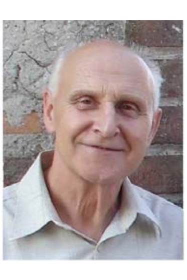
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

23. szám 2022. március



2022. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

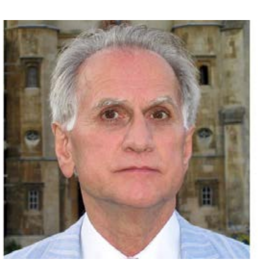
Az ukrán matematika egyik ékköve: Sarkovszkij tétele

Olekszandr Sarkovszkij 85 éves, Kijevben született, egész életében ott dolgozott, és jelenleg is ott él. 1964-ben publikálta eredményeit orosz nyelven, az Ukrajnszki Matematicski Zsurnal hasábjain. Ez az egyik kedvenc matematikai tételem, egyetemista koromban én is kikerestem a cikket és próbáltam megérteni, írtam is róla egy esszét Pintér Lajos tanár úr analízis kurzusán. – írja *Röst Gergely*...

2022. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Matézis a Müpában

2021-ben egy új családi koncertsorozat indult a Müpában, a „Matematika a zenében”. Püthagorasz húrja, Bach, a matematikus, Mozart kockajátéka, Aranymetsző zeneszerzők címmel hirdették meg az egyes részeket. Kiknek jutott az eszébe? *Körmendy Zsoltot*, a Müpa Családi és Ifjúsági Programok szerkesztőjét kérdeztük, akinek első diplomája matematika-fizika szakos tanár.



2022. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Matematikus történetek: Bollobás Béla

Bollobás Béla Széchenyi-díjas matematikus, a Cambridge-i Egyetem professzor emeritusa, a Trinity College örökös tagja, a Memphisi Egyetem címzetes professzora, az MTA külső tagja. Diákkorában éveken át szinte minden matematikaversenyt megnyert. A magyar televízióban 2004-ben tűzték műsorra a róla készült riportfilmet a Matematikus történetek sorozatában.

2022. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

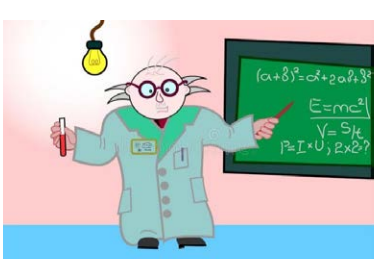
Lépcsőházi gondolatok – kongresszus után

Fél évvel ezelőtt számoltunk be a 8. Európai Matematikai Kongresszusról, a matematikus közösség második legnagyobb szabású eseményéről a Matematikai Világkongresszus után. Az egyhetes programsorozat keretében Európa tíz kiemelkedő szaktekintélye tartott plenáris előadásokat. Egyikük a Rényi Intézet tudományos tanácsadója, *Pach János*, akivel *Szathmári Nóra* beszélgetett.

2022. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

MTA Alumni program

A középiskolai MTA Alumni program célja, hogy kutatóvá vált egykori diákok az alma materükbe visszatérve tudományt népszerűsítő, ismeretterjesztő előadásokat tartsanak, és így közvetlen kapcsolatot alakítsanak ki az akadémiai kutatóintézetek és az érdeklődő diákok között. A programot Freund Tamás, az Akadémia elnöke indította el 2020 végén, amelyre az Akadémia köztestületének csaknem 1600 tagja jelentkezett 2022 februárjáig. A megnyitó egyik előadója volt *Miklós István*. Tovább...



2022. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Úton az egyenletek használata felé

A hatosztályos gimnáziumok felvételi anyagait tanulmányozva láthatjuk, hogy minden évben előfordulnak olyan szöveges feladatok, amelyeket felnőttként ösztönösen egyenlettel oldanánk meg. Ebben az életkorban szívet melengető kreatív ötletekkel állnak elő a gyerekek egy-egy feladatmegoldás során. Leírni viszont nem tudják precízen. Mit tehet a tanár, a szülő?

2022. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Ugródeszkák matek szakon – Fehér Dániel

Új beszélgető sorozatot indítunk 2022-ben fiatal matematikusok részvételével *Ugródeszkák matek szakon* címmel. Az 1. részben *Fehér Dánielt* kérdezi *Bérczi-Kovács Erika*, hogyan jutott el Tokaj-Hegyaljáról a Luxemburgi Egyetemre. Tovább...

2022. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A Baker-módszer és egy alkalmazása

Pink István írásának célja, hogy rövid betekintést nyújtson a diofantikus számelmélettel foglalkozó kutatók által sokszor idézett és alkalmazott Baker-módszerbe. A 19. század közepétől napjainkig tartó, híres tételek nyomán létrejött történet a transzcendens számok bevezetésével indul. A fényképen *Alan Baker* (1939–2018) Fields-érmes brit matematikus. Tovább...

2022. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

A 2021-es fizikai Nobel-díjas Giorgio Parisi

Giorgo Parisi kutatási területe rendkívül széles, a fizikával összefüggésben a matematikában, a biológiában, sőt a társadalomtudományokban is. A magyar valószínűségelméleti iskola tagjai közül többen is foglalkoznak a sztochasztikus folyamatok elméletének Parisi által inspirált új fejezeteivel. A fizikai rendszerekben, az atomitól a bolygóléptékű szintig tapasztalt zavarok és fluktuációk kölcsönhatásainak feltárása terén alkotott elméletét díjazták 2021-ben Nobel-díjjal. A díjazottról *Kondor Imre* fizikus írt 2021 végén a Fizikai Szemlében. Tovább...

2022. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Járványmatek középiskolásoknak – 3. rész

Járványmatek középiskolásoknak című sorozatunk utolsó részéhez érkeztünk. Az 1.rész és a 2. rész után a mostani is igencsak aktuális: a tesztek megbízhatóságát és a vakcinák hatékonyságát számolja ki *Volf Annamária* különböző feltételek esetén. Jó lenne, ha minden középiskolás megismerné ezeket a példákat, vélekedések helyett a tényeket. Következik tehát a 3. rész.

2022. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is... a szimplektikus geometria?

Nem tud átbújni a szimplektikus teve a tű fokán: *Ian Stewart* 1987-es Nature-beli cikkének humoros grafikája is szerepel *Tara Holmes* írásában, amelyet *Stipsicz András* fordított le a *Notices of the AMS* 2016. decemeberi számából: Mi is a szimplektikus geometria?

2022. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

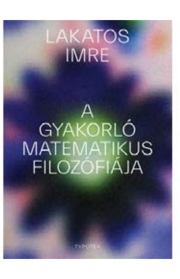
Társulati díjak 2021

Az előző évhez hasonlóan 2021-ben is online díjátadó ünnepséget rendezett a Bolyai János Matematikai Társulat december 15-én. Az eseményről készült felvételeket a honlap videotárában nézhetik meg. Pálfy Péter Pál elnök megnyitójában kiemelte,hogy a szokásos díjakon túl idén maga a Bolyai Társulat is kapott egy igen komoly elismerést: elnyerte a Prima Primissima díjat. Cikkünk beszámol a társulati díjak, illetve a Schweitzer és a Kürschák versenyek nyerteseiről. Tovább...

2022. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A gyakorló matematikus filozófiája

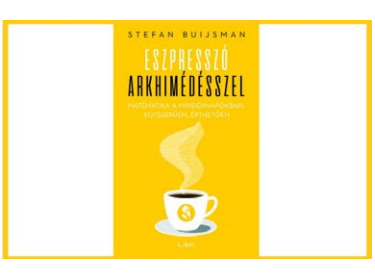
A Typotex kiadó 2021-ben jelentette meg *Lakatos Imre*: A gyakorló matematikus filozófiája című könyvét. A kötet a híres tudományfilozófus, Lakatos Imre (1922–1974) dolgozataiból egy összeállítás – *Máté András* szerkesztésében. Témája a matematika filozófiája, cikkei kiváló gondolatébresztők, egy részük főleg filozófusokhoz, egy részük inkább matematikusokhoz szól. Külön csemege, hogy a kötet több dolgozatát Lakatos nem a nyilvánosságnak szánta, e dolgozatok első ízben jelennek meg magyarul. *Ferenczi Miklós* gondolatai következnek a könyvről...



2022. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Lakatos Imre írásai matematikáról és a matematika filozófiájáról

„A gyakorló matematikus filozófiája” című kötetről *Kutrovácz Gábor* könyvismertetése *Lakatos Imre* matematikára vonatkozó nézeteiről nyújt bepillantást Karl Popper kritikai filozófiája, Pólya György matematikai heurisztikája és Hegel dialektikája mentén. „A matematika története, a filozófia iránymutatását nélkülözve, vakká, a matematika filozófiája, mellőzve a matematika történetének legérdekesebb problémáit, üressé válik” – idézi a „Bizonyítások és cáfolatok”-ból. Tovább...



2022. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

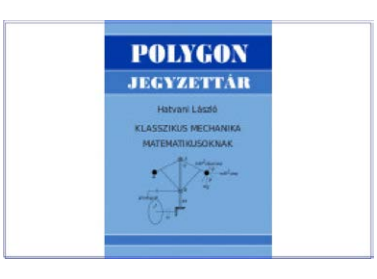
Eszpresszó Arkhimédésszel

Stefan Buijsman nemrég megjelent könyvének alcíme: *Matematika a mindennapokban, egyszerűen, érthetően.* Ez a könyv kellemes meglepetés: friss, jól olvasható és nem tartalmatlan. Az egyik oka ennek (a képletek mellőzése mellett) az a tény, hogy nagyon sok történeti, filozófiai vagy éppen kulturális antropológiai tudásra támaszkodva beszél a matematika mibenlétéről, alkalmazhatóságáról, szépségéről. Érdeklődő ifjúnak, tanárnak, sőt matematikusnak is ajánlja *Tóth János*...

2022. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Tehetségek együtt – Specmat 1962–2022

Idén 60 éve, 1962 szeptemberében indult el Magyarországon az első speciális matematika tagozatos gimnáziumi osztály. Nagyon sokan írtak már róluk, rengeteg interjú készült legendás tagjaival, a nemrég megjelent kiadvány szerzője, *Gordon Győri János* azonban egy, a teljes osztályra kiterjedő kutatás eredményeit foglalja össze. Legfontosabb kérdése: ötven év távlatából a kutatásban részt vevők hogyan tekintenek vissza a speciális matematika tagozaton töltött éveikre, különösen tehetségpedagógiai szempontból. Tovább...



2022. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Klasszikus mechanika matematikusoknak

Hatvani László: Klasszikus mechanika matematikusoknak című könyve végigvezet minket az analitikus mechanika fejlődésének főbb állomásain, megmutatja, milyen utat jártak be a mechanika tudományterületét mai alakjára formáló őseink, mindezt matematikus szemléletmóddal. A *Polygon jegyzettár* kötetét *Gyebrószky Gergely* ismerteti.

2022. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Mark Kac: A véletlen rejtélyei

Az egyik legjobb tudományos népszerűsítő könyv, amelyet valaha olvastam. Bölcs, szellemes, időszerű. – írta az Érintőben 2020-ban az angol nyelvű könyvről Simonovits András. A könyv most megjelent magyar nyelven is, Gyárfás Vera fordításában.. A véletlen rejtélyei…

2022. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Tavaszi felkészülés

A tavasz közeledtével mindannyian ki szeretnénk mozdulni a szabadba, végre korlátozások nélkül lehet rendezvényeket, versenyeket, táborokat szervezni. Például az április-májusi Medve Szabadtéri Matekversenyre – országszerte 19 helyszínre – március végéig lehet kedvezményesen jelentkezni tanároknak és csapatoknak 3.-tól 12. osztályosokig, és van még néhány hely a nyári Medve Matektáborokban is. Tovább….

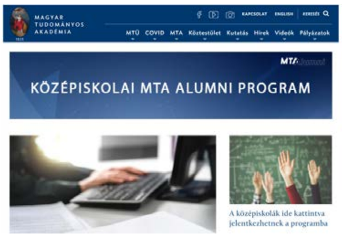
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **HÍREK – ÚJDONSÁGOK** ROVAT A MATEMATIKÁHOZ ÉS A BOLYAI TÁRSULATHOZ KAPCSOLÓDÓ ESEMÉNYEKRŐL, ÚJDONSÁGOKRÓL SZÓL. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÁKÓCZI ILDIKÓ.)*


MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖZÉPISKOLAI MTA ALUMNI PROGRAM
A középiskolák ide kattintva jelentkezhetnek a programba

Miklós István

2022. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

MTA Alumni program

A középiskolai MTA Alumni program célja, hogy kutatóvá vált egykori diákok az alma materükbe visszatérve tudományt népszerűsítő, ismeretterjesztő előadásokat tartsanak, és így közvetlen kapcsolatot alakítsanak ki az akadémiai kutatóintézetek és az érdeklődő diákok között. A programot Freund Tamás, az Akadémia elnöke indította el 2020 végén, amelyre az Akadémia köztestületének csaknem 1600 tagja jelentkezett 2022 februárjáig. A megnyitó egyik előadója volt *Miklós István. Tovább...*

Szerkesztő

2022. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Társulati díjak 2021

Az előző évhez hasonlóan 2021-ben is online díjátadó ünnepséget rendezett a Bolyai János Matematikai Társulat december 15-én. Az eseményről készült felvételeket a honlap videotárában nézhetik meg. Pálfy Péter Pál elnök megnyitójában kiemelte,hogy a szokásos díjakon túl idén maga a Bolyai Társulat is kapott egy igen komoly elismerést: elnyerte a Prima Primissima díjat.

Cikkünk beszámol a társulati díjak, illetve a Schweitzer és a Kürschák versenyek nyerteseiről. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Miklós István 2022. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

MTA Alumni program

A középiskolai MTA Alumni programot Freund Tamás, az Akadémia elnöke indította el 2020-ban. A program célja, hogy kutatóvá vált egykori diákok az alma materükbe visszatérve tudományt népszerűsítő, ismeretterjesztő előadásokat tartsanak, és így közvetlen kapcsolatot alakítsanak ki az akadémiai kutatóintézetek és az érdeklődő diákok között.

A pandémia miatt a program hivatalos megnyitójára csak 2021. október 15-én került sor a veszprémi Lovassy László Gimnáziumban, ahol négy korábbi diák tartott előadást. Csuka Dorottya kutatóorvos az immunológia és genetika kapcsolódási területeit ismertette, Domokos Mariann folklorista az elektronikus folklórról tartott egy érdekes előadást, Hartmann Bálint kutató villamosmérnök a magyarországi elektromos vezetékek hálózatának a kialakulását mutatta be, jómagam, Miklós István bioinformatikus, matematikus a biológiában, matematikában, számítástudományban megjelenő sokszínűségről beszéltem. Az előadók a tudományos munkájukon túl a szakmai életpályájukról is meséltek. Az előadások visszatérő motívuma volt, hogy a kutatói pálya bizony sokszor rögös, a sikeres kutatóknak alkalmazkodni kell, fel kell ismerni a lehetőségeket, a trendeket, és merni kell változtatni, nyitottnak kell lenni új dolgok iránt. Ez közelebb hozta az előadókat a hallgatósághoz, a diákok is láthatták, hogy a kutatók sem – ahogy Schultz Zoltán iskolaigazgató is fogalmazott – valahonnan a távolról jönnek, nem valami csodabogarak, hanem ugyanonnan indultak, ahol a mostani diákok vannak. Az előadások után a diákoknak lehetőségük volt kötetlenül beszélgetni az előadókkal, és további kérdéseket tehettek fel, további információkat kaphattak a magyarországi kutatóműhelyek tevékenységéről. Az eseményről kisfilm is készült.

IGAZ GÁBOR BARNABÁS

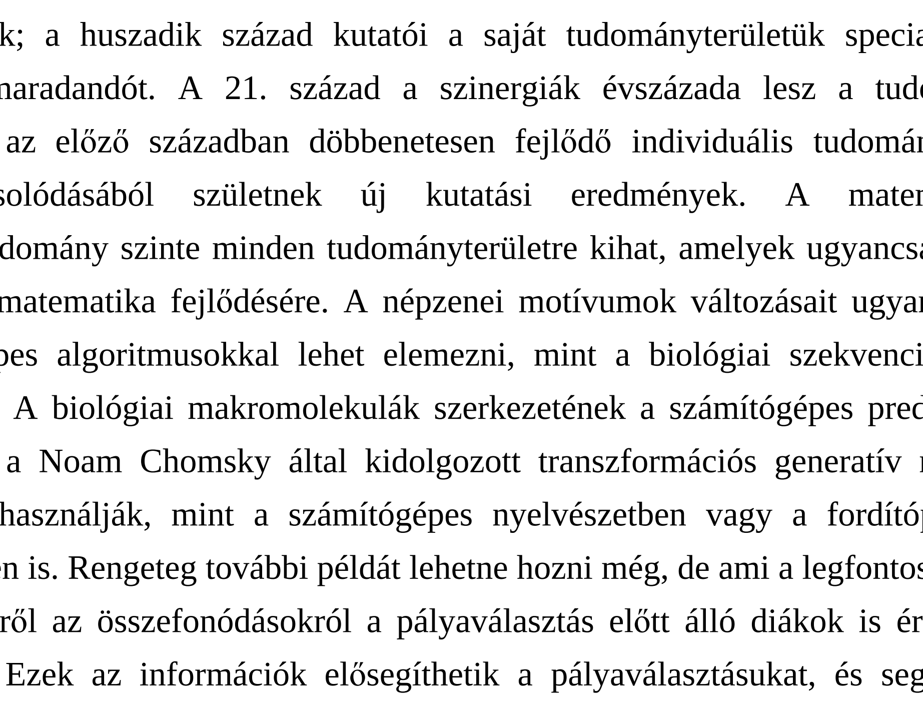
Az MTA Alumni program célja a problémacentrikus, kritikus gondolkodás népszerűsítése, és a kutatás világának a megismertetése. Előadásomban kiemeltem, hogy milyen nagy mértékben tudnak hatni egy kutató teljes életpályájára az első, fiatalkori benyomások, élmények. Példaként hoztam fel (a későbbi Abel-díjas) Szemerédi Endrét, aki a 70 éves születésnapján adott interjújában így emlegette egykori tanárát: „nekem az istenem Turán Pál professzor”. Saját példám azt mutatja, hogy az első személyi számítógépemen írt játékprogramok, álvéletlen labirintusok generálása ilyen nagy hatással voltak rám: teljes kutatói életutamat meghatározták a „hogyan lehet kiszámolni, hogyan lehet számítógépes programmal megkonstruálni?” kérdések, amelyek a bioinformatika, majd a számítástudomány irányába tereltek.

Az MTA Alumni program keretében tartott előadások, műhelybeszélgetések hasonló meghatározó élmények lehetnek a mostani középiskolások számára, és nagymértékben befolyásolhatják a későbbi tudományos karrierjüket. Fontos lenne, hogy bemutassák a középiskolásoknak a jelen és a jövő tudományos kutatásait vezérlő trendeket, összefüggéseket. A modern tudományos kutatásoknak egyik népszerű témája a hálózatok kutatása. A hálózatkutatás a Lovassy László Gimnáziumban elhangzott négy, meglehetősen különböző előadás között is összekapcsoló motívum volt. A biológusok és kutatóorvosok a biokémiai hálózatok, valamint génhálózatok vizsgálatával próbálják megérteni a sejtek, a szövetek, az emberi szervezet működését. A hagyományos folklór és az elektronikus folklór fejlődése, dinamikája közötti különbség egyik oka az, hogy az internet világában az emberi kapcsolatok hálózata minőségileg megváltozott, térben, kultúrában nagyon különböző emberi csoportokat képes összekapcsolni. Ezen a hálózaton az internetes mémek terjedése olyan sebességű, amely az internet előtti korszakban elképzelhetetlen volt. Ma már a magyarországi elektromos vezetékek hálózatának a fejlődését is lehet hálózatkutatási eszközökkel vizsgálni. A matematikusok, számítástudósok pedig olyan algoritmusokat, számítógépes eljárásokat gyártanak, amelyekkel adott tulajdonságú véletlen hálózatokat lehet gyorsan generálni, és amelyek segítségével hálózatok statisztikai vizsgálatához lehet háttéreloszlásokat generálni.

A 19. század a polihisztorok százada volt. A 20. században az egyes tudományterületek elmélyültek; a huszadik század kutatói a saját tudományterületük specialistájaként alkottak maradandót. A 21. század a szinergiák évszázada lesz a tudományban, amelyben az előző században döbbenetesen fejlődő individuális tudományterületek összekapcsolódásából születnek új kutatási eredmények. A matematika, a számítástudomány szinte minden tudományterületre kihat, amelyek ugyancsak hatással vannak a matematika fejlődésére. A népzenei motívumok változásait ugyanazokkal a számítógépes algoritmusokkal lehet elemezni, mint a biológiai szekvenciák időbeli változását. A biológiai makromolekulák szerkezetének a számítógépes predikciójához ugyanúgy a Noam Chomsky által kidolgozott transzformációs generatív nyelvtanok elméletét használják, mint a számítógépes nyelvészetben vagy a fordítóprogramok elméletében is. Rengeteg további példát lehetne hozni még, de ami a legfontosabb lenne, hogy ezekről az összefonódásokról a pályaválasztás előtt álló diákok is értesüljenek, halljanak. Ezek az információk elősegíthetik a pályaválasztásukat, és segíthetnek a kutatói pályára való tudatos felkészülésben is.

A 21. században nemcsak az egyes tudományterületek fognak összefonódni, hanem a matematika egyes részterületei közötti szinergiák is fontosak lesznek. Hopcroft és Kannan egy interneten is elérhető jegyzetükben kifejtik, hogy amíg a 20. század számítástudományában a központi szerepet az automaták és transzformációs nyelvtanok elmélete, az algoritmusok elmélete játszotta, addig a 21. század számítástudományához geometriai, valószínűségszámítási és statisztikai ismeretek lesznek szükségesek. Valóban, korunk számítástudományi kérdései a nagy mennyiségű adatok elemzései körül forognak. Az adatok sokszor számsorok, amelyeket vektorokként ábrázolhatunk magas dimenziós euklideszi terekben. Ezeknek a vektortereknek az intuícióval szembemenő tulajdonságaik vannak, amelyek alapvetően meghatározzák a magas dimenziós adatelemzésekben használható módszereket.

Ezek az intuícióval szembemenő tulajdonságok önmagukban is érdekesek, egy részüket az érdeklődő középiskolások is megérthetik. Az alábbi jelenség megértéséhez például csak a Pitagorasz-tételre van szükség. Vegyünk egy négyzetet, osszuk négy egybevágó kisebb négyzetre, és ezen kisebb négyzetek mindegyikébe írjunk egy-egy kört, amelyek érintik a nagy négyzetet és egymást is. Megadhatunk egy ötödik kört, amely mind a négy kört belülről érinti. Ez az ötödik kör kisebb, mint a másik négy (a sugara egyszerűen kiszámolható), de mi a helyzet, ha ezt a konfigurációt általánosítjuk magasabb dimenziós terekre? Egy kockát is feloszthatunk nyolc részre, mindegyikbe írhatunk egy gömböt, és egy kilencedik gömböt, amely mind a nyolc másik gömböt érinti (ha ennek is kiszámoljuk a sugarát, az nagyobb lesz, mint két dimenzióban). Négy dimenzióban már a tizenhat gömböt fogja érinteni a belső tizenhetedik, és ez a tizenhetedik már pont akkora lesz, mint a másik tizenhat. Az a furcsa dolog történik, hogy a dimenzió növekedésével a belülre írt gömb sugara folyamatosan nő, míg a többi gömb sugara változatlan marad. Tíz dimenzióban a belülre írt gömb sugara már akkora lesz, hogy kilóg a tízdimenziós hiperkockából, habár mind az 1024 (= 2^{10}) kis gömböt belülről érinti. A jelenség részletezése a Numberphile YouTube-csatornáján is megtekinthető.



Hasonlóképpen már most látszik, hogy az absztrakt algebra és algebrai geometria ki fog hatni a matematika számos területére, többek között a számítástudományra és a kombinatorikára is. Az érdeklődő diákok például az invariánsok alkalmazásán keresztül is megismerkedhetnének olyan absztrakt algebrai fogalmakkal, mint a homomorfizmus vagy csoportok egy ismeretterjesztő előadás keretében, amely bemutatná az algebra és más matematikai területek közötti kapcsolatokat.

Örvendetes lenne, ha az MTA Alumni program keretében nem csak sporadikus előadások lennének, hanem a programban szereplő néhány kutató azt is vállalná, hogy a szakmai területüknek a középiskolások számára is megérthető részeit előadássorozatok, szakköri foglalkozások keretében is bemutatnák, ezzel is felkeltve a középiskolások érdeklődését a tudomány iránt. Ez elősegítené a pályaválasztási orientációjukat, valamint a szakmai karrierjükre való felkészülést is.

Miklós István,

a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet tudományos főmunkatársa

beszámolók MTA

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

nka Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2022. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Társulati díjak 2021

Szele Tibor Emlékérem

A 2021. évi Szele Tibor Emlékérem kitüntetettje **Némethi András**, az MTA levelező tagja, a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet tudományos osztályvezetője, az ELTE egyetemi tanára, aki az algebrai geometriában és a differenciáltopológiában, ezen belül különösen a szingularitáselméletben ért el kimagasló tudományos eredményeket. Ezen témaköröket Magyarországon úttörőként művelte és terjesztette el. Kutatásai mellett kiemelkedik fáradhatatlan iskolateremtő munkája és a kimagasló utánpótlást nevelő munkássága is. A teljes indoklást itt olvashatják.

Ez a böngésző nem tudja lejátszani a videót.
További információ

A díjról és a korábbi évek díjazottairól a https://www.bolyai.hu/dijaink-szele-tibor-emlekerem oldal tájékoztat.

Grünwald Géza Emlékérem

2021-ban a Grünwald Géza Emlékéremre öt felterjesztés érkezett. Egyhangú döntéssel, a Bizottság mindnyájukat méltónak találta a kitüntetésre. Így a 2021-es díjazottak listája: **Kunosné Nedényi Fanni**, **Maga Balázs**, **Nagy János**, **Poór Márk** és **Remete László**. A részletes jelentés itt olvasható.

A díjról és a korábbi évek díjazottairól a https://www.bolyai.hu/dijaink-grunwald-geza-emlekerem oldal tájékoztat.

Farkas Gyula Emlékdíj

Ebben az évben a Farkas Gyula Emlékdíjat az alkalmazott matematikában kiemelkedő tudományos eredményeket elérő négy fiatal matematikus: **Balázs István, Boldog Péter, Lovas Attila és Varga Bálint** kapták meg. A díjazottak munkásságát itt ismertetjük.

Ez a böngésző nem tudja lejátszani a videót.
További információ

A díjról és a korábbi évek díjazottairól a https://www.bolyai.hu/dijaink-farkas-gyula-emlekdij oldal tájékoztat.

Rényi Kató Emlékdíj

2021-ben 10 felterjesztés is érkezett kiváló, önálló tudományos eredményt elért 25 év alatti fiatalokra. Közülük csak 4 kaphatta meg a Rényi Kató Emlékdíj 1.fokozatát: **Borbényi Márton, Imolay András, Keliger Dániel és Pálfy Máté**. A részletes jelentés és indoklás itt tekinthető meg.

Ez a böngésző nem tudja lejátszani a videót.
További információ

A díjról és a korábbi évek díjazottairól a https://www.bolyai.hu/dijaink-renyi-kato-emlekdij oldal tájékoztat.

Patai-díj

A Patai Alapítvány 2021. évi díját **Torma Gábor** részére ítélte oda a Bizottság az alábbi indoklással.

Torma Gábor 2013 és 2019 közt a Szegedi Tudományegyetem Természettudományi Karán fizika-matematika osztatlan tanár szakán tanult, 2019 óta a Matematika és Számítástudományi Doktori Iskola didaktika alprogramjának ösztöndíjas hallgatója. 2018 óta a szegedi Dugonics András Piarista Gimnázium matematika-fizika tanára. Emellett 2016 óta oktat a Szegedi Tudományegyetemen. A tehetséges fiatal tanár-kutató tanárként meggyőző erővel tartott előadásaival szeretteti meg középiskolás és egyetemi diákjaival a matematikát. Ennek érdekében a legmodernebb informatikai és módszertani eszközöket alkalmazza, azokat továbbfejleszti, önálló kutatásokat végez. Eredményeiről publikációkban, konferencia előadásokon számol be.

A 2020. márciusában ránk tört, s hullámokban azóta is vissza-visszatérő online oktatásban példamutató módon, több saját innováció alkalmazásával állta meg helyét, bizonyítva ezzel is pályára való alkalmasságát, tanári és kutatói rátermettségét. A tapasztalatokat közös cikk, illetve a cikkhez kapcsolódóan tudományos-továbbképző előadás formájában osztotta meg a széles körű szakmai közösséggel.

Szakmai közéleti tevékenysége kiemelkedő. 2013 óta folyamatosan a szegedi Eötvös Kollégium különböző szakmai műhelyeinek aktív tagja, jelenleg a pedagógus műhely titkára, programok lelkes szervezője. 2018 óta a Medve Szabadtéri Matematikaverseny önkéntese. Egyetemi projektek keretében vállalta tutorként alsóbb éves hallgatók tanulmányainak és elsőéves hallgatók tudásszintmérésének segítését is. Torma Gábor munkásságának értékét a számára odaítélt SZTE TTIK Kiváló Hallgatója, Talent Ösztöndíj és a Nemzeti Felsőoktatási Ösztöndíjak is minősítik.

Ez a böngésző nem tudja lejátszani a videót.
További információ

A díjról és a korábbi évek díjazottairól a https://www.bolyai.hu/dijaink-patai-dij oldal tájékoztat.

A 2021. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat 2021. október 22. és november 2. között rendezte meg a 2021. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, valamint 2021-ben egyetemet vagy főiskolát végzettek vehettek részt.

A Bolyai János Matematikai Társulat a verseny megrendezésére a következő bizottságot kérte fel: Páles Zsolt (elnök), Nagy Gergő és Pink István (titkárok), Baran Sándor, Bérczes Attila, Bessenyei Mihály, Boros Zoltán, Fazekas István, Figula Ágota, Gát György, Győry Kálmán, Hajdu Lajos, Muzsnay Zoltán, Novák-Gselmann Eszter, Tengely Szabolcs, Vincze Csaba.

A versenybizottság 10 feladatot tűzött ki. A feladatokat Buczolich Zoltán, Fazekas István, Gát György, Hajdu Lajos (2 feladat), Páles Zsolt (2 feladat),Totik Vilmos (2 feladat) és Vincze Csaba bocsátotta a bizottság rendelkezésére. A feladatok és a megoldások itt érhetők el.

A versenyre 9 versenyző 40 megoldást nyújtott be, melyek közül 29 volt hibátlan. Az alábbi táblázatban pontok jelzik, hogy a versenyzők mely feladatokra nyújtottak be megoldásokat.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Borbényi Márton	●	●	●	●	●	●			●	●
Füredi Erik	●	●		●					●	●
Gárgyán Barnabás		●								
Gáspár Attila	●	●	●	●	●	●				●
Imolay András	●	●		●					●	●
Iványos János Balázs		●								
Kovács Benedek	●	●	●						●	●
Seress Dániel		●			●				●	●
Tóth Péter	●				●				●	●

A megoldások értékelése után a versenybizottság a következő döntést hozta.

I. díjban részesül **Gáspár Attila**, az ELTE elsőéves Matematikus MSc hallgatója

II. díjban részesül **Borbényi Márton**, az ELTE másodéves Matematikus MSc hallgatója

III. díjban részesül **Füredi Erik**, az ELTE elsőéves Matematika BSc hallgatója, **Kovács Benedek**, az ELTE másodéves Matematikus MSc hallgatója és **Tóth Péter**, a DE másodéves Alkalmazott matematikus MSc hallgatója

Indoklás

Gáspár Attila 7 feladatra nyújtott be megoldást; mindegyikre adott megoldása teljes, a 3. feladatra adott megoldásának 1. része újszerű. Megoldásai nagyon színvonalasak, az 5., 6. és 10. feladat esetén a versenybizottság azokat választotta mintamegoldásnak.

Borbényi Márton 8 feladatra nyújtott be megoldást; az 1., 3., 4., 6., 9. és 10. feladatokra adott megoldása teljes; a 2. és 5. feladatra adott megoldása hiányos, de javítható.

Füredi Erik 5 feladatra nyújtott be megoldást; a 2., 4., 9. és 10. feladatokra adott megoldása teljes; az 1. feladatnak csak az egyik részére adott megoldása helyes.

Kovács Benedek 5 feladatra nyújtott be megoldást; mindegyikre adott megoldása teljes.

Tóth Péter 4 feladatra nyújtott be megoldást; mindegyikre adott megoldása teljes.

Ez a böngésző nem tudja lejátszani a videót.
További információ

A 2021. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2021. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 8-án rendezte meg. A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására az alábbi bizottságot kérte fel: Biró András, Frenkel Péter, Harangi Viktor, Kós Géza, Maga Péter (titkár), Pach Péter Pál (elnök), Tóth Géza.

A bizottság a következő feladatokat tűzte ki:

1. A síkbeli derékszögű koordinátarendszer $P_i=(a_i,b_i)$ $(i=0,\ 1,\ 2)$ pontjai által alkotott háromszögnek az $O=(0,0)$ origó belső pontja. Mutassuk meg, hogy a P_0OP_1, P_0OP_2, P_1OP_2 háromszögek területei (ebben a sorrendben) akkor és csak akkor alkotnak mértani sorozatot, ha az

$$a_0x^2+a_1x+a_2=b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

egyenletrendszernek van valós x megoldása.

2. Csodaország n városa között n légitársaság üzemeltet járatokat. Minden egyes légitársasághoz páratlan sok város tartozik, mondjuk $v_1,v_2,\dots,v_i$, amelyek között körjáratot üzemeltet mindkét irányban: a v_jv_{j+1} illetve a $v_{j+1}v_j$ járatokra lehet jegyet váltani $1\le j\le i$ esetén, ahol $v_{i+1}=v_1$. Igazoljuk, hogy található páratlan sok város, mondjuk $u_1,u_2,\dots,u_k$ úgy, hogy az $u_1u_2,u_2u_3,\dots,u_{k-1}u_k,u_ku_1$ járatokra lehet jegyet váltani csupa különböző légitársaságnál.

3. Adott az $A_1B_3A_2B_1A_3B_2$ húrhatszög, amelynek A_1B_1, A_2B_2 és A_3B_3 átlói egy ponton mennek át. Minden $i=1,2,3$ esetén az A_iB_i és az $A_{i+1}A_{i+2}$ átlók metszéspontja C_i, továbbá D_i olyan, a B_i-től különböző pont a hatszög köré írt körön, amelyre a $B_iC_iD_i$ kör érinti az $A_{i+1}A_{i+2}$ egyenest. (A pontokat modulo 3 számozzuk, tehát $A_4=A_1$ és $A_5=A_2$.) Igazoljuk, hogy az A_1D_1, A_2D_2 és A_3D_3 szakaszok egy ponton mennek át.

Az idei versenyen a 78 regisztrált versenyző közül 73-an vettek részt a versenyen, és tőlük összesen 64 dolgozat érkezett be. Az első feladatot 21-en, a második feladatot 5-en, a harmadik feladatot pedig 3-an oldották meg helyesen vagy lényegében helyesen. Bár mindegyik feladatra születtek helyes megoldások, két feladatnál többet egyetlen versenyző sem oldott meg, így a versenybizottság idén nem adott ki I. díjat.

Egy versenyző helyesen oldotta meg az első és a harmadik feladatot. Ezért

II. díjban és 50 000 Ft pénzjutalomban részesült

Seres-Szabó Márton, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai Dobos Sándor, Ádám Réka és Fazakas Tünde).

III. díjban és 40 000 Ft pénzjutalomban részesült

Fleiner Zsigmond, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai Hujter Bálint, Gyenes Zoltán, Dobos Sándor és Juhász Péter), aki javítható hibától eltekintve helyesen oldotta meg az első feladatot és kis hiányossággal oldotta meg a második feladatot,

Várkonyi Zsombor, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai Fazakas Tünde, Kocsis Szilveszter, Pósa Lajos és Dobos Sándor), aki lényegében helyesen oldotta meg az első feladatot és helyes megoldást adott a második feladatra.

Dicséretben és 20 000 Ft pénzjutalomban részesült

Csaplár Viktor, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai Fazakas Tünde és Kocsis Szilveszter), aki apró hiányosságtól eltekintve helyesen oldotta meg az első feladatot és részeredményeket ért el a harmadik feladatban.

A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző, felkészítő tanár és a lebonyolításban közreműködő kolléga munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva gratulál.

A feladatok megoldásai megjelentek a KöMaL 2022. februári számában.

Bolyai · díjazottak · Kürschák József · Schweitzer Miklós · tanulmányi versenyek

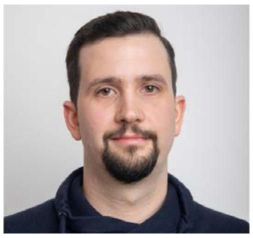
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

AZ **INTERJÚ-PORTRÉ** MENÜPONT JÓL VAGY KEVÉSBÉ ISMERT MATEMATIKUSOKAT, VAGY OLYAN, EGYKOR MATEMATIKUSKÉNT VÉGZETTEKET SZERETNE BEMUTATNI, AKIK MA MÁS SZAKMA ELISMERT KÉPVISELŐI, SPORTOLÓK, MŰVÉSZEK...(ROVATSZERKESZTŐ: *OLÁH VERA*.)

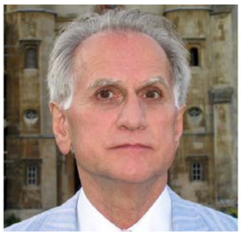


Bérczi-Kovács Erika

2022. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Ugródeszkák matek szakon – Fehér Dániel

Új beszélgető sorozatot indítunk 2022-ben fiatal matematikusok részvételével *Ugródeszkák matek szakon* címmel. Az 1. részben *Fehér Dánielt* kérdezi *Bérczi-Kovács Erika*, hogyan jutott el Tokaj-Hegyaljáról a Luxemburgi Egyetemre. Tovább...



Szerkesztő

2022. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Matematikus történetek: Bollobás Béla

Bollobás Béla Széchenyi-díjas matematikus, a Cambridge-i Egyetem professzor emeritusa, a Trinity College örökös tagja, a Memphisi Egyetem címzetes professzora, az MTA külső tagja. Diákkorában éveken át szinte minden matematikaversenyt megnyert. A magyar televízióban 2004-ben tűzték műsorra a róla készült riportfilmet a Matematikus történetek sorozatában.

Szathmári Nóra

2022. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Lépcsőházi gondolatok – kongresszus után

Fél évvel ezelőtt számoltunk be a 8. Európai Matematikai Kongresszusról, a matematikus közösség második legnagyobb szabású eseményéről a Matematikai Világkongresszus után. Az egyhetes programsorozat keretében Európa tíz kiemelkedő szaktekintélye tartott plenáris előadásokat. Egyikük a Rényi Intézet tudományos tanácsadója, *Pach János*, akivel *Szathmári Nóra* beszélgetett.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

Bérczi-Kovács Erika 2022. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Ugródeszkák matek szakon – Fehér Dániel

Beszélgetés Fehér Dániellel (University of Luxembourg)

A matematika szép, de mindenkinek kicsit másért az. Te annak idején gyerekként miért szeretted a matekot?

Ha van valami, ami nagyon megfog, az az, amikor egy nagyon bonyolult problémára van egy szép, egyszerű megoldás. Ezek az „Aha! Heuréka!” pillanatok azok, amelyekhez az utat nehéz megtalálni, de amikor az ember rájön, ott a dopamin. Talán nem mindenkit, de én olyan vagyok, akit ez jobb kedvre derít.

Milyen iskolákba jártál?

Tokaj-Hegyaljáról származom, egy Tállya nevezetű kis faluból. Onnan a szerencsi Bocskai István Gimnázium hatosztályos képzésére mentem az általános iskola után.

Miért választottad a matek szakot?

A középiskolában még nem nagyon tudtam, mit szeretnék csinálni, nem volt konkrét tervem, hogy például ilyen vagy olyan mérnök leszek. Mindenképpen reál irányba akartam továbbmenni, de azon belül gőzöm sem volt. A matek mindig is jól ment, és a középiskolai szuper matektanárom, Bodnár György volt az, aki biztatott, hogy menjek matematika szakra, mert szerinte képes vagyok megcsinálni. Én nem feltétlenül értettem egyet vele akkor, de szerencsére igaza lett. Így kerültem az ELTE-re, alkalmazott matematika szakirányra.

Milyennek találtad a BSc képzést?

Amikor odakerültem az egyetemre, volt bennem egy félelemérzet, hogy lesz ott rengeteg diák, akik híres-neves gimnáziumokból, sokkal több matekórával a zsebükben jönnek, de szerencsére annyira nem vettem észre ezt a hátrányt, mert a tárgyakat a nulláról építették fel, és mindent részletesen elmagyaráztak. A BSc képzésben olyan alapvető tudásra tettem szert, amit azóta folyamatosan alkalmazok, legyen szó operációkutatásról, lineáris algebráról, valószínűségszámításról vagy éppen statisztikáról.

Emellett az egyik legfontosabb, amit tanultam, az, hogy hogyan kell jól tanulni és megismerni új területeket.

Olyan szempontból is jó választás volt a matek, hogy ott később is lehetősége van az embernek különböző irányokba elmozdulni.

Milyen területen látod versenyképesnek a matematikus végzettséget?

Bankszektorban, befektetői cégeknél, informatikai cégeknél stb. Az adatelemzés, adattudomány területekhez is nagyon erős alapot ad a matek. El lehet helyezkedni bármilyen elemző irányban, legyen az logisztika vagy bank, ahol az algoritmikus, kreatív gondolkodást lehet alkalmazni.

Te hogyan folytattad a tanulmányaidat a BSc után?

A BSc végén jelentkeztem az EIT Digital Master School mesterképzésre, és az első évet Olaszországban, Trentoban, a második évet Budapesten töltöttem. Itt kriptográfia szakirányon tanultam tovább.

Akkoriban, amikor a mesterszakos diplomámat írtam, nagyon megtetszett a kutatás, és bár előtte más terveim voltak, ez megfordult, és eldöntöttem magamban, hogy jelentkezem doktori képzésre. Szétnéztem a nemzetközi lehetőségek között is, és gondoltam, mi veszteni valóm lehet, elküldtem a jelentkezésemet a Luxemburgi Egyetemre, ahová néhány interjú után fel is vettek.

Hogyan zajlott a felvételi a doktori képzésre?

Több, mint 70 jelentkező közül választottak ki 5 jelöltet, akiket visszahívtak online interjúra. Először egy Kenguru tesztverseny feladatsort kellett megoldani, és utána a megoldásainkat elmagyarázni. Egy másik alkalommal nehezebb algoritmikus kérdéseket kaptunk, amelyeken egy hétig gondolkodhattunk. Végül a leendő témavezetőmmel is volt egy interjú, és utána hívtak, hogy megkaptam a lehetőséget.

A PhD képzés alatt konszenzusos protokollokkal és blokkláncokkal foglalkoztál. Mik azok a konszenzus protokollok?

Ezek olyan többszereplős rendszerek (multiágens rendszer a magyarban használt szakmai kifejezés), amelyekben a szereplőknek valamilyen biztonságos módon meg kell egyezniük valamilyen adaton. Ilyen adat lehet például pénzügyi tranzakciók ellenőrzése (van-e elég fedezet) és ugyanazon sorrendbe helyezése minden szereplőnél. Ezekben a rendszerekben a nehézség az, hogy lehetséges valamilyen hiba létrejötte, például az egyik szereplő fölött átveszi az irányítást egy támadó. A rendszeren belül a helyesen működő szereplőknek azonban ilyen esetekben is meg kell egyezniük.

Mi az a blokklánc?

A blokklánc egy olyan nyílt konszenzus protokoll, amelyben nincs centrális hatóság (például bankok), de mégis lehetővé teszik különböző kreditek (ami a pénz megfelelője) tranzakcióját.

Mi a disszertációd fő témája?

Akkoriban, amikor kezdtem a PhD-mat, kijött egy új blokklánc, amelynek a neve Zcash, és az a lényege, hogy lehet úgy fizetni emberek között, hogy nem látható, ki küldi, ki kapja és az sem, mennyit küld, csak egy matematikai zero-knowledge proof létezik a blokkláncon, ami bizonyítja, hogy ez valós tranzakció, de semmilyen más információ nem derül ki a tranzakcióról.

Elmondanád, mi is a zero-knowledge proof?

A zero-knowledge proof egy olyan módszer, amelyben egy fél (a prover, bizonyító fél) bizonyítja egy másik félnek (verifier, ellenőrző fél) egy állítás igazságát anélkül, hogy a bizonyító fél bármilyen további információt felfedne. Ez egy pénzügyi tranzakciónál például azt jelenti, hogy a küldő bizonyítja a tranzakció helyességét, azaz van rá elég fedezete, és az elküldött összeg levonódott a számlájáról, de a tranzakció ellenőrzője (pl. egy bank, vagy a blokklánc) nem tudja, mekkora volt a tranzakció összege, és azt sem, ki volt a feladó vagy a címzett.

Érdekesnek találtam ezt a témát, a témavezetőmmel elkezdtük adatelemzői szempontból vizsgálni a Zcash tranzakciókat. A disszertációm arról szólt, hogy milyen információkat tudunk kinyerni azokról, akik ezt a szolgáltatást használják, az alapján, ahogyan a blokklánc publikus részével kommunikálnak.

Mi volt az adatelemzés mögött a matematika?

Főképpen valószínűségszámítás. A módszerünk helyességének ellenőrzéséhez például egy elsőrendű Markov-lánccal modelleztük a tranzakciók elméleti viselkedését. Ennek a modellnek egy eleme például az, hogy milyen eséllyel küld a feladó pénzt egy tranzakción belül csak egy vagy pedig több fogadónak.

Milyen információkat sikerült kinyerni?

A Zcash-blokkláncnak van egy privát és egy publikus része. Léteznek úgynevezett bújtató tranzakciók, amikor valaki publikus címről küld pénzt privát címre, illetve felfedők, amikor a privát címről küldenek pénzt publikusra. Ezek a műveletek sokszor párban valósulnak meg, és mi ezeket a tranzakciókat kötöttük össze, sok esetben elég nagy valószínűséggel.

Milyen terveid vannak a PhD után?

Amikor befejeztem a PhD-t úgy döntöttem, megpróbálok elhelyezkedni az ipari világban, és azon belül is kamatoztatni próbálom az adatelemzési vonalat, amiből a PhD-t is írtam.Hamarosan kezdek az új munkahelyemen Luxemburgban, ahol ajánlórendszerek adatelemzésével fogok foglalkozni.

Mit jelent az ajánlórendszerek adatelemzése?

Egy ajánlórendszer például a YouTube algoritmusa, aminek alapján megjeleníti az ajánlott videókat a főoldalon és az éppen nézett videók mellett is. Ezen algoritmusok adatelemzése pedig jelentheti az algoritmus hatékonyságának a kiértékelését, vagy akár új algoritmusok feltehető sikerességének kivizsgálását.

Mit üzennél a mai fiataloknak, akik hasonló úton járnak?

Ha van valamilyen rövid üzenet, amit meg lehet fogalmazni, akkor az az, hogy nem kell félni az új területektől, ha van lehetőség, hogy kipróbálja az ember ezeket.

Az interjút készítette: Bérczi-Kovács Erika

---

matematikus-karrier pénzügyi matematika

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2022. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Matematikus történetek: Bollobás Béla

Bollobás Béla Széchenyi-díjas matematikus, a Cambridge-i Egyetem professzor emeritusa, a Trinity College örökös tagja, a Memphisi Egyetem címzetes professzora, az MTA külső tagja. Diákkorában éveken át szinte minden matematikaversenyt megnyert, 3 alkalommal a Kürschák, majd a Schweitzer versenyt is 3 egymást követő évben. (Talán ezért cserélte fel megbocsátható módon a következő riportfilmben a két verseny nevét.) A Nemzetközi Matematikai Diákolimpiákon egy ezüst- és két aranyérmet nyert. Egyetemi évei alatt Erdős Pál ajánlására ösztöndíjat kapott Cambridge-be. 1969-ben feleségével együtt elhagyta Magyarországot, hogy Cambridge-ben tehesse le a PhD-t. Azóta külföldön él, magyar születésű brit matematikusként. A távozás okairól, kombinatorikai és gráfelméleti kutatásairól, Erdős Pálról beszél a 20 évvel ezelőtt készült interjúban, ahol rajta kívül megszólal Ronald Graham, Katona Gyula és Bollobás Gabriella is, aki még a félelmetes Littlewooddal is jóban volt, sőt szobrot is készített róla. A magyar televízióban 2004-ben leadott riportfilm (rendező: Pataki Éva, szakértők Ács Katalin, Pataki János, hossz: 28.51 perc, Presidents Productions Kft 2001-2002), a Matematikus történetek sorozat része.

A most következő videó közlési jogát 3 évre vásárolhattuk meg. Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy az MTVA által az Érintő elektronikus folyóirat weboldalán 3 éves felhasználásra átadott 2004-ben műsorra tűzött felvételt harmadik fél semmilyen formában nem használhatja!

Ez a böngésző nem tudja lejátszani a videót.
További információ

videofelvétel

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

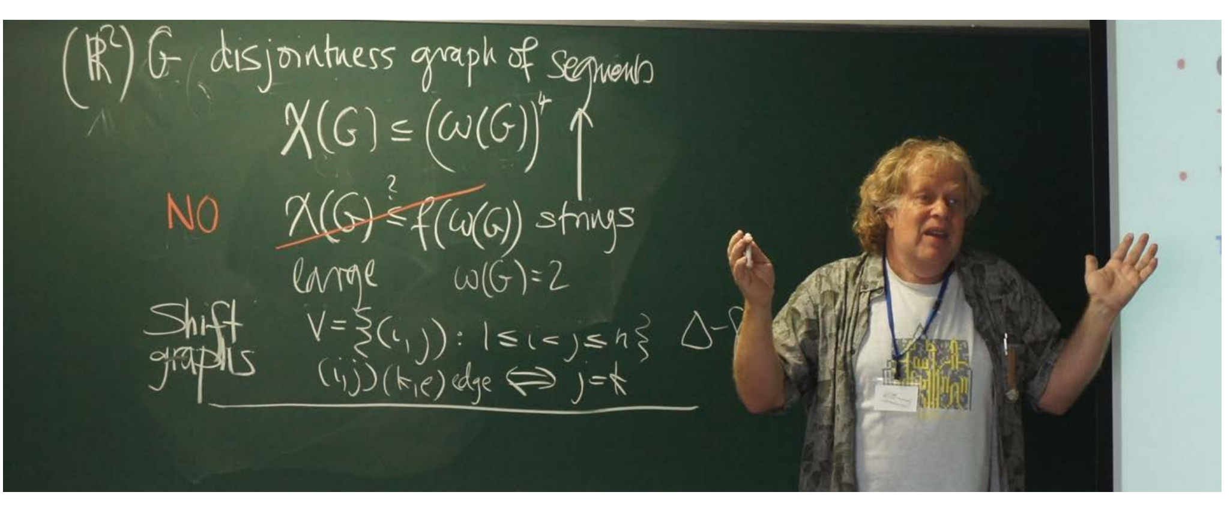
Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szathmári Nóra 2022. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Lépcsőházi gondolatok – kongresszus után

Beszélgetés Pach Jánossal


G disjointness graph of segments
$\chi(G) \le (\omega(G))^4$
NO
$\chi(G) \le f(\omega(G))$ strings
large $\omega(G)=2$
Shift graphs
$V=\{(i,j): 1\le i<j\le n\}$
$(i,j)(k,\ell)$ edge $\Leftrightarrow$ $j=k$

Mennyi idővel korábban kérnek fel egy plenáris előadót a kongresszusok előtt?

A 2014-es Szöulban rendezett világkongresszus előtt kb. másfél évvel kaptam meg a meghívást, fél évvel a kongresszus előtt pedig le kellett adnom az előadás szövegét, ami megjelent a hivatalos kötetben. Az európai kongresszus elvileg 2020-ban lett volna, engem egy évvel korábban kértek fel plenáris előadónak. Teljesen váratlanul ért a dolog, hiszen korábban csak két hazai matematikust, *Babai Lászlót* és *Lovász Lászlót* ért hasonló megtiszteltetés.

Hogyan választottad ki előadásod témáját?

Mivel az előadást eredetileg 2020-ban írtam, témája szorosan kapcsolódik az akkor induló From Geometry to Combinatorics and Back: Escaping the Curse of Dimensionality című ERC grantom kutatási programjához. Röviden arról van szó, hogy több fontos − teljes általánosságban reménytelenül nehéznek látszó − kombinatorikai feladatot először úgy próbálunk megoldani, hogy valamilyen értelemben korlátozzuk a vizsgált objektumok dimenzióját. Hogy éppen milyen dimenzió-fogalmat használunk, az a várható alkalmazásoktól vagy módszereink erejétől függ. Plenáris előadásról lévén szó, igyekeztem nemcsak precízen kimondani a szükséges definíciókat, de azt is érzékeltetni, hogy mi indokolja ezek bevezetését. Próbáltam úgy megfogalmazni a mondandómat, hogy az a témában teljesen járatlan matematikusok számára is követhető és − horribile dictu − érdekes is legyen.

A „kombinatorikus robbanás” fogalmát a következő anekdotával szokás illusztrálni:

> *Egy indiai király busásan meg kívánta jutalmazni a sakkjáték feltalálóját. Megígérte, hogy bármit megad neki, amit csak kér.*
>
> *– Szerény leszek – mondta a feltaláló. – A tábla első kockájára egy szem búzát kérek, a másodikra kettőt, és minden továbbira kétszer annyit, mint az előzőre.*
>
> *A király erre csak mosolygott, de hamarosan arcára fagyott a mosoly. Udvari matematikusa ugyanis elmagyarázta neki, hogy a földkerekség összes búzája is kevés lenne ahhoz, hogy ígéretének eleget tegyen.*

Kombinatorikus robbanásnak hívjuk, ha egy feladatban szereplő mennyiségek a feladat (a fenti esetben a sakktábla) méretének függvényében legalább exponenciálisan nőnek. Ez a jelenség jellemez számos kombinatorikai optimalizációs feladatot. Ha a matematikusnak nincs jobb ötlete, akkor a feladat megoldásához lényegében az összes esetet végig kell néznie, ami sokszor reménytelen vállalkozás. A számítástudomány egyik fontos ága, a bonyolultságelmélet azzal foglalkozik, hogy mely problémák kezelhetőek hatékony algoritmusokkal és melyek nem. Milyen feladatokra van lényegesen gyorsabb megoldás, mint az összes eset megvizsgálása, és mik azok, amelyekre nincs, mert „eredendően” nehezek. Ez utóbbiaknál a matematikus kompromisszumokra kényszerül. Gyakran kénytelen megelégedni közelítő megoldásokkal. Néha ez sem segít, mert bizonyítható, hogy ugyanolyan nehéz közelítő megoldást találni, mint pontosat. A bonyolultságelmélet legmélyebb és legnehezebb tételei az alsó korlátok, vagyis annak a bizonyítása, hogy egy feladat eredendően nehéz.

A kombinatorika és a gráfelmélet fiatal tudományok. Bővelkednek megoldatlan problémákban, híres sejtésekben, melyek eldöntése fontos lenne a továbbhaladás szempontjából. A kombinatorikus robbanás jelensége következtében gyakran esélyünk sincs arra, hogy egyes sejtések helyességét ellenőrizzük legalább kis, mondjuk 10–20 pontú gráfokra. Más „praktikákhoz” kell folyamodnunk. Előadásomban olyan kérdéseket vizsgáltam, melyek kezelhetővé válnak, ha megszorítjuk őket – valamilyen értelemben – korlátos dimenziójú gráfokra vagy hipergráfokra. Az egyik lehetséges megszorítás, hogy feltesszük, hogy a szóban forgó struktúrák beágyazhatók egy alacsony dimenziós euklideszi térbe. Ez esetben gyakran támaszkodhatunk geometriai intuíciónkra, hiszen az euklideszi terekről rengeteg ismerettel rendelkezünk. Például felvághatjuk a teret – és benne az adott struktúrát – kisebb darabokra. Ha feltesszük, hogy ezekre a darabokra már igazoltunk egy sejtést, akkor megpróbálhatjuk a bizonyítást kiterjeszteni az általános esetre. „Csak” annyit kell belátnunk, hogy a parciális megoldások ügyesen összekombinálhatóak. Egy másik lehetséges megszorítás, hogy feltesszük, hogy az általunk vizsgált gráfok, hipergráfok Vapnyik–Cservonyenkisz-dimenziója korlátos, vagy eleget tesznek valamilyen hasonló algebrai feltételnek, amely garantálja, hogy kombinatorikus szerkezetük egyszerű. Ezek a dimenziófogalmak korábban már hasznosnak bizonyultak a matematikai statisztikában és a tanuláselméletben, de kombinatorikában és geometriában való alkalmazásuk viszonylag újkeletű.

Hogyan zajlik egy online kongresszus?

Tulajdonképpen hasonlóan a szokásos jelenléti konferenciákhoz. Többnyire egy neves matematikus elnököl, aki röviden bemutatja a meghívottat. Utána következik az előadás. Az Európai Kongresszusnak hivatalosan 1700-1800 résztvevője volt, közülük több százan regisztráltak az előadásomra. Remélem, hogy néhányuk érdekődését sikerült felkeltenem a téma iránt. A kongresszust követő hetekben sok kérdést és visszajelzést kaptam email-en, de egy „chat” vonalon az előadás alatt is érkeztek kérdések, megjegyzések. Minden esetben az elnök dönti el, hogy ezek közül melyeket olvassa fel.

A webinárium hátránya, hogy az előadó nem csak a hallgatóságot nem látja, de még saját magát sem. Fogalma sincs például arról, hogy kilóg-e a képből. Közvetlen kapcsolat híján nem érzékeli, ha bizonyos dolgok megértése nehézséget okoz a hallgatóságnak, és menet közben nem változtathat az előadásán. Közönséges zoom esetén legalább néhány arcot látunk a képernyőn, és nincs az az érzésünk, hogy a falnak beszélünk.

A kongresszus során milyen előadásokat hallgattál meg?

A programfüzetből előre kiválasztottam, hogy mely előadások érdekelnek, és csak azokat hallgattam meg. Egy kongresszusi központban valahogy el kell tölteni a kijelölt előadások közötti időt. Ha Portorožban lettem volna, nyilván beülök olyan előadásokra is, amelyek témája kevésbé izgat. Ilyenkor sokat tanulhat az ember, rácsodálkozhat arra, hogy milyen nagy és szerteágazó tudomány a matematika. Ha szerencséje van, akkor a tanultakat később a saját kutatási területén is kamatoztatni tudja.

A plenáris előadások nagy részét meghallgattam. Egy volt közöttük, amelynek témája kapcsolódik a kutatásaimhoz, és fontos szerepet játszik a konvexitás elméletében (Monika Ludwig: Geometric Valuation Theory). Egy másik plenáris előadó, Alfio Quarteori alkalmazott matematikus, a szív véráramlásának modellezéséről beszélt. A szív bonyolult szerkezet. Működéséről rengeteg adat áll rendelkezésünkre. Mérni tudjuk a vérnyomást, a szív összehúzódásának ritmusát, CT segítségével képet alkothatunk a sejtszövet állapotáról stb. Ha mindezek alapján sikerül jó modellt alkotnunk, akkor ezáltal jóval olcsóbban és egyszerűbben diagnosztizálhatjuk a szívrendellenességeket. A munka interdiszciplináris csapatot igényel. A felhasznált matematikai módszerek sokfélesége komoly kihívás elé állította a hallgatóságot – beleértve engem is.

A 10 plenáris előadón kívül még 30-an voltak meghívottak.

Egyikük, Daniela Kühn kombinatorikus. Persze az ő előadását is meghallgattam. *Erdős*, *Faber* és *Lovász* egy fél évszázados sejtéséről beszélt, amelyet idén oldott meg *Kang*gal, *Kelly*-vel, *Methuku*val és *Osthus*-szel közösen. Az indiai származású Abhishek Methuku egyébként *Győri Ervin* vezetésével Budapesten szerezte a PhD-jét, a Central European University-n, utána a tanszékemen volt postdoc, Lausanne-ban.

Egy magyar meghívott előadó volt, ifj. Székelyhídi László személyében, aki a Max Planck Intézetben szerzett doktori fokozatot, és a Lipcsei Egyetem professzora. Persze őt is meghallgattam. Édesapja, *id. Székelyhídi László* és fivére, *Székelyhídi Gábor*, aki az University of Notre Dame-on tanít, szintén kiváló matematikus. 2014-ben a szöuli világkongresszuson mindhármukkal találkoztam.

Az idei program külön érdekessége volt, hogy a szervezők felkérték Lovász Lászlót egy Abel-előadás megtartására.

Ha jól tudom, voltak a kongresszuson népszerűsítő előadások is.

A szélesebb nagyközönségnek szánt előadásokat eredetileg egy több ezer ember befogadására alkalmas konferenciateremben tartották volna, de sajnos nagyközönség hiányában ezek is online zajlottak. Az előadók között 3 még ma is viszonylag fiatal Fields-érmes volt: Andrei Okounkov (algebrai geométer), Stanislav Smirnov (matematikai fizikus) és Martin Hairer (sztochasztikus analista). Mindhárman ragyogó előadást tartottak. Bojan Mohar gráfok kereszteződési számairól beszélt, ami az én témámhoz is kapcsolódott.

Az egyik kísérő rendezvény egy matematikai témájú bélyegkiállítás volt, melyet Robin Wilson szervezett. Magam is bélyeggyűjtő vagyok, nagyon sajnálom, hogy erről lemaradtam. Wilson régebben gráfelmélettel foglalkozott, aztán átnyergelt matematikatörténetre. Édesapja, Harold Wilson 1974-76 között az Egyesült Királyság miniszterelnöke volt.

A kongresszussal kapcsolatban még egy dolgot feltétlenül meg szeretnék említeni. Az előadók körülbelül egyharmada nő volt. Korábban soha nem tapasztaltam ilyen arányt egyetlen matematikai konferencián sem. Biztos vagyok benne, hogy a programbizottság erre különös hangsúlyt fektetett. Önmagában is sokat számít, ha egy konferencia legrangosabb előadásaira nőket kérnek fel. A hallgatóság körében sok az egyetemi hallgató. Ha ilyen példát látnak, az vonzerőt jelenthet további életpályájukra nézve. Visszatekintve az elmúlt fél évszázad hazai tudományos életére, a nemek közti egyenlőségre vonatkozó hangzatos szavak és a valóság köszönő viszonyban sem volt egymással. Nagyon kevés női kutató jutott például az akadémikusi rangig. Nem csoda, hogy közülük többen felemás módon viszonyulnak annak említéséhez is, hogy ők nők; szívesebben tekintik magukat az adott tudományterület jeles képviselőjének, aki történetesen nő.

Ez az intézetünkben dolgozó fiatal női kutatóknál is megfigyelhető. Nem igényelnek semmilyen megkülönböztetést. Másrészt az utánpótlás-nevelés szempontjából hasznos őket bemutatni, példaként állítani a Lányok napján és hasonló pályaorientációs rendezvényeken.

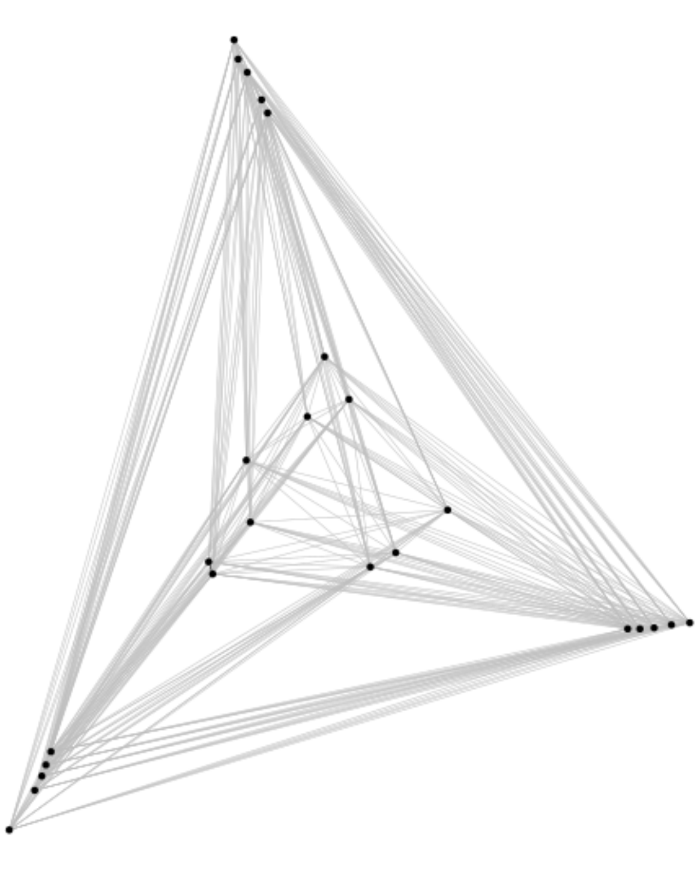
Teljes mértékben egyetértek.

Kikből áll a kutatócsoportod?

A **GeoScape** csoportban jelenleg öten vagyunk: rajtam kívül *Barát János*, *Tardos Gábor*, *Tóth Géza* Budapesten, *Frankl Péter* pedig Japánban. Ő elsősorban halmazrendszerekkel foglalkozik, de ez is erősen kötődik a témánkhoz. Mindnyájan világhírű matematikusok, több tucat közös cikket írtunk egymással. Nagyon jól tudunk együtt dolgozni. Remélem, hamarosan sikerül csoportunk létszámát bővíteni. A munka első évében a pandémia miatt minden bizonytalan volt. Nem lett volna sok értelme egy posztdoktort Budapestre csábítani. A majdani postdoc-ok kiválasztásánál fontos szempont, hogy lehetőleg olyan kollégát találjunk, akinek érdeklődése kicsit eltér a mienkétől, és az is előny, ha jól tud programozni.

Az ELTE TTK-n végeztem, a programozással is ott találkoztam először. Évente mindössze egy-két lyukkártyás programot kellett írnunk, de ezek futtatása igen körülményes és lassú volt, különösen, ha hibáztunk. A tankörünkben volt egy diák, aki félállásban számítógépen dolgozott. Legtöbbünk helyett ő írta meg a programokat. Hibátlanul, néhány perc alatt. Manapság a matematikusképzésben nagyobb súllyal szerepel a programozás. Óriási hátrányban van valaki, ha még egy rövid programot sem tud megírni. Különösen igaz ez a kombinatorikában, ahol sok sejtést nem csak érdemes kis mintákon kipróbálni, de lehetséges is. A legkisebb esetek ellenőrzéséhez gyakran nem is kell nagyon „okos” programot írni.

Tudnál olyan megoldatlan feladatot mondani, ahol a számítógépes megközelítés hasznos lehet?



25 pont, amely nem határoz meg 6 páronként metsző élt

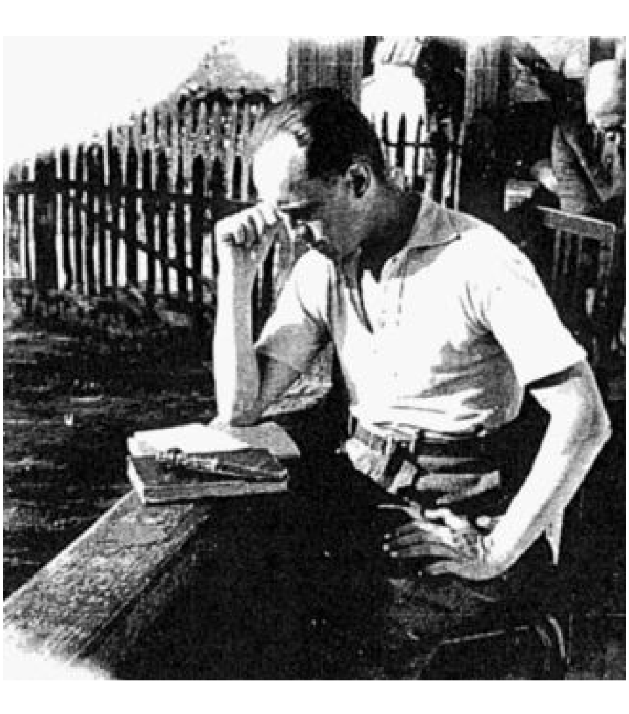
Különösen érdekelnek bennünket az olyan kérdések, hogy hány különböző módon lehet ugyanazt a gráfot lerajzolni a síkban. Milyen kombinatorikus- és metszettulajdonságokkal rendelkezik egy ilyen lerajzolás? Vegyünk N tetszőleges pontot a síkban, és bármely kettőt kössünk össze egy egyenes szakasszal. A szakaszok száma $N(N-1)/2$. Ez lényegesen több, mint a $3N-6$, tehát Euler egy tétele szerint biztosan lesz közöttük kereszteződés. Azt sem nehéz belátni, hogy ha a szakaszok számának nagyságrendje N^2, akkor a kereszteződések számának nagyságrendje N^4. Azt viszont nem tudjuk, hogy ki lehet-e mindig választani konstansszor N szakaszt úgy, hogy azok páronként messék egymást. Azt sejtjük, hogy igen. Ennek a problémának a megoldásában talán segíthet a számítógép. Úgy is próbálkozhatunk, hogy véletlenszerűen veszünk fel pontokat egy körben, és megnézzük, hogy erre a ponthalmazra mi a válasz. Ha a pontok egy kör határán vannak és N páros, akkor mindig van $N/2$ páronként metsző szakasz. Egyébként gráfok és hipergráfok 3-dimenziós reprezentációja is számos érdekes matematikai kérdést vet fel. Az ilyen tipusú feladatoknál sokszor segít, ha bizonyos példákat le is rajzolunk. Mi nem írunk rajzoló programokat. Olyan kérdésekkel viszont gyakran foglalkozunk, amelyek megoldása felhasználható ilyen algoritmusok tervezésében.

Milyen valós problémákhoz kapcsolódnak a kutatásaitok?

Erre jó példa a kereszteződési szám fogalma, amely Turán Pál úgynevezett *Téglagyári problémája* kapcsán vált ismertté.

Turán Pál 1944 júliusában munkaszolgálatosként egy Pest környéki téglagyárban dolgozott. Társaival téglákkal teli vagonokat kellett ide-oda tolnia a kemencék és a raktárak között. A kereszteződéseknél a vagonok nagyot zökkentek és megakadtak. Megfogalmazódott benne a kérdés, hogy újra lehetne-e tervezni a sínrendszert kevesebb kereszteződéssel.

Egy G gráf kereszteződési száma az a legkisebb szám, ahány kereszteződéssel G lerajzolható a síkban.



Turán Pál egy matematikai feladaton gondolkozik a munkaszolgálatban

A téglagyári problémát a háború után *Erdős Pál*, a matematika utazó nagykövete terjesztette. Többen próbálkoztak a feladat megoldásával abban a speciális esetben, amikor G teljes páros gráf, sőt, néhány ezzel kapcsolatos cikk is megjelent, de ezek mind hibásnak bizonyultak. A válasz ma sem ismert. A kérdést Turántól függetlenül egy angol konstruktivista festő, *Anthony Hill* is felvetette. Őt főképp az az eset foglalkoztatta, amikor G teljes gráf. A téma iránti érdeklődés a múlt század 70-es, 80-as éveiben ugrott meg, amikor *Tom Leighton* kutatásai nyomán kiderült, hogy egy elektromos hálózatot realizáló legkisebb nyomtatott áramkör vagy mikrochip mérete épp a hálózat gráfjának kereszteződési számától függ. Azóta több ezer cikk és számos monográfia jelent meg ezzel kapcsolatos kombinatorikai, algoritmikus és topológiai kérdésekről.

A felmerülő feladatok egy részének megoldásához csak egy jó ötlet kell, semmilyen matematikai előismeretre nincs szükség. Egy középiskolai matematikaszakkör számára fel lehetne építeni belőlük egy 5‒6 foglalkozásból álló modult.

Talán a Rényi Intézet új Szakmódszertani osztálya vevő lesz erre a témára.

Nem tudom, mennyire vadásznak ötletekre; ötletben talán nincs hiány. A kérdés az, hogy van-e emberük, aki kézbe venné az ügyet. Lehet, hogy nyitottak rá, majd megkérdezem őket.

A veled készült Qubit interjúban a magyar matematikaoktatás helyzetéről is beszéltél. A következő 5 évben 22.000 tanár megy nyugdíjba, és nincs elég utánpótlás.

Sokan csak szerelemből tanítanak, de nem szerencsés erre építeni egy oktatási rendszert. A matematikát illetően mégis kicsit optimistább vagyok. A matematikát tanulók között talán több a megszállott, aki feltétlenül tanítani szeretne. De ha megszállottnak kell lenned ahhoz, hogy matematikát tanulj, s majd taníts, akkor nem feltétlenül a legjobb diákok jelentkeznek tanárszakra, és nem javul az oktatás minősége. Azért is bizakodom, mert a dolgok sokszor másképp alakulnak, mint gondolnánk. Az 1920-as években például kevesen számítottak arra, hogy hamarosan az Egyesült Államok lesz a világ vezető tudományos nagyhatalma. Aki 100 évvel ezelőtt Európából egy amerikai egyetemre ment kutatni és tanítani, az vagy kalandvágyból tette, vagy személyes okoknál fogva. Aztán jött Hitler, a náci hatalomátvétel, a háború, és tömegével vándoroltak ki Amerikába nem csak a jól képzett tudósok, de olyan diákok is, akik Európában remek alapképzést kaptak. A menekültek többsége szegény volt, de ambíciózus. Jó egyetemre akartak járni, de nem volt semmijük, ezért csak a legolcsóbb iskolákba tudtak jelentkezni. Ilyen volt a New York-i City College is, ahol korábban éveken át tanítottam. Egy abszolút közepes állami egyetem, melyet hirtelen elleptek a lelkes, tanulni vágyó európai fiatalok. A diákság színvonala akkorát nőtt, hogy az ott tanító professzoroknak fel kellett kötni a gatyaszárukat. Fel is kötötték. Mára a City College-nak annyi Nobel díjasa van, mint mondjuk a párizsi Ecole Normale Superieur-nek vagy a londoni Imperial College-nak. Nem azért, mert olyan ragyogó egyetem volt, hanem mert oda mentek a szegény diákok. Ez váratlan dolog volt, nem lehetett rá számítani. Ha egyszer valami beindul, és megvan a kritikus tömeg, akkor az láncreakciót válthat ki. Pláne, ha van hozzá pénz is! Az pedig volt, hiszen az 1950-es évek az amerikai gazdaság diadalmenetét hozták. Senki sem várta, senki sem tervezte, de megtörtént!

Nagyon remélem, hogy azokhoz a megrázkódtatásokhoz, amelyek együtt járnak az úgynevezett „egyetemi modellváltással”, jól fognak alkalmazkodni a hazai egyetemek. Ez egy váratlan, új helyzet, és nehéz megjósolni, hogy miként alakulnak a dolgok. Abban reménykedem, hogy nem lesz visszaesés. Elképzelhető, hogy kiemelkedik néhány kiváló egyetem, ahova ismét csak nagyon magas teljesítménnyel lehet bekerülni. Valamilyen csodában bízom én is.

Beszélgetőtárs: *Szathmári Nóra.*

Az eredeti interjú a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet honlapján jelent meg.

konferencia gráfok kombinatorika

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

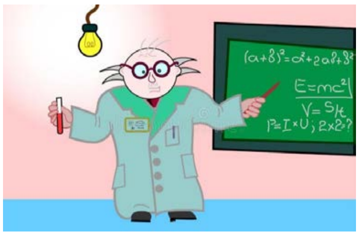
SOKSZOR TALÁLKOZUNK OLYAN FELADATTAL, ÖTLETTEL, AMIT SZÍVESEN ELTESZÜNK KÉSŐBBI HASZNÁLATRA. A **TANÓRA – SZAKKÖR** ROVAT SZERETNE HOZZÁJÁRULNI A MATEMATIKATANÁROK ESZKÖZTÁRÁNAK GAZDAGÍTÁSÁHOZ, FÓRUMOT KÍVÁN ADNI A GONDOK, NEHÉZSÉGEK MEGTÁRGYALÁSÁRA IS. (ROVATSZERKESZTŐ: *HORVÁTH ESZTER*.)

Volf Annamária

2022. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Járványmatek középiskolásoknak – 3. rész

Járványmatek középiskolásoknak című sorozatunk utolsó részéhez érkeztünk. Az 1.rész és a 2. rész után a mostani is igencsak aktuális: a tesztek megbízhatóságát és a vakcinák hatékonyságát számolja ki *Volf Annamária* különböző feltételek esetén. Jó lenne, ha minden középiskolás megismerné ezeket a példákat, vélekedések helyett a tényeket. Következik tehát a 3. rész.



Horváth Eszter, Fried Katalin

2022. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Úton az egyenletek használata felé

A hatosztályos gimnáziumok felvételi anyagait tanulmányozva láthatjuk, hogy minden évben előfordulnak olyan szöveges feladatok, amelyeket felnőttként ösztönösen egyenlettel oldanánk meg. Ebben az életkorban szívet melengető kreatív ötletekkel állnak elő a gyerekek egy-egy feladatmegoldás során. Leírni viszont nem tudják precízen. Mit tehet a tanár, a szülő?

Szerkesztő

2022. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Tavaszi felkészülés

A tavasz közeledtével mindannyian ki szeretnénk mozdulni a szabadba, végre korlátozások nélkül lehet rendezvényeket, versenyeket, táborokat szervezni. Például az április-májusi Medve Szabadtéri Matekversenyre – országszerte 19 helyszínre – március végéig lehet kedvezményesen jelentkezni tanároknak és csapatoknak 3.-tól 12. osztályosokig, és van még néhány hely a nyári Medve Matektáborokban is. Tovább….

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Volf Annamária 2022. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Járványmatek középiskolásoknak – 3. rész

Bevezető

A cikksorozat utolsó részében főként az egészségügyi tesztek megbízhatóságával kapcsolatos számolásokat végzünk. Az emelt szintű matematika érettségin ezek a problémák típusfeladatnak számítanak, általánosítás nélkül viszont az alacsonyabb évfolyamok számára is feldolgozható a téma kicsit komplexebb százalékszámítás-feladatként tálalva. Zárásként röviden megnézzük, hogy hogyan határozzák meg a vakcinák hatékonyságának százalékos értékét.[1]

Az egészségügyi tesztek megbízhatósága[2]

Tesztek specificitása és szenzitivitása

Az egészségügyi tesztek közül a bináris teszteket fogjuk vizsgálni. Binárisnak nevezzük a tesztet akkor, ha kétféle végeredményt adhat: az egyed rendelkezik vagy nem rendelkezik a vizsgált tulajdonsággal. Az eredményt az előbbi esetben pozitívnak, utóbbi esetben negatívnak nevezzük. A tesztek általában nem tökéletesek, két irányban is tévedhetnek: adhatnak hamis pozitív, illetve hamis negatív eredményt.

	a valós állapotnak megfelelő érték	
a teszt eredménye	pozitív	negatív
pozitív	valós pozitív	hamis pozitív
negatív	hamis negatív	valós negatív

- Hamis pozitív eredmény: ha valakinek, aki nem rendelkezik az adott tulajdonsággal, a teszt pozitív értéket ad.

  Egy teszt specificitása azt mutatja meg, hogy milyen arányban lehet vele a valódi negatívakat beazonosítani. Ezt a tulajdonságot rontják le a hamis pozitívak. A specificitás tehát egy feltételes valószínűség: feltéve, hogy az alany egészséges, mekkora valószínűséggel lesz a teszteredmény negatív.

  Kiszámítási módja: $\frac{\text{valós negatívak}}{\text{valós negatívak}+\text{hamis pozitívak}}$.

- Hamis negatív eredmény: ha valakiről, aki rendelkezik a beazonosítani kívánt tulajdonsággal a teszt negatív értéket ad.

  Egy teszt szenzitivitása vagy érzékenysége azt mutatja meg, hogy milyen arányban lehet vele a valódi pozitívakat beazonosítani. Ezt a tulajdonságot rontják a hamis negatívak. A szenzitivitás szintén egy feltételes valószínűség: feltéve, hogy az alany beteg, mekkora valószínűséggel lesz a teszteredmény pozitív.

  Kiszámítási módja: $\frac{\text{valós pozitívak}}{\text{valós pozitívak}+\text{hamis negatívak}}$.

Ha ismerjük az érzékenységet és a specificitást, valamint tudjuk, hogy az adott tulajdonság mennyire gyakori a populációban (ennek a jelentőségéről hamarosan beszélünk), akkor ki tudjuk számolni, hogy mennyire valószínű, hogy egy pozitív teszteredmény valós problémát takar, illetve hogy egy negatív eredmény valóban azt jelenti, hogy az illető egészséges. El is érkeztünk két újabb fogalom definiálásához:

- A **pozitív prediktív érték** a pozitív tesztet adókon belül a valóban pozitívak aránya. Ismét feltételes valószínűséggel van dolgunk: feltéve, hogy pozitív a teszt, mekkora valószínűséggel beteg az alany.

  Kiszámítási módja: $\frac{\text{valós pozitívak}}{\text{valós pozitívak}+\text{hamis pozitívak}}$.

- A **negatív prediktív érték** a negatív tesztet adókon belül a valóban nem betegek aránya. Megint egy feltételes valószínűség: feltéve, hogy negatív a teszt, mekkora valószínűséggel egészséges az alany.

  Kiszámítási módja: $\frac{\text{valós negatívak}}{\text{valós negatívak}+\text{hamis negatívak}}$.

A tesztek specificitásáról és szenzitivitásáról a Zállatorvos Mire mész a teszttel? – Ellenanyagkimutatás című videójában szemléletes bemutatást láthatunk 6:24–8:07 között.

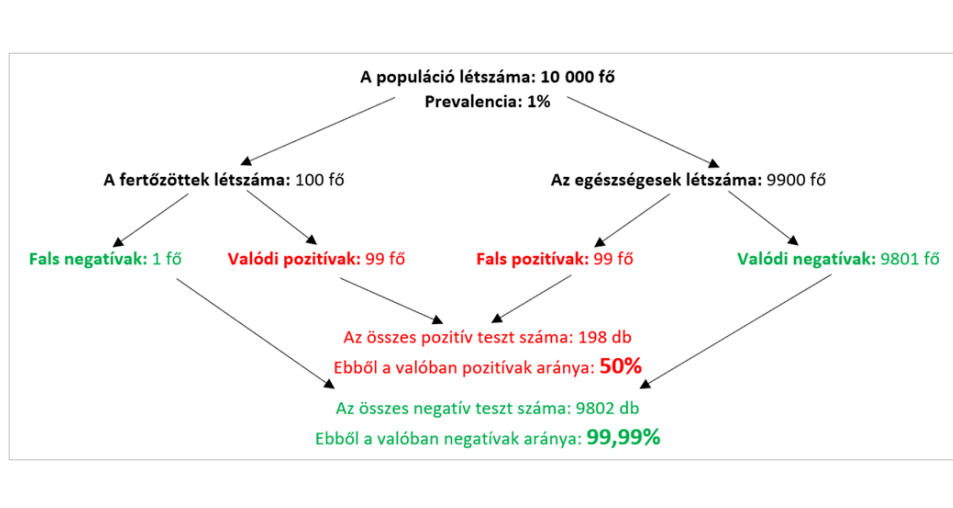
Gyorstesztek megbízhatósága

A diagnosztikai tesztek közül először a koronavírus ellenanyagtesztek tulajdonságait fogjuk megvizsgálni. (Az ellenagyagtesztek azt hivatottak megmutatni, hogy a fertőzés vagy a vakcina hatására termelődött-e ellenanyag a szervezetünkben.) Gyorstesztnek azt a fajta tesztet nevezzük, ami a mintavétel helyszínén kiértékelhető, nem kell hozzá laboratórium, emiatt olcsóbb, mint a laboratóriumi teszt.[3]

Ismét a Zállatorvos említett látott videójához fordulunk (9:09), és megnézzük, hogy mennyi a pozitív prediktív, illetve negatív prediktív értéke egy olyan tesztnek, amelynek szenzitivitása és specificitása egyaránt nagyon jól hangzó 99%. A válasz: attól függ, hogy a populációnak mekkora része fertőzött a teszt végzésekor. (Ezt az arányt nevezzük **prevalenciának**.)

Végezzünk el két számolást ennek az igazolására.

1. eset: a populáció létszáma $10\,000$ fő, a prevalencia 1%.

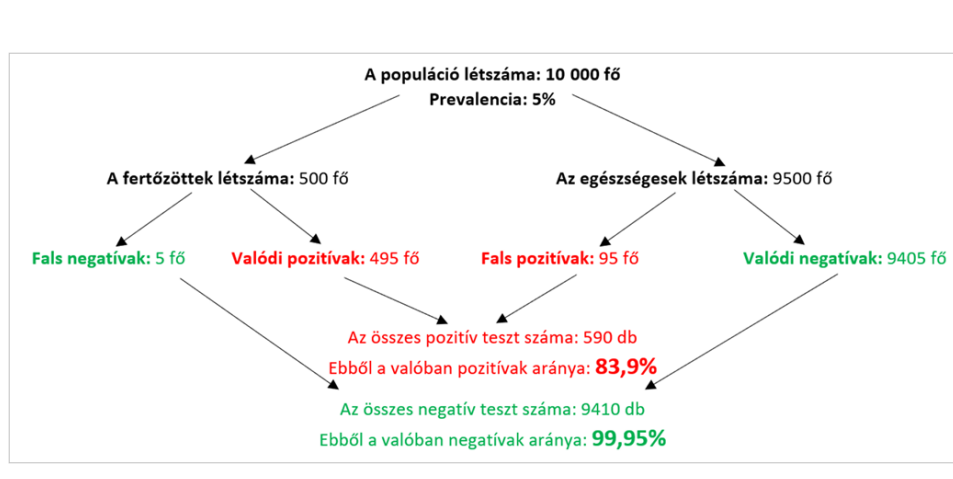

A populáció létszáma: 10 000 fő
Prevalencia: 1%
A fertőzöttek létszáma: 100 fő
Az egészségesek létszáma: 9900 fő
Fals negatívak: 1 fő
Valódi pozitívak: 99 fő
Fals pozitívak: 99 fő
Valódi negatívak: 9801 fő
Az összes pozitív teszt száma: 198 db
Ebből a valóban pozitívak aránya: 50%
Az összes negatív teszt száma: 9802 db
Ebből a valóban negatívak aránya: 99,99%

A számolást táblázat segítségével is elvégezhetjük:

	a valós állapot		**összesen**
a teszt eredménye	beteg	egészséges	
pozitív	$100\cdot 0{,}99=99$	$9900\cdot 0{,}01=99$	$99+99=198$
negatív	$100\cdot 0{,}01=1$	$9900\cdot 0{,}99=9801$	$1+9801=9802$
összesen	$10\,000\cdot 0{,}01=100$	$10\,000\cdot 0{,}99=9900$	$10\,000$

Pozitív prediktív érték: $\frac{99}{198}=50\%$. Negatív prediktív érték: $\frac{9801}{9802}\approx 99{,}99\%$.

2. eset: a populáció létszáma $10\,000$ fő, a prevalencia 5%.


A populáció létszáma: 10 000 fő
Prevalencia: 5%
A fertőzöttek létszáma: 500 fő
Az egészségesek létszáma: 9500 fő
Fals negatívak: 5 fő
Valódi pozitívak: 495 fő
Fals pozitívak: 95 fő
Valódi negatívak: 9405 fő
Az összes pozitív teszt száma: 590 db
Ebből a valóban pozitívak aránya: 83,9%
Az összes negatív teszt száma: 9410 db
Ebből a valóban negatívak aránya: 99,95%

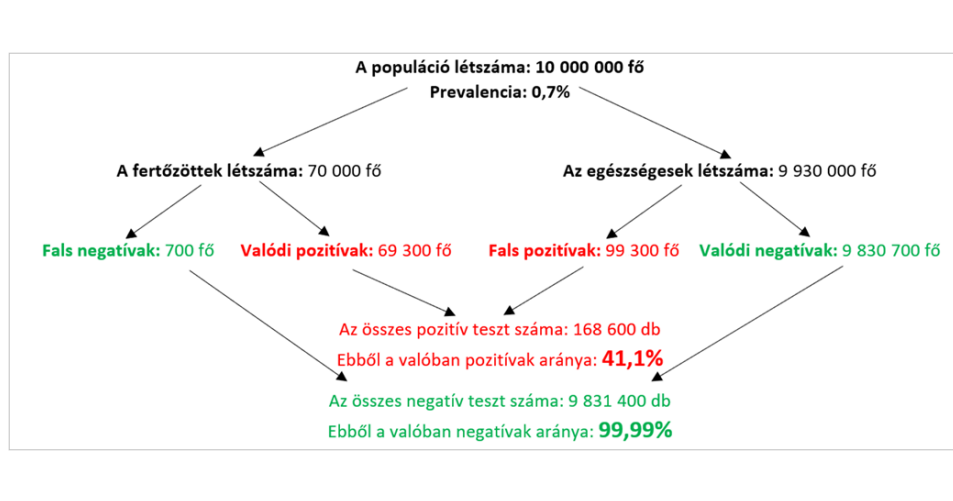
A számolás táblázattal:

	a valós állapot		**összesen**
a teszt eredménye	beteg	egészséges	
pozitív	$500\cdot 0{,}99=495$	$9500\cdot 0{,}01=95$	$495+95=590$
negatív	$500\cdot 0{,}01=5$	$9500\cdot 0{,}99=9405$	$5+9405=9410$
összesen	$10\,000\cdot 0{,}05=500$	$10\,000\cdot 0{,}95=9500$	$10\,000$

Pozitív prediktív érték: $\frac{495}{590}\approx 83{,}9\%$. Negatív prediktív érték: $\frac{9405}{9410}\approx 99{,}95\%$.

Vagyis a prevalencia növekedésével a teszt pozitív prediktív értéke nő, negatív prediktív értéke pedig csökken.

Ugyanezt a számolást a Semmelweis Egyetem 2020 májusi átfertőzöttségi tesztelése során kapott eredményekkel Magyarországra is kiszámíthatjuk, azaz megadhatjuk, hogy 2020 májusában körülbelül mennyi volt a 99%-os szenzitivitást és specificitást ígérő gyorstesztek pozitív prediktív, illetve negatív prediktív értéke. A SOTE reprezentatív tesztjei alapján az átfertőzöttség ebben az időpontban $0{,}0027\%$–$1{,}1\%$ közötti volt, számoljunk a köztes $0{,}7\%$-os értékkel!


A populáció létszáma: 10 000 000 fő
Prevalencia: 0,7%
A fertőzöttek létszáma: 70 000 fő
Az egészségesek létszáma: 9 930 000 fő
Fals negatívak: 700 fő
Valódi pozitívak: 69 300 fő
Fals pozitívak: 99 300 fő
Valódi negatívak: 9 830 700 fő
Az összes pozitív teszt száma: 168 600 db
Ebből a valóban pozitívak aránya: 41,1%
Az összes negatív teszt száma: 9 831 400 db
Ebből a valóban negatívak aránya: 99,99%

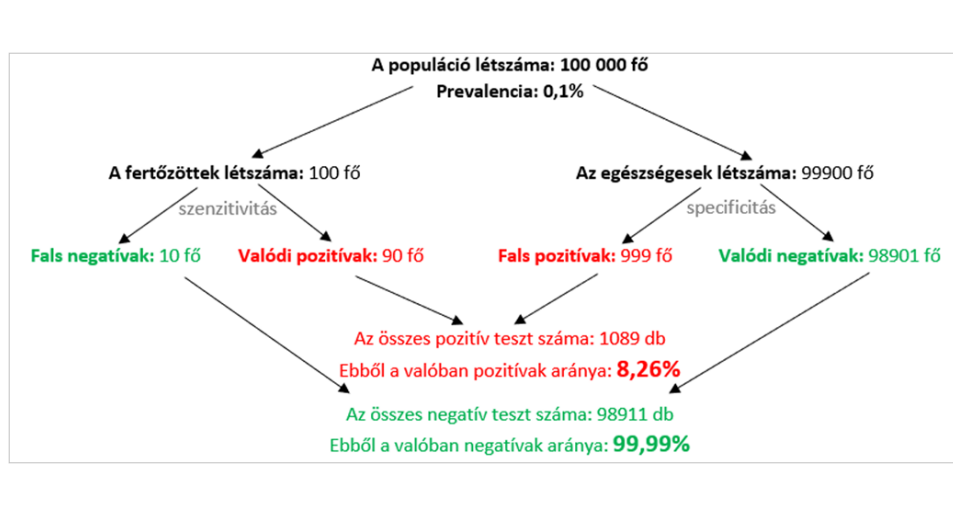
Táblázattal:

	a valós állapot		**összesen**
a teszt eredménye	beteg	egészséges	
pozitív	$70\,000\cdot 0{,}99=63\,900$	$9\,930\,000\cdot 0{,}01=99\,300$	$168\,600$
negatív	$70\,000\cdot 0{,}01=700$	$9\,930\,000\cdot 0{,}99=9\,830\,700$	$9\,831\,400$
összesen	$10\,000\,000\cdot 0{,}007=70\,000$	$10\,000\,000\cdot 0{,}993=9\,930\,000$	$10\,000\,000$

Pozitív prediktív érték: $\frac{63\,900}{168\,600}\approx 41{,}1\%$. Negatív prediktív érték: $\frac{9\,830\,700}{9\,831\,400}\approx 99{,}99\%$.

Hasonló számításokat más egészségügyi diagnosztikai vizsgálatokra is elvégezhetünk.

A **Lyme-kór**[4] kimutatására használt teszt szenzitivitása 90%, specificitása 99%. A Lyme-kór előfordulásának valószínűsége (a prevalencia) Magyarországon $0{,}1\%$. Adjuk meg a teszt pozitív prediktív, illetve negatív prediktív értékét, ha $100\,000$ embert tesztelünk le! (A két érték valójában független attól, hogy hány embert tesztelünk. Erre később kitérünk.) A feladat abban tér el a korábbiaktól, hogy a szenzitivitás és a specificitás értéke különböző.

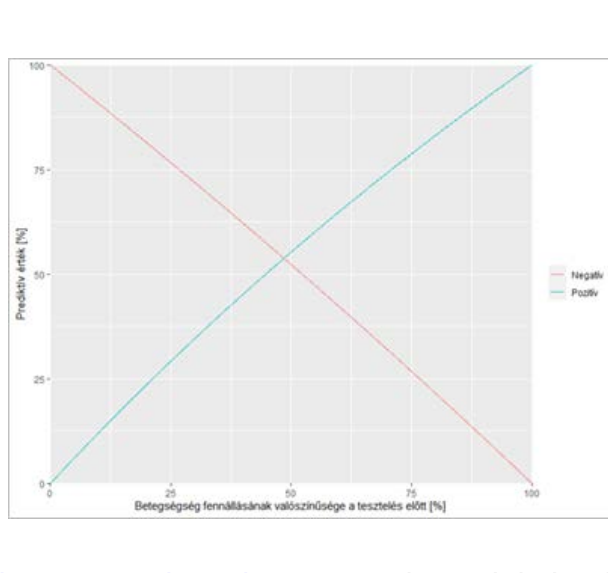

A populáció létszáma: 100 000 fő
Prevalencia: 0,1%
A fertőzöttek létszáma: 100 fő
Az egészségesek létszáma: 99900 fő
szenzitivitás
specificitás
Fals negatívak: 10 fő
Valódi pozitívak: 90 fő
Fals pozitívak: 999 fő
Valódi negatívak: 98901 fő
Az összes pozitív teszt száma: 1089 db
Ebből a valóban pozitívak aránya: 8,26%
Az összes negatív teszt száma: 98911 db
Ebből a valóban negatívak aránya: 99,99%

Táblázattal:

	a valós állapot		**összesen**
a teszt eredménye	beteg	egészséges	
pozitív	$100\cdot 0{,}9=90$	$99\,900\cdot 0{,}01=999$	1089
negatív	$100\cdot 0{,}1=10$	$99\,900\cdot 0{,}99=98\,901$	$98\,911$
összesen	$100\,000\cdot 0{,}001=100$	$100\,000\cdot 0{,}99=99\,900$	$100\,000$

Pozitív prediktív érték: $\frac{90}{1089}\approx 8{,}26\%$. Negatív prediktív érték: $\frac{98\,901}{98\,811}\approx 99{,}99\%$.

Az alábbi grafikon[5] a prevalencia (a betegség fennállásának valószínűsége) függvényében mutatja a pozitív prediktív érték (zöld) és a negatív prediktív érték (piros) változását a fenti teszt esetében. A prevalencia növelésével a pozitív prediktív érték nő, a negatív prediktív érték csökken.



Lakos András és Ferenci Tamás cikkében a Lyme-kór tesztjénél látható alacsony pozitív prediktív értékkel kapcsolatos dilemmákról tájékozódhatunk alaposabban.

Az emlőrák szűrésére szolgáló **mammográfiai vizsgálat** esetén is a fenti számítási eljárás segít meghatározni, hogy egy pozitív lelet esetén mekkora a betegség valószínűsége. Az Egyesült Királyságban a nők körében az emlőrák prevalenciájára vonatkozó becslés $0{,}2\%$, az 50 év feletti nők esetében $0{,}4\%$[6]. A vizsgálat szenzitivitására és specificitására többféle becslés létezik, a mi esetünkben legyen a szenzitivitás 85%, a specificitás 90%[7]. Mekkora a mammográfiai vizsgálat pozitív prediktív, illetve negatív prediktív értéke, ha $1\,000\,000$ nőt vizsgálunk meg? A számítást végezzük el úgy is, ha csak 50 év feletti nőket szűrünk! A számolásunkat lerövidítheti, ha táblázatkezelő szoftvert használunk, és paraméterként felvesszük a prevalenciát, a szenzitivitást, a specificitást és a populáció méretét.

A mammográfiai szűrés értékelése az összes nő körében:

a populáció mérete:	$1\,000\,000$ fő
prevalencia:	0.20%
szenzitivitás:	85.00%
specificitás:	90.00%

	a valós állapot		
a teszt eredménye	beteg	egészséges	**összesen**
pozitív	1700 fő	99 800 fő	101 500 fő
negatív	300 fő	898 200 fő	898 500 fő
összesen	2000 fő	998 000 fő	1 000 000 fő

Pozitív prediktív érték: 1.67%. Negatív prediktív érték: 99.97%.

A mammográfiai szűrés értékelése az 50 év feletti nők körében:

a populáció mérete:	$1\,000\,000$ fő
prevalencia:	0.40%
szenzitivitás:	85.00%
specificitás:	90.00%

	a valós állapot		
a teszt eredménye	beteg	egészséges	**összesen**
pozitív	3400 fő	99 600 fő	103 000 fő
negatív	600 fő	896 400 fő	897 000 fő
összesen	4000 fő	996 000 fő	1 000 000 fő

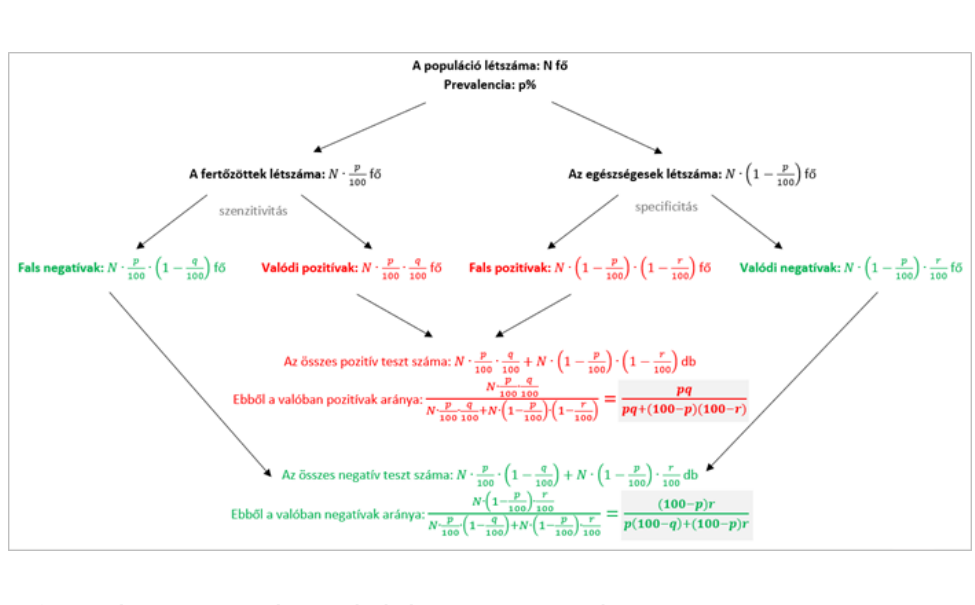
Pozitív prediktív érték: 3.30%. Negatív prediktív érték: 99.93%.

Azt látjuk, hogy a teszt pozitív prediktív értéke kicsi[8]. Ennek oka az alacsony prevalencia. A pozitív teszttel rendelkezők diagnózisát további komplex vizsgálatokkal lehet pontosítani.

Általánosítás

Adjunk képletet a pozitív prediktív értékre és a negatív prediktív értékre a következő paramétereket használva:

- p: prevalencia százalékban,
- q: szenzitivitás százalékban,
- r: specificitás százalékban,
- N: populáció létszáma.


A populáció létszáma: N fő
Prevalencia: p%
A fertőzöttek létszáma: $N\cdot\frac{p}{100}$ fő
Az egészségesek létszáma: $N\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)$ fő
szenzitivitás
specificitás
Fals negatívak: $N\cdot\frac{p}{100}\cdot\left(1-\frac{q}{100}\right)$ fő
Valódi pozitívak: $N\cdot\frac{p}{100}\cdot\frac{q}{100}$ fő
Fals pozitívak: $N\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{r}{100}\right)$ fő
Valódi negatívak: $N\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{r}{100}$ fő
Az összes pozitív teszt száma: $N\cdot\frac{p}{100}\cdot\frac{q}{100}+N\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{r}{100}\right)$ db
Ebből a valóban pozitívak aránya: $\frac{N\cdot\frac{p}{100}\cdot\frac{q}{100}}{N\cdot\frac{p}{100}\cdot\frac{q}{100}+N\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{r}{100}\right)}=\frac{pq}{pq+(100-p)(100-r)}$
Az összes negatív teszt száma: $N\cdot\frac{p}{100}\cdot\left(1-\frac{q}{100}\right)+N\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{r}{100}$ db
Ebből a valóban negatívak aránya: $\frac{N\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{r}{100}}{N\cdot\frac{p}{100}\cdot\left(1-\frac{q}{100}\right)+N\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{r}{100}}=\frac{(100-p)r}{p(100-q)+(100-p)r}$

A feladattípus a Bayes-tétel segítségével is megoldható.

Tekintsük a következő eseményeket:

B: a vizsgált személy beteg.

$\bar{B}$: a vizsgált személy egészséges.

A: a vizsgált személy tesztje pozitív.

$\bar{A}$: a vizsgált személy tesztje negatív.

Az ismert valószínűségek:

prevalencia: $P(B)=\frac{p}{100}\rightarrow P(\bar{B})=1-\frac{p}{100}$.

szenzitivitás: $P(A\mid B)=\frac{q}{100}\rightarrow P(\bar{A}\mid B)=1-\frac{q}{100}$.

specificitás: $P(\bar{A}\mid \bar{B})=\frac{r}{100}\rightarrow P(A\mid \bar{B})=1-\frac{r}{100}$.

A kérdéses valószínűségek:

pozitív prediktív érték: $P(B\mid A)$,

negatív prediktív érték: $P(\bar{B}\mid \bar{A})$.

A pozitív prediktív érték meghatározása a Bayes-tétellel:

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\mid B)\cdot P(B)}{P(A\mid B)\cdot P(B)+P(A\mid \bar{B})\cdot P(\bar{B})}=\frac{\frac{q}{100}\cdot\frac{p}{100}}{\frac{q}{100}\cdot\frac{p}{100}+\left(1-\frac{r}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)}=\frac{pq}{pq+(100-r)(100-p)}.$$

A negatív prediktív érték meghatározása a Bayes-tétellel:

$$P(\bar{B}\mid \bar{A})=\frac{P(\bar{A}\mid \bar{B})\cdot P(\bar{B})}{P(\bar{A}\mid \bar{B})\cdot P(\bar{B})+P(\bar{A}\mid B)\cdot P(B)}=\frac{\frac{r}{100}\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)}{\frac{r}{100}\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)+\left(1-\frac{q}{100}\right)\cdot\frac{p}{100}}=\frac{r(100-p)}{r(100-p)+(100-q)p}.$$

Egy ide vágó érettségi feladat

A 2017 májusi idegen nyelvű emelt matematika érettségi 8c feladata[9] a gyorstesztek megbízhatóságáról szólt:

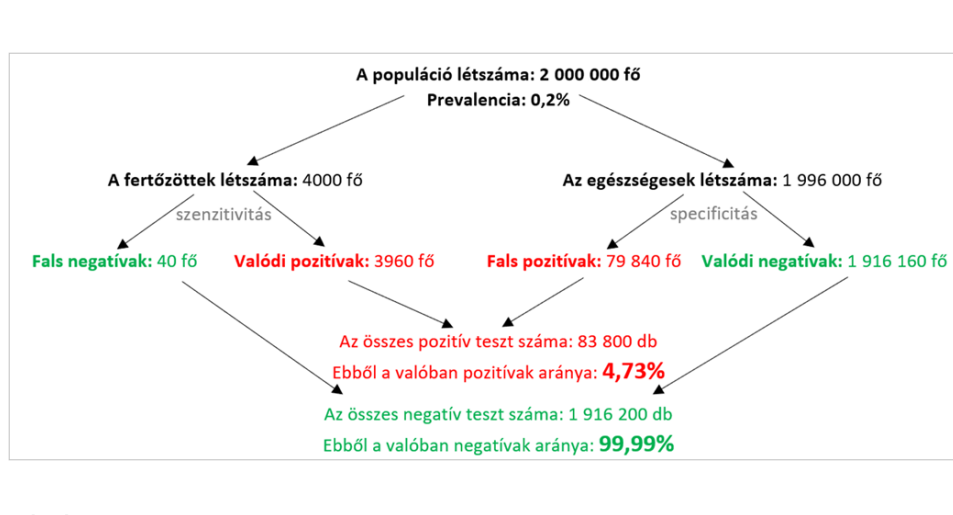
Járványos időszakban egy nagyváros lakóinak $0{,}2\%$-a fertőzött a járványt okozó vírussal. Egy kereskedelmi forgalomban is kapható gyorsteszt azt ígéri a felhasználóknak, hogy a teszt kimutatja a vírusfertőzést. A termék leírásában ez áll: „A teszt a vírussal fertőzött embereknél 99%-os valószínűséggel mutatja ki a fertőzöttséget. A vírussal nem fertőzött emberek esetében olykor szintén fertőzöttséget jelez a teszt, ám ennek a téves jelzésnek a valószínűsége mindössze 4%.' Tudjuk, hogy a város lakosságának $0{,}2\%$-a fertőzött a járványt okozó vírussal. Mutassa meg, hogy ha egy véletlenszerűen választott városlakó gyorstesztje fertőzöttséget mutat, akkor $0{,}05$-nál kisebb annak a valószínűsége, hogy a tesztalany valóban vírusfertőzött (tehát a gyorsteszt nem a fertőzöttség megbízható kimutatására alkalmas)!

Ha a diákok levezették a feladattípus általánosítását, láthatták, ha nem vezették le, elárulhatjuk, hogy a végeredmény nem függ a populáció méretétől. Helyes eredményt kapunk tehát, ha a város lakóinak számára kiválasztunk egy konkrét értéket, és arra végigszámoljuk a feladatot.

A paraméterek:

- prevalencia: $0{,}2\%$,
- specificitás: 96%,
- szenzitivitás: 99%,
- a populáció létszáma legyen $2\,000\,000$ fő abban az esetben, ha a diákok még nem tudják általánosítani a feladatot.

Megoldás, ha $N=2\,000\,000$ fő:


A populáció létszáma: 2 000 000 fő
Prevalencia: 0,2%
A fertőzöttek létszáma: 4000 fő
Az egészségesek létszáma: 1 996 000 fő
szenzitivitás
specificitás
Fals negatívak: 40 fő
Valódi pozitívak: 3960 fő
Fals pozitívak: 79 840 fő
Valódi negatívak: 1 916 160 fő
Az összes pozitív teszt száma: 83 800 db
Ebből a valóban pozitívak aránya: 4,73%
Az összes negatív teszt száma: 1 916 200 db
Ebből a valóban negatívak aránya: 99,99%

Táblázattal:

	a valós állapot		**összesen**
a teszt eredménye	beteg	egészséges	
pozitív	$4000\cdot 0{,}99=3960$	$1\,996\,000\cdot 0{,}04=79\,840$	$83\,800$
negatív	$4000\cdot 0{,}01=40$	$1\,996\,000\cdot 0{,}96=1\,916\,160$	$1\,916\,200$
összesen	$2\,000\,000\cdot 0{,}002=4000$	$2\,000\,000\cdot 0{,}998=1\,996\,000$	$2\,000\,000$

Pozitív prediktív érték: $\frac{3960}{83\,800}\approx 4{,}73\%$. Negatív prediktív érték: $\frac{1\,916\,160}{1\,916\,200}\approx 99{,}99\%$.

Megoldás általánosan a Bayes-tétellel:

Események:

B: a vizsgált személy beteg

$\bar{B}$: a vizsgált személy egészséges

A: a vizsgált személy tesztje pozitív

$\bar{A}$: a vizsgált személy tesztje negatív

Az ismert valószínűségek:

prevalencia: $P(B)=0{,}002\rightarrow P(\bar{B})=0{,}998$,

szenzitivitás: $P(A\mid B)=0{,}99\rightarrow P(\bar{A}\mid B)=0{,}01$,

specificitás: $P(\bar{A}\mid \bar{B})=0{,}96\rightarrow P(A\mid \bar{B})=0{,}04$.

A valószínűségek, amiket keresünk:

pozitív prediktív érték: $P(B\mid A)$,

negatív prediktív érték: $P(\bar{B}\mid \bar{A})$.

A pozitív prediktív érték meghatározása a Bayes-tétellel:

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\mid B)\cdot P(B)}{P(A\mid B)\cdot P(B)+P(A\mid \bar{B})\cdot P(\bar{B})}=\frac{0{,}99\cdot 0{,}002}{0{,}99\cdot 0{,}002+0{,}04\cdot 0{,}998}=\frac{0{,}001\,98}{0{,}0419}\approx 0{,}0473$$

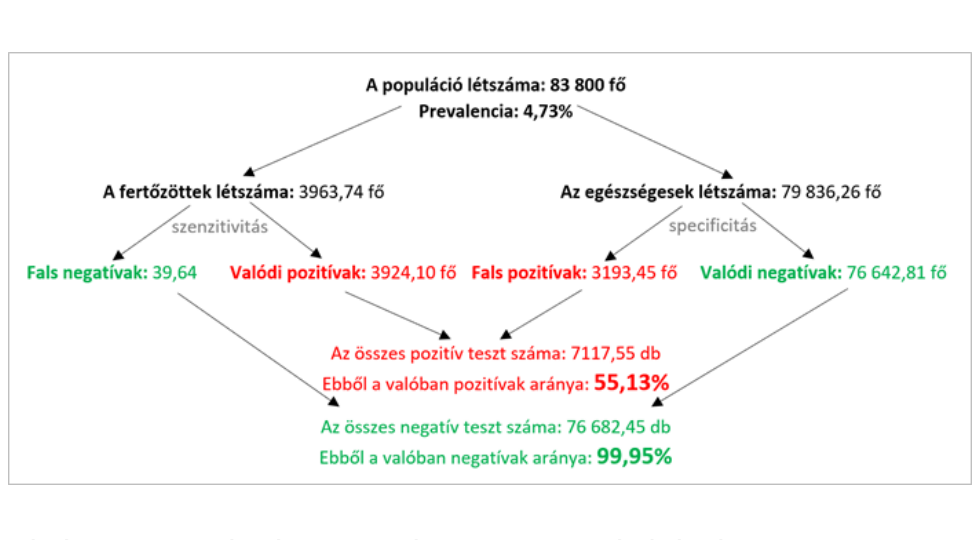
A negatív prediktív érték meghatározása a Bayes-tétellel:

$$P(\bar{B}\mid \bar{A})=\frac{P(\bar{A}\mid \bar{B})\cdot P(\bar{B})}{P(\bar{A}\mid \bar{B})\cdot P(\bar{B})+P(\bar{A}\mid B)\cdot P(B)}=\frac{0{,}96\cdot 0{,}998}{0{,}96\cdot 0{,}998+0{,}01\cdot 0{,}002}=\frac{0{,}958\,08}{0{,}9581}\approx 0{,}9999$$

A feladattal részletesen foglalkozott Csapodi Csaba és Koncz Levente cikke. Továbbgondolták a problémát, és megfogalmazták a következő állítást: *„Ha 5%-ban betegek csak a pozitív teszteredményt produkálók, akkor hogy lehet megtalálni a ténylegesen betegeket? A pozitív eseteket érdemes egy második, vélhetően drágább, de ebben az irányban pontosabb eszközzel újratesztelni. De ha ilyenünk nincs, akkor a gyorsteszt másodszori alkalmazása is szóba jöhet: ha csak az első körben pozitív $83\,800$ esetet teszteljük újra, akkor a második tesztelésen is pozitívnak bizonyulók már 55% eséllyel tényleg fertőzöttek.”*

Igazoljuk, hogy a cikk állítása helyes!

A számolás az előzőhöz hasonló, de két paraméter változik. A bemenő létszám a pozitív tesztek száma ($83\,800$ fő), a prevalencia pedig az első kör pozitív prediktív értéke, vagyis $4{,}73\%$. A teszt szenzitivitása és specificitása nem változik. Láttuk, hogy a tesztek mennyire érzékenyek a prevalenciára, ezért sejtjük, hogy az előzőnél jóval nagyobb százalékos arányt fogunk kapni a végén. (Ha konkrét létszámra, azaz $83\,800$ főre végezzük el a számolást, tört létszámokat, illetve darabszámokat kapunk, de ez a végeredményt nem befolyásolja.)


A populáció létszáma: 83 800 fő
Prevalencia: 4,73%
A fertőzöttek létszáma: 3963,74 fő
Az egészségesek létszáma: 79 836,26 fő
szenzitivitás
specificitás
Fals negatívak: 39,64
Valódi pozitívak: 3924,10 fő
Fals pozitívak: 3193,45 fő
Valódi negatívak: 76 642,81 fő
Az összes pozitív teszt száma: 7117,55 db
Ebből a valóban pozitívak aránya: 55,13%
Az összes negatív teszt száma: 76 682,45 db
Ebből a valóban negatívak aránya: 99,95%

Táblázattal: adjunk általános megoldást, legyen a populáció létszáma x.

	a valós állapot		**összesen**
a teszt eredménye	beteg	egészséges	
pozitív	$0{,}0473x\cdot 0{,}99=0{,}046\,827x$	$0{,}9527x\cdot 0{,}04=0{,}038\,108x$	$\approx 0{,}084\,935x$
negatív	$0{,}0473x\cdot 0{,}01=0{,}000\,473x$	$0{,}9527x\cdot 0{,}96=0{,}914\,592x$	$\approx 0{,}915\,065x$
összesen	$0{,}0473x$	$0{,}9527x$	x

Pozitív prediktív érték: $\frac{0{,}046\,827x}{0{,}084\,935x}\approx 55{,}13\%$. Negatív prediktív érték: $\frac{0{,}914\,592x}{0{,}915\,065x}\approx 99{,}95\%$.

Megoldás Bayes-tétellel:

Események:

B: a vizsgált személy beteg.

$\bar{B}$: a vizsgált személy egészséges.

A: a vizsgált személy tesztje pozitív.

$\bar{A}$: a vizsgált személy tesztje negatív.

Az ismert valószínűségek:

prevalencia: $P(B)=0{,}0473\rightarrow P(\bar{B})=0{,}9527$,

szenzitivitás: $P(A\mid B)=0{,}99\rightarrow P(\bar{A}\mid B)=0{,}01$,

specificitás: $P(\bar{A}\mid \bar{B})=0{,}96\rightarrow P(A\mid \bar{B})=0{,}04$.

A valószínűségek, amiket keresünk:

pozitív prediktív érték: $P(B\mid A)$,

negatív prediktív érték: $P(\bar{B}\mid \bar{A})$.

A pozitív prediktív érték meghatározása a Bayes-tétellel:

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\mid B)\cdot P(B)}{P(A\mid B)\cdot P(B)+P(A\mid \bar{B})\cdot P(\bar{B})}=\frac{0{,}99\cdot 0{,}0473}{0{,}99\cdot 0{,}0473+0{,}04\cdot 0{,}9527}=\frac{0{,}046\,827}{0{,}084\,935}\approx 0{,}5513$$

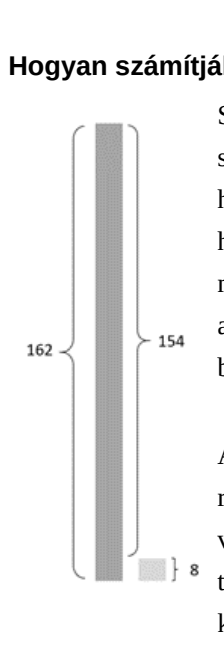
A negatív prediktív érték meghatározása a Bayes-tétellel:

$$P(\bar{B}\mid \bar{A})=\frac{P(\bar{A}\mid \bar{B})\cdot P(\bar{B})}{P(\bar{A}\mid \bar{B})\cdot P(\bar{B})+P(\bar{A}\mid B)\cdot P(B)}=\frac{0{,}96\cdot 0{,}9527}{0{,}96\cdot 0{,}9527+0{,}01\cdot 0{,}0473}=\frac{0{,}914\,592}{0{,}915\,065}\approx 0{,}9995$$

A koronavírus-tesztek megbízhatósága

A koronavírus esetén alkalmazott teszttípusok[10] (PCR-, antitest-, antigén-teszt) hatékonyságával, különböző tesztek egymás után történő alkalmazásával kapcsolatos részletes számításokat találunk Dobreán István „A Bayes-statisztika alkalmazása mindennapi helyzetekben” című szakdolgozatában.

Hogyan számítják a vakcinák hatékonyságát?[11]



Sok helyen hallottuk azt a kifejezést, hogy X vakcina ilyen és ilyen százalékos hatékonysággal véd a koronavírus ellen. Megnézzük, hogyan határozzák meg ezeket az értékeket. Előtte fontos kiemelni, hogy nem mindegy, hogy ez az adat megfertőződésre, tünetes megbetegedésre, súlyos betegség kialakulására, kórházba kerülésre avagy a halálos kimenetelre vonatkozik-e. (És akkor még nem beszéltünk a különböző koronavírus-variánsok elleni védelemről.)

A Pfizer vakcinájának vizsgálatában körülbelül 43 000 ember vett részt (a pontos szám 43 661). Első körben feltételezzük, hogy a vizsgálatban résztvevőknek pontosan a fele kapott valódi vakcinát, a többieket hatóanyag nélküli placebóval oltották be[12]. Előbbit kísérleti csoportnak, utóbbit kontrollcsoportnak nevezzük. A vizsgált személyek közül a vizsgálati periódusban 170-en kapták el a Covidot, közülük 8-an kaptak hatóanyagot, 162-en placebót. A vakcina hatékonyságát az mutatja meg, hogy a kontrollcsoportban regisztrált megbetegedések számához képest milyen arányú a megelőzött megbetegedések száma a kísérleti csoportban.

A fenti esetben ez az arány $\frac{154}{162}\approx 95\%$.

Ha a kontrollcsoport és a kísérleti csoport nem egyforma létszámú, akkor létszámok helyett százalékokkal végezzük el ugyanezt a számolást. A fenti adatokkal ez a levezetés így nézne ki:

A kísérleti csoportban a megbetegedések aránya $\frac{8}{21\,500}\approx 0{,}037\%$.

A kontrollcsoportban a megbetegedések aránya $\frac{162}{21\,500}\approx 0{,}75\%$.

A megelőzött betegségek aránya a kísérleti csoportban: $0{,}75\%-0{,}037\%=0{,}713\%$.

A megelőzött betegségek aránya a kontrollcsoport megbetegedéseihez képest: $\frac{0{,}713}{0{,}75}=95\%$.

Fontos kiemelni, hogy a 95%-os hatékonyság nem azt jelenti, hogy 100 beoltott emberből 5 fog megbetegedni! A 95% az egyén, nem pedig a csoport szintjén hordoz jelentést: aki megkapja az oltást, annak 95%-kal kisebb esélye van arra, hogy megbetegedjen.

Nézzünk meg néhány fiktív forgatókönyvet.

Tegyük fel, hogy mindkét csoportban ugyanannyian betegedtek meg. Ekkor a vakcina hatékonysága 0%, hiszen a megelőzött megbetegedések aránya (azaz a törtünk számlálója) 0.

Az Egészségügyi Világszervezet (WHO) annak a vakcinának a sürgősségi jóváhagyását tartja elfogadhatónak, amelyik eléri legalább az 50 százalékos hatékonyságot. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a megelőzött megbetegedések aránya legalább 2-szer akkora, mint a kontrollcsoportban a megbetegedések aránya.

Tegyük fel, hogy a vizsgálat végén azt kapjuk, hogy a vakcina hatékonysága 70%, és tudjuk, hogy a kontrollcsoportban a megbetegedések aránya $0{,}75\%$ volt. Számoljuk ki, hogy a kísérleti csoport hány százaléka kapta el a betegséget!

A kísérleti csoportban a megbetegedések aránya x.

A kontrollcsoportban a megbetegedések aránya 0,0075.

A megelőzött betegségek aránya a kísérleti csoportban: $0{,}0075-x$.

A megelőzött betegségek aránya a kísérleti csoport megbetegedéseihez képest: $\frac{0{,}0075-x}{0{,}0075}=0{,}7$.

Az egyenlet megoldása: $x\approx 0{,}225\%$.

A különböző vakcinák hatékonysági mutatóit akkor lenne értelme összehasonlítani, ha azonos járványügyi helyzetben, azonos variánsra vizsgálnák őket. A Pfizernél jóval alacsonyabb százalékos mutatókkal rendelkező Janssen vakcinát például súlyosabb járványügyi helyzetben, fertőzőbb variánsok terjedése idején vizsgálták.

Függelék: a források ellenőrzésének fontosságáról

A felhasznált anyagok kapcsán érdemes kitérni a forrásaink ellenőrzésének fontosságára. A koronavírussal kapcsolatos információk esetén az sem mindegy, hogy az adott cikk vagy videó mikori, hiszen az új kutatási eredmények fényében változhat a tudásunk.

A linkelt forrásokból szemezgetve van, amikor a szerző szakértelme garantálja az információk hitelességét. Ferenci Tamás, Röst Gergely, Csoma Eszter és Constantin Tamás idézett cikkei, nyilatkozatai esetén ez a helyzet.

Sok esetben az írást megjelentető sajtóorgánum lehet a hitelesség biztosítéka, bár nem árthat a szerző személyének is utánajárni. Megbízhatunk a tudományos ismeretterjesztő folyóiratokban (pl. Természet Világa, Érintő), illetve a tudományt népszerűsítő weboldalakon megjelent cikkekben (Qubit, brilliant.org, Szkeptikus Társaság).

A különböző videómegosztó oldalakról származó anyagokat is érdemes ellenőrizni.

- A többször idézett Zállatorvos koronavírussal kapcsolatos videóit Kemenesi Gábor virológus lektorálta.
- A Szertár csatorna a természettudományok népszerűsítését tűzte ki céljául.
- A Zanza tv magyar nyelvű videós tananyagok gyűjteménye, melyeket tantárgy, évfolyam és témakör szerint csoportosítottak.
- A Numberphile videóiban matematikusok szólalnak meg.
- A TED-Ed oktatási célra szánt rövid animációs filmek gyűjteménye.
- A 3Blue1Brown csatorna a matematikai összefüggések vizualizálását tűzte ki céljául.

Volf Annamária

Városmajori Gimnázium

Lábjegyzetek

[1] A tananyagban szereplő hivatkozások, görbék a 2021. júliusi állapotokat mutatják.
[2] A témához fontos forrás Ferenci Tamás cikke: https://index.hu/velemeny/olvir/2020/05/02/agyorstesztekhasznalhatatlansagarol/
[3] Forrás: Zállatorvos
[4] Forrás: Lakos András, Ferenci Tamás https://index.hu/techtud/2019/06/28/tevhitek_nehezitik_a_lyme-kor_elleni_vedekezest/
[5] https://index.hu/techtud/2019/06/28/tevhitek_nehezitik_a_lyme-kor_elleni_vedekezest/
[6] Forrás: Kit Yates: Ne hidd el az igazságot – Miért (szinte) minden matematika? (Athenaum, 2020)
[7] Forrás: http://daganatok.hu/rakszures/mellrak-szures/mammografia

Adatkezelés Elfogadom.

mammográfiai eredménnyel érkezik a rendelőjükbe, mekkora eséllyel van emlőrákja. A paraméterek a következők szerint adták meg: prevalencia 1%, szenzitivitás 90%, specificitás 91%. A részvevők többsége a megadott válaszlehetőségek közül (81%, 90%, 10%, 1%) a 81%-ot választotta. A helyes válasz a 10%.
[9] Feladatsor: http://dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2017tavasz_emelt/e_matma_17maj_fl.pdf , pontozókulcs: http://dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2017tavasz_emelt/e_matma_17maj_ut.pdf
[10] A koronavírus diagnosztizálására használt teszttípusokról Csoma Eszter mikrobiológus összefoglalójából tájékozódhatunk részletesebben: https://tudomany.hu/cikkek/a-koronavirus-fertozes-kimutatasanak-utvesztoi-azaz-melyik-teszt-modszer-mire-es-hogyan-hasznalhato-111225
[11] Forrás: Constantin Tamás: Miért nincs még olyan, hogy „legjobb” COVID-19 oltás? https://mierted.com/miert-nincs-olyan-hogy-legjobb-covid-19-oltas/
[12] Az orvosi kutatások módszertanának fontos fogalmait közérthetően magyarázza el a Szkeptikus Társaság cikke: https://szkeptikus.blog.hu/2008/01/01/nagy_adag_szkepticizmus_a_newsweek_szerk

statisztika matematikatanítás járