

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

ALAPÍTOTTÁK

KALMÁR LÁSZLÓ, TANDORI KÁROLY, PRÉKOPA ANDRÁS, ARATÓ MÁTYÁS

FŐSZERKESZTŐ

PÁLES ZSOLT

FŐSZERKESZTŐ-HELYETTESEK

BENCZÚR ANDRÁS, GERENCSÉR LÁSZLÓ, SZÁNTAI TAMÁS

FELELŐS SZERKESZTŐ

BOZÓKI SÁNDOR

FELELŐS SZERKESZTŐ-HELYETTES

CSATÓ LÁSZLÓ

TÖRDELŐSZERKESZTŐ

MOCZÁR KÁROLY

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI

Arató Miklós, Baran Sándor, Csáji Balázs Csanád, Csendes Tibor, Csirik János, Fazekas István, Forgó Ferenc, Frank András, Fridli Sándor, Friedl Katalin, Friedler Ferenc, Galántai Aurél, Garay Barna, Gazdag-Tóth Boglárka, Gyimóthy Tibor, Hajdu András, Hartung Ferenc, Hatvani László, [Heppes Aladár], Horváth Zoltán, Illés Tibor, Járai Antal, Jelasity Márk, Katona Gyula, Király Tamás, Kis Tamás, Kovács Gergely, Krisztin Tibor, Lovász László, Maksa Gyula, Maros István, Michaletzky György, Miklós István, Molnár-Sáska Gábor, Pituk Mihály, Rásonyi Miklós, Recski András, Rónyai Lajos, Röst Gergely, Simon Péter, Szabó Péter Gábor, Szeidl László, Szilágyi Brigitta, Tasnádi Attila, Temesi József, Tusnády Gábor, Vizi Zsolt, Vizvári Béla

39. kötet

Szerkesztőség és kiadóhivatal: 1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelenítése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását. A szerkesztőbizottság bizonyos időnként lehetővé kívánja tenni, hogy a legjobb cikkek nemzetközi folyóiratok különszámaként angol nyelven is megjelenhessenek.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Páles Zsolt, főszerkesztő

1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.

A folyóirat e-mail címe: aml@renyi.hu

A folyóirat honlapja: <http://aml.math.bme.hu>

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára évfolyamonként 1200 forint. Megrendelések a szerkesztőség címén lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

AZ EGERVÁRY JENŐ EMLÉKPLAKETT 2021. ÉVI DÍJAZOTTJA:
SZEIDL LÁSZLÓ



Az Egerváry Jenő emlékplakettet a Magyar Operációkutatási Társaság 2021-ben Szeidl Lászlónak (Óbudai Egyetem, professzor emeritus) ítélte oda a nemzetközi szinten is kiemelkedő tudományos, szakmai és oktatói munkásságáért, valamint tudomány- és oktatásszervezési tevékenységéért.

Életútja

Szeidl László 1948-ban született Salgótarjánban. 1971-ben kapott matematikus diplomát az Eötvös Loránd Tudományegyetemen. 1979-ben a matematikai tudomány kandidátusa fokozatot nyerte el a Moszkvai Állami Egyetemen. Ennek alapján az ELTE-n természettudományi doktor címet kapott. 1995-ben a Magyar Tudományos Akadémia a matematikai tudomány doktora címet adományozta számára. 1998-ban habilitált az ELTE-n.

1971-1981 között az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézetében dolgozott, mint tudományos segédmunkatárs majd munkatárs, végül tudományos főmunkatárs. SZTAKI-s éveit aspirantúráján vett részt a Moszkvai Állami Egyetemen (1977-79).

1981-1992 között az ELTE Számítóközpontban dolgozott, kezdetben tudományos főmunkatárs, 1985-től címzetes egyetemi docens. 1984-től az Alkalmazott Rendszerelméleti önálló tudományos csoport vezetője. 1992-1999 között az ELTE Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszéken dolgozott, kezdetben tudományos főmunkatárs, 1994-től egyetemi docens. ELTE-s főállása mellett a Budapesti

Műszaki Egyetemen is dolgozott részfoglalkozásban; a Közlekedésmérnöki Karon (1981-1985), és az Építőmérnöki Karon (1992-1993).

1999-ben egyetemi tanári kinevezést nyert a Pécsi Tudományegyetem Matematika Tanszékén. 2000-2005 között, alapításától kezdve, a PTE Matematikai és Informatikai Intézetének igazgatója.

2005-től az Óbudai Egyetem (korábban Budapesti Műszaki Főiskola) egyetemi tanára. 2006-2010 között a Neumann János Informatikai Kar dékánja.

2011-2013 között a Széchenyi István Egyetem Műszaki Tudományi Karának egyetemi tanára.

2018 óta az Óbudai Egyetem professzor emeritusa.

Hosszabb idejű külföldi szakmai útjai: Sztyeklov Matematikai Intézet, Moszkva (1985-1987), Paderborni Egyetem (1991), Göteborgi Chalmers Egyetem (1997).

Tudomány- és oktatásszervezési tevékenysége

Az oktatási-kutatási tevékenységhez, valamint a doktori iskolák munkájához kapcsolódóan több kari feladatot látott el az ELTE TTK-n a 90-es években.

A Pécsi Tudományegyetemen 2000-ben vezetésével jött létre a Matematikai és Informatikai Intézet. Öt és fél éven keresztül igazgatta az intézetet, és ezalatt sikerült szilárd alapokra helyeznie. Akkreditáltatta és szakfelelősként elindította a programozó matematikus képzést, valamint más szakterületekkel közös informatikai képzéseket, majd 2005-től a programtervező informatikus BSc-t.

A PTE TTK Informatikai Stratégiai Bizottság elnöke (2000-2004), az egyetem szenátusának tagja (2001-2003), a TTK Kari Tanács tagja (2003-2005), a TTK Doktori és Habilitációs Bizottság tagja (2004-2005).

Az Óbudai Egyetemen (korábban Budapesti Műszaki Főiskolán) a Neumann János Informatikai Kar főigazgatója, illetve dékánja volt a 2006-2010 időszakban. Vezetése alatt a kar jelentősen továbbfejlődött mind oktatási, mind kutatási területen: 2007-ben sor került a mérnök informatikus MSc szak akkreditációjára és a képzés 2008-ban elindult.

Aktív szerepet játszott az Alkalmazott Informatikai Doktori Iskola megalapításában és elindításában dékánként, tudományos műhely vezetőjeként és tőrzstagként. Az akkreditációra 2009-ben került sor. 2013-ban Alkalmazott Matematikai programmal egészült ki a doktori iskola, az új program vezetője Szeidl László volt. A matematikai területtel kibővült Alkalmazott Informatikai és Alkalmazott Matematikai DI alelnöke volt 2014-től.

A BME Közlekedésmérnöki Kar Habilitációs Bizottság és Doktori Tanács tagja 2000-től. A BME Egyetemi Habilitációs Bizottság és Doktori Tanács tagja 2014-től.

A Széchenyi István Egyetem Műszaki Tudományi Habilitációs Bizottságának tagja 2011-től. Az egyetem Doktori Tanácsának tagja (2012-2013).

Több OTKA, FKFP és NKFP pályázat vezetője volt.

Oktatói és kutatói tevékenysége

Aktív oktatói pályája négy évtizedes. Előadásokat és speciális kollégiumokat tartott programtervező matematikus, matematikus, matematika tanárszakos, biológus, szakinformaticus, valamint doktorandusz hallgatóknak. Fő tárgyai: valószínűségi számítás és matematikai statisztika, többváltozós statisztikai analízis, idősoranalízis, sztochasztikus rendszerek modellezése, tömegkiszolgálás elmélete, szimulációs módszerek.

Az oktatás mellett több tantárgy tematikáját kidolgozta, illetve továbbfejlesztette; tankönyveket és szakkönyveket írt.

Német nyelven tartott előadásokat és gyakorlatokat matematikai statisztikából a Paderborni Egyetemen az 1991-92 tanévben.

Öt doktorandusz hallgatója szerzett PhD fokozatot, és korábban egy sikeres kandidatúra témavezetője volt.

Az alábbi kutatási területeken ért el fontos eredményeket: tömegkiszolgálás elmélet, nemlineáris rendszerek identifikációja, határeloszlás tételek, sztochasztikus rendszerek modellezése és szimulációs vizsgálata, diverzitási indexek, abundancia analízis, higher-order singular value decomposition (HOSVD) és alkalmazásai.

Alkalmazásorientált kutatásai: agrometeorológiával, meteorológiai idősorokkal összefüggő statisztikai, modellezési és szimulációs kérdések vizsgálata, szimulációs szoftver készítése; hőerőművek input-output folyamatainak sztochasztikus modellezése; véletlen hibával terhelt vasúti pálya modellezési kérdései; biológiai kutatások.

Eddigi eredményeit 5 könyv, 15 könyvfejezet, több mint 100 publikáció és több kutatási jelentés tartalmazza. Ezek az eredmények számos nemzetközi konferencián, egyetemen, kutatóintézetben kerültek ismertetésre.

Munkáit eddig számos magyar és több száz külföldi kutató idézte. Az MTMT szerint a független idéző közlemények száma több, mint 1200.

Tudományos közéleti tevékenysége

A Magyar Operációkutatási Társaság tagja 2000 óta, a 2004-2006 időszakban a Társaság elnöke volt.

Az MTA III. Osztály Operációkutatási Bizottság tagja 2000-től. A 2003-2006 ciklusban a Bizottság alelnöke, a 2006-2011 ciklusban a Bizottság elnöke. Sokat tett az operációkutatás elismertetéséért a III. Osztály körében. Sikerrel folytatta a Rapcsák Tamás által megkezdett munkát. Jelentős szerepe volt az Operációkutatási Bizottság megerősítésében. Az MTA III. Osztály Doktori Bizottságának tagja a 2001-2010 időszakban. Választott MTA Közgyűlési Doktorképviselő a 2004-2010 időszakban. Az MTA Pécsi Akadémiai Bizottság Matematikai és Informatikai Szakbizottság elnöke (2001-2005). Az MTA Biomatematikai-Biometriai Bizottságának tagja volt 1997-től.

Aktívan vett rész a Magyar Felsőoktatási Akkreditációs Bizottság munkájában is. A MAB Matematikai és Számítástudományi Bizottság tagja 2001-2003 között. A MAB tagja 2006-2010 között. Ugyanebben az időszakban az Egyetemi Tanári Kollégium társelnöke és a Matematikai Képzési Ági Bizottság társelnöke. A MAB Stratégiai Bizottság tagja volt 2010-től.

A Magyar Rektori Konferencia Informatikai Tudományos Bizottságának elnöke a 2007-2009 időszakban, társelnöke 2009-2010 között.

Az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok (OTKA) Elektrotechnikai-Elektronikai (ELE) zsűri tagja 2008-2010 között.

A Magyar Ösztöndíj Bizottság elnökhelyettese 2008-2010 között.

A Neumann János Számítógéptudományi Társaság tagja 1989 óta, a Magyar Mérnökakadémia tagja 1995 óta. Az International Biometric Society tagja 1997-2010 között.

Tagja az *Alkalmazott Matematikai Lapok* és az *Időjárás* szerkesztő bizottságának, valamint a *Teaching Mathematics and Computer Science* Advisory Board-jának.

Többször volt tagja nemzetközi konferencia, valamint tudományos emlékülés szervezőbizottságának.

Sok DSc, CSc, PhD, Dr.habil. értekezés opponense volt, illetve részt vett a bíráló bizottságok munkájában, valamint számos kutatással és oktatással összefüggő pályázatot, folyóiratcikket bírált.

A Széchenyi Professzori Ösztöndíjat elnyerte a 2000-2003 évekre.

AZ EGERVÁRY JENŐ EMLÉKPLAKETT 2022. ÉVI DÍJAZOTTJA:
CSENDES TIBOR



Az Egerváry Jenő emléklakettet a Magyar Operációkutatási Társaság 2022-ben Csenedes Tibornak (Szegedi Tudományegyetem, egyetemi tanár) ítélte oda az operációkutatásban, a globális optimalizálásban elért kutatói, oktatói, alkalmazási és vezetői eredményeiért, valamint a tudományos közéleti tevékenységéért.

Életútja

Egyetemi tanulmányait Szegeden, a JATE programtervező matematikus szakán végezte 1975 és 1980 között. Diákköri munkája eredményeként 1979-ben első díjat kapott a XIV. Országos Diákköri Konferencián elméleti biológiai rendszerek matematikai modellezésével és számítógépes szimulációjával. Diplomamunkáját is ebben a témakörben írta „A chemoton modellezése” címmel. 1980-ban államvizsgázott jeles eredménnyel, okleveles programtervező matematikus képesítéssel.

1980 szeptemberétől a JATÉ-n (illetve a szegedi egyetemek átalakulása óta az SZTE-n) dolgozik. Az első években tudományos segédmunkatárs, majd 1985 óta tudományos munkatárs volt a Kalmár Laboratóriumban. 1993 júniusától a Számítógépes Optimalizálás Tanszéken oktat (2009-ig ennek neve Alkalmazott Informatikai Tanszék volt), 1994-től egyetemi docensi beosztásban. 1994-1997 között tanszékcsoport vezetőhelyettes. Az 1995-96-os tanévben a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Számítástechnika Tanszéke megbízott tanszékvezetői felada-

ait látta el félállásban, 2006 áprilisától megbízott tanszékvezetője volt, és 2007-től 2020-ig tanszékvezetője volt a Számítógépes Optimalizálás Tanszéknek.

1981-ben középfokú angol nyelvvizsgát tett, és a XV. OTDK-n nívódíját nyerte dolgozatával. 1981 óta tanít az egyetemen: előadást tart numerikus matematikából, operációkutatásból és számítógépes statisztikából, gyakorlatot vezetett programozásból, számítógépek alkalmazásaiból, operációkutatásból és numerikus analízisből. Speciálkollégiumot tart globális optimalizálásból és intervallummatematikából. 1984-ben „summa cum laude” minősítéssel egyetemi doktori címet kapott. 1985-ben elnyerte a számítástudománnyal és az alkalmazott számítástechnikával foglalkozó fiatal kutatók számára alapított Kalmár László Díjat. 1986-ban alapfokú orosz, 1993-ban felsőfokú német nyelvvizsgát tett.

1987-88-ban 10 hónapot töltött DAAD ösztöndíjjal a Düsseldorf-i Egyetemen. 1989-ben elnyerte a Bolyai Társulat Farkas Gyula Emlékdíját. 1993-ban „A paraméterbecslési feladat néhány számítógépes eljárása” című értekezés alapján a Tudományos Minősítő Bizottság a matematikai tudomány kandidátusává nyilvánította. 1993-ban 5 hónapot kutatott és oktatott a Bázeli Egyetemen a Svájci Ösztöndíjbizottság támogatásával, 1994-ben 3 hónapot Karlsruhe-ban COST ösztöndíjjal, egy évvel később pedig 6 hónapot Wuppertalban KDAW ösztöndíjjal. 1998-ban Széchenyi Professzori ösztöndíjat, 2002-ben Széchenyi István ösztöndíjat nyert, mindkét esetben első pályázatával.

Számos diákköri munkát irányított, tanítványai közül többen értek el országos első helyezést. 2002-ben ezért elnyerte az Országos Tudományos Diákköri Tanács Emlékplakettjét, 2009-ben a Mestertanár Aranyérmét. 2005-ben a hallgatók Arany Kréta díjat szavaztak meg neki, 2007-ben pedig elnyerte a Vezető Informatikusok Szövetsége által odaítélt Az év informatikai oktatója díjat. 2008 szeptemberében egyetemi tanári kinevezést kapott. 2008-12 között az SZTE Természettudományi és Informatikai Kara általános és tudományos dékánhelyettese volt. 2012-2015 között az SZTE Informatika Doktori Iskola vezetője.

2013-ban elnyerte a Szentágothai János tapasztalt kutatói ösztöndíjat, 2016-ban a R.E. Moore díjat az intervallum-analízis alkalmazásában elért eredményekért. 2017-ben a Neumann János Számítógéptudományi Társaság Kalmár-díját kapta meg, majd 2021-ben a Szegedi Tudományegyetem Innovációs díját. Idén, 2022-ben a Magyar Érdemrend lovagkeresztjét nyerte el.

Kilenc és fél doktorandusznak volt témavezetője - egynek megosztva -, és jelenleg egy PhD hallgató belső témavezetője. Nyolc doktori védésben volt bíráló vagy bírálóbizottsági tag. Kilenc tanítványa szerezte meg a PhD fokozatot: Antal Elvira, Balogh János, Bánhelyi Balázs, Csallner András Erik, Markót Mihály Csaba, Pál László, Szabó Péter Gábor, Tóth Boglárka, és Vinkó Tamás, egy kivételével mindannyian summa cum laude minősítéssel. Tanítványaival több alkalommal nyert OTKA pályázatot a közös kutatás támogatására.

2004-ben habilitált a Szegedi Tudományegyetem Informatikai Intézetében. A tantermi- és a tudományos előadásának címe „Korlátozás és szétválasztás típusú optimalizálási módszerek”, illetve „A megbízható optimalizálás és alkalmazásai” volt. 2007 májusában sikeresen megvédte Reliable optimization - methods and applications című értekezését, és megkapta az MTA Doktora címet.

1990 óta az MTA Operációkutatási Bizottsága, 1991-óta a Magyar Operációkutatási Társaság tagja. 1991-96, 1999-2002 és 2004-2006 között volt az utóbbi társaság vezetőségi tagja, 2000 és 2002 között elnökhelyettese, 2008-2011 között elnöke. 2003-tól 2008-ig az MTA Operációkutatási Bizottságának titkára volt, 2011-2015 között alelnöke, 2015-től 2020-ig pedig elnöke. 2007-ben megválasztották az MTA közgyűlési képviselőjének. 70 tudományos folyóiratnak írt bírálatokat, több mint 50 nemzetközi konferenciának volt tudományos- vagy programbizottsági tagja, és tíz plenáris előadásra kérték fel. Az Acta Cybernetica, az Acta Universitatis Sapientiae Informatica, az Alkalmazott Matematikai Lapok, a Central European J. of Operations Research, a Journal of Global Optimization, a Nonlinear Theory and its Applications (IEICE), az Optimization Letters, az SN Operations Research Forum és a szegedi Polygon szerkesztője. A Mathematical Programming A szerkesztője volt 2011-2017 között.

230 publikációnak, ezen belül 2 könyv és több mint 80 megjelent, teljes terjedelmű idegennyelvű közleménynek szerzője vagy társszerzője (a hatástényezők összege 32 felett), és az előbbiekre több, mint 2200 hivatkozást kapott önhivatkozások nélkül. A Hirsch indexe 23.

Végezetül, a tudományos eredményeken felül, egy remek (globális) optimalizációs csoportot alakított ki Szegeden, és gondoskodott arról, hogy a tagok, amennyiben szeretnének, az akadémiai életben maradhassanak. Sok tudományos unokája van, a [13,17] intervallumon belül.

A FARKAS GYULA EMLÉKDÍJ 2021. ÉVI DÍJAZOTTJA:
BALÁZS ISTVÁN



Életútja

Balázs István 1988-ban született Kiskunhalason. A Szegedi Tudományegyetemen (SZTE) szerzett alkalmazott matematikus mesterszakos diplomát 2012-ben. Ezt követően három évig a Szegedi Tudományegyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola ösztöndíjasa volt. 2015-től 2020-ig tudományos segédmunkatárs előbb a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetében, majd az ELKH-SZTE (korábban MTA-SZTE) Analízis és Sztochasztika Kutatócsoportban. 2020-2022 között posztdoktor a Klagenfurti Egyetem Matematikai Intézetében.

Kutatási területe a funkcionál-differenciálegyenletek elmélete és alkalmazása. Témavezetője – mind mesterszakos diplomadolgozatának, mind pedig 2020-ban megvédett PhD értekezésének – Krisztin Tibor volt.

Balázs István a viszonylag kevés, de elméletileg rendkívül igényes cikket író kutatók közé tartozik. Ugyanakkor kutatásait fontos alkalmazások motiválják. Dolgozatai a témakör legrangosabb folyóirataiban jelennek meg, úgymint a *Journal of Differential Equations* és a *SIAM Journal of Mathematical Analysis*.

Az utóbbi dolgozatot egy sorbanállási probléma motiválja, amelyben a kiszolgálás késleltetése a sorhossztól függ. Ilyen problémák természetes módon vetődnek fel számítógép-hálózatokban, közlekedési modellekben, sőt biológiai rendszerekben is. A probléma matematikai modellje egy állapotfüggő késleltetést tartalmazó differenciálegyenlet, ennek az újkeletű problémának a virtuóz vizsgálata a szerző egyik legmélyebb eredménye.

Legújabb, a *Journal of Differential Equations* folyóiratban megjelent publikációjában egy sejtbiológiai alkalmazás által motivált, állapotfüggő késleltetést tartalmazó differenciálegyenlet-rendszert vizsgál, melyben a késleltetést egy küszöbfeltétel határozza meg.

Röst Gergellyel írt két dolgozatában megmutatta, hogy konstans késleltetést tartalmazó differenciálegyenletekre a Hopf-bifurkációval kapcsolatos ismert, de a gyakorlatban nehezen kezelhető eredmények speciális egyenletosztályok esetén kiválthatók egy egyszerűen ellenőrizhető kritériummal annak eldöntésére, hogy a bifurkáció szub- vagy szuperkritikus-e. Az eredmények alkalmazhatók a nevezetes Wright-egyenletre [3] és a Nicholson-egyenletre is.

A konstans késleltetést tartalmazó egyenletek elméletének egy további alkalmazása egy deviza-portfólió vizsgálata, a dinamika globális stabilitásának bizonyítása, ld. [4].

Érdeklődésének és eszköztárának sokféleségét mutatja az [5] dolgozat, amelyben intervallum-analízisen alapuló megfontolással bizonyítják nemlineáris parciális differenciálegyenletek speciális megoldásainak a létezését. A cikk fő érdeme egy numerikus eljárásnak valódi bizonyítássá történő átalakítása

Balázs István több szegedi konferencia szervezésében vett részt. 2014 óta oktat dinamikus rendszerek, sztochasztika és kalkulus tárgyakat, és részt vett egy dinamikus rendszereket tárgyaló egyetemi jegyzet átdolgozásában is.

A díjazott öt legfontosabb publikációja

- [1] BALÁZS, I., GETTO, P. ÉS RÖST, G.: *A continuous semiflow on a space of Lipschitz functions for a differential equation with state-dependent delay from cell biology*, Journal of Differential Equations, Vol. **304**, pp. 73–101 (2021). DOI: 10.1016/j.jde.2021.09.019
- [2] BALÁZS, I. ÉS KRISZTIN, T.: *A differential equation with a state-dependent queueing delay*, SIAM Journal of Mathematical Analysis, Vol. **52** No. **4**, pp. 3697–3737 (2020). DOI: 10.1137/19M1257585
- [3] BALÁZS, I. ÉS RÖST, G.: *Hopf bifurcation for Wright-type delay differential equations: the simplest formula, period estimates, and the absence of folds*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. **84**, p. 10, 105188 (2020). DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105188
- [4] BALÁZS, I. ÉS KRISZTIN, T.: *Global stability for price models with delay*, Journal of Dynamics and Differential Equations, Vol. **31** No. **3**, pp. 1327–1339. (2019). DOI: 10.1007/s10884-017-9583-5
- [5] BALÁZS, I., VAN DEN BERG, J.B., COURTOIS, J., DUDÁS, J., LESSARD, J.-P., VÖRÖS-KISS, A., WILLIAMS, J.F. ÉS YIN, X.Y.: *Computer-assisted proofs for radially symmetric solutions of PDEs*, Journal of Computational Dynamics, Vol. **5** No. **1-2**, pp. 61–80 (2018). DOI: 10.3934/jcd.2018003

A FARKAS GYULA EMLÉKDÍJ 2021. ÉVI DÍJAZOTTJA:
BOLDOG PÉTER



Életútja

Boldog Péter 1987-ben született Budapesten. Tanulmányait a Szegedi Tudományegyetemen folytatta, először biológia BSc, majd fizika BSc és MSc diplomát szerzett. Bekapcsolódott több biofizikai kutatásba is, ami a rangos *Physica Status Solidi (B)* folyóiratban közölt elsőszerzős publikációhoz vezetett. Később érdeklődése a matematika felé fordult, és Röst Gergely témavezetésével (belső konzulens Fehér László professzor) írta a fizikus diplomamunkáját késleltetési Turing-rendszerek mintaképződéséből. TDK dolgozatot is készített Röst Gergellyel, ami egy különös járványtani jelenségre ad magyarázatot egy dinamikus matematikai modell segítségével: hogyan lehetséges, hogy a diftéria elleni toxoid vakcina nyáj-immunitást biztosít, mikor az nem a megfertőződés, hanem csak a megbetegedés ellen véd. A dolgozat az OTDK-n 2. díjat nyert.

PhD tanulmányait is Röst Gergely mellett kezdte el, és egy sejtbiológiai problémán kezdett dolgozni, az úgynevezett „go or growth” típusú rendszerek korrekt matematikai leírásán, Ruth Baker oxfordi professzorral együttműködésben (akinél tanulmányúton is volt). Ez a probléma több ráktípus, legfőképpen a glióma esetén fontos: bizonyos rákos sejtek két állapot, az invazív és a proliferáló fenotípus között váltogatnak. Az utóbbi állapotban eltöltött idő a sejtciklus hosszától függ, emiatt a modellek nem-Markoviak lesznek, a mean field egyenletek pedig időkésleltetést tartalmaznak. Az analitikus közelítő egyenletek mellett egy ágens alapú modellrendszert is kidolgozott, amihez a Gillespie algoritmust jelentősen tovább

kellett fejleszteni. Nagyon sok eredményt ért el ezen a területen, amelyeket több rangos nemzetközi konferencián is bemutatott.

Közbeszölt azonban a COVID-19 pandémia, tudására és munkájára nagy szükség volt a járvány elleni védekezéshez az ITM Járvány matematikai és epidemiológiai elemző munkacsoportjában. COVID-19 elemző munkájának eredményei között van egy publikáció a Journal of Clinical Medicine folyóiratban a koronavírus globális terjedési kockázatáról, aminek első szerzője, és ami 230 hivatkozást kapott másfél éven belül. Emellett társszerző a magyar járványhelyzetet legalaposabban modellező tanulmányban is, ami a Viruses folyóiratban jelent meg. Két további COVID-19-hez kapcsolódó cikke lett benyújtva. Vizi Zsolttal és Bogya Norberttel közösen fejlesztette ki a Flatten nevű előrejelző és készletező rendszert, amellyel elnyerték az SZTE Innovációs Díját.

Boldog Péter egy rendkívül széles látókörű kutató, aki a biológiában, fizikában, matematikában, de még a programozásban és szoftver-fejlesztésben is jártas, egy igazi reneszánsz ember, a szokásos kategóriákba nem besorolható. Nagyon aktívan és nagy lelkesedéssel vesz részt a tudományos ismeretterjesztésben és a matematika népszerűsítésében, rendszeres előadója az ilyen jellegű rendezvényeknek (Kutatók Éjszakája, egyetemi nyílt napok, stb.), látványos vizualizációkkal mutat be jelenségeket.

A díjazott öt legfontosabb publikációja

- [1] BOLDOG, P., HAJDU, K., MAGYAR, M., HIDEG, É., HERNÁDI, K., HORVÁTH, E., MAGREZ, A., NAGY, K., VÁRÓ, GY., FORRÓ, L. ÉS NAGY, L.: *Carbon nanotubes quench singlet oxygen generated by photosynthetic reaction centers*, Phys. Status Solidi B, Vol. **250** No. **12**, pp. 2539–2543 (2013). DOI: 10.1002/pssb.201300074
- [2] BAKER, R.E., BOLDOG, P. ÉS RÖST, G.: Convergence of Solutions in a Mean-Field Model of Go-or-Grow Type with Reservation of Sites for Proliferation and Cell Cycle Delay. In: Faragó, I., Izsák, F., Simon, P. (eds) Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2018. Mathematics in Industry, Vol. **30**. Springer, Cham. (2019). DOI: 10.1007/978-3-030-27550-1_48
- [3] BOLDOG, P., TEKELI, T., VIZI, ZS., DÉNES, A., BARTHA, F.A. ÉS RÖST, G.: *Risk Assessment of Novel Coronavirus COVID-19 Outbreaks Outside China*, Journal of Clinical Medicine, Vol. **9** No. **2**, p. 571 (2020). DOI: 10.3390/jcm9020571
- [4] RÖST, G., BARTHA, F.A., BOGYA, N., BOLDOG, P., DÉNES, A., FERENCI, T., HORVÁTH, K.J., JUHÁSZ, A., NAGY, CS., TEKELI, T., VIZI, ZS. ÉS OROSZI, B.: *Early Phase of the COVID-19 Outbreak in Hungary and Post-Lockdown Scenarios*, Viruses, Vol. **12** No. **7**, p. 708 (2020). DOI: 10.3390/v12070708
- [5] BOLDOG, P., BOGYA, N. ÉS VIZI, ZS.: *P propensity matrix method for age depend-ent stochastic infectious disease models*, BIOMAT: Trends in Biomathematics: Stability and Oscillations in Environmental, Social, and Biological Models 2021, pp. 311–325 (2021). DOI: 10.1007/978-3-031-12515-7_17

A FARKAS GYULA EMLÉKDÍJ 2021. ÉVI DÍJAZOTTJA:
LOVAS ATTILA



Életútja

Lovas Attila 2007-ben kezdte tanulmányait a BME vegyészmérnök szakán, ahol kiváló eredménnyel végezte el a BSc képzést (2011). Vegyészmérnöki tanulmányaival párhuzamosan 2009-től a BME matematika szakán tanult, ahol kitűnő eredménnyel végezte el a BSc (2012) és az MSc (2014) képzést. Ez követően PhD képzésen vett részt a BME Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolájában Andai Attila témavezetésével, ahol 2017-ben védte meg *Az információgeometria alkalmazása kvantummechanikai rendszerekre* című doktori értekezését. A kvantum információelmélet területen elért elméleti eredményeiért 2018-ban Grünwald Géza emlékéremben részesült. A Farkas Gyula emlékdíjjal pedig az alkalmazott matematikai eredményeit ismerték el.

Lovas Attila jelenleg a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben dolgozik teljes állásban a Rásonyi Miklós által vezetett Pénzügyi matematika kutatócsoportban, részmunkaidőben pedig a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen oktat analízist és valószínűségi számításokat.

Jelentős eredményeket ért el az alkalmazott valószínűségi számítás, gépi tanulás, és matematikai modellalkotás területeken, valamint orvosi és epidemiológiai alkalmazásokban.

Rásonyi Miklóssal közös cikkében a stacionárius ergodikus közegbe helyezett Markov-láncok egy igen tág családjára bizonyította a folyamat kezdeti feltételtől nem függő stacionárius eloszláshoz való konvergenciáját, és megmutatta, hogy a folyamat korlátos funkcionáljaira teljesül a nagy számok törvénye L_p értelemben.

A HU-MATHS-IN szervezet (Hungarian Service Network for Mathematics in Industry and Innovations) fő célkitűzése, hogy összekapcsolja az akadémiai ipari matematikai kutatói kapacitásokat az ipar területén felmerülő kutatás-fejlesztési és innovációs igényekkel. Lovas Attila két nagy sikeres, HU-MATHS-IN által mednedselt ipari célú matematikai kutatási projekt megvalósításában vett részt. A BOSCH együttműködő projekt keretében három magyarországi egyetem kutatócsoportjai közösen olyan számítógépes grafikai alkalmazást fejlesztettek, melynek segítségével paraméterezhető, valóság-hű kód szimulálható kétdimenziós statikus képeken. Lovas Attila a BME csoportját vezette, és a fizikai kódmodell kidolgozásáért felelt. A Magyar Közút Nonprofit Zrt. és a Széchenyi Egyetem közötti, Stuttgarteri Egyetem által koordinált HiDALGO (HPC and Big Data Technologies for Global Systems) projekthez kapcsolódó egyik ipari feladat volt a járműforgalom becslése városi úthálózatokon ritkásan telepített forgalomfigyelő szenzorok adatai alapján. A fő kihívást a szenzorokkal el nem látott útszakaszokon lévő járműforgalom szimulációja jelentette. Lovas Attila részt vett az új típusú makroszkopikus forgalomszimulációs modell kidolgozásában és implementálásában. 2011-ben Szalóki Imre (BME NTI) témavezetése mellett közreműködött egy új, háromdimenziós röntgenfluoreszcens spektrometriai képkalkoló algoritmus megalkotásában.

A díjazott öt legfontosabb publikációja

- [1] LOVAS, A. ÉS RÁSONYI, M.: *Ergodic theorems for queuing systems with dependent inter-arrival times*, Operations Research Letters, Vol. **49** No. **5**, pp. 682–687 (2021). DOI: 10.1016/j.orl.2021.07.006
- [2] LOVAS, A. ÉS RÁSONYI, M.: *Markov chains in random environment with applications in queuing theory and machine learning*, Stochastic Processes and their Applications, Vol. **137**, pp. 294–326 (2021). DOI: 10.1016/j.spa.2021.04.002
- [3] LOVAS, A., SZILÁGYI, B., BOSNYÁK, E., ÁCS, P., OLÁH, A., KOMKA, ZS., TÓTH, M., MERKELY, B., NÉMETH, E., GILÁNYI, B., KREPUSKA, M., SÓTI, CS. ÉS SÓTONYI, P.: *Reaction kinetics modeling of ehsp70 induced by norepinephrine in response to exercise stress*, International Journal of Sports Medicine, Vol. **42** No. **06**, pp. 506–512 (2021). DOI: 10.1055/a-1224-3792
- [4] SZALÓKI, I., GERÉNYI, A., RADÓCZ, G., LOVAS, A., DE SAMBER, B. ÉS VINCZE, L.: *FPM model calculation for micro X-ray fluorescence confocal imaging using synchrotron radiation*, Journal of Analytical Atomic Spectrometry, Vol. **32** No. **2**, pp. 334–344 (2017). DOI: 10.1039/C6JA00161K
- [5] SZILÁGYI, B., BERCZELI, M., LOVAS, A., OLÁH, Z., TÖRŐ, K. ÉS SÓTONYI, P.: *The effects of changing meteorological parameters on fatal aortic catastrophes*, BMC Cardiovascular Disorders, Vol. **20** No. **1**, pp. 1–8 (2020). DOI: 10.1186/s12872-020-01575-1

A FARKAS GYULA EMLÉKDÍJ 2021. ÉVI DÍJAZOTTJA:
VARGA BÁLINT



Életútja

Varga Bálint 1988-ban született Pápán. Az ELTE matematikus szakán kapta meg BSc diplomáját 2012-ben. Az ELTE Informatikai Kar által koordinált European Institute of Technology (EIT) ICT Labs Master School „Security and Privacy” programjában kapott MSc diplomát 2014-ben, párhuzamosan az ELTE IK-n és a Trentói Egyetemen. 2015-2018 között Grolmusz Vince témavezetése mellett doktori ösztöndíjasként, 2018-tól tudományos segédmunkatársként az ELTE PIT Bioinformatikai Kutatócsoport tagja.

