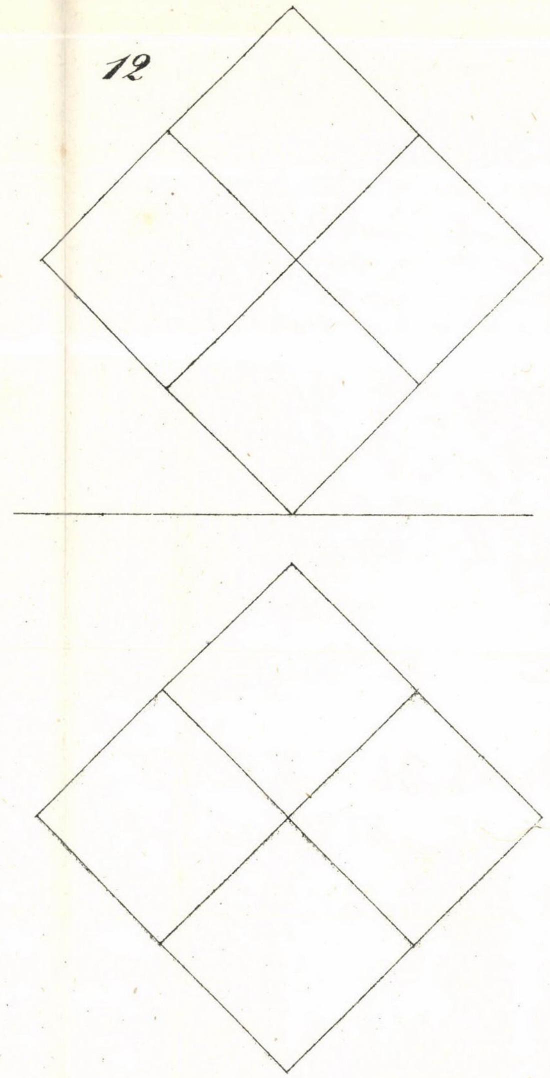
10.



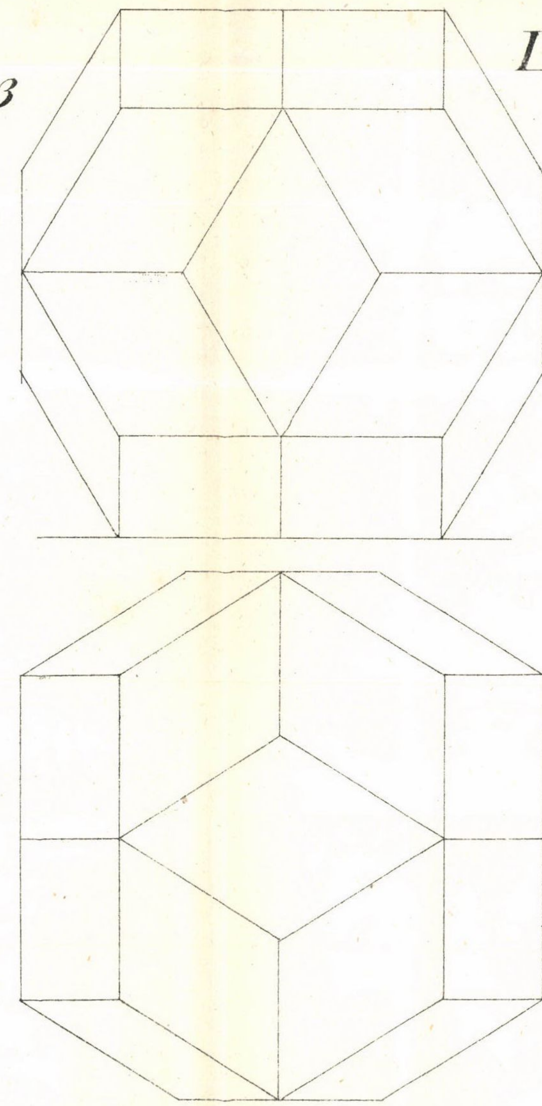
11



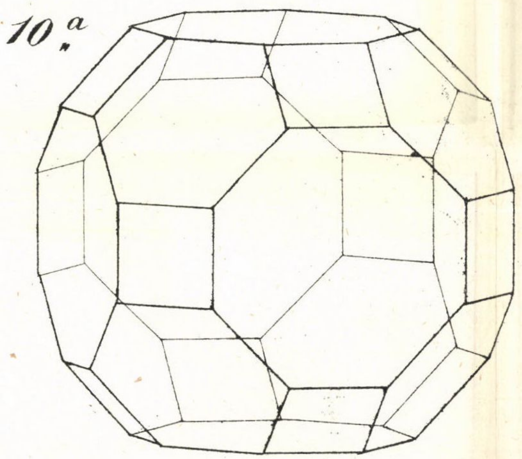
12



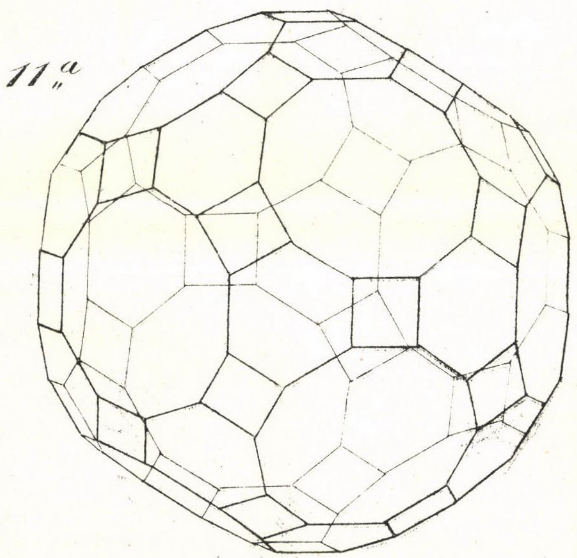
13



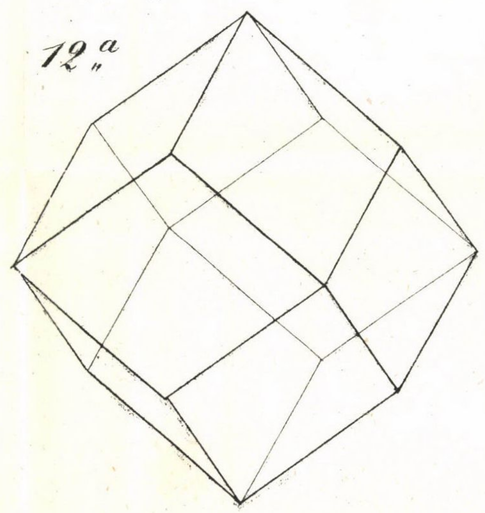
10.ᵃ



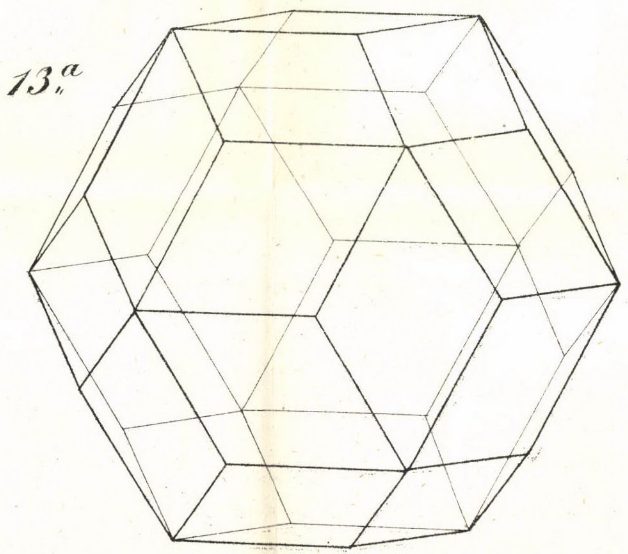
11.ᵃ



12.ᵃ

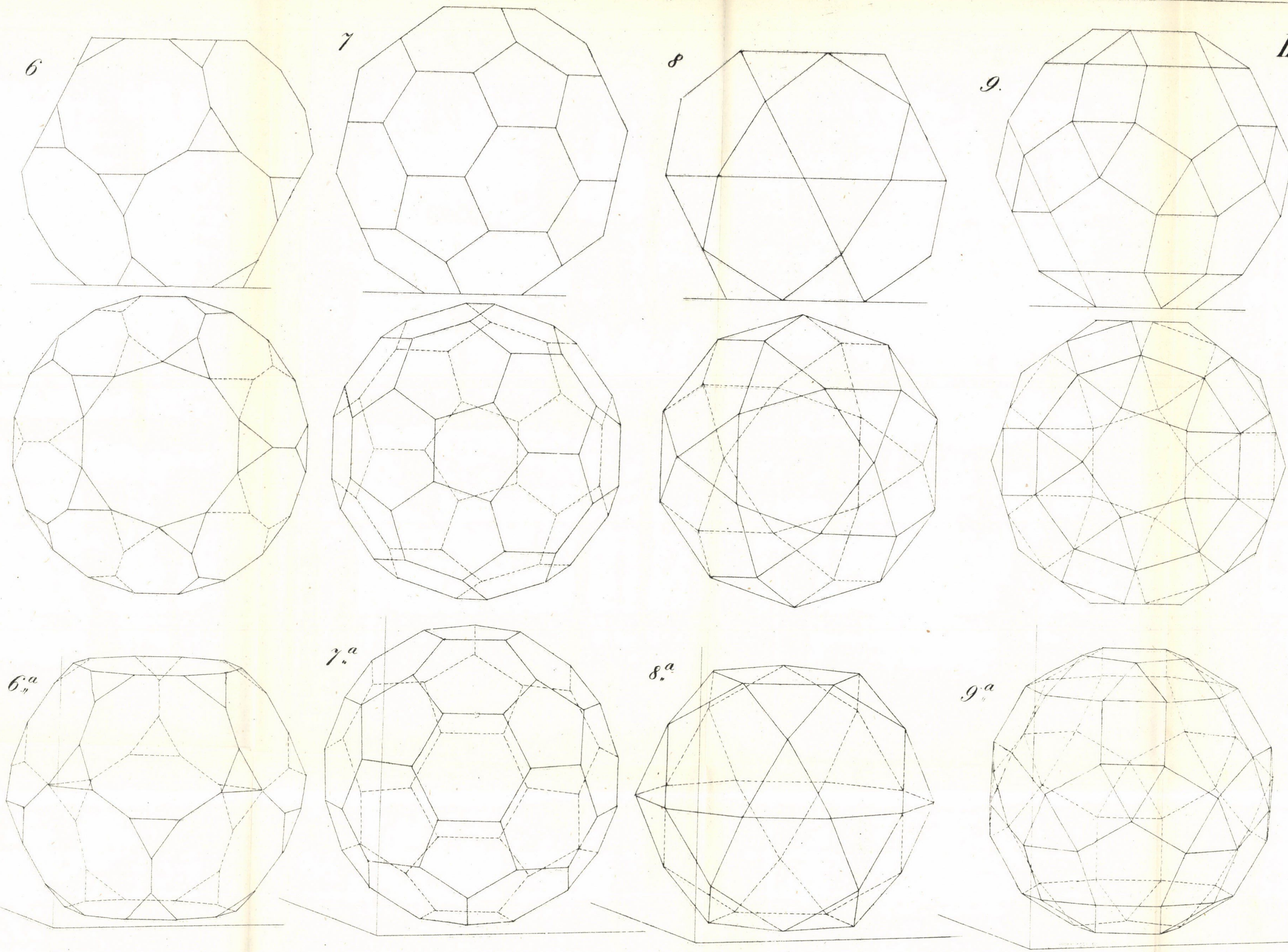


13.ᵃ



Nyomt. Rohn, Pesten 1860

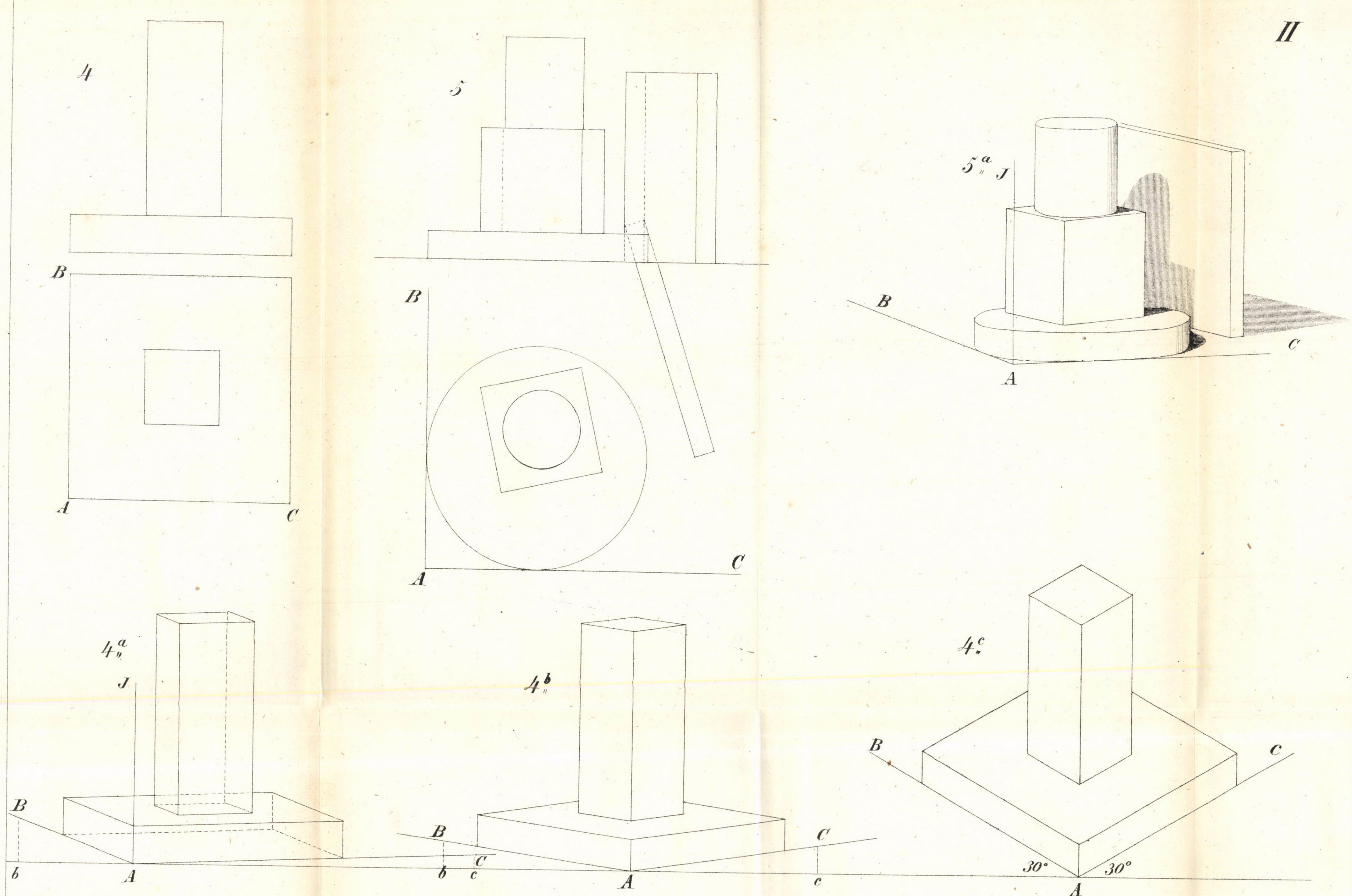
III.



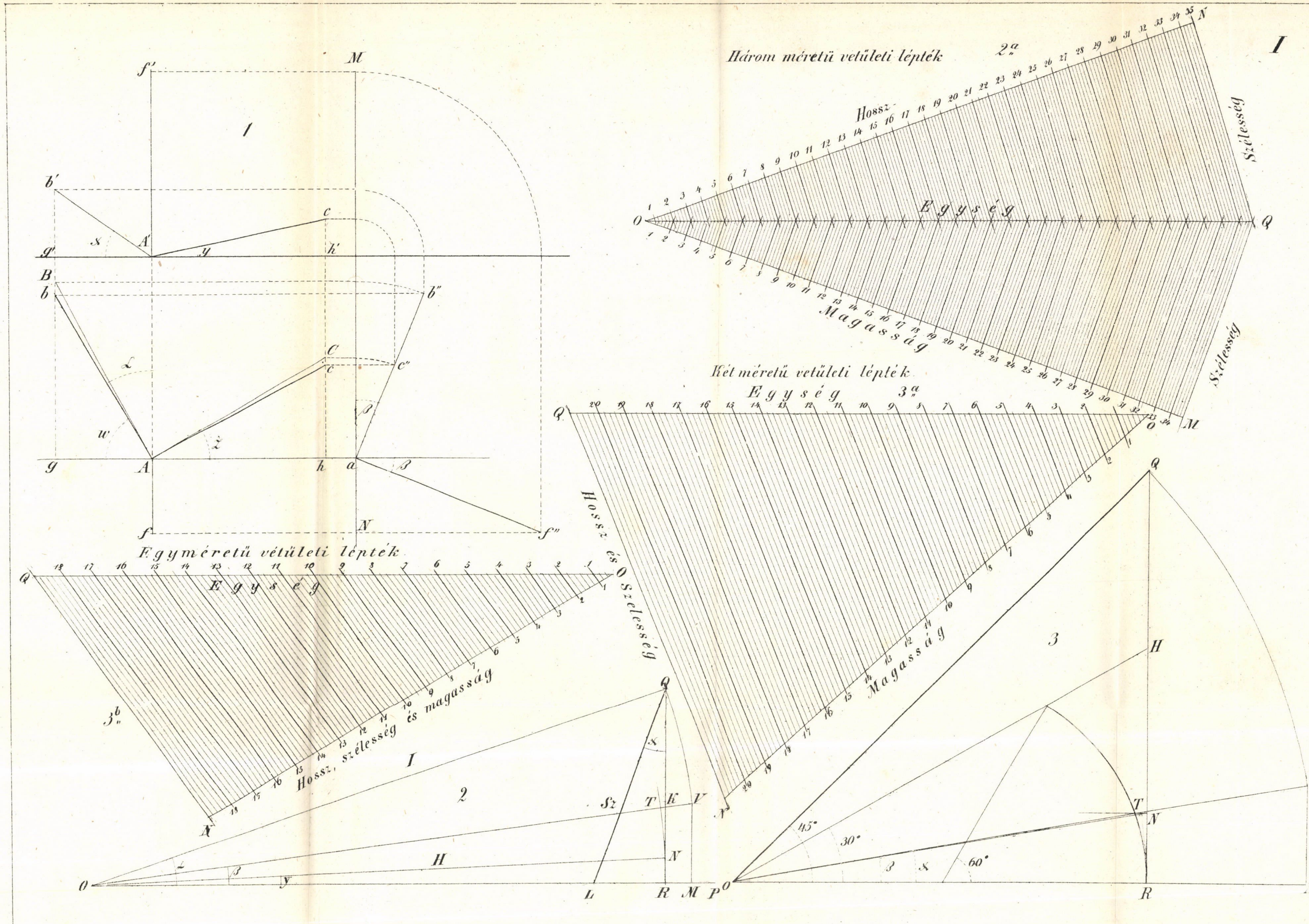
Nyomt. Rehn. Pesten 1860.

Weisz, Vetületek.

II



Nyomt. Rohn. Pesten 1860.



Nyomt. Rohn, Peston 1860.

Weisz Vetületek.

MAGYAR

AKADEMIAI ÉRTESÍTŐ.

A MATHEMATIKAI,

ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI

OSZTÁLYOK KÖZLÖNYE.

I. KÖTET. 1860. III. SZÁM.

A BONCZTANI RAJZOK HASZNÁRÓL ÉS KELLÉKEIRŐL.

SZÉKFOGLALÓLAG OLV. JUL. 16. 1860.

ARÁNYI LAJOS lt.

Tekintetes tudományos Akademia! Valamint minden egészséges szervezetű emberben szakadatlan müködik az önfentartási ösztön: úgy pezseg minden ép elméü és ép kedélyü emberben azon vágy, melynél fogva öröké fön- és megtartani törekszik mind azt, mi szép, mi jó, mi dicsö.

A múltat a feledékenység falánk torkából kiragadni iratban, rajzban (hová a fa-, réz-, aczél- és kőmetszet, meg a fényképészet tartoznak), továbbá festményekben, szobrokban és építményekben iparkodunk: mindezen eszközök közöl a festészetet tartanám legczélszerübbnek, mert az irat holt betüiből kiki csak azt olvashatja ki, mit értelmi s érzelmi tehetsége nemkülönben mit kedélye megeleveníteni bír, mely alkalommal az alanyi fogalmak a tárgyiakat hihetetlenül elváltoztathatják, néha pedig sürü köd az olvasmány eredménye, mely az olvasónak szellemi szemeit elvakítja.

Az építmények nyelvét csupán magasabb müveltségü lélek érti, — — igaz ugyan, hogy az együgyü kedély is sejti olykor az epítményekben a magasztost, de könnyen oknak véli az okozatot, mint ama nyugatindiai, ki az óriási folyam megláttára arczra borúlt, s azt megtestesült istenkép imádá.

A fa-, kő- és érczmetszetek elég hűn tükrözik a múltat, de velök a színek országa örökre sírba dől, pedig mennyi báj rejlik egy hajnal biborában! mennyi hajnal egy pirongó szűz arczában, kiben az első szerelem lángja lobban föl! Ezen zománczokat a rajznok, vésnök, s nem kevesbbé a szobrász az örök feledékenység odvába sülyeszti, míg ugyanazokat a festész örökön örökítni képes; s ha a festész még azt is érti, miben hajdan Correggio és Rembrandt tündöklött, újabb időben pedig Ammerling és hazánkfia Haám fénylenek, értem a viszfényt (Reflex), mit a színezés költészetének hínak: akkor képes a művész nemcsak művének alaptárgyát, hanem saját nevét is a halhatatlanság országába juttatni.

Átallom a becses időt a viszfény fejtegetésére pazarolni, mert kiki tudja, miszerint a viszfény alatt azon világosságot értjük, melyet valamely árnyékolt test oly testtől nyer, melyet közvetetlen a nap, vagy holmi gyertyaféle világít meg; így remeg a viszfényben valamely árnyékban rejlő fegyver, melynek közelében némi napsütötte, példáúl piros palástú személy helyel, — úgy látszik viszfényben egy a fák árnyába vonúlt hadvezér ábrázata, midőn valamely titkos levél olvastával a sűrű lombok közt a papír fehér lapjára lopódznak a kiváncsi napsugárok, és az örvendetes hírre vérbe boruló arcz bíborára verődnek.

Bíbor volt bizonyos korszakban a kitüntetés legmagasb foka, — a szerényebb jelenkor a babérral tart; bíborban születtek kéjelgének hajdanta görög honban, babérban születtek díszelgnek mai nap édes hazánkban, kiknek dicső testülete én csekélységemet érdemdús ölébe fölemelni méltatott, ezen koszorús koszorúnak egyes virágai szint' annyi megvilágított testek, kikre a kedélylyel összekelt észnek *napja ragyog*, s kik rám, a homályban lappangóra, viszfényt árasztani szívesked- nek, — szabadjon tehát ezen *megfontolt öntudattal* élvezett örömemért, szabadjon ezen kitüntetésért, mely nem csak tudományos buzgalmat, de még sokkal nemesebbet, úgy mint *jellemet* sejtet *hű magyar keblemben*, — áldomásúl forró hálámat kijelentenem, és az üdvárasztó magyar tudományos Akademia egyes tagjainak hosszú, igen hosszú, — magának az Akademiának pedig végtelen életet kivánnom.

A BONCZTANI RAJZOK HASZNÁRÓL ÉS KELLÉKEIRŐL.

A boncztan fajainak kifejlődése.

Valamint az építész csak úgy képes építményét a romlástól megóni, és ha megromlott, újra kitatarozni, ha művének egyes alkatrészeit alaposan ismeri: úgy az orvos is csak úgy foghatja az emberi testet kártékony befolyások ellen védni, és az egészség megbomlásának okait föltalálván, meg elhárítván, az egészséget visszaállítni, ha a test alkatrészeit minél tökélyesben érti, mire, mint tudjuk, a boncztan tanítja.

Alig három százada, hogy az emberi test belső részei emberi hullákban vizsgáltatnak; annakelőtte az állatok fölnyitása pótolá — s mint sejthetni, igen tökéletlenül — az ebbéli igényeket.

Alig hét évtizede, hogy az emberi boncztan nem csupán az egyes részek leirásával, hanem átalános fölfogásokkal is foglalkozik e téren, azaz: hogy a boncztan egy *átalánosra* és egy *különösre* szakadt.

Alig 30 éve, hogy nem csupán az *ép* test alkatát fürkészik a bonczolók, hanem a *kórok* által ezernyi alakokban előhozatott elváltozásokat is; mi által a boncztannak két egészen különböző faja támadt, úgymint: az *épboncztan* (anatomia physiologica) és a kórboncztan (anatomia pathologica); ez utolsóról ez alkalommal nem óhajtván értekezni, az épboncztannál maradok, mely, mint említém, a múlt század vége felé egy *átalánosra* és egy *különösre* szakadt.

Az átalános boncztan, melynek a nevezetes francznia Bichat vala teremtője, a testnek azon képleteit veszi figyelőre, melyek igen számos helyt találtatnak föl, p. a hártyák, csontok, mirigyek stb., s mely képleteket *szövegeknek* (textus) szokás híni, miután ezek szövik mintegy össze a bonyolodottabb tetemeket, minők a tüdők, a szemek, a máj, a vesék stb.; ezen bonyadalmas tetemek csak egyszer (mint a máj, szív, gyomor stb.), vagy legfölebb kétszer (mint a szemek, fülek, vesék stb.) fordúlnak az emberi testben elő, és *szerveknek* (organa) hivatnak.

Az épületteli analogiára visszatérve hasonlók a szövegek például valamely nyári laknak igen számos helyein található tégláihoz, gerendáihoz, vas pántjaihoz és a czémenthez, a szervek pedig az épületben találkozó teremhez, erkélyhez, pinczéhez, padláshoz, lépcsőzethez stb.

Az átalános boncztan nem ügyelvén sokat a szövegek szabad szemmel kivehető idomára, azoknak rendesen csak a testben történt elosztatási szabályait fürkészi, mintegy 30 év óta pedig egyrészt *vegyi*, másrészt górcsövi (mikroskopisch) tulajdonait vizsgálja, s így eredt az átalános boncztanból két fióktanítmány, t. i.

a) az úgy nevezett *górcsőtan* (mikrologia) mit *szorosabb értelemben vett szövegtannak* (hystologia) is hínak;

b) az *embertesti vegytan* (anthropochemia).

A különös boncztan (anatomia specialis) az emberi test egyes szerveit veszi ügyelőre, melyek, mint említém, csak a szövegekből vannak összeállítva; — a szövegeket is föladata ugyan megvizsgálni, de különösen idombeli, még pedig szabad szemmel észlelhető (makroskopisch) idombeli tekintetben, úgy például a csontokat, mint a fej, mint a törzs, s mint a végtagoknak megkülönböztetett küllemmel bíró csontjait írja le.

Miként az átalános, úgy a különös boncztan is két, noha rokon, de mégis igen különböző tanítmányra oszlott szét, egyik

a) a *rendszeres* vagyis szorosan vett *leíró* boncztan (anatomia systematica, vel descriptiva), — mely a test *szerveit* és *szövegeit* veszi fölosztási elvűl, követvén azokat az egyes tagokba, vagyis az úgynevezett boncztani tájakba, s mondja például: ily meg ily *csontok* találtatnak a fejen, a nyakon, a törzsön, — továbbá ily meg ily *izmok* találtatnak a tetőtől talpig; — aztán az agyból és gerinczagyból eredő *idegzet* így meg így osztatik el a főben, nyakon, mellen, hàton stb. A szívből fakadó *üterek* ekként ágaznak el a fejben, a mellben, a vég-tagokban stb.; nemkülönben a *szív* és a *tüdő*, a *máj*, *vesék* stb. ily meg ily karélyokkal, üregekkel stb. bírnak.

Ezen leiró boncztan az ős anyatörzs, melynek a mintegy 28 év óta sarjadzott, de már anyányivá élemedett hajtása:

b) a *tájboncztan* (anatomia topographica), mely fölosztási elvül veszi a test különféle *tájait*, minők teszem azt a halanték-, a lágyék-, a térdalyi stb. táj, s mondja például: a *halántéktájon* a bőr alatt ily bőnye (hártya), ily izmok, ily erek, idegek; alattok ily csontok, — ezek alatt ily burkai az agynak — végre az agynak ilyen meg amolyan részei szemlélhetők.

Ki a *rendszeres* boncztanban jártas, könnyebben tájékozódik valamely rejtelmes baj eredete körött, mint az, ki egyoldalulag csak a tájboncztanhoz ért; mert nem mindig lappang ott valamely fájdalom forrása, hol annak tanyája, hanem vagy föntebb, vagy lentebb, ott t. i. hol az illető bántalmas ideg, vagy edény, vagy kiürítő vezetéknek eredete fakad. — Ezen körülmény a gyógygyakorlatban vajmi nagy fontossággal bír!

Ki a tájboncztanban jártas, tüzetesben határozhatja meg, mint az, ki csak a rendszeres boncztanban vitéz, mily erek, és zsigerek, vagy csontok sérültek meg, midőn a testen valamely mélyen beható szúrt, vagy lőtt, vagy vágott seb szemléltetik; tudja továbbá a tájboncztan avatottja, mikor kell valamely daganatot fölszúrni, mikor tilos; bátran beböki a szúrcsapot (trocart) a kidomborodó mellkasba, midőn vizet akar a mellhártya, vagy a szívburok üregéből üríteni, s a világért nem nyitja föl a domborodó mellkast, midőn függérdag lappang a dudorodmány alatt.

Midőn ily nélkülözhetetlen irányadóvá lőn a tájboncztan a sebészre nézve, elhamarkodva *sebészi* boncztannak (anatomia chirurgica) neveztetett mintegy 26 év előtt el, mondom elhamarkodva, mert miután a szív- és tüdő-, továbbá a máj-, lép-, gyomor- és bél-, nemkülönben a vese-vízhólyag és a méhbajak ismerete a kórboncztan lámpájánál tiszta fénybe deríttettek: kisült, miszerint a belorvos is irgalom tárgyává torzúl el, ha Ariadne fonalának (értem a tájboncztannak) tökélyes birtokában nincsen.

E századnak első negyedében meg kellett betegnek és orvosnak a „Schola hippocratica“ sugárlataival elégednie, mely a belbajokban legnagyobb részt csak érzelmi kórismét (Gefühls Diagnose) volt képes fölállítni; de mióta a tájbonczta n szövétneke lobog, és számtalan ablakon láthatni be a különben eltorlaszolt szervület rejtelmes szuglyaiba; s mióta a tájbonczn okra illik leginkább az írás azon szava, hogy „isten képére van az ember teremtve" mert istenhez közelítőleg képes a tájbonczn ok „szíveket és veséket" — még pedig élőn — vizsgálni: azóta nem az érzelem, hanem az ép érzékek által kalauzoltatik az orvos a kórisme alakításában, és az erre építendő észszerű gyógyeljárásban.

Valamint csak úgy itélhetjük tökélyesnek a földrajznokot (geographust), ha megfejti egy részről hol ered, s mely nevezetes helységeknél fut el valamely jelesebb bérczhuzam, folyó, róna stb., más részről pedig, ha megmondja mily nevezetes hegy, folyó, rónaság, stb. létezik valamely kitűzött város környékén: úgy szinte a bonczn ok csak akkor üti meg a mértéket, ha tudtúl bírja adni, hol ered, s mily nevezetes testtájakat érint lefutásában valamely ér, ideg, izom stb., és ha megmondhatja, mi erek, idegek, zsigerek stb. léteznek az emberi test bizonyos táján, azaz: ha mind a táj- mind a rendszeres bonczta nban jártas.

Ki a bonczta nt bár csak hírből ez oldalairól ismeri, kell hogy meggyőződjék irányadó varázs erejéről, melynél fogva vallania is kell, hogy a bonczta n csillag, mely az eltévedt vándort útba igazítja, — hogy a bonczta n delejtű, mely a fergeteg által útjából eltántorított vitorlást vezérli, — hogy a bonczta n idegvillanyozó, és érzékelevenítő szer, mely a kórismében csüggedt erővel tapogatódzó kül- vagy belorvost öntudatra ébreszti, és elhatározott cselekvésre serkenti; de valamint az illatszerek, hacsak rendküli szorgalommal zárva nem tartatnak, nyom nélkül elröppennek: úgy illannak legsebesb gyorsasággal a bonczta nnak adatai is el, melyek azonfölül még igen bonyolodott természetűek, és hihetetlen sokaságúak; mert ha európahírű hazánkfiának Hyrtl bécsi tanárnak csak közép terjedelmű bonczta nkönyvét veszszük kezünkbe, a csontokról 450 adatot halmozunk össze, a csontok kötelékeiről (a szálagokról) 150-et, az izmokról 270-et, a belrészekről (zsigerekről) 400-at, az agy- és gerinczagyról meg az idegekről 350-et, a szívről s az üterekről 340-et, s végre az érzéki szervekről 180-at, összesen 2000-nél jóval többet.

Az eféle adatok könyvnélküli megtanulása gyakran nem különbözik a naptár könyvnélküli betanulásától, s ép oly könynyen felejtetik el, ha csak nem gyakoroljuk napontai ismételgetéssel emlékezetünket, mint Liszt Ferencz, kiről tudva van, miszerint úton-útfélen maga után hordat egy húrtalan klaviaturát, hogy szakadatlan gyakorlattal tartsa ébren bámulatosan szökdécselő ujjainak csuda ügyességét.

A boncztannak olvasásból, azaz *csak olvasásból* álló ismételgetése tévútra vezet, mert halkkal-halkkal elhomályosodnak a boncztani tárgyak stereometricus, és később geometricus fogalmai is, s a puszta szavak formulái maradnak agyunkban, melyek mint *érczbe többé be nem váltható* bankjegyek egészen elérvénytelenülnek.

2. *A bonczolás pótszereiről.*

Minthogy a pályavégzett orvosnak a természet könyvéböli olvasásra (a bonczolásra) *rendesen* sem ideje, sem tere: pótszerekről kell gondoskodni; ezek *a*) a viaszkészítmények, *b*) a rajzok (fa-, réz-, kőmetszetek).

A viaszkészítmények, ha hívek, a természetet a legjobban helyettesítik; csak az a baj, hogy 30 vagy 50 év múlva el szoktak avúlni, mint ama híres jozefinumbeliek, melyeknek kétharmada (a tudomány további kifejlődése miatt) haszonvehetetlenné vált; — jók az ily gyüjtemények, ha állandó fizetésü viasz-gyúrmár (Wachs-Bossirer) által pótoltatnak időről-időre ki, mint azt Münchenben láttam 1858-ban, hol is a jeles Zeiler az ő igen ügyes családa segélyével mindent rögtön előállít viaszból, mire őt a boncztan, sebészet, szülészet és élettan tanárai fölszólítják, — különös érdekkel láttam, — midőn tőle az agyag- és viaszgyúrmálást (das Bossiren), a gypsz-öntést, szóval a boncztani szobrászat elemeit tanulám, — mikép készíté tudományosan müvelt neje az emberi s különféle állati petének s a belőle rügyező magzatnak koronkénti kifejlődését, s miután e tünemények csak górcső alatt észlelhetők, arasznyi, azaz akkora mekkoraságban képleltetének a viasz-másolatok, mekkoráknak azokat a górcső előtünteté, t. i. 200—300-szori nagyobbításban.

A mi egyetemi viaszkészítményi gyüjteményünk, mely nehány elavúlt, s már hajdan kimustrált darabból áll, csupán a nem orvosi kiváncsi közönség bámulatára alkalmas, nem pedig tanczélokra, — pár század múlva régészeti becscsel bírand, már csak azért is, mert van köztök egy-két darab, mely a híres Cavaliere Felice Fontánától (pizai tanártól) származik, ki azokat a még híresebb Mascagni után gyúrmálta Firenczében.

A viaszkészítmények után ismételgetési pótszerül a rajzokat lehet ajánlani, melyek noha kissé rekedt, de ha hívek és czélszerüek, mégis elég eleven viszhangjai a természetnek.

Miután a bonczrajzokkal 20 év óta nem csekély vonzalommal foglalkozom azon üres óráimban, melyeket 830 darabból álló kórboncztani gyüjteményem létrehozatától megtakarítottam, nem csak hallatni, de megértetni is óhajtanék e tárgy körött; nem átallom a bonczábrák történetét (melynek tulajdonommá tevését főleg Münchenbeni tartózkodásomnak köszönhetem) rövid vázlatban közleni.

Úgy látszik, a boncztan ősapái meggyőződtek már a felől, miszerint:

1-ör a rajz azon eszköz, mely az ügygyel-bajjal kiaknázott boncztani fölfedezményeket leggyorsabban tükrözi le, s míg a bonczkészítmény pár nap, olykor már pár óra múlva megromlik, a rajz örökké megmarad; igaz, hogy a bonczkészítményt írásba is foglalhatni, de naponta tapasztaljuk, mily ferde fölfogásokat szülnek *concrét* tárgyak szóbeli vázlatai a különkülönféle módon szervezett agyakban; csak egy példát említek: két jeles társam, kik a legdicsőbben tevék le szigorlataikat, évekiglen azon hiszemben voltak, hogy együttérzideg (nervus synpathicus) csak egy van az emberben, mert egyes számban említtetik, mint az *egyes* gerinczagy, vagy mint az *egyes* verőczér (vena portae), s mert egyéb *kettősen* előforduló szervek, p. húgyvezédek (uretheres), a herék stb. többes számban említtetnek. — Az együttérzideget mondott pajtásim természetben nem látták, s így csak a könyv puszta szavai után indúltak a tévútnak, mi nem történendett, ha csak egyszer látták volna rajzban az említett együttérzideget, vagyis jobban mondva idegeket, miután ketten léteznek ; — —

2-or : hogy a boncztani szövegeknek legjobb tolmácsai az ábrák ; mert hányszor kell a magyarázó szöveget olvasni, és újra megolvasni, midőn valamely tájon, p. a nyak alsó és oldalsó táján óhajtjuk az üterek, viszerek és idegek egymáshozi viszonyait kitudni, mily bonyodalmas madzag-pamathoz hasonlít ezen torzonborz képletek tömkelege! de egy pillantás a betükkel vagy számokkal czélszerüen ellátott rajzra, azonnal nyélbe süti a fürkészt. —

3-or : A bonczolással járó ismételgetést is fölötte könynyítik a bonczábrák, mert a bonczoló előtt áll annak mintája, mit kikészítni óhajt, hogy pedig minta után csak sokkal kevésbbé fárasztó dolgozni, mint puszta fejből, vagy holt betü után, arról kiki meg van győződve.

4-er : Mit a rajzon egy tekintettel átnézek, mit egy vagy két percz alatt könnyedén átismételhetek, arra az olvasás több óranegyedet igényel.

5-ör : Mindennapi tapasztalásunk tanusítja, miszerint az ember ösztönszerüleg indíttatik a *concrét* tárgyaknak rajzzali fölvilágositására, ha nem is egyébbel, mint p. sétapálczánkkal, melylyel teszem azt : egy valamely táj felől tudakozódó felebarátunknak a homokba karczoljuk le azon útat, mely czélja felé vezeti, s azon mellék-útakat, melyeket kikerülnie kell.

S nem volna-e vétek, a természetnek ily hangosan és üdvösen kiáltó szavát szélnek bocsátni ?!

Hallok ugyan szinte a tapasztalásból merített ellenvetéseket, melyek mintegy így szólnak :

Találkozik *gyakran* oly ember, kit a kép csak megzavar ; ki festetlen rajzon csak fekete, szürke és fehér foltokat, a festetten pedig vertveres, tulipiros meg kupikék letyetán pecséteket lát, — az ilyen aztán ekép nyilatkozik : ha behúnyom szemem, sokkal jobban el tudom könyv után az erek és idegek elágazásait mondani, mintha ama kákom-bákom vargabetükre nézek, ép úgy, mint a földrajzot sokkal jobban pergetem el behúnyt szemmel, mintha a tarka-barka földképre tekintek.

Erre azt felelem, hogy valóban találkozik — de nem mint ellenvető mondja : *gyakran*, hanem inkább *igen ritkán*, ily egyén, magam is bukkantam 135 tanítvány közöl kettőre, ki az említett módon jajdula föl, míg a többi, mint a mannán, legelészett a tárgyvilágító ábrákon, melyeket 1859-ben (mint az épboncztan helyettes tanára) 72 ívre festettem tanítványaim számára.

Ama ritka, ismétlem hogy ritka agyszervezettel bíró egyének, kik a rajz üdvét nem tudják fölfogni és élvezni: az árny- és világosságnak mind a rajzban mind meg a természetben mutatkozó eloszlására s a színek és távlat törvényeire figyelmeztetendők, s oktatandók; mert ha az ilyetén személyek müteni (operálni) fognak, nem húnyhatandják be szemöket, hogy tisztábban képzelhessék magoknak a könyv sorait, melyek a kikerülendő, vagy átmetszendő idegek vagy edényekről szólnak.

Nehány hét előtt Lippai Gáspár ügyfelem egy 18 éves, és születése óta vak lánynak szerzé meg szeme világát, — a lány az új és sehogysem sejdíthetett érzék megnyertére anynyira elragadtatott örömében, hogy csaknem az őrjöngés partján tévelygett; a színek, különösen pedig az emberi arcz sajátlagos alkota fakasztá a különben épen nem buta lányt szakadatlan nevetésre; de mennyire elszomorodott ugyanezen személy, midőn helyéből kiindúlt, mert először azt vélte, hogy minden rá borúl, mi öt környezi, — másodszor minduntalan elbotlék a kórház bútoraiban, mert a távlatnak (die Pespektive) — csak a tapasztalás által betanúlni szokott — törvényeit nem ismeré, a töle két ölnyire álló ember felé csak úgy nyúlt, mint a mellette állóhoz, és egy darabig azt hitte, hogy minden ember, s minden tárgy voltaképen megkisebbszik, ha távozik, s hogy megnő, ha közeledik, s nem tudá megfejteni, miért marad saját személye mindig egyforma mekkoraságban, bár hová menjen is.

Ezen lány, mint egyéb vakon született s utóbb szerencsével mütettek, a megvilágosodás első heteiben behúnyt szemekkel járt, mert világtalani tapasztalásából jobban ismerte vakon a tárgyak egymástóli távolságát, mint nyílt szemekkel; de azért mégis csak neki szoktatá magát halkkal-halkkal a nyitott szemmeli járáshoz, mert végre csak el kelle ismernie, a látásnak a tapogatás fölött levő előnyét. Így szoktassa magát az is az ábrák értéséhez, ki azoknak analizálásában kissé nehézkes; különben minden tudományos müveltsége daczára kisded képmása lehetne az itten ülő egyik tisztelt veterán tagtársunk amaz inasának, ki a következő jelenetre nyújtott alkalmat: az urnak (akkori fehér egyenruhájú katonatisztnek) olajban festett s igen jól eltalált arczképe hozatik a szobába, — az inas kérdetik: „no Pali, ki ez?“ mire az inas nagy közömbösen azt feleli: „a jő isten tudja,“ — no de csak nézd meg jól! — „talán a kis Jézus“ — mondja az inas — no de hová jár az eszed? — kérdék — tekintsd meg jobban a képet — „hát tán a boldogságos szüz Mária“ — lőn a faggatottnak ultimatuma.

A festemények fölfogásának szinte nem igen magas színvonalán lézengenek ama különben *philosophiae et artium liberalium doctores*-ek is, kik valamely jeles női arczkép megszemléltének ekkép panaszkodnak: „hiszen csínosnak elég csínos volna ezen kép, de ugyan miért festett Diánának egyik felén bajuszt azon agyafúrt festész? (bajusznak nézé t. i. az orr alatti verárnyékot), miért mázolá be czipóhéjszínre egyik pofáját, holott a másikat szép pozsgásra ecsetelte?!“

Mind az eféle badar bírálatoknak oka abban rejlik, hogy az illetők az árnyék, a verárnyék (Schlagschatten) s a viszfény fölött nem gondolkodtak, s mert agyaikban azon saját érzék mély álomban szendereg, mely a legémettebben éberkedik azon festész agyában, ki távol levő, vagy elhalt ismerősének óly elevenen tudja képzelni arczát, hogy annak egyes vonalai veszteg megállanak mindaddig előtte, míg azokat ízenként analizálva a megkivánt színekkel a vászonra leteremti.

Ezen eszmélkedések akaratlan is arra vezetik a gondolkozót, hogy iparkodjék azokat, kik az orvosi pályára készülnek, kik egész életökben legnagyobb részt concrét tárgyakkal, úgymint idomokkal és színekkel foglalkoznak, a rajzolással megbarátkoztatni, s ha nem is müveltetnek gyakorlati rajzolókká az orvosnövendékek, mint — dicsérettel mondva — a reál-tanodák tanítványai, de legalább értsék a rajzot, legalább tanulják meg a rajzokat és ezek nyomán a természetet lát-tani tekintetből analizálni, miként az legelőször Montpellierben kísértetett meg a legjobb sikerrel (lásd: Essai sur l'iconographie médical, per J. Lordat. Montpellier 1833).

Most repüljünk gyorsan végig a bonczábrák történeteinek vázlatán.

3. *A boncztani ábrák története.*

A bonczábrák kitünőbb szerzői, vagy legalább rendezői a következők voltak:

1. *Leonardo da Vinci*, Arnó-völgyi, Vinci-beli születésű ismert híres festész, élt 1452-től 1518-ig. *Della Torre* nevű orvos számára készített csínos fametszetű bonczábrákat, de melyek inkább festészek mint orvosok számára hasznosak, alakjai sokkal kisebbek a természetinél.

2. *Michaele Angelo Buonarotti*, kaprézei születés, élt 1474-től 1563-ig, mint világhírü festész, szobrász és épitész tizenkét évig foglalkozott a boncztannal; jeles fametszetű ábrái kilenczszer kisebbek a természetinél.

3. *Magnüs Hundt*, magdeburgi születésü lipcsei tanár, élt 1449-től 1519-ig; — otromba fametszetü bonczábrái 15-ör kisebbek a természetesnél, s tudtunkra adják, mily irtóztatóan lehet eltévedni, ha az emberi test alkatát holmi nyúl, macska, vagy patkány kaptájára, mint Hundt teheté, akarja húzni.

4. *Laurentius Fryesen* vagy *Frisius*, metzi orvos, ily czimü könyvet írt: *Spiegel der Arzny dergleichen vormals nie vom keinem* (így) *Doktor tütsch usgangen ist* stb. Strassburg 1518. Fametszetü durva ábrái tanusítják, hogy láthatott ugyan *Fryesen* emberi zsigereket is, de tanulni az állatiakat tanulhatta.

5. *Charles Etienne* vagy *Carolus Stephanus*, nyomdász (mert apja is az volt) és orvos, élt Párisban 1564-ig. „De dissectione partium corporis stb.“ czimü munkáját inkább ékes, mint tanulságos fametszvényekkel látta el. Ábrái tízszer kisebbek a természetinél.

6. *Andreas Vesalius* vagy *André Vesel*, brüsseli születés, élt 1514-től 1564-ig; ő volt a világ leghíresebb bonczolóinak egyike, s egyszersmind V. Károly udvari orvosa.

A boncztan Vesaliusnak köszönheti újjászületését, mert ő rombolta le tekintélyét a mindaddig csalhatatlannak tartott *Galenusnak*, ki állatok bonczolásaiból magyarázá az emberi test belszerkezetét, minek gyakran veszedelmes tévedések valának szüleményei. Fametszetű ábráit Tiziano Vecelli (a híres Ticián) rajzolá, melyek jóval kisebbek a természetinél.

Vesalius kilencz különféle munkáját tizennyolcz darab (külön nyelvű) fordításban olvashatni. (Lásd Choulant's Geschichte der anatomischen Abbildungen. Leipzig 1852.)

Jegyzet. Vesaliust dolgozó termében Hamman K. festé igen remekül le. Ezen képnek díszes kőnyomatait közlék legújabb időben Mouilleron, továbbá Schubert, melyeket Treichlinger boltja előtt bámúltak a múlt évben a pestiek.

7. *Leonhard Turnheisser*, berlini orvos, élt 1567-ig.

8. *Georg Bartisch*, drezdai orvos, élt 1583-ig, mind a kettő abban eredetieskedett, hogy az emberi test belrészeit egymásra ragasztott, mind a mellett egymásról félig fölemelhető rétegekben tünteté elő; de miután az ábrák oly aprók, hogy a kisebb zsigereknek okvetetetlen ki kellett maradniok, miután kifestetlenek, s végre durva fametszvényekből állanak: sem művészi, sem orvosi becscsel nem bírnak; — mi egyébként a rétegkénti előadás eszméjét illeti, ennek megbírálására még visszatérendek.

9. *Bartolomeo Eustachi*, az Eustachi-féle kürtnek (a fülben) fölfedezője, szanszeverinói születésű római boncztanár, élt 1574-ig; fametszetű bonczábrái kissé ridegek, merevek, — magyarázó betűk, vagy számok az ábrákon hiányzanak, hanem bizonyos, a földképekéhez hasonló fokozatos keret (ráma) környezi képeit, s bizonyos érczszerszám használatával lehet az egyes részeket meghatározni; ezen eszme annyiban igen jó volna, hogy számok, vagy betűk nem zavarják a rajzot, de ki az érczkészülettel finnyán bánni nem tud, könnyen találja a szív magyarázatát a máj táján, a veséét a fölhágó ürös viszér vagy az alhasi függér táján, és ki nem szabadúl a hinárból.

Eustachi boncztáblái kilenczszer adattak ki.

10. *Constantio Varoli*, a Varoli-féle hídnak (az agyban) föltalálója, bolognai születés, élt 1543-tól 1578-ig, boncztanár és a római pápa orvosa volt. Fametszetű bonczábrái, noha dur-

váeskák, mégis eléggé tanulságosak, kár hogy a természetinél hol felényivel, hol többel is kisebbek.

11. *Giulio Casserio*, piacenzai születésű páduai tanár, a a Casserio-féle ducznak első leirója, élt 1561-től 1606-ig. — 34 rézmetszetű táblái mai napig becsületet vallanak.

Casserionak, a korán elhúnytnak, két munkája ismeretes.

12. *Casper Bauhin*, bázeli születésű bázeli tanár, a Bauhin-féle billentyű megismertetője, élt 1560-tól 1624-ig; írt sok munkát, ezek közt két boncztanit. Igen szorgalmas és éles elméjű bírálója volt ő az előtte megjelent boncztani munkáknak; ábrái mind a mellett, aprók, utánzottak és igen alárendelt becsüek.

13. *Johann Remmelin*, ulmi gyakorló orvos, született 1583-ban; egy munkát írt, ezen czím alatt: Catoptron mikrokosmicum etc. Augustae Vindelicorum 1619. fol. — melyet fia később németre ily módon fordított: Kleiner Weltspiegel, (e helyett: Spiegel der kleinen Welt) das ist: Abbildung göttlicher Schöpfung an des Menschen Leib stb. in die teutsche Sprach' übersetzet durch M. Joh. Ludov. Remmelinum, med. stud. Authoris filium. Gedruckt durch Joh. Schultes, in Verlegung Joh. Görlin, Ulm, 1661. fol.

Hasonló ezen munka a fönt említett Turnheisser meg Bartisch-féle egymásról leemelhető rétegekben előállított bonczábrákhoz.

14. *Georg Wirsung*, augsburgi születésű páduai tanár, 1643-ban Augustus 22-én meggyilkoltatott. Ó volt a Wirsung-féle hasnyálmirígybeli vezeték fölfedezője, melyet természetes nagyságban rézre metszetett.

15. *Godefridus Bidloo*, amszterdami születésű hági tanár, később III. Vilmos angol király orvosa, élt 1649-től 1713-ig, tudtomra első, ki természeti mekkoraságban rajzoltatott boncztani tárgyakat; pazar fénynyel állítá ki díszmunkáját, és híres rézmetszője De Laraisse roppant pénzt szerze magának nem csak a fő tárgyakkal, de még a haszontalan redőzettel, elő- és háttéri apróságokkal, szóval a *parergonokkal* (Beiwerke) azaz a műmellékletekkel is. A munka haszonvehetősége 105 nagy folio tábla daczára nem tart egyenlépést tékozlatos pompájá-

val, miután a boncztani adatok nem mint az élőben, hanem mint a halottban mutatkoznak, úgy tüntetnek elő.

16. *Chrisostomo Martinez*, valenciai születésű festész és rézmetsző, élt 1650-től 1694-ig. Noha 20 jeles ábrái művészek számára vésettek, mégis sokkal jobban megfeleltek az orvosi czéloknak, mint azok, melyek előtte s utánna orvosok számára készítvék.

Martinez volt az első, ki az izmokon mintegy üvegen keresztül tünteté át a csontokat, minek a sebész szintoly hasznát veszi mint a festész, vagy szobrász. Őt követé újabb időben Elfinger orv. tudor. (Lásd Dr. J. Elfinger's Anatomischer Atlas der Muskeln, Knochen und Bänder. Wien, 1858.).

Örvendve találkozom ábráiban (mint még lentebb Kamperében) azon elvemmel, mely szerint minden tanczélra szolgáló emberi test építészeti (architektonisch) nem pedig távlati (perspektivisch) modorban van előállítva.

17. *William Cheselden*, Burrow on the Hill nevű helységben született, élt 1688-tól 1752-ig, mint londoni kórházi ünnepelt műtész (operateur) többi között két boncztani munkát is írt, jeles rézmetszetekkel ékesítvén azokat. Ő volt az első, ki a csontok minél hívebb lemásolhatása végett a sötét kamrát (camera obscura) használta. Csontjai 56 ékes folio táblán ábrázoltatnak Osteographia, or anatomy of the bones, London 1733. fol. max. czímű munkájában.

18. *Gian Domenico Santorini*, velenczei születésű, fölötte buzgó boncztanár, élt 1681-től 1737-ig, a Santorini-féle küldények és porczok első leírója; jeles munkái egyikét „Observationes anatomicae“ nagy Péter orosz czárnak ajánlá; 17 bonczábráit rajzolta az ismert hírű *Giovanni batista Piazetta* velenczei festész, rézbe pedig vésé Florenzia Marcella nevű úrhölgy Santorini saját vezérlete alatt.

Santorini sok helyt használja az Eustachi által divatba hozott fokozatos keretű (rámájú) modort.

19. *Friedrich Ruysch*, amszterdami tanár, élt 1730-tól 1781-ig, a Ruysch-féle hártyának (a szemben) első leírója, számos hajszáledényi fecskendezmények készitője (első ilynemű gyűjteményét 30,000 forintért adta el a pétervári egyetemnek), s első fölhasználója a tarka réznyomatnak (Bunt-

kupferdruck), melynek Ladmiral vala végrehajtója, s mely nyomatról így szól a latín magyarázat: „vivis coloribus non penicillo depicta sed inaudito et mirabili artificio typis impressa" — így a franczia: „imprimé à la presse au grand étonnement d'un chaqu' un" — a hollandi röviden csak így: „tot verwondering." — Ezen színes réznyomat, melyre akkor csak kék, vörös, és sárga festékek használtattak a vásó modor (Schabmanier) alkalmazásával *Le Blon* frankfurti születésű festésztől találtatott föl, s miután ezen modor körülbelül 100 évig a tetszhalál álmát alvá, a bécsi híres Auertől újra fölébreszteték és a kőnyomatra alkalmazva csudaszerüen tökélyesítteték.

Volt Le Blonnak, ki minden megszerzett szabadalmai daczára tönkre silányúlt, egy *Gautier d'Agoty* nevű segédje, ki gazdájának fölfedezését sajátjának adá ki, Párisban fényes szabadalmat nyert 1745-ben rá, és 13 boncztárgyi munkát tőn közzé, elejénte *Duverny*, aztán *Toussin*, végre saját szövegével. Lásd: Götke's Farbenlehre (historischer Theil) és Halleri Bibliotheca, második kötet 307, 387, 781-ik lap.

20. *Bernhard Siegfried Albinus,* leideni születés, élt 1697-től 1770-ig. Ötven évig tanárkodott nagy dicsőséggel Leidenben, mint újjá alakítója az izomtannak és életbe léptetője négy eléggé nem ajánlható bonczrajzkészítési eljárásnak, melyeknél fogva:

a) számos bonczolások eredményéből egy eszményi képe hozaték elő az emberi szervületnek;

b) nem szemmértékkel, hanem körzővel (czirkalommal) mérettek meg a lerajzolandó tárgyak;

c) az emberi alak legalább 40 lábnyi, s ha lehet még nagyobb (úgynevezett végetlen távolságról vételék le, „reddere non ad aspectum, qui mos est, sed ex mensura; reddere quod natura optima ostendit; reddere non ut solent anatomici sic solummodo sub adspectu pictoris ponendo quod retexerunt, sed ex aliis aliisque corporibus colligendo, et in unum ad regulam componendo, sic ut veritas exhibeatur etc. (Albini Annotationes anatomicae. Lib. I.).

d) A csontváz rajzoltatik alapúl, és erre ruháztatnak az izmok.*)

*) Örömmel olvasám Albinus ezen elvent 1848-ban miután én már

Albinus rajzolóját a híres amszterdami *Van Delaen*-t minden legkisebb részletekben maga vezeté, ki az akkor igen díszlő Gravesande nevü természettani tanár utasítására hálót rajzolt rajztáblájára és hálón tekinté a fönt megpendített 40 lábnyi távolságról a lemásolandó tárgyakat.

Albinusnak mintegy tízre terjedő külön munkái közt, melyek összesen 196 rézmetszetü táblákkal láttattak el, legkitünőbb a 70 folio max. táblával ékeskedő „Tabulae ossium humanorum etc. Leidae apud Pet. H. Werbeck 1753.

21. *Pieter Camper*, lájdeni születés, mint boncz-sebész- és növénytani tanár Amszterdam-, Franecken-, és Gröningenben aratta babérjait, élt 1722-től 1789-ig. Számos kisebb-nagyobb és vegyes orvosi ágbeli munkái közöl 10 darab volt pálmanyertes; a rajzolást, víz- és olajfestést, a rézmetszést és rézvásást (Schabmanier) meg a képfaragást ügyesen gyakorolta, s még az építészethez is alaposan értett; Páris, London, Berlin és Haag voltak kimüvelődési helyei.

Nagy vitája volt Campernek Albinussal, ki nem csak építészeti, hanem távlati modorban is készítteté boncztábláit. (Nézd „Epistola ad anatomicorum principem magnum Albinum. Gröningae 1767."

Camper húsznál több rézmetszetü táblát bocsátott közre.

22. *Albert von Haller*, berni születés, élt 1708-tól 1777-ig. A boncz-, növény- és élettanban, nemkülönben az orvosi tudományok történetében hervadhatlan koszorúkat vívott ki magának, éles belátása és példátlan tevékenysége által; rézmetszetü s ötvenet meghaladó ábrái természeti nagyságban és igen pontosan tüntetnek különféle általa tüzetesben leírt részleteket elő, melyek részint *Rolinus* orvostudor, részint *Kattenhofer* vésnök müvei.

Tíz nagy kötetre terjedő „Bibliotheca Halleri" nevü roppant munkájában, melyben minden nemzet orvosi kéziratait és könyveit rövid, de kimerítő kivonatban közli, különös figyelmét a boncz- és növénytannak szentelé.

23. *Antonio Scarpa*, motta-i születés, élt 1747-től 1832-ig.

1842-ben követém ezeket Myoplasticám kidolgozásakor hozzá tevén még a természetes mekkoraság elvét is, meg a színezését.

Morgagni páduai boncztanárnak és Riviera bolognai sebésztanárnak tanítványa levén, beutazta franczia-, angol- és némethont; mint modenai és utóbb mint páviai bonez- és sebésztanár roppant munkásságot fejtett ki kilenczre terjedő műveiben, a finomabb idegek leírása általa ismertetik, p. az orrszájpad-idegé (nervus nasopalatinus Scarpae), továbbá a magasabbszerű műtétek (operationes sublimiores) életbe léptetését és tökélyesbítését neki köszönhetjük.

Scarpa jó rajzoló és viaszgyurmáló volt, — rézmetszetü nagy számú ábrái nem csak igen tanulságosok, de még pazar fénynyel is kiállítvák. Scarpának mellszobra sebészi bonczterműnkben találtatik, s fájdalom, évente nagy kegyelettel — — bemeszeltetik.

24. *Samuel Thomas von Soemmerring*, thorni születésű kasseli boncztanár, élt 1753-tól 1820-ig; pompás ábrái mind eszményi, természetnagyságú, nem a hullát, hanem az élőt utánzó képek, nem távlati, hanem épitészeti modorban rajzolvák, mind tudományos, mind meg művészeti tekintetben csak Albinuséval hasonlíthatók össze. — Sokáig válogatott Soemmerring rézmetszőiben, míg végre a híres Koeckre akadt.

Soemmerring tizenkét külön munkáiban 50 réztábla találtatik.

25. *Paolo Mascagni*, castellettói születésű siénai bonczanár, élt 1752-től 1815-ig, a boncztant két munkával és 236 nagy, igen mesterséges folio réztáblával gazdagítá meg, ide nem számítván a vonalos táblákat (Lineartafeln), melyeket az olaszok *ellentáblák*-nak (contratavole) neveznek; 20 táblája színes nyomatban jelent meg. Érdemeket Mascagni különösen a nyirkedények körött szerzett; munkáinak egy része olaszban, más része latinban jelent meg; latin íratai olasz, franczia és német nyelvre fordíttattak.

26. *Just. Christian von Loder*, rigai születésű, jénai, később moszkvai bonez-sebész- és szülésztanár, élt 1753-tól 1832-ig; fényes boncztani gyűjteményét az orosz kormány 50,000 ezüst rúbelen vette meg.

Loder különös érdeme abban álla, hogy az ő előtte megjelent újabb és jóféle bonczábrákat 182 táblákban adá ki, ezeken 1431 idom, köztük 1122 másolat és 309 eredeti rajz találtatik;

a munka czíme: „Anatomische Tafeln zur Beförderung der Kenntniss des menschlichen Körpers.“ Weimar 1794—1803. Sok tábláin azonnal föltünik, hogy Loder nem igen érthetett a rajzhoz, rajzolói pedig nem értettek a boncztanhoz, miután a csontoknál és zsigereknél nem ritkán vagy kavics, vagy ércz charakter hozaték a metszetben elé.

27. *Leopoldo Marco Antonio Caldani*, bolognai születésű, — bolognai, utóbb páduai, s végre velenczei boncz- és gyógytanár, élt 1725-től 1813-ig. Loder modorában adá ki Floriano Caldani páduai boncztanár, öcscse segítségével ezen munkát: „Icones anatomicae quotquot sunt celebriores ex optimis neotericorum operibus summa diligentia depromtae, et collectae Tabulas selegerunt, et nonnullas ex cadaveribus ad vivum delineatas addere curarunt L. M. A. et Flor. Caldani Venetiis 1801—1813. Négy kötet 264 fol. max. réztáblával, oda nem számítván a sok ellentáblát.

Írtak Caldaniék még négy külön munkát, s ezeknek egyikét festészek számára.

Mióta az izlám a tudományok iránt hitágazataiban engedékenyebb, azóta (1727-től) a nyomdászatot türi*), s midőn a képekre átalában kimondja az anathemát: a bonczábrák készítését és szaporítását megengedi; így adathatott ki Skutariban 1815-ben 56 folio réztáblával ékeskedvén ily czímű egy munka: „A testnek tükre,“ a szerző uléma, vagyis jogtudományú lelkész, kinek neve: Sáni Zadeh Mehemed Ataullah.

Összehasonlítván azon ösvényeket, melyeket a boncztan alapítói a bonczábrák kiállításával törtenek, és fontolóra vevén azon követeléseket, melyeket egyrészt a bel- és külgyógygyakorlat, másrészt az élettan tehet: oly egy szabályjavaslatot bátorkodom a szakértők elé bocsátani, mely a boncz ábrák minél czélszerüebb kiállítását illetné.

Miután a szerényen ajánlandó szabályok részint minden, részint csak különös körülményekre vonatkozók: általánosokra és különösökre osztanám azokat ekként föl.

* 1727-ben alapíttatott Stambulban az első nyomda, mely egyébkint 1755—1784-ig csukva tartaték. — Ezen nyomdából 1819-ig mintegy 60 munka került ki. Nézd: T. X. Bianchi: Notice sur le premier ouvrage d'anatomie et de médecine en Turquie à Constantinople en 1820. — Paris 1821.

A) *Általános szabályok a bonczábrák készítésére.*

1. A bonczalakok természetes nagyságban rajzoltassanak; mert a természetinél kisebbek

a) nem híven tükrözik a természetet, holott a mütésznek mindig a természetet kell képzelni tudnia, de még a *kontató* (percussionem exercens) belorvosnak is;

b) a természetinél kisebb ábrák apró, de mégis igen lényeges részleteket elő nem állíthatnak, vagy ha elő állíthatnak is, azok szemrontókká lesznek, s csak nagyítóval (lencseüveggel) vehetők ki; — természetinél *nagyobbat* rajzolni lehet, sőt kell is, midőn igen finomak a lemásolandó tárgyak, p. a fül és szem alkatrészei, vagy midőn nagy számú s e szerint nagy tágas teremben gyülekszik a hallgatóság; én is kényszerültem ily oknál fogva két 10 lábnyi hosszú és 3 s fél lábnyi széles táblát üterekkel és idegekkel tantermem számára 1859-ben festeni.

II. A bonczábrák kiállításánál fő, még pedig lelkiismeretes gond fordíttassék a *körrajzra*, miért is Albinus példájára a pontos megmérések szigorúan kezelendők, mert a körrajzra főleg rá illik az ismert „forma dat esse rei"-féle mondat.

Mi a fél, közép és mély árnyéklatot s a viszfényt illeti: ezekre csak öregéből (breit gehalten) kell figyelni, miután ezen részletességek az orvosok ismereteit nem gazdagítják, a munkát rettentőleg eldrágítják, s így a vevőt a megvásárlástól elijesztik; röviden szólván: takarosak (schlicht) legyenek a bonczrajzok, nem pedig czifrák, kivévén, ha azt valamely Maecenas-féle széles jó kedvében kivánná meg, mintegy egy füst alatti ápolója mind a tudománynak, mind meg a művészetnek.

III. Az előállítandó alakok építészeti, nem pedig távlati modorban, készíttessenek, mert a műtéteknél, vagy a kontatás (percussio) s a hallgatódzás (auscultatio) alatt sem *kurtatban* (in Skorz), hanem egészen szemben (s tehát nem távlatban) nézzük a tárgyakat. (Ismert dolog, miszerint a kurtatban nem csak a műavatlanok, de a művészek magok is gyakran csalódnak, még pedig mind azok, kik a kurtatban dolgoznak mind meg azok, kik a kurtatot megtekintik s megbírálják.

IV. A boncztani ábrák úgy tükrözzék vissza a test lemásolandó részeit, valamint azok az élőben mutatkoznak; ez ellen vétett többek közt *Bidoo*, kinek jeles művésze nem csak hogy a hullának charakterét hozá be (az elevennek charaktere helyett) képeibe, de még az itt-ott előfordúló nyomait a hanyag bonczolásnak is híven és nagy szorgalommal fejezé ki ábráiban, mint p. Horace Vernet a port, mely első Napoleon lábtyúit födé.

V. Az eszményi képek a közép mekkoraságot tüntessék elő; ne legyenek azok hat lábnyiak, mint Wéber óriásai, és ne 4$^1/_5$ lábnyiak, mint Froriep (üteres és ideges) emberkéi; ne legyenek továbbá elhízott Bacchusok vagy elszáradt Irusok az ideálok, minőket a különben a legremekebb kőmetszetű Nuhn féle ábrák mutatnak. (Nézd: Chirurgisch-Anatomischer Atlas von Dr. Professor Nuhn, mit 30 ausgeführten und 30 Lineartafeln, nach der Natur gezeichnet. Düsseldorf (év nélkül) fol. max. (az ábrák magyarázó szövegén olvasható: Manheim 1856.)

VI. A véredényeket (ütereket és viszereket) illetőleg: ne rajzoltassanak ezek pötyögősen üresen, de ne is a pukkanásig duzzadtan, mint azt majd mindenhol láthatni, hanem kövessük a közép útat, mert különben mindig álfogalommal bírandunk e tetemek teriméje (volumen) fölött.

VII. Színezve állíttassanak ki az ábrák. (Ezt újabb időben Bock kezdé ismét divatba hozni. Nézd: Hand-Atlas der menschlichen Anatomie von Prof. J. H. Bock. Berlin 1858.)

Miután minden rajz végső analysisban mégis csak schema marad, közelítsen a schema, mennyire csak lehet, a természethez, a közeledést pedig a színezés igen előmozdítja.

VIII. Ugyanazon egy munkának valamennyi ábrái *ugyanazon egy bizonyos* szervületnek legyenek részletei, ne mint például Weber, Oesterlein, Loder s más többen tettek, kiknél a tüdő egy Herkules, a máj vagy a karok egy Ganymed, a belek vagy a nyak izmai egy Hekubából vétethettek, — a tagoknak ily különböző kaptára vert külleme soha sem fejthet tiszta fogalmat a tanulmányozó agyában, — az egyéb tekintetben igen dícsérendő Luschka: Die Brustorgane des Menschen in ihrer Lage, von Prof. H. Luschka. Tübingen 1857, fol. czímű munkájában öt különféle egyénnek vétette le egymástól igen különböző mellkasát, holott *nem a mellkas közti különbség* iratának tárgya, hanem a *rendes mellüregben* foglalt *rendes zsigereknek rendes fekvése.*

Hogy akkor két különféle egyéniség után készíttessék az ábra, midőn férfi és nő, vagy midőn fölserdült és kisded közti testalkati különbséget tűzünk ki értekezésünk tárgyáúl: az magából is értetik.

IX. Mielőtt boncztani tárgyak lemásolásához fog a szerző, készítsen magának (az ismert átlátszóságú) szalmapapírra egy szabályszerű csontvázat, és öltse arra a közlendő puha részeket (izmokat, edényeket, idegeket), rakja továbbá üregeibe az illető zsigereket; ezen eljárással sok időt gazdálkodtam meg hasonló esetekben, és a legszigorúabb ellenőrködésnek juték birtokába. (Minél tovább gondolkodandik a rajzértő ezen fortélyom fölött, annál inkább meggyőződendik annak mivel sem, pótolható hasznossága felől, legyenek bár egyszerűek a rajzok, vagy rétegesek, mint a Turnheisser- vagy Remmeling-félék.)

X. Rajzoltassanak le a tárgyak, mennyire csak lehet, nem csupán szemben, hanem hátúlról és oldalt is; üres részek pedig, mint a mellkas vagy a medencze s a koponya belülről is, még pedig mind függőleges, mind meg haránt átvágatban (im Durchschnitte und im Querschnitte).

XI. Igen ajánlatos, főleg rendszeres boncztani tárgyalványok számára a részeket előbb *egymagokban* azután a szomszédrészekkeli összefüggésben (in syntaxi — mint Albinus mondja —) lemásolni.

XII. Tanuljon az, ki hivatást érez magában a boncztanra· nem csak rajzolni, hanem festeni is, még pedig olajban festeni; mert csak akkor fogja a természetet megérteni és híven lemásolni, ha a szomszéd festészek azon kifejezéseit gyakorlatilag is értendi, melyek ekként hangzanak: „plastisch zeichnen, den Gegenstand richtig modelliren, — den bezüglichen Charakter hineinbringen, — warm coloriren, — breit halten, — in Detaille ausführen.“ S ha mégis rajzoltat a rajzban és festészetben idegen de a boncztanban jártas egyéniség *illustrátiókat*, akkor oly művészt válaszszon, — de csak is olyant, — ki a boncztanban jártas, és ki eredetiének szellemét és jellemét megérteni bírja.

B. *Különös szabályok a bonczlani ábrák készítésére.*

I. Ellentáblák, vagyis vonalos táblák nagy terjedelmű tárgyaknál, melyekre zavar-okozás nélkül lehet betűket, vagy számokat írni, haszontalanok és költség-szaporítók, de apróbb tárgyaknál igen szükségesek, mert a betűk ilyenkor igen megzavarhatják a rajzot.

II. Azon kérdésre: mi jobb a tárgyak bélyegzésére betűe vagy szám? azt felelem: hogy az egyes betű azért jobb a számnál, mert kevesebb tért foglal el egy betű, mint egy tízeseket vagy százasokat ábrázoló szám; ha tehát csak annyi tárgy bélyegzendő, a hány a betű (értvén a nagy és a kis betűket összesen) akkor betűvel éljünk; — ha több a tárgy, például a 350-re haladó idegek, vagy a 340-re rúgó üterek, akkor számokkal kell bélyegeznünk.

III. A betűk tekintetében ajánlom, hogy *következő* zavartszülő betűk hagyassanak ki:

1) az i, mert könnyen nézethetik egyesnek,

2) a j, mert szinte egyesnek tartathatik,

3) az l (kis ell) mert nagy i-nek (I), — továbbá római egyesnek (I) tartható, mely utolsóra gyakran szorúlunk, s ekép vele élendjünk is,

4) az o (kis ó), mert hol *zérusnak*, hol meg kerekded liknak, vagy szömölcsnek — szóval: rajzbeli jegynek tartható,

5) a kis v és a nagy V, mert mind a kettő római ötöst (V) jelent, melyre szinte, mint a római egyesre (I) gyakran szorúlunk, s melylyel élendjünk is.

IV. Igen dicséretes szokása *Arnold*-[1]) *Bischof-*, de különösen *Froriep*-nak[2]), midőn *kisebbféle syntaktikus* táblákon, melyeken csontok, izmok, erek és idegek fordúlnak elő, a csontokat nyomtatott nagy latin, az izmokat nyomtatott kis latin, a mirigyeket írott nagy latin, az ütereket írott kis latin betűkkel, a viszereket görög betűkkel, az idegeket számokkal bélyegezni.

Barth[3]) a csillagászati jeleket is alkalmazá, de ezek mint

---

[1]) F. Arnold-i icones nervorum capitis (kis folio); továbbá F. Arnold-i Organa sensuum (nagy folio).

[2]) Roberti Froriepi atlas anatomicus. Weimariae 1856.

[3]) Die Lehre der Mäuslein. (Myologia) 1788.

kevésbbé ismert hieroglyphek zavart okoznak és néha (mint például a halak) rajzbeli idomnak is tarthatók.

Midőn így kifogyunk a rendes betű- vagy számbeli jegyekből, akkor kettőztessük meg a betüket (például aa, bb, cc stb.).

V. Ha azt kérdik: hová írassék a bélyegző betü vagy szám, a tárgyra-e, vagy a tárgy mellé? akkor azt tanácslom, hogy nagy részleteknél a tárgyra, kisdedeknél a tárgy mellé tétessék a bélyegző jel, és húzattassék ez utolsó esetben a tárgy illető pontjától (p. a leírandó lik-, vagy nyújtvány- vagy hasadéktól) egy vonal a bélyegző jelhez (betűhöz vagy számhoz), de ezen vonal ne legyen folytonos, mint Henlének*) különben remek legújabb boncztanában, hanem pontozva, mint többi között Elfinger bécsi orv. tudor és híres festész ily czímü munkájában: Anatomie des Menschen sat. Wien, 1854. mert folytonos vonal könnyen rajzbeli adatnak, p. barázdának tartathatnék.

VI. Az ábrák magyarázatánál nem kell a papírral gazdálkodni, mint p. H. Wéber (Erklärung des anat. Atlas v. M. J. Weber) ki *egymás mellé* írá az illető lajstrom egyes adatait, hanem *egymás alá* kell ezeket (mint a naptári neveket) írni, példájára Arnoldnak vagy Oesterreichernek. (Nézd: Dr. H. Oesterreichers anatomischer Atlas. München 1853.)

Valamint a dombormüvek a rajzról a szobrászatra: úgy képzik az átmenetet a bonczábrákról a viaszkészítményekre a réteges rajzok, minőket hajdan Turnheisser, Bartisch és Remmelin készítettenek, újabb időben pedig Tuson (Edw. William Tuson, Myopolyplasiasmus, weimári német fordítás 1830) bocsátott közre, végre az értekező.

A réteges rajzok bizonyos előnyökkel bírnak, és pedig hasznosabbak a viaszkészítményeknél, a mennyiben olcsóbbak, és kisebb tömeggel meg súlylyal bírván, könyebben kezelhetők, végre melegebb éghajlat alatt nem szenvednek, mint a viaszgyurmálatok, — és ajánlatosabbak a puszta rajzoknál, mert az elfedett képletek föltakarhatók, s ekként:

*) Handbuch der systhematischen Anatomie des Menschen, von Dr. I. Henle 1855.

VII. pártolandók a réteges rajzok, ha természetes mekkorasággal birnak, ha színezettek, s ha az emberi szervületnek mind mellső, mind pedig hátsó képleteit (mintegy egymás fölött ellenőrködőleg) tüntetik ugyanazon egy darabon (például végtagon) elő. Az emberi testet (öt nagy táblán) természetes mekkoraságban, még pedig ugyanazon egy-egy táblán mind a mellső mind a hátsó rétegeket, értekező kísérté meg 1843-ban legelőször előállítani, s öt darab réteges tábláinak fölszerelésére 32 nagy ívnyi kőnyomat kívántaték meg; ezen munka kibocsátását egyébiránt azon sajnos körülmény akadályoztatá meg, hogy a (2000 p. ftba került) 32 megrajzolt nagy ívnyi mekkoraságú kő az edző gondatlansága miatt megperzseltetett, hamvaiból ezen bonctani phoenix csak úgy lendülhetne föl, ha a bonctan nemtője a *sorsintézettel* karöltve a kárt megtéríteni irgalmas lenne.

Zsigerek utánzására, melyeknél a stereometricus viszonyok a geometricusokat igen fölülhaladják, például az agynál, szívnél s májnál, háládatlan a réteges ábrázolás, s erőszakolt kivitele inkább konok makacsságra, mint észszerű következetességre mutat.

A KIKINDAI KESERŰVÍZNEK VEGYBONTÁSA.

ELŐTERJESZTÉ JÚL. 16. 1860.

MOLNÁR JÁNOS.

Schwartz úr kikindai házbirtokos felszólítása következtében, bátorkodom az ő kútvizének vegybontási eredményét a következőkben előterjeszteni.

Az elégséges menyiségben küldött víznek közelebbi körülményeiről nem szólhatok, azok leírása nem volt megküldve.

Minőleges vegybontás.

A víz tiszta, szín- és szagtalan, íze sóskeserű, keveset gyöngyöz, minden üvegben találtatik nagyon csekély fehér szürke kiválmány.

Főzésig hevítve megzavarodik, fehér csapadékot képezvén. A főzött és átszürt vízben a szokott kémszerekkel találtatott: Cl, SO^3, CaO, MgO. Más főzött vízrészből $BaCl$ BaO és végre AmO, CO^2 által a földessók kiejtve, a chloralkalikat tartalmazó folyadékot addig pároltam el, míg benne kristályok kezdettek képződni. A maradványt a Bunsenféle optikai mód szerint megvizsgáltam, s találtam NaO és LO; KO-nak pedig nyoma sincs.

A főzés által támadt csapadék erős pezsgés mellett HCl-ban olvasztható. Találtam benne: CO^2, SiO^2, CaO, MgO, FeO, Al^2O^3 és PO^5 nyomát.

BO^3—200k. c. vízhez addig KO,CO^2-t tettem, míg a folyadék égvényes lett, majd szárazig lepároltatva és ClH-val savítva curcumapapírra nagyon gyengén hat, tehát BO^3-nak nyoma van jelen.

A víz szárazig elpároltatva és nagyobb fokra hevítve kissé megbarnúl, mi szerves anyagnak jelenlétére mutat.

500 k. c. vizet NaO lúggal keverve lepárítottam, mi által nem mérhető kis AmO hatást kaptam.

A kísérlet NO^5 ra indigo és SO^3 által tagadó volt. 5 litre vizet KO,CO^2 hozzáadásával elpároltam, és a maradványt arra fordítottam, hogy: J, Br, F, BaO, $S+O$, és NH_4S által elválasztható testeket találhassam, e kísérletek azonban siker nélkül maradtak.

A minőleges vegybontás által tehát találtatott:

NaO, LO, CaO, MgO	Cl és SO^3-hoz kötve mérhető mennyiségben	CaO, MgO, FeO	CO^2-hoz kötve, mérhető mennyiségben.

SiO^2, Al^2O^3, szerves anyag	vízben olvasztva mérhető kis mennyiségben.

Azonkivül csak nyoma van: PO^5, BO^3 és AmO-nak.

Mennyileges elemzés.

Az egyes kísérletre szolgált, megmért víz térfogatának súlya, az előbb meghatározott tömöttsége által kiszámíttatott.

50k. c. víz nyom 50.5365 grmm, a tömöttsége tehát 1,01073.

A főzött vízben létező CaO-nek és MgO-nak meghatározása. 500 t. c. $=$ 505, 365 grm. vizet fél óráig forraltam és forrón megszürtem. Az elgőzölt részt párított vízzel pótoltam és chlorammon hozzá adása után AmO, C_2O_3-al lecsaptam. A tökéletesen kimosott csapadékot az előbbi edénybe visszatettem, a szürő HCl-val kimostam és a csapadékban volt C^2O^3t-chamaeleon által meghatároztam.

Kelletett chamaeleonból 16, 4 k. c.:

A chamaeleonnak térereje volt $=$ 5 k. c. normalsóskasav megfelelt 11, 6 k. c.: chamaeleonnak.

16, 4 k. c. chamaeleon tehát 7.06 k. c. normalsóskasav, mi 0.028 a CaO nek vegysúlyával sokszorozva ad 0.19768 grmm CaO tehát 1000 részben a CaO $=$ 0,3911

e kiván SO^3-t $=$ 0.5559

és tesz CaO, SO^3 0.9470.

A CaO, C^2O^3-ről leszürt folyadékot kisebb térre gőzöltem, és még melegen AmO, PO^5 által a MgO-t kiejtettem. A 36 óra után gyüjtött csapadékot ammontartalmú vízzel mostam és mint pyrophosphorsavas magnesiát megmértem. Súlya 2,150 grmm 1000 tehát a főzött vízben MgO . . 1,5288

ez telit SO^3-t . . 3,0598

és képez MgO,SO^3 . . 4,5886.

