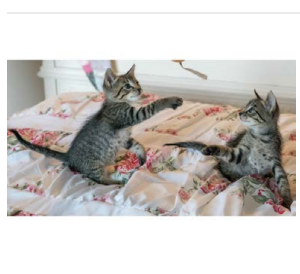
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

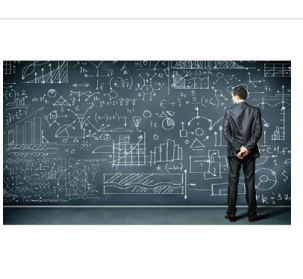
3. szám 2017. március



2017. MÁRCIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

Matematikusokról mindenkinek

Mit csinál egész nap egy elméleti matematikus? Hányan értik az eredményeit? Meg tud-e élni a fizetéséből? És lehet-e belőle igazi sztár? Minden, amit tudni akartál a matematikusokról, de sosem merted megkérdezni. Aki kérdez: *Szamuely Tamás*. Aki válaszol: *Szamuely Tamás*.



2017. MÁRCIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

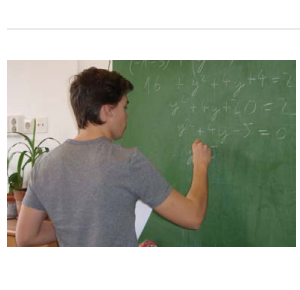
Schweitzer Miklós és a Matematikai Emlékverseny

A Bolyai János Matematikai Társulat 1949-ben az egyetemi hallgatók számára alapított egy versenyt, amelyet a 22 éves korában elhunyt tehetséges matematikus emlékére *Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenynek* nevezték el. A verseny formája és színvonala igen szokatlan volt, 10 napra 10-12 feladat a matematika különböző területeiről. A legszokatlanabb az volt, hogy a versenyzők otthon, vagy a könyvtárban törhették a fejüket, de a feladatok színvonala is messze meghaladta más ismert versenyekét. Azt, hogy ezeket az akkor újszerű feltételeket jól találták ki annak idején a létrehozók, mi sem bizonyítja jobban, hogy a verseny 68 év után is létezik és sikeres.

2017. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

RMM − Romanian Master of Mathematics

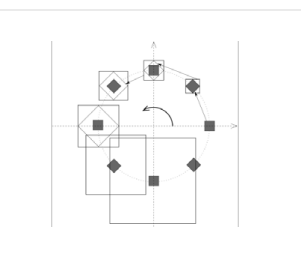
Két beszámolót közlünk egy viszonylag fiatal nemzetközi versenyről, amelyre 2009 óta minden év februárjának végén kerül sor Bukarestben. Az egyiket *Pelikán József* írta, aki évtizedek óta a magyar matematikai diákolimpiai csapat vezetője, míg a másikat a legutóbbi versenyen is részt vett *Williams Kada*, aki lejegyezte a csapattagok közös élményeit.



2017. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Így készüljünk az emelt szintű szóbelire – feladatjavaslatok próbaszóbelire

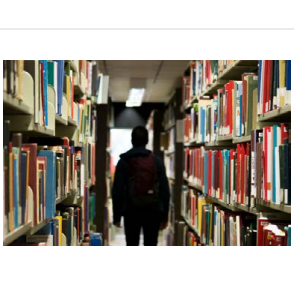
Az emelt szintű matematika érettségi írásbeli és szóbeli vizsgarészből áll. A matematika érettségi pontszámának döntő részét, 115 pontot, az írásbelin lehet megszerezni. Ugyanakkor nem szabad kockára tenni a szóbelire kapható 35 pontot sem. Ebben a cikkben néhány gondolatot írunk le a szóbelire való készülés módszeréről és minden témakörhöz ajánlunk két-két feladatot, amit a témakörök kidolgozásánál és egy próbaszóbelin is használhatunk. A gyakorláshoz tegyünk ki az asztalra egy órát, ami 15 perc elteltével jelez.



2017. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Megbízható számítások

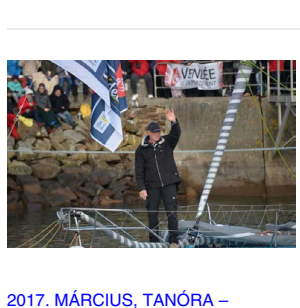
A cím kissé rejtélyes: a számítógépes algoritmusok a köztudat szerint pontosak és megbízhatók. Az alku során az ügynökök végső érve gyakran az, hogy a kalkulátor is a mondott számot mutatja. Ezzel szemben sajnos fontos feladatok megoldása során is azzal szembesülünk, hogy a kapott eredmény csak közelítő érték, és gyakran kritikus esetben a kapott szám nagyságrendje, vagy az előjele sem helyes. Ennek ellenére van olyan számítógépes módszertan, amely biztosítani tudja a numerikus számítások tetszőleges pontosságát és megbízhatóságát. *Csendes Tibor* megismertet az intervallum-aritmetikával.



2017. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Könyveket ajánlunk; honlapokat ajánlunk

Könyvajánlóinkat és honlapajánlóinkat ebben a számunkban is megtalálják Olvasóink, ezzel színesítve az olykor nehezebb tudományos munkák és hosszú matematikatörténeti kifejtések sorát. Amit itt találnak, az könnyed és rövid :-)



2017. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Két pont között legrövidebb út az egyenes? Kérdezzük meg Fa Nándort...

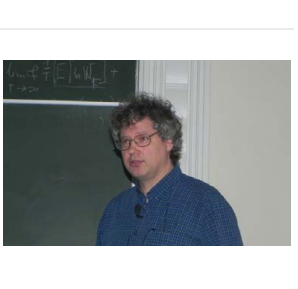
A cikk apropója *Fa Nándor* kiváló sportteljesítménye a Vendée Globe földkerülő vitorlás versenyen. A rendkívül nehéz fizikai igénybevétel mellett a verseny nehézsége többek között abból áll, hogy meg kell tervezni az optimális útvonalat úgy, hogy a szél alapvetően befolyásolja a távolságmérést (adott pontokban az időegység alatt elérhető pontok halmazát), és így a tér geometriáját.

Jordan Ellenberg
hogy (ne) tévedjünk

2017. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Hogy ne tévedjünk – Wald Ábrahám és a hiányzó lövedéknyomok

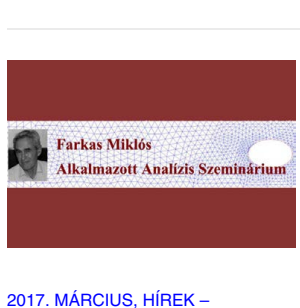
Mennyivel korábban célszerű kimenni indulás előtt a repülőtérre? Valójában mit árul el a közvélemény-kutatás? Milyen lottózási módszer vezet a legbiztosabban a meggazdagodáshoz? *Jordan Ellenberg* könyve, a Hogy ne tévedjünk megdöbbentő felfedezésekre világít rá egyes-egyedül a matematikus módszerével, de nem a matematikusok által használt szaknyelven. A könyv egy fejezetét a Park Könyvkiadó szíves engedélyével közöljük.



2017. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is ... egy Maass-forma?

A Maass-formák – vagy általánosabban az automorf formák – harmonikus hullámok, amelyek speciális szimmetriákkal rendelkeznek. Felfedezőjük Hans Maass. A matematika több híres megoldatlan problémája – pl. a Ramanujan-Selberg-sejtés, a Langlands-program, vagy az általános Riemann-sejtés – hozható kapcsolatba a Maass-formákkal. A fényképen a szerző, *Harcos Gergely* (foto: *Hubert Tibor*).



2017. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

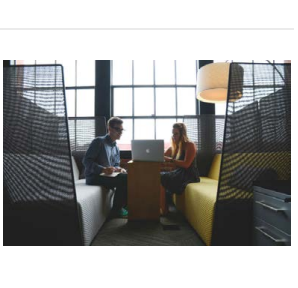
Farkas Miklós Alkalmazott Analízis Szeminárium a BME Matematika Intézetében

A BME Matematika Intézet Analízis és Differenciálegyenletek Tanszékének közös Alkalmazott Analízis Szemináriuma 2016. őszén indult *Faragó István*, a BME TTK Differenciálegyenletek Tanszék egyetemi tanárának kezdeményezésére. A szeminárium 2017. januárjától felvette a *Farkas Miklós* Alkalmazott Analízis Szeminárium nevet. A szervezők ezzel is szeretnének emléket állítani a BME egykori tanszékvezető matematikaprofesszorának.

2017. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Szemelvények a magyar matematikai műnyelv történetéből

Mi, matematikatanárok, kényesek vagyunk a szaknyelv használatára. Diákjainktól maximális precizitást várunk el a szakszavak használatában. Ritkán gondolkozunk el azon, hogy miért tapasztalható sokszor ugyanaz a hiba a diákok szóhasználatában, miért tévesztik el mindig, hogy melyik a *nevező* és melyik a *számláló*, miért nem tudják rögtön megmondani, hogy egy síkidom vagy egy görbe *konvex*-e vagy *konkáv*.



2017. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

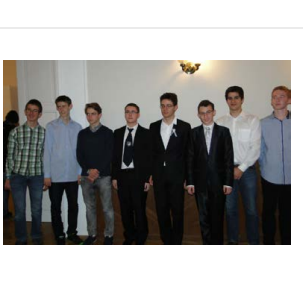
Karrierlehetőségek az akadémián kívül: Hogyan készüljenek fel a matematikus és az alkalmazott matematikus hallgatók?

A SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) Ipari és Alkalmazott Matematikai Társaság matematikával, számítástudománnyal, informatikával és alkalmazásaikkal foglalkozók és ezeket tanuló diákok philadelphiai székhelyű nemzetközi szervezete. Folyóirata a SIAM News, amelynek 2016. szeptemberi számában jelent meg ez az írás. A leírtak az USA-beli adatokat és tapasztalatokat ismertetik, de hasonló a helyzet Magyarországon is, például az ELTE-n mesterszakon végzett matematikusok mintegy 80%-a vállalatoknál helyezkedik el. A cikk szerzői: *Lalitha Venkataramanan, Rachel Levy és Bill Kolata*. Fordította: *Molnár-Sáska Gábor*.

2017. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Repülő Iskola

A felfedeztető matematikatanítás egyik hazánkban kidolgozott irányzata, a *Pósa Lajos* által kifejlesztett módszer kiemelkedően tehetséges diákok körében már lassan 30 éve kiválóan működik. Az MTA Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programjának fontos részét képezi az, hogy megvizsgálják a módszert abból a szempontból, hogy mely elemei, milyen mértékben alkalmazhatóak széles körben a közoktatásban. A Repülő Iskola kísérleti program ezer matematika iránt érdeklődő kilencedik osztályost keres fel 2017-ben.



2017. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Kürschák József Matematikai Tanulóverseny

A 2016. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny díjazottjai a fényképen (balról): *Kovács Benedek, Molnár-Sáska Zoltán* és *Bukva Balázs* a Budapesti Fazekas Mihály Gimnáziumból, *Gáspár Attila* a miskolci Földes Ferenc Gináziumból, *Williams Kada* és *Lajkó Kálmán* a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnáziumból, kettőjük között *Tóth Viktor* a Kaposvári Táncsics Mihály Gimnáziumból. Gimnáziumból. (Ráadásul még egy Táncsisos: *Borbényi Márton*)

2017. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

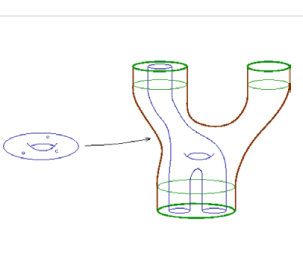
Babai és a gráf-izomorfizmus probléma

Babai László korábban az ELTE algebraprofesszora volt, ma a chicagoi egyetemen tanít számítástudományt és matematikát (ld. a fényképen). 2015 novemberében egy háromrészes chicagoi előadássorozatában jelentette be, hogy kvázipolinomiális algoritmust talált a gráf-izomorfizmus probléma megoldására. Ez egy olyan, egyszerűen megfogalmazható probléma, amit rendkívül nehéz megoldani.

2017. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Számítógép a matematikaversenyeken

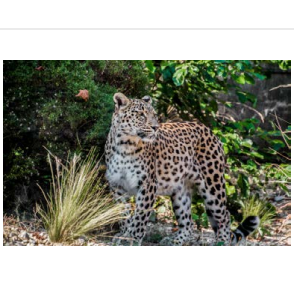
Valamennyi (magyar vagy nemzetközi) zárthelyi versenyen tilos nemcsak számítógépek, hanem kis kézi számológépek (további mobiltelefonok) használata is. Ezenkívül könyveket és jegyzeteket (saját kézzel írottakat is) tilos használni. A Kürschák-versenyen még néhány éve könyv és jegyzet engedélyezett volt, most már ott is tilos. Marad a körző és vonalzó... Vagy mégsem? Mi a helyzet az egyetemisták számára rendezett Putnam-verseny egyik példájával? Vagy a Schweitzer Miklós Emlékverseny feladataival? Mennyire ismeri egy „rendes” matematikus a matematikai programcsomagokat? *Tóth János* véleménye az, hogy igenis, kellene olyan versenyeket is rendezni, ahol lényegesen kihasználható valamely programcsomag a matematikai feladat megoldásához.



2017. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is ... egy pszeudo-holomorf görbe?

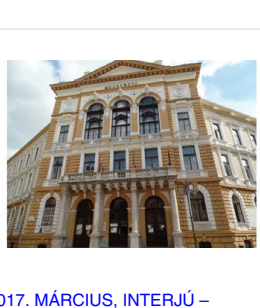
Görbéket mind a differenciálgeometriában, mind az algebrai geometriában hosszú ideje tanulmányoznak. A klasszikus elmélet számunkra most érdekes változata a „komplex” vagy „holomorf” görbék elmélete. A pszeudo-holomorf görbe fogalma a holomorf görbe természetes módosítása. A pszeudo-holomorf görbe fogalmát Gromov vezette be 1986-ban, amivel gyökeresen alakította át a szimplektikus topológiát, és több más közeli diszciplínára, például algebrai geometriára, húrelméletre, 4-sokaságok elméletére volt döntő hatással. *Simon Donaldson* írása, amelyet *Stipsicz András* fordításában közlünk, az Amerikai Matematikai Társaság Notices folyóiratának What is...? rovatában jelent meg.



2017. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Csúcsragadozók vagyunk?

A csúcsragadozó a táplálékláncolat tetején helyezkedik el, ő semmilyen más élőlénynek nem tápláléka/áldozata (Wikipédia). A recenzió természete, hogy mások munkájáról szól. Most épp egy olyan blogra hívjuk fel a figyelmet, amely matematikus blogokat ismertet: a Notices of the AMS című lapban sok érdekesség olvasható.



2017. MÁRCIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

Faragó Andorról – két tételben II. Tanár és lapszerkesztő a XX. században

Radnai Gyula cikkének első része Faragó Andorról (Felkészülés a tanári pályára a XIX. század végén) 2016. decemberi számunk Interjú–portré rovatában olvasható. Ebben a részben megtudhatjuk, hogyan indította újra Faragó Andor a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokat. A fényképen a mai Óbudai Egyetem egyik épülete, az egykori Tavaszmező utcai főgimnázium, ahol Faragó Andor 27 éven át tanított matematikát és fizikát.

2017. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Megjegyzések az adatbányászatról jégkorongcsapatok összeállítása ürügyén

Nemrégiben olvastam egy izgalmas cikket *Südy Barbara* (BME, Analízis Tanszék) tollából az Alkalmazott Matematikai Lapokban, mely arról szólt, hogyan optimalizáljuk jégkorongcsapatok összetételét adatbányászati módszerekkel. A korszerű statisztikai – és abból kinőtt – módszerek egy ilyen, első ránézésre igen csak szokatlan alkalmazása indított arra, hogy mint statisztikus, papírra vessek pár gondolatot e területről, és persze magáról a cikkről is, megfogalmazva egyúttal néhány javaslatot és tanulságot is.

Védőoltásokról
a tények alapján

2017. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Védőoltásokról a tények alapján

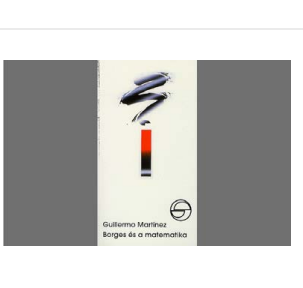
A védőoltásoknak köszönhetjük, hogy ma már biztonságban vagyunk a korábban brutálisan pusztító fertőzésektől. *Ferenci Tamás* szerint ahhoz, hogy ez a kedvező helyzet fennmaradjon, tudományos alapokon és bizonyítékokon nyugvó ismeretterjesztésre, és korrekt, a kockázatokat és az előnyöket is bemutató tájékoztatásra van szükség. A védőoltásokról a tények alapján c. könyv a szerző által írt vedooltas.blog.hu oldal anyagaiból nőtt ki. A védőoltások mechanizmusáról talán mindenki hallott valamennyit, arról azonban valószínűleg kevesen, hogy milyen szerepet játszhat itt a matematika.

PROGRAMOZÁS GYEREKEKNEK

2017. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Micsoda?! Programozás gyerekeknek?

Jelen sorok írója tízéves korában kezdett programozni tanulni, és ez meghatározó tapasztalat volt annak ellenére, hogy az akkori számítógépek nyújtotta felhasználói élmény össze sem lehet hasonlítani a ma megszokottal. A programozni tanulás egy mai gyerek számára is ugyanilyen lenyűgöző tud lenni. *Korn András* Carol Vorderman: Programozás gyerekeknek c. könyvét saját nyolcéves fián "tesztelte".



2017. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Borges és a matematika

Megkértünk egy kognitív tudományi hallgatót (*Farkas Dávidot*) és egy matematikai fizikus kollégát (*Andai Attilát*), írja meg véleményét ugyanarról a könyvről, Guillermo Martínez: Borges és a matematika című művéről. Szeretnénk más alkalmas írások esetén is találni recenzenspárokat mindannyiunk okulására. (*A rovatvezető előzetes megjegyzése.*)

Positive Operator Semigroups

2017. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Nemnegatív operátor-félcsoportok

Mik is azok a nemnegatív operátor-félcsoportok, és miért fontos ezek vizsgálata? *Bátkai András, Marjeta Kramar Fijavž és Abdelaziz Rhandi Nemnegatív operátor-félcsoportok (a végesből a végtelen dimenzióig)* című 364 oldalas monográfiája 2016 második felében jelent meg elektronikusan a Birkhäuser Kiadó gondozásában. A könyv nyomtatott formában várhatóan 2017 februárjától elérhető.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

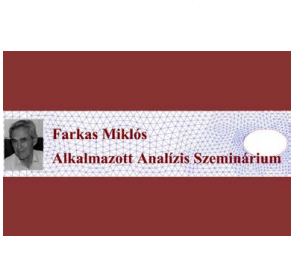
Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **HÍREK – ÚJDONSÁGOK** ROVAT A MATEMATIKÁHOZ ÉS A BOLYAI TÁRSULATHOZ KAPCSOLÓDÓ ESEMÉNYEKRŐL, ÚJDONSÁGOKRÓL SZÓL. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÁKÓCZI ILDIKÓ.)*

Pelikán József, Williams Kada
2017. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

RMM − Romanian Master of Mathematics

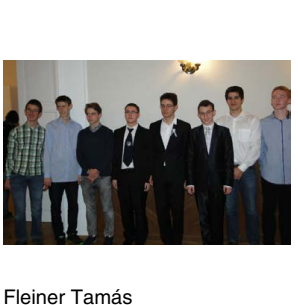
Két beszámolót közlünk egy viszonylag fiatal nemzetközi versenyről, amelyre 2009 óta minden év februárjának végén kerül sor Bukarestben. Az egyiket *Pelikán József* írta, aki évtizedek óta a magyar matematikai diákolimpiai csapat vezetője, míg a másikat a legutóbbi versenyen is részt vett *Williams Kada*, aki lejegyezte a csapattagok közös élményeit.



Faragó István
2017. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Farkas Miklós Alkalmazott Analízis Szeminárium a BME Matematika Intézetében

A BME Matematika Intézet Analízis és Differenciálegyenletek Tanszékének közös Alkalmazott Analízis Szemináriuma 2016. őszén indult *Faragó István*, a BME TTK Differenciálegyenletek Tanszék egyetemi tanárának kezdeményezésére. A szeminárium 2017. januárjától felvette a *Farkas Miklós* Alkalmazott Analízis Szeminárium nevet. A szervezők ezzel is szeretnének emléket állítani a BME egykori tanszékvezető matematikaprofesszorának.



Fleiner Tamás
2017. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Kürschák József Matematikai Tanulóverseny

A 2016. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny díjazottjai a fényképen (balról): *Kovács Benedek*, *Molnár-Sáska Zoltán* és *Bukva Balázs* a Budapesti Fazekas Mihály Gimnáziumból, *Gáspár Attila* a miskolci Földes Ferenc Gináziumból, *Williams Kada* és *Lajkó Kálmán* a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnáziumból, kettőjük között *Tóth Viktor* a Kaposvári Táncsics Mihály Gimnáziumból. Gimnáziumból. (Ráadásul még egy Táncsisos: *Borbényi Márton*)

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Pelikán József, Williams Kada 2017. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

RMM − Romanian Master of Mathematics

A „Romanian Master of Mathematics” verseny

A legrangosabb nemzetközi matematikaverseny, a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia (International Mathematical Olympiad – IMO) mellett számos regionális matematikaverseny létezik. Magyarország ezek közül kettőn vesz részt rendszeresen: a Közép-Európai Matematikai Olimpián (Middle European Mathematical Olympiad – MEMO), és az Európai Leány Matematikai Olimpián (European Girls' Mathematical Olympiad – EGMO). Az előbbit 2007 óta, az utóbbit 2012 óta évente rendezik, más-más országban. (Az első IMO éve 1959 volt.)

Van azonban egy rangos nemzetközi matematikaverseny, amelyet minden évben ugyanaz az ország rendez, a „Romanian Master of Mathematics” (RMM). Ez egy meghívásos verseny – a szervezők az IMO élmezőnyébe tartozó országokat hívják meg, kiegészítve néhány egyéb ország csapatával. A kitűzött feladatok nehézsége eléri, sőt néha meghaladja az IMO-feladatok átlagos nehézségét.

A versenyre 2009 óta minden év februárjának végén kerül sor Bukarestben. A szervezők generózusan állják az összes résztvevő szállásának és ellátásának költségét. A fő szervező Románia egyik legjobb középiskolája, a bukaresti Tudor Vianu Líceum, amit különböző szervezetek támogatnak. A támogatók egyike a Román Matematikai Társulat, amelynek elnöke, Radu Gologan évek óta a román IMO-csapatot is vezeti.

A versenyen az IMO-hoz hasonló rendszerben két egymás utáni napon négy és fél óra alatt 3-3 feladatot kell megoldani. Itt azonban nemcsak egyéni verseny van, hanem – az IMO-val ellentétben – van hivatalos csapatverseny is. Ezen – hogy az eltérő létszámú csapatok esélyeit kiegyenlítsék – minden csapatból csak a három legtöbb pontot elért versenyző eredményét veszik figyelembe. Magyarország csapata rendszerint az erős mezőny első harmadában végez az RMM versenyen.

Végül illusztrációként álljon itt egy feladat egy korábbi RMM-ről:

$2n$ különböző érmét helyezünk el egy szabályos $2n$-szög csúcsaiba, minden csúcsba egy érmét. Egy *lépés* alatt azt értjük, hogy kiválasztjuk a $2n$-szög egy oldalát, és annak az oldalnak a két végpontjában lévő érméket kicseréljük egymással. Tegyük fel, hogy véges sok lépés után mindegyik érmepár pontosan egyszer lett kicserélve. Bizonyítsuk be, hogy van olyan oldal, amit soha nem használtunk.

Pelikán József

RMM 2017

Bukarest, 2017. február 22-27.

Szerdán kora reggel szálltunk fel Budapesten a vonatra; 14 órával később már Bukarestben találtuk magunkat. A vonatút kifejezetten kellemes volt: mind jól ismertük egymást matektáborokból, és előre örültünk a találkozásnak. Az út során kártyázás közben kielemeztünk néhány geometriapéldát a közelmúlt versenyeiről (OKTV, Dürer Verseny...), beszéltünk a versenyszervezés és a kutatás kihívásairól, és megosztottuk kedvenc filmsorozatainkat. Az ablakból időnként érdemes volt kinézni a februári tájra, különösen amikor a Duna mellett haladt vonatunk a Vaskapu-szorosban.

Este fáradtan, de jókedvvel értünk a szállásra. Ekkor egyesítettük erőinket a repülőgéppel utazó „különítménnyel”, így vált teljessé a magyar csapat:

Borbényi Márton és *Tóth Viktor (a Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium 12. osztályos tanulói); Bukva Balázs* és *Molnár-Sáska Zoltán (a Budapesti Fazekas Mihály Gimnázium 11. osztályos tanulói), Gáspár Attila (a miskolci Földes Ferenc Gimnázium 11. osztályos tanulója)* és *Williams Kada (a Szegedi Radnóti Miklós Gimnázium 12. osztályos tanulója);*

és a csapatvezetők: *Hujter Bálint (a Budapesti Fazekas Mihály Gimnázium matematikatanára)* és *Lenger Dániel (az ELTE matematikus doktorandusza).*

Marci, Zoli, Balázs és Attila került az egyik szobába, Kada és Viktor pedig egy fiatal ukránnal osztozott a másikon. A matracokban a megszokott puha, szivacsos anyag mellett rugó alakú fém alkatrészeket is felfedeztünk: ez Balázst, miután bordái a fémrugók között éppen a megfelelő állásba kerültek, egyáltalán nem zavarta, Kadának viszont még úgy is nehézségei akadtak, hogy további paplanrétegeket helyezett maga és ágya közé.

Bár más-más időben aludtunk el, mindenki ugyanakkor ébredt: ezt az önkéntes román diákok hangos kopogtatással biztosították. Nem ezért kedveltük meg őket, jóllehet sikerült ily módon még a verseny napja előtt átállni a román időszámítás szerinti 7.30-as kelésre. Aznap délelőtt egy érdekfeszítő előadás során betekintést nyerhettünk a hiperbolikus geometria analitikus leírásának mélységeibe. Ezután szétnéztünk kicsit a városban a házigazdáink vezetésével, igencsak imponált például az adományokból épült Atheneum hangversenyterem épülete (ez az épület egyébként az 5 lejes hátoldalán is szerepel). Délután pihentünk kicsit, majd a megnyitón vettünk részt az ASE (a bukaresti Közgazdasági Egyetem) dísztermében.

A következő két nap délelőttjén írtuk meg a versenydolgozatokat. Összesen hat feladaton dolgozhattunk, és mivel mi is éppen hatan vagyunk, így mindenki egy-egy feladatról mondta el a véleményét:

„Az 1. feladat egy eléggé mechanikus példa volt, ahol egy rekurzív képletet kellett felírni egy sorozatra. Utáltam. Mondjuk eleinte félreolvastam és másfél órát foglalkoztam egy sokkal nehezebb változattal.” (Tóth Viktor)

„A 2. feladat könnyebb volt, mint gondoltam, bár a verseny vége felé sikerült megcsinálnom, és nem volt elég időm teljesen leírni. Tetszett, mert sokféle különböző polinommal oldható meg.”
(Bukva Balázs)

„Általában nem gondolkozom előszeretettel kombinatorika-példákon, de a 3. feladat ez alól kivételnek mutatkozott. Kár, hogy nem volt elég időm verseny közben vele foglalkozni, miután bő 3 órát elvitt az első két feladat tisztázása.” (Williams Kada)

„Szerintem a 4. feladat egy nagy ötleteket nem igénylő koordináta-geometriai példa volt, habár hazafelé a vonaton megoldottuk euklideszi és projektív geometriával is.” (Borbényi Marci)

„A kedvenc feladatom volt az 5.: találtam egy átfogalmazást páros gráfokkal, és ott jól lehetett alkalmazni a Kőnig-Hall-tételt, amit most már egy életre megjegyeztem. Utólag kiderült, hogy pofátlanul egyszerű indukciós megoldás is adható volt rá, de az sokkal kevésbé volt természetes.” (Molnár-Sáska Zoli)

„A 6. feladat a verseny legnehezebb feladata volt. Egy bonyolult négyszöges geometriafeladat volt, és sajnos hiába próbálkoztam mindenféle inverziós trükkökkel, nem sikerült megoldanom.”
(Gáspár Attila)

Az első versenynapon a másodikra pihenve, a másodikon pedig az eső miatt délután a koleszban élveztük egymás társaságát. Zoli és Marci megoldotta, hogy Zoli laptopjáról megossza az internetet, és így tudtunk egy laptopon közösen autókat versenyeztetni. Kezdetben Balázs mindenkit letolt az útról, de aztán közösen sikerült kivédenünk szemtelen viselkedését.

Játszottunk egymás ellen Honfoglalót és különféle kártyajátékokat is. Sőt, mikor Balázsnak és Marcinak kedve támadt pingpongozni, ám asztalt nem talált, összedobtak egyet a szobában fellelhető alapanyagokból.

Bukarestet nem találtuk különösebben szép városnak: az épületek külseje általában el van hanyagolva. Bár akadnak helyenként modern épületek, az utcaképet jórészt a kommunista időszak téglatestei alkotják, csak néhány 19. századi lakóház maradt fenn a Ceausescu-rezsim után. A várost inkább lakosai tették érdekessé, mint például a kollégiumunk lakói, akik állandóan az udvaron cigiztek és hangos rapzenére táncoltak.

A sok park és tér kitűnő terep volt egy hosszú sétára, így a negyedik nap reggelén két lelkes román
házigazdánk, Anca és Andrei társaságában nekivágtunk a fővárosnak. Fél órát töltöttünk egy vásárban, ahol román jellegzetességeket lehetett venni. Meg is kóstoltuk a helyi fogásokat, így a szájunkban elolvadó borjút és a zamatos, de nem csípős kolbászt. Ezt követően kedvünk támadt közelebbről megismerni a bukaresti metrórendszert (mind a négy vonalon utaztunk), míg kísérőinkkel beszélgettünk a sulijukról és a román közéletről. Így akadtunk rá a 40 éves metróvonalukra, aminek szerelvényeit a fiatalok éjszaka graffitivel színesítik, ezzel teljesen egyedi hangulatúvá téve utunkat.

A záróünnepség a versenyeknek is helyszínt adó Tudor Vianu Gimnázium aulájában zajlott. Néhány csapat egységes öltözetben jelent meg: például az ukránok népies felsőben, a távol-keletiek pedig a sportolókéhoz hasonló egyen-melegítőben. Mások öltönyben, de a legtöbben hétköznapi ruhában vették át a díjaikat.

Az érmeket 8 fős csoportokban adták át, és minden csoport országzászlókkal együtt állt ki a rögtönzött színpadra. Akadt, aki csalódott, mint Mexikó, de például az olaszok egyik ezüstérmesét hárman körbevitték a teremben, így ünnepelve első érmét a negyedik nemzetközi versenyén. A magyar csapat vegyes érzemekkel fogadta az eredményt: bár akadt köztünk olyan aki előzetesen jobbat remélt, de a többség őszintén örült a megszerzett díjaknak, melyek a következők voltak:

– Williams Kada 30 ponttal *és*

– Borbényi Márton 25 ponttal *ezüstérmet*,

– Molnár-Sáska Zoltán 21 ponttal,

– Tóth Viktor 20 ponttal,

– Bukva Balázs 18 ponttal *bronzérmet* szerzett;

– Gáspár Attila 16 ponttal *dicséretben* részesült.

A versenyen egyébként egyetlen diák, a kínai Lihuang Ding szerzett maximális 42 pontot. Hét versenyző kapott aranyérmet, Kada csak hajszállal maradt le erről. A csapatok versenyét Dél-Korea nyerte, míg a téli szünetben hagyományosan velünk együtt tréningező brit csapat a tavalyi évhez hasonlóan 2. lett. Mi a középmezőny első felében, a 19 csapat közül holtversenyben a 7-8. helyen végeztünk. A részletes végeredmény elérhető a verseny honlapján: http://rmms.lbi.ro/rmm2017.

Az eredményhirdetés utáni fogadás derült hangulatban telt. Itt búcsúztunk el román házigazdáinktól. Ezt követően öten visszatértünk a kollégiumba, Kadát pedig meghívták az angol és amerikai csapat közös vacsorájára. Kevés (vagy semennyi) alvás után pedig hajnali 4.15-kor a vasútállomásra indultunk, és az ottani gyorsétteremben szerelkeztünk fel elegendő táplálékkal utunk átvészeléséhez. A vonatra ülve legtöbbünk rögvest elaludt, de aztán ahogy felébredtünk, folytatódott a beszélgetés, persze matematikai témákat is érintve: szó esett például a *p*-adikus számokról és Gallai Tibor tételeiről.

Értékes versenytapasztalatokkal, újonnan tanult matematikai ötletekkel és sok egyéb élménnyel is gazdagodtunk utunk során. Köszönjük a bukaresti szervezőknek a vendéglátást és a színvonalas versenyfeladatokat; a Bolyai Társulatnak az utazás megszervezését. Az útiköltség előteremtésében a Társulaton kívül segítségünkre volt még a Korszerű Iskoláért Alapítvány (Miskolc), a Kaposvári Tankerületi Központ és a MOL Új Európa Alapítvány, nekik is köszönettel tartozunk.

a csapattagok közös élményei alapján lejegyezte: Williams Kada

díjazottak beszámolók

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Faragó István 2017. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Farkas Miklós Alkalmazott Analízis Szeminárium a BME Matematika Intézetében

A BME Matematika Intézet Analízis és Differenciálegyenletek Tanszékének közös Alkalmazott Analízis Szemináriuma 2016. őszén indult Faragó István, a BME TTK Differenciálegyenletek Tanszék egyetemi tanárának kezdeményezésére. A szemináriumot a fent említett két tanszék és az MTA-ELTE Numerikus Analízis és Nagy Hálózatok Kutatócsoport közösen gondozza. Szervezők: Faragó István, Horváth Róbert, Karátson János és Mincsovics Miklós.

A szeminárium fórumot szeretne biztosítani az alkalmazott analízissel foglalkozó matematikusok és az analízist alkalmazók számára az együttgondolkodásra. A szeminárium célja, hogy elősegítse egy alkalmazott analízissel (pl. differenciálegyenletek, numerikus módszerek, funkcionálanalízis) foglalkozó kutatói kör kialakítását a BME Matematika Intézetén belül, valamint hogy segítse ezen kör kapcsolódását más olyan kutatóhelyekhez és alkalmazói intézményekhez, ahol a matematika magas szintű alkalmazására van szükség. A cél elérésének egyik eszköze az érdeklődő hallgatók és fiatal kollégák bevonása a kutatói munkába. Emiatt az előadók az előadásaik elején közérthető képet adnak a téma előzményeiről, fontosságáról és érdekességeiről, és az előadás során is kiemelik a lehetséges további kutatási irányokat.

2016 őszi félévében nyolc előadás volt a szeminárium keretében. Az előadók hat intézményből érkeztek, köztük két külföldi, neves egyetemről (Lund, Tübingen). A résztvevők érdekes előadásokat hallhattak a merev differenciálegyenletek jellemzésével kapcsolatban, a parabolikus parciális differenciálegyenletek különböző numerikus megoldási lehetőségeiről pl. dinamikus peremfeltételek esetén, a wave form relaxation módszert alkalmazva vagy a Richardson-extrapolációt használva. Megismerhették az ekvivalens operátorokkal való prekondicionálás technikáját elliptikus feladatokra, láthattak újabb, hatékony modelleket a diffúziós folyamatokra, találkozhattak a járványterjedés térbeli matematikai modelljeivel, illetve megtudhatták, hogy hogyan lehet periodikus pályák metastabilitását igazolni. Az előadások rendszerint számos konkrét alkalmazást és számítógépes kísérletek eredményeit is tartalmazták.

A szeminárium 2017. januárjától felvette a Farkas Miklós Alkalmazott Analízis Szeminárium nevet. A szervezők ezzel is szeretnének emléket állítani a BME egykori tanszékvezető matematikaprofesszorának, aki elindította az egyetemen a matematikus-mérnök képzést, és a stabilitáselmélet valamint a biomatematika terén elért jelentős tudományos eredményeivel és könyveivel nagyban hozzájárult az alkalmazott matematika erősödéséhez.

Az előzetes tervek szerint a következő félévben is magas színvonalú előadások várják az érdeklődőket, köztük több neves külföldi kutató előadásával. Az előadások heti rendszerességgel csütörtökönként 10:15−11:15 között a BME H épületének 306 termében kerülnek megtartásra. Az előadást követően lehetőség van további kérdésekre, kötetlen beszélgetésre. A szeminárium honlapja: http://math.bme.hu/alkanalszemi Ezen az oldalon amellett, hogy a szervezők mindig hirdetik az aktuális előadást, az érdeklődők elolvashatják az eddigi előadások kivonatait, sőt elérhetők a korábbi előadások diasorai vagy a hozzájuk kapcsolódó cikkek linkjei is. Az aktuális előadásokról a levelezőlistára történő feliratkozással külön elektronikus értesítés is kérhető, amelyet Mincsovics Miklósnál (mincso@math.bme.hu) vagy a honlapon található űrlapon lehet jelezni.

A szervezők minden érdeklődőt szívesen látnak az előadásokon.

Faragó István

Megjegyzés: az előforduló, kevésbé közismert fogalmak magyarázatára a *Mi is …?* rovatunkban előbb-utóbb visszatérünk. *A Szerk.*

Farkas Miklósra emlékezett cikkében az Alkalmazott Matematikai Lapok: http://aml.math.bme.hu/wp-content/uploads/2014/03/25-Farkasrol.pdf

☐ alkalmazott matematika ☐ beszámolók

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

2017. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Kürschák József Matematikai Tanulóverseny

„A Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt 1894-ben indította a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat közös elődje, a Mathematikai és Physikai Társulat abból a célból, hogy maradandó emléket állítson báró Eötvös Lorándnak, a társulat akkori elnökének vallás- és közoktatásügyi miniszterré történt kinevezése alkalmából. Eleinte 100, ill. 50 koronával járó I. és II. b. Eötvös díjban, ill. dicséretben részesítették a legjobb versenyzőket. A versenyen érettségizett tanulók indulhattak és használhatták a magukkal hozott könyvet és jegyzetet. A kezdetektől egészen a mai napig érvényes, hogy egyetlen fordulóban három feladatra 4 óra munkaidő áll rendelkezésre.

A versenyeket az első világháborúig Budapesten és Kolozsvárott rendezték meg, az 1919 és 1921 közötti három évben érthető okokból nem volt verseny, majd 1922-től Kolozsvár helyett Szeged lett a második helyszín. A második világháború alatt ismét kényszerű szünet következett: 1944 és 1946 között ismételten kimaradt 3 év, de egyúttal az Eötvös Lorándról elnevezett matematikaversenyeknek is vége szakadt. Az alapító jogutódja, a Bolyai János Matematikai Társulat 1947-ben szervezte újra a versenyt, ám azt ekkor Bolyai Jánosról nevezték el. A szabályok pedig annyiban változtak, hogy az érettségi előtt álló tanulóknak is megengedték az indulást. A verseny 1949-ben kapta meg a jelenlegi elnevezését. Az újraindulás után minden évben megrendezték a versenyt valamikor október eleje és november eleje között, az egyetlen kivétel érthetően 1956 volt. (Az 1990-es taxisblokád alatt is megtartották a versenyt: Budapesten gyalog vagy kerékpáron érkeztek a versenyzők az Árpád gimnáziumba.)

A Kürschák verseny sikerének két fontos tényezőjét emeljük ki. A kitűzött feladatok kiválóan megfelelnek a kezdetben megfogalmazott céloknak: a megoldáshoz a középiskolában tanított ismereteken túl nincs szükség további tudásra, hanem sokkal inkább a matematikai gondolkodásmód alkalmazásával lehet elérni a sikert. Íratlan hagyomány, hogy a feladatok megoldásához lehetőleg ne fárasztó számolás, hanem az összefüggések átlátása illetve egy-egy jó ötlet vezessen. Ebben a tekintetben a verseny talán a világon is egyedülálló.

A verseny sikerének másik kulcsa a Kürschák által elindított munka, a Matematikai versenytételek. Ez az a könyv, amiben az 1894 és 1928 közötti versenyek feladatait (tételeit), azok megoldását és a díjazottak neveit találjuk...

A Kürschák versenyen elért díj volt az egyik első sikere számos, később komoly tudományos karriert befutott egykori versenyzőnek. A már nem élők közül a teljesség igénye nélkül az alábbiakat emeljük ki (időrendben): Fejér Lipót, Kármán Tódor Tivadar, Kőnig Dénes, Haar Alfréd, Szegő Gábor, Radó Tibor, Rédei László, Kalmár László, Teller Ede, Bakos Tibor, Gallai Tibor, Szele Tibor, Schweitzer Miklós. Ahogy említettük, a háború után az érettségi előtt álló tanulók is elindulhattak, így ugyanaz a versenyző több díjat is nyerhetett. Az alábbi versenyzők többször is Kürschák díjazottak voltak, nevük után zárójelben az elnyert díjaik száma áll: Szkerka Pál (2), Kálmán Lajos (2), Vigassy József (2), Bollobás Béla (3), Kóta József (2), Máté Attila (2), Gerencsér László (2), Lovász László (2), Bajmóczy Ervin (3), Ruzsa Imre (2), Kollár János (2), Pröhle Péter (2), Tardos Gábor (4), Bohus Géza (2), Magyar Ákos (2), Erdős László (2), Kós Géza (3), Montágh Balázs (2), Sustik Mátyás (2), Kálmán Tamás (2), Burcsi Péter (2), Braun Gábor (2), Lippner Gábor (3), Kun Gábor (2), Terpai Tamás (2), Csikvári Péter (2), Csóka Endre (2), Rátz Béla András (2), Jankó Zsuzsanna (3), Nagy Csaba (2), Korándi Dániel (2), Lovász László Miklós (2), Éles András (2), Nagy János (2), Tomon István (2)."

(Részletek a Bolyai Társulat által 2010-ben kaidott **Cserepek** a magyarországi tehetséggondozóműhelyekből című kötetből (Kürschák verseny, 28-33.o). A teljes könyv pdf formátumban letölthető a MATEGYE Alapítványi honlapjáról: http://www.mategye.hu/?pid=cserepek .)

A Bolyai János Matematikai Társulat a **2016. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt** október 7-én, középeurópai idő szerint 14 órai kezdettel rendezte meg a következő huszonhárom helyszínen: Békéscsaba, Bonyhád, Budapest, Cambridge, Csíkszereda, Debrecen, Eger, Győr, Kaposvár, Kecskemét, Kolozsvár, Koronka (Marosvásárhely), Miskolc, Nagykanizsa, Nyíregyháza, Pécs, Sopron, Szeged, Székesfehérvár, Szombathely, Tatabánya, Veszprém és Zalaegerszeg.

A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására az alábbi bizottságot kérte fel: *Biró András, Fleiner Tamás* (elnök), *Frenkel Péter, Kós Géza, Maga Péter, Pach Péter Pál* (titkár), *Pelikán József.* A bizottság szeptember 15-i ülésén a következő feladatokat tűzte ki:

1. *Legyenek* $1 \leq k \leq n$ *egészek. Az* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *halmaznak legfeljebb hány* k *elemű részhalmaza adható meg úgy, hogy közülük bármely kettő valamelyike a kettejük uniójának* k *legkisebb eleméből álljon?*

2. *Bizonyítsuk be, hogy pozitív egész számok tetszőleges véges* A *halmazának van olyan* B *részhalmaza, amelyre fennáll az alábbi két feltétel.*

• *Ha* b_1 *és* b_2 *a* B *különböző elemei, akkor sem* b_1 *és* b_2*, sem pedig* b_1+1 *és* b_2+1 *nem egymás többszörösei, továbbá*
• *az* A *halmaz tetszőleges* a *eleméhez van* B*-nek olyan* b *eleme, amelyre* a *osztója* b*-nek vagy* $(b+1)$ *osztója* $(a+1)$*-nek.*

3. *Igaz-e, hogy ha* $p(x)$ *és* $q(x)$ *olyan valós együtthatós polinomok, melyekre* $p\big(p(x)\big) = q(x)^2$ *teljesül minden valós* x*-re, akkor létezik olyan valós együtthatós* $r(x)$ *polinom, amelyre* $p(x) = r(x)^2$ *teljesül minden valós* x*-re?*

A bizottság a beérkezett dolgozatok átnézése után, november 30-i ülésén a következő jelentést fogadta el:

„A verseny minden helyszínen rendben zajlott le. Budapesten a megjelent 66-ból 61, míg a további helyszíneken összesen 40 versenyző adott be dolgozatot.

Az idei versenyen a számos versenyző által megoldott első feladat bizonyult a legkönnyebbnek. Ezzel szemben a második feladat esetében kifogástalan megoldás nem érkezett, mindössze öt versenyző ért el jelentős részeredményt. A harmadik feladatot öten oldották meg, és ígéretes próbálkozás is akadt.

Egyetlen versenyző teljesítménye haladta meg lényegesen két feladat megoldását, aki a harmadik feladatra adott elegáns, az algebra alaptételét nélkülöző megoldás mellett megoldotta az első feladatot, valamint a második feladatban jutott a megoldás közelébe. Ezért

I. díjban és 40000 Ft pénzjutalomban részesül

Lajkó Kálmán, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Schultz János, Mike János, Kosztolányi József* és *Pósa Lajos*).

Négy versenyző oldotta meg az első és a harmadik feladatot. Ennek megfelelően

II. díjban és fejenként 25000 Ft pénzjutalomban részesülnek

Bukva Balázs, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója, (tanárai *Hujter Bálint, Gyenes Zoltán, Dobos Sándor* és *Szűcs Gábor*),

Gáspár Attila, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium 11. osztályos tanulója, (tanárai *Kovács Attiláné* és *Győry Ákos*),

Tóth Viktor, a Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Kubatov Antal, Tóthné Berzsán Gabriella* és *Pósa Lajos*) és

Williams Kada, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Schultz János, Mike János, Pósa Lajos* és *Kosztolányi József*).

Két további versenyző akadt, aki az első feladat helyes megoldása mellett a második feladatban is jelentős részeredményt ért el. Ennek megfelelően

Dicséretet és fejenként 5000 Ft pénzjutalmat kapnak

Kovács Benedek, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Fazakas Tünde* és *Dobos Sándor*) és

Molnár-Sáska Zoltán, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai *Hujter Bálint, Gyenes Zoltán, Pósa Lajos* és *Szűcs Gábor*)."

Fleiner Tamás

Megjegyzések:

A Jelentés a 2016. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről és **a feladatok megoldásai** megjelentek a KöMaL folyóirat 2017. februári számában (66-72.o).

A Kürschák versenyek feladatai a versenyvizsga.hu oldalon, illetve a KöMaL archívumában találhatók meg: db.komal.hu/KomalHU

díjazottak Kürschák József

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

AZ **INTERJÚ-PORTRÉ** MENÜPONT JÓL VAGY KEVÉSBÉ ISMERT MATEMATIKUSOKAT, VAGY OLYAN, EGYKOR MATEMATIKUSKÉNT VÉGZETTEKET SZERETNE BEMUTATNI, AKIK MA MÁS SZAKMA ELISMERT KÉPVISELŐI, SPORTOLÓK, MŰVÉSZEK...(ROVATSZERKESZTŐ: *OLÁH VERA*.)

Szamuely Tamás
2017. MÁRCIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

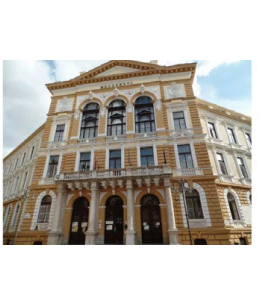
Matematikusokról mindenkinek

Mit csinál egész nap egy elméleti matematikus? Hányan értik az eredményeit? Meg tud-e élni a fizetéséből? És lehet-e belőle igazi sztár? Minden, amit tudni akartál a matematikusokról, de sosem merted megkérdezni. Aki kérdez: *Szamuely Tamás*. Aki válaszol: *Szamuely Tamás.*

Kántor Sándorné, Katona Gyula, Frenkel Péter
2017. MÁRCIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

Schweitzer Miklós és a Matematikai Emlékverseny

A Bolyai János Matematikai Társulat 1949-ben az egyetemi hallgatók számára alapított egy versenyt, amelyet a 22 éves korában elhunyt tehetséges matematikus emlékére *Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenynek* neveztek el. A verseny formája és színvonala igen szokatlan volt, 10 napra 10-12 feladat a matematika különböző területeiről. A legszokatlanabb az volt, hogy a versenyzők otthon, vagy a könyvtárban törhették a fejüket, de a feladatok színvonala is messze meghaladta más ismert versenyekét. Azt, hogy ezeket az akkor újszerű feltételeket jól találták ki annak idején a létrehozók, mi sem bizonyítja jobban, hogy a verseny 68 év után is létezik és sikeres.



Radnai Gyula
2017. MÁRCIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

Faragó Andorról – két tételben II. Tanár és lapszerkesztő a XX. században

Radnai Gyula cikkének első része Faragó Andorról (Felkészülés a tanári pályára a XIX. század végén) 2016. decemberi számunk Interjú–portré rovatában olvasható. Ebben a részben megtudhatjuk, hogyan indította újra Faragó Andor a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokat. A fényképen a mai Óbudai Egyetem egyik épülete, az egykori Tavaszmező utcai főgimnázium, ahol Faragó Andor 27 éven át tanított matematikát és fizikát.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

2017. MÁRCIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

Matematikusokról mindenkinek

Mit csinál egész nap egy elméleti matematikus? Hányan értik az eredményeit? Meg tud-e élni a fizetéséből? És lehet-e belőle igazi sztár? Minden, amit tudni akartál a matematikusokról, de sosem merted megkérdezni.

Aki kérdez: Szamuely Tamás. Aki válaszol: Szamuely Tamás [1]

Hogyan telik egy elméleti matematikus munkanapja? Ül a kockás papír felett és gondolkodik?

Nem feltétlenül, bár Karinthytól tudjuk, hogy az író úgy ír, hogy mozgatja a kezében a tollat, és közben gondolkozik. Először is, a kutatók általában egyetemen vagy akadémiai intézetben dolgoznak, ahol a kutatás mellett vannak oktatási, adminisztrációs és szervezési feladataik is. Sokszor emellett a kutatásra nem is marad kellő idő. De vegyünk egy olyan napot, amely csak kutatással telik. Ekkor attól függ, hogy a munka melyik fázisában vagyunk. Kezdetben fontos mások munkájának az alapos tanulmányozása, hogy tisztában legyünk az adott témában ismert eredményekkel, módszerekkel. Utána jön a „gondolkodós" fázis, amit lehet papír felett ülve, netán ágyban fekve vagy sétálgatva bonyolítani. De néha a legjobb ötletek a buszon vagy a zuhany alatt születnek. A harmadik, nagyon fontos fázis az eredmények megfogalmazása és leírása. Ilyenkor még nagyon sokat fejlődhet, tisztulhat a kép. Kiderülhet, hogy a módszerekből sokkal több is kijön, mint eredetileg gondoltuk, vagy éppenséggel valahol hiba csúszott az elgondolásba.

Ha hiba van a bizonyításban, a tétel mehet a kukába?

Eukleidész óta a matematikusok közössége csak a hibátlanul bizonyított tételeket fogadja el. Bizonyítás nélkül minden állítás csak hipotézis marad. Ettől persze lehet nagyon érdekes felvetés, másrészről egy hibás bizonyításban is lehetnek olyan ötletek, amelyek máshol hasznosíthatóak.

A hibák, mint a daganatok, különböző természetűk lehetnek. A viszonylag ritkább, rosszindulatú eset a katasztrofális hiba, amely tönkreteszi az egész gondolatmenetet, esetleg magát a keresett állítást is. A gyakoribb, jóindulatú eset az, amikor a hiba – esetleg vér és könnyek árán – kiküszöbölhető, vagy pedig maradnak olyan értékes részeredmények, amelyeket a hiba nem érint. Azért gyakoribb az utóbbi eset, mert mielőtt nekilátnánk egy állítás bizonyításának, különböző módokon teszteljük, hogy egyáltalán igaz lehet-e a keresett tétel, illetve a megálmodott módszer működhet-e. Fatális hiba ezért csak olyankor keletkezik, amikor valamit nagyon elnéztünk.

Ki ellenőrzi, hogy helyes-e egy bizonyítás?

Először is a szerző dolga többször ellenőrizni a saját gondolatmenetét, mielőtt nyilvánosságra hozza. Ha ezután benyújtja hivatalos publikálásra, felkérnek egy vagy több szakértő lektort, akiknek a véleményezés mellett az ellenőrzés is a feladatuk. Ez sokszor igen aprólékos, időigényes feladat. Ráadásul a lektor anonim marad, és nem kap díjazást a munkájáért, így a lelkiismeretességén túl más nem motiválja arra, hogy tényleg alaposan ellenőrizzen mindent. De még lelkiismeretes lektorok szűrőjén is átcsusszanhatnak hibák, amelyeket valamelyik olvasó, esetleg a szerző később vesz észre. Ez komoly hiba esetén általában kellemetlen helyzet.

Jelenleg folynak olyan kutatások, amelyeknek a célja a bizonyítások ellenőrzésének automatizálása. Így elképzelhető, hogy a nem túl távoli jövőben a matematikusok elméleti kutatásának egy részét is szoftverek veszik majd át. Még nem tudjuk, pontosan hogyan fog ez festeni a mindennapokban.

Hányan értenek a világon egy-egy matematikai részterülethez?

Erre nagyon nehéz válaszolni, mert elég változó a szám, és attól is függ, mennyire szűken vagy tágan húzzuk meg a terület határait. Vannak olyan népszerű vagy könnyen megközelíthető témák, amelyekkel több ezren foglalkoznak a világban. Vannak olyan, nagyon sok szaktudást igénylő elméletek is, amelyekhez jó ha tucatnyi szakértő ért igazán, de az ő eredményeiket jóval szélesebb körben használják és tartják becsben. Vannak aztán olyan témák is, amelyeket csak néhány ember művel, és rajtuk kívül nem is nagyon érdekel mást.

A matematikai kutatás magányos foglalatosság?

Egyáltalán nem! Nagyon fontos a másokkal való együttműködés, amit manapság az internet használata nagyon meg is könnyít. Míg száz évvel ezelőtt a szakcikkeket szinte mindig egyetlen szerző jegyezte, napjainkban már a többségük együttműködésen alapul. De még akkor is, amikor az ember egyedül dolgozik valamin, nagyon hasznosak a kollégák visszajelzései, segítségük egyes részletkérdéseket illetően. Ezt sokszor meg lehet oldani emailen keresztül, de a személyes beszélgetés, közös gondolkodás még nagyobb lökést tud adni.

Szoktak a matematikusok csapatban dolgozni?

Tapasztalatom szerint két, esetleg három ember együttműködése az ideális. Több résztvevő esetén nehezebb a dolgokat koordinálni. Ilyenkor már többnyire szétosztják a feladatokat, és esetleg nem mindenki látja át az egész kutatást. De a kettő tényleg több, mint az egy! Ilyenkor kölcsönösen inspiráljuk és egyben kontrolláljuk is egymást.

Újabban vannak érdekes és eredményes példák nagy nemzetközi csoportok közösségi online együttműködésére is, és lehet, hogy ezek szaporodni fognak a jövőben. Itt azonban nagyon fontos, hogy legyen egy koordinátor, aki kézben tartja a fejleményeket és a végső formába öntést. Kicsit hasonlít a helyzet ahhoz, mint amikor nagy adatigényű kísérleteket óriási csapatok nemzetközi együttműködésben valósítanak meg. Ilyenkor nagyon jó érzés lehet részt venni mondjuk a gravitációs hullámokkal kapcsolatos nagy felfedezésben, de kevésbé személyes a felfedezés élménye.

Ki adja a kutató matematikusnak a feladatait? A főnöke?

Dehogyis! Mindenki teljes szabadságot élvez a kutatási témái megválasztásában. A kezdet kezdetén a doktori témavezetők általában javasolnak megoldandó feladatot a diákjaik számára, de a legjobb tanítványok egy idő után már önállóan találnak maguknak kutatási irányokat.

Honnan merülnek fel a megoldandó problémák? És honnan lehet tudni, hogy kellően érdekesek-e?

Minden részterületnek vannak nagy vezérlő problémái, amelyek általában rendkívül nehezek. Ha valaki ezekkel kapcsolatban előrehaladást ér el, azt a szakmai közösség érdekesnek szokta találni. Másrészt mint ahogy más tudományokban is, egy-egy adott kérdés megválaszolása majdnem mindig újabb kérdéseket szül. Sokszor kiderül, hogy amit a végállomásnak hittünk, az valójában egy új utazás kezdete.

De kik vetik fel a nagy vezérlő problémákat?

Megesik, hogy egy-egy kiemelkedő matematikus előáll egy nagy vízióval, amelynek megvalósítása sokaknak ad életre szóló feladatot. Máskor sokkal prózaibb dolog történik: egy eleinte természetesnek, egyszerűnek tűnő kérdés sokkal nehezebbnek bizonyul, mint azt gondolták. Ahogy múlnak az évek, és a kérdés még mindig megválaszolatlan, úgy emelkedik a „tőzsdei árfolyama".

Szóval azt szokták érdekesnek találni, ha valaki egy ismert nyitott kérdésre válaszol?

Nem feltétlenül. Van, amikor valaki új szemszögből tekint egy klasszikus eredményre, és megmutatja, milyen irányokba lehet onnan továbblépni. Korábbi bonyolult megközelítések egyszerűbbé tétele is feltűnést szokott kelteni. De teljesen újfajta fogalmak, kérdésfeltevések is polgárjogot nyerhetnek. Ritka azonban, hogy ezek ne kapcsolódnának valamilyen módon klasszikusabb kérdésekhez.

Előfordul, hogy más tudományágban vagy a technikában való alkalmazások motiválják új elméleti kutatási irányok születését. Ezek azonban általában akkor sikeresek, ha tisztán matematikai problémakörként is fel tudják kelteni a szakmai érdeklődést. Emlékszem egy konferenciára, ahol egy neves matematikus egy borzasztó bonyolult és elvont formuláról tartott előadást. A közönség nagy részének nem volt világos, mi értelme pont ezt a kérdést vizsgálni. Az előadó válasza az volt, hogy egy világhírű fizikus azt mondta neki: ha nem volna igaz a formula, összeomlana a világegyetem. Hogy miért is, azt ő sem tudta.

Tényleg, miért járnak a matematikusok konferenciákra? Azért, hogy értesüljenek a legújabb eredményekről?

Ehhez manapság, az internet korában már nem muszáj konferenciára járni. A kollégák többsége új eredményeit közzéteszi az `arxiv.org` internetes szerveren, így naponta értesülhetünk a legfrissebb fejleményekről. Egy-egy szenzációs felfedezés a közösségi médiát is pillanatok alatt be szokta járni. Konferenciákra járni elsősorban a személyes találkozás miatt érdemes. Rengeteg együttműködés születik kávészüneti beszélgetések vagy közös vacsorák folyamán, és kérdéseinkre is sokkal gyorsabban választ kaphatunk, ha ott helyben megkérdezzük a megfelelő szakértőt olyan körülmények között, amikor mindketten ráérünk és nincs ezer más tennivalónk.

Az sem mellékes, hogy konferenciákat gyakran rendeznek a világ legszebb tájain, városaiban. Ilyenkor mindig akad idő egy kis turisztikára is. Azért túlzás lenne azt állítani, hogy a kutatók az ingyen nyaralás miatt járnak konferenciákra, bár mondjuk egy hawaii helyszín esetében felmerül a gyanú. De állandó matematikai konferenciaközpontok működnek Németországban, a Fekete-erdő mélyén, a kanadai Sziklás-hegységben vagy a francia Riviérán is. Dokumentumokkal és szavahihető tanúkkal igazolható, hogy ezeken a helyeken nemcsak hassüttetés folyik, hanem tételek is születnek!

Akkor a matematikai konferenciákon előadások nincsenek is, csak kávészünetek?

Dehogynem, előadások is vannak. Ezek olyan témák esetén a leghasznosabbak, ahol a módszerek nagyon bonyolultak. Ha az előadó ilyenkor lényegretörően el tudja magyarázni a hallgatóság számára a legfontosabb tudnivalókat, az nagy segítség azok számára, akik később részletesebben is foglalkozni kívánnak a témával, de azok számára is, akik csak általános képet szeretnének kapni.

Vita szokott lenni az előadások után?

Általában csak néhány percnyi rövid kérdés és válasz. A témához részletekbe menően általában csak néhány ember ért a hallgatóságból, a többiek számára a hosszadalmas diszkusszió időrablás volna.

De ha valaki nem érti az előadást, akkor minek megy el rá?

A megértésnek különböző fokozatai vannak. Diákkorunkban még sokan azt hisszük, akkor értettünk meg egy tételt, ha a bizonyítás legapróbb részleteit is követni tudjuk. Ez azonban csak felszínes, formális megértés. Az igazi megértés akkor következik el, ha a módszer mozgatórugóit is látjuk, és felismerjük, mi miért történik. Egy jó előadás képet tud adni arról, hogy mi történik, anélkül, hogy belemenne minden egyes részlet taglalásába. A legközelebbi szakértők persze ezekre is kíváncsiak, és kíváncsiságukat kiélhetik a kávészünetben.

És az előadók válaszolnak is minden kérdésre? Nincs titkolózás a részletekről?

Nincsen. Egyes más tudományágak vagy az ipari kutatások művelőivel ellentétben a matematikusok szívesen osztják meg gondolataikat, akár félkész ötleteiket is másokkal. Egy matematikai tétellel általában nem lehet sok pénzt keresni, így nem kell üzleti titkot csinálni a „családi receptekből". Másrészt a matematika olyan nagy, és olyan sok a nyitott kérdés, hogy viszonylag ritka az elmérgesedő konkurenciaharc. Ugyan gyakran előfordul, hogy ketten egymástól függetlenül ugyanazon dolgoznak, de nagyon sokszor kiderül, hogy a megközelítésük nem egészen azonos, így végül a meglátásaik inkább kiegészítik egymást.

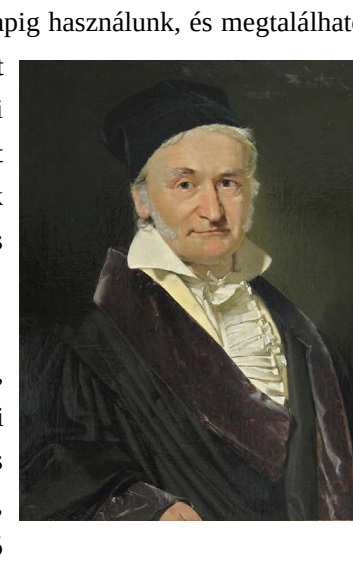
Mi számít sikernek a matematikai kutatásban? És hogyan ismerik el a nagy teljesítményeket?

Egyfelől adott a felfedezés öröme. A nagy áttörések általában hosszú egy helyben toporgás után következnek be, ami sok frusztrációt okoz. Ha ezután felvillan a fény az alagút végén, az nagy örömforrás. De persze az emberek többsége külső elismerésre is vágyik. Ilyen elismerés lehet, ha egy tanulmányt valamelyik vezető folyóiratban fogadnak el közlésre, a szerzőt meghívják egy kiemelt konferenciaelőadásra, vagy adnak neki egy rangos díjat. Mindezek mögött persze az áll, hogy az illető munkáját több vezető nemzetközi szakértő is kiemelkedőnek találta.

Ez más tudományoknál is így van. Van esetleg olyan, ami csak a matematikára jellemző?

Sok tudományterületen annyira felgyorsult a világ, hogy az eredmények néhány év után túlhaladottá válnak, a régebbi cikkeket már nem olvassa senki. A matematikában azonban ha valaki ír egy jó cikket vagy könyvet, az számíthat rá, hogy évtizedek múlva is olvasni fogják. Van úgy, hogy egy eredménynek a megjelenésekor korlátozott visszhangja van, aztán 20-30 évvel később az érdeklődés homlokterébe kerül. Ez nem azért van, mert a szerző „megelőzte a korát", vagy „meg nem értett zseni volt", hanem többnyire azért, mert utólag kiderül, hogy az adott eredmény kapcsolatba hozható izgalmas későbbi fejleményekkel. Szóval némi lódítással azt is állíthatjuk, hogy a matematikusok az örökkévalóságnak dolgoznak.

Tényleg szokás olvasni 50 vagy 100 évvel ezelőtt írt munkákat? Nem avulnak el?



Személyes tapasztalatom az, hogy az 1930-as évek óta írt művek túlnyomó többsége ma is gond nélkül olvasható, az 50 évvel ezelőttiek pedig már teljesen mai nyelven íródtak. A XIX. században vagy még régebben írt munkák megértése már speciális tudást igényel, mert a terminológia, a szemlélet sokat változott azóta. De ezekben is rengeteg olyan gondolat, eredmény van, amelyet mind a mai napig használunk, és megtalálhatók későbbi, frissebb szemlélettel írt összefoglalásokban. Gauss vagy Riemann eredeti írásait manapság ritkábban forgatják (bár időnként érdemes beléjük tekinteni, akadhatunk bennük elfeledett gyöngyszemekre), viszont a tételeiket ma is tanítjuk és használjuk.

Természetesen van sok olyan történeti eredmény, amely ma már túlhaladottnak számít, mert a későbbi módszerek sokkal hatékonyabban és koncepciózusabban célhoz érnek. Az is előfordul, hogy egy-egy, a maga korában izgalmasnak ígérkező új téma hosszú távon kevésbé bizonyul lelkesítőnek. De a legtöbb 50 éve fontosnak tartott eredmény ma is fontosnak számít, és velünk él.

Vannak ma is olyan nagy matematikusok, mint a fent említett Gauss vagy Riemann?

Feltétlenül. Sőt, mivel ma sokszorosan több kutató matematikus dolgozik, mint 150 éve, és a kutatás volumene is nagyon megemelkedett, óhatatlanul jóval több kivételes nagyság is dolgozik. Földrajzi értelemben is kitágult a merítés: míg a XIX. század nagy matematikusai szinte kivétel nélkül néhány európai országból kerültek ki, manapság Amerikában és Ázsiában is rengeteg tehetség emelkedik ki. Ami változott, az a kompetenciák kiterjedtsége. A XIX. század végén még voltak olyan kivételesen tájékozott professzorok, akik a matematika szinte valamennyi területén követni tudták a fejlődést, és számos területen alkottak maradandót. A mai kutatás fejlettsége és volumene mellett ez már elképzelhetetlen. Személyes véleményem szerint a legnagyobbak ma is azok, akik ha nem is minden, de több területen is képesek kiemelkedőt alkotni, és új kapcsolódásokat fedeznek fel. Mindamellett az egyes részterületeknek is megvannak a maguk nagy alakjai.

Egy kezdő kutató is kapcsolatba tud kerülni ilyen nagy emberekkel?

Természetesen. Ha lehetősége van valamelyik vezető egyetemen ösztöndíjjal tanulni vagy dolgozni, óhatatlanul belebotlik némelyikükbe. De máshol, akár itthon is lehet velük találkozni, és emailen keresztül is könnyű felvenni a kapcsolatot. Sokszor megesik, hogy egy tehetséges diáknak van olyan ötlete, ami a nagy szakértőknek nem jutott eszébe, vagy éppen hibát talál a munkájukban. Az ilyen esetekben a legtöbb „nagy ember" érdeklődéssel és barátságosan reagál. A matematikustársadalom egyáltalán nem tekintélyelvű. Kezdő fiataloknak is könnyen igazat adnak szakmai kérdésekben, és szívesen bevonják őket egyenrangú partnerként közös munkákba.

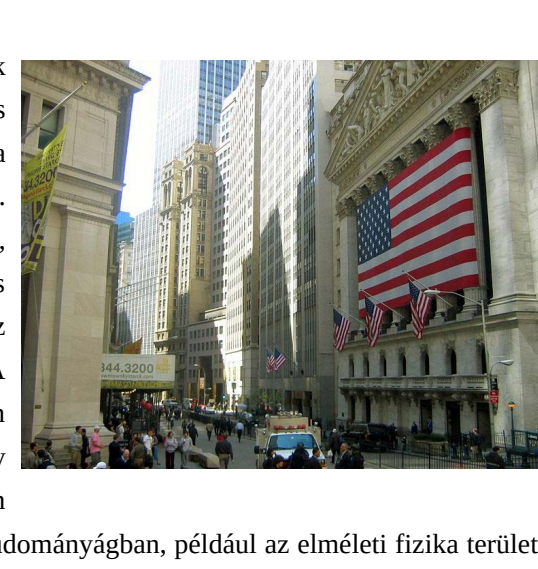
Igaz-e, hogy a matematikusok fiatal korukban vannak a csúcson?

Tapasztalatom szerint egyre kevésbé. Természetesen mindig is voltak és lesznek olyan kivételes tehetségű fiatal csillagok, akik már a húszas éveikben világraszóló tételekkel állnak elő. Ez azonban inkább a kivétel, mint a szabály. A mai matematika számos területén olyan bonyolult módszereket alkalmaznak, amelyeknek az alapos elsajátítása sok évbe telik. Néhány mély eredményhez pedig többféle bonyolult módszer kombinációjával lehet csak eljutni. Ezért egyre gyakrabban fordul elő, hogy 50–60 éves vagy még idősebb emberek érnek el olyan kiemelkedő eredményeket, amelyekhez nemcsak fiatalos energia, hanem mély tárgyismeret is szükségeltetik. A már említett fiatal zsenik persze gyakran a szükséges tárgyismeretet is villámsebességgel szerzik meg.

Akkor mikor derül ki, hogy valakinek van-e tehetsége a kutató matematikusi pályához?

Szét kell választani a matematikai készséget és a kutatói alkalmasságot. Sok példa van arra, hogy valakinek már gyermekkorában kiemelkedő matematikai készsége van, és később világhírű tudós lesz belőle. De nem minden csodagyerekből lesz Mozart. Másfelől a sikeres tudományos pályához nemcsak jó alapkészségre van szükség, hanem más tényezőkre is: önállóságra, kezdeményezőkészségre, eredetiségre, állhatatosságra, sok önkontrollra például. Ezért van az, hogy ígéretes diákok nem mindig válnak sikeres kutatókká. Talán nem tévedek nagyot, ha azt állítom, hogy 30 éves korára azért többnyire eldől valakiről, hogy alkalmas-e a pályára. De a legjobb évek még ezután jönnek.

Csak abból lehet jó matematikus, aki gyerekkorától erre készült? Később nem lehet beszállni?



De igen. Sok matematikusnak többirányú tehetsége van, és viszonylag későn dönti el, hogy a matematikát választja fő hivatásának. Arra is van példa, hogy valaki másik, például műszaki pályán indul, és később fordul az érdeklődése az elméleti kérdések felé. A pályamódosításhoz azonban mindenképpen el kell végeznie egy matematikai képzést, hacsak nem korábban valamelyik nagyon közeli tudományágban, például az elméleti fizika területén dolgozott. Fordított irányban viszont igen könnyű foglalkozást váltani több életszakaszban is. Számos példa van olyanokra, akik elméleti matematikusként dolgoztak, majd később, akár 40 éves koruk felett betegre keresték magukat a Wall Streeten. De a hazánkban jelen lévő cégeknél is lehetséges a későbbi elhelyezkedés.

És aki már eldöntötte, hogy matematikus szeretne lenni, hol érdemes tanulnia? Itthon vagy külföldön?

Mindenkinek csak ajánlani tudom a külföldi tapasztalatszerzést, de nem mindegy, hogy mikor és hol. Talán kevéssé köztudott, de a hazai képzésben a bevezető kurzusok sokkal alaposabbak, mint például az angolszász egyetemeken, még a legjobbakon is. Brit kollégáim szoktak is panaszkodni, hogy az ottani diákok nagy tudáshátrányban vannak a külföldről érkezőkkel szemben a doktori iskolán.

Amivel viszont nem tudunk versenyezni, az a világ vezető egyetemeinek posztgraduális képzése, ahol egy-egy témában gyakran nagyobb csoportok is összegyűlnek kiemelkedő tehetségekből. Akinek (hozzám hasonlóan) megadatik a lehetőség doktoranduszként vagy posztdoktori ösztöndíjasként együtt dolgozni ilyen társakkal, és találkozni a heti szemináriumokon a világ minden tájáról érkező vezető szaktekintélyekkel, az életre szóló élményeket és kapcsolatokat szerez. Fontos azonban, hogy legyen előzetes elképzelése, információja arról, milyen témával szeretne foglalkozni, és a kiszemelt egyetemen vannak-e olyan professzorok, akik az adott témában szakmailag és emberileg is jó témavezetőnek számítanak. Sajnos a legjobb helyeken is sokszor elkallódnak tehetségek.

És aki inkább itthon maradna?

Itthon is nem kevés olyan kutató dolgozik, aki a világ élvonalába tartozik, és szívesen foglalkozik diákokkal. A kisebb létszám előnye, hogy a témavezetőknek több idejük van egyénileg konzultálni a tanítványaikkal, szorosabb munkakapcsolat alakulhat ki. További itthonról is el lehet utazni nemzetközi nyári iskolákra, ahol friss témákról tartanak haladó kurzusokat különböző egyetemekről érkező diákoknak és kezdő kutatóknak, akik így egymással is megismerkedhetnek, és elkezdhetnek közösen dolgozni. Minden évben sok ilyen rendezvény van Európa- és világszerte, Magyarországon is.

Férfiszakma-e a matematikusoké?

Sajnos a kutató matematikusok között még mindig nagyon alacsony a nők aránya. Viszont jól ismerek több egészen kiemelkedő matematikusnőt, akikről állíthatom, hogy „ugyanúgy jár az agyuk", mint a legjobb férfi kollégáké. Senki ne higgye tehát, hogy a nőknek bármivel is kevesebb eredendő matematikai készsége lenne, mint a férfiaknak. Hogy miért van mégis kevesebb nő a pályán, arra nehéz egyértelmű választ adni. Biztosan szerepet játszik, hogy a kutatói pályát nehéz összehangolni a gyerekneveléssel, bár van olyan világhírű és rendkívül aktív kolléganő, aki ugyancsak neves matematikus férjével együtt öt gyermeket nevelt fel. A legvalószínűbb az, hogy még mindig erősek a társadalmi sztereotípiák, kevés a széles körben ismert pozitív példa. A matematika iránt érdeklődő lányokat sokszor tekintik afféle balettozó Billy Elliotnak. Tapasztalatom szerint ez azért inkább a szélesebb társadalomra jellemző, mint a matematikusközösségre.

Meg lehet élni abból, hogy valaki elméleti matematikus?

Az egyetemi szférában sehol a világon nem akkorák a fizetések, mint az üzleti világ hasonló képzettséget igénylő pozícióiban. De általánosságban azért elmondható, hogy tisztességesen meg lehet belőlük élni. Persze vannak olyan világvárosok, mint például New York, London vagy Párizs, ahol egyetemi fizetésből gyakorlatilag képtelenség elfogadható belterületi lakásban élni – van, ahol ezen az egyetem saját ingatlanaival segít, van, ahol nem. Magyarországon sajnos a kezdő oktatók bérei még mindig igen alacsonyak. A későbbiekben azért hazai körülmények között versenyképesebbek a fizetések, és a külföldieknél nem sokkal rosszabb életszínvonalat tudnak biztosítani.

Ami az egyetemi pályának nagy előnye az üzletihez képest, az a sokkal nagyobb szabadság. Ez több szabadidőt is jelent, de nagy szabadságot is abban, hogy az ember megválaszthassa az őt érdeklő feladatokat.

Szóval egy matematikus sokkal kevesebbet dolgozik, mint mondjuk egy bankár?

Az időbeosztása mindenképp szabadabb. Másrészt a matematikai kutatómunka olyan koncentrálást igényel, amit nem lehet rendszeresen napi 8–10 vagy még több órában fenntartani, hacsak valaki nem kivételesen megszállott. Vannak nagyon intenzív periódusok, amikor egy megoldandó feladat szinte éjjel-nappal foglalkoztat, de ezeket lazábbak követik, amelyek a feldolgozást, a dolgok megemésztését segítik. Ugyanakkor, amint az elején már említettem, a munkaidőnknek csak egy részét teszi ki a kutatómunka, hiszen az oktatási, szervezési, bírálói feladatok, vagy éppen a különféle pályázatok írása is sok időt igényelnek.

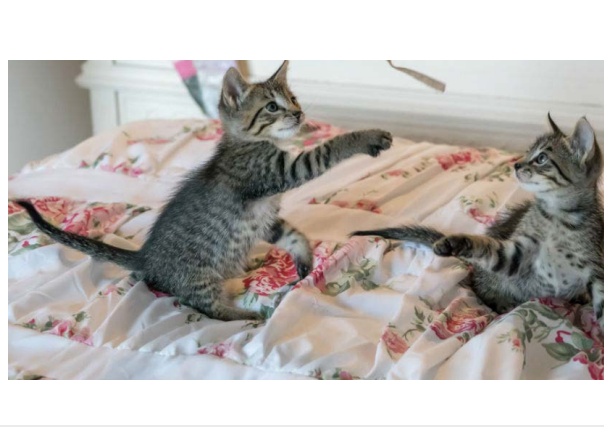
Tehát összegezve elmondhatjuk: kevesebb pénz, több szabadság, több dicsőség?

Feltétlenül nagyobb szabadság és nagyobb önállóság. A dicsőséget nehezebb jellemezni. A kutatói munka során rengetegszer érzi az ember nagyon butának magát, de aztán ha a sok erőfeszítés sikerre vezet, jól esik a kollégák elismerése. A szélesebb társadalomban viszont manapság már nem nagyon lehet kutatóként celebstátuszt elérni, a ma élő legnagyobb matematikusok legtöbbjének a szakmán kívül senki nem ismeri a nevét. Ugyanakkor egy-egy itthoni „sztárhoz" képest földrajzi értelemben sokkal kiterjedtebb ismertségre lehet szert tenni. Néhány éve a tokiói egyetemen adtam elő, és utána megkeresett néhány diák. Azt mondták, ők az ottani fan clubom, és szeretnének közös fotót csinálni, könyvet dedikáltatni. Ehhez hasonló élményeink sokunknak vannak. No ezt csinálja utánunk a Kasza Tibi!

Szamuely Tamás

---

[1] A szerző az MTA Rényi Intézetének tudományos tanácsadója. Álmában két macska volt.



matematikus-karrier

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Kántor Sándorné, Katona Gyula, Frenkel Péter 2017. MÁRCIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

Schweitzer Miklós és a Matematikai Emlékverseny

Schweitzer Miklós 1923-ban született, középiskoláit Budapesten a Mátyás király Gimnáziumban végezte. 1941-ben érettségizett. Ugyanebben az évben az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat matematikai tanulóversenyén második "báró Eötvös Loránd díjat" nyert. Az akkori törvények alapján zsidó származása miatt nem vették fel az egyetemre, azonban matematikai tanulmányait és kutatásait tovább folytatta. Első tudományos eredményét az analízis területén 1942 végén érte el. Ígéretes matematikai tehetsége nem tudott kibontakozni: 1945-ben Budapest ostromakor egy gyilkos golyó oltotta ki életét.

Cikkei, eredményei az Abel-féle hatványsor-tételnek a végtelen sorozatokra való átvitelénél talált összefüggésekről csak a 2. világháború után jelenhettek meg, *Turán Pál, Fejér Lipót* és *Szegő Gábor* gondozásában. A Schweitzer-egyenlőtlenséget 1956-ban *Cassels*, a Schweitzer sejtést 1961-ben *Atkinson* bizonyította be.

Az Eötvös Loránd nevét viselő közös társulat két utóda az 1947-ben alapított Bolyai János Matematikai Társulat és a fizikus tudós nevét megtartó Fizikai Társulat. A korábbi Eötvös Loránd Matematikai Tanulóversenyből lett az 1949-ben Kürschák József nevét felvett matematikaverseny. (1952 óta pedig párja, az őszi fizikaverseny viseli az Eötvös-verseny nevet.)

A Bolyai János Matematikai Társulat alapítói ugyancsak 1949-ben az egyetemi hallgatók számára is létrehoztak egy versenyt, amelyet a 22 éves korában elhunyt tehetséges matematikus emlékére **Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenynek** neveztek el.

A verseny formája és színvonala igen szokatlan volt, 10 napra 10-12 feladat a matematika különböző területeiről. A legszokatlanabb az volt, hogy a versenyzők otthon, vagy a könyvtárban törhették a fejüket, de a feladatok színvonala is messze meghaladta más ismert versenyekét. Azt, hogy ezeket az akkor újszerű feltételeket jól találták ki annak idején a létrehozók, mi sem bizonyítja jobban, hogy a verseny 68 év után is létezik és sikeres. Kritikus pontnak tűnhet, hogy a versenyzők sportszerűtlenül együttműködhetnének, vagy külső segítséget vehetnének igénybe. Azonban a sok évtized alatt nem derült fény olyan esetre, amikor egy ilyen csalás befolyásolta volna a végeredményt. A másik jellegzetesség a feladatok nehézsége és sokszínűsége. Sokszor már a feladatok megértéséhez is az irodalomhoz kell fordulni, mert az egyetemi anyagon túlmutató fogalmak szerepelnek bennük. A megoldások megtalálása közel áll az önálló kutatások végzéséhez. És csak az tud eredményesen szerepelni, aki a matematikának nem csak egy területén tájékozott, hanem széleskörű ismeretekkel rendelkezik. A kiváló feladatmegoldó képesség nem elegendő. Ha végignézzük az eredmények listáját (http://www.bolyai.hu/schweitzer.htm) láthatjuk, hogy az eredményes versenyzők túlnyomó része eredményes kutatóvá vált (nem csak az első díjasok). Érdemes felsorolni azok nevét, akik négyszer is első díjat nyertek: Csiszár Imre, Lovász László, Ruzsa Imre, Tardos Gábor, Bíró András, Nagy János (mind Magyarországon dolgoznak).

A Contests in higher mathematics (Hungary, 1949 – 1961) in Memorian Miklós Schweitzer (Editorial Board: G. Szász, L. Gehér, I. Kovács, L. Pintér, Akadémiai Kiadó, 1968) c. könyv tartalmazza az 1949-1961 közötti versenyek anyagát, folytatása a Contests in higher mathematics 1962-1991, Springer, Editor: Gábor J. Székely.

Az érdeklődők 2003-ig a http://www.versenyvizsga.hu portálon tudják megnézni a feladatokat és a díjazottak listáját. A későbbi évek versenyeinek feladatai a http://www.math.u-szeged.hu/~mmaroti/schweitzer/ oldalon találhatók.

A versenyjelentések a Bolyai Társulat folyóiratában, a Matematikai Lapokban, és 2009 óta a feladatokkal együtt a http://www.bolyai.hu/schweitzer.htm honlapon minden évben megjelennek.

Kántor Sándorné és Katona Gyula írásai alapján

Jelentés a 2016. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat 2016. október 24. és november 2. között rendezte meg a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, továbbá azok vehettek részt, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 2016-ban fejezték be.

A verseny lebonyolítására a Társulat a következő bizottságot kérte fel: Füredi Zoltán (elnök), Frenkel Péter (titkár), Biró András, Csikós Balázs, Halász Gábor, Keleti Tamás, Komjáth Péter, Móri Tamás, Terpai Tamás.

A bizottság október 14-i ülésén kiválasztotta a 10 kitűzendő feladatot. A bizottság köszönetét fejezi ki mindazoknak, akik feladatot javasoltak a versenyre. A kitűzött feladatokat javasolták: 1. Ruzsa Imre, 2. Király Zoltán, 3. Totik Vilmos, 4. Füredi Zoltán, 5. Buczolich Zoltán, 6. Biró András és Halász Gábor, 7. Szabó Endre és Szűcs András, 8. Augustin Fruchard és Bárány Imre, 9. Lovász László, 10. Székely J. Gábor.

A verseny eredményes volt, 15-en indultak rajta, összesen 65 megoldást nyújtottak be. Ezek ötletességükben helyenként a kitűzők eredeti megoldásait is túlszárnyalták.

A versenybizottság december 2-i ülésén megállapította, hogy egyetlen versenyző oldotta meg – apró hiányosságoktól eltekintve – mind a tíz feladatot. Ennek alapján

*I. díj*ban és 100 000 forint pénzjutalomban részesült

Nagy János, az ELTE végzett, matematikus mesterszakos hallgatója, jelenleg a Közép-európai Egyetem Matematika és Alkalmazásai doktori programjának elsőéves hallgatója.

Egy versenyző oldott meg hat és fél feladatot (1., 2., 3., 7., 8., 9., valamint részeredmény a 4. és 5. feladatban). Ennek alapján

*II. díj*ban és 50 000 forint pénzjutalomban részesült

Ágoston Tamás, az ELTE másodéves, matematikus mesterszakos hallgatója.

Három versenyző oldott meg lényegében öt vagy öt és fél feladatot. Ennek alapján

*III. díj*ban és fejenként 30 000 forint pénzjutalomban részesült

Fehér Zsombor, az ELTE másodéves, matematika alapszakos hallgatója,

Frankl Nóra, az ELTE végzett, matematikus mesterszakos hallgatója, jelenleg a London School of Economics and Political Science elsőéves doktorandusz hallgatója és

Maga Balázs, az ELTE harmadéves, matematika alapszakos hallgatója.

Közülük Fehér Zsombor megoldotta az 1., 2., 3., 5., 8. feladatot; a 2. feladatra adott megoldása kiemelkedő. Frankl Nóra megoldotta 2., 3., 4., 8., valamint apróbb, javítható hibáktól eltekintve az 5. feladatot, és hiányos megoldást adott az 1. feladatra. Maga Balázs megoldotta a 2., 3., 5., 8., valamint -- kis hiányosságtól eltekintve -- a 4. feladatot.

Három versenyző oldott meg három feladatot (és ért el esetleges további részeredményt). Ennek alapján

*dicséret*ben részesült

Csernák Tamás, az ELTE harmadéves, matematika alapszakos hallgatója,

Szőke Tamás, az ELTE másodéves, matematika alapszakos hallgatója és

Williams Kada, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. évfolyamos tanulója.

Közülük Csernák Tamás megoldotta a 3., 5. és 8. feladatot, és részeredményt ért el a 2. feladatban. Szőke Tamás a 2., 3. és 8., Williams Kada pedig a 3., 4. és 8. feladatot oldotta meg.

A díjakat a Morgan Stanley Magyarország Elemző Kft. támogatta, ezért a versenybizottság köszönetét fejezi ki.

A 2016. évi díjak átadására december 14-én az Eötvös József Gimnázium Dísztermében került sor.

Frenkel Péter

díjazottak beszámolók matematikatörténet Schweitzer Miklós

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Radnai Gyula 2017. MÁRCIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

Faragó Andorról – két tételben II. Tanár és lapszerkesztő a XX. században

Tanár Sopronban, majd Budapesten

A soproni m. kir. áll. főreáliskolát 1850-ben mint városi katholikus alreáliskolát alapították. 1868-ban lett községi főreáliskola, melyet 1876-ban államosítottak, ekkor kapott gyönyörű új épületet. 1922 óta Széchenyi István nevét viseli az iskola. A XIX. század végén – 1872-től 25 éven át – nevezetes fizikus igazgatója volt ennek a főreáliskolának: a svájci születésű, francia származású Jedlik tanítvány, Salamin Leó (1832-1903). Amikor Salamin Leó nyugdíjba ment, Wallner Ignác (1847-1929), az új, kémia-biológia szakos igazgató fiatal fizikatanárt keresett és talált Péch Aladár (1873-1949) személyében. Péch Aladárnak azonban nagyobb ambíciói voltak, és amikor néhány év múlva kedvező állásajánlatot kapott Budapestről, ott hagyta Sopront. 1901-ben az ő helyére vett fel Wallner Ignác ismét egy fiatal tanárt, Faragó Andort.

A soproni Széchenyi István Gimnázium korabeli fényképe

Faragó mindjárt az első tanévben osztályfőnök lett, mégpedig a VII. osztályban, ahol a fizikát (természettant) tanította heti 4 órában. Tankönyvként Fehér Ipoly (1842-1909) Kísérleti természettan c. jól bevált fizikakönyvét használta, Szekeres Kálmán (1859-1940) átdolgozásában. Szekeres Kálmán 1888-tól 1895-ig volt ennek az iskolának a fizikatanára. Faragó Andor összesen heti 17 órában tanított, legénylakása az iskolai Értesítő tanúsága szerint az Erzsébet u. 14-ben volt. Nem tartott sokáig ez a legényélet: a következő tanév végén, miután osztálya sikeresen leérettségizett, Faragó Andor 1903. július 9-én megházasodott. Elvette feleségül a nála nyolc évvel fiatalabb Rosenfeld Berta kisasszonyt. Új lakásba költöztek: a Győri vasúti sor 7-be. Mellettük, a Győri vasúti sor 9-ben lakott kollegája, Faragó József (1866-1932), aki Kolozsváron szerezte mennyiségtan-természettan szakos középiskolai tanári oklevelét.

Házasságkötése után Faragó Andor nemcsak új lakáshoz, de új osztályhoz is jutott az iskolában, egy V. osztálynak lett osztályfőnöke. Itt heti 5 órában tanított „mathematikát" és ő lett az V-VIII. osztályos tanulók számára fenntartott ifjúsági könyvtár őre . Az iskola 1903/04. évi Értesítője az ő tanulmányával indul, címe: „Egy minimum probléma megfejtése elemi geometriai módszerrel." Már itt is látszik, hogy a szerző ismeri és figyelemmel kíséri a matematika oktatásában folyó reformtörekvéseket. Még jobban kiderül ez az Országos Középiskolai Tanáregyesületi Közlönyben 1905-ben publikált cikkéből, melyben a trigonometria tanításához szól hozzá. Közben az ifjúsági könyvtár számára megvette a Középiskolai Mathematikai Lapok XII. és XIII. évfolyamát, valamint Rátz László Mathematikai gyakorlókönyvét. Amikor osztálya felért VII.-be és fizikát kellett már tanítani nekik, a Fehér-Szekeres féle tankönyvet felváltotta az újabb, modernebb szemléletű, Kovács-féle Fizika tankönyvvel. Kovács Zoltán (1871-1912) a győri főreálban, a mai Révay gimnázium elődjében tanított, akkor került oda, amikor Arany Dániel (1863-1945) felköltözött Budapestre. (Egyébként ő volt Kovács Margit keramikus művész édesapja.)

1905-ben ismét új lakásba költöztek Faragó Andorék, mégpedig Sopron belvárosába, a Széchenyi tér 1-be. 1906. február 9-én született meg első gyermekük, Faragó István. Faragó Andor ekkor még többet vállalt, ha kellett, még éneket is tanított az iskolában. Ő lett az ének- és zeneszertár őre. Előadásokat tartott a Soproni Pedagógiai Társaságban az iskolai reformmozgalmakról, a Szabad Lyceumban az elektromos hullámokról. 1907. július 13-án megszületett második gyermekük: Faragó György. Faragó Andor sikeresen leérettségiztette mostani osztályát, a következő tanévben pedig már újra a VII. osztályban lett osztályfőnök, nekik tanította a matekot és a fizikát.

1906-ban Budapesten Beke Manó (1862-1946) elnökletével alakult meg a Matematikatanítási Reformbizottság. Jegyzője Mikola Sándor (1871-1945) volt. A reformbizottság havonta ülésezett, a referátumokról és a hozzászólásokról részletes beszámolókat lehetett olvasni a Tanáregyesületi Közlönyben. Nem nehéz elképzelni, milyen érdeklődéssel követte az eseményeket az újságból Faragó Andor Sopronban. Az 1907/08-as iskolai Értesítő újra az ő tanulmányával kezdődött, címe: „A matematika jelentősége az oktatásban." A tanulmányból jól látszik, hogy Faragó Andor gondolatilag részt vesz, naprakészen tájékozott a matematikai reformmozgalomban. Nyilván szeretne tevőlegesen is részt venni benne, de ehhez Budapesten kellene élnie. Fontos döntést hoz ekkor: 1909-ben még leérettségizteti az osztályát, de utána megpróbál feljutni szülővárosába, Budapestre.

Feleséggel, két pici gyerekkel hol kaphatna lakást és állást Budapesten? Ehhez komolyabb segítségre lesz szüksége. Hallgatva az idők szavára, 1908-ban elhagyja az izraelita vallást, megkeresztelkedik és áttér a római katolikus hitre. (Felesége csak 1938-ban tér át.) Ezzel gyermekei is automatikusan római katolikusok lesznek, és katolikusok is maradnak, egészen halálukig…

Faragó Andor állást is, lakást is kapott Budapesten 1909-ben. Sikeresen pályázott meg egy mennyiségtan-természettan szakos tanári állást abban a VIII. kerületi főgimnáziumban, amely az ő egykori iskolájából, a VII. kerületi főgimnáziumból nőtt ki. Kacsoh Pongrác (1873-1923) helyére került, aki Kecskeméten lett a főreál igazgatója. (Kacsoh Pongrác Kecskeméten is csak három évig maradt: 1912-ben – a János vitéz országos sikere nyomán – már nem tudott ellenállni a zenei pálya vonzásának és feladta matematika-fizika tanári karrierjét.) Először Arany Dániel töltötte be ezt az állást, miután Győrből feljött Budapestre. Őt váltotta Kacsoh Pongrác, most pedig Kacsoh Pongrácot váltotta Faragó Andor.

Lakást a Lónyay utca 46-ban, a III. emeleten kapott - több hozzájuk hasonló tanári család lakott ebben a házban. Publikálni kezdett a Magyar Középiskolában, az 1907-ben alapított Katolikus Középiskolai Tanáregyesület 1908-ban indult folyóiratában. Valószínűleg tagja is lett ennek az egyesületnek. Lehet, hogy itt ismerte meg személyesen Nagy L. József (1882-1962) piarista fizikatanárt, akivel szoros együttműködésben indította meg később a Matematikai és Fizikai Lapok Könyvtárát. Nagy L. József 1906-ban Tangl Károly (1869-1940) egyik legelső tanítványaként szerzett tanári oklevelet Kolozsváron, és lelkes fiatal tanárként 1908-tól 1911-ig tanított a budapesti piarista gimnáziumban. Bizonyára aktívan részt vett a Katolikus Középiskolai Tanáregyesület munkájában.

1909 nyarán Budapesten volt az Országos Középiskolai Tanáregyesület Közgyűlése. Itt hangzott el Mikola Sándor előadása a matematikatanítás reformjáról, a reformbizottság eddigi munkájáról. Ennek nyomán jelent meg még ebben az évben a Beke Manó, Mikola Sándor: „A középiskolai matematikatanítás reformja" c. könyv a Franklin Társulatnál. Semmi kétség: Faragó Andor már újra budapesti polgárként vehetett részt, s ha tudott, részt is vett a közgyűlésen.

Új iskolája a Tavaszmező utca 17-ben, lakásához viszonylag közel volt. Igazgatója a VII. kerületi főgimnázium egykori földrajz-történelem szakos tanára, Létmányi Nándor. Könnyen lehet, hogy annak idején a Barcsay utcában tanította is az ifjú Grosz Andort, tisztában lehetett a fiú képességeivel, jó szervező készségével. Mindjárt kezdetben megbízta az iskola fiókintézményének, a munkásgimnáziumnak a szervezésével.

Érdemes is megvizsgálni, miért és hogyan keletkeztek újabb és újabb középiskolák az első világháború előtt Budapesten. Nőtt a lakosság lélekszáma, és még ennél is gyorsabban nőtt az érettségit adó középiskolák iránti igény. Tanulságos példaként tekintsük csak a már említett Barcsay utcai, VII. kerületi főgimnázium és az ebből kinőtt középiskolák esetét, amelyek mind kapcsolatosak Faragó Andor életpályájával.

1881-ben alapította Trefort Ágoston a VII. kerületi állami főgimnáziumot. Az iskola 1892-ben kapott saját épületet a Barcsay utca 5-ben, amely rövidesen szűknek bizonyult. Ezután több új iskola keletkezett, melyek tanári karát részben a Barcsayból jött tanárok alkották. Először a VIII. kerületben alakult meg egy új főgimnázium 1894-ben, amely 1897-ben kapott saját épületet a Tavaszmező utca 17-ben. Pedig ebben az akkori VIII. kerületben működött az egyetem gyakorló iskolája, a Minta is, és ebben a kerületben működött már egy nívós főreáliskola, a mai Vörösmarty gimnázium jogelődje. Mégis nemsokára a Tavaszmező utcai főgimnázium is „megtelt", és hozzáfogtak egy olyan új fiókgimnázium szervezéséhez a IX. kerületben, amelyet maguk között csak munkásgimnáziumnak neveztek.

A Tavaszmező utcai főgimnáziumból lett 1921-ben Zrínyi Miklós gimnázium, 1945 után pedig Kandó Kálmán technikum, majd főiskola. Itt kezdett el tanítani 1909-ben Faragó Andor és itt tanított csaknem három évtizeden át. Sajnos ma még nem őrzi emlékét tábla az épület falán, pedig az iskolában csupán néhány évig magyart és németet tanító Karácsony Sándorra hatalmas márványtábla emlékeztet.

1914-TŐL 1927-IG EBBEN AZ ÉPÜLETBEN TANÍTOTT
KARÁCSONY SÁNDOR
1891-1952
PROFESSZOR,
A PEDAGÓGIA KIVÁLÓ TUDÓSA,
AZ IFJÚSÁGI MOZGALMAK
NAGYHATÁSÚ VEZETŐJE.

A munkásgimnázium, a későbbi Fáy András gimnázium, formálisan már 1908-ban megalakult, mégis csak 1928-ban készült el saját épülete a Mester utca 60-62-ben. Addig egy bérházban és barakképületekben folyt az oktatás. A gyönyörű Mester utcai épületben ma is középiskola működik, amely 2008-ban ünnepelte alapításának centenáriumát. Faragó Andorról sajnos ők se emlékeztek meg.

Amikor 1909 szeptemberében megjelent Faragó Andor a Tavaszmező utcai főgimnáziumban, már találkozhatott néhány olyan matematikus-fizikus szaktanárral, akiknek nevét csak szakfolyóiratokból ismerte addig. Legismertebb volt közülük Lévay Ede (1864-1928), az Országos Középiskolai Tanáregyesületi Közlöny szerkesztője, a Mathematikai és Physikai Társulat pénztárnoka, matematika és fizika tankönyvek szerzője, aki nemsokára, 1914-ben a Markó utcai főreál igazgatója lett. Itt, a Tavaszmező utcai főgimnáziumban tanított Winter József (1853-1937) kiváló matematika tanár, akinek már három alkalommal is sikerült báró Eötvös díjas versenyzőt nevelnie tanítványaiból, és aki tagja volt a Beke-Mikola féle reformbizottságnak is.

Végre megfelelő szakmai környezetbe került Faragó Andor, és már a második itteni tanévében az egyik VIII. osztály osztályfőnökségét is rábízta Létmányi Nándor. Emellett még egy munkásgimnáziumi VIII. osztályt is kapott, igazgatói beosztásban. Más források szerint a munkásgimnázium vezetője Fodor Gyula (1864-1918) volt, aki ugyancsak a Tavaszmező utcában tanított. Tény az, hogy a VIII. kerületi főgimnázium értesítőjében 1917-ig – amíg csak Létmányi Nándor volt az igazgató – Faragó Andor a munkásgimnázium igazgatójaként van feltüntetve.

Az 1911/12-es tanévben egy induló I. osztálynak lett osztályfőnöke. Ez az osztály 1919-ben érettségizett volna, de ebben az évben a Tanácsköztársaság eltörölte az érettségit, ahogyan eltörölte az osztályozást is minden iskolában. Nincs írásbeli dokumentum arról, hogy mi történt ezzel az osztállyal. Nem nehéz elképzelni, milyen fájdalmat okozott az értelmetlen döntés egy olyan tanárnak, aki nyolc évig – mindenféle viszontagságok között - tanította, nevelte, vezette osztályát. A háború alatt 1914-től 1916-ig hadikórház működött az iskola épületében, ekkor a X. kerületi (tisztviselőtelepi) főgimnázium épületében, délelőtt/délután folyt az oktatás. (Ebben az épületben működik ma az Országos Pedagógiai Könyvtár és Múzeum.) A matematikát végig Faragó Andor tanította az osztályában, de mindig kapott VII. és VIII. osztályos órákat is. A fizikát Kovács Zoltán tankönyvéből tanította, akárcsak Sopronban.

Létmányi Nándor halála után Lengyel Miklós (1878-1952) lett az iskola igazgatója. Korban közel állt Faragó Andorhoz, de érdeklődése távol állt a természettudományoktól. Irodalomtörténész volt. A kommün bukása után jelentős változásokat hajtott végre a tantestületben. Winter Józsefet 43 évi szolgálat után nyugdíjba küldte, helyette Faragó Andorra bízta a fizikaszertár gondozását. Ahogy akkor mondták: Faragó Andor lett a természettani szertár őre. Új tanárokat is felvett, akik legtöbbje azonban csak rövid ideig maradt itt. Verő Leó (1885-1925) rejtélyes módon eltűnt Párizsban, és Karácsony Sándor (1891-1952) is csak 1927-ig tanított az iskolában. A legérdekesebb eset az 1921/22-es tanévben történt: ekkor került az iskolához Erdős Lajos, mégpedig franciát és angolt tanítani!

Erdős Lajos hosszú orosz hadifogság után tudott csak hazavergődni 1921-ben. A fogságban kapott, vett, talált könyvekből megtanult franciául és angolul olvasni és írni, de persze nem ismerte a szavak kiejtését. Ennek ellenére Lengyel Miklós felvette és „ideiglenesen beosztotta" heti 6x3 nyelvóra tartására. Nyilván szükséghelyzet volt, továbbá az is nagyon valószínű, hogy Faragó Andor támogatása segítette Erdőst ehhez az álláshoz. A következő három tanévben már szaktárgyait tanította Erdős Lajos a pestszenterzsébeti Kossuth Lajos reálgimnáziumban, innen ment át 1925-ben a Szent István reálgimnáziumba.

Faragó Andor az 1922/23-as tanévben vállalt utoljára osztályfőnökséget, mégpedig egy érettségiző osztályban. Ekkorra már Kovács Zoltán fizikakönyvét is átdolgozta Fröhlich Károly (1879-1933), Karinthy egykori tanára a Markó utcai főreálból. Úgyhogy ezt használta. Saját fiai is az érettségi felé közeledtek: István 1924-ben, György 1925-ben érettségizett.

1925-ben belefogott élete legnagyobb és mind maga, mind az ország számára legjobb vállalkozásába: megindította a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokat. Erről később részletesen fogunk szólni, most röviden áttekintjük Faragó Andor további életének az iskolai dokumentumokból kiolvasható fontosabb eseményeit, egészen nyugdíjazásáig.

Már az 1923-ban rábízta az igazgató az ifjúsági körök felügyeletét, 1924-ben – a koppenhágai jamboree évében – csapatfelügyelő lett az iskolai cserkészetnél. A Lapok szerkesztése, kiadása egyre több idejét vette el, ezért 1928-tól kezdve csökkentett óraszámban, heti 12 órában tanított az iskolában. Fizikából Nagy L. József tankönyveit, valamint volt vezetőtanára, Szíjártó Miklós tankönyvét használta, a Markó utcai főreálban tanító Fraknóy (Fornwald) József átdolgozásában. 1929-ben hívták meg a matematikai Eötvös-verseny bíráló bizottságába, 1931-től pedig már a fizikai Károly Irén verseny bíráló bizottságának is tagja volt. Választmányi tag volt 1930-tól 1933-ig az Országos Középiskolai Tanáregyesületben, 1931-től pedig az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulatban.

1932-ben elköltözött a Lónyay utcából Budára, a Verpeléti út 22-be, egy ugyancsak III. emeleti lakásba. Ugyanebben a házban lakott Karinthy Frigyes és családja, a VI. emeleten. Nincs kizárva, hogy ismerték egymást. (A Verpeléti út ma már Karinthy Frigyes nevét viseli.) Az 1935/36-os tanév jutalomév volt számára: címzetes igazgatóvá nevezték ki és már nem is kellett órát tartania az iskolában. 1936 május 1-jén ment nyugdíjba.

Az iskolai Értesítőben olvashatjuk: „Május 1-jén vált meg iskolánktól Faragó Andor rendes tanár. 35 évi szolgálat után nyugállományba helyezték. A 35 évből 27-et intézetünkben töltött…" Lengyel Miklós igazgató a következő szavakkal méltatta nyugdíjba menő kollégáját:

„Faragó Andor egyike a legképzettebb matematikusoknak. Nagy tudását nemcsak a tanításban használta fel, hanem évek hosszú sora óta szerkesztője a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapoknak. Ez az ifjúságnak szánt folyóirat nagy érdeklődést váltott ki és segítségére volt a középiskolai tanításnak. Hatását és eredményét már most érezzük, pár év múlva még jobban érezni fogjuk. De Faragó Andor nemcsak szaktudós. Ismeri és értékeli a klasszikus írókat is. Jártas a latin nyelvben. Egyéniségén kívül főleg ennek tulajdoníthatjuk, hogy meghatározásai mindig szabatosak, magyarázatának menete mindig logikus volt. Lapját tovább szerkeszti: kapcsolata a tudománnyal és iskolánkkal távozása után sem szakad meg."

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok szerkesztője

A 21. századból visszatekintve különös szerencsének mondhatjuk, hogy 1922-ben Klebelsberg Kunó (1875-1932) lett Magyarország kultuszminisztere. Debrecenben, Pécsett és Szegeden jól átgondolt egyetemi építkezésekbe fogott, Bécsben, Berlinben, Rómában létrehozta a Collegium Hungaricumokat. Az ő hívására jött haza és kapott méltó helyet a hazai tudományos életben Szent-Györgyi Albert (1893-1986) és Bay Zoltán (1900-1992). Felkarolta a természet- és műszaki tudományokat, elérhető hazai és külföldi ösztöndíjak rendszerével támogatta a magyar kutatókat. Az egyetemi oktatás újjászervezésében a gyakorlatiasabb oktatásra helyezte a hangsúlyt, előtérbe állította a reáltudományokat.

1922-ben a matematikában és fizikában tehetséges középiskolai tanulók számára újra indultak a Társulat tanulóversenyei. Ebben az évben matematikából Kalmár László (1905-1976), fizikából Reguly Zoltán (1904-1952) lett az első. 1923-ban Pintér Jenő (1881-1940) megszervezte először Budapesten, majd az egész országra kiterjedően az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyt minden fontosabb tantárgyból, így matematikából és fizikából is, azonban lényegesen más feltételekkel, mint amik a Társulat versenyein voltak érvényesek. Nem indulhatott bárki az OKTV-n, csupán tantárgyanként egyetlen versenyző minden középiskolából. Nem lehetett használni segédeszközöket (saját könyveket, szótárakat, jegyzeteket) a dolgozat elkészítéséhez, így a kreativitás helyett a memória vált döntő tényezővé. Nem lehet csodálni, hogy matematikából és fizikából az OKTV-n kitűzött feladatok színvonala általában alacsonyabb volt a társulati versenyek színvonalánál. Csakhogy a társulati versenyeken meglehetősen kicsi volt a résztvevők száma, olykor a 30-at se érte el. Egyre jobban érződött az 1914-ig Rátz László (1863-1930) által szerkesztett Középiskolai Mathematikai Lapok tehetségfelkaroló és fejlesztő munkájának hiánya.

1924-ben két fontos törvénytervezetet terjesztett Klebelsberg Kunó a parlament elé, s az országgyűlés mindkettőt elfogadta. A legutóbbi, hasonló horderejű törvény még 1883-ban, Trefort Ágoston minisztersége idején született.

Az 1924/11. törvénycikk legfontosabb két eleme a reálgimnázium létrehozása és az egyetemi továbbtanulás szempontjából egységes jogosítás elvének bevezetése volt. Megszűntek a főgimnáziumok és a főreáliskolák, helyettük gimnáziumok, reáliskolák és reálgimnáziumok jöttek létre. Az ország középiskoláinak több mint a fele reálgimnázium lett, egységes, a reáltantárgyakat kiemelten kezelő tanrenddel. Az egységes jogosítás elve azt jelentette, hogy mindegyik középiskolából ugyanolyan joggal jelentkezhetett bárki bármelyik egyetemre.

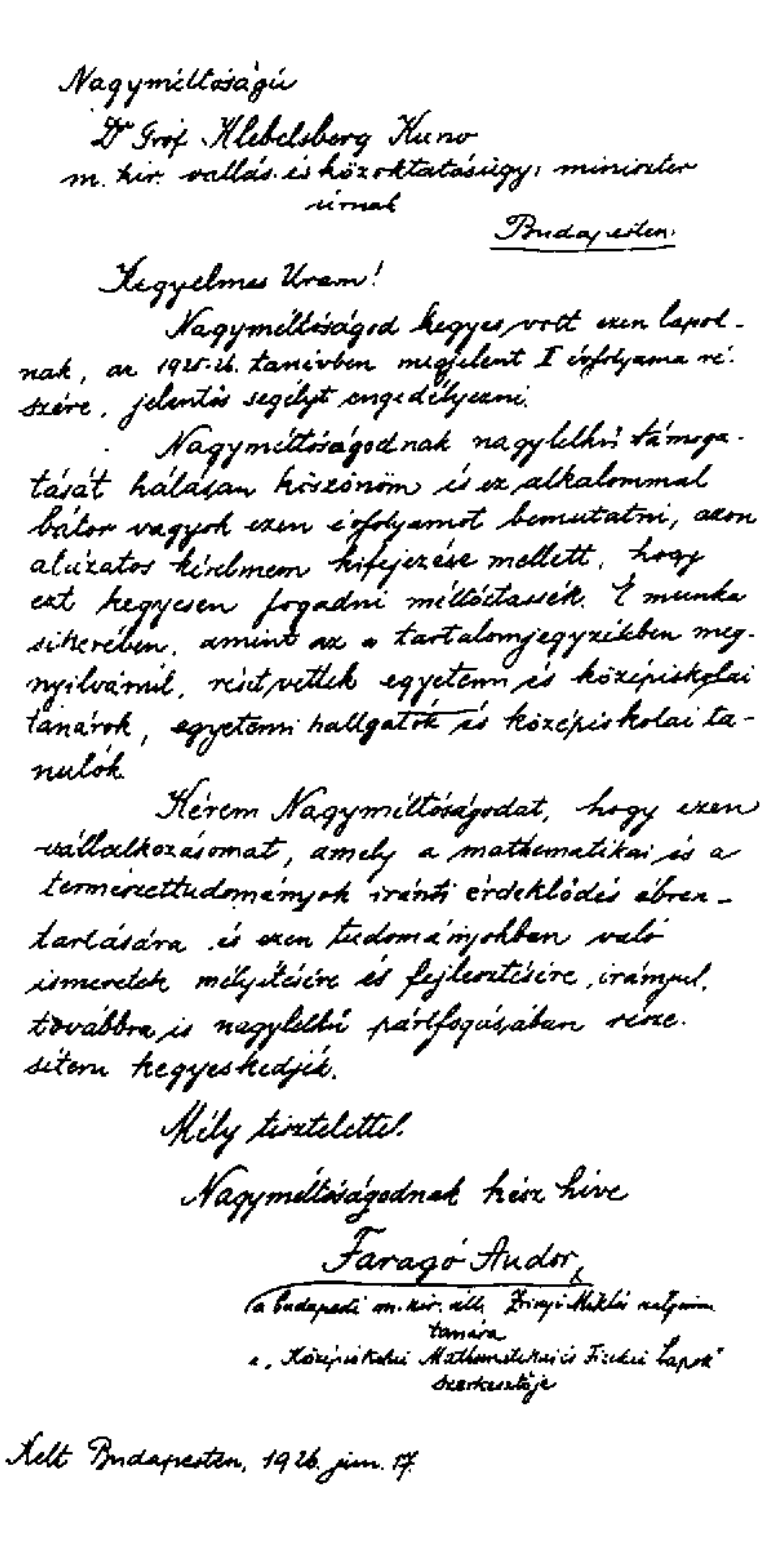
Az 1924/27. törvénycikk a középiskolai tanárok képzéséről rendelkezett, legfontosabb eleme az egyetemek mellett működő tanárképző intézetek megerősítése volt. A tanár szakos hallgatóknak az egyetemmel párhuzamosan be kellett iratkozniuk a tanárképző intézetbe, így nemcsak egyetemi, de tanárképző intézeti leckekönyvük is lett.

Mint arról például a Bakos Tibor (1909-1998) hagyatékában megőrzött iratokból is meggyőződhetünk, az egyetemi vizsgarend a matematika-fizika szakon nem sokat változott. 1924 után is volt másodév végi alapvizsga és a negyedév végi szakvizsga, melyet ugyanannál a vizsgabizottságnál kellett letenni. Mindkét szaktárgyból kötelező volt szakdolgozatot írni a negyedik év végéig, akárcsak Faragó Andor idejében. Az ötödik évet azután végig a tanárképző intézeti gyakorlóiskolában kellett eltölteni. Itt Bakos Tibornak jól jött, hogy vezetőtanárai nemcsak kollegák, de egymás barátai is voltak: matematikából Horvai (Kronstein) Béla (1885-1969), fizikából Kronberger Ede (1885-?). Sokat tanult tőlük. Előtte az egyetemen Kürschák József (1964-1933) vizsgáztatta matematikából és Pogány Béla (1887-1943) fizikából, náluk írta a szakdolgozatait is. (Matematikából Kürschák egyik kedvenc témájából, a „tapétákból", az u.n. felületi díszítmények szimmetriacsoportjaiból, fizikából pedig Pogány egyik „házi" témájából, egy röntgendiffrakciós szerkezetvizsgálati komplex témából. A méréseket a műegyetem laborjában kellett – lehetett - elvégeznie.) Jó példa ez arra, hogy Kürschák és Pogány bár műegyetemi tanárok voltak, mégis alkothattak egy független tanárvizsgáló bizottságot. Műegyetemisták is lehettek ugyanis a tanárképző intézet hallgatói, ami még indokoltabbá tette, hogy műegyetemi tanárok is legyenek a tanárvizsgáló bizottságokban. Mindez Klebelsberg Kunó nagyvonalú oktatáspolitikájának volt köszönhető, aki nemcsak lehetővé tette, de segítette is a reáltehetségek kibontakozását. Többek között úgy is, hogy támogatta a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok megjelenését. Bakos Tibor, a KöMaL volt főszerkesztőjének példáját is azért idézzük Faragó Andor kapcsán, mert az ő életpályáját döntően befolyásolta ez a Klebelsberg féle oktatáspolitika.

Bakos Tibor 1926-ban érettségizett Szombathelyen, ahol Radványi László (1891-?) volt a matematika tanára. Ősszel megnyerte a Társulat tanulóversenyét matematikából is, fizikából is. Tehetségén, valamint kiváló tanárán kívül ezt Faragó Andornak köszönhette, aki előző évben újraindította a Rátz László által félbehagyott Középiskolai Matematikai Lapokat, és lehetővé tette, hogy az iskolai matematika és fizika tananyagában elmélyüljön, fejlessze problémamegoldó képességét. Ez az indítás vezette őt Kürschák Józsefhez, akinek előadásaira átjárt a műegyetemre, akihez szigorlatra jelentkezett, és akinél első komolyabb matematikai munkáját, szakdolgozatát írta. Valószínűleg közel járunk az igazsághoz, ha feltételezzük, hogy később, már a második világháború után, az akkori KöMaL szerkesztését is ezért merte elvállalni. Kiváló elődök: Arany Dániel, Rátz László, Faragó Andor és Neukomm Gyula (1892-1957) nyomán dolgozhatott Bakos Tibor, a Kürschák Józseftől látott és magáévá tett igényességgel és élvezettel.

Hogyan is született hát a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok?

1924. áprilisban Faragó Andor fizetését felemelték: átlépett a VII. fizetési osztályból a VI. fizetési osztályba. István fia júniusban érettségizett. A Tavaszmező utcai iskolát, amely három éve viselte már Zrínyi Miklós nevét, ősszel reálgimnáziummá avatták. Faragó Andor ekkor már negyedik éve volt itt a fizikaszertár őre, s ebben a tanévben barátja, Erdős Lajos is megkapta ezt a címet és feladatot a pestszenterzsébeti Kossuth Lajos reálgimnáziumban. Másik barátja, Nagy L. József 1919 óta újra a budapesti piarista gimnáziumban tanított, 1923-ban jelent meg az általa átdolgozott Fehér-Szekeres féle fizika tankönyv első kötete, 1924-ben a második kötet. Faragó Andor azonnal áttért ezekre a tankönyvekre. Mindhárman aktív tagjai voltak az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulatnak, ahol nyilván felvetődött, hogy újra kellene indítani a Lapokat. Ekkor már Nagy L. József kolozsvári fizikaprofesszora, Tangl Károly is a budapesti tudományegyetemen működött, Eötvös Loránd halála után őt bízták meg a Kísérleti Fizikai Intézet vezetésével. Biztos, hogy valamennyien helyeselték, feltehetően szorgalmazták is a Lapok újraindításának gondolatát. Az erkölcsi támogatáson túl anyagi támogatásról is szó lehetett, minthogy Klebelsberg Kunó törekvéseivel összhangban állt a folyóirat célja, a matematikai és fizikai tehetségek kiválasztása, fejlesztése, gondozása. Nem tudni, ki javasolta, hogy a „fizikai" jelző is kerüljön be a Lapok nevébe, ahogyan benne van a Társulat nevében is, de biztosak lehetünk abban, hogy mindannyian egyetértettek ezzel. Már csak valakinek vállalkoznia kellett a Lapok szerkesztésére és kiadására.



Nagyméltóságú
Dr Gróf Klebelsberg Kuno
m. kir. vallás- és közoktatásügyi miniszter
urnak
Budapesten.

Kegyelmes Uram!

Nagyméltóságod kegyes volt ezen lapoknak, az 1925-26. tanévben megjelent I évfolyama részére, jelentős segélyt engedélyezni.

Nagyméltóságodnak nagylelkű támogatását hálásan köszönöm és ez alkalommal bátor vagyok ezen évfolyamot bemutatni, azon alázatos kérelmem kifejezése mellett, hogy ezt kegyesen fogadni méltóztassék. E munka sikerében, amint az a tartalomjegyzékben megnyilvánul, részt vettek egyetemi és középiskolai tanárok, egyetemi hallgatók és középiskolai tanulók.

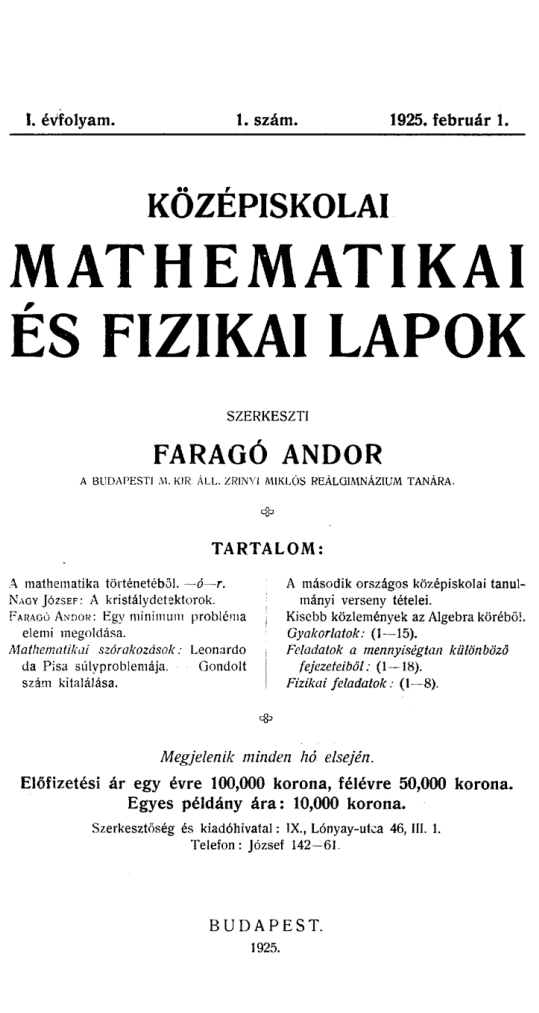
Kérem Nagyméltóságodat, hogy ezen vállalkozásomat, amely a mathematikai és a természettudományok iránti érdeklődés ébrentartására és ezen tudományokban való ismeretek mélyítésére és fejlesztésére irányul, továbbra is nagylelkű pártfogásában részesíteni kegyeskedjék.

Mély tisztelettel.
Nagyméltóságodnak hű híve
Faragó Andor
(a budapesti m. kir. áll. Zrínyi Miklós reálgimn. tanára
s a „Középiskolai Mathematikai és Fizikai Lapok" szerkesztője

Kelt Budapesten, 1926 jún. 17.

Faragó Andor vállalkozott rá. Megszerezvén a szükséges minisztériumi engedélyeket és támogatást, 1925. januárban már nyomdában volt és február 1-jén megjelent a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 1. száma. Egy-egy példány ára 10 ezer inflációs korona volt – még két évig váratott magára az új fizetőeszköz, a pengő bevezetése. (Rátz László újságja a „békebeli időkben" csaknem két évtizeden át ugyanannyiba került: 60 fillérbe.)

Nem volt ebben az első számban semmi bevezető magyarázkodás, in medias res a Bernoulliakkal kezdte Faragó Andor az újságot, nem kevesebbel, mint a brachistron problémával. Azután Nagy L. József cikke következett a kristálydetektorokról, majd újra egy Faragó írás egy minimum probléma elemi megoldásáról. Kisebb közlemények, „matematikai szórakozások", az 1924-es OKTV tételek bemutatása után kitűzött indulásnak 15 gyakorlatot és 18 feladatot matematikából, majd 8-at fizikából, és várta a postán érkező megoldásokat.



I. évfolyam. 1. szám. 1925. február 1.

KÖZÉPISKOLAI
MATHEMATIKAI
ÉS FIZIKAI LAPOK

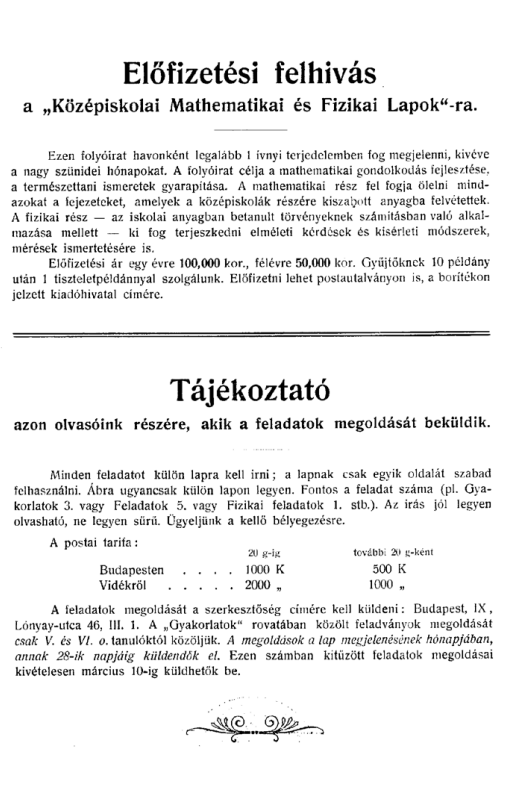
SZERKESZTI
FARAGÓ ANDOR
A BUDAPESTI M. KIR. ÁLL. ZRÍNYI MIKLÓS REÁLGIMNÁZIUM TANÁRA.

TARTALOM:

A mathematika történetéből. –d–r.
Nagy József: A kristálydetektorok.
Faragó Andor: Egy minimum probléma elemi megoldása.
Mathematikai szórakozások: Leonardo da Pisa súlyproblémája. Gondolt szám kitalálása.
A második országos középiskolai tanulmányi verseny tételei.
Kisebb közlemények az Algebra köréből.
Gyakorlatok: (1–15).
Feladatok a mennyiségtan különböző fejezeteiből: (1–18).
Fizikai feladatok: (1–8).

Megjelenik minden hó elsején.
Előfizetési ár egy évre 100,000 korona, félévre 50,000 korona.
Egyes példány ára: 10,000 korona.
Szerkesztőség és kiadóhivatal: IX., Lónyay-utca 46, III. 1.
Telefon: József 142–61.

BUDAPEST.
1925.



Előfizetési felhívás
a „Középiskolai Mathematikai és Fizikai Lapok"-ra.

Ezen folyóirat havonként legalább 1 ívnyi terjedelemben fog megjelenni, kivéve a nagy szünidei hónapokat. A folyóirat célja a mathematikai gondolkodás fejlesztése, a természettani ismeretek gyarapítása. A mathematikai rész fel fogja ölelni mindazokat a fejezeteket, amelyek a középiskolák részére kiszabott anyagba felvehetők. A fizikai rész — az iskolai anyagban betanult törvényeknek számításban való alkalmazása mellett — ki fog terjeszkedni elméleti kérdések és kísérleti módszerek, mérések ismertetésére is.

Előfizetési ár egy évre 100,000 kor., félévre 50,000 kor. Gyűjtőknek 10 példány után 1 tiszteletpéldánnyal szolgálunk. Előfizetni lehet postautalványon is, a borítékon jelzett kiadóhivatal címére.

Tájékoztató
azon olvasóink részére, akik a feladatok megoldását beküldik.

Minden feladatot külön lapra kell írni; a lapnak csak egyik oldalát szabad felhasználni. Ábra ugyancsak külön lapon legyen. Fontos a feladat száma (pl. Gyakorlatok 3. vagy Feladatok 5. vagy Fizikai feladatok 1. stb.). Az írás jól legyen olvasható, ne legyen sűrű. Ügyeljünk a kellő bélyegezésre.

A postai tarifa:

	20 g-ig	további 20 g-ként
Budapesten	1000 K	500 K
Vidékről	2000 „	1000 „

A feladatok megoldását a szerkesztőség címére kell küldeni: Budapest, IX., Lónyay-utca 46, III. 1. A „Gyakorlatok" rovatában kitűzött feladványok megoldását csak V. és VI. o. tanulóktól közöljük. A megoldások a lap megjelenésének hónapjában, annak 28-ik napjáig küldendők el. Ezen számban kitűzött feladatok megoldásai kivételesen március 10-ig küldhetők be.

Azok pedig hamarosan meg is érkeztek, a szerkesztő, valamint az akkori tehetséges középiskolások és tanáraik legnagyobb örömére. Radványi László tanár úr, aki egykor maga is megoldója volt a Rátz László szerkesztette Lapoknak, most vidáman nyomta tanítványa (Bakos Tibor) kezébe az új Lapokat: itt van pupák, most mutasd meg, mit tudsz! Ő pedig megmutatta. Fényképe egy év múlva az első oldalon szerepelt az újságban, ahol Faragó Andor, új hagyományt teremtve, szép, fényes papíron közölte a legjobb megoldók fotóit.

A Faragó Lapokról az első rövid, bemutató értékelés 1926-ban jelent meg a Tanáregyesületi Közlönyben. A következő év tavaszán a Magyar Középiskola már részletes áttekintést adott az egész elmúlt évfolyamról Borosnyay Szeréna (1881-?), a Mária Terézia Leánylíceum tanárának tollából. A Társulat tudományos folyóirata, a Matematikai és Fizikai Lapok elvből nem közölt recenziókat, így nem adhatott hírt a Faragó Lapok megjelenéséről sem.

1927-ben jelent meg Budapesten Nagy L. József és Faragó Andor közös kiadásában A Matematikai és Fizikai Lapok Könyvtárának 1-2. száma „Kiváló matematikusok és fizikusok" címmel. Az akkor már a váci piarista gimnáziumban tanító Nagy L. József volt a könyv szerkesztője és ő írta meg benne Archimedes és Galilei életrajzát is a diákok számára. Az előszót Tangl Károly professzor írta. Még ez év tavaszán közölt e könyvről kedvező bírálatot a Tanáregyesületi Közlöny. A recenzió szerzője Mende Jenő (1883-1944), aki akkor a Kölcsey gimnáziumban tanította a fizikát, Novobátzky Károly (1884-1967) kollegájaként.

1929-ben, Eötvös Loránd halálának 10. évfordulója alkalmából Szegeden jelent meg A Matematikai és Fizikai Lapok Könyvtárának 3-5. száma: Kürschák József „Matematikai versenytételek" c. munkája. Ebben az 1894 óta folyó társulati tanulóversenyek több mint három évtizedének matematika feladatait dolgozta fel a szerző igényesen, nagy szakmai és metodikai hozzáértéssel. Ez a könyv, kiegészítve az azóta született folytatásokkal, melyeket Hajós György (1912-1972), Neukomm Gyula és Surányi János (1918-2006) neve fémjelez, ma is egyik fő segítség a már Kürschák Józsefről elnevezett tanulóversenyre készülő diákok és tanáraik számára. Miért éppen Szegeden jelent meg Kürschák József könyve? Mert a megjelenéshez a minisztérium anyagi támogatására is szükség volt, s azt így lehetett biztosítani. A Faragó Andor – Nagy L. József szerkesztőpáros vállalkozásához a támogatást valószínűleg az ugyancsak piarista Kornis Gyula (1885-1958) szerezte meg, aki akkor államtitkár volt Klebelsberg Kunó minisztériumában. Kürschák köszönetet is mondott a minisztériumi támogatásért a könyv előszavában. És ki írta az első lelkendező recenziót a könyvről 1930-ban, a Tanáregyesületi Közlönyben? Nem más, mint Erdős Lajos.

Erdős Lajos a Lapok megindítása óta szívén viselte Faragó Andor vállalkozásának ügyét. „Az atomok világában" címmel öt részes közleményt jelentetett meg a Lapok induló számaiban, melyben a statisztikus fizika és általában a modern fizika újabb eredményeit tárta érthető módon a Lapokat olvasó diákok elé. Most se mulasztotta el megjegyezni: „Felesleges rámutatni a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok hasonlíthatatlan fontosságára; a múltban is ez volt a korán megnyilatkozó tehetségek gyakorló tere és most is ennek munkatársai közül kerülnek ki a különböző versenyek győztesei." Kétoldalas recenziójának végén egészen személyes hangot ütött meg, midőn felidézte egykori – Faragó Andorral együtt töltött – egyetemi éveit: „Immár harminc esztendeje annak, hogy Kürschák József előadásait hallgattam és könyvének olvasása alkalmával ezek az előadások elevenedtek meg. Ugyanazzal a féltő gonddal és szeretettel írta meg ezt a könyvét, mint ahogy bennünket bevezetett a szabályos számsorozatok meg a projektív sugársorok misztériumaiba; a madár tanítja így repülni a fiait, hogy megerősödve tudjanak szembeszállni az igazi nehézségekkel. A szeretet adománya ez a könyv, a szereteté és a kegyeleté, mert nem véletlen az sem, hogy éppen tíz évvel Eötvös Loránd halála után jelent meg. Mi magyar tanárok megértettük a Mester szavát és intencióinak megfelelően fogjuk felhasználni."

Kikkel dolgozott együtt Faragó Andor, akiket sikerült megnyernie, hogy cikkeket, tanulmányokat írjanak a diákok számára? A már említett Nagy L. Józsefen és Erdős Lajoson kívül álljon itt néhány név a cikkírók közül:

„Matematikai értekezést" írt többek között Adler Ernő (-), Arany Dániel (1863-1945), Balyi Ferenc Károly (1897-1975), Bella Andor (-), Bodócs István (1887-1965), Csada Imre (1884-1955), Egerváry Jenő (1891-1958), Elek Tibor (1910-1972), Erdős Pál (1913-1996), Fejes László (1915-2005), Goldziher Károly (1881-1955), Grünwald Tibor (1912-1992), Jordan Károly (1871-1959), Kalmár László (1905-1976), Kárteszi Ferenc (1907-1989), Klein Eszter (1910-2005), Klug Lipót (1854-1944), Korányi Szevér (1895-1955), Kresznerics Károly (-), Márkus József (-), Sárközy Pál (1884-1957), Sós Ernő (1881-?), Spitz Iván (-), Szépréthy Béla (1861-?), Szűcs Adolf (1884-1945), Svédné Wachsberger Márta (1910-2005), Telkes Sándor (1874-1951), Tihanyi Miklós (1873-1951), Torda Klára (-), Tóvárosi Fischer György (-), Török Elemér (-), Turán Pál (1910-1976), Veress Pál (1893-1945), Weiszfeld Endre (1916-2003).

„Fizikai ill. csillagászati értekezést" írt többek között Bodócs István (1887-1965), Bohárcsik Pál (1899-1969), Csada Imre (1884-1955), Mende Jenő (1883-1944), Nagy Béla (1881-1954), Selényi Pál (1884-1954), Strasser V. Benő (1884-1966), Szabó Gábor (1876-1956), Terkán Lajos (1877-1940), Vermes Miklós (1905-1990), Zilczer Pál (-).

Érdemes azt is megvizsgálni, hogy kik tűzték ki a feladatokat. Faragó Andor nem minden feladat alá írta oda az illető nevét, ezeket a feladatokat valószínűleg különböző példatárakban találta, vagy ő maga találta ki őket – saját nevét egyetlen feladathoz se írta oda. Matematikából nagyon sok feladatkitűző volt. Középiskolások, egyetemi hallgatók, középiskolai és egyetemi tanárok. A legtöbb feladatot kitűzők nevei között találjuk Arany Dánielt, Bakos Tibort, Klug Lipótot, Kőnig Dénest, Kürschák Józsefet, továbbá Goldziher Károlyt a műegyetemről, Hantos Lászlót a székesfehérvári, Kántor Nándort az egri, Telkes Sándort a debreceni főreálból, Kálovics Rezső és Sárközy Pál pannonhalmi bencés, Korányi Szevér kőszegi bencés, Balyi Ferenc Károly és Bertram Brunó gödöllői premontrei, Bohárcsik Pál debreceni piarista tanárokat. Ott találjuk Kárteszi Ferencet és Spitz Ivánt, akik már bölcsészhallgatóként és Turán Pált, aki még a Madách gimnázium tanulójaként kezdett saját feladatokat küldeni Faragó Andornak. A legfiatalabb példakitűzők mind budapestiek voltak: Alpár László az izraelita reálgimnáziumból, Erdős Pál a Szent István reálgimnáziumból és Hajós György a piarista gimnáziumból.

Fizikából a legtöbb feladatot Strasser V. Benő, az izraelita gimnázium tanára és Nagy Béla, a Szent László gimnázium tanára tűzte ki. Viszonylag sok feladatot küldött be még Korányi Szevér, Mende Jenő és Selényi Pál, néhányat Balyi Ferenc Károly, Benkő Béla, Bodócs István, Bródy Imre, Kántor Nándor, Molnár Tibor, Szabó Gábor, Tóth Lajos és Weltner Gyula, de Szekeres György és Turán Pál is adott fel feladatot fizikából.

Természetesen Faragó Andor és Nagy L. József is tűzött ki fizikafeladatokat. Néhány, a fentiek által kitalált feladatot újra kitűzött a KöMaL fizikai szerkesztősége az utóbbi években, ezzel állítva emléket a Lapok egykori főszerkesztőjének és munkatársainak. Erdős Lajos nem tűzött ki feladatokat, ezt az élvezetet meghagyta a fiának. Viszont tartalmas recenziókat közölt megjelent könyvekről, így Strasser V. Benő kétkötetes fizika tankönyvéről is. Ez nem hivatalos tankönyv, éppen csak egy érdekes, jó tankönyv volt, amit bárki megvásárolhatott a könyvesboltokban. Simonyi Károly is megvette középiskolás korában, és később büszkén emlegette, hogy ebből olvasott, hallott először Einstein relativitáselméletéről.

Végigtekintve a fenti névsorokon, óhatatlanul felmerül, milyen sokan ismerhették életében Faragó Andort. Azonban akárcsak Erdős Lajos vagy Nagy L. József, ő se szívesen állt a fényképezőgép kamerája elé. Erdős Lajosról szerencsére maradt egy családi és egy iskolai fotó, Nagy L. Józsefről pedig nemrég került elő egy fénykép – talán még Faragó Andorról is előkerül egy?

Az ugyanis a szomorú igazság, hogy arról a Faragó Andorról, aki évente közölte lapjában a legjobb megoldók fényképeit, nem ismerünk fotót, amely őt ábrázolná. Nemcsak profilképet nem ismerünk, de még olyan csoportképet se sikerült idáig fellelnünk, amelyen ő is látható lenne. Hiába sikerült kapcsolatot találnunk például egykori igazgatójának, Lengyel Miklósnak fiával, Lengyel Lászlóval, kiderült, hogy Lengyel Miklós lakása, benne minden irata és ingósága 1944-ben, a budapesti ostrom során megsemmisült. De hát a remény hal meg utoljára – többek között ezért íródott ez a tanulmány is – hátha sikerül valakinek, egy volt tanítvány vagy kolléga megmaradt családi albumában rátalálni egy Faragó Andort ábrázoló fényképre... S ha ez sikerülne, végre a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok megannyi mai olvasója és megoldója tekinthetne tisztelettel annak a tanárnak az arcképére, aki élete utolsó pillanatáig a matematikai és fizikai tehetséggondozás elkötelezett híve, szelíd harcosa volt, s aki két fiával együtt a holokauszt áldozatává vált 1944-ben.

Radnai Gyula

Megjegyzések:

Radnai Gyula cikkének első része Faragó Andorról (Felkészülés a tanári pályára a XIX. század végén) 2016. decemberi számunk Interjú–portré rovatában olvasható: http://ematlap.hu/index.php/interju-portre-2016-12/365-farago-andorrol-ket-tetelben-i-felkeszules-a-tanari-palyara-a-xix-szazad-vegen.

A KöMaL legjobb megoldóinak fényképtablóit a KöMal honlapján a https://www.komal.hu/tablok/ oldalon lehet megnézni, 1925-től napjainkig.

matematikatörténet Faragó Andor Bakos Tibor KöMaL

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

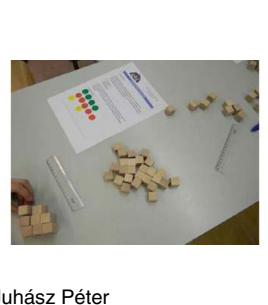
SOKSZOR TALÁLKOZUNK OLYAN FELADATTAL, ÖTLETTEL, AMIT SZÍVESEN ELTESZÜNK KÉSŐBBI HASZNÁLATRA. A **TANÓRA – SZAKKÖR** ROVAT SZERETNE HOZZÁJÁRULNI A MATEMATIKATANÁROK ESZKÖZTÁRÁNAK GAZDAGÍTÁSÁHOZ, FÓRUMOT KÍVÁN ADNI A GONDOK, NEHÉZSÉGEK MEGTÁRGYALÁSÁRA IS. (ROVATSZERKESZTŐ: *HORVÁTH ESZTER*.)

Horváth Eszter, Romhányi Katalin, Tegzes Kinga, Wirnhardtné Matolcsy Erzsébet

2017. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Így készüljünk az emelt szintű szóbelire – feladatjavaslatok próbaszóbelire

Az emelt szintű matematika érettségi írásbeli és szóbeli vizsgarészből áll. A matematika érettségi pontszámának döntő részét, 115 pontot, az írásbelin lehet megszerezni. Ugyanakkor nem szabad kockára tenni a szóbelire kapható 35 pontot sem. Ebben a cikkben néhány gondolatot írunk le a szóbelire való készülés módszeréről és minden témakörhöz ajánlunk két-két feladatot, amit a témakörök kidolgozásánál és egy próbaszóbelin is használhatunk. A gyakorláshoz tegyünk ki az asztalra egy órát, ami 15 perc elteltével jelez.

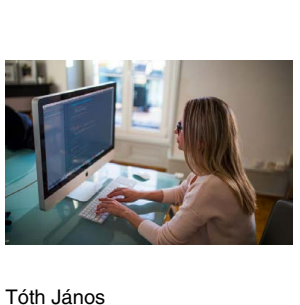


Juhász Péter

2017. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Repülő Iskola

A felfedeztető matematikatanítás egyik hazánkban kidolgozott irányzata, a *Pósa Lajos* által kifejlesztett módszer kiemelkedően tehetséges diákok körében már lassan 30 éve kiválóan működik. Az MTA Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programjának fontos részét képezi az, hogy megvizsgálják a módszert abból a szempontból, hogy mely elemei, milyen mértékben alkalmazhatóak széles körben a közoktatásban. A Repülő Iskola kísérleti program ezer matematika iránt érdeklődő kilencedik osztályost keres fel 2017-ben.



Tóth János

2017. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Számítógép a matematikaversenyeken

Valamennyi (magyar vagy nemzetközi) zárthelyi versenyen tilos nemcsak számítógépek, hanem kis kézi számológépek (továbbá mobiltelefonok) használata is. Ezenkívül könyveket és jegyzeteket (saját kézzel írottakat is) tilos használni. A Kürschák-versenyen még néhány éve könyv és jegyzet engedélyezett volt, most már ott is tilos. Marad a körző és vonalzó... Vagy mégsem? Mi a helyzet az egyetemisták számára rendezett Putnam-verseny egyik példájával? Vagy a Schweitzer Miklós Emlékverseny feladataival? Mennyire ismeri egy „rendes” matematikus a matematikai programcsomagokat? *Tóth János* véleménye az, hogy igenis, kellene olyan versenyeket is rendezni, ahol lényegesen kihasználható valamely programcsomag a matematikai feladat megoldásához.

Muzsnay Zoltán

2017. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Két pont között legrövidebb út az egyenes? Kérdezzük meg Fa Nándort...

A cikk apropója *Fa Nándor* kiváló sportteljesítménye a Vendée Globe földkerülő vitorlás versenyen. A rendkívül nehéz fizikai igénybevétel mellett a verseny nehézsége többek között abból áll, hogy meg kell tervezni az optimális útvonalat úgy, hogy a szél alapvetően befolyásolja a távolságmérést (adott pontokban az időegység alatt elérhető pontok halmazát), és így a tér geometriáját.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Horváth Eszter, Romhányi Katalin, Tegzes Kinga, Wirnhardtné Matolcsy Erzsébet

2017. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Így készüljünk az emelt szintű szóbelire – feladatjavaslatok próbaszóbelire

Az emelt szintű matematika érettségi írásbeli és szóbeli vizsgarészből áll. A szóbeli vizsga azt kívánja a tanulóktól, hogy egy-egy témakörön belül lássák az összefüggéseket, tudjanak definíciókat és tételeket pontosan megfogalmazni, a matematika szaknyelvét tudják jól használni akár egy tétel bizonyításában, akár egy feladat megoldásának ismertetése során.

Az emelt szintű érettségi vizsga írásbeli részére tematikus ismétléssel, sok feladat megoldásával, a megoldási módszerek elemzésével készülünk. Régi feladatsorokat oldunk meg tanítványainkkal, próbaérettségit iratunk velük. Interneten a korábbi évek feladatsorai és javítási kulcsai elérhetőek. A matematika érettségi pontszámának döntő részét, 115 pontot az írásbelin lehet megszerezni. Ugyanakkor nem szabad kockára tenni a szóbelire kapható 35 pontot sem.

Ebben a cikkben néhány gondolatot írunk le a szóbelire való készülés módszeréről, és minden témakörhöz ajánlunk két-két feladatot, amit a témakörök kidolgozásánál és egy próbaszóbelin is használhatunk.

A 2017-es májusi érettségi vizsgaidőszakban az emeltszintű szóbelin 24 témakör szerepel, lefedve a 9-12. évfolyam matematika tananyagának jelentős részét beleértve az emelt szinten tanított témaköröket is.

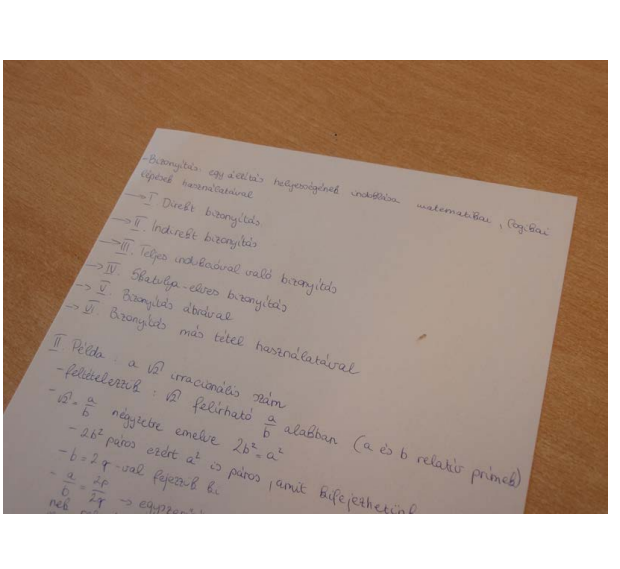
Javasoljuk, hogy ne csak a 12. osztály második felében kezdjünk el a szóbelire készülni. A szóbeli indoklásra már a korábbi években is fektessünk hangsúlyt. Fontos, hogy a gyerekeket folyamatosan hozzászoktassuk a táblánál való szerepléshez, és a matematika szaknyelvének használatához. Ez időigényes feladat, de a ráfordítás később megtérül. Időnként feleltessünk. 11. osztályban dolgozzunk ki 3-5 témakört az érettséginek megfelelő módon. Már ebben az évben is lehet próbaszóbelit tartani.

12. évfolyamon érdemes a tanév elejétől heti egy vagy két órát ismétlésre szánnunk, ezen belül a szóbelire is gondoljunk. Egyes vizsgabizottságok arra kérik a vizsgázót, hogy a táblánál mondja el feleletét, máskor a vizsgabizottsággal szemben ülve felel a diák, ilyenkor a vizsgáztatók látják a jegyzetét. Lehet, hogy tanítványunk választhat a két lehetőség közül. Gyakoroltassuk mindkét helyzetet.

Beszéljük meg, hogyan készítjük el a feleletünk vázát, hogyan gyűjtjük össze a témakörhöz tartozó fogalmakat, milyen tételeket fogalmazunk meg, melyiket bizonyítjuk. A tételsorok kisebb mértékben évről évre változnak, így figyelnünk kell arra, hogy az adott évben egy-egy tételcím mit takar. A feleletnek 20 percbe kell beleférnie a feladatmegoldással együtt. Talán érdemes úgy gyakorolni, hogy 15 percre tervezzenek. 15 perc alatt sok minden elhangozhat. Ha a feladatmegoldás nem sikerül önállóan, akkor a vizsgabizottságnak „marad ideje” segíteni.

A felkészülés során készített jegyzet legyen áttekinthető. A felelet nem a jegyzet felolvasását jelenti, hanem azt, hogy időnként belenézve a mondanivalót tovább lehet fűzni. Beszéd közben meg kell benne találni a folytatáshoz szükséges kulcsszavakat, mondatokat.

Milyen definíciót mondjon el a vizsgázó? Javasoljuk, hogy többet is, mert a felelet ekkor biztosabb tudást mutat és így, ha valamelyik definíció esetleg helytelen, azt feledtetni tudja egy másik hibátlan definíció.



Milyen tételt válasszon az érettségiző? Mondja ki azokat a tételeket, amelyek a témakör összefüggéseit lefedik. Bizonyításra ne a legkönnyebbet válassza, mert az idei vizsgaidőszaktól kezdve a bizottságnak van módja a tétel nehézségét is értékelni. Ha egy szinte nyilvánvaló állítást kinevezünk tételnek, a vizsgabizottság elismerését ezzel nem nyerjük el. Nagyon nehéz tételt csak akkor válasszon a diák, ha az a „kedvence”, valóban tudja és az elmondásával biztonságosan belefér az időkeretbe. Soha ne válasszon olyan tételbizonyítást, amely hosszadalmas.

Ne felejtsen el a vizsgázó alkalmazásokról beszélni! Változást jelent az idei évtől kezdve, hogy az emelt szintű szóbeli vizsgarészben az alkalmazások között matematikatörténeti vonatkozások ismertetése is megjelenhet. Az alkalmazások esetében az „említés” szót felváltja az „ismertetés”. Figyeljen oda a vizsgázó arra, hogy szóbelijének gyakorlati alkalmazásokra vonatkozó része ne pusztán felsorolás legyen, egyet-kettőt kicsit részletesebben is ismertessen.

Az alábbi táblázatban lévő számokra kattintva a 2017. év adott sorszámú érettségi témakörét kapjuk, amelyhez két feladatot ajánlunk azzal a céllal, hogy egy próbaszóbeli előkészítését segítsük. A szóbelin természetesen csak egy feladatot kell megoldani, nincs választási lehetőség. A feladatokat az iskolák nagy részében használt feladatgyűjteményekből válogattuk, ha szükséges, a megoldás ezekben a feladatgyűjteményekben vagy a hozzájuk kapható CD-n megnézhető. Egy próbaszóbelin az a cél, hogy a tanuló szokja meg a vizsgaszituációt. Nincs szükség nehéz, furfangos feladatra. Persze tudnia kell a tanulónak, hogy ennél nehezebbet és könnyebbet is húzhat majd az igazi vizsgán. Bevalljuk, feladatsorunk nehézsége nem teljesen kiegyensúlyozott, de reméljük, hogy sok tipikus módszert átismételhetünk vele és ezzel segíthetjük a vizsgára való felkészülést.

Az alábbi tankönyvekre a zárójelbe tett rövidítéssel hivatkozunk:

Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet:
Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.
(NT-I.)
Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.
(NT-II.)
Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.
(NT-III.)
(Raktári szám:
NT-16125/I; NT-16126/II; NT-16127/III vagy NT-16125/NAT; NT-16126/NAT; NT-16127/NAT)

Mozaik Kiadó:
Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 9.
(MS-9)
Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 10.
(MS-10)
Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11.
(MS-11)
Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12.
(MS-12)
(Raktári szám:
MS - 2321; MS - 2322; MS - 2324; MS - 2225)
(Ezek a feladatgyűjtemények léteznek két évfolyamra összeállított kiadásban is – CD melléklettel.
9-10 évf. MS-2323; 11-12. évf. MS-2326 – a feladatok számozása az előző kötetekével azonos.)

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24

Horváth Eszter, Kempelen Farkas Gimnázium
Romhányi Katalin, Kempelen Farkas Gimnázium
Tegzes Kinga, Szent Gellért Katolikus Általános Iskola és Gimnázium
Wirnhardtné Matolcsy Erzsébet, Budai Ciszterci Szent Imre Gimnázium

érettségi

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Választon:

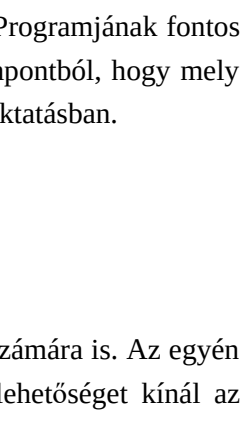
Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Juhász Péter 2017. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Repülő Iskola

2017 januárjában az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet Didaktikai Csoportja és A Gondolkodás Öröme Alapítvány közös programot hirdetett. A program egy kísérlet, amely az MTA Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programjának részeként valósul meg.

A kísérletnek két kiemelt célja van. Az egyik, hogy olyan matematikában tehetséges diákokat találjanak országszerte, akik különböző okok miatt jelenleg rejtve maradnak, nem sikerül tehetségüket megmutatni, kibontakoztatni, kamatoztatni.



A másik fontos cél, hogy minél szélesebb körben bemutassák a felfedeztető matematikatanítás egyik hazánkban kidolgozott irányzatát, a Pósa-módszert. A Pósa Lajos által kifejlesztett módszer kiemelkedően tehetséges diákok körében már lassan 30 éve kiválóan működik. Nagyjából egy évtizede történnek próbálkozások abban az irányban, hogy ne csak egy adott korosztály nagyjából 50 legtehetségesebb diákjának legyen megfelelő a módszer. Az MTA Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programjának fontos részét képezi az, hogy megvizsgálják a módszert abból a szempontból, hogy mely elemei, milyen mértékben alkalmazhatóak széles körben a közoktatásban.

Miért van szükség egy ilyen programra?

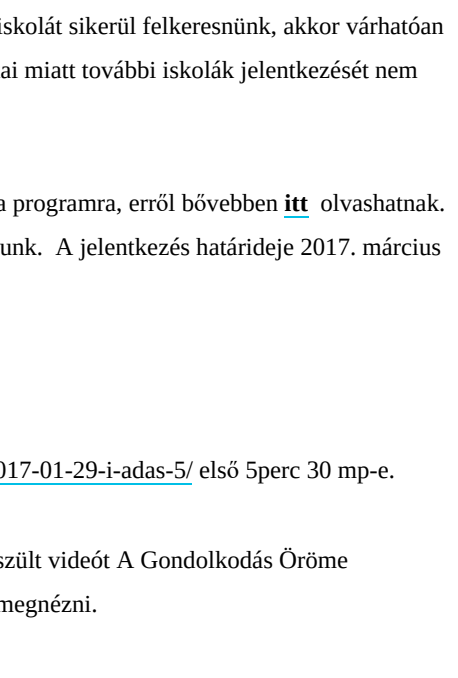
A két különböző cél legalább egy-egy fontos okot is szolgáltat.

A rejtett tehetségek felkutatása fontos az egyén és a közösség számára is. Az egyén számára azért, mert eggyel több, boldog jövővel kecsegtető lehetőséget kínál az életében. Ha rejtve marad valakinek a matematikai tehetsége, akkor elvész az a lehetőség, hogy ezt a tehetséget kamatoztatva legyen hasznos tagja a társadalomnak. A közösség is profitál ebből, hiszen egyre több munkakörben szükség van kreatív, logikus, szisztematikus gondolkodásra, és a színvonalas matematikai neveltetés jó eséllyel kitermeli ezeket a képességeket.

A Pósa-módszer bemutatása és terjesztése, elterjedése azzal a haszonnal járhat, hogy a matematika nem egy utált tantárgy lesz a többség szemében, hanem stresszmentesen megtaníthat sokakat önállóan gondolkodni, illetve megadhatja sokaknak azt a csodálatos örömöt, amikor rájövünk egy probléma megoldására.

Felmerül a kérdés, hogy pont Magyarországon kell ez? Hiszen messze földön híres tehetséggondozásunk és matematikaoktatásunk van.

A tehetséggondozás tényleg jól működik, sok különböző formája van, népességarányosan kiválóan szerepelnek csapataink a különböző nemzetközi matematikaversenyeken. Ez azonban nem jelenti azt, hogy mindenki, akinek ott lenne a helye, be is kerül a rendszerbe. Az IMO-csapat (Nemzetközi Matematikai Diákolimpia) tagjainak háromnegyede fővárosi iskolába jár, és az utóbbi 20 év adatait alapul véve összesen 4 olyan vidéki város van, amelynek iskolái egynél több csapattagot adtak. Ezek az adatok arra utalnak, hogy a tehetségek kiválasztásán még lehetne csiszolni.



A matematikaoktatásunk talán már relatíve sem olyan kiemelkedő. Sajnos, nagyon sok mechanikus, unalmas feladatot kell a diákoknak az iskolában megoldaniuk, és az sem világos számukra, hogy mi az értelme annak, hogy ezeken a feladatokon gondolkoznak. A gondolkodásra rendszerint kevés időt kapnak, ráadásul a tanár az esetek jelentős részében helyettük oldja meg a feladatot, vagyis előre elmondja, hogy mi a megoldás módszere, majd kapnak a diákok rengeteg gyakorló feladatot, hogy a módszert jól "begyakorolják". Ez rombolja a kreativitást, az önálló gondolkodás képességét. A diák mindig azt várja, hogy valaki megmondja neki, hogy mit és hogyan kell csinálnia. A Pósa-módszer ennek szöges ellentéte. Itt a tanár semmit nem mond el előre, csak problémákat ad. Egyszerre többet, hogy senki ne unatkozzon, mindenki választhasson ízlése szerint. Párhuzamosan több téma fut, ezzel is növelve a kreativitás lehetőségét, hiszen a diák nem tudja pontosan, hogy mi lesz a megoldás kulcsa az adott feladatnál. A diákoknak elég idejük van a gondolkodásra, a cél az, hogy minél többen, minél több probléma megoldására önállóan jöjjenek rá. Lehetőség van arra is, hogy 2-3 fős csoportokban gondolkozzanak a gyerekek.

A kísérlet felhívása minden technikai részletet tartalmaz: (http://agondolkodasorome.hu/felhivasok/repulo-iskola/).

A Repülő Iskola fontos része az MTA-Rényi Felfedeztető Matematikatanítás Kutatócsoportja (http://mta.hu/tantargy-pedagogiai-kutatasi-program/mta-renyi-felfedezteto-matematikatanitas-kutatocsoport-107085) kutatási programjának. A program házigazdája az ELTE Eötvös József Collegiuma.

Juhász Péter

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Megjegyzések:

Felhívásunkra 54 iskola jelentkezett, igyekszünk közülük minél többet felkeresni, az időpontok egyeztetése jelenleg is folyamatban van. Ha minden iskolát sikerül felkeresnünk, akkor várhatóan 1000 diákkal fogunk találkozni. Kapacitásaink korlátai miatt további iskolák jelentkezését nem tudjuk fogadni.

Az érdeklődő diákok egyénileg még jelentkezhetnek a programra, erről bővebben **itt** olvashatnak. Minden érdeklődő kilencedikes diákot, szeretettel várunk. A jelentkezés határideje 2017. március 27.

A Repülő Iskoláról szóló tv interjú Juhász Péterrel:

http://www.mediaklikk.hu/video/ma-reggel-2017-01-29-i-adas-5/ első 5perc 30 mp-e.

A felfedeztető matematikatanításról Pósa Lajossal készült videót A Gondolkodás Öröme Alapítvány honlapján (a fenti címen), vagy itt lehet megnézni.

beszámolók Varga Tamás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

2017. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Számítógép a matematikaversenyeken

Rácz András barátom, az alapos lektorok kihalóban lévő fajtájának képviselője azzal a kérdéssel fordult hozzám, hogy a 2015-ös Putnam-verseny egyik feladatának számítógéppel segített megoldásában megakadt, tudnék-e neki segíteni. A Putnam-verseny sokkal több egyetemista számára elérhető, mint a mi `Schweitzer Miklós Emlékverseny`ünk. (Ez utóbbin egy időben sikerült a lécet oly magasra tenni, hogy a versennyel foglalkozó akadémikusok száma meghaladta a versenyezni bátor egyetemisták számát. De hogy tájékoztassuk a tájékozatlanokat: ezen a versenyen 10 feladat szokott szerepelni, megoldásukra van 10 nap, ezalatt bármilyen eszköz használható, számítógép és könyvek is. Ez utóbbiaknál kívánatos, hogy a könyvtárból senki ne vegye ki azt a könyvet, amelyik esetleg releváns információt tartalmaz valamely feladatra vonatkozóan. Természetesen egymással sem illik(!) kommunikálni, eltekintve az olyan üzenetektől, hogy „Nekem már három megvan!”. Tanárnál nem érdemes kérdezősködni, mert köztük nem sok van, aki néhánynál több feladatban tudna segíteni... A versenyzők etikájára jellemző, hogy egy alkalommal egyikük erősen követelte a javítóktól, hogy vegyék észre, az ő megoldása nem helyes, és emiatt vonjanak le a pontszámából, és helyezzék hátrébb. Az illető ma már Nagy Britannia közoktatását erősíti.)

A szóban forgó feladat tehát a következő:

Legyen $a_0=1, a_1=2$, és ha $n\ge 2$, akkor $a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}$. Keressük meg a_{2015} egy páratlan prímtényezőjét.

Mivel az a sorozat egy másodrendű lineáris, állandó együtthatós differenciaegyenletnek tesz eleget, ezért a kezdeti feltételeket is kielégítő megoldását a szokásos módon (l. pl. [1, 58–59. oldal]) kaphatjuk meg: meghatározzuk a $q^2=4q-1$ karakterisztikus egyenlet gyökeit; ezek $2\pm\sqrt{3}$. Így az általános megoldás $C_1(2-\sqrt{3})^n+C_2(2+\sqrt{3})^n$, az együtthatókat pedig a kezdeti feltételekből kiszámolva végül ezt kapjuk: $a_n=\frac{(2-\sqrt{3})^n+(2+\sqrt{3})^n}{2}$. Ezt a számolást a *Mathematica* is hajlandó elvégezni helyettünk, ha így kérjük tőle:

$$\mathrm{RSolve}[\{a[0]==1, a[1]==2, a[n]==4a[n-1]-a[n-2]\}, a[n], n]$$

Egyelőre sokkal nem jutottunk előbbre, pedig explicit képletünk van a sorozat tagjaira, amelyek mellesleg pozitív egész számok, de ez nem kiabál az explicit képletről. Minden konkrét n esetére azonban kifejthetjük a hatványokat, és máris ott áll előttünk egy 1153 jegyű szám. $\mathrm{ea}=\mathrm{Expand}[a[2015]]$. (Megkíméljük az olvasót a számjegyek közlésétől.) Ha elosztjuk ezt a számot 2 egymás utáni hatványaival, akkor kiderül, hogy 4 osztója, de 8 már nem. Egy páratlan osztója tehát $a_{2015}/4$. De az nem prím, mert $\mathrm{PrimeQ}[\mathrm{Expand}\,[a[2015]/4]$ eredménye False. A hiszékenyebbek elfogadják ezt a választ, de legyünk óvatosak, mert a program úgynevezett valószínűségi algoritmust használ, amely csak annyit garantál, hogy az eredmény nagy valószínűséggel helyes. Aki biztosra akar menni, az használja inkább a ProvablePrimeQ függvényt. Esetünkben ez is False eredményt ad.

A FactorInteger függvény tetszőleges egész szám prímtényezős előállítását adja meg. Ezen a még mindig nagy számon viszont kivárhatatlanul sokáig futna. De megkereshetjük az előállítás két tényezőjét is, így: $\mathrm{FactorInteger}\,[\mathrm{Expand}\,[a[2015]/4]\,,2]$. Kisebbik eredményül a $67\,513$ számot kapjuk, és ennek teljes prímtényezős felbontása: $181\cdot 373$, tehát mindjárt két páratlan prímosztót is kaptunk.

Eddig megvolnánk. De ez az a pont, ahol meg kellett kérdeznem `Pelikán József`et, aki saját jogán négyszeres matematikai diákolimpikon, emellett megszámlálhatatlanul (bár véges) sok diákolimpikon felkészítője évtizedek óta. Érdeklődő levelemre a következő választ kaptam:

„Élvezet nézni, ahogy a *Mathematica* elbánik az ilyen típusú problémákkal. Ezzel együtt versenyen ez nem számítana megoldásnak. A probléma a gyakorlatban szerencsére fel sem merül, mert valamennyi általam ismert (magyar vagy nemzetközi) zárthelyi versenyen tilos nemcsak számítógépek, hanem kis kézi számológépek (továbbá mobiltelefonok) használata is. Ezenkívül könyveket és jegyzeteket (saját kézzel írottakat is) tilos használni. A Kürschák-versenyen még néhány éve könyv és jegyzet engedélyezett volt, most már ott is tilos. Marad a körző és vonalzó...

Hosszabb távú (pl. Schweitzer) versenyeken nyilván ki sem tűznének ilyen feladatokat, hiszen nem akadályozható meg *Mathematica*, *Maple*, stb. használata. El tudom képzelni, hogy a Putnam-szervezők is haboztak kissé. De végül is elég meggyőző az elegáns matematikai megoldás...”

Ezt már nem idézem a levélből, hogy maradjon lehetősége gondolkodnia annak, aki akar. Ha megvan a megoldás, megnézhetjük, hogy azonos-e a miénk `ezzel`.

De a végére még maradt két halk megjegyzésem. Egyrészt arról, hogy mennyire ismeri egy rendes matematikus a matematikai programcsomagoknak akár a létét, nemhogy a teljesítőképességét. (Figyelembe véve, hogy a gépektől való idegenkedés még azt is jelentheti, hogy valaki a cikkeit nem saját maga gépeli...) A másik konstruktívabb: igenis, kellene olyan versenyeket is rendezni, ahol lényegesen kihasználható valamely programcsomag matematikai feladat megoldásához.

A feladat leírása Wolfram nyelven itt, a számolásokat tartalmazó Wolfram-nyelvű jegyzetfüzet tartalma pedig `itt` található.

TJ

Irodalomjegyzék

1
Máté L.: Rekurzív sorozatok, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

□ informatika □ Schweitzer Miklós □ Putnam-verseny

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

nka Nemzeti Kulturális Alap

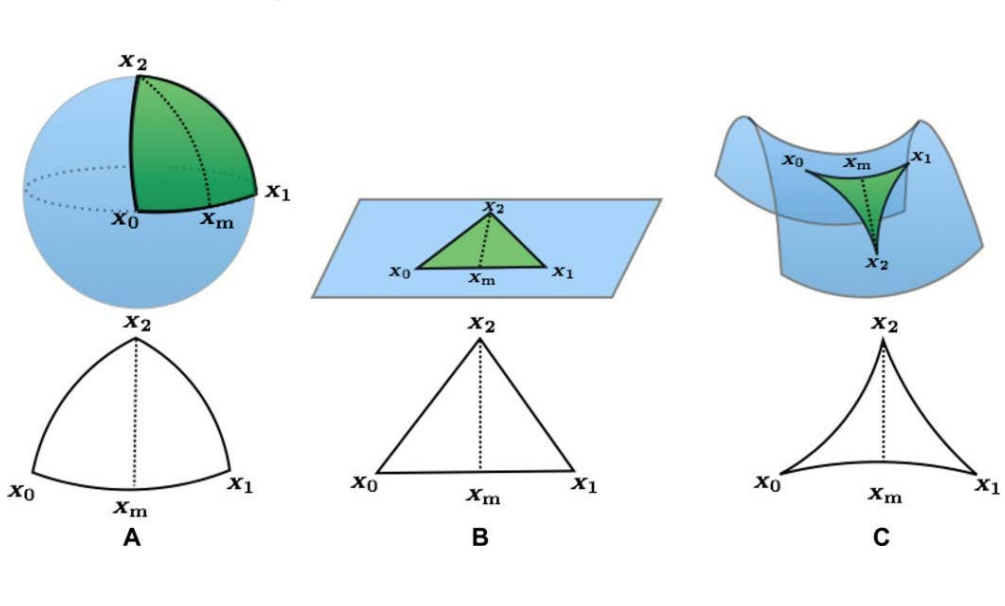
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Muzsnay Zoltán 2017. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Két pont között legrövidebb út az egyenes? Kérdezzük meg Fa Nándort...

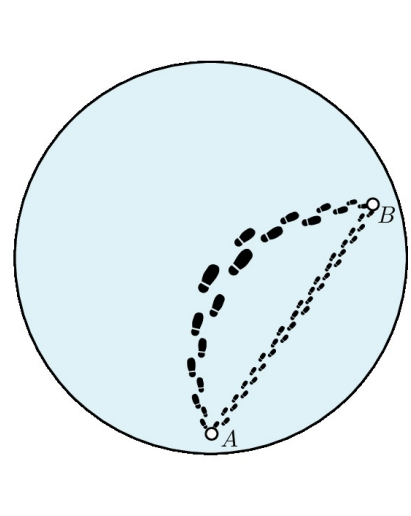
A geometriában az egyik legtermészetesebb kérdés, hogy két pont között melyik a legrövidebb út. Igaz-e, hogy két pont között a legrövidebb az egyenes?

A válasz az euklideszi síkon vagy térben természetesen igen, ha úgy definiáljuk az „egyenest”, hogy az a távolságot minimalizáló görbe. Ekkor a minimalizáló „egyenes” tényleg az egyenes. De az is természetes, hogy vannak olyan esetek, amikor a távolságot minimalizáló görbe nem az egyenes. Például a gömbfelületen, ahol a minimalizáló görbék körívek lesznek. Nem is akármilyen körívek, hanem az úgynevezett főkörívek, amelyek sugara a gömb sugarával egyezik meg. Itt egyébként egy érdekes jelenséggel is találkozhatunk: az egy pontból kiinduló széttartó „egyenesek” széttartása lelassul és egy idő után elkezdenek összetartani. Ez egy jellemző tulajdonsága a pozitív görbületű felületeknek. Ez a viselkedés pontosan az ellentéte az úgynevezett negatív görbületű felületeknek, ahol az „egyenesek” széttartása növekszik:



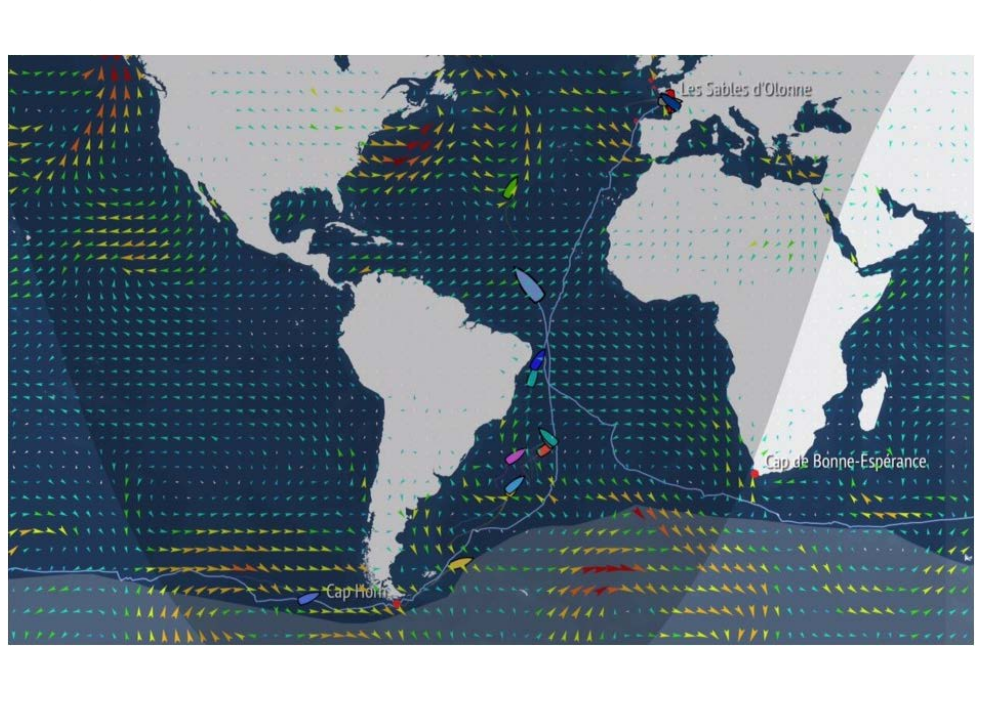
Pozitív, nulla és negatív görbületű felületek [1]

A fenti ábra A és C példájában az alapul vett felület eleve görbült volt, így a rajta haladó „egyeneseknek” is görbülniük kellett. De el tudunk-e képzelni egy olyan világot, ahol az alapul vett tér lapos, mégis az „egyenesek” nem egyenesek, hanem görbe vonalak? Képzeljük el, hogy a világegyetem egy lapos körlap! A körlap szélén rendkívül hideg van (abszolút nulla fok), a közepén viszont meleg. Jelentősen eltúlozva vegyük figyelembe a hőtágulást: a körlap széle felé haladva a testek mérete a lehűléssel tartson a nullához. Mi lesz az optimális stratégia, ha az *A* pontból át szeretnénk menni a *B* pontba?



Természetesen az egyenes vonalon átmehetünk egyik pontból a másikba, de ez azzal jár, hogy végig a hideg területen gyalogolunk. Megmutatható, hogy hamarabb átérünk *A*-ból *B*-be, ha *A*-ból először a világunk melegebb belseje felé vesszük az irányt és így folyamatosan felmelegedve és kitágulva *B* pont felé kanyarodunk. Érdekességként megjegyezzük, hogy az egy pontból kiinduló „egyenesek” széttartása gyorsul, ami azt jelenti, hogy az így kapott tér görbülete negatív. A megfelelő hőtágulási viszonyokat beállítva ebben a térben a Bolyai János által felfedezett hiperbolikus geometria világa lesz érvényes.

A fenti példa egy fontos tényre világít rá: az „egyenesek” viselkedése, és így a tér geometriai jellege (görbülete) megváltozhat azzal, ha a távolságmérés megváltozik. Az előző példában ugyanis pontosan ez történt: egységnyi idő alatt más-más távolságra juthatunk el attól függően, hogy milyen irányban indultunk. Ilyen jelenségre számos példát találhatunk a gyakorlati életben. A cikk apropója Fa Nándor kiváló sportteljesítménye a Vendée Globe földkerülő vitorlás versenyen. A rendkívül nehéz fizikai igénybevétel mellett a verseny nehézsége többek között abból áll, hogy meg kell tervezni az optimális útvonalat úgy, hogy a szél alapvetően befolyásolja a távolságmérést (adott pontokban az időegység alatt elérhető pontok halmazát), és így a tér geometriáját. Az eredmény egy igen bonyolult tér, amelynek azonban kiterjedt szakirodalma van (Zermelo navigációs probléma, Randers-típusú Finsler-terek elmélete).



Vendée Globe 2016–2017: Fa Nándor útvonala [2,3]

A geometriai görbület fogalmával érdekes módon a tudomány sok egyéb területén is találkozhatunk. Természetes módon jelenik meg a fizikában, csillagászatban, de találkozhatunk alkalmazásokkal a földrajz, biológia és a közgazdaságtan területén is.

Aki szeretne többet megtudni a cikkben szereplő geometriákról, annak ajánljuk Lánczos Kornél [4] könyvét, illetve az [5] és [6] cikkeket.

Muzsnay Zoltán

Irodalomjegyzék

1
Sandhu, R. S., Georgiou, T. T., Tannenbaum, A. R.: *Ricci curvature: An economic indicator for market fragility and systemic risk*, Sci. Adv. 27, 2016: Vol. 2, no. 5, e1501495
2
Fa Nándor honlapja: `http://spiritofhungary.hu`
3
Vendée Globe földkerülő vitorlás verseny honlapja:
`http://www.vendeeglobe.org/`
4
Lánczos K.: A geometriai térfogalom fejlődése: A geometriai fogalmak fejlődése Püthagorasztól Hilbertig és Einsteinig, Budapest, Typotex, 2010
5
Hiperbolikus geometria:
`https://hu.wikipedia.org/wiki/Hiperbolikus_geometria`
6
Zermelo navigációs problémája:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Zermelo's_navigation_problem`

A bevezető kép készítője Fa Nándor indulásáról a Vendée Globe versenyén *Eric Houdas*, forrása:
https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:N%C3%A1ndor_Fa#/media/File:Nandor_Fa_(8).jpg

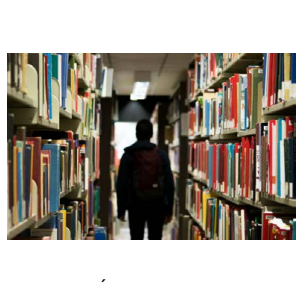
Bolyai alkalmazott matematika

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ** ROVATBAN ELSŐSORBAN OLYAN KÖNYVEKRŐL SZERETNÉNK TUDÓSÍTANI ÉS OLYAN ELEKTRONIKUSAN ELÉRHETŐ ÍRÁSOKAT AJÁNLUNK, AMELYEK A MATEMATIKA BÁRMELY RÉSZE VAGY KAPCSOLATAI IRÁNT ÉRDEKLŐDŐK SZÁMÁRA KÍVÁNATOSAK LEHETNEK. (ROVATSZERKESZTŐ: *TÓTH JÁNOS.)*



Besenyei Ádám, Tóth János
2017. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Könyveket ajánlunk; honlapokat ajánlunk

Könyvajánlóinkat és honlapajánlóinkat ebben a számunkban is megtalálják Olvasóink, ezzel színesítve az olykor nehezebb tudományos munkák és hosszú matematikatörténeti kifejtések sorát. Amit itt találnak, az könnyed és rövid :-)

Szerkesztő
2017. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

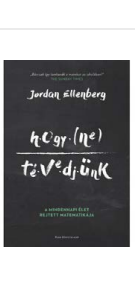
Csúcsragadozók vagyunk?

A csúcsragadozó a tápláléklánc tetején helyezkedik el, ő semmilyen más élőlénynek nem tápláléka/áldozata (Wikipédia). A recenzió természete, hogy mások munkájáról szól. Most épp egy olyan blogra hívjuk fel a figyelmet, amely matematikus blogokat ismertet: a Notices of the AMS című lapban sok érdekesség olvasható.

Farkas Dávid, Andai Attila
2017. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Borges és a matematika

Megkértünk egy kognitív tudományi hallgatót (*Farkas Dávidot*) és egy matematikai fizikus kollégát *(Andai Attilát)*, írja meg véleményét ugyanarról a könyvről, Guillermo Martínez: Borges és a matematika című művéről. Szeretnénk más alkalmas írások esetén is találni recenzenspárokat mindannyiunk okulására. (*A rovatvezető előzetes megjegyzése.)*



Jordan Ellenberg
2017. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

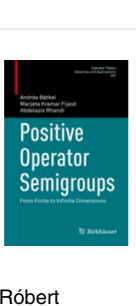
Hogy ne tévedjünk – Wald Ábrahám és a hiányzó lövedéknyomok

Mennyivel korábban célszerű kimenni indulás előtt a repülőtérre? Valójában mit árul el a közvélemény-kutatás? Milyen lottózási módszer vezet a legbiztosabban a meggazdagodáshoz? *Jordan Ellenberg* könyve, a Hogy ne tévedjünk megdöbbentő felfedezésekre világít rá egyes-egyedül a matematikus módszerével, de nem a matematikusok által használt szaknyelven. A könyv egy fejezetét a Park Könyvkiadó szíves engedélyével közöljük.

Korn András
2017. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Micsoda?! Programozás gyerekeknek?

Jelen sorok írója tízéves korában kezdett programozni tanulni, és ez meghatározó tapasztalat volt annak ellenére, hogy az akkori számítógépek nyújtotta felhasználói élményt össze sem lehet hasonlítani a ma megszokottal. A programozni tanulás egy mai gyerek számára is ugyanilyen lenyűgöző tud lenni. *Korn András* Carol Vorderman: Programozás gyerekeknek c, könyvét saját nyolcéves fián "tesztelte".



Horváth Róbert
2017. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Nemnegatív operátor-félcsoportok

Mik is azok a nemnegatív operátor-félcsoportok, és miért fontos ezek vizsgálata? *Bátkai András, Marjeta Kramar Fijavž és Abdelaziz Rhandi Nemnegatív operátor-félcsoportok (a végestől a végtelen dimenziókig)* című 364 oldalas monográfiája 2016 második felében jelent meg elektronikusan a Birkhäuser Kiadó gondozásában. A könyv nyomtatott formában várhatóan 2017 februárjától elérhető.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Besenyei Ádám, Tóth János 2017. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Könyveket ajánlunk; honlapokat ajánlunk

Könyvajánlónk

Alex Bellos: *Alex Csodaországban. Matematikai ínyencségek a kőkortól a huszonegyedik századig,* Európa Könyvkiadó, Budapest, 2014.

Nem is a mi ajánlónk. Örömmel hívjuk fel itt a figyelmet *Szabó Borbála* író, drámaíró, dramaturg, és műfordító, de csicsikét se matematikus ajánlójára:

http://www.konyvjelzomagazin.hu/hir/a-matematika-kolteszet--szabo-borbala-dramairo-meglepo-konyvajanloja

Zádori Zsolt: http://www.konyvjelzomagazin.hu/hir/melyen-elfojtott-logaritmikus-oszton

Ezek után futás a boltba vagy a könyvtárba :-) !

Honlapokat ajánlunk

Visontay György
folyóirata: PonticulusHungaricus (https://www.facebook.com/PonticulusHungaricus)

TJ

Matematikai kifejezések első előfordulása : Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics

Matematikai jelölések első előfordulása: Earliest Uses of Various Mathematical Symbols

Egy-egy matematikai fogalom vagy jelölés hallatán, láttán bizonyára sokakat – akár diákot az órán vagy matematikust egy cikk olvasása közben egyaránt – furdalhat a kíváncsiság: honnan származik az adott elnevezés, szimbólum? Például ki használta először a = jelet az egyenlőségre? Kitől származik az $f(x)$ és ennek következményeként a diákokat a sorrend szempontjából gyakran csapdába ejtő $f(g(x))$ jelölés? Miért primitív a primitív függvény vagy éppen mit jelent a nabla kifejezés és ki, miért aggatta a ∇ jelre? A sort a végtelenségig – honnan származik a ∞ jel? – folytathatnánk a matematika bármely területén vagy szintjén használatos elnevezések, valamint jelölések kapcsán felmerülő érdekesebbnél érdekesebb kérdésekkel. Ezek megválaszolásában nyújt kiváló segítséget és szolgál kiindulópontként a fenti két weboldal, ahol a különféle matematikai szavak és szimbólumok első előfordulási helyeinek – sőt rendszerint egész fejlődéstörténetüknek – gyűjteményét találhatja az érdeklődő olvasó. A folyamatos frissítés és karbantartás mellett a szócikkek nagy erénye, hogy eredeti forrásokkal, idézetekkel vannak alátámasztva, amelyeknek az olvasó az interneten fellelhető digitális archívumokban – a későbbiekben ezeket is fogjuk ajánlani e rovatban – a székében ülve is könnyedén utánanézhet.
A szavak, jelölések eredetének megismerése számos esetben segíthet a mélyebb megértésében, ahogy *Fried Ervin* idézte *Pelikán Józsefet* a KöMaL 2006. évi februári számában a kvaterniók kapcsán: „Ha az ember valamit meg akar érteni, akkor vissza kell menni az eredethez.” Mindemellett pedig az elnevezések, szimbólumok mögött rejlő matematikatörténeti érdekességek és a hozzá kapcsolódó személyek gyakran fordulatos életútja – amelyről a már korábban ajánlott MacTutor weboldalon tájékozódhatunk – remekül használható a matematikaórák színesítésére az általános iskolától az egyetemig.

Besenyei Ádám

☐ recenzió

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2017. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Csúcsragadozók vagyunk?

A csúcsragadozó a tápláléklánc tetején helyezkedik el, ő semmilyen más élőlénynek nem tápláléka/áldozata (Wikipédia).

A recenzió természete, hogy mások munkájáról szól. Most épp egy olyan blogra hívjuk fel a figyelmet, amely matematikus blogokat ismertet. Tesszük mindezt *Anna Haentsch* írása alapján (Notices of the AMS 63 (6), (2016), 643–644), amely arról szól, hogy ő írja az Amerikai Matematikai Társulat (AMS) **Blogs on Math Blogs** elnevezésű blogját, azaz ezt:

http://blogs.ams.org/blogonmathblogs

Maga a cikk pedig szintén elérhető, bárki számára, ingyenesen:

http://www.ams.org/publications/journals/notices/201606/rnoti-p643.pdf

És ha már ott jár valaki, akkor körülnézni is érdemes, mert ez az AMS lapjai közül az, amelyik a legszélesebb rétegek számára olvasható. Vannak benne visszaemlékezések, kritika matematikai tárgyú könyvekről, filmekről és színdarabokról. Újabban indult a **Graduate Student Section**, ami szintén szélesebb közönség által is élvezhető. És ne feledkezzünk meg arról, hogy a lap visszatérő vitatémája a (matematikai) közoktatás is.

Boldogok lennénk, ha mások mégis csak tovább terjesztenék ezt a kis ismertetést ☺, letaszítva bennünket a csúcsról.

TJ

AMS recenzió

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Farkas Dávid, Andai Attila 2017. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Borges és a matematika

I.

A szerző, Guillermo Martínez, írói munkássága mellett matematikából Ph.D. fokozattal is rendelkezik, így tudása különösen alkalmassá teszi Borges művei és a matematika közötti kapcsolatok feltárására. Már a könyv előszavában egyértelművé teszi az olvasónak, hogy bár Borges műveinek áttekintése során közel 200 matematikai utalást fedezett fel, kerülni fogja ezek kifinomult matematikai eszközökkel való részletekbe menő vizsgálatát, és sokkal inkább az irodalmi és a matematikai nézőpontok kiegyensúlyozására törekszik az interpretáció során. A könyv célja – ahogy azt Martínez leírja – bemutatni, miként használja fel Borges a matematikát írásaiban, úgy, hogy közben a matematika ne váljon el az irodalmi szándéktól, és megmutatni, hogy az irodalmi képzelet és a matematika igencsak közel állnak egymáshoz, sőt, kiegészítik egymást, mint ahogyan azt Borges állítja.

A könyv első felét az első három fejezet teszi ki, az első kettő két előadás anyagát tartalmazza, amelyeket Martínez a MALBA-ban (Museo de Arte Latinoamericano de Buenos Aires: Latin-Amerikai Művészeti Múzeum, Buenos Aires) adott elő 2003-ban. Az első fejezet Borges azon műveivel foglalkozik (mint például a „Homokkönyv", „Bábeli könyvtár", „Pascal gömbje", vagy „Az Alef"), amelyek egyértelműen hozzákapcsolhatók valamely matematikai koncepcióhoz. Megjelenik például a végtelen és annak különféle modelljei, a rekurzivitás, Russel paradoxona, és a gömb, amelynek közepe mindenütt jelen van, de felülete sehol sem. Nem csak arról kapunk leírást, hogy ezek miként jelennek meg Borges több művében, de a szerző matematikában kevésbé jártasak számára is érthető módon elmagyarázza a mögöttük meghúzódó matematikai elképzeléseket, így ezek még olyanok számára is világosak lesznek, „akik csak tízig tudnak számolni". Mindeközben a szerző megpróbálja hozzákapcsolni a matematikai elemeket Borges stilisztikai jegyeihez. Ez utóbbi próbálkozás leginkább a második fejezetben teljesedik ki, amelyben Borges nem-matematikai jellegű írásait veszi szemügyre Martínez. Arról próbálja meggyőzni az olvasót, hogy Borges valahogy úgy áll hozzá egy mű megalkotásához, mint ahogy egy matematikus a tételalkotáshoz: Borges írásai olyanok, mintha „egyszerre lennének specifikusak és általánosak", a specifikus példák és analógiák, amelyek végigkísérnek egy-egy művet, később univerzális alakot öltenek. Az absztrakció, mint matematikai eljárás is időről időre fellelhető Borges nem-matematikai jellegű műveiben is: a „Két király és két útvesztő" című műben például a labirintus fogalmát a sivatagra vonatkoztatja, demonstrálva, hogy mivel egy sivatagban is el lehet tévedni, az ugyanúgy lehet labirintus, mint például egy több fix útvonalból álló útvesztő (azaz a „tipikus" labirintus). Ebben a fejezetben az „Isten betűje", valamint a „Funes, az emlékező" című írásokra is utal a szerző, és gyakran idéz is a megfelelő művekből, hogy szemléltesse a megfigyeléseit, valamint ahol kell, emlékezteti az olvasót a megértés szempontjából kulcsfontosságú részekre ezekből a művekből.

Nem szükséges tehát feltétlenül ismernünk Borges műveit, hogy értsük és élvezzük Martínez könyvét, habár véleményem szerint annak az olvasónak többet nyújtanak ezek a fejezetek, aki már olvasta Borges néhány írását. A harmadik fejezetben Borges „A gólem" című költeményéből kiindulva a mesterséges intelligenciához kapcsolódó elképzelésekről ír, kitérve Borges „Körkörös romok" és „Isten betűje" című műveire is. Ezzel a fejezettel le is zárul a könyv azon része, amelyben Martínez direkt utalásokat tesz Borges műveire. A könyv második fele, tehát a maradék tíz fejezet már Martínez személyes elmélkedéseit tartalmazza a matematikai koncepciók és irodalmi jelenségek kapcsolatáról. Ezek a fejezetek még inkább megerősítik az olvasóban, hogy mennyi közös van a matematikai gondolkodásban és az irodalomban. Mindeközben szerző a legkülönfélébb irodalmi művekre tesz utalásokat és vesz idézeteket azokból. A nyolcadik fejezetben például még a neuropszichológia területére is elkalandozik, Oliver Sacks, „A férfi aki kalapnak nézte a feleségét" című könyvén keresztül, amelyből kiemeli annak a savant (https://hu.wikipedia.org/wiki/Savant-szindr%C3%B3ma) ikerpárnak az esetét, akik a számok nyelvén látták a világot. Például miután egy doboz gyufát kiborítottak eléjük az asztalra, egyszerre rá tudták vágni, hogy 111 gyufa van az asztalon (és valóban annyi volt), mintha valamiféleképpen látták volna a számot. Noha nem értettek olyan alapvető koncepciókat, mint az összeadás vagy a kivonás, képesek voltak például a prímszámok felismerésére. Martínez ehhez kapcsolódóan utalást tesz arra a biológiai hipotézisre, miszerint a prímszámok valamiféleképpen előre be vannak vésődve a jobb agyféltekébe, és onnan vizuálisan kiolvashatóak. Mindezzel felhívja az olvasó figyelmét arra, hogy a számok, a végtelen, a formális logika és az egyéb matematikai absztrakt koncepciók mind-mind az emberi agy, az emberi elme termékei és végső soron így van ez az irodalmi művekkel is, nem csoda tehát, ha hasonló konstrukciós mintázatokat látunk e két látszólag egymástól távol álló terület között.

Aki nem szakértője a matematikának, mindenképpen profitálhat Martínez matematikai koncepciókat érintő leírásaiból, amelyeket Borges műveihez kapcsolódóan mutat be. Például különösen érdekes volt megtudni, miként lehetséges, hogy az egész nem feltétlenül nagyobb a részek összességénél, vagy miként lehet bebizonyítani, hogy annyi racionális szám van, ahány természetes. De ez a könyv ugyanúgy szól a matematikában jártas olvasónak is, hiszen Martínez igyekszik kiemelni Borges műveinek azon vonásait, amelyek egy matematikus, fizikus vagy más tudós számára különösen vonzóvá teszik azokat, így akár kedvet csinálhat ezek elolvasására (vagy újra-olvasására). A könyv második fele pedig egyéb irodalmi művekre és azok matematikai vonulataira hívja fel a figyelmet, így csakugyan szolgálhat kedvcsinálóként, valamint (a könyv első felével együtt) a matematika és irodalom összefüggéseinek bemutatásával egy olyan szemléletmódot kölcsönöz, amelynek segítségével más szemüvegen keresztül nézhetünk az irodalmi művekre. Összességében Martínez könyve mind a tudománnyal foglalkozó embereknek, mind a laikusoknak kiváló forrásként szolgálhat az irodalom, matematika, és filozófia hasonlóságainak, közös elemeinek a felfedezéséhez, különös tekintettel Borges írásaira.

Farkas Dávid

II.

,,Akik ugyanis tényleg félnek a matematikától, soha az életben nem nyitnak ki egy olyan könyvet, melynek címlapján ez a szó szerepel..." olvasható a *Ki fél a szörnyű egyestől?* című fejezetben. Mégis, talán nem sikertelenül próbálja a szerző barátságos, közvetlen hangnemével az irodalom egyik nagy alakjának a matematikához nyilvánvaló módon kapcsolódó műveivel kezdve bemutatni a matematika sokszínű és élő világának több szeletét. Borges matematikájáról szóló előadásokban, melyek szerkesztett formában a könyv első felét teszik ki, igazán otthon érezhette magát a matematikai logikából PhD fokozatott szerzett, irodalmi munkásságáról is ismert szerző, Guillermo Martínez.

Borges számtalan művében ír olyan gondolatokról, fogalmakról, melyek ugyan formálisabb módon, de a matematikában is központi szerepet töltenek be. Naivan azt gondolhatnánk, hogy az irodalom, illetve a matematika világa nehezen összeegyeztethető. Pont arra mutat rá remekül a könyv, hogy mekkora tévedés lenne így vélekedni! Tekintsük például a mindenki által használt *végtelen*-t. Szép párhuzamban mutatja be a könyv a Borges műveiben megtalálható végtelen fogalmát és a matematikában használt, axiomatikus felépítést. A figyelmes Olvasó észreveheti, hogy milyen ügyesen kerülik ki a matematikusok a végtelent: végtelen az, ami nem véges. Vajon többet tud így a matematikus a végtelenről, mint a laikus? Bizonyos szempontból igen: tudja, hogy többféle végtelen létezik és az egyik végtelen lehet kisebb, mint a másik. Ezt Borges is tudta, és különböző képeken keresztül meg is próbálta láttatni. Azonban a lényeget tekintve a matematikus is pont ott tart, ahol a laikus: csak annyit tud a végtelenről, hogy nem véges. Ettől nem tudja jobban megragadni lényegét. Ha valaki meg akarja érteni (ha egyáltalán lehet ilyen mohó az emberi természet) a végtelent, akkor annak lényegét bármilyen eszközzel keresheti, például formalizmussal, absztrakcióval, művészettel, érzelemmel, hittel. Filozófusok, matematikusok és sok író között Borges is erre a megértésre vágyik, és a megértés felé vezető úton találhatunk párhuzamokat.

Olykor magától értetődően megtalálhatjuk Borges egy-egy művének vagy művében szereplő gondolatmenetnek a matematikai megfelelőjét, mint a végtelen esetében, azonban Guillermo olyan elegáns és meglepő matematikai interpretációkat is bemutat, melyek megtalálása már nem kézenfekvő, és a jó matematikai érzékkel rendelkező olvasót is meglepi.

A könyv második részét úgy lehetne jellemezni, hogy válogatott érdekességek a mai modern matematikához kapcsolódóan. Nem bonyolult tételeket vagy összetett definíciókat kell ezen érteni, hanem olyan, filozófiával szorosan összefonódó felvetéseket, mint például az igazság, bizonyíthatóság, komplexitás, ellenőrizhetőség és a mesterséges intelligencia kérdése. Amíg pusztán a mennyiség és a tér tudományaként hivatkoztak a matematikára, addig nem firtatták különösebben az alapjait, amint kellő absztrakciós szint után a tudományok királynője lett (K. F. Gauss), kiderültek egzaktsága körüli hiányosságok. Kellő önfegyelemmel boncolgatja Guillermo a matematika megalapozásával és mibenlétével kapcsolatos nehézségeket, nem nyomja agyon az olvasót absztrakt ismeretekkel, ugyanakkor sikeresen rá tud világítani a kényes pontokra. Teszi mindezt könyvbemutató, interjú, orvosi esettanulmány, anekdota, történelmi érdekesség segítségével. Nincs végső feloldozás, nincs katarzis a végén. Csak haladni lehet a matematikai gondolkozás útján. Könnyed léptekkel, szellemes képekkel, üdítő történetekkel és analógiákkal kíséri a könyv az Olvasót sok lépésen át.

Andai Attila

Guillermo Martínez: Borges és a matematika, Európa Könyvkiadó, Budapest, 2010. (Fordította: Kutasy Mercédesz).

A (matematikus) rovatvezető utólagos megjegyzése:

Sajnos, a Cantor-féle átlós módszer épp nem az, aminek Martínez állítja. Kummerről pedig jogtalanul van szerzőnknek nagyon rossz véleménye: ennek a kevéssé közismert német matematikusnak a MacTutor szerint nemcsak alapvető fontosságú volt tevékenysége a Fermat-sejtés (ma már -tétel) területén, mivel minden további munka az övén alapult, de az ideál fogalmának bevezetése tette lehetővé a gyűrűelmélet és az absztrakt algebra további területeinek előrehaladását. (Mellesleg az első 100 kitevőre be is bizonyította Fermat tételét.)
A fordító pedig néha szokatlan kifejezéseket választ, többértékű logika helyett polivalensről beszél. Diffúzt mond, amikor az eredetiben nyilván fuzzy szerepelt. Ennek a szónak a lefordítása mindenkinek gondot okoz, egyesek ezért magyarul is fuzzyt mondanak. Pontos lenne a meglehetősen nehézkes nem éleshatárú kifejezés. Egy helyütt megszámlálhatatlant mond megszámlálható helyett. Ezektől a hibáktól eltekintve a fordítás jól olvasható. Az alábbi recenziókkal is érdemes összevetni a fenti írást.
http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/rovatok/hidverok/borges-math.html
http://ildikoblogja.blogspot.hu/2010/05/guillermo-martinez-borges-es-matematika.html
http://www.prae.hu/prae/lazarilloetc.php?menu_id=115&aid=103&type=2
http://orulunkvincent.blog.hu/2010/07/01/az_igazsag_minden_szeletenek_kibontasarol#more2122718

- recenzió

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok
Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon: ›
Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Jordan Ellenberg 2017. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Hogy ne tévedjünk – Wald Ábrahám és a hiányzó lövedéknyomok

Azt, ami a legjobb a matematikában, nemcsak feladatként érdemes megtanulnunk, hanem a magunkévá kell tennünk mindennapi gondolkodásunk részeként és mindig megújuló bátorításként egyre fel kell idéznünk elménkben.

Bertrand Russell, 1902

Wald Ábrahám és a hiányzó lövedéknyomok

A történet sok más második világháborús történethez hasonlóan azzal kezdődik, hogy a nácik elüldöztek Európából egy zsidót, és azzal végződik, hogy ezt megbánták. Wald Ábrahám 1902-ben született Kolozsvárott, az akkori Osztrák–Magyar Monarchia területén. Kamaszkorára egy világháború már bekerült a könyvekbe, szülővárosa pedig – Cluj néven – immár Romániához tartozott. Nagyapja rabbi volt, apja kóser pék, de a fiatal Wald érdeklődése már nagyon korán a matematika felé fordult. Tehetségét hamar felismerték, és felvették a Bécsi Egyetem matematika szakára, ahol olyan, a tiszta matematika mércéje szerint is absztrakt és rejtélyes témák vonzották, mint a halmazelmélet és a metrikus terek.

Mire Wald befejezte tanulmányait, az 1930-as évek Ausztriája mély gazdasági válságba süllyedt, és egy külföldiből nem lehetett professzor Bécsben. Waldot Oskar Morgenstern állásajánlata mentette meg. Morgenstern később az Egyesült Államokba emigrált, és részt vett a játékelmélet kifejlesztésében, de 1933-ban még az Osztrák Közgazdasági Kutatóintézet igazgatója volt, és Waldot alkalomszerűen matematikai munkákkal látta el szerény javadalmazás mellett. Ez a tevékenység hasznosnak bizonyult Wald számára: közgazdasági jártassága miatt ösztöndíjas állásajánlatot kapott a Cowles Bizottságtól, egy akkor Colorado Springsben működő gazdasági intézetben. Az egyre romló politikai helyzet ellenére Wald nehezen szánta rá magát, hogy végleg búcsút intsen az elméleti matematikának. Ausztria megszállása azonban megkönnyítette számára a döntést. Néhány, Coloradóban töltött hónap után a Columbia Egyetemen, a statisztikai részlegen kapott professzori állást, így újra összecsomagolt, és New Yorkba költözött.

Ezen a helyen vívta meg a maga háborúját.

A második világháború alatt Wald a Statisztikai Kutatócsoport (SKCS) nevű különleges program keretében dolgozott. Ez a program a háborús célok érdekében egyesítette az amerikai statisztikusok szellemi kapacitását – kicsit hasonlóan a Manhattan-tervhez, csak itt bombák helyett egyenleteket fejlesztettek ki. Mellesleg az SKCS tényleg Manhattanben volt, Morningside Heightsban, a Nyugati 118. utca 401. szám alatt, néhány háztömbnyire a Columbia Egyetemtől. Az épületben most a Columbia professzori lakásai, valamint orvosi rendelők találhatók, de 1943-ban itt zsongott és vibrált a háborús matematika idegközpontja. A Columbia Alkalmazott Matematikai Csoportjában fiatal nők tucatjai görnyedtek a Marchant asztali kalkulátorok fölé, és számolták a vadászgépek optimális pályaívét, hogy az ellenséges repülőket lőtávolon belül tartsák. Egy másik lakásban princetoni kutatók a stratégiai bombázások menetrendjét készítették. A szomszéd szobában pedig az atombombaprojekt columbiai részlege működött.

De mind között az SKCS volt a legnagyobb, és végső soron a legbefolyásosabb csoport. Légköre egy egyetemi tanszék intellektuális nyitottságát és hatékonyságát ötvözte a cél érdekében közösen vállalt felelősség érzésével, ami csak akkor tapasztalható, ha igazán nagy dolgok forognak kockán. „Ajánlásokat tettünk, miközben gyorsan peregtek az események – írta később W. Allen Wallis igazgató. – A vadászgépek harcba bocsátkoztak a Jack Wolfowitz javaslata alapján vegyes típusú lőszerrel feltöltött géppuskáikkal, és a pilóták vagy visszatértek, vagy nem. A hadihajók kilőtték a rakétákat, amelyek hajtóanyagát Abe Girshick mintavételi tervei alapján hagyták jóvá, és azok vagy a saját repülőgépeinket és pilótáinkat találták el, vagy valóban a célpontot semmisítették meg."

A rendelkezésre álló matematikai tehetség összhangban állt a feladat nehézségével. Wallis szavaival, az SKCS „a valaha létrejött legkülönlegesebb statisztikai kutatócsoport volt, mind a résztvevők száma, mind azok minősége tekintetében". Ott volt Frederick Mosteller, a Harvard majdani statisztika tanszékének létrehozója.

Ugyanígy Leonard Jimmie Savage, a döntéselmélet úttörője és az utóbb Bayes-statisztikáknak nevezett terület nagy pártfogója.[1] Időnként megjelent a kibernetika atyja, Norbert Wiener az MIT-ről. Olyan csoport volt ez, ahol Milton Friedman, a későbbi közgazdasági Nobel-díjas gyakran csak a negyedik legokosabb ember volt a szobában.

A szoba *legokosabb* emberének általában Wald Ábrahámot tartották. Wald volt Wallis tanára a Columbián, és a csoport matematikai eminenciásaként működött. „Ellenséges idegenként" formálisan el volt tiltva azoktól a bizalmas jelentésektől, amelyeket ő maga írt; az SKCS-ben az a vicc járta, hogy a titkárnőknek azonnal ki kell tépniük Wald kezéből minden egyes papírlapot, amint azt teleírta. Wald bizonyos szempontból nem látszott sikerrel kecsegtető munkatársnak. Mindig is az absztrakció felé hajlott, nem kedvelte a közvetlen alkalmazásokat. Ám motivációja, hogy tehetségét a tengelyhatalmak ellen hasznosítsa, nyilvánvaló volt. És amikor egy kósza ötletből rendes matematikát kellett fabrikálni, arra Wald volt a megfelelő ember.

Íme a feladat. Mivel nem akarjuk, hogy az ellenséges vadászok lelőjék a repülőgépeinket, páncélzattal látjuk el azokat. A páncél azonban megnöveli a gép súlyát, ettől nehezebben manőverezhető, és több üzemanyagot fogyaszt. Ha túl sok a páncélzat, az is baj; ha túl kevés, az is. Valahol a kettő között van az optimum. És azért zárták össze egy csomó matematikust egy New York-i lakásba, hogy megtalálják ezt az optimumot.

A katonaság átadott néhány hasznosnak vélt adatot az SKCS-nek. Amikor az amerikai gépek visszatérnek az európai bevetésekből, tele vannak golyó ütötte lyukakkal. Ezek azonban nem egyformán oszlanak el a gép felületén. A törzsön több lyuk van, a hajtóműnél kevesebb.

A repülőgép részei	Golyónyomok négyzetlábanként
Hajtómű	1,11
Törzs	1,73
Üzemanyagrendszer	1,55
A gép többi része	1,8

A tisztek a következőt gondolták ki a hatékonyság növelésére; ugyanazt a védelmet kevesebb páncél felhasználásával is elérhetjük, ha a páncélzatot a gépnek azokra a részeire koncentráljuk, ahol a legnagyobb szükség van rá, vagyis ahol a gépeket a legtöbb találat éri. De pontosan milyen vastag legyen a páncél ezeken a részeken? Ezzel a kérdéssel keresték meg Waldot. De nem a remélt választ kapták.

A páncél nem oda kell, mondta Wald, ahol sok a lyuk. Oda kell, ahol *nincs* lyuk: a hajtóműre.

Wald éleslátása a következő egyszerű kérdésben nyilvánult meg: hol vannak a hiányzó lyukak? Azok, amelyek mindenütt megtalálhatók lennének a burkolaton, ha a lövések egyenletesen oszlanának meg a gépen. Wald meglehetősen biztos volt a válaszban. A hiányzó lyukak a hiányzó gépeken vannak. Azért volt a visszatérő gépek hajtóművein kevés golyónyom, mert amelyik gépnek a hajtóművét találták el, az általában lezuhant. Ugyanakkor az ementáliszerűen kicsipkézett törzzsel visszatérő gépek nagy száma erős bizonyíték arra, hogy a törzset ért találatok megengedhetők (és így megengedendők). Egy hadikórházban sokkal több olyan lábadozót látsz, akinek a lábát lőtték meg, mint akinek a mellkasát. De ennek nem az az oka, hogy az embereket nem lövik mellbe, hanem az, hogy akit mellbe lőnek, az többnyire nem marad életben.

Íme, egy ősi matematikai trükk, amelynek segítségével teljesen tisztázhatjuk a kérdést: *tegyünk néhány változót nullával egyenlővé*. Jelen esetben legyen ez a változó annak a valószínűsége, hogy ha egy gép hajtóművét eltalálják, azért a levegőben tud maradni. Ha ezt nullává tesszük, azt jelenti, hogy egyetlen lövés a hajtóműre garantáltan leszedi a gépet. Hogyan néznének ki ekkor az adatok? A visszajövő gépeken mindenhol lennének lyukak, a szárnyakon, a törzsön, az orron, csak a hajtóművön nem. A katonai elemző ezt kétféleképpen magyarázhatja: vagy a német lövedékek egy kivétellel a gép minden részét érik, vagy pedig a hajtómű a legsebezhetőbb. Mindkét vélekedés megmagyarázza az adatokat, csak az utóbbi jóval hihetőbb. A páncélt tehát oda kell tenni, ahol nincsenek lyukak.

Wald javaslatait gyorsan megvalósították. Sőt a haditengerészet és a légierő még a koreai és a vietnami háborúban is ezt a módszert alkalmazta. Nem tudom megmondani, hogy pontosan hány gépet mentett meg Wald ötlete, de az SKCS-nek a mai hadseregben működő adatvirtuóz utódai minden bizonnyal igen. Az amerikai védelmi rendszer vezetői azt hagyományosan jól tudják, hogy egyik ország sem azért nyer meg egy háborút, mert bátrabb, szabadabb a másik félnél, vagy mert Isten jobban szereti. Általában azok győznek, akiknek 5%-kal kevesebb repülőjét lövik le, vagy 5%-kal kevesebb üzemanyagot használnak, vagy 5%-kal jobban tudják táplálni a gyalogságot, ráadásul 95%-os költséggel. A háborús filmeket nem ezeknek az adatoknak az alapján készítik, de a háborút így vívják.

És minden lépésben ott van a matematika.

Miért látta Wald azt, amit a légi csatáról sokkal többet tudó és értő tisztek nem láttak? Ez a matematikán edződött gondolkodásmódjának köszönhető. Egy matematikus mindig azt kérdezi: „Milyen feltevésekkel dolgozunk? Mennyire megalapozottak ezek a feltevések?" Ez a következetesség néha bosszantó lehet. Máskor viszont nagyon hatékony. Jelen esetben a tisztek akaratlanul is a következő feltevéssel éltek: a visszatérő gépek az összes gép egy véletlen mintáját adták. Ha ez igaz lenne, akkor az összes gépre vonatkozó golyónyomok eloszlására valóban lehetne következtetni a visszatérő gépek golyónyomainak a vizsgálatából. Amint tisztán látjuk a feltevést, azonnal látszik, hogy az alapvetően hibás; semmi sem indokolja, hogy a gépek túlélése egyformán valószínű, akárhol találják is el őket. A 15. fejezetben tárgyalandó matematikai zsargonnal élve, a túlélési esély és a lyukak elhelyezkedése között *korreláció* áll fenn.

Wald másik előnye volt az absztrakcióra való hajlama. Wolfowitz, Wald tanítványa a Columbián, azt írta, hogy a Wald által kedvelt problémák „valamennyien nagyon absztrakt jellegűek voltak", és „bármikor szívesen beszélt matematikáról, de nem érdekelte a népszerűsítés vagy a speciális alkalmazások".

Wald – egyéniségéből fakadóan – alkalmazási kérdésekre nehezen tudott fókuszálni. A repülőgépek és a fegyverek részletei az ő szemében csak a fedőkárpitot jelentették, amelyen keresztülnézve jutott el a dolognak támaszt és rögzítést adó matematikáig. Ilyen megközelítésben néha nem veszed figyelembe a probléma nagyon fontos vonatkozásait. Ugyanakkor láttatni engedi a felszíni kinézet alapján nagyon különbözőnek tűnő problémák közös vázát. Így általunk ismeretlen területeken is fontos tapasztalatokat tudunk szerezni.

Egy matematikus értelmezésében a golyónyomok problémájának mélyén a *túlélési torzítás* nevű jelenség áll. Ez a legkülönfélébb összefüggésekben újra és újra előbukkan. És ha – mint Wald – tisztában vagyunk vele, akkor azonnal felismerjük, akárhogy bujkáljon is.

Vegyük például a befektetési alapokat. Ezek hozamának mérése olyan terület, ahol egy picit sem szeretnénk tévedni. Az évi növekedés 1%-os változása egy értékes pénzügyi konstrukcióból bóvlit csinálhat, és fordítva. A Morningstar (amerikai tanácsadó intézet) nagyvállalati kategóriába tartozó alapjai, amelyek lényegében az S&P 500 tőzsdeindexhez tartozó nagy vállalatokba fektetnek be, az első változatot látszanak megtestesíteni. Ebben az osztályban az alapok átlagosan 178,4%-kal nőttek 1995 és 2004 között, ami egy nagyon egészséges 10,8%-os évi növekedés.[2] Ezért jó üzletnek tűnhet, ha készpénzünket ezekbe az alapokba fektetjük be.

Hát nem az. A Savant Capital egy 2006-os tanulmánya kicsit más megvilágításba helyezte ezeket a számokat. Gondoljunk bele, hogyan generálja a Morningstar a számait. 2004-et írunk, vesszük az összes nagyvállalati kategóriába tartozó alapot, és megnézzük, mennyit nőttek az elmúlt tíz év alatt.

Valami azonban hiányzik a képből: azok az alapok, *amelyek már nem léteznek*. A befektetési alapok sem élnek örökké. Egyesek virágoznak, mások megszűnnek. És általában a tönkremenők azok, amelyek nem fialnak pénzt. Így ha a befektetési alapok évtizedes teljesítményét az időszak végén is létezők alapján próbáljuk megítélni, az ugyanolyan, mintha a pilóták kitérési manővereit a visszatérő gépek golyónyomainak száma alapján értékelnénk. Mit is jelentene, ha soha nem találnánk egynél több golyónyomot egyetlen gépen sem? Semmiképpen sem azt, hogy a pilóták zseniálisan képesek kijátszani az ellenséges tüzet, hanem inkább azt, hogy a kétszer eltalált gépek kigyulladtak és lezuhantak.

A Savant-tanulmányból kiderült, hogy ha a döglött alapok teljesítményét is figyelembe vesszük, akkor a hozamráta 134,5%-ra esik vissza, ami a már nem kiemelkedő évi 8,9%-nak felel meg. Az újabb kutatások is megerősítették ezt: a *Review of Finance* folyóiratban 2011-ben megjelent, több mint 5000 alapot vizsgáló összefoglaló tanulmány kimutatta, hogy a 2641 túlélő alaphozamrátája mintegy 20%-kal magasabb, mint ha az időközben megszűnt alapokat is figyelembe vesszük. A túlélési hatás mértéke lehet, hogy meglepte a befektetőket, de biztosan nem lepte volna meg Wald Ábrahámot.

Jordan Ellenberg: Hogy ne tévedjünk – A mindennapi élet rejtett matematikája

Fordította Freud Róbert és Seres Iván, szakmai szempontból ellenőrizte Besenyei Ádám. Park Könyvkiadó, 2016

http://park.libricsoport.hu/fooldal/konyvek/hogy-ne-tevedjunk-a-mindennapi-elet-rejtett-matematikaja/

Jordan Ellenberg a Wisconsini Egyetem matematikaprofesszora. Könyve 2016-ban az USA-ban elnyerte a legjobb matematikai ismeretterjesztő könyvért járó Euler-díjat.

---

[1] Savage majdnem teljesen vak volt, csak az egyik szemének a sarkából látott, és egyszer hat hónapig szárított húson élt, hogy bebizonyítson egy állítást a sarkvidéki kutatásról. Gondoltam, ezt érdemes megemlíteni.

[2] Sőt maga az S&P 500 index még jobban teljesített, 212,5%-ot nőtt ugyanebben az időszakban.

alkalmazott matematika · matematikatörténet · recenzió

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Korn András 2017. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Micsoda?! Programozás gyerekeknek?

Kicsit talán még tartja magát az a sztereotípia, hogy a programozó zsíros hajú, pattanásos, szódásüveg-szemüveges, szociális téren kihívásokkal küzdő, magának való lúzer. A valóságban természetesen programozóból is sokféle van, és – mivel a mindennapi életünkben egyre fontosabb szerephez jut a valamilyen értelemben vett programozás – a programozók sokfélesége egyre csak fokozódik.

Nyugodtan kijelenthetjük, hogy a XXI. századi digitális írástudásnak része a programozás alapjainak ismerete. Egyre több programozható eszköz vesz körbe bennünket. A zsebünkben hordott okostelefonjaink számítógépként jóval többre képesek, mint a húsz évvel ezelőtti asztali számítógépek. Otthonaink egyre szélesebb körben automatizálhatók. Lassan elmosódnak a határok; az informatika mindenhova beszivárog a tévéktől kezdve az autókon át a karórákig. Ezeknek az ,,okos" eszközöknek a működését jobban megérthetjük, hibáik előtt kevésbé állunk tanácstalanul, ha a programozás alapfogalmaival tisztában vagyunk – ha van intuitív képünk arról, hogyan épül fel egy program, és milyen programozási hibák milyen működési hibákat eredményeznek.

Jelen sorok írója tízéves korában kezdett programozni tanulni, és ez meghatározó tapasztalat volt annak ellenére, hogy az akkori számítógépek (például az, amelyen a szerző is tanult: a Sinclair ZX81) nyújtotta felhasználói élményt össze sem lehet hasonlítani a ma megszokottal. A programozni tanulás egy mai gyerek számára is ugyanilyen lenyűgöző tud lenni, és pusztán a logikus, analitikus gondolkodást, a végrehajtó működéseket, a dekompozíciós készséget fejlesztő hatása miatt azok számára is hasznos, akikből később nem lesz programozó.

Tudtommal egyetlen kifejezetten gyerekeknek szóló programozás-könyv van a magyar könyvpiacon, ez pedig a Carol Vorderman-féle, amely a HVG Kiadó gondozásában jelent meg 2016-ban Budapesten (fordította Csitári Gyula és Csordás András). Az alábbiakban ezt a könyvet mutatom be röviden.

Bevallom, a szerző neve ismeretlen volt a számomra, és amikor rákerestem, elsősorban az derült ki róla, hogy műsorvezető; szakmai sovinizmusom rögtön lebiggyesztette az ajkát és nagyképűen azt kérdezte: ,,ugyan mit tudhat egy tévés személyiség a programozásról?". Miután a szakmai sovinizmusomat sarokba állítottam, továbbolvastam és megtudtam, hogy a hölgynek mérnöki diplomája van, a könyvet pedig további mérnökökkel és természettudósokkal együtt írta. Hihetővé vált, hogy a könyvből valóban meg lehet tanulni egyet s mást a programozásról.

A könyvet nyolcéves fiamon teszteltem, akit eleve érdekelt a téma, és már olvasott kb. fél oldalnyit a Scratch nyelvről egy másik könyvben. Örömmel forgatta a Programozás gyerekekneket, és szerintem többször is elolvasta, de nem elejétől a végéig, hanem a fejezetek között ugrálva.

A könyv általános bevezetővel kezdődik; érdemi első fele a Scratch nevű, kifejezetten kezdőknek való programozási nyelvről és a hozzá tartozó fejlesztőkörnyezetről szól. A Scratch nagy előnye, hogy a programozás folyamata teljesen vizuális. A gyerekeknek nem kell egy formális szintaxist (egy programozási nyelv elemeit és helyesírását) megjegyezniük, hanem kész utasításblokkokat huzigálhatnak egymás alá az egérrel, és elegendő egy-egy paramétert beállítani itt-ott. Nagyon kevés tanulás után is látványos eredményeket lehet elérni: a könyv több mini játékot is tartalmaz, amelyeket nagyjából egy-egy óra munkával a számítógépen is életre lehet kelteni.

A Scratch fejlesztőkörnyezetének 1-es verziója ingyenes szabad szoftver, ami minden elterjedt platformra elérhető; mi Devuan GNU/Linuxon próbáltuk ki. A 2-es verzió is ingyenes ugyan, de nem teljesen szabad szoftver; Linuxra sajnos csak elvileg érhető el, mert a futtatásához szükséges Adobe Air futtatókörnyezetet már nem lehet telepíteni; szerencsére WINE-nal kifogástalanul működött Linuxon a windowsos változat. Érdemes a 2-es verziót választani, mert ebben már definiálhatók saját programblokkok (lényegében szubrutinok vagy függvények – a valódi programozás során ezek nagyon fontosak), amelyeket több helyről is meghívhatunk.

A könyv első, Scratchről szóló része fokozatosan bonyolódó példákon keresztül mutatja be a programozás alapjait. A magyarázatok tömörek és lényegretörőek, de egy gyerek számára is emészthetőek (szerintem hiba is lenne terjengős, maximális precizitásra törekvő magyarázatokkal próbálkozni). Ezeknek a fejezeteknek a feldolgozása után az olvasó akár önállóan is elkészítheti mondjuk egy PONG játékot (ez a '80-as évek egyik első, hazánkban is elérhető videojátéka volt: a képernyő két szélén levő csík alakú ütőkkel kellett egymásnak pattintgatni a négyzet alakú labdát). Nagyjából egyértelmű lesz, hogyan kell dekomponálni a feladatot: milyen entitások lesznek benne, és melyiknek körülbelül hogy fog kinézni a programja.

A valódi életben is használható programokat Scratchben nemigen fogunk tudni írni; a könyv második fele azonban ebben lesz a segítségünkre.

A könyv második része a Python nyelvbe vezeti be az olvasót. A Python a valódi életben is rendkívül fontos scriptnyelv, amelynek az alapos ismerete önmagában is elég lehet egy sor informatikai állás betöltéséhez (persze mire a könyv olvasói felnőnek, ez már valószínűleg nem lesz így). Mivel nyílt forráskódú szabad szoftver, a legtöbb platformra elérhető. Mindemellett azonban általában nem ezt a nyelvet tanítják kezdő programozóknak először (vagy másodikként), úgyhogy számomra meglepő volt a választás. A könyvet lapozgatva azonban hamar beláttam, hogy a Scratch-re alapozva nagyon is reális a Python alapjait is megtanítani; a szerzők tudatosan építenek a Scratch ismeretére, és vizuálisan mutatják be, hogy a Python lényegét tekintve ugyanaz, mint a Scratch, csak kicsit másképp néznek ki benne a Scratch-ben már megszokott konstrukciók. Ezzel együtt a téma érezhetően nehezedik, és a szerzők egyre többször kényszerülnek arra, hogy az érthetőség érdekében nagyvonalúan eltekintsenek fontos részletek tárgyalásától. Az ifjú olvasókat ez ugyan nem feltétlenül zavarja, de azért nem árt, ha kéznél van valaki, aki a felmerülő kérdéseket meg tudja válaszolni.

A Pythonról szóló rész felépítése az első részhez hasonló: egyre bonyolódó példákon keresztül ismerhetjük meg a nyelv elemeit. A könyvrész végére az olvasó megértheti az ott közölt egyszerű játék működését, de szerintem túlzás lenne azt várni, hogy az olvasottak alapján saját maga is képes legyen hasonló programot írni; ehhez több önálló gyakorlásra lenne szükség, amihez a könyv nem nyújt segítséget, mivel nincsenek benne önállóan megoldandó feladatok. Az Interneten elérhető segédanyagok zöme is angolul van, márpedig a könyv célközönsége valószínűleg még nem tud annyira jól angolul, hogy ezeket eredményesen használni tudja.

A programozásról szóló fejezetek így tehát főként arra jók, hogy a téma iránt érdeklődő és fogékony gyerekek passzív, elméleti ismereteiket szélesítsék; ez nagyon fontos és hasznos, de kevés ahhoz, hogy valóban megtanulhassanak programozni. Ha erre támadna igényük, szükségük lesz egy felkészült (valószínűleg felnőtt) segítőre, tanárra, aki testreszabott feladatokat, célokat tud kijelölni, és segíteni tud azok elérésében. Nem feltétlenül gond, ha nincs programozó a családban: ma már gyerekek számára is több cég, szervezet szervez programozás-tanfolyamokat.

A könyv utolsó fejezetei a számítógépekkel és az Internettel kapcsolatos fogalmak magyarázatára tesznek kísérletet; pl. elvileg megtudhatjuk, mi az, hogy IP-cím, portszám vagy socket. Ezek a magyarázatok sajnos sokszor annyira elnagyoltak és pontatlanok, hogy egyáltalán nem lesz tőlük okosabb az ember; például a socketről azt írja, ,,Egy IP-cím és egy port együttesen egy csatlakozópontot, más néven socketet alkot. A csatlakozópont által a programok közvetlenül tudnak egymásnak adatot küldeni az interneten keresztül, ami hasznos, ha például online játszunk." Ez a magyarázat pontatlan, mert a socket valójában egy olyan adatstruktúra, amely egy futó program számára egy hálózati kapcsolatot testesít meg, és sok szempontból úgy viselkedik, mint egy megnyitott fájl (lehet bele írni és olvasni belőle; le lehet zárni; a gyermekfolyamatok öröklik a szülőtől stb.); nemcsak IP esetén értelmezhető és nemcsak olyan protokollok esetében, amelyekben van portszám. Az sem igaz, hogy egy IP-cím és egy port együttesen szükségszerűen meghatározna egy socketet; attól eltekintve, hogy egy konkrét protokollt is meg kellene nevezni, könnyen előfordulhat, hogy egy {IP-cím, protokoll, portszám} hármashoz nem tartozik socket, mert az adott portot vagy akár IP-címet éppen nem használja senki. Véleményem szerint a könyvben közölt magyarázat nem segít a socket fogalmának intuitív megértésében.

A portszámokról azt írja a könyv, hogy van belőlük ,,jól ismert, regisztrált és privát", de hogy ez a felosztás mit jelent vagy miért fontos, az már nem derül ki.

Ezek miatt a felületességek miatt úgy gondolom, az utolsó fejezeteket akár ki is lehetett volna hagyni a könyvből; hozzáadott értékük minimális, és inkább összezavarnak, mint tájékoztatnak. A könyvet forgató gyerekek szüleiként készüljünk fel arra, hogy az itt bevezetett fogalmakat nekünk kell majd rendesen elmagyaráznunk.

A könyv kiállítása igényes; a nyomat szép, a papír fényes (de sajnos a puha borító könnyen megtörik). A 3900 Ft-os árat nem érzem irreálisnak. A fordítás többnyire igényes, de helyenként nyögvenyelős; a fordítóknak nem mindenhol sikerült az eredetitől elszakadva magyarul visszaadni ugyanazt a jelentést, így találkozhatunk angolos szóhasználattal, mondatszerkesztéssel (példa: "Használd ezt a programot, hogy több rendezett tuple-ból álló listát készíts"). Néhány más kiadványra jellemző zavaró, értelmezhetetlen, erőszakos magyarításokkal (amiket a laikus magyar azért nem ért, mert nem ismeri a fogalmat, a hozzáértő pedig azért nem, mert csak nehezen tudja kitalálni, melyik fogalom nevét látja) szerencsére nem találkoztam. Dicséretes például, hogy az angol ,,tuple" tuple maradt, ami később megkönnyíti majd az olvasók számára az angol nyelvű szakirodalom értelmezését.

A könyvben található pixelesített rajzocskák próbaolvasóm szerint (és szerintem is) inkább zavaróak, mint aranyosak, de ez ízlés dolga.

Összességében a könyvet hibái ellenére jónak és hasznosnak, sőt, hiánypótlónak tartom; szerintem a leginkább 8–12 éveseknek ajánlható (bár a könyv hátulján tízéves kor fölött ajánlják). Azt gondolom, arra ugyan nem alkalmas, hogy a programozás iránt egyáltalán nem érdeklődő gyerekek érdeklődését felkeltse, azonban a fogékony programozópalánták örömmel és eredményesen forgathatják; széleskörű alapismeretekre tehetnek szert, amelyekre építve később – más forrásból – könnyebben tanulhatnak meg valóban programozni.

Carol Vorderman: Programozás gyerekeknek – a bináris kódtól a játékkészítésig HVG Kiadó, 2016 (ISBN 978-963-304-320-2; fordította Csitári Gyula és Csordás András).
https://www.hvgkonyvek.hu/programozas-gyerekeknek

Korn András

informatika recenzió

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Horváth Róbert 2017. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Nemnegatív operátor-félcsoportok

Bátkai András (Budapest, Wuppertal), Marjeta Kramar Fijavž (Ljubljana) és Abdelaziz Rhandi (Salerno) *Nemnegatív operátor-félcsoportok (a végestől a végtelen dimenziókig)* című 379 oldalas monográfiája 2016 második felében jelent meg elektronikusan a Birkhäuser Kiadó gondozásában. A könyv nyomtatott formában várhatóan ez év februárjától lesz elérhető. Az eBook ára 56, míg a nyomtatott változat 72 dollárért lesz kapható.

A monográfia a nemnegatív (a könyvben a *positive* angol szó utal erre a tulajdonságra) operátor-félcsoportok tulajdonságait vizsgálja, és különböző alkalmazási feladatokon bemutatja az elméleti eredmények több felhasználási lehetőségét. Mik is azok a nemnegatív operátor-félcsoportok, és miért fontos ezek vizsgálata? Ismert, hogy az exp(x) exponenciális függvény előállítható hatványsor formájában. Ezen hatványsor segítségével négyzetes mátrixokra is definiálható az exponenciális függvény. Így egy tetszőleges A négyzetes mátrix esetén minden nemnegatív t paraméterre definiálható a $T(t):=\exp(tA)$ mátrix, és az így kapott mátrixok rendelkeznek az alábbi két alapvető tulajdonsággal: (1) $T(0)=I$ (I az egységmátrix), (2) $T(s+t)=T(s)T(t)$ tetszőleges s és t nemnegatív paraméterek esetén. Az exp(tA) kifejezés hatékony számolásának és tulajdonságainak fontos szerepe van a gyakorlati alkalmazásokban. Példaként említhetjük, hogy a számtalan valós folyamat modellezésére alkalmas $y'(t)=Ay(t)$ ($y(0)$ adott vektor) kezdetiérték-feladat megoldása az $y(t)=\exp(tA)y(0)$ alakban írható. Így a megoldás tulajdonságait az exp(tA) függvény tulajdonságai határozzák meg. Több alkalmazásban garantálnunk kell, hogy a megoldás komponensei ne legyenek negatívok (például mert koncentrációt, valószínűséget stb. jelentenek). Nyilvánvalóan igaz, hogy a megoldás pontosan akkor lesz nemnegatív minden nemnegatív $y(0)$ kezdővektor esetén, ha az exp(tA) mátrix minden t-re nemnegatív. Ez a követelmény feltételt szab az A mátrixra, így fontos kérdés ezen feltételek feltárása. Az operátorfélcsoportokhoz az előző – mátrixokra végiggondolt – fogalmak általánosításával jutunk. Legyen X egy Banach-tér, és minden nemnegatív t paraméterhez rendeljük hozzá az X tér egy korlátos lineáris operátorát. Jelöljük ezt a hozzárendelést $T(t)$-vel. A $T(t)$ leképezést operátorfélcsoportnak nevezzük, ha teljesíti az (1) $T(0)=I$ (I az identitás operátor) és a (2) $T(s+t)=T(s)T(t)$ ún. félcsoport-tulajdonságokat. A mátrixok nemnegativitása pedig így általánosítható operátor-félcsoportokra: egy Banach-hálókon értelmezett operátor nemnegatív, ha megőrzi a nemnegatív kúpokat.

A szerzőket azon kívül, hogy ugyanazon kutatási területen dolgoznak, az is összeköti, hogy közösen szervezték a 2013/14-es tanévben a 17. Nemzetközi Internet-szemináriumot *Nemnegatív operátor-félcsoportok és alkalmazásaik* címmel. Az erre a szemináriumra készített anyagokat – kiegészítve több, differenciálegyenletekre vonatkozó fontos alkalmazással, ill. a tárgyalás egységességét elősegítő bevezető fejezetekkel – olvashatjuk most könyv alakban. Mindhárom szerző mentorának tekinti a könyv ajánlását is író Rainer Nagel és Ulf Schlotterbeck (Tübingen) professzorokat. Ők mindketten nemzetközileg elismert kutatói a félcsoportok elméletének, és szerzői több, a témával kapcsolatos, alapműnek tekinthető könyvnek. Az 1986-os kilencszerzős monográfiájuk részletesen bemutatta a nemnegatív operátor-félcsoportok elméletét. Már akkor felmerült a monográfia kibővítése az elmélet hatékonyságát jól mutató, gyakorlati alkalmazásokból vett példákkal. Ennek megvalósulására egészen mostanáig kellett várniuk, így nem csoda, hogy erősen ösztönözték a könyv létrejöttét.
A monográfia lényegében három nagy és megközelítően egyforma hosszúságú részből áll.

Az I. részben a véges dimenziós eset tárgyalására kerül sor, azaz a fejezet a fent említett mátrixfélcsoportokról szól. Ezt a részt – amely jól előkészíti a későbbi fejezeteket – az ajánlást írók egy korábbi, nemnegatív mátrixokról írt, befejezetlen jegyzete inspirálta. Az I. rész csak a lineáris algebra alapvető fogalmainak ismeretét feltételezi. A szerzők az állításokat praktikus – de az irodalomban ritkán követett – módon koordinátafüggetlen alakban fogalmazzák meg, ami jól segíti majd a véges és végtelen dimenziós esetek közti eltérések és párhuzamok megértését. Ebben a részben megismerkedünk a nemnegatív mátrixokkal és alapvető tulajdonságaikkal. Bevezetik a vektor- és mátrixnormákat, ill. a mátrixok spektrális jellemzőit. Megtudjuk, hogy bizonyos valós-valós függvények hogyan értelmezhetők mátrixokra, ill. hogy hogyan viselkednek a mátrixok, ha hatványozzuk őket és a kitevővel végtelenhez tartunk. A kiemelkedően fontos mátrixexponens számításának külön fejezetet szenteltek a szerzők. Megtudhatjuk, hogy exp(tA) pontosan akkor lesz nemnegatív, ha A főátlón kívüli elemei nemnegatívok, ill. hogy milyen állítások érvényesek A spektrumára, ill. a félcsoport aszimptotikájára abban az esetben, ha exp(tA) nemnegatív. A nemnegatív mátrixokról szóló fejezet részletesen bemutatja a Perron-, Frobenius- és Wielandt-tételeket, melyek nemnegatív mátrixok spektrális tulajdonságait jellemzik. Például a Perron-tétel szerint egy nemnegatív mátrix spektrálsugara egyben sajátérték is, és a hozzá tartozó sajátvektor (ez az ún. Perron-vektor) választható nemnegatívnak. Ezen tételek segítségével leírható például a kezdetiérték-feladatok megoldásának viselkedése abban az esetben, ha a t paraméterrel végtelenhez tartunk, így számtalan alkalmazásukat találhatjuk meg különböző gyakorlati feladatokban. Az alkalmazási lehetőségekre a szerzők is mutatnak példákat. Nemnegatív mátrixok esetén bemutatják például, hogy hogyan használja a Google a honlapok rangsorolására a Google-mátrix Perron-vektorát. Ezen kívül láthatunk példákat gráfokkal, Markov-láncokkal, ill. életkor-strukturált populációs modellekkel kapcsolatban. A nemnegatív mátrixfélcsoportok alkalmazására is látunk példákat többek között betegségterjedési, versenypiaci, ill. sorbanállási modellek esetén.

A II. rész – az első rész által alaposan előkészített – végtelen dimenziós eset tárgyalását adja. Ez a rész tartalmazza a könyv fő mondanivalóját. Olvasásához már lineáris algebrai és funkcionálanalízisbeli ismeretekre is szükség van, de a szerzők sikerrel törekednek arra, hogy a könyv önmagában is jól olvasható legyen. Ennek megfelelően a II. rész egy gyorstalpalóval indul az operátor-félcsoportok, a Banach-hálók és a nemnegatív operátorok elméletéről. Ezek után részletesen tárgyalják a generálási tételeket, a spektrálelméletet és a nemnegatív operátor-félcsoportokra vonatkozó perturbációs tételeket.

A III. rész tovább folytatja a mélyebb elméleti vizsgálatokat. Megtudhatjuk, hogy a Perron–Frobenius-elmélet hogyan általánosítható a végtelen dimenziós esetre, és hogy milyen fontos tulajdonságai vannak az irreducibilis félcsoportoknak. Azt láthatjuk, hogy a mátrixfélcsoportokra érvényes állítások végtelen dimenzióban is érvényben maradnak. Ezen kívül a szerzők bemutatják, hogy hogyan lehet a félcsoportok generátorának spektrális tulajdonságaiból következtetni a félcsoport aszimptotikus tulajdonságaira, például az aszimptotikus periodicitásra vagy a kiegyensúlyozott exponenciális növekedésre. A III. rész második fele a korábban bemutatott elmélet gyakorlati alkalmazásait veszi sorra. A szerzők saját érdeklődési körüknek megfelelően összeválogattak olyan differenciálegyenletekkel leírt matematikai modelleket, melyeknél a félcsoportelméletre támaszkodva hatékonyan lehet a megoldás tulajdonságait vizsgálni. Így részletesen tárgyalják a késleltetett differenciálegyenletek témakörét, a nemlineáris közönséges differeniálegyenlet-rendszerekhez tartozó Koopman-félcsoport tulajdonságait és alkalmazásait, a lineáris Boltzmann-féle transzportegyenleteket, hálózatok transzportfolyamatait és a diffúziós populációs egyenleteket.

Minden fejezet egy irodalmi kitekintéseket és megjegyzéseket tartalmazó résszel és egy megoldani javasolt feladatsorral zárul. A feladatokhoz nem közölnek megoldásokat a szerzők. Az Appendix tartalmazza a könyv megértéséhez szükséges legfontosabb definíciókat és összefüggéseket a lineáris algebra és a funkcionálanalízis témaköréből. A könyvet 158 művet felsoroló, átfogó irodalomjegyzék és részletes szószedet zárja.

Összefoglalva elmondható, hogy a monográfia következetesen felépített, jó angolsággal megírt és könnyen olvasható munka. A könyv a nemnegatív operátor-félcsoportok terén eljut az alapoktól a legfrissebb tudományos eredményekig, így széleskörű érdeklődésre tarthat számot a matematikával foglalkozók körében. Haszonnal forgathatják az egyetemi hallgatók, de a matematika különböző alkalmazási lehetőségei és szép elméletei iránt nyitott kutatók is.

A. Bátkai, M. Kramar Fijavž, A. Rhandi, Positive Operator Semigroups, From Finite to Infinite Dimensions, Series: Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 257, Birkhäuser, Basel, 2016, 364 p.

Horváth Róbert

recenzió

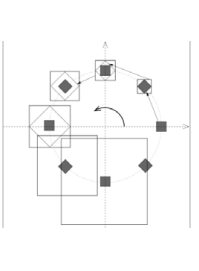
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **TUDOMÁNY** MENÜPONT TÖBBFÉLE, A MATEMATIKA TUDOMÁNYÁHOZ KAPCSOLÓDÓ FUNKCIÓT TAKAR..**A TUDOMÁNY– TÖRTÉNET ROVAT** CÉLJA ELSŐSORBAN MATEMATIKATÖRTÉNETI JELLEGŰ ÍRÁSOK KÖZLÉSE. **A MI IS …?ROVAT** A MAI MATEMATIKA TUDOMÁNYÁRÓL KÍVÁN SZÓLNI A HOZZÁÉRTŐKNEK.
(ROVATSZERKESZTŐK: *BESENYEI ÁDÁM; STIPSICZ ANDRÁS.*)



Csendes Tibor
2017. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

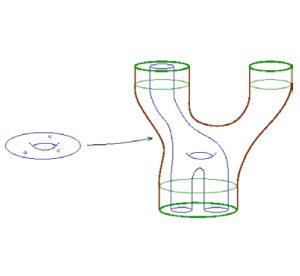
Megbízható számítások

A cím kissé rejtélyes: a számítógépes algoritmusok a köztudat szerint pontosak és megbízhatók. Az alku során az ügynökök végső érve gyakran az, hogy a kalkulátor is a mondott számot mutatja. Ezzel szemben sajnos fontos feladatok megoldása során is azzal szembesülünk, hogy a kapott eredmény csak közelítő érték, és gyakran kritikus esetben a kapott szám nagyságrendje, vagy az előjele sem helyes. Ennek ellenére van olyan számítógépes módszertan, amely biztosítani tudja a numerikus számítások tetszőleges pontosságát és megbízhatóságát. *Csendes Tibor* megismertet az intervallum-aritmetikával.

Csapodi Csaba
2017. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Szemelvények a magyar matematikai műnyelv történetéből

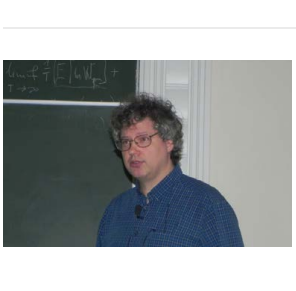
Mi, matematikatanárok, kényesek vagyunk a szaknyelv használatára. Diákjainktól maximális precizitást várunk el a szakszavak használatában. Ritkán gondolkozunk el azon, hogy miért tapasztalható sokszor ugyanaz a hiba a diákok szóhasználatában, miért tévesztik el mindig, hogy melyik a *nevező* és melyik a *számláló*, miért nem tudják rögtön megmondani, hogy egy síkidom vagy egy görbe *konvex*-e vagy *konkáv*.



Simon Donaldson
2017. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is ... egy pszeudo-holomorf görbe?

Görbéket mind a differenciálgeometriában, mind az algebrai geometriában hosszú ideje tanulmányoznak. A klasszikus elmélet számunkra most érdekes változata a „komplex” vagy „holomorf” görbék elmélete. A pszeudo-holomorf görbe fogalma a holomorf görbe természetes módosítása. A pszeudo-holomorf görbe fogalmát Gromov vezette be 1986-ban, amivel gyökeresen alakította át a szimplektikus topológiát, és több más közeli diszciplínára, például algebrai geometriára, húrelméletre, 4-sokaságok elméletére volt döntő hatással. *Simon Donaldson* írása, amelyet *Stipsicz András* fordításában közlünk, az Amerikai Matematikai Társaság Notices folyóiratának What is...? rovatában jelent meg.



Harcos Gergely
2017. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is ... egy Maass-forma?

A Maass-formák – vagy általánosabban az automorf formák – harmonikus hullámok, amelyek speciális szimmetriákkal rendelkeznek. Felfedezőjük Hans Maass. A matematika több híres megoldatlan problémája – pl. a Ramanujan-Selberg-sejtés, a Langlands-program, vagy az általános Riemann-sejtés – hozható kapcsolatba a Maass-formákkal. A fényképen a szerző, *Harcos Gergely* (foto: *Hubert Tibor*).

Pyber László
2017. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Babai és a gráf-izomorfizmus probléma

Babai László korábban az ELTE algebraprofesszora volt, ma a chicagoi egyetemen tanít számítástudományt és matematikát (ld. a fényképen). 2015 novemberében egy háromrészes chicagoi előadássorozatában jelentette be, hogy kvázipolinomiális algoritmust talált a gráf-izomorfizmus probléma megoldására. Ez egy olyan, egyszerűen megfogalmazható probléma, amit rendkívül nehéz megoldani.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Csendes Tibor 2017. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Megbízható számítások

A cím kissé rejtélyes: a számítógépes algoritmusok a köztudat szerint pontosak és megbízhatók. Az alku során az ügynökök végső érve gyakran az, hogy a kalkulátor is a mondott számot mutatja. Ezzel szemben sajnos fontos feladatok megoldása során is azzal szembesülünk, hogy a kapott eredmény csak közelítő érték, és gyakran kritikus esetben a kapott szám nagyságrendje, vagy az előjele sem helyes. Ennek ellenére van olyan számítógépes módszertan, amely biztosítani tudja a numerikus számítások tetszőleges pontosságát és megbízhatóságát. Ez úgy érhető el, hogy többet kell számolni, és tovább tart a megoldás. Gyakran a gép memóriája is nagy kell hogy legyen.

A pontatlanság egyik oka: Adjunk össze 3 számot, majd igazoljuk, hogy ha ezt lebegőpontos számítógépes rendszerben tesszük, akkor az eredmény lényegében tetszőlegesen távol lehet a helyestől! Matlabban[1] például a következőt tapasztalhatjuk. Az

```
>> A+B+C
```

utasításra a $10^{23}, 2016, -10^{23}$ értékekkel az eredmény 0, a helyes nyilván 2016. Érdekes, hogy mind az adatok, mind az eredmények lebegőpontos környezetben ábrázolható számok.

Természetesen több megoldás is van erre a problémára. Ilyen a részeredményeknek több lebegőpontos számba való gyűjtése, az ún. error free transformation (EFT), vagy az intervallum-aritmetikán alapuló befoglaló függvények használata.

Legyen $\mathbb{I}$ a kompakt valós intervallumok tere. Az intervallum-aritmetika műveletei ezen a halmazon vannak értelmezve. A műveleteket úgy kell definiálni, hogy az $A \circ B$ eredménye egy olyan C intervallum legyen, amely pontosan azon c valós számok halmaza, amelyekhez léteznek olyan $a \in A$ és $b \in B$ valósok, hogy $c = a \circ b$. Itt $\circ$ a négy alapművelet valamelyikét jelöli. Az ilyen aritmetika segítségével követni lehet a kerekítési hibákat, és az adatainkat terhelő bizonytalanság is tükröződhet az eredményekben.

Az előző definíció mellett az intervallum-aritmetikát lehet kizárólag a valós aritmetikára támaszkodva is definiálni. Az $[a, b]$ és $[c, d]$ intervallumokra legyen

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d],$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c],$$

$$[a, b][c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)],$$

$$[a, b]/[c, d] = [a, b][1/d, 1/c].$$

Az osztást persze csak akkor értelmezzük, ha $0 \notin [c, d]$. Érdemes megjegyezni, hogy ez utóbbi feltétel jól megfogalmazott gyakorlati feladatokban a tapasztalataink szerint szinte kivétel nélkül teljesül. A valós műveleteknek ezt a kiterjesztését intervallumokra természetes, vagy naiv intervallum-kiterjesztésnek nevezik. Az utóbbi években vizsgálják az olyan intervallum-aritmetikákat is, amelyek nem csak kompakt intervallumokon definiáltak. Ezeken a nullát tartalmazó intervallummal való osztás is értelmezhető. Például $[1, 2]/[-1, 1] = [1, -1] = \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.

Bár az alapműveletek pontosak a fenti értelemben, mégis, a velük kiszámított bonyolultabb függvények durva becslései is lehetnek a megfelelő értékkészletnek. A gyakran emlegetett példa a következő: az $x - x^2$ értékkészlete a $[0, 2]$ intervallumon $[-2, 0{,}25]$. Ezzel szemben az intervallum-kiterjesztéssel adódó intervallum $[-4, 2]$.

Az intervallum-aritmetika műveleteinek tulajdonságaival foglalkozik az intervallum-algebra. Számos, a valós műveletekre érvényes tulajdonság változatlanul teljesül az intervallum-műveletekre is (pl. a kommutativitás, asszociativitás az összeadásra és a szorzásra), de általában nincs inverz, és érvényes a szubdisztribúciós tulajdonság: $A(B + C) \subseteq AB + AC$.

Az alapműveletekhez hasonlóan könnyen lehet definiálni az elemi függvények intervallum-kiterjesztését is, tehát a számítógépen kiszámítható függvényeket szinte kivétel nélkül meg lehet valósítani természetes intervallum-kiterjesztésben is.

Az intervallum-aritmetika alkalmazása szempontjából alapvető fogalom a befoglaló függvény. Az $F(X)\colon \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ az $f(x)$ n-változós valós függvény befoglaló függvénye, ha $f(x) \in F(X)$ érvényes minden $x \in X$ pontra és $X \in \mathbb{I}^n$ intervallumra. Az intervallum-matematika fontos eredménye, hogy az $f(x)$ valós függvényből természetes (vagy naiv) intervallum-kiterjesztéssel adódó $F(X)$ függvény befoglaló függvény.

A befoglaló függvényektől természetes azt elvárni, hogy bővebb argumentum-intervallumra ne adjanak szűkebb eredmény-intervallumot. Ezt a feltételt fogalmazza meg az izotonitás: egy $F(X)$ befoglaló függvény akkor izoton, ha $X \subseteq Y$-ból következik $F(X) \subseteq F(Y)$. Az izotonitás szinte minden intervallum-aritmetika implementációra érvényes.

A befoglaló függvények minőségének fontos mutatója a rend: azt mondjuk, hogy az $F(X)$ befoglaló függvény rendje $\alpha > 0$, ha létezik olyan c valós konstans, hogy $w(F(X)) - w(f(X)) \leq cw(X)^\alpha$ teljesül minden $X \in \mathbb{I}^n$-re, ahol $w(X)$ az X intervallum szélessége, és $f(X)$ az $f(x)$ értékkészlete az X intervallumon. A természetes intervallum-kiterjesztéssel adódó befoglaló függvények elsőrendűek, de kidolgozott a magasabbrendű befoglaló függvények elmélete is. Az egynél szélesebb intervallumokra a természetes intervallum-kiterjesztést, a kisebbekre pedig a magasabbrendű befoglaló függvényeket szokták ajánlani.

A számítógépes megvalósítás során minden intervallum-művelet végrehajtása után a kapott intervallumot módosítani szokás. Az intervallum alsó határát lefelé, felső határát felfelé kell kerekíteni a legközelebbi ábrázolható számra. Ezzel az úgynevezett *kifelé kerekítés*i eljárással el lehet érni, hogy a befoglalási tulajdonság a kerekítési hibák ellenére is fennmaradjon. Ezen a módon számítógéppel automatizálható a garantált megbízhatóságú befoglaló függvények előállítása.

Az intervallum-aritmetikához használatos speciális kerekítéseket az IEEE 754-1985 szabvány biztosítja, ezeket napjaink szinte minden számítógépes processzora támogatja. A hetvenes évek közepétől elérhetők olyan programozási nyelvek, amelyek az INTERVAL adattípus használatát támogatják. Ilyen nyelveken (mint például a C-XSC) még az intervallum-aritmetikát megvalósító szubrutinokat sem kell megírni: a megfelelő befoglaló függvény implementálásához elegendő a függvény kiszámításához használt változók típusát megváltoztatni.

A befoglaló függvényekre támaszkodó numerikus algoritmusok érzékenyek a befoglaló függvény minőségére, pontosságára. A vázolt természetes intervallum-kiterjesztés mellett számos más eljárás is ismert a befoglaló függvények előállítására, például a magasabbrendű deriváltakat is használó ún. középponti alakok, az automatikus deriválásra és monotonitás-vizsgálatra épülő stratégiák a befoglaló függvény javítására, illetve az optimális pontosságú befoglaló függvényt generáló eljárás. Ezek a módosítások természetesen növelik az egy befoglaló függvény kiértékeléséhez szükséges számítások mennyiségét.

Az intervallum-matematikát részletesen tárgyaló jegyzet vagy magyar nyelvű irodalom sajnos még nincs. Angol és német (esetleg orosz) nyelvű bevezető könyveket tudok ajánlani:

- G. Alefeld, J. Herzberger: Einführung in die Intervallrechnung, Bibliographises Institut AG, Mannheim, 1974.
- G. Alefeld, J. Herzberger: Introduction to Interval Computations, Academic Press, New York, 1983.
- H. Ratschek, J. Rokne: Computer Methods for the Range of Functions, Ellis Horwood Ltd., Chichester, 1984.
- S.A. Kalmikov, Yu.I. Sokin, Z.H. Yuldashev: Az intervallum-analízis módszerei (oroszul), Nauka, 1986.
- H. Ratschek, J. Rokne: New Computer Methods for Global Optimization, Ellis Horwood Ltd., Chichester, 1988.
- W. Tucker: Validated Numerics: A Short Introduction to Rigorous Computations, Princeton University Press, 2011.

Egy pozitív példa: A SIAM (Ipari és Alkalmazott Matematikai) Társaság 2002-ben 10 numerikus feladatot tűzött ki[2]. Feladatonként 10 helyes decimális jeggyel 100 dollárt lehetett nyerni. A negyedik megadott feladat a következő függvény minimalizálása volt:

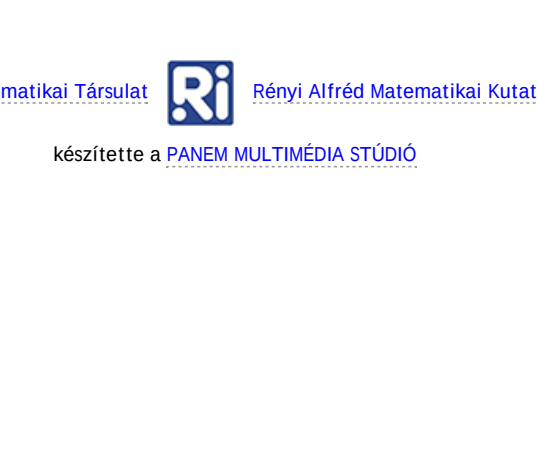
$$\exp(\sin(50x)) + \sin(60e^y) + \sin(70\sin(x)) + \sin(\sin(80y)) - \sin(10(x + y)) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2).$$

A feladat megoldására egy intervallum-aritmetikára alapuló korlátozás és szétválasztás módszert használtunk. A kapott eredmény a $[-10.0, 10.0]$ keresési tartományon a globális minimum értékére a következő alsó- és felső korlátokat adta:

$$[\underline{-3.306868647475}316, \underline{-3.306868647475}196].$$

Az eredményben a kiemelt első 13 jegy matematikai bizonyítóerővel igazoltan helyes. Ehhez mindössze 0.26 másodperc CPU-idő, minimális memóriaigény (75 részintervallum tárolására volt szükség), 1975 célfüggvény-, 1158 gradiens- és 92 Hesse-mátrix kiértékelés kellett.

Az úgynevezett ,,wrapping effect" a differenciálegyenletek megoldását nehezíti, még pontos számítás esetén is a kapott eredmény intervallum mérete nagyon nagy lehet:



Az ábrán azt kell megfigyelni, hogy a jobb szélen lévő négyzet körbeforgatásával a befoglaló intervallumok mérete reménytelenül nő. Ennek az oka a rögzített koordinátarendszerben való intervallumos befoglalás.

Mikor nem kell a megbízhatóság?

- Olyan gyakorlati feladatok esetén, amikor költség vagy haszon jellegű a célfüggvény. Ilyenkor a jó közelítő megoldások elegendők.

- Ilyen H.-P. Schwefel példája: A Siemens megbízásából atomerőművek számára kellett a fűtőelemek helyét meghatároznia úgy, hogy javuljon a hatékonyság. Az evolúciós módszerrel talált megoldás több mint 1%-kal volt jobb, mint a korábban ismert. Bár nem tudja, hogy a talált közelítés akár csak helyileg optimális-e, és azt sem, hogy milyen messze van az optimumtól, a megbízó elégedett volt ($> 10^8$ DEM).

Mikor kell a megbízhatóság?

- Elméleti állítások igazolására mint például a
    - a Kepler-sejtés,
    - a Fekete-feladat,
    - n-dimenziós gömbhöz illeszkedő azonos méretű gömbök száma (kissing number),
    - körpakolási feladatok, vagy:
    - $\min{(a^n + b^n - c^n)}^2 + \sin^2 a\pi + \sin^2 b\pi + \sin^2 c\pi + \sin^2 n\pi$ ahol a, b, c nemnegatív és n nagyobb mint kettő.
- egyes olyan gyakorlati feladatok esetén, ahol a közelítő megoldás ismerete haszontalan (pl. van-e olcsóbb termelés...),
- kritikus alkalmazásokban, mint a műtéti robotok irányítása.

Csendes Tibor

Szegedi Tudományegyetem

Az érdeklődők számára további anyagok:

A Tudomány Határai, Kossuth Rádió, 2016. VIII. 27., 14:32, interjú Bánhelyi Balázzsal, Csendes Tiborral és Krisztin Tiborral.

`http://www.mediaklikk.hu/radio-lejatszo-kossuth/?date=2016-08-27_14:32:00&ch=mr1`

Csendes Tibor: Egy intervallum-aritmetikán alapuló algoritmus a szinthalmazok korlátainak megkeresésére. Alkalmazott Matematikai Lapok 17(1993) 19-40,

`http://real-j.mtak.hu/456/1/ALKMAT_17.pdf`

Csendes Tibor: Közelítő és szimbolikus számítások. Polygon, Szeged, 2007

Csendes Tibor: Számítás garantált pontossággal I., Számábrázolási lehetőségek, Természet Világa 132(2001) 132-134

Csendes Tibor: Számítás garantált pontossággal II., Természet Világa 132(2001) 180-183

Csendes Tibor: Megbízható Számítógépes Eljárások, Szabadegyetemi előadás

https://www.u-szeged.hu/oktatas/megbizhato-szamitogepes/megbizhato-szamitogepes

Pál László és Csendes Tibor: Egy intervallum alapú globális optimalizálási módszer és alkalmazása szenzor lokalizálási feladatra. Alkalmazott Matematikai Lapok 28(2011) 17-39,

http://aml.math.bme.hu/wp-content/uploads/2012/06/28-pal_csendes.pdf

A szerző a Szegedi Tudományegyetem Számítógépes Optimalizálás Tanszéke egyetemi tanára, a fenn megadott cikkek egy része elérhető a http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes/publh.html oldalon is.

Korábbi cikkünk a Moore-díjat elnyert Csendes Tiborról és kollegáiról 2016. decemberében jelent meg az Érintőben:

http://ematlap.hu/index.php/tudomany-tortenet-2016-12/391-szegedi-matematikusok-kaptak-a-moore-dijat

---

Lábjegyzetek

[1] A MATLAB olyan matematikai programcsomag, amelyet eredetileg mátrixokkal végzett műveletek elvégzésére és numerikus számításokra dolgoztak ki. Speciális előnyei a jelfeldogozás és a szabályozás területén adódhatnak. Elsősorban mérnökök körében népszerű.

[2] Nick Trefethen: A Hundred-Dollar, Hundred-digit Challenge. SIAM News 35(2002)

Mi is...?

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Csapodi Csaba 2017. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Szemelvények a magyar matematikai műnyelv történetéből

1. Bevezetés

Mi, matematikatanárok, kényesek vagyunk a szaknyelv használatára. Diákjainktól maximális precizitást várunk el a szakszavak használatában. Ritkán gondolkozunk el azon, hogy miért tapasztalható sokszor ugyanaz a hiba a diákok szóhasználatában, miért tévesztik el mindig, hogy melyik a *nevező* és melyik a *számláló*, miért nem tudják rögtön megmondani, hogy egy síkidom vagy egy görbe *konvex*-e vagy *konkáv*.

És mi, akik ilyen hibátlanok és következetesek vagyunk, nem akadunk fenn azon, hogy az a^2-et úgy olvassuk, hogy *„a négyzet”*, de az a^3-t nem úgy olvassuk, hogy *„a kocka”*. Vagy: ki ne javítaná ki diákja szóhasználatát, amikor az *kockás füzet*-ről beszél, de én még a legszigorúbb kollégát sem hallottam, hogy *négyzetrácsos ing*-et említett volna.

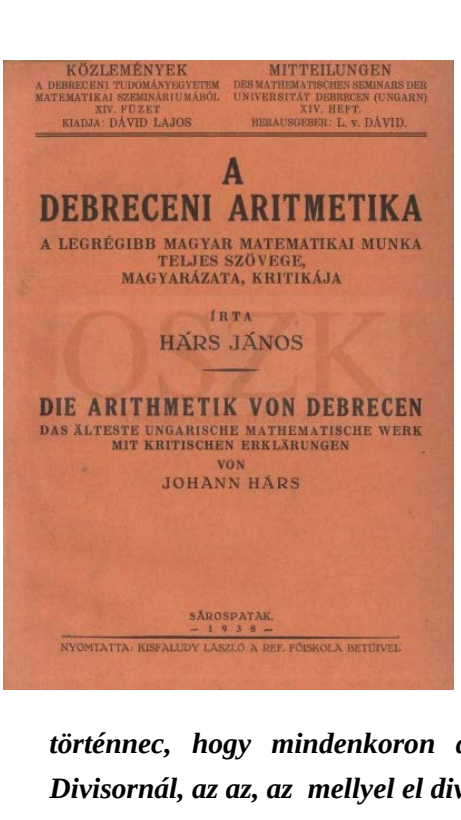
Vannak tehát érdekes jelenségek, érdemes talán egy kicsit körüljárni, hogy az elmúlt évszázadokban hogyan beszéltek tanáraink a matematikáról, milyen szakszavakat használtak, ezek honnan erednek, milyen elvek mentén keletkezhettek.

Ez az írás a magyar matematikai műnyelv kialakulásának rövid áttekintésére vállalkozik, példákon át megmutatva, hogy egy-egy matematikai fogalom elnevezése miként változott az elmúlt évszázadok során.

A munka során a legtöbbször Keresztesi Mária: *A magyar matematikai műnyelv története* című, 1935-ben megjelent munkájára támaszkodtam.

2. A Debreceni Aritmetika (1577)

(A kép forrása, ahol a teljes mű is olvasható: http://mek.oszk.hu/14700/14761/14761.pdf)



KÖZLEMÉNYEK A DEBRECENI TUDOMÁNYEGYETEM MATEMATIKAI SZEMINÁRIUMÁBÓL XIV. FÜZET KIADJA: DÁVID LAJOS
MITTEILUNGEN DES MATHEMATISCHEN SEMINARS DER UNIVERSITÄT DEBRECEN (UNGARN) XIV. HEFT HERAUSGEBER: L. v. DÁVID
A DEBRECENI ARITMETIKA
A LEGRÉGIBB MAGYAR MATEMATIKAI MUNKA TELJES SZÖVEGE, MAGYARÁZATA, KRITIKÁJA
ÍRTA HARS JÁNOS
DIE ARITHMETIK VON DEBRECEN
DAS ÄLTESTE UNGARISCHE MATHEMATISCHE WERK MIT KRITISCHEN ERKLÄRUNGEN VON JOHANN HARS
SÁROSPATAK. 1936.
NYOMTATTA: KISFALUDY LÁSZLÓ A REF. FŐISKOLA BETŰIVEL

Tudjuk, hogy Magyarországon az oktatásban sokáig a latin nyelv volt az egyeduralkodó, melyen a reformáció XVI. századi megjelenése változtatott. Az első magyar nyelven kiadott aritmetika, vagyis számtankönyv 1577-ben jelent meg Debrecenben, amely címe szerint fordítás, de az eredetivel egybevetve kiderül, hogy jelentős részben önálló munka. Ismeretlen szerzője elsősorban még latin terminológiát használ, de tudatos magyarításra is törekszik. Az osztásról például így ír:

> ***Az divisio oll’ species, mellyen egy számot részekre ossthacz. De ebben illy számoc történnec, hogy mindenkoron az sommánac nagyobbnac kell lenni az Divisornál, az az, az mellyel el dividalod. Mintha valaki mondana: 25 forintot ossd el hat embernec, ez annit tésſön mint ha azt mondana, hogy az 25 forintot vagdald hat felé: az felsö ssámot penig az Deac uraim mind Dividendusnac hijác, az az elosstandonac, mell’ ssámot ssüksegös keppen el kell osstani. Az másikat penig tsac Divisornac hijac, mellyet magyarul elosstanac hivunc, az mellyel valamit elosstunc.***

Ez az úgynevezett Debreceni Aritmetika nem tárgyalja a korának tankönyveiben gyakran szereplő társasági szabályt, amellyel ki lehet számolni egy vállalkozásba különböző tőkével beszállók haszonrészesedését. Ennek indoklásául a szerző a következőt írja:

> ***Magyar országban ennec a regulanac igön nagy haszna nintsen, mert a Magyaroc igön kemény nyakuac és egyaránt az fizetést restellic.***

Debrecen élénk kereskedelmi életét tükröző feladatokat viszont találunk benne:

> ***Mass fél sing posztot veszöc ötuen pénzen, vallyon negyed fél singöt högy vehetöc?***

A szerző az olvasó motiválására is törekszik:

> ***Azért valamelly ember számlálni nem tud, nem különbez az oktalan állattul.***

A Debreceni Aritmetika 1591-ben megjelent második, átdolgozott kiadása már használ egy korábban nem szereplő kifejezést a törtekre:

> ***Az Fractio és részre való szegdelés, semmi nem egyéb hanem az egésznec részei és darabyi. Az Fractio és szegdelt szám kiváltképpen származik az Divisioból, mikoron maradéc történic lenni.***

3. Apáczai Csere János (1625-1659)

(A kép forrása: http://www.sk-szeged.hu/statikus_html/kiallitas/honapkonyve/apaczai/apaczai.htm)

A következő száz év nem sok fejlődést hozott a matematikai szaknyelv kialakulása terén. A XVII. század irodalmi termékei közül Apáczai Csere János *Magyar Encyclopedia* című műve emelkedik ki 1653-ból. Ennek negyedik része *„A dolgok megszámlálásáról”* (aritmetika), ötödik része *„A mennyiségek megméréséről”* (geometria) szól. Ez utóbbi egyben az első magyar nyelvű geometria.

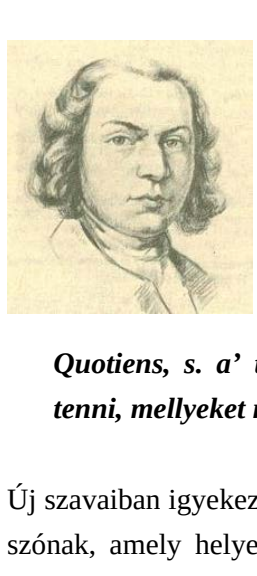
Néhány Apáczai által először használt matematikai műszó: *azonosság, egyenes, szög, test, sík, egynemű, középpont*. Néhány azóta már nem használt kifejezés: *fellyül rész szerint való* (számláló), *megtöbbíteni* (szorozni), *rá menő* (függőleges), *hegyes gömbölyeg* (kúp), *lángszabású* (gúla).

Hogy nyelvezetéről helyes képet kapjunk, lássunk az Encyclopediából néhány részt a testekről:

> ***A test széles és magas vonásból álló dolog, azon értelemmel mondatik temérdek dolognak is. A temérdek határa a szén (superficies). Tengelye pedig az az által mérő, mely körül forgattatik, melynek végei tengely végeknek mondatnak. Igyenes temérdek dolog az, a melynek tengelye a fenék közepére igyenesen menő: a meg hanyatlot ellenbe…A temérdek sima vagy görbe…A sima temérdek lángszabású avagy lángszabásúból való. A lángszabású (pyramis) az igyenesvonású fenéktől fogva háromszegletekkel megtetéztetett sima temérdek. Annak okáért a lángszabásúnak síkjai a feneken való szegeleteknél eggyel többek…A négysíkú (tethraedrum) négy rendes egyenlő háromszegletektől béfoglaltatott rendes lángszabású forma.***

4. Maróthi György (1715-1744)

(A kép forrása: https://hu.wikipedia.org/wiki/Mar%C3%B3thi_Gy%C3%B6rgy)



Maróthi György debreceni professzor *Arithmetica* című munkája az első igazi iskolai tankönyv, melyben a szerző nagyon sok ma is használt szakszót alkotott. Tudatosan törekedett a latin szavak magyarítására:

> ***Minthogy még eddig a’ Deákság nélkül való Tanulóknak nagy bajt szereztek a’ Deák nevek, mint Additio, Subtractio, Quotiens, s. a’ t. én hasznosnak itéltem mind azok helyett Magyar szókat tenni, mellyeket még az Aszszony-nép is megérthessen.***

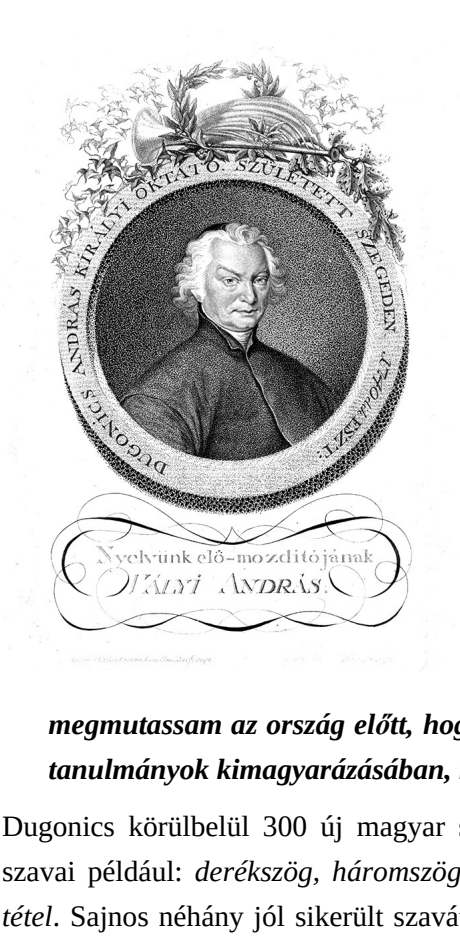
Új szavaiban igyekezett, hogy megmaradjon a nyoma, sőt a formája is annak a latin szónak, amely helyett használja. Pl. *fractio*: törtszám, *multiplicare*: sokszorozni. Emiatt gyakran végez szófordítást, de ahol más szót alkalmasabbnak tart, ott azt használja.

> ***A Fractiókban, hogy a felső számot Numeratornak, az alsót pedig Denominatornak hívják, annak ugyan van valami haszna. De mivel gyakorta abban is megakadhat a gyenge számvető, hogy a felsőt hívják-é Numeratornak, vagy az alsót? Én jobbnak gondoltam, ha az egyiket Felsőnek, másikat Alsónak nevezzük: mert így nem lehet tévedés benne.***

Maróthi Györgytől eredő, máig használt matematikai műszavaink: *számlálás, összeadás, kivonás, osztás, osztó, maradék, kerület, sokszorozás* (ebből lett a *szorzás*).

5. Dugonics András (1740-1818)

(A kép forrása: https://hu.wikipedia.org/wiki/Dugonics_Andr%C3%A1s)



A magyar matematikai nyelv a legtöbbet talán Dugonics András, szegedi piarista szerzetes, egyetemi tanár 1784-ben megjelent *Tudákosság* című munkájának köszönheti. Dugonics II. József németesítő politikája elleni tiltakozásul írta meg négykötetes művét gyönyörű magyarsággal. Feljegyzéseiben ezt olvashatjuk erről:

> ***A császár megparancsolta, hogy a deák és magyar nyelvet abbahagyván csupán németül taníttassanak a magyar gyerekek… Én ez igyekezetének ellene állván, csak azért is az algebrát és a geometriát magyar nyelven kiadtam, hogy megmutassam az ország előtt, hogy a német nyelv soha sem oly alkalmatos a tanulmányok kimagyarázásában, mint a magyar nyelv.***

Dugonics körülbelül 300 új magyar szót alkotott könyvében. Ma is használatos szavai például: *derékszög, háromszög, kör, végtelen, lap, egyenlet, gömb, hasáb, tétel*. Sajnos néhány jól sikerült szavát később kevésbé szerencséssel váltották fel, így például az *eliminare* helyett bevezetett *kiiktatni*t később kiszorította a nehézkesebb *kiküszöbölni*.

Dugonics Tudákosságának kötetei egységes egészet alkotnak, egymásra épülnek. Nemcsak feladatok és megoldások találhatók benne, hanem tételek (*vételek*), bizonyítások (*vittatások*), definíciók (*magyarázatok*), axiómák (*tudtomok*) és posztulátumok (*kéremények*) is. Ebből is látható, hogy kevesebb idegen szót használt, mint mi ma. A bevezetőben a szerző leírja gondolatait „a Tudákosság tanulásának módgyáról” e szavakkal:

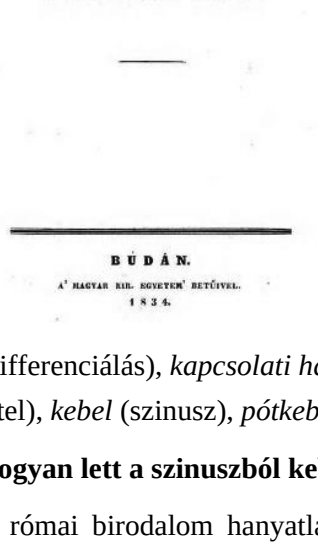
> ***E könyvemnek elejéről utóllyára, osztán közepére senki se hágdicsállyon: hanem, amint írva vagyon, a rend szerint lépdegellyen.***

Algebrájában a kornak megfelelő felfogásban ír a negatív számból vont négyzetgyökről (*vak-gyök*) és az irracionális gyökről (*veszett gyök*). Ez utóbbiról a következőképpen:

> ***A veszett gyök az, mellyet csak a számba fel nem találhatni, hanem hozzája vég nélkül lehet közelíteni. Például:*** $\sqrt{5}$ ***, mert egy bizonyos szám sincs, melly maga-magát sokszorozván e kart adná.***

6. A Mathematikai Műszótár (1834)

(A kép forrása: http://old.mta.hu/mta_hirei/lattsag-es-torott-szam-mathematikai-muszotar-az-akademia-hoskorabol-135646/)



MATHEMATIKAI
MŰSZÓTÁR.
KÖZRE BOCSÁTJA
A’ MAGYAR TUDÓS TÁRSASÁG.
BUDÁN.
A’ MAGYAR KIR. EGYETEM’ BETŰIVEL.
1834.

A XIX. század első felében, mikor irodalmi nyelvünk már fejlett, matematikai műnyelvünk még a változás korát éli. Az újonnan és másféleképen alkotott szavak özöne lehetetlenné teszi az egységes szóhasználatot. Ezen akart változtatni a tényleges működést 1830-ban megkezdő Magyar Tudományos Akadémia, mikor 1834-ben Mathematikai Műszótárt adott ki. A szótár Apáczai és Dugonics szellemében a magyar matematikai szaknyelv egységesítését, megteremtését volt hivatott szolgálni. A mindenáron való magyarosításnak voltak azonban túlzásai is. Például: *külzeléki hánylás* (differenciálás), *kapcsolati hánylat* (kombinatorika), *kétszaki oktatmány* (binomiális tétel), *kebel* (szinusz), *pótkebel* (koszinusz), *visszás pótkebel* (arkusz koszinusz).

Hogyan lett a szinuszból kebel?

A római birodalom hanyatlásával a matematika fejlődésének súlypontja Indiába tevődött át. E korszaknak az első írásos emlékei a matematikatörténeti szempontból igen fontos könyvek, a*Sziddhánták*. Időrendben az első a*Szúrja Sziddhánta*(A Nap rendszere),amelyet a hagyományok szerint maga*Szúrja*, a napisten írt. Ebben olvashatunk először a szinusz szögfüggvényről a mai értelemben. A*Szúrja Sziddhánta*húrtáblázata a középponti szög feléhez rendeli hozzá a középponti szög húrjának a felét. A *szinusz* szó maga is a hindu *jiva* (húr) szó hibás fordításából ered. Az arab fordító ezt a szót *jiba*-nak vette át. Az arab írás azonban a magánhangzókat nem tünteti fel, s az arabról latinra fordító *jaib*-nak olvasta azt, aminek jelentése öböl, s ezt a latin szinusz szóval helyettesítette, aminek jelentése öböl, öl, kebel. Így történhetett, hogy a magyarosítás korában a *szinusz* szóból *kebel* lett, a *koszinuszból* pedig *pótkebel* a*Kazinczy*korabeli diákok nagy örömére.

A XIX. század közepére majdnem teljesen kialakul az elemi matematika egységes szókincse. A felső matematika legfontosabb nyelvújítója **Győry Sándor** (1795-1870) volt, az első magyar nyelvű analízis könyv szerzője. Matematikai műnyelvünknek az analízis az a területe, amelyben a legfurcsább képzett műszavakat találjuk. Győry közhasználatba átment szavai közül a legismertebbek: *függvény, határérték, középérték, hatványkitevő, gyökkitevő*.

Érdekességképpen említem meg **Brassai Sámuel** nevét, aki a régi hagyományok híve volt. Ő még 1837-ben is kifogásolja a törtszám elnevezést „mintha bizony egy számot el lehetne törni.” Szerinte helyesebb az *osztalom* elnevezés. Ő maga leginkább régi írók szavait használja, ezért fordul elő műveiben igen sok elavult szó. Különösen Euklidesz Elemek című művének fordításában találunk nála ilyen szavakat: *buta szeglet* (tompaszög), *gerend* (hasáb), *görü* (henger), *teke* (gömb).

7. A XIX-XX. század fordulója

Keresztesi Mária 1935-ben ezt írja: „Műnyelvünk megállapításában valami egységes elv föltétlen érvényesítése lehetetlennek bizonyult.” A reformáció korában arra törekedtek, hogy minden előforduló kifejezést magyarosítani kell. Így egyesek a görög-latin műszavakat szó szerint lefordították. Ilyen például a máig használt kitevő (*exponens*), aminek egyesek szerint „ki kell tenni a szűrét”. Ma már nem használjuk a szintén így keletkező *összrendező* (koordináta) szót.

Mások a népnyelv megfelelő szavait kezdték, mint műszót használni. A matematikai műnyelvre azonban kisebb hatással volt a nép, mint pl. a természettudományi műnyelvre. Vita alakult ki arról például, hogy a *kör* vagy inkább a *karika*, illetve a *sugár* vagy inkább a *küllő* használata helyes-e. Volt, aki szerint a *karika* és a *küllő* jobban kifejezi e fogalmak jelentését, arról nem beszélve, hogy a *sugár* hétköznapi értelemben sokkal inkább jelöl félegyenest, mint szakaszt.

Többen ekkoriban még szívesen idézték fel régi matematikusok szavait is, mások pedig új szavak alkotásával próbálkoztak, mely kísérletek rendre kudarcot vallottak.

A századfordulóra kezdett egységesen elfogadott válni a *Nyelvőr* című lapoldalain ekkoriban olvasható vélemény **Császár Károlytól**:

> ***…ha van közkeletű szónk, melynek képzése kifogás alá nem eshetik, azt használom: ellenben a kétes jellegű szók helyett inkább a tudományos kifejezéssel élek, mert evvel kevesebbet rontunk nyelvünk tisztaságán, mint az afféle egyközény, dülénnyed stb. értelmetlenségekkel.***
>
> *egyközény* – paralelogramma, *dülénnyed* – rombusz, trapéz

A fenti véleménnyel egyre többen értettek egyet, így általánossá vált az a vélekedés, hogy kisebb baj idegen kifejezéseket, mint közkeletű, de rossz magyar szavakat használni.

Ezen irányvonal megkoronázója **Kőnig Gyula** volt, aki belátta a teljes magyarosítás lehetetlenségét. Átvette és végződés, helyesírás szempontjából a magyar nyelvbe illesztette a nemzetközileg elfogadott szakkifejezéseket. Így lett nála a *permutatioból* először *cserélet*, majd *permutáció, coordinátából összrendező* majd *koordináta* stb.

8. Befejezés

A XX. században gyakorlatilag megszűnt a műszavak tömeges gyártása. Tekintsük át, hogy milyen tulajdonságok mentén lehet jellemezni egy adott matematikai műszót:

a) **szabatosság**, vagyis a szó mennyire ragadja meg a fogalom lényegét. Egy matematikai (és általában tudományos) fogalom megnevezésére használt szó akkor jó, ha magának a szónak, vagy annak, amiből származik, a köznyelvi jelentése olyan, ami az új fogalom irányába tereli a gondolkodást. Jó példának tekinthető ilyen szempontból a *háromszög*, vagy a korábban szintén használatos *három-oldal* kifejezés. A magyar nyelvben jelentéssel nem bíró idegen szavak eleinte gyakran váltanak ki ellenérzést az általuk jelölt fogalommal kapcsolatban. A *hatvány, gyök* és *logaritmus* szavak egyike sem tartozik a jól sikerült szavak közé, hiszen nem segítik a közvetlen asszociációt a jelölt fogalom felé. Természetesen az idegen kifejezés megtartása még mindig jobb megoldás, mint az olyan magyarítás, amely rossz irányba viszi a gondolkodást (például a *kebel*).

b) **magyarosság**, vagyis legyen nyelvileg helyes és tiszta. Mindkettő kritérium alól engedményeket tehetünk. A helyesség ellenére sok ma is használt szóról elmondatjuk: „haragudhatunk, hogy lettek, de örüljünk, hogy vannak.” Ilyenek például: *felület, kitevő, együttható*. Más esetekben pedig a tisztaság sérül, hiszen „hiábavaló fáradtság mind kiirtani az idegen szavakat.” Így nyugszunk bele az *abszcisszába* a *külke*, a *koordinátába* az *összrendező*, a *differenciálszámításba* a *külzelés-számítás* vagy a *logaritmusba* a *szorszámfejtés* helyett.

c) **hajlékonyság**, azaz legyen a jó műszó könnyen ragozható, továbbképezhető. Erre jó példa az *összeg* szavunk, rossz példa viszont a *differenciálásra* használt *növetizkép* és a belőle származó *egynövetizképezni* próbálkozás.

d) **egyöntetűség**, vagyis egymással összefüggő fogalmak elnevezései tükrözzék vissza az összefüggést. Így például a XX. század elején már használt *félsík* és *féltér* szavak mellé később került bevezetésre a *félegyenes* elnevezés, amit korábban a *sugár* szóval jelöltek (ld. napsugár, lézersugár).

Csapodi Csaba, ELTE TTK, Matematikai Intézet,

Matematikatanítási és Módszertani Központ

Irodalom

Keresztesi Mária: *A magyar matematikai műnyelv története*. Debrecen: Dávid Lajos, 1935.

Akit érdekel a téma, a következő linken sok matematikai kifejezés korábbi változatait találja meg:

http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/rovatok/hidverok/keresztesi.html#a-kotet-irodalomjegyzeke

matematikatörténet

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

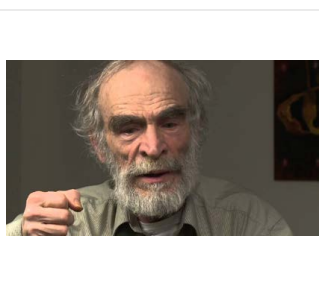
Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Simon Donaldson 2017. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is ... egy pszeudo-holomorf görbe?



A pszeudo-holomorf (vagy J-holomorf) görbe fogalmát Gromov vezette be 1986-ban, amivel gyökeresen alakította át a szimplektikus topológiát, és több más közeli diszciplínára, például algebrai geometriára, húrelméletre, 4-sokaságok elméletére volt döntő hatással; ezekre később még visszatérünk.

A „görbe” – mondjuk egy síkgörbe – mindannyiunk számára ismerős fogalom. Két módon is megadhatunk egy síkgörbét: akár mint az $f(x,y)=0$ egyenlet megoldáshalmazát valamilyen f függvényre, akár az $x=x(t), y=y(t)$ paraméterezéssel. A körvonalat például megadhatjuk az $x^2+y^2=1$ egyenlettel vagy az $x=\cos t, y=\sin t$ paraméterezéssel. Egy további ismerős fogalom görbék egy „családja”, például a sík összes egyeneseinek családja.

Görbéket mind a differenciálgeometriában, mind az algebrai geometriában hosszú ideje tanulmányoznak. A klasszikus elmélet számunkra most érdekes változata a „komplex” vagy „holomorf” görbék elmélete. Legegyszerűbb változatában helyettesítsük az x, y valós változókat a z, w komplex változókkal; így egy komplex görbét kapunk a komplex síkon. A $z^2+w^2=1$ egyenlet például egy komplex görbét ad meg. Hasonlóan, tekinthetünk paraméterezett komplex görbéket, melyeket a $z=z(\tau), w=w(\tau)$ egyenletek adnak meg, ahol $z(\tau)$ és $w(\tau)$ holomorf függvényei a τ komplex változónak. Általánosabban, komplex sokaságokban is tekinthetünk komplex görbéket, melyeket Riemann-sokaságokon értelmezett holomorf függvények parametrizálnak.

De mi is egy holomorf leképezés? Vegyük először a legegyszerűbb esetet, amikor az f leképezés $\mathbf{C}$-ből $\mathbf{C}$-be képez: ekkor egyszerűen egy holomorf függvény. A holomorf tulajdonságot a Cauchy-Riemann egyenlet teljesülése jelenti, vagyis hogy

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0.$$

Az egyenlet azt fejezi ki, hogy az f deriváltja (többváltozós függvénytani értelmében) minden pontban egy $\mathbf{C}$-ből $\mathbf{C}$-be vezető komplex lineáris leképezés. A fogalom természetesen terjed ki majdnem-komplex sokaságokra is. Legyen tehát M egy $2n$-dimenziós differenciálható (vagy más néven sima) sokaság. Egy M-en értelmezett majdnem-komplex struktúra egy $J_x\colon T_xM \to T_xM$ leképezés-család mely minden $x \in M$ pontra a T_xM érintőtéren teljesíti a $J_x^2=-1$ egyenletet, és $x \in M$-től differenciálható módon függ. Röviden, J az érintőtereket komplex vektorterekké teszi. Minden komplex sokaságon van egy természetes majdnem-komplex struktúra, de a megfordított állítás már nem igaz $n>1$ esetén: egy integrálhatósági feltétel karakterizálja azokat a speciális majdnem-komplex struktúrákat, melyek komplex struktúrából származnak. Számos olyan sokaság létezik, melyen ugyan van majdnem-komplex struktúra, de egyáltalán nem látható el komplex struktúrával.

A pszeudo-holomorf görbe fogalma a holomorf görbe természetes módosítása arra az esetre, amikor a bennfoglaló sokaság csak majdnem-komplex. Pontosabban, vegyünk egy Σ Riemann-felületet, egy (M,J) majdnem-komplex sokaságot és egy $f\colon \Sigma \to M$ differenciálható leképezést melyre minden $\sigma \in \Sigma$ esetén teljesül, hogy a

$$df_\sigma\colon T_\sigma\Sigma \to T_{f(\sigma)}M$$

derivált leképezés komplex lineáris az adott komplex struktúrákkal az érintőtereken. Konkrétan, tekintsük a $\Sigma=\mathbf{C}$, $M=\mathbf{C}^n$ és ezen egy J általános majdnem-komplex struktúra esetét. Lineáris algebrai érveléssel látható, hogy az $\mathbf{R}$-lineáris $J\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ leképezések melyek a $J^2=-1$ egyenletet is teljesítik, az $n \times n$-es komplex mátrixok (melyeket $\mu=(\mu_{\alpha\beta})$-val jelölünk) egy nyílt részhalmazát alkotják. A majdnem-komplex struktúra tehát egy $\mu(z)$ ($z \in \mathbf{C}^n$) mátrix-értékű függvénnyel írható le. Egy pszeudo-holomorf görbe a következő parciális differenciálegyenlet megoldásaként adható meg:

$$\frac{\partial z_\alpha}{\partial \overline{\tau}}+\sum_\beta \mu_{\alpha\beta}(\underline{z})\overline{\frac{\partial z_\beta}{\partial \tau}}=0,$$

az egyenlet a szokásos Cauchy-Riemann egyenlet deformációjának tekinthető a $\underline{z}(\tau)=(z_\alpha(\tau))$ vektorértékű függvényre.

Azzal, hogy majdnem-komplex struktúrákat tekintünk, a klasszikus holomorf görbe-elméletnél szélesebb és rugalmasabb világban találjuk magunkat. A klasszikus elmélet számos vetülete nem nagyon változik, amennyiben ilyen irányba terjesztjük azt ki. Röviden azt mondhatjuk, hogy *a pszeudo-holomorf görbék lokális elmélete nagyon hasonlít a holomorf görbék elméletéhez.* Ebben a kontextusban a lokálisnak két értelmezése is lehetséges: akár úgy, hogy a problémát lokálisan vizsgáljuk az M sokaságban vagy lokálisan a leképezések terében. Fontos kiemelni, hogy görbéket vizsgálunk és nem magasabb dimenziós objektumokat. Ugyan bármely N, M majdnem-komplex sokaság-párra értelmezhető egy $f\colon N \to M$ leképezés (pszeudo-)holomorfsága, de amint N valós dimenziója több mint 2, ez nem túl hasznos fogalom. Egy általános majdnem-komplex N sokaság esetén, melynek dimenziója több mint 2, például még lokálisan sem létezik nem-konstans (pszeudo)holomorf leképezés M-be – épp ez az integrálhatósági feltétel forrása komplex sokaságokra.

Állításunk egy pontosabb megfogalmazása a következő: egy Σ kompakt Riemann-sokaság esetén egy adott $f\colon \Sigma \to (M,J)$ pszeudo-holomorf görbe deformációinak elméletét egy nem-lineáris Fredholm-elmélet írja le. Ez nagyjából azt jelenti, hogy a deformációkat egy véges dimenziós sokaság, egy $\mathcal{M}$ modulustér paraméterezi, melynek dimenzióját topologikus adatokból lehet kiszámolni. Továbbá ez a modulustér simán változik mind a J majdnem-komplex struktúra mind a Σ-n rögzített Riemann-sokaság struktúra függvényeként. Vegyük például azt az esetet, amikor M a komplex projektív tér (annak standard komplex struktúrájával), Σ pedig a Riemann-gömb. Ekkor minden M-beli „egyenes” (a szó projektív geometriai értelmében) valamint egy egyenes minden paraméterezése egy pszeudo-holomorf görbét ad. Következésképp az $\mathcal{M}$ modulustér a duális sík felett egy $PGL(2,\mathbf{C})$-fibrumú nyaláb (a $PGL(2,\mathbf{C})$ csoport a Möbius-leképezések csoportja). A nem-lineáris Fredholm-elmélet azt mutatja, hogy ha deformáljuk a majdnem-komplex struktúrát, akkor ugyan valószínűleg nem tudjuk majd a pszeudo-holomorf görbéket expliciten leírni, de hasonló általános tulajdonságokkal rendelkező modulusteret kapunk.

Gromov észrevétele az volt, hogy a Fredholm elmélet által a pszeudo-holomorf leképezésekről adott lokális kép egy globális képpé alakítható, feltéve hogy M majdnem-komplex struktúrája egy szimplektikus struktúrával kompatibilis. Emlékézzünk, hogy egy szimplektikus struktúrát egy olyan ω külső 2-forma ad meg, mely két feltételt teljesít. Az első feltétel pontonkénti és algebrai: a sokaság minden pontjában ω egy nem-elfajuló anti-szimmetrikus forma M abban a pontban vett érintőterén. A másik feltétel globálisabb és differenciálgeometriai: az ω 2-forma zárt. Akkor mondjuk, hogy J kompatibilis ω-val, ha az érintővektorokon értelmezett

$$g(v,w)=\omega(v,Jw)$$

bilineáris forma szimmetrikus és pozitív definit. Ebben az esetben g egy M-en értelezett Riemann metrika lesz. Legyen $f\colon \Sigma \to M$ egy pszeudo-holomorf leképezés. Az

$$I=\int_\Sigma f^*(\omega)$$

integrálra ekkor kétféleképp is gondolhatunk. Egyrészt, a pontonkénti kompatibilitás miatt I lényegében az f képének területe, melyet a g metrika segítségével mérünk. Másrészt viszont, mivel ω zárt forma, az I mennyiség az f leképezés topologikus (homotopikus) invariánsa. Következésképp ebben az esetben pszeudo-holomorf görbék területe egy egyszerű topologikus adattal határozható meg. Ezt a tulajdonságot használva Gromov egy részleges kompaktsági tulajdonságot tudott bizonyítani a modulusterekre. Vegyük például a Riemann gömbről a komplex projektív síkba mutató leképezéseket. Ha megengedjük, hogy a majdnem-komplex struktúrát tetszőleges mértékben és tetszőleges irányban deformáljuk, akkor nem sokat tudunk mondani, hiszen a pszeudo-holomorf görbék nagyon bonyolult módokon degenerálódhatnak ahogy a majdnem-komplex struktúrát deformájuk, és a leképezések akár el is „tűnhetnek”. De ha csak olyan majdnem-komplex struktúrákat engedünk meg, melyek egy szimplektikus formával kompatibilisek, akkor a görbék nem tudnak degenerálódni, mert területüket kontrollálni tudjuk. Ebben az esetben Gromov valójában megmutatta, hogy a görbéknek meg kell maradniuk, akármilyen nagy deformációt is alkalmazunk.

E két tulajdonság – a Fredholm elmélet és a kompaktság – adja Gromov elméletének alapjait, mely keretében pszeudo-holomorf görbéket használunk szimplektikus topológiai kérdések megválaszolására. Ezeket a görbéket két alapvető módon használhatjuk. Az első megközelítésben mint geometrikus ‚szondákat’, melyekkel felderíthető a szimplektikus sokaság: például Gromov egy eredménye szerint (melyet később Taubes terjesztett ki) a komplex projektív síkon egyetlen szimplektikus struktúra létezik, melyet úgy lehet belátni, hogy a sokaságot végigseperjük „egyenesekkel” (vagyis olyan pszeudo-holomorf görbékkel, melyeknek ugyanolyan topologikus tulajdonságaik vannak, mint az egyeneseknek a standard esetben). A második megközelítésben a görbék numerikus invariánsok forrásai: ezek az úgynevezett *Gromov-Witten invariánsok.* A legegyszerűbb esetben, amikor a modulustér 0-dimenziós és véges sok pontból áll, egy egész értékű invariánst kapunk pusztán ezen pontok megszámolásával. E második irány fejlődött legdinamikusabban Gromov cikkének megjelenése után. A *Floer homológiák* elmélete is hasonló alapokon nyugszik; ebben az esetben olyan pszeudo-holomorf görbéket kell számolni, melyek pereme egy rögzített Lagrange féle részsokaságra képződik. Ez az elmélet vezet el a *Fukaya kategória* fogalmához. A négydimenziós esetben Taubes felfedezte, hogy a Gromov-Witten invariánsok megegyeznek a Seiberg-Witten invariánsokkal, melyeket teljesen más módon definiálhatunk. Abban az esetben, amikor a sokaság valójában komplex, mondjuk egy algebrai varietás, az invariánsok az algebrai geometria klasszikus leszámlálási kérdéseihez kapcsolódnak. Ugyanezen invariánsok, a Feynman integrálokon keresztül, feltűnnek a topologikus húrelméletben is. Ez a megközelítés teljesen új látásmódot, és csodálatos és érzékeny algebrai struktúrákat, *kvantum kohomológiákat* eredményezett. A sokaság Fukaya kategóriája pedig, Kontsevich munkája nyomán, a *tükörszimmetria* jelenségéhez is szorosan kapcsolódik.

Irodalom:

Dusa McDuff és Dietmar Salamon, J*-holomorphic Curves and Symplectic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 52, 2004.

Simon Donaldson az Imperial College (London) Royal Society Research professzora. A cikk eredetileg az American Mathematical Society *Notices* folyóiratának 2005. októberi számában jelent meg a *What is …?* rovatban. Ez a fordítás a szerző és az AMS engedélyével jelenik meg. A fordítást *Stipsicz András* készítette.

Simon K. Donaldson, “What is…a Pseudoholomorphic Curve?” *Notices Amer. Math. Soc.*, 52 (October 2005) 1026-1027. © 2005 American Mathematical Society.

A cikk bevezető ábráján látható pszeudo-holomorf görbe lelőhelye: https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/SFT/

Mi is...? AMS

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Harcos Gergely 2017. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is ... egy Maass-forma?

A Maass-formák – vagy általánosabban az automorf formák – harmonikus hullámok, amelyek speciális szimmetriákkal rendelkeznek. A hullámok hagyományosan a fizikusokat érdeklik, de mivel a szóban forgó szimmetriák az egész számokból származnak, ezért a Maass-formákat elsősorban a számelmélészek kutatják. Kevésbé nyilvánvaló, hogy a Maass-formák nagyon hasznosak az egész számok megértésében, de a matematika egyéb területein is, pl. a matematikai fizikában. A segítségükkel mély összefüggéseket sikerült feltárni és nehéz kérdéseket sikerült megválaszolni. A matematika több híres megoldatlan problémája – pl. a Ramanujan-Selberg-sejtés, a Langlands-program, vagy az általános Riemann-sejtés – hozható kapcsolatba a Maass-formákkal.

A Maass-formákat Hans Maass fedezte fel 1946-ban meglehetősen indirekt módon, számelméleti L-függvényeken keresztül. A legegyszerűbb L-függvény a Riemann-féle zeta-függvény, amit az 1-nél nagyobb valós részű komplex számokon a

$$\zeta(s)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}=\prod_{p\text{ prím}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Dirichlet-sor, illetve Euler-szorzat definiál. A klasszikus gamma-függvénnyel kiegészített

$$Z(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

teljes zeta-függvény holomorfan kiterjed a $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ pontozott komplex számsíkra, ahol kielégíti a $Z(s)=Z(1-s)$ függvényegyenletet. Ennek a függvénynek a segítségével jól becsülhető a prímek száma egy adott korlátig, és az ilyen irányú vizsgálatok vezethették Riemannt a híres sejtésének megfogalmazásához: ha $Z(s)=0$, akkor s valós része $1/2$. Az általánosabb, ún. d-ed fokú L-függvények Dirichlet-sorában az együtthatókat nem a konstans 1 függvény adja meg, hanem egy általánosabb multiplikatív függvény; az Euler-szorzatban a p prímhez nem az $1-p^{-s}$ tényező tartozik, hanem a p^{-s} egy legfeljebb d-ed fokú polinomja (amelyben az együtthatók csak a p-től függnek és a konstans tag mindig 1); a teljes L-függvényben szereplő extra tényező pedig nem a $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, hanem ennek d darab eltolt példánya. A függvényegyenlet az $N^{s/2}Z(s)=\kappa N^{(1-s)/2}\overline{Z(1-\overline{s})}$ alakot ölti, ahol $|\kappa|=1$ és N egy pozitív egész (aminek prímosztóihoz tartoznak a d-nél kisebb fokú Euler-tényezők). Persze csak nagyon speciális multiplikatív függvény Dirichlet-sora rendelkezhet ilyen szép tulajdonságokkal, és ma már úgy gondoljuk, hogy minden ilyen függvény automorf eredetű.

A prímszámok finomabb eloszlása motiválja az általánosabb L-függvények bevezetését. Pl. ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy adott korlátig hány prímszám ad 1, illetve 3 maradékot 4-gyel osztva, akkor a $\zeta(s)$ mellett azt a Dirichlet-sort célszerű vizsgálni, amelyben az együtthatók 4-esével ismétlődve rendre az $1,0,-1,0$ értékek (mindkét L-függvény foka $d=1$). Ily módon kiderül, hogy a kétféle maradék nagyjából egyenletesen oszlik el a prímek között. Továbbmenve, az 1 maradékot adó prímszámok egyértelműen előállnak két négyzetszám összegeként, és ha arra vagyunk kíváncsiak, a két négyzetszám hányadosa az esetek hányad részében esik mondjuk 0.89 és 1.07 közé, akkor a $\mathbb{Q}(i)$ komplex másodfokú számtest bizonyos Hecke L-függvényeit célszerű vizsgálni (amelyek foka $d=2$). Ez utóbbi L-függvényeket Hecke 1936-ban az akkoriban már jól ismert moduláris formákhoz tudta kapcsolni: megmutatta, hogy a Dirichlet-együtthatók megegyeznek egy alkalmas moduláris forma Hecke-sajátértékeivel. Maass 10 évvel később felismerte, hogy hasonló leírás létezik a valós másodfokú számtestek – mint pl. a $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ – Hecke L-függvényeire is, csak az ő esetükben moduláris formák helyett Maass-formákat kell tekinteni.

Mi is tehát egy Maass-forma? A Bolyai-féle hiperbolikus síkgeometria egyik ismert modellje a komplex számsík valós tengely feletti félsíkja. Ebben a modellben az egyenesek a valós tengelyt merőlegesen metsző egyenesek és félkörök. Az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ csoport minden eleme meghatároz egy irányítástartó egybevágóságot az alábbi törtlineáris hatással:

$$z\mapsto\frac{az+b}{cz+d},\qquad\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Valójában minden irányítástartó egybevágóságot megkapunk így. Tekintsük most az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ egy aritmetikus részcsoportját, példának okáért az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-t. Maass-formán (pontosabban 1 szintű és 0 súlyú Maass-formán) a $\mathscr{H}$ felső félsík olyan korlátos (de nem konstans) függvényét értjük, ami invariáns az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ hatására nézve, továbbá sajátfüggvénye a

$$\Delta f=-y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

pozitív hiperbolikus Laplace-operátornak, tehát kielégíti a $\Delta f=\lambda f$ parciális differenciálegyenletet valamilyen $\lambda>0$ konstanssal. Más szóval a Maass-forma az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathscr{H}$ hiperbolikus felület korlátos (de nem konstans) Laplace-sajátfüggvénye. Persze cseppet sem világos, hogy ilyen egyáltalán létezik – a Maass által konkrétan megtalált formák csak az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ egy véges indexű kongruencia-részcsoportjára voltak invariánsak. Mindenesetre Selberg a róla elnevezett nyomformulával 1956-ban belátta, hogy az általunk tekintett Maass-formák bőségesen léteznek, és az $L^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathscr{H})$ Hilbert-tér egy jelentős részét, az ún. csúcsos alterét feszítik ki. A Maass-formák Laplace-sajátértékei véges multiplicitásúak: sorba rendezve őket átlagosan 12 távolságra fekszenek egymástól, és a sorozat első 5 tagja 5 tizedesjegyre kerekítve

$$\lambda\approx 91.14135,\ 148.43213,\ 190.13155,\ 206.41680,\ 260.68741.$$

Selberg azt is megmutatta, hogy a csúcsos altér ortogonális kiegészítőjének minden eleme előáll Eisenstein-sorok folytonos lineáris kombinációjaként: az Eisenstein-sorok $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-invariánsak és Laplace-sajátfüggvények, de nem korlátosak.

A képet finomítják a Hecke-operátorok, amelyek a Laplace-operátor számelméleti megfelelői. Ezek bevezetéséhez rendeljük minden $z\in\mathscr{H}$ ponthoz a $\mathbb{Z}+z\mathbb{Z}\subset\mathbb{C}$ rácsot. Könnyen meggondolható, hogy $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-ekvivalens pontokhoz tartozó rácsok forgatva nyújtással egymásba vihetők: valójában az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathscr{H}$ pontjai bijekcióban állnak a $\mathbb{C}$-beli rácsokkal forgatva nyújtás erejéig. Tehát egy Maass-formára tekinthetünk úgy is, mint a $\mathbb{C}$-beli rácsok halmazán értelmezett speciális függvényre. Ha most n egy pozitív egész, akkor minden $\mathbb{C}$-beli rácsnak van $\sum_{d|n}d$ darab n indexű részrácsa, amik felett átlagolhatjuk a Maass-formát. Ez az átlagolás az n-hez tartozó Hecke-operátor, ami egy konvencionális normálással a felső félsík $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-invariáns függvényeire a következő alakot ölti:

$$T_nf(z)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{ad=n}\sum_{1\leqslant b\leqslant d}f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

Ehhez a családhoz hozzávesszük még a T_{-1} kiegészítő Hecke-operátort is, amely az $f(z)$ függvényhez az $f(-\overline{z})$ függvényt rendeli. A Hecke-operátorok az $L^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathscr{H})$ önadjungált operátorai, amelyek a hiperbolikus Laplace-operátorral és egymással is felcserélhetők. Ez azt jelenti (egy jól ismert lineáris algebrai tétel szerint), hogy a csúcsos altérnek van olyan Maass-formákból álló bázisa, amelyek az összes Hecke-operátornak sajátfüggvényei. Ha f egy ilyen Hecke-Maass-forma, amire $T_nf=\lambda(n)f$, akkor az f-hez társított másodfokú L-függvény az 1-nél nagyobb valós részű komplex számokon

$$L(s,f)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\lambda(n)}{n^s}=\prod_{p\text{ prím}}\left(1-\frac{\lambda(p)}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}.$$

Továbbá, ha $\Delta f=(1/4+t^2)f$ és $T_{-1}f=f$ (a $T_{-1}f=-f$ eset hasonló), akkor a teljes L-függvény

$$\Lambda(s,f)=\pi^{-s}\Gamma\left(\frac{s+it}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-it}{2}\right)L(s,f),$$

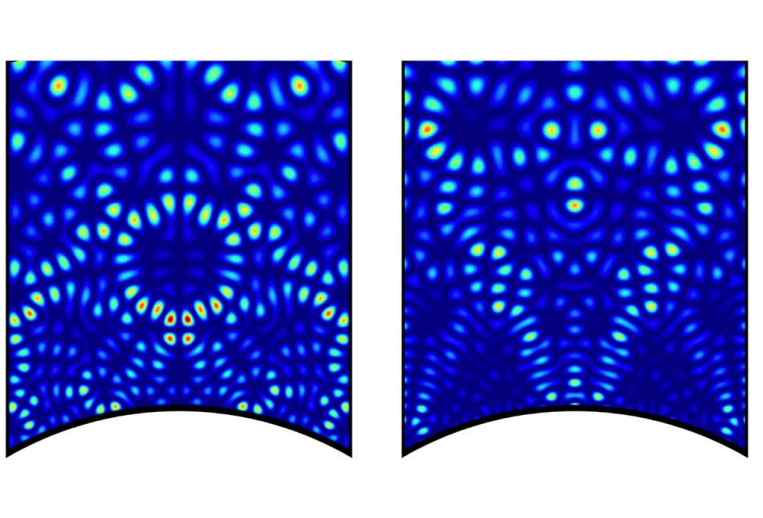
ami kiterjed holomorf egészfüggvénnyé és kielégíti a $\Lambda(s,f)=\Lambda(1-s,f)$ függvényegyenletet. Tehát $L(s,f)$ és $\Lambda(s,f)$ nagyon hasonlít a Riemann-zetából származtatott $\zeta(s+it)\zeta(s-it)$ és $Z(s+it)Z(s-it)$ szorzatokra. Valójában $\zeta(s+it)\zeta(s-it)$ nem más, mint az $1/4+t^2$ Laplace-sajátértékű Eisenstein-sorhoz a fenti módon társított L-függvény!

Amennyire tudjuk, az $L(s,f)$ Dirichlet-sorának együtthatói – tehát a Hecke-operátorok sajátértékei az f Maass-formán – transzcendens számok (ellentétben a korábban felfedezett L-függvényekkel), de a Riemann-sejtés itt is igaznak tűnik: ha $\Lambda(s,f)=0$, akkor s valós része $1/2$. Jó okunk van tehát feltételezni, hogy a Riemann-sejtés maga is automorf természetű. Annyit már most bizonyosan tudunk, hogy az automorf L-függvényeket együttesen, családokban tudjuk hatékonyan vizsgálni, felhasználva azok közös eredetét.

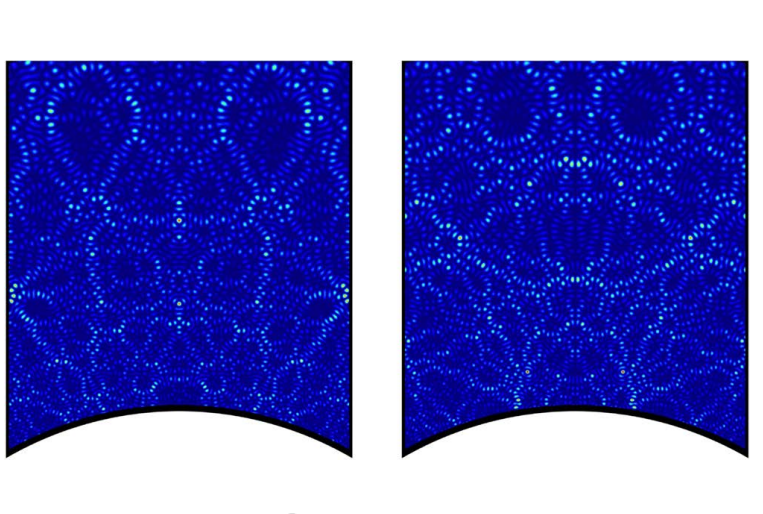
Végezetül nézzünk meg néhány Maass-formát a „valóságban”. Az alábbi ábrákat Fredrik Strömberg készítette, és az ő engedélyével közöljük. Mindegyik ábrán egy Maass-forma abszolút értékének eloszlása látható a $\{z\in\mathscr{H}:|\mathrm{Re}z|\leqslant 1/2,\ |z|\geqslant 1\}$ halmazra megszorítva (pontosabban annak az $\mathrm{Im}z\leqslant 2$ feltétellel megadott kompakt részére), ami az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-re nézve egy fundamentális tartomány. A Maass-formák valós értékűek, mert a T_{-1} operátornak sajátfüggvényei, és ugyanez okozza az ábrák bal-jobb szimmetriáját. Mint egy hőtérképen, a sötétkék szín jelzi a kis értékeket, a vörös pedig a nagyokat.

Harcos Gergely

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Közép-európai Egyetem



Hecke-Maass-formák $\lambda\approx 10^4$ Laplace-sajátértékekkel (*Fredrik Strömberg*)



Hecke-Maass-formák $\lambda\approx 10^5$ Laplace-sajátértékekkel (*Fredrik Strömberg*)

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

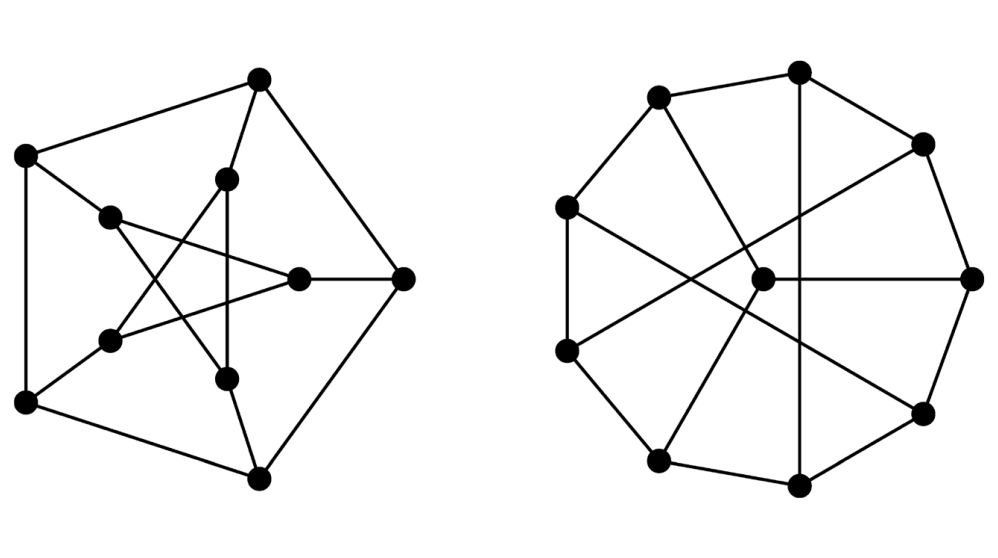
Pyber László 2017. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Babai és a gráf-izomorfizmus probléma

Gráfnak nevezünk egy olyan X struktúrát, ahol adott a pontok egy V halmaza, valamint élek (azaz pont-párok) egy E halmaza. A gyakorlatban előforduló véges gráfok közül az egyik legismertebb a Facebook-gráf (itt az élek a Facebook ismerősök között futnak).

A gráf-izomorfizmus probléma (röviden IZO) a következő számítási feladat: Döntsük el, hogy két adott véges gráf, G és H valójában ugyanaz-e, még akkor is, amikor máshogy néznek ki. Azaz döntsük el, hogy van-e olyan bijekció a csúcshalmazok között, amely megőrzi az éleket. Általánosabban azt is vizsgálhatjuk, hogy két adott kombinatorikus struktúra valójában ugyanaz-e. Számos ilyen jellegű probléma visszavezethető az IZO problémára.

Ez egy olyan, egyszerűen megfogalmazható probléma, amit rendkívül nehéz megoldani. Például, mint az alábbi ábra mutatja, a Petersen gráfot is nagyon különböző módokon lehet ábrázolni.



A fenti ábrán 10 pontú gráfok szerepelnek. Képzeljük el, milyen nehéz lehet eldönteni, hogy két 10^{100} pontú gráf izomorf-e. Nyilvánvaló, hogy egy ilyen problémát csak nagyteljesítményű géppel lehet megoldani. És még egy ilyen számítógépet használva is valamilyen nagyon gyors algoritmusra van szükségünk. A probléma elméleti jellegű. Léteznek ravasz eljárások arra, hogy mondjuk 10^{10}-nél kevesebb pontú gráfokat megkülönböztessünk egymástól [1].

Babai László 2015 novemberében egy háromrészes chicagoi előadássorozatában jelentette be, hogy kvázipolinomiális algoritmust talált az IZO probléma megoldására. (Egy algoritmust kvázipolinomiálisnak nevezünk, ha futási ideje $\exp((\log n)^c)$, ahol n a vizsgált gráfok pontszáma és c egy abszolút konstans. Például $c = 2$ esetén $n^{\log n}$ ami egy kicsivel rosszabb mint n^k ami polinomiális). Ezt az eredményt a matematikus társadalom mint az évtized legnagyobb számítógéptudományi áttörését ünnepelte. Babai bizonyítását egy 90 oldalas kézirat formájában [2] az arxiv.org oldalon tette közzé. Nyilvánvaló, hogy egy ilyen bonyolultságú bizonyítás ellenőrzése sokáig tart. Többen olvastak részeket a kéziratból és kisebb, gyorsan javítható hibákat találtak.

Harald Helfgottot felkérték, hogy a nevezetes Bourbaki-szemináriumon tartson előadást Babai eredményéről. Több hónapos ellenőrző munka után Helfgott szilveszter éjjelén komoly hibát talált. Ezt Babai egy hét intenziv munkával kijavította, egyben egyszerűsítve a bizonyítást. Paradox módon mindez lényegesen növeli az eredmény elfogadottságát. Részben azért, mert Helfgott időközben megtartott párizsi előadásán határozottan kijelentette, hogy a módosított bizonyítás már jó. Mindezekről további információ és a javitás részletes leirása Babai honlapján, illetve Helfgott áttekintő cikkében [3] található.

Miért olyan fontos Babai eredménye? Mert ezzel a megoldással mélyebben megérthetjük a számítógéptudomány lényegét. A gráf-izomorfizmus probléma algoritmikus bonyolultsága az algoritmuselmélet egy, már Cook 1971-es klasszikus dolgozatában [4] is említett nyitott problémája. Ez a probléma különleges szerepet játszik az algoritmuselméletben. A legtöbb ismert, eldöntendő (igen-nem választ váró) probléma vagy a könnyű, azaz polinomiális időben megoldható vagy a nehéz, úgynevezett NP-teljes problémák közé tartozik. Ezekből a nehéz problémákból több ezret ismerünk, az egyik legismertebb annak eldöntése, hogy van-e egy gráfban Hamilton kör, azaz egy olyan kör amely a gráf minden pontján áthalad.

Ahhoz, hogy a fentieket jobban megértsük, néhány alapvető fogalommal kell megismerkednünk az algoritmikus bonyolultság elméletéből. A matematikában, illetve az elméleti számítógéptudományban egy algoritmus hatékonyságát az összes lehetséges inputot vizsgálva becsüljük. Azaz egy IZO algoritmus futási ideje a leghosszabb futási idő az összes lehetséges n pontú G és H gráf-párra. Egy problémát NP-belinek nevezünk ha polinomidőben megoldható egy nemdeterminisztikus Turing gépen. Informálisan, ha bármely valahogyan megtalált megoldásról (mint például egy gráfban egy Hamilton kör vagy a G és H gráfok között megadott izomorfizmus) polinomidőben ellenőrizhető, hogy valóban megoldás-e.

Meglepő módon az NP osztályban léteznek legnehezebb problémák, ezeket nevezzük NP-teljesnek. Bármelyik NP-teljes probléma polinomidejű megoldása az összes többi polinomidejű megoldásához vezetne. Hogy van-e ilyen polinomidejű algoritmus, az a Clay Matematikai Intézet listáján szereplő „P versus NP" probléma (ahol tehát P a polinomidőben megoldható, NP a polinomidőben ellenőrizhető problémák halmaza). Ennek megoldásáért egymillió dolláros jutalom járna. A probléma mai állásáról Aaronson írt nemrég áttekintő cikket [5].

A gráf-izomorfizmus probléma egyike a nagyon kisszámú ismert természetes problémának, amelyről nem ismeretes, hogy NP-teljes lenne, de amelynek megoldására nem ismert polinomidejű algoritmus sem. Egy másik ilyen nevezetes probléma a prímfaktorizáció, azaz egy természetes szám prímszámokra való gyors felbontásának kérdése. A probléma NP-beli, egy megadott felbontásról gyorsan el lehet dönteni, hogy jó-e valójában. A jelenleg ismert leggyorsabb algoritmus erre a problémára ugyanúgy mérsékelten exponenciális ($\exp(n^{1/3})$ körüli) mint a korábbi legjobb algoritmus az IZO probléma megoldására.

Matematikailag a két problémának kevés köze van egymáshoz. De Babai áttörése egy pszichológiai korlátot is áttört és várható hogy most sokan nekiveselkednek a prímfaktorizációs probléma megoldásának. Ha erre valaki igazán gyors algoritmust talál, az a kódoláselmélet számára elég nagy csapás lesz. A ma általánosan használt gyakorlati kriptográfia arra épül, hogy a prímfaktorizációt nem tudjuk megoldani a gyakorlatban, még nagy teljesitményű számítógépekkel sem. Egy elméleti áttörés ebben a témában alapvetően változtathatja meg, hogy például a különféle titkosszolgálatok illetve a bankok mit tartanak biztonságos kódolási módszernek.

Babai eredménye a gráf-izomorfizmus problémát az exponenciálishoz közeli bonyolultságú problémák közül a majdnem polinomiális bonyolultságú problémák közé helyezi. Korábban Eugene Luks talált polinomidejű IZO algoritmust a korlátos fokú gráfokra. Azaz egy olyan algoritmust, amelynek futási ideje $n^{c(D)}$, ahol D egy felső korlát a vizsgált gráfok maximális fokára. Algoritmusa lényeges módon épít véges csoportelméleti eredményekre. A korábbi legjobb általános algoritmus, amelyet Luks talált 1983-ban, mérsékelten exponenciális futási idejű volt. Valójában Babai egy, a gráf-izomorfizmus problémánál általánosabb, az algoritmikus csoportelmélethez tartozó problémát old meg. Ez a színezett halmazok G-izomorfia problémája:

Legyen G egy, az R halmazon ható permutációcsoport (G-t a generáló permutációk egy halmaza segítségével adjuk meg). Ha adott az R halmaz két színezése, akkor az a kérdés, hogy a két színezés egymásba G-beli elemmel átvihető-e.

Könnyen látható, hogy az IZO ennek a problémának speciális esete. Tekintsük ugyanis a $\mathrm{Sym}(n)$ csoport hatását a rendezetlen párok R halmazán. Ez egy $\binom{n}{2}$ fokú G permutációcsoport. Egy n pontú X gráfnak természetes módon megfelel az R halmaz egy 2 színnel való színezése. Az IZO megoldásához elég a fenti G csoportra megoldani a színezett halmazok G-izomorfia problémáját.

Babai eredeti bizonyítása használja a Véges Egyszerű Csoportok Osztályozását (amelynek bizonyítását 10000 oldalra becsülik). Pontosabban, felhasználja az úgynevezett Schreier-sejtést, mely szerint a véges egyszerű csoportok külső automorfizmuscsoportja feloldható. Ez a klasszifikációs tétel egy elegáns egymondatos következménye.

Jelen cikk szerzőjének sikerült ezt a mondatot egy másik, pár oldalon elemien bizonyítható mondatra kicserélni [6], amelynek felhasználásával Babai algoritmusának egy gyengébb, de még mindig kvázipolinomiális változata adható meg.

Természetes kérdés, hogy van-e polinomiális algoritmus az IZO problémára. A Babai által használt módszerek, mint például a felhasznált csoportelméleti állítások azt jelzik, hogy egy ilyen algoritmus megalkotásához alapvető új ötletekre van szükség. Az azonban most már nagyon valószínűtlen, hogy a gráf-izomorfizmus probléma NP-teljes legyen. Ahogy Babai cikkében [2] megjegyzi, ez esetben minden NP-beli probléma megoldására létezne kvázipolinomiális algoritmus.

Pyber László

Irodalomjegyzék

1
B. D. McKay, A. Piperno: Practical Graph Isomorphism, II, arXiv:1301.1493, 2013.
2
L. Babai: Graph Isomorphism in quasipolynomial time. arXiv:1512.03547, 2015.
3
H. A. Helfgott: Isomorphismes de graphes en temps quasi-polynomial. arXiv:1701.04372, 2017.
4
S. A. Cook: The complexity of theorem proving procedures, Proc 3rd ACM STOC (1971), 151—158.
5
S. Aaronson: P $\stackrel{?}{=}$ NP, kézirat Scott Aaronson „Shtetl-Optimized" című blogján.
6
L. Pyber: A CFSG-free analysis of Babai's quasipolynomial GI algorithm. arXiv:1605.08266, 2016.
7
E. M. Luks: Isomorphism of graphs of bounded valence can be tested in polynomial time. J. Comput. Syst. Sci. 25 (1982), 42—65.

alkalmazott matematika informatika

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **GAZDA(G)SÁG** NEVET ADTUK A **GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET ROVATNAK**, AMELYBEN BEMUTATJUK, HOL, MIKÉPPEN HASZNÁLJÁK FEL A MATEMATIKÁT, MILYEN GAZDAG IS AZ A KÖR, AMELYIK ÉRINTI EZT A TUDOMÁNYÁGAT. (ROVATSZERKESZTŐK: *RÖST GERGELY* ÉS *MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR*.)

Molnár-Sáska Gábor fordítása
2017. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Karrierlehetőségek az akadémián kívül: Hogyan készüljenek fel a matematikus és az alkalmazott matematikus hallgatók?

A SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) Ipari és Alkalmazott Matematikai Társaság matematikával, számítástudománnyal, informatikával és alkalmazásaikkal foglalkozók és ezeket tanuló diákok philadelphiai székhelyű nemzetközi szervezete. Folyóirata a SIAM News, amelynek 2016. szeptemberi számában jelent meg ez az írás. A leírtak az USA-beli adatokat és tapasztalatokat ismertetik, de hasonló a helyzet Magyarországon is, például az ELTE-n mesterszakon végzett matematikusok mintegy 80%-a vállalatoknál helyezkedik el. A cikk szerzői: *Lalitha Venkataramanan, Rachel Levy és Bill Kolata.* Fordította: *Molnár-Sáska Gábor.*

Ferenci Tamás
2017. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Megjegyzések az adatbányászatról jégkorongcsapatok összeállítása ürügyén

Nemrégiben olvastam egy izgalmas cikket *Südy Barbara* (BME, Analízis Tanszék) tollából az Alkalmazott Matematikai Lapokban, mely arról szólt, hogyan optimalizáljuk jégkorongcsapatok összetételét adatbányászati módszerekkel. A korszerű statisztikai – és abból kinőtt – módszerek egy ilyen, első ránézésre igen csak szokatlan alkalmazása indított arra, hogy mint statisztikus, papírra vessek pár gondolatot e területről, és persze magáról a cikkről is, megfogalmazva egyúttal néhány javaslatot és tanulságot is.

Röst Gergely
2017. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Védőoltásokról a tények alapján

A védőoltásoknak köszönhetjük, hogy ma már biztonságban vagyunk a korábban brutálisan pusztító fertőzésektől. *Ferenci Tamás* szerint ahhoz, hogy ez a kedvező helyzet fennmaradjon, tudományos alapokon és bizonyítékokon nyugvó ismeretterjesztésre, és korrekt, a kockázatokat és az előnyöket is bemutató tájékoztatásra van szükség. A védőoltásokról a tények alapján c. könyv a szerző által írt vedooltas.blog.hu oldal anyagaiból nőtt ki. A védőoltások mechanizmusáról talán mindenki hallott valamennyit, arról azonban valószínűleg kevesen, hogy milyen szerepet játszhat itt a matematika.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Molnár-Sáska Gábor fordítása 2017. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Karrierlehetőségek az akadémián kívül: Hogyan készüljenek fel a matematikus és az alkalmazott matematikus hallgatók?

Végzős hallgatók gyakran tekintenek úgy a témavezetőjükre, mint fő mentorukra. Így nagyon sok diák képzeli el a jövőjét tudományos pályán. *Bill Kolata* egy nemrég közölt tanulmányában rámutat arra, hogy a végzős hallgatók száma lényegesen nagyobb annál, mint ahányan akadémiai vonalon el tudnak helyezkedni. A 2013/2014-es tanévben körülbelül 1187 matematika PhD fokozatot szereztek meg diákok. Ugyanakkor csak 187 üres álláshely volt a matematika tanszékeken. 556 doktorival rendelkező kutató (44.6%) tudott poszt-doktorként elhelyezkedni. Egy 2012-es SIAM jelentés (http://www.siam.org/reports/mii/2012/report.php) azt javasolja, hogy az egyetemeknek bátorítaniuk kellene a hallgatóikat abban, hogy fontolóra vegyék a karrierlehetőségeket az iparban, és fel is kellene készíteni őket az ottani kihívásokra. Egy 2015-ös NSF-IPAM (Institute for Pure and Applied Mathematics (IPAM) at UCLA) jelentés (http://www.ipam.ucla.edu/reports/2015-nsf-ipam-mathematical-sciences-internship-workshop-report/) szintén tárgyalja a kérdést azzal, hogy növelni kellene a gyakornoki lehetőségek számát matematikus hallgatók számára. Ennek fényében a SIAM szokásos éves találkozóján, Bostonban 2016 nyarán rendezett egy panelbeszélgetést a karrierlehetőségekről az iparban. A résztvevők (*Tamara Kolda* − Sandia National Laboratories, *Dean Bottino* −Takeda Pharmaceuticals, *Gary Green* − The Aerospace Corporation, *Penny Anderson* − MathWorks és *Amy Sliva* − Charles River Analytics) beszéltek saját karrierútjukról és válaszoltak az érdeklődők kérdéseire. A következő fő témák kerültek elő:

1. Hogyan készüljenek fel a diákok karrierjükre az iparban?

A beszélgetés résztvevői arra hívták fel a figyelmet, hogy a diákoknak minél előbb el kell sajátítaniuk a programozási ismereteket. Kiemelték a C/C++, Python és Matlab programnyelveket, amelyek a leginkább alkalmasak a kutatási eredmények bemutatására (még hozzátenném a Java és R nyelvek ismeretét – a ford.). Mivel a matematikusok gyakran találkoznak adatfeldolgozással kapcsolatos feladatokkal, így a statisztika kurzusok is melegen ajánlottak. Ezenfelül a nyári és évközi gyakornoki munkák az egyetemi tanulmányok alatt szintén nagyon sokat segítenek abban, hogy a diákok felmérjék, mire is lehet szükségük az ipari karrierjükhöz.

2. Mit néznek a vállalatok az interjú során?

Elsősorban a megfelelő technikai tudás számít. Ugyanakkor majdnem ugyanennyire fontos a matematikai gondolkodásmód: az a képesség, hogy a jelentkező mennyire lát a probléma mélyére, mennyire látja a nagy összefüggéseket, illetve mennyire kritikusan áll a probléma megfogalmazásához. Egyik problémáról egy másik problémára való hirtelen váltás nehézséget tud okozni azoknak a diákoknak, akik az egyetemi éveik során ahhoz voltak hozzászokva, hogy néha éveken át ugyanazzal a kérdéskörrel foglalkoztak. A rugalmasság nagyon fontos tényező az ipari világban. Ezen felül, a legtöbb alkalmazott matematikus csapatban dolgozik, így nagyon fontos a megfelelő kommunikáció kialakítása. Végül az is gyakran előfordul, hogy a szakembereknek olyan felsővezetőknek kell beszámolniuk a munkájukról, akik nem feltétlen szakmabeliek. Ezt a képességet is külön tanulni kell.

3. Mit ajánlanak annak a diáknak, aki a BSc fokozatát matematikából vagy alkalmazott matematikából szerzi meg és az ipar világában képzeli a jövőjét?

A fiatal akkor a legértékesebb a munkaerőpiacon, ha van egy második végzettsége, ami kiegészíti a matematikát. Ilyen például az informatika, vagy egy fokozat egy másik tudományterületről. Vannak olyan vállalatok is, amelyek a munka mellett engedik, támogatják a további MSc vagy PhD fokozatok megszerzését is. Ha lehetséges, ezt érdemes az interjú során megbeszélni.

4. Mennyire nehéz a tanítást feladni?

Amikor az ember ipari karriert választ, akkor a tanítást fel kell adnia. Ez nem egyszerű. Azonban a munkahelyen is megtalálhatók azok a tevékenységek, amelyek a tanítást helyettesítik. Például a gyakornokok betanítása nagyon hasonlít az egyetemi tanításhoz. Fiatalabb kollégák mentorálása, formális keretek között a vállalaton belül, vagy vállalaton kívüli szervezetekben, de akár informálisan is, nagyon jó dolog.

5. Hogyan ismerik el az ember munkáját?

Az akadémiai szférában az embert alapvetően a kutatási és az oktatási tevékenysége alapján ítélik meg. Az ipari kutatásban is megvan a megfelelő technikai munka értéke. Az eredmények egy részét itt is lehet publikálni folyóiratokban vagy konferenciákon. Azonban az eredmények tipikusan más formában jelennek meg: például találmányok vagy szabadalom formájában. Gyakran az eredmények a vállalat egy belső kódjában jelennek meg, vagy egy olyan termékben, amit a cég értékesíteni tud. Vezetői, mentori, releváns üzleti tapasztalatok megszerzése, valamint nyilvános megjelenés konferenciákon és egyetemi fórumokon szintén a sikeresség lehetséges mutatói.

Fordította: Molnár-Sáska Gábor

A cikk a SIAM News 2016. szeptemberi számában jelent meg: *Lalitha Venkataramanan*, *Rachel Levy és Bill Kolata*: Careers Outside Academia: How Should Math and Applied Math Students Prepare? (https://sinews.siam.org/Details-Page/careers-outside-academia-how-should-math-and-applied-math-students-prepare-2) A fordítást a SIAM News engedélyével közöljük.

alkalmazott matematika matematikus-karrier

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Ferenci Tamás 2017. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Megjegyzések az adatbányászatról jégkorongcsapatok összeállítása ürügyén

Nemrégiben olvastam egy izgalmas cikket *Südy Barbara* (BME, Analízis Tanszék) tollából az Alkalmazott Matematikai Lapokban, mely arról szólt, hogyan optimalizáljuk jégkorongcsapatok összetételét adatbányászati módszerekkel. A korszerű statisztikai – és abból kinőtt – módszerek egy ilyen, első ránézésre igen csak szokatlan alkalmazása indított arra, hogy mint statisztikus, papírra vessek pár gondolatot e területről, és persze magáról a cikkről is, megfogalmazva egyúttal néhány javaslatot és tanulságot is.

A XX. század utolsó harmadában rendkívüli módon kiterjedt mind az apparátusa, mind a vizsgálati köre azoknak a módszereknek, melyeket korábban egyszerűen a ,,statisztika" címke alá soroltak. Egészen új elnevezések, tudományterületek jöttek létre, rengeteg átfedéssel. Hogy a legfontosabbakat említsük, néhány alapvető hivatkozással:

- Statisztika [12,8,13],
- Gépi tanulás, statisztikai tanulás [9,10,14],
- Adatbányászat [21,3,6,2],
- Mesterséges intelligencia [18].

Mindezek pontos elhatárolása nagyon nehéz [4,5,7,1]. Az ember inkább csak ,,érzi", hogy ami matematikailag jól megalapozott, papíron ceruzával követhető számítástechnikai kérdések nélkül, az statisztika, ahol viszont már informatikai problémákat is kezelni kell, az inkább adatbányaszat. De valójában lineáris vagy logisztikus regressziót az adatbányászok is ugyanúgy használnak (legfeljebb nem törődnek a modelldiagnosztikával[1]). Másik oldalról, kevesen vitatnák, hogy például a neurális hálózatok a gépi tanuláshoz és nem a statisztikához tartoznak – miközben ugyancsak van matematikájuk.

Miközben más a fókuszuk (elemzés vs. előrejelzés, ebből adódóan milyen mértékben használnak ,,black-box" modelleket), miközben vannak partikuláris problémák (egy ilyet feltétlenül érdemes megemlíteni: annak kérdése, hogy rendkívül nagy méretű adatbázisokon hogyan hajthatóak végre hatékonyan – algoritmikus értelemben – bizonyos műveletek, mely kérdés jellemzően az adatbányászat területéhez tartozik), miközben jellemzően más méretű adatbázisokon dolgoznak, a vizsgált kérdések nagyon sok esetben teljesen hasonlóak. Az előbb említett szárba szökkenésben fontos komponens volt, hogy e kérdések száma, amit a kutatók egyáltalán vizsgálni akartak, rendkívüli módon megnőtt; részint az érdeklődés változása okán, részint, mert létrejött a számítástechnikai infrastruktúra a vizsgálathoz szükséges adatok begyűjtésére/tárolására.

Ennek a legkézenfekvőbb alkalmazott példáit talán az üzleti világ (pl. vásárlói viselkedés) és az orvostudomány (pl. kockázati modellek) jelentik. De a sport sem maradt ki a sorból; számos matematikailag is igényes elemzés készült a sport kvantitatív, empirikus kérdéseinek vizsgálatára. Nem csak egyszerű statisztikákról van szó[2], hanem sok esetben kifejezetten kifinomult modellekről, kézilabda támadási taktikák eredményességétől [17] a maratonfutások tempóválasztásán át [19] a súlyemelőeredményekig [15]. A baseball statisztikai vizsgálata annyira elterjedt, hogy ennek a ,,tudományágnak" már külön neve is van (sabermetrics, a SABR ugyanis az Amerikai Baseballkutatási Társaság – igen, ilyen is létezik! – rövidítése), a népszerű R statisztikai programcsomaghoz dedikált ,,baseball-statisztikai" kiegészítők és szakirodalom létezik [11].

A cikk bemutatása

Südy Barbara (Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Analízis Tanszék) érdekfeszítő cikke – Jégkorongcsapat összeállításának valós idejű optimalizálása adatbányászati eszközök segítségével – pontosan ebbe a sorba illeszkedik [20]. Kvantitatív, empirikus adatokból indul (az Anaheim Ducks csapatának 2009 és 2012 között az NHL-ben játszott összes mérkőzésének adatbázisa), és azt a kérdést igyekszik megválaszolni, hogy mely játékosokat érdemes csere során pályára küldeni, hogy a gólszerzés valószínűsége a legnagyobb legyen. Ehhez a statisztika, adatbányászat módszereit hívja segítségül.

A legfontosabb eszköze a logisztikus regresszió. Regresszión olyan módszereket értünk, melyek egy változó alakulását igyekeznek más változók felhasználásával leírni. Legegyszerűbb eset a lineáris regresszió, ekkor az Y (ún. eredmény-) változót a következő formában írjuk fel az X_i (ún. magyarázó-) változók segítségével:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_d X_d + u,$$

ahol u valamilyen – lehetőleg ,,jól viselkedő" – hiba, mely kifejezi, hogy a valóság sztochasztikus, nem tudjuk tökéletesen leírni az eredményváltozónkat a magyarázó információnkkal.

Látható tehát, hogy a lineáris regresszió kulcsgondolata, hogy a magyarázó változóink lineáris kombinációját képezzük az eredményváltozó modellezéséhez – a lineáris kombináció mint struktúra adatoktól függetlenül rögzített; amit az adatbázisunk (mintánk) alapján találunk ki, azok a $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_d$ paraméterek értékei[3]. A lineáris függvényforma használata persze megszorító – mi van, ha a valóságban nem ilyen alakú az összefüggés a változók között? – de nem annyira, mint elsőre gondolhatnánk, és cserében kifejezetten kényelmesen kezelhető.

A paraméterek értékeit úgy állapítjuk meg, hogy a legjobban illeszkedjen a modellünk a mintához – ahogy a statisztikusok mondják, megbecsüljük őket. Ahhoz, hogy az így kapott becslések jó tulajdonságúak legyenek – például a véges méretű mintából becsült paraméterek a valódi értékeik körül ingadozzanak – bizonyos feltevéseknek teljesülniük kell (kezdve természetesen azzal, hogy a változók közti összefüggés valóban ilyen alakú, azaz lineáris legyen), ezeket hívjuk modellfeltevéseknek, az ellenőrzésüket pedig modelldiagnosztikának. Fontos a kapott modell jóságának jellemzése, a modellminősítés is.

Amennyiben az eredményváltozónk nem folytonos, hanem kategoriális (legegyszerűbb esetben: bináris), akkor a fenti eljárás nem követhető. Ilyenkor nem a 0/1 jellegű kimenetet akarjuk közvetlenül modellezni, hanem az 1 kimenet valószínűségét, de még ez sem oldja meg a problémát: gondoljunk bele, a lineáris regresszió adhatna 0-nál kisebb vagy 1-nél nagyobb értéket is. Éppen ezért bár megtartjuk a fenti lineáris struktúrát, de annak eredményét előbb transzformáljuk egy olyan függvénnyel, ami az egész számegyenest a $[0,1]$ tartományra képezi le. Így már tekinthető a modell kimenete valószínűségnek; persze a paraméterek becslése – az adatok modellhez való illeszkedésének mérése – bonyolultabb lesz. A legnépszerűbb választás az említett transzformációra az $\frac{1}{1+e^{-x}}$ alakú ún. logisztikus függvény alkalmazása, az ezt használó eljárás neve innen: logisztikus regresszió.

A logisztikus regresszió tehát közvetlenül egy valószínűséget ad meg. Ahhoz, hogy bináris besorolást kapjunk, egy küszöböt (cut-off) kell meghatároznunk, ami fölött 1, alatta 0 kategóriába osztályozzuk a megfigyelést. Fontos, hogy ezt a cut-off-ot nem a logisztikus regresszió határozza meg, annál is inkább, mert ez a saját, egyéni preferenciáinkat is kell, hogy tükrözze: ha attól a hibától félünk jobban, hogy egy 1-eset tévesen 0-ba sorolunk, akkor érdemes a cut-off-ot alacsonyra venni, ha inkább az a baj, ha egy 0 tévesen az 1-es kategóriába kerül, akkor viszont magasra. (Nagyon gyakori a kétféle hiba elkerülésére az az – orvosi gyakorlatból átvett – szóhasználat, amikor annak a valószínűségét, hogy egy valójában 1-es alanyt tényleg 1-esnek sorolunk szenzitivitásnak (érzékenység), annak a valószínűségét, hogy egy valójában 0-s alanyt tényleg 0-snak sorolunk specificitásnak (fajlagosság) nevezzük.) A szenzitivitás és a specificitás jól jellemzi a modellt egy adott cut-off mellett, de ha általában vagyunk a jóságára kíváncsi, akkor célszerű megnézni, hogy az összes lehetséges cut-off mellett milyenek az összetartozó szenzivitás/specificitás párok[4]. Ennek egy tipikus ábrázolása, amikor a különböző cut-off-ok melletti szenzitivitásokat az (1-specificitás) értékekkel szemben ábrázoljuk, ennek neve: ROC-görbe. Ezen a bal alsó és a jobb felső pont felel meg az előbbi lábjegyzetben említett két szélsőséges esetnek, a kettőt összekötő görbén vannak azok a modellek, amelyek pénzfeldobással sorolnak be (különbözőképp cinkelt pénzérmékkel). A tökéletes modell a bal felső pontban van, ennek megfelelően egy konkrét modell jellemzésének gyakori eszköze, hogy mekkora a terület a ROC-görbéje alatt (AUC): a véletlenszerű modelleknél ez $0{,}5$, a tökéletes modellnél 1.

A szerző elsősorban a logisztikus regressziót alkalmazta kérdésének vizsgálatára.

Egész pontosan három részkérdésre bontotta a feladatot, ezek közül is az első annak előrejelzése volt, hogy egy adott buli[5] időpontjában elérhető adatok alapján valamely játékos a következő buli időpontjakor a jégen lesz-e. (Ez tehát azt jelenti, hogy minden bulihoz – kivéve a legelsőt – és minden játékoshoz tartozik egy modell!) A magyarázó változókat az jelenti, hogy a korábbi játékmegszakítások időpontjában kik voltak a pályán (minden korábbi játékmegszakításra, és minden játékosra), kiegészítve néhány, szakmailag fontosnak ítélt változóval (például, hogy emberelőnyben volt-e a vizsgált csapat a buli időpontjában, vagy, hogy mennyi idő telt el a legutóbbi buli óta).

Látható, hogy ez rettenetes mennyiségű magyarázó változót jelent, amelyek felhasználása problémás, vagy egyenesen lehetetlen lenne. (Ha több magyarázó változónk van, mint megfigyelésünk, akkor belátható, hogy elvileg sem lehet megbecsülni a paramétereket, de ha több a megfigyelés, ám nem sokkal, akkor is lehet, hogy nagyon bizonytalan lenne a becslés, vagy túl rossz lenne az általánosítóképessége a modellnek – hogy ez utóbbi mit jelent, arra rögtön visszatérünk.) Éppen ezért a szerző változószelekciót alkalmazott: egy – közelebbről meg nem határozott – módszerrel minden magyarázó változóhoz hozzárendelt egy ,,hasznossági értéket" (hogy mennyire lényeges az adott változó az eredményváltozó leírásában), és csak a legjobb hasznosságú változókat vonta be a modellbe.

Ha ilyen változószelekciót is használ az ember, különösen fontos a modell validálása. Az teszi szükségessé ennek használatát, hogy a szokásos modellminősítés esetén ugyanazokon az adatok találjuk ki (becsüljük meg) a modellt, mint amik alapján lemérjük a jóságát. Ez nyilvánvalóan torzításhoz vezet, hiszen a modell ,,unfair előnyt kap" azáltal, hogy egy megfigyeléshez tud igazodni is (hiszen felhasználjuk a becsléshez) majd ugyanazon mérjük le azt is, hogy mennyire jól igazodott hozzá! A modell igazi célja nem az, hogy a mintánkat jól leírja (ha csak ezt akarnánk, akkor kár is modellt alkotni, ott a minta), hanem, hogy a mintán kívüli világról, amiből a minta származik – ahogy a statisztikusok mondják: a sokaságról – mondjunk valamit, hogy általánosítani lehessen a modell eredményeit a sokaságra. Nem az a feladat, hogy a mintában lévő eredményváltozókat jól eltaláljuk, hanem, hogy ha jön egy új, mintában nem szereplő megfigyelés, akkor annak eredményváltozóját jól eltaláljuk! Ennek lemérésére tehát a szokványos modellminősítés nem jó, torzított módszer. A szerző éppen ezért kettéosztja a mintáját: az adatok 80%-át az ún. tanítóhalmazba rakja, ezen megfigyelések alapján becsli meg a modellt, ám annak jóságát már a maradék 20%-on, az ún. teszthalmazon méri le! Ilyen módon a modellt tényleg olyan adatok alapján minősíti, amiket az még soha nem látott (tehát nem használódott fel a tanításához).

A szerző egy kiválasztott neves játékosra, Teema Selänne-re vonatkoztatva közli az eredményeit. Eszerint a végleges modelljében, még a tesztadatokon is $0{,}8$ értékű az AUC, a használt cut-off mellett az érzékenység 48%. (A specificitás adatait nem közli, de a ROC-görbe alapján 90% körülinek tűnik.)

Most, hogy van egy jó modellünk az egyes játékosok pályára lépési valószínűségeinek megtippelésére, a következő lépés annak meghatározása, hogy mi lesz a teljes csapat összeállítása a legközelebbi játékmegszakítás pillanatában. (A dolog azért nem triviális folyománya az előbbinek, mert ez már tekintettel van a csapat összeállítására is, tehát, hogy milyen pozíciók vannak egyáltalán egy jégkorongcsapatban – amiken természetesen nem felcserélhetőek az egyes játékosok.) Ezt a feladatot valósítja meg a második modell. Ehhez felhasználja magyarázó változóként az első modell által predikált valószínűségeket – sőt, más, nem logisztikus regressziós módszerek által szolgáltatott becsült valószínűségeket is –, valamint ezúttal is bevon a szerző néhány szakmai alapon kiválasztott további magyarázó változót.

A helyzet modellezési szempontból annyiban más, mint az első modellnél, hogy nem egyszerűen azt kell megmondani, hogy egy játékos pályára lép-e (binárisan), hanem azt is, hogy melyik pozícióban. Míg az előbbi esetben egy darab valószínűséget kell visszaadnunk, itt most 6-ot (egy jégkorongcsapat 6 játékosból áll). Úgy is fogalmazhatnánk, hogy míg az első esetben 2 lehetséges kategória valamelyikébe kell az alanyokat besorolnunk (pályára lép/nem lép pályára), itt most 7 kategória egyikébe. Ez is osztályozási feladat tehát, csak immár – úgy szokás mondani – többosztályos. Erre létezik a logisztikus regressziónak egy meglehetősen direkt általánosítása[6], ezt multinomális logisztikus regressziónak szokás nevezni[7].

A szerző ezzel a modellel 40–50% körüli találati arányt tudott elérni (természetesen itt is használva a változószelekciót, és itt is validálva az eredményeket) – innen is látszik, hogy ez a feladat jóval nehezebb, mint pusztán a pályára lépési valószínűség megtippelése.

Ezt követi az utolsó, harmadik modell alkalmazása – ez az, ami az igazán központi kérdésre választ fog adni: hogyan maximalizáljuk ügyes cserével a gólszerzési valószínűséget? A második modellből már tudjuk, hogy mik a legvalószínűbb összeállítású sorok, de egyelőre még semmit nem tudunk a gólszerzési valószínűségekről. A szerző megközelítésének a lényege, hogy veszi a második modellből minden pozícióra a két legvalószínűbb játékost, és belőlük képez ún. ,,alternatív sorokat" az összes lehetséges kombinációt tekintve (azaz összesen $2^5 = 32$ sort[8]). Ezután jön a gólszerzési valószínűség bevonása: ezt ismét csak logisztikus regresszióval vizsgálja, ahol az eredményváltozó az, hogy az adott sor lő-e gólt, a magyarázó változókat pedig a korábbi sorösszetételek jelentik, ezúttal is kiegészítve néhány szakmai alapon kézzel kiválasztott változóval. Miután megvannak az ezen modell által megadott gólszerzési valószínűségek, a szerző módszerének utolsó lépését az jelenti, hogy az – előbb definiált – alternatív sorokból kivesszük azt a játékost, amelyre a predikált gólszerzési valószínűség maximális.

A harmadik lépés modelljében szereplő logisztikus regresszió validált AUC-je $0{,}62$. Az egész procedúrát tekintve elmondható, hogy az eljárás az esetek 74%-ában javasol olyan sort, melynek a predikált gólszerzési valószínűsége nagyobb volt, mint a ténylegesen pályára küldötté. (Persze azt nem tudhatjuk, adat híján, hogy ezek valóban valószínűbben szereztek-e volna gólt.)

Az olvasó észrevételei

Természetesen egyetlen recenzió sem lehet teljes anélkül, hogy néhány kritikus észrevétel, továbbfejlesztési lehetőséget meg ne fogalmaznánk:

- Mindhárom modell esetében jobb eredményt produkál a modell a tesztadatokon, mint a tanítómintán. Ez, ha nem is elvileg, de gyakorlatilag lehetetlen. Itt valami biztos nem stimmel, jobb esetben az oszlopfeliratok, rosszabb esetben az eredmények keveredtek össze!
- Furcsa, hogy az első modellben fix $0{,}5$ volt a cut-off. Miért? Miért nem optimalizálta a szerző ezt az értéket...? Annál is inkább, mert közölte a teljes ROC-görbét, ami alapján ez könnyedén megtehető lett volna. (Ráadásul még csak fel sem tüntette a $0{,}5$ helyét a ROC-görbén, így azt sem látjuk közvetlenül, hogy a szerző modellje hol volt.) Hasonlóan nem derül ki, hogy a harmadik modellnél miért épp a $0{,}06$-ot választotta ki...
- A pontosság használatának az első modell esetében nem sok teteje van, hiszen ha egy játékos sokat volt a pályán (a példaként hozott Teema Selänne a tanító adatok alapján az esetek $(4031+1413)\,/\,(4031+1413+56+69) = 97{,}8$%-ában pályán volt!), akkor az a modell is remek pontosságú, ami magyarázó változóktól függetlenül mindig azt predikálja, hogy a pályán lesz! (Jobb lett volna a 2. táblázatban inkább a specificitást is számszerűen megadni.)
- Érdekes lett volna tudni, hogy pontosan milyen jellemzőkiválasztási módszert használt a szerző.

Ezekkel együtt is a modell alapfeltevése kifejezzen érdekes, a használt módszerek megfelelnek a ,,korszerű" sport-statisztika megközelítésének, így csak remélni lehet, hogy a további fejlesztések révén gyakorlatban is alkalmazható eszközt nyer a szerző.

Ferenci Tamás

Élettani Szabályozások Csoport, Óbudai Egyetem

Irodalomjegyzék

1
Three perspectives of data mining. *Artificial Intelligence*, 143(1):139–146, 2003.
2
Abonyi János: *Adatbányászat – a hatékonyság eszköze*. Computerbooks, 2006.
3
Bodon Ferenc: *Adatbányászati algoritmusok*. http://www.cs.bme.hu/~bodon/magyar/adatbanyaszat/tanulmany/adatbanyaszat.pdf, 2010.
4
Leo Breiman et al. Statistical modeling: The two cultures (with comments and a rejoinder by the author). *Statistical Science*, 16(3):199–231, 2001.
5
Jerome H Friedman. Data mining and statistics: What's the connection? *Computing Science and Statistics*, 29(1):3–9, 1998.
6
Jiawei Han és Micheline Kamber. *Adatbányászat – Koncepciók és technikák*. Panem, 2004.
7
David J. Hand. Data mining: Statistics and more? *The American Statistician*, 52(2):112–118, 1998.
8
F. Harrell. *Regression Modeling Strategies: With Applications to Linear Models, Logistic and Ordinal Regression, and Survival Analysis*. Springer Series in Statistics. Springer International Publishing, 2015.
9
T. Hastie, R. Tibshirani, and J. Friedman. *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction*. Springer Series in Statistics. Springer New York, 2013.
10
P. Langley. *Elements of Machine Learning*. Machine Learning Series. Morgan Kaufmann, 1996.
11
M. Marchi and J. Albert. *Analyzing Baseball Data with R*. Chapman & Hall/CRC The R Series. CRC Press, 2016.
12
Bolla Marianna és Krámli András: *Statisztikai következtetések elmélete*. Typotex, 2005.
13
Móri Tamás és Székely Gábor: *Többváltozós statisztikai analízis*. Műszaki Könyvkiadó, 1987.
14
K. P. Murphy. *Machine Learning: A Probabilistic Perspective*. Adaptive computation and machine learning series. MIT Press, 2012.
15
Lori Ploutz-Snyder et al. Age, body mass, and gender as predictors of masters olympic weightlifting performance. *Medicine and science in sports and exercise*, 35(7):1216–1224, 2003.
16
Brian Ripley. Data mining: Large databases and methods or..., 5 2004. Keynote speech at UseR! 2004 [Accessed: 24/08/2016].
17
Nenad Rogulj, Vatromir Srhoj, and Ljerka Srhoj. The contribution of collective attack tactics in differentiating handball score efficiency. *Collegium antropologicum*, 28(2):739–746, 2004.
18
Stuart Russel és Peter Norvig: *Mesterséges intelligencia modern megközelítésben*. Panem, 2005.
19
A Santos-Lozano, PS Collado, C Foster, A Lucia, and N Garatachea. Influence of sex and level on Marathon pacing strategy. insights from the New York city race. *International journal of sports medicine*, 35(11):933–938, 2014.
20
Südy Barbara: Jégkorongcsapat összeállításának valós idejű optimalizálása adatbányászati eszközök segítségével.
Alkalmazott Matematikai Lapok, 32:41–61, 2015.
21
P. N. Tan, M. Steinbach, and V. Kumar. *Introduction to Data Mining*. Addison-Wesley, 2013.

Lábjegyzetek

[1] Brian Ripley, az alkalmazott statisztika egyik jól ismert kortárs alakja, a Modern Applied Statistics with S (MASS) című alapkönyv szerzője egyszer úgy fogalmazott: ,,A gépi tanulás nem más mint statisztika, mínusz a modellfeltevések teljesülésének bármiféle ellenőrzése!" [16].

[2] Bár a széles nagyközönség számára ez is újdonság lehet; emlékezetes, hogy mekkora híre ment, amikor a 2006-os labdarúgó világbajnokság negyeddöntőjében Jens Lehman, a német válogatott kapusa az argentinok elleni tizenegyespárbaj során a sportszárába rejtett fecniről olvasta le, hogy a soron következő lövőnek a múltbeli adatok alapján mi a legkedveltebb választása a lövés helyezését illetően.

[3] Ezért a lineáris regresszió az ún. paraméteres regressziók nagyobb csoportjába tartozik, ahol a függvényforma adott, és csak néhány paraméter megbecslése a feladat. Természetesen ezek eredményei alapján módosítható a függvényforma is.

[4] Az előbbiből már következik, hogy 0 cut-off esetén – mindenkit 1-be sorolunk – a modell tökéletesen szenzitív, de nulla a specificitása, 1 cut-off mellett – mindenkit 0-ba sorolunk – a modell tökéletesen specifikus, de nulla a szenzitivitása.

[5] Korongbedobást maga után vonó játékmegszakítás a hokiban.

[6] Lényegében arról van szó, hogy kiválasztjuk az egyik kategóriát, és az összes többi kategóriára gyártunk egy szokásos – kétosztályos – logisztikus regressziót, melyben az adott kategória és a kiválasztott kategória között osztályozunk.

[7] A szerző – a recezens véleménye szerint igen ritkán használt, és nem is túl szerencsés módon – ezt polinomiális logisztikus regressziónak nevezi.

[8] Bár a cikkből nem derül ki, de sejthetőleg a kapust rögzítetten tartja a szerző.

alkalmazott matematika · recenzió · adatbányászat

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 3. szám 2017. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Röst Gergely 2017. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Védőoltásokról a tények alapján

Kezdeném azzal, hogy ez egy nagyon fontos könyv: a védőoltásokkal kapcsolatos ismeretek egyedülálló gyűjteménye, ahol a lényeges és tudományosan alátámasztott információk egy helyen megtalálhatók. *Ferenci Tamás* egy fiatal biostatisztikus, aki nagyon nehéz feladatra vállalkozott, hiszen a védőoltások témája igencsak sokféle területet érint: szóba kerül itt az immunológia, epidemiológia, infektológia, statisztika, matematikai modellezés, kockázat-haszon elemzés, farmakológia, nem is beszélve a vakcinálás társadalmi és etikai vonatkozásairól.[1] Magának a könyvnek is érdekes története van, hiszen ez a szerző által írt vedooltas.blog.hu oldal anyagaiból nőtt ki, 2016 októberében jelent meg a második, jelentősen bővített kiadása. A blog első bejegyzése 2012 szeptember elejére datálódik, és nagyon jól végigkövethető a szerző négyéves intenzív munkája, aminek az eredménye most ebben az igényes kivitelezésű kötetben összegződött. Magát a blogot a Magyarországon szerencsére egyelőre jelentéktelen, de több országban komoly közegészségügyi veszélyhelyzeteket előidéző oltásellenes mozgalom tudománytalan és teljesen megalapozatlan érvrendszere provokálta ki. A szerző példáját említve, még 1881-ben is New Yorkban egy diftériajárvány elvitte a tíz év alatti gyerekek 1%-át – egyetlen betegség egyetlen év alatt… A védőoltásoknak köszönhetjük, hogy ma már biztonságban vagyunk a korábban brutálisan pusztító fertőzésektől, és a szerző szerint ahhoz, hogy ez a kedvező helyzet fennmaradjon, tudományos alapokon és bizonyítékokon nyugvó ismeretterjesztésre, és korrekt, a kockázatokat és az előnyöket is bemutató tájékoztatásra van szükség.

A védőoltások mechanizmusáról talán mindenki hallott valamennyit, arról azonban valószínűleg kevesen, hogy milyen szerepet játszhat itt a matematika. Ezért matematikus irányultságúaknak különösen ajánlott a nyájimmunitásról szóló 5. fejezet, hiszen ezt a fontos járványtani jelenséget a legjobban a matematikán keresztül érthetjük meg. Bár angolul kétségtelenül a *herd immunity* az elterjedt szóhasználat, a *nyájimmunitás* helyett én a magam részéről a magyar nyelvben a pozitívabb csengésű *közösségi immunitás* kifejezést jobbnak találnám. Lényege, hogy kellően nagy számú oltott ember védettséget biztosít azoknak is, akik valamilyen okból (akár életkoruk, valamilyen egyéb betegségük, vagy az oltás nem 100%-os hatásossága miatt) nem védettek, hiszen ha valaki csak védettekkel találkozik, annak nem lesz kitől elkapnia a betegséget. Ennek a kritikus szintnek a meghatározásához ismernünk kell a reprodukciós számot, amit hagyományosan R_0-val jelölnek és nagyjából azt fejezi ki, hogy ha egy fertőzött csupa fogékonnyal találkozik, akkor várhatóan hányan kapják el tőle a betegséget. Ez egy átlagszám, pl. R_0 = 2,1 azt jelenti, hogy tíz fertőzött 21 másikat generál, és ez is csak ideiglenesen érvényes a járvány kezdeti szakaszában, amíg csupa fogékonnyal kerül mindenki kapcsolatba. Ha az emberek felét védetté tesszük, akkor (feltéve a véletlenszerű keveredést) ez a reprodukciós szám is a felére csökken. A járvány csak akkor lesz önfenntartó, ha a reprodukciós száma nagyobb, mint egy, különben minden lépésben egyre kevesebb fertőzött lesz, és ahhoz, hogy ezt elérjük, egy egyszerű közelítés, hogy az emberek több, mint $(1 - 1/R_0)$ részét kell védetté tenni. Ez az arány a közösségi immunitáshoz szükséges kritikus szint. Például a diftéria reprodukciós száma 6 körül van, így itt ez a kritikus szint 83,3%. A kanyaró reprodukciós száma 18 is lehet (vagyis egy kanyarós gyerek 18 másikat tud megfertőzni!), ebben az esetben a nyájimmunitáshoz minimum 94,4%-os immunizáltsági szint kell, amit még az oltás hatékonyságával is korrigálni kell, hogy megkapjuk a szükséges oltottsági arányt. Persze az élet nem ilyen egyszerű, hiszen az emberek nem mind egyformák, nem teljesen véletlenszerűen keverednek, és az immunitás sem tart örökké, így, ha realisztikusabb modelleket szeretnénk, akkor komolyabb matematikai eszköztárat kell bevetnünk. De ahogy a könyv is szépen illusztrálja, már az egyik legegyszerűbb differenciálegyenletes modell, az SIRV-modell is tartalmaz érdekességeket, hiszen nagyon jól mutatja a vakcinálási programok elindításakor tapasztalható, a való életben is megfigyelt ún. mézeshetek-effektust: ez akkor következik be, amikor egy oltási program nem éri el a közösségi immunitási szinthez szükséges szintet, csak majdnem. Ekkor évekig vagy akár egy évtizedig is látszólag minden a legnagyobb rendben van, a megbetegedések száma szépen csökken, majd egyszer csak (a nem-matematikusok számára) teljesen váratlanul, a semmiből hirtelen visszatér a járvány. A fejezet megmagyarázza még azt az elsőre különösnek tűnő jelenséget is, hogy a vakcinálás következményeként a megbetegedettek átlagéletkora eltolódik, és még egy kis hálózatelmélet is szóba kerül.

Egy másik matematikailag intenzívebb rész az A. Függelék, ami az alumínium szervezeten belüli felhalmozódását és kiürülését írja le differenciálegyenletekkel. Ennek célja, hogy összevesse a szervezet természetes, táplálkozásból eredő alumíniumterhelését és az oltásokon keresztül a szervezetbe került alumínium-többletet egy tipikus, a hazai oltási rendet követő ember esetére. Aki nem akarja végigkövetni a számításokat, annak ajánlom, vessen egy pillantást a végső következtetést tartalmazó 83. ábrára.

A többi fejezet végigveszi a védőoltások történetét, a legfontosabb fertőző betegségeket, az immunrendszer működésének alapjait, a védőoltások bevezetésének hatását a járványokra, valamint a vakcinák hatékonyságával és biztonságával kapcsolatos főbb tudományos vizsgálatok eredményét. A matematikai szemlélet számos helyen megjelenik a könyvben: minden állítás adatokkal, konkrét számokkal, levezetésekkel van alátámasztva.

A közölt információk töménysége miatt ez talán nem az a könyv, amit az ember a metrón utazva vagy a strandon heverészve olvasgat (bár vannak regénybe illően izgalmas részei is), de ott a helye mindenkinek a polcán, aki szeretne több, és legfőképpen megbízható tudásra szert tenni a védőoltásokról.

Röst Gergely

Ferenci Tamás: Védőoltásokról a tények alapján, 2 javított, bővített kiadás, Medicina Kiadó, 2016

---

[1] epidemiológia = járványtan

immunológia = az immunrendszer működésével foglalkozó tudomány

infektológia = fertőzésekkel foglalkozó tudomány

vakcina = védőoltás: olyan készítmény, amelynek beadása után a szervezetben védettség alakul ki a az adott betegséggel szemben

farmakológia = gyógyszerek hatásaival foglalkozó tudomány

alkalmazott matematika recenzió