Nemzeti Kulturális Alap

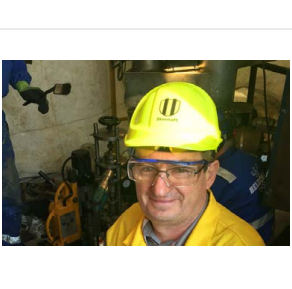
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

6. szám 2017. december

2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

MedveMatek

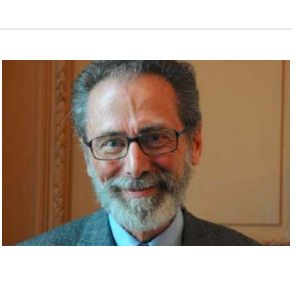
Matekverseny a szabadban — na de hogy visszük ki oda a padokat és székeket? Ugyan nem lenne lehetetlen feladat, de a Medvének épp az a célja, hogy a matematikát és a versenyeket kicsit más irányból közelítse meg. „Közösségi élménnyé tesszük a matekot!” — szól a szlogen. *Gyimesi Bernadett* segít megismernünk *A matematika összeköt* egyesület rendezvényeit és azt, milyen is a MedveMatek.



2017. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Újra tanulni, újat tanulni! — Interjú dr. Kelemen Bélával

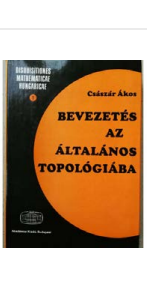
Az interjút *Kelemen Bélával*, a MOL Csoport Üzleti Kiválóság Igazgatójával, a Műegyetem címzetes egyetemi tanárával *Illés Tibor* készítette. Kelemen Béla rendszeres meghívott előadója a Műegyetemnek és a Veszprémi Pannon Egyetemnek. Az interjúban karrierjéről és sikerének titkairól mesél. A cikket lejegyezte és szerkesztette *Romsics Erzsébet*, lektorálták Illés Tibor és Kelemen Béla.



2017. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Waveletek – A 2017. évi Abel-díjjal kitüntetett Yves Meyer munkásságáról

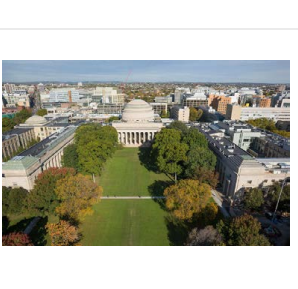
A 2017. évi Abel-díjat *Yves Meyer* francia matematikus kapta *a waveletek matematikai elméletének kidolgozásában játszott úttörő munkásságáért*. Szeizmikus adatok elemzésére és képek tömörítésére használt gyakorlati eljárásokból kiindulva az 1980-as évek közepétől vezetésével a jelfeldolgozás egy új, hatékony módszerének rakták le a matematikai alapjait. Az eljárást felhasználták a Hubble űrteleszkóp felvételeinek dekonvolúciójára, valamint a napjainkban észlelt gravitációs hullámok detektálásában is. *Schipp Ferenc* vezeti be az olvasót a témakörbe.



2017. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Császár Ákos (1924 — 2017)

Életének 94-edik évében, 2017. december 14-én elhunyt Császár Ákos akadémikus, a Bolyai Társulat egykori főtitkára, elnöke, majd tiszteletbeli elnöke, az ELTE professor emeritusa. Nekrológját az MTA honlapján olvashatják. Az Érintő következő számában szeretnénk méltó búcsút venni a magyar matematika kiemelkedő egyéniségétől.



2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Matematikaoktatás az MIT-n

Legtöbben csak a rövidítést ismerik: az MIT, Massachusetts Institute of Technology a világ egyik legjobb egyeteme, rendszeresen az első 10-ben van az egyetemi rangsorokban, nem ritkán a legelején. E cikk szerzőjének, *Csikvári Péternek* lehetősége volt 3 évet eltölteni az egyetem matematikai intézetében, így első kézből vannak tapasztalatai az ott folyó oktatásról.

2017. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

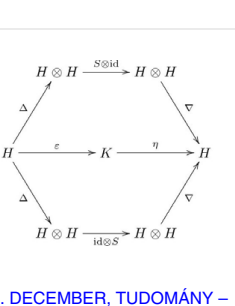
Búcsú Mezei Istvántól

„Vándor, lábaid nyoma az út s nem más. Vándor, nincs út, az út maga a vándorlás. Vándorlásból születik az út, s visszatekintvén látszik az ösvény, melyet senki sem taposhat többé. Vándor, nincs út, csak barázdák a víz tetején” (*Antonio Machado*) Az ELTE Matematikai Intézetének honlapján november elején jelent meg a hír: Fájdalommal és megrendüléssel tudatjuk, hogy szeretett és tisztelt kollégánk, *Mezei István* feladva a betegségével folytatott egyenlőtlen küzdelmet, 2017. november 4-én eltávozott közülünk. *Besenyei Ádám* és *Faragó István* nekrológját az Érintőben is közöljük.

2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Gondold tovább! – 2.

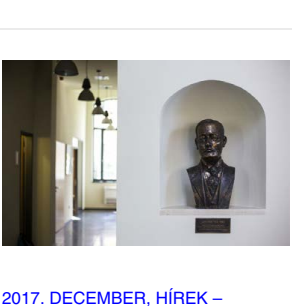
Mottó: „A legtöbb amit a tanár a diákjaiért tehet az, hogy észrevétlenül rávezeti egy-egy jó ötletre.” (*Pólya György*) A kérdéseket először mi tesszük fel, majd fokozatosan érjük el, hogy ezeket már a tanulók maguk fogalmazzák meg. Ha ezt következetesen csináljuk, akkor eljuthatunk ahhoz az örömteli helyzethez, hogy a tanítványaink olyan érdekes kérdéseket is fel tudnak tenni, ami nekünk nem is jutott eszünkbe. (*Katz Sándor*)



2017. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is ... egy kvantumcsoport?

Kompakt csoportokra mint „merev” objektumokra szeretünk gondolni, amiket tehát nem lehet deformálni. Ha azonban a hozzájuk tartozó csoportalgebrát, vagy a burkolóalgebrát vesszük, annak már van deformációja, ami ugyan nem lesz csoportalgebra (vagy burkolóalgebra), de nagyon hasonló lesz egy ilyenhez: speciális tulajdonságú Hopf-algebrát kapunk. Ez az ötlet vezetett a kvantumcsoport fogalmának megszületéséhez. *Shahn Majid* 2006-ban az Amerikai Matematikai Társaság Notices c. folyóiratában megjelent cikkét *Stipsicz András* fordította. Az ábrán egy Hopf-algebra látható.



2017. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Kellenek a kiváló tanárok

A Rátz Tanár Úr Életműdíjról tavaly, 2016 decemberében is beszámolt az Érintő. Ezt az elismerést az iskolás 5-12. évfolyamain matematikát, fizikát, biológiát vagy kémiát tanító tanároknak ítélik oda, akik tantárgyaik népszerűsítésében és a tehetséggondozás területén maradandót alkottak. Idén november 29-én tizenhetedik alkalommal rendezték meg a Magyar Tudományos Akadémia dísztermében a díjátadó ünnepséget.

2017. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

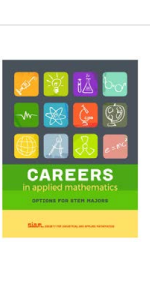
A zenében rejlő matematika

2016-ban a KöMaL Ifjúsági Ankét keretében elhangzott előadásának elektronikus formába öntésére kérte fel szerkesztőségünk *Székely Pétert*. Bár a cikk az előadáshoz képest sokat veszít az értékéből, ha az előadó nem tudja megmutatni, megszólaltatni a hangszereket, illetve az érdekes hang-effektusokat, azért erre is tettünk kísérletet. Következzen tehát egy kis ízelítő a zeneelméletről, s a benne rejlő matematikáról, fizikáról.

2017. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Diáktalálkozó a felvidéki Komáromban 25. alkalommal

A Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozó megálmodója negyed századdal ezelőtt Oláh György tanár úr volt. Húsz éven át fáradhatatlanul szervezte a közös tanár-diák találkozót, ami személyes barátokká tette a Kárpát-medence legjobb tehetséggondozó matematikatanárait Mosolygós szemére, kedvességére még ma is sokan emlékeznek, pedig idén már ötödik alkalommal adták át az emlékére létrehozott *Oláh György magyar matematikai tehetségdíját*.



2017. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

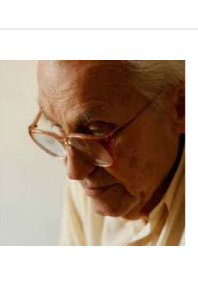
Munkalehetőségek az alkalmazott matematikában — honlapajánló

Cikkeinkhez kapcsolódó honlapokat ajánlunk ebben a rövid írásban. Elsőként az amerikai Ipari és Alkalmazott Matematikai Társaság, a SIAM által kiadott SIAM NEWS-ból idézünk: mi is a matematika szerepe a bennünket körülvevő világban és milyen állások várják ma a matematikusokat, informatikusokat, mérnököket, természettudósokat.

2017. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

VTN 2017 — Varga Tamás Módszertani Napok huszonkilencedszer

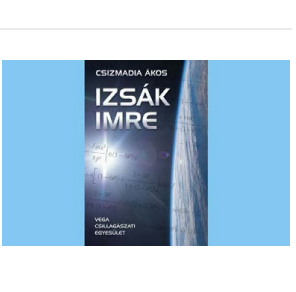
Idén is megrendezésre került a Varga Tamás matematika szakmódszertani konferencia, 2017. november 10—11-én a Varga Tamás Tanítványainak Emlékalapítványa, a Bolyai János Matematikai Társulat és az ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központja közös rendezvényeként. Két jubileumi év következik: 2018-ban lesz a 30. Varga Tamás Napok és 2019-ben lesz Varga Tamás születésének 100-ik évfordulója, amelyre nemzetközi konferenciával készül az MTA.



2017. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Máté László

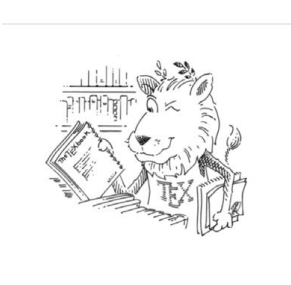
Máté László Szokatlan gondolatok geometriai sorozatokról című írása egy évvel ezelőtti számunkban jelent meg. Bevezető gondolata ez volt: ...néhány példán keresztül azt szeretném megmutatni, hogy ha egy geometriai sorozatot végtelen sorozattá terjesztünk ki, akkor ezzel a látszólag kis lépéssel nagymértékben tágíthatjuk diákjaink matematikai szemléletét. Ez a kiterjesztés az első lépés lehet a határérték fogalma felé és megadhatja azt az élményt, amit a végtelen kicsi és a végtelen nagy világa nyújt a megszokott makrovilágunkkal szemben.



2017. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Izsák Imre — életrajz egy magyar csillagászról

Csizmadia Ákos könyve a tragikusan fiatalon elhunyt magyar csillagásznak állít méltó emléket. A Föld alakjának pontos meghatározása *Izsák Imre* munkásságának talán legfontosabb területe. Elsőként mutatta ki, hogy a Föld egyenlítői keresztmetszete sem kör, hanem ellipszis. 1970-ben krátert neveztek el róla a Hold túlsó oldalán. *Ladics Tamás* méltatja a könyvet.



2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

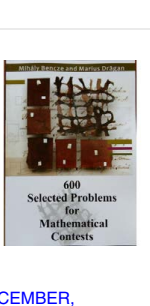
Miért éppen LaTeX?

Az elmúlt években, évtizedben rendszeresen fordultak hozzám ismerőseim LaTeX-et illető kérdésekkel. Szeretném volna segíteni nekik, és — bár bevallom, sokszor nem is tudtam a válaszokat — minden kérdésnek igyekeztem a végére járni. Közben sokat tanultam magam is, és az, hogy továbbra is szeretnék segíteni mindazoknak, akik kíváncsiak a LaTeX-re, nem változott. — *Fried Katalin* LaTeX-tanfolyamának első része következik.

2017. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Kísérletek tervezése és értékelése

Hézagpótló művet tartok a kezemben; már az első kiadás is alapműnek számított és nem hiányozhatott senki polcáról, aki adatfeldolgozással, kísérlettervezéssel foglalkozik. A korábbi, bibliaként forgatott könyv, többszöri utánnyomás dacára is elfogyott, hiánycikknek számít. A jelen mű ennek átdolgozott, javított kiadása. Kemény Sándor, Deák András, Lakné Komka Kinga, Kunovszki Péter: Kísérletek tervezése és értékelése c. kétkötetes könyvéről *Héberger Károly* írt recenziót.



2017. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

600 válogatott feladat matematikaversenyekre

Bencze Mihály és Marius Dragan nemrég megjelent példatárát haszonnal forgathatják az olyan rutinos versenyzők, akik nagy számú eredeti feladat megoldásával akarnak további gyakorlatot szerezni. A könyv előszavában azt ígérik a szerzők, hogy a könyv segítséget nyújt középiskolai diákok és egyetemisták számára a nemzetközi versenyekre való felkészítésben. Ennek az elvárásnak a könyv *Gyenes Zoltán* indoklása szerint csak részben felel meg.

2017. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Arckép helyett

2017 szeptemberében különös, továbbított e-mail jutott el hozzám, egy meghívó Faragó Andor, Faragó István és Faragó György emlékére botlatókő elhelyezésére a Bartók Béla út 52. számú ház előtti járdán. Bevallom őszintén, nem tudtam, mi is a botlatókő. A wikipédiához fordulva kiderült, hogy Gunter Demnig német szobrászművész alkotásai azok a holokauszt áldozatai előtt tisztelgő, macskakőre rögzített 10 × 10 centiméteres réz emléktáblák, amelyeket az áldozatok egykori lakhelye előtt helyeznek el a járdába süllyesztve.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **HÍREK – ÚJDONSÁGOK** ROVAT A MATEMATIKÁHOZ ÉS A BOLYAI TÁRSULATHOZ KAPCSOLÓDÓ ESEMÉNYEKRŐL, ÚJDONSÁGOKRÓL SZÓL. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÁKÓCZI ILDIKÓ.)*

Szerkesztő
2017. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Császár Ákos (1924 — 2017)

Életének 94-edik évében, 2017. december 14-én elhunyt Császár Ákos akadémikus, a Bolyai Társulat egykori főtitkára, elnöke, majd tiszteletbeli elnöke, az ELTE professor emeritusa. Nekrológját az MTA honlapján olvashatják. Az Érintő következő számában szeretnénk méltó búcsút venni a magyar matematika kiemelkedő egyéniségétől.

Szerkesztő
2017. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

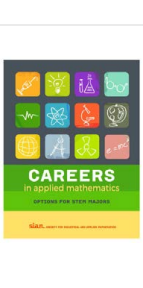
Kellenek a kiváló tanárok

A Rátz Tanár Úr Életműdíjról tavaly, 2016 decemberében is beszámolt az Érintő. Ezt az elismerést az iskolák 5-12. évfolyamain matematikát, fizikát, biológiát vagy kémiát tanító tanároknak ítélik oda, akik tantárgyaik népszerűsítésében és a tehetséggondozás területén maradandót alkottak. Idén november 29-én tizenhetedik alkalommal rendezték meg a Magyar Tudományos Akadémia dísztermében a díjátadó ünnepséget.

Oláh Vera
2017. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Diáktalálkozó a felvidéki Komáromban 25. alkalommal

A Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozó megálmodója negyed századdal ezelőtt Oláh György tanár úr volt. Húsz éven át fáradhatatlanul szervezte a közös tanár-diák találkozót, ami személyes barátokká tette a Kárpát-medence legjobb tehetséggondozó matematikatanárait. Mosolygós szemére, kedvességére még ma is sokan emlékeznek, pedig idén már ötödik alkalommal adták át az emlékére létrehozott *Oláh György magyar matematikai tehetségdíjat.*



Szerkesztő
2017. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Munkalehetőségek az alkalmazott matematikában — honlapajánló

Cikkeinkhez kapcsolódó honlapokat ajánlunk ebben a rövid írásban. Elsőként az amerikai Ipari és Alkalmazott Matematikai Társaság, a SIAM által kiadott SIAM NEWS-ból idézünk: mi is a matematika szerepe a bennünket körülvevő világban és milyen állások várják ma a matematikusokat, informatikusokat, mérnököket, természettudósokat.

Vancsó Ödön
2017. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

VTN 2017 — Varga Tamás Módszertani Napok huszonkilencedszer

Idén is megrendezésre került a Varga Tamás matematika szakmódszertani konferencia, 2017. november 10—11-én a Varga Tamás Tanítványainak Emlékalapítványa, a Bolyai János Matematikai Társulat és az ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központja közös rendezvényeként. Két jubileumi év következik: 2018-ban lesz a 30. Varga Tamás Napok és 2019-ben lesz Varga Tamás születésének 100-ik évfordulója, amelyre nemzetközi konferenciával készül az MTA.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

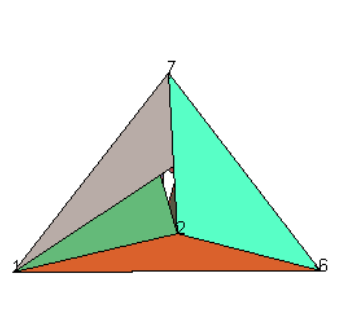
Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2017. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Császár Ákos (1924 — 2017)

Életének 94-edik évében, 2017. december 14-én elhunyt Császár Ákos akadémikus, a Bolyai Társulat egykori főtitkára, elnöke, majd tiszteletbeli elnöke, az ELTE professor emeritusa. Nekrológját az MTA honlapján olvashatják. Az Érintő következő számában szeretnénk méltó búcsút venni a magyar matematika kiemelkedő egyéniségétől. Emlékére forog a Császár-féle poliéder.



http://users.atw.hu/polyeder5/22_csszrfle_test.html

nekrológ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

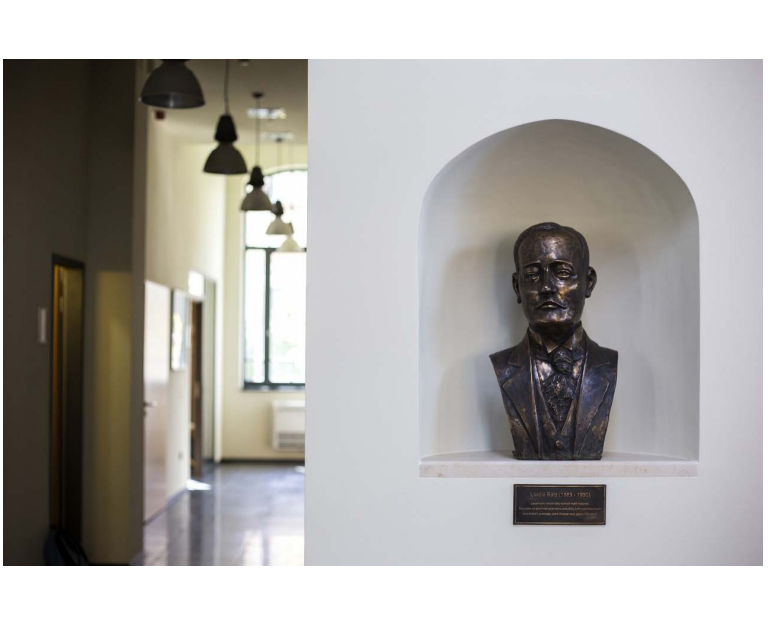
Szerkesztő 2017. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Kellenek a kiváló tanárok

A Rátz Tanár Úr Életműdíjról tavaly, 2016 decemberében is beszámolt az Érintő. Ezt az elismerést az iskolák 5-12. évfolyamain matematikát, fizikát, biológiát vagy kémiát tanító tanároknak ítélik oda, akik tantárgyaik népszerűsítésében és a tehetséggondozás területén maradandót alkottak. Idén november 29-én tizenhetedik alkalommal rendezték meg a Magyar Tudományos Akadémia dísztermében a díjátadó ünnepséget.

A díjat 2000-ben alapította a természettudományos oktatás támogatásában elkötelezett három vállalat, az Ericsson Magyarország, a Graphisoft SE és a Richter Gedeon Nyrt. A cégek vezetői ez alkalommal is megerősítették a közös díj alapításakor is kinyilvánított hitvallásukat arról, hogy minden nagy teljesítmény mögött ott áll egy kiváló tanár. Az idei díjazottak diákjai vezető egyetemeken és vállalatoknál dolgoznak, vannak köztük egyetemi tanárok, tanszékvezetők és akadémikusok is. A díj a XX. század egyik legnagyobb tanáregyéniségének, a Fasori Evangélikus Gimnázium matematika-fizika tanárának, Rátz Lászlónak állít emléket.

A díjátadó napján avatták fel az Aquincumi Technológiai Intézetben Rátz tanár úr első szobrát Magyarországon. Az intézmény, amely informatikát tanít a legjobb amerikai egyetemekről érkező diákoknak, Rátz László ikonikus tanáralakját választotta példaképül. A bronz mellszobor Tóth Ernő szobrász alkotása.



Az elmúlt 17 év során összesen 128 kiváló pedagógus részesült az életműdíjban. Sajnos, azóta sokuk már nincs az élők sorában, csak a matematikusok közül több fantasztikus egyéniséget fájóan hiányolunk, közöttük Urbán Jánost, Reiman Istvánt, Pálmay Lórántot, Kőváry Károlyt vagy Pogáts Ferencet

A mostani egyik díjazott, Mezei István azonban már át sem tudta venni a díjat. Helyette fia, Bálint mondott olyan okos, szép és megható köszönetet, ami önmagában is bizonyította, hogy édesapja nemcsak kiváló tanár, de kiváló ember is volt.

Az Érintőben külön cikk szól Mezei tanár úrról, aki teheti, nézze meg a róla szóló videót is.

2017 Rátz Tanár Úr Életműdíjasai:

Matematika

† Dr. Mezei István — Óbudai Árpád Gimnázium, ELTE TTK Matematikai Intézet

Egyed László — bajai III. Béla Gimnázium

Fizika

Dr. Piláth Károly — ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium

Mester András — nyugalmazott tanár, korábban Zrínyi Ilona Gimnázium, Miskolc, Bláthy Ottó Villamosipari Szakközépiskola, Diósgyőri Gimnázium

Kémia

Dancsó Éva: — budapesti Eötvös József Gimnázium

Dr. Antal-Szalmás Lajosné: —nyugalmazott kémiatanár, a Kossuth Lajos Tudományegyetem Gyakorló Gimnáziuma, Debreceni Református Gimnázium

Biológia

Gál Béla: — szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium

Zátonyi Szilárd: — győri Veres Péter Mezőgazdasági és Élelmiszeripari Szakgimnázium, Szakközépiskola és Kollégium

Dr. Piláth Károly, Dr. Mezei István fia, Bálint, Dancsó Éva, Egyed László, Mester András, Dr. Antal-Szalmás Lajosné, Gál Béla, Zátonyi Szilárd

A díjazottak méltatása a korábbi évekéhez hasonlóan a `http://www.ratztanarurdij.hu` honlapon található.

Minden életműdíjasról video is készült, amelyeket az ünnepség keretében mutattak be.

A tavalyi eseményről itt olvashatnak lapunkban:

`http://ematlap.hu/index.php/hirek-ujdonsagok-2016-12/396-ratz-tanar-ur-eletmudij-tizenhatodszor`

A szerk.

☐ díjazottak ☐ beszámolók ☐ Rátz László ☐ konferencia

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Oláh Vera 2017. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

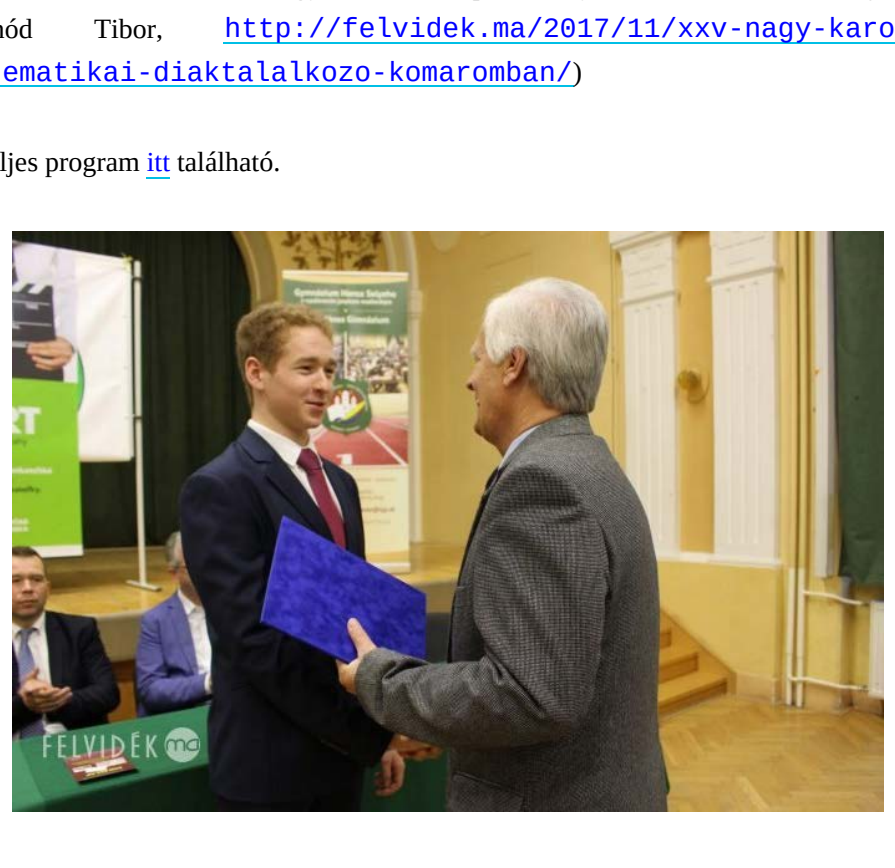
Diáktalálkozó a felvidéki Komáromban 25. alkalommal

Kerek arcú, kedves, már nem fiatal tanár kopogott be minden hónap közepe táján Budapesten a KöMaL szerkesztőségébe, hogy megvegye és elvigye a diákjai számára a lap legfrissebb számait (elég sok példányban). Még aznap újra felült a komáromi vonatra, majd a hídon átballagva cipelte be az iskolába a számára oly fontos tehetséggondozó füzeteket. A határon túlról az előfizetés is nehézkes, és mire a posta odaér a Lapokkal, már le is jár a beküldési határidő — magyarázta. Ő volt Oláh Gyuri, a Rátz László Vándorgyűlések „örökös” tagja, a Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozó „atyja”. Halála után Keszegh István vette át a szervezést, most már ő is nyugdíjas tanár. Idén teljesen új formában, elektronikus úton, a google drive segítségével megosztott dokumentumokkal, aktív levelezéssel folyt a találkozó előkészítése, nem is lehetett kétséges, hogy Fonód Tibor, a Selye János Gimnázium igazgatóhelyettese méltó módon szervezi a 25. felvidéki magyar matematikakonferenciát.

„A Selye János Gimnázium és az Ipari Szakközépiskola közös rendezvényeként megtartott találkozó gerincét minden évben hazai és határon túli magyar matematikatanárok és egyetemi hallgatók szakmai előadásai képezik, az idei háromnapos rendezvény 24 előadására 80 résztvevő érkezett számos anyaországi vagy egyéb Kárpát-medencei magyarlakta vidékről (Szatmárnémeti, Zenta, Pécs, Békéscsaba, Győr, Szeged, Gyula, Kaposvár, Hódmezővásárhely, Budapest, Debrecen, Nagykanizsa, Kassa, Somorja, Pozsony stb.). Emiatt is nyilvánvaló, hogy a rendezvény teljesítette egyik legfőbb feladatát: összekapcsolja az anyaország, Erdély, Felvidék és Délvidék magyar matematikatanárait és a legtehetségesebb diákokat.

Az elmúlt évek gyakorlatához hasonlóan a résztvevők idén is tarka kínálatból válogathattak, hiszen a három nap alatt olyan előadások hangzottak el, mint például Matematika a számítógépen és számítógép a matematikában, Úthálózatok, hidak, kereszteződések, Stewart, Steiner és a szimedián..., vagy Szimmetrikus objektumok leszámlálása, de a tanulók egy érdekes csapatversenyben is összemérték erejüket.” (Fonód Tibor, http://felvidek.ma/2017/11/xxv-nagy-karoly-matematikai-diaktalalkozo-komaromban/)

A teljes program itt található.



A 2017. évi Oláh György magyar matematikai tehetség díját *Borbényi Márton*, a Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium idén érettségizett diákja érdemelte ki, aki jelenleg az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika szakos hallgatója. (A fényképen Keszegh István gratulál a díjazottnak.)

A további részletekről innen tájékozódhatnak az érdeklődők:

http://felvidek.ma/2013/03/a-komaromi-olah-csalad-atvette-a-magyar-orokseg-dijat/

http://felvidek.ma/2017/11/xxv-nagy-karoly-matematikai-diaktalalkozo-komaromban/

http://felvidek.ma/2017/11/nincsenek-alacsonyan-logo-gyumolcsok-mindenert-meg-kell-dolgozni/

Köszönjük a Felvidek.ma szerkesztőségének, hogy cikkükből idézhettünk, és felhasználhattuk Szalai Erika fotóját.

Oláh Vera

díjazottak · beszámolók · konferencia

Érintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2017. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Munkalehetőségek az alkalmazott matematikában — honlapajánló

Az amerikai Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), az Ipari és Alkalmazott Matematikai Társaság színes, 32 oldalas kiadványa rengeteg információval és ötlettel szolgál azoknak, akik mérnöki, természettudományos vagy matematika diplomával keresnek állást, vagyis a ma divatos STEM (science, technology, engineering, and math) területén szeretnék megalapozni a karrierjüket.

27 nő és férfi rövid története van benne, akik olyan multiknál dolgoznak, mint az Amazon, a Caterpillar, a Coca-Cola, az Intel vagy a Microsoft, vagy nemrég indították el startup cégüket, vagy a nonprofit szférában tevékenykednek. Mindegyikőjüknél ugyanazok a kérdések: most mivel foglalkozik; milyen képességek-készségek kellenek ehhez a munkához; melyek a munkájának előnyei és hátrányai; esetükben mi a munka és a magánélet aránya, milyen karrierutak várhatók és mik a lehetséges keresetek. (Ez utóbbi számok — főleg, ami a kezdőfizetéseket illeti — a mi viszonyainkhoz képest sokkolóan magasnak tűnhetnek.) Minden érdeklődőnek tanulságos elolvasni.

A SIAM idei konferenciájára készült az a videó, amelyik a matematika szerepéről szól a bennünket körülvevő világban. Ez is megtalálható a SIAM NEWS honlapján, de felkerült már a youtube-ra is.

Mindazokat, akik mostani számunkban, az Érintő 2017. decemberi számában megnézték Yves Meyer fényképét, bizonyára érdekli a tudomany.blog.hu-n megjelent Hullámocskák című bejegyzés is. Nagyon érdekes cikkek olvashatók egyébként is a tudományos gourmandoknak szóló honlapon, mi különösen ajánljuk a matematika rovatát.

2017. márciusi számunkban jelent meg Pyber László cikke, ehhez kapcsolódóan találhatnak egy írást a Magyar Tudományos Akadémia oldalán.

A szerk.

☐ alkalmazott matematika ☐ matematikus-karrier

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Vancsó Ödön 2017. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

VTN 2017 — Varga Tamás Módszertani Napok huszonkilencedszer

Idén is megrendezésre került a Varga Tamás matematika szakmódszertani konferencia, 2017. november 10-11-én (pénteken és szombaton) a Varga Tamás Tanítványainak Emlékalapítványa, a Bolyai János Matematikai Társulat és az ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központja közös rendezvényeként. A helyszín az ELTE TTK déli épületében volt. Péntek délután a szokásoknak megfelelően plenáris előadások voltak, ezúttal az Oktatási Hivatalból Szepesi Ildikó (a Köznevelési Mérés Értékelés Osztály mb. osztályvezetője) a matematika területéről, és Ostorics László, a PISA nemzetközi projektvezetője általában a PISA mérésekről tartott előadást, majd válaszoltak a kérdésekre. A vitát Fried Katalin és Korándi József moderálta.

Plenáris ülés: Szepesi Ildikó és Ostrorics László

Ezután Vancsó Ödön számolt be a Magyar Tudományos Akadémia Szakmódszertani pályázatán nyertes Korszerű Komplex Matematikaoktatás projekt első évének eredményeiről. A részleteket illetően lásd a projekt saját honlapját és az MTA akadémiai honlapját.

Az előadást követően az ELTE Matematikus doktori iskolájának didaktika programjára felvett három doktoranduszszal beszélgetett a pódiumon Vancsó Ödön. Ennek az adott aktualitást, hogy mindhárman — Kiss Anna, Varga Eszter és Svitek Szilárd — részt vesznek majd az MTA-projekt kutatásaiban. Három kérdéssel foglalkoztak:

- Hogyan látják az értékes magyar matematikatanítási tradíciók — köztük a felfedeztető matematikaoktatás és a Varga Tamás örökség — helyzetét az általuk tanított korosztályban?
- Mi motiválta a doktori programra jelentkezésüket?
- Véleményük szerint segíthet-e a sikeres tanári gyakorlatban egy ilyen képzés?

Ezután a hagyományoknak megfelelően kiosztásra került a Varga Tamás Emlékdíj és annak Junior változata. Az idén a díjat *Jakucs Erika*, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium matematikatanára nyerte el, ami — a laudációkból is kiderült — igazán megérdemelt és már nagyon időszerű volt. A Junior díjat *Katona Dániel*, a Veres Péter Gimnázium tanára és a matematika-didaktika programra első körben (2016-ban) felvett doktorandusza nyerte. Őt Vásárhelyi Éva és Szmerka Gergely méltatta. A díjakat az anyagi támogatást évek óta biztosító Appel György személyesen adta át. A díjazottak tiszteletére adott fogadással ért véget az első napi program.

Szombaton két plenáris előadással indult a nap: először Krajcsi Attila az algoritmikus gondolkodásról, majd Ambrus Gabriella „Tanulói gondolkodás és a valóság" címmel tartott előadást a fent említett akadémiai projekt keretében folyó kutatásaikról.

Ezután szekciókban folyt tovább a program: az angol nyelvű szekció volt talán a legnépesebb, de a szokásos Tanítói klub sem maradt el tőle sokkal. Ezalatt zajlott Török Judit és Fried Katalin vezetésével a részt vevő diákoknak szóló program.

Angol nyelvű szekció: előadó Molnár Emil, szekcióvezető Munkácsy Katalin

Délután két szekciót is tartottak, az egyiket általános témákban, míg a másikat az informatikát a matematika órán használók számára.

A teljes program és egyes előadások anyagai megtekinthetők a következő honlapon: `http://mathdid.elte.hu`, a Varga Tamás Módszertani napok menüpont kiválasztása után a VTN 2017 címen.

Egy meglepetéssel zárult a nap: Varga János székesfehérvári kolléga először játszotta le a matematikatanárok nyilvánossága előtt Neumann János egyetlen magyar nyelvű interjúját, amely nem sokkal halála előtt, 1955-ben az akkori Amerika Hangja rádióban hangzott el.

A VTN zárásaként elhangzott, hogy két jubileumi év következik, amelyekre már most invitáljuk a matematikatanárok és a matematika-didaktikusok közösségét. 2018-ban lesz a 30. Varga Tamás Napok és 2019-ben lesz Varga Tamás születésének 100-ik évfordulója. Ez utóbbi megünneplésére az Akadémián egy nagy nemzetközi matematika-didaktikai konferencia szerveződik, és ennek folytatása lesz a 31. VTN az ELTE-n. Az első esemény időpontja 2018. november 9-10. (péntek szombat), a nemzetközi konferencia 2019. november 6-tól 8-ig fog tartani, és ezt követi majd 8-9-én a szokásosnál ünnepibb jellegű Varga Tamás Napok a hazai tanárok részére. Kérjük, hogy az érdeklődők már most írják be naptárukba az időpontokat. Mindkét matematikai szakmódszertani kutatócsoport megjelenik majd ezeken a konferenciákon.

Vancsó Ödön,
egyetemi docens, házigazda
ELTE Matematikatanítási és Módszertani Központ

díjazottak beszámolók konferencia

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

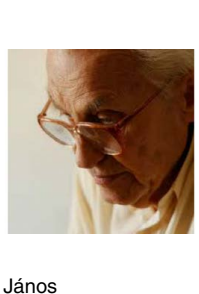
AZ **INTERJÚ-PORTRÉ** MENÜPONT JÓL VAGY KEVÉSBÉ ISMERT MATEMATIKUSOKAT, VAGY OLYAN, EGYKOR MATEMATIKUSKÉNT VÉGZETTEKET SZERETNE BEMUTATNI, AKIK MA MÁS SZAKMA ELISMERT KÉPVISELŐI, SPORTOLÓK, MŰVÉSZEK...(ROVATSZERKESZTŐ: *OLÁH VERA*.)

Illés Tibor, Romsics Erzsébet

2017. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Újra tanulni, újat tanulni! — Interjú dr. Kelemen Bélával

Az interjút *Kelemen Bélával*, a MOL Csoport Üzleti Kiválóság Igazgatójával, a Műegyetem címzetes egyetemi tanárával *Illés Tibor* készítette. Kelemen Béla rendszeres meghívott előadója a Műegyetemnek és a Veszprémi Pannon Egyetemnek. Az interjúban karrierjéről és sikerének titkáról mesél. A cikket lejegyezte és szerkesztette *Romsics Erzsébet*, lektorálták Illés Tibor és Kelemen Béla.



Tóth János

2017. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Máté László

Máté László Szokatlan gondolatok geometriai sorozatokról című írása egy évvel ezelőtti számunkban jelent meg. Bevezető gondolata ez volt: ...néhány példán keresztül azt szeretném megmutatni, hogy ha egy geometriai sorozatot végtelen sorozattá terjesztünk ki, akkor ezzel a látszólag kis lépéssel nagymértékben tágíthatjuk diákjaink matematikai szemléletét. Ez a kiterjesztés az első lépés lehet a határérték fogalma felé és megadhatja azt az élményt, amit a végtelen kicsi és a végtelen nagy világa nyújt a megszokott makrovilágunkkal szemben.

Besenyei Ádám, Faragó István

2017. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Búcsú Mezei Istvántól

„Vándor, lábaid nyoma az út s nem más. Vándor, nincs út, az út maga a vándorlás. Vándorlásból születik az út, s visszatekintvén látszik az ösvény, melyet senki sem taposhat többé. Vándor, nincs út, csak barázdák a víz tetején” (*Antonio Machado*) Az ELTE Matematikai Intézetének honlapján november elején jelent meg a hír: Fájdalommal és megrendüléssel tudatjuk, hogy szeretett és tisztelt kollégánk, *Mezei István* feladva a betegségével folytatott egyenlőtlen küzdelmet, 2017. november 4-én eltávozott közülünk. *Besenyei Ádám* és *Faragó István* nekrológját az Érintőben is közöljük.

Oláh Vera

2017. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Arckép helyett

2017 szeptemberében különös, továbbított e-mail jutott el hozzám, egy meghívó Faragó Andor, Faragó István és Faragó György emlékére botlatókő elhelyezésére a Bartók Béla út 52. számú ház előtti járdán. Bevallom őszintén, nem tudtam, mi is az a botlatókő. A wikipédiához fordulva kiderült, hogy Gunter Demnig német szobrászművész alkotásai azok a holokauszt áldozatai előtt tisztelgő, macskakőre rögzített 10 × 10 centiméteres réz emléktáblák, amelyeket az áldozatok egykori lakhelye előtt helyeznek el a járdába süllyesztve.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Illés Tibor, Romsics Erzsébet 2017. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Újra tanulni, újat tanulni! — Interjú dr. Kelemen Bélával

Az interjút *Kelemen Bélával*, a MOL Csoport Üzleti Kiválóság Igazgatójával, a Műegyetem címzetes egyetemi tanárával *Illés Tibor* készítette. Kelemen Béla rendszeres meghívott előadója a Műegyetemnek és a Veszprémi Pannon Egyetemnek. Az interjúban karrierjéről és sikerének titkáról mesél.

— I.T.: *Régóta ismerjük egymást, hiszen először 1981-ben találkoztunk, amikor én még gimnáziumi tanuló voltam, Te pedig a bátyám évfolyamtársa a BME Vegyészmérnöki Karán. Emlékszem — később — érdekes beszélgetéseket folytattunk matematikáról, sportról. Mesélted, hogy Ódor Tiborral, aki az évfolyamtársam volt az ELTE matematikus szakán, közösen jártatok Győrben matematika olimpia előkészítőre. Számomra akkor úgy tűnt, hogy Neked a sport és a matematika valahogyan összefonódtak az életedben. Elmesélnéd, hogyan is volt ez?*

— K.B.: Középiskolában fociztam, s mint nagyon sok fiúnak nekem is a futball jelentette az életet. A matematika csak amolyan furcsa hobbinak számított, hiszen orosz tagozatos osztályba jártam a gimnáziumba. A foci volt a mindenem, és a tanulás helyett is inkább rúgtam a bőrt. Természetesen ennek az lett a következménye, hogy időnként egy-egy gyengébb osztályzat is becsúszott. Ezt elégelte meg az édesanyám, és eltiltott a focitól. Közölte velem, hogy „fiam neked kitűnőnek kell lenned, mert ha nem leszel az, akkor az csak a trehányságod és a befektetett munka hiánya miatt lesz, úgyhogy ha focizni akarsz, akkor be kell bizonyítanod, hogy nemcsak okos vagy, hanem szorgalmas és eredményes is. Az, hogy okos vagy, az nem a te érdemed, de az eredmény már csak rajtad múlik.” Neki az volt a világos elvárása, hogy kitűnőnek kell lennem, vagy legalábbis ahhoz nagyon közeli eredményt kell elérnem.

— I.T.: *Emlékszem arra is, hogy az egyetemi évfolyamodon is a legjobbak közé tartoztál.*

— K.B.: Amikor szokásoddá válik beletenni a munkát, energiát, annak érdekében, hogy kijöjjön az eredmény, akkor a folyamatos, céltudatos munka az életed részévé válik. A tanulásban és a sportban is a tökéletes eredmény elérésére törekedtem mindig. A sport és a tanulás számomra ugyanazt jelentették, a kihívást a minél jobb teljesítmény elérése érdekében. Szóval a kettő erősítette és kiegészítette egymást. A sport egy alapvetően kompetitív közeg, ráadásul én kapus voltam, ahol vagy te védesz, vagy senki. Nem arról van szó, hogy van 11 hely, és pályázik rá 15-16 ember, és jó esélyed van, hogy valahová bekerülsz. Itt egy kapu van, és vagy te védesz, vagy valaki más, hiszen minimum ketten vannak kapusok, úgyhogy meg kellett küzdeni a helyemért. Én a komáromi csapatban játszottam. A város legnevezetesebb játékosa az Aranycsapat és a Barcelona egykori sztárja Czibor Zoltán volt. Így nem csoda, hogy minden gyerek futballozni akart. Én is.

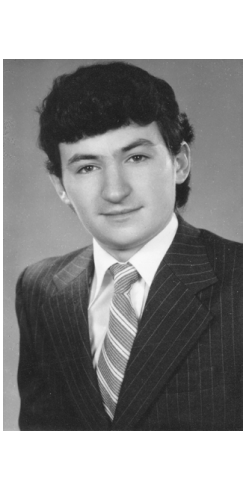
16 évesen a KAC első csapatában (középső sor jobbról a negyedik zöld mezben)

— I.T.: *Melyik gimnáziumban végeztél?*

— K.B.: A komáromi Jókai Mór Gimnáziumban. Én Tatára akartam menni az Eötvösbe, mert az volt az elit gimnázium abban az időben Komárom megyében, és még közel is volt. De anyám megint közbeszólt és azt mondta, „Fiam, az az idő, amit utazással töltesz, kárba vész, ha ehelyett tanulsz, akkor egy másik gimnáziumban is ugyanolyan jó lehetsz”. Meg kell mondjam, igaza volt. Ez persze óriási szerencsével párosult, mert egy olyan osztályfőnököt kaptunk Sebestyén Józsefné személyében, aki mindent megtett azért, hogy mi ketten Gombival — Gombás László osztálytársam, aki szintén nagyon jó matematikai érzékkel bírt és később mat.-fiz.-en végzett az ELTE-n — minél jobban fejlődjünk. Az osztályfőnökünk matematika-fizika szakos tanár létére kapott egy orosz tagozatos osztályt. Nem kell mondanom, hogy az orosz tagozaton a reál affinitás viszonylag alacsony volt, de Sebi néni — mi csak hívtuk magunk között — mindent beleadott. Azt hiszem a nagyon sok jó tanárom közül ő volt az igazi, a nagybetűs Tanárom.

— I.T.: *Tanárod munkája és példája benned is maradandó nyomot hagyott a matematika és természettudomány iránti vonzalom terén.*

— K.B.: Én úgy hiszem, hogy neki köszönhetem azt, hogy most itt vagyok. Több szempontból is óriási szerepe volt ebben. A matematika oktatási stílusa rendkívül szisztematikus volt, a mai napig őrzöm azokat a füzeteket, amikben a feladatokat kidolgoztam. Ebben az osztályban nagyjából úgy működtünk, hogy ő ugyanannyit készült a matematika szakkörre, mint amennyit mi a feladat megoldással foglalkoztunk. Ez már neki is nagyon komoly kihívást jelentett. Harmadik osztályos voltam, amikor országos szinten kialakítottak egy matematika olimpiai előkészítő rendszert, ha jól emlékszem, ebben Reiman István játszott nagy szerepet. 10 megyei központban szerveztek egész napos szakköröket, és bennünket is Gombás barátommal meghívtak Győrbe, a Czapáry Endre által vezetett szakkörbe. Czapáry tanár úr — ahogy mi hívtuk Czapi bácsi — a győri Révai Miklós Gimnázium matematika tanára, példamutató matematika tanár volt, igazi fanatikus, aki csak azért élt, hogy mi matematikából jobbak legyünk. Az olimpiai előkészítőben találkoztam többek közt Ódor Tibivel is.



Az érettségi évében, a KöMaL legjobbjainak tablóján

— I.T.: *Hogy kerültél a Műegyetemre?*

— K.B.: 18 éves fejjel fogalmam sem volt, mi akarok lenni. Nem akartam matematikus lenni, mert azt gondoltam, hogy ücsörögni és mindenféle matematikai dolgokon gondolkodni nem nekem való, annál sokkal mozgékonyabb voltam. Orvos nem akartam lenni, mert a vértől rosszul lettem. Rajztanár vagy gépészmérnök sem, mert nem tudtam rajzolni. És így kizárásos alapon sodródtam a kémia felé, és végül vegyészmérnöknek jelentkeztem. A Veszprémi Egyetemre akartam menni, az osztályfőnököm azonban közbeszólt, s azt mondta, hogy nekem Budapesten a helyem, ő nem írja alá a veszprémi jelentkezésemet. Akkor még így működött a rendszer, nem úgy, mint ma, hogy mindenki szabadon csinálhat, amit akar. Ennek köszönhetem, hogy Műegyetemista lettem. Köszönet érte, igaza volt.

— I.T.: *A Műegyetemen sem a legegyszerűbb dolgot választottad ki, hiszen a Fizikai Kémia Tanszéken kötöttél ki.*

— K.B.: Ez a véletlen műve volt. Amikor elsősként bekerültem a kollégiumba, kaptam egy negyedéves szobatársat. A haverjának is elsős volt a szobatársa, és cserélni akartak, hogy ők egy szobában legyenek. Két hét alatt elintézték a cserét, de mi közben összebarátkoztunk. Kiderült, hogy ő TDK munkát végez a Fizikai Kémia Tanszéken a Spektroszkópia Csoportban. Akkor azt sem tudtam, hogy eszik-e vagy isszák a spektroszkópiát, de ez volt az első téma, ami szembejött velem a Műegyetemen. Amikor túljutottam az első évemen, és a kritikus tárgyakból látszott, hogy nem szerepeltem rosszul, akkor előjött a TDK, a spektroszkópia, és így kerültem a fizikai kémiával kapcsolatba.

A BME Martos Flóra kollégium kosárlabdacsapatának edzőtáborában, Rijekában. Az álló sorban jobbról a második Kelemen Béla, a guggoló sor közepén Illés Zoltán.

— I.T.: *Az egyetemi matek nagyon könnyű lehetett neked a gimnáziumi képzésed után.*

— K.B.: Nekem nem volt különösebb problémám a matematikával, de sokan megszenvedtek vele. Két féléven keresztül tartott az egyetemi matematika képzésünk, és dr. Nagy Béla volt az előadónk. A baj az volt, hogy elvont és a gyakorlattól nagyon távol álló matematikát tanított. Tele volt bizonyításokkal és kevésbé elképzelhető dolgokkal. Sajnos az előadásokat a gyakorlatok sem támogatták meg abból a szempontból, hogy az anyag megfoghatóvá váljon. Nyilván, amikor elkezdett a Fourier-transzformációról beszélni szárazon, az egy „hogy kerül a csizma az asztalra” téma. Amikor a spektroszkópiában szembejött velem a Fourier-transzformációs spektroszkópia, hát akkor megértettem, hogy mire való és mire kell.

— I.T.: *Aztán diplomázás után végül kikötöttél a Fizikai Kémia Tanszéken.*

— K.B.: A vegyészmérnök képzés már akkor is két lépcsőben zajlott, csak nem bolognai rendszernek hívták, hanem két egymásra épülő, üzemmérnök (3 év) és okleveles mérnök képzésnek (2 év). A legjobbaknak beindítottak egy egyéni tanterv szerinti képzést a második fokozaton, és én is a kiválasztottak közé kerültem. Nyilván a spektroszkópia volt a központi témám, sőt ekkor már demonstrátorként kezdtem oktatni a fizikai kémiát. Különböző méréseket én vezettem negyedévesként, ötödévesként, amiért némi pénzt is kaptam. A spektroszkópia mellett mágneses magrezonanciával. meg hasonlókkal kezdtem foglalkozni. Amikor végeztem 1986-ban, akkor elég kézenfekvő volt számomra, hogy ott maradok az egyetemen.

— I.T.: *Az egyetemi karrier egy egészen vonzó dolog volt akkoriban? Gyorsan elkészítetted az egyetemi doktoridat?*

— K.B.: Kétféle ember maradt ott akkor az egyetemen. Akik nagyon jók voltak a tanulmányaikban, vagy KISZ-, illetve pártvonalon megfelelő funkciót tudtak betölteni. Az 1980-as évek közepén még nem volt a maihoz hasonló intézményesített PhD rendszer, de el lehetett jutni az egyetemi doktorihoz, úgy is, hogy közben valamelyik tanszéken tanársegédként dolgoztál. Bevallom, hogy nekem csak az egyetemi állásomról való lemondás után sikerült befejeznem az egyetemi doktorimat. Úgy történt, hogy az egyetemen eltöltöttem még 5 évet, emellett nevelőtanár voltam a kollégiumban. Szóval élveztem az életet, imádtam oktatni mind az egyetemen, mind a kollégiumban. De aztán váltani kellett, az idő eljárt fölöttem is. Először kiköltöztem a kollégiumból, rá egy évre már családom volt, jött a rendszerváltás, és végül elhagytam az egyetemet. Miért hagytam ott az egyetemi létet? Akik azokban a '89-'90-'91-es időkben éltek, azok számára a politikai és gazdasági változások szinte felfoghatatlan méreteket öltöttek. Különösen a '70-es, '80-as évek után ez a változás gyakorlatilag fenekestül fordította fel Magyarországot, és ez engem is drámaian érintett. Valójában megteremtette a lehetőséget, hogy mindenki az lehet, ami szeretne, csak tenni kell érte.

— I.T.: *Szóval a Műegyetemről távoztál, és hol kaptál munkát ezután?*

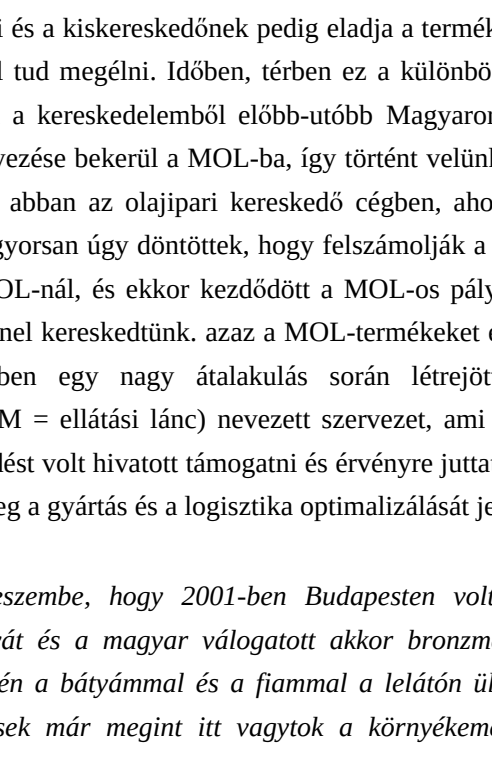
— K.B.: Egy Allcom nevű amerikai-magyar vegyesvállalathoz mentem. Be kell vallanom, tulajdonképpen „kilóra megvettek”. Ugyan én tudós, kutató szerettem volna lenni, és az első évek alapján ez nagyon tetszett is. Nem emlékszem a számokra, hogy akkor mennyi volt az egyetemi fizetésem, egyet tudok, hogy orvos feleségemmel lakást akartunk venni, és hitelt csak olyan mértékben vehettünk fel, hogy a törlesztés nem haladhatta meg a jövedelmünk 33%-át. Ha jól emlékszem, ez kb. $13\,000$ Ft volt. S akkor úgy döntöttem, ha valaki $100\,000$ Ft-ot fizet nekem havonta — ami akkor nagy fizetésnek számított — akkor teljesen mindegy, hogy milyen munkát kell végeznem, feladom a kutatói ambícióimat. Szóval kaptam egy ilyen ajánlatot, otthagytam az egyetemi tanársegédi állásomat, és végül megvettük az első közös lakásunkat Kőbányán.

— I.T.: *Így kerültél az olajiparral kapcsolatba?*

— K.B.: Igen, mert a cég, ahova elszegődtem, olajtermék-kereskedelemmel foglalkozott. Az Allcom egy 50-50%-ban amerikai és magyar tulajdonú vegyesvállalat volt, amit a rendszerváltás után hoztak létre az amerikai Phibro és a magyar állami tulajdonú Minerálimpex. A cél az volt, hogy orosz kőolajat feldolgozva/feldolgoztatva a nyugati piacra tudjunk termékeket eladni. Azt hiszem nagyon jó iskola volt, ott tanultam meg az igazi üzleti gondolkodást és azt, hogy profit nélkül nem lehet élni. A filozófia egyszerű volt ebben a vállalatban. Január elsején mintha a vállalat pénztárcájából kivették volna az éves költséget, azaz a példa kedvéért mondjuk mínusz 100 millió forinton áll a kassza, amit nekünk hónapról hónapra kell feltölteni a nyereséges tevékenységünkkel. Ha májusban elértük a nullát, akkor jó évünk lett, ha ez csak októberre sikerült, akkor „felkopott az állunk”, mert nem kaptunk prémiumot. A prémium a cég nyereségének kb. 10%-át tette ki, és összemérhető volt az egyének éves fizetésével. Ez ma általánosan bevett modell a gazdasági életben, de 1992-ben nóvumnak számított Magyarországon.

— I.T.: *Nagyon érdekes és tanulságos volt az életed első közel 30 éve, de most ugorjunk az időben. Először is gratulálni szeretnék, hogy az Európai Kőolajfinomítók Szövetsége az elnökévé választott 2017. június 8-án. 1992-ben indult az olajipari pályafutásod, és 2017-re ide jutottál. Nyilván, egy ilyen pályafutásnak sok csúcsa volt, és ez az egyik, hogy egy nemzetközi szervezet megválasztott az elnökévé. Ez azt jelenti, hogy külföldi kollégák, üzleti ellenfelek is elismerik a munkádat és tisztelnek, megbecsülnek Téged.*

— K.B.: Két futballista nem szakmailag ellenfél, csak a bajnokságban ellenfelek, egyébként mindkettőnek közös érdeke, hogy maga a futball fejlődjön, népszerű legyen, a közönség minél jobban szórakozzon. És persze a focit válassza a közönség, ne a Formula 1-t vagy más sportágakat. E tekintetben a kőolajipar is olyan, mint a foci. Magát a szövetséget is azért hozták létre és azért dolgozik, hogy a kőolaj-feldolgozásnak illetve a kőolajtermékeknek a vásárlók piacán meg legyen a helye, egyenlő feltételeket kapjon mindenki a versenytársakkal szemben mind a gyártásban, mind az értékesítésben. Ne érje diszkriminatív megkülönböztetés az iparágat és a terméket, például a többi energiahordozóval és az alternatív megoldásokkal szemben. Ennek az európai szervezetnek körülbelül 40 tagvállalata van. 100%-ban lefedi az európai finomítókat, és nagyjából 75%-ban az európai üzemanyag-forgalmazó cégeket. Két fontos területe közül az egyik egy technológiai környezetvédelmi terület, ahol a tagvállalatok együttműködnek nem elsősorban technológiai fejlesztésekben, hanem környezetvédelmi, levegőkémiai, és sok más témában. Összefognak azért, hogy minél kisebb károkat és minél kisebb terhelést okozzon maga az ipar a környezetnek, a levegőnek, a víznek, és legfőképpen az embereknek. A másik pedig a lobbitevékenység, amelynek célja, hogy az európai szabályozás egyenlő feltételeket teremtsen a versenyben. Szeretnénk elérni, hogy az európai döntéshozók ne a pillanatnyi divatnak és politikailag népszerű szlogeneknek felülve módosítsanak a szabályokon, hanem technológiasemleges és költséghatékony irányba tereljék a versenyt, s a versenypályán győzzön a jobbik. És természetesen az energiaiparban ne hagyják figyelmen kívül a természettudományok alaptörvényeit, mondjuk az energiamegmaradás törvényét.



Slovnaft finomítóban egy üzemi reaktor tetején 2016-ban

— I.T.: *Tehát ez a 25 éves olajipari karriered egyik állomása. Már említettél néhány kulcsszót, ami igazából utal arra, hogy miért is beszélgetünk. Kiderült, hogy a termelés és az értékesítés mögött matematikai modellek állnak. Minket is összeköt az operációkutatás. Még mindig emlékszem arra, amikor azt mondtad, hogy „Tibor, engem nem érdekel az aktuális megoldásod erre a feladatra, adjál egy nagyon jó megoldást, ami stabil és fizikailag megvalósítható”. Sokat beszélgettünk arról, hogy mit értesz stabilitás alatt. Legyen stabil: azalatt az értetted, hogy ha megváltoznak az árak, alapanyag- vagy termékárak és egyebek, akkor azzal arányosan változzanak a kimeneti paraméterek, elsősorban a gyártandó mennyiségek is. Nagyon érdekes számomra a szemléleted, hogy nem az optimum érdekes, hanem a stabil, jó megoldás, ami kivitelezhető. Hol és mikor találkoztál újra a matematikával, mint olajipari vezető, és milyen feladatokat láttál el ezzel kapcsolatban?*

— K.B.: Belecsöppentem az olajipari értéklánc értékesítési végébe, mint kereskedő, aki a termelőtől megveszi és a kiskereskedőnek pedig eladja a terméket, és a vétel és eladás közötti különbözetből tud megélni. Időben, térben ez a különbözet mutatja és méri az eredményüket. Aztán a kereskedelemből előbb-utóbb Magyarország minden olajipari cége vagy kezdeményezése bekerül a MOL-ba, így történt velünk is. A MOL 1997-ben tulajdonrészt szerzett abban az olajipari kereskedő cégben, ahol dolgoztam. A másik tulajdonossal együtt gyorsan úgy döntöttek, hogy felszámolják a cégünk tevékenységét. Így kötöttem ki a MOL-nál, és ekkor kezdődött a MOL-os pályafutásom. Először PB gázzal, majd bitumennel kereskedtünk. azaz a MOL-termékeket értékesítettük a piacon. A MOL-ban 2001-ben egy nagy átalakulás során létrejött egy Supply Chain Managementnek (SCM = ellátási lánc) nevezett szervezet, ami tulajdonképpen ezt az értékláncalapú működést volt hivatott támogatni és érvényre juttatni. Egyéb iparágakban ez már létezett, és főleg a gyártás és a logisztika optimalizálását jelentette.