Cl—100 k. c.: $=$ 101.073 grmm. víz KO,CrO^3-al festve 8.7 k. c. rt tizedezüst oldatból kellett. 1000 részben a Cl tartalom 0,3052, ehez kell Na 0,1994 és ad NaCl 0,5046.

SO^3—100k. c.$=$101,073 grmm víz HCl savval elegyítve s felforralva. BaCl-val adott szárított s izzított üledéket, mely 2,312 gramm nyomott. 1000 részben tehát a

SO^3 $=$ 7,8587.

2-dik kisérletben 50 k. c. $=$ 50,5365 gramm víz adott ugyane módon 1,157 gramm BaO SO^3-ot mi 1000 részben tesz SO^3 $=$ 7,8655

a SO^3 tartalom középszámban 7,8621.

NaO és LO—150 k. c. $=$ 151,6095 gramm vizet előbb BaCl azután BaO vízzel kiejtettem s a folyadékhoz AmO,CO^2-t addig adtam, míg csak üledék képződött. Az erről leszürt folyadékot befőztem és izzítottam. Az izzított tömeget vízben felolvasztottam, átszürtem HCl-val, savitottam s újonan szárazra tettem. Súlya 1,003 gramm. chloralkálik. 1000 részben 6,6156.

A chloralkálikot absolut alkohol és aether keverékkel kihúztam. Az oldatot lepárítottam, s a maradékos vízben felolvasztva platintégelyben vízfürdőben elgőzöltem és harang alatt kénsav mellett kihülni hagytam. Nyomott 0,0395 gramm. 1000 részben tehát chlorlithium 0,2605. ez megfelel LO — bul = 0,0901 résznek, és kiván SO^3-ból 0,2508. LO,SO^3 képezvén 0,3409.

1000 részben a chloralkalik	6,6156
levonva a LCl-t	0,2605
maradt Na Cl	6,3551.
1000 részben a Na O tartalom	3,3788
levonva a Cl-hoz kötött Na mint NaO . . .	0,2682
maradt NaO	3,1106
ez telít SO^3-t	3,9967
tehát a NaO,SO^3	7,1073.

A SiO^2, FeO. Al^2O^3, CaO, és MgO-nak összes meghatározása.

a) 2000 k. c. = 2021,460 gramm víz HCl savval savítva, szárazra hoztam. HCl-val megnedvesítve, darab idő múlva forró vízzel tárgyaltam. Az olvaszthatlan maradt SiO^2 nyomott izzítás után 0.0405 gramm, mi 1000 részre tesz 0,0200.

b) A kovasavról leszürt folyadékot légelzárt módon AmmO-nal lecsaptam. A mosott é erősen izzított csapadék nyomott összesen 0,008 gramm, mi 1000 részre tesz 0,0039.

A megmért üledék tömött HCl savval tárgyaltatott, és higítva horgany által szinítve chamaeleonból 8 k. c. kelletett.

Chamaeleonnak térereje volt 0,250 gramm vaskettedsó, megfelelt chamaeleonnak 94 k. c.-nek. 1 k. c, chamaeleon tehát annyi mint 0.0026595 gramm vaskettedsó; mi 8-al sokszorozva és 7-el elosztva adja a vas-mennyiséget, mi 1000 részre Fe^2O^3-ból tesz 0.0021; a FeO-ből pedig = 0.0019; ez kiván CO^2 0,0011 és képez FeO, C^2O = 0,0030.

Az egész ammonüledék tesz 1000 részben	0,0039
levonva a Fe^2O^3 tartalmát	0,0021
marad	0,0018

mi kisérletek nyomán, mint $4Al^2O^3$, $3PO^5$ tétetik.

c) A b) alatt nyert folyadékot HCl-val savítva kisebb térre elgőzöltem és még melegen AmmO és AmmO,C^2O^3 által lecsaptam, a csapadékot kihülés után szürőn szedtem megint ClH-ban olvasztottam és újonan AmmO, és AmmO,C^2O^3-al kiejtettem. A mosott és vigyázva izzított csapadék nyomott 2,119 gramm CaO,CO^2. 1000 részben tehát az egész CaO tartalom

	0,5882
evonva a SO^3-hoz kötött részt	0,3911
maradt CaeO	0,1971
ez kíván CO^2	0,1541
és tesz CaO, CO^2	0,3512.

d) A c) folyadékot összetéve, kisebb térre elpároltattam, és kétfelé osztva, az egyik részéből AmO,PO^5 által a MgO-at kiejtettem és ammontartalmú vízzel mosva mint pyrophosphorsavas magnesiát megmértem. Súlya 5, 0796 gramm 10.10,730 gramm vízből, tehát 1000 részben az összes MgO tartalom

= 1,8060 levonva a SO^3-hoz

kötött részt . . . . . . = 1,5288

maradt MgO-ból = 0,2772 ez telít CO^2

0,2965

és képez MgO, CO^2 0,5737.

A szilárd részek meghatározására a vizet platincsészében szárazra főztem s 120°C. fokon szárítottam.

1-ső kísérletnél adott 100 k. c. = 101,073 gramm. víz 1,485 gramm maradványt, tehát 1000 részben 14,6923

2-ik kísérletben 200 c. c. = 202,146 gramm.
víz adott 2,971 maradványt = 1000 részben 14,6972

Elpárolási maradvány középszámban 14,6947.

Az elpárolási maradvány 202,146 gramm víznek megfelelő; a szerves anyagnak elbomlásáig izzítottam; AmO,CO^2-nál megnedvesítettem, szárítottam és megmértem. Súlyából vesztett 0,050 gramm. 1000 részben tehát a szerves anyag 0,2473.

Ellenőrzések.

A közvetlen elpárlás adott szilárd részeket 14,6947.

A vegybontás pedig, az alkatrészeket külön véve, adott:

NaO	3,3788
LO	0,0901
CaO	0,5882
MgO	1,8060
FeO	0,0019
$_4Al^2O^3, {}_3PO^5$	0,0018
Si O^2	0,0200
SO^3	7,8621
Cl	0,3052
CO^2	0,4517
szerves anyag	0,2473
BO^3-et AmmO	nyoma $_{34}$
	14,7531 a jelenlevő Cl-nak
megfelelő O súlyt levonva	0,0688
	14,6843.

SO^3-ból találtatott . . . . 7,8621.

A vegybontási számla szerint kötve

van NaO-hoz	3,9967	
LO-hoz	0,2508	
CaO-hoz	0,5559	
MgO-hoz	3,0598	
		7,8632.

A kikindai Schwartz-féle kút vízének alkrészei, összeállítva vegyekre:

	1000 részben	1 font = 32 latban.
Na Cl	0,5046	3,8753
NaO, SO^3	7,1073	54,5840
LO, SO^3	0,3409	2,6182
CaO, SO^3	0,9470	7,2729
MgO, SO^3	4,5886	35,2404
CaO, CO^2	0,3512	2,6972
MgO, CO^2	0,5737	4,4060
FeO, CO^2	0,0030	0,0230
$_4Al^2O^3, {}_3PO^5$	0,0018	0,0138
Si O^2	0,0200	0,1530
szerves anyag	0,2473	1,8992
BO^3 és Amm O	nyoma	nyoma
szilárd részeknek összege	14,6854	112,7836

Az elemzésből látnivaló, hogy a kikindai víz a keserű-vizek osztályába sorozandó (pykropega) és hogy ezt a nátron és magnesiasók elég tetemes mennyiségének köszöni, azonkivül meg azon tulajdonnal bír, hogy szénsavas földeket is tartalmaz tetemes mennyiségben.

Hasonlítás végett, az eddigi magyarhoni keserű vizeket következő táblában állítom össze:

A magyarhoni keserűvizeknek összeállítása 1 font 32 lat vízben számítva, bécsi szemerekben.

Alkrészek	Alsó Alap	Budán Neuwirth forrás	Budán Böck forrás	Budán Unger-forrás	Budán Hausner Ferencz-forrás	Ivandsai forrás	Budán Bray forrás	Felső Alap	Budán Rochusvölgyi forrás	Budán Hausner Hildegard forrás	Kikindai Schwartz forrás	Esztergomi forrás
kénsavas káli KO, SO^3	0,329	6,8713	0,9288	1,21	0,0123	0,420	0,7672	0,2381	0,0386	0,659		
glaubersó NaO, SO^3	147,050	127,8136	115,2610	108,90	107,5661	117,342	81,3273	43,8611	36,5760	64,784	54,5840	
keserső MgO. SO^3	22,344	99,3746	79,3969	61,73	41,4259	25,997	45,3166	24,0889	33,1361	30,120	35,2404	70,000
gypsz CaO, SO^3	4,890	11,6267	9,7864	9,46	10,9286		7,3728	14,0418	10,0853	6,659	7,2729	0,256
konyhasó Na Cl	104,946	19,8789	12,2475	14,09		14,609	12,0759	32,1504	13,8455	4,161	3,8753	
szénsavasmész CaO, CO^2		1,7172	1,0431	3,14	0,0545	2,302	3,6096	0,7222	8,1400	4,306	2,6972	
szénsavas magnesia MgO, CO^2	1,810	3,1741	0,9671	2,52	1,7587	0,209	3,0018	1,1571	8,6830	1,966	4,4060	4,000
kovasav Si O^2	0,008	0,8102	0,1353	0,33	0,0768	0,184	0,1456	0,3332	0,9953	0,813	0,1536	
chlormagnesium Mg Cl	5,175				15,7587		1,1320	7,2356				2,000
szénsavas vasoxydul FeO, CO^2 } szénsav. manganoxydulMaO, CO^2 }	0,060		0,2059		0,0223	nyoma		0,1629	0,0894	nyoma	0,0230	
								0,0669				
timföld Al^2O^3		0,0614		0,62	0,0230		0,0675	szerv. any. 2,4576	szerv. any. 6,0825		szerv. any. 1,8984	
aljas phosph. timföld $_4Al^2O^3$, $_3PO^5$	0,050							0,2222	0,0230	0,039	0,0138	
kénsavas lithion LO, SO^3	0,702							0,3804			2,6182	
jódmagnesium MgJ.	0,036							0,0221				
salítromsavas magnesia MgO, NO^5						2,864						
A szilárd részeknek összege	289,000	271,3280	222,1801	202,00	176,9440	164,759	158,1478	127,1409	117,6947	114,000	112,7836	72,600

A RÉSZLETES KÜLZELÉKI EGYENLETEK EGÉSZELÉSE.

PETZVAL JÓZSEF TANÁR ELŐADÁSAIBÓL KÖZLI

KONDOR GUSZTÁV.

BEVEZETÉS. *)

A részletes külzeléki egyenletek egészelése.

A három x, y, és z változékony mennyiségek közti első rendű *részletes* külzeléki egyenletek alatt általában azon viszonyok értetnek, melyek az x, y, z, $\frac{dz}{dx}$, és $\frac{dz}{dy}$ mennyiségek közt léteznek, és melyeknek képviselője:

$$(1) \qquad F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0$$

Ha pedig a függvényekben előforduló legmagasabb külzeléki hányadosok 2, 3,... n-dik rendüek, akkor azok 2, 3,... n-dik rendű részletes külzeléki egyenleteket állítanak elő, melyeknek képviselőjök:

$$(2) \qquad F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}\right) = 0$$

$$(3) \quad F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}, \frac{d^3z}{dx^3}, \frac{d^3z}{dx^2dy}, \frac{d^3z}{dxdy^2}, \frac{d^3z}{dy^3}\right) = 0$$

s. a. t.

*) Használt műszók. *Alaktan*, Formenlehre, *alaphang*, Grundton, *berejtett*, implicit, *csere*, permutatio, *csoportozat*, Gruppe, *egészelő*, integrirender Factor, *egybevetés* combinatio, *elemző*, analytisch, *elnyelési tényző*, Absorptionsfactor, *gócz-húr*, parameter, *hármas*, terne, *jelves*, symbolisch, *kényleges*, beliebig, *kifejtett*, explicit, *külzelék*, differentiale, *nyolczadrét*, octav, *ősegyenlet*, Urgleichung, *öszfoglalat*, complexio, *öszlet*, complexus, *öszméret*, Symmetrie, *összegezés*, Summirung, *részletes*, partiell, *részleges*, particulär, *rezgcsomó*, Schwingungsknote, *rezgidő*, Schwingungsdauer, *teljes*, vollständig, *tetszésszerinti*, willkührlich, *túllépő*, transcendent, *utólag*, a posteriori, *változtatás*, variatio, *végszerű*, rationalis, *végszerűtlen*, irrationalis, *vonalos*, linear.

A részletes külzeléki egyenletekben több függő változékony menyiségek is jöhetnek elő; így például: azokban, melyek a feszült húr lengési, és a világosság terjedési szabályait adják, két független x, és t, és három függő ξ, η, és ζ változékony mennyiségek fordúlnak elő.

Minden x, és y közti függvény, mely z helyett a részletes külzeléki egyenletbe tétetik, és ennek megfelel, az egyenlet *egészletének* neveztetik. A hány ily egymástól különböző kifejezések léteznek, melyek az egyenletnek megfelelnek, épen annyi egészlete is van ugyanannak.

Hogyha a föltalált kifejezés egy másiknak különleges esete, akkor az előbbi *részleges*, az utóbbi pedig *általános* egészletnek neveztetik. Ezen kifejezéseket, vagyis a részletes külzeléki egyenlet egészletét feltalálni annyit tesz, mint az egyenletet *egészelni*.

A vonalos részletes külzeléki egyenlet általános egészlete létezésének bebizonyítása csaknem legyőzhetlen nehézségek alá van vetve; és minthogy már a *vonalos* külzeléki egyenlet általános egészlete *létezésének* bebizonyítását Petzval József tanár úrtól (lásd: Integration der linearen Differentialgleichungen mit constanten und veränderlichen Coefficienten von Josef Petzval. Erste Lieferung, Seite 6—17) bírjuk, az előbbinek bebizonyítását tehát minden habozás nélkül átugorhatjuk.

(1. §.)

Minden vonalos részletes külzeléki egyenletnek egy, kényleges függvénynyel ellátott, egészlet felel meg.

Hogy a vonalos részletes külzeléki egyenletnek egy, kényleges függvénynyel ellátott, egészlet megfelelhet, ezt utólag e következőképen lehet bebizonyítani.

Legyen

$$z = \varphi\,(x^2 + y^2) \tag{4}$$

egészletben φ függvény alakja egészen kényleges, leszen a részletes külzelés után

$$(5)\quad \left.\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= 2x\,\varphi'(x^2+y^2) = p \\ \frac{dz}{dy} &= 2y\,\varphi'(x^2+y^2) = q \end{aligned}\right\}$$

és

tehát

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{q}$$

miből

$$(6)\qquad py - qx = 0$$

egy első rendű részletes külzeléki egyenlet, melyben a φ kényleges függvénynek semmi nyoma nem találtatik.

Az egészletnek megfelelő értékei lehetnek tehát:

$$(7)\quad z = \log(x^2+y^2),\ \sin(x^2+y^2),\ (x^2+y^2) \text{ sat.}$$

és ámbár ezen függvények egymástól mind különbözők, az alapmennyiség (x^2+y^2) mégis mindig ugyanaz.

Ebből következik, hogy a (6) alatti első rendű vonalos részletes külzeléki egyenletnek egy, meghatározott alapmennyiséggel ellátott, kényleges függvény felel meg; és hogy minden első rendű vonalos részletes külzeléki egyenlet általános egészletében hihetőleg egy kényleges függvény foglaltatik.

Ezen elemző tapasztalás után jó lesz az első rendű vonalos részletes külzeléki egyenlet *mértani jelentését* elővenni.

Legyen e végre

$$(8)\qquad L = \varphi(M)$$

egy ősegyenlet, melyben a φ függvény alakja egészen kényleges, L, és M mennyiségek pedig x, y, és z közti ismert függvények.

Ha ezen függvényből egy első rendű vonalos részletes külzeléki egyenletet képezni akarunk, kell, hogy ugyanazt kétszer egymásután, egyszer t. i. x, és egyszer y szerint külzeljük, és azután az így képzett egyenleteket a (8) alattival összevetve e következő végső kiküszöbölési egyenletre

$$(9)\ p\left[\frac{dL}{dz}\cdot\frac{dM}{dy} - \frac{dL}{dy}\cdot\frac{dM}{dz}\right] + q\left[\frac{dL}{dx}\cdot\frac{dM}{dz} - \frac{dL}{dz}\cdot\frac{dM}{dx}\right] = \left[\frac{dL}{dy}\cdot\frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dx}\cdot\frac{dM}{dy}\right]$$

jutunk, mely nyilván vonalos, és első rendű ugyan, de az igen bonyolt öszténvezőkből bizonyos ismertető jelek után nehezen lehetne a megfelelő függvény alakjára következtetni; mert a külzeléki egyenletben gyakran közös tényzők is fordúlnak elő, melyek azután elmaradnak.

Ha

(10) $$L = a$$

és (11) $$M = b$$

egyenletekben L, és M az x, y, és z változékony mennyiségek függvényei, a, és b mennyiségek pedig kényleges góc-húrok volnának, akkor azok közöl mindegyik egy határozatlan lap-egyenletet, tehát végtelen sok görbe lapokat, együttvéve pedig végtelen sok kettős görbületű átmetszési vonalokat állítanak elő.

Ha pedig a, és b mennyiségek meghatározott értékeket vesznek fel, akkor a (10), és (11) alatti egyenletek külön-külön egy határozott lap-egyenletet, együttvéve pedig egy határozott kettős görbületű átmetszési vonalat képviselnek.

Ha továbbá

(12) $$a = \varphi(b)$$

akkor a két lap átmetszési vonalát nem minden kettős görbületű vonal képezheti, mert csak bizonyos átmetszési vonalok lesznek, melyek a (12) alatti függvénynek megfelelnek.

Végre a (10), és (11) alatti értékeket a (12) alattiba helyettesítvén, kapjuk

(13) $$L = \varphi(M)$$

egyenletet, melyben a fennevezett átmetszési vonalak mind benne foglaltatnak, t. i.

$$L = a = \varphi(b)$$

és $$M = b.$$

Ha most már a, és b mennyiségek kénylegesek, akkor az átmetszési vonalok egyikét bizonyos ponton, melynek öszrendezői x_1, y_1, és z_1, lehet átvezetni, mert ezen esetben a kettős görbületű átmetszési vonalok végtelen sokasága az egész tért betölti.

Ha pedig a, és b mennyiségek nem kénylegesek, tehát valamely föltét alá vannak vetve, akkor az átmetszési vonal bizonyos ponton való keresztülvitele általában nem sikerülend ugyan, de mindazonáltal a (13) alatti lapot egy bizonyos átmetszési vonal mozgása által lehet előállítani. E végre vegye b e következő értékeket:

$$\beta,\ (\beta+\delta),\ (\beta+2\delta),\ \text{sat.}$$

fel, hol δ igen kis mennyiséget képviseljen; akkor

$$L = \varphi\,(\beta)$$

és

$$M = \beta$$

együttvéve egy meghatározott kettős görbületü átmetszési vonalhoz tartoznak, valamint ezen egyenletek is:

$$L = \varphi\,(\beta+\delta)$$

és

$$M = (\beta+\delta)$$

Ezen utóbbi átmetszési vonal δ mennyiség kicsinysége végett az előbbivel csaknem összeesik: tehát az első átmetszési vonal egy igen csekély elmozdítás által a másodiknak helyébe, s ismét igen csekély tovább mozdítása következtében a harmadiknak helyébe jut, és így tovább. Ebből nyilván következik, hogy a meghatározott első átmetszési vonal folytonos mozgása által a keresett egész görbe lap előállítható.

Ezen öszrendezők, melyek egy bizonyos ponthoz tartoznak, és a (10), és (11) alatti egyenleteknek megfelelnek, megfelelnek egyszersmind a (13) alattinak is. Az előbbiek *alkotó* lapoknak, az utóbbi pedig *alkotott*nak neveztetik.

Minthogy a (9) alatti részletes külzeléki egyenlet alakjából a (8) alatti megfelelő függvényt lehetetlen meghatározni; azért tehát rövidség okáért legyen:

$$(14)\quad \left.\begin{aligned} P &= \left[\frac{dL}{dz}\cdot\frac{dM}{dy}-\frac{dL}{dy}\cdot\frac{dM}{dz}\right] \\ Q &= \left[\frac{dL}{dx}\cdot\frac{dM}{dz}-\frac{dL}{dz}\cdot\frac{dM}{dx}\right] \\ R &= \left[\frac{dL}{dy}\cdot\frac{dM}{dx}-\frac{dL}{dx}\cdot\frac{dM}{dy}\right] \end{aligned}\right\}$$

eszen a (9) alatti egyenletből

$$(15)\qquad Pp + Qq = R$$

mely részletes külzeléki egyenlet csak akkor egészelhető, ha még e következő részletes külzeléki egyenlet

$$(16\qquad dz = pdx + qdy$$

hozzá járúl. Ha most az utóbbiból p kerestetik, és a (15) alattiba helyettesíttetik, e helyettesítési eredmény következik:

$$(17) \qquad q(Qdx - Pdy) = (Rdx - Pdz).$$

Ha a, és b mennyiségek állandók, akkor az L, és M külzelékei elenyésznek, és ennek következtében a (17) alatti egyenlet azonos; tehát a (8) alatti függvény ennek, és minden egészelés nélkül a (10), és (11) alatti egyenleteknek megfelel. Megfelelhet tehát a (17) alatti részletes külzeléki egyenletnek a két görbe lap átmetszési vonala, és azon lap is, mely ezen átmetszési vonal által képezhető.

A 2-dik, 3-dik és magasabb rendű vonalos részletes külzeléki egyenletekről hasonló okoskodásokat várhatni, csak azon különbséggel, hogy az általános egészlet ezeknél két, három . . . vagy több kényleges függvényeket is foglalhat magában. Ugyanis legyen:

$$(18) \qquad L = \varphi(M) + \psi(N)$$

egy, két kényleges függvénynyel ellátott, ősegyenlet, melyből a megfelelő vonalos részletes külzeléki egyenlet az által származtathatik, hogy ezen ősegyenlet egyszer x, és egyszer y után külzeltetik, mely két egyenlet a φ', és ψ' függvényeket foglalja magában. Ha most már ez utóbbi két egyenletből az egyik külön x, és y után, a másik pedig csak y után külzeltetik, három új egyenlet származik, melyekben φ'', és ψ'' függvények foglaltatnak. Ezen öt egyenletből φ', ψ', φ'', és ψ'' függvényeket lehet kiküszöbölni, és egy kiküszöbölési egyenlet ered, mely másodrendű, és a φ, és ψ függvények benne nem találtatnak.

Az épen mondottak lehetségesek ugyan, de nem kell nekik szükségképen megtörténni, mert volna csak

$$L = \varphi(M) + K\psi(N)$$

akkor a fentebbi kiküszöbölés többé nem történhetnék meg.

(2. §.)

Állandó öszttényezőkkel ellátott egynemű vonalos részletes külzeléki egyenletek egészelése.

A három z, x, és t változékony mennyiségek közti állandó össztényezőkkel ellátott n-dik rendű vonalos részletes külzeléki egyenlet általános alakja:

$$(19)\quad A_n \frac{d^n z}{dx^n} + A_{n-1} \frac{d^n z}{dx^{n-1}dt} + A_{n-2} \frac{d^n z}{dx^{n-2}dt^2} + \ldots + A_1 \frac{d^n z}{dx\, dt^{n-1}} + A_0 \frac{d^n z}{dt^n} = 0$$

melyben x, és t független, és z függő változékony mennyiségek, A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, ... A_1, A_0 pedig állandó ösztényezők.

Ezen, és hasonló külzeléki egyenletek a természetben leggyakrabban jönek elő, és kényleges függvény által, például: ezen alak által:

$$(20)\qquad z = f(x + \alpha t)$$

egészelhetők. Vajjon a felvett függvény alakja az adott részletes külzeléki egyenletnek megfelel-e vagy nem? arról e következők helyettesítése

$$(21)\qquad \left.\begin{aligned} \frac{d^n z}{dx^n} &= f^{(n)}(x+\alpha t) \\ \frac{d^n z}{dx^{n-1}dt} &= \alpha\, f^{(n)}(x+\alpha t) \\ \frac{d^n z}{dx^{n-2}dt^2} &= \alpha^2 f^{(n)}(x+\alpha t) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^n z}{dt^n} &= \alpha^n f^{(n)}(x+\alpha t) \end{aligned}\right\}$$

ad bizonyságot, mely által:

$$(22)\quad \left.\begin{aligned} f^{(n)}(x+\alpha t)\,[A_n + A_{n-1}\alpha + A_{n-2}\alpha^2 + \ldots + \\ A_1 \alpha^{n-1} + A_0 \alpha^n] = 0 \end{aligned}\right\}$$

leszen.

Ezen egyenletnek vagy

$$(23)\qquad f^{(n)}(x+\alpha t) = 0$$

vagy

$$(24)\quad A_n + A_{n-1}\alpha + A_{n-2}\alpha^2 + \ldots + A_1 \alpha^{n-1} + A_0 \alpha^n = 0$$

felelhet meg. De minekutánna a (23) alatti föltét az egyenletnek nem felelhet meg, minthogy ennek következtében a (20) alatti függvény alakja (n—1)-dik fokú egész sok tag volna, tehát nem kényleges, mely a részletes külzeléki egyenletek általános mivoltával ellentétben állana. Ebből tehát következik, hogy a (24) alatti föltét a részletes külzeléki egyenletnek csak egyedül felelhet meg, mely n-dik fokú algebrai egyenlet lévén, n gyökei

$$\alpha = \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_{n-1},\ \alpha_n$$

vannak.

Ebből továbbá következik, hogy a (19) alatti részletes külzeléki egyenletnek α-nak csak azon értéke felel meg, mely egyszersmind a (24) alattinak is megfelel.

A megfelelő függvények lesznek tehát

$$(25)\qquad \left.\begin{aligned} z &= f_1\,(x+\alpha_1 t) \\ z &= f_2\,(x+\alpha_2 t) \\ z &= f_3\,(x+\alpha_3 t) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ z &= f_n(x+\alpha_n t) \end{aligned}\right\}$$

és minthogy a (19) alatti részletes külzeléki egyenlet *vonalos*, tehát a részleges egészletek összege

$$(26)\quad z = f_1(x+a_1 t + f_2(x+\alpha_2 t) + \ldots + f^n(x+\alpha_n t)$$

is az egyenletnek megfelelend, és ez volna az adott egynemü vonalos részletes külzeléki egyenletnek *általános egészlete*.

Szabály. Állandó ösztényezőkkel ellátott, és három z, x, és t változékony menyiségek közti n-dik fokú egynemü vonalos részletes külzeléki egyenlet következőképen egészeltetik: *a részletes külzeléki egyenletben a t után vett külzeléki hányadosok helyett α egynevü hatványai tétetnek, azután az így nyert algebrai egyenlet feloldatik, és α értékei az általános egészlet kényleges függvényébe helyettesítetnek.*

Ezen egészelési módszer felvilágositására szolgáljon az elemző erömütan e kérdeménye:

$$\frac{d^2z}{dt^2} - a^2\frac{d^2z}{dx^2} = 0$$

mely a feszült húrok lengési egyenletét állítja elő, és melyben z a Z tengely után vett igen csekély mozgását jelenti.

Ennek általános egészlete a fenebb mondottak után:

$$z = f_1\,(x+\alpha_1 t) + f_2(y+\alpha_2 t)$$

és az algebrai egyenlet

$$\alpha^2 - a^2 = 0$$

ebből

$$\alpha_1 = +a$$
$$a_2 = -a$$

következik, leszen tehát

$$z=f_1(x+at)+f_2(x-at)$$

az adott egyenlet általános egészlete, mely a feszült húrok lengési minden szabályait magában foglalja.

Ámbár ezen egészelési módszer igen szép, és egyszerü, mindazonáltal oly egynemü vonalos részletes külzeléki egyenletekre többé nem alkalmazható, melyekben különbféle külzeléki hányadosok, és több, példáúl : x, t, és y változékony mennyiségek foglaltatnak, mert ezen esetben a megfelelő kényleges függvény alakja

$$z=f(x+\alpha t+\beta y)$$

lenne, α, és β alapmenyiségek pedig egyetlenegy algebrai egyenletből meg nem határoztathatnának.

(3. §.)

Változékony összényezőkkel ellátott egynemü vonalos részletes külzeléki egyenletek egészelése.

Az x, y, és z közti változékony össztényezőkkel ellátott első rendü egynemü vonalos részletes külzeléki egyenletek általános alakja :

$$Pp+Qq=R \tag{27}$$

melyben P, Q, és R mennyiségek x, y, és z, ez utolsó pedig x, és y függvényei, továbbá p, és q az x, és y után vett részletes külzeléki hányadosok; z-nek minden értéke, mely ezen egyenletet azonossá teszi, *egészlet*nek neveztetik.

Ha most p, és q mennyiségek értékei úgy választatnak, hogy

$$q=\frac{R-Pp}{Q} \tag{28}$$

egyenletnek megfeleljenek, és egyszersmind

$$dz=pdx+qdy \tag{29}$$

egyetlenegy ösegyenlet külzeléki hányadosai is legyenek, akkor kell, hogy ez utóbbi egyenlet

1-ör a (27) alattinak megfeleljen, és

2-or egészelhető legyen.

E végre a (28) alatti egyenletet a (29) alattiba helyettesítvén, származik

$$(30) \qquad dz = pdx + \left(\frac{R-Pp}{Q}\right)dy$$

mely a következő kutatásoknak egyedüli tárgya leend.

Ha p helyébe egy értéket — talán tapogatás által, — mely x, és y függvénye, találtunk volna; akkor a (30) alatti egyenlet második része épen úgy mint az első teljes külzelék lenne, tehát

$$pdx, \text{ és } \left(\frac{R-Pp}{Q}\right)dy$$

z-nek x, és y után vett részletes külzelései, továbbá

$$p = \frac{dz}{dx}, \text{ és } q = \frac{dz}{dy}$$

z-nek x, és y után vett részletes külzeléki hányadosai lennének. Ebből következnék, hogy a (30) alatti egyenlet egészelhető, vagy legalább p-nek ügyes, és szerencsés választása által egészelhetövé tehető.

Ha mindjárt a (30) alatti egyenlet így is:

$$(31) \qquad 0 = -dz + pdx + \left(\frac{R-Pp}{Q}\right)dy$$

vagy a nevező eltávolítása következtében e következőképen:

$$(32) \qquad p(Qdx-Pdy) = (Qdz-Rdy)$$

is iratik, még is egészelhető marad; ámbár ez utóbbi esetben a teljes külzeléki tulajdonságát talán esetlegesen elvesztette.

Az utolsó egyenletnek e föltételek:

$$(33) \qquad Qdx-Pdy=0$$

és

$$(34) \qquad Qdz-Rdy=0$$

nyilván megfelelnek, bármily értéke volna is p-nek. Ezen föltételek által az egészelési mívelettől egészen eltávozánk, minthogy ezek z, és y változékony menyiségeket mint az x függvényeit állítják elő.

Külzeljük most már ezeket az x alap-változékony után, kapunk még két egyenletet, mely négy egyenletből e hét

$$x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \text{és}\ \frac{d^2z}{dx^2}$$

mennyiségek közöl három, t. i.

$$z, \qquad \frac{dz}{dx}, \qquad \text{és}\ \frac{d^2z}{dx_2}$$

kiküszöbölhető, a hátra maradt kiküszöbölési egyenlet z menyiséget nem foglalván magában, egy x, és y változékonyak közti másodrendű közönséges külzeléki egyenletet képez, melynek alakja

(35) $$L_1=0$$

és egészlete

(36) $$\chi(x,y,a,b)=0$$

legyen, hol a, és b kényleges állandók.

Keressük továbbá ebből a függvényből y-t, és külzeljük az így nyert egyenletet x szerint; akkor y, és $\frac{dy}{dz}$ mint az x, a, és b függvényei fordúlnak elő. Ha végre y, és $\frac{dy}{dz}$ értékei a (33) alattiba helyettesíttetnek, leszen belőle:

(37) $$\tilde{\omega}(x,z,a,b)=0$$

Fordúljunk most már a (30) alatti külzeléki egyenlet valódi egészeléséhez ismét vissza, és vezessünk p helyett a, és b két változékony mennyiséget azáltal be, hogy a (36) és (37)-ben előforduló kényleges egészelési állandók változékonyaknak tekintessenek. Lesznek

(38) $$\left.\begin{aligned} y&=F(a,b,x) \\ \text{és}\quad z&=F_1(a,b,x)\end{aligned}\right\}$$

y, és z mennyiségek az a, b, és a régi x változékonyak függvényei, melyeknek teljes külzelékei

(39) $$\left.\begin{aligned} dy&=\frac{dF}{da}da+\frac{dF}{db}db+\frac{dF}{dx}dx \\ dz&=\frac{dF_1}{da}da+\frac{dF_1}{db}db+\frac{dF_1}{dx}dx\end{aligned}\right\}$$

Képzeljük a (38), és (39) alatt levő mennyiségeket a (31)-be helyettesítve: nyerjük e következő helyettesítési eredményt:

(40) $$\mathit{A}da+\mathit{B}db+\mathit{X}dx=0$$

mi által az egyenlet teljes külzeléki tulajdonsága nem veszett el.

Ha a, és b változékony mennyiségeket ismét állandóknak tekintjük, leszen

(41) $$\mathit{X}dx=0$$

$$\text{tehát}\quad \mathit{X}=0$$

és ennek következtében

(42) $$Ada+Bdb=0$$
egyenlet is teljes külzelék.

Minthogy a (31) alatti külzeléki egyenlet egészelhető, lehet tehát egészelőt hozzá csatolni, ha az még eddig ott jelen nem volna, melynek következtében a (42) alatti teljes külzeléki egyenletetben x nem foglaltatik. Ha ellenben az egészelőt hozzá nem csatoltuk volna, A, és B mennyiségekben x lett volna, mely mint közös tényező el is maradhatott volna.

A (42) alatti teljes külzeléki egyenlet egészelve

(43) $$\varphi(a,b)=0$$
leszen, melynek teljes külzeléke

(44) $$\frac{d\varphi}{da}\,da+\frac{d\varphi}{db}\,db=0$$
leszen tehát

(45) $$\left.\begin{aligned} A&=\frac{d\varphi}{da} \\ B&=\frac{d\varphi}{db} \end{aligned}\right\}$$

Ha végre a (33), és (34) alatti egyenleteket egészeljük, kapjuk

(46) $$\left.\begin{aligned} L&=a \\ \text{és}\quad M&=b \end{aligned}\right\}$$
melyekben L, és M mennyiségek x, y, és z függvényei, a, és b pedig kényleges egészelési állandók. Ezeket a (43) alattiba helyettesítve, leszen

(47) $$\left.\begin{aligned} \varphi(L,M)&=0 \\ \text{vagy}\quad L&=\psi(M) \end{aligned}\right\}$$
az adott egynemü vonalos részletes külzeléki egyenlet keresett *általános egészlete.*

Ha p-nek több értékei vannak, melyek az adott külzeléki egyenletet egészelhetővé teszik, akkor bizonyosan többféle függvényalakok is leendnek, melyek mindannyian a külzeléki egyenletnek megfelelnek, azaz : a (31), és (44) alatti külzeléki egyenletek mindig ugyanazok, bármily alakja volna is φ függvénynek.

L egészelő a (32)hez csatolva, ezt a (42), és (44) alattival együtt azonossá teszi. Tegyük tehát a (32)-be a, és b változékony mennyiségeket be, kapjuk e következő helyettesítési eredményt

$$(48)\quad \mathbf{L}[\mathbf{A}da+\mathbf{B}db+\mathbf{X}dx]+\mathbf{L}[\mathbf{A}_1 da+\mathbf{B}_1 db+\mathbf{X}_1 dx]=0$$

melyben $\mathbf{L}$, $\mathbf{X}$, és $\mathbf{X}_1$ menyiségek az x változékonyt foglalják magokban, míg $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{B}_1$ ettől szabadok.

Most már a, és b mennyiségek legyenek ismét állandók, leszen

$$\mathbf{X}=0$$

$$\text{és}\quad \mathbf{X}_1=0$$

ez által a (44), és (48) alatti külzeléki egyenletek összeesnek, tehát

$$(49)\qquad \left.\begin{aligned} \mathbf{LA}+\mathbf{L}p\mathbf{A}_1 &= \frac{d\varphi}{dá} \\ \text{és}\quad \mathbf{LB}+\mathbf{L}p\mathbf{B}_1 &= \frac{d\varphi}{db} \end{aligned}\right\}$$

mely egyenletekből következik, hogy bármily alakja volna is a φ függvénynek, p, és L mennyiségeknek bizonyos értékei mégis mindig volnának, melyek az adott egynemü vonalos részletes külzeléki egyletnek megfelelnek, miből tehát világosan következik, hogy a φ *függvény alakja kényleges.*

Szabály. Ezen egészelési módszer áll tehát e következőben :

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

tévén, ezen külzeléki egyenleteket ügyes összeállítás által egészelvén, két kényleges állandót adnak, melyek azután változékony mennyiségeknek tekintetnek, és a külzeléki egyenletbe helyettesíttetnek, mi által a három változékony mennyiség száma, melyek az adott külzeléki egyenletben előfordúlnak, kettőre vezettetik vissza. E két változékony mennyiséggel ellátott külzeléki egyenlet most már az adott egynemü vonalos részletes külzeléki egyenlet általános egészletéhez vezet.

Ezen egészelési módszer alkalmazása.

Ezen egészelési módszer könnyebb felfogása végett alkalmazzuk azt e következő példára :

$$(51)\qquad (hx+y)p-(hy+x)q=0$$

(50) után lesz

$$\frac{dx}{(hx+y)} = -\frac{dy}{(hy+x)} = \frac{dz}{0}$$

tehát

$$dz = 0$$

és $$(hy+x)dx+(hx+y)dy=0$$

az elsőt egészelve, ad

(52) $$z=a$$

a második egyenlet pedig egynemü, tehát L egynemű egészelő által egészelhető, és leszen

(53) $$L(hy+x)dx+L(hx+y)dy=0$$

tehát egészelve

$$L(x^2+y^2+2hxy)=C$$

ebből $$L=\frac{C}{(x^2+y^2+2hxy)}$$

ezt az (53)-ba helyettesítve leszen

$$C\left[\frac{(hy+x)dx+(hx+y)dy}{(x^2+y^2+2hxy)}\right]=0$$

melyet egészelve, ezt adja:

(54) $$x^2+y^2+2hxy=b$$

Minthogy a, és b mennyiségek kénylegesek, lehet tehát

$$a=\psi(b)$$

vagy

(55) $$z=\psi(x^2+y^2+2hxy)$$

mely kifejezés a külzeléki egyenlet egészlete, és ψ kénylegés függvény.

Ezen egészelési módszer helyessége e példa által bizonyítassék be.

Nem elég q-nak értékét csak úgy választani a mint az a (28)-ban előfordúl, mert ez által az egyenlet még nincs egészelve; hanem szükséges, hogy z, mint az x, és y változékony mennyiségek függvénye, úgy választassék, a hogy azt a (29) alatti egyenlet megkivánja, melyben p, és q mennyiségek z-nek x, és y után vett részletes külzelékei.

A kivánt helyettesítés után csak a (31) alatti egyenlettel van dolgunk, melyet p-nek ügyes választása által előbb egészelhetővé kell tenni, és azután valósággal egészelni.

Az (51) alatti egyenletből, a (31) alattival egybehangzólag, leszen e következő:

$$(56) \qquad dz - pdx - \frac{p(hx+y)}{(hy+x)}.dy = 0$$

most p e következőkép:

$$p = (hy+x)$$

választassék, leszen

$$dz - (hy+x)dx - (hx+y)dy = 0$$

és

$$z = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2+2hxy)$$

Ezen függvény az (51) alatti egyenletnek megfelel, mert ennek részletes külzelése által

$$p = (hy+x)$$

és

$$q = (hx+y)$$

származnak, melyek az (51) alattit azonossá teszik.

Az egészelés csak azon esetben leszen lehetséges, hogyha p-nek értékét ügyesen lehet választani; de minthogy ez nem mindig sikerülend, kell, hogy az egyenlet p érték elkerülése által egészeltessék.

A (32) alatti egyenletnek teljes külzeléki tulajdonsága Q nevező eltávolítása által elveszett. Ha az (56) alatti egyenletből $(hy+x)$ nevező is eltávolíttatik, leszen

$$(58) \qquad dz(hy+x) - p[(hy+x)dx + (hx+y)dy] = 0$$

mely teljes külzeléki tulajdonságát hasonlókép elvesztette. Ez utóbbi egyenletből a (33), és (34) alattiak után következnek

$$(59) \qquad \left.\begin{array}{r} dz(hy+x) = 0 \\ \text{és} \quad (hy+x)dx + (hx+y)dy = 0 \end{array}\right\}$$

melyek egészelve

$$(60) \qquad \left.\begin{array}{r} z = a \\ x^2+y^2+2hxy = b \end{array}\right\}$$

adnak.

Legyenek most a, és b mennyiségek új változékonyak, és vezettessenek az (58) alattiba be, továbbá választassék p helyébe egy helyes érték, talán : $(hy+x)$, vagy egy másik, akkor ezek bevezetésének hatása leend

$$Ada + Bdb + Xdx = 0$$

egy teljes külzeléki egyenlet.

Ha a, és b mennyiségek ismét állandóknak vétetnek, leszen:

$$Xdx = 0$$

tehát

$$X = 0$$

tehát $$Ada + Bdb = 0$$
még mindig egy teljes külzeléki egyenlet, melyben A, és B menyiségek x-t nem foglalják magokban.

Ezeket példánkra alkalmazva, lesznek a (60) alatti egyenletekből

$$dz = da$$

és $$(hy+x)\,dx + (hx+y)\,dy = \frac{1}{2}\,db$$

ezeknek helyettesítése után pedig az (58)-ból

$$da\,(hy+x) + (hy+x)\,(\tfrac{1}{2}\,db) = 0$$

Ha ezen egyenletből a (60) alatti segítségével y kiküszöböltetik, akkor a közös szorzó csak x-t foglal magában, és következik

$$da - \frac{1}{2}\,db = 0$$

mely egészelve

$$\varphi\,(a, b) = 0$$

ad, tehát $$\varphi\,[z, (x^2+y^2+2hxy)] = 0$$

vagy $$z = \psi\,(x^2+y^2+2hxy)$$

az (51) alatti egyenlet általános egészlete, melyben ψ kényleges függvény.

Ezen utólsó állítás bebizonyítására indúljunk az (58) alatti egyenletből ki, melyet így is lehet írni:

$$da\,(hy+x) - p\,(\tfrac{1}{2}\,db) = 0$$

Most a p értékét úgy kell választani, hogy ezen egyenletben x ne fordúljon elő; és minthogy dx ebben nincsen, tehát x sem lesz benne. Ezen külzeléki egyenletet U egészelővel szorozva, leszen

$$U\,(hy+x)\,da - \frac{1}{2}\,Updb = 0$$

és minthogy ez a (44) alattival összeesik, leszen

$$U\,(hy+x) = \frac{d\varphi}{da}$$

és $$\tfrac{1}{2}\,Up = \frac{d\varphi}{db}$$

miből

$$U = \frac{1}{(hy+x)} \cdot \frac{d\varphi}{da} \qquad (61)$$

tehát

$$(62) \qquad p = - \frac{2(hy+x)\frac{d\varphi}{db}}{\frac{d\varphi}{da}}$$

származik U egészelőnek bár mily értéke volna is. Ebből következik, hogy a ψ függvény önkényüsége p értékének ügyes választásától függ, mely az adott külzeléki egyenletnek megfelel.

(4. §.)

De Lagrange ezen egészelési módszert a változékony menynyiségek tetszés szerinti számára terjesztette ki, mely e következőkben áll:

Az $(n+1)$ változékony mennyiségek közti részletes külzeléki egyenlet általános alakja :

$$(63) \quad P = P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_{n-1} p_{n-1} + P_n p_n$$

melyben x függő, $x_1, x_2, x_3, \dots x_{n-1}$, és x_n pedig független változékony menyiségek; továbbá $P, P_1, P_2, \dots P_{n-1}$, és P_n tényzők $x, x_1, x_2, \dots x_{n-1}$, és x_n függvényei, végre

$$(64) \quad \frac{dx}{dx_1} = p_1, \frac{dx}{dx_2} = p_2, \dots \frac{dx}{dx_{n-1}} = p_{n-1}, \text{ és } \frac{dx}{dx_n} = p_n$$

$x_1, x_2, x_3, \dots x_{n-1}$, és x_n szerint vett x függvény külzeléki hányadosai.

Ezen utolsó föltét következtében a (63)-hoz e következőt kell még hozzá csatolni :

$$(65) \quad dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_{n-1} dx_{n-1} + p_n dx_n$$

mely egy ősegyenlet által egészelhető.

Minthogy dx teljes külzelék, tehát az egyenlet második részének is teljes külzeléknek kell lenni, tehát

$$p_1 dx_1, \; p_2 dx_2, \dots p_{n-1} dx_{n-1}, \text{ és } p_n dx_n$$

$x_1, x_2, \dots x_{n-1}$, és x_n szerint vett részletes külzeléki hányadosok, tehát a (65) alatti egyenletnek, és a (64) egyenlet következtében az adott részletes külzeléki egyenletnek is lehet megfelelni.

Keressük a (63)-ból

$$(66) \quad p_n = \frac{P - P_1 p_1 - P_2 p_2 - \dots - P_{n-1} p_{n-1}}{P_n}$$

leszen ezen érték megfelelő ugyan, de még ez nem egészlet. Helyettesítsük a (66) alattit a (65) alattiba, és vigyük zérusra, leszen:

$$(67)\quad dx - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \ldots - p_{n-1} dx_{n-1} - \left(\frac{P - P_1 p_1 - P_2 p_2 - \ldots - P_{n-1} p_{n-1}}{P_n}\right) dx_n = 0$$

mely egyenlet ezutáni kutatásunk egyedüli tárgya leend, mert ez az eddig mondottakat mind magában foglalja. Minthogy dx külzelék, a többi tagok összege is teljes külzelék, tehát

$$p_1 dx_1,\ p_2 dx_2, \ldots p_{n-1} dx_{n-1}, \text{ és } \left(\frac{P - P_1 p_1 - P_2 p_2 - \ldots - P_{n-1} p_{n-1}}{P_n}\right) dx_n$$

x_1, x_2, ... x_{n-1}, és x_n szerint vett részletes külzelések, és

$$p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, \text{ és } \left(\frac{P - P_1 p_1 - P_2 p_2 - \ldots - P_{n-1} p_{n-1}}{P_n}\right)$$

x_1, x_2, ... x_{n-1}, és x_n szerint vett részletes külzeléki hányadosok.

Írjuk a (67) alattit e következő alakban:

$$(P_n dx - P dx_n) + p_1 (P_1 dx_n - P_n dx_1) + p_2 (P_2 dx_n - P_n dx_2) + \ldots + p_{n-1} (P_{n-1} dx_n - P_n dx_{n-1}) = 0$$

leszen még mindig egészelhető, ámbár teljes külzeléki tulajdonságát talán esetlegesen elvesztette.

Tegyük fel, hogy p_1, p_2, ... p_{n-2}, és p_{n-1} értékei valamely módon talán tapogatás útján feltaláltattak volna, akkor a (67) alatti külzeléki egyenlet egészelhető, tehát

$$p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, \text{ és } \left(\frac{P - P_1 p_1 - P_2 p_2 - \ldots - P_{n-1} p_{p-1}}{P_n}\right)$$

x_1, x_2, ... x_{n-1}, és x_n szerint vett részletes külzeléki hányadosok, és ennek következtében az adott egyenlet is egészelhető.

A p mennyiségek értékei feltalálására e következő elemző fogást használjuk:

$$(69)\quad \left.\begin{aligned} P_n dx - P dx_n &= 0 \\ P_1 dx_n - P_n dx_1 &= 0 \\ P_2 dx_n - P_n dx_2 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ P_{n-1} dx_n - P_n dx_{n-1} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$(70)\quad \text{vagy } \frac{dx}{P} = \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{P_{n-1}} = \frac{dx_n}{P_n}$$

mely által az egészeléstől egészen eltávozánk, minthogy n egyenletből álló rendszer által akaránk egészelni.

Ha most P_n, és P csak x_n, és x, továbbá P_n, és P_1 csak x_n, és x_1 függvényei, és így tovább; azon esetben az n egyenletek egészelése könnyen végrehajtható, mi által n kényleges állandók jőnek létre. Ellenkező esetben x_1, x_2, ... x_{n-1}, és x_n mennyiségek x alapváltozékony függvényeinek tekintetnek, és ha a fentebbi egyenletek egyenként (n—1)-szer az x alapváltozékony szerint egymásután külzeltetnek, n^2 egyenletek származnak, melyekben

$$
\begin{array}{llllll}
x, & x_1, & x_2, \ldots & x_{n-1}, & x_n & \\
& \frac{dx_1}{dx}, & \frac{dx_2}{dx}, \ldots & \frac{dx_{n-1}}{dx}, & \frac{dx_n}{dx} & , \\
& \frac{d^2x_1}{dx^2}, & \frac{d^2x_2}{dx^2}, \ldots & \frac{d^2x_{n-1}}{dx^2}, & \frac{d^2x_n}{dx^2} & \\
& \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
& \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
& \frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}}, & \frac{d^{n-1}x_2}{dx^{n-1}}, \ldots & \frac{d^{n-1}x_{n-1}}{dx^{n-1}}, & \frac{d^{n-1}x_n}{dx^{n-1}} & \\
& \frac{d^nx_1}{dx^n}, & \frac{d^nx_2}{dx^n}, \ldots & \frac{d^nx_{n-1}}{dx^n}, & \frac{d^nx_n}{dx^n} &
\end{array}
$$

(n^2+n+1) változékony mennyiségek foglaltatnak, és melyekből bizonyos mennyiségek, példáúl:

$$
\begin{array}{llll}
x_2, & x_3 \ldots & x_{n-1}, & x_n \\
\frac{dx_2}{dx}, & \frac{dx_3}{dx}, \ldots & \frac{dx_{n-1}}{dx}, & \frac{dx_n}{dx} \\
\frac{d^2x_2}{dx^2}, & \frac{d^2x_3}{dx^2}, \ldots & \frac{d^2x_{n-1}}{dx^2}, & \frac{d^2x_n}{dx^2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{d^{n-1}x_2}{dx^{n-1}}, & \frac{d^{n-1}x_3}{dx^{n-1}}, \ldots & \frac{d^{n-1}x_{n-1}}{dx^{n-1}}, & \frac{d^{n-1}x_n}{dx^{n-1}} \\
\frac{d^nx_2}{dx^n}, & \frac{d^nx_3}{dx^n}, \ldots & \frac{d^nx_{n-1}}{dx^n}, & \frac{d^nx_n}{dx^n}
\end{array}
$$

(n^2-1) számmal kiküszöböltetnek, a hátra hagyott egyetlenegy kiküszöbölési egyenlet

$$x, x_1, \frac{dx_1}{dx}, \frac{d^2x_1}{dx^2}, \frac{d^3x_1}{dx^3}, \ldots \frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}}, \text{ és } \frac{d^nx_1}{dx^n}$$

mennyiségeket foglal magában, tehát egy x, és x_1 közti n-dik rendű vonalos külzeléki egyenlet, melynek egészelése n kényleges állandót ad. Ugyanezen módon lehet egy x, és x_2 közti n-ed rendű vonalos külzeléki egyenletet képezni, melynek egészelése más n kényleges állandót ad, és így tovább. Egyébiránt meg kell jegyezni, hogy az elsőn kivül a többi (n—1) n-ed rendű vonalos külzeléki egyenleteket nem szükség egészelni.

Képzeljük magunknak az említett külzeléki egyenletet már egészelve, leszen

$$(71)\quad \left.\begin{array}{l} a_1 = L_1 \\ a_2 = L_2 \\ a_3 = L_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n-1} = L_{n-1} \end{array}\right\}$$

és

$$a_n = L_n$$

melyekben $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, és a_n kényleges egészelési állandók, $L_1, L_2, \ldots L_{n-1}$, és L_n mennyiségek pedig x, x_1, x_2, $\ldots x_{n-1}$, és x_n függvényei.

Legyenek most már $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}$, és a_n mennyiségek változékonyak, és $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, és x_n mennyiségek a (71)-ből határoztassanak meg, lesznek:

$$(72)\quad \left.\begin{array}{l} x_1 = \psi_1(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n, x) \\ x_2 = \psi_2(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n, x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n-1} = \psi_{n-1}(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n, x) \\ x_n = \psi_n(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n, x) \end{array}\right\}$$

melyek külzelve, és a (67) egyenletbe helyettesítve, következő helyettesítési eredményt adnak:

$$(73)\quad A_1\,da_1 + A_2\,da_2 + \ldots + A_{n-1}da_{n-1} + A_n da_n + X dx = 0$$

és minthogy a (67) egyenlet egészelhető, ez is az leszen.

Ha továbbá az újonan bevezetett változékony mennyiségek ismét állandóknak tekintetnek, leszen

$$X dx = 0$$

tehát

$$X = 0$$

tehát

(74) $A_1\, da_1 + A_2\, da_2 + \ldots + A_{n-1}\, da_{n-1} + A_n\, da_n = 0$

is még mindég egészelhető, melyben csak n változékony mennyiségek jőnek elő. Ezen elemző fogással a változékony mennyiségek száma egy egységgel kisebbíttetett. A_1, $A_2 \ldots A_{n-1}$, és A_n tényzők x változékonyt nem foglalnak magukban, és ha x azokban elő fordulna is, ez csak a közös szorzóban lenne, és elmaradhatna. Ezekből az első vagy második eset lép be a mint a helyettesítés a (68) vagy (67) egyenletbe történt, mert a (68) alatti a teljes külzeléki tulajdonságát talán esetlegesen elvesztette. Hogy tehát ez ismét teljes külzelékre változtassék, egy egészítőt kell hozzá csatolni, és ez nyilván a fennevezett közös szorzó. Hogy A_1 A_2, $\ldots A_{n-1}$, és A_n tényzőkben x változékony nem találtatik, annak valódi elemző oka e következőben áll: ha x bennök lenne, akkor azokban dx-nek is kellene előfordúlni, mert a (74) egyenlet egészelhető, de minthogy dx bennök nem találtatik, azokban tehát x sem fordúlhat elő.

Minthogy a (74) egyenlet teljes külzelék, lehet tehát egészelni, és leszen egészlete

(75) $\varphi\,(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n) = 0$

vagy a (71) egyenleteket tekintetbe véve:

(76) $\varphi\,(L_1, L_2, \ldots L_{n-1}, L_n) = 0$

mely az adott külzeléki egyenlet *általános egészlete.*

Hátra van még bebizonyítani, hogy a φ függvény alakja *kényleges,* azaz: φ függvénynek nincsen oly alakja, melynek a p értékek bizonyos sora meg nem felelne.

Ennek bebizonyítására külzeltessék a (75) alatti egyenlet, leszen

(77) $$\frac{d\varphi}{da_1}\,da_1 + \frac{d\varphi}{da_2}\,da_2 + \ldots + \frac{d\varphi}{da_{n-1}}\,da_{n-1} + \frac{d\varphi}{da_n}\,da_n = 0$$

továbbá kapcsoltassék a (68)-hoz L egészelő, melybe azután $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, és a_n új változékony mennyiségek $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$, és x_n helyett hozassanak be, leszen

(78) $$\left.\begin{array}{r} \mathbf{L}\,[\mathbf{A}_1\, da_1 + \mathbf{A}_2\, da_2 + \ldots + \mathbf{A}_n\, da_n + \mathbf{X}\, dx] + \\ \mathbf{L}p_1\,[\mathbf{A}'_1\, da_1 + \mathbf{A}'_2\, da_2 + \ldots + \mathbf{A}'_n\, da_n + \mathbf{X}' dx] + \\ \mathbf{L}p_2\,[\mathbf{A}''_1\, da_1 + \mathbf{A}''_2\, da_2 + \ldots + \mathbf{A}''_n\, da_n + \mathbf{X}'' dx] + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{L}p_{n-1}\,[\mathbf{A}_1^{(n-1)} da_1 + \ldots + \mathbf{A}_n^{(n-1)} da_n + \mathbf{X}^{(n-1)} dx] \end{array}\right\} = 0$$

Ha most az új változékony mennyiségek ismét állandóknak tekintetnek, leszen

$$\left.\begin{array}{l} X = 0 \\ X' = 0 \\ X'' = 0 \\ \quad . \quad . \quad . \\ X^{(n-1)} = 0 \end{array}\right\}$$

tehát

$$(79) \quad \left.\begin{array}{l} L\,[A_1\,da_1 + A_2\,da_2 + \ldots + A_n\,da_n\,] + \\ Lp_1\,[A'_1\,da_1 + A'_2\,da_2 + \ldots + A'_n\,da_n\,] + \\ Lp_2\,[A''_1\,da_1 + A''_2\,da_2 + \ldots + A''_n da_n\,] + \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ Lp_{n-1}[A_1^{(n-1)}da_1 + A_2^{(n-1)}da_2 + \ldots + A_n^{(n-1)}da_n] \end{array}\right\} = 0$$

teljes külzelék, és a (77) egyenlettel összeesik, leszen

$$(80) \quad \left.\begin{array}{l} \frac{d\varphi}{da_1} = L\,[A_1 + p_1 A'_1 + p_2 A''_1 + \ldots + p_{n-1}\,A_1^{(n-1)}] \\ \frac{d\varphi}{da_2} = L\,[A_2 + p_1 A'_2 + p_2 A''_2 + \ldots + p_{n-1} A_2^{(n-1)}] \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \frac{d\varphi}{da_n} = L\,[A_n + p_1\,A'_n + p_2 A''_n + \ldots + p_{n-1} A_n^{(n-1)}] \end{array}\right\}$$

n egyenlet, melyek L, p_1, p_2, . . . és p_{n-1} mennyiségek meghatározására elégségesek. Ebből tehát következik, hogy a φ függvény alakja bármilyen legyen, mégis létezik L, p_1, p_2, . . . és p_{n-1} mennyiségek értékeinek bizonyos sora, mely az adott külzeléki egyenletnek megfelel.

(5. §.)

Az egészelőről.

A *Lagrange* előadott egészelési módszere lényegesen abban áll, hogy:

1-ör az adott vonalos részletes külzeléki egyenlet csak egyetlenegy ősegyenlet által egészelhető, és

2-or a változékony mennyiségek száma új változékonyak behozása által egy egységgel kissebbíthető.

Az új változékony mennyiségekkel ellátott vonalos részletes külzeléki egyenlet x-t többé nem foglal magában, és ha x benne véletlen elő fordúlna is, akkor az x-t magában foglaló tényző közös lenne, és elmaradhatna, és ez épen az *egészelő*. Az egész egészelési módszer tehát az egészelő körül forog, szükség tehát megmutatni, miként lehetne annak értékét feltalálni.

Legyen e végre

$$(81) \qquad X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y = 0$$

egy x, és y közti külzeléki egyenlet, akkor ezen föltétező egyenlet

$$(82) \qquad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}$$

az egészelhetésnek vagy megfelel vagy nem, a szerint a mint a (81) alatti egyenlet teljes külzelék vagy nem, vagy a szerint a mint az egészelő jelen van vagy nincs. Ez utóbbi esetben a (81)-hez L egészelőt kell hozzá csatolni, és leszen

$$(83) \qquad LX\mathrm{d}x + LY\mathrm{d}y = 0$$

melyhez ezen föltét egyenlet

$$(84) \qquad \frac{\mathrm{d}(LX)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}(LY)}{\mathrm{d}x}$$

járúl, és melyből

$$L\left[\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\right] = Y\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} - X\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y}$$

származik. Most már az előbbi egészelési mód szerint leszen

$$(86) \qquad \frac{\mathrm{d}L}{L\left[\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\right]} = \frac{\mathrm{d}x}{Y} = -\frac{\mathrm{d}y}{X}$$

melyből összevetés által

$$X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y = 0$$

következik. De minthogy ez az adott külzeléki egyenlet, ebből tehát következik, hogy az egészelő feltalálására előbb az adott külzeléki egyenletet kellene egészelni. — Ez nyilván csalódás, és arra mutat, hogy az egészelőt két változékony mennyiséggel ellátott külzeléki egyenletnél nem oly könnyű feltalálni, tehát több változékonynyal ellátott külzeléki egyenleteknél még nehezebb lesz annak feltalálása.

Ennek további felvilágosítására vegyünk még egy három változékony mennyiséggel ellátott külzeléki egyenletet

$$(87)\qquad X\mathrm{dx} + Y\mathrm{dy} + Z\mathrm{dz} = 0$$

melyben X, Y, és Z tényzők x, y, és z változékony mennyiségek függvényei.

Kérdés vajjon az egészelő jelen van-e, vagy nincs? E végre írjuk így

$$(88)\qquad LX\mathrm{dx} + LY\mathrm{dy} + LZ\mathrm{dz} = 0$$

mely által a (87) egyenletet e következő alakra hoztuk:

$$(89)\qquad \frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{dx}}.\mathrm{dx} + \frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{dy}}\mathrm{dy} + \frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{dz}}.\mathrm{dz} = 0$$

tehát e feltétező-egyenleteket nyerjük:

$$(90)\qquad \left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{dx}} &= LX \\ \frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{dy}} &= LY \\ \frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{dz}} &= LZ \end{aligned}\right\}$$

és

$$(91)\qquad \left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(LY)}{\mathrm{dz}} &= \frac{\mathrm{d}(LZ)}{\mathrm{dy}} \\ \frac{\mathrm{d}(LX)}{\mathrm{dz}} &= \frac{\mathrm{d}(LZ)}{\mathrm{dx}} \\ \frac{\mathrm{d}(LX)}{\mathrm{dy}} &= \frac{\mathrm{d}(LY)}{\mathrm{dx}} \end{aligned}\right\}$$

melyek az egészelő feltalálására szolgálhatnak.

Ha már most ezen kijelentett külzeléseket kifejtjük, kapjuk e három egyenletet:

$$(92)\qquad \left.\begin{aligned} L\left[\frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{dz}} - \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{dy}}\right] &= Z\,\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{dy}} - Y\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{dz}} \\ L\left[\frac{\mathrm{dZ}}{\mathrm{dx}} - \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{dz}}\right] &= X\,\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{dz}} - Z\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{dx}} \\ L\left[\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{dy}} - \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{dx}}\right] &= Y\,\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{dx}} - X\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{dy}} \end{aligned}\right\}$$

melyek az L egészelő feltalálására elegendők volnának ugyan, de csakhamar meggyőződhetünk arról, hogy ha ezen egyenletek rendre X, Y, és Z, mennyiséggel szoroztatnak, és azután összeadatnak,

$$\frac{dL}{dx}, \frac{dL}{dy}, \text{ és } \frac{dL}{dz}$$

mennyiségek a kiküszöbölési egyenletből kimaradnak, és nyerjük:

$$93)\ L\left[X\left(\frac{dY}{dz}-\frac{dZ}{dy}\right)+Y\left(\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}\right)+ Z\left(\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx}\right)\right]=0$$

minthogy L nem lehet zérus, szükségkép kell lenni:

$$(94)\ X\left(\frac{dY}{dz}-\frac{dZ}{dy}\right)+Y\left(\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}\right)+ Z\left(\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx}\right)=0$$

Ha ezen egyenletnek meg lehet felelni, akkor ez a (92) alattiaktól nem különbözik, és azokból a harmadik a két első egyenletnek közvetleni credménye. Ezen tény tehát arra mutat, miszerint végtelen sok tényzők létezhetnek, melyek mindannyian az adott külzeléki egyenletet teljes külzeléki egyenletté tehetik, és minden függvény alakja, például ez:

$$L = \varphi\,(U)$$

egészelő, tehát a (89) alatti így is írható

$$(95)\quad \varphi\,(U)\,\frac{dU}{dx}dx+\varphi(U)\frac{dU}{dy}dy+\varphi(U)\frac{dU}{dz}dz=0$$

Ebből következik, hogy az egészelő értéke fel nem található. Szerencsénkre nincsen is arra szükségünk, elég ha annak *létezéséről* vagy *nemlétezéséről* meggyőződhetünk.

(6. §.)

Az egészelő létezés- vagy nemlétezésének bebizonyítása.

Hogy az egészelő létezés- vagy nemlétezésének *általános* bebizonyítását könnyebben felfoghassuk, vegyük előbb a (87) alatti egyenletet, mely csak három x, y, és z változékony mennyiségeket foglal magában, és igyekezzük ezt egyetlenegy ösegyenlet által akkép egészelni, hogy a változékonyak száma következő helyettesítés által:

$$(96)\qquad \left.\begin{aligned} y &= \eta\,(a, b, x) \\ z &= \zeta\,(a, b, x) \end{aligned}\right\}$$

kettőre szoríttassék, melyekben η, és ζ kényleges függvények, a, és b mennyiségek pedig új változékonyakat képviselnek, és melyeknek külzelései ezt adják :

$$(97)\qquad \left.\begin{aligned} dy &= \frac{d\eta}{da}\,da + \frac{d\eta}{db}\,db + \frac{d\eta}{dx}\,dx \\ dz &= \frac{d\zeta}{da}\,da + \frac{d\zeta}{db}\,db + \frac{d\zeta}{dx}\,dx \end{aligned}\right\}$$

E (96), és (97) alatti egyenleteket képzeljük magunknak a (87)-be helyettesítve, az e következő eredményt adja:

$$(98)\qquad A da + B db + X_1 dx = 0$$

Most már az η, és ζ kényleges függvények úgy választatnak, hogy

$$(99)\qquad X_1 = 0$$

tehát

$$(100)\qquad A da + B db = 0$$

legyenek. Ez utóbbi teljes külzelék lévén, x-t csak a közös szorzó foglalja magában, tehát a hányados

$$\frac{B}{A}$$

tehát

$$\log\left(\frac{B}{A}\right) = \log B - \log A$$

x-t nem foglalnak magokban, tehát

$$\frac{d}{dx}\left[\log B - \log A\right] = 0$$

vagy

$$(101)\qquad \frac{1}{A}\cdot\frac{dA}{da} = \frac{1}{B}\frac{dB}{db} = Q$$

vagy

$$(102)\qquad \left.\begin{aligned} \frac{dA}{da} &= AQ \\ \frac{dB}{db} &= BQ \end{aligned}\right\}$$

tétetik, melyekben Q rövidség okáért hozatott be.

A (99) és (102) alatti egyenletek feladatunk megfejtésére elégségesek.

Vezessük most már a (96), és (97) alatti egyenleteket a (87)-be valósággal be, és pedig úgy, hogy ideiglen csak η, és ζ függvények jöjenek benne elö, és az által a dölt betükkel jelölt *X*, *Y*, és *Z* mennyiségek **X**, **Y**, és **Z**-vé változzanak, leszen a helyettesítési eredmény:

$$(103)\quad \left(\mathbf{Y}\frac{d\eta}{da}+\mathbf{Z}\frac{d\zeta}{da}\right)da+\left(\mathbf{Y}\frac{d\eta}{db}+\mathbf{Z}\frac{d\zeta}{db}\right)db+\left(\mathbf{X}+\mathbf{Y}\frac{d\eta}{dx}+\mathbf{Z}\frac{d\zeta}{dx}\right)dx=0$$

Ha ezen egyenletet a (98) alattival összehasonlítjuk, látjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned} A&=\mathbf{Y}\frac{d\eta}{da}+\mathbf{Z}\frac{d\zeta}{da}\\ B&=\mathbf{Y}\frac{d\eta}{db}+\mathbf{Z}\frac{d\zeta}{db}\\ X_1&=\mathbf{X}+\mathbf{Y}\frac{d\eta}{dx}+\mathbf{Z}\frac{d\zeta}{dx}\end{aligned}\right\}$$

és a (102), és (99) után

$$(104)\quad \left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[\mathbf{Y}\frac{d\eta}{da}+\mathbf{Z}\frac{d\zeta}{da}\right]=Q\left[\mathbf{Y}\frac{d\eta}{da}+\mathbf{Z}\frac{d\zeta}{da}\right]\\ &\frac{d}{dx}\left[\mathbf{Y}\frac{d\eta}{db}+\mathbf{Z}\frac{d\zeta}{db}\right]=Q\left[\mathbf{Y}\frac{d\eta}{db}+\mathbf{Z}\frac{d\zeta}{db}\right]\\ &\mathbf{X}+\mathbf{Y}\frac{d\eta}{dx}+\mathbf{Z}\frac{d\zeta}{dx}=0\end{aligned}\right\}$$

három egyenlet származik, melyek η, ζ, és Q mennyiségek meghatározására elégségesek.

De minthogy

$$(105)\quad \frac{d}{dx}\left[\mathbf{Y}\frac{d\eta}{da}+\mathbf{Z}\frac{d\zeta}{da}\right]=\left(\frac{d\mathbf{Y}}{dx}\right)\frac{d\eta}{da}+\left(\frac{d\mathbf{Z}}{dx}\right)\frac{d\zeta}{da}+\mathbf{Y}\frac{d^2\eta}{dadx}+\mathbf{Z}\frac{d^2\zeta}{dadx}$$

melyben $\left(\frac{d\mathbf{Y}}{dx}\right)$, és $\left(\frac{d\mathbf{Z}}{dx}\right)$ tényezök nem csak a kifejtett x szerint, melyek a dölt *Y*, és *Z*-t foglalják magokban, hanem a berejtett x szerint is, mely az η, és ζ függvényalakokban vagyon, kell külzelni, leszen tehát

$$
(106)\quad
\begin{aligned}
&\left(\frac{dY}{dx}\right)=\frac{dY}{dx}+\frac{dY}{dy}\frac{d\eta}{dx}+\frac{dY}{dz}\frac{d\zeta}{dx}\\
\text{és}\quad&\left(\frac{dZ}{dx}\right)=\frac{dZ}{dx}+\frac{dZ}{dy}\frac{d\eta}{dx}+\frac{dZ}{dz}\cdot\frac{d\zeta}{dx}
\end{aligned}
$$

Külzeljük továbbá a (104) alatti egyenletek harmadikát a mennyiség szerint, leszen:

$$
\frac{dX}{da}+\frac{dY}{da}\frac{d\eta}{dx}+\frac{dZ}{da}\frac{d\eta}{dx}+Y\frac{d^2\eta}{dxda}+Z\frac{d^2\zeta}{dxda}=0
$$

melyből

$$
(107)\quad Y\frac{d^2\eta}{dxda}+Z\frac{d^2\zeta}{dxda}=-\frac{dX}{da}-\frac{dY}{da}\frac{d\eta}{dx}-\frac{dZ}{da}\cdot\frac{d\zeta}{dx}
$$

származik.

Ha a (104) alatti egyenletekből, és különösen az elsőből a második külzelékeket kiküszöbölni akarjuk, a (106), és (107) alatti egyenletek értékeit a (105) alattiba kell helyettesíteni, s leszen:

$$
(108)\quad
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[Y\frac{d\eta}{da}+Z\frac{d\zeta}{da}\right]=&\frac{d\eta}{da}\left[\frac{dY}{dx}+\frac{dY}{dy}\frac{d\eta}{dx}+\frac{dY}{dz}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\right]\\
&+\frac{d\zeta}{da}\left[\frac{dZ}{dx}+\frac{dZ}{dy}\frac{d\eta}{dx}+\frac{dZ}{dz}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\right]\\
&-\left[\frac{dX}{da}+\frac{dY}{da}\frac{d\eta}{dx}+\frac{dZ}{da}\frac{d\zeta}{dx}\right]
\end{aligned}
$$

Minthogy továbbá

$$
(109)\quad
\begin{aligned}
\frac{dX}{da}&=\frac{dX}{dy}\cdot\frac{d\eta}{da}+\frac{dX}{dz}\frac{d\zeta}{da}\\
\frac{dY}{da}&=\frac{dY}{dy}\cdot\frac{d\eta}{da}+\frac{dY}{dz}\frac{d\zeta}{da}\\
\frac{dZ}{da}&=\frac{dZ}{dy}\cdot\frac{d\eta}{da}+\frac{dZ}{dz}\frac{d\zeta}{da}
\end{aligned}
$$

leszen

$$
(110)\quad
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[Y\frac{d\eta}{da}+Z\frac{d\zeta}{da}\right]=&\frac{d\eta}{da}\left\{\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}+\frac{d\zeta}{dx}\left[\frac{dY}{dz}-\frac{dZ}{dy}\right]\right\}\\
&+\frac{d\zeta}{da}\left\{\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}+\frac{d\eta}{dx}\left[\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

melyből ha rövidség okáért

$$(111)\quad \left.\begin{array}{l}\left[\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}+\frac{d\zeta}{dx}\left(\frac{dY}{dz}-\frac{dZ}{dy}\right)\right]=Y'\\ \left[\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}+\frac{d\eta}{dx}\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)\right]=Z'\end{array}\right\}$$

tétetik, származik

$$(112)\quad Y'\frac{d\eta}{da}+Z'\frac{d\zeta}{da}=QY\frac{d\eta}{da}+QZ\frac{d\zeta}{da}$$

Hasonló módon lehet a (104) alatti egyenletek másodikával is bánni, mely egyébiránt az a mennyiségnek b-veli felcserélése által származhatik, ugyan is:

$$(113)\quad Y'\frac{d\eta}{db}+Z'\frac{d\zeta}{db}=QY\frac{d\eta}{db}+QZ\frac{d\zeta}{db}$$

Világosan láthatni, hogy e következő föltételek

$$(114)\quad \left.\begin{array}{l}Y'=QY\\ Z'=QZ\end{array}\right\}$$

és

a (112), és (113) alatti egyenleteket azonossá teszik.

Továbbá a (111), és (114) alatti egyenletek összevetésük által származnak:

$$(115)\quad \left.\begin{array}{l}\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}+\frac{d\zeta}{dx}\left[\frac{dY}{dz}-\frac{dZ}{dy}\right]=QY\\ \frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}+\frac{d\eta}{dx}\left[\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right]=QZ\end{array}\right\}$$

és

Ezek η, ζ, és Q mennyiségek meghatározására nem elégségesek, melyekhez azonban a (104) alatti egyenlet harmadika hozzá járúlhat.

Ha végre a (115) egyenlet elseje **Z**-vel, a másodika pedig — **Y**-al szoroztatik, és ezek azután összeadatnak, leszen

$$(116)\quad Z\left[\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right]+Z\frac{d\zeta}{dx}\left[\frac{dY}{dz}-\frac{dZ}{dy}\right]-$$
$$Y\left[\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}\right]-Y\frac{d\eta}{dx}\left[\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right]=0$$

Helyettesítsük elvégre a (104) alatti egyenlet harmadikából

$$Z\frac{d\zeta}{dx}$$

értékét ezen egyenletbe, nyerjük

$$(117)\quad X\left[\frac{dY}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right]+Y\left[\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}\right]+ Z\left[\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx}\right]=0$$

egyenletet, melyből η, ζ, és Q mennyiségek nem határoztathatnak meg, mert a (94) alatti föltétező egyenletre jöttünk vissza, mely tény arra mutat, *hogy az egészelőnek létezése vagy nemlétezése a (94) vagy (117) föltétező egyenletek beteljesedésétől vagy be nem teljesedésétől függ.*

Ezen vizsgálás következtében e következő egészelési módszerre jutottunk: *az adott külzeléki egyenletet szét kell kettőre bontani, melyek egészelve két egészelési állandót adnak; ezek azután új változékonyak gyanánt tekintetnek, és az adott külzeléki egyenletbe helyettesíttetnek, mi által a változékonyak száma egy egységgel kisebbíttetik. Végre az így nyert két változékonnyal ellátott külzeléki egyenletet egészelve az adott külzeléki egyenlet általános egészletét adja.*

(7. §.)

Az egészelő létezésének vagy nemlétezésének általános bebizonyítása.

Legyen

$$(118)\quad Xdx+X_1dx_1+X_2dx_2+\ldots+X_{n-1}dx_{n-1}+X_ndx_n=0$$

(n+1) változékony mennyiséggel ellátott külzeléki egyenlet, melyet rövidség okáért így is lehet írni:

$$(119)\qquad Xdx+\mathop{S}_{\beta=1}^{n}\left[X_\beta\, dx_\beta\right]=0$$

melyben az összegjel β betűre vonatkozik, s 1, és n határok közt vétetik.

Ezen egyenletnek különbféleképen lehet megfelelni, és L egészelő hozzácsatolásával

$$(120)\quad LXdx+LX_1dx_1+LX_2dx_2+\ldots+LX_ndx_n=0$$

teljes külzelékké átváltoztatni, melynek tulajdonsága nem vesz el, hogyha néhány x-ek állandóknak tekintetnek. Legyenek tehát mindnyájan — hármat kivéve — állandók; akkor a hátra maradt külzeléki egyenlet még mindig teljes külzelék leszen, és az egészelőnek létezése vagy nemlétezése ezen föltétező egyenlettől függ:

$$(121)\ X\left[\frac{dX_1}{dx_2}-\frac{dX_2}{dx_1}\right]+X_1\left[\frac{dX_2}{dx}-\frac{dX}{dx_2}\right]+$$
$$X_2\left[\frac{dX}{dx_1}-\frac{dX_1}{dx}\right]=0$$

Ha pedig a változékonyak száma 4, 5, ... (n+1), akkor annyi föltétező egyenlet lesz, a hány hármas ezen számokból képeztethetik, t. i. 4, 10, ... $\frac{(n+1)n(n-1)}{1.\,2.\,3.}$, melyek, mint látni fogjuk, egymástól nem különböznek.

Ezek után azon kérdés forog fen, vajjon lehet-e az (n+1) változékonyak számát új változékonyak behozása által legalább egy egységgel kisebbíteni. Azután az így nyert külzeléki egyenlet változékony mennyiségeit más újak behozása által ismét legalább egy egységgel leszállítani. És így tovább.

E végre tegyük:

$$(122)\quad \left.\begin{array}{l} x_1=\xi_1(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, x) \\ x_2=\xi_2(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=\xi_n(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, x) \end{array}\right\}$$

melyekben x a régi, a_1, a_2, a_3, ... és a_n, mennyiségek pedig a bevezetendő új változékonyakat képviselik.

Ha ezen függvényeket a bennök előforduló változékonyak szerint külzeljük, és azután ezeket, és a (122) alattiakat a (118) alatti egyenletbe helyettesítjük, következő helyettesítési eredményre jutunk:

$$(123)\ \mathbf{X}dx+A_1da_1+A_2da_2+\ldots+A_{n-1}da_{n-1}+A_nda_n=0$$

Ha most ξ_1, ξ_2, ... és ξ_n függvényalakokat úgy választjuk, hogy az által (n+1) föltétező egyenletek származnak; és ha különösen:

$$(124)\qquad \mathbf{X}=0$$

azon esetben A_1, A_2, ... és A_n tényzőknek csak a közös szorzójukban foglaltatik az x változékony; tehát az (n—1) számú hányadosok:

$$\frac{A_2}{A_1}, \frac{A_3}{A_1}, \ldots \frac{A_{n-1}}{A_1}, \text{ és } \frac{A_n}{A_1}$$

tehát logarithmusai is:

$$\left.\begin{aligned}\log\left(\frac{A_2}{A_1}\right) &= \log A_2 - \log A_1 \\ \log\left(\frac{A_3}{A_1}\right) &= \log A_3 - \log A_1 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \log\left(\frac{A_n}{A_1}\right) &= \log A_n - \log A_1\end{aligned}\right\}$$

x-től szabadok; tehát az x szerinti külzelései:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\log A_2 - \log A_1) &= 0 \\ \frac{d}{dx}(\log A_3 - \log A_1) &= 0 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d}{dx}(\log A_n - \log A_1) &= 0\end{aligned}\right\}, \text{ vagy } \left.\begin{aligned}\frac{1}{A_2}\frac{dA_2}{dx} - \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dx} &= 0 \\ \frac{1}{A_3}\frac{dA_3}{dx} - \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dx} &= 0 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{A_n}\frac{dA_n}{dx} - \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dx} &= 0\end{aligned}\right\}$$

Ezekből származik:

$$(125)\quad \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dx} = \frac{1}{A_2}\frac{dA_2}{dx} = \frac{1}{A_3}\frac{dA_3}{dx} = \ldots = \frac{1}{A_n}\frac{dA_n}{dx} = Q$$

Q-t rövidség okáért behozva, leszen a többi n föltétező egyenlet:

$$(126)\quad \frac{dA_1}{dx} = A_1 Q; \frac{dA_2}{dx} = A_2 Q; \ldots \frac{dA_n}{dx} = A_n Q$$

Tehát ξ_1, ξ_2, ... ξ_n, és Q mennyiségek ezen (n+1) föltétező egyenleteknek megfelelhetnek.

Ezen számolási míveletet, melyet eddig csak képzeletben vittük véghez, most valósággal végre akarjuk hajtani, és pedig akként: hogy a (122) alatti függvények, és azok külzeléseiből a (118) alattiba ideiglenesen csak ξ_1, ξ_2, ... és ξ_n függvényalakokat hozzuk be, melyek helyeit az új változékonyak csak azután töltendik be.

Legyen e végre

$$dx_\beta = \frac{d\xi_\beta}{da}dx + \frac{d\xi_\beta}{da_1}da_1 + \frac{d\xi_\beta}{da_2}da_2 + \ldots + \frac{d\xi_\beta}{da_n}da_n$$

vagy

$$(127)\qquad dx_\beta = \frac{d\xi^\beta}{dx} + \mathop{S}_{\alpha=1}^{n}\left[\frac{d\xi_\beta}{da_\alpha}.\, da_\alpha\right]$$

hol az összegjel α-ra vonatkozik, és β helyébe rendre 1, 2, ... és n tétetik.