Varga Bálint olyan új, ígéretes bioinformatikai területeken dolgozik, amelynek művelése igényli a nagy adathalmazok, a gyors és hatékony algoritmusok, a fejlett adatszerkezetek, a kombinatorika, a gráfelmélet, valamint a biológia ismeretét is.

Varga Bálint dolgozta ki az amerikai Human Connectome Project (HCP) MRI felvételeiből való agygráf számításokat, azaz számos szoftver (pl. FreeSurfer, Connectome Mapper Toolkit) segítségével az emberi agy területei mint gráfcsúcsok közti élek azonosítását, ahol az élek megfelelnek olyan axon-kötegeknek, amelyek a csúcsoknak megfelelő agyi területek között futnak. A feladat végrehajtása során számos adat-kompatibilitási problémát és hibajavító eljárást kellett megoldani, illetve kidolgozni. Kezdetben (2014-2018) 3-4 hónapig tartott több száz agygráf kiszámolása, itt automatikus feladatütemező és hibajavító eljárást dolgozott ki. Ma a korszerű, sokkal nagyobb klaszteren ugyanez a feladat (immár sokkal hatékonyabb hibajavítással) már egy hét alatt megoldható.

Munkájának kiválóságát az is jellemzi, hogy bár a HCP adathalmaz nyilvánosan elérhető, igen kevés kutatócsoport képes ezekből a diffúziós MRI adatokból agygráfokat építeni. Vezető szerepet játszott a Budapest Reference Connectome Szerver létrehozásában, amely több száz agygráf alapján, egy tetszőlegesen választható k paraméterrel, azokat a gráféleket adja meg és rajzolja ki, amelyek a feldolgozott agygráfok közül legalább k -ban jelen vannak. Vezető szerepe volt a <http://braingraph.org> szerver létrehozásában, amely a tudományos közösség számára könnyen elérhetővé teszi az általa kiszámított agygráfokat.

Munkájára, a Budapest Reference Connectome Szerverre alapozva fedezte fel kutatócsoportjának volt tagja, Kerepesi Csaba a Consensus Connectome Dynamics nevű jelenséget, amely robusztus módon leírja az emberi agy kapcsolatainak egyedfejlődését, illetve – elsőként az irodalomban – lehetőséget ad az MRI-ből számított agygráf-élek irányítására.

Varga Bálint hozta létre az eddigi legmegbízhatóbb, 1064 alany agygráfiájából álló adathalmazt, amely egy kifinomult átlagolási eljárás eredménye. Erre épül a Newton-blurring felfedezése és alkalmazása nem-képi adatok augmentálására, valamint az SVM-alapú adat-analízis.

Alapvető szerepet játszott a PDB_Amyloid automatikusan frissülő amiloid-lista létrehozásában is, amelyben a Protein Data Bank több mint 150 000 struktúrája közül, pusztán geometriai feltételeket használva, azonosítja az amiloidokat. (Az amiloidok rosszul feltekeredett, oldhatatlanná vált fehérjék, amelyek fontos szerepet játszanak az öregséggel kapcsolatos neurodegeneratív betegségek kialakulásában (pl. Alzheimer kór, Parkinson kór)).

Mesterszakos tanulmányai alatt a Pázmány Péter Egyetemen tartott gyakorlatokat. Az ELTE-n először Véges matematika gyakorlatokat, majd Számításmélet gyakorlatot, legújabbban, immár rendszeresen, Bioinformatika gyakorlatot tart, és legújabbban az Intézet mesterséges intelligencia kurzusain tanít.

A díjazott öt legfontosabb publikációja

- [1] VARGA, B. ÉS GROLMUSZ, V.: The braingraph.org Database with more than 1000 Robust Human Structural Connectomes in Five Resolutions, *Cognitive Neurodynamics*, Vol. **15** No. **5**, pp. 915–919 (2021). DOI: 10.1007/s11571-021-09670-5
- [2] SZALKAI, B., VARGA, B. ÉS GROLMUSZ, V.: The Graph of our Mind; *Brain Sciences*, Vol. **11** No. **3**, p. 342 (2021). DOI: 10.3390/brainsci11030342
- [3] SZALKAI, B., VARGA, B. ÉS GROLMUSZ, V.: Brain Size Bias Compensated Graph-Theoretical Parameters are Also Better in Women’s Structural Connectomes, *Brain Imaging and Behavior* Vol. **12**, No. **3**, pp. 663–673 (2018). DOI: 10.1007/s11682-017-9720-0
- [4] SZALKAI, B., VARGA, B. ÉS GROLMUSZ, V.: Graph Theoretical Analysis Reveals: Women’s Brains Are Better Connected than Men’s, *PLoS ONE*, Vol. **10** No. **7**, e0130045 (2015). DOI: 10.1371/journal.pone.0130045
- [5] SZALKAI, B., KEREPESI, CS., VARGA, B. ÉS GROLMUSZ, V.: The Budapest Reference Connectome Server v2.0, *Neuroscience Letters*, Vol. **595**, pp. 60–62, (2015). DOI: 10.1016/j.neulet.2015.03.071

A FARKAS GYULA EMLÉKDÍJ 2022. ÉVI DÍJAZOTTJA:
BARÁTH DÁNIEL



Életútja

Baráth Dániel 1989-ben született Budapesten. Egyetemi tanulmányait az ELTE Informatikai Karán folytatta, ahol az M.Sc. fokozatot 2014-ben nyerte el. Ezt követően az ELTE Informatikai Kar Informatikai Doktori iskolájának hallgatója lett, ahol témavezetője Hajder Levente volt. 2019-ben számítógépes látás témában írt „Affine Correspondences and their Applications in Practice” című PhD disszertációját summa cum laude eredménnyel védte meg. 2016 óta az MTA/ELKH SZTAKI tudományos munkatársa, ezen belül a Geometriai Modellelés és Számítógépes Látás Labor, ill. a Gépi Érzékelés Kutatólaboratórium kutatócsoportokban dolgozott/dolgozik, itt végezte doktori munkáját is. Jelenleg 2020 óta az ETH Zürich, Department of Computer, Science Computer Vision and Geometry Group tanszékén posztdoktori ösztöndíjas.

Kutatási területe a számítógépes látás geometriai, ill. robusztus statisztikai módszerei, a zajjal terhelt és hibás adatpontokat tartalmazó *valós* adatokból egy matematikai modell becslése. A gyakorlatban ezen módszerek számos területen elengedhetetlenül fontosak. Lehetővé teszik többek között valós környezet mind off-line, mind pedig valós idejű háromdimenziós rekonstrukcióját képekből és egyéb szenzoradatokból. Továbbá fontos elemei autonóm járművek vagy UGV-k (Unmanned Ground Vehicle) navigációjának.

Tudományos munkásságának kiválóságát jelzi, hogy jelenleg, három évvel a PhD fokozat megszerzése után 25 A*-os minősítéssel rendelkező konferencia publikációval rendelkezik, melyek többsége elsőszerzős vagy egyszerzős. Az A* minősítést csak az adott terület legelismertebb konferenciái kapják, mint például a Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2021-ben két elsőszerzős cikke jelent meg a Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence folyóiratban 2022-ben az International Journal of Computer Vision folyóiratban fogadták el cikkét. Mindkét szaklap C1 besorolású (top 1%). Referált publikációinak száma meghaladja az 50-et, több mint 1000 hivatkozással és 17-es *h*-indexszel rendelkezik (Google Scholar).

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Informatikai Karán tanít számítógépes grafikát és számítógépes látást már 5 éve. Az ELTE-n, a Prágai Műszaki Egyetemen, és az ETH Zürichen összesen több mint 10 diák szakdolgozatának volt témavezetője.

Baráth Dániel kiemelkedő teljesítményt nyújt a tudományos kutatásban. Már most iskolateremtőnek számít, itthon és külföldön is. A mérnöki problémák megfogalmazásában és matematikailag igényes megoldásában kiváló példáját adja az alkalmazott matematika magas színvonalának.

A díjazott öt legfontosabb publikációja

- [1] BARATH, D. ÉS HAJDER, L.: *Efficient recovery of essential matrix from two affine correspondences*, IEEE Transactions on Image Processing, Vol. **27** No. **11**, pp. 5328–5337 (2018). DOI: 10.1109/TIP.2018.2849866
- [2] BARATH, D. ÉS MATAS, J.: *Graph-cut RANSAC: local optimization on spatially coherent structures*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. **44** No. **9**, pp. 4961–4974, (2021). DOI: 10.1109/TPAMI.2021.3071812
- [3] BARATH, D., NOSKOVA, J. ÉS MATAS, J.: *Marginalizing sample consensus*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. **44** No. **11**, pp. 8420–8432, (2021). DOI: 10.1109/TPAMI.2021.3103562
- [4] BARATH, D.: *Efficient Energy-based Topological Outlier Rejection*, Computer Vision and Image Understanding, Vol. **174**, pp. 70–81 (2018). DOI: 10.1016/j.cviu.2018.07.002
- [5] GUAN, B., ZHAO J., BARATH, D. ÉS FRAUNDORFER, F.: *Minimal solvers for Relative Pose Estimation of Multi-Camera Systems using Affine Correspondences*, International Journal of Computer Vision, Vol. **131**, pp. 324–345 (2023). DOI: 10.1007/s11263-022-01690-w

A FARKAS GYULA EMLÉKDÍJ 2022. ÉVI DÍJAZOTTJA:
CSEH ÁGNES



Életútja

Cseh Ágnes matematikus BSc diplomáját 2010-ben szerezte a BME-n, a Fleiner Tamás témavezetése mellett írt „Stabil párosítások és alkalmazásaik” c. diplomamunkájával. Ezt követően a Berliini Műszaki Egyetemen folytatta tanulmányait, itt szerezte meg az MSc és a PhD fokozatot is. Az előbbit „Best Degree Award”-dal, míg az utóbbit „summa cum laude” minősítéssel díjazták. Ezután az MTA KRTHK kutatóintézetében dolgozott kutatóként, ill. posztdoktori ösztöndíjasként számos helyen megfordult. Jelenleg Berlinben él, és az egyéves kisfiát neveli.

Cseh Ágnes kutatási területe az elméleti matematika főként algoritmusokkal kapcsolatos eredményeinek alkalmazásaihoz kötődik. Az egyik legfontosabb terület a párosítások vizsgálata preferenciákkal ellátott struktúrákban, de vannak eredményei igazságos elosztásokról is. A stabil párosítások sikerének hatására napjainkban sokat vizsgált népszerű párosítások legjobb magyarországi szakértője. Kutatómunkája mellett a szervezésben is óriási gyakorlata van: számos jelentős konferencia program- ill. szervezőbizottságának volt tagja, valamint három EU által támogatott COST projektben volt vezetőségi képviselő. Ismeretterjesztő cikkével 2018-ban nyerte el az Élet és Tudomány díját, a 2016-ban odaítélt Klaus Tschira díjat szintén a tudomány népszerűsítéséért kapta, 2012-ben pedig a Kairóban rendezett „Science slam” versenyt nyerte meg a tudományterületét ismertető, tágabb közönségnek szánt előadásával.

A legkézzelfoghatóbb alkalmazási terület Cseh Ágnes munkájában a vesecserékkel kapcsolatos. Az élődonoros vesetranszplantáció egyik fő akadálya, ha a műtét azért ellenjavallt, mert a szervátültetésre szoruló beteg inkompatibilis a donorjával. Ha azonban több ilyen inkompatibilis pár között találunk két olyat, akik a donorjaikat elcserélve kompatibilissé válnak, akkor minden ilyen cserével két beteg menthető meg. Bár a jogi környezet számos országban jelentősen megnehezíti az ilyesfajta megoldást, ahol ez lehetséges, ott sok páciens számára teszi lehetővé a beavatkozást egy optimalizáló algoritmussal kiszámított párosítás a cserére fogékony betegek és donorok között. Cseh Ágnes németországi tartózkodása során szembesült azzal, hogy a német egészségügyi rendszer rendkívül elutasító ezzel a lehetőséggel kapcsolatban. Ennek hatására vett részt, az ezt a hozzáállást megváltoztatni szándékozó, kevés lelkes ember indította kezdeményezésben. A kitartó munka és a Cseh Ágnes által implementált algoritmus nyomán született meg – évtizedes tétlenség után – az első, Németországban elvégzett vesecseré.

Cseh Ágnes 2016-ban Grünwald Géza díjban részesült, a Farkas Gyula emlék-díjat az ezt követő eredményei alapján nyerte el.

A díjazott öt legfontosabb publikációja

- [1] CECHLÁROVÁ, K., CSEH Á., JANKÓ, ZS., KIREŠ, M. ÉS MIÑO, L.: *A quest for a fair schedule: The Young Physicists' Tournament*, Journal of Scheduling, (2022). megjelenés alatt
- [2] ANDERSSON, T., CSEH, Á., EHLERS, L. ÉS ERLANSON, A.: *Organizing Time Banks: Lessons from Matching Markets*, American Economic Journal: Microeconomics, Vol. **13** No. **1**, pp. 338–373 (2021). DOI: 10.1257/mic.20180236
- [3] CSEH, Á. ÉS KAVITHA, T.: *Popular Matchings in Complete Graphs*, Algorithmica, Vol. **83** No. **5**, pp. 1493–1523 (2021). DOI: 10.1007/s00453-020-00791-7
- [4] CSEH, Á. ÉS FLEINER, T.: *The complexity of cake cutting with unequal shares*, Transactions on Algorithms, Vol. **16** No. **3**, pp. 1–21, Article No.: 29, (2020). DOI: 10.1145/3380742
- [5] CSEH, Á. ÉS KAVITHA, T.: *Popular edges and dominant matchings*, Mathematical Programming, Vol. **172** No. **1**, pp. 209–229 (2018). DOI: 10.1007/s10107-017-1183-y

A FARKAS GYULA EMLÉKDÍJ 2022. ÉVI DÍJAZOTTJA:
HORVÁTH MARKÓ



Életútja

Horváth Markó 1989-ben született. Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán 2011-ben matematikus BSc diplomát, majd 2013-ban alkalmazott matematikus MSc diplomát szerzett. 2013-tól a SZTAKI tudományos munkatársa, és egyben az ELTE Matematikai Doktori Iskolájának doktorandusza. 2020-ban summa cum laude minősítéssel védte meg PhD értekezését, amelynek témája egészértékű programozás és ütemezéelmélet volt.

2022-ben 3 éves Bolyai János Kutatási Ösztöndíjat nyert. Ezen kívül 2021-ben az International Conference on Automated Planning and Scheduling konferencia keretein belül szervezett Dynamic Pickup and Delivery Problem című nyílt versenyen csapatban harmadik helyezést ért el. A verseny során egy ipari logisztikai feladatra kellett egy megoldást kidolgozni, amire 2 hónap állt rendelkezésre. A versenyen összesen 153 csapat indult.

Tudományos eredményeit főleg az egészértékű programozás ütemezési és járműútvonal tervezési alkalmazásaival kapcsolatban érte el. Egyrészt új egzakt, ill. approximációs algoritmusokat dolgozott ki az erőforrás korlátos legrövidebb út problémára, másrészt az integrált több depós jármű és vezető ütemezési problémára dolgozott ki egy egzakt módszert, ami a maga nemében az első ilyen módszer volt. Ezen kívül online jármű flotta ütemezési feladatok hatékony megoldására fejlesztett különféle módszereket. Utóbbi feladatok nehézségét az adja, hogy

a szállítási feladatok előre nem ismertek, és bizonyos mérőszámok szerint minél jobban szolgálja ki egy járműflotta a feladatokat.

Eddig összesen 8 cikke jelent meg nemzetközi, lektorált szakfolyóiratban, amelyek közül 4 db D1 besorolású, 2 db Q1 besorolású, és 2 db Q2 besorolású.

Több ipari alkalmazás kidolgozásában is részt vett az EPIC InnoLabs Kft. számára. A fejlesztések részben magyarországi, részben nemzetközi vállalatok számára készültek, és ütemezési, valamint logisztikai alkalmazások voltak.

A díjazott öt legfontosabb publikációja

- [1] KIS, T. ÉS HORVÁTH, M.: *Ideal, non-extended formulations for disjunctive constraints admitting a network representation*, Mathematical Programming, Vol. **194**, pp. 831–869 (2022). DOI: 10.1007/s10107-021-01652-z
- [2] DRÓTOS, M., GYÖRGYI, P., HORVÁTH, M. ÉS KIS T.: *Suboptimal and conflict-free control of a fleet of AGVs to serve online requests*, Computers and Industrial Engineering, Vol. **152**, p. 13 (2021). DOI: 10.1016/j.cie.2020.106999
- [3] HORVÁTH, M. ÉS KIS, T.: *Polyhedral results for position-based scheduling of chains on a single machine*, Annals of Operations Research, Vol. **284**, pp. 283–322 (2020). DOI: 10.1007/s10479-019-03180-8
- [4] HORVÁTH, M. ÉS KIS, T.: *Computing strong lower and upper bounds for the integrated multiple-depot vehicle and crew scheduling problem with branch-and-price*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **27**, pp. 39–67 (2019). DOI: 10.1007/s10100-017-0489-4
- [5] HORVÁTH, M. ÉS KIS, T.: *Solving resource constrained shortest path problems with LP-based methods*, Computers & Operations Research, Vol. **73**, pp. 150–164, (2016). DOI: 10.1016/j.cor.2016.04.013

A FARKAS GYULA EMLÉKDÍJ 2022. ÉVI DÍJAZOTTJA:
JUHÁSZ NÓRA



Életútja

Juhász Nóra 1988-ban született. Matematika BSc és MSc tanulmányait is a Szegedi Tudományegyetemen végezte. Szakdolgozatát, illetve diplomamunkáját Hatvani László és Karsai János vezetésével készítette egy közgazdasági (kereslet-kínálati modell), illetve egy biológiai modellezés (a tüdő és a légzés biomechanikája) témájában. Ezután több vállalatnál is dolgozott szoftverfejlesztőként. 2016-ban visszatért a kutatáshoz, és elnyert egy rangos PhD-ösztöndíjat a Marie Curie Európai Innovatív Képzési Hálózatban. Doktori fokozatát 2020-ban szerezte Olaszországban L'Aquila egyetemén Donatella Donatelli témavezetése mellett. Ezután visszatért Magyarországra, és a Szegedi Tudományegyetemen folytatta munkáját, ahol vírusdinamikával foglalkozik Röst Gergely Élvonal pályázata, majd az Egészségbiztonság Nemzeti Laboratórium keretében.

Doktori értekezése az atmoszféra folyamatainak modellezéséhez kapcsolódik. A szél áramlását háromdimenziós Navier-Stokes egyenletek írják le. Ha emellett a légszennyezést is modellezni szeretnénk, a rendszert ki kell egészíteni még egy konvekciós-diffúziós egyenlettel is. A meteorológiában azonban nem a teljes modellt használják a mindennapi munkában, hanem ennek egy leegyszerűsítését (primitív egyenleteknek vagy hidrosztatikus approximációnak is nevezik). Juhász Nóra azt a kérdést vizsgálta, igazolható-e ez a leegyszerűsítés. PhD értekezésének fő eredménye, hogy egy skálázási paramétert (ami a tartomány vastagságát adja

meg a tartomány méretéhez képest) nullába tartatva az anizotróp rendszer megoldásai konvergálnak az egyszerűsített rendszer megoldásaihoz. Ez nemcsak egy matematikailag nehéz és szép eredmény, hanem egyben az elméleti alátámasztását is adja a meteorológusok által használt hidrosztatikus approximációnak.

A COVID-19 pandémia alatt elindított kutatásban hamarosan a vírusdinamikai csapat vezéregyéniségévé vált, és Röst Gergely – a pandémia alatti gyakori – távollétei idején ő fogta össze és irányította ezeket a kutatásokat. Az új megközelítésük lényege, hogy kihasználva a sejtek és a vírus közötti méretbeli különbséget, egy hibrid multiskálás modellcsaládot alkottak. Az ágens alapú komponens sztochasztikus, és a hámsejtek állapotváltozását követi egyedi szinten, a vírus térbeli terjedését pedig egy parciális differenciálegyenlet (reakció-diffúzió típusú) írja le. A két modellkomponens kölcsönös interakcióban áll egymással. A matematikai formalizmus korrekt megalkotása és a szimulációt végző algoritmus hatékony implementációja mellett nagy kihívás volt a mikrobiológiai, virológiai tanulmányok alapján paraméterezni a modellt, de ezzel sikerült nagyon jól reprodukálni valódi in-vitro kísérletek eredményét, így új információkat nyerni a SARS-CoV-2, valamint az influenzafertőzés dinamikájáról. A modellt továbbfejlesztve megadták a Paxlovid nevű kétkomponensű antivirális szer részletes farmakometriai elemzését.

Juhász Nóra az alkalmazott matematika népszerűsítéséhez is hozzájárult. Munkái a vírusterjedésről készített látványos szimulációknak köszönhetően nagy médiafigyelmet kapott. A Kutatók éjszakája Fiala Kutatók sorozatában videointerjút készítettek vele. Emellett az Érintőbe is írt egy hosszabb cikket.

A díjazott négy legfontosabb publikációja

- [1] BARTHA, F., JUHÁSZ, N., MARZBAN, S., HAN, R. ÉS RÖST, G.: *In Silico Evaluation of Paxlovid's Pharmacometrics for SARS-CoV-2: A Multiscale Approach*, Viruses, Vol. **14** No. **5**, 1103 (2022). DOI: 10.3390/v14051103
- [2] MARZBAN, S., HAN, R., JUHÁSZ, N. ÉS RÖST, G.: *A hybrid PDE-ABM model for viral dynamics with application to SARS-CoV-2 and influenza*, Royal Society Open Science, Vol. **8**, 210787 (2021). DOI: 10.1098/rsos.210787
- [3] DONATELLI, D. ÉS JUHÁSZ, N.: *The primitive equations of the polluted atmosphere as a weak and strong limit of the 3D Navier Stokes equations in downwind matching coordinates*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol. **42** No. **6**, pp. 2859-2892 (2022). DOI: 10.3934/dcds.2022002
- [4] DONATELLI, D. ÉS JUHÁSZ, N.: *Weak solution of the merged mathematical equations of the polluted atmosphere*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. **43** No. **15**, pp. 9245-9261 (2020). DOI: 10.1002/mma.6618

DINAMIKUS RENDSZEREK SZÉTCSATOLÁSA BE- ÉS KIMENETI TRANSZFORMÁCIÓKKAL

BAÁR TAMÁS, LUSPAY TAMÁS

Jelen kézirat egy olyan szétcsatolási eljárást mutat be, amely segítségével dinamikus rendszerek alrendszerekre bonthatók. Ezt a szétcsatolást a rendszer be- és kimeneteinek megfelelő transzformációival érjük el. Ezen transzformációkat úgy határozzuk meg, hogy az átvitelt a kiemelni kívánt alrendszeren keresztül maximalizáljuk, míg a lecsatolni kívánt alrendszereken keresztül minimalizáljuk. Az ehhez szükséges vektorok kiszámítása a robusztus irányítások témakörében ismert lineáris mátrix egyenlőtlenségekkel megfogalmazott optimalizálási feladatra vezethető vissza. Egy demonstrációs példa bemutatása után részletesen tárgyaljuk a felmerült és még nyitott kérdéseket.

1. Bevezetés

Adott munkapont körül egy rendszer viselkedése leírható egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet rendszerrel, melyet a rendszerelméletben állapotterez alaknak nevezünk. Amennyiben a differenciálegyenlet rendszer együtthatómátrixa diagonalizálható, úgy a sajátvektorok segítségével a rendszer blokkdiagonális struktúrára hozható, ez az úgynevezett modális alak. Ahogyan ezt később bemutatjuk, ebben a reprezentációban a rendszert alkotó módusok az együtthatómátrixban szétcsatoltak egymástól, azonban a rendszer bemenetén és kimenetén keresztül kölcsönhatásba lépnek egymással. Ez azt is jelenti, hogy a rendszer válasza a különböző módusok válaszainak szuperpozíciójaként is meghatározható. A módusokat tulajdonságaik vagy az elérendő irányítási cél alapján alrendszerekbe sorolhatjuk.

Nagydimenziós komplex rendszerek irányításánál gyakran célszerű a tervezési probléma egyszerűsítése, amire az irodalomban többféle megközelítés is létezik. A kéziratban dinamikus rendszerek szétcsatolásával foglalkozunk, ami lehetővé teszi, hogy kiválasztott alrendszereket úgy irányítsunk, hogy közben nem lépünk interakcióba a rendszer fennmaradó részével. Ez a tervezési eljárás az úgynevezett strukturált szabályzótervezési megoldások irányába mutat [1]; esetünkben az egyes alrendszerek irányításához egymástól független, az adott alrendszerhez tar-

tozó szabályzó tartozik¹. A megközelítés lehetővé teszi, hogy egyszerűbb, kisebb együtthatómátrixszal leírható szabályozókat tervezzünk, melyek nem lépnek kölcsönhatásba egymással.

A vonatkozó irodalomban többféle szétcsatolási eljárás létezik (lásd [3], [4]), melyeknek egy közös pontja, hogy a rendszer be- és kimenetén megfelelően megválasztott transzformációs vektorokat alkalmaznak. Ezen transzformációk segítségével úgy összegzik skalár jelekké a rendszer be- és kimeneteit, hogy azok a lehető legjobban jellemezzék az irányítani kívánt alrendszert, miközben nem lépnek interakcióba a fennmaradó dinamikával. [4] egy nemlineáris \mathcal{H}_2 norma maximalizáláson alapuló transzformációs vektor számítását mutat be, ahol az irányítandó alrendszer \mathcal{H}_2 normáját maximalizálják, miközben biztosítják, hogy a transzformációs vektorok merőlegesek legyenek a lecsatolandó alrendszerek be- és kimeneti mátrixaira.

A jelen cikkben bemutatott megközelítés hasonló alapelvekre támaszkodik, azonban az optimalizálási feladatot lineáris mátrix egyenlőtlenségek segítségével fogalmazzuk meg. A megközelítés előnye a konvexitáson túl, hogy könnyen kiterjeszhető a rendszerelmélet szempontjából fontos rendszerosztályokra, többek között bizonytalan, valamint lineárisan változó paraméterű (LPV) rendszerekre.

A cikk célkitűzése tehát a következő. Olyan be- és kimeneti transzformációs vektorokat keresünk, melyek segítségével egy modális alakban adott rendszer egy kiválasztott alrendszerét leválaszthatjuk a fennmaradó dinamikáról. A transzformációs vektorokat úgy tervezzük meg, hogy egyrészt az átvitel \mathcal{H}_- index által leírt minimális érzékenységet maximalizálják az irányítandó alrendszeren keresztül. Ugyanakkor a lecsatolás érdekében a transzformációs vektorok az átvitel \mathcal{H}_∞ norma által leírt maximális érzékenységet csökkentik a fennmaradó alrendszereken keresztül. A transzformációs vektorok alkalmazása után az eredmény így egy olyan egy bemenetű és egy kimenetű rendszer, melyben a kiválasztott alrendszer a domináns. A feladat megoldásához felhasznált lineáris mátrix egyenlőtlenségekben a transzformációs vektorok diadikus szorzata jelenik meg, így a számítások során a be- és kimenethez tartozó egy rangú transzformációs mátrixokat kell meghatározni, melyekből a transzformációs vektorok a későbbiekben visszaszámíthatóak. A rangfeltétel betartása nélkül konvex optimalizálási feladatokat kell megoldani, melyek globális optimumot szolgáltatnak. Az egy rangú transzformációs mátrixra vonatkozó kitétel azonban egy nem konvex feltételt jelent, aminek kielégítésére két lehetséges megközelítést vizsgáltunk eddigi munkánk során. Ezek változó mértékben ugyan, de minden esetben valamilyen szintű heurisztikát tartalmaznak, így globális optimum nem garantálható a feladat megoldása során.

¹Jelen cikkben a szétcsatolási eljárás matematikai hátterére fókuszálunk és azt mutatjuk be, hogy egy alrendszer hogyan irányítható a többitől függetlenül. A [2] cikk a 4.3. fejezetben részletesen kitér arra az esetre, amikor több alrendszert szeretnénk egymástól független szabályzókkal irányítani.

A cikk célja, hogy bemutassa a megközelítésünket, majd a még nyitott kérdésekre kitérve párbeszédet indítson a különböző tudományterületek képviselői között a módszer további fejlesztése érdekében. Az algoritmus részletes bemutatása megtalálható a [2] cikkben. A felvetett kérdések között szerepel a részletes alkalmazási feltételek kidolgozása, valamint egy rang minimalizációs probléma heurisztikáktól mentes megoldása.

A 2. fejezetben bemutatjuk az alkalmazott matematikai eszközöket, kitérve a kiindulópontként felhasznált modális alakra, illetve a rendszer legkisebb és legnagyobb érzékenységének számításához szükséges tételekre. Ezen ismeretek birtokában a 3. fejezetben bemutatott problémamegfogalmazás már könnyen követhető. A 4. fejezetben mutatjuk be az általunk javasolt megközelítést, míg az 5. fejezet egy egyszerű példán keresztül szemlélteti a megközelítést. Az általunk megvitatásra érdemesnek ítélt kérdéseket a 6. fejezetben tárgyaljuk.

2. Matematikai háttér

Ebben a fejezetben röviden tárgyaljuk az eredményekhez szükséges matematikai eszközöket.

2.1. Az alkalmazott állapotter modell

Olyan rendszerekkel foglalkozunk, melyek egy munkapont körüli viselkedése leírható elsőrendű lineáris differenciálegyenlet rendszerekkel. Ezen egyenletrendszert nevezzük a rendszer állapotteres alakjának. Kiindulásként vizsgáljuk a folytonos idejű Lineáris Időinvariáns (LTI) rendszerosztályt, mely az alábbi alakban adott

$$\mathcal{P}_{n_y \times n_u} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (1)$$

a szokásos jelölésekkel: $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ az állapotvektor, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ a bemenőjel és $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ a kimenőjel vektora. Továbbá feltételezzük, hogy a rendszer az alábbi alrendszer alakban adott:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ 0 & A_d \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} B_c \\ B_d \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} C_c & C_d \end{bmatrix}, & D &= \begin{bmatrix} D \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Az A mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz létezik egy invertálható T és egy blokkdiagonális X mátrix, hogy $T^{-1}AT = X$ teljesül. Lineáris időinvariáns rendszerek esetében ha A diagonalizálható, a (2) alak mindig elérhető és a rendszer modális alakjának nevezzük [5]. Az ehhez szükséges T transzformáció az A sajátvektorai alapján számítható. A konstrukció sajátossága, hogy

minden blokk a rendszer egy dinamikai módusának felel meg, melyek mindegyike egy darab valós (\Re), vagy egy komplex (melynek képzetes része (\Im)) póluspárral jellemezhető. Ezek alapján a blokkdiagonális A felírható $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_n)$ alakban, ahol az egyes blokkok a következőképpen definiáltak:

$$A_i = \begin{cases} \lambda_i, & \text{ha } \Im(\lambda_i) = 0 \\ \begin{bmatrix} \Re(\lambda_i) & \Im(\lambda_i) \\ -\Im(\lambda_i) & \Re(\lambda_i) \end{bmatrix}, & \text{ha } \Im(\lambda_i) \neq 0. \end{cases} \quad (3)$$

A (2) reprezentáció egy speciális modális alaknak tekinthető, ahol a módusokat aszerint csoportosítottuk, hogy melyeket szeretnénk irányítani, és melyeket lecsatolni. Ez a blokkok egyszerű permutációjával elérhető. A későbbiekben az irányítandó alrendszerre a $\{\cdot\}_c$ jelölést (control), míg a lecsatolandó alrendszerre a $\{\cdot\}_d$ (decouple) jelölést alkalmazzuk. A probléma bemutatása során a tárgyalás egyszerűsítése céljából feltételezzük hogy az irányítandó alrendszer csak egy módust tartalmaz. Ez a megszorítás azonban könnyen feloldható, ahogy az bemutatásra került a [2] cikkben. Felhívjuk a figyelmet, hogy a (2) blokkdiagonális reprezentáció nincs szétcsatolva, ugyanis az alrendszerek a ki- és bemeneti mátrixokon keresztül kapcsolatba léphetnek egymással. Átviteli függvény mátrix alakban a rendszer felírása

$$\mathcal{G}(s) = \sum_{i \in \{c,d\}} \{C_i(sI - A_i)^{-1}B_i + D/2\} = \mathcal{G}_c(s) + \mathcal{G}_d(s), \quad (4)$$

ahol $\mathcal{G}_c(s)$ az irányítandó, $\mathcal{G}_d(s)$ a lecsatolandó alrendszert, s a Laplace operátort, és I a megfelelő dimenziójú egységmátrixot jelöli.

