Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

1. szám 2016. szeptember

2016. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

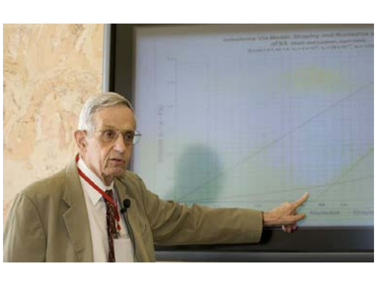
Kit érint a matematika?

Simon Péter főszerkesztő írása a lap indíttatásáról, céljairól, lehetőségeiről: negyedévente megjelenő folyóiratunk rovataiban ismeretterjesztő írásokat találnak a matematika tanításáról, tudományos eredményeiről, ipari és pénzügyi alkalmazásairól, könyvismertetésekkel, portrékkal, hírekkel. Szeretnénk megszólítani mindazokat, akik a matematikát tanulják, tanítják, kutatják, vagy bárhol alkalmazzák, mindenkit, aki matematikában érintett. Örülnénk, ha minél több területet mutathatnánk be, amit a matematika *érint*.

2016. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Röviden az Érintő rovatairól

Elektronikus Matematikai Lapunk egy-egy számát a cikkek bevezetőivel főoldalunkon láthatják. A címére kattintva lehet olvasni a cikket. Ha a cikk rovatára kattintanak, akkor megjelenik az adott rovat összes írása, ami ebben a számban található. Egy-egy szám rovatait a fő menüpontokból is elérhetik (teljes képernyőn a felső menüsorból, egyébként a bal felső sarokból). A bal felső sarok három vonalkájára kattintva találják az Információk menüjét. A rovatokban más-más jellegű írásokat találhatnak, válogassanak belőlük kedvük, érdeklődésük szerint.



2016. SZEPTEMBER, INTERJÚ – PORTRÉ

Interjú a 2015-ben Abel-díjat nyert John F. Nash Jr. professzorral

Világszerte az egyik legismertebb matematikus volt a 86 éves korában tavaly elhunyt *John Forbes Nash*, akinek élete ihlette az Oscar-díjas *Egy csodálatos elme* című filmet (Főszereplők: *Russell Crowe*, *Jennifer Connelly*, Rendező *Ron Howard*, 2001). A hosszú évtizedeken át paranoid skizofréniában szenvedő matematikus a játékelmélet terén elért kiemelkedő eredményeiért 1994-ben (*Harsányi Jánossal* és *Reinhard Seltennel* megosztva) megkapta a közgazdasági Nobel-díjat. (A fotó 2008-ban készült a második nemzetközi játékelméleti konferencián.)

2016. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

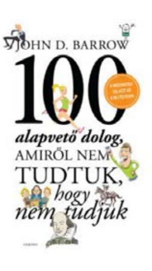
Beszámoló az 56. Rátz László Vándorgyűlésről

Idén Baja, ezen belül pedig a Bajai III. Béla Gimnázium adott otthont a július 5. és 8. között megrendezett *56. Rátz László Vándorgyűlésnek*. Bizonyos értelemben jubileumi volt az esemény, ugyanis 40 éve, 1976-ban volt utoljára Baján Vándorgyűlés.

2016. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Legfölső polc

Elsősorban olyan könyvekről szeretnénk tudósítani (akár korábban megjelentekről is), amelyek a matematika bármely része vagy kapcsolatai iránt érdeklődők számára kívánatosak lehetnek. Leginkább a magyar nyelven megjelent, boltokban vagy könyvtárakban könnyen elérhető művekre koncentrálunk...Ma már a könyvespolcok nem kizárólag fából készülnek: olvasmányaink egyre nagyobb részét teszik ki az elektronikusan elérhető írások.



2016. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

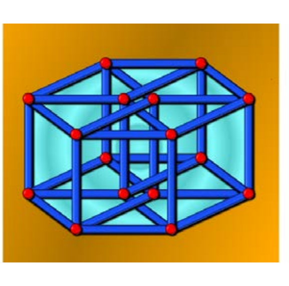
A titkárnőprobléma

Lottó, lóverseny, káosz, játékelmélet, Google, sorbanállás, hídszerkezetek vagy könyvelés: mi bennük a közös? A matematika! A szórakoztató stílusban megírt 100 rövid írás mindegyike arra példa, hogy a matematika segítségével olyan dolgokat tudhatunk meg a világról, mint sehonnan máshonnan. A száz közül kiválasztottunk egyet ízelítőül. Lehet, hogy sokaknak ismerős a téma, de a további 99 között bizonyára van meglepő újdonság is az olvasónak.

2016. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

A játékelmélet elemei és Neumann János

Ez a rövid cikk alapvetően didaktikai szándékú és fő célja, hogy megmutassa a XX. század egyik legkiemelkedőbb magyar matematikusának, *Neumann Jánosnak* egy igazán világraszóló eredményét, pontosabban az ahhoz vezető fő gondolatokat, amit ma „Minimax-tételnek” vagy *a játékelmélet alaptételének* is neveznek. A leírtak alapján akár egy középiskolai kísérleti kipróbálást is meg lehet szervezni, amit a szerző meg is tett évekkel ezelőtt több vidéki és fővárosi iskolában.



2016. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

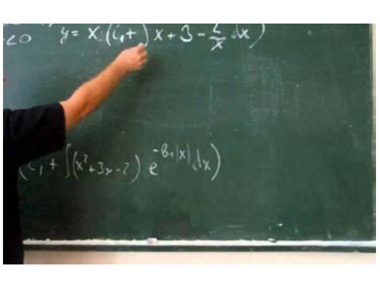
Mi is ... egy egzotikus 4-dimenziós euklideszi tér?

A cikk megírásának ötletét a *Notices of the American Mathematical Society* 'What is...?' sorozatából merítette *Stipsicz András*, a *Mi is...?* rovat gazdája, az Érintő főszerkesztője, a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet tudományos tanácsadója. Akik még nem tudják, mi is egy egzotikus négydimenziós euklideszi tér, azoknak itt a lehetőség... (A képen egy 4-dimenziós kocka, https://commons.wikimedia.org/ Enzo Bono *Ipercubi* c. képéről)

2016. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is ... egy minimális modell?

A *Mi is...?* sorozat második tagja nem könnyű olvasmány. *Kollár János* 2007 márciusában a *Notices of the American Mathematical Society* What is...? rovatában megjelent itt következő írását *Stipsicz András* az Érintő számára lefordította. A cikk szerzője, Kollár János az ELTE-n végzett matematikus, a Princeton University (USA) professzora.



2016. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

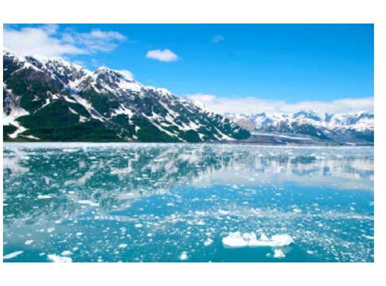
Dolgozatírás a középiskola és a felsőoktatás határán

A dolgozatírás szót sokféle értelemben használjuk. Van röpdolgozat, írásbeli felelet, témazáró dolgozat, kompetenciamérés, kisérettségi, próbaérettségi, érettségi közép- és emelt szinten, egyetemi zárthelyi dolgozat. Körülbelül 10-15 éve néhány új fogalom is megjelent a köztudatban: nulladik ZH, kritériumdolgozat, szintfelmérő.

2016. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Hongkongi levél

A levelet egy debreceni és egy szegedi gimnazista írta, nevüket évek óta ismerjük a versenyekről, feladatmegoldásban kiválóak, és most kiderült, hogy nemcsak számolni, de írni is egész jól tudnak :-). A Hongkongban, a *Nemzetközi Matematikai Diákolimpián* részt vett magyar csapat: *Gáspár Attila* (aranyérem), *Dobos Sándor* (csapatvezető-helyettes), *Kunszenti-Kovács Dávid* (a norvég csapat vezetője), *Pelikán József* (csapatvezető), *Szabó Barnabás* (ezüstérem), *Lajkó Kálmán* (ezüstérem), *Baran Zsuzsanna* (bronzérem), *Kós Géza* (koordinátor), *Williams Kada* (bronzérem), *Nagy Kartal* (ezüstérem).



2016. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Jégvarázs és a parciális differenciálegyenletek

A 20. *Európai Ipari Matematika Konferenciát* a *Bolyai János Matematikai Társulat* és az *ELTE* szervezi 2018-ban Budapesten. Milyen témák kerülnek elő egy ilyen konferencián? Például az idei egyik kiemelt előadáson a *Jégvarázs* című *Walt Disney* animációs filmről volt szó…

2016. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Bolyai János Japánban

Bolyai János művének magyar fordítása, 65 évvel a latin nyelvű eredeti után, csak 1897-ben jelent meg Budapesten, miután olaszul, franciául, angolul már régen kiadták, és ismertették német nyelven is. Bármennyire meglepő, de Budapesten később jelent meg *A tér abszolút igaz tudománya* magyarul, mint *Tokióban* angolul. Bolyai János hatása Japánban a mai napig tetten érhető. Nem véletlen, hogy a világhálón a *Kiotói Egyetem Matematikai Kutatóintézetének* nyitó weboldalán Bolyai János 1820 körül született matematikatörténeti jelentőségű kéziratlapja látható *Parallelarum Theoriara* felirattal. (Fenti fényképünket is a www.kurims.kyoto-u.ac.jp képei között találtuk.)

2016. SZEPTEMBER, INTERJÚ – PORTRÉ

A varázshegyen túl

„Utoljára a halála előtt két nappal beszéltem vele szkájpon. Rosszul aludt, és arra panaszkodott, hogy nem tudja beszerezni azt az altatót, melyet Amerikában használt…” *Pach János* az MTA Rényi Intézetének matematikusaként az *Élet és Irodalom* 2016. augusztus 12-i számában búcsúzott el *Hajnal Andrástól*. Az ÉS engedélyével mi is megjelentetjük írását a magyar matematikatörténet elmúlt 60 évének pár momentumáról, benne Erdősről és Hajnalról. A Bolyai Társulat 2008-as közgyűlésén készült fényképén jobbról balra Hajnal András, Juhász István, Császár Ákos és felesége látható.

2016. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

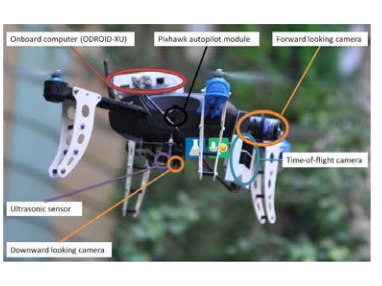
Játékok a tanórán, szakkörön

Képzeljék, vannak tanárok, akik úgy tanítanak, hogy még az 5-8.-os, sőt a 9-12.-es diákjaikkal is alkalmanként játszanak. Milyen játékok férnek be egy tanóra kereteibe ? Egy kis ízelítő *Magyar Zsolt* jól bevált *gondolkodtató játékaiból*, nem kell hozzájuk sok idő, csak papír, ceruza, néhány kocka vagy egy pakli kártya, és a gyerekek örömmel és észrevétlenül tanulnak...

2016. SZEPTEMBER, INTERJÚ – PORTRÉ

Emlékfoszlányok Erdős Pálról

Húsz éve nincs közöttünk *Erdős Pál*. Többek rábeszélésére megpróbálom felidézni néhány vele kapcsolatos emlékemet: talán sikerül a személyiségét új szemszögből is megvilágítanom... – A Strasbourgban élő és dolgozó magyar matematikus, *Komornik Vilmos* bár csak rövid ideig ismerhette Erdőst, személyes élményei mégis sokat hozzátesznek ahhoz a képhez, amelyet az életrajzokból, anekdotákból vagy legjobb barátainak írásaiból ismerhettünk meg. 2016 szeptemberében „Pali bácsi” halálának huszadik évfordulójáról emlékezünk meg.



2016. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Konferencia az alkalmazott matematikáról

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2016. évi *BJMT Alkalmazott Matematikai Konferenciát* Győrben rendezte meg. A konferencia célja olyan tudományos, technológiai és társadalmi kihívások bemutatása volt, amelyek megfogalmazásában és megoldásában a matematika kiemelt szerepet játszik. Közismert példák az alkalmazásra az autonóm járművek, az okos városok vagy a víztudomány.

2016. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Kálmán Rudolf és a Kálmán-szűrő

2016. július 2-án, életének 86. évében, a rákbetegséggel folytatott többéves küzdelme után elhunyt *Kálmán Rudolf*, a rendszertudomány matematikai alapjainak megalkotója. A *Kálmán-szűrő* kifejlesztése szorosan összefügg a lineáris rendszerek elméletében végzett úttörő jelentőségű munkájával, amelyet a villamos áramkörök vizsgálata inspirált.

2016. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Timothy Gowers: Matematika nagyon röviden

Itt nem talál az olvasó semmit az aktuális káoszról, fraktálokról, hálózatokról (ki emlékszik már a katasztrófaelméletre…); a cél kifejezetten *néhány fogalom alaposabb megismertetése*, nem a villogás. Valóban lehet a matematika legfontosabb jellemzőjének tartani ezt. Szerzőnk számos példán mutatja meg, hogy ha megértjük a lényegét, megoldhatatlannak tűnő feladatok vizsgálatában is előbbre juthatunk.

2016. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

A Wolfram nyelv történetéről

A Wolfram nyelv mindössze néhány éve kapott végleges nevet, noha fejlesztése még az elmúlt évezredben kezdődött el. A felhasználók a nyelvvel először a *Mathematica* nevű programcsomagban találkozhattak. A cikkben a *Wolfram programozási nyelv* rövid történetét és egy *könyvismertetőt* olvashatnak.

2016. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Prize of the European Mathematical Society

Az *Európai Matematikai Társulat* Berlinben tartott 2016. évi kongresszusán *Varjú Péter* EMS díjat kapott (*Prize of the European Mathematical Society*). Ezt a díjat 1992 óta 35 évnél nem idősebb matematikusok kaphatják a nemzetközi bizottság döntése alapján. *Tardos Gábor* után ő a második magyar matematikus, aki EMS-díjban részesült.

2016. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Matematikai problémák a meteorológiai modellezésben

A *meteorológiai modellezés* az alkalmazott matematika egyik legösszetettebb területe. A téma egyik legfrissebb angol nyelvű tanulmánygyűjteményét ismerteti a szerző, *Ladics Tamás*. A kötetben foglalt tanulmányok érdekesek és hasznosak lehetnek a légköri kutatást művelők közösségén túl minden természettudományos és matematikai képzettséggel rendelkező érdeklődő számára. A *matematikai módszerek sokszínű alkalmazása* ötleteket és motivációt adhat a jövőbeni kutatásokhoz.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **HÍREK – ÚJDONSÁGOK** ROVAT A MATEMATIKÁHOZ ÉS A BOLYAI TÁRSULATHOZ KAPCSOLÓDÓ ESEMÉNYEKRŐL, ÚJDONSÁGOKRÓL SZÓL. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÁKÓCZI ILDIKÓ.*)

Simon Péter
2016. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Kit érint a matematika?

Simon Péter főszerkesztő írása a lap indíttatásáról, céljairól, lehetőségeiről: negyedévente megjelenő folyóiratunk rovataiban ismeretterjesztő írásokat találnak a matematika tanításáról, tudományos eredményeiről, ipari és pénzügyi alkalmazásairól, könyvismertetésekkel, portrékkal, hírekkel. Szeretnénk megszólítani mindazokat, akik a matematikát tanulják, tanítják, kutatják, vagy bárhol alkalmazzák, mindenkit, aki matematikában érintett. Örülnénk, ha minél több területet mutathatnánk be, amit a matematika *érint*.

Kosztolányi József
2016. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Beszámoló az 56. Rátz László Vándorgyűlésről

Idén Baja, ezen belül pedig a Bajai III. Béla Gimnázium adott otthont a július 5. és 8. között megrendezett *56. Rátz László Vándorgyűlésnek*. Bizonyos értelemben jubileumi volt az esemény, ugyanis 40 éve, 1976-ban volt utoljára Baján Vándorgyűlés.

Totik Vilmos
2016. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Prize of the European Mathematical Society

Az *Európai Matematikai Társulat* Berlinben tartott 2016. évi kongresszusán *Varjú Péter* EMS díjat kapott (*Prize of the European Mathematical Society*). Ezt a díjat 1992 óta 35 évnél nem idősebb matematikusok kaphatják a nemzetközi bizottság döntése alapján. *Tardos Gábor* után ő a második magyar matematikus, aki EMS-díjban részesült.

Szerkesztő
2016. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Röviden az Érintő rovatairól

Elektronikus Matematikai Lapunk egy-egy számát a cikkek bevezetőivel főoldalunkon láthatják. A címére kattintva lehet olvasni a cikket. Ha a cikk rovatára kattintanak, akkor megjelenik az adott rovat összes írása, ami ebben a számban található. Egy-egy szám rovatait a fő menüpontokból is elérhetik (teljes képernyőn a felső menüsorból, egyébként a bal felső sarokból). A bal felső sarok három vonalkájára kattintva találják az Információk menüjét. A rovatokban más-más jellegű írásokat találhatnak, válogassanak belőlük kedvük, érdeklődésük szerint.

Baran Zsuzsa, Williams Kada
2016. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Hongkongi levél

A levelet egy debreceni és egy szegedi gimnazista írta, nevüket évek óta ismerjük a versenyekről, feladatmegoldásban kiválóak, és most kiderült, hogy nemcsak számolni, de írni is egész jól tudnak :-). A Hongkongban, a *Nemzetközi Matematikai Diákolimpián* részt vett magyar csapat: *Gáspár Attila* (aranyérem), *Dobos Sándor* (csapatvezető-helyettes), *Kunszenti-Kovács Dávid* (a norvég csapat vezetője), *Pelikán József* (csapatvezető), *Szabó Barnabás* (ezüstérem), *Lajkó Kálmán* (ezüstérem), *Baran Zsuzsanna* (bronzérem), *Kós Géza* (koordinátor), *Williams Kada* (bronzérem), *Nagy Kartal* (ezüstérem).

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

Simon Péter 2016. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Kit érint a matematika?

Sosem voltam jó matekból – mondja viccesen a riporter vagy a riportalany, kifejezve társadalmunk széles rétegének viszonyulását a matematikához. Bár a közoktatásban kiemelten, 12 éven át tanítják, sok gyereknek előbb-utóbb rettegett tantárgyává válik, amit nehéz megérteni, nehéz megtanulni. Ők felnőttként még azt a keveset is, amit tudtak, igyekeznek elfelejteni. Másoknak a matematika mintha a vérükben lenne, szinte nem is kell tanulniuk, könnyedén oldják meg a feladatokat, sorra nyerik a versenyeket. Szerintük érdekes és szép. Vannak, akik nem értik, mire jó a matematika, miért is kell kínozni ezzel az elvont tudománnyal a tanulókat. Valóban csak keveseknek, kiváltságosaknak okozhatnak örömet a matematika logikus kérdései, válaszai, megoldatlan problémái, szépsége és igazsága? A való életben mire használható, amit ebből a tárgyból tanulunk?

A matematika az ókortól kezdve egyre inkább a társadalom tudásának alapja, nélküle nem lett volna építészet, kereskedelem, technika, informatika, telefon, tévé, internet és facebook. A fizika, a kémia, a biológia vagy a haditechnika sem tudott volna fejlődni a matematikusok újabb és újabb elméletei, tételei nélkül. Mint ahogy a matematika is újabb és újabb inspirációt kapott a tudományok és a technika eredményeitől.

A római számok között hiába keressük a nullát, a negatív számokról nem is beszélve, ezek csak a középkorban, a kereskedelem igényei nyomán kerültek be a matematikába. A XII. században a semmi absztrakciójaként bevezetett nulla mára közismertté vált, és ez minden bizonnyal elmondható a XIX. század végén bevezetett üres halmazról is. A végtelen kicsi és végtelen nagy fogalmának bevezetése, melyet a XVII. századi fizika erősen motivált, az analízis kialakulásához vezetett. Mára minden mérnök és közgazdász bevezetést kap a differenciál- és integrálszámítás rejtelmeibe, melynek fogalmai teljesen átjárják a gazdasági és technikai világunkat. Az informatika kora is visszahatott a matematikára, gondoljunk csak az internetes fizetést lehetővé tevő kriptográfiára, vagy az információk keresését szolgáló adatbányászatra. Az elmúlt néhány évtizedben számos új matematikai terület létrejöttének lehettünk tanúi a káoszelmélettől a pénzügyi változásokat modellező véletlen folyamatokon át a nagy hálózatok vizsgálatáig. Az így kialakult diszciplínák fokozatosan beépülnek a matematika hagyományos területei közé. Mára a matematika életünk szinte minden részét átszövi. A matematikai logikát, algoritmusokat alkalmazó rendszerszintű gondolkodás a sikeres vállalat számára kulcsfontosságú. Az iparban, a bankszférában egyre keresettebbek a matematikusok. Statisztikák szerint az egyik legjobb foglalkozás a világon a matematikusé: nyugalmas, széles körben keresett és emellett jövedelmező!

Talán mégiscsak érdemes lenne több gyerekkel és felnőttel megértetni, megszerettetni a matematikát, megmutatni hasznosságát, alkalmazhatóságát! Hiszen szinte nincs az életnek olyan területe, amelyet a matematika ne érintene!

A Bolyai János Matematikai Társulat feladatának érzi, hogy hazánkban ezt az üzenetet széles körben terjessze, a matematika eredményeit, ezek innovatív hatásait sokak számára elérhetővé tegye. Ez vezetett néhányunkat arra, hogy elindítsuk a Társulat elektronikus matematikai lapját, az Érintőt. Számos kérdésre szeretnénk választ kapni mi is mindannyian, akiket már régen megérintett a matematika. Mivel foglalkozik ma a matematikai kutatás? Hogyan épülnek be az új matematikai felfedezések a mindennapjainkba? Hogyan lehet az egyre szélesedő ismeretanyagot, a mélységet nem feladva, a következő generációnak átadni? Hogyan lehet ebben segíteni a szülőknek? Kik azok, akik napjainkban a matematikai kutatás és innováció élvonalában dolgoznak?

Többek között ezeket a témákat szeretnénk körüljárni negyedévente megjelenő folyóiratunk rovataiban, ismeretterjesztő írásokkal a matematika tanításáról, tudományos eredményeiről, ipari és pénzügyi alkalmazásairól, könyvismertetésekkel, portrékkal, hírekkel. Szeretnénk megszólítani mindazokat, akik a matematikát tanulják, tanítják, kutatják, vagy bárhol alkalmazzák. Reméljük azonban, hogy az Érintőt nemcsak azok olvassák, akiket munkájuk, tanulmányuk a matematikához köt, hanem minden érdeklődő.

szerk@ematlap.hu címünkre várjuk mások ötleteit is, amelyekkel hozzá tudunk járulni ahhoz, hogy minél többen érezzék azt, hogy a matematika őket is megérintette.

Simon Péter főszerkesztő és Oláh Vera felelős szerkesztő

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

Kosztolányi József 2016. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Beszámoló az 56. Rátz László Vándorgyűlésről

Idén Baja, ezen belül pedig a Bajai III. Béla Gimnázium adott otthont a július 5. és 8. között megrendezett 56. Rátz László Vándorgyűlésnek. Bizonyos értelemben jubileumi volt az esemény, ugyanis 40 éve, 1976-ban volt utoljára Baján Vándorgyűlés. Ezt a 40 évvel ezelőtti Vándorgyűlést ma már sokan a „legendás" jelzővel illetik. Ennek oka, hogy azon a Vándorgyűlésen volt egy beszélgetés a XX. század két nagy magyar matematikusával, Péter Rózsával és Kalmár Lászlóval, akik tevékenységükkel, életművükkel a matematika népszerűsítésére és iskolai tanítására is igen nagy, máig érzékelhető hatással voltak. Az Urbán János által vezetett beszélgetés, sajnos, a két „főszereplő" tanárok előtti utolsó nyilvános „fellépése" volt: Kalmár László 1976 augusztusának elején, Péter Rózsa 1977 februárjában hunyt el.

Az idei rendezvényen 190 regisztrált résztvevő volt, közülük 23-an határon túli magyarlakta területekről érkeztek. A korábbi évekhez képest újdonság volt az idei Vándorgyűlésen, hogy az eddigi három szekció (Alsó tagozat, Felső tagozat, Középiskola) kiegészült egy negyedikkel, a speciális matematika tagozaton tanító tanárok szekciójával. Ezzel bővült a választható előadások és szemináriumok palettája, amely bővülést a résztvevő tanárok kifejezetten pozitívan fogadták.

A korábbi hagyományoknak megfelelően a kedd délutáni ünnepélyes megnyitó és plenáris ülés keretében került sor a Beke Manó Emlékdíjak átadására. Idén a Beke Manó Emlékdíj II. fokozatában részesültek a következő kollégák: Csikósné Vörös Marianna, Fábián Istvánné, Gosztomné Ivsics Eszter, Kis Gábor, Lutzné Feszt Edit, dr. Ökördi Péterné, Schultz János, Udvarhelyiné Béres Irma.

A szakmai előadások előtt köszöntöttük az idei Vándorgyűlésen is előadást tartó Rábai Imrét abból az alkalomból, hogy 2016. július 9-én töltötte be a 90. életévét.

A plenáris ülés második részében először Laczkovich Miklós, az MTA rendes tagja tartott *A matematikaoktatás legégetőbb problémái egy felmérés válaszainak tükrében* címmel előadást. Az előadás előzménye az volt, hogy az MTA Matematikai Osztálya a köz- és felsőoktatás minden egyes szintjét képviselő tanárokból, valamint akadémikusokból 2015 decemberében megalakította a Matematikai Közoktatási Munkabizottságot 21 fővel, Laczkovich Miklós elnökletével. Ennek a bizottságnak az első ténykedése egy, a matematikatanítás jelenlegi hazai helyzetét vizsgáló kérdőív összeállítása, majd ezen keresztül a tanítók/tanárok véleményének megismerése volt. A kérdőívet a célcsoport tagjainak több mint 25%-a töltötte ki. Ez a kitöltési arány biztosítja, hogy az egyes kérdésekre adott válaszok összesítése alapján megfogalmazott állítások figyelembe vétele határozottan javasolt a kormányzat oktatáspolitikai döntései előtt. Az előadást vastaps fogadta, amelynek oka egyáltalán nem az előadó által mondottak optimista kicsengése volt...

Hagyományosan a Vándorgyűlés plenáris délutánján szoktak előadást tartani az előző év végén Rátz Tanár Úr Életműdíjat kapott matematikatanárok is. Pálfalvi Józsefné dr. *Gyökereink. Tantervi fordulatok a magyar matematikatanításban* címmel tartott kiváló, sok tanulsággal szolgáló tanítástörténeti előadást, Mike János pedig lebilincselően élvezetes stílusban mutatott be néhányat tanítványai szellemes és érdekes feladatmegoldásaiból. A plenáris ülés után a nemcsak matematikatanárnak, de orgonistának is kiváló Tassy Gergely adott nagyon jól szerkesztett orgonakoncertet a Barátok Páduai Szent Antal Templomában. A keddi nap a Turisztikai Központban elköltött közös vacsorával zárult.

Szerda reggeltől péntek délig négy szekcióban zajlottak az előadások és szemináriumok a gimnázium épületében. A krónikás azért nem szeretne most egyetlen előadást vagy szemináriumot sem kiemelni, mert a résztvevők visszajelzései alapján mindegyik előadás és szeminárium alaposan előkészített, informatív és hasznos volt. A hagyományos és nagy népszerűségnek örvendő programok idén is lezajlottak: volt Tanárverseny a MATEGYE Alapítvány szervezésében, volt szerda este Hangos Könyv a Typotex Kiadó szervezésében, Votisky Zsuzsa vezetésével, volt szerdán foci, és csütörtökön kirándulások. Baja speciális adottságai lehetővé tették, hogy a szerdai sportolási lehetőség kibővüljön sárkányhajózással illetve kenuzással a Sugovicán. Háromféle kirándulás közül választhattak, akik csütörtök délután kirándulni szerettek volna: lehetett Hajósra (érseki kastély, pincefalu, borkóstolás), Gemencre (kisvasút, tanösvény, Ökoturisztikai Központ) kirándulni, valamint lehetett hajókázni a Dunán. Mindegyik kirándulás népszerű volt, és a résztvevők beszámolói alapján jól sikerült. Ennek a sikernek nem elhanyagolható összetevőjeként az időjárás kegyes volt hozzánk a Vándorgyűlés teljes ideje alatt.

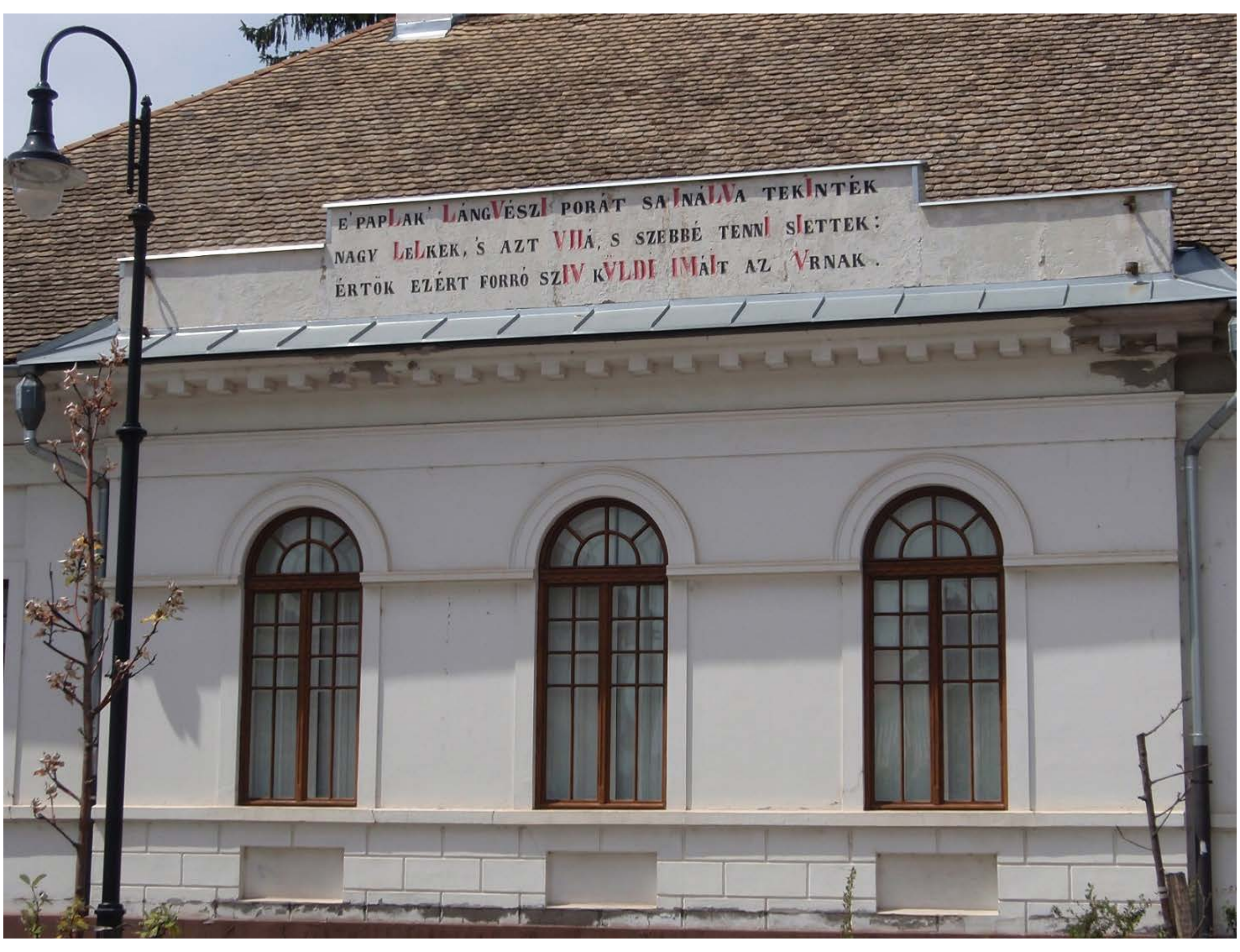
Összegezve a fentieket, elmondható, hogy az idei bajai Vándorgyűlés jól szervezett, szakmai szempontból is tartalmas és színvonalas volt. Az 57. Rátz László Vándorgyűlés 2017-ben Székesfehérváron lesz.

Kosztolányi József

Megjegyzések:

- A Vándorgyűlés programja az alábbi honlapon elérhető. Több előadás anyaga tanulmányozható itt: http://rlv.berzsenyi.hu/2016

- A Baján készült fotót a római számok tanításához ajánljuk. Horváth Eszter adta közre a Mattanárklub nyári hírlevelében, aki ott nem olvasta, adja össze a római számokat és megtudja, mikor építették újjá az épületet.


E' PAPLAK' LÁNGVÉSZI PORÁT SAINÁLVA TEKINTÉK
NAGY LELKEK, 'S AZT VJJÁ, S SZEBBÉ TENNI SIETTEK:
ÉRTÖK EZÉRT FORRÓ SZIV KV̈LDI IMÁIT AZ VRNAK.

☐ beszámolók

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

Totik Vilmos 2016. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Prize of the European Mathematical Society

Az **Európai Matematikai Társulat** Berlinben tartott 2016. évi kongresszusán ***Varjú Péter*** EMS-díjat kapott (*Prize of the European Mathematical Society*). Ezt a díjat 1992 óta 35 évnél nem idősebb matematikusok kaphatják a nemzetközi bizottság döntése alapján. Négyévente 10 díjat adnak át az EMS kongresszusain. Varjú Péter 2006-ban szerzett matematikus diplomát a Szegedi Tudományegyetemen. Egyetemi tanulmányai alatt kétszer lett első helyezett a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyen. Végzése után rövid ideig az Analízis és Sztochasztika Kutatócsopotban dolgozott, majd Fulbright ösztöndíjjal Princetonban folytatta PhD tanulmányait, ahol 2011-ben szerzett doktori fokozatot. Ezt követően a mai napig különböző ösztöndíjakkal Angliában, Cambridge-ben dolgozik. Először kombinatorikával, majd analízissel foglalkozott, jelenlegi kutatási területe csoportokon végzett véletlen séták, additív kombinatorika és Bernoulli konvolúciók. A díjat a véletlen séták elméletében elért mély eredményeiért kapta. *Tardos Gábor* után ő a második magyar matematikus, aki EMS díjban részesült.

Totik Vilmos

díjazottak

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2016. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Röviden az Érintő rovatairól

Elektronikus Matematikai Lapunk egy-egy számát a cikkek bevezetőivel főoldalunkon láthatják. A címére kattintva lehet olvasni a cikket. Ha a cikk rovatára kattintanak, akkor megjelenik az adott rovat összes írása, ami ebben a számban található. Egy-egy szám rovatait a fő menüpontokból is elérhetik (teljes képernyőn a felső menüsorból, egyébként a bal felső sarokból). A bal felső sarok három vonalkájára kattintva találják az Információk menüjét. A rovatokban más-más jellegű írásokat találhatnak, válogassanak belőlük kedvük, érdeklődésük szerint.

A Hírek – újdonságok rovat a matematikához és a Bolyai Társulathoz kapcsolódó eseményekről, újdonságokról szól. Rovatszerkesztő: *Rákóczi Ildikó.*

Az Interjú – portré menüpont jól vagy kevésbé ismert matematikusokat vagy olyan, egykor matematikusként végzetteket szeretne bemutatni, akik ma más szakma elismert képviselői, sportolók, művészek… A rovat gazdája: *Oláh Vera.*

Tanóra – szakkör rovat: Tanár, szülő és nem utolsó sorban a tanítvány is tapasztalatból tudja, hogy a tanítás is mesterség, aminek eredménye alapvetően függ attól, hogy mit és hogyan adunk át a tanítási órákon, szakkörökön és iskolán kívüli foglalkozásokon. A mesterségbeli tudást ápolni kell. Sokszor találkozunk olyan feladattal, ötlettel, amit szívesen elteszünk későbbi használatra. A most induló digitális folyóirat tanítással foglakozó rovata szeretne hozzájárulni a matematikatanárok eszköztárának gazdagításához, fórumot kíván adni a gondok, nehézségek megtárgyalására is. Terveink szerint a matematika különböző témaköreinek tanításával foglalkozó írások, szakköri tematikák, a pedagógustársadalmat foglalkoztató szakmai kérdések elemzése, játékos feladatok, matematikához köthető érdekes képek, rajzok fognak megjelenni ebben a rovatban. Most még csak tervezgetünk. Várjuk olvasóink javaslatait is arra, hogy mivel foglalkozzunk, hogyan alakuljon ennek az új folyóiratnak és benne ennek a rovatnak az arculata. Rovatszerkesztő: *Horváth Eszter.*

Könyvespolc – ajánló rovatunk bevezetőjét a *Legfölső polc* című cikkben találják. Ebből egy rövid részlet: Elsősorban olyan könyvekről szeretnénk tudósítani és olyan elektronikusan elérhető írásokat ajánlani, amelyek a matematika bármely része vagy kapcsolatai iránt érdeklődők számára kívánatosak lehetnek. Rovatszerkesztő: *Tóth János*

A Tudomány menüpont többféle, a matematika tudományához kapcsolódó funkciót takar. Két rovat írásai jelennek meg alatta, ezek: A Tudomány – történet és a Mi is …?

A **Tudomány – történet** rovat célja elsősorban matematikatörténeti jellegű írások közlése. A teljesség igénye nélkül ide tartozik a matematikához köthető híres vagy éppen feledésbe merült tudósok munkássága, fordulatos életrajzok, továbbá a matematika egy-egy részterületének vagy nevezetes problémájának története. Örömmel fogadunk olvasóinktól ötleteket, témajavaslatokat, cikkeket vagy akár személyes visszaemlékezéseket. Szívesen vesszük, ha felhívják figyelmünket matematikatörténeti szempontból érdekes könyvekre, honlapokra, írásokra, filmekre, évfordulókra stb. Rovatszerkesztő: *Besenyei Ádám*.

A **Mi is … ?** rovat a mai matematika tudományáról kíván szólni a hozzáértőknek. Az Amerikai Matematikai Társaság (AMS) folyóiratának, a Notices-nak van egy érdekes rovata: What is…? címmel, 1-2 oldalas cikkekkel, amelyek egy-egy kevéssé ismert, egyetemen (még) nem tanított, de valahol már hallott és érdeklődésre számot tartható matematikai fogalmat, jelenséget magyaráznak el matematikát végzettek számára. Az AMS szíves hozzájárulásával az Érintő-ben elindítjuk a Mi is ….? sorozatot. Ebben néhány eredeti What is… ? fordítása mellett saját szerzőink hasonló írásait szeretnénk megjelentetni. A sorozat gazdája *Stipsicz András*.

A Gazga(g)ság nevet adtuk a ***Gazdaság – technika – művészet*** rovatnak, amelyben bemutatjuk, hol, miképpen használják fel a matematikát, milyen gazdag is az a kör, amelyik érinti ezt a tudományágat. Elképzeléseink szerint a rovat lefedné az alkalmazott matematikát mind a gazdaságban, mind más tudományokban. Súrolni szeretnénk a matematika határterületeit a technikában és a művészetekben is. Rovatszerkesztők: *Röst Gergely és Molnár-Sáska Gábor*.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Baran Zsuzsa, Williams Kada 2016. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Hongkongi levél

Kedves Bolyai Társulat!

Ezen beszámoló megírását már a hongkongi repülőtér várójában elkezdtük – ezzel kívánva élvezetesebbé tenni a röpke hétórás várakozási időt – de a kezdeményezés hamar beszélgetésbe, matekozásba torkollott, így csak most tudjuk prezentálni.
A csapat összetételét tekintve éppen úgy alakult, ahogy azt tavaly az olimpia után elképzeltük (a jövő évit is kitaláltuk, de azt nem mondjuk el :)). Emiatt már hamar elkezdtük a felkészülést, de a legtöbbet azért mégis nyáron, a Fazekasban, majd a pöpecül megszervezett dombóvári táborban matekoztunk.
A metropoliszba a szűk 50 perc átszállási idő ellenére is sikerült gördülékenyen megérkeznünk. A városkép a tengerrel, óriási hidakkal és épületekkel legalább olyan lenyűgöző volt, mint amilyennek a tavalyi olimpia záróünnepségén bemutatott reklámvideó alapján elképzeltük. A buszokból kilépve ismét elállt a lélegzetünk, ezúttal a mellbevágó hőség és a pára miatt - ezután nem volt meglepő látni a helyszínt adó hongkongi természettudományi egyetem csempézett falait. Épp a tengerparton voltunk elszállásolva, egy hegység lábánál, a szobákból a tengerre és néhány gyönyörűen zöldellő szigetre nyílt kilátás. Szokatlan volt, hogy mindenhova lifttel kellett közlekedni: a koleszokban biztonsági okokból lezárták a lépcsőket (mintha túl lett volna biztosítva, de ki tudja), és a főépület földszintje – a verseny helyszíne – pedig a hegyoldalon, 30 emelettel feljebb volt található.
A nyitóünnepséget igen profin tartották meg, a csapatokat meglehetősen gyorsan felvonultatva. Elkápráztató volt egy szimfonikus zenekart látni magunk előtt, hatalmas kínai dobokkal kiegészítve.
Az első éjszakákon nehezen viseltük az időeltolódást és az újszerű éghajlatot, de pár nap alatt mindkettőhöz hozzá lehetett szokni valamennyire, így mindkét versenynapon aránylag pihenten sorjázhattunk be a terembe. (Egyébként ez is kissé túlbiztosítottnak tűnt, belépéskor a tasakjaink mellett a zsebeinket is ellenőrizték, a verseny közben pedig a mosdóba sem volt egyszerű kijutni.)
A harmadik feladat kivételével mindegyikre adott valamelyikünk megoldást. (Sőt, valamelyikünk a harmadik kivételével minden feladatra adott megoldást.)
A hatodik feladat az elmúlt évek hatosaival szemben teljesen elérhető nehézségű volt, sokan valószínűleg jobb pontszámot értek volna el rajta, ha kisebb sorszámmal szerepel.
A feladatsor egyébként nem volt könnyű, de verseny után bosszantó érzést jelentett, hogy több feladat megoldása is pár mondatban összefoglalható volt.
A csapatvezetők tömény pesszimizmust igyekeztek belénk sulykolni a pontszámokkal kapcsolatban, de végül nem éreztük úgy, hogy a kelleténél kevesebb pontot kaptunk volna. Még Kálmán ábrákkal kódolt, de egyébként hibátlan megoldását is sikerült megfejtetni a koordinátorokkal.
Ezalatt mi már a kirándulásokon vettünk részt. Több helyen járva Hongkongnak több különböző arcát ismerhettük meg, de mindegyik program után felüdülést jelentett beülni a hűtött buszokba.
A hongkongi Disneylandben azonnal megtaláltuk a legérdekesebb helyet, a medvék között elhúzó hullámvasutat, ezen többször is végigmentünk. Végigvezettek bennünket egy iskolán és végigmehettünk egy helyi piacon is. Ez utóbbi érződött talán leginkább ázsiainak (legalábbis a képzeletünkben ilyesmi kép élt): két szomszédos épület aljában sűrűn elhelyezett boltok, amikben meglepően sokféle dolgot lehetett kapni. A Peak nevű kilátóba (ami az idei IMO-logót is ihlette) a drága belépőjegy miatt sajnos nem mentünk fel, de azért így is meg tudtuk csodálni a várost felülnézetből.
A fenti programokon kívül – talán a nagyobb közösségi tér hiányának enyhítésére – két este ún. cultural night-ot is szerveztek. Itt egy teremben lehetőség volt matekos játékokat kipróbálni, esetleg beszélgetni más csapatokkal, illetve akadt babákat fonó néni, színes írásjeleket pingáló bácsi és sárkánycukorkóstoló is.
Az utolsó este rendezett díjkiosztó ünnepség a megnyitóhoz hasonlóan gördülékenyen zajlott le. A diákokból álló fúvószenekar fergeteges látványt nyújtott, mintha egy rajzfilmből léptek volna elő.
A magyar csapat egy arany-, három ezüst- és két bronzérmet szerzett, az országok közötti (nem hivatalos) versenyben pedig 14. helyen végzett.
A ceremóniát egy elegáns vacsora is követte, ahol kivételesen (csodás) európai fogásokat tálaltak fel.
Az utolsó napot főleg pakolással töltöttük, ezen kívül a megmaradt ételkuponjainkat a campus egy elegánsabb kínai éttermében költöttük el. A délután és este pedig – ahogy már fentebb írtuk – a repülőtéren üldögélve ért bennünket.