— I.T.: *Az jutott eszembe, hogy 2001-ben Budapesten volt a vízilabda Európa bajnokság és a horvát és a magyar válogatott akkor bronzmérkőzést játszott, amit megnyertünk. Akkor én a bátyámmal és a fiammal a lelátón ültem, és te a félidőben leszóltál, hogy „Illések már megint itt vagytok a környékemen?” Nagyon érdekes dolgokról beszélgettünk, a sportról és a múltról, és mielőtt elváltunk volna azt mondtad, hogy „Te figyelj, itt a névjegykártyám. Az egyik beosztottam állandóan matematikus után kiált”. A doktori témavezetőm és a diplomamunka vezetőm volt Terlaky Tamás, aki a '70-es évek végén ott dolgozott a MOL elődjénél, és arról mesélt, hogy azok, akik dolgoztak Vele, még 10 vagy 15 évvel később is beszéltek Terlaky Tamásról és nagyon hasznos operációkutatási tudásáról. Megkérdezted, ebben a stílusban, hogy „még mindig azzal a hülyeséggel foglalkozol, hogy operációkutatás?” Azóta, 2001 óta többször dolgoztunk a MOL számára, és különböző operációkutatási, a termeléstervezéssel összefüggő kérdésekkel foglalkoztunk. Ennyire égető volt a matematikus jelenléte? Mert úgy érzem, amikor létrehoztátok az ellátásilánc-csoportot, akkor minőségileg magasabb szintre emeltétek a cég működését, irányítását. A matematika alkalmazása egy eszköz volt a vállalat céljai megvalósítása érdekében, nem feltétlenül közvetlenül, hanem a szoftvereken keresztül.*

— K.B.: Én a történetre úgy emlékszem, hogy együtt laktunk a bátyáddal a Martos kollégiumban még egyetemistaként. Onnan ismertük egymást, és valóban egy vízilabda meccsen találkoztam a bátyáddal — már nem emlékszem melyik meccsen, — ő mondta, hogy te matematikus vagy. Később, amikor már a MOL-ban beszélgettünk, számomra akkor derült ki, hogy te Terlaky-tanítvány vagy, és Tamás utóda az ELTE Operációkutatási Tanszékén. Maga az olajipari termeléstervezés elvi modellezése a '70-es, '80-as években kezdődött a folyamatos működést igénylő iparágakban, mint a petrolkémia és az olajipar is. Terlaky Tamás — ma Pennsylvaniában a betlehemi egyetem professzora — volt az, aki segítette a mérnököket az operációkutatási modellek felépítésében és megoldásában az akkori informatikai lehetőségek figyelembevételével. Miután a MOL-ban létrehoztuk a fent nevezett SCM csapatot, onnét kezdve intézményesített formában kellett a vállalatot úgy átalakítani, hogy értékláncalapú legyen a működése, és nem szétdaraboltan a termelés vagy kőolajfinomítás, a logisztika vagy a kereskedelem érdekeinek a figyelembevételével, hanem az egész értékláncot tekintve kellett optimalizálni a rendszert. Ahhoz, hogy ez a fajta filozófia érvényre jusson, kellett egy magasan pozícionált szervezet is. A szervezettől persze még a filozófia nem fog érvényre jutni, ahhoz a termelést, a logisztikát, a kereskedelmet is tréningezni kellett, egyszerűen egészen máshogy kellett gondolkodni. Az induláskor még nem tudtam, hogy milyen mértékben kell nekünk matematikus támogatás, de fixa ideám volt, hogy meg kell értenünk, hogy mi van az ellátási lánc teljes folyamatában, hogyan kell ezt a munkát szervezni és irányítani a MOL Csoport szintjén, és ne csak fogjuk a kalapácsot — ami esetünkben egy igen drága, amerikai szoftver volt — hogy beverjük a szöget a falba. Legalább azt szerettem volna elérni, hogy értsük meg, hogy a kalapács hogyan működik. Persze, ahogyan egyre inkább teljessé tettük az ellátásilánc-modellünket, elindultunk egy komplexebb irányba, egyre inkább lényegessé vált, hogy megértsük a modelleket és a megoldó algoritmusok működését is, nem pedig csak használjuk a szoftvert, mint egy fekete dobozt. Ehhez kellett a matematikus, speciális operációkutatási ismeretekkel. Kideríteni, milyen modellt hogyan old meg a szoftver. Egyértelmű, hogy számítógépes eszköz nélkül az egész elmélet csupán egy szép elmélet marad. Ahhoz, hogy az egész értékláncban addig önmagát a legfontosabb elemnek tartó termelés vezetése rájöjjön, hogy mit kell termelni, azt — a cég szempontjából — nem ő tudja a legjobban meghatározni, nekünk kellett bizonyítani. Világos volt azonnal, hogy az ellátási lánc egészét az alapanyag-beszerzéstől a termékek piacokon történő eladásáig egységes rendszerben kell kezelni. Ehhez olyan matematikai megalapozottságú, jól működő és megbízható eredményt adó eszköz (szoftver) kellett, amit az olajipari szakma referenciaként elfogad. Az olajiparban — Basil Joffee munkássága óta — vagyis a 80-as évek elejétől kezdve fejlesztenek egy ilyen eszközt, amit ma PIMS néven ismernek. A PIMS napi használata, az egész ellátási lánc mérete és bonyolultsága miatt nélkülözhetetlenné vált. Lokális megoldások helyett, MOL Csoport szintű globális megoldásokat kellett produkálni. A PIMS volt alkalmas arra, hogy a tényeket, az adatokat, a rendelkezésre álló információkat felhasználva, a szakértők modelljei alapján elkészítse azt az operációkutatási modellt, amelyet szekvenciális lineáris programozási módszerrel megoldva kimutassa, hogy mit kellene termelni, mert úgy néz ki, hogy ez fizet a legjobban. Persze ez a kép, ami a matematika jelentőségét és nélkülözhetetlenségét mutatja, több éves együttműködésünk alapján tisztult le ennyire.

— I.T.: *Emlékszem a kezdetekre, 2002 januárjában egy féléves előkészítő munka után tartottam egy operációkutatási továbbképzést az ellátási lánc menedzsment szakértőinek. Ez után egy újabb együttműködés keretében sikerült tisztáznunk, hogy milyen modelleket és hogyan old meg a PIMS. 2004-től kezdve az ELTE folytonos optimalizálással foglalkozó kutatócsoport tagjaival közösen, többször dolgoztunk Nektek, a MOL Csoport ellátási lánc csoportjának, különböző modellezési, érzékenységvizsgálati és egyéb a termelés tervezéssel összefüggő operációkutatási kérdéseken. Nem tudom, hogy emlékszel-e arra a kijelentésedre, amikor azt mondtad, hogy „kellenének matematikusok, akik itt egyedül is, a Te irányításod nélkül tudnának dolgozni”. Ezután több beszélgetés alatt kiderítettük, hogy Neked nem klasszikusan képzett matematikusok kellenek, hanem olyan szakemberek, akik hárman szaktudással rendelkeznek, azaz kiváló operációkutatási, számítástechnikai és folyamatszabályozási ismeretekkel. Sőt az is elvárás, hogy ezekből legalább kettőt profi szinten tudjanak. Egyszer az irodádban találtuk ki, hogy kellene egy ilyen képzést indítani, és végül a veszprémiekkel elindítottátok a PIMS Akadémiát.*

— K.B.: Kétfelé választanám a dolgot. Kellett nekünk matematikus/operációkutató is, azt én úgy értettem, — és ma is úgy értem — hogy olyan szakértő, aki megérti a gyakorlati problémákat, és át tudja ültetni a matematika nyelvére. Szükséges, hogy az ellátási lánccal foglalkozó csapat rendelkezzen ilyen profilú szakemberrel. A PIMS Akadémia egy kicsit más történet. A MOL Csoport termelését, értékesítését stb. leíró modell egyre bonyolultabb lett, egyre több elemet tartalmazott, egyre komplexebbé vált az a való világ, amit át kellett ültetni a modellbe, egyre speciálisabb tudást igényelt azoktól, akik a PIMS-et használták. Komoly gondot okozott a megfelelő ismeretekkel és képességekkel rendelkező kollégák verbuválása és betanítása. Egyszóval, gond volt a szakértői utánpótlással. Ez a fajta karrierút a 2000-es évek fiatalságának nem volt eléggé vonzó. Senki nem akart kizárólag operációkutatási modellek megoldásával foglalkozni, vagy ahogyan mi mondjuk, lineáris programozást futtatni. Ebben az időszakban azt gondoltuk, hogy egyféleképpen lehet ennek a nagyon fontos feladatnak az elvégzését vonzóvá tenni, ha dinamikussá tesszük a karrierutat. A speciális tudás gyors, célirányos megszerzése, 3-5 év aktív optimalizálási tevékenység, majd új kihívások egyéb üzleti területeken. Ez csak akkor tehető meg, ha folyamatos az utánpótlás és a képzés. Ugyan a továbblépő kolléga speciális PIMS tudása kvázi elveszik, de az optimálásban megszerzett globális ismeretei rendkívül hasznosak az értékláncalapú gondolkodás elmélyítésében az üzlet egyéb területein.

Mi házon belül több okból sem tudtuk megvalósítani a képzést. Egyrészt mindig minden fontosabbnak tűnt, mint kiképezni egy új embert, másrészt azok, akik tanítottak volna, sokkal inkább azt érezték, hogy az ő székükre lesz majd veszélyes az illető, és nem hagyták, hogy az újonc pl. hozzányúljon a modellhez. A külső képzés így létfontosságúvá vált. Friedler Ferencék a Pannon Egyetemen elvállalták ezt a feladatot, és a kétévente indított PIMS Akadémiával hozzájárultak a szakértői gárda folyamatos megújításához. Nem kell szomorkodnod, Tibor, hogy nem az ELTE-re került a képzés, mert az operációkutatás tárgy — amelyet volt tanárod, Maros István tanított, ma pedig már a fiatal utódok oktatják — így is egy komoly nehéz tárgyként szerepel a képzésben.

— I.T.: *Maros Istvántól nemcsak az operációkutatás számítógépes módszerei tárgyat tanultam az egyetemen, hanem az első munkahelyemen, az MTA SZTAKI Alkalmazott Matematika Főosztályán ő volt az első főnököm is. Térjünk rá az operációkutatási feladatra. Ez egy több periódusos, több termelő céges operációkutatási feladat, amelynek az adatai — leginkább a gazdasági körülmények és a meglévő raktárkészletek miatt — hónapról-hónapra változnak. A méretekről is beszélhetünk: egy 6 hónapos modell az körülbelül* $50\,000 \times 300\,000$*-es méretű lineáris programozási feladatra vezet, ami igazából nem is LP, mert a modell feltételeinek 10%-a bilineáris feltétel, ahol minőségi és mennyiségi változók szorzata szerepel a feltételben, igen nehézzé téve a feladat numerikusan stabil megoldását. A modellezésen és megoldáson dolgozó szakértők munkája nagyon nehéz, állandó stresszel járó munka, hiszen rövid határidővel kell az aktuális modellt elkészíteni és a termelési tervet kiszámolni.*

— K.B.: Az operációkutatási modell-mátrixnak több millió eleme van, de ezek nagy része, közel 95%-a nulla, amiknek nincs jelentősége. A feladat méretéhez képest mindössze néhány ezer nullától eltérő számnak van jelentősége. Azok pontos megadása dönt a siker vagy sikertelenség kérdésről.

— I.T.: *Az operációkutatás szakos hallgatók az 1980-as években pontosan Maros Istvántól tanultak a strukturált, több periódusos, nagyméretű lineáris programozási feladat általad is említett jellemzőjéről, a ritkásságról. A nagyméretű, gyakorlatból származó LP feladatok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy az adataiknak mindössze a 2-3 százaléka nem nulla. A nagyméretű LP feladatokat pontosan ezért tudjuk megoldani. Ha tele volna nem nulla adattal, akkor nem tudnánk megoldani, sőt tárolni is alig.*

— K.B.: Ez bennünket nem vigasztal. De még egy fontos eleme van ennek az egész optimalizálásnak. Mindent meg lehet csinálni a modellel, a számítógéppel, a papírral, de a nap végén mégiscsak oda kell adni a vevőnek a benzint, egyébként a vállalat értelmét veszti. Ez nagyon fontos segédeszköz, nagyon fontos eleme a rendszernek. Ez segít abban, hogy jól működjünk, de nem ettől működünk.

— I.T.: *A PIMS Akadémia végül is a veszprémi egyetemen indult el, és azóta sikertörténet lett.*

— K.B.: Így igaz, ez egy tradicionális, angol nyelvű, nemzetközi posztgraduális képzés lett. Neked ebben nagy szereped volt. Arra emlékszem, hogy egy matematikai konferencián voltunk Veszprémben, amit mi azóta is szponzorálunk. Én ott találkoztam először Terlaky Tamással és Friedler Ferivel, és ugyan mi, mint MOL közel álltunk a Veszprémi Egyetem Mérnök Karához, de Feri volt az, aki mint az Informatika Kar dékánja, kapva kapott az ötleten és megvalósította. A következő év szeptemberében (2007) elindult a képzés, amelyet azóta is kétévente hirdet meg a Pannon Egyetem, s 10-15 főnek biztosít helyet.

A kezdetek óta több, mint 50-en végeztek, van közöttük, aki nemzetközi karriert futott be, és így a képzésnek nemzetközi híre is van. A végzettek 25%-a nem is a MOL-nál dolgozik már, hanem nagy nemzetközi cégeknél, mint az OMV, Shell, Shell Global Solutions, AspenTech., ami azt bizonyítja, hogy a végzősök jók, nagyon piacképes tudást kapnak.

— I.T.: *Mekkora a matematikusok részaránya ebben a képzésben? Szoktak időről-időre feltűnni matematikusok, vagy inkább vegyészmérnökök jelentkeznek?*

— K.B.: Vegyes a jelentkezők halmaza, de általában kevés a matematikus. Egy elég szigorú feltételrendszer szerint választunk ki a körülbelül 100-120 jelentkező közül 10-15 embert, aki részt vehet a képzésen. Vagyis 8-10-szeres túljelentkezés van. A PIMS Akadémia egy 1 éves posztgraduális képzés volt, a felvettek ösztöndíjat kaptak a vállalattól, illetve az egyetemtől, és ezzel bizonyos kötelezettséget vállaltak. 2013-tól a képzés egy komplexebb egység része, amely az egy év egyetem mellett egy év „on the job” gyakorlati képzést is tartalmazott. Az egyetemi képzés továbbra is a veszprémi egyetem Alkalmazott Informatikai Karán folyik. Mai munkám miatt már én is csak távolabbról követem a PIMS Akadémiát. Természetesen a fejlődés folyamatos, az idei évtől további átalakuláson megy keresztül, ma már inkább „Value Chain Academy”-nek lehetne hívni, ami az egyre erősödő értékláncalapú megközelítést tükrözi, mind formájában, mind tartalmában.

— I.T.: *Igazából sok hozzád hasonló vezetővel beszélgettem már, akik a matematikát nagyra értékelik és elismerik a matematikusok szerepét az iparban is. Általában azt mondják, hogy 15-20 mérnökre jutnia kell egy matematikusnak. Mindig meg szoktam kérdezni, hogy annak a matematikusnak ki tudjátok-e használni a képességeit? A válaszuk az, hogy a 15-20 mérnöknek mindig van olyan típusú kérdése, amihez egy matematikai gondolkodású vagy tudású ember kell. Neked erről mi a véleményed?*

— K.B.: Egy biztos, hogy a hétköznapi problémák megoldása modern eszközökkel csak úgy lehetséges, ha ezeket a problémákat le tudjuk fordítani a matematika nyelvére, a matematika eszközeivel megoldjuk, és vissza tudjuk fordítani a megoldást és a következményeket a valós folyamatokra.

— I.T.: *Ezek szerint azért a matematikus hallgatóink ne keseredjenek el, mert van számukra hely az iparban! Most így mellesleg említeném meg, hogy amikor te a Műszaki Egyetemre jártál, akkor volt egy matematikus mérnökképzés a Gépészmérnöki Karon (GPK). Ez újra elindul. A gépészmérnökök fogalmazták meg azt az igényt, hogy legyen újra matematikus mérnökképzés. A tapasztalat azt mutatja, hogy a gépészmérnök évfolyamokon, a körülbelül 350 főből van egy 15-20%-os kisebbség, aki sokkal jobban tudja a matematikát, mint a többiek. Az évfolyamból körülbelül 20 fő specializálódhat matematikus mérnöknek. Ezek a hallgatók a 18 kreditnyi matematika helyett 60 kredit matematikát tanulnak majd. A GPK vezetésnek az az elképzelése, hogy kellenek a matematikában jobban képzett emberek, és célirányosan választották ki a tárgyakat, hogy ezzel segítsék a kutatás-fejlesztési irányba a mérnököket. Talán az a filozófiájuk, hogy jobb, ha egy mérnök több matematikát tud, mint ha a matematikusnak kell elmagyarázni, hogy mi az ipari probléma. Egy matematikus mérnöknek megvan a mérnöki tudása, a matematikai hátterével több problémát tud megoldani, mint a megfelelő matematikai ismeretekkel nem rendelkező átlagos társa. Másfelől, ha matematikai szempontból nagyon nehéz a valós probléma — ami manapság már rendszeresen előfordul — akkor pedig sokkal rövidebb idő alatt magyarázhatja el a problémát egy alkalmazott matematikusnak, hiszen komoly matematikai ismeretekkel és készségekkel rendelkezik.*

— K.B.: A leglényegesebb elem, hogy a komplex probléma megoldásához több szakterület tudjon egymással kommunikálni és le tudja fordítani egyik a másik nyelvére a problémát. Ahogy a gépészmérnököknek ma sokkal több matematikát kellene tanítani, ugyanúgy több villamossággal, kémiával kéne foglalkozniuk, hogy az adott speciális feladatban képes legyen szakmai team-munkára.

— I.T.: *A BME matematikusképzésében vannak erre apró lépések. A mesterképzésen van a témalabor nevezetű tárgy, ami alatt a hallgatóink nem matematikusoktól kapnak feladatot, és a nem matematikus témavezető mellett, egy matematikus konzulenssel is megvitatják a megoldandó kérdést. Ez eléggé hatékony formája az együttműködésnek és a hallgatókat arra neveli, hogy képesek legyenek szakmai kérdésekről kommunikálni másmilyen háttérrel rendelkező szakértőkkel. Erre a BME maga megteremti a feltételeket, de értem, hogy te ennél sokkal többet szeretnél.*

— K.B.: Ha egy statikai feladatot csak bonyolult vektorrendszerrel adsz meg, akkor nagyon elvont feladatot kapsz. De ha lerajzolod, és megmutatod, hogy ezek a vektorok mik is valójában, akkor a probléma rögtön kézzelfoghatóvá válik, egy hétköznapi feladathoz fog hasonlítani. Nem mindegy, hogy a követ azért faragod, hogy templomot építs, vagy rabszolgaként követ faragsz. Nagy különbség.

— I.T.: *Zárszónak még mit szeretnél elmondani? Mi az, amit bárkinek tanácsolni tudnál, mik a legfontosabbak a sikeres karrierhez? Nyilván a matematika fontos számodra a gondolkodás miatt. A szorgalom is, amit anyukád követelt meg a focizásért cserébe a gimnáziumban, és amire szükséged volt, hogy mindezt elérd. De mi a lényege a munkásságodnak? Mi az, amit te mondanál, mit csináljon az ember, hogy jól érezze magát és sikeres legyen?*

— K.B.: Bárhol is vagy, érezd jól magad a saját bőrödben, ez csak rajtad múlik. Nem a körülmények tesznek boldoggá. A Műegyetemen tettem néhány kitérőt: a spektroszkópia egy idő után nem adott újat, ezért elmentem a mezőgazdaság-kémia analitika csoportba ipari alkalmazások megoldásán dolgozni. Később bekerültem a termodinamika csoporthoz, ahol ott volt Oláh Karcsi bácsi, akinek a mai napig egyik legnagyobb tisztelője vagyok. Sok embertől sok mindent tanulhattam, de valószínűleg tőle tanultam a legtöbbet, mind szakmában, mind a feladatokhoz való viszonyulásban. Egyszer, a sok beszélgetésünk közül az egyik során azt mondta, hogy „Béla, én nagyon szerencsés ember vagyok, mert mindig mindent elfelejtek”. Néztem nagy, kerek szemekkel, hogy „Karcsi bácsi, ez mitől szerencsés?” „Tudod, mikor elfelejtek valamit, akkor mindig tudok újra tanulni és újat tanulni”, és ez valószínűleg az élet esszenciája. Képesnek lenni újra tanulni és újat tanulni. Egy másik nagy igazság a tudomány világában, hogy az új tanok akkor kerülnek elfogadásra, ha a régi tanok hirdetői kihalnak. De nem kihalni kell, hanem újat tanulni!

— I.T.: *Nagyon szépen köszönjük a beszélgetést. Az utolsó nagyon érdekes történeteddel már címet is adtál a beszélgetésünkből készülő cikknek:* ***Újra tanulni és újat tanulni!***

A cikket lejegyezte és szerkesztette: *Romsics Erzsébet.*

A cikket lektorálta: *Illés Tibor* és *Kelemen Béla*.

alkalmazott matematika matematikus-karrier operációkutatás

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Tóth János 2017. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Máté László

Tisztelt Gyászolók, Rokonok, Barátok, Munkatársak!

Máté Lászlótól kell búcsúznunk, 92. születésnapja előtt néhány nappal. Mindig váratlan tragédiaként ér bennünket kedves ismerősünk vagy rokonunk halála, ez talán most még inkább így van: ő volt maga az állandóság, biztonság, úgy éreztük, hogy számos betegsége és magas életkora ellenére örökké fog élni. Az Egyetemen eltöltött évtizedei alatt karok, tanszékek intézetek át- meg átalakultak, ő maradt, mint biztos pont.

Lacival mintegy húsz éve vagyunk munkatársak, de ismeretségünk kezdete a múltba vész: konferenciákon korábban is találkoztunk. Legalább ennyire fontos, hogy (sajnos, csak egyetemi tanulmányaim befejezése után) megismerhettem azt a könyvét, amely magyar nyelven elsőként mutatta be a szélesebb közönség számára a funkcionálanalízis szépségeit, beleértve annak alkalmazásait is[1]. A rekurzív sorozatokról szóló szakköri füzetéből[2] is sokat tudtam hasznosítani. Ezek a témák kapcsolódtak kutató munkájához[3] is, amelynek középpontjában az iterált függvényrendszerek álltak, és ezekből kiindulva tartotta a diákok körében oly népszerű, szabadon választható óráit is. A legutolsó időszakban leginkább az foglalkoztatta, hogy hogyan tudná kurzusait úgy megújítani, hogy a hallgatók számára érdekfeszítő és hosszú távon hasznosítható tudást nyújtson.[4] Nyilván ezért jelentkezett hozzá mindig sok hallgató; mindannyian tudjuk, hogy ezt nem könnyű elérni. Nagyon fontosnak tartotta, hogy mindig konkrét problémákból induljon ki, és csak akkor absztraháljon, amikor már van miből. Soha nem elégedett meg a tételek bizonyításával, azt is megkövetelte (és ebben példát is mutatott), hogy a diákok algoritmust és programot is gyártsanak befejezésül - egyúttal numerikus kísérletek kezdeteként. Röviden szólva: egyetemi oktató *létére* érdekelte az oktatás módszertana, saját tevékenységének hatékonysága.

Annak bemutatására pedig, hogy mennyire érdekelték az újdonságok, hadd említsem meg, hogy utolsó éveiben igen sokat olvasott neurobiológiai modellekről, régóta készült szakmai megbeszélésre a terület egyik külföldön élő, magyar származású szakemberével, Kozma Róberttel.

Néhány hónapja még rendszeresen bejárt az Intézetbe, teázni, beszélgetni, érdeklődni. Miután számos betegsége a mozgásban erősen korlátozta, telefonon beszélte meg (nemcsak velem) az őt érdeklő problémákat, szakmaiakat, intézetieket, de a világ híreit is. Sokat tanultam ezekből a beszélgetésekből a tárgyi ismereteken túl is.

Két kedvenc idézete nagyon jellemző felfogására. Az egyik - prózában - Nem az a fontos öcsém, honnan jössz, hanem az, hogy hová tartasz.[5] S a másik: Oly nagy vagy, mint az ügy, amelyet szolgálsz, és olyan fiatal, mint az álmaid.[6]

Azzal emlékezhetünk rá méltó módon, ha követjük őt nyitottságban, a kollégák iránti kedves érdeklődésben, és a hallgatók szeretetében.

Befejezésül hadd idézzem egyetértően Vizvári Béla, közös barátunk és kollégánk levélben küldött szavait: Megtiszteltetésnek érzem, hogy ismerhettem. Kiváló ember volt. Legyen neki könnyű a föld.

2017. november 3.

Tóth János

Lábjegyzet

[1] Máté László: *Funkcionálanalízis műszakiaknak*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.
Máté László: *Hilbert Space Methods in Science and Engineering*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1989.
[2] Máté László: *Rekurzív sorozatok*, Tankönyvkiadó, Budapest. 1980.
[3] https://www.researchgate.net/profile/Laszlo_Mate/citations?sorting=recent&page=1
[4] Máté László: Szokatlan gondolatok geometriai sorozatokról, Érintő, 2016. december. http://www.ematlap.hu/index.php/tanora-szakkor-2016-12/380-mate-laszlo-szokatlan-geometriai-sorozatokrol
[5] Illyés Gyula: Egy népfira, http://epa.oszk.hu/00000/00022/00608/19238.htm
[6] Simón Peresz http://www.azquotes.com/author/11518-Shimon_Peres

☐ nekrológ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Besenyei Ádám, Faragó István 2017. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Búcsú Mezei Istvántól

Mindenkit váratlanul és mély megdöbbenéssel ért a hír, hogy kollégánk és barátunk, Mezei István 2017. november 4-én, 71 éves korában eltávozott közülünk. A súlyos betegségével vívott egyenlőtlen küzdelmet feladva úgy távozott, amilyen egész életében volt: csendben elaludt, senkit nem terhelve a személyes tragédiájával.

A hírt nem akartuk elhinni, hiszen István maga volt az állandóság, az örök fiatalság, a szellemi frissesség, tettrekészség példaképe. Egyik volt tanítványa ezt írta a hír hallatára. „Eszembe se jutott, hogy ő meghalhat. Talán azért, mert mióta csak megismertem, mindig ugyanaz a lelki béke áradt belőle, ami egy szelíd és kiegyensúlyozott időtlenséget kölcsönzött neki. A halál meg valahogy túl van ezeken a kategóriákon. Talán számára tényleg túl is volt”. Igen, Pista ezek felett állt, és ezért minden bizonnyal most is itt van közöttünk.

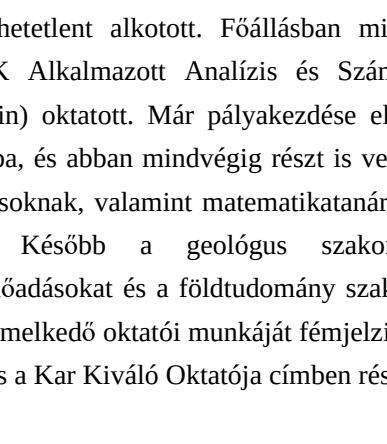
István 1969-ben matematika-fizika szakos középiskolai tanárként végzett az ELTE Természettudományi Karán. Ezt követően került az Analízis II. Tanszékre, ahol kezdetben gyakornokként, majd egyetemi tanársegédi, később pedig nyugdíjazásáig egyetemi adjunktusi beosztásban dolgozott. Nyugdíjasként is mindvégig tanított, a katedrától csak a kegyetlen sors távolíthatta el.

Pista a tudományt magas szinten művelő, igazi tanárember volt. Minden területen, ahol csak alkotott, a legmagasabb szintet érte el.

Matematikusnak egészen széles látókörű, szinte minden területhez értő szakember volt. Alig volt olyan téma, ahol ne lett volna járatos, és ebben nagy segítségére volt mély ismerete a fizika területéről.

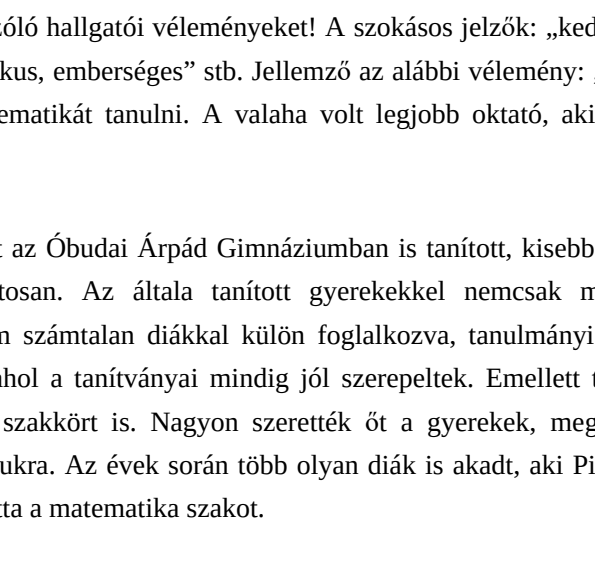
Pályakezdőként a tanszék kutatásaiba bekapcsolódva a variációszámítás és az optimális folyamatok elmélete témaköreiben végzett tudományos munkát. Egyetemi doktori értekezését 1980-ban Végtelen idejű diszkrét optimális folyamatok vizsgálata címmel írta. Eredményeiből 1983-ban a Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, valamint 1984-ben az Annales Universitatis Scientiarium Budapestinensis Sectio Computatorica folyóiratban közölt cikket. A variációszámítás témakörének a tanár szakosok körében való népszerűsítésére született 1982-ben az ELTE TTK Szakmódszertani Közleményeiben a differenciáljátékokról szóló írása. Az analízis oktatásához kapcsolódik az 1986-ban a Műszaki Könyvkiadó gondozásában, társszerzőkkel írt Analízis példatár címmel megjelent feladatgyűjteménye, amely a mai napig az egyik legtöbbünk által használt példatár. Fontos megemlíteni a 2014-ben, a TypoTeX gondozásában megjelent, ugyancsak társszerzőkkel közösen írt „Bevezetés az analízisbe”, illetve „Introductory course in analysis” című könyveit, amelyek számos helyen most is alaptankönyvként szerepelnek.

Pista vérbeli tanár, pedagógus volt. Munkásságának ez volt az a területe, ahol lubickolt, feledhetetlent és utolérhetetlent alkotott. Főállásban mindvégig az Eötvös Loránd Tudományegyetem TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszéken (illetve annak jogelődjein) oktatott. Már pályakezdése elején bekapcsolódott a tanár szakos analízis oktatásába, és abban mindvégig részt is vett. Emellett az esti tagozaton programozó matematikusoknak, valamint matematikatanár szakosoknak tartott analízis előadást, gyakorlatot. Később a geológus szakon a matematika és a differenciálegyenletek előadásokat és a földtudomány szakon az első éves matematika előadást is ő tartotta. Kiemelkedő oktatói munkáját fémjelzi, hogy a hallgatók szavazatai alapján két alkalommal is a Kar Kiváló Oktatója címben részesült.



Órái legendásak voltak, szinte minden hallgató az ő csoportjába szeretett volna bekerülni. Amikor életkora miatt elterjedt a nyugdíjazásának híre, hallgatók csoportjai egymásnak adták a tanszékvezetői szoba kilincsét, kérve, hogy ne küldje el a legjobb és legszeretettebb tanárukat nyugdíjba. És aki szép, megható dolgokat szeretne olvasni, az nézze meg a róla szóló hallgatói véleményeket! A szokásos jelzők: „kedves, jóindulatú, követhető, fantasztikus, emberséges” stb. Jellemző az alábbi vélemény: „Az a tanár, aki miatt érdemes matematikát tanulni. A valaha volt legjobb oktató, akivel találkoztam életem során”.

Az egyetem mellett az Óbudai Árpád Gimnáziumban is tanított, kisebb megszakítással 1987 óta folyamatosan. Az általa tanított gyerekekkel nemcsak megszerettette a matematikát, hanem számtalan diákkal külön foglalkozva, tanulmányi versenyekre is felkészítette őket, ahol a tanítványai mindig jól szerepeltek. Emellett több osztályban tartott matematika szakkört is. Nagyon szerették őt a gyerekek, meghatározó tanári példakép volt számukra. Az évek során több olyan diák is akadt, aki Pista hatására lett tanár vagy választotta a matematika szakot.

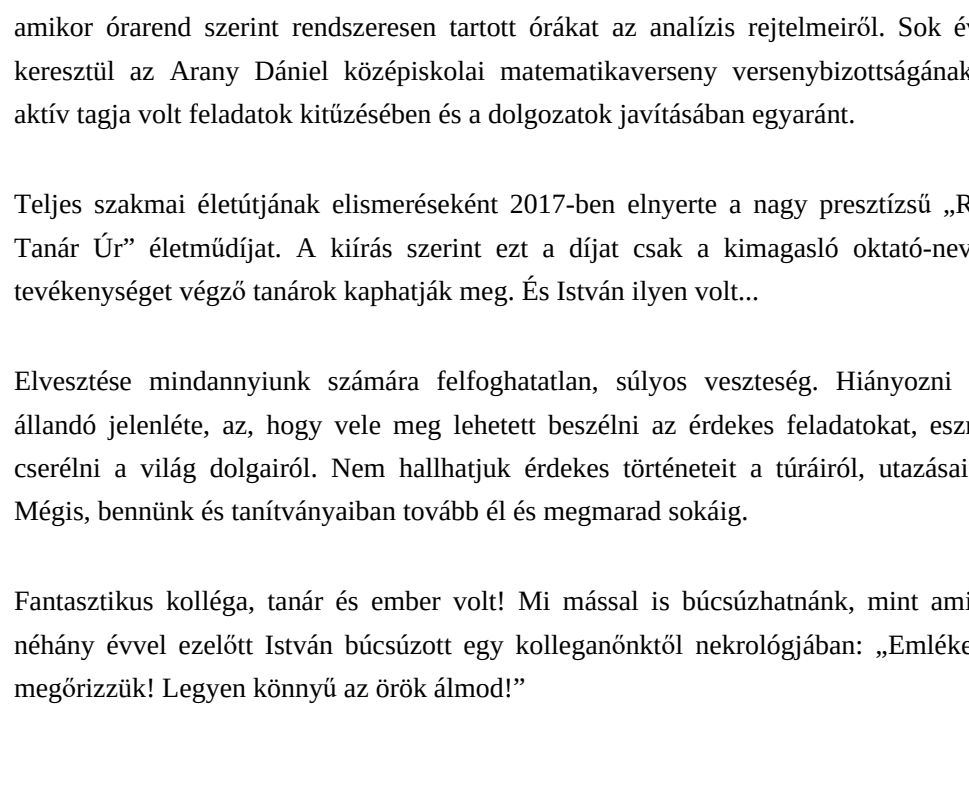


A tantestületi kollegáknak külön szakmai előadásokat is tartott. Voltak olyan évek, amikor órarend szerint rendszeresen tartott órákat az analízis rejtelmeiről. Sok éven keresztül az Arany Dániel középiskolai matematikaverseny versenybizottságának is aktív tagja volt feladatok kitűzésében és a dolgozatok javításában egyaránt.

Teljes szakmai életútjának elismeréseként 2017-ben elnyerte a nagy presztízsű „Rátz Tanár Úr” életműdíjat. A kiírás szerint ezt a díjat csak a kimagasló oktató-nevelő tevékenységet végző tanárok kaphatják meg. És István ilyen volt...

Elvesztése mindannyiunk számára felfoghatatlan, súlyos veszteség. Hiányozni fog állandó jelenléte, az, hogy vele meg lehetett beszélni az érdekes feladatokat, eszmét cserélni a világ dolgairól. Nem hallhatjuk érdekes történeteit a túráiról, utazásairól. Mégis, bennünk és tanítványaiban tovább él és megmarad sokáig.

Fantasztikus kolléga, tanár és ember volt! Mi mással is búcsúzhatnánk, mint amivel néhány évvel ezelőtt István búcsúzott egy kolleganőnktől nekrológjában: „Emlékedet megőrizzük! Legyen könnyű az örök álmod!”



Besenyei Ádám, Faragó István
ELTE TTK, Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

A megemlékezés a Matematikai Intézet honlapján jelent meg: http://www.math.elte.hu/wp-content/uploads/2014/11/MI_megemlekezes.pdf

Kollégája, *Buczolich Zoltán* egyetemi tanár (ELTE TTK, Analízis Tanszék), a fényképek készítője, egészen más módon búcsúzott Pistától, a túrázás szerelmesétől. Érdemes elolvasni: http://www.math.elte.hu/wp-content/uploads/2014/11/istvanintezetblack.pdf

Mezei István nagyon örült, amikor megtudta, neki ítélték oda a 2017. évi Rátz Tanár Úr Életműdíjat. A díjátadót már nem tudta megvárni... https://vimeo.com/244335129

nekrológ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Oláh Vera 2017. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Arckép helyett

2017 szeptemberében különös, továbbított e-mail jutott el hozzám, egy meghívó Faragó Andor, Faragó István és Faragó György emlékére botlatókő elhelyezésére a Bartók Béla út 52. számú ház előtti járdán.

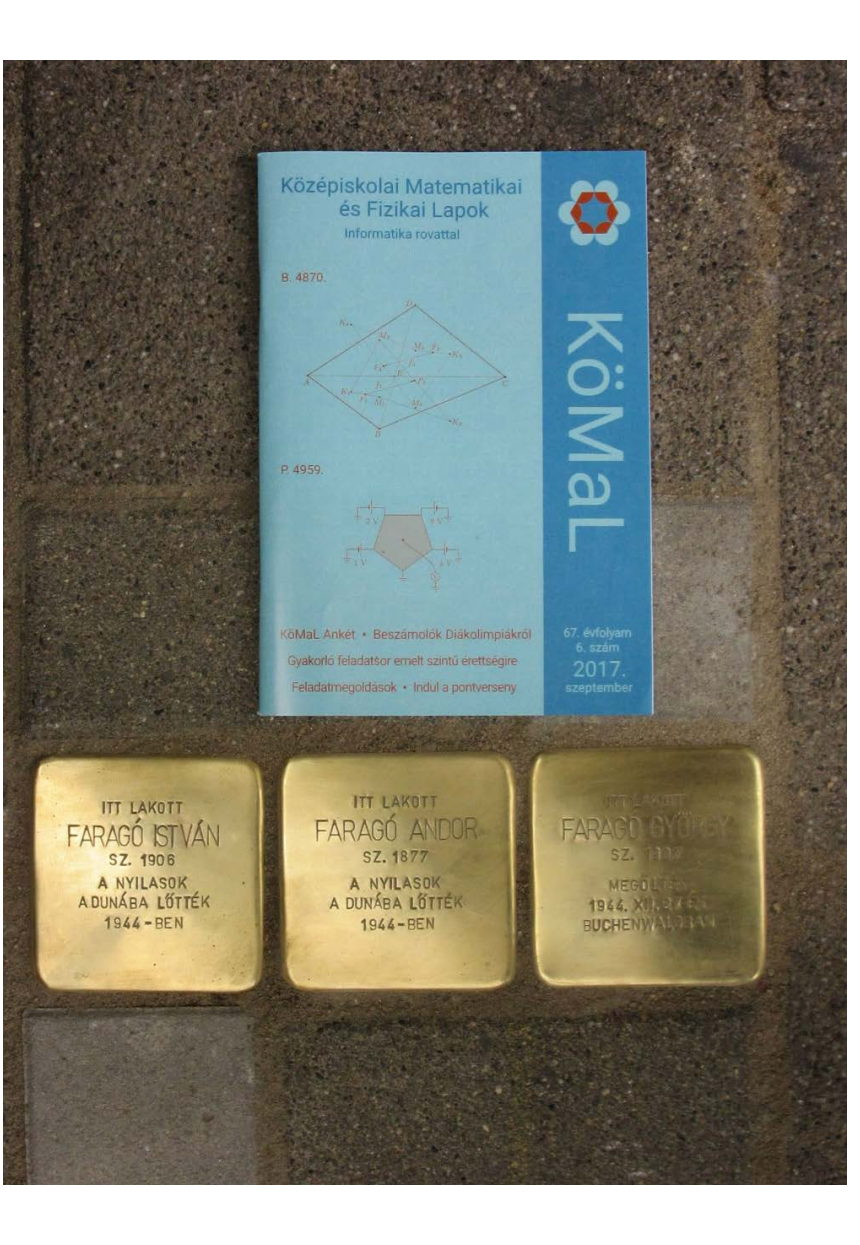
Faragó Andor életéről Radnai Gyula írt két részben az Érintő 2016 decemberi és 2017 januári számában. Ismeretes, hogy Radnai tanár úr fizikusi pályafutása mellett egész életében matematikatörténet-kutatásokat is folytatott. Mint a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok fizika szerkesztőbizottságának vezetője, már évtizedekkel ezelőtt elkezdett foglalkozni a KöMaL egykori főszerkesztője, Faragó Andor munkásságával. Sokszor mondta, mennyire sajnálja, hogy semmilyen emlék, fénykép nem maradt fenn arról a tanárról, aki 1925-ben újra elindította a középiskolásoknak szóló folyóiratot, helyet teremtve benne a fizikának és legjobb megoldók fényképtablójának is, megszerezve hozzá a híres kultuszminiszter, Klebelsberg Kuno erkölcsi és anyagi támogatását. Faragó Andor haláláról sem sikerült semmi bizonyosat kideríteni, csak az évszámát: 1944.

Most váratlanul felbukkant egy távoli rokon: Dr. Faragó Borbála, aki olvasta az Érintőben megjelent tanulmányt, és ennek nyomán megkereste Radnai Gyulát. Borbála így írt az e-mailjében:

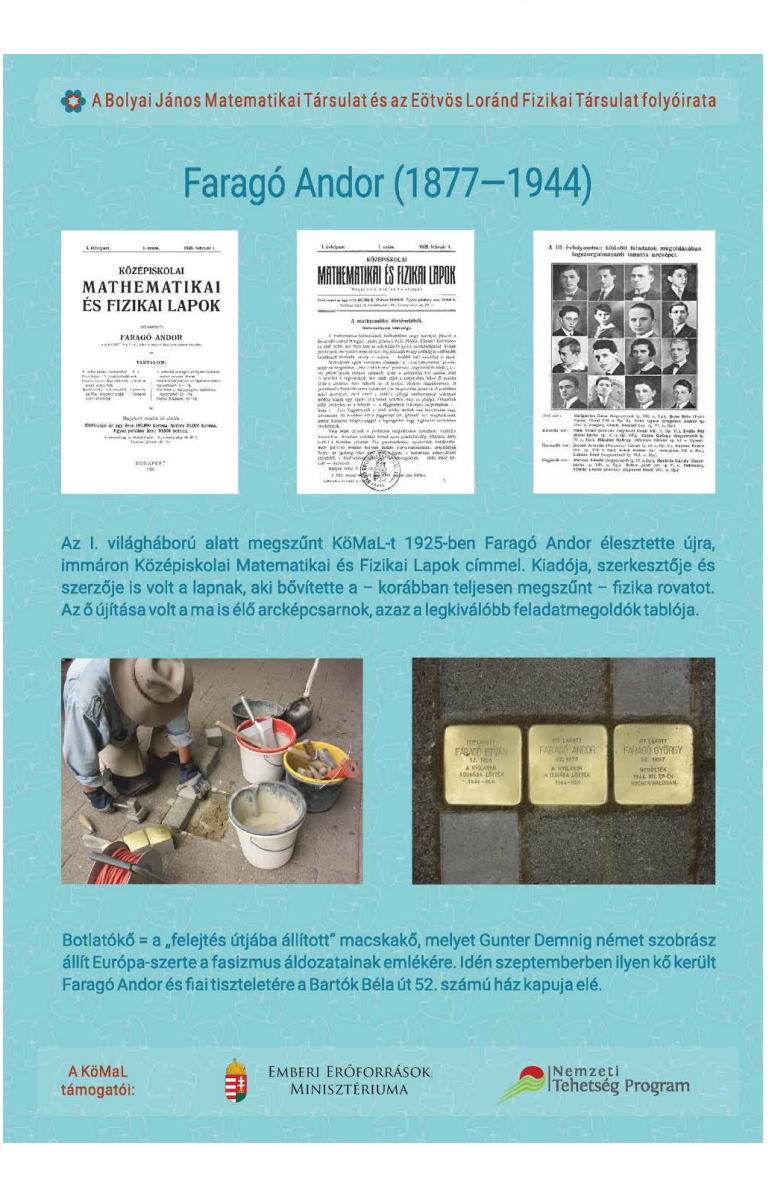
„Faragó Andor *Faragó László (matematikus, pedagógus, Platón-fordító) nagyapánk apjának a testvére volt, akit két fiával (Istvánnal és Györggyel)* együtt vittek el a Bartók Béla út 52-ben működtetett csillagos házból. Andort minden valószínűség szerint egyik fiával együtt a Dunába lőtték, másik fia Mauthausenben halt meg.”

Bevallom őszintén, nem tudtam, mi is az a botlatókő. A wikipédiához fordulva kiderült, hogy Gunter Demnig német szobrászművész alkotásai azok a holokauszt áldozatai előtt tisztelgő, macskakőre rögzített 10 × 10 centiméteres réz emléktáblák, amelyeket az áldozatok egykori lakhelye előtt helyeznek el a járdába süllyesztve. Ezek a kövek a lakóhelyek mindennapjaiban teszik láthatóvá és kézzelfoghatóvá a történelmet. Nevükhöz híven rövid időre megállítják és — a személyes történetek bemutatásával — emlékezésre, elgondolkodásra késztetik az arra járókat, a véletlenül „beléjük botlókat”. A művészi projekt révén egy folyamatosan növekvő, az egyes kövek hálójából összeálló decentrális óriás „emlékmű” jön létre. Magyarországon 2007 óta számos „emlékező macskakövet” helyezett el a művész.

Néhány fénykép a 2017. szeptember 26-i botlatókő-lerakásról:



A KöMaL 2017. októberi számában hírt adott az eseményről:



A Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat folyóirata

Faragó Andor (1877—1944)

Az I. világháború alatt megszűnt KöMaL-t 1925-ben Faragó Andor élesztette újra, immáron Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok címmel. Kiadója, szerkesztője és szerzője is volt a lapnak, aki bővítette a – korábban teljesen megszűnt – fizika rovatot. Az ő újítása volt a ma is élő arcképcsarnok, azaz a legkiválóbb feladatmegoldók tablója.

Botlatókő = a „felejtés útjába állított” macskakő, melyet Gunter Demnig német szobrász állít Európa-szerte a fasizmus áldozatainak emlékére. Idén szeptemberben ilyen kő került Faragó Andor és fiai tiszteletére a Bartók Béla út 52. számú ház kapuja elé.

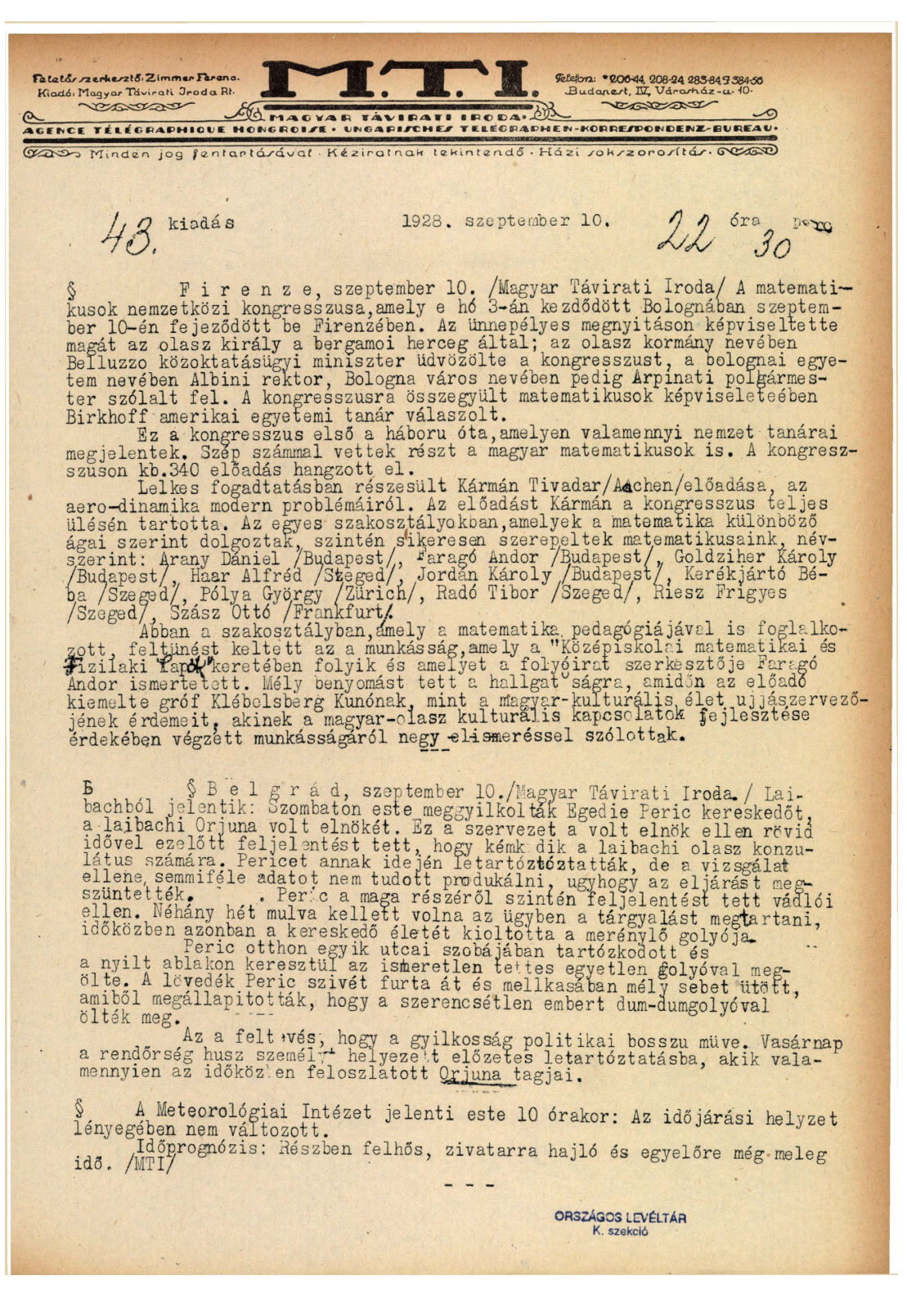
A KöMaL támogatói: Emberi Erőforrások Minisztériuma · Nemzeti Tehetség Program

KÖZÉPISKOLAI MATHEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
FARAGÓ ANDOR
MATHEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

Novemberben újabb meglepő e-mailt kaptam, ezúttal Radnai Mártontól, Radnai Gyula fiától. Az ő szeptemberben készített fotóiból mellékeltünk ehhez az íráshoz néhányat. E-mailjében ez állt:

„A minap a mellékelt tudósítást találtam egy régi újságban.

https://library.hungaricana.hu/hu/view/NapiHirek_1928_09_1/?query="faragó andor"&pg=256&layout=s”



Felelős szerkesztő: Zimmer Ferenc.
Kiadó: Magyar Távirati Iroda Rt.

M.T.I.

Telefon: *206-44, 208-24, 283-84, 7.384-56
Budapest, IV. Városház-u. 10.

MAGYAR TÁVIRATI IRODA
AGENCE TÉLÉGRAPHIQUE HONGROISE · UNGARISCHES TELEGRAPHEN-KORRESPONDENZ-BUREAU
Minden jog fentartásával · Kéziratnak tekintendő · Házi sokszorosítás

43. kiadás 1928. szeptember 10. 22 óra 30 perc

§ F i r e n z e, szeptember 10. /Magyar Távirati Iroda/ A matematikusok nemzetközi kongresszusa, amely e hó 3-án kezdődött Bolognában szeptember 10-én fejeződött be Firenzében. Az ünnepélyes megnyitáson képviseltette magát az olasz király a bergamoi herceg által; az olasz kormány nevében Belluzzo közoktatásügyi miniszter üdvözölte a kongresszust, a bolognai egyetem nevében Albini rektor, Bologna város nevében pedig Arpinati polgármester szólalt fel. A kongresszusra összegyült matematikusok képviseletéeben Birkhoff amerikai egyetemi tanár válaszolt.
Ez a kongresszus első a háboru óta, amelyen valamennyi nemzet tanárai megjelentek. Szép számmal vettek részt a magyar matematikusok is. A kongresszuson kb. 340 előadás hangzott el.
Lelkes fogadtatásban részesült Kármán Tivadar/Aachen/előadása, az aero-dinamika modern problémáiról. Az előadást Kármán a kongresszus teljes ülésén tartotta. Az egyes szakosztályokban, amelyek a matematika különböző ágai szerint dolgoztak, szintén sikeresen szerepeltek matematikusaink, névszerint: Arany Dániel /Budapest/, Faragó Andor /Budapest/, Goldziher Károly /Budapest/, Haar Alfréd /Szeged/, Jordán Károly /Budapest/, Kerékjártó Béla /Szeged/, Pólya György /Zürich/, Radó Tibor /Szeged/, Riesz Frigyes /Szeged/, Szász Ottó /Frankfurt/.
Abban a szakosztályban, amely a matematika pedagógiájával is foglalkozott, feltünést keltett az a munkásság, amely a "Középiskolai matematikai és fizikai Lapok" keretében folyik és amelyet a folyóirat szerkesztője Faragó Andor ismertetett. Mély benyomást tett a hallgatságra, amidőn az előadó kiemelte gróf Klébelsberg Kunónak, mint a magyar-kulturális élet ujjászervezőjének érdemeit, akinek a magyar-olasz kulturális kapcsolatok fejlesztése érdekében végzett munkásságáról negy elismeréssel szólottak.

Б § B e l g r á d, szeptember 10./Magyar Távirati Iroda./ Laibachból jelentik: Szombaton este meggyilkolták Egedie Peric kereskedőt, a laibachi Orjuna volt elnökét. Ez a szervezet a volt elnök ellen rövid idővel ezelőtt feljelentést tett, hogy kémkedik a laibachi olasz konzulátus számára. Pericet annak idején letartóztatták, de a vizsgálat ellene semmiféle adatot nem tudott produkálni, ugyhogy az eljárást megszüntették. . Peric a maga részéről szintén feljelentést tett vádlói ellen. Néhány hét mulva kellett volna az ügyben a tárgyalást megtartani, időközben azonban a kereskedő életét kioltotta a merénylő golyója.
Peric otthon egyik utcai szobájában tartózkodott és a nyilt ablakon keresztül az ismeretlen tettes egyetlen golyóval megölte. A lövedék Peric szivét furta át és mellkasában mély sebet ütött, amiből megállapitották, hogy a szerencsétlen embert dum-dumgolyóval ölték meg.
Az a feltevés, hogy a gyilkosság politikai bosszu müve. Vasárnap a rendőrség husz személyt helyezett előzetes letartóztatásba, akik valamennyien az időközben feloszlatott Orjuna tagjai.

§ A Meteorológiai Intézet jelenti este 10 órakor: Az időjárási helyzet lényegében nem változott.
Időprognózis: Részben felhős, zivatarra hajló és egyelőre még meleg idő. /MTI/

- - -

ORSZÁGOS LEVÉLTÁR
K. szekció

Az MTI tudósítása igen sok szempontból érdekes, elemzése a matematikatörténészek feladata, számomra azonban az volt a legföltűnőbb, hogy Faragó Andor, a KöMaL-t újraélesztő középiskolai tanár Arany Dániellel, a KöMaL alapítójával és a magyar matematika leghíresebbjeivel együtt szerepelt azon a firenzei matematikakongresszuson.

Oláh Vera

matematikatörténet · Faragó Andor

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

SOKSZOR TALÁLKOZUNK OLYAN FELADATTAL, ÖTLETTEL, AMIT SZÍVESEN ELTESZÜNK KÉSŐBBI HASZNÁLATRA. A **TANÓRA – SZAKKÖR** ROVAT SZERETNE HOZZÁJÁRULNI A MATEMATIKATANÁROK ESZKÖZTÁRÁNAK GAZDAGÍTÁSÁHOZ, FÓRUMOT KÍVÁN ADNI A GONDOK, NEHÉZSÉGEK MEGTÁRGYALÁSÁRA IS. (ROVATSZERKESZTŐ: *HORVÁTH ESZTER*.)

MEDVE MATEK

Gyimesi Bernadett
2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

MedveMatek

Matekverseny a szabadban — na de hogy visszük ki oda a padokat és székeket? Ugyan nem lenne lehetetlen feladat, de a Medvének épp az a célja, hogy a matematikát és a versenyeket kicsit más irányból közelítse meg. „Közösségi élménnyé tesszük a matekot!" — szól a szlogen. *Gyimesi Bernadett* segít megismernünk *A matematika összeköt* egyesület rendezvényeit és azt, milyen is a MedveMatek.

Fried Katalin
2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Miért éppen LaTeX?

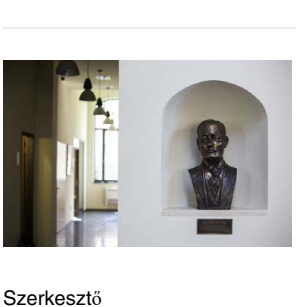
Az elmúlt években, évtizedben rendszeresen fordultak hozzám ismerőseim LaTeX-et illető kérdésekkel. Szerettem volna segíteni nekik, és — bár bevallom, sokszor nem is tudtam a válaszokat — minden kérdésnek igyekeztem a végére járni. Közben sokat tanultam magam is, és az, hogy továbbra is szeretnék segíteni mindazoknak, akik kíváncsiak a LaTeX-re, nem változott. — *Fried Katalin* LaTeX-tanfolyamának első része következik.

THINK OUTSIDE OF THE BOX

Katz Sándor
2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Gondold tovább! – 2.

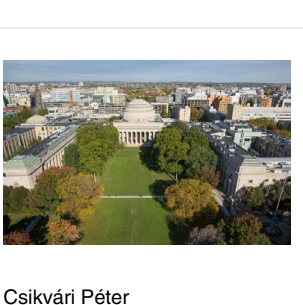
Mottó: „A legtöbb amit a tanár a diákjaiért tehet az, hogy észrevétlenül rávezeti egy-egy jó ötletre." (Pólya György) A kérdéseket először mi tesszük fel, majd fokozatosan érjük el, hogy ezeket már a tanulók maguk fogalmazzák meg. Ha ezt következetesen csináljuk, akkor eljuthatunk ahhoz az örömteli helyzethez, hogy a tanítványaink olyan érdekes kérdéseket is fel tudnak tenni, ami nekünk nem is jutott eszünkbe. *(Katz Sándor)*



Szerkesztő
2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Kellenek a kiváló tanárok

A Rátz Tanár Úr Életműdíjról tavaly, 2016 decemberében is beszámolt az Érintő. Ezt az elismerést az iskolák 5-12. évfolyamain matematikát, fizikát, biológiát vagy kémiát tanító tanároknak ítélik oda, akik tantárgyaik népszerűsítésében és a tehetséggondozás területén maradandót alkottak. Idén november 29-én tizenhetedik alkalommal rendezték meg a Magyar Tudományos Akadémia dísztermében a díjátadó ünnepséget.



Csikvári Péter
2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Matematikaoktatás az MIT-n

Legtöbben csak a rövidítést ismerik: az MIT, Massachusetts Institute of Technology a világ egyik legjobb egyeteme, rendszeresen az első 10-ben van az egyetemi rangsorokban, nem ritkán a legelején. E cikk szerzőjének, *Csikvári Péternek* lehetősége volt 3 évet eltölteni az egyetem matematikai intézetében, így első kézből vannak tapasztalatai az ott folyó oktatásról.

Oláh Vera
2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Diáktalálkozó a felvidéki Komáromban 25. alkalommal

A Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozó megálmodója negyed századdal ezelőtt Oláh György tanár úr volt. Húsz éven át fáradhatatlanul szervezte a közös tanár-diák találkozót, ami személyes barátokká tette a Kárpát-medence legjobb tehetséggondozó matematikatanárait Mosolygós szemére, kedvességére még ma is sokan emlékeznek, pedig idén már ötödik alkalommal adták át az emlékére létrehozott *Oláh György magyar matematikai tehetségdíjat.*

Vancsó Ödön
2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

VTN 2017 — Varga Tamás Módszertani Napok huszonkilencedszer

Idén is megrendezésre került a Varga Tamás matematika szakmódszertani konferencia, 2017. november 10—11-én a Varga Tamás Tanítványainak Emlékalapítványa, a Bolyai János Matematikai Társulat és az ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központja közös rendezvényeként. Két jubileumi év következik: 2018-ban lesz a 30. Varga Tamás Napok és 2019-ben lesz Varga Tamás születésének 100-ik évfordulója, amelyre nemzetközi konferenciával készül az MTA.

Székely Péter
2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

A zenében rejlő matematika

2016-ban a KöMaL Ifjúsági Ankét keretében elhangzott előadásának elektronikus formába öntésére kérte fel szerkesztőségünk *Székely Pétert*. Bár a cikk az előadáshoz képest sokat veszít az értékéből, ha az előadó nem tudja megmutatni, megszólaltatni a hangszereket, illetve az érdekes hang-effektusokat, azért erre is tettünk kísérletet. Következzen tehát egy kis ízelítő a zeneelméletről, s a benne rejlő matematikáról, fizikáról.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Fried Katalin 2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Miért éppen LaTeX?

Az elmúlt években, évtizedben rendszeresen fordultak hozzám ismerőseim LaTeX-et (ejtsd: léteh vagy magyarosan lateh) illető kérdésekkel. Szerettem volna segíteni nekik, és — bár bevallom, sokszor nem is tudtam a válaszokat — minden kérdésnek igyekeztem a végére járni. Közben sokat tanultam magam is, és az, hogy továbbra is szeretnék segíteni mindazoknak, akik kíváncsiak a LaTeX-re, nem változott.

Na, igen, persze ha az elején akarom kezdeni, akkor először idéznem kell a leggyakrabban hallott kérdéseket (amelyekre később igyekszem is válaszolni):

Mi az a LaTeX?
Mire jó a LaTeX?
Jó a LaTeX?
Érdemes-e LaTeX-et tanulni?
Kinek érdemes LaTeX-et tanulni?
Miért érdemes LaTeX-et tanulni?
Meg lehet-e tanulni a LaTeX-et?
Érdemes-e megtanulni a LaTeX-et?
Nehéz megtanulni a LaTeX-et?
Miért nehéz megtanulni a LaTeX-et?

Magamtól senkinek sem mondanám, hogy tanulja meg a LaTeX-et, legfeljebb tanácsolnám, ha például megkérdezné hogy „Matematikai szöveghez milyen tördelő programot érdemes használni?”. De ismerjük el, nagyon csekély az esélye annak, hogy valaki éppen ezzel a kérdéssel álljon elő.

Tény azonban, hogy egy matematikatanárnak nagy segítségére lehet. És mivel sajnos a LaTeX-et is lehet rosszul használni, szeretnék segíteni, hogy ez ne így legyen.

Én egy nap alatt tanultam meg az alapokat, és azóta is folyamatosan tanulok. Minden nap örömömet lelem abban, hogy szép dokumentumok kerülnek ki a kezem alól. Ennek az örömnek szeretném a kedves olvasókat is részesévé tenni.

Nyomdászat

Réges-régen, úgy 60-80 évvel ezelőtt a legtöbb nyomdai termék még kézzel készült. A szöveg nyomdai előállítása azt jelentette, hogy az ólombetűket sorba szedte a szedő, a sorokat egymás alá illesztette egy nagy keretbe, majd a keretből összeállt oldalról lenyomat készült. (Persze visszafelé, tükörírással kellett szedni, hogy a lenyomat megfelelően álljon.) Ez igen fárasztó és nagyon sok hibalehetőséget magában rejtő folyamat volt.

Nem csoda, hogy a nyomdákban már a számítógépek elterjedése előtt megjelentek a szedést könnyítő gépek. A fényszedőgépet két magyar mérnök, Szemző János és Uher Ödön találta fel 1928-ban.

A folyószöveg szedése ezzel jelentősen könnyebbé és gyorsabbá vált, valamint a hibalehetőség is jelentősen csökkent. Ám a képek beillesztése vagy a képletek tördelése továbbra is kézzel történt.

A számítógépek elterjedésével sokan felismerték, hogy a gép képes lehet helyettesíteni a nyomdai munkálatok egy részét. (Bár a sokszorosítást vagy a grafikát nem.) Donald E. Knuth 1962-ben kezdte írni a *Számítógép programozás művészete* című, többkötetes művét. 1976-ban nekilátott, hogy az addigra elkészült kötetek közül a másodikat újra nyomda alá rendezze, de technikai akadályokba ütközött. Ezek elhárítására — mintegy kilenc év alatt — megalkotta a TeX (ejtsd tech vagy teh) technikai (műszaki) szövegszedő programot. Nem ez volt az első kísérlet, hogy matematikai szövegszedő programot készítsenek, ám ez bizonyult a feladatra legalkalmasabbnak, ugyanis az Amerikai Matematikai Társulat (AMS) is elfogadta, és a továbbiakban ajánlotta is a használatát a matematikai kiadványok előállításához. Ezt elősegítendő egységes formátumokat, stílusokat, betűkészleteket adtak közre (AmS-TeX csomagok).

A professzionális megjelenés mellett hallatlan előnye volt a programnak a szabad fejleszthetőség. Ahogy terjedt a program, egyre többen és egyre jobb kiegészítőket írtak hozzá.

A legnagyobbat talán Leslie Lamport adta hozzá, aki LaTeX néven publikált programjában megvalósította azt a sokak által hiányolt készséget, hogy az automatikusan kezelje a matematikában oly gyakran előforduló számozott egyenletek, tételek, ábrák, táblázatok, hivatkozások stb. számát. Ez azt jelentette, hogy nemcsak hogy automatikusan kitette a számot, hanem azt is, hogy ezekre automatikusan (a számuk ismerete nélkül is) lehetett hivatkozni.

Utóbb az AmS csomagokat is integrálták a LaTeX-be, és mivel a TeX képezi az alapját, így ez az idők folyamán nagyon hatékony programmá fejlődött.

Bár amikor a LaTeX-hel találkoztam, a TeX-et már vagy 20 éve használtam (professzionális szinten), ezért nehezen szántam rá magamat a váltásra, de meggyőződésem, hogy a LaTeX megkerülhetetlen.

Manapság sokkal egyszerűbb publikálni (bármit is), mint a TeX születésekor, és sokan saját maguk készítenék el legszívesebben a kiadványukat, gondolván, hogy az alkalmas a publikációra. Ezeket rendszerint sem szerkesztő, sem tipográfus, sem nyomdász nem látja, ezért nagyon csúnya szövegeket (is) lehet látni nyomtatásban, de különösen az interneten. Ám akit ez zavar, annak érdemes megtanulnia, hogyan lehet szépen szedni. Ehhez nagy segítséget a nyújt LaTeX, én pedig a LaTeX-hez szeretnék segítséget nyújtani.

Kérdések és válaszok

Mi az a LaTeX? Mire jó a LaTeX?

A LaTeX olyan, bárki által ingyenesen hozzáférhető program, amelynek segítségével nyomdai minőségben lehet műszaki szöveget előállítani. Röviden: műszaki szöveg szedő program. Ma a piacon még csak hasonló más program sincs. Van, amelyik képes nyomdai minőséget előállítani, de nem kezeli jól a képleteket. Van, amelyik képletszerkesztővel készült képleteket képként befogad, de azok beillesztése meglehetősen macerás. Van olyan program, amelyiknek van beépített képletszerkesztője, de nem szövegszedő, csak szövegszerkesztő program. (A szövegszerkesztő nem képes sok, a nyomdai minőséghez elengedhetetlen beállítás automatikus alkalmazására.)

Ráadásul a piacon található szövegszedő programok általában nem tudják automatikusan „befolyatni” a szöveget, míg a TeX néhány vezérlőparancs beírása után szinte tévedhetetlenül és automatikusan állítja elő a nyomdai minőségű szöveget.

Az első élményünk (ha helyesen telepítettük a gépre a szükséges programokat) gyors, látványos és lenyűgöző lesz.

Jó a LaTeX?

A rövid válasz: jó. A hosszú válasz: nagyon jó. Az igazság azonban az, hogy nem mindig tökéletes, de javítható.

Érdemes-e LaTeX-et tanulni? Kinek érdemes LaTeX-et tanulni? Miért érdemes LaTeX-et tanulni?

Mindenképpen érdemes. Elsősorban érdemes azoknak, akik valaha az életben matematikát akarnak írni, illetve azoknak is, akik nyomdai minőségű kiadványt akarnak készíteni. Azért érdemes, mert nagyon sokszínű, és a műszaki tördelésen kívül egyéb kiadványok tördelésére is kiválóan alkalmas. Én magam is nagyon sokféle kiadványhoz használtam már TeX-et: szakácskönyv, szépirodalmi mű, társasjáték tábla, plakát, történelmi szemelvénykönyv, statisztikai kiadvány, matematikai cikkek, dolgozatok és természetesen rengeteg matematikakönyv.

Meg lehet-e tanulni a LaTeX-et? Érdemes-e megtanulni a LaTeX-et?

Tanulni lehet, megtanulni nem. És nem is érdemes. Ahogyan a nyelvet használjuk, de nem ismerjük minden szavát, helyesírási szabályát, úgy a LaTeX is megtanulhatatlan, de ettől még jól használható. Állandó rendelkezésünkre állnak az online „szótárak”, a „szabályok” leírása. Ráadásul állandóan fejlődik, mert a LaTeX közösségi fejlesztése nem áll le egy percre sem.

Nehéz „megtanulni” a LaTeX-et? Miért nehéz „megtanulni” a LaTeX-et?

Ezzel elérkeztünk a fekete leveshez. A LaTeX oly korban készült program, amikor még nem volt egér, ezért mindent a billentyűzetről kell elérni, és mindent, de tényleg mindent, amit a programtól kérni akarunk, parancs formájában be kell gépelnünk. Ezért egyrészt rengeteget kellett gépelni (a szövegen kívül), másrészt ismerni kellett azokat a parancsokat, amelyekkel rávehetjük a programot a szöveg megfelelő formázására (például arra, hogy zárjon középre egy szöveget vagy tegyen döltbe egy szöveget). Régebben sokakat eltántorított ez a TeX használatától, de ma már sok szövegszerkesztő segíti ezt a munkát, és ez sok terhet levehet a vállunkról.

És még egy nagy hátránya van: mivel a formázásra szolgáló utasítások — amelyek maguk is szövegek — bele vannak írva a szövegbe, nem azt látjuk a képernyőn, amit valójában meg akarunk jeleníteni, hanem egyszerre szöveget és utasításokat, a programot időről-időre meg kell kérni, hogy legyen szíves mutassa meg, hogy mindez hogyan fog majd kinézni (állítsa össze a kiadványt). Ez a lépés kihagyhatatlan. Nincs olyan ember, aki hosszú oldalakon keresztül képes hibátlanul beírni az utasításokat, és közben fejben elképzelni, hogy az hogyan fog kinézni. Akinek ez nehézséget okoz, több olyan szövegszerkesztő is készült a LaTeX-hez, amely a beírással lényegében egyidőben mutatja is (gyakorlatilag folyamatosan befordítja), milyen lesz a kész dokumentum.

Ettől persze még tudnunk kell, mit csinálunk, hogyan szedjük a szöveget, vagyis a LaTeX-et csak ésszel lehet használni.

És akkor mégis miért?

Mert mindenért kárpótol minket az, hogy ami elkészül, az valami parádés lesz!

Akkor vágjunk bele!

Mint említettem, ha van egy jól telepített rendszerünk, akkor az első élményünk gyors, látványos és lenyűgöző lesz.

Mivel sokféle rendszer van, és más-más rendszerre más és más a telepítés módja, csak a legelterjedtebb rendszerre (windows) történő telepítést írom le részletesebben. (Más rendszerekben, például Linux alatt a TeXlive, Macintosh alatt a MacTeX programot lehet használni.)

Az általam alább javasolt programok mindegyike ingyenes, a telepítése meglehetősen egyszerű, de csak a hivatalos oldalról szabad telepíteni őket. A problémák elkerülése érdekében érdemes ezeket oda telepíteni, ahova a rendszer felkínálja. Szükségünk lesz egy PDF nézegető programra, egy TeX rendszerre és egy szövegszerkesztőre. Én csak egy-egy lehetőséget adok meg, mindegyik helyett lehet mást választani.

A telepítés részletei:

1. PDF nézegető program: Javaslom a Sumatra PDF®-et. A legelterjedtebb, az Acrobat Reader® beállításaival gondok lehetnek.

2. TeX rendszer: MikTeX®. A program telepítéskor rákérdez, hogy a későbbiekben telepítheti-e a hiányzó csomagokat. Ezt érdemes megengedni.

3. Szövegszerkesztő: TeXnicCenter®. (Mást is választhatunk, de ez ingyenes, és nagyon sok szolgáltatása van. Az igazsághoz azonban hozzátartozik, hogy maga a MikTeX is tartalmaz egy szövegszerkesztőt, a TeXworksöt. Ez ugyan kevésbé felhasználóbarát, de a TeX rendszer hibáit automatikusan javítja.) A TeXnicCenter telepítés után rákérdez, hogy konfigurálja-e a szövegszerkesztőt. Érdemes ezt rögtön megtenni. Megkérdezi, hogy hol találja meg a ps nézegető programot. Itt meg kell adni a pdf nézegető program könyvtárát. Ezután a menük alatti sávban középtájt egy fehér hátterű mezőben megjelenik, hogy milyen fordítási opciókat lehet kérni. Válasszuk ki a LaTeX ⇒ PDF opciót.

Teszt:

Mindennél fontosabb, hogy ellenőrizzük, jól működik-e a rendszer. Kezdjünk új üres TeX fájlt, és írjuk be a következő néhány sort:

```
\documentclass{article}
\begin{document}
x
\end{document}
```

Bizonyosodjunk meg róla, hogy egyetlen betűt sem írtunk el. (Az egész fájlban az egyetlen szöveg az x. Minden más csak a LaTeX-nek szóló utasítás, parancs.)

Mentsük le a fájlt, majd nyomjuk meg a Ctrl+F7 billentyűzetkombinációt.

Ha mindent jól csináltunk, alul egy kis ablakban üzen nekünk a program, és végül ezt írja:

LaTeX-Result: 0 Error(s), 0 Warning(s), 0 Bad Box(es), 1 Page(s)

BibTeX-Result: 0 Error(s), 0 Warning(s)

Ha hibátlanul írtuk be a szöveget, de mégsem ez történik, akkor hibás a MikTeX vagy a telepítés. Ha a telepítés hibás, azon csak egy újratelepítés segít, ha a MikTeX hibás, akkor keresni kell a honlapon egy korábbi verziót, és azt telepíteni.

Ezután megtekinthejük az alkotásunkat, az F5 gomb hatására megjelenik a PDF nézegető program. (Ha nem nyitja meg a PDF-et, akkor gond van. Lehet, hogy az AcroRd okozza a gondot. Ezen az a kényelmetlen, de áthidaló megoldás segíthet, ha a PDF-et kézzel megnyitjuk.)

A PDF-en egy x betűt és egy 1-es számot látunk. Az 1 oldalszám, ezt automatikusan tette bele a program. Az x helyére szinte bármit beírhatunk. Ha azonban ékezetes szöveget írunk be, kellemetlen meglepetésben lehet részünk.

Ékezetes betűk

A szövegszerkesztő alsó kék sávjában a középétől jobbra ANSI vagy UTF-8 felirat látható. Ez azt mutatja meg, hogy milyen ékezetes kódolást használ a szövegszerkesztő. Ezzel összhangba kell hozni azt, hogy a LaTeX milyen kódolást használjon.

Érdemesebb az UTF-8 kódolást használni, mert sokoldalúbb, mint az ANSI.

Először adjuk meg a LaTeX-nek, hogy UTF-8 kódolást akarunk használni. Írjuk be az 1. és a 2. sor közé (új 2. sorba):

```
\usepackage[utf8]{inputenc}
```

Ha a szövegszerkesztő is UTF-8-ra van állítva, akkor azzal nincs más dolgunk. Ha azonban ANSI-ra van állítva, mentsük a fájlunkat másként (Save As), és a megnyíló párbeszédablakban a kódolást (Encoding) állítsuk át UTF-8-ra (igen, írjuk felül). Ezzel a szövegszerkesztőt összhangba hoztuk a LaTeX-hel.

Beírunk valamilyen ékezetes szöveget, és ismét befordítjuk a LaTeX-et PDF-be: Ctrl+F7, majd ha nem kaptunk hibajelzést, akkor F5-tel megnézzük a PDF-et.

Speciális karakterek

1. Mivel a programnak meg kell tudnia különböztetni a parancsokat a szövegtől, lefoglalt egy karaktert, amelyet arra használ, hogy a parancsok azzal kezdődjenek, ez pedig a `\` karakter. Minden szó, ami ezzel kezdődik, a TeX-nek szóló parancs. Ez egyrészt azt jelenti, hogy ha ezt lefelejtjük, akkor nem a parancs, hanem az azt követő szöveg kerül bele, másrészt meg azt, hogy ezt a karaktert nem tudjuk a billentyűzetről karakterként beírni.

Arra is figyelnünk kell, hogy a parancs után szóközt (vagy más, nem betű karaktert) kell írni, hogy a TeX tudja, hogy véget ért a parancs. A TeX hibák jelentős része az ilyen parancsok hibás beírásából ered.

Ám más speciális karaktert is használ a TeX, amelyekről érdemes tudni.

2. A `\` után a legfontosabb, `{` és `}` karaktereket (csoportosító vagy csoport vagy group karakterek) arra használja a TeX, hogy körülhatárolja azt a szöveget, amelyre a parancs vonatkozik. A használata kissé ellentmondásos, mert egyes esetekben a parancsot a kapcsos zárójeleken belülre kell írni, más esetekben pedig a nyitó kapcsos zárójel elé. Az a ritkább, hogy belülre kell írni, de érdemes odafigyelni, hogyan kell használni.

3. A szóköz és a soremelés nem különösebben speciális, de fontos megjegyezni néhány dolgot. Akárhány szóközt is írunk be, abból csak egyetlen szóköz lesz (amelynek a méretét a tördelés, vagyis a program határozza meg). Ráadásul matematikai képleten belül hiába írunk be szóközt, azt nem veszi tekintetbe a rendszer. A billentyűzet `TAB` karaktere is csak egy szóközt eredményez. De a `TAB` és a szóköz együtt is csak egyetlen szóközt ad. Ennél meglepőbb, hogy az a billentyű, amely arra szolgál, hogy új sort kezdjünk (soremelés billentyű, amelyre `RETURN` vagy `ENTER` van írva, vagy csak egy visszafelé — kocsi vissza — nyíl van rárajzolva) is csak egy szóközt fog eredményezni.

Jogosan merül fel tehát a kérdés, hogy akkor hogyan lehet új sort kezdeni.

Új sort nem kezdhetünk, csak új bekezdést. Ehhez két soremelést kell beírni. (Megjegyzem, hogy elvileg lehet új sort kezdeni, de el sem mondom, hogyan lehet elérni, mert tipográfiailag elképesztően súlyos hiba. El kell tudni dönteni, hogy új bekezdést akarunk-e kezdeni, vagy nem. Ha nem, akkor ne erőszakoskodjunk a TeX-hel.)

A soremelés billentyűvel is ugyanaz a helyzet, mint a szóközzel: akárhányszor nyomjuk is le (legalább kétszer), ugyanannyi lesz két bekezdés között a távolság.

Természetesen jól el tudom képzelni, hogy valakinek nem tetszik a TeX által felkínált formátum. De ne feledkezzünk meg róla, hogy a tipográfiának, a kiadványok előállításának szigorú szabályai vannak, és a TeX ezeknek — alapesetben — eleget tesz. Ezért addig, amíg nem ismerjük elég jól a tipográfiát és a TeX-et, ne állítsuk át az alapbeállításokat.

4. További speciális karakterek:

`–` Gondolatjel: beírása két kötőjellel történik: --.

`%` Ha egy sorba százalékjelet teszünk, akkor az azt követő karaktereket a TeX nem veszi tekintetbe. Így a sor végén álló (szóközként funkcionáló) soremelés karaktert sem.

`$` A dollár jel segítségével matematikai képletet lehet beírni.

`_` Az aláhúzás karakterrel indexet írhatunk. A TeX-nek meg kell mondani, hogy mi kerül az indexbe. Az indexben szereplő jeleket csoportosító karakterek közé kell tenni.

`^` A kalap karakterrel kitevőt írhatunk. Meg kell mondani, hogy mi kerül a kitevőbe. A kitevőbe kerülő jeleket csoportosító karakterek közé kell tenni.

`&` A latin et jelét arra használhatjuk, hogy elválasszunk táblázatba vagy táblázatos elrendezésbe (mint például egy mátrix) kerülő objektumokat.

`~` A hullám (tilde) karakter el nem törhető szóközt jelent a TeX-ben.

`"` A macskaköröm jelet ne használjuk.

Érdemes egy nagy levegőt venni, és kipróbálni az eddigieket

A dokumentum elejére írjuk be a következő sorokat (egyelőre magyarázat nélkül):

```
\documentclass[12pt]{article}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage[magyar]{babel}
\usepackage{amsmath,amssymb,amsfonts,amsthm}
\frenchspacing
```

Ez a dokumentum bevezető része, ebben állítjuk be, hogy milyen csomagokat akarunk használni. Ezt a részt preambulumnak is szokás nevezni.

Ezután következik a tényleges dokumentum (ami messze nem jelenti azt, hogy többet nem üzenünk már semmit a LaTeX-nek). Az első sora `\begin{document}`, az utolsó `\end{document}`

Írjunk be egy tetszőleges szöveget — egyelőre olyat, amelyben nincsen matematika.

Játsszunk el kicsit a szöveg formátumával is!

Tegyünk bele kiemelés gyanánt dőlt betűs szövegeket, például `\textit{dőlt}`, illetve félkövér (ez egy nyomdai szakkifejezés, ami azt jelenti, hogy vastagabb betűs) szövegeket, például `\textbf{félkövér}`.

Arra azonban vigyázzunk, hogy a félkövér szöveg nagyon tolakodó, ezért ne írjunk vele hosszas szövegrészeket, kizárólag egy-egy szót, azt is csak indokolt esetben.

A `\begin{center}` és `\end{center}` parancsok közé írt sorokat a LaTeX középre zárja.

Például az alábbi mintaszöveg (amelyhez felhasználtuk a debreceni egyetem honlapján található ismertetőt):

Elindult az **Érintő** — Elektronikus Matematikai Lapok, a Bolyai János Matematikai Társulat kiadásában. A negyedévente megjelenő *online* folyóirat rovataiban ismeretterjesztő írások olvashatók a matematika tanításáról, tudományos eredményeiről, ipari és pénzügyi alkalmazásairól.

Az olvasáshoz jó szórakozást kívánunk!

így írható be:

```
Elindult az \textbf{Érintő} -- Elektronikus Matematikai Lapok, a Bolyai János Matemati
kai Társulat kiadásában.
A negyedévente megjelenő \textit{online} folyóirat rovataiban ismeretterjesztő írások
olvashatók
a matematika tanításáról, tudományos eredményeiről, ipari és pénzügyi alkalmazásairól.

\begin{center}
Az olvasáshoz jó szórakozást kívánunk!
\end{center}
```

A matematika szöveg fontos része: a képlet

Azt tapasztaltam, hogy sokaknak nehéz eldönteni, hogy mi matematika és mi nem. Pedig ez a TeX használatához nagyon fontos, mert egészen másképp néz ki egy képlet, mint a folyószöveg.

Talán úgy lehetne legegyszerűbben megfogalmazni, hogy a képlet olyan matematikai kifejezés, amelyet szöveg vesz közre, és amelyben általában nincs szöveg.

Például abban a szövegben, hogy „Pitagorasz tétele szerint egy a,b,c oldalú derékszögű háromszögben, ahol c az átfogó, fennáll, hogy $a^2+b^2=c^2$.” képlet az a,b,c, a c és az $a^2+b^2=c^2$ kifejezés.

Így írjuk be:

```
Pitagorasz tétele szerint egy $a,b,c$ oldalú derékszögű háromszögben, ahol $c$ az átfo
gó, fennáll, hogy $a^{2}+b^{2}=c^{2}$.
```

Képlet beírása TeX-ben

A TeX-ben a képletet két $ jel közé tesszük (LaTeX-ben lehet még másképp is, de az hosszasabb).

Például: `$6+3=9$` eredménye $6+3=9$, `$a+b=c$` eredménye $a+b=c$.

Látható, hogy a képletben szereplő betűket a TeX automatikusan döltté teszi. Nemcsak a betűket, hanem minden más karaktert a képlet tördelési szabályainak megfelelően ír.

Ahhoz, hogy megértsük, hogy miért úgy néz ki a képlet a TeX-ben, ahogy kinéz, meg kell ismernünk néhány alapvető tipográfiai szabályt.

A képlet részei:

Számok, változónevek, műveleti és relációs jelek, zárójelek, függvénynevek, operátornevek, egyéb matematikai jelek.

A pozíciójuk lehet normál, index, index indexe, kitevő, kitevő kitevője, index kitevője, kitevő indexe (stb.)

Az önmagukban álló számokat csak akkor kell képletként írni, ha azok matematikai tartalmat hordoznak (14 osztható 7-tel). A nem matematikai tartalmú számokat soha. Például: 1962-ben. A helyesírás szabályai szerint a kis számokat — amennyiben nem hordoznak matematikai tartalmat — amúgy is betűkkel kell kiírni: Hófehérke és a hét törpe.

A számok betűtípusa szövegben és képletben (rendszerint) megegyezik.

A változónevek rendszerint dőlt betűsek, ám a szöveges dőlt betű típusa eltér a képlet dőlt betűjétől. Ezért a változóneveket csak képletként írhatjuk be, a TeX automatikusan döltté teszi a változóneveket.

A vektorokat félkövér betűkkel kell beírni (a tipográfiai szabvány szerint). Például $\mathbf{v}(1;2)$ írásmódja `$\mathbf{v}(1;2)$`

Itt is láthatjuk, hogy a képletben szereplő félkövér betűt (a vektor `\mathbf`) nem úgy kell beírni, mint a szövegben szereplőt (`\textbf`).

Műveleti és relációs jelek

Műveleti jelek pl. $+$, $-$, $\cdot$ (írásmódja: `\cdot`), $\pm$ (írásmódja: `\pm`)

A tört írásmódja: `\frac{}{}` (az első kapcsos zárójelbe a számlálót, a másodikba a nevezőt kell írni). Például: `$\frac{2a}{b}$` eredménye $\frac{2a}{b}$.

Relációs jelek pl.	$=$	$\neq$	$>$	$<$	$\geq$	$\leq$	$\geqq$	$\leqq$	$\approx$
beírásuk:	`=`,	`\ne`, `\neq`	`>`	`<`	`\ge`, `\geq`	`\le`, `\leq`	`\geqq`	`\leqq`	`\approx`

Zárójelek

A matematikában többféle zárójelet, zárójelpárt használunk: (,), [,], $\{$, $\}$. Ezek közül az első négyet el lehet érni a billentyűzetről. Ám a kapcsos zárójelek a TeX speciális karakterei, így ha a billentyűzetkaraktereket írjuk be, akkor azokból nem zárójelek lesznek, hanem a TeX-nek szóló üzenetek. A kapcsos zárójeleket így írhatjuk be: `\{` és `\}` (és csak matematikai módban használjuk).

A zárójelek méretének a közrefogott képlet méretéhez kell igazodniuk. Ezt automatikusan úgy érhetjük el, hogy a bal oldali zárójel elé azt írjuk: `\left`, a jobb oldali elé azt: `\right`

Például $\left\{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right\}$ írásmódja: `$\left\{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right\}$`.

A TeX függvénynevek használata

A tipográfia szabályai szerint a matematikai függvények betűje álló. Nem írhatjuk például azt, hogy `$sin x$`, mert az így jelenne meg: $sinx$. (Még a szóköz is eltűnt!)

A függvényeket TeX parancsként kell beírni: `\sin`, `\sin x`.

Néhány gyakori függvény:

`\max`	`\min`	`\lim`	
`\sup`	`\inf`	`\limsup`	`\liminf`
`\exp`	`\log`	`\lg`	`\ln`

tg és ctg nincs, azt definiálnunk kell. Érdemes a preambulumban, a `\begin{document}` elé:

```
\newcommand\tg{\operatorname{tg}}
```

```
\newcommand\ctg{\operatorname{ctg}}
```

A leggyakoribb TeX operátorok

$\leq$	`\leq`	$\geq$	`\geq`	$\neq$	`\neq`
$\approx$	`\approx`	$\times$	`\times`	$\vdots$	`\vdots`
$\pm$, $\mp$	`\pm`, `\mp`	$\cdot$	`\cdot`	${}^{\circ}$	`{}^{\circ}`
$\circ$	`\circ`	$'$	`'`	$\ldots$	`\ldots`
∞	`\infty`	$\neg$	`\neg`	$\wedge$	`\wedge`
$\vee$	`\vee`	$\supset$	`\supset`	$\forall$	`\forall`
$\in$	`\in`	$\rightarrow$	`\rightarrow`	$\subset$	`\subset`
$\exists$	`\exists`	$\notin$	`\notin`	$\to$	`\to`
$\Rightarrow$	`\Rightarrow`	$\Leftarrow$	`\Leftarrow`	$\mapsto$	`\mapsto`
$\Leftrightarrow$	`\Leftrightarrow`	$\leftrightarrow$	`\leftrightarrow`	$\mid$	`\mid`
$\cup$	`\cup`	$\cap$	`\cap`	$\setminus$	`\setminus`
$\hat{}$	`\hat{}`	$\bar{}$	`\bar{}`	$\tilde{}$	`\tilde{}`

A { } azt jelenti, hogy argumentumot vesz fel, arra illeszti a TeX a megfelelő jelet.

A leggyakoribb görög betűk

α	`\alpha`	β	`\beta`	γ	`\gamma`
δ	`\delta`	ϵ	`\epsilon`	ε	`\varepsilon`
ζ	`\zeta`	η	`\eta`	θ	`\theta`
ϑ	`\vartheta`	ι	`\iota`	κ	`\kappa`
$\varkappa$	`\varkappa`	λ	`\lambda`	μ	`\mu`
ν	`\nu`	ξ	`\xi`	π	`\pi`
ρ	`\rho`	ϱ	`\varrho`	σ	`\sigma`
τ	`\tau`	υ	`\upsilon`	ϕ	`\phi`
φ	`\varphi`	χ	`\chi`	ψ	`\psi`
ω	`\omega`	Γ	`\Gamma`	Δ	`\Delta`
Θ	`\Theta`	Λ	`\Lambda`	Ξ	`\Xi`
Π	`\Pi`	Σ	`\Sigma`	Υ	`\Upsilon`
Φ	`\Phi`	Ψ	`\Psi`	Ω	`\Omega`

Néhány további fontos TeX parancs

Határérték	`\lim_{n\to \infty}`	$\lim_{n\to\infty}$
vagy	`\lim\limits_{n\to \infty}`	$\lim\limits_{n\to\infty}$
szumma	`\sum_{k=1}^{n}`	$\sum_{k=1}^{n}$
vagy	`\sum\limits_{k=1}^{n}`	$\sum\limits_{k=1}^{n}$
produktum	`\prod_{k=1}^{n}`	$\prod_{k=1}^{n}$
vagy	`\prod\limits_{k=1}^{n}`	$\prod\limits_{k=1}^{n}$
integrál	`\int_{0}^{t}`, `\int\limits_{0}^{t}`	$\int_{0}^{t}$, $\int\limits_{0}^{t}$
négyzetgyök	`\sqrt{ }`	$\sqrt{\ }$
k-adik gyök	`\root{k}\of{ }`, `\sqrt[k]{ }`	$\sqrt[k]{\ }$, $\sqrt[k]{\ }$

Hasonló — mégis más, ne tévesszük össze!

$\backslash$ (`\backslash`), nincs matematikai funkciója	$\setminus$ (`\setminus`), halmazkivonás, pl. $A\setminus B$
$:$ (`\colon`), függvénydefiníció, halmazdefiníció, pl. $f\colon x\to 1$, $\{x\colon x<0, x\in\mathbb{Z}\}$	$:$ (:), osztás, arány, pl. $a:b$
$\vert$ (`\vert` vagy `|`), abszolút érték, pl. $2\vert x\vert y$	$\mid$ (`\mid`), osztó, halmazelválasztó, pl. $x\mid y$, $\{x\mid x\in\mathbb{R}, x<0\}$
$\Vert$ (`\Vert` vagy `\\|`), norma, pl. $\Vert A\Vert$	$\parallel$ (`\parallel`), párhuzamos, pl. $A\parallel B$
Σ, görög betű	$\sum$, szumma jel
Π, görög betű	$\prod$, produktum jel

Index és kitevő

Az index írása az `_{ }` jellel történik (a kapcsos zárójelbe az indexet kell írni). Például: `$3a_{2k+1}$` eredménye $3a_{2k+1}$.

A kitevő írása a `^{ }` jellel történik (a kapcsos zárójelbe a kitevőt kell írni). Például: `$10^{10}$` eredménye 10^{10}.

Példa: `$3x_{5}^{12}+12y_{12}^{5}$` eredménye $3x_{5}^{12}+12y_{12}^{5}$.

Ha csak egy karakter van a kapcsos zárójeleken belül, akkor a zárójel elhagyható, de ez számos hiba forrása lehet.

A TeXnicCenter zölddel jelöli azokat a zárójeleket, amelyeknek megtalálja a párját, pirossal azokat, amelyeknek nem. Érdemes ezt is figyelni!

A tizedesvessző írása

A képletben beírt vesszőt a TeX úgy tekinti, hogy a felsorolás elválasztó karaktere, ezért helyet tesz utána. Ezt úgy lehet kiküszöbölni, hogy a tizedesvesszőt kapcsos zárójelek közé tesszük: $4{,}2$ írásmódja `$4{,}2$`. Ha lemarad a kapcsos zárójel, akkor $4,2$ lesz belőle, mintha felsorolás lenne.

Mivel a tizedestört matematikai kifejezés, mindig képletként kell beírni.

Nézzünk néhány példát

A másodfokú egyenlet megoldóképletét így írhatjuk be:

Az $ax^2+bx+c=0$ ($a\ne 0$) másodfokú egyenlet megoldásai $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

```
Az $ax^2+bx+c=0$ ($a\ne 0$) másodfokú egyenlet megoldásai
$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
```

Vegyük észre, hogy mi került egy-egy képletbe. A kikötés egy új képlet, amelynek a nyitó és záró zárójele nem része a képletnek, tehát szöveges, maga a kikötés matematikai kifejezés.

A szinusztétel:

Ha egy háromszög három oldalát a, b és c jelöli, a velük szemközti szögeket pedig rendre α, β és γ, akkor fennáll, hogy $a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$.

```
Ha egy háromszög három oldalát $a$, $b$ és $c$ jelöli,
a velük szemközti szögeket pedig rendre $\alpha$, $\beta$ és $\gamma$,
akkor fennáll, hogy $a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$.
```

Kiemelt, középrezárt képlet

Előfordulhat, hogy egy képletet kiemelve, középre zárva akarunk beírni. Ezt úgy tehetjük meg, hogy nem egy-egy, hanem két-két dollárjel közé zárjuk a képletet. Ez ugyan nem a legjobb megoldás (majd látunk rá sokkal jobbat), de egyelőre maradjunk ennyiben.

Például

Az $ax^2+bx+c=0$ ($a\ne 0$) másodfokú egyenlet megoldásai

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

```
Az $ax^2+bx+c=0$ ($a\ne 0$) másodfokú egyenlet megoldásai
$$
x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.
$$
```

Erről a következőkben sokkal több szót ejtünk.

Ismét vegyünk nagy levegőt, és tegyük próbára a TeX-et

Ezúttal válasszunk egy olyan szöveget, amely tartalmaz matematikát, és próbáljuk meg beírni.

Gyakorlati tanácsok:

1. Tartsuk magunk előtt (a képernyőn vagy kinyomtatva) a relációs jelek, a leggyakoribb TeX függvények, TeX operátorok, a leggyakoribb görög betűk, a további TeX parancsok és a Hasonló — mégis más táblázatokat.

2. Figyeljük, hogy fordításkor jelez-e hibát a program. Ha igen, azonnal keressük meg. Eleinte gyakran fordítsuk be a LaTeX-et PDF-re, hogy ha hibát jelez a program, akkor tudjuk, hol keressük.

A leggyakoribb hibák forrása: lemarad a $\backslash$ a parancs elől, betűelírás a parancsban, lemarad egy nyitó vagy záró kapcsos zárójel, nem kapcsos zárójelet írunk oda, ahova azt kellett volna, lemarad egy $ jel.

3. A legelső hibát keressük meg, mert lehet, hogy az okoz további 50 hibát. A TeX a hibaüzeneteket a hibát tartalmazó sor számával együtt adja meg, így könnyen megtaláljuk a hibát tartalmazó sort. A szövegszerkesztő segít: a felső sorban található piros háromszög ikonra kattintva ráugrik a hibás sorra. (A View menüpontban állítsuk be, hogy a szövegszerkesztő jelezze a szövegben a sorszámot, Ctrl+Shift+F7 billentyűzetkombináció).

4. Ha nem találjuk meg a hibát, akkor zárjuk le a dokumentumot `\end{document}` egy korábbi sornál, ahol még — reményeink szerint — nem lehet hiba. Ezek után tegyük egyre hátrább és hátrább a dokumentum lezáró sorát. Ha még mindig nem találjuk a hibás sort, akkor egyesével tegyük `%` jel mögé a gyanús sort, sorokat.

5. Ha úgy tűnik, hogy minden rendben van, de mégis hibát jelez a program, akkor a fordítás során létrejövő állományok közül töröljük azokat, amelyekre nincs szükségünk, legfőképpen az aux kiterjesztésűt. Lehet ugyanis, hogy valamilyen hiba egy korábbi fordítás során ezekbe bekerülve továbbra is hibát eredményez.

6. Ha ez sem segít, akkor ellenőrizzük, hogy egy korábban jól működő TeX még mindig jól működik-e. Ha most hibás, akkor a rendszerrel történhetett valami. Ha a korábbi fájl hibátlan, akkor sajnos mégis hiba van a mostani fájlban. Ilyenkor csak a türelem segít, előbb-utóbb megtaláljuk a hibát.

FOLYT. KÖV.

Fried Katalin

informatika TeX - LaTeX

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok
Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon:
Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Katz Sándor 2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Gondold tovább! – 2.

A 2017. évi székesfehérvári Rátz László matematikatanári vándorgyűlésen elhangzott előadás szerkesztett változata. Az Érintő 2017. szeptemberi számában megjelent első rész folytatása.

Mottó: „A legtöbb amit a tanár a diákjaiért tehet az, hogy észrevétlenül rávezeti egy-egy jó ötletre." (Pólya György) A kérdéseket először mi tesszük fel, majd fokozatosan érjük el, hogy ezeket már a tanulók maguk fogalmazzák meg. Ha ezt következetesen csináljuk, akkor eljuthatunk ahhoz az örömteli helyzethez, hogy a tanítványaink olyan érdekes kérdéseket is fel tudnak tenni, ami nekünk nem is jutott eszünkbe.

A cikk első részében példákat hoztam néhány javasolt kérdésre, amit célszerű feltenni:

I. Lehet-e a feladatnak több, más eredménye is?

II. Lehet-e más módszerrel eredményre jutni? Melyik módszer a legalkalmasabb, melyik ragadja meg leginkább a feladat lényegét? Milyen más feladatokban vezethet eredményre a megoldásban alkalmazott módszer? Szükség volt-e a megoldáshoz minden feltételre? Lehet-e a problémát általánosítani?

A második részben további kérdésekre mutatok feladatokat:

III. Megfordítható-e az állítás?

IV. Hogyan változhat a feladat eredménye, vagy megoldási módszere, ha a feltételeket kissé módosítjuk?

V. Milyen alkalmazásai lehetnek a megoldott problémának?

III. Megfordítható-e az állítás?

Általános- és középiskolában sok olyan tétellel találkoznak a tanulók, amelyeknek a megfordítása is igaz, de az nem szerepel a tananyagban. Az alkalmazásnál viszont gyakori, hogy a bizonyított tétel helyett annak megfordítását használják fel. Feladatoknál pedig még gyakoribb, hogy a feladat szövege csak az egyik irányú állítás igazolására szólít fel.

Akár tételként, akár feladatként találkoznak tanítványaink *Ha ..., akkor* ... típusú állításokkal, célszerű megvizsgálni, hogy igaz-e az állítás megfordítása?

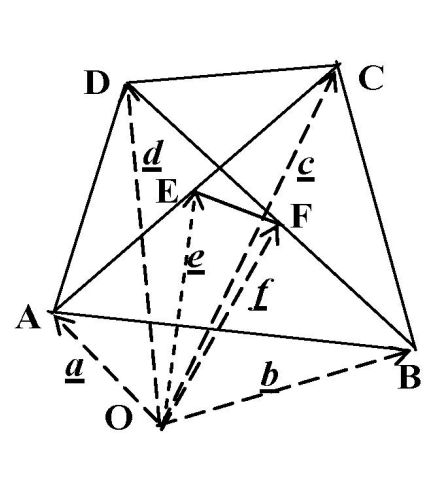
A következőkben néhány olyan, négyszögekre vonatkozó állítást vizsgálunk, amelyeket jobb osztályokban tételként szoktunk bizonyítani, illetve más csoportokban is előkerülhetnek feladatként, de megfordításuk általában nem szerepel a tananyagban. A tételek bizonyítását ismertnek tekintjük, itt csak a megfordításokkal foglakozunk.

III/1. feladat. *Tudjuk, hogy a paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével. Igaz-e, hogy ha egy konvex négyszög oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével, akkor a négyszög paralelogramma?*

Megoldás. A megfordítás is igaz. Ennek megmutatásához egy általánosabb tételt igazolunk:

Ha az $ABCD$ konvex négyszög AC és BD átlóinak felezőpontja E és F, akkor

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4EF^2.$$



1. bizonyítás. A sík tetszőleges O pontjából az A, B, C és D pontokba mutató vektorok legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$.

Ekkor O-ból az E és F pontba mutató vektorok $\mathbf{e}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}$ és $\mathbf{f}=\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{d}}{2}$.

Így a fenti állítás

$$(\mathbf{b}-\mathbf{a})^2+(\mathbf{c}-\mathbf{b})^2+(\mathbf{d}-\mathbf{c})^2+(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2=(\mathbf{c}-\mathbf{a})^2+(\mathbf{d}-\mathbf{b})^2+4\left(\frac{\mathbf{d}+\mathbf{b}}{2}-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}\right)^2.$$

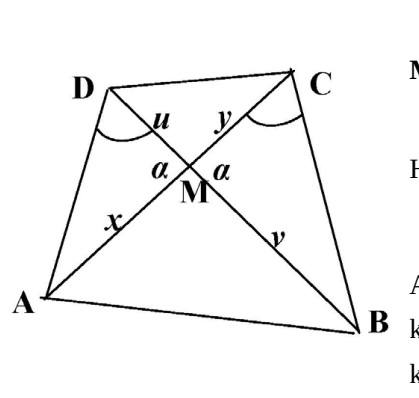
A műveleteket elvégezve a két oldal egyenlő.

2. bizonyítás. Helyezzük el a négyszöget koordináta-rendszerbe, és legyen $A(a_1;a_2)$, $B(b_1;b_2)$, $C(c_1;c_2)$ és $D(d_1;d_2)$. Ekkor $E\left(\dfrac{a_1+c_1}{2};\dfrac{a_2+c_2}{2}\right)$ és $F\left(\dfrac{b_1+d_1}{2};\dfrac{b_2+d_2}{2}\right)$, továbbá $AB^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$, ...

A megfelelő koordinátákat az igazolandó állításba írva láthatjuk, hogy a két oldal egyenlő.

Az igazolt tételből következik, hogy ha a négyszög oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével, akkor $EF=0$, azaz a négyszög paralelogramma. Sőt az is, hogy ha a négyszög nem paralelogramma, akkor a négyszög oldalainak négyzetösszege nagyobb az átlók négyzetösszegénél.

III/2. feladat. *Tudjuk, hogy húrnégyszögben a két átlón az átlódarabok szorzata egyenlő. Igaz-e, hogy ha egy konvex négyszögben a két átlón az átlódarabok szorzata egyenlő, akkor a négyszög húrnégyszög?*



Megoldás. A megfordítás is igaz.

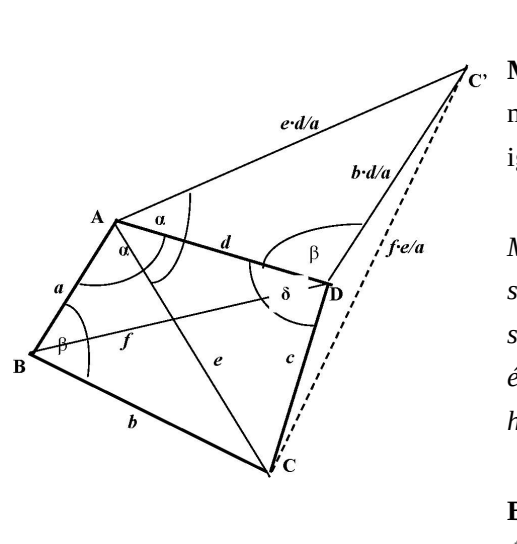
Ha $xy=uv$, akkor $\dfrac{x}{u}=\dfrac{v}{y}$.

Az AMD és BMC háromszögek hasonlók, mert két oldaluk aránya egyenlő, és az oldalak által közbezárt szög mindkét háromszögben α.

Ezért a megfelelő szögek is egyenlők: $ADB\sphericalangle=ACB\sphericalangle$.

Ha egy oldal a másik két csúcsból azonos szög alatt látszik, akkor a négyszög húrnégyszög.

III/3. feladat. *Tudjuk, hogy húrnégyszögben az átlók szorzata egyenlő a szemközti oldalak szorzatának összegével. Igaz-e, hogy ha egy konvex négyszögben az átlók szorzata egyenlő a szemközti oldalak szorzatának összegével, akkor a négyszög húrnégyszög?*



Megoldás. A megfordítás is igaz. Ennek megmutatásához is egy általánosabb tételt igazolunk:

Minden konvex négyszögben az átlók szorzata nem nagyobb a szemközti oldalak szorzatának összegénél. Egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha a négyszög húrnégyszög.

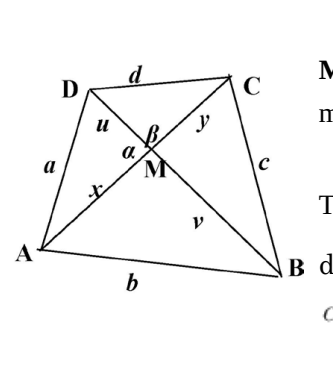
Bizonyítás forgatva nyújtás segítségével. Alkalmazzuk az ABC háromszögre az $A\left(\alpha,\dfrac{d}{a}\right)$ forgatva nyújtást. Ennél B képe D, C képe C'.

A $\dfrac{d}{a}$-szoros nyújtás miatt $AC'=e\cdot\dfrac{d}{a}$ és $DC'=b\cdot\dfrac{d}{a}$. A forgatás miatt $CAC'\sphericalangle=\alpha$ és $ADC'\sphericalangle=\beta$, $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AC'}{AD}=\dfrac{e}{a}$. Ezért $ABD\triangle\sim ACC'\triangle$. Így a harmadik oldalak aránya is $\dfrac{e}{a}$, azaz $CC'=f\cdot\dfrac{e}{a}$. A CDC' (esetleg elfajuló) háromszögben:

$$c+b\cdot\frac{d}{a}\geq f\cdot\frac{e}{a}\Rightarrow ac+bd\geq ef.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor állhat, ha $\beta+\delta=180^\circ$, azaz ha a négyszög húrnégyszög.

III/4. feladat. *Tudjuk, hogy ha egy konvex négyszög átlói merőlegesek, akkor a szemközti oldalak négyzetösszege egyenlő. Igaz-e, hogy ha egy konvex négyszögben a szemközti oldalak négyzetösszege egyenlő, akkor a négyszög átlói merőlegesek?*



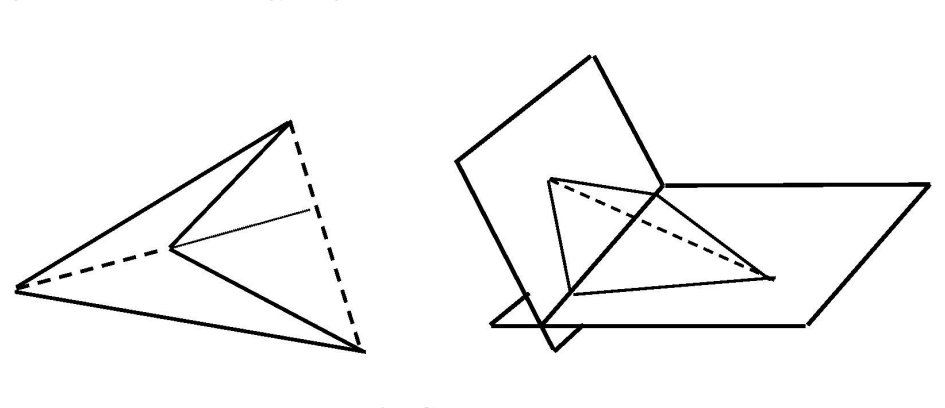
Megoldás. A megfordítás is igaz. Ezt indirekt módszerrel mutatjuk meg.

Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz: $a^2+c^2=b^2+d^2$, de az átlók nem merőlegesek. Feltehetjük, hogy pl. $\alpha<90^\circ$, $\beta>90^\circ$.

Ekkor $a^2<x^2+u^2$, $c^2<y^2+v^2$ és $b^2>x^2+v^2$, $d^2>y^2+u^2$.

Ezekből $a^2+c^2<b^2+d^2$. Ez ellentmond annak, hogy $a^2+c^2=b^2+d^2$.

Megjegyzés. Vektorokkal vagy koordináta-rendszerben való elhelyezéssel megmutatható, hogy a tétel is és a megfordítása is (nem hurkolt) konkáv négyszögekben is igaz, sőt nem síkbeli négyszögekre is.



III/5. feladat. *Tudjuk, hogy az $ABCD$ téglalap síkjának tetszőleges P pontjára $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$.*

Igaz-e, hogy ha az $ABCD$ négyszög síkjának tetszőleges P pontjára $PA^+PC^2=PB^2+PD^2$, akkor a négyszög téglalap?

(Lásd KöMaL 2008. szept. B.4106. feladat.)

Megoldás. A megfordítás is igaz.

Vegyük fel a P pontot először a négyszög A csúcsában, ekkor $AC^2=AB^2+AD^2$.

Ha $P=C$, akkor $AC^2=CB^2+CD^2$, ezekből

$$AB^2+AD^2=CB^2+CD^2. \qquad (1)$$

Ugyanígy, ha P-t a másik átló végpontjaiban vesszük fel, akkor

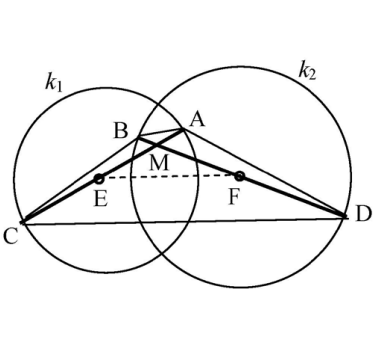
$$AB^2+BC^2=AD^2+CD^2. \qquad (2)$$

Az (1) és a (2) egyenlőséget összeadva, illetve kivonva, azt kapjuk, hogy $AB=CD$, illetve $BC=AD$, tehát a négyszög paralelogramma.

Vegyük fel ezután a P pontot a paralelogramma átlóinak metszéspontjában. Mivel az átlók felezik egymást, azt kapjuk, hogy pl. $PA=PB$, az átlók egyenlők, a négyszög valóban téglalap.

Megjegyzés. Az eredeti állítás a tér tetszőleges P pontja esetén igaz, és így természetesen a megfordítás is igaz akkor is, ha P a tér tetszőleges pontja.

A következőkben a fenti öt tétel alkalmazására mutatunk feladatokat. Olyanokat is, amelyeknél a fenti tételek segíthettek emelt szintű érettségin és versenyeken is szép megoldások megtalálásában.



III/6. feladat. *Az 5 egység sugarú k_1 és a 7 egység sugarú k_2 körök középpontjainak távolsága 9 egység. A k_1 kör AC átmérője és a k_2 kör BD átmérője M-ben metszi egymást. Mekkora az $ABCD$ négyszög oldalainak négyzetösszege?*

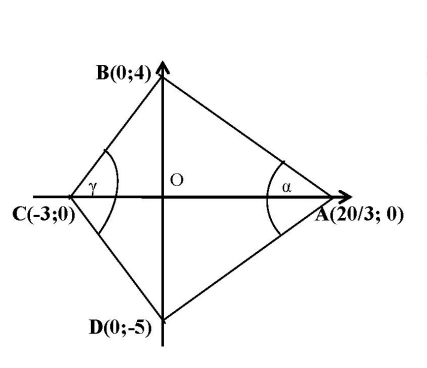
Megoldás. A **III/1. feladat** megoldásában bizonyított tétel szerint

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4EF^2=10^2+14^2+4\cdot9^2=620$$

III/7. feladat. *Az $ABCD$ konvex négyszög oldalegyeneseinek egyenlete rendre: $DA\colon 3x-4y-20=0$, $AB\colon 3x+5y-20=0$, $BC\colon 4x-3y+12=0$, $CD\colon 5x+3y+15=0$.*

a) Igazolja, hogy a négyszög átlói az x és az y tengelyre illeszkednek, továbbá hogy ennek a négyszögnek nincsen derékszöge!

b) Bizonyítsa be, hogy ez a négyszög húrnégyszög! (A 2010. évi májusi emelt szintű érettségi 7. feladata.)



Megoldás. a) A megfelelő egyenletrendszerek megoldásával kiszámolhatjuk a csúcsok koordinátáit:

$$A\left(\frac{20}{3};0\right),\qquad B(0;4),\qquad C(-3;0),\qquad D(0;-5).$$

Tehát a csúcsok valóban a tengelyekre illeszkednek.

Az oldalegyenesek irányvektorai:

$$\overrightarrow{AB}\left(-\frac{20}{3};4\right),\quad \overrightarrow{CB}(3;4),\quad \overrightarrow{CD}(3;-5),\quad \overrightarrow{DA}\left(\frac{20}{3};5\right).$$

Ezekből

$$\cos\gamma=\frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{9-20}{5\cdot\sqrt{34}}\approx-0{,}3773,$$

ezért $\gamma\approx112{,}17^\circ$. Hasonló módszerrel $\alpha\approx67{,}87^\circ$.

A B és D csúcsban találkozó oldalak irányvektorainak skalárszorzata sem 0, ezért nincs derékszög a négyszögben.

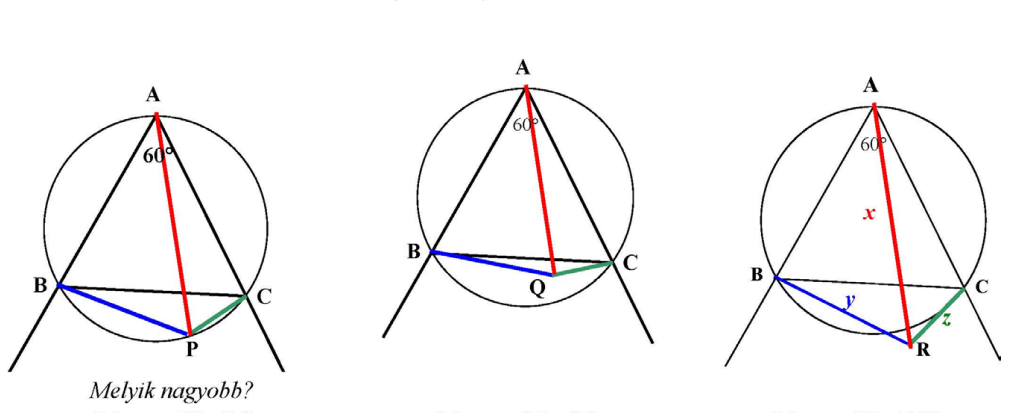
b) Aki a fentiekből $\alpha+\gamma=180^\circ$ kiszámolásával igazolta, hogy a négyszög húrnégyszög, az nem kapott pontot, mert a közelítő értékek nem bizonyítják az állítást.

Ez a gondolatmenet akkor elfogadható, ha $\cos\alpha$ és $\cos\gamma$ pontos értékéről állapítjuk meg, hogy egymásnak (-1)-szeresei.

Hasonlóan jó megoldás az is, ha pl. a CDB és CAB hegyesszögek tangenseiről mutatjuk meg, hogy egyenlők.

Sokkal egyszerűbben jutunk eredményre, ha a **III/2. feladat** állításának felhasználásával megmutatjuk, hogy $OA\cdot OC=\dfrac{20}{3}\cdot3=20$, és $OB\cdot OD=4\cdot5=20$, azaz $OA\cdot OC=OB\cdot OD$, ezért a négyszög húrnégyszög.

III/8. feladat *Az ABC háromszög szabályos.*



Melyik nagyobb?
PA vagy PB+PC, *QA vagy QB+QC,* *RA vagy RB+RC?*

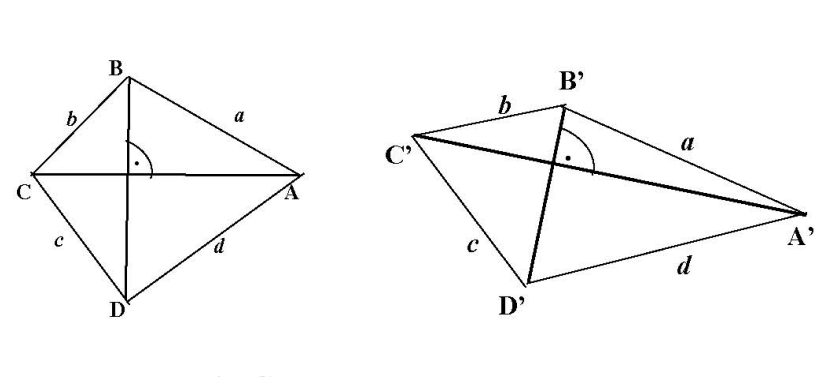
Megoldás. A **III/3. feladat** megoldásában bizonyított tétel szerint húrnégyszögben a szemközti oldalak szorzatának összege egyenlő az átlók szorzatával, ha a négyszög nem húrnégyszög, akkor szemközti oldalak szorzatának összege nagyobb az átlók szorzatánál.

Ezért ha a szabályos háromszög oldala a, akkor $a\cdot PA=a\cdot PB+a\cdot PC$, azaz $PA=PB+PC$.

A másik két ábrán viszont a $ABQC$ és $ABRC$ négyszögek nem húrnégyszögek, ezért $a\cdot QA<a\cdot QB+a\cdot QC$, azaz $QA<QB+QC$, illetve $a\cdot RA<a\cdot RB+a\cdot RC$, azaz $RA<RB+RC$.

Megjegyzés. A feladatban a tanulók igen nagy százalékban a $PA=PB+PC$, $QA<QB+QC$, illetve $RA>RB+RC$ megoldást adták meg.

III/9. feladat. *Ha egy csuklós négyszög átlói valamely helyzetben merőlegesek, akkor minden helyzetben merőlegesek.*

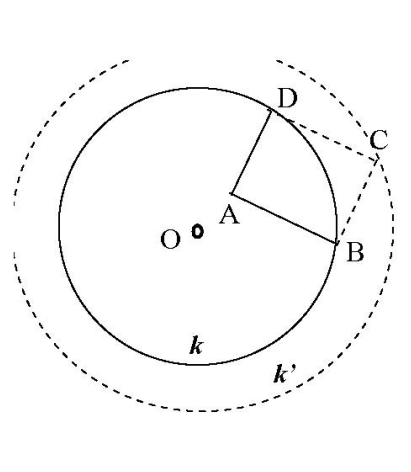


Megoldás. Ha az $ABCD$ négyszögben az átlók merőlegesek, akkor $a^2+c^2=b^2+c^2$.

De ha $a^2+c^2=b^2+c^2$, akkor az $A'B'C'D'$ négyszögben az átlók merőlegesek, azaz minden helyzetben merőlegesek.

III/10. feladat. *Adott a síkban egy k kör és a körön belül egy A pont. Mi lesz az összes olyan $ABCD$ téglalap C csúcsának mértani helye, amelyeknek B és D csúcsa illeszkedik a k körre?*

(Lásd KöMaL 2002. nov. B.3588. feladat.)



Megoldás. Alkalmazzuk a **III/5. feladatot** úgy, hogy a P pont a kör O középpontja legyen: $OA^2+OC^2=OB^2+OD^2$.

Mivel $OB=OD$ minden helyzetben a kör sugárával egyenlő, és OA is állandó, ezért OC is állandó. Tehát a C pont mértani helye egy O középpontú $OC=\sqrt{2r^2-OA^2}$ sugarú k' kör.

Mivel $OA<r$, ezért A bármely helyzetében $r<OC\leq\sqrt{2}r$.

A k' kör minden C pontja hozzá tartozik a mértani helyhez, az AC szakasz Thalész-köre kimetszi a k körön a megfelelő B és D pontokat.

Megjegyzés. Ha nem kötjük ki, hogy A a k kör belső pontja, akkor csak abban az esetben van megoldás, ha $OA\leq r\sqrt{2}$. Ha $OA=r\sqrt{2}$, akkor a keresett mértani hely az O pont.

Néhány további gyakorló feladat

III/11. feladat. *a) Tudjuk, hogy egy rombusznak két szimmetriatengelye van, a két átlója. Igaz-e, hogy ha egy négyszög alakú ruhadarabról hajtogatással akarjuk eldönteni, hogy rombusz alakú-e, akkor ehhez legalább két hajtást kell végezni?*

b) Tudjuk, hogy egy téglalapnak két szimmetriatengelye van. Igaz-e, hogy ha egy négyszög alakú ruhadarabról hajtogatással akarjuk eldönteni, hogy téglalap alakú-e, akkor ehhez legalább két hajtást kell végezni?

c) Tudjuk, hogy egy négyzetnek négy szimmetriatengelye van. Igaz-e, hogy ha egy négyszög alakú ruhadarabról hajtogatással akarjuk eldönteni, hogy négyzet alakú-e, akkor ehhez legalább négy hajtást kell végezni?

III/12. feladat. *Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja M. Tudjuk, hogy ha $AB\parallel CD$, akkor a BCM és ADM háromszögek területe egyenlő. Igaz-e, hogy ha a BCM és ADM háromszögek területe egyenlő, akkor $AB\parallel CD$?*

III/13. feladat. *Az $ABCD$ konvex négyszög BC oldalának felezőpontja F. Tudjuk, hogy ha $AB\parallel CD$ akkor az AFD háromszög területe fele a négyszög területének. Igaz-e, hogy ha az AFD háromszög területe fele a négyszög területének, akkor $AB\parallel CD$?*

IV. Hogyan változik a feladat eredménye, megoldási módszere, ha kissé változtatunk a feltételeken?

Egy feladat teljesebb megértését szolgálja, ha megvizsgáljuk, hogyan változik az eredmény, esetleg a megoldási módszer, ha a feltételeket kissé megváltoztatjuk. Célszerű tanítványainkat rászoktatni arra, hogy elemezzék, módosítsák a feltételeket. Nemcsak azért, mert ezáltal világosabbá válik, hogy melyik feltételnek milyen szerepe van a feladatban, hanem azért is, mert ez az egyszerű elvárás jól fejleszti a kreativitást, és meglepő új problémákhoz vezethet.

A kétszemélyes matematikai játékok témaköréből mutatunk néhány példát arra, hogy a feltételek kisebb módosításával változatos feladatcsokrokat hozhatunk létre. Az első két feladat megoldását az olvasóra bízzuk, ill. megtalálhatók [6]-ban. Javasoljuk további módosítások elemzését. (Mindegyik feladatban a lehetséges lépéseket fogalmazzuk meg, de lépni kötelező, passzolni nem lehet.)

IV/1. feladat. *a) Egy asztalon 25 kavics van. Ketten felváltva vesznek el kavicsokat. Egy lépésben 1, 2 vagy 3 kavicsot. Az a játékos nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Ki tud nyerni, Kezdő vagy Második?*

Legyen az asztalon levő kavicsok száma k, az egy lépésben elvehető kavicsok száma $1,2,\ldots,m$. Ki tud nyerni, ha

b) $k=28$, $m=3$,

c) $k=25$, $m=4$,

d) Milyen (k,m) számpároknál tud Kezdő nyerni?

e) Hogyan módosul a feladat a fenti esetekben, ha az veszít, aki az utolsó kavicsot elveszi?

f) $k=25$ és $m=3$ esetén ki tud nyerni, ha az nyer, akinél a végén páros számú kavics lesz?*

g) $k=25$ esetén ki tud nyerni, ha az elvehető kavicsok száma 2 vagy 3? (Így nemcsak az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi, hanem az is, aki 1 kavicsot hagy az asztalon.)

h) Adott* k esetén az elvehető kavicsok száma $m-1$ vagy m. Milyen (k,m) számpároknál tud Kezdő nyerni? (Az nyer, aki a végén az asztalon $0,1,2,\ldots,m-2$ kavicsot hagy.)

i) $k=25$, $m=3$ esetén ki nyer, ha nem szabad annyi kavicsot elvenni, amennyit az előző lépésben a partner elvett? (Nemcsak az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi, hanem az is, aki a végén az asztalon levő két kavicsból 1-et elvesz, mert a partner nem tud már lépni.)

j) Az asztalon van k kavics. Az elvehető kavicsok száma az asztalon levő kavicsok legfeljebb fele. Milyen k estén tud nyerni Kezdő?

k) Az asztalon van k kavics. Az n-edik lépésben az elvehető kavicsok száma legfeljebb n. Milyen k estén tud nyerni Kezdő?

IV/2. feladat. *Az asztalon van két halom, az egyikben k, a másikban m kavics. A halmokból ketten felváltva vesznek el kavicsokat. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. (Az veszít, aki a megengedett lépést már nem tudja elvégezni.) Milyen (k,m) számpároknál tud Kezdő nyerni a következő feltételek esetén?*

Egy lépésben szabad elvenni:

a) Az egyik halomból akármennyit. (Aki lép, az itt is, és a továbbiakban is mindig választhat, hogy melyik halomból veszi el a megengedett mennyiséget.)

b) Az egyik halomból akármennyit, vagy mindkét halomból ugyanannyit.

c) Az egyik halomból egyet.

d) Az egyik halomból egyet, vagy mindkét halomból egyet.

e) Az egyik halomból egyet vagy kettőt.

f) Az egyik halomból egyet vagy kettőt, vagy mindkét halomból egyet vagy kettőt.

g) Az egyik halomból egyet, a másik halomból kettőt.

Megjegyzés. A fenti feladatok átfogalmazhatók sakktáblás játékká. Egy sakktáblán valamelyik mezőre elhelyezünk egy bábut. A bábuval ketten felváltva lépnek, és az nyer, aki a bal alsó sarokba viszi a bábut. Távolodni nem szabad. A fenti *a), c)* és *e)* feladatokban a bábu bástya, a *b)* és *f)* feladatban vezér, a *d)* feladatban király, a *g)* feladatban huszár. A sakktáblán könnyebben megtalálhatjuk a nyerő és vesztő mezőket.

IV/3. feladat. *Van egy m kavicsból álló halmazunk. Egy lépés abból áll, hogy a halmazt két részre bontják. Ketten felváltva lépnek. Az veszít, aki a megengedett lépést már nem tudja elvégezni. (Tehát az nyer, aki a csupa egy kavicsból álló halmaz-rendszert el tudja érni.)*

a) Ki tud nyerni $m=10$ esetén?

b) Milyen m-ek esetén van Másodiknak nyerő stratégiája?

c) Ki tud nyerni, ha három halomban vannak kavicsok: 5, 8 és 10 db?

d) Ki tud nyerni, ha három halomban vannak kavicsok: k, n és m db?

e) Ki tud nyerni $m=10$ kavics esetén, ha az asztalon levő halmok egyikét sem lehet két egyenlő halomra bontani? (Most az nyer, aki el tudja érni, hogy az asztalon csupa egy- és kételemű halom legyen.)

*f**) Milyen m-ek esetén van Másodiknak nyerő stratégiája egy halomban levő m számú kavics esetén, ha az asztalon levő halmok egyikét sem lehet két egyenlő halomra bontani?*

Megoldás. Az *a), b), c)* és *d)* feladatok esetén igen egyszerű a megoldás, ha észrevesszük, hogy minden bontásnál a halmok száma 1-gyel nő, ezért a halmok számának paritása minden lépésnél megváltozik. Például az *a)* feladatban Kezdő első lépése után 2 halom, minden további lépése után páros számú halom lesz, ezért a 10 db 1 elemű halmot ő tudja létrehozni, ő nyer.

Vizsgáljuk most az *f)* feladatot, speciális esetként megkapjuk az $m=10$ esetére a választ.

$m=1$ és $m=2$ esetén Kezdő veszít, mert már az első lépést sem tudja megtenni.

$m=3$ esetén Kezdő tud nyerni, mert 1–2 bontást végez, és ezzel befejeződik a játék.

$m=4$ esetén Kezdő csak 1–3 bontást végezhet, amelyből Második 1–2–1 bontással nyer.

Ha valamely $m\geq4$ esetén Második tud nyerni, akkor $m+1$ és $m+2$ esetén Kezdőnek van nyerő stratégiája, hiszen $1–m$, ill. $2–m$ bontással olyan helyzetet hoz létre, amelyből a következő, tehát Második veszít. (*) Eszerint $m=5$ és $m=6$ esetén Kezdő nyer.

$m=7$ esetén Kezdő háromféleképpen kezdhet. 1–6 és 2–5 bontással az előző pont szerint vesztő helyzetbe kerül. Kezdő 3–4 bontásánál Második 1–2–4-re bont. Ezután Kezdő csak 1–2–1–3-at tud bontani, amiből Második 1–2–1–1–2 bontással nyer.

$m=8$ és $m=9$ esetén Kezdő (*) szerint nyerni tud.

$m=10$ esetén Kezdő szintén háromféleképp kezdhet. 1–9 és 2–8 bontással az előző pont szerint vesztő helyzetbe kerül. Kezdő 4–6 bontásánál Második 4–2–4-re bont. Ezután amit Kezdő csinál az egyik 4-es halommal, Második azt utánozza a másikkal, ezért ő nem veszít. Mivel a játék véges sok lépésben befejeződik ezért Második nyer.

$m=11$ és $m=12$ esetén Kezdő ismét (*) szerint nyerni tud.

Itt már sejteni lehet egy szabályosságot: $m=1$, 2 és minden $m=3k+1$ alakú számra Második nyer, a többi számra Kezdő. Sajnos ez nem igaz. Már $m=13$-ra sem működik. Itt a sejtéstől eltérően Kezdő tud nyerni.

Hogyan tovább?

Ha nem kötjük ki, hogy különböző részekre kell bontani a halmazt, akkor a játék igen könnyű, illetve nem is igazán érdekes, mert aki az elején kedvező helyzetben van, bárhogy is játszanak a játékosok, mindig az nyer.

Az a látszólag kis nehezítés, hogy nem lehet két egyenlő részre bontani a halmokat, teljesen megváltoztatja a játékot. Olyannyira, hogy **tetszőleges m-re az általános megoldás nem is ismert.**

$m=1$, 2, 4, 7, 10, 20, 23, 26 esetén Második nyer, de a következő, Második számára kedvező m értékek már jóval nagyobbak: 50, 53, 270, 273, 276, ...

$m=2^{38}$-ig összesen 42 Második számára kedvező helyzet ismert.

A következő, nem nehéz számelméleti feladat továbbgondolása, kis módosítása olyan problémára vezet, amelynek tudomásom szerint nem ismert a megoldása.

IV/4. feladat. *Van-e olyan kettő-hatvány, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában mind a tíz számjegy ugyanannyiszor szerepel?*

Megoldás. Nincs, mert ha minden számjegy k-szor szerepelne, akkor a számjegyek összege $45k$ lenne, a szám osztható lenne 3-mal, de 2^n nem osztható 3-mal.

Módosítás. *Van-e olyan három-hatvány, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában mind a tíz számjegy ugyanannyiszor szerepel?*

Erre a kérdésre nem találtunk olyan indokot, ami kizárná a létezést, de mostanáig számítógépes programmal sem találtunk megfelelő számot.

Most egy számelméleti feladatot és annak egy olyan módosítását vizsgáljuk, amely egy igen hasznos alkalmazáshoz vezetett.

IV/5. feladat. *Az n szám összes pozitív osztójának összege $\sigma(n)=5394$. Mi lehet az n szám?*

Megoldás. Az n szám prímtényezős felbontásának ismeretében meghatározhatjuk pozitív osztóinak összegét: Ha $n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{k_r}$, akkor pozitív osztóinak összege:

$$\sigma_n=\left(1+p_1+p_1^2+\ldots p_1^{k_1}\right)\cdot\left(1+p_2+p_2^2+\ldots p_2^{k_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+p_r+p_r^2+\ldots p_r^{k_r}\right).$$

A képlet ötletet adhat arra is, hogy hogyan határozzuk meg $\sigma(n)$ ismeretében n prímosztóit.

$5394=2\cdot3\cdot29\cdot31$, ezért 5394-nek $2^4=16$ osztója van. Ezek:

1, 2, 3, 6, 29, 31, 58, 62,
5394, 2697, 1798, 899, 186, 174, 93, 87

Azt kell megkeresnünk, hogy ezek közül melyek állíthatók elő valamely p prímre $d(p,k)=1+p+p^2+\ldots+p^k$ alakban.

$d(p,k)$ értékei p és k növekedésével gyorsan nőnek. Készítsünk egy táblázatot, amelyben az összes 5394-nél nem nagyobb $d(p,k)$ érték szerepel.

p	$k=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095
3	4	13	40	121	364	1093	3280				
5	6	31	156	781	3906						
7	8	57	400	2801							
11	12	133	1464								
13	14	183	2380								
17	18	307	5220								
$\vdots$											
73	74	5403									
$\vdots$											
5393	5394										

(A $k=1$ és $k=2$ oszlopban nem írtunk ki minden számot. A táblázatban valójában 753 lehetséges $d(p,k)$ érték szerepel.)

A $k=1$ oszlop 503 számot tartalmaz, ezért érdemesebb azt megnézni, hogy a fenti osztók közül melyik lesz $p+1$ alakú, azaz melyiknek lesz a kisebb szomszédja prím.

Ezek: $p=2$, 5, 61, 173 és 5393.

$p=5393$-hoz $n_1=5393$ jó megoldás. Valóban, $\sigma(5393)=5394$.

$p_1=173$-hoz $d(2,4)$-re $n_2=2^4\cdot173=2768$ is jó. Valóban, $\sigma(2768)=(1+173)(1+2+4+8+16)=5394$.

$p_1=173$-hoz $d(2,4)$-re $n_3=5^2\cdot173=4325$ is jó. Valóban, $\sigma(4325)=(1+173)(1+5+25)=5394$.

$p_1=61$-hez tartozó társosztó, a 87 nem állítható elő a táblázatból.

$p_1=5$-höz tartozó társosztó, a 899 sem állítható elő a táblázatból.

$p_1=2$-höz tartozó társosztó, a 2697 sem állítható elő a táblázatból.

A $k>1$ oszlopokban szereplő számok a 31 kivételével nem osztói 5394-nek. A 31-hez tartozó n_2 és n_3 számot pedig már megtaláltuk. Tehát három olyan n szám van, amelyre $\sigma(n)=5394$.

Mi a helyzet nagyobb $\sigma(n)$ értékek esetén?

A $d(p,k)=1+p+p^2+\ldots+p^k$ értékek $k>2$ esetén gyorsan növekednek, ezért ezek lehetséges értékeinek száma nem túl nagy. Ezekkel osztva $\sigma(n)$-t, el tudjuk dönteni, hogy az egyes prímek szerepelhetnek-e n-ben.

$k=1$ és $k=2$ esetén pedig ha $\sigma(n)$ osztói $p+1$-gyel, illetve $1+p+p^2$ egyenlők, a kapott egyenletek adnak lehetséges p értékeket. Ha n nem prím, akkor a legkisebb prímosztója, $p_1<\sqrt{\sigma(n)}$. Ha például $\sigma(n)$ 24-jegyű, akkor egy jó prímszámtáblázattal és programmal a 10^{12}-nél nem nagyobb p_1 prímosztót viszonylag gyorsan, néhány perc alatt meg lehet találni.

Egy kézenfekvő módosítás. *Jelöljük $s(n)$-nel az n szám nála kisebb osztóinak összegét: $s(n)=\sigma(n)-n$.*

Hogyan határozhatjuk meg $s(n)$ ismeretében az n számot?

Az $s(n)=\sigma(n)-n$ függvény nem alakítható szorzattá, ezért a $\sigma(n)$-nél használtakhoz hasonló eljárások nem alkalmazhatók. Nem tudjuk a fentihez hasonló módszerrel eldönteni $s(n)$ értékének ismeretében, hogy egy prím szerepel-e n-ben vagy nem.

Nem látszik jobb módszer, mint végigpróbálni minden lehetséges n-t, hogy az adott $s(n)$ tartozik-e hozzá.

Egy adott $s(n)$ esetén milyen határok között kereshetjük n értékét?

Ha n prím, akkor $s(n)=1$, és fordítva.

Ha $n=p^2$, ahol p prím, akkor $s(n)=1+p$. A két egyenletből: $n=(s(n)-1)^2$. Tehát egy adott $s(n)$ érték esetén $n\leq(s(n)-1)^2$, és ez a felső határ el is érhető.

Ez például azt jelenti, hogy egy 25-jegyű $s(n)$ esetén n nem lehet nagyobb 50-

Ha az 50-jegyűekig minden n-t végig kellene próbálni, hogy az adott $s(n)$ érték tartozik-e hozzá, akkor ez igen sokáig tartana. Ha például egy számítógép minden n esetén átlagosan $0{,}001$ s alatt döntené el, hogy hozzá az adott $s(n)$ tartozik-e, akkor ez kb. 10^{39} évig tartana.

Természetesen a próbálkozások száma csökkenthető. Például beláthatjuk, hogy

ha $s(n)$ páros, akkor

— n páros, és van olyan $p > 2$ prímtényezője, amely páratlan kitevővel szerepel; vagy

— n páratlan négyzetszám;

ha $s(n)$ páratlan, akkor

— n páros és minden $p > 2$ prímtényezője páros kitevővel szerepel; vagy

— n páratlan és van olyan $p > 2$ prímtényezője, amely páratlan kitevővel szerepel.

Ez kb. felére csökkenti a próbálkozások számát.

Vizsgálhatjuk külön azon eseteket, amelyeknél egy adott $s(n)$-hez nagyon nagy n tartozik

Már láttuk, hogy ha $n = p^2$, ahol p prím, akkor $s(n) = 1 + p$. Ez csak egyetlen próbálkozás.

Ha $n = pq$, ahol p és q prímek, akkor $s(n) = 1 + p + q$.

$4n = 4pq \leq (p+q)^2 = (s(n)-1)^2$. Ebből $n \quad \leq (s(n)-1)^2/4$.

Ez már negyedrészére csökkenti a vizsgálandó intervallumot.

Mindezek a korlátozások azonban alig csökkentik a próbálkozások számát, és a szükséges időt.

Ha egy 25-jegyű $s(n)$-nél az 50-jegyűekig minden n végigpróbálása helyett

— a fent említettnél $1\ 000\ 000$-szor gyorsabb gépekkel,

— és olyan meggondolásokat alkalmazva, keresnénk, amelynél $1\ 000\ 000$ számból csak 1-et kellene megnézni, már „csak” 10^{27} évig tartana.

Láthatjuk, hogy egy nagyon kézenfekvő kis módosítás: $\sigma(n)$ helyett $s(n)$-ből határozzuk meg n értékét; néhány perc alatt megoldható feladatból belátható idő alatt megoldhatatlan problémát hoz létre.

(A $\sigma(n)$-ből meghatározni n értékét feladat is exponenciális idejű probléma, de kb. 20-25-jegyű $\sigma(n)$-ekig ez jó géppel és jó programmal már valóban néhány perc alatt megoldható.)

V. Milyen alkalmazásai lehetnek a megoldott problémának?

Ne csak az emelt szintű szóbelire való készülésnél, hanem folyamatosan, elméleti anyagnál is és feladatoknál is tegyük fel a kérdést: Mire lehet használni a tárgyalt ismeretet?

A követezőkben a **IV/5. feladat** módosításánál kapott eredmény felhasználását mutatjuk be.

Ha egy eljárás, algoritmus egyik irányban viszonylag gyorsan, fordított irányban viszont sokkal hosszabb idő alatt hajtható végre, akkor gondolhatunk annak titkosításban való alkalmazására.

Például két nagy prímszám összeszorzása egy számítógéppel gyorsan végrehajtható, de a szorzatból a két nagy prím visszakeresésére nem ismerünk rövid idő alatt elvégezhető eljárást. Ezen alapul az 1976-ban kifejlesztett RSA titkosítási módszer.

Jelenleg számítógépekkel egy kb. 25-30-jegyű n szám nála kisebb osztói $s(n)$ összegének meghatározása rövid idő, legfeljebb néhány perc alatt elvégezhető, de a **IV/5. feladat** módosításánál megállapítottuk, hogy hasonló hosszúságú $s(n)$-ből n visszakeresésére belátható idejű módszert nem ismerünk. Tanítványaimmal ennek a ténynek a felhasználásával alakítottunk ki egy egyirányú titkosítási módszert.

Az egyirányú titkosítás lényege az, hogy egy üzenetet akarunk úgy elküldeni, hogy aki kapja, az a megérkezéskor még ne tudja elolvasni, csak egy lenyomatot kapjon róla. később viszont, amikor elküldjük a valódi üzenetet, akkor a lenyomat alapján ellenőrizni tudja, hogy ugyanaz volt-e az első küldemény.

Egy példa. Ketten interneten sakkoznak, de a játszmát félbe kell szakítani és például másnap folytatják. Normál versenyen ilyenkor a lépésre következő megteszi a következő lépést, de ezt nem mondja meg a partnernek, hanem egy borítékba zárva leadja a versenybírónak. Ezt igazságosnak tartjuk, mert aki lépett, az tudja ugyan a lépést, de ha a szünet alatt találna is helyette jobbat, már nem változtathat. Hogyan lehet borítékolni a lépést internetes sakkozásnál, ha nincs versenybíró?

Nem a lépést, hanem annak egy lenyomatát küldi el a játékos, és csak a folytatáskor küldi a lépést. A partner a lenyomat alján ellenőrzi, hogy valóban ez volt-e a lépés. A sakklépés ASCII kódja egy n szám, de nem ezt küldjük el (mert ebből a partner visszafejthetné a lépést), hanem a hozzá tartozó $s(n)$ értéket. Mint korábban láttuk, egy elég nagy $s(n)$-ből véges idő alatt nem tudja visszafejteni a partner az n értéket. A sakklépéshez kicsi n szám, és kicsi $s(n)$ tartozna, ezért a sakklépést egy hosszabb szövegbe pl. egy versidézetbe ágyazzuk. (Ezt az eljárást „sózás”-nak szokás nevezni.)

Nézzünk erre egy konkrét példát! A borítékolt lépés, azaz a szöveg: *Hc6-d4*

ASCII kódja: $n = \mathbf{072}\ 099\ 054\ 045\ 100\ 052$, $s(n) = 61\ 496\ 367\ 384\ 376\ 108$

Bár ebből az $s(n)$-ből sem lenne könnyű visszafejteni n-t, de mégsem célszerű ezt elküldeni, mert a szóba jöhető lépések végigpróbálásával megtalálható ez az $s(n)$. Mi a megoldás? Helyezzük el a lépést egy hosszabb szövegbe!

Új szöveg: *te édes Hc6-d4 mostoha*

$n = 116101032233100101115032\mathbf{072}099054045100052032109111115116111104097$

$s(n) = 21\ 316\ 625\ 413\ 985\ 228\ 944\ 022\ 908\ 396\ 052\ 158\ 373\ 299\ 675\ 439\ 331\ 439\ 287$

Ezt az 56-jegyű $s(n)$-t küldjük el, ebből a partnernek nincs esélye visszafejteni az eredeti szöveget. Látható, hogy az új n számban megtalálható az eredeti n, de az új $s(n)$-ben nyoma sincs az eredetinek.

Azért is jó ez a titkosítás, mert akár az eredeti, akár a bővített szöveg kis változtatása is teljesen megváltoztatja a lenyomatot. Változtassuk például a sakklépés *H* betűjét *h*-ra, ekkor az n szám közepén a 072 szám 104-re változik, ez n-ben csak kis változás, de $s(n)$ teljesen más lesz:

Módosított szöveg: *te édes hc6-d4 mostoha*

$n = 116101032233100101115032\mathbf{104}099054045100052032109111115116111104097$

$s(n) = 56\ 103\ 573\ 973\ 299\ 697\ 222\ 652\ 080\ 319\ 064\ 555\ 333\ 071\ 168\ 169\ 129\ 057\ 606$

Miért tettük versidézetbe az üzenetet?

Egy adott $s(n)$ értékhez több n is tartozhat. Például $n = 512$, 3521, 5489, 9329, 11201, 14849 esetén is $s(n) = 511$. Azért kell értelmes szöveget, irodalmi idézetet használni a sózáshoz, mert ha ezt nem kötnénk ki, akkor a lépést borítékoló játékosnak esetleg lehetősége volna megfelelően megválasztott „sózással” egy később talált, jobb lépéshez ugyanazt a lenyomatot előállítani. Irodalmi idézet használata esetén viszont teljesen minimális annak a valószínűsége, hogy ugyanazon $s(n)$-hez két irodalmi idézetbe ágyazott sakklépés tartozzon.

Az egyirányú kódolásnak sokfélé felhasználása lehetséges. Ezekből csak néhányat említünk.

— Ha egy munkára árajánlatot akarunk adni, és el akarjuk kerülni annak a lehetőségét is, hogy a borítékba zárt ajánlatunkat idő előtt megnézze valaki, és azt közölje a konkurenciával, akkor a fenti módszerrel küldhetjük el az ajánlatot: Szöveg: *32 millió Ft Hozz reá víg esztendőt*

$s(n)$ = 39 801 904 735 194 256 535 843 329 980 775 011 282 180 576 600 895 974 789 714 855 418 597 707 148 511 355 857 326 363 050 770 274 141 360 164

Ezt küldjük el. Ebből az eredeti ajánlat nem fejthető vissza. Borítékbontásnál megadjuk az eredeti üzenetet, és ellenőrizhető, hogy valóban ez az $s(n)$ tartozik hozzá.

— Ha valamilyen információhoz, rendszerhez jelszóval férhetünk hozzá, akkor a jelszavainkat (elvileg) nem szabad tárolni, hanem csak azoknak egy lenyomatát, amelyből nem fejthető vissza a jelszó. A jelszóból képezzük az n számot, a lenyomat legyen az $s(n)$.

— Elképzelhető műszaki alkalmazás is. Ha gépkocsinkat távirányítóval nyitjuk, akkor a távirányító jelét le lehet hallgatni, és a lehallgatott jellel már más is tudja nyitni az autót. Kiküszöbölhető ez például úgy, hogy az autót minden zárásnál egy máik $s(n)$-nel zárjuk, (ezt lehallgathatják,) és a hozzá tartozó n-nel nyitjuk. $s(n)$-ből n nem határozható meg.

Több kérdés is felvetődhet ennél a titkosítási módszernél. Csak néhányat említünk. Mit tehetünk, ha az üzenet hosszú, és a nagy n számnak nem lehet rövid idő alatt kiszámítni az $s(n)$-jét. (Ez esetben az üzenetet megfelelő hosszúságú darabokra bontjuk.) Mit tehetünk, ha az üzenetből kapott n szám prím, vagy valamilyen könnyen visszafejthető $s(n)$-t kapunk? Ezekre, és további a problémákra több év alatt tanítványaimmal, Freud Róbertnek, az ELTE TTK Algebra és Számelmélet Tanszék tanárának segítségével megkerestük a megoldásokat.

Ezzel a kutatással tanítványaim több hazai innovációs versenyen lettek díjazottak, és ketten 2012-ben Pittsburgh-ben, az ISES nemzetközi tudományos és innovációs versenyen 4. helyezést értek el.

A kutatás ismertetője, a résztvevő tanítványaim neve és egy program, amellyel bárki küldhet tikosított üzenetet, megtalálható iskolánk honlapján a következő címen:

`http://www.bomateka.hu/pseg-matek/index.htm`

Kiindulási feladatunk az volt, hogy $\sigma(n)$-ből határozzuk meg n értékét. A módosítás: $s(n)$-ből határozzuk meg n értékét. A további kérdés: milyen alkalmazása lehet ennek az egyik irányban viszonylag gyors, másik irányban sokkal lassúbb eljárásnak? Az eredeti feladat továbbgondolása, a tanulók számára sikereket hozó alkalmazáshoz, kutatáshoz vezetett. Cikkünk korábbi részeiben felvetett kérdések is, ez a részletesen bemutatott alkalmazás pedig különösen jól mutatják: hasznos az, ha tanítványainkat rászoktatjuk, hogy egy feladat megoldása után még próbálják továbbgondolni a dolgot, tegyenek fel újabb kérdéseket.

Katz Sándor

a Bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium és az Erdős Pál Tehetséggondozó Iskola tanára

Irodalomjegyzék

5
Gyapjas Ferenc, Reiman István: Elemi matematika feladatgyűjtemény I., (ELTE jegyzet) Nemzeti Tankönyvkiadó 1993.
6
Katz Sándor: Játékos matematika, Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány 2016.
7
Erdős Pál—Surányi János: Válogatott fejezetek a számelméletből, Polygon Könyvtár 1996.
8
K. Guy Richard: Unsolved Problems in Number Theory, Springer, 2004.
9
Pál Erdős: Über die Zahlen der Form $\sigma(n) - n$ und $n - \varphi(n)$, Elemente der Mathematik 1973. 83—87. oldal

☐ érettségi

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

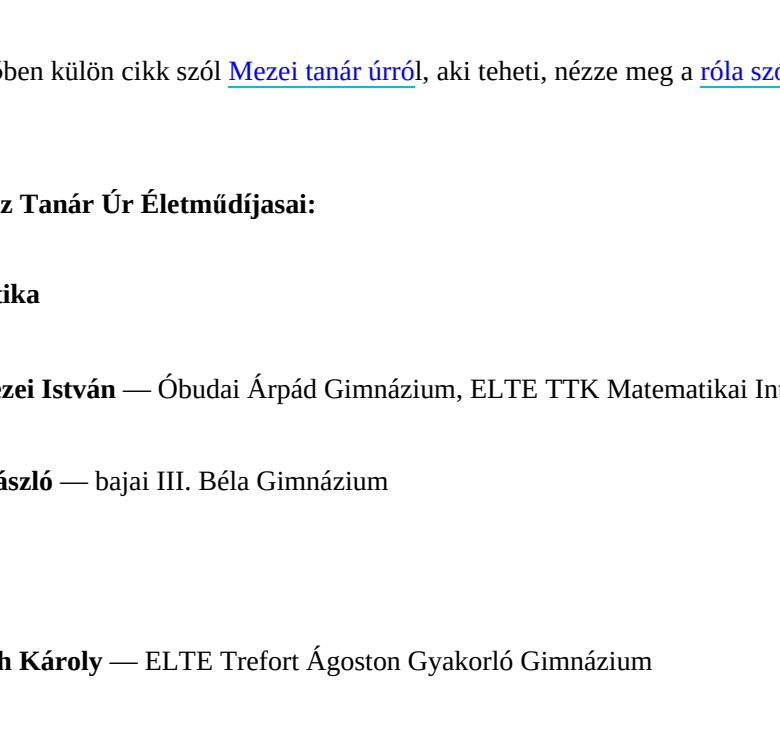
Szerkesztő 2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Kellenek a kiváló tanárok

A Rátz Tanár Úr Életműdíjról tavaly, 2016 decemberében is beszámolt az Érintő. Ezt az elismerést az iskolák 5-12. évfolyamain matematikát, fizikát, biológiát vagy kémiát tanító tanároknak ítélik oda, akik tantárgyaik népszerűsítésében és a tehetséggondozás területén maradandót alkottak. Idén november 29-én tizenhetedik alkalommal rendezték meg a Magyar Tudományos Akadémia dísztermében a díjátadó ünnepséget.

A díjat 2000-ben alapította a természettudományos oktatás támogatásában elkötelezett három vállalat, az Ericsson Magyarország, a Graphisoft SE és a Richter Gedeon Nyrt. A cégek vezetői ez alkalommal is megerősítették a közös díj alapításakor is kinyilvánított hitvallásukat arról, hogy minden nagy teljesítmény mögött ott áll egy kiváló tanár. Az idei díjazottak diákjai vezető egyetemeken és vállalatoknál dolgoznak, vannak köztük egyetemi tanárok, tanszékvezetők és akadémikusok is. A díj a XX. század egyik legnagyobb tanáregyéniségének, a Fasori Evangélikus Gimnázium matematika-fizika tanárának, Rátz Lászlónak állít emléket.

A díjátadó napján avatták fel az Aquincumi Technológiai Intézetben Rátz tanár úr első szobrát Magyarországon. Az intézmény, amely informatikát tanít a legjobb amerikai egyetemekről érkező diákoknak, Rátz László ikonikus tanáralakját választotta példaképül. A bronz mellszobor Tóth Ernő szobrász alkotása.



Az elmúlt 17 év során összesen 128 kiváló pedagógus részesült az életműdíjban. Sajnos, azóta sokuk már nincs az élők sorában, csak a matematikusok közül több fantasztikus egyéniséget fájóan hiányolunk, közöttük Urbán Jánost, Reiman Istvánt, Pálmay Lórántot, Kőváry Károlyt vagy Pogáts Ferencet

A mostani egyik díjazott, Mezei István azonban már át sem tudta venni a díjat. Helyette fia, Márton mondott olyan okos, szép és megható köszönetet, ami önmagában is bizonyította, hogy édesapja nemcsak kiváló tanár, de kiváló ember is volt.

Az Érintőben külön cikk szól Mezei tanár úrról, aki teheti, nézze meg a róla szóló videót is.

2017 Rátz Tanár Úr Életműdíjasai:

Matematika

† Dr. Mezei István — Óbudai Árpád Gimnázium, ELTE TTK Matematikai Intézet

Egyed László — bajai III. Béla Gimnázium

Fizika

Dr. Piláth Károly — ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium

Mester András — nyugalmazott tanár, korábban Zrínyi Ilona Gimnázium, Miskolc, Bláthy Ottó Villamosipari Szakközépiskola, Diósgyőri Gimnázium

Kémia

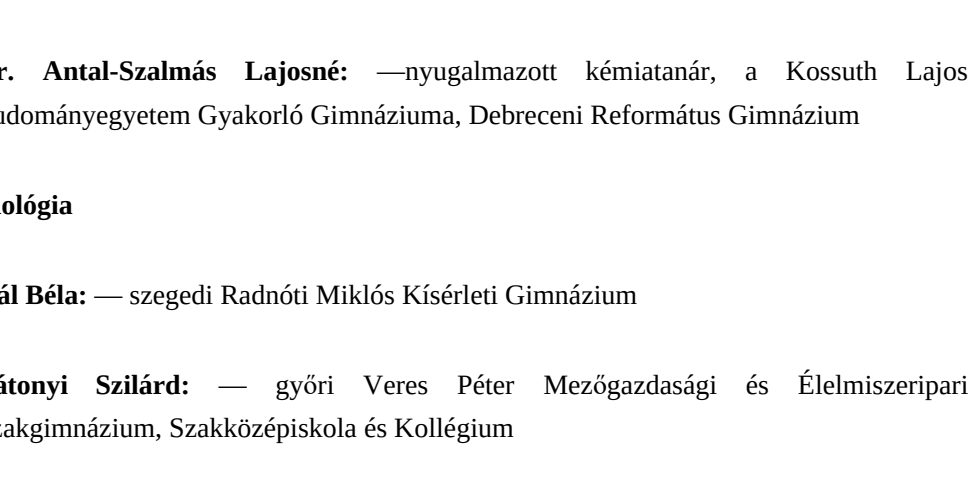
Dancsó Éva: — budapesti Eötvös József Gimnázium

Dr. Antal-Szalmás Lajosné: —nyugalmazott kémiatanár, a Kossuth Lajos Tudományegyetem Gyakorló Gimnáziuma, Debreceni Református Gimnázium

Biológia

Gál Béla: — szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium

Zátonyi Szilárd: — győri Veres Péter Mezőgazdasági és Élelmiszeripari Szakgimnázium, Szakközépiskola és Kollégium



Dr. Piláth Károly, Dr. Mezei István fia, Márton, Dancsó Éva, Egyed László, Mester András, Dr. Antal-Szalmás Lajosné, Gál Béla, Zátonyi Szilárd

A díjazottak méltatása a korábbi évekéhez hasonlóan a `http://www.ratztanarurdij.hu` honlapon található.

Minden életműdíjasról video is készült, amelyeket az ünnepség keretében mutattak be.

A tavalyi eseményről itt olvashatnak lapunkban:

`http://ematlap.hu/index.php/hirek-ujdonsagok-2016-12/396-ratz-tanar-ur-eletmudij-tizenhatodszor`

A szerk.

díjazottak beszámolók Rátz László

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Csikvári Péter 2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Matematikaoktatás az MIT-n

Massachusetts Institute of Technology, melyet a legtöbben csak az MIT rövidítéséről ismernek, a világ egyik legjobb egyeteme, rendszeresen az első 10-ben van az egyetemi rangsorokban, nem ritkán a legelején. E cikk szerzőjének lehetősége volt 3 évet eltölteni az egyetem matematikai intézetében, így első kézből vannak tapasztalatai az ott folyó oktatásról.

Elöljáróban néhány szó az MIT matematikai intézetéről. Ez egy kifejezetten nagy intézet mintegy 70 főállású professzorral, kb. ugyanennyi postdoktorral és vendégkutatóval, valamint kb. 100 doktorandusszal ([1]). Összehasonlításul megemlítjük, hogy a Harvardnak, amely ugyancsak a massachusettsi Cambridge-ben helyezkedik el, kb. 30 professzora és 60 doktorandusza van ([2]). Ennek megfelelően az MIT különleges helyet foglal el az amerikai matematikaoktatásban. A legtöbb diákolimpikon és nagyon sok más tehetséges diák az MIT-n tanul tovább. Ez pedig meglátszik az amerikai egyetemi matekverseny, a William Lowell Putnam verseny eredményein ([3]): az MIT dominanciája néha egészen elképesztő, 2014-ben például a legjobb 27 diákból 16 tanult az MIT-n, az első 6-ból 5! Ez persze néhány problémát is felvet. A diákjaik tudása, képessége nagyon széles skálán mozog, így az ajánlott tantárgyakat is ennek megfelelően kell kialakítani. Az alábbiakban összefoglalom, én milyen tantárgyakat tanítottam, ott milyen praktikákat alkalmaznak, és a tantárgy hogyan illeszkedik bele a tantárgystruktúrába.

Mielőtt rátérnék az általam oktatott tárgyakra, néhány szót kell szólnom az oktatási rendszerről. A képzés Bsc része 4 éves, az első évben még nem választanak a diákok szakot. Kevés a kötelező tantárgy, a diákok meglehetősen szabadon válogathatnak a tárgyak között. Ráadásul meglehetősen sok idejük van arra, hogy leadhassák a tárgyakat, majdnem a félév háromnegyedéig. Emiatt kialakul az úgynevezett „shoppingolás”: a diákok elég sok tantárgyat felvesznek, és a félév során szépen lassan megszabadulnak a nekik nem tetsző tárgyaktól. Én csak Bsc-s tárgyakat tanítottam. A Bsc után van 5 év graduate képzés, ez nagyjából megfelel a mi Msc plusz doktori képzésünknek.

A diákok teljesítményét folyamatosan figyelik. Minden diáknak van egy mentora, akit értesíteni lehet, ha a diáknak problémája van egy tantárggyal. Az elsőéves tárgyaknál ennek külön neve van: ez az „5. heti zászló”. Az ötödik héten megkérik a gyakorlatvezetőket, hogy ha van olyan diákjuk, akiről gyanítható, hogy nem fogja tudni elvégezni a gyakorlatot, azt jelezzék a diák mentorának.

Az 5. hétre ezt már meg lehet tippelni, ugyanis már túl vannak többheti házi feladaton és egy vagy két zárthelyi dolgozaton is. Felsőbb éveseknél egy-két héttel később szokták megkérdezni a tárgyak oktatóit az esetleges problémás diákokról. A mentornak az a feladata, hogy segítse a diákot abban, hogy érdeklődésének és tudásának megfelelő tárgyakat válasszon, ha pedig problémái vannak a diáknak, akkor megpróbáljon megfelelő segítséget találni neki. Mivel én postdoc voltam, így rám 4 duplaszakos diákot osztottak, akiknek már volt egy főszakos mentora. Bár ez nem túl nagy feladat, érdemes valamennyire odafigyelni rá, mert ha a diák nem teljesít jól, akkor a diákkal együtt a mentornak is meg kell jelennie az Academic Performance Committee előtt, ami állítólag nem túl kellemes. Szerencsére ilyen helyzetbe nem kerültem.

Érdekességként megemlítem, hogy nincs szóbeli vizsgájuk, a vizsgaidőszak mindössze egyhetes. Ezen a héten írnak meg több vizsgát, amelyek ugyanúgy problémamegoldásból állnak, mint a korábbi évközi zárthelyik. Sajnos azt is volt lehetőségem megtanulni, hogy hogyan működik az MIT csaláspolitikája. Ha egyszer valakit csaláson kapnak, akkor a tárgyfelelős elmesélése alapján egy titkárnő készít egy esetleírást, amelyet elhelyez a diák nevére kialakított elektronikus dossziéban. Mikor a második levél is megérkezik a dossziéba, akkor a rendszer jelez, és akkor már bizottság tárgyalja mindkét esetet. Nagyon-nagyon súlyos esetben már az első alkalommal összehívják a bizottságot.

Bár az MIT elsősorban a kutatásairól ismert, rengeteget költ az oktatásra is. Innovatív oktatási ötletekkel pályázni is lehet különböző pénzekre. Szintén sokat költenek arra, hogy rengeteg tantárgynak legyenek online elérhető előadásai. Érdekességként megemlítem, hogy itt fejlesztették a Scratch nevű programozási nyelvet is, amelynek célja, hogy kisgyerekeket vonjanak be a programozás világába.

Külön figyelmet szentelnek a kommunikációs tárgyaknak. Erre egy intézetet hoztak létre, ennek munkatársait kihelyezik a különböző területek intézeteihez. Például a matematikai intézet munkatársait Susan Ruff segíti. Számos ötletet, amelyet alább a Diszkrét matematika szeminárium tantárgynál leírtam, éppen tőle tanultam.

Most pedig következzenek az általam oktatott tárgyak.

Kalkulus. Ez egy elsőéves tárgy, amely kötelező mindenkinek, nem csak a matematika szakosoknak. Valójában ekkor még nem is választanak a diákok szakot. Ezt a tárgyat több különböző szinten el lehet végezni, de a legjobb diákok egyszerűen megírnak egy tesztet az elején, és ezzel le is tudják a tárgyat. Én a legalacsonyabb szinten tartottam gyakorlatot. Itt a diákok nem rendelkeztek különösebb matematikai képességekkel, de rendkívül motiváltak voltak, nagyon-nagyon kevesen buktak az egész évfolyamról. Az előadás heti 3-szor 50 perc volt, ehhez hozzájött még a 2-szer 50 perc gyakorlat. A kb. 80 diák 7 csoportba volt osztva gyakorlatra, amelyekből én két csoportnak vezettem gyakorlatot. Meglepő módon a gyakorlatvezetőkön nem volt igazi nyomás, hogy a gyakorlatokba próbáljanak mindent belesűríteni, amit tudnak, ugyanis az alapelv az, hogy a diákok maguk tanulnak. Ennek megfelelően a gyakorlatokon csak 2-3 feladatot beszéltünk meg, a diákokat pedig hagytuk dolgozni legalább 20-30 percet. Viszont ami a diákoknak igazi kihívás volt, az a rengeteg házi feladat. Minden héten rengeteg feladatot kaptak, amelyek megoldása nemritkán összesen 15-20 oldal volt. Szerencsére ezeket nem nekem kellett kijavítani, hanem külön javítók voltak, általában felsőbb éves diákok. Egy apró érdekesség, hogy a diákok dolgozhattak együtt, viszont minden feladathoz oda kellett írniuk, hogy kiktől kaptak segítséget. Ezt azért csinálják így, hogy tudatosítsák a diákokban, hogy mennyi mindenki segíti őket. (Mint később felfedeztem, nem elhanyagolható mellékterméke a rendszernek, hogy a csalásokat könnyebb kezelni: a legnagyobb csalásoknál ugyanis nem írják oda a diákok egymás nevét, így az oktatónak elég rámutatnia, hogy bizonyos fokú együttműködés biztosan volt, nem kell bizonyítani, hogy az egész csalás volt.) Általában is igaz az MIT-ra, hogy a kooperatív munkára nagy hangsúlyt fektetnek, a gyakorlatokon is bátorítottuk a diákokat a csapatmunkára. Azt hiszem, ez fontos is, mert a követelmények meglehetősen magasak, így egyedül végigcsinálni az egyetemet meglehetősen nehéz. Például ebben a tantárgyban összesen 4 + 1 zárthelyi dolgozatot kell írniuk a diákoknak. A + 1 az a végső nagy zárthelyi vagy vizsgadolgozat. A diákok munkáját még a rendszeres fogadóórák segítik, amelyek valóban népszerűek. Mi annak idején az előadóval és a 4 gyakorlatvezetővel úgy szerveztük meg, hogy minden napra essen fogadóóra. A diákok természetesen nem csak a saját gyakorlatvezetőjükhöz mehettek segítséget kérni.

Diszkrét matematika szeminárium. Minden diáknak el kell végezni két CI-M tárgyat: a CI-M a „communication intensive in major”, magyarul intenzív szakmai kommunikációs tárgy, vagyis szeminárium. Ezt az egészet azért írom le, mert gyakori mintának láttam az MIT-n, hogy egyszerű dolgoknak adnak furcsa neveket, de utána megpróbálják megtölteni extra tartalommal. Ennél a tárgynál is ezt éreztem. Aki részt vett már szemináriumokon az tudja, hogy nem igazán hatékony módja az oktatásnak, tanulásnak, mert a diákok nincsenek igazán rákényszerítve, hogy mások előadásait is kövessék. Ráadásul, ha a diák egyetlen előadást tart a félév alatt, akkor fejlődési lehetősége sincs igazán. Ezt kiküszöbölendő, ebben a tantárgyban a diákoknak 3 előadást kellett tartaniuk, 12 fős létszámnál 3 darab 50 perces, 15 fős létszámnál két 50 és egy 25 perceset. Ahhoz is ragaszkodtunk, hogy az első előadás táblás, a második pedig projektoros legyen, a harmadik szabadon választható volt az előadásmód szempontjából. Én magam is tartottam két mintaelőadást, egy táblását és egy projektorost. Valójában én leginkább fogadóórákon segítettem a diákokat a cikkek feldolgozásával kapcsolatban.

Minden előadás végén az utolsó 5 percben a diákoknak le kellett írniuk a véleményüket az előadásról, és tanácsokat kellett megfogalmazniuk az előadó számára a fejlődése érdekében. Érdekességként megemlítem, hogy ennek kétféle változata van aszerint, hogy a vélemény anonim vagy sem. Ha a vélemények anonimek, akkor jobb, ha a szemináriumvezető nem adja őket oda az előadónak, csak elolvasás után összefoglalja őket. Ennek az az oka, hogy az anonim vélemények gyakran kegyetlenek tudnak lenni. A nem anonim véleményekkel viszont pont az ellenkezője a probléma, a legtöbb diák annyira konfliktuskerülő magatartást vesz fel, hogy akkor sem mondja meg, hogy az előadás pocsék volt, ha egyébként 2 perc után elvesztette a fonalat az előadó felkészületlensége miatt. Ilyenkor gyakran túl udvarias vélemények születnek, amelyekből nem tanul semmit az előadó. Szerencsére ennek a problémának a kezelésére van egy egyszerű trükk: meg kell kérni az előadót, hogy a végén tegyen fel egy vagy két kvízkérdést az előadásából. Általában olyan egyszerű kérdésről van szó, amelyet ha nem válaszol meg valaki, akkor okkal feltételezhető, hogy semmit nem értett az előadásból. Ilyenkor fel kell hívni az előadó figyelmét rá, hogy az adott diák véleményét nem feltétlenül kell elfogadnia. Természetesen az is egy visszajelzés, ha csak nagyon kevesen tudták megválaszolni a kérdést: ez azt jelenti, hogy az előadás teljesen követhetetlen volt. Természetesen a kvízkérdésekre adott válaszokat bele lehet építeni az értékelésrendszerbe, de mint említettem, ezt óvatosan kell megtenni, nem biztos, hogy a diák hibája, ha nem tud megválaszolni egy kérdést.

A tárgynak fontos része még, hogy egy nagyjából 10 oldal hosszú (survey) cikket kell írniuk egy előre leegyeztetett kutatási témában. Ugyanezen témában kell megtartaniuk a harmadik előadásukat is. Hogy milyen témákat érdemes javasolni és hogyan lehet segíteni a diákokat cikkírásban, arra létrehoztak egy külön adatbázist, amelybe az oktató feltölti azokat a témákat, amelyeken ő dolgozott a diákjaival és azt is, hogy milyen észrevételei vannak. Javasolt még a tárgy korábbi oktatóival beszélni a félévkezdéskor. Az adatbázisba ötletszerűen beleolvastam, és tényleg voltak benne jópofa tanácsok, viszont maga az adatbázis akkorára nőtt az évek során, hogy lehetetlen volt akárcsak nagyjából átnézni. Egyébként a tárggyal kapcsolatos munkám nagy része nem is a fogadóórák, illetve az előadások beosztása, megszervezése volt, hanem éppen e cikkek különböző verzióinak elolvasása, javítása. Kicsit olyan munka ez, mint 15 miniprojekt témavezetése.

Kombinatorikus analízis. Neve ellenére ez egy bevezető kombinatorika tárgy. A tárgyat heti 3-szor 50 percben tanítottam. Ebben a tárgyban nagy hangsúlyt kap a leszámláláselmélet. Ennek megfelelően ezen a területen alaposan körbejártuk a generátorfüggvények különböző alkalmazásait, talán leginkább erre utal a tantárgy neve. Ennek ellenére gráfelmélet is van a tantárgyban, de jóval elemibb szinten, mint a leszámláláselmélet. Általában Bóna Miklós „A Walk through Combinatorics” könyvét szokták tankönyvnek használni. Főleg olyan diákok veszik fel ezt a tantárgyat, akiknek a matematika a második, kiegészítő szakjuk. Ennek megfelelően a színvonal nem igazán magas, legalábbis az MIT-s standardokhoz képest.

Algebrai kombinatorika ([4]). Már a tárgy leírásakor jelzik, hogy ez egy nehezebb tantárgy, és ennek megfelelően itt már nagyon komoly diákokkal lehet találkozni. Egyáltalán nem ritka, hogy néhány volt (nem feltétlenül amerikai) diákolimpikon is felveszi a tárgyat. A tantárgy kialakításánál nagyon nagy szabadságot kaptam, így tényleg az ízlésemnek megfelelő dolgokat taníthattam.

Ezt a szabadságot arra is használtam, hogy kísérletezzek egy picit, és kipróbáljak egy számomra új osztályozási rendszert. Valójában erre a rendszerre rá is voltam kényszerítve valamelyest a diákok közti különbségek miatt. Ebben a rendszerben a diákok egyénre szabottan kaptak feladatokat egy feladatlistából aszerint, hogy a korábbi házi feladatoknál hogyan szerepeltek. Akik jól teljesítettek, azoknak legközelebb nehezebb feladatokat választottam, akiknek problémáik voltak, azoknak könnyebbet. A diákok nagyon pozitívan fogadták ezt a rendszert.

A kurzusokon kívül még külön ki szeretném emelni az úgynevezett egyéni tanulmányi lehetőséget. Itt a diák vagy diákok pályázhatnak tanulmányi kreditre valamely terület megtanulásával ha egy oktató elvállalja témavezetésüket. Az oktatásnak ezzel a formájával úgy ismerkedtem meg, hogy egy nap felkeresett két nagyon jó diák, hogy ők szívesen feldolgoznák Szemerédi számtani sorozatokra vonatkozó tételét. Mire a munka elkezdődött, már 7 nagyon jó diákom volt, többségében volt diákolimpikonok. Szemináriumi formában feldolgoztuk Terence Tao és Van Vu „Additive combinatorics” könyvének 3 fejezetét [5]. Érdekességként megemlítem, hogy azon félelmem miatt, hogy esetleg lejáratom a rendszert, ha túl könnyen adom meg a kreditet, olyan magasra tettem a lécet, hogy a diákok lényegében két tantárgy követelményeit végezték el a rengeteg előadással, survey cikkel és számtalan probléma megoldásával. Ennek ellenére nekem nem volt sok munkám ezzel, mert a diákok tényleg nagyon jók voltak.

Bár nem tartozik szorosan az oktatáshoz, még megemlíteném, hogy az MIT rendkívül nagy hangsúlyt fektet arra, hogy a diákok kutassanak. Mindenféle elvárás nélkül is anyagilag támogatják a diákok kutatásait. Az MIT egyébként fenntart középiskolásoknak is egy kutatási programot, az úgynevezett PRIMES programot ([6]).

A fentiekből azt hiszem, világos, hogy az MIT az oktatás területén is innovatív módon gondolkozik. Rengeteg ötlettel és néha sok pénzzel próbálja keresni az oktatás minél hatékonyabb módjait . Számomra természetesen azok az ötletek az érdekesebbek, amelyekhez nem kell pénz. Szerencsére ilyenből is rengeteget láttam, ami azt mutatja, egy oktatási rendszer fejlesztésére akkor is van mód, ha az anyagi lehetőségek korlátozottak.

Összességében én nagyon-nagyon kellemesen éreztem magam. A diákok kifejezetten együttműködőek voltak, így az oktatás mellett még bőven maradt időm kutatni.

Köszönetnyilvánítás: Nagyon köszönöm Juhász Péternek és Lovrics Annának, hogy észrevételeikkel segítették ezen írás elkészítését.

Csikvári Péter
ELTE Matematikai Intézet, Számítógéptudományi Tanszék

Csikvári Péter 2001-ben és 2002-ben a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium diákjaként vett részt a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián a magyar csapatban. 2002 és 2007 között az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematikus hallgatója volt, majd ugyanitt PhD-t szerzett 2011-ben. 2010 és 2013 között a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet munkatársa, majd 2013 és 2016 között az MIT posztdoktora. Jelenleg az Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézetének adjunktusa.

Irodalomjegyzék

1
http://math.mit.edu/index.php
2
http://abel.harvard.edu/people
3
http://kskedlaya.org/putnam-archive
4
http://math.mit.edu/~csikvari/18.212.html
5
http://math.mit.edu/~csikvari/18.099.html
6
http://math.mit.edu/research/highschool/primes/index.php

matematikus-karrier diploma

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Oláh Vera 2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Diáktalálkozó a felvidéki Komáromban 25. alkalommal

Kerek arcú, kedves, már nem fiatal tanár kopogott be minden hónap közepe táján Budapesten a KöMaL szerkesztőségébe, hogy megvegye és elvigye a diákjai számára a lap legfrissebb számait (elég sok példányban). Még aznap újra felült a komáromi vonatra, majd a hídon átballagva cipelte be az iskolába a számára oly fontos tehetséggondozó füzeteket. A határon túlról az előfizetés is nehézkes, és mire a posta odaér a Lapokkal, már le is jár a beküldési határidő — magyarázta. Ő volt Oláh Gyuri, a Rátz László Vándorgyűlések „örökös” tagja, a Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozó „atyja”. Halála után Keszegh István vette át a szervezést, most már ő is nyugdíjas tanár. Idén teljesen új formában, elektronikus úton, a google drive segítségével megosztott dokumentumokkal, aktív levelezéssel folyt a találkozó előkészítése, nem is lehetett kétséges, hogy Fonód Tibor, a Selye János Gimnázium igazgatóhelyettese méltó módon szervezi a 25. felvidéki magyar matematikakonferenciát.

„A Selye János Gimnázium és az Ipari Szakközépiskola közös rendezvényeként megtartott találkozó gerincét minden évben hazai és határon túli magyar matematikatanárok és egyetemi hallgatók szakmai előadásai képezik, az idei háromnapos rendezvény 24 előadására 80 résztvevő érkezett számos anyaországi vagy egyéb Kárpát-medencei magyarlakta vidékről (Szatmárnémeti, Zenta, Pécs, Békéscsaba, Győr, Szeged, Gyula, Kaposvár, Hódmezővásárhely, Budapest, Debrecen, Nagykanizsa, Kassa, Somorja, Pozsony stb.). Emiatt is nyilvánvaló, hogy a rendezvény teljesítette egyik legfőbb feladatát: összekapcsolja az anyaország, Erdély, Felvidék és Délvidék magyar matematikatanárait és a legtehetségesebb diákokat.

Az elmúlt évek gyakorlatához hasonlóan a résztvevők idén is tarka kínálatból válogathattak, hiszen a három nap alatt olyan előadások hangzottak el, mint például Matematika a számítógépen és számítógép a matematikában, Úthálózatok, hidak, kereszteződések, Stewart, Steiner és a szimedián..., vagy Szimmetrikus objektumok leszámlálása, de a tanulók egy érdekes csapatversenyben is összemérték erejüket.” (Fonód Tibor, http://felvidek.ma/2017/11/xxv-nagy-karoly-matematikai-diaktalalkozo-komaromban/)

A teljes program itt található.

FELVIDÉK ma

A 2017. évi Oláh György magyar matematikai tehetség díját *Borbényi Márton*, a Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium idén érettségizett diákja érdemelte ki, aki jelenleg az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika szakos hallgatója. (A fényképen Keszegh István gratulál a díjazottnak.)

A további részletekről innen tájékozódhatnak az érdeklődők:

http://felvidek.ma/2013/03/a-komaromi-olah-csalad-atvette-a-magyar-orokseg-dijat/

http://felvidek.ma/2017/11/xxv-nagy-karoly-matematikai-diaktalalkozo-komaromban/

http://felvidek.ma/2017/11/nincsenek-alacsonyan-logo-gyumolcsok-mindenert-meg-kell-dolgozni/

Köszönjük a Felvidek.ma szerkesztőségének, hogy cikkükből idézhettünk, és felhasználhattuk Szalai Erika fotóját.

Oláh Vera

díjazottak beszámolók konferencia

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Vancsó Ödön 2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

VTN 2017 — Varga Tamás Módszertani Napok huszonkilencedszer

Idén is megrendezésre került a Varga Tamás matematika szakmódszertani konferencia, 2017. november 10-11-én (pénteken és szombaton) a Varga Tamás Tanítványainak Emlékalapítványa, a Bolyai János Matematikai Társulat és az ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központja közös rendezvényeként. A helyszín az ELTE TTK déli épületében volt. Péntek délután a szokásoknak megfelelően plenáris előadások voltak, ezúttal az Oktatási Hivatalból Szepesi Ildikó (a Köznevelési Mérés Értékelés Osztály mb. osztályvezetője) a matematika területről, és Ostorics László, a PISA nemzetközi projektvezetője általában a PISA mérésekről tartott előadást, majd válaszoltak a kérdésekre. A vitát Fried Katalin és Korándi József moderálta.

Plenáris ülés: Szepesi Ildikó és Ostrorics László

Ezután Vancsó Ödön számolt be a Magyar Tudományos Akadémia Szakmódszertani pályázatán nyertes Korszerű Komplex Matematikaoktatás projekt első évének eredményeiről. A részleteket illetően lásd a projekt saját honlapját és az MTA akadémiai honlapját.

Az előadást követően az ELTE Matematikus doktori iskolájának didaktika programjára felvett három doktorandusszal beszélgetett a pódiumon Vancsó Ödön. Ennek az adott aktualitást, hogy mindhárman — Kiss Anna, Varga Eszter és Svitek Szilárd — részt vesznek majd az MTA-projekt kutatásaiban. Három kérdéssel foglalkoztak:

- Hogyan látják az értékes magyar matematikatanítási tradíciók — köztük a felfedeztető matematikaoktatás és a Varga Tamás örökség — helyzetét az általuk tanított korosztályban?
- Mi motiválta a doktori programra jelentkezésüket?
- Véleményük szerint segíthet-e a sikeres tanári gyakorlatban egy ilyen képzés?

Ezután a hagyományoknak megfelelően kiosztásra került a Varga Tamás Emlékdíj és annak Junior változata. Az idén a díjat *Jakucs Erika*, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium matematikatanára nyerte el, ami — a laudációkból is kiderült — igazán megérdemelt és már nagyon időszerű volt. A Junior díjat *Katona Dániel*, a Veres Péter Gimnázium tanára és a matematika-didaktika programra első körben (2016-ban) felvett doktorandusza nyerte. Őt Vásárhelyi Éva és Szmerka Gergely méltatta. A díjakat az anyagi támogatást évek óta biztosító Appel György személyesen adta át. A díjazottak tiszteletére adott fogadással ért véget az első napi program.

Szombaton két plenáris előadással indult a nap: először Krajcsi Attila az algoritmikus gondolkodásról, majd Ambrus Gabriella „Tanulói gondolkodás és a valóság” címmel tartott előadást a fent említett akadémiai projekt keretében folyó kutatásaikról.

Ezután szekciókban folyt tovább a program: az angol nyelvű szekció volt talán a legnépesebb, de a szokásos Tanítói klub sem maradt el tőle sokkal. Ezalatt zajlott Török Judit és Fried Katalin vezetésével a részt vevő diákoknak szóló program.

Angol nyelvű szekció: előadó Molnár Emil, szekcióvezető Munkácsy Katalin

Délután két szekciót is tartottak, az egyiket általános témákban, míg a másikat az informatikát a matematika órán használók számára.

A teljes program és egyes előadások anyagai megtekinthetők a következő honlapon: `http://mathdid.elte.hu`, a Varga Tamás Módszertani napok menüpont kiválasztása után a VTN 2017 címen.

Egy meglepetéssel zárult a nap: Varga János székesfehérvári kolléga először játszotta le a matematikatanárok nyilvánossága előtt Neumann János egyetlen magyar nyelvű interjúját, amely nem sokkal halála előtt, 1955-ben az akkori Amerika Hangja rádióban hangzott el.

A VTN zárásaként elhangzott, hogy két jubileumi év következik, amelyekre már most invitáljuk a matematikatanárok és a matematika-didaktikusok közösségét. 2018-ban lesz a 30. Varga Tamás Napok és 2019-ben lesz Varga Tamás születésének 100-ik évfordulója. Ez utóbbi megünneplésére az Akadémián egy nagy nemzetközi matematika-didaktikai konferencia szerveződik, és ennek folytatása lesz a 31. VTN az ELTE-n. Az első esemény időpontja 2018. november 9-10. (péntek szombat), a nemzetközi konferencia 2019. november 6-tól 8-ig fog tartani, és ezt követi majd 8-9-én a szokásosnál ünnepibb jellegű Varga Tamás Napok a hazai tanárok részére. Kérjük, hogy az érdeklődők már most írják be naptárukba az időpontokat. Mindkét matematikai szakmódszertani kutatócsoport megjelenik majd ezeken a konferenciákon.

Vancsó Ödön,
egyetemi docens, házigazda
ELTE Matematikatanítási és Módszertani Központ

díjazottak beszámolók Varga Tamás konferencia

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Gyimesi Bernadett 2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

MedveMatek

1999-ben egy debreceni középiskolai tanár, Kis Gábor megálmodott egy matekversenyt, ami kiszabadította tanítványait a négy fal közül: a Nagyerdőn csapatokban barangolva oldották meg a gyerekek a feladatokat. Az új kezdeményezésnek nem meglepő módon nagy sikere lett, így 2000-ben már a 7. és 8. osztályos általános iskolás diákok is részt vehettek az akkor még Medve Vetélkedő névre hallgató matematika versenyen.

Ezután évről évre megrendezésre került a verseny, a kategóriák tovább bővültek az 5—6.-os korosztály, majd a felnőttek felé és a helyszín sem korlátozódott Debrecenre: 2007-től Budapesten, majd sorban Szegeden, Veszprémben, Egerben és Pécsett is lehetőség nyílt a szabadtéri vetélkedésre. Jelenleg az ország 7 helyszínén lehet versenyezni 6 különböző kategóriában életkor alapján; az 5—6. osztályosok a Medvebocs, a 7—8. osztályosok a Kismedve, a 9—10. osztályosok a Nagymedve, a 11—12. osztályosok pedig a Jegesmedve kategóriában indulhatnak. A vállalkozó kedvű szülők, tanárok, érdeklődő felnőttek számára is van két kategória; az Ursa Minor, mely a matematikával nem foglalkozó vagy általános iskolában tanító felnőttek részére ajánlott, az Ursa Maior pedig a munkájuk során emelt szinten matematikával foglalkozó vagy középiskolában, egyetemen tanító matematika tanárok részére létrejött kategória.

A versenyek hétvégi napokon kerülnek megrendezésre a megadott városok ligetes, erdős, dombos területein. A szervezők a helyszínen állomásokat jelölnek ki, ezekről egy rajzolt térképet kap minden versenyző csapat. Ennek alapján tudnak tájékozódni a verseny folyamán. Ugyanis a versenyzőknek nem véletlenszerűen kell felkeresniük minél több állomást, hanem a válaszaik alapján egy megadott sorrendben. Minden csapat az A állomáson kapja meg az első feladatát, majd a válaszuk helyessége alapján haladnak tovább egy másik állomásra. Az elsődleges cél 10 feladat hiba nélküli teljesítése. Azonban nem feltétlen az a győztes, akinek minden válasza helyes, hiszen ha valaki egy rossz válasszal „mellékvágányra” kerül, de azt jól megoldja, könnyen visszatérhet a fő csapásvonalra és amennyiben gyorsabban teljesíti a feladatokat, elé kerülhet annak, aki hibátlanul, ám lassabban dolgozik.

Nem elég tehát a hibátlan matematikatudás, szükség van a csapatmunkára, a logikus gondolkodásra és a stratégiai tervezésre. Persze sokaknak nem az eredmény elérése a cél, egyszerűen a jó idő, kellemes időtöltés, a fesztiválhangulat miatt látogatnak el a „medve-rendezvényekre”. Egy-egy budapesti versenyen közel 3500 résztvevő fordul meg egyszerre, ezért A Matematika Összeköt Egyesület, a Medve versenyek szervezői komoly rendezvényszervezési technikákkal készülnek. Évről évre egyre gördülékenyebb a verseny annak ellenére, hogy a 3500 résztvevő a verseny elején együtt rajtol, valamint az eredményhirdetés a verseny vége után negyedórával megkezdődik. Ebben a szervezők segítségére van egy mobiltelefonos applikáció, amellyel minden állomás rendelkezik, és ezzel könyvelik a csapatok beadott válaszait.

Mindemellett a csapatok a térkép mellé kapnak egy Utilapput, mely a haladási irányukat hivatott feljegyezni. Így nem csak az applikációban tárolódnak az adatok, hanem a diákok Utilappuján is. Ez segítségükre van a következő állomás felkeresésében és az esetleges plusz körök könnyebb felfedezésében. Az Utilappuk, ahogy a feladatok is a kategóriák szerint, színkódokkal ellátottak, hogy még könnyebben találják meg a versenyzők a saját feladatukat és kevesebb legyen az esély a tévesztésre.

Aki szívesen kipróbálná a „medvefesztivált”, 2018 tavaszán lesz rá bőven lehetősége. A helyszínek és időpontok az alábbiak:

- 2018. április 7. Eger, Érsekkert
- 2018. április 14. Budapest, Gellért-hegy
- 2018. május 6. Szeged, Erzsébet liget
- 2018. május 6. Debrecen, Nagyerdő
- 2018. május 12. Veszprém, Kolostorok és Kertek park
- 2018. május 13. Pécs, Zsolnay Kulturális Negyed
- 2018. május 26. Budapest, Óbudai-sziget

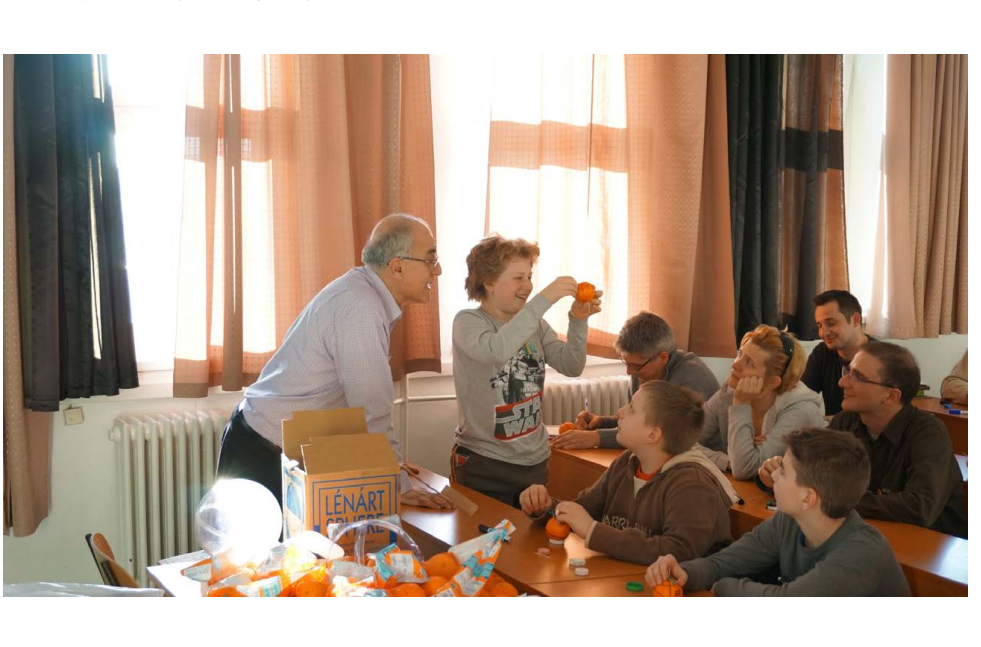
Március 9-éig tart az előnevezési időszak mindegyik versenyre, amelyet a `http://medvematek.hu/` honlapon lehet megtenni egy rövid regisztrációt követően.

A regionális versenyeken legjobban szereplő csapatok meghívást kapnak a 2018. június 9-én Debrecenben megrendezésre kerülő országos fordulóra, ahol az ország legügyesebbei mérethetik össze tudásukat.

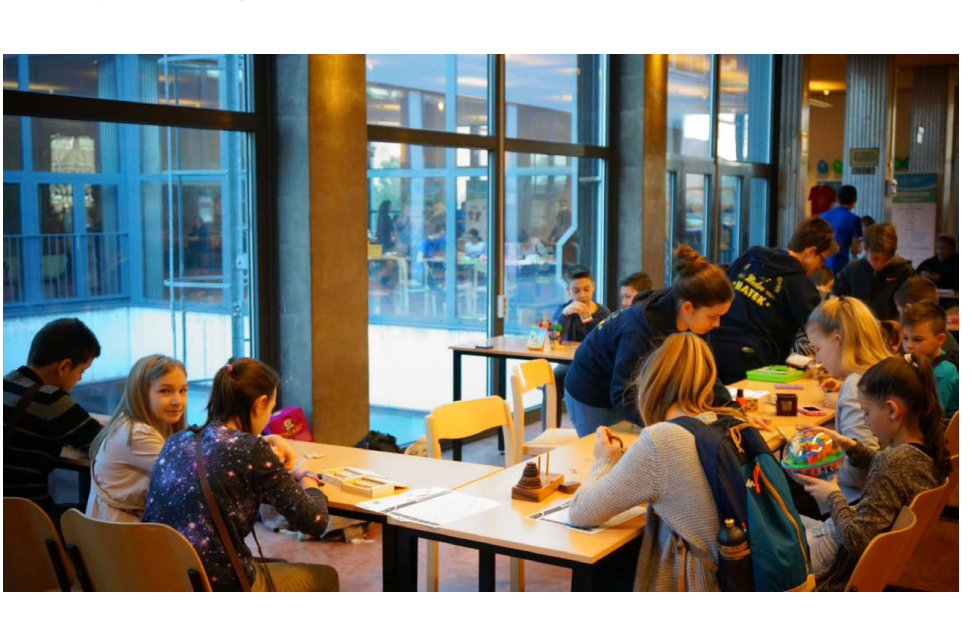
A Matematika Összeköt Egyesület azonban nem csak a versenyein keresztül próbálja megszerettetni az érdeklődőkkel a matematikát. 2018 február 24-én harmadik alkalommal kerül megrendezésre a Medve Matek Élménynap, amely külön programot nyújt a diákoknak és a pedagógusoknak.

A szintén hétvégi napon megrendezésre kerülő esemény délelőtti óráiban a résztvevők különböző matematikához kapcsolódó standokon járhatnak körbe: logikai játékokat lehet kipróbálni, matematikai alakzatokat lehet hajtogatni papírból és egyszerűbb kísérleteket megtekinteni. Ezen kívül meghívott professzorok és matematikusok tartanak rövid plenáris előadást. Ezek után a pedagógusok kerekasztal beszélgetéseken vehetnek részt, melynek során az oktatás és azon belül is a matematikaoktatás különböző aspektusai vannak terítéken. Ezalatt a diákok játékos csapatversenyen vehetnek részt, ami hasonlít a Medve Szabadtéri Matekversenyhez és a később szóba kerülő tábori programokhoz.

Az ebédet követően kiscsoportos foglalkozások veszik kezdetüket több matematikához köthető témakörben; titkosírás, rejtvényfejtés, térgeometria, gráfelmélet. Ezeken diákok, tanárok egyaránt részt vehetnek, a témák olyanok, melyek mindenki számára érdekesek és többnyire az újdonság erejével hatnak.



Az Élménynapon a részvétel ingyenes, csupán regisztrációhoz kötött, így, ha valaki nem tudja eldönteni, neki való-e a tábor vagy a verseny, ez tökéletes alkalom a Medve Matek rendezvénysorozat megismerésére.



Többször szóba került már a tábor, mit is takar ez pontosan? Évente három különböző alkalommal, télen, nyáron és ősszel rendez az egyesület matematika táborokat.

A téli matektábor, amely 2018-ban kis csúszással már tavaszi tábor lesz, március 15—18. között kerül megrendezésre Nagykőrösön. Ezután a nyári táborok július 3.-ától egészen augusztus 8.-áig nyújtanak lehetőséget egyhetes vagy tíznapos táborozásra a nyári szünetben 4 különböző turnusban. Pontosabban:

- 2018. július 3—9. Sástó, Mátra Tábor
- 2018. július 10—16. Sástó, Mátra Tábor
- 2018. július 20—29., Pusztafalu, Öreg Bence Turistaház
- 2018. augusztus 2—8. Városlőd, Iglauer Park

A táborok programja nagy vonalakban évszaktól függetlenül megegyező. Délelőtt kétszer másfél órás foglalkozáson vehetnek részt kiscsoportokban (8-12 fő) az általános iskolai felső tagozatos és középiskolás diákok. Délutánonként pedig játékos csapatversenyek, vagyis tortúra, tételátadás, logikai kaland várja a diákokat. A tábor programjának része egy egész napos túra a környező hegyekben választható távval és nehézséggel. Emellett minden táborban összemérethetik a diákok sportban magukat a tanárokkal; fociban, kosárlabdában, röplabdában, pingpongban stb.

Pusztafalu
Helyi időzóna
CPST 100
Magyar idő + 100 perc

Különlegességek a tábori életben a saját fizetőeszköz, a batka, amelyet a diákok a tábori idő alatt gyűjthetnek, majd játékokra, Medve Matekos ajándékokra és könyvekre válthatnak be; a tábori idő, ez általában a magyar idő plusz egy óra. Ettől a diákok úgy érzik, hogy egy órával tovább alhatnak és egy órával később fekhetnek le. Ezen a trükkön kívül persze elősegíti azt is, hogy a résztvevők egy külön kis univerzumban érezhessék magukat a tábori idő alatt. Emellett a fesztiválhangulatot elősegítendő minden résztvevő karszalagot kap a tábor elején, amit előszeretettel viselnek és gyűjtenek a diákok és a tanárok egyaránt.

A táborok népszerűségének egyik oka valószínűleg a szervezők fiatalsága. A szervezők döntő többsége pályakezdő fiatal vagy még éppen egyetemista, tanári, mérnöki, matematikus, informatikus és egyéb matematikához köthető szakokon. A tábori lét éppen ezért kifejezetten fiatalos és laza, a tegeződés alapvető a résztvevők és szervezők között.

A tanárok minden tábor végén írnak egy dalt a táborban történt eseményekről, amelyet utolsó nap a búcsúest keretében előadnak a diákoknak. Emellett minden táborban készül egy altatódal is, melyet az esti szobaellenőrzések során énekelnek a tanárok a diákoknak. Mindegyik dal igyekszik átadni a tábor hangulatát, hogy azt a diákok minél inkább magukénak érezhessék, és hogy később feleleveníthse a tábori emlékeket. Legtöbb esetben gitár a kíséri ezeket a dalokat, azonban megjelent tábori dalban már dob, ukulele és hegedű is.

A Medve Matek tehát egy egész éves programsorozatot nyújt a matematika iránt nyitottak számára. Bőven akad lehetőség, ne féljetek hát kipróbálni. További információkért, a jelentkezésért és kedvcsináló képekért látogassatok el a `http://medvematek.hu/` oldalra, vagy a Medve Matek facebook oldalra: `https://www.facebook.com/medvematek/`

Gyimesi Bernadett

beszámolók

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok
Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon:
Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Székely Péter 2017. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

A zenében rejlő matematika

Azt mondják, hogy a matematikusok között igen sok zenészt találni. Ez nem meglepő, hiszen mind a zene keltésében, mind magában a rezgő közeg fizikai viselkedésében, sőt, a zene lejegyzésében is rengeteg matematikailag könnyen leírható tulajdonságot fedezhetünk fel. Az, hogy a szép, s logikus rend mellé gyönyörködtető hangzás is párosul, magához vonzza a szépség iránt amúgy is igen érzékeny matematikusokat. Szoktuk is mondogatni a matematikában, hogy ha egy bizonyítás szép, akkor az nagy valószínűséggel jó is.

Monochord — arany aránypár

Mint minden előadást, ezt is úgy illik kezdeni, hogy „már a görögök is…” Nem véletlen ez, hiszen az emberiség történetével egyidős lehet a — sokszor alig-alig ismert — zenei művészet. Valóban kevéssé ismert a régi idők zenéje, gondoljunk csak arra, hogy az egyik legszebb hangú hangszerünket a torkunkban hordozzuk… Sajnos, a régi emberek hangszereiről is kevés feljegyzés maradt fenn, s már a pár száz évvel ezelőtti hangszerek rekonstrukciója is nehéz feladat. A zene lejegyzése is elég későn alakult ki a történelem folyamán, nem is beszélve arról, hogy mit tekintett fontosnak lekottázni a korabeli zenész, s mi volt az, amit nem írt le, hiszen közismert tény volt.

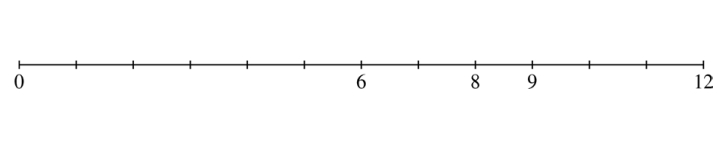
De ha már a görögök, akkor természetesen — matematika tanárok lévén — rögtön Pitagorasz jut eszünkbe. Pitagorasz nevével kapcsolatban pedig háromszögekre gondolunk, s a velük kapcsolatos tételre. De gondolunk-e arra a Pitagoraszra, aki kitartóan érdeklődött a tiszta művészetek iránt? Gondolunk-e Pitagoraszra, mint filozófusra? Gondolunk-e Pitagoraszra, aki az élet számos területén kereste a rendet, ahogy ő nevezte, a *szümphoniát?*

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0b/MIM_String_Instruments.jpg

Közismert a történet, amelyet Pitagorasz nevéhez fűznek. Nevezetesen egy kalapácsműhely mellett elhaladva a négy kalapács csengését konszonánsnak, azaz szépen együttszólónak hallotta, s e tulajdonságot a kalapácsok súlya közötti összefüggéssel azonosította. A kedves história szép képet fest a nagy matematikusról, de kevéssé valószínű. Annyi viszont bizonyos, hogy igen behatóan tanulmányozta a monochord rezgéseit (lásd a fenti képen). Ilyen egyhúrú hangszer csupán az iskolában fellelhető, az is csak demonstráció céljából. Azonban ne keseredjünk el, szinte mindenki talál a környezetében egy gitárt, ami céljainknak tökéletesen megfelel. Ennek teste kiválóan rezonál, erősíti a húr alig hallható hangját. Takarjuk le a nem szükséges húrokat, hogy kizárjuk azok zavaró hatását. Ezen a hangszeren már könnyedén kísérletezhetünk, hála a bundoknak, a fogólapon található rézlapoknak, melyek segítségével bárki tisztán lefoghatja a hangokat mindenféle zenei előképzettség nélkül.

Játsszunk a gitárunkkal! Egyetlen húrt — pl. a legalsó, a legvastagabb E-húrt — megpendítve más és más magasságú hangot kapunk, ha a húrt egy-egy bundnál lefogjuk. Pitagorasz hasonló kísérleteket végzett a monochordjával: a húrt 12 egyenlő hosszúságú részre osztotta fel, így könnyedén vette a húr felét, harmadát, … (Szerencsére a 12-nek sok osztója van! ☺) Így ha most a felénél fogjuk le a húrt, akkor megpengetéskor az alaphang feletti oktávot, ha a 2/3-ad részénél, akkor a kvintet, s ha a 3/4-ed részénél, akkor a kvartot hallhatjuk. (Sok gitárnál a bundok közötti jel segítségünkre van az oktáv, s a kvart lefogásánál.) A kísérletet a többi húron elvégezve ugyanezeket a hangközöket figyelhetjük meg.

A kis egész számok arányaként felírt húrarányok meglepő módon éppen azok a hangközök, melyeknél a két hangot (alap és oktáv, alap és kvart, illetve alap és kvint) a leginkább szépen együttcsengőnek érzünk. (Ennek okára még később visszatérünk.) Amit a zenében szépnek találunk, az a matematikában is igen szép arányokkal, az *arany aránypár*ral írható fel. Lássuk, mi is ez!



Az ábrán láthatjuk, hogy a 12 egység hosszúságú húrt a kilencediknél lefogva az alaphang kvartját kapjuk meg, míg ha a 8 egység hosszúságú húrral tesszük ugyanezt, akkor a 6 egységnél kell lefognunk a húrt, hogy a rövidebb húr kvartját hallhassuk. Ezt matematikailag a $12:9=8:6$ arány igazolja.

Emellett még szintén érdekes, hogy a 9 (kvart) és a 8 (kvint) a 12 (alaphang) és a 6 (az alap oktávja) számtani, illetve harmonikus közepe:

$$A(6;12)=\frac{6+12}{2}=9,\qquad H(6;12)=\frac{2}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}=8$$

Tehát az „arany aránypárt” ezekkel felírva:

$$12:\frac{6+12}{2}=\frac{2}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}:6$$

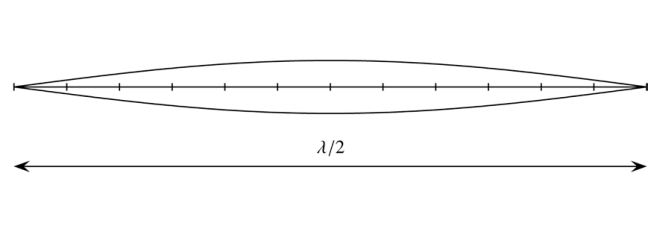
Pitagorasz a *kozmosz* szóval nevezte el a világ e szép harmóniáját. A szép rend számára mindenhol megjelent. Így például a kocka és duálisa, az oktaéder között figyelt meg szép rendet:

kocka	oktaéder
6 lap	6 csúcs
8 csúcs	8 lap
12 él	12 él

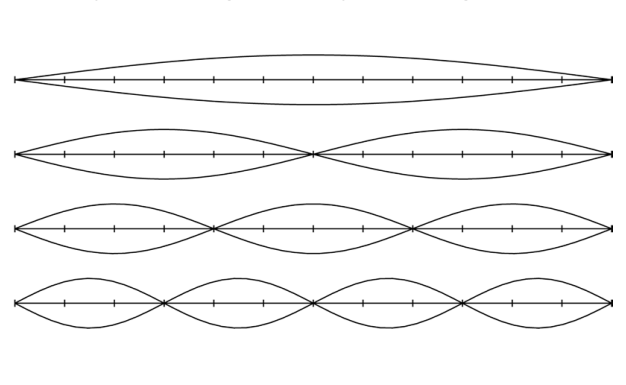
A szépre való törekvésünket minden művészetben megfigyelhetjük. A képeken, szobrokon, épületeken, de a drámák, zeneművek időbeli felépítésében is lépten-nyomon felfedezhetjük a kis egész számokkal felírható arányokat, vagy akár az aranymetszést. Ennek oka az ember, az ember és környezete, a világ harmonikus felépítésében keresendő. Nem véletlen, hogy Orfeusz muzsikájával a holtakra és élőkre is egyaránt hatással van, rezonálnak zenéjére.

Hangközök — összegzés a zenében

Térjünk vissza az egyhúrú hangszerünkhöz. Mi is történik a húrral, ha megpendítjük?



A húr két végén rögzítve van, így szemmel látható, hogy a kifeszített drót a pendítés irányában, illetve ellentétesen kitér, egy orsószerű mintázatot hoz létre. Ez egy fél hullámhossz, hiszen a teljes szinusz görbe fele jelenik meg előttünk.

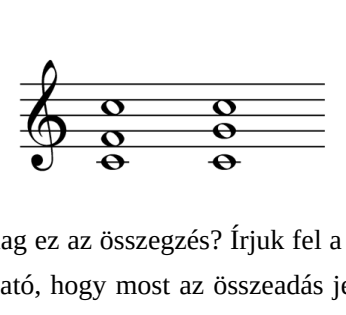


Ez azt jelenti számunkra, hogy a húron létrejövő rezgés hullámhossza éppen a húr hosszának a kétszerese lesz. Hasonlóképpen a húr hosszát rövidítve (lefogva egy-egy bundnál a húrt) a hullámhossz arányosan változik.

A hullámhossz és a frekvencia fordítottan arányos. (Lásd később, a szorzatuk éppen a hangsebességet adja meg az adott közegben.)

Vegyük most alaphangnak az egyvonalas c hangot. A következő kottaképen az alaphangot és az oktávját láthatjuk egy-egy másik hanggal két további hangközre bontva. Így az első esetben az oktávot egy kvint és egy kvart, míg a második esetben egy kvart és egy kvint összegére bontottuk. Világos, hogy a két összeg ugyanazt az oktávot adja, vagyis az összeadás kommutatív tulajdonsága jelenik meg:

$$\text{kvart}+\text{kvint}=\text{kvint}+\text{kvart}=\text{oktáv}$$



De hogy néz ki matematikailag ez az összegzés? Írjuk fel a húrhosszak arányát! (Oktáv: $\frac{1}{2}$, kvart: $\frac{3}{4}$, kvint: $\frac{2}{3}$.) Látható, hogy most az összeadás jel helyett a szorzás jelét kell használnunk, hogy az $1/2$ arányt megkapjuk:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$

Ha a hangok összegzését a húrhosszak arányának szorzásával kell felírnunk, akkor ez egy matematikus számára azt jelenti, hogy a kotta a húrok arányainak logaritmusát (sőt ld. később, a frekvenciák logaritmusát) ábrázolja:

$$\text{oktáv kottaképe}=\log\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)=\log\left(\frac{2}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{4}\right)=\text{kvint és kvart kottaképe}$$

Ha már az előbb felfedeztük, hogy tetszőleges húron végezhetjük a megfigyeléseinket, miért ne folytatnánk azzal a húrral, amellyel a játékot elkezdtük? Arra gondolok, hogy ha a húron a 3/4-ed részt lefogva előállíthattam az E-húr kvintjét, azaz a H hangot, akkor megismételhetném a lefogást most a megrövidített húron, előállítva a H hang kvintjét. Ehhez nem kell mást tenni, mint a korábbi, a „megmaradt” 2/3-ad hosszúságú húr 2/3-ád kell venni. Így máris a H hang kvintjét hallhatjuk, a Fisz hangot.

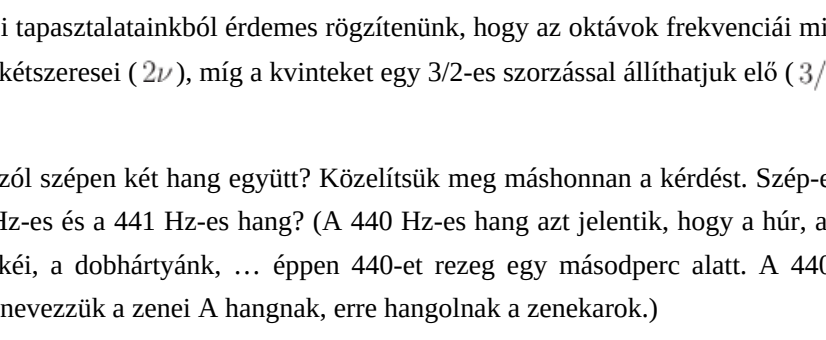
Matematikailag ez azt jelenti, hogy az eredeti húr 2/3-ad részének 2/3-ad részét vettük, azaz a $(2/3)^2=4/9$-ed részét vettük a húrnak. Zeneileg pedig azt mondhatjuk, hogy a kvintre ráépítettünk egy újabb kvintet. Matematikus gondolkodásunk máris érzi, hogy a zenei összegzés, a két kvint összeadása a hangok frekvenciájának szorzását fogja jelenteni…

Konszonancia

Ismét visszatérve az egyhúrú hangszerünkhöz, vegyük fel gyorsított videóval a húr rezgéseit. Amint a felvételt lassítva visszanézzük, észrevehetjük, hogy a korábban szabad szemmel is jól látható orsószerű alakzatra további furcsa, de egyben mégis szabályos rezgések rakódnak rá. Ez azt jelenti, hogy a húr rezgésében további, rövidebb hullámhosszú rezgések találhatók.

Ezt kísérletileg könnyen ellenőrizhetjük, csupán annyi a dolgunk, hogy az alaphang rezgését megszüntessük. Ezt úgy tesszük meg, hogy a megpendítés után a húr közepét óvatosan megérintjük, mellyel a közepén megszüntetjük a rezgését. Ekkor a további rezgéseket hallhatjuk, közülük is a legerősebb az oktáv hangja lesz. (Ha a húr közepén nem rezeg, akkor két orsószerű alakzat jön létre rajta, vagyis egy teljes szinuszhullám, melynek hullámhossza a húr hossza.)

Ha a kísérletet most úgy folytatjuk, hogy a húr 2/3-ánál is megszüntetjük a rezgést, akkor az alaphang kvintjét hallhatjuk — igaz, egy oktávval feljebb. Tovább kísérletezve (ehhez már nagy ügyesség kell a gitáron) a további részhangokat is kinyerhetjük. Ezek a hangok a következő sorrendben jönnek elő:



Az egyes hangok alá írt számok nem csupán a sorrendet jelentik, hanem azt is, hogy az alaphang frekvenciájának (ν) hányszorosa jött létre: $2\nu,3\nu,\ldots$. Ez jól érthető a korábbi ábránkon, hiszen a kísérleteink során éppen egy-egy újabb orsószerű alakzat „fér rá” a húrra.

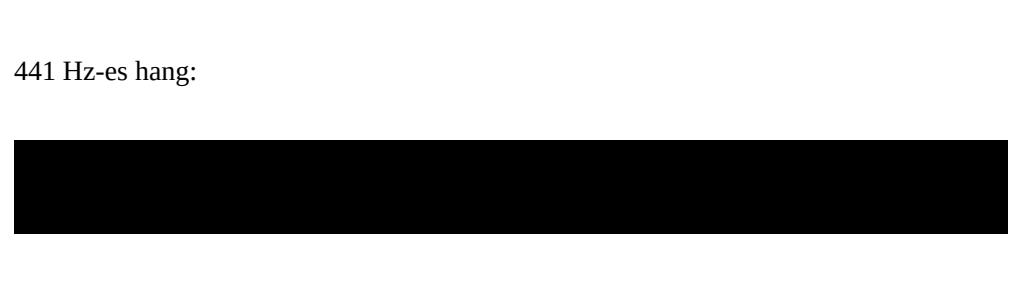
Ezt hívjuk felhangskálának. (Érdekességként érdemes megemlíteni, hogy a hangok különböző hangszínét éppen ezen felhangok különböző erőssége határozza meg. A fuvola hangjában pl. a felhangok egyenletesen csökkenő erősségűek, míg a klarinét felhangjai a csökkenő erősség mellett kissé hiányosak: minden második felhang hiányzik.)

Korábbi tapasztalatainkból érdemes rögzítenünk, hogy az oktávok frekvenciái mindig az előzők kétszeresei (2ν), míg a kvinteket egy 3/2-es szorzással állíthatjuk elő ($3/2\,\nu$).

Mitől szól szépen két hang együtt? Közelítsük meg máshonnan a kérdést. Szép-e együtt a 440 Hz-es és a 441 Hz-es hang? (A 440 Hz-es hang azt jelentik, hogy a húr, a levegő részecskéi, a dobhártyánk, … éppen 440-et rezeg egy másodperc alatt. A 440 Hz-es hangot nevezzük a zenei A hangnak, erre hangolnak a zenekarok.)

Érdemes letölteni egy hanggenerátort a telefonunkra. Ilyen igen sokféle található. Például a Frequency Sound Generator segítségével egyszerre több frekvenciájú hangot is hallhatunk.

A két képen a nagyon magas rezgésszám nem lenne jól látható, helyette a 11 Hz-es, a 12 Hz-es, a jobboldali ábrán pedig a két előző összegével kiegészített rezgések láthatók.



A hangfelvételekre kattintva a 440 Hz-es, a 441 Hz-es, valamint a kettő összegét (a két hang együttes hangját) hallgathatjuk meg.

440 Hz-es hang:

441 Hz-es hang:

a két hang összege:

Ha külön-külön hallgatjuk e két hangot, nem halljuk a különbséget. Ellenben együtt érdekes hanghatást figyelhetünk meg: a hallott hang egy változó intenzitású hang lesz. Ennek okát igen egyszerűen magyarázhatjuk matematikailag.

A két rezgés:

$$y_1(t)=A\sin(440t)$$
$$y_2(t)=A\sin(441t)$$

A kettőt összeadva a következő függvényt kapjuk:

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)=A\sin(440t)+A\sin(441t)=$$
$$=2A\cdot\cos\left(\frac{440-441}{2}t\right)\cdot\sin\left(\frac{440+441}{2}t\right)=2A\cdot\cos(0{,}5t)\cdot\sin(440{,}5t)$$

A kapott eredményen látszik, hogy a rezgés továbbra is szinuszos (a kettő átlagával, egy 440,5 Hz-cel rezgő hangot hallunk), melynek amplitúdója lassan — 0,5 Hz-cel — változik. (A 440,5 Hz-hez képest a 0,5 Hz igen kicsi frekvenciájú.) Ezt halljuk lebegésszerűnek.

Maga a hallható hangzás nem túl szép, de kiválóan használható hangoláshoz: amikor a két hang frekvenciája igen közel van egymáshoz, a lebegés lassan megszűnik:

$$y(t)=\lim_{\varepsilon\to0}\left[A\sin(440t)+A\sin\left((440+\varepsilon)t\right)\right]=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left[2A\cdot\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}t\right)\cdot\sin\left(\left(440+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\right)\right]=2A\sin(440t)$$

Ugyanígy nem túl szép két hang együtt, ha felhangjai között van „súrlódás”, vagyis van olyan két felhang, melynek frekvenciái igen közel vannak egymáshoz.

A legszebb két hang, mely igen kellemesen együtt szól, a tiszta prím, vagyis az, mikor két ugyanolyan frekvenciájú hang szól. (Azonos a két hang.) Ekkor természetes, hogy minden felhang megegyezik. Ha a két hang egy oktávnyira van egymástól, akkor egész sok egyezés található a felhangok között, s alig van néhány hang, mely „súrlódik”. A kvarttal és a kvinttel már sokkal több baj van. Mint az alábbi táblázatból látszik, jóval kevesebb az egyezés. (A ', '', ''', stb. jelzések azt jelentik, hogy hány vonalas hangról van szó, vagyis, hogy az alaphang felett hány oktávval van a hang magasabban.)

C	C'	G'	C''	E''	G''	B''	C'''	D'''	E'''	Fisz'''	G'''
ν	2ν	3ν	4ν	5ν	6ν	7ν	8ν	9ν	10ν	11ν	12ν
	C'		C''		G''		C'''		E'''		G'''
	ν'		$2\nu'$		$3\nu'$		$4\nu'$		$5\nu'$		$6\nu'$
		G'			G''			D'''			D'''
		ν^*			$2\nu^*$			$3\nu^*$			$4\nu^*$

A kvintnél az G alaphangra épülő sorban igen kevés egyezés van (G', G'', D''', G''''):

G **G'** D'' **G''** H'' **D'''** F''' G''' A''' H''' E'''' **G''''**

A kvartnál az F alaphangra épülő sorban még kevesebb egyezés van (C'', C''', G'''):

F F' **C''** F'' A'' **C'''** Esz''' F''' **G'''** A''' H''' F''''

A zenében a terc igen későn került a játszott hangközök közé. Ezt a hangközt igen sokáig disszonánsnak tartották.

A következő hangmintákat meghallgatva egészen archaikusnak tűnik az oktáv, illetve régies, gregoriánszerű a kvint párhuzamban hallható Tavaszi szél vizet áraszt kezdetű dal. (A szekund távolságra lévő két szólamot bántó hallgatni.)

tiszta prím:

oktáv:

kvint:

szekund:

A pitagoraszi hangsor

Ha csupán az oktávot tekintjük szépen konszonáns hangzatnak, akkor a többi hangközt nem fogjuk használni.

A kvint is igen szépen együttcsengő hangköz. Használjuk fel a skálánk felépítéséhez. Mielőtt matematikázunk, ismételjük át egy kicsit a fizikai ismereteinket!

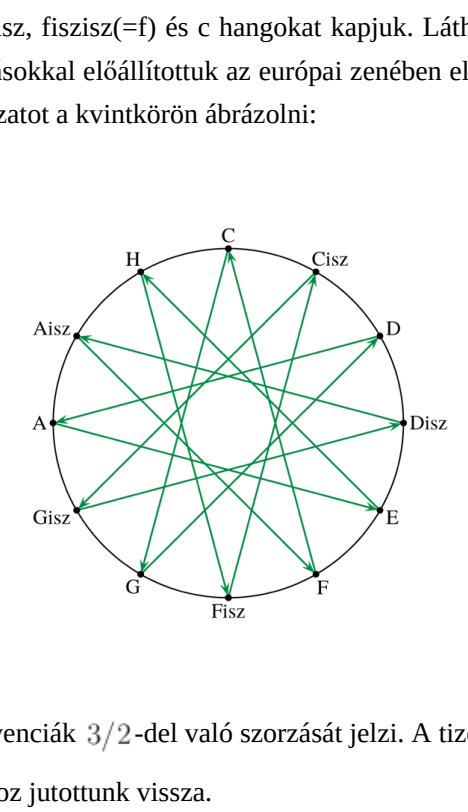
Tanultuk, hogy a levegőben kb. 340 m/s a hang sebessége, ami nem más, mint az egyetlen hanghullám hullámhossza osztva a hozzá szükséges idővel, a periódusidővel, vagy másként: a hullámhossz és a frekvencia szorzata.

$$c=340\ \text{m/s}\left(=\frac{\lambda}{T}\right)=\lambda\cdot\nu$$

Az adott közegben ez a sebesség állandó, tehát a hullámhossz (λ) és a frekvencia (ν) fordított arányban áll egymással. Az előzőeket egy táblázatban összefoglalva láthatjuk az összefüggéseket a zenei kifejezések (oktáv, kvart, kvint) között. Alaphangnak a gitár legalsó, legvastagabb húrját, az E húrt választottuk:

	λ	ν
alaphang (E)	λ_0	$\nu_0\,(=164{,}8\ \text{Hz})$
kvart (A)	$\frac{3}{4}\lambda_0$	$\frac{4}{3}\nu_0\,(=219{,}7\ \text{Hz})$
kvint (H)	$\frac{2}{3}\lambda_0$	$\frac{3}{2}\nu_0\,(=247{,}2\ \text{Hz})$
oktáv (e)	$\frac{1}{2}\lambda_0$	$2\nu_0\,(=329{,}6\ \text{Hz})$

A következőkben válasszuk alaphangnak az egyvonalas c hangot. Mint az előzőekből látható volt, ennek a kvintjét úgy kaphatjuk meg, hogy a c hang frekvenciáját 3/2-del szorozzuk. Így nyerjük az egyvonalas g hangot. Ennek a kvintjét ismét egy 3/2-des szorzással állíthatjuk elő. Ez lesz a kétvonalas d hang. Az eljárást folytatva az a, e, h, fisz, cisz, gisz, disz, aisz, fiszisz(=f) és c hangokat kapjuk. Látható, hogy az eljárásunk segítségével, kvintugrásokkal előállítottuk az európai zenében előforduló összes hangot. Szokás ezt a lépéssorozatot a kvintkörön ábrázolni:



A nyilak iránya a frekvenciák $3/2$-del való szorzását jelzi. A tizenkettedik ugrás után az alaphang egy oktávjához jutottunk vissza.

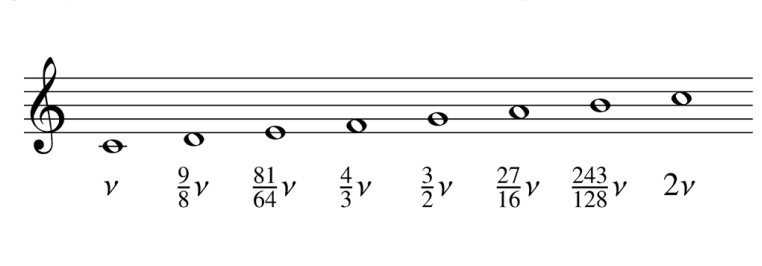
Valóban megkaptuk az alaphang valamelyik oktávját? A frekvenciákat 3/2-del szorozgatva előállítható az oktáv (melyet az alaphang kettővel való szorzásával nyerhetünk)?

$$\nu\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\overset{?}{=}\nu\cdot2^k$$

Az egyenlőség igaz lehet? Természetesen nem, hiszen $2^p\neq3^r$. A hiba viszont olyan elenyésző, hogy — néhány kiváló zenésztől eltekintve — mindenki élvezni fogja így is a muzsikát. Részletezve az állítást:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12}\approx2^7$$

A kvintugrásokkal felépített skálával nyerhetjük a pitagoraszi hangsort. Ehhez csupán annyit kell tennünk, hogy néhány esetben az egy oktávval lejjebbi hangot válasszuk a kapott hang helyett. (Ez a frekvencia 2-vel való osztását jelenti.)



Az egyes hangok közötti hangközök így a következőképpen alakulnak:

c	d	e	f	g	a	h	c
ν	$\frac{9}{8}\nu$	$\frac{81}{64}\nu$	$\frac{4}{3}\nu$	$\frac{3}{2}\nu$	$\frac{27}{16}\nu$	$\frac{243}{128}\nu$	2ν
$\frac{9}{8}\nu$	$\frac{9}{8}\nu$	$\frac{256}{243}\nu$	$\frac{9}{8}\nu$	$\frac{9}{8}\nu$	$\frac{9}{8}\nu$	$\frac{243}{128}\nu$	

Az így nyert pitagoraszi hangsor valóban szép hangközöket eredményez egy adott alaphangról kiindulva. A későbbi zenében (barokk kortól kezdve) felmerült az igény, hogy a zenemű közben más hangnembe, egy más alaphangról indított skálába is szeretnének áttérni a zenészek. Ebben a skálában viszont a legtisztább hangközeink (kvart, kvint) nem lesznek már olyan szép konszonánsak, mint az alapskálában. (Pl. a c-ről indított skálában a „végén” csalnunk kellett, hogy az oktávhoz visszatérjünk. Ha példának okául a H hangot vesszük alapul, akkor a csalás miatt most már a kvint sem lesz tiszta konszonáns…)

Bach idejében ezt az eltérést egy Zarlino nevű zenetudós megelőző kutatásai alapján úgy oldották meg, hogy az alaphang és oktávja közötti részt 12 teljesen egyforma hangközre bontották fel. A kérdés az volt, hogy mi lehet az a szám, mellyel 12-szer megszorozva az alaphang frekvenciáját, az oktávhoz jutunk. Matematikailag felírva

$$2\nu_0=x^{12}\cdot\nu_0$$

egyenlet megoldását jelenti. $x=\sqrt[12]{2}$ lesz ez a szám, mellyel két egymás melletti hangközt (kis szekundot) előállíthatjuk. A kvint most nem lesz olyan szép, konszonáns hangköz, hiszen

$$\frac{3}{2}\cdot\nu_0=\left(\sqrt[12]{2}\right)^7\approx1{,}4983\cdot\nu_0,$$

de az eltérés elhanyagolható talán. A hangszereinket ma így hangolják (temperált skála), s a parányi eltérések kiküszöbölésére a zenész hivatott.

Kezdő tanár koromban is szívesen forgattam Sain Marci bácsi matematikatörténeti könyvét, a Nincs királyi utat. Szeretettel ajánlom tanítványaimnak ma is, ezt a ma már csak könyvtárban fellelhető remekművet. A cikk e művel való „összecsengése” tehát nem a véletlen műve, kedvenc irodalmam volt ez a könyv.

A rövid írás figyelemfelkeltő szeretne csupán lenni, minden teljességre, részletre való törekvés nélkül. Az előadás szűkre szabott ideje (30 perc) is hasonlóképpen ízelítőt kívánt adni a zeneelméletről, s a benne rejlő matematikáról, fizikáról. Igyekeztem, hogy e hatalmas anyagban minden korosztály számára legyen a matematikaórákhoz kapcsolódó érdekes kitekintés. Kérem, hogy mindenki kedvére folytassa a kísérletezést, s a zene matematikai felfedezéseit.

Székely Péter

Székely Péter a budapesti Eötvös József Gimnázium matematika, fizika és informatika szakos tanára. Gyermekkora óta zenél, elvégezte a budapesti Bartók Béla Zeneművészeti Konzervatóriumot, s ma is örömmel muzsikál zenésztársaival (Triola Fúvósegyüttes). Zeneszeretetét igyekszik gyermekeinek, tanítványainak is átadni.

alkalmazott matematika alkalmazott fizika

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

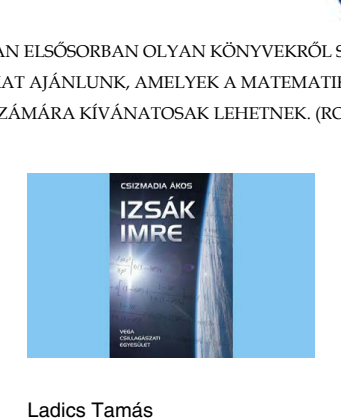
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ** ROVATBAN ELSŐSORBAN OLYAN KÖNYVEKRŐL SZERETNÉNK TUDÓSÍTANI ÉS OLYAN ELEKTRONIKUSAN ELÉRHETŐ ÍRÁSOKAT AJÁNLUNK, AMELYEK A MATEMATIKA BÁRMELY RÉSZE VAGY KAPCSOLATAI IRÁNT ÉRDEKLŐDŐK SZÁMÁRA KÍVÁNATOSAK LEHETNEK. (ROVATSZERKESZTŐ: *TÓTH JÁNOS.)*

Héberger Károly
2017. DECEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Kísérletek tervezése és értékelése

Hézagpótló művet tartok a kezemben; már az első kiadás is alapműnek számított és nem hiányozhatott senki polcáról, aki adatfeldolgozással, kísérlettervezéssel foglalkozik. A korábbi, biblaként forgatott könyv, többszöri utánnyomás dacára is elfogyott, hiánycikknek számít. A jelen mű ennek átdolgozott, javított kiadása. Kemény Sándor, Deák András, Lakné Komka Kinga, Kunovszki Péter: *Kísérletek tervezése és értékelése* c. kétkötetes könyvéről *Héberger Károly* írt recenziót.



Ladics Tamás
2017. DECEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Izsák Imre — életrajz egy magyar csillagászról

Csizmadia Ákos könyve a tragikusan fiatalon elhunyt magyar csillagásznak állít méltó emléket. A Föld alakjának pontos meghatározása *Izsák Imre* munkásságának talán legfontosabb területe. Elsőként mutatta ki, hogy a Föld egyenlítői keresztmetszete sem kör, hanem ellipszis. 1970-ben krátert neveztek el róla a Hold túlsó oldalán. *Ladics Tamás* méltatja a könyvet.

Gyenes Zoltán
2017. DECEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

600 válogatott feladat matematikaversenyekre

Bencze Mihály és Marius Dragan nemrég megjelent példatárát haszonnal forgathatják az olyan rutinos versenyzők, akik nagy számú eredeti feladat megoldásával akarnak további gyakorlatot szerezni. A könyv előszavában azt ígérik a szerzők, hogy a könyv segítséget nyújt középiskolai diákok és egyetemisták számára a nemzetközi versenyekre való felkészítésben. Ennek az elvárásnak a könyv *Gyenes Zoltán* indoklása szerint csak részben felel meg.

Szerkesztő
2017. DECEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Munkalehetőségek az alkalmazott matematikában — honlapajánló

Cikkeinkhez kapcsolódó honlapokat ajánlunk ebben a rövid írásban. Elsőként az amerikai Ipari és Alkalmazott Matematikai Társaság, a SIAM által kiadott SIAM NEWS-ból idézünk: mi is a matematika szerepe a bennünket körülvevő világban és milyen állások várják ma a matematikusokat, informatikusokat, mérnököket, természettudósokat.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Héberger Károly 2017. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Kísérletek tervezése és értékelése

Hézagpótló művet tartok a kezemben; már az első kiadás is alapműnek számított és nem hiányozhatott senki polcáról, aki adatfeldolgozással, kísérlettervezéssel foglalkozik. A korábbi, bibliaként forgatott könyv, többszöri utánnyomás dacára is elfogyott, hiánycikknek számít. A jelen mű ennek átdolgozott, javított kiadása.

A könyv szándékai szerint nem matematikusoknak szól, felhasználók, mérnökök használhatják sikerrel. Valóságos problémákkal foglalkozik, nem steril elméleti, matematikai levezetésekkel, bizonyításokkal. Egyszerű, könnyen érthető példáktól vezet a gondolatmenet a bonyolult, nem egyszerűsíthető komplex feladatokig.

A legtöbb felhasználó csak alkalmazni, használni akarja a statisztikai apparátust, és ezért gyakran hibáznak, ha nem alaposan megértett módszereket alkalmaznak. A módszerek hátterének megértése nélkül az is gyakran előfordul, hogy az alkalmazó az érvényességi határokon kívül is alkalmazni akarja a módszereket. Szerencsére a könyv részletes utalásokat, gyakorlati útmutatókat tartalmaz, így mindenki, aki gondosan követi a gondolatmenetet, meg fogja érteni a példákat, eredményesen tudja alkalmazni a módszereket.

Meggyőződésem, hogy a mérnökhallgatókat, doktoranduszokat nem zavarja majd a sok képlet, szumma-, sőt integráljel, hisz manapság egy táblázatkezelő programban egy kattintással megkaphatjuk számoszlopok összegét. Félő azonban, hogy a sok képlet sok tudományterületen riasztólag hat, de meggyőződésem szerint fölöslegesen, csak nem szabad „félni”, illetve úgy hozzáállni, hogy ez bonyolult, úgysem értem majd meg. Sok évtizedes oktatói gyakorlat csiszolta a felépítést, a példák életből ellesettek, könnyen érthetők, a fejezetek egymásra épülnek. Jómagam sokszor elcsodálkoztam, hogy olyan problémákra is megvan a megoldás (van már megoldás), melyeknek még a létezéséről sem tudtam.

A könyv első fele a valószínűségszámítási és statisztikai alapfogalmakat összesíti. Ismerteti a statisztikai próbákat, a paraméterbecslési módokat, a konfidenciaintervallum és a korreláció fogalmát, hogy csak néhány alapfogalmat említsünk. A második részt a regresszió problémájának szentelték: egyváltozós, többváltozós lineáris regresszió. Külön fejezetek foglalkoznak azokkal az esetekkel, amikor a független változóban is hiba van, a hibaterjedési törvénnyel, és a regresszió feltételezéseinek utólagos ellenőrzésével (reziduumvizsgálat). A harmadik rész tárgya a varianciaanalízis, ennek egyes fejezeteit külön kiegészítő kötetben adják közre. Ez a legjobban kidolgozott, legtöbb valós problémát tartalmazó rész. A negyedik rész szól a kísérlettervezésről (faktoros kísérleti tervek): bevezetés, kétszintes kísérleti tervek, a válaszfelület módszere, és a kísérlettervezés megvalósítása. Az ötödik részt a minőségjavító kísérlettervezésnek szentelték: ismertetik a Taguchi-módszert, a négyzetes veszteségfüggvényt, a kétlépcsős optimalizálás elvét és gyakorlatát, a célfüggvények megválasztását, míg a kiegészítő kötetben a Taguchi-módszerben használt ortogonális terveket, a faktorok megválasztását, és az ellenőrző kísérleteket találjuk.

A könyv egyik, ha nem a legnagyobb előnye az, hogy önálló tanulást is lehetővé tesz. Akik vizsgázni szeretnének statisztikából, akkor is sikerrel vehetik az akadályt, ha nem jártak előadásra, de a könyvet alaposan áttanulmányozzák és megértik. Ugyancsak nem hagyja cserben a könyv azokat, akik nem rendelkeznek megfelelő (validált, drága) számítógépes programokkal. Programozási ismeretek nélkül is jól használható algoritmusok vannak a könyvben, képletekkel, táblázatokkal. Az eltérések négyzetösszegének felbontásával kiegészítve könnyen követhetővé válik a gondolatmenet. A megértést nagyban segíti a digitális formában elérhető EXCEL adattáblázatok gyűjteménye: az összes példa adatai megtalálhatók így.

Tudja valaki, mit jelent a „független változókban nemlineáris, de a paraméterekben lineáris függvényekkel” végzett regresszió?
Mi az a Boksz—Cox-transzformáció? Mikor van rá szükség?
Hány kísérlet szükséges egy teljes faktorú kísérleti tervhez?
Mi az az Abbé-próba, mikor használjuk?
Hogyan kell a veszteségfüggvényt alkalmazni diszkrétváltozókra?
Mi a Kolmogorov—Szmirnov-próba próbastatisztikája?
Hogyan határozzuk meg egy egyenes paramétereinek együttes konfidenciatartományát?
Vagy éppenséggel a varianciák azonosságát (homogeneitását)?
Okoz-e ingadozást az, hogy különböző napokon végezték a méréseket?

Aki a fenti, és ezekhez hasonló kérdésekre nemleges a választ ad, annak érdemes a könyvet kezébe vennie, sőt alaposan áttanulmányoznia.

A könyv nyelvezete színvonalas, az angol szakkifejezések fordítása szabatos és egyértelmű, ami nagyon ritka manapság.

Amire nem kapunk választ:

Idézünk a könyvből: „Ha az arány a kritikus értéket meghaladja, el kell vetnünk a nullhipotézist, amely szerint r-q változó hatása nem szignifikáns. ...Minthogy a ...becslések egymástól nem függetlenek, az előbbi vizsgálat t-próbával nem végezhető el. Ha a normális eloszlás feltételezése nem jogos, az itt leírt módszer hamis eredményeket ad!”

Mi a teendő ilyenkor? Hisz a t-próbát is rutinszerűen használják, még akkor is, ha tudják, hogy a feltételezések nem jogosak. Ha a normális eloszlás feltételezése nem teljesül, nemparaméteres, robusztus regressziót kellene végezni? Ám az eredmény, ekkor is, mint a t-próba esetén, az esetek túlnyomó többségében megegyezik azokkal az eredményekkel, (azaz nem tér el szignifikánsan azoktól) melyeket a normális eloszlás feltételezésével kapunk.

A könyv 17 táblázatot (a kiegészítő kötet 19-et) tartalmaz, melyek a hipotézisvizsgálatokhoz, döntésekhez nyújtanak segítséget, anélkül, hogy drága számítógépes programokat kellene használni.

Összefoglalva megállapítható, hogy hiánypótló műről van szó, amely nem hiányozhat senkinek a könyvespolcáról, aki adatelemzéssel, kísérlettervezéssel, egyváltozós statisztikával, görbeillesztéssel, varianciaelemzéssel és hasonló tárgykörökkel foglalkozik.

Kemény Sándor, Deák András, Lakné Komka Kinga, Kunovszki Péter: ***Kísérletek tervezése és értékelése*** (Bővített, javított kiadás, két kötet), Typotex, Budapest, 2017.(A szerzők a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Kémia és Környezeti Folyamatmérnöki Tanszékének oktatói.)

Héberger Károly

MTA Természettudományi Kutatóközpont

A szerző az MTA doktora, éveket töltött külföldön: Göttingenben, Zürichben és Olaszországban. Jelenleg többváltozós adatelemzéssel (mintázatfelismerés, modellek összehasonlítása, rangsorolás, molekulák hasonlósága) foglalkozik, fő szervezője a Conferentia Chemometrica konferenciasorozatnak. `http://aki.ttk.mta.hu/scientist/heberger/`

recenzió statisztika

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Ladics Tamás 2017. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Izsák Imre — életrajz egy magyar csillagászról

Engedjék meg, hogy egy személyes élménnyel kezdjem: elsőéves egyetemi hallgatóként a legelső óránk „a Föld és felépítése” volt, ahol megtudtuk: a Föld valójában nem gömb alakú. A forgási ellipszoid egy sokkal jobb közelítése a valóságnak, de még ez sem tökéletes: a Föld ugyanis egy *geoid*. Tizennyolc évünk minden görögös műveltségét összeszedve megfejtettük, hogy bizony ez azt jelenti, a Föld földalakú. A derültség frissítő szellője járt körbe a teremben, máris magabiztosabbnak éreztük magunkat: az ilyen fogalmakkal talán megbirkózunk a vizsgaidőszakig. A szívünk mélyén éreztük, s hamar ki is derült, hogy a dolog nem ennyire egyszerű...

A Föld alakjának pontos meghatározása Izsák Imre munkásságának talán legfontosabb területe. Elsőként mutatta ki, hogy a Föld egyenlítői keresztmetszete sem kör, hanem ellipszis. Legutolsó munkájában 26 244 műhold pályájának elemzésével adta meg a geoidformát, azaz a Föld gravitációspotenciál-függvényét.

Csizmadia Ákos könyve a tragikusan fiatalon elhunyt magyar csillagásznak állít méltó emléket.

Izsák Imre a huszadik század legzivatarosabb időszakában élt és alkotott. Magyarként megélt háborút és forradalmat, s mint akkor oly sokan, életének jelentős részét külföldön, Svájcban és Amerikában töltötte. Munkásságának elismertségét jól tükrözi, hogy 1970-ben krátert neveztek el róla a Hold túlsó oldalán, sőt, ahogy a könyvből megtudhatjuk, „...ritkán fordul elő, hogy valakinek kráter és kisbolygó is viselje a nevét”.

A könyv komoly tudománytörténeti munkának tekinthető. Olvasásakor megdöbbentett a megírásához szükséges kutatómunka mennyisége és mélysége. A szerző többször tárgyalja a közölt adatok hitelességének kérdését, rámutatva különböző források pontatlanságaira; bőven kitér „az adott korok és intézmények történetére, ekként is elhelyezve, érthetőbbé téve Izsák Imre életét a tágabb összefüggésekben is”. Életrajzi jellege mellett laikus számára is érthető módon beszél az Izsákot foglalkoztató tudományos kérdésekről és elért eredményeiről. A könyv függelékében megtalálható Izsák húsz évet felölelő személyes jellegű levelezése.

Csizmadia Ákos munkája bizonyosan hozzájárul ahhoz, hogy Izsák Imre neve a szűk szakmai körön kívül is ismertté váljon itthon, s elfoglalja az őt megillető helyét a köztudatban.

Csizmadia Ákos: *Izsák Imre*, VEGA Csillagászati Egyesület, Zalaegerszeg, 2017.

ISBN 978-963-12-8088-3.

http://vcse.hu/izsak-imre-eletrajz-egy-magyar-csillagaszrol/

Ladics Tamás

Ladics Tamás az ELTE-n végzett meteorológusként, doktori fokozatát a Műszaki Egyetem Matematika és Számítástudomány Doktori Iskolájában szerezte. Jelenleg a kecskeméti Neumann János Egyetem főiskolai docense.

Megjegyzés

Izsák Imre Gyula neve immár negyed évszázada ismert a róla elnevezett komplex középiskolai természettudományi versenyről, amely indulásakor kifejezetten újdonság volt és mind a mai napig egyike a legszínvonalasabb országos tehetséggondozó versenyeknek. A zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium 1992 óta évente megrendezi a matematika, fizika, és számítástechnika tárgyköreit egyaránt felölelő, komoly díjazású versenyét, az Izsák Imre Gyula Természettudományi Versenyt. A három tantárgy rendhagyó, komplex vetélkedőjét a gimnázium jelenlegi igazgatója, Horváth Attila kezdeményezte. A verseny 1993 óta a gimnázium egykori tanulójának, a zalaegerszegi születésű matematikus-csillagásznak, Izsák Imre Gyulának — emlékét őrizve — viseli a nevét. *A szerk.*

http://www.zmgzeg.sulinet.hu/index.aspx?page=/izsak/eletrajz.aspx

http://www.zmgzeg.sulinet.hu/index.aspx?page=/izsak

☐ recenzió ☐ alkalmazott fizika

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Gyenes Zoltán 2017. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

600 válogatott feladat matematikaversenyekre

A magánkiadásban megjelent könyv címének megfelelően 600 matematikafeladatot tartalmaz, a felmerülő témakörök egy része megfelel a versenyeken jól szereplő középiskolás magyar diákok tudásának: egyenlőtlenségek, síkgeometriai feladatok. Több olyan témakör is szerepel a könyvben, amely inkább egyetemi szintű tudást feltételez: mátrixok és lineáris algebra, valós analízis, integrálás és deriválás. A feladatok javára írható, hogy valóban nehezek, és ami különösen nagy erény, hogy eredetiek, nem példatárakban ezerszer látott problémák. A kiadvány feladatai azonban nincsenek semmilyen módon rendezve. A könyv minden egyes feladat megoldását tartalmazza, de a megoldásokban hivatkozott tételek sajnos még kimondva sincsenek, így a kevésbé rutinos diákoktól külön erőfeszítést igényelhet ezek felkutatása. Lehetett volna egy tételjegyzéket csatolni ezekből, bár a tapasztalt versenyzők ezt nyilván nem fogják hiányolni.

A könyv egyértelmű hátránya a szerkesztetlensége: az egy témakörbe tartozó feladatok elszórva találhatók, és sajnos az sem ritka, hogy egy feladat megfogalmazásába olyan hiba csúszik, ami már a megértést akadályozza (ilyen például az 544-es és az 599-es feladat). Az 599-es feladat esetében még a megoldást elolvasva sem derül ki, mi lehetett a feladat. Ahol érthető a feladat és a megoldás, ott se mindig gördülékeny a feladat megfogalmazása, jó lett volna, ha a feladatok szövegét még jobban megszerkesztik (érdekes például a 417-es feladat megoldása, de rettentő nehéz megérteni a szerencsétlen megfogalmazás és a sajtóhiba, illetve a felesleges feltétel miatt, ráadásul az oszthatóságra is szokatlan jelölést használnak).

Összességében a könyvet haszonnal forgathatják az olyan rutinos versenyzők, akik nagy számú eredeti feladat megoldásával akarnak további gyakorlatot szerezni, de az említett hiányosságok miatt tanárok és kevésbé rutinos diákok számára ez a könyv kevésbé hatékonyan használható. Kár érte, mert az eredeti feladatok nagy értéket képviselnek: ha legközelebb a szerzők tovább csiszolják őket, szélesebb olvasóközönség számára szóló könyvvel állhatnak majd elő.

Mihály Bencze, Marius Dragan: 600 Selected Problems for Mathematical Contests, 2017, 476 oldal.

Megrendelhető: **1benczemihaly@gmail.com**

Gyenes Zoltán

Gyenes Zoltán a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium tanára. Diákkorában rendszeres és eredményes résztvevője volt országos és nemzetközi versenyeknek. Gimnazistaként három egymást követő évben részt vett és érmet szerzett a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián.

recenzió

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2017. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Munkalehetőségek az alkalmazott matematikában — honlapajánló

Az amerikai Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), az Ipari és Alkalmazott Matematikai Társaság színes, 32 oldalas kiadványa rengeteg információval és ötlettel szolgál azoknak, akik mérnöki, természettudományos vagy matematika diplomával keresnek állást, vagyis a ma divatos STEM (science, technology, engineering, and math) területén szeretnék megalapozni a karrierjüket.

27 nő és férfi rövid története van benne, akik olyan multiknál dolgoznak, mint az Amazon, a Caterpillar, a Coca-Cola, az Intel vagy a Microsoft, vagy nemrég indították el startup cégüket, vagy a nonprofit szférában tevékenykednek. Mindegyikőjüknél ugyanazok a kérdések: most mivel foglalkozik; milyen képességek-készségek kellenek ehhez a munkához; melyek a munkájának előnyei és hátrányai; esetükben mi a munka és a magánélet aránya, milyen karrierutak várhatók és mik a lehetséges keresetek. (Ez utóbbi számok — főleg, ami a kezdőfizetéseket illeti — a mi viszonyainkhoz képest sokkolóan magasnak tűnhetnek.) Minden érdeklődőnek tanulságos elolvasni.

A SIAM idei konferenciájára készült az a videó, amelyik a matematika szerepéről szól a bennünket körülvevő világban. Ez is megtalálható a SIAM NEWS honlapján, de felkerült már a youtube-ra is.

Mindazokat, akik mostani számunkban, az Érintő 2017. decemberi számában megnézték Yves Meyer fényképét, bizonyára érdekli a tudomany.blog.hu-n megjelent Hullámocskák című bejegyzés is. Nagyon érdekes cikkek olvashatók egyébként is a tudományos gourmandoknak szóló honlapon, mi különösen ajánljuk a matematika rovatát.

2017. márciusi számunkban jelent meg Pyber László cikke, ehhez kapcsolódóan találhatnak egy írást a Magyar Tudományos Akadémia oldalán.

A szerk.

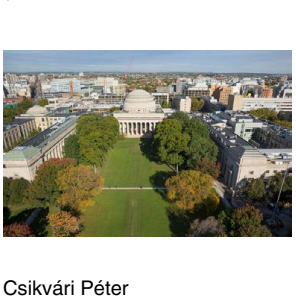
---

alkalmazott matematika   matematikus-karrier

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

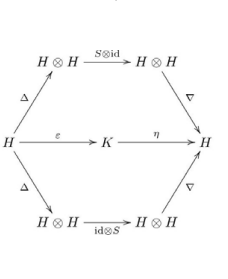
A **TUDOMÁNY** MENÜPONT TÖBBFÉLE, A MATEMATIKA TUDOMÁNYÁHOZ KAPCSOLÓDÓ FUNKCIÓT TAKAR..**A TUDOMÁNY– TÖRTÉNET ROVAT** CÉLJA ELSŐSORBAN MATEMATIKATÖRTÉNETI JELLEGŰ ÍRÁSOK KÖZLÉSE. **A MI IS …?ROVAT** A MAI MATEMATIKA TUDOMÁNYÁRÓL KÍVÁN SZÓLNI A HOZZÁÉRTŐKNEK.
(ROVATSZERKESZTŐK: *BESENYEI ÁDÁM; STIPSICZ ANDRÁS.*)



Csikvári Péter
2017. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Matematikaoktatás az MIT-n

Legtöbben csak a rövidítést ismerik: az MIT, Massachusetts Institute of Technology a világ egyik legjobb egyeteme, rendszeresen az első 10-ben van az egyetemi rangsorokban, nem ritkán a legelején. E cikk szerzőjének, *Csikvári Péternek* lehetősége volt 3 évet eltölteni az egyetem matematikai intézetében, így első kézből vannak tapasztalatai az ott folyó oktatásról.



Shahn Majid
2017. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is ... egy kvantumcsoport?

Kompakt csoportokra mint „merev" objektumokra szeretünk gondolni, amiket tehát nem lehet deformálni. Ha azonban a hozzájuk tartozó csoportalgebrát, vagy a burkolóalgebrát vesszük, annak már van deformációja, ami ugyan nem lesz csoportalgebra (vagy burkolóalgebra), de nagyon hasonló lesz egy ilyenhez: speciális tulajdonságú Hopf-algebrát kapunk. Ez az ötlet vezetett a kvantumcsoport fogalmának megszületéséhez. *Shahn Majid* 2006-ban az Amerikai Matematikai Társaság *Notices* c. folyóiratában megjelent cikkét *Stipsicz András* fordította. Az ábrán egy Hopf-algebra látható.

Schipp Ferenc
2017. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Waveletek – A 2017. évi Abel-díjjal kitüntetett Yves Meyer munkásságáról

A 2017. évi Abel-díjat *Yves Meyer* francia matematikus kapta *a waveletek matematikai elméletének kidolgozásában játszott úttörő munkásságáért*. Szeizmikus adatok elemzésére és képek tömörítésére használt gyakorlati eljárásokból kiindulva az 1980-as évek közepétől vezetésével a jelfeldolgozás egy új, hatékony módszerének rakták le a matematikai alapjait. Az eljárást felhasználták a Hubble űrteleszkóp felvételeinek dekonvolúciójára, valamint a napjainkban észlelt gravitációs hullámok detektálásában is. *Schipp Ferenc* vezeti be az olvasót a témakörbe.

Oláh Vera
2017. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Arckép helyett

2017 szeptemberében különös, továbbított e-mail jutott el hozzám, egy meghívó Faragó Andor, Faragó István és Faragó György emlékére botlatókő elhelyezésére a Bartók Béla út 52. számú ház előtti járdán. Bevallom őszintén, nem tudtam, mi is az a botlatókő. A wikipédiához fordulva kiderült, hogy Gunter Demnig német szobrászművész alkotásai azok a holokauszt áldozatai előtt tisztelgő, macskakőre rögzített 10 × 10 centiméteres réz emléktáblák, amelyeket az áldozatok egykori lakhelye előtt helyeznek el a járdába süllyesztve.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Csikvári Péter 2017. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Matematikaoktatás az MIT-n

Massachusetts Institute of Technology, melyet a legtöbben csak az MIT rövidítéséről ismernek, a világ egyik legjobb egyeteme, rendszeresen az első 10-ben van az egyetemi rangsorokban, nem ritkán a legelején. E cikk szerzőjének lehetősége volt 3 évet eltölteni az egyetem matematikai intézetében, így első kézből vannak tapasztalatai az ott folyó oktatásról.

Elöljáróban néhány szó az MIT matematikai intézetéről. Ez egy kifejezetten nagy intézet mintegy 70 főállású professzorral, kb. ugyanennyi postdoktorral és vendégkutatóval, valamint kb. 100 doktorandusszal ([1]). Összehasonlításul megemlítjük, hogy a Harvardnak, amely ugyancsak a massachusettsi Cambridge-ben helyezkedik el, kb. 30 professzora és 60 doktorandusza van ([2]). Ennek megfelelően az MIT különleges helyet foglal el az amerikai matematikaoktatásban. A legtöbb diákolimpikon és nagyon sok más tehetséges diák az MIT-n tanul tovább. Ez pedig meglátszik az amerikai egyetemi matekverseny, a William Lowell Putnam verseny eredményein ([3]): az MIT dominanciája néha egészen elképesztő, 2014-ben például a legjobb 27 diákból 16 tanult az MIT-n, az első 6-ból 5! Ez persze néhány problémát is felvet. A diákjaik tudása, képessége nagyon széles skálán mozog, így az ajánlott tantárgyakat is ennek megfelelően kell kialakítani. Az alábbiakban összefoglalom, én milyen tantárgyakat tanítottam, ott milyen praktikákat alkalmaznak, és a tantárgy hogyan illeszkedik bele a tantárgystruktúrába.

Mielőtt rátérnék az általam oktatott tárgyakra, néhány szót kell szólnom az oktatási rendszerről. A képzés Bsc része 4 éves, az első évben még nem választanak a diákok szakot. Kevés a kötelező tantárgy, a diákok meglehetősen szabadon válogathatnak a tárgyak között. Ráadásul meglehetősen sok idejük van arra, hogy leadhassák a tárgyakat, majdnem a félév háromnegyedéig. Emiatt kialakul az úgynevezett „shoppingolás”: a diákok elég sok tantárgyat felvesznek, és a félév során szépen lassan megszabadulnak a nekik nem tetsző tárgyaktól. Én csak Bsc-s tárgyakat tanítottam. A Bsc után van 5 év graduate képzés, ez nagyjából megfelel a mi Msc plusz doktori képzésünknek.

A diákok teljesítményét folyamatosan figyelik. Minden diáknak van egy mentora, akit értesíteni lehet, ha a diáknak problémája van egy tantárggyal. Az elsőéves tárgyaknál ennek külön neve van: ez az „5. heti zászló”. Az ötödik héten megkérik a gyakorlatvezetőket, hogy ha van olyan diákjuk, akiről gyanítható, hogy nem fogja tudni elvégezni a gyakorlatot, azt jelezzék a diák mentorának.

Az 5. hétre ezt már meg lehet tippelni, ugyanis már túl vannak többheti házi feladaton és egy vagy két zárthelyi dolgozaton is. Felsőbb éveseknél egy-két héttel később szokták megkérdezni a tárgyak oktatóit az esetleges problémás diákokról. A mentornak az a feladata, hogy segítse a diákot abban, hogy érdeklődésének és tudásának megfelelő tárgyakat válasszon, ha pedig problémái vannak a diáknak, akkor megpróbáljon megfelelő segítséget találni neki. Mivel én postdoc voltam, így rám 4 duplaszakos diákot osztottak, akiknek már volt egy főszakos mentora. Bár ez nem túl nagy feladat, érdemes valamennyire odafigyelni rá, mert ha a diák nem teljesít jól, akkor a diákkal együtt a mentornak is meg kell jelennie az Academic Performance Committee előtt, ami állítólag nem túl kellemes. Szerencsére ilyen helyzetbe nem kerültem.

Érdekességként megemlítem, hogy nincs szóbeli vizsgájuk, a vizsgaidőszak mindössze egyhetes. Ezen a héten írnak meg több vizsgát, amelyek ugyanúgy problémamegoldásból állnak, mint a korábbi évközi zárthelyik. Sajnos azt is volt lehetőségem megtanulni, hogy hogyan működik az MIT csaláspolitikája. Ha egyszer valakit csaláson kapnak, akkor a tárgyfelelős elmesélése alapján egy titkárnő készít egy esetleírást, amelyet elhelyez a diák nevére kialakított elektronikus dossziéban. Mikor a második levél is megérkezik a dossziéba, akkor a rendszer jelez, és akkor már bizottság tárgyalja mindkét esetet. Nagyon-nagyon súlyos esetben már az első alkalommal összehívják a bizottságot.

Bár az MIT elsősorban a kutatásairól ismert, rengeteget költ az oktatásra is. Innovatív oktatási ötletekkel pályázni is lehet különböző pénzekre. Szintén sokat költenek arra, hogy rengeteg tantárgynak legyenek online elérhető előadásai. Érdekességként megemlítem, hogy itt fejlesztették a Scratch nevű programozási nyelvet is, amelynek célja, hogy kisgyerekeket vonjanak be a programozás világába.

Külön figyelmet szentelnek a kommunikációs tárgyaknak. Erre egy intézetet hoztak létre, ennek munkatársait kihelyezik a különböző területek intézeteihez. Például a matematikai intézet munkatársait Susan Ruff segíti. Számos ötletet, amelyet alább a Diszkrét matematika szeminárium tantárgynál leírtam, éppen tőle tanultam.

Most pedig következzenek az általam oktatott tárgyak.

Kalkulus. Ez egy elsőéves tárgy, amely kötelező mindenkinek, nem csak a matematika szakosoknak. Valójában ekkor még nem is választanak a diákok szakot. Ezt a tárgyat több különböző szinten el lehet végezni, de a legjobb diákok egyszerűen megírnak egy tesztet az elején, és ezzel le is tudják a tárgyat. Én a legalacsonyabb szinten tartottam gyakorlatot. Itt a diákok nem rendelkeztek különösebb matematikai képességekkel, de rendkívül motiváltak voltak, nagyon-nagyon kevesen buktak az egész évfolyamról. Az előadás heti 3-szor 50 perc volt, ehhez hozzájött még a 2-szer 50 perc gyakorlat. A kb. 80 diák 7 csoportba volt osztva gyakorlatra, amelyekből én két csoportnak vezettem gyakorlatot. Meglepő módon a gyakorlatvezetőkön nem volt igazi nyomás, hogy a gyakorlatokba próbáljanak mindent belesűríteni, amit tudnak, ugyanis az alapelv az, hogy a diákok maguk tanulnak. Ennek megfelelően a gyakorlatokon csak 2-3 feladatot beszéltünk meg, a diákokat pedig hagytuk dolgozni legalább 20-30 percet. Viszont ami a diákoknak igazi kihívás volt, az a rengeteg házi feladat. Minden héten rengeteg feladatot kaptak, amelyek megoldása nemritkán összesen 15-20 oldal volt. Szerencsére ezeket nem nekem kellett kijavítani, hanem külön javítók voltak, általában felsőbb éves diákok. Egy apró érdekesség, hogy a diákok dolgozhattak együtt, viszont minden feladathoz oda kellett írniuk, hogy kiktől kaptak segítséget. Ezt azért csinálják így, hogy tudatosítsák a diákokban, hogy mennyi mindenki segíti őket. (Mint később felfedeztem, nem elhanyagolható mellékterméke a rendszernek, hogy a csalásokat könnyebb kezelni: a legnagyobb csalásoknál ugyanis nem írják oda a diákok egymás nevét, így az oktatónak elég rámutatnia, hogy bizonyos fokú együttműködés biztosan volt, nem kell bizonyítani, hogy az egész csalás volt.) Általában is igaz az MIT-ra, hogy a kooperatív munkára nagy hangsúlyt fektetnek, a gyakorlatokon is bátorítottuk a diákokat a csapatmunkára. Azt hiszem, ez fontos is, mert a követelmények meglehetősen magasak, így egyedül végigcsinálni az egyetemet meglehetősen nehéz. Például ebben a tantárgyban összesen 4 + 1 zárthelyi dolgozatot kell írniuk a diákoknak. A + 1 az a végső nagy zárthelyi vagy vizsgadolgozat. A diákok munkáját még a rendszeres fogadóórák segítik, amelyek valóban népszerűek. Mi annak idején az előadóval és a 4 gyakorlatvezetővel úgy szerveztük meg, hogy minden napra essen fogadóóra. A diákok természetesen nem csak a saját gyakorlatvezetőjükhöz mehettek segítséget kérni.

Diszkrét matematika szeminárium. Minden diáknak el kell végezni két CI-M tárgyat: a CI-M a „communication intensive in major”, magyarul intenzív szakmai kommunikációs tárgy, vagyis szeminárium. Ezt az egészet azért írom le, mert gyakori mintának láttam az MIT-n, hogy egyszerű dolgoknak adnak furcsa neveket, de utána megpróbálják megtölteni extra tartalommal. Ennél a tárgynál is ezt éreztem. Aki részt vett már szemináriumokon az tudja, hogy nem igazán hatékony módja az oktatásnak, tanulásnak, mert a diákok nincsenek igazán rákényszerítve, hogy mások előadásait is kövessék. Ráadásul, ha a diák egyetlen előadást tart a félév alatt, akkor fejlődési lehetősége sincs igazán. Ezt kiküszöbölendő, ebben a tantárgyban a diákoknak 3 előadást kellett tartaniuk, 12 fős létszámnál 3 darab 50 perces, 15 fős létszámnál két 50 és egy 25 perceset. Ahhoz is ragaszkodtunk, hogy az első előadás táblás, a második pedig projektoros legyen, a harmadik szabadon választható volt az előadásmód szempontjából. Én magam is tartottam két mintaelőadást, egy táblásat és egy projektorost. Valójában én leginkább fogadóórákon segítettem a diákokat a cikkek feldolgozásával kapcsolatban.

Minden előadás végén az utolsó 5 percben a diákoknak le kellett írniuk a véleményüket az előadásról, és tanácsokat kellett megfogalmazniuk az előadó számára a fejlődése érdekében. Érdekességként megemlítem, hogy ennek kétféle változata van aszerint, hogy a vélemény anonim vagy sem. Ha a vélemények anonimek, akkor jobb, ha a szemináriumvezető nem adja őket oda az előadónak, csak elolvasás után összefoglalja őket. Ennek az az oka, hogy az anonim vélemények gyakran kegyetlenek tudnak lenni. A nem anonim véleményekkel viszont pont az ellenkezője a probléma, a legtöbb diák annyira konfliktuskerülő magatartást vesz fel, hogy akkor sem mondja meg, hogy az előadás pocsék volt, ha egyébként 2 perc után elvesztette a fonalat az előadó felkészületlensége miatt. Ilyenkor gyakran túl udvarias vélemények születnek, amelyekből nem tanul semmit az előadó. Szerencsére ennek a problémának a kezelésére van egy egyszerű trükk: meg kell kérni az előadót, hogy a végén tegyen fel egy vagy két kvízkérdést az előadásából. Általában olyan egyszerű kérdésről van szó, amelyet ha nem válaszol meg valaki, akkor okkal feltételezhető, hogy semmit nem értett az előadásból. Ilyenkor fel kell hívni az előadó figyelmét rá, hogy az adott diák véleményét nem feltétlenül kell elfogadnia. Természetesen az is egy visszajelzés, ha csak nagyon kevesen tudták megválaszolni a kérdést: ez azt jelenti, hogy az előadás teljesen követhetetlen volt. Természetesen a kvízkérdésekre adott válaszokat bele lehet építeni az értékelésrendszerbe, de mint említettem, ezt óvatosan kell megtenni, nem biztos, hogy a diák hibája, ha nem tud megválaszolni egy kérdést.

A tárgynak fontos része még, hogy egy nagyjából 10 oldal hosszú (survey) cikket kell írniuk egy előre leegyeztetett kutatási témában. Ugyanezen témában kell megtartaniuk a harmadik előadásukat is. Hogy milyen témákat érdemes javasolni és hogyan lehet segíteni a diákokat cikkírásban, arra létrehoztak egy külön adatbázist, amelybe az oktató feltölti azokat a témákat, amelyeken ő dolgozott a diákjaival és azt is, hogy milyen észrevételei vannak. Javasolt még a tárgy korábbi oktatóival beszélni a félévkezdéskor. Az adatbázisba ötletszerűen beleolvastam, és tényleg voltak benne jópofa tanácsok, viszont maga az adatbázis akkorára nőtt az évek során, hogy lehetetlen volt akárcsak nagyjából átnézni. Egyébként a tárggyal kapcsolatos munkám nagy része nem is a fogadóórák, illetve az előadások beosztása, megszervezése volt, hanem éppen e cikkek különböző verzióinak elolvasása, javítása. Kicsit olyan munka ez, mint 15 miniprojekt témavezetése.

Kombinatorikus analízis. Neve ellenére ez egy bevezető kombinatorika tárgy. A tárgyat heti 3-szor 50 percben tanítottam. Ebben a tárgyban nagy hangsúlyt kap a leszámláláselmélet. Ennek megfelelően ezen a területen alaposan körbejártuk a generátorfüggvények különböző alkalmazásait, talán leginkább erre utal a tantárgy neve. Ennek ellenére gráfelmélet is van a tantárgyban, de jóval elemibb szinten, mint a leszámláláselmélet. Általában Bóna Miklós „A Walk through Combinatorics” könyvét szokták tankönyvnek használni. Főleg olyan diákok veszik fel ezt a tantárgyat, akiknek a matematika a második, kiegészítő szakjuk. Ennek megfelelően a színvonal nem igazán magas, legalábbis az MIT-s standardokhoz képest.

Algebrai kombinatorika ([4]). Már a tárgy leírásakor jelzik, hogy ez egy nehezebb tantárgy, és ennek megfelelően itt már nagyon komoly diákokkal lehet találkozni. Egyáltalán nem ritka, hogy néhány volt (nem feltétlenül amerikai) diákolimpikon is felveszi a tárgyat. A tantárgy kialakításánál nagyon nagy szabadságot kaptam, így tényleg az ízlésemnek megfelelő dolgokat taníthattam.

Ezt a szabadságot arra is használtam, hogy kísérletezzek egy picit, és kipróbáljak egy számomra új osztályozási rendszert. Valójában erre a rendszerre rá is voltam kényszerítve valamelyest a diákok közti különbségek miatt. Ebben a rendszerben a diákok egyénre szabottan kaptak feladatokat egy feladatlistából aszerint, hogy a korábbi házi feladatoknál hogyan szerepeltek. Akik jól teljesítettek, azoknak legközelebb nehezebb feladatokat választottam, akiknek problémáik voltak, azoknak könnyebbet. A diákok nagyon pozitívan fogadták ezt a rendszert.

A kurzusokon kívül még külön ki szeretném emelni az úgynevezett egyéni tanulmányi lehetőséget. Itt a diák vagy diákok pályázhatnak tanulmányi kreditre valamely terület megtanulásával ha egy oktató elvállalja témavezetésüket. Az oktatásnak ezzel a formájával úgy ismerkedtem meg, hogy egy nap felkeresett két nagyon jó diák, hogy ők szívesen feldolgoznák Szemerédi számtani sorozatokra vonatkozó tételét. Mire a munka elkezdődött, már 7 nagyon jó diákom volt, többségében volt diákolimpikonok. Szemináriumi formában feldolgoztuk Terence Tao és Van Vu „Additive combinatorics” könyvének 3 fejezetét [5]. Érdekességként megemlítem, hogy azon félelmem miatt, hogy esetleg lejáratom a rendszert, ha túl könnyen adom meg a kreditet, olyan magasra tettem a lécet, hogy a diákok lényegében két tantárgy követelményeit végezték el a rengeteg előadással, survey cikkel és számtalan probléma megoldásával. Ennek ellenére nekem nem volt sok munkám ezzel, mert a diákok tényleg nagyon jók voltak.

Bár nem tartozik szorosan az oktatáshoz, még megemlíteném, hogy az MIT rendkívül nagy hangsúlyt fektet arra, hogy a diákok kutassanak. Mindenféle elvárás nélkül is anyagilag támogatják a diákok kutatásait. Az MIT egyébként fenntart középiskolásoknak is egy kutatási programot, az úgynevezett PRIMES programot ([6]).

A fentiekből azt hiszem, világos, hogy az MIT az oktatás területén is innovatív módon gondolkozik. Rengeteg ötlettel és néha sok pénzzel próbálja keresni az oktatás minél hatékonyabb módjait . Számomra természetesen azok az ötletek az érdekesebbek, amelyekhez nem kell pénz. Szerencsére ilyenből is rengeteget láttam, ami azt mutatja, egy oktatási rendszer fejlesztésére akkor is van mód, ha az anyagi lehetőségek korlátozottak.

Összességében én nagyon-nagyon kellemesen éreztem magam. A diákok kifejezetten együttműködőek voltak, így az oktatás mellett még bőven maradt időm kutatni.

Köszönetnyilvánítás: Nagyon köszönöm Juhász Péternek és Lovrics Annának, hogy észrevételeikkel segítették ezen írás elkészítését.

Csikvári Péter
ELTE Matematikai Intézet, Számítógéptudományi Tanszék

Csikvári Péter 2001-ben és 2002-ben a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium diákjaként vett részt a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián a magyar csapatban. 2002 és 2007 között az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematikus hallgatója volt, majd ugyanitt PhD-t szerzett 2011-ben. 2010 és 2013 között a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet munkatársa, majd 2013 és 2016 között az MIT posztdoktora. Jelenleg az Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézetének adjunktusa.

Irodalomjegyzék

1
http://math.mit.edu/index.php
2
http://abel.harvard.edu/people
3
http://kskedlaya.org/putnam-archive
4
http://math.mit.edu/~csikvari/18.212.html
5
http://math.mit.edu/~csikvari/18.099.html
6
http://math.mit.edu/research/highschool/primes/index.php

matematikus-karrier diploma

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Shahn Majid 2017. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is ... egy kvantumcsoport?

Egy kvantumcsoport elsősorban is egy Hopf-algebra, egy gyönyörű struktúra, amelynek elegáns definiáló axiómáit már az 1940-es években leírták, sokkal korábban minthogy az 1980-as években az igazán fontos fizikából érkező példák megjelentek volna. Kezdjük tehát ezen elegáns axiómák ismertetésével, észbentartva azt, hogy a modern példák és a további struktúrák azok, amik igazán érdekessé és fontossá teszik ezt a témakört. Egy H Hopf-algebra tehát a következő axiómákat teljesíti:

1. H egy $(H,\cdot,1)$ k test feletti egységelemes algebra.
2. H egy (H,Δ,ϵ) k test feletti koegységelemes koalgebra. A $\Delta\colon H\to H\otimes H$ „koszorzás” és az $\epsilon\colon H\to k$ „koegység” leképezéseknek teljesíteni kell a $(\Delta\otimes\mathrm{Id})\Delta=(\mathrm{Id}\otimes\Delta)\Delta$ és $(\epsilon\otimes\mathrm{id})\Delta=(\mathrm{id}\otimes\epsilon)\Delta=\mathrm{id}$ azonosságokat.
3. Δ és ϵ algebra homomorfizmusok.
4. Létezik egy $S\colon H\to H$ „antipodális” leképezés, mely teljesíti a $\cdot(\mathrm{id}\otimes S)\Delta=\cdot(S\otimes\mathrm{id})\Delta=1\epsilon$ azonosságot.

Három nézőpontból érhetünk (egymástól függetlenül) a fenti axiómákhoz; ezek mindegyike a kvantumcsoport egy definícióját adja. Alább mindhármat tárgyaljuk, de helyszűke miatt nagyrészt az elsőre fogunk fókuszálni.

Az első megközelítés avval az észrevétellel kezdődik, hogy egy G véges csoport $k(G)$ függvényei vagy egy G algebrai csoport $k[G]$ koordináta-algebrája Hopf-algebrákat alkotnak. Valóban, egy véges G halmazra legyen $k(G)$ a G-n értelmezett k értékű függvények algebrája a pontonkénti műveletekkel ellátva. Azonosítsuk $k(G)\otimes k(G)$-t $k(G\times G)$-vel, vagyis a kétváltozós függvényekkel. Amikor G valójában egy csoport, egy $a\in k(G)$ elemre legyen

$$(\Delta a)(x,y)=a(xy),\quad (Sa)(x)=a(x^{-1}),\quad \epsilon(a)=a(e),$$

ahol e a G csoport egységeleme és $x,y\in G$ tetszőleges. A csoportstruktúra tehát a Δ,ϵ koalgebra-struktúrában és az S antipodális leképezésben van elkódolva. Hasonlóan, minden $G\subset k^n$ polinom-egyenletekkel megadott részhalmazra egy $k[G]$ „koordináta-algebrát” definiálhatunk, mint a k^n-en értelmezett polinom-függvények tere, moduló a G mentén eltűnő függvények ideálja. Amennyiben k algebrailag zárt, ilymódon egy pontos (funktoriális) megfeletetést kapunk ilyen polinomiális részhalmazok és nilpotens-mentes végesen generált kommutatív algebrák között. Amikor a G részhalmaz egy csoportot alkot és a csoportművelet polinomiális, a $G\times G\to G$ szorzás-leképezés e megfeleltetés mentén egy, épp az ellenkező irányba mutató Δ algebra homomorfizmust ad. Hasonló módon kaphatók a Hopf-algebra struktúra további elemei. Íme két példa: Az „affin egyenes” a $k[x]$ koordináta-algebrával (egyváltozós polinomokkal) adható meg, ahol a $\Delta x=x\otimes 1+1\otimes x$ additív koszorzat a k-beli összeadásnak felel meg. Az olvasóra hagyjuk a struktúra további részeinek definícióját, és így annak megmutatását, hogy minden k testre létezik Hopf-algebra. A „kör” hasonló módon írható le, véve a $k[t,t^{-1}]$ koordináta-algebrát (vagyis t-beli és t^{-1}-beli polinomokat, amelyekre a $tt^{-1}=t^{-1}t=1$ relációk teljesülnek), ellátva a $\Delta t=t\otimes t$ multiplikatív koszorzással, ami a k^*-beli szorzásnak felel meg. A további részleteket és az ellenőrzést ismét az olvasóra bízzuk. A legismertebb komplex Lie-algebrák általában polinom-egyenletekkel definiáltak, amelyekhez természetesen tartozik a $\mathbb{C}[G]$ algebra, illetve definiálhatók általános k test felett a megfelelő hasonló egyenletekkel és a $k[G]$ algebrával. A $\mathbb{C}$ feletti esetben egy „valós forma” egy további struktúrát, egy kompatibilis, komplex lineáris involúciót jelent, amellyel a koordináta algebra egy $*$-algebrává válik. Ezekkel a jelölésekkel a fenti két példa $\mathbb{C}[\mathbb{R}]$ és $\mathbb{C}[S^1]$ lesz, és $x^*=x$ illetve $t^*=t^{-1}$ lesz a valós forma.

Egy általános H Hopf-algebrára is megvannak a Δ,ϵ,S struktúrák, de általában nem tesszük fel, hogy — mint a fenti példákban — H algebrája kommutatív. Ez épp a nemkommutatív geometria vagy „kvantálás” nézőpontja egy kommutatív koordináta-algebra vagy függvényalgebra nemkommutatív deformálására a matematikusok (de nem a fizikusok) értelmezésében. A csoportelmélet, illetve a Lie-csoportok elméletének nagy része erre a szintre emelhető; például amennyiben az

$$\int\colon H\to k$$

eltolás-invariáns integrálás (ami bizonyos értelemben Δ-t is használja) létezik, akkor átskálázás erejéig egyértelmű, és valójában a szép esetekben létezik is. Hasonlóan, az $(\oplus_n\Omega^n,d)$ komplex differenciálformák minden H algebra felett értelmezhetőek. Az egy fokú Ω_1 1-formák tere egy $H-H$ bimodulus, amelyen egy $\mathrm{d}\colon H\to\Omega^1$ operátor is adott, ami eleget tesz a $\mathrm{d}(ab)=(\mathrm{d}\,a)b+a(\mathrm{d}\,b)$ $(a,b\in H)$ Leibniz-szabálynak és $\Omega^1=H\,\mathrm{d}\,H$. Ez kicsit gyengébb mint a szokásos differenciálgeometriában, még akkor is, amikor H kommutatív, mivel nem követeljük meg, hogy az 1-formák kommutáljanak H elemeivel. Amikor H egy Hopf-algebra, megkövetelhető az is, hogy Ω^1 eltolás-invariáns legyen, ismét egy a Δ-t is használó értelemben. Ebben az értelemben egy „kvantumcsoport” nem egyszerűen egy Hopf-algebra, hanem egy további, a Lie-csoportokhoz hasonló struktúrája is van. E mélyebb elmélet néhány tulajdonsága már az egyenes és a kör példáján is látható, bár ezek a példák kommutatívak mint algebrák. Az egyszerű (tehát valódi hányados nélküli) eltolás-invariáns (Ω^1,d) struktúrák például osztályozhatók. $\mathbb{C}[x]$ esetén egy $\lambda\in\mathbb{C}$ paraméterrel jellemezhetők, és a

$$\mathrm{d}\,a(x)=\frac{a(x+\lambda)-a(x)}{\lambda}\,\mathrm{d}\,x,\quad \mathrm{d}\,xa(x)=a(x+\lambda)\,\mathrm{d}\,x$$

véges differencia alakra hozhatók minden $a\in\mathbb{C}[x]$-re. Csak $\lambda=0$ esetén fog $\mathrm{d}\,x$ a függvényekkel kommutálni, tehát csak ekkor látjuk a megszokott geometriát. $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ esetén az eltolás-invariáns (Ω^1,d) struktúrákat egy $q\in\mathbb{C}^*$ érték klasszifikál, és ekkor

$$\mathrm{d}\,a(t)=\frac{a(t)-a(qt)}{(1-q)t}\,\mathrm{d}\,t,\quad \mathrm{d}\,ta(t)=a(qt)\,\mathrm{d}\,t$$

minden $a\in\mathbb{C}[t,t^{-1}]$-re. Ez a két példa valójában bemutatja a ma ismert kvantumcsoportok két fő típusát. A legnevezetesebb példa a $C_q(SL_2)$ „q-deformált” kvantumcsoport, melynek a,b,c,d generátoraira a relációk és a koszorzat a következő módon adható meg:

$$ba=qab,\ bc=cb,\ ca=qac,\ dc=qcd,\ db=qbd,\ da=ad+(q-q^{-1})bc,\ ad-q^{-1}bc=1,$$

$$\Delta\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

ahol mátrix-szorzást alkalmazunk (vagyis például $\Delta a=a\otimes a+b\otimes c$, stb.). Hasonlóan adhatók meg a $\mathbb{C}_q[G]$ változatok minden G Lie-csoportra, illetve komplexifikáltjaikra. Másfajta „λ-deformációra” ad példát $\mathbb{C}_\lambda[\mathcal{R}^{1,3}]$, amit a t,x_i ($i=1,2,3$) elemek által generált algebraként definiálunk; a relációk $[x_i,t]=\text{ß}\lambda x_i$; és az additív koszorzat úgy adható meg, mint $\mathbb{C}[x]$ esetében. Ez valójában egy feloldható Lie-algebra burkoló algebrája (lásd később). A NASA GLAST műhold mérései alapján azt is tesztelni tudjuk majd esetleg, hogy a mi téridőnk ilyen-e, $\lambda\approx 10^{-44}$ szekundum választással, ahol ez a hatás a kvantumgravitációból jönne. További nemtriviális példákat adnak a „bikeresztszorzat” kvantumcsoportok, amelyeket később fogunk érinteni.

A kvantumcsoportok definíciójának második megközelítése azon az észrevételen alapul, hogy egy tetszőleges csoport kG csoportalgebrája, és egy tetszőleges Lie-algebra $U(\mathfrak{g})$ burkoló algebrája Hopf-algebrákat alkotnak, ez esetben szimmetrikus koszorzattal (vagyis koalgebrájuk „kokommutatív”). Egy G csoport k feletti csoportalgebrája egyszerűen a G elemei mint bázis által definiált vektortér, és a szorzat a báziselemeken a G-beli szorzat, lineárisan kiterjesztve. Továbbá

$$\Delta x=x\otimes x,\quad \epsilon x=1,\quad Sx=x^{-1}$$

minden $x\in G$-re, ismét lineárisan kiterjesztve. Hasonlóan, legyen $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ egy Lie-algebra a $[\cdot,\cdot]$ Lie-zárójellel ellátva. Az $U(\mathfrak{g})$ egy egyszerű (de nem túlzottan elegáns) definíciója a következő: vegyük $\mathfrak{g}$ egy bázisát és legyen $U(\mathfrak{g})$ az a szabad asszociatív algebra, amelyet ezek az elemek mint generátorok adnak, és vegyük ehhez a $vw-wv=[v,w]$ relációkat minden v,w báziselemre. Mindez lineárisan kiterjed, így ez az egyenlet minden $v,w\in\mathfrak{g}$ elemre teljesül. A koszorzás ismét az additív koszorzás: $\Delta v=v\otimes 1+1\otimes v$ a generátorokon. Ezekben a példákban a kG vagy az $U(\mathfrak{g})$ algebra egy hatása a G csoport vagy a $\mathfrak{g}$ Lie-algebra egy lineáris hatásával egyenértékű, és Δ azt kódolja el, hogy a hatások hogyan terjednek ki a tenzorszorzatokra; hasonlóan ahhoz, ahogy egy H Hopf-algebrát tekinthetünk úgy, mint egy „általánosított szimmetriát”, ahol a $h\in H$ elem Δh-val hat a tenzorszorzaton. Erre szükségünk van például akkor, amikor meg akarjuk határozni, hogy egy másik algebra kovariáns-e H-ra nézve.

A leghíresebb példa pedig $U_q(sl_2)$, amelyet az e,g,q^h,q^{-h} generátorokkal adhatunk meg, és amelyekre a következő relációk teljesülnek:

$$q^heq^{-h}=q^2e,\ q^hfq^{-h}=q^{-2}f,\ [e,f]=\frac{q^h-q^{-h}}{q-q^{-1}},$$

$$\Delta e=e\otimes q^h+1\otimes e,\ \Delta f=f\otimes 1+q^{-h}\otimes f,\ \Delta q^h=q^h\otimes q^h.$$

Megköveteljük továbbá, hogy $q^2\neq 1$. $U_q(\mathfrak{g})$ pedig tetszőleges $\mathfrak{g}$ esetén egy szimmetrizálható Cartan-mátrixszal definiálható. Ezek a kvantumcsoportok nagyon gazdag algebrai struktúrával rendelkeznek, amelyek csomó- és 3-sokaság-invariánsokhoz vezetnek. Az egyik legmélyebb eredmény a Lusztig–Kashiwara kanonikus bázis létezése, amely a legmagasabb súlyú modulusoknak indukálja egy bázisát; ez az eredmény még a $q\to 1$ klasszikus esetben is nagyon fontos.

A harmadik nézőpont szerint Hopf-algebrák az Abel-csoportok utáni legegyszerűbb olyan kategóriát alkotják, amelyben van Fourier-transzformált. E nézőpont adja az önduális formákhoz tartozó „bikeresztszorzat” kvantumcsoportok meglehetősen nagy osztályát. Ezek egyszerre „koordináta-” és „szimmetria-” algebrák, és szoros kapcsolatban állnak a kvantummechanikával. Ezekre egy példa $\mathbb{C}[\mathbb{R}^3\rtimes\mathbb{R}]_\lambda\bowtie U(so_{1,3})$ mely a $\mathbb{C}_\lambda[\mathbb{R}^{1,3}]$ fent tárgyalt nemkommutatív tér–idő algebra Poincaré- kvantumcsoportja. Ez esetben a speciális relativitáselmélet ugyanúgy alkalmazható, de mint kvantumcsoport szimmetria. Ez a kvantumcsoport úgy is interpretálható, mint egy feketelyuk-szerű tulajdonságokkal rendelkező görbült térben mozgó részecske kvantálása.

Shahn Majid

További olvasmány:

S. Majid, *A Quantum Groups Primer*, L. M. S. Lect. Notes **292**, 2002.

Shahn Majid a Queen Mary (University of London) matematika professzora; e-mail címe s.majid@qmul.ac.uk. A cikk eredetileg az American Mathematical Society *Notices* folyóiratának 2006-os számában jelent meg a *What is ...?* rovatban. A fordítást *Stipsicz András* készítette.

Sahn Majid, WHAT IS...a Quantum Group? *Notices Amer. Math. Soc.* Vol. 53 Num. 1 (January, 2006) 30-31 ©2006 American Mathematical Society

☐ Mi is...?

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

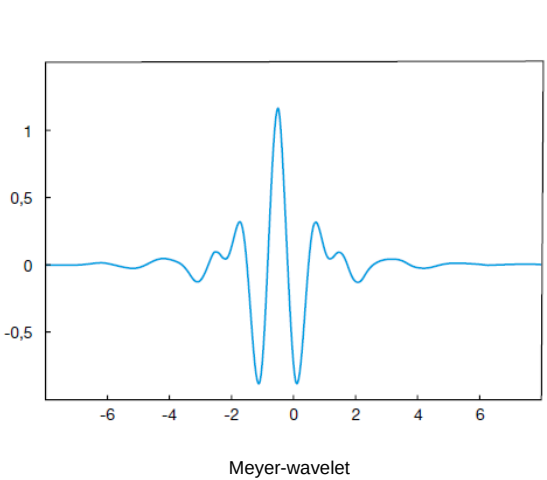
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

2017. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Waveletek – A 2017. évi Abel-díjjal kitüntetett Yves Meyer munkásságáról

A 2017. évi Abel-díjat *Yves Meyer* francia matematikus kapta *a waveletek matematikai elméletének kidolgozásában játszott úttörő munkásságáért*. Szeizmikus adatok elemzésére és képek tömörítésére használt gyakorlati eljárásokból kiindulva az 1980-as évek közepétől vezetésével a jelfeldolgozás egy új, hatékony módszerének rakták le a matematikai alapjait. A Fourier-analízisben korábban alkalmazott trigonometrikus felbontás helyett rövid tartójú hullám, ún. *wavelet* (franciául: *ondelette*) összetevőket használtak. A szakirodalomban a legtöbb nyelven átvették az angol elnevezést, hazánkban is ez terjedt el. (Egyik tanítványom a *hullámka* elnevezés használatát javasolta.) Meyer nevéhez fűződik az első sima, ortonormált wavelet-bázis konstrukciója, valamint a jelek felbontására használt *multirezolúciós analízis* (MR) bevezetése. A waveletek elmélete rövid időn belül igen népszerű lett az adatátvitellel és a jel- és képfeldolgozással foglalkozó szakemberek körében. Az elmúlt három évtizedben a wavelet-analízis számos változatát alkalmazták, többek között a harmonikus analízis, a jeltömörítés, a hibaredukció és a képfeldolgozás problémáinak megoldására. Az eljárást felhasználták a Hubble űrteleszkóp felvételeinek dekonvolúciójára, valamint a napjainkban észlelt gravitációs hullámok detektálásában. Yves Meyernek ezen túlmenően alapvető eredményei vannak a számelmélet, a harmonikus analízis, a parciális differenciálegyenletek, speciálisan a Navier-Stokes-egyenletek, valamint a szinguláris integrálegyenletek elméletében.

Yves Meyer (Abel-díj 2017)



Meyer-wavelet

Ebben a dolgozatban ismertetjük a témakör előzményeit, vázoljuk matematikai hátterét. Külön figyelmet szentelünk a magyar matematikusok eredményeire, amelyek jelentősége az irányításelmélet, a jelfeldolgázás és a waveletek területén új megvilágításba kerültek. Például a trigonometrikus Fourier-sorokra vonatkozó *Fejér-féle szummáció* a háromszög ablaknak megfelelő jelszűrési eljárásként interpretálható. Számos, *Riesz Frigyes* által bevezetett fogalom és nevéhez fűződő eredmény alapvető szerepet játszik ezekben az alkalmazásokban. Ezek közül a matematikusok körében jól ismert klasszikus tételein túlmenően itt most csak a Hardy-terek faktorizációjára, a róla elnevezett bázis fogalmára, valamint a nemnegatív trigonometrikus polinomok előállítására vonatkozó *Fejér-Riesz-féle tételre* utalunk, amelyek a wavelet konstrukciók alapvető eszközeivé váltak.

Haar Alfréd (1855 - 1933)

A *Haar Alfrédről* elnevezett mérték, amely az absztrakt harmonikus analízis egyik legfontosabb eszköze, a jelfeldolgozás transzformációinak leírásában is nélkülözhetetlennek bizonyult. A *róla elnevezett rendszer*, amelyet 1909-ben egy elméleti probléma tisztázására vezetett be, napjainkban mint a legegyszerűbb wavelet vált igazán ismertté. Míg az 1960-as években, egyfajta magyar specialitásként, kizárólag csak a hazai egyetemi tankönyvek tesznek említést a Haar-rendszerről [13], addig manapság szinte minden jelfeldolgozással kapcsolatos tankönyv több fejezetet szentel a témának.

POLYGON
KÖNYVTÁR
Szőkefalvi - Nagy Béla
VALÓS FÜGGVÉNYEK
ÉS FÜGGVÉNYSOROK

A Haar-függvények grafikonja [13]

A Haar-rendszerből kiinduló wavelet-transzformáció mellett a *Gábor Dénes* által 1945-ben vizsgált (ablakos) Fourier-transzformáció (azóta Gábor-transzformációnak nevezett eljárás) a beszéd és zenei hangok elemzésének hatékony eszköze lett. Ez a transzformáció a waveletek egy másik típusának mintájául szolgál. Az utóbbi két évtizedben a wavelet-transzformációk számos további változatát vezették be és alkalmazták a matematika, a természet- és műszaki tudományok különböző területein. Ezek a transzformációk, a klasszikus Fourier-transzformációhoz hasonlóan, egységes elvek szerint származtathatók, felhasználva az absztrakt harmonikus analízis eszköztárát. Ezen az úton, kiindulva az affin csoport egy reprezentációjából eljuthatunk az (affin) *wavelet-transzformációhoz*, a Heisenberg-féle csoport egy reprezentációjából a *Gábor-transzformációhoz*. A waveletek 2000 óta az ELTE alkalmazott matematikus és informatikus szakán speciális szakirányok tanterveinek, PhD programok és kutatások részét képezik [11], [16]. Kiindulva a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometria egybevágósági transzformációiból, a fentiek mintájára bevezettük a *hiperbolikus wavelet transzformációkat* (HWT-t) [12]. A szóban forgó egybevágósági transzformációk a *Blaschke-függvényekkel* írhatók le. Ezek nemcsak a komplex függvénytanban, hanem az irányításelméletben is kitüntetett szerepet játszanak. Ennek alapján azt reméljük, hogy a HWT a jelfeldolgozásnak és a rendszerelméleti alkalmazásoknak adekvát eszközévé válhat. Az MTA SZTAKI és az ELTE Numerikus Analízis Tanszék együttműködésében született eredmények azt mutatják, hogy ezek a transzformációk hatékonyan alkalmazhatók az irányításelméletben [1] és EKG jelek feldolgozására és tömörítésére [4].

Történeti áttekintés

A Fourier-sorok elméletének kialakulása szorosan összefügg fontos gyakorlati problémákkal. Már maga *Fourier* is egy fizikából származó feladat, a hővezetés matematikai leírására dolgozta ki módszerét. A matematika számos fejezetének létrejötte és fejlődése szorosan összefügg azokkal a kérdésekkel, amelyek a Fourier-sorok alkalmazásával kapcsolatban felvetődtek. Ezek tisztázása, *Dirichlet* munkássága nyomán a ma is használt függvényfogalom kialakulásához vezettek, *Cantort* a Fourier-sorok konvergencia halmazaival kapcsolatos vizsgálatai inspirálták a halmazelmélet megalapozására. *Riemann* a Fourier-együtthatók értelmezéséhez kiterjesztette az integrál fogalmát, *Lebesgue* a róla elnevezett integrál bevezetésével a Fourier-sorok elméletét gazdagította egy ma is nélkülözhetetlen eszközzel, amely azután a valószínűségelmélet matematikai megalapozásában is fontos szerepet játszott.

Az első, mai szemmel nézve is korrekt konvergenciatétel *Dirichlet*-től származik, aki 1829-ben bebizonyította, hogy a szakaszonként monoton függvények Fourier-sora konvergens. Már 1876-ban *Du Bois Reymond* munkássága révén ismert volt, hogy a Fourier-sor 2π-szerint periodikus, *folytonos függvény esetén is lehet divergens*. A Fourier-sorok konvergenciájával kapcsolatos problémák tisztázása kapcsán új fogalmakat és módszereket vezettek be, több új fejezettel gazdagítva a matematikát. Többek között a hagyományos, pontonkénti konvergencia helyett az integrálközépben való konvergenciát, a részletösszegek helyett azok számtani közepeinek konvergenciáját véve alapul számos problémára sikerült választ adni. Ezekben *Riesz Frigyes* és *Fejér Lipót* munkássága úttörő jellegű volt [13].

A Haar-rendszer

Már a múlt század elején a trigonometrikus rendszer mellett több, akkor kissé egzotikusnak tűnő függvényrendszert vezettek be, amelyek elméleti és gyakorlati jelentősége jóval később derült ki. Ezek között is a *Haar Alfréd* által definiált ortonormált rendszer játszik kitüntetett szerepet. Haar a róla elnevezett rendszert doktori értekezésében vezette be 1909-ben, választ adva *Hilbert* egy Fourier-sorok divergenciájával kapcsolatos problémájára. A Du Bois Reymond-féle ellenpéldával összefüggésben Hilbert felvetette, hogy létezik-e olyan ortonormált rendszer, amely szerint vett Fourier-sorfejtés minden folytonos függvényre mindenütt konvergens? A kérdésre Haar pozitív választ adott, bebizonyítva, hogy az azóta róla elnevezett ($h_n, n \in \mathbb{N}$) *ortonormált rendszer szerinti Fourier-sor minden folytonos függvény esetén egyenletesen konvergens*. Az első pillanatra mesterkéltnek tűnő rendszer lépcsős függvényekből áll, amely a $[0,\infty)$ intervallumon értelmezett h alapfüggvényből egyszerűen származtatható, ahol $h(x)=1$ ($x\in[0,1/2)$), $h(x)=-1$ ($x\in[1/2,1)$), $h(x)=0$ ($x\in[1,\infty)$). Nevezetesen *transzlációt és dilatációt* alkalmazva kapjuk az $x\in[0,1)$ intervallumon értelemzett $h_0(x):=1$, $h_m(x):=2^{n/2}h(2^nx-k)$ ($m:=2^n+k,\ 0\le k<2^n,\ n\in\mathbb{N}$) *Haar-rendszert*. A h_m függvény tartója a 2^{-n} hosszúságú $I(k,n):=[k/2^n,(k+1)/2^n)$ diadikus intervallum. Ebből következik, hogy a f függvény $\langle f,h_m\rangle := \int_0^1 f(t)h_m(t)\,\mathrm{d}t$ Haar-Fourier-együtthatói, ellentétben a trigonometrikus Fourier-együtthatókkal, az f függvénynek csak az $I(k,n)$ intervallumon felvett értékeitől függnek. A Haar-rendszer ortonormált az $L^2:=L^2[0,1)$ Hilbert-tér szokásos skaláris szorzatára nézve és az $f\in L^1:=L^1[0,1)$ függvény Haar-Fourier-sorának $S_mf:=\sum_{k=0}^{m-1}\langle f,h_m\rangle h_m$ részletösszegei előállíthatók az f függvény diadikus intervallumokra vett *integrálközepeivel*, nevezetesen az $x\in I(k,n)$ pontokban $S_{2^n}f(x)=2^n\int_{I(k,n)}f(t)\,\mathrm{d}t$. Innen következik, hogy a Haar-rendszer teljes az L^1 térben, bármely $f\in L^1$ függvény Haar-Fourier-sora L^1-normában és m.m. konvergál az f-hez, továbbá, választ adva Hilbert kérdésére, *folytonos függvény esetén a konvergencia egyenletes*. A Haar-rendszer ezekben a tulajdonságaiban alapvetően különbözik a trigonometrikus rendszertől.

Valószínűségelméleti terminológiát használva S_{2^n} a 2^{-n} hosszúságú diadikus intervallumok által generált σ-algebrára vonatkozó feltételes várható érték, továbbá az ($S_{2^n}f,\ n\in\mathbb{N}$) részletösszegek (reguláris, diadikus) *martingált alkotnak*.

A Haar-rendszernek ezek a tulajdonságai szolgáltak a *bázisokkal összefüggő funkcionálanalízisbeli, a martingálelméleti és a waveletekkel kapcsolatos* vizsgálatok kiinduló pontjául.

Egyszerűen igazolható, hogy a Haar-rendszer nemcsak az L^2 Hilbert-térben, hanem az L^p ($1\le p<\infty$) Banach-terekben is bázist alkot. A Haar-sorok feltétlen (bármely átrendezés melletti) konvergenciájának vizsgálatában fontos szerepet játszik az f függvény *Paley* által bevezetett $Qf:=\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}|\langle f,h_k\rangle h_k|^2\right)^{1/2}$ kvadratikus variációja. Paley bebizonyította, hogy $1<p<\infty$ esetén az f és a Qf L^p-normái ekvivalensek. Ennek alapján *Marcinkiewicz* megmutatta, hogy a Haar-rendszer $1<p<\infty$ esetén *feltétlen* (azaz bármely átrendezés mellett is) *bázis* az L^p térben. Ismeretes, hogy a Parseval-formula alapján az L^2-tér jellemezhető bármely $(\phi_n\in L^2, n\in\mathbb{N})$ teljes ortonormált rendszer szerint vett Fourier-együtthatókkal: $f\in L^2$ akkor és csak akkor, ha $\sum_{n\in\mathbb{N}}|\langle f,\phi_n\rangle|^2<\infty$. Amíg L^p terekre $p\neq2$ esetén ilyen típusú jellemzés általában nem adható, addig a Haar-együtthatókból a Qf-ből kiindulva szerkeszthetünk az L^p-normával ekvivalens normát. A Haar-rendszernek ezek a tulajdonságai az 1960-as években, hosszú szünet után, ismét ráirányították a figyelmet a rendszerre. Orosz matematikusok munkássága révén kiderült, hogy a Haar-rendszer eredményesen alkalmazható a funkcionálanalízis fontos problémáinak megoldásában és kitüntetett szerepet játszik a bázisok között. Például többek között kiderült, hogy Banach-terek egy tág osztályára igaz a következő állítás: *ha a szóban forgó Banach-térben a Haar-rendszer nem feltétlen bázis, akkor ebben a térben feltétlen bázis nem létezik*. Speciálisan az L^1 térben nincs feltétlen bázis. Ezekről az eredményekről nyújt részletes áttekintést *Ciesielski* [2] és *Uljanov* [14] 1985-ben a Haar emlékkonferencián tartott előadása és a [9] monográfia.

A Faber-Schauder-, a Franklin- és a Ciesielski-féle rendszer

Mivel a Haar-függvények nem folytonosak, azért ezek nem alkotnak bázist a $C[0,1]$ függvénytérben. *Faber* 1910-ben a Haar-függvények integrálját véve bevezetett egy folytonos függvényekből álló rendszert, amely normáló faktortól eltekintve a h_m-hez hasonló alakban adható meg: Kiindulva a $\varphi(x):=\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$ „háztető" függvényből a szóban forgó rendszer dilatációval és transzlációval származtatható: $\varphi_m(x):=\varphi(2^nx-k)$ ($m=2^n+k,\ 0\le k<2^n,\ n,k\in\mathbb{N},\ x\in[0,\infty)$). Faber megmutatta, hogy ez a rendszer bázis a $[0,1]$ végpontjaiban eltűnő folytonos függvények $C_0[0,1]$ terén. Ezekhez hozzávéve egy lineáris függvényt a $C[0,1]$ tér egy bázisát kapjuk. Megjegyezzük, hogy ezt a bázist később (1927-ben) *Schauder* újra felfedezte és azóta ezt a rendszert az irodalomban Faber-Schauder-féle (FS) rendszernek nevezzük. Ez a rendszer nyilván nem ortogonális az L^2-tér skaláris szorzatára nézve. A $[\varphi_n,h_m]:=\int_0^1\varphi_n\,\mathrm{d}h_m=0$ ($m\neq n, m,n\in\mathbb{N}$) reláció úgy interpretálható, hogy a folytonos függvényekből álló FS-rendszer és a korlátos változású függvényekből álló Haar-rendszer biortogonális. Megjegyezzük, hogy az $f\in C_0[0,1]$ függvény FS-rendszer szerinti biortogonális sorfejtésének részletösszegei interpolálnak a diadikusan racionális pontokban: $(S^{FS}_{2^n}f)(x):=\sum_{k=0}^{2^n-1}[f,h_k]\varphi_k(x)=f(x)$ $(x=j2^{-n},$ $0\le j\le2^n,\ n\in\mathbb{N})$, továbbá folytonos függvények FS-rendszer szerini biortogonális sorfejtése egyenletesen tart az f-hez.

Franklin amerikai matematikus 1928-ban az FS-rendszerből kiindulva a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással bevezetett egy (szakaszonként lineáris, más szóval elsőfokú spline függvényekből álló) ortonormált rendszert, amelyről megmutatta, hogy nemcsak az L^2 térben, hanem $C[0,1]$-ben is bázis. A Franklin-rendszer nem írható le a Haar-rendszerhez hasonló egyszerű képlettel. Ugyanakkor *Ciesielski* lengyel matematikus 1963-ban jól használható becslést adott a Franklin-rendszer függvényeire és Dirichlet-féle magfüggvényeire. Többek között bebizonyította, hogy az $f_m(x)$ ($m=2^n+k,\ 0\le x\le1,\ 0\le k<2^n$) Franklin-függvények a Haar-függvényhez hasonló függvényekkel becsülhetők: $|f_m(x)|\le2^{n/2}f(2^nx-k)$, ahol $f(u)=C\exp(-\gamma|u|)$ és C,γ abszolút pozitív konstansok. Ezeket az eredményeket általánosítva az FS rendszer helyett m-edfokú spline függvényekből kiindulva Ciesielski az 1970-es években jó approximációs tulajdonságokkal rendelkező, C^r*-beli ortogonális bázisoknak egy új osztályát vezette be*. Ezekkel több, Banach 1932-ben megjelent könyvében említett fontos térben sikerült bázist szerkeszteni. Felhasználva ezeket az eredményeket *Bockarjev* orosz matematikus bebizonyította a Paley-féle egyenlőtlenség megfelelőjét a Franklin-rendszerre, következésképpen kiderült, hogy $1<p<\infty$ esetén a Franklin-rendszer is feltétlen bázist alkot az L^p-terekben. Ugyanitt a Franklin-rendszer analitikus kiterjesztésével *bázist konstruált a diszkalgebrán*, megoldva Banach egy hosszú ideig nyitott problémáját. *Z. Ciesielski, Simon Péter* és *P. Sjölin* megmutatták, hogy azonos együtthatókat véve a Haar- és Franklin-sorok L^p-normában ekvikonvergensek, ha $1<p<\infty$, más szóval a szóban forgó rendszerek *ekvivalens bázisok* az L^p ($1<p<\infty$) terekben. Ez volt az első nem triviális példa ekvivalens bázisokra. Ezekről további információt nyújt a [9] könyv 5. fejezete.

Waveletek

A jel- és képfeldolgozás gyakorlatában a jelek matematikai modellezése, analízise, kódolása, tömörítése, átvitele és tárolása, valamint szintézise és rekonstrukciója kapcsán számos új probléma vetődött fel, amelyek hagyományos eszközökkel nem kezelhetők. A klasszikus Fourier-transzformációt széleskörűen alkalmazták stacionárius jelek reprezentálására. Az elmúlt évek tapasztalatai azt mutatják, hogy tranziens jelek esetén a wavelet-transzformációk bizonyultak hatékonyabbnak.

A Ciesielski-féle rendszereket és becsléseket felhasználva számos, bázisokkal kapcsolatos, fontos elméleti problémát sikerült megoldani. Az ezek szerinti sorfejtések, jó approximációs tulajdonságai miatt, alkalmasak sztohasztikus folyamatok leírására, jelek reprezentálására és hatékony tömörítésére. Ennek ellenére, talán explicit előállítás hiányában, ezek nem terjedtek el az alkalmazók körében.

Az 1980-as évektől egy másik irányba indultak el a kutatások a Haar-rendszerhez hasonlóan származtatható, *sima függvényekből álló* $\psi_{n,k}(x)=2^{n/2}\psi(2^nx-k)$ ($x\in\mathbb{R},\ n,k\in\mathbb{Z}$) alakú ortonormált rendszerek konstrukcióját tűzve ki célul az $L^2(\mathbb{R})$ térben. Az ilyen alakú függvényeket *waveletnek*, a rendszert generáló ψ függvényt *anya-waveletnek* nevezzük. Az első, folytonos (szakaszonként lineáris) függvényekből álló ortonormált wavelet-rendszert *Strömberg* konstruálta 1980-ban. Meyer 1985-ben C^∞-beli függvényekből álló ortonormált wavelet-bázisoknak egy osztályát adta meg, *explicit módon előállítva az anya-waveletet* (kompakt tartójú) *Fourier-transzformáltját* [3]. A bevezetőben bemutatott ábra egy Meyer-wavelet grafikonját szemlélteti.

Waveletek szerkesztése, a Haar-rendszert kivéve, nehéz feladatnak bizonyult. A konstrukciókban, a Meyer-féle wavelethez hasonlóan, a ψ anya-wavelet helyett annak $\widehat{\psi}$ Fourier-transzformációjából célszerű kiindulni. A továbbiakban az $L^1(\mathbb{R})$-beli függvény Fourier-transzformáltját, az $\epsilon_x(t):=\exp(2\pi ixt)$ ($x,t\in\mathbb{R}$) függvényeket alapul véve, $\widehat{g}(x):=\int_{\mathbb{R}}g(t)\overline{\epsilon}_x(t)\,\mathrm{d}t$ szerint értelmezzük és terjesztjük ki az $L^2(\mathbb{R})$ térre. Annak ellenére, hogy maga a ψ általában nem adható meg explicit alakban, a wavelet Fourier-sorok jó konvergencia- és approximációs tulajdonságokkal rendelkeznek, a sorfejtés részletösszegeinek magfüggvényei jól becsülhetők és a wavelet Fourier-együtthatók hatékony algoritmussal számíthatók.

Különösen hasznosnak bizonyultak a *sima, kompakt tartójú waveletek*, amelyek *Ingrid Daubechies* úttörő munkásságanak köszönhetően nemcsak az elméletben, hanem a gyakorlati alkalmazásokban is központi szerepet játszanak [3]. Az említett két tulajdonság egymás ellen hat: minél rövidebb a wavelet tartója, annál kisebb a simaságát jellemző Hölder-kitevő. A Daubechies által bevezetett, az $N=2,3,\dots$ paramétertől függő $\psi^N\in C^{\alpha_N}$ wavelet tartójának hossza $2N-1$ és Hölder-folytonos: $|\psi^N(x_1)-\psi^N(x_2)|\le M|x_1-x_2|^{\alpha_N}$ ($\alpha_N\approx0{,}2075N$). A waveletek konstrukciójában fontos szerepet játszik a ψ anya-wavelettel szoros kapcsolatban álló *skálázási függvény* vagy *apa-wavelet*.

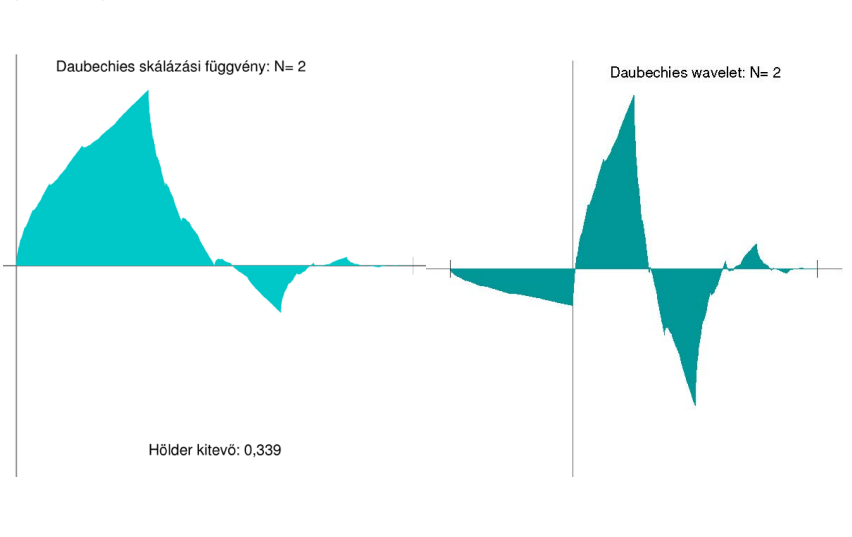
A skálázási függvény értelmezését és szerepét a Haar-rendszer példáján mutatjuk be. Ebben az esetben h az anya-wavelet és a $[0,1)$ intervallum $\chi=\chi_{[0,1)}$ karakterisztikus függvénye az apa-wavelet. Legyen $\chi_{n,k}(x):=\chi(2^nx-k)$ ($x\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}$) a χ által generált wavelet-sorozat és jelölje H_n a $\operatorname{span}\{\chi_{n,k}\colon k\in\mathbb{Z}\}$ által generált zárt alteret az $L^2(\mathbb{R})$ térben. Nyilvánvaló, hogy $H_n\subset H_{n+1}$ ($n\in\mathbb{Z}$) és $\cup_{n\in\mathbb{Z}}H_n$ mindenütt sűrű a $H:=L^2(\mathbb{R})$ térben. Ebből következik, hogy a $P_n\colon H\to H_n$ ortogonális projekciókra $P_nf\to f$ $(f\in H,\quad n\to\infty)$ a H-tér normájában, a $K_n:=H_{n+1}-H_n$ ($n\in\mathbb{Z}$) alterek egymásra ortogonálisak, továbbá a $h_{n,k}\in H_n$ ($k\in\mathbb{Z}$) Haar-rendszer egy ortonormált bázis ebben a térben, következésképpen a teljes $h_{n,k}$ ($n,k\in\mathbb{Z}$) Haar-rendszer a H tér egy ortonormált bázisa.

Ilyen típusú approximációs eljárást alkalmaztak jelek szűrésére (quadrature mirror filters) és képek tömörítésére (pyramid algorithms). Meyer ezeknek és az ehhez hasonló eljárásoknak tisztázta a matematikai hátterét, bevezetve a *multirezolúciós analízis* fogalmát. Jelölje τ_h az eltolás, δ_s a dilatáció operátorát az $\mathbb{R}$-téren értelmezett függvények körében: $(\tau_hf)(x)=f(x+h)$, $(\delta_sf)(x)=f(sx)$ ($x,h\in\mathbb{R},\ s>0$). A multirezolúció értelmezéséhez induljunk ki egy $\varphi\in X:=L^2(\mathbb{R})$ függvényből, amelynek $\varphi_k:=\tau_k\varphi$ ($k\in\mathbb{Z}$) eltoltjai *Riesz-bázist* alkotnak, más szóval létezik két konstans $0<m\le M<\infty$, hogy bármely $f=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k\varphi_k\in\operatorname{span}\{\varphi_k\colon k\in\mathbb{Z}\}$ elem $L^2(\mathbb{R})$ normájára $m(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|a_k|^2)^{1/2}\le\|f\|_2\le M(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|a_k|^2)^{1/2}$ teljesül. Megjegyezzük, innen a $m=M=1$ speciális estben következik, hogy a $(\tau_k\varphi,k\in\mathbb{Z})$ rendszer ortonormált. Az ilyen alakú Riesz-bázisok jellemezhetők a φ Fourier-transzformáltjával, nevezetesen a $(\varphi_k,k\in\mathbb{Z})$ rendszer akkor és csak akkor Riesz-bázis, ha $m^2\le E(|\widehat{\varphi}|^2)\le M^2$, ahol E a periodizáló operátort jelöli: $Eg:=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tau_kg$ ($g\in L^1(\mathbb{R})$). Ennek alapján szerkeszthetünk eltolás invariáns Riesz-bázisokat és ortonormált rendszereket. Mivel B-spline-ok Fourier-transzformáltja explicit alakban adható meg, azért ilyenekre a konstrukció egyszerűen elvégezhető.

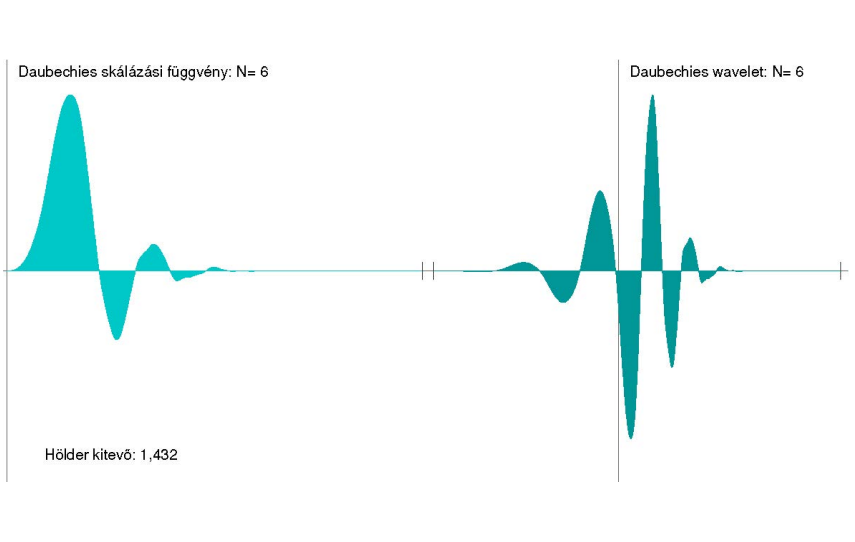
Az $X_n\subset X:=L^2(\mathbb{R})$ ($n\in\mathbb{Z}$) zárt altereknek egy *monoton növő* sorozatát *multirezolúciónak* nevezzük, ha i) uniójuk mindenütt sűrű X-ben, ii) metszetük a 0 függvényből álló triviális altér, iii) $\delta_2\colon X_n\to X_{n+1}$ bijekció, iv) az X_0 alteret egy $(\tau_k\varphi,k\in\mathbb{Z})$ alakú Riesz-bázis generálja.

A fenti értelmezéséből következik, hogy az X_0 teret generáló φ függvény meghatározza a multirezolúciót: X_n a $\operatorname{span}\{\varphi_{k,n}\colon k\in\mathbb{Z}\}$ tér lezárása. Az $X_n\subset X_{n+1}$ ($n\in\mathbb{Z}$) feltétel azzal ekvivalens, hogy $\delta_{1/2}\varphi\in X_0$. Innen következik, hogy kompakt tartójú φ esetén fennáll a $\varphi(x/2)=\sum_{j=0}^{2N-1}c_j\varphi(x-j)$ ($x\in\mathbb{R}$) ún. *skálázási egyenlet*. A c_j wavelet konstansok ismeretében az egyenlet alapján iterációs eljárással meghatározhatjuk a φ értékeit a diadikusan racionális pontokban [3]. Az alábbi ábrákon a skálázási függvények értékeit ilymódon számítottuk. A skálázási függvény (az apa-wavelet) ismeretében a ψ anya-wavelet $\psi(x/2)=\sum_{j=0}^{2N-1}(-1)^{j+1}c_j\varphi(x+2N-j)$ ($x\in\mathbb{R}$) alapján már meghatározható [3], [11], [15]. A Haar-rendszer esetén a skálázási egyenlet $\chi(x/2)=\chi(x)+\chi(x-1)$ és $h(x/2)=\chi(x)-\chi(x-1)$. Bármely B-spline függvényre fennáll a skálázási egyenlet és az együtthatók explicit alakban adhatók meg.

Az alábbi ábrákon $N=2,6$ esetén szemléltetjük a Daubechies-féle skálázási függvényt és anya-waveletet.



A Daubechies-féle φ skálázási függvény és ψ wavelet: $N=2$



A Daubechies-féle skálázási függvény és wavelet: $N=6$

A skálázási egyenletet célszerű a Fourier-transzformáltakra (a frekvencia tartományban) felírni és megoldani. Kompakt tartójú skálázási függvény esetén $\widehat{\varphi}(2t)=\alpha(t)\widehat{\varphi}(t)$ ($t\in\mathbb{R}$), ahol az $\alpha(t)=\sum_{k=0}^{2N-1}c_ke^{-2\pi ikt}$ trigonometrikus polinomot, a jelfeldolgozásban szokásos terminológiát használva, a *wavelet (aluláteresztő) szűrőjének nevezik*. Bebizonyítható, hogy ha φ MR-felbontást generál, akkor az 1-szerint periodikus α szűrőre $(*)$ $\alpha(0)=1$, $|\alpha(x)|^2+|\alpha(x+1/2)|^2=1$ ($x\in\mathbb{R}$) teljesül, továbbá $\widehat{\varphi}$ előállítható végtelen szorzatként: $\widehat{\varphi}=\prod_{k=1}^{\infty}\delta_{2^{-k}}\alpha$. Megfordítva, kiindulva egy 1-szerint periodikus α trigonometrikus polinomból, amely eleget tesz a $(*)$ feltételnek, a szóban forgó végtelen szorzat (kompakt intervallumokon egyenletesen) konvergál egy folytonos $A\in X$ függvényhez. Amennyiben ezen kívül még $E(|A|^2)=1$ teljesül, akkor a $\widehat{\varphi}=A$ alapján számított φ MR-felbontást generál. Ez utóbbi feltétel biztosítására több elégséges feltétel ismert. Daubechies a (*) egyenletnek olyan α trigonometrikus polinom megoldásait határozta meg, amelyekből az említett módon származtatott φ skálázási függvény kompakt tartójú és $\varphi\in C^\alpha$ [3]. Megjegyezzük, hogy a konstrukcióban fontos szerepet játszik a következő Fejér-Riesz-féle tétel: Ha az S páros trigonometrikus polinom nem-negatív, akkor van olyan P trigonometrikus polinom, amelyre $S(x)=|P(x)|^2$ ($x\in\mathbb{R}$).

Az utóbbi évtizedekben a waveletek számos változatát vezették be. Elsőként megemlítjük a waveletek egy folytonos paraméterektől függő osztályát, a $\psi_{a,b}(t):=a^{-1/2}\psi((t-b)/a)$ $(\psi\in X,\ a>0,b,t\in\mathbb{R})$ waveleteket és az ezekkel képzett $f\to(\mathcal{W}f)(a,b):=W(a,b):=\langle f,\psi_{a,b}\rangle$ $(f\in X)$ transzformációkat, amelyeket *Grossman és Morlet* a kvantummechanika koherens állapotainak leírására vezetett be az 1980-as években. Kiderült, hogy az általuk felfedezett $f(x)=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}W(a,b)\psi_{a,b}(x)\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}a/a$ ($x\in\mathbb{R}$) rekonstrukciós formula *Calderon* egy 20 évvel korábbi azonosságából következik. Ezek az eredmények késztették Meyert az ilyen típusú transzformációk szisztematikus vizsgálatára [5], [6].

A wavelet-transzformációk egy másik fontos osztályát, a *Gábor Dénes* által 1945-ben bevezetett (ablakos) Fourier-transzformációra utalva, *Gábor-transzformációknak* nevezik. Ebben az esetben az integráltranszformáció magfüggvénye egy $g\in X$ ablakfüggvényből *transzlációval és modulációval* képzett $g_{a,b}(x):=\epsilon_a(x)g(x-b)$ ($x,a,b\in\mathbb{R}$) függvénysereg, maga a transzformáció $f\to(\mathcal{G}f)(a,b):=\langle f,g_{a,b}\rangle$ ($f\in X$) alakú. A $\psi,g\in X$ függvényre tett megfelelő feltételek mellett mindkét esetben érvényesek a Fourier-transzformációra ismert, az energia-megmaradást kifejező, Plancherel-formula és a rekonstrukciót letővé tevő inverziós formula megfelelői.

Ezeknek a formuláknak az értelmezése, a Fourier-transzformálthoz hasonlóan, számos kérdést vet fel. *Weisz Ferenc* igen általános feltételek mellett, különböző konvergencia típusokat és szummációs eljárásokat alapul véve meghatározta a szóban forgó formulák érvényességi körét, messzemenően általánosítva a korábbi eredményeket [7], [16].

A Fourier-transzformációt az $\mathbb{R}$ additív csoportjának ϵ_x ($x\in\mathbb{R}$) karakterei, az $\mathbb{R}$ egydimenziós reprezentációi, segítségével értelmezzük: $\widehat{f}(x):=\langle f,\epsilon_x\rangle$. Az absztrakt harmonikus analízis szemléletet követve ezen az alapon a Fourier-transzformáció fontos tulajdonságai levezethetők. A wavelet- és a Gábor-transzformáció az $\mathbb{R}$ affin csoportjának, ill. a Heisenberg-féle csoport egy-egy reprezentációjából kiindulva hasonló elvek szerint származtatható. Ez a szemlélet elősegíti az említett transzformációk mélyebb megértését és mintát ad hasonló típusú leképezések szerkesztéséhez. A Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometria egybevágósági transzformációiból kiindulva bevezettük a *hiperbolikus waveleteket* és az ezek által generált transzformációkat, valamint bebizonyítottuk a Plancherel- és a rekonstrukciós formulák megfelelőit [12]. *Pap Margit* a hiperbolikus waveletek diszkrét változatából kiindulva a $H^2(\mathbb{T})$ Hardy-térnek egy multirezolúciós felbontását adta meg [8].

Racionális függvényekből álló waveleteket sikerrel alkalmaztunk EKG-görbék matematikai modellezésére és tömörítésére, valamint irányításelméleti problémák megoldására [1], [4].

A wavelet konstrukciók alapvető eszköze a Fourier-transzformáció. Ez az észrevétel inspirált bennünket arra, hogy alkalmas formában leírva a lokális testek Fourier-transzformációit lerakjuk a wavelet-konstrukcióhoz szükséges technikai alapokat [10].

Irodalomjegyzék

1
J. Bokor, F. Schipp, A. Soumelidis: *Applying hyperbolic wavelet construction in the identification of signals and systems*. 15th IFAC Symposium on System Identification, SYSID 2009, Saint-Malo, France, July 6-8, 2009.

2
Z. CIESIELSKI: *Haar orthogonal functions in analysis and probability*. A. Haar memorial conference. Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Eds. J. Szabados , K. Tandori, 49 (1985), pp. 27-56.

3
I. DAUBECHIES: *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania (1992).

4
S. FRIDLI, L. LÓCSI, F. SCHIPP: *Rational Function Systems in ECG Processing*. EUROCAST 2011, Springer LNCS 6927, 88-95.

5
Y. MEYER: *Ondelettes et opérateurs. I. Ondelettes, II. Opérateurs de Calderon-Zygmund, III. Opérateurs multilinéaire*. Hermann, Paris, 1990. English translation in Cambridge University Press (1992).

6
Y. MEYER: *Wavelets. Algorithms and Applications*. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania (1992).

7
H. G. FEICHTINGER, F. WEISZ: *Gabor analysis on Wiener amalgams*. Sampl. Theory Signal Image Process. 6.129-150 (2007)

8
M. PAP: *Hyperbolic Wavelets and Multiresolution in* $H^2(\mathbb{T})$. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2011, DOI: 10.1007/s00041-011-9169-2.

9
F. SCHIPP, W. R. WADE, P. SIMON, J. PÁL: *Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis*. Akadémia Kiadó, Budapest, Adam Hilger, Bristol and New York (1990).

10
F. SCHIPP, W. R. WADE: *Transforms on normed fields*. Leaflets in Mathematics, Pécs (1995)

11
SCHIPP F.: *Waveletek*. Egyetemi jegyzet alkalmazott- és programtervező matematikusoknak, ELTE (2013). (http://numanal.inf.elte.hu/schipp)

12
SCHIPP F.: *Hiperbolikus waveletek*. Alkalmazott Matematikai Lapok 32 (2015), 1-40.

13
SZŐKEFALVI-NAGY B.: *Függvények és függvénysorok*. Polygon, Szeged (2002).

14
P. L. ULJANOV: *Haar series and related questions*. A. Haar memorial conference. Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Eds. J. Szabados , K. Tandori, 49 (1985), pp. 57-96.

15
WEISZ F.: *Wavelet- és Gábor-transzformált*. ELTE, Budapest (2013), 317 pp. ISBN 978-963-284-453-4

16
F. WEISZ: *Multi-dimensional Summability Theory and Applications*. Current Topics in Summability Theory and Application. Eds. H. Dutta and B. E. Rhoades, Springer Singapore, 2016, 241-311.

Schipp Ferenc
professor emeritus

ELTE Infomatikai Kar, Numerikus Analízis Tanszék

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Oláh Vera 2017. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Arckép helyett

2017 szeptemberében különös, továbbított e-mail jutott el hozzám, egy meghívó Faragó Andor, Faragó István és Faragó György emlékére botlatókő elhelyezésére a Bartók Béla út 52. számú ház előtti járdán.

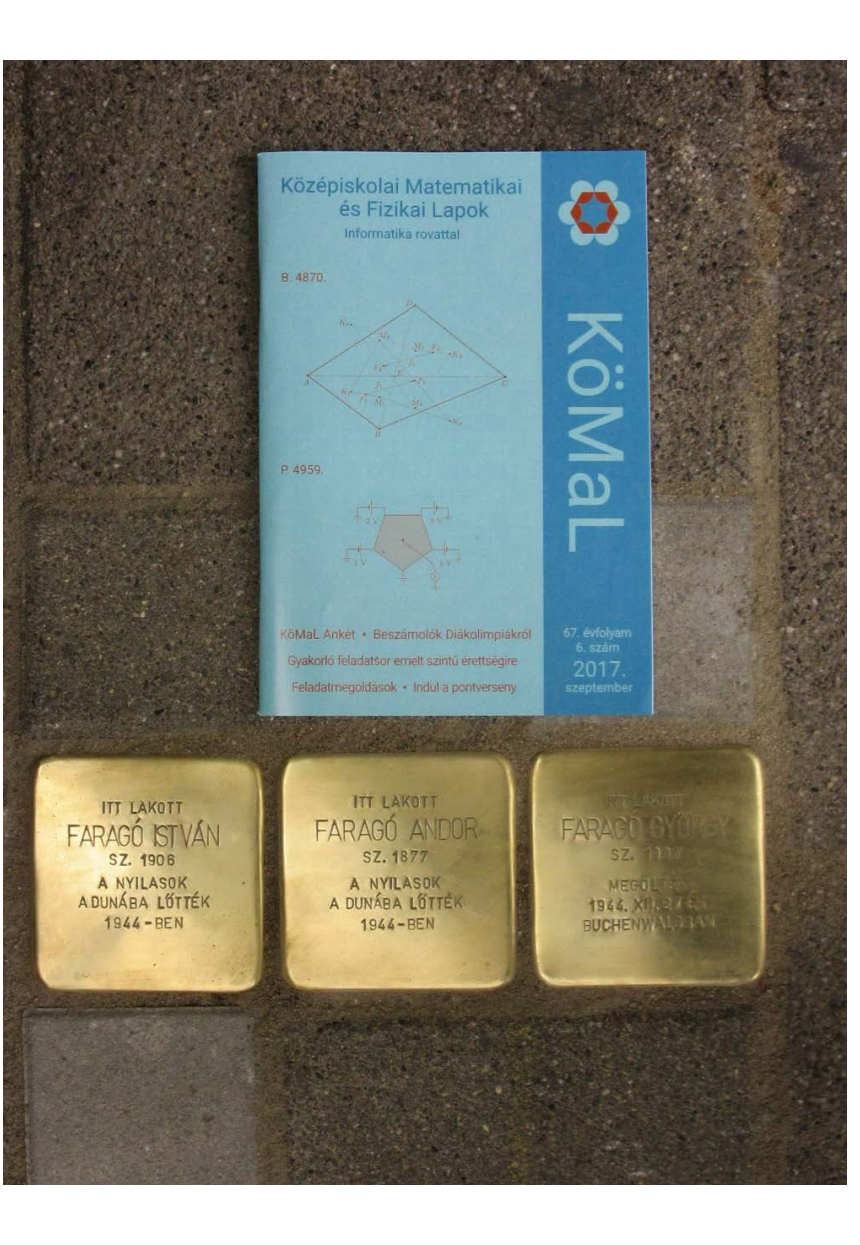
Faragó Andor életéről Radnai Gyula írt két részben az Érintő 2016 decemberi és 2017 januári számában. Ismeretes, hogy Radnai tanár úr fizikusi pályafutása mellett egész életében matematikatörténet-kutatásokat is folytatott. Mint a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok fizika szerkesztőbizottságának vezetője, már évtizedekkel ezelőtt elkezdett foglalkozni a KöMaL egykori főszerkesztője, Faragó Andor munkásságával. Sokszor mondta, mennyire sajnálja, hogy semmilyen emlék, fénykép nem maradt fenn arról a tanárról, aki 1925-ben újra elindította a középiskolásoknak szóló folyóiratot, helyet teremtve benne a fizikának és legjobb megoldók fényképtablójának is, megszerezve hozzá a híres kultuszminiszter, Klebelsberg Kuno erkölcsi és anyagi támogatását. Faragó Andor haláláról sem sikerült semmi bizonyosat kideríteni, csak az évszámát: 1944.

Most váratlanul felbukkant egy távoli rokon: Dr. Faragó Borbála, aki olvasta az Érintőben megjelent tanulmányt, és ennek nyomán megkereste Radnai Gyulát. Borbála így írt az e-mailjében:

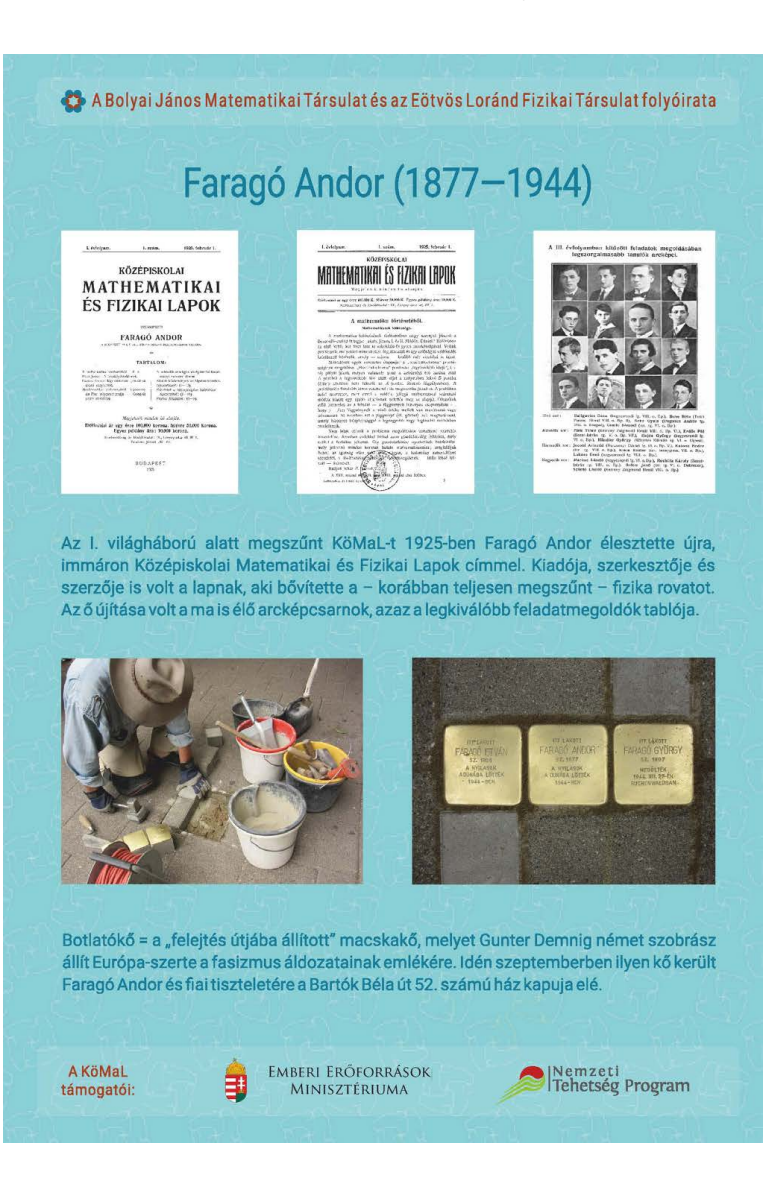
„Faragó Andor *Faragó László (matematikus, pedagógus, Platón-fordító) nagyapánk apjának a testvére volt, akit két fiával (Istvánnal és Györggyel)* együtt vittek el a Bartók Béla út 52-ben működtetett csillagos házból. Andort minden valószínűség szerint egyik fiával együtt a Dunába lőtték, másik fia Mauthausenben halt meg."

Bevallom őszintén, nem tudtam, mi is az a botlatókő. A wikipédiához fordulva kiderült, hogy Gunter Demnig német szobrászművész alkotásai azok a holokauszt áldozatai előtt tisztelgő, macskakőre rögzített 10 × 10 centiméteres réz emléktáblák, amelyeket az áldozatok egykori lakhelye előtt helyeznek el a járdába süllyesztve. Ezek a kövek a lakóhelyek mindennapjaiban teszik láthatóvá és kézzelfoghatóvá a történelmet. Nevükhöz híven rövid időre megállítják és — a személyes történetek bemutatásával — emlékezésre, elgondolkodásra késztetik az arra járókat, a véletlenül „beléjük botlókat". A művészi projekt révén egy folyamatosan növekvő, az egyes kövek hálójából összeálló decentrális óriás „emlékmű" jön létre. Magyarországon 2007 óta számos „emlékező macskakövet" helyezett el a művész.

Néhány fénykép a 2017. szeptember 26-i botlatókő-lerakásról:



A KöMaL 2017. októberi számában hírt adott az eseményről:



A Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat folyóirata

Faragó Andor (1877—1944)

Az I. világháború alatt megszűnt KöMaL-t 1925-ben Faragó Andor élesztette újra, immáron Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok címmel. Kiadója, szerkesztője és szerzője is volt a lapnak, aki bővítette a – korábban teljesen megszűnt – fizika rovatot. Az ő újítása volt a ma is élő arcképcsarnok, azaz a legkiválóbb feladatmegoldók tablója.

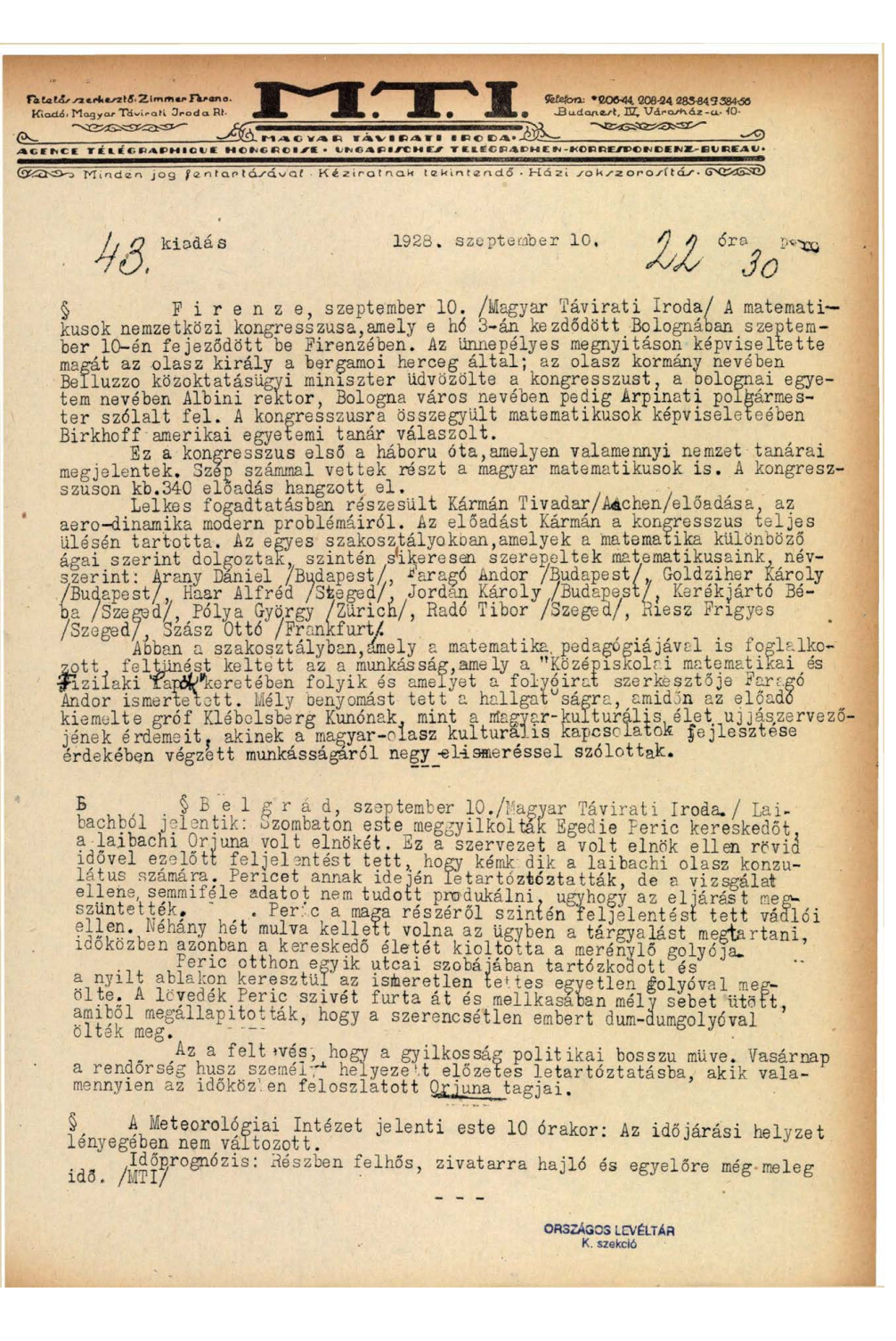
Botlatókő = a „felejtés útjába állított" macskakő, melyet Gunter Demnig német szobrász állít Európa-szerte a fasizmus áldozatainak emlékére. Idén szeptemberben ilyen kő került Faragó Andor és fiai tiszteletére a Bartók Béla út 52. számú ház kapuja elé.

A KöMaL támogatói: Emberi Erőforrások Minisztériuma; Nemzeti Tehetség Program

Novemberben újabb meglepő e-mailt kaptam, ezúttal Radnai Mártontól, Radnai Gyula fiától. Az ő szeptemberben készített fotóiból mellékeltünk ehhez az íráshoz néhányat. E-mailjében ez állt:

„A minap a mellékelt tudósítást találtam egy régi újságban.

`https://library.hungaricana.hu/hu/view/NapiHirek_1928_09_1/?query="faragó andor"&pg=256&layout=s`"



Felelős szerkesztő: Zimmer Ferenc.
Kiadó: Magyar Távirati Iroda Rt.

M.T.I.

Telefon: *206-44, 206-24, 283-84, 9-384-56
Budapest, IV. Városház-u. 10.

MAGYAR TÁVIRATI IRODA
AGENCE TÉLÉGRAPHIQUE HONGROISE · UNGARISCHES TELEGRAPHEN-KORRESPONDENZ-BUREAU
Minden jog fentartásával · Kéziratnak tekintendő · Házi sokszorosítás

43. kiadás 1928. szeptember 10. 22 óra 30 perc

§ Firenze, szeptember 10. /Magyar Távirati Iroda/ A matematikusok nemzetközi kongresszusa, amely e hó 3-án kezdődött Bolognában szeptember 10-én fejeződött be Firenzében. Az ünnepélyes megnyitáson képviseltette magát az olasz király a bergamoi herceg által; az olasz kormány nevében Belluzzo közoktatásügyi miniszter üdvözölte a kongresszust, a bolognai egyetem nevében Albini rektor, Bologna város nevében pedig Arpinati polgármester szólalt fel. A kongresszusra összegyült matematikusok képviseletében Birkhoff amerikai egyetemi tanár válaszolt.
Ez a kongresszus első a háboru óta, amelyen valamennyi nemzet tanárai megjelentek. Szép számmal vettek részt a magyar matematikusok is. A kongresszuson kb. 340 előadás hangzott el.
Lelkes fogadtatásban részesült Kármán Tivadar /Aachen/ előadása, az aero-dinamika modern problémáiról. Az előadást Kármán a kongresszus teljes ülésén tartotta. Az egyes szakosztályokban, amelyek a matematika különböző ágai szerint dolgoztak, szintén sikeresen szerepeltek matematikusaink, névszerint: Arany Dániel /Budapest/, Faragó Andor /Budapest/, Goldziher Károly /Budapest/, Haar Alfréd /Szeged/, Jordán Károly /Budapest/, Kerékjártó Béla /Szeged/, Pólya György /Zürich/, Radó Tibor /Szeged/, Riesz Frigyes /Szeged/, Szász Ottó /Frankfurt/.
Abban a szakosztályban, amely a matematika pedagógiájával is foglalkozott, feltűnést keltett az a munkásság, amely a "Középiskolai matematikai és fizikai lapok" keretében folyik és amelyet a folyóirat szerkesztője Faragó Andor ismertetett. Mély benyomást tett a hallgatóságra, amidőn az előadó kiemelte gróf Klébelsberg Kunónak, mint a magyar-kulturális élet ujjászervezőjének érdemeit, akinek a magyar-olasz kulturális kapcsolatok fejlesztése érdekében végzett munkásságáról nagy elismeréssel szólottak.

Б § Belgrád, szeptember 10. /Magyar Távirati Iroda/ Laibachból jelentik: Szombaton este meggyilkolták Egedie Peric kereskedőt, a laibachi Orjuna volt elnökét. Ez a szervezet a volt elnök ellen rövid idővel ezelőtt feljelentést tett, hogy kémkedik a laibachi olasz konzulátus számára. Pericet annak idején letartóztatták, de a vizsgálat ellene, semmiféle adatot nem tudott produkálni, ugyhogy az eljárást megszüntették. Peric a maga részéről szintén feljelentést tett vádlói ellen. Néhány hét mulva kellett volna az ügyben a tárgyalást megtartani, időközben azonban a kereskedő életét kioltotta a merénylő golyója.
Peric otthon egyik utcai szobájában tartózkodott és a nyilt ablakon keresztül az ismeretlen tettes egyetlen golyóval megölte. A lövedék Peric szivét furta át és mellkasában mély sebet ütött, amiből megállapitották, hogy a szerencsétlen embert dum-dumgolyóval ölték meg.
Az a feltevés, hogy a gyilkosság politikai bosszu müve. Vasárnap a rendőrség husz személyt helyezett előzetes letartóztatásba, akik valamennyien az időközben feloszlatott Orjuna tagjai.

§ A Meteorológiai Intézet jelenti este 10 órakor: Az időjárási helyzet lényegében nem változott.
Időprognózis: Részben felhős, zivatarra hajló és egyelőre még meleg idő. /MTI/

- - -

ORSZÁGOS LEVÉLTÁR
K. szekció

Az MTI tudósítása igen sok szempontból érdekes, elemzése a matematikatörténészek feladata, számomra azonban az volt a legföltűnőbb, hogy Faragó Andor, a KöMaL-t újraélesztő középiskolai tanár Arany Dániellel, a KöMaL alapítójával és a magyar matematika leghíresebbjeivel együtt szerepelt azon a firenzei matematikakongresszuson.

Oláh Vera

☐ matematikatörténet ☐ Faragó Andor

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon:

nka Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

.A **GAZDA(G)SÁG** NEVET ADTUK A **GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET ROVATNAK**, AMELYBEN BEMUTATJUK, HOL, MIKÉPPEN HASZNÁLJÁK FEL A MATEMATIKÁT, MILYEN GAZDAG IS AZ A KÖR, AMELYIK ÉRINTI EZT A TUDOMÁNYÁGAT. (ROVATSZERKESZTŐK: *ILLÉS TIBOR, MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR ÉS RÖST GERGELY*.)

Illés Tibor, Romsics Erzsébet
2017. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Újra tanulni, újat tanulni! — Interjú dr. Kelemen Bélával

Az interjút *Kelemen Bélával*, a MOL Csoport Üzleti Kiválóság Igazgatójával, a Műegyetem címzetes egyetemi tanárával *Illés Tibor* készítette. Kelemen Béla rendszeres meghívott előadója a Műegyetemnek és a Veszprémi Pannon Egyetemnek. Az interjúban karrierjéről és sikerének titkáról mesél. A cikket lejegyezte és szerkesztette *Romsics Erzsébet*, lektorálták Illés Tibor és Kelemen Béla.

Székely Péter
2017. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

A zenében rejlő matematika

2016-ban a KöMaL Ifjúsági Ankét keretében elhangzott előadásának elektronikus formába öntésére kérte fel szerkesztőségünk *Székely Pétert*. Bár a cikk az előadáshoz képest sokat veszít az értékéből, ha az előadó nem tudja megmutatni, megszólaltatni a hangszereket, illetve az érdekes hang-effektusokat, azért erre is tettünk kísérletet. Következzen tehát egy kis ízelítő a zeneelméletről, s a benne rejlő matematikáról, fizikáról.

Besenyei Ádám, Faragó István
2017. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Búcsú Mezei Istvántól

„*Vándor, lábaid nyoma az út s nem más. Vándor, nincs út, az út maga a vándorlás. Vándorlásból születik az út, s visszatekintvén látszik az ösvény, melyet senki sem taposhat többé. Vándor, nincs út, csak barázdák a víz tetején*” (*Antonio Machado*) Az ELTE Matematikai Intézetének honlapján november elején jelent meg a hír: Fájdalommal és megrendüléssel tudatjuk, hogy szeretett és tisztelt kollégánk, *Mezei István* feladva a betegségével folytatott egyenlőtlen küzdelmet, 2017. november 4-én eltávozott közülünk. *Besenyei Ádám* és *Faragó István* nekrológját az Érintőben is közöljük.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Illés Tibor, Romsics Erzsébet 2017. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Újra tanulni, újat tanulni! — Interjú dr. Kelemen Bélával

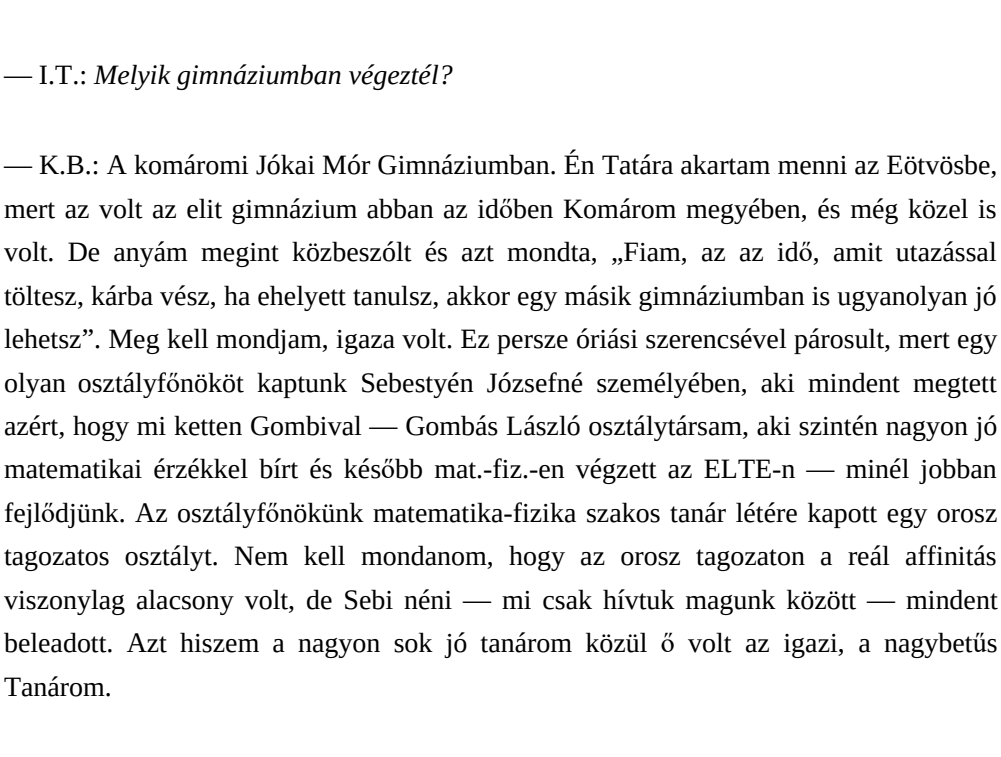
Az interjút *Kelemen Bélával*, a MOL Csoport Üzleti Kiválóság Igazgatójával, a Műegyetem címzetes egyetemi tanárával *Illés Tibor* készítette. Kelemen Béla rendszeres meghívott előadója a Műegyetemnek és a Veszprémi Pannon Egyetemnek. Az interjúban karrierjéről és sikerének titkáról mesél.

— I.T.: *Régóta ismerjük egymást, hiszen először 1981-ben találkoztunk, amikor én még gimnáziumi tanuló voltam, Te pedig a bátyám évfolyamtársa a BME Vegyészmérnöki Karán. Emlékszem — később — érdekes beszélgetéseket folytattunk matematikáról, sportról. Mesélted, hogy Ódor Tiborral, aki az évfolyamtársam volt az ELTE matematikus szakán, közösen jártatok Győrben matematika olimpia előkészítőre. Számomra akkor úgy tűnt, hogy Neked a sport és a matematika valahogyan összefonódtak az életedben. Elmesélnéd, hogyan is volt ez?*

— K.B.: Középiskolában fociztam, s mint nagyon sok fiúnak nekem is a futball jelentette az életet. A matematika csak amolyan furcsa hobbinak számított, hiszen orosz tagozatos osztályba jártam a gimnáziumba. A foci volt a mindenem, és a tanulás helyett is inkább rúgtam a bőrt. Természetesen ennek az lett a következménye, hogy időnként egy-egy gyengébb osztályzat is becsúszott. Ezt elégelte meg az édesanyám, és eltiltott a focitól. Közölte velem, hogy „fiam neked kitűnőnek kell lenned, mert ha nem leszel az, akkor az csak a trehányságod és a befektetett munka hiánya miatt lesz, úgyhogy ha focizni akarsz, akkor be kell bizonyítanod, hogy nemcsak okos vagy, hanem szorgalmas és eredményes is. Az, hogy okos vagy, az nem a te érdemed, de az eredmény már csak rajtad múlik.” Neki az volt a világos elvárása, hogy kitűnőnek kell lennem, vagy legalábbis ahhoz nagyon közeli eredményt kell elérnem.

— I.T.: *Emlékszem arra is, hogy az egyetemi évfolyamodon is a legjobbak közé tartoztál.*

— K.B.: Amikor szokásoddá válik beletenni a munkát, energiát, annak érdekében, hogy kijöjjön az eredmény, akkor a folyamatos, céltudatos munka az életed részévé válik. A tanulásban és a sportban is a tökéletes eredmény elérésére törekedtem mindig. A sport és a tanulás számomra ugyanazt jelentették, a kihívást a minél jobb teljesítmény elérése érdekében. Szóval a kettő erősítette és kiegészítette egymást. A sport egy alapvetően kompetitív közeg, ráadásul én kapus voltam, ahol vagy te védesz, vagy senki. Nem arról van szó, hogy van 11 hely, és pályázik rá 15-16 ember, és jó esélyed van, hogy valahová bekerülsz. Itt egy kapu van, és vagy te védesz, vagy valaki más, hiszen minimum ketten vannak kapusok, úgyhogy meg kellett küzdeni a helyemért. Én a komáromi csapatban játszottam. A város legnevezetesebb játékosa az Aranycsapat és a Barcelona egykori sztárja Czibor Zoltán volt. Így nem csoda, hogy minden gyerek futballozni akart. Én is.



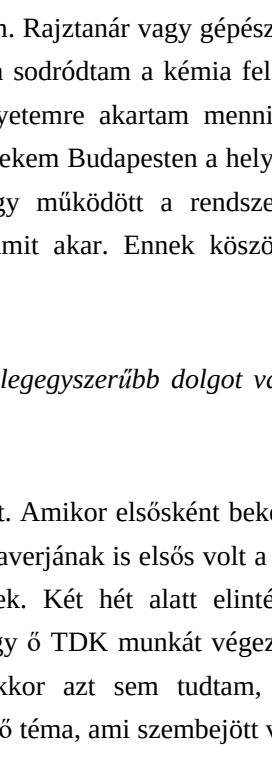
16 évesen a KAC első csapatában (középső sor jobbról a negyedik zöld mezben)

— I.T.: *Melyik gimnáziumban végeztél?*

— K.B.: A komáromi Jókai Mór Gimnáziumban. Én Tatára akartam menni az Eötvösbe, mert az volt az elit gimnázium abban az időben Komárom megyében, és még közel is volt. De anyám megint közbeszólt és azt mondta, „Fiam, az az idő, amit utazással töltesz, kárba vész, ha ehelyett tanulsz, akkor egy másik gimnáziumban is ugyanolyan jó lehetsz”. Meg kell mondjam, igaza volt. Ez persze óriási szerencsével párosult, mert egy olyan osztályfőnököt kaptunk Sebestyén Józsefné személyében, aki mindent megtett azért, hogy mi ketten Gombival — Gombás László osztálytársam, aki szintén nagyon jó matematikai érzékkel bírt és később mat.-fiz.-en végzett az ELTE-n — minél jobban fejlődjünk. Az osztályfőnökünk matematika-fizika szakos tanár létére kapott egy orosz tagozatos osztályt. Nem kell mondanom, hogy az orosz tagozaton a reál affinitás viszonylag alacsony volt, de Sebi néni — mi csak hívtuk magunk között — mindent beleadott. Azt hiszem a nagyon sok jó tanárom közül ő volt az igazi, a nagybetűs Tanárom.

— I.T.: *Tanárod munkája és példája benned is maradandó nyomot hagyott a matematika és természettudomány iránti vonzalom terén.*

— K.B.: Én úgy hiszem, hogy neki köszönhetem azt, hogy most itt vagyok. Több szempontból is óriási szerepe volt ebben. A matematika oktatási stílusa rendkívül szisztematikus volt, a mai napig őrzöm azokat a füzeteket, amikben a feladatokat kidolgoztam. Ebben az osztályban nagyjából úgy működtünk, hogy ő ugyanannyit készült a matematika szakkörre, mint amennyit mi a feladat megoldással foglalkoztunk. Ez már neki is nagyon komoly kihívást jelentett. Harmadik osztályos voltam, amikor országos szinten kialakították egy matematika olimpiai előkészítő rendszert, ha jól emlékszem, ebben Reiman István játszott nagy szerepet. 10 megyei központban szerveztek egész napos szakköröket, és bennünket is Gombás barátommal meghívtak Győrbe, a Czapáry Endre által vezetett szakkörbe. Czapáry tanár úr — ahogy mi hívtuk Czapi bácsi — a győri Révai Miklós Gimnázium matematika tanára, példamutató matematika tanár volt, igazi fanatikus, aki csak azért élt, hogy mi matematikából jobbak legyünk. Az olimpiai előkészítőben találkoztam többek közt Ódor Tibivel is.



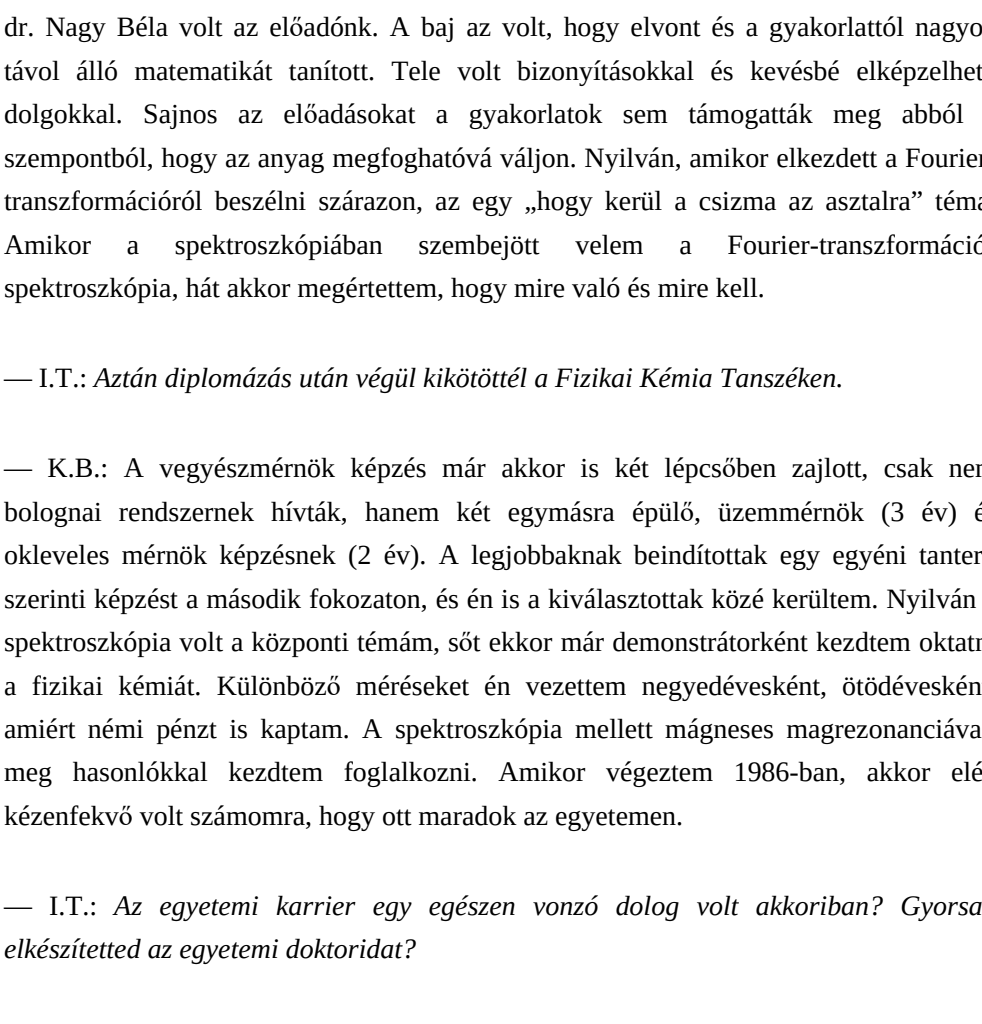
Az érettségi évében, a KöMaL legjobbjainak tablóján

— I.T.: *Hogy kerültél a Műegyetemre?*

— K.B.: 18 éves fejjel fogalmam sem volt, mi akarok lenni. Nem akartam matematikus lenni, mert azt gondoltam, hogy ücsörögni és mindenféle matematikai dolgokon gondolkodni nem nekem való, annál sokkal mozgékonyabb voltam. Orvos nem akartam lenni, mert a vértől rosszul lettem. Rajztanár vagy gépészmérnök sem, mert nem tudtam rajzolni. És így kizárásos alapon sodródtam a kémia felé, és végül vegyészmérnöknek jelentkeztem. A Veszprémi Egyetemre akartam menni, az osztályfőnököm azonban közbeszólt, s azt mondta, hogy nekem Budapesten a helyem, ő nem írja alá a veszprémi jelentkezésemet. Akkor még így működött a rendszer, nem úgy, mint ma, hogy mindenki szabadon csinálhat, amit akar. Ennek köszönhetem, hogy Műegyetemista lettem. Köszönet érte, igaza volt.

— I.T.: *A Műegyetemen sem a legegyszerűbb dolgot választottad ki, hiszen a Fizikai Kémia Tanszéken kötöttél ki.*

— K.B.: Ez a véletlen műve volt. Amikor elsősként bekerültem a kollégiumba, kaptam egy negyedéves szobatársat. A haverjának is elsős volt a szobatársa, és cserélni akartak, hogy ők egy szobában legyenek. Két hét alatt elintézték a cserét, de mi közben összebarátkoztunk. Kiderült, hogy ő TDK munkát végez a Fizikai Kémia Tanszéken a Spektroszkópia Csoportban. Akkor azt sem tudtam, hogy eszik-e vagy isszák a spektroszkópiát, de ez volt az első téma, ami szembejött velem a Műegyetemen. Amikor túljutottam az első évemen, és a kritikus tárgyakból látszott, hogy nem szerepeltem rosszul, akkor előjött a TDK, a spektroszkópia, és így kerültem a fizikai kémiával kapcsolatba.



A BME Martos Flóra kollégium kosárlabdacsapatának edzőtáborában, Rijekában. Az álló sorban jobbról a második Kelemen Béla, a guggoló sor közepén Illés Zoltán.

— I.T.: *Az egyetemi matek nagyon könnyű lehetett neked a gimnáziumi képzésed után.*

— K.B.: Nekem nem volt különösebb problémám a matematikával, de sokan megszenvedtek vele. Két féléven keresztül tartott az egyetemi matematika képzésünk, és dr. Nagy Béla volt az előadónk. A baj az volt, hogy elvont és a gyakorlattól nagyon távol álló matematikát tanított. Tele volt bizonyításokkal és kevésbé elképzelhető dolgokkal. Sajnos az előadásokat a gyakorlatok sem támogatták meg abból a szempontból, hogy az anyag megfoghatóvá váljon. Nyilván, amikor elkezdett a Fourier-transzformációról beszélni szárazon, az egy „hogy kerül a csizma az asztalra” téma. Amikor a spektroszkópiában szembejött velem a Fourier-transzformációs spektroszkópia, hát akkor megértettem, hogy mire való és mire kell.

— I.T.: *Aztán diplomázás után végül kikötöttél a Fizikai Kémia Tanszéken.*

— K.B.: A vegyészmérnök képzés már akkor is két lépcsőben zajlott, csak nem bolognai rendszernek hívták, hanem két egymásra épülő, üzemmérnök (3 év) és okleveles mérnök képzésnek (2 év). A legjobbaknak beindítottak egy egyéni tanterv szerinti képzést a második fokozaton, és én is a kiválasztottak közé kerültem. Nyilván a spektroszkópia volt a központi témám, sőt ekkor már demonstrátorként kezdtem oktatni a fizikai kémiát. Különböző méréseket én vezettem negyedévesként, ötödévesként, amiért némi pénzt is kaptam. A spektroszkópia mellett mágneses magrezonanciával. meg hasonlókkal kezdtem foglalkozni. Amikor végeztem 1986-ban, akkor elég kézenfekvő volt számomra, hogy ott maradok az egyetemen.

— I.T.: *Az egyetemi karrier egy egészen vonzó dolog volt akkoriban? Gyorsan elkészítetted az egyetemi doktoridat?*

— K.B.: Kétféle ember maradt ott akkor az egyetemen. Akik nagyon jók voltak a tanulmányaikban, vagy KISZ-, illetve pártvonalon megfelelő funkciót tudtak betölteni. Az 1980-as évek közepén még nem volt a maihoz hasonló intézményesített PhD rendszer, de el lehetett jutni az egyetemi doktorihoz, úgy is, hogy közben valamelyik tanszéken tanársegédként dolgoztál. Bevallom, hogy nekem csak az egyetemi állásomról való lemondás után sikerült befejeznem az egyetemi doktorimat. Úgy történt, hogy az egyetemen eltöltöttem még 5 évet, emellett nevelőtanár voltam a kollégiumban. Szóval élveztem az életet, imádtam oktatni mind az egyetemen, mind a kollégiumban. De aztán váltani kellett, az idő eljárt fölöttem is. Először kiköltöztem a kollégiumból, rá egy évre már családom volt, jött a rendszerváltás, és végül elhagytam az egyetemet. Miért hagytam ott az egyetemi létet? Akik azokban a '89-'90-'91-es időkben éltek, azok számára a politikai és gazdasági változások szinte felfoghatatlan méreteket öltöttek. Különösen a '70-es, '80-as évek után ez a változás gyakorlatilag fenekestül fordította fel Magyarországot, és ez engem is drámaian érintett. Valójában megteremtette a lehetőséget, hogy mindenki az lehet, ami szeretne, csak tenni kell érte.

— I.T.: *Szóval a Műegyetemről távoztál, és hol kaptál munkát ezután?*

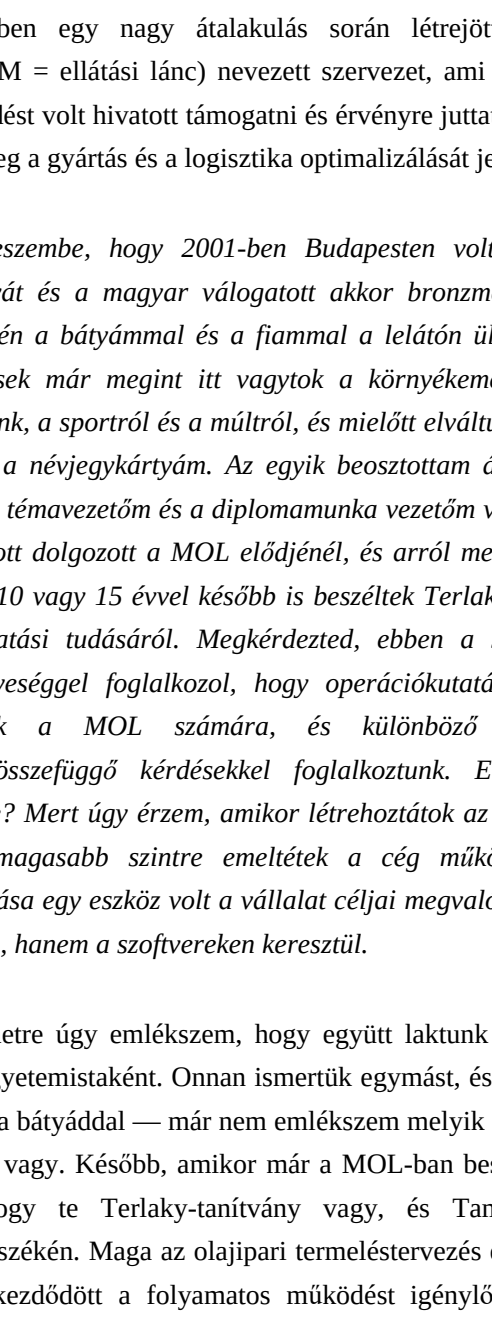
— K.B.: Egy Allcom nevű amerikai-magyar vegyesvállalathoz mentem. Be kell vallanom, tulajdonképpen „kilóra megvettek”. Ugyan én tudós, kutató szerettem volna lenni, és az első évek alapján ez nagyon tetszett is. Nem emlékszem a számokra, hogy akkor mennyi volt az egyetemi fizetésem, egyet tudok, hogy orvos feleségemmel lakást akartunk venni, és hitelt csak olyan mértékben vehettünk fel, hogy a törlesztés nem haladhatta meg a jövedelmünk 33%-át. Ha jól emlékszem, ez kb. $13\,000$ Ft volt. S akkor úgy döntöttem, ha valaki $100\,000$ Ft-ot fizet nekem havonta — ami akkor nagy fizetésnek számított — akkor teljesen mindegy, hogy milyen munkát kell végeznem, feladom a kutatói ambícióimat. Szóval kaptam egy ilyen ajánlatot, otthagytam az egyetemi tanársegédi állásomat, és végül megvettük az első közös lakásunkat Kőbányán.

— I.T.: *Így kerültél az olajiparral kapcsolatba?*

— K.B.: Igen, mert a cég, ahova elszegődtem, olajtermék-kereskedelemmel foglalkozott. Az Allcom egy 50-50%-ban amerikai és magyar tulajdonú vegyesvállalat volt, amit a rendszerváltás után hoztak létre az amerikai Phibro és a magyar állami tulajdonú Minerálimpex. A cél az volt, hogy orosz kőolajat feldolgozva/feldolgoztatva a nyugati piacra tudjunk termékeket eladni. Azt hiszem nagyon jó iskola volt, itt tanultam meg az igazi üzleti gondolkodást és azt, hogy profit nélkül nem lehet élni. A filozófia egyszerű volt ebben a vállalatban. Január elsején mintha a vállalat pénztárcájából kivették volna az éves költséget, azaz a példa kedvéért mondjuk mínusz 100 millió forinton áll a kassza, amit nekünk hónapról hónapra kell feltölteni a nyereséges tevékenységünkkel. Ha májusban elértük a nullát, akkor jó évünk lett, ha ez csak októberre sikerült, akkor „felkopott az állunk”, mert nem kaptunk prémiumot. A prémium a cég nyereségének kb. 10%-át tette ki, és összemérhető volt az egyének éves fizetésével. Ez ma általánosan bevett modell a gazdasági életben, de 1992-ben nóvumnak számított Magyarországon.

— I.T.: *Nagyon érdekes és tanulságos volt az életed első közel 30 éve, de most ugorjunk az időben. Először is gratulálni szeretnék, hogy az Európai Kőolajfinomítók Szövetsége az elnökévé választott 2017. június 8-án. 1992-ben indult az olajipari pályafutásod, és 2017-re ide jutottál. Nyilván, egy ilyen pályafutásnak sok csúcsa volt, és ez az egyik, hogy egy nemzetközi szervezet megválasztott az elnökévé. Ez azt jelenti, hogy külföldi kollégák, üzleti ellenfelek is elismerik a munkádat és tisztelnek, megbecsülnek Téged.*

— K.B.: Két futballista nem szakmailag ellenfél, csak a bajnokságban ellenfelek, egyébként mindkettőnek közös érdeke, hogy maga a futball fejlődjön, népszerű legyen, a közönség minél jobban szórakozzon. És persze a focit válassza a közönség, ne a Formula 1-t vagy más sportágakat. E tekintetben a kőolajipar is olyan, mint a foci. Magát a szövetséget is azért hozták létre és azért dolgozik, hogy a kőolaj-feldolgozásnak illetve a kőolajtermékeknek a vásárlók piacán meg legyen a helye, egyenlő feltételeket kapjon mindenki a versenytársakkal szemben mind a gyártásban, mind az értékesítésben. Ne érje diszkriminatív megkülönböztetés az iparágat és a terméket, például a többi energiahordozóval és az alternatív megoldásokkal szemben. Ennek az európai szervezetnek körülbelül 40 tagvállalata van. 100%-ban lefedi az európai finomítókat, és nagyjából 75%-ban az európai üzemanyag-forgalmazó cégeket. Két fontos területe közül az egyik egy technológiai környezetvédelmi terület, ahol a tagvállalatok együttműködnek nem elsősorban technológiai fejlesztésekben, hanem környezetvédelmi, levegőkémiai, és sok más témában. Összefognak azért, hogy minél kisebb károkat és minél kisebb terhelést okozzon maga az ipar a környezetnek, a levegőnek, a víznek, és legfőképpen az embereknek. A másik pedig a lobbitevékenység, amelynek célja, hogy az európai szabályozás egyenlő feltételeket teremtsen a versenyben. Szeretnénk elérni, hogy az európai döntéshozók ne a pillanatnyi divatnak és politikailag népszerű szlogeneknek felülve módosítsanak a szabályokon, hanem technológiasemleges és költséghatékony irányba tereljék a versenyt, s a versenypályán győzzön a jobbik. És természetesen az energiaiparban ne hagyják figyelmen kívül a természettudományok alaptörvényeit, mondjuk az energiamegmaradás törvényét.



Slovnaft finomítóban egy üzemi reaktor tetején 2016-ban

— I.T.: *Tehát ez a 25 éves olajipari karriered egyik állomása. Már említettél néhány kulcsszót, ami igazából utal arra, hogy miért is beszélgetünk. Kiderült, hogy a termelés és az értékesítés mögött matematikai modellek állnak. Minket is összeköt az operációkutatás. Még mindig emlékszem arra, amikor azt mondtad, hogy „Tibor, engem nem érdekel az aktuális megoldásod erre a feladatra, adjál egy nagyon jó megoldást, ami stabil és fizikailag megvalósítható”. Sokat beszélgettünk arról, hogy mit értesz stabilitás alatt. Legyen stabil: azalatt az értetted, hogy ha megváltoznak az árak, alapanyag- vagy termékárak és egyebek, akkor azzal arányosan változzanak a kimeneti paraméterek, elsősorban a gyártandó mennyiségek is. Nagyon érdekes számomra a szemléleted, hogy nem az optimum érdekes, hanem a stabil, jó megoldás, ami kivitelezhető. Hol és mikor találkoztál újra a matematikával, mint olajipari vezető, és milyen feladatokat láttál el ezzel kapcsolatban?*

— K.B.: Belecsöppentem az olajipari értéklánc értékesítési végébe, mint kereskedő, aki a termelőtől megveszi és a kiskereskedőnek pedig eladja a terméket, és a vétel és eladás közötti különbözetből tud megélni. Időben, térben ez a különbözet mutatja és méri az eredményüket. Aztán a kereskedelemből előbb-utóbb Magyarország minden olajipari cége vagy kezdeményezése bekerül a MOL-ba, így történt velünk is. A MOL 1997-ben tulajdonrészt szerzett abban az olajipari kereskedő cégben, ahol dolgoztam. A másik tulajdonossal együtt gyorsan úgy döntöttek, hogy felszámolják a cégünk tevékenységét. Így kötöttem ki a MOL-nál, és ekkor kezdődött a MOL-os pályafutásom. Először PB gázzal, majd bitumennel kereskedtünk. azaz a MOL-termékeket értékesítettük a piacon. A MOL-ban 2001-ben egy nagy átalakulás során létrejött egy Supply Chain Managementnek (SCM = ellátási lánc) nevezett szervezet, ami tulajdonképpen ezt az értékláncalapú működést volt hivatott támogatni és érvényre juttatni. Egyéb iparágakban ez már létezett, és főleg a gyártás és a logisztika optimalizálását jelentette.

— I.T.: *Az jutott eszembe, hogy 2001-ben Budapesten volt a vízilabda Európa bajnokság és a horvát és a magyar válogatott akkor bronzmérkőzést játszott, amit megnyertünk. Akkor én a bátyámmal és a fiammal a lelátón ültem, és te a félidőben leszóltál, hogy „Illések már megint itt vagytok a környékemen?” Nagyon érdekes dolgokról beszélgettünk, a sportról és a múltról, és mielőtt elváltunk volna azt mondtad, hogy „Te figyelj, itt a névjegykártyám. Az egyik beosztottam állandóan matematikus után kiált”. A doktori témavezetőm és a diplomamunka vezetőm volt Terlaky Tamás, aki a '70-es évek végén ott dolgozott a MOL elődjénél, és arról meséltél, hogy azok, akik dolgoztak Vele, még 10 vagy 15 évvel később is beszéltek Terlaky Tamásról és nagyon hasznos operációkutatási tudásáról. Megkérdezted, ebben a stílusban, hogy „még mindig azzal a hülyeséggel foglalkozol, hogy operációkutatás?” Azóta, 2001 óta többször dolgoztunk a MOL számára, és különböző operációkutatási, a termeléstervezéssel összefüggő kérdésekkel foglalkoztunk. Ennyire égető volt a matematikus jelenléte? Mert úgy érzem, amikor létrehoztátok az ellátásilánc-csoportot, akkor minőségileg magasabb szintre emeltétek a cég működését, irányítását. A matematika alkalmazása egy eszköz volt a vállalat céljai megvalósítása érdekében, nem feltétlenül közvetlenül, hanem a szoftvereken keresztül.*

— K.B.: Én a történetre úgy emlékszem, hogy együtt laktunk a bátyáddal a Martos kollégiumban még egyetemistaként. Onnan ismertük egymást, és valóban egy vízilabda meccsen találkoztam a bátyáddal — már nem emlékszem melyik meccsen, — ő mondta, hogy te matematikus vagy. Később, amikor már a MOL-ban beszélgettünk, számomra akkor derült ki, hogy te Terlaky-tanítvány vagy, és Tamás utóda az ELTE Operációkutatási Tanszékén. Maga az olajipari termeléstervezés elvi modellezése a '70-es, '80-as években kezdődött a folyamatos működést igénylő iparágakban, mint a petrolkémia és az olajipar is. Terlaky Tamás — ma Pennsylvaniában a betlehemi egyetem professzora — volt az, aki segítette a mérnököket az operációkutatási modellek felépítésében és megoldásában az akkori informatikai lehetőségek figyelembevételével. Miután a MOL-ban létrehoztuk a fent nevezett SCM csapatot, onnét kezdve intézményesített formában kellett a vállalatot úgy átalakítani, hogy értékláncalapú legyen a működése, és nem szétdaraboltan a termelés vagy kőolajfinomítás, a logisztika vagy a kereskedelem érdekeinek a figyelembevételével, hanem az egész értékláncot tekintve kellett optimalizálni a rendszert. Ahhoz, hogy ez a fajta filozófia érvényre jusson, kellett egy magasan pozícionált szervezet is. A szervezettől persze még a filozófia nem fog érvényre jutni, ahhoz a termelést, a logisztikát, a kereskedelmet is treníroznia kellett, egyszerűen egészen máshogy kellett gondolkodni. Az induláskor még nem tudtam, hogy milyen mértékben kell nekünk matematikus támogatás, de fixa ideám volt, hogy meg kell értenünk, hogy mi van az ellátási lánc teljes folyamatában, hogyan kell ezt a munkát szervezni és irányítani a MOL Csoport szintjén, és ne csak fogjuk a kalapácsot — ami esetünkben egy igen drága, amerikai szoftver volt — hogy beverjük a szöget a falba. Legalább azt szerettem volna elérni, hogy értsük meg, hogy a kalapács hogyan működik. Persze, ahogyan egyre inkább teljessé tettük az ellátásilánc-modellünket, elindultunk egy komplexebb irányba, egyre inkább lényegessé vált, hogy megértsük a modelleket és a megoldó algoritmusok működését is, nem pedig csak használjuk a szoftvert, mint egy fekete dobozt. Ehhez kellett a matematikus, speciális operációkutatási ismeretekkel. Kideríteni, milyen modellt hogyan old meg a szoftver. Egyértelmű, hogy számítógépes eszköz nélkül az egész elmélet csupán egy szép elmélet marad. Ahhoz, hogy az egész értékláncban addig önmagát a legfontosabb elemnek tartó termelés vezetése rájöjjön, hogy mit kell termelni, azt — a cég szempontjából — nem ő tudja a legjobban meghatározni, nekünk kellett bizonyítani. Világos volt azonnal, hogy az ellátási lánc egészét az alapanyag-beszerzéstől a termékek piacokon történő eladásáig egységes rendszerben kell kezelni. Ehhez olyan matematikai megalapozottságú, jól működő és megbízható eredményt adó eszköz (szoftver) kellett, amit az olajipari szakma referenciaként elfogad. Az olajiparban — Basil Joffee munkássága óta — vagyis a 80-as évek elejétől kezdve fejlesztenek egy ilyen eszközt, amit ma PIMS néven ismernek. A PIMS napi használata, az egész ellátási lánc mérete és bonyolultsága miatt nélkülözhetetlenné vált. Lokális megoldások helyett, MOL Csoport szintű globális megoldásokat kellett produkálni. A PIMS volt alkalmas arra, hogy a tényeket, az adatokat, a rendelkezésre álló információkat felhasználva, a szakértők modelljei alapján elkészítse azt az operációkutatási modellt, amelyet szekvenciális lineáris programozási módszerrel megoldva kimutassa, hogy mit kellene termelni, mert úgy néz ki, hogy ez fizet a legjobban. Persze ez a kép, ami a matematika jelentőségét és nélkülözhetetlenségét mutatja, több éves együttműködésünk alapján tisztult le ennyire.

— I.T.: *Emlékszem a kezdetekre, 2002 januárjában egy féléves előkészítő munka után tartottam egy operációkutatási továbbképzést az ellátási lánc menedzsment szakértőinek. Ez után egy újabb együttműködés keretében sikerült tisztáznunk, hogy milyen modelleket és hogyan old meg a PIMS. 2004-től kezdve az ELTE folytonos optimalizálással foglalkozó kutatócsoport tagjaival közösen, többször dolgoztunk Nektek, a MOL Csoport ellátási lánc csoportjának, különböző modellezési, érzékenységvizsgálati és egyéb a termelés tervezéssel összefüggő operációkutatási kérdéseken. Nem tudom, hogy emlékszel-e arra a kijelentésedre, amikor azt mondtad, hogy „kellenének matematikusok, akik itt egyedül is, a Te irányításod nélkül tudnának dolgozni”. Ezután több beszélgetés alatt kiderítettük, hogy Neked nem klasszikusan képzett matematikusok kellenek, hanem olyan szakemberek, akik három szaktudással rendelkeznek, azaz kiváló operációkutatási, számítástechnikai és folyamatszabályozási ismeretekkel. Sőt az is elvárás, hogy ezekből legalább kettőt profi szinten tudjanak. Egyszer az irodádban találtuk ki, hogy kellene egy ilyen képzést indítani, és végül a veszprémiekkel elindítottátok a PIMS Akadémiát.*

— K.B.: Kétfelé választanám a dolgot. Kellett nekünk matematikus/operációkutató is, azt én úgy értettem, — és ma is úgy értem — hogy olyan szakértő, aki megérti a gyakorlati problémákat, és át tudja ültetni a matematika nyelvére. Szükséges, hogy az ellátási lánccal foglalkozó csapat rendelkezzen ilyen profilú szakemberrel. A PIMS Akadémia egy kicsit más történet. A MOL Csoport termelését, értékesítését stb. leíró modell egyre bonyolultabb lett, egyre több elemet tartalmazott, egyre komplexebbé vált az a való világ, amit át kellett ültetni a modellbe, egyre speciálisabb tudást igényelt azoktól, akik a PIMS-et használták. Komoly gondot okozott a megfelelő ismeretekkel és képességekkel rendelkező kollégák verbuválása és betanítása. Egyszóval, gond volt a szakértői utánpótlással. Ez a fajta karrierút a 2000-es évek fiatalságának nem volt eléggé vonzó. Senki nem akart kizárólag operációkutatási modellek megoldásával foglalkozni, vagy ahogyan mi mondjuk, lineáris programozást futtatni. Ebben az időszakban azt gondoltuk, hogy egyféleképpen lehet ennek a nagyon fontos feladatnak az elvégzését vonzóvá tenni, ha dinamikussá tesszük a karrierutat. A speciális tudás gyors, célirányos megszerzése, 3-5 év aktív optimalizálási tevékenység, majd új kihívások egyéb üzleti területeken. Ez csak akkor tehető meg, ha folyamatos az utánpótlás és a képzés. Ugyan a továbblépő kolléga speciális PIMS tudása kvázi elveszik, de az optimálásban megszerzett globális ismeretei rendkívül hasznosak az értékláncalapú gondolkodás elmélyítésében az üzlet egyéb területein.

Mi házon belül több okból sem tudtuk megvalósítani a képzést. Egyrészt mindig minden fontosabbnak tűnt, mint kiképezni egy új embert, másrészt azok, akik tanítottak volna, sokkal inkább azt érezték, hogy az ő székükre lesz majd veszélyes az illető, és nem hagyták, hogy az újonc pl. hozzányúljon a modellhez. A külső képzés így létfontosságúvá vált. Friedler Ferencék a Pannon Egyetemen elvállalták ezt a feladatot, és a kétévente indított PIMS Akadémiával hozzájárultak a szakértői gárda folyamatos megújításához. Nem kell szomorkodnod, Tibor, hogy nem az ELTE-re került a képzés, mert az operációkutatás tárgy — amelyet volt tanárod, Maros István tanított, ma pedig már a fiatal utódok oktatják — így is egy komoly nehéz tárgyként szerepel a képzésben.

— I.T.: *Maros Istvántól nemcsak az operációkutatás számítógépes módszerei tárgyat tanultam az egyetemen, hanem az első munkahelyemen, az MTA SZTAKI Alkalmazott Matematika Főosztályán ő volt az első főnököm is. Térjünk rá az operációkutatási feladatra. Ez egy több periódusos, több termelő céges operációkutatási feladat, amelynek az adatai — leginkább a gazdasági körülmények és a meglévő raktárkészletek miatt — hónapról-hónapra változnak. A méretekről is beszéltünk: egy 6 hónapos modell az körülbelül $50\,000 \times 300\,000$-es méretű lineáris programozási feladatra vezet, ami igazából nem is LP, mert a modell feltételeinek 10%-a bilineáris feltétel, ahol minőségi és mennyiségi változók szorzata szerepel a feltételben, igen nehézzé téve a feladat numerikusan stabil megoldását. A modellezésen és megoldáson dolgozó szakértők munkája nagyon nehéz, állandó stresszel járó munka, hiszen rövid határidővel kell az aktuális modellt elkészíteni és a termelési tervet kiszámolni.*

— K.B.: Az operációkutatási modell-mátrixnak több millió eleme van, de ezek nagy része, közel 95%-a nulla, amiknek nincs jelentősége. A feladat méretéhez képest mindössze néhány ezer nullától eltérő számnak van jelentősége. Azok pontos megadása dönt a siker vagy sikertelenség kérdésről.

— I.T.: *Az operációkutatás szakos hallgatók az 1980-as években pontosan Maros Istvántól tanultak a strukturált, több periódusos, nagyméretű lineáris programozási feladat általad is említett jellemzőjéről, a ritkásságról. A nagyméretű, gyakorlatból származó LP feladatok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy az adataiknak mindössze a 2-3 százaléka nem nulla. A nagyméretű LP feladatokat pontosan ezért tudjuk megoldani. Ha tele volna nem nulla adattal, akkor nem tudnánk megoldani, sőt tárolni is alig.*

— K.B.: Ez bennünket nem vigasztal. De még egy fontos eleme van ennek az egész optimalizálásnak. Mindent meg lehet csinálni a modellel, a számítógéppel, a papírral, de a nap végén mégiscsak oda kell adni a vevőnek a benzint, egyébként a vállalat értelmét veszti. Ez nagyon fontos segédeszköz, nagyon fontos eleme a rendszernek. Ez segít abban, hogy jól működjünk, de nem ettől működünk.

— I.T.: *A PIMS Akadémia végül is a veszprémi egyetemen indult el, és azóta sikertörténet lett.*

— K.B.: Így igaz, ez egy tradicionális, angol nyelvű, nemzetközi posztgraduális képzés lett. Neked ebben nagy szereped volt. Arra emlékszem, hogy egy matematikai konferencián voltunk Veszprémben, amit mi azóta is szponzorálunk. Én ott találkoztam először Terlaky Tamással és Friedler Ferivel, és ugyan mi, mint MOL közel álltunk a Veszprémi Egyetem Mérnök Karához, de Feri volt az, aki mint az Informatika Kar dékánja, kapva kapott az ötleten és megvalósította. A következő év szeptemberében (2007) elindult a képzés, amelyet azóta is kétévente hirdet meg a Pannon Egyetem, s 10-15 főnek biztosít helyet.

A kezdetek óta több, mint 50-en végeztek, van közöttük, aki nemzetközi karriert futott be, és így a képzésnek nemzetközi híre is van. A végzettek 25%-a nem is a MOL-nál dolgozik már, hanem nagy nemzetközi cégeknél, mint az OMV, Shell, Shell Global Solutions, AspenTech., ami azt bizonyítja, hogy a végzősök jók, nagyon piacképes tudást kapnak.

— I.T.: *Mekkora a matematikusok részaránya ebben a képzésben? Szoktak időről-időre feltűnni matematikusok, vagy inkább vegyészmérnökök jelentkeznek?*

— K.B.: Vegyes a jelentkezők halmaza, de általában kevés a matematikus. Egy elég szigorú feltételrendszer szerint választunk ki a körülbelül 100-120 jelentkező közül 10-15 embert, aki részt vehet a képzésen. Vagyis 8-10-szeres túljelentkezés van. A PIMS Akadémia egy 1 éves posztgraduális képzés volt, a felvettek ösztöndíjat kaptak a vállalattól, illetve az egyetemtől, és ezzel bizonyos kötelezettséget vállaltak. 2013-tól a képzés egy komplexebb egység része, amely az egy év egyetem mellett egy év „on the job” gyakorlati képzést is tartalmazott. Az egyetemi képzés továbbra is a veszprémi egyetem Alkalmazott Informatikai Karán folyik. Mai munkám miatt már én is csak távolabbról követem a PIMS Akadémiát. Természetesen a fejlődés folyamatos, az idei évtől további átalakuláson megy keresztül, ma már inkább „Value Chain Academy”-nek lehetne hívni, ami az egyre erősödő értékláncalapú megközelítést tükrözi, mind formájában, mind tartalmában.

— I.T.: *Igazából sok hozzád hasonló vezetővel beszélgettem már, akik a matematikát nagyra értékelik és elismerik a matematikusok szerepét az iparban is. Általában azt mondják, hogy 15-20 mérnökre jutnia kell egy matematikusnak. Mindig meg szoktam kérdezni, hogy annak a matematikusnak ki tudjátok-e használni a képességeit? A válaszuk az, hogy a 15-20 mérnöknek mindig van olyan típusú kérdése, amihez egy matematikai gondolkodású vagy tudású ember kell. Neked erről mi a véleményed?*

— K.B.: Egy biztos, hogy a hétköznapi problémák megoldása modern eszközökkel csak úgy lehetséges, ha ezeket a problémákat le tudjuk fordítani a matematika nyelvére, a matematika eszközeivel megoldjuk, és vissza tudjuk fordítani a megoldást és a következményeket a valós folyamatokra.

— I.T.: *Ezek szerint azért a matematikus hallgatóink ne keseredjenek el, mert van számukra hely az iparban! Most így mellesleg említeném meg, hogy amikor te a Műszaki Egyetemre jártál, akkor volt egy matematikus mérnökképzés a Gépészmérnöki Karon (GPK). Ez újra elindul. A gépészmérnökök fogalmazták meg azt az igényt, hogy legyen újra matematikus mérnökképzés. A tapasztalat azt mutatja, hogy a gépészmérnök évfolyamokon, a körülbelül 350 főből van egy 15-20%-os kisebbség, aki sokkal jobban tudja a matematikát, mint a többiek. Az évfolyamból körülbelül 20 fő specializálódhat matematikus mérnöknek. Ezek a hallgatók a 18 kreditnyi matematika helyett 60 kredit matematikát tanulnak majd. A GPK vezetésének az az elképzelése, hogy kellenek a matematikában jobban képzett emberek, és célirányosan választották ki a tárgyakat, hogy ezzel segítsék a kutatás-fejlesztési irányba a mérnököket. Talán az a filozófiájuk, hogy jobb, ha egy mérnök több matematikát tud, mint ha a matematikusnak kell elmagyarázni, hogy mi az ipari probléma. Egy matematikus mérnöknek megvan a mérnöki tudása, a matematikai hátterével több problémát tud megoldani, mint a megfelelő matematikai ismeretekkel nem rendelkező átlagos társa. Másfelől, ha matematikai szempontból nagyon nehéz a valós probléma — ami manapság már rendszeresen előfordul — akkor pedig sokkal rövidebb idő alatt magyarázhatja el a problémát egy alkalmazott matematikusnak, hiszen komoly matematikai ismeretekkel és készségekkel rendelkezik.*

— K.B.: A leglényegesebb elem, hogy a komplex probléma megoldásához több szakterület tudjon egymással kommunikálni és le tudja fordítani egyik a másik nyelvére a problémát. Ahogy a gépészmérnököknek ma sokkal több matematikát kellene tanítani, ugyanúgy több villamossággal, kémiával kéne foglalkozniuk, hogy az adott speciális feladatban képes legyen szakmai team-munkára.

— I.T.: *A BME matematikusképzésében vannak erre apró lépések. A mesterképzésen van a témalabor nevezetű tárgy, ami alatt a hallgatóink nem matematikusoktól kapnak feladatot, és a nem matematikus témavezető mellett, egy matematikus konzulenssel is megvitatják a megoldandó kérdést. Ez eléggé hatékony formája az együttműködésnek és a hallgatókat arra neveli, hogy képesek legyenek szakmai kérdésekről kommunikálni másmilyen háttérrel rendelkező szakértőkkel. Erre a BME maga megteremti a feltételeket, de értem, hogy te ennél sokkal többet szeretnél.*

— K.B.: Ha egy statikai feladatot csak bonyolult vektorrendszerrel adsz meg, akkor nagyon elvont feladatot kapsz. De ha lerajzolod, és megmutatod, hogy ezek a vektorok mik is valójában, akkor a probléma rögtön kézzelfoghatóvá válik, egy hétköznapi feladathoz fog hasonlítani. Nem mindegy, hogy a követ azért faragod, hogy templomot építs, vagy rabszolgaként követ faragsz. Nagy különbség.

— I.T.: *Zárszónak még mit szeretnél elmondani? Mi az, amit bárkinek tanácsolni tudnál, mik a legfontosabbak a sikeres karrierhez? Nyilván a matematika fontos számodra a gondolkodás miatt. A szorgalom is, amit anyukád követelt meg a focizásért cserébe a gimnáziumban, és amire szükséged volt, hogy mindezt elérd. De mi a lényege a munkásságodnak? Mi az, amit te mondanál, mit csináljon az ember, hogy jól érezze magát és sikeres legyen?*

— K.B.: Bárhol is vagy, érezd jól magad a saját bőrödben, ez csak rajtad múlik. Nem a körülmények tesznek boldoggá. A Műegyetemen tettem néhány kitérőt: a spektroszkópia egy idő után nem adott újat, ezért elmentem a mezőgazdaság-kémia analitika csoportba ipari alkalmazások megoldásán dolgozni. Később bekerültem a termodinamika csoporthoz, ahol ott volt Oláh Karcsi bácsi, akinek a mai napig egyik legnagyobb tisztelője vagyok. Sok embertől sok mindent tanulhattam, de valószínűleg tőle tanultam a legtöbbet, mind szakmában, mind a feladatokhoz való viszonyulásban. Egyszer, a sok beszélgetésünk közül az egyik során azt mondta, hogy „Béla, én nagyon szerencsés ember vagyok, mert mindig mindent elfelejtek”. Néztem nagy, kerek szemekkel, hogy „Karcsi bácsi, ez mitől szerencsés?” „Tudod, mikor elfelejtek valamit, akkor mindig tudok újra tanulni és újat tanulni”, és ez valószínűleg az élet esszenciája. Képesnek lenni újra tanulni és újat tanulni. Egy másik nagy igazság a tudomány világában, hogy az új tanok akkor kerülnek elfogadásra, ha a régi tanok hirdetői kihalnak. De nem kihalni kell, hanem újat tanulni!

— I.T.: *Nagyon szépen köszönjük a beszélgetést. Az utolsó nagyon érdekes történeteddel már címet is adtál a beszélgetésünkből készülő cikknek:* ***Újra tanulni és újat tanulni!***

A cikket lejegyezte és szerkesztette: *Romsics Erzsébet*.

A cikket lektorálta: *Illés Tibor* és *Kelemen Béla*.

alkalmazott matematika matematikus-karrier operációkutatás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Székely Péter

2017. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

A zenében rejlő matematika

Azt mondják, hogy a matematikusok között igen sok zenészt találni. Ez nem meglepő, hiszen mind a zene keltésében, mind magában a rezgő közeg fizikai viselkedésében, sőt, a zene lejegyzésében is rengeteg matematikailag könnyen leírható tulajdonságot fedezhetünk fel. Az, hogy a szép, s logikus rend mellé gyönyörködtető hangzás is párosul, magához vonzza a szépség iránt amúgy is igen érzékeny matematikusokat. Szoktuk is mondogatni a matematikában, hogy ha egy bizonyítás szép, akkor az nagy valószínűséggel jó is.

Monochord — arany aránypár

Mint minden előadást, ezt is úgy illik kezdeni, hogy „már a görögök is…” Nem véletlen ez, hiszen az emberiség történetével egyidős lehet a — sokszor alig-alig ismert — zenei művészet. Valóban kevéssé ismert a régi idők zenéje, gondoljunk csak arra, hogy az egyik legszebb hangú hangszerünket a torkunkban hordozzuk… Sajnos, a régi emberek hangszereiről is kevés feljegyzés maradt fenn, s már a pár száz évvel ezelőtti hangszerek rekonstrukciója is nehéz feladat. A zene lejegyzése is elég későn alakult ki a történelem folyamán, nem is beszélve arról, hogy mit tekintett fontosnak lekottázni a korabeli zenész, s mi volt az, amit nem írt le, hiszen közismert tény volt.

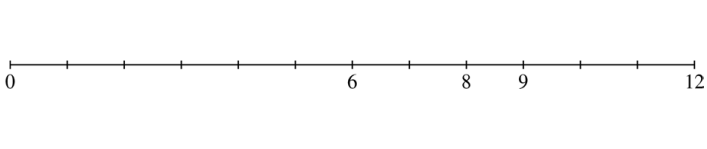
De ha már a görögök, akkor természetesen — matematika tanárok lévén — rögtön Pitagorasz jut eszünkbe. Pitagorasz nevével kapcsolatban pedig háromszögekre gondolunk, s a velük kapcsolatos tételre. De gondolunk-e arra a Pitagoraszra, aki kitartóan érdeklődött a tiszta művészetek iránt? Gondolunk-e Pitagoraszra, mint filozófusra? Gondolunk-e Pitagoraszra, aki az élet számos területén kereste a rendet, ahogy ő nevezte, a *szümphoniát?*

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0b/MIM_String_Instruments.jpg

Közismert a történet, amelyet Pitagorasz nevéhez fűznek. Nevezetesen egy kalapácsműhely mellett elhaladva a négy kalapács csengését konszonánsnak, azaz szépen együttszólónak hallotta, s e tulajdonságot a kalapácsok súlya közötti összefüggéssel azonosította. A kedves história szép képet fest a nagy matematikusról, de kevéssé valószínű. Annyi viszont bizonyos, hogy igen behatóan tanulmányozta a monochord rezgéseit (lásd a fenti képen). Ilyen egyhúrú hangszer csupán az iskolában fellelhető, az is csak demonstráció céljából. Azonban ne keseredjünk el, szinte mindenki talál a környezetében egy gitárt, ami céljainknak tökéletesen megfelel. Ennek teste kiválóan rezonál, erősíti a húr alig hallható hangját. Takarjuk le a nem szükséges húrokat, hogy kizárjuk azok zavaró hatását. Ezen a hangszeren már könnyedén kísérletezhetünk, hála a bundoknak, a fogólapon található rézlapoknak, melyek segítségével bárki tisztán lefoghatja a hangokat mindenféle zenei előképzettség nélkül.

Játsszunk a gitárunkkal! Egyetlen húrt — pl. a legalsó, a legvastagabb E-húrt — megpendítve más és más magasságú hangot kapunk, ha a húrt egy-egy bundnál lefogjuk. Pitagorasz hasonló kísérleteket végzett a monochordjával: a húrt 12 egyenlő hosszúságú részre osztotta fel, így könnyedén vette a húr felét, harmadát, … (Szerencsére a 12-nek sok osztója van! ☺) Így ha most a felénél fogjuk le a húrt, akkor megpengetéskor az alaphang feletti oktávot, ha a 2/3-ad részénél, akkor a kvintet, s ha a 3/4-ed részénél, akkor a kvartot hallhatjuk. (Sok gitárnál a bundok közötti jel segítségünkre van az oktáv, s a kvart lefogásánál.) A kísérletet a többi húron elvégezve ugyanezeket a hangközöket figyelhetjük meg.

A kis egész számok arányaként felírt húrarányok meglepő módon éppen azok a hangközök, melyeknél a két hangot (alap és oktáv, alap és kvart, illetve alap és kvint) a leginkább szépen együttcsengőnek érzünk. (Ennek okára még később visszatérünk.) Amit a zenében szépnek találunk, az a matematikában is igen szép arányokkal, az *arany aránypár*ral írható fel. Lássuk, mi is ez!



Az ábrán láthatjuk, hogy a 12 egység hosszúságú húrt a kilencediknél lefogva az alaphang kvartját kapjuk meg, míg ha a 8 egység hosszúságú húrral tesszük ugyanezt, akkor a 6 egységnél kell lefognunk a húrt, hogy a rövidebb húr kvartját hallhassuk. Ezt matematikailag a $12:9=8:6$ arány igazolja.

Emellett még szintén érdekes, hogy a 9 (kvart) és a 8 (kvint) a 12 (alaphang) és a 6 (az alap oktávja) számtani, illetve harmonikus közepe:

$$A(6;12)=\frac{6+12}{2}=9,\qquad H(6;12)=\frac{2}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}=8$$

Tehát az „arany aránypárt” ezekkel felírva:

$$12:\frac{6+12}{2}=\frac{2}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}:6$$

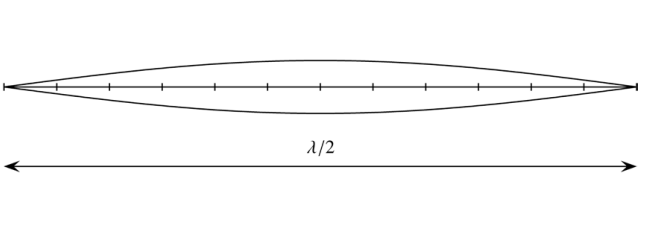
Pitagorasz a *kozmosz* szóval nevezte el a világ e szép harmóniáját. A szép rend számára mindenhol megjelent. Így például a kocka és duálisa, az oktaéder között figyelt meg szép rendet:

kocka	oktaéder
6 lap	6 csúcs
8 csúcs	8 lap
12 él	12 él

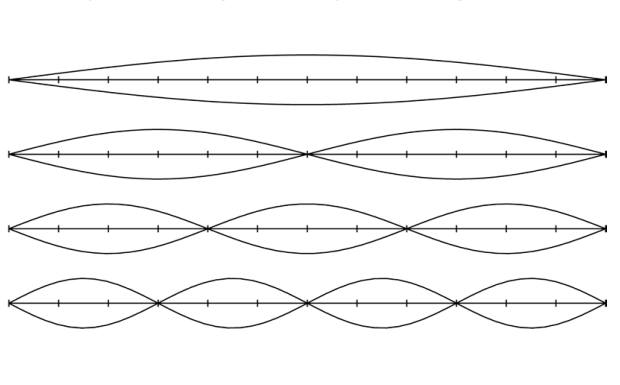
A szépre való törekvésünket minden művészetben megfigyelhetjük. A képeken, szobrokon, épületeken, de a drámák, zeneművek időbeli felépítésében is lépten-nyomon felfedezhetjük a kis egész számokkal felírható arányokat, vagy akár az aranymetszést. Ennek oka az ember, az ember és környezete, a világ harmonikus felépítésében keresendő. Nem véletlen, hogy Orfeusz muzsikájával a holtakra és élőkre is egyaránt hatással van, rezonálnak zenéjére.

Hangközök — összegzés a zenében

Térjünk vissza az egyhúrú hangszerünkhöz. Mi is történik a húrral, ha megpendítjük?



A húr két végén rögzítve van, így szemmel látható, hogy a kifeszített drót a pendítés irányában, illetve ellentétesen kitér, egy orsószerű mintázatot hoz létre. Ez egy fél hullámhossz, hiszen a teljes szinusz görbe fele jelenik meg előttünk.

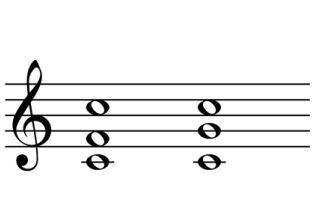


Ez azt jelenti számunkra, hogy a húron létrejövő rezgés hullámhossza éppen a húr hosszának a kétszerese lesz. Hasonlóképpen a húr hosszát rövidítve (lefogva egy-egy bundnál a húrt) a hullámhossz arányosan változik.

A hullámhossz és a frekvencia fordítottan arányos. (Lásd később, a szorzatuk éppen a hangsebességet adja meg az adott közegben.)

Vegyük most alaphangnak az egyvonalas c hangot. A következő kottaképen az alaphangot és az oktávját láthatjuk egy-egy másik hanggal két további hangközre bontva. Így az első esetben az oktávot egy kvint és egy kvart, míg a második esetben egy kvart és egy kvint összegére bontottuk. Világos, hogy a két összeg ugyanazt az oktávot adja, vagyis az összeadás kommutatív tulajdonsága jelenik meg:

$$\text{kvart}+\text{kvint}=\text{kvint}+\text{kvart}=\text{oktáv}$$



De hogy néz ki matematikailag ez az összegzés? Írjuk fel a húrhosszak arányát! (Oktáv: $\frac{1}{2}$, kvart: $\frac{3}{4}$, kvint: $\frac{2}{3}$.) Látható, hogy most az összeadás jel helyett a szorzás jelét kell használnunk, hogy az $1/2$ arányt megkapjuk:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$

Ha a hangok összegzését a húrhosszak arányának szorzásával kell felírnunk, akkor ez egy matematikus számára azt jelenti, hogy a kotta a húrok arányainak logaritmusát (sőt ld. később, a frekvenciák logaritmusát) ábrázolja:

$$\text{oktáv kottaképe}=\log\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)=\log\left(\frac{2}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{4}\right)=\text{kvint és kvart kottaképe}$$

Ha már az előbb felfedeztük, hogy tetszőleges húron végezhetjük a megfigyeléseinket, miért ne folytatnánk azzal a húrral, amellyel a játékot elkezdtük? Arra gondolok, hogy ha a húron a 3/4-ed részt lefogva előállíthattam az E-húr kvintjét, azaz a H hangot, akkor megismételhetném a lefogást most a megrövidített húron, előállítva a H hang kvintjét. Ehhez nem kell mást tenni, mint a korábbi, a „megmaradt” 2/3-ad hosszúságú húr 2/3-ád kell venni. Így máris a H hang kvintjét hallhatjuk, a Fisz hangot.

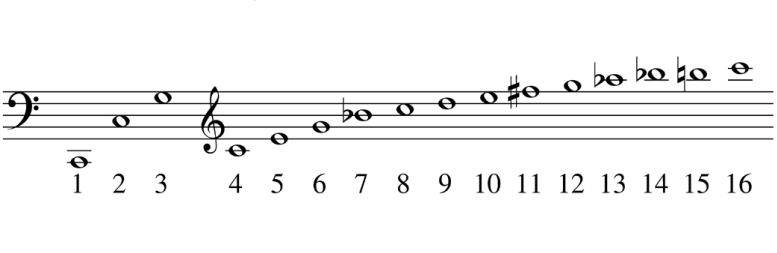
Matematikailag ez azt jelenti, hogy az eredeti húr 2/3-ad részének 2/3-ad részét vettük, azaz a $(2/3)^2=4/9$-ed részét vettük a húrnak. Zeneileg pedig azt mondhatjuk, hogy a kvintre ráépítettünk egy újabb kvintet. Matematikus gondolkodásunk máris érzi, hogy a zenei összegzés, a két kvint összeadása a hangok frekvenciájának szorzását fogja jelenteni…

Konszonancia

Ismét visszatérve az egyhúrú hangszerünkhöz, vegyük fel gyorsított videóval a húr rezgéseit. Amint a felvételt lassítva visszanézzük, észrevehetjük, hogy a korábban szabad szemmel is jól látható orsószerű alakzatra további furcsa, de egyben mégis szabályos rezgések rakódnak rá. Ez azt jelenti, hogy a húr rezgésében további, rövidebb hullámhosszú rezgések találhatók.

Ezt kísérletileg könnyen ellenőrizhetjük, csupán annyi a dolgunk, hogy az alaphang rezgését megszüntessük. Ezt úgy tesszük meg, hogy a megpendítés után a húr közepét óvatosan megérintjük, mellyel a közepén megszüntetjük a rezgését. Ekkor a további rezgéseket hallhatjuk, közülük is a legerősebb az oktáv hangja lesz. (Ha a húr közepén nem rezeg, akkor két orsószerű alakzat jön létre rajta, vagyis egy teljes szinuszhullám, melynek hullámhossza a húr hossza.)

Ha a kísérletet most úgy folytatjuk, hogy a húr 2/3-ánál is megszüntetjük a rezgést, akkor az alaphang kvintjét hallhatjuk — igaz, egy oktávval feljebb. Tovább kísérletezve (ehhez már nagy ügyesség kell a gitáron) a további részhangokat is kinyerhetjük. Ezek a hangok a következő sorrendben jönnek elő:



Az egyes hangok alá írt számok nem csupán a sorrendet jelentik, hanem azt is, hogy az alaphang frekvenciájának (ν) hányszorosa jött létre: $2\nu, 3\nu, \ldots$. Ez jól érthető a korábbi ábránkon, hiszen a kísérleteink során éppen egy-egy újabb orsószerű alakzat „fér rá” a húrra.

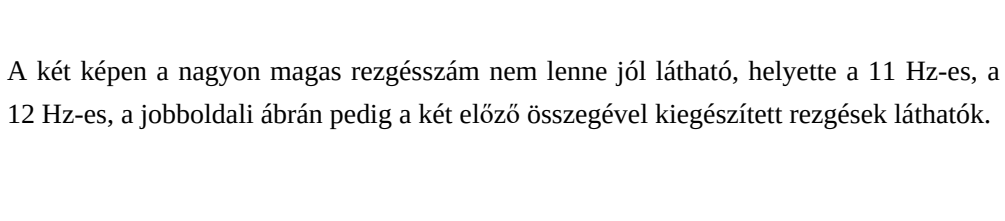
Ezt hívjuk felhangskálának. (Érdekességként érdemes megemlíteni, hogy a hangok különböző hangszínét éppen ezen felhangok különböző erőssége határozza meg. A fuvola hangjában pl. a felhangok egyenletesen csökkenő erősségűek, míg a klarinét felhangjai a csökkenő erősség mellett kissé hiányosak: minden második felhang hiányzik.)

Korábbi tapasztalatainkból érdemes rögzítenünk, hogy az oktávok frekvenciái mindig az előzők kétszeresei (2ν), míg a kvinteket egy 3/2-es szorzással állíthatjuk elő ($3/2\,\nu$).

Mitől szól szépen két hang együtt? Közelítsük meg máshonnan a kérdést. Szép-e együtt a 440 Hz-es és a 441 Hz-es hang? (A 440 Hz-es hang azt jelenti, hogy a húr, a levegő részecskéi, a dobhártyánk, … éppen 440-et rezeg egy másodperc alatt. A 440 Hz-es hangot nevezzük a zenei A hangnak, erre hangolnak a zenekarok.)

Érdemes letölteni egy hanggenerátort a telefonunkra. Ilyen igen sokféle található. Például a Frequency Sound Generator segítségével egyszerre több frekvenciájú hangot is hallhatunk.

A két képen a nagyon magas rezgésszám nem lenne jól látható, helyette a 11 Hz-es, a 12 Hz-es, a jobboldali ábrán pedig a két előző összegével kiegészített rezgések láthatók.



A hangfelvételekre kattintva a 440 Hz-es, a 441 Hz-es, valamint e kettő összegét (a két hang együttes hangját) hallgathatjuk meg.

440 Hz-es hang:

441 Hz-es hang:

a két hang összege:

Ha külön-külön hallgatjuk e két hangot, nem halljuk a különbséget. Ellenben együtt érdekes hanghatást figyelhetünk meg: a hallott hang egy változó intenzitású hang lesz. Ennek okát igen egyszerűen magyarázhatjuk matematikailag.

A két rezgés:

$$y_1(t)=A\sin(440t)$$
$$y_2(t)=A\sin(441t)$$

A kettőt összeadva a következő függvényt kapjuk:

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)=A\sin(440t)+A\sin(441t)=$$

$$=2A\cdot\cos\left(\frac{440-441}{2}t\right)\cdot\sin\left(\frac{440+441}{2}t\right)=2A\cdot\cos(0{,}5t)\cdot\sin(440{,}5t)$$

A kapott eredményen látszik, hogy a rezgés továbbra is szinuszos (a kettő átlagával, egy 440,5 Hz-cel rezgő hangot hallunk), melynek amplitúdója lassan — 0,5 Hz-cel — változik. (A 440,5 Hz-hez képest a 0,5 Hz igen kicsi frekvenciájú.) Ezt halljuk lebegésszerűnek.

Maga a hallható hangzás nem túl szép, de kiválóan használható hangoláshoz: amikor a két hang frekvenciája igen közel van egymáshoz, a lebegés lassan megszűnik:

$$y(t)=\lim_{\varepsilon\to0}\left[A\sin(440t)+A\sin\left((440+\varepsilon)t\right)\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left[2A\cdot\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}t\right)\cdot\sin\left(\left(440+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\right)\right]=2A\sin(440t)$$

Ugyanígy nem túl szép két hang együtt, ha felhangjai között van „súrlódás”, vagyis van olyan két felhang, melynek frekvenciái igen közel vannak egymáshoz.

A legszebb két hang, mely igen kellemesen együtt szól, a tiszta prím, vagyis az, mikor két ugyanolyan frekvenciájú hang szól. (Azonos a két hang.) Ekkor természetes, hogy minden felhang megegyezik. Ha a két hang egy oktávnyira van egymástól, akkor egész sok egyezés található a felhangok között, s alig van néhány hang, mely „súrlódik”. A kvarttal és a kvinttel már sokkal több baj van. Mint az alábbi táblázatból látszik, jóval kevesebb az egyezés. (A ', '', ''', stb. jelzések azt jelentik, hogy hány vonalas hangról van szó, vagyis, hogy az alaphang felett hány oktávval van a hang magasabban.)

C	C'	G'	C''	E''	G''	B''	C'''	D'''	E'''	Fisz'''	G''''
ν	2ν	3ν	4ν	5ν	6ν	7ν	8ν	9ν	10ν	11ν	12ν
	C'		C''		G''		C'''		E'''		G''''
	ν'		$2\nu'$		$3\nu'$		$4\nu'$		$5\nu'$		$6\nu'$
		G'			G''			D'''			D''''
		ν^*			$2\nu^*$			$3\nu^*$			$4\nu^*$

A kvintnél az G alaphangra épülő sorban igen kevés egyezés van (G', G'', D''', G''''):

G **G'** D'' **G''** H'' **D'''** F''' G''' A''' H''' E'''' **G''''**

A kvartnál az F alaphangra épülő sorban még kevesebb egyezés van (C'', C''', G'''):

F F' **C''** F'' A'' **C'''** Esz''' F''' **G'''** A''' H''' F''''

A zenében a terc igen későn került a játszott hangközök közé. Ezt a hangközt igen sokáig disszonánsnak tartották.

A következő hangmintákat meghallgatva egészen archaikusnak tűnik az oktáv, illetve régies, gregoriánszerű a kvint párhuzamban hallható Tavaszi szél vizet áraszt kezdetű dal. (A szekund távolságra lévő két szólamot bántó hallgatni.)

tiszta prím:

oktáv:

kvint:

szekund:

A pitagoraszi hangsor

Ha csupán az oktávot tekintjük szépen konszonáns hangzatnak, akkor a többi hangközt nem fogjuk használni.

A kvint is igen szépen együttcsengő hangköz. Használjuk fel a skálánk felépítéséhez. Mielőtt matematikázunk, ismételjük át egy kicsit a fizikai ismereteinket!

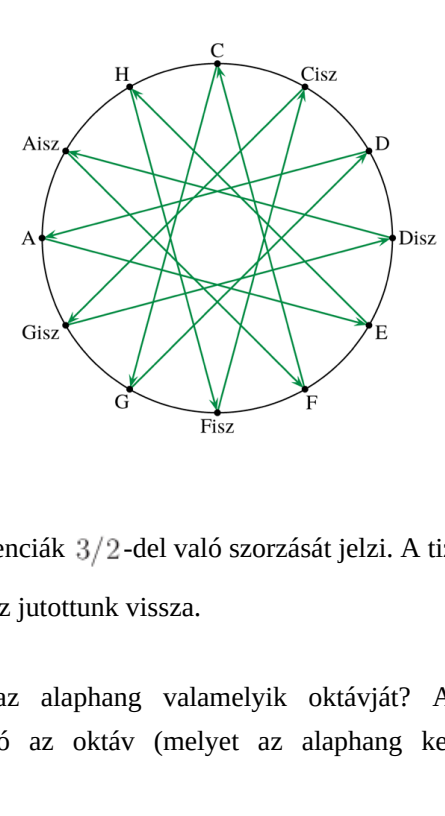
Tanultuk, hogy a levegőben kb. 340 m/s a hang sebessége, ami nem más, mint az egyetlen hanghullám hullámhossza osztva a hozzá szükséges idővel, a periódusidővel, vagy másként: a hullámhossz és a frekvencia szorzata.

$$c=340\ \text{m/s}\left(=\frac{\lambda}{T}\right)=\lambda\cdot\nu$$

Az adott közegben ez a sebesség állandó, tehát a hullámhossz (λ) és a frekvencia (ν) fordított arányban áll egymással. Az előzőeket egy táblázatban összefoglalva láthatjuk az összefüggéseket a zenei kifejezések (oktáv, kvart, kvint) között. Alaphangnak a gitár legalsó, legvastagabb húrját, az E húrt választottuk:

	λ	ν
alaphang (E)	λ_0	$\nu_0\,(=164{,}8$ Hz$)$
kvart (A)	$\frac{3}{4}\lambda_0$	$\frac{4}{3}\nu_0\,(=219{,}7$ Hz$)$
kvint (H)	$\frac{2}{3}\lambda_0$	$\frac{3}{2}\nu_0\,(=247{,}2$ Hz$)$
oktáv (e)	$\frac{1}{2}\lambda_0$	$2\nu_0\,(=329{,}6$ Hz$)$

A következőkben válasszuk alaphangnak az egyvonalas c hangot. Mint az előzőekből látható volt, ennek a kvintjét úgy kaphatjuk meg, hogy a c hang frekvenciáját 3/2-del szorozzuk. Így nyerjük az egyvonalas g hangot. Ennek a kvintjét ismét egy 3/2-des szorzással állíthatjuk elő. Ez lesz a kétvonalas d hang. Az eljárást folytatva az a, e, h, fisz, cisz, gisz, disz, aisz, fiszisz(=f) és c hangokat kapjuk. Látható, hogy az eljárásunk segítségével, kvintugrásokkal előállítottuk az európai zenében előforduló összes hangot. Szokás ezt a lépéssorozatot a kvintkörön ábrázolni:



A nyilak iránya a frekvenciák $3/2$-del való szorzását jelzi. A tizenkettedik ugrás után az alaphang egy oktávjához jutottunk vissza.

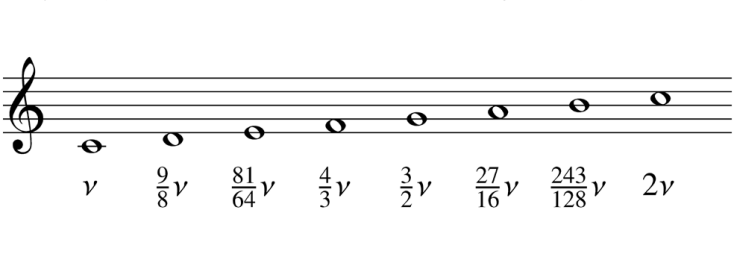
Valóban megkaptuk az alaphang valamelyik oktávját? A frekvenciákat 3/2-del szorozgatva előállítható az oktáv (melyet az alaphang kettővel való szorzásával nyerhetünk)?

$$\nu\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\overset{?}{=}\nu\cdot2^k$$

Az egyenlőség igaz lehet? Természetesen nem, hiszen $2^p\neq3^r$. A hiba viszont olyan elenyésző, hogy — néhány kiváló zenésztől eltekintve — mindenki élvezni fogja így is a muzsikát. Részletezve az állítást:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12}\approx2^7$$

A kvintugrásokkal felépített skálával nyerhetjük a pitagoraszi hangsort. Ehhez csupán annyit kell tennünk, hogy néhány esetben az egy oktávval lejjebbi hangot választjuk a kapott hang helyett. (Ez a frekvencia 2-vel való osztását jelenti.)



Az egyes hangok közötti hangközök így a következőképpen alakulnak:

c	d	e	f	g	a	h	c
ν	$\frac{9}{8}\nu$	$\frac{81}{64}\nu$	$\frac{4}{3}\nu$	$\frac{3}{2}\nu$	$\frac{27}{16}\nu$	$\frac{243}{128}\nu$	2ν
$\frac{9}{8}\nu$	$\frac{9}{8}\nu$	$\frac{256}{243}\nu$	$\frac{9}{8}\nu$	$\frac{9}{8}\nu$	$\frac{9}{8}\nu$	$\frac{243}{128}\nu$	

Az így nyert pitagoraszi hangsor valóban szép hangközöket eredményez egy adott alaphangról kiindulva. A későbbi zenében (barokk kortól kezdve) felmerült az igény, hogy a zenemű közben más hangnembe, egy más alaphangról indított skálába is szeretnének áttérni a zenészek. Ebben a skálában viszont a legtisztább hangközeink (kvart, kvint) nem lesznek már olyan szép konszonánsak, mint az alapskálában. (Pl. a c-ről indított skálában a „végén” csalnunk kellett, hogy az oktávhoz visszatérjünk. Ha példának okául a H hangot vesszük alapul, akkor a csalás miatt most már a kvint sem lesz tiszta konszonáns…)

Bach idejében ezt az eltérést egy Zarlino nevű zenetudós megelőző kutatásai alapján úgy oldották meg, hogy az alaphang és oktávja közötti részt 12 teljesen egyforma hangközre bontották fel. A kérdés az volt, hogy mi lehet az a szám, mellyel 12-szer megszorozva az alaphang frekvenciáját, az oktávhoz jutunk. Matematikailag felírva

$$2\nu_0=x^{12}\cdot\nu_0$$

egyenlet megoldását jelenti. $x=\sqrt[12]{2}$ lesz ez a szám, mellyel két egymás melletti hangközt (kis szekundot) előállíthatjuk. A kvint most nem lesz olyan szép, konszonáns hangköz, hiszen

$$\frac{3}{2}\cdot\nu_0=\left(\sqrt[12]{2}\right)^7\approx1{,}4983\cdot\nu_0,$$

de az eltérés elhanyagolható talán. A hangszereinket ma így hangolják (temperált skála), s a parányi eltérések kiküszöbölésére a zenész hivatott.

Kezdő tanár koromban is szívesen forgattam Sain Marci bácsi matematikatörténeti könyvét, a Nincs királyi utat. Szeretettel ajánlom tanítványaimnak ma is, ezt a ma már csak könyvtárban fellelhető remekművet. A cikk e művel való „összecsengése” tehát nem a véletlen műve, kedvenc irodalmam volt ez a könyv.

A rövid írás figyelemfelkeltő szeretne csupán lenni, minden teljességre, részletre való törekvés nélkül. Az előadás szűkre szabott ideje (30 perc) is hasonlóképpen ízelítőt kívánt adni a zeneelméletről, s a benne rejlő matematikáról, fizikáról. Igyekeztem, hogy e hatalmas anyagban minden korosztály számára legyen a matematikaórákhoz kapcsolódó érdekes kitekintés. Kérem, hogy mindenki kedvére folytassa a kísérletezést, s a zene matematikai felfedezéseit.

Székely Péter

Székely Péter a budapesti Eötvös József Gimnázium matematika, fizika és informatika szakos tanára. Gyermekkora óta zenél, elvégezte a budapesti Bartók Béla Zeneművészeti Konzervatóriumot, s ma is örömmel muzsikál zenésztársaival (Triola Fúvósegyüttes). Zeneszeretetét igyekszik gyermekeinek, tanítványainak is átadni.

alkalmazott matematika alkalmazott fizika

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatvédelem
Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 6. szám 2017. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Besenyei Ádám, Faragó István 2017. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Búcsú Mezei Istvántól

Mindenkit váratlanul és mély megdöbbenéssel ért a hír, hogy kollégánk és barátunk, Mezei István 2017. november 4-én, 71 éves korában eltávozott közülünk. A súlyos betegségével vívott egyenlőtlen küzdelmet feladva úgy távozott, amilyen egész életében volt: csendben elaludt, senkit nem terhelve a személyes tragédiájával.

A hírt nem akartuk elhinni, hiszen István maga volt az állandóság, az örök fiatalság, a szellemi frissesség, tettrekészség példaképe. Egyik volt tanítványa ezt írta a hír hallatára. „Eszembe se jutott, hogy ő meghalhat. Talán azért, mert mióta csak megismertem, mindig ugyanaz a lelki béke áradt belőle, ami egy szelíd és kiegyensúlyozott időtlenséget kölcsönzött neki. A halál meg valahogy túl van ezeken a kategóriákon. Talán számára tényleg túl is volt”. Igen, Pista ezek felett állt, és ezért minden bizonnyal most is itt van közöttünk.

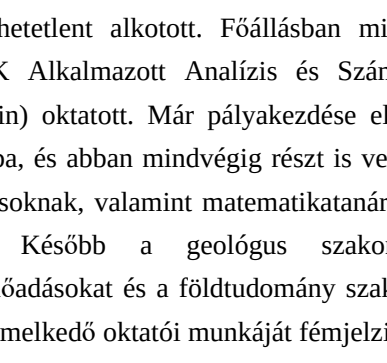
István 1969-ben matematika-fizika szakos középiskolai tanárként végzett az ELTE Természettudományi Karán. Ezt követően került az Analízis II. Tanszékre, ahol kezdetben gyakornokként, majd egyetemi tanársegédi, később pedig nyugdíjazásáig egyetemi adjunktusi beosztásban dolgozott. Nyugdíjasként is mindvégig tanított, a katedrától csak a kegyetlen sors távolíthatta el.

Pista a tudományt magas szinten művelő, igazi tanárember volt. Minden területen, ahol csak alkotott, a legmagasabb szintet érte el.

Matematikusnak egészen széles látókörű, szinte minden területhez értő szakember volt. Alig volt olyan téma, ahol ne lett volna járatos, és ebben nagy segítségére volt mély ismerete a fizika területéről.

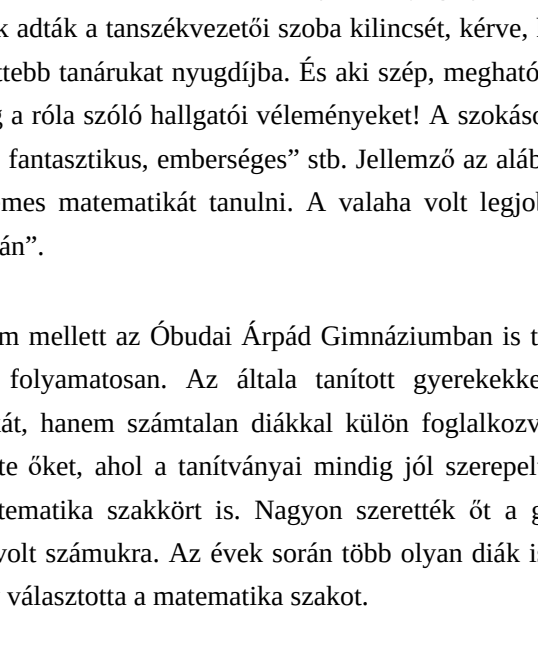
Pályakezdőként a tanszék kutatásaiba bekapcsolódva a variációszámítás és az optimális folyamatok elmélete témaköreiben végzett tudományos munkát. Egyetemi doktori értekezését 1980-ban Végtelen idejű diszkrét optimális folyamatok vizsgálata címmel írta. Eredményeiből 1983-ban a Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, valamint 1984-ben az Annales Universitatis Scientiarium Budapestinensis Sectio Computatorica folyóiratban közölt cikket. A variációszámítás témakörének a tanár szakosok körében való népszerűsítésére született 1982-ben az ELTE TTK Szakmódszertani Közleményeiben a differenciáljátékokról szóló írása. Az analízis oktatásához kapcsolódik az 1986-ban a Műszaki Könyvkiadó gondozásában, társszerzőkkel írt Analízis példatár címmel megjelent feladatgyűjteménye, amely a mai napig az egyik legtöbbünk által használt példatár. Fontos megemlíteni a 2014-ben, a TypoTeX gondozásában megjelent, ugyancsak társszerzőkkel közösen írt „Bevezetés az analízisbe”, illetve „Introductory course in analysis” című könyveit, amelyek számos helyen most is alaptankönyvként szerepelnek.

Pista vérbeli tanár, pedagógus volt. Munkásságának ez volt az a területe, ahol lubickolt, feledhetetlent és utolérhetetlent alkotott. Főállásban mindvégig az Eötvös Loránd Tudományegyetem TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszéken (illetve annak jogelődjein) oktatott. Már pályakezdése elején bekapcsolódott a tanár szakos analízis oktatásába, és abban mindvégig részt is vett. Emellett az esti tagozaton programozó matematikusoknak, valamint matematikatanár szakosoknak tartott analízis előadást, gyakorlatot. Később a geológus szakon a matematika és a differenciálegyenletek előadásokat és a földtudomány szakon az első éves matematika előadást is ő tartotta. Kiemelkedő oktatói munkáját fémjelzi, hogy a hallgatók szavazatai alapján két alkalommal is a Kar Kiváló Oktatója címben részesült.



Órái legendásak voltak, szinte minden hallgató az ő csoportjába szeretett volna bekerülni. Amikor életkora miatt elterjedt a nyugdíjazásának híre, hallgatók csoportjai egymásnak adták a tanszékvezetői szoba kilincsét, kérve, hogy ne küldje el a legjobb és legszeretettebb tanárukat nyugdíjba. És aki szép, megható dolgokat szeretne olvasni, az nézze meg a róla szóló hallgatói véleményeket! A szokásos jelzők: „kedves, jóindulatú, követhető, fantasztikus, emberséges” stb. Jellemző az alábbi vélemény: „Az a tanár, aki miatt érdemes matematikát tanulni. A valaha volt legjobb oktató, akivel találkoztam életem során”.

Az egyetem mellett az Óbudai Árpád Gimnáziumban is tanított, kisebb megszakítással 1987 óta folyamatosan. Az általa tanított gyerekekkel nemcsak megszerettette a matematikát, hanem számtalan diákkal külön foglalkozva, tanulmányi versenyekre is felkészítette őket, ahol a tanítványai mindig jól szerepeltek. Emellett több osztályban tartott matematika szakkört is. Nagyon szerették őt a gyerekek, meghatározó tanári példakép volt számukra. Az évek során több olyan diák is akadt, aki Pista hatására lett tanár vagy választotta a matematika szakot.

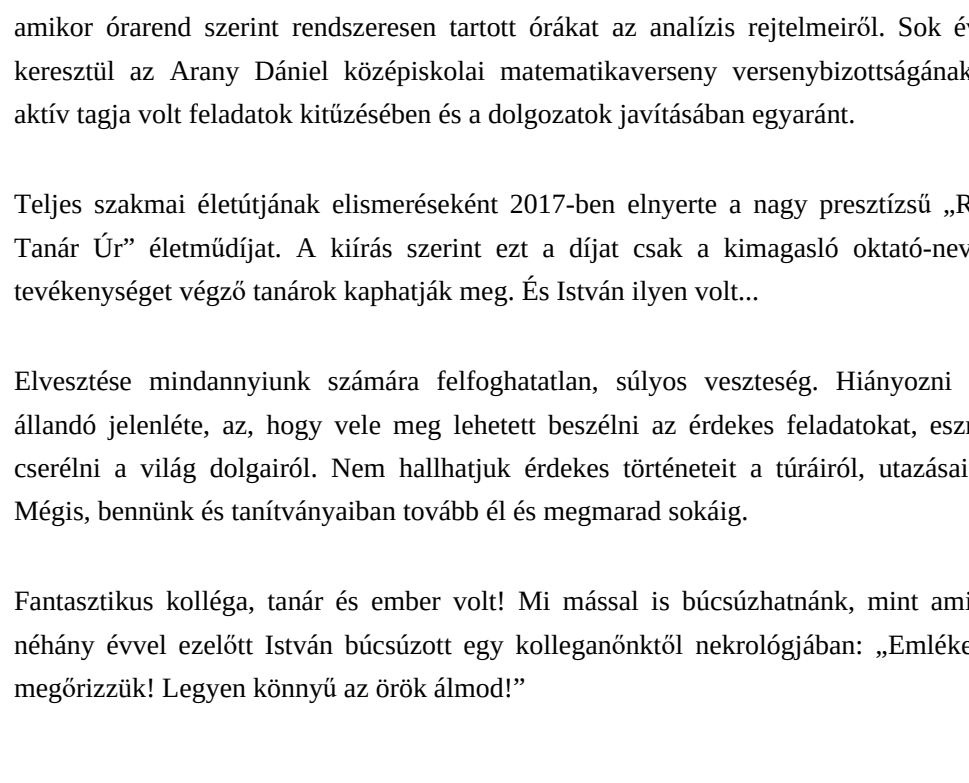


A tantestületi kollegáknak külön szakmai előadásokat is tartott. Voltak olyan évek, amikor órarend szerint rendszeresen tartott órákat az analízis rejtelmeiről. Sok éven keresztül az Arany Dániel középiskolai matematikaverseny versenybizottságának is aktív tagja volt feladatok kitűzésében és a dolgozatok javításában egyaránt.

Teljes szakmai életútjának elismeréseként 2017-ben elnyerte a nagy presztízsű „Rátz Tanár Úr” életműdíjat. A kiírás szerint ezt a díjat csak a kimagasló oktató-nevelő tevékenységet végző tanárok kaphatják meg. És István ilyen volt...

Elvesztése mindannyiunk számára felfoghatatlan, súlyos veszteség. Hiányozni fog állandó jelenléte, az, hogy vele meg lehetett beszélni az érdekes feladatokat, eszmét cserélni a világ dolgairól. Nem hallhatjuk érdekes történeteit a túráiról, utazásairól. Mégis, bennünk és tanítványaiban tovább él és megmarad sokáig.

Fantasztikus kolléga, tanár és ember volt! Mi mással is búcsúzhatnánk, mint amivel néhány évvel ezelőtt István búcsúzott egy kolleganőnktől nekrológjában: „Emlékedet megőrizzük! Legyen könnyű az örök álmod!”



Besenyei Ádám, Faragó István
ELTE TTK, Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

A megemlékezés a Matematikai Intézet honlapján jelent meg: http://www.math.elte.hu/wp-content/uploads/2014/11/MI_megemlekezes.pdf

Kollégája, *Buczolich Zoltán* egyetemi tanár (ELTE TTK, Analízis Tanszék), a fényképek készítője, egészen más módon búcsúzott Pistától, a túrázás szerelmesétől. Érdemes elolvasni: http://www.math.elte.hu/wp-content/uploads/2014/11/istvanintezetblack.pdf

Mezei István nagyon örült, amikor megtudta, neki ítélték oda a 2017. évi Rátz Tanár Úr Életműdíjat. A díjátadót már nem tudta megvárni... https://vimeo.com/244335129

nekrológ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: Default sablon Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

100

Cím	Szerző
Kellenek a kiváló tanárok	Írta: Szerkesztő
Császár Ákos (1924 — 2017)	Írta: Szerkesztő
VTN 2017 — Varga Tamás Módszertani Napok huszonkilencedszer	Írta: Vancsó Ödön
Munkalehetőségek az alkalmazott matematikában — honlapajánló	Írta: Szerkesztő
Diáktalálkozó a felvidéki Komáromban 25. alkalommal	Írta: Oláh Vera
Arckép helyett	Írta: Oláh Vera
Máté László	Írta: Tóth János
Búcsú Mezei Istvántól	Írta: Besenyei Ádám, Faragó István
Újra tanulni, újat tanulni! — Interjú dr. Kelemen Bélával	Írta: Illés Tibor, Romsics Erzsébet
Miért éppen LaTeX?	Írta: Fried Katalin
A zenében rejlő matematika	Írta: Székely Péter
MedveMatek	Írta: Gyimesi Bernadett
Gondold tovább! – 2.	Írta: Katz Sándor
Matematikaoktatás az MIT-n	Írta: Csikvári Péter
Diáktalálkozó a felvidéki Komáromban 25. alkalommal	Írta: Oláh Vera
VTN 2017 — Varga Tamás Módszertani Napok huszonkilencedszer	Írta: Vancsó Ödön
Kellenek a kiváló tanárok	Írta: Szerkesztő
Kísérletek tervezése és értékelése	Írta: Héberger Károly
Izsák Imre — életrajz egy magyar csillagászról	Írta: Ladics Tamás
600 válogatott feladat matematikaversenyekre	Írta: Gyenes Zoltán
Munkalehetőségek az alkalmazott matematikában — honlapajánló	Írta: Szerkesztő
Arckép helyett	Írta: Oláh Vera
Mi is ... egy kvantumcsoport?	Írta: Shahn Majid
Matematikaoktatás az MIT-n	Írta: Csikvári Péter
Waveletek – A 2017. évi Abel-díjjal kitüntetett Yves Meyer munkásságáról	Írta: Schipp Ferenc
A zenében rejlő matematika	Írta: Székely Péter
Búcsú Mezei Istvántól	Írta: Besenyei Ádám, Faragó István
Újra tanulni, újat tanulni! — Interjú dr. Kelemen Bélával	Írta: Illés Tibor, Romsics Erzsébet