Vigyük ezen értéket a (119) alattiba be, kapjuk e külzeléki egyenletet:

$$(128)\; X\mathrm{dx} + \sum_{\beta=1}^{n}\left[X_\beta \frac{\mathrm{d}\xi_\beta}{\mathrm{dx}}\mathrm{dx}\right] + \sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\left[X_\beta \frac{\mathrm{d}\xi_\beta}{\mathrm{da}_\alpha}\mathrm{da}_\alpha\right] = 0$$

mely a (123) alattival azonos. Ennek következtében kell lenni:

$$(129)\; X + \sum_{\beta=1}^{n}\left[X_\beta \frac{\mathrm{d}\xi_\beta}{\mathrm{dx}}\right] = X + X_1\frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{dx}} + \ldots + X_n\frac{\mathrm{d}\xi_n}{\mathrm{dx}} = 0$$

és az A tényzők képviselője

$$(130)\; A_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n}\left[X_\beta \frac{\mathrm{d}\xi_\beta}{\mathrm{dx}}\right] = X_1\frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{dx}} + X_2\frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{dx}} + \ldots + X_n\frac{\mathrm{d}\xi_n}{\mathrm{dx}}$$

képlet által épen úgy állítható elő, a mint az a (126) alattiakból e következő által

$$(131)\qquad \frac{\mathrm{d}A_\alpha}{\mathrm{dx}} = A_\alpha\, Q$$

előállíttatik, melyekből a többiek igen egyszerűen az 1, 2, ... és n számok α helyetti helyettesítése által származhatnak.

Külzeljük most már a (130) alattit x szerint, nyerjük:

$$(132)\; \frac{\mathrm{d}A_\alpha}{\mathrm{dx}} = \sum_{\beta=1}^{n}\left[\left(\frac{\mathrm{d}X_\beta}{\mathrm{dx}}\right)\frac{\mathrm{d}\xi_\beta}{\mathrm{da}_\alpha}\right] + \sum_{\beta=1}^{n}\left[X_\beta \frac{\mathrm{d}^2\xi_\beta}{\mathrm{da}_\alpha \mathrm{dx}}\right]$$

melyben $\left(\frac{\mathrm{d}X\beta}{\mathrm{dx}}\right)$-et nem csak a kifejtett, hanem a berejtett x szerint is kell külzelni. Minthogy továbbá a (129) alatti egyenlet azonos, lehet azt a_α szerint külzelni, és így írni:

$$(133)\; \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{da}_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}X_\beta}{\mathrm{da}_\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}\xi_\beta}{\mathrm{dx}}\right] + \sum_{\beta=1}^{n}\left[X_\beta \frac{\mathrm{d}^2\xi_\beta}{\mathrm{da}_\alpha \mathrm{dx}}\right] = 0$$

Hasonlítsuk ezt a (132) alattival össze, leszen

$$(134)\; \frac{\mathrm{d}A_\alpha}{\mathrm{dx}} = \sum_{\beta=1}^{n}\left[\left(\frac{\mathrm{d}X_\beta}{\mathrm{dx}}\right)\frac{\mathrm{d}\xi_\beta}{\mathrm{da}_\alpha}\right] + \sum_{\beta=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}X_\beta}{\mathrm{da}_\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}\xi_\beta}{\mathrm{dx}}\right] - \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{da}_\alpha}$$

az egyenlet második részének első tagjában (n+1), és a másodikban csak n tag. Minthogy

$$(135)\quad \left(\frac{dX_\beta}{dx}\right)=\frac{dX_\beta}{dx}+\frac{dX_\beta}{dx_1}\frac{d\xi_1}{dx}+\frac{dX_\beta}{dx_2}\frac{d\xi_2}{dx}+\ldots+\frac{dX_\beta}{dx_n}\frac{d\xi_n}{dx}$$
$$=\frac{dX_\beta}{dx}+\sum_{\gamma=1}^{n}\left[\frac{dX_\beta}{dx_\gamma}\cdot\frac{d\xi_\gamma}{dx}\right]$$

és

$$(136)\quad \frac{dX_\beta}{da_\alpha}=\frac{dX_\beta}{dx_1}\frac{d\xi_1}{da_\alpha}+\frac{dX_\beta}{dx_2}\cdot\frac{d\xi_2}{da_\alpha}+\ldots+\frac{dX_\beta}{dx_n}\frac{d\xi_n}{da_\alpha}=$$
$$\sum_{\gamma=1}^{n}\left[\frac{dX_\beta}{dx_\gamma}\cdot\frac{d\xi_\gamma}{da_\alpha}\right]$$

leszen a (134)-ből:

$$\frac{dA_\alpha}{dx}=\sum_{\beta=1}^{n}\left[\frac{dX_\beta}{dx}\cdot\frac{d\xi_\beta}{da_\alpha}\right]+\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}\left[\frac{dX_\beta}{dx_\gamma}\cdot\frac{d\xi_\gamma}{dx}\cdot\frac{d\xi_\beta}{da_\alpha}\right]-$$
$$\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}\left[\frac{dX_\beta}{dx_\gamma}\cdot\frac{d\xi_\gamma}{da_\alpha}\cdot\frac{d\xi_\beta}{dx}\right]-\sum_{\gamma=1}^{n}\left[\frac{dX_\beta}{dx_\gamma}\cdot\frac{d\xi_\gamma}{da_\alpha}\right]$$

és minthogy a β, és γ betűket más kénylegesek által lehet pótolni, következik, hogy azokat magok közt is fel lehet cseréłni. Cseréljük fel tehát őket a két utolsó tagokban, leszen

$$(137)\quad \frac{dA_\alpha}{dx}=\sum_{\beta=1}^{n}\left\{\left[\frac{dX_\beta}{dx}-\frac{dX}{dx_\beta}\right]\frac{d\xi_\beta}{da_\alpha}+\right.$$
$$\left.\sum_{\gamma=1}^{n}\left[\left(\frac{dX_\beta}{dx_\gamma}-\frac{dX_\gamma}{dx_\beta}\right)\frac{d\xi_\gamma}{dx}\cdot\frac{d\xi_\beta}{da_\alpha}\right]\right\}$$

Tegyük rövidség okáért

$$(138)\quad \left.\begin{aligned}\frac{dX_\beta}{dx}-\frac{dX}{dx_\beta}&=[\beta,0]\\ \frac{dX_\beta}{dx_\gamma}-\frac{dX_\gamma}{dx_\beta}&=[\beta,\gamma]\end{aligned}\right\}$$

és általában

következik, hogy

$$(139)\quad [\beta,\beta]=[\gamma,\gamma]=[0,0]=[1,1]=\ldots=0$$

és vigyük ezen értékeket a (137) alatti egyenletbe, kapjuk

$$(140)\quad \frac{dA_\alpha}{dx}=\sum_{\beta=1}^{n}\left\{\left[[\beta,0]+\sum_{\gamma=1}^{n}\left[[\beta,\gamma]\frac{d\xi_\gamma}{dx}\right]\right]\frac{d\xi_\beta}{da_\alpha}\right\}$$

Tegyük továbbá rövidség okáért

$$(141)\quad [\beta,0] + \sum_{\gamma=1}^{n}\left[[\beta,\gamma]\frac{d\xi_\gamma}{dx}\right] = X'_\beta$$

leszen

$$(142)\quad \frac{dA_\alpha}{dx} = \sum_{\beta=1}^{n}\left\{X'_\beta \frac{d\xi_\beta}{da_\alpha}\right\}$$

Helyettesítsük most már a (130), és (142) alatti egyenletek értékeit a (131) alattiba, kapjuk

$$(143)\quad \sum_{\beta=1}^{n}\left[X'_\beta\frac{d\xi_\beta}{da_\alpha}\right] = \sum_{\gamma=1}^{n}\left[X_\beta Q\frac{d\xi_\beta}{da_\alpha}\right]$$

melynek

$$(144)\qquad X'_\beta = X_\beta\, Q$$

megfelel.

A (143) alatti egyenletbe α helyébe rendre 1, 2, . . . és n-et kell helyettesítni, mi által n egyenletet nyerünk, melyek, a (124), vagy (129) alattit hozzájok számítva, elégségesek a ξ_1 ξ_2, . . . ξ_n, és Q mennyiségek meghatározására.

Ha a (141); és (144) alatti egyenletekbe β helyébe 1, 2, . . . és n, továbbá γ helyébe is 1, 2, . . . és n-et rendre valósággal helyettesítjük; származnak a (143)-ból e következő egyenletek:

$$(145)\quad \left.\begin{array}{l}
[1,0]+[1,1]\frac{d\xi_1}{dx}+[1,2]\frac{d\xi_2}{dx}+\ldots+[1,n]\frac{d\xi_n}{dx}=X_1 Q\\
[2,0]+[2,1]\frac{d\xi_1}{dx}+[2,2]\frac{d\xi_2}{dx}+\ldots+[2,n]\frac{d\xi_n}{dx}=X_2 Q\\
[3,0]+[3,1]\frac{d\xi_1}{dx}+[3,2]\frac{d\xi_2}{dx}+\ldots+[3,n]\frac{d\xi_n}{dx}=X_3 Q\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
[n,0]+[n,1]\frac{d\xi_1}{dx}+]n,2]\frac{d\xi_2}{dx}+\ldots+[n,n]\frac{d\xi_n}{dx}=X_n Q
\end{array}\right\}$$

Ezekhez az öszméret végett a (129) alatti egyenlet helyett egy másikat azáltal lehet képezni, ha a (145) alattiakat rendre $-\frac{d\xi_1}{dx}, -\frac{d\xi_2}{dx} \ldots$ és $-\frac{d\xi_n}{dx}$-el szorozzuk, és azután összeadjuk, és még általában megjegyezzük, hogy

$$[\beta,\gamma] = -[\gamma,\beta]$$

származik:

$$(146)\quad [0,0]+[0,1]\frac{d\xi_1}{dx}+[0,2]\frac{d\xi_2}{dx}+\ldots+[0,n]\frac{d\xi_n}{dx} = XQ$$

az $(n+1)$-dik, és egyszersmind az utolsó egyenlet.

Hátra van még megmutatni, miként lehet ezen egyenletek rendszeréből az $(n+1)$ ismeretlen mennyiségeket meghatározni. E végre jó lesz a (145), és (146) alatti egyenleteket még egyszer a maga rendében felírni, kapjuk e rendszert:

$$(147)\quad \left.\begin{aligned}
&[0,0]+[0,1]\frac{d\xi_1}{dx}+[0,2]\frac{d\xi_2}{dx}+\ldots+[0,n]\frac{d\xi_n}{dx}=XQ\\
&[1,0]+[1,1]\frac{d\xi_1}{dx}+[1,2]\frac{d\xi_2}{dx}+\ldots+[1,n]\frac{d\xi_n}{dx}=X_1Q\\
&[2,0]+[2,1]\frac{d\xi_1}{dx}+[2,2]\frac{d\xi_2}{dx}+\ldots+[2,n]\frac{d\xi_n}{dx}=X_2Q\\
&[3,0]+[3,1]\frac{d\xi_1}{dx}+[3,2]\frac{d\xi_2}{dx}+\ldots+[3,n]\frac{d\xi_n}{dx}=X_3Q\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[n,0]+[n,1]\frac{d\xi_1}{dx}+[n,2]\frac{d\xi_2}{dx}+\ldots+[n,n]\frac{d\xi_n}{dx}=X_nQ
\end{aligned}\right\}$$

melynek azon nevezetes tulajdonsága van, hogy a vízirányos, és függőleges sorok előszámainak ugyanazon számbeli értékei, de ellenkező jegyei vannak. Az egyenletek ily rendszerét Krammer kiküszöbölési módszere szerint lehet feloldani, mely szerint az ismeretlenek mindegyike tört alakban, példáúl:

$$\frac{L}{N}$$

fordúl elő. Ezen értékek feltalálására szorozzuk ezen egyenleteket rendre p, p_1, p_2, p_3, ... és p_n -el, és adjuk össze. Válaszszuk azután az utóbbiakat úgy, hogy a $\frac{d\xi_2}{dx}$, $\frac{d\xi_3}{dx}$, ... és $\frac{d\xi_n}{dx}$ tényezői a talált egyenletekben elenyészszenek; $\frac{d\xi_1}{dx}$ tényzőjének pedig zérustól különböző értéke legyen. Kapunk ezáltal egy részt p, p_1, p_2, ... és p_n meghatározására n egyenleteket:

$$(148)\quad\left.\begin{array}{l}[0,0]\,p+[1,0]\,p_1+[2,0]\,p_2+\ldots+[n,0]\,p_n=0\\ [0,2]\,p+[1,2]\,p_1+[2,2]\,p_2+\ldots+[n,2]\,p_n=0\\ [0,3]\,p+[1,3]\,p_1+[2,3]\,p_2+\ldots+[n,3]\,p_n=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ [0,n]\,p+[1,n]\,p_1+[2,n]\,p_2+\ldots+[n,n]\,p_n=0\end{array}\right\}$$

másrészt pedig $\frac{d\xi_1}{dx}$ értékét tört alakban:

$$(149)\quad \frac{1}{Q}\frac{d\xi_1}{dx}=\frac{Xp+X_1p_1+X_2p_2+\ldots+X_np_n}{[0,1]p+[1,1]p_1+[2,1]p_2+\ldots+[n,1]\,p_n}$$

És most azt állítjuk, hogy csak ezen tört nevezőjének tudása szükséges, és hogy ebből mindjárt nem csak annak számlálója, hanem egyszersmind a többi törtek számlálója is minden akadály nélkül meghatározható. Mindenek előtt világos, hogy a (148) alatti egyenletek tulajdonképen nem p, p_1, p_2, ... és p_n mennyiségeket, hanem inkább $\frac{p_1}{p}$, $\frac{p_2}{p}$, ... és $\frac{p_n}{p}$ viszonyokat adják; és így ezen mennyiségek egyike — talán p — tetszésszerinti, a többiek általa meghatároztathatnak, melyek vele aránylagosak, és hogy ennek értékét úgy lehetne választani, hogy p_1, p_2, ... és p_n mennyiségek nem tört, hanem egész soktagú alakban jelennének meg, melyekben a (147) alatti egyenletek tényezői — a második függőleges sorban levőket kivéve — mind benne foglaltathatnak. Ebből következik, hogy $\frac{d\xi_1}{dx}$ számlálója az előre bocsátott ismert nevezőjéből úgy származtatható, hogyha

$[0,1]$, $[1,1]$, $[2,1]$, ... és $[n,1]$ tényezőket
X, X_1, X_2, ... és X_n mennyiségekkel felcseréljük.

Hasonló módon lehet a többi ismeretlen mennyiségek számlálóját is föltalálni.

A közös nevező egész soktagú mennyiség levén, mely, mint a (148) alattiból látható, azonnal elenyészik, mihelyt az abban előforduló második függőleges tényezői helyett bármelyik függőleges sor tényezőit helyettesítjük. Ezen soktagú feltalálása e következőkép történhetik: Az 1, 2, 3, ... és $(n+1)$ számok mint egybevetési elemek tekintetnek, és velök minden lehető cserék képeztetnek, így például: ha csak három egyenlet, és ugyanannyi ismeretlen volna, akkor e következő csoportozatokat 012, 021, 102, 120, 201, 210 kapnánk. Mindegyikben az első egybevetési elemhez 0, a másodikhoz 1, és a harmadikhoz 2 kísérőt csatolunk, és az egybevetési elemet kísérőjével zárjel alá teszszük, így:

$$[0,0][1,1][2,2],\ [0,0][2,1][1,2],\ [1,0][0,1][2,2],$$
$$[1,0][2,1][0,2],\ [2,0][0,1][1,2],\ [2,0][1,1][0,2]$$

megvan ezáltal minden tag, melyből a soktagú áll. Ezen tagoknak a fele $+$, a másik fele pedig $-$ jegygyel vétetik. Minő jegy tulajdonítható az egyes tagnak, azt e következőkép lehet meghatározni: Azon körülményre kell ügyelni, vajjon van-e egy ugyanazon tagnak két különböző szorzójában a magasabb egybevetési elemnek alacsonyabb kísérője és az alacsonyabb elemnek magasabb kísérője?

Ezen körülményt Petzval igen helyesen *compensatiónak*, míg Krammer azt variatiónak (változtatás) nevezi, mely utóbbi kifejezés azért nem igen helyeselhető, minthogy variatio (változtatás) megnevezés alatt egész más fogalmat kell gondolnunk. Ennek felvilágosítására e szorzók [0,1], és [1,2] nem adnak compensatiót; ellenben [0,2], és [1,0] szorzókban egy compensatio van, minthogy a második szorzóban az egybevetési elem túlnyomó mennyisége, az első szorzóban pedig a kísérő túlnyomó mennyisége által mintegy egymást megsemmisítik. Ugyanazon tagban lehetnek több compensatiók, és azon tag kapja a $+$, vagy $-$ jegyet, a mint abban a compensatiók száma páros, vagy páratlan. Ezen szabály szerint lenne a keresett soktag a felvett példában e következő:

$$N = +[0,0][1,1][2,2] - [0,0][2,1][1,2] - [1,0][0,1][2,2] +$$
$$[1,0][2,1][0,2] + [2,0][0,1][1,2] - [2,0][1,1][0,2]$$

Ugyanazon úton kell a soktagot $(n+1)$ egyenletnél $(n+1)$ ismeretlennel képezni, mely által annál nagyobb kifejezést kapunk minél nagyobb n.

Vegyünk még példáúl négy egyenletet ugyanannyi ismeretlennel, leszen az öszfoglalatok száma 24, t. i.

0123	1023	2013	3012
0132	1032	2031	3021
0213	1203	2103	3102
0231	1230	2130	3120
0312	1302	2301	3201
0321	1320	2310	3210

Minden öszfoglalatban az első elemhez 0 kísérőt, a másodikhoz 1, a harmadikhoz 2, és a negyedik elemhez 3 kísérőt csatolunk, és mindegyiket kísérőjével zárjelbe kapcsoljuk. Ezáltal minden tagot, melyből a nevező áll, a jegyen kívül megkaptunk. A jegy meghatározásánál a compensatio számára kell ügyelni; ha ez páros, akkor a jegy $+$, ha pedig páratlan, akkor nemleges. Itt igen könnyen lehetne egy compensatiót kihagyni, ha az egymásra következő tagok szabályossága szembeszökő nem volna. Az előbbi példában láttuk, hogy az első tevőleges tagra két nemleges, ezekre két tevőleges sat. tagok következnek. Ebből tehát a négy egyenlethez tartozó ismeretlennek nevezőjét egyszerűen felírhatjuk, és leszen:

$$\left.\begin{array}{rl} N = & +[0,0][1,1][2,2][3,3]-[0,0][1,1][3,2][2,3]- \\ & -[0,0][2,1][1,2][3,3]+[0,0][2,1][3,2][1,3]+ \\ & +[0,0][3,1][1,2][2,3]-[0,0][3,1][2,2][1,3]- \\ & -[1,0][1,1][2,2][3,3]+[1,0][0,1][3,2][2,3]+ \\ & +[1,0][2,1][0,2][3,3]-[1,0][2,1][3,2][0,3]- \\ & -[1,0][3,1][0,2][2,3]+[1,0][3,1][2,2][0,3]+ \\ & +[2,0][0,1][1,2][3,3]-[2,0][0,1][3,2][1,3]- \\ & -[2,0][1,1][0,2][3,3]+[2,0][1,1][3,2][0,3]+ \\ & +[2,0][3,1][0,2][1,3]-[2,0][3,1][1,2][0,3]- \\ & -[3,0][0,1][1,2][2,3]+[3,0][0,1][2,2][1,3]+ \\ & +[3,1][1,1][0,2][2,3]-[3,0][1,1][2,2][0,3]- \\ & -[3,0][2,1][0,2][1,3]+[3,0][2,1][1,2][0,3] \end{array}\right\}$$

és ez természetesen azon gyanításra vezet, hogy ezen szabályosság általános, és a dolog természetében fekszik, tehát az öszfoglalat számát nem is kell tekintetbe venni, hanem csak mindig két nemleges tag után két tevőleges tagot bocsátani.

Azonban a közelebbi kutatás csakhamar e szabály kivételére vezet; mert már öt egyenletnél öt ismeretlennel a cserék képezésénél öt elemből a 23, 24, és 25-dik öszfoglalatokra jutunk t. i. 04312, 04321, és 10234. Ezek a közös nevezőhöz e következő 3 tagot adják:

$$-[0,0][4,1][3,2][1,3][2,4]+[0,0][4,1][3,2][2,3][1,4]-$$
$$[1,0][0,1][2,2][3,3][4,4]$$

Ezen szabályosság tehát a 24-dik tagtól a 25-dikre való átmenetnél megszünik. Innen a 48-dikig ismét azon szabályosság lép be, és a 48-iktól a 49-re ismét kivétel van. Ennek további kutatását Kolbe József tanár vitte véghez.

Minekutána az N közös nevező már ismeretes, hátra volna tehát még megmutatni, miként lehet ebből a számlálókat feltalálni.

E végre oszszuk a (144) alatti egyenleteket Q-val, és vigyük azokat a kiküszöbölési módszer által e következő alakra:

$$(150)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{Q} &= \frac{L}{N} \\ \frac{1}{Q}\cdot\frac{d\xi_1}{dx} &= \frac{L_1}{N} \\ \frac{1}{Q}\cdot\frac{d\xi_2}{dx} &= \frac{L_2}{N} \\ &\cdots\cdots \\ \frac{1}{Q}\,\frac{d\xi_n}{dx} &= \frac{L_n}{N} \end{aligned}$$

A számlálókat a nevezőből most az által képezhetjük, hogyha a függőleges sorok tényezői helyett illetőleg az egyenletek második részeit teszszük.

Ezeknek felvilágositására vegyünk először csak két x, és x_1 változékony mennyiségeket, leend a (147)-ből:

$$\frac{1}{Q}\left[[0,0]+[0,1]\frac{d\xi_1}{dx}\right]=X$$

$$\frac{1}{Q}\left[[1,0]+[1,1]\frac{d\xi_1}{dx}\right]=X_1$$

melyekből a közös nevező

$$N=+[0,0][1,1]-[1,0][0,1]=[1,0]^2$$

tehát $$L=X[1,1]-X_1[0,1]=+[1,0]X_1$$

tehát $$\frac{1}{Q}=\frac{[1,0]X}{[1,0]^2}=\frac{X_1}{[1,0]}$$

és $$L_1=[0,0]X_1-[1,0]X=-[1,0]X$$

tehát $$\frac{1}{Q}\frac{d\xi_1}{dx}=\frac{-[1,0]X}{[1,0]^2}=\frac{-X}{[1,0]}$$

tehát $$\frac{d\xi_1}{dx}=-\frac{X}{X_1}$$

ebből $$Xdx+X_1d\xi_1=0$$

mely kifejezés azt mutatja, hogy az adott külzeléki egyenletet előbb egészelni kell, hogy azután ezáltal az egészelőt feltalálhassuk. Ez nyilván csalódás, és az általháríttathatik el, ha az egészelő létezik, hogyha a külzeléki egyenlet ugyanazzal szoroztatik, és e teljes külzelék alakjára:

$$dU=0$$

tehát $$U=c$$

vitetik; de akkor a ξ_1 tetszésszerinti függvényt úgy kell választani, hogy az adott külzeléki egyenlet e következő alakot vegye fel:

$$dc=0$$

Ha a külzeléki egyenlet három x, x_1, és x_2 változékonynyal van ellátva, leend a (147)-ből:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{Q}\left[[0,0]+[0,1]\frac{d\xi_1}{dx}+[0,2]\frac{d\xi_2}{dx}\right]&=X\\ \frac{1}{Q}\left[[1,0]+[1,1]\frac{d\xi_1}{dx}+[1,2]\frac{d\xi_2}{dx}\right]&=X_1\\ \frac{1}{Q}\left[[2,0]+[2,1]\frac{d\xi_1}{dx}+[2,2]\frac{d\xi_2}{dx}\right]&=X_2\end{aligned}\right\}$$

tehát a közös nevező

$$\begin{aligned}N=&+[0,0][1,1][2,2]-[0,0][2,1][1,2]-[1,0][0,1][2,2]+\\ &+[1,0][2,1][0,2]+[2,0][0,1][1,2]-[2,0][1,1][0,2]\\ =&\left(\frac{dX_1}{dx}-\frac{dX}{dx_1}\right)\left(\frac{dX_2}{dx_1}-\frac{dX_1}{dx_2}\right)\left(\frac{dX}{dx_2}-\frac{dX_2}{dx}\right)+\\ &+\left(\frac{dX_2}{dx}-\frac{dX}{dx_2}\right)\left(\frac{dX}{dx_1}-\frac{dX_1}{dx}\right)\left(\frac{dX_1}{dx_2}-\frac{dX_2}{dx_1}\right)=0\end{aligned}$$

ha már most a számlálók zérustól különbözők, akkor a külzeléki egyenletnek véges értékekkel nem lehet megfelelni, tehát leszen;

$$\left.\begin{array}{l} L=+X[2,1]^2+X_1[2,1][0,2]+X_2[0,1][1,2]=0 \\ L_1=+X[2,0][1,2]+X_1[2,0]^2+X_2[1,0][0,2]=0 \\ L_2=+X[1,0][2,1]+X_1[2,0][0,1]+X_2[1,0]^2=0 \end{array}\right\}$$

vagy

$$\left.\begin{array}{l} L=[2,1](X[2,1]+X_1[0,2]+X_2[1,0])=0 \\ L_1=[2,0](X[1,2]+X_1[2,0]+X_2[0,1])=0 \\ L_2=[1,0](X[2,1]+X_1[0,2]+X_2[1,0])=0 \end{array}\right\}$$

minthogy [2,1], [2,0], és [1,0] jelves tenyzőkel nem enyészhetnek, leszen tehát

$$\left.\begin{array}{l} X[2,1]+X_1[0,2]+X_2[1,0]=0 \\ X[1,2]+X_1[2,0]+X_2[0,1]=0 \\ X[2,1]+X_1[0,2]+X_2[1,0]=0 \end{array}\right\}$$

Ezen három egyenlet egymástól lényegesen nem különbözik, és ha kifejtetnek e következő alakot veszik fél :

$$X\left(\frac{dX_2}{dx_1}-\frac{dX_1}{dx_2}\right)+X_1\left(\frac{dX}{dx_2}-\frac{dX_2}{dx}\right)+X_2\left(\frac{dX_1}{dx}-\frac{dX}{dx_1}\right)=0$$

a mely egyenlet az egészelő létezése vagy nemlétezése föltételét foglalja magában. Ha tehát a külzeléki egyenletnek van egészelője, akkor lehet új változékonyak bevezetése által a változékonyak számát háromról kettőre, és azután ismét kettőről egyre leszálítni. Ha pedig annak nincs egészelője, azon esetben lehet

$$dx_2=0$$

tehát

$$x_2=c$$

tenni, és azután az egészelő hozzákapcsolása által e teljes különbzéket

$$dU=0$$

tehát

$$U=f(x,x_1,c)=c_1$$

kapni. Ebből tehát következik; hogy ámbár semmiféle egészelő vagy görbe lap nem létezik, mely az egyenlethez tartozného, még is van két ösegyenlet, melyek annak megfelelnek.

E négy változékonynyal ellátott külzeléki egyenletnél

$$Xdx+X_1dx_1+X_2dx_2+X_3dx_3=0$$

a közös nevező nem enyészik el. Kisebbítsük tehát a változékonyak számát egy egységgel új változékonyak behozása által, kapjuk e helyettesítési eredményt :

$$A_1da_1+A_2da_2+A_3da_3=0$$

és alkalmazzuk még egyszer ugyanazon eljárást, kapjuk

(151) $$B_1 db_1 + B_2 db_2 = 0$$

külzeléki egyenletet, melyben csak két változékony vagyon. Ezen utolsó egyenlet létezése attól függ, vajjon létezik vagy nem létezik-e egy egészelő. Ez utóbbi esetben lehet

$$da_3 = 0$$

tehát

(152) $$a_3 = g$$

tenni, tehát

$$LA_1 da_1 + LA_2 da_2 = 0$$

teljes külzelék, és egészelve

(153) $$U = f(a_1, a_2, a_3) = g_1$$

tehát ámbár a (151) alatti egyenlet nem létezik, mindazonáltal az adott külzeléki egyenletnek a (152), és (153) alatti ősegyenletek megfelelnek, és ez volna ezen esetben a megfelelő ősegyenletek legkisebb száma.

Az öt változékonynyal ellátott külzeléki egyenlet feloldása oly közös nevezőt ad, mely elenyészik, tehát valamennyi számlálók az egészelő létezésére vagy nemlétezésére bizonyos föltétező egyenleteket adnak, melyek egymástól nem különböznek. Az utóbbi esetben nem lehet a változékonyak számát mindaddig leszállítni, míg

$$dx_4 = 0 \quad \text{nem tétetik.}$$

tehát

(154) $$x_4 = c$$

Ha már most ezen leszállítás után egy egészelő ismét nem létezik, akkor

(155) $$a_3 = c_1$$

és az így nyert külzeléki egyenlet egészelése után lesz

(156) $$U = f(a_1, a_2, a_3) = c_2$$

tehát ámbár egy egészelő nem létezik, mindazáltal az adott egyenletnek a (154), (155), és (156) alatti ősegyenletek megfelelnek.

Ezek után e következő eljárási módot találtuk:

A vonalos alakú egyenletek feloldása főkép a soktagú közös nevező képezésétől függ, melyből azután az ismeretlenek valamennyi számlálója csupán felcserélés által képezhető. A közös nevező képezése pedig addig, mig az ismeretlenek száma nem nagy, például kettő vagy három, igen könnyű, mint már láttuk; de mihelyt azoknak száma nagyobbra nő, a közös nevező tagjainak száma is tetemesen nagyobbodik, és egyenlő azon csereszámhoz, mely ugyanannyi egybevetési elemekből áll a hány ismeretlen van, és még minden tag oly szorzatból áll, mely mindig nagyobbodik, és az ismeretlenek számával egyenlő. Ily soktagok képezésöknél bizonyos meghatározott rendet kivánnak, mely azután azon bizonyosságot adja, hogy valamennyi tagok képezve vannak, egyik sincs kihagyva, vagy tán kétszer oda írva, és hogy azonkivül még a jegyet egyik tagban sem hibáztuk el. Miután ezáltal a nevezőt nem csak a jegyre, hanem egyszersmind a tagok számára nézve is már képeztük, még megjegyezzük, hogy ha két bármely tagban az egybevetési elemet kisérőjével felcseréljük, és ha azelőtt compensatio volt, az megmarad; ha pedig a felcserélés előtt nem volt compensatio, tehát nem lesz azután sem. Továbbá szabad a fekmentes sorok tényezőit a függőleges sorok tényezőivel felcserélni, mert ezáltal csak a jegy, nem pedig a számbeli értéke változik. Mindezekből következik, hogy a nevező, ha az ismeretlenek száma (n+1), ezen alakban írható:

$$N = S[P_{n+1}](-1)^{n+1}$$

Képzeljük már most a P soktagban valamennyi egybevetési elemet kísérőjével felcserélve lenni, leszen nyilván

$$N = N, \text{ vagy } N = -N = 0$$

a szerint a mint (n+1) páros, vagy páratlan szám. Valahányszor tehát (n+1) páratlan szám, azon esetben az N nevező mindig zérus, és azután az egészelő létezésére, vagy nemlétezésére nézve bizonyos számú föltétező egyenletek vannak. Ez utóbbi esetben az előadott egészelési módszert nem lehet ugyan használni: mindazonáltal léteznek néhány ősegyenletek, melyek a részletes külzeléki egyenletnek megfelelnek.

Ezen most előadott módszer föltétezi a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ és ξ_n függvények oly módoni választását, hogy azáltal n föltételeknek megfeleljenek; ezen függvények még $a_1, a_2, \ldots$ ás a_n ismeretleneket foglalnak magukban, melyek a külzeléki egyenletben elő nem fordúlnak Ezen látszatos akadályt e következő úton lehet elhárítani, keressük a (147)-ből nak lehetetlen, hogy csak egy egészelő létezzék; tehát a külzeléki egyenletnek nem egy, hanem több ősegyenlet felel meg.

Minekutána 2n páros szám, lehet tehát e következő helyettesítés által:

$$(163)\quad \left.\begin{array}{l} x_1 = \xi_1(a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2n-1}, x) \\ x_2 = \xi_2(a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2n-1}, x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \xi_n(a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2n-1}, x) \\ p_1 = \pi_1(a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2n-1}, x) \\ p_2 = \pi_2(a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2n-1}, x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{n-1} = \pi_{n-1}(a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2n-1}, x) \end{array}\right\}$$

a 2n változékonyakat (2n—1)-re, azaz: eggyel kisebbíteni úgy, hogy e helyettesítési eredmény

$$(164)\quad A_1 da_1 + A_2 da_2 + \ldots — A_{2n-2}\, da_{2n-2}\, A_{2n-1}\, da_{2n-1} = 0$$

x-et nem foglal magában.

A (162) alatti egyenletbe (n+1) külzelék van, míg a (164)-be (2n—1); ez által a külzelékek száma (n—2)-vel szaporodott, mely körülmény nemcsak nem ad előnyt, hanem még hátramaradásra mutat, minthogy mindig oda kell ügyekezni, hogy a külzelékek száma kisebbüljön.

Ha már most egy egészelő sem létezik, akkor tehetjük:

$$(165)\quad a_{2n-1} = c_1$$

és azután e következő helyettesítés által:

$$(166)\quad \left.\begin{array}{l} a_2 = \alpha_2(b_1, b_2, \ldots b_{2n-3}, a_1) \\ a_3 = \alpha_3(b_1, b_2, \ldots b_{2n-3}, a_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{2n-2} = \alpha_{2n-2}(b_1, b_2, \ldots b_{2n-3}, a_1) \end{array}\right\}$$

a (164) alattit e következőre változtathatjuk:

$$(167)\quad B_1 db_1 + B_2 db_2 + \ldots + B_{2n-3}\, db_{2n-3} = 0$$

melyben a_1 nem fordúl elő. Tegyük továbbá

$$(168)\quad b_{2n-3} = c_2$$

és így tovább míg ezen eljárást (n—1)-szer használtuk, kapjuk végre

$$(169)\quad \psi = c_{n-1}$$

az (n—1) ősegyenletek utolsóját, melyben csak két változékony van, tehát az egészelő hozzácsatolása által egészelhetjük.

A p mennyiségekről nem mondottuk, hogy ők részletes külzeléki hányadosok, hanem mint független változékonyakat tekintettük, hogy azáltal (n—1) ősegyenleteket kapjunk, melyek az adott külzeléki egyenletnek mindannyian megfelelnek.

Ha már most a p mennyiségek valódi jelentését meghagyjuk, akkor a (162) alatti egyenlet egészelhető; és ha az x_1, $x_2, \ldots$ és x_n változékonyakat c_1, $c_2, \ldots$ és c_{n-1} új változékonyak, és továbbá p_1, $p_2, \ldots p_{n-1}$, és x által ezen alakokban:

$$(170)\quad \left.\begin{array}{l} x_1=\chi_1(c_1,c_2,\ldots c_{n-1},p_1,p_2,\ldots p_{n-1},x) \\ x_2=\chi_2(c_1,c_2,\ldots c_{n-1},p_1,p_2,\ldots p_{n-1},x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=\chi_n(c_1,c_2,\ldots c_{n-1},p_1,p_2,\ldots p_{n-1},x) \end{array}\right\}$$

kifejezve, és azután ezeket külzelve, és végre mind ezeket a (162) alattiba helyettesítve képzeljük; nyerjük e következő helyettesítési eredményt:

$$(171)\quad C_1dc_1+C_2dc_2+\ldots C_{n-1}dc_{n-1}+Xdx+ P_1dp_1+P_2dp_2+\ldots P_{2n-1}dp_{2n-1}=0$$

Ha a c menyiségek egy pillanatra állandóknak tekintetnek, leszen:

$$(172)\quad Xdx+P_1dp_1+P_2dp_2+\ldots+P_{2n-1}\,dp_{2n-1}=0$$

tehát

$$(173)\quad C_1dc_1+C_2dc_2+\ldots C_{n-1}dc_{n-1}=0$$

teljes külzelék, mely az egészelés következtében e függvényt

$$(174)\quad F(c_1,c_2,\ldots c_{n-1})=0$$

adja általános egészletül, melyben az F függvény alakja tetzésszerinti.

Ezen egészelési módszer a Lagrange-énál nehezebb; de minekutánna azon út, melyen haladni kell tökéletesen ki van jelölve, azért az egészelés mindig megtörténhetik, valahányszor az alárendelt műtétek végrehajthatók.

De minekutána a (167)-diki, és további külzeléki egyenletek tényzői igen bonyolodottak, kivánatos lenne tehát azoknak egészelését kikerülni, ezt *Jakobi* meg is mutatta.

$$
(157)\quad \left.\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{dx} &= f_1(x, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \\
\frac{d\xi_2}{dx} &= f_2(x, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d\xi_n}{dx} &= f_n(x, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)
\end{aligned}\right\}
$$

és egészeljük az így nyert külzeléki egyenleteket. Továbbá külzeljük a (157) alatti egyenletek mindegyikét (n—1)-szer x szerint, kapunk $n+(n-1)n=n^2$ egyenleteket, melyekben e következő mennyiségek :

$$
\left.\begin{array}{l}
x,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \ldots\ \xi_n \\
\frac{d\xi_1}{dx},\ \frac{d\xi_2}{dx},\ \frac{d\xi_3}{dx},\ \ldots\ \frac{d\xi_n}{dx} \\
\frac{d^2\xi_1}{dx^2},\ \frac{d^2\xi_2}{dx^2},\ \frac{d^2\xi_3}{dx^2},\ \ldots\ \frac{d^2\xi_n}{dx^2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d^n\xi_2}{dx^n},\ \frac{d_n\xi_2}{dx^n},\ \frac{d^n\xi_3}{dx^n},\ \ldots\ \frac{d^n\xi_n}{dx_n}
\end{array}\right\}
$$

$[(n+1)+n.n=n+1+n^2]$ számmal fordúlnak elő. Ezekből küszöböljük ki

$$
\left.\begin{array}{l}
\xi_2,\ \xi_3\ \ldots\ \xi_n \\
\frac{d\xi_2}{dx},\ \frac{d\xi_3}{dx},\ \ldots\ \frac{d\xi_n}{dx} \\
\frac{d^2\xi_2}{dx^2},\ \frac{d^2\xi_3}{dx^2},\ \ldots\ \frac{d^2\xi_n}{dx^2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d^n\xi_2}{dx^n},\ \frac{d^n\xi_3}{dx^n},\ \ldots\ \frac{d^n\xi_n}{dx^n}
\end{array}\right\}
$$

$[(n-1)+(n-1)n=(n^2-1)]$ számú mennyiséget marad egy külzeléki egyenlet, melyben $x, \xi_1, \frac{d\xi_1}{dx}, \frac{d^2\xi}{dx^2} \ldots\ldots$ és $\frac{d^n\xi_1}{dx^n}$ mennyiségek jönek elő. Ezen n-dik fokú közönséges külzeléki egyenlet egészelve n számú $a_1, a_2, a_3, \ldots$ és a_n tetszés szerinti állandókat e következő alakban adja :

$$\xi_1 = F_1(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, x)$$

Hasonló módon találjuk :

$$\left.\begin{array}{l}\xi_2=F_2(a_1,a_2,a_3, \ldots\ldots a_n,x)\\ \xi_3=F_3(a_1,a_2,a_3, \ldots\ldots a_n,x)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \xi_n=F_n(a_1,a_2,a_3, \ldots a_n,x)\end{array}\right\}$$

Egyébiránt elégséges, ha ezek közöl csak egyet egészelünk. A fennevezett akadály ezen értékeknek a (124)-be való helyettesítése által elhárítható.

Ezekből tehát látható, hogy mindaddig, míg a részletes külzeléki egyenletnek alapúl szolgáló vonalos külzeléki egyenlet egészelhető, és továbbá ezen utóbbinak alapúl szolgáló algebrai egyenlet feloldható: az adott föladat mindig feloldhatónak tekinthető.

(8. §.)

Az első rendű részletes külzeléki egyenletek egészelése.
(Pfaff után)

Legyen.

(158) $f(x,x_1,x_2, \ldots x_n, p_1,p_2, \ldots p_n)=0$

$(2n+1)$ változékony közti kényleges első rendű külzeléki egyenlet, és keressük belőle:

(159) $p_n=\varphi(x,x_1,x_2,\ldots x_n,p_1,p_2,\ldots p_{n-1})$

leszen ez megfelelő érték ugyan de nem egészlet, mert a p menyiségekről nem nyilatkoztunk.

Ha továbbá e következő egészelhető külzeléki egyenletet

(160) $dx=p_1dx_1+p_2dx_2+\ldots+p_{n-1}dx_{n-1}+p_ndx_n$

hozzácsatoljuk, és a (159) alatti értéket bele helyettesítjük:

(161) $dx=p_1dx_1+p_2dx_2+\ldots+p_{n-1}dx_{n-1}+\varphi dx_n$

egészelhető külzeléki egyenletet kapjuk, melynek egészeléséről leszen csak itt szó, azaz: $p_1,p_2 \ldots$ és p_{n-1} oly függvények feltalálásáról, melyek ennek megfelelnek. De minthogy ezen értékeket feltalálni képesek nem vagyunk, tehát az utolsó egyenletet mint közönséges külzeléki egyenletet tekintjük, melyben 2n változékony van, és a p mennyiségek lehozásai zérusok, és így írjuk:

(162) $dx-p_1dx_1-p_2dx_2-\ldots-p_{n-1}dx_{n-1}-\varphi dx_n=0$

Mindaddig míg a p mennyiségek meg nem határoztat-

Hozzátétel Jakobitól.

Bocsássuk a Pfaff egészelési módszerét bezárólag a (164) alattiig, úgy, valamint az a mennyiségek értékeinek a (147)-böli meghatározását, elöre.

Minekutána a (163) alatti függvények helyettesítése által a (162) alatti egyenletből minden x-et magokban foglaló tagok kimaradtak, úgy hogy a (164) alattiba semmi x sem találtatik; lehetne tehát már a helyettesítés előtt $x = 0$ tenni, és ez által a számbeli míveleteket tetemesen rövidítni; lenne tehát:

$$(175) \quad \begin{array}{l} 0 - p_1^{(0)} dx_1^{(0)} - p_2^{(0)} dx_2^{(0)} - p_3^{(0)} dx_3^{(0)} - \ldots - \\ p^{(0)}_{n-1} dx^{(0)}_{n-1} - p_n^{(0)} dx_n^{(0)} = 0 \end{array}$$

és

$$(176) \quad \left.\begin{array}{l} x_1 = \mathbf{x}_1 = \xi_1 (a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}, 0) \\ x_2 = \mathbf{x}_2 = \xi_2 (a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}, 0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \mathbf{x}_n = \xi_n (a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}, 0) \end{array}\right\}$$

Azon mennyiségek, melyek (0) jelvény által vannak megjelölve x-et nem tartalmazzák; és ha ez utolsó függvényeket a (175)-be helyettesítjük, leszen:

$$(177) \quad -\mathbf{p}_1 d\mathbf{x}_1 - \mathbf{p}_2 d\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_3 d\mathbf{x}_3 - \ldots - \mathbf{p}_{n-1} d\mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{p}_n d\mathbf{x}_n = 0$$

A (164) alattiban van (2n—1) változékony, ellenben az utóbbiban csak n. A (164)-ből a (177)-re könnyen mehetünk át, és megfordítva. Képzeljük a (163) alatti függvényeket az a mennyiségek szerint feloldva, és a (164)-be helyettesítve, kapjuk a (162) alattit; ha pedig az a mennyiségek a (176) alattiakból kerestetnek, azon esetben nem kapjuk a (162)-et, hanem a (177) alattit. Minthogy a (164) alatti teljes külzelék, a (177) alatti is az leszen, és pedig az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ és $\mathbf{x}_n$ változékonyak szerint. Kapcsoljuk hozzá tehát az egészelőt, és egészeljük, nyerjük

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n) = 0$$

vagy

$$(178) \quad \mathbf{x}_n = \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_{n-1})$$

általános egészletet, melyben ψ tetszésszerinti függvényalakot képvisel.

Ha már egyszer a ψ függvényalakjáról nyilatkoztunk, akkor az a mennyiségeket a (163)-ból keressük, és a (176)-ba helyettesítsük, mely által az ezen x-ekkel kifejezett változékonyakat, x és p mennyiségek által kifejezve nyerjük, ezeket azután a (178)-ba helyettesítve, és abból példáúl p_{n-1} mennyiséget keresve, kapunk egy értéket, mely az adott részletes külzeléki egyenletnek megfelel. Ebből következik, hogy a ψ függvény minden alakjánál ezen míveleteket újra kell végre hajtani.

(9. §.)

A másodrendű részletes külzeléki egyenletek egészelése.

Minekutána már az első rendű részletes külzeléki egyenletek egészelésénél nagy akadályokra akadtunk, képzelhető, hogy a másod, és magasabb rendű részletes külzeléki egyenletek egészelése még nagyobb akadályoknak van alá vetve.

Az első rendű részletes külzeléki egyenletek általános egészlete — állandó alapmennyiséggel ellátott — tetszésszerinti függvény; míg a másod rendű részletes külzeléki egyenletek általános egészlete különféle alapmennyiséggel, és két tetszésszerinti függvénynyel ellátott kifejezés. Legyen tehát

$$(179) \qquad L = \varphi(M) + \psi(N)$$

egy másodrendű részletes külzeléki egyenletnek általános egészlete, melyben φ, és ψ függvények tetszésszerintiek, L, M, és N mennyiségek pedig x, y, és z változékonyak függvényei, továbbá z változékony x, és y függvénye. Ezeken kivül vannak a függvényben még e következő mennyiségek:

$$(180) \qquad \frac{dz}{dx} = p, \text{ és } \frac{dz}{dy} = q$$

és

$$(181) \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = r, \frac{d^2z}{dxdy} = s, \text{ és } \frac{d^2z}{dy^2} = t$$

p, q, r, s, és t mennyiségek rövidség okáért hozatnak be.

Ha már most a (179) alatti függvényt kétszer, egyszer t. i. x, és egyszer y szerint külzeljük, a származtatott külzeléki egyenletekben φ', és ψ' függvények lesznek. Ha továbbá az elsőt ezekből még egyszer külön x, és külön y szerint a másodikat csak y szerint külzeljük, ezen három származtatott egyenletekben φ'', és ψ'' függvények fordúlnak elő. Ha végre ezen öt egyenletből φ', ψ', φ'', és ψ'' függvényeket kiküszöböljük, egy másod rendű részletes külzeléki egyenletet kapunk, melyben tetszésszerinti függvények nincsenek, és melynek a (179) alatti ösegyenlet megfelel.

A másodrendű részletes külzeléki egyenletek egészelésénél hasonló úton kell haladni mint az első rendűeknél, csak azon különbséggel, hogy itt egy helyettesítési módozat helyett kettőt kell használni. Tegyük t. i. előbb

$$\psi = 0$$

és azután $\varphi = 0$

Az első esetben lesz: $L = \varphi\ (M)$

a másodikban $L = \psi\ (N)$

mely helyettesítési módozat által a változékonyak számát egy egységgel kisebbítjük.

Legyen ezek után egy másod rendű vonalos alakú (a vonalos alak csak a második külzeléki hányadosra vonatkozik) részletes külzeléki egyenlet

$$(182) \qquad Rr + Ss + Tt = U$$

három x, y, és z változékonyak közt, melyben R, S, T, és U tényzők x, y, z, p, és q mennyiségek függvényei, melyek különböző hatványban előfordúlhatnak.

Jelen esetben hat, a (180), (181), és (182) alatti egyenleteket kellene egészelni, melyek száma igen nagy, tehát igyekeznünk kell azt kisebbíteni. E végre z-t x, és y függvényének tekintjük:

$$(183) \qquad dz = pdx + qdy$$

mely teljes külzelék, tehát egészelhető, tehát p, és q mennyiségek x, és y szerint vett külzeléki hányadosok.

Továbbá legyen

$$(184) \qquad dp = rdx + sdy$$

p szerint teljes külzelék, tehát egészelhető, tehát p, és q menynyiségek x, és (x,y) szerint vett másodrendű részletes külzeléki hányadosok.

Végre legyen

$$(185) \qquad dq = sdx + tdy$$

q szerint teljes külzelék, tehát egészelhető, tehát s, és t mennyiségek (x,y), és y szerint vett másod rendü részletes külzeléki hányadosok, és e mellett

$$(186) \qquad s = \frac{d^2z}{dxdy} = \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy}$$

Mi itt csak a (184), és (185) alatti függvényeket akarjuk használni, melyekből mindegyik egy ősegyenlet által egészelhető. Keressük tehát a (184)-ből:

$$r = \frac{dp - sdy}{dx}$$

és a (185)-ből: $t = \frac{dq - sdx}{dy}$

és helyettesítsük ezeket a (182)-be, leszen:

$$R\left(\frac{dp - sdy}{dx}\right) + Ss + T\left(\frac{dq - sdx}{dy}\right) = U$$

vagy

$$(187) \quad Rdpdy + Tdqdx - Udxdy = s.(Rdy^2 + Tdx^2 - Sdxdy)$$

s helyébe oly értékeket kell találni, melyek ezen egyenletnek megfelelnek. De sajnos, ez igen kevés esetekben sikerülend. Lehetne tehát hasonló analytikai fogáshoz, mint a Lagrange módszerében tettük, folyamodni, és írni:

$$(188) \qquad Rdpdy + Tdqdx - Udxdy = 0$$

és

$$(189) \qquad Rdy^2 + Tdx^2 - Sdxdy = 0$$

és ezáltal mind z-t, mind y-t x függvényének tekinteni. Az utolsóból dy-ra, tehát y-ra nézve is kettős érték t. i.

$$(190) \qquad dy = V_1 dx \,;\; V_2 dx$$

következik, tehát

$$(191) \qquad M = \psi\,(x,y) = a$$

Helyettesítsük ezen értékeket a (188)-ba, leszen

$$(192) \qquad L = \varphi\,(x,y,p,q) = b$$

mely kifejezés két egymástól különböző első egészletet képvisel.

Minthogy a két különböző második egészlet egészelése ritkán sikerül: azért a (183) alatti egyenlethez fordulunk, az a, és b állandókat változékonynak tekintvén, a két utolsó függvényből x, és y-t z, p, és q által fejezzük ki, ezeket azután külzeljük, és a (187) alattiba helyettesítvén, e következő helyettesítési eredményt kapjuk :

$$(193)\quad A\mathrm{da}^2+B\mathrm{dadb}+C\mathrm{db}^2+\ldots+\mathrm{dp}+\ldots\mathrm{dq}+\ldots\mathrm{dz}=0$$

és minthogy a (187) alatti egészelhető, e helyettesítési eredmény is egészelhető leszen.

Legyenek már most a, és b mennyiségek állandók, leszen :

$$\ldots\mathrm{dp}+\ldots\mathrm{dq}+\ldots\mathrm{dz}=0$$

és

$$(194)\qquad A\mathrm{da}^2+B\mathrm{dadb}+C\mathrm{db}^2=0$$

az egészelés következtében :

$$\mathrm{b}=\mathrm{f}(\mathrm{a})$$

tehát

$$(195)\qquad L=\mathrm{f}\,(M)$$

az adott külzeléki egyenlet egészlete.

E módszer felvilágosítására e következő példa szolgáljon :

$$(196)\qquad \mathrm{r}+A\mathrm{s}+B\mathrm{t}=U$$

A, és B állandó tényző, U pedig csak x, és y függvénye legyen. Leszen tehát a (187) után :

$$(197)\quad \mathrm{dpdy}+B\mathrm{dqdx}-U\mathrm{dxdy}=\mathrm{s}\,(\mathrm{dy}^2+B\mathrm{dx}^2-A\mathrm{dxdy})$$

és (189) után

$$\mathrm{dy}^2+B\mathrm{dx}^2-A\mathrm{dxdy}=0$$

ebből

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=+\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{\mathrm{A}^2}{4}-\mathrm{B}}=\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix}$$

tehát

$$\mathrm{dy}=\begin{Bmatrix}\alpha_1\ \mathrm{dx}\\ \alpha_2\ \mathrm{dx}\end{Bmatrix}=\alpha\mathrm{dx}$$

tehát

$$(198)\ \mathrm{y}=\alpha\mathrm{x}+\mathrm{a}$$

következik. Továbbá leszen a (188) után

$$\alpha\mathrm{dp}+B\mathrm{dq}-\mathbf{U}\alpha\mathrm{dx}=0$$

hol $\mathbf{U}$ csak x függvénye, és egészelve

$$(199)\qquad \alpha\mathrm{p}+B\mathrm{q}=\alpha\int\mathbf{U}\mathrm{dx}+\mathrm{b}$$

Ha már most a (198) és (199) alatti egyenletekben a, és b állandót változékonyoknak tekintjük, és külzeljük, leszen:

$$\mathrm{dy}=\alpha\mathrm{dx}+\mathrm{da}$$

és

$$\mathrm{dp}=-\frac{B}{\alpha}\mathrm{dq}+\mathbf{U}\mathrm{dx}+\frac{1}{\alpha}\mathrm{db}$$

Helyettesitsük ezeket a (197)-be, leszen:

$$\mathrm{dbdx} - \frac{B}{\alpha}\mathrm{dqda} + \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{dbda} =$$
$$\mathrm{s}\,[\alpha^2\mathrm{dx}^2 + 2\alpha\mathrm{dxda} + \mathrm{da}^2 + B\mathrm{dx}^2 - A\alpha\mathrm{dx}^2 - A\mathrm{dxda}]$$

Ha most a, és b mennyiségeket ismét állandóknak tekintjük, leszen:

$$0 = \mathrm{s}\,[\alpha^2 + B - A\alpha]\,\mathrm{dx}^2$$

és $\mathrm{dbdx} - \frac{B}{\alpha}\,\mathrm{dbda} + \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{dbda} = \mathrm{s}\,[2\alpha\mathrm{dxda} + \mathrm{da}^2 - A\mathrm{dxda}]$

Az utolsóelőttiből következik:

$$\alpha = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B} = \begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{Bmatrix}$$

mint már láttuk. Az utolsó pedig egészelhető, minthogy x, tehát dx mennyiség is, s ügyes választása által benne nem találtatik, leszen tehát

(200) $\qquad \mathrm{b} = \varphi\,(\mathrm{a})$

tehát

(201) $\qquad \alpha\mathrm{p} + B\mathrm{q} - \alpha\int \mathrm{U}\mathrm{dx} = \varphi\,(+\alpha\mathrm{x} + \mathrm{y})$

melyben α-nak kettős értéke van. Ezek volnának tehát a két első egészletek. Ha a tetszésszerinti φ függvény alakjáról már nyilatkoztunk, azon esetben lehet a Lagrange módszere után egészelni, és ezáltal z-t mint x, és y függvényét kapjuk.

Ezen egészelési módszer a másod rendü nem vonalos részletes külzeléki egyenletekre nem alkalmazható. Egyébiránt, ha egyszer a Pfaff egészelési módszere az első rendü nem vonalos részletes külzeléki egyenletekre is kiterjesztetik, akkor a másod rendü nem vonalos részletes külzeléki egyenletek egészelése is sikerülend.

A harmad rendü részletes vonalos külzeléki egyenletek feloldásánál kapunk egy harmad fokú vonalos külzeléki egyenletet, melynek három mérete van. Itt három különféle módozatot kell használni; az első adja az első tetszésszerinti függvényt, a második a másodikat, és a harmadik a harmadikat.

Míglen az alárendelt mütétek a tökély nagyobb fokára nem emelkednek: mindaddig ezen szép egészelési módszerek csak az elmélet körében maradnak.

(10. §.)

Most oly vonalos részletes külzeléki egyenletek egészelésére fordítjuk figyelmünket, melyek a gyakorlatban használtatnak, és a természet-, s erőműtani térkőrben előfordúlnak.

Ezeknek egészelésére két módszerünk van, t. i.

1) a *Fourier-képlet* használata, és

2) az *összegezés* által való egészelés.

(11. §.)

A Fourier-képlet bebizonyítása egy, és több változékonyra nézve.

Fourier e képlete:

$$(202)\quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} f(\lambda)d\alpha d\lambda$$

folytonos függvény, mely a végesből a végtelenbe, a valódiból a képzetesbe nem megyen át, és hogyha tágasabb határok közt nem is folytonos, de λ' és λ'' határok között még is az. A λ' és λ'' egészelési határok csak λ mennyiségre, ellenben $-\infty$, és $+\infty$ határok α-ra vonatkoznak. Az x mennyiség itt a kettős egészletre nézve csak állandó szerepet visel. A jelen esetben tehát f(x) folytonos függvény a (202) alatti képlet második alkatrészében összeg alakban állíttatik elő, mely igen könnyen külzelhető, minthogy az x csak a kitevőleges mennyiségben fordúl elő. Ámbár a kitevőleges mennyiség kitevőjében $\sqrt{-1}$ képzetes fordúl elő, mindazáltal f(x) csak valódi mennyiség lehet; tehát itt, mint sok más esetekben, a folytonos függvény látszó képzetes mennyiség által előállítható, mely azután bizonyos helyettesítés után két alkatrészre t. i. a valódi, és a képzetesre bontatik, melyekből az utóbbi elenyészik, és így csak a valódi rész marad hátra. És valóban:

$$(203)\quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} \cos\alpha(x-\lambda) f(\lambda)d\alpha d\lambda + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} \sin\alpha(x-\lambda) f(\lambda) d\alpha d\lambda$$

Ha már most a második alkatrészben a képzetes tag α szerint mint összeg tekintetik, és α helyett minden lehető értékek

$-\infty$ egész $+\infty$-ig a sinusba helyettesíttetnek, akkor ez minden lehető nem csak tevőleges, hanem nemleges értékeket is, melyek egymást párosan megsemmisítik, felveszen; melynek következtében csak ezen kifejezés bebizonyítandó :

$$(204)\quad 2\pi f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} \cos\alpha(x-\lambda)\, f(\lambda) d\alpha d\lambda$$

De minekutánna a cosinus a tevőleges, és egyenlő nemleges értékek helyettesítése által nem változik: tehát azon értékek, melyek 0-tól egész $-\infty$-ig, és azok, melyek 0-tól egész $+\infty$-ig helyettesítés által származnak, magokat párosan összegezik, leszen:

$$(205)\quad \pi f(x) = \int_{0}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} \cos\alpha(x-\lambda) f(\lambda) d\alpha d\lambda$$

Tegyük már most

$$(206)\quad J = \int_{0}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} f(\lambda) d\alpha d\gamma.$$

akkor ezen kettős egészlet többé nem látszó, hanem valóságos képzetes mennyiség, mert itt a képzetes alkatrész nem enyészik el. Ha most a valódi alkatrészt felkeresni akarjuk, azt találjuk, hogy a határozott egészletnek nincs határozott értéke. Úgy van példáúl ezen határozott egészletnek

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$$

mint összeg tekintve zérus értéke, mert a helyettesítés által éppen annyi, és oly nagy tevőleges mint nemleges értékek, melyek egymást párosan megsemmisítik, jőnek elő. Ha pedig ugyanazon egészlet mint különbség tekintetik, leszen értéke $-\log(-1)$. Ennek értéke pedig ezen egyenletből származik:

$$e^{\pi(2r+1)\sqrt{-1}} = \cos\pi(2r+1) + \sqrt{-1}\sin\pi(2r+1)$$

és ha 2r páros szám, leszen

$$\log(-1) = (2r+1)\pi\sqrt{-1}$$

tehát

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = -(2r+1)\pi\sqrt{-1}$$

nem csak képzetes, hanem még tetszésszerinti is, mert r tetszésszerinti egész szám.

Továbbá a határozott egészlet értéke gyakran azon úttól is függ, melyen haladunk. Sorozzuk tehát a fentebbi határozott egészletnek mind számlálóját mind nevezőjét x^m-el, leszen :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^m dx}{x^{m+1}}$$

melynek határozatlan értéke :

$$\frac{1}{(m+1)} \log x^{m+1}$$

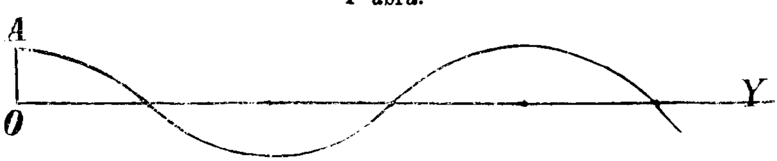
lés legyen $m=1$, leszen a határozott egészlet zérus, és így tovább.

A legnagyobb óvatossággal kell tehát a határozott egészet igazi jelentésének meghatározásánál eljárni, ha az több jelentésű, vagy ha az a valódi mennyiségből képzetest ad ; ez akkor történik, ha az egészelési jel alatt levő függvény a határok közt a végtelenségen átmegy, mely esetben a zérus az egészelési jel alatt levő függvényt végtelenné teszi. Ily jelenségek nem csak véges, hanem végetlen határok közt vett egészleteknél is elő jőnek, így például :

$$\int_{0}^{+\infty} \cos x \, dx$$

melynek értéke mint különbség tekintve többjelentésű, és -1, $+1$ határok közt leng. Mint összeg tekintve sem ad határozott értéket, mert annak tulajdonsága végtelen nagy mennyiségtől függ, és mértanilag e következőkép állítható elő :

1 ábra.



hol a tevőleges, és nemleges területrészek a cosinus vonal, és az Y tengely által képeztetnek. Szorozzuk az utolsó egészletet az egészelési jel alatt e^{-kx} tényzővel, leszen :

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-kx} \cos x dx$$

melynek határozott értéke :

$$\frac{k}{k^2+1}$$

Ha k a zérushoz közeledik, akkor az egészlet is a zérushoz közeledik, és $k=0$ értékre nézve elenyészik. Mértanilag ezen ábra által állítható elő :

2. ábra.

Látjuk, hogy a görbe vonal e^{-kx} elnyelési tényzője által lenyomatik. A tevőleges, és nemleges területrészek összege valóban zérus.

Az imént említett eljárást a (206) alatti kettős egészletre lehet alkalmazni. Minthogy az egészelés α szerint határozatlan értéket ad, tehát e^{-kx} elnyelési tényzőt kell hozzácsatolni, leszen :

$$(207)\; J_1 = \int_0^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha[-k+(x-\lambda)\sqrt{-1}]} f(\lambda)d\alpha d\lambda$$

Ha k zérushoz közeledik, akkor J mennyiség J_1 határának tekinthető.

Miután arról meggyőződtünk, hogy a Fourier-képlet csak látszó képzetes mennyiség, lehet tehát a képzetes alkatrészét egyszerűen elhagyni. Egészeljük tehát a (207) alattit α szerint, leszen :

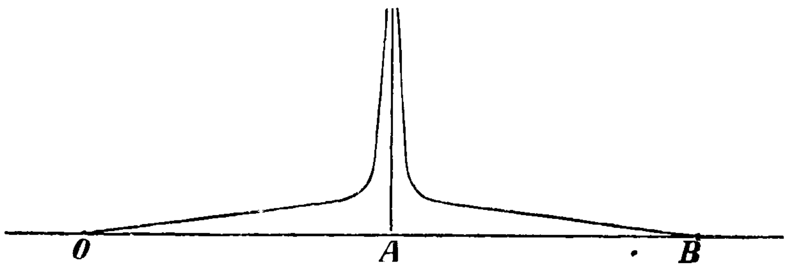
$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha[-k+(x-\lambda)\sqrt{-1}]} d\alpha = \frac{k}{k^2+(x-\lambda)^2} + \frac{(x-\lambda)\sqrt{-1}}{k^2+(x-\lambda)^2}$$

tehát a valódi alkatrész

$$(208) \qquad J_1 = k\int_{\lambda'}^{\lambda''} \frac{f(\lambda)d\lambda}{k^2+(x-\lambda)^2}$$

Első pillanatra azt gondolnók, hogy ezen egészlet elenyészik, ha k zérushoz közeledik ; de ha megfontoljuk, hogy f(x), tehát $f(\lambda)$ is folytonos függvény, legalább $x=\lambda'$, és $x=\lambda''$ határok közt, mely közt valóban folytonos ; akkor ezen egészlet e kis közért $x=\lambda$, és $x=$közel λ-hoz, nemcsak nem zérus, hanem igen nagy értéket is felvehet. A terület, melyet azután az egészlet előállítana, mértanilag szerkesztve e következő lenne :

3. ábra.



Minthogy λ értékei x értékeitől igen keveset különböznek, lehet tehát új változékony behozása által tenni:

$$\lambda = x + ku$$

tehát $$\lambda - x = ku$$

és $$d\lambda = kdu$$

A Taylor tantétele után leszen

$$f(\lambda) = f(x+ku) = f(x) + kf(x+\Theta ku)$$

hol az utolsó tag a kiegészítő tag, és $\Theta < 1$. Itt világosan látható, hogy f(x), tehát f(λ) is folytonos függvény, mert a Taylor tantétele csak ilyenekre alkalmazható. Az új határok lesznek

$$u = \frac{\lambda' - x}{k}, \text{ és } u = \frac{\lambda'' - x}{k}$$

Ezen mennyiségek a (208)-ba való helyettesítés után, ezt a következőre változtatják.

$$J_1 = f(x) \int_{-\left(\frac{x-\lambda'}{k}\right)}^{\left(\frac{x-\lambda''}{k}\right)} \frac{du}{(1+u^2)} + k \int_{-\left(\frac{x-\lambda'}{k}\right)}^{\left(\frac{x-\lambda''}{k}\right)} f'(x+\Theta ku) \frac{udu}{(1+u^2)}$$

Ha már most k zérushoz közeledik, a második tag zérus leszen, mert $f'(x+\Theta ku)$, és $\frac{udu}{(1+u^2)}$ tényzőknek véges értékeik vannak. Leszen tehát

$$J_1 = f(x)[\operatorname{artg}\infty + \operatorname{artg}\infty] = f(x).\pi = J$$

Ha a (206) alatti tekintetbe vétetik, leszen :

$$(209)\ f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} f(\lambda) d\alpha d\lambda$$

Ezen imént bebizonyított Fourier képlete azon tulajdonsággal bír, miszerint *minden folytonos függvényt, és minden más függvényt legalább azon határok közt, hol folytonos, kitevőleges mennyiséggel ellátott sor-alakban kifejezhet; ez oly alak, melynek a külzelés, és egészelés műtéteit különös könnyűséggel lehet végrehajtani.*

(12. §.)

Szükség, hogy a Fourier-képlet két, söt három változékonyra is terjesztessék ki, mert az erőműtani föladatokban oly külzeléki egyenletek is fordúlnak elő, melyekben a t változékonyon kivül még két vagy három változékony jő elő.

Vegyük tehát ezen kfejezést:

$$(210)\ f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} f(\lambda,y)\,d\alpha\,d\lambda$$

mely csak x-nek függvénye, és y egyelőre állandó. Leszen nyilván

$$(211)\ f(\lambda,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mu'}^{\mu''} e^{\beta(y-\mu)\sqrt{-1}} f(\lambda,\mu)\,d\beta\,d\mu$$

y függvénye, minthogy a határozott egészlet értéke nem a változékony nevétől függ, hanem azon határoktól, melyek közt vétetik.

Helyettesítsük már most a (211) alattit a (210) alattiba, leszen

$$(212)\ f(x,y) =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{-\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''}\int_{\mu'}^{\mu''} e^{[\alpha(x-\lambda)+\beta(y-\mu)]\sqrt{-1}} f(\lambda,\mu)\,d\alpha\,d\beta\,d\lambda\,d\mu$$

négyszeres egészlet, vagy a mi ugyanaz: x, és y közti folytonos függvény kifejezve kitevőleges mennyiség összege által, melynek kitevői mind vonalos alakuak.

(13. §.)

Hasonló módon lehet e következő egészletet:

(213) f(x,y,z) =

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{\nu'}^{\nu''} e^{[\alpha(x-\lambda)+\beta(y-\mu)+\gamma(z-\nu)]\sqrt{-1}} f(\lambda,\mu,\nu)d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu$$

bebizonyítni, mely három változékony közti függvény, és kitevőleges mennyiséggel ellátott sor által kifejezhető. Megemlítésre méltó, hogy a hatszoros egészleti jegy alatt levő függvény oly bonyolodott, hogy annak alakját nem is lehet átlátni.

A Fourier-képletek általában nem csak a részletes külzeléki egyenletek, hanem még a közönséges vonalos, vagy nem vonalos külzeléki egyenletek egészelésére is alkalmazhatók.

(14. §.)

Hogy a Fourier-képletek hasznát jobban belehessen látni, vegyünk az elemző erőműtanból néhány föladatot.

I. Egyik a legnevezetesebb föladatok közé tartozik ez:

$$(214) \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = a^2\,\frac{d^2\eta}{dx^2}$$

mely a feszült húr rezgési szabályait foglalja magában, és η az Y tengely mentében való igen csekély félretolás.

Mielőtt az egészeléshez fognánk, meg kell a feszült húr kezdő állapotát határozni, és a kényleges időre nézve, például: $t=0$, tenni:

$$(215) \qquad \left.\begin{aligned} \eta &= \varphi(x) \\ \text{és} \quad \frac{d\eta}{dx} &= \psi(x) \end{aligned}\right\}$$

azaz: a feszült húr bizonyos pontjának helyzete, és sebessége a kezdő állapotra nézve adva legyen.

Most oly megfelelő értékeket kell keresnünk, melyek nem csak az adott külzeléki egyenletnek, hanem egyszersmind a kezdő állapot föltételeinek is megfeleljenek. Tehát η e következő alakban jöne elő:

$$(216)\quad \eta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} f(\lambda,t)\,d\alpha\,d\lambda$$

Ez volna tehát egy megfelelő érték, ha az f függvény úgy határoztatik meg, hogy az mind a (214), mind pedig a (215) alattinak megfeleljen.

E végre külzeljük a (216) alattit kétszer x, és kétszer t szerint, és helyettesítsük azután ezen kifejtett értékeket a (214)-be, leszen:

$$(217)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}\left[\frac{d^2f}{dt^2}+a^2\alpha^2 f\right]=0$$

melyből a t kénylegessége végett származik:

$$(218)\qquad \frac{d^2f}{dt^2}+a^2\alpha^2 f=0$$

Tehát csak azon értékek lesznek megfelelők, melyek ezen másodrendű közönséges külzeléki egyenletnek is megfelelnek, melynek általános egészlete:

$$(219)\qquad f=G_1\, e^{\alpha a t\sqrt{-1}}+G_2 e^{-\alpha a t\sqrt{-1}}$$

Helyettesítsük már most ezen értékeket a (216)-ba, leszen

$$(220)\quad \eta=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}\left[G_1 e^{\alpha a t\sqrt{-1}}+G_2\, e^{-at\sqrt{-1}}\right]d\alpha\,d\lambda$$

mely alak nem csak az adott külzeléki egyenletnek, hanem egyszersmind a kezdő állapot föltételeinek is megfelel. A benne előforduló G_1 és G_2 tetszésszerinti állandók, melyek a, α, és λ függvényei, a kezdő állapot föltételei következtében meghatároztathatnak. És valósággal, tegyük t=0, leszen

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}(G_1+G_2)\,d\alpha\,d\lambda$$

és $$\psi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}\alpha a(G_1-G_2)\,d\alpha\,d\lambda$$

Hasonlítsuk össze ezeket a (202) alatti Fourier-képlettel, leszen nyilván

$$\varphi(\lambda)=G_1+G_2$$

és $$\psi(\lambda)=(G_1-G_2)\alpha a$$

melyekből

$$(221)\quad \left.\begin{aligned} G_1 &= \frac{\alpha a\varphi(\lambda) + \psi(\lambda)}{2\alpha a} \\ G_2 &= \frac{\alpha a\varphi(\lambda) - \psi(\lambda)}{2\alpha a} \end{aligned}\right\}$$

és

származik. Helyettesítsük végre ezen értékeket a (220)-ba, kapjuk

$$(222)\ \eta = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}\left[\frac{\varphi(\lambda)}{2}\left(e^{\alpha a t\sqrt{-1}} + e^{-\alpha a t\sqrt{-1}}\right) + \right. \\ &\left. \frac{\psi(\lambda)}{2\alpha a}\left(e^{\alpha a t\sqrt{-1}} - e^{-\alpha a t\sqrt{-1}}\right)\right] d\alpha d\lambda \end{aligned} \right\}$$

a (214) alatti részletes külzeléki egyenlet *általános egészletét*, melyből részletezés által a feszült húr rezgési különböző törvényeit lehet származtatni.

II. Második példáúl szolgáljon e következő nem egynemű részletes külzeléki egyenlet:

$$(223)\qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = a^2\frac{d^4\zeta}{dx^4}$$

mely a ruganyos toll rezgési szabályait adja, mely mind a két vagy csak egyik végén van megerősítve, és semmi forgó mozgást meg nem enged.

Ezen külzeléki egyenletet egészelni annyit tesz, mint azt fejtegetni, és abból azután a rezgési törvényeket származtatni: de miután a mozgások a jelen esetben különfélék lehetnek, szükséges, hogy valamelyik részére nyilatkozzunk, tehát feltenni, hogy t=0 időre, azaz a kezdő állapotra nézve, valamely pontnak mind helyzete, mind pedig sebessége adva legyen, tehát

$$(224)\quad \left.\begin{aligned} \zeta &= \varphi(x) \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \psi(x) \end{aligned}\right\}$$

és

és hogy a ζ félretolásnak felvett következő értéke:

$$(225)\quad \zeta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} F(\lambda, t)\, d\alpha d\lambda\ .$$

nem csak a részletes külzeléki egyenletnek, hanem egyszersmind a kezdő állapot föltételeinek is megfeleljen, ha az F függvény alakja úgy választatik, hogy e közönséges külzeléki egyenletnek:

$$\frac{d^2F}{dt^2}-\alpha^4a^2F=0$$

melynek általános egészlete

$$F=G\,e^{a\alpha t\sqrt{-1}}+H\,e^{-a\alpha t\sqrt{-1}}$$

megfeleljen. G, és H tetszésszerinti állandók, melyek a, α, és λ függvényei, a kezdő állapot által meghatároztathatnak, és e következő értéket veszik fel:

$$G=\frac{a\alpha^2\varphi(\lambda)+\psi(\lambda)}{2a\alpha^2}$$

$$H=\frac{a\alpha^2\varphi(\lambda)-\psi(\lambda)}{2a\alpha^2}$$

melynek következtében

$$(226)\ \zeta=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''}e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}\left[\frac{\varphi(\lambda)}{2}\left(e^{a\alpha^2t}+e^{-a\alpha^2t}\right)+\right.\\ \qquad\left.\frac{\psi(\lambda)}{2a\alpha^2}\left(e^{a\alpha^2t}-e^{-a\alpha^2t}\right)\right]d\alpha d\lambda\end{array}\right\}$$

az *általános egészlet*, melyből a ruganyos toll rezgési szabályai következnek.

Mint már fentebb említettük, a ruganyos tollat mind a két végén is megerősíthetjük, hol azután $\zeta=0$. Továbbá semmi forgó mozgást nem türhetünk, és még φ, és ψ függvényalakokat úgy választhatjuk, hogy ezek a fentebbi föltételeknek ellent ne mondjanak. Ez igen nehezen történhetik, és csak az által háríttathatik el, ha a ruganyos toll végtelen hosszúnak vétetik. Ha mind a két végén semmi mozgás nem létezik, hol tehát a hullámok t kényleges időben torlódnak, akkor a rezgési csomóknak mind bal, mind jobb oldalán mozgás van.

Ezen példából láthattuk, hogy a Fourier-képlet nem csak egynemű, hanem különnemű részletes külzeléki egyenletekre is alkalmazható.

III. Látni akarjuk, miként lehet a (212) alatti két x, és y változékony közt létező Fourier-képletet egy erőműtani föladatra használni. Válaszszuk e következő részletes külzeléki egyenletet:

$$(227)\quad \frac{d^2\zeta}{dt^2}=a^2\left[\frac{d^4\zeta}{dx^4}+2\frac{d^4\zeta}{dx^2dy^2}+\frac{d^4\zeta}{dy^4}\right]$$

mely a ruganyos lemez rezgési törvényeit adja, mely az (XY) lappal összeesik. A ζ igen csekély félretolás a Z tengelyhez egyenközüleg történik, és x, y, és t változékonyak függvénye.

Ezen külzeléki egyenletet úgy kell egészelni, hogy nemcsak ez, hanem egyszersmind kezdő állapota is tekintetbe vétessék. Így e következő érték:

$$\zeta = Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3+Et+F$$

megfelelő ugyan, de nem egészlet, minthogy a kezdő állapotnak egyszersmind meg nem felel, tehát rezgési mozgást nem ad.

Vegyünk egy semleges réteget, és egy kezdő állapotot t $=0$ időre nézve, leszen:

$$(228)\quad \left.\begin{aligned}\zeta&=\varphi(x,y)\\ \text{és}\quad \frac{d\zeta}{dt}&=\psi(x,y)\end{aligned}\right\}$$

tehát a félretolás, és sebesség bizonyos pontra nézve adva van; leszen a Fourier-képlet szerint:

$$(229)\quad \zeta =$$
$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''}\int_{\mu'}^{\mu''} e^{[\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}+\beta(y-\mu)]\sqrt{-1}}\, T d\alpha d\beta d\lambda d\mu$$

megfelelő érték azon esetre, ha T függvény úgy választatik, hogy az e következő közönséges külzeléki egyenletnek is megfeleljen:

$$\frac{d^2T}{dt^2}-a^2(\alpha^2+\beta^2)\,T=0$$

melynek általános egészlete:

$$T=G\,e^{a(\alpha^2+\beta^2)t}+H\,e^{-a(\alpha^2+\beta^2)t}$$

G, és H tetszésszerintiek, és λ, μ, α, β, meg a függvényei, melyek a kezdő állapot által meghatároztatnak, leszen tehát t$=0$ időre nézve:

$\zeta = \varphi(x,y) =$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''}\int_{\mu'}^{\mu''} e^{[\alpha(x-\lambda)+\beta(y-\mu)]\sqrt{-1}} (G+H)\, d\alpha d\beta d\lambda d\mu$$

és

$\frac{d\zeta}{dt} = \psi(x,y) =$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''}\int_{\mu'}^{\mu''} e^{[\alpha(x-\lambda)+\beta(y-\mu)]\sqrt{-1}} (G-H)\, a(\alpha^2+\beta^2) d\alpha d\beta d\lambda d\mu$$

mely kifejezések, ha a Fourier képlettel összehasonlíttatnak az állandókra nézve adnak:

$$G = \frac{a(\alpha^2+\beta^2)\varphi(\lambda,\mu) + \psi(\lambda,\mu)}{2a(\alpha^2+\beta^2)}$$

és $$H = \frac{a(\alpha^2+\beta^2)\varphi(\lambda,\mu) - \psi(\lambda,\mu)}{2a(\alpha^2+\beta^2)}$$

tehát

$$T = \frac{\varphi(\lambda,\mu)}{2}\left[e^{a(\alpha^2+\beta^2)t} + e^{-a(\alpha^2+\beta^2)t}\right] + \frac{\psi(\lambda,\mu)}{2a(\alpha^2+\beta^2)}\left[e^{a(\alpha^2+\beta^2)t} - e^{-a(\alpha^2+\beta^2)t}\right]$$

és az általános egészlet e következő alakot veszi fel:

(230) $\zeta =$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''}\int_{\mu'}^{\mu''} e^{[\alpha(x-\lambda)+\beta(y-\mu)]\sqrt{-1}} \left[\frac{\varphi(\lambda,\mu)}{2}\left(e^{a(\alpha^2+\beta^2)t} + e^{a(\alpha^2+\beta^2)t}\right) + \frac{\psi(\lambda,\mu)}{2a(\alpha^2+\beta^2)}\left(e^{a(\alpha^2+\beta^2)t} - e^{-a(\alpha^2+\beta^2)t}\right)\right] d\alpha d\beta d\lambda d\mu$$

melyből különlegezés által a ruganyos lemez rezgési szabályait lehet származtatni.

És különösen, ha e képlet egyszerüsítése végett a sebességet a kezdő állapotban $\psi = 0$, és továbbá

$$\varphi(\lambda,\mu) = A\, e^{-(\lambda^2+\mu^2)}$$

teszszük, leszen

$\zeta =$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''}\int_{\mu'}^{\mu''} e^{[\alpha(x-\lambda)+\beta(y-\mu)]\sqrt{-1}} . \tfrac{1}{2} A\, e^{-(\lambda^2+\mu^2)}\left[e^{a(\alpha^2+\beta^2)t} + e^{-a(\alpha^2+\beta^2t)}\right] d\alpha d\beta d\lambda d\mu$$

a Z tengely körül forgó lapban való félretolás. Ha a lemez bármikép hozatik mozgásba, hullámok származnak, melyek abban tovább terjesztetnek. A dolog természetében fekszik tehát, hogy λ', és λ'', azután μ', és μ'' helyett $-\infty$, és $+\infty$ határok vétessenek. A λ, és μ szerinti egészelést e következő képlet által hajtjuk végre:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{a^2z^2-2abz}\,dz=\frac{e^{b^2}\sqrt{\pi}}{a}$$

Leszen tehát:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2-\alpha\lambda\sqrt{-1}}\,d\lambda=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

és

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2-\beta\mu\sqrt{-1}}\,d\mu=\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\beta^2}{4}}$$

tehát $\zeta=$

$$\frac{A}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha x+\beta y)\sqrt{-1}}\left[e^{(\alpha^2+\beta^2)(-\frac{1}{4}+at)}+e^{(\alpha^2+\beta^2)(-\frac{1}{4}-at)}\right]d\alpha d\beta$$

Továbbá:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2(\frac{1}{4}-at)+\alpha x\sqrt{-1}}\,d\alpha=\frac{2\sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{1-4at}}}{\sqrt{1-4at}}$$

és

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2(\frac{1}{4}+at)+\alpha x\sqrt{-1}}\,d\alpha=\frac{2\sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{1+4at}}}{\sqrt{1+4at}}$$

azután

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2(\frac{1}{4}-at)+\beta y\sqrt{-1}}\,d\beta=\frac{2\sqrt{\pi}e^{-\frac{y^2}{1-4at}}}{\sqrt{1-4at}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2(\frac{1}{4}+at)+\beta y\sqrt{-1}}\,d\beta=\frac{2\sqrt{\pi}e^{-\frac{y^2}{1+4at}}}{\sqrt{1+4at}}$$

tehát

$$\zeta=\frac{A}{2}\,\frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{(1-4at)}}}{(1-4at)}+\frac{A}{2}\,\frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{(1+4at)}}}{(1+4at)}$$

Hogy ezen kifejezés a külzeléki egyenletnek megfelel, arról utólagosan meggyőződhetünk. A vonalos külzeléki egyenletek elméletéből tudjuk, hogy az egészlet egyes tagja is az egyenletnek megfelel, ha tehát a második tagot veszszük:

$$\frac{A}{2}\cdot\frac{e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{1+4at}\right)}}{(1+4at)}$$

látjuk, hogy $t=\infty$ értékére nézve a kitevőleges $=1$, és $\zeta=+\infty$. A föladat tehát határozatlan. De minthogy végtelen hosszú ruganyos lemezt föltételeztünk, a kitevőlegesnek az egységhezi közeledése esetében ζ értéke

$$\frac{A}{2(1+4at)}$$

értékhez közeledik. De ez szakaszos függvény nem lévén, belőle tehát a ruganyos lemez rezgési tüneményeit nem lehet származtatni.