Üdvözlettel:
A 2016-os magyar IMO-csapat

Írta: *Baran Zsuzsa* és *Williams Kada*

Megjegyzések:

Az összes eddigi diákolimpián (1959 óta) eredményesen szerepelt magyar versenyzők eredményei itt: https://www.imo-official.org/country_individual_r.aspx?code=HUN láthatók.

A hivatalos beszámoló és az olimpia hat feladata – ahogy minden évben, most is – a **KöMaL szeptemberi számában** található meg.

A 2016-os IMO-n minden eddiginél több résztvevő ország és versenyző volt. **A magyarok 109 ország csapatai közül lettek a tizennegyedikek**, és ha megnézzük, kik előztek meg bennünket, kiderül, hogy egy Európa-bajnokságon a dobogón végeztünk volna.

A lap tanévnyitó száma tudósít a 2016-os lányolimpiáról, a jövő évi versenyekre felkészítő szakkörök indulásáról, a fizikai diákolimpia sikeréről, mohó algoritmusokról és természetesen közli az előző tanévi pontversenyek részletes végeredményeit. Talán nem meglepő, hogy cikkünk mindkét ifjú írója a KöMaL egy-egy versenyén is aranyérmes!

díjazottak beszámolók

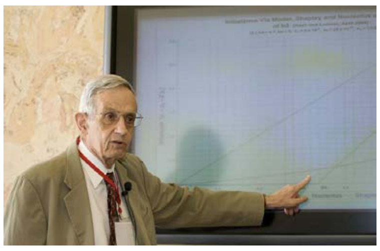
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

AZ **INTERJÚ-PORTRÉ** MENÜPONT JÓL VAGY KEVÉSBÉ ISMERT MATEMATIKUSOKAT, VAGY OLYAN, EGYKOR MATEMATIKUSKÉNT VÉGZETTEKET SZERETNE BEMUTATNI, AKIK MA MÁS SZAKMA ELISMERT KÉPVISELŐI, SPORTOLÓK, MŰVÉSZEK...(ROVATSZERKESZTŐ: *OLÁH VERA*.)



fordította Matolcsi Máté

2016. SZEPTEMBER, INTERJÚ – PORTRÉ

Interjú a 2015-ben Abel-díjat nyert John F. Nash Jr. professzorral

Világszerte az egyik legismertebb matematikus volt a 86 éves korában tavaly elhunyt *John Forbes Nash*, akinek élete ihlette az Oscar-díjas *Egy csodálatos elme* című filmet (Főszereplők: *Russell Crowe*, *Jennifer Connelly*, Rendező *Ron Howard*, 2001). A hosszú évtizedeken át paranoid skizofréniában szenvedő matematikus a játékelmélet terén elért kiemelkedő eredményeiért 1994-ben (*Harsányi Jánossal* és *Reinhard Seltennel* megosztva) megkapta a közgazdasági Nobel-díjat.

(A fotó 2008-ban készült a második nemzetközi játékelméleti konferencián.)

Pach János

2016. SZEPTEMBER, INTERJÚ – PORTRÉ

A varázshegyen túl

„Utoljára a halála előtt két nappal beszéltem vele szkájpon. Rosszul aludt, és arra panaszkodott, hogy nem tudja beszerezni azt az altatót, melyet Amerikában használt…” *Pach János* az MTA Rényi Intézetének matematikusaként az *Élet és Irodalom* 2016. augusztus 12-i számában búcsúzott el *Hajnal Andrástól*. Az ÉS engedélyével mi is megjelentetjük írását a magyar matematikatörténet elmúlt 60 évének pár momentumáról, benne Erdősről és Hajnalról. A Bolyai Társulat 2008-as közgyűlésén készült fényképén jobbról balra Hajnal András, Juhász István, Császár Ákos és felesége látható.

Komornik Vilmos

2016. SZEPTEMBER, INTERJÚ – PORTRÉ

Emlékfoszlányok Erdős Pálról

Húsz éve nincs közöttünk *Erdős Pál*. Többek rábeszélésére megpróbálom felidézni néhány vele kapcsolatos emlékemet: talán sikerül a személyiségét új szemszögből is megvilágítanom... – A Strasbourgban élő és dolgozó magyar matematikus, *Komornik Vilmos* bár csak rövid ideig ismerhette Erdőst, személyes élményei mégis sokat hozzátesznek ahhoz a képhez, amelyet az életrajzokból, anekdotákból vagy legjobb barátainak írásaiból ismerhettünk meg. 2016 szeptemberében „Pali bácsi” halálának huszadik évfordulójáról emlékezünk meg.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon:

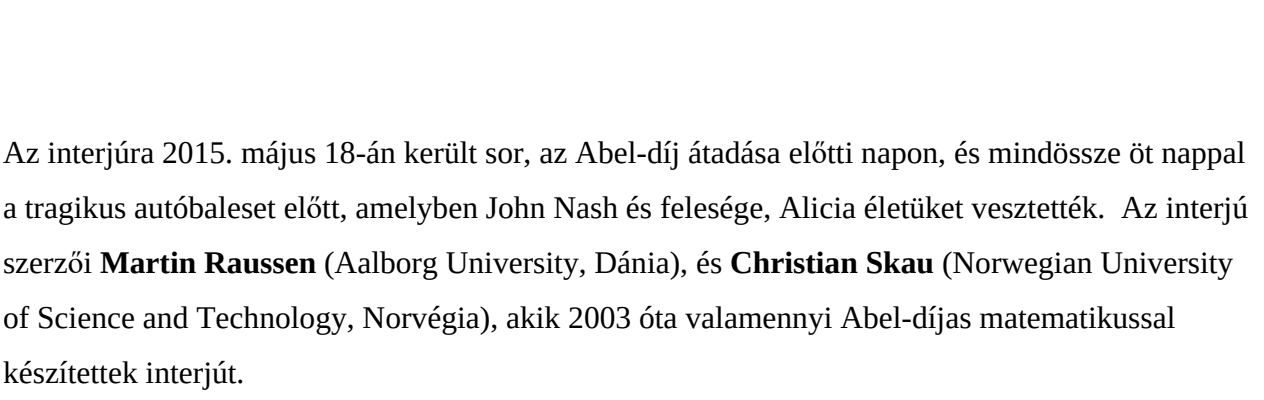
Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

fordította Matolcsi Máté 2016. SZEPTEMBER, INTERJÚ – PORTRÉ

Interjú a 2015-ben Abel-díjat nyert John F. Nash Jr. professzorral

Az interjúra 2015. május 18-án került sor, az Abel-díj átadása előtti napon, és mindössze öt nappal a tragikus autóbaleset előtt, amelyben John Nash és felesége, Alicia életüket vesztették. Az interjú szerzői **Martin Raussen** (Aalborg University, Dánia), és **Christian Skau** (Norwegian University of Science and Technology, Norvégia), akik 2003 óta valamennyi Abel-díjas matematikussal készítettek interjút.



A díj

Nash professzor úr, szívből gratulálunk, mint a 2015-ös Abel-díj egyik díjazottjának, aki Louis Nirenberggel megosztva kapta a díjat. Mi volt az első reakciója, amikor megtudta, hogy elnyerte a díjat?

Nem úgy tudtam meg, mint annak idején a Nobel-díj esetében. Kaptam egy telefont a díjazottak kihirdetése előtti napon, amelyben csak annyit mondtak, hogy az Abel-díj nyerteseit másnap fogják kihirdetni. Tehát csak ennyiben voltam felkészülve. De már korábban is gondoltam az Abel-díjra, amely jó példája a viszonylag újkeletű nagy presztízsű díjaknak, és amely nem teljesen kiszámítható.

De váratlanul érte?

Igen, váratlan volt. Nem tudtam, hogy az év közben mikor szokták kihirdetni a díjazottakat. Évről évre olvastam ugyan róluk a hírekben, de nem követttem a díjat nagyon közelről. Azt persze láttam, hogy nagyon tiszteletreméltó matematikusok a díjazottak.

Fiatalkor és tanulmányok

Mikor vette észre, hogy kivételes tehetsége van a matematikához? Voltak olyanok, akik bátorították, hogy matematikával foglalkozzon?

Édesanyám angol- és latintanár volt, édesapám pedig villamosmérnök, aki szintén tanítóskodott az I. világháború előtt. A kisiskolában az összeadást és a szorzást mindig sokjegyű számokkal végeztem, nem pedig ahogy a feladatokban volt, kétjegyűekkel. Szóval, négy-, ötjegyű számokkal számoltam. Élveztem, hogy kitaláljam a megfelelő számítási módszert. Az, hogy ezt ki tudtam találni, persze a matematikai tehetség jele volt.

Aztán voltak más jelek is. Megvolt nekem E.T. Bell „Men of Mathematics" című könyve, és azt nagyon fiatalon elolvastam. Azt hiszem maga Abel is meg van említve benne.

Igen, valóban, Abel is benne van. 1948-ban 20 éves korában felvételt nyert a Princeton egyetemre diploma utáni képzésre, ahová csak a legjobb diákok tudnak bekerülni. Hogy érezte magát Princetonban? Nagyon nagy volt a verseny a hallgatók között?

Nagyon inspiráló volt. Természtesen verseny is volt – egyfajta csendes versengés a diákok között. Nem direktben versenyeztünk egymás ellen, mint például a teniszezők, de mindenki ki akart emelkedni valamilyen különleges eredménnyel. Erről senki sem beszélt, de benne volt a levegőben.

Játékok és játékelmélet

A játékelmélet elég korán elkezdte foglalkoztatni Önt. Sőt, ki is talált egy zseniális topológiai jellegű játékot, amit aztán sok tanár és diák is játszott Princetonban. Akkor ezt a játékot „Nash"-nek hívták, de ma már „Hex" a szokásos neve. Egy dán feltaláló, Piet Hein, Öntől függetlenül szintén feltalálta ezt a játékot. Miért érdeklődött annyira a játékok és a játékelmélet iránt?

Közgzdaságtant tanultam az előző egyetemen, a pittsburgh-i Carnegie Institue of Technology-n (amelynek mai neve Carnegie Mellon University), és Princetonban figyelemmel kisértem az olyan kutatókat, akik a játékok és a matematikai programozás közötti kapcsolatot tanulmányozták. Volt néhány közgazdaságtani ötletem olyasfajta játékokkal kapcsolatban, amelyek a tőzsdéhez hasonlítanak – az is olyan, mint egy játék. Nem emlékszem pontosan, mikor történt, de Neumann és Morgenstern Princetonban találtak egy bizonyítást a kétszereplős játékok megoldására, ami egy speciális esete az én általános tételemnek n-szereplős játékokra. Én a megoldást az egyensúlyi állapot természetesen adódó fogalmával asszociáltam, és a topológiai Brouwer-féle fixpont-tétellel, ami jó ötlet volt.

Hogy pontosan mikor és miért kezdtem ezzel foglalkozni, és Neumann és Morgenstern mikor gondoltak erre – ebben bizonytalan vagyok. Később aztán rátaláltam a Kakutani-féle fixpont-tételre, ami a Brouwer-féle tétel egy általánosítása. Azt nem is tudtam, hogy Kakutanit Neumann inspirálta erre a tételre. Kakutani princetoni diák volt, és Neumann nem lepődött meg azon, hogy egy topológiai érvelés egy általános egyensúlyi fogalomhoz vezethet. Ebben az időben aztán kifejlesztettem a játékok tanulmányozásának további aspektusait is.

Most egy kicsit előreugrott professzor úr. A matematikával nem foglalkozó emberek közül is sokan tudják, hogy Ön közgazdaságtani Nobel díjat kapott 1994-ben.

Igen, ez sokkal később volt.

Az „Egy csodálatos elme" című filmnek köszönhetően, amelyben Russel Crowe játszotta az Ön szerepét, sokan tudják, hogy Ön közgazdaságtani Nobel-díjat kapott. De azt kevesebben tudják, hogy a Nobel-díjat elnyerő ötlet már a PhD disszertációjában szerepelt, amit Princetonban nyújtott be 1950-ben, 21 évesen. A címe „Nem-kooperatív játékok" volt.

Akkoriban volt fogalma arról, hogy milyen forradalmi hatású lesz ez a munkája? Hogy nemcsak közgazdaságtanban, de politológiában és evolúciós elméletekben is fogják majd használni?

Nehéz megmondani. Az biztos, hogy mindenütt lehet használni, ahol valamilyen egyensúlyi állapot van, és sok egymással versenyző szereplő van jelen. Az evolúciós elméletek természetesen ilyen helyzeteket kutatnak. Most kicsit elkanyarodunk az egyéb tudományok felé.

De az azért tudatosult Önben, hogy a disszertációja nagyon jó?

Igen, és egy hosszabb változata is volt, de a témavezetőm lerövidítette. Voltak eredményeim a kooperatív játékokról is, de végül azokat külön publikáltam.

A disszertáció témáját Ön választotta, vagy a témavezetője segített benne?

A témát többé-kevésbé én magam találtam, és aztán a téma alapján jelöltek ki nekem témavezetőt.

Albert Tucker volt a témavezetője, ugye?

Igen, ő Neumannal és Morgensternnel is dolgozott.

Princeton

A tanulási és kutatási szokásairól is szeretnénk kérdezni. Princetonban ritkán járt be előadásokra. Miért?

Igen, ez igaz. Princeton eléggé liberális volt. Nem sokkal azelőtt, hogy odaérkeztem, bevezetésre került az N-jegy fogalma. Például egy professzor a kurzus végén adhatott N-jegyet is, ami azt jelentette, hogy „nincs jegy". De ez meg is változtatta a tanulási szokásokat. Azt hiszem a Harvard nem alkalmazta ezt a módszert abban az időben, és nem tudom, hogy azóta bevezették-e. Princetonban viszont azóta is alkalmazzák az N-jegyet, ezért a kurzusokat ténylegesen (csak a jegyért) felvevő diákok száma Princetonban kevesebb, mint másutt.

Az igaz, hogy az volt az álláspontja, hogy ha az ember túl sokat tanul másodkézből, akkor az elnyomja a kreativitást és az eredeti gondolkodást?

Igen, így gondolom. De mi számít másodkéznek?

Valóban, mi számít másodkéznek?

Másodkéznek az számít például, ha az ember nem Abeltől tanul, hanem olyasvalakitől aki az Abel-féle integrálokat tanulmányozta.

Maga Abel is azt írta a matematikai naplójában, hogy az embernek a mesterektől kell tanulnia, nem pedig a tanítványaiktól.

Igen, ezt tartom jó módszernek.

Amíg Princetonban volt, többször is megkereste Albert Einsteint és Neumann Jánost is. Ők az Institute of Advanced Study-ban dolgoztak Princetonban, ami nem esik messze a Princeton egyetem területétől. Elég vakmerőnek számított ilyen fiatal diákként ilyen híres emberekhez odamenni, ugye?

Azért ilyet meg lehetett tenni. Ez jól illeszkedik Princeton intellektuális működésébe. Neumannt illetően, én a Brouwer-féle fixpont-tétellel bizonyítottam azegyensúlyi helyzetet, amíg ő és Morgenstern egy másik módszert használtak a könyvükben. De amikor Neumannhoz odamentem, és a táblánál álltam, azt kérdezte: „Egy fixpont-tételt használtál?" „Igen, a Brouwer-féle fixpont-tételt" – mondtam erre. Akkor már egy ideje tudtam, hogy a bizonyítás a Kakutani fixpont-tétellel is elvégezhető, aminek a közgazdaságtani alkalmazásokban azért van jelentősége, mert a fellépő függvénynek nem kell folytonosnak lennie. Vannak azért folytonossági tulajdonságai, úgynevezett általános folytonossági tulajdonságok, és erre az esetre is működik a fixpont-tétel. Nem voltam tudatában, hogy Kakutanit a bizonyításban Neumann inspirálta, aki maga is egy fixpont-tételt használt egy többszereplős közgazdaságtani problémában (míg a játékelméletben ő nem használt fixpont-tételeket).

Mi volt Neuamnn reakciója, amikor Ön beszélt vele erről?

Ahogy mondtam, bent voltam az irodájában, és ő csak néhány általános dolgot fűzött hozzá. Most már el tudom képzelni, hogy mi járhatott a fejében, hiszen ő is tudta a Kakutani fixpont-tételt (amit én nem említettem neki, pedig megtehettem volna). Valami általános megjegyzést mondott, hogy „persze, ez a módszer működik", de arról nem mondott sokat, hogy milyen csodálatos az eredmény.

Amikor Einsteinnel találkozott és elmondta neki néhány fizikával kapcsolatos ötletét, akkor Einstein hogyan reagált?

Éppen egy diák asszisztense ott volt vele, és erre nem igazán számítottam. Elmondtam az ötletemet, ami azzal volt kapcsolatos, hogy a fotonok energiát veszíthetnek az Univerzumon át történő hosszú utazásuk során, emiatt észlelhetünk vöröseltolódást. Másoknak is eszébe jutott ez az ötlet. Sokkal később láttam, hogy egy tudós Németországban írt erről egy cikket, de most nem tudok pontos referenciát adni. Ha ez a jelenség valóban létezne, akkor az aláásná azt a népszerű elméletet, hogy a Világegyetem tágul, ugyanis a tágulásnak tulajdonított vöröseltolódásnak más magyarázatát találnánk. Később egy matematikai elméletet is kidolgoztam erre a jelenségre, és ezt be is mutatom majd holnap az Abel-díj átadáson tartandó előadásomban. Van egy érdekes egyenlet, amely különböző típusú téridőket írhat le. Felmerülnek szingularitások, amelyeknek a sötét anyaghoz illetve a sötét energiához lehet köze. Azok a kutatók, akik ezt támogatják, azt is vallják, hogy az Univerzumban lévő tömeg legnagyobb része sötét energiából keletkezett. De az is lehet, hogy semmennyi sem keletkezett abból. Lehetségesek alternatív elméletek is.

John Milnor 2011-es Abel-díjazott éppen abban az évben kezdte meg egyetemi tanulmányait Princetonban, amikor Ön a diploma utáni képzését ugyanott. Ő azt mondta, hogy Ön nagyon is tudatában volt a híres megoldatlan problémáknak, és gyakran faggatta a kutatókat ezekkel kapcsolatban. Valóban valami nagy megoldatlan problémára vadászott Princetonban?

Igen, így volt. Illetve egész életemben általánosságban is igaz ez. Milnor akkoriban talán azt figyelte meg, ahogy néhány konkrét problémát tanulmányoztam. Milnor egyébként maga is szenzációs kutatási eredményeket ért el. Például megadott nem-standard differenciálható struktúrákat a 7-dimenziós gömbön. Azt is belátta, hogy minden csomónak van egy bizonyos nagyságú görbülete, bár ez már nem volt új eredmény, mert előtte nem sokkal valaki más[1] már belátta ugyanezt.

Egy sor híres eredmény

Mialatt a disszertációját írta játékelméletből a Princeton egyetemen, már egy újabb témán is dolgozott geometriával kapcsolatosan. Ezeket a kutatásokat aztán folytatta 1951-től 1959-ig, mialatt Bostonban az MIT-n dolgozott. És egy sor fantasztikus eredményt ért el. Valójában főként ezek az eredmények szolgáltatják az idei Abel-díj odaítélésének alapját. Mielőtt rátérünk magukra az eredményekre, hadd idézzük ezzel kapcsolatban Mikhail Gromovot, a 2009-es Abel-díj nyertesét. Ő hat éve azt mondta nekünk a vele készített interjú alatt, hogy az Ön módszerei „hihetetlen eredetiséget" mutatnak, valamint, hogy „amit Nash a geometriában elért, az véleményem szerint összehasonlíthatatlanul felülmúlja azt amit közgazdaságtanban alkotott – nagyságrendekkel felülmúlja". Ön egyetért Gromov értékelésével?

Szerintem ez ízlés kérdése. A geometriával nagy küzdelmem volt. Csináltam valamit algebrai geometriában, ami a differenciál-geometriához kapcsolódott – benne néhány apró finomsággal. Ott sikerült egy áttörést elérnem. Az ember konrollt nyer egy algebrai varietás geometriai alakja felett.

Éppen ez lesz a következő kérdésünk. Amikor 1951-ben az MIT-n kezdett dolgozni, benyújtott publikálásra egy cikket algebrai sokaságokkal kapcsolatban. Hadd idézzük Michael Artint az MIT-ról, aki később felhasználta az Ön eredményeit: „Már az is figyelemre méltó, hogy egy ilyen tétel megfogan valakinek a képzeletében." El tudná mondani nekünk, hogy mivel foglalkozott és mit bizonyított be ebben a cikkben, és hogyan kezdett ezzel a kérdéssel foglalkozni?

Nagyon megragadott Einstein téridő elmélete és a csillagok eloszlása az Univerzumban, és a következőre gondoltam: „Ha adott a csillagoknak egy eloszlása, akkor vajon van-e egy olyan sokaság, ami önmagába záródik és valamiféle egyensúlyban van az adott csillageloszláshoz képest?" Ezt kezdtem vizsgálni. Végülis sikerült egy matematikai modellt alkotnom, ahol a pontok (csillagok) eloszlása szabadon választható volt, és aztán ezekhez a pontokhoz tartozott egy megfelelő geometriai és topologikus tulajdonságokkal ellátott sokaság. Emellett további általános elméleti eredményeket is hozzáfűztem, és ezek együtt alkották a publikációt. Később a kutatók azon kezdtek dolgozni, hogy a reprezentációt még pontosabbá tegyék, mert amit én bebizonyítottam, az még megengedett geometriailag nem túl szép tulajdonságokat a reprezentáló sokaságban. Nem kellett például végesnek lennie, egyes részei kinyúlhattak a végtelenbe. Végül úgy tűnt, hogy A. H. Wallace ezt megoldotta – de mégsem, mert hiba volt az érvelésében. De később egy olasz matematikus Alberto Tognoli megtalálta a helyes megoldást.

Egy másik eredményéről is szeretnénk kérdezni, a Riemann-sokaságok realizálhatóságáról. A Riemann-sokaságok absztrakt sima struktúrák, ahol a távolságok és szögek csak lokálisan vannak definiálva elég absztrakt módon. Ön megmutatta, hogy ezek az absztrakt struktúrák mindig konkrétan is realizálhatók, mint egy magasabb dimenziós euklideszi tér részsokaságai.

Igen, ha a metrika absztrakt módon van adva, ahogy Ön is mondja, de elegendő ahhoz, hogy a metrikus struktúrát meghatározza, akkor ezt egy beágyazással realizálni lehet egy magasabb dimenziós térben, és a beágyazás indukálja a metrikát. De itt mellékvágányra kerültem. Először C^1-sokaságokra láttam be a tételt, amivel aztán mások is foglakoztak. Publikáltam egy cikket erről az esetről. Később egy holland matematikus, Nicolaas Kuiper a beágyazás dimenzióját eggyel csökkentette.

Maguktól az eredményektől eltekintve, sokan megemlítették, hogy Önnek a módszerei is zseniálisak voltak. Például hadd idézzük itt Gromovot és John Conwayt. Gromov, amikor meglátta az Ön eredményét, ezt mondta: „Azt hittem, hogy ez nonszenszt, zagyvaság, nem lehet igaz. De igaz volt, és hihetetlen volt." Valamint később: „Nash teljesen megváltoztatta a parciális differenciálegyenletek nézőpontját." Conway pedig: „Amit Nash csinált, az a XX. századi matematikai analízis egyik legfontosabb darabja." Ez aztán a dicséret!

Igen.

Az igaz, ahogy a pletyka tartja, hogy egy fogadás következtében kezdett a beágyazási tételen dolgozni?

Volt valami fogadás-szerűség. Beszélgettünk a professzori szobában az MIT-n, ahol a tantestület tagjai rendszeresen találkoztak. A beágyazás kérdéséről beszéltünk Warren Ambrose profeszorral, a geometria tanszék egyik professzorával. Tőle kaptam az ötletet, hogy az absztrakt metrikát egy beágyazással realizáljuk. Akkoriban ez teljesen nyitott probléma volt, nem voltak ilyen irányú eredmények azelőtt. Elkezdtem dolgozni rajta. Aztán ráterelődtem a C^1 esetre. Az derült ki, hogy ebben az esetben a beágyazási tér dimenziója nem kell, hogy sokkal nagyobb legyen, mint az eredeti sokaság dimenziója. Én plusz két dimenzióval oldottam meg, de aztán Kuiper belátta, hogy plusz egy dimenzió is elég. De az ő megoldása nem volt sima, pedig az ember azt szeretné, hogy ha egy sima sokaságot kap kézhez, akkor a beágyazás is legyen sima. Néhány évvel később megcsináltam a sima esetet is, és egy négy részből álló cikkben publikáltam. De volt benne egy hiba, most már bevallhatom. Mintegy 40 évvel a cikk publikálása után Robert M. Solovay logikaprofesszor a Kalifornia Egyetemről küldött nekem egy üzenetet, amiben rámutatott a hibára. Azt gondoltam magamban, hogyan lehetséges ez, és újra átnéztem a cikket és észrevettem a hibát. Az ember sima beágyazást akar, és ha a sokaság végtelen, akkor felosztjuk kisebb, véges részekre, és minden részhez csinálunk egy rész-beágyazást. Csakhogy egy logikai hibát követtem el, hogyan is fejezzem ki ezt, lokálisan jó volt a megoldásom, csakhogy semmi sem zárta ki, hogy két különböző pont képe ugyanaz legyen. Ezért aztán a beágyazásom az igazat megvallva nem is volt igazán beágyazás – belemetszehetett önmagába.

De a hibát később kijavították?

Hát, én sok-sok évvel a publikálás után tudtam meg, hogy hiba van. Lehet, hogy mások már korábban is észrevették, csak hivatalosan nem szóltak róla.[2]

Itt közbevetünk egy epizódot, ami megvilágítja, hogy mennyire meglepő volt akkoriban az Ön eredménye. Az egyik kollégája az MIT-n, Gian-Carlo Rota matematika- és filozófiaprofesszor, a következőt mondta: „A terület egyik szaktekintélye azt mondta nekem, hogy ha az ő egyik tanítványa egy ennyire különös ötlettel állt volna elő, akkor egyszerűen kizavarta volna az irodájából".

Ez nem túl liberális, progresszív hozzáállás.

Parciális differenciálegyenletek

Akárhogyan is, úgy tűnik, hogy az Ön eredményeit úgy fogadták, mint ami kívül esik és túlmutat azokon a technikákon, amelyeket azelőtt alkalmaztak.

Igen, ezek a technikák új módszerekhez vezettek a parciális differenciálegyenletek elméletében.

Folytassuk akkor a parciális differenciálegyenleteknél elért eredményeivel. Ha nem tévedünk, akkor ezek felé egy Louis Nirenberggel történt beszélgetés indította el 1956-ban a Courant Intézetben (Nirenberg a 2016-os Abel-díj másik díjazottja Ön mellett). Ő elmondott Önnek egy fontos megoldatlan problémát a nem-lineáris parciális differenciálegyenletek témakörében.

Igen, mondott nekem egy problémát. A témában egy kaliforniai kutató, C. B. Morrey már elért néhány korábbi eredményt, két dimenzióban. Morrey azt találta, hogy két dimenzióban az adott parciális differenciálegyenlet megoldásainak van egy folytonossági tulajdonsága. Az volt a kérdés, hogy mi történik magasabb dimenziókban. Ezen kezdtem dolgozni, és egy olasz matematikus, De Giorgi, szintén ezen dolgozott.

De akkor még nem tudtak egymás munkájáról, igaz?

Nem, én nem tudtam De Giorgi munkájáról, de végül ő jött rá hamarabb a megoldásra.

De csak az elliptikus esetben.

Igen, eredetileg csak az elliptikus esetben, de aztán lehetett a megoldást általánosítani a parabolikus egyenletekre is, és ez nagyon hasznosnak bizonyult. A parabolikus egyenletekkel kapcsolatban felmerült egy módszer, amiben az entrópia fogalmával kapcsolatos érvelés jött elő. Nem is tudom... Nem akarok semmi elsőbbséget belemagyarázni, de egy hasonló érvelést használt később Hamilton professzor és Perelman is. Ők is egy entrópia mennyiséget kontrollálnak, és így érnek el bizonyos javításokat, amelyekre szükségük van.

És végül ez vezetett el a Poincaré-sejtés megoldásához?

Az entrópia használata mindenesetre lényegbevágó volt. Először Hamilton használta, aztán Perelman onnan folytatta. Persze mindig nehéz megjósolni a későbbi sikert az út elején. Érdekes, hogy Perelman semmilyen díjat nem fogadott el. Elutasította a Fields-érmet, és a Clay Millenium díjat is, amely pedig egymillió dolláros pénzjutalommal jár[3].

Menjünk vissza arra az időpontra, amikor De Giorgi és Ön egyszerre dolgozott ugyanazon a problémán. Amikor megtudta, hogy De Giorgi előbb találta meg a megoldást, akkor csalódott volt?

Természetesen csalódott voltam, de az ember általában talál egy másik nézőpontot is. Mint a patak vize, amely megtölti a tavat, aztán valahol utat talál kifelé.

Vannak, akik úgy gondolják, hogy Ön is megkaphatta volna a Fields-érmet , ha nem lett volna az időbeli egybeesés De Giorgi munkájával.

Igen, ez valószínű, természetes dolog lehetett volna, ha megkapom. Viszont De Giorgi sem kapta meg a Fields-érmet, noha egyéb elismeréseket azért kapott. De ez már nem matematika: attól függ, hogy hogyan működik egy adott díjkiosztó bizottság.

Amikor az 1950-es években a legnagyobb eredményeit megalkotta, volt valaki, akivel megbeszélhette a dolgokat, valaki, akin az ötleteit először tesztelhette?

A bizonyításokat? A játékelméletbeli bizonyításhoz nem kellett sok megbeszélés, Neumann azonnal tudta, hogy egy ilyen bizonyítás működni fog, amint felhoztam a témát.

És mi a helyzet a geometriai eredményekkel és az egyéb eredményeivel? Volt valaki, akivel a bizonyításokat megbeszélte?

Voltak, akik általánosságban érdeklődtek a geometria problémák iránt, mint például Ambrose professzor. De a bizonyítások részleteiben ezek az emberek sem tudtak segíteni.

És mi a helyzet Spencer professzorral Princetonban? Vele voltak megbeszélései?

Ő valóban Pricetonban volt, és benne volt a vizsgáztató bizottságomban. Úgy tűnt, hogy nagyra értékeli az eredményeimet. Ő komplex függvénytannal foglalkozott.

Volak olyan matematikusok akár Princetonban, akár az MIT-n, akiket csodált, akikre felnézett?

Természetesen. Ott volt például Levinson professzor az MIT-n, őt csodáltam. Beszélgettem Norman Steenrod-dal is Princetonban, és Solomon Lefschetz-cel, aki tanszékvezető volt Princetonban. Ő jó matematikus volt. Az algebra professzorával, Emil Artin-nel azonban nem volt ennyire jó kapcsolatom.

A Riemann-sejtés

Ugorjunk előre az életének egy fordulópontjára. Úgy döntött, hogy megtámadja a matematika talán leghíresebb nyitott problémáját, az azóta is tárva-nyitva álló Riemann-sejtést. Ez egyike a Milleniumi problémáknak, amelyek egyszer már szóba kerültek. Elmondaná, hogy mentálisan mennyire fárasztotta ki ez a vállalkozás?

Igazából ez csak egy pletyka vagy mítosz, hogy én frontális támadást indítottam volna a Riemann-sejtés ellen. Óvatos voltam. Általában óvatos vagyok, amikor megtámadok egy problémát, mert a probléma úgyszólván visszatámadhat. A Riemann-sejtéssel kapcsolatban nem úgy gondolok magamra, mint a probléma igazi tanulmányozójára, hanem mint aki hobbiszerűen foglalkozik vele, ahol találhat valami gyönyörű és érdekes új aspektust. Selberg professzor, egy norvég matematikus, aki az Institue of Advanced Study-ban dolgozott, azt látta be a II. világháború idején, hogy a gyököknek legalább egy bizonyos hányada a kritikus egyenesre esik. Ezt még pár évvel azelőtt látta be, hogy az Intézetbe érkezett volna. Nagyon jó eredményeket ért el ekkoriban. Aztán később, 1974-ben, Levinson professzor az MIT-n bebizonyította, hogy a gyököknek legalább egy jelentős része, mintegy harmada esik a kritikus egyenesre. Akkor már agydaganatban szenvedett, ami aztán a halálát is okozta. Ilyen is megtörténhet: egy ember agya már sajnos támadás alatt áll, de attól egy ideig még képes lehet jó eredmények megalkotására.

Egy nagyon egyedi matematikus?

Azok a matematikusok, akik ismerik Önt, azt mondják, hogy a hozzáállása a matematikai problémákhoz nagyon más, mint a kutatók többségéé. Tudna mesélni az Ön megközelítéséről? Honnan merít inspirációt?

Hát, nem tudnám azt mondani, hogy most éppen így-és-így dolgozom, és ez mennyiben különbözik a standard munkamódszertől. Megpróbálom felmérni, hogy mit tudok kezdeni az elmémmel, a tapasztalataimmal és a kapcsolataimmal. Mérlegelek, hogy milyen problémát lenne előnyös megpróbálnom. Nem gondolkodom a mostanában népszerű nonszensz témákon.

Mondott egyszer egy interjú során valami olyasmit (javítson ki minket, ha nem így van), hogy „nem lettek volna jó tudományos ötleteim, ha normálisabban gondolkodtam volna". A megszokottól eltérő volt nézőpontja.

Hát, könnyű ezt gondolni. Azt hiszem ez igaz rám, mint matematikusra. Nem lenne értelme úgy gondolkodni, mint egy tipikus diák, aki a disszertációja előtt áll. A legtöbb matematikai disszertáció eléggé rutinmunka. Egy csomó munka van vele, de mégis az egész a témavezető által előre ki van jelölve, és a diák addig dolgozik, amíg összegyűlik elég anyag, és a disszertációt be lehet nyújtani.

Szabadidő és hobbik

Végül hadd kérdezzük meg, mint az összes eddigi díjazottól, hogy mik a főbb elfoglaltságai és hobbijai a matematikán kívül.

Különféle dolgok vannak. Természetesen követem a pénzügyi piacokat. Ez nem esik teljesen távol a közgazdaságtani Nobel-díjam területétől, de egy csomó mindent lehet ott kezdeni, ha az ember elgondolkodik a dolgokon. Vegyük például a nagy gazdasági krízist, ami nem sokkal azután kezdődött, hogy Obamát megválasztották. Az ember vagy az egyik döntést hozza, vagy egy másikat, és a kihatások eléggé különbözőek lehetnek. Azt hiszem, a gazdaság 2009-ben kezdett feléledni.

Közismert, hogy amikor diák volt Princetonban, akkor biciklivel járt, és Bach egyik fúgáját fütyülte. Szereti a klasszikus zenét?

Igen, Bachot valóban szeretem.

Más kedvenc zeneszerzők?

Jónéhány klasszikus zeneszerzőt élmény hallgatni, ott van például Mozart. Annyival jobbak, mint például Ketelbey és mások.

Nagyon köszönjük ezt az érdekes beszélgetést. Nemcsak a mi kettőnk nevében, de a Dán, a Norvég és az Európai Matematikai Társulatok nevében is.

A formális interjú után még lehetőségünk nyílt egy kis beszélgetésre Nash professzor jelenlegi érdeklődési területeiről. Újra megemlítette például a csillagászatot. Az eljövendő publikációkat illetően Nash professzor beszámolt egy Open Problems in Mathematics (Nyitott problémák a matematikában) című könyvről, amelyet egy görög matematikusssal, Michael Th. Rassias-szal közösen szerkeszt. Rassias ebben a tanévben a Princeton egyetemen posztdoktori kutatásokat folytatott.

Az interjút készítették: Martin Raussen (Aalborg University, Dánia), és Christian Skau (Norwegian University of Science and Technology, Norvégia). Fordította: Matolcsi Máté.

Az interjú az Európai Matematikai Társulat EMS Newsletters 2015. szeptemberi számában jelent meg (letölthető: https://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2015-09-97.pdf). Ezúton is köszönjük az EMS és a szerzők szíves engedélyét a fordítás megjelentetéséhez.

A közölt képek forrása a Wikimédia Commons: https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:John_Forbes_Nash

A csodálatos elméről szóló könyv magyarul is megjelent. http://www.gabo.hu/hu/szorakoztato-irodalom/2055-sylvia-nasar-egy-csodalatos-elme-a-nobel-dijas-geniusz-john-nash-elete-9789634061632.html

---

[1] Fáry István

[2] A bizonyítást azóta kijavították, és a Nash cikkében lévő tétel igaznak bizonyult; az egyik bizonyítást maga Gromov adta

[3] A Millenniumi problémák hét olyan matematikai problémát takar, amelyek megoldására 2000-ben magas pénzjutalommal járó díjat alapított az amerikai Clay Matematikai Intézet. Ezek közül hat még mindig megfejtésre vár, amellyel a kiváló matematikusok a dicsőségen túl az egyenként egymillió amerikai dollárt is elnyerhetik. A Poincaré-sejtést Grigorij Jakovlevics Perelman 2002-ben már megoldotta. Forrás:Wikipédia

☐ Abel-díj ☐ John Nash ☐ Neumann János ☐ Nobel-díj ☐ Harsányi János ☐ Einstein

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

Pach János 2016. SZEPTEMBER, INTERJÚ – PORTRÉ

A varázshegyen túl

Utoljára a halála előtt két nappal beszéltem vele szkájpon. Rosszul aludt, és arra panaszkodott, hogy nem tudja beszerezni azt az altatót, melyet Amerikában használt. Itt megtiltják az embernek, hogy aludjon! - kiabálta, mert rosszul hallott. Némi elégedettség futott át az arcán. Talán annak örült, hogy ilyen frappánsan sikerült fogalmaznia. Hajnal András alapvetően elégedett ember volt. Rejtély, hogy miből táplálkozott kifogyhatatlan energiája, jókedve és töretlen optimizmusa, melyből a legutóbbi időkig a környezetének is jócskán juttatott.

Budapest felszabadulásakor még nem volt tizennégy éves. A nehezén már túl volt. A Vörösmarty cserkészcsapatban, az ország egyetlen koedukált cserkészcsapatában ragyogóan tehetséges fiatalok vették körül. Éles vitákat folytattak a legelvontabb kérdésekről, és mindent elolvastak, ami a kezük ügyébe került. A matematika nem tartozott Hajnal kedvenc tárgyai közé, nem is érettségizett belőle kitűnőre. Thomas Mann Doktor Faustus-ának hatására döntött úgy, hogy mégis matematika szakra jelentkezik. A kivételes szellemi képességekkel megáldott Adrian Leverkühn szerint csak három tudomány méltó arra, hogy komolyan tanulmányozzák: a teológia, a zene és a matematika. Hajnal szívesen fogalmazott úgy, hogy a teológia akkortájt nem volt „aktuális", a zenéhez botfüle volt, úgyhogy kizárásos alapon maradt a matematika. Se neki, se Thomas Mann-nak nem volt pontos fogalma arról, hogy mi a matematika. De szerencséje volt, jól választott. Hamar kiderült, hogy különleges tehetsége van a matematikához. Másodéves korában már oktatott, 1953-ban pedig megnyerte a Bolyai Társulat Schweitzer Miklós emlékversenyét, melyet a világ legnehezebb matematikaversenyeként tartanak számon. Szegedre került aspiránsnak, ahol Kalmár László irányításával írta meg kandidátusi értekezését az axiomatikus halmazelmélet egy alapproblémájáról.

1956 tavaszán ismerkedett meg Erdős Pállal, aki a háború után akkor látogatott először Magyarországra. Ez a találkozás döntően befolyásolta életét és pályafutását. Erdős korának egyik legnagyobb matematikusa volt, áradt belőle a szabadság levegője és a matematika imádata. Akit ez megérintett, nemigen tudott szabadulni a hatása alól. Erdős akkor már húsz éve megállás nélkül járta a világot, előadott (szójárása szerint „prédikált"), sejtett és bizonyított. Se Erdős, se Hajnal nem engedhette meg magának azt a luxust, hogy ne törődjön a politikával. Gyakran vitáztak – ismét Erdős szóhasználatával élve – „Samu" (Amerika) és a Sztálin miatt „Józsefként" aposztrofált Szovjetúnió bűneiről. A matematika számukra varázshegy volt, amely magasan kiemelkedett a mindennapi élet birodalmából. A legizgalmasabb világ, melynek törvényei kristálytiszták és átláthatóak. A kettejük találkozását követő két évtizedben Erdős és Hajnal – Richard Rado, readingi professzorral együtt – létrehozta a halmazelmélet új ágát, a partíciókalkulust. A témakör bibliáját is ők írták meg Hajnal egyik tanítványával, Máté Attilával közösen. Főképp a végtelen halmazok elméletére koncentráltak, de véges halmazokra vonatkozó eredményeik is a modern kombinatorika csúcsteljesítményei közé tartoznak.

Harminchárom évesen meghívást kapott Berkeley-be, ahol minden idők egyik legnagyobb logikusa, Alfred Tarski csoportjában dolgozhatott. Amikor tíz évvel később Vancouverben, a matematikusok világkongresszusán adott elő, már komoly nemzetközi tekintélynek örvendett. Számos alkalommal volt vendégprofesszor Calgaryban, a halmazelmélet kanadai központjában, és alaposan rányomta bélyegét az ott folyó kutatásokra is. A tanszék társalgójának falán máig Erdős és Hajnal képe lóg. A Fazekas Gimnázium első, legendás matematika tagozatos osztályának ő tanította a gráfelméletet. Az ELTE-n matematikusok generációit vezette be a halmazelméletbe.