2.2. Minimális érzékenység

Egy dinamikus rendszer minimális érzékenysége a rendszer- és irányításelméletben, azon belül is a hibadetektálás irodalmában, gyakran használt és kutatott mérték (lásd [6] és [7]). Ezen cikkben a véges frekvencia intervallum felett értelmezett \mathcal{H}_- indexet használjuk a minimális érzékenység leírására, mely az alábbi módon van definiálva

$$\|\mathcal{G}_c(s)\|_{-}^{[\underline{\omega}, \bar{\omega}]} := \inf_{\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]} \underline{\sigma} \left[\mathcal{G}_c(j\omega) \right], \quad (5)$$

ahol $\underline{\sigma}$ jelöli a rendszer legkisebb szinguláris értékét. Továbbá j az imaginárius egységet, ω a frekvencia változót (a Fourier transzformáció változóját), $\underline{\omega}$ és $\bar{\omega}$ pedig a vizsgált frekvenciatartomány alsó és felső határát jelöli. Egy dinamikus rendszer minimális érzékenységének kiszámítására számos módszer létezik, mi az általánosított Kalman - Yakubovich - Popov (GKYP) lemmán alapuló megközelítést [8] követjük, mely egy konvex optimalizálási feladatra vezet, ún. Lineáris Mátrix Egyenlőtlenség (Linear Matrix Inequality - LMI) típusú korlátozások mellett. A vonatkozó tétel a következőképpen fogalmazható meg:

2.1. TÉTEL. *Minimális érzékenység véges frekvenciatartomány felett [9]. Adott a rendszer állapotterez alakja (1) és átviteli függvény mátrixa (4). Legyen $\Pi = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & \beta^2 I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_y) \times (n_x+n_y)}$, továbbá $\omega, \bar{\omega}$ jelölje a frekvencia tartomány legkisebb és legnagyobb elemét, valamint legyen $\tilde{\omega} = \frac{\omega+\bar{\omega}}{2}$. Ekkor $\|\mathcal{G}_c(s)\|_{\left[\frac{\omega}{-}, \bar{\omega}\right]} > \beta$ akkor és csak akkor, ha létezik P_c hermitikus, $Q_c > 0$ pozitív definit mátrix, valamint $\beta > 0$ skalár, hogy*

$$\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \Xi \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_c & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} C_c & D \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (6)$$

$$\text{ahol } \Xi = \begin{bmatrix} -Q_c & P_c + j\frac{\tilde{\omega}}{2}Q_c \\ P_c - j\frac{\tilde{\omega}}{2}Q_c & -\omega\bar{\omega}Q_c \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás. A bizonyítás elérhető a [9] cikkben. □

2.3. Legnagyobb érzékenység

Egy dinamikus rendszer legnagyobb érzékenysége a robusztus irányítások irodalmában a \mathcal{H}_∞ norma, ami az alábbi módon definiált

$$\|\mathcal{G}_d(s)\|_\infty := \sup_{\omega} \bar{\sigma} \left[\mathcal{G}_d(j\omega) \right], \quad (7)$$

itt $\bar{\sigma}$ jelöli a rendszer legnagyobb szinguláris értékét. Hasonlóan a \mathcal{H}_- index számításához, \mathcal{H}_∞ norma esetében is az LMI alapú megközelítést használjuk, amely az irodalomban Bounded Real Lemma-ként ismeretes és a következőképpen fogalmazható meg:

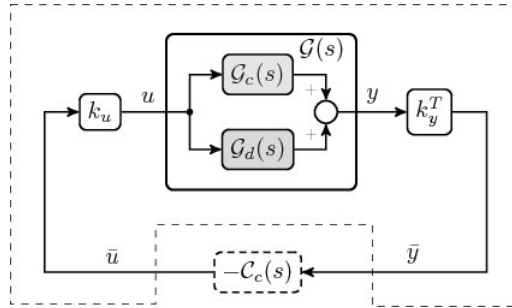
2.1. LEMMA. *A Bounded Real Lemma [10]. Legyen $\gamma \geq 0$ egy nemnegatív konstans skalár. Ekkor $\|\mathcal{G}_d(s)\|_\infty^{[0,\infty)} < \gamma$, akkor és csak akkor, ha létezik olyan pozitív definit szimmetrikus P_d mátrix, hogy*

$$\begin{bmatrix} A_d^T P_d + P_d A_d + C_d^T C_d & P_d B_d + C_d^T D \\ B_d^T P_d + D^T C_d & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \preceq 0. \quad (8)$$

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható a [10] könyvben. □

3. Probléma megfogalmazás

Miután bevezettük a szükséges matematikai fogalmakat és jelöléseket, rátérünk a kitűzött feladat részletes ismertetésére. Tekintsük ehhez az 1. ábrát! Tervezzük



1. ábra. A zárt rendszer be- és kimeneti transzformációkra épülő irányítási struktúrája

meg a szaggatott vonallal jelölt „környezetet” úgy, hogy az lehetővé tegye a kiválasztott $\mathcal{G}_c(s)$ alrendszer irányítását a hozzá tartozó $\mathcal{C}_c(s)$ szabályzó segítségével, miközben a szabályzó a lehető legkisebb hatást gyakorolja a $\mathcal{G}_d(s)$ alrendszerre. Matematikailag ez a minimális érzékenység \bar{u} -ról \bar{y} -ra történő maximalizálása a $\mathcal{G}_c(s)$ alrendszeren keresztül, miközben az átvitel maximális érzékenységét minimalizáljuk a $\mathcal{G}_d(s)$ alrendszeren keresztül. Ahogyan ez az 1. ábrán látható, a szétcsatolást be- és kimeneti transzformációk segítségével kívánjuk elérni. Vezessük be tehát a be- és kimeneti $k_u \in \mathbb{R}^{n_u \times 1}$ és $k_y \in \mathbb{R}^{n_y \times 1}$ normált ($\|k_u\| = \|k_y\| = 1$) transzformációs vektorokat. Ezek a rendszer be- és kimeneteit egy-egy jellé vonják össze, egy SISO (Single Input Single Output) irányítási feladatot eredményezve. A bemeneti vektor szétesztja a beavatkozó jelet ($u = k_u \bar{u}$), hogy az csak az irányítani kívánt alrendszerre hasson. Hasonlóan az $\bar{y} = k_y^T y \in \mathbb{R}$ vektorral az irányítandó módusra vonatkozó információkat maximalizáljuk, míg a lecsatolandó módusra vonatkozókat minimalizáljuk. A bemutatott problémát a következőképp formalizálhatjuk a bevezetett \mathcal{H}_- és \mathcal{H}_∞ mértékek segítségével:

3.1. Probléma. Szétcsatolási probléma. Keressük azokat a normált k_u és k_y vektorokat, melyekkel az irányítandó alrendszer minimális erősítését maximalizáljuk, azaz

$$\begin{aligned} \max_{k_u, k_y} \quad & \beta \\ \text{korlátozások:} \quad & \|k_y^T \mathcal{G}_c(s) k_u\|_{-}^{[\omega, \bar{\omega}]} > \beta, \quad \beta \geq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

míg a lecsatolandó alrendszer maximális erősítését minimalizáljuk, azaz

$$\begin{aligned} \min_{k_u, k_y} \quad & \gamma \\ \text{korlátozások:} \quad & \|k_y^T \mathcal{G}_d(s) k_u\|_\infty < \gamma, \quad \gamma \geq 0, \end{aligned} \quad (10)$$

a meghatározott $[\omega, \bar{\omega}]$ frekvencia intervallum felett. A β és γ változók két nem-

negatív skalárt jelölnek, melyek a rendszer minimális és maximális erősítését jellemzik.

A következőkben röviden kitérünk a véges frekvenciatartomány bevezetésének szükségességére. A [11] cikk a minimális érzékenység LMI alapú számítását tárgyalja végtelen frekvenciaintervallum felett. Ez a megközelítés a 2.1. Lemmához hasonló eredményre jut, azonban a megoldhatóság feltétele hogy $D \neq 0$. A 4. fejezetben látni fogjuk, hogy a megoldandó feladatokban D értéke 0. Ezekben az esetekben a minimális érzékenység kiszámítása véges frekvencia intervallum felett lehetséges, ami viszont a több változó miatt növeli a probléma komplexitását. Az előbbiekkal szemben a maximális érzékenység számítása a 2.1. Lemma alapján $D = 0$ mellett is megoldható. Így bár létezik véges frekvenciatartományra megfogalmazott formája is az említett lemmának (lásd [8], [12]), nem szükséges azt használnunk. Ezáltal egy kevesebb optimalizálási változót magába foglaló, egyszerűbb optimalizálási feladatot kell megoldanunk (a véges frekvenciaintervallumra vonatkozó megközelítés helyett), miközben a nem kívánt dinamika hatását a teljes frekvenciatartományon csökkenthetjük.

Logikus kérdésként merülhet fel, hogy egy egyszerűbb optimalizálási problémára vezet-e, ha k_u -t B_d sorvektor-terére merőleges vagy minimális normájú vektorként keressük (valamint k_y -t hasonló módon a C_d oszlopterére merőlegesen). LTI rendszerek esetében található lehet olyan k_u és k_y , ami a lecsatolandó alrendszer átvitelét csökkenti. További megfelelő korlátozások bevezetésével B_c és C_c figyelembevételével az irányítandó alrendszeren történő átvitelt is növelhetjük. Azonban más rendszerosztályokra, figyelembe véve azok speciális tulajdonságait, ez a megközelítés nehézkes. Ezzel szemben a 3.1. probléma megfogalmazása a rendszerelméletben széles körben alkalmazott Lineáris Mátrix Egyenlőtlenségekkel megfogalmazható rendszernormákon (a \mathcal{H}_∞ index esetében kvázi normán) alapul. A megközelítés előnye, hogy más rendszerosztályokra is könnyen kiterjeszhető, könnyen beilleszthető az azok vizsgálatára az irodalomban kialakult keretrendszerbe. A 6. fejezet megemlíti, hogy a módszert ezen tulajdonságának köszönhetően már sikeresen alkalmaztuk Lineáris Változó Paraméterű (LPV), valamint bizonytalan rendszerekre is.

4. A javasolt szétcsatolási módszer

A be- és kimeneti transzformációs vektorokat egymásra épülő iterációs lépések során határozhatjuk meg. Első lépésben egy k_u bemeneti vektor számítását mutatjuk be, majd a második lépésben a hozzá tartozó k_y kimeneti vektort tervezük meg. Megjegyezzük, hogy a számítás sorrendje felcserélhető. Az algoritmus a rendszer D mátrixát nem veszi figyelembe, így a későbbiekben ettől eltekintünk. Amennyiben a rendszerben van D mátrix, a [2] cikkben bemutatott, a D hatását kompenzáló megközelítést javasoljuk. Ez a tervezés menetét nem befolyásolja.

4.1. Bemenet szétcsatolás

Ebben az alfejezetben olyan k_u vektort kívánunk meghatározni, mely biztosítja, hogy a kiválasztott alrendszer állapotainak gerjesztése maximális legyen, miközben a többi alrendszer állapotaira való hatást minimalizálja. Ennek érdekében a rendszer kimeneteit ebben a lépésben úgy módosítjuk, hogy azok a rendszer állapotainak gerjesztését közvetlenül tükrözzék. Az új performancia kimeneteket az állapotok összegeként határozzuk meg², azaz

$$A = \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ 0 & A_d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_c \\ B_d \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} J_c & J_d \end{bmatrix}, \quad (11)$$

ahol $J_c \in \mathbb{R}^{1 \times n_{x_c}}$ és $J_d \in \mathbb{R}^{1 \times n_{x_d}}$ egyesekből álló vektorok. A cél, hogy a \mathcal{H}_- index által jellemzett minimális érzékenységet maximalizáljuk az irányítandó alrendszer performancia kimenetére, míg a \mathcal{H}_∞ normával jellemzett maximális érzékenységet minimalizáljuk a lecsatolandó alrendszer esetében.

A részletek tárgyalása előtt megjegyezzük, hogy annak érdekében, hogy változóiban lineáris feladatot kapjunk, ebben a lépésben a (11) rendszer duális reprezentációját alkalmazzuk, amely

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_c^T & 0 \\ 0 & A_d^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} J_c^T \\ J_d^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} B_c^T & B_d^T \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Nyilvánvaló, hogy a duális reprezentáció nem módosítja egy rendszer minimális, illetve maximális érzékenységet.

Ezek után, ha a (6) és (8) egyenlőtlenségeket felírjuk a duális reprezentációra, majd behelyettesítjük az eredeti rendszerleírás mátrixait, úgy az alábbi alakokat kapjuk:

$$\begin{bmatrix} A_c^T & J_c^T \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \Xi \begin{bmatrix} A_c^T & J_c^T \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_c^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} B_c^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (13)$$

és

$$\begin{bmatrix} P_d A_d^T + A_d P_d + B_d K_u B_d^T & P_d J_d^T \\ J_d P_d & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (14)$$

ahol $\Pi = \begin{bmatrix} -K_u & 0 \\ 0 & \beta^2 I \end{bmatrix}$. Itt bevezettük a $K_u = k_u k_u^T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ ún. bemenetfúziós

²Az új kimeneti egyenletek megfelelő dimenziós egységmátrixokként történő definiálása is egy logikus választás lehetne, azonban ez problémákat eredményezne a (13) egyenlőtlenség megoldásakor. A [2] cikk A.1. fejezetében megmutattuk, hogy a (6) képletben megadott LMI feltétel csak ún. magas vagy négyzetes rendszerek esetében oldható meg (vagyis ahol $n_y \leq n_u$). Az J_c, J_d választással garantálhatjuk, hogy a (12) rendszer négyzetes vagy magas reprezentációt eredményezzen.

mátrixot: a bemenet transzformációs vektorok diadikus szorzatát. Az egyenlőtlenségekben K_u csak a duális reprezentáció miatt jelenik meg, mely használata nélkül bilineáris mátrix egyenlőtlenségekre vezetne a feladat. Azonban K_u definíciójából következően egy 1-rangú mátrix, amit a feladat megoldása során figyelembe kell venni. Mivel ebben a lépésben a mérési egyenletektől eltekintünk, ezért $D = 0$.

Ezeket figyelembe véve, a keresett bemeneti fúziós vektor meghatározására az alábbi optimalizálási feladaton alapuló módszert javasoljuk.

4.1. Módszer. Bemeneti fúziós vektor tervezés. Az (1) rendszerhez tartozó k_u optimális fúziós vektor kiszámítható mint a K_u fúziós mátrix legnagyobb szinguláris értékéhez tartozó baloldali szinguláris vektora, ahol K_u a következő optimalizálási feladat eredménye

$$\begin{aligned} & \min_{P_d, K_u, P_c, Q_c, \beta^2, \gamma^2} \quad -\beta^2 + \gamma^2 \\ & \text{korlátozások: (13), (14), } P_d = P_d^T, P_d \succeq 0, \\ & P_c = P_c^T, Q_c = Q_c^T, Q_c \succeq 0, \\ & K_u = K_u^T, 0 \preceq K_u \preceq I, \text{ és } \text{rang}(K_u) = 1, \end{aligned} \tag{15}$$

ahol I a megfelelő dimenziójú egységmátrix.

Megjegyezzük, hogy a 4.1. módszer több optimalizálási változó egyidejű minimalizálását írja elő, ami gyakori a $\mathcal{H}_-/\mathcal{H}_\infty$ hibadetektáló szűrő tervezési problémáknál [6]. Azonban a $\text{rang}(K_u) = 1$ feltétel egy nem konvex feltétel, melynek kielégítése több módszerrel is megvalósítható, melyeket röviden az alábbiakban foglalhatunk össze:

4.1. Megoldás. Egy korábbi publikációban a K_u mátrix nyomának minimalizációjára alapuló heurisztikus eljárást alkalmaztunk a rangfeltétel betartására [13]. Az eljárás lényege, hogy egy négyzetes mátrix rangjának minimalizálása visszavezethető a mátrix nyomának minimalizálására. Ebben az esetben a nem konvex rang feltételt felváltja egy, a célfüggvényhez hozzáadott, a K_u nyomának minimalizálására vonatkozó tag. Azonban ez a heurisztikus megközelítés a gyakorlatban sokszor nem eredményez valóban 1-rangú megoldást.

4.2. Megoldás. Egy másik lehetséges megközelítés a váltakozó vetítések módszere, melyet a [2] cikkben alkalmaztunk a vonatkozó problémára, a [14] cikk alapján. Ebben a szerzők egy csökkentett dimenziós \mathcal{H}_∞ szabályzó tervezési feladat során elégítik ki a felmerülő rangfeltételt a váltakozó vetítések módszerének segítségével. Az alapötlet a következő. Vezessünk be egy Γ_{konvex} konvex halmazt, melyet (15) definiál a K_u -ra vonatkozó rangfeltétel nélkül. Továbbá a K_u -ra vonatkozó nem-konvex rangfeltételt értelmezzük egy Γ_{rang} halmaz felett. Feltételezzük, hogy

a két halmaznak van nem üres metszete, tehát létezik 1-rangú megoldása az optimalizálási feladatnak. A célunk, hogy ebben a metszetben találjunk megfelelő K_u mátrixot. A váltakozó vetítések módszerével a feladat megoldható a két halmaz közötti merőleges vetítések egymásutáni alkalmazásával. A módszer garantálja, hogy minden egyes vetítés során a vetített mátrix képe a másik halmazon a lehető legközelebb esik a vetített mátrixhoz. Továbbá bizonyítható, hogy a vetítések egyértelműek [15]. Azonban a módszer egy bizonyos szintű heurisztikát még mindig hordoz magában, amiből fakadóan csak lokális konvergencia garantálható, globális nem, de a gyakorlatban kielégítőnek bizonyul.

A módszer több merőleges vetítés egymásutáni sorozatából áll. A teljes rangú megoldásból kiindulva minden egyes sorozatban eggyel csökkentjük a K_u mátrix rangját, amíg el nem érjük a kívánt 1-rangú megoldást. A vetítések során a következő két lemmát használjuk.

4.1. LEMMA. *Merőleges vetítés a Γ_{rang} halmazra [14]. Legyen $Z \in \Gamma_{\text{rang}}^{n \times n}$ és legyen $Z = USV^T$ a Z szinguláris érték felbontása. A $Z^* = \mathcal{P}_{\Gamma_{\text{rang}}^{n-k}} Z$, merőleges vetítése Z -nek a $\Gamma_{\text{rang}}^{(n-k) \times (n-k)}$ $n - k$ dimenziós halmazra a*

$$Z^* = US_{n-k}V^T \quad (16)$$

összefüggéssel definiálható, ahol az S_{n-k} diagonális mátrixot úgy kapjuk, hogy S -nek a k darab legkisebb szinguláris értékét 0-val helyettesítjük.

4.2. LEMMA. *Vetítés az LMI-k által definiált Γ_{konvex} konvex halmazra [14]. Legyen Γ_{konvex} konvex halmaz, egy LMI-vel definiálva. Akkor az $X^* = P_{\Gamma} X$ vetítés egyértelműen számítható az alábbi Y -ra vonatkozó szemidefinit optimalizálási probléma segítségével a következőképp*

$$\begin{aligned} & \min \quad \text{trace}(S) \\ & \text{korlátozások:} \quad \begin{bmatrix} S & (Y - X)^T \\ Y - X & I \end{bmatrix} \succeq 0, \\ & Y \in \Gamma_{\text{konvex}}, S, Y, X \in R^{n \times n}, \end{aligned} \quad (17)$$

ahol $S = S^T$.

Megjegyezzük, hogy a Schur-komplement tétel [16] alkalmazásával a (17)-ben adott LMI átírható $S - (Y - X)I(Y - X)^T \succeq 0$ alakba. Így figyelembe véve a Frobenius norma ($\|A\|_F^2 = \text{trace}(AA^T)$) definícióját $A = Y - X$ helyettesítés mellett látható, hogy (17) az X és Y mátrixok Frobenius normából származtatott távolságát minimalizálja. A váltakozó vetítésekkel kapcsolatos további részleteket az érdeklődő olvasó a [14] cikkben találhat.

A bemeneti transzformációs vektor tervezés a 4.1. módszer segítségével megtehető, a fentebb vázolt megoldásokat felhasználva. Az eredményül kapott k_u vektort alkalmazzuk az alrendszer bemeneteire, majd használjuk a kimeneti transzformációs vektor számítása során az alábbi jelölésrendszert: $\bar{A}_{\{c,d\}} = A_{\{c,d\}}$, $\bar{B}_{\{c,d\}} = B_{\{c,d\}}k_u$, $\bar{C}_{\{c,d\}} = C_{\{c,d\}}$.

4.2. Kimenet szétcsatolás

Miután meghatároztuk a bemeneti szétcsatolás vektorát, figyelmünket a kimeneti transzformációs vektor meghatározására fordítjuk. k_y egy összevont kimenetben maximalizálja az irányítani kívánt alrendszerre vonatkozó információt, míg minimalizálja a többi alrendszerre vonatkozókat. Az előző alfejezethez hasonlóan az irányítani kívánt alrendszeren keresztül maximalizáljuk a minimális érzékenységet, míg a lecsatolandó alrendszereken keresztül minimalizáljuk a legnagyobb érzékenységet. Mivel a D mátrixot a bemeneti transzformáció során nem vettük figyelembe, így itt is eltekintünk tőle, ennek hatása figyelembe vehető a zárt körben egy $-k_y^T Dk_u$ előreccsatoló tag bevezetésével.

Alkalmazva az előző alfejezet végén bevezetett jelöléseket, a feladat megoldásához szükséges LMI korlátozások a következőképpen írhatóak

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{B}_c \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \Xi \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{B}_c \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} \bar{C}_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (18)$$

és

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_d^T P_d + P_d \bar{A}_d + \bar{C}_d^T K_y \bar{C}_d & P_d \bar{B}_d \\ \bar{B}_d^T P_d & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (19)$$

ahol $\Pi = \begin{bmatrix} -K_y & 0 \\ 0 & \beta^2 I \end{bmatrix}$. Hasonlóan az előző alfejezethez, itt is bevezetésre került

a diadikus szorzatként adódó $K_y = k_y k_y^T$ kimenet transzformációs mátrix.

4.2. Módszer. Kimeneti transzformációs vektor tervezése. A rendszerhez tartozó k_y optimális kimeneti transzformációs vektor a K_y mátrix legnagyobb szinguláris értékéhez tartozó baloldali szinguláris vektoraként számítható. K_y kielégíti a következő optimalizálási feladatot.

$$\begin{aligned} & \min_{P_d, K_y, P_c, Q, \beta^2, \gamma^2} && -\beta^2 + \gamma^2 \\ & \text{korlátozások: (18), (19), } && P_d = P_d^T, P_d \succeq 0, \\ & && P_c = P_c^T, Q = Q^T, Q \succeq 0, \\ & && K_y = K_y^T, 0 \preceq K_y \preceq I, \text{ és rang}(K_y) = 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Ezen probléma megoldása szintén a javasolt 4.1., valamint 4.2. eljárásokkal lehetséges.

Végezetül a kapott k_u és k_y vektorokat alkalmazva az egyes alrendszerre, a szétcsatolt rendszerfelírás a következő alakban adódik:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{\{c,d\}}(t) &= A_{\{c,d\}}x_{\{c,d\}}(t) + B_{\{c,d\}}k_u\bar{u}(t), \\ \bar{y}_{\{c,d\}}(t) &= k_y^T C_{\{c,d\}}x_{\{c,d\}}(t).\end{aligned}\tag{21}$$

5. Demonstrációs példa

A kidolgozott eljárást egy egyszerű példán keresztül mutatjuk be, ahol a rendszer az alábbiak szerint adott

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ 0 & A_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.6 & 0 \\ -1.6 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -1.4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_c \\ B_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.1 & 0.3 \\ -0.4 & -0.2 & 0.1 \\ -0.6 & -0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} C_c & C_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & -0.8 \\ -0.8 & -0.7 & -0.9 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{22}$$

A rendszer két stabil módból áll, ahol az elsőt szeretnénk irányítani, és a másodikat lecsatolni. Mielőtt a rendszer szétcsatolásával foglalkoznánk, vizsgáljuk meg annak viselkedését irányíthatóság és megfigyelhetőség szempontjából! A rendszer állapotainak irányításához szükséges energia, illetve az állapotok megfigyelhetőségének mértéke az úgynevezett irányíthatósági és megfigyelhetőségi Gram mátrixok sajátértékeivel számszerűsíthető. Az irányíthatósági Gram mátrix az

$$AW + WA^T + BB^T = 0,\tag{23}$$

egyenlet pozitív definit W megoldásaként számítható. Ezek az egyes alrendszerre lebontva

$$\lambda_c(W_c) = [0.4096 \quad 0.5904], \quad \text{és} \quad \lambda_d(W_d) = 0.3714\tag{24}$$

értékeket veszik fel a szétcsatolás előtt.

A k_u és k_y transzformációs vektorokat az előző fejezet alapján számíthatjuk. A frekvencia tartományt, ami felett a szétcsatolást el szeretnénk érni, a $[0 \quad \omega_n]$ rad/s intervallumként határoztuk meg, ahol ω_n az első módus természetes frekvenciája. A 4.2. megoldási megközelítést alkalmazva a

$$k_u^T = [-0.7979 \quad -0.0167 \quad -0.6026]^T \quad \text{és} \quad k_y^T = [-0.6956 \quad 0.7185]^T$$

vektorokat kaptuk eredményül. Ha alkalmazzuk őket a rendszer bemenetére és kimenetére, a reprezentáció a következőképp módosul:

$$Bk_u = \begin{bmatrix} B_c \\ B_d \end{bmatrix} k_u = \begin{bmatrix} -0.7376 \\ 0.2622 \\ \approx 0 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$k_y^T C = k_y^T \begin{bmatrix} C_c & C_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5748 & -1.0594 & -0.0902 \end{bmatrix}.$$

Az eredményekből látható, hogy az algoritmus nagy súlyokat rendel az irányítandó alrendszerhez tartozó elemekhez, míg minimalizálni igyekszik a lecsatolandókhoz tartozó elemeket. Ennek megfelelően az irányíthatósági Gram mátrix sajátértékei is úgy változnak, hogy a lecsatolandó alrendszerhez tartozóak jelentősen csökkennek

$$\lambda_c(\tilde{W}_c) = \begin{bmatrix} 0.2901 & 0.4759 \end{bmatrix}, \text{ és } \lambda_d(\tilde{W}_d) = 3.58 \cdot 10^{-14} \approx 0. \quad (26)$$

Mivel az irányításhoz szükséges energia a Gram mátrix sajátértékeinek reciprokával arányos, ezért látszik, hogy a transzformációk alkalmazása után egy SISO szabályzó gyakorlatilag nem tud hatást gyakorolni a leválasztandó alrendszerre. Mindeközben az irányítandó alrendszerhez tartozó sajátértékek csak kis részben változtak, tehát nem romlott jelentősen az irányíthatóságuk.

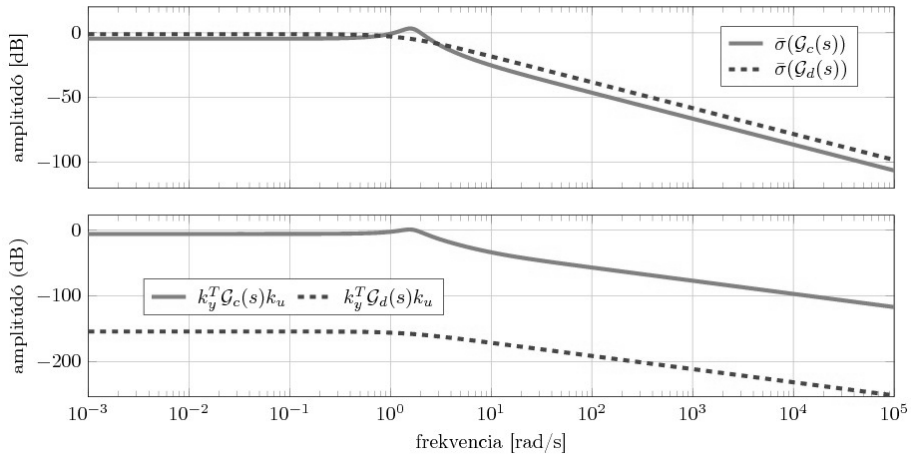
Az eredmények átfogó grafikus szemléltetése az alrendszerek szinguláris érték görbéinek segítségével adható meg. Így áttekinthető, hogy a teljes frekvencia tartományon hogyan változik a gerjesztő jelek átvitele a transzformációk alkalmazásának hatására. A 2. ábra felső alábrája szemlélteti az alrendszerek maximális érzékenységét a frekvencia függvényében. A transzformációk alkalmazása után már minden alrendszerhez csak egy átviteli függvény és így csak egy szinguláris érték görbe tartozik. Ezen görbét a 2. ábra alsó alábrája szemlélteti. Jól látható, hogy az irányítandó alrendszer az elérhető maximális érzékenységét közel megőrizte, miközben a lecsatolandó alrendszer átvitele minden frekvencián jelentősen gyengült.

6. Nyitott kérdések

A kidolgozott módszertan számos új kutatási területet nyit meg, illetve matematikailag is érdekes feladatokat fogalmaz meg, melyeket röviden ismertetünk.

Szétcsatolhatósági feltétel

Jelenleg nem ismert olyan metrika, amely segítségével az alrendszerek szétcsatolhatóságát jellemezhetnénk. A korábban hivatkozott [2] cikkben azonban röviden foglalkoztunk a szétcsatolhatóság feltételével az alábbiak szerint.



2. ábra. Felső: Az alrendszerek legmagasabb szinguláris érték görbéi transzformációk nélkül. Alsó: A szinguláris értékek a transzformáció alkalmazása után.

A [17] cikk bemutatja, hogy a $|q_i^T b_j| = |q_i| |b_j| \cos(\theta_{ij})$ elem nagysága az i . módus j . bemenetről történő irányíthatóságának egy megfelelő jellemzése. Az összefüggésben q_i az i . módus baloldali sajátvektora, b_j a j . bemenethez tartozó bemeneti vektor (a B mátrix i . módushoz tartozó partíciójának j . oszlopa), θ_{ij} pedig a két vektor által bezárt szög. Annak érdekében, hogy az alrendszer irányítható legyen a j . bemenetről, a b_j vektor nem tartalmazhat csupa 0 elemeket. Továbbá ezen vektor elemeinek nagysága jellemzi, hogy mekkora hatást tudunk gyakorolni a kiválasztott alrendszerre az adott bemeneten keresztül, így az irányíthatóság egy mérőszáma. Modális alakban az érvelés tovább egyszerűsödik, hiszen nem szükséges a két vektor és a közbezárt szögük kiszámítása. Ebben az esetben a modális alak B mátrixából kiolvasott b_j vektor közvetlenül jellemzi az adott bemenet hatását a módusra. Ezek alapján a bemenet transzformáció során a $B_c k_u$ vektornak az elemeit maximalizálni kell, miközben a $B_d k_u$ vektor elemeit minimalizálni. Ez nyilvánvalóan elérhető, ha a B_c mátrix sorai által kifizített altér távol fekszik a B_d sorai által kifizített altértől. Hasonló érvelés mondható el a rendszer kimenetéhez kapcsolódóan is.

Kérdés, hogy lehet-e ennél szisztematikusabb eljárást bemutatni arról, hogy milyen feltételeknek kell teljesülnie ahhoz, hogy két alrendszert szétcsatlakoztassunk egymástól. Illetve, hogy milyen feltételek szerint határozható meg, hogy legfeljebb hány alrendszert lehet egymástól függetlenül irányítani.

Nem konvex rang feltétel

Ahogy az optimalizálási feladat javasolt megoldásai során bemutattuk, a rangfeltétel teljesítéséhez alkalmazott megoldások bizonyos fokú heurisztikát tartalmaznak, és így nem garantálnak globális optimumot a probléma megoldása során. Nyitott kérdésként merül fel, hogy vajon megoldható-e úgy a rangfeltétel kielégítése, hogy az ne heurisztikus eljárásokon alapuljon, vagy átfogalmazható-e úgy a problémafelírás, hogy elkerüljük az egy rangú transzformációs mátrixok bevezetését. Ígéretes irányvonalnak tekintjük az elmúlt években kidolgozásra került Lagrange-dualitáson alapuló megoldásokat, melyek konvex feladatra vezetnek vissza a rangfeltételt.

Változó paraméterű rendszerek

Az eljárás kiterjeszthető Lineáris Változó Paraméterű rendszerekre is, ahogyan azt [18] megmutattuk. Mindamellet, hogy erre a rendszerosztályra is sikerült szétcsatolást elérnünk, számos nyitott kérdéssel találkoztunk. Példaként említjük a változó paraméterű rendszerekre vonatkozó rangfeltételnek a definícióját és számítási módját. Hogyan definiálható egy mátrixfüggvény esetén a rangfeltétel, illetve hogyan számítható az?

Bizonytalan rendszerek

Legújabb kutatási eredményeink bizonytalan rendszerek szétcsatolására vonatkoznak. Ennek első lépéseként kiterjesztést kellett adnunk a minimális érzékenységnek olyan esetekre is, amikor a rendszer leírása nem pontosan ismert. Ez lényegében egy legrosszabb eset (worst-case) érzékenységgént értelmezhető. Ennek számítása különböző bizonytalansági struktúrák esetén (pl. politopikus, Lineáris Tört Transzformációval, vagy Kvadratikus Integrál Korlátozással leírt) hasonló alapelvek mentén történik, azonban számos új kihívást tartogat.

7. Konklúzió

Be és kimeneti transzformációs vektorok alkalmazásán alapuló szétcsatolási eljárást mutattunk be dinamikus rendszerek alrendszerre bontásához kapcsolódóan. Az alkalmazott megközelítés segítségével a rendszerhez egyszerűbb felépítésű strukturált szabályzó tervezhető, miközben a különböző szabályzási körök közti interakció minimálisra csökkenthető. Egy egyszerű példán keresztül bemutattuk az algoritmus működését, és szemléltettük hogy megfelelő transzformációs vektorok alkalmazásával a kiválasztott alrendszerek a teljes frekvenciatartományon szétcsatolhatóak egymástól.

8. Támogatások



A bemutatott eredményekhez vezető kutatást az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatta az Új Nemzeti Kiválóság Program ÚNKP-19-4 pályázatán keresztül.

A jelen publikációban megjelenő kutatások az Innovációs és Technológiai Minisztérium Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott TKP2020 Intézményi Kiválóság Alprogram támogatásával, a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal által kibocsátott támogatói okirat alapján valósultak meg (projekt azonosító: TKP2020 BME-IKA-MIFM).

A publikációban szereplő kutatást, amelyet a SZTAKI valósított meg, az Innovációs és Technológiai Minisztérium és a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal támogatta az Autonóm Rendszerek Nemzeti Laboratórium keretében.

Hivatkozások

- [1] P. APKARIAN, M. N. DAO, AND D. NOLL: *Parametric robust structured control design*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. **60** No. **7**, pp. 1857-1869 (2015). DOI: 10.1109/TAC.2015.2396644
- [2] T. BAÁR AND T. LUSPAY: *Decoupling through input-output blending*, International Journal of Control, Vol. just-accepted, pp. 1-15 (2020). DOI: 10.1080/00207179.2020.1773540
- [3] B. P. DANOWSKY, P. THOMPSON, D.-C. LEE, AND M. J. BRENNER: *Modal isolation and damping for adaptive aeroservoelastic suppression*, in AIAA Atmospheric Flight Mechanics (AFM) Conference, (2013). DOI: 10.2514/6.2013-4743
- [4] M. PUSCH AND D. OSSMANN: *H₂-optimal blending of inputs and outputs for modal control*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, pp. 1-8 (2019). DOI: 10.1109/TCST.2019.2942281
- [5] T. KAILATH: *Linear systems*, Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, Vol. **156**, (1980). ISBN 0 13 536961 4
- [6] J. L. WANG, G.-H. YANG, AND J. LIU: *An LMI approach to H₋ index and mixed H₋/H_∞ fault detection observer design*, Automatica, Vol. **43** No. **9**, pp. 1656-1665 (2007). DOI: 10.1016/j.automatica.2007.02.019
- [7] K. GLOVER AND A. VARGA: *On solving non-standard H₋/H₂/H_∞ fault detection problems*, in 2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, IEEE, pp. 891-896 (2011). DOI: 10.1109/CDC.2011.6160723
- [8] T. IWASAKI, G. MEINSMAN, AND M. FU: *Generalized S-procedure and finite frequency KYP lemma*, Mathematical Problems in Engineering, Vol. **6** No. **2-3**, pp. 305-320 (2000). DOI: 10.1155/S1024123X00001368
- [9] H. WANG AND G.-H. YANG: *A finite frequency domain approach to fault detection observer design for linear continuous-time systems*, Asian Journal of Control, Vol. **10**, No. **5**, pp. 559-568 (2008). DOI: 10.1002/asjc.56

- [10] C. SCHERER AND S. WEILAND: *Linear matrix inequalities in control*, Lecture Notes, Dutch Institute for Systems and Control, Delft, The Netherlands, (2000).
<https://www.imng.uni-stuttgart.de/mst/files/LectureNotes.pdf>
- [11] J. LIU, J. L. WANG, AND G.-H. YANG: *An LMI approach to minimum sensitivity analysis with application to fault detection*, *Automatica*, Vol. **41** No. **11**, pp. 1995-2004 (2005). DOI: 10.1016/j.automatica.2005.06.005
- [12] T. IWASAKI AND S. HARA: *Generalization of Kalman-Yakubovic-Popov lemma for restricted frequency inequalities*, in Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003., IEEE, Vol. **5**, pp. 3828–3833 (2003). DOI: 10.1109/ACC.2003.1240432
- [13] T. BAÁR AND T. LUSPAY: *An $H - /H_\infty$ blending for mode decoupling*, in 2019 American Control Conference (ACC). IEEE, pp. 175-180 (2019).
DOI: 10.23919/ACC.2019.8814947
- [14] K. M. GRIGORIADIS AND E. B. BERAN: *Alternating projection algorithms for linear matrix inequalities problems with rank constraints*, in Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control, SIAM, pp. 251-267 (2000).
<https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9780898719833.ch13>
- [15] D. G. LUENBERGER: *Optimization by vector space methods*. John Wiley & Sons, (1997). ISBN 9780471181170.
- [16] P. RÓZSA AND G.-NÉ STUBNYA: *Lineáris algebra és alkalmazásai*. Tankönyvkiadó (1991). ISBN 963 18 3163 9.
- [17] A. HAMDAN AND A. NAYFEH: *Measures of modal controllability and observability for first- and second-order linear systems*, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. **12** No. **3**, pp. 421-428 (1989). DOI: 10.2514/3.20424
- [18] T. BAÁR, P. BAUER, AND T. LUSPAY: *Parameter varying mode decoupling for LPV systems*, Presented at the 2020 IFAC World Congress, (2020). Conference date: July 11-17, 2020.