Az egészlet első tagja $t=\frac{1}{4a}$ értékére nézve zérus, tehát épen nem használható, mert ez a külzeléki egyenletek vonalos alakjának föltételével egyenesen ellenkezik.

IV. Végre jó lesz egy x, y, és z változékony közt létező példát felvenni, és pedig ezen általános egyenletet választani:

$$(231)\qquad \frac{du}{dt}=a\left[\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right]$$

mely a hév föladatait foglalja magában, u a mérséket jelenti, és x, y, meg z változékony függvénye.

Ezen külzeléki egyenletet egészelni annyit tesz, mint u helyébe oly értéket találni, mely nem csak a külzeléki egyenletnek, hanem azonkivül még $t=0$ kezdő állapotnak is, tehát

$$(232)\qquad u=f(x,y,z)$$

megfeleljen, hol az f függvény alakja a mérséktől függ, és adva van. Itt tehát csak egyetlenegy föltétező egyenlet van. És általában megemlítendő, hogy a kezdő állapotra nézve ugyanannyi föltétező egyenletek léteznek, a hány t szerinti külzelések az adott részletes külzeléki egyenletben előfordúlnak. Vannak azonkivül még oly föltételek is, melyek bizonyos pontra vonatkoznak. Ha a test példáúl egyenközénylap volna, és az forró vízbe tétetnék, és ha lenne $x=a$, $u=90^0$ R.; vagy ha a hőséget sugárzó testnél u a lég és a test közti mérsék különbségét állítja elő, akkor minden szabad lapra nézve e külzeléki egyenlet áll:

$$\frac{du}{dx}-hu=0$$

Alkalmazzuk már most ezen esetre a (213) alatti Fourier-képletet, leszen:

$$(233)\ u=$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{\nu'}^{\nu''}e^{[\alpha(x-\gamma)+\beta(y-\mu)+\lambda(z-\nu)]\sqrt{-1}}F.d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu.$$

megfelelő érték, ha F függvény alakja úgy választatik, mint az e külzeléki egyenletből:

$$\frac{dF}{dt}+a(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)F=0$$

melynek általános egészlete

$$F=G\,e^{-a(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t}$$

származik. A tetszésszerinti állandó meghatározására a (232) alatti függvény szolgál, és ad

$$G=f(\lambda,\mu,\nu)$$

tehát

$$(234)\ u=$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda'}^{\lambda''}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{\nu'}^{\nu''}e^{[\alpha(x-\lambda)+\beta(x-\mu)+\gamma(z-\nu)]\sqrt{-1}}f(\lambda,\mu,\nu)d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu$$

az *általános egészlet.*

Az eddig kifejtett képletek végtelen hosszú testet föltételeznek, melyek a természetben nem léteznek, mely körülmény kényszerít bennünket egy más egészelési módszer felvételére, mely által nem csak a ruganyos, hanem még a nem-ruganyos testek rezgési szabályait is fel lehet találni.

(15. §.)

A részletes külzeléki egyenleteknek az összegezés általi egészelése.

A dolog természetében fekszik azon eljárás, miszerint minden egészelési módszert a legegyszerübb esetnél kezdjük el, és csak később emelkedünk fel a nehezebb esetekre.

Vegyük tehát e részletes külzeléki egyenletet:

$$(235)\qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2}=a^2\frac{d^2\zeta}{dx^2}$$

melyet a Fourier-képlet segítségével már egészeltünk, és mely a feszült húr rezgési szabályait adja. Minekelőtte az egészeléshez fognánk, két föltételt bocsátunk előre, melyek az időtől részint függetlenek, részint függők: az azért szükséges, mert

1) a talált általános egészlet különféle föladatokat foglalhat magában, és

2) a kifejezés átlátszhatlansága czélhoz nem vezetne, és végre

3) az egészlet nem a czél, hanem csak eszköz a czél elérésére, melyből a természettörvények származtatnak.

Képzeljük magunknak a feszült húr hosszát $AB=l$, mely mindkét végén meg van erősítve, és az X tengelylyel összeesik. Továbbá legyen A az öszrendezők kezdő pontja, leszen

I. $\qquad x=0$, és $x=l$

értékére nézve a ζ félretolás a Z tengely mentében kényleges időre zérus.

II. A kezdő állapot kényleges rendelkezésre áll, vegyük $t=0$ meghatározott időre nézve a félretolást:

$$(236)\qquad \zeta=\varphi(x)$$

és a kezdő sebességet:

$$(237)\qquad \frac{d\zeta}{dt}=\psi(x)$$

Ezek után azon kérdés forog fen, vajjon a fennevezett föltételek mellett a külzeléki egyenletnek szakaszos függvény megfelel-e, vagy nem?

Mi tehát teszszük:

$$(238)\qquad \zeta=X_{\cos}^{\sin}(\alpha t)$$

melyben X, x függvénye, és ζ, t szerint szakaszos függvény.

Kutassuk most, vajjon ezen függvény mind a külzeléki egyenletnek, mind pedig a két fennevezett föltételnek megfelel-e, vagy nem?

E végre külzeljük az utolsó függvényt kétszer egymásután t, és x szerint, és helyettesitsük az így nyert értékeket a (235) alatti külzeléki egyenletbe, nyerjük e másod rendü közönséges külzeléki egyenletet:

$$(239) \qquad a^2\frac{d^2X}{dx^2}+\alpha^2X=0$$

mely azt mondja, hogy a (238) alatti ζ-ra nézve mindenesetre megfelelő érték leszen, ha X függvény úgy választatik, hogy az a (239) alattinak is megfeleljen, melynek általános egészlete

$$X=G\,e^{+\frac{\alpha}{a}x\sqrt{-1}}+H\,e^{-\frac{\alpha}{a}x\sqrt{-1}}$$

vagy

$$(240)\ X=L\cos\frac{\alpha x}{a}+M\sin\frac{\alpha x}{a}$$

ha rövidség okáért tétetik:

$$(241) \qquad \left.\begin{aligned} L&=G+H \\ M&=(G-H)\sqrt{-1} \end{aligned}\right\}$$

és

De minthogy nemcsak a sinus, hanem a cosinus is megfelelő érték, lehet tehát a (238) alatti függvényt így is írni:

$$(242)\ \xi=\left(L\cos\frac{\alpha x}{a}+M\sin\frac{\alpha x}{a}\right)(A\cos\alpha t+B\sin\alpha t)$$

a benne előforduló L, M, A, B, és α mennyiségek határozatlan állandók, melyek a fennevezett föltételek által meghatároztathatnak.

Tegyük x=0, leszen nyilván L=0; mert a második szorzó t kényleges időre nézve zérus nem lehet: azután x=l, leszen

$$\sin\frac{\alpha l}{a}=0$$

az M állandó nem lehet zérus, mert azáltal ζ is az lenne. Az utolsó egyenletből pedig α-ra nézve e következő értéket nyerjük:

$$\alpha=0,\pm\frac{\pi a}{l},\pm\frac{2\pi a}{l},\pm\frac{3\pi a}{l},\ldots\pm\frac{r\pi a}{l}\ldots.$$

hol r tevőleges egész számot állít elő. Helyettesitsük ezen értékeket a (242)-be, leszen :

$$
(243)\quad \zeta = \left.\begin{array}{l}
M_1 \sin\frac{\pi x}{l}\left(A_1\cos\frac{\pi a t}{l}+B_1\sin\frac{\pi a t}{l}\right)\\
+M_2\sin\frac{2\pi x}{l}\left(A_2\sin\frac{2\pi a t}{l}+B_2\sin\frac{2\pi a t}{l}\right)\\
+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\
+M_r\sin\frac{r\pi x}{l}\left(A_r\cos\frac{r\pi a t}{l}+B_r\sin\frac{r\pi a t}{l}\right)\\
+\ \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}
$$

az *általános egészlet.*

Megemlítendő, hogy ezen kifejezés mind a tevőleges, mind a nemleges tagok öszletét magában foglalja, melyről igen könnyen meggyőződhetünk; továbbá a tagok nem csak összesen, hanem egyenként is a külzeléki egyenletnek megfelelnek.

Az tagadhatlan, hogy e kifejezés:

$$\zeta = f_1(x+at)+f_2(x-at)$$

mely hasonlóképen a feszült húr rezgési szabályait adja, sokkal csinosabb mint a fenálló; de az emennél alkalmasabb.

Nem lesz érdektelen a (243) alatti kifejezést tagról tagra megvitatni.

Az első tag

$$\zeta = A_1 M_1 \sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi a t}{l}$$

bizonyos rezgési módot képvisel, és minden x-re nézve ugyanazon értéket veszi fel valahányszor

$$\frac{\pi a t}{l} \qquad 2\pi\text{—vel}$$

tehát $\quad t \quad \frac{2l}{a} = \tau$-val

nő, τ *rezgidőnek* neveztetik, melynek bizonyos hang az úgynevezett *alaphang* felel meg.

A második tag

$$\zeta = B_1 M_1 \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi a t}{l}$$

ugyanazon eredményt adja.

Továbbá

$$\zeta = A_2 M_2 \sin\frac{2\pi x}{l}\cos\frac{2\pi a t}{l}$$

is rezgési állapotot állít elő, mely minden x-re nézve ugyanazon értéket veszi fel, valahányszor

$$\frac{2\pi at}{l} \qquad 2\pi\text{-vel}$$

tehát

$$t \qquad \frac{l}{a}=\tau\text{-val nő.}$$

A rezgidő az előbbihez képest csak félannyi, tehát a megfelelő hang az úgynevezett *nyolczadréte* az alaphangnak. A negyedik tag ugyanazon rezgidőt, és hangot adja.

Minthogy az eddig megfejtett részletes értékek összesen véve is a külzeléki egyenletnek megfelelnek, a két különféle rezgidők is kölcsönös háborgatás nélkül együtt megmaradhatnak, tehát az alaphang, és a nyolczadrét együtt is hangozhatnak, és így tovább. Végre

$$\zeta=A_r\, M_r \sin\frac{r\pi x}{l}\cos\frac{r\pi at}{l}$$

általánosan bizonyos rezgési állapotot képvisel, mely a kényleges x-re nézve ugyanazon értéket veszi fel, valahányszor

$$\frac{r\pi at}{l} \qquad 2\pi\text{-vel}$$

tehát

$$t \qquad \frac{\frac{2}{r}}{a}\, l = \tau\text{-val}$$

nő. Ha most r folytonosan nő, akkor minden következő tagja a (243)-iki egyenletnek kisebb-kisebb rezgidőt, tehát mindig magasabb-magasabb hangot is ad, melyek úgy állanak egymáshoz, mint 1,2 ... r ... Általában mondhatjuk, hogy ζ zérus t kényleges időre nézve, ha

$$\sin\frac{r\pi x}{l}=0$$

melynek gyökei : $x=\frac{l}{r}, \frac{2l}{r}, \frac{3l}{r} \ldots\ldots \frac{rl}{r} \ldots\ldots$ Ebből látható, hogy a feszült húrnak a két végpontjain kivül egygyel kevesebb nyugvó pontja van mint az osztási részek száma. Ezen nyugvópontok *rezgcsomóknak* neveztetnek. A feszült húr tehát csak akkor hangzik, ha azt mérhető néhány részében penditjük meg; mert ha ez úgy nem volna, akkor a feszült húr minden pontja rezgcsomó lenne, tehát semmi rezgés nem volna, mely az előbbiek előrebocsátásával egyenesen ellenkezném.

A (243)-ban előforduló tetszésszerinti állandók meghatározására szolgáljon a második föltétel, t. i. a kezdő állapot, ugyanis lesz a (236) és (237) szerint

$$(244)\quad \varphi(x) = A_1 M_1 \sin\frac{\pi x}{l} + A_2 M_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots + A_r M_r \sin\frac{r\pi x}{l} + \ldots$$

és

$$(245)\quad \psi(x) = \frac{\pi a}{l}\left(B_1 M_1 \sin\frac{\pi x}{l} + 2B_2 M_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots + rB_r M_r \sin\frac{r\pi x}{l} + \ldots\right)$$

Az állandók elszigetelésére szolgáljon e fogás; szorozzuk t. i. e két egyenletet rendre :

$$\sin\frac{\pi x}{l}\,dx, \sin\frac{2\pi x}{l}\,dx, \ldots \sin\frac{r\pi x}{l}\,dx, \ldots$$

és vegyük azután minden tagot 0 és l határok közé, kapunk csak kétféle tagokat, t. i.

$$\int^{l}\left(\sin\frac{r\pi x}{l}\right)^2 dx, \text{ és } \int_0^l \sin\frac{r\pi x}{l}\sin\frac{s\pi x}{l}\,dx$$

Az első határozott egészlet nem lehet zérus, mert a sinus az egészlet-jegy alatt a második hatványban áll, tehát mindig tevőleges eredményt ad; ellenben a második határozott egészlet értéke zérus, mert a sinusok szorzata cosinusok különbségére átváltoztatható, ezek egészelve sinust adnak, melyek mind 0, mind pedig l értékére nézve elenyésznek. Leszen tehát :

$$(246)\quad \left.\begin{aligned} A_1 M_1 &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi x}{l}\,dx \\ A_2 M_2 &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{2\pi x}{l}\,dx \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_r M_r &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{r\pi x}{l}\,dx \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}$$

$$
(247)\quad \left.\begin{aligned}
B_1 M_1 &= \frac{2}{\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi x}{l}\,dx\\
B_2 M_2 &= \frac{2}{\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{2\pi x}{l}\,dx\\
&\dots\dots\dots\dots\\
B_r M_r &= \frac{2}{\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{r\pi x}{l}\,dx
\end{aligned}\right\}
$$

. . . .

Tehát a (243) alatti egészlet így is írható :

$$
(248)\quad \zeta=\frac{2}{l}\mathop{S}_0^{+\infty}\left[\int_0^l \varphi(\lambda)\sin\frac{r\pi\lambda}{l}\,d\lambda\right]\cos\frac{r\pi at}{l}\sin\frac{r\pi x}{l}+
$$

$$
\frac{2}{\pi a}\mathop{S}_0^{+\infty}\left[\int_0^l \psi(\lambda)\sin\frac{r\pi\lambda}{l}\,d\lambda\right]\frac{1}{r}\sin\frac{r\pi at}{l}\sin\frac{r\pi x}{l}
$$

x helyett λ-t írtunk, ez a dolgon mit sem változtat, mert a határozott egészlet értéke nem függ a változékony nevétől.

Ha a kezdő sebesség zérus, tehát $\psi(x)=0$, és $l=+\infty$ leszen $\frac{2}{l}$ igen csekély tört, tehát $\frac{\pi}{l}$ igen csekély szorzó, melyet így írhatunk:

$$
\frac{\pi}{l}=d\alpha,\ \text{tehát}\ \frac{2}{l}=\frac{2d\alpha}{\pi}
$$

Minthogy a sinusok, és cosinusok alatt igen csekély ív elemek jönek elő, a (248)-ból következik tehát :

$$
\zeta=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sin(\alpha\lambda)\sin(\alpha x).\cos(\alpha at).\varphi(\lambda)d\alpha d\lambda
$$

melyből származik :

$$
\zeta=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\Big[\cos\alpha(x-\lambda)-\cos\alpha(x-\lambda)\Big]\cos(\alpha at)\varphi(\lambda)d\alpha d\lambda
$$

és ha az egészelés 0, és $-\infty$ közt is vétetik, azon esetben egyik e kettős egészletből elesik, és azután a Fourier-képletét kapjuk.

(16. §.)

Második példa gyanánt szolgáljon :

$$(249) \qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -b^2 \zeta^{(4)}$$

mely a ruganyos toll rezgési szabályait adja. Ezen külzeléki egyenlet egészelési folytában három fő munkát kell végbe vinnünk. Az első közülök azon kérdés megfejtése, vajjon ennek szakaszos függvény felel-e meg, vagy nem? A második az egészelési módszerben előforduló közönséges külzeléki egyenlet egészelése, és egy túllépő egyenlet feloldása. A harmadik munka az előforduló tetszésszerinti állandóknak bizonyos föltételek segítségéveli meghatározása.

Tegyük tehát

$$(250) \qquad \zeta = Z_{\cos}^{\sin}(\alpha t) = Z[A\cos\alpha t + A\sin\alpha t]$$

melyben Z csak x függvénye. Leszen a külzelés, és helyettesítés után:

$$(251) \qquad b^2 Z^{(4)} - \alpha^2 Z = 0$$

melynek általános egészlete, ha

$$\Theta^4 - \frac{\alpha^2}{b^2} = 0, \text{ tehát } \Theta = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{b}} = \pm\lambda,$$

$$\text{és } \pm \sqrt{\frac{\alpha}{b}} \sqrt{-1} = \pm\lambda\sqrt{-1},$$

a következő :

$$(252) \qquad Z = G_1 e^{\lambda x} + G_2 e^{-\lambda x} + G_3 \cos\lambda x + G_4 \sin\lambda x$$

Z mennyiség λ függvénye, ez pedig α-é, tehát Z, α függvénye is. G_1, G_2, G_3, és G_4 tényzőkben α is fordúlhat elő, tehát :

$$(253) \qquad \zeta = \underset{\alpha}{S} \left\{ Z[A\cos\alpha t + A\sin\alpha t] \right\}$$

Tehát a (250) alatti függvény a (249) alatti egyenletnek megfelel, ha Z a (252)-ből úgy választatik, hogy az a (251) alatti egyenletnek megfeleljen. Tehát létezik egy szakaszos függvény, mely az adott külzeléki egyenletnek megfelel, csak Z mennyiséget ügyesen kell választani, azaz : a tetszésszerinti állandókat úgy kell választani, hogy ezek mind a részletes külzeléki egyenletnek, mind pedig a mellékes föltételeknek megfeleljenek. Az utóbbiak kétfélék, t. i. olyanok, melyek az időtől függnek, és olyanok, melyek attól nem függnek. E végre legyen egy l hosszuságú ruganyos toll, mely vagy mindkét végén, vagy csak az egyikén meg van erősítve, míg a másik szabadon van. Az első esetben leszen

$$\text{(254)}\quad \text{x}=0 \text{ értékre nézve } \left.\begin{array}{l}\zeta=0\\ \frac{d\zeta}{dx}=0\end{array}\right\}, \text{ és x}=\text{l értékre nézve } \left.\begin{array}{l}\zeta=0\\ \frac{d\zeta}{dx}=0\end{array}\right\}$$

az utóbbi egyenlet azt mondja, hogy az érintő fekmentes, azaz : az X tengelylyel összeesik. A második esetben leszen

$$\text{(255)}\quad \text{x}=0 \text{ értékre nézve } \left.\begin{array}{l}\zeta=0\\ \frac{d\zeta}{dx}=0\end{array}\right\}, \text{ és x}=\text{l ért. nézv. } \left.\begin{array}{l}\frac{d^2\zeta}{dx^2}=0\\ \frac{d^3\zeta}{dx^3}=0\end{array}\right\}$$

a ruganyos toll szabad végén a görbületi sugár∞, és a rezgés ugyanott úgy történik, mintha ott fordulati pont volna.

Ha először az első esetet veszszük tekintetbe, kapunk két föltételt az egyik, és kettőt a másik végére nézve, ezek

$$\text{(256)}\left\{\begin{array}{l}\text{x}=0 \text{ értékre nézve } \left.\begin{array}{l}0=G_1+G_2+G_3\\ \text{és}\quad 0=G_1-G_2+G_4\end{array}\right\}\\ \text{továbbá x}=\text{l}\\ \text{értékre nézve } \left.\begin{array}{l}0=G_1\,e^{+\lambda l}G_2\,e^{-\lambda l}+G_3\cos\lambda l+G_4\sin\lambda l\\ \text{és}\quad 0=G_1e^{\pm\lambda l}G_2\,e^{-\lambda l}-G_3\sin\lambda l+G_4\cos\lambda l\end{array}\right\}\end{array}\right.$$

állandók vonalosak, és λ, tehát α függvényei is. Ezen egyenletek λ-ra, tehát α-ra nézve is túllépők. Ha valamennyi állandó elenyészném, akkor Z, tehát ζ is elenyészném; ez ugyan megfelelő érték volna, de nem egészlet. A (256)-ból G_1, G_2, G_3, és G_4 mennyiségeket kétféleképen t. i. a kiküszöbölés, és egy általános módszer által lehet meghatározni. A közönséges kiküszöbölés ad :

$$\text{(257)}\quad \left.\begin{array}{l}G_3=-G_1-G_2\\ \text{és}\quad G_4=-G_1+G_2\end{array}\right\}$$

tehát :

$$\left.\begin{aligned} 0 &= G_1\left(e^{+\lambda l}-\cos\lambda l-\sin\lambda t\right)+ \\ \text{és}\qquad & G_2\left(e^{-\lambda l}-\cos\lambda l+\sin\lambda l\right) \\ (258)\ 0 &= G_1\left(e^{+\lambda l}+\sin\lambda l-\cos\lambda l\right)+ \\ \text{ezekből}\qquad & G_2\left(-e^{-\lambda l}+\cos\lambda l+\sin\lambda l\right)\end{aligned}\right\}$$

$$(259)\ 2=\left(e^{\lambda l}+e^{-\lambda l}\right)\cos\lambda l$$

kiküszöbölési egyenlet származik, mely λ, tehát α függvénye is. Ezen túllépő egyenlet feloldása végtelen sok gyököt ad:

$$\alpha=\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \dots\ \alpha_\infty\dots$$

melyek mindnyájan az egyenletnek megfelelnek. Tehát α-nak nem minden értéke felel meg az egyenletnek, hanem csak olyan, mely a (259) alatti föloldásából származik. Ezek után a (257), és (258)-ból következik:

$$\frac{G_2}{G_1}=\frac{-e^{\lambda l}+\cos\lambda l+\sin\lambda l}{e^{-\lambda l}-\cos\lambda l+\sin\lambda l}$$

$$\frac{G_3}{G_1}=\frac{e^{\lambda l}-e^{-\lambda l}-2\sin\lambda l}{e^{-\lambda l}-\cos\lambda l+\sin\lambda l}$$

$$\frac{G_4}{G_1}=\frac{-(e^{\lambda l}+e^{-\lambda l})+2\cos\lambda l}{e^{-\lambda l}-\cos\lambda l+\sin\lambda l}$$

Minthogy G_1 eddig még tetszésszerinti, tegyük tehát

$$\left.\begin{aligned} & G_1=e^{-\lambda l}-\cos\lambda l+\sin\lambda l \\ \text{leszen:}\quad & G_2=-e^{\lambda l}+\cos\lambda l+\sin\lambda l \\ (260)\quad & G_3=e^{\lambda l}-e^{-\lambda l}-2\sin\lambda l \\ & G_4=-\left(e^{\lambda l}-e^{-\lambda l}\right)+2\cos\lambda l\end{aligned}\right\}$$

A második és általános föloldás következtében írjuk a (256) alatti egyenleteket e következőkép:

$$\left.\begin{aligned} 1.G_1+1.G_2+1.G_3+0.G_4&=0 \\ 1.G_1-1.G_2+0.G_3+1.G_4&=0 \\ e^{\lambda l}G_1+e^{-\lambda l}G_1+\cos\lambda l G_3+\sin\lambda l G_4&=0 \\ e^{\lambda l}G_1-e^{-\lambda l}G_2'-\sin\lambda l G_3+\cos\lambda l G_4&=0\end{aligned}\right\}$$

A közös nevezőt a 7. §-ban előforduló módszer szerint képezve, leszen:

$$
\begin{aligned}
N = &+ [1,1][2,2][3,3][4,4] - [1,1][2,2][4,3][3,4] - \\
&- [1,1][3,2][2,3][4,4] + [1,1][3,2][4,3][2,4] + \\
&+ [1,1][4,2][2,3][3,4] - [1,1][4,2][3,3][2,4] - \\
&- [2,1][1,2][3,3][4,4] + [2,1][1,2][4,3][3,4] + \\
&+ [2,1][3,2][1,3][4,4] - [2,1][3,2][4,3][1,4] - \\
&- [2,1][4,2][1,3][3,4] + [2,1][4,2][3,3][1,4] + \\
&+ [3,1][1,2][2,3][4,4] - [3,1][1,2][4,3][2,4] - \\
&- [3,1][2,2][1,3][4,4] + [3,1][2,2][4,3][1,4] + \\
&+ [3,1][4,2][1,3][2,4] - [3,1][4,2][2,3][1,4] - \\
&- [4,1][1,2][2,3][3,4] + [4,1][1,2][3,3][2,4] + \\
&+ [4,1][2,2][1,3][3,4] - [4,1][2,2][3,3][1,4] - \\
&- [4,1][3,2][1,3][2,4] + [4,1][3,2][2,3][1,4]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= &+ (+1)(-1)(\cos\lambda l)(\cos\lambda l) - (+1)(+1)(\sin\lambda l)(-\sin\lambda l) - \\
&- (+1)(-e^{-\lambda l})(0)(-\cos\lambda l) + (+1)(e^{-\lambda l})(-\sin\lambda l)(+1) \\
&+ (+1)(-e^{-\lambda l})(0)(\sin\lambda l) - (+1)(e^{-\lambda l})(-\cos\lambda l)(-1) - \\
&- (+1)(-1)(-\cos\lambda l)(-\cos\lambda l) + (+1)(+1)(-\sin\lambda l)(\sin\lambda l) \\
&+ (+1)(e^{-\lambda l})(+1)(\cos\lambda l) - (+1)(-e^{-\lambda l})(\sin\lambda l)(0) - \\
&- (+1)(e^{-\lambda l})(-1)(-\sin\lambda l) + (+1)(-e^{\lambda l})(\cos\lambda l)(0) \\
&+ (e^{\lambda l})(+1)(0)(\cos\lambda l) - (e^{\lambda l})(-1)(\sin\lambda l)(-1) - \\
&- (e^{\lambda l})(+1)(-1)(-\cos\lambda l) + (e^{\lambda l})(-1)(-\sin\lambda l)(0) \\
&+ (e^{\lambda l})(-e^{-\lambda l})(+1)(+1) - (e^{\lambda l})(e^{-\lambda l})(0)(0) - \\
&- (e^{\lambda l})(-1)(0)(-\sin\lambda l) + (e^{\lambda l})(+1)(\cos\lambda l)(+1) \\
&+ (e^{\lambda l})(-1)(+1)(\sin\lambda l) - (e^{\lambda l})(+1)(-\cos\lambda l)(0) - \\
&- (e^{\lambda l})(-e^{-\lambda l})(-1)(-1) + (e^{\lambda l})(e^{-\lambda l})(0)(0) \\
= &- 2 + (e^{\lambda l} + e^{-\lambda l}) \cos\lambda l
\end{aligned}
$$

tehát $$2 = (e^{\lambda l} + e^{-\lambda l}) \cos\lambda l$$

mint fentebb.

Egészeljük már most a (249) alatti egyenletet, ha a második esetet, azaz: a (255) alatti föltételeket előre bocsátjuk. E végre legyen a (251) alatti közönséges külzeléki egyenlet általános egészlete:

$$(261)\ Z = B_1 e^{\lambda x} + B_2 e^{-\lambda x} + B_3 \cos\lambda x + B_4 \sin\lambda x$$

leszen

$$\left.\begin{aligned}\frac{dZ}{dx} &= \lambda B_1 e^{\lambda x} - \lambda B_2 e^{-\lambda x} - \lambda B_3 \sin\lambda x + \lambda B_4 \cos\lambda x \\ \frac{d^2Z}{dx^2} &= \lambda^2 B_1 e^{\lambda x} + \lambda^2 B_2 e^{-\lambda x} - \lambda^2 B_3 \cos\lambda x - \lambda^2 B_4 \sin\lambda x \\ \frac{d^3Z}{dx^3} &= \lambda^3 B_1 e^{\lambda x} - \lambda^3 B_2 e^{-\lambda x} + \lambda^3 B_3 \sin\lambda x - \lambda^3 B_4 \cos\lambda x\end{aligned}\right\}$$

tehát x=0 értékre nézve, leszen:

$$0 = B_1 + B_2 + B_4$$

és

$$0 = B_1 - B_2 + B_4$$

továbbá x=l értékre nézve, leszen:

$$\left.\begin{aligned}0 &= B_1 e^{\lambda l} + B_2 e^{-\lambda l} - B_3 \cos\lambda l - B_4 \sin\lambda l \\ 0 &= B_1 e^{\lambda l} - B_2 e^{-\lambda l} + B_3 \sin\lambda l - B_4 \cos\lambda l\end{aligned}\right\}$$

és

ezekből következik:

$$B_3 = -B_1 - B_2$$

$$B_4 = -B_1 + B_2$$

tehát

$$0 = B_1 (e^{\lambda l} + \cos\lambda l + \sin\lambda l) + B_2 (e^{-\lambda l} + \cos\lambda l - \sin\lambda l)$$

$$0 = B_1 (e^{\lambda l} + \cos\lambda l - \sin\lambda l) + B_2 (-e^{\lambda l} - \cos\lambda l - \sin\lambda l)$$

végre

$$(262)\ 2 + (e^{\lambda l} + e^{-\lambda l}) \cos\lambda l \ 0 = 0$$

kiküszöbölési egyenlet.

Ezen túllépő egyenlet föloldására nincsen egyenes módszerünk. Ha például $+\lambda$ az egyenlet gyöke lenne, akkor $-\lambda$ is az lenne, söt ezek is $+\lambda\sqrt{-1}$, meg $-\lambda\sqrt{-1}$ gyökök volnának. Ebből látható, hogy ha ezen egyenlet valamennyi gyökei ismeretesek volnának, lehetne azután azokat négyesével csoportozatban elkülöníteni. Minthogy

$$\frac{\alpha}{b} = \lambda^2,$$

leszen : $\alpha_1 = +b\lambda^2$, $\alpha_2 = +b\lambda^2$, $\alpha_3 = -b\lambda^2$, és $\alpha_4 = -b\lambda^2$,

tehát $Z = Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$.

Tegyük :

leszen :

$$(263)\quad \left.\begin{aligned} B_1 &= e^{-\lambda l} + \cos\lambda l + \sin\lambda l \\ B_2 &= e^{\lambda l}\cos\lambda l - \sin\lambda l \\ B_3 &= -e^{\lambda l} - e^{-\lambda l} - 2\cos\lambda l \\ B_4 &= e^{\lambda l} - e^{-\lambda l} - 2\sin\lambda l \end{aligned}\right\}$$

Minthogy a túllépö egyenletből λ-ra nézve végtelen sok értékek következnek, Z, és B mennyiségekre nézve is végtelen sok csoportozatok származnak. Mi csak az első csoportozatot szeretnők kifejteni, és teszszük:

$$(264)\quad \begin{aligned} \lambda &= +\lambda_1 \\ \lambda &= -\lambda_1 \\ \lambda &= +\lambda_1\sqrt{-1} \\ \lambda &= -\lambda_1\sqrt{-1} \end{aligned} \quad \text{értékre nézve :} \quad \begin{aligned} Z_1 &= \underset{1}{B_1} e^{+\lambda_1 x} + \underset{1}{B_2} e^{-\lambda_1 x} + \underset{1}{B_3}\cos\lambda_1 x + \underset{1}{B_4}\sin\lambda_1 x \\ Z_2 &= \underset{2}{B_1} e^{-\lambda_1 x} + \underset{2}{B_2} e^{+\lambda_1 x} + \underset{2}{B_3}\cos\lambda_1 x - \underset{2}{B_4}\sin\lambda_1 x \\ Z_3 &= \underset{3}{B_1} e^{+\lambda_1 x\sqrt{-1}} + \underset{3}{B_2} e^{-\lambda_1 x\sqrt{-1}} + \\ &\quad \underset{3}{B_3}\cos\lambda_1 x\sqrt{-1} + \underset{3}{B_4}\sin\lambda_1 x\sqrt{-1} \\ Z_4 &= \underset{4}{B_1} e^{-\lambda_1 x\sqrt{-1}} + \underset{4}{B_2} e^{+\lambda_1 x\sqrt{-1}} + \\ &\quad \underset{4}{B_3}\cos\lambda_1 x\sqrt{-1} - \underset{4}{B_4}\sin\lambda_1 x\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Leszen tehát :

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= Z_1[A_1\cos b\lambda^2_1 t + \mathbf{A}_1\sin b\lambda^2_1 t] + Z_2[A_2\cos b\lambda^2_1 t + \mathbf{A}_2\sin b\lambda^2_1 t] \\ &+ Z_3[A_3\cos b\lambda^2_1 t - \mathbf{A}_3\sin b\lambda^2_1 t] + Z_4[A_4\cos b\lambda^2_1 t - \mathbf{A}_4\sin b\lambda^2_1 t] \end{aligned}\right\}$$

vagy :

$$(265)\quad \begin{aligned} \zeta = {} & [\underset{1}{B_1} e^{+\lambda_1 x} + \underset{1}{B_2} e^{-\lambda_1 x} + \underset{1}{B_3}\cos\lambda_1 x + \underset{1}{B_4}\sin\lambda_1 x][A_1\cos b\lambda^2_1 t + \mathbf{A}_1\sin b\lambda^2_1 t] + \\ & + [\underset{2}{B_1} e^{-\lambda_1 x} + \underset{2}{B_2} e^{+\lambda_1 x} + \underset{2}{B_3}\cos\lambda_1 x - \underset{2}{B_4}\sin\lambda_1 x][A_2\cos b\lambda^2_1 t + \mathbf{A}_2\sin b\lambda^2_1 t] + \\ & + [\tfrac{1}{2}(\underset{3}{B_3} + \underset{3}{B_4}\sqrt{-1})e^{\lambda_1 x} + \tfrac{1}{2}(\underset{3}{B_3} - \underset{3}{B_4}\sqrt{-1})e^{-\lambda_1 x} + \\ & \quad (\underset{3}{B_1} + \underset{3}{B_2})\mathrm{cs}\lambda_1 x + \sqrt{-1}(\underset{3}{B_1} - \underset{3}{B_2})\sin\lambda_1 x]\,[A_3\cos b\lambda^2_1 t - \mathbf{A}_3\sin b\lambda^2_1 t] + \\ & + [\tfrac{1}{2}(\underset{4}{B_3} - \underset{4}{B_4}\sqrt{-1})e^{\lambda_1 x} + \tfrac{1}{2}(\underset{4}{B_3} + \underset{4}{B_4}\sqrt{-1})e^{-\lambda_1 x} + \\ & \quad (\underset{4}{B_1} + \underset{4}{B_2})\cos\lambda_1 x - \sqrt{-1}(\underset{4}{B_1} - \underset{4}{B_2})\sin\lambda_1 x]\,[A_4\cos b\lambda^2_1 t - \mathbf{A}_4\sin b\lambda^2_1 t] \end{aligned}$$

Tegyük rövidség okáért :

(266)

$$\left.\begin{array}{l}
A'=A_1 B_{\substack{1\\1}}+A_2 B_{\substack{2\\2}}+\tfrac{1}{2}A_3(B_{\substack{3\\3}}+B_{\substack{4\\3}})+\tfrac{1}{2}A_4(B_{\substack{3\\4}}-B_{\substack{4\\4}}\sqrt{-1})\\
B'=A_1 B_{\substack{2\\1}}+A_2 B_{\substack{1\\2}}+\tfrac{1}{2}A_3(B_{\substack{3\\3}}-B_{\substack{4\\3}}\sqrt{-1})+\tfrac{1}{2}A_4(B_{\substack{3\\4}}-B_{\substack{4\\4}}\sqrt{-1})\\
C'=A_1 B_{\substack{3\\1}}+A_2 B_{\substack{3\\2}}+A_3(B_{\substack{1\\4}}+B_{\substack{2\\3}}+A_4(B_{\substack{1\\4}}+B_{\substack{2\\4}})\\
D'=A_1 B_{\substack{4\\1}}-A_2 B_{\substack{4\\2}}+A_3\sqrt{-1}(B_{\substack{1\\3}}-B_{\substack{2\\3}})-A_4\sqrt{-1}(B_{\substack{1\\4}}-B_{\substack{2\\4}})\\
E'=\mathbf{A}_1 B_{\substack{1\\1}}+\mathbf{A}_2 B_{\substack{2\\2}}-\tfrac{1}{2}\mathbf{A}_3(B_{\substack{3\\3}}+B_{\substack{4\\3}})-\tfrac{1}{2}\mathbf{A}_4(B_{\substack{3\\4}}-B_{\substack{4\\4}}\sqrt{-1})\\
F'=\mathbf{A}_1 B_{\substack{2\\1}}+\mathbf{A}_2 B_{\substack{1\\2}}-\tfrac{1}{2}\mathbf{A}_3(B_{\substack{3\\3}}-B_{\substack{4\\3}}\sqrt{-1})-\tfrac{1}{2}\mathbf{A}_4(B_{\substack{3\\4}}-B_{\substack{4\\4}}\sqrt{-1})\\
G'=\mathbf{A}_1 B_{\substack{3\\1}}+\mathbf{A}_2 B_{\substack{3\\2}}-\mathbf{A}_3(B_{\substack{1\\4}}+B_{\substack{2\\3}})+\mathbf{A}_4(B_{\substack{1\\4}}+B_{\substack{2\\4}})\\
H'=\mathbf{A}_1 B_{\substack{4\\1}}-\mathbf{A}_2 B_{\substack{4\\2}}-\mathbf{A}_3\sqrt{-1}(B_{\substack{1\\3}}-B_{\substack{2\\3}})+\mathbf{A}_4\sqrt{-1}(B_{\substack{1\\4}}-B_{\substack{2\\4}})
\end{array}\right\}$$

Leszen:

(267) $\zeta =$

$$[A'e^{\lambda_1 x}+B'e^{-\lambda_1 x}+C'\cos\lambda_1 x+D'\sin\lambda_1 x]\cos(b\lambda^2_1 t)+$$
$$[E'e^{\lambda_1 x}+F'e^{-\lambda_1 x}+G'\cos\lambda_1 x+H'\sin\lambda_1 x]\sin(b\lambda^2_1 t)$$

Miután ily módon a (262) alatti egyenlet minden gyökeit feltaláltuk, négyesével csoportozatokban elkülönítettük, és végre ezen elkülönített négyes gyököket egybe összevontuk, nem marad egyéb hátra mint a kezdő állapot fölvétele, vagyis azon föltételek használata, melyek az időtől függnek. Legyen $t=0$ értékére nézve:

$$(268)\qquad \zeta=\varphi(x),\ \text{és}\qquad \frac{d\zeta}{dt}=\psi(x)$$

melyben φ, és ψ függvényalakok adva vannak, tehát ismeretesek, akkor a (250) alattiból leszen egész általánosan :

$$\zeta=\sum_{r=1}^{\infty}\left[Z_r\left(A_r\cos(\alpha_r t)+\mathbf{A}_r\sin(\alpha_r t)\right)\right]$$

tehát:

$$\left.\begin{array}{ll}
(269)\ \varphi(x)=\sum_{r=1}^{\infty}\left[Z_r A_r\right]=A_1 Z_1+A_2 Z_2+\dots\\
\text{és}\qquad \psi(x)=\sum_{r=1}^{\infty}\left[\alpha_r\mathbf{A}_r Z_r\right]=\alpha_1\mathbf{A}_1 Z_1+\alpha_2\mathbf{A}_2 Z_2+\dots
\end{array}\right\}$$

A_r, és $\mathbf{A}_r$ állandókat meg kell határozni. Hasonszerü alakoknál fogva, ha az egyik már ismeretes a másik belőle könnyen meghatározható. A feszült húr rezgési szabályainak meghatározásánál φ (x) függvény egy sor által volt adva, mely a sokszoros ív sinusait foglalta magában, az állandók elkülönítése egy egyszerü szorzó által igen könnyen eszközöltetett. Kérdés, vajjon nem lehetne e általánosan, ha Z függvénynek bármily alakja volna is, hasonló módon az állandókat meghatározni. E végre kutassuk vajjon lehet-e oly Y szorzót feltalálni, melylyel a (269) alattiakat szorozva, a bennök előforduló állandókat elkülöníti. Szorozzuk a (249) alatti azonos egyenletet Y dx-el, és vegyük 0, és l határok közé, leszen :

$$(270) \qquad \int_0^l Y\frac{d^2\zeta}{dt^2}dx = -b^2\int_0^l Y\zeta^{(4)}dx$$

még mindig azonos, Y-nak bármily értéke lenne is. Ha a ζ szerinti külzelékeket eltávolítjuk, leszen :

$$\int_0^l Y\frac{d^4\zeta}{dt^4}dx = \left\{Y\frac{d^3\zeta}{dx^3} - Y'\frac{d^2\zeta}{dx^2} + Y''\frac{d\zeta}{dx} - Y'''\zeta\right\}_0^l + \int_0^l Y''''\zeta\,dx$$

és minthogy Y csak x függvénye, lehet tehát a (270) alattit így is írni :

$$(271) \quad \frac{d^2}{dt^2}\int_0^l Y\zeta dx =$$

$$-b^2\int_0^l Y''''\zeta dx - b^2\left\{Y\frac{d^3\zeta}{dx^3} - Y'\frac{d^2\zeta}{dx^2} + Y''\frac{d\zeta}{dx} - Y'''\zeta\right\}_0^l$$

Már most Y-t úgy kell választani, hogy legyen :

$$b^2 Y'''' = +\beta^2 Y$$

és
$$Y\frac{d^3\zeta}{dx^3} - Y'\frac{d^2\zeta}{dx^2} + Y''\frac{d\zeta}{dx} - Y'''\zeta = 0$$

mely utóbbinak általános egészlete

$$(272) \quad Y = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x} + C_3\cos\mu x + C_4\sin\mu x$$

Leszen a (271)-ből

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^l Y\zeta\,dx = -b^2\int_0^l Y\zeta dx$$

Tegyük rövidség okáért :

$$J = \int_0^l Y\zeta dx$$

Leszen

$$\frac{d^2 J}{dt^2} = -\beta^2 J$$

melynek általános egészlete

$$J = H_1 \cos\beta t + H_2 \sin\beta t$$

tehát

$$\int_0^l Y\zeta dx = H_1 \cos\beta t + H_2 \sin\beta t$$

H_1 és H_2 állandók a kezdő állapot föltételei által meghatároztathatnak, és lesznek t=0 értékére nézve:

$$H_1 = \int_0^l Y\varphi(x)dx, \text{ és } \beta H_2 = \int_0^l Y\psi(x)dx$$

tehát

$$J = \int_0^l Y\zeta dx = \cos\beta t \int_0^l Y\varphi(x)dx + \frac{\sin\beta t}{\beta}\int_0^l Y\psi(x)dx$$

Ebből látható, hogy Y-nak csakugyan bizonyos alakot kell felvenni.

Hasonlítsuk össze már most a (261) alattit a (272) alattival, látjuk, hogy Z, és Y közt a legnagyobb hasonlatosság létezik, és hogy a β mennyiség jelentősége α-val egészen hasonszerű. A mint előbb B_1, B_2, B_3, és B_4 mennyiségek N=0 túllépő egyenlettel meghatároztattak, hasonszerű módon lehet C_1, C_2, C_3, és C_4 állandókat is meghatározni, mely által β, tehát Y részére is végtelen sok értékeket találunk, melyek négyesével csoportozatokban elrendeztethetnek. És csakugyan:

$$\begin{array}{lll} B_1 = C_1 \quad \text{és} & \alpha_1 = \beta_1 \quad \text{tehát} & Z_1 = Y_1 \\ B_2 = C_2 & \alpha_2 = \beta_2 & Z_2 = Y_2 \\ B_3 = C_3 & \alpha_3 = \beta_3 & Z_3 = Y_3 \\ B_4 = C_4 & \alpha_4 = \beta_4 & Z_4 = Y_4 \end{array}$$

Ezek után a (269)-ből származnak:

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^l Z_1\varphi(x)dx = A_1\int_0^l Z_1^2 dx + A_2\int_0^l Z_1 Z_2 dx + A_3\int_0^l Z_1 Z_3 dx + \ldots \\ \int_0^l Z_2\varphi(x)dx = A_1\int_0^l Z_1 Z_2 dx + A_2\int_0^l Z_2^2 dx + A_3\int_0^l Z_2 Z_3 dx + \ldots \end{array}\right\}$$

. . . .

továbbá:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^l Z_1\psi(x)dx= \\
&\qquad \alpha_1 A_1\int_0^l Z_1^2 dx+\alpha_2 A_2\int_0^l Z_1 Z_2 dx+\alpha_3 A_3\int_0^l Z_1 Z_3 dx+\ldots \\
&\int_0^l Z_2\psi(x)dx= \\
&\qquad \alpha_1 A_1\int_0^l Z_1 Z_2 dx+\alpha_2 A_2\int_0^l Z_2^2 dx+\alpha_3 A_3\int_0^l Z_2 Z_3 dx+\ldots
\end{aligned}\right\}$$

. . . .

Ezekből általában:

$$\int_0^l Z_r Z_s\, dx = 0$$

leszen tehát:

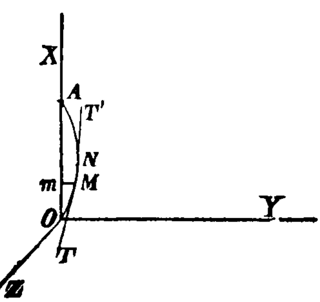
$$(273)\qquad \left.\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \frac{\int_0^l Z_1\varphi(x)dx}{\int_0^l Z_1^2 dx} \\
\mathcal{A}_2 &= \frac{\int_0^l Z_2\varphi(x)dx}{\int_0^l Z_2^2 dx} \\
&\ldots\ldots\ldots \\
A_1 &= \frac{\int_0^l Z_1\psi(x)dx}{\alpha_1\int_0^l Z_1^2 dx} \\
A_2 &= \frac{\int_0^l Z_2\psi(x)dx}{\alpha_2\int_0^l Z_2^2 dx}
\end{aligned}\right\}$$

a tetszésszerinti állandók értéke.

(17. §.)

A függőlegesen feszített kötél rezgéseinek szabályait magában foglaló részletes külzeléki egyenletek egészelése.

4. ábra



O pontban XYZ derékszögű öszrendező rendszert úgy helyezzük, hogy az X tengely a nehézség irányába jöjön. Legyen O, és A között OA kötél feszítve, melyre csak a nehézség hasson. A kötél egyensúlyállapotban OA vonalban marad. Adjunk már most a kötélnek valami módon OMA görbületet, mely igen lapos, tehát MN ívecske az X tengelylye igen kis szöget képezzen. A kötél egyes részei bizonyos feszitésnek vannak alávetve, mely O-tól kezdve A-ig nő, és A-ban a legnagyobb. Nevezzük az M pontban létező feszültséget S-nek, mely az öszrendezők függvénye, és legyenek az

m pont öszrendezői x, y=o, és z=o, és

M „ „ x, y, és z a két utóbbiak igen csekélyl félretolások.

Tegyük továbbá OA = a, OM = s, MN = ds, és a tömeg egységét = μ, leszen a ds tömege = μds. Szükséges, hogy mindazon erőket felhasználjuk, melyek ezen tömegecskére hatnak. Ugyanis:

1-ör azon feszítés, mely M pontra MT érintő irányban hat, mely oldalerőkre felbontva tagadólag vétetik, mert ez a öszrendezőket kisebbíti.

2-or azon feszítés, mely az N pontra NT érintő irányban hat, és hasonlókép oldalerőkre bontatik fel.

3-or a nehézség gyorsasága, mely a tömegecskét gyorsítja, és tagadólag vétetik.

Lesznek tehát az X, Y, és Z tengely irányban ható erők:

X	Y	Z
$-S\frac{dx}{ds}$	$-S\frac{dy}{ds}$	$-S\frac{dz}{ds}$
$(S+dS)\frac{dx}{ds}$	$(S+dS)\frac{dy}{ds}$	$(S+dS)\frac{dz}{ds}$
$-\mu g ds$		

melyek az egyensúly-állapotban egyenként elenyésznek. De miután rezgési állapotot bocsátunk előre, tehát a *D'* Alembert elve jő még tekintetbe. A már jelenlevő, és a mozgást elöidézett erőknek épen oly nagy tettleg erőt kell ellentállíttni, és pedig vonatkozólag

$$0, \quad -\mu ds\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -\mu ds\frac{d^2z}{dt^2}$$

Minthogy még dx=ds tehetjük, leszen:

$$(274)\quad \left.\begin{aligned} dS-\mu g dx &= 0 \\ d\left(S\frac{dy}{dx}\right)-\mu dx\frac{d^2y}{dt^2} &= 0 \\ d\left(S\frac{dz}{dx}\right)-\mu dx\frac{d^2z}{dt^2} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Az első ezek közöl ad:

$$(275)\qquad S=\mu gx+C$$

ha μ állandónak vétetik. O pontban a feszítés ismeretes, mert a kötélnek ezen vége vagy szabad, vagy T súly által nincs nehezítve. Az első esetben a feszítés zérus, a másodikban $= T$, tehát az utóbbi esetben $S=T$, tehát

$$S=\mu gx+T$$

mely két részből áll, az egyik az x kötél, a másik pedig a T állandó súlya.

A (274) alatti egyenletek másodika, és harmadika hasonlók, tehát elég, ha csak az egyikét például a másodikát egészeljük. Fejtsük ki tehát ezt, leszen:

$$(276)\qquad \frac{dS}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}+S\frac{d^2y}{dx^2}=\mu\frac{d^2y}{dt^2}$$

de

$$\frac{dS}{dx}=\mu g$$

tehát leszen:

$$\mu g \frac{dy}{dx} + (\mu g x + T) \frac{d^2 y}{dx^2} - \mu \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

vagy:

$$(277) \qquad (gx+h) \frac{d^2 y}{dx^2} + g \frac{dy}{dx} - \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

ha

$$\frac{T}{\mu} = h$$

tétetik. Arról volna már most a szó, vajjon ennek egy szakaszos függvény megfelelhet-e, vagy nem? Mielőtt ezt a kutatást elkezdenők, kényszerítsük az y-t néhány föltételnek megfelelni, és pedig

$$(278) \left\{ \begin{array}{l} x=0 \text{ értékére, és kényleges időre nézve legyen } Y=0 \\ \text{és } x=a \quad . \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad Y=0 \end{array} \right.$$

Továbbá meg kell határoznunk, hogy a mozgás mi által történik? Végre

$$\left. \begin{array}{ll} \text{legyen } t=0 \text{ ért. nézve} & y = \varphi(x) \\ (279) & \dfrac{dy}{dt} = \psi(x) \end{array} \right\}$$

Ezek után oly értéket vegyünk, mely nem csak a külzeléki egyenletnek, hanem a többi föltételeknek is megfelel, tehát

$$(280) \qquad y = Y \begin{smallmatrix}\sin\\\cos\end{smallmatrix} (\alpha t) = Y(A\cos\alpha t + A\sin\alpha t)$$

melyben Y csak x függvénye, leszen tehát a helyettesítés eredménye:

$$(281) \qquad (gx+h) \frac{d^2 Y}{dx^2} + g \frac{dY}{dx} + \alpha^2 Y = 0$$

Ezen egyenletet határozott egészlettel nem lehet egészelni, mert az első tényzőtől kezdve az utolsóig az esés 1, tehát az esés egy pár tényzőre — $\frac{1}{2}$, mely ismertető jel az alaktan (Formenlehre von J. Petzval) eredményei következtében két részletes egészletre mutat, melyeknek alakjuk:

$$y = C_1 e^{\int \frac{\lambda_1 dx}{\sqrt{x}}} + C_2 e^{\int \frac{\lambda_2 dx}{\sqrt{x}}} \cdots$$

λ_1, és λ_2 értékei: $g\lambda^2 + \alpha^2 = 0$ egyenletből származnak. Ezen körülmény kevés hasznot hoz, minthogy

$$\int_{u'}^{u''} e^{ux} V du$$

határozott egészletnél nem kapunk elegendő gyököket. Tehát kényszerítve érezzük magunkat a (281) alatti külzeléki egyenletet e következő helyettesítés által

$$(282) \qquad gx + h = \xi^2$$

e következőre átalakítani:

$$(283) \qquad \xi \frac{d^2 Y}{d\xi^2} + \frac{dY}{d\xi} + \frac{4\alpha^2}{g^2} \xi Y = 0$$

melyben az első tényzőtől az utolsóig nincs esés. Lehet tehát ezt az alaktan szabályai szerint vagy határozott egészlettel, vagy pedig általános rendszámmal ellátott külzeléki hányadossal egészelni. Egészeljük tehát előbb határozott egészlettel, és tegyük:

$$(284) \qquad Y = \int_{u'}^{u''} e^{ux} V du$$

leszen

$U_0 = hu^2 + gu + \alpha^2$, és $U_1 = gu^2$, tehát $e^{\int \frac{U_0}{U_1} du} = u e^{\frac{hu}{g} - \frac{\alpha^2}{gu}}$
tehát

$$(285) \qquad V = \frac{1}{U} e^{\int \frac{U_0}{U_1} du} = \frac{1}{gu^2} e^{\frac{hu}{g} - \frac{\alpha^2}{gu}}$$

tehát

$$(286) \qquad e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} = u \, . \, e^{u(x + \frac{h}{g}) - \frac{\alpha^2}{gu}} = 0$$

ezen egyenlet gyökei: $u = 0$, és $u = -\infty$, az utóbbira nézve leszen $\frac{e^{-\infty}}{e^{+\infty}}$, tehát a nevező túlnyomó nagysága ezen törtet elenyészteti. Leszen tehát

$$(287) \qquad Y = C_1 \int_0^{-\infty} \frac{1}{gu} e^{u(x + \frac{h}{g}) - \frac{\alpha^2}{gu}} du$$

csak egy részletes egészlet, mely által a határoknáli föltételeknek nem felelhetünk meg.

A (281) alatti külzeléki egyenlet tényzőinek fokszáma 1, 0, és 0, mely az alaktan szabályai szerint végszerütlen részletes, e következő alakú egészletre mutat:

$$e^{\int \varphi dx}$$

melyben a φ fokszáma $-\frac{1}{2}$, és ezt sor-alakban kifejezve:

$$\varphi = \frac{\lambda}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{\mu}{x^{\frac{2}{3}}} + \ldots$$

De tudjuk, hogy a φ első tagjának nevezőjében a (281) alatti egyenlet első tagjának tényczője jelen van, melyet e következő helyettesítés által

$$\sqrt{gx+h} = \xi$$

végszerüvé teszünk; és ez az oka, miért hoztuk be mi ezen új változékonyt, mely által a (283) alatti egyenlet származott, melyben nincs esés, és a φ fokszáma zérus, tehát ily alakú:

$$\varphi = \lambda + \frac{\mu}{\xi} + \frac{\nu}{\xi^2} + \ldots$$

Vegyük tehát az egészletet ily alakban:

$$Y = \int_{u'}^{u''} e^{u\xi}\, V du \tag{288}$$

leszen:

$U_0 = u$, és $U_1 = u^2 + \frac{4\alpha^2}{g^2} = u^2 + \beta^2$, ha rövidség okáért

$$\frac{4\alpha^2}{g^2} = \beta^2 \tag{289}$$

tétetik. Leszen tehát:

$$e^{u\xi + \int \frac{U_0}{U_1} du} = e^{u\xi} (u^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \tag{290}$$

melynek gyökei: $u = +\beta\sqrt{-1}$, $u = -\beta\sqrt{-1}$, és $u = -\infty$ minthogy ξ tevöleges mennyiség. Ezen gyökök most ügyesen választathatnak, de minthogy a valódi gyök a képzetessel nem használható, azért segítségül vehetjük a 0 gyököt, és leszen:

(291) $Y=$

$$C_1\int_0^{+\beta\sqrt{-1}}\frac{e^{u\xi}du}{\sqrt{u^2+\beta^2}}+C_2\int_0^{-\beta\sqrt{-1}}\frac{e^{u\xi}du}{\sqrt{u^2+\beta^2}}+\int_0^{-\infty}\frac{e^{u\xi}du}{\sqrt{u^2+\beta^2}}$$

és az állandók közti föltétező-egyenlet:

(292) $$C_1+C_2+C_3=0$$

Már most a képzetes mennyiségeket e következő helyettesítés által távolítsuk el:

az elsö tagra nézve		a második tagra nézve	
$+u\sqrt{-1}$ helyett $+u$		$-u\sqrt{-1}$ helyett $+u$	
$+du\sqrt{-1}$ „ $+du$		$-du\sqrt{-1}$ „ $+du$	
$u\sqrt{-1}=\beta\sqrt{-1}$	$u=\beta\sqrt{-1}$	$-u\sqrt{-1}=\beta\sqrt{-1}$ „	$u=+\beta$

a harmadik tagra nézve

$-u$	helyett	$+u$
$-du$	„	$+du$
$-u=-\infty$	„	$u=-\infty$

Leszen:

(293) $$Y=C_1\int_0^{\beta}e^{-u\xi\sqrt{-1}}(\beta^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}du\sqrt{-1}-$$

$$C_2\int_0^{\beta}e^{-u\xi\sqrt{-1}}(\beta^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}du\sqrt{-1}-C_3\int_0^{\infty}e^{-u\xi}(\beta^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}du$$

a két elsö részletes egészlet látszó képzetes, melyek helyett írhatjuk:

(294) $$Y=\int_0^{\beta}(\beta^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}du[B_1\cos u\xi-B_2\sin u\xi]-$$

$$C_3\int_0^{\infty}(\beta^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-u\xi}du$$

ha rövidség okáért tétetik:

(295) $B_1=\sqrt{-1}\,(C_1-C_2)$, és $B_2=C_1+C_2$

A (292), és (295) alattiakból következik

(296) $$B_2=C_3$$

tehát:

(297) $Y=$

$$\int_0^{\beta}(\beta^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}du[B_1\cos(u\sqrt{gx+h})-B_2\sin(u\sqrt{gx+h})]+$$

$$B_2\int_0^{\infty}(\beta^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-u\sqrt{gx+h}}du$$

mely egészletnek csekély haszna van, mert nem hagyja magát átváltoztatni, és nehezen lehet vele számolni, azért a sorokban keressünk menedéket. Vegyük tehát az egészlet ezen alakját:

$$(298)\quad \int \frac{e^{u\xi}du}{\sqrt{u^2+\beta^2}} = \int \frac{e^{u\xi}du}{(u+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}(u-\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}}$$

tehát

$$V = \frac{1}{(u+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}(u-\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}}$$

továbbá az általános rendszámmal ellátott külzeléki hányadosok alakjában előforduló egészletet:

$$(299)\quad Y = B_1\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{du^{-\frac{1}{2}}}\Big[e^{u\xi}W_1\Big]\Big\}_{u=\beta\sqrt{-1}} + B_2\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{du^{-\frac{1}{2}}}\Big[e^{-u\xi}W_2\Big]\Big\}_{u=-\beta\sqrt{-1}}$$

tehát

$$(300)\quad W_1 = \frac{1}{\sqrt{u+\beta\sqrt{-1}}},\ \text{és}\ W_2 = \frac{1}{\sqrt{u-\beta\sqrt{-1}}}$$

tehát:

$$(301)\quad Y = B_1\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{du^{-\frac{1}{2}}}\Big[\frac{e^{u\xi}}{\sqrt{u+\beta\sqrt{-1}}}\Big]\Big\}_{u=\beta\sqrt{-1}} + B_2\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{du^{-\frac{1}{2}}}\Big[\frac{e^{-u\xi}}{\sqrt{u-\beta\sqrt{-1}}}\Big]\Big\}_{u=-\beta\sqrt{-1}}$$

Fejtsük ki a külzeléki hányadost ezen alak szerint:

$$(P_1Q_1)^{(m)} = P_1^{(m)}Q_1 + mP_1^{(m-1)}Q'_1 + \frac{m(m-1)}{1\ 2}P_1^{(m-2)}Q''_1 + \dots$$

leszen:

$$Y = B_1\frac{e^{\beta\xi\sqrt{-1}}}{\sqrt{\xi}\sqrt{2\beta\sqrt{-1}}}\Big[1 - \frac{(\frac{1}{2})^2\sqrt{-1}}{2\beta\xi} - \frac{(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2})^2}{4\beta^2\xi^2} + \frac{(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2})^2\sqrt{-1}}{8\beta^3\xi^3} + \frac{(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2})^2}{16\beta^4\xi^4}\dots\Big] +$$

$$+ B_2\frac{e^{-\beta\xi\sqrt{-1}}}{\sqrt{\xi}\sqrt{-2\beta\sqrt{-1}}}\Big[1 + \frac{(\frac{1}{2})^2\sqrt{-1}}{2\beta\xi} - \frac{(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2})^2}{4\beta^2\xi^2} - \frac{(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2})^2\sqrt{-1}}{8\beta^3\xi^3} + \frac{(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2})^2}{16\beta^4\xi^4}\dots\Big].$$

tegyük rövidség okáért:

$$\text{és}\quad (302)\quad \left\{\begin{aligned} P&=1-\frac{(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2})^2}{4\beta^2\xi^2}+\frac{(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2})^2}{16\beta^4\xi^4}-+\ldots \\ Q&=\frac{(\frac{1}{2})^2}{2\beta\xi}-\frac{(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2})^2}{8\beta^3\xi^3}+\frac{(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2})^2}{32\beta^5\xi^5}-+\ldots \end{aligned}\right.$$

Leszen:

$$Y=B_1\frac{e^{\beta\xi\sqrt{-1}}}{\sqrt{\xi}}(P-Q\sqrt{-1})+B_2\frac{e^{-\beta\xi\sqrt{-1}}}{\sqrt{\xi}}(P+Q\sqrt{-1})$$

vagy:

$$Y=\frac{1}{\sqrt{\xi}}[\cos\beta\xi(B_1P-B_1Q\sqrt{-1}+B_2P+B_2Q\sqrt{-1})+$$
$$\sin\beta\xi(B_1P\sqrt{-1}+B_1Q-B_2P\sqrt{-1}+B_2Q)]$$

és ha

$$(303)\qquad G_1=B_1+B_2,\ \text{és}\ G_2=(B_1-B_2)\sqrt{-1}$$

tétetik, leszen:

$$(304)\quad Y=\frac{1}{\sqrt{\xi}}(G_1P-G_2Q)\cos\beta\xi+\frac{1}{\sqrt{\xi}}(G_2P+G_1Q)\sin\beta\xi$$

mely nyilván szakaszos függvény, és azt mondja, hogy az x-nek tehát a ξ-nek növése által is a félretolás mindig kisebb-kisebb, tehát a hullámok lenyomatva fordúlnak elö.

Végre a (278) alatti föltételeket tekintetbe véve, leszen

$$\left.\begin{aligned} &(305)\ x=0\ \text{értékére nézve}\ \xi_0=\sqrt{h}=\sqrt{\frac{T}{\mu}} \\ &\text{és}\qquad x=a\quad ,,\quad \xi_1=\sqrt{ga+h} \end{aligned}\right\}$$

$\frac{T}{\mu}$ mennyiség vonalt állíthat elö, mert T, és μ súlyt jelentenek.

Hogy egy bizonyos eset legyen előttünk, legyen T, μ-re nézve igen nagy. Leszen:

$$\beta\xi=\frac{2\alpha}{g}\sqrt{gx+h}$$

tehát $\quad \beta\xi_0=\frac{2\alpha}{g}\sqrt{h}$, és $\beta\xi_1=\frac{2\alpha}{g}\sqrt{ga+h}$

tegyük már most rövidség okáért

$$(306)\qquad \frac{2\sqrt{h}}{g}=p,\ \text{és}\ \frac{2\sqrt{ga+h}}{g}=q$$

leszen

(307) $\beta\xi_0 = p\alpha$, és $\beta\xi_1 = q\alpha$

tehát a (304)-ből:

$$(308)\quad \left.\begin{array}{l} 0=\cos p\alpha(G_1P_0-G_2Q_0)+\sin p\alpha(G_2P_0+G_1Q_0 \\ 0=\cos q\alpha(G_1P_1-G_2Q_1)+\sin q\alpha(G_2P_1+G_1Q_1 \end{array}\right\}$$

hol: $P_0 = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)^2}{4p^2\alpha^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\right)^2}{16p^4\alpha^4} - \ldots\ldots$

$$Q_0 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{2p\alpha} - \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\right)^2}{8p^3\alpha^3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\right)^2}{32p^5\alpha^5} - + \ldots.$$

(309)

továbbá $P_1 = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)^2}{4q^2\alpha^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\right)^2}{16q^4\alpha^4} - + \ldots.$

$$Q_1 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2q\alpha} - \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\right)^2}{8q^3d^3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\right)^2}{32q^5\alpha^5} - + \ldots$$

Leszen

$$(310)\quad \left.\begin{array}{l} G_2(Q_0\cos p\alpha - P_0\sin p\alpha) = G_1(P_0\cos p\alpha + Q_0\sin p\alpha) \\ G_2(Q_1\cos q\alpha - P_1\sin q\alpha) = G_1(P_1\cos q\alpha + Q_1\sin q\alpha) \end{array}\right\}$$

tehát

$$(311)\quad \operatorname{tang}(q-p)\alpha = \frac{\frac{Q_1}{P_1} - \frac{Q_0}{P_0}}{1 + \frac{Q_1}{P_1}\cdot\frac{Q_0}{P_0}}$$

melyet így lehetne feloldani: tegyük

$$\left.\begin{array}{l} \frac{Q_0}{P_0} = \operatorname{tang}\varphi = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2p\alpha} + \ldots\ldots \\ \frac{Q_1}{P_1} = \operatorname{tang}\psi = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{2q\alpha} + \ldots\ldots \end{array}\right\}$$

hol φ, és ψ szögek igen kicsinyek, leszen

$$(312)\quad \operatorname{tang}(q-p)\alpha = \frac{\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\varphi}{1+\operatorname{tang}\psi\operatorname{tang}\varphi} = \operatorname{tang}(\psi-\varphi)$$

de minthogy $\varphi = \operatorname{arctang}\frac{Q_0}{P_0}$, és $\psi = \operatorname{arctang}\frac{Q_1}{P_1}$ többjelentésű, tehát világosan kijelentjük, hogy a legkisebb értéket, azaz: a legkisebb szögöt akarjuk alatta érteni. A (312) alatti egyenlet feloldása ad: $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\infty \ldots$ Leszen α_1 gyökre nézve különösen: $\operatorname{tang}(q-p)\alpha_1 = \operatorname{tang}(\psi_1 - \varphi_1)$ tehát

$$(q-p)\alpha_1 = (\psi_1 - \varphi_1),\ \text{melyből}\ \alpha_1 = \frac{(\psi_1 - \varphi_1)}{(q-p)}\ \text{származik.}$$

Továbbá leszen α_2-re nézve $\operatorname{tang}(q-p)\alpha_2 = \operatorname{tang}(\psi_2 - \varphi_2) + \pi$, tehát

$$\alpha_2 = \frac{(\psi_2 - \varphi_2) + \pi}{(q-p)},$$

és általában

$$(313) \qquad \alpha_r = \frac{(\psi_r - \varphi_r + (r-1)\pi}{(q-p)}$$

melyből látható, hogy az első gyöktől kezdve fokonként minden további gyökök kiszámíthatók. A (310)-ből származik:

$$(314) \qquad \left.\begin{aligned} G_1 &= Q_0 \cos p\alpha - P_0 \sin p\alpha \\ G_2 &= P_0 \cos p\alpha + Q_0 \sin p\alpha \end{aligned}\right\}$$

Leszen a (304)-ből:

$$(315)\ Y = \frac{1}{\sqrt[4]{gx+h}} \left\{ \begin{aligned} &(PQ_0 - QP_0)\cos(\beta\sqrt{gx+h} - p\alpha) + \\ &(PP_0 + QQ_0)\sin(\beta\sqrt{gx+h} - p\alpha) \end{aligned} \right\}$$

hol Y, (gx+h) mennyiség negyedik gyökével visszásan arányos.

Ha most α helyett rendre α_1, α_2, ... teszünk, kapunk Y_1 Y_2 ..., leszen tehát a (280)-ból:

$$(316)\ y = Y_1(A_1 \cos\alpha_1 t + \mathbf{A}_1 \sin\alpha_1 t) +$$
$$Y_2(A_2 \cos\alpha_2 t + \mathbf{A}_2 \sin\alpha_2 t) + \ldots + Y_r(A_r \cos\alpha_r t + \mathbf{A}_r \sin\alpha_r t) + \ldots$$

az *általános egészlet*, melynek minden egyes tagja is az egyenletnek megfelel, és bizonyos állapotot képvisel. Most még csak arról lehet szó, miként lehetne ezen rezgési állapotokat meghatározni. Az bizonyos, hogy ugyanazon rezgési állapotot kapjuk, ha

$[\beta\sqrt{gx+h} - p\alpha]$ ... 2π vel

tehát $\sqrt{gx+h}$ ... $\frac{2\pi + p\alpha}{\beta} = \frac{g(2\pi + p\alpha)}{2\alpha}$-val nő.

Ebből látható, hogy a rezgési csomók nincsenek egyenlő távolságban egymástól.

Továbbá y ugyanazon értéket veszi fel, ha

αt ... 2π-vel

tehát t ... $\frac{2\pi}{\alpha} = \tau$-val nő; tehát a rezgési idők α gyököktől függnek.

Hátra volna még a (279) alatti kezdő állapot föltételeinek használata, hogy ez által a még meg nem határozott tetszésszerinti állandók értékei meghatároztassanak. Ez hasonló módon vitetik végbe mint a fentebbi kérdésben.

MAGYAR

AKADEMIAI ÉRTESÍTŐ.

A MATHEMATIKAI,

ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI

OSZTÁLYOK KÖZLÖNYE.

I. KÖTET. 1860. IV. SZÁM.

A KÖZÉPFUTERŐ BEFOLYÁSA A FORGATOTT TESTEK SZILÁRDSÁGÁRA.

MARTIN LAJOSTÓL.

1.

Sebes tengely körüli forongások nem ritkák a gépészetben.

Ilyen forongásoknak vettetnek alá a gőzművek hajtókerekei, az őrlő malmok kövei, a szélkerék, a vízi csavar- a vízi pörgetyü szárnyai stb.

Minden tengely körül hajtott testben, mint tudva van, középfuterő gerjesztetik, mely a forongó részeket a forgatás tengelyétől elszakítani igyekszik. Minél nagyobb a forgatás sebessége, annál nagyobb maga a futerő, mely utóljára a forgatás kellő megsebesítésével oly hatályra kap, hogy még a legszilárdabb testet is szélyelszakítja.

A gépész tehát, kinek legfőbb kötelessége mozgonyát s mozgonya részeit oly mérvek szerint alkatni, hogy bízvást s az összetöretés veszélye nélkül használtathassék, a futerő hatását s az általa a gépészekben ébresztett feszületeket fontolóra veszi.

Az erőszet terén az anyagok szilárdságai felől ugyan igen érdekes értekezések találtatnak, de a futerő hatása s az anyagok szilárdsága közti viszonyok felől alig vannak némi nyomozások nyomai; miért is hiszszük, hogy a jelen sorok haszontalanok és fölöslegesek nem lesznek.

Ha valamely a forgatási tengelytől (r) távolban levő anyagi pont tömegét m-nek, s annak szögi sebességét vagy röviden szólva szögfuttatását w-nak nevezzük, akkor, mint tudva van, ezen anyagi pont futereje:

(1). . . . . $F = mr\omega^2$

Ha több ilyen ugyanazon egy tengely körül forongó egy változatlan rendszert képző anyagi pont tömegeit m m′ m″ m‴ . . . . . s tengelytőli távolait r r′ r″ r‴ . . . . ., a közös szögfuttatást ω-nak nevezzük, akkor ezen rendszer összes futereje :

$F = \omega^2[mr + m_1 r_1 + m_{,,} r_{,,} + m_{,,,} r_{,,,} + \ldots]$, vagy ha, mint öszletezéseknél is a szokás, a zárjel közé szorított szorzót rövidebb analytikai jellel jelentjük :

(2) . . . . . $F = \omega^2 \Sigma mr$

Ezen képlet használatánál legkivált 2 eset különböztetendő; lehet t. i. hogy azon rendszert képző pontok anyagukra nézve egyentömöttségüek s lehet hogy különtömöttségüek. A természeti testeknél az utolsóra csak ritkán akadunk, miért is mi a következőkben közönségesen csak az elsőt feltételezzük. Ha már most a forgatott pontok anyagukra nézve egyentömöttségüek, akkor az ezen pontok tömegeinek köbfogatuk s közös tömöttségök arányosak. Egy ilyen pont köbfogatát v-nek s anyagi tömöttségét γ-nak nevezvén, úgy hogy $m = \gamma v$, akkor az utolsó egyenlet általmegy :

$F = \gamma\omega^2 \Sigma v$ képletbe

Ezen képlet a forgatott testek futerejök meghatározására is szolgálhat. És ezen esetben az előbbi rendszernek minden pontja a forongó test valamelyik része; s mivel a test részei a test terét folytonosan kitöltik, azért a test maga mintegy valamely téren folytonosan elterjeszkedő pontok rendszere. Az ilyen rendszerhez tartozó pont köbfogata pedig az egész test köbfogatának valamely része, tehát külzése is, mely tér külzést szokás szerint Δv-nek hívjuk, mi által az utolsó képlet továbbá

(3). . . . $F = \gamma\omega^2 \Sigma r \Delta v$ képletbe alakíttatik által.

Hogy ha pedig Δv térkülzést végnélküli kisebbülésre vezetjük, akkor a külzés maga külzelékre az ezen külzelékek öszlete pedig egészletre megy által, miből végre :

(4). . . . . $F = \omega^2 \int rdv$ ered, mely képletben a kijelentett egészlés a forgatott test térhatáraira vonatkozik.

Azon különféle az utolsó képletre alkalmazható eset közöl elsősorban leginkább kettőt kell említnünk. Az elsőben ugyan a test anyagi pontjai, vagy ha tetszik, tömecsei csak egy a forgatás tengelyére merőlegesített egyenesben feküsznek; a másodikban pedig a test minden tömecse egyentávolú a tengelytől. Az első esetben tehát a test csak egy a tengelyre merőlegesen álló egyenes anyagi vonalat, úgy szólván egy kifeszített fonalat vagy szálat képez; a másodikban pedig a tömecsek a forgó tengelylyel köztengelyes körmetszésű henger felületében fekszenek.

2.

Ha a test egy a tengelyre merőlegesített anyagi egyenest képez, akkor azt hasábnak is nézhetjük. Annak hosszát, l-nek köbfogatát v-nek, továbbá dv térkülzelékének hosszát dr-nek nevezvén, akkor :

$$l : v = dr : dv \text{ miből}$$

$$dv = \frac{v}{l} \cdot dr \text{; mit a (4) képletbe vezetvén :}$$

$$F = \gamma\omega^2 \int \frac{v}{l}\, rdr + C$$

De a kérdéses test hasáb, következetesen $\frac{v}{l}$ hányados egy állandó az egészlésre befolyást nem gyakorló érték, miért az utolsó egyenlet még így írható :

$$F = \frac{\gamma\omega^2 v}{l} \int rdr + C$$

A most végre hajtandó egészlés a vonal hoszterjelmére vonatkozik. Feltévén, hogy a vonal egyik végével közvetlenül a tengelyre köttetett, akkor az a tengelytől egész l hoszszáig terjed, s következésképen az egészlés maga $r=0$ és $r=l$ határokra vonatkozik, így tehát a kérdéses fonal futereje :

$$F=\frac{\gamma\omega^2 v}{l}\int_0^l r dr \text{ azaz :}$$

$$F=\gamma\omega^2 . \frac{v}{l} . \frac{l^2}{2}$$

A test átmetszési térfogatát nevezvén f-nek, akkor $v=lf$ és $\frac{v}{l}=f$ következőleg:

$$F=r\omega^2 . f . \frac{l}{v^2}$$

Mely erő a forgatott fonalat tövinél a tengelytől elszakítani szándékozik. Ezen elszakitásnak ellentáll a fonal anyagi szilárdsága. Feltévén hogy K az anyag téregységére vonatkozó szilárdsága, akkor ezen f átmetszésű vonal Kf erővel ellentállhat a szétszakító feszületnek, következésképen :

$$Kf=\gamma\omega^2 f \frac{l^2}{2} \text{ azaz}$$

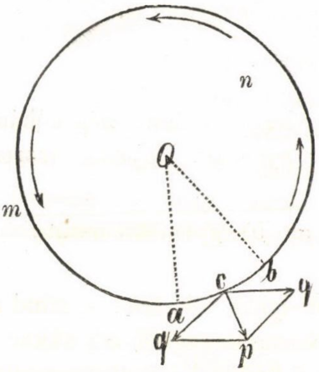
(5). . . . . . . $2\,K=\gamma\omega^2 l^2$

Miből kitünik, hogy egy egyenest képző fonal forgathatási sebessége saját átmetszése nagyságától egészen független. Valamint megfordítva látható, hogy azon átmetszésnek nagysága a forgatott vonal hosszára befolyást nem gyakorol. — Bár milyen vastagnak vagy vékonynak gondoljuk tehát a forgatott vonalat, az (5) képlet értékét állandóan megtartja. Következetesen ezen képlet minden hasábos testnél érvényes. A hajtó kerék karai szint ilyen hasábos, a tengelyre merőlegesített testek, érvényes tehát azon képlet ezeknél is, s látjuk tehát, hogy nekik csak a szögfuttatás által korlátolt egy hosszmérvet adhatunk.

3.

Elébb a test anyagi pontjai egy a tengelyre merőleges egyenesben feküdtek. Ha ellenben a pontok a forgó tengelyhöz egyentávoluak, akkor azok csak egy a forgatási tengelylyel köztengelyes körmetszésü henger felületében fekhetnek. A legegyszerübb itt gondolható eset az, ha a pontok egy a tengelylyel központos, síkjával a tengelyre merőlegesített kör kerületét folytonosan eltöltik. A forgatott ponti rendszer tehát a kör kerületét képezi, mely középpontja körül képeztetik.

Hogy ezen esetben nyomozásunk irányát megtartsuk, a (4) képletet el hagyjuk. Ugyanis legyen mn a szomszéd ábrában az o pontot körülfutó kör, melynek anyagi tömöttségét γ-nak, szilárdságát K-nak, szögfuttatását ω-nak hívjuk. Kiszelvén végre ao és bo félmérők által ab ívet, legyen még aob φ-vel és ao félmérő r-el egyenlő, akkor :



rφ az ab ív hossza, frφ annak köbfogata ha f az anyagi körvonal átmetszése, γfrφ annak tömege és $\gamma f r^2 \omega^2 \varphi$ ezen tömeg futereje. Ezen sugárilag ható cp futerő a pqcq' erőegyenközény szerint cq és cq' oldalerőkre oszlik szét oly formán, hogy cq merőleges ao-ra, cq' pedig merőleges bo-ra. ab ív egy tetsző nagyságú ív lehet ugyan, de ha ezen ívet úgy választjuk, hogy öt mintegy húrjával öszveeső ívnek tekinthetjük, akkor acbo kőrkiszelvényt egyenszárú háromszögnek s következésképen pcq háromszöghöz hasonlónak tekinthetjük, úgy hogy ennek folytán írhatjuk :

cq : cp = ao : ab azaz :

cq : cp = r : rφ = 1 : φ miből

$cq = \frac{1}{\varphi}\, cp = \frac{1}{\varphi} \cdot F$ mibe F futerő elébb talált értékét helyettezvén

$cq = \gamma f r^2 \omega^2$ lesz.

Ezen cq oldalerő az ab ivecskét a átmetszésében amn ívtől igyekszik elszakítani. Minthogy az anyag szilárdsága K s átmetszése a-ban f, azért az anyag e helyen Kf erővel állhat ellen a futerőnek, következésképen

$$Kf = \gamma f r^2 \omega^2 \text{ azaz}$$

(6). . . . . $K = \gamma r^2 \omega^2$ lesz.

S mivel ezen alkalommal mint az elébbi czikkben f átmetszési térfogat a végeredményből kiesett, látjuk hogy a körnél is az áll mi elébb az egyenes vonalról állott. Legyen tehát az anyagi körnek bármily átmetszése vagy úgy szólván vastagsága, legyen a kör körgyürü, külső szélének félmérője egy a gyürü szélességétől független, csak a szögfuttatás által korlátolt érték. Maga a körlap általán szólva szinte körgyürünek nézhető, azért az utolsó egyenlet a körlapra is alkalmazható. Egy körátmetszésü henger szint ilyen anyagi körlapok öszvegének nézhető. Minthogy pedig a (6) egyenlet ezen körlapok mindenikéről érvényes, azért érvényes marad az ezen körlapok öszvegéről tehát magáról a hengerről is.

4.

Az (5) és (6) egyenletek egybevetése által még néhány igen egyszerü következtetéseket nyerünk. Ugyanis szorozván az utóbbit 2-vel, kapjuk:

$2\ K = 2\gamma r^2\omega^2$; mi alá az (5) egyenletet írván :

$2\ K = \gamma l^2\omega^2$

Ha már most mind a kör melynek félmérője r, mind az egyenes melynek hossza l, ugyanazon anyagból áll, akkor K és γ, mind a két esetben egyenértékü lévén, a két utolsó egyenletből kiesik. S feltévén azt is, hogy mind a két test egyenlő sebességgel futja körül tengelyét, akkor mind a két egyenletben ω is egyenlő értékű, miből

$2r^2 = l^2$ azaz

(7). . . . . $r\sqrt{2} = l$ következik.

Visszamenvén az elébbi egyenletre s szorozván azt ω^2-vel, úgy hogy :

$2r^2\omega^2 = l^2\omega^2$, akkor azt még igy is írhatjuk :

$2(r\omega)^2 = (l\omega)^2$; de $r\omega$ és $l\omega$ szorzatok nem egyebek, mint azon kerengési sebességek, melyek elsejével a kör kerülete másikával pedig az egyenes szélső vége tengelyöket körülfutják ; tévén ezen értékékeket röviden v és v' egyenlőnek, akkor az utolsó egyenlet szerint : . . . . $2v^2 = v_1{}^2$ avagy $v\sqrt{2} = v_1$ S végre mivel $l\omega = v_1$ ezért $2\ K = \gamma l^2\omega^2 = \gamma(l\omega)^2$ egyenlet még :

$2\ K = \gamma v_1{}^2$ azaz :

(7). . . . . . $v_1 = \sqrt{\dfrac{2K}{\gamma}}$ s következésképen $v = \sqrt{\dfrac{K}{\gamma}}$

Mely két egyenenletből kitetszik, miszerint a középpont körüli futás legnagyobb még lehetséges sebessége ugyanazon egy anyagra nézve állandó és változhatlan egy érték.

Megérdemli a fáradságot $v = \sqrt{\frac{K}{\gamma}}$ egyenlet értékeit több anyagnemre kiszámítani. Legyen a választott anyagok közt: az aczél, a vert-, az öntött vas, a réz, a tölgy-, bükk-, fenyü-, teak-, puszpáng-, s körtvélyfa és a kenderrost. Ezen anyagok:

	fajsúlya;	tehát tömege 1 köblábban;		és nyújtás elleni szilárdságuk:	
aczél	7'84	14·238	font	116000	bécsi font
vert vas	7·79	14·146	„	57500	a bécsi □
öntött vas	7·21	13·093	„	16000	hüvelykre
öntött réz	7·788	14·133	„	34700	vonatkozva.
tölgyfa	0·75	1·544	„	9045	„ „
bükkfa	0·70	1.271	„	9989	„ „
fenyüfa	0.59	0·981	„	10654	„ „
teakfa	0·86	1·562	„	13146	„ „
puszpángfa	0·98	1·780	„	17306	„ „
körtvélyfa	0.646	1·173	„	8557	„ „
kenderrost	0·293	1·812	„	9000	„ „

Az itt álló három számsor elseje és utolsója magából is megérthető; a középső számsor pedig következőleg keletkezett: az egy bécsi köblábnyi tért megtelő vízmennyiség súlya 56 ½ bécsi fontot nyom, tehát 1 köbláb aczél $7{\cdot}84 \times 56{\cdot}5$ fontot nyom. De az anyag súlya egyenlik annak a földi gyorsulással szorzott tömegével, miért tehát megfordítva a tömeg egyenlő az anyag súlyával elosztván azt a földi gyorsulás által. Innen keletkezett az aczélra nézve 14·238, mely nem egyéb mint $\frac{6{\cdot}84 \times 56{\cdot}5}{31{\cdot}05}$ kitétel értéke. Azonban az ily formán kikapott számok a kivánt eredmény kiszámitására még nem alkalmasak; mert a középső számsor köblábra a harmadik pedig □ hüvelykre vonatkozik. Szükséges tehát az utolsókat elébb □ lábokra vonatkoztatni, azaz 144-el szorozni. Így áll aztán az aczélra nézve elő:

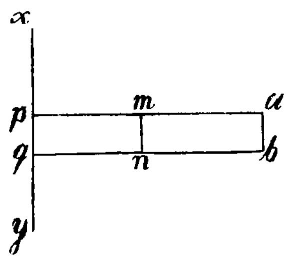
$$v=\sqrt{\frac{K}{\gamma}}=\sqrt{\frac{144\times116000}{14{\cdot}238}}=12\sqrt{\frac{116000}{14{\cdot}238}}=1082{\cdot}4$$

azaz egy aczélból készült abroncs 1032·4 lábnyi sebességgel futhatja körül középpontját. Hasonló értelemmel bírnak a következő számok.

aczél	1082·4	bükkfa	1064·4
vert vas	764·4	fenyüfa	1248·0
öntött „	420·0	teakfa	1100·4
„ réz . . .	594·0	puszpángfa . . .	1183·2
tölgyfa	918·0	körtvélyfa . . .	1024.8

Kenderrost . . . . . 844·8.

5.



Ha egy a forgatás tengelyére merőlegesített hasábos test, mint pb a szomszéd ábrában, pq átmetszésében futerejének megfelelő szilárdsággal bír, akkor ez csak azon átmetszésre nézve áll. Mert, bármely más tetsző mn átmetszését szemlélvén, könyen belátni hogy a test azon átmetszésben kelletinél szilárdabb, minthogy mn átmetszésre csak mb karrész futereje, holott pq-ra az egész kar futereje hat. E szerint a forongó kar csak egyik átmetszésében bír egy a futerőnek megfelelő szilárdsággal.

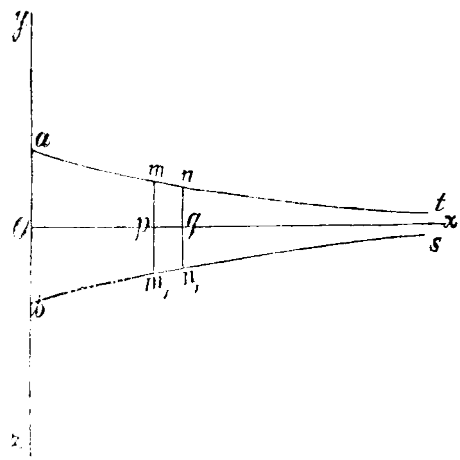
Léteznek azonban a természetben testek (sőt azt a természet minden alkatáról kell mondanunk) melyek kiterjedésök minden pontjában s átmetszésében csak a szükséges és kellő szilárdsággal bírnak. Maga az erőszet is már több ilyen egyenszilárdságú testeket fedezett fel. Keressük tehát azon kar idomát, mely a futerőre nézve egyenszilárdságú.

Ezen hasznos s mint hiszszük erőszetileg véve érdekes nyomozást a jelen sorok írója már 1856-ban végrehajtotta. Akkori időben t. i. gátnoki hadnagy lévén, forgó röppentyük fölött analytikai nyomozásokat tett, melyek eredményét fő-hadi parancsnokságunknak is aláterjesztette. A munka tudományiag ugyan igen alaposan megbíráltatott, rendjén kivül meg is dicsértetett, de arra, bár hogy is iparkodott, nem vihette, hogy eredményeit álladalmi költségen megkísérlhette volna. Két év múltán csakhamar az a hír lepte meg az írót hogy tüzérségi főparancsnokságunk Hale angollal forgó röppentyűik megvásárlásáért alkudozásokba ereszkedett volna.

Ezen esemény elnyomasztó sújtás volt ugyan, de más részről általa legszebb elégtételeket nyert. Mert Hale kísérletei által a 2 évvel elébb beadott nyomozásainak elvileg akkor ugyan helyeselt de gyakorlatilag kétségbe vett eredményei eldönthetlen bizonyítást nyertek. Hale röppentyűi a Congreve-féle röppentyűt nem csak fölülmúlják czéltalálási biztosságban és horderőben, hanem a képzelhetőséget is sokkal megelőzték.

6.

Az elébb feltett kérdés eldöntésében különfélekép járhatunk el. A nyerendő eredmény ugyanis a keresendő test átmetszése idomától függ. Legyen először a keresett test minden átmetszése egyenszög, olyformán, hogy ezen egyenszög egyik oldalpárja a tengelyhöz párhuzamos, másika pedig arra merőleges és minden átmetszésére nézve állandóan egyenlő hosszú.



Legyen ennekokáért yz a szomszéd ábrában a forgatás tengelye; at és bs a keresendő test vázvonala; továbbá legyen γ a test anyagi tömöttsége és K annak szilárdsága; végre ω a kérdéses kar forgatási sebessége. Messük ezen ab átmetszésében a tengelyre kötött kart p-ben mm_1 sík által, akkor, mint felteszszük, a keletkezendő mm^1 metszés egyenszög, melyben az yz tengelyhez párhuzamos oldalt $mm_1=2.mp=2y$ teszszük; az ezen mm_1 s így tehát rajzunk síkjára is deréklö oldalát$=b$, mely minden más hasonfekvésü átmetszésben ugyanaz. Messük továbbá ugyanazon kart q-ban nn^1 szerint, de úgy, hogy pq közeg határtalan kicsinynek nézhető, akkor az mm_1 és nn_1 átmetszések közé egy parányi kis szelvényke szoríttatik. Nevezzük már most op-t x-nek, pq-t dx-nek, és oa-at a-nak, akkor:

$2by$ az mm_1 átmetszés térfogata
$2bydx$ az mm_1n_1n testi szelvény köbfogata, tehát
$2\gamma bydx$ annak tömege és
$2\gamma b\omega^2 xydx$ futereje.

Általmenvén azután a test egyes szelvényéről az egész testre, kapjuk általánosan:

$$F=2\gamma b\omega^2\int xydx+C$$

Ha már most a test a tengelytől egész l hosszáig terjed, akkor futereje kétségkivül:

$$F_1=2\gamma b\omega^2\int_0^l xydx;$$

Ha pedig a test a tengelytől csak mm_1 átmetszésig terjed, akkor a futerő:

$$F_{11}=2\gamma b\omega^2\int_0^x xydx$$

Levonván most az első egészletből a másodikat, megkapjuk a test azon részének futerejét, mely az mm_1 átmetszéstől a test szélső végéig terjed; miből tehát

$$F=F_1-F_{11} \text{ azaz:}$$

$$F=2\gamma b\omega^2\left[\int_0^l xydx-\int_0^x xydx\right] \text{következik.}$$

Bár milyen legyen is már most az x és y közti viszony, annyi bizonyos, hogy a zárjel közé szorított egészletek elseje, mint állandó határokra vonatkozó egészlet, csak állandó érték lehet. Ezen állandó értéket C-vel jelölvén, lesz

$$F=C-2\gamma b\omega^2\int_0^x xydx$$

A még hátramaradt egészlet határokra vonatkozik; ha az ezen határok által meghatározott egészleti állandót a már ott álló C-hez kapcsoljuk, akkor a még kitett egészlési határokat tekintet nélkül hagyhatjuk, s írhatjuk röviden :

$$F = C - 2\gamma b\omega^2 \int xydx.$$

És ez azon az anyag szilárdságát mm_1 vágás szerint megtámadó futerő. Mivel pedig 2by azon átmetszés térfogata és K az anyagnak a téregységre vonatkozó szilárdsága, azért az anyag mm_1 átmetszésben 2Kby erővel felelhet meg a szétszakításnak. Hogy tehát a kérdéses test a futerőre nézve egyenszilárdságú test legyen, szükséges, hogy :

$2Kby = (C - \int xydx) 2\gamma b\omega_2$ azaz :

$2Ky = 2\gamma\omega^2 (C - \int xydx)$ legyen; s ezt C kiküszöblése végett külzelvén :

$2Kdy = -2\gamma\omega^2 xydx$ s 2y-al elosztván :

$K \frac{dy}{y} = -\gamma\omega^2 xdx$, miből végre egészlés útján :

$K \int \frac{dy}{y} = -\gamma\omega^2 \int xdx$ következik. Ha az itt végrehajtandó egészlést x-re nézve zy tengelytől egész $xp = x$-ig kiterjesztjük, akkor y-ra nézve $oa = a$ és $mp = y$ az egészlés határai, minek folytán :

$$K \int_a^y \frac{dy}{y} = -\gamma\omega^2 \int_0^x xdx \text{ azaz :}$$

$$K \log. \text{nat.} \left(\frac{y}{a}\right) = -\gamma\omega^2 \frac{x^2}{2} \text{ avagy :}$$

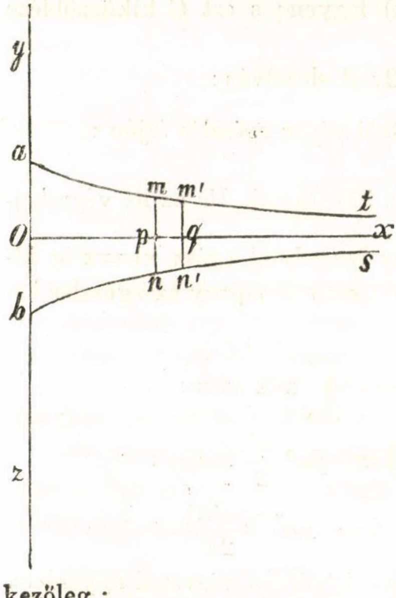
$$(8) \; \ldots\ldots \; y = a.e^{-\frac{\gamma\omega^2 x^2}{2K}}$$

És ezen egyenlet aztán a kérdéses vázvonal egyenlete.

Ezen egyenletben $x = 0$, tévén akkor $y = a$ mint ab átmetszésre nézve is lennie kell; tévén ellenben $y = 0$ akkor $x = \infty$ a vázvonal tehát csak a végetlenségben metszi át ox tengelyét. Mivel pedig x-nek a semmitől kezdve folytonosan növekedő értékeire nézve y folytonosan apad, a görbe tehát, minél tovább folytattatik, annál inkább az közeledik, x-ek tengelyéhez de azt csak a végetlenségben éri el, azért látjuk hogy xo tengely a kitalált görbe közelítője. Mivel végre a (8) egyenletben fellépő szögfuttatás ω a görbe egész kiterjedésére változatlanúl megtartja értékét, s mivel ugyanott x-nek lehető értéke korlátolva nincsen azért látjuk, miszerint oly testet találtunk, mely bár hogy is hosszabbíttatnék, a futerőt egyaránt és ugyanazon szögisebességnél kitartja. A kitalált test hossza tehát független a szögisebességtől, következetesen a forgatástól is.

7.

Ilyen a futerőt egyaránt kitartó test számtalan sok van. Tegyük példáúl, hogy a test minden átmetszése kör. Legyen megint yz a szomszéd ábrában a forgatás tengelye; at, bs a keresett kar vázvonalai. Legyen továbbá ω, γ és K a karnak szögfuttatása, anyagának tömöttsége és szilárdsága. Messük e kart p és q-ban mn és m′n′ síkok szerint, úgy hogy pq$=$dx hézag határtalan kis közeg, s az mnm′n′ testi szelvény csak parányi kis része a karnak. Nevezzük aztán oa és mp körfélmérőket a és y-nak s op metszéket x-nek akkor:



πy^2 az mn kör területe

$\pi y^2 dx$ az mnm′n′ testi szelvény köbfogata, következőleg:

$\pi\gamma\omega^2 xy^2 dx$ futereje; melyről az egész test futerejére általmenvén:

$F = \pi\gamma\omega^2 \int xy^2 dx + C$

Ha már most a test a tengelytől egyszer l hosszáig, másszor pedig csak x hosszáig, terjed, akkor $F_1 = \gamma\omega^2 \int_0^l xy^2 dx$ és $F_{,,} = \pi\gamma\omega^2 \int_0^x xy^2 dx$; következőleg a karnak mn átmetszéstől szélső végéig elterjedő részének futereje:

$$F = F_1 - F_{1'} = \pi\gamma\omega^2 \left[\int_0^l xy^2dx - \int_0^x xy^2dx \right]$$

mi helyett a már fent említett tehát ismert okok miatt röviden írhatjuk:

$$F = \pi\gamma\omega^2(C - \int xy^2dx)$$

Más részről πy^2 az mn átmetszés térfogata, K a téregységre vonatkozó szilárdság, tehát:

$$\pi K y^2 = \pi\gamma\omega(C - \int xy^2dx) \text{ azaz:}$$

$$Ky^2 = \gamma\omega^2(C - \int xy^2dx) \text{ miből:}$$

$$2Kydy = -\gamma\omega^2xy^2dx \text{ azaz}$$

$$2Kdy = -\gamma\omega^2xydx \text{ következik; s így viszont:}$$

$$2K\int\frac{dy}{y} = -\gamma\omega^2\int xdx$$

Ha x=0 és x=x az egészlés határai x-re nézve, akkor y=a és y=y azon határok y-ra nézve s így tehát:

$$2K\int_a^y \frac{dy}{y} = -\gamma\omega^2\int_0^x xdx\text{; miből}$$

$$2K \log.\text{ nat. } \left(\frac{y}{a}\right) = -\frac{\gamma\omega^2x^2}{2} \text{ avagy:}$$

$$(9)\ldots\ldots \quad y = ae^{-\frac{\gamma\omega^2x^2}{4K}}$$

mint a keresett vázvonal egyenletéül következik, melynek mértani természete az elébb talált egyenletével összeesik.

De ámbár a (8) és (9) egyenlet mértanilag szólva egyfajzatú vonalak is, nagy azért mégis köztük a különbség. Mert a (9) egyenlet négyzetét:

$$y_1{}^2 = a.^2e^{-\frac{\gamma\omega^2x^2}{2K}} \text{ a (8)-kal egybevetvén:}$$

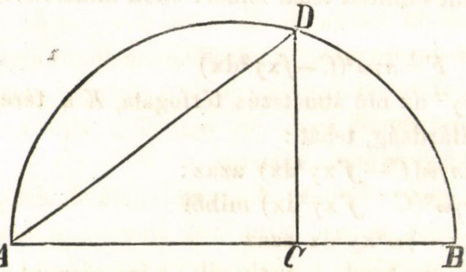
$$y = ae^{-\frac{\gamma\omega^2x^2}{2K}} \text{ látjuk miszerint:}$$

$$y_1{}^2 : y = a^2e^{-\frac{\gamma\omega^2x^2}{2K}} : ae^{-\frac{\gamma\omega^2x^2}{2K}} \text{ azaz}$$

$$y_1{}^2 : y = a : 1 \text{ miből}$$

(α)...... $y_1{}^2 = ay$ lesz; y_1 félmérő tehát y és a-nak mértani középarányosa.

Még inkább szembetünövé lesz a különbség a következő módon :



AB a szomszéd ábrában legyen ADB félkör átméröje, és AD egy a félkörben tetszőleg húzott húrja; D-ből AB átméőre DC merőlegest bocsátván álland ez arány:

$AC : AD = AD : AB$ vagy ez egyenlet :

$AD^2 = AC.AB$

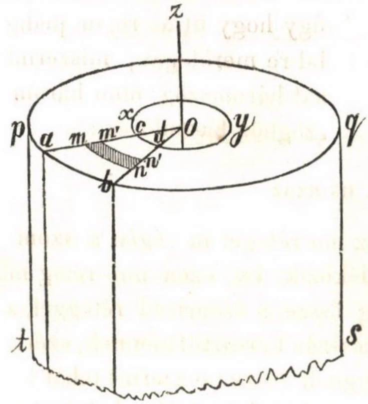
Ezen egyenletben $AB = a$, $AC = y$, és $AD = y_1$-nak tévén, akkor az $y_1{}^2 = ya$ egyenletté változik át, mely tehát (α)-val összeesik. y_1 ; y és a közt tehát ugyanazon viszony áll, mint AD, AC és AB közt. Mivel pedig AD mint ADC háromszög átfogója (hypotenusa) mindig nagyobb AC-nél ; azért y_1 is mindig nagyobb y-nál, azaz az egyenszögös átmetszésü kar y rendesei mindig kissebbek mint a körmetszésü kar y rendesei. A kettő közöl tehát az első anyag szükségletre nézve takarékosabb.

Egyébiránt az említettekből látható, miszerint, bár hogy járunk is el, a keletkezendő eredmény mindig egy a (8) egyenlettel rokonos egyenletre vezet. S így tehát :

$y = a\, e^{-bx^2}$ egyenlet magában foglal minden itt gondolható külön esetet.

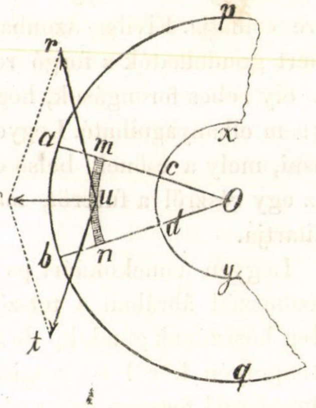
8.

A gépészetben mint pl. némely vízipörgetyűnél nem ritkán köridomú csövek, melyek belső oldalai valamely nyomásnak tétetnek ki, sebes forgatásnak vettetnek alá. Itt tehát a cső részint a belső nyomást, részint saját anyagának futerejét tartja ki. Gyakorlatilag ugyan közönségesen a gépész nem veszi tekintetbe a futerő hatását, részint azért, mivel az előkerülő forgatások korántsem oly nagyok, hogy a futerő szembetünő volna, részint azért, mivel a gépész az ily csövet úgy is kelletinél két- és többszerte erősebbre csinálja. Elvileg azonban ezen eljárás nem helyeselhető, mert gondolhatók s forgó röpentyüknél valóban elő is jőnek oly sebes forongások, hogy az általok ébresztett futerő sehogy sem elhanyagolható. Legyen azért szabad azon viszonyt keresni, mely a csőnek belső és külső félmérője közt fenáll, ha az egy részről a futerőt, más részről valamely belső nyomást kitartja.



Legyen ennekokáért ps a szomszéd ábrában a tetszőleg hosszúnak gondolt, de zo tengelyén körül ω szögisebességgel forongó cső, melynek anyagi tömöttsége γ, szilárdsága K. xy belső oldalára hasson p a téregységre vonatkozó nyomás. Messük ezen csövet ao és bo félmérői szerint 2 a zo tengelyen keresztül fektetett sík által, de úgy hogy aob=cod szeglet $=\varphi$ csak parányi kis szeglet oly formán, hogy ab ív mintegy húrjával összeeső ívnek nézhető. Húzzuk továbbá mo és m_1o félmérőkkel központosan o-val az mn és m'n' köríveket, de úgy, hogy mm' hézag csak határtalan kis része az mo=r félmérőnek; akkor ezen 2 körív közé szoríttatik egy határtalan kis mm'n'n terület. Gondolhatunk most magunknak egy azon hahatártalan kis területnek megfelelő, párhuzamosan zo tengelyhöz az egész csöven keresztül menő réteget; mm' hézagot dr-nek, ao és bo félmérőket a és b-nek s a cső hosszát l-nek nevezvén, akkor :

$r\varphi$ az mn ív hossza
$r\varphi$ dr az mm'n'm terület térfogata, tehát
$lr\varphi dr$ az ezen területnek megfelelő réteg köbfogata, s azért
$\gamma l\omega^2\varphi r^2 dr$ azon réteg futereje.



Legyen már most palq xody a szomszéd ábrában a cső belső és külső kerülete és o a tengelye, továbbá us az mn réteg elébb megtalált futereje; akkor ruts egyenközény szerint us erő ut és ur oldal-erőkre oszlik fel úgy hogy ut ac-re, ur pedig bd-re merőleges; miszerint sut háromszög mno háromszöghöz hasonló és:

$$ut = \frac{1}{\varphi}.\ us \text{ azaz}$$

$tu = \gamma\omega^2 lr^2 dr$; mely erő az mn réteget m végén a szomszéd rétegtől elszakítani szándékozik. De ezen mn réteg m végén dr szélesség szerint függ össze a szomszéd réteggel, s mivel ezen rétegek a cső egész hosszán keresztül mennek, azért:

ldr terület terjelmével függnek össze; e szerint tehát:

Kldr erővel állhatják meg a szétszakítást. Minek folytán:

$K ldr - \gamma l\omega^2 r^2 dr$ azon erő melylyel ezen réteg m-beni szilárdsága a futerőt felülmúlja, melyet tehát ezen egyes réteg a belső nyomás legyőzetésére még fordíthat.

Általmenvén azután az egyes rétegtől az egész csőkiszelvényre, kapjuk:

$P = l\int(K - \gamma\omega^2 r^2)\,dr$; s mivel ao és co azaz a és b a cső kiterjedési határai, azért r=a és r=b a végre hajtandó egészlés határai, tehát:

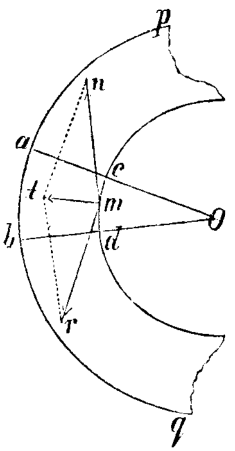
$$P = l\int_b^a (K - \gamma\omega^2 r^2)\,dr \text{ azaz:}$$

$$P = Kl(a-b) - \gamma\omega^2 l\left(\frac{a^3}{3} - \frac{b^3}{3}\right)$$

Más részről az abdc csőkiszelvény belső felületének szélessége a cd ív hossza, s azért ezen a cső egész hosszán keresztül nyúló, ca széles felület térfogata:

$b\varphi l$ lesz, s következőleg:

$pb\varphi l$ azon a kiszelvényre eső belső nyomás.



Ha már most pabq a szomszéd ábrában a forongó cső, acdb a kérdéses csőkiszelvény és mt azon cd-re eső belnyomás, akkor ez tnmr egyenközény szerint mn és mr oldalerőkre oszlik, melyek vonatkozólag bd- és ca-ra merőlegesek, úgy hogy tmr háromszög cdo háromszöghöz hasonló és hogy :

$$\text{mr} = \frac{1}{\varphi}\ \text{tm azaz}$$

$$\text{mr} = \frac{1}{\varphi}.\text{pbl}\varphi = \text{pbl}$$

azon ac-re müködő feszület.

Hogy tehát a cső mind a futerőnek mind ezen belnyomásnak megfelelhessen, szükséges :

hogy .... $\text{pbl} = K\text{l}(\text{a}-\text{b}) - \gamma\omega^2\text{l}\left(\frac{\text{a}^3}{3} - \frac{\text{b}^3}{3}\right)$ azaz hogy :

$$\text{pb} = K(\text{a}-\text{b}) - \frac{\gamma\omega^2}{3}(\text{a}^3 - \text{b}^3) \text{ legyen, miből tehát}$$

utoljára :

$$(10)\ldots\ldots \frac{\gamma\omega^2}{3}\text{a}^3 - K\text{a} + (\text{p}+K)\text{b} - \frac{\gamma\omega^2}{3}\text{b}^3 = 0 \text{ következik.}$$

Ha a belnyomás a cső egész hosszában állandóan megmarad, akkor a és b értéke is a cső minden átmetszésében állandóan ugyanaz ; de ha ezen belnyomás a cső hosszával megváltoznék, akkor a cső vagy kül- vagy belső félmérője is megváltoznék. Tévén például, hogy a belnyomás, mint víznél is tapasztalhatnánk, az illető átmetszés távolának a legfelső átmetszéstől aránylagos, azaz tévén hogy :

$$P : P_1 = \text{l} : \text{z tehát :}$$

$$P_1 = \text{p} = \frac{P.\text{z}}{\text{l}} = \frac{P}{\text{l}}.\ \text{z} = \text{mz, akkor}$$

$$\frac{\gamma\omega^2}{3}\text{x}^3 - K\text{x} + (\text{mz}+K)\text{b} - \frac{\gamma\omega^2}{3}\text{b}^3 = 0$$

a cső külső vázvonalának egyenlete, ha a belső ; — és

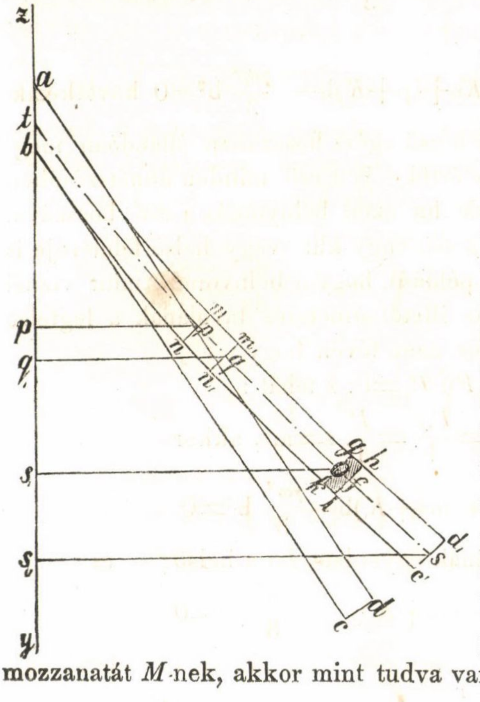
$$\frac{\gamma\omega^2\text{a}^3}{3} - K\text{a} + (\text{mz}+K)\text{y} - \frac{\gamma\omega^3}{3}\text{y}^3 = 0$$

annak belső vázvonala, ha a cső külső félmérője állandónak tekintetik; és ezen egyenletek szerint szerkezendők a forgóröpentyü tokja, a Whitelaw-féle pergetyü emelőcsöve, vagy a Fontaine-féle pergetyü gyürüje stb.

9.

Eddig a futerő csak a nyújtási szilárdságra hatott, mely esetekben a hányolás még elég egyszerünek mutatkozik. De vannak esetek, melyekben a futerő a hajlítási, az ösznyomás elleni — vagy a csavarás elleni szilárdságot és az ezek vegyes ösztételeit megtámadja. Az ily esetekben a hányalás nem mindig mutatkozik oly egyszerünek mint eddig. Nem ritkán, majd csaknem közönségesen, egy meg nem fejthető külzeléki egyenletre akadunk azzal. Mint mindjárt 2 példában látni fogjuk.

Első példaként legyen abcd a szomszéd ábrában egy a zy egyenessel mint tengelyével szilárdan összekötött körátmetszésü rúd vagy kar, melynek anyagi szilárdságát K, tömöttségét γ és zy körüli sebességét ω-nak nevezzük; akkor ezen zy tengelyt körülfutó test meggörbül és körülbelül abc′d′ idomot veszi fel.



Legyen már most tps a meghajúlt kar semleges rétege; és ezen kart p-ben mn szerint metszvén, legyen W ezen átmetszés hajlítási mozzanata (Biegungsmoment), és ts görbének p pontbani görbületsugara (Krümmungshalbmesser) ϱ; továbbá nevezzük a meghajtott test ruganyossági módítóját (Elasticitäts modul) ε-nek, és az ezen kanyarulást okozó futerőnek p pontra vonatkozó mozzanatát M-nek, akkor mint tudva van:

(11) . . . . . $M\varrho = W\varepsilon$

Ezen képletben tehát *M* a futerő mozzanata p pontra vonatkozva. Legyen már most yklh a forongó kar valamelyik határtalan kis szeletkéje, és gk átmetszés térfogatának szorzata *Kl* avagy o*f*-el ezen szeletkének köbfogata. Más részről o*f* nem egyéb mint ts görbének egy határtalan kis ívecskéje: nevezvén azt ds-nek s a kar gk átmetszését *f*-nek, akkor;

f.ds a gl szeletkének tartalma, és

γfds annak tömege.

Ezen kis tömeg oo, félmérővel járja körül zy tengelyt, nevezvén oo, y-nak, valamint to_1 x-nek, akkor:

$r\omega^2 f$yds azon kis tömeg futereje, mely erő oo, irány szerint lép fel, tehát p pontra nézve p_1o_1 emeltyűkaron működik. p pont rendesét pp_1 y_1-nak és p_1t x_1-nek nevezvén, akkor amaz erő emeltyűkara $p_1o_1 = to_1 - tp_1$ azaz $= x - x_1$ s így tehát szeletkénk futerejének p pontra vonatkozó mozzanata =

$\gamma\omega^2 f(x - x_1)yds$; általmenvén pedig az egyes szeletkéről az egész s-től p-ig elterjedő karrészre, kapjuk:

$\gamma\omega^2 f(x - x_1)yds + C$ mely képletben x és y ugyan s függvényének nézetik, de minthogy $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)}$

azért képesek vagyunk (s) változót az egészletből eltávolítni, és az egészlést x-re vonatkozó egészlésnek tekinteni. x-re nézve azonban az egészlés határai s_1t és p_1t azaz h és x_1 következőleg a keresett mozzanat:

$$M = f\gamma\omega^2 \int_{l_1}^{l_1} (x - x_1)y\frac{d\varphi}{dx}\,dx$$

vagy rövidebben

$$= a \int_{x_1}^{l_1} (x - x_1)y\,\frac{ds}{dx}.\,dx$$

Továbbá, mint szinte tudva van

$$\zeta = \frac{\sqrt{\left(1 + 1\,\frac{dy^2}{dx}\right)^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

tehát p pontra nézve:

$$\zeta_1 = \frac{\left((1+\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y_1}{dx^2}}$$

mely M és ζ-nak megfelelő értékek (11)be tétetvén :

$$(12).\ \ldots\ a.\frac{\left(1+\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y_1}{dx^2}}\int_{x_1}^{h}(x-x_1)y\frac{ds}{dx}.\,dx$$

$$=a\,\frac{ds_1{}^{3}|_2}{dx_1 d^2y_1}\int_{x}^{h}(x-x_1)y\frac{ds}{dx}.\,dx = WE$$

Mely egyenlet további kezeltetése meggyőzhetetlen akadályokra talál. Hogy ezen akadályokat némileg bemutassuk, visszatérünk a (11) egyenletre, melyben M által röviden egy egészlet jeleltetik. Ezen egészletben rejlik az x és y közti függvényesség; minthogy pedig épen ezen függvényesség határozza meg a ts görbét, szükséges azt kikapni, mi azonban itt csak az egészlési jel eltávolításával, tehát külzelés útján elérhető.

Visszapillantván a (11) egyenletre könnyen belátni, hogy $M\varrho$ szorozmány külzeléke mindig a semmivel egyenlő, mivel t. i. mind W mind E az egész karra és annak minden meggörbülésére nézve állandó egy érték, ennek folytán tehát :

$$d(M\varrho)=0$$

Az itt követelt külzelésnél 2 külön eset különböztetendő Lehet, hogy a szorzat mindkét tényezője változható, de lehet az is, hogy az egyik t. i. ϱ állandó. Válaszszuk a kettő közöl először az utolsót. Legyen tehát μ állandó ; akkor :

$d(M\varrho)=\varrho dM=0$ s így tehát vagy

$\varrho=0$; vagy

$dM=0$, és mivel a kettő közöl az első féltétel a görbének csak egy pontjára vonatkozhatik, azért szükségkép csak a másodikat választhatjuk. De mivel :

$$M=a\int_{x}^{h}(x-x_1)y\ \frac{ds}{dx}\,dx$$

$$=a\int(x-x_1)y\ \frac{ds}{dx}\,dx+C \text{ azért megfordítva :}$$

$$dM = a(x-x)y\frac{ds}{dx}.\,dx, \text{ s így tehát vagy:}$$
$$x - x_1 = 0;\ \text{vagy:}$$
$$y = 0;\ \text{vagy}$$
$$\frac{ds}{dx}\,dx = 0;$$

mely egyik sem vezet czélunkra.

Ha ellenben az említett szorzat mindkét tényezője változó akkor:

$$d(M\varrho) = \varrho\, dM + M d\varrho = 0$$

Mely egyenletben azonban dM-nek egészen más értelme és értéke van, mint elébb. Mert ϱ értéke csak úgy változhatik meg, ha ezen ϱ-ra vonatkozó p pontról a görbének más q pontjára átmegyünk; következőleg M-nek változhatósága is csak hasonló jelentéssel bírhat, és kell bírnia. Így tehát dM már nem a tetszőleges gl szeletkének futerejes mozzanatát hanem M-nek változmányát jelenti, melylyel M értéke apad ha ts görbén p pontról egy másik q pontra általmegyünk.

Hogy dM ezen értelemben vett értékét meghatározhassuk, legyen $m_1 n_1$ egy ts görbének q pontján keresztül fektetett új átmetszet. Nevezzük $qq_1 = y_2$ és $q_1 t$ x_2-nek, akkor mivel p pontra nézve:

$$M_1 = a\int_x^h (x-x_1)y\frac{ds}{dx}.\,dx$$

$= a\int_{x_1}^h (x-x_1)yds$ volt, q pontra nézve hasonlóképen:

$M_{,,} = a\int_{x_1}^h (x-x_2)yds$ lesz; honnét M növekedése

$$\triangle M = M_{,,} - M_1 = a\int_{x_2}^h (x-x_2)yds - a\int_{x_1}^h (x-x_1)yds$$

$$\text{De: } \int_{x_2}^h (x-x_2)yds = \int_{x_1}^h yds + \int_{x_2}^{x_1} (x-x_2)yds;\ \text{tehát:}$$

$$\triangle M = a\int_{x_1}^h (x-x_2)yds - a\int_{x_1}^h (x-x_1)xds + a\int_{x_2}^{x_1} (x-x_2)yds$$

Mivel továbbá $x - x_2 = x - x_2 + x_1 - x_1 = (x-x_1) - (x_2 - x_1)$ azért:

$$\int_{x_1}^{h}(x-x_2)yds = \int_{x_1}^{h}[(x-x_1)-(x_2-x_1)]yds$$

$$\int_{x_1}^{h}(x-x_1)yds-(x_2-x_1)\int_{x_1}^{h}yds, \text{ minek folytán :}$$

$$\triangle M = a\int_{x_1}^{h}(x-x_1)yds - a(x_2-x_1)\int_{x_1}^{h}yds$$

$$-a\int_{x_1}^{h}(x-x_1)yds + a\int_{x_2}^{x_1}(x-x_2)yds \text{ azaz :}$$

$$\triangle M = -a(x_2-x_1)\int_{x_1}^{h}yds + a\int_{x_2}^{x_1}(x-x_2)yds \text{ avagy:}$$

$$\nabla M = -a(x_2-x_1)\int_{x_1}^{h}yds\ a\int_{x_1}^{x_2}(x-x_2)yds$$

Ha már most q pont folytonosan p ponthoz közelednék, akkor pq ív s vele együtt p_1q_1 vetülete határtalan kisebbülésnek lesz alá vetve. De minél közelebb esik egymáshoz a két pont, annál kisebb lesz az M_1 és M_{11} közti különbség, s belátni hogy p_1q_1 vetület határtalan kisebbülésénél $\triangle M$ is határtalan kissebbülésre megy által. Tévén tehát hogy végre már $x_2-x_1=dx$ azaz $x_2=x_1+dx$, akkor :

$$dM = -adx\int_{x_1}^{h}yds - a\int_{x_1}^{x_1+dx}(x-(x_1+dx))yds$$

avagy rövidebben :

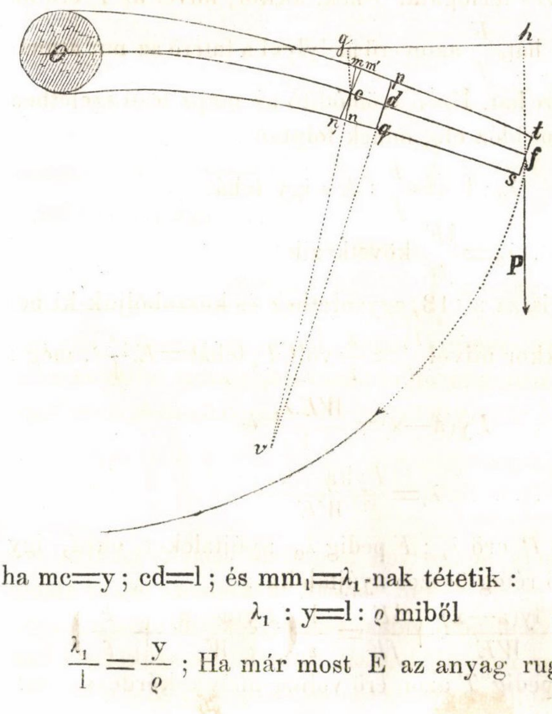
$$dM = -adx\int_{x_1}^{h}yds - a\int_{x_1}^{x_1+dx}(x-x_1)yds$$

Miből egyszersmind látjuk, hogy az egészlés jele bár külzelés útján jártunk is el, el nem tűnt, s azért tehát az ezen egészletben rejlő x és y közt fenálló függvényességét se kaphatjuk ki.

10.

Ha valamely tengelyén forgatható emeltyűskarra erő hat, akkor ezen emeltyűskar, hacsak más ellenző erő az elébbi erővel egyensúlyban nem volna, tengelye körül forogni kezd. Hogy a forgó kar azon erő hatását kitarthassa, szükséges lesz átmetszésének kellő nagyságot adni. Hogyha pedig a kar forgása sebességre kap, akkor nem csak a forgást okozó erő, hanem a forongó anyag futereje is befolyással bír a kar szilárdságára és megkanyarulására.

Keressük most azon emeltyűkar vázvonalait, mely kiterjedésének minden átmetszésében mind a forgatást előidéző erőt, mind saját anyagának futerejét egyaránt kitartja. Legyen ennekokáért P az erő, mely a forgatást eszközli, s ω a végre hajtott forgatás szegleti sebessége. Legyen továbbá atsb a szomszédos lapon szemlélhető ábrában a kérdéses kar, melynek f végére hat P erő, minekokáért a kar is az o pontot körülfutja. Ocd$f$ legyen a megkanyarodott karnak semleges rétege, és mn, pq két tetsző de a legközelebbi szomszédságban egymás mellet levő átmetszés, melyek mindegyike síkjával merőleges ocd$f$ rétegre; húzván m_1n_1 c ponton keresztül, akkor mp az mpqn testi szelvény legnagyobb szétnyújtott rétege és nq a legjobban összenyomott rétege, és mm_1 a legnagyobb nyújtalék; nn_1 pedig a legnagyobb össznyomás.



Hoszabbítsuk mn és pq síkokat míg v-ben egymást metszik, akkor cv=ϱ az oc$f$ görbének c ponjábani görbületsugara és cdv háromszög mm'c-höz hasonló lesz, úgy hogy $mm_1 : mc = cd : cv$ vagy

ha mc=y; cd=l; és $mm_1=\lambda_1$-nak tétetik:

$$\lambda_1 : y = l : \varrho \text{ miből}$$

$\frac{\lambda_1}{l} = \frac{y}{\varrho}$; Ha már most E az anyag ruganyossági módítója (Elastizitäts-Modul) és T_1 azon erö mely $m_1 p$ rétegben az mm′ nyújtalékot elöidézheti, akkor mint tudva van :

$$\frac{T_1}{E}=\frac{\lambda_1}{l}=\frac{y}{\varrho}$$

Más részröl P erő c pontra nézve gh emeltyüskaron müködik; tévén og=x és oh=a úgy hogy gh=oh—og=a—x, akkor :

P(a—x) ezen erö d pontra vonatkozó mozzanata; következöleg :

$P(a-x)=\frac{WE}{\varrho}$, ha W az mn átmetszés hajlitási mozzanata (Biegungsmoment) avagy mivel $\frac{T_1}{E}=\frac{y}{\varrho}$ tehát $\frac{T_1}{y}=\frac{E}{\varrho}$

$$P(a-x)=\frac{W.T_1}{y} \text{ azaz :}$$

(13) . . . . . $Py(a-x)=WT_1$

Továbbá nevezzük az mnts karrésznek futerejét F-nek, s az mn átmetszés térfogatát f-nek, akkor, mivel az F erö az egész f térségre hat, $\frac{F}{f}$ azon erö melylyel a futerö az mn átmetszés téregységére hat. Ezen erömódító az mnpz testi szeletben új λ_2 nyújtalékot idéz elö, minek folytán :

$$\lambda_2 : l = \frac{F}{f} : E \text{ s így tehát :}$$

(14) . . . . $\lambda_2=\frac{lF}{f\varepsilon}$ következik.

Térjünk vissza a (13) egyenlethez és küszöböljük ki belöle T_1 eröt; akkor mivel $\frac{T_1}{E}=\frac{\lambda}{l}$ volt, T_1 tehát $=E.\frac{\lambda}{l}$, még :

$$Py(a-x)=\frac{WE.\lambda_1}{l} \text{ és}$$

(15). . . . . . . $\lambda_1=\frac{Pyl(a-x)}{WE}$

Minthogy P erö λ_1 ; F pedig λ_2 nyújtalékot okoz, igy az mp legszélsö réteg összes nyújtaléka :

$$\lambda_1+\lambda_2=\frac{Ply(a-x)}{WE}+\frac{lF}{fE}=\frac{l}{\varepsilon}\left(\frac{Py(a-x)}{W}+\frac{F}{f}\right)$$

Hogyha pedig T azon erö volna, mely a kérdéses testben egy a ruganyossági határt elérő λ nyujtalékot előhozza, akkor $T : E = \lambda : 1$, miből:

$$\lambda = 1 . \frac{T}{E}$$

Hogy tehát a keresett kar szilárdsága a két erő igényeinek megfelelhessen, szükséges hogy:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \text{ azaz, hogy:}$$

$$1 \frac{T}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\left(Py\frac{a-x}{W} + \frac{F}{f}\right) \text{avagy}$$

$$(16) \ldots \; T = \frac{Py(a-x)}{W} + \frac{F}{f}$$

Ezen egyenletben F az s-től c-ig érő karnak futereje, f az mn átmetszés térfogata és W ugyanannak hajlítási móditója. A két utolsónak értéke az mn átmetszés idomától függ; tegyük különlegesítés példájául hogy mn átmetszés kör; akkor mivel mc=y:

$$f = \pi y^2; \text{ és } W = \frac{\pi y^4}{4}.$$

Továbbá mivel πy^2 az mn területe, $\pi y^2 dx$ az mpgc testiszelet köbfogata, és γ anyagi tömöttségnél $\pi\gamma y^2 dx$ annak tömege, következőleg, mivel ezen tömeg og félmérővel futja körül az o pontot: $\pi\gamma\omega^2 xy^2 dx$ annak futereje, és az egyes szelvényről az egész testre általmenvén $F = C - \pi\omega\gamma^4 \int xy^2 dx$, s ha f, W és F értékét (16) átviszszük, akkor:

$$T = \frac{4Py(a-x)}{\pi y^4} + \frac{C - \pi\gamma\omega^2 \int xy^2 dx}{\pi y^2}, \text{ avagy:}$$

$$\pi T y^2 = 4P\frac{a-x}{y} + C - \pi\gamma\omega^2 \int xy^2 dx \text{ lesz.}$$

Az utolsó egyenletet azután az égészlés jelének kiküszöbölése végett külzelvén:

$$2\pi Ty\frac{dy}{dx} = -4P\left(\frac{1}{y} + \frac{a-x}{y^2}\frac{dy}{dx}\right) - \gamma\omega^2\pi xy^2 \text{ avagy:}$$

$$\left(1\pi Tx + \frac{4P(a-x)}{y^2}\right)\frac{dy}{dx} = -\frac{4P}{y} - \pi\gamma\omega^2 xy^2$$

egyenletre jövünk, miből végre:

$$(17) \ldots [2\pi T y^3 + 4P(a-x)]dy + [\pi\gamma\omega^4 xy^2 + 4Py]dx = 0 \text{ lesz.}$$

Mely külzeléki egyenlet azonban közönséges és közvetlen úton fel nem oldható. Egészlésére kétségkivül csak egészleti szorzók segitségével jöhetünk, így tehát ezen kérdés véges eldöntése csak a jó szerencsétől függ.

Alúlírt ezennel félbenszakasztja nyomozását, azon reményben, hogy azt más alkalommal újra tovább folytathassa. Ő ugyan már 1857-ben a várnoki bizottmány által felszólíttatott nyomozásait közrebocsátni. Hogy azt akkor nem tevé, annak oka csak az volt, hogy több évi fáradozása gyümölcsét mint magyar csak nemzete s nem idegenek nyelvén akará a nyilvánosságnak általadni. S mivel az akkori foglalatosságai közt ezen óhajtása valósitható nem vala, azért kényszerítteték azt jobb időre halasztani.

AZ ELMÉLETI VEGYTAN FÖLADATÁRÓL ÉS JELEN ÁLLAPOTÁRÓL.

DR. THANN KÁROLYTÓL.

ELSŐ ÉRTEKEZÉS.

Midőn e föliratnak megfelelő értekezésem kidolgozásába fogtam, nem ismertem félre azon nagy nehézségeket, melyeknek legyőzésével küzdenem kell, ha a kitüzött czélt csak megközelítni akarom is; mert egyrészt azon eszmék, melyek jelenben a vegytan irányadói, oly újak, hogy azoknak következetes alkalmazása a már meglevő és naponta óriási mértékben növekedő tapasztalati adatokra, az utóbbiaknak gondos összeállítását igényli; másrészt azonban, mivel a müvelt népek összes vegytani irodalmában, legalább tudtommal, alig létezik oly mü *), mely a vegytani jelenségek általános szempontbóli fölfogását tárgyalná, vagy legalább olyan, mely az e czélra használható újabb adatok tökéletes gyüjteményét tartalmazná,

*) Kekulé A. müve „Lehrbuch der organischen Chemie 1859." melynek eddig csak 1-ső füzete jelent meg, leginkább a széneny vegyületeire vonatkozik.

úgy hogy kútforrásúl leginkább csak a különféle vegytani folyóiratokban szétszórt egyes értekezések használhatók. Ezekhez járúl még, hogy jelen terhes hivatalom időm legnagyobb részét teljesen igénybe veszi.

Ha ezen nehézségek daczára bátorkodom szaktudományomat illető értekezéseim elsejét a tekintetes Magyar Tudományos Akademia elébe terjeszteni, hazafiúi kötelességemnek óhajtok általa megfelelni, egyszersmind azon reménynyel kecsegtetvén magamat, hogy dolgozatom gyarlóságát a fönebbi körülmények eléggé fogják menteni.

A tárgy terjedelmessége miatt dolgozatom több értekezést fog igénybe venni, melyeknek elseje a jelen sorokban a vegytan föladatát valamint a tömecs (molecule) és parány (atome) fogalmát tárgyalja.

Alig létezik tudomány, melynek czélja történetének különféle korszakaiban oly változatos, és egymástól s valódi föladatától annyira elütő lett volna, miként a vegytané, miről történetének legfölületesebb átpillantása által is meggyőződhetünk.

Az ó korban ámbár számos vegytani tények ismeretesek voltak, ezeknek valamely határozott czél elérésére való összeállításáról szó sem lehet; a IV. századtól a XVI. elejéig, az úgynevezett „alchymia“ korszakában, a vegytan különféle alakban czéljáúl tüzte ki az arany mesterséges készitését.

Ezen időszaktól kezdve a XVII. század közepéig a vegytan czélja a betegségek magyarázata és gyógyítása volt; ennyi századon keresztül tehát idegen czélok elérésére szolgált, és csak a XVII. század közepén az úgynevezett „phlogistikai elmélet“ korszakának keletkeztével ébredt benne föl saját czéljának sejtelme, mely sok viszontagságos átváltozások után, mai föladatának megismerésévé fejlett ki.

Mielőtt azonban e föladat közelebbi kijelölésére átmennénk, vessünk egy pillanatot azon fogalmakra, melyeket a mai természettudomány az anyag és az erő mivoltáról alkotott magának.

Az elemző vegytan nehány évtized alatt kifejtett ernyedetlen szorgalmának köszönhető azon eredmény, hogy a bolygónk fölületét képező véghetetlen változatosságú anyagi testek mintegy hatvan úgynevezett egyszerütest- vagy elemből leszármaztathatók, azaz ezen testek akármelyike, vagy egyike ezen elemeknek, vagy pedig több elemek vegytani egyletének tekinthető, és az eddig ismert vegyműtételek által oly alkatrészekre bontható, melyek az említett elemek sorába tartoznak; vagy végre egy vagy több vegyület, illetőleg elem keveréke.

Az elem tapasztalati fogalma tehát következő : a vegytani elem oly test, mely semmiféle ismert vegyműtétel által különnemű alkatrészekre nem bontható. Természetes, hogy e fogalom igen relatív, és a vegytani ismeretek mindenkori állapotja szerint változó. E század elején még a káli, natron, a mész és egyéb élegek elemeknek tartattak, míg 1807-ben a nagy Davy-nek sikerült megmutatni, hogy mindezek sajátságos fémeknek élenyvegyületei.

Hogy ezen elemek anyaga valóban egyszerű-e? vagy idővel különnemű alkatrészekre bontható-e? vagy pedig valamely közös eredeti anyagra visszavezethető-e? az eddigi tapasztalatokból véglegesen eldönteni nem lehet; de az elemek minőségi különneműsége nem kényszerít bennünket arra, hogy azoknak elvont anyagát (azaz erők nélkül képzelt, úgyszólván holt anyagát) lényegesen különneműeknek tekintsük; söt némely tapasztalati adatoknak, (melyekről későbbi értekezéseimben szólandok) inductív egybevetése után nem látszik valószinűtlennek, hogy abstract anyaguk azonos.

A tudomány az ekként elvont anyagot, mint valamely tökéletesen szenvedőleges (passiv) és hatásnélküli tétlen lényeget fogja föl, mint ilyennek nem szabad neki (az anyagnak) minőleges különneműséget tulajdonítanunk, ha különnemű anyagokról beszélünk, a különneműséget mindenkor a testek különböző hatásából következtetjük, melyet azok egymásra és érzékeinkre gyakorolnak; de a tiszta anyag maga nem gyakorol hatást, hanem azon erők, melyekkel az föl van ruházva; látható tehát, hogy ebből nem magának az anyagnak, hanem csak az egyes anyagi test fölött uralkodó erőknek különneműségét következtethetjük.

E szerint *a vegytani elemeket oly anyagoknak tekinthetnők, melyek változatlan erőkkel vannak ellátva.*

Természetes, hogy a valóságban az anyag fogalmát mindig az erőével párosítva kell alkalmaznunk, mert csak ott tapasztalunk anyagot, a hol egyszersmind erő van, s viszont.

Tapasztalásként természeti erő csak ott nyilatkozik, a hol több (legalább két) külön vált anyagi tömeg együtt létezik; ezen együttlét változásától függ magának az erőnek változása is; mivel azonban anyagi (változhatatlan) részekből alkotott rendszerben, csakis térbeli változás (azaz mozgás) lehetséges; természetes hogy viszont az erő végelemzetben csakis mozgató erő lehet, melynek hatása az anyag térbeli viszonyaitól függ. — Azon erőt, melyet két anyagi tömeg együttléte idéz elő, föl kell bontanunk legkisebb részecskéiknek azaz anyagi pontjaiknak erejökre. Mivel két pont között a kölcsönös távolságon kivül egyéb térbeli viszony nem létezik, az eddigiekből önkényt foly az újabb erőmütan következő tétele: *Az erő végelemzetben csak olyan lehet, mely az anyag részeinek vonzását vagy ellöketését (repulsio) eszközli;* azaz köztük egyedül távolsági változásokat, egyszóval mozgást idézhet elő. — *Az erő hatályossága (intensitas) az anyag részeinek kölcsönös távolságától függ.*

Ha az anyagi testet és részecskéinek kölcsönös hatását ekkép fogjuk föl, világos miszerint az elemek minöleges különnemüsége legközelebb az anyag különböző megsürüdési fokának (condensatio) tulajdonitandó, miként ezt újabb időben többek közt Dumas *) a paránysúlyok közti törvényszerüségből következteté. Természetes, hogy e megsürüdés nem magokra a holt anyag végső parányaira, hanem ezeknek a térbeni szétosztására vonatkozik. — Ha ez bebizonyítható, akkor az anyag minősége (qualitas) mennyiségre (quantitas) vezethető vissza.

E hypothesis csak igen durva vázlat, és ily eredeti alakban nem elégséges a testekről ismert tények megmagyarázására. Ilynemü okoskodások, valamint a fönebbi abstractiók, nem is igényelhetnek egyéb méltánylást, mint a mennyiben arra szolgálnak, hogy útat nyissanak az elemző mennyiségtan világosságot terjesztő hatalmának a vegytani jelenségek

*) Dumas: Annales de chimie et de physique 1859. (3). LV. 129.

sötét tömkelegébe, mely a számtalan hangyaszorgalommal gyüjtött tényeknek daczára, még nem hódíthatá meg e tért, melynek oka nagyrészt a vegytan eddigi irányában rejlik, mely valódi czéljához egyenesen nem vezethet. A vegyészek nagyobb része t. i. egyrészt új vegyületek előállításával foglalkozik, mely némely helyeken csaknem gyárias alakban űzetik; másrészt a testek kölcsönös vegyhatásából elvont, egyes analogiákra épített, de szilárd alap nélküli hypothesisek fölállításával foglalkozik, melyek az önkénynek, az egyéni fölfogásnak alárendelvék, és a csalódástól ritkán mentek; a nélkül hogy az anyag végső részei fölött uralkodó erők mennyiségi viszonyai tekintetbe vétetnének.

Ezen elvek szerint a vegytan föladata, kiszámíthatatlan sokaságú vegyület létrehozása, és ezeknek az említett analogiákra alapított áttekinthetetlen rendszerbe iktatása lenne. Hogy ez úgyszólván semmi elméleti eredményre, és a vegytani jelenségeknek egységes fölfogására nem vezethet, könnyen belátható; ámbár az elméleti és iparos vegytannak egyaránt jó szolgálatokat tehet, amannak végső föladatául nem tekinthető, és általa a vegytan bizonyára nem fog szabatosságot és magyarázó jellemet nyerni.

A vegytannak, legalább mint természettudománynak, föladata sokkal magasabb és egyszerűbb, t. i. *azon törvények kutatása, melyek által az egyes vegytani jelenségek általános szabályokra visszavezethetők és ezekből viszont meghatározhatók.*

A vegytan körébe tartozó jelenségek szabatos meghatározását, s különösen a szorosabb értelemben vett természettani (physikai) jelenségektől való szigorú elkülönözését, alább kísérlendem meg, a tömecs (molecule) és parány fogalmának meghatározása után; e szerint és a fönemlítettek nyomán közelebb meghatározva, az elméleti vegytan föladata:

A vegytani jelenségek visszavezetése az idő szerint változatlan vonzó és taszító erőkre, melyeknek hatályossága a távolságtól függ.

E még igen messze levő czél, a kisérlet és a mennyiségtannal párosúlt elmélet közös összeműködése által érhető el. — A kisérleti vizsgálódás körébe tartozik azon törvények fölkeresése, melyek által az egyes vegytani jelenségek általános szabályokra vonhatók. — Az elmélet hivatása a jelenségek látható hatásaiból azoknak láthatatlan okait kutatni, és az okság törvénye szerint fölfogni. E kutatásra följogosít bennünket azon elv, mely szerint: *minden változásnak a természetben meg van a maga oka.* Maga a jelenség legközelebbi oka változatlan vagy változó lehet; ez utóbbi esetben ugyanazon elv nyomán ezen változásnak okát keressük, és így tovább, míg végre oly okokra akadunk, melyek változatlanok, azaz minden időben egyenlő viszonyok közt ugyanazon hatást hozzák létre.

A vegytan és általában a jelenségi természettudományok föladatának ily fölfogása, egyszersmind elméleti részöknek határát képezi; mert a végső és időszerint változatlan anyag létének vagy erőinek okát természettani módszer szerint kutatni, merő képtelenség, miután csak a változásnak képzelhetjük az itt vett értelemben okát, nem pedig az absolut változatlanságnak. E határ tiszta megismerése egyszersmind azon védfal, mely a valódi és csalódástól ment természettudományt a félszeg anyagelviségtől megóvja.

A kísérleti vegytan, mint már fönebb említve volt, a nevezett czél elérésére aránylag még csak kevés használható adatokat és törvényeket készített elő a tudomány elméleti részének: mindazonáltal az eddigi gyüjteményből lehet, a testek apró részekből szerkesztett alkotására vonatkozó elméletet vázlatilag fölállítani, mely a jól ismert tényekkel megegyeztethető; és ha a kisérlet annak elvei nyomán haladva a hiányzó adatokat megszerezte, az elméleti vegytant az elemző erőműtan fejtményévé alakíthatja át.

Az eddig mondottakból gyanítható, hogy a kérdésben forgó elmélet nem lehet egyéb mint a parány-elmélet.

Nem czélom e helyen megvitatni, mennyivel helyesebb a parány-elmélet egyéb elméleteknél, melyek a testek végső szerkezetére vonatkozólag eddig fölállíttattak; elégnek tartom e tekintetben Fechner érdekes müvére útalni: „Über die physikalische und philosophische Atomenlehre von G. T. Fechner.“ Lipcsében 1855. annyival inkább, miután a szakértőre nézve fölösleges volna a parányelméletet védelmezni, vagy számtalan előnyeit fölsorolni. Itt csak arra szorítkozom, hogy ezen elméletnek az újabb természettudomány fölfogása szerint rövid vázlatát ismételjem.

A természet- és vegytani tapasztalatok arra útalnak bennünket, hogy a súlyos anyagot térileg különvált részecskékből állónak képzeljük; e részecskék közt létezik a súlytalan leb (aether), mely szinte különvált részekből van alkotva. Valamint a súlyos, úgy a súlytalan legkisebb részecskék (végső parányok), kölcsönös viszonyban vannak, és pedig oly erők által, melyek az erőműtan legáltalánosabb egyensúlyi és mozgási törvényeinek alávetvék.

A súlyos anyag végső parányai nagyobb vagy kisebb csoportokká egyesülve *az összetett (azaz vegytani) parányokat* képezik, a vegytani parányok további egyesülése által nagyobb csoportok jőnek létre, melyeket *tömecseknek (molecules)* *) nevezünk.

Hogy a végső parányok bírnak-e meghatározható kiterjedéssel (dimensio), vagy csak pontok gyanánt tekintendők-e? nem tudhatni; annyi bizonyos, hogy az egyszerű valamint az összetett parányok kölcsönös távolságához képest az illető parányok átmérője enyészeti kicsinységű.

A súlyos anyag parányai egymásra és a leb parányaira vonzást gyakorolnak, míg a lebparányok egymást kölcsönösen eltaszítják. — Az erők szigorú törvénye még ismeretlen, azonban nem vonható kétségbe, hogy ezen erők a részecskék kölcsönös távolának függvényei.

Ámbár ezen elmélet, mely inductió útján a közvetlen tapasztalatból származott, részleteiben még nagyon kevéssé van kifejlődve, és eddig csak legáltalánosabb alapvonalaiban alkalmazható a vegytani jelenségekre: el kell ismernünk, hogy csak az emelheti az elméleti vegytant a szabatosság azon fokára, melyre egyéb természettudományi tanok között már p. a fénytan általa eljutott.

Az eddig ismert tapasztalati adatok közöl a vegytan

*) A tömecs-nél jobb szót nem találtam a molecule magyarítására, ámbár használata néha kissé kellemetlen, miután a „tömeg"-hez (masse) igen hasonlóan hangzik, melylyel gyakran kell együtt használni.

elméletének megalapítására egyelőre legsikeresebben használhatók azok, melyek a testek tömecseinek és vegyparányainak relativ tömegére vonatkoznak, mert ezek a mennyiségi vegybontás szigorúsága által a többinél szabatosabbak, és különben legszámosabbak is. Mindenek előtt tehát ezek tárgyálásával kezdem meg a vegytan jelen állapotának fejtegetését.

Ha a testeket mechanikai mütételek által folyvást kisebb részekre osztjuk, a parányelmélet fölfogása szerint végre oly apró részecskékre akadunk, melyek ámbár végetlenül kicsinyek, de egymást közt és az eredeti testtel minőségökre nézve még mindig azonosok, (föltévén hogy a kérdésben forgó test nem volt különnemű vegyületek keveréke); és vagy épen nem oszthatók tovább, vagy ha oszthatók, részecskéik az eredeti testtől külömbözők. Ezen legkisebb részecskéket, melyek tovább nem oszthatók a nélkül, hogy meg ne szünnének az eredeti testtel azonosok lenni, *tömecseknek* (molecules) nevezzük.

A tömecs tehát oly vegytani egyed, mely nem osztható a nélkül, hogy vegytani értelemben meg ne szünnék az lenni, mi az osztás előtt volt.

Világos hogy a vegytan fönkitüzött czéljának elérésére egyelőre legnagyobb fontosságú föladat, a különféle testektömecsének relativ tömegét (Masse der Molekule) vagy inkább relativsúlyát meghatározni; mert a vegytani jelenségek erőmütani kezelése ezen tömeg nagyságok ismeretét föltételezi. E tömegek az egyes testekre nézve változatlanok levén a számolásban mint állandó mennyiségek (Constante) fognak elötünni.

Miután a tömecsek oly kicsinyek, hogy érzékeink által észre nem vehetők, és miután azt sem tudjuk, hogy az egyes testek bizonyos térfogatában mekkora azoknak absolut száma, természetes, hogy a különböző testek egyes tömecsének absolut súlyát közvetlen kísérlet által jelenleg meghatároznunk nem lehet; a következő tétel azonban, mely az elméleti vegytan alaptételéül tekinthető, igen egyszerű módot szolgáltat arra, hogy számos test relativ tömecs nagyságát meghatározhassuk. — E tétel ekként szól:

Különféle légnemek (és gőzök) egyenlő térfogatában a tömecsek száma ugyanaz.

A térfogatokat természetesen ugyanazon hőmérsék és nyomásnál mérve. — Ezentúl ha két légnem (vagy gőz) térfogatáról van szó, ezt mindenkor egyenlő hőmérsék (0°C) és nyomásnál (0,760^{m}) véve értjük-

E tétel helyessége, melyet a tudomány legnagyobb bajnokai mint Ampére Gay-Lussac Berzelius Gerhardt s mások „a légnemek egyenlő parányszerkezete“ által kifejezve már régen fölállítottak, nem tekintve azon megegyezést melyben consequentiái a vegytani tényekkel állanak, a következő szemlélődésekből foly.

Ha a testeket általában különvált aprórészecskék halmazának tekintjük, melyek fölött vonzó és taszító erők uralkodnak, mire csaknem minden tapasztalat kényszerít bennünket; akkor különösen a légalakú testeknél szükségkép föl kell tennünk, hogy e részecskék átmérője kölcsönös távolságukhoz képest enyészeti kicsinységű, azaz : azon tér melyet az összes tömecsek anyaga betölt enyészetileg kicsiny a légnem egész térfogatához képest; úgy hogy bizonyos határok közt maga a térfogat és ennek bizonyos nagyságú megváltoztatására fordítandó erő különnemű gázoknál a részecskék külömböző tömegétől csaknem független, és leginkább ezeknek kölcsönös távolságától függ. — A tapasztalás bizonyítja hogy a különnemű légnemek térfogatának egyenértékű megváltoztatására (növesztésére vagy kisebbítésére) egyenlő mennyiségű erő fölhasználása kivántatik meg ; miként Mariotte és Gay-Lussac törvényei igazolják. — Az első törvény a gázok külső nyomásának, a második azok hőmérsékének térfogatukhozi viszonyára vonatkozik. A légnemek térfogatának változása azonban nem egyébb mint mechanikailag oszthatlan legkisebb részecskéik (tömecseik) kölcsönös távolságának változása; ha tehát erre a különnemű légnemeknél egyenlő erő kivántatik meg ; ugyanazon nyomás és hőmérsék mellett a különnemű gázoknál a tömecsek kölcsönös távolságának egyenlőknek kell lenni, az az más szavakkal, a különféle gázok egyenlő térfogatában a tömecsek száma ugyanaz.

E nézet tökéletesen megegyez ama Dulong és Petit által fölfedezett és Regnault *) újabb kísérletei szerint általánosabban bebizonyúlt remek törvény is, mely szerint a *testek hőképessége* (calorique specifique, Wärmecapacität) *tömecs súlyaikkal* (tehát számos esetben úgynevezett paránysúlyaikkal is) *fordított viszonyban van*, azaz más szavakkal, ha különféle testek hőmérsékét egyenlő számú hévmérői fokkal nagyobbítni akarjuk, az egyes testek tömecssúlyainak megfelelő mennyiségek e czélra egyenlő meleg mennyiséget igényelnek. — Mivel a különféle légnemeknél tapasztalásként e mennyiségek egyenlő térfogatok által képviseltetnek (azaz : egyenlő térfogatok, hőképessége ugyanaz), világos hogy ez a fönebbi törvény értelmében csak úgy történhet, ha a különféle légnemek egyenlő térfogatában a tömecsek száma egyenlő.

A meleg erőműtani elmélete szerint **). Mariotte és Gay-Lussac törvényei következő mennyiségtani képlet által fejeztetnek ki.

$$p = \frac{nmc^2}{v} \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

melyben p=a légnem (feszereje nyomása a

n=a tömecsek száma, melyet a légnem

v= térfogata tartalmaz

m= egy tömecs tömege (Masse eines Moleculs) illetőleg súlya.

c= az egyes tömecs mozgásának közép sebességét jelenti.

E képletben mc^2 egyenlő a légnem absolut hőmérsékével T, azaz $mc^2 = T = \frac{1}{\alpha} + t^0 = 273^0 + t^0$ hol $\alpha = 0{,}003665$ a

---

*) L. a hőképesség és a tömecssúly közti összefüggést illetőleg. Regnault compt. rend. XXVIII., 325. és Annales de chimie et de physique (3). XLVI, 257. — A légnemek hőképességének meghatározására nézve Compt. rend. XXXVI. 676.

**) Ezen elmélet szerint a testek hőmérséke legkisebb részecskéik mozgásának eredménye, vagy az erőműtan nyelvén kifejezve : a testek absolut hőmérséke (T) nem egyébb mint tömecseiknek (m) eleven ereje (lebendige Kraft) azaz $T = mc^2$ (c a mozgó tömecs középsebességét jelentvén. L. Krönig Poggendorf's Annalen der Physik et Chemie XCIX 315. és Clausius ugyanott C-ik kötet 353-ik lapon sat.

gázok kiterjedési tényezőjét, t^0 pedig a 100 fokú hévmérő 0^0 pontjától számított hőmérséket jelenti. — Ha ezt 1-ső) képletünkben helyettesítjük, következő alakot nyer.

$$p = \frac{nT}{v} \text{ vagy } v = \frac{nT}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

azaz : akármely légnem térfogata tömecseinek számával és absolut hőmérsékével egyenes, feszerejével (nyomásával) pedig fordított viszonyban van, és a tömecsek tömegétől (m) közvetlenül nem függ; mert m állandó mennyiség lévén T egyedül c-nek függvénye.

Ha két különnemű légnemre nézve a 2-ik képlet mennyiségeit különféle betűk által fejezzük ki és n-re nézve föloldjuk e két egyenletet nyerjük :

$$n_1 = \frac{v_1 p_1}{T_1} \text{ az egyik, } n_2 = \frac{v_2 p_2}{T_2} \text{ a másik}$$

légnem viszonyait fejezvén ki. — Ha $p_1 = p_2$, $T_1 = T_2$ és $v_1 = v_2$ világos hogy $n_1 = n_2$

azaz : ugyanazon nyomás (p) és absolut hő mérséknél (T) a a különféle légnemek egyenlő térfogatában (v) a tömecsek száma (n) ugyanaz.

Ha tehát ezen alaptétel helyes, önkényt következik belőle hogy : *a légalakú testek tömecssúlya fajsúlyaikkal (vagy sürüségükkel) egyenes viszonyban van* : azaz két különnemű gázra nézve :

$$m : m_1 = s : s_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

ha m és m_1 a tömecssúlyokat s és s_1 az illető légnemek fajsúlyát jelentik.

Tételünk ily alakban kimondva egyenesen alkalmazható, a tömecsek relativ súlyának kiszámolására; mely természetesen csak azon testekre nézve használható, melyek légalakúak vagy legalább magasabb hőmérséknél fölbomlás nélkül gőzökké változtathatók, és ily állapotban fajsúlyaik már meghatározvák. — Minden illó test gőze elegendő nagyságú hőmérséknél (rendesen 30—40 C^0-kal túl a forrponton) a fönnebbi czélra nézve tökéletes gáz gyanánt tekinthető; különben nem szükséges czélunk elérésére hogy az ily hőmérsékeknél kísérletileg meghatározott fajsúly (az úgynevezett gőzsürüség) nagy szabatossággal bírjon, mert a vegysúlyok *) és a sokszoros aránylatok törvényének segítségével (melyek más úton pontosan meghatároztattak) ezen számbeli értékeket nagy szigorúsággal ellenőrizhetjük.

Ha 3-ik képletünket m-re nézve föloldjuk következő alakot nyer

$$m = ks \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 4)$$

melyben $k = \frac{m_1}{s_1}$ állandó mennyiség, és azon légnem tömecsének (m_1) fajsúlyához (s_1) viszonyát jelenti, melylyel a többi légnemeket össze akarjuk hasonlítani.

A tömecsek relativ súlyának kiszámolása végett alább említendő okoknál fogva legczélszerübb a hydrogen tömecsének súlyát =2-vel tenni, és evvel a többiekét összehasonlítani. — Ha tehát utolsó képletünkbe a hydrogenre vonatkozó értékeket $m_1 = 2$ és $s_1 = 0{,}0691$ helyettesítjük k-nak változatlan értéke meghatározható ugyanis:

$$k = \frac{m_1}{s_1} = \frac{2}{0{,}0691} = 28{,}943 \ldots.$$

Ebből 4-ik képletünk

$$m = 28{,}943 \ldots s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5)$$

azaz: akármely lég-vagy gőzalakú test tömecssúlyát megkapjuk, ha az illető test gőzsürüségét (vagyis közönséges levegőhöz hasonlított fajsúlyát) s-et; 28,943 . . .mal sokszorozzuk. Ezen 5-ik képl. szerint van a következő testek relativ tömecssúlya kiszámolva.

A hydrogen-ét=2 tevén

A) egyszerű testek =	m	*B) összetett testek* . . .	m
Hydrogen . . . =	2	Chlorhydrogen (sósav). =	36·5
Chlor (halvany) . =	71	Bromhydrogen . . . =	81.
Éleny . . . . =	32	Víz . . . . =	18
Légeny (Nitrog.) =	28	Kényhydrogen . . . =	34
Brom (büzeny) . =	160 sat.	Ammoniak . . . . =	17
		Kénecssav . . . . =	64
		Szénsav . . . . . =	44
		Szénéleg . . . . . =	28
		Légélecs (Stickoxydul). =	44
		Légéleg (stickoxyd) . . =	30 s.

*) (Aequivalentgewichte)

Az értekezés végén még nehány nevezetesebb vegyület tömecssúlya van fölsorolva.

Ezen relativ súlyok alaptételünk szerint oly menyiségeket képviselnek, melyek légalakú állapotban egyenlő térfogattal bírnak, tehát az illető testek tömecsének relativ tömecs nagyságát fejezik ki, miután az anyag súlya tömegével egyenes viszonyban van.

Ha a különféle összetett testek alkatrészeinek relativ súlymennyiségét, illető tömecssúlyaikkal egybevetjük, azt tapasztaljuk, hogy ugyanazon test egyébb különnemű anyagokkal egyesülvén; az ekkép származott különböző tömecsekben e közös alkatrész mennyisége vagy ugyanaz, vagy pedig valamely más tömecsben megjelenö (kisebb) mennyiségének sokszorosa (multipluma); a közös alkatrész itt vélt mennyiségei közt a legkisebbiket, az illető alkatrész *paránysúlyjának* vagy helyesebben *vegyparányának* nevezzük.

Keressük ki ezen elv szerint nehány egyszerü test vegyparányát p. o.

Hydrogen=H.

	m		s. r.	s. r.
Egy tömecs sósavb. .. azaz	36·5	súlyrészb. van	35,5 Cl és	1 H
„ „ bromhydrog. „ „	81.0	„ „	80,0-Br „	1H
„ „ vizben . . . „ „	18,0	„ „	16,0-O „	2H
„ „ kénhydrog . „ „	34,0	„ „	32,0-S „	2H
„ „ ammoniában „ „	17,0	„ „	14,0-N „	3H
phosphorhydrogenben „ „	34.0	„ „	31,0-P „	3H
mocsárlégben (Sumpfgas) „	16.0	„ „	12,0-C „	4H
olajk. gáz (oelbild. Gas) „	28,0	„ „	24,0-C „	4H

Azon relativ súlymennyiségek közt, melyekben a hydrogen különféle összetett tömecsekben előfordúl, a legkisebb=1 az az a hydrogen vegyparánysúlya=1. Mivel a hydrogen paránysúlya minden elemek közt a legkisebb, a többiek paránysúlyai is a legkisebb számok által fejeztetnek ki, ha amazét egység gyanánt a többiek mértékéül veszszük. A tapasztalásként mint később látandjuk, a hydrogen tömecse még egyszer akkora mint vegyparánya, ez az oka hogy a tömecsek összehasonlításánál a hydrogenét=2 tettük, (m_1 helyet a 4 képletben)

Éleny=O

	m		s. r.	s. r.
Egy töm. vízb. azaz	18	súlyrészb. van	2—H és	16—0
„ „ légélecsben „	44	„ „	28—N és	16—0
„ „ légélegben	30	„ „	14—N „	16—0
„ „ szénélegben	28	„ „	12—C „	16—0
„ „ kénecssavban	64	„ „	32—S „	32—0=2·26
„ „ szénsavban	44	„ „	12—C „	32 0
„ „ vízm.kénsavb.	80	„ „	32—S	48—0=3·16sat.

Az éleny vegyparánysúlya tehát=16, mert akármely éleny tartalmú vegyület tömecsében legalább 16 súlyrész éleny fordúl elő, mint legkisebb oszthatatlan tömege az élenynek.

Légeny=N.

	m		s. r.	s. r.
Egy tömecs ammoniáb.. azaz	17	súlyrészb. van..	3—H és	14—N
„ „ légélegben	30	„	16—0 „	14—N
kéksavb.(Cyanhydrog.)	27	„	12—C, 1—H „	14—N
légélecsben . . .	44	„ „	16—0 „	28—N =2·14
kékenyb. (Cyan.)	52	„ „	24—C „	28—N. sat.

A légeny paránysúlya tehát=14.

Az e mód szerint meghatározható paránysúlyok lajstroma értekezésem végén fordúl elő.

A vegyparány tehát akármely test azon mennyiségei közül a *legkisebbik*, melyeket a különféle vegyületek egyes tömecsei tartalmaznak.

Két vagy több ily vegyparány kölcsönös vonzásuk következtében egyesülve képezik a tömecset, tapasztalásként egy parány magában véve nem képez tömecset, azaz mint közönségesen szokták kifejezni „az egyes vegyparány nem létezik szabad állapotban."

A vegy-és természettan eddig ismert eszközei által az úgynevezett elemek ily értelemben vett vegyparányai tömegökre nézve semmi változást nem szenvednek; ámbár mint már fönebb említém képzelhető, hogy a vegyparány még kisebb részekből (talán minden testre nézve egyenlő tömegű végső parányokból) áll, melyek véghetetlen közel levén egymáshoz, oly erövel vonzák egymást, hogy még eddig nem sikerült őket kisebb részekre osztani.

A vegyparány (chemisches Atom) fogalma tehát lényegesen különbözik a tömecsétől, mely az értekezés elején említett elvek szerint következőképen határozható meg :

A tömecs változatlan tömegü részecskék (parányok) erőmütani szerkezete, mely részecskék kölcsönös hatásaik következtében egyensúlyban vannak.[1]

A tömecs tehát nem csupán véletlen halmaza a vegyparányoknak (mint p. a homokrakás) hanem központi (central) vonzó és taszító erőkkel ellátott tömegrészecskék egylete, mely az erőmütan általános törvényei szerint egyensúlyban van.

A tömecs benső szerkezetének bárminemü megváltozása a testek vegytani átváltozásával azonos ; minden vegytani jelenség tehát a tömecs szerkezetének megváltozására vezetendő vissza.

E változás általában háromféle lehet:

1-ör olyan, mely csupán a részecskék egyensúlyi szerkezetére (kölcsönös helyzetére) vonatkozik, a nélkül hogy a tömecs tömegére *) nézve szenvedne változást. (egyenméretü módosulás, (isomere Modification).

Például: ha a cyansavas ammoniumot $\Theta H_4 N_2 \Theta$ 60^6 C-ra hevítjük, a nélkül hogy tömegéhez valami hozzájárúlna, vagy abból valamit elvesztene, egészen új anyaggá a húgyannyá (Harstoff) változik, mely az előbbi vegyület semmiféle tulajdonával sem bír. Ugyan ekkép változik át hevítés által a közönséges phosphor az úgynevezett vörös phosphorrá, melynek vegytani jelleme véghetetlen különbözik amazétól.

2-or, a tömecs változása olyan lehet, mely csupán egyes tömegrészeinek (parányainak) mások általi kicserélésén alapszik, a nélkül hogy az egyensúlyrendszer különben tökéletes átalakúlást szenvedne, (cserebomlás Wechselzerlegung, és helyettesítés Substitutio).

Például: ha jodkaliumot JK, halvannyal (Chlor) vegyítünk, a jod(127) parány helyébe a kisebb tömegü halvany parány (35·5) lép be, a nélkül, hogy az egyensúly szerkezete földúlatnék. A ClK tulajdonai és vegytani jelleme lényegesen nem kölömböznek a JK-éitól. — Vagy végre

*) Súlyára.

3-or, e két féle folyamat egyidőben megy végbe.

Természetes hogy az itt kérdésben forgó egyensúly részletes erő műtani törvényeiről és mibenlétéről a vegytan jelen állásánál csak igen naiv ismeretekkel bírunk, ezeknek alapos kikutatására a megkivántató adatok nagyrészben hiányzanak, milyenek többek közt a vegyületek meleg általi kiterjedésének törvénye, hőképessége, azon hőmérséki határok pontos ismerete, melyek közt az egyes vegyületek fölbomlás nélkül megállhatnak, vagy létrejöhetnek, továbbá számos nevezetes testek valódi parány— illetőleg tömecssúlyának ismerete sat. — Csak némi valószinűséggel következtethetjük két különböző vegyületre nézve, ezen egyensúlyrendszer hasonlóságát, azoknak hasonló vegytani átváltozásaiból mint ezt később látandjuk.

Még kevesebb szabatossággal, (hogy úgy mondjam semmivel sem) bírnak ismereteink ama mozgási jelenségekről, melyet a vegytan közönséges nyelvén vegyfolyamatnak (chemischer Procesz) nevezünk. E mozgás erőműtani törvényeinek exact tanulmányozása a fönemlitett egyensúly tökéletes ismeretét föltételezi, mert a vegytani jelenség nem egyéb mint ezen egyensúly háborítása. — Az értekezésem elején kitűzött czél elérése természetesen csak az által remélhető, ha a kisérleti vegytan azon észleleteket, melyek e törvények megállapítására vezethetnek, kellő figyelemre méltatja.

E helyen egyszersmind nem tartom fölöslegesnek megemlíteni, hogy az úgynevezett okszerű vegytani képletek (rationelle Formel der chem. Verbindungen) legkevésbbé sem fejezik ki ezen egyensúly mibenlétét, s nem egyebek mint czélszerűség tekintetéből többnyire megegyezés (conventio) útján fölvett minták, melyek a vegyületek némely (de nem mindenféle) átváltozásait kifejezik, és leginkább arra szolgálnak, hogy a végetlen sokaságú vegyületeket könnyen áttekinthető rendszerbe illesszék addig is mig exact mennyiségtani vizsgálódásnak sikerülend azt más által helyettesíteni. Ámbár e czélszerű rendszerek alapítói közöl különösen a jeles Gerhardt több helyen figyelmeztetett arra, hogy az okszerű vegyképletek semmikép sem fejezik ki a parányok valódi egyensúlyi lehelyezését, mindazáltal nem csekély azon vegyészek száma, kik ezen képletekben a parányok egyensúlyi helyzetét vélik kifejezhetni. *)

Határozottabb ismereteink eddigelé csak a tömecsek és parányok tömegére (illetőleg relativ súlyára) szorítkoznak, melyek tapasztalásként változatlanok és a számolásban mint állandó mennyiségek (constante Gröszen) fognak megjelenni.

E viszonyok fejtegetését a mennyiben az jelenleg lehetséges, következő értekezésemben kísérlendem meg a tekintetes akademia elébe terjeszteni.

A tömecs fönebb megállapított fogalmából önkényt folynak a következő tapasztalati törvények :

1-ör A tömecs súly egyenlő a tömecset alkotó parányok súlyának összegével : azaz általánosan kifejezve, akármely test tömecsére nézve :

$$m = \alpha A + \beta B + \gamma C + \ldots \ldots \quad 6).$$

hol m a tömecssúlyt, A, B, C .... az egyes parányok súlyát α, β, γ ... egész számú együtthatókat jelentenek.

2-szor A változatlan arányok törvénye (Gesetz der constanten Proportionen), melynél fogva bármely úton származott is valamely vegyület, alkatrészeinek súlya mindig ugyanazon viszonyban van, e viszonyt az úgynevezett vegysúlyok (Mischungs gewichte) képviselik. Például ha H és O vizzé egyesülnek, az alkatrészek súlyaránya bármiként állítatott is a víz elő mindig 1 : 8.

Az az : α, β, γ, ... ugyanazon vegyületre nézve minden időben változatlanok.

A vegysúlyok szigorú meghatározását a tudomány nagy részben a halhatatlan Berzelius kísérleteinek köszöni. — Élesen meg kell különböztetnünk a vegysúlyokat a valódi parány- és tömecssúlyoktól.

3-or, A sokszoros arányok törvénye (Gesetz der multiplen Proportionen). E szerint ha két vagy több test egymással vegyül, a vegyület tömecsében foglalt alkatrészek súlymennyisége, az illető alkatrész parányTsulyával, vagy (ha a tömecsben ugyanazon testnek egynél több paránya foglaltatik,) azon

*) Lásd. Chr. Gerhardt Traité de chimie organique. Tome quatrième pag. 561.

paránysúlynak valamely sokaságával(multiplum)egyenlő. Más szavakkal a parányok oszthatatlansága miatt a testek nem egyesülhetnek minden gondolható arányban vegyületekké. A szénélegben például minden tömecsben ($C\,O$) 12 s. r. széneny és 16 s. r. éleny van, mig a vízmentes szénsav tömecse ($C\,O_2$) ugyanazon mennyiségü széneny mellett 32 s. r. (=2.16) élenyt tartalmaz. 6-ik Képletünkben e törvény az által nyilatkozik, hogy benne α, β, γ . . . mindenkor egész számokat jelentenek.

4-er. A helyettesítés törvénye (Gesetz der Substitution) melynek következtében, ha valamely vegyületnek egyik alkatrésze más test által helyettesithető (substituirbar) a nélkül hogy a régi vegyület egyensúlyának jellemét lényegesen megváltoztatná, az egymást helyettesítő alkatrészek súlymennyisége, illető paránysúlyaikkal egyenes arányban van. — E törvénynyel szoros kapcsolatban van.

5-ör. Az egyenérték törvénye (Gesetz der aequivalenz), mely szerint ha két test bizonyos súly arányokban valamely harmadiknak ugyanazon súlymenynyiségét képes helyettesítni akkor a két első test ismét csakis azon súlyarányban helyettesítheti egymást is.

Ugyanily egyszerüen megmagyarázza tételünk az egymással egyesülő gázok térfogati viszonyaira vonatkozó törvényeket melyek fölfödözőjökről Gay-Lussacféle térfogati törvényeknek neveztetnek,

---

A fölállitott elvek szerint, csak azon testeknek tömecsét határozhatjuk meg kisérletileg, melyek léggé vagy gőzzé alakíthatók. A nem illó testeket illetőleg ediggelé nem ismerünk oly szigorú törvényt, mely e czélra használható volna, úgy hogy egyelőre tömecssúlyaik kipuhatolása, némely vegy és természettani tulajdonságaikból elvont analogiákra van útalva, és mivel semmi általános törvényre vissza nem vezethetők, természetesen csak némi valószinüséggel birnak. Alig szenved kétséget hogy idővel a testek hőképességének alapos tanulmányozása e tekintetben igen nagy szolgálatokat fog tenni. Mivel az elemek valódi relativ paránysúlyának kipuhatolása vegyületeik tömecsének ismeretét föltételezi, természetes hogy jelenleg csak azon elemek valódi relativ parány súlyát határozhatjuk meg, melyek illó vegyületeket képeznek.

A testek vegysúlyát vagy egyenértéksúlyát (Mischungsgewicht Aequivalentgewicht), melyek már többnyire nagy pontossággal meghatározvák, nem szabad az itt vélt parány- és tömecssúlylyal fölcserélnünk, mi a tudomány nem jelentéktelen kárára eddig igen gyakran megtörtént. A vegysúlyok mint a kísérlet közvetlen adatai egyebet nem fejeznek ki mint azon súlyviszonyt, mely szerint a különböző testek egymással vegyületté alakúlnak, míg ellenben a parány- és tömecssúly a fönebbi tételek értelmében, ezt és még sokkal többet jelentenek, ámbár némely testek vegysúlya a parány, — illetőleg a tömecssúlylyal azonos lehet, sok esetben azonban lényegesen különböző. Példáúl, ha a hydrogent egységnek tekintjük az éleny vegysúlya=8 valódi relativ paránysúlya=16 tömecssúlya=32.

Ha már minden test paránysúlyát ismernők, a vegysúlyok használata fölösleges volna.

Az itt használandó vegyjelek a fönebbi értelemben vett parány nagyságokat fejezik ki, melyek nagyobb részt a Gerhardt által megállapitott és már a legtöbb vegyész által elfogadott paránysúlyokkal megegyeznek.

A 6-ik képlet segitségével akármely test paránysúlyát (A) kiszámolhatjuk ennek bármely vegyületéből a következő képlet szerint

$$A=\frac{m-(\beta B+\gamma C+\ldots)}{\alpha} \quad \ldots\ldots \quad 8)$$

Példáúl a borszeszre *) vonatkozó adatokból a széneny paránysúlyát (Ac) $m=46$ $\beta B+\gamma C=6H+O=6+16=22$, $\alpha=2$ tehát

$$Ac=\frac{46-22}{2}=12$$

*) $C_2\ H_6\ O$

Az elemek jelenleg meghatározható valódi relativ paránysúlya.

Hydrogen . . . *H*=1

I.		II.	
Fluor , ...	*Fl*=19	Éleny . . .	*O*=26
Chlor	*Cl*=35,5	Kén . . .	*S*=32
Brom	*Br*=80	Selen . . .	*Se*=80
Jod	*J*=127	Tellur . .	*Te*=128
III.		**IV.**	
Légeny	*N*=14	Széneny . . .	*C*=12
Vilany (phosph)	*P*=31	Kovany . . .	*Si*=28·5
Arsen	A_1=75	. . . .	
Antimon . . .	*Sb*=120	Ón.	*Sn*=118

V.

Bórany	*Bo*=11
Almninium. . . .	*Al*=55
Vasany (ferrium .	*Fe*=112
Horgany (zink).	*Zn*=65
Higany	*Hg*=200

Az első négy csapatban fölsorolt elemek vegytani jellemök szerint vannak beosztva. E természetes csapatokról és azoknak nagy jelentőségéről jövő értekezésemben lesz szerencsém szóllani. Az 5-ik csapatban előfordúló elemek különféle még nem eléggé tanulmányozott csoportok törédékei; mivel ez utóbbi elemeknek csekély számú illó vegyületei vannak, és ezek közül is még csak néhánynak van gözsürüsége meghatározva, följegyzett paránysúlyaik nem bírnak azon bizonyossággal mint a többi négy csapatéi, és egyelőre csak ideigleneseknek tekintendők, ámbár a tényekkel semmi összeütközésben nincsenek, és használatuk vegyületeik képleteit egyszerübbekké és okszerübbekké teszi, mint azt a vegysúlyok képesek tenni.

Az ide mellékelt testek tömecssúlyai 4-ik képletünk m=ks szerint vannak kiszámolva. — A gőzsürüség (illetőleg fajsúly) kísérleti meghatározásából eredt hiba, az állandó és sokszoros aránylatok törvényének segítségével van kijavítva — A kísérlet és a számolás közti megegyezés összehasonlítása végett, az ekként javítot t tömecssúlyokból viszont kiszámolt elméleti sürüségekhez *) vannak mellékelve a kísérlet adatai, szerzőik nevének kíséretében.

Az elemek jelenleg kiszámolható tömecssúlyai.

m	$s = \frac{m}{k}$ képletből kiszámolt elméleti fajsúly.	a kísérlet által meghatározott fajsúly.
Hydgrogen . . . $H_2=2$	0,0691	0,06926 Regnault.
Chlor . . . . . . $Cl_2=71$	2,453	2,47 Gay-Lussac.
Brom . . . . . . $Br_2=160$	5,528	5,54 Mitscherlich.
Jod . . . . . . $J_2=254$	8,776	8,716 Dumas.
Éleny . . . . . $O_2=22$	1,1056	1,10561 Regnault.
Kén (500°C alatt) $S_6=192$	6,634	6,617 Dumas.
Kén (1040°C-nál) $S_2=64$	2,211	2,2 Deville és Troost.
Légeny . . . . $N_2=28$	0,967	0,9713 Regnault,.
Phosphor . . . $P_4=124$	4,284	4,335 Dumas.
Arsen . . . . $As_3=300$	10,365	10,6 Mitscherlich.
Higany. . . . $Hg=200$	6,910	6,976 Dumas.

Ha ezen elemek itt fölsorolt tömecssúlyát, illető paránysúlyaikkal összehasonlítjuk, első pillanatra meggyőződhetünk, hogy a tömecs képzésére az elemeknél úgy miként a vegyületeknél egynél több parány kivántatik meg. A legtöbb esetben két parány képezi az elemek tömecsét, néha ez azonban kettőnél több parányból is áll mint a P és As-nél négyből, a kéné 500°C-t meg nem haladó hőmérséknél hat parányból — Bineau régibb (compt. rend XLIX. 799) valamint Deville és Troost legújabb kísérleteiből (Compt. rend XLIX.239) világosan kitünik, hogy magas hőmérséknél (860°C fölött), melynél a kén göze is tökéletes légnem gyanánt tekinthető, ezen testnek tömecse is miként a többi légalakú elemeké két parányból áll : ugyanezen kísérletek szerint a phosphor tömecse még 1040°C-nál is 4 parányból áll, arsennel még nem tétettek kísérletek ily magas hőmérsékeknél.

Világos hogy az elemek tömecseinek ily értelmezése ál-

*) $s = \frac{m}{k}$ képlet szerint.

tal, a kén, phosphor arsen sat. úgynevezett térfogati szabálytalansága (Anomalie) elenyészik, épen úgy eltünik a némely vegyületeknél fölvett rendkivüli megsürüdés (Condensation auf verschiedene 1, 2, 4 Volume) : mindezen szabálytalanságok, melyek alaptételünk (l.270. lap)általános és következetes alkalmazását eddig lehetlenné tenni látszottak, onnét eredtek, hogy a tőmecs fogalma a parányéval fölcseréltetett; ha ezen fogalmakat a fönebb megállapitott értelemben egymástól megkülönböztetjük, a szabálytalanságok elenyésznek, és alaptételünk átalános érvénynyel bír.

Néhány nevezetesebb illó vegyület tömecssúlya.

	m	$s = \frac{m}{k}$ szerint kiszámolt elméleti fajsúly	a kísérlet által meghatár. fajsúly.	
Chlorhydrogen . . .	ClH=36·5	1,2608	1,256	Buff.
Jodhydrogen . . .	JH=128.	4,4225	4,443	Gay-Lussac.
Víz	H_2O=18	0,6219	0,624	Gay-Lussac.
Kénhydrogen . . .	H_2S=34,	1,1747	1,179	Thomson.
Kénecssav	SO_2=64,	2,2112	2,222	Thomson.
vízmenteskénsav . .	SO_3=80,	2,7631	3,0	Mitscherlich.
Ammoniak	NH_3=17,	0,5874	0,590	Humph. Davy.
Légélecs	N_2O=44,	1,5202	1,520	Colin.
Légéleg	NO=30,	1,0365	1,041	Thomson.
Phosphorhydrogen.	PH_3=34,	1,1747	1,165	Buff.
Chlorphosphor .	PCl_3=137,5	4,7507	4,875	Dumas.
Arsenhydrogen .	As_2H_3=78,	2,6949	2,695	Dumas.
Arsenecssav . . (Arsenige Säure)	As_2O_3=396	13,6818	13,850	Mitscherlich.
Fluorbór	BFl_3=68	2,3494	2,369	Thomson.
Methylhydrogen . (Mocsárlég)	CH_4=16	0,5528	0,558	Thomson.
Szénéleg	CO=28	0,9674	0,9678	Cruikshanks.
Szénsav	CO_2=44	1,5202	1,524	Regnault.
Aethylén . . . . (Olajnemzőlég)	C_2H_4=28	0,9674	0,985	Saussure.
Aethyl	$C_4H_1{}^0$=58	2,0040	2,046	Frankland.

$m\ s = \frac{m}{k}$ szerint kiszámolt elméleti fajsúly.			a kísérlet által meghatár. fajsúly.	
Aethylaether .	$C_4H_{10}O=74$	2,5568	2,586	Gay-Lussac.
Borszesz	$C_2H_6O=46$	1,5893	1,613	Gay-Lussac.
Chlorkovany . .	$SiCl_4=170.5$	5,8908	5,9920	Dumas.
Chlorónany (Zinnchlorid)	$SnCl_4=260$	8,9830	9,199	Dumas.
Ónjódmethyl.	$Sn(CH_3)_3J_5=290$,	10,0200	10.320	Cahours.
Zinkaethyl.	$Zn(C_2H_5)_2=123$	4,2497	4,259	Frankland.
Vaschlorid. . .	$FeCl_6=325$	11,2290	11,390	Deville és Troost.
Aluminiumchlor.	$AlCl_6=268$	9,2594	9,340	Deville és Troost.
Higany chlorür.	$HgCl=235,5$	8,1365	8,210	Deville és Troost.
Higanychlorid	$HgCl_2=271$	9,3630	9,800	Mitscherlich.

Az ammonium (NH_4) és az avval analog gyökök néhány vegyületei első pillanatra eltérni látszanak alaptételünk törvényétől; mely eltérésnek oka kétség kivül nem egyébb minthogy az említett csekély számú vegyületek tömecse azon hőfoknál, melynél gőzzé változnak két különvált tömecsre bomlik; a szalamia (Chlorammonium) tömecse például, mint vegytani tulajdonai kétségtelenné teszik $(NH_4)Cl=53,5$ által képviseltetik; ha gőzének fajsúlyából tömecssúlyát kiszámoljuk erre$=26,75$ azaz a valódinak fele jut, mert a hevítés alkalmával a szalamia göze NH_3 és ClH tömecsekre bomlik fel, melyből a látszólagos eltérés tökéletesen megmagyarázható. Ugyanez áll NH_4,SH és PCl_5-ról is.

Ezen fejtegetések után az elem úgy nevezett egyszerű test) és a vegyület (összetett test) fogalmát következőképen határozhatjuk meg.

Az elem oly test (mondhatnók vegyület), melynek tömecse azonos vegyparányokból van alkotva.

Az tömecs általános képlete (6) az elem tömecsét (me)

fejezi ki, ha benne $B=C=D= \ldots =A$ teszszük, mi által ily alakot nyer $m_e = nA$ . . . . 8)
hol A az elem paránysúlyát, n pedig az egységnél nagyobb egész számot (a tömecsben foglalt parányok számát) jelentik, n ugyanazon elemnél, legalább bizonyos hőmérséki határok közt változatlan. — Például : a Cl tömecssúlya miután $n=2$ $A=Cl=35{,}5$, $m_{cl}=Cl_2=2.35{,}5=71$. A phosphoré mivel $n=4$, $A=P=31$, $m_p=P_4=4.31=114$.

A vegyület ellenben oly test, melynek tömecse különnemű parányokból van szerkesztve, melynél tehát 5-ik) képletünkben $A, B, C \ldots$ egymástól különböznek. $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ tényezők az egységet vagy bármely már egész számot jelenthetik p. a. víz tömecsében $A=H=1$, $B=O=16$, $\alpha=2$, $\beta=1$ tehát $mH_2O=H_2+O=2 \cdot 1+1 \cdot 16=18$. — Az olaj nemzőlég (Gas oléfiant) tömecsében $A=C=12$, $B=H=1$, $\alpha=4$, $\beta=2$ tehát $m_{C_2H_4}=C_2+H_4=2.12+4.1=28$.

Ugyanezen elvek szerint a vegyület és a keverék közötti különbséget nagy szabatossággal határozhatni meg :

A (vegytani tisztaságú) vegyület, oly test, melynek egyes tömecsei (vegytani egyedei) azonosok, és mint ilyen mechanikai műtételek által csakis azonos részekre osztható. P. a vaskéneg (vas és kén vegyülete) mechanikai műtétek által csak oly részekre osztható, melyeknek legkisebbike is minőségére nézve azonos az eredetivel, azaz mindegyik részecske ugyanazon változatlan arányban vasat ésként tartalmaz.

A keverék (Gemenge, Melange) azonban oly test, mely különnemű tömecsekből van összehalmozva, és mechanikai műtételek által többnyire különnemű reszekre is osztható. Ilyen például a porrá oszlatott vas és kén keveréke, mely vízzeli iszapolás által vagy a delejtű segedelmével alkatrészeire (azaz kén- és vas tömecsekre bontható).

Az eddig mondottakat röviden a következő tételekben foglalhatjuk össze :

1-ör) Minden test mint olyan, tovább nem osztható kis részecskék (tömecsek) halmazának tekinthető.

2-or) Minden tömecs változatlan tömegű vonzó és taszító erőkkel ellátott parányok erőműtani szerkezete.

3-or). A különféle légalakú testek egyenlő térfogatában a tömecsek száma egyenlő.

4-er) Az elem- és vegyület tömecse erőműtani szerkezetökre nézve, általában ugyanazon elvek szerint vannak alkotva és a különbség köztük egyedül abban áll, hogy az első azonos, az utolsó pedig kü lönnemű parányokat tartalmaz.

Mielőtt jelen értekezésemet befejezném, megkísérlendem a szorosabb értelemben vett természettan (physika) és a vegytan körébe tartozó jelenségek határának szigorúbb megjelölését a fönebbi elvek nyomán; mert a mennyiben tudomásom van róla, számos vegytani iratokban e határ nagyon ingadozó, és az elméleti vegytan rovására igen korlátolt

Mivel a jelenség (Erscheinung) nem egyéb mint azon változás, melyet a természeti tárgyak kölcsönös hatásaik által idéznek elő, a jelenségek természettudományát, mint ezen változások tanát foghatjuk fel.

A szorosabb értelemben vett természettan (physika) körébe tartoznak azon változások, melyek a *tömecsen kivül* mennek végbe.

A vegytan körébe tartoznak ellenben mindazon változások, melyek a *tömecs belsejére* vonatkoznak.

Világos e szerint hogy az elméleti vegytan fejlődésére nem elegendő csupán a testek tömegére (massa) vonatkozó változások tanulmányozása, miként sokan vélik. Hogy a vegytan egyébb exact tudományok rangjára emelkedhessen, legsürgősebb föladatai közé tartozik a tömecs belsejében uralkodó erők egyensúlyi és mozgási törvényeit fölkutatni és tanulmányozni. Ily értelmezés szerint a láthatatlan kicsinységü parányok és tömecsek körülbelül oly szerepet játszanak az elméleti vegytanban, *mint az egges égitestek és a fölfoghatatlan terjedelmü bolygórendszerek a csillagászatban.* — A kísérleti téren ez irányban eddigelé ugyan kitünő de fájdalom csekély számú vegyészek működnek.

A jelen értekezésben kifejtett alapelvek részletesebb alkalmazását a mennyiben erőm és az eddigi tapasztalatok engedik, folytatólag külön értekezésekben lesz szerencsém a tekintetes akademia elébe terjeszteni.

NÉMELY KÉTESEKNEK VÍTATOTT MATHEMATIKAI ELVEK IGAZOLÁSA.

ELŐADATOTT 1860. MÁJUS 14

Az 1857. évi Értesítő 4 és 10. nem különben az 1858. évi 10. füzetében, három értekezés jelent meg ezen czim alatt: *Némely algebrai fogalmakról s ezeknek geometriai alkalmazásáról*, melyeket, már csak azért sem lehetne észrevételek nélkül hagyni, mivel bennök a mathematikai tudományok egész rendszere következetlenséggel vádoltatik, úgy annyira hogy legalsóbb alapelvei nemcsak kétesek, hanem a józan ész szabályaival a logikával is ellenkezésbe jőnek, maga pedig a tudomány 81 §-ban olvasható azon állítás következtében, miszerint: *gyér sora van azon mathematikusoknak kikben a mathematikum ingenium, más nemű ingeniumot nem fojtott el*, képes volna más egyéb elmetehetségek kifejlődését is gátolni és elfojtani. Ezeknél fogva czélúl tüzvén ki magának értekező e tudományban tetemes fogalom zavarokat mutatni elő, kiválaszt némely alapfogalmakat, melyeket körülményesebben tárgyal, s azokat, valóban érthetetlenekké teszi az által, hogy a maga önkényes értelmezését rájok akarja erőszakolni. E közben pedig a legtekintélyesebb mathematikusokat meglepőleg fenthangon nemcsak bírálat alá vonja, eldöntő itéletet mond felettök, hanem logikátlansággal vádolja, gúnyolja, leczkézi és nevetségesekké tenni igyekezik. Ezek, mint mondám, már addig is elegendő okúl szolgálhatnának arra, hogy értekezését észrevételek nélkül ne hagyjuk.

De van még ezen értekezéseknek más czéljok is, melyet a szerző maga első értekezésének mindjárt elején leplezetlenül előád következőkben :

A létező akademiák működésének szemléléséből inductio útján következik azon állítás, hogy egy tudós társaság fogalmától elválaszthatatlan vonás a tudomány haladtatása, korlátai tágítása. Igaz ugyan, hogy ez minden szaktudósnak szintúgy kötelessége, de az akademiák e tekintetben jeles előnnyel bírnak az egyének felett. A tudomány haladása, véleményekben, tények előadásában s állítmányokban nyilatkozik. Midőn magántudós magán munkájában, vagy tanszéken ilyekkel áll elő, úgy szólva csak maga szakálára teszi. Az érdeklett illető közönség előtt nem létezik más garantia, hanem vagy elhiszi ama tudós szavára és tekintélyére, vagy ab ovo meg kell vizsgálnia annak egész alkotmányát anyagi és alaki részleteiben. Mind ezek fennmaradhatnak ugyan az akademia keblében hirdetett véleményekre sat. nézve is; de itt hozzájárúl ám az; hogy ott van a szak' meg lehet vetélytársak ellenörködő szeme és füle, s ha a vélemény ne tán nem elég alapos, a tény nem eléggé valósúlt, az állítás nem eléggé bizonyított, mindig készen áll a hiány vagy hiba kimutatására. És ez az, mi az eredményeket élvezni akaró közönségnek mindenesetre kényelmet nyújt, a tudomány haladó lépteit képviselő új tételeknek nemi garantiát ad s az akademiának minden bizonynyal tekintélyt szerez. De jegyezzük meg, nem úgy jön el ama tekintély, az akademia legdicsőbb koszorúja, mint Istennek ingyen áldása, mely összedugott kézzel is meg lep bennünket; hanem megemlékezve a franczia közmondásról „segíts magadon Isten is segít rajtad" követve a fenérintett eljárást, magunknak kell munkálkodni benne. Teszszük e mi ezt? az szintén nem tartozik jelen vizsgálatom körébe, mint általán fogva az a másik kérdés sem, vajjon akademiánk tapasztalati fogalmában meg van-e a feljebb követelt vonás? De igen is oda tartozik, mivel tárgyam csekélységének mentsége épül rajta, puhatolódzni, vajjon azon osztály melyhez felszólalásomat van szerencsén intézni, van-e körülményeinél fogva azon állapotban, hogy az emlegetett követelésnek megfelelhessen."

Ezekből tehát világosan által láthatni

a) Hogy értekező az akademiák fentállásának lényeges czélját abban helyezi, hogy az előttök tárgyalt véleményekre nézve a közönségnek garantiát nyújtsanak, s a szakok ha a vélemény ne tán nem eléggé alapos, a tény nem eléggé valósúlt, az állítás nem eléggé bizonyított mindig készen álljanak a hiány vagy hiba kimutatására

b). Ugyanezt különösebben akademiánktól is követeli, különben nem mondaná egész nyomatossággal, hogy ez az : a mi azt akademiának minden bizonynyal tekintélyt szerez; de ez nem úgy jő el mint Istennek ingyen áldása mely összedugott kézzel is meg lep bennünket, hanem . . . magunknak kell munkálkodni benne. Követeli pedig felolvasott három értekezéseire nézve is még különösebben a szakosztálytól. Mivel úgymond

c), Tárgya csekélységének mentsége épül rajta, puhatolódzni, vajjon azon osztály, melyhez felszólalását intézi, van e körülményeinél fogva azon állapotban, hogy az emlegetett követelésnek megfelelhessen.

Ezen felhozott okok és felhívások ellenében nem levén menekülhetés ; különben nemcsak az említett vádaknak a közönség itélő széke előtt reánk kellene nehezülniök, hanem különösebben puhatolódzásainak következtében el kellene ismernünk, hogy azon osztály melyhez felszólalását intézte, körülményeinél fogva nincs azon állapotban, hogy az emlegetett követelésnek megfelelhessen : hozzá kell fognunk a nevezett értekezés taglalásához.

Mellőzvén tehát a tudós idézgetéseket melylyekben a legtekintélyesebb régi és újabb tudósok neveik abc rendszerint Arago, Archimedesz, Basedow, Becquerel, Biot Buffon . . s a többiektől fogva egész Wollastonig válogatott kiszemeléssel előfordúlnak, s melyek ha csak ugyan ha mindazoknak munkáit alaposan tanulmányozta, tagadhatatlanúl nagy tudományos készültséget bizonyítanak ; itten csak értelmezésének főbb tárgyairól szólandunk.

I. Értekezés.

Első tárgyúl tehát az állító és tagadó (positiv, negativ) mennyiségek fogalma felvilágosítását tűzi ki magának.

Az állító és tagadó mennyiségek fogalma szükséges következménye az általános számtannak, s egyszersmind oly egyszerü fogalom, melynek nem csak értelmét hanem alkalmazását is minden nehézség nélkül, könnyen beláthatjuk, kivált ha annak példák által lehető felvilágositásától minden ok és szükség nélkül nem iszonyodunk. Ha példáúl (a)-ból ki veszzük (b)-t és egész általánosságban mind az (a) mind a (b) akármi egynemü mennyiséget jelenthet, következöleg (b) lehet egyenlő (a)-val s lehet kisebb is nagyobb is (a)-nál szükségképen elő kell jönni azon esetnek is midőn (a—b) kitételben b>a kérdés tehát mit tegyünk ekkor? holott nyilván van hogy a nagyobbik mennyiséget nem lehet a kisebbikből kivonni. Az igaz, de mivel ezen esetben viszont a<b kivesszük b-ből az (a)t s mivel a maradéknak egynemünek kell lenni azzal a miből felmaradt, a maradék elébe a (b)-nek előjegyét írjuk, s ugyanezen maradékot tagadónak nevezzük.

S vajjon fordúlhatnak-e elő tettlegesen is ilyen esetek? Kétségenkivül. Példáúl ha valakinek több adóssága van mint a mennyit ér egész vagyona, akkor ha adóssait tulajdon vagyonából kellene ki elégiteni, többet kellene töle elvenni mint a mije van, s mivel ez nem lehet, kivesszük vagyona értékét az adósságból s a mi felmarad adósság fog lenni. Ilyen példákat mint tudva van számtalanokat lehet felhozni.

Br. úr megfordítja a dolgot midőn ezeket mondja: „*egy mathematikus a XIX. században nem meri a positiv és negativ mennyiségek fogalmait elméletileg megállítani, hanem kártyától és koczkától „Handelsbilanz“ s mit tudom én mitől koldúl esetleges adatokat, hogy a tanulónak némi zavart adjon ama kristály tisztaságú s rendíthetetlen dolgokról* l. 1857-dik évi Ért, 4. füzet 172.

Előadásaink szerint egészen másképen van a dolog.

Mert a mathematikus, csak miután a negativ mennyiségek fogalmát mathematikai értelemben elméletileg megállapította, azután tér által esetleges adatokra, s azt példákkal és alkalmazásokkal is felvilágosítja.

Kit értett legyen a XIX. század egy megnevezetlen mathematikusa alatt, nem tudhatni, mert nem csak a XIX-dik hanem minden más századokban is voltak és lesznek kik a mennyiségek állító és tagadó fogalmait a közéletben előfordúló esetekre is alkalmazták és fogják alkalmazni. Bizonyosabb az, hogy mivel előbocsátott értelmezésünk következtében az állító és tagadó mennyiség fogalma, akár vonalakra, akár bárminemü más mennyiségekre vonatkozzék, tiszta menynyiségi fogalomból ered, nem pedig megfordítva mint Br. úr állítja, azokat a miket elmondott nem mondhatta más okból, hanem hogy alkalmat vehessen magának egyfelöl a *XIX.* század mathematikusát leczkézni és korholni, másfelől pedig hogy elmondhassa magáról s azon logikáról melyre lehozatait épitette — *építek biz én, különben nem is igyekeztem volna állításaimat a legtökélyesebb logikai szigorral dedukálni,* közbenközben pedig olyan nyaktörö elméleti ugrándozásokat tehessen melyre borzadozva kell tekinteni mindennek, a ki az egyedül ő neki engedményezett legtökéletesebb logikával nem bír.

Lássuk mint járt el dolgában.

1. §-ban innét indúl ki. *A mathesis fö alapelve az,* **hogy az egész egyenlö a részeivel, ezeket mind együtt gondolva.**

Úgy de a tagadó mennyiség fogalma melyet fel kellene világositani, a mennyiségek fogyásából származik, az-e tehát a legtökélyesebb logika hogy megmutatásait olyan alapra építi melynek azzal a mit meg akar mutatni semmi köze sincs. Nem is megy vele semmire. Hiába mondja

3. §. a) Hogy az egész a részénél, vagy részei öszvegénél, ha ebből csak egy hiányzik is **nagyobb**, *és*

b) Hogy egy rész, vagy nem minden részek öszvege az egésznél **kisebb**

4. §. a) Minden részt együtt annál vagy annyinál, a miből hiányzik valami, nagyobbnak nevezek, még pedig épen az ebből hiányzó **részszel** *nagyobbnak; és*

b) Egy vagy több részt együtt annál vagy annyinál a mihez még járúlt valami kisebbnek nevezek, még pedig az ehez járúlt részszel kisebbnek

Mind ezek igazak lehetnek s nincs is kifogásunk ellenök, csak hogy nem tartoznak a dologra.

Valamit, a mi töle különböző s még is vele azonos valamikből áll, egésznek, azon valamiket, a melyekből az egész áll, részeknek nevez. Hát aztán?

És így eleget tett **Buffon** *állításának, de tovább ment* *mint ő, mert kimutatta függetlenül az érzéki tapasztalástól, hogy olyas valami valóban létezik, azaz :* **Kant** *igen helyes kivánata szerint kimutatta értelmezése lehetségét.*

De most sem *Kant*-al sem Buffonnal semmi dolgunk, hanem csak azt akarnók tudni mi az állító, mi a tagadó mennyiségi fogalom.

5. §. Mielőtt tovább mennék, alakítsuk az eddig mondottakat könnyen felfogható és kezelhető algebrai jelképpé.

$$a+b+c+d=s$$

melynek az eddigiekre alkalmazásával nem bántom meg t. hallgatóim értelmességét; de igen is szükséges megmondanom hogy az algebra ezen fogalmakat saját műszavaival jelöli s az egészet **öszvegnek** *a részeket* **öszvezendőknek** *nevezi.*

Miért szükséges? Hát ha meg nem mondta volna, nem tudtuk volna.

Ezzel felállítottuk a **positiv** *mennyiség fogalmát, mint a mely akármely hozzá járuló részt jelent.*

Felállította bizony, nem a *positiv* hanem az *additiv* mennyiség fogalmát mint a mely akármely hozzájáruló részt jelent. Hogy pedig a *positiv* és *additiv* nem mindegy, minden mathematikus tudja.

Egyébiránt szórul szóra visszatér oda a honnét elindúlt *az egész egyenlő a részeivel, ezeket mind együtt gondolva,* mely után közvetlenül tehette volna

$$a+b+c+d=s$$

tehát sem előre sem hátra egy tapodtat sem haladt. Hát ezen úgy nevezett circulus vitiosus is legtökélyesebb logika? Mire való volt tehát az eddigi szószaporítás?

6. *§-ban képzeli még egyszer az egészet mint egy egyéni esetben és szemléleti alakban.*

Azaz : mivel eddigiekből semmi sem jött ki, új küzdelemhez kezd, még pedig tagadhatatlanúl nagy óvatossággal és mathematikai szigorral. Mert ekképen folytatja :

AB egyenes vonalban, mely AC és CB részekből áll.

Közbe mondva szántszándékosan nem fejezé úgy ki, hogy két részből áll; mert a kettő már szám, melynek az algebrában csak a szorzat fejezete alatt szabad legelőször megjelenni.

Több mint Euclideszi szigor. Noha senki sem akadt volna fel rajta ha két részből állónak mondotta volna is annyival inkább, mivel nem rendszeres algebrai tankönyvet ír; csak azt akarnók tudni, mi a positiv? mi a negativ?

7. §. C—t B felé közelítni annyit tesz, mint mostani helye és B közé valahova . . . . sat. tenni.

Tartott töle hogy olvasói nem tudják mit teszen közelíteni. És méltán is, mert értekezésében a kérdés megfejtéséhez közelíteni, annyit tesz, mint mindig több több szövevényekbe keveredni.

9. §. A közelítést folytatva, végre C határ ponttal épen B végpontba jutunk, és itt az a kérdés áll elő : mikép fejezzük ki ezen viszonyt?

Világos, hogy e pillanatban, vagy is helyesben, ezen phasisban az AC tökélyesen egyenlő, söt azonos AB-vel, és így annak része többé nem lehet, mert különben a dönthetlennek s evidensnek elfogadott feljebbi igazság, miszerint **a rész kisebb az egésznél** *megszűnnék igazság lenni.*

10. §. Ám de a mathematikus nem nyughatik meg, sem azon, hogy egy igazság megszünjék igazság lenni, sem pedig azon, hogy oly csekély körülmény, mint a **megérkezés** *az AC—t addig jogosan bírt nevétől, mi több sajátságától, hogy ő* **rész**, *egyszerre megfoszsza.*

S vajjon oly csekély körülmény az a megérkezés, hogy tekintetbe sem vétethetik, holott az minden előbocsátott feltételeinket s a belölök eredő viszonyokat megsemmisíti, s azokat lényegökben megváltoztatja?

Mit tesz hát a mathematikus e bajon segítendő?

Szerintem azt, hogy a 10. §-ban mondottakra rá sem hallgat. Br. úr szerint ellenben:

Meghagyja AC-nek a **rész** *nevet és valóságot, s következetesen folytatva azt mondja : az AC most is része az egésznek AB-nek, és kisebb ennél de semmivel kisebb; és megfordítva AB egész, AC résznél nagyobb de semmivel nagyobb.*

Több az, hogy ő e mellett a másik igazságot sem tagadja, és azt vallja minden emberrel, hogy az AC most már egyenlő az AB-vel, söt vele ezen esetben azonos és így maga is egész

Az AC hát egész is rész is, más szóval az AC egész is, nem egész is; rész is nem rész is.

Értse a ki tudja. Melyik mathematikus nevében mondotta mindezeket? S ezeken aztán megnyughatik a mathematikus ha elébb *vale*—t mondott a józan észnek. Mit teszen tehát Br. úr e bajon segitendő?

Ismét corollarium gyanánt megjegyzi, hogy Hegel-nek, midőn a logika híres három elvének másodikát, a **principium contradictionist** *nem akarta általános érvényességünek ismerni el, tény lebegett a szeme előtt, és hogy azok, kik ama három logikai elvre még metaphysikát is akarnak építeni, nem igen fontolák meg Jézus példa beszédét, mely meg van írva Mát· Ev. VIIr. 24—28 v.*

S ezzel mindennek vége. Hanem még is nyomja valami Mert a

11. §-ban nem venné rosz neven, ha sokan tiszt. hallgatói közöl őtet azon izlámhitű lélek helyzetében látnák, melynek a pokol mélysége felett nyújtott szőrszál- vagy beretvaél pallón kell által mennie hogy bejuthasson Mahomed paradicsomába.

Igen de a volna a kérdés mi a positiv és negativ fogalom, erre pedig mindeddig nem nyerhettünk felvilágositást, még is a következendőkben, a kopasz fejről, Achilleszről és a csigáról értekezik, elmondja hogy a kopaszság és nem kopaszság között nem egy hajszál, hanem egy rakás vagy csomó hajszál a különbség. Megmutatja hogy a rész soha sem érheti el az egészet, azután által tér Archimedesz mondatára hogy ha álláspontot adnak neki kimozditandja helyéből a földet. Megczáfolja ezen állítást még pedig épen ellenkező szempontból mint azt Archimehesz értette és érthette. Mivel Archimedesz a földet légben függőnek gondolta „*ponderibus librata suis*" ő pedig a föld súlyát számítja ki (mellékesen mondva aligha nem igen tetemes hibával) azután a forgó gép útját az utolsó keréken, honnét ki hozza hogy ha egy mázsa erővel csak egy hüvelykel akarná is felemelni a földet, arra 10 billio 167086 millió év, kivántatnék, s utána teszi : *Már tisztesség becsület Archimedesznek, de ennyit nem hogy maga, de neve sem fog élni azon gömböcskén, melyet ő ily könnyü szerel odább lódítni fogadkozék.*

Szegény Archimedesz, hát ha még tudta volna hogy mig ő maga gépeit felállitgatná, addig a föld ezer mértföldeket haladna előre. Archimedesz mondatáról tehát, nem a mai hanem az akkori idők fogalmai szerint kellett volna itéletet hozni.

Egyébiránt igen természetes hogy mindezeknek elmondását múlhatatlanúl szükségesnek tartotta mielőtt a positiv és negativ fogalom értelmezésébe bocsátkoznék, különben nem szaggatta volna félbe a legtökélyesebb logika szigorral ké szült dedukálásait. De még ez mind nem elég.

Tudni kell ugyanis hogy Archimedesz kerekes gépéről vett következtetések folytában *a'C* (útazó pont) *végtelenüll közeledhetik a B végponthoz mint Achillesz a csigához* 180 l. *Ennél fogva nem egy, de egy rakás közelítő állomása van a C-nek melyekről sem azt nem lehet mondani hogy : $AC>CB$; azaz $AB=AC+CB$ sem azt hogy : $AD=CB$ azaz : $AB=AC+O$ vagy is mind kettőt egyenlő joggal mondhatni, és így hát, ha tetszik, AC része AB-nek, ha tetszik vele egyenlő; ha tetszik, AB nagyobb AC-nél végtelen kicsinynyel, mely nem egy, hanem több lehet, és a véghatárra való véghetlen kis lépést jelölvén, végre ha tetszik, azt mondhatjuk, hogy AB nagyobb AC-nél* **semmivel** (l. 77. §.)

18. §. Így hát én a beretváélt meglehetősen kiszélesítettem, azaz megmutattam : hogy az a **megérkezés** *nem csak olyan* **átpattanás** *féle, hogy nem* **egy** *mozzanat hanem számtalan mozzanatok öszvege*; *továbbá hogy az* **igen**-*ről a* **nem**-*re megint nem rögtöni az átmenet vagy inkábh az átugrás sat.*

19. §. De nemcsak annyira lapítottam én ki a beretvaélt, hogy magam s mathematikus társaim le ne bukjunk róla, hanem hogy mint fentebb (11 §.) állítám akkora tért nyitottam melyben két ellenséges hadtest kényelmesen csatázhat.

Mathematikus társai köszönetet mondhatnak érette.

De még e sem elég, mert a következendőkben az eddig mondottakon kivül is sok érdekes dolgokra tanít bennünket

Tudni kell ugyanis, hogy azon utolsó, s még sem utolsó törtszámot, melyet tetszésünk szerint vehetünk semminek vagy nem semminek, a mathematikusok **differentialénak** *nevezik, hogy meg különböztessék azon bármily parányi, de csak ugyan számban kifejezhető részecskétől, mellyel AB kétségtelenüll nagyobb AC-nél, és a melynek mint más akármily nagy de AB-*

nél mindenesetre és aequivocatio nélkül kisebb résznek **differentia** *a neve.*

E fogalmat, elnevezöje s a reá épült tudomány feltalálója **Leibniz** *épen úgy? értette mint azt én a fentebbiekben dedukálám. Szintoly kevéssé akadtak fel rajta a* **Bernoulliak** *s mások, kik az új épület felebb vitelében s kiszélesítéséhen tevékeny és sikeres részt vettek. De már ily korán a belga* **Nieuwentyt**-*nek kire tán szülö földje vastag párái hatottak, sehogy sem fért fejébe, hogy a végtelen nagyot még végtelenszer nagynak gondolja, vagy a végtelen kicsinynek még végtelen kicsiny részét engedje meg, sat. De szembetünöen követné* **Nieuwentyt** *okoskodását az, ki elismerné ugyan hogy létezik oly vékony vonal mellyet egy 2000 szer nagyító mikroskopium is csak oly vékonynak mutatna mint egy pókháló szál, vagy Wollaston platindrótja, mely csak fínom fehér papíron, vagy a galvanikus polusok között tüzesülve látható; de hogy annál már vékonyabb vonal lehessen; nem akarná hinni.*

20. §. Eljött az encyclopaedisták kora, s képzelhetö hogy a végetlen **kicsiny** *eszméje sokkal tisztábban gondolkodási, mondhatni, szellemibb valami volt, mintsem az, az ö vastagabb vagy fínomabb materialismusokkal összefért volna. Nem csak a philosophia, hanem a gúny fegyvereivel is megtámadák hát ök a védetlen szegény végetlent, s nem sejtették — azok az eszes urak — hogy midön az elöttök vélt harlequinen nevetnek, nekik magoknak fityeg hátukon a róka fark, s ök is nevetség tárgyai sat.*

Láthatja az olvasó, hogy ezen értekezésnek eltagadhatatlan szépségei is vagynak, a mit, mivel efférlék számosan fordúlnak elö, elég legyen egyszer említeni.

21. §. **Euler** *hogy a végetlennek odiosummá vált nevét ki kerülje, a differentziálet egyenesen semmi-nek nevezé. Természetesen csak a fentebb bonczoltam értelemben? mit az ellene polemizálók nem sejtvén, igen nyomos erösségnek vélték megczáfolására, hogy hát — szerinte — egyik* **semmi** *nagyobb vagy kisebb lenne a másik* **semminél** *és $\frac{dy}{dx}$ a semminek semmihez való arányát jelölné. Persze hogy az öreg Euler csak mosolygott erre a gyermekes nyilazásra, mint Gulliver a liliputiakra.*

Azonban még ezen színes ellenvetéstöl is menekülni akar-

ván a másik nagy ész, **Lagrange** *a* $\frac{dy}{dx}$ *—et is merőben mellőzé, s azt,* **derivált** *függvénynek nevezvén, egy elméletet gondola ki lehozatalára, melynek csak egy baja van, t. i. logikai alapja hibás. Különben ha ezt elengedjük neki, akkor aztán minden jól megy : azaz nem jobban és nem roszabbúl mint Leibniznél, hanem sokszor jóval kényelmetlenebbül?*

Engedelmet kérek hogy szavában megfogom. De hát nem juthatunk el másképen a positiv és negativ fagalmához, hanem csak úgy mint az *izlamhitű lélek, a pokol mélysége felett nyújtott szőrszál vagy beretvaél pallón a Mohamed paradicsomába.*

Egyébiránt, miután idáig terjedt dedukálásai által, magát annyira felpánczélozottnak véli, hogy már most a *principium contradictionis* fegyvere sem járja (176. l.) csakugyan törésre kerül a dolog.

22. *§. Itt már megint új phasishoz léptünk.*

Ez azt teszi : Miután már kétszer hozzá kezdtünk, s egyszer sem mehettünk semmire, kezdjünk hozzá harmadszor is, melytől ismét az előbbiekhez hasonló eredményt várhatunk. Nem is csuda. Mert hiszen a positiv és negativ fogalmaknak semmi közök a megérkezés phasisaival. Söt inkább a tétel és ellentétel ollyan eredeti fogalmak melyeket sem tagadni sem bizonyítani nem lehet. S ez értelemben a mathematikusok is a positiv és negativ mennyiségeket ellentéteseknek nevezik.

Mint feljebb a közeledést, úgy itt a távulodást mathematikailag értelmezi. Felesleges mind a kettő.

Volna hát összesen három phasisunk, u. m. ugyanazon vonalon mutatva ki sat. láthatni a 184-dik lapon, a ki hasztalanúl akarja elméjét fárasztani megtekintheti. Megjegyzendő még is, hogy a másodikkal nem tud mit tenni, tehát azt kihagyja.

24, §. *A mathematikusok a legutolsó kifejezésben lelék a legegyszerűbb különböztető jellemet, még pedig e szócskában :* **nem** *s ennél fogva a harmadik phasisbeli BC-et* **negativ**-*nek nevezék, s e jelet adák neki.*

Soha senkinek eszébe sem jutott; hiszen az egész dedukálás eleitől fogva végig kirekesztőleg Br.' úr tulajdona. A

44-dik §-ban egész megelégültséggel ön maga mondja : *hizelkedem magamnak hogy mintázatomat eddig legalább senki sem elözte meg.* E pedig tökéletesen igaz.

Lássuk már most hová jutottunk. Tovább így folytatja :

Algebrailag fejezve ki tehát midőn (5 §,) az első phasisban $AC+BC=AB$ és a BC positiv; harmadik phasisban $AC'—BC'=AB$ és a BC' negativ.

Soha sem volt biz a, s nem is lesz soha. Hanem BC' *kivonandó* vagy is *subtractiv.* Megjegyzendő levén egyszersmind hogy noha az eredeti szövegben a vonásos AC'-nek és BC'-nek megkülönböztetése elmaradt, mindazonáltal hogy ennek úgy kell lenni kitetszik onnét, mivel a harmadik phasis alatt világosan kiteszi hogy C távozik B-től e pedig csak a vonással jegyzett C'-ét illetheti.

Mathematikus társai is tudhatják hogy a tagadó menynyiséget kifejező egyenlet :

$$a—b=—c$$

melyben b kivonandó levén, a' (—) azon irányt jelenti, a mint az imént nevekésben levő (a) fogyni kezd s mindaddig fogyhat mig nem a=b mely esetben a—a=o-ba válik. Ezentúl ha az útazó pont túl megyen ugyanazon irányban az (a) kezdő pontján c-vel, akkor c ugyanazon irányt tartja meg melyben odáig haladott, következőleg azontúl is (—)al jelöltetik.

Br. úr tehát valamint elébbiekben a *positiv*-et az *additiv*-el úgy itt is a *negativ*-et a *subtractiv*vel zavarja össze.

27. §. *Így minden kételyt elhárítva, kimondhatjuk a* **negativ** *fogalma értelmezését sat.*

De ha minden kételyt elhárított, miért nyújtja tehát értekezését még egyszer annyira mint már eddig is minden türelmet kimerítőképen terjedett. S miért mondja értekezése berekesztéséül. (195 l.)

Nem mintha kimerítettem volna, hanem mivel már is túlhágtam egy szerény értekezés illő határain, ezennel és ezúttal bevégzem előadásomat.

Azokat tehát melyekkel úgy is túlhágott egy szerény értekezés illő határain, annyival is inkább mellőzvén mivel azok sem egyebek mint az *AB, AC, BC* vonalakból alkotható egyenletek, minden kigondolható ok nélküli összeviszsza forgatásai, még egy pár nézeteire fogunk észrevételeket tenni.

33. §, *A kivonás jegye nemcsak külsőleg az a mi a negativitásé* (**Sit venia verbo**) *; hanem lényegesen azonegy vele, és az a különbség, mit köztök sok, valódi mély belátású mathematikusok kerestek még árnyalatban sem létezik.*

A kivonás és negativitás jegyei között, valamint az összeadás és positivitás jegyei között is soha senki sem keresctt különbséget, hanem az állító és öszvezendő, nem különben a kivonandó és tagadó mennyiségek különbségét még azok is elismerik a kik távol vannak töle hogy valódi mély belátású mathematikusok czímét követeljék magoknak. Hanem Br: úr a mathematikusok mind a két osztályától különbözik annyiban, hogy a mint fentebbiekben kimutattuk a positiv és additiv, negativ és subractiv mennyiségeket, összetéveszti egymással. E pedig éppen onnét ered mivel a mathematikusok nem tesznek különbséget a positiv és additiv s a negativ és subtractiv mcnnyiségek jegyei között, holott a mély belátású mathematikusokat épen ennek ellenkezőjével vádolja.

De van igen is különbség a kivonandó (subtrahendus) és a negativ szám között. Egy oly külömbség, melyet kivétel nélkül minden mathematikus, mondhatni ösztönszerüleg érzett, de a mennyire irodalmi ismeretem terjed, egy is a következő egyszerüséggel ki nem mondott, t. i. a **subtrahendus** *maga a (—) jegygyel felruházott mennyiség, de jegyétől megválva, vagy is elvontan gondolva ; a negatir pedig ugyan olyan mennyiség jegyével gondolva. P. o. ebben : (10—3) a 3 subtrahendus, melylyet mint az előtte való jegyből látom, ki kell vonnom ; a —3 pedig együtt mondva negativ szám, melyet az algebrista a tízhez hozzá ád, és így írja 10+(—3). Ázért még is mind két kifejezés=7.*

Ezeket bármi egyszerüeknek gondolja is Br. úr, mind a mellett még sem egyszerüek, söt inkább nagyon is sokszerük, minélfogva szabatosok sem lehetnek, holott a legtökélyesebb logikai szigornak melyet dedukálásaira nézve követel múlhatlan feltétele a szabatosság.

Mathematikusnak ösztönszerüleg érezni semmit sem szabad, mert arra senki sem ad semmit.

A mi pedig az egyszerüséget illeti, ebben áll:

a) A subtrahendus maga a (—) jegygyel felruházott menynyiség de jegyétől megválva, vagy is elvontan gondolva.

Úgy de az állító és öszvezendő menyiségeknek ugyanazon+nem különben a tagadó és kivonandó mennyiségeknek ugyanazon (—) jegyei vannak tehát melyiket érti alatta? Valamennyi mathematikus midőn a jegyek elvonásáról szól, mindenkor az összeadás és kivonás jegyeire vonatkozik, ezenkivül pedig az állító és tagadó fogalom megkülönböztetése mindig felmarad. Br. úr ellenben összezés és kivonás jegyei elvonásával, mint alábbiakban a képzetes mennyiségek tárgyalásánál látni fogjuk, ollyan alakoskodást üz, melyből az következnék, hogy olyan mennyiségek is vannak melyek sem nem állítók sem nem tagadók.

Már pedig a logikából azt is tudhatná, hogy elvontan véve minden a mi van, minden a mit gondolok, vagy képzelek állító, mert ezen fogalmak van, gondolom, képzelem sat. állító fogalmak.

Úgy de mindennek a mi van, a mit gondolok, vagy képzelek, egy vagy más kategoriában nevezetesen a mennyiségiben ellenkezője is létezhetik, ellenkezőjét is gondolhatom és képzelhetem, s ezen ellenkező a *negativ*. A *negativitás* tehát nem egyéb mint a *positivitás* ellentéte. A ki *positiv* nem gondol, nem képzel, valamit annak ellenkezőjét sem gondolhatja és képzelheti; és ha a *positivval* valami ellenkezőt gondol, ezen ellenkezés mindig a *positivitásra* vonatkozik; világos tehát hogy ollyas valami, a mi állító sem, tagadó sem legyen, nem csak az érzéki világban, de még gondolatban, képzeletben és fogalomban sem létezhetik.

Mi lesz tehát a jegyétől megválva vagy is elvontan gondolt mennyiség? Semmi nem egyéb mint *positiv*. Például a és b ellentétes viszony nélkül mindkettő *absolut*-nak gondoltatván, már az által hogy gondoltatott, mindkettő *positiv*, Mostan ha (a)—t b-vel összeadás jelével kötöm össze a+b leszen b *additiv* viszont, ha kivonás jegyével kötöm össze a—b ugyanazon állító (b) *subtractiv* s egyátalában nem *negativ*, mert, a negativitas csak akkor áll elö midőn b>a; a—b=—c maradékot hágy fel.

b) *A negativ pedig ugyanolyan mennyiségjegyével együtt gondolva. P. o. ebben (10—3)* sat. fentebb ... melyet az algebrista a tízhez hozzá ád, és így írja 10+(—3).

De hát hol tanyáznak azok az algebristák, kik a —3 helyett +(—3)-at írnak, s ez által teljes hatalmukban áll a *kivonandót tagadóvá*, és viszont csupán leirásuk által *a tagadót kivonandóvá* változtatni. Vagy talán azt gondolja, hogy ezen lényeges különbség csak attól függ, ha olyan algebrista találkozik, a ki a — 3 helyett+(—3)-at ír s e kettőt tetszése szerint használja a mikor, és a hol akarja.

(10—3) akárhogy írjuk, soha sem lesz tagadó mennyiség, s a —3 mindig kivonandó marad. Ha ellenben a kivonandó nagyobb, például =(10+3) leszen, 10—(10+3)=(10—10—3)=0—3 tagadó, melyet semmi algebrista az által hogy 10—13 helyett 10+(—13)-at ír, soha sem fog állítóvá változtatni.

Megmondták már azt, s *irodalmi ismerete annyira csakugyan terjedhet,* nagyobb szabatossággal mint Br. úr, hogy mi az állító mi a tagadó mennyiség. Mert akárhova tekintsünk, mindenütt úgy látjuk, hogy állító mennyiségnek nevezik ezen kitételt 0+a=a mely nevekedést jelent 0-tól a-ig; tagadónak ezt (0—a)=—a mely fogyást jelent 0-tól a-ig. S első esetben a + jegyet, melytől úgy is semmi létezhető vagy gondolható mennyiséget nem lehet megfosztani, elhagyják; másik esetben pedig a tagadó jegyet, mely szükségképen mindig az állítónak ellentéte, s a nélkül sem nem létezhető sem nem gondolható, ezen ellentétes viszony megkülönböztetésére mindig kiteszik. Ezért mondjuk, hogy az *állító* (a)-nak folytonos fogyással 0-n kell által mennie mielőtt tagadóvá válnék; ezért mondjuk elméletileg az *állító* (a)-t nagyobbnak a tagadó (a)-t kisebbnek semminél, bárha azok a mennyiség érzéki fogalmával ellenkezésbe látszanak is jőni, mert a 0 és tagadó mennyiség fogalmai csupán eszményiek. S ekképen *a geometriára való alkalmazás nem úgy jelen meg, mint kényszerü egyezménynél (conventiónál) fogva állított viszony, hanem a dolog lényegében fekvő szembetünő igazság.* 44 §.

Meg kell még jegyeznem azt is, hogy Br. úr ezen sajátságos leirási módjával +(—3) még más fogalmat is köt-össze, s ezeket mindenütt algebrai öszvegnek vagy summának nevezi.

Algebrai öszveg nem tehet egyebet mint jelképi öszveget, minthogy az algebra számok helyett jelképi kitételekkel él. De ha ezek helyett számokat teszünk, azonnal számtaniakká válnak. Miért nevezi tehát Br. úr az ehez hasonló kitételeket $10+(-3)=7$ algebrai öszvetnek, a mennyire irodalmi ismeretem terjed, nem tudom.

Jaj volna annak a tanítónak és tanulónak, a ki az állító és tagadó mennyiségek fogalmát az ő legtökélyesebb mathematikai szigorral bíró deducálásaiból akarná megértetni és megérteni. Ám kisértse meg, a ki bízik magához.

41. §. *Mivel azt kérdhetné valaki, vajjon a fellvett útazó C pontnak van-e valami realitása, tehát meg kell mutatnom egy pár alkalmazott példán, hogy oly útazó pontok valóban és láthatólag vannak. Alkalmazásért azonban nem folyamodunk szarufákhoz, vagy kipányvázott lóhoz a skót tudóssal. sat.*

Ez is az értekezésnek azon különös szépségei közé tartozik, melyeket rendesen előre szokott bocsátani, midőn nagy dolgokhoz készül.

Folytatólag elmondja mi a projectio, csak hogy alkalma legyen *mellesleg megjegyezni, hogy ez, az újabb geometriában, s elméleti mechanikában igen szükségessé vált fogalom, melyre óhajtaná, hogy több tekintet és figyelem legyen fordítva iskoláinkban, mint a mennyit tapasztalása súg fülébe.*

Figyelem fordíttatik reá a hol kell, itt pedig bízvást el lehettünk volna nála nélkül.

42. §. *Ime itt a mi útazó pontunk az, ahol a forduló vonalat kísérő függő az alapvonalat vágja.*

S miért nem a forduló vonal azon pontja, mely a fordulással együtt útazik?

A végpont a fordulás sarkpontja.

Lehetetlen. Mert hiszen ki hallotta valaha, hogy a végponton túl is lehet menni, az ő útazó pontja pedig tovább is megyen B-nél a fordulás sarkpontjánál.

Azon innen a **positiv** *és túlrajta a* **negativ** *projectiók.*

Hátha azt mondom, hogy a fordulás sarkpontja épen az a mi a kör középpontja, azon innen a *positiv*, túl rajta a *negativ* sugár (radius), ez nem áll?

De kitetszik ebből most már az, hogy a két rendbeli projectiónak nem csupa szeszélyből adtak positiv és negativ nevet, nem is csak azért hogy az egyik balra a másik jobbra van.

Nem ám, hanem azért mivel egyik a másikkal ellentétes irányban fekszik.

Hanem azért, hogy az egyik rendbeli projectiók az első, a másik rendbeliek a harmadik phasisban vannak.

Mondottam már, hogy a phasisok kirekesztőleg Br. úr tulajdonai, azokra tehát senki sem gondolhatott.

A coordinátákról, honnét a positiv és negativ mennyiségekről világosabb fogalmat szerezhetett volna, csak ennyit mond.

Ugyanily móddal magyarázandók a positiv és negativ coordináták is, mit itt rövidség okáért nem részletezek.

Kár volt, pedig nagyon kár. Mert ezen esetben egyszerübb, és érthetőbb is lehetett volna. Hanem a mit elmulasztott, helyre hozhatja. Állítsa fel tehát magának a coordináták *X*, *Y*, tengelyeit, mindeniket állítólag, s útaztassa ezeken belől A kezdő ponttól fogva, hol a tengelyek egymást vágják, a C pontot egyenes irányban előre, mint lehozatalaiban feltette; sőt többet is megengedünk, előre és hátra, jobbra-balra, a mint tetszik, csak hogy mindig ezen negyedben maradjon, s meglássuk miképen hoz ki minden phasisainak segítségül vételével is negativ coordinátákat.

43. §. *Ezzel feloldatát nyeri a híres Carnotféle ellenvetés is, melylyel ő a vonalnak* $+;-$ *elnevezését gyanúsítá, a mely röviden oda megy ki, hogy a kör átmérőjének egyik fele* $+R$ *(radius) a másik* $-R$ *levén, maga az átmérő* $=0$ *semmi lenne. Semmi biz az ellenvetés, mert ez a képlet; úgy hogy* $+R-R$ *azon egy diameter két részei legyenek, soha elő nem fordúlhat. Ebben az értelemben épen annyi volna ez, mint azt mondani valakinek, hogy a Verestengerből merje ki a Feketetenger vizét. R t. i. D-nek mint egésznek nem levén része,* **minus** *jegygyel nem kapcsolhatjuk hozzá, hanem a 40 §. IV. szerint így kell írnunk:* $R-(-R)=R+R=Diameter$*, a mint igaz is.*

Igaz biz az, mert minden bizonyítás nélkül közvetlenül tudjuk, ő pedig azzal bizonyít a mit elébb be kellene bizonyítani. Miért ne fordúlhatna elő ezen eset; $R—R=0$? Hát már megfeledkezett a 33. §-ban 188. lapon mondottakról, hogy: a negativ pedig ugyan olyan mennyiség jegyével együtt gondolva, melyet az algebrista (a positióhoz) hozzáád és így írja $10+(—3)$. Azért még is mindkét kifejezés $(10—3)$ és $10+(—3)=7$ egyenlő. Söt a

34-dik §-ban, még igazolja is, *mi jogosítja az algebristát ezen úgy látszó összezavarására a kifejezéseknek.* L. tovább a 188-dik lapon.

Carnot ellenvetése onnét ered, mivel a *kivonandót* épen úgy mint Br. úr nem különbözteti meg a *tagadótól.* Mondottuk már, hogy a tagadó a 0-n túl folytatott elfogyást jelent, s ez értelemben mindig kisebb semminél, annál is inkább kisebb akármi állító mennyiségnél, melyeknek következtében :

$$R>0—R;\ R+R=2R=D>0.$$

Hátra van még, hogy azon kérdésre feleljünk, hogy mindezek ellenére is miképen hozhatta ki a projectiókból és phasisaiból, azon kétségtelen háromszögméreti tant, miszerint a Cosinusok az első negyedben állítók, a másodikban tagadók.

Csak úgy, hogy deducálásaiban és alkalmazásában anynyira különbözöképen beszél, mintha a *Vöröstengerből* akarná kimeríteni a *Feketetenger* vizét; ezenkivül, mivel előre tudta azon eredményt, melynek ki kell jöni, addig küzdött vele míg reájok rámázhatta megmutatásait; a mit annyival könynyebben tehetett, mivel más részről a phasis ollyan sokféle értelmü szó, melyet, ha kell, a cholerára is lehet alkalmazni.

Deducálásaiban szó sem volt sarkpontról, két útazó pontról, körvonalról vagy általában görbe vonalról, s a vonalak projectióiról, hanem egyetlen egy útazó pontot vett fel, s azt egyenes irányban útaztatta.

Itt pedig két útazó pontja van, egyik, mely tulajdonképen útazik a kör kerületén görbe vonal mentiben, mindazonáltal nem ezt, hanem annak projectióit, söt még ezt sem, hanem a sark körül forduló vonal végpontja projectióit, a minél alig lehet valami önkényesebb következetlenség, veszi útazó pontnak. Van kezdő pontja, van sarkpontja, van végpontja. Kezdő pont az átmérő kezdete, sarkpont a kör közép pontja, végpont az átmérő vége. Utolsó phasisa, melyben a negativitas titka rejlik, akkor állana elő, mikor az útazó pont a végponton túl útazik. Ide tartozó szavai : *Mi pedig visszatérünk a C-re, s tovább útaztatjuk a B határon is túl. Itt már megint új phasishoz léptünk sat.* 183. lap. S noha ezen utolsó phasisa, miszerint az útazó pontnak a határon is túl kell mennie, elő sem áll, még is kihozta azt, a mit előre feltett magában.

Hanem erre azt felelhetné, hogy most ő neki a sarkpont a végpont. Elhiszem, de viszont azt kérdhetjük: mi jogosíthatja erre az algebristát, holott a valóságos útazó pont a félkerület mentében folytonosan előre halad, s azzal együtt annak (nem pedig a sarkpont körül forduló vonalnak) projectiói egyenes irányban mindig nevekedve az átmérő kezdetétől fogva annak vég vagy határ pontjáig? S már most útaztassa tovább, ha tetszik, hogy a harmadik phasis előálljon.

Nem jobb volna-e azt mondani, ha már a projectio semmiképen el nem maradhat, hogy : a kör középpontjából felállítom merőlegesen az átmérőre a fél átmérőt, mely után ha azt bizonyos szeglet alatt előre hajlítom, s annak projectióját állítónak veszem, a hátra hajlítás projectiójának ellenkező irányban kell esni, következőleg tagadónak kell lenni, a miről phasisok nélkül is meggyőződhetünk.

De már szerencsére oda jutottunk, hol a sok szószaporítást, melynek részét tetemes észrevétel nélkül hagytuk, maga is megsokallván, ezen vígasztaló szavait intézi hozzánk :

Nem mintha kimerítettem volna (még sem!!!), *hanem mivel már is túlhágtam egy szerény értekezés illő határain, ezennel és ez úttal bevégzem előadásomat.*

Ezt teszszük mi is.

II.

Második értekezésének főbb tételei :

I. Igyekezik megmutatni, hogy az egymással egyenlő oldalú merőszögek és ferdeszögek tértartalmai az elhajlási szegletek arányában, 1 sin α : sin β vannak, s hozzá teszi :

Ezen viszony a mily sajátságos, várni lehete, hogy valaki oka fölfedezésében fáradozott; de biz az tudtomra még eddig nem történt.

Egyenes oka az, mert az egyenlö alapú és magasságú egyközények területei egyenlők. S mivel ez már Euklidesz I. k. 35,36. propositióiban meg mutattatik, s mint a gyakorlati mértan legalsóbb alapelve, már ő előtte kitudja hány századdal, sőt ezereddel ismeretes lehetett; a felhozott viszonyok okának felfedezésében nem volt szükség fáradozni, annyival inkább, mivel Euklidesz megmutatása hasonlítatlanúl szigorúbb és világosabb az övénél, melyet a generatrix, directrix, differential köröcskék, s egyéb effélék által a lehető legnagyobb homályba igyekezett burkolni.

II. Kétségbe hozza, hogy vonalt a vonallal osztási viszonyba lehetne tenni. Mivel ú. m. e feladat: $ab = cx$-ből *x-et megtalálni mindig feloldható, még pedig így* $x = \frac{ab}{c}$ *egészen geometriai constructióval.*

Ezen képletből látnivaló hogy az osztandónak, szükségkép téglalapnak (rectangulum) vagy téglalappá alakítható lapnak kell lenni. Az a kérdés, tehát tehet-e lap laphoz, és vonal vonalhoz osztási viszonyban?

Ezekről soha senki sem kételkedett. Mert vonal a vonallal, lap a lappal egyneműek levén, mindenik lehet kétszer, háromszor s akár hányszor nagyobb, ennélfogva megfordított osztási viszonyban kisebb mint a másik. Hanem sokkal inkább arról lehet kétségünk, lehet-e vonal osztási viszonyban a laphoz, mert a vonalnak végetlenül sokszor kellene a lapban megtaláltatni, s a vonal és lap külön neműek levén, nem lehetnek arányban egymással.

De ha már a kérdést feltette, meg is kellett mutatni. Mely végre elsőben számokat alkot vonalakból, noha 71. §-a végén azon írónak véleményéről, ki szerint *a szám semmi nem egyéb, mint a vonal hossza, azt mondja Poloniussal, hogy bolondság, de rendszer van benne.* Azután onnét kihúzott következtetéseit hat pontba foglalja, melyeknek utolsója szerint közelített ugyan a kérdés megfejtéséhez, de még el nem jutott.

Hanem, minthogy eddig egy elsőbent mondott, következik annak másodszora. Melyből ismét végéremehetetlen értelmezések, s az egyszerü $sr = e$ egyenlet minden lehető öszve-vissza forgatásaiból vont következtetése után, nagy meglepetésünkre eljutunk oda, a mi eszünk ágában sem fordult volna meg, hogy a törtszámokban egy mathematikai mívelet jelképe és szerkezete a maga elemeivel oly formán van coordinálva, *mintha a természetrajzban ilyen felosztást tennének, hogy „a madarak háromfélék, ú. m. vízi madarak, szárazi madarak és tyúkok, s e csak azon sötét évszázadban történhetett, melyben a kimikusok a bölcsek kövét keresték, s a természetrajz nyereményei a griffmadár, a basiliskus a kraken és a kétfejü sárkány valának, melyben a theologia azt a kérdést tüzte ki, vajjon idvezítőnk cserebogár képében végrehajthatta volna-e a megváltás nagymunkáját*"? Hát ha ezeket olvasná Polonius? bizony ö is megakadna rajta hogy mit mondjon rólok.

És még az a képtelen nevezet hozzá : **törtszám**. *Mintha biz a számot el lehetne törni.*

III. *Ha elmondá a nyavalyát, méltán orvoslási módot is követelhetni töle*; *nem is kéreti tehát magát, hanem mond kettöt.*

Miután azonban egészséges ember sem hajt a feltolakodó kuruzsoló szavaira, s mi is úgy vagyunk meggyözettetve, hogy a mathesis alapelvei a krakenek és basiliskusok idejében is épen oly ingatlanok voltak mint ma, s azokat akkor sem lepte meg semmi nyavalya : egyik orvoslási módot sem fogadjuk el, s okát adandjuk miért ?

Térjünk hát a részletekre vissza.

Azt mondja : *E feladatot* $ab = cx$ *mindig feloldhatni, még pedig így* (?) $x = \frac{ab}{c}$ *és egészen geometriai constructióval.*

Ezen képletben látnivaló, hogg az osztandónak szükségkép (?) *téglalapnak* (rectangulum, merőszög) *vagy legalább téglalappá alakítható lapnak kell lenni.*

Az a kérdés tehát : lehet-e *lap laphoz, és vonal vonalhoz osztási viszonyban?*

Elöbocsátott tételéröl nem is kételkedik, holott az épen nem látnivaló, söt elsö tekintetre láthatóképen nem igaz. Arról pedig, a mit kétségbe von, soha sem kételkedett, s nem is kételkedhetett senki.

Hogy ezeket bebizonyíthassuk, kénytelenek vagyunk olvasóinkat a legalsóbb számtani elemekre emlékeztetni. De ez onnét van, mivel Sz. állításai a legalsóbb számtani elvekkel is ellenkezésbe jőnek.

Mindenki tudja hogy a sokszorozás nem egyéb mint valami mennyiség ismételt összeadása. Következőleg: az ismétlés általános szám levén, egyik tényezőnek mindig általános számnak kell lenni, a másik tényező pedig akár általános akár megnevezett szám lehet, s mindkét esetben a szorzatnak a maga egyik tényezőjével egynemünek kell lenni. Innét pedig szükségképen következik, hogy osztási viszony, mely a szorzásinak megfordított viszonya, vagy csupán általános számok között, vagy csupán egynemü megnevezett számok között melyet különösen aránynak nevezünk, vagy általános és megnevezett számok között lehet; más nemüek között pedig, milyenek a lap és vonal, egyáltalában nem.

Hogy tehát ezen feladat $x = \frac{ab}{c}$ megoldása számokban mindig, annálfogva akkor is lehető, midőn az a, b, c vonalak számokban fejeztetnek ki, fentebbi előadásainkból önkényt következik; mivel a számok számokkal, akár egyszerüek, akár összetettek legyenek, mindig egynemüek levén, osztási viszonyban lehetnek egymással.

De a mértani szerkezet mást kiván, t. i. azt, hogy a vonalak nem számokban, hanem csak mekkoraságban adatnak, s ahoz képest x-nek értékét sem számokban, hanem mértani szerkezet által kimutatható mekkoraságban kell előállítani. S ezen feladatot a mértan akképen fejti meg, hogy c, a, b-hez vagy c, b, a-hoz negyedik arányos vonalat keres.

Miképen lehet ez? holott azon felfejtésben, sem szám, sem tényezet, sem annál inkább merőszög alakítása egyáltalában elő sem kerül; másrészről pedig az adott átalános analytikai képletben azon eseteknek is be kell foglaltatni.

Úgy, hogy ezen általános kitételben $x = \frac{ab}{c}$ valósággal még más két felfejtés foglaltatik $x = \frac{a}{c} \times b$ s innét $\frac{x}{b} = \frac{a}{c}$ és: $x = \frac{b}{c} \times$ a melyből $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ ekkor pedig $\frac{a}{c}$ az a és c, $\frac{b}{c}$ a' b és c, $\frac{x}{b}$ az x és b, $\frac{x}{a}$ az x és a vonalak arányát fejezi ki, s oda útasít bennünket, hogy vagy a' c, a, b-hez, vagy a' c, b, a-hoz negyedik arányos vonalat keressünk.

Már most, kitudja megfogni, miképen következik onnét, mivel $x = \frac{ab}{c}$, az, a mit Sz. belőle kihoz: hogy (ab)-nak szükségképen merőszögnek kell lenni. Még pedig azért, mivel mértani szerkesztés által a, b, c-hez negyedik arányost kell találnunk, s a leszen a keresett x. Úgyde az arányosság osztási viszony levén, a négy arányos vonal között is osztási viszonynak kell lenni; téglalapnak ellenben a mértani szerkesztésben nyoma sincs, tehát arról szót sem ejthetünk.

Úgy is van valósággal a dolog. Mert,

a) Mint már a fentebbiekben láttuk, osztási viszony, vagy csak általános számok, vagy csak egynemü megnevezett számok, vagy általános és megnevezett szám között lehet más nemüek között soha sem. Már pedig vonal és lap más nemüek.

b) Vonalból sokszorozás által mindig csak vonal származhatik, lap pedig soha sem; tehát megfordítva, osztás által sem lehet lapból vonalat származtatni, pedig ezen kitételben $x = \frac{ab}{c}$ ha (ab) lapot, x vonalat jelent, szükségképen ezen esetnek kellene magát előadni.

c) Ha ezen kitételt $x = \frac{ab}{c}$ így írjuk $x = \frac{a}{c}$ b vagy: $x = \frac{b}{c}$ a akkor $\frac{a}{c}$ és $\frac{b}{c}$ a' nevezett vonalak arányát jelenti, s egyszersmind az egyenes vonal ismeretes egyenletére akadunk, hogy pedig abban szükségképen téglalapnak kellene lappangani, senkinek eszébe sem juthat.

d) Ellenben az $x = \frac{ab}{c}$ kitételnek fentebbiekben előadott értelmezése, mind a szorzás, mind az arányosság fogalmaival, mind az egyenes vonalak egyenletével összeegyezik.

Mindazonáltal hozzá fog annak megmutatásához, hogy vonal is lehet vonalhoz osztási viszonyban. A minek megmutatása természetesen igen nehéz, mert magában látható levén, megmutatás nélkül úgy sem szükölködik, hanem az egynemüség kétségbevonhatlan következménye. Nem is éri végét megmutatásainak, mint látni fogjuk, hanem végéremehetetlen szószaporitásokkal addig fárasztja és kalandoztatja ide s tova az olvasót, míg végtére elfelejteti vele miről van a kérdés.

Az 59-dik §-ban megtanit bennünket vonalakkal számlálni ekképen : $AC=1\ AC$; $AC+AC=2AC$ azaz két AC sat.

Mirevalók ezek? Hiszen ha minden egységgel külön külön akarunk számlálni tanulni, annak soha végét nem érjük. Magának is feltűnik, hogy *elemi, nagyon elemi dolgok ezek*; hanem azzal vágja ki magát : *de épen ezen elemiek elhanyagolása hozta aztán a sok zavart és badar beszédet a tudományba, és a haszonvehetetlen és értelemzavaró sok műszót nyelvünkbe.* Pedig e vád semmire sem illeszthető méltányosabban mint saját értekezésére, a mi világosan ki fog tetszeni a következőkből.

A 60-dik §-ban következményeket von

a) *Hogy a mértékek összegeit jelentő mellékneveket számoknak nevezik, s azt tanuljuk, hogy a számokat csupán az egyek hozzá tétele által ismerhetni meg voltakép. Az egy nélkül a kettőről, a kettő nélkül a háromról, és így tovább nem lehet fogalmunk.* Ezeket tehát innét tanuljuk, különben soha sem tudtuk volna.

Gyakorlati eredményeire nézve megjegyezhetjük, hogy mióta Pestalozzi ezen igazságot elismerte és a tanmódszerbe behozta, azóta a számvetéstudók száma — keveset mondok — százszorta szaporodott mindenütt a hol bevették, s az a mit azelőtt csak nehány kiváltságos fő illetékének tartottak, köz jószággá vált. Hiszi ezeket valaki? avagy nem inkább a badar beszédek jutnak-e eszünkbe?

b) alatt Göthe büvölő inasa, a dyadika, tetradika, heptadika, dekadika, dodekadika varázsvesszeje, fordúlnak elő.

c) alatt a számlálás maga már szorzás, és minden szám szorzat.

d) alatt *kitetszik ebből azon értelmezés* **logikátlansága**, *mi szerint : „a szorzat oly szám volna, mely egyik tényezője által úgy keletkezett a másik tényezőből, mint amaz első tényező az egyből.“ Úgy de ez az elsőbb tényező maga is* **szorzás** *által keletkezett az egyből, ennélfogva az a lényeges nagy hiba van* *benne, hogy az értelmezendő maga már benne van hallgatagon az értelmezésben (definitum ingreditur definitionem).*

Söt inkább c) alatt azt mondá, hogy a számlálás maga már szorzás, kétségen kivül azért, hogy az értelmezendőt bele hozhassa az értelmezésbe. Helyezzük tehát vissza a szorzás helyébe a számlálást, s e szerint az első tényező számlálás által keletkezik az egyből, s épen úgy a szorzat is ezen tényezőből.

Nagy dolog, ha okos embereknek, ilyen csekélységekben is, logikai leczkéket akar adni.

e) Lehozatalaiból kitünik, hogy a szorzónak és szorzandónak oly közönségesen és megszorítás nélkül állított azonossága, vagy egynemüsége és felcserélhetősége épen nem áll.

Ezekre nézve semmi szószap orító lehozatokra nem volt szükségünk, mert minden kézi könyvben megtalálhatja, hogy a szorzónak mindig általános számnak kell lenni, a szorzandó pedig akármi megnevezett szám. A kettőnek közönségesen és megszorítás nélkül állított azonossága és egynemüsége pedig, sehol másutt elő nem fordúl csak itt, tehát csak a maga saját fogalmaival lehet dolga. A felcserélhetőség egészen más. Mert a szorzók valami megnevezett egységre nézve mindig általános számok levén, felcseréltethetnek egymással.

AC lévén a mérték, 2AC 3AC . . sat. valódi szorzatok, és bizony nem lehet ezek helyett mondani AC-szer kettő AC szer három sat.

Ezen nagyszerü felfedezés, melyet, mint, állítja *bizonyos fogalmak értelmezésére nem nélkülözhetüük,* oda útasít bennünket, hogy a kik mindeddig így sokszoroztak, például : két font czúkorszor három ; ezentúl így sokszorozzanak : kétszer három font czúkor. Mert, *ennek elhanyagolása, söt megtagadása ama fogalmakat maig is homályba hagyta.*

f) Utolsó következménye az, hogy feltett kérdésünknek „lehet-e osztandó egyéb is mint lap?" megfejtéséhez közeledtünk ; de mielőtt eljutnánk hozzája : még más oldalát is meg kell vizsgálnunk a dolognak. Ez az *első közelítés.*

A 61. §-ban *Határozott egyenes vonalt vesz fel, melynek kezdő* pontja A, végpontja *B* nevet kapjon. Ezen vonalnak közepére gondolja a C-t, azután AC és CB vonalaknak ismét közepét gondolja sat. s egyszer eszébe jut, hogy :

Ha már most az életet és gyakorlatot kérdeném meg, mit csináltam? azt felelné reá, hogy: felosztotta ön AB vonalat egyenlő részekre ; én pedig azt viszonoznám ama felelőnek, hogy nem osztottam, hanem szoroztam, a mennyiben oly összeget állítottam elő, melynek részei egyenlők.

Nem csudálkozhatnánk rajta, ha a felelő ezekre ismét azt viszonzaná : hogy vagy nem tudja mit beszél, s az osztás és szorzás fogalmait öszzezavarja, vagy készakarva történt aggatódzásból érthetetlenséget akar mondani. Mert ha az adott egésznek részét mint ismeretlent keresem, ez csakugyan semmi értelemben nem lehet szorozás; a szorozás ellenben ismeretes részt teszen fel, melynek annyiszor kell ismételtetni mint a szorzó kivánja. Mást beszél az 59-dik, mást ismét a 61-dik §-ban.

Még is miután az idézett két §-ban az osztás és szorzás fogalmát kitelhetöképen öszzezavarta, előáll a logikával, a minek mindenütt ott kell lenni, mintha ő találta volna fel elsöben, s mind e mai napig ő értene hozzá legjobban.

Ez által mutathatjuk ki valóban a szorzás és osztás közti lényeges kapcsolatot, nem pedig hamis és a logika legsérthetlenebb szabályai ellen rugódozó rosz értelmezésekkel.

Következökben jó darabig szó sincsen többé a feltett nagy kérdésről, ha lehet-e vonal vonalhoz osztási viszonyban, hanem egy háládatlan eszme fejtegetéséhez fog, melyet egész értekezése folytában nem tud tisztára hozni, noha annak magasztalására nem kíméli a nagy szavakat, s csudálkozik azoknak tudatlanságán, a kik mind ez ideig észre nem vették. Lehetetlen levén azonban az ide tartozókat és nem tartozókat kellőleg részletezni, az olvasó belátására vagyok kénytelen bízni, olvassa el figyelemmel a 63-dik és 64-dik §-kat, mi okulást vehet belölök. Pedig hogy nagy érdekü dolgokról beszélt, onnét gyaníthatni, mivel így fejezi be :

És általában az analogia a + és — viszonyaik közt egyfelől, s a szorzási és osztási jegyekéi közt másfelől oly tökélyes és átható, hogy az úgynevezett jegyek szabályai, melyek mostani algebráinkban **(ezután hihetöleg másképen lesz)** *csak a positiv és negativra vonatkoznak, a + és — helyett ezeket* (×)

és (:) tevén, minden tekintetben állanak. Sőt nem csak elméletben állanak, hanem gyakorlati hasznuk is tetemes, és névszerint a kezdőknek és tanulóknak a törtszámok szorzási és osztási műveleteiben egyetlen egy szabály teljes és kielégítő útasítást ád, egyszersmind nagy erő és idő kímélést, s e mellett egészen okszerű belátást eszközölvén. Csodálatos, hogy valamennyi tankönyvíró ezt észre, vagy tán csak számba nem vette.

Ha ez így van, csakugyan érdemes lett volna azt az egyetlen egy szabályt megemlíteni, sőt gyakorlati alkalmazással is felvilágosítani. Így aztán akadhatna még egy Pestallozzi, a ki azon igazságot is elismerné és a tanmódszerbe behozná, hogy a számvetéstudók száma — keveset mondok — százszorta szaparodnék.

A 65. 66. és 67. §§-okat is felesleges volna részletezni. Az olvasónak hasznos gyakorlatúl szolgálhat a logikában. De az eredményt nem látom feleslegesnek megemlíteni.

És ez által azon különös esetekre, ha e=1r vagy 2r, 3r... sat. a végetlenig, határzott értelmet tulajdonítunk oly osztási képletnek, melyben osztandó és osztó egynemű ürnemek t. i. mindkettő vonal, mindkettő lap, mindkettőtest. Tehát az 58. §-ban tett kérdés megfejtéséhez még egy igen nyomos lépéssel közelebb jutottunk. De teljes megoldatára még több vizsgálatot kell tennünk. E már *második közelítés.*

Mikor lesz hát ezeknek végök? S nem úgy járunk-e vele a 68. §. példája szerint, mint *a ki 20 lábnyiról egy borsó nagyságú likon borsó szemeket hajigált át, mire Mátyás királyunk óta nem is volt példa, s a minek az eszélyes király, ha megtörtént is, igen csekélg díját szabta.*

És valóban alig örvendhettünk egy kissé annak, *hogy a feltett kérdés megfejtéséhez még egy igen nyomos lépéssel közelebb jutottunk,* ismét más örvénybe sodortatunk, mivel a következőkben irtó háborút indít a törtszámok ellen, hogy azoknak még csak nevök és emlékezetök is az élők könyvéből örökre kitöröltessenek. Közbe jőnek azonban a 68. és 69. §-ok, melyeknek átolvasását hasonlag olvasóim figyelmébe ajánlom, mivel azokhoz hasonló érdekes fejtegetéseket nem egy könnyen lehet találni.

A háború tehát tulajdonképen a 70. §-ban kezdődik, azon előrelátó, taktikával hogy mindenekelőtt ellenfelét gyülöletessé akarván tenni, azt állítja : hogy a törtszámok azon sötét századokban származtak, *melyekben a griffmadár, basiliskus, kraken és kétfejü sárkányok.* Volt az idő, midőn hétfejüket is emlegetett, de már most öt fejjel alább szállította.

Mindezek mellett bevallja, hogy a rosz nevezet, a vele járó rosz értelmezés és zavart elmélet legkisebb befolyással sem voltak a számvetés szabályaira, s mind azok a miket az általok úgy nevezett **törtszámokra** *nézve parancsolnak, tökélyesen helyesek. Hanem fontosabb következményei vannak az életbe átmenő csalfa elméletnek, mint futó tekintet hagyja észre venni. Emlékezzenek csak tisztelt hallgatóim azon nehézségekre, melylyekkel a törtszámokkal bánás tanulásában kellett küzdeniök!*

Mennyiszer meg lepő volt az a visszásság, hogy $\frac{1}{2}$*-et és* $^1/_3$ *ot nem tehet úgy öszveadniok, hogy* $^2/_5$ *legyen belőle.* Hiszen ezt józan észszel kivánni sem lehet. Hát a 25 miért nem 7 ? ez is meglepő visszásság? 25-ben sem lehet 2-öt 5-höz adni.

Hogy a törtszámmal való szorzás a szorzandónál kisebb szorzatot, az osztás az osztandónál nagyobb hanyadost adott!

Ennek okát is könnyü általlátni, s a kinek annyi belátása sincs, ne tanuljon semmit.

De ma már a tanítás oktatással jár — és miképen lehessen csalfa elméletet megérteni?

Ezért lett volna szükség az igaz elméletet kifejteni melyről 64. §-ban állítja hogy *egyetlen egy szabály teljes és kielégítő útasítást ád.* Melyik az? S mi hasznát vessszük ha nem tudjuk.

A szám lehet positiv, negativ, lehet szorzó, osztó de soha nem **tört,** *s az úgynevezett törtszám számtani míveletek complexusa.*

Számtani míveletek ; az összeadás, kivonás, sokszorozás és elosztás ; hogy tehát a törtszám számtani míveletek complexusa volna, annak értelme nincs.

71. §. *Ugyanis ez, pl.* $^1/_5$ *elvontan véve teljes lehetetlenség.* Igen is annak, a kinek logikája megengedi, hogy a fogalomnak lényegét is elvonjuk a fogalomtól, s a fogalom mégis ugyanaz maradjon. De hát létezhetik-e egység a minek részei ne volnának? Mindenki tudja, hogy az olyan elvont egységet,

melynek részei nincsenek, mennyiségi tekintetben semminek nevezzük.

Ha az **egy** *afféle egy, a milyenekből az 5 áll, akkor világos lehetlen hogy 5, 1-nek része legyen.*

Milyen világos elferdítés! Hiszen $^1/_5$ kimondva *egy ötödrészben* félreértetlenül az foglaltatik, hogy 1 része az 5-nek, nem pedig 5 az 1-nek.

Ellenben jól megvizsgálva a dolgot $\frac{1}{5}$-ben, mint míveleti jelképben, háromféle gondolkodási processus van : 1) Gondolnom kell valamit, a minek részei legyenek. 2) Azt a valamit (testet, lapot, vonalat, időt, erőt) 5 egyenlő részre osztani 3). Ezen részek közől egyet és csak egyet gondolni létezőnek sat.

E dolog tehát jól meg levén vizsgálva, hozzá vizsgálhatjuk még azt is, hogy a számokban és számlálásban szintúgy ezen három gondolkodási processus van. Ha valamit meg akarok számlálni. 1). Gondolnom kell valamit a minek részei legyenek. 2). Azt a valamit egyenlő részekre osztani. 3) Azon részek közől egyet, kettőt, hármat. . . . sat. annyit a mennyit számlálok, gondolni létezőnek. Minthogy tehát a törtszámokban is épen ezen gondolkodási processus van, már csak ez okból is méltán számoknak neveztethetnek.

Általában a törtszámok nem is egyebek, mint megnevezett számok, melyekben a megnevezés nem szóval, hanem a nevezőben kitett számok által történik, s ezt azért nevezzük nevezőnek; a számlálás pedig a számító által, s azért nevezzük számítónak. S mégis kérdésbe teszi :

Hogy lehetne mindezeket felvenni az ismétlési actus fogalma alá?

Igen egyszerűen úgy, hogy a számítóban mindenkor azon ismétlési actus határoztatik meg, a hányszor a nevező egységeit ismételve kell gondolnunk.

Sokkal inkább a dologra tartoznék, hogy a kérdés ez : *lehet-e vonal vonallal osztási viszonyban?* S erre kellene már egyszer megfelelni.

És még e sem elég. Hanem ezeken túl megint a mai rendszereknek fordúl. A rendszert értelmezi, a mai rendszerek ellen élesen kikel, hogy *midőn valaki a tudomány igazságait plausibilis logikával osztott czímek s ezek szerint rendezett* *fejezetek alatt előtálalja, azzal hízelkedik magának, hogy ugyancsak rendszeres tan- vagy kézi könyvet írt! Innen van az is, hogy a mostani tudós világban divatos vélemény az* **alkalmazott logika** *legjelesebb emlékét, Euklidesz Geometriáját rend és módszertelen könyvnek nyilvánítni; mivel a halhatatlan szerző nem lelte azt megegyeztethetőnek a bebizonyítások logikai következetességével, s ennélfogva nem írt oly hysteron proteronokat, a milyek hemzsegnek a fentebbi recept szerint szerkesztett Geometriákban?*

Hát itt nem hemzsegnek? *Hova maradt hát a főkérdés, lehet-e vonal vonallal osztási viszonyban?* Ellenben a logikának még is csak elé kellett fördúlni nehány sorban legalább háromszor.

Melyeknek szerzői ha mutatósan kiállíthatták rovataikat, büszkeséggel kiáltják a világnak: Exegi monumentum aere perennius.

Suum cuique. Ha Sz. voltaképen meg van győződve mindazoknak igazságáról, melyekről azt allítja, hogy a legtökélyesebb logikai szigorral vannak deducálva, méltán ugyanazt kiálthatja ő is.

Ily rendszerező kezek között veszett el a szám fogalma is. Lám oly magánosan állott a világon az a szegény szám! Ott volt a **quantitas continua** *és* **quantitas discreta**, *ott az egyenes és görbe vonal; a háromszögeket meg háromfélekép is fel lehetett osztani, mig a szám mindig szám maradt. Nosza hát osszuk fel azt is, legyen* **egész szám** *és* **törtszám**, *majd aztán legyen* **rationalis** *és* **irrationalis** *szám — aztán hisz a szalonnát csak meg kell kezdeni majd reá járnak — következett a* **valódis** *és* **képzetes** *szám megkülönböztetése. Ha még hozzá teszszük a positiv és negativ számokat, kiviláglik, hogy ha késöre fogtak a felosztás munkájához, csakugyan ki is pótolták a mulasztást.*

Felfogása szerint tehát az analytikai mennyiségtan legnagyobb része csak úgy származott, mint mikor *a szalonnát megkezdik s azután rájárnak.* Nekiestek a számok felosztásának, és ha *késöre fogtak a felosztás munkájához, csakugyan ki is pótolták a mulasztást.* Kétséget nem szenved, hogy ezen felfogás a szokottnál nagyobb járatosságot és mélyebb belátást feltételez a mathematikai tudományokban.

Ha elmondá a nyavalyát, méltán orvoslási módot is követelhetni töle. Nem is kéreti magát, hanem mond kettőt.

Hogy orvoslási módjáról itéletet hozhassunk, ismerni kell a nyavalyát, melyet orvosolni kiván. Erről ugyan emlékeztünk már alkalmilag nehány helyeken, de mivel most különösebben ezen tárgyra kell fordítani figyelmünket, nem leszen felesleges róla rendszeresebben szólani.

A törtszámok kiirtására törekvő harczot már a 60. §-ban megkezdette, azt állítván, hogy az idézett helyen általa felhozott pia fraus onnan támad, hogy *a törtekkel való szorzást is föl akarák venni a szorzás általános fogalmába, mi perse nem sikerült és nem is sikerülhetett. Majd meglátjuk miért.*

És már itt elfeledte a miket nehány sorral elébb a számrendszerekről mondott, hogy azok a számfogalmak végetlen halmazában útakat nyitnak, csoportokat alkotnak sat. Világos ugyanis, hogy minden rendszerek a törtszámok fogalmán alapúlnak, miszerint alsóbb egységekből felsőbbeket alkothatunk és viszont. Legvilágosabb pedig a közönségesen használt tizedes rendszerben, hol a törtek és egész számok között nem is teszünk más különböztetést mint azt, hogy őket valami jegygyel, ponttal vagy vonallal elválasztjuk, egyébiránt munkálatinkat mindkettővel ugyanazon szabályok szerint hajtjuk végre. Törtszámok fogalma nélkül lehetetlen volna számrendszereket alkotni, és számtani míveleteink valósággal nem egyebek, mint röviditett törtszám-míveletek, melyekben a különféle egységek nevezőit elhagyjuk. Miképen mondhatá tehát, hogy a törtekkel való szorozás nem sikerült és nem sikerülhetett, holott épen az egész számokkal való sokszorozás nem sikerült volna, és nem sikerülhetne, ha azokat is különböző nevezőjü törtszámoknak nem tekintenők.

Azon ellenvetéseire, hogy a törtszám nem szám hanem számtani míveletek complexusa, hogy a törtszámot nem lehet az ismétlés fogalma alá vonni, és hogy elvontan véve lehetetlen, már a fentebbiekben meg volt felelve. Ezeken kivül:

Mivel azon három fő nyüg melyekből sehol sem tud kibontakozni, kiváltképen a logika, a differentiálék és a haszontalan szóvita, ezen utóbbival is megtámadja a törtszámokat *És még az a képtelen nevezet hozzá törtszám, mintha biz a számot el lehetne törni.* Itt már *ötödikszer* tér el a feltett kérdéstől.

Szavaink nagy része általvitt értelemben is szokott használtatni, melyben az a nyereség, hogy nem kell minden módosított eszmének kifejezésére új szavakat alkotnunk és tanulnunk, s mindenki első tekintetre által láthatja, hogy a tört mellék név itt is nem tulajdon hanem általvitt értelemben vétetik. Szerző nem tudom csinált e szerencsésebb műszavat a **téglalapnál**, melyet az (a) alapvonalból és (b) magasságból származott tér elnevezésére használ, s nem inkább mondhatjuk-e erről : hát még az a képtelen nevezet hozzá **téglalap**, mintha biz a rectangulumot téglavetőkben égetnék. S e műszó annál inkább ki rí, mivel tiszta mathesisbe igen meglepő lehet, hogy hol veszi magát benne a tégla, s ez is (Tiegel) német eredetű, egyébiránt helyesen alkotott jó műszavunk is van reá **merőszög**.

Ellenvetésül hozza fel azt is, hogy a törtszámnak nincs bizonyos értelme, mert az különféle értelemben a hányados arány és osztási viszonyok kifejezésére is használtatik.

Ez sem történik ok nélkül. Ugyanis :

Az osztás számtani mívelet, melynek kétféle neme s ahoz képest kétféle eredménye van : a) Az osztandó megnevezett, az osztó általános szám b) Mind az osztó mind az osztandó egynemű megnevezett, vagy általános szám. Ezen utóbbiakat különböztetésül arányoknak, az elsőbbeket hanyadosoknak nevezzük. A törtszám nevezetet pedig mindkettő méltán viseli, nemcsak a már fentebb előadott okoknál fogva, hanem szükségképan is törtszámoknak kell őket neveznünk, mivel mindazon munkálatokat hajtjuk végre vélők, a miket egész számokkal, mihez képest a törtszámok összeadása, kivonása, szorozása és elosztása szabályait ezekben is szintúgy ki kell mutatnunk mint egész számokban.

A ki ezekben összefüggést nem lát, hanem **logikai botlást** keres, *mintha a természet rajzban ily nemű felosztást tennének, hogy a madarak háromfélék ú. m. vízi madarak, szárazi* *madarak és tyúkok* annak okát ne a tudományban keresse, hanem abban, hogy nem azon logikát követi a mivel közönségesen mások is élniszoktak

Noha tehát az orvoslandó nyavalyának semmi jelensége nem mutatkozik, lássuk mindazonáltal ha van-e orvoslási módjában valami a mi egyre vagy másra használható volna.

A) Javaslata az volna, hogy fejtsük ki a (×) és (:) ú. m. szorzás és osztás jegyeinek törvényeit okszerűen, mi annál könnyebb, minthogy ezek, a (+) és (—) jegyekéivel tökélyesen azonosok.

Miért mondja hogy fejtsük ki, s miért nem fejti ki ön maga, holott régóta várva várjuk azon egyetlen egy szabályt, mely a *törtszámok szorzási és osztási müveleteiben teljes és kielégítő útasítást ad, egyszersmind nagy erő és idő kimélést s e mellett egészen okszerü belátást eszközölvén.* De e helyett most is midőn nemcsak kivánt, hanem szinte követelő alkalom nyílt volna fel előtte, egy jelentéktelen példával útasit el bennünket, sőt a mi több, abban is az általa felállított jegyek törvényeivel ellenkezésbe jön.

B) Második orvoslási módja a volna, hogy az ily osztalmakat $\frac{a}{b}$ aránynak nevezzük.

Erre nézve *megkísérti az aránynak a törtszámtól független értelmezését adni,* s azt négy esetre vonja. Azután kérdésbe teszi *létezik-e oly kifejezés, mely vagy változás nélkül vagy a dolog lényegét nem illető némi módosítással mindezen képletekre illjék? És úgy jön ki a dolog, hogy ily kifejezést tankönyveinkben hasztalan keresünk, még is szerzőik dictatorilag követelik mind amaz eszmék azonosságát. A* **logika** *kivánván ezen hiány kipótlását, lássuk nem lelnők-e meg a keresettet.* **Hatodik eltérés.**

Kivánhatná bizony mind a tudomány mind az olvasó a logika hiányának ki pótlását, mert fejtegetéseiből úgy jön ki a dolog, hogy sem $\frac{a}{b}$ sem $\frac{m}{n}$ a kivánatoknak eleget nem tehet hanem $\frac{e}{r_1}$ mint mondja :

Világos hát, hogy ez a képlet $\frac{e}{r_1}$ *mindenesetre egyenlően szolgál s mindig érvényes.* Mi ez? hiszen $\frac{e}{r_1}$ azonos kitétel $\frac{a}{b}$-vel és $\frac{m}{n}$-el.

Mondottuk már, hogy arányoknak különösen azon osztalmakat nevezzük, melyekben mind az osztó mind az osztandó egyneműek. A tört számokat pedig nemcsak méltó joggal számoknak nevezhetjük, hanem annál inkább is számoknak kell neveznünk, mivel a velök teendő számtani míveletek szabályait is ki kell fejtenünk. Mi lenne tehát belőle, ha ezentúl minden különböztetések mellőzésével s a fogalmak összezavarásával csupán arányokról, sőt a mi több, az arányok összeadásáról, kivonásáról, sokszorozásáról és elosztásáról beszéllenénk.

76 §. Nem hagyhatja érintetlenül a szorzás eredeti míveletének azon esetét, melyben szorzónak szám helyet vonal van felvéve. Hetedik eltérés.

Ez tehát azt teszi, hogy vonal vonallal van sokszorozva, s ezt tartja geometriai szorzatnak. Annál inbább, mivel végzetül világosan kimondja: *Mint különös tulajdonságát meg lehet jegyezni, hogy ezen geometriai szorzat tényezői szigorúan és tökélyesen egyneműek.*

Úgy de a szorzás tisztán számtani mívelet lévén, szorzó a világon semmi egyéb nem lehet mint szám, és még számokban is egynemű megnevezett számokat nem lehet szorozni egymással, hanem a szorzónak szükségképen elvont számnak kell lenni. Miként. egyeztessük hát meg ezeket a szorzás fogalmával? Az analytikai mértannak alapeszméje az, hogy a vonalak viszonyait számokban fejezzük ki, s az adott számtani viszonyokból az ismereteseket keressük, miknél fogva, a mértani szorzat is épen ellenkezője annak a mint értelmezi, azaz : mértani szorzat az, a melyben vonalak helyett számok vannak helyettesítve.

Hanem így van ez mindenütt. Az alapeszmével, a melyből kiindúl, nem sokat gondol, hanem azt önkénytesen felvévén, ha fejtegetéseiben véget nem érhet, vagy phasisaihoz vagy a differentialékhez folyamodik, s azt véli, hogy a mathesis legmélyebb titkaiban búvárkodik; vagy ha ellenmondásokra bukkan, ott van a **logika**, mely ezeknek helyrehozását kivánja, s elő áll javaslataival és orvoslási módszereivel. Lássuk, mire megy itt is a vonalak szorzásával.

Ez, ú. m. két kép történhetik.

1). *Mi akadályozna minket* (**a**) *vonal differentialéját ismételve gondolnunk, és* (**a**) *vonalat úgy vennünk fel mint véghetetlen nagy számú* **d**(**a**)*-ból állót? E szerint hát lenne* **d**(**a**)$.\infty$ $=$ **a**. *És* **b** *vonalat* **a**-*val szorozni annyit tenne, mint* (**b**)*-ét annyiszor ismételni, a hányszor* **d**(**a**) *van ismételve* (**a**)*-ban. Ezen* **b**-*ket egymás végtiben gondolva, egy véghetetlen hosszú vonalat tenne, mely túl esvén képzeletünk és az alkalmazhatás határain, továbbá tekintetbe nem jön s a tudományban merőben el is van mellőzve. Csak lehetségét és gondolhatóságát akartam ezen első esetnek kimutatni.*

Mi akadályozna minket? Akadályoz elsőben az, hogy mit keresnek itt a differentialék; azután pedig az, hogy nem minden ember szeret olyasmit gondolni, a mi túl esik képzeletünk és az alkalmazhatás határain, söt a minek lehetőségét és gondolhatóságát sem lehet ki mutatni. Mert bármi kicsiny nek gondolja *da*-t a' *da* közt *a*-tól a' *da* végpontjáig *még egy kis világ van.* Emlékezzék vissza első értekezésében a 15—18 §§-okban olvasható deducalásokra.

S mi lesz tehát ezen sokszorozásokból, ha határozott mennyiségeket veszünk fel? Példáúl 1: hüvelyk sokszorozva 1 hüvelykkel? Végetlen. Hát 1 láb 1 lábbal? az is végetlen 1 öl egy lábbal vagy 1 hüvelykel? sat. ez is végetlen. Melyik lesz nagyobb ha 1 lábat 1 öllel sokszorozok vagy egy lábat 1 lábbal, mennyivel és mennyiszer? Íme mindezek nem akadályozhatnak minket, hogy az *a* vonal differentialéját ismételve gondoljuk; s íme *ez a szorzás eredeti miveletének első esete, melyben számhelyett vonal van felvéve.*

2) *Máskép üt ki a dolog, ha egymás mellett és oldalaslag képzeljük ismételve* **b** *vonalat. Ez ugyanis épen annyit tenne mintha* **a** *vonal minden* **d**(**a**) *részéből* **b** *vonalat gondolnánk töle derék szegletre húzva. Látnivaló, hogy ezen módon egy téglalap alakúlt. Lapnak mondom, mivel épen annyira közeledtünk*

a felszin folytonosságához vele, a mennyire a ∞x **d(a)** *képviseli a vonal folytonosságát. De látjuk azt is, hogy ez a lap, alakjára és mekkoraságára nézve tökélyesen egyenlő azzal, a mely származik, ha a* **b**-*ét származtatónak,* **a**-*t irányzónak vettük volna. És ez által a téglalapnak a szorzattal, s oldalainak a tényezőkkel való egynemüsége, söt fogalmi azonossága ellenvetésen kivül meg van állapítva.* **Nyolczadik kitérés.**

Nagyon hirtelen, és nem ellenvetésen kivül hanem összefüggés nélkül. Nagyon kőnnyü azzal bizonyítani, hogy látnivaló, a mi épen nincs összefüggésben a bizonyítandóval. Miképen felel tehát ezen ellenvetésre, hogy vonalakból, melyeknek fogalmaink szerint hosszusági terjedelmökön kivül semmi más terjedelmök nincsen, miképen származhatik lap? Hát erre? hogy a szorzásból eredett tényezőnek mindig a szorzandóval egynemünek kell lenni, itt pedig akár az **a** akár a **b** vonalat tegye szorzandónak, s akár alapnak akár magasságnak akár irányzónak akár irányadónak nevezze, nem ide tartozik, a tényezet mindig különnemü lesz a szorzandóval. Ezekből tehát más látnivaló következik, tudniillik az : hogy a mondottak szerint alakitott lapban *b.da.*∞, a szorzandó *b.da* terület, a szorzó pedig ∞ ; s mint különös tulajdonságát megjegyezheti, hogy ezen geometriai szorzat tényezöi közöl egyik sem vonal, s annyival inkább egynemüek sem lehetnek.

77. §. A téglalapot t-nek, oldal vonalait V és v-nek *nevezvén, miután szorzat, szorzandó és szorzó viszonyaikban állanak, ezen kérdést : adva levén a téglalap és egyik oldala, mi a másik? szab ad ime képletbe öltöztetnünk :* $\frac{t}{V}$ *és* $\frac{t}{v}$. *De az analogia teljessége megkivánja, hogy a feljebb állított általános kifejezés erre az esetre is alkalmazható legyen. És az is: mivel ezt* $\frac{t}{V} = v$ *így mondhatjuk ki ; V annyiszor van t-ben, a hányszor* **dv** *v-ben, és megfordítva* $\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{v}} = \mathbf{V}$, *azaz:* **v** *annyiszor van* **t**-*ben, a hányszor* **d(V) V**-*ben, feltéve hogy* **da=dV**, *vagy is mint a felsöbb analysis szokta használni,* **dv** *állandó (constans).* **Kilenczedik kitérés.**

Eredeti egy mutatvány a differentialis calculusból, az igaz. E szerint $V:t=dv:v$ honnét $dv=d\left(\frac{t}{V}\right)=\frac{Vv}{t}$. Ki látott valaha ilyen differentiálét, és ki hallotta valaha, hogy a felsőbb analysisben dx állandó ilyen értelemben vétetik hogy $dv=dV$?

Mondhatna-e valaki készakartva is ennél nagyobb mathematikai képtelenséget? Hiszen ebből a következnék, hogy mivel felteszi ezen egyenleteket a) $\frac{t}{V}=V$; b) $dv=dV=d\left(\frac{t}{V}\right)$, ezeknél fogva két változó hányadosa külzelékének anynyinak kellene lenni mint csupán a nevezőé. Ha pedig azt gondolja, hogy dx ezen értelemben mondatik állandónak, valóban nem tudja miben.

Ezt akárki más így külzelte volna: Egyik oldal szabadon felvétethető, másik ahozképest meghatározandó, tehát mind kettő x, y változó lévén, legyen az adott tér$=t$ állandó; $xy=t$; $xdy+ydx=0$; $\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x}$, s azt hozta volna ki belőle hogy egyik oldalnak azon irányban kell fogyni melyben a másik nevekedik, a mi tagadhatatlanúl igaz.

80. §. Még egy kérdés maradt vitatlanúl, az t. i. hogy vajjon ezen képlet $\frac{c}{r}=\frac{s}{s}$ mindig lehetséges-e úgy hogy *s* és *s* számokat tegyenek.

Hát ebből mi lesz? *lehet-e vonal vonalhoz osztási viszonyban?* annál inkább kérdésbe tehetjük, mivel a vonalak és számok szorzását, mint legközelebb láttuk, a számokétól egészen megkülönböztette, következőleg osztási viszonyát is meg kell különböztetnie.

Már most mindenből kifogytunk. Logikáztunk ugyan eleget, de a mi a főkérdés volna, *lehet-e vonal vonallal osztási viszonyban?* erre feleletet még eddig sem nyerhettünk.

III.

Harmadik Értekezését.

Azon kezdi, hogy *Littrow nem utolsó volt azon mathematikusok gyér sorában, kiknél a mathematicum ingenium másnemű ingeniumot nem fojtott el.* Nagy dolgokhoz készül. Tudatni kivánja tehát az olvasóval, hogy a mathematicum ingenium elfojt más egyéb ingeniumot, és hogy gyér sora van azon mathematikusoknak, a kikkel ez nem történik.

Ha ezt mint saját véleményét magány körökben emlegetné, legfelebb a különösségek közé volna számítandó, mivel a mathematikai tudományokat maga a közvélemény is egyik leghathatósabb eszköznek tartja az észtehetségek kifejtésére. Különben is mivel a mathematikai tudományok csaknem minden egyéb tudományokkal és müvészetekkel szoros kapcsolatban állanak, s azoknak részint irányadóúl szolgálnak, részint alapelveket szolgáltatnak, valóban nem lehet megfogni, hogy miképen fojthatnának el ezek más egyéb ingeniumokat; s valóban tapasztalatilag is bebizonyúlva látjuk, hogy a nevezetesebb mathematikusok a tudományok egyéb nemeiben is kitünöleg jeleskedtek.

Azonban nem csak az eddigiekben, hanem az alább következendőkben is, ezen tudományokat úgy akarja elötüntetni, mint a melyeknek nem csak biztos alapjok nincsen, hanem rendszerök és állításaik a józan ész szabályaival a logikával is ellenkeznek, a tudósokat logikátlansággal vádolja, s mind az elfogadott tudományos rendszerben, mind annak egyes tételeiben alaptalanságokat, következetlenségeket, tévedéseket, söt észrevehető önkényes csábitásokat akar kimutatni. Ezeket sem a szakosztály sem a tudományok érdekében szó nélkül nem hagyhatjuk.

Folytatja tehát elébbi két értekezéseiben megkezdett vádaskodásait, s elsőben is állítja hogy

81. §. *A differentialis és integralis calculus fő alapelve mind e mai napig kérdés alatt van; pedig másfél száz éve, hogy módszereiket széltiben és biztosan használják.*

Mellőzvén hogy már ez tizedik eltérés a felvett kérdéstől, melyet be akar bizonyítani : hogy lehet-e vonal vonallal osztási viszonyban? legalább ezen eltérésnek okát adhatjuk. Br. úr ugyanis szenvedélyes kedvellője lehet a differentialis és integralis calculusnak. Mert noha értekezésének mindjárt elején kimondotta, *hogy egy akademiai székben ezen testület méltóságához egészen illő tárgy, csak egy eddig nem integrálhatott forma integrálására szükséges fogások kitalálása lehetne* (más semmi sem?), vallomása ellenére azonban még is nagyon elemi dolgok fejtegetésével foglalkozik; ezen hiányt legalább azzal akarja helyre pótolni, hogy a differentialékat vagy kell vagy nem, söt ahol egyáltalában nem alkalmazható, oda is bele keveri. Söt többre megy ennél. A kik még eddig nem értették, mi a differentialis calculus fő alapelve, azokat is nem csak felvilágosítani, hanem egyszersmind kimutatni igyekezik, hogy a differentiálékat Leibnitz, a Bernoulliak s Euler is épen azon értelemben vették mint ő. A mi pedig ha valósággal úgy van, s csakugyan azt hiszi hogy az ő értelmezése igaz, e pedig nem más mint Leibnitz é és az első feltalálóké : nehezen tudjuk a legtökélyesebb logikával összeegyeztetni, miképen mondhatja mégis azon alapelveket kérdés alatt levőknek, melyeket ön maga kétségtelenül olyan értelemben hisz és vall, mint magok az első feltalálók.

Noha tehát nem mutat ugyan elő új integrálási formákat, melyek mindeddig integrálva nem voltak : mindazonáltal tagadhatatlanúl nagy dolgokat, söt ennél is nagyobbakat és érdekesebbeket fejteget. Állítja ugyanis

19. §. Hogy azon utolsó, s még sem utolsó törtszámot, melyet tetszésünk szerint vehetünk semminek vagy nem semminek, a mathematikusok **differentziale**-*nak nevezik.* Erre nincs egyéb észrevételünk, hanem hogy nincs ember, akár mathematikus legyen akár nem, a ki megértse; és ha a mathematikai igazságokat így értelmezi, akkor előttünk is megfoghatóvá válik miért mondotta, hogy a mathematikai ingenium más egyéb ingeniumokat elfojt. Ilyen értelmezések mellett nem is lehetne másképen. Még is azt mondja : *E fogalmat elnevezője s a reá épült tudomány feltalálója Leibnitz épen úgy értette mint ő, szintoly kevéssé akadtak fel rajta a Bernoulliak s mások.* Lássuk tehát részletesebben, miképen érti Br. úr, s úgy értették-e Leibnitz, a Bernoulliak és mások. Br. úr így érti

1) 77. §-ban. „Mivel ezt $\frac{t}{V}$ =v így mondhatjuk ki : V annyiszor van t-ben, a hányszor *dv* a *v*-ben. És megfordítva, $\frac{t}{v}$ =V azaz : *v* annyiszor van *t*-ben a hányszor dV a V-ben, feltéve hogy dv=dV, vagyis, mint a felsőbb analysis szokta használni a dx állandó (constans).“

Ezekről ugyan sem Leibnitz, sem a Bernoulliak, sem senki nem is álmodott soha.

2) 90. §-ban A dx *kifejezése tehát számnyelven ez :*

$$dx = \frac{x}{1000000\ldots}$$

De mivel egyrészről a dx-et végetlen kicsinynek, más részről pedig a legközelebb mondottak szerint állandónak állítja: változó lévén x, miképen lehet dx állandó? holott dx= $\frac{x}{1(0)^n}$-ben, (x) akármi nagynak és kicsinynek felvétethető értéket jelenthet. Miképen lehet x-nek akármi felvétethető értékével végetlen kicsiny? Holott akármekkorának tegyük $1(0)^n$-et, x-et mindenkor annál nagyobbnak is tehetjük.

Továbbá, ha dx= $\frac{x}{1(0)^n}$ kétségenkivül épen úgy :

$$dy = \frac{y}{1(0)^n} \text{ tehát}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{1(0)^n}}{\frac{x}{1(0)^n}} = \frac{y}{x}$$

mi szükség volna hát magunkat a külzelék-hanyadosok keresgélésével fárasztanunk, holott $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ csakhogy minden bizonynyal nem Leibnitz és a Bernoulliak értelmében.

Más részről pedig az 1) sz. alatt mondotta, hogy dv= dV, vagy is, mint a felsőbb analysis szokta használni, a' dx állandó.

Innét ismét v helyett x; V helyett y tétetvén, leszen dx=dy, tehát a felsőbb analysisben ilyen értelemben mondatnék a dx állandónak, ha valaki elhinné.

3) Ilyen értelemben aztán nagyon kényelmes módját találta fel a külzelésnek. Neki megy mindennek, nem tekintvén sem állandóra sem változóra, mindennek egyiránt végetlenedik kis részét veszi, s ezt nevezi *differentialénak*. Úgy de Leibnitz szerint is az állandó mennyiségnek nincsen *differentiáléja*, szerinte pedig szintúgy van mint akármelyik változónak, mert $da = \frac{a}{1(0)^n}$. S valóban ilyen értelemben beszélget az 53. és azt követő, nemkülönben a 76. és 77. §§-okban. Kár,hogy eredeti nézeteit valami eddig nem integrálhatott forma integrálására nem alkalmazta.

4) De nem csak Leibnitz hanem Euler is egy értelemben vannak Br. urral. Mert „Euler hogy a végtelennek odiusommá vált nevét ki kerülje, a differentialét egyenesen semminek nevezé. Természetesen csak az ő általa bonczolt értelemben. De vette is hasznát, mert azután könnyen mosolyoghatott a gyermekes nyilazásokra, mint Gulliver a lilliputiakra. 21. §.

A ki Euler munkájába csak bele tekintett is, annál inkább ha Inst. Calc. diff. III-dik fejezetét figyelemmel olvasta, bizonyosan tudni fogja hogy Euler a differentialét nem csak nevezte 0-nak, hanem valósággal annak is tartotta, söt igyekezett elegendő okokkal bebizonyítani, és felvilágosítani, még pedig épen nem Br. úr értelmében.

5) Azonban még ezen színes ellenvetéstől is menekülni akarván, a másik nagy ész Lagrange, a $\frac{dy}{dx}$-et is merőben mellőzé, s azt „derivált függvénynek nevezvén, egy elméletet gondola ki lehozatalára, melynek csak egy baja van, t. i. hogy logikai alapja hibás. Különben ha ezt elengedjük neki, akkor aztán minden jól megy : azaz nem jobban és nem roszszabbúl, mint Leibnitznél, hanem sokszor jóval kényelmetlenebbűl.

Lagrange nézetei tehát csakugyan mégis eltérnek Br. úrétól, ennélfogva a logikátlan Lagrange-al szóba sem áll. Jól teszi.

Ezek után általmehetünk azon állítására : *A differentialis és integralis culculus fő alapelve mind e mai napig kérdés alatt van.*

Természetes. Mert hiszen a körnégyszögitése, az örök mozgony és egyebek, söt Br. úr szerint még az arányok, törtszámok, állító és tagadó mennyiségek is sat. mind e mai napig kérdés alatt vannak. Erről nem tehetünk, mert a legvilágosabb igazság is mindig szükségképen kérdés alatt van azok előtt, kik be nem látják.

De mivel hozzáteszi : *pedig másfélszáz éve, hogy módszereiket széltiben és biztosan használják*: innét a következik, hogy a kérdéstevők feszegetései által a mathematikusok nem igen hagyják magokat megzavartatni. Littrow, mint értekezésének elején olvassuk, mindig neheztelésre fakadt, valahányszor a mathematika alapelveit feszegette valaki. Nincsen is ennél hálátlanabb munka. Mert annak, a ki ezt teszi, vagy azt kell hinni magáról, hogy ő ért hozzá legjobban, vagy ha nem, miért nem igyekezik inkább világos fogalmakat szerezni magának a helyett, hogy másokat oktatgat. Különben, miután már e tárgyban annyi felvilágositások adattak, hogy azoknak egybevetésök után semmi kétségünk sem maradhat fel, nem is tehetünk egyebet, hanem ha a haszontalan szóvitát ezek irányában egy általában mellőzzük. Azokra nézve ellenben, a kik a különböző, de ugyanazon alapelvekre visszavihető nézetek összeegyeztetésében nehézségekre akadnának, vagy inkább azoknak némelyek által történhető önkénytes összetévesztése által tévútakra teríttetnének, helyén leszen némely észrevételeket tennünk.

A differentialis calculusnak Br. úr által feszegetett fő alapelvére nézve, hogy mi a *dx* tulajdonképen, három nézetet kell megkülönböztetnünk.

1). Leibnitz és követői a dx-et elenyészhető, végetlen kicsiny, minden kimutatható mennyiségnél kisebbnek (omni assignabili minor) állítják. De épen nem Br. úr értelmében. Mert :

a) A külzelés (differentiatio) legalsóbb elemeiből tudjuk, hogy dx az x-től egészen független mennyiséget jélent. Br. úr pedig x-től függővé teszi, midőn azt mondja :

$dx = \frac{x}{1000000}$. Az x-hez járuló nevekedést csak azért jelöljük $\triangle x$, dx-el, hogy mindenkor szemünk előtt legyen hogy $\triangle x$, dx az x-hez járuló nevekedést jelenti. Különben igen gyakran így is iratik $x+h$; $x+i$; $x+E$; $x+k$ sat.

b) A dx állandó. De nem ám azon értelemben mint Br. úr állítja, hogy $dv=dV$ vagy $dx=dy$. — Hanem, hogy dx állandó lehessen, látnivalóképen ezen kitételben $dx = \frac{x}{100000}$ a jobbfelöl eső tag mind számítójának mind nevezőjének állandónak kell lenni. Tegyünk tehát x helyett a-t leszen $dx = \frac{a}{1000000\ldots}$; s már most csak az a kérdés; hogy dx elenyészhető, minden kimutatható mennyiségnél kisebb, azaz, érzéki tehetségeink által egyáltalában fel nem fogható mennyiség legyen; melyre nézve, még eddig határozatlan lévén a, akármi értéket adjunk (a)-nak, a nevezőt ahoz képest úgy kell meghatároznunk, hogy $dx = \frac{a}{10000\ldots}$ minden, érzékeink által felfogható mennyiségnél kisebb legyen. Tegyük tehát $a=1''$.

Ha egy hüvelyknyi hosszú vonalat ezerfelé osztunk, annak részeit parányмérők (mikrometer) segédelmével is alig tudjuk megkülönböztetni: tízezered részhez nagyítóüvegek is szükségesek; százezered részhez még inkább, és összetettebbek; milliomod részt talán semmiképen, tizmilliomod részt egyáltalában nem tudunk megkülönböztetni. Ezen értelemben tehát Leibnitz szerint $dx = \frac{1''}{10000000}$ részét méltán elenyészhető-, s minden kimutatható mennyiségnél kisebbnek, vagy is differentialénak tekinthetjük, annyival inkább a még ennél is kisebbeket; s egyszersmind dx állandó, mint kell lenni.

Ez azt teszi hogy: Ha a metszékek nevekedését állandóúl egy hüvelyk tízmilliomod részének veszszük, s ahoz képest az egy, két, három sat. tízmilliomod részeknek megfelelő rendeseket akármi görbében, melynek egyenlete adva van, kiszámítjuk: azon görbének minden pontjait sokkal szigorúbban képesek vagyunk meghatározni, mintsem azt akármi kigondolható segédeszközök közbejöttével tehetnők; és ha külzeléseinket azon feltétel alatt hajtjuk végre, miszerint dx egy hüvelyknek csak tízmilliomod részét vagy annál kevesebbet teszi, minden innét kihozható következtetéseink annyira biztosok leendenek, hogy a rajtok elkövethető hiba érzéki tehetségeink felfoghatása alá egyáltatában nem eshetik. Ezek úgy vélem érthetőbbek és világosabbak mint : *az utolsó mégsem utolsó törtszám, melyet tetszésünk szerint vehetünk semminek vagy nem-semminek ;* és hogy dx ilyen értelemben állandó : dv=dV ; s több efélék.

c) Az említetteken kivül a) dx elenyészhető ; b) dx állandó ; harmadik fő alapelve a külzelésnek hogy c) a dx első hatványainál meg *kell* állapodnunk. Ezt Leibnitz követői csak az által igazolják, hogy : mivel dx már maga is elenyészhető, annyival inkább elenyészhetőnek kell lenni dx^2-nek s a dx felsőbb hatványainak ; s ennek következtében a dx felsőbb hatványaival sokszorozott tagokat tekintet nélkül hagyhatjuk. Mindezek tehát igazak lehetnek ugyan, a mennyiben érzéki tehetségeinkre vonatkoznak, de a mathematikai szigornak egyáltalában nem tesznek eleget, mint az alábbiakban példákkal is fel fogjuk világositani. Sőt ezen nézetek szerint minélkisebbnek veszszük dx-et, a dx felsőbb hatványai elhagyásából eredhető hibának is annál kisebbnek kellene lenni, minélfogva a külzelés nem lenne egyéb közelítési számításnál, holott külzeléseink nem csak közelítő, hanem a legszigorúbban bebizonyítható eredményekre vezetnek. Innét van, hogy ezen nézetek követői okvetetlenül a végetlenségek örvényébe sodortatnak, melyből semmi álfogásokkal és okoskodásokkal ki nem tudnak menekülni. Mert ha azt mondják hogy a dx felsőbb hatványaival sokszorozott tagokat elhagyhatjuk, ez annál igazabb, minél kisebbnek veszszük dx-et, következőleg a dx csupán elenyésző értékénél sem állapodhatnak meg, hanem tovább kell menniök a végetlen kicsinyig, e pedig minden bizonynyal semmi nem egyéb, mint : $\frac{1}{\infty}=0$,azt pedig nem akarják elismerni. Nem is azt kell mondanunk hogy a dx felsőbb hatványait elhagyhatjuk, hanem azt, hogy azokat szükségképen el kell hagynunk; mert ez a külzelésnek múlhatlan feltétele, melynek teljesitése nélkül tökéletesen hibátlan eredményekre soha sem juthatunk.

2) Ezeknél fogva Euler világosan kimondotta, hogy dx semmi nem egyéb mint valóságos; 0 és: $\frac{dx}{dy}=\frac{0}{0}$, s ez az a mit sokan a legvilágosabb bebizonyítások daczára sem akarnak elhinni. Mivel azt mondják, hogy egyik 0 nem lehet arányban másik 0-val, mert egyik 0 nem lehet nagyobb mint a másik, hogy az arány csak mennyiségek között létezhetik, mihelyest pedig valami mennyiség 0-vá válik, azonnal megszűnik mennyiség lenni, és hogy a külzés nem lehet külzés mihelyest=0. Ilyen ellenvetések tétetnek tehát az igaz; de mielőtt azokra felelnénk, mi is tehetünk legalább egyet, vagy kettőt.

A külzések kifejtésének általános alakja:

$$f(y+\Delta y)=fx+\frac{f'x}{1}\Delta x+\frac{f''x}{1.2}\Delta x^2+\frac{f'''}{1.2.3}\Delta x^3.$$

sat. melyből:

$$f(y+\Delta y)-fx=\Delta y=\frac{f'x}{1}\Delta x+\frac{f''x}{1.2}\Delta x^2$$
$$+\frac{f'''x}{1.2.3}\Delta x\ldots \text{ sat.}$$

tehát $\frac{\Delta y}{\Delta y}=\frac{f'x}{1}+\frac{f''x}{1.2}\Delta x+\frac{f'''x}{1.2.3}\Delta x^2+\frac{f''''x}{1.2.4}\Delta x^3 \ldots$ sat

$$=f'x+\left[\frac{f''x}{1.2}+\frac{f'''x}{1.2.3}\Delta x+\frac{f''''x}{1.2..4}\Delta x^2\ldots \text{ sat.}\right]\Delta x$$

külzelék-hanyadosnak nevezzük pedig azon esetet, midőn $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'x$; s hogy ezt minden egyéb esetektől megkülönböztessük, $\frac{dy}{dx}$-el jelöljük. Kérdés tehát, mikor áll elő ezen eset? Kétségen kivül csak akkor, ha megengedjük hogy $\Delta x=0$. Ha pedig meg nem engedjük, akkor nincs mit vitatkoznunk a külzelés alapelvei felett, mert így egyáltalában lehetetlen.

Aztán nem szembetünő következetlenség-e azt mondani, hogy egyik 0 nem lehet arányban a másikkal? holott miután a külzelés szabályai kifejtettek, csaknem mindenütt az első alkalmazások a $\frac{0}{0}$ határozatlan arány meghatározására szoktak tétetni. A mi pedig azon ellenvetést illeti, hogy a külzés nem lehet $=0$, e csak érzéki tekintetben lehet igaz; arról azonban soha sem kell megfeledkeznünk, hogy a mathesis eszményi fogalmakra épül, és csak alkalmazásait teszi érzéki tárgyakra. Ha ez így nem volna, mindjárt Euklidesz első értelmezésén, hogy a pontnak sem szélessége sem hosszasága nincs, fel kellett volna akadnunk, s máig sem mehetünk volna tovább. Ha a külzés nem külzés mihelyest $=0$, a pont sem pont szélesség és hosszaság nélkül. Ha eszményileg eszményi pont létezhető, szintúgy létezhetik eszményi külzés is, mely hasonlag nem egyéb mint bármily kis külzés kezdő pontja$=0$

Lássuk még azt is, mit nyom azon ellenvetés, hogy a 0-t nem lehet 0-val arányba tenni, különben egyik 0 nagyobb volna a másiknál.

Az arányokat és törtszámokat meg kell egymástól különböztetnünk. A törtszámok általános kitétele $\frac{P}{Q}$, az arányoké ellenben $\frac{P.a}{Q.a}=\frac{P}{Q}$, mely azt teszi, hogy csak egynemű tárgyakat hasonlíthatunk össze, melyeknek egysége mind a számítóban mind a nevezőben ugyanaz, s ekkor az arány egészen független lévén attól, hogy mit vettünk egységnek, csupán a számító és nevező szorzói által fejeztetik ki. Ha tehát P. $0=0$-t hasonlítok Q.$0=0$-hoz leszen akkor is $\frac{P.0}{Q.0}=\frac{0}{0}=\frac{P}{Q}$. Azon ellenvetés tehát, hogy egyik 0-nak nagyobbnak kellene lenni mint a másiknak, világosan hibás értelemben van feltéve; mert általános kitételünk nem ezt fejezi ki, hanem azt, hogy például négy 0 tagadhatatlanúl több 0 mint két 0, még pedig az elébbi kétszer több 0 mint az utóbbi, azonban $0=0$ marad.

Ezen ellenvetés egyébiránt tettlegesen megczáfoltatik az egész analysisben az által, hogy $\frac{0}{0}$-nak határozatlan értékét minden adott esetekben meg tudjuk határozni.

Ide tartozik az is, midőn azt mondják, hogy a mennyiség azonnal megszűnik mennyiség lenni, mihelyest 0-vá válik.

Igen de, még azért hogy $\frac{P.a}{Q.a}$-ban a helyett 0-t teszünk, nem a P és Q válik 0-vá, hanem mind a P mind a Q megtartja a maga értékét s az arány $\frac{P}{Q}$ marad.

A mi pedig az a-t illeti, annak egyáltalában nem szükség mennyiségnek lenni, lehet az akármi tárgy vagy fogalom. Például : Hihetőségi számvetésünk is van, melyben azt mondjuk : P hihetőség úgy van Q hihetőséghez mint $P : Q$-hoz, a hihetőség pedig kétségenkivül nem szám. Hasonlag P erő a Q erőhöz; Psúly a Q súlyhoz ; P sebesség a Q sebességhez ; sőt $P\sqrt{-1}$ a $Q\sqrt{-1}$-hez maga a lehetetlenség analytikai jelképe is tétethetik a belyett, s az arány mindig $\frac{P}{Q}$ semmi esetben legkisebb változást sem szenved. Már pedig ha mindezek így vannak, valóban nem képzelhetjük, miképen lehetne bebizonyítani, hogy :

$$\frac{P.0}{Q.0}=\frac{0}{0}=\frac{P}{Q}$$

nem volna lehető.

De lássuk már most azt is, hogy Euler oly elszigetelten áll-e a maga nézeteivel, melyek szerint a differentialék valóságos 0-nak tekintendők, mintha különben nem is mosolyoghatna a lilliputiakra, hanemha Br. úr értelmezését magáéva teszi.

Newton, úgy látszik, biztosabb útat követett, midőn a differentzialék fogalmát a folytonosságból (fluxio) igyekezett felvilágosítani, mint Leibnitz a külzésekből, melyek természetöknél fogva nem lehetnek egyebek, mint szakos mennyiségek (quantitates discretae). Ugyanazért a végetlenségekhez kellett folyomodnia, de a folytonosságot ez által sem sikerült elérnie s végtére is azon vallomást teszi, *non nisi toleranter vera loquimur*. Newton ellenben a folytonosságra támaszkodván, a külzelék-hányadosokról világosan kimondja, hogy azoknak arányok *non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt*. Hogy pedig a folytonosság törvényei szerint e kettő között nem létezhetik más, mint 0 magában, világos.

Lagrange, a kit Br. úr logikátlansággal vádol, azt mondja, hogy a külzelék hányados semmi nem egyéb mint $\frac{dy}{dx} = f'x$ azaz tökéletesen maga az első eredeztetett függvény; a mi pedig fentebbi megmutatásaink szerint csak akkor történhetik, mikor dx és azzal együtt dy=0.

Lagrange-t egyébiránt más váddal is illeti. „Különben ha a logikátlanságot elengedjük neki, aztán minden jól megy: azaz nem jobban és nem roszabbul, mint Leibnicznál, hanem sokszor jóval kényelmetlenebbül.

Nem hiszem, hogy ezt mondhatná valaki, hacsak egy függvényt külzelt is a két mód szerint. Hiszen az eredeztetés felette könnyű, Leibnicz szerint pedig x helyett (x+dx)-et kell tennünk s az adott függvényt ehezképest kifejtenünk, s végezetre a dx felsőbb hatványaival szorzott tagokat elhagynunk, mihez még az is hozzájárúl, hogy ezen elhagyogatás nincs is mathematikai szigorral bebizonyítva, holott a nevezett tagok nem csak elhagyhatók, hanem szükségképen elhagyandók.

Littrow Elemente der Algebra und Geometrie Wien 1827 a 292. lapon, figyelmeztetésül ritkított betükkel kiszedve ez áll : Bezeichnet man **für diese Grenze selbst** das Verhältniss $\frac{DN}{DM}$ durch $\frac{dy}{dx}$ so hat man sat.

Itten épen azért szükséges a figyelmeztetés, mivel azok szerint kik a dx-et 0-tól különböző végetlen kicsinynek vélik, $\frac{dy}{dx}$ soha sem maga a határ, hanem csak a határhoz végetlenül közelítő hányados.

Littrow, Kurze Einleitung in die gesammte Mathematik Wien 1838. 296 l.

Für den *ersten Anfang* dieser Aenderung, die Grösse h kleiner noch als jede angebbare Grösse, oder wenn h *unendlich klein ist* . . . sat., melyekben tehát a végetlen kicsiny úgy értelmeztetik, mint nem maga a változás, hanem annak kezdete, azaz mennyiségi tekintetben =0 mivel a vonalnak első kezdete kétségenkivül nem lehet más, mint =0.

Ugyanezen lapon nehány sorral alább : Die daraus folgende Aenderung u'—u ihrer Function als **unendlich klein** in der oben (§ 8 II) aufgestellten Bedeutung des Wortes. Idézett §-ban pedig $\frac{1}{0}=\infty$, melyből $\frac{1}{\infty}=0$.

Burg ausführliches Lehrbuch der höheren Mathematik Wien 1833. III. kötet, 4-dik lap. Das Product ($Q+R$dx$+$ Sdx^2 . . . sat.) dx weggelassen werden muss (**nicht kann**). Mert azoknak nézetök szerint, kik a végetlen kicsinyt 0-tól különbözőnek állítják, a nevezett származat (Product) legfelebb elhagyható mint a fentebbiekben láttuk.

Még világosabban és minden tétovázás nélkül kimondja pedig idézett munkája I. kötetében 51-dik lapon:

Solche unendlich kleine: Grössen, die sich in der Rechnung wie absolute Nullen (was sie nach unserer Ansicht auch sind) verhalten sat.

Állítja még azt is, *hogy a mathematikus világ szép énekszóval visszatért a differentialéra és a végetlen kicsinyre.*

De a végetlen kicsiny semmi nem egyéb, mint általánosan elfogadott műszó az olyan 0-knak kitételére, melyek folytonos fogyatkozás által válnak semmivé.

Ezt pedig két értelemben szokták venni: absolut értelemben valóságos semminek, és relativ értelemben nem valóságos semminek ugyan, hanem olyan kicsinynek, mely semminél mindenkor nagyobb ugyan, de ahoz végetlenül közelít. Hogy a végetlen kicsiny a szónak szigorú értelmében sem lehet egyéb mint semmi, első tekintetre világos. Mert a végetlen kicsinynek olyan kicsinynek kell lenni a mi már nem fogyasztható, e pedig csupán a 0-ra illik. A másik felfogásban rejlő ellentmondásokat pedig szavakba foglalva alig lehetne jellemzőbben kifejezni, mint maga Br. úr tevé: *utolsó még sem utolsó törtszám, melyet tetszésünk szerint vehetünk semminek vagy nem semminek.* Egyébiránt ezen második értelmezést Leibnitz sem tudta más képen védelmezni, hanem csak azzal, hogy *toleranter vera loquitur.*

Nem az a kérdés tehát, hogy élhetünk-e ezen műszóval, *végetlen kicsiny*, vagy nem? Mert hogy élhetünk, sőt ha csak minden lépten nyomon a dx$=$0 mellé oda nem akarjuk tenni, hogy olyan 0-t értünk alatta, mely az x-nek folytonos fogyatkozása által vált semmivé, szükségképen élnünk kell; azt senki sem vonja kétségbe. Következőleg, ha a dx-et absolut értelemben 0.nek mondjuk, még akkor csakugyan nem térünk vissza a *végetlen kicsinyekre*, azoknak értelmében, a kik azt állítják, hogy nem 0 hanem más valami.

Mindezek mellett is azonban, sőt annál inkább, mivel ezen műszó *végetlen* általánosan el van fogadva, nem leszen felesleges megemlíteni: hogy a végetlenek fogalma nem csak, mint legközelebb láttuk, szavakba foglalható ellenmondásokra visz, hanem ugyanaz következik az analytikai kitételekből is.

$\frac{1}{1-1}=1+1+1+1+1+\ldots$ sat. $=0$ honnét:

$$\frac{1}{0}=\infty;\ 1=0.\infty$$

úgy de mivel alap-egyenletünk következtében $0=1-1$ leszen egyszersmind:

$$1=(1-1)\infty=\infty-\infty=0$$

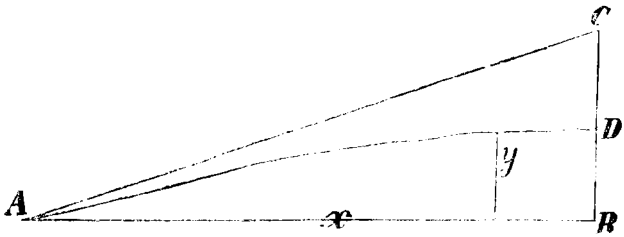
a mi pedig világos ellenmondás.

Egészen másképen van a dolog 0-ra nézve, ha dx-et a vonal kezdő pontjának, s mint a melynek sem széle sem hossza nem levén, mennyiségi tekintetben $=0$-nak tekintjük.

Mert ha elhittük Euklidesznek, hogy a' vonal a' pont megindulása és elébb haladása által származik, csakugyan nem tudom, miért ne higyjük el az újabb kor mathematikusainak, hogy a vonal nevekedésének kezdete is pont, azaz számtani kifejezéssel $=0$.

De ha elméleti lehozatalaink némelyek előtt még most sem volnának eléggé világosak annak bebizonyítására, hogy a külzelés alapelvei szerint dx-nek szükségképen a nevekedés kezdő pontjának, számtanilag $dx=0$-nak kell lenni, egy pár példa felvilágosításul szolgálhat.

1) Görbe vonalnak hívjuk azt, a melynek minden pontjai eltérnek az egyenes aránytól, melyből szükségképen következik, hogy az egyenes vonal a görbét csak egy pontban érintheti. Legyen tehát *BC* az *AB*-re merőlegesen felállítva:



Húzzunk most az *AO* és *AB* vonalak közé egy görbét *AD*; mely az *AC*-ét csak egy pontban érinti, leszen azon görbére nézve külzelési szabályaink szerint $\frac{dy}{dx}=\frac{BC}{AB}$. De ha dy-nak bármi végetlen kicsinynek nevezhető, mindazonáltal az eszményi 0-nál nagyobb értéke volna, akkor az *AC* vonalnak nem csak x-nek kezdetén = dx, hanem a dy felső pontján is keresztül kellene menni, következőleg nemcsak ezeket, hanem a kettő között fekvő pontokat is érinteni kellene, a mi nyilvános ellenmondásban volna az érintő fogalmával.

Továbbá világosan látható az is,

Hogy az x-ek változásával az y-onoknak is szükségképen változniok kell, vagyis az y-ok az x változásától függenek.

Ellenben akár elébbre, akár hátrább ejtsük az y-okat, valamig az *AD* görbe vonal, tehát annak egyenlete is ugyanaz marad $\frac{dy}{dx}=\frac{BC}{AB}$ mindenkor változatlan, következőleg az x növekedésétől egyáltalában független lévén, ha már most teszszük:

$$dy=P dx+Q dx^2+R dx^3 \ldots \text{sat.}$$

a rendesek nevekedése ugyan mindig az x nevekedésétől fog függeni, ellenben:

$\frac{dy}{dx}=P+Q dx+R dx^2 \ldots$ sat.-ben $\frac{dy}{dx}$ az x nevekedésétől egyáltalában független lévén, annak meghatározására a dx-el sokszorozott tagoknak egyáltalában semmi befolyásuk nem lehet, vagyis azok *szükségképen elhagyandók.* Nem pedig *elhagyhatók,* mint a végetlen kicsinyek elméletéből következik.

Minthogy pedig $P=f'x$, látni való, hogy ha azt mondjuk, hogy $\frac{dy}{dx}$ semmi nem egyéb, mint az x-nek első eredeztetett függvénye, s azt be is tudjuk bizonyítani, mint láttuk a fentebbiekből; ez által a külzeléstanban a végetleneknek még csak megemlítését is elkerülhetjük.

S már most csak azt kell megjegyeznünk, hogy épen ezen elmélet az, melyről Br. úr azt mondja, hogy Lagrange a $\frac{dy}{dx}$-et is merőben mellőzé (holott épen nem mellőzi, hanem azt állítja, hogy $\frac{dy}{dx}=f'x)$ s azt derivált függvénynek nevezvén, egy elméletet gondola ki lehozatalára, melynek csak egy baja van, t. i. logikai alapja hibás.

De ha így bánik a mathesissel, hogy minden elméletről, melynek alapjait be nem látja, rövid úton itéletet hoz, hogy annak logikai alapja hibás: akkor ugyan könnyen elszánhatta magát arra is, hogy a szakosztály irányában puhatolódzáshoz kezdett. Ellenben ha ezt nem csak megtette, hanem a 166. lapon az osztályhoz világos kihívó szavakat is intézett, itélje meg bárki is, hogy ha állításaira nem felelünk, mit gondolhatnának a tudós mathematikusok, kik ezen értekezéseket olvassák nem csak most, hanem jövendőben is akármikor.

2) Lássunk még egy példát.

A körben a legnagyobb rendesnek a félátmérőnek kell lenni, még pedig oly tökéletesen, hogy belőle egy végetlenedrész sem hiányzhatik, sem hozzá nem adhatunk egy végetlened részt is.

A körnek egyenlete pedig tevén az átmérőt $=$a

$$y^2=ax-x^2$$

honnét y helyett y+dy ; x helyet x+ax tétetvén

$$y^2+2ydy+dy^2=ax+adx-x^2-2xdx-dx^2$$

és mivel $y^2=ax-x^2$

$$2ydy+dy^2=adx-2xdx-dx^2$$

$$(2y+dy)dy=adx-2xdx-dx^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(a-2x-dx)}{2y+dy}$$

tehát ha x-nek legnagyobb értékét keressük tétetvén $\frac{dy}{dx}=0$

$$a-2x-dx=0 \text{ melyből :}$$

$$x=\frac{a-dx}{2}$$

Igy tehát ha szinte dx-et bármi névvel nevezendő végetlen kicsinynek teszszük is, a kör legnagyobb rendesének $\frac{1}{2}$-dx-el kisebbnek kellene lenni a félátmérőnél, a mi lehetetlen. S mivel tökéletesen akkorának kell lenni mint a félátmérő, ez csak akkor lehet igaz ha $dx=0$

Leibnitznál ezen hiba, mely a végetlenek elméletétől elválhatatlan, azon önkénytes felvétel által van kiegyenlítve, hogy a felsőbb rangú végetlen kicsinyeket az alsóbb rangúakhoz, az első rangúakat pedig a végesekhez képest elhagyhatjuk. Úgyde ezen felvételből is mathematikai szigorral csak az következik, hogy az elhagyás miatt származott hiba tekintet nélkül hagyható ugyan, de ha azokat sem hagyjuk el, számitásaink annál tökéletesebbek lesznek. Itt pedig megfordítva van a dolog, mert az eredmény csak úgy tökéletes, ha elhagyjuk, ha pedig el nem hagyjuk, mindenesetre hibás.

Lagrange elmélete szerint pedig, melyről még azt is mondja, hogy ha a logikátlanságot elengedjük neki, akkor aztán minden jól megy , azaz nem jobban és nem roszabbúl mint Leibnicznál, hanem sokszor jóval kényelmetlenebbűl, a fentebbi lehozatok ekképen állanak :

Minthogy $\frac{dy}{dx}$, melynek a legnagyobb rendes meghatározásában 0-nak kell lenni, maga az elsö eredeztetett függvény, ez pedig $a-2x=0$
innét $x=\frac{1}{2}$ a tökéletesen igaz.

Kényelmetlenebbül megy-e ez mint Leibnitznál? a fentebbi lehozatalokból látható.

Harmadik nézet szerint.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'x+\left[\frac{f''x}{1.2}+\frac{f'''x}{1.2.3}.\Delta x+\frac{f''''x}{1...4}\Delta a^2 \ldots \text{ sat.}\right]\Delta x$$

Ezen kitételben minél kisebbnek veszszük Δx-et, az egyenlet jobb oldalán eső második tag annál kisebbé válik; minélfogva ha Δy-ont és Δx-et elenyésző mennyiségeknek tekintjük s ez esetben illetőleg dy-al és dx-el jegyezzük, a második tagot elhagyván

$\frac{dy}{dx} = f'x$; tehát nem egyéb mint azon határ, melyhez $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a Δx kisebbedésével vég nélkül közelít.

Ezen értelmezés látnivalóképen átmenetül szolgál a véges külzésekből a végetlenekre, vagyis úgynevezett differentiálékra, annálfogva legtöbb tankönyveinkben ezen értelmezéssel találkozunk. Azonban általánosságánál fogva mind a három eddigi nézetet magában foglalván úgy látszik, hogy a félreértések onnét erednek ha meg nem határozzuk szabatosan mi a dx?

Leibnitz szerint: ha dx nem $=0$; hanem attól eltérő bármi végetlen, kicsiny, akkor a második tag soha tökéletesen el nem enyészhetik következőleg $\frac{dy}{dx}$ sohasem tökéletesen $= f'x$, hanem csak ahoz végetlenül közelítő lehet s a külzelés nem volna egyéb közelítésnél.

Euler és Newton szerint: ha $dx=0$; akkor a második tag tökéletesen elenyészik, de mivel ekkor $dx=0$-val együtt egyszersmind $dy=0$ tartozik lenni, leszen: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = f'x$. A 0-k aránya ellen tétethető kifogásokra már a fentebbiekben meg volt felelve.

Lagrange szerint $\frac{dy}{dx}$ maga a határérték, nem pedig a a határ értékhez végetlenül közelítő arány $\frac{dy}{dx} = f'x$. De ez csak úgy lehető, ha $dx=0$ és azzal együtt $dy=0$; épen úgy, mint Euler és Newton szerint.

Ezen értelmezés mellett tehát ha minden homályt és kétséget el akarunk távoztatni, szükségképen meg kell mondanunk, hogy a határértéket mi értelemben veszszük. Ha végetlenül közelítőnek: akkor Leibnitz véleményéhez csatlakozunk, és csak *toleranter vera loquimur.*

Ha pedig azt mondjuk, hogy $\frac{dy}{dx} = f'x$ maga a határ, akkor Lagrange értelmezését fogadjuk el, mely szerint elkerülhetjük ugyan a végetlen kicsinyek megnevezését mindazáltal ebből is szükségképen következik dx=0 dy=0. S akár azt mondjuk $\frac{dy}{dx}$ maga a határ, akár azt: dx=0, mindkettő egyre megyen ki.

Fentebbi idézeteinkben Lagrange-al egyértelmüleg mondja Littrow *die Grenze selbst.* Newton-nal egy értelmüleg: für den *ersten Anfang,* Eulerrel egy értelemben Burg *unendlich kleine Grössen* nach unsrer Ansicht *absolute Nullen*

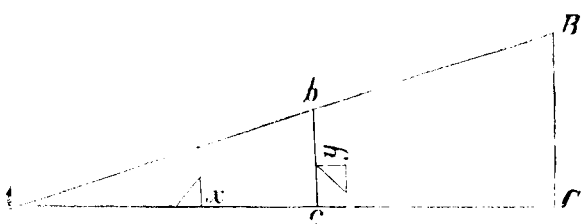
Nem mondhatjuk tehát, hogy a külzelés alapelvei mind e mai napig kérdés alatt volnának, mert azok változatlanúl ugyanazok maradtak az első feltalálóktól fogva mind e mai napig; s a kérdés mindig csak a végetlen kicsinyek kétesértelmezése körül forgott. Azt sem mondhatjuk, hogy a mathematikusok visszatértek volna a végetlen kicsinyekre; hanem csak azt, hogy ezen müszót megtartották ugyan, de épen nem azon maga magának ellentmondó értelemben, mintha az valami *utolsó még sem utolsó törtszám* volna, hanem számokban valóságos 0, vonalakban pedig sem nem vonal, sem nem akármi gondolható kicsiny nevekedés, hanem a vonalnak vagy nevekedésnek kezdete.

Csak annyit mondhatunk, hogy azokra nézve, kik világos fogalmat nem tudnak szerezni magoknak, kétségen kivül kérdés alatt vannak mind e mai napig s kérdés alatt is fognak maradni örökké.

Ezekből már most látható az is, mi értelmök van az efféle kitételeknek

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}=\frac{P.0}{Q.0}=\frac{P}{Q}$$

melynek felvilágositására húzzunk akármi szeglet alatt két vonalat AB ; AC



azután állitsunk fel C-ből egy merőlegest AC-re$=CB$ s az

A és *C* pontok között egy másikat=cb ; s nevezzük *Ac*= $\triangle$x ; bc=$\triangle$y. *A*kárhova gondoljuk tehát $\triangle$y-ont, látni való, hogy az *AB* vonalnak mindig a $\triangle$y felső pontján kell keresztül menni, s $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ mindenütt $=\frac{BC}{AC}$; de látni való az is, hogy ha $\triangle$y A felé közeledik s végtére az *A* kezdő pontba ér, ottan mind $\triangle$y mind $\triangle$x semmivé válik, a kezdő pontnak iránya ellenben, melyet $\frac{BC}{AC}$ arány által fejeztünk ki, változatlanul ugyanaz marad. Az efféle kitételeknek $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}=\frac{BC}{AC}$ értelmök tehát az, hogy az *AC* vonal irányának meghatározására a $\triangle$y és $\triangle$x mennyiségi ismerete egyáltalában szükségtelen, mivel azt a $\triangle$y ; $\triangle$x közvetítő vonalak nélkül is egyenesen a *BC* vonal felső pontjára kell húznunk.

Gondoljunk továbbá az *AC* és *AB* vonalak közé egy görbét, melynek *AC* érintője legyen, azaz : a mondott görbének és az *AC* egyenes vonalnak egyetlen egy közös pontja csupán csak az *A*-val jegyzett kezdő pont legyen. A görbének öszrendeseit pedig továbbra is x-el és y-al s azoknak nevekedéseit illetőleg $\triangle$x-el és $\triangle$y-al jelölvén ezen fölvételekhez képest $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}=\frac{BC}{AC}$ értelme az eddig mondottak szerint az, hogy x-nek és y-nak semmi nevekedése sem lehet, melyeknek arányok $\frac{BC}{AC}$ volna. Mert az *AC* vonalnak a görbe vonalt csak egyetlen egy pontban szabad érinteni. Ha pedig dx-nek, dy-nak bármi kis, ám legyen végetlen kis értéket tulajdonítunk, de azon értelemben, hogy 0-nál nagyobb legyen: akkor az *AC* vonalnak a dy felső pontját is kellene érinteni, következőleg, eszményileg megállapított értelemben érintő nem lehetne.

Az eddig mondottak következtében még egy észrevételt tenni nem látszik feleslegesnek.

Szembetünő ugyanis a mondottakból, hogy a külzeléstan ezen nézetek szerint épen nem közelítési módszer, hanem megmutatásai az eszményi legtökéletesebb szigorral birnak, mert az eszményi végső határig a 0-ig terjednek, a mit a szerkesztési mértantól, mely sem pontot, sem vonalat, sem tért eszményi alakban elő terjeszteni nem képes, egyáltalában nem várhatunk.

De már most mi leszen a felsőbb rangú végetlenekből? mely már 19-dik §-a szerint a belga Nieuwentyt-nek sem fért fejébe, hanem hihetőleg nem azért, mivel *szülő földje vastag párái hatottak reá* s kétségeit *Wollaston platin drótjával* aligha eloszlatjuk.

Az, hogy a végetlenséget kétféle, ugymint : *relativ*, és *absolut* értelemben vehetjük.

Ha relativ értelemben veszszük, mely szerint végetlen kicsinynek nevezzük azt, a mi valamely adott mennyiséghez képest elenyészik, pl. egy hüvelykhez képest annak ezermilliomod része, akkor semmi kétség sincs benne, hogy ilyen mennyiségek s azoknak felsőbb hatványai is léteznek.

De ha absolut értelemben veszszük s a végetlen kicsiny alatt azt értjük, a minél már kisebb nincs, ezen értelemben a végetlen kicsiny látnivalóképen nem lehet egyéb mint $=0$. A végetlen nagy pedig absolut értelemben, a minél már nagyobb nincs mint már fentebbiekben kimutattuk, szintúgy analytikai mint eszményi képtelenség. Miknél fogva a felsőbb rangú differentialéknak épen úgy 0-knak kell lenni, mint az első rangúaknak. A végetlen nagy pedig absolut értelemben valóságos képtelenség levén, annak felsőbb hatványai sem egyebek mint az első rangú képtelenség felsőbb hatványai.

Nem is ilyen értelemben fordulnak elő a felsőbb differentialék.

Hanem, mivel minden függvényt lehet külzelni, a melyben változó van, ha első külzelésünk által olyan függvényt találunk, melyben még változó foglaltatik, külzelésünket ezen függvényre nézve ismét megújíthatjuk. Például :

$$y=ax+bx^2+cx^3\text{-ból}$$
$$dy=adx+2bxdx+3cx^2dx$$
$$\frac{dy}{dx}=a+2bx+3cx^2$$

ebben még változó lévén külzelésünket tovább is folytathatjuk :

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}=2b+bcx \text{ s folytatólag :}$$

$$d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3}=bc$$

külzelhettük volna, pedig az első és második külzelék-hányadost függetlenül is ekképen :

$$y=a+2bx+3cx^2 \text{ honnét}$$

$$\frac{dy}{dx}=2b+bcx$$

és :

$$y=2b+bcx\text{-ből}$$

$$\frac{dy}{dx}=bc$$

melyekből látni való, hogy az egymásután következő külzelésekben

$\frac{d^2y}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$ . . . sat. szintúgy $=\frac{0}{0}$ mint a független külzelésekben $\frac{dy}{dx}=0$ csak a külzelék-hányadosok értékei változnak, a min pedig nincs miért felakadnunk, mivel úgy is tudjuk, hogy $\frac{0}{0}$ határozatlan kitétel.

Következőleg: $\frac{d^2y}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$ ... sat. semmi nem egyéb, mint analytikai jelkép, melylyel azért élünk, hogy a külzelések folytatását a független külzelésektől megkülönböztessük.

Egyszersmind a differentiálékat arra használja, hogy belőlök az analysis értelmezését akarja meghatározni és felvilágosítani. Mert ezek nélkül sohol el nem lehet. Még az állító és tagadó mennyiségek fogalmát sem tudta volna nálok nélkül kristályszinü tiszta igazság alakjában előtüntetni s a legtökélyesebb logikai szigorral dedukálni, holott más felől épen ő állítja, hogy a differentialis calculus alapelvei mind e mai napig kérdés alatt vannak. Ez is logikai mutatványúl szolgálhat.

A 90-dik §-t tehát így folytatja :

Az egész úgynevezett felsőbb mathesis, sőt az alsóbbnak az a része, melyet röviden analysisnek (finitorum) neveznek, tulajdonképen csak az ily közelítő fogásokat keresi, s azért az (alsóbb és felsőbb) analysist legalkalmasban közelítéstannak *nevezhetnők magyarul, oly jellemzetességgel, a milyennel latin görögös európai neve nem dicsekhetik, már csak az analysis sokértelműségénél fogva is.*

Első értekezésének pedig mindjárt elején a 166-dik lapon ezeket mondja :

A mathematika lényegesen speculativ, syntheticus, construáló tan. Melyhez 1) alatt jegyzetbe teszi :

Halljuk ugyan gyakran e kifejezést „**analysis, analytica geometria, analytica mechanica, analysis infinitorum** *sat. melyek felületesen tekintve kétségbe hozhatnák a szövegbeli megkülönböztetés helyességét vagy legalább általánosságát. De ennek oka az, hogy az* **analysis** *több értelmű szó, épen úgy mint a* **nap,** *mely* **dies**-*t és* **sol**-*t jelent . . . A mathematikában pedig két különböző használata van. Egyik szerint azt teszi, hogy :* **kibontás** (*Entwickelung, développement, evolutio*), *melynek mivoltát legkönnyebben példákból láthatni :*

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}b^2+ \,..\,\text{sat.}$$

S mivel az úgynevezett alsóbb és felsőbb analysis legtöbbnyire ilyes kibontásokkal, fejlesztésekkel foglalkodik, innét szokásba jött magokat a tanokat is úgy nevezni. Itt legalább, ha más értelmű is, nem téveszt az elnevezés. De az **analytika geometriában,** *hol nincs semmi ilyes bontás, és merőben a synthetica methodus szerint folynak az állítmányok lehozatalai, épen helytelen ez a szó, és csak arra használ, hogy a construálórajzoló geometriától legyen megkülönböztetve.*

A logikának gyakori emlegetése mellett, a világért sem jutna, eszébe, hogy mivel az analytica geometriában ilyes kibontások nincsenek, nem azt kell következtetnünk, hogy nevét ezen kibontásoktól vette volna, s így az egész világ hibásan nevezi; hanem inkább azt, hogy ezen elnevezésnek más okának kell lenni. A mi pedig azt illeti, hogy az **analysis** több értelmü szó, egyáltalában nem mondhatjuk. Söt inkább, az **analysis** a tudományok csaknem minden nemében, sőt a közéletben is ismeretes müszó, és mindig azon elemek kifejtését jelenti, melyek valami egészben befoglaltatnak. Miért ne vehetnők tehát a mathematica analysist ilyen értelemben ? ha csak azért nem, mivel így sem a tudományt, sem senkit nem vádolhatunk következetlenséggel.

Felvilágosításul lássunk egy példát épen a szóbavett *analytica geometriából.*

Az analytica geometria felállít egy általános egyenletet, melyben minden második fokú görbéknek be kell foglaltatni Azután kifejti, hogy azon általános egyenletben csak a következő különösebb egyenletek foglaltathatnak :

$$y^2 = px; \; y^2 = ax - x^2; \; y^2 = ax \pm \frac{px^2}{a}$$

Tovább menvén, ismét azon törvényeket és tulajdonságokat fejtegeti, melyek a nevezett egyenletekben foglaltatnak, s eképen folynak az analytikai munkálatok és következtetések a végső elemzésig.

A synthesissel egészen másképen megy a dolog.

Gondolhatok egy pontot, mely a legegyszerűbb első mértani fogalom.

Gondolhatok másikat is valahol, s e kettőnek köze *távolság,* összetettebb fogalom.

Ezen távolságok egyenlők vagy egyenetlenek lehetnek. Ismét összetettebb.

Gondolhatok pontokat egy adott ponttól egyenlő távolságra.

Gondolhatok, egy pontot, mely megindúlván mindig úgy halad, hogy valami ponttól mindig egyenlő távolságban maradjon. S ez leszen a kör fogalmának synthetikai megalapítása.

Ezentúl a körbe írhatok vonalakat különféle helyzetekben s azokból ismét synthetice hozhatom ki azoknak viszonyait.

Hogy ezen synthetikai eljárások mind a fogalmak alkotásában, mind a következtetések összefüggésében egészen másnemüek, mint a felhozott analytikaiak magában látható lévén ; még csak azt kell hozzáadnom, hogy az analysis általános jegyekkel él, annálfogva minden kitételei általánosak, melyekből különösebbeket lehet és kell kifejteni ; azért is viszont azon mennyiségtan, mely általános jegyekkel él, akár tiszta akár alkalmazott legyen az, analytikai mennyiségtannak neveztetik.

De már annyira eltávoztunk a kitűzött kérdéstől, hogy alig emlékezhetünk reá mi volt az? S ki hinné, hogy ezen kérdés megoldásával foglalkozunk: *lehet-e vonal vonalhoz osztási viszonyban?*

Ismétli tehát a 82-ik s azt követő §§-okban a mit már százszor ismételt, azután pedig, hogy az üres vitatkozásoknak semmi híjja ne legyen, erősen hiszi és állítja, hogy a térnek háromnál több mérete nincsen. *Pancoucke negyedik méretet vélt fellelni az időben. Valamint* $+$ *a-nak negatioja* $-$ *a, úgy* $1 \times m$*-nek reciproque-ja* $\frac{1}{m}$. *Nem ő találta ezt a nevet, már rég óta divatos a tankönyvekben.* sat.

Nem legtökélyesebb logikai szigorú dedukálások ezek, hanem olyan zűrzavar, melynek sem Pancoucke, sem Polonius nem látta mását; s melyek mellett a *risum teneatis*, a *ne sutor ultra crepidam*, harlequin, róka fark, s több efférlék másokra alkalmazása bizvást elmaradhattak volna.

A 85 §-ban arra tanít bennünket, hogy megértsük, mik a hatványok, s itt azon felfedezést teszi, hogy m-et így kell írni: $1 \times m$; m^3-at így: $1 \times m \times m \times m$ sat. miért nem? $1 \times m \times 1 \times m \times 1 \times m$; *ezen általa gondosan oda tett egyről megfeledkeznek a tankönyvek, ámbár későbbi bebizonyításaikban kénytelenek elővenni a gondolkodó s igazán figyelő tanítvány bámultára, a ki természetesen nem foghatja meg, honnan jöjjön egyszerre elő az az* **egy**? *s még kevesbbé bírja megegyeztetni a hatvány értelmezésével, azzal t. i. melyet tankönyve ada elébe.*

Szomorú dolog volna, ha úgy volna, az igaz; s e részben sokat köszönhetne az igazán figyelő tanítvány, ha útba igazítaná. A ki tudni akarja, miképen? olvassa meg a következendőket. Elég legyen annyit mondani, hogy ő azokat *óvatos értelmezésnek* nevezi s ekképen fejezi be.

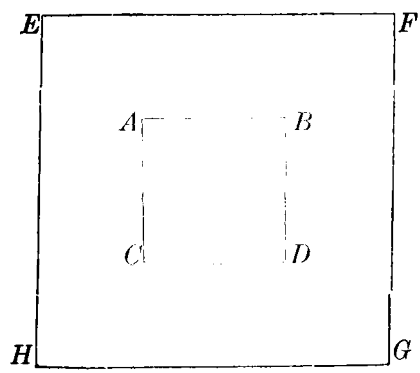
Ha pedig ismét valaki ezt netalántán haszontalan pepecslésnek s aprólékosságokon kapásnak nézné, azt arra figyeltetem, hogy a humanisták a formalis észfejtést emelvén ki módszerök kétségbevonhatlan előnye gyanánt, a realisták a nyelvtannal csak? a mathematikát állíthatják szembe, mint észfejtő formalis eszközt (hát már nem fojt el más egyéb ingeniumot?) *Ha hát azt akarjuk, hogy versenytársa előtt meg ne szégyenlje* *magát, azon kell igyekeznünk, hogy az ész legnemesb egyik tehetségét, a józan itéletet, növendékeinkben ha előteremteni képesek nem lennénk is, legalább meg ne rontsuk logikátlanságunkkal.*

Észrevételeket ezekre nem teszek, hanem csakugyan szeretném tudni, mit gondolt, mikor ezeket irta, s mit gondol más, a ki olvassa.

87-dik 88-dik §§-okban unalmas szószaporítások következnek, melyeknek felhozásával nem akarjuk olvasóink türelmét fárasztani.

89-ik §-ban meg akarja mutatni, hogy a vonalakat illetőleg *nincs oly négyszög, melynek valódi és látható 2-od, és nincs köb, melynek ugyanoly 3-ad gyöke nem volna. A számoknál előforduló lehetetlenségnek tehát itt semmi nyoma.*

Ezen tétele megbizonyításában pedig, logikai szokott szigorával sajátszerűleg jár el akképen, hogy a mit be kell bizonyítani, bizonyosnak veszi fel, s ebből bizonyítja meg a bizonyítandót. Leír egy nagyobb négyszögbe egy kisebbet,



azután így okoskodik:

Látni való, hogy ha ABCD négyszöget lassanként szélesedve gondoljuk, úgy mindazáltal, hogy négyszögalakját soha se veszesse, egykor elfogja érni EFGH négyszöget, s ha tovább nevekedni gondoljuk, túl is szárnyalja. Ezen nevekedésében hát minden lehető arányokon keresztülmegy, a miket csak e kifejezés ABCD : EFGH jelenthet, s ezek közt előjöhetnek ezek 1 : 2; 1 : 1; 2 : 1; 3 : 1; 4 : 1 sat. Különben, az úgynevezett Pythagorás tételénél fogva, tetszésünkszerint állíthatunk össze négyszögek *sorát, melyekben a négyszögterületek arányai $1 : 2 : 3 : 5 : 6 : 7$. sat. legyenek.*

De mivel e közben *CD* vonalnak is keresztül kell menni mindazon arányokon, melyeket *CD* : *HG*-hez, s hasonlag *AD*-nek is mindazokon, melyeket *AD* : *EH*-hoz jelenthet, s egyszersmind $AD=DC$ tartozik lenni; és mivel akármi lehető aránytugyanazon aránynyal sokszorozunk, annak tényzete sem 2 sem 3 sem 5 sat. nem lehet; látni való, hogy ezen arányokon az *ABDC* □ nevekedése keresztül nem mehet.

Hasonlag van a Pythagoras tételével a dolog; midőn azt mondja, hogy annálfogva tetszésünk szerint állíthatunk elő négyszögek sorát, melyekben a négyszögterületek arányai $1 : 2 : 3 : 5$ sat. legyenek, holott épen ezt kellene bebizonyítani, melyről mindjárt bővebben szólandunk a következendőkben. Következik újabb eltérés:

90. §. Még mindig hátra azon kérdés megfejtése, miért nem követheti a hosszaságok kijelölésében a szám a vonalat? A feleletre már meg van vetve az alap a fentebbiekben.

Mivel pedig a fentebbiekben megvetett alapra semmit sem építhetünk, fordítsuk meg a kérdést, miért nem követheti a vonal a számokat? S erre azt feleljük: azért, mivel a számok eszméink, a vonalak pedig csak érzékeink jelképei.

Mindenki tudja, hogy az analytikai mértanban a pontok helyezetét és vonalak hosszaságait hasonlítatlanúl tökéletesebben kiszámíthatjuk, mint mértani szerkezet által előállítani képesek volnánk. A szerkesztési mértan- postulatumokra, még pedig gyakorlatban teljesíthetetlenekre építi feloldásait és megmutatásait, melyek tehát csak érzéki tehetségeink határai között lehetnek igazak és valók. Ezeket a Pythagoras tételére alkalmazva megmutathatjuk ugyan, hogy ha két vonalat egymással merőszög alatt összekötünk, melyeknek mindegyike például egy hüvelyk; a hypothenusának négyszöge eszményileg 2 tartoznék lenni. De hol van hát az a hasonlag eszményi hypotenusa? Hol van eszményi vonal, melynek szélessége $=0$? Ki fog két vonalat úgy összemérni, hogy egyik a másiknál nem csak egy hüvelyk százezer milliónyi, hanem még annál is akár hányszor parányibb részszel kisebb vagy nagyobb ne legyen? Ki fogja azokat tökéletesen merőszög alatt össze-állítani úgy, hogy annak iránya is az igaz iránytól sehol a hüvelyknek százezer milliónyi részével se távozzék el? De ha mindezek megvolnának is, a három vonal három pontban vágná magát. Mind a három pontot ha például ezerszer nagyító mikroskopiumon szemlélem, hol leszen mindegyik átmetszésnél azon pont, mely között a keresett hypotenusának valóságos hossza fekszik? Mindezek mellett a szerkesztő mértan összeköt két imígy-amúgy megmért vonalat, valami szeglet alatt, a mi külalakjára nézve a merőszöghöz közelít, a vonalak végpontjait összeköti valami érzékileg is látható vastag vonallal, és szerző elhiszi, hogy a Pythagoras tétele szerint tetszésünk szerint állíthatunk elő négyszögek sorát, melyekben a a négyszögek területei 1: 2: 3: 5. sat. arányban legyenek. Ezekre pedig a világért sem lehetne mondani, hogy: *az ész legnemesb egyik tehetségét, a józan itéletet, növendékeinkben ha előteremteni képesek nem lennénk is, legalább meg ne rontsuk logikátlanságunkkal.*

Mégis mintha dolgát jól végezte volna s a legszebb egyetértésben volna a logikával, nemcsak az, hogy ezzel végezi be elmélkedéseit: *Mi pedig ezekben az úgynevezett aránytalan számok eszméjét s ennek geometriai alkalmazását tehetségünk szerint tisztába hoztuk*; hanem folytatólag arra tér által, *hogy a csalhatatlanságáról híres mathematikában minő logikai bakokat lehet lőni. A tárgy* ú. m. *megérdemli, hogy új czikket kezdjünk vele.*

Igen de a volna a kérdés: *lehet-e vonal vonallal osztási viszonyban*? S már megint új czikket kezdjünk.

Az új czikk pedig így hangzik: **Aránytalan** *mennyiség (quantitas irrationalis) neve ereje szerint az, a mi nincsen arányban más, vele egyébiránt egynemű mennyiséggel. És ennek daczára, alig van egy mathematikus, a ki az aránytalan mennyiségek arányáról nem beszélne.* Idézi C. Meyers Lehrbuch der Geometrie. *Ha valaki tarokot játszva egy színt megtagadna, s mindjárt utána való ütésben azt a színt hívá, méltán kinevetnék nemcsak, hanem meg is büntetnék. És a logika iskolájában, mint némelyek nevezik s nem is méltatlanúl a mathesist, azon tudományban, melyben annyiszor bizonyítnak apagogice, azaz a képtelenség kimutatásával, ott, mondom, szabadjon pirulás nél-*

küll beszélni az aránytalan mennyiségek arányosságáról? Tehát szabadjon a képtelent, az absurdumot, igazságnak adni ki? Csudálatos, de úgy van.

Vették ezt észre némelyek, s azt hitték, segítve lesz a dolgon, hogy ha az **aránytalan** *nevezetet kikerülik s* **öszmérhetetlen**-*nel élnek helyette. De bizony csak olyan ez, mintha a kecskebak szőrét szarvát megkurtítanák s barnára festenék, hogy aztán gondolja ŏznek a kinek tetszik. S ime tetszett, mert hiszen hiába írta meg Phaedrus ezelőtt majd 2000 évvel az* **ignotos fallit notis est derisui**-ját sat.

Már kérdem, mire valók tudományos értekezésben efféle gúnyolódások, melyekben tiszteletet érdemlő tudósokra Phaedrus **derisui**-ját alkalmazza? Nem könnyen megtörténhetik-e, hogy mindazok önnyakába esnek vissza?

Nem kell rendkivüli észtehetség annak belátására, hogy midőn az arányok arányosságáról és aránytalanságáról beszélünk, az **arányt** kétféle, úgymint általános és különös értelemben veszszük. Az arány általános fogalma nem rekeszti ki azon esetet, hogy annak általános kitételében $\frac{m}{n}$ a nevező és számító akár külön, akár együtt és egyszersmind határozatlanúl sok egymásután következő, akár végetlen sok számjegyekből álljon. De ha számtani míveleteinkben ilyen mennyiségekre akadunk, azokat nem vehetjük fel számításainkban hiánytalanúl, hanem közölök csak nehányat, melyeket $\frac{m'}{n'}$ eljegyezvén soha sem lehet tökéletesen $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, tehát : $n : m = n' : p$
dáúl $1 : \sqrt{2} : 1{,}41421356 \ldots$ sat. Söt mivel az efféI
nem is valóságos, hanem csak jelképi arányok
méltán nevezhetjük aránytalanoknak. Ha
példáit láthatjuk ezekben : páratlan pá
ember, halhatatlan halandó, helytele
tételekben, melyeken senki fel n
értekezést írnunk annak megmu
van, helyben és időben létezik, teha
vak absurdumok, képtelenségek; hogy

szabad legyen közelítőleg kifejeznünk, vagyis az aránytalanokat arányba tennünk, épen oly igazságos postulatum, mint liceat mihi lineam ducere, s az ilyen közelítő arány szintolyan joggal neveztethetik aránynak, mint a vonal vonalnak, noha egy vonal sincs vastagság nélkül.

Történetesen előfordúlt fentebbiekben ez a szó : *apagogice*; tehát a logika kivánja, hogy a vitatandó kérdést, *lehet-e vonal vonallal osztási viszonyban*, továbbra is függőben hagyjuk, hanem a helyett egy pár apagogika bebizonyítással ismerkedjünk meg.

Ezek tehát szorosan nem tartoznának ide, de mivel igen tanulságos észrevételek és következtetések vannak velök összekapcsolva, melyekből például az is kitűnnék, hogy az ó geometria, mint az ó bor, jobb az újnál, érdemeseknek látszanak, hogy felhozzuk.

92. §. *És íme ezen alap ürességét nemcsak meg nem ismerik,*

Nem ám. Hanem a helyett megismerjük az álokoskodásokat, s azoknak ürességét fentebbiekben kimutattuk.

hanem még mernek is építni reá

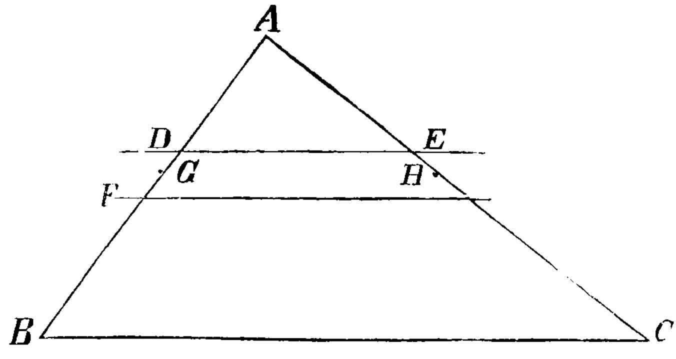
Hogy is ne, és kitől való féltökben ne mernének?

egy apagogikai (kénytelenítő) bizonyítékot

Mi ez? hiszen minden bizonyíték kénytelenítő, mert kényszerít bennünket, hogy a bebizonyított tétel igazságát elismerjük.

azon igazság megmutatására, hogy ha egy háromszög talpával párhuzamos vonalat húzunk, ez a háromszög oldalait proportionalis darabokra vágja.

Első eset: *midőn a párhuzamos vonal az oldalakat összemérhető darabokra vágja. Ez ellen legkisebb kifogás sincs; minden a maga rendén és teljes szigorral megy.*



Második eset: *midőn a darabok összemérhetlenek (azaz nincs közös mértékök)?* Összemérhetlen nem azt teszi, hogy nincs közös mértékök, mert az egység mindent megmér. Hanem azt, hogy egyik sem lehet mértéke a másiknak. *Ekkor is*: $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$. *Mert ha nem, úgy* $\frac{AB}{AC}>\frac{AD}{AE}$. *Legyen elébb* $\frac{AB}{AC}>\frac{AD}{AE}$. *Ezt feltéve, a második törtszám számlálóját meg lehet annyival (pl. DF-el) nagyobbítni, hogy az elsövel egyenlő legyen. Ekkor hát*

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AF}{AE}\ \text{(I)}$$

De most már mérhető lenne AB egy oly mértékkel, mely DF-nél kisebb lenne. Ezen mértéknek semmi végpontja nem eshetnék D-be, mert úgy AB és AD a felvét ellenére összemérhetők volnának; hanem D és F közé esnék valamelyik ilyes végpont. Legyen ez G; AB és AG tehát összemérhetők, és ha G-én át a $\triangle$ talpával párhuzamost vonunk, ez EC-et is valahol E és C közt (tegyük H-ban) vágja, még pedig úgy, hogy AH és AC összemérhetők. Ekkor az első eset szerint:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AG}{AH}\text{(II)}.$$

De ha két arány egy harmadikkal egyenlő, egymásközt is egyenlő, tehát $\frac{AF}{AE}=\frac{AG}{AH}$ volna. De ez képtelenség; mert

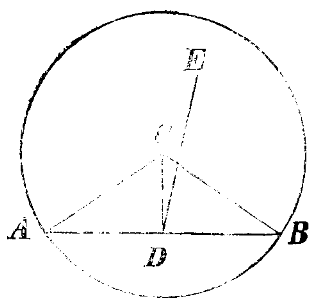
$AF > AG$ és így AE-nek is nagyobbnak kellene lenni AH-nál, már pedig kisebb. Tehát $\frac{AB}{AC}$ nem lehet nagyobb mint $\frac{AD}{AE}$.

Hasonló módon bizonyíthatni be, hogy kisebb sem lehet. Tehát egyenlő vele.

Mint látjuk, oly vígan halad ez, mint jól kent tengelyű waggon jó vasúton, azaz hogy haladna ha megindúlhatna sat.

Legyen szabad egy gyönyörű példát hoznom fel erre az ó geometriából.

A húr középére állított függő a kör közép pontján megy át. Ez a bebizonyítandó tétel. Mert ha nem, valahol másutt megy el, természetesen a körben belül. Íme az első fogantyú, mely oly hatalmasan megragad, mint a középkor kínzó eszköze a spanyol szüz. Egy vonalnak ha egyszer létét megengedjük, vagy egy ponton vagy azonkivül kell átmennie; ezen dilemmából nincs menekülés. Ne menjen tehát a középponton át, hanem mellette akárhol, mint DE az ábrában. Úgy de DE függő lévén AB húrra, EDB *és* EDA szegletek derékek és így egyenlők. Itt a második fogantyú. Most már az igazi középpontból C-ből húzzuk CA, CD, CB vonalakat. Ezek a húrral két $\triangle$-et alkotnak, ú. m. ACD-et és ABD-et, és ezek a $\triangle$-ek oldalaik egyenlőségénél fogva hasonlók és egyenlők; tehát



$ADC\wedge = BDC\wedge$-el; s mivel egyenlő mellékszegletek egyszersmind derék szegletek; tehát ADC és BDC is azok. De mint láttuk ADE és BDE is derék szegletek és ennélfogva BDC is, és ennélfogvà BDC is $=$ BDE-vel, kisebb a nagyob bal, a mi képtelenség; tehát DE nem mehet másutt, mint a középponton át. És valóban, ha DE-t DC hosszában képzeljük, akkor igazán egyenlők és derék szegletek lesznek *BDC* és *BDE*, mert összeesnek. *Q. E. D.*

Hol van az ebben foglalthoz hasonló fogantyú az elébbi bizonyítékban?

Ott van mindjárt az elején hogy, ha: $\frac{AB}{AC}$ nem egyenlő $\frac{AD}{AE}$-vel, vagy kisebbnek vagy nagyobbnak kell lenni. Ez is úgy megragad mint a spanyol szűz. Mert mihelyest két egyenetlen mennyiség létét megengedjük, akkor az egyiknek vagy kisebbnek vagy nagyobbnak kell lenni, ezen dilemmából nincs menekülés.

Ha $\frac{AB}{AC}$ és $\frac{AD}{AE}$ *nem egyenlők, azt mondja, hát egy más pár hanyadosnak* $\frac{AB}{AC}$ és $\frac{AF}{AE}$-nek *kell egyenlőknek lenni.*

Nem azt mondja, hanem ezt: hogy a második törtszám számítóját meg lehet annyival (pl. *DF*-el) nagyobbítani, hogy az elsővel egyenlő legyen. Hát ez nem fogantyú? A ki a vonalak folytonosságát megengedi, ezt sem tagadhatja.

Igen ha tagadnám, hogy $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$. *De én sem egyiket sem másikat nem állítom; csak azt, hogy nem lehet tudni. Nem lehet pedig azért, mivel AB és AD összemérhetetlenek levén, végetlen számokkal kellene meghatározni, mi nincs emberi hatalomban még képzelődésben is.*

Ilyen ellenvetésekkel nem csak az új geometria, hanem Euklidesz, sőt a gondolkozás **waggonát** is meg lehetne állítani. Euklidesz azt akarja bebizonyítani, hogy a **húr közepére állított függő a kör középpontján megy át.** Igen ha tagadnám, de én csak azt állítom, hogy nem lehet tudni. Nem lehet pedig azért, mert a pontnak sem széle, sem hossza, sem vastagsága nincs, ilyen pontot kimutatni pedig nincs emberi hatalomban még képzelődésben is, tehát nem tudhatom hol van a középpont. Nem tudhatom azt is, hol van az *AB* húr közepe, mert az *AB* öszmérhetlen levén, annak felét is, mely a *D* pontot meghatározza, számokban kellene meghatározni, a mi nincs emberi hatalomban, söt képzelődésben is.

Hát azt hol vette, hogy AB és AD összemérhetlenek levén, végetlen számokkal kellene meghatározni? Hiszen itt vonalakról van szó, azokról pedig a 89. §-ban azt mondotta, hogy *a számoknál előforduló lehetetlenségnek itt hát semmi nyoma.* Valóban sokat kiván, ha azt kivánja, hogy mindezeket a legszigorúbb logikai következtetéseknek higyjük.

Ugyanez lehetetlenné teszi a másik kivánatot, hogy t. i. pótoljuk $\frac{AD}{AE}$*-t annyira a mennyi* $\frac{AB}{AC}$. *Hogy pótoljam ki, a mit nem tudok, arra, a mit megint nem tudok?*

Épen azért, mivel ezeket nem tudja, nem is kérdi senki, hanem csak azt kérdik, hogy ha $\frac{AB}{AC} > \frac{AD}{AE}$, ki lehet-e pótolni $\frac{AD}{AE}$-t, hogy $\frac{AB}{AC}$-vel egyenlő legyen, vagy nem? Ezt pedig csakugyan tudhatja.

Végre, miért legyen a felvett, vágy inkább feltett közös mérték kisebb mint DF? Hol itt a kénytelenség?

Miért nem húzta az elöttünk levő képletben a DE-t jobb oldalra nem pedig a balra? miért nem közelebb vagy távolabb C-től? hol itt a kénytelenség? Sehol sincs, hanem lehető eset. Ugyanez adja elö magát itt is. Mert ha az AB mérhető DF-el vagy valami nagyobbal, akkor mérhetö lesz annak bármi kis valamennyid részével, tehát DF-nél kisebbel. Ha pedig sem DF-el sem ennél nagyobbal nem mérhető, szükségképen DF-nél kisebbel kell mérhetőnek lenni, vagyis hogy *mérhető legyen AB egy oly mértékkel, mely DF-nél kisebb* mindenesetre lehető.

Látnivaló tehát, hogy nem *a fogantyúk a bizonyítónak,* hanem inkább az ellenvetések szakadnak markába az ellenvetőnek. Van még több is. Megtanít bennünket, hogy a dilemmát és általában a principium exclusi tertiit mikor lehet alkalmazni. És :

Azt, hogy két vonal **vagy arányos vagy nem arányos**, *szintoly kevéssé vagyunk kénytelenek elismerni, mint azt, hogg a ló* **vagy görbe szarvú vagy nem görbe szarvú**, *meg azt, hogy az ész* **vagy piros vagy nem piros**; *akár végre azt, hogy a háromszög magassága* **vagy keserü vagy nem keserü** sat. *Az arány bevett értelmezése pedig a vonalak-*

ról teljességgel nem szólván, nem láthatni át, mi joggal szoríthatna az, ki ezen értelmezést teszi alapúl, dilemmája szarvai közé bárkit is.

De mivel az aránynak bevett értelmezése minden egynemüekre kiterjed; hogy miért nem szólana, a vonalakról, annak okát adni elfelejtette. Ha pedig Meyerre hivatkoznék, Meyer csak azt mondja, hogy az (a) és (b) számok aránya nem egyéb mint azoknak hanyadosa, s egyáltalában nem azt, hogy az arány értelmezése csupán számokra vonatkoznék. Söt némelyek az általános számok arányát meg is szokták az egynemü mennyiségekétöl különböztetni, és *exponens rationis-nak*, az *arány kitevöjének* nevezik.

A következökböl továbbá ezeket tanuljuk, hogy

Minden elakadásainkban menhely gyanánt Euklideszhez kell folyamodnunk, kinél két értelmezésben leljük fel az aránytannak egyedül biztos alapját sat.

Midön mindezek nemcsak így vannak, hanem minden mathematikustól, ki ezen jeles és egyedül idves rendszert ismeri, bevallvák, méltán kérdésbe jöhet, mikép történt még is kiküszöbölésök? mikép foglalta el a rossz a jó helyét? . . . sat. Teh át:

Puhatoláshoz fogék, s ime egyéni gyarlóság helyett kor gyarlóságára bukkanék . . . sat.

Szegény Euklidesz azt találá egyszer az ö tudós büszkeségében mondani; hogy **nincs királyi út a geometriára** *sat.*

Nem kellett egyéb azon kornak, mely a tudományokat czukros gesztenye adagokban akarta belopni a fiatal nemzedék gyomrába . . . sat. Ezen kor methodikus hösei, Basedowjai meg akarák mutatni, hogy van királyi út a geometriára . . . sat. Nos, hogy az imént jellemzett **ragout**-*kba az egyarányuakról való Euklideszi értelmezés szilárd marhahús szelete minden állományias tápláló ereje daczára be nem fért, az magában világos; ki kelle hát küszöbölni, s felvenni helyette azt, hogy az* **egyarány** *két hanyados egyenlösége; ezt könnyebb volt mind megtanulni, mind elmondani, mind pedig — semmit sem gondolni mellette. Ezen elbánásból húzott szép logikai eredmények egyikét vala szerencsém a fentebbiekben ismertetni. Tehát* **ne sutor ultra crepidam.** Kinek szól ezen intés? az alábbiakból fog kitetszeni.

Valóban különös fogalma lehet a mathematikai tudományok rendszeréről, melyre már fentebb is mutatott egy példát a számok felosztásában, hogy : *ha későn fogtak a felosztás munkájához, csakugyan ki is pótolták, hisz a szalonnát csak meg kell kezdeni, majd reá járnak* (71 §.), s e szolgált alapelvül a számok folytatásában. Az arányok értelmezésében pedig az, hogy a kor methodikus hősei meg akarták mutatni, hogy van királyi út a geometriára; e volt az oka, hogy oly értelmezést adtak, *melyet könnyebb volt mind megtanulni, mind elmondani, mind pedig — semmit sem gondolni mellette.* Ezen értelmezést azután az egész mathematikus világ elfogadta, mert természetesen a sem gondolt mellette semmit.

De ha puhatoláshoz fogott, könnyen reá akadhatott volna, hogy Euklidesz értelmezésének hibáját, miszerint az, egyrészről nem foglal magába minden viszonyokat, melyeket arány nevezete alatt értünk, másrészről olyakat is foglal magába, melyeket az arányok közé fel nem vehetünk, nem a kor methodikus hősei, Basedowjai vették észre és igazították helyre, hanem az újabb mathesisnek szintolyan tekintélyes képviselői, mint Euklidesz az ó geometriának. Nem mondhatná, hogy állításai *minden mathematikustól, ki azon jeles és egyedüll idves rendszert ismeri, bevallvák.* Nem mondhatná, hogy az újabb értelmezést csak azért vették fel, mert könnyebb volt mind megtanulni, mind elmondani, mind pedig — semmit sem gondolni mellette. Végezetre :

94-dik §-ban csakugyan reá tér a vonalak arányának értelmezésére

Ez : $\frac{e}{s}$ (e *és* s *vonalakat* jelentvén) *azt teszi, hogy* **s**-*nek valamennyid része, mint mérték, megvan* **e**-*ben valamennyiszer. Más szókkal, ha* **e=mr** *és* **s=nr** *így fejezhetjük ki : a mi* **s**-ben **m**-szer *van, az* **e**-*ben* **n**-*szer van meg. Világos hogy* **r** az **e**-*nek és* **s**-nek *közösmértéke.*

Most már két eset lehet, vagy van a két vonalnak **véges közös mértéke**, *vagy a* **végetlen kicsinyig** *kell mennünk, hogy közös mértéket leljünk. Az első esetben az* **m** és **n** *számokban megmondhatók, a másodikban pedig csak végetlenül közelíthetők. Az elsőben* **összemérhetőknek,** *a másodikban* **össze-**

mérhetleneknek *nevezzük a vonalakat, azaz véges közös mértékkel nem mérhetőknek.*

Ott vagyunk tehát a min mindjárt eleintén lehetett és kellett volna kezdeni : $\frac{e}{s} = \frac{m.r}{n.r} = \frac{m}{n}$ mert, hogy ezen egyenletek értelmének felfogásához az eddig két és fél iven keresztül-szőtt-font fejtegetésekből egy betü sem kivántatik, mindenki világosan láthatja. Lehet, hogy a nagyon megkedvellett logikai bakvadászat igen messzire és félrevezette.

Hanem a mi a belőlök húzott következtetéseket illeti, egészen másokra akadunk mint ő.

Láthatjuk ugyanis, hogy az arány egyáltalában nem függ a közös mértéktől, hanem csupán azon általános számokban adott szorzóktól, melyekkel a közös mérték van sokszorozva. Az tehát, hogy van-e két vonalnak véges közös mértéke, vagy a végetlen kicsinyig kell mennünk, egyáltalában nem lehet befolyással arra, hogy az arány öszmérhető, vagy öszmérhetlen legyen. Söt már a fentebbiekben láttuk, hogy az ilyen kitételek is $\frac{0}{0} = \frac{P.0}{Q.0} = \frac{P}{Q}$ melyekben a közös mérték $= 0$ lehetnek arányosok és aránytalanok ahoz képest a milyenek $P : Q$ egymáshoz.

Ide tartozik a mit Meyerből a 92-dik §-ban idéz:

„Ist das Verhältniss zweier Linien oder Flächen für irgend ein Mass rational, so ist es für jedes Mass rational. Und ist ihr Verhältniss für irgend ein Mass irrational, so ist es für jedes Mass irrational.“

Miután ratio = Verhältniss, nyiltan képtelenség, ezen kifejezés csak azt teszi, hogy „ist ihr Verhältniss kein Verhältniss. Meyers Lehrbuch der Geometrie. 116. l. Azután irrational két vonal vagy felszín egymáshoz, ha **közös mértékök** *nincs; mit tesz ennélfogva valami mértékre nézve nincs közös mértékök? Tehát két absurdum egy helyett.* De ezeket Meyer nem mondja, hanem értekező mond két absurdumot egy helyett.

Sok beszéd helyett egy példa fel fogja világositani az egész dolgot. 3 mértföld $\sqrt{3}$ mértföldhöz *aránytalan arány*, az *arány* szó két értelemben, általános és különös értelemben vétetvén. *Arány* általános értelemben, mivel mint egynemüeket összehasonlíthatjuk egymással, és az arányok általános jelképével így irhatjuk: $\frac{3 \text{ mrföld}}{\sqrt{3} \text{ mrföld}}$. Különös értelemben pedig, mivel az arány meghatározására a $\frac{3}{\sqrt{3}}$ hanyadost véges számokban ki nem fejezhetjük, *aránytalan.* Közös mérték a mértföld, s mivel ezen közös mértékre nézve aránytalan, aránytalan leszen más egyebekre nézve is, akár ölet, akár lábat... sat. tegyünk a mértföld helyett $\frac{3 \times 4000 \text{ öl}}{\sqrt{3} \times 4000 \text{ öl}}$ és: $\frac{3 \times 4000 \times 6 \text{láb}}{\sqrt{3} \times 4000 \times 6 \text{láb}}$ sat. hasonlag aránytalan, mert az önmaga által felállított egyenletek szerint is

$\frac{e}{s} = \frac{m.r}{n.r} = \frac{m}{n}$ az arány egyáltalában nem függhet a közös mértéktől, a mit itten saját értelmezése szerint (r)-el jegyeztünk. Nem azon két vonal tehát aránytalan egymáshoz, melyeknek közös mértékök nincs, hanem az, melyben a közös mérték aránytalan szorzóval van (akár a számítóban, akár a nevezőben, akár mind a kettőben együtt) sokszorozva. Ugyanezekből látható egyszersmind az is, hogy arány mindig a közös mérték szorzóinak hanyadosa, s ilyen értelemben kell venni a mit ugyanott hasonlag Meyerből idézett „*Also ist das geometrische Verhältniss der beiden Zahlen* (a) (b) itten (m) (n) *nichts anderes als ihr Quotient.* Nem pedig abban, hogy az arány bevett értelmezése a vonalakról teljességgel nem szólana mint 92-dik §-a végén állítja, de nem adja okát.

Utolsó része értekezésének, melyben az úgynevezett képzetesek értelmét akarja felvilágositani, épen azon csalhatatlan eredményekre vezető mintázat szerint készült, melyet minden eddigi lehozatalaiban híven követett, s hihetőleg ezt tartja azon legtökélyesebb logikai szigornak, melyről a 26. §-ban emlékezett. Ehez képest pedig megkivántatik, hogy némely nagyhangzású szavak elöbocsátása után a müszavak gáncsolásába bocsátkozzunk, s azok saját és általvitt értelmöket lehetőségig összezavarjuk. Azután általánosan a tudomány és a tudósok ellen fordúljunk, hogy a nevezett müszavaknak megfelelő fogalmak, nem is okszerűleg, következetesen, sőt szükségképen vétettek fel e tudományba, hanem csak önkényesen azért, mivel akkor a szükségnek megfeleltek. Továbbá, egyes tudósokat és azoknak állításait kell kiszemelnünk, azok ellen viadalra kelnünk s kétségen kivül diadalmaskodnunk, mert a ki a *logika* fegyverét oly ügyesen tudja forgatni mint eddigiekben láttuk, annak elég annyi, hogy ellenfele állításában nincsen *logika*, az ő czáfolata ellenben a legtökélyesebb *logikai* szigorral bír. Így tehát, mivel a logikának döntő szerepet kell viselni, hivatkozzunk reá mindenütt a hol csak lehet, főképen pedig ott, hol okoskodásaink gyengéit leginkább érezzük, s a mathematikai szigor üldözései elől másképen nincs reményünk menekülhetni.

Hogy Sz.-nek minden fentebbi lehozatalai ezen mintázat szerint készültek, mindenki könnyen általláthatja, ha azokra visszaemlékezik. Jelen esetben pedig bevezetésül szolgáló nagymondó szavak :

90. §. *Eddigelő, t. ak. oly ország úton jártunk, hol legfelebb egy-egy kijárt vagy kimosott gödröcskét kelle kitöltenünk, vagy egy nehezen hágható meredeken kanyargással segítenünk.*

Értésünkre adja tehát, hogy fentebbiekben a gödröcsköket kiegyengette s a nehezen hágható meredekségeken által segített bennünket, miknél fogva következő vállalatának sikerülésében annál nagyobb bizodalmat helyezhetünk :

Hanem most oly helyre érkeztünk, hol megszűnik a rakott út, hol kiki csak úgy közeledik a czélhoz, mint Pesthez közeledünk vala hajdanában a Rákoson át, úgy t. i. hogy minden útas maga vert útat magának.

Ezekután aha sználatban levő műszavakat következőképen gáncsolja :

A latin, s vele minden román népek **imaginarius** *gyököknek vagy számoknak* (!) *az elméletben hivő német a kölcsönzött* **imaginár**-*en kivül még* **unmögliche Grössen**-*nek is nevezi. Ím mindjárt egy rögtönzött út, de a mely nem az óhajtott vagy czélzott helységbe, hanem posványba viszen mint egy bolygó tüz. Ezen csalóka fény a* **képzetes**-*nek a* **lehetetlen**-*nel való párosítása, minek hiúságát könnyü kimutatni.*

Arról, hogy emberi nyelven kell szólanunk, s a tudományokban müszavakat használnunk, melyeknek értelmöket el is lehet ferdíteni, nem tehetünk; azonban segítve van a dolgon, ha azon fogalmakat, melyeknek jelentésére müszavakkal élünk, szabatosan meghatározzuk, s mindenkor szem előtt tartjuk. Képzetes gyököknek a $\sqrt[2r]{-a}$ formájú kitételeket méltán nevezhetjük azért, mert képzeletünk elébe egy olyan jelképet terjesztenek, a mi második fokra emelve $\sqrt{-a})^{2r} = -a$ valósággal (—a)t állítja elő, noha ezen feltételnek megfelelő mennyiséget elő nem mutathatunk. Hogy valaki képzetes számnak (numerus imaginarius) nevezte volna, nehezen hiszem. Az elméletben hivő német és mások is a lehetetlen mennyiségeket általánosabb értelemben veszik, mint a képzetes gyökereket, mert lehetetlen mennyiségek számtalanféle alakban tünhetnek elő. Vannak függvények, melyek a változónak csak bizonyos határok közé foglalt értékével lehetők, azokon kivül lehetetlenek, például : Arc. Sinx. csak 0 és 1 határokon belől sat.

Most már egyenesen a tudósok és tudomány ellen fordúl.

97. §. *Pedig első tekintetre oly épnek, oly tévedhetlennek látszik az okoskodás! Hogy ne látszanék? midőn annyira minden ellentállás söt vonakodás nélkül fogadta el a mathematikusok eddigi nagy többsége. Miért? Csak azért, mivel akkor midőn elfogadták, eleget tett a szükségnek. A szükség pedig csak abban állott, hogy adott egyenletben az ismeretlen (X) értékét keresve, megtudják, kifejezhető-e ez az érték a számok eddigelé ismeretes, ú. m. igenleges vagy nemleges, egész vagy tört, arányos vagy aránytalan fajaiban (helyesben : bevégzett vagy közelítő számokban)? S ha a keresett érték képzetes alakban jelent meg, ez az iménti kérdésre döntő nemmel felelt, s a szükség ki volt elégítve.*

Ilyeneket már fentebb a 71. §. végén is olvastunk, hogy : *ha későn fogtak a számok felosztásához, ki is pótolták a mulasztást, csak azért, mivel a szalonnát csak meg kell kezdeni, azután majd reá járnak ;* itt pedig ezt : *hogy a képzetesek eszméjét minden ellentállás söt vonakodás nélkül fogadta el a mathematikusok* **eddigi** *nagy többsége, csak azért, mivel akkor, mikor elfogadták, eleget tett a szükségnek.*

De hát képzelheti-e valaki, hogy a szigorúságáról ismeretes mathematikai tudományok rendszere csak ilyen *neki esett felosztások és szükséget ideiglenesen kielégítő elfogadások* következtében állott volna elő? s a mathematikusok eddigi nagy többsége sem magától be nem látta az alaptalanságokat, sem senki nem találkozott, a ki őket felvilágosította volna. De csak az eddigiekről szól, mert ezentúl hihetőleg máskép lesz.

Azt pedig tekintetbe sem veszi, hogy a képzetesek elfogadása vagy nem fogadása, sem a mathematikusok eddigi nagy többségének, sem senkinek nem állott hatalmában, hanem az algebrai és analytikai jegyek s kitételek általánosságának okvetetlenül szükséges következménye.

Ha valamely általános mennyiséget (a) gyökér jegy alá foglalunk $\sqrt{a}$); annak itten is szükségképen akármi lehető értéket tulajdoníthatunk; melyek közöl a tagadó értékeket egyáltalában ki nem rekeszthetjük. Úgy de másfelől a tagadó mennyiségek páros gyökerei lehetetlenek, ennélfogva a tagadó mennyiségeket ilynemű gyökérjegyek alá nem foglalhatnók, s az ilyen kitételeket számvetéseinkből egészen ki kellene hagynunk. De a mathematikusok nagy többsége előtt nem maradhatott észrevétlenül az is, hogy a képzetesek csak olyan analytikai jelképek mint egyebek, következőleg szintazon munkálatokat végezhetjük velök mint amazokkal, mely közben nem csak az, hogy a páros hatványok tagadó jegyei valós hatványokká változnak, hanem sok esetekben kitételeinkből a képzetesek egészen kiesnek.

A szükség sem abban állott, hogy: *adott egyenletben az ismeretlen (x) értékét keresve, megtudják, kifejezhető-e ez az érték a számok eddigelé ismeretes fajaiban sat.?*

A feladatok nem azért tüzetnek ki megfejtésül, hogy megtudhassuk, kifejezhető-e az ismeretlennek értéke a számok eddig ismeretes fajaiban; hanem azért, hogy fejtessenek meg akár így akár amúgy, a számok fajait, melyekben az ismeretlen meghatároztathatik, a megfejtés különben is mindenesetre ki fogja tüntetni. Kivánhatunk olyan megoldást is, melyben előre tudhatjuk, söt ki is mondhatjuk, hogy az ismeretlen értéke képzetes; például: negyedik fokú egyenlet feloldása, melynek egy valós gyökere sincs. Ellenben mindenekelött tudvalevőképen Cardan szabálya a köbök, egyenletek három valós gyökereit képzetesek alakjában állítja elő; pedig ez, már mintegy háromszáz évvel ezelőtt ismeretes volt. Nem e volt tehát eleitől fogva mindeddig a szükség, a mit sz. nagyon elvétve és elvetve állít; hanem az, hogy a képzetesek értelmét állapitsuk meg és világosítsuk fel, a mit annál kevésbbé vonhat kétségbe, mivel a következőkben maga is ezzel foglalatoskodik.

És már most, a tárgyba mélyebb ereszkedés nélkül mondjuk meg csupa köz- emberi észszel, miképen lehessen egy gyakorlatias, használható eszköz és az általános lehetlenség eszméjét ugyanazon egy tárgyra vonatkozva és egymással összeférkeztetni?

Csak úgy, hogy az eszköz és a czél nem mindegy, s a lehetetlenséget a gyakorlatias használható eszköz sem teheti lehetővé, ezeket köz emberi észszel is általláthatjuk.

Ha lehetetlenséget jelent a képzetes, úgy mikép kezeljük?

Úgy, hogy a lehetetlenség jelentése és maga a lehetetlenség ismét nem mindegy. Az előbbit tárgyilagos és számtani törvények szerint kezelhető kitételekben állíthatjuk elő, miknél fogva azoknak kezelésében nincs lehetetlenség, sőt inkább megállapított törvények és szabályok szerint hajtatik végre.

Ha pedig tettlegesen kezeljük s előmutatható eredményeket húzunk belőle, nemde ab esse ad posse valet consequentia?

Valet ám, de csak a helyesen következtetett consequentia. Ha a lehetetlenséget jelentő képzeteseket tettlegesen kezeljük, valet consequentia, hogy azoknak kezelhetőknek kell lenni s ezt senki sem tagadja. Az eredmények pedig kétfélék lehetnek, lehetők és lehetetlenek, s ezen utóbbiakra nézve csak ugyan nem mondhatjuk, hogy mivel lehetetlenek, tehát lehetőknek kell lenni, vagyis *ab esse ad posse valet consequentia.*

S így hát alapos a gyanú, hogy a lehetetlen mennyiség kifejezése talán nem nyugszik szilárd logikai alapon, s a reá vezető okoskodás hihetőkép csak sodomei alma. Nálam e gyanú meggyőződéssé vált, és megkísértem azt másoknál is azzá tenni.

A kísérlettétel ellen nincs kifogásunk, hogy meggyőződése okait előterjeszthesse, de a mondottak szerint alapos azon gyanú, hogy azok aligha fognak másokat is hasonló meggyőződésre bírni

Azonban hogy meggyőződését másoknál is azzá tegye: Valamint fentebb *a tagadó mennyiségek* elméletében a XIX-dik század egy mathematikusa ellen indított háborút és csak kegyelem útján történt, hogy ki nem mondotta a *risum teneatist* (172. lap); *a külzelék-hanyadosok* értelmezésében Lagrange-nak egyenesen szemébe mondotta, hogy logikai alapja hibás, Eulert pedig maga feladására kényszerítette, hogy ő vele egy értelemben legyen; (21. §.) *a törtszámokéban* a tanrendszereket és tankönyvek szerzőit korbácsolja, a kik kivétel nélkül hysteron proteronakat írnak össze s még is büszkeséggel kiáltják a világnak: *Exegi monumentum aere perennius* (71. §.) az *aránytalanokéban Meyer*-nek két *absurdomot egy helyett* hány szemére sat. így itt is azon szolgálatot, hogy valaki tárgya legyen csapkodásainak, **Kerekes** tanárnak kell megtenni, még pedig a *logikai* éles fegyverek ellenében, melyeket hogy milyen roppant erővel használt ellene, kitetszik onnét, mivel egy pár lapon (593; 595.) ötször fordúl elő más meg más bajvívási fogásokban.

98. §. *Minthogy az* **egy**-*nek, így szól K. négyes kistükre lapján, valamint minden hatványa, úgy gyökere is* **egy**, *kétség kivül* $\sqrt{-1}$-*nek is* **egy**-*nek kell lennie. De milyen* **egy**-*nek? Felelet: olyan egynek, mely ha 2-dik hatványra emeltetik, a hatvány* $=-1$ *legyen. Úgy de több lehetséges egy nincsen, mint e kettő* $+1$ *és* -1 *e kettő közöl pedig mindeniknek második hatványa* $+1$; *és* -1 *egyiké sem lehet. A honnan következik, hogy annak az egynek, mely ha második hatalomra emeltetik, a hatványa* -1 *lesz, olyan egynek kell lennie, mely nem lehetséges nem létezhető.*

* alatt jegyzetbe teszi: **Kell lenni** *valaminek a mi* **nem létezhető**!!! *Hogy lehet ilyes valamit leírni hogy bele ne törjék a toll hegye.*

Kerekes, látnivalóképen az ellenmondást igyekezett idézett szavaiban minél világosabban kitüntetni, s a $\sqrt{-1}$ gyökerek nem-létezhetését innét következteti. Miképen lehetett tehát ilyes jegyzetet írni, hogy bele nem tört a toll hegye.

Hiszen így ezt sem mondhatnók : est impossibile, ist unmöglich, mert a lehetetlenről mondjuk hogy van.

Ezek után hozzáfog Kerekes okoskodásai czáfolatához. „Ezen bizonyítmány két részből áll. Az első azt mutatja meg, hogy negativ páros hatványnak általában gyöke és ennek : $-1^2=-1$ különösen másod gyöke nem létezik, mert sem positiv, sem negativ gyök nem ád páros hatványt. Ennek ereje tehát abban feküdnék, hogy minden szám vagy positiv vagy negativ; azaz hogy a positiv és negativ ellentmondó (contradictorius) fogalmak, és így egy harmadiknak létezését kirekesztik.

De hát mondotta-e K. ez utóbbiakat? fentebbiekben legalább semmi nyoma nincs, s így talán csak ráfogtuk.

Nyert-e ez által erőt a bizonyítmány, vagy tán azt is elvesztette a mi volt? eldöntését a t. ak. **logikai** belátására bízza. — Helyesen teszi.

Mi ugyan a lehetőségig igyekszünk bebizonyítani, hogy a **logika** *tűzpróbáját sem egyik sem másik szerkesztése nem állja ki.*

99 §. Nem az első, mert föltételei a principium exclusi tertii-nek, melyre támaszkodnék, nem felelnek meg. A positiv és negatıv fogalmai ellentétesek ugyan (contraria) de nem ellenmondók (contradictoria) ; már pedig a többször idézett elv csak ezekre nézve áll.

Ne higyje, hogy a **logikának** és principium **exclusi tertii**-nek senki más hirét sem hallotta volna ; hanem hogy mindkettőt másképen szokás alkalmazni, nem úgy mint már a fentebbiekben is számos példákat láttunk s a következőkben is látni fogunk, az csakugyan bizonyos. Különben nem is fedezhetett volna fel a mathesisben annyi logikátlanságokat. Szabad legyen tehát kérdeznünk, hol vette azt, hogy a principium exclusi tertii **csak** az ellenmondó fogalmakra alkalmazható, nem pedig általában mindenütt a hol kettőnél több lehető eset nincs. Ha egy vederben csupán kék és piros golyók vannak, ezen fogalmak nem ellenmondók ugyan, de azért senki sem húzhat ki belőle egyebet, hanem vagy kéket vagy pirosat.

Hát a logikával hogy állunk ? ki fog tetszeni a következőkből.

Azért hogy egy számot nem adok valamihez, még nem lesz negativ, s azzal hogy nem vonok ki egy mennyiséget valamiből, *még nem adtam hozzá. Hisz ismeretes neutral terrain a mathematikusok elött az úgynevezett viszonytalan (absolut) számok fogalma, melylyel épen azt mondják, hogy bizonyos mennyiséget nem akarnak sem a positiv, sem a negativ rovatba sorozni.*

Ezeket meg sem érthetjük, ha csak azon fogalomzavarokra, melyeket a positiv és negativ mennyiségekről a legtökélyesebb logikai szigorral dedukált, vissza nem emlékezünk. Azon dedukálások szerint ugyanis az additiv és positiv, úgy a negativ és subtractiv mennyiségek között semmi különbség nem létezik, s azt a 33-dik §-ban világosan is kimondja: *hogy a kivonás jegye nem csak külsöleg az, a mi a negativitásé, hanem lényegesen azon egy vele; és az a különbség, a mit köztök sok, valódi mély belátású mathematikusok kerestek, még árnyalatban sem létezik.* Kinek higyjünk tehát, a mély belátású mathematikusoknak-e, vagy ő neki?

Ezen fogalomzavar következtében mondja tehát, hogy ha valami számot nem adok valamihez, még azért nem lesz (subtractiv helyett) negativ. S azzal hogy nem vonom ki, még nem adtam hozzá, azaz: nem lesz positiv. Ezért mondja, hogy az absolut számokat nem akarják sem a positiv, sem a negativ rovatba sorozni.

De a mély belátású mathematikusok különbséget tesznek ám az additiv, positiv, subtractiv és negativ mennyiségek között, s azt nevezik absolut számnak, a mi sem öszvezendő, sem kivonandó. *On appelle nombre absolu tout nombre consideré indépendimment du signe de l'addition ou de la soustraction.* Bourdon i. m. 87. lap. s egyáltalában nem azt, a mi sem positiv sem negativ.

Sőt az *absolut* szám egyáltalában semmi nem egyéb, mint a mit szokottabban positivnek nevezünk, sem összeadva sem kivonva nem gondolunk, hanem önállólag tekintve, sem összeadás sem kivonás jelével nem jelöljük. Minden, mi van, *positiv*, viszonytalan értelemben, mert a létel már magában is positivítás; negativ pedig semmi nem egyéb, mint a positiv ellentétes viszonya. Más neutral terrain mennyiségek között a 0-n kivűl nem létezik, és pedig e sem azon értelemben, hogy sem állító sem tagadó, hanem épen ellenkezőképen abban, hogy mint a positivnek véghatára positiv; s mint a negativnak kezdete negativ; azaz mind positiv, mind negativ egyenlő joggal lehet.

Vonalakra nézve hasonlóképen van a dolog. Akármi irányban gondoljam a kezdő pont előhaladását, ezen előhaladás positiv, ennek ellentéte pedig negativ. És ha ezen fogalom mellett a principium exclusi tertii nem alkalmazható, méltán kivánhatjuk, hogy mutasson elő olyan vonalat, melynek sem előre haladó (positiv), sem hátra haladó (negativ) iránya ne legyen. A miket e részben az alábbiakban előhoz, azokról magok helyén körülményesebben fogunk szólani.

De ha már bebizonyithatná is, hogy vannak mennyiségek, melyek sem állítók sem tagadók, vajjon mit következtetne ki belőle? Mert hiszen a 102-dik §-ban maga is megvallja, hogy: *ha (a)-t absolut számnak veszem is, $a \times a$ még sem lesz* — a^2. Ugyanez igaz minden egyéb mennyiségekről, ha szintén állító és tagadón kivül lehetségesek volnának is.

A második szerkezetről ezeket mondja:

Egy fogalmat a létezők sorából a principium contradictionisnál fogva kirekeszteni, s aztán a halva született gyermeket, mivel szükségünk lenne reá, életre galvanizálni akarni, megtagadása ugyanazon **logikai** *elvnek, melyre fektettük bizonyítmányinkat. Ezen blasphemia távol legyen tőlünk! De nem fohászkodott bezzeg így K. tanár úr; mert a képzetes mennyiség lehetetlenségét bebizonyítván, születlen képtelen nem lénynek állítván, s végül a fa vaskarika metaphorájával egyénítvén, mégis azzal a fa vaskarikával játszik, köt, abrincsoz, lánczot füz belőle, vagy a mathesis komoly kifejezésével élve: öszvezendőnek, kivonandónak, tényezőnek, rangjelnek használja a lehetetlen mennyiséget. Mi joggal? ne kérdjük, mert kis tükre erre nem ad feleletet. De biz a mi* **logikánk** *sem.*

A ki az analytikai általános nyelvet érti s érteni akarja, ilyen ellenvetéseket nem tehet. Mindenki tudja, hogy ebben a mennyiségek általános jegyeivel, s azoknak szabályszerű változásainak törvényeivel élünk, azokkal kötünk, abrincsozunk, s azokból fűzzük lánczolatainkat. Ellenben ha ezeket s a velök véghez viendő szabályszerű munkálatokat magokkal a mennyiségekkel azonosítjuk, s mint a 102-dik § végén mondatik, mégis elismerjük, hogy: *számokra nézve valóban a le-*

hetetlenség jelképének lehet mondani ezen oly sokat nyaggatott kitételt $\sqrt{-1}$ arra, hogy miképen köthetünk, abrincsozhatunk és lánczolhatunk velök számokban különösen, arra, mondom, azon logika adjon feleletet, mely a jegyet és jegyzett dolgot ugyanazon egynek nézi. Itt pedig a sem segít, ha azt mondjuk, hogy a geometriában az a mi számokban lehetetlen, lehetővé válhatik, mert az elébbi eset ekkor is sértetlenűl felmarad.

Hanem térjünk által azokra, melyekben a képzetesek mértani lehetőségét részletesebben igyekezik kimutatni.

Valami egyenes vonalon $=AC$ a B pontot kezdő pontnak vevén fel, melytől jobbra a negativ, balra a positiv irány legyen, így okoskodik :

Goldoljunk csak a mi vonalunk mellé paralel vonalakat véghetetlen számmal és differentialis? távolságokra. Az idézett helybeli[s] *általánosan*] *bevett eljelölés szerint a B-től balra a positiv, jobbra a negativ irány levén, s a B maga közben a O helye, mely egyik sem, a szomszéd vonalaknak is mindezen helyei s azon módon vannak, s jelesen a B-nek megfelelő pontok sora egy, az AB-hez keresztben álló BC vonalat képez, mely mind neutralis pontokból állván, eleget teszen azon kivánságnak, hogy se positiv se negativ ne legyen, s ha hossza* $= a$, *akkor szolgálhat* $(-\mathbf{a}^2)$ *gyökéül vagyis* $BC=\sqrt{-a^2}=a\sqrt{-1}$, *és így az* **a** *mellett levő* $\sqrt{-1}$ *jel azt jelenti, hogy az, az eredeti és alapúl vett vonalhoz kereszetben, még pedig derék szegletre vagy is függőn álló vonal.*

Mindezeknek megvan az ő elégséges okuk. A párhuzamosságot s a paralel vonalaknak megfelelő $+$ *és* $-$ *phasisait az analytika geometria ismerőinek — azaz : mathematikusnak — nincs miért bizonyítsam vagy magyarázzam, mert hiszen az bevett és ismeretes dolog. Az megint, hogy a vonal differentzial? pontokból álljon, a felsőbb mathesis kikerülhetetlen postulatuma; hogy az* **a** $\sqrt{-1}$ *vonalnak az alapvonal végpontján túl egészen kivül kell esni az alapvonalon, világos abból, hogy bele eső része szükségkép vagy* $+$ *vagy* -1 *lenne, s aztán mint egyenes vonal nem eshetik részint belé, részint kivüle. Csupán csak a függősséget kell kimutatnunk, a mit és még egy mást összekapcsolva teszünk meg.*

104. §. *Ez a más, azon kérdés megfejtésében áll, vajjon az általunk felvett segéd, vagy képviselő vonal és ennek helyze-*

tét jelölő $\sqrt{-1}$ *jegy közt van e valami szükséges és természetes kapcsolat? Azt hiszem van; mert íme* $\sqrt{-a^2}$ *geometriai alkalmazásban egy négyszög valamelyik oldalát jelenti; nem jelentheti pedig sem* $+$ **a** *sem* — **a** *oldalát, mert ezeknek egyike sem adná négyszögnek az* (—**a**^{2})*-őt és csak azok eshetnének az alapvonalba. Tehát egy más oldalát kell vennünk és jelölnünk a négyszögnek, ez pedig az alapvonalon (a kezdő pontját kivéve) egészen kívül esik és szükségkép* **függösen.** *A* $\sqrt{-1}$ *jegy tehát az alapvonaltól függösen álló egyenes vonalt jelenti, és* **csak** *azt jelentheti.*

Elbeszélésre mathesisben semmit sem adunk; mégis oly bizakodva teszi utána: *minélfogva a képzetes mennyiség fogalma geometriára alkalmazva a legtermészetesebb képét lelé, és meg van szünve nála ezen alkalmazásban a lehetetlenségnek még csak sejtelme is;* mint Euklidesz a *Q. E. D.* ét.

Hogy pedig a miket mondott csupán elbeszélésnek tartjuk, s azoknak semmi bizonyító erőt nem tulajdoníthatunk, *mindezeknek megvan az ő elégséges okuk.*

1) Azt, hogy az *AC* vonalon *B* pontból merőlegesen felállított vonal, közönbös, neutral (sem állító sem tagadó) tartozik lenni, onnét akarja bebizonyítani, mert ha differential távolságokra az *AC*-vel paralel vonalakat gondolunk, a nevezett *BC'* vonal csupa neutral differential pontokból fog állani. Pontokból soha sem lesz vonal, hanem az általa úgynevezett differentzial távolságok öszvetéből, s mint hogy az öszvezendőket és azoknak öszvetét ön maga is több helyeken állítóknak elismeri, a *BC'* vonal állító minőségéről nem is kételkedhetik.

2) Azt, hogy a neutralnak állított *BC'* vonal a'—a^2-nek gyökéül szolgálhat, onnét: mivel *eleget tesz azon kivánságnak, hogy sem állító sem tagadó ne legyen.* Innét pedig azt kellene következtetni, hogy tehát a' — a^2-nek gyökéül nem szolgálhat, mivel tagadó tényzetet csak az állító és tagadó mennyiségek szorzása származtathat, a közönbösöké egyáltalában nem, mint ezt a 102-dik §-ban maga is elismerte, de már itt arról egészen megfeledkezett.

3) Ha felfogása szerint az, hogy a *vonal differentzial? pontokból álljon a felsöbb mathesis kikerülhetlen postulatuma*

volna is, a mi egyáltalában nem igaz, akkor egyszersmind a $\pm$ vonalak is ilyen differentzial pontokból állanának, melyeknek mindegyike neutral a maga helyén, következőleg a neutral pontokból nem kell szükségképen neutral vonalnak származni.

4) A pont csak a $\pm$ vonalak irányában s az azokat elválasztó helyen mondathatik közönbösnek; de ha ezen helyezetből kimozdul akármi irányban s bármi parányi távolságra is, vonalat képez; s a vonal nem pont, a vonalról nem lesz igaz, a mi a pontról igaz volt. Tegyük fel tehát a legegyszerűbb esetet, hogy *B*-ből *C*-be merő szegelet alatt halad és BC'—a^2-nek gyökéül szolgálhat, s legyen egyszersmind $BC = \sqrt{b^2}$; $CC' = H$ állani kell:

$$-a^2 + b^2 = H^2\,;\ b^2 = H^2 + a^2\,;\ \text{azaz:}$$

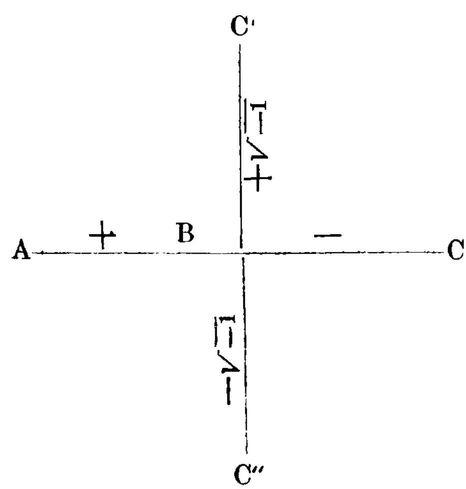
Ha volna olyan vonal, mely a'—a^2-nek gyökül szolgálna, akkor egyszersmind olyan merőszögnek is kellene lenni, melyben az egyik mellettes (cathetus) négyszöge nagyobb volna a feszülő (hypotenusa) négyszögénél.

5) A neutralitas kimutatására felhozott okoskodásai akkor is állanának, ha a *BC'* nem volna merőleges az *AC*-re. Igéri tehát, hogy a függősséget ki fogja mutatni. Ezen kimutatás pedig abban áll: Azt hiszi, hogy van valami szükséges és természetes kapcsolat a felvett képviselő vonal és ennek helyzetét jelölő $\sqrt{-1}$ között; mert: $\sqrt{-a^2}$ geometriai alkalmazásban egy négyszög valamelyik oldalát jelenti; nem jelentheti pedig sem $+a$ sem $-a$ oldalát, mert ezeknek egyike sem adná négyszögnek a ($-a^2$)-őt és csak azok eshetnének az alapvonalba. Tehát egy más oldalát kell vennünk és jelölnünk a négyszögnek, e pedig az alapvonalon (a kezdő pontját kivéve) egészen kivül esik és szükségkép függősen.

A kiben ezen bizonyitás meggyőződést szerez, érje be vele. Hanem kérdhetjük azt is: hova esnek hát geometriai alkalmazásban azon négyszögek és azoknak oldalai, melyekről beszél? Az öszrendesek szerkezetében a négyszögnek négy helye lehet; mindenik négyszögnek négy oldala van, mindenik $\pm$ lehet, s mindenik a négyszög gyökéül egyiránt szolgálhat. Végezetre, akárhova kerülgessünk, mindig oda fogunk érkezni, hogy sem az állító sem a tagadó gyökérnek tagadó négyszöge nem lehet. Neutral vonalak pedig fentebbi megmutatásaink következtében egyátalában nem létezhetnek, és ha léteznének is, azoknak négyszögük sem volna tagadó. Hát ezekre mit felel a *logika* és a *principium exclusi tertii?*

Mindezek mellett mintha dolgát legjobban végezte volna, tovább folytatja értelmezését, ekképen :

Ez meg lévén állítva, a' BC' vonalat aláfelé is megnyújthatjuk (BC''), és a' ± jegyek helyzetbeli értelmével kapcsolatba hozva, egyfelől positiv, másfelől negativ ágnak határozhatjuk. Ennélfogva a négy jegy négy irányt jelöl a következő képlet szerint :



Minélfogva a' B (vég) pont előbbnyomulásával, vagy hátrahúzódtával, a felvett végetlen lapnak — melyre esnek t. i. AC és C'C'' vonalak — minden pontjára eljuthatunk ; azaz : a lap bármely pontja helyezetét algebrai (vagy, ha tetszik, analytikai) kifejezésben meghatározhatjuk.

Valósággal úgy látszik, hogy midőn ilyeneket irt, melyeket sem ön maga, sem senki a világon vagy fel nem foghat és nem érthet, vagy el nem hihet, azt csakugyan nem is komoly szándékból, hanem értekezésének elején nyilvánított vallomása szerint csupán puhatolódzási viszketegből tette.

Ezekből ugyanis a következnék, hogy a metszékek (abscissae) rendeseinek (ordinatae) mindenkor képzetesek által kellene meghatároztatni, a mi az egész analytikai mértanban hallatlan és példátlan, sőt ezen állítás az egész tudománynyal ellenkezésbe jön és azt tökéletesen megsemmisítené.

Egyébiránt említett kételkedésünket is egészen eloszlatja az alábbiakban :

Hogy a képzetesek geometriai alkalmazása az algebrai fogalmak alkalmazásának egyenes és szakadatlan folytatása minden újabb felvétel közbejötte nélkül : legalább ezt kimutatni vala jelen értekezéseim sorának állandó czélja és vég feladata ; s ha meggyőződést nem tudtam kelteni az iránt hallgatóim s olvasóimban, csak kifejtésem tökélytelensége viseli a hibát, mivel a tény maga rendíthetetlenül áll.

Honnét tudja ezt oly bizonyosan ? ha kifejtése tökéletlen, és ha minden tények ellene szólanak, s elméletének igazolására mindeddig egyetlen egy tényt sem tudott felhozni. Mutasson fel tehát csak egyetlen egy görbe vonalat, melynek rendeseit valaha valaki képzetesek által határozta volna meg, vagy pedig ön maga képzetesek által meg tudná határozni. Mert hogy ezekről nincsen tisztában, onnét is megtetszik, mivel ilyenkor olvasói figyelmének félrevonására rendesen mindenféle idegen tárgyakat öszve szokott vegyíteni : *Hogy az ember porból van és porból kell lennie. Az erőmütan és fénytan szintoly fényes mint fontos elméleteit, a csillagászat magasztos feladatait, Cartesius éles és erős fegyverét, galvanoplastikát és telegraphot sat.* 104. 105. §§.

Továbbá nem helyesli, hogy :

A szokott coordinaták rendszerében, mind az abscissáknak, mind az ordinatáknak saját ± jegyeket kell felvenni, valamint az egymással keresztben álló két **O** *vonalat. Ebből a következik, hogy az* x*-re és* y*-onra vonatkozó* +*-ok két külön s egymástól nem függő irányt jelentvén, ezen határozatlansággal a geometriai jelentés szabatossága is elvész.*

Nincs könnyebb a beszédnél, ha szavainknak sem értelmén nem aggódunk, sem állításaink igazolásával, összefüggésével s eredményeivel nem törődünk. Hogyne kellene az y-noknak más ± jegyet felvenni, holott azok egészen más vonalak ; a vonalakat csak irányuk és hosszaságuk által különböztetjük, az irány pedig csak ± lehet, következőleg a más irányú vonalnak is szükségképen más ± jegyet kell felvenni. Ő maga pedig, mint a fentebbi képlet mutatja, szintúgy külön álló ± jegyeket tulajdonít az AC és $C'C''$ vonalaknak, sőt azokat a képzeteseknek is elébe teszi, noha mindeddig szakadatlanúl vitatta, hogy a képzetesek sem állítók, sem tagadók nem lehetnek. Hát ez logika?

A képzetesek használatával ezen felvételek mind nem szükségesek a határozottság legkisebb csorbája nélkül; mint azt a 104. §-nál beiktatott alakzat mutatja.

Azon alakzat csak azt mutatja, hogy benne a képzetesek is állítók és tagadók. Tehát ellenkezőjét mutatja azon állításainak és bizonyítmányainak, melyek szerint a *principium exclusi tertii* értelmében neutral vonalak is léteznek, melyek sem állítók sem tagadók, és a képzeteseknek szükségképen ily nemü vonalnak kell lenni. Idézett tételét pedig nem alakzatban, hanem a görbe vonalak metszékeinek és rendeseinek meghatározására vonatkozó alkalmazásokkal kellene kimutatni és bebizonyitani, a mit pedig még csak kísérlet vagy felvilágosító példaképen sem hozott fel, egyet sem.

106. §. Elégnek tartok ennyit mondani fejtegetéseim minden oldalról lehető igazolására. De szükségesnek is véltem, miután általok, s megelöző egész deductióm által van alapja vetve Gauss híres mondatának, melynek eddigelé csak az ő személyes tekintélye szolgált vala igazi támaszúl; annak t. i. hogy ha a + *mennyiségeket* **directák**-*nak, a* (—)-*okat* **inversák**-*nak, s a képzeteseket transversalisoknak nevezik vala, minden ide vonatkozó nehézség rég elenyészett volna sat. de azon kérdésre, hogy a képzetesek mi jogon viseljék a transversalisok képét, felelni elmúlatta Gauss sat. sat.*

Ezen szavainak értelme sokkal világosabb, mint különben deductiói szoktak lenni. Alapot vetett Gauss híres mondatának, melynek eddig csak Gauss tekintélye szolgálhatott támaszúl, s kipótolta a mit Gauss tenni elmulasztott, s ily formán segítségül akart lenni Gauss-nak, hogy állításainak ne csak az ő személyes tekintélye szolgáljon támaszúl, mint *eddigelé* történt, hanem az övé is. De ha ezt akarta, úgy bizvást egészen töből elől kezdheti munkáját; mert különben alig hihetö, hogy Gauss maga is hajlandó lenne a neki ajánlott támaszt elfogadni. A transversalisoknak értelmök nem az, hogy azok a metszékek tengelyére legyenek transversalisok ugyanazon síklapon (planum), melyen a metszékek feküsznek, mert ezeket rendeseknek (ordinatae) nevezzük, és nem képzetes, hanem valós mennyiségek által kifejezhetőknek kell lenniök. Hanem transversalisok alatt a görbe vonal síklapjára felállított merőleges vonalakat kell értenünk, melyek ezen síklapon létezhető minden egyéb vonalakkal, következőleg a metszékekkel és rendesekkel is, keresztben állanak, és mivel egy pontjok is a kezdő ponton kivül a görbe vonal síklapjára nem esik, e tekintetben a görbe vonalak egyenletében a képzetes mennyiségeket képviselhetnék.

Ezekkel már most értekező véleménye szerint, a képzetesek értelmezése tökéletesen meg volna állapítva; mindazonáltal még egy hiányt lát abban, hogy használatuk és alkalmazásuk eredményei nincsenek kellőképen kifejtve és felvilágositva.

Értekező, hogy semmi se maradjon felvilágositatlanúl, ezen hiányt is igyekezik kipótolni.

107. §. Szemünk előtt tartva a 104 §-beli ábrát, egy pillantásra kitűnik, hogy az x értékei mindnyáján a fekvő vonalban és csak ott; az y-néi ellenben a lapnak azon kivül eső részeiben, és itt a fekvővel keresztben és derék-szegletre helyzett vonalban keresendők. Rögtön látni való, hogy a két vonalnak az egymás átszelésén kivül több közös pontja nem levén, a két vonal egymástól merőben el van különözve, és hogy (mindig az említett egy pont kivételével) a' + x-nek semmi pontját a' $\pm y\sqrt{-1}$-ben s emezét amabban keresni soha sem lehet. A $\pm\sqrt{-1}$ egyfelöl tehát és a' $\pm\sqrt{-1}$ másfelöl, egészen külön álló és egymással soha sem vegyülhető mennyiségeket jelölnek. További következés az, hogy ezen formulának $\pm x \pm y\sqrt{-1}$ algebrai, vagy határozottabban kifejezve, számvetési értelme nincs, mivel öszvege vagy különbsége csak egynemű (homogen) mennyiségeknek lehet, x és $y\sqrt{-1}$ pedig, mint az imént mondottakból világos, külön neműek (heterogenek), azaz egymással sem részben sem egészben jel nem cserélhetők.

Hát ezekre mit mondjunk?

1) Világos, hogy azon mennyiségeket tartja képzete-

seknek, melyeket a görbe vonalak rendeseinek szoktunk nevezni. De ezek nem hogy képzetesek volnának, söt inkább a görbe vonal lehetetlenné válik, ha rendesei képzetesekbe mennek által.

2) A $\pm x$ és $\pm y\sqrt{-1}$ vonalak különneműségét onnét akarja bebizonyítani, hogy *e két vonalnak az átszelésen kivül több közös pontja nem levén, a $\pm x$-nek semmi pontját a $\pm y\sqrt{-1}$-ben s emezét amabban keresni soha sem lehet.* De hiszen így semmi elkülönzött vagy más fekvésü vonalak nem lehetnének egynemük, mert az csakugyan bizonyos, hogy egyiknek egy pontját sem lehet keresni a másikban. Az *ABC* $\triangle$ *AB* oldalának egy pontját sem lehet keresni a *BC*-ben vagy *AC*-ben, tehát ezen oldalak nem volnának egynemü vonalak, nem lehetne őket összeadni, vagy egyiket a másikból kivonni sat.

3) Ezen formulának $\pm x \pm y\sqrt{-1}$ *azért nincs algebrai értelme, mivel öszvege vagy különbsége csak egynemü menynyiségeknek lehet, x és $y\sqrt{-1}$ pedig különneműek.* Miért kapcsolja tehát őket össze $\pm$ jegyekkel? holott ezek tagadhatatlanúl öszveadás és kivonás jegyei. Miért kell velök mindennemü analytikai munkálatokat kirekesztőleg ezen értelemben véghez vinnünk, semmi másban nem? S ha nincs értelmök, miképen vezethetnek kétségbevonhatlan eredményekre?

108 §. *Kapcsolt szám csak kapcsolt számmal lehet egyenlő*

$$x+y\sqrt{-1}=z+w\sqrt{-1}$$

mely egyenlet a következő kettőt foglalja magába:

$$x=z \text{ és : } y=w$$

Könnyü már ebből látni, miben áll az emlegetett nagy előny. Valahányszor t. i. analytikai vizsgálataink complex számok egyenletét nyeretik eredményül, ezen egy egyenlet mindig kettőt ér, mivel a legtermészetesebb úton kettőt lehet belőle alkotni. Tovább nincs dolgom vele, csak azt jegyzem meg, hogy az iménti elv, melyből ez a nyeremény egyenesen foly, minden lehozatal, vagy megalapítás nélkül, csak mint valami **deus ex machina** *van az analytikus munkákban kiállítva. Hogy ne láttassam rágalmazni, ime a képzetesek tüzetes értekezője Kerekes mit ír Négyes Kistükrében, a 21 lapon : A képzetes mennyiségekkeli számvetés tudománya nem puszta ábrándozás, hanem ennek gyakorlati haszna is van; mivel általa sokszor a legszebb* *mathesisi igazságokhoz juthatunk, s e nélkül a számvetés nagyon csonka és hiányos volna. Ennyi az egész megalapítás. Alig mond ennél többet a nagy Cauchy is.*

Szomorú dolog volna, ha a mathematikai tudományokban még ma is annyi hiányok, értetlenségek, következetlenségek, s logikátlanságok találtatnának, melyeket értekezése folytában nemcsak előszámlált, hanem azoknak kiigazítására is, ön véleménye szerint czélszerű javaslatokat terjesztett elő. Mivel a többieket már magok helyén láttuk, lássuk ezeket is.

Hiánynak tartja, hogy a képzetesek gyakorlati hasznai nincsenek különösen kifejtve és részletezve, hanem csak mint *deus ex machina vannak az analytikus munkákban kiállítva.* S hogy ne láttassék rágalmazni, Kerekes idézett szavait hozza fel, kinél alig mond többet a nagy Cauchy is.

De hát mit is mondanának többet? Hiszen a gyakorlati alkalmazások előfordúlnak a magok helyökön, az analytikai mértanban, a három szögmérésben, felsőbb egyenletekben sat. ezeket tehát különösebben tárgyalni szintolyan felesleges volna, mintha például valaki a sokszorozás, gyökérhuzás vagy más akármi számtani munkálat gyakorlati alkalmazásáról és haszonvételéről akarna kirekesztőleg értekezni.

Ellenben szerző egyáltalában nem arról beszél a miről Kerekes, t. i. a *képzetes mennyiségekkeli számvetés* tudományáról, hanem mint *deus ex machina* a complex számoknak azon tulajdonáról, hogy ha : $x+y\sqrt{-1}=z+w\sqrt{-1}$ ezen egyenletből kell lenni $x=z$; $y=w$ melyet mint *temérdek hasznút és dús eredményüt* akar kifejteni. Holott nem következik belőle más, hanem, hogy a mondott kitételek azonosok levén, azonos egyenletekre vezetnek, a miket egyáltalában nem lehet temérdek hosszúaknak és dús eredményűeknek nevezni.

De ha a volna is, nagyon csalatkozik, ha azt gondolja, hogy a nevezett tulajdonság kirekesztőleg csak a képzetesekre tartozik, mert az minden páros gyökerekre ki terjed. Ugyanis, ha :

$$x\pm\sqrt{y}=z\pm\sqrt{w} \text{ honnét : } x-z=\mp\sqrt{w}\pm\sqrt{y}$$

állani kell egyszersmind :

$$1)\ x-z=+\sqrt{w}-\sqrt{y}$$
$$2)\ x-z=-\sqrt{w}+\sqrt{y}$$

melyekből, öszveadás és kivonás által :

$$2x-2z=0 \text{ tehát : } x=z$$
$$0=2\sqrt{w}-2\sqrt{y} \text{ tehát : } w=y$$

Tovább nincs dolga vele. Cauchy munkája pedig épen nincs kezénél, hogy idézettel bizonyíthasson.

Efféléklkel senkinek sem lehet port hinteni szemébe, a ki mathematikai szigort követel. Dolgának kell lenni mindaddig, mig állításait egész szigorral be nem bizonyítja; így pedig egyáltalában nem mondhatná, hogy az ő *temérdek hasznú és dús eredményű egyenletei :* $x=z$; $y=w$ egyfelől csak mint *deus ex machina* volnának az analytikus munkákban felállítva, másfelől nemcsak az, hogy temérdek hasznúak és dús eredményűek volnának, hanem csak azt is, hogy valami eredményre vezetnének. Mert vajjon mit is következtethetne két, egymástól egészen független egyenletekből, melyekben még csak közös ismeretlenek sincsenek?

Hanem, találtatnak igen is, az analytikus munkákban ilyen kitételek $a+b\sqrt{-1}=fx+\varphi x\sqrt{-1}$ kifejtve :

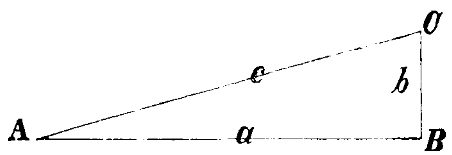
$$fx=A_0+A_1x+A_2x^2\ldots., \text{ sat. }=a$$
$$\varphi x=x_0+\alpha_1x+\acute{o}+\alpha^2x^2\ldots \text{ sat. }=b$$

ezekben az igaz, hogy a feltett egyenlet kettővel ér fel; s talán ezekről volt némi homályos sejtelme. De ez, a fentebbi kimutatások szerint közvetlenül, söt a páros való gyökerekre nézve is általánosan igaz levén, semmi megmutatásra nem szorúl, annálfogva nem mint deus ex machina van felállítva.

Egyébiránt, nem is arról beszél a miről Cauchy és Kerekes. Ezek a képzetesekkel véghezviendő munkálatokról, ő pedig a complex számok egyenletéről. Miért zavarta hát ezt ide? igazán aképen mint *deus ex machina.* Mutatta volna ki inkább (ha már csakugyan többet akart tudni és mondani mint Cauchy és Kerekes) azt, a mit ezek szerinte elmulasztottak, s az idézett helyen ekképen olvassuk : *A képzetes mennyiségekkeli számvetés tudománya nem puszta ábrándozás, hanem ennek gyakorlati haszna is van, mivel általa sokszor a legszebb mathesisi igazságokhoz juthatunk sat.* s erről egy szót sem szól, pedig erről kellett volna s lehetett volna is.

Annak elitélését már most, hogy értekező *a maga meggyőződését azzá tette-e másokban,* tudós olvasóimra bízhatom. Annyi bizonyos, hogy erről önmaga legalább, mivel, mint láttuk, mindeddig oly szigorú logikát követett, melylyel egy mathematikai rendszer sem dicsekedhetik, tökéletesen meg van győződve.

Csak is azt mondja tehát végső befejezésül:
Biztosságát nem, de a dolog világosságát neveli, ha egy tekintetet vetünk vissza (I. Ért. 37 §. b) alatt mondottakra, honnét: 109. §-ban azt következteti, hogy feltéve ezeket: AB=a BC=b és AC=c



$$a+b\sqrt{-1}=c$$

a kapcsolt (complex) számok azon háromszög átfogóját (hypotenusa) jelölik, melynek AB és BC a befogói (cathetus). És valóban ez is a complex számok geometriai, és a mennyiben hosszúságot számmal kifejezhetni, számvetési értelme is.

Bizony hamar megfeledkezett az elébbi §-ban önmaga által is bevallott, söt dús eredményünek állított igazságról, hogy:

Kapcsolt szám csak kapcsolt számmal lehet egyenlő. Itt pedig, alig egy pár lappal alább, kapcsolt számot nem kapcsolt számmal tesz egyenletbe. Ha pedig erre visszaemlékezünk, látnivalóképen a feltett egyenlet csak úgy állhat meg, ha b=*0*. A mi valósággal úgy is van, mert ha CB=b addig fogy, mígnem 0-vá válik, kétségenkivül igaz lesz: a=C.

De vannak még más bajok is.

Mert, ha $a+b\sqrt{-1}=c$

leszen: $-b^2=(c-a)^2$ mivel tehát a baloldal szükségképen tagadó, a jobboldal szükségképen állító, miképen létezhetik ellentétes mennyiségek között egyenlőség?

Továbbá, a cathetusok felcserélésével hasonlag kell lenni:

$$-a^2=(c-b)^2 \text{ honnét :}$$
$$a^2=-c^2+2bc-b^2$$
$$b^2=-c^2+2ac-a^2$$
$$a^2+b^2=c^2=-c^2+2ac \text{ honnét : } c=a$$
$$a^2+b^2=c^2=-c^2+2bc \quad \text{„} \quad c=b$$

következőleg : $c=a=b$ vagyis a merőszög három oldalainak egyenlőknek kell lenni. Hasonlag következik

$$a^2+b^2+c^2=c(a+b)$$

Például azon merőszögben, melyben $a=3$; $b=4$; $c=s$

$$9+16+25=5.7 \text{ azaz } 50=35$$

Ezek pedig a dolognak sem biztosságát, sem világosságát csakugyan nem nevelik, s akármint hangoznak is öszve az (Ért. 38 §. b) pontjával, de a mathesis kétségbevonhatlan alapigazságaival minden bizonynyal merőben ellenkeznek.

Kérdhetjük már most viszont mi is, mely kérdésre a 100-dik §-ban önmaga szolgáltatott alkalmat, ha vajjon elég hosszadalmas bőbeszédű értekezésével *elébbre vitte-e az általa tárgyalt kérdések megfejtését csak egy szúnyog-nyommal is?* vagy inkább azokat, jelesül : a positiv, negativ, additiv, subtractiv, és viszonytalan (absolut) mennyiségek fogalmait, az arányokat, törtszámokat, aránytalanokat s ezeknek megfelelő mértani szerkesztés értelmezését, a differentiális calculus alapelveit, s a képzetesek kérdését olyan homályba borította, melyből kivált kezdőknek, ha útmutatásai után indúlnak, lehetetlen kibontakozni.

Mégis, a mi különösen a képzeteseket illeti, Arenstein pályadíjt nyert értekezéséről ezeket mondja :

Meri állítani, hogy az akademia által koszorúzott felelet compilatio, még pedig oly szerencsétlen compilatio, melynek forrásai egymással homlok-egyenest ellenkező elvnek hódolnak. A képzetesek analytikai alkalmazása, mint kikerekített rendszer, egészen Cauchy tulajdona ..... A geometriai alkalmazás megint merőben Gauss-é ..... E két nézet pedig épen úgy nem vegyül mint víz az olajjal, s merem mondani, hogy a jutalmazott felelet szerzője még az emulsióig sem vitte.

Annyi merészség mellett melyet eddigiekben tanúsított, s a miket már eddig mert állítani, legkevésbbé sem kételkedhetünk rajta, hogy ezeket is merheti.

Egyszersmind megróvja az akademia azon eljárását, minélfogva az általa évenkint szabályosan kitűzetni szokott pályakérdések, még eddig mindenkor relativ becsök szerint díjaztattak.

Ezen elvet pedig ő csak úgy helyeselhetné, ha a pályakér-

dések kitüzésében nem a tudomány vagy müvészet emelése, hanem a versenyzőknek osztandó segély, vagy alamizsna volna a fő czél. 100 §.

Természetes, hogy az akademiának tekintetbe kellene venni, hogy valamiképen olyan elvet ne kövessen, a mit ő nem helyeselhet. Mert ha intézményeiben az övétől eltérő nézetek vezérelik, azok mindenesetre helytelenek, s ezeket megróni *szükségesnek tartá az akademia tekintélye iránti buzgalomból, melyet az ily esetekben* **helyes** *elvek követése csak öregbíthet.* 100 §. végin.

Minthogy pedig idézett szavai, azonkivül hogy egyik méltányos elismerést érdemlő tudós tagtársunkat kíméletlenül sértik, a bírálókra is oly gyanút vethetnek, mintha azok tudatlanságból vagy részrehajlásból szerencsétlen compilatiót ajánlottak volna jutalomra; ez ellen, mint akkori egyik bíráló s különösebben e kérdés kitüzője, észrevételt kivánok tenni.

A kérdés e volt:

„Mi a képzetesek mind analytikai mind geometriai értelme".

Értekező a 100-dik §-ban mondja: hogy *Cauchy a képzetest csupa* **symbolumnak** *nézi*, a 102. §. végin pedig: *és így számokra nézve valóban a lehetetlenség* **jelképének** *lehet mondani ezen oly sokat nyaggatott kifejezést* $\sqrt{-1}$.

Világos tehát, hogy a képzeteseket önmaga is analytikai értelemben **jelkép**-nek tekinti mint Cauchy.

A 106 §. elején pedig ezt:

Miután általok s megelőző egész deductióm által, van alapja vetve Gauss híres mondatának, melynek eddigelé csak az ő személyes tekintélye szolgált vala igazi támaszúl.

Itt ismét világos, hogy mértani értelemben Gauss nézeteit fogadta el, s azokat akarta megállapitani.

Mondja meg tehát bárki is, tudja-e Ért. mit akar? s mi feleletet kivánhatott a feltett kérdésre, hanemha azt, hogy: analytikai értelme az, a miben Cauchy, geometriai pedig az, a miben Gauss vette. *E két nézet pedig* szerinte, *épen úgy nem vegyül, mint víz az olajjal.* De hiszen épen azért volt a kitüzött kérdésben is egymástól szorosan elválasztva és megkülönböztetve.

Azt mondja, hogy a jutalmazott értekezés szerencsétlen compilatio.

Mellőzvén, hogy lehet-e alapos ismeretek nélkül mathematikai értekezést csupán compilálni; mert a tudományos tételek rendszeres és választékos öszveállítása vagy nem compilatio, vagy kivétel nélkül mindenik az levén, egész tudományunk compilatio. A compilatiókra könnyü az öszve nem függő tételekből, dologra nem tartozó, egymásra halmozott idegen anyagokból, következetlen, ellentmondó állításokból, helytelen felfogásokból és visszás értelmezésekből reáismerni. S midőn Ért. önmaga egy, jobbára elemi ismereteket tárgyazó mathematikai értekezésben, melynek eszméjét *de matheseos incomprehensibilibus* irott munkákból vehette, annyiféle tárgyat, példáúl : Electromagnetismust , galvanoplastikát, chemiát, botanicát, logikát, metaphysikát, dialektikát sat. polarisatiót, projectiót, sárkányokat, krakeneket, cserebogarakat, annyi idézetek kiséretében, melyekből egy meglehetős könyvkereskedési lajstromot lehetne késziteni, öszvevegyit : mindez nem compilatio hanem eredetiség, de milyen? s a tudományoknak emulsióig vitele. — Vagy talán inkább compilatio, még pedig olyan, a miről azt sem mondhatjuk Poloniussal, hogy rendszer van benne.