A hetvenes években új szelek fújdogáltak a magyar kultúrpolitikában. A változások a matematikus társadalmat is végzetesen megosztották. Hajnalt 1976-ban választották akadémikussá, és ezt követően a Bolyai Társulat elnökségétől kezdve az MTA Matematikai Kutatóintézetének igazgatóságáig számos vezető funkciót betöltött. Szervezőkészségével és határozott kiállásával nagyban hozzájárult a matematikaoktatás és kutatás színvonalának megőrzéséhez és továbbfejlesztéséhez. Remekül sakkozott. A Kutatóintézet csapatával többször is Magyar Hírlap kupát nyert. Büszke volt rá, hogy egy szimultán során kis híján legyőzte a világbajnokjelölt Korcsnojt. Nagyon ritkán hibázott. Úgy halt meg, mint Erdős. Váratlanul és (számára) fájdalommentesen.

Pach János

Az életének 86. évében, 2016. július 30-án elhunyt Hajnal Andrásról, a halmazelmélet, a kombinatorika és a topológia nemzetközi hírű kutatójáról, a magyar matematikai élet egyik vezető egyéniségéről, a Bolyai Társulat egykori elnökéről az MTA augusztus 1-i hírében megjelent életrajza itt olvasható: http://mta.hu/mta_hirei/elhunyt-hajnal-andras-matematikus-az-mta-rendes-tagja-106732

☐ Erdős Pál ☐ matematikatörténet

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

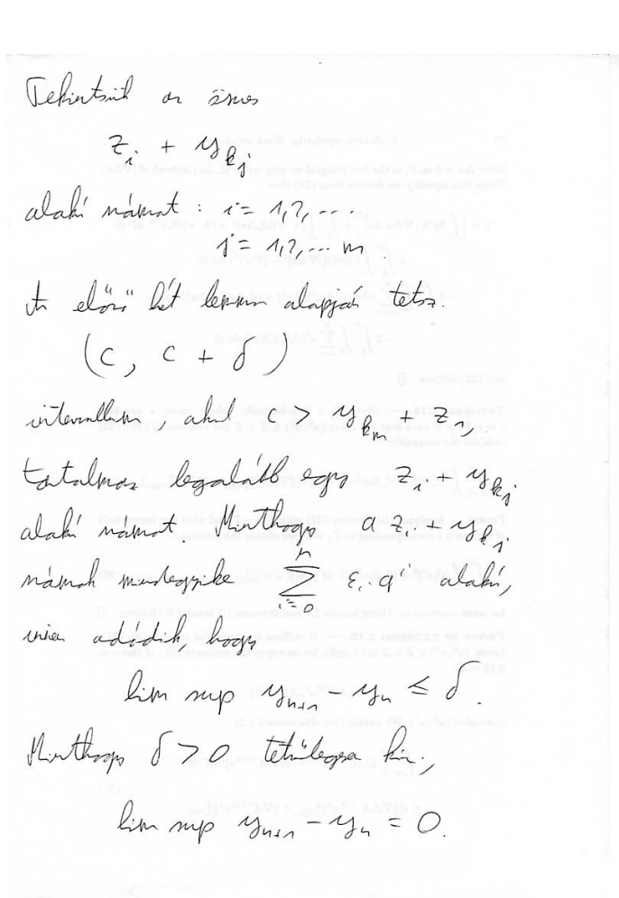
Komornik Vilmos 2016. SZEPTEMBER, INTERJÚ – PORTRÉ

Emlékfoszlányok Erdős Pálról

Zürich, 1994. augusztus 2−9. A matematikai kongresszuson ismerkedtem meg vele. Volt már két közös dolgozatunk, de ezek Joó Pista közreműködésével, levelezés útján születtek. Egy nagy terem közepén ült, körülvéve rengeteg baráttal és érdeklődővel. Nem mertem őt zavarni. Egyszer csak felállt és egyenesen felém indult:[1] „Szervusz! Ne haragudj, hogy nem jöttem előbb, hogy üdvözöljelek Téged, de tudod, nem jó az arcmemóriám. Ugye van már közös cikkünk? Hogy állnak a problémák?" Majd elsüllyedtem szégyenemben. Néhány percig beszélgettünk, és felajánlotta, hogy kutassunk együtt tovább.

Strasbourg, 1994. október 20−24. E-mail-ben üzent, hogy szívesen meglátogatna Strasbourgban, ha volna kedvem és időm vele dolgozni. Kaptam az alkalmon. Pali bácsi csütörtök délután érkezett Nancy-ból. A pályaudvar peronján várt mosolyogva egy kis bőrönddel és egy nejlon szatyorral. Hazavittem hozzánk. Röviden megismerkedett a családommal, majd rögtön dolgozni akart. Bementünk a számára fenntartott szobába. Becsukta az ajtót, beleült a fotelbe, elmondatott velem egy általam nemrégen talált bizonyítást. Én titokban büszke voltam rá, hogy jól tanítom a matematikát. Ő máshogy vélekedett: „Nem értem. Egy szót sem értek. Magyaráztál már az életedben matematikát valakinek? Írd le a két lemmát, bizonyítás nélkül, és majd elolvasom." Mit tehettem, nekiláttam. Ekkor megjelent a 11 éves lányom, aki nem tudta elviselni, hogy ki van zárva a szobából. Bekopogott, hogy nézzem át a német házi feladatát. Pali bácsi türelmetlenül félbeszakította: „Én majd megnézem, tudok németül, te csak írd a két lemmát." Fél perc alatt átfutotta a két oldalt, majd így szólt Tímeához: „Itt van egy hiba: nem *der*, hanem *das*. A többi jó, mehetsz." A lányom sértődötten kiment, hogy biztosan maradtak benne hibák.[2] Közben leírtam a lemmákat. Pali bácsi elolvasta őket, igaznak tűntek neki, és megnyugodott.

Addigra elkészült a vacsora. Evés közben megkérdezte a feleségemet, hogy mi a szakmája, és miből írta a szakdolgozatát. A válasza után („Miksa császár mexikói hadjáratának a visszhangja a magyar sajtóban") el akarta magyarázni, mi is volt ez a hadjárat, amelyről ő sem tudott, mielőtt megkapta volna a szakdolgozati témát az egyetemen, de Erdős Pál leintette: „ismerem, III. Napóleon kineveztette császárnak, aztán 1867-ben kivégezték Mexicóban.



Tekintsük az összes
$z_i + y_{\ell_j}$
alakú számot: $i = 1, 2, \ldots$
$j = 1, 2, \ldots m$
Az előző két lemma alapján tetsz.
$(c, c+\delta)$
intervallum, ahol $c > y_{\ell_m} + z_n$,
tartalmaz legalább egy $z_i + y_{\ell_j}$
alakú számot. Minthogy a $z_i + y_{\ell_j}$
számok mindegyike $\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i q^i$ alakú,
innen adódik, hogy
$\limsup y_{n+1} - y_n \le \delta.$
Minthogy $\delta > 0$ tetszőleges volt,
$\limsup y_{n+1} - y_n = 0.$

Másnap reggel a tanszéken dolgoztunk. Volt egy ötletem, hogyan javíthatnánk meg az eredményeinket a „két lemma" módosításával. „Az nem működik" − vágta rá. „De én úgy érzem, igen" − erősködtem, és nekiálltam számolni. Egy fél óra múlva feladtam: „Sajnos, nem megy". „Mondtam neked" − válaszolta nyugodtan. Délben haza kellett hoznom a fiamat az iskolából ebédszünetre, addig Pali bácsi az irodámban maradt.

Az iskola előtt egy másik apuka, gimnáziumi matematikatanár, elmondta nekem, hogy hetek óta hiába próbálják bebizonyítani a kollégáival, hogy minden valódi tört felírható egyiptomi törtek összegeként.

Én akkor hallottam először az egyiptomi törtekről. Visszatérve az irodába elismételtem a kérdést Pali bácsinak, aki egy papírlapot tett maga elé, és villámgyorsan leírta a bizonyítást: „Régebben írtam a témáról egy cikket, emlékszem rá".

Hazamentünk ebédelni. Visszatérve bementünk a könyvtárba, mert Erdős Pál elfelejtette a nevét egy matematikusnak, aki egyszerű bizonyítást talált egy Szekeressel közös tételükre. Arra azért emlékezett, hogy a cikk a J. London Math. Soc. folyóiratban jelent meg 1959-ben, és így azonnal rátalált Seidenberg nevére. A könyvtárban megtaláltam az egyiptomi törtekről szóló cikkét is: 1950-ben írta, és a bizonyítás szóról-szóra egyezett.

Délután előadást tartott a tanszékünkön „Some of my favourite problems in number theory, in combinatorics and in geometry" (Néhány kedvenc számelméleti, kombinatorikai és geometriai problémám) címmel. Olyan sokan jöttek őt meghallgatni, hogy termet kellett váltani. Szerencsére a nagy terem szabad, bár fűtetlen volt. Erdős Pál kabátban tartotta meg előadását. Angolul beszélt, de az állításokat franciául is elismételte. Nagy hatással volt a hallgatóságra, akik addig szinte csak a gyökeresen eltérő Bourbaki stílust ismerték.

Szombaton a városban sétáltunk. Mutattam neki egy emléktáblát, hogy itt adták elő először a Marseillese-t. „Nehéz élete volt Rouget de l'Isle-nek, olvastam róla Stefan Zweig-től" − válaszolta. Én addig semmit sem tudtam Rouget de l'Isle életéről.

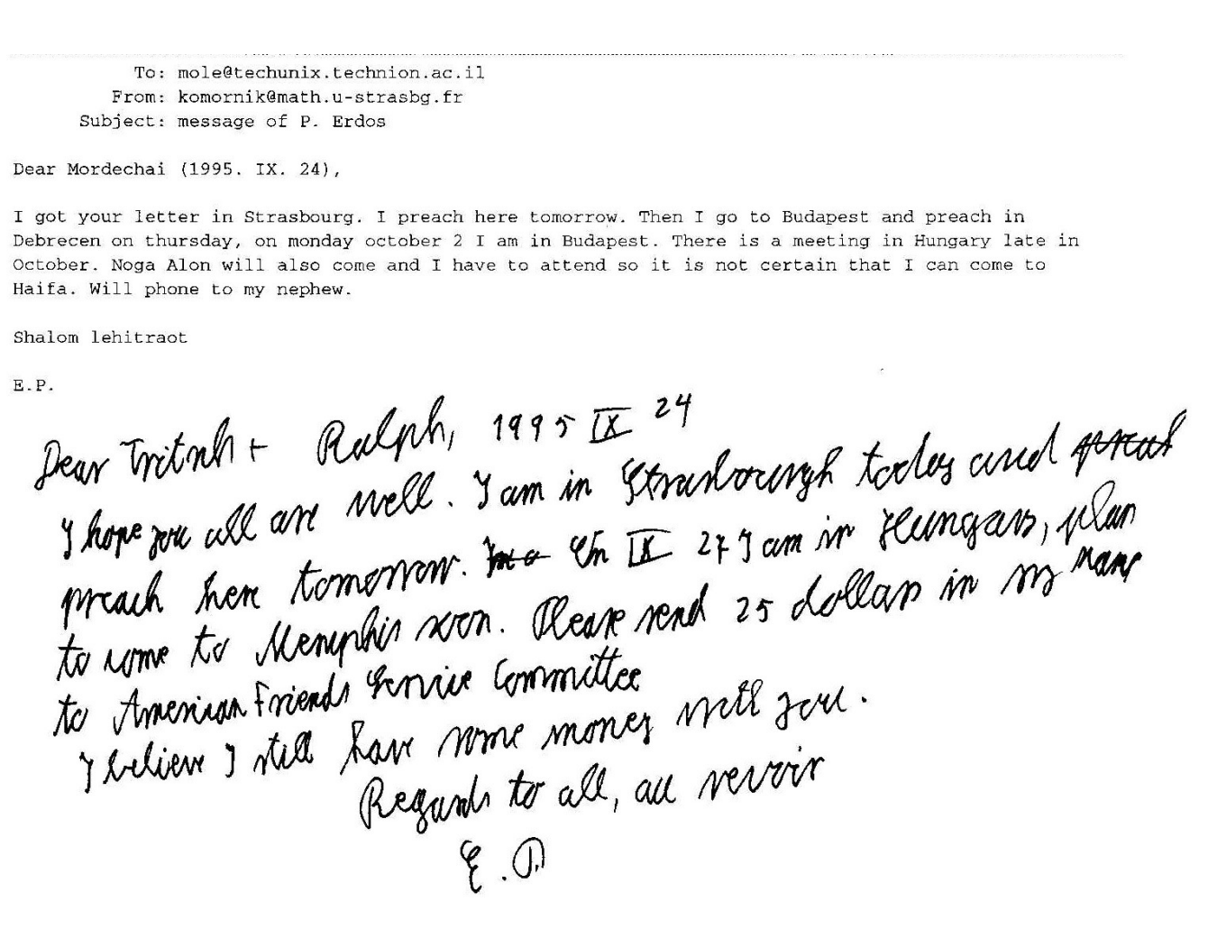
A katedrálishoz érkezve nem volt kedve felmenni a toronyba: „Voltam már ott 20 évvel ezelőtt, emlékszem rá".

A téren kéregetők jöttek hozzá. Mindenkinek adott pénzt, mire azok visszajöttek, erre ismét adott. El kellett vezetnem onnan, mielőtt minden pénzét szétosztaná.

Felajánlottam, hogy nézzük meg a Szent Tamás templomban azt az orgonát, amelyiken annak idején Mozart is játszott. Ez érdekelte. Autóba ültünk, és 20 percet manővereztem, mire végre találtam egy közeli parkolóhelyet. A templomban viszont egy fél percet sem töltöttünk. Egyenesen az orgonához ment, rátekintett, elolvasta az ismertetőt, majd megfordult, és kiment: „Mehetünk vissza dolgozni". Biztos voltam benne, hogy kívülről megtanulta az ismertető szövegét.

Esténként otthon szívesen hallgatott zenét, általában Bachtól a Brandenburgi koncerteket. Amikor hétfőn tovább utazott Lyonba, kölcsönkérte tőlünk Diószegi István: „Két világháború árnyékában" című diplomáciatörténeti munkáját, amit a könyvespolcunkon talált. Kicsit félve adtuk oda neki, mert nehéz lett volna újra beszerezni, de két hét múlva visszaküldte nekünk Sao Pauloból. (Ekkor, 81 évesen járt először és utoljára Dél-Amerikában.)

Budapest, 1995. augusztus 3. Erdős Pál a SZTAKI-ban tartott előadást. A kis terem zsúfolásig megtelt, de a kánikula ellenére minden ablakot becsuktak, hogy a kinti útjavítás zaja ne zavarja az előadást. Tuza Zsolttal közös egyik eredményükről beszélt, amikor Zsolt közbeszólt: „Ez a másik irányú bizonyítás". „Ja, persze", válaszolta, és el akarta kezdeni a másik bizonyítást, de hirtelen elhallgatott és szédülni kezdett. Kiürítették a termet, kinyitották az ablakokat, Pali bácsit végigfektették négy összetolt széken, és hívták a mentőket. A friss levegő hatására magához tért: „Itt van még a Tuza?" − kérdezte elhaló hangon. Behívták Zsoltot. „Hogy is volt a bizonyítás?" − kérdezte tőle. Zsolt elkezdte neki magyarázni, mire a székeken fekvő Pali bácsi egyre jobban felélénkült. A közben megérkező mentőknek azt mondta, most már egészen jól van, és nagyon nehéz volt őt rákényszeríteni, hogy velük menjen kivizsgálásra.



```
         To: mole@techunix.technion.ac.il
       From: komornik@math.u-strasbg.fr
    Subject: message of P. Erdos

Dear Mordechai (1995. IX. 24),

I got your letter in Strasbourg. I preach here tomorrow. Then I go to Budapest and preach in
Debrecen on thursday, on monday october 2 I am in Budapest. There is a meeting in Hungary late in
October. Noga Alon will also come and I have to attend so it is not certain that I can come to
Haifa. Will phone to my nephew.

Shalom lehitraot

E.P.
```

Dear Tritsch + Ralph, 1995 IX 24
I hope you all are well. I am in Strasbourgh today and preach here tomorrow. On IX 27 I am in Hungary, plan to come to Memphis soon. Please send 25 dollars in my name to American Friends Service Committee
I believe I still have some money with you.
Regards to all, au revoir
E.P.

Strasbourg, 1995. szeptember 23−26. Szeptember elején telefonon keresett otthon, mialatt az egyetemen voltam. A feleségem meg akarta neki adni az irodai telefonszámomat. „Köszönöm, de emlékszem a telefonszámra" − válaszolta neki, és máris hívott engem. Nem felejtette el tavaly óta.

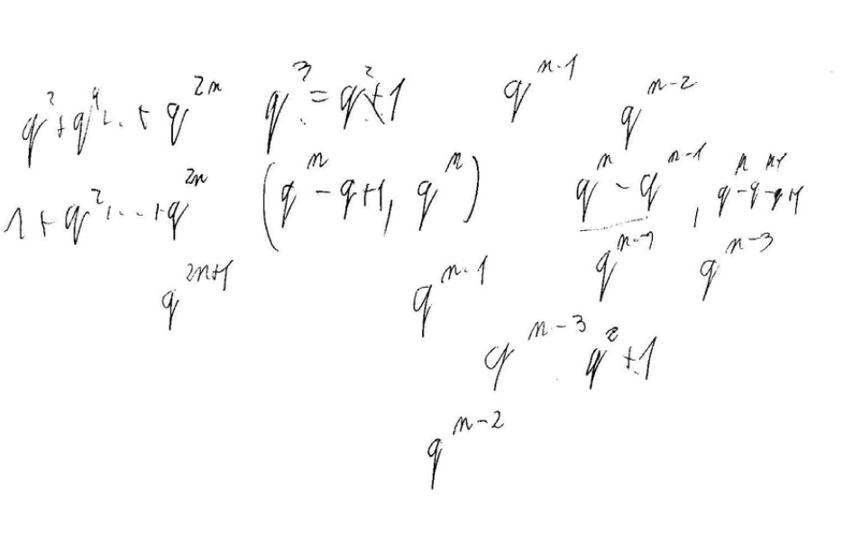
Szombat délután érkezett. A lakásban a lányom azzal fogadta, hogy már tud németül. Pali bácsi azonnal németre váltott, úgy beszélt vele. Timi nehezen értette, mire ő csodálkozva kérdezte: „Miért mondod, hogy tudsz németül, ha nem tudsz?"

Pali bácsi nem találta a szandálját: vagy Nancy-ban maradt, vagy a vonaton hagyta el. Felhívta Tenenbaumot, aki megtalálta egy szék alatt. „Utánad küldjem?" -- kérdezte. „Nem, csak tudni akartam, hol vesztettem el. Dobd ki, úgyis régi volt már." − felelte. Vacsora után dolgoztunk, majd este 11 után megkérdezte: „Igaz, hogy neked van kulcsod könyvtárhoz?" Igaz, feleltem, és éjfél előtt 15 perccel már ott is voltunk. Pali bácsi akkurátusan végigböngészte a frissen érkezett folyóiratokat. Éjjel egykor elégedetten lépett ki a könyvtár ajtaján.

A vasárnap délelőttöt az irodámban töltöttük. Több levelet írt, azokat faxon vagy e-mail-en keresztül továbbítottam a megadott címekre. Egy munkatársát megkérte, küldjön a nevében a nála lévő pénzéből 25 dollárt az „American Friends Service Committee" számára. Majdnem minden nap adott kisebb adományokat humanitárius célokra vagy a matematika népszerűsítésére.

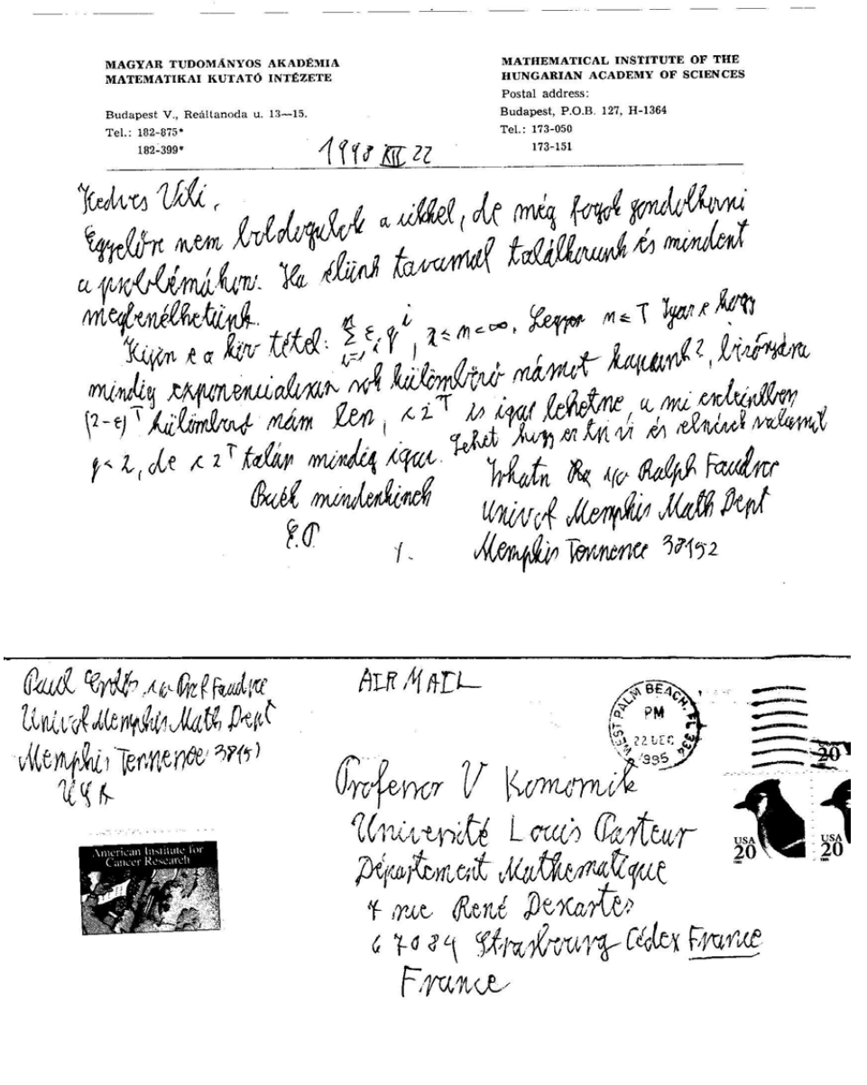
Délután megtalálta nálam, és hosszasan olvasgatta Hajnal és Hamburger halmazelmélet könyvét, majd felkiáltott: „Jé, itt egy hiba van!" Hitetlenkedtem: visszaemlékezve Hajnal András mintaszerűen precíz és elegáns egyetemi előadásaira, nem tudtam elképzelni, hogy hiba lehetne a könyvben. „Azt írják, Gödel 1939-ben bizonyította be, hogy a kontinuum hipotézis konzisztens a szokásos halmazelméleti axiómákkal. De az 1938-ban volt, nem 1939-ben: emlékszem rá, mert egy kávéházban ültem vele Bécsben, amikor mondta nekem, és az 1938-ban volt".

Este együtt ünnepeltük vele a fiam születésnapját.



Hétfőn hármasban ebédeltünk egy német kolléganőmmel. Miután Pali bácsi megtudta, hogy Essenből való, németre váltott néhány percig (én nem beszélek németül). Később kérdésemre Petra elmondta, hogy Erdős Pál tökéletes németséggel Essen középkoráról mesélt neki érdekességeket. Ő pedig nagyon szégyellte magát, mert esseni létére szinte semmit sem tudott a szülővárosa történelméről. Délután Pali bácsi újabb nagy sikerű előadást tartott a tanszéken. A honoráriuma éppen elég volt, hogy megvegye belőle a repülőjegyét másnapra Budapestre. Este elkísért bennünket Zsolt fiam pingpong klubjába, és ő is játszott vele.

Kedden délelőtt átmentünk Németországba, hogy új Birkenstock szandált vásároljon magának. Talált is egyet: nem volt igazán kényelmes, de megvette. Kifizettem márkában, ő pedig rögtön odaadta nekem frankban az összeget. Később utánaszámoltam, fillérre egyezett. Közben elmesélte, hogy Hajnal András egyszer így reagált az állandó panaszkodásaira: „Ha embereket tudtunk küldeni a Holdra, akkor a Te lábadra is tudunk kényelmes cipőt készíteni!". „Ebben a Hajnal tévedett" − kommentálta Pali bácsi.



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETE
Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.
Tel.: 182-875*
183-399*

MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
Postal address:
Budapest, P.O.B. 127, H-1364
Tel.: 173-050
172-151

1990 XII 22

Kedves Vili,

Üdv mindenkinek
E.P.

Írjatok c/o Ralph Faudree
Univ of Memphis Math Dept
Memphis Tennessee 38152

Paul Erdős c/o Prof Faudree
Univ of Memphis Math Dept
Memphis Tennessee 38152
USA

AIR MAIL

Professor V Komornik
Université Louis Pasteur
Département Mathématique
4 rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex France
France

Strasbourg, 1996. április 5−8. Április 3-án váratlanul telefonált, hogy nálunk tölthetné-e a húsvéti hétvégét, és két nap múlva meg is érkezett. Megmutattam neki az Erdős−Mordell tételre talált bizonyításomat: neki is újnak, és az eddigieknél egyszerűbbnek tűnt. Kazarinoff 1961-ben írt „Geometriai egyenlőtlenségek" című könyvében azon meditált, hogyan fedezhette fel Erdős Pál ezt a tételt: „Valószínűleg Euler egyik tételét akarta élesíteni".

Kérdésemre Pali bácsi elmondta, hogy az Erdős−Mordell egyenlőtlenséget valójában 1932-ben fedezte fel, miután rengeteg háromszöget rajzolt, hogy azokból új törvényszerűségeket találjon.
Érdekes, hogy sem ő, sem más nem kérdezte meg ezt tőle korábban, a több mint 60 év alatt.
Mennyi mindent megtudhattunk volna tőle, ha többet kérdezzük!

„Hitt Einstein Istenben?" -- kérdeztem egyszer. „Nem hitt" -- válaszolta kategorikusan. „Honnan tudod?"− kérdeztem újra. „Megkérdeztem tőle egyszer."

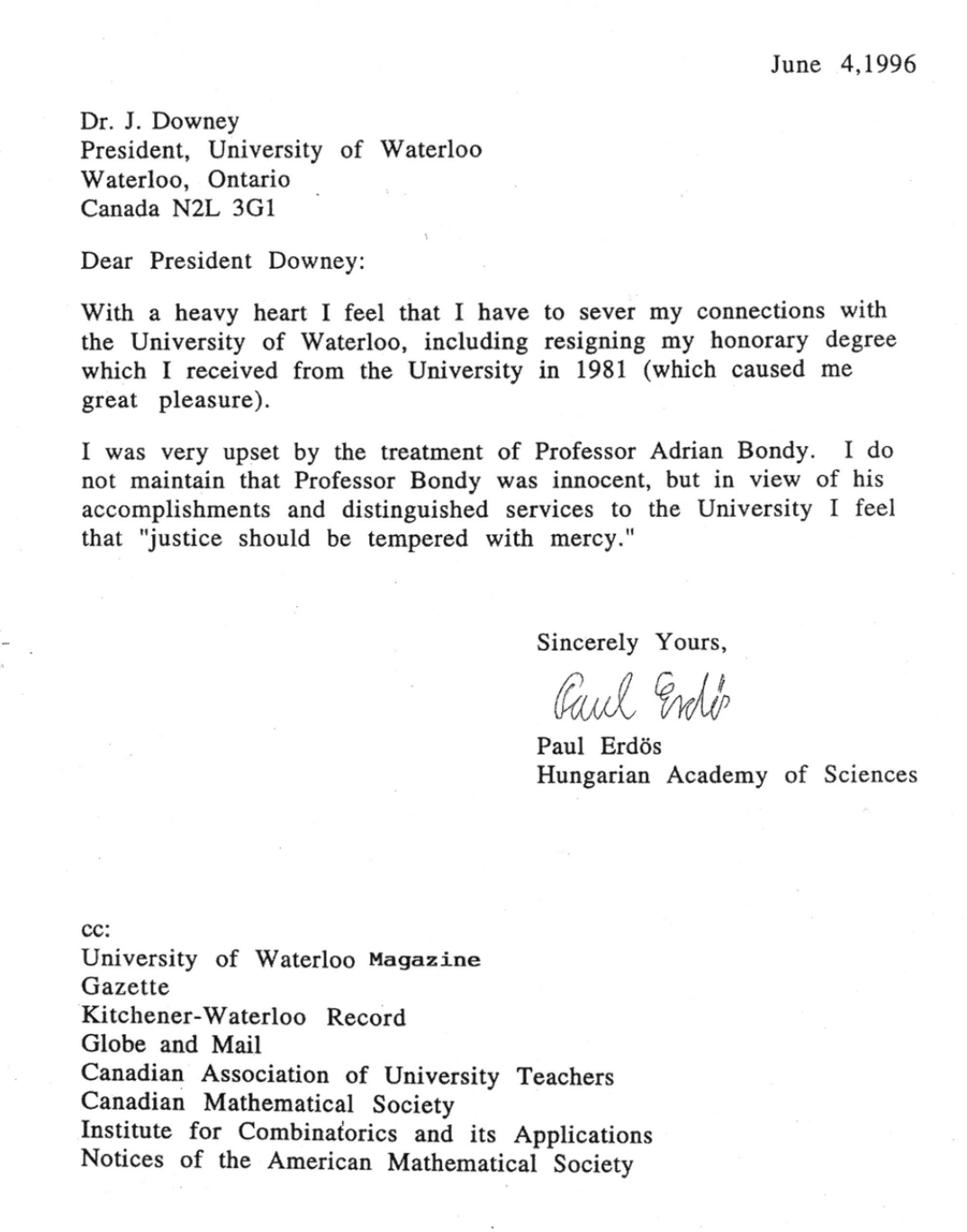
Vasárnap reggel indult a vonata Marseille-be. De amikor reggel bementem hozzá, azt mondta, hogy nem érzi jól magát, nem tud elutazni. Nem komoly a dolog, nyugodtan feküdjek én is vissza. Egy fél óra múlva, amikor már túl késő volt elérni a vonatot, hirtelen jobban lett, és felkelt. Viszont a reggeli után közölte, hogy van egy probléma: „Délután egykor érkezik a vonat Lyonba, és Sárközi András az előzetes tervek szerint ott csatlakozik hozzá. Ha nem fogja őt a vonaton találni, pánikba fog esni.
Valahogyan értesíteni kellene őt, hogy nem tudott elutazni, de semmi komoly. Nyugodtan utazzon el Marseille-be, azután majd este hívják fel őt telefonon." Mobil telefon még nem volt, de sikerült felhívnom egy lyoni barátomat: „Ki kellene menned a Lyon Perrache pályaudvarra délben, ott megkeresni egy Sárközi András nevű matematikust, és átadni neki a következő üzenetet…". Nem tudom, hogyan, de megoldotta.

Közben otthon megebédeltünk, és Pali bácsi kinézett az ablakon. „Azok ott hegyek? Messze vannak?"
„Igen, a Fekete Erdő Németországban, úgy 20-30-kilométerre." „Oda lehetne menni?" Autóba ültünk, és elmentünk kirándulni.

Ezalatt a vonat befutott Marseille-be. Sárközi, aki öt órán keresztül idegeskedett tehetetlenül, odarohant az első telefonhoz, és felhívott minket. „Pali bácsi elment kirándulni Vilivel a Fekete Erdőbe" − válaszolta neki a feleségem. Este, miután visszaérkeztünk, újból csörgött a telefon. T. Sós Vera, Sárközi András és Hajnal András egymás szavába vágva kapacitálták Pali bácsit, hogy ne vicceljen, itt mindenki őt várja. Másnap reggel mindenképpen utazzon oda az első repülőgéppel. Hétfőn kikísértem őt a repülőtérre. Jókedvű volt, jót tett neki a hétvégi pihenő a családunk körében és a vasárnapi kirándulás. Feladta a bőröndjét, benne egy pár bakanccsal és minden egyéb ingóságával: 9,4 kilogrammot nyomott.

Strasbourg, 1996. április 27−május 2. Két hét múlva Párizsból hívott, és a következő szombat délután érkezett újra Strasbourgba. Az egy éve elveszett szandálja volt rajta: Tenenbaum megőrizte neki.

Pali bácsi erkölcsi kérdésekben hajthatatlan volt. Levelet küldött a Waterloo Egyetemre egy munkatársa érdekében, akit szerinte aránytalanul büntettek egy kis hibáért. Felvetette, hogy ha nem találnak megfelelő megoldást, le fog mondani a díszdoktori címéről.[3]



June 4,1996

Dr. J. Downey
President, University of Waterloo
Waterloo, Ontario
Canada N2L 3G1

Dear President Downey:

With a heavy heart I feel that I have to sever my connections with the University of Waterloo, including resigning my honorary degree which I received from the University in 1981 (which caused me great pleasure).

I was very upset by the treatment of Professor Adrian Bondy. I do not maintain that Professor Bondy was innocent, but in view of his accomplishments and distinguished services to the University I feel that "justice should be tempered with mercy."

Sincerely Yours,
Paul Erdős
Paul Erdös
Hungarian Academy of Sciences

cc:
University of Waterloo Magazine
Gazette
Kitchener-Waterloo Record
Globe and Mail
Canadian Association of University Teachers
Canadian Mathematical Society
Institute for Combinatorics and its Applications
Notices of the American Mathematical Society

Hétfőn a szívére panaszkodott, nem érkezett meg Amerikából a szokásos gyógyszere. Kihívtam a háziorvosunkat. Szerencsére a gyógyszer Franciaországban is kapható. Felírta neki, de azt tanácsolta, feltétlenül maradjon itt, és pihenjen legalább egy hétig a szíve miatt. „Azt nem lehet!" − felelte Pali bácsi, „mindenütt várnak rám. A gyógyszereket köszönöm, beszedem őket, és nem lesz semmi baj."
Utána négyszemközt is beszéltem a doktorral. „Ha nem engednénk tovább utazni, csak tovább romlana az állapota. Engedni kell, bár egyszer ebbe fog belehalni" − mondta nekem.

Kedden újabb előadást tartott: „Sur mes problèmes préférés en théorie des nombres, combinatoire, géométrie et analyse".[4] Este, vacsora közben a lányom elújságolta, hogy a francia tanárnője próbálta rábeszélni a diákokat, hogy jövőre tanuljanak nála ógörögöt is. „Az ókor híres matematikusai görögök voltak. Aki nem tanul meg görögül, abból nem válhat jó matematikus" − mondta az osztály legjobb matekosának. „Micsoda hülyeség!" − kommentálta Pali bácsi, és nyugodtan kanalazgatta tovább a levesét.

Csütörtökön tovább utazott Berlinbe.

Hónapokkal később megkeresett egy strasbourgi kolléganőm. Elmondta, hogy már több, mint 15 éve felhagyott a kutatással, de Erdős Pál előadása annyira tetszett neki, hogy gondolkozni kezdett az egyik, ott elhangzott megoldatlan kérdésen, és azt több hónapi munkával sikerült részben megoldania. Ha jól emlékszem, a dolgozatát a Studia. Math. Hungar. közölte.

Strasbourgi látogatásai alatt sokat beszélgettünk séta vagy kirándulás közben. Bármiyen témát fel lehetett hozni: család, politika, történelem.

Egy hétvégén elvittem őt a Sainte-Odile hegyre, az ottani régi kolostorból gyönyörű kilátás nyílik az elzászi síkságra. Az úton meglepően kevés autóval találkoztunk. A hegytetőn azonban sok száz kocsi parkolt egymás hegyén-hátán, alig találtunk helyet. „Egész Elzász idejött" − állapította meg Pali bácsi lakonikusan.

Az őt régóta ismerők szerint Erdős Pál fiatalon sokkal gyorsabb volt, mint utolsó éveiben. De nekem még mindig nagyon fel kellett készülnöm a látogatásaira. Néha azért tévedett. „Hülyül az öreg" − mondogatta ilyenkor.

Egyszer a Rajna-parton régi magyar matematikusokról kérdezgettem őt. „Milyen ember volt Fejér Lipót?" − kérdeztem. „Lassú" -- válaszolta. Ez persze vicc is volt a részéről: Pali bácsi nagyon szeretett viccelődni, de sosem mások kárára. Úgy hallottam, hogy Fejér nehezen követte Erdős Pál gyors magyarázatait, neki pedig nem volt türelme végighallgatni Fejér lassú fejtegetéseit.
Gyakran Turán Pál barátja tolmácsolt közöttük. „De a gyorsaság nem fontos, csak az, hogy bebizonyítsunk egy nagy tételt" − tette hozzá. „Nem számít, hogy egy hónap vagy tíz év alatt, a fő, hogy találjunk egy fontos eredményt. Fejér kiváló matematikus volt, és nagyon-nagyon rendes ember" − folytatta.

„És Riesz milyen volt?" -- kérdeztem tovább kiváncsiskodva. „Óh," − gondolkodott el Pali bácsi, „Riesz kevésbé volt lassú…" .

„Nem fájt Neked, hogy nem kaptál Fields-érmet?" -- kérdeztem egy másik alkalommal. „Nem. Kaptam sok más díjat. De nem a díjak a fontosak, hanem az, hogy próbáljunk olyan eredményt elérni, amire 500 év múlva is emlékezni fognak."

„Volt olyan, hogy fizikailag is szenvedtél a háború alatt?" -- kérdeztem utána. „Persze, hogy volt" − vágta rá. „Amerikában 1942-ben a tengerparton sétáltam. Az elsötétítés miatt nekimentem egy lámpaoszlopnak, és még másnap is sajgott a térdem."

Budapest, 1996. július 21−27. Az Európai Matematikai Kongresszuson találkoztam vele utoljára.

Meghívott ebédelni az Astoriába. Kérdeztem tőle, hogy van, történt-e vele valami különleges az utóbbi 2-3 hónapban. Semmi érdemleges, válaszolta, majd a matematikára fordította a szót. Ne várjunk tovább, küldjük el a készülő cikkünket publikálásra. Én szerettem volna megoldani előbb még egy függő kérdést, de megígértem, hogy az októberi látogatásakor befejezzük a cikket. Csak jóval később hallottam a júniusi rosszullétéről és pacemaker beültetéséről.

Este a Welcome party-ra mentünk a Nemzeti Galériába.

Másnap vagy harmadnap a szüleim meghívtak minket ebédelni.
Délben a konferenciaközpont melletti buszmegállóban várakoztunk, de Pali bácsi két perc után elveszítette a türelmét: „Úgy látszik, nem jár ez a busz. Menjünk taxival!". A busszal csak 5-6 megállóra laktak a szüleim, nem volt kedvem taxit fizetni. „Mindjárt jön" − válaszoltam. Erdős odament érdeklődni a megállóban várakozó két férfihoz. „Jár ez a busz?" -- kérdezte. Miután kiderült, hogy nem magyarok, megismételte a kérdést más nyelveken is, de ők továbbra sem értették. Pali bácsi füstölögve jött vissza: „Ezek semmilyen nyelven nem beszélnek". Láttam a kitűzőjükön, hogy orosz konferencia résztvevők, úgyhogy azt feleltem, ő sem tud oroszul, nincs mit a szemükre hánynia. „Ez igaz", felelte, és megnyugodott, mert ebben a pillanatban megjelent a fordulóban a busz. Felszálltunk, leültünk egy kettős ülésre, a busz elindult. Egyszercsak Erdős felém fordult, és oroszul kezdett beszélni. Egészen hosszú szöveg volt, bár nem látszott az aktualitása. „Te tudsz oroszul?", kérdeztem meglepetve. „Nem, de 1966-ban, amikor Moszkvában rendezték a Matematikai Kongresszust, úgy gondoltam, illene megtanulni egy kicsit, és akkor foglalkoztam az orosszal egy keveset". A harminc évvel korábban olvasott szöveg még a fejében volt.

Gulyáslevest és palacsintát ettünk ebédre, és közben ő kellemesen elbeszélgetett mindenkivel. A szüleimet arról kérdezte, hogyan vészelték át a háborút.

A banketten sokáig kerülgetett egy kisbabát, amíg az elfogadta, hogy Pali bácsi a közelébe kerüljön.

Az utolsó délután egy róla készült filmet vetítettek a kongresszuson. „Én is láttam már a filmet, meg te is, maradjunk inkább kint, és beszélgessünk" − javasolta. Fel-alá sétálgattunk az üres folyosón, és mindenféléről társalogtunk. Egyszercsak megállt, és komolyan rám nézett: „Tudod, azt hiszem, hibát követtem el, hogy nem alapítottam családot" − mondta. Aztán csendben álltunk ott egy darabig.

Ekkor láttam őt utoljára. Másnap reggel elutazott Sárospatakra, háromszor is telefonált nekem onnan aznap. Egyedül érezte magát.

Augusztus végén a Rudin házaspárral találkozott Budapesten, onnan kaptam tőle e-mail-en keresztül az utolsó üdvözletét. Október elején jött volna legközelebb Strasbourg-ba. De a szíve nem bírta addig.

Miután minden újság szalagcímben közölte a hírt, az egyik titkárnő megkérdezte tőlem a tanszéken: „Tényleg ő volt az a kedves, idős bácsi, aki mindig olyan szerényen sétált itt a folyosón? Sose gondoltam volna róla, hogy híres ember".

Október 21-én volt a temetése. Nagyon szép búcsúbeszédeket mondtak a kollégái és barátai, és távoli országok matematikai társaságai is képviseltették magukat koszorúval, sőt személyesen is. Később megemlítettem Császár Ákosnak a magyar állam távolmaradása feletti meglepetésemet. „Az szerintem nem volt zavaró," − felelte, „hiszen ő nem adott az ilyesmire. Nekem inkább az fájt, hogy az MTA Elnöksége sem képviseltette magát. Megkértem őket, de azt válaszolták, hogy Erdős Pál nem volt elnökségi tag, így az protokolláris szempontból nem szükséges."

Komornik Vilmos

---

[1] Valószínűleg kérdezett felőlem, és valaki a társaságban megmutatta neki, hogy merre vagyok.

[2] Másnap kiderült, hogy nem maradtak.

[3] Ezt meg is tette az egyetem válasza után.

[4] Kedvenc problémáimról a számelméletben, kombinatorikában, geometriában és analízisben.

Einstein Erdős Pál matematikatörténet

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

SOKSZOR TALÁLKOZUNK OLYAN FELADATTAL, ÖTLETTEL, AMIT SZÍVESEN ELTESZÜNK KÉSŐBBI HASZNÁLATRA. A MOST INDULÓ **TANÓRA – SZAKKÖR** ROVAT SZERETNE HOZZÁJÁRULNI A MATEMATIKATANÁROK ESZKÖZTÁRÁNAK GAZDAGÍTÁSÁHOZ, FÓRUMOT KÍVÁN ADNI A GONDOK, NEHÉZSÉGEK MEGTÁRGYALÁSÁRA IS. (ROVATSZERKESZTŐ: *HORVÁTH ESZTER*.)

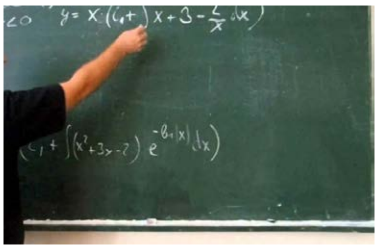
NEUMANN JÁNOS 1903—1957
MAGYARORSZÁG
40Ft

Vancsó Ödön

2016. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

A játékelmélet elemei és Neumann János

Ez a rövid cikk alapvetően didaktikai szándékú és fő célja, hogy megmutassa a XX. század egyik legkiemelkedőbb magyar matematikusának, *Neumann Jánosnak* egy igazán világraszóló eredményét, pontosabban az ahhoz vezető fő gondolatokat, amit ma „Minimax-tételnek” vagy *a játékelmélet alaptételének* is neveznek. A leírtak alapján akár egy középiskolai kísérleti kipróbálást is meg lehet szervezni, amit a szerző meg is tett évekkel ezelőtt több vidéki és fővárosi iskolában.



Horváth Eszter

2016. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Dolgozatírás a középiskola és a felsőoktatás határán

A dolgozatírás szót sokféle értelemben használjuk. Van röpdolgozat, írásbeli felelet, témazáró dolgozat, kompetenciamérés, kisérettségi, próbaérettségi, érettségi közép- és emelt szinten, egyetemi zárthelyi dolgozat. Körülbelül 10-15 éve néhány új fogalom is megjelent a köztudatban: nulladik ZH, kritériumdolgozat, szintfelmérő.

Magyar Zsolt

2016. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Játékok a tanórán, szakkörön

Képzeljék, vannak tanárok, akik úgy tanítanak, hogy még az 5-8.-os, sőt a 9-12.-es diákjaikkal is alkalmanként játszanak. Milyen játékok férnek be egy tanóra kereteibe ? Egy kis ízelítő *Magyar Zsolt* jól bevált *gondolkodtató játékaiból*, nem kell hozzájuk sok idő, csak papír, ceruza, néhány kocka vagy egy pakli kártya, és a gyerekek örömmel és észrevétlenül tanulnak...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Vancsó Ödön 2016. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

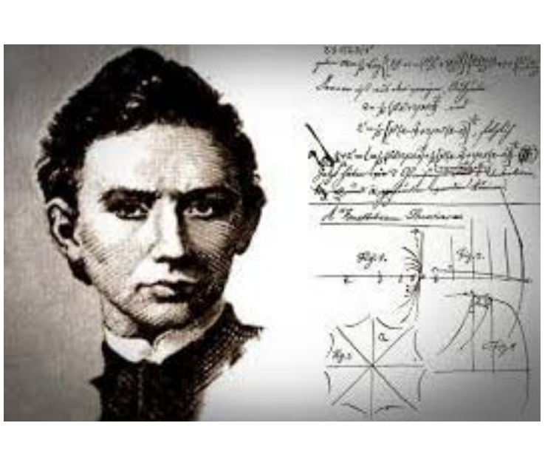
A játékelmélet elemei és Neumann János

0. Bevezető

Ez a rövid cikk alapvetően didaktikai szándékú és fő célja, hogy megmutassa a XX. század egyik legkiemelkedőbb magyar matematikusának, Neumann Jánosnak egy igazán világraszóló eredményét, pontosabban az ahhoz vezető fő gondolatokat, amit ma „Minimax-tételnek” vagy a játékelmélet alaptételének is neveznek. A leírtak alapján akár egy középiskolai kísérleti kipróbálást is meg lehet szervezni, amit a szerző meg is tett évekkel ezelőtt több vidéki és fővárosi iskolában.

Két, nem csak a matematikus világban világhírűvé vált János született majdnem pontosan 100 év különbséggel a XIX. és a XX. században. Mindketten a világon valaha élt legjelentősebb matematikusok közé tartoznak. Ezért is fontos lenne az iskolában mindkettőjükről beszélni, hiszen magyar tanuló számára a matematika szó elhangzásakor legalább ezek a nevek be kellene, hogy ugorjanak. Egyikük Bolyai János (1802-1860), akinek a nem-euklideszi geometriát köszönhetjük, s amelynek iskolai bemutatása először Lénárt István[1] gömbjeivel vált lehetővé. Bolyai elismerése tragikus élete során nem, csak halála után kezdődött, igaz azóta is töretlen.

Eredménye a modern matematika egyik előfutárává tette, aki évtizedekkel megelőzte korát. Ennek az úttörő szerepnek a bemutatására egy tudományelméleti megközelítést választó beszélgetésre utalnék, amely Staar Gyula könyvében [1] olvasható a Tóth Imrével folytatott dialógusban. Munkásságának igazi jelentősége remekül kiviláglik Tóth matematika filozófiai fejtegetéséből. Az olvasónak ajánljuk a beszélgetés megismerését.



Bolyai János és részlet egy kéziratából

NEUMANN JÁNOS 1903—1957
MAGYARORSZÁG
40Ft
1992
ÁLLAMI NY
DUDÁS L.

Bélyeg Neumann Jánosról, 1992-ből

Másikuk a már említett Neumann János (1903-1957), aki a számítógép működési elvének és mechanizmusának kidolgozása és megvalósítása (az ENIAC első számítógép) mellett nagyon sok alapvető eredményt ért el a matematikában és az elméleti fizikában. Hozzá fűződik a Schrödinger-féle hullám-mechanika és a Heisenberg-féle mátrix-mechanika izomorfiájának igazolása.
Ez egy nagyon mély eredmény, ma is csak a felsőoktatásban szerepelhet, ahol évtizedek óta egy másik nagy teljesítménye a játékelmélet is szerepel, lásd [3]. Ezúttal az utóbbiról szeretnénk azt megmutatni, hogy hamarabb is előkerülhetne, már akár középiskolában is, bár természetesen csak egy egyszerű esetben. Ehhez első lépés egy ilyen játék ismertetése, amit a következő fejezetben meg is teszünk.

1. Egy egyszerű játék a snóbli[2] alapján

Két játékos játszik úgy, hogy mindkettőnek két lehetősége van, vagy tesz egy pénzérmét a kezébe vagy nem. Majd mindketten előrenyújtják az összezárt kezüket és egyszerre kinyitják. Az első, nevezzük őt A játékosnak, nyer, ha a két kéz szimmetrikus, azaz mindkettő üres vagy mindkettőben van egy-egy érem. A másik, B nyer, ha aszimmetrikus, azaz ha az egyikben van pénzérme, míg a másikban nincs. Abban is hasonlít a játék a snóblira, hogy a nyeremény a kezekben levő pénzérmék összege. De mivel, ha senki nem tett, akkor 0 lenne a nyeremény, ezért a pénzérmékhez a vesztes még egyet hozzátesz. Így az alábbi, ún. kifizetési mátrixszal írhatjuk le a játékot:

↓ *A* játékos; *B* játékos téte →	0	1
0	1	-2
1	-2	3

A kérdések a következők:

i.) Milyen stratégiát kövessenek a játékosok?
ii.) Igazságos-e a játék vagy valakinek kedvez?

A kérdések megválaszolását megelőzheti a játék kipróbálása, amelynek tapasztalatait a következőkben összegezzük.

2. A játék elemzése stratégiai szempontból

Mindkét játékos számára fontos, hogy kiismerhetetlen legyen a játéka, mivel ellenkező esetben veszteni fog, bármelyik szerepben is van. Pl. ha *A* tudja mit fog lépni *B*, akkor ugyanazt teszi ő is, hiszen szimmetrikus esetben ő nyer. Ugyanez igaz *B*-re is, csak ő ekkor éppen ellenkezőképpen fog cselekedni, s nyer. Azaz mindkettőjük számára fontos a kiismerhetetlenség. De hogyan is lehet a viselkedésem kiismerhetetlen? Ha *véletlenszerű*, hiszen ekkor nem tudja a másik, mi fog történni. Bármilyen rafinált determinisztikus stratégiával is játszom, egy idő múlva felismeri a másik, s meg tudja jósolni a következő lépésemet. A nem tét és a tét egy 0, 1 sorozattal írható le. Ha akár *A*, akár *B* felismer valami szabályszerűséget partnere 0, 1 sorozatában, akkor onnantól kezdve nyerni fog. Ezzel azonban még csak az első lépést tettük meg Neumann János gondolatmenetében. Itt jegyezzük meg azt, hogy a véletlennek egy lehetséges meghatározása éppen a bonyolultság segítségével lehetséges. Ha egy 0, 1 sorozatot nem lehet lényegesen rövidebb hosszúságú programmal leírni, mint a sorozat elemeinek száma, akkor mondjuk véletlennek sorozatnak. Ezzel ma egy új matematikai elmélet a bonyolultságelmélet foglalkozik, melyet nem meglepően éppen az a matematikus kezdeményezett Chatain amerikai kollégájával, aki a valószínűségszámítás matematikai megalapozását is elvégezte, azaz A. N. Kolmorogov[3]. Egy Lovásztól származó egyetemi jegyzet 6. fejezetében olvashatunk erről bővebben, lásd [4] 109. oldaltól.

A következő kérdés persze az, hogy milyen véletlen generátorral játsszak. Más szavakkal, mi legyen a „teszek a kezembe pénzt” vagy a „nem teszek” valószínűsége? Vajon léteznek-e olyan valószínűségértékek, amelyek „optimálisak” abban az értelemben, hogy a tőlük való eltérés hátrányos a játékos(ok)nak. Elemezzük a helyzetet. Ha a két játékos egymástól függetlenül p és q valószínűséggel tesz pénzérmét a kezébe, akkor az A játékos nyereményének várható értéke a két egyelőre ismeretlen valószínűséggel a következőképpen írható fel:

(1) $$N(p,q) = 3pq - 2p(1-q) - 2q(1-p) + (1-p)(1-q).$$

Két dolgot használtunk fel, a várható (nyeremény)érték fogalmát, valamint az események függetlensége esetén fennálló szorzási szabályt. Tehát, hogy például *A* tesz és *B* nem tesz, annak esélye éppen $p(1-q)$. Vizsgáljuk most meg ezt a kifejezést.

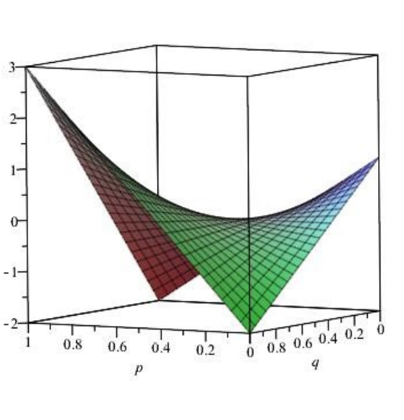
Egyúttal vegyük észre, hogy *B* várható nyereménye éppen $-N_A(p,q)$, azaz amikor *B* nyereménye maximális, akkor *A* nyereménye minimális és fordítva, mivel pénzt csak egymástól nyernek el. Ha nincs se külső pénzforrás, se pénznyelő, akkor az ilyen játékokat szokás zérusösszegű játéknak nevezni, mivel a játékosok „nyereményeinek” összege mindig 0. Mielőtt tovább vizsgálnánk a helyzetet, alakítsuk át (1)-et, a beszorzások elvégzésével és az egynemű tagok összevonásával adódik

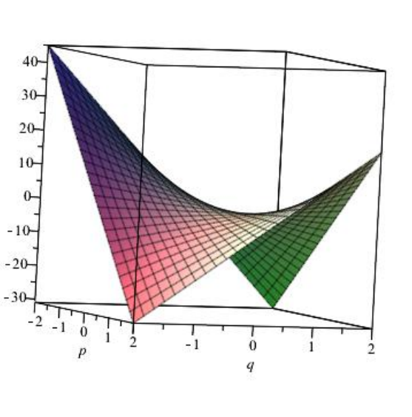
(2) $$N_A(p,q) = 8pq - 3p - 3q + 1\,.$$

Iskolás feladat, hogy egy kifejezést alakítsunk szorzattá, lehetőleg úgy, hogy az egyik tényezőben csak a p, a másikban csak a q szerepeljen. Így kapjuk

(3) $$N_A(p,q) = 8(p-\frac{3}{8})(q-\frac{3}{8}) - \frac{1}{8}.$$

Most kezdhetjük bemutatni Neumann János gondolatát, amelyben feltételezi, hogy mindkét játékos intelligens, s a számára legjobb megoldást képes választani. A feltételezi, hogy *B* nagyon okos, tehát olyan q értéket választ, ami mellett nyeresége maximális, azaz *A* nyereménye minimális. Ezután jön a saját „okossága”, ami olyan p választást jelent, hogy a nyereménye maximális legyen. Ezt úgy fejezhetjük ki, hogy keressük a következő kettős szélsőértéket: $Max_p Min_q N_A(p,q)$. Ugyanez *B* szemszögéből $Min_q Max_p N_A(p,q)$. Akkor van optimális megoldás mindkét játékosnak, ha a két szélsőértékhely egybeesik. Neumann éppen azt bizonyította, hogy két játékos zérusösszegű játéka esetén mindig vannak olyan valószínűségek a döntési lehetőségeik halmazán, amely mindkettőjüknek a lehető legjobb. Ha ilyenkor a nyeremény várható értéke 0, akkor igazságosnak mondjuk a játékot. Az optimumot az egységnégyzeten ábrázolt felületet szemlélve, amit az $N_A(p,q)$ függvény grafikonja rajzol ki, érthető, miért hívjuk nyeregpontnak. Lásd a mellékelt két ábrát illusztrációként.





Neumann számára az ötletet, amelyből kiindulhatott, a Young-tétel adhatta, mely szerint a kétváltozós függvény változók szerinti parciális deriváltjainak esetében a deriválás sorrendje felcserélhető, formálisan: $\frac{\partial^2 N(p,q)}{\partial p \partial q} = \frac{\partial^2 N(p,q)}{\partial q \partial p}$. Egyébként ezt a (2)-beli kifejezésünkön elvégezve is láthatjuk. Ha először p szerint deriválunk, a másik változót paraméternek véve, akkor kapjuk: $\frac{\partial N(p,q)}{\partial p} = 8q - 3$. Ezt tovább deriválva, most q szerint, adódik 8. Ha fordított sorrendben végezzük el a parciális deriválást, akkor első lépésben $8p-3$ adódik, s ezt most p szerint deriválva, szintén 8 lesz az eredmény. A tételnek természetesen feltételei vannak, amelyek esetünkben teljesülnek. Ennek általában egy n változós analógiája szükséges, lásd a 3. paragrafusát ennek a cikknek. Ezen túl azt is igazolni kell, hogy a szélsőérték az egységnégyzet (egység-hiperkockába) belsejébe vagy legfeljebb a határára esik, mivel itt valószínűségek szerepelnek, melyek 0 és 1 közé kell, hogy essenek. Erre még visszatérünk.

Először vizsgáljuk meg a (3) kifejezést. Itt világos, hogy mivel a két paraméter különböző tényezőkben szerepel, látszik, hogy a másik játékától egy módon függetleníthetem magam, ha a saját tényezőmet 0-vá teszem, mert akkor a szorzat a másiktól függetlenül 0 lesz. Azaz mindkettőnek ez célszerű választás (esetünkben p = 3/8 és q = 3/8), hiszen ilyenkor nem is kell a másikat figyelni. Azonban az is látható, hogy bármelyiküknek veszteséges lehet az ettől való eltérés, ha a másik elég intelligens. Akár *A*, akár *B* szempontjából elvégezhetjük az eltérést a fentebb meghatározott p és q értéktől akár felfelé, akár lefelé. Egy esetet bemutatunk, a másik hármat az olvasó is elvégezheti. Tehát pl. *A* játékos *felfelé* eltér a p = 3/8 értéktől. Ezt, ha sokszor játszanak a megfelelő relatív gyakoriságból észreveszi *B*. Mivel neki a függvény minél kisebb értéke a célja (ha *A* nyeresége minimális, akkor az övé maximális) ezért ő lefelé fog eltérni a q = 3/8 értéktől. Ekkor mivel a szorzat negatív lesz (ezért tér el éppen ellentétes irányban, mint *A*) több, mint 1/8 lesz a nyeresége átlagosan partinként. Tehát ha *A* intelligens, akkor jobb, ha nem tér el felfelé a 3/8-tól. ugyanez igaz a lefelé eltérésre is. Ezért nevezzük ezt optimális értéknek számára. Hasonló érveléssel mondható el ez *B*-ről is. Azaz mindenféle mélyebb analízis ismeret nélkül, pusztán elemi algebrai okoskodással ebben az esetben megmutatható, hogy van mindkettő számára optimális valószínűség és ezzel játszva, a játék partinként átlagosan 1/8 egységet hoz *B*-nek. Tehát a játék *nem igazságos*. Ha választhatunk, akkor *B* szerepét kell kérnünk. Jó gyakorlás annak meggondolása, hogy a mi kifizetési mátrixunkban egyetlen szám megváltoztatásával, hogyan lehetne elérni az igazságosságot.

Megjegyeznénk azonban egy „hamis okoskodást”, amellyel amellett lehetne érvelni, hogy ez volt az igazságos. *B* mindenképpen 2 egységet nyer, ha nyer. *A* átlagosan szintén 2 egységet, mivel 1 és 3 átlaga is 2. Ezért sokan igazságosnak gondolják a játékot. A hiba ebben a gondolatban az, hogy nem a p = ½ az optimális stratégia, ezért *A* nem az átlagot nyeri partinként átlagosan!

3. Az egyszerű 2x2-es játék általánosítása és az alaptétel kimondása

A bemutatott és elemzett játék egyszerű általánosítása, ha nem csak két lehetőség van a játékosok számára, hanem több, pl. mindegyik tehet 1 vagy 2 vagy 3 érmét is. Ekkor mindkettőnek 4 lehetősége van. Ehhez is kell egy kifizetési mátrixot rendelni, s akkor megkérdezhető, hogy ezúttal miként játszanak. Egy példát adjunk erre a következő mátrix segítségével, folytatva a szimmetrikus *A* és az aszimmetrikus *B* játékos elvét és a pénzérmék összege plusz egy elvet a nyeremény meghatározásához. Ezt követve kaphatjuk meg a következő kifizetési mátrixot vagy inkább táblázatot:

↓ *A* játékos; *B* játékos téte →	0	1	2	3
0	1	-2	-3	-4
1	-2	3	-4	-5
2	-3	-4	5	-6
3	-4	-5	-6	7

A nyeremény várható értékét kell itt is felírni, ahol az *A* játékos négy lehetséges választásának esélyei legyenek $p_0; p_1; p_2; p_3$,míg hasonlóan a *B* játékosái: $q_0; q_1; q_2; q_3$. Ezekkel a jelölésekkel kapjuk:

(4) $$N_A(p_i,q_j) = \sum_{i=j}(i+j+1)p_iq_j - \sum_{i\neq j}(i+j+1)p_iq_j$$

továbbá $$\sum_{i=0}^{3} p_i = \sum_{j=0}^{3} q_j = 1$$.

Azonban most lesz egy nagy nehézség az eddig bemutatott módszerrel kapcsolatban, nevezetesen most már legalább három p és q érték kell, azaz 6 ismeretlenes lesz a várható nyeremény-függvény, egyet a két feltétel miatt kifejezhetünk a többivel. Ennek szemléltetésére egy hétdimenziós térre lenne szükségünk. Így a „nyeregpont” már nem látszik, ezért a szemléletes megoldás kiesik, másrészt a fentebb leírt szorzattá bontás esetleg akár több tényezővel, de úgy, hogy ezek közül egyesek csak p-ket, mások pedig csak q-kat tartalmaznak, nem vezet eredményre. Már a kisebb háromszor kettes esetben is baj van, tehát ha csak az egyiknek van 3 lehetősége. Ezekben az esetekben már komolyabb eszközökre van szükség, amelyet ma éppen pl. a számítógépek segítségével lehet elvégezni. Az alaptétel szerint ilyenkor is van optimális valószínűség-eloszlás a lehetőségeink halmazán, amelytől sem *A*, sem *B* nem tér el, ha intelligens játékosok. Neumann tétele tehát az *egzisztenciáról* szól, ezt sikerült belátnia még 1928-ban megjelent cikkében [5]. A tétel a következő:

Ha van egy kétszemélyes zérusösszegű játék, akkor mindig létezik mindkét játékos számára olyan optimális kevert[4] *stratégia, amelytől való eltérés nem kedvező, azaz mindig létezik nyeregpontja a játéknak. Ez az ún. Minimax (Maximin)-tétel, vagy a játékelmélet alaptétele.*

Az eloszlás numerikus kiszámítása azonban bonyolult feladat. Az egzisztenciát eredetileg topologikus módszerekkel sikerült Neumannnak igazolnia, mára azonban egészen más módszerek is léteznek, amelyek közül egy már a Morgensternnel írt közös könyvben [3] is megjelenik. A téma történetét elég részletesen ismerteti Kóczy Á. László cikke [6], amelyben beszámol a máig nyúló fejlődéséről is. Csupán az érdekesség kedvéért jegyezzük meg, hogy végül a téma első Nobel- díjasa az a John F. Nash[5] lett, aki a nemkooperatív játékok egyensúlyi állapotainak vizsgálata során végzett úttörő munkásságáért, főleg annak jelentős közgazdasági alkalmazásai miatt *megosztva* közgazdasági Nobel díjat kapott a magyar származású, Harsányi Jánossal, valamint R. Seltennel 1994-ben. Ez a terület a Neumann-féle elmélet egyik általánosítása.

A 20. SZÁZAD SORSFORDÍTÓ MAGYARJAI KÖZÜL E FALAK KÖZÖTT VÉGEZTÉK KÖZÉPISKOLAI TANULMÁNYAIKAT
WIGNER JENŐ
1902 - 1995
NOBEL-DÍJAS FIZIKUS
NEUMANN JÁNOS
1903 - 1957
VILÁGHÍRŰ MATEMATIKUS
HARSÁNYI JÁNOS
1920 - 2000
NOBEL-DÍJAS KÖZGAZDÁSZ
TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEIKKEL ISKOLÁNKNAK, HAZÁNKNAK HÍRNEVET, DICSŐSÉGET SZEREZTEK, AZ EMBERISÉG SZÁMÁRA MARADANDÓT ALKOTTAK.
A SZÁZAD OLYAN KIVÁLÓ TANÁREGYÉNISÉGEI OKTATTÁK ŐKET, MINT
HITTRICH ÖDÖN - MIKOLA SÁNDOR - RÁTZ LÁSZLÓ - RENNER JÁNOS
AKIK A TANÍTÁS MELLETT TUDOMÁNYOS KUTATÓMUNKÁT IS VÉGEZTEK.
EMLÉKEZÉSÜL A MILLENNIUM ÉVÉBEN ÁLLÍTOTTA
A BUDAPEST FASORI EVANGÉLIKUS GIMNÁZIUM TANÁRI KARA ÉS TANULÓI

Emléktábla a Fasori Evangélikus Gimnáziumban

Milyen meglepő, hogy Harsányi János is éppen a legendás evangélikus Fasori Gimnáziumban tanult és érettségizett, mint Neumann, csak majdnem 20 évvel később. Mindkettejüket ma egy emléktábla örökíti meg az iskolában, a hasonlóképpen itt tanult Wigner Jenővel együtt. A szintén János keresztnév viszont már talán igazi véletlen…

4. Didaktikai megjegyzés

Sokféle oktatási struktúrába illeszthetjük a bemutatott játékot. Lehet akkor foglalkozni vele, amikor már valószínűségszámítást tanultak a diákok (legalább a függetlenség esetén a szorzási szabályt és a várható érték fogalmát is bevezettük már). Ekkor ezekre lehet hivatkozni. Ebben az esetben egy modellezési feladatról van szó, amelyhez a szükséges matematika ismert, tehát *alkalmazásról* beszélhetünk. Van azonban másik lehetőség is, éppen a valószínűségszámítás tanulásának motiválása, amikor pl. az eloszlások és ezek várható értékének bevezetését szeretnék megcélozni. Ekkor a bemutatott feladat már *probléma* és éppen az a célja a foglalkozásnak, hogy a megoldáshoz milyen „*elméletet*” kell, hogy *fejlesszünk*. Ez az út sokkal időigényesebb, de a megértést és a motiváció által a tanulást is segítheti. Bármely lehetőséget is választjuk, célszerű a játékot sokszor eljátszatni, amit időtakarékosságból lehet szabadidős tevékenység terhére és nem a matematika óra idején folytatni. Ott már csak a megfigyelések összegzése történne. A szerző saját tapasztalatai szerint a véletlen stratégia szükségességére rájönnek a tanulók, azonban a következő lépésben segíteni kell, mármint, hogy mit jelent itt a véletlen szerepe és hogyan lehet „alkalmas” véletlent választani. Azaz a várható érték felírása átlagos tanulóknál (ahol a kísérlet folytatódott) segítség nélkül nem várható el. A megoldás ismeretében a kérdés, hogy milyen esetben lenne igazságos, már nem nehéz, ha csak a főátlóban változtathatunk és az 1-est nem így csak a 3-at lehet módosítani. Mivel jelenleg *B*-nek kedvez a játék, *A* többet kell, hogy nyerjen, így 3-nál nagyobb szám kell. A számolás ellenőrzésére közöljük a megoldást, amely talán meglepő, de éppen a 4.

5. A játékelmélet további, iskolában is megmutatható alkalmazásai

Ehhez igen gazdag az irodalom, az első ilyen tárgyú munka a már említett Neumann és a közgazdász Morgenstern közös könyve [3]. Egy igazán gazdag tartalmú, didaktikailag is jól felépített és szerteágazó kapcsolatokat bemutató könyv Mérőtől származik [7]. Ebben kezdve a pszichológiától, viselkedés-lélektani, társadalmi és biológiai példák mellett a kvantummechanika ilyen szemléletű bemutatása is szerepel. Az evolúciós biológia területén Dawkins génekről írt könyve [8] tartalmazza annak leírását, hogy miként lehet az evolúció modellezésére ezt az elméletet sok esetben használni. Végül két, még az elmúlt század hetvenes éveiben a Műszaki Kiadónál megjelent könyvet említenénk meg, melyek közül a későbbi [10]-ben még irodalmi alkalmazásokat is olvashatunk, így Sherlock Holmes a híres detektív és a bűnöző Moriarty „párbaját a vonaton”. Méltánytalanul elfeledett, pedig akár középiskolás diákoknak is bátran ajánlható művekről van szó. Közülük a háromszerzős (egyikük Kemény *János* - már megint János! - magyar származású amerikai matematikus, aki a Basic nyelv kidolgozásával, Neumannhoz hasonlóan a számítástechnikában is jelentőset alkotott. Ő azonban a középiskolát már Amerikában járta ki, mivel az általános iskola elvégzése után zsidó származású szüleivel az Egyesült Államokba menekültek.) Ebben a könyvben [9], elsősorban diszkrét matematikát és valószínűségszámítási témákat dolgoznak fel, mátrixok komoly alkalmazásával. Mégis elemi tárgyalásmódja lehetővé teszi a matematikában kevésbé jártas olvasónak is a megértést, s egyben a modern matematika egyes elemeinek közérthető bemutatását nyújtja, kiváló példát mutatva a népszerűsítésre és a matematika szélesebb közönséghez eljuttatására. Egyben nagyon alkalmas tanárok számára is néhány az iskolában korábban nem szereplő téma egy lehetséges tárgyalására. Azért említem meg, mert a témánkhoz tartozó feladatokat is találhatunk benne.

6. Irodalom

[1] Staar Gy. : A megélt matematika – beszélgetések. Gondolat Kiadó Budapest 1990

[2] Neumann, J.: A kvantummechnika matematikai alapjai. Akadémiai Kiadó, Budapest 1980

[3] Morgenstern, O., von Neumann, J. : Theory of Games and Economic Behavior. University Press Princeton 2004(Először 1944-ben jelent meg, mint a játékelmélet első monográfiája).

[4] Lovász, L.: Algoritmusok bonyolultsága. Egyetemi jegyzet, ELTE Matematikai Intézet A 2014-es változata elérhető: http://www.cs.elte.hu/~kiraly/alg.pdf

[5] Neumann, J. : Zur Theorie der Gesellschaftspiele. *Mathematische Annalen*, 100. 295–320. (1928)

[6] Kóczy Á., L. : A Neumann-féle játékelmélet. *Közgazdasági Szemle*, LIII. évf., 2006. január (31–45. o.) online: http://epa.oszk.hu/00000/00017/00122/pdf/02koczy.pdf

[7] Mérő, L.: Mindenki másképp egyforma. Tercium Kiadó 2007

[8] Dawkins, R.: Az önző gén. Gondolat 1986

[9] Kemeny, Snell, Thompson: A modern matematika alapjai. Műszaki Kiadó 1971

[10] Williams J. D.: Játékelmélet. Műszaki Kiadó 1972

Vancsó Ödön, ELTE TTK

---

[1] Lénárt István már nagyon sok iskolában elterjedt eszközéről a Lénárt gömbről lehet egy videót megnézni a http://lenartgomb.hu/ honlapon.

[2] Régi játék, amelyet akárhányan játszhatnak. Mindenki 0 vagy 1 vagy 2 egyforma (pl. 5 forintos) pénzérmét tehet a kezébe. A kezdő mond egy számot a kezekbe levő összes pénzérmék számának becslésére, az utána következő hasonlóképpen, de az előző által mondott szám már foglalt. Ezt folytatva mindenki mond sorban egy számot, amely a megelőzőkétől különböző kell, hogy legyen. Az nyer, aki eltalálja a pénzdarabok számának összegét, ha ilyen nincs, akkor az, aki a legközelebbi egész számot mondta. A nyeremény a kezekben levő összes pénzdarab. Döntetlen esetén feleznek (ami akkor lép fel, ha pl. összesen 7 pénzdarab van a kezekben, ezt a számot senki nem mondta, de van 6 és 8 is tippként).

[3] Lásd pl. a Wikipédián: https://hu.wikipedia.org/wiki/Andrej_Nyikolajevics_Kolmogorov

[4] Kevert stratégia azt jelenti, hogy nem az egyiket vagy a másikat választom szisztematikusan, hanem, véletlen szerint „keverem” a választásomat minden egyes partiban. Az egyes stratégiákhoz tartozó valószínűségértékeknek van mindig optimális választása, erről szól a tétel.

[5] Róla még egy kiváló könyv és annak filmfeldolgozása is született „Egy csodálatos elme” címmel.

□ Bolyai □ John Nash □ Neumann János □ Nobel-díj □ Harsányi János □ játékelmélet

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Horváth Eszter 2016. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Dolgozatírás a középiskola és a felsőoktatás határán

A dolgozatírás szót sokféle értelemben használjuk. Van röpdolgozat, írásbeli felelet, témazáró dolgozat, kompetenciamérés, kisérettségi, próbaérettségi, érettségi közép- és emelt szinten, egyetemi zárthelyi dolgozat. Körülbelül 10-15 éve egy új fogalom is megjelent a köztudatban: nulladik ZH, kritériumdolgozat, szintfelmérő. Ez utóbbiak abban az időben alakultak ki, amikor a felvételi vizsgák megszűntek, és a felsőoktatásba a hallgatók döntően középszintű érettségit téve jutottak be. Nyilvánvalóvá vált, hogy a felvettek egy része nem rendelkezik azzal a matematikai tudással és jártassággal, ami elég akár csak az első hetek matematika előadásainak megértéséhez, a gyakorlatokon való eredményes részvételhez. Ma sok egyetem megíratja azt a bizonyos nulladik ZH-t és ennek sikeres teljesítéséhez köti a megfelelő matematika-tantárgy felvételének lehetőségét, a rosszul teljesítő hallgatók számára pedig felzárkóztató kurzust szervez. És vannak olyan intézmények, ahol azt mondják, „hulljon a férgese”…
Középiskolai matematikatanárként érettségizett tanítványaimtól hallok az első sikerekről és kudarcokról. Az egyetemek honlapján meg tudom nézni a kritériumdolgozatok feladatait. Az Eötvös Loránd Tudományegyetem kritériumdolgozatairól és a Budapesti Műszaki Egyetem nulladik zh-iról az alábbi honlapokon olvashatunk:

http://mathdid.elte.hu/html/bscbevmat.html

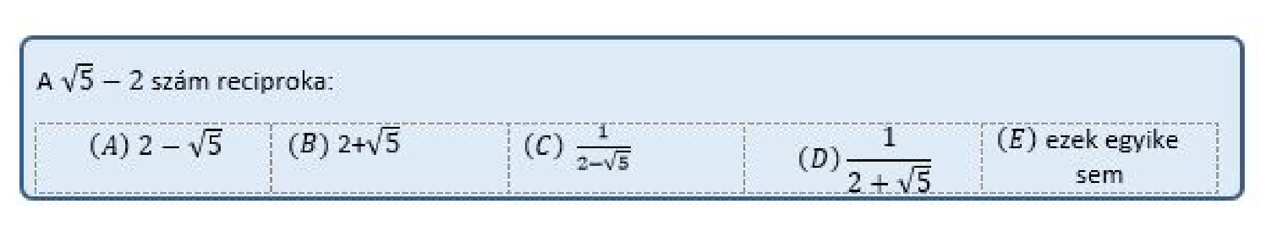
http://www.ttk.bme.hu/altalanos/nyilt/NulladikZH/

Pár éve rám tört a kíváncsiság: szerettem volna megnézni ilyen megírt dolgozatokat, látni az előforduló hibákat és elgondolkozni azon, hogy lenne-e lehetőség ezt a tudásbeli hiányosságot még a középiskolában bizonyos mértékig orvosolni. Ha már az orvoslás szó kicsúszott a számon, hogyan lehetne a megelőzésre hangsúlyt fektetni.

2015 őszén lehetőségem volt belenézni az Eötvös Loránd Tudományegyetem (ELTE TTK) és a Pázmány Péter Katolikus Egyetem (PPKE ITK) elsőéves hallgatóinak dolgozatába. Ebben a cikkben az ekkor szerzett benyomásaimról fogok írni. Az előforduló hibák gazdag választékából párat kiválasztottam és ezekhez fűzöm gondolataimat. Néhány dolgozatrészletet szkenneltem, ezekből is bemutatok néhányat. A PPKE-en a hallgatók tesztet írnak, de a megoldást a javítók csak akkor fogadják el, ha a megoldáshoz vezető út látható a dolgozatban, az ELTE-n pedig a megoldásokat részletesen indokolni kell.

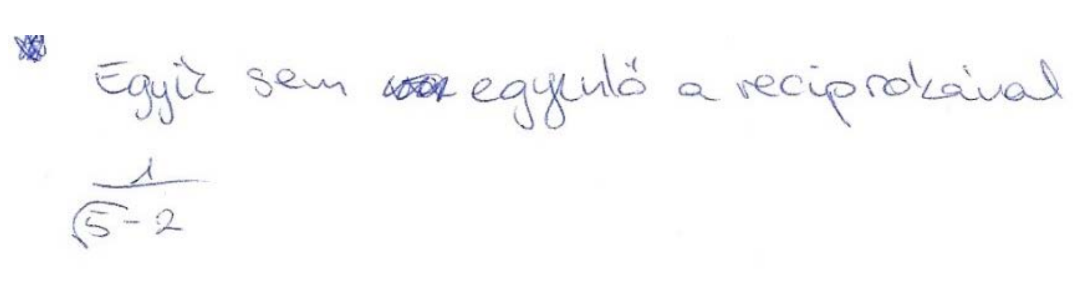
Válogatás a feleletválasztós feladatokból (PPKE ITK):

A dolgozat 1. feladata:



A $\sqrt{5}-2$ szám reciproka:

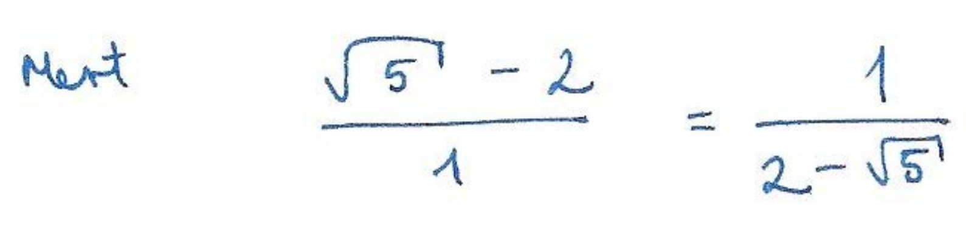
$(A)\ 2-\sqrt{5}$	$(B)\ 2+\sqrt{5}$	$(C)\ \frac{1}{2-\sqrt{5}}$	$(D)\ \frac{1}{2+\sqrt{5}}$	(E) ezek egyike sem



Egyik sem egyező a reciprokával

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

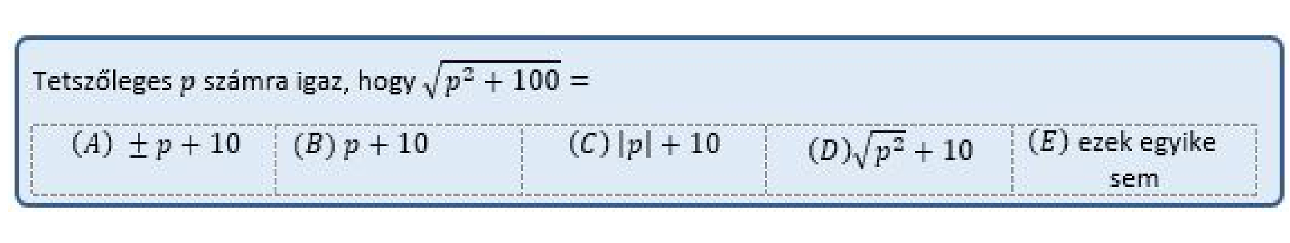
Ha a fenti indoklás alapján az (*E*) választ adta a hallgató, nem gondolt arra, hogy gyökteleníteni is lehetne a kifejezést. Előfordult az alábbi gondolat is, amiből a (*C*) megoldás adódik:



Mert $\frac{\sqrt{5}-2}{1} = \frac{1}{2-\sqrt{5}}$

Ha valaki az (*A*) lehetőséget adta meg, nyilvánvalóan nem tudja a gyakorlatban, mi a reciprok és mi az ellentett. A jó megoldás természetesen a (*B*).

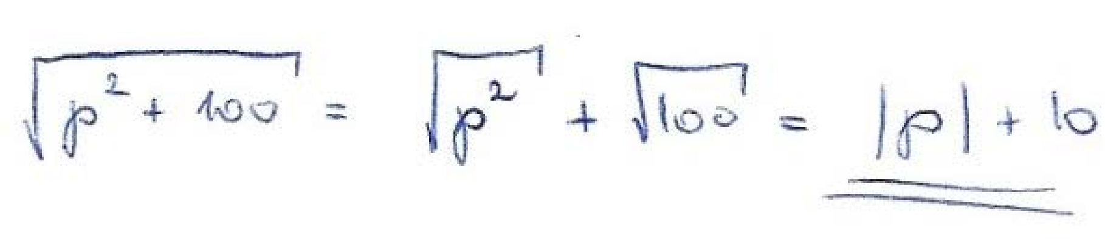
2. feladat:



Tetszőleges p számra igaz, hogy $\sqrt{p^2+100}=$

$(A)\ \pm p+10$	$(B)\ p+10$	$(C)\ \lvert p\rvert+10$	$(D)\sqrt{p^2}+10$	(E) ezek egyike sem

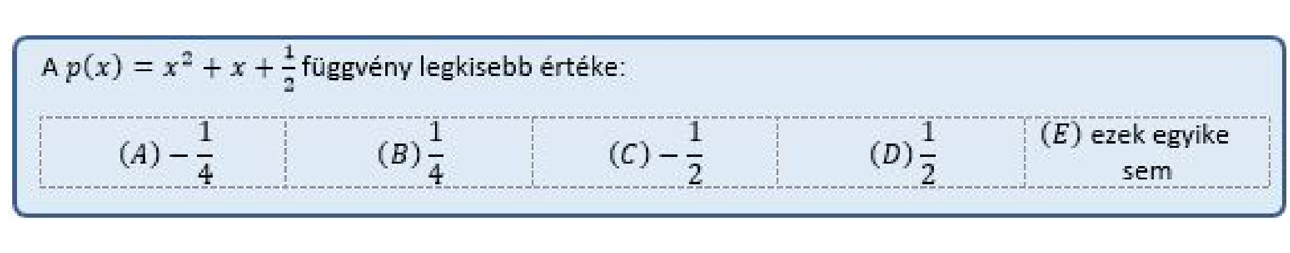
A (*D*) válasz azt jelenti, hogy a hallgató tagonként von négyzetgyököt, de a $\sqrt{p^2}$-tel „óvatos”, a *(B)* válasz esetén ezt a gyökvonást is elvégzi. Aki a (*C*)-t választja, az szintén tagonként von négyzetgyököt, de tudja, hogy $\sqrt{p^2}=\lvert p\rvert$, az *(A)* válasz azt mutatja, hogy $\sqrt{p^2}$-nek két értéke is lehet a dolgozatot író szerint. Ezek a hibák valóban előfordultak, például az alábbi formában:



$$\sqrt{p^2+100} = \sqrt{p^2}+\sqrt{100} = \underline{\underline{\lvert p\rvert+10}}$$

Jó válasz az (*E*).

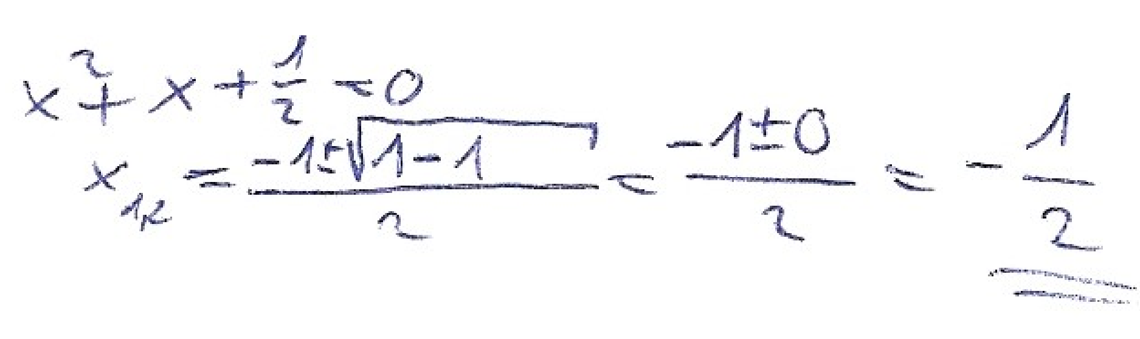
13. feladat:



A $p(x)=x^2+x+\frac{1}{2}$ függvény legkisebb értéke:

$(A)-\frac{1}{4}$	$(B)\frac{1}{4}$	$(C)-\frac{1}{2}$	$(D)\frac{1}{2}$	(E) ezek egyike sem

Az alábbi dolgozatrészlet azt mutatja, hogy a hallgató keveri a szélsőérték és a zérushely fogalmát és a megoldóképletet sem tudja jól használni:



$$x^2+x+\frac{1}{2}=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-1}}{2}=\frac{-1\pm0}{2}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

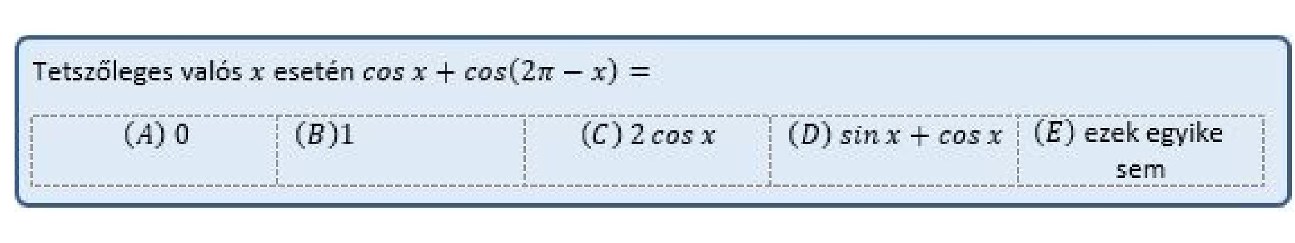
A (*D*) válaszra az az „indok”, hogy a függvény a minimumát az $x=0$ helyen veszi fel. Találkoztam az

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$$

hibával is. Jó választ az adott, aki a (*B*) lehetőséget választotta.

A következő két feladat megoldása a szögfüggvények fogalmának pontos ismeretét igényelné:

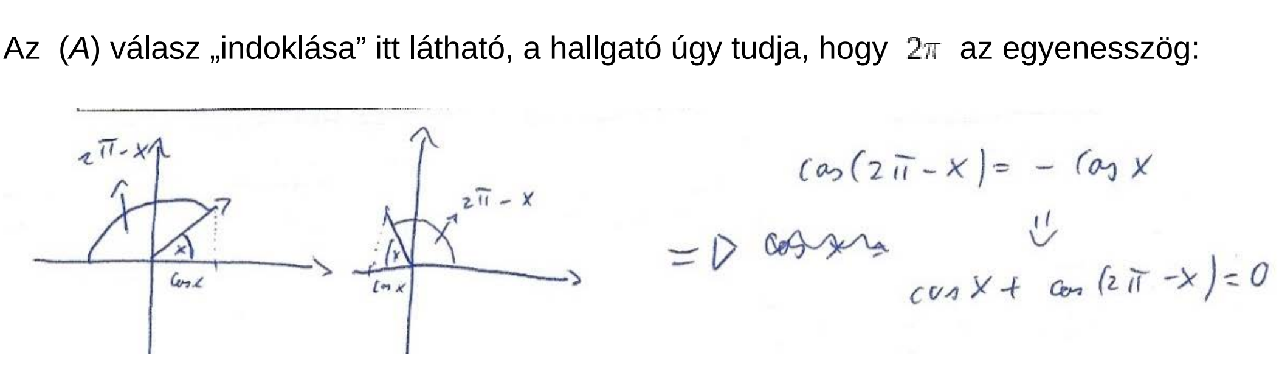
A dolgozat 7. feladata:



Tetszőleges valós x esetén $\cos x+\cos(2\pi-x)=$

$(A)\ 0$	$(B)1$	$(C)\ 2\cos x$	$(D)\ \sin x+\cos x$	(E) ezek egyike sem

Az (*A*) válasz „indoklása” itt látható, a hallgató úgy tudja, hogy 2π az egyenesszög:



$$\cos(2\pi-x) = -\cos x$$
$$\Rightarrow \quad \Downarrow$$
$$\cos x+\cos(2\pi-x)=0$$

További előforduló hibák kommentár nélkül:

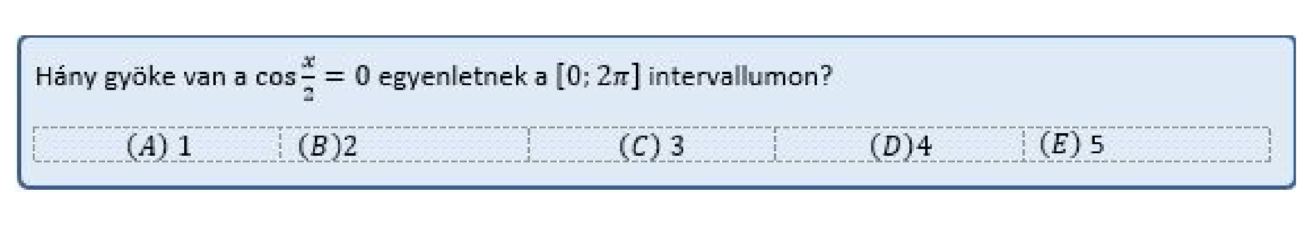
$$\cos x+\cos(2\pi-x)=\cos(x+2\pi-x)=\cos 360^\circ=1$$

$$\cos(2\pi-x)=\sin x$$

$$\cos(2\pi-x)=\cos 2\pi-\cos x$$

A feladatra adott jó válasz a (*C*).

A 14. feladat:



Hány gyöke van a $\cos\frac{x}{2}=0$ egyenletnek a $[0;2\pi]$ intervallumon?

$(A)\ 1$	$(B)2$	$(C)\ 3$	$(D)4$	$(E)\ 5$

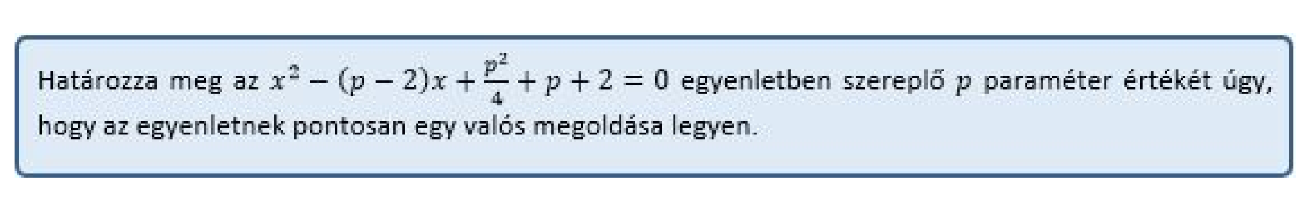
A megoldásokból kiderül, hogy sokan a $\cos x=0$ egyenletet oldják meg, az sem kizárt, hogy az egyenlet mindkét oldalát 2-vel megszorozták. Kevesen tudják, hogy a

$$\cos\frac{x}{2}$$

függvény periódusa 4π és így a jó válasz (*A*).

Válogatás a részletes indoklást kérő feladatokból (ELTE TTK):

Tanár szakos hallgatók 2. feladata:



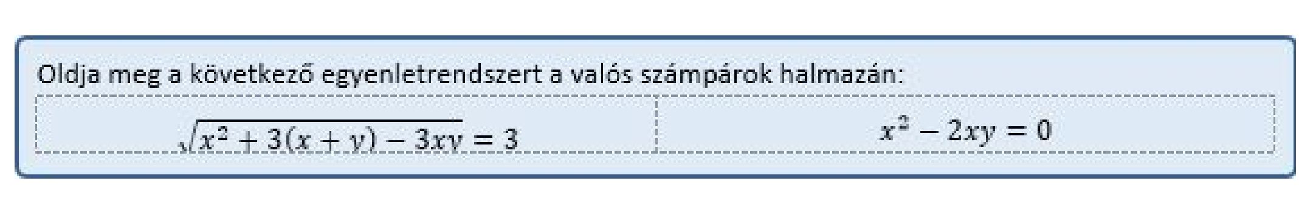
Határozza meg az $x^2-(p-2)x+\frac{p^2}{4}+p+2=0$ egyenletben szereplő p paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek pontosan egy valós megoldása legyen.

A dolgozatok egy részében az látható, hogy a hallgató nincs tisztában azzal. hogy mi a különbség az *x* és a *p* szerepe között, azaz nem tudja, hogy mi a paraméter.

Többen rosszul írják fel a diszkriminánst, két tag különbségét rosszul emelik négyzetre, zárójelfelbontásnál rosszul kezelik az előjeleket.

Gyakran elmarad az ellenőrzés vagy az „ekvivalens átalakításokat végeztem” szavak jelennek meg a hibás megoldás mellett is.

Tanár szakos hallgatók 4. feladata:



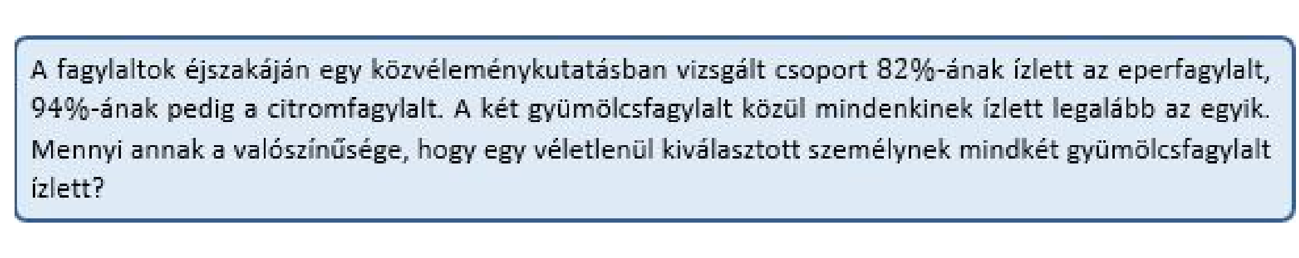
Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:

$\sqrt{x^2+3(x+y)-3xy}=3$	$x^2-2xy=0$

A hallgatók által elkövetett hibák ennél a feladatnál:

Az első egyenletnek csak a baloldalát emelik négyzetre. A második egyenletet *x*-el osztják anélkül, hogy az $x=0$ lehetőséget megvizsgálnák. Taktikai hibának mondanám, ha valaki nem a második egyenletet kezdi el alakítani először, ezzel megnehezítve a megoldást.

Matematikus hallgatók 1. feladata:



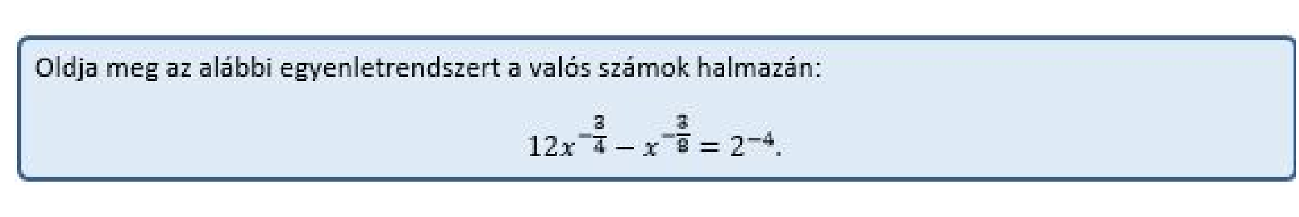
A fagylaltok éjszakáján egy közvéleménykutatásban vizsgált csoport 82%-ának ízlett az eperfagylalt, 94%-ának pedig a citromfagylalt. A két gyümölcsfagylalt közül mindenkinek ízlett legalább az egyik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott személynek mindkét gyümölcsfagylalt ízlett?

A helyes megoldás a következő lenne:

82% + 94% = 176%. A megkérdezettek 176% – 100% = 76%-a szereti mindkét gyümölcsfagylaltot. Így 76% annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy mindkét gyümölcsfagylaltot szereti.

Ezzel szemben egy dolgozatban ez olvasható: A valószínűség 0,82 · 0,94, mert a két esemény független.

Matematikus hallgatók 4. feladata:



Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$12x^{-\frac{3}{4}}-x^{-\frac{3}{8}}=2^{-4}.$$

A megoldás során fel kellett ismerni, hogy ez egy másodfokúra visszavezethető egyenlet, alkalmazni kellett a megoldóképletet, amiből az

$$x^{-\frac{3}{8}}=\frac{1}{8}$$

vagy

$$x^{-\frac{3}{8}}=-\frac{1}{24}$$

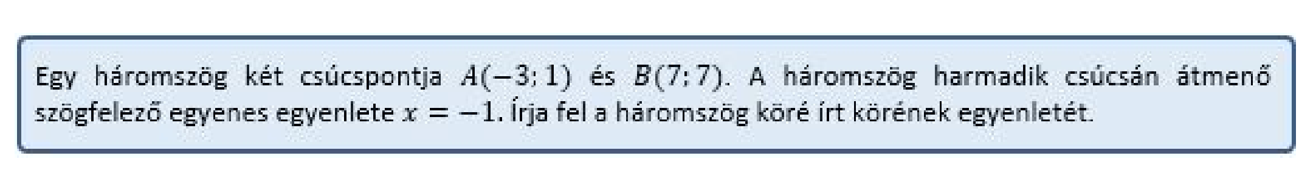
lehetőség adódik. A továbblépésnél ismerni kellett a negatív- és a törtkitevő fogalmát és azt is, hogy ebben az esetben a hatvány értéke nem lehet negatív.

A legmegdöbbentőbb hiba ez:

$$12x^{-\frac{3}{4}}-x^{-\frac{3}{8}}=\sqrt[8]{12x^{-6}-x^{-3}},$$

de van, aki negatív hatványértékhez is meghatároz kitevőt, néhányan az $x^{-\frac{3}{8}}$-ra új ismeretlent vezetnek be, és meghatározzák annak értékét, de elfelejtik az *x* értékét kiszámítani.

Matematikus hallgatók 7. feladata:



Egy háromszög két csúcspontja $A(-3;1)$ és $B(7;7)$. A háromszög harmadik csúcsán átmenő szögfelező egyenes egyenlete $x=-1$. Írja fel a háromszög köré írt körének egyenletét.

Bár ez a feladat a koordináta-geometria témakörébe tartozik, megoldásában elemi geometriai módszereket is használni kell. Előfordult, hogy a hallgató a háromszög köré írt kör középpontjának a magasságpontot tekinti. Kevesen gondolnak a szögfelezőre úgy, mint egy lehetséges tükörtengelyre. Többen elfogadják megoldási módszernek az ábráról való leolvasást.

Az előbbi feladatokat úgy válogattam, hogy érzékeltetni tudjam azt, hogy milyen jellegű problémákra kérdeznek rá ezekben a kritériumdolgozatokban az egyetemek és milyen mélységűek az elkövetett hibák. A feladatokból látható, hogy a felsőoktatás azt várja, hogy a tanulmányaikat elkezdő diákok az alapvető matematikai fogalmakat értsék, algebrai átalakításokat hatványok, gyökök, polinomok körében biztonságosan végezzenek el, tudjanak paraméteres kifejezéseket használni, függvények vizsgálatának elemi módszerével tisztában legyenek, és talán egy kevés geometriai ismeret is hasznos.

A kiválasztott példákban most a problémákra „vadásztam”. Megnyugtatom a leírtak után az olvasót, hogy a felsőoktatást kezdő hallgatók között sok jó képességű, biztos tudású diák is van.

A komoly gondokat is látjuk. Olyan okokat is fel tudunk sorolni, amelyek magyarázatot jelentenek a jelenlegi állapotokra: pl. a felsőoktatás tömegessé válása, a középszintű érettségi követelményrendszere, az iskolai fegyelem és ebben a tanulmányi fegyelem lazulása… És még sorolhatnám.

Írásom végén két olyan gondolatkörről írok, amely engem egy ideje foglalkoztat ebben a témakörben. Úgy tűnik számomra, hogy szándékosan vagy öntudatlanul, nem merjük felmérni a közoktatásban a diákok tudását kellő időben. Az a nézőpont vált uralkodóvá, hogy „alkalmazható tudáshoz juttassuk” a gyerekeket, ennek szellemében kompetenciát mérünk a 6. 8. 10. osztály végén 2001-től kezdve. Ezek a tesztfüzetek és az elvárt megoldások megnézhetők az Oktatási Hivatal honlapján:

http://www.oktatas.hu/kozneveles/meresek/kompetenciameres/feladatsorok

A feladatokat sok esetben ügyesnek, jónak tartom a maguk helyén. DE: a 6. évfolyam végén nem érdeklődünk arról, hogy tud-e a diák előjeles számokkal és törtekkel számolni, a 8. év végén nem vagyunk kíváncsiak arra, hogy egy betűket tartalmazó képletet, egyenletet megért-e a diák, a 10. évfolyam végén pedig „öncélú algebrai átalakításokat” nem kérdezünk, a függvények használatának területére csak egy-egy grafikon kapcsán tévedünk, a geometriai alapfogalmak tudását nem firtatjuk. Pedig talán jó lenne a nulladik ZH előtt is rendelkezni olyan információval, hogy hol kellene egy-két témát jobban megérteni, talán meg is tanulni, sőt használatát „begyakorolni” (remélem, ennek a szónak a leírása nem nagy szégyen). Jó lenne, ha az iskolák bizonyos körében, legalább a 10. évfolyamon a kompetenciamérés mellett a megtanult és megértett tudás mérése is megjelenne, jó lenne látni, hogy a matematika területén továbbtanulásra esélyes tanulók rendelkeznek-e megfelelő „matematikai kézügyességgel”. Ez tanárt és diákot is motiválhatna a kellő irányba.

A másik téma, amit megemlítek, nagyon hiányolom az érdemi párbeszédet a középiskolák, az egyetemek között és ennek ösztönzését és támogatását az oktatásügy irányítói részéről. Az elmúlt évtizedben megrekedtünk néhány sarkosan megfogalmazott véleménynél: a „középiskola nem tanítja meg”, „a felsőoktatás irreális követelményeket támaszt”, „miért nem kötelező az emelt szintű érettségi?”, „kevesen érettségiznek”, „sokan érettségiznek”, „sok a hallgató a felsőoktatásban”, „kevés a hallgató a felsőoktatásban”. És még sorolhatnám. Biztos vagyok benne, hogy mindegyik érintett szereplő tett és tesz lépéseket ezen a téren. Hosszú távú párbeszédre, ebből születő cselekvésre lenne szükség, a reformok előkészítésére és a hatásainak nyomon követésére pedig kellő időt kellene szánni. Segítséget jelenthet, ha mi, középiskolai tanárok tanulmányozzuk a korábbi évek nulladik zh-t, kritériumdolgozatait és információt gyűjtünk az egyetemek, főiskolák első éves matematika tematikáiról. Azoknak az oktatóknak, akik az első éves hallgatók felmérésével, felzárkóztatásával foglalkoznak, hasznos lehet a jelenlegi középszintű és emeltszintű érettségi feladatsorokba betekinteni. Ezt a határterületet kellene alaposan ismernünk, hogy segíteni tudjunk. Talán a kerettantervek, helyi tantervek tartalmára, az érettségi követelményekre is hatást gyakorolhat a középiskolából a felsőoktatásba való átmenet jobb ismerete.

Bízom benne, hogy az olvasóban nem a tehetetlenség érzését tápláltam írásommal, hanem bosszantottam annyira, hogy felébredjen benne a tenni akarás vágya is ott és olyan módon, ahol az élet a tanítás terén feladatot osztott rá. Merje átgondolni, hogy mely témákra – esetleg nem divatos témákra – tesz nagyobb hangsúlyt tanítási gyakorlatában.

Végül megköszönöm Rózsahegyiné Dr. Vásárhelyi Évának, az ELTE nyugalmazott központvezető egyetemi docensének és Várdainé Kollár Juditnak a PPKE oktatójának, hogy lehetőséget adtak a hallgatói dolgozatok megtekintésére. és értékes észrevételeikkel segítették ennek a cikknek a megszületését.

Horváth Eszter
Kempelen Farkas Gimnázium, Budapest

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Magyar Zsolt 2016. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Játékok a tanórán, szakkörön

Sok olyan alkalom van, amely lehetőséget ad arra, hogy tanítványainkkal játsszunk olyan játékokat, amelyek a matematikai gondolkodást fejlesztik. Ilyen alkalmak például egy-egy új téma bevezetése, de lehet alkalom egy 50. vagy 100. tanóra is, vagy egy szünet előtti utolsó óra, amelyen valamiféle játékos levezetést szeretnénk nyújtani a gyerekeknek.

Erre a célra olyan játékok alkalmasak, amelyeket egyszerre sok ember tud játszani, viszonylag egyszerűek a szabályok, és lehetőleg egy-egy játék nem tart túl sokáig. Fontos szempont szokott lenni, hogy kevésbé legyen eszközigényes, vagy a kellékek egyszerűen és olcsón legyenek elkészíthetők. Sajnos ezeknek a szempontoknak nem felelnek meg az úgynevezett új generációs stratégiai táblás játékok, mert ezek általában sok pénzbe kerülnek, és egy-egy játékmenet időtartama messze túlmutat egy tanóra időkeretén.

További fontos szempont lehet, hogy az osztályban egyfajta egészséges versenyszellem alakuljon ki, azaz ne páros vagy néhány személyes játékok legyenek, hanem az egész csoport vagy osztály tudjon együtt játszani. A játékidő rövidsége lehetőséget ad arra, hogy egy-egy játék alkalmával több fordulót is lebonyolítsunk, így az osztály nagyobb része sikereket tud elérni.

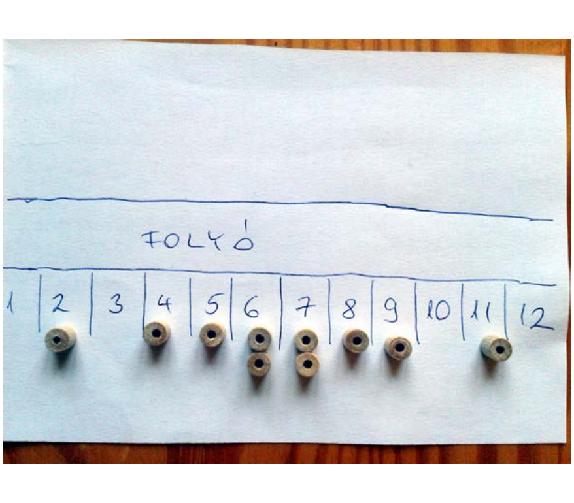
Néhány olyan játékot szeretnék bemutatni, amely a fenti feltételeknek megfelel, és amelyet gyakran játszunk tanítványaimmal.

Egy megjegyzés a játékok leírása előtt. Minden játék olyan, hogy van benne egy vagy több győztes, a győzelem elég jól definiált feltételek mellett következik be. A gyerekekben azonban ott van az igény, hogy ha már nem nyertek, akkor legalább második-harmadik helyet érjenek el. Így a játékot nem kell abbahagyni, amikor kiderül, ki a győztes, lehet tovább folytatni, és kiosztani a második, illetve harmadik helyezést.

„Átkelés a folyón”

A diákoknak készíteniük kell egy játékmezőt a füzetükbe. Ezen a játékmezőn van egy folyó, amelynek egyik oldalán 1-12-ig számozott mezők vannak. A diákok kapnak fejenként 10-15 figurát – babszemet, gombot, tetszőleges választás szerint. Az egy-egy gyerek által használt figurák száma csak a játék időtartamát befolyásolja, ha hosszabb időtartamra tervezzük a játékot, akár 20-20 figurát is használhatnak. A diákok a számozott mezők között úgy osztják el a figuráikat, ahogyan akarják, tetszés szerint akár az összeset tehetik ugyanarra a mezőre, de minden figurát el kell helyezni valamelyik mezőn.

Ezután a játékvezető két hatoldalú kockával dob, és a két dobott érték összegének megfelelő mezőn levők közül minden diáknak egy figurája átkel a folyó túloldalára. A játékot az nyeri, akinek elsőként átkelt az összes figurája a folyón.



Megjegyzések: Amikor a játékot először játsszák, akkor felmerülhet a kérdés, hogy miért van szükség az 1-es számú mezőre. A gyakorlat azt igazolja, hogy néhány gyerek először tesz oda is, figyelmen kívül hagyva, hogy a dobott értékek összege legalább 2. Ez jó tanulópénz a számukra. Természetesen a továbbiakban, a kérdés tisztázása után ez a mező már elhagyható.

További érdekesség, hogy tanárként tudjuk, általában leggyakrabban a 7-es összeg, majd a 6- os és 8-as szokott előfordulni egy dobássorozatban, tehát érdemesebb középre csoportosítani a figurákat. Mivel a játékban nem dobunk túl sokszor, ezért ez a taktika nem mindig válik be, de érdemes hagyni a gyerekeket, hadd próbálgassák maguk, és az előző játékok tapasztalatait építsék be a következő játékban alkalmazandó stratégiájukba.

„Átkelés a folyón” variánsai

A játékot rendszeresen játszva az ember gyorsan felismeri, hogy tulajdonképpen a folyó szerepe elhagyható, lényegében arról van szó, hogy van egy táblázatunk 1-12-ig a számokkal, és a két dobott érték összegének megfelelő mezőről leveszünk egy figurát. Ha elkészítünk egy táblázatot, amelybe 0-18-ig számozott mezőket helyezünk, akkor az alábbi játékok játszhatók a segítségével az eredeti „Átkelés a folyón” játékon kívül:

a) A játékvezető három hatoldalú kockával dob, és a három dobott szám összegének megfelelő mezőről veszünk le egy figurát.

b) A játékvezető két hatoldalú kockával dob, és a dobott számok összegének vagy különbségének (a nagyobbikból kivonva a kisebbet) megfelelő mezőről lehet levenni egy figurát, a játékos döntésének megfelelően. – Ez a változat igényli, hogy legyen egy 0-s mező is.

c) A játékvezető három hatoldalú kockával dob, és a dobott számok összegének, vagy a legnagyobb és legkisebb dobott szám különbségének megfelelő mezőről lehet levenni egy figurát, a játékos döntésének megfelelően.

d) A játékvezető három hatoldalú kockával dob, és a legnagyobb és legkisebb dobott szám összegének vagy különbségének megfelelő mezőről lehet levenni egy figurát, a játékos döntésének megfelelően.

Az egyes változatok mind gondolkodásra kényszerítik a gyerekeket, hogy melyik szám hányféleképpen jöhet ki, azaz melyik mezőre érdemes több, melyikre kevesebb figurát helyezni, és melyikre nem érdemes helyezni egyáltalán.

Egyszámjáték, többszámjáték

A játék eredetileg *Mérő László* nevéhez fűződik. A játék lényege, hogy minden diák ír a füzetébe egy pozitív egész számot, a játékot az nyeri, aki a legkisebb pozitív egész számot írta egyedül.

A játék technikailag úgy játszható a legegyszerűbben, hogy a játékvezető tanár egyesével sorolja a pozitív egész számokat 1-től kezdve, és minden szám elhangzásakor azok a gyerekek, akik az adott számot írták, a magasba lendítik a kezüket. Az első olyan gyerek nyer, aki egyedül lendíti fel a kezét. Fontos, hogy a csalások elkerülése végett a gyerekek a szám elhangzásakor azonnal tegyék fel a kezüket, aki késlekedik, az kiesett a játékból.

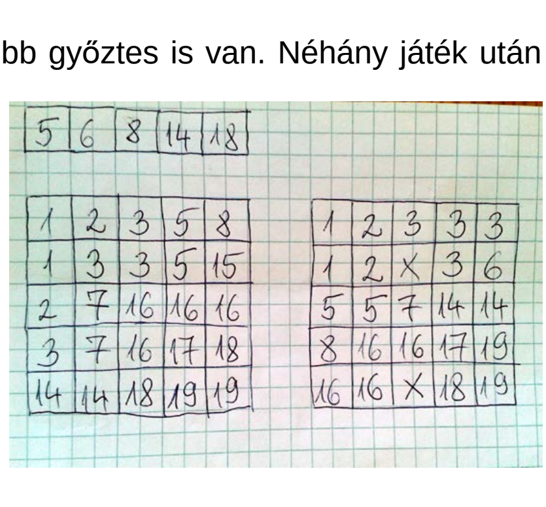
A játék gyors, azonban előfordulhat, hogy valaki mindig az egyest írja fel. Ebben az esetben vagy ő nyer, vagy valaki a csoportból „beáldozza” magát, hogy ne az illető nyerjen, viszont így ő maga sem tud nyerni, és ez keserű szájízt okozhat. Ennek megoldására továbbfejlesztettük a játékot „kétszámjáték”-ká, illetve „többszámjáték”-ká. Az „*n*-számjáték”-ban minden gyerek *n* db pozitív egész számot ír fel a füzetébe, és az nyer, aki a lehető legkisebb számot írta fel egyedül. A játék menete hasonló az előzőhöz, mindenki akkor teszi fel a kezét, amikor olyan szám hangzik el, amit ő felírt, és az nyer, akinek legelőször van fenn a keze egyedül. Ezek a játékvariánsok kiküszöbölik a folyton egyest írók problémáját, mert így az 1 felírásával senki sem veszti el a nyerés lehetőségét.

A tantermi játék során először az egyszámjátékkal szoktuk kezdeni, és néhány kör után áttérünk a két szám, majd ismét néhány kör után a három szám stb. felírására, általában 5-ig szoktunk felmenni. A gyerekeknek mindig alkalmazkodniuk kell a többiekhez, és ahogy egyre több számot írnak fel, rájönnek, hogy esetleg csak egyre nagyobb számokkal lehet nyerni, bár előfordult, hogy ötszámjátékban a 2-essel nyert valaki.

5-ös és 5·5-ös bingó

A játékhoz szükség van egy húszoldalú dobókockára („dobóikozadérre”). Az 5-ös bingóban a gyerekek rajzolnak egymás mellé öt cellát a füzetükbe, ezekbe kell majd a dobott számokat beírni egyesével. A beírás szabálya az, hogy a beírt számok balról jobbra haladva monoton növekedő sorozatot alkossanak a végén. (Azaz egy már korábban beírt számtól jobbra legalább akkora számoknak kell szerepelni, mint ő maga.) Értelemszerűen, ha egy olyan számot dobott a kocka, amelyet valaki már nem tud beírni, akkor nem csinál semmit. A játékot az nyeri, aki először ki tudja tölteni mind az 5 mezőt a szabályoknak megfelelően.

A gyerekek gyorsan felismerik, hogy a kis számokat balra, a nagy számokat jobbra kell írni a cellákban, a döntés mindig az, hogy hány helyet hagynak a többi számnak a jobb, illetve a bal oldalon.



Ez a játék gyorsan zajlik, és általában egyszerre több győztes is van. Néhány játék után érdemes áttérni az **5·5-ös** változatra. Ebben a játékban a gyerekek a dobott számokat egy 5·5-ös táblázatba írják be úgy, hogy a beírt számok soronként balról jobbra, és oszloponként fentről lefelé haladva monoton növekedő sorozatot alkossanak. (Tehát egy már beírt szám sorában tőle jobbra, illetve az oszlopában alatta legalább akkora számoknak kell szerepelni, mint ő maga.) A játék elején lehet tisztázni a gyerekekkel, de nem feltétlenül szükséges, hogy a kisebb számok általában a bal felső sarok környékén, a közepesen nagy számok a bal alsó sarokból a jobb felsőbe menő átló környékén, a nagy számok pedig a jobb alsó sarok környékén fognak helyet kapni. (Ez persze nem törvényszerű, de sok játékban ezt az elrendezést alakítják ki a gyerekek a lehetőségeket figyelembe véve.)

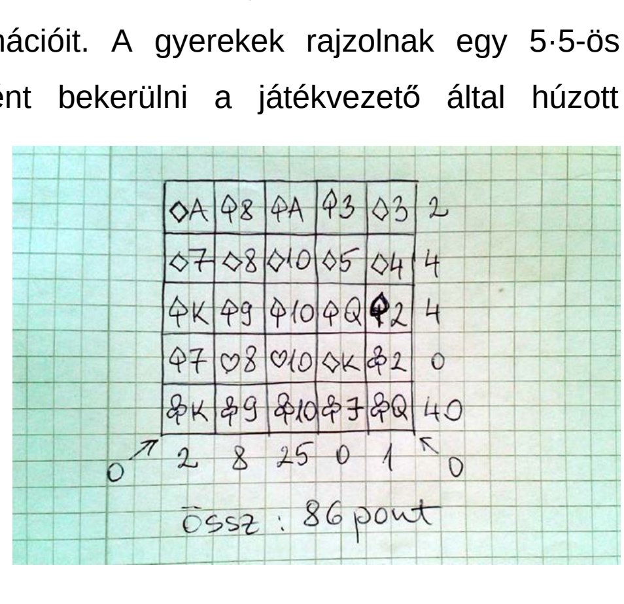
A játék két változatban érhet véget:

a) Ha a dobott számot valaki nem tudja beírni a táblázatába a szabályoknak megfelelően, akkor nem csinál semmit. A játékot az nyeri, aki először kitölti a teljes táblázatot a szabályoknak megfelelően. (Ezt a játék végén mindig ellenőrizni kell, mert előfordulhat, hogy valaki rosszul csinálja, de nem veszi észre.) Lehet még egy különdíjas játékot is beiktatni, a gyerekek a dobások megkezdése előtt megtippelhetik, hogy hány dobás után fog véget érni a játék.

b) Ha a dobott számot valaki nem tudja beírni a táblázatába a szabályoknak megfelelően, akkor ki kell húznia egy még üres mezőt a táblázatában. A játékot az nyeri, aki a legtöbb számot tudja beírni a szabályoknak megfelelően. (Ezt a játék végén mindig ellenőrizni kell, mert előfordulhat, hogy valaki rosszul csinálja, de nem veszi észre.) Ez a játék értelemszerűen pontosan 25 dobás után véget ér.

Gyűjtőpóker

A játékhoz szükséges egy pakli francia kártya Jokerek nélkül, és ismerni kell hozzá a póker alapjait, azaz a póker nyerő kombinációit. A gyerekek rajzolnak egy 5·5-ös táblázatot, ennek celláiba fognak egyenként bekerülni a játékvezető által húzott kártyalapok. Fontos, hogy amikor egy lap kihúzásra került, akkor azonnal el kell helyezni a táblázatban (azaz be kell írni a jelét), mielőtt a következő lap kihúzásra kerül. A játék lényege, hogy a sorok, az oszlopok, és a két nagyátló (melyek 5-5 négyzetet tartalmaznak), számítanak egy pókerlapnak, tehát mintha 12 kezünk lenne a pókerhez. A gyerekek úgy helyezik el az egyesével kihúzott lapokat a táblázatukban, hogy összességében a lehető legtöbb pontot gyűjtsék. A kitöltött táblázatot a pontozótábla alapján kell kiértékelni, minden sornak, oszlopnak és a két nagyátlónak is kialakul egy-egy pontértéke attól függően, hogy milyen nyerő kombinációt sikerült ott kialakítani, és a részpontok összege adja a teljes pontszámot. A játékot az nyeri, aki a legtöbb pontot gyűjti.



Pókerlapok megnevezése	Magyarázat	Pontérték
1 pár (1 pair)	Két egyforma értékű lap + három egymástól és ezektől is különböző értékű lap (pl. 4, 4, 5, J, K vagy 3, 5, 7, Q, Q).	1 pont
2 pár (2 pairs))	Két egyforma értékű lap + két egyforma értékű, de az előzőektől különböző lap + egy az előzőektől különböző értékű lap (pl. 4, 4, 5, 5, K vagy 3, 7, 7, Q, Q).	2 pont
Terc (drill)	Három egyforma értékű lap + két egymástól és ezektől is különböző értékű lap (pl. 4, 4, 4, J, K vagy 3, 5, A, A, A).	3 pont
Szín (flush)	Mind az 5 lap azonos színű (pl. mind kőr vagy mind pikk).	4 pont
Sor (straight)	Valamelyik számértéktől kezdve folyamatosan 5 egymást követő értékű lap van a kézben (pl. 3, 4, 5, 6, 7). A sor kezdődhet Ásszal (A, 2, 3, 4, 5), de körberakás nincs (K, A, 2, 3, 4 nem sor). ***Megjegyzés:*** A mi játékunk során annak nincs jelentősége, hogy az öt egymást követő értékű lap egy soron vagy egy oszlopon belül milyen sorrendben követi egymást. Tehát sor akkor is, ha fentről lefelé pl. 2, 5, 3, 4, 6 sorrendben láthatók a lapok.	5 pont
Full (full house)	Két egyforma értékű lap + három egyforma értékű, de az előzőektől különböző lap (pl. 4, 4, 4, 5, 5 vagy 7, 7, 7, Q, Q).	8 pont
Póker (poker)	Négy egyforma értékű lap + egy ötödik bármilyen lap.	25 pont
Színsor (straight flush)	Olyan sor, amelyben minden lap ugyanolyan színű (pl. kőr 5, 6, 7, 8, 9).	40 pont
Royal flush	Olyan színsor, amely a 10, J, Q, K A lapokból áll.	800 pont

Szuperfarmer újratöltve

A játék eredetije a Szuperfarmer játék, egy matematikai alapú stratégiai játék, amely a véletlen szabályszerűségeit felhasználva épül fel. Sajnos az eredeti játék túl hosszú és eszközigényes, nem alkalmas órai alkalmazásra. Az általam kitalált változat rövidebb (bár hosszabb, mint az eddig felsorolt játékok), és kevesebb eszközzel megoldható.

A játékhoz szükség van két tizenkét oldalú dobókockára, játékosonként egy lapra, amelyen egy folyamatos, 1-12-ig számozott, 12 mezőből álló játéktér látható, továbbá játékosonként sok figurára (babszem, számolókorong is megteszi). Minden játékos a saját játéktábláján tevékenykedik, a többiek előrehaladását nem tudja befolyásolni. Kezdetben mindenki feltesz két figurát az 1-es számú mezőre. A játékvezető a két tizenkét oldalú kockával egyszerre dob, és a játékosok feltesznek figurákat a játéktáblájukra az alábbi szabályok szerint:

Ha két különböző, 12-nél kisebb szám szerepel a két kockán, pl. a 4 és a 6, akkor először minden játékos megnézi, hogy a 4-es mezőn hány figurája van, hozzáad 1-et, elosztja az eredményt kettővel, és lefelé kerekíti. Az így kapott szám határozza meg, hogy hány új figurát tehet fel a 4-es mezőre. Ugyanezt az eljárást végrehajtja a 6-os mezővel is.

Ha két egyforma, 12-nél kisebb szám szerepel a kockákon, pl. két 7-es, akkor minden játékos megnézi, hány figurája van a 7-es mezőn, hozzáad 2-t, elosztja az eredményt kettővel, és lefelé kerekíti. Az így kapott szám határozza meg, hogy hány új figurát tehet fel a 7-es mezőre.

Ha az egyik dobott szám 12, a másik pedig nem 12, hanem pl. 3, akkor minden játékosnak az összes figuráját le kell vennie a 3-as mezőről.

Ha mindkét dobott érték 12, akkor a játékosoknak arról a mezőről le kell venniük az összes rajta levő figurát, amelyen a legtöbb figurájuk van. Ha több ilyen mező is van, akkor közülük a legmagasabb sorszámút kell kiüríteni.

A játék során minden dobás előtt a játékosok átrendezhetik figuráikat a játéktáblájukon az alábbi szabályok szerint:

1. Két figuráért, amelyek egy adott sorszámú mezőn állnak, feltehet 1 figurát az 1-gyel nagyobb sorszámú mezőre (a két „beváltott” figurát le kell vennie az érintett mezőről).

2. Egy figuráért cserébe, amely egy adott mezőn áll, feltehet két figurát az 1-gyel kisebb sorszámú mezőre (a „beváltott” figurát itt is le kell vennie az érintett mezőről).

3. Az 1. és 2. lépéseket döntése szerint akárhányszor megteheti, amíg van rá lehetősége.

4. Minden játékosnak jeleznie kell, amikor befejezte a figurák átváltását, és akkor következik a következő dobás.

Az a játékos nyer, aki először tud figurát feltenni a 12-es számú mezőre.

A játék természetesen játszható 1-6-ig számozott mezőkkel is, és két hatoldalú dobókockával, ez esetben gyorsabban véget ér, és általában kevésbé számít az alkalmazott taktika.

Nyerő nemhatos

A játékhoz egy hatoldalú kockára van szükség. A játék egy fordulója kockadobásokból áll, a játékvezető egyesével végzi a dobásokat a hatoldalú kockával. Ha 6-ost dobott, akkor a forduló véget ér, és az éppen játékban levő játékosok az adott fordulóra nem kapnak pontot. Ha nem hatost dob, akkor minden játékos eldöntheti, hogy folytatja-e a játékot, vagy kiszáll. Aki egy adott dobás után kiszáll, annyi pontot kap, ahány dobás történt eddig a fordulóban. Tehát ha a játékvezető már négyszer dobott, és egyik sem volt 6-os, akkor 4 pontot kap, aki a negyedik dobás után kiszáll. A forduló akkor ér véget, amikor mindenki kiszállt, vagy a játékvezető 6-ost dobott. A játék tetszőleges számú fordulóból állhat, érdemes ezt előre megbeszélni. A játékot az nyeri, aki a legtöbb pontot gyűjti.

Miután már sokat játszottuk ezt a játékot, rátérhetünk a profi változatára. A játékszabályok ugyanazok, néhány eltéréssel. A játék kezdetén mindenki kap 20 pontot. Ha valaki részt akar venni egy adott fordulóban, akkor ezért 2 pontot kell adnia. Ha úgy dönt, hogy nem játszik, akkor a két pontja megmarad, de nem is szerezhet pontot. A többi szabály ugyanaz.

Megjegyzés: A gyerekek egy idő után rájönnek arra, hogy a játékban hosszabb távon akkor is érdemes részt venni, ha „fizetni kell” a részvételért. Azt is könnyen láthatják, hogy a 3. dobás előtt nem fog kiszállni az, aki játszik, hiszen ha az első vagy a második dobás után kiszállna, akkor nem járna rosszabbul, ha egyáltalán nem is szállna be. Ez egyben azt is jelenti, hogy az első 3 dobást lehet egyben is ledobni, és ha van benne 6-os, akkor véget ért a forduló.

A játék lebonyolításánál praktikus, ha van sok kockája a játékvezetőnek, mert akkor egyszerű a dobások nyilvántartása: mindig másik kockával kell dobni, és a nem 6-os dobások aktuális számát a kockák egymás mellé helyezésével érdemes számon tartani.

További érdekes vizsgálat lehet, hogy kérjük meg a gyerekeket, döntsék el előre, hogy az adott fordulóban melyik dobásnál fognak kiszállni, amennyiben addig nincs 6-os, pl. a 3. dobásnál, majd ezeket a stratégiákat össze lehet hasonlítani a nyeremények alapján.

Zárszó

Remélem, hogy a fent ismertetett játékok mindenkinek jó szórakozást okoznak majd. Egyben buzdítok is arra mindenkit, hogy ha találkozik valamilyen játékkal, akkor gondolkozzon el azon, hogyan lehetne ötletet meríteni belőle a fentiekhez hasonló játékokhoz, és ossza meg ezeket az ötleteket és az elkészült játékokat másokkal is.

Magyar Zsolt

Szent István Gimnázium, Budapest

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

A **KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ** ROVATBAN ELSŐSORBAN OLYAN KÖNYVEKRŐL SZERETNÉNK TUDÓSÍTANI ÉS OLYAN ELEKTRONIKUSAN ELÉRHETŐ ÍRÁSOKAT AJÁNLUNK, AMELYEK A MATEMATIKA BÁRMELY RÉSZE VAGY KAPCSOLATAI IRÁNT ÉRDEKLŐDŐK SZÁMÁRA KÍVÁNATOSAK LEHETNEK. (ROVATSZERKESZTŐ: *TÓTH JÁNOS.)*

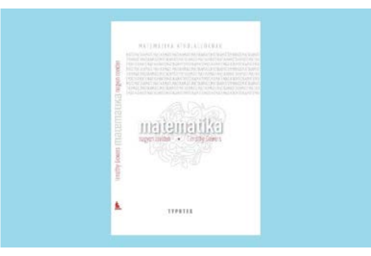
Szerkesztő

2016. SZEPTEMBER,

KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Legfölső polc

Elsősorban olyan könyvekről szeretnénk tudósítani (akár korábban megjelentekről is), amelyek a matematika bármely része vagy kapcsolatai iránt érdeklődők számára kívánatosak lehetnek. Leginkább a magyar nyelven megjelent, boltokban vagy könyvtárakban könnyen elérhető művekre koncentrálunk...Ma már a könyvespolcok nem kizárólag fából készülnek: olvasmányaink egyre nagyobb részét teszik ki az elektronikusan elérhető írások.



Szerkesztő

2016. SZEPTEMBER,

KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Timothy Gowers: Matematika nagyon röviden

Itt nem talál az olvasó semmit az aktuális káoszról, fraktálokról, hálózatokról (ki emlékszik már a katasztrófaelméletre…); a cél kifejezetten *néhány fogalom alaposabb megismertetése*, nem a villogás. Valóban lehet a matematika legfontosabb jellemzőjének tartani ezt. Szerzőnk számos példán mutatja meg, hogy ha megértjük a lényegét, megoldhatatlannak tűnő feladatok vizsgálatában is előbbre juthatunk.

Ladics Tamás

2016. SZEPTEMBER,

KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Matematikai problémák a meteorológiai modellezésben

A *meteorológiai modellezés* az alkalmazott matematika egyik legösszetettebb területe. A téma egyik legfrissebb angol nyelvű tanulmánygyűjteményét ismerteti a szerző, *Ladics Tamás*. A kötetben foglalt tanulmányok érdekesek és hasznosak lehetnek a légköri kutatást művelők közösségén túl minden természettudományos és matematikai képzettséggel rendelkező érdeklődő számára. A *matematikai módszerek sokszínű alkalmazása* ötleteket és motivációt adhat a jövőbeni kutatásokhoz.

Szerkesztő

2016. SZEPTEMBER,

KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A titkárnőprobléma

Lottó, lóverseny, káosz, játékelmélet, Google, sorbanállás, hídszerkezetek vagy könyvelés: mi bennük a közös? A matematika! A szórakoztató stílusban megírt 100 rövid írás mindegyike arra példa, hogy a matematika segítségével olyan dolgokat tudhatunk meg a világról, mint sehonnan máshonnan. A száz közül kiválasztottunk egyet ízelítőül. Lehet, hogy sokaknak ismerős a téma, de a további 99 között bizonyára van meglepő újdonság is az olvasónak.

Lóczi Lajos

2016. SZEPTEMBER,

KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A Wolfram nyelv történetéről

A Wolfram nyelv mindössze néhány éve kapott végleges nevet, noha fejlesztése még az elmúlt évezredben kezdődött el. A felhasználók a nyelvvel először a *Mathematica* nevű programcsomagban találkozhattak. A cikkben a *Wolfram programozási nyelv* rövid történetét és egy könyvismertetőt olvashatnak.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

Szerkesztő 2016. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Legfölső polc

Mit várhat tőlünk az Olvasó?

Miképpen az egész laptól, természetesen ettől a rovattól is hasznos és érdekes tudnivalókat, tanácsokat, ismereteket. Konkrétabban: elsősorban olyan könyvekről szeretnénk tudósítani (akár korábban megjelentekrő isl), amelyek a matematika bármely része vagy kapcsolatai iránt érdeklődők számára kívánatosak lehetnek. Leginkább a magyar nyelven megjelent, boltokban vagy könyvtárakban könnyen elérhető művekre koncentrálunk, de időnként fölhívjuk a figyelmet klasszikusokra, vagy idegen nyelven megjelent, lefordításra (vagy eredeti nyelven olvasásra) méltó könyvekről is fogunk szólni.

Ma már a könyvespolcok nem kizárólag fából – ajjaj! farostlemezből :-) készülnek: olvasmányaink egyre nagyobb részét teszik ki az elektronikusan elérhető írások. Ezeket is igyekszünk szemlézni, közülük is ajánlgatunk.

Mit várunk mi a kedves Olvasótól?

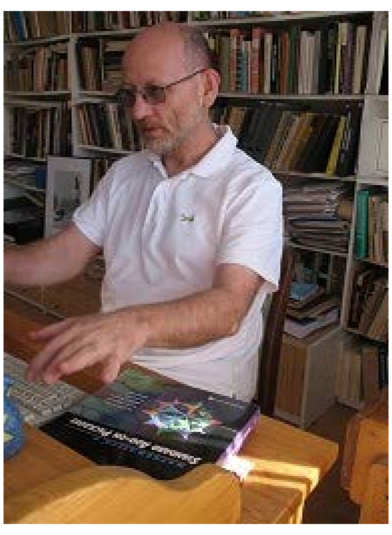
Olvassanak kritikusan bennünket. Nem egy esetben szándékosan (vagy jobb híján) szubjektívek leszünk. Amíg nem lesz mód hozzászólásokban kifejezni véleményüket, szívesen fogadunk (Kapcsolat!) terjedelmesebb ellenvéleményeket, kiegészítéseket, sőt teljes könyvkritikákat. (szerk@ematlap.hu, tárgy: Könyvespolc).

Könyvajánlónk

Ebben a számunkban *Timothy Gowers*: Matematika nagyon röviden (Typotex, Budapest, 2010), *John D. Barrow*: 100 alapvető dolog, amiről nem tudtuk, hogy nem tudjuk (Akkord Kiadó, Budapest, 2013) és *Stephen Wolfram*: An Elementary Introduction to the Wolfram Language, Wolfram Media, Inc., 2015) című könyveit ajánljuk.

Honlapokat ajánlunk

MacTutor History of Mathematics archive (http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/)
Nagyon jól használhatjuk ezt a teljességre törekvő honlapot a matematika történetéről. Könnyű ottfelejtkezni, illetve bármikor érdemes ott háttér-infot keresni. *Skócia első egyeteme*, ahogyan magukat hívják (és joggal, mert időben elsőként, 1413-ban alakultak, és a skót egyetemek listáján a legjobbak), a University of St. Andrews tartja fenn a matematikusok, (talán: fizikusok), a tudománytörténészek és a közönséges halandók kedvéért. Saját magam leggyakrabban az életrajzokat használom, de történeti témák, nevezetes görbék, és nagyon sokféle index segíti elveszni az olvasónak.
Encyclopedia of Mathematics (eom.springer.de)
A néhai Szovjetunióban készült egy ötkötetes enciklopédia, amit valami csoda folytán sikerült megvásárolnom a Gorkij-könyvesboltban. (A csoda ahhoz kellett, hogy ne csak a második és az ötödik kötethez jussak hozzá, volt némi véletlenség a kötetek elérhetőségében, ez volt az ára az olcsó árnak.) Ezt a művet lefordították angolra, kiegészítették, és kiadta a Kluwer Academic Publishers 10 kötetben. Ekkor rávettem a BME Könyvtárát, hogy vegyék meg a CD-t, mert ott mégis csak könnyebb keresni.A következő lépésben a Springer az Európai Matematikai Társasággal közösen (gondolom, általuk anyagilag támogatva) föltette az egészet a hálóra, ingyenesen. Egyetemi színvonalú, vagy inkább magasabb, tehát szakember is találhat újdonságokat a saját szakterületéről. Megjegyzendő, hogy nem találtam a honlapon utalást arra, hogy a mű eredetileg oroszul jelent meg, pedig a szerzők neve is utal erre, és az a tény is, hogy a szócikkek rendszerint két részből állnak: az eredeti szöveget kiegészíti egy kommentár, ahol az újabb fejlemények és a kimaradt nyugati irodalom szerepel.



JT

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

Szerkesztő 2016. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Timothy Gowers: Matematika nagyon röviden

A rendkívül aktív és sokoldalú szerző (bocsánat, nem szorul az én magasztalásomra a Fields-érmes matematikus, de tényleg ez a jellemző rá, nézzék csak meg az Interneten) írt egy kis könyvet a matematikáról, kívülállóknak. Egy jellegzetes részlet az Előszóból: „…számítok viszont az olvasó érdeklődésére. Magam ugyanis nem törekszem különösebben ennek felkeltésére.” (Szóval: „Csak az olvassa versemet…”) Ezt azért tartom rokonszenves figyelmeztetésnek, mert sok esetben az, aki azt állítja, hogy törekszik az érdeklődés felkeltésére, nem jár sikerrel, esetleg be is csapja az olvasót, aki előbb-vagy utóbb mérgesen elhajítja a könyvet. Itt nem talál az olvasó semmit az aktuális káoszról, fraktálokról, hálózatokról (ki emlékszik már a katasztrófaelméletre…); a cél kifejezetten néhány fogalom alaposabb megismertetése, nem a villogás.

Gowers számára a legfontosabb fogalom az absztrakció. Valóban lehet a matematika legfontosabb jellemzőjének tartani ezt. Szerzőnk számos példán mutatja meg, hogy ha megértjük a lényegét, megoldhatatlannak tűnő feladatok vizsgálatában is előbbre juthatunk. (Talán nem érdektelen, hogy néhány évtizeddel korábban, mindenki által kedvelt és tisztelt tanárunk, *Fried Ervin* viszont – észlelvén, hogy nem mindegyikünknek megy jól a leginkább absztrakción alapuló tantárgy, az algebra – felhívta a figyelmünket, hogy az egyetemen lényegében egyetlen új fogalmat tanultunk, és ez a folytonosság/határérték. Neki is igaza volt.)
Amíg például a görögök kétségbeestek, amikor felfedezték, hogy az egységnégyzet átlójának hossza nem racionális szám, ma ezzel a ténnyel úgy járhatunk el, hogy azt és csak azt használjuk fel a 2 négyzetgyökéről, hogy a négyzete 2, és nem elmélkedünk fölöslegesen arról, hogy mi is az valójában. A -1 négyzetgyöke még nagyobb „sikertörténet”, ha túltesszük magunkat azon, hogy nincs olyan **valós** szám nincsen, amelyiknek a négyzete -1 lenne. Semmi mást nem kell tudnunk róla, de azt igen, hogy a négyzete -1. Jutalmul viszont azt kapjuk, hogy tetszőleges polinom gyökei előállíthatók a segítségével. Az elnevezések (irracionális, transzcendens, képzetes szám) jól mutatják, milyen erős pszichológiai gátakat kellett legyőzni az újfajta számokkal való ismerkedés közben.
Szerzőnk – *Wittgenstein* (http://www.iep.utm.edu/wittgens/) nyomán – folyamatosan hangsúlyozza (amit néhány év alatt sikerült megszoknunk egyetemi tanulmányaink során), hogy a (matematikában előforduló) szavak jelentése azonos használati módjukkal. Egy új definíció megjelenésekor egyrészt kísérletezünk a speciális esetekkel, ez rendben van. Másrészt a definíció azt és csak azt tartalmazza, amit kimond, az adott fogalommal azt csinálhatunk, amit a definíció előír. (Aki tanulta például a feltételes várható érték fogalmát, az emlékezhet arra, hogy ugyan a konkrét példák is hasznosak, de általános állítások bizonyításához a definícióban szereplő tulajdonságokat kell használni, mást viszont nem.)
Honnan lehet tudni, hogy a fordító, *Pataki János* jó munkát végzett? A könyv folyamatosan, jól olvasható, nincsenek benne félreértésre utaló hibák, egy szóval: kellemes olvasmány. Nincs szükség az eredeti szöveggel való filológusi egybevetésre ahhoz, hogy azt gondoljuk: a pontossággal se lehet baj.
Személyes tapasztalatom, hogy az ilyen, kívülállók számára szánt könyveket matematikusok olvassák. Jól megdicsérjük a szerzőt egymás között, hogy milyen világosan fejtett ki olyan fogalmakat, amelyek számunkra az egyetem első féléve óta maguktól értetődőek. Péter Rózsa *Játék a végtelennel* című klasszikus könyvecskéje (http://www.typotex.hu/book/245/peter_rozsa_jatek_a_vegtelennel) kifejezetten *Benedek Marcell* kérésére készült. (A Wikipédiát meglátogatni lusta újszülöttek számára: *Péter Rózsa* (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Peter.html), tanítványainak: Rózsi néni, legalább két dologban volt kiváló: oktatóként és a rekurzív függvények elméletének korát megelőző kutatójaként. Benedek Marcell nem csak irodalomtörténész, műfordító és színházigazgató volt, de a mesemondó Benedek Elek fia, valamint az orvos és író Benedek István apja is.)
Ez a kitérő arra irányult, hogy nagy örömmel közölnénk bölcsész, képzőművész, jogász, tánckritikus – egyszóval matematikától távolabb álló olvasó írását ugyanerről a műről. Egészen biztos, hogy tanulhatunk abból, ahogyan valaki más nézőpontból ítéli meg e szívünknek oly kedves könyvecskét.

TJ

Timothy Gowers: Matematika nagyon röviden, TYPOTEX, Budapest, 2010.

http://www.typotex.hu/book/2912/timothy_gowers_matematika_nagyon_roviden

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

Ladics Tamás 2016. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Matematikai problémák a meteorológiai modellezésben

A magyar szerkesztők által összeállított *Mathematical Problems in Meteorological Modelling* tanulmánygyűjtemény a légköri folyamatok vizsgálatának több fontos területét felöleli. Célja, hogy bemutassa: a matematika módszereinek széles skálája megjelenik ezen tudományág művelése során. Minden fejezet időszerű szakmai kérdést feszegető munka, melyben a matematikai módszerek alkalmazásaira mutatnak egy-egy példát.

A kötet három nagy részre tagolódik: Az **időjárás számszerű előrejelzése** nemlineáris parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásának összetett feladatát jelenti. Az első fejezet *On a Conservative Finite-Difference Method for 1D Shallow Water Flows Based on Regularized Equations* című munkájában a probléma tipikus megközelítését olvashatjuk: a sekélyvízi egyenletek megoldása nem csupán egy szokásos tesztje a numerikus sémáknak, de több, a légkör viselkedését jellemző alapvető jelenséget is jó közelítéssel visszaad. Numerikus megoldásuk alapvető fontosságú. A *Discretization in Numerical Weather Prediction: A Modular Approach to Investigate Spectral and Local SISL Methods* jó áttekintést ad a numerikus időjárás-előrejelzés matematikai kihívásairól és az azokra adott válaszokról. Amellett, hogy – a tudományterületet kevéssé ismerők számára is érhető módon – ismerteti a módszereket, bemutat egy örvényesség-divergencia egyenleteken alapuló szemi-Lagrange-féle szemiimplicit sémát. A *Turbulence Modeling Using Fractional Derivatives* egy olyan kétdimenziós turbulenciamodellt mutat be, ahol a nyírófeszültségek véletlen változók. Törtrendű deriváltak segítségével általánosítja a Navier–Stokes-egyenleteket, megalkotva ezzel a turbulencia egy sztochasztikus-determinisztikus modelljét. A negyedik fejezet *A Parallel Numerical Solution Approach for Nonlinear Parabolic Systems Arising in Air Pollution Transport Problems* című munkája a nemlineáris parabolikus problémák numerikus kezelésének olyan új megközelítését írja le, amely a légköri transzport folyamatok modellezésében fontos szerepet kaphat.

A **levegőminőség modellezés**ének szánt második rész négy tanulmányból áll, amelyek a mozgásrendszerek alapvető matematikai leírásának lehetőségeitől – *Eulerian and Lagrangian Approaches for Modelling of Air Quality*; *Hydrodynamic Modeling of Industrial Pollutants Spreading in Atmosphere*; *Coordinate Transformation Approach for Numerical Solution of Environmental Problems* – egészen a nyolcadik fejezetben – *Impact of Climatic Changes on Pollution Levels* – közölt eredményekig a témát nagyon eltérő nézőpontokból vizsgálják. Az utóbbi munka különböző éghajlat-változási forgatókönyvek mellett a légszennyező anyagok szintjében bekövetkezhető változásokat tárgyalja, így a napjainkban megnövekedett érdeklődésre számot tartó két kérdéskört – éghajlatváltozás és légszennyezettség – kapcsol össze. A légszennyezés-terjedésének gyors és pontos előrejelzése elengedhetetlen. Elég ha csak egy nukleáris erőműben bekövetkezett baleset eredményeként a légkörbe kerülő radioaktív gázokra, vagy egy vulkánkitörés utáni hamufelhő szétterülésére gondolunk. Nem csupán a transzport parciális differenciálegyenleteit kell megoldani, hanem az ehhez csatlakozó, az aktuális időjárási helyzetet leíró modellt is kezelni kell. A fő nehézséget a kémiai reakciók matematikai leírása jelenti, ami a transzportegyenletek között teremt nemlináris kapcsolatot.

A légkör és az éghajlati rendszer egyik alapvető jellemzője a kaotikus viselkedés, ezért a meteorológiai előrejelzés nagyon érzékeny a kezdeti feltételekre. Az úgynevezett adatasszimiláció során kezdeti értékeket állítunk elő a numerikus előrejelző modell számára. Ez összetett optimalizálási probléma, a légkör állapota ugyanis csupán becsülhető, némi bizonytalansággal a mennyiségekben. Ezen bizonytalanságokat igyekszik figyelembe venni az úgynevezett *Ensemble* előrejelzés, amely során több előrejelzés készül, különböző kezdeti feltételek mellett. Mára a módszerben az összes számszerűsíthető légköri és éghajlati bizonytalanságot figyelembe veszik. Mostanra az adatasszimiláció és az ensemble modellezés szétválaszthatatlan a meteorológiai kutatásban. A harmadik rész az **adatasszimilációt**, és a **valószínűségi előrejelzést** ismerteti. Néhány példában megmutatják, mi a kapcsolat a számszerű időjárás előrejelzés ezen két területe között. Az *An Invitation to Meteorological Data Assimilation* bemutatja az adatasszimiláció alapmódszereit, ezek matematikai levezetését, valamint alkalmazásukat néhány próbafeladatra. Az adatasszimiláció módszereinek matematikai vizsgálatát tartalmazza a tizedik fejezet (*Analysis of the Data Assimilation Methods from the Mathematical Point of View*). A tizenegyedik fejezet – *Ensemble Methods in Meteorological Modelling* – bemutatja az ensemble előrejelzés ötletét és használatát a számszerű időjárás-előrejelzésben. A szerzők arra is kitérnek, hogy hogyan alkalmazható a módszer a meteorológiai adatasszimilációban. A tizenkettedik fejezet *Quantifying Sources of Uncertainty in Precipitation and Temperature Projections over Different Parts of Europe*című munkája a különböző időskálájú, földrajzi területre és meteorológiai változóra vonatkozó éghajlat-előrejelzések fő bizonytalanságait hivatott azonosítani.

A kötetben foglalt tanulmányok érdekesek és hasznosak lehetnek a légköri kutatást művelők közösségén túl minden természettudományos és matematikai képzettséggel rendelkező érdeklődő számára. A munkák tudományos mélysége mellett a szűk értelemben vett szakmai problémák érhető módon szerepelnek benne. A matematikai módszerek sokszínű alkalmazására láthatunk példát, így a kötetben foglalt munkák matematikusok számára adhatnak ötletet és motivációt jövőbeni kutatásaikhoz.

Ladics Tamás

A. **Bátkai**, P. **Csomós**, I. **Faragó**, A. **Horányi**, G. **Szépszó** (eds.): ***Mathematical Problems in Meteorological Modelling.*** Series: The European Consortium for Mathematics in Industry Vol. 24 Springer International Publishing, 2016. doi 10.1007/978-3-319-40157-7. http://www.springer.com/us/book/9783319401553

Nyitókép: © William Crochot / Wikimedia Commons /
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parapente_-_166.jpg

☐ alkalmazott matematika

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

Szerkesztő 2016. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A titkárnőprobléma

John D. Barrow *100 alapvető dolog, amiről nem tudtuk, hogy nem tudjuk* című könyvének mottója Neumann Jánostól származik: „Ha valaki nem hiszi, hogy a matematika egyszerű, az azért van, mert még nem jött rá, hogy milyen bonyolult az élet".

A problémák elsődleges okai a megoldások.

Sevareid-szabály

Régi probléma, hogyan válasszunk sok jelentkező közül, például ha egy igazgató mellé 500-an jelentkeznek titkárnőnek, vagy ha egy királynak feleséget kell választania országa összes hajadonja közül, vagy amikor egy egyetem csak a legjobb diákot akarja felvenni a sok jelentkező közül. Amikor nincs túl sok jelölt, mindegyikükkel el lehet beszélgetni, össze lehet őket hasonlítani, esetleg újra meg lehet hallgatni, akiről többet akarunk tudni, majd végül ki lehet választani a legalkalmasabbat. Ha viszont sok a jelentkező, ez a módszer gyakorlati akadályokba ütközhet. Ha véletlenszerűen választunk egyvalakit *N* ember közül, annak az esélye, hogy éppen ő a legjobb, mindössze 1/*N*, és ha *N* nagy, ez bizony nem túl sok – 100 vagy még több jelentkező esetén kevesebb, mint 1%. A legjobb jelölt kiválasztására az első módszer, amikor mindenkivel személyesen találkoztunk, időigényes volt, viszont megbízható, a véletlenszerű választás viszont gyors, de megbízhatatlan. Vajon van valamiféle „legjobb" módszer a kettő között, amelynek alkalmazásával elég jó eséllyel ki tudjuk választani a legjobb jelöltet anélkül, hogy aránytalanul sok időt emésztene fel a folyamat?

Van, méghozzá meglepően egyszerű és hatékony, mint látni fogjuk. Van tehát *N* jelentkezőnk egy állásra, akiket valamiféle véletlenszerű sorrendben fogunk elbírálni. Tegyük fel, hogy van egy módszerünk, amellyel egy-egy jelölt megismerése után el tudjuk dönteni, hogy ő milyen az eddig látott többihez képest, bár valójában mindig csak az a fontos, hogy tudjuk, ki volt a legjobb az adott pillanatig megismertek közül. Amikor egy jelöltet elbíráltunk, már nem hívjuk vissza. És csak akkor sikeres a módszerünk, ha megtaláljuk a legjobb jelöltet; az összes többi próbálkozásunk kudarcnak számít. Így amikor befejezzük a beszélgetést egy-egy jelentkezővel, csak annyit kell feljegyeznünk, hogy ki a legjobb az eddig megismertek közül (beleértve a legutóbbit is). Vajon az *N* jelölt közül hányat kell meghallgatnunk, hogy legjobb eséllyel válasszuk ki a legjobbat, és mi legyen a stratégiánk?

Stratégiánk a következő lesz. Az *N* jelölt közül *C*-vel elbeszélgetünk ($N > C$), és az lesz a befutó, aki a megmaradt jelöltek közül jobb mind a *C* jelöltnél. A nagy kérdés, hogy *C* mekkora legyen?

Tegyük fel, hogy három jelöltünk van: 1, 2 és 3, ahol 3 jobb 2-nél és 2 jobb 1-nél. Ekkor hat lehetséges meghallgatási sorrend képzelhető el:

123, 132, 213, 231, 312, 321

Ha az lenne a módszerünk, hogy mindig az elsőként meghallgatott jelentkezőt választjuk, akkor a legjobbat (a 3. jelöltet) a hat sorrend közül csak kettőben választanánk, azaz 2/6 = 1/3 valószínűséggel. Ha a az módszerünk, hogy az első jelentkező meghallgatása után azt választjuk, aki először mutatkozik nála jobbnak, akkor csak a második (132), harmadik (213) és negyedik (231) esetben találnánk meg a legjobb jelöltet, vagyis ennek esélye 3/6 = 1/2. Ha viszont az első kettő meghallgatása után választunk a maradékból, az csak az első (123) és a harmadik (213) esetben vezet jó eredményre, megint csak 1/3 valószínűséggel. Tehát amikor három jelentkező van, a megfelelő stratégia a legjobb kiválasztására, hogy egyet menni hagyunk, majd kiválasztjuk a következőt, aki nála jobb.

Ugyanezzel a gondolatmenettel végig lehet nézni, hogy mi a helyzet, amikor a jelentkezők száma (*N*) nagyobb 3-nál. 4 jelölt esetében 24 lehetséges sorrend képzelhető el. Ha ezt mind végiggondoljuk, kiderül, hogy még mindig az a legjobb esélyünk, ha az elsőtől elbúcsúzunk, és azt választjuk, aki először jobb nála; a siker valószínűsége[1] ekkor 11/24. Bármekkora *N*-re ki lehet számolni ezt az értéket, és érdekes megfigyelni, hogyan változik *C* értéke a stratégiánk alkalmazásakor.

Ahogy nő a jelöltek száma, stratégiánk, illetve annak eredménye egyre jobban közelít az optimálishoz. vegyük például azt az esetet, amikor 100 jelölt van. Az optimális stratégia:[2] meghallgatni az első 37-et, majd azt választani, aki a többiek közül először lesz jobb az első 37-nél, és a többiekkel nem foglalkozni. Ennek eredményeképpen mintegy 37,1% valószínűséggel választjuk a legalkalmasabb jelentkezőt – ez egész jó az 1%-hoz képest, ami a véletlenszerű kiválasztásnál adódik.[3]

Vajon alkalmazható-e az a stratégia a gyakorlatban? Persze szép és jó azt mondani, hogy ha meghirdetünk egy állást, meg kell hallgatnunk az összes jelentkezőt, de vajon ugyanez igaz a cégvezetők kiválasztásakor, amikor feleséget keresünk, vagy ki akarjuk választani az új szakkönyv témáját vagy a tökéletes lakóhelyet? Végül is nem tölthetjük egész életünket keresgéléssel. Vajon mikor kell abbahagyni a válogatást és választani? Vagy kevésbé életbevágó helyzetekben, amikor szállodát vagy vendéglőt keresünk, a legjobb ár/érték arányú nyaralás után kutatunk az interneten, vagy megpróbáljuk megtalálni azt a benzinkutat, ahol a legolcsóbb a benzin, hány lehetőséget vizsgáljunk meg, mielőtt döntenénk? Ezek mind szekvenciális kiválasztási problémák, csakúgy, mint a titkárnők kérdése, amihez megkerestük az optimális stratégiát. A gyakorlati tapasztalatok alapján valószínűnek látszik, hogy nem keresgélünk elég sokáig a végső döntés meghozása előtt. A pszichológiai nyomás vagy egyszerűen a türelmetlenség (akár a sajátunk, akár a másoké) miatt sokkal hamarabb döntést hozunk, mintha végignéznénk a lehetőségek kritikus hányadát, mintegy 37%-át.

John D. Barrow: 100 alapvető dolog, amiről nem tudtuk, hogy nem tudjuk (Akkord Kiadó, Budapest, 2013

A szerző a Cambridge-i Egyetemen folyó Millenniumi Matematika Projekt vezetője, matematikaprofesszor, a Royal Society tagja. Az Akkord Kiadónál korábban megjelentek tőle A semmi könyve, A végtelen könyve és az Univerzumok könyve.

---

[1] Ha az első vagy az utolsó jelöltet választjuk, annak 1/4 az esélye, ha 2 jelölt után választjuk a legjobbat, annak 5/12, ha viszont 1 után, annak 11/24; ez az optimális.

[2] Vegyük észre, hogy ha a legjobb jelölt az $(r + 1)$-edik a sorban, és az első r jelentkező meghallgatása után fogunk csak választani, akkor biztos, hogy a legjobbat kapjuk, de ez csak $1/N$ valószínűséggel következik be. Ha a legjobb jelölt az (r + 2)-edik, $1/N \times r/(r + 1)$ eséllyel választjuk ki (hiszen $r/(r + 1)$ az esélye annak, hogy az első r+1 jelölt közötti legjobb beleesik az első r-be; a nekünk rossz eset pont ennek komplemetere, amikoris az r+1-dik jelölt a legjobb az első r+1 közül, ezért őt kiválasztjuk, holott a ténylegesen legjobb jelölt csak az r+2-dik helyen jönne). Ha ezt a gondolatmenetet továbbvisszük a sorban később következő jelöltekre, azt kapjuk, hogy a sikerességünk esélye ezen mennyiségek összege, vagyis $P(N, r) = 1/N \times (1+r/(r+1)+r/(r+2)+ r/(r+3)+ r/(r+4)+r/(r+5)+\ldots+r/(N-1)) \approx 1/N \times (1+r \ln((N - 1)/r)$. Ez utóbbi mennyiség, amely felé a sor tart N növekedésével, maximális értékét akkor éri el, amikor $(N - 1)/r \approx e$, vagyis $e \approx (N - 1)/r \approx N/r$, ha N elég nagy. Így $P(N, r)$ maximuma $P \approx (r/N) \times \ln(N/r) \approx 1/e \approx 0{,}37$.

[3] Pontosabban, ha az első N/e jelentkező meghallgatása után választunk a következőkből, akkor annak esélye, hogy a legjobbat találjuk meg, N növekedésével közelít $1/e$ értékéhez, ahol $e \approx 2, 7182\ldots \approx 1/0{,}37$ állandó a természetes logaritmus alapszáma.

Érintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Lóczi Lajos 2016. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A Wolfram nyelv történetéről

Stephen Wolfram: An Elementary Introduction to the Wolfram Language

A Wolfram programozási nyelv rövid története

A Wolfram nyelv mindössze néhány éve kapott végleges nevet, noha fejlesztése még az elmúlt évezredben kezdődött el.

A felhasználók a nyelvvel először a *Mathematica* nevű programcsomagban találkozhattak [5]; ma úgy tekintünk e szoftverrendszerre, mint a Wolfram nyelv első fő implementációjára. E sorok írása előtt 28 évvel (és 2 nappal) jelent meg a *Mathematica* legelső változata, most hamarosan a 11-es változatnál járunk. A *Mathematica* felhasználói tábora jelenleg néhány milliósra tehető.

A Wolfram nyelv történetében a következő mérföldkövet a Wolfram|Alpha keresőszolgáltatás 2009-es beindítása jelentette [6]. A Wolfram|Alpha abban tér el a hagyományos internetes keresőktől, hogy folyamatosan karbantartott és frissített tudásbázisa segítségével olyan kérdések megválaszolására is képes, amelyhez általános értelemben vett számításokra van szükség (angolul ezt computational knowledge engine-nek, vagy answer engine-nek hívják). A Wolfram|Alpha áll például az Apple cég telefonjaiban megtalálható Siri beszédfelismerő szoftver mögött. A Wolfram|Alpha keresőmotorjának több tízmillió soros programkódja nagyrészt Wolfram nyelven íródott. 2009-ben ezt úgy fogalmaztuk meg, hogy a Wolfram|Alpha keresőmotorja a *Mathematica* rendszerre épül. Az elkövetkezendő hónapokban aztán fokozatosan lehetővé vált, hogy az internetkapcsolattal rendelkező felhasználó számítógépén futtatott *Mathematica* kód egyszerű kérdéseket intézhessen a Wolfram|Alpha tudásbázisához. Ma már e két óriási rendszer szimbiózisa elválaszthatatlan: a Wolfram|Alpha a keresésekhez a *Mathematica* számára kifejlesztett algoritmusokat (is) használja, míg a *Mathematica* működése közben szinte észrevétlenül merít a Wolfram|Alpha tudásanyagából. Ebből következik a Wolfram nyelv egyik kulcsfontosságú tulajdonsága: a Wolfram nyelv tudásalapú nyelv (knowledge-based language).

A nyelv elterjedését nagyban segíti a http://demonstrations.wolfram.com/ [7] weboldalon programkóddal együtt szabadon elérhető mintegy tízezer, Wolfram nyelven megírt példaprogram és interaktív alkalmazás, amelyek valamely tudományterületről (beleértve a művészeteket is) mutatnak be egy-egy érdekes modellt. Pozitív elbírálás esetén a weboldalon mi magunk is közzétehetjük igényesen megírt kódunkat.

A Wolfram nyelvvel a felhőben [8] is találkozhatunk. A 2016 januárja óta működő Wolfram Programming Lab oldalon [4] például ki-ki maga is megkezdheti a nyelvvel való ismerkedést: a böngészőnkből közvetlenül (és előfizetés nélkül) futtathatunk Wolfram nyelvű kódokat.

Ami a hardvert illeti, a Raspberry Pi − pár tízezer forintért kapható − miniszámítógépen alapértelmezésben elérhető a Wolfram nyelv. A Wolfram nyelvet egyébként folyamatosan készítik fel a Dolgok Internetével (Internet of Things, IoT) való „találkozásra”: a [9] adatbázisban gyűjtik össze azokat a készülékeket és eszközöket, amelyek az internetre kapcsolódva valamilyen adatot továbbítanak a felhőbe, és ezeket az adatokat a Wolfram nyelvvel feldolgozhatjuk. A Wolfram nyelv tehát a Dolgok Internetének egyik általános leíró nyelve lehet.

A Wolfram nyelv az elmúlt csaknem három évtizedben stabilnak és időtállónak bizonyult. A *Mathematica* korábbi változataiban íródott programok (az esetek legnagyobb részében) gond nélkül lefutnak az újabb *Mathematica*-változatok alatt is. Az idők során ugyanakkor a Wolfram nyelv képességei rohamosan bővültek. A nyelv jelenleg mintegy 5000 parancsot tartalmaz. Stephen Wolfram szerint saját maga is sokszor meglepődik a nyelv kifejezőerején: korábban elérhetetlennek tűnő dolgokat tudnak most sikerrel megvalósítani (gondoljunk például a Wolfram|Alpha-hoz kifejlesztett természetes nyelvi feldolgozás roppant bonyolult kérdéskörére).

A Wolfram nyelv legfontosabb tulajdonságainak összefoglalásaként elmondható, hogy a nyelv

- kis számú, jól megválasztott és egyszerű alapelvre épül;
- sokféle programozási stílust ötvöz (pl. procedurális, funkcionális, objektumorientált, szabályalapú);
- tudásalapú: (i) a nyelvben közvetlenül használható a *Mathematica* és a Wolfram|Alpha számára három évtized során kifejlesztett algoritmusok óriási gyűjteménye, valamint (ii) a nyelvben közvetlenül elérhető rengeteg, a valós világra vonatkozó aktuális információ (pl. fizikai-, kémiai-, földrajzi-, csillagászati- vagy tőzsdei adatbázisok);
- mindent szimbolikus kifejezésként reprezentál. A szimbolikus jelleg folytán egy f[x_]:= kezdetű függvénydefinícióban az x szimbólum jelenthet például egy lebegőpontos számot, egy komplex számot, egy integrált, egy gráfot, egy dokumentumot, egy internetről letöltött ábrát, egy programot, vagy akármit.

A Wolfram nyelv teljes dokumentációja [10] jelenleg nagyságrendileg 50 000 nyomtatott oldalon férne el (és akkor még nem is említettük a *Mathematica* szoftver alkalmazásairól szóló sok tucat komoly könyvet). A Wolfram nyelv megalkotója ezért szükségét látta annak, hogy egy rövid, bevezető jellegű könyvet adjon a nyelv iránt érdeklődők kezébe.

A könyv felépítése

Stephen Wolfram: An Elementary Introduction to the Wolfram Language c. könyve 2015. december 8-án jelent meg. E recenzió megírásához a 324 oldalas papíralapú könyv interneten szabadon elérhető angol nyelvű változatát vettük alapul [1].

- A mű 47 rövid, egymásra épülő fejezetből áll. Minden fejezet egy-egy új fogalomkörbe vezeti be az olvasót. Egy fejezet nem más, mint 10-20 egyszerű, az adott témakörbe illeszkedő példa felsorolása. Minden példa egy 1-2 soros angol nyelvű leírással kezdődik, amely után egy Wolfram nyelven megfogalmazott − egysorosnál ritkán hosszabb − lehetséges megoldás található. Az adott példát az inputhoz tartozó output megjelenítése zárja. A kidolgozott példák után minden fejezetben egy-két tucat feladat szerepel. Általában minden feladatra számos, egyenértékű megoldás adható Wolfram nyelven. Az illető fejezet végén néhány kitekintő megjegyzés, valamint a részletesebb dokumentációra való hivatkozás áll.

A könyv legvégén az előző 47 fejezetben felsorolt összes feladat megoldása megtalálható – a közölt megoldások döntő többségükben egysorosak, ezzel is kidomborítva a Wolfram nyelv kifejezőképességét.

Minden fejezet egy kattintással letölthető *Mathematica*-jegyzetfüzet formájában is − a példákat saját gépünkön interaktívan módosítva, illetve az inputokkal kedvünk szerint kísérletezve a nyelvtanulás hatékonyságát sokszorosára növelhetjük.

Kedvcsinálóul álljon itt a könyvben érintett témakörök felsorolása (zárójelben néha egy-egy önkényesen kiragadott példával).

- Elemi aritmetika (pl. mi történik nullával osztás után).
- Kifejezések és függvények (pl. véletlenszámok generálása).
- Listák és megjelenítésük (pl. grafikonok, oszlop- és tortadiagramok).
- Listaműveletek és listák létrehozása (pl. összesen hány nulla található egy szám 10-es számrendszerbeli alakjában).
- Színek és szövegstílusok (pl. egy száztagú, véletlen színekből álló lista létrehozása).
- Alapvető grafikai elemek (pl. egy sárgára festett gömb megjelenítése).
- Dolgok interaktív manipulálása (pl. csúszkák segítségével változtatható színű és oldalszámú sokszögek kirajzolása).
- Képek és elemi képszerkesztési eljárások (pl. éldetektálás).
- Karakterek és sztringek (pl. egy mondat szavai hosszának oszlopdiagramos ábrázolása).
- Zenei hangok és akkordok.
- Tömbök és mátrixok (pl. mátrixműveletek karakterek pixeles képével).
- Síkbeli és térbeli koordináták (pl. egymást metsző testek kirajzolása).
- Kapcsolat a Wolfram|Alpha-val (pl. a koffeinmolekula térbeli és forgatható szerkezetének megjelenítése).
- Mértékegységek és átváltások (ízelítő a nyelv által kezelt mintegy 10 ezer mértékegységből).
- Földrajzi, illetve a szomszédos égitestekre vonatkozó koordináták és térképek (pl. a Rómához 25 legközelebbi vulkán megjelenítése).
- Mennyiségek térben és időben (pl. a Los Angelesben és New Yorkban jelenleg mérhető hőmérséklet különbségének kiszámolása).
- Gráfok és hálózatok (pl. a Facebook-on található ismerőseink hálózatának megjelenítése).
- Gépi tanulás (szöveg- vagy képfelismerés).

> Tetszőleges pontosságú aritmetika. Különféle függvénymegadási módok. Tiszta függvények. Rekurziók és iterációk. Feltételes utasítások. Mintaillesztés. Kifejezések szimbolikus reprezentációja a nyelvben. Asszociációk. Természetes nyelvi feldolgozás. Saját kód elhelyezése a felhőben, majd a futtatása a böngészőnkben. Globális és lokális változók. Azonnali és késleltetett értékadások. Különféle függvénydefiníciók. A mintaillesztésről bővebben. Mintaillesztés sztringekkel. Adatok be- és kivitele. Kapcsolat különféle adatbázisokkal. Kódunk hatékonyságának növelése, hibakeresés a kódban, illetve hogyan tegyük "szebbé" a kódot.

A Wolfram nyelvről korábban már megjelent egy csupán 30 oldalas bevezető [3], azonban az az írás olyanoknak szól, akik már járatosak valamely más programozási nyelvben. Wolfram mostani könyve nem épít előzetes programozási ismeretekre. A tárgyalás a matematikai alapműveletektől indul, ám a könyv olvasása során meglehetősen komoly fogalmakig is eljutunk. Wolfram a könyvét, illetve a nyelvet egyaránt ajánlja felnőtteknek és 12 éves kortól gyerekeknek [2], kifejezetten akár első programozási nyelvként. Wolfram könyvének magyar fordítását tehát a hazai közönség is haszonnal forgathatná – legyen szó tapasztalt programozókról vagy a programozás alapjaival most ismerkedőkről.

Lóczi Lajos

Hivatkozások

[1] https://www.wolfram.com/language/elementary-introduction/

[2] http://blog.stephenwolfram.com/2015/12/i-wrote-a-book-to-teach-the-wolfram-language/

[3] https://www.wolfram.com/language/fast-introduction-for-programmers/

[4] https://www.wolfram.com/programming-lab/

[5] https://www.wolfram.com/mathematica/

[6] http://www.wolframalpha.com/

[7] http://demonstrations.wolfram.com/

[8] https://www.wolframcloud.com/

[9] http://devices.wolfram.com/

[10] http://reference.wolfram.com/language/

informatika

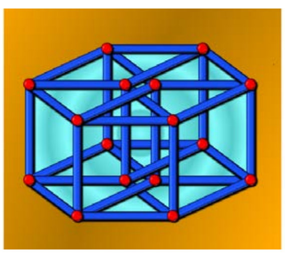
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **TUDOMÁNY** MENÜPONT TÖBBFÉLE, A MATEMATIKA TUDOMÁNYÁHOZ KAPCSOLÓDÓ FUNKCIÓT TAKAR..**A TUDOMÁNY- TÖRTÉNET ROVAT** CÉLJA ELSŐSORBAN MATEMATIKATÖRTÉNETI JELLEGŰ ÍRÁSOK KÖZLÉSE. **A MI IS ...? ROVAT** A MAI MATEMATIKA TUDOMÁNYÁRÓL KÍVÁN SZÓLNI A HOZZÁÉRTŐKNEK. (ROVATSZERKESZTŐK: *BESENYEI ÁDÁM; STIPSICZ ANDRÁS.*)



Stipsicz András

2016. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is ... egy egzotikus 4-dimenziós euklideszi tér?

A cikk megírásának ötletét a *Notices of the American Mathematical Society* 'What is...?' sorozatából merítette *Stipsicz András*, a *Mi is...?* rovat gazdája, az Érintő főszerkesztője, a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet tudományos tanácsadója. Akik még nem tudják, mi is egy egzotikus négydimenziós euklideszi tér, azoknak itt a lehetőség... (A képen egy 4-dimenziós kocka, https://commons.wikimedia.org/ Enzo Bono *Ipercubi* c. képéről)

Szabó Péter Gábor

2016. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Bolyai János Japánban

Bolyai János művének magyar fordítása, 65 évvel a latin nyelvű eredeti után, csak 1897-ben jelent meg Budapesten, miután olaszul, franciául, angolul már régen kiadták, és ismertették német nyelven is. Bármennyire meglepő, de Budapesten később jelent meg *A tér abszolút igaz tudománya* magyarul, mint *Tokióban* angolul. Bolyai János hatása Japánban a mai napig tetten érhető. Nem véletlen, hogy a világhálón a *Kiotói Egyetem Matematikai Kutatóintézetének* nyitó weboldalán Bolyai János 1820 körül született matematikatörténeti jelentőségű kéziratlapja látható *Parallelarum Theoriara* felirattal. (Fenti fényképünket is a www.kurims.kyoto-u.ac.jp képei között találtuk.)

Gerencsér László

2016. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Kálmán Rudolf és a Kálmán-szűrő

2016. július 2-án, életének 86. évében, a rákbetegséggel folytatott többéves küzdelme után elhunyt *Kálmán Rudolf*, a rendszertudomány matematikai alapjainak megalkotója. A *Kálmán-szűrő* kifejlesztése szorosan összefügg a lineáris rendszerek elméletében végzett úttörő jelentőségű munkájával, amelyet a villamos áramkörök vizsgálata inspirált.

Kollár János

2016. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is ... egy minimális modell?

A *Mi is...?* sorozat második tagja nem könnyű olvasmány. *Kollár János* 2007 márciusában a *Notices of the American Mathematical Society* What is...? rovatában megjelent itt következő írását *Stipsicz András* az Érintő számára lefordította. A cikk szerzője, Kollár János az ELTE-n végzett matematikus, a Princeton University (USA) professzora.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

Stipsicz András 2016. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is ... egy egzotikus 4-dimenziós euklideszi tér?

Egy X topologikus teret *sokaságnak* hívunk, ha lokálisan olyan mint egy euklideszi tér; pontosabban, ha X minden $x \in X$ pontjának van egy olyan U nyílt környezete, mely valamely $\mathbb{R}^n$-nel homeomorf (egy φ_U homeomorfizmus mentén). Az (U, φ_U) pár az $x \in X$ pont körül egy *térkép*. (Technikai okokból két további tulajdonságot (a topologikus tér T_2 és M_2 tulajdonságát) is bele szokás érteni a sokaság definíciójába.) Összefüggő X esetén a fenti n egész konstans, és ez lesz a sokaság dimenziója.

Ha két fenti U_1, U_2 környezet metszete nemüres, akkor a $(\varphi_{U_2}|_{U_1\cap U_2}) \circ (\varphi_{U_1}|_{U_1\cap U_2})^{-1}$ átmenő-függvény (mely most $\mathbb{R}^n$ két nyílt része közötti leképezés lesz) mutatja meg, hogy a két térképet hogyan kell a sokaságban "összepasszítani". Ahhoz azonban, hogy az analízis jól ismert fogalmait és módszereit (pl. a differenciálhatóságot) használni tudjuk, további feltételekre van szükségünk. Egy $f\colon X \to \mathbb{R}$ függvény az $x \in X$ pontban differenciálható, ha egy (U, φ_U) térképre az $f \circ \varphi_U^{-1}$ kompozíció (mint $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény) a $\varphi_U(x)$ pontban differenciálható. Sajnos ez a tulajdonság függhet az x-et tartalmazó térkép választásától. Ennek elkerülésére azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_{U_i}) \mid i \in I\}$ térkép-halmaz egy *differenciálható atlasz,* ha $\cup_{i\in I} U_i = X$ (vagyis a térképek lefedik X-et), és a halmazhoz tartozó térképek párjaira az átmenő-függvények (mint $\mathbb{R}^n$ nyílt részei közötti leképezések) differenciálhatóak. Ekkor az $\mathcal{A}$ halmazból vett térképeket használva függvények pontonkénti differenciálhatósága már probléma nélkül definiálható, és valójában az analízis sok eredménye átemelhető ebbe a topologikus kontextusba. Ugyanígy egy $F\colon X_1 \to X_2$ leképezés differenciálhatósága is egyszerűen definiálható, amennyiben a sokaságokon $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ differenciálható atlaszokat rögítünk. (Ezen atlaszok választását ezentúl beleértjük az X *differenciálható* sokaság definíciójába.) Egy $F\colon X_1 \to X_2$ leképezést diffeomorfizmusnak hívunk, ha homeomorfizmus, és mind F, mind F^{-1} differenciálhatóak.

Természetes kérdés az, hogy mely sokaságokra létezik differenciálható atlasz, és mikor egyértelmű ez. Ismert például, hogy legfeljebb 3 dimenziós sokaságokra mindig létezik differenciálható atlasz, és az diffeomorfizmus erejéig egyértelmű — ez a tétel fontos lépés például Perelmannak a Poincaré-sejtésre adott megoldásában. Magasabb dimenzióban ez az elv általában nem teljesül: vannak olyan sokaságok (már 4-dimenzióban is) melyeken nem létezik differenciálható atlasz, és rengeteg olyan van, amin több (sőt 4-dimenzióban végetelen sok) különböző is létezik. A továbbiakban csak euklideszi terekre (vagyis $\mathbb{R}^n$-ekre) szorítkozunk. Ezeken a tereken természetesen mindig van egy differenciálható atlasz: maga az egész tér (az identitás-függvénnyel). Az egyértelműség tekintetében a következő klasszikus eredmény ismert:

Tétel: *Ha az X differenciálható sokaság $\mathbb{R}^n$-nel homeomorf, és $n \neq 4$ teljesül, akkor X és $\mathbb{R}^n$ diffeomorfak. Vagyis minden olyan $\mathbb{R}^n$-en, amire $n \neq 4$ teljesül, (diffeomorfizmus erejéig) egyetlen differenciálható struktúra létezik.*

A 4-dimenziós eset azonban ettől jelentősen különbözik. Egy olyan differenciálható sokaságot, amely $\mathbb{R}^4$-gyel homeomorf, de nem diffeomorf, *egzotikus* $\mathbb{R}^4$-nek hívjuk.

Tétel: *Minden $r \in \mathbb{R}$ valós számhoz létezik egy olyan X_r sokaság, mely homeomorf $\mathbb{R}^4$-gyel, de X_r és X_s csak akkor diffeomorfak, ha $r = s$. Másképpen szólva, kontinuum sok különböző egzotikus $\mathbb{R}^4$ létezik.*

Nem könnyű egy ilyen sokaságot elkészíteni, vagy éppenséggel elképzelni. A továbbiakban egy konstrukciót adunk egy egzotikus $\mathbb{R}^4$-re. Ennek során egy bizonyos tulajdonságú, a 3-dimenziós terünkben lévő csomó létezését fogjuk feltételezni. Ez utóbbi létezésének bizonyítása messze nem egyszerű feladat; így az alább ismertetendő módszer nem igazán egyszerűbbé, inkább szemléletesebbé, "hihetőbbé" teszi egzotikus euklideszi terek létezését. A végső lépésben az egzotikusság bizonyításához (természetesen) a 4-dimenziós topológia csúcseredményeire lesz szükségünk.

Legyen tehát K egy csomó $\mathbb{R}^3$-ban (vagy, ekvivalens módon a 3-dimenziós S^3 gömbfelületben): vagyis vegyük az S^1 körvonalnak S^3-ba egy differenciálható beágyazását. Az S^3 gömbfelületet a $D^4 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid ||x|| \leq 1\}$ 4-dimenziós golyó peremeként tekintve a K csomónak két tulajdonságát definiálhatjuk: K *topologikus metszet* ha a $D^2 \times D^2$ szorzattérnek van olyan folytonos beágyazása D^4-be, hogy $\partial D^2 \times D^2$ a D^4 golyó S^3 peremébe képződik, és a $\partial D^2 \times \{0\}$ középkör épp K-t adja. A csomó *sima metszet*, ha a $D^2 \times D^2$-nek létezik fenti tulajdonságú *differenciálható* beágyazása. (Ez a két tulajdonság fogja tehát a csomók szintjén a folytonos és differenciálható közötti különbséget mérni — éppen azt a tulajdonságot, amitől egy tér egzotikus lesz majd.)

Egy olyan K csomó, mely topologikus metszet, de nem sima metszet, egy egzotikus $\mathbb{R}^4$-et ad a következő módon. Képzeljük el a 4-dimenziós S^4 gömbfelületet mint két 4-dimenziós D^4 golyó (D_1 és D_2) uniója, melyek az S^3 peremük mentén vannak összeragasztva. Ebben az S^3-ban van a fenti tulajdonságú K csomónk. Emlékezzünk még, hogy ha S^4-ből elhagyunk egy pontot, akkor épp az $\mathbb{R}^4$ Euklideszi teret kapjuk.

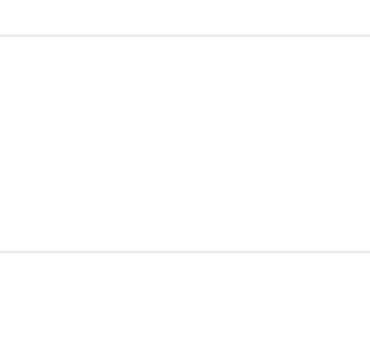
Legyen a folytonosan beágyazott $D^2 \times D^2$ (melyre $\partial D^2 \times \{0\}$ épp K-t adja) képe $U \subset D_1$. (Ennek létezése következik abból, hogy választott csomónk topologikus metszet.) Ilymódon az S^4 gömbfelület felbontható a $D_1 - \mathrm{int} U$ és a $D_2 \cup U$ részeinek uniójára, melyek egy 3-sokaság mentén vannak összeragasztva. (Ezt a 3-sokaságot a K menti 0-műtét adja meg, de ez a mostani konstrukció szempontjából lényegtelen.) Szemléletesen szólva, az $S^4 = D_1 \cup D_2$ felbontást úgy változtatjuk meg, hogy U-t áttesszük D_1-ből D_2-be.

A $D_2 \cup U$ peremes 4-sokaság valójában úgy keletkezik, hogy a 4-dimenziós golyóhoz egy ún. 4-dimenziós 2-fogantyút ragasztunk, így ennek a résznek természetesen adódik egy differenciálható struktúrája. Vegyük most a $D_1 - \mathrm{int} U$ részt (ami szintén egy kompakt 4-dimenziós peremes sokaság), és hagyjunk el belőle egy pontot. A kapott peremes, nem-kompkat 4-sokaság Freedman és Quinn egy nevezetes és mély tétele miatt ellátható egy differenciálható struktúrával. (Ebben a tételben a nem-kompaktság nagyon fontos — szemléletesen az történik, hogy a problémás pontokat el tudjuk küldeni a "végtelenbe", ami nem-kompakt esetben egy lehetőség, a kompakt esetben azonban nem. Ennek a heurisztikus gondolatnak szigorú matematikai tétellé formálása meghökkentően nehéz apparátust igényel.) Mivel egy 3-dimenziós sokaságon a differenciálható struktúra egyértelmű, a kapott két differenciálható sokaság ($D_2 \cup U$ és $(D_1 - \mathrm{int} U) - \{\mathrm{pont}\}$) egy differenciálható sokasággá — nevezzük R_K-nak — ragad össze.

Mivel topologikusan pusztán egy pontot hagytunk el S^4-ből, az összeragasztott sokaság homeomorf lesz $\mathbb{R}^4$-gyel. Azonban abból a tulajdonságból, hogy K nem sima metszet, az következik, hogy R_K nem diffeomorf $\mathbb{R}^4$-gyel. Valóban, ha R_K és $\mathbb{R}^4$ diffeomorfak, akkor R_K-hoz egy pontot adhatunk úgy, hogy S^4-et kapjuk, és ekkor az U rész képe egy sima metszet körlap lenne K számára, ami ellentmond a feltett tulajdonságnak.

Egy egzotikus $\mathbb{R}^4$ létezésének belátásához azonban szükségünk van egy megfelelő K csomóra: egy olyanra, ami simán nem metszet, de topologikusan az. Az alábbi rajzon bemutatott csomóra egyszerűen kiszámolható, hogy Alexander polinomja azonosan 1. (Mind egy csomó Alexander polinomja, mind az előbb említett számolás meglehetősen elemi módszereket igénylő egyszerű feladat.) Ebből Freedman egy (Fields medállal díjazott) mély eredménye szerint következik, hogy a csomó topologikus metszet. Ezzel szemben Donaldson (szintén Fields medállal díjazott) módszerét alkalmazva belátható, hogy a csomó nem sima metszet. (Ez utóbbi eredmény most már aránylag elemi eszközökkel is bebizonyítható — egy ilyen bizonyítás található meg Ozsváth, Szabó és a szerző *Grid homology for knots and links* című könyvében.)

Tehát a fenti módszert a rajzon látható csomóra alkalmazva egy egzotikus $\mathbb{R}^4$ adódik. Arra azonban fel szeretnénk hívni a figyelmet, hogy ennek az objektumnak (a létezésén kívül) nem sok tulajdonságát ismerjük. A fenti módszerben két olyan lépés is volt (az egyik Freedman tételén alapult, és U létezését garantálta, a másik Freedman és Quinn tétele volt, mely a nem-kompakt 4-sokaságon lévő differenciálható struktúrát adta), melyek messze nem konstruktívak.



☐ Mi is...?

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

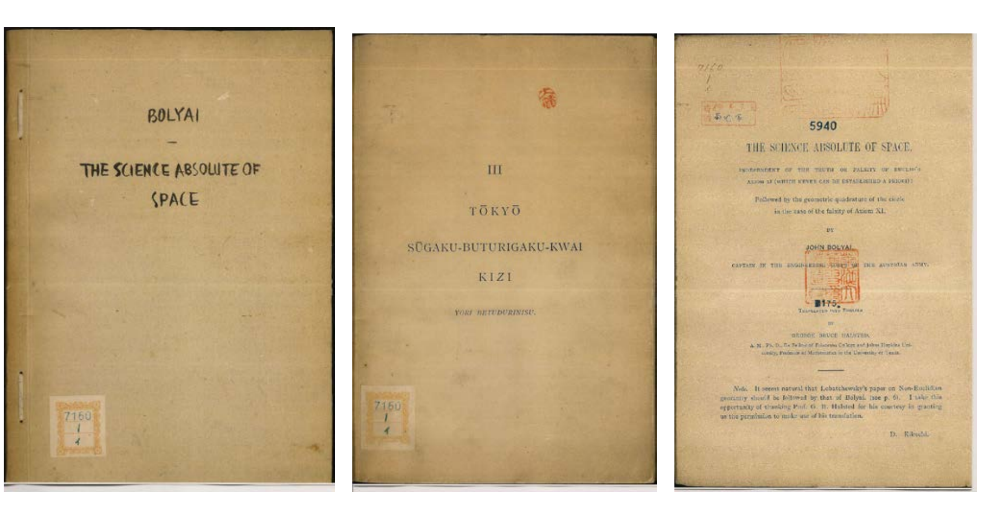
Szabó Péter Gábor 2016. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Bolyai János Japánban

Bolyai János (1802-1860) a magyar matematikatörténet legnagyobb alakja. Az első nem-euklideszi geometria kidolgozását édesapjának Bolyai Farkasnak (1775-1856) *Tentamen* c. latin nyelvű könyvének függelékében adta közre 1832-ben. Bolyai tértudománya, a *Scientia Spatii*, korszakalkotó munka volt, amely a kétezer éves ógörög eredetű párhuzamosok problémájára adott választ, kitágítva ezzel a térről addig kialakított egyeduralkodó euklideszi szemléletet. Az UNESCO világemlékezeti listájára is felvett mű a matematika történetének egyik legékesebb gyöngyszeme, pedig a maga korában szinte teljesen visszhang nélkül maradt. Bolyai János úgy halt meg, hogy életében az édesapján kívül senki mástól nem kapott nyilvános elismerést művéért. Utolsó útjára három polgári személy kísérte el a marosvásárhelyi református temetőbe és csak évekkel később a külföldi tudományos érdeklődés hatására kezdtek el a saját hazájában is felfigyelni rá. Olasz és francia tudósok hosszú és kitartó levelezéseinek árán sikerült elérni, hogy a Bolyai-kéziratok 1869 őszén a Marosvásárhelyi Kollégiumból Budapestre a Magyar Tudományos Akadémiára kerüljenek átvizsgálásra. Guillaume Jules Hoüel (1823-1886) a bordeaux-i egyetem professzora írta ekkoriban a Bolyai-ügy első hazai harcosának a temesvári építész Schmidt Ferencnek (1827-1901): „*Határozottan kezdem hinni, hogy a geográfusok tévedtek, amikor Erdélyt Európába rajzolták; inkább Afrikába, vagy Bochara közepén van és egy Livingstone-ra vagy Vámbéryre lenne szükség, hogy fölfedezze. Bizonyos, hogy ha a Bolyai-iratok Japánban vagy Ausztráliában lettek volna, akkor Ön már régen megkapta volna azokat.*”[1] Bolyai János művének magyar fordítása, 65 évvel a latin nyelvű eredeti után, csak 1897-ben jelent meg Budapesten, miután olaszul, franciául, angolul már régen kiadták és ismertették német nyelven is. Bármennyire is meglepő, de Budapesten később jelent meg *A tér abszolút igaz tudománya* magyarul, mint Tokióban angolul. A Bolyai-kutatás szakirodalmában és a japán-magyar kulturális kapcsolatok történetének irodalmában azonban ennek részleteiről eddig még nem jelent meg tanulmány.

Bolyai János műve Japánban

A Tokiói Egyetem Történettudományi Intézetében őrzik az egyetem egykori rektorának Kikuchi Dairoku (1855-1917) japán matematikus professzornak a hagyatékát. A Kikuchi-gyűjteményben található egy angol nyelvű különlenyomat (No. 175), amely Bolyai János főművének tokiói kiadásakor készült, amely a Tokiói Matematikai és Fizikai Társulat *Tokyo Sugaku-Butsurigaku Kwai Kiji* (Vol. 5, No. 3, 1894, 94-135) kiadványában jelent meg és amelyhez a címlapon Kikuchi írt kísérő szavakat. A publikáció tartalmazza a texasi matematikus George Bruce Halsted (1853-1922) fordítói előszavát, valamint Bolyai Farkasnak a *Kurzer Grundriss*ban 1851-ben közölt azon észrevételeit is, amelyeket fiának és Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij[2] (1792-1856) művének összehasonlításakor tett. Halsted nem sajnálta az időt, hogy lefordítsa Bolyai művét, hiszen azt írta róla, hogy „*a halhatatlan János a világtörténetben a lángésznek legtökéletesebb megtestesülése*”. Tértudományáról pedig úgy vélekedett, hogy „*ez a legrendkívülibb két tucat oldal a gondolkodás történetében*”. 1896 nyarán még Marosvásárhelyre is ellátogatott. Kikuchi szintén hamar felfedezte Bolyai művének rendkívüli értékét, neki köszönhetjük, hogy a mű Japánban is már nagyon korán megjelenhetett.

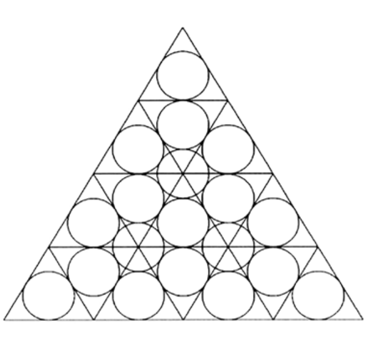


Bolyai János műve tokiói kiadásának különlenyomatából[3]

Bolyai művének közlése nem maradt hatástalan Japánban. Nyissuk ki a híres japán matematikatörténész Mikami Yoshio (1875-1950) 1913-ban megjelent monográfiáját![4] Kína és Japán korai matematikatörténetéről szól, de mégis az első matematikus, akinek nevével találkozunk benne: Bolyai János! Halsted írta ugyanis az előszót a könyvhöz, amiben rögtön Bolyai és Lobacsevszkij műveinek kiadását is megemlítette.

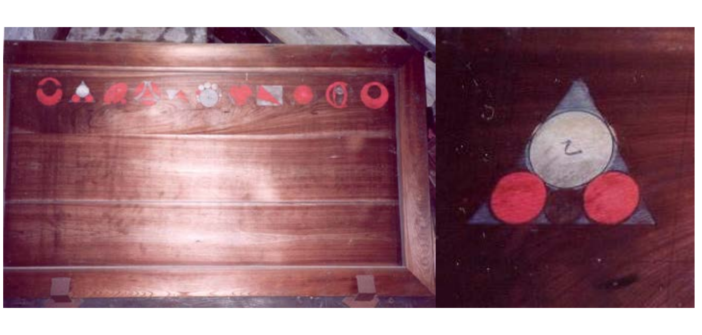
A Tentamen körpakolási feladata és a japán szangaku problémák

Bolyai János mellett Bolyai Farkas matematikai munkásságának is vannak kapcsolatai, pontosabban szólva *párhuzamai* a tradícionális japán matematikával, még pedig az ún. szangaku problémákkal. A *Tentamen*ben Bolyai Farkas egy nagyon érdekes körpakolási feladatot is tárgyalt, amelynek motivációját csak nemrég sikerült felfedeznünk. Vegyünk egy szabályos háromszöget és osszuk fel az oldalait négy egyenlő részre. Húzzunk az osztópontokon keresztül párhuzamosokat a háromszög oldalaival, majd a keletkezett 16 kis háromszögbe rajzoljuk be a beírható körüket. Ezt követően még további 3 az előzőekkel megegyező sugarú kört tehetünk azokra a helyekre, amelyeket 6 másik kör vesz körül, így összesen 19 egybevágó kört rajzoltunk a háromszögbe. Bolyai azt a kérdést vizsgálja, hogy mekkora lesz a körökkel le nem fedett terület a háromszögben, illetve mi történik a körpakolás sűrűségével, ha a háromszög oldalain az osztópontok számát a végtelenhez tartatjuk. Bolyai Farkas kollégiumi előadásain résztvevő diákok jegyzeteinek tanulmányozása alapján sikerült kiderítenünk, hogy Bolyai indíttatása az ilyen problémák vizsgálatához gyakorlati jellegű volt: meg akarta tudni, hogyan lehet egy területet úgy beültetni fákkal, hogy az minél sűrűbb legyen, de a fák egymás életterét ne vegyék el. A probléma felvetése és tárgyalása Bolyai Farkas saját leleménye, de mégis rokonságban van a japán szangaku problémákkal is.



Bolyai Farkas körpakolási feladatának ábrája a Tentamenből

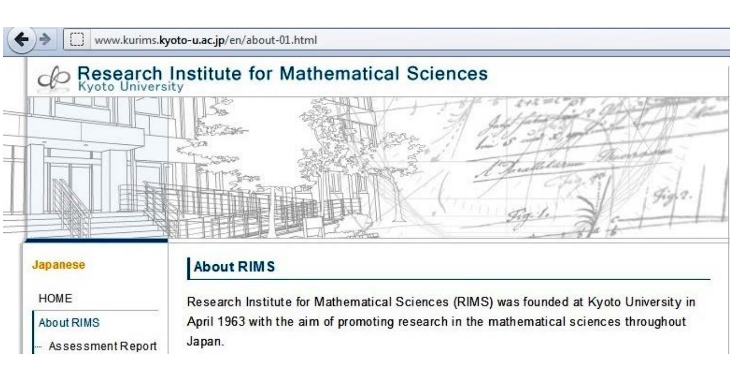
Hasonló szép körpakolási feladatokkal találkozhatunk a japán szangaku táblákon. Ezek olyan fatáblák, amelyeket Japánban sintoista szentélyekben vagy buddhista templomokban helyeztek el és matematikai feladatokat, főleg érdekes geometriai problémákat tartalmaznak. Bolyai Farkas körpakolási feladatához hasonlóan számos olyan fatáblát ismerünk, amelyen izgalmas körelhelyezéseket lehet tanulmányozni. Szintén nagyon érdekes, hogy az ilyen körpakolási problémák Japánban még kőtömbbe vésve is találhatók.



1879-ben készült szangaku Kiotóból, amelyen körpakolási feladat látható szabályos háromszögben[5]

Bolyai János Japánban

Bolyai János hatása Japánban a mai napig tetten érhető. Nem véletlen, hogy a világhálón a Kiotói Egyetem Matematikai Kutatóintézetének nyitó weboldalán[6] Bolyai János 1820 körül született híres kéziratlapja látható. Matematikatörténeti jelentőségű ez a *Parallelarum Theoriara* feliratú lap, hiszen ábráiról már leolvashatók az új geometria alapgondolatai. Amikor Bolyai János ezeket rajzolta még csak 17-18 éves volt, a bécsi Hadmérnöki Akadémián akkor lépett a 6. osztályba. Ezek az ábrái a mechanika jegyzetfüzetében találhatók. Néhány évre rá, 1823. november 3-án írta aztán édesapjának a híres temesvári levelét, benne a világhírű sorral: *Semmiből egy új, más világot teremtettem*.[7]

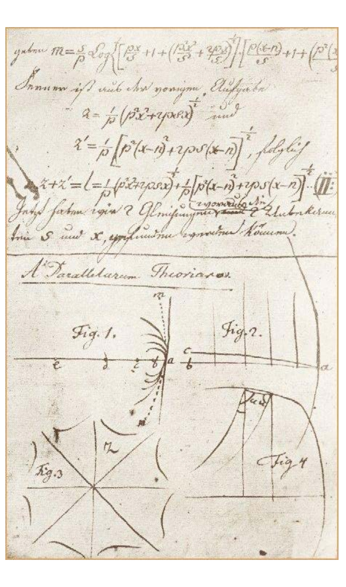


www.kurims.kyoto-u.ac.jp/en/about-01.html

Research Institute for Mathematical Sciences
Kyoto University

About RIMS

Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS) was founded at Kyoto University in April 1963 with the aim of promoting research in the mathematical sciences throughout Japan.


Parallelarum Theoriara
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3
Fig. 4

A Kiotói Egyetem Matematikai Kutatóintézetének nyitóoldala a világhálón, Bolyai János kéziratával

Ahogyan több mint egy évszázaddal ezelőtt Halsted is elzarándokolt Marosvásárhelyre, úgy most is érkeznek – még Japánból is – látogatók, akik kifejezetten a Bolyaiak miatt jönnek el Erdélybe. Legutóbb a jeles csíkszeredai Bolyai-kutató, Oláh-Gál Róbert számolt be egy ilyen látogatásról.[8] Koichi Ohita japán fizikus professzor a feleségével keresett fel több Bolyai-emlékhelyet, mivel készülő könyvének Bolyai Jánosról szóló fejezetének írásához eredetiben szerette volna azokat látni. Domáldon, Bolyai János édesanyjának kopjafáját is megnézte. A benyomásait a könyvéből tudhatjuk majd meg, mindenesetre annyit már kijelentett, hogy úgy találja *a japán és a magyar ember lélekben testvér*. Bízunk benne, hogy ez a látásmód szintén hozzásegíthet bennünket ahhoz, hogy a két ország között minél több további együttműködés születhessen a jövőben, nemcsak a geometria, de a tudomány és a kultúra más egyéb területein is. A matematikában mindenesetre Bolyai János volt az első, aki közelebb hozta egymáshoz a japán és a magyar nemzetet.[9]

Magyar és japán kutatók Bolyai János szobránál

(Kása Zoltán, Oláh-Gál Róbert, Koichi Ohita és felesége a marosvásárhelyi Sapientia egyetemen)

Szabó Péter Gábor

Szabó Péter Gábor a Szegedi Tudományegyetem Informatikai Intézetének adjunktusa. Fő kutatási témái a magyarországi matematika és informatika története, a nemlineáris programozás, valamint a körpakolások és fedések. e-mail: pszabo@inf.u-szeged.hu

---

[1] Weszely Tibor, *Bolyai János. Az első 200 év*, Vince Kiadó, Budapest, 2002.

[2] Lobacsevszkij orosz matematikus Bolyai Jánostól függetlenül dolgozta ki az ún. hiperbolikus geometriát, amely Bolyai ún. abszolút geometriájának speciális esete. A hiperbolikus geometriát így Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometriának is hívjuk. Kikuchi szintén leközölte Lobacsevszkij művét az említett japán folyóiratban, Halsted angol nyelvű fordításában.

[3] A különlenyomat 44 oldalas teljes másolatának elküldéséért a Tokióban élő Mizuno Mitsukonak tartozom köszönettel, aki egyébként Kőnig Dénes gráfelméleti munkásságáról írt Franciaországban doktori disszertációt.

[4] Mikami, Yoshio: *The Development of Mathematics in China and Japan*, 1913.

[5] A két képet Tarnai Tibor (Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem) készítette a kiotói Kitano Tenman-gu sintoista templomban, akinek ezúton köszönöm a felvételei közlésének jogát. Ennek a szangakunak az egyik érdekessége, hogy itt minden geometriai feladat más és más embertől származik.

[6] www.kurims.kyoto-u.ac.jp

[7] Babits Mihály Bolyai-szonettjének mottója is ez, amely valószínűleg a legsikerültebb szépirodalmi alkotás, amely Bolyai Jánosról szól. A versnek van japán nyelvű fordítása is, amely Goto Fumito és Hirayama Kazuko műve. Megtalálható a Toró Tibor: *Bolyai János temesvári „új, más világa” (1823. november 3.) emlékére*, Magister Kiadó, Apáczai Csere János Pedagógusok Háza, Csíkszereda, 2003 kötetben.

[8] Oláh-Gál Róbert: *Japán professzor a Bolyaiak bűvkörében*, e-Népújság, 2011. szeptember 23. Ezúton köszönöm Oláh-Gál Róbertnek az itt szereplő felvétel közlésének lehetőségét.

[9] Bolyai János 14.000 oldalas kéziratos hagyatékának egyik oldalán maga is azt írta, hogy szeretne japánul tanulni:„*miután egy néhány közelebbről érdekesebb nyölvvel némileg, meglehetősen ismeretes vagyok (magyar, német, latin, frank, olasz, román), még más nyölvet akarok tanulni, egyik különösön a sinai és japáni lenne*”.

Bolyai matematikatörténet

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Gerencsér László 2016. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Kálmán Rudolf és a Kálmán-szűrő

Kálmán Rudolf emlékére

2016. július 2-án, életének 86. évében, a rákbetegséggel folytatott többéves küzdelme után elhunyt Kálmán Rudolf, a rendszertudomány matematikai alapjainak megalkotója, aki a legmagasabb amerikai kitüntetések és nemzetközi elismerések mellett is büszke volt magyar akadémiai tiszteleti tagságára, valamint az MTA SZTAKI-val való kapcsolatára, ahol haláláig szobája volt.

Kálmán a második világháború elől családjával gyerekként az Egyesült Államokba menekült, és ott telepedett le, így ott tanulhatott az akkori matematikai-műszaki világ nyugati úttörői között. 1953-ban végzett az MIT-n, majd a Stanfordi és a Floridai Egyetemeken tanított. 1973 óta a Svájci Szövetségi Műszaki Főiskola professzora volt.

A navigációs rendszerek matematikai tervezésének fejlesztése során dolgozta ki a ma már a nevét viselő Kálmán-szűrőt, amelyet 1963-ban az ember nélküli amerikai Hold-szondánál alkalmazták először, és azóta is az űreszközök irányításának általánosan használt eleme. Napjainkban használatos a meteorológiai előrejelzések, a GPS, a célkövető radarok, és közgazdasági idősorok elemzésénél is.

1985-ben elsőként kapta meg a Kyoto Díjat. 2008-ban megkapta az amerikai mérnöki akadémia Charles Stark Draper-díját, amelyet mérnöki Nobel-díjként tartanak számon. 2009-ben Barack Obama amerikai elnöktől vehette át az Egyesült Államok legfontosabb tudományos elismerését, a Nemzeti Tudományos Érmet.

A Kálmán-szűrő alapgondolata

A Kálmán-szűrő komplex, zajos (sztochasztikus) rendszerek belső állapotainak a becslésére ad hatékony, valós időben alkalmazható eljárást külső, mért, zajos jelek alapján. A probléma maga a telekommunikációban már a II. világháború idején megfogalmazódott, de az akkor született eredmények integrálegyenletek megoldását kívánták meg, emiatt alkalmazásuk nehézkes.

A Kálmán-szűrő kifejlesztése szorosan összefügg Kálmán Rudolfnak a lineáris rendszerek elméletében végzett úttörő jelentőségű munkájával, amelyet a villamos áramkörök vizsgálata inspirált. Az elmélet kiindulópontja az az egyszerű felismerés, hogy az RLC áramkörök dinamikája leírható egy lineáris rendszerrel az alábbi módon:

{jatex}\dot{x}_{t}=Ax_{t}+Bu_{t}{/jatex}

{jatex}y_{t}=Cx_{t},{/jatex}

ahol az {jatex}x_t{/jatex} vektor a rendszer állapotváltozója, az {jatex}u_t{/jatex} vektor a rendszer bemenete, az {jatex}y_t{/jatex} vektor pedig a rendszer kimenete, {jatex}A,B,C{/jatex} pedig alkalmas méretű mátrixok. A fenti modellben {jatex}t{/jatex} folytonos időt, {jatex}{\dot x}_t{/jatex} pedig az idő szerinti deriváltat jelöli. Kézenfekvő módosítással a fenti modell diszkrét idejű változata is könnyen felírható.

Kálmán alapvető felismerése volt, hogy a lineáris rendszerek elmélete véletlen (sztochasztikus) folyamatok modellezésében addig nem ismert új utakat nyit a szűrési probléma megoldására. Nevezetesen, tekintsük a fenti modell sztochasztikus, diszkrét idejű változatát:

{jatex}x_{n+1}=Ax_{n}+u_{n},{/jatex}

{jatex}y_{n}=Cx_{n}+v_{n},{/jatex}

minden egész {jatex}n{/jatex}-re, ahol az {jatex}(u_n, v_n){/jatex} egy alkalmas dimenziójú, {jatex}0{/jatex}-várható értékű ortogonális folyamat, vagyis pl. {jatex}{\rm E} u_n u^T_m = 0{/jatex} ha {jatex}n \neq m,{/jatex} egyébként {jatex}{\rm E} u_n u^T_n = \Sigma = {\rm const.}{/jatex}

A (prediktív) szűrési probléma ekkor matematikailag így fogalmazható meg: keressük az {jatex} x_{n+1}{/jatex} állapot legkisebb négyzetes becslését az {jatex}y_n ,y_{n-1},...{/jatex} mért értékek birtokában. Ezt jelöljük {jatex}{\hat x}_{n+1}{/jatex}-gyel. Kálmán zseniális észrevétele az volt, hogy az általános szűrési problémát a fenti feladatosztályra megszorítva {jatex}{\hat x}_{n+1}{/jatex} eleget tesz az

$$\hat{x}_{n+1} = A\hat{x}_n + K\nu_n,$$

$$y_n = Cx_n + \nu_n$$

állapottéregyenletnek, ahol az állapotegyenletben és a megfigyelésben egy közös {jatex}\nu_n{/jatex} folyamat jelenik meg, ezt innovációs folyamatnak hívjuk. A {jatex}K{/jatex} mátrix angolul és magyarul az ún. Kalman-gain. A fenti egyenlet egyszerű átrendezésével kapjuk az {jatex}{\hat x}_{n+1}{/jatex} keresett értékét, éspedig rekurzív alakban:

$$\hat{x}_{n+1} = (A - KC)\hat{x}_n + Ky_n.$$

A {jatex}K{/jatex} mátrix meghatározása nem triviális feladat, ehhez többek között meg kell oldani egy mátrix-egyenletet, egy ún. algebrai Riccati-egyenletet, amelyben az ismeretlen mátrix másodfokú függvényei is szerepelnek. A fenti témakör legteljesebb és legmodernebb kifejtését az alábbi könyv tartalmazza:

Lindquist, A. and Picci,G., Linear Stochastic Systems: A Geometric Approach to Modeling, Estimation and Identification. Springer, 2015.

Gerencsér László, MTA SZTAKI

Megjegyzés: Az első rész megemlékezése az MTI által közzétett hír szerkesztett változata.

alkalmazott matematika matematikatörténet

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Kollár János 2016. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is ... egy minimális modell?

Az M kompakt komplex sokaság nagyjából akkor egy minimális modell, ha M egy "optimális tartománya" az M-en definiált meromorf függvényeknek. Ahhoz, hogy megmutassuk, mit is értünk "optimális tartomány" alatt, vegyünk egy hasonló példát, a $\mathbb{C}^2$-n értelmezett holomorf függvények elméletét.

Hartogs tétele szerint minden, az $r_1^2 < |x|^2 + |y|^2 < r_2^2$ gömbhéjon értelmezett holomorf függvény kiterjed az $|x|^2 + |y|^2 < r_2^2$ golyóra. Következésképp nincs túl sok értelme a 2-dimenziós gömbhéjakon holomorf függvények elméletét tanulmányozni. Ezzel ellentétben, a nyílt golyó optimális tartomány a függvényelmélet szempontjából.

Az ilyen optimális tartományok meghatározása vezet el minket a Stein sokaságok fogalmához. Ezek olyan U komplex sokaságok, melyek a következő két tulajdonsággal bírnak:

Pontok elválaszthatósága: Bármely két $p \neq q \in U$ különböző pontra van egy olyan f holomorf függvény U-n, melyre $f(p) \neq f(q)$ teljesül.

A tartomány maximalitása: Minden T, U-t nyílt részhalmazként tartalmazó topologikus térre, és minden $r \in \partial U$ határpontra van olyan f, U-n értelmezett holomorf függvény, melyre $\lim_{p\to r} f(p)$ határérték nem létezik.

A minimális modell fogalma akkor merül fel, amikor kompakt komplex sokaságokra teszünk fel hasonló kérdéseket. A maximum-elv szerint egy kompakt komplex sokaságon minden holomorf függvény konstans; így tehát a globális holomorf függvények elmélete nem igazán érdekes. Másfelől viszont egy kompakt komplex sokaságon rengeteg érdekes meromorf függvény létezhet; ezek olyan függvények, melyek lokálisan két holomorf függvény hányadosaként állíthatók elő. Egy pontban tehát egy meromorf függvény értéke lehet véges, végtelen, vagy nem-definiált. Például az $\frac{x}{y}$ hányados az origóban nem-definiált, és minden olyan $(x, 0)$ pontban, melyre $x \neq 0$, az értéke ∞. Azon pontok halmaza, melyekben f nem-definiált, komplex 2 kodimenziós (vagy nagyritkán üres). Ez megnehezíti annak megértését, hogy mi történik legalább 2 kodimenzióban. Meromorf függvényekkel való munkánk vezérlőelve tehát: ügyeljünk az 1 kodimenzióra, és reménykedjünk, hogy a magasabb kodimenziók nem okoznak majd gondot.

Az M sokaságon lévő meromorf függvények egy $\mathbb{C}(M)$ testet alkotnak, melyet M függvénytestjének nevezünk. Stein tartományok példáját követve tehetjük fel tehát a következő kérdést: Mennyire szoros az M és $\mathbb{C}(M)$ közötti kapcsolat?

Egy dimenzióban, vagyis amikor M egy kompakt Riemann-felület, ez a megfeleltetés teljes: M és $\mathbb{C}(M)$ kölcsönösen meghatározzák egymást.

Magasabb dimenzióban a helyzet ennél bonyolultabb, kezdjük tehát az első feltétellel (közben figyelve a nem-definiált értékekre).

Pontok elválaszthatósága: Bármely két különböző $p \neq q \in M$ pontra és $R \subset M$ véges halmazra létezik M-en olyan f meromorf függvény, melyre $f(p) \neq f(q)$ és f az R halmaz minden pontjában definiált. Chevalley, Chow és Kleiman munkái alapján egy ilyen tulajdonsággal rendelkező M szükségképp algebrai. Ez azt jelenti, hogy M beágyazható valamely $\mathbb{CP}^N$ komplex projektív térbe úgy, hogy a beágyazás képe polinomok közös zérushelyeként definiálható, és az M-en definiált meromorf függvények racionálisak, vagyis globálisan előállnak polinomok hányadosaiként.

Az algebrai esetben az M és $\mathbb{C}(M)$ közötti kapcsolat meglehetősen erős. Tegyük fel, hogy $M_1 \subset \mathbb{CP}^r$, melyen a homogén koordinátákat $(x_0 : \ldots : x_r)$ jelöli, míg $M_2 \subset \mathbb{CP}^s$, ahol a homogén koordinátákat $(y_0 : \ldots : y_s)$ adják, valamint legyen $\psi\colon \mathbb{C}(M_1) \to \mathbb{C}(M_2)$ egy adott izomorfizmus. Ekkor M_2-n léteznek olyan $\phi_0, \ldots, \phi_r$ racionális függvények, hogy az $(y_0 : \ldots : y_s) \mapsto (\phi_0 : \ldots : \phi_r)$ hozzárendelés egy olyan $\Phi\colon M_2 \dashrightarrow M_1$ leképezést ad, amely ψ-t indukálja a függvények visszahúzásával. Hasonló módon, a fenti receptet a ψ^{-1} függvényre alkalmazva a Φ^{-1} inverz leképezést kapjuk. Az ilyen invertálható $\Phi\colon M_1 \dashrightarrow M_2$ racionális leképezéseket *biracionális* leképezéseknek hívjuk.

Általában egy inverzzel rendelkező leképezés izomorfizmus, de ebben az esetben ez az elv nem érvényesül, hiszen sem Φ sem Φ^{-1} nincs mindenhol definiálva. Egy tipikus példát kaphatunk a következő módon. Legyen $Q^2 \subset \mathbb{CP}^3$ az $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ egyenlettel megadott másodfokú felület. (Gondolhatunk rá úgy is, mint a komplexifikált gömbre.) Legyen

$$\pi\colon (x : y : z : t) \dashrightarrow (x : y : t - z)$$

a $(0 : 0 : 1 : 1)$ északi sarkból, a $(z = 0)$ egyenlítői síkra való vetítés. Ennek π^{-1} inverze az

$$(x : y : t) \dashrightarrow (2xt : 2yt : x^2 + y^2 - t^2 : x^2 + y^2 + t^2)$$

formulával adható meg. Ezek a leképezések azt mutatják, hogy a Q^2-n és a $\mathbb{CP}^2$-n levő meromorf függvények elmélete azonos. Másrészt viszont Q^2 és $\mathbb{CP}^2$ meglehetősen különböző sokaságok. Például a π leképezés az $(s : \pm\sqrt{-1}s : 1 : 1)$ egyeneseket az $(1 : \pm\sqrt{-1} : 0)$ pontokra ejti össze, míg a π^{-1} inverz a $(t = 0)$ végtelen távoli egyenest ejti össze a $(0 : 0 : 1 : 1)$ pontra. Következésképp sem Q^2 sem $\mathbb{CP}^2$ nem egyszerűbb mint a másik.

Egy $\Phi\colon M_1 \dashrightarrow M_2$ biracionális leképezésről akkor mondjuk, hogy egy $D \subset M_1$ 1 kodimenziós részhalmazt összeejt, ha $\Phi(D) \subset M_2$ legalább 2 kodimenziós. Φ egy kontrakció, ha ő maga összeejt valamilyen 1 kodimenziós részhalmazt, de Φ^{-1} nem ejt össze semmilyen 1 kodimenziósat.

Kontrakciókra legegyszerűbb példák a lefújások. Legyen $Z \subset M$ egy d kodimenziós részsokaság, $d \geq 2$, és legyen E_Z az összes Z-hez normális irány. Minden $p \in Z$ esetén a p-beli normális irányok egy $\mathbb{CP}^{d-1}$-et alkotnak. Ilymódon a $\pi_Z\colon E_Z \to Z$ projekció egy $\mathbb{CP}^{d-1}$-fibrumú nyaláb, és így $\dim E_Z = \dim M - 1$. Belátható, hogy a $B_Z M = E_Z \cup (M \setminus Z)$ tér természetes módon egy kompakt komplex sokaság, melyet $Z \subset M$ *felfújtjának* nevezünk. E_Z-nek Z-re való projekciója és $M \setminus Z$ identitás-leképezése egy $\pi\colon B_Z M \to M$ leképezéssé ragad össze, amit *lefújásnak* hívunk. Ez a leképezés az E_Z totális terű $\mathbb{CP}^{d-1}$-nyalábot Z-re ejti össze. Vegyük észre, hogy $\pi^{-1}(Z) = E_Z$ 1 kodimenziós, következésképp π egy kontrakció. Első közelítésben gondolhatunk úgy kontrakciókra, mint olyan leképezésekre, melyek lefújások kompozícióiként állnak elő.

M-et egymás után többször is felfújva egyre bonyolultabb olyan sokaságokat állíthatunk elő, melyeknek ugyanaz a függvénytestje. Így tehát az azonos függvénytestű sokaságok között maximális nem létezik, de kereshetünk minimálisat.

A tartomány minimalitása: M egy *minimális modell* ha minden $\Phi\colon M_1 \dashrightarrow M$ biracionális leképezés vagy kontrakció vagy egy legalább 2 kodimenziós részen kívül izomorfizmus. Ekkor azt is mondjuk, hogy M minimális modellje minden ilyen M_1-nek.

Az első esetben (amikor tehát Φ egy kontrakció) az M sokaság, legalábbis 1 kodimenzióban, egyszerűbb mint M_1. A második esetben M nagyjából ugyanannyira bonyolult mint M_1.

A $\pi\colon Q^2 \dashrightarrow \mathbb{CP}^2$ leképezés azt mutatja, hogy sem Q^2 sem $\mathbb{CP}^2$ nem minimális modell. Valójában egy olyan sokaságnak, mely biracionális $\mathbb{CP}^1 \times Y$-nal, nincs minimális modellje. Még általánosabban, kizárunk minden olyan X n-sokaságot, mely *vonalazott* (angolul *uniruled*), vagyis amelyikhez van egy olyan Y $(n-1)$-sokaság és egy $\mathbb{CP}^1 \times Y \dashrightarrow X$ meromorf leképezés melynek képe sűrű. Ezen sokaságok tanulmányozására más módszereink vannak, lásd [2].

1901-ben Castelnuovo és Enriques belátták, hogy minden olyan S sima, kompakt, komplex 2-dimenziós algebrai sokaságnak, mely nem vonalazott, létezik egy egyértelmű $S^{\min}$ minimális modellje. Az elmúlt 25 évben számos algebrai geométer próbálta ezt az eredményt magasabb dimenziós sokaságokra általánosítani.

Sejtés: (Mori és Reid minimális modell sejtése). *Legyen M egy olyan kompakt, sima, algebrai n-dimenziós komplex sokaság, mely nem vonalazott. Ekkor*

1. *M-nek van egy $M^{\min}$ minimális modellje, és*
2. *$M^{\min}$ minimális modellen van egy olyan Kähler metrika, melynek Ricci görbülete ≤ 0.*

Két fontos dologra fel kell hívjuk a figyelmet. Elsősorban, meg kell engednünk, hogy $M^{\min}$ valamilyen enyhe (úgynevezett terminális) szingularitásokkal rendelkezhessen. Az algebrai geométerek megtanultak ezekkel a szingularitásokkal együttélni, noha ezek differenciálgeometriáját még kevéssé értjük. Másodsorban, a minimális modell nem egyértelmű, viszont léteznek biracionális leképezések különböző minimális modellek között, melyek legalább 2 kodimenziós részhalmazokon kívül izomorfizmusok. A 2-dimenziós esetben egy ilyen leképezés értelemszerűen izomorfizmus, magasabb dimenzióban azonban egy *flip* vagy egy *flop* lehet [1].

A 3-dimenziós esetben a fenti sejtés első állítása már egy tétel, melynek bizonyítása nagyrészt Mori nevéhez fűződik. Egy általános bevezetés ehhez [3]-ban található. Egy magasabb dimenziós ``általános típusú" sokaságra az első állítás következik Hacon, McKernan és Siu eredményeiből, a második állítás pedig Eyssidieux, Guedj és Zeriahi azon munkájából következik, melyben Aubin és Yau, a Monge-Ampère egyenletekre vonatkozó eredményeit általánosították.

Alkalmazások során különösen a sejtés második része hasznos. Amellett, hogy a minimális modellen a lehető legegyszerűbb 1 kodimenziós geometriánk van, még egy nagyon erős, globális differenciálgeometriai tulajdonság is a rendelkezésünkre áll.

Algebrai geométerek általában a sejtésnek egy gyengébb változatát vizsgálják, mely a *kanonikus osztályt* használja; ez utóbbit mint a $c_1(M) \in H^2(M^{\min}; \mathbb{Q})$ első Chern osztály (-1)-szeresét definiálhatjuk.

> *2.' Az $M^{\min}$ minimális modell kanonikus osztálya nem-negatív, vagyis minden $C \subset M^{\min}$ algebrai görbének a kanonikus osztállyal vett sapka-szorzata nem-negatív. Másképp kifejezve ezt, $M^{\min}$ Ricci görbületének integrálja minden $C \subset M^{\min}$ algebrai görbén nem-pozitív.*

Ez utóbbi állítás 3-dimenzióban, illetve általános típusú sokaságokra minden dimenzióban ismert.

Felhasznált irodalom:

[1] Alessio Corti: What is ... a flip?, *Notices Amer. Math. Soc.* **51** (2004), 1350-1351.

[2] János Kollár: Which are the simplest algebraic varieties?, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **38** (2001), 409-433.

[3] János Kollár és Shigefumi Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge University Press, 1998.

Kollár János a Princeton University (USA) professzora. A fenti dolgozat eredetije 2007 márciusában jelent meg a *Notices of the American Mathematical Society* folyóiratban. Ez a fordítás a szerző és az AMS engedélyével jelenik meg. *Fordította Stipsicz András (Szabó Endre segítségével)*

János Kollár, WHAT IS...a Minimal Model? *Notices Amer. Math. Soc.* 54 (March 2007) 370-371. ©2007 American Mathematical Society.

Mi is...?

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **GAZDA(G)SÁG** NEVET ADTUK A **GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET ROVATNAK**, AMELYBEN BEMUTATJUK, HOL, MIKÉPPEN HASZNÁLJÁK FEL A MATEMATIKÁT, MILYEN GAZDAG IS AZ A KÖR, AMELYIK ÉRINTI EZT A TUDOMÁNYÁGAT. (ROVATSZERKESZTŐK: *RÖST GERGELY* ÉS *MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR*.)

Simon Péter

2016. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Jégvarázs és a parciális differenciálegyenletek

A 20. *Európai Ipari Matematika Konferenciát* a *Bolyai János Matematikai Társulat* és az *ELTE* szervezi 2018-ban Budapesten. Milyen témák kerülnek elő egy ilyen konferencián? Például az idei egyik kiemelt előadáson a *Jégvarázs* című *Walt Disney* animációs filmről volt szó…

AN ELEMENTARY INTRODUCTION TO THE
Wolfram Language
STEPHEN WOLFRAM

Lóczi Lajos

2016. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

A Wolfram nyelv történetéről

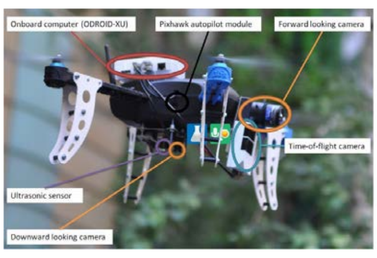
A Wolfram nyelv mindössze néhány éve kapott végleges nevet, noha fejlesztése még az elmúlt évezredben kezdődött el. A felhasználók a nyelvvel először a *Mathematica* nevű programcsomagban találkozhattak. A cikkben a *Wolfram programozási nyelv* rövid történetét és egy *könyvismertetőt* olvashatnak.

Ladics Tamás

2016. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Matematikai problémák a meteorológiai modellezésben

A *meteorológiai modellezés* az alkalmazott matematika egyik legösszetettebb területe. A téma egyik legfrissebb angol nyelvű tanulmánygyűjteményét ismerteti a szerző, *Ladics Tamás*. A kötetben foglalt tanulmányok érdekesek és hasznosak lehetnek a légköri kutatást művelők közösségén túl minden természettudományos és matematikai képzettséggel rendelkező érdeklődő számára. A *matematikai módszerek* *sokszínű alkalmazása* ötleteket és motivációt adhat a jövőbeni kutatásokhoz.



Gerencsér László

2016. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Konferencia az alkalmazott matematikáról

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2016. évi *BJMT Alkalmazott Matematikai Konferenciát* Győrben rendezte meg. A konferencia célja olyan tudományos, technológiai és társadalmi kihívások bemutatása volt, amelyek megfogalmazásában és megoldásában a matematika kiemelt szerepet játszik. Közismert példák az alkalmazásra az autonóm járművek, az okos városok vagy a víztudomány.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Simon Péter 2016. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Jégvarázs és a parciális differenciálegyenletek

2016. június 13. és 17. között került sor Santiago de Compostelaban a 19. Európai Ipari Matematika Konferenciára. A konferencia kiemelt előadója volt *Joseph Teran* (University of California, LA), aki a Jégvarázs című animációs filmben **a hó mozgását élethűvé tette** egy részletes fizikai modell bevezetésével és annak matematikai közelítésével. Ennek köszönhetően a hó mozgását parciális differenciálegyenletekkel írták le, a filmben látható animáció az egyenletek numerikus megoldásából származik. A látványos előadásban a matematikai modell bemutatásán kívül az előadó összehasonlította a hagyományos animációs technikával készült hómozgásokat azzal, ahogy ők csinálták. Ez utóbbi teljesen élethű volt, mivel a valódi fizikai folyamatot modellezték. (Sajnos ebben a cikkben a film szerzői jogai miatt nem tudjuk megmutatni magát a mozgást, de ha a legközelebb megnéznék a Jégvarázst, figyeljék meg!) Teran professzor egyik hallgatója pedig PhD dolgozatában a haj mozgásának szimulációjáról írt. Többségünk nem is gondolta volna, hogy a matematika milyen jelentős mértékben tudja növelni az animáció élethűségét, nemcsak a hóesésnél, de a szereplők ruhájának vagy hajának mozgatásában, a füst vagy a víz mozgásában.

A konferencia 10 plenáris előadója és 40 szekciója **a matematika technikai és ipari alkalmazásainak** különböző aspektusaiba nyújtott betekintést. Az egyik plenáris előadásból megtudhattuk, hogy a folyadékáramlás egyenleteinek gyors számítógépes közelítő megoldása hogyan segít ipari méretekben hatékonyan **optimalizálni a gyümölcslevek vagy a tej dobozokba töltését**.

A párizsi École Polytechnique professzora **repülőgépek elektromágneses sugárzások elleni védelméről** tartott előadást közös kutatásukról egy repülőgépgyártó céggel, amelyben differenciálegyenletek numerikus megoldását használták.

Egy oxfordi kutató a **lítium-ion akkumulátorok** új matematikai modelljét mutatta be, ennek segítségével a telefonoktól az autókig számos helyen alkalmazott akkumulátorok mikrostruktúrája is leírható, ezáltal működésük hatékonyabbá tehető.

A **membránszűrők** eladása az USA-ban több milliárd dolláros forgalmat képvisel. Számos helyen alkalmazzák az iparban a víztisztítástól a biotechnológián át a sörkészítésig. Pontos matematikai modellezésük mégis váratott magára ezidáig, erről számolt be a New Jersey Institute of Technology kutatója.

A **növekvő energiaigény és a légszennyezettség növekedése** közötti ellentét feloldására statisztikai és operációkutatási módszerek alkalmazását mutatta be egy másik plenáris előadó.

A matematikai modellek nem csak a technikában, hanem a biológiában is fontos szerepet játszanak. Egy madridi professzor előadása rávilágított, hogy az úgynevezett **T-sejtek immunválaszban betöltött szerepét** matematikailag modellezni lehet, és a viselkedésükben megfigyelt jelenség ilyen módon magyarázható.

Egy nemzetközi kutatócsoport vezetője arról beszélt, hogy **nagy intenzitású ultrahang biológiai és ipari alkalmazása** nemlineáris hullámegyenlettel kapcsolatos matematikai kérdésekhez vezet és optimalizálási kérdéseket is felvet. **Energiahálózatok optimalizálásáról** és megbízhatóságuk vizsgálatáról tartott előadást egy floridai professzor.

Az egyhetes konferencia során a technika és gazdaság számos területéről származó matematikai kérdésekkel találkoztunk, amelyek az alkalmazott matematika szinte minden területét érintették az optimalizálástól a statisztikán át a differenciálegyenletekig. Mindez megerősítette azt a meggyőződésünket, hogy bár a felületes szemlélő talán nem is érzékeli, a matematika mégis nélkülözhetetlen a mindennapi életben.

Az említett előadások kivonatait és az előadók bemutatását a http://www.usc.es/congresos/ecmi2016/ honlapon találhatják meg az érdeklődők.

alkalmazott matematika

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Lóczi Lajos 2016. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

A Wolfram nyelv történetéről

Stephen Wolfram: An Elementary Introduction to the Wolfram Language

A Wolfram programozási nyelv rövid története

A Wolfram nyelv mindössze néhány éve kapott végleges nevet, noha fejlesztése még az elmúlt évezredben kezdődött el.

A felhasználók a nyelvvel először a *Mathematica* nevű programcsomagban találkozhattak [5]; ma úgy tekintünk e szoftverrendszerre, mint a Wolfram nyelv első fő implementációjára. E sorok írása előtt 28 évvel (és 2 nappal) jelent meg a *Mathematica* legelső változata, most hamarosan a 11-es változatnál járunk. A *Mathematica* felhasználói tábora jelenleg néhány milliósra tehető.

A Wolfram nyelv történetében a következő mérföldkövet a Wolfram|Alpha keresőszolgáltatás 2009-es beindítása jelentette [6]. A Wolfram|Alpha abban tér el a hagyományos internetes keresőktől, hogy folyamatosan karbantartott és frissített tudásbázisa segítségével olyan kérdések megválaszolására is képes, amelyhez általános értelemben vett számításokra van szükség (angolul ezt computational knowledge engine-nek, vagy answer engine-nek hívják). A Wolfram|Alpha áll például az Apple cég telefonjaiban megtalálható Siri beszédfelismerő szoftver mögött. A Wolfram|Alpha keresőmotorjának több tízmillió soros programkódja nagyrészt Wolfram nyelven íródott. 2009-ben ezt úgy fogalmaztuk meg, hogy a Wolfram|Alpha keresőmotorja a *Mathematica* rendszerre épül. Az elkövetkezendő hónapokban aztán fokozatosan lehetővé vált, hogy az internetkapcsolattal rendelkező felhasználó számítógépén futtatott *Mathematica* kód egyszerű kérdéseket intézhessen a Wolfram|Alpha tudásbázisához. Ma már e két óriási rendszer szimbiózisa elválaszthatatlan: a Wolfram|Alpha a keresésekhez a *Mathematica* számára kifejlesztett algoritmusokat (is) használja, míg a *Mathematica* működése közben szinte észrevétlenül merít a Wolfram|Alpha tudásanyagából. Ebből következik a Wolfram nyelv egyik kulcsfontosságú tulajdonsága: a Wolfram nyelv tudásalapú nyelv (knowledge-based language).

A nyelv elterjedését nagyban segíti a http://demonstrations.wolfram.com/ [7] weboldalon programkóddal együtt szabadon elérhető mintegy tízezer, Wolfram nyelven megírt példaprogram és interaktív alkalmazás, amelyek valamely tudományterületről (beleértve a művészeteket is) mutatnak be egy-egy érdekes modellt. Pozitív elbírálás esetén a weboldalon mi magunk is közzétehetjük igényesen megírt kódunkat.

A Wolfram nyelvvel a felhőben [8] is találkozhatunk. A 2016 januárja óta működő Wolfram Programming Lab oldalon [4] például ki-ki maga is megkezdheti a nyelvvel való ismerkedést: a böngészőnkből közvetlenül (és előfizetés nélkül) futtathatunk Wolfram nyelvű kódokat.

Ami a hardvert illeti, a Raspberry Pi − pár tízezer forintért kapható − miniszámítógépen alapértelmezésben elérhető a Wolfram nyelv. A Wolfram nyelvet egyébként folyamatosan készítik fel a Dolgok Internetével (Internet of Things, IoT) való „találkozásra": a [9] adatbázisban gyűjtik össze azokat a készülékeket és eszközöket, amelyek az internetre kapcsolódva valamilyen adatot továbbítanak a felhőbe, és ezeket az adatokat a Wolfram nyelvvel feldolgozhatjuk. A Wolfram nyelv tehát a Dolgok Internetének egyik általános leíró nyelve lehet.

A Wolfram nyelv az elmúlt csaknem három évtizedben stabilnak és időtállónak bizonyult. A *Mathematica* korábbi változataiban íródott programok (az esetek legnagyobb részében) gond nélkül lefutnak az újabb *Mathematica*-változatok alatt is. Az idők során ugyanakkor a Wolfram nyelv képességei rohamosan bővültek. A nyelv jelenleg mintegy 5000 parancsot tartalmaz. Stephen Wolfram szerint saját maga is sokszor meglepődik a nyelv kifejezőerején: korábban elérhetetlennek tűnő dolgokat tudnak most sikerrel megvalósítani (gondoljunk például a Wolfram|Alpha-hoz kifejlesztett természetes nyelvi feldolgozás roppant bonyolult kérdéskörére).

A Wolfram nyelv legfontosabb tulajdonságainak összefoglalásaként elmondható, hogy a nyelv

- kis számú, jól megválasztott és egyszerű alapelvre épül;
- sokféle programozási stílust ötvöz (pl. procedurális, funkcionális, objektumorientált, szabályalapú);
- tudásalapú: (i) a nyelvben közvetlenül használható a *Mathematica* és a Wolfram|Alpha számára három évtized során kifejlesztett algoritmusok óriási gyűjteménye, valamint (ii) a nyelvben közvetlenül elérhető rengeteg, a valós világra vonatkozó aktuális információ (pl. fizikai-, kémiai-, földrajzi-, csillagászati- vagy tőzsdei adatbázisok);
- mindent szimbolikus kifejezésként reprezentál. A szimbolikus jelleg folytán egy f[x_]:= kezdetű függvénydefinícióban az x szimbólum jelenthet például egy lebegőpontos számot, egy komplex számot, egy integrált, egy gráfot, egy dokumentumot, egy internetről letöltött ábrát, egy programot, vagy akármit.

A Wolfram nyelv teljes dokumentációja [10] jelenleg nagyságrendileg 50 000 nyomtatott oldalon férne el (és akkor még nem is említettük a *Mathematica* szoftver alkalmazásairól szóló sok tucat komoly könyvet). A Wolfram nyelv megalkotója ezért szükségét látta annak, hogy egy rövid, bevezető jellegű könyvet adjon a nyelv iránt érdeklődők kezébe.

A könyv felépítése

Stephen Wolfram: An Elementary Introduction to the Wolfram Language c. könyve 2015. december 8-án jelent meg. E recenzió megírásához a 324 oldalas papíralapú könyv interneten szabadon elérhető angol nyelvű változatát vettük alapul [1].

- A mű 47 rövid, egymásra épülő fejezetből áll. Minden fejezet egy-egy új fogalomkörbe vezeti be az olvasót. Egy fejezet nem más, mint 10-20 egyszerű, az adott témakörbe illeszkedő példa felsorolása. Minden példa egy 1-2 soros angol nyelvű leírással kezdődik, amely után egy Wolfram nyelven megfogalmazott − egysorosnál ritkán hosszabb − lehetséges megoldás található. Az adott példát az inputhoz tartozó output megjelenítése zárja. A kidolgozott példák után minden fejezetben egy-két tucat feladat szerepel. Általában minden feladatra számos, egyenértékű megoldás adható Wolfram nyelven. Az illető fejezet végén néhány kitekintő megjegyzés, valamint a részletesebb dokumentációra való hivatkozás áll.

A könyv legvégén az előző 47 fejezetben felsorolt összes feladat megoldása megtalálható – a közölt megoldások döntő többségükben egysorosak, ezzel is kidomborítva a Wolfram nyelv kifejezőképességét.

Minden fejezet egy kattintással letölthető *Mathematica*-jegyzetfüzet formájában is − a példákat saját gépünkön interaktívan módosítva, illetve az inputokkal kedvünk szerint kísérletezve a nyelvtanulás hatékonyságát sokszorosára növelhetjük.

Kedvcsinálóul álljon itt a könyvben érintett témakörök felsorolása (zárójelben néha egy-egy önkényesen kiragadott példával).

- Elemi aritmetika (pl. mi történik nullával osztás után).
- Kifejezések és függvények (pl. véletlenszámok generálása).
- Listák és megjelenítésük (pl. grafikonok, oszlop- és tortadiagramok).
- Listaműveletek és listák létrehozása (pl. összesen hány nulla található egy szám 10-es számrendszerbeli alakjában).
- Színek és szövegstílusok (pl. egy száztagú, véletlen színekből álló lista létrehozása).
- Alapvető grafikai elemek (pl. egy sárgára festett gömb megjelenítése).
- Dolgok interaktív manipulálása (pl. csúszkák segítségével változtatható színű és oldalszámú sokszögek kirajzolása).
- Képek és elemi képszerkesztési eljárások (pl. éldetektálás).
- Karakterek és sztringek (pl. egy mondat szavai hosszának oszlopdiagramos ábrázolása).
- Zenei hangok és akkordok.
- Tömbök és mátrixok (pl. mátrixműveletek karakterek pixeles képével).
- Síkbeli és térbeli koordináták (pl. egymást metsző testek kirajzolása).
- Kapcsolat a Wolfram|Alpha-val (pl. a koffeinmolekula térbeli és forgatható szerkezetének megjelenítése).
- Mértékegységek és átváltások (ízelítő a nyelv által kezelt mintegy 10 ezer mértékegységből).
- Földrajzi, illetve a szomszédos égitestekre vonatkozó koordináták és térképek (pl. a Rómához 25 legközelebbi vulkán megjelenítése).
- Mennyiségek térben és időben (pl. a Los Angelesben és New Yorkban jelenleg mérhető hőmérséklet különbségének kiszámolása).
- Gráfok és hálózatok (pl. a Facebook-on található ismerőseink hálózatának megjelenítése).
- Gépi tanulás (szöveg- vagy képfelismerés).

Tetszőleges pontosságú aritmetika. Különféle függvénymegadási módok. Tiszta függvények. Rekurziók és iterációk. Feltételes utasítások. Mintaillesztés. Kifejezések szimbolikus reprezentációja a nyelvben. Asszociációk. Természetes nyelvi feldolgozás. Saját kód elhelyezése a felhőben, majd a futtatása a böngészőnkben. Globális és lokális változók. Azonnali és késleltetett értékadások. Különféle függvénydefiníciók. A mintaillesztésről bővebben. Mintaillesztés sztringekkel. Adatok be- és kivitele. Kapcsolat különféle adatbázisokkal. Kódunk hatékonyságának növelése, hibakeresés a kódban, illetve hogyan tegyük "szebbé" a kódot.

A Wolfram nyelvről korábban már megjelent egy csupán 30 oldalas bevezető [3], azonban az az írás olyanoknak szól, akik már járatosak valamely más programozási nyelvben. Wolfram mostani könyve nem épít előzetes programozási ismeretekre. A tárgyalás a matematikai alapműveletektől indul, ám a könyv olvasása során meglehetősen komoly fogalmakig is eljutunk. Wolfram a könyvét, illetve a nyelvet egyaránt ajánlja felnőtteknek és 12 éves kortól gyerekeknek [2], kifejezetten akár első programozási nyelvként. Wolfram könyvének magyar fordítását tehát a hazai közönség is haszonnal forgathatná – legyen szó tapasztalt programozókról vagy a programozás alapjaival most ismerkedőkről.

Lóczi Lajos

Hivatkozások

[1] https://www.wolfram.com/language/elementary-introduction/

[2] http://blog.stephenwolfram.com/2015/12/i-wrote-a-book-to-teach-the-wolfram-language/

[3] https://www.wolfram.com/language/fast-introduction-for-programmers/

[4] https://www.wolfram.com/programming-lab/

[5] https://www.wolfram.com/mathematica/

[6] http://www.wolframalpha.com/

[7] http://demonstrations.wolfram.com/

[8] https://www.wolframcloud.com/

[9] http://devices.wolfram.com/

[10] http://reference.wolfram.com/language/

informatika

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

Ladics Tamás 2016. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Matematikai problémák a meteorológiai modellezésben

A magyar szerkesztők által összeállított *Mathematical Problems in Meteorological Modelling* tanulmánygyűjtemény a légköri folyamatok vizsgálatának több fontos területét felöleli. Célja, hogy bemutassa: a matematika módszereinek széles skálája megjelenik ezen tudományág művelése során. Minden fejezet időszerű szakmai kérdést feszegető munka, melyben a matematikai módszerek alkalmazásaira mutatnak egy-egy példát.

A kötet három nagy részre tagolódik: Az **időjárás számszerű előrejelzése** nemlineáris parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásának összetett feladatát jelenti. Az első fejezet *On a Conservative Finite-Difference Method for 1D Shallow Water Flows Based on Regularized Equations* című munkájában a probléma tipikus megközelítését olvashatjuk: a sekélyvízi egyenletek megoldása nem csupán egy szokásos tesztje a numerikus sémáknak, de több, a légkör viselkedését jellemző alapvető jelenséget is jó közelítéssel visszaad. Numerikus megoldásuk alapvető fontosságú. A *Discretization in Numerical Weather Prediction: A Modular Approach to Investigate Spectral and Local SISL Methods* jó áttekintést ad a numerikus időjárás-előrejelzés matematikai kihívásairól és az azokra adott válaszokról. Amellett, hogy – a tudományterületet kevéssé ismerők számára is érhető módon – ismerteti a módszereket, bemutat egy örvényesség-divergencia egyenleteken alapuló szemi-Lagrange-féle szemiimplicit sémát. A *Turbulence Modeling Using Fractional Derivatives* egy olyan kétdimenziós turbulenciamodellt mutat be, ahol a nyírófeszültségek véletlen változók. Törtrendű deriváltak segítségével általánosítja a Navier–Stokes-egyenleteket, megalkotva ezzel a turbulencia egy sztochasztikus-determinisztikus modelljét. A negyedik fejezet *A Parallel Numerical Solution Approach for Nonlinear Parabolic Systems Arising in Air Pollution Transport Problems* című munkája a nemlineáris parabolikus problémák numerikus kezelésének olyan új megközelítését írja le, amely a légköri transzport folyamatok modellezésében fontos szerepet kaphat.

A **levegőminőség modellezésé**nek szánt második rész négy tanulmányból áll, amelyek a mozgásrendszerek alapvető matematikai leírásának lehetőségeitől – *Eulerian and Lagrangian Approaches for Modelling of Air Quality*; *Hydrodynamic Modeling of Industrial Pollutants Spreading in Atmosphere*; *Coordinate Transformation Approach for Numerical Solution of Environmental Problems* – egészen a nyolcadik fejezetben – *Impact of Climatic Changes on Pollution Levels* – közölt eredményekig a témát nagyon eltérő nézőpontokból vizsgálják. Az utóbbi munka különböző éghajlat-változási forgatókönyvek mellett a légszennyező anyagok szintjében bekövetkezhető változásokat tárgyalja, így a napjainkban megnövekedett érdeklődésre számot tartó két kérdéskört – éghajlatváltozás és légszennyezettség – kapcsol össze. A légszennyezés-terjedésének gyors és pontos előrejelzése elengedhetetlen. Elég ha csak egy nukleáris erőműben bekövetkezett baleset eredményeként a légkörbe kerülő radioaktív gázokra, vagy egy vulkánkitőrés utáni hamufelhő szétterülésére gondolunk. Nem csupán a transzport parciális differenciálegyenleteit kell megoldani, hanem az ehhez csatlakozó, az aktuális időjárási helyzetet leíró modellt is kezelni kell. A fő nehézséget a kémiai reakciók matematikai leírása jelenti, ami a transzportegyenletek között teremt nemlináris kapcsolatot.

A légkör és az éghajlati rendszer egyik alapvető jellemzője a kaotikus viselkedés, ezért a meteorológiai előrejelzés nagyon érzékeny a kezdeti feltételekre. Az úgynevezett adatasszimiláció során kezdeti értékeket állítunk elő a numerikus előrejelző modell számára. Ez összetett optimalizálási probléma, a légkör állapota ugyanis csupán becsülhető, némi bizonytalansággal a mennyiségekben. Ezen bizonytalanságokat igyekszik figyelembe venni az úgynevezett *Ensemble* előrejelzés, amely során több előrejelzés készül, különböző kezdeti feltételek mellett. Mára a módszerben az összes számszerűsíthető légköri és éghajlati bizonytalanságot figyelembe veszik. Mostanra az adatasszimiláció és az ensemble modellezés szétválaszthatatlan a meteorológiai kutatásban. A harmadik rész az **adatasszimilációt**, és a **valószínűségi előrejelzést** ismerteti. Néhány példában megmutatják, mi a kapcsolat a számszerű időjárás előrejelzés ezen két területe között. Az *An Invitation to Meteorological Data Assimilation* bemutatja az adatasszimiláció alapmódszereit, ezek matematikai levezetését, valamint alkalmazásukat néhány próbafeladatra. Az adatasszimiláció módszereinek matematikai vizsgálatát tartalmazza a tizedik fejezet (*Analysis of the Data Assimilation Methods from the Mathematical Point of View)*. A tizenegyedik fejezet – *Ensemble Methods in Meteorological Modelling* – bemutatja az ensemble előrejelzés ötletét és használatát a számszerű időjárás-előrejelzésben. A szerzők arra is kitérnek, hogy hogyan alkalmazható a módszer a meteorológiai adatasszimilációban. A tizenkettedik fejezet *Quantifying Sources of Uncertainty in Precipitation and Temperature Projections over Different Parts of Europe*című munkája a különböző időskálájú, földrajzi területre és meteorológiai változóra vonatkozó éghajlat-előrejelzések fő bizonytalanságait hivatott azonosítani.

A kötetben foglalt tanulmányok érdekesek és hasznosak lehetnek a légköri kutatást művelők közösségén túl minden természettudományos és matematikai képzettséggel rendelkező érdeklődő számára. A munkák tudományos mélysége mellett a szűk értelemben vett szakmai problémák érhető módon szerepelnek benne. A matematikai módszerek sokszínű alkalmazására láthatunk példát, így a kötetben foglalt munkák matematikusok számára adhatnak ötletet és motivációt jövőbeni kutatásaikhoz.

Ladics Tamás

A. **Bátkai**, P. **Csomós**, I. **Faragó**, A. **Horányi**, G. **Szépszó** (eds.): ***Mathematical Problems in Meteorological Modelling.*** Series: The European Consortium for Mathematics in Industry Vol. 24 Springer International Publishing, 2016. doi 10.1007/978-3-319-40157-7. http://www.springer.com/us/book/9783319401553

Nyitókép: © William Crochot / Wikimedia Commons /
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parapente_-_166.jpg

alkalmazott matematika

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 1. szám 2016. szeptember Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Gerencsér László 2016. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Konferencia az alkalmazott matematikáról

A Bolyai János Matematikai Társulat hosszas szervezőmunka után, 2016. június 1. és 3. között a győri Széchenyi István Egyetemen rendezte meg a 2016. évi **BJMT Alkalmazott Matematikai Konferenciát**.

A konferencia célja olyan tudományos, technológiai és társadalmi kihívások bemutatása volt, amelyek megfogalmazásában és megoldásában a matematika kiemelt szerepet játszik. Közismert példák az alkalmazásra az autonóm járművek, az okos városok vagy a víztudomány.

A matematikán kívül eső területek és a matematika termékeny kapcsolatának a jelentőségét nemzetközi viszonylatban is számos kiváló kutató és tudománypolitikai szereplő hangsúlyozza. Példaként említhető a konferencián is képviselt Einstein Centre for Mathematics, Berlin, amely az alkalmazásoktól a középiskolai oktatásig terjedő spektrumban folytat hálózatépítő tevékenységet.

A fenti nemzetközi irányzatoknak megfelelően a konferencia tematikáját öt nagy alkalmazási terület szerint strukturáltuk:

- Pénzügyi- és biztosítási matematika
- Jármű- és gépipar − Energia
- Biológia − Orvosi alkalmazások − Gyógyszeripar
- Hálózatok − Telekommunikáció és web-technológiák
- Társadalmi kihívások: Demográfia − Környezetvédelem.

A szakmai programot *Richard. S. Varga*, (Emeritus Professor of Mathematical Sciences, Kent State University), a numerikus lineáris algebra világhírű, elismert szakemberének előadása nyitotta meg, akinek *Matrix Iterative Analysis* c. könyve a témakör egy klasszikus mesterműve.

Őt követte *Volker Mehrmann* (Professor at TU Berlin, Vice Chair of the Einstein Centre for Mathematics) „Industrial mathematics: simulation and control of real world processes" című előadása, amelyben az ipari matematika sikertörténetei (mint például **járműves fékrendszerek matematikailag megalapozott tervezése**) mellett kitért a **Németországban kialakított hatékony intézményi háttér** (Research Center Matheon, Einstein Centre for Mathematics), ill. azok európai hálózati kapcsolatainak (EU-MATHS-IN: European Service Network of Mathematics for Industry and Innovation) a bemutatására.

Az **EU-MATHS-IN** képviseletében jelent meg *Emilo Carrizosa* (Universidad de Sevilla) professzor is, aki a matematikai technológiák sikeres spanyol ipari alkalmazásairól tartott előadást, többek között egy nevezetes, **napenergiát hasznosító erőműről** és az ott alkalmazott ún. heliostat technológiáról.

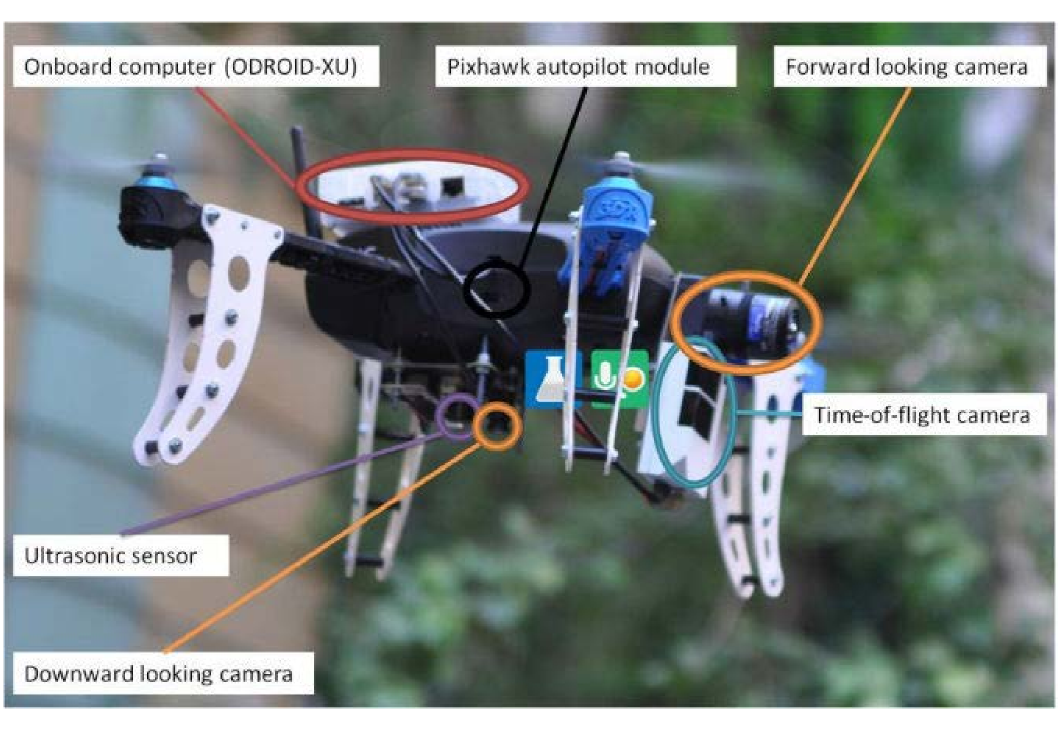
A programnak mintegy a felét a fenti alkalmazási területekhez kapcsolódó plenáris és kiemelt (45 perces) előadások képezték. A következőkben röviden ismertetjük a plenáris előadások témáit.

Bíró József (az MTA doktora, egyetemi tanár, BME Villamosmérnöki és Informatikai Kar, Távközlési és Médiainformatikai Tanszék) „Geometry of Complex Navigable Networks" c. előadásában a távközlésben alapvető, **hálózatokon történő navigáció** problémáját *S. Milgram* kísérleti pszichológus ún. **Small World experiment**-jének a bemutatásával vezette be (ld. még *J. Kleinberg*, Nature, 2000). Ebben a kísérleti személyeknek úgy kell eljuttatni egy megcímzett levelet a megadott címre, hogy a levelet mindenki csak saját ismerősének küldheti tovább. Értelemszerűen mindenki közeli ismerőst próbál találni, de felmerül a kérdés, hogy ebben a kontextusban mit jelent a közelség? Meglepő módon a személyek közötti távolság definiálásában a **Bolyai féle hiperbolikus geometria Poincarè-modelljére** célszerű támaszkodni.

Benczúr András (MTA SZTAKI, az Informatikai Kutatólaboratórium vezetője) „Machine learning in data streams and batch" c. előadásában a **gépi tanulás** szerteágazó módszertanának egy látványos alkalmazását mutatta be az internet felhasználók által jól ismert ún**. ajánló rendszerek tervezésében** (ld. Netflix Prize). A módszer matematikai alapja nagyméretű, ritka, 1%-ra kitöltött mátrixok faktorizációja. Az általuk kifejlesztett algoritmussal, ill. ajánló rendszerrel a legrangosabb nemzetközi adatbányászati versenyen (Knowledge Discovery and Data Mining, röviden KDD) 2007-ben első helyen végeztek.

Perczel András (az MTA levelező tagja, egyetemi tanár, ELTE TTK, Szerves Kémia Tanszék) Bolyai-díjas vegyész „Fehérjék láthatatlan térszerkezetei" című, az élet molekulaszintű alapjelenségeit (oszcilláció, folding) bemutató, videókkal gazdagon illusztrált előadásában a kitűnő infrastruktúrával támogatott fehérjekutatás (ld. Worldwide Protein Data Bank, http://www.wwpdb.org/) egy fontos, és új matematikai eszközöket (új dekonvolúciós módszereket) is kívánó irányzatára hívta fel a figyelmet. Megemlítette, hogy a fehérjék térszerkezetének a tanulmányozása közvetlen kapcsolatban van az **Alzheimer kór**, és a **Parkinson kór** mechanizmusainak a megértésével, és a megfelelő gyógyszerek kifejlesztésével. A fehérjék gyógyszeripari jelentőségét demonstrálja az a tény, hogy ma a világ 10 legdrágább gyógyszeréből 6 fehérje.

Szirányi Tamás (az MTA doktora, egyetemi tanár, MTA SZTAKI, BME Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar) „Simple rules on complex image structures" című, képekkel szintén gazdagon illusztrált előadásában többszörös kameraállásból nyert képek értelmezésével kapcsolatos eljárásokat ismertetett, többek között az általuk kidolgozott elegáns, a kép geometriai objektumait és a kép textúráját szétválasztó módszert. Egy kiemelt alkalmazási terület az **intelligens járművek fejlesztése**. A fedélzeti kamerák segítségével, ill. a közlekedést támogató drónok (UAV-k) segítségével az intelligens járművek nem csupán képet készítenek, hanem látnak, a képeket értelmezik, és így lehetővé teszik egy a vezetőt kiváltó új járműtechnológia kialakítását.



https://www.logisztika.bme.hu/hu/fohirek/139-slider-14.html

Fáth Gábor (Managing Director, Head of Budapest Strats and Modeling, Morgan Stanley Hungary), „Quantitative challenges in the financial industry" c. előadásában az **árfolyamatok modellezésével kapcsolatos** alapvető problémákról adott egy, a laikusok számára is transzparens áttekintést. Ezen belül kitért az ún. **árazó mértékek** (az empirikus valószínűségektől különböző mértékek) kalibrálásának a problémájára, és az **elektronikus kereskedés** által felvetett olyan kérdésekre, mint a msec időhorizontra történő előrejelzés ill. a piaci mikrostruktúrák problémája.

Náray-Szabó Gábor (az MTA rendes tagja) „Fenntartható fejlődés és migránsválság" c. előadásában R. Carson ma már klasszikusnak számító „Silent Spring" c. könyvét és annak utóhatásait idézve a gazdasági növekedés határaival kapcsolatos, számos globális statisztikai mutatóval alátámasztott elemzést mutatott be. Példaként említette az **édesvízkészlet csökkenését**, az Aral-tó kiszáradását, az afrikai mezőgazdasági területek csökkenését, a demográfiai egyensúly megbomlását, és a **gazdasági polarizáció** (Gini index) növekedését. **A migránsválságot** és annak lehetséges kezelési módjait ebben a tágabb kontextusban vizsgálta.

A kiemelt előadások közül a teljesség igénye nélkül, a tematika sokszínűségének illusztrálására megemlítjük *Csirmaz László* (CEU/DE) „Magántitok és közérdek: kommunikáció és kriptográfia", *Dr. Erőss Loránd* (OITI) „Neuropacemekers in the therapy of neurological diseases", *Michaletzky Görg*y „Befizetési stratégia DC (befizetéssel meghatározott) rendszerek esetén – átlag vs. szórásnégyzet kritérium-függvény", *Bozsó Dávid* (NN) „Buying and selling mortality", *Gyires Klára* és *Mátyus, Péter* (SE) „Drug discovery and development: preclinical and clinical studies", *Szintai Balázs* (OMSZ) „Limited area numerical weather prediction", *Simonovits András* (MTA KRTK) „Pension models: an insider's view", *Bihary Zsolt* (Corvinus) „Self-exciting price dynamics − An empirical study" című előadásait.

A program másik felét meghívásos alapon szervezett alkalmazásokhoz kapcsolódó matematikai szekciók képezték. Ezen túlmenően a konferencia teljes idején lehetőség volt a kutatási eredmények bemutatására a poszter-kiállításon.

A plenáris és kiemelt előadók teljes listája, ill. a konferencia teljes programja megtekinthető a konferencia honlapján, a http://amk2016.math.sze.hu/home címen.

A konferencia programjának egy rövid, de érdekfeszítő pontja volt a június 1.-én este folytatott kerekasztal-beszélgetés, „Az alkalmazott matematika helye a multidiszciplináris kutatásban, fejlesztésben és innovációban" címmel. Ennek során a magyar tudományos közélet kiemelkedő személyiségei fejtették ki gondolataikat *Recski András* (egyetemi tanár, BME) moderálása mellett, az azóta 2016 szeptember 18.-án elhunyt [redacted] (emeritus professzor, ELTE) bevezetője után. A résztvevők: *Domokos Gábor* (az MTA rendes tagja, egyetemi tanár, BME), *Friedler Ferenc* (NKFIH elnökhelyettes, egyetemi tanár, PPKE ITK) és *Pálfy Péter Pál* (az MTA rendes tagja, az MTA III. Matematikai Tudományok Osztályának elnöke, az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetének igazgatója) voltak, valamint a külföldi vendég, Professor *Volker Mehrmann*.

Nincs mód arra, hogy a mintegy egyórás kerekasztal-beszélgetésnek akár csak a lényegesebb gondolatait is összefoglaljuk, de a beszélgetés kereteihez és tematikájához jól illeszkedik *Neumann János* idézett gondolata: *„Ha egy matematikai diszciplína messzire távolodik tapasztalati forrásától, az súlyos veszélyt rejt magában. A forrásától eltávolodott folyó jelentéktelen ágak sokaságává különül el és a diszciplína részletek és bonyodalmak szervezetlen tömegévé válik."*

A konferencia szervezésében közreműködött a Magyar Ipari és Innovációs Matematikai Szolgáltatási Hálózat (**HU-MATHS-IN**), és a konferencia fő támogatója, a **győri Széchenyi István Egyetem**. A konferencia társelnöke *Horváth Zoltán* (tanszékvezető egyetemi tanár, Széchenyi István Egyetem, Matematika és Számítástudomány Tanszék) volt.

Gerencsér László
MTA SZTAKI
a BJMT Alkalmazott Matematika Szakosztály elnöke

BJMT Alkalmazott Matematikai Konferencia, Győr, 2016. június 1–3.

☐ alkalmazott matematika ☐ beszámolók