Baár Tamás 1989-ben született Budapesten. A budapesti Toldy Ferenc gimnáziumban érettségizett, majd tanulmányait a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Karán folytatta. 2016-ban szerezte járműmérnöki mesterszakos diplomáját. Doktori tanulmányait Luspay Tamás vezetésével a Kandó Kálmán Doktori Iskolában végzi. Kutatása során nagy komplexitású rendszerek analízisének és szintézisének egyszerűsítésével foglalkozik, a be- és kimeneti jelek optimális felhasználását alapul véve. Emellett a Számítástechnikai és Automatizálási

Kutató Intézet Rendszer- és Irányításelméleti Kutatólabor tudományos segédmunkatársaként dolgozik.

BAÁR TAMÁS

ELKH, SZTAKI, Rendszer- és Irányításelméleti Kutatólabor
1111 Budapest, Kende u. 13-17.
baartamas@sztaki.hu



Luspay Tamás 2006-ban végzett a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Közlekedésmérnöki Karán. 2006-tól fiatal kutatóként dolgozott a Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetében. PhD fokozatát 2011-ben szerzett a BME Baross Gábor Közlekedéstudományi Doktori Iskolában. 2011-től 2015-ig a University of Houston Mechanical Engineering karán végezte poszt-doktori kutatásait. 2015-től a SZTAKI Rendszer- és Irányításelméleti Kutatólabor tudományos munkatársa. Kutatási területe a dinamikus rendszerek irányítása, analízise, különös tekintettel a nagyméretű, nemlineáris (változó paraméterű) komplex rendszerekre.

LUSPAY TAMÁS

ELKH, SZTAKI, Rendszer- és Irányításelméleti Kutatólabor
1111 Budapest, Kende u. 13-17.
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék
1111 Budapest, Stoczek u. 2. St. épület, 1. emelet 110.
tluspay@sztaki.hu

DECOUPLING OF DYNAMICAL SYSTEMS BY INPUT AND OUTPUT
TRANSFORMATIONS

TAMÁS BAÁR, TAMÁS LUSPAY

The paper presents a novel decoupling method, based on blending the input and output signals of linear dynamical systems. For this purpose, blend vectors are introduced and calculated such that the minimum sensitivity of the controlled mode is maximized, while the worst case gain of the other subsystems is minimized from the blended input to the blended output. The problem is transformed to a standard optimization program subject to Linear Matrix Inequality constraints. An academic example is given to validate the method and to illustrate how the proposed approach can be applied for control engineering problems.

PÁROS MUNKÁK ÜTEMEZÉSE KORAI ÉS KÉSŐI BEFEJEZÉS BÜNTETÉSÉVEL – EGY BONYOLULTSÁGELMÉLETI EREDMÉNY

BÉKÉSI JÓZSEF, DÓSA GYÖRGY, GALAMBOS GÁBOR

Az egy művelettel rendelkező, egygépes ütemezési feladatokat széles körben elemezték. Kimutatták, hogy azok a feladatok, amelyekben a célfüggvényt a munkák elvárt befejezési idejéhez viszonyított korai ill. késői ütemezés költsége határozza meg (ET-feladat) bonyolultságelméleti szempontból sok esetben másképpen viselkednek, mint a „klasszikus” – a legkésőbbi befejezési időt minimalizáló – feladatok. Wan és Yuan [20]-ban bebizonyította, hogy általános esetben az ET-feladat erősen \mathcal{NP} -nehéz.

Az egy művelettel rendelkező, egygépes ET-feladat felfogható a kétműveletes probléma (CTP-feladat) speciális eseteként. Ebben az esetben a második művelet hossza 0, és a várakozási idő is 0. Így a páros munkák ütemezéséhez tartozó minden olyan ET-feladat is erősen \mathcal{NP} -nehéz, amelyben az egyes tevékenységekhez tartozó második művelet hossza konstans, és megegyezik a két művelet közötti várakozási idővel. Ebben a cikkben a korábbiaknál egyszerűbb bizonyítást adunk arra, hogy az ilyen feladat \mathcal{NP} -nehéz.

1. Bevezetés

A cikk páros munkák ütemezésével (CTP feladat) foglalkozik. A feladatot ebben a formában először Sherali és Smith definiálta a [17] cikkben: adott kétfázisú munkák egy $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ halmaza. Minden J_i munka két műveletből áll, amelyeknek végrehajtási ideje rendre a_i és b_i . Az ütemezést egy gépen kell végrehajtani úgy, hogy a műveletek nem megszakíthatók. Az általunk vizsgált feladatban a második művelet kezdési ideje és az első művelet befejezési ideje között pontosan L_i várakozási időnek kell eltelni. Egy munka akkor van befejezve, ha mindkét műveletét elvégeztük. A futtatáshoz használt gép bármely időintervallumban maximum egy műveletet képes végrehajtani. A feladat az, hogy ütemezzük úgy a munkákat az adott gépen, hogy egy előre adott célfüggvény szélsőértékét megkapjuk.

Az elmúlt évtizedekben többnyire olyan feladatokat vizsgáltak, amelyeknek a célfüggvénye a maximális végrehajtási idő minimalizálása volt. Ezt a problémát először Shapiro vizsgálta [16]-ban, később Orman és Potts [14]-ben elemezte a

problémát bonyolultságelméleti szempontból. A vizsgált feladatokat egy irányított gráfban ábrázolták, ahol a gráf csúcspontjaiban a speciális esetek helyezkednek el, és irányított él mutat egy csúcspontból egy másik csúcspontba akkor, ha végpont a kiinduló ponthoz tartozó speciális eset egyfajta általánosításával kapható meg. Ebben a bonyolultsági gráfban az erősen \mathcal{NP} -nehéz osztályba sorolt esetek jól elkülönülnek a polinomiális időben megoldható problémáktól. Az ún. identikus munkák – $1|(a, L, b)|C_{\max}$ – ütemezésének algoritmikus bonyolultsága nyitva maradt. Ennek a feladatnak a megoldására Ahr és mtsai [3]-ban javasoltak egy olyan dinamikus programozásra alapuló gráf modellt a megoldásra, amelynek bonyolultsága $O(nr^{2L})$, ahol $r = a^{-\sqrt{a}}$. Később, Baptiste megmutatta, hogy a probléma megoldására adható $O(\log n)$ bonyolultságú algoritmus, ha a , L és b rögzített (lásd [5]). Ismereteink szerint az identikus műveletek ütemezésének a bonyolultsága továbbra is nyitott maradt. Az $1|(a_i, L_i, b_i)|C_{\max}$ feladat közelítő megoldására több algoritmust is elemeztek (lásd pl. [2], [13]). Yu és mtsai [19]-ben bebizonyították, hogy az $1|(1, L_j, 1)|C_{\max}$ feladat erősen \mathcal{NP} -nehéz. Erre a feladatra adtak egy $7/4$ -es approximációs algoritmust [1]-ben és [6]-ban. Ha a munkák ütemezésének sorrendje kötött, akkor a feladat bonyolultsága nem minden esetben egyszerűsödik (lásd pl. [15]). (Egy kötött sorrendű ütemezésben ha a J_i job megelőzi a J_j jobot, akkor mind az a_i , mind a b_i művelet az a_j ill. b_j művelet előtt kerül végrehajtásra.) Erre a speciális esetre Blazewicz és mtsai [7]-ben az $1|(a_j, L_j, b_j), \text{fjs}|C_{\max}$ jelölést használták, ahol az „fjs” a második mezőben mutatja a fixed-job-sequence feltételt. Ugyanebben a cikkben a szerzők vizsgálták az $1|(1, L, 1), \text{prec}|C_{\max}$ feladatot, amelyben a munkák sorrendjére kötött precedencia szabályok vonatkoznak, és bebizonyították, hogy már ebben a nagyon speciális esetben is a feladat erősen \mathcal{NP} -teljes marad, de az $L = 2$ esetre egy $O(n)$ idejű algoritmust fejlesztettek. A fixed-job-sequence feladatot Hwang és Lin is vizsgálta [11]-ben, és – más speciális esetek mellett – polinomiális idejű algoritmust adtak a $1|(a_j, p, p), \text{prec}|C_{\max}$ feladatra is.

Egészen a közelmúltig más célfüggvénnyel rendelkező CTP feladatot bonyolultságelméleti szempontból nem vizsgáltak. A közelmúltban Chen és Zhang [8]-ban átfogóan elemezte azt a CTP feladatot, amelyben a célfüggvény a végrehajtási idők összegének a minimalizálása, $1|(a_i, L_i, b_i)|\sum C_i$. A [8] cikkben a szerzők feltérképezték a teljes bonyolultsági gráfot, és minden esetben megadták a vizsgált esetek algoritmikus bonyolultságát. Több más speciális eset mellett a $1|(a_i, p, p)|\sum C_i$ problémáról megmutatták, hogy az polinomiális időben megoldható.

Ebben a cikkben a következő feladatot fogjuk vizsgálni. Adott egy CTP feladat egzakt várakozási idővel. A J_i munkához adva van egy d_i előírt befejezési idő. Jelöljük a J_i munka σ ütemezésen belüli befejezési idejét $C_i(\sigma)$ -val, és legyen a munkához tartozó korai ill. késői befejezés költsége $E_i(\sigma) = \max\{0, d_i - C_i(\sigma)\}$ és $T_i(\sigma) = \max\{0, C_i(\sigma) - d_i\}$. Ekkor a \mathcal{J} példa költsége a σ ütemezésben

$$\text{cost}(\sigma, \mathcal{J}) = \sum_{i=1}^n (E_i(\sigma) + T_i(\sigma)).$$

A feladatot *ET-feladatnak* nevezzük.

Az ET-feladat gyakorlati alkalmazása az ún. „just-in-time” gyártással függ össze. Ennek során a korai és a késedelmes gyártás egyaránt kiemelten van kezelve, mert mindkettő költséggel jár akkor, ha a gyártás az elvárt rendelkezésre állási – szállítási, lejárat, befejezési – időnél korábban vagy későbbben történik. Az első esetben raktározási költségek merülnek fel, az utóbbi esetben pedig kötbér fizetési kötelezettség léphet fel. Ezért ideális esetben egy jó ütemezés akkor történik, ha az áru (munka) akkorra készül el (akkor lesz befejezve), amikor annak éppen rendelkezésre kell állnia (az eredményre szükség van).

A „klasszikus” – egy művelettel rendelkező – egygépes korai-, ill. késői ütemezési feladatokra Baker és Scudder [4]-ben adott egy áttekintést. Az első publikált eredmények általában a legkorábbi gyártás ill. a legkésőbbi elkészülés minimalizálását tűzték ki célul. Sidney [18]-ben adott egy hatékony algoritmust az optimális ütemezésre. Lakshminarayan és mtsai [12]-ben egy $O(n \log n)$ idejű javítást adtak az optimális megoldásra. Garey és mtsai [9]-ben bebizonyították, hogy az $1 \parallel \sum (E_j + T_j)$ feladat az általános értelemben \mathcal{NP} -nehéz. Hall [10] azt látta be, hogy a feladat \mathcal{NP} -nehéz marad akkor is, ha az összes munkának azonos a lejárat ideje. Wan és Yuan [20]-ban bebizonyította, hogy általános esetben a $1 \parallel \sum (E_j + T_j)$ feladat erősen \mathcal{NP} -nehéz.

Ha a *CTP* feladatot vizsgáljuk, akkor az látható, hogy ha minden munka közös elvárt befejezési idővel rendelkezik, és bármely \mathcal{J} példa esetén a közös elvárt befejezési idő értékére $d(\mathcal{J}) = 0$, akkor az ET-feladat megegyezik a [8]-ban vizsgált problémával. Ha a munkákhoz egymástól független előírt befejezési időt rendelhetünk, akkor a speciális feladatok bonyolultságelméleti szempontból másképpen viselkedhetnek. Azt fentebb láttuk, hogy az (a_j, p, p) paraméterekkel rendelkező feladat különböző célfüggvények esetén polinomiális megoldással rendelkezik.

Az egy művelettel rendelkező, egygépes ET-feladat felfogható a kétműveletes probléma speciális eseteként. Ebben az esetben a második művelet hossza 0, és a várakozási idő is 0, azaz a feladat a $1 \parallel (a_j, 0, 0) \parallel \sum (E_j + T_j)$ jelöléssel írható le. Így az $1 \parallel (a_j, p, p) \parallel \sum (E_j + T_j)$ *CTP*-feladat is erősen \mathcal{NP} -nehéz. Ebben a cikkben az általánosabb feladat $1 \parallel (a_j, p, p) \parallel \sum (E_j + T_j)$ – bonyolultságára adunk egy új, egyszerűbb bizonyítást. Azt mutatjuk meg, hogy a *CTP* probléma esetén az ET-feladat algoritmikus bonyolultsága ekvivalens a – közismerten erősen \mathcal{NP} -nehéz – 3-partícionálási feladat komplexitásával. A bizonyításban alapvetően a [20]-ban megadott technikát követjük, azonban a konstrukció során definiált ún. „rövid” munkák hosszának eltérő választásával el tudtuk érni, hogy az optimális megoldáshoz tartozó összes eltérés kisebb, és egyszerűbben meghatározható, továbbá a konstrukcióban szereplő konstansok – M_p és M_s – értéke jelentősen csökkenthető, ezáltal a bizonyítás áttekinthetősége is javul.

3-Partícionálási Feladat (3PP). Adva van $3u + 1$ pozitív egész szám: $\alpha_1, \dots, \alpha_{3u}$ és B , amelyekre érvényes, hogy $\sum_{j=1}^{3u} \alpha_j = uB$ és $\frac{B}{4} < \alpha_j < \frac{B}{2}$,

$1 \leq j \leq 3u$. A kérdés az, hogy létezik-e az $A = \{1, 2, \dots, 3u\}$ index halmaznak olyan A_1, A_2, \dots, A_u diszjunkt halmazokra történő felbontása, amelyekre $|A_i| = 3$, és $\sum_{j \in A_i} \alpha_j = B$, ahol $1 \leq i \leq u$.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy egy 3PP feladatban $\alpha_j \geq 3$ minden j -re.

2. A $1|(a_j, p, p)| \sum(E_j + T_j)$ feladat bonyolultsága

Legyen adott egy 3PP feladat az $\alpha_1, \dots, \alpha_{3u}, B$ konstansokkal. Definiáljuk az

$$M_p = 12u^2 \quad \text{és} \quad M_s = M_p B u^2 = 12B u^4.$$

konstansokat, és konstruáljuk meg a következő $1|(a_j, p, p)| \sum(E_j + T_j)$ ütemezési feladatot, amelyben a munkák halmazát jelölje \mathcal{J} . A munkáknak két típusát különböztetjük meg: lesz $3u$ darab particionáló és uM_s rövid (short) munka. Ekkor $\mathcal{J} = \{\mathcal{P}, \mathcal{S}\}$.

- Legyen $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_{3u}\}$ a particionáló munkák halmaza. Ekkor a P_i particionáló munka két műveletének végrehajtási ideje és a várakozási ideje legyen

$$a_i = M_p \alpha_i - 2 \quad b_i = 1, \quad L_i = 1.$$

Így a P_i munka az $(M_p \alpha_i - 2, 1, 1)$ hármassal írható le. Ezért a P_i munka futásiideje $M_p \alpha_i$. Legyen továbbá a munkák közös elvárt befejezési ideje $d(P_i) = 0$.

- Az uM_s darab rövid munkát osszuk u blokkba. Jelölje a rövid munkák halmazát \mathcal{S} . Ekkor $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_u\}$, ahol \mathcal{S}_i az i . blokk, amely M_s darab elemet tartalmaz, azaz $\mathcal{S}_i = \{S_{i,1}, \dots, S_{i,M_s}\}$. A rövid munkák műveleteinek végrehajtási ideje legyen $a_i = 2$, $b_i = 1$, és a műveletek közötti várakozási idő $L_i = 1$ minden $S_{i,k} \in \mathcal{S}_i$. Az $S_{i,k}$ munka a $(2, 1, 1)$ hármassal írható le. A definícióból adódik, hogy egy rövid munka végrehajtási ideje 4. Minden rövid munkának eltérő elvárt befejezési ideje van: a \mathcal{S}_i blokkba tartozó k . munkához ($1 \leq k \leq M_s$) a

$$d(S_{i,k}) = iM_p B + 4(i-1)M_s + 4k$$

előírt befejezési idő tartozik.

Ez a konstrukció pseudo-polinomiális időben elkészíthető, és polinomiális idejűvé válik, ha unáris kódolást alkalmazunk (lásd [20]). A konstrukciónak van néhány egyszerű következménye:

2.1. KÖVETKEZMÉNY. *A munkákon belüli várakozási idő nem használható fel egyetlen művelet számára sem, azaz a munkák nem ütemezhetők „átfedett” módon.*

2.2. KÖVETKEZMÉNY. *Egy particionáló munka végrehajtási ideje $M_p\alpha_i > \frac{M_p B}{4}$.*

A W_0 küszöbérték legyen

$$W_0 = 6M_s u(u-1) + \frac{3}{2}u(u+1)M_p B. \quad (1)$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy a 3PP feladatnak akkor és csak akkor van megoldása, ha a hozzá tartozó ütemezési feladatnak van olyan lehetséges megoldása, amelyre $cost(\sigma) \leq W_0$.

2.1. SEGÉDTÉTEL. *Ha a 3PP feladatnak van megoldása, akkor a hozzá tartozó ütemezési feladatnak van olyan σ lehetséges megoldása, amelyre $cost(\sigma) \leq W_0$.*

Bizonyítás. Ha a 3PP-nek van megoldása, akkor az $A = \{1, 2, \dots, 3u\}$ indexhalmaznak létezik egy olyan A_1, A_2, \dots, A_u diszjunkt halmazokra történő partíciója, amelyekre $|A_i| = 3$ és $\sum_{j \in A_i} \alpha_j = B$ minden i -re, ahol $1 \leq i \leq u$. Legyen a konstruált ütemezési feladatban a particionáló munkák halmaza a következő:

$$\mathcal{P}_{A_i} = \{P_j : j \in A_i\}.$$

Készítsük el azt a σ ütemezést, amelyben a munkákat a 0 időponttól kezdjük el ütemezni holtidő nélkül a

$$\mathcal{P}_{A_1}, \mathcal{S}_1, \mathcal{P}_{A_2}, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{P}_{A_u}, \mathcal{S}_u$$

sorrendben. A \mathcal{P}_{A_i} halmazban elhelyezkedő egyetlen munkának sem lehet nagyobb a befejezési ideje, mint $4(i-1)M_s + iM_p B$. Egy halmazon belül 3 ilyen munka van, ezért

$$cost(\mathcal{P}_{A_i}, \sigma) \leq 12(i-1)M_s + 3iM_p B. \quad (2)$$

Mivel most a \mathcal{S}_i halmazba eső munkák összköltsége $cost(\mathcal{S}_i, \sigma) = 0$, ha $1 \leq i \leq u$, ezért

$$\begin{aligned} cost(\mathcal{J}, \sigma) &\leq \sum_{i=1}^u \left\{ cost(\mathcal{P}_{A_i}, \sigma) + cost(\mathcal{S}_i, \sigma) \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^u \left\{ 12(i-1)M_s + 3iM_p B \right\} \\ &= 6M_s u(u-1) + \frac{3}{2}u(u+1)M_p B \\ &= W_0. \end{aligned}$$

□

A következő lemma előtt szükségünk van néhány egyszerű állítás bizonyítására.

2.1. ÁLLÍTÁS.

$$\frac{M_p M_s}{2} > 2M_s(3u^2 - 3u + 2) > W_0. \quad (3)$$

Bizonyítás. A bal oldali egyenlőtlenség teljesüléséhez elegendő azt belátni, hogy $M_p > 4(3u^2 - 3u + 2) = 12u^2 - 12u + 8$, ami M_p definíciójából következik.

Vizsgáljuk most a második egyenlőtlenséget. Itt – elvégezve az egyszerűsítéseket – annak kell teljesülni, hogy $8M_s > 3u(u + 1)M_p B$. Helyettesítsük be M_s definícióját, és osszunk $M_p B$ -vel. Ekkor azt kapjuk, hogy $8u^2 > 3(u + 1)$. \square

Egy lehetséges ütemezést *megfelelőnek* fogunk nevezni, ha $cost(\sigma) \leq W_0$. Egy σ megfelelő ütemezés minimális, ha bármely σ' megfelelő ütemezésre $cost(\sigma) \leq cost(\sigma')$.

2.2. SEGÉDTÉTEL. *Legyen σ egy megfelelő ütemezés. Ekkor az ütemezéshez tartozó 3PP-nek van megoldása.*

Bizonyítás. A bizonyítás első részében azt vizsgáljuk, hogy milyen szabályok teljesülnek a particionáló és a rövid munkák ütemezése során.

2.2. ÁLLÍTÁS. *Legyen S_i és S_j két olyan rövid munka, amelyek elvárt befejezési idejére $d_i < d_j$. Ekkor van olyan minimálisan megfelelő ütemezés, amelyben az S_i munka előbb van ütemezve, mint a S_j munka, azaz $s(S_i) < s(S_j)$.*

2.1. *Megjegyzés.* A 2.2. Állítás megfogalmazásában eltekintettünk a dupla alsó indextől, mert az állítás minden i, j párra igaz függetlenül attól, hogy azonos blokkon belül helyezkednek el, vagy sem.

Bizonyítás. Legyen σ egy minimálisan megfelelő ütemezés. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, és a σ ütemezésben $d_i < d_j$, de $s(S_i) > s(S_j)$.

Legyen $C_i(\sigma)$ és $C_j(\sigma)$ a két munka befejezési időpontja. Ekkor a σ ütemezésben

$$cost(S_i, S_j, \sigma) = |C_i(\sigma) - d_i| + |C_j(\sigma) - d_j|.$$

Azt tudjuk, hogy $C_j(\sigma) < C_i(\sigma)$ és $d_i < d_j$. Legyen σ' egy olyan ütemezés, amelyben a S_i és S_j munkákat megcseréljük. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} cost(S_i, S_j, \sigma') &= |C_i(\sigma') - d_i| + |C_j(\sigma') - d_j| = |C_j(\sigma) - d_i| + |C_i(\sigma) - d_j| \\ &= \max\{C_j(\sigma), d_i\} - \min\{C_j(\sigma), d_i\} \\ &\quad + \max\{C_i(\sigma), d_j\} - \min\{C_i(\sigma), d_j\} \\ &\leq \max\{C_j(\sigma), d_j\} - \min\{C_i(\sigma), d_i\} \\ &\quad + \max\{C_i(\sigma), d_i\} - \min\{C_j(\sigma), d_j\} \\ &= |C_i(\sigma) - d_i| + |C_j(\sigma) - d_j| = cost(S_i, S_j, \sigma). \end{aligned}$$

Így σ' is minimális megfelelő ütemezés.

□

A fenti Állításnak az a következménye, hogy van olyan σ minimálisan megfelelő ütemezés, amelyben a rövid munkák az elvárt befejezési idejük szerint vannak elhelyezve. Osszuk a rövid munkákat blokkokba. Egy blokkba akkor kerül az j . és az $(j + 1)$. rövid munka, ha $d(S_{j+1}) = d(S_j) + 4$. Vizsgáljuk ezek után az \mathcal{S}_i – rövid munkákat tartalmazó – blokkot.

2.3. ÁLLÍTÁS. *Van olyan minimálisan megfelelő σ ütemezés, amelyben particionáló munka nincs a rövid munkákat tartalmazó blokkon belül ütemezve.*

Bizonyítás. Legyen σ egy minimálisan megfelelő ütemezés. Először vizsgáljuk meg σ -t. Ha abban találunk olyan munkákat, ahol egy particionáló munka közvetlenül megelőz egy rövid munkát, akkor vizsgáljuk meg, hogy ezek cseréje után változik-e az ütemezés költsége? Ha a költség nem változik, akkor cseréljük meg a két munkát. Ezek után σ -ban nem marad olyan pár, amelyekre egy rövid munka közvetlenül követ egy particionáló munkát, és a munkák cseréje után az ütemezés költsége nem változik.

Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, és a σ ütemezésben a S_i halmaz két egymás utáni munkája között vannak particionáló munkák. Legyen $S_{i,j}$ és $S_{i,j+1}$ a két egymás utáni munka. Ekkor a két munka elvárt befejezési idejére igaz lesz, hogy $d(S_{i,j+1}) = d(S_{i,j}) + 4$. Tegyük fel, hogy a két rövid munka között van legalább egy particionáló munka. Legyenek ezek P_{k_1}, \dots, P_{k_r} . Jelölje s és t az ebből a halmazból legkésőbb ütemezett particionáló munka (P_{k_r}) kezdési és befejezési időpontját. Legyen továbbá $d = d(S_{i,j}) + 2$.

A. ESET. $d \leq (s + t)/2$. Cseréljük fel P_{k_r} és $S_{i,j+1}$ ütemezését. Ekkor a P_{k_r} ütemezési költsége 4-gyel növekszik. Azt tudjuk, hogy az ütemezés előtt a $S_{i,j+1}$ rövid munka későbbre van ütemezve, mint a hozzá tartozó elvárt befejezési idő.

A.1. ESET. Ha $s + 4 \geq d(S_{i,j+1})$, akkor a csere után is késni fog az $S_{i,j+1}$ rövid munka. A csökkenés nagyobb lesz, mint 4, mert bármely particionáló munka hossza lényegesen nagyobb, mint a rövid munkák hossza. Ez pedig ellentmond annak, hogy σ minimálisan megfelelő ütemezés.

A.2. ESET. Tegyük fel, hogy $s + 4 < d(S_{i,j+1})$. Ekkor a $S_{i,j+1}$ rövid munka a csere után nem késik, hanem korábban fejeződik be, mint a hozzá tartozó elvárt befejezési idő. A csere előtt a késés $t + 4 - d(S_{i,j+1}) = t + 4 - (d + 2) = t - d + 2$ volt. A csere után a munka ütemezésének a költsége $d(S_{i,j+1}) - (s + 4) = d + 2 - (s + 4) = d - s - 2$ lesz. Így az $S_{i,j+1}$ rövid munka átütemezése során a költség csökkenése legalább

$$t - d + 2 - (d - s - 2) = t + s - 2d + 4 \geq 4.$$

Ha a bal oldal nagyobb, mint 4, akkor ismét ellentmondásra jutunk. Viszont

egyenlőség nem állhat, mert – a bizonyítás elején történt csere miatt ha egyenlőség lett volna, akkor a két munkát már korábban megcseréltük volna.

B. ESET. Tegyük fel, hogy $d > (s + t)/2$. Ekkor a legkésőbbben ütemezett particionáló munka helyett tekintsük a legkorábban ütemezett particionáló munkát. (Ha $r = 1$, akkor ezt a munkát választjuk.) Ez P_{k_1} . Legyen ennek a kezdési és befejezési ideje s' és t' . Világos, hogy $d > (s' + t')/2$.

Cseréljük most meg $S_{i,j}$ és P_{k_1} ütemezését. Ekkor a particionáló munka ütemezésének a költsége 4 egységgel csökkenni fog, és a rövid munka kezdési időpontja eltolódik $t' - 4$ -be. Azt tudjuk, hogy a csere előtt a rövid munka korábban fejeződik be, mint a hozzá tartozó elvárt befejezési idő.

B.1. ESET. $t' \leq d(S_{i,j})$. Ekkor a rövid munka továbbra is korábban lesz ütemezve, és munka ütemezésének költsége legalább annyival csökken, mint a particionáló munka hossza, ami lényegesen nagyobb, mint 4. Így a csere után az ütemezés költsége csökkenni fog, ami ellentmond annak, hogy σ minimálisan megfelelő volt.

B.2. ESET. $t' > d(S_{i,j})$. Ekkor a csere után a rövid munka késni fog. A csere előtt a munka ütemezésének a költsége legalább $d(S_{i,j}) - s' = d - 2 - s'$ volt, és a csere után a költség $t' - d(S_{i,j}) = t' - d + 2$. Így a rövid munka ütemezési költségének változása

$$(t' - d + 2) - (d - 2 - s') = (t' + s') - 2d + 4 < 4$$

lesz. Itt – az utolsó egyenlőtlenséghez – kihasználtuk, hogy $d > (s' + t')/2$. Így ebben az esetben is ellentmondásra jutunk, mert a csere után az ütemezés költsége csökken.

□

Definiáljuk most az A_1 -t mint azon j indexeknek a halmazát, amelyekre a P_j particionáló munkák S_1 -t megelőzik, és legyen A_i ($2 \leq i \leq u + 1$) azon j indexek halmaza, amelyekre a P_j particionáló munkák a S_{i-1} és S_i között lettek ütemezve egy σ minimálisan megfelelő ütemezésben.

Legyen $\mathcal{P}_{A_i} = \{P_j : j \in A_i\}$, $1 \leq i \leq u + 1$. Ekkor σ -ban a munkákat a következő sorrendben ütemezzük:

$$\mathcal{P}_{A_1}, S_1, \mathcal{P}_{A_2}, S_2, \dots, \mathcal{P}_{A_u}, S_u, \mathcal{P}_{A_{u+1}}.$$

A $\mathcal{P}_{A_{u+1}}$ halmazra azért van szükségünk, mert nem tudjuk, hogy a σ ütemezés particionáló munkákkal vagy rövid munkákkal fejeződik be.

Nevezünk egy ütemezést *ideálisnak*, ha minden \mathcal{P}_{A_i} ($1 \leq i \leq u$) halmazban elhelyezett munkák összhossza pontosan $M_p B$.

2.4. ÁLLÍTÁS. A \mathcal{P}_{A_i} ($1 \leq i \leq u$) halmazban elhelyezett particionáló munkák összhossza legfeljebb $M_p B$.

Bizonyítás. Egy ideális ütemezésben legyen a j . particionáló halmazban elhelyezkedő első munka kezdési ideje s és befejezési ideje $t = s + M_p B$.

Tegyük fel, hogy az állításunk nem igaz, és van egy olyan \mathcal{P}_{A_j} , amelyben az ütemezett particionáló munkák végrehajtási idejének összege legalább $M_p B + M_p$. Ekkor \mathcal{P}_{A_j} -ben legalább 3 munka van. Mivel a \mathcal{P}_{A_j} -ben elhelyezkedő munkák összhossza legalább $M_p B + M_p$, ezért ezek a munkák vagy s előtt, vagy t után foglalnak le $M_p/2$ helyet. Egy particionáló munka hossza legalább $M_p B/4 > M_p/2$.

A. ESET. Tegyük fel, hogy a \mathcal{P}_{A_j} halmazba tartozó első munka kezdési időpontja legfeljebb $s - M_p/2$. Ekkor $j > 1$. Vizsgáljuk meg az \mathcal{P}_{A_j} halmaz előtt közvetlenül elhelyezkedő rövid munkák költségét. Ezek a munkák most korábban lettek ütemezve, és mindegyik befejezési ideje legalább $M_p/2$ -vel csökkent. Így a \mathcal{S}_{j-1} -ben ütemezett munkák összköltsége legalább $M_p M_s/2$.

B. ESET. Tegyük fel, hogy a \mathcal{P}_{A_j} halmazba tartozó utolsó munka befejezési időpontja legalább $t + M_p/2$. Vizsgáljuk meg az \mathcal{P}_{A_j} halmaz után közvetlenül elhelyezkedő rövid munkák költségét. Ezek a munkák most későbbben lesznek ütemezve, és mindegyik befejezési ideje legalább $M_p/2$ -vel nő. Így a \mathcal{S}_j -ben ütemezett munkák összköltsége legalább $M_p M_s/2$.

A 2.1 Állítás miatt mindkét esetben az ütemezés összköltsége nagyobb lesz, mint W_0 , ami ellentmond annak, hogy σ egy minimálisan megfelelő ütemezés. □

2.5. ÁLLÍTÁS. $A_{u+1} = \emptyset$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, és $A_{u+1} \neq \emptyset$. Adjunk egy alsó becslést az ütemezésben elhelyezett particionáló munkák költségére. A 2.4 Állításból következik, hogy minden \mathcal{P}_{A_i} halmazban legfeljebb 3 munka van, ahol $i = 1, 2, \dots, u$. Ezért az első három particionáló munka összes eltérése legalább 0. A következő három particionáló munkát megelőző M_s darab 4 hosszúságú rövid munka, ezért ezek összes eltérése legalább $4M_s$, függetlenül attól, hogy melyik particionáló halmazban kerülnek elhelyezésre. Folytatva ezt a gondolatot azt kapjuk, hogy az $(u-1)$. három particionáló munkára az összes eltérés legalább $4(u-2)M_s$.

Maradt 3 nem vizsgált particionáló munka. Mivel azt feltételeztük, hogy $A_{u+1} \neq \emptyset$, ezért ezek közül kettőt biztosan megelőző $(u-1)$ darab rövid munkát tartalmazó blokk. Egy ilyen blokk pontosan M_s darab 4 hosszúságú munkát tartalmaz, ezért a két particionáló munka összes költsége legalább $2[4M_s(u-1)]$. A legutoljára ütemezett particionáló munka költsége legalább $4uM_s$, mivel ezt a munkát megelőző minden rövid munka. Így – felhasználva a 2.1 Állításban bizonyított egyenlőtlenséget – kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\text{cost}(\mathcal{P}, \sigma) &\geq 3[4M_s + 8M_s + \dots + (u-2)M_s] + 8(u-1)M_s + 4uM_s \\
&= 12M_s[1 + 2 + \dots + (u-2)] + 8(u-1)M_s + 4uM_s \\
&= 6u(u-1)M_s + 4M_s \\
&= 2M_s(3u^2 - 3u + 2) \\
&> W_0.
\end{aligned}$$

Ez pedig ellentmondás, mert azt feltételeztük, hogy σ minimálisan megfelelő ütemezés volt. □

A 2.4 Állításból és a 2.5 Állításból következik, hogy $\sum_{j \in A_i} a_j \leq B$ minden $1 \leq i \leq u$ -ra, és $\sum_{i=1}^u \sum_{j \in A_i} a_j = \sum_{i=1}^{3u} a_j = B$. Ezért $\sum_{j \in A_i} a_j = uB$ minden $1 \leq i \leq u$. Így az (A_1, A_2, \dots, A_u) halmazpartíció a 3PP feladat egy lehetséges megoldása. □

A fenti levezetés eredményeként kimondható az alábbi tétel.

2.1. TÉTEL. Az $1|(a_j, p, p)| \sum(E_j + T_j)$ feladat erősen \mathcal{NP} -nehéz.

Ha a konstrukciót úgy készítjük el, hogy a particionáló ill. rövid munkákat a $(1, 1, M_p \alpha_i - 2)$ ill. $(1, 1, 2)$ hármasokkal írjuk le, akkor – a fenti bizonyítás lépéseit használva – belátható, hogy igaz a következő

2.2. TÉTEL. Az $1|(p, p, b_j)| \sum(E_j + T_j)$ feladat erősen \mathcal{NP} -nehéz.

Összefoglalás

A cikkben arra adtunk egy egyszerűbb bizonyítást, hogy az $1|(a_j, p, p)| \sum(E_j + T_j)$ CTP feladat algoritmikus bonyolultsága eltér azoktól az ütemezési feladatoktól, ahol más célfüggvényeket vizsgáltak. A [20]-ban közölt bizonyítást három ponton javítottuk: bizonyításunkban elegendő két korlátot vizsgálni a W_0 küszöbértékre, konstrukcióban a „rövid” munkák befejezési idejei különböznek, ezáltal az optimális megoldáshoz tartozó összes eltérés kisebb és egyszerűbben meghatározható, végül a munkákhoz tartozó első műveletek hosszát meghatározó képletben a konstansok értéke jelentősen kisebb, ezáltal a bizonyítás áttekinthetősége javul.

Ez azt jelenti, hogy a feladat bonyolultsági gráfjában máshol van a határ a \mathcal{P} -beli és az \mathcal{NP} -beli speciális feladatok között. A további kutatások szempontjából érdekes lehet megvizsgálni a $1|\sum(E_j + T_j)$ ET-feladatot a különböző

speciális esetekre, és ezek alapján megkonstruálni a problémához tartozó bonyolultsági gráfot. Azt érdemes előre vetíteni, hogy már a legegyszerűbbnek látszó $1|(p, p, p)|\sum(E_j + T_j)$ feladat bonyolultságának meghatározása sem tűnik egyszerűnek, így kérdéses, hogy ennek a feladatnak van-e olyan speciális esete, amelynek algoritmikus bonyolultsága \mathcal{P} -ben van.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetet mondanak a bírálóknak, akik a korábbi változat körültekintő olvasásával és konstruktív bírálatukkal jelentősen javítottak a cikk minőségén.

Békési József kutatási tevékenységét az NKFIH Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal SNN 129178 számú OTKA pályázata és az EFOP- 3.6.2-16-2017-00015 pályázata támogatta. Dósa György kutatási tevékenységét az NKFIH Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal SNN 129364 számú OTKA pályázata és az EFOP- 3.6.1-16-2016-00015 pályázata támogatta.

Hivatkozások

- [1] A.A. AGEEV, AND A.E. BABURIN, *Approximation algorithms for UET scheduling problems with exact delays*, Operations Research Letters, Vol. **35**, pp. 533–540 (2007). DOI: 10.1016/j.orl.2006.09.006
- [2] A.A. AGEEV, AND A.V. KONONOV, *Approximation algorithms for scheduling problems with exact delays*, Lecture Notes in Computer Sciences, Vol. **4368**, pp. 1–14 (2006). DOI: 10.1007/11970125_1
- [3] D. AHR, J. BÉKÉSI, G. GALAMBOS, M. OSWALD, AND G. REINELT, *An exact algorithm for scheduling identical coupled tasks*, Mathematical Methods of Operations Research, Vol. **59**, pp. 193–203 (2004). DOI: 10.1007/s00186-014-0469-6
- [4] K.R. BAKER, G.D. SCUDDER, *Sequencing with earliness and tardiness: a survey*, Operations Research, Vol. **38**, pp. 22–36 (1990). DOI: 10.1287/opre.38.1.22
- [5] P. BAPTISTE, *A note on scheduling identical coupled task in logarithmic time*, Discrete Applied Mathematics, Vol. **158**, pp. 583–587 (2010). DOI: 10.1016/j.dam.2009.10.012
- [6] J. BÉKÉSI, G. GALAMBOS, M. OSWALD, AND G. REINELT, *Improved analysis of an algorithm for the coupled task problem with UET jobs*, Operations Research Letters, Vol. **37**, pp. 93–96 (2009). DOI: 10.1016/j.orl.2008.11.002
- [7] J. BLAZEWICZ, K. ECKER, T. KIS, C.N. POTTS, M. TANAS, AND J. WHITEHEAD, *Scheduling of coupled tasks with unit processing times*, Journal of Scheduling, Vol. **13**, pp. 453–461 (2010). DOI: 10.1007/s10951-010-0167-z
- [8] B. CHEN, X. ZHANG, *Scheduling of Coupled tasks with Exact Delays for Minimum Total Job Completion Time*, J. of Scheduling (2020). DOI: 10.1007/s10951-020-00668-1

- [9] M.R. GAREY, R.E. TARJAN, G.T. WILFONG, *One-processor scheduling with symmetric earliness and tardiness penalties*, Math.of Operations Research, Vol. **13**, pp. 330–348 (1988). DOI: 10.1287/moor.13.2.330
- [10] M.N.G. HALL, W. KUBIAK, S.P. SETHI, *Earliness and tardiness scheduling problems II: deviation of completion times about a restrictive common due date*, Operations Research, Vol. **39**, pp. 847–856 (1991). DOI: 10.1287/opre.39.5.847
- [11] F.J. HWANG, AND M.T. LIN, *Coupled-task scheduling on a single machine subject to a fixed-job-sequence*, Computer Industrial Engineering Vol. **60**, pp. 690–698 (2011). DOI: 10.1016/j.cie.2011.01.002
- [12] S.V.R. LAKSHMINARAYAN, R.L. PAPINEAU, R. ROCHETTE, *Optimal single-machine scheduling with earliness and tardiness penalties*, Operations Research, Vol. **26**, pp. 1079–1082 (1978). DOI: 10.1287/opre.26.6.1079
- [13] H. LI, AND H. ZHAO, *Scheduling coupled-tasks on a single machine*, In Proceedings of 2007 IEEE symposium on computational intelligence in scheduling, Honolulu, Hawaii pp. 137–142 (2007). DOI: 10.1109/SCIS.2007.367681
- [14] A.J. ORMAN, AND C.N. POTTS, *On the complexity of coupled-task scheduling*, Discrete Applied Mathematics, Vol. **72** No. **1-2**, pp. 141–154 (1997). DOI: 10.1016/S0166-218X(96)00041-8
- [15] Y.M. SHAFRANSKY, AND V.A. STRUSEVICH, *The open shop scheduling problem with a given sequence of jobs on one machine*, Naval Research Logistics, Vol. **45**, pp. 705–731 (1998). DOI: 10.1002/(SICI)1520-6750(199810)45:7<705::AID-NAV4>3.0.CO;2-F
- [16] R.D. SHAPIRO, *Scheduling coupled tasks*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. **27**, pp. 4489–498 (1980). DOI: 10.1002/nav.3800270312
- [17] H.D. SHERALI, AND J. C. SMITH, *Interleaving two-phased jobs on a single machine*, Discrete Optimization, Vol. **2**, pp. 348–351 (2005). DOI: 10.1016/j.disopt.2005.08.002
- [18] J.B. SIDNEY, *Optimal single-machine scheduling with earliness and tardiness penalties*, Operations Research, Vol. **25**, pp. 62–69 (1977). DOI: 10.1287/opre.25.1.62
- [19] W. YU, H. HOOGEVEEN, AND J.K. LENSTRA, *Minimizing makespan in a twomachine flow shop with delays and unit-time operations is NP-hard*, Journal of Scheduling, Vol. **7**, pp. 3333–348 (2004). DOI: 10.1023/B:JOSH.0000036858.59787.c2
- [20] L. WAN, J. YUAN, *Single machine scheduling to minimize the total earliness and tardiness is strongly NP-hard*, Operations Research Letters, Vol. **41**, pp. 3693–365 (2013). DOI: 10.1016/j.orl.2013.04.007



Békési József 1963-ban született. 1987-ben végzett a JATE Matematikus szakán. PhD fokozatát 1998-ban szerezte a Szegedi Tudományegyetemen és 2020-ban habilitált. Munkahelyei: Juhász Gyula Tanárképző Főiskola (1987-2000), Szegedi Tudományegyetem (2000 óta). 2008 óta főiskolai tanár. Leginkább az ütemezésmélet és a ládapakolás különféle változataival foglalkozik. Több egyetemi jegyzet szerzője vagy társszerzője, 50-nél több tudományos publikációja van, amelyekre több mint 300 hivatkozást

kapott (Google Scholar). Köztisztületi tag, tagja a Magyar Operációkutatási Társaságnak (MOT), továbbá a Bolyai János Matematikai Társulatnak.

BÉKÉSI JÓZSEF

Számítógépes Algoritmusok és Mesterséges Intelligencia Tanszék,
Természettudományi és Informatikai Kar,
Szegedi Tudományegyetem,
POB 361, H-6701 Szeged
bekesi.jozsef@szte.hu



Dósa György 1963-ban született. 1987-ben végzett az ELTE Matematikus szakán, Operációkutatási szakirányon. PhD fokozatát 2009-ben szerezte a Szegedi Tudományegyetemen, és 2018-ban lett az MTA doktora. Munkahelyei: ELTE Operációkutatási Tanszék (1987-1991), Széchenyi István Egyetem (1991-94), Pannon Egyetem (1994 óta). Egyetemi tanár 2019 óta. Leginkább az ütemezésmélet és ládapakolás különféle változataival foglalkozik. Több egyetemi jegyzet szerzője vagy társszerzője, 100-nál több tudományos publikációja van, amelyekre

több mint 1300 hivatkozást kapott (Google Scholar). Köztisztületi tag, tagja a Magyar Operációkutatási Társaságnak (MOT), továbbá az MTA regionális szervezetének (VEAB) is tagja, két munkabizottságban, az egyiknek titkára.

DÓSA GYÖRGY

Matematika Tanszék, Műszaki Informatikai Kar,
Pannon Egyetem,
Egyetem utca 10.,
H-8200 Veszprém,
dosagy@almos.vein.hu



Galambos Gábor 1947-ben született. 1971-ben végzett a JATE Programtervező Matematikus szakán. PhD fokozatát 1992-ben védte, 1999-ben habilitált a Debreceni Egyetemen. Az MTA Doktora címet 2017-ben kapta meg, 2000-2017 időszakban egyetemi tanár az SZTE-n. Jelenleg professzor emeritusz. Fő kutatási területe: diszkrét matematikai problémák megoldására készített közelítő algoritmusok elemzése. Több külföldi egyetemen töltött hosszabb időt, többek között Augsburgban, Rotterdamban, Bolognában, Grazban és Heidelbergben volt vendégkutató vagy vendégprofesszor. Tudományos közleményeinek a száma 79, amelyekre több, mint 1400 hivatkozást kapott (Google Scholar). Köztisztviselői tag, tagja a Magyar Operációkutatási Társaságnak.

GALAMBOS GÁBOR

Informatika Alkalmazásai Tanszék,
Juhász Gyula Pedagógusképző Kar,
Szegedi Tudományegyetem,
POB 361, H-6701 Szeged,
GalambosGabor@szte.hu

ON MINIMIZING TOTAL EARLINESS AND TARDINESS OF COUPLED-TASKS – A COMPLEXITY RESULT

JÓZSEF BÉKÉSI, GYÖRGY DÓSA, GÁBOR GALAMBOS

In the paper we prove that the complexity of the CTP problem $1|(a_j, p, p)|\sum(E_j + T_j)$ differs from scheduling problems with other objective functions. This means that the line between the problems in P and NP runs along different special cases. According to the future research it can be interesting to investigate the problem $1|\sum(E_j + T_j)$ for different special cases, and taking into account these results one can construct the complexity graph. It is worth mentioning that to determine the complexity of the problem even in the simplest case $1|(p, p, p)|\sum(E_j + T_j)$ is not easy. So it is possible that this problem does not have any subcase with complexity in the class P.

LÉNYEGES KOALÍCIÓK NEM KIEGYENSÚLYOZOTT JÁTÉKOK ESETÉN

DORNAI ZSÓFIA, PINTÉR MIKLÓS

Cikkünkben az átruházható hasznosságú kooperatív játékok pre-nukleoluszának kiszámításával foglalkozunk. Huberman [5] tétele, amely a lényeges koalíciók fogalmát használja, jelentősen megkönnyítheti a pre-nukleolusz kiszámítását számítástudományi szempontból is. Huberman [5] tétele azonban csak az ún. kiegyensúlyozott kooperatív játékok esetében használható.

Ebben a cikkben két, egymástól független általánosítást adjuk Huberman tételének tetszőleges átruházható hasznosságú kooperatív játékokra. Ehhez két új fogalmat vezetünk be, amelyek a szűken lényegesség és az első rendben lényegesség. A szűken lényegesség fogalom segítségével kimondott tételek nem csak kiterjesztései a lényeges koalíciók fogalmát használó tételnek tetszőleges átruházható hasznosságú kooperatív játékokra, hanem a kiegyensúlyozott kooperatív játékok esetében is valódi általánosítást kapjuk Huberman tételének.

1. Bevezetés

A kooperatív játékelmélet egyik fő ága az átruházható hasznosságú játékok (a továbbiakban játékok) vizsgálata, ahol adott játékosok esetén adottak az egyes játékos csoportok, a koalíciók értékei, és ennek fényében vizsgáljuk, hogy az egyes játékosoknak mekkora a „fontossága” az adott játékban. Erre a kérdésre adnak különböző megközelítésű válaszokat a megoldások és az értékek. A megoldás (pl. mag [3, 10], kernel [2], alkühalmaz [1]) egy olyan halmazértékű leképezés, ami minden vizsgált játékhoz a játékosok számának megfelelő dimenziójú valós vektortér egy részhalmazát rendel, az érték pedig (pl. Shapley-érték [9], (pre)nukleolusz [8]) egy szingleton értékű megoldás.

A leggyakoribb megközelítés szerint a nagykoalíció (a játékosalmaz) értékét szeretnénk valamilyen értelemben igazságosan szétosztani a játékosok között. A mag esetében például úgy szeretnénk szétosztani a nagykoalíció értékét, hogy egyik koalíció se járjon rosszul, azaz a koalíció tagjai együttesen mindig legalább annyit kapjanak, mint amennyi az adott koalíció értéke (koalíciós racionalitás). Ilyen elosztás természetesen nem minden esetben valósítható meg, ilyenkor nevezzük a játékot nem kiegyensúlyozottnak.

Egy másik megközelítés szerint a nagykoalíció értékét úgy szeretnénk szétosztani, hogy a legrosszabbul járó koalíció a legkevésbé járjon rosszul, és legyen ugyanez igaz a második legrosszabbul járó koalícióra, és így tovább. Ez a (pre)nukleolusz háttérgondolata.

A nukleolusz és a prenukleolusz közötti különbség az, hogy a nukleolusz esetén kikötjük, hogy az egy elemű koalíciók, más néven szingletonok elégedettek legyenek (egyéni racionalitás), azaz ne kaphasson egyik játékos sem kevesebbet, mint amennyi az önálló értéke, míg a prenukleolusz esetén ilyen kikötést nem teszünk. Természetesen nem minden esetben valósítható meg, hogy úgy osszuk el a nagykoalíció értékét, hogy a szingletonok elégedettek legyenek, ilyenkor a játék nukleolusza üres, bármely egyéb esetben pedig pontosan egy elemű. A prenukleolusz esetén az egyértelműség viszont fennáll minden játékra.

A nukleolusz és a prenukleolusz kiszámítására alkalmazott emblematikus algoritmus a lexikografikus közép módszer [6, 7], ami lineáris programozási feladatok egy véges sorozata. Az egyetlen számításelméleti szempontból is releváns problémát az jelenti, hogy habár egy lineáris programozási feladat polinom időben megoldható, és elegendő a játékosok számában lineárisan sokat megoldani a (pre)nukleolusz kiszámításához, az algoritmus a játékosok számában mégsem polinomiális, mivel minden egyes koalícióhoz tartozik egy feltétel a lineáris programozási feladatban, így a játékosok számában exponenciálisan sok feltételt kell az egyes lineáris programozási feladatokban megoldani.

Mivel általános esetben maga a játék leírása (koalíciók száma) exponenciális függvénye a játékosok számának, ezért nem lehet úgy fejleszteni az algoritmust, hogy az a játékosok számában polinomiális legyen. Ugyanakkor, speciális játékoszályokon, és speciális esetekben nincs szükség a játék teljes leírására, azaz, nincs szükség minden koalíció értékét figyelembe venni a (pre)nukleolusz számítása során. Amennyiben egy játékban a figyelembe veendő koalíciók száma a játékosok számának polinomiális függvényére redukálható, akkor a (pre)nukleolusz számítása polinomiális bonyolultságú. Ezért fontos annak vizsgálata, hogy melyik koalíciók „lényegesek” a (pre)nukleolusz számítása során.

Huberman [5] megmutatta, hogy kiegyensúlyozott játékok esetén a nukleolusz kiszámításához nincs szükség a nem lényeges koalíciókra. Huberman eredménye több esetben jelentősen megkönnyíti a nukleolusz kiszámítását; pl. Huberman eredményének következménye, hogy a hozzárendelési játékok [11] nukleoluszának kiszámítása polinomiális bonyolultságú.

Huberman eredményét azóta többen továbbfejlesztették, lsd. pl. Granot et al [4], Solymosi és Sziklai [13], Solymosi [12], de legjobb tudomásunk szerint nincs még eredmény Huberman eredményének nem kiegyensúlyozott játékokra való kiterjesztésére. Mi okozza, hogy a lényeges koalíciók csak a kiegyensúlyozott játékokban elegendőek a nukleolusz kiszámításához, és hogyan lehetne módosítani ezt a fogalmat úgy, hogy az nem kiegyensúlyozott játékok esetén is használható legyen? Ez a témája cikkünknek.

Ebben a cikkben bevezetünk két, egymástól független általánosítást a lényeges koalíció fogalmának, a szűken lényeges és az elsőrendben lényeges koalíciók fogalmát. Megmutatjuk, hogy mindkét fogalom a pre nukleolusz egy-egy karakterizációs osztályát adja tetszőleges játékok esetén, azaz, tetszőleges játék esetén a pre nukleolusz kiszámításához elég a szűken lényeges koalíciókra, vagy elég az első rendben lényeges koalíciókra támaszkodni. Mindkét fogalom esetében azt használjuk ki, hogy ellentétben a maggal, a szűkmag sohasem üres, és a szűkmaghoz rendelhető úgy egy játék, hogy a pre nukleolusz a szűkmaghoz rendelt játék pre nukleolusza. A két, egymástól független új lényegesség fogalom két különböző, a szűkmaghoz tartozó játékot definiál, ebben térnek el egymástól.

A cikkben először ismertetjük azokat az alapvető játékelméleti fogalmakat amelyek a cikk olvasásához szükségesek, majd kitérünk a pre nukleolusz kiszámításához használt lineáris programozási feladatokra (3. fejezet). Ezután (4. fejezet) bemutatjuk a két új fogalmunkat, és bizonyítjuk az azokhoz tartozó karakterizációs tételeket. Az 5. fejezetben két példa segítségével szemléltetjük a két új fogalom függetlenségét, és egy további példa azt mutatja meg, hogy a szűken lényegesség fogalom a lényegesség fogalmának általánosítása a kiegyensúlyozott játékok osztályán is. Az utolsó fejezetben röviden összefoglaljuk eredményeinket.

2. Játékelméleti alapfogalmak

Adott N a játékosok nemüres, véges halmaza, és $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ halmazfüggvény (koalíciós függvény), amire $v(\emptyset) = 0$; ekkor v -t TU-játéknak nevezzük (továbbiakban játék). Az N játékoshalmazzal rendelkező játékok osztályát jelölje \mathcal{G}^N . Jelölje $\mathcal{P}^*(N) := \{S \subseteq N : S \neq \emptyset, S \neq N\}$ az összes koalíció halmazát az N játékoshalmazon az üres és a nagykoalíció kivételével, és jelölje \mathcal{D}_S az $S \subseteq N$ koalíció partícióinak osztályát $\{S\}$ kivételével.

Egy ψ halmazértékű leképezés az $A \subseteq \mathcal{G}^N$ játékosztályon *megoldás*, ha tetszőleges $v \in A$ játékra, $\psi(v) \subseteq \mathbb{R}^N$. A ψ megoldás az $A \subseteq \mathcal{G}^N$ játékosztályon *érték*, ha tetszőleges $v \in A$ játékra $|\psi(v)| = 1$, azaz, ha ψ szingleton értékű.

Jelölje $I^*(v) := \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}$ és $I(v) := \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ és } x_i \geq v(\{i\}) \forall i \in N\}$ rendre a $v \in \mathcal{G}^N$ játék *preimputációinak* és *imputációinak* halmazát. Vegyük észre, hogy a preimputációk halmaza tetszőleges játék esetén nem üres.

Egy adott $v \in \mathcal{G}^N$ játékban az $S \subseteq N$ koalíciónak az $x \in \mathbb{R}^N$ kifizetésnél vett *többlete*: $e(S, x) := v(S) - x(S)$, ahol $x(S) := \sum_{i \in S} x_i$.

Az úgynevezett *többlet vektor* $E(x) = [\dots \geq e(S, x) \geq \dots : S \in \mathcal{P}^*(N)] \in \mathbb{R}^{2^{|N|}-2}$, egy olyan $2^{|N|} - 2$ dimenziós vektor, aminek a komponensei az adott $v \in \mathcal{G}^N$ játékban az x kifizetés mellett az $S \in \mathcal{P}^*(N)$ koalíciókhoz tartozó többletek nemnövekvő sorrendbe rendezve.

A *lexikografikus rendezés* $x, y \in \mathbb{R}^n$ között a következő: $x \leq_L y$, ha $\exists k$, hogy $x_i = y_i$ $i = 1, 2, \dots, k-1$ és $x_k < y_k$, vagy $x = y$.

A $v \in \mathcal{G}^N$ játék *prenukleolusza* [8] a preimputációk azon halmaza, amelynek elemei a preimputációk között lexikografikusan minimalizálják a nemnövekvő sorrendbe rendezett többletek vektorát, azaz

$$Nu^*(v) = \{x \in I^*(v) : E(x) \leq_L E(y) \forall y \in I^*(v)\}.$$

A $v \in \mathcal{G}^N$ játék *nukleolusza* az imputációk azon halmaza, amelynek elemei az imputációk között lexikografikusan minimalizálják a nemnövekvő sorrendbe rendezett többletek vektorát, azaz

$$Nu(v) = \{x \in I(v) : E(x) \leq_L E(y) \forall y \in I(v)\}.$$

A prenukleolusz és a nukleolusz alap gondolata az, hogy szeretnénk elérni, hogy az x kifizetéssel legrosszabbul járó S koalíció a legkevesébb járjon rosszul. Majd ugyanezt meg tesszük azzal a koalícióval, amelyik a második legrosszabbul jár, és így tovább.

Fontos még itt megjegyeznünk, hogy a prenukleolusz minden játékhoz egyetlen preimputációt rendel, így ez egy érték, és, ha a játék imputációinak halmaza nem üres, akkor a nukleolusz is egyetlen imputációt rendel a játékhoz [8]. Viszont mivel egy játék imputációinak halmaza lehet üres, ezért a nukleolusz az összes játék osztályán nem érték, hanem megoldás.

Egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék magja [3, 10] a hatékony és koalíciósan racionális kifizetésvektorok halmaza, azaz

$$\text{core}(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ és } \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \text{ minden } S \subseteq N\text{-re} \right\}.$$

Magyarán szólva, a mag olyan kifizetésvektorok halmaza, amelyek úgy osztják fel az N nagykoalíció $v(N)$ értékét a játékosok között (hatékonyság), hogy minden $S \subseteq N$ koalícióra a koalícióbeli játékosok együtt nem kapnak kevesebbet a koalíció értékénél (koalíciós racionalitás), vagyis olyan kifizetésvektorokról beszélünk, amelyek mellett minden koalíció elégedett lehet, abban az értelemben, hogy a többletük nem nagyobb, mint 0. Mivel a mag nem feltétlenül egy kifizetésvektort rendel egy v játékhoz, a mag egy megoldás.

Egy játék *kiegyensúlyozott*, ha a magja nem üres. Ismert, hogy kiegyensúlyozott játékok esetén a prenukleolusz és a nukleolusz megegyezik.

A $v \in \mathcal{G}^N$ játék ε -magja a preimputációk azon részhalmaza, melyek esetén bármely $S \in \mathcal{P}^*(N)$ koalícióra $e(S, x) \leq \varepsilon$, azaz

$$\text{core}_\varepsilon(v) = \left\{ x \in I^*(v) : \max_{S \in \mathcal{P}^*(N)} e(S, x) \leq \varepsilon \right\}.$$

Vegyük észre, hogy a mag megegyezik a 0-maggal.

A $v \in \mathcal{G}^N$ játék *szűkmagja* a legszűkebb nemüres ε -magja, azaz az összes nemüres ε -mag metszete. Jelölje

$$\varepsilon^* := \min_{\text{core}_\varepsilon(v) \neq \emptyset} \varepsilon$$

a minimális nemüres ε -maghoz tartozó valós számot. Ekkor a szűkmag megegyezik $\text{core}_{\varepsilon^*}$ -gal.

Ellentétben a maggal, a szűkmag sohasem üres, ezért a szűkmaggal dolgozva kikerülhetjük a problémát, amit Huberman [5] tételében (4.1. Tétel) a mag üressége okoz.

3. A prenukleolusz kiszámítása

Ebben a fejezetben áttekintjük a *lexikografikus közép eljárást* [6, 7] – pontosabban annak egy Huberman [5] általi módosítását – aminek ismeretére a későbbiek során szükségünk lesz.

Rögzítsük a $v \in \mathcal{G}^N$ játékot, és tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{aligned} & t \rightarrow \min \\ \text{f.h. } & e(S, x) \leq t, \quad S \in \mathcal{P}^*(N) \\ & x \in I^*(v) \\ & t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1}$$

Könnyen látható, hogy az (1) feladatnak van optimális megoldása, és jelölje t_1 az (1) feladat optimumát. Legyen továbbá

$$X_1 = \{x \in I^*(v) : e(S, x) \leq t_1, \forall S \in \mathcal{P}^*(N)\}.$$

Jelölje W_1 az (1) feladatban a *fix halmazt*, azaz legyen

$$W_1 = \{S \in \mathcal{P}^*(N) : \exists c_S \in \mathbb{R}, \text{ hogy } e(S, x) = c_S, \forall x \in X_1\}.$$

Legyen $k \geq 2$, és tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{aligned} & t \rightarrow \min \\ \text{f.h. } & e(S, x) \leq t, \quad S \in \mathcal{P}^*(N) \setminus (\cup_{r=1}^{k-1} W_r) \\ & x \in X_{k-1} \\ & t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2}$$

Könnyen látható, hogy a (2) feladatnak van optimális megoldása, és jelölje t_k a (2) feladat optimumát. Legyen továbbá

$$X_k = \{x \in X_{k-1} : e(S, x) \leq t_k, \forall S \in \mathcal{P}^*(N) \setminus (\cup_{r=1}^{k-1} W_r)\}.$$

Jelölje W_k a (2) feladatban a fix halmazt, azaz legyen

$$W_k = \{S \in \mathcal{P}^*(N) : \exists c_S \in \mathbb{R}, \text{ hogy } e(S, x) = c_S, \forall x \in X_k\}.$$

Könnyen látható, hogy $t_k \geq t_{k+1}$, $X_k \supseteq X_{k+1}$ minden k -ra, és létezik k^* , hogy minden $l \geq k^*$ -ra $X_l = X_{k^*}$.

Kopelowitz [6], Maschler et al [7] bizonyították, hogy a fenti eljárás, azaz a lexikografikus közép eljárás – pontosabban a fenti eljárás a lexikografikus közép eljárás egy Huberman [5] általi módosítása, ami lényegi eltérést az eredeti eljárás-hoz képest nem jelent – a prenukleoluszt adja eredményül, azaz Kopelowitz [6], Maschler et al [7] bizonyították a következő állítást:

3.1. TÉTEL. $Nu^*(v) = X_{k^*}$.

4. Huberman eredményének általánosítása

Ebben a fejezetben ismertetjük eredményeinket. Először áttekintjük Huberman [5] eredményeit. Huberman tételének (ld. 4.1. Tétel) kimondásához először a lényeges koalíciók fogalmát kell definiálnunk.

4.1. *Definíció.* Adott egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék. Egy $S \in \mathcal{P}^*(N)$ koalíciót *lényegesnek* mondunk, ha S szingleton, azaz $|S| = 1$, vagy

$$v(S) > \max_{\mathcal{B} \in \mathcal{D}_S} \sum_{T \in \mathcal{B}} v(T).$$

Jelölje \mathcal{E}_v a v játék lényeges koalícióinak osztályát.

4.1. TÉTEL. (Huberman-tétel [5]) *Adott egy $v \in \mathcal{G}^N$ kiegyensúlyozott játék, és legyen*

$$Y_1 = \{x \in I^*(v) : e(S, x) \leq t_1, \forall S \in \mathcal{E}_v\},$$

továbbá, $k \geq 2$ -re legyen

$$Y_k = \{x \in X_{k-1} : e(S, x) \leq t_k, \forall S \in \mathcal{E}_v \setminus (\cup_{r=1}^{k-1} W_r)\}.$$

Ekkor $X_k = Y_k$ minden k -ra.

Tehát a tétel azt mondja, hogy kiegyensúlyozott játékok esetén a nukleolusz számításához nincs szükségünk a nem lényeges koalíciókra, azaz csupán a lényeges koalíciókhoz tartozó feltételek használatával felírva az (1) és a (2) lineáris

programozási feladatokat a kapott végeredmény ugyanaz lesz, sőt minden egyes iterációban is megegyezik a kapott kifizetések halmaza azzal a halmazzal, amit az összes koalícióhoz tartozó feltétel használatával kapunk a lineáris programozási feladatok megoldása során.

A következő példa azt szemlélteti, hogy mi történik akkor, ha a mag üres.

4.1. *Példa.* Legyen $N = \{1, 2, 3\}$ és

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |S| = 1 \text{ vagy } S = \{1, 2\}, \\ 4, & \text{ha } S = \{1, 3\}, \\ -1, & \text{ha } S = \{2, 3\}, \\ 2, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Ekkor $t_1 = 1 > 0$, azaz a mag üres. A lényeges koalíciók a következők: $\mathcal{E}_v = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$, a játék prenukleolusza $(2, -1, 1)$, míg ha csak a lényeges koalíciókhoz tartozó egyenlőtlenségeket figyelembe véve számoljuk a „prenukleoluszt”, akkor $(\frac{3}{2}, -1, \frac{3}{2})$ -et kapunk. Az első eltérés a második iterációban látható. Ha csak a lényeges koalíciókkal számolunk, akkor $t'_1 = 1$ és $t'_2 = -\frac{3}{2}$, míg $t_2 = -1$. Megfigyelhető, hogy csak a lényeges koalíciók ismeretében az 1-es és a 3-as játékosok felcserélhetőek, míg az eredeti játékban nem azok.

Közelebbről megvizsgálva a játékot azt látjuk, hogy az $\{1, 2\}$ koalíció okozza a problémát. Az $\{1, 2\}$ koalíció nem lényeges, de fontos abból a szempontból, hogy a t_1 -magban (szűkmag) nem redundáns az 1-es és 2-es játékosok minimális kifizetése szempontjából. Másképpen fogalmazva, mivel $t_1 = 1$, ezért $v(\{1\}) = 0$ miatt az 1-es játékosnak legalább -1 kifizetést kell kapnia, mivel $v(\{2\}) = 0$, ezért a 2-es játékosnak legalább -1 kifizetést kell kapnia, de mivel $v(\{1, 2\}) = 0$, ezért az 1-es és 2-es játékosoknak együtt legalább -1 kifizetést kell kapniuk, ami nagyobb, mint $(-1) + (-1)$.

Cikkünk alapgondolata, hogy a lényegesség definíciójának módosításával, koalíciók olyan osztályát kapjuk, ami tartalmazza az olyan látszólag nem „lényeges” koalíciókat, mint a fenti példában az $\{1, 2\}$ koalíció. Fontos megjegyeznünk, hogy kiegyensúlyozott játékok esetén a prenukleolusz és a nukleolusz egybeesik, viszont nem kiegyensúlyozott játékok esetén nem feltétlenül, így a tétel általánosításakor már fontos megkülönböztetni, hogy mikor dolgozunk a nukleolusszal, és mikor a prenukleolusszal. Mi ebben a cikkben az általánosítást a prenukleoluszcsoportra mondjuk ki.

A következő alfejezetekben ismertetjük fő eredményeinket, ami két egymástól független általánosítása a lényeges koalíciók fogalmának és Huberman tételének (ld. 4.1. Tétel).

4.1. Szűken lényeges koalíciók

Az első vizsgált általánosítása a lényeges koalíciók fogalmának a *szűken lényeges* koalíciók fogalma. A definíció alap gondolata, hogy a játék szűkmagja sosem üres, így ha $\text{core}_{\varepsilon^*}$ jelöli a szűkmagot, akkor a koalíciók értékeit ε^* -gal eltolva egy olyan játékot kapunk, aminek a magja nem üres, így igaz lesz rá a Huberman-tétel (ld. 4.1. Tétel). Vegyük észre, hogy $\varepsilon^* = t_1$, mivel mind a kettő az (1) lineáris programozási feladat optimuma.

4.2. Példa. A 4.1. Példát folytatva megfigyelhetjük, hogy mivel a lényeges koalíciók az $\mathcal{E}_v = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$ koalíciók, ezért csak ezekkel számolva a pre nukleoluszban nem lesz különbség az egyes és a hármas játékosokhoz rendelt értékek között, míg a pre nukleoluszban, ami $(2, -1, 1)$, egyértelműen különböző értékek tartoznak hozzájuk. Ebből arra következtethetünk, hogy az $\{1, 2\}$ koalíció fontos a pre nukleolusz számítása szempontjából.

A mag nem üressége esetén tudjuk, hogy az egyes koalíciók legalább annyit kapnak a pre nukleoluszban, amennyi az értékük, mivel a pre nukleolusz magbeli. A mag üressége esetén ez nyilván nem valósítható meg, de azt tudjuk, hogy a pre nukleolusz a szűkmag eleme. Mivel $t_1 = 1$, így a szűkmag megegyezik a játék 1-magjával. Emiatt annyit tudunk, hogy az $S \subseteq N$ koalíciók a pre nukleoluszban legalább $v(S) - 1$ -et fognak kapni. Így a fontosság megállapításánál is ezt az értéket érdemes figyelembe venni, és így számolva $v(\{1, 2\}) - 1 = -1 > v(\{1\}) + v(\{2\}) - 2 = -2$ valóban fennáll, ami alapján látható, hogy az $\{1, 2\}$ koalíció „lényeges” lesz ebben a játékban.

Tekintsük a szűken lényeges koalíciók definícióját:

4.2. Definíció. (Szűken lényegesség) Az $S \in \mathcal{P}^*(N)$ koalíció szűken lényeges, ha szingleton, azaz $|S| = 1$, vagy

$$v(S) - t_1 > \max_{B \in \mathcal{D}_S} \sum_{T \in B} (v(T) - t_1).$$

Jelölje \mathcal{E}_v^s a v játék szűken lényeges koalícióinak osztályát.

Könnyen látható, hogy ha a vizsgált játék magja nem üres, azaz $t_1 \leq 0$, a fenti fogalom akkor is a lényegesség fogalom általánosítása. Magyarán szólva, ha egy kiegyensúlyozott játékban egy koalíció szűken lényeges, akkor lényeges, és van olyan kiegyensúlyozott játék, ahol van olyan lényeges koalíció, ami nem szűken lényeges (ld. 5.3. Példa).

A következőkben az alfejezet fő eredményének bizonyításában használt két segédtevélt mondunk ki és bizonyítunk be.

4.1. SEGÉDTÉTEL. Legyen $S \in \mathcal{P}^*(N)$ tetszőleges nem szűken lényeges koalíció. Ekkor létezik $B^* \in \mathcal{D}_S$, hogy $v(S) - t_1 \leq \sum_{T \in B^*} (v(T) - t_1)$ és $B^* \subseteq \mathcal{E}_v^s$.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{B} = \{\mathcal{B} \in \mathcal{D}_S : v(S) - t_1 \leq \sum_{T \in \mathcal{B}} (v(T) - t_1)\}$, és legyen $\mathcal{B}^* \in \mathbf{B}$ olyan, hogy minden $\mathcal{B} \in \mathbf{B}$ -re $|\mathcal{B}^*| \geq |\mathcal{B}|$.

Indirekt tegyük fel, hogy egy $T^* \in \mathcal{B}^*$ koalíció nem szűken lényeges. Ekkor létezik $\mathcal{B}' \in \mathcal{D}_{T^*}$, hogy $v(T^*) - t_1 \leq \sum_{T' \in \mathcal{B}'} (v(T') - t_1)$, azaz

$$v(S) - t_1 \leq \sum_{T' \in (\mathcal{B}^* \setminus \{T^*\}) \cup \mathcal{B}'} (v(T') - t_1),$$

és $|(\mathcal{B}^* \setminus \{T^*\}) \cup \mathcal{B}'| > |\mathcal{B}^*|$, ami ellentmondás. □

4.2. SEGÉDTÉTEL. Legyen k tetszőleges pozitív egész, $S \in \mathcal{P}^*(N) \setminus \cup_{r=1}^{k-1} W_r$ tetszőleges koalíció, és $\mathcal{B}^* \in \mathcal{D}_S$. Ekkor létezik $T^* \in \mathcal{B}^*$, hogy $T^* \notin \cup_{r=1}^{k-1} W_r$.

Bizonyítás. Ha $k = 1$, akkor $\cup_{r=1}^{k-1} W_r = \emptyset$, tehát $T^* \notin \cup_{r=1}^{k-1} W_r$. Ha $k \geq 2$, akkor indirekt tegyük fel, hogy $\mathcal{B}^* \subseteq \cup_{r=1}^{k-1} W_r$. Ekkor minden $x \in X_{k-1}$ -re

$$e(S, x) = v(S) - x(S) = v(S) - \sum_{T \in \mathcal{B}^*} x(T) = v(S) - \sum_{T \in \mathcal{B}^*} (v(T) - c_T),$$

azaz minden $x, x' \in X_{k-1}$ -re $e(S, x) = e(S, x')$, azaz $S \in \cup_{r=0}^{k-1} W_r$, ami ellentmondás. □

A következő tétel Huberman tételének általunk javasolt első általánosítása:

4.2. TÉTEL. (Huberman [5] általánosítása I.) *Adott egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék, és legyen*

$$Y_1^s = \{x \in I^*(v) : e(S, x) \leq t_1, \forall S \in \mathcal{E}_v^s\},$$

továbbá, $k \geq 2$ -re legyen

$$Y_k^s = \{x \in X_{k-1} : e(S, x) \leq t_k, \forall S \in \mathcal{E}_v^s \setminus (\cup_{r=1}^{k-1} W_r)\}.$$

Ekkor $X_k = Y_k^s$ minden k -ra.

Bizonyítás. Az összehasonlított halmazok definíciójából következik, hogy $X_k \subseteq Y_k^s$ minden k -ra.

Indirekt tegyük fel, hogy létezik k , hogy $X_k \not\subseteq Y_k^s$, azaz létezik $y^* \in Y_k^s$ és $S \in \mathcal{P}^*(N) \setminus (\mathcal{E}_v^s \cup (\cup_{r=1}^{k-1} W_r))$, hogy $e(S, y^*) > t_k$.

A 4.1. Lemma miatt létezik $\mathcal{B} \in \mathcal{D}_S \cap \mathcal{E}_v^s$ szűken lényeges koalíciókból álló partíciója S -nek, hogy $v(S) - t_1 \leq \sum_{T \in \mathcal{B}} (v(T) - t_1)$.

Ekkor

$$\begin{aligned} v(S) - t_1 &\leq \sum_{T \in \mathcal{B}} (v(T) - t_1) \\ v(S) - y^*(S) - t_1 &\leq \sum_{T \in \mathcal{B}} (v(T) - y^*(T) - t_1) \\ e(S, y^*) - t_1 &\leq \sum_{T \in \mathcal{B}} (e(T, y^*) - t_1) \end{aligned}$$

Mivel $y^* \in Y_k^s$, $e(T, y^*) \leq t_1$ minden $T \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}_v^s$ esetén, így tetszőleges $T \in \mathcal{B}$ koalícióra $e(S, y^*) - t_1 \leq e(T, y^*) - t_1$ fennáll. A 4.2. Lemma miatt létezik $T^* \in \mathcal{B}$, hogy $T^* \notin \cup_{r=1}^{k-1} W_r$. Emiatt $e(S, y^*) \leq e(T^*, y^*) \leq t_k$ teljesül, ami ellentmondás. \square

Érdeemes lehet megjegyezni, hogy a szűken lényegesség fogalmat (4.2. Definíció) definiálhatjuk t_1 -gyel való eltolás helyett tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ konstanssal való eltolással is (a továbbiakban nevezzük ezt c -lényegességnek). Ekkor nyilván a t_1 -lényeges koalíciók megegyeznek a szűken lényeges koalíciókkal. Könnyen látható, hogy ekkor tetszőleges $t_1 \leq c$ esetén a 4.2. Tétel igaz marad szűken lényeges koalíciók helyett c -lényeges koalíciókat használva is. Természetesen minél nagyobb c konstanszt választunk, annál több c -lényeges koalíciót kapunk, míg a célunk ezek számát minél inkább csökkenteni. Amennyiben viszont egy olyan játéknak van, ahol a szűkmag meghatározása nehéz, de ismerünk egy felső becslést t_1 értékre, akkor ez az eredmény segíthet lecsökkenteni a prenukleolusz kiszámításához szükséges koalíciók számát.

4.2. Első rendben lényeges koalíciók

Az általunk javasolt második lényegesség fogalom az *első rendben lényegesség*. Az első rendben lényeges koalíció fogalmának háttérgondolata, hogy a szűkmagból kiindulva lehetséges a különböző koalíciók értékeit különböző nagyságokkal tologatni, és ezáltal kiszűrni a „lényeges” koalíciókat.

4.3. Példa. A 4.1. Példához visszatérve kiindulhatunk abból a megközelítésből, hogy a $v(S) > \max_{\mathcal{B} \in \mathcal{D}_S} \sum_{T \in \mathcal{B}} v(T)$ egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő kifejezés a mag üressége esetén túl magas, és a kérdés, hogy mennyivel kell csökkenteni ahhoz, hogy a „lényeges” koalíciókat megtarthassuk, de ne válasszunk a „lényeges” koalíciók közé „túl sok” koalíciót.

Jelölje $v_m(S)$ a szűkmag (az (1) lineáris programozási feladat) poliéderében a lehető legkisebb $x(S)$ értékeket, minden $S \subseteq N$ koalícióra. Ekkor $v_m(\{1\}) = 0$, $v_m(\{2\}) = -1$ és $v_m(\{3\}) = -1$. Amiből $v(\{1, 2\}) = 0 > -1 = v_m(\{1\}) + v_m(\{2\})$, $v(\{1, 3\}) = 4 > -1 = v_m(\{1\}) + v_m(\{3\})$ és $v(\{2, 3\}) = -1 > -2 = v_m(\{2\}) + v_m(\{3\})$, azaz minden koalíció „lényeges”.

Az 5.2. Példában megmutatjuk, hogy ez a megközelítés nem feltétlenül határoz meg bővebb koalíció osztályt, mint a szűken lényeges koalíciók osztálya.

Legyen $S \in \mathcal{P}^*(N)$ és tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{aligned} x(S) &\rightarrow \min \\ \text{f.h. } e(T, x) &\leq t_1, \quad T \in \mathcal{P}^*(N) \\ x &\in I^*(v) \end{aligned} \tag{3}$$

Könnyen látható, hogy a (3) feladatnak tetszőleges $S \in \mathcal{P}^*(N)$ esetében van optimális megoldása. Legyen $v_m(S)$ a fenti feladat optimuma, és legyen

$$v^*(S) = \min\{v_m(S), v(S)\}.$$

Tekintsük a második általunk javasolt lényegesség fogalom definícióját:

4.3. *Definíció. (Első rendben lényegesség)* Egy $S \in \mathcal{P}^*(N)$ koalíció *első rendben lényeges*, ha S szingleton, azaz $|S| = 1$, vagy

$$v(S) > \max_{\mathcal{B} \in \mathcal{D}_S} \sum_{T \in \mathcal{B}} v^*(T).$$

Jelölje \mathcal{E}_v^e a v játék első rendben lényeges koalícióinak osztályát.

A következőkben tekintsünk egy technikai eredményt, amelyre az alfejezet fő eredményének bizonyítása során lesz szükségünk:

4.3. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $S \in \mathcal{P}^*(N)$ tetszőleges nem első rendben lényeges koalíció. Ekkor létezik $\mathcal{B}^* \in \mathcal{D}_S$, hogy $v(S) \leq \sum_{T \in \mathcal{B}^*} v^*(T)$ és $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{E}_v^e$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{B} = \{\mathcal{B} \in \mathcal{D}_S : v(S) \leq \sum_{T \in \mathcal{B}} v^*(T)\}$, és legyen $\mathcal{B}^* \in \mathbf{B}$ olyan, hogy minden $\mathcal{B} \in \mathbf{B}$ -re $|\mathcal{B}^*| \geq |\mathcal{B}|$.

Tegyük fel, hogy egy $T \in \mathcal{B}^*$ koalíció nem első rendben lényeges. Ekkor létezik $\mathcal{B}' \in \mathcal{D}_T$, hogy $v(T) \leq \sum_{T' \in \mathcal{B}'} v^*(T')$, azaz, mivel definíció szerint $v^*(T) \leq v(T)$,

$$v(S) \leq \sum_{T' \in (\mathcal{B}^* \setminus \{T\}) \cup \mathcal{B}'} v^*(T'),$$

és $|(\mathcal{B}^* \setminus \{T\}) \cup \mathcal{B}'| > |\mathcal{B}^*|$, ami ellentmondás. □

A következő tétel a második általunk javasolt általánosítása Huberman tételének:

4.3. TÉTEL. (Huberman [5] általánosítása II.) *Adott egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék, és legyen*

$$Y_1^e = \{x \in I^*(v) : e(S, x) \leq t_1, \forall S \in \mathcal{E}_v^e\},$$

továbbá, $k \geq 2$ -re legyen

$$Y_k^e = \{x \in X_{k-1} : e(S, x) \leq t_k, \forall S \in \mathcal{E}_v^e \setminus (\cup_{r=1}^{k-1} W_r)\}.$$

Ekkor $X_k = Y_k^e$ minden k -ra.

Bizonyítás. Az összehasonlított halmazok definíciójából következik, hogy $X_k \subseteq Y_k^e$ minden k -ra.

Indirekt tegyük fel, hogy létezik k , hogy $X_k \not\subseteq Y_k^e$ azaz létezik $y^* \in Y_k^e$ és $S \in \mathcal{P}^*(N) \setminus (\mathcal{E}_v^e \cup (\cup_{r=1}^{k-1} W_r))$, hogy $e(S, y^*) > t_k$.

A 4.3. Lemmából következik, hogy létezik $\mathcal{B} \in \mathcal{D}_S \cap \mathcal{E}_v^e$, hogy $v(S) \leq \sum_{T \in \mathcal{B}} v^*(T)$.

Ekkor

$$\begin{aligned} v(S) &\leq \sum_{T \in \mathcal{B}} v^*(T) \\ v(S) - y^*(S) &\leq \sum_{T \in \mathcal{B}} (v^*(T) - y^*(T)) \\ e(S, y^*) &\leq \sum_{T \in \mathcal{B}} (v^*(T) - y^*(T)). \end{aligned}$$

Mivel v^* definíciója miatt $v^*(T) - y^*(T) \leq 0$ minden $T \in \mathcal{B}$ esetén, így tetszőleges $T \in \mathcal{B}$ koalícióra $e(S, y^*) \leq v^*(T) - y^*(T)$ fennáll. A 4.2. Lemma miatt létezik $T^* \in \mathcal{B}$, hogy $T^* \notin \cup_{r=1}^{k-1} W_r$, emiatt

$$e(S, y^*) \leq v^*(T^*) - y^*(T^*) \leq t_k,$$

ami ellentmondás. □

5. A két új lényegesség fogalom összehasonlítása

A 4.2. és a 4.3. Definíciókban foglalt lényegesség fogalom között semmilyen irányú tartalmazás nem áll fenn, egymástól függetlenek. Ezt a következő példákön szemléltetjük:

5.1. *Példa.* (Nem minden első rendben lényeges koalíció szűken lényeges)
Legyen $N = \{1, 2, 3\}$ és

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |S| = 1, \\ -\frac{1}{2}, & \text{ha } S = \{1, 2\}, \\ -2, & \text{ha } |S| = 2, S \neq \{1, 2\}, \\ -1, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Ebben a játékban $t_1 = \frac{1}{3}$. A szűken lényeges koalíciók (4.2. Definíció): $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$. Az $S = \{1, 2\}$ koalíció esetén

$$v(\{1, 2\}) - t_1 = -\frac{5}{6} \leq -\frac{4}{6} = v(\{1\}) + v(\{2\}) - 2t_1.$$

Az első rendben lényeges koalíciók (4.3. Definíció): $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$. Megfigyelhető, hogy ebben a játékban a szűkmag egy elemű, vagyis csak a $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ pontot tartalmazza, ami egyben a prenukleolusz is, így $v_m(\{i\}) = -\frac{1}{3}$ minden $i \in N$ esetén. Tehát az $S = \{1, 2\}$ koalíció esetén

$$v(\{1, 2\}) = -\frac{1}{2} > -\frac{2}{3} = v^*(\{1\}) + v^*(\{2\}).$$

Így ebben a játékban az $\{1, 2\}$ koalíció nem szűken lényeges, de elsőrendben lényeges.

Érdeemes megjegyezni, hogy mivel az imputációk halmaza üres, ennek a játéknak nincs nukleolusza.

5.2. *Példa. (Nem minden szűken lényeges koalíció első rendben lényeges)*
Legyen $N = \{1, 2, 3, 4\}$ és

$$v(S) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & \text{ha } |S| = 3, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ebben a játékban $t_1 = \frac{3}{4}$. A szűken lényeges koalíciók (4.2. definíció): $\mathcal{P}^*(N)$. Világos, hogy az $|S| = 3$ koalíciók szűken lényegesek. Az $|S| = 2$, $S = i, j$ koalíciók esetén

$$v(S) - t_1 = -\frac{3}{4} > -\frac{3}{2} = v(\{i\}) + v(\{j\}) - 2t_1.$$

Az első rendben lényeges koalíciók (4.3. Definíció): $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$. A szűkmag itt egy elemű, csak a $(0, 0, 0, 0)$ kifizetés vektort tartalmazza, ami egyben a prenukleolusz is, így $v_m(S) = 0$ minden $S \in \mathcal{P}^*(N)$ esetén, tehát $v^*(S) = 0$ minden $S \in \mathcal{P}^*(N)$ koalícióra. Emiatt világos, hogy az $|S| = 3$ koalíciók első rendben lényegesek. Az $|S| = 2$, $S = \{i, j\}$ koalíciók esetén pedig

$$v(S) = 0 = v^*(\{i\}) + v^*(\{j\}).$$

Tehát ebben a játékban az $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ koalíciók nem első rendben lényegesek, de szűken lényegesek.

A fenti két példából látható, hogy a szűken lényeges és az első rendben lényeges koalíciók osztályai között semmilyen irányú tartalmazás nincs, így egyik fogalom sem erősebb vagy gyengébb a másiknál.

A következő példa azt mutatja, hogy a szűken lényegesség általánosítása a lényegesség fogalomnak a kiegyensúlyozott játékok osztályán.

5.3. *Példa.* (Nem minden lényeges koalíció szűken lényeges) Legyen $N = \{1, 2, 3\}$ és

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |S| = 1, \\ 1, & \text{ha } |S| = 2, \\ 9, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Először is vegyük észre, hogy minden koalíció (kivéve az üres és nagykoalíciót) lényeges.

Ebben a játékban $t_1 = -3$. A szűken lényeges koalíciók (4.2. Definíció) a szingletonok. Ha $S = \{i, j\}$, $i \neq j$, akkor

$$v(S) - t_1 = 4 < 6 = v(\{i\}) + v(\{j\}) - 2t_1.$$

Tehát a két elemű koalíciók nem szűken lényegesek, de lényegesek.

Megfigyelhető továbbá, hogy a játék szűkmagja egy elemű, csak a $(3, 3, 3)$ kifizetést tartalmazza, ami egyben a pre nukleolusz is, ami itt megegyezik a nukleolusszal is.

6. Összefoglalás

Cikkünkben a lényeges koalíció fogalmának két különböző általánosítását vettük be. Bizonyítottuk továbbá, hogy mindkét új lényegesség fogalom – a szűken lényegesség és az első rendben lényegesség – a pre nukleolusz két különböző karakterizációs osztályát határozza meg tetszőleges – nem csak kiegyensúlyozott – játékok esetén.

Két példán keresztül szemléltettük, hogy a két általánosított lényegesség fogalom független egymástól. Cikkünk nyitva hagyta azt a kérdést, hogy a két karakterizációs osztály metszete is karakterizációs osztály-e. További kutatási irány a cikkbeli eredmények kiterjesztése korlátozott kooperációval rendelkező játékokra.

Megjegyezzük, hogy az általunk bevezetett új lényegesség fogalmak nagyon könnyen átírhatóak a nukleolusznak megfelelő formába.

Köszönetnyilvánítás

A jelen publikációban megjelenő kutatások az Innovációs és Technológiai Minisztérium Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott TKP2020 Nemzeti Kihívások Alprogram támogatásával, a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal által kibocsátott támogatói okirat alapján valósultak meg (projekt azonosító: TKP2020 BME-NKA).

A szerzők köszönik az NKFI (K119930) támogatását.

Hivatkozások

- [1] R.J. AUMANN AND M. MASCHLER: *Advances in Game Theory*, Princeton University Press, chap The Bargaining Set for Cooperative Games, in *Annals of Mathematical Studies*, Vol. **52**, pp. 443–476 (1964). DOI: 10.1515/9781400882014-022
- [2] M. DAVIS AND M. MASCHLER: *The kernel of a cooperative game*, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. **12** No. **3**, pp. 223–259 (1965). DOI: 10.1002/nav.3800120303
- [3] D.B. GILLIES: *Solutions to general non-zero-sum games*, *Contributions to the Theory of Games*, Princeton University Press, Vol. **IV** (1959). DOI: 10.1515/9781400882168-005
- [4] D. GRANOT, F. GRANOT AND W.R. ZHU: *Characterization sets for the nucleolus*, *International Journal of Game Theory*, Vol. **27** No. **27**, pp. 359–374 (1998). DOI: 10.1007/s001820050078
- [5] G. HUBERMAN: *The nucleolus and the essential coalitions*, In: A. Bensoussan and J. Lions (eds) *Analysis and Optimization of Systems*, Proceedings of the Fourth International Conference, Versailles, Springer, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. **28**, pp. 416–422, (1980). DOI: 10.1007/BFb0004057
- [6] A. KOPELOWITZ: *Computation of the kernels of simple games and the nucleolus of n-person games*, rM-31, Mathematics Department, The Hebrew University of Jerusalem, (1967).
- [7] M. MASCHLER, B. PELEG AND L.S. SHAPLEY: *Geometric properties of the kernel, nucleolus and related solution concepts*, *Mathematics of Operations Research*, Vol. **4** No. **4**, pp. 303–338 (1979). DOI: 10.1287/moor.4.4.303
- [8] D. SCHMEIDLER: *The Nucleolus of a Characteristic Function Game*, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. **17**, pp. 1163–1170 (1969). DOI: 10.1137/0117107
- [9] L.S. SHAPLEY: *A value for n-person games*, In: H.W. Kuhn and A.W Tucker (eds) *Contributions to the Theory of Games II*, *Annals of Mathematics Studies*, Princeton University Press, Princeton, Vol. **28**, pp. 307–317 (1953). DOI: 10.1515/9781400881970-018
- [10] L.S. SHAPLEY: *Markets as Cooperative Games*, Tech. rep., Rand Corporation, (1955).
- [11] L.S. SHAPLEY AND M. SHUBIK: *The assignment game I: the core*, *International Journal of Game Theory*, Vol. **1**, pp. 111–130 (1972). DOI: 10.1007/BF01753437
- [12] T. SOLYMOSI: *Weighted nucleoli and dually essential coalitions*, *International Journal of Game Theory*, Vol. **48**, pp. 1087–1109 (2019). DOI: 10.1007/s00182-019-00689-x
- [13] T. SOLYMOSI AND B. SZIKLAI: *Characterization sets for the nucleolus in balanced games*, *Operation Research Letters*, Vol. **44** No. **4**, pp. 520–524 (2016). DOI: 10.1016/j.orl.2016.05.014



Dornai Zsófia 1995-ben született Budapesten. BSc tanulmányait a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Természettudományi Karának matematika szakán végezte, majd ugyanitt 2020-ban szerzett Alkalmazott matematikus MSc diplomát operációkutatás specializáción. Jelenleg ugyanott, a Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolában másodéves PhD hallgató, Pintér Miklós témavezetésével. Fő kutatási területe a játékelmélet, elsősorban kooperatív játékokkal foglalkozik.

DORNAI ZSÓFIA

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Matematika Intézet
dornaizs@math.bme.hu

Pintér Miklós a Budapesti Corvinus Egyetemen a Corvinus Center for Operations Research kutatóközpontban dolgozik. Fő kutatási területei: döntéselmélet, játékelmélet, matematikai közgazdaságtan és operációkutatás. Jelenleg a Magyar Operációkutatási Társaság elnöke.

PINTÉR MIKLÓS

Budapesti Corvinus Egyetem,
Corvinus Center for Operations Research
pmiklos@uni-corvinus.hu

ESSENTIAL COALITIONS FOR NON-BALANCED GAMES

ZSÓFIA DORNAI, MIKLÓS PINTÉR

The prenucleolus of transferable utility cooperative games (games for short) are considered. Applying a result by Huberman [5] one can reduce significantly the number of coalitions needed for computing the prenucleolus on balanced games, meaning a corollary of the above mentioned result is that one can show that the computation of the prenucleolus is easy on some subclasses of games. However, the result in [5] works only for balanced games.

In this paper we give two generalizations of the result in [5]. Both generalizations are based on generalizations of the notion of essential coalition which the result in [5] result is based on. The two generalizations are independent from each other, both work for non-balanced games too, and both generalize the result in [5] even on balanced games.

A KLÍRINGMÁTRIXOK EGYÉRTELMI SÉGE PÉNZÜGYI HÁLÓZATOKBAN

CSÓKA PÉTER

Az általunk vizsgált pénzügyi hálózatban az ágensek pénzügyi szerződésekkel kapcsolódnak egymáshoz. A négy legelterjedtebb elosztási szabály az arányos, az elsőbbségi, a korlátozott egyenlő díjazás és a korlátozott egyenlő veszteségek elosztási szabály. Mivel a teljesített kifizetések a beérkezett kifizetésektől függenek, koherens elszámolási egyensúlyokat (fixpontokat) keresünk, úgynevezett klíringmátrixokat. Bizonyos helyzetekben több klíringmátrix is megoldás lehet eltérő csődös ágensekkel, további rendszerkockázatot okozva. A tanulmányban összefoglaljuk és szemléltetjük a Csóka és Herings [5] által, a klíringmátrixok egyértelműségére adott elégséges monotonitási feltételeket. A feltételek alkalmazásához particionálni kell az ágenseket, és elemezni kell egy kapcsolódó irányított aciklikus gráfot.

1. Bevezetés

A pénzügyi intézmények közvetlen pénzügyi szerződésekkel vagy korrelált pénzügyi eszközök tartásával hatnak egymásra, és az intézmények közötti elszámolásban a többszörös egyensúly lehetősége további rendszerkockázathoz vezet (Jackson és Pernaud [10]). Ebben a tanulmányban olyan pénzügyi hálózatokat vizsgálunk, ahol az ágensek pénzügyi szerződésekkel kapcsolódnak egymáshoz.

Eisenberg és Noe [7] nagyhatású cikkéhez hasonlóan az általunk elemzett pénzügyi hálózatokban is van az ágenseknek egy induló, tökéletesen likvidnek tekinthető (pénz-)készlete, minden ágens tartozhat valamekkora összeggel a többieknek, a pénzügyi szerződések aktuális értéke szerint. Eisenberg és Noe [7] cikkében minden ágens az arányos felosztás szabályt alkalmazza csőd esetén, azaz a kifizetések arányosak a kötelezettségekkel. A gyakorlatban azonban az elsőbbségi elosztási szabályokat is alkalmazzák, ahol egy prioritási sorrend határozza meg a kötelezettségek rangsorát (például először az államnak, majd a dolgozóknak, majd az előresorolt hitelezőknek kell fizetni, stb.). A szakirodalomban leggyakrabban alkalmazott további két elosztási szabály a korlátozott egyenlő díjazás (mindenkinek azonos összeget fizetve, de maximum a követelését) és a korlátozott egyenlő veszteségek (mindenkinek azonos veszteséget okozva, de maximum a követelését). [16] jól összefoglalja az addigi kapcsolódó tudományos eredményeket, magyar szerzők kapcsolódó cikkei [9], [15].

A tanulmányban összefoglaljuk és szemléltetjük a Csóka és Herings [5] által, a klíringmátrixok egyértelműségére adott elégséges monotonitási feltételeket. A feltételek alkalmazásához particionálni kell az ágenseket, és elemezni kell egy kapcsolódó irányított aciklikus gráfot.

A kapcsolódó szakirodalom szerteágazó. Az aciklikus gráf megjelenik Sziklai, Fleiner és Solymosi [14] cikkében is. Számos tanulmány foglalkozott a klíringmátrixokkal ([2]), [3], [4], [8]), [11] és [13]. A pénzügyi hálózatokat magyar szerzők is elemezték empirikusan ([1], [12]). Csóka és Kondor [6] összefoglalja, hogy az elosztási szabályokon alapuló klíringmátrixok felírhatóak egy egyenletrendszer megoldásaként is, továbbá teljes hálót (complete lattice) alkotnak, mindig létezik egy legkisebb és egy legnagyobb klíringmátrix. Ebben a tanulmányban tehát azt vizsgáljuk, hogy mikor nem esik egybe a legkisebb és a legnagyobb klíringmátrix.

A 2. fejezetben definiáljuk a pénzügyi hálózatokat, a négy leggyakrabban használt elosztási szabályt és az azokon alapuló klíringmátrixokat. A 3. fejezetben egy irányított aciklikus gráffal illusztráljuk a Csóka és Herings [5] által, a klíringmátrixok egyértelműségére adott függőleges térköz elégséges monotonitási feltételeket.

2. Jelölések, definíciók

A legfontosabb jelölések és definíciók bevezetésénél Csóka és Herings [5] műhelytanulmányára támaszkodunk. Egy N pénzügyi hálózat az (I, z, L, d) négyessel adható meg, ahol a négy elem jelentése a következő. A véges I halmaz jelöli a a pénzügyi hálózatban lévő *ágensek* halmazát. A $z \in \mathbb{R}_+^I$ vektor jeleníti meg a nemnegatív *induló készletét* (endowments) az ágenseknek, amely az ágensek összes (de a többiekkel szembeni követeléseket nem tartalmazó), teljesen likvidnek feltételezett eszközével egyenlő. Az $L \in \mathbb{R}_+^{I \times I}$ *tartozási mátrix* adja meg az ágensek egymással szembeni tartozásait, ahol L_{ij} az $i \in I$ ágens tartozása a $j \in I$ ágens felé. Az $i \in I$ ágens összes tartozását jelölje $\bar{L}_i = \sum_{j \in I} L_{ij}$.

A $d = (d^i)_{i \in I}$ ágensspecifikus elosztási szabályok (division rule) határozzák meg, hogy ki kinek mennyit fizet. Az $i \in I$ ágens d^i elosztási szabálya azt adja meg, hogy az i ágens az $E_i \in \mathbb{R}_+$ vagyona függvényében mennyit fizet az I -ben lévő hitelezőinek. Formálisan az $i \in I$ ágens d^i elosztási szabálya egy olyan $d^i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^I$ függvény, amelyre $d_j^i(E_i) \leq L_{ij}$ minden $j \in I$ ágensre és $\sum_{j \in I} d_j^i(E_i) = \min\{E_i, \bar{L}_i\}$. Feltesszük, hogy $L_{ii} = 0$, így az elosztási szabály definíciójából következik, hogy $d_i^i(E_i) = 0$ minden $i \in I$ ágensre. Feltesszük még, hogy minden $i \in I$ ágensre d^i monoton, vagyis minden $j \in I$ ágensre és minden olyan $E_i, E'_i \in \mathbb{R}_+$ vagyonokra, ahol $E_i \leq E'_i$, teljesül, hogy $d_j^i(E_i) \leq d_j^i(E'_i)$. A klíringmátrixok egyértelműségének vizsgálatához további monotonitási tulajdonságokat definiálunk. Jelölje \underline{a}_{ij} azt a vagyonerőrtéket, amely mellett az i ágens elkezd fizetni a $j \in I$ ágensnek $L_{ij} > 0$ esetén, vagyis $d_j^i(E_i) = 0$, ha $E_i \leq \underline{a}_{ij}$ és $d_j^i(E_i) > 0$, ha $E_i > \underline{a}_{ij}$.

2.1. *Definíció.* Legyen $N = (I, z, L, d)$ egy pénzügyi hálózat. Az $i \in I$ ágens $d^i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^I$ elosztási szabálya *erősen monoton*, ha minden olyan $j \in I$ ágensre, amire $L_{ij} > 0$, és minden olyan $E_i, E'_i \in \mathbb{R}_+$ vagyonokra, ahol $0 \leq E_i < E'_i \leq \bar{L}_i$, teljesül, hogy $d_j^i(E_i) < d_j^i(E'_i)$. Egy elosztási szabály *pozitív monoton*, ha minden $j \in I$ ágensre, amire $L_{ij} > 0$, és minden $E_i, E'_i \in \mathbb{R}_+$ vagyonokra, ahol $\underline{a}_{ij} \leq E_i < E'_i \leq \bar{L}_i$, teljesül, hogy $d_j^i(E_i) < d_j^i(E'_i)$.

Az erős monotonitás azt követeli meg, hogy ha egy csődben lévő ágens vagyona nő, akkor minden nem nulla követeléssel rendelkező hitelezőjének többet fizet. A pozitív monotonitás annyiban gyengébb, hogy ha a csődben lévő ágens vagyona nő, akkor csak azoknak a hitelezőknek fog többet fizetni, akiknek már addig is pozitív összeget fizetett. Lássuk, hogy a négy leggyakrabban használt elosztási szabály milyen monotonitási tulajdonságokat teljesít!

2.2. *Definíció.* Az $i \in I$ ágens d^i elosztási szabálya az *arányos elosztási szabály*, ha a $j \in I$ hitelezőnek fizetett összeg

$$d_j^i(E_i) = \begin{cases} 0, & \text{ha } L_{ij} = 0, \\ \min \left\{ \frac{L_{ij}}{L_i} E_i, L_{ij} \right\}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az arányos elosztási szabály esetén a vagyont a követelésekkel arányosan osztjuk fel, de mindenki legfeljebb a követelését kaphatja meg. Világos, hogy az arányos elosztási szabály erősen monoton, így pozitív monoton is.

2.3. *Definíció.* Az $i \in I$ ágens d^i elosztási szabálya az *elsőbbségi elosztási szabály*, ha van olyan $\pi : I \rightarrow \{1, \dots, |I|\}$ permutáció, amire a $j \in I$ hitelezőnek fizetett összeg

$$d_j^i(E_i) = \max \left\{ 0, \min \left\{ L_{ij}, E_i - \sum_{\{k \in I \mid \pi(k) < \pi(j)\}} L_{ik} \right\} \right\},$$

ahol $\{k \in I \mid \pi(k) < \pi(j)\}$ azon ágensek halmaza, amelyek π szerint j elé soroltak.

Az elsőbbségi elosztási szabály esetén először a $j_1 = \pi^{-1}(1)$ ágens követelését fizetjük, aztán ha még marad vagyon, vagyis $E_i - L_{ij_1} > 0$, akkor a $j_2 = \pi^{-1}(2)$ követelését fizetjük, és így tovább.

Az elsőbbségi elosztási szabály nem pozitív monoton (így nem is szigorúan monoton) a következő példában. Legyen $I = \{1, 2, 3\}$, $L_{11} = 0, L_{12} = 4, L_{13} = 2$, a fizetési sorrend $1 = \pi^{-1}(1), 2 = \pi^{-1}(2), 3 = \pi^{-1}(3)$, és tekintsük az 1-es ágens elsőbbségi fizetési szabályát. Ekkor $E_1 = 4$ esetén $d_1^1 = 0, d_2^1 = 4, d_3^1 = 0$, $E_1 = 5$ esetén pedig $d_1^1 = 0, d_2^1 = 4, d_3^1 = 1$, a második ágensnek pozitív összeget fizettünk $E_1 = 4$ esetén, de $E_1 = 5$ esetén nem fizettünk neki többet.

Az $i \in I$ ágens korlátos egyenlő díjazás elosztási szabályának definiálásához vezessük be a következőket. Ha $E_i > \bar{L}_i$, akkor legyen $\lambda_i = \max_{j \in I} L_{ij}$. Egyébként

legyen $\lambda_i \in [0, \max_{j \in I} L_{ij}]$ az

$$\sum_{j \in I} \min\{L_{ij}, \lambda\} = E_i$$

egyenlet egyértelmű megoldása.

2.4. Definíció. Az $i \in I$ ágens d^i elosztási szabálya a *korlátos egyenlő díjazás (constrained equal awards)* elosztási szabály, ha a $j \in I$ hitelezőnek fizetett összeg

$$d_j^i(E_i) = \min\{L_{ij}, \lambda_i\}.$$

A korlátos egyenlő díjazás esetén minden hitelezőnek azonos összeget fizetünk, de legfeljebb annyit, amennyivel tartozunk nekik.

A korlátos egyenlő díjazás sem pozitív monoton (így nem is szigorúan monoton) a következő példában. Legyen $I = \{1, 2, 3\}$, $L_{11} = 0$, $L_{12} = 4$, $L_{13} = 2$, és tekintsük az 1-es ágens korlátos egyenlő fizetési szabályát. Ekkor $E_1 = 4$ esetén $d_1^1 = 0$, $d_2^1 = 2$, $d_3^1 = 2$, $E_1 = 5$ esetén pedig $d_1^1 = 0$, $d_2^1 = 3$, $d_3^1 = 2$, a harmadik ágensnek pozitív összeget fizettünk $E_1 = 4$ esetén, de $E_1 = 5$ esetén nem fizettünk neki többet.

Az $i \in I$ ágens korlátos egyenlő veszteség elosztási szabályának definiálásához legyen $E_i > \bar{L}_i$ esetén $\mu_i = 0$. Egyébként legyen $\mu_i \in [0, \max_{j \in I} L_{ij}]$ a

$$\sum_{j \in I} \max\{L_{ij} - \mu_i, 0\} = E_i$$

egyenlet egyértelmű megoldása.

2.5. Definíció. Az $i \in I$ ágens d^i elosztási szabálya a *korlátos egyenlő veszteség (constrained equal losses)* elosztási szabály, ha a $j \in I$ hitelezőnek fizetett összeg

$$d_j^i(E_i) = \max\{L_{ij} - \mu_i, 0\}.$$

A korlátos egyenlő veszteség elosztási szabály a korlátos egyenlő díjazás duálisa, ekkor minden hitelező azonos veszteséget szenved el, de legfeljebb a teljes követelését. A korlátos egyenlő veszteség nem szigorúan monoton a következő példában. Legyen $I = \{1, 2, 3\}$, $L_{11} = 0$, $L_{12} = 4$, $L_{13} = 2$, és tekintsük az 1-es ágens korlátos egyenlő fizetési szabályát. Ekkor $E_1 = 1$ esetén $d_1^1 = 0$, $d_2^1 = 1$, $d_3^1 = 0$, $E_1 = 2$ esetén pedig $d_1^1 = 0$, $d_2^1 = 2$, $d_3^1 = 0$. Hiába nőtt a vagyon, a harmadik ágensnek nem fizettünk többet. Ugyanakkor a korlátos egyenlő veszteség elosztási szabály pozitív monoton, mert ha a csődben lévő ágens vagyona nő, akkor minden olyan ágensnek többet fog fizetni, akinek már elkezdett fizetni. Ez teljesül az előző példában is, de nézzük meg két másik vagyonra is ugyanazt a példát. $E_1 = 4$ esetén $d_1^1 = 0$, $d_2^1 = 3$, $d_3^1 = 1$, $E_1 = 6$ esetén pedig $d_1^1 = 0$, $d_2^1 = 4$, $d_3^1 = 2$.

Az elosztási szabályok az ágensek vagyonától függenek, de pénzügyi hálózatokban az ágensek vagyona a többi ágens fizetésétől is függ, endogénné téve a

vagyonszinteket. A pénzügyi hálózatok elemzéséhez vezessük be a $P \in \mathbb{R}_+^{I \times I}$ *fizetési mátrix* fogalmát, ahol P_{ij} adja meg, hogy az $i \in I$ ágens mennyit fizet a $j \in I$ ágensnek. A P fizetési mátrix esetén az i ágens E_i vagyona az eszközérték $a_i(P)$ által adott, ahol

$$a_i(P) = z_i + \sum_{j \in I} P_{ji}.$$

Az $i \in I$ ágens eszközértékből kivonva az általa teljesített kifizetéseket megkapjuk az i ágens saját tőkéjének $e_i(P)$ értékét, ahol

$$e_i(P) = a_i(P) - \sum_{j \in I} P_{ij} = z_i + \sum_{j \in I} (P_{ji} - P_{ij}).$$

A klíringmátrixok definiálásához meg kell ragadnunk, hogy milyen kifizetések lehetségesek. Egy d_i elosztási szabály \mathcal{F}_i értékészlete megadja a lehetséges fizetések halmazát, ahol

$$\mathcal{F}_i = d_i(\mathbb{R}_+) = \{d_i(E_i) \in \mathbb{R}_+^I \mid E_i \in \mathbb{R}_+\}.$$

Egy P fizetési mátrix *lehetséges*, ha minden $i \in I$ ágensre fennáll, hogy az elosztási szabálya szerint fizet, vagyis $P_i \in \mathcal{F}_i$, ahol P_i a P fizetési mátrix i . sora. A lehetséges fizetési mátrixok halmazát jelölje \mathcal{P} , ahol

$$\mathcal{P} = \{P \mid \forall i \in I, P_i \in \mathcal{F}_i\}.$$

2.6. Definíció. ([5]) Egy P fizetési mátrix *klíringmátrix* az $N = (I, z, L, d)$ pénzügyi hálózat esetén, ha igaz rá a következő három feltétel:

1. *Lehetségesség:* $P \in \mathcal{P}$.
2. *Korlátolt felelősség:* minden $i \in I$ ágensre $e_i(P) \geq 0$.
3. *Hitelezők elsőbbsége:* minden $i \in I$ ágensre, ha $P_i < L_i$, akkor $e_i(P) = 0$.

A lehetőségesség azt követeli meg, hogy minden ágens az elosztási szabálya értékészletéből válasszon egy elemet. A korlátolt felelősség teljesülése esetén minden ágens saját tőkéje nemnegatív. A hitelezők elsőbbsége szerint ha egy ágens nem fizeti ki az összes tartozását (csődöt jelent), akkor a saját tőkéje nulla lesz. Eisenberg és Noe [7] hasonló definíciót használ akkor, amikor minden ágens csak az arányos elosztási szabályt használhatja. Csóka és Herings [3] megenged ágensspecifikus elosztási szabályokat, de az egészértékű esetet vizsgálja, amikor van egy legkisebb elszámolási egység (pl. cent).

Számos tanulmány foglalkozott a klíringmátrixokkal. Csóka és Kondor [6] összefoglalja, hogy az elosztási szabályokon alapuló klíringmátrixok felírhatóak egy egyenletrendszer megoldásaként is, továbbá a Tarski-féle fixponttételt használva

teljes hálót (complete lattice) alkotnak. A mátrixokat elemenként összehasonlítva ebből nemcsak az következik, hogy mindig létezik klíringmátrix, hanem az is, hogy mindig létezik egy legkisebb és egy legnagyobb klíringmátrix is, amelyek per sze egybeeshetnek. Ebben a tanulmányban azt vizsgáljuk, hogy mikor nem esik egybe a legkisebb és a legnagyobb klíringmátrix, mint például a következő, Csóka és Herings [5] által adott példában.

2.1. *Példa.* Legyen $N = (I, z, L, d)$ egy pénzügyi hálózat három ágenssel, $I = \{1, 2, 3\}$, akik az elsőbbségi elosztási szabályt használják a $\pi = (3, 2, 1)$ permutációval. Az 1. táblázatban láthatjuk az induló készleteket, a tartozásokat, a legkisebb (P^-) és a legnagyobb (P^+) klíringmátrixot és az általuk indukált eszköz és saját tőke értékeket.

z	L			P^-			$a(P^-)$	$e(P^-)$
1	0	2	1	0	0	1	1	0
1	2	0	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0	3	3
z	L			P^+			$a(P^+)$	$e(P^+)$
1	0	2	1	0	2	1	3	0
1	2	0	1	2	0	1	3	0
1	0	0	0	0	0	0	3	3

1. táblázat. A P^- és P^+ klíringmátrixok és az általuk indukált eszköz és saját tőke értékek a 2.1. példában

Könnyen ellenőrizhető, hogy a klíringmátrix mindhárom feltétele teljesül mindkét klíringmátrixra, és tetszőleges konvex kombinációjukra is. Vegyük észre, hogy a végső saját tőke vektora mindkét mátrixra azonos, de a csődös ágensek halmaza eltér. A P^- mátrix esetén az 1-es és a 2-es ágens is csődös, míg P^+ esetén nincs csődös ágens.

3. Az egyértelműség egy elégséges feltétele

A klíringmátrixok egyértelműségének vizsgálatához szükségünk van néhány gráfelméleti fogalomra Csóka és Herings [5] műhelytanulmánya alapján. Irányított útnak hívjuk $k' \geq 2$ különböző ágens $(i_1, \dots, i_{k'})$ sorozatát az M mátrixban, ha minden $k \in \{1, \dots, k' - 1\}$ -ra $M_{i_k i_{k+1}} > 0$. A $j \in I$ ágens kapcsolódik az $i \in I$ ágenshez M -ben, ha van egy $(i_1, \dots, i_{k'})$ irányított út M -ben, amire $i_1 = i$ és $i_{k'} = j$.

Legyen $N = (I, z, L, d)$ egy pénzügyi hálózat. Az ágensek $S \subset I$ halmazát erősen összekapcsolt komponensnek hívjuk L -ben, ha S -ben bármely két különböző

ágens kapcsolódik egymáshoz L -ben és az S halmaz ebben a tulajdonságban a lehető legnagyobb.

Minden $i \in I$ ágensre legyen $O(i)$ az az erősen összekapcsolt komponens L -ben, amely tartalmazza i -t. Az $\mathcal{O} = \{O(i) \mid i \in I\}$ halmazok particionálják az ágensek I halmazát, ahogy azt egy példában hamarosan illusztráljuk.

Az erősen összekapcsolt komponensekre definiálhatunk egy (\mathcal{O}, D) (meta) irányított gráfot:

$$D = \{(O, O') \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} \mid \exists i \in O, \exists j \in O', L_{ij} > 0\},$$

vagyis az $O, O' \in \mathcal{O}$ különböző elemekre akkor van él O -ból O' -be, ha létezik $i \in O$ és $j \in O'$, amikre $L_{ij} > 0$. Az $O \in \mathcal{O}$ komponens utódai az (\mathcal{O}, D) irányított (meta) gráfban azok az erősen összekapcsolt komponensek, amelyek kapcsolódnak O -hoz (\mathcal{O}, D) -ben. Az (\mathcal{O}, D) irányított gráfban nincs kör, különben azt felhasználhatnánk egy nagyobb erősen összekapcsolt komponenshez és ellentmondásra jutnánk. A tartozások irányított gráfját tehát felbonthatjuk olyan komponensekre, amelyeknél egyértelmű, hogy merre „folyik” a tartozások útja a komponensek között. Ezért sorba rendezhetjük az \mathcal{O} -ban lévő halmazokat $\mathcal{O} = \{O_1, \dots, O_R\}$ módon, ahol $(O_r, O_{r'}) \in D$ -ből az következik, hogy $r < r'$, vagyis az utódok számozása mindig magasabb. Természetesen ez a számozás általában nem egyértelmű.

Az $i \in I$ ágens *ciklikus ágens* és a hozzá tartozó $O(i)$ komponens *ciklus*, ha $O(i)$ legalább két elemet tartalmaz. A ciklikus komponensek körbetartozó ágenseket tartalmaznak. A ciklikus ágensek halmazát jelölje C .

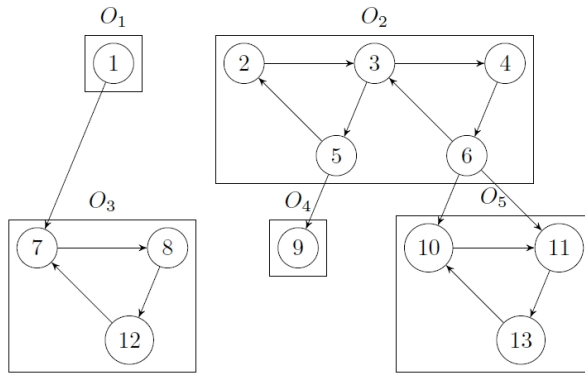
Az (\mathcal{O}, D) irányított (meta) gráfot a Csóka és Herings [5] által adott 3.1. példában illusztráljuk.

3.1. Példa. Tekintsük az $I = \{1, 2, \dots, 13\}$ ágensek által adott pénzügyi hálózatot. Az 1. ábrán akkor van él i -ből j -felé, ha az i ágensnek pozitív tartozása van j felé.

Az L -beli erősen összekapcsolt komponensek halmaza $\mathcal{O} = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5\}$, ahol $O_1 = \{1\}$, $O_2 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $O_3 = \{7, 8, 12\}$, $O_4 = \{9\}$, és $O_5 = \{10, 11, 13\}$. Az erősen összekapcsolt komponensek közötti (egyszeres) élek halmaza $D = \{(O_1, O_3), (O_2, O_4), (O_2, O_5)\}$. Az O_1 utóda O_3 , O_2 utódai pedig O_4 és O_5 . Az (\mathcal{O}, D) irányított gráfban nincs kör. Az O_2 , O_3 és O_5 halmazok ciklikusak, a bennük lévő ágensek ciklikus ágensek. Az $r \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ értékekre az O_r -beli ágenseknek csak olyan $O_{r'}$ -beli ágensek felé van pozitív tartozása, ahol $r' \geq r$. Világos, hogy az egy szinten lévő komponensek számozása tetszőlegesen permutálható.

Csóka és Herings [5] a következő elégséges, csak ciklikus ágensekre vonatkozó feltételt bizonyítja a klíringmátrixok egyértelműségére.

3.1. ÁLLÍTÁS. Legyen $N = (I, z, L, d)$ olyan pénzügyi hálózat, amelyre a következő három feltétel teljesül.



1. ábra. Ágensok, tartozások és az \mathcal{O} -ban lévő rendezett halmazok a 3.1. példában.

1. Ha $O \in \mathcal{O}$ utód nélküli ciklikus komponens, akkor $\sum_{i \in O} z_i > 0$.
2. Minden $i \in C$ ágensre, ahol $z_i > 0$, teljesül, hogy d^i pozitív monoton.
3. Minden $i \in C$ ágensre, ahol $z_i = 0$, teljesül, hogy d^i erősen monoton.

Ekkor N klíringmátrixa egyértelmű.

A 3.1. Állítás első feltétele, hogy ha van utód nélküli ciklikus komponens, akkor legalább egy ágens ebben a komponensben pozitív induló készlettel kell rendelkezzen. A második és harmadik feltétel azt várja el, hogy a pozitív induló készletekkel rendelkező ciklikus ágensek elosztási szabálya pozitív monoton, a zérus induló készletekkel rendelkezőké pedig erősen monoton legyen. Ez alapján ha nincs ciklikus ágens (körbetartozás), akkor az ágensek tetszőleges elosztási szabályt használhatnak, a lánc mentén mindenkinél egyértelmű, hogy mennyit fizet, a klíringmátrix egyértelmű.

A bizonyítás alapötlete a következő. Először belátható, hogy minden ciklikus komponensre igaz az állítás. Utána meg kell mutatni, hogy az O_1 -ben lévő ágens (ha O_1 -nek egy eleme van) vagy ágensek (ha O_1 ciklikus) klíringmátrixa egyértelmű. Ha az erősen összekapcsolt komponensek számára igaz, hogy $R > 2$, akkor indukcióval lehet befejezni a bizonyítást. Ha feltesszük, hogy az állítás igaz minden $r < R$ komponensre, akkor belátható, hogy igaz $r + 1$ -re is.

Ha vannak ciklikus ágensek, akkor a leggyakrabban használt négy elosztási szabályra a következőket tudjuk mondani. Mivel az arányos elosztási szabály erősen monoton, ha minden ágens azt használja, akkor az első feltétel teljesülése esetén a klíringmátrix egyértelmű. Mivel sem az elsőbbségi, sem a korlátos egyenlő díjazás nem pozitív monoton, ezért mindkettőnél lehet olyan körbetartozásos példát adni,

ahol a klíringmátrix nem lesz egyértelmű. Ha minden ágens a korlátos egyenlő veszteség elosztási szabályt használja, akkor minden ciklikus ágens pozitív induló készlete esetén a klíringmátrix egyértelmű.

4. Köszönetnyilvánítás

A tanulmány a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj támogatásával készült.

Hivatkozások

- [1] BERLINGER, E., MICHALETZKY, M., ÉS SZENES, M.: *A fedezetlen bankközi forintpiac hálózati dinamikájának vizsgálata a likviditási válság előtt és után*, Közgazdasági Szemle, Vol. **58** No. **3**, pp. 229–252 (2011).
- [2] CSÓKA, P.: *Az arányos csőd szabály karakterizációja körbetartozások esetén*, Közgazdasági Szemle, Vol. **64** No. **9**, pp. 930–942 (2017). DOI: 10.18414/KSZ.2017.9.930
- [3] CSÓKA, P. AND HERINGS, P. J.-J.: *Decentralized clearing in financial networks*, Management Science, Vol. **64** No. **10**, pp. 4681–4699 (2018). DOI: 10.1287/mnsc.2017.2847
- [4] CSÓKA, P. AND HERINGS, P. J.-J.: *An axiomatization of the proportional rule in financial networks*, Management Science, Vol. **67** No. **5**, pp. 2799–2812 (2021). DOI: 10.1287/mnsc.2020.3700
- [5] CSÓKA, P. AND HERINGS, P. J.-J.: *Uniqueness of Clearing Payment Matrices in Financial Networks*, GSBE Research Memoranda, (014) (2021). DOI: 10.26481/umagsb.2021014
- [6] CSÓKA, P. ÉS KONDOR G.: *Csőd szabályok pénzügyi hálózatokban*, Alkalmazott Matematikai Lapok, **37** (2), 1-13.(2020). DOI: 10.37070/AML.2020.37.2.08
- [7] EISENBERG, L. AND NOE, T. H.: *Systemic risk in financial systems*, Management Science, Vol. **47** No. **2**, pp. 236–249 (2001). DOI: 10.1287/mnsc.47.2.236.9835
- [8] GROOTE SCHAARSBERG, M., REIJNIERSE, H., AND BORM, P.: *On solving mutual liability problems*, Mathematical Methods of Operations Research, Vol. **87** No. **3**, pp. 383–409 (2018). DOI: 10.1007/s00186-017-0621-1
- [9] HABIS, H.: *Sztoczasztikus csődjátékok - avagy hogyan osszunk szét egy bizonytalan méretű tortát?*, Közgazdasági Szemle, Vol. **59** No. **12**, pp. 1299–1310 (2012).
- [10] JACKSON, M. O. AND PERNOUD, A.: *Systemic risk in financial networks: A survey*, Annual Review of Economics, Vol. **13**, 171-202 (2021). DOI: 10.1146/annurev-economics-083120-111540
- [11] KOSTER, M.: *A note on uniqueness of clearing prices in financial systems*, SSRN (2019). DOI: 10.2139/ssrn.3427039
- [12] LUBLÓY, Á.: *Dominóhatás a magyar bankközi piacon*, Közgazdasági Szemle, Vol. **52** No. **4**, pp. 377–401 (2005).

- [13] SCHULDENZUCKER, S., SEUKEN, S., AND BATTISTON, S.: *Default ambiguity: Credit default swaps create new systemic risks in financial networks*, Management Science (2019). DOI: 10.1287/mnsc.2019.3304
- [14] SZIKLAI, B., FLEINER, T., AND SOLYMOSSI, T.: *On the core and nucleolus of directed acyclic graph games*, Mathematical Programming, Vol. **163** No. **3**, pp. 243-271 (2017). DOI: 10.1007/s10107-016-1062-y
- [15] TASNÁDI, A.: *On probabilistic rationing methods*, Mathematical Social Sciences, Vol. **44** No. **2**, pp. 211–221 (2002). DOI: 10.1016/S0165-4896(02)00014-8
- [16] THOMSON, W.: *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: an update*, Mathematical Social Sciences, Vol. **74**, pp. 41-59. (2015). DOI: 10.1016/j.mathsocsci.2014.09.002



Csóka Péter 2003-ban szerzett közgazdász diplomát a Budapesti Corvinus Egyetem jogelődjén. Doktori fokozatát 2008-ban a Maastrichti Egyetemen szerezte. 2008 óta a Budapesti Corvinus Egyetem oktatója és kutatója, 2019 óta egyetemi tanár. 2011-óta a Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont Játékelméleti kutatócsoportjának kutatója. Kutatásaiban elméleti közgazdaságtani módszereket használ befektetések, kockázatkezelés, vállalati pénzügyi kérdések, likviditási problémák és pénzügyi hálózatok vizsgálatára. 16 angol és 11 magyar referált cikk szerzője, jelenleg az MTMT-ben a független hivatkozásainak száma 317, h-indexe 11. 2012 óta az évenként Budapesten megrendezett Annual Financial Market Liquidity Conference egyik főszervezője. 2019-ben a Magyar Közgazdaságtudományi Egyesület elnökségi tagja lett. 2019-ben Bolyai János kutatási ösztöndíjat nyert. 2021-től tag az MTA Közgazdaság-tudományi Bizottságában. 2022-től tag az NKFIH Bölcsész- és Társadalomtudományok Kollégiumban.

CSÓKA PÉTER

Budapesti Corvinus Egyetem és Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont.
peter.csoka@uni-corvinus.hu

ON THE UNIQUENESS OF CLEARING MATRICES IN FINANCIAL NETWORKS

PÉTER CSÓKA

In the financial network we study, agents are linked by financial contracts. The four most common division rules are the proportional, priority, constrained equal awards, and constrained equal losses division rules. Since the payments made depend on the payments received, we look for coherent accounting equilibria (fixed points), called clearing matrices. In some situations, multiple clearing matrices may be a solution with different bankrupt agents, causing additional systemic risk. In this paper, we summarize and illustrate the sufficient monotonicity conditions given by Csóka and Herings [5] for the uniqueness of clearing matrices. To apply these conditions, one has to partition the agents and analyze an associated directed acyclic graph.

A FŰTÖTT HATÁRRÉTEGET LEÍRÓ EGYENLETRENDSZER ÖNHASONLÓ MEGOLDÁSAI

BARNA IMRE FERENC, MÁTYÁS LÁSZLÓ, HRICZÓ KRISZTIÁN

Dolgozatunkban a hővezetési határréteget leíró parciális differenciálegyenlet-rendszer (PDE) időfüggő önhasonló megoldásait elemzzük. A tanulmányozás során kétféle hővezetési modellt vizsgálunk és hasonlítunk össze. A reguláris hővezetési modell esetén a sebesség, nyomás és hőmérséklet dinamikai változóinak tér és időfüggését kifejezzük speciális függvények alkalmazásával. Abban az esetben, ha a hővezetési egyenletben egy további, úgynevezett viszkózus melegedési tagot is figyelembe veszünk (amely nagyobb, realisabb folyadék sebességek esetén érvényes), akkor a hőmérséklet eloszlás nem adható meg analitikus alakban. A viszkózus növekedési tag alkalmazásakor a hőmérséklet eloszlás korábbi oszcillációi kisimulnak.

1. Bevezető

Evidenciának tekinthetjük, hogy a térben és időben lejátszódó folytonos természeti és társadalmi jelenségeket PDE-vel tudjuk adekvát módon leírni. Az áramlástan köztudottan egy ilyen tudományterület. Ennek a diszciplínának egyik igen fontos ága a határrétegekben lejátszódó fizikai folyamatokkal foglalkozik.

Ludwig Prandtl volt ezen tudományterület úttörője, aki a huszadik század elején skálázási érveléssel bebizonyította, hogy a kétdimenziós Navier-Stokes egyenletek tagjainak hozzávetőleg fele elhagyható a határrétegekben lejátszódó áramlási jelenségek vizsgálata esetén [1]. Blasius 1908-as dolgozatában [2] megadta az összenyomhatatlan stacioner két dimenziós határrétegben való áramlás profilját. A határrétegekben lejátszódó fizikai folyamatokat Schlichting mára már klasszikussá vált tankönyvéből bárki részletekbe menően elsajátíthatja [3].

A fenti folyamatok jelenkori, aktuális tudományos és mérnöki alkalmazásait pedig Hori [4] monográfiájából ismerhetjük meg. Az elmúlt évtizedek során számos kutató foglalkozott a határrétegeket leíró PDE-vel, a továbbiakban a teljesség igénye nélkül megemlítünk néhány számunkra releváns dolgot. Libby és Fox [5] perturbációs módszerekkel adott néhány megoldást. Ma és Hui [6] önhasonló megoldásokat mutatott be a határrétegekre vonatkozóan. A kilencvenes években Burde

[7, 8, 9] publikált különböző analitikus megoldásokat a témában. Weidman [10] további megoldásokat publikált határreégekre keresztirányú áramlásban. Ludlow és munkatársai [11] szintén önhasonló megoldásokat származtattak. Stacionárius nem-newtoni határreégeket Bognár [12] analizálta és adott önhasonló megoldásokat. A későbbiek során pedig általánosította a megoldásait a stacioner hővezetési mechanizmust is figyelembe véve [13, 14, 15]. Korábbi publikációink során már vizsgáltuk a kétmidenziós nem-newtoni folyadékokat leíró Navier-Stokes egyenletet, illetve a Rayleigh-Bénard-féle hővezetési problémákat [16, 17, 18]. Kijelenthetjük, hogy bizonyos szempontból a fűtött határreteg problémája részben egy Rayleigh-Bénard feladathoz is hasonlít. Jelenlegi dolgozatunkban a Sedov által bevezetett önhasonló Ansatz-ot [19, 20] alkalmazzuk és ezáltal a kezdeti PDE rendszert egy nemlineáris csatolt közönséges differenciálegyenlet-rendszerré (KDE) tudjuk transzformálni. A származtatott KDE rendszert kvadratúrával tudjuk megoldani és így analitikus eredményeket kapunk a sebességre, a hőmérsékletre, illetve a nyomásra mint eredeti dinamikai változókra.

Az alkalmazott vizsgálati módszerünket két megfontolás teszi indokolttá. Az első, hogy a nemlineáris jelenségeket leíró nemlineáris PDE-k megoldásának nincsen általános, egzaktul kidolgozott matematikai elmélete, vagyis nem létezik általános megoldási módszer. A vizsgálatok néhány módszertől eltekintve ad-hoc technikát igényelnek. Az egyik ilyen módszer a redukációs technika, amikor valamilyen új (a hely és időváltozó kombinációjából adódó) változó segítségével a kezdeti PDE-k KDE-ké transzformálhatóak, amelyeket sok esetben kvadratúrával integrálva analitikus végeredményt kapunk. A kezdeti fizikai paraméterek pl. a hővezetési állandó, a sűrűség a végső KDE-ben mint szabad paraméterek továbbra is megmaradnak és hatásuk direkt módon vizsgálhatóvá válik.

Véleményünk szerint két ilyen fajta fizikailag releváns redukációs Ansatz (vagy másnéven próbafüggvény) létezik, amelyek eredete a két ismert lineáris időfüggő PDE-ben keresendő. Ez a két alapvető egyenlet a hullám-, illetve a diffúziós (vagy hővezetési) egyenlet. Linearitásukból adódóan megoldásaikra igaz a szuperpozíció tétele. Mindkét PDE-re létezik természetes próbafüggvény vagy Ansatz. A hullámegyenlet egy tetszőleges fizikai változóra felírva $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ alakú, ahol c a hullám terjedési sebességét jelöli. A megoldásokat a közismert haladó hullámú Ansatz-cal, $u = f(x \pm ct)$ -vel számíthatjuk ki, amelyet szinte minden fizika szakkönyv említ. A diffúziós egyenlet esetén a Gauss-féle megoldás többféle módon származtatható, amelyeket szinte minden szak-, illetve tankönyv részletesen le is ír, viszont a megfelelő és természetes próbafüggvényt, az önhasonló Ansatz-ot nem említik. Néhány sorban megmutatható, hogy az önhasonló Ansatz ($t^{-\alpha} f[x/t^\beta]$) a két szabad kitevőjével (α, β) természetes módon adja meg az időben lecsengő, ugyanakkor a térben szétfolyó (diszperzív) Gauss alakú fundamentális megoldást [21].

Ezen két Ansatz segítségével tetszőleges nemlineáris PDE (vagy PDE rendszer) érdemben vizsgálható és az eredményekből megítélhetjük, hogy az egyenlet

milyen mértékben mutat hullám, illetve diszperzív szétfolyó tulajdonságokat. A teljesség érdekében megemlítjük a Lie szimmetrián [22] alapuló vizsgálati módszereket. Ezekkel a módszerekkel általában többféle, de leginkább csak matematika-ilag érdekes és a fizikai elveknek sok esetben ellentmondó pl. divergens, végtelen energiájú megoldások származtathatóak. Személyes tapasztalataink szerint a Lie szimmetriát alkalmazó szerzők dolgozataikban eredményként kapott függvényeiket egyáltalán nem prezentálják ábrákon, illetve a megoldások paraméter függéseit és ezek fizikai diszkuszióit is mellőzik.

A jelenlegi cikk szerzői egy jó évtizede kutatják a hidrodinamikai [23, 24], kvantummechanikai [25] és elektrodinamikai folyamatokat [26] a haladó hullámú, illetve a fent említett (és a továbbiakban részletezésre kerülő) önhasonló Ansatz-ok segítségével. Ezáltal a vizsgált jelenségek *globális* hullám, illetve diffúzív (időben „szétfolyó”) természetére vonatkozóan kapunk releváns információkat. A feladat további kihívását adja, hogy némely hullámszerű folyamatnál a két módszer összefüggővé válik [27]. A továbbiakban a fűtött határréteget leíró PDE-et fogjuk az önhasonló Ansatz-cal elemezni. Tudomásunk szerint a szakirodalomban a fűtött határréteg egyenleteinek még nem léteznek ilyenfajta analitikus időfüggő megoldásai.

2. Az alkalmazott modell és a származtatott eredmények

Vizsgálatainkat az alábbi PDE rendszeren mutatjuk be:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

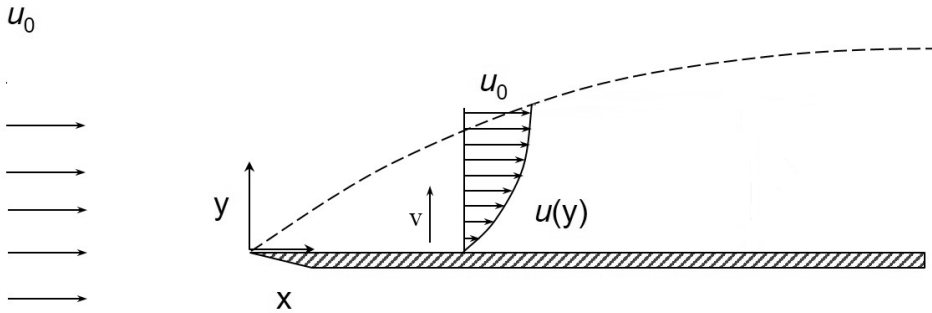
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\rho_\infty \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_\infty \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\rho_\infty c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_\infty c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + a \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (4)$$

ahol a dinamikai változók az alábbiak: $u(x, y, t), v(x, y, t)$ a határréteg fallal párhuzamos, illetve arra merőleges sebesség komponensei, $p(x, y, t)$ a nyomás, $T(x, y, t)$ pedig a hőmérséklet, ez esetben az a rész, amely az átlagtól való eltérést mutatja. A rendszer első egyenlete az összenyomhatatlan folyadékokra vonatkozó anyagmegmaradást leíró kontinuitási egyenlet, a második a felületre merőleges nyomásra vonatkozó egyenlet, a harmadik a felülettel párhuzamos sebesség komponensre vonatkozó egyszerűsített Navier-Stokes egyenlet. A bal oldal első tagja a lokális gyorsulásért, a második a konvektív gyorsulásért felelős. A jobb oldal első tagja a nyomás gradiens, ez hajtja az áramlást, a második tag pedig a belső

súrlódásért felel. Az utolsó, negyedik egyenlet pedig egy hővezetési egyenlet. A bal oldal első tagja a lokális hőmérséklet változásért, a második pedig a konvekció okozta hőmérséklet változásért felelős. A jobb oldal első tagja térbeli hőmérséklet változásáért, utolsó tagja pedig disszipatív viszkózus fűtésért felelős. A vizsgált rendszer geometriai viszonyait az első ábra szemlélteti.



1. ábra. A vizsgált rendszer geometriáját szemléltető sematikus ábra. A szaggatott vonal egy, az origóból induló félig végtelen felület mentén mutatja a vízszintes sebesség komponens $u(y)$ nagyságát az y tengely mentén.

Mind a négy dinamikai változó a két térbeli Descartes-féle koordináta, illetve az idő folytonos függvénye. A számított megoldásainkat a C^2 kétszer folytonosan differenciálható függvények terén értelmezzük és nem tételezünk fel pl. L^2 térbeli integrálhatóságot. Az egyenletben szereplő további fizikai paraméterek $\rho_\infty, c_p, \mu, \kappa, a$ pedig a folyadék sűrűsége aszimptotikus távolságokon és időkből, az állandó nyomáson vett fajhő, a kinematikai viszkozitás, a termikus diffúziós állandó, valamint a viszkózus fűtési tag erőssége. A hővezetési egyenlet utolsó tagja felelős a viszkozitásból adódó hőforrásért, amelynek hatása magasabb áramlási sebességek esetén jelentős. Dolgozatunk második felében eredményeinket összehasonlítjuk azon fűtött határrejteget leíró eredményekkel, amelyekben nem szerepel ez a fajta viszkózus forrástag.

A fenti egyenletrendszer megoldását az alábbi önhasonló Ansatz alkalmazásával keressük [19, 20]:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= t^{-\alpha} f(\eta), & v(x, y, t) &= t^{-\delta} g(\eta), \\ T(x, y, t) &= t^{-\gamma} h(\eta), & p(x, y, t) &= t^{-\epsilon} i(\eta), \end{aligned} \quad (5)$$

ahol $\eta = \frac{x+y}{t^\beta}$ az új, úgynevezett hasonlósági változó, f, g, h és i pedig a redukált rendszer hasonlósági függvényei. A maradék öt kis görög betű $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ és ϵ pedig az önhasonló exponenseket jelenti, amelyek tetszőleges valós értékeket vehetnek

fel. A hasonlósági függvényekről feltesszük, hogy megfelelő simasággal rendelkeznek, tehát léteznek a fenti egyenletnek megfelelő első és másodrendű deriváltakkal. Az általunk alkalmazott Ansatz geometriáját és további tulajdonságait részletesen elemeztük előző tanulmányainkban [16, 17, 18].

A hasonlósági függvények, illetve az önhasonló exponensek pontos alakjára vonatkozó számítások menete a következő. Kiszámítjuk a dinamikai változók (5) megfelelő helykoordináta és idő deriváltjait és visszahelyettesítjük őket az eredeti (4) rendszer megfelelő egyenleteibe, így az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$t^{-\alpha-\beta} f' + t^{-\alpha-\delta} g' = 0, \quad (6)$$

$$t^{-\epsilon-\beta} i' = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \rho_\infty (-\alpha t^{-\alpha-1} f - \beta t^{-\alpha-1} f' \eta) + \rho_\infty (t^{-2\alpha-\beta} f f' + t^{-\alpha-\delta-\beta} g f') = \\ + \mu t^{-\alpha-2\beta} f'' - t^{-\epsilon-\beta} i', \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \rho_\infty c_p (-\gamma t^{-\gamma-1} h - \beta t^{-\gamma-1} h' \eta) + \rho_\infty c_p (t^{-\alpha-\gamma-\beta} f h' + t^{-\delta-\gamma-\beta} g h') = \\ \kappa t^{-\gamma-2\beta} h'' + a t^{-2\alpha-2\beta} (f')^2. \end{aligned} \quad (9)$$

A jobb átláthatóság érdekében a hasonlósági függvények η argumentum szerinti deriválását $'$ -vel jelöljük (pl. $\frac{df(\eta)}{d\eta} = f'(\eta)$). Az önhasonló Ansatz-cal a redukció során a kezdeti (x, y, t) változókról az új η változóra térünk át, de csak akkor, ha a fenti egyenletrendszer függetlenné válik az időtől. Tehát el kell érjünk, hogy az összes időbeli hatvánnyal (pl. $t^{-\alpha-1}$) minden egyenlet minden tagját egyszerűsíthessük. Így egy lineáris egyenletrendszert kapunk a kitevőkre vonatkozóan, amely jelen esetben ellentmondásmentesen és egyértelműen megoldható. Minden exponens az alábbi pozitív racionális vagy egész értéket veszi fel:

$$\alpha = \beta = \delta = 1/2, \quad \epsilon = 1, \quad \gamma = 1. \quad (10)$$

Megjegyezzük, hogy az 1/2-es kitevő értékek a reguláris hővezetés esetén adják meg a Gauss megoldást. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a kapott sebességtér lényegében egyfajta diffúziós folyamat eredménye. Ez a kijelentés igaz a Navier-Stokes egyenletekre is [23, 24]. Egy fontos megjegyzés, hogy az önhasonló Ansatz (5) nem minden PDE rendszerre alkalmazható automatikusan, sok esetben az exponensek közötti feltételek ellentmondásra vezetnek.

A redukált KDE rendszer az alábbi alakot ölti:

$$f' + g' = 0, \quad (11)$$

$$i' = 0, \quad (12)$$

$$\rho_\infty \left(-\frac{f}{2} - \frac{f' \eta}{2} \right) + \rho_\infty (f f' + g f') = \mu f'' - i', \quad (13)$$

$$\rho_\infty c_p \left(-h - \frac{h' \eta}{2} \right) + \rho_\infty c_p (f h' + g h') = \kappa h'' + a (f')^2. \quad (14)$$

Rendszerünk egy hiányos csatolt nemlineáris másodrendű KDE, ami néhány algebrai lépéssel szétcsatolható. Vegyük észre, hogy az első két egyenlet teljes differenciál és így automatikusan integrálható. Eredményeit közvetlenül behelyettesítve a (13) egyenletbe, a sebesség változására vonatkozó KDE alakja a következő:

$$\frac{1}{\rho_\infty}(\mu f' + c_2 \eta + c_3) + \frac{f \cdot \eta}{2} - c_1 f = 0, \quad (15)$$

megoldását kvadratúrával kiszámíthatjuk:

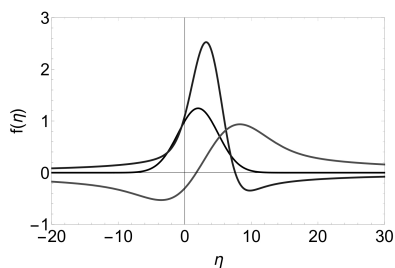
$$f = \left[\frac{-2c_2}{\rho_\infty} \exp\left(\frac{\rho_\infty \eta^2}{4\mu} - \frac{c_1 \eta \rho_\infty}{\mu}\right) - \sqrt{\frac{-\pi}{\mu \rho_\infty}} \exp\left(\frac{-c_1^2 \rho_\infty}{\mu}\right) \right] \cdot \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{-\rho_\infty}{4\mu} + \frac{c_1 \rho_\infty}{\sqrt{-\mu \rho_\infty}}}\right) (2c_1 c_2 + c_3) + c_4 \exp\left(\frac{\eta(-\eta + 4c_1)\rho_\infty}{4\mu}\right). \quad (16)$$

a kifejezésben szereplő erf a hibafüggvényt jelenti, tulajdonságairól a NIST kézikönyvből [28] tájékozódhatunk részletesebben. (A teljesség és eredményeink jövőbeni reprodukálhatóságának érdekében meg kell említenünk, hogy a levezetett KDE-k megoldásait a Maple 12 matematikai programcsomaggal számítottuk ki, majd deriválással és visszahelyettesítéssel ellenőriztük.) Vegyük észre, hogy pozitív valós fizikai ρ_∞, μ paraméter értékek esetén egy komplex mennyiség $\sqrt{-\rho_\infty/\mu}$ adódik a hibafüggvény argumentumában, ám a további komplex multiplikatív prefaktorral együtt a végső megoldás tisztán valóssá válik. Az eredmény lényeges paramétere a ρ_∞/μ hányados, amely ha nagyobb mint egy, akkor a függvény elkezd a Gauss görbéhez hasonlóvá válni. A második ábra általános sebesség hasonlósági függvényeket (16) mutat különféle paraméterértékekre. Az alkalmazott paraméterek önkényes értékűek, amelyek segítségével megpróbáltunk a lehető legáltalánosabb alakú megoldásokat szemléltetni. A harmadik ábra magát a sebességteret ábrázolja a $z = 0$ projekcióra vonatkozóan. A függvénynek az origóban nagyon hegyes maximuma, illetve minimuma van, ezt követően nagyon gyorsan csökken mind térben, mind pedig időben.

A sebességter megoldásfüggvényének ismeretében a hőmérséklet változásra vonatkozó KDE egyértelműen meghatározható:

$$\kappa h'' - \rho_\infty c_p h' \left(c_1 - \frac{\eta}{2}\right) + \rho_\infty c_p h + a(f')^2 = 0. \quad (17)$$

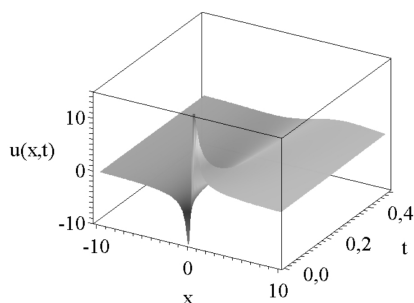
Még a legegyszerűbb Gauss görbe alakú sebesség hasonlósági függvény esetén sem kaphatunk analitikus, zárt alakú megoldást. Azonban, hogy vizsgálhassuk eredményünket, rögzítjük a $(\rho_\infty, c_p, \kappa)$ fizikai paramétereket és az integrálási konstansokat bizonyos értékekre. A negyedik ábra három különféle a viszkozus hőforrás erősség értékre mutat megoldásfüggvényeket. Megjegyezzük, hogy magasabb a paraméterérték magasabb végső függvény értéket jelent. Az ötödik ábrán megmutatjuk a hőmérséklet eloszlás viselkedését az $a = 1$ esetre. A kapott függvény alakja hasonló maradt a hasonlósági függvényéhez.



2. ábra. A sebesség tér $f(\eta)$ hasonlósági függvényének (16) grafikonjai három különféle paraméter halmazra vonatkozóan

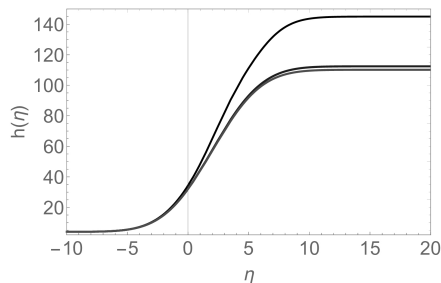
$(c_1, c_2, c_3, c_4, \mu, \rho_\infty)$.

A fekete, a kék, illetve a piros vonal a $(1, 0, 1, 0, 4.1, 0.9)$, $(2, -1, 0.5, 0, 2.5, 1)$ és a $(2, 2, 0.3, 0, 10, 1)$ paraméter kombinációt jelenti.



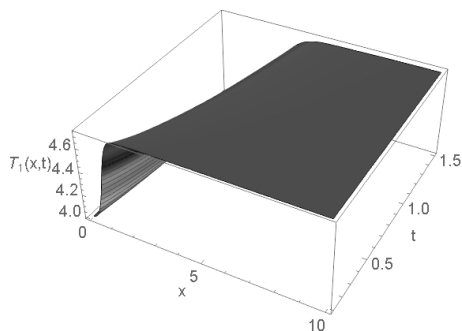
3. ábra. Az x irányú sebesség komponens

$u(x, y = 0, t) = t^{-1/2}f(\eta)$ grafikonja ahol a $(c_1, c_2, c_3, c_4, \mu, \rho_\infty)$ paraméterek a $(2, -1, 0.5, 0, 2.5, 1)$ értékeket veszik fel.



4. ábra. A hőmérséklet $h(\eta)$ hasonlósági függvényének (17) grafikonja három különböző

viszkózus hőforrás paraméter esetére megadva. A fekete, kék és a piros folytonos vonal a $a = 10, 1$ és 0.1 értékre számított görbe. A többi paraméter $(c_1, c_2, c_3, c_4, \mu, \rho_\infty)$ értéke pedig $(2, -1, 0.5, 0, 2.5, 1)$.



5. ábra. A hőmérséklet eloszlás $T(x, y = 0, t) = t^{-1/2}h(\eta)$ grafikonja az $a = 1$ viszkózus hőforrás erősség értékre. A többi paraméter $(c_1, c_2, c_3, c_4, \mu, \rho_\infty)$ numerikus értéke pedig $(2, -1, 0.5, 0, 2.5, 1)$.

A teljesség érdekében megadjuk a nyomástérre vonatkozó eredményeket is. A nyomásváltozásra vonatkozó KDE és a megoldása is triviális:

$$i' = 0, \quad i = c_4, \quad (18)$$

Ebből következően a nyomásfüggvény alakja:

$$p(x, y, t) = t^{-\epsilon} \cdot i(x, y, t) = \frac{c_4}{t}, \quad (19)$$

ami annyit jelent, hogy a nyomás konstans az egész térben egy adott időpontban, ám van egy $1/t$ alakú időbeli lecsengése, ami gyorsabb, mint a sebességtér esetében. Vegyük észre, hogy a nyomás és a hőmérséklet időbeli lecsengése azonos alakú.

Tanulmányunk fő célkitűzése, hogy eredményeinket összehasonlítsuk a viszkózus fűtési tagot nem tartalmazó $(a(\partial u/\partial y)^2 = 0)$ hidrodinamikai rendszer eredményeivel.

A felhasznált Ansatz megegyezik az előzővel (5. egyenlet), ám a kapott önhasznoló exponensek alakja némileg megváltozott:

$$\alpha = \beta = \delta = 1/2, \quad \epsilon = 1, \quad \gamma = \text{tetszőleges valós}. \quad (20)$$

Mivel kevesebb a kényszer feltétel az exponensek között, ezért lehetséges, hogy a γ exponens értéke határozatlanná vált. Tehát a hőmérséklet eloszlás időbeli lecsengése (vagy negatív értékek esetén végtelenhez való tartása) tetszőleges alakúvá vált. Mint a későbbiekben látni fogjuk, egy határozatlan önhasznoló exponens, (mivel megjelenik a megoldásban) gazdag és sokrétű matematikai struktúrát eredményez. Értelemszerűen a származtatott KDE rendszer is nagyon hasonló alakú. A sebességre és a nyomásra vonatkozó eredmények teljes mértékben változatlanok, így ezekkel most nem foglalkozunk, ám a hőmérséklet hasonlósági függvényére adódó KDE egyszerűbbé vált:

$$\kappa h'' - \rho_\infty c_p h' \left(c_1 - \frac{\eta}{2} \right) + \rho_\infty c_p \gamma h = 0. \quad (21)$$

Ezzel ellentétben (17)-nek viszont már létezik zárt alakú megoldása:

$$h = c_2 M \left(\gamma, \frac{1}{2}; -\frac{c_p \rho_\infty [\eta - 2c_1]^2}{4\kappa} \right) + c_3 U \left(\gamma, \frac{1}{2}; -\frac{c_p \rho_\infty [\eta - 2c_1]^2}{4\kappa} \right), \quad (22)$$

ahol az M és az U a reguláris és irreguláris Kummer függvényeket jelöli. Ezen függvények tulajdonságairól részletekbe menően olvashatunk a már említett NIST kézikönyvben [28]. A továbbiakban a reguláris Kummer M megoldással foglalkozunk (tehát $c_3 = 0$), amelyik véges értéket vesz fel az origóban. A Kummer M és U függvények komplett ortonormált rendszert alkotnak, ha a függvények

argumentumai lineárisak. Jelen esetben azonban az argumentum négyzetes. Hasonló négyzetes argumentumú függvényekkel (amelyek lineáris argumentum esetén ortonormált rendszert alkotnak) eddigi vizsgálataink során már találkoztunk a Navier-Stokes [23, 24] és a Madelung [25] egyenletek hasonló analízisével.

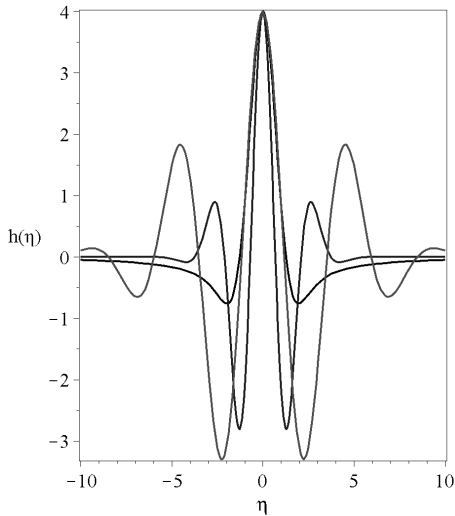
A hatodik ábra a hőmérséklet hasonlósági függvényét mutatja három általános paraméter együttesre kiszámolva. A megoldás görbeseregének legfontosabb paramétere a γ kitevő, minél nagyobb ennek az értéke, annál több nullátmenettel rendelkezik a függvény, ám maximum értéke egyre csökken. A c_1 -es integrálási konstans csak eltolja a megoldást az x tengely mentén, a c_2 pedig csak skálázza a maximális értéket. A $\frac{\rho_\infty c_p}{\kappa}$ hányados a megoldás félérték szélességéért felelős. Néhány speciális γ értékre a Kummer függvények más speciális függvényekre egyszerűsödnek, $\gamma = \pm\frac{1}{2}$ és 0 esetére a megoldások kifejezhetővé válnak a hibafüggvénnyel. Negatív egész γ értékekre páros fokú polinomokat kapunk, pl. $\gamma = -1$ esetén $f = (c_2 + c_3) \cdot (2\kappa + c_p \rho_\infty [\eta - 2c_1]^2)$. A polinom megoldások $\eta \rightarrow \infty$ esetén divergálnak, ezért nem tekinthetőek fizikailag releváns megoldásnak, ezért nem elemezzük őket részletesebben.

Az utolsó, hetedik ábra a hőmérséklet eloszlás $y = 0$ vetületét ábrázolja a $\gamma = 0.8$ -as önhasonló exponens értékére. Látható, hogy a gyors tér és időbeli lecsengés ellenére a függvény mutat egy előjelváltást.

Mindezek ismeretében hasonlítsuk össze a két vizsgált modellt és értelmezzük a kapott eredményeket. Evidens, hogy a sebesség és nyomástér független a hőmérséklet eloszlástól (ezek lecsatolódnak a megoldás során). Egyértelműen látható tehát a viszkózus fűtési tag hatása. Azonos fizikai kezdeti feltételek mellett, ahol az egész térben egy időben $1/t$ alakú nyomáseloszlás és egy térben erősen lokalizált és gyorsan csökkenő sebességtér két lényegesen különböző hőmérséklet eloszlást eredményez. A viszkózus fűtés nélküli esetben, a fűtött felület gyakorlatilag kihűl, a kezdeti nagy sebesség és nyomás gyorsan csökkenti a hőmérsékletet, közben kisebb-nagyobb oszcillációkat okozva. A véges viszkózus fűtési tag a dinamika során felmelegíti a felületet, egyfajta sűrűlódásként hőt termel és visszafogottabb ingadozásokat eredményez.

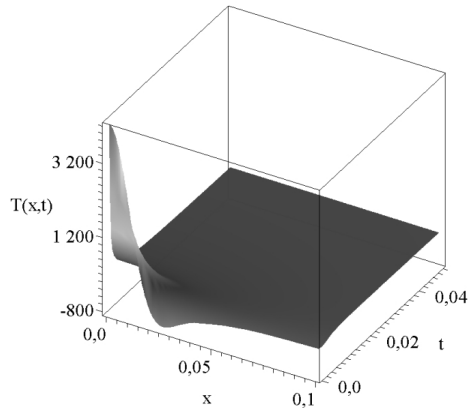
3. Összefoglalás és kitekintés

A dolgozatunkban fűtött határrétegek PDE egyenleteit vizsgáltuk az önhasonló Ansatz segítségével. Kétféle modell eredményeit hasonlítottuk össze; az elsőben figyelembe vettük a viszkózitásból adódó fűtési tagot, amely magasabb áramlási sebesség értékek esetén ad realisabb eredményt, a második vizsgált modellben azonban mellőztük ezt a tagot. Mind a sebesség, mind a nyomástér mindkét esetben analitikusan kifejezhető. Az első esetben a hibafüggvénnyel, a másodikban pedig egy triviális, $1/t$ alakú időfüggvénnyel. A fizika szempontjából egyetlen lényegesen különböző eredményt a hőmérséklet eloszlásra kaptuk. A viszkózus fűtési



6. ábra. A (21) hőmérséklet hasonlósági függvényre $h(\eta)$ vonatkozó megoldás három különféle paraméter szettre $(\gamma, c_2, c_3, c_p, \rho_\infty, \kappa)$ kiszámítva.

A fekete, a kék és a piros vonal a $(0.8, 4, 0, 1, 0.9, 0.3)$, $(3.4, 4, 0, 1, 1, 0.6)$ és a $(6.3, 4, 0, 1, 3, 10)$ numerikus értékekhez tartozó függvényeket ábrázolja.



7. ábra. A hőmérséklet eloszlás $T(x, y = 0, t) = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} h(\eta)$ grafikonja a $(\gamma, c_2, c_3, c_p, \rho_\infty, \kappa)$ paraméterek $(0.8, 4, 0, 1, 0.9, 0.3)$ numerikus értékeire.

tag hiányában az eredményeket négyzetes argumentumú Kummer-függvényekkel írtuk fel analitikus formában, amely megoldások egy erősen csillapodó oszcillációs tulajdonságot mutatnak. Tehát a határrétegben a hőmérséklet nagy amplitúdójú változásokat mutat. Ha figyelembe vesszük a viszkózus tagot, akkor a végeredmény nem írható fel analitikus alakban, viszont mindenfajta oszcillációtól mentes és egy logisztikus függvényre emlékeztető formájú. Tanulmányunknak tehát az a legfontosabb következtetése, hogy a viszkózus hővezetési tag hiányában kihűl a felület, kezdeti hőmérséklete oszcillálva csökken, ám ha létezik véges viszkózus hővezetés, akkor ez az ingadozás már enyhébb a folyamat során.

További terveink, hogy vizsgálatainkat kiterjesztjük nem-newtoni közegekre is. Egy másik természetes általánosítási lehetőség, hogy ferroelektromos, esetleg magnetohidrodinamikussal közegek határrétegeit tanulmányozzuk.

4. Köszönetnyilvánítás

A 129257 számú projekt a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból biztosított támogatással, a K_18 pályázati program finanszírozásában valósult meg.

Hivatkozások

- [1] L. PRANDTL: *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*, Verhandlungen des III. Int. Math. Kongr., pp. 484–491 Heidelberg, Teubner, Leipzig (1905).
- [2] H. BLASIUS: *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner reibung*, Zeitschrift für Mathematische Physik, Vol. **56**, pp. 1–37 (1908).
- [3] H. SCHLICHTING AND K. GERSTEN: *Boundary-Layer Theory*, Springer, (2017).
- [4] Y. HORI: *Hydrodynamic Lubrication*, Springer (2006).
- [5] P.A. LIBBY AND H. FOX: *Some perturbation solutions in laminar boundary-layer theory*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. **17**, pp. 433–449 (1963), DOI: 10.1017/S0022112063001439.
- [6] P.K.H. MA AND W.H. HUI: *Similarity solutions of the two-dimensional unsteady boundary-layer equations*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. **216**, pp. 537–559 (1990), DOI: 10.1017/S0022112090000520.
- [7] G.I. BURDE: *The Construction of special explicit solutions of the boundary-layer equations. Steady flows*, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. **47**, pp. 247–260 (1994). DOI: 10.1093/qjmam/47.2.247.
- [8] G.I. BURDE: *The Construction of special explicit solutions of the boundary-layer equations. Unsteady flows*, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. **48**, pp. 611–633 (1995). DOI: 10.1093/qjmam/48.4.611.
- [9] G.I. BURDE: *New similarity reductions of the steady-state boundary layer equations*, Journal of Physics A: Mathematical and General, Vol. **29**, pp. 1665–1683 (1996). DOI: 10.1088/0305-4470/29/8/015.
- [10] P.D. WEIDMAN: *New solutions for laminar boundary layers with cross flow*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, Vol. **48**, pp. 341–356 (1997). DOI: 10.1007/s000330050035.
- [11] D.K. LUDLOW, P.A. CLARKSON AND A.P. BASSOM: *New similarity solutions of the unsteady incompressible boundary-layer equations* The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. **53**, pp. 175–206 (2000). DOI: 10.1093/qjmam/53.2.175.

- [12] G. BOGNÁR: *Similarity solution of boundary layer flows for non-Newtonian fluids*, International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. **10**, pp. 1555–1566 (2009). DOI: 10.1515/IJNSNS.2009.10.11-12.1555.
- [13] G. BOGNÁR AND J. KOVÁCS: *Non-isothermal steady flow of power-law fluids between parallel plates*, International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. **6**, pp. 122–129 (2012). DOI: 10.1.1.352.6564.
- [14] G. BOGNÁR: *Analytic Solutions to a Boundary Layer Problem for Non-Newtonian Fluid Flow Driven by Power Law Velocity Profile*, WSEAS Transactions on Fluid Mechanics, Vol. **6**, pp. 22–31 (2011).
- [15] U.S. MAHABALESHWAR, P.N. VINAY KUMAR, K.R. NAGARAJU, G. BOGNÁR AND S.N. RAVICHANDRA NAYAKAR: *A New Exact Solution for the Flow of a Fluid through Porous Media for a Variety of Boundary Conditions*, Fluids, Vol. **4** No. **3**, pp. 1–22 (2019). DOI: 10.3390/fluids4030125.
- [16] I.F. BARNA AND L. MÁTYÁS: *Analytic self-similar solutions of the Oberbeck-Boussinesq equation*, Chaos Solitons and Fractals, Vol. **78**, pp. 249–255 (2015). DOI: 10.1016/j.chaos.2015.08.002.
- [17] I.F. BARNA, M.A. POCSAI, S. LÖKÖS AND L. MÁTYÁS: *Rayleigh-Benard convection in the generalized Oberbeck-Boussinesq system* Chaos Solitons and Fractals, Vol. **103**, pp. 336–341 (2017). DOI: 10.1016/j.chaos.2017.06.024.
- [18] I.F. BARNA, L. MÁTYÁS AND M.A. POCSAI: *Self-similar analysis of a viscous heated Oberbeck-Boussinesq flow system*, Fluid Dynamics Research, Vol. **52**, 015515 (2020). DOI: 10.1088/1873-7005/ab720c.
- [19] L. SEDOV: *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, CRC Press, (1993).
- [20] YA. B. ZEL'DOVICH AND YU. P. RAIZER: *Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena*, Academic Press, New York, (1966).
- [21] L. MÁTYÁS AND I.F. BARNA: *General Self-Similar Solutions of Diffusion Equation and Related Constructions*, Romanian Journal of Physics, Vol. **67**, pp. 101–117 (2022). URL: https://rjp.nipne.ro/2022_67_1-2/RomJPhys.67.101.pdf.
- [22] P.J. OLVER: *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, (Graduate Texts in Mathematics), Springer, Vol. **107** (1986).
- [23] I.F. BARNA: *Self-Similar Solutions of Three-Dimensional Navier-Stokes Equation*, Communication in Theoretical Physics, Vol. **56**, pp. 745–750 (2011). DOI: 10.1088/0253-6102/56/4/25.
- [24] I.F. BARNA AND L. MÁTYÁS: *Analytic solutions for the three dimensional compressible Navier-Stokes equation*, Fluid Dynamics Research, Vol. **46**, 055508 (2014). DOI: 10.1088/0169-5983/46/5/055508.
- [25] I.F. BARNA, M.A. POCSAI AND L. MÁTYÁS: *Analytic Solutions of the Madelung Equation*, Journal of Generalized Lie Theory and Applications, Vol. **11** No. **2**, p. 4 (2017). DOI: 10.4172/1736-4337.1000271.
- [26] I.F. BARNA: *Self-similar shock wave solutions of the nonlinear Maxwell equations*, Laser Physics, Vol. **24**, 086002 (2014). DOI: 10.1088/1054-660X/24/8/086002.

- [27] I.F. BARNA AND R. KERSNER: *Heat conduction: a telegraph-type model with self-similar behavior of solutions*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Vol. **43**, 375210 (2010). DOI: 10.1088/1751-8113/43/37/375210.
- [28] F.W.J. OLVER, D.W. LOZIER, R.F. BOISVERT AND C.W. CLARK: *NIST handbook of mathematical functions*, Cambridge University Press, (2010).



- Született: 1972. november 13., Budapest.
- Végzettség: Mérnök-fizikus, Budapesti Műszaki Egyetem, Természet és Társadalom Tudományi Kar, 1997.
- Doktori cím: Justus Liebig Egyetem, Németország, 2002, Elméleti Fizikai Intézet, "Ionization of helium in relativistic heavy-ion collisions", témája elméleti atomfizika.
- Korábbi munkahelyek:
2002 - 2004 Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems, Drezda, Németország.
2004 - 2005 Bécsi Műszaki Egyetem, Elméleti Fizika Tanszék
2006 - 2013 MTA Atomenergia-kutató Intézet.
- Jelenlegi munkahely, beosztás: Wigner Fizikai Kutatóközpont, tudományos főmunkatárs.

-Oktatási tevékenység: Biofizika oktatása német nyelven az Állatorvostudományi Egyetemen elsőéves hallgatóknak.

- Kutatási terület: lézer - anyag kölcsönhatás, transzport folyamatok nemlineáris parciális differenciálegyenleteinek önhasonló és haladó hullám megoldásai.

- Publikációs tevékenység eredménye:

56 tudományos cikk, két könyvfejezet, hozzávetőleg 600 darab független hivatkozással.

BARNA IMRE FERENC

Wigner Fizikai Kutatóközpont,
Konkoly-Thege Miklós út 29 - 33, Budapest 1121
barna.imre@wigner.hu



- Született: 1974. június 2., Gyergyószentmiklós.
- Végzettség: Fizika licenciátus 1996, Babes-Bolyai Tudományegyetem, Fizika mesteri 1997.
- Doktori cím: Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2002.
- Korábbi munkahelyek:
2001 - 2002 Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems, Drezda, Németország.
2003 - 2005 Center for Nonlinear Phenomena and Complex Systems, Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Belgium.
- Jelenlegi munkahely, beosztás:
Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, egyetemi adjunktus.
- Kutatási terület: transzportfolyamatok, illetve nemlineáris parciális egyenleteinek önhasonló

és haladó hullám megoldásai.

- Publikációs tevékenység eredménye:

30 tudományos cikk, egy könyv, egy könyvfejezet, hozzávetőleg 286 hivatkozás.

MÁTYÁS LÁSZLÓ

Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem,
Biomérnöki Tanszék,
Szabadság tér 1,
Csíkszereda, Hargita megye, 530104 Románia
matyaslaszlo@uni.sapientia.ro



- Született: Miskolc, 1986. 07. 19.
- Végzettség: Mérnök-informatikus, Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, 2009, Mérnök tanár, Miskolci Egyetem, Bölcsészettudományi Kar, 2021
- Doktori cím: Miskolci Egyetem, Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola, 2015
- Korábbi munkahelyek: Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Analízis Tanszék
- Jelenlegi munkahely, beosztás: Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Matematikai Intézet, egyetemi docens
- Kutatási terület: folyadékmechanika, áramlás-

tani nemlineáris parciális differenciálegyenletek önhasonló és haladó hullám megoldásai.

- Publikációs tevékenység eredménye:

20 tudományos folyóiratcikk, 2 könyvfejezet, 26 konferenciakötetben megjelent tudományos cikk, 79 hivatkozás, melyből 54 független.

HRICZÓ KRISZTIÁN

Miskolci Egyetem,
Gépészmérnöki és Informatikai Kar,
Matematikai Intézet
Miskolc Egyetemváros, 3515
mathk@uni-miskolc.hu

SELF-SIMILAR SOLUTIONS OF THE INCOMPRESSIBLE BOUNDARY LAYERS WITH
VISCOUS HEAT CONDUCTION

IMRE FERENC BARNA, LÁSZLÓ MÁTYÁS, KRISZTIÁN HRICZÓ

We investigated the heated boundary layer equations with the time-dependent self-similar Ansatz. We found that all the three dynamical variables, the velocity, pressure and temperature fields could be expressed with special analytic functions like error, Gaussian or Kummer functions. The parameter dependencies were studied in details. Our analysis clearly showed that if the regular heat conduction equation were complemented with the extra viscous heat conduction term (which were relevant at higher velocities) then the resulting temperature distribution had no oscillatory behaviour and could not be expressed with analytic functions any more.

Keywords: self-similar solutions, heat conduction, boundary layer

Mathematics Subject Classification (2000): 35C06, 35Q79, 76Dxx

Az Alkalmazott Matematikai Lapok megjelenését támogatja
a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

A kiadásért felelős a BJMT főtákará
Szedte és tördelte: Moczár Károly

Nyomta a Coradix Kft., Budapest
Felelős vezető: Szűcs Ernőné

Budapest, 2022
Megjelent 18 (A/5) ív terjedelemben
100 példányban
HU ISSN 0133-3399

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A közlésre szánt dolgozatokat és mellékleteiket egy tömörített zip fájlban e-mailen az `aml@renyi.hu` címre kérjük elküldeni.

A részletes instrukciók és a LaTeX minta fájl megtalálható az AML honlapján, a cikkek benyújtása http://aml.math.bme.hu/?page_id=7 címén. Mivel az Alkalmazott Matematikai Lapokban megjelenő cikkek 2019 óta DOI azonosítót kapnak, az irodalomjegyzékben szereplő minden forrás adatai között szerepeltetni kell a DOI azonosítót is, amennyiben rendelkezik ilyen-
nel.

Kérjük a szerzőket, hogy a cikk benyújtása előtt ellenőrizzék az alábbi elemek meglétét:

A teljes cikk, benne:

magyar nyelvű kivonat

a cikk szövege, valamint ábrák és táblázatok, ha vannak

irodalomjegyzék, DOI azonosítókkal együtt

szerzők bemutatása és fotói, munkahelyei és e-mail címei

angol nyelvű cím és kivonat

Mellékelte fájlok:

a cikk LaTeX forráskódja, és a teljes cikk pdf formátumban

ábrák, képek fájljai

szerzők fotói

A dolgozatok után szerzői díjat az Alkalmazott Matematikai Lapok nem fizet.

TARTALOMJEGYZÉK

Az Egerváry Jenő emléklakett 2021. évi díjazottja: Szeidl László	1
Az Egerváry Jenő emléklakett 2022. évi díjazottja: Csendes Tibor	5
A Farkas Gyula emlékdíj 2021. évi díjazottja: Balázs István	9
A Farkas Gyula emlékdíj 2021. évi díjazottja: Boldog Péter	11
A Farkas Gyula emlékdíj 2021. évi díjazottja: Lovas Attila	13
A Farkas Gyula emlékdíj 2021. évi díjazottja: Varga Bálint	15
A Farkas Gyula emlékdíj 2022. évi díjazottja: Baráth Dániel	17
A Farkas Gyula emlékdíj 2022. évi díjazottja: Cseh Ágnes	19
A Farkas Gyula emlékdíj 2022. évi díjazottja: Horváth Markó	21
A Farkas Gyula emlékdíj 2022. évi díjazottja: Juhász Nóra	23
<i>Baár Tamás, Luspay Tamás</i> , Dinamikus rendszerek szétcsatolása be- és kimeneti transzformációkkal	25
<i>Békési József, Dósa György, Galambos Gábor</i> , Páros jobok ütemezése korai és késői befejezés büntetésével – Egy bonyolultságelméleti eredmény	45
<i>Dornai Zsófia, Pintér Miklós</i> , Lényeges koalíciók nem kiegyensúlyozott játékok esetén	59
<i>Csóka Péter</i> , A kliringmátrixok egyértelműsége pénzügyi hálózatokban	77
<i>Barna Imre Ferenc, Mátyás László, Hriczó Krisztián</i> , A fűtött határréteget leíró egyenletrendszer önhasonló megoldásai	89

INDEX

Jenő Egerváry Prize recipient in 2021: László Szeidl	1
Jenő Egerváry Prize recipient in 2022: Tibor Csendes	5
Gyula Farkas Prize recipient in 2021: István Balázs	9
Gyula Farkas Prize recipient in 2021: Péter Boldog	11
Gyula Farkas Prize recipient in 2021: Attila Lovas	13
Gyula Farkas Prize recipient in 2021: Bálint Varga	15
Gyula Farkas Prize recipient in 2022: Dániel Baráth	17
Gyula Farkas Prize recipient in 2022: Ágnes Cseh	19
Gyula Farkas Prize recipient in 2022: Markó Horváth	21
Gyula Farkas Prize recipient in 2022: Nóra Juhász	23
<i>Tamás Baár, Tamás Luspay</i> , Decoupling of dynamical systems by input and output transformations	25
<i>József Békési, György Dósa, Gábor Galambos</i> , On minimizing total earliness and tardiness of coupled-tasks – A complexity result	45
<i>Zsófia Dornai, Miklós Pintér</i> , Essential coalitions for non-balanced games	59
<i>Péter Csóka</i> , On the uniqueness of clearing matrices in financial networks	77
<i>Imre Ferenc Barna, László Mátyás, Krisztián Hriczó</i> , Self-similar solutions of the incompressible boundary layers with viscous heat conduction	89