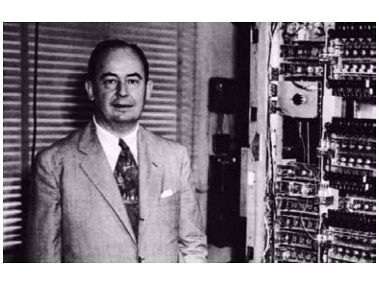
Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

26. szám 2022. december



2022. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

„A számológép és az agy" megjelenésétől az infoszféra forradalmáig

2023-ban lesz Neumann János születésének 120. évfordulója. *Benczúr András* tanulmányában röviden bemutatja Neumann életútját, részletesen ismerteti utolsó, 1958-ban megjelent írását, amelynek címe: „A számológép és az agy". Ehhez kapcsolódik saját kutatása arról, hogy milyen új megvilágítást ad a számítógépek és az élő emberi elmék összevetése az infoszférában betöltött szerepük alapján. Tovább...

2022. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Príma matematika

Az idei Prima Primissa Díjátadón ismét elismerték a matematika jelentős társadalmi értékét. Amíg tavaly a Bolyai János Matematikai Társulat vehette át a magyar oktatás és köznevelés kategóriában a Prima Primissima Díjat, idén Lovász László matematikus, akadémikus a magyar tudomány kategóriában kapta meg a kitüntető címet. Príma hírek következnek.

2022. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Szokatlan párosítás

John Urschel nevét sokan ismerhetik, akik érdeklődnek az amerikai foci iránt. Urschel 2014-től 2016-ig volt a Baltimore Ravens csapatának támadófal-embere, 26 évesen úgy döntött, hogy az MIT-n szeretne PhD-t szerezni matematikából. Nem mindennapi történetét feleségével közösen írta meg Mind and Matter című könyvében. *Juhász Péter* (futball- és matematikarajongó) írt kedvcsinálót a könyvhöz.

2022. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Rényi-díj néven születik újjá a Graphisoft-díj

Két év szünet után 2022-ben más néven éled újra a matematikatanárok körében nagy megbecsülésnek örvendő Graphisoft-díj. A népszerű elismerés új keretek között kerül kiosztásra, de a díjazottak kiválasztási módszere nem változik. A díj történetéről, a névadó Rényi-házaspár életéről (benne a komplex matematikatanítási kísérletről) és az első díjátadóról *Ács Katalin* számol be.

2022. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Elment Révész, Somfai, Holló-Szabó, Besenyei

Nyolc héten belül négy jól ismert tagját, a magyar matematikai élet egy-egy részének meghatározó személyiségét veszítette el a Bolyai János Matematikai Társulat. 2022. október 16. és december 8. között elhunyt *Révész Pál* matematikus, Állami Díjas akadémikus (88 évesen), *Somfai Zsuzsa* Rátz Tanár Úr Életműdíjas tanár (78 évesen), *Holló-Szabó Ferenc* Ericsson-díjas tanár (57 évesen), és *Besenyei Ádám* Gács András-díjas kutató és tanár, az ELTE TTK kétszeres Kar Kiváló Oktatója (40 évesen). Mélyen gyászoljuk őket.

2022. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Besenyei Ádám (1982−2022)

Nehezen felfogható és feldolgozható veszteség érte a magyar matematikusok és matematikatanárok közösségét, egyúttal az Érintő szerkesztőségét. Besenyei Ádám, az ELTE Matematikai Intézete Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék docense 2022. december 8-án, életének 41. évében eltávozott közülünk. Egy nagyon nagy tudású, széles látókörű, rendkívül szerény, mindenki által tisztelt és szeretett kollégát veszítettünk el.

2022. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A Tingley-sejtés

Ebben a cikkben valós normált terekről és azok távolságtartó leképezéseiről lesz szó. A szükséges fogalmak bevezetése után ismertetünk egy nagyon szép tételt, a Mazur–Ulam-tételt, majd rátérünk annak egy nagyon természetes általánosítására (Mankiewicz tétele). Ezek után teszünk néhány megjegyzést arra vonatkozóan, hogy hogyan néz ki egy gömb és a felülete, és kimondjuk Tingley sejtését, ami amennyire egyszerűnek hangzik, annyira nehéz. (És a mai napig megoldatlan.) *Titkos Tamás* cikke következik.

2022. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Kicsit kooperatívan

Spencer Kagan neve, kooperatív tanulási technikákat kutató és népszerűsítő tevékenysége világszerte jól ismert. 2001-ben magyarul is megjelent könyve, módszereit már két évtizede sok iskolánkban használják. *Kovács-Koszó Eszter, Kiss Viktória* és *Kosztolányi József* ezeket a stratégiákat egészítette ki néhány gyakorlati ötlettel, amelyek kísérleteik alapján is jól illeszkednek a mai magyarországi matematikaórákba. Tovább...

2022. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Erdős Gábor és Varga József Rátz Tanár Úr Életműdíjasok

2022. december 12-én 22. alkalommal adták át 2-2 matematikát, fizikát, kémiát, illetve biológiát oktató pedagógusnak a Rátz Tanár Úr Életműdíjat. Az idei évtől kezdődően a díjazott tanárok egyenként 2 millió forinttal járó elismerést vehettek át a Magyar Tudományos Akadémia Dísztermében. A Magyar Természettudományos Oktatásért Alapítvány több mint két évtizede ismerve a közoktatásban dolgozók nehéz helyzetét, egyedülálló módon támogatja a reáltantárgyakat magas színvonalon oktató, elhivatott, tanítványaik által tisztelt, szeretett, elismert pedagógusokat. Kik lettek az idei díjazottak?

2022. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Sikeres KöMaL-rendezvény az ELTE-n

Október utolsó hétvégéjén rendezte meg a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok szokásos Ifjúsági ankétját a MATFUND Alapítvány szervezésében, a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat háttértámogatásával. A kétnapos előadássorozatra a 2021–22-es tanév KöMaL-pontversenyeinek legjobbjai kaptak meghívást. Következik a rövid beszámoló.

2022. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Gács András-díjazottak a Matematikus hangversenyen

A 2022. évi Gács András-díjat az ELTE két oktatója, *Bérczi Kristóf* és *Frenkel Péter* kapta meg. A Gács András-díjat 2018-ban és 2019-ben is az ELTE dísztermében tartott Matematikus hangverseny keretében adták át, azonban 2020-ban és 2021-ben nem lehetett megtartani az ünnepélyes díjátadót. Ezért 2022. október 5-én nemcsak az idei, de a tavalyi és a tavalyelőtti díjazottakat is köszöntötték az ELTE dísztermében a hangverseny szünetében. Tovább...

2022. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

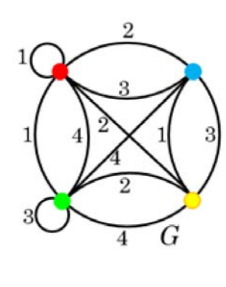
Matematikus Hangversenyek

2022. október 5-én 40. alkalommal rendezték meg az ELTE Matematikus Hangversenyét. A Matematikus Hangversenyek olyan ingyenes koncertek, ahol matematikusok (egyetemi hallgatók, oktatók, nem feltétlenül az ELTE-ről) esetleg családtagjaikkal, barátaikkal zenélnek főként (de nemcsak) matematikus hallgatóságuknak. A Matematikus Hangversenyek történetéről, kialakulásáról, fejlődéséről két korábbi főszervezőjükkel, *Somogyi Krisztiánnal és Horváth Andrással beszélgetett Oláh Vera*.

2022. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Ugródeszkák matek szakon – Palotay Dorka

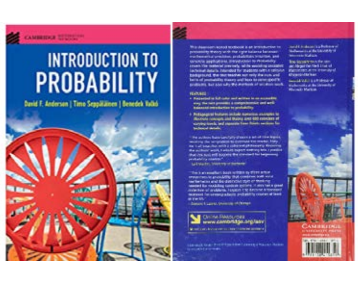
Palotay Dorka alkalmazott matematikus egy, az internetszolgáltatóknak különféle szolgáltatásokat nyújtó cégnél dolgozik, malware, azaz kártékony szoftver elemzéssel foglalkozik. *Bérczi-Kovács Erika* negyedik interjúja következik az Ugródeszkák matek szakon sorozatában.



2022. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Sok színnel, sokszínűen a gráfokról

A magyarországi matematikának egyik kiemelkedő területe a gráfelmélet. A nemzetközi szakkönyvekben, példatárakban nagyon gyakran találkozhatunk hivatkozásokkal magyar matematikusok tételeire, hazánkban kitűzött versenyfeladatok bemutatásával. Ezek a példák megmozgatják a fiatalok fantáziáját, hiszen a problémák megoldása szinte minden esetben valamilyen speciális felismerésen, különleges fogalomtársításon alapul, így komoly szellemi kihívást jelent még a matematikailag képzettek számára is. *Fonyó Lajos* és *Fonyóné Németh Ildikó* jól hasznosítható, sokszínű anyagot kínál az iskolai szakkörök számára.



2022. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Bevezetés a valószínűségszámításba

David F. Anderson, Timo Seppäläinen, Benedek Valkó: **Introduction to Probability** című könyvéről *Major Péter* írt ismertetőt. A könyv célja az, hogy bemutassa a valószínűségszámítás alapjait, és legfontosabb, nehéz matematikai apparátust nem igénylő eredményeit. A szerzők olyanokkal is meg akarták ismertetni a valószínűségszámítást, akik nem tanultak mértékelméletet. Fontosnak tartották, hogy ne csak az eredmények bizonyítását ismertessék, hanem bőséges példaanyag segítségével érzékeltessék azok hasznosságát is. Tovább...

2022. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Az index tanítása nemzetközi környezetben

Az index absztrakt fogalmát korántsem egyszerű megérteni, főleg, ha avval először az egyetemen találkozik a hallgató. A tanárnak, egyetemi oktatónak fel kell ismerni a problémát, és didaktikusan elmagyarázni a válaszokat a külföldi egyetem nemzetközi diákjaiban felmerülő kérdésekre. Erről ír szubjektív beszámolójában a Cipruson, Famaguszta városában tanító *Vizvári Béla*.

2022. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

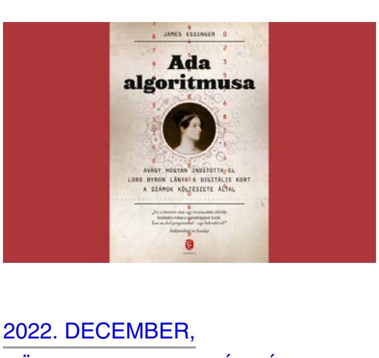
34. Varga Tamás Módszertani Napok

A tavalyi évtől eltérően a 34. Varga Tamás Módszertani Napokat 2022. november 4-én és 5-én új formában, személyesen és online részvétellel vegyesen rendezték meg. *Csapodi Csaba*, *Oláh Vera* és *Szitányi Judit* számol be a matematikatanárok és tanítók körében megrendezett jó hangulatú, sikeres eseményről.

2022. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Matematikus sikerek: Lendület 2022

A Lendület pályázat idei nyerteseinek köszöntésén ismét két fiatal matematikussal találkozhattunk. *Bárány Balázs* (aki az NKFIH pályázatán is sikeres volt) a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen, *Vidnyánszky Zoltán* pedig az Eötvös Loránd Tudományegyetemen indíthatott kutatócsoportot. A fénykép, amelynek forrása az mta.hu, a Lendület program díjátadóján Vidnyánszky Zoltán előadásán készült. A cikk néhány szóval bemutatja mindkét nyertes kutatását. Tovább...



2022. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Ada algoritmusa

Avagy hogyan indította el Lord Byron lánya a digitális kort a számok költészete által. *James Essinger* könyve új perspektívából mutatja be Lady Ada Lovelace életét, valóban jogosan tekintjük-e őt a világ első programozójának? Milyen akadályok álltak annak az útjában, hogy a digitális korszak majdnem egy évszázaddal korábban megkezdődjön? *Binzberger Viktor* ajánlója nagy kedvet csinál a könyv elolvasásához.

2022. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Valósággá vált álmok a Millenárison

Megnézték már az Álmok Álmodói 20 kiállítást a Millenárison? Ha nem, 2023. január 31-ig még megtehetik. A téli- vagy a sízünetben vigyék el a gyerekeket, unokákat: sem a felnőttek, sem a gyerekek nem fognak unatkozni, annyiféle tudományos régiség és újdonság között lehet válogatni, Szent-Györgyitől Karikó Katalinig, Bolyaitól Lovász Lászlóig, a régi autóktól az űrhajóig, a bolygóktól a fekete lyukig. Akik pedig mertek nagyokat álmodni, mind magyar feltalálók és tudósok, érdemes őket megismerni.

A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon: ›

A **HÍREK – ÚJDONSÁGOK** ROVAT A MATEMATIKÁHOZ ÉS A BOLYAI TÁRSULATHOZ KAPCSOLÓDÓ ESEMÉNYEKRŐL, ÚJDONSÁGOKRÓL SZÓL. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÁKÓCZI ILDIKÓ.)*

Szerkesztő
2022. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Erdős Gábor és Varga József Rátz Tanár Úr Életműdíjasok

2022. december 12-én 22. alkalommal adták át 2-2 matematikát, fizikát, kémiát, illetve biológiát oktató pedagógusnak a Rátz Tanár Úr Életműdíjat. Az idei évtől kezdődően a díjazott tanárok egyenként 2 millió forinttal járó elismerést vehettek át a Magyar Tudományos Akadémia Dísztermében. A Magyar Természettudományos Oktatásért Alapítvány több mint két évtizede ismerve a közoktatásban dolgozók nehéz helyzetét, egyedülálló módon támogatja a reáltantárgyakat magas színvonalon oktató, elhivatott, tanítványaik által tisztelt, szeretett, elismert pedagógusokat. Kik lettek az idei díjazottak?

Szerkesztő
2022. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Elment Révész, Somfai, Holló-Szabó, Besenyei

Nyolc héten belül négy jól ismert tagját, a magyar matematikai élet egy-egy részének meghatározó személyiségét veszítette el a Bolyai János Matematikai Társulat. 2022. október 16. és december 8. között elhunyt *Révész Pál* matematikus, Állami Díjas akadémikus (88 évesen), *Somfai Zsuzsa* Rátz Tanár Úr Életműdíjas tanár (78 évesen), *Holló-Szabó Ferenc* Ericsson-díjas tanár (57 évesen), és *Besenyei Ádám* Gács András-díjas kutató és tanár, az ELTE TTK kétszeres Kar Kiváló Oktatója (40 évesen). Mélyen gyászoljuk őket.

Szerkesztő
2022. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Gács András-díjazottak a Matematikus hangversenyen

A 2022. évi Gács András-díjat az ELTE két oktatója, *Bérczi Kristóf* és *Frenkel Péter* kapta meg. A Gács András-díjat 2018-ban és 2019-ben is az ELTE dísztermében tartott Matematikus hangverseny keretében adták át, azonban 2020-ban és 2021-ben nem lehetett megtartani az ünnepélyes díjátadót. Ezért 2022. október 5-én nemcsak az idei, de a tavalyi és a tavalyelőtti díjazottakat is köszöntötték az ELTE dísztermében a hangverseny szünetében. Tovább...

Szerkesztő
2022. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Príma matematika

Az idei Prima Primissa Díjátadón ismét elismerték a matematika jelentős társadalmi értékét. Amíg tavaly a Bolyai János Matematikai Társulat vehette át a magyar oktatás és köznevelés kategóriában a Prima Primissima Díjat, idén Lovász László matematikus, akadémikus a magyar tudomány kategóriában kapta meg a kitüntető címet. Príma hírek következnek.

Szerkesztő
2022. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Matematikus sikerek: Lendület 2022

A Lendület pályázat idei nyerteseinek köszöntésén ismét két fiatal matematikussal találkozhattunk. *Bárány Balázs* (aki az NKFIH pályázatán is sikeres volt) a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen, *Vidnyánszky Zoltán* pedig az Eötvös Loránd Tudományegyetemen indíthatott kutatócsoportot. A fénykép, amelynek forrása az mta.hu, a Lendület program díjátadóján Vidnyánszky Zoltán előadásán készült. A cikk néhány szóval bemutatja mindkét nyertes kutatását. Tovább...

Csapodi Csaba, Oláh Vera, Szitányi Judit
2022. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

34. Varga Tamás Módszertani Napok

A tavalyi évtől eltérően a 34. Varga Tamás Módszertani Napokat 2022. november 4-én és 5-én új formában, személyesen és online részvétellel vegyesen rendezték meg. *Csapodi Csaba*, *Oláh Vera* és *Szitányi Judit* számol be a matematikatanárok és tanítók körében megrendezett jó hangulatú, sikeres eseményről.

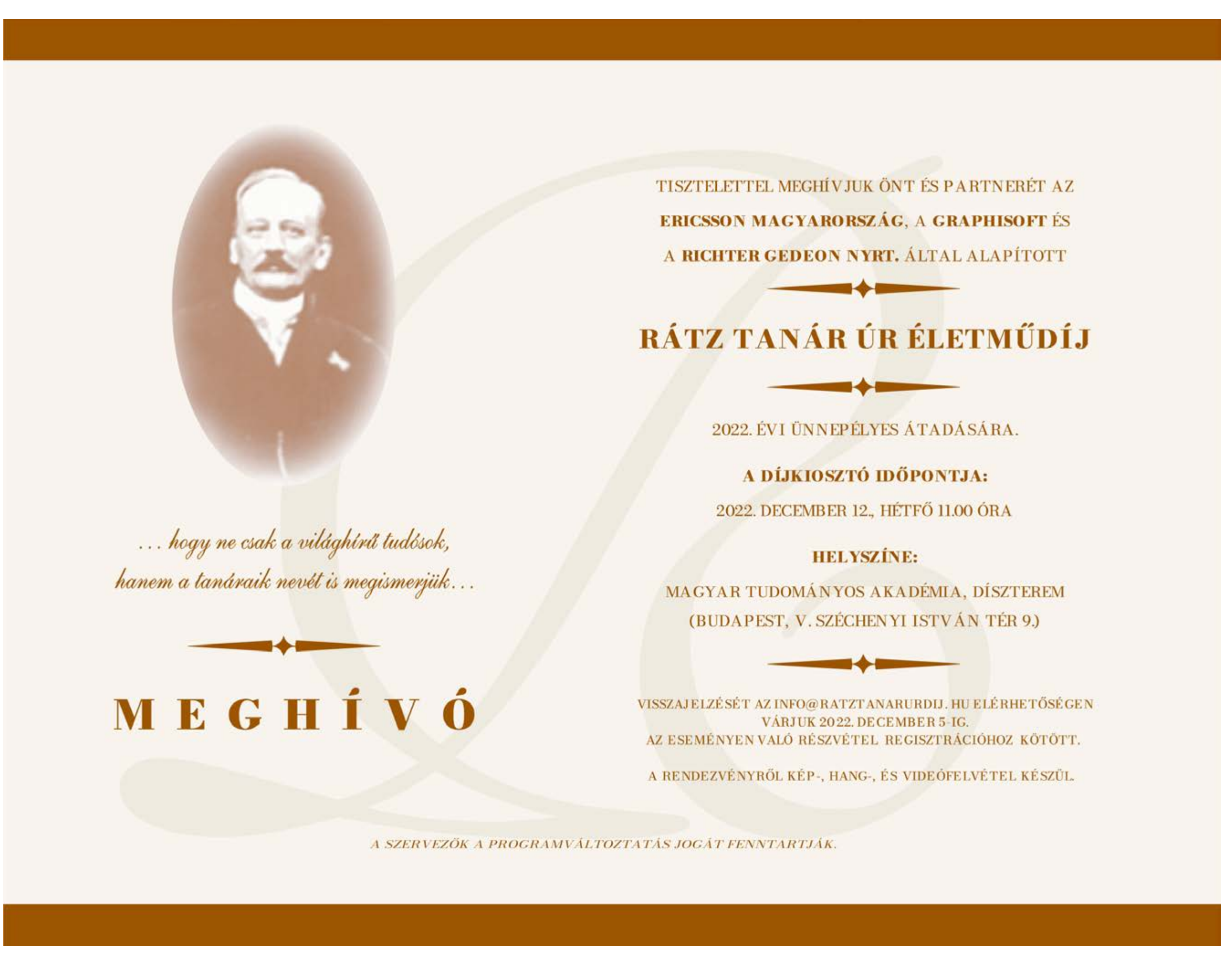
TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon: ›

Szerkesztő 2022. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Erdős Gábor és Varga József Rátz Tanár Úr Életműdíjasok



TISZTELETTEL MEGHÍVJUK ÖNT ÉS PARTNERÉT AZ
ERICSSON MAGYARORSZÁG, A **GRAPHISOFT** ÉS
A **RICHTER GEDEON NYRT.** ÁLTAL ALAPÍTOTT

RÁTZ TANÁR ÚR ÉLETMŰDÍJ

2022. ÉVI ÜNNEPÉLYES ÁTADÁSÁRA.

A DÍJKIOSZTÓ IDŐPONTJA:
2022. DECEMBER 12., HÉTFŐ 11.00 ÓRA

HELYSZÍNE:
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA, DÍSZTEREM
(BUDAPEST, V. SZÉCHENYI ISTVÁN TÉR 9.)

VISSZAJELZÉSÉT AZ INFO@RATZTANARURDIJ.HU ELÉRHETŐSÉGEN
VÁRJUK 2022. DECEMBER 5-IG.
AZ ESEMÉNYEN VALÓ RÉSZVÉTEL REGISZTRÁCIÓHOZ KÖTÖTT.

A RENDEZVÉNYRŐL KÉP-, HANG-, ÉS VIDEÓFELVÉTEL KÉSZÜL.

… hogy ne csak a világhírű tudósok,
hanem a tanáraik nevét is megismerjük…

MEGHÍVÓ

A SZERVEZŐK A PROGRAMVÁLTOZTATÁS JOGÁT FENNTARTJÁK.

2022-ben a következő tanárok kapták meg a Rátz Tanár Úr Életműdíjat:

Matematikából:

- **Erdős Gábor,** Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa
- **Varga József,** Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét

Fizikából:

- **Koncz Károly,** PTE Babits Mihály Gyakorló Gimnázium, Pécs
- **Moróné Tapody Éva,** Szegedi Tömörkény István Gimnázium, Művészeti Szakgimnázium, Szeged

Kémiából:

- **Tölgyesné Kovács Katalin,** Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg
- **Hotziné Pócsi Anikó Judit,** Tóth Árpád Gimnázium, Debrecen

Biológiából:

- **Fazakas Andrea,** Deák Téri Evangélikus Gimnázium, Budapest
- **Bertáné Kövesdi Gabriella,** Keszthelyi Vajda János Gimnázium, Keszthely

MORÓNÉ TAPODY ÉVA
KONCZ KÁROLY
2022
RÁTZ TANÁR ÚR
ÉLETMŰDÍJ

A képen (hátsó sor, balról jobbra): Bojár Gábor (Graphisoft), Bogsch Erik (Richter Gedeon), Varga József, Koncz Károly, Erdős Gábor, Éry Gábor (Ericsson), Kroó Norbert (MTA, az alapítvány kuratóriumának elnöke), (első sor, balról jobbra) Fazakas Andrea, Moróné Tapody Éva, Tölgyesné Kovács Katalin, Bertáné Kövesdi Gabriella, Hotziné Pócsi Anikó.

A rangos díjat három olyan nagyvállalat alapította, az Ericsson Magyarország, a Richter Gedeon Nyrt. és a Graphisoft, amelyek a mai napig is sikeresek és elkötelezettek a tudományok és a jó oktatás iránt. Kroó Norbert, az alapítók által létrehozott Magyar Természettudományos Oktatásért Alapítvány kuratóriumának elnöke, Bogsch Erik, a Richter Gedeon Nyrt igazgatóságának elnöke és Bojár Gábor, a Graphisoft alapítója is már 22. alkalommal köszöntötte a Rátz Tanár Úr Életműdíjasokat. Éry Gábor idén utoljára adta át a díjakat a legjobb fizikatanárok részére az Ericsson Magyarország vezérigazgatójaként.

Rátz László annak idején a Fasori Gimnáziumban többek között Wigner Jenőt tanította, akivel Kroó Norbert beszélgetett hosszasan szeretve tisztelt tanáráról még 1963-ban (amikor Wigner fizikai Nobel-díjat kapott). Ezt a történetet is elmesélte megnyitójában az akadémikus. Bojár Gábor a gazdasági vállalatok és a társadalom figyelmét hívta arra, hogy mennyire fontos a közoktatás – a diákok az egyetemen a szakma részleteit tanulják meg, de azt, hogy mennyire lesznek kreatívak és mennyire tudnak önállóan gondolkodni, az a közoktatáson múlik.

ERDŐS GÁBOR
Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa
2022
RÁTZ TANÁR ÚR
ÉLETMŰDÍJ

Bojár Gábor átadja a díjat Erdős Gábornak

A díjazottak mindegyikéről készült és bemutatásra került egy-egy rövid videó, ezek elején egy azóta felnőtt és karriert befutott diák beszélt arról, hogyan indította el őt és társait a pályán kiváló tanára. Mind a kisfilmekben, mind a megtisztelő helyszínen, a Tudományos Akadémia Dísztermében olyan mondatok hangzottak el a pedagógusoktól, amelyek bölcsek, igazak és szívet melengetők is voltak egyben. A vicc szerint van olyan tanár, aki szereti a tantárgyát, és van, aki szereti a gyerekeket. Az itt levőkre mindkettő igaz: szeretik a tantárgyukat is, és a gyerekeket is. Hivatástudatuk, hozzáállásuk példamutató diákjaik számára, akik ezt messzemenően értékelik.

A youtube-ra már fel is kerültek a videók az írásos méltatásokkal együtt.

A két életműdíjas matematikatanár:

Erdős Gábor

Varga József

Nekik is és a többi Rátz Tanár Úr-díjazottnak őszintén gratulálunk.

A Szerkesztők

☐ díjazottak ☐ Rátz László

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

Szerkesztő 2022. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Elment Révész, Somfai, Holló-Szabó, Besenyei

Dr. Révész Pál matematikus, az MTA rendes tagja, a BJMT tiszteletbeli elnöke 2022. november 14-én, életének 89. évében hunyt el. **Búcsúztatására 2022. december 29-én, csütörtökön 9:45-kor kerül sor a Farkasréti temető Makovecz ravatalozójában.**

Idézzük az MTA nekrológját és a Bolyai Társulat értesítését:

Révész Pál 1934-ben született Budapesten. 1957-ben szerzett alkalmazott matematikus oklevelet az Eötvös Loránd Tudományegyetemen. Diplomájának megszerzését követően az ELTE Természettudományi Karának Valószínűségszámítási Tanszékén lett oktató. 1964-től 1987-ig a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutatóintézetének tudományos munkatársa volt. 1987-től 1997-ig a Budapesti Műszaki Egyetemen, 1985-től 1997-ig pedig a Bécsi Műszaki Egyetemen is professzorként tanított.

Révész Pál Rényi Alfréd tanítványa volt. A modern magyar valószínűségszámítás jelentős alakjaként számos kiváló matematikussal dolgozott együtt, köztük Erdős Pállal is. A független valószínűségi változók viselkedéséről több fontos könyvet írt. Első könyve, a The Laws of Large Numbers (1970) a független valószínűségi változók finomabb tulajdonságaival foglalkozott. Igen nagy hatást gyakorolt a Csörgő Miklóssal közösen írt Strong approximations in probability and statistics című könyve (1981), amelyben a szerzők a független valószínűségi változók részletösszegeinek Wiener-folyamatokkal való approximációjáról közöltek új és meglepő eredményeket.

Későbbi könyvei, a Random walk in random and non-random environments (1990, 2005) és a Random Walks of Infinitely Many Particles (1994) a modern valószínűségszámítás olyan kérdéseivel foglalkoztak, amelyeknek a vizsgálatához radikálisan új módszereket kellett kidolgozni.

Révész Pál 1955-ben lépett be a Bolyai János Matematikai Társulatba. 1960-ban Grünwald Géza Emlékérmet kapott. 1993-tól részt vett a Társulat vezetésében, 1995 és 1997 között a Társulat megbízott elnöke volt, 2006-ban a BJMT közgyűlése tiszteletbeli elnökké választotta.

Számos magyar és nemzetközi elismerésben részesült. 1978-ban Állami Díjat kapott. 1982-ben a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagjává, 1987-ben pedig rendes tagjává választotta. 1989-ben a londoni Európai Akadémia is felvette tagjai sorába, 1983–1985-ben a Nemzetközi Statisztikai Intézet Bernoulli Társaságának elnöke volt. A Carleton Egyetem és a Szegedi Tudományegyetem is címzetes egyetemi tanárává fogadta. Bécsben a statisztikai és valószínűségszámítási tanszéket vezette 1997-ben történt nyugdíjba vonulásáig.

Szőllősyné Somfai Zsuzsa néhány hónapos, méltósággal viselt betegség után 78 éves korában 2022. október 16-án hunyta le a szemét örökre. Az iskola honlapján nagyon szép írás jelent meg róla, ebből és Balga Attila kollégája személyes visszaemlékezéséből állt össze a következő pár sor:

Somfai Zsuzsa 1972–2022-ig tanított az Eötvös József Gimnáziumban, ebből 20 évig, mint a matematikai munkaközösség vezetője. 1989-ben a Beke Manó díj 2., 2014-ben az 1. fokozatával tüntette ki a BJMT. 2010-ben elnyerte a Rátz Tanár úr Emlékdíjat. 1987-től volt szaktanácsadó, 1997–2007-ig fővárosi vezető szaktanácsadó a Fővárosi Pedagógiai Intézetben (amit ő csak ef-pi-áj-ként rövidített). Rengeteg órát látogatott, az ország iskoláinak legjobb matektanárait személyesen ismerte. Rengeteg előadást tartott különböző szakmai továbbképzéseken, tagja volt az OKTV matematikai bizottságának. A Bolyai János Matematikai Társulat évenkénti Rátz László Vándorgyűléseinek egyik fő szervezője volt, 1996–2015-ig töltötte be az Oktatási Bizottság alelnöki posztját. Számára magától értetődő volt, hogy mindennél fontosabb a matematikatanítás jobbításáért végzett lelkiismeretes, áldozatos, sokoldalú tevékenység.

Nemcsak a matematika magas szintű, ugyanakkor a gyerekeknek örömet okozó tanítását tartotta fontosnak, hanem a személyiségformálást, a nevelést is. Szótárában azt a szót, hogy DIÁK, csupa nagybetűvel írták. A mottója ez volt: „Tisztellek, tehát követelek tőled.” Persze azt is nagyon pontosan tudta, hogy mit szabad egy diáktól követelni.

Matematika és filozófia tanárként arra törekedett, hogy tanítványai a világra nyitott, a reál és a humán műveltséget egységben kezelni képes, ugyanakkor empátiával, társadalmi érzékenységgel is bíró felnőttekké váljanak. Ha egy diák elment az iskolából, leérettségizett, az nem jelentette azt, hogy Zsuzsa néni elengedte őt. Ha találkoztak, kikérdezte, mi van vele, nagyon büszke volt, és nagyon örült, ha hallott a sikereiről. Kevés az olyan ember, aki annyira őszintén tudott örülni mások sikerének, mint ő.

Az érettségi találkozókon tanítványai elsősorban azt a szeretet emlegetik, amivel tanáruk középiskolai éveiket egyengette. Kollégái is úgy gondolják, olyan példát kaptak tőle a teljes tanári pálya megéléséhez, amihez felnőni komoly feladat.
Nyugdíjasként bejárt a Heim Pál Gyermekkórházba a beteg gyerekeket tanítani, a kórházi időszakot elviselhetőbbé tenni számukra. Sokaknak fog hiányozni.

ericsson.com

Holló-Szabó Ferenc Ericsson-díjas tanár az idén 25 éves évfordulóját ünneplő Magyar Matematikai Múzeum megálmodója és vezetője, rengeteg kiállítás, matematikai foglalkozás megszervezője, aki augusztusban még a Tudományok Palotájának megalapítását tervezte, 2022. december 4-én 57 éves korában távozott közülünk.

Holló-Szabó Ferenc az ELTE TTK Matematikai Intézet Matematikatanítási és Módszertani Központ munkatársa és az esztergomi Temesvári Pelbárt Ferences Gimnázium tanára volt. **2022. december 21-én 11 órakor helyezik végső nyugalomra a Matematikai Múzeum közelében, a Magyar Szentek Templomában** (1117. Bp. Magyar tudósok körútja 1.)

Néhány mondat a 2019-ben kapott Ericsson-díjának indoklásából:

Meggyőződése, hogy a diákoknak kedvet kell és lehet is csinálni a matematika tanulásához. Egyéni látásmódjával, derűs stílusával a matematikát kevésbé kedvelőket is pillanatok alatt elvarázsolja a legegyszerűbb anyagokból és módon készített eszközeivel. Alapítója és vezetője az ELTE TTK épületében működő Magyar Matematikai Múzeumnak. Évente számos előadást tart a Kárpát-medence különböző iskoláiban, tanártovábbképzéseken és a nagyközönségnek. Tehetséggondozó táborok aktív résztvevője, a KöMaL lelkes népszerűsítője. Többször volt előadó a matematikatanárok Rátz László Vándorgyűlésén, a Varga Tamás Napokon és a KöMaL Ifjúsági Ankéton, emellett a Múzeumok Éjszakája és a Kutatók Éjszakája programok szervezője. Az alábbi videókból, írásokból még jobban megismerhető:

https://www.youtube.com/watch?v=PC81-SOsWoI

https://www.youtube.com/watch?v=zbJ6-Vh-qjI

https://magyarnemzet.hu/.../palotat-erdemelnek-a-magyar....

https://www.elte.hu/.../kituntettek-az-elte-matematikusat...

https://ttk.elte.hu/content/elhunyt-hollo-szabo-ferenc-a-matematika-langlelku-lovagja.t.6255

Dr. Besenyei Ádám, az ELTE Matematikai Intézetének docense, az alkalmazott analízis kutatója, egyúttal középiskolai tanár, országos és nemzetközi matematikai versenyek bizottsági tagja és elkötelezett tudománynépszerűsítő szervezete nem tudott megküzdeni betegségével: 40 évesen 2022. december 8-án hagyott itt bennünket. Róla, az Érintő főszerkesztőjéről külön cikkben emlékezünk meg ugyanebben a számunkban.

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon: ›

Szerkesztő 2022. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Gács András-díjazottak a Matematikus hangversenyen

Gács András, a fiatalon elhunyt matematikus kutatási eredményei mellett sokoldalúságával, nyitottságával és humorával hatott inspirálóan a diákokra. Családja alapította emlékére a díjat, sok diákot motiváló, kiemelkedő fiatal matematikus egyetemi oktatók részére. A jelöltekről a kuratórium dönt, amelynek alapításkori tagjai Gács Zsófia, Keleti Tamás, Nagy Zoltán Lóránt, Sziklai Péter, Szőnyi Tamás, Weiner Zsuzsa, Wiener Gábor. A jutalom a díszoklevélen és a 150-150 ezer forint díjazáson kívül a díj, amelynek formai ihletője egy véges projektív sík, a híres Fano-sík egy modellje, mely Gács András kutatási területéhez, a véges geometriához kötödik.

Díjazott Dániel

A Gács András-díjat 2018-ban és 2019-ben is az ELTE dísztermében tartott Matematikus hangverseny keretében adták át, azonban 2020-ban és 2021-ben nem lehetett megtartani az ünnepélyes díjátadót. Ezért 2022. október 5-én nemcsak az idei, de a tavalyi és a tavalyelőtti díjazottakat is köszöntötték az ELTE dísztermében a hangverseny szünetében.

A Gács András-díjat korábban elnyert matematikusok:

2018:

Röst Gergely, a szegedi SZTE TTIK Bolyai Intézet Matematikai Tanszékcsoport Alkalmazott és Numerikus Matematika Tanszék adjunktusa,

Zábrádi Gergely, az ELTE TTK Matematikai Intézet, Algebra és Számelmélet tanszékének adjunktusa.

(Cikkünket lásd itt.)

2019

Elekes Márton, az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet kutatója, az ELTE Matematika Doktori Iskola oktatója.

(Cikkünket lásd itt.)

2020

Bérczi-Kovács Erika, az ELTE TTK Operációkutatási Tanszékének adjunktusa,

Szeszlér Dávid, a BME Villamosmérnöki és Informatikai Kar Számítástechnikai és Információelméleti Tanszékének docense.

(Cikkünket lásd itt.)

2021

Besenyei Ádám, az ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék docense,

Nyul Gábor, a Debreceni Egyetem Algebra és Számelmélet Tanszékének adjunktusa.

(Cikkünket lásd itt.)

A díjat 2022-ben **Bérczi Kristóf**, az ELTE TTK Matematikai Intézet Operációkutatási Tanszékének adjunktusa, valamint **Frenkel Péter**, az ELTE Algebra és Számelmélet Tanszékének habilitált docense kapta.

Bérczi Kristóf

Bérczi Kristóf az ELTE TTK-n szerzett matematikusi diplomát, majd 2013-ban ugyanitt PhD fokozatot szerzett. Oktatási tevékenységet már 2007 óta folytat a Matematikai Intézet Operációkutatási Tanszékén. A szakmai kuratórium külön értékelte az oktatásban vállalt szerteágazó aktivitását, kiemelve, hogy a fokozatszerzés (BSc, MSc, doktori képzés) valamennyi szintjén oktat, emellett nélkülözhetetlen szerepet vállal a Matematikai Intézet nemzetközi Nyári Iskolája szervezésében.

Bérczi Kristóf kutatói eredményei is kiemelkedők, negyvennél több dolgozata, közel 200 hazai és nemzetközi hivatkozása mutatja szakmai kiválóságát. Bérczi eddigi munkásságát már több díjjal is elismerték, így a Bolyai ösztöndíjjal, MTA Ifjúsági Díjjal, ÚNKP ösztöndíjjal, témavezetőként pedig OTKA és DAAD pályázatokkal. Nagy siker, hogy Lendület pályázatának köszönhetően a következő öt évben saját kutatócsoportot vezethet matroidelmélet témában.

Frenkel Péter

Frenkel Péter 2011 óta dolgozik az ELTE Algebra és Számelmélet Tanszékén, 2020 óta docensként. Korábban tanított a BMGE-n és a Genfi Egyetemen is. Az utóbbi 10 évben 3 MSc és 14 BSc szakdolgozat és két nyertes TDK-dolgozat témavezetője volt.

Frenkel Péter a Bolyai János Matematikai Társulat választmányi tagja. Gyakori résztvevője tudományos minősítő eljárásoknak bírálóként és bizottsági tagként, széleskörű matematikai ismereteinek köszönhetően a matematika több ágában is. 1999 óta tagja a Kürschák József Tanulóverseny Versenybizottságának. A matematikai diákolimpiai csapat felkészítésének évek óta aktív résztvevője, 2020 óta vezetője is. Több alkalommal vállalta a Schweitzer Miklós Emlékverseny szervezőbizottságának titkári megbízatását, különböző nemzetközi matematikaversenyek csapatvezetője vagy zsűrielnöke is volt.

A szakmai kuratórium a kimagasló színvonalú oktatási tevékenysége mellett nagyra értékelte példamutatóan aktív részvételét a matematikai közéletben.

☐ díjazottak ☐ matematikatanítás ☐ alapkutatások

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

Szerkesztő 2022. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Príma matematika

…az értékek elismerésével értéket teremtsen, s a példaképek kiemelésével példát nyújtson…

Az idei, 20. Prima Primissa Díjátadón példát állítva ismét elismerték a matematika értékét. Amíg tavaly a Bolyai János Matematikai Társulat vehette át a magyar oktatás és köznevelés kategóriában a Prima Primissima Díjat, idén **Lovász László**, a Magyar Tudományos Akadémia és az amerikai National Academy of Science rendes tagja, 2014 és 2020 között a Magyar Tudományos Akadémia elnöke nyerte el a Prima Primissima kitüntető címet a magyar tudomány kategóriában. Az Abel-, Kyoto- és Wolf-díjas, Széchenyi-nagydíjas és Bolyai János alkotói díjas, Szent István-renddel, Corvin-lánccal kitüntetett matematikus munkássága részletesen megismerhető az MTA honlapján szereplő tudósításból és annak hivatkozásaiból. Lovász László itt beszél a matematika szépségének és hasznosságának összekapcsolásáról.

A magyar oktatás és köznevelés kategória nyertese pedig idén egy fizikus mestertanár, **Härtlein Károly** lett, aki több száz kísérletező fizikaórát tartott diákoknak és tanároknak, a Műegyetemen, középiskolás rendezvényeken, itthon és a határainkon túl. 2005-ben az ő javaslatára tartották az első Kutatók Éjszakáját. Egyéni módon, nagy sikerrel népszerűsítette a fizikát a Csodák Palotájában és a TV-ben is.

A PRIMA PRIMISSIMA DÍJ
2022-ES JELÖLTJEI

Gratulálunk a 2022-es Prima Primissima-díjazottaknak!

Príma év várható jövőre

2023-ban is meghirdeti a Nemzetközi Matematikai Unió, az IMU a Matematika Világnapját (a Pi-napot). Ebben az évben talán a korábbiaknál több lehetőség lesz arra, hogy magyar iskolák, szervezetek, vagy kisközösségek felkészüljenek az ünneplésre. 2023. március 14. keddi napra esik, és akár az előző hétvégén, akár hétfőn, akár kedden bátran lehet szervezni matematikával kapcsolatos tevékenységeket, kirándulást, vetélkedőt, poszterpályázatot, verset-táncot-éneket. (Csak márc. 15. szerda lesz ünnepnap Magyarországon.) **Matematikát mindenkinek** (Mathematics for Everyone) - hirdeti az ez évi szlogen. Az eseményszervező aloldalon található online űrlap beküldésével felkerülhet minden tervezett matematikai kihívás a nemzetközi térképre, és segítséget is kap a szervező a program hirdetéséhez.

2023 júliusában a Rényi Intézet és az ELTE közös szervezésében Budapesten zajlik majd a **CERME13** konferencia, ami a legnagyobb, kétévente megrendezésre kerülő európai matematikatanítással foglalkozó konferenciasorozat következő tagja. A szervezők mintegy 1000 résztvevőre számítanak.

A konferencia honlapja: https://cerme13.renyi.hu/

A konferenciára előadóként 2023. február 15-ig lehet jelentkezni.

díjazottak konferencia Lovász László

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

Szerkesztő 2022. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Matematikus sikerek: Lendület 2022

A Lendület pályázat idei nyerteseinek köszöntésén ismét két fiatal matematikussal találkozhattunk. *Bárány Balázs* (aki az NKFIH pályázatán is sikeres volt) a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen, *Vidnyánszky Zoltán* pedig az Eötvös Loránd Tudományegyetemen indíthatott kutatócsoportot.

Az MTA 2009-ben létrehozott *Lendület programjának* célja a hazai kutatóbázis megerősítése kimagasló teljesítményű kutatók külföldről való hazahívásával, illetve itthon tartásával. A program azoknak a kutatóknak segít önálló kutatócsoportot alakítani, akik korábban már sikeresen pályáztak rangos kutatási támogatásokra.

Bárány Balázs sikerrel pályázott a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal által finanszírozott Élvonal – Kutatási Kiválósági Programban is. Ez a program a legdinamikusabb alkotási szakaszban lévő, kiváló, a nemzetközi tudományos világ élmezőnyébe tartozó, kutatásaikat magyarországi kutatóhelyen megvalósítani kívánó kutatók számára nyújt jelentős, legfeljebb öt éves támogatást. Mivel a két támogatás egyszerre nem vehető igénybe, Bárány Balázs végül Lendület kutatócsoport helyett Élvonal kutatócsoportot indított.

A 2022-es Lendület program nyertesei. Forrás: mta.hu

Bárány Balázs a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen szerzett doktori címet 2012-ben Simon Károly témavezetése alatt. Fokozatszerzése után posztdoktor kutató volt 2012-től 2013-ig a Lengyel Tudományos Akadémia Matematika Intézetében Michał Rams, 2014-től 2016-ig a University of Warwick-on Mark Pollicott, és 2017-ben pedig a Hebrew University of Jerusalem-en Michael Hochman témavezetésével. 2013-tól 2021-ig, megszakításokkal, az BME Sztochasztika Tanszékének MTA-BME Sztochasztika Kutatócsoportjának tudományos munkatársa, 2018-tól a BME Sztochasztika Tanszékének docense. 2016-ban elnyerte a Bolyai János Kutatási Ösztöndíjat, 2017-ben az NKFI Posztdoktori Kiválósági Program és 2020-ban pedig az NKFI Fiatal Kutatói Kiválósági Program ösztöndíját. 2020-ban a Magyar Tudományos Akadémia Matematika Osztálya Erdős Pál-díjban, 2021-ben az MTA Bolyai-plakett kitüntetésben részesítette. Bárány Balázs 2022-től a Fraktálgeometria és alkalmazásai Kutatócsoport vezetője.

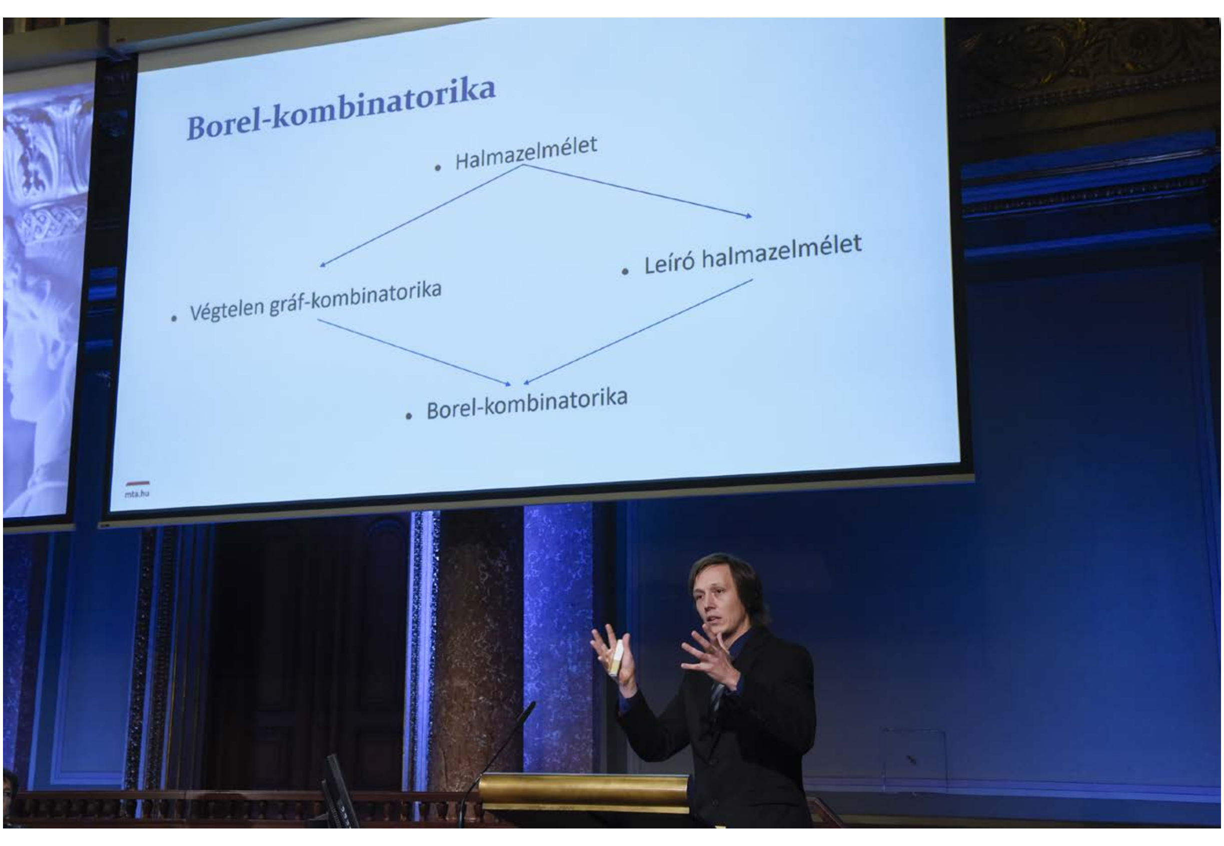
Bárány Balázs a Lendület program díjátadóján. Forrás: mta.hu

A fraktálok olyan végtelenül bonyolult, töredezett alakzatok, melyek valamilyen értelemben minden szinten ismétlődő mintázatot mutatnak. A most induló Fraktálgeometria és Alkalmazásai Kutatócsoport kutatásainak középpontjában ezen alakzatok geometriai tulajdonságainak vizsgálata áll. Az utóbbi években számottevő figyelmet kaptak a dinamikailag definiált fraktál halmazok, különösen az iterált függvényrendszerek (IFS) attraktorai. A csoport fő célkitűzései között szerepel a fraktálok dimenzióelméletének jobb megértése, különös tekintettel a síkbeli és magasabb dimenziós nem-konformális rendszerek Hausdorff, Minkowski és Assouad dimenziójára. Fraktáltulajdonságok azonban természetes módon kerülnek elő a matematika további területein és más tudományterületeken is. A kutatócsoport keretein belül fraktálgeometriai módszereket tervezünk alkalmazni mind számelméleti problémákra, mind fraktális növekedésű hálózatokra, perkolációs modellek geometriai tulajdonságainak vizsgálatára, de célunk további mélyebb kapcsolatok és alkalmazási lehetőségek feltárása is.

Vidnyánszky Zoltán az Eötvös Loránd Tudományegyetemen diplomázott (BSc szakdolgozatát Komjáth Péternél, MSc szakdolgozatát Elekes Mártonnál írta), majd ugyanitt szerzett PhD fokozatot Elekes Márton témavezetésével. Fokozatszerzés után két évig a Rényi Intézetben dolgozott, majd a York University-n, a University of Toronto-n, a Bécsi Egyetemen, és a California Institute of Technology-n volt posztdoktori ösztöndíjas.

Vidnyánszky Zoltán a Lendület program díjátadóján. Forrás: mta.hu

Vidnyánszky Zoltán tudományos munkásságát 2016-ban Grünwald Géza emlékéremmel, 2018-ban Turán Pál-díjjal ismerték el. 2022-ben a Lendület Programnak köszönhetően visszatért Magyarországra, jelenleg az Eötvös Loránd Tudományegyetem Analízis Tanszékének munkatársa, az MTA–ELTE Lendület Borel Kombinatorika és Komplexitás Kutatócsoport vezetője.



Vidnyánszky Zoltán a Lendület program díjátadóján. Forrás: mta.hu

A tapasztalat azt mutatja, hogy a végtelen gráfok kombinatorikus tulajdonságai sokszor anti-intuitívak (pl. a méltán hírhedt Banach–Tarski paradoxon könnyen megfogalmazható bizonyos végtelen gráfokban teljes párosítások létezésével). Az alapötlet a Borel-kombinatorika tárgyköre mögött, hogy az ilyen paradox viselkedéstől úgy szabadulnak meg, hogy csak „szép” (pontosabban Borel-) objektumokat vizsgálnak. Meglepő módon a Borel-kombinatorikában tapasztalt viselkedés sokszor tükrözi a nagy, de véges számítógépes hálózatokban tapasztaltakat. Az elmúlt öt évben konkrét összefüggéseket is sikerült bizonyítani a Borel-kombinatorika és a számítástudományi, ú.n. LOCAL modell között. A kutatás egyik célja, hogy ezeket az összefüggéseket jobban megértsék, és a nagy véges és definiálható végtelen közötti átjárást kiépítsék.

☐ alkalmazott matematika ☐ gráfok ☐ MTA

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

Csapodi Csaba, Oláh Vera, Szitányi Judit 2022. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

34. Varga Tamás Módszertani Napok

A tavalyi évtől eltérően a 34. Varga Tamás Módszertani Napokat 2022. november 4-én és 5-én új formában, személyesen (az ELTE-n) és online részvétellel vegyesen rendeztük meg. Ezzel egyfelől szerettünk volna lehetőséget adni a személyes előadásra, részvételre, együttlétre, beszélgetésekre, amit mindannyian hiányoltunk az elmúlt időszakban. Másfelől azokra is gondoltunk, akik valamilyen oknál fogva nem tudnak személyesen részt venni, mégis szívesen adnak elő vagy vesznek részt hallgatóként a hétvégi rendezvényen.

Vancsó Ödön és Csapodi Csaba megnyitják a 34.VTMN-t.

Néhányan a résztvevők közül

A konferencia honlapján a programon és a rövid kivonatokon kívül megnézhetők a pénteki előadások videói, és néhány szombati előadás, illetve prezentáció.

Péntek délután mintegy 50 fő részvételével először megemlékeztünk az októberben elhunyt Somfai Zsuzsáról, akinek az elvesztése mindannyiunk számára nagy fájdalmat jelent. **Balga Attila**, az Eötvös József Gimnázium igazgatóhelyettese meghatóan szépen beszélt Zsuzsáról, akivel több évtizede együtt tanított, majd több résztvevő is hozzátette a saját gondolatait, emlékeit.

A megemlékezés után **Vancsó Ödön** (központvezető egyetemi docens, ELTE TTK) tartott előadást *Hipotézis vizsgálat az emelt szintű érettségin?* címmel. Az előadásban halhattunk az MTA−Rényi Intézet−ELTE Matematikadidaktikai Kutatócsoport keretei között indult nagyszabású kísérlet koncepciójáról, első lépéseiről, iskolák csatlakozási lehetőségeiről.

Ezután **Stettner Eleonóra** (egyetemi docens, MATE) *Kalandozások az oktatás univerzumában a Poliuniverzummal* címmel tartott előadást a PUSE projekt eredményeiről és a PUNTE projekt terveiről. Ez utóbbi Erasmus+ program a tanárképzésre, tanártovábbképzésekre helyezi a hangsúlyt.

Az előadás után az idei Varga Tamás Díjak átadására került sor. Az idei három díjazott: **Fried Katalin** (Korándi József laudációja), **Konrád Ágnes** (Szitányi Judit laudációja) és **Wéber Anikó** (Zsinkó Erzsébet laudációja).

Zsinkó Erzsébet méltatja a díjazott Wéber Anikót

Wéber Anikó, Fried Katalin,Konrád Ágnes

A szombat délelőtti program négy párhuzamos szekcióban zajlott. Az egyes szekciókban 20-40 fő vett részt, összesen mintegy 100 érdeklődő hallgatta meg a módszertani előadásokat, workshop-okat.

Előadás szekció

A szekció első előadása két részből állt. A **BSME diákjai, Barbarics Márta** vezetésével mutatták be kutatásaik eredményét angolul. Az első előadás a Pósa-módszer felsőoktatási hatásairól, a második a felfedeztető matematikaoktatás felsőoktatásban való megjelenéséről, fogadtatásáról szólt.

Ezután **Munkácsy Katalin** (ELTE) *Intuitív bevezetés az analízis tanulásához* címmel tartott előadást, amelynek során az analízisben vizsgált fogalmak szemléletes és pontos definiálását járta körül.

Egy rövid szünetet követően **Kántor Sándor** (Debreceni Egyetem) *A tananyagon túli matematikáról* szóló előadásában beszélt a matematika tanításának azokról a vonásairól, amelyek a tanulmányi versenyeken, illetve a felsőoktatásban jól szereplő diákok és tanáraik számára lehetnek fontosak.

Végül **Fülöp Zsolt**: *Függvénytani ismeretek alkalmazása az algebrai gondolkodásmód kialakításában* című előadásában az aritmetikai módszerekről az algebra eszközeire való áttérés problematikájáról beszélt. Az algebra oktatásának legfőbb akadályát abban látja, hogy a 7. évfolyamos tanulók többségénél még nem történt meg az áttérés a strukturális gondolkodásra. Az algebrai módszerek tanításának másik nehézsége, hogy a műveleteket ki kell terjeszteni betűszimbólumokra is, amelyek bizonyos esetekben ismeretlent, máskor pedig változót jelölnek. Az előadó által bemutatott elképzelés szerint a függvénytani ismeretek tanításának már az algebrai gondolkodásmód kialakításának kezdetén jelen kell lennie az oktatásban.

Workshop szekció

A szekciót **Szende Zsuzsa** nyitotta, aki *Az „okos" számológép (Casio fx 991CEX) használata az érettségin* címmel az előző évek érettségi feladataiból válogatott, különböző típusú feladatok megoldását, trükköket, alkalmazásokat, funkciókat mutatott be.

Utána **Kiss Anna** (ELTE), **Németh Anna** és **Szalai Lívia**: *Variációk egy témára – maradékokkal számolunk játékosan* címmel számelméleti játékokat hozott, sajátélmény, háttérinformáció és beszélgetés formájában. A bemutatott-eljátszott játékokat mindhárman játszották saját csoportjaikkal, és hatodikos számelméleti kísérletben is. Ezek a kontrollcsoportos mérések alapján közkedveltek és eredményesek voltak.

...maradékokkal számolunk játékosan...

Rövid szünet után **Saxon Szász János** és **Dárdai Zsuzsa** tartottak foglalkozást, az itt részt vevők felfedezhették a Poliuniverzum lehetséges szerepét például a geometriai és logikai készségek, az algoritmikus gondolkodás fejlesztésében, vagy a kombinatorikai problémák vizuális megjelenítésében.

Végül **Bogya Norbert** a Medve Matekról, a vándorlós csapatversenyről adott elő. Előadása során bemutatta a verseny általános jellegét. Motivációs rendszerükkel igyekeznek elérni, hogy a diákok folyamatos visszajelzést kapjanak arról, hogyan teljesítenek éppen a versenyben. Beszélt legújabb technológiai fejlesztésükről, a Medve Matek GO platformról, amellyel a diákok az elmúlt szezonban már okostelefon segítségével is versenyezhettek.

Online szekció

Azok, akik online kapcsolódtak be a Varga Tamás Napok szombat délelőttjébe, három különböző témájú prezentációt követhettek.

Marczis György (Gyula) tanítványaival közös kutatómunkájának tapasztalatait osztotta meg *magasabb fokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek* kedvcsináló feladataival, a jutalomút zenés képsoraival, végül felidézve Somfai Zsuzsa emlékét. A prezentáció a honlapról elérhető.

Ambrus Gabriella (ELTE) azt fejtette ki, *milyen lehetőségeket rejt(het) a szöveges feladatok szövege,* mik a tipikus buktatói a szöveges példák megértésének és megoldásának.

Máder Attila (Szeged) arról beszélt, hogyan lett *PhD dolgozatából kutatótanári program,* amelynek témája néhány év elteltével a középiskolai matematikaoktatás *mobileszközökkel segített* lehetőségeinek feltárása, a matematikai témájú applikációkban rejlő lehetőségek kiaknázása a felfedeztetésközpontú matematikaoktatás eszközrendszerén keresztül. A prezentációt megtekinthetik a honlapon.

Matematikát Tanítók Klubja – alsó tagozaton matematikát tanítók online szekciója

Pintér Klára (SZTE): *A Kalmár László Matematikaverseny az alsó tagozaton* című előadása

nagyon izgalmas volt, igen szép feladatokkal, és ezek megoldásaival. Hangsúlyozta a diszkusszió jelentőségét, azaz a már megoldott feladaton is érdemes tovább gondolkodni. A matematika minden területéről igyekezett példákat hozni. Külön érdeme, hogy szóba kerültek olyan fejlesztő játékok vagy tevékenységek, amelyekkel még a nehezebb feladatok is könnyebben érthetőek.

Balogh Tamás László: *Medve Matek: csapatverseny a szabadban.* Minden fontos információ, érdekesség és újdonság elhangzott, (csakúgy, mint Bogya Norbert workshopjában) ami egyre népszerűbbé tette a különleges, szabadtéri versenyt. Örvendetes, hogy egyre több helyszínen lehet bekapcsolódni.

Csordás Péter (MATEGYE Alapítvány): *Zrínyi Ilona Matematikaverseny - feladatok az alsó tagozaton* előadásának értéke, hogy bemutatta egyes feladatok megoldási statisztikáját. Ez azért hasznos, mert az adatok alapján a tipikus hibák kiküszöbölhetők lehetnek mind a feladatsorok összeállításában, mind a megoldásuk során. Sok praktikus tanács is elhangzott, amivel a tanítók sikerrel készíthetik fel diákjaikat a versenyre.

Szombat délután a **Varga Tamás Alapítvány** kuratóriumának szervezésében **Csapodi Csaba** vezetésével mindenki számára nyitott megbeszélést folytatott mintegy 30 résztvevő arról, hogy miként lehetne a matematika tanítását, tanulását eredményesebbé tenni. Néhány az elhangzott ötletek közül: az iskolák matematikai eszközeit kellene fejleszteni; foglalkozások szülőknek; tanártovábbképzések fejlesztése; videófelvételek készítése és nyilvánosságra hozása; internetes adatbázist létrehozni minőségi matematikai tartalmak számára; felajánlások iskolai munkaközösségek számára előadások tartására; egyetemi tanárképzésben nagyobb hangsúlyt helyezni Varga Tamás munkásságára; matematikai hátterű társasjátékok fejlesztése otthoni használatra. A Varga Tamás Alapítvány ezek közül az ötletek közül elkezdi néhánynak a megvalósítását, amiről a jövő évi Varga Tamás Napok keretében számolunk be.

Csapodi Csaba, Oláh Vera, Szitányi Judit

díjazottak Varga Tamás konferencia

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

AZ **INTERJÚ-PORTRÉ** MENÜPONT JÓL VAGY KEVÉSBÉ ISMERT MATEMATIKUSOKAT, VAGY OLYAN, EGYKOR MATEMATIKUSKÉNT VÉGZETTEKET SZERETNE BEMUTATNI, AKIK MA MÁS SZAKMA ELISMERT KÉPVISELŐI, SPORTOLÓK, MŰVÉSZEK...(ROVATSZERKESZTŐ: *OLÁH VERA*.)

Faragó István, Sikolya Eszter, Simon Péter

2022. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Besenyei Ádám (1982–2022)

Nehezen felfogható és feldolgozható veszteség érte a magyar matematikusok és matematikatanárok közösségét, egyúttal az Érintő szerkesztőségét. Besenyei Ádám, az ELTE Matematikai Intézete Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék docense 2022. december 8-án, életének 41. évében eltávozott közülünk. Egy nagyon nagy tudású, széles látókörű, rendkívül szerény, mindenki által tisztelt és szeretett kollégát veszítettünk el.

Ács Katalin, Rotter Barbara

2022. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Reményi-díj néven születik újjá a Graphisoft-díj

Két év szünet után 2022-ben más néven éled újra a matematikatanárok körében nagy megbecsülésnek örvendő Graphisoft-díj. A népszerű elismerés új keretek között kerül kiosztásra, de a díjazottak kiválasztási módszere nem változik. A díj történetéről, a névadó Reményi-házaspár életéről (benne a komplex matematikatanítási kísérletről) és az első díjátadóról *Ács Katalin* számol be.

Bérczi-Kovács Erika

2022. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Ugródeszkák matek szakon – Palotay Dorka

Palotay Dorka alkalmazott matematikus egy, az internetszolgáltatóknak különféle szolgáltatásokat nyújtó cégnél dolgozik, malware, azaz kártékony szoftver elemzéssel foglalkozik. *Bérczi-Kovács Erika* negyedik interjúja következik az Ugródeszkák matek szakon sorozatában.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

Faragó István, Sikolya Eszter, Simon Péter 2022. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Besenyei Ádám (1982−2022)

Nehezen felfogható és feldolgozható veszteség érte a magyar matematikusok és matematikatanárok közösségét, egyúttal az Érintő szerkesztőségét. Besenyei Ádám, az ELTE Matematikai Intézete Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék docense 2022. december 8-án, életének 41. évében eltávozott közülünk. Életének teljében, alkotó munkásságának közepén ragadta el tőlünk súlyos betegsége. Rövidre szabott életét a kutatás–tanítás–tudománynépszerűsítés hármasa jellemezte, és mindhárom területen örökké maradandót alkotott. A veszteség szinte pótolhatatlan, személyében a magyar tanárképzés, valamint az alkalmazott analízis kutatásának kulcsszereplője távozott, nagy űrt hagyva maga után.

Besenyei Ádám alkalmazott matematikusi oklevelét 2005-ben szerezte az ELTE-n, szakdolgozatát nemlineáris parabolikus funkcionál-differenciálegyenletrendszerek témában írta. 2009-ben szerzett PhD-fokozatot (dolgozatának címe „On nonlinear systems containing nonlocal terms”, témavezető: Simon László), majd 2015-ben habilitált az ELTE TTK-n (habilitációs dolgozatának címe: „Számok és mátrixok közepei és egyenlőtlenségei”). 2008 óta folyamatosan az ELTE TTK Matematikai Intézet Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszékén dolgozott. Fontos állomást jelentett az életében, amikor 2019-ben középiskolai matematikatanár diplomát szerzett, majd 2020-tól az Óbudai Árpád Gimnáziumban tanított. 2014 és 2017 között tudományos munkatársként dolgozott az MTA-ELTE Numerikus Analízis és Nagy Hálózatok Kutatócsoportban.

Aktívan részt vett a kutatásban, az oktatásban, és a tudományos közéletben egyaránt.

Kutatási területe elsősorban az analízis, ezen belül a parciális differenciálegyenletek és közepek. Nagyon komolyan foglakozott a matematikatörténettel is. Összesen 25 tudományos és 11 ismeretterjesztő munkája került publikálásra, többségük vezető nemzetközi folyóiratokban.

Az *egyetemi oktatásban* 2004 óta számos területen vett részt, eleinte gyakorlatvezetőként, majd később előadások tartásával. Kiemelendők a matematika tanárképzés keretében tartott analízis, illetve a matematikus hallgatóknak tartott parciális differenciálegyenletek kurzusai, amelyeket 2012 óta rendszeresen oktatott. Simon Lászlóval és Komornik Vilmossal közösen 2010-ben ,,Parciális differenciálegyenletek’’ címmel írt egyetemi jegyzetet, amelynek javított kiadásán haláláig nagy lelkesedéssel dolgozott. Összesen 19 BSc, 2 MSc, 7 matematikatanári szakos hallgatónak volt szakdolgozati, egy hallgatónak pedig PhD témavezetője. Speciálelőadásai (pl. „A differenciálegyenletek csodálatos világa”, „Kalandozás a nevezetes egyenlőtlenségek világában” stb.) mind nagy népszerűségnek örvendtek a hallgatók körében.

Ismeretterjesztő és közéleti tevékenysége is példaértékű volt. Nagyon szeretett tanítani és fontos volt számára a tudományos ismeretterjesztés, a középiskolások figyelmének felhívása a matematika csodáira, összefüggéseire a társadalom- és természettudományokkal. Középiskolásként részt vett a KöMaL versenyein, később egyetemi hallgató korától kezdve 20 éven keresztül több feladata és cikke jelent meg a lapban. Az Ifjúsági Ankéton is nagy hatást tett a gyerekekre kiugróan színvonalas prezentációja. Számos ismeretterjesztő rendezvény előadója, az ELTE TTK Matematikatanár-klubjának szervezője és résztvevője volt, és rendszeresen adott elő a Kutatók éjszakáján az ELTE TTK-n. Az OKTV Matematika III. kategória, a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, valamint az Arany Dániel Matematikai Verseny Kezdők versenybizottságának is tagja volt. A 2016 óta megjelenő Érintő c. folyóirat szerkesztőségének egyik legtevékenyebb tagja, először a lap rovatvezetője, majd később főszerkesztője volt.

Életpályáját több díj és elismerés övezte. Ezek közül kiemelendő a Grünwald Géza emlékérem (2011), valamint a Gács András-díj (2021). A legbüszkébb a hallgatók által odaítélt Kar Kiváló Oktatója címre volt, amelyben − rendkívül kivételes módon − két alkalommal, 2018-ban és 2020-ban is részesült.

Ádám szerette a természetet, gyakran járt kirándulni, kerékpározni. Rendszeres színházlátogató volt, és a közélet iránt is nagyon fogékony volt. Sok időt áldozott matematikatörténeti kutatásokra, számos, eddig ismeretlen történeti összefüggésre derített fényt, amellyel előadásait is rendszeresen színesítette. Szerette a könyveket, matematikai tárgyú könyvekből kisebb könyvtárra valót gyűjtött össze.

Besenyei Ádámban egy nagyon nagy tudású, széles látókörű, rendkívül szerény, mindenki által tisztelt és szeretett kollégát veszítettünk el. Hiánya egyelőre felfoghatatlan.

Emlékét megőrizzük a szívünkben!

Faragó István, Sikolya Eszter, Simon Péter

ELTE Matematikai Intézete Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Besenyei Ádám honlapja publikációival, oktatási anyagokkal, számos segédanyaggal, zárthelyikre felkészítő feladatsorokkal és kedvenceivel: https://abesenyei.web.elte.hu/

☐ nekrológ

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

Ács Katalin, Rotter Barbara 2022. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Reményi-díj néven születik újjá a Graphisoft-díj

Hogyan lett a Graphisoft-díjból Reményi-díj

A Graphisoft-díjat Bojár Gábor a szoftver cég akkori vezetőjeként alapította 1998-ban, és az erre a célra létrehozott alapítvány működtette 22 éven keresztül. Bojár Gábor továbbra is meggyőződéssel vallja, hogy a magyar matematikaoktatás hagyományaira büszkék lehetünk, ez olyan nemzeti kincs, amely az informatikai forradalom korában különösen felértékelődik. Egy szoftver cég sikere azon múlik, hogy mennyire jól képzett és tehetséges szakemberek dolgoznak ott, így nem kérdés, hogy a szakember utánpótlásba, tehát a minőségi oktatásba kell befektetni. Ezzel a céllal hozta létre az alapító a díjat, és most ugyanezt a küldetést viszi tovább új formájában is.

2010-ben Bojár Gábor megalapította az Aquincumi Technológiai Intézet (AIT-Budapest) nevű felsőoktatási vállalkozást, amely informatikát tanuló diákoknak nyújt rendkívül magasszintű egyetemi részképzést. Az intézményben az ország legjobb professzorai tanítanak, és mára partnere a legjobb 50 észak-amerikai egyetem, amelyek évről évre legtehetségesebb diákjaikat küldik Magyarországra tanulni. Máig az AIT kurzusain több mint 1000 diák tanult, akik azóta a világ legsikeresebb szoftver cégeinél dolgoznak. A magyar diákok tandíjmentesen vesznek részt az angol nyelvű oktatásban, és a magas szintű kurzusok mellett a velük együtt tanuló amerikai diákok páratlan kapcsolati hálót jelenthetnek későbbi karrierjük során.

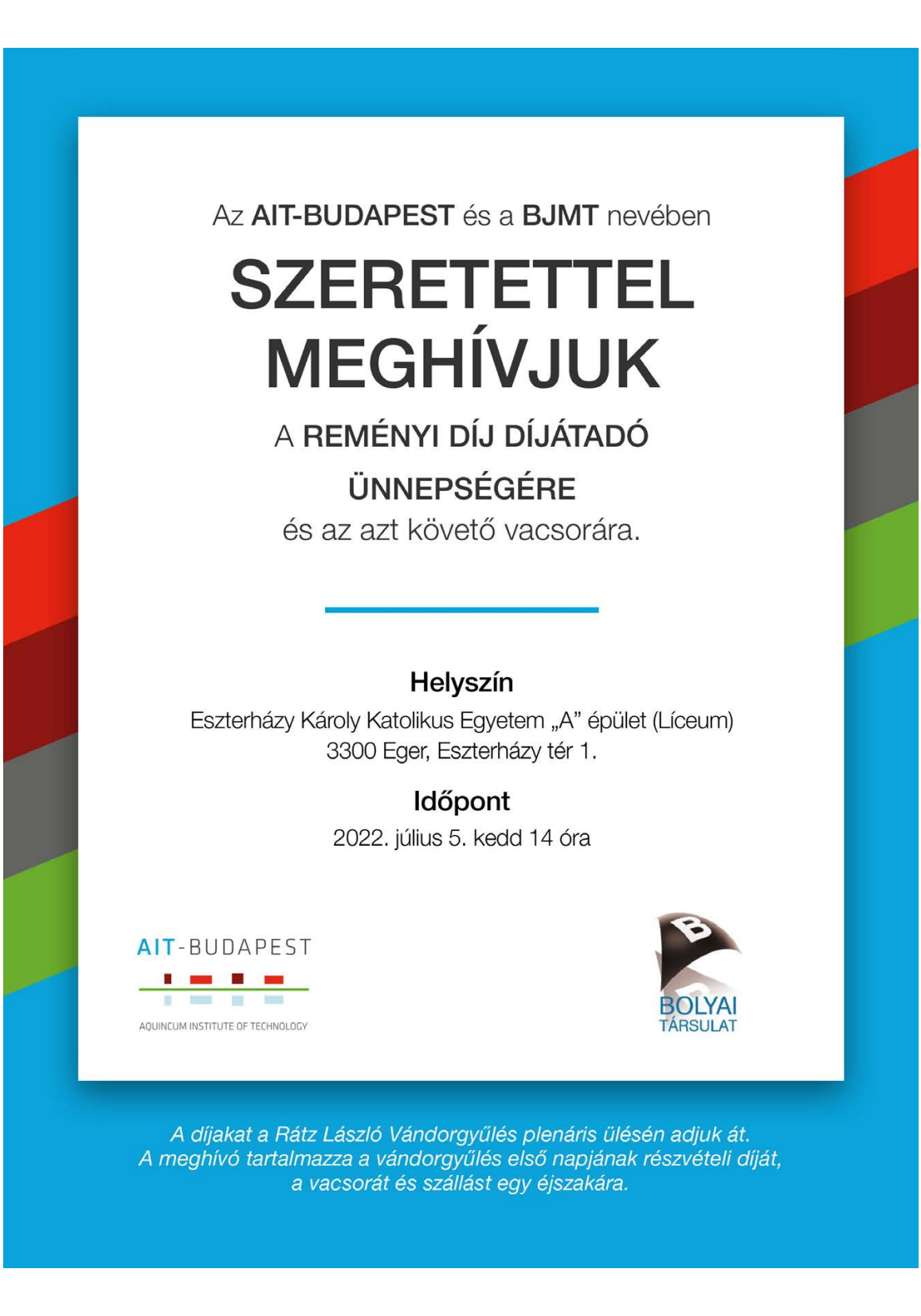
Az AIT mindezen túlmenően is támogatja a magyar matematikaoktatást. Korszerűen felszerelt épületét és infrastruktúráját rendszeresen használják a Pósa Lajos nevével fémjelzett Gondolkodás Öröme Alapítvány tehetséggondozó matematika táborai, a hasonló módszertant alkalmazó ProgTábor, az EGMO (Európai Lányok Matematikai Olimpiája) magyar csapata, illetve sakktáborok és sakkversenyek. Ezen kívül az AIT jelentős anyagi támogatást nyújtott a MATFUND Alapítvány keretein belül megrendezésre kerülő KöMaL matematika-fizika táboroknak is.

2022-től tehát – missziójával összhangban – az AIT égisze alatt születik újjá a Graphisoft-díj, és az alapító Bojár Gábor, tisztelegve saját egykori középiskolai matematikatanára előtt, a díjat Reményi-díjra nevezi át.

Bojár Gábor megnyitja a díjkiosztót

A Reményi-díjról röviden

A díj anyagi hátterét az Aquincumi Technológiai Intézet (AIT-Budapest) biztosítja és a díjazás lebonyolítását a Bolyai János Matematikai Társulat (BJMT) veszi át. A díjkiosztó évente egy alkalommal a legrangosabb szakmai fórumon, a BJMT által szervezett Rátz László Vándorgyűlés keretein belül kerül megrendezésre. Évente 20 díjat osztanak ki, amelyek összege egyenként bruttó 300.000 Ft. A kiválasztás módszere egy egyedi algoritmus alapján történik. A díjakat az adott év Arany Dániel Matematika Tanulóverseny és az OKTV matematika verseny legjobb helyezettjeinek felkészítő tanárai kapják.



Az AIT-BUDAPEST és a BJMT nevében

SZERETETTEL MEGHÍVJUK

A REMÉNYI DÍJ DÍJÁTADÓ ÜNNEPSÉGÉRE
és az azt követő vacsorára.

Helyszín
Eszterházy Károly Katolikus Egyetem „A" épület (Líceum)
3300 Eger, Eszterházy tér 1.

Időpont
2022. július 5. kedd 14 óra

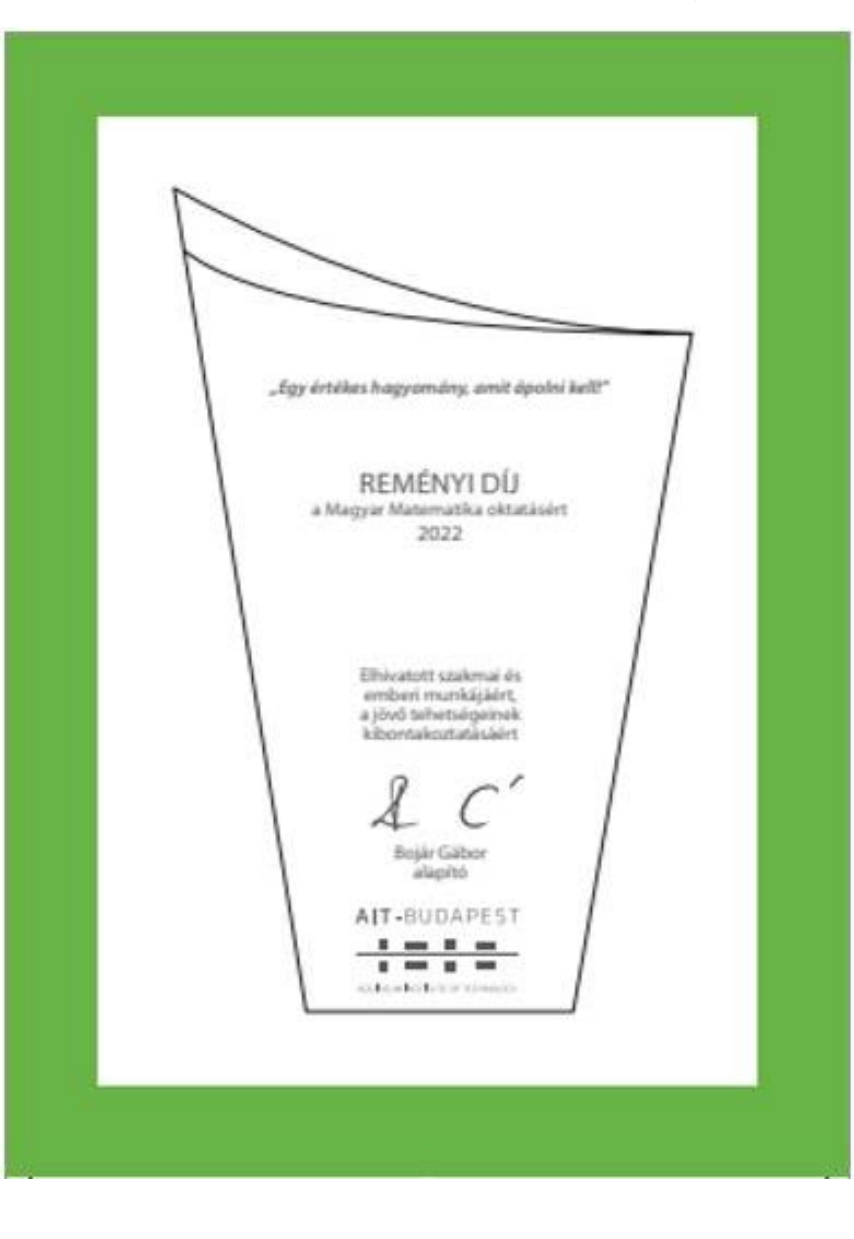
AIT-BUDAPEST
AQUINCUM INSTITUTE OF TECHNOLOGY

BOLYAI TÁRSULAT

A díjakat a Rátz László Vándorgyűlés plenáris ülésén adjuk át.
A meghívó tartalmazza a vándorgyűlés első napjának részvételi díját,
a vacsorát és szállást egy éjszakára.

A díjazottak köre és kiválasztása

- A díjazott tanárok az adott tanév (következő pontban megnevezett) matematikai versenyein résztvevő legjobb középiskolás diákjainak felkészítő tanárai közül kerülnek ki. A Reményi díjra nem lehet pályázni, sem ajánlani valakit, hanem kizárólag a tanítványok versenyeredményei révén lehet bejutni a jelöltek közé. A legutóbbi évek díjazottjainak kiejtése után egy algoritmus segítségével jelöli ki a bizottság a tanév 20 díjra érdemes tanárát.
- A díj két matematika verseny összesen 9 kategóriáját veszi számításba: az Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny (Kezdő I., II., III.; Haladó I., II., III.) és az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny (I., II., III.) matematika kategóriáit.
- A diákok által megjelölt felkészítő tanárok helyezések és kategóriák szerint rendezett névsora a kiindulási pont.
- A díjazott tanárok kiválasztását megelőzi az adott iskola igazgatójának „hitelesítő" emailje, miszerint a tanár valóban az adott versenyző tanára az adott iskolában.
- Ha egy versenyző neve mellett több felkészítő tanár szerepel, akiknek „hitelesítése" megtörtént, akkor mindegyikük jogosult a teljes díjra.
- Az ismétlődések elkerülése miatt a díjat legfeljebb 8 évente lehet újra megkapni.
- A korábban Rátz tanár úr-díjjal jutalmazott tanárok nem jogosultak a Reményi díjra.
- A bizottság szem előtt tartja még, hogy az OKTV és az Arany Dániel Tanulói verseny tekintetében a díjazott tanárok eloszlása arányos legyen.


„Egy értékes hagyomány, amit ápolni kell!"
REMÉNYI DÍJ
a Magyar Matematika oktatásért
2022
Elhivatott szakmai és emberi munkájáért, a jövő tehetségeinek kibontakoztatásáért
Bojár Gábor
alapító
AIT-BUDAPEST

A névadók: Reményi Gusztáv és Reményi Gusztávné, Kata néni

Reményi Gusztáv 1921-ben született Szarvason. A kiterjedt tanítócsalád harmadik generációjához tartozik. Fiatalabbik nővére is 10 évvel idősebb nála, egyetlen fiú. Édesanyja anyanyelve szlovák, ő élete végéig megőrizte jellegzetes akcentusát. Az első négy elemi iskolai osztály után kilenc gimnáziumi év következett a szarvasi evangélikus Vajda Péter gimnáziumban. Egyenletesen jól tanul, ezekben az években szereti meg a latin és a görög nyelvet. Érdekelték a hittel kapcsolatos kérdések, több éven keresztül tanult gyorsírást is, amit élete végéig hasznosított különböző módokon. Középiskolai éveiben kiugró a zene és ezen belül az aktív zenélés szeretete, úgy tűnik indexéből, hogy minden, középiskolájában akkor elérhető zenei tárgyat tanult, érdeklődésből. Otthonából a kórus, a zongora és az orgona szeretetét is kapta, ez utóbbi lett a kedvenc hangszere. Középiskolai hegedűtanára, Szederkényi Nándor biztatására érettségi után a Zeneakadémiára iratkozik be, itt hegedű szakon két évet, középiskolai énektanár- és karvezető szakon egy évet végez el. Itt is jól tanul, szorgalmát külön is több tanára kiemeli. Mégis pályát változtat, Szegeden kezdi el a matematika-fizika szakot. Döntésében szerepe volt Szele Tibornak, akivel közeli barátságba került. Két évig Szegeden a Tudományegyetem Matematikai Intézetében megbízott díjazás nélküli gyakornok. Csak nemrégen derült ki a Reményi-család birtokában lévő dokumentumokból, hogy Kalmár Lászlóval és feleségével is baráti kapcsolatban volt. Diplomájának megszerzése után Szarvason, egykori iskolájában óraadó, de a Tessedik Sámuel Mezőgazdasági Iskolában, sőt a helybeli evangélikus iskolában is tanít. Ezután kerül Nyíregyházára, az ottani evangélikus gimnáziumba. A város több középiskolájában is tanít. Érdekes az Építőipari technikumba kerülése. Ennek oka az, hogy „az egész megyében csak egyetlen tanár van, aki ábrázoló geometriát is tud tanítani." A Zrínyi Ilona leánygimnáziumban tanít legtovább. 1958 januárjától matematikából megyei szakfelügyelő. 1959 szeptemberétől a budapesti Apáczai Csere János Általános Iskola és Gimnáziumhoz kerül, amelyik akkor az ELTE gyakorlóiskolája is volt. Itt általános- és középiskolában is tanított. Vezető tanár beosztásba került, vagyis a tanárjelöltekkel való foglalkozás is feladatai közé tartozott.

1965-től került a Fazekas gimnáziumba, ahol főleg matematika tagozatos osztályokat tanított. Innen 1985-ben ment nyugdíjba, haláláig kötődött az iskolához. Részt vett a Fasori evangélikus gimnázium újraindulásának előkészítő munkáiban. Itt matematikatanár és az egyik első igazgatóhelyettes is. Később, a Lónyay Gimnáziumban is helyettesített, de a Trefort utcában is – hosszabb időn keresztül.

Néhány egyéb munkája: BME Gépészmérnöki Kar Felvételi előkészítő tanfolyam, ELTE TTK Elemi matematika gyakorlat, az ELTE TTK matematika szakának levelezős oktatásában tanulókört vezetett két éven keresztül, az '50-es évek első felében még Nyíregyházán. Budapesten is több éven keresztül tartott konzultációkat matematika szakos levelező hallgatóknak.

A Bolyai János Matematikai Társulatba 1951-ben lép be. A Társulat nyíregyházi tagozatában , amelynek hamarosan titkára lesz, egyaránt dolgozik a város matematikatanárainak továbbképzésével és a matematika iránt érdeklődő diákok órákon kívüli képzésével. Később különböző tisztségeket tölt be a társulatban, ezen kívül főleg a középiskolai matematika-versenyek lebonyolításában és javításában vesz részt.

A Varga Tamás körül kialakult reformmozgalomba a kezdetektől fogva bekapcsolódik: a Reményi-házaspár Varga Tamással rendkívül aktív szakmai és baráti levelezést folytat, főleg 1951 és 1959 között. Hivatalosként induló szakmai kapcsolatuk hamar mély barátsággá alakul.

1960 nyarán Reményi Gusztáv feleségével együtt részt vesz Dienes Zoltán kéthetes nyári budapesti tanfolyamán, ahol délelőttönként Dienes Zoltán foglalkozott egy hirtelenében összeverbuvált gyerekcsoporttal, itt a felnőttek délelőttönként megfigyelték a gyerekekkel végzett munkát, délután pedig a tanároknak volt program. A gyerekcsoportban én is résztvevő voltam. Igyekvő tízéves kislányként az első alkalomra számtanfüzetet, ceruzát és radírt vittem. De a füzetembe legfeljebb a csoporttársaim címét írtam be, mást nem. Ugyanis az előre elkészített igen hosszú asztal tele volt matematikai játékokkal. Mi gyerekek délelőttönként agyonjátszottuk magunkat, így éltem át a foglalkozásokat. A tanfolyam végén Dienes Zoltán meghívta a gyerekcsoportot egy nagy fagyizásra a Vörösmarty cukrászdába. A rengeteg játékot persze tudtam később hasznosítani.

Reményi Gusztáv számára természetes volt az állandó önképzés. Feladatmegoldással mindig is szívesen foglalkozott. A Matematikai Lapok tanároknak szánt feladatrovatot indított az 50-es években: ide megoldásokat küld be rendszeresen, néha kitűzésre szánt feladatot is, de előfordul, hogy Varga Tamás helyett, aki ennek a rovatnak a vezetője volt, egy-egy feladat beérkezett megoldásait is ő nézi át először.

Később rovatvezető lesz A matematika tanítása c. folyóirat feladatmegoldó rovatánál. Ezt a munkát Tolnai Jenőtől vette át, majd pár év múlva Pogáts Ferencnek adta tovább. Ebbe az akkor igen fontos folyóiratba sok kollega küldte be feladatmegoldásait, a környező országokból is, egypár egyetemi hallgató is, sőt egy-egy bátrabb középiskolás diák is. De Geőcze Zoárd László, aki Ady Endre barátjának, Geőcze Zoárd matematikusnak a családjához tartozott, Brazíliából jelentkezett feladatmegoldásaival, kitűzésre szánt feladataival és kedves hangú kísérő leveleivel.

A Polygon folyóiratba is küldött be Reményi Gusztáv feladatmegoldásokat és kitűzésre szánt feladatokat.

Rengeteg tanítványa volt, nagyon különböző életpályákkal, sokan élete végéig tartották vele a kapcsolatot. Volt tanítványainak később is sokszor és szívesen segített, amiben tudott. Szenvedélyesen szeretett tanítani és ugyanígy szerette a matematikát is. A Fazekas gimnáziumban érezte magát otthon.

Hűséges volt evangélikus hitéhez. Az evangélikus egyházhoz való viszonya ambivalens volt.

Felesége matematikai és matematikadidaktikai képességeit ő fedezte fel, és rábeszélésére fordult Reményi Gusztávné érdeklődése e terület felé. Töretlen kitartással tanulta vele együtt naponta újra először a matematikát, majd az ábrázoló geometriát, és sokszor a kívülálló számára láthatatlan módon is naponta segítette észrevételeivel és tanácsaival.

Gyermekeinek kiskorukban minden este felolvasott, majd ő kezdte őket tanítani hegedűre is, szolfézsra is, egy kis kamarazenélés is volt még Nyíregyházán, amelynek szimfonikus zenekarában koncertmesterként láttam és hallottam őt. Pár év múlva a gyerekek simán tudták folytatni a zenei tanulmányokat a megfelelő osztályban már Budapesten. Nevelésükre nagy gondot fordított.

1975 után pár éven keresztül feleségével együtt volt a középbizottság az Arany Dániel matematikai versenyen. Vásárhelyi Éva, aki ezekben az években benne volt a feladatkitűző bizottságban, majd a javítás utolsó fázisában dolgozó csúcsbizottságban is, így emlékszik vissza:

Az általuk átnézett feladatmegoldásokból és a hozzá fűzött kommentárjaikból több dolog is kiderül. Az egyik a munkamódszerük: először egyikük nézte át a dolgozatot és kommentálta, majd másikuk végezte el ugyanezt. Azokban a dolgozatokban, ahol Reményi Gusztávné nézte át először a geometriafeladat megoldását, Reményi Gusztávnak módosító javaslata nem volt, vagyis itt mindenben egyetértett a feleségével. A többi feladat megoldásánál sokszor voltak módosító javaslatai. Az is kiderült, hogy a geometriafeladatok megoldásainak minden kis részletét észrevételezték, a megoldásokat tudták a gyerek szemével is nézni, az elkezdett megoldásokat pedig, ha csak lehetett, befejezték. Javításaikban jelezték ugyan a felmerülő hibákat, de a „rossz", és „hibás" szavak sohasem szerepeltek.

Reményi Gusztávné 1921-ben született Orosházán, egy szegényparaszti család első gyermekeként. Egyik anyai nagybátyja népiskolai tanító lett. Anyai nagyapám az ottani Hangya-boltban volt üzletvezető-helyettes, emellett földműveléssel foglalkozott. Anyai nagyanyám igényes és színvonalas volt minden munkájában. Gyönyörűen varrt, fillérekért.

A négy elemi népiskolai osztály után négy polgári leányiskolai osztályt végez el, ezután a győri királyi magyar tanítónőképzőbe kerül. A 14 éves kislány egy teljes tanévre utazott el otthonról, mert nem tudott tanév közben hazautazni, de szülei sem tudták meglátogatni. A tandíj ugyanis több volt, mint a család összjövedelme... Győrben többek között énektanára, Kiss György volt rá nagy hatással. Zenéből elégséges volt az első jegye, másfél év múlva már ebből a tárgyból is jelese volt. Ezután három évig a budapesti II. ker. állami tanítónőképzőben tanult, tanítónői oklevelében csak két jó van, az egyik érdekes módon éppen mennyiségtanból. Az utolsó tanévben már ő vezette az intézet kórusát.

Állást nem kapott, ezért Szegeden, a polgári iskolai tanárképző főiskolán folytatta tanulmányait, itt három évet végez csak el. Ezután a főiskola engedélyével két évig Orosházán, egykori polgári leányiskolájában tanít óraadóként, ekkor már családfenntartó is. A második tanév elején teszi le a polgári iskolai tanári képzés első alapvizsgáját. Alig hittem el, hogy édesanyámnak ennyire rossz vizsgaeredményei is lehetnek: a filozófián kívül, amelyből négyest kapott, az összes többi tárgyból csak elégségese van. Pedig ezt az eredményt akkori körülményei bőven indokolták. A második tanévben itt is vezeti az iskola 150 tagú kórusát, a májusi hangversenyre már Reményi Gusztáv is kap meghívót. Esküvőjén tanítványai állnak meglepetésre sorfalat.

Még a második világháború alatt végez el egy vezetőképző tanfolyamot az egyetemisták munkaszolgálatának keretein belül, majd egy női munkatábor vezetését bízzák rá Középlakon júniustól szeptemberig.

Szarvason óraadó az evangélikus tanítónőképzőben. Egy félév múlva Nyíregyházára kerül férjével együtt. Elmondása szerint sírt, mert nem kapott munkát. Először kollégiumi nevelő, azután gondnok egy középiskolában. Majd egy átképző tanfolyamon vesz részt matematikából. 1951-ben általános iskolai első tanári alapvizsgát tesz matematikából és kémiából. Ugyanebben az évben a Zrínyi Ilona leánygimnáziumhoz kerül matematikatanárként. Részlet Horváth Sándornak, az iskola igazgatójának jellemzéséből, 1953-ból:

„Kiválóan képzett, igen lelkiismeretes, igen tevékeny és eredményes nevelő. Önmagával és tanítványaival szemben a legnagyobb követelményekkel lép fel, de minden feltételt is biztosít az általa kiszabott követelmények tökéletes teljesítéséhez. Igen gondos, jól felépített óravezetésével, osztályfoglalkoztatásával minden növendékét minden óráján mozgásban tartja, munkája nyomán nagyfokú emelkedés mutatkozik minden tanítványa fejlődésében."

Matematikatanári munkája mellett végzi el először a matematika, majd az ábrázoló geometria szakot az ELTE levelező tagozatán.1955-ben egyik tanítványa váratlanul első helyezést ért el az Arany Dániel matematikaversenyen, ugyanitt egy másik tanítványa első dicséretet kap. Közben − nem függetlenül a Varga Tamással való levelezés hatására is − figyelme egyre inkább az általános iskola felé fordul. Kísérletet szeretett volna indítani egy 8. osztályban, de erre már csak '59-ben kapott engedélyt.

1959-ben az ELTE pályázatot hirdetett vezető tanári állásokra. A pályázatot beadó tanárokat óráikon meglátogatták, és a látottakat meg is beszélték. Péter Rózsa és Horvay Katalin utaztak Nyíregyházára. A Reményi-házaspár óráit különösen jónak látták. A pályázat végeredménye, amelyet most csak emlékezetemből idézek fel: 1. dr. Vigassy Lajos, 2. Reményi Gusztávné, 3. Reményi Gusztáv.

Reményi Gusztávné személyes közlése szerint senki sem tudott úgy matematikaórát elemezni, mint Péter Rózsa.

A Trefortba kerül vezető tanárként, általános iskolában és középiskolában is tanít, új munkaterület a tanárjelöltekkel való foglalkozás, ami ezután mindig szívügye lesz.

Varga Tamás 1957 szeptemberében indítja négyéves matematikatanítási kísérletét egy 5. osztályban, a Cukor utcában. Reményi Gusztávné 1961-ben egy ötödik osztályban indítja egyik matematikatanítási kísérletét, Surányi János vezetése alatt. E kísérlet egyik motivációja az akkori matematikatanterv geometria anyagának szűkössége volt. Péter Rózsa minden tanévben legalább egyszer meglátogatta ezt a kísérletet is. A kísérlet egy lányosztályban indult, négy év múlva ebből az osztályból alakult ki az iskola első matematika-fizika tagozatos osztálya.

A komplex matematikatanítási kísérlet 1963-ban indult két első osztályban a Váci utcai általános iskolában. Amikor ezek a tanulók a felső tagozatba jutottak, akkor az egyik osztályban dr Eglesz Istvánné, a másik osztályban pedig Reményi Gusztávné lesz a matematikatanár. Ennek a kivitelezéséhez főmunkahelye megértése és segítsége is kellett.

A matematika munkaközösségnek vezetője is lesz a Trefort utcában. A tanárjelöltek képzésében észrevett hiányok pótlására, a problémák megoldására törekszik igen sokoldalúan és eredményesen is, természetesen kollegái segítségével.

A komplex matematikatanítási kísérlet nyomán kialakult új általános iskolai tanterv bevezetéséhez a tankönyvek, tanári kézikönyvek, munkalapok bírálatával is hozzájárul férjével együtt. De sokszor tart előadásokat és feladatmegoldó szemináriumokat is különböző tanári továbbképzéseken.

Állandóan foglalkoztatta a matematika iránt érdeklődő általános iskolai tanulók segítése, ezért nyolcadikos tanulók részére szakkört indított a Társulat keretein belül. Az első foglalkozáson körülbelül 80 gyerek jelent meg...A Kis Matematikusok Baráti Körében is sokoldalúan vett részt. Meglepetésemre még 3.- 4. osztályosoknak is vezetett ilyen szakkört több éven keresztül. Sokat dolgozott az általános iskolásoknak szervezett matematikaversenyek kialakításán, a versenyek feladatainak a kialakításában, és a lebonyolításban is részt vett. Férjével együtt éveken keresztül részt vett az Arany Dániel versenyfeladatok javításában. Egy pletyka szerint„... a Kati néni minden geometriafeladat megoldását, amit egy gyerek elkezdett, pillanatok alatt be tudta fejezni, így aztán azt is jól meg tudta ítélni, hogy a gyerek meddig jutott el a megoldásban..."

Több éven keresztül a Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Szakosztályának elnöke. Ekkor feladatai közé tartozott a vándorgyűlés megszervezése és lebonyolítása. A később az ELTE-hez csatolt egri Ho Si Minh-tanárképző főiskola budapesti tagozatán is dolgozott: módszertan, elemi matematika speciálkollégiumot tartott.

A társulati rendezvényeken egy időben többször fordultak elő vidéki bemutató tanítások is. Itt a hallgatóság, de különösen a gyerekeket év közben tanító tanár meg volt lepve, hogy milyen eredményesen foglalkozott a számára ismeretlen gyerekekkel, akikkel pár perc beszélgetés alatt meg tudta teremteni az eredményes munkához szükséges jó kapcsolatot.

A BME Gépészmérnöki Karán is vezetett felvételi előkészítő tanfolyamot matematikából,de az ELTE-n is óraadó volt egy ideig ábrázoló geometriából és módszertanból .

A matematikatanításban merész volt, állandóan új utakat keresett és talált is. A csoportmunkát brilliánsan és eredményesen tudta kezelni. Fel tudta kelteni és meg is tudta tartani tanítványai érdeklődését.

Földesi Andrásné Reményi Katalin

Földesi Andrásné Reményi Katalin

Amit édesanyámtól kaptam, részletek

Előadás a Reményi-házaspárról

A 2021-2022-es tanév Reményi-díjazottai

Szeretettel köszöntöm Önöket!

Nem kis izgalommal állok most itt, mindenekelőtt köszönetet szeretnék mondani mindazoknak, akik sokat fáradoztak azon, hogy a Szüleinkről elnevezett díj megvalósuljon.

Nekünk, kettőnknek, és jelenlévő családtagjainknak is kivételes öröm és megtiszteltetés,

hogy itt lehetünk. Szüleink híresek voltak arról, hogy korán meglátták tanítványaikban a tehetséget, a matematikai képességeket, és emellett kiemelt gondot fordítottak arra, hogy minket is jó irányba tereljenek. Így történt, hogy engem inkább a zene területén láttak erősebbnek, így ezen az úton segítettek egészen a Zeneakadémia elvégzéséig. A hegedűt Édesapám adta először a kezembe, óvodás koromban. Akkor persze nem tudhattam, hogy ő maga is tanult zenét, hisz eredetileg énektanárnak készült. A hagyatékában talált dokumentumokból kiderül, hogy a mai napig híres és elismert tanárok tanították. Kodály Zoltán − egy vele készült interjúban − Euler professzor mondását idézi, miszerint:
„A zene az hangzó matematika". És itt érnek össze a szálak − szüleink másik szenvedélye a zene volt, maguk is több hangszeren játszottak. Emlékszem, amikor hegedűről áttértem brácsára, Édesapámat kértem meg, álljon oda a kotta mellé, és ellenőrizze, jó hangokat játszom-e. Vele tanultam meg a brácsakulcsot olvasni.

Végül külön szeretnék gratulálni a mostani díjazottaknak. Nekik is és Önöknek is jó egészséget és sok sikert kívánok további munkájukhoz.

Reményi Ágnes

Reményi Ágnes köszönti a résztvevőket

Lenger Dániel átveszi a díjat

Szlobodnikné Kiss Edit átveszi a díjat

Díjazott tanár	Iskola
Ádám Réka	**Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium** *tanára*
Árki Tamás	**Révai Miklós Gimnázium és Kollégium, Győr** *tanára*
Balázs Ferenc	**Kiskunfélegyházi Szent Benedek PG Két Tanítási Nyelvű Technikum és Kollégium** *tanára*
Balázs Tivadar	**Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium** *tanára*
Balga Attila	**Budapest V. kerületi Eötvös József Gimnázium** *tanára*
Baráti Ákos	**Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma és Kollégiuma, Pécs** *tanára*
Cs. Nagy András	**Váci SzC Boronkay György Műszaki Technikum és Gimnázium** *tanára*
Dr. Gaál Istvánné	**Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium** *tanára*
Gyenes Zoltán	**Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium** *tanára*
Holló Gábor	**Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium** *tanára*
Horváth Orsolya	**Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium** *tanára*
Kötél Tamás	**Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium** *tanára*
Lányi Veronika	**Pécsi Janus Pannonius Gimnázium** *tanára*
Lenger Dániel	**Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium** *tanára*
Szalahov Mária Zsuzsanna	**Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma és Kollégiuma, Pécs** *tanára*
Számadóné Békéssy Szilvia	**Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium** *tanára*
Szlobodnikné Kiss Edit	**Váci SZC Boronkay György Műszaki Technikum és Gimnázium** *tanára*
Tassy Gergely	**Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium** *tanára*
Tóth Tibor	**Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc** *tanára*
Varga Attila	**Balassagyarmati Balassi Bálint Gimnázium** *tanára*

Ács Katalin (Reményi Bizottság), Rotter Barbara (AIT)

díjazottak matematikatanítás Arany Dániel OKTV

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

Bérczi-Kovács Erika 2022. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Ugródeszkák matek szakon – Palotay Dorka

Turizmus-vendéglátás szakról a kiberbiztonság világába

Beszélgetés Palotay Dorkával (alkalmazott matematikus, Senior threat researcher, CUJO AI)

Mivel foglalkozol most?

Most éppen itthon babázom, de előtte a Cujo AI nevű vállalatnál dolgoztam, és oda is tervezek majd visszamenni. Ez egy amerikai székhelyű cég, ami internetszolgáltatóknak nyújt különféle szolgáltatásokat a routereken futó hálózat-monitorozó szoftverek segítségével.

Én a biztonsággal foglalkozó részlegen dolgozom, ahol a hálózaton tapasztalt gyanús kommunkációkat vizsgáljuk, és akár blokkoljuk is. Ez olyasmi, mint egy antivírus program a számítógépünkön. De például egy okos villanykörtére nem tudunk antivírus programot tenni, ezért van szükség a cyber-támadások hálózati szintű monitorozására.

A biztonsági szolgáltatásokon belül én malware (= kártékony szoftver) elemzéssel foglalkozom, tehát szétszedem azokat a kártékony programokat, amelyek támadják a különböző eszközöket.

Milyen lehet egy malware?

Például a zsarolóvírusok a malware-ek egy széles körben ismert fajtája. Mostanában leginkább botnetekkel foglalkozom, amely egy másik malware típus. Egy botnet sok-sok kis botból áll össze, amelyek például DOS (denial of service) támadásokat indítanak bizonyos célpontok ellen. Ezenkívül vannak olyan malware-ek, amelyek adatokat lopnak a számítógépről, vagy amelyek meghackelik az otthoni kamerát stb. Például nagyon sokan szerelnek fel a gyerekszobába kamerát, ami aztán az internetre csatlakoztatva rossz konfiguráció vagy frissítések hiányában könnyen támadhatóvá válik.

Mostanában a cégnél főleg IoT (internet of things) és NAS (network attached storage) eszközökkel foglalkoztam. Az utóbbi egy hálózati adattároló, ami egy, többek között különféle médiatartalmak, például fényképek tárolására alkalmas eszközt jelent. Ezek általában helyi hálózatról és internetről is elérhetőek, és gyakran válnak sérülékennyé a rossz konfigurációnak vagy a frissítések hiányának köszönhetően. Rajtuk keresztül a támadók bejuthatnak a hálózatra, majd egyik eszközről a másikra, vagy akár csak az adott eszközön hajthatnak végre további támadásokat. Ezek nagyon gyakori célpontok.

Diákként a matek szak előtt turizmus-vendéglátás szakra jártál, hogyan kerültél később mégis az ELTE-re?

Mindig szerettem a matekot, a gimiben az volt a kedvencem, mert azt nem kellett „tanulni”. Nem kellett bemagolni, hogy melyik költőnk éppen merre vándorolt, kibe volt szerelmes és hasonlók. A matematikát ha egyszer megérted, onnantól már könnyű.

Aztán ott voltam 18 évesen, és nem tudtam, mit kezdjek a matekkal. Utólag azt hiszem, nem volt elég információm. Az fel sem merült bennem, hogy mérnök legyek, a tanári pálya pedig sajnos már akkor sem volt anyagilag vonzó. Ugyanakkor utazni nagyon szerettem, ezért választottam a turizmus-vendéglátás szakot. Nagyon hamar kiderült, hogy nem nekem való, de azért befejeztem, és érdekes tapasztalatokat szereztem. Ott is a matekórákat szerettem legjobban, így néhány év „tévelygés” után végül elkezdtem a matematikus szakot, ahová akkor már a húgom járt, és tetszett neki. Aztán amikor oda bekerültem, kinyílt a világ: megértettem, hogy nemcsak a toronyban gondolkodó matematikusok és a matematikatanárok járnak matek szakra, hanem rengeteg egyéb lehetőség is van. Azóta is kicsit bánom, hogy előtte öt évig nem ezzel a rengeteg mindennel foglalkoztam inkább. Az nagyon nehéz volt, hogy mindenkinél öt évvel idősebb voltam, ugyanakkor segített, hogy másképp álltam az egyetemhez, tényleg tanulni mentem oda. Szerettem a tanulást, szinte az összes órát élveztem, éreztem, hogy a helyemen vagyok. A kriptográfiával is az egyetemen találkoztam, ami aztán a karrierem kiindulópontja lett.

Hogyan kerültél a kiberbiztonság világába?

Az egész nagyon érdekesen indult, mert amikor vége lett az alkalmazott matematikus BSc-nek, akkor az EIT Digital keretein belül tanultam tovább kriptográfia szakirányon. Az első év Trentoban nagyon izgalmas volt. Inkább informatikai oldalról közelítettük meg a témát, kevés matekos tárgyunk volt, viszont felvettem kint plusz matekórákat, amik nagyon érdekesek voltak.

Amikor szakmai gyakorlati helyet kerestem, megmondom őszintén, nem igazán tudtam, mihez fogok kezdeni. Adott volt a kriptográfia tudás, és ehhez a korábbi témavezetőm, Szabó Csaba ajánlotta a Sophos-t, ami egy biztonsági szolgáltatásokat nyújtó cég. Odakerültem mint malware-elemző, mivel éppen kerestek valakit zsaroló vírusok elemzésére. Leginkább arra voltak kíváncsiak, hogy milyen titkosítást használnak a zsarolók, illetve feltörhető-e, visszafejthető-e az a titkosítás, amit a zsaroló vírus használ. Amikor a céghez kerültem, semmi közöm nem volt a malware-ekhez, de nagyon megtetszett. Eredetileg főleg az ezekben használt kriptográfiát vizsgáltam, de aztán egyre tágult a kör, és elkezdtem egyre több dologgal foglalkozni. Ez azzal is járt, hogy egyre kevésbé találkoztam matematikával. Ezzel együtt nagyon élveztem, számomra ez olyan, mint a rejtvényfejtés vagy mint egy szabadulószoba.

A Sophos után a Citi Bankhoz kerültem. Ott női főnököm volt, aminek nagyon örültem, mert ez igen ritka a szakmában. Utána kerestek meg a Cujo-tól, ahol most vagyok.

Mik a tapasztalataid nőként az IT világban?

Nagyon jó látni más nőket is a pályán. Őszintén szólva nem találkoztam még olyan női kollégával, akinek családja is volt. Amikor babát vártam, nagyon jó lett volna látni egy mintát, olyan nagyon jól esett volna, de sajnos nem volt. Nagyon jól tudok együtt dolgozni férfi kollégákkal, és nem igazán ért negatív tapasztalat ezzel kapcsolatban. Ugyanakkor érdekes volt, hogy néha azt éreztem, annyira próbálnak korrektek lenni a nőkkel − például más vicceket engednek meg maguknak − hogy emiatt nem tudsz a csapat része lenni. A női főnököm volt az első, akivel kicsit bensőségesebb tudott lenni a kapcsolatom, és sokat tanultam tőle arról, hogy ő nőként hogyan működik a szakmában.

Említetted, hogy szívesen dolgozol együtt másokkal. Számodra mi az ideális csapat- illetve egyéni munka felosztása egy munkahelyen?

Sokan dolgoznak nálunk Litvániából és Magyarországról is. Nagyon élvezem a közös munkát a litván kollégákkal, mert hasonló mentalitásúak, mint mi. Persze muszáj egyedül is dolgozni. Amikor az ember ki akar bogarászni valamit, gyakorlatilag hermetikusan lezárja a környezetét, és szinte teljesen belebújik a kódba. De azt is gondolom, hogy nagyon fontos, hogy megosszuk a tudást, és dolgozzunk együtt is. A Cujo-nál sok diákot igyekszünk foglalkoztatni gyakornoki program keretében, ilyenkor nagyon élvezem a tanítást is, hogy átadhatok valamit. Ugyanakkor mi is sokszor tanulunk a fiataloktól.

Mennyire változatosak a malware-ek által használt módszerek, amikkel találkozol?

Olyan igazán izgalmas megoldással ritkán találkozik az ember. Sok az, ami egy kaptafára megy, csak egy picit más, és véletlenül kicsúszott a detekcióból, az automatikus malware-észlelésből. Ezek az úgynevezett malware-családok, amelyeket folyamatosan fejlesztenek különféle irányokba.

Mi volt az eddigi legizgalmasabb kihívásod itt a Cujo-nál?

Az utóbbi időben olyan malware-ekkel foglalkoztam, amelyek Go nyelven íródtak. A Go a google saját fejlesztésű programozási nyelve, ami egyre népszerűbb a malware-írók körében is, mert könnyű lefordítani különböző architektúrákra. Néhány éve, amikor ezek újdonságnak számítottak, még kérdés volt, hogyan érdemes ezeket elemezni. Egyrészt próbáltam megérteni ezt a nyelvet, és emellett a Ghidra nevű malware-elemző szoftverben hoztam létre elemző toolokat, amelyek más elemzőknek is segíthetnek Go malware-eket gyorsan elemezni. Izgalmas feladat feltérképezni, hogyan lehet megérteni a kódok felépítését, és gyorsan kiszedni belőlük a lényeges információkat, hogy ha leül egy malware-elemző, ne kelljen újra elvégeznie ugyanazokat a lépéseket, hanem automatikusan rendelkezésre álljanak ezek az információk. (Ezek a kódok elérhetők a Cujo GitHub oldalán.)

Azért is szeretem a cybersecurity világot, mert ez a kutató közösség eléggé együtt dolgozik, megosztjuk egymással a tudást. Például most is együtt dolgozom egy kollégával egy másik cégtől, aki ezeket a Python kódokat Javaban írja meg. Nagyon jó érzés, hogy teljesen más cégtől jövő emberekkel is lehet együtt dolgozni. Szerintem ebben az együttműködésben van az erősségünk ezen az oldalon. Ezt egyébként a Citinél is tapasztaltam, a bankok figyelmeztették egymást támadások esetén.

A munkád során mennyire használod a matekos gondolkodásmódot?

Keveset használom konkrétan a matematikát, sokszor inkább programozói tudásra van szükség. Ugyanakkor mi matekosok mindig szeretnénk megérteni, hogy mi miért van, beleásni a probléma mélyébe. Nem elégszünk meg azzal, ha csak néhány gombot megnyomva véletlenül működik a dolog. Megőrülök, ha nem értem, miért működik valami, és ez szerintem eléggé matekos vonás. Szeretjük megérteni a mélyebb összefüggéseket, és ez nagyon hasznos tud lenni.

Szerinted a matekosok közül kiknek való a cybersecurity világ?

Ha van türelmed leülni, belemászni. Egy etikus hacker munkája pörgősebb, folyamatos támadás. Amit én csinálok „szöszölősebb”, néha kitartónak kell lenni, mert lassan állnak össze a dolgok. Aki szeret rejtvényekkel bíbelődni, annak abszolút való ez a pálya. No meg többféle feladattal foglalkozhatunk, így mindenki megtalálhatja azokat a területeket, ami neki tetszik. Az mindenképpen kell, hogy nyitottak legyünk új IT tudás megszerzésére. Ha most újra kezdhetném, és tudnám, hogy ilyen irányba megyek majd, több informatika órát vennék fel.

Egy örök küzdelem van a malware-ek (a rosszak) és az ellenük küzdők (a jók) között, szerinted éppen ki áll nyerésre?

Ez mindig ott van valahol középen. Ha az egyik oldal kitalál valamit, arra azonnal reagál a másik. Például egy húsz évvel ezelőtti malware ma már szinte nevetséges, úgymond még a nagyszüleink se dőlnének be neki.

Az ELTE-n szoktam tartani egy előadást sandboxokról, és azok fejlődése is nagyon érdekes.

A sandbox egy automatizált zárt környezet, amiben elemezni tudsz egy malware-t. Tehát beküldöd a malware-t, lefut, és a végén kapsz egy reportot, hogy mi történt ott bent. A malware-ek alkotói nyilván próbálják elkerülni, hogy ilyen módszerekkel elemezhető legyen a módszerük, ezért különböző technikákat alkalmaznak, hogy felismerjék, amikor ilyen környezetben fut a módszerük. Erre a sandbox fejlesztői megint reagálnak, stb, stb … és ettől válik izgalmassá a dolog.

Amikor szétszedek egy malware-t, nagyon kíváncsi vagyok, mit hogyan oldottak meg, például hogyan próbálják meg elkerülni a detekciót, mi az új, mivel lettek okosabbak. Ettől a macska-egér játéktól válik a munkánk izgalmassá.

Palotay Dorkával Bérczi-Kovács Erika készítette az interjút.

☐ alkalmazott matematika ☐ informatika ☐ matematikus-karrier

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

SOKSZOR TALÁLKOZUNK OLYAN FELADATTAL, ÖTLETTEL, AMIT SZÍVESEN ELTESZÜNK KÉSŐBBI HASZNÁLATRA. A **TANÓRA – SZAKKÖR** ROVAT SZERETNE HOZZÁJÁRULNI A MATEMATIKATANÁROK ESZKÖZTÁRÁNAK GAZDAGÍTÁSÁHOZ, FÓRUMOT KÍVÁN ADNI A GONDOK, NEHÉZSÉGEK MEGTÁRGYALÁSÁRA IS. (ROVATSZERKESZTŐ: *HORVÁTH ESZTER*.)

Szerkesztő

2022. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Sikeres KöMaL-rendezvény az ELTE-n

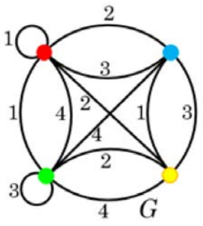
Október utolsó hétvégéjén rendezte meg a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok szokásos Ifjúsági ankétját a MATFUND Alapítvány szervezésében, a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat háttértámogatásával. A kétnapos előadássorozatra a 2021–22-es tanév KöMaL-pontversenyeinek legjobbjai kaptak meghívást. Következik a rövid beszámoló.

Kovács-Koszó Eszter, Kiss Viktória, Kosztolányi József

2022. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Kicsit kooperatívan

Spencer Kagan neve, kooperatív tanulási technikákat kutató és népszerűsítő tevékenysége világszerte jól ismert. 2001-ben magyarul is megjelent könyve, módszereit már két évtizede sok iskolánkban használják. *Kovács-Koszó Eszter*, *Kiss Viktória* és *Kosztolányi József* ezeket a stratégiákat egészítette ki néhány gyakorlati ötlettel, amelyek kísérleteik alapján is jól illeszkednek a mai magyarországi matematikaórákba. Tovább...



Fonyó Lajos, Fonyóné Németh Ildikó

2022. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Sok színnel, sokszínűen a gráfokról

A magyarországi matematikának egyik kiemelkedő területe a gráfelmélet. A nemzetközi szakkönyvekben, példatárakban nagyon gyakran találkozhatunk hivatkozásokkal magyar matematikusok tételeire, hazánkban kitűzött versenyfeladatok bemutatásával. Ezek a példák megmozgatják a fiatalok fantáziáját, hiszen a problémák megoldása szinte minden esetben valamilyen speciális felismerésen, különleges fogalomtársításon alapul, így komoly szellemi kihívást jelent még a matematikailag képzettek számára is. *Fonyó Lajos* és *Fonyóné Németh Ildikó* jól hasznosítható, sokszínű anyagot kínál az iskolai szakkörök számára.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
nka Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Szerkesztő 2022. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Sikeres KöMaL-rendezvény az ELTE-n

Október utolsó hétvégéjén rendezte meg a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok szokásos Ifjúsági ankétját a MATFUND Alapítvány szervezésében, a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat háttértámogatásával.

A rendezvény programja és további támogatóinak listája itt található.

A kétnapos előadássorozatra a 2021–22-es tanév KöMaL-pontversenyeinek legjobbjai kaptak meghívást, de szép számmal jöttek el az ELTE TTK Fizika épületébe tanárok, szülők és érdeklődők is. A résztvevők mindegyike kapott egy KöMaL-pólót és egy KöMaL-tollat, valamint a közeli, Infoparkbeli Ericsson-székház éttermébe szóló ebédjegyet, amelyért cserébe finom ételek többféle kínálatából válogathattak.

Az első nap délelőtt négy előadás követte egymást.

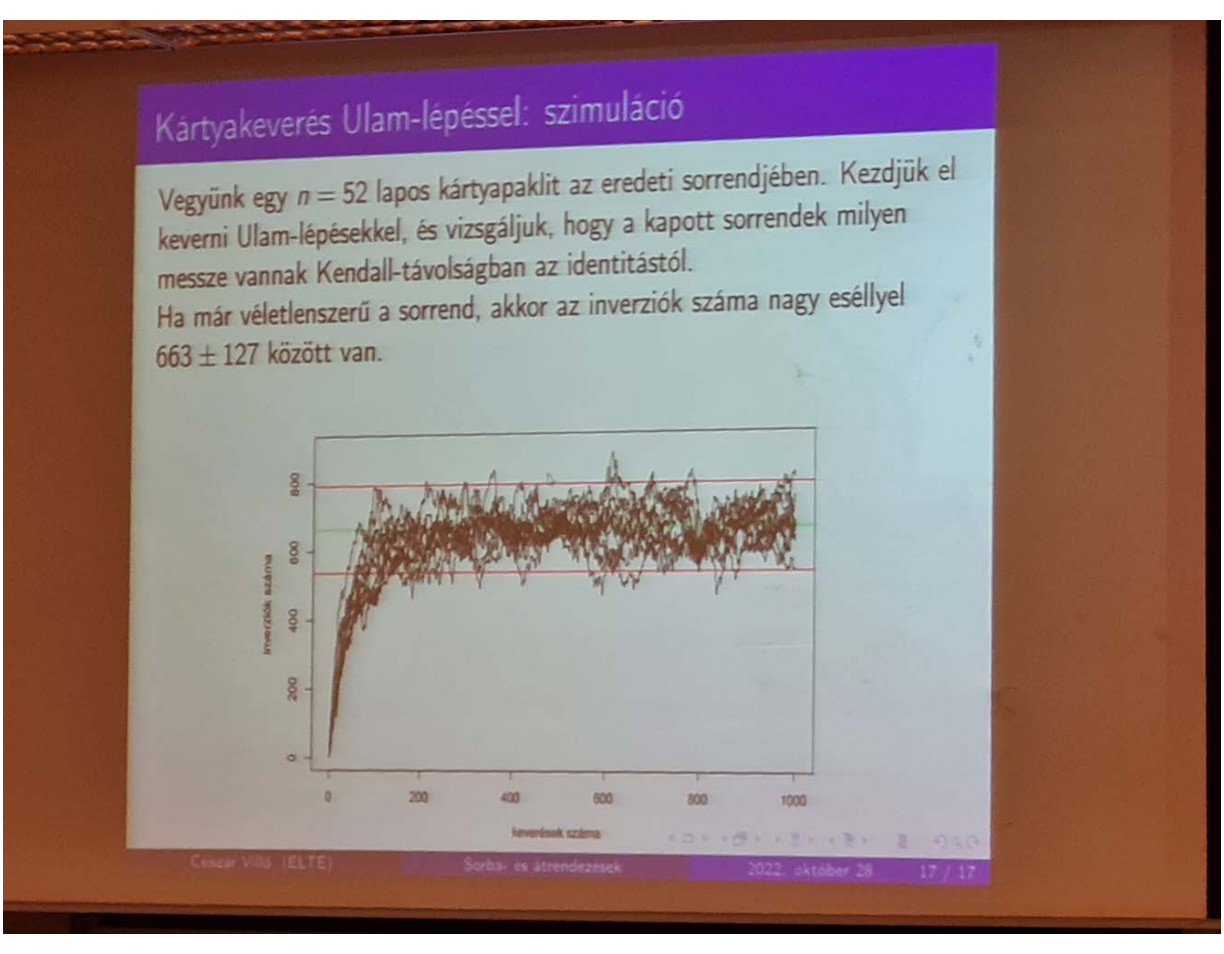
Gnädig Péter térből síkba visszalépő módszerekről beszélt egy, a lapban korábban kitűzött fizika feladat kapcsán – ez épp az olyan geometriai feladatok fordítottja, amelyeknél szép megoldásokra lehet jutni, ha a síkból kilépünk a térbe. A kiinduló feladat egy kúp felszínén haladó áramfolyamról szólt, a megoldáshoz a kúpot kellett kiteríteni a síkba. A probléma a fizika és a matematika iránt érdeklődőknek egyaránt érdekes volt, ráadásul még a beteg kutyák nyakravalóját is felhasználta a szemléltetéshez a KöMaL fizika szerkesztője. A feladat általánosításához pedig a legyező-leképezés (egy aránytartó leképezés) adta meg a kulcsot.

Gnädig Péter

Csiszár Villő könyveket vett le a könyvespolcról, de más helyekre rakta azokat vissza, így vezette be az inverziókat és az azon alapuló többféle távolságfogalmat. A véletlen sorbarendezések és átrendezések jelentősége mára megnőtt, felhasználása nemcsak a játékoknál, vagy az iskolai tananyagban, de a való életben is fontos.

KöMaL
KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK INFORMATIKA ROVATTAL
TÁMOGATÓINK:

Csiszár Villő

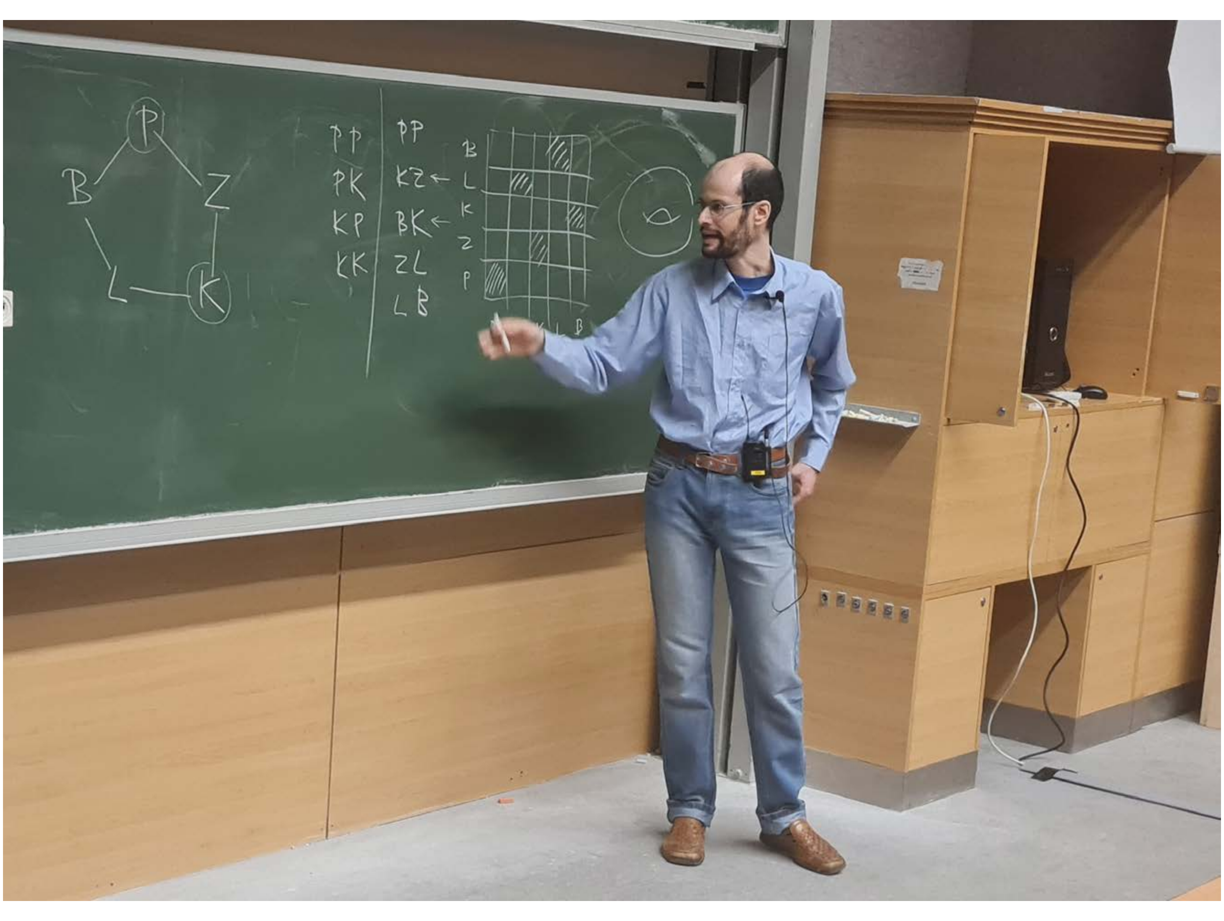


Kártyakeverés Ulam-lépéssel: szimuláció

Vegyünk egy $n = 52$ lapos kártyapaklit az eredeti sorrendjében. Kezdjük el keverni Ulam-lépésekkel, és vizsgáljuk, hogy a kapott sorrendek milyen messze vannak Kendall-távolságban az identitástól.
Ha már véletlenszerű a sorrend, akkor az inverziók száma nagy eséllyel 663 ± 127 között van.

Csiszár Villő (ELTE) Sorba- és átrendezések 2022. október 28 17 / 17

Frenkel Péter bemutatta a Lovász-esernyőt, egy kémfeladat geometriai interpretációjú megoldását. Szóba kerültek a megkülönböztethető sálak, és kiderült, hogy kombinatorikai feladatok geometriai megoldása a koordinátageometria révén magasabb dimenziós terekben algebrai problémává válhat.



Frenkel Péter

Fajszi Bulcsú és *Rábay Kristóf* visszatérő vendégei az Ifjúsági Ankétnak a támogató Hiflylabs cég képviseletében. Rámutattak, hogy az informatika milyen gyorsan fejlődik az utóbbi pár évben is – köszönhetően többek között a matematika legújabb eredményeinek. A mesterséges intelligencia (MI) egyre jobb szöveganalitikára képes, ami lehetővé teszi, hogy a rengeteg fontos adatot, amire ma már alapvető szükségünk van, a számítógép elolvassa és értelmezze is, például jogi szövegkörnyezetből kiemelje a lényeget. Az MI eredményezi a BI, az üzleti intelligencia alkalmazásának lehetőségét. A matematikai nyelvészet, a (magyar) nyelv szemantikai feldolgozása a matematika, a programozás és a nyelvészet kölcsönhatásából alakult ki, napjainkra egyre fontosabb lesz. Nagyon érdekes feladatok várnak a mostani középiskolás nemzedékre, akár a matematikát, akár a fizikát, akár az informatikát választják.

Az első nap délutánján került sor a szokásos KöMaL díjkiosztó ünnepségre. Minden évben száz körüli a jutalmazottak száma, és bár a díjak anyagi értéke nem túl nagy, de erkölcsi értékük egy egész életre szóló. A mostani eredmények − 1996 óta a korábbi tanéveké is − a https://www.komal.hu/eredmeny oldalon találhatók. A díjak kiosztása közben egy előadásra is sor került: *Asbóth János* beszélt a „kísérteties távolhatásról”, ami a múlt évszázad ismert paradoxonait, Schrödinger macskáját, és a kvantummechanika Einstein–Podolsky–Rosen nevezetes gondolatkísérletét köti össze a 2022-es fizikai Nobel-díjasok eredményeivel.

A rendezvény második napján is hasznos és érdekes ismereteket szerezhettek az érdeklődők:

Jenei Péter válogatott kísérleteket mutatott az Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenyéről, *Kiss György* ezután matematikai témát, a Moore-gráfokat és véges geometriákat hozott középiskolás szinten. *Olosz Balázs* komplex számokat alkalmazott a váltóáramú fizika feladatok megoldásánál, *Számadó László* előadása pedig matematikai játékokról és a játékok matematikájáról szólt. A délutáni előadók, *Szeidemann Ákos* és *Kadlecsik Ádám* három izgalmas folyadékos problémát oldottak meg.

A KöMaL Ifjúsági Ankét sikeréhez hozzájárultak a szerkesztőség lelkes munkatársai, a pénteki fogadás szendvicsei és süteményei és a szombati pizza és a kötetlen játékok is.

☐ KöMaL ☐ konferencia

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

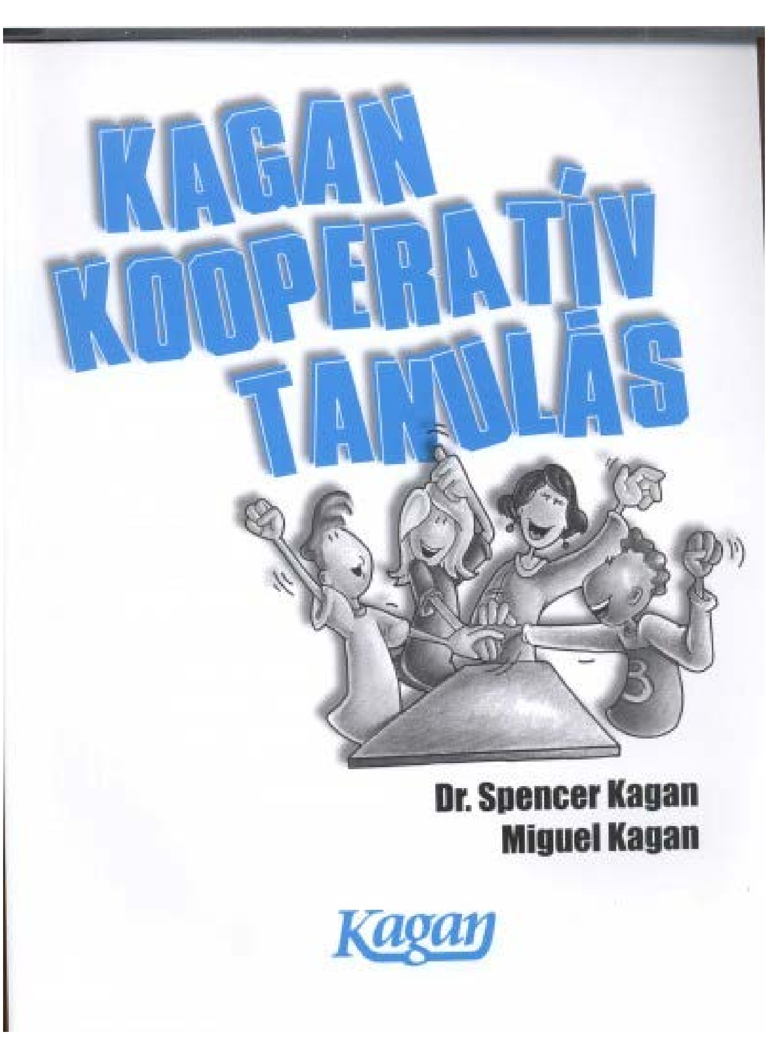
Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

Kovács-Koszó Eszter, Kiss Viktória, Kosztolányi József 2022. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Kicsit kooperatívan

BEVEZETŐ

A következő írásban szeretnénk bemutatni néhány apró ötletet, amelyek kis energiabefektetést igényelnek, de látványos változást eredményezhetnek a mindennapok matematikaóráin. Néhány lehetséges utat mutatunk be, hogy a tanórákat ne kelljen újra tervezni, hanem egy szemléletváltozás mentén, néhány egyszerű módszer alkalmazásával formáljuk tanítási stílusunkat. Ezek a módszerek nem az óra felépítését, a feladatok típusát vagy a feltett kérdések tartalmát módosítják, hanem a diákok órai aktivitását növelik meg.



Az itt bemutatott stratégiák többsége Spencer Kagantól származik. Ezeket egészítettük ki néhány gyakorlati ötlettel, amelyek jól illeszkednek a mai magyarországi matematikaórákba. Dr. Spencer Kagan az 1970-es évek óta kutatja és nagy erővel népszerűsíti a kooperatív technikákat Amerikából kiindulva az egész világon. Kiadója már 1996-ban 2000 könyvet ajánlott a témában, ma pedig honlapja számos továbbképzést, könyvet, munkafüzetet, cikket és eszközt kínál.

Vegyünk sorra néhány ilyen ötletet!

„MEGBESZÉLÉS PÁRBAN”

A „megbeszélés párban” stratégia jól használható bármilyen kérdés-felelet szituációban: új elméleti tananyag tárgyalása közben vagy ismétléskor. A szokással ellentétben ne egy diákot szólítsunk fel, hanem minden pár egyik tagja válaszoljon, társa pedig ellenőrizze azt. Ekkor még az osztály általában csendben maradó fele is aktívabb a szokásosnál, hiszen állást kell foglalnia a hallottak helyességéről. Ez után felszólíthatunk valakit, vagy ha sietünk, adjuk meg mi magunk a helyes választ, kiemelve a sarkalatos pontokat. Röviden fel is mérhetjük az osztály tudását, ha megkérdezzük, ki adott vagy ki hallott jó feleletet.

Hasznos lehet még egy új típusfeladat vagy egy hosszabb, bonyolultabb példa után megkérni a párokat, hogy például az ablak felől ülő magyarázza el a feladat megoldását lépésről-lépésre társának a füzet alapján, úgy, mintha a párja hiányzott volna az elmúlt 5-10 percben. Bár ez lényegében egy feladatnyi időt elvesz az órából, lehet, hogy alkalmanként hasznosabb, mint plusz egy gyakorlófeladat. Ha szeretnénk, hogy írásos nyoma is maradjon a diákok munkájának, akkor megkérhetjük őket, hogy emeljék ki, írják le a feladat kulcslépéseit, ötleteit.

„EDZÉS PÁRBAN” VALAMINT „MESTER ÉS ÍRNOK” MÓDSZER

Az „edzés párban” és a „mester és írnok” módszerek gyakorló feladatokhoz alkalmazhatók jól. „Edzés párban” esetén az egyik diák megoldja a feladatot a saját füzetében, és közben hangosan magyarázza is, hogy mit, miért csinál. A másik ellenőrzi, figyeli, ha szükséges javítja. „Mester és írnok” felállásban a mester oldja meg a feladatot, de nem ő, hanem társa, az írnok ír. Ekkor is a társé az ellenőrző szerep, de most sokkal közvetlenebb, hiszen a rossz megoldást már le sem írja, ha időben észreveszi.

Mindkét esetben kiegészíthető a módszer azzal, hogy mindkét fél ír, de fontos hangsúlyoznunk, hogy nem az a feladat, hogy a pár egyik tagja gondolkodás nélkül másolja társát. A mester és írnok felállás esetén megkérhetjük a mestert, hogy időben csúsztatva, csak az írnok után írjon. A közös ellenőrzés is teret adhat arra, hogy mindenki füzetében szerepeljen a helyes megoldás.

Ezek a módszerek főleg algebra jellegű feladatoknál működnek jól, ahol kisebb lépésekre bontható a feladat, és a megoldás elengedhetetlen része az is, hogy a diákok írásban számoljanak. Kombinatorikai vagy geometriai feladatoknál kevésbé alkalmazható, mert ekkor a megoldás fő lépéseit nem jegyzik le a tanulók.

Bár első hallásra/olvasásra lehet, hogy nehéz elképzelni az ilyen pármunkák megvalósulását, a „mester és írnok” módszer néhány, elsőre talán nem egyértelmű előnyét szeretnénk kiemelni. Ehhez gondoljunk bele a pármunka dinamikájába!

A szereposztás nélküli pármunka erőegyensúlya felborulhat, ha az egyik diák elkalandozik vagy nincs kedve dolgozni. A mester és írnok szereposztásban legalább minden második feladatot ennek a tanulónak kell megoldania, ha rá kerül a sor. Továbbá írnok szerepben is egy árnyalattal jobban kell koncentrálnia szerepének minimális teljesítéséhez, mintha csak másolná társa munkáját. Bár a potyautas diák, ha elég elszánt, minden ilyen akadályt el tud hárítani, hogy ne kelljen megerőltetni magát. Tanárként is könnyebben észrevesszük, ha kilép a szerepéből. Ezen kívül a pár dolgozó tagjának is több eszköze van lustálkodó társa motiválására, mert a szerepek betartására való felszólítás („Írd, amit mondok!” / „Te vagy a mester, neked kell megoldani a feladatot!”) sokkal kézzelfoghatóbb reakciót igényel, mint egy-egy „Segíts gondolkodni!” / „Számolj!” / „Dolgozz te is!” típusú kérés.

A másik lehetőség a szimmetria megbillenésére, ha az egyik diák okosabb/határozottabb, mint a társa, és elnyomja párját. A szerepek rendszeres cseréje ezt is segít kezelni: ha a lendületesebb tanuló írnokként türelmetlen, meg lehet kérni, hogy várja meg, amíg a mester diktál, ne írjon magától. Ha mesterként sietne előre, le kell lassítania legalább annyira, hogy az írnok megérthesse, amit diktál, még ha a gondolatmenetet nem is feltétlen magyarázza el. Előnye ezeknek a helyreigazító utasításoknak, hogy nem a diák személyére irányulnak, hanem a szerepek betartását szorgalmazzák, így kevésbé bántóak.

A szerepek közepesen helyes betartása esetén is megvalósul, hogy matematikáról beszél a diák, még akkor is, ha csak számokat és algebrai jeleket mond ki. Ez a fajta beszéd segít a koncentrálásban, fókuszálásban is, hiszen több érzékszervet aktivál. Megjelennek a csoportmunka klasszikus előnyei is: a diákok találkoznak egymás gondolataival, sajátjaikra pedig azonnali visszacsatolást kaphatnak. A társ jelenléte szociális motivációt ad, sok esetben enyhe, még pozitív hatású teljesítménykényszert hoz létre. A kommunikáció érdekesebbé, vidámabbá teszi az egyébként akár monoton munkát.

A módszer saját kísérleteinkkel is igazolt előnyeit később még részletezzük.

KOMOLYABB CSOPORTMUNKA, NAGYOBB IDŐIGÉNNYEL

Az óra kicsit komolyabb átformálását jelenti az „ötletek az asztalon” módszer, de még mindig nem igényel hosszas tervezést, előkészületet. Párban, de akár 3-4 fős csoportokkal is megvalósíthatjuk. A név ismét magáért beszél: brainstorming jellegű gyors ötletek, gondolatok összeszedése, rövid rögzítése a cél. Új tananyag bevezetésekor az alapok felelevenítésére jól lehet használni, akár versenyeztetve a csoportokat, hogy ki tud több tételt, releváns definíciót, azonosságot összegyűjteni. Összefoglaló órán az elméletet is összegeztethetjük a csoportokkal, de akár a füzet segítségével a típusfeladatok, jellegzetes ötletek, típushibák összegyűjtése is cél lehet. Összetettebb, bonyolultabb példa esetén a feladat elkezdése, terv készítése is lehet a csoport ilyen jellegű feladata. Alkalmazhatjuk a módszert szóforgó jelleggel is, ahol a csoporttagok felváltva mondanak 1-1 gondolatot. Kisebb feladatoknál pedig strukturálatlan ötletelést is megengedhetünk. A szóforgó akkor javasolt, ha könnyedén fel tudunk sorolni legalább kétszer, háromszor annyi választ, mint ahány tagja van a csoportnak.

SZAVAZÁS

Eldöntendő kérdés, vagy kevés válaszlehetőség esetén egy gyors szavazás lebonyolítása hatékonyan aktivizálhatja az osztályt. Ehhez egy hasznos ötlet a „fejlehajtós szavazás”. Ezzel a módszerrel a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium felső tagozatán találkoztunk. A diákok ráborulnak a padra, vagy csak eltakarják a szemüket és kézfeltartással szavaznak. Ez a diszkréció a szégyenérzetet is csökkentheti, de a jó tanulók befolyásoló hatásával szemben is jó védekező eszköz.

EGY IGAZÁN ÚJ ÖTLET

A segítő asztal ötlet egy angliai tanártól származik. Se leírva, se a gyakorlatban nem találkoztunk még vele. Saját tapasztalata alapján nagyon gördülékenyen működik középiskolában (14-17 éves korosztályban). A módszer elsősorban sok, kisebb feladat megoldására tervezett órán hasznos. A lényege, hogy egy diák egy kitűntetett padban ül, ami lényegében a szamárpad pozitív verziója. Hozzá társai szabadon odamehetnek az óra alatt, ha nem értenek valamit, vagy megakadtak. A kitűntetett diák ekkor félbehagyja munkáját és segít társának. A tapasztalat szerint a segítő elég ügyes ahhoz, hogy ne maradjon le.

Az ötlet gazdája szerint a kitűntetett diák szerepe önkéntes jelentkezés alapján jól működik, nem szokott üresen maradni a felajánlott poszt, sőt, néha több diák is szeretné azt betölteni. Ha valaki úgy gondolja, képes betölteni a szerepet, el lehet fogadni a jelentkezését. Tapasztalata szerint időnként nem csak a legokosabb 10% akar és tud segítő lenni, valamint jellemzően kitűntetésként élik meg a szerepet a diákok.

KÍSÉRLETI EREDMÉNYEK A „MESTER ÉS ÍRNOK” MÓDSZER HASZNÁLATÁRÓL

Kilenc rövid, négy-hat tanórás kísérletet végeztünk felső tagozaton és középiskolában. Ezek eredményeire támaszkodva később megvalósulhatott egy kéthónapos kísérlet két párhuzamos osztályban: egy gimnáziumi tizedikes humán orientációjú 16 fős félosztályban és egy szintén tizedikes nyelvi tagozatos, 34 fős osztályban. Kifejezetten az utóbbi kísérleti tapasztalatokra támaszkodva szeretnénk néhány szembetűnő előnyét kiemelni a módszernek.

A tanárok nagyon pozitívan élték meg a kísérletet, később más osztályokban is tervezték alkalmazni. Kiemelten pozitívumnak élték meg, hogy hallották diákjaik gondolatait, elmondásuk szerint többet, mint amennyit a füzetből látni, érzékelni szoktak. Követhetőbbé vált a tanulók önálló munkája, hiszen például egy 16 fős csoport esetén az egyéni munkákba csak bele-belepillantani tud a tanár, 8 pár munkája viszont már követhető, ellenőrizhető. A pármunka miatt megjelenő diák-diák párbeszéd megnövelte a tanár-diák párbeszédek gyakoriságát is. Fontos eredménynek ítéljük azt is, hogy mind a két kísérletben részt vevő pedagógus határozottan állította, hogy nem igényelt extra időt az új munkamódszer. Összességében színesebbek lettek a matekórák, közvetlenebb lett a hangulat, aktívabbak és motiváltabbak lettek a diákok.

A tanulók a vidámabb, kötetlenebb légkört emelték ki leginkább, illetve többen megfogalmazták, hogy érdekes volt társuk gondolatmenetébe ilyen mélységben belelátni. Negatívumként fogalmazták meg, hogy a felváltott szerep miatt nem került be minden a füzetbe, de többen kilépve szerepükből önállóan megoldották ezt a problémát.

A páros munkákról hangfelvételeket készítettünk, amelyekben bőven találtunk vitákat, érveléseket. Ezek önálló munka esetén nem kaptak volna teret. Számos támogató, egymást megerősítő megjegyzés is előfordult, részben ennek köszönhető a „jobb hangulat” is.

ZÁRÓ GONDOLATOK

Szeretnénk arra bíztatni azokat, akiknek tetszettek az ötletek, hogy nézzék át, gondolják át meglévő óraterveiket: hova lehet beilleszteni ezeket a módszereket. Elég, ha minden második órán találunk egy feladatot, amelyhez elővesszünk egy-egy kooperatív foglalkoztatási formát. Meg fogjuk tapasztalni, hogy színt tud vinni egy-egy apróság is az órákba, és jobban megismerhetjük diákjainkat is.

Kezdetben természetesen számolni kell a betanulási idővel. A „mester és írnok” módszer esetén tapasztalat szerint elég, ha egy gyakorló óra felét arra szánjuk, hogy párban oldjanak meg sok apró feladatot. Ezen az órán, és még néhány következőn, érdemes sokat körbejárni és újra és újra emlékeztetni a diákokat a szerepekre, és azok rendszeres cseréjére.

Kagan honlapja továbbra is aktív (https://www.kaganonline.com/). Szerveznek rendszeres továbbképzéseket online is. Ezek 60 ezer Ft/nap árban vannak, 1-2-3 naposak vagy egy hetesek.

Magyarországon a Szabad Iskolákért Alapítvány, a SZIA (http://www.kooperativ.hu/) gondozza a kooperatív gyakorlatokat. Rendszeresen szerveznek akkreditált továbbképzéseket Budapesten, amelyeknek szerves része a saját élmény szerzése, valamint az alternatív iskolákban történő hospitálások is.

Ha hosszú távon szeretnénk alkalmazni a komolyabb, nagyobb szervezést igénylő kooperatív módszereket, akkor például a fenti képzések egyikének elvégzésével még tapasztaltabbak lehetünk a témát illetően. A befektetett munka megtérül, amit a módszerben járatos kollégák és a szakirodalom is egybehangzóan igazol.

Kovács-Kószó Eszter, Kiss Viktória, Kosztolányi József

„Az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-21-3 - 439 SZTE-533 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.”

Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal
ÚNKP Új Nemzeti Kiválóság Program

matematikatanítás

Fonyó Lajos, Fonyóné Németh Ildikó 2022. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Sok színnel, sokszínűen a gráfokról

Bevezető gondolatok

A magyarországi matematikának egyik kiemelkedő területe a gráfelmélet. A nemzetközi szakkönyvekben, példatárakban nagyon gyakran találkozhatunk hivatkozásokkal magyar matematikusok tételeire, hazánkban kitűzött versenyfeladatok bemutatásával. Ezek a példák megmozgatják a fiatalok fantáziáját, hiszen a problémák megoldása szinte minden esetben valamilyen speciális felismerésen, különleges fogalomtársításon alapul, így komoly szellemi kihívást jelent még a matematikailag képzettek számára is.

Az iskolai tanórákon a diákok többsége általában csak a legalapvetőbb megoldási lehetőségekkel ismerkedik meg, és egyszerű feladatok megoldására válik alkalmassá. A tanulók rutinszerű példákat oldanak meg, adott tulajdonságú egyszerű gráfokat hoznak létre, és vizsgálják a létezés feltételeit. Ebben a cikkben más szempontok szerint vizsgáljuk meg a gráfokat. Áttekintjük, hogy a gráfok milyen széles körben lehetnek segítségünkre a problémák megoldásában. Tesszük ezt a színek segítségével úgy, hogy kiderüljön, hogy egy ilyen szemléltetéssel még a nehezebb feladatok is könnyebben megoldhatóvá válnak. Elkalandozunk a játékok, a sík- és a kombinatorikus geometria, a poliéderek, a versenyek világába, foglalkozunk optimális útvonalak, elhelyezkedések, kapcsolatrendszerek kialakításával. Eközben találkozunk a gráfelmélet legfontosabb összefüggéseivel, a fokszámokra vonatkozó ismeretekkel, a Turán-tétellel, a fákkal, a síkgráfokkal, az Euler-féle poliédertétellel, a Ramsey-problémákkal és a versenygráfokkal.

Az egyes módszerek segítségével nagyon változatos nehézségű és érdekes feladatok megoldását mutatjuk meg. A cikk végén azt is bemutatjuk, hogy hogyan készíthetünk mi magunk is nevezetes tételek segítségével feladatokat mások számára. Összességében egy jól hasznosítható anyagot szeretnénk adni a kollégáknak az iskolai szakköri munkához.

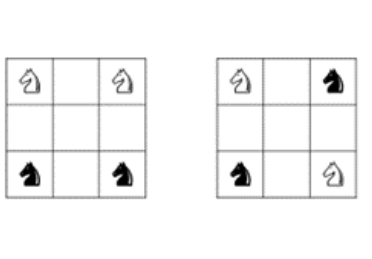
A cikkben a következő fogalmakat ismertnek tekintjük: gráf, teljes gráf, körmentes gráf, reguláris gráf, izolált pont, csúcs fokszáma.

A cikkben említett tételek bizonyítása megtalálható ezekben a művekben: Katona Gyula–Recski András–Szabó Csaba: *A számítástudomány alapjai*, Xiong Bin–Zheng Zhongyi: *Graph Theory*.

1. Gráfok alkalmazása nem várt helyzetekben

A következő két feladat arra mutat be egy-egy példát, hogy mennyire eredményesen használhatók a gráfok a játékelméletben. Segítségükkel tudatosan, gyorsan alakíthatunk ki egy játékhelyzetet, és könnyen indokolhatóvá válik az is, ha egy állás nem hozható létre.

Egy 3×3-as négyzetrács négy sarokmezőjében a bal oldali ábra szerint két világos és két sötét huszár áll. A huszároknak a sakk szabályai szerinti mozgatásával elérhető-e, hogy a bábuk a jobb oldali ábra szerinti helyzetbe kerüljenek, ha a lépések során a bábuk csak üres mezőkre ugorhatnak?

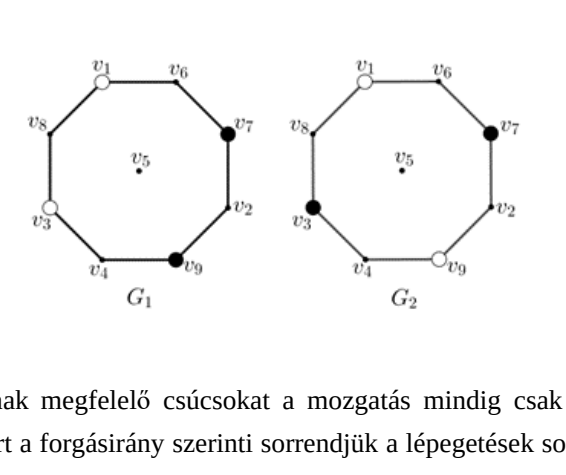


Megoldás:

Számozzuk meg a négyzetrács mezőit az alábbi ábra szerint:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

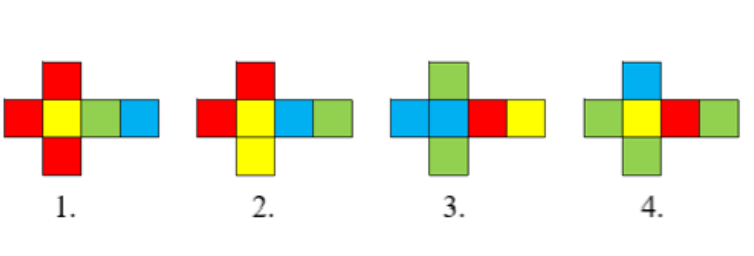
Rendeljük hozzá a rács négyzeteihez egy gráf v_1, v_2, ..., v_9 csúcsait, és kössük össze éllel azokat a csúcsokat, amelyekhez tartozó mezők elérhetők egymásból egy lóugrással. Ekkor a huszárok kezdeti és végső helyzetét is bejelölve az alábbi G_1 és G_2 gráfokat kapjuk:



Mivel a huszároknak megfelelő csúcsokat a mozgatás mindig csak szomszédos üres csúcsba viheti, ezért a forgásirány szerinti sorrendjük a lépegetések során nem változhat meg.

Így a fehér–fehér–fekete–fekete huszár helyzete nem változhat át fehér–fekete–fehér–fekete sorrendre. Tehát a kívánt állapot nem érhető el.

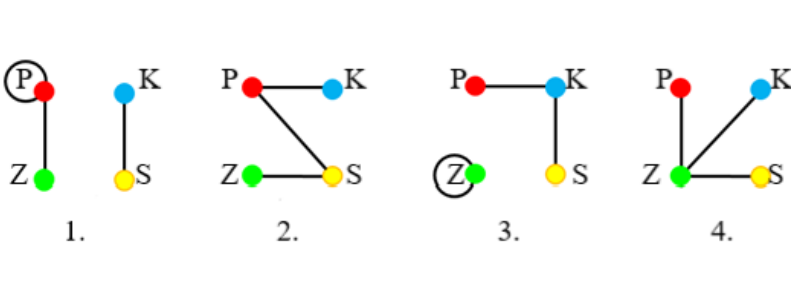
Egy 4 kockából álló logikai építőjáték elemeinek lapjai az alábbiak szerint vannak színezve:



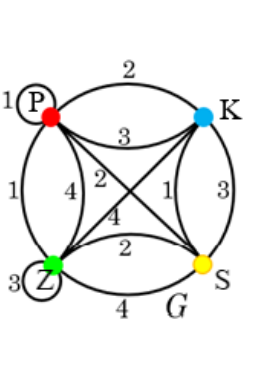
A játék célja az, hogy a kockákból úgy építsünk 4-szintes tornyot, hogy annak minden oldallapján az összes szín előforduljon.

Megoldás:

Rendeljünk az egyes kockákhoz egy-egy gráfot úgy, hogy ezen a kockák lapjainak a színezését át tudjuk tekinteni. Az egyes gráfoknak legyen négy csúcsa a négy színnek megfelelően. Két csúcs között akkor haladjon él, ha a kocka két szemben lévő lapja ilyen színű. Ha két ilyen lap azonos színű, akkor ezt az ábrán hurokél jelöli. Négy csúcsból és 3 élből álló gráfokat kapunk:



A négy gráfot egyesítve az alábbi G gráf adódik. Minden élre ráírjuk, hogy melyik kockából került az egyesített gráfba.



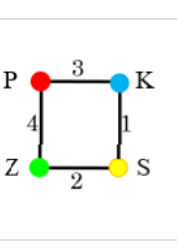
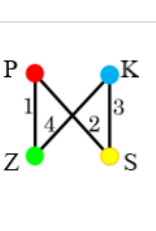
A feladat megoldásához olyan G_1, G_2 részgráfokat keresünk, amelyek megadják azokat a színeket, amelyek a torony elején-hátulján, illetve bal és jobb oldalán szerepelnek. G_1, G_2 kiválasztásának szempontjai:

– A torony felépítésében mind a 4 kocka részt vesz, ezért G_1 és G_2 minden számozott gráfnak egy élét tartalmazza.

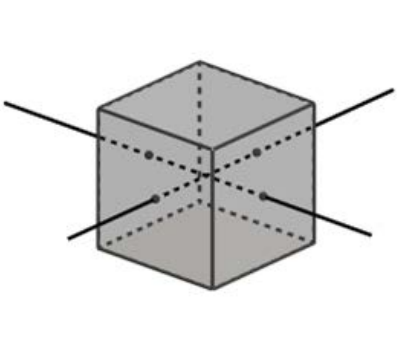
– A hasáb oldallapjain minden szín előfordul, ezért G_1 és G_2 pontjai a P, K, Z és S csúcsok.

– A hasáb szemközti oldallapjain minden szín egyszer-egyszer, összesen kétszer szerepel, ezért a csúcsok másodfokúak, G_1 és G_2 2-regulárisak.

Egy lehetséges megoldás:

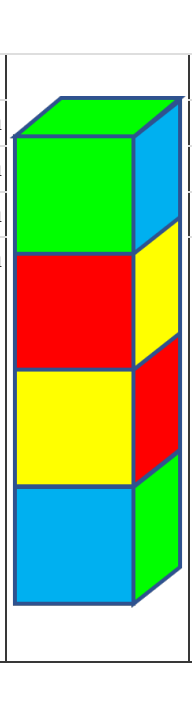
	
G_1	G_2
Elöl – hátul	Balra – jobbra

A két gráf mindegyikén szerepel az 1, 2, 3, 4 szám. Ez azt jelenti például, hogy az 1-es kockát úgy tegyük magunk elé, hogy elöl legyen a kék, hátul a sárga (vagy fordítva), balra legyen a piros, jobbra a zöld (vagy fordítva). A 2-es, 3-as, 4-es kocka elhelyezését hasonlóan olvashatjuk le a G_1, G_2 gráfokról. A második kocka elhelyezésétől kezdve figyelnünk kell arra, hogy azonos oldalra ne kerüljön kétszer egy szín. A kockát megfelelő tengelye/tengelyei körül elforgatva ez a probléma megoldható.



Ha ilyen módon felépítettünk egy tornyot, akkor a kockák sorrendje függőlegesen tetszőlegesen permutálható.

Az alábbi torony ilyen elvek szerint épült:

		hátsó lap	bal oldali lap
4. kocka		P	Z
3. kocka		K	K
2. kocka		Z	S
1. kocka		S	P

2. Csúcsok fokszámának vizsgálata

Felhasznált tételek:

T1: Ha egy G gráfban a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) csúcsok fokszámai rendre $d(v_1)$, $d(v_2)$, ..., $d(v_n)$ és az élek száma e ($e \in \mathbb{N}$), akkor

$$d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_n) = 2e.$$

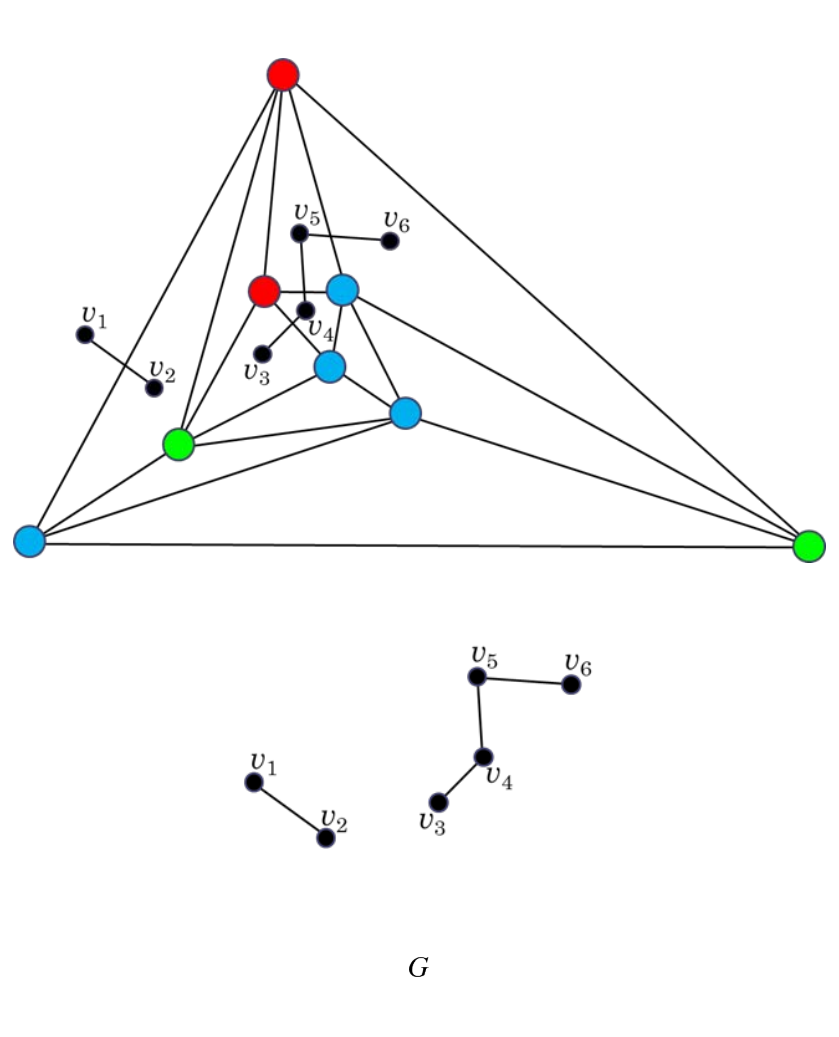
T2: Bármely G gráfban a páratlan fokú csúcsok száma páros.

Egy háromszög csúcsai piros, kék és zöld színekkel vannak kiszínezve. A nagy háromszög belsejében elhelyezünk néhány pontot, és így azt több kisebb háromszögre bontjuk. Két kis háromszögnek lehet közös csúcsa, közös oldala, vagy lehetnek közös pont nélküliek is. A kis háromszögek csúcsait is kiszínezzük a piros, kék vagy zöld színek valamelyikével. Bizonyítsuk be, hogy bármilyen színezés esetén kapunk olyan háromszöget, amelynek csúcsai különböző színűek.

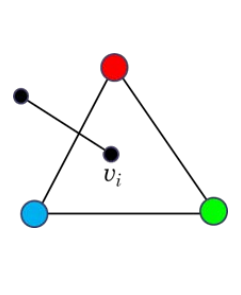
Megoldás:

Válasszunk ki egy pontot (v_1) a nagy háromszögön kívül, és kössük össze azt a nagy háromszög piros-kék oldalára illeszkedő részháromszögének egy belső pontjával (v_2). Továbbá keressük meg belül az összes piros-kék végpontú oldalt, és kössük össze azokra illeszkedő két háromszögnek egy-egy belső pontját egy-egy szakasszal [az ábra szerint $(v_3; v_4)$, $(v_4; v_5)$, $(v_5; v_6)$].

Tekintsük a kiválasztott v_i pontokat egy G gráf csúcsainak, a berajzolt szakaszokat G éleinek.

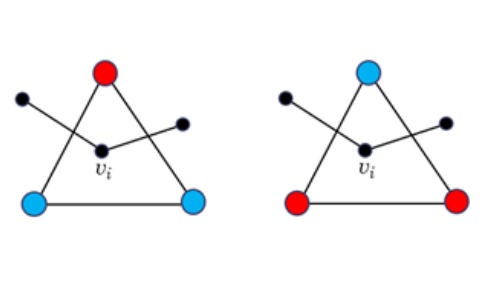


Ekkor a G gráf azon belső csúcsai, amelyek foka 1 és a nagy háromszög belsejében találhatók, egy háromszínű háromszög belsejében vannak.



$$d(v_i) = 1$$

Másrészt G azon belső csúcsai, amelyek foka 2, egy piros-kék háromszög belsejében helyezkednek el.



$$d(v_i) = 2$$

G csúcsainak fokszámát vizsgálva, mivel a nagy háromszögön kívüli csúcs foka 1, és a gráfban a páratlan fokú csúcsok száma páros, ezért G tartalmaz még legalább egy 1-fokú csúcsot. A korábbi megállapításunk szerint ez a pont egy háromszínű háromszög belsejében helyezkedik el.

3. Turán-tétel

Egyszerűbb formában:

Ha egy n csúcspontú G gráfban nincs K_{k+1} (teljes $(k+1)$-es), akkor éleinek száma legfeljebb

$$\frac{k-1}{2k} n^2.$$

Teljes formában:

Ha $n = kq + r$, ahol $0 \leqslant r < k$ ($r, q \in \mathbb{N}$), és az n csúcspontú G gráfban nincs K_{k+1}, akkor az élek e számára teljesül, hogy

$$e \leqslant \frac{k-1}{2k} n^2 - \frac{r(k-r)}{2k}.$$

Az egyenlőség olyan $T(n,k)$ Turán-gráfra teljesül, amely k közös elem nélküli A_1, A_2, ..., A_k ponthalmazból áll, ahol $|A_1| = \ldots = |A_r| = q+1, |A_{r+1}| = \ldots = |A_k| = q$, és két pontot pontosan akkor kötünk össze, ha azok különböző ponthalmazokhoz tartoznak.

Egy bridzsklubnak van egy speciális szabálya, amely szerint 4 tag csak abban az esetben játszhat együtt, ha a párokon belül egyik játékos sem volt korábban a párjának partnere.

Egy találkozón 14 tag jelent meg, akik közül mindenki korábban 5 társának volt partnere. Az est folyamán 3 mérkőzés lejátszása után a tagok szomorúan tapasztalták, hogy a klubszabály miatt be kell fejezniük a játékot. Már készülnek a befejezésre, amikor beállít egy új tag, akit egyikük sem ismer. Mutassuk meg, hogy az ő érkezésével még legalább egy játék lejátszható.

Megoldás:

Rendeljük hozzá az eredetileg jelen levő 14 taghoz egy G gráf egy-egy csúcsát. Kössük össze éllel azokat a csúcsokat, amelyekhez tartozó emberek még nem volt partnerei egymásnak, majd vizsgáljuk a gráf $\bar{G}$ komplementerét.

Figyelembe véve, hogy a 14 személy mindegyikének korábban 5 partnere volt, és az est folyamán az új tag érkezéséig már 3 mérkőzést lejátszottak, ezért $\bar{G}$ éleinek száma:

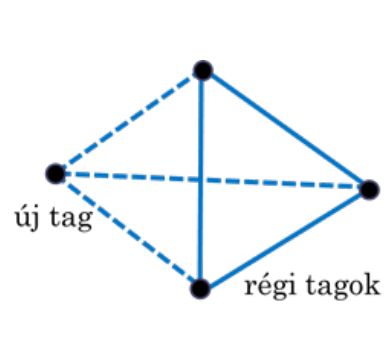
$$e(\bar{G}) = \frac{14 \cdot 5}{2} + 3 \cdot 2 = 41, \text{ és}$$

$$e(G) = e(K_{14}) - e(\bar{G}) = \frac{14 \cdot 13}{2} - 41 = 50.$$

Az új tag érkezésével akkor nyílik lehetőség új partira, ha G tartalmaz háromszöget. A Turán-tétel alapján, ha G-ben nincs K_3, akkor

$$e(G) \leqslant \frac{k-1}{2k} \cdot n^2 = \frac{14^2}{4} = 49.$$

Mivel G-ben az élek száma meghaladja a 49-et, így G tartalmaz háromszöget. Ehhez a háromszöghöz tartozó személyek és az új tag között tehát lebonyolítható a szabályoknak megfelelő mérkőzés.



4. Fagráfok

Fontosabb definíciók, tételek:

D1: Az összefüggő, körmentes gráfokat fáknak nevezzük.

T1: Minden legalább 2 pontú T fagráfban van legalább 2 elsőfokú pont.

T2: Ha a T fagráf csúcsainak száma n ($n \in \mathbb{N}^+$), akkor éleinek száma $e = n - 1$.

T3: Legyen a T fagráf csúcsainak száma n, éleinek száma e. Ekkor az alábbi tulajdonságok ekvivalensek egymással:

a) T fagráf,

b) T körmentes és $e = n - 1$,

c) T összefüggő és $e = n - 1$.

Egy n csúcsú teljes gráf éleit Dia és Viki a megadott sorrend szerint felváltva színezi ki pirosra. Az veszít, aki először hoz létre piros kört. Melyik lánynak van nyerő stratégiája?

Megoldás:

A feladatban szereplő játéknak csak $n \geqslant 3$ esetén van értelme, hiszen $n = 1$, $n = 2$ esetén senki sem veszít, tehát a játék döntetlen eredménnyel ér véget.

Használjuk fel a feladat megoldásához az alábbi két gráfelméleti tételt:

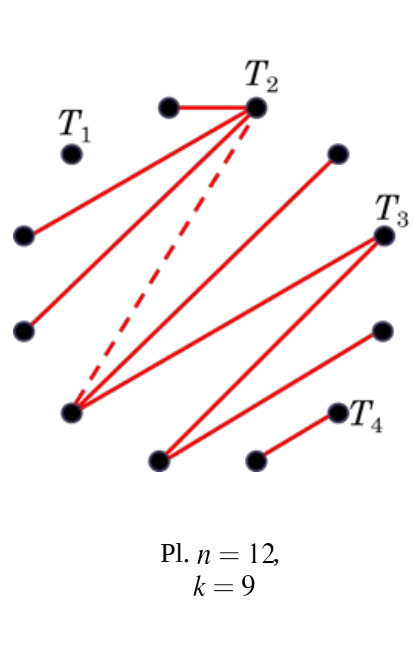
– Egy n csúcsú összefüggő gráfnak legalább $n - 1$ éle van.

– Egy n csúcsú körmentes gráfnak legfeljebb $n - 1$ éle van.

Azt fogjuk belátni, hogy $n \geqslant 3$ esetben helyes játék esetén az veszít, akinek az n. élt kell pirosra színeznie. Állítsunk igazolásához elég belátni, hogy ha $k < n$, akkor az a játékos, aki a k élt színezi, még meg tudja tenni, hogy ne ő hozzon létre piros élekből álló kört.

Tekintsük azt a G_{k-1} gráfot, amit az addig kiszínezett $k - 1$ él alkot az n csúccsal.

Ha $k < n$, akkor $k - 1 < n - 1$, így G_{k-1} nem összefüggő. Ez azt jelenti, hogy szétbomlik két vagy több $T_1, T_2, \ldots, T_j$ fára, amelyek között nem fut él.



Pl. $n = 12$,
$k = 9$

Az éppen következő játékosnak nem kell mást tennie, mint két fa egy-egy pontját kell összekötnie egy piros éllel. Ha G_{k-1}-ben nem volt piros kör, akkor G_k-ban sem lesz, mivel a kör kialakításához fel kellene használni az újonnan behúzott élt, illetve a két fa között kellene lennie még egy összekötő élnek. Ilyen pedig nincs.

Így beláttuk, hogy ha az egyik leánynak a $k < n$ sorszámú élt kell kiszíneznie, akkor el tudja kerülni a piros kör kialakulását. Az a játékos viszont, akinek az n. él jut, ezt már nem tudja megtenni. Ezért helyes stratégia esetén páros n-re Dia, páratlanra pedig Viki nyer.

5. Euler-vonal

Felhasználható definíciók, tételek:

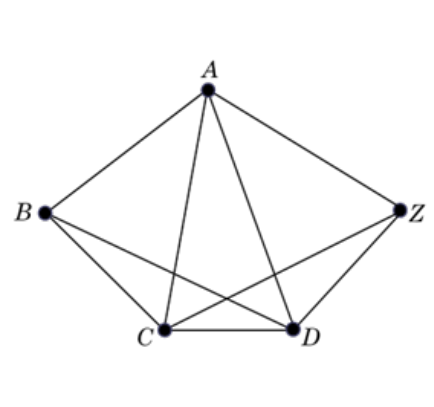
D1: Vonalnak nevezzük egy gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozatát, amelyben minden él legfeljebb egyszer szerepelhet, de lehetnek olyan pontok, amelyek többször is előfordulnak.

D2: Euler-vonalnak nevezünk egy gráfban egy vonalat, ha az a gráf minden élén áthalad. Az Euler-vonal lehet nyitott, ha a kezdő- és végpontja nem azonos, és lehet zárt, ha kezdő- és végpontja megegyezik.

T1: Izolált pontot nem tartalmazó gráfban akkor és csak akkor van zárt Euler-vonal, ha a gráf összefüggő és minden pont fokszáma páros.

T2: Izolált pontot nem tartalmazó gráfban akkor és csak akkor van nyitott Euler-vonal, ha a gráf összefüggő és két pont fokszáma páratlan, a többi pont fokszáma páros.

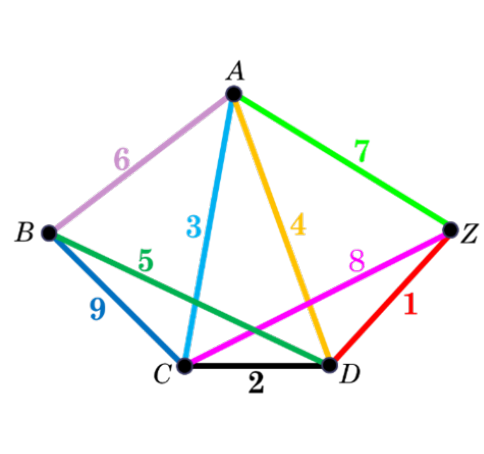
Az ábra szerint Atom Anti és Zé, a két hangya az A és Z pontokban állnak. Azt mondja Anti Zé-nek: „Versenyezzünk, nézzük meg, hogy melyikünk halad át először a 9 élen és ki ér előbb a B csúcsba.” A két hangya egyszerre indul, és azonos sebességgel halad. Ki nyeri meg a versenyt?



Megoldás:

Tekintsük a pontokat egy G gráf csúcsainak, a köztük húzott szakaszokat pedig az éleinek. G összefüggő, és az egyes csúcsok fokszámai: $d_Z = d_B = 3$, $d_A = d_C = d_D = 4$.

Tehát G-ben pontosan két páratlan fokú csúcs van (B és Z). Így T2 alapján a gráfban van nyílt Euler-vonal, amelynek két végpontja B és Z.



Ezért, ha Zé például Z-ből indulva a $ZDCADBAZCB$ nyílt Euler-vonalon halad, akkor 9 él érintésével eljuthat B-be (lásd a fenti ábrát). Anti a páros fokszámú A pontból indul, így ő nem juthat el ismétlés nélkül B-be. Tehát a megfelelő útvonalválasztás esetén Zé nyeri meg a versenyt.

6. Hamilton-kör

Fontosabb definíciók, tételek:

D: Egy G gráfban egy kört Hamilton-körnek nevezünk, ha G minden pontját pontosan egyszer tartalmazza.

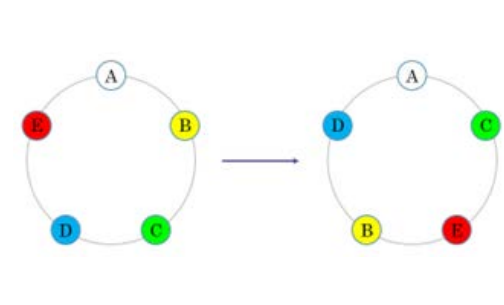
T1 (Ore-tétel): Legyen G egyszerű gráf csúcsainak száma n ($n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}^+$). Ha bármely v, v' nem szomszédos csúcspár esetén $d(v) + d(v') \geqslant n$, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

T2 (Dirac-tétel): Legyen G egyszerű gráf csúcsainak száma n ($n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}^+$). Ha a gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor a gráfban létezik Hamilton-kör.

Egy kör alakú asztal körül legalább 5 ember ül. Lehetséges-e, hogy úgy módosítsuk az ülésrendet, hogy mindenkinek két új szomszédja legyen?

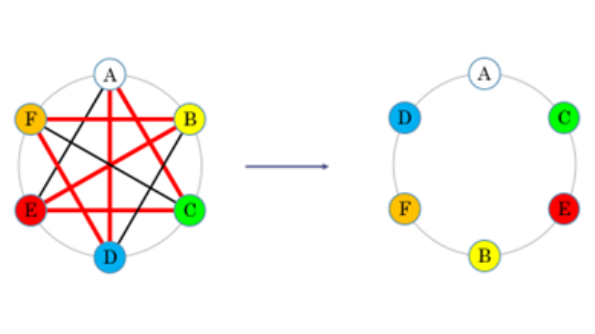
Megoldás:

5 fő esetén egy lehetséges megoldás:



5-nél több személy esetén rendeljük a társaság tagjaihoz egy gráf csúcsait, és kössük össze éllel azokat a csúcsokat, amelyekhez tartozó emberek az eredeti helyzet szerint nem voltak szomszédok. Így olyan G gráfot kapunk, amelyben minden csúcs foka $|V(G)| - 3 = n - 3$ ($n \geqslant 6$, $n \in \mathbb{N}^+$). Ekkor a gráfban bármely két csúcs fokszámának összege $2n - 6$.

$n \geqslant 6$ esetén $2n - 6 \geqslant n$, és az Ore-tétel miatt G tartalmaz Hamilton-kört. Ez alapján alakítható ki a helyes ülésrend. Az ábra $n = 6$ esetén mutatja be a megoldást:



7. Síkba rajzolható gráfok

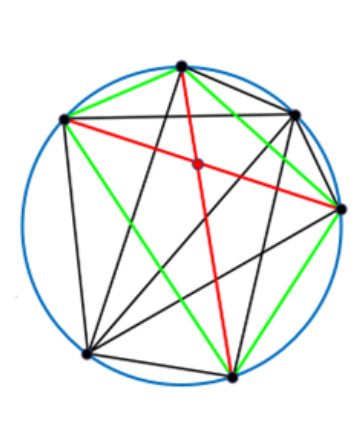
D: Egy gráf síkba rajzolható, ha lerajzolható a síkban úgy, hogy élei kizárólag a csúcspontokban találkoznak.

Euler-formula: Ha adott egy véges összefüggő síkgráf, ahol c a csúcsok, e az élek, ℓ pedig a tartományok számát jelöli, beleértve a külső nagy területet is, akkor

$$c + \ell = e + 2$$

Adott egy körön n pont ($n > 3$, $n \in \mathbb{N}^+$). Bármelyik két pontot összekötjük egy-egy szakasszal. Ezen szakaszok között nincs 3 olyan, amelyek a körön belül egy pontban metszik egymást. Határozzuk meg a körön belül kialakult tartományok számát.

Megoldás:



A kör n ívének eltávolítása után egy egyszerű síkgráfot kapunk, amelynek csúcsai a körön levő pontok és a szakaszok körön belüli metszéspontjai.

A körön levő pontok közül bármelyik 4 pontosan egy belső metszéspontot határoz meg, így

$$c = n + \binom{n}{4}.$$

A körön levő pontok mindegyikéhez $n - 1$, a belső pontokhoz 4-4 él tartozik, és minden élnek két végpontja van, ezért

$$e = \frac{1}{2} \cdot \left[n(n-1) + 4\binom{n}{4} \right].$$

A síkgráfokra vonatkozó Euler-formula alapján a tartományok száma:

$$\ell' = e + 2 - c = \left[\frac{n(n-1)}{2} + 2\binom{n}{4} \right] + 2 - \left[n + \binom{n}{4} \right].$$

Az így kimaradt tartományokhoz hozzáadva a körívek által határolt n tartományt és levonva a körön kívüli részt:

$$\ell = \ell' + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2} + \binom{n}{4} + 1 = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + 1.$$

8. Ramsey-számok

Fontosabb ismeretek:

T (Ramsey-tétel): Adott k és p pozitív egészekhez létezik egy olyan legkisebb $r(k;p)$ szám, hogy bármely $n \geqslant r(k;p)$ ($n \in \mathbb{N}^+$) esetén az n pontú K_n teljes gráf éleit két színnel – kékkel és pirossal – kiszínezve van a gráfban egy kék K_k vagy egy piros K_p.

T1: $r(k;1) = r(1;p) = 1$

T2: $r(k;2) = k$, $r(2;p) = p$

T3: $r(k;p) \leqslant r(k-1;p) + r(k;p-1)$

T4: (Erdős–Szekeres): $r(k;p) \leqslant \binom{k+p-2}{k-1}$

Néhány Ramsey-szám:

$r(3;3) = 6, \quad r(3;4) = 9, \quad r(3;5) = 14, \quad r(4;4) = 18, \quad r(4;5) = 25.$

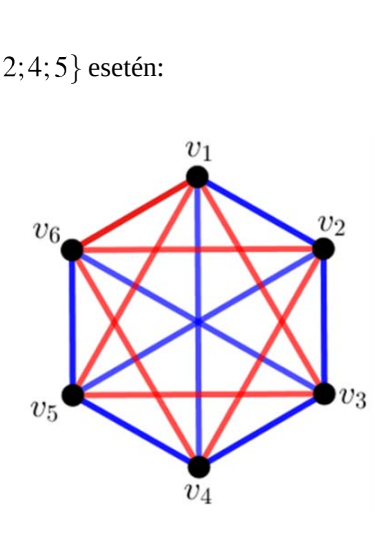
Az 1, 2, 3, 4, 5 számokat véletlenszerűen két csoportba (A és B) osztjuk. Bizonyítsuk be, hogy az egyik csoportba kerül két olyan szám, amelyek különbsége megegyezik a csoport egyik számával.

Megoldás:

Az $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ számokhoz rendeljük hozzá egy G gráf v_i csúcsait. Bármely $1 \leqslant i < j \leqslant 6$ esetén kössük össze a v_i, v_j csúcsokat kék éllel, ha $j - i \in A$, és pirossal, ha $j - i \in B$. Így egy kétszínű K_6 teljes gráfot kapunk, amely $r(3;3) = 6$ miatt tartalmaz monokromatikus háromszöget. Legyenek ennek csúcsai v_i, v_j, v_k ($1 \leqslant i < j < k \leqslant 6$). Ekkor az $a = j - i$, $b = k - j$, $c = k - i$ számok egy csoportban vannak, és

$$c - b = (k - i) - (k - j) = j - i = a.$$

Például $A = \{1; 3\}$, $B = \{2; 4; 5\}$ esetén:



Piros háromszög $v_1 v_3 v_5$, $(3 - 1 = 5 - 3 = 2, \ 5 - 1 = 4)$ és $4 \in B$, $2 \in B$ és $4 - 2 = 2 \in B$.

9. Versenygráfok

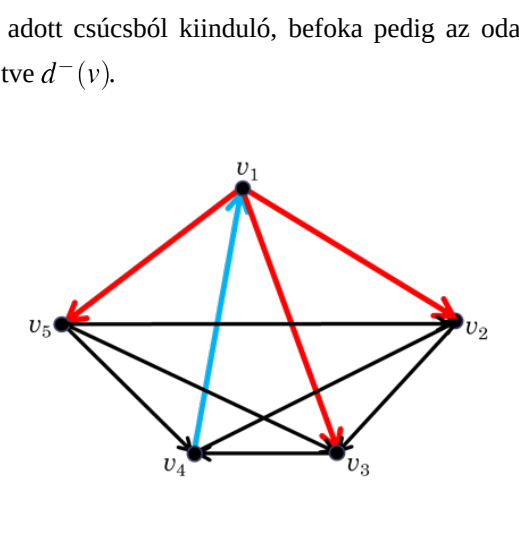
Fontosabb ismeretek:

D: Egy gráfot irányított versenygráfnak nevezünk, ha n ($n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}^+$) csúcsot tartalmaz, és bármely két csúcsot pontosan egy irányított él köt össze.

Jelölése: $\overrightarrow{K}_n$.

Az él a győztestől mutat a vesztes felé.

A v csúcs kifoka az adott csúcsból kiinduló, befoka pedig az oda befutó élek száma. Jelölésük: $d^+(v)$, illetve $d^-(v)$.



$\overrightarrow{K}_5$, $d^+(v_1) = 3$,
$d^-(v_1) = 1$

T1: Legyenek v_1, v_2, ..., v_n egy $\overrightarrow{K}_n$ versenygráf csúcsai. Ekkor

$$d^+(v_1) + d^+(v_2) + \ldots + d^+(v_n) = d^-(v_1) + d^-(v_2) + \ldots + d^-(v_n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

T2: Egy versenygráfban mindig létezik olyan csúcs, ahonnan vezet irányított út bármely más csúcsba. Az ilyen utak maximális hossza 2.

T3: A $\overrightarrow{K}_n$ versenygráf mindig tartalmaz $n - 1$ hosszú Hamilton-utat.

T4: Egy $\overrightarrow{K}_n$ versenygráf ($n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}^+$) akkor és csak akkor tartalmaz kört, ami háromszög, ha létezik két olyan v és v' csúcs, melyekre teljesül, hogy

$$d^+(v) = d^+(v').$$

A tételek alapján nagyon könnyen készíthetünk magunk is versenyfeladatokat. A feladatok megoldása a tételek bizonyítása szerint történik, amelyekre a cikk terjedelme miatt nem térünk ki. Lássuk tehát a versenyeken kitűzhető, nem túl könnyű példákat!

Egy egyfordulós körmérkőzéses tornán n ($n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}^+$) játékos vesz részt, és mindenki a többiekkel egy-egy mérkőzést játszik. A mérkőzéseken nincs döntetlen eredmény. Bizonyítsuk be, hogy a versenyzők között van olyan személy, hogy ő, az általa legyőzött személyek és az általa legyőzött személyek által legyőzött ellenfelek az összes sportolót tartalmazzák.

Megoldás: T2-ből következik az állítás.

Egy asztalitenisz tornán bármely két játékos pontosan egyszer játszik a többi versenyzővel. Bizonyítsuk be, hogy a játékosokat lehet úgy sorszámozni, hogy minden játékos legyőzte a közvetlenül utána következőt.

Megoldás: T3-ból következik az állítás.

Egy körmérkőzéses egyfordulós röplabda tornán n ($n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}^+$) csapat vesz részt. A tornán egyetlen csapat sem győzte le az összes ellenfelét. Bizonyítsuk be, hogy a résztvevők között található három olyan A, B, C csapat, hogy A legyőzte B-t, B legyőzte C-t és C legyőzte A-t.

Megoldás: A skatulyaelvből és T4-ből következik az állítás.

Ez az írás a 2022-ben az egri Rátz László Vándorgyűlésen elhangzott szemináriumi foglalkozás alapján készült. A bemutatott feladatokkal felkelthetjük a középiskolás tanulók érdeklődését a gráfelméleti feladatok iránt. A cikkben közölt példák között amerikai, kínai, magyar versenyfeladatok mellett saját feladatok is szerepelnek. Ezekkel próbáltunk jól hasznosítható anyagot biztosítani a középiskolában tanító és a tehetséggondozásban résztvevő kollégáknak.

Fonyó Lajos – Fonyóné Németh Ildikó

A szolgáltatásaink működéséhez sütiket (cookie) használunk. További információkhoz kattintson az Adatkezelés linkre.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

A **KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ** ROVATBAN ELSŐSORBAN OLYAN KÖNYVEKRŐL SZERETNÉNK TUDÓSÍTANI ÉS OLYAN ELEKTRONIKUSAN ELÉRHETŐ ÍRÁSOKAT AJÁNLUNK, AMELYEK A MATEMATIKA BÁRMELY RÉSZE VAGY KAPCSOLATAI IRÁNT ÉRDEKLŐDŐK SZÁMÁRA KÍVÁNATOSAK LEHETNEK. (ROVATSZERKESZTŐ: *TÓTH JÁNOS.)*

Juhász Péter

2022. DECEMBER,

KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Szokatlan párosítás

John Urschel nevét sokan ismerhetik, akik érdeklődnek az amerikai foci iránt. Urschel 2014-től 2016-ig volt a Baltimore Ravens csapatának támadófal-embere, 26 évesen úgy döntött, hogy az MIT-n szeretne PhD-t szerezni matematikából. Nem mindennapi történetét feleségével közösen írta meg Mind and Matter című könyvében. *Juhász Péter* (futtball- és matematikarajongó) írt kedvcsinálót a könyvhöz.

JAMES ESSINGER
Ada algoritmusa
AVAGY HOGYAN INDÍTOTTA EL LORD BYRON LÁNYA A DIGITÁLIS KORT A SZÁMOK KÖLTÉSZETE ÁLTAL

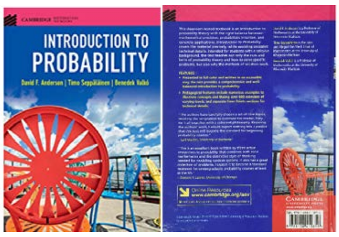
Binzberger Viktor

2022. DECEMBER,

KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Ada algoritmusa

Avagy hogyan indította el Lord Byron lánya a digitális kort a számok költészete által. *James Essinger* könyve új perspektívából mutatja be Lady Ada Lovelace életét, valóban jogosan tekintjük-e őt a világ első programozójának? Milyen akadályok álltak annak útjában, hogy a digitális korszak majdnem egy évszázaddal korábban megkezdődjön? *Binzberger Viktor* ajánlója nagy kedvet csinál a könyv elolvasásához.


INTRODUCTION TO PROBABILITY
David F. Anderson | Timo Seppäläinen | Benedek Valkó

Major Péter

2022. DECEMBER,

KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Bevezetés a valószínűségszámításba

David F. Anderson, Timo Seppäläinen, Benedek Valkó: **Introduction to Probability** című könyvéről *Major Péter* írt ismertetőt. A könyv célja az, hogy bemutassa a valószínűségszámítás alapjait, és legfontosabb, nehéz matematikai apparátust nem igénylő eredményeit. A szerzők olyanokkal is meg akarták ismertetni a valószínűségszámítást, akik nem tanultak mértékelméletet. Fontosnak tartották, hogy ne csak az eredmények bizonyítását ismertessék, hanem bőséges példaanyag segítségével érzékeltessék azok hasznosságát is. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

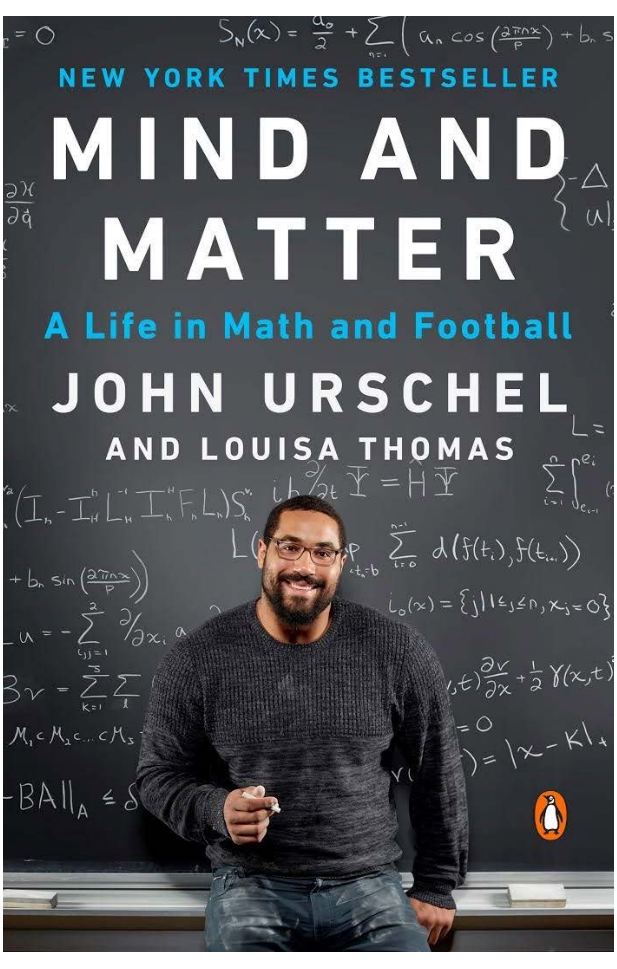
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

Juhász Péter 2022. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Szokatlan párosítás

John Urschel, Louisa Thomas: Mind and Matter: A Life in Math and Football (A *New York Times* bestseller)



J

John Urschel nevét sokan ismerhetik, akik érdeklődnek az amerikai foci iránt. Urschel 2014-től 2016-ig volt a Baltimore Ravens csapatának támadófal-embere, 40 NFL-mérkőzésen játszott. (National Football League, a profi amerikaifoci-bajnokság) 191 cm magas, karrierje során 140 kiló körül volt a tömege. Hogy kerül mégis az Érintő hasábjaira? Úgy, hogy sportolói karrierjét 26 évesen befejezte, mert úgy döntött, hogy az MIT-n szeretne PhD-t szerezni matematikából. Nem ő az első ilyen az NFL-ben, korábban Frank Ryan, a Los Angeles Rams, a Cleveland Browns, illetve a Washington Redskins irányítója matematikusként dolgozott a profi sportkarrierjével párhuzamosan.

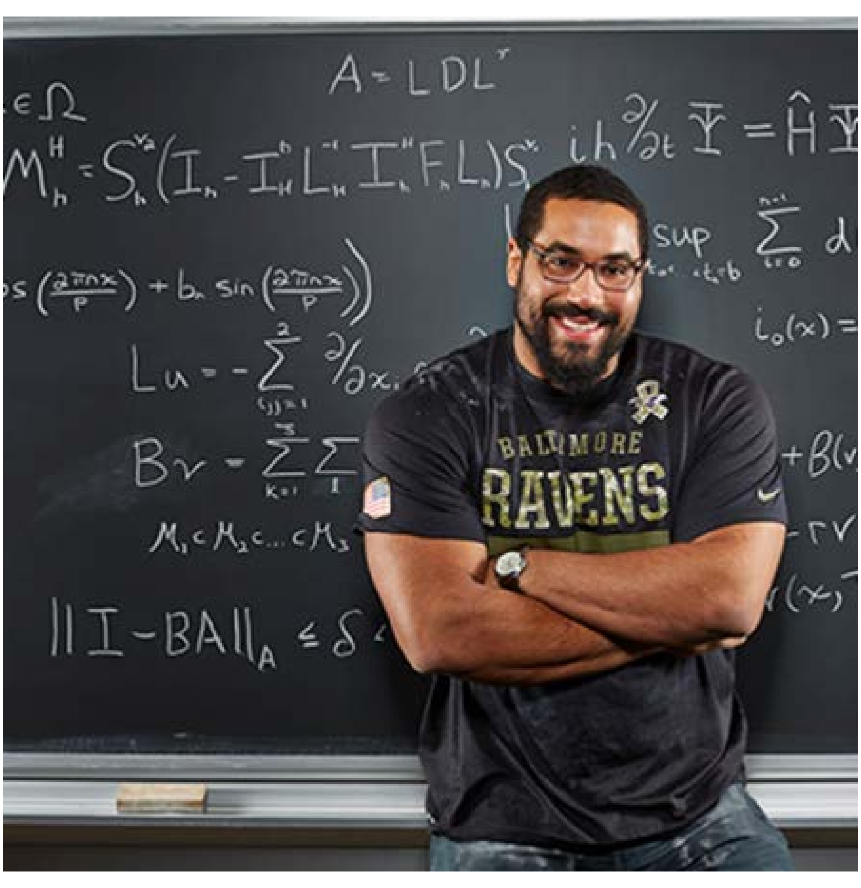
John Urschel az NFL-ben

Mégsem mondható gyakorinak, hogy egy profi amerikaifoci-játékos a tudományos életben is jeleskedik. A könyv erről a két némiképp ellentétesnek látszó vonzalomról szó, amelyet Urschel feleségével, az író Louisa Thomasszal közösen írt.

A könyvben egymást váltják az amerikai futballal és a matematikával kapcsolatos fejezetek.

Édesanyja egyedül nevelte, de tartotta a kapcsolatot apjával is. Anyja nagyon szerette volna, hogy John neves egyetemre járjon, mindent megtett, hogy ebbe az irányba terelje. De John már gyerekkorában imádta az amerikai focit, és végül ez határozta meg azt a döntést, hogy a Penn State University-t választotta.

Éveken át az őszi szemeszterben a foci töltötte ki az idejét (az amerikai futballszezon szeptembertől február elejéig tart), tavasszal és nyáron maradt több ideje matematikával foglalkozni. Nem tartotta magát kiemelkedően tehetségesnek a sportban, úgy értékeli, hogy a kitartása és az analitikus gondolkodása segítette abban, hogy focistaként is szép karriert futott be.



John Urschel az MIT-n

A könyvben többek között szó esik arról, hogy

- gyerekkorában milyen kérdések miatt kezdett vonzódni a matematikához, hogy miért választotta a Penn State-et,
- milyennek találta az egyetemi matematikakurzusokat,
- a Penn State amerikai focicsapata hogyan élte meg a Jeff Sandusky-ügyet, amikor is eltiltották a teljes csapatot azért, mert 20 évvel korábban a csapat egyik edzője, akit az aktuális csapat tagjai nem is ismertek, szexuálisan zaklatott játékosokat,
- mekkora hatást gyakorolt rá annak bizonyítása, hogy a valós számok halmaza nem megszámlálható,
- mennyire rosszul érintette, hogy a doktori disszertációjában szereplő egyik tétel bizonyítása rossz, és nem is volt triviális a hiba javítása,
- hogyan vált hollóvá, azaz a Baltimore Ravens játékosává.

A könyv 21. fejezetének címe: John von Neumann. Különös ez a fejezet, mert először arról szól, hogy az NFL draft (az újoncok kiválasztása a csapatok által) milyen fura dolog, mennyire különböznek a csapatok stratégiái, illetve hogy a nagyon jónak látszó játékosok sokszor nem futnak be komoly karriert, míg nemegyszer a sokadiknak választott játékosokból lesznek a világsztárok. Nagyon sok múlik a szerencsén, miközben a csapatok elképesztő pénzt, és energiát ölnek abba, hogy minél pontosabban tudják megmérni a játékosokban rejlő potenciált. Ennek kapcsán szóba kerül a Berkeley egyetem pere is, amelynek során azért perelték be az egyetemet, mert az adatok felületes megtekintése alapján a jelek arra mutattak, hogy komolyan diszkriminálták a női jelentkezőket. Ám az adatok alaposabb vizsgálata azt mutatta ki, hogy nem történt diszkrimináció, csak a Simpson-paradoxon[1] miatt tűnt úgy. Innen jut el oda, hogy az amerikai foci is egy zéró összegű játék, ahogy sok minden, amit a szerző szeret. Ilyen a sakk is, aminek Urschel felnőtt korában lett nagy szerelmese. Innen már csak egy lépés Neumann János és a minimax-tétel. Egyre többet olvasott a témáról, egyre jobban kezdte érdekelni, és így vált Neumann János a kedvenc matematikusává. Egyben azon is meglepődik, hogy megismerve Neumann munkásságát azt gondolja, hogy az alapvetően meghatározta a 20. századi matematikát, ennek ellenére ő csak egyetemista korában hallotta először a nevét. Hogyan lehetséges ez?

A könyv nem ad részletes betekintést sem egy profi amerikai focista életébe, se egy MIT-n dolgozó matematikus életébe. Ehelyett arra a szokatlan kettőségre fókuszál, hogy ugyanaz az ember hogyan éli meg a rajongását és tehetségét a matematika és az amerikai futball iránt.

Nem kell sem matematika-, sem amerikaifutball-rajongónak lenni ahhoz, hogy a könyvet valaki érdekesnek találja, az ugyanis részben attól izgalmas, hogy betekintést nyerhetünk ebbe a szokatlan párosításba.

Juhász Péter

a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet tudományos főmunkatársa,

a Szent István Gimnázium matematikatanára

---

[1] A Simpson-paradoxon egy statisztikai antinómia. Azt jelenti, hogy ha egy csoportot két (vagy több) részre bontunk, akkor elképzelhető, hogy egy tulajdonság minden csoportban teljesül, de a teljes mintára épp a tulajdonság ellenkezője igaz. A konkrét esetben az történt, hogy ha az összes egyetemi felvételizőt vettük alapul, akkor a férfiak lényegesen nagyobb százalékát vették fel, mint a nőknek. De ha ezt az egyes szakokra lebontva néztük meg, akkor a szakok többségében a nők felvételi aránya volt magasabb.

☐ recenzió

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

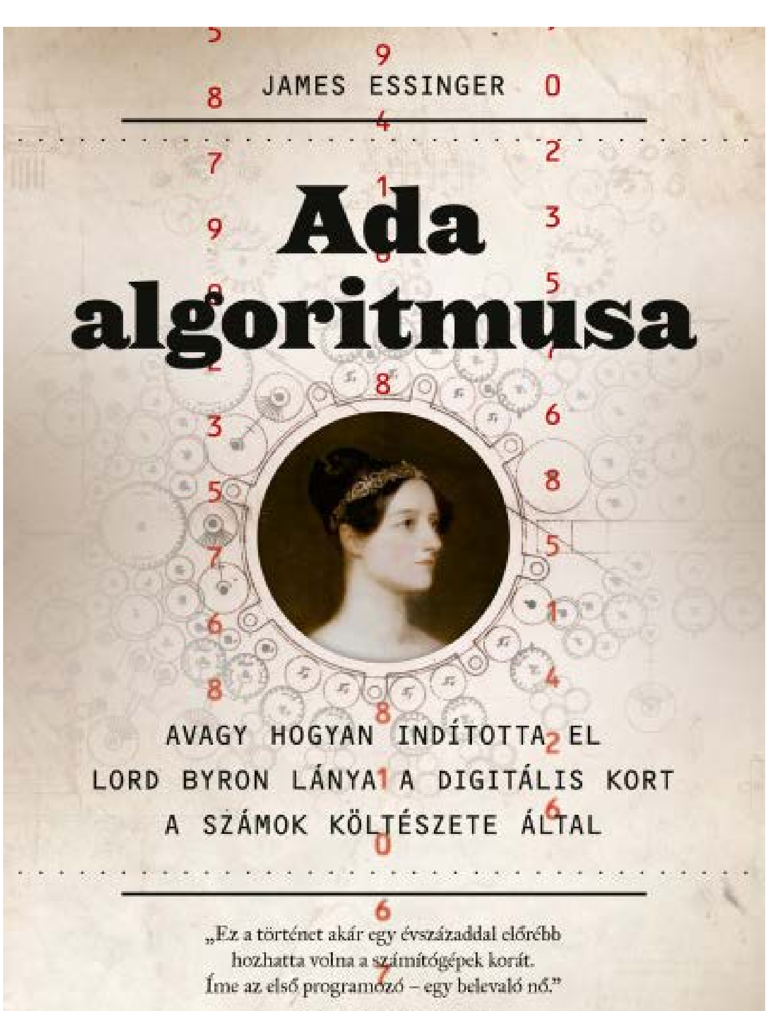
Binzberger Viktor 2022. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Ada algoritmusa

Avagy hogyan indította el Lord Byron lánya a digitális kort a számok költészete által

James Essinger könyve új perspektívából mutatja be Lady Ada Lovelace életét, Charles Babbage-dzsel kötött barátságát, és azt a komplex társadalmi szövetet, amely a 19. század közepén egyrészt lehetővé tette forradalmian új gondolatok találkozását, másrészt viszont behatárolta azokat a lehetőségeket, amelyek Lady Ada tehetségének kibontakoztatásához rendelkezésére álltak.

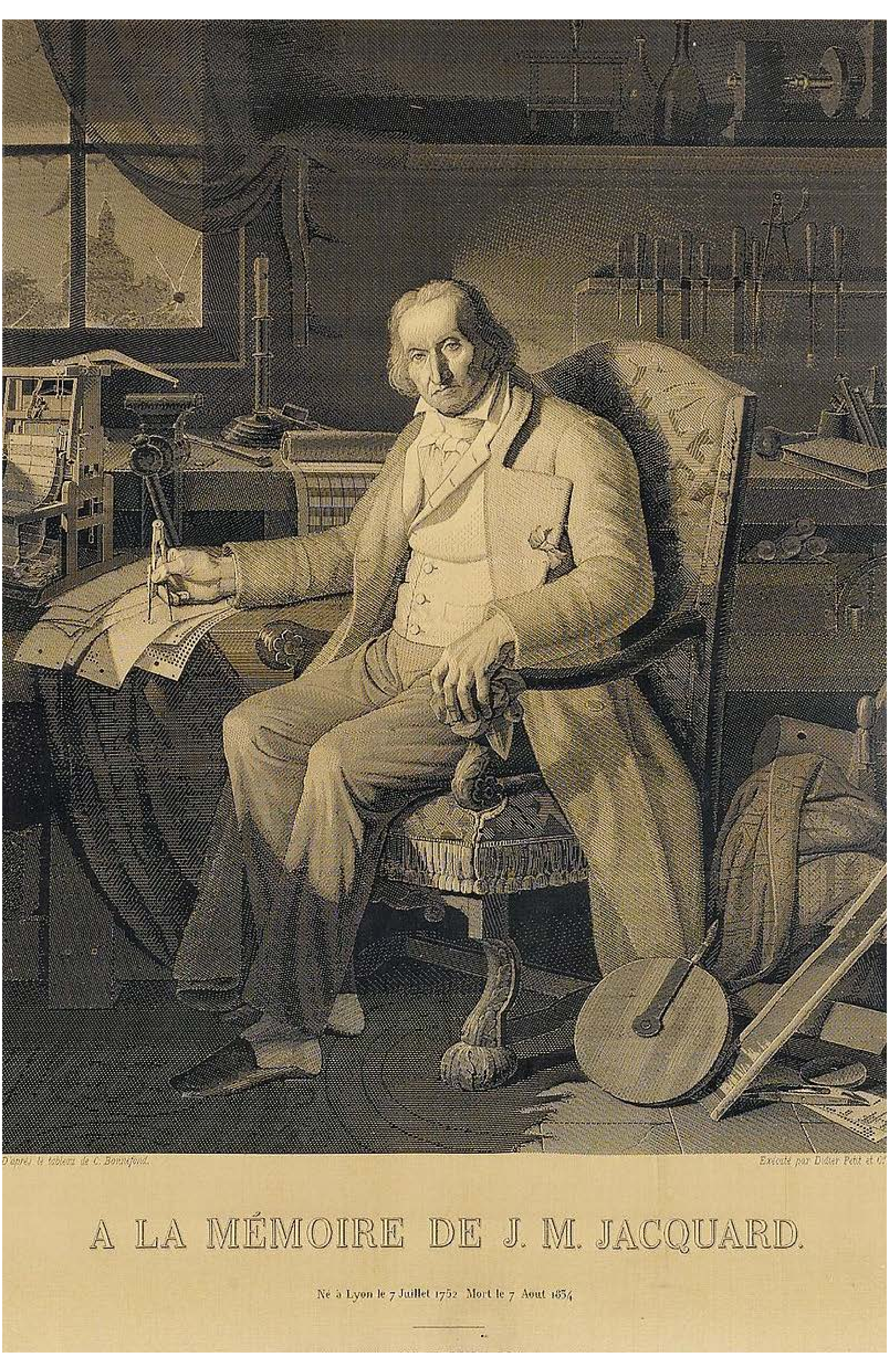
Lady Ada Lovelace munkája mennyiben tekinthető önálló és eredeti kontribúciónak, és valóban jogosan tekintjük-e őt a világ első programozójának? Az analitikus gépről írt gondolatai miért nem váltottak ki szélesebb körű hatást kortársai között, melyek voltak azok a pontok, ahol áttörést lehetett volna elérni, és milyen akadályok álltak annak az útjában, hogy a digitális korszak majdnem egy évszázaddal korábban megkezdődjön? Essinger könyve ezeknek a kérdéseknek a megválaszolását tűzi ki célul.


JAMES ESSINGER
Ada algoritmusa
AVAGY HOGYAN INDÍTOTTA EL LORD BYRON LÁNYA A DIGITÁLIS KORT A SZÁMOK KÖLTÉSZETE ÁLTAL
„Ez a történet akár egy évszázaddal előrébb hozhatta volna a számítógépek korát. Íme az első programozó – egy belevaló nő.”
Independent on Sunday
EURÓPA

Az első három fejezet a társadalmi és családi hátteret vázolja fel. Ada a botrányos életű romantikus költő, Lord Byron és egy vagyonos, művelt és a tudományok iránt érdeklődő, de nem nemesi származású hölgy, Annabella Milbanke gyermeke volt. Apja botrányai miatt Lady Ada már születésétől fogva a nyilvánosság reflektorfényében állt, és életének megértéséhez érdemes látnunk a nemesi osztály dekadens életstílusát, de úgy érzem, a könyv ezen a ponton túlságosan is elveszik a részletekben, amelyek nem igazán kapcsolódnak Ada tudományos munkásságához. Lord Byron szerelmi élete nagyobb részletességgel és terjedelemben kerül bemutatásra, mint maga a címadó algoritmus, ami számomra sokat levon a könyv értékéből.

A következő három fejezet Ada gyerekkorát és neveltetését mutatja be. Narcisztikus apja – nemesi címének átörökítésén és apai örökségének elherdálásán túl – egyáltalán nem játszott szerepet a nevelésében, ezzel szemben anyja, Lady Byron manipulatív és perfekcionista módon kontrollálta élete minden aspektusát, különös figyelmet fordítva tanulmányaira, és ezen belül matematikai képzésére. Saját széleskörű képzettségétől és amatőr matematikusi érdeklődésétől vezérelve sok pénzt költött lánya taníttatására egy olyan korban, amikor a nők számára általánosságban nem volt elérhető az oktatás. Lady Byron célja viszont nem az volt, hogy ezt a tudást Ada a tudomány, vagy a saját szellemi kiteljesedésének szolgálatába állítsa, hanem hogy egy tökéletes úrhölgyet képezzen lányából, aki azután egy nemesi házasság révén még magasabb társadalmi rétegbe emelheti családját.

A kilencedik fejezet az ipari forradalom kontextusának megrajzolásáról szól. A gőzgép feltalálása, az ipari munkafolyamatok hatékonyságának növelése az Adam Smith által leírt munkamegosztással, és a textilipar automatizálása különösen nagy hatással volt Charles Babbage és Ada gondolkodására. A Jacquard-féle lyukkártyával irányított automatikus szövőszék annyira lenyűgözte Babbage-et, hogy egy kisebb vagyont áldozott egy olyan selyem szőttesért, ami 24000 lyukkártya segítségével magát a feltalálót ábrázolja: ez a világ első digitalizált portréjának tekinthető.


D'après le tableau de C. Bonnefond.
Exécuté par Didier Petit et Cie
A LA MÉMOIRE DE J. M. JACQUARD.
Né à Lyon le 7 Juillet 1752 Mort le 7 Aout 1834

A világ legelső digitalizált portréja a feltalálóról selyemből a Jaquard-féle automatikus szövőszéken 1839-ben 24 000 lyukkártyával készült (Science Museum, London)

A számítógép története a tizedik fejezetnél, Charles Babbage bemutatásával kezdődik. Babbage egy gazdag bankár gyermekeként kellemes jólétben tudott kedvenc időtöltéseinek: a matematikának és a mechanikus számológép megalkotásának hódolni. Egyetemi évei alatt John Herschell-el együtt azon munkálkodtak, hogy a differenciálszámításhoz használt Newton-féle jelrendszert a hatékonyabbnak tartott Leibniz-féle jelrendszerre cseréljék, ami maradandó sikert hozott számára. Barátjával 1829-ben járt először Párizsban, ahol tudomást szerzett Gaspard de Prony báró munkájáról, aki a francia térképészeti szolgálatnak készített nagy pontosságú logaritmustáblázatokat az újonnan bevezetett metrikus rendszerhez. Ő is olvasta Adam Smith munkáját, és a táblázatok előállítását egy nagyon hatékony gyárhoz hasonlóan szervezte meg. A munkát három részre osztotta: a nagy matematikai tudást feltételező magas szintű tervezésre, az alapos gyakorlati tudást igénylő sarokszámok kiszámítására, és a csupán betanított munkát igénylő, ismétlődő összeadások sorozatává lebontható, sarokszámok közötti polinomiális interpolációra, amivel jelentősen párhuzamosította és felgyorsította a folyamatot.

Babbage-ben feltehetőleg ekkor fogalmazódott meg a mechanikus számítógép gondolata, amelynek *differenciálgép*nek keresztelt első változatán 12 éven át dolgozott. A differenciálgép egy *n*-ed fokú polinomiális függvény értékeit volt képes kiszámítani a 10-es számrendszerbeli egész számok sorozatára, és ezáltal automatizálni a logaritmustáblázatok előállításának mechanikus lépéseit. Egyre ambiciózusabb gépek terveivel állt elő, de végül csak egy hatjegyű, harmadfokú polinomok számítására képes prototípus készült el 1832-re, amely nem volt gyorsabb de Prony emberi kalkulátorainál.

Babbage és Ada barátságának kibontakozása ekkortájra tehető. A tizenhét éves Ada többször meglátogatta Babbage estélyeit, ahol látta a differenciálgép prototípusát működés közben, felismerte a találmányban rejlő lehetőségeket, és 1835-től rendszeresen levelezett a feltalálóval. Babbage időközben felhagyott a differenciálgép tökéletesítésével, és egy még általánosabb *analitikus gép* tervén kezdett el dolgozni. Ez már nem csak polinomiális, hanem tetszőleges függvény értékeinek kiszámítására is képes volt. Babbage a kézi adatbevitel helyett immár Jacquard-féle lyukkártyákkal képzelte el nemcsak az adatok, de a műveletek sorrendjének a bevitelét is, sőt a műveletek ismétlésére és kondicionális elágazásra is lehetőséget biztosított: emiatt tekinthető az első mai értelemben vett programozható számítógépnek.

A differenciálgép a gyakorlati felhasználás szemszögéből tekintve kudarcot vallott, a további fejlesztésekhez nélkülözhetetlen kormányzati támogatások elapadtak, Babbage pedig egyre jobban elszigetelődött. Ada érdeklődése viszont nőttön nőtt, ahogy egyre inkább megértette az analitikus gép jövőbemutató jelentőségét, Babbage pedig mentorként, tanárként és barátként támogatta őt.

Ada lelkesedése még azokban az években sem csökkent, amikor létrejött az anyja által vágyott főrangú házasság, amelynek első öt évében három egészséges gyermeknek adott életet. Házastársi kötelezettségeinek eleget téve ismét matematikai tanulmányaiba vetette magát. Nagy benyomást tett rá Mary Somerville, a skót származású autodidakta matematikusnő pályája, aki nőként elsőként járt be elismert, széles körben népszerű és anyagilag is sikeres tudományos karriert az Egyesült Királyságban. Kiváló tehetsége volt abban, hogy a kor élenjáró tudományos fejleményeit a témában kevésbé jártasak számára is érthetővé tegye, a kor csillagászati, matematikai, földrajzi és biológiai tudását összegző művei évtizedekig a legnépszerűbb egyetemi tankönyvek közé számítottak. Az ő példáját követve vonódott be Ada abba a körbe, akik Babbage analitikus gépének működését próbálták meg érthetővé tenni és népszerűsíteni.

Babbage lyoni és torinói utazása során ismerkedett meg egy fiatal matematikussal, Luigi Federico Menabreával, akit annyira érdekelt az analitikus gép működése, hogy egy jól érthető, tömör összefoglalást írt róla franciául egy kevéssé ismert svájci tudományos folyóiratba. Noha ez a cikk sokkal meggyőzőbben magyarázta el, hogy mennyiben más az analitikus gép a differenciálgép elvén működő korai kalkulátoroktól, mint ahogyan azt maga Babbage képes volt artikulálni, de ez az írás valószínűleg teljesen feledésbe merült volna, ha Ada nem dönt úgy, hogy angolra fordítja. Babbage-nek annyira tetszett a fordítás, hogy rögtön egy önálló publikáció írására buzdította Adát, de ő Lady Byron elvárásainak és a kor előítéleteinek megfelelően nőként nem merte önálló munkaként prezentálni gondolatait. Ezeket végül részletes, az eredeti cikk terjedelmét messze meghaladó, de csak egy szerény monogrammal ellátott "Fordítói Jegyzetek" formájában publikálta. Ez a fordítás és a Jegyzetek az egyetlen önálló tudományos szöveg, ami Adától fennmaradt. Élete folyamán ugyan rengeteg levelet váltott kortárs gondolkodókkal, viszont ezek nagy részét anyja, Lady Byron az örökség feldolgozása során – Ada határozott kívánsága ellenére – szisztematikusan megsemmisítette.

A Jegyzetek alapján Adáról az analitikus gép működésének összes részletében rendkívül tájékozott, a matematika és csillagászat kortárs kérdéseivel kapcsolatban széleskörűen művelt amatőr kutató képe rajzolódik ki. A Jegyzetek célja, hogy közérthetően és meggyőzően illusztrálja az analitikus gép forradalmian új számítási képességeit, különös hangsúlyt fektetve konkrét alkalmazási példák részletes ismertetésére. Ezek közé tartozik a Bernoulli-számok kiszámítására szolgáló algoritmus, amely a világ első számítógépes programjaként híresült el.

A Bernoulli-algoritmus jelentőségét az adja, hogy a probléma bonyolultsága lényegesen meghaladja a differenciálgép által kezelhető polinomiális sorozatokét. Ada ehhez olyan alapvető programozási technikákat ír le elsőként, mint például a ciklus (ehhez egy új jelölésrendszert vezet be), ciklusok egymásba ágyazása, és a változókra referencia szerint való hivatkozás. Az algoritmus egésze pedig azt a technikát illusztrálja, hogy hogyan lehet egy rekurzív formulát hatékony ciklusos algoritmussá alakítani. Ada mindeközben folyamatosan szem előtt tartja a gép memória- és programtárhely korlátait, és pontos becslést ad a végrehajtáshoz szükséges lyukkártyák számára.

Mindez annyira precíz és részletes megértést feltételez az analitikus gép működéséről, hogy többen kétségbe vonták Ada szerzőségét, és Babbage-ot tartják a valódi szerzőnek. Essinger a fennmaradt életrajzi töredékek alapján határozottan eloszlatja ezeket a kétségeket, de szerintem ez vita szem elől téveszti a lényeget: Lady Ada Lovelace volt az, aki képes volt elsőként felismerni a programozható számítógép korszakalkotó jelentőségét, és érthetően elmagyarázni a programozás alapvető fogalmait, úgy, ahogyan ezt Babbage maga soha nem volt képes megtenni.

Mi lett volna, ha Ada tudományos pályáját nem szakítja félbe súlyos betegsége és halála? Ha az analitikus gép a kor technikai színvonalán nem bizonyul megvalósíthatatlannak? Ha Babbage jobban támaszkodott volna Ada segítségére a szükséges kormányzati támogatás megszerzéséhez? Ha a társadalmi és családi háttér elfogadóbb lett volna a nők professzionális tudományos karrierjével szemben?

Nem hinném, hogy ezekre az író által felvetett tényellentétes kérdésekre egy ilyen egyedi esetben válaszolni tudnánk. Számomra a történet lényege, hogy Ada, Mary Somerville-hez hasonlóan egy nagyon egyenlőtlen és nők számára különösen hátrányos társadalmi kontextus ellenére, kiemelkedő szorgalma és tehetsége révén volt képes kortársai közül kiemelkedni. Az anyagi jólét ugyan a korban egyedülálló hozzáférést biztosított magas színvonalú oktatáshoz, de a vagyonnal járó kötelezettségek nagyon leszűkítették Ada lehetőségeit, amit csak kitartó törekvéssel tudott ellensúlyozni.

Lady Ada nem véletlenül vált a nők kutatói és mérnöki karrierjét népszerűsítő mozgalom *(STEM - Science, Technology, Engineering and Mathematics)* klasszikus ikonjává. Ha olyan társadalmi tereket hozunk létre, ahol a nőknek lehetőségük nyílik tudományos és technikai tehetségük kibontakoztatására akkor is, ha nem privilegizált társadalmi réteghez tartoznak, ha pozitív szerepmodellekkel ellensúlyozzuk a hagyományos előítéleteket, ha csökkentjük az oktatáshoz, munkahelyekhez való hozzáférés korlátait, az nem csak igazságosabb és egyenlőbb társadalmat eredményez, de olyan gazdasági és innovációs potenciált szabadít fel, amely korszakalkotó újításokhoz vezet.

Binzberger Viktor

Az írásban foglaltak kizárólag a szerző saját véleménye, nem tükrözik a szerző munkáltatójának vagy bármilyen más szervezetnek a nézetét vagy álláspontját.

informatika matematikatörténet recenzió

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

Major Péter 2022. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Bevezetés a valószínűségszámításba

David F. Anderson, Timo Seppäläinen, Benedek Valkó: Introduction to Probability

A címben szereplő bevezetés (introduction) szót nagyon komolyan kell venni. A könyv célja az, hogy bemutassa a valószínűségszámítás alapjait, és legfontosabb, nehéz matematikai apparátust nem igénylő eredményeit. A szerzők fontosnak tartották, hogy ne csak az eredmények bizonyítását ismertessék, hanem bőséges példaanyag segítségével érzékeltessék azok hasznosságát is, és egyben megtanítsák a valószínűségszámítás néhány fontos módszerének az alkalmazását. Ez a könyv elsősorban az amerikai egyetemeken szereplő bevezető valószínűségi kurzusok számára készült. Különböző nehézségű feladatokat tartalmaz, jelezve közülük a nehezebb, több munkát igénylőket, lehetőséget adva arra, hogy az oktatók az általuk vezetett kurzus diákjainak a tudásához, képességeihez igazítsák az oktatást.

A könyv megértéséhez az olvasónak rendelkeznie kell alapvető analízisismeretekkel, viszont nem szükséges hozzá a mértékelmélet mélyebb eredményeinek az ismerete. A szerzők olyanokkal is meg akarták ismertetni a valószínűségszámítást, akik nem tanultak mértékelméletet. Itt egy komoly problémába ütközünk, aminek a megértéséhez érdemes egy kis történelmi utalást tenni.

Általában úgy tekintik, hogy a valószínűségszámítás a 17. század közepén alakult ki *Blaise Pascal* és *Pierre de Fermat* levelezése során. Ők ebben a levelezésben de Méré lovag szerencsejátékokkal kapcsolatos kérdéseit tárgyalták meg. Bár később is születtek fontos valószínűségszámítási eredmények, a modern, mai valószínűségszámítás elméletét *Andrej Nyikolajevics Kolmogorov* dolgozta ki Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (A valószínűségszámítás alapfogalmai) című 1933-ban megjelent könyvében. (Magyarul: Gondolat, 1982; Typotex, 2010.) A valószínűségszámítás megjelenése és annak precíz megalapozása között tehát majdnem 300 év telt el. Ennek az az oka, hogy bár a valószínűségszámítás problémáinak megértéséhez nem kellenek komoly matematikai ismeretek, azok precíz tárgyalásához a modern matematika egy fontos részének, a mértékelméletnek az alkalmazása szükséges. Ez komoly gondot jelent akkor, ha olyan majdani alkalmazóknak akarjuk elmagyarázni a valószínűségszámítás lényegét, akik nem tanultak mértékelméletet. Ezzel a nehézséggel szembesültek az itt ismertetett könyv szerzői is.

Ők úgy oldották meg ezt a problémát, hogy egyrészt kerülték az olyan túlságosan bonyolult és elvont fogalmak és kérdések tárgyalását, amilyenekkel a valószínűségszámítást gyakorlati problémák megoldásában alkalmazók nem fognak találkozni. Másrészt bizonyos eredményeket, amelyek bizonyítása komoly matematikai apparátust igényelt volna, bizonyítás nélkül közöltek. Jelen ismertetés írója egyetért ezzel a hozzáállással, de van néhány olyan pont, ahol vitatkozna a szerzőkkel. Erről az ismertetés későbbi részében lesz szó.

A könyv 10 fejezetből és egy appendixből áll. Az appendix a könyvben felhasznált legfontosabb analízisbeli és kombinatorikai eredményeket tárgyalja, valamint megadja néhány valószínűségi eloszlás táblázatát.

Az **első** fejezet ismerteti a valószínűségszámítás néhány alapvető fogalmát, a valószínűségi mérték (eloszlás), a véletlen esemény, valamint a valószínűségi változó definicióját, tárgyalja ezek legfontosabb tulajdonságait, és több példa megoldását ismerteti. Ezek segítik az itt bevezetett fogalmak jobb megértését.

E fejezetben a valószínűségi változó bevezetése érdemel külön figyelmet, ami eltér e fogalom hagyományos tárgyalásától. A szerzők először bevezetik a mintatér (*sample space*) fogalmát, és ezen definiálják a valószínűségi eloszlásokat és valószínűségi változókat. Mint a bevezetőben írják, ez fontos annak érdekében, hogy elkerüljék azt az érzést, hogy a valószínűségi változó egy homályos fogalom. Ezen ismertetés írója nem ért egyet ezzel a hozzáállással, mivel így néhány fontos kérdésnek hiányzik a megfelelő magyarázata. E probléma tárgyalása az ismertetés későbbi részeiben is meg fog jelenni.

A **második** fejezet néhány, a véletlen eseményekkel kapcsolatos fogalmat és eredményt tartalmaz. Bevezeti a feltételes eloszlást, események, majd valószínűségi változók függetlenségének a fogalmát, bebizonyít néhány ezekkel a fogalmakkal kapcsolatos eredményt, és tárgyalja a Bayes-formulát.

A **harmadik** fejezet témája a valószínűségi változók fogalma. Bevezeti az eloszlás és az eloszlásfüggvény fogalmát, (amit a könyv *cumulative distribution function*-nak nevez), majd tárgyalja a várható értéknek és szórásnégyzetnek a valószínűségszámításban rendkívül fontos fogalmát, illetve megmutatja, hogyan lehet ezeket kiszámolni. Csak a diszkrét eloszlású és a sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók függvényeinek a kiszámítására ad a könyv képletet, de ez a megszorítás elfogadható, mert a gyakorlatban csak ilyen valószínűségi változókkal találkozunk. Bevezet néhány fontos eloszlást, így a binomiális, a geometriai eloszlásokat, a normális eloszlást, és kiszámítja az ilyen eloszlású valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét. Viszont hiányzik a várható érték egy rendkívül fontos tulajdonságának az említése. Nevezetesen az, hogy valószínűségi változók összegének a várható értéke egyenlő az egyes valószínűségi változók várható értékének az összegével. Pontosabban, ez az eredmény csak a könyv végén, a nyolcadik fejezetben jelenik meg, és ott is csak speciális esetekben bizonyítva.

Ez a hiány összefügg azzal, hogy a valószínűségi változók ebben a könyvben csak a mintatereken vannak definiálva. Ha általános terekben definiáljuk azokat, akkor a várható érték additivitása következik az integrálok jól ismert additivitásából. Természetesen a dolog nem ilyen egyszerű. Az általános (és a valószínűségszámítás legtöbb tárgyalása során bevezetett) várható érték definíciója esetén meg kell magyarázni, hogy az általános esetben miért és hogyan tudjuk a problémáinkat a mintatereken definiált valószínűségi változókkal és azok eloszlásaival való számolással megoldani. Ehhez ismertetni kell a mértékelmélet néhány alapvető eredményét. Mégis, véleményem szerint ez a helyes tárgyalásmód. Ugyanis ezeknek az eredményeknek a bemutatása nem annyira nehéz, viszont így érthetőbb és teljesebb képet kapunk a valószínűségszámítás néhány problémájáról.

A könyv egyik célja az, hogy az olvasó megismerje a legfontosabb valószínűségszámítási törvényeket. Először olyan speciális esetekben tárgyalja ezeket a törvényeket, amelyekben a bizonyítás egyszerűbb. Ez a **negyedik** fejezet fő témája. Ez a fejezet először a binomiális eloszlással foglalkozik, bebizonyítja erre a centrális határeloszlástételt a Stirling-formula segítségével, majd a nagy számok törvényét is, de ezt is csak a binomiális eloszlás esetében. Tárgyal néhány érdekes feladatot, például azt, hogy hogyan lehet bizonyos statisztikai problémákban konfidenciaintervallumot szerkeszteni a centrális határeloszlás-tétel segítségével. Ez a matematikai statisztika egyik fontos feladata.

Ezután a könyv bevezeti a Poisson-eloszlást, és megadja a binomiális eloszlás jó közelítését Poisson-eloszlás segítségével. A fejezet következő témája az exponenciális eloszlás, és annak legfontosabb tulajdonságai. Végül bevezeti a Poisson-folyamat definícióját, és definiálja segítségével a gamma-eloszlást. Hiányolom ebből a tárgyalásból annak a bizonyítását, hogy a Poisson-folyamat valóban létezik, azaz létezik olyan sztochasztikus folyamat, amely teljesíti a Poisson-folyamat definíciójában szereplő feltételeket.

Az **ötödik** fejezet ismert eloszlású valószínűségi változók függvényeit tekinti, és ezek várható értékének, illetve eloszlásának a kiszámolásával foglalkozik. Az úgynevezett momentumgeneráló függvénynek a kiszámolása és tulajdonságainak a vizsgálata e fejezet fő témája. Egy X valószínűségi változó momentumgeneráló függvénye az $M(t)=Ee^{tX}$ függvény, ahol E várható értéket jelöl, és a t paraméter egy valós szám. A fejezet megfogalmazza a momentumgeneráló függvény néhány fontos tulajdonságát. Például azt, hogy egy valószínűségi változó momentumgeneráló függvényének az értéke az origó egy kis környezetében meghatározza a valószínűségi változó eloszlását. A szerzők azért foglalkoznak a momentumgeneráló függvényekkel és azok tulajdonságaival, mert ezek segítségével fogják belátni a centrális határeloszlás-tételt.

A **hatodik** fejezet az ötödik fejezet természetes folytatása. Itt azt a problémát tárgyalják, hogy amennyiben ismerjük több valószínűségi változó együttes eloszlását, akkor hogyan tudjuk kiszámolni ezen valószínűségi változók valamely függvényének a várható értékét és eloszlását. Először azzal az esettel foglalkoznak, amikor a valószínűségi változók mindegyike diszkrét eloszlású. Ez viszonylag egyszerű probléma, a könyv korábbi fejezeteiben felhasznált módszerek segítségével tárgyalható. A könyv bemutatja az ezzel kapcsolatos legfontosabb eredményeket, és bevezeti az úgynevezett polinomiális eloszlásokat, amelyek természetes módon megjelennek e vizsgálatok során.

A következő vizsgálandó eset az, amikor az egyes valószínűségi változók folytonos eloszlásúak, azaz sűrűségfüggvénnyel rendelkeznek. A könyv módszerei csak azon speciális eset vizsgálatához elegendőek, ahol ezek a valószínűségi változók együttesen is folytonosak, azaz az együttes eloszlásuknak van (többváltozós) sűrűségfüggvénye. Ezekről bizonyít be a könyv eredményeket. Ezek közül a legfontosabb az, amelyik megadja sűrűségfüggvényekkel rendelkező valószínűségi változók függetlenségének a jellemzését a sűrűségfüggvények segítségével. A fejezet több példát is tartalmaz. Többek között bevezeti a kétváltozós standard normális eloszlást. (Ez olyan (X,Y) véletlen vektor eloszlása, amelynek a koordinátái független, standard normális eloszlású valószínűségi változók.)

A **hetedik** fejezet fő témája a konvolúció. Ez egy olyan operátor, amelynek segítségével ki tudjuk számolni ismert eloszlású független valószínűségi változók összegének az eloszlásfüggvényét valamint sűrűségfüggvényét is, feltéve, hogy az utóbbi létezik. E fejezet több példát tárgyal a konvolúció alkalmazásáról. Például megmutatja, hogy független, normális eloszlású valószínűségi változók összege olyan normális eloszlású valószínűségi változó, amelynek várható értéke, illetve szórásnégyzete megegyezik az összeadandók várható értékének, illetve szórásnégyzetének az összegével. Ez tanulságos háttérinformáció a később tárgyalt centrális határeloszlás-tételhez.

Ezután ez a fejezet foglalkozik az úgynevezett felcserélhető valószínűségi változókkal, és megmutatja, hogy ezek néhány egyszerűen bizonyítható tulajdonsága nagy segítséget nyújt bizonyos feladatok megoldásában. Például tekinthetjük a következő feladatot. *Egy urnában különböző színű golyók vannak, és minden szín esetén tudjuk, hogy hány ilyen színű golyó van az urnában. Visszatevés nélkül kihúzunk golyókat, mindegyik golyót egyforma valószínűséggel. Mi a valószínűsége, hogy bizonyos húzásoknál (például az ötödik, hetedik és tizedik húzásnál) előírt színű golyót húzunk?* Ez a feladat nagyon egyszerűvé válik, ha ismerjük a szükséges eredményeket a felcserélhető valószínűségi változókról.

A hetedik fejezet utolsó témája a Poisson-folyamat egy fontos tulajdonságának az ismertetése, tudniillik annak, hogy egy Poisson-folyamat egymást követő pontjai közötti távolságok egymástól független exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

A **nyolcadik** fejezet első eredménye a várható érték additivitásáról szól. Ezt bizonyítja bizonyos speciális esetekben. Erről az eredményről már volt szó a harmadik fejezetről szóló részben is. A könyv több olyan példát is tárgyal, ahol ez az állítás jól használható. A második fontos, ebben a fejezetben tárgyalt állítás, hogy független valószínűségi változók szorzatának a várható értéke megegyezik az egyes valószínűségi változók várható értékének a szorzatával. Fontos megjegyezni, hogy ez a szorzat várható értékéről szóló eredmény, ellentétben a megfelelő összegekről szólóval, csak független valószínűségi változók esetében érvényes. A könyv egyszerű bizonyítást ad erre abban az esetben, ha az egyes valószínűségi változók diszkrét eloszlásúak vagy sűrűségfüggvénnyel rendelkeznek. (A könyv csak ilyen eseteket tárgyal.) A bizonyítás azon alapszik, hogy valószínűségi változók függetlensége jó jellemezhető sűrűségfüggvényeik segítségével.

A fejezet több példát is megad, ahol ezek az eredmények hasznos összefüggésekre mutatnak rá. Így például egyszerű képlet van arra, hogy független valószínűségi változók összegének ne csak a várható értékét, hanem a szórásnégyzetét is kiszámolhassuk. Ugyancsak hasznos alkalmazás bizonyos eloszlások, például a negatív binomiális eloszlás, a binomiális eloszlás várható értékének és szórásnégyzetének a kiszámítása. A fejezet külön tárgyalja ezek segítségével a híres kupongyűjtő problémát, ami a következőképp szól: *Egy cég a termékeit egy dobozban árulja, és mindegyik dobozba betesz ráadásként egy játékdarabot. A játékdaraboknak összesen n különböző típusa van, és minden dobozba egymástól függetlenül ugyanolyan valószínűséggel helyezik el ezen játéktípusok valamelyikét. Ha valaki összegyűjti az összes játéktípust, akkor jutalmat kap. Hány dobozt kell vásárolnunk ahhoz, hogy elnyerjük ezt a jutalmat?* A szerzők kiszámolják a nyeréshez szükséges dobozszám várható értékét és szórásnégyzetét. E feladat külön érdekessége, hogy ahhoz, hogy összegyűjtsük a játéktípusok felét, várhatólag kevesebb dobozt kell vásárolnunk, mint ahhoz, hogy megszerezzük azt az utolsó, még hiányzó játéktípust.

E fejezet megmutatja az előző eredmények segítségével, hogy független valószínűségi változók összegének a momentumgeneráló függvénye egyenlő az egyes függvények momentumgeneráló függvényének a szorzatával. Megmutatja ennek az állításnak az alkalmazását is néhány példában. De ez az eredmény igazán a következő fejezetben tárgyalt centrális határeloszlás-tétel bizonyításában bizonyul hasznosnak.

Ezután ebben a fejezetben bevezetik a kovariancia és a korreláció fogalmát. Az X és Y valószínűségi változó

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$$

kovarianciafüggvénye valamilyen értelemben ezen valószínűségi változók egymás közötti függését méri, és ennek ismeretében ki tudjuk számolni valószínűségi változók összegének a szórásnégyzetét akkor is, ha azok nem függetlenek. A korrelációfüggvény a kovarianciafüggvény alkalmas normalizáltja. A **nyolcadik** fejezet felsorolja a kovarianciafüggvény legfontosabb tulajdonságait. Végül ebben a fejezetben bevezetik először a kétváltozós majd az általánosabb többváltozós normális eloszlás fogalmát. Ezen ismertetés írója itt hiányolja néhány tény tárgyalását.

Helyesnek tartottam volna, ha a könyv ismertette volna a következő fejezetben a centrális határeloszlás-tétel mellett annak többdimenziós változatát is. Ez tette volna érthetőbbé, miért vezették be a többdimenziós normális eloszlásokat. Ezek a többdimenziós centrális határeloszlás limeszeként jelennek meg a valószínűségszámításban.

Ez magyarázatot adott volna arra is, hogy miért fontos definiálni a többdimenziós normális eloszlást abban az esetben is, ha annak nincs sűrűségfüggvénye. Vannak fontos példák, amikor a többdimenziós centrális határeloszlás-tétel limesze ilyen eloszlás. Mint a könyv megjegyzi, ilyen esetekben is lehet definiálni a többdimenziós normális eloszlást, például annak momentumgeneráló függvénye segítségével.

A **kilencedik** fejezet ismerteti a klasszikus valószínűségszámítás legfontosabb eredményeit. Először a Markov- és Csebisev-egyenlőtlenséget bizonyítja. A fejezet következő témája a nagy számok törvénye. Ez a következőt állítja: Vegyük független, egyforma eloszlású $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók $\frac{S_n}{n}=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ átlagát minden n számra. Ezek az átlagok nagyon enyhe és természetes feltételek mellett konvergálnak ezen valószínűségi változók EX_1 várható értékéhez, ha az n szám tart a végtelenhez. A fenti állítás pontos megfogalmazásához szükséges tisztázni azt is, hogy hogyan definiáljuk ezen átlagok konvergenciáját, azaz be kell vezetni egy alkalmas konvergenciafogalmat a valószínűségi változók terében. Kétfajta konvergenciát szoktak tekinteni. Az egyik az úgynevezett sztochasztikus konvergencia. Ha az átlagok sztochaszikusan konvergálnak, akkor a nagy számok gyenge törvényéről beszélünk. Egy erősebb, úgynevezett majdnem mindenütt konvergencia teljesülését a nagy számok erős törvényének nevezik. A könyv mind a kétfajta konvergencia teljesülését bebizonyítja alkalmas feltételek mellett. Ugyanakkor ezek a feltételek lényegesen gyengíthetők, de ennek bizonyításához a könyvben nem tárgyalt módszerek szükségesek.

A kilencedik fejezet következő témája a valószínűségszámítás talán legfontosabb eredménye, a centrális határeloszlás-tétel. Ez a következő állítást fogalmazza meg. Tekintsük független valószínűségi változók egy végtelen sorozatát, és minden pozitív egész n számra vegyük e sorozat első n tagjának az összegét, és annak normalizáltját. (A normalizálás során az összegből kivonjuk annak várható értékét, majd elosztjuk a szórásával.) Ezen normalizált összegeknek az eloszlása nagyon általános feltételek mellett konvergál a standard normális eloszláshoz, ha n tart végtelenhez.

A könyv csak független, egyforma eloszlású valószínűségi változók normalizált összegeivel foglalkozik. A momentumgeneráló függvények segítségével bizonyítja be ezt az eredményt, igaz a szükségesnél erősebb feltételek mellett. A szerzők megfogalmazzák az éles változatot is, és megjegyzik, hogy ennek az éles változatnak a bizonyítása nagyon hasonló az általuk ismertetett bizonyításhoz. Ez azonban csak részben igaz. Az éles eredményt valóban a könyvben ismertetettekhez nagyon hasonló számolások segítségével kaphatjuk meg, ha a momentumgeneráló függvények helyett azok egy alkalmas módosításával, az úgynevezett karakterisztikus függvényekkel számolunk. De a bizonyításnak van egy másik része is. Meg kell indokolni, hogy az elvégzett számolásokból miért következik a centrális határeloszlás-tétel. És ez az indoklás ebben az új esetben már más módszereket igényel.

Ez a fejezet megemlíti a kapott eredmények néhány érdekes alkalmazását. Ezek egyike az úgynevezett Monte Carlo-módszer, ami lehetőséget ad bizonyos nehezen számolható mennyiségek (például bonyolult integrálok) viszonylag pontos kiszámítására megfelelő eloszlású véletlen minták segítségével. A könyv ismertet példákat, amikor ez a módszer jól alkalmazható.

A könyv utolsó, **tizedik** fejezete a feltételes valószínűség és feltételes várható érték fogalmát tárgyalja az általános esetben. Ez egy meglehetősen kényes téma, amitől sokan idegenkednek. Szemléletesen a feltételes várható érték jelentése a következő. Van egy véletlen, azaz valószínűségi változó. Ennek várható értéke azt fejezi ki, hogy mit várunk, ennek értéke (bizonyos hibával) körülbelül mekkora lesz. De ha vannak plusz ismereteink, amelyek befolyásolják e változó értékét, akkor azokat is figyelembe vesszük, amikor azt becsüljük meg, hogy mit várunk. Ezt próbáljuk kifejezni a feltételes várható érték bevezetésével. De ha a valószínűségi mező felbomlik kontinuum sok nulla valószínűségű diszjunkt esemény uniójára, és azt tudjuk, hogy ezen nulla valószínűségű események közül melyik következett be, akkor nehéz megmondani, hogy ezt az információt hogyan kell figyelembe venni.

Az általános esetben ezt a feltételes valószínűséget és várható értéket a mértékelmélet egy mély eredményének, az úgynevezett Radon–Nikodym-tételnek és az e tételben bevezetett Radon–Nikodym-deriváltnak a segítségével definiálják. Ezzel a Radon–Nikodym-deriválttal elég nehéz számolni, és ezért sokan igyekeznek ezt elkerülni.

A könyv szerzői úgy kerülik el ezt a nehézséget, hogy csak abban az esetben dolgoznak ezekkel a fogalmakkal, amikor a tekintett valószínűségi változók diszkrét eloszlásúak, vagy létezik együttes sűrűségfüggvényük. Mind a két esetben definiálják természetes módon a feltételes sűrűségfüggvényt, majd ezek segítségével definiálják, szintén természetes módon, a feltételes valószínűséget és feltételes várható értéket. Bebízonyítanak néhány eredményt a feltételes várható értékről. Ezek között van olyan, a feltételes várható érték bizonyos optimum tulajdonságát kifejező állítás is, ami jelzi, hogy miért játszik a feltételes várható érték fontos szerepet a statisztikai becslések elméletében.

Ez a tárgyalás segíthet a feltételes valószínűség és várható érték fogalmának a megértésében az általános esetben, amikor nulla mértékű feltételekkel is tudnunk kell dolgozni. A könyv ad néhány útmutatást arról, hogy mit kell tenni az általános esetben, de ez nem elegendő a felmerülő nehézségek leküzdéséhez.

Röviden összefoglalva, ezen ismertetés írójának a következő a véleménye: Ez a könyv hasznos lehet azok számára, akik a valószínűségszámítás alkalmazásával foglalkoznak, szeretnének valamilyen képet kapni arról, hogy mivel foglalkozik ez a tudomány, de nem kívánnak elmélyült tanulmányokat folytatni. Viszont azoknak, akik a valószínűségszámítás elméletét mélyebben meg kívánják ismerni, és hajlandóak több energiát fordítani arra, hogy megtanulják az ehhez szükséges elméletet, más könyveket érdemes tanulmányozni.

Major Péter
egyetemi tanár, akadémikus

David F. Anderson, Timo Seppäläinen, Benedek Valkó: Introduction to Probability, Cambridge University Press, 2017

(A három szerző, köztük a magyar Valkó Benedek, a könyv írásakor a wisconsini egyetemen, Madisonban dolgozott. *A szerk.*)

recenzió valószínűségszámítás

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

A **TUDOMÁNY** MENÜPONT TÖBBFÉLE, A MATEMATIKA TUDOMÁNYÁHOZ KAPCSOLÓDÓ FUNKCIÓT TAKAR..**A TUDOMÁNY– TÖRTÉNET ROVAT** CÉLJA ELSŐSORBAN MATEMATIKATÖRTÉNETI JELLEGŰ ÍRÁSOK KÖZLÉSE. **A MI IS …?ROVAT** A MAI MATEMATIKA TUDOMÁNYÁRÓL KÍVÁN SZÓLNI A HOZZÁÉRTŐKNEK.
(ROVATSZERKESZTŐK: *BESENYEI ÁDÁM; STIPSICZ ANDRÁS.*)

Titkos Tamás

2022. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS…?

A Tingley-sejtés

Ebben a cikkben valós normált terekről és azok távolságtartó leképezéseiről lesz szó. A szükséges fogalmak bevezetése után ismertetünk egy nagyon szép tételt, a Mazur–Ulam-tételt, majd rátérünk annak egy nagyon természetes általánosítására (Mankiewicz tétele). Ezek után teszünk néhány megjegyzést arra vonatkozóan, hogy hogyan néz ki egy gömb és a felülete, és kimondjuk Tingley sejtését, ami amennyire egyszerűnek hangzik, annyira nehéz. (És a mai napig megoldatlan.) *Titkos Tamás* cikke következik.

Vizvári Béla

2022. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS…?

Az index tanítása nemzetközi környezetben

Az index absztrakt fogalmát korántsem egyszerű megérteni, főleg, ha avval először az egyetemen találkozik a hallgató. A tanárnak, egyetemi oktatónak fel kell ismerni a problémát, és didaktikusan elmagyarázni a válaszokat a külföldi egyetem nemzetközi diákjaiban felmerülő kérdésekre. Erről ír szubjektív beszámolójában a Cipruson, Famaguszta városában tanító *Vizvári Béla*.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

Titkos Tamás 2022. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A Tingley-sejtés

Ebben a cikkben valós normált terekről és azok távolságtartó leképezéseiről lesz szó. A szükséges fogalmak bevezetése után ismertetünk egy nagyon szép tételt, a Mazur–Ulam-tételt, majd rátérünk annak egy nagyon természetes általánosítására (Mankiewicz tétele). Ezek után teszünk néhány megjegyzést arra vonatkozóan, hogy hogyan néz ki egy gömb és a felülete, és kimondjuk Tingley sejtését, ami amennyire egyszerűnek hangzik, annyira nehéz. (És a mai napig megoldatlan.)

1. Normált terek

Elsőként fel kell idéznünk, mik a valós vektorterek. A cikkben lévő állítások szemléltetéséhez elég lenne a valós síkra, azaz az $\mathbb{R}^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ térre gondolni, és azt különböző struktúrákkal ellátni. De ahhoz, hogy az állításokat az eredeti formájukban mondjuk ki (rámutatva a nehézségekre), szükség van az absztrakt definíciókra, és néhány bonyolultabb példára. Azok, akik „csak a nagy képre kíváncsiak”, az alábbihoz hasonló szürke keretes bekezdéseket nyugodtan átugorhatják, és vektortér/normált tér helyett gondolhatnak $\mathbb{R}^2$-re, és azokra a konkrét normákra, amiket említeni fogunk.

Valós vektortér alatt egy olyan X halmazt értünk, ami el van látva egy összeadás nevű kétváltozós $+$ művelettel, és X elemeit meg lehet szorozni valós számokkal. Az X elemeit vektoroknak fogjuk nevezni. Az összeadásnak és a valós számmal szorzásnak (ahogy azt az $\mathbb{R}^2$ esetében megszokhattuk) az alábbi tulajdonságokkal kell rendelkezni:

1) Asszociatív, azaz minden $u,v,w\in X$ vektorhármasra $u+(v+w)=(u+v)+w$.

2) Kommutatív, azaz minden $u,v\in V$ vektorpárra $u+v=v+u$.

3) Létezik neutrális elem, azaz olyan 0-val jelölt elem, amelyre minden $v\in X$ esetén $v+0=v$.

4) Minden $v\in X$ elemhez található olyan $u\in X$, amelyre $v+u=0$. (Az u elemet v ellentettjének, vagy additív inverzének nevezzük.)

A skalárral való szorzásra vonatkozó zárójelezési szabályok pedig az alábbiak:

5) Minden $c\in\mathbb{R}$ számra és $u,v\in X$ vektorokra $c(u+v)=cu+cv$.

6) Minden $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ számra és $v\in X$ vektorra: $(c_1+c_2)v=c_1v+c_2v$.

7) Minden $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ számra és $v\in X$ vektorra igaz, hogy $c_1(c_2v)=(c_1c_2)v$.

8) Minden $v\in X$ vektorra $1v=v$.

Példák valós vektorterekre: Ahogy már említettük, a korábbról ismert $\mathbb{R}$ (valós számegyenes), $\mathbb{R}^2$ (valós sík) struktúrák vektorterek a megszokott műveletekkel. Vektorteret alkotnak a $[0,1]$ intervallumon értelmezett valós értékű függvények, ha két függvény összegét pontonkénti értelmezzük, azaz $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$, és függvényt számmal a $(cf)(x):=cf(x)$ pontonkénti szabály szerint szorzunk. Ennek a továbbiakban $F[0,1]$-gyel jelölt vektortérnek a neutrális eleme a konstans nulla függvény, egy f függvény ellentetje pedig a $-f$ függvény. Ez utóbbi struktúra sokkal bonyolultabb $\mathbb{R}^2$-nél. Jelentős eltérés, hogy míg $\mathbb{R}^2$ minden eleme felírható két előre rögzített vektor $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1))$ kombinációjaként: $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$, addig $F[0,1]$-ben ilyen felírás nem létezik. Nem csak kettőre, semmilyen n számra nem lehet találni n darab olyan $g_1,\dots,g_n$ elemet, amelyre minden $f\in F[0,1]$ felírható a $g_1,\dots,g_n$ vektorokkal összeadás és számmal szorzás segítségével. Ugyanez elmondható az $F[0,1]$ tér egy részhalmazára, a $[0,1]$-en értelmezett folytonos függvények halmazára. Ez a $C[0,1]$-gyel jelölt halmaz maga is egy vektortér ugyanazokkal a műveletekkel. (Minden stimmel, két folytonos függvény összege is folytonos, tehát tudunk összeadni, és egy folytonos függvény számszorosa is folytonos, tehát tudunk számmal szorozni.)

Most bevezetjük a norma fogalmát, ami a hossznak egy természetes általánosítása. Mielőtt megadjuk a precíz definíciót, megemlítünk három konkrét példát az $\mathbb{R}^2$ síkon. Ezekről az olvasó megpróbálhatja igazolni, hogy valóban teljesítik a lenti definícióban szereplő a)-b)-c) feltételeket. Egy $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ vektor normájára az $\|(x,y)\|_*$ jelölést használjuk, ahol alsó indexben a $*$ helyére írt jelekkel mondjuk meg, hogy a három ismertetett norma közül melyikre gondolunk. Nézzük tehát a három példát $\mathbb{R}^2$-en:

n1) $\|(x,y)\|_1:=|x|+|y|$. Ha ebben a normában számoljuk ki például a $(-1,2)$ vektor hosszát, akkor azt kapjuk, hogy $\|(-1,2)\|_1=|-1|+|2|=3$. Érdemes megfigyelni, hogy ez a hosszfogalom nem invariáns az origó körüli forgatásra. Ha a $(-1,2)$ vektort beforgatjuk az y tengelyre, akkor a $(0,\sqrt{5})$ vektort kapjuk, aminek a hossza $\sqrt{5}$.

n2) $\|(x,y)\|_2:=\sqrt{|x|^2+|y|^2}$. Ebben a normában ugyanannak a $(-1,2)$ vektornak a hossza $\|(-1,2)\|_2=\sqrt{|-1|^2+|2|^2}=\sqrt{5}$. Ez a középiskolából ismert euklideszi hosszfogalom.

n3) $\|(x,y)\|_m:=\max\{|x|,|y|\}$, azaz a két koordináta abszolútértéke közül a nagyobb. Ebben a normában a $(-1,2)$ vektor hossza $\|(-1,2)\|_m=\max\{|-1|,|2|\}=2$.

Általában, egy $\|\cdot\|\colon X\to\mathbb{R}$ nemnegatív függvényt normának (vagy ha úgy tetszik: hosszfüggvénynek) nevezünk az X vektortéren, ha teljesíti az alábbi három tulajdonságot:

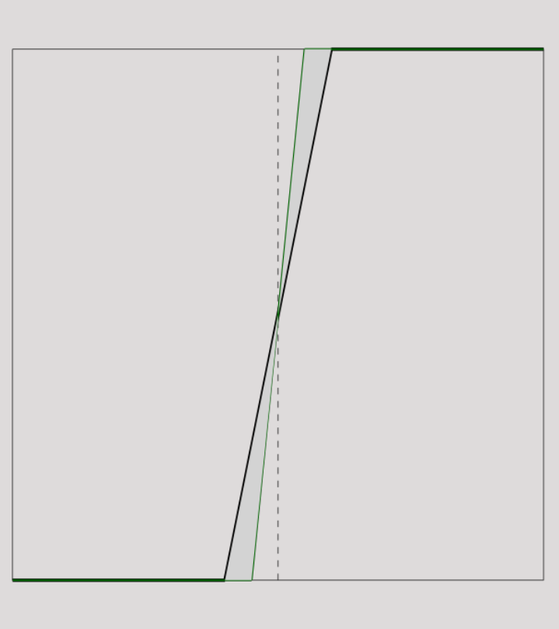
a) $\|v\|=0\Leftrightarrow v=0$, azaz a nulla vektor hossza 0, és csak a nulla vektornak 0 a hossza.

b) Minden valós c számra és $v\in X$ vektorra $\|cv\|=|c|\|v\|$, azaz ha megnyújtunk egy vektort, és megmérjük a hosszát, akkor ugyanazt kapjuk, mintha először megmérnénk a hosszát, és vennénk a kapott szám $|c|$-szeresét.

c) Minden $x,y,z\in X$-re $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$. Ez az úgynevezett háromszög-egyenlőtlenség.

Mint az n1)-n2)-n3) példákban láttuk, ugyanazon az X vektortéren több különböző normát is be lehet vezetni, ezért a félreértések elkerülése végett, ha X vektortérről mint normával ellátott térről akarunk beszélni, mindig feltüntetjük, hogy pontosan melyik normára gondolunk. Tehát ha a középiskolában megszokott módon akarunk hosszat számolni, akkor ezt úgy jelöljük, hogy $\mathbb{R}^2$ helyett $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_2)$-t írunk. Egy X vektorteret a $\|\cdot\|$ normával ellátva normált térnek hívunk, és $(X,\|\cdot\|)$-val jelölünk.

A normált tér fogalma az 1920-as években kristályosodott ki. Természetesen az emberek korábban is dolgoztak olyan struktúrákban (főleg függvényterekben), amikben volt hosszfüggvény, és többen is megfogalmaztak feltételrendszereket, amelyek az a)-b)-c) tulajdonságokra hasonlítanak, de a fenti axiomatikus bevezetés Stefan Banach 1932-es *Théorie des opérations linéaires* című könyvében jelent meg először. Ugyanitt jelent meg először a modern analízis egyik legfontosabb fogalma, a teljesség. Az $(X,\|\cdot\|)$-t teljes normált térnek, vagy Banach-térnek nevezzük, ha minden olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ X-beli sorozathoz, amelyre igaz, hogy $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|x_n-x_m\|=0$, van egy olyan x pontja az X térnek, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$. Minden véges dimenziós normált tér teljes, ezért ha szeretnénk nem teljes teret látni, akkor végtelen dimenziós terek között kell keresgélnünk. Vegyük ismét $C[0,1]$-et, a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények vektorterét. Egy f függvénynek az úgynevezett L^1-normája $\|f\|_{L^1}=\int_0^1|f(x)|\,dx$. Azt állítjuk, hogy ez a tér nem teljes. Definiáljuk a következő sorozatot: az f_n függvény legyen 0 a $[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}]$ halmazon, legyen 1 az $[\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1]$ halmazon, az $[1/2-1/n,1/2+1/n]$ halmazon pedig legyen a függvény $f_n(x)=\frac{n}{2}\left(x-(\frac{1}{2}-\frac{1}{n})\right)$. Az alábbi ábrán azt látjuk, hogy különböző n és m értékekre az $\|f_n-f_m\|_{L^1}$ nem más, mint két kis háromszög területe. Ahogy n és m egyre nagyobb, ez a terület tart 0-hoz.



De nem találunk olyan $f\in C[0,1]$ függvényt, amire $\|f_n-f\|_{L^1}\to 0$. Ugyanis f-nek a $[0,1/2]$ intervallumon 0-nak, az $[1/2,1]$-en pedig 1-nek kellene lennie, csakhogy ilyen folytonos függyvény nincs. Bevezetünk egy másik normát is $C[0,1]$-en, az úgynevezett ∞-normát: $\|f\|_\infty=\max\{|f(x)|\mid x\in[0,1]\}$. Nem nehéz bebizonyítani, hogy a $C[0,1]$ tér ezzel a normával ellátva teljes.

2. A Mazur–Ulam-tétel és Mankiewicz tétele

Az előző szekcióban bevezettük a normált tér fogalmát. A norma segítségével beszélhetünk két vektor távolságáról is: egy $(X,\|\cdot\|)$ normált tér két $u,v\in X$ pontjának távolsága a különbségük hossza, azaz az $\|u-v\|$ szám. Az a1)-a2)-a3) példákon szemléltetve az $(-1,-1)$ és $(1,1)$ pontoknak a távolsága a különböző normákban: $\|(-1,-1)-(1,1)\|_1=4$, $\|(-1,-1)-(1,1)\|_2=\sqrt{8}$, és $\|(-1,-1)-(1,1)\|_m=2$.

Tehát egy normált téren tudunk elemeket összeadni, tudunk számmal szorozni, tudunk hosszat mérni, és tudunk távolságot mérni. Vegyünk két normált teret, $(X,\|\cdot\|_X)$-et és $(Y,\|\cdot\|_Y)$-t. Egy $f\colon X\to Y$ függvényt izometriának nevezünk, ha minden $u,v\in X$-re $\|f(u)-f(v)\|_Y=\|u-v\|_X$. Szavakkal elmondva, $f(u)$ és $f(v)$ távolsága Y-ban ugyanannyi, mint az u és v távolsága X-ben, akárhogy is választjuk az u,v. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $f(0)=0$.

Felmerül a kérdés, hogy egy olyan függvény, ami megőrzi a távolságot, vajon megőrzi-e a lineáris struktúrát (azaz az összeadást és a számmal szorzást) is? Általában semmi okunk ebben reménykedni, hiszen a lineáris struktúra X-en egy dolog, a hosszfogalom az X elemein pedig egy másik dolog. Stanisław Mazur és Stanisław Ulam gyönyörű tétele [7] azt mondja, hogy ha a szóban forgó izometria szürjektív, akkor mégis ez a helyzet!

Mazur–Ulam-tétel (1932)

Legyenek $(X,\|\cdot\|_X)$ és $(Y,\|\cdot\|_Y)$ valós normált terek, legyen $f\colon X\to Y$ egy kölcsönösen egyértelmű leképezés, amelyre

- $f(0)=0$,
- minden $u,v\in X$-re $\|f(u)-f(v)\|_Y=\|u-v\|_X$.

Ekkor f lineáris, azaz $f(u+v)=f(u)+f(v)$ minden $u,v\in X$-re, és $f(cv)=cf(v)$ minden $v\in X$-re és minden c valós számra.

A Mazur–Ulam-tételre számtalan bizonyítás ismert, az egyik legszebb és legelemibb Jussi Väisälä bizonyítása [11]. A tételben feltettük, hogy f kölcsönösen egyértelmű. Azaz f injektív (ha $u\neq v$, akkor $f(u)\neq f(v)$) és f szürjektív (minden $w\in Y$-hoz van olyan $u\in X$, amelyre $f(u)=w$). Mennyire fontosak ezek a feltételek? Az injektivitás automatikusan teljesül, hiszen ha $u\neq v$, akkor $u-v$ nem az X nullvektora, akkor viszont a norma a) tulajdonsága miatt $\|u-v\|_X\neq 0$. Mivel f izometria, ezért $0\neq\|u-v\|_X=\|f(u)-f(v)\|_Y$, így megint az a) tulajdonságot használva $f(u)-f(v)$ nem az Y tér nullvektora, és így $f(u)\neq f(v)$. Mit mondhatunk a szürjektivitásra vonatkozó feltevésről? Nem hagyható el? Az alábbi egyszerű példa azt mutatja, hogy nem.

Ha $(X,\|\cdot\|_X)$ a számegyenes az abszolútértékkel, $(Y,\|\cdot\|_Y)$ pedig az n3)-ban bevezetett tér, akkor az $f(x):=(x,|x|)$ függvény egy izometria. Valóban, minden $x,y\in\mathbb{R}$-re

$$\|f(x)-f(y)\|_m=\|(x,|x|)-(y,|y|)\|_m=\|(x-y,|x|-|y|)\|_m=\max\{|x-y|,||x|-|y||\}=|x-y|.$$

Az is teljesül, hogy az $\mathbb{R}$ nullelemének képe az $\mathbb{R}^2$ nulleleme: $f(0)=(0,|0|)=(0,0)$. De az nem igaz, hogy f lineáris! Az $u=-1$, $v=1$ választással $f(-1+1)=f(0)=(0,0)$, míg $f(-1)+f(1)=(-1,|-1|)+(1,|1|)=(0,2)$. Tehát $f(-1+1)\neq f(-1)+f(1)$. Ez a példa valóban ellenpélda, de eléggé elfajult abban az értelemben, hogy az $\mathbb{R}$ f-általi képe $\mathbb{R}^2$-ben az abszolútérték függvény grafikonja, ami egy nagyon sovány halmaz.

Piotr Mankiewicz megmutatta, hogy el lehet hagyni a szürjektivitást, ha feltesszük, hogy az izometria képe egy szép kövér halmaz [6]. Az egyszerűség kedvéért a tételt csak egy speciális esetben mondjuk ki. Elsőként fel kell idézzük a 0 körüli zárt egységgömb fogalmát: B_X jelöli azon $v\in X$ pontok halmazát, amelyeknek nullától vett távolsága legfeljebb 1, azaz $B_X=\{v\in X\mid\|x-0\|_X\leq 1\}$.

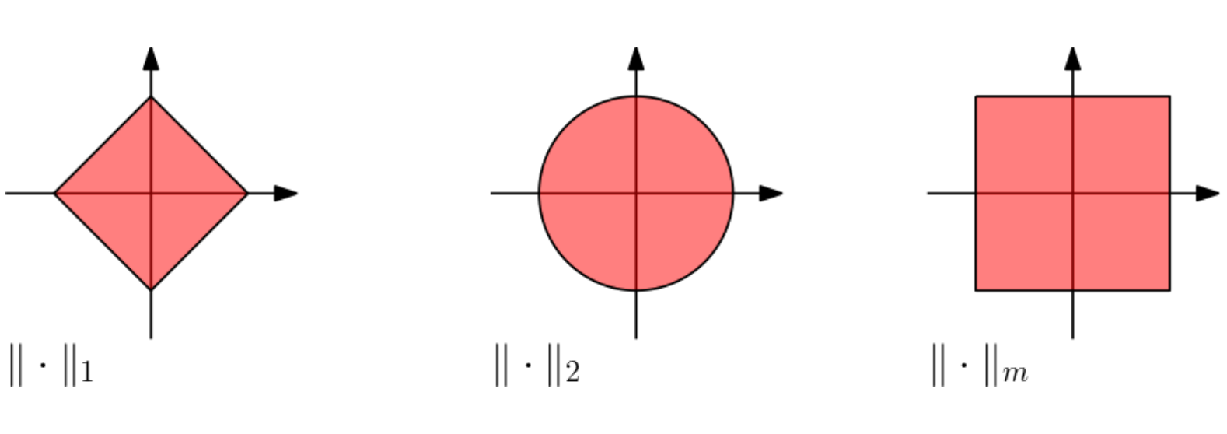
Mankiewicz tétel (1972)

Legyenek $(X,\|\cdot\|_X)$ és $(Y,\|\cdot\|_Y)$ valós normált terek, $f\colon B_X\to B_Y$ egy kölcsönösen egyértelmű izometria. Ekkor van olyan $F\colon X\to Y$ szürjektív lineáris izometria, amelyre $F(x)=f(x)$ minden $x\in B_X$-re. Más szóval, f kiterjeszthető az egész X-re úgy, hogy a kiterjesztés egy szürjektív linéris izometria.

3. Hogy néz ki egy gömb?

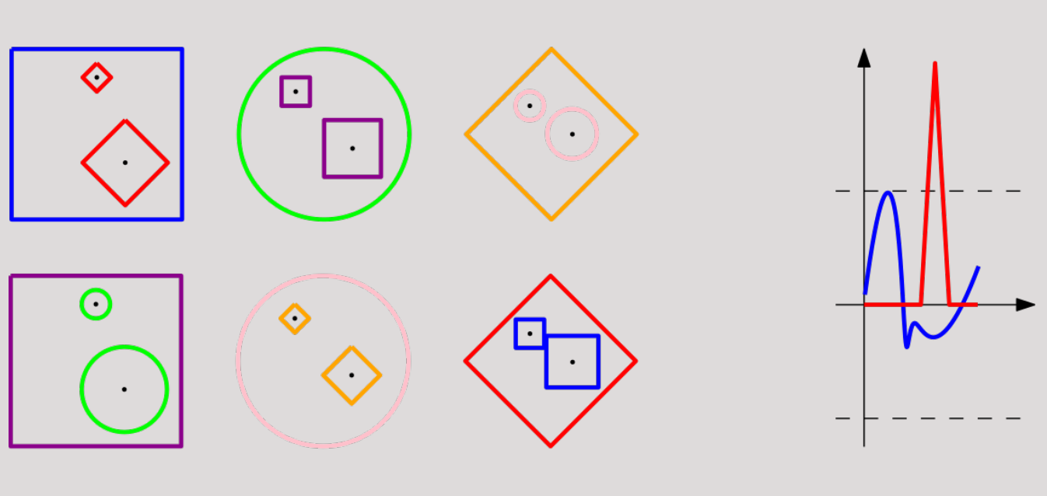
Mielőtt továbbmennénk, gondoljuk át, hogy mit mond az előző állítás. Először is jegyezzük meg, hogy egy bijektív lineáris izometria létezése $(X,\|\cdot\|_X)$ és $(Y,\|\cdot\|_Y)$ között azt mondja, hogy pusztán a metrikus és lineáris szerkezetük alapján nem tudjuk X-et és Y-t megkülönböztetni. Mankiewicz tétele azt mondja, hogy ha meg akarjuk tudni, hogy két tér megkülönböztethető-e, akkor elég ha megnézzük a gömbjeiket. De mit látunk, ha ránézünk egy normált tér gömbjére? Hogy néz ki egy gömb?

Kezdjünk megint az a1)-a2)-a3) példákkal. Az alábbi ábrán az $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_2)$, és $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_m)$ terek egységgömbjeit (vagy ha úgy tetszik, egységkörlapjait) látjuk egymás mellett.



Rögtön látszik, hogy a két szélső gömb sok dologban különbözik a középen lévő „szokásos gömbtől”. A $\|\cdot\|_1$- és $\|\cdot\|_m$-gömböknek vannak csúcsai, ami elsőre szokatlannak hathat. Sőt, a gömb felülete tartalmaz szakaszokat. (Az $\|\cdot\|_1$-gömb felülete tartalmazza például az $(1,0)$ és $(0,1)$ közti szakaszt, az $\|\cdot\|_m$-gömb pedig tartalmazza például a $(-1,1)$ és $(1,1)$ pontok közti szakaszt. Ennek van egy meglehetősen kellemetlen következménye. A $\|\cdot\|_2$-norma esetén bármely két (x_1,y_1), (x_2,y_2) pont esetén egyetlen olyan (u,v) pont van, amelyik mindkettőtől $\frac{1}{2}\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|_2$ távolságra van, nevezetesen az őket összekötő szakasz felezőpontja, $(u,v)=\frac{1}{2}(x_1+x_2,y_1+y_2)$). Ez amiatt van, hogy két pont köré rajzolt megfelelő sugarú gömb egyetlen pontban metszi egymást. Míg például a $\|\cdot\|_m$ esetben a határon lévő szakaszok rengeteg ilyen pontot generálhatnak. Könnyen látszik, hogy $\|(-1,0)-(1,0)\|_m=2$, és minden $t\in[0,1]$-re $\|(-1,0)-(0,t)\|_m=\|(1,0)-(0,t)\|_m=\max\{1,|t|\}=1$.

Már a fenti példák is mutatják, hogy normált terek gömbjei általában egzotikusabbak, mint a megszokott euklideszi gömb, tehát az ember nem hagyatkozhat az euklideszi szemléletére. Nézzünk még egy példát arra, hogy egy vektortéren két különböző norma gömbje mennyire eltérő lehet. A fent említett gömbök az $\mathbb{R}^2$ tér origóra szimmetrikus szép konvex részhalmazai, és bizonyos kérdések vizsgálatánál teljesen mindegy, hogy melyikkel dolgozunk. Így például egy $\mathbb{R}^2$-beli sorozat ponosan akkor konvergens az egyik norma szerint, ha konvergens a másik kettő szerint. Ennek az az oka, hogy mindegyik gömbbe bele lehet rajzolni a többi gömb egy kicsinyített mását. (Sőt, bármelyik gömb bármelyik nem 1-normájú pontja köré be lehet rajzolni a többi gömb egy kicsinyített mását.)



Ez is egy olyan tulajdonság, amit az ember csak véges dimenziós tereket ismerve természetesnek vesz. Azonban ez a tulajdonság végtelen dimenzióban általában nem teljesül. Térjünk vissza a $C[0,1]$ térhez. Hogy néz ki az egységgömb a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint? Egy f függvény pontosan akkor van benne, ha $\max\{|f(x)|\mid x\in[0,1]\leq 1\}$, azaz ha a grafikonja a konstans -1 és konstans 1 függvények közé van beszorítva. Az ilyen függvények összessége adja ki a gömböt. Ha ebbe a gömbbe bele lehetne zsugorítani az $\|\cdot\|_{L^1}$-egységgömböt, az azt implikálná, hogy az abban lévő függvények is mind be vannak szorítva valamilyen konstans C és $-C$ függvények közé. De ez nem lehet, mert a $\|\cdot\|_{L^1}$ gömbben bármilyen nagy K számhoz van olyan f_K nemnegatív függvény, aminek az integrálja legfeljebb 1, a maximuma pedig K. (Gondoljunk egy olyan f_K üggvényre, aminek a grafikonja a $[0,1]$ intervallummal egy $1/K$ alapú K magas egyenlő szárú háromszöget zár be. Ekkor $\|f_K\|_\infty=K$, $\|f_K\|_{L^1}=\frac{1}{2}$.)

4. A Tingley-sejtés

Mankiewicz tételét látva felmerül a kérdés, hogy nem elég-e az egységgömbök helyett csak az egységgömbök felületét megnézni, ha el akarjuk dönteni, hogy két normált tér megkülönböztethető-e. Jelöljük a továbbiakban S_X-szel az $(X,\|\cdot\|)$ tér egységgömbjének felületét

$$S_X=\{x\in X\mid\|x\|=1\}.$$

Tingley azt sejtette, hogy ha adott egy $f\colon S_X\to S_Y$ kölcsönösen egyértelmű izometria két normált tér gömbfelületei között, akkor azt mindig ki lehet terjeszteni X és Y közötti szürjektív izometriává. (Tingley véges dimenziós normált terekkel foglalkozott, de a sejtés dimenziótól függetlenül érdekes.)

Ami az embernek rögtön eszébe jut, mint természetes kiterjesztés, az az alábbi:

$$F(0):=0\quad\text{és } F(x):=\|x\|\cdot f\left(\frac{x}{\|x\|}\right),\ \text{ ha } x\neq 0.$$

De mi garantálja, hogy ez a leképezés egy szürjektív izometria? Ne felejtsük el, hogy a Mazur–Ulam-tétel értelmében ennek az F kiterjesztésnek lineárisnak kéne lenni!

Tingley az 1987-es [10] cikkében megmutatta, hogy a gömbfelület átellenes pontjai átellenes pontokba mennek, de már ennek a látszólag nyilvánvaló állításnak a bizonyítása is rendkívül bonyolult. Érdemes megjegyezni, hogy ennek az állításnak mély mondanivalója van. Nevezetesen, hogy az átellenességnek (ami egy algebrai tulajdonság, azt mondja, hogy az egyik pont a másik (-1)-szerese) van valami metrikus tartalma is. A síkon a $\|\cdot\|_2$ norma esetében nem nehéz meglátni a metrikus tartalmat. Az egységgömbön lévő pontok távolsága legfeljebb 2 lehet, és $\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|_2=2$ pontosan akkor, ha $(x_2,y_2)=-(x_1,y_1)$. De ugyanez az állítás a $\|\cdot\|_m$ normára nem igaz. A gömb átmérője továbbra is 2, de bármely (x_1,y_1) ponthoz végtelen sok olyan (x_2,y_2) pont van, amire $\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|_2=2$. (Emlékezzünk vissza, hogy a gömbfelület ebben az esetben egy négyzet, és annak bármely pontjától a szemközti oldal minden pontja 2 távolságra van a $\|\cdot\|_m$ normából származtatott távolság szerint.)

A nehézséget az okozza, hogy egy normált tér egységgömbjének felülete nagyon elvadult lehet, és általában, ha csak annyit mondanak, hogy van egy függvényünk két normált tér gömbfelülete között, akkor nincs mibe kapaszkodnunk. Ha a kérdést nem úgy tesszük fel, hogy tetszőleges X és Y normált terekre igaz-e, hanem konkrétan meg is nevezzük a teret (vagy esetleg tereknek egy szép osztályát), akkor a kérdés egyszerűbbé válhat, mert a konkrét terek konkrét gömbfelületéről már lehetnek információink. Így például Kadets és Martín 2012-ben [5] bebizonyította Tingley sejtését olyan véges dimenziós terekre, ahol a gömb egy poliéder. Szintén igazolták a sejtést bizonyos függvényalgebrákra, operátoralgebrákra, és egyéb szép struktúrákra (lásd [3,2,4,8,9], a teljesség igénye nélkül.)

Az általános sejtés a mai napig nyitott, sőt, megdöbbentő módon még kétdimenziós terekre sem volt megválaszolva egeszen mostanáig. Taras Banakh az 2022-ben publikált [1] cikkében megmutatta, hogy Tingley sejtése igaz, ha a szóban forgó terek kétdimenziósak.

Érdemes megjegyezni, hogy ahogy Kadets és Martín, úgy Tingley is véges dimenziós normált tereket vizsgált. Az eredményeik erősen támaszkodnak arra, hogy a gömböknek bizonyos értelemben sok extremális pontja van. (Egy H halmaznak a $h\in H$ pont extremális pontja, ha nem található olyan $h_1,h_2\in H$, amelyre $h_1\neq h_2$ és $h=\frac{1}{2}h_1+\frac{1}{2}h_2$.) Az $\mathbb{R}^2$ esetben az $\|\cdot\|_1$-gömb és a $\|\cdot\|_m$-gömb extremális pontjai a négyzet csúcsai, míg a $\|\cdot\|_2$ esetén a körvonal minden pontja extremális pont. A probléma az, hogy végtelen dimenziós terekben előfordulhat, hogy a zárt egységgömbnek egyáltalán nincs extremális pontja. Jelölje c_0 az összes olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat halmazát, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Könnyű látni, hogy c_0 egy vektortér. Vezessük be ezen a téren a max normát: $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\max}:=\max\{|x_n|\mid n\in\mathbb{N}\}$. Megmutatjuk, hogy B_{c_0} egyik pontja sem extremális pont. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy tetszőleges elem B_{c_0}-ban. Mivel a sorozat nullához tart, biztosan van olyan x_k tagja, amire $-\frac{1}{2}\leq x_k\leq\frac{1}{2}$. Definiáljuk az $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokat úgy, hogy ha $j\neq k$, akkor legyen $y'_j=x_j=y''_j$. A k-adik tagok pedig legyenek $y'_k=x_k-\frac{1}{2}$, $y''_k=x_k+\frac{1}{2}$. Az így definiált sorozatok B_{c_0}-ban vannak, és

$$\frac{1}{2}\left((y'_n)_{n\in\mathbb{N}}+(y''_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Tehát $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valóban nem extremális pont.

Daryl Tingley a University of New Brunswick nyugalmazott professzora. Fő kutatási területe a funkcionálanalízis, azon belül is Banach terek elmélete (geometriája). A nevéhez fűződő sejtés mellett érdemes néhány szót ejteni kertészeti sikereiről is: feleségével (aki szintén matematikus) Maureen Tingley-vel díjat díjra halmoznak óriástök növesztésben. Erről itt és itt lehet többet olvasni.

Tingley és felesége a neguaci óriástök fesztivál első díjával. (Fotó: Camille Breau)

Irodalomjegyzék

[1] T. Banakh, *Every 2-dimensional Banach space has the Mazur–Ulam property*, Linear Algebra and its Applications, 632 (2022), 268–280.

[2] M. Cueto-Avellaneda, A. M. Peralta, *The Mazur–Ulam property for commutative von Neumann algebras*, Linear and Multilinear Algebra, 68 (2020), 337–362.

[3] F. J. Fernández-Polo and A.M.Peralta, *On the extension of isometries between the unit spheres of a C^*-algebra and $B(H)$*, Transactions of the American Mathematical Society, 5 (2018), 63–80.

[4] O. Hatori, S. Oi, R. S. Togashi, *Tingley's problem on uniform algebras*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 503 (2021), Paper No. 125346.

[5] V. Kadets, M. Martín, *Extension of isometries between unit spheres of finite-dimensional polyhedral Banach spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 396 (2012), 441–447.

[6] P. Mankiewicz, *On extension of isometries in normed linear spaces.* Bulletin L'Académie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques 20 (1972), 367–371.

[7] S. Mazur, S. Ulam, *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 194 (1932), 946–948.

[8] M. Mori, *Tingley’s problem through the facial structure of operator algebras*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 266 (2018), 1281–1298.

[9] A. M. Peralta, *A survey on Tingley’s problem for operator algebras*, Acta Scientiarum Mathematicarum, 84 (2018), 81–123.

[10] D. Tingley, *Isometries of the unit sphere*, Geometriae Dedicata, 22 (1987), 371–378.

[11] J. Väisälä *A Proof of the Mazur-Ulam Theorem*, The American Mathematical Monthly, 110 (2003), 633–635.

Titkos Tamás
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Budapesti Gazdasági Egyetem

metrikus terek

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

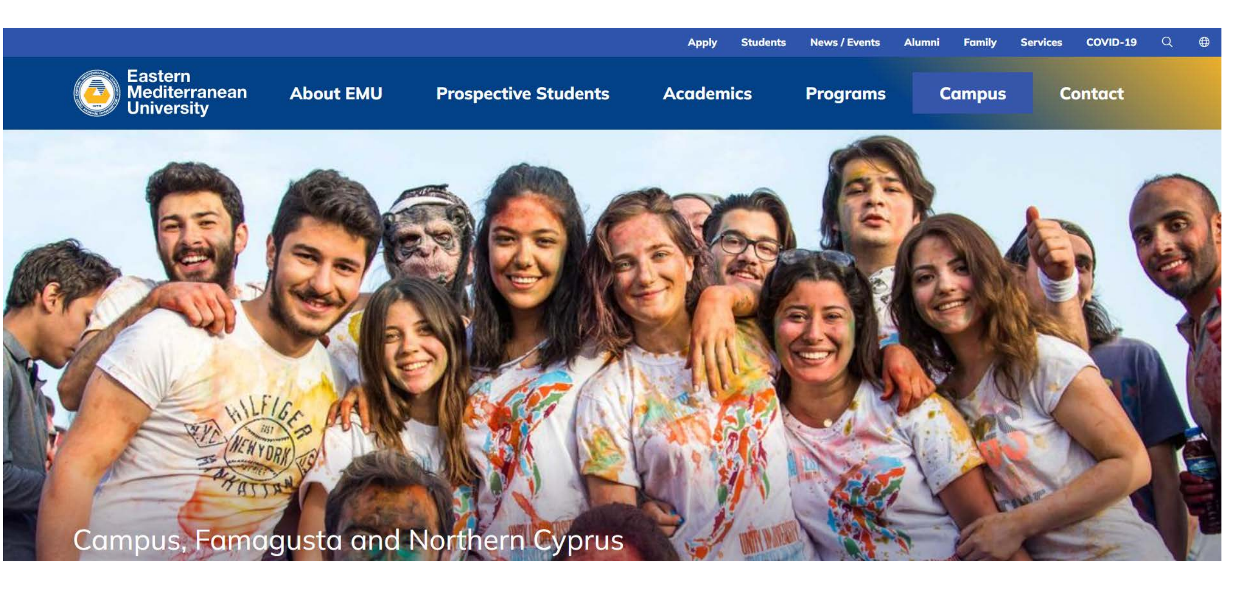
Vizvári Béla 2022. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS…?

Az index tanítása nemzetközi környezetben

Az index bevezetése nemzetközi környezetben mérnök hallgatók részére – szubjektív beszámoló

A környezet

2007-től kezdődően Ciprus szigetén, Famaguszta városában a Kelet-Mediterrán Egyetem Ipari Mérnök Tanszékén (Department of Industrial Engineering, Eastern Mediterranean University) tanítottam hallgatókat mindhárom szinten. Famaguszta a kettéosztott sziget északi, azaz török részén található. Az egyetemet 1979-ben alapították, és ez az egész sziget első egyeteme. Az alapítás ötletét a török felsőoktatás egy sajátossága adta. A három részre osztott középiskola elvégzése után az egyetemekre jelentkező fiataloknak egységes felvételi vizsgát kell letenniük. Az illetékes hivatal sorrendbe állítja őket. Az egyetemek kötelesek a hozzájuk jelentkezőket ebben a sorrendben felvenni. Egy személy a sorrendjüket megjelölve több helyre is jelentkezhet. Az első olyan helyre veszik fel, ahova a jelentkezők sorrendje szerint befér. Mint minden vizsga esetében, itt is lehetséges, hogy valakinek jó vagy éppen ellenkezőleg rossz napja van. Az utóbbiak között értékes emberek is lehetnek, akiket kár volna kirekeszteni a felsőoktatásból. Ha azonban Ciprusra jönnek, ami formálisan másik országnak számít, akkor tanulmányaik sikeres befejezése után egy egyszerű honosítási eljárás után diplomájukat Törökországban is hasznosíthatják. Az egyetem egyben a ciprusi török közösség számára is hasznos, mert ők helyben tanulhatnak.



Törökországban az egyetemi oktatás nyelve hagyományosan az angol volt. Ez a mai Boszporusz Egyetem (Boğaziçi University) történetéből adódik, aminek elődjét a 19. század első felében alapították, és ami mindvégig angol nyelven működött, még az 1971-es államosítás után is. Emiatt Cipruson is angol lett a tanítás nyelve. Ez viszont lehetőséget adott arra, hogy a török nyelvi környezeten kívülről is vonzzon hallgatókat, ami meg is történt. Bár a törökországi hallgatók csoportja a legnagyobb, mára már mintegy 100 országból érkeznek diákok. Én tanítottam hallgatókat Kirgiziától Marokkóig és Bulgáriától Zambiáig. Mára a nigériaiak száma is meglehetősen magas, de sokan jönnek az arab országokból. Még Szaúd-Arábiából is vannak, egykori menekültek leszármazottai, akik ma is menekültnek számítanak. Közöttük több lány is. Az alábbiakban a kulturális háttér jelzésére említem a vallásokat is. Vallási ellentétek azonban nincsenek a hallgatók között. A különböző kultúrák békésen élnek egymás mellett. Mindazonáltal megjegyzendő, hogy az egyetem területén mecset is és keresztény templom is van. Az utóbbit több felekezet is használja.

Felmerül a probléma

Az ipari mérnök név nem adja vissza jól a szakma lényegét, amit a magam részéről a szervező mérnök kifejezéssel szoktam elmagyarázni. Tehát olyan ipari környezetben dolgozó szakemberről van szó, aki minden mérnöki szakmával jól együtt tud működni, az ott zajló folyamatokat szervezni képes. Az ipari mérnök szakma igen nagy átfedést mutat a vezetéstudománnyal és az operációkutatással.

Az ipari mérnök szakmában sok olyan probléma létezik, ahol számos, némileg különböző, de hasonló természetű dolog, például gyártmány, alkatrész, gép van, és ezeket kell valahogy elrendezni. A kérdés matematikai elemzése során ezeket az objektumokat az indexükkel nevezzük meg, és különböző paramétereik értékét részben a paraméter nevével, például hossz, illetve ezen név valamilyen rövid megnevezésével, például az adott esetben h, és az adott objektum indexével azonosítjuk, például h_i. *Az index tehát semmi más, mint az adott objektum neve*, igaz, elég absztrakt formában megadva. Ebben az sem zavar, hogy különböző természetű objektumok rendelkezhetnek látszólag azonos indexszel, például beszélhetünk 1 indexű (azaz 1-es) gépről is és 1 indexű (azaz 1-es) munkadarabról is, mert ezeket eltérő természetük miatt nem fogjuk összekeverni. Ha két vagy több objektum közötti kapcsolatot akarunk kifejezni, akkor kettős vagy többes indexezést használunk, felsorolva mindazon objektumokat, amelyek a kapcsolatban benne vannak. Például, ha azt kell eldönteni, hogy az i munkadarab megmunkálása után közvetlenül a j munkadarab megmunkálása következik-e, akkor ennek az igen/nem kérdés eredményének leírására bevezethetjük az x_{ij} változót. (Bővebb magyarázat alább, az utazó ügynök feladatánál található.)

Az index használata már a legelső szakmai tárgyakban előjön, és tipikus a termelés irányításával kapcsolatos témákban.

Egy ízben egy zambiai hallgatónő jött konzultációra egy másik diákkal. A feltett kérdést próbáltam legjobb tudásom szerint megfelelni, de válaszom használhatatlan volt számukra. Egy ideig reménytelenül körbe-körbe jártunk, majd a zambiai lány valahogy megváltoztatta a kérdést, amiből rájöttem, hogy nem az előadott számítási módszert nem értik, hanem az index fogalmát. Ettől kezdve sínen voltunk, és a megbeszélés sikeresen zárult.

Megkaptam azonban a leckét, ezentúl az index mibenlétét mindig el kell magyaráznom.

Első kísérlet: évek

Azt gondoltam, hogy ha olyan dolgokra hivatkozom, amelyeknek a neve *szinte* kivétel nélkül szám, akkor egyszerű dolgom lesz. Ilyenek az évek, amelyeket számokkal azonosítunk a nyugati kultúrában is és az iszlám (muszlim) kultúrában is. Ennek az a jelentősége, hogy a hallgatók többsége muszlim hitű volt, bár keresztények is érkeztek, főleg Afrikából.

Az évek között azért van kivétel, olyan, amelyiknek külön neve van. Magyarázatomat erre próbáltam építeni. Az iszlám kultúrában 570 neve az Elefánt éve. Azért ez, mert ekkor egy afrikai csapat megtámadta Mekkát. Nekik volt egy elefántjuk. Az év igazi jelentősége azonban az, hogy ez egyben Mohammed Próféta születésének éve is.

Feltettem tehát a kérdést az osztályban:

– Melyik az Elefánt éve?

Azt vártam, hogy kezek erdeje emelkedik a magasba, vagy számosan bekiabálják a választ. Nos, a kérdést néma csönd követte. Ebből pedig nehéz volt tovább építkezni.

Második kísérlet: absztrakt rövidítések

Tanteremben csak kisebb példákat mutatunk be, hiszen a nagyobb feladatok átláthatatlanok volnának a hallgatóknak. Ha mondjuk csak öt gyártmányról van szó, akkor azoknak nyugodtan lehet nevet adni, például AIX5, AIX7, Z23, NGK, Y48L. Soha nem mondtam ki, de a két AIX-szel azt akartam sugallani, hogy nagyon hasonló dolgokról van szó, csak méretbeli különbség létezik közöttük. Ezeknek az absztrakt neveknek a használatával nem is volt semmi baj. Ugyanis mindenki látott ehhez hasonlókat a való életben. De ezekről átugrani az egyszerű számokra mint indexekre, túl nagy lépés volt. Bár az absztrakt neveket továbbra is használtam, de világossá vált, hogy az index fogalmának magyarázatára más módszert kell találnom.

Kitérő: az utazóügynök-feladat

Az optimalizálás elméletében több feladatnak is külön neve van, amely név valamely történethez, matematikai megfogalmazáshoz kötődik. Érdekes módon az utazó ügynök feladata pont arról szól, mint amit a neve mutat. Először 1832-ben merült fel egy német nyelvű, utazó kereskedőknek tanácsokat adó kézikönyvben. A kereskedő előre tudja, hogy mely városokat akarja felkeresni. Ezek között kell egy körutat megtennie úgy, hogy annak végén visszaérjen a saját városába, amely kiindulásul szolgált. A könyv tanácsa szerint úgy kell útját megszerveznie, hogy annak teljes hossza a lehető legkisebb legyen.

Ha a városokat és azok távolságát szimbólumként fogjuk fel, akkor ennek a feladatnak az ipari mérnöki szakma számos, egymástól távoli területén van alkalmazása. Az egyik legtermészetesebb, hogy egy teherautó egy központi raktárból látja el bizonyos áruval a boltokat. Milyen sorrendben keresse fel az üzleteket, hogy útja a leggazdaságosabb legyen? Ha egy robot egy felületen több megmunkálást is végez meghatározott helyeken, például lyukat fúr vagy nyomtatott áramkörön alkatrészt forraszt, akkor mi legyen a megmunkálások sorrendje, hogy a robot útja a megmunkálások között, ami tulajdonképpen szükségeses de veszteséges idő, a lehető legrövidebb legyen?

Érdekes módon a feladatot matematikailag megfogalmazni csak sokára sikerült. Nevezetesen ismertté válása után csak 122 két évvel, 1954-ben született meg az első teljes modell Dantzig, Fulkerson és Johnson jóvoltából [1]. Az idők folyamán a feladatnak további modelljeit találták meg [2]. Az első modellt a szerzők nevének kezdőbetűi alapján szokás DFJ-modellnek is nevezni. Gyakorlati szempontból máig ez az egyik leghatékonyabb modell. Versenytársa a Miller–Tucker–Zemlin, azaz MTZ-modell [3]. Érdekes módon a két modell változói részben közösek. A DFJ-modell csak ezeket használja, az MTZ-modell másokat is. Most nem tárgyalom a teljes modelleket, hanem csak ezeket a közös változókat, amelyek az index tanításában szerepet játszottak.

A körút megtervezésének egyik legegyszerűbb módja, ha megadjuk, hogy a városok milyen sorrendben követik egymást. A legjobb sorrend persze számítás eredménye, azt az esetek többségében nem lehet előre tudni. A sorrend úgy is felfogható, hogy megmondjuk minden város esetében a változókat. Legyen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha az utazó az } i \text{ városból közvetlenül } j \text{ városba megy,} \\ 0, & \text{minden más esetben.} \end{cases}$$

A változók használatának módja az, hogy velük le lehet írni a körút szerkezetének fontos két tulajdonságát, amelyek egy párt alkotnak: (i) minden városból el kell utazni és (ii) minden városba meg kell érkezni. E két feltétel matematikai megfogalmazásához érdemes átfogalmazni az x_{ij} változó jelentését:

$x_{ij} =$ hányszor megy az utazó i városból j-be = hányszor érkezik meg az utazó j városba i városból.

Ha rögzített i város esetén az x_{ij} értékeket összegezzük, megkapjuk, hogy összesen hányszor ment tovább az i városból. Körút esetén ennek 1-nek kell lennie. Hasonlóképp, rögzített j város mellett az összeg azt adja meg, hogy hányszor érkezett meg az utazó a j városba. Így jutunk a két legnevezetesebb feltétel-csoporthoz [4]:

$$\forall i\colon \sum_{j \neq i} x_{ij} = 1, \qquad \forall j\colon \sum_{i \neq j} x_{ij} = 1.$$

Az utazóügynök-feladattal kapcsolatban annyit érdemes megjegyezni, hogy a most tárgyalt feltételek nem elegendőek. Ugyanis megengedik olyan „megoldás” előállítását is, amelyik nem egyetlen teljes körút, hanem több kisebb körútból áll [5]. A feladat matematikai modellezésének pont ez a nehézsége, hogy a kis köröket hogyan zárjuk ki.

Harmadik kísérlet: a megoldás

Segítségül híva az utazóügynök-feladatot, már a változók bevezetésénél kezdődött az index fogalmának tárgyalása. Mivel a problémát az absztrakt gondolkodási képesség hiányossága okozta, aminek oka annak az oktatási kultúrának a hiányossága lehet, ahonnan érkeztek, célszerűnek látszott konkrét példával indítani. A hallgatóság összetétele miatt törökországi példát választottam. Tegyük tehát fel, hogy Ankara, Isztambul, Izmir, Konya és Antalya városok között akarunk körutat szervezni. A változó bevezetése így kezdődik:

$$x_{\text{Ankara,Isztambul}} = \begin{cases} 1, & \text{ha az utazó Ankarából közvetlenül Isztambulba megy,} \\ 0, & \text{minden más esetben.} \end{cases}$$

Ez a konkrét példa érthető. Itt el lehet magyarázni, hogy információként az „Ankara” és „Isztambul” szavak túl hosszúk és lehet őket számokkal helyettesíteni, ami sok memóriát takarít meg. A dolog lényege, hogy csinálunk egy táblázatot – matematikai értelemben egy (kicsi) függvényt –, ami megmondja, hogy melyik várost melyik szám reprezentálja. Például így:

város	szám
Ankara	1
Isztambul	2
Izmir	3
Konya	4
Antalya	5

Természetesen az első, ismétlő kérdés, hogy mi x_{12}, a válasz pedig $x_{\text{Ankara,Isztambul}}$. Ezt követően, még a fent tárgyalt matematikai feltételek bevezetése előtt, ellenőrző kérdéseket lehet feltenni. Például mi x_{53}? A válasz $x_{\text{Antalya,Izmir}}$. Ezt követően már nem volt gond az index használatával.

Vizvári Béla
Eastern Mediterranean University

Hivatkozások

[1] Dantzig, G. B., Fulkerson, D. R., Johnson, S. M., Solution of a large-scale traveling salesman problem, Operations Research, 2(1954), 393–410.

[2] Vizvári Béla Operációkutatási modellek, Typotex, 2009, Budapest. Összesen hat modellt tárgyal, de vannak továbbiak is.

[3] Miller, C. E., Tucker, A. W., Zemlin, R. A., Integer programming formulation of traveling salesman problem, J. of ACM, 3(1960), 326–329.

[4] Ezek a feltételek az úgynevezett hozzárendelési feladatban is szerepelnek, de azt most nem tárgyaljuk.

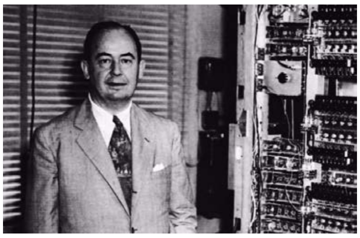
[5] Például hat város esetén $1 \to 2 \to 3 \to 1$ és $4 \to 5 \to 6 \to 4$ két kis körút, mindegyik három utazásból áll. Minden városból továbbmegy az utazó, minden városba megérkezik, mégsem egyetlen körútról van szó.

matematikatanítás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

A **GAZDA(G)SÁG** NEVET ADTUK A **GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET ROVATNAK**, AMELYBEN BEMUTATJUK, HOL, MIKÉPPEN HASZNÁLJÁK FEL A MATEMATIKÁT, MILYEN GAZDAG IS AZ A KÖR, AMELYIK ÉRINTI EZT A TUDOMÁNYÁGAT. (ROVATSZERKESZTŐK: *ILLÉS TIBOR, MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR ÉS RÖST GERGELY.*)



Benczúr András

2022. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

„A számológép és az agy” megjelenésétől az infoszféra forradalmáig

2023-ban lesz Neumann János születésének 120. évfordulója. *Benczúr András* tanulmányában röviden bemutatja Neumann életútját, részletesen ismerteti utolsó, 1958-ban megjelent írását, amelynek címe: „A számológép és az agy”. Ehhez kapcsolódik saját kutatása arról, hogy milyen új megvilágítást ad a számítógépek és az élő emberi elmék összevetése az infoszférában betöltött szerepük alapján. Tovább...

Oláh Vera

2022. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Matematikus Hangversenyek

2022. október 5-én 40. alkalommal rendezték meg az ELTE Matematikus Hangversenyét. A Matematikus Hangversenyek olyan ingyenes koncertek, ahol matematikusok (egyetemi hallgatók, oktatók, nem feltétlenül az ELTE-ről) esetleg családtagjaikkal, barátaikkal zenélnek főként (de nemcsak) matematikus hallgatóságuknak. A Matematikus Hangversenyek történetéről, kialakulásáról, fejlődéséről két korábbi főszervezőjükkel, *Somogyi Krisztiánnal* és *Horváth Andrással* beszélgetett *Oláh Vera.*

Oláh Vera

2022. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Valósággá vált álmok a Millenárison

Megnézték már az Álmok Álmodói 20 kiállítást a Millenárison? Ha nem, 2023. január 31-ig még megtehetik. A téli- vagy a síszünetben vigyék el a gyerekeket, unokákat: sem a felnőttek, sem a gyerekek nem fognak unatkozni, annyiféle tudományos régiség és újdonság között lehet válogatni, Szent-Györgyitől Karikó Katalinig, Bolyaitól Lovász Lászlóig, a régi autóktól az űrhajóig, a bolygóktól a fekete lyukig. Akik pedig mertek nagyokat álmodni, mind magyar feltalálók és tudósok, érdemes őket megismerni.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Benczúr András 2022. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

„A számológép és az agy” megjelenésétől az infoszféra forradalmáig

120 éve született Neumann János

Neumann János születésének 120. évfordulója tiszteletére az NJSZT és az MTA ünnepi eseménysorozatot tervez 2023-ban. Az egyik kiemelkedő esemény a Nemzetközi Informatikai Diákolimpia (IOI) lesz 2023-ban Szegeden. Az évforduló is szerepet játszott abban, hogy Magyarország elnyerte a rendezést.

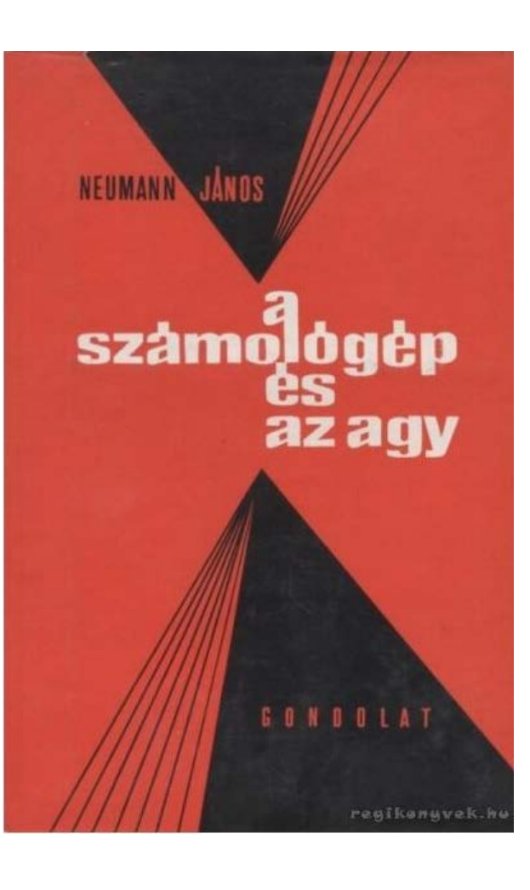
2023. szeptember 14-én a terv szerint neves hazai és külföldi tudósok részvételével Neumann munkásságához kapcsolódó előadások lesznek az MTA székházában. A nyitó plenáris előadások sorában a köszöntések mellett a Neumann-életmű, a hazai Neumann János professzori cím, valamint az NJSZT Neumann-díjának bemutatása is szerepel majd. Az ezt követő két szekcióban Neumann munkásságának területeihez kacsolódó előadások következnek meghívott előadókkal. Ezek egyike Neumann utolsó megjelent írásával, magyar fordításban „A számológép és az agy” könyvvel, annak utóhatásával foglalkozik majd. Ebben a kis tanulmányban rövid bemutatás következik Neumann János életútjáról, a könyvről, majd az utóhatásokról. Neumann János *„A számológép és az agy”* [1] írását 1955-ben kezdte el és haláláig dolgozott rajta. Az első kiadás 1958-ban, a magyar fordítás első kiadása 1964-ben jelent meg. A magyar könyv elérhetősége: https://mek.oszk.hu/01200/01255/html/. Angol nyelven a könyv még további két kiadást ért meg.

A könyvhöz Neumann felesége, Klára írt előszót. Érdemes elolvasni, ha valaki rövid életrajzi áttekintést szeretne kapni Neumann Jánosról. A könyv ismertetését majd a keletkezés körülményeivel kezdem, az előszóból idézve. Neumann János a tudományos közéleten kívül elsősorban, mint a számológépek egyik meghatározó atyja vált ismertté. Érdeklődését a számítógépek iránt a turbulenciajelenségek parciális differenciálegyenleteinek numerikus megoldása keltette fel. Hatékonyan megvalósítható automata architektúrát keresett, amihez már a kezdeteknél is tanulmányozni kezdte az agy működését.

Neumann kezdettől fogva szélesebb és elméletibb szemléletet képviselt, mint a többi számítógépes úttörő. A ma már híres EDVAC[1] 1945-ös jelentésében Neumann világosan kifejtette ötletét a tárolt programról, amely a számítógép memóriájában található, azokkal az adatokkal együtt, amelyeken működnie kell. Ezt a tárolt programú számítógépet idealizált neuronok segítségével írta le, kiemelve a digitális számítógép és az emberi agy közötti analógiát. A következő évtized során a bonyolult információfeldolgozó rendszerek vagy automaták elméletének kidolgozásával foglakozott, valamint olyan témákat vezetett be, mint a tanulás, megbízható rendszer építése megbízhatatlan összetevőkből, az önreplikáló automata, valamint a memória és tárolási kapacitás fontossága a biológiai idegrendszerben. E témák közül sok továbbra is a jelenlegi párhuzamos vagy neurocomputing kutatások középpontjában áll.

A Neumann-elvű számítógép – a memóriában tárolt programú számítógép – ma is a leggyakoribb architektúra, természetesen többirányú kiegészítéssel.

A számológép és az agy



A 82 oldalas esszé két részből áll. Az első rész a számítógépet tárgyalja: eljárásait, vezérlési mechanizmusait és egyéb jellemzőit. A második rész az agyra összpontosít. A neurális rendszert szisztematikusan hasonlítja össze a számítógéppel a számítástechnika akkori legkorszerűbb szintjét tekintve. A memóriát érintő elemzése egy harmadik rész alapjául is tekinthető – de nem külön részként van megszervezve. Neumann az összehasonlításból néhány következtetést von le a kód és a nyelv szerepére vonatkozóan. Ezek a következtetések talán a legérdekesebb részei a könyvnek, mert Neumann olyan reflexív kérdésekkel foglalkozik, amelyekkel korábban nem foglalkoztak a kibernetika tradicionális irányvonalában. Neumann Klára előszava ismerteti a könyv keletkezésének és tragikusan félbemaradt írásának hátterét.

„Férjemet, John von Neumannt 1955 elején kérte fel a Yale Egyetem, hogy az 1956-os tavaszi félévben, valamikor március végén vagy április elején, tartsa meg a Silliman-előadásokat. Johnny mélyen megtisztelve érezte magát, igen hálás volt a meghívásért, bár kénytelen volt azt a feltételt szabni, hogy az előadássorozat nem tarthat tovább egy hétnél. Közölte azt is, hogy az előadásai után átadandó kézirat, „A számológép és az agy" részletesebben is taglalja majd a témát, amellyel hosszú időn át foglalkozott. Az előadássorozat időtartamának a megrövidítését szükségszerűen kérnie kellett: Eisenhower elnök éppen akkor nevezte ki az Atomenergia Bizottság egyik tagjává. … Az automatikus szerkezetek rengeteg feltáratlan lehetősége csakugyan nagyon foglalkoztatta; így egészen biztos volt benne, hogy teljes kéziratot tud összeállítani, még ha magát az előadássorozatot kissé meg is kell kurtítani.”

Sajnos, súlyos betegsége megakadályozta terveinek teljes kivitelezésében, 1955-ben csontrákot diagnosztizáltak vállában. *„1956 április elején befeküdt a Walter Reed kórházba, s ezt a helyet 1957. február 8-án bekövetkezett haláláig már nem hagyta el. A Silliman-előadásokra készült befejezetlen kéziratot magával vitte a kórházba; ott még néhányszor megpróbált dolgozni rajta, de azután végleg felülkerekedett a betegség, s még Johnny kivételes szelleme sem tudta legyőzni testének gyengeségét.”*

A töredékes kéziratot a Yale egyetem a Silliman-előadások sorozatban jelentette meg.

Előadásában Neumann a számítógép és az agy szisztematikus összehasonlítását tűzte ki célul. A teljes előadásban bizonyára épített volna korábbi automataelméleti dolgozataira, amelyek az automaták összetettségére, a meghibásodó alkatrészekből megbízhatóan működő automata építésére, vagy az önmagát előállítani képes automatára vonatkoztak.

A könyv első, „A számológép” fejezete áttekinti korának legfontosabb műszaki megoldásait a számológépek felépítésében. Összehasonlítja az analóg és digitális műveleteket, majd a soros, párhuzamos vezérlési struktúrákat. A „Logikai vezérlés” részben jut el a dugaszolt és a lyukkártyás vezérléstől a tárolt utasításokra épülő vezérlésig, ami a Neumann-architektúra alapja. A vegyes – dugaszolt és tárolt utasításos – vezérlési formák és a vegyes számábrázolás lehetőségei akkor még használatban voltak.

A második rész induló gondolata a szerzőtől: *„Elég részletes leírást adtam a modern számológépek természetéről és azokról a nagy alternatív elvekről, amelyek szerint munkájuk megszervezhető. Most rátérhetek az összehasonlítás másik felére, az emberi idegrendszer taglalására. Meg fogom vitatni azokat a hasonlatosságokat és eltéréseket, amelyek e kétféle „automata” között fennállnak.”*

Az összehasonlítás kiindulása az idegrendszer „aktív” elemére, a neuronra alapul. A neuronok közötti ingerületek, a szinapszisok és az ingerlések elemzésével első ránézésre a működés digitális jellegét emeli ki. Ezt érdemben finomítja, és a lényegi eltéréseket megemlíti. Korának mesterséges automatáival összeméri a fő mutatókat, és az agy 10^4-szeres előnyét mutatja ki. A mutató az aktív elemek sűrűségével áll szoros összefüggésben. Az eltelt 60 év során, leegyszerűsítve a Moore-törvény hatását, a sűrűség 18 hónaponkénti duplázódása alapján a mesterséges gépek aktív elemeinek sűrűsége 10^{12}-szeresére nőtt, vagyis már 10^8-szoros lett az előnyük.

A mesterséges gép inkább soros feldolgozásra, kevés, de gyors aktív elemre épül, míg a természetes erősen párhuzamos és lassú, de sok aktív elemet használ. Azt várja, *„hogy egy természetes automata logikai felépítése és szerkezete nagyon különbözni fog egy mesterséges automatáétól, továbbá az utóbbi memóriaszükségletei rendszerint nagyobbaknak bizonyulnak.*”

Hosszabban foglalkozik a különböző ingerlési feltételekkel, amiből a vegyes digitális−analóg működés lehetőségét mutatja meg. A neuronok mellett aktív elemnek lehetne tekinteni a szinapszisokat is, amivel 10-100-szoros szorzóval növekszik az aktív elemek száma.

Az idegrendszeri memória kérdését csak hipotetikusan járja körbe. Főleg kapacitásbecsléssel, és nem megvalósulásának felépítésével foglalkozik. Számításai szerint másodpercenként $14 \cdot 10^{10}$ bit az idegsejtekbe belépő benyomások összege, ami 60 év alatt $2{,}8 \cdot 10^{20}$ bit. A mesterséges számítógépek aktív elemeinek számához viszonyított memóriaméretének arányszámához mérve ezt tartja az agy memória kapacitása becslésének. Jelenleg a világhálón felhalmozódott adatszféra mérete már túllépte ezt a mennyiséget. A memóriára nézve igen fontos megállapítást fogalmaz meg:

„A problematikának ezek az oldalai rendkívül fontosnak tűnnek az idegrendszer szerkezeti megértése szempontjából, de itt túlnyomó részben megválaszolatlan kérdésekkel kerülünk szembe. Ugyanis ismerjük az idegrendszer alapvető aktív szerveit (az idegsejteket), s minden okunk megvan azt hinni, hogy e rendszerhez nagyon nagy kapacitású memória társul. De a legnyomatékosabban hangsúlyozni kell, hogy ***nem tudjuk****, milyen típusú fizikai dolgok szolgálnak e memória alapvető alkatelemeiként.”*

A programokkal is foglalkozik pár érdekes oldal. *„A logikai utasítások olyan rendszerét, amelyet egy automata végre tud hajtani és amely az automatát valamilyen szervezett feladat teljesítésére készteti, programnak nevezik.”* Ez a fogalom akkor még nem volt közismert. Az olyan programok, (úgynevezett rövid programok) amelyek egy gép működését utánozni tudják, segítenek abban, hogy egy gépre írt programot egy másik gépen, az előbbit utánzó program segítségével le lehessen futtatni. Turing utánzó gépére utal, és az univerzális kiszámítási képességű géphez köthető ez a kis rész. A tanulmány legvégén még előkerül majd a „rövid program”, mint az agy lehetséges nyelvezeti eleme. Itt nem veti fel azt a kérdést, hogy programozható-e az agy, ahogy a számítógépek alapvető tulajdonsága a programozhatóság.

A számszerű és a logikai eljárások viszonyát, lehetőségeit vizsgálja a záró részben. Érdemi eltérést mutat ki a mesterséges automaták numerikus eljárásai és az idegrendszer eljárásai között. A pontosság és hibatűrés megoldása az idegrendszerben statisztikus jellegű. Míg a mesterséges automaták működtetéséhez többféle nyelvet, többek között a matematika nyelvét is használjuk, kétséges, hogy az idegrendszer használ-e nyelvet vagy programokat, például „rövid programokat”. Végső megállapításként azt határozottan kimutatja, hogy az agy nem a matematika nyelvét használja.

Informatika és az infoszféra

Az elemzés jellemzően architekturális, reprezentációs és működési összehasonlításra épül. A két automata közül a mestereséges 60 év alatt exponenciális ütemben fejlődött, sok minden változott. Ceruzzi [2] „A history of Modern Computing” könyve 1996-ig terjedően részletesen ismerteti a fejlődést. A tranzisztorok elterjedése a könyv írásának idejére esett, amit követett az integrált áramkörök technológiája. A nevezetes Moore-törvény szerint az aktív elemek sűrűsége és több más mutató 18 hónaponként kétszeresére nőtt. A fő állomások, a felhasználás változása szerint: a tudományos számítások gépéből először általános valós idejű adatfeldolgozó gép lett, majd jöttek a személyi számítógépek, munkaállomások, és behozták a számítógépet a mindennapi alkalmazásokba, a világháló, a WWW a számítógépek globális hálójába vont be mindenkit. Ez folytatódott a következő 25 évben. Jött az adatrobbanás, a Big Data világa, a felhők, a mobil kommunikációs eszközök, a mesterséges intelligencia, az MI új, mélyhálós technológiái, a tárgyak internete. Az 1980-as években még számítástechnika szerepelt közismereti tárgyként, amit felváltott az informatika. Tudományterületként is ez honosodott meg. Legújabb fejlemény, hogy a közismereti tárgy neve digitális kultúra lett. Mindez jól tükrözi, hogy a számítógépek szerepe döntő részben áttevődött a felgyülemlett információval való mindennapi gazdálkodás, munkálkodás területére. Megkerülhetetlenné válik ezért, hogy összevessük a két gépezetet az információ világában, az infoszférában betöltött funkcióik alapján is.

A processzorok a világhálón és egyéb berendezésekben (mint mobiltelefonjainkban) folyamatosan futtatják tárolt programjaikat, és részesei az emberiség globális információfeldolgozásának és szolgáltatásainak. A legfontosabb megállapítás: beépültek az emberiség infoszférájába mint új, aktív elemek. Az infoszféra aktív elemei ezt megelőzően kizárólag az élő emberi elmék voltak. A külső formációkat csak emberi elmék tudták értelmezni, feldolgozni. Nézzük át röviden, milyen új megvilágítást ad a számítógépek és az élő emberi agyak összevetése az infoszférában betöltött szerepük alapján.

Mit jelent az, hogy ez a két információfeldolgozó gépezetünk van: az agy és a számítógép? Mit is dolgoznak fel anyagi szubsztanciaként? Az információ hordozóit. Röviden felvázolom a Magyar Tudományban megjelent tanulmányaim alapján, hogyan fejlődtek ki az emberiség információhordozói, amelyeket a következőkben formációnak nevezek.

Tanulmányaimban[2] az anyag átrendezésének és a gondolkodásnak emberi lehetőségeiből kiindulva *az információ anyagi megjelenésére, a formációkra* irányítottam a figyelmet. A formációk bevezetése láthatóvá teheti a határt az emberiség információ-konstrukciói és a természet összetett folyamatai között.

A mindenkor fizikailag létező formációk és azok használatát biztosító rendszerek együttese alkotja az emberiség *infoszféráját*. Az infoszféra a bioszféra terméke, nélküle nem létezne, hiszen a bioszférán kívül nincs ember. A mai kor pedig új forradalmi lépést jelent az infoszféra építésében a digitalizálással és a kiszámítás gépesítésével. Mindez új tudomány megjelenéséhez vezet. Az infoszféra új fejlődéséhez már saját tudományterületre van szükség, ami az informatika lehet, tudományágként pedig informatikai tudomány.

Abból indulhatunk ki, hogy információ nincs csak úgy a semmiben, valami hordozza, valami, ami megfigyelhető/észlelhető/alakítható. Ez a hordozó az, amit már eddig is formációnak neveztem. A formáció észlelése/létrehozása során az észlelő/létrehozó számára jelenik meg az információ, akkor történik meg a jelentés hozzárendelése. Erre az észrevételre épül az információs esemény meghatározása:

Definíció: Az *információtriád* a formáció, tulajdonos és a jelentés hármasa (hármossága). A formáció szerepe a triádban háromféle lehet: keletkező, észlelt vagy kibocsátott. Ez a hármas egy időben lejátszódó folyamathoz tartozik, amit *információs eseménynek* nevezek.

Két alaptörvényt adok meg:

Az *első alaptörvény*: Különböző jelentésekhez különböző (a megfigyelő/létrehozó által megkülönböztethető) formációra van szükség.

A *második alaptörvény*: Formáció észlelése/létrehozása akkor jelent információt, ha olyan korábban keletkezett formáció észlelése is lehetséges, amelyhez a jelentés kötődik. A második alaptörvény behozza az információ időfüggését és a megértés, hasznosulás minőségét. A szemantika modellezésének ezt is figyelembe kell vennie. Ez egyaránt vonatkozik a humán szféra és a mesterséges szféra információs eseményeire.

A legfontosabb információs események emberi tudati tevékenységhez kapcsolódnak. A tulajdonos az emberi elme. A formációk lehetnek tudaton belüli struktúrák, és lehetnek külső, tárgyiasult struktúrák. A tudaton belüli agyi formációkat is észlelni kell, és tudati mozgásokat is lehet referáltnak tekinteni. Ilyen a mentális belső világunk, az érzelmek, gondolatok. Az információs esemény hossza nem korlátozott, összetett formációk is lehetségesek, egyszerre több tulajdonos is részt vehet benne. A tartós vagy ismételhető formációk lehetővé teszik, hogy közösségekben megegyezéssel társuljon hozzájuk jelentés. Az ilyen formációk felhalmozása adja a közösség információkészletét.

A kommunikáció szükségszerűen anyagi változás létrehozásával és terjedésével jár. Az anyag átrendezésének képessége és a gondolkodás együttesen eredményezte az emberi kommunikáció és információkezelés egymásra épülő rétegeinek kibontakozását. Egyik kezdeti réteg a hang alapú kommunikáció kifejlődése, ami a nyelvi fonémák, szavak kikristályosodásával a beszélt nyelvekhez vezetett. A kimondható és felismerhető hangalapú kódolási rendszert követte az írásjelek és hangalakok megfeleltetésével az írott nyelvek kifejlődése. Ezekkel olyan külső formációrendszer alakult ki, ami az élő tudatok belső formációvilágában értelemzést nyert. Ki kell emelni a beszélt és írott nyelv kódolási jellegét, ami erősen eltér a természetes − az agy által használt belső − formációktól. Megindult a mesterséges, külső formációk felhalmozódása. A metrikus információk számjegyekkel való kódolása, különösen az arab számrendszer bevezetése a kiszámítási képességeinket is kibontakoztatta. Nem az elme dolgozik számokkal (nem a matematika nyelvét beszéli), hanem mi használjuk az elménket, hogy kiszámítási eljárásokat, külső kisegítő formációkat is használva elégezzen. Így adunk össze, szorzunk és osztunk tetszőleges nagy számokat. A kiszámítás absztrakt lehetőségéről Turing mutatta ki az univerzális Turing-gép megkonstruálásával, hogy bármilyen függvény, amit valahogy ki lehet számítani, kiszámítható az univerzális Turing-géppel is. A konstrukció megtalálható Bach Iván [5] könyvében, a 217. oldalon. Közben az anyag átrendezésének lehetőségei elérték a legújabb áttörést: olyan anyagátrendezést tudunk létrehozni, ami utána úgy rendezi át magát az anyagot, hogy kiszámítást végez. A Neumann-architektúra ezt valósítja meg, és Turing elméleti univerzális kiszámításához megadta a műszakilag megvalósított univerzális számítógépet. Az elme nem tud elvégezni összetett, nagyméretű kiszámításokat, de most már egyre nagyobb méretekben el tudja végeztetni. A gép számára nincs jelentése, milyen kiszámítást végez, a program készítője ismeri a kiszámítás jelentését. Itt jutunk el az információ hordozóinak kérdésköréhez. A kiszámítás gépeinek fejlődésével egyidőben a gépek által elérhető, és feldolgozható formációk készlete is forradalmi ütemben fejlődött. A jelsűrűség, elérési idők, adattároló kapacitások, adatátviteli kapacitások, instrumentális felvételek lehetővé tették, hogy az emberiség felhalmozódó formációkészletének döntő részét a Digtális Univerzumba szervezze. A DU adatszférája másfél évente kétszereződik, elérte a Zettabyte tartományt. Az emberiség infoszférája új korszakába lépett.

A legutóbbi, két évszázada tartó fejlődés során az instrumentális felvételekkel, különféle kamerákkal már formáció készül az észlelésről, ami tárolható, továbbítható, digitalizálható. Majd a kiszámítás elvégeztetése az anyag önátrendezésével lehetőséget ad az így keletkező digitális formációk emberi tudatok nélküli átalakítására. Ez a lehetőség korszakunk meghatározója; ezzel új, mesterséges aktív gépezet került be az infoszféra világába. Az új műtárgy, a számítógép (computing machinery) különlegessége az, hogy az általa átalakított anyag „csak” formáció. Ez egyben azt is jelenti, hogy csak a formációhoz rendelt megfelelő jelentés esetében hasznosul, válik információvá. A hozzárendelés megoldása az informatika kihívása, feladatrendszere. Itt húzódik a döntő különbség a számítógép és az agy között: az agy által használt belső formációk világa jelentések egymásra épülő komplex rendszerét alkotja. Lisa Feldman Barret [7] ezt így jellemzi a „Mind Issue” kötetének bevezető cikkében, „How your brain is made”:

„Amikor az agy emlékezik, újra létrehozza a múlt darabjait, és akadálytalanul egyesíti őket. Ezt a folyamatot „emlékezésnek” nevezzük, de valójában összeszerelés. Valójában az agyad ugyanazt az emléket (vagy pontosabban azt, amit ugyanazon emlékként él meg) minden alkalommal más és más módon konstruálja meg. Itt nem az emlékezés tudatos élményéről beszélek, mint például a legjobb barátod arcának felidézése vagy a tegnapi vacsora. Arról az automatikus, tudattalan folyamatról beszélek, amikor egy tárgyra vagy szóra nézünk, és azonnal tudjuk, mi az.”

Az információ, konkrétabban a formációk hasznosulása, felhasználása, átalakítása, feldolgozása sokáig emberi tudatokon keresztül történt. Ezen a téren hozott forradalmi változást a digitális világ és a kiszámítás gépesítése. Az infoszférában két formációkészlet létezik: a tudatokon kívül létező, fizikailag megjelenő formációk készlete, és az egyéni tudatok készletei. A megoldandó állandó feladat: hogyan lehet a fizikai formációkészletből információhoz jutni? A feladat megoldásában két korszak határolható el: a kiszámítás előtti korszak, és a kiszámítás utáni korszak.

Kiszámítás előtt az alapmegoldás: meg kell találni a megfelelő formációkészletet, észleni kell, és ki kell nyerni a szükséges információt – meg kell érteni a formációt. Van a mindennapi formációáradat, ami mindenkit elér. Ez mások által létrehozott formációkat tartalmaz, nagy részük mindennapi észlelésekről, eseményekről szól. A fontosabb kategória a nem azonnali fogyasztásra szánt formációk létrehozása. Ezeket a formációkat létrejöttüktől kezdve valameddig fizikailag létező hordozók tartalmazzák. Ezek a formátum-repozitóriumok. (Könyvtárak, gyűjtemények, nyilvántartások, levéltárak stb.) Hogyan lehet egy kérdéshez tartozó formációt (formációkészletet) megtalálni, elérni? Újabb szint kell: a tárolt formációkról elérési, tartalmi összefüggésekre vonatkozó formációk kellenek. Ezek is hozzáadódnak a formációhordozók készletéhez. Erre a feladatra bontakozott ki a klasszikus könyvtár- és információtudomány. (Library and Information Science).

A kiszámítás utáni korszakban eljutottunk odáig, hogy a külső formációk döntő, és egyre növekvő hányada digitálisan létezik valahol a világhálóra kapcsolódó számítógépes rendszerekben. Kiépült a Digitális Univerzum, benne az International Data Corporation tanulmányának [6] újabb elnevezése szerint az adatvilágot jelentő adatszférával. Az adatszféra mérete – tulajdonképpen a digitálisan tárolt formációk mennyisége a tanulmány szerint: *„Napjainkban több mint 5 milliárd fogyasztó lép kapcsolatba az adatokkal naponta – 2025-re ez a szám 6 milliárd lesz, vagyis a világ lakosságának 75%-a. 2025-ben minden csatlakoztatott személynek legalább egy adatkapcsolata lesz 18 másodpercenként. Ezen interakciók nagy része a világon összeköttetésben álló milliárdnyi IoT-eszköznek köszönhető, amelyek várhatóan több mint 90 ZB adatot hoznak létre 2025-ben. Az adatvezérelt világ mindig bekapcsolt lesz, mindig nyomon követ, mindig monitoroz, mindig lehallgat és mindig figyel, – mert mindig tanulni fog. Amit véletlenszerűségnek tekintünk, azt a kifinomult mesterséges intelligencia algoritmusai fogják a normalitási mintázatokba kötni, amelyek új és személyre szabott módon hozzák el a jövőt.”*

A másik „gépezet” nem változott, de kutatása a tudomány egyik legnagyobb kihívása. Az agy, elme és a tudat modellezését erősen befolyásolta a kiszámítási világ kiteljesedése. A számítógépes metafora szerint az agy a hardver, az elme pedig a szoftver. Külön agymodellezési filozófia az agy kiszámításos elmélete, vagy az agy működésének szimulálása. Érdemes megemlíteni az elmúlt évek két agykutatási megaprojektjét. Az összefoglaló az MIT TR Emily Mullin [8] cikke alapján készült:

Az amerikai Brain Activity Map projekt célkitűzése az volt, hogy egyszerre mérjék valamennyi neuron kapcsolatait és tüzelését, és így összetett gondolatok képéhez jussanak. Neurális és nanotechnológiák együttes használatára épült. 2013-ban indult, mint központi Brain Research through Advancing Innovative Neurotechnologies (BRAIN) iniciatíva. Az eredeti célt messze nem érte el. A közel 8 milliárd USD költségű megaprojekt inkább az agy kutatási eszközeinek fejlesztésében mutatott fel értékes eredményeket. Továbbra is csak néhány száz neuron együttes működésének felvételére képesek, szemben az eredeti teljes 86 milliárd neutron megfigyelésével. A projekt 2026-ig folytatódik. A másik a 2013-ban az EU zászlóshajó projektjeként 1,3 milliárd EUR támogatást nyert agyszimulátor projekt. A terv 10 év alatt a teljes agy háromdimenziós sejtszintű, minden sejtkapcsolatot tartalmazó digitális modelljének építése volt. A teljes, globális szimulációs tervet már feladták, 2023-ig részekre vonatkozó szimulációs modellek készülnek. A globális modellek felépítése még várat magára.

Visszaértünk Neumann neuronokból való építkezéséhez. Az új célok nagyratörők: a teljes neurális hálózat megismerése a cél. Neumann memóriára megfogalmazott kérdése ezen belül továbbra is nyitva ál. Nincs még magyarázat a tudat, öntudat mibenlétére. Az agy, mint automata nemcsak kiszámítási feladatokat hajt végre a benne lévő vagy belépő formációkon, hanem hozzáférhetővé teszi a jelentésüket is. Folyamatosan információs események játszódnak le benne. Ezzel nagyon eltér a számítógépek működésétől.

Az információelméleti, pontosabban az információ hordozóira és az információs eseményekre alapuló szemléletem alapján úgy gondolom, hogy az agy folyamatosan új és új formációkat épít a folyamatosan érkező ingerületekre, impulzusokra, és a korábbi észlelések formációival összevetve értelmezi, raktározza a jövő számára. Úgy tekinthető, hogy rendkívül komplex szemantikus hálót épít fel, egymásra épülő jelentési rétegek, hálók dinamikus világát sejteti. Ebben a belső szemantikus világban reprezentációk keletkeznek a nyelv kívülről beáramló mesterséges formációihoz is. A nyelvi jelekre való kódolás-dekódolás feladatát elsajátítjuk, és lényegében erre épül az infoszférában a külső hordozókon mesterségesen létrehozott formációk használata. A (tudatos) gondolkodásunkat igen nagy arányban a nyelvi formációkon, formációkkal végezzük. A kódolás alapú nyelv kialakulása tette lehetővé a külső és belső formációk megegyezés alapú használatát. Agyunk önmagában és másokkal való együttműködésben való használatában az emberiség kiemelkedésnek ez a döntő mozzanata. Azonban ezekkel a kódokkal egy adott jelfinomságon és mennyiségen felül nem tudunk agyunkkal gazdálkodni. Ebben hozott áttörést a kiszámítás és a rendkívül finom jelfelbontásra épülő digitális világ. Az infoszféra építésének ezzel forradalmi új korszakába léptünk. Ne feledjük el, hogy a mindenkori infoszféra formációkészletéhez a mindenkori élő emberi tudatok az értelemzés, megértés hordozói.

Benczúr András

az MTA doktora, professor emeritus, ELTE IKT

Hivatkozások

[1] John von Neumann, „The Computer and the Brain.” (New Haven/London: Yale Univesity Press, 1958.), (Az első kiadás 1958-ban jelent meg Klara von Neumann előszavával. A 2000-ben megjelent második kiadás Paul Churchland és Patricia Churchland előszavát tartalmazza, amely Neumann nézeteit az akkori tudomány kontextusába helyezi. A 2012-ben megjelent harmadik kiadás Ray Kurzweil előszavát tartalmazza. ISBN 9780300181111.)

[2] Paul E. Ceruzzi „A history of Modern Computing”, The MIT Press, 1998.

[3] Benczúr András, „AZ INFORMÁCIÓ HORDOZÓIRÓL – AZ INFORMÁCIÓ ÚJ NÉZŐPONTBÓL, I. Információ, formációk, infoszféra”, Magyar Tudomány 182(2021)6, 717–731 DOI: 10.1556/2065.182.2021.6.1

[4] Benczúr András, „AZ INFORMÁCIÓ HORDOZÓIRÓL – AZ INFORMÁCIÓ ÚJ NÉZŐPONTBÓL, II. Információ, kiszámítás és informatika”, Magyar Tudomány 182(2021)7, 945–959, DOI: 10.1556/2065.182.2021.7.7

[5] Bach Iván, „Formális nyelvek”, Typotex, 2001 ISBN 9639132 92 6

[6] The Digitization of the World − From Edge to Core, IDC report 2018.

[7] Lisa Feldman Barret, „How your mind is made” (MIT Technology Review, Vol 124. No 5, 2021. The mind issue)

[8] Emily Mullin, „Big science has failed to unlock the mysteries of the human brain” (MIT Technology Review, Vol 124. No 5, 2021. The mind issue)

Lábjegyzetek

[1] Electronic Discrete Variable Automatic Computer, First Draft of a Report on the EDVAC.

[2] Benczúr [3,4] https://mersz.hu/dokumentum/matud202106__1 és https://mersz.hu/dokumentum/matud202107__11

Neumann János · informatika · matematikatörténet · mesterséges intelligencia

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

Oláh Vera 2022. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Matematikus Hangversenyek

2022. október 5-én 40. alkalommal rendezték meg az ELTE **Matematikus Hangversenyét**. A Matematikus Hangversenyek olyan ingyenes koncertek, ahol matematikusok (egyetemi hallgatók, oktatók, nem feltétlenül az ELTE-ről) esetleg családtagjaikkal, barátaikkal zenélnek főként (de nemcsak) matematikus hallgatóságuknak. A zenei kínálatban szerepel klasszikus komolyzene, (szóló- és kamaradarabok), de jöhet népzene (sőt, előfordult néptánc is), megzenésített vers, jazz vagy rock is. A zenészek között akadnak lelkes amatőrök, képzett muzsikusok és egészen profi művészek, a produkciók, ha nem is egységesek, de mindenképpen színvonalasak.

A mindenkori zeneszerető egyetemista hallgatóságon kívül vannak, akik évtizedek óta visszajárnak. A 2012-es és 2013-as évek hangversenyeiről válogattunk fényképeket: a nézők között sok az ismerős arc, sajnos, közülük már nem mindenki tudott eljönni a mostani eseményre.

Domonkos Orban PHOTOGRAPHY

Nézők a 2012-es koncerten (Orbán Domonkos felvétele)

Kérges Máté PHOTOGRAPHY

Közönség 2013-ból (Kérges Máté felvétele)

A Matematikus Hangversenyek hivatalos honlapján olvasható a történelem: e szerint az első hangverseny ötlete Szalkai Istváné volt, helyszíne egészen 2008-ig a Kőrösi Csoma Sándor Kollégium „Lepény" része. Csaknem minden tanévben családias környezetében, önkéntes munkával szervezték meg itt a koncerteket a hallgatók, egymásnak átadva a stafétabotot. Amikor azonban a „Lepény" régi koncertzongorája végleg megadta magát, Dobos Dánielnek, az akkori főszervezőnek sikerült elintéznie, hogy a hangverseny az ELTE Jogi karának dísztermébe költözhessen.

AULA MAGNA
Domonkos Orban PHOTOGRAPHY

Az Aula Magna bejáratánál (Orbán Domonkos felvétele)

Azóta méltó környezetben, többszáz néző előtt zajlik a hagyományos rendezvény. 2018 óta még „matematikusabb" és ünnepélyesebb lett, mivel a fiatal, kiváló egyetemi matematikaoktatók számára alapított Gács András-díjakat a koncert szünetében adják át. Ugyan 2020-ban és 21-ben a Covid-járvány miatt nem lehetett a Díszteremben megtartani a rendezvényt, de végül 2022 őszén újra lehetőség nyílt rá. Ez évben a szünet szokatlanul hosszúra sikerült, hiszen most kivételesen 3 év díjazottjait ünnepelte a közönség.

A Matematikus Hangversenyek történetéről, kialakulásáról, fejlődéséről két korábbi főszervezőjükkel, Somogyi Krisztiánnal és Horváth Andrással beszélgettünk.

Somogyi Krisztián

Somogyi Krisztián matematika-informatika szakos tanár ma informatikusként dolgozik. Egyetemi hallgató korában, 2011-ben vett részt először a Matematikus Hangversenyen egy hegedű duóban, ez elég is volt ahhoz, hogy ezt követően 4 éven át ő szervezze meg a koncerteket. Krisztián kezdeményezte a Matematikus Hangversenyek fellelhető emlékeinek összegyűjtését a mathangverseny.elte.hu oldalon, ami főként a műsorokat, megjelent írásokat, cikkeket tartalmazza, ritkábban videofelvételeket, fényképeket, hangfelvételeket. Felkérésére készítette el Németh Levente 2011-ben a logót. 2015-ben, az egyetem elvégzése után átadta a szervezést Jázsó Miklósnak, aki később Horváth Andrásnak tanította be a főszervezői tennivalókat.

Horváth András

Horváth András 2019 óta vesz részt a hangversenyek lebonyolításában, első önálló szervezése a 2023 tavaszi hangverseny lesz. Ő matematika-fizika szakos tanár és az ELTE fizika doktorandusza, jelenleg a Szent László Gimnáziumban tanít. Kórusban énekel, és karnagyként kórusokat vezényel is.

R.: Te kórusokkal szerepelsz a hangversenyeken. Honnan jött az indíttatás?

H.A.: Az első évben két kórusomat is elvittem, a TTK és az IK Bolyai-kórusát, mai nevén BoCho. Nálunk otthon a családban többen zenélnek, énekelnek, nekem ez természetes volt gyerekként. Gimnazista koromban a Lovassyba jártam Veszprémbe. A Lovassy kórusáról azt kell tudni, hogy ők mindenkor eszméletlen jók, zseniális karnagyuk, Tóth Mária tanárnő éppen tavaly ment el nyugdíjba. Maca néni egy meghatározó, ikonikus karakter. És hogy mekkora ereje van a zenének és a szeretetének: itt a bel cantótól a népdalkörön keresztül mindent énekeltek az aktuális kórusok kereken negyven éven keresztül. Amikor a tanárnő nyugdíjba ment, akkor némi titkos egyeztetések után egyik délután a kóruspróba után a Lovassy tornatermében legalább 300 korábbi kórustag jelent meg és különböző darabok nyitányaival az énekteremtől Maca nénit odacsalogattuk a csarnokba, megtapsoltuk, és még olyan dalokat is énekeltünk közösen, amelyeket gimnazista korunk óta sem.

A kórusokban is az a jó, hogy generációkon átívelő, mint egy-egy népszerű sláger a könnyűzenében, a közös éneklésnek megvan ez a fajta közösségi élménye. Gondolok ezzel a mostani hangversenyre, ott például egy Piramis-dal volt az utolsó szám, ami aztán átment egy nagy közös éneklésbe.

Mindenhol óriási közösségformáló ereje van a zenének, középiskolában, egyetemen, és azon túl.

R.: Krisztián, te is gyerekkorodban kezdtél hegedülni?

S.K.: Nem, az én életembe egyetemista korom körül lépett be a zene. Ez számomra akkor szükséglet volt. Nagyon szerettem a matematikát, de az akkor tényleg nagyon sok volt. A zenélés, a hegedülés volt, ami az érzelmeimhez mégiscsak közelebb állt, mert a matematikában én − főleg az első években − nagyon nehezen találtam meg azt, amire azt mondhattam: ez az én matematikám. Az ritka pillanat volt az életemben, hogy azt éreztem volna, hogy a matematika számomra önkifejezés. Zenében pedig ez egész hamar el tud jönni. Elkezdek skálázni, egy kicsit máshogy csinálom, és azt érzem, hohó, hát ez én vagyok! Hogy esténként az egyetem után tudok egy kicsit hegedülni, nekem nagyon sokat adott.

R.: Hogyan tanultál meg hegedülni?

S.K.: Hát elmentem egy tanárhoz kétszer egy héten, itthon meg minden nap kellett gyakorolni. Ez fárasztó is volt, de nagyon szerettem. Így lényegében autodidakta módon lett belőlem amatőr zenész.

R.: ...és amatőr matematikatörténet-kutató, már ami a hangversenyek emlékeit illeti...

S.K.: Ehhez talán még egy érdekes adalékot hozzátennék. Oly régóta járt kézről-kézre a hangverseny, hogy elfelejtődött, hogy az aktuális az hányadik is. Pl. az én időmben az aktuális hangversenyre úgy hivatkoztunk, hogy az az n+12-dik. A hangverseny múltjának szenvedélyes kutatása közben, sok kedves levél után tudtam ezt az ismeretlent megfejteni és megtudni, hogy n=20. Erről szól két cikk lábjegyzete: cikk 1996-ból és kiegészítő cikk 2006-ból.

R.: A Matematikus Hangversenyeken kik szerepelhetnek, és milyen darabokkal? Van-e valamilyen megkötés?Kiegészítő a 2006-os cikk Hogyan áll össze a műsor?

H.A.: Általában elegendő szereplő jelentkezik, akik elég jók ahhoz, hogy kiálljanak a színpadra. Annyi a megkötés, hogy egy műsorszám maximum 7 perces lehet és egy-egy szereplő legfeljebb kétszer léphet fel. Sok a visszatérő: az első rész harmadik-negyedik száma majdnem mindig Freud Róbert és Laczkovich Miklós négykezes zongorajátéka, többnyire Mozart vagy Brahms. Székely Péter mindig csodálatosan klarinétozik. Ott vannak a kórusok: a BoCho, vagy a BME Wigner Jenő Kamarkórusa. Külsős szereplőink is vannak, de ők is valamilyen ELTE-s vagy matematikus kötődéssel.

Freud Róbert és Laczkovich Miklós (Orbán Domonkos felvétele, 2013)

Székely Péter klarinétozik (Kérges Máté felvétele, 2013)

Frenkel Péter (Orbán Domonkos felvétele, 2013)

PICTURES
1848-1919
EÖTVÖS LORÁND

A BoChor kórus a Díszteremben (Orbán Domonkos felvétele, 2013)

A programot, a sorrendet úgy állítjuk össze, hogy lehetőleg változatos, élvezetes legyen. A szereplőkkel megbeszéljük a preferenciákat, de a sorrend azért szinte teljes egészében a szervező kezében van.

S.K.: A Matematikus Hangversenyek szervezése számomra a hallgató-oktató viszonyt teljesen más kapcsolattá alakította. Fantasztikus érzés, hogy együtt muzsikálunk. Ezen kívül erre a Hangversenyre meg lehet hívni a dékánokat, meg lehet hívni a rektort. Mi mindig hívjuk őket, nagyon megköszönik, de nemigen jönnek el. Volt olyan, egy egyetemi vacsorán, ahol ott volt a rektor, szerepelt egy bűvész, akivel megbeszéltem, hogy csináljon egy olyan trükköt, amiből egyszerre csak egy Matematikus Hangverseny Meghívó ugrik elő. A rektor ott helyben meg is ígérte, hogy eljön, de végül mégsem láttuk a hangversenyen.

H.A.: Nekem volt olyan évem, amikor a jogi kar dékánja ott volt! A Matematikai Intézetből sokan kapnak külön meghívót, professzorok, intézetvezetők, a matekos oktatók kifejezetten lelkesen jönnek is. Rendszeres résztvevők például Szőnyi Tamás vagy Pálfy Péter Pál. Az ELTE-n tehetséggondozással foglalkozók is mindig ott vannak. Rutinosabb oktatók kérdezik is már sokszor előre, hogy mikor lesz az időpontja. Kiss Géza is mindig jön a feleségével, én őt még az Erdős-iskolából gimnazista koromból ismerem, meg az algebra 1-2 gyakorlatokat nekem annak idején éppen ő tartotta.

R.: Sok a zeneszerető-zeneértő a matematikusok között, felsorolni is nehéz volna. Az Érintőben is több interjú, cikk jelent meg a matematika és a zene kapcsolatáról [1].

H.A.: Euler is megmondta, hogy a zene az hangzó matematika.

R.: Igen, Euler a hangok frekvenciái közötti számokkal kifejezhető viszonyokra egész filozófiai rendszert épített.

H.A.: Kodály is a nagy amerikai körútja során elmondta, hogy a zene és a matematika milyen szoros kapcsolatban áll. A zenészek is tudják, hogy igen, a ritmustól kezdve az alapkészségeken keresztül az absztrakcióig, vagy ha valaki kortárs zenét játszik, ebben mi minden van benne. Ez is egy szépsége a zenének. És szerintem ezért is annyira lelkes zenészek a matematikusok. Ők azok, akik a leginkább értékelni tudják ezt a matematikailag leírható szépségét.

R.: Ez talán nem is ennyire tudatos, inkább annak köszönhető, hogy a tapasztalat szerint sokszor a zenei és a matematikai tehetség együtt jelentkezik. A zene tud hatni már kisgyermekkorban mind az érzelmi, mind az értelmi képességek fejlődésére [2].

S.K.: Én még arra is kíváncsi lennék, hogy a szocializáció mennyire játszhat közre ebben. Tehát ahol mondjuk otthon szerették a matematikát, esetleg fontosnak tartották a zenét is. És akkor a gyerek egyszerre kapta ezt a kettőt: itt vannak a gondolkodtató példák, de itt van a zongora vagy a pianínó is, leülhetsz mellé. Ez csak azért merül fel bennem, mert nálam nem volt ilyen. Én sokkal előbb szerettem meg a matematikát, mint a zenét. Nekem ez a kettő gyerekkoromban nem járt együtt, míg az, hogy emelt szintű matekra megyek a középiskolában, az nagyon egyértelmű volt. Nálam a zene úgy nem volt jelen a hétköznapokban, mint a matematika. Ez egy sokkal későbbi kapcsolódás, és messze nem is lett annyira erős.

Még egy utolsó gondolat, ami eszembe jutott: beszéltünk a hallgatótársakról, oktatókról, dékánokról, rektorokról, a másik, ami nagyon izgalmas, a lapok, folyóiratok, mint például az Érintő is. Nekem a TTK-s Nyúzzal volt sok jó élményem, hogy meg lehet őket hívni a hangversenyre, és aki szívesen ír róla cikket, tudósítást, az kipróbálhatja magát ebben a körben, és én ezt nagyon szerettem. És örömmel lehozta az újság, nemcsak a tudósítást, hanem előtte a toborzást, hirdetést is,amibe mindig nagy munkát fektettünk. Én a HÖK-kel addig nem voltam kapcsolatban, de ez adott egy újabb kapcsolódási pontot, hogy mi itt nemcsak egyetemi hallgatók vagyunk, hanem a hallgatók mindennapjaihoz hozzátenni igyekvők. Ki akarták dobni az utolsó 20 év TTK-s Nyúzait, de szóltak nekem, nehogy elvesszen egy korábbi tudósítás a hangversenyről, mielőtt kidobnák az utolsó példányokat, jöjjek és nézzem át, ha van kedvem. És lementem a szerkesztőségbe, és tényleg találtam egy-két cikket, ami valahogy nem került még fel a honlapra. Ez is olyan volt, ami összehozta a kultúra különböző ágait, matematikát egy kis irodalommal, zenével. Korábban a hangversenyen még népzene és néptánc is volt, és esetleg még jazz is a végén, nekem akkor voltak ilyen teljességi élményeim. Ez a sokszínűség, ez nagyon jó.

R.: Hányan szoktak lenni?

H.A.: A legutóbbi koncerten tíz hivatalos fellépő volt.

R.: És a hallgatóságban hányan vannak?

H.A.: Az Aula Magnát a fellépőkkel együtt jó háromnegyed részben megtöltöttük, de az előre rögzített időpont, amit nem tudtunk áthelyezni, épp az egyik nagy pedagógus tüntetéssel esett egybe. A szokásos tavaszi alkalmakkor csaknem telt ház szokott lenni (300-400 fő). A tervek szerint kivételesen még ugyanebben a tanévben, 2023 áprilisában lesz a következő rendezvény, akkortól reméljük, visszatér a korábbi tavaszi hangversenyek rendje.

R.: Akkor várjuk a meghívót jövő áprilisban!

Riporter: Oláh Vera

Néha még a csilláron is lógnak...

1848-1919
EÖTVÖS LORÁND
Kérges Máté PHOTOGRAPHY

Eötvös Loránd kissé meglepve nézi a forgást...(Kérges Máté felvétele,2013)

Hivatkozások

[1] https://ematlap.hu/gazda-g-sag-2017-12/600-a-zeneben-rejlo-matematika (Székely Péter)

https://ematlap.hu/gazda-g-sag-2018-03/676-a-kiralyi-ut-a-zenetudomanyhoz-2 (Malina János, Tóth János)

https://ematlap.hu/konyvespolc-2018-12/797-darvas-ferenc-szamcirkusz-wettl-ferenc (Darvas Ferenc könyvéről Wettl Ferenc)

https://ematlap.hu/gazda-g-sag-2022-20/1217-zene-matematikus-fullel (Szendi Ágoston)

https://ematlap.hu/gazda-g-sag-2022-9/1181-mupa-matematika-a-zeneben: (Matézis a Müpában – Körmendy Zsolt)

https://ematlap.hu/gazda-g-sag-2022-19/1201-matematikus-muvesz-bali-janos (Bali János)

https://ematlap.hu/interju-portre-2019-6/879-emlekezes-baranyai-zsoltra Katona Gyula, Malina János

[2] https://papageno.hu/blogok/animo/2022/03/hogyan-fugg-ossze-a-zene-es-a-matematika/ https://pallasathenekiado.hu/konyvesbolt/zene-matematika-es-elme/ David Sulzer magyarul 2021-ben megjelent könyve.

https://www.typotex.hu/book/152/douglas_hofstadter_godel_escher_bach

zene ELTE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon:

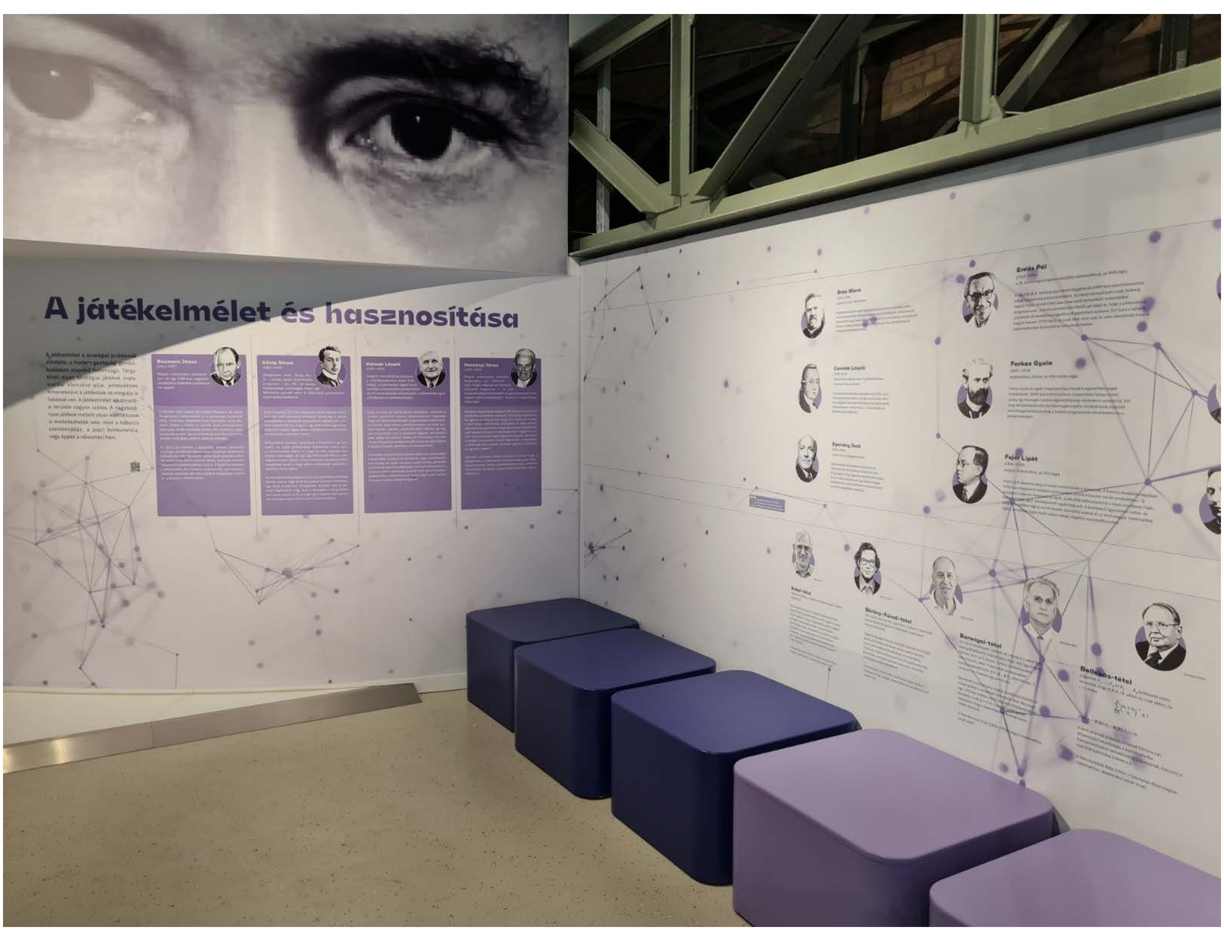
Oláh Vera 2022. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Valósággá vált álmok a Millenárison

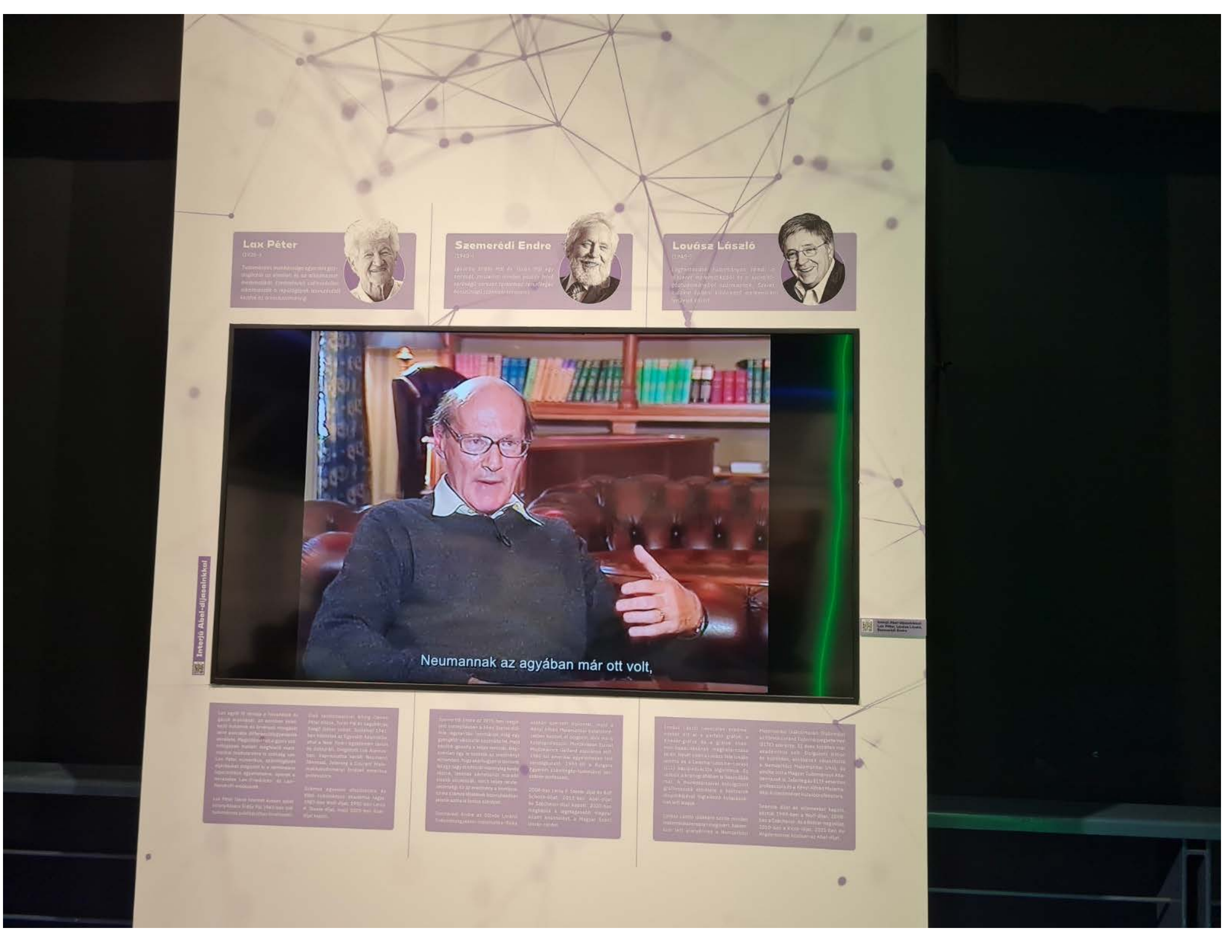
Az **Álmok Álmodói 20** kiállítás 2023. január 31-ig tart nyitva a Millenárison, december 22-től rendkívüli nyitvatartással. Aki megnyitja a remekül összeállított honlapot, rengeteg információt talál rajta, mi mindent érdemes megnézni: A tér tudománya, Agrárium, Infokommunikáció, Energia, Ipar, Orvoslás, Mobilitás a fő témakörök. Olvassák el az ELTE TTK ajánlóját, vagy a Gazda István tudománytörténésszel, a tárlat vezető kurátorával készült interjút. Többek között az ő érdeme az impozáns matematikát és matematikusokat bemutató terem, ahol a mai magyar matematikusok fényképei között játszhatnak a kisiskolások (igaz, tableteken) logikai játékokat. Ha pedig egy középiskolás megkeresi a saját gimnáziumát egy térképen, megtudhatja, milyen hírességek jártak oda régen. A Tudományos Arcképcsarnokból gombnyomásra kiválaszthatók különböző tudományágak és különböző korok tudósai. Saját unokáimat sem a régi eredeti motor, autó, autóbusz, még a repülőgép sem lelkesítette annyira, mint az űrhajó, amibe bemehettünk.

Engem az internetről mindenki számára elérhető Tudástár nyűgözött le, gazdag anyagát csak ajánlani tudom. Remélem, a kiállítás megszűnésével nem vész el. Aki az Érintő másik cikkét is olvassa, Neumann: A számológép és az agy című könyvét is megtalálhatja benne.

„semmiből egy új
más világot teremtettem”
(Bolyai János, 1823. november 3.)
A Bolyai-geometria


A játékelmélet és hasznosítása

Kiemelkedő magyar matematikai eredmények
Magyar matematikusokról elnevezett tételek


Neumannak az agyában már ott volt,

Oláh Vera

matematikatörténet tudománypolitika

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 26. szám 2022. december Válasszon: ›

100

Cím	Szerző
Elment Révész, Somfai, Holló-Szabó, Besenyei	Írta: Szerkesztő
Matematikus sikerek: Lendület 2022	Írta: Szerkesztő
34. Varga Tamás Módszertani Napok	Írta: Csapodi Csaba, Oláh Vera, Szitányi Judit
Gács András-díjazottak a Matematikus hangversenyen	Írta: Szerkesztő
Erdős Gábor és Varga József Rátz Tanár Úr Életműdíjasok	Írta: Szerkesztő
Príma matematika	Írta: Szerkesztő
Rényi-díj néven születik újjá a Graphisoft-díj	Írta: Ács Katalin, Rotter Barbara
Ugródeszkák matek szakon – Palotay Dorka	Írta: Bérczi-Kovács Erika
Besenyei Ádám (1982–2022)	Írta: Faragó István, Sikolya Eszter, Simon Péter
Sok színnel, sokszínűen a gráfokról	Írta: Fonyó Lajos, Fonyóné Németh Ildikó
Sikeres KöMaL-rendezvény az ELTE-n	Írta: Szerkesztő
Kicsit kooperatívan	Írta: Kovács-Koszó Eszter, Kiss Viktória, Kosztolányi József
Ada algoritmusa	Írta: Binzberger Viktor
Bevezetés a valószínűségszámításba	Írta: Major Péter
Szokatlan párosítás	Írta: Juhász Péter
A Tingley-sejtés	Írta: Titkos Tamás
Az index tanítása nemzetközi környezetben	Írta: Vizvári Béla
Valósággá vált álmok a Millenárison	Írta: Oláh Vera
Matematikus Hangversenyek	Írta: Oláh Vera
„A számológép és az agy” megjelenésétől az infoszféra forradalmáig	Írta: Benczúr András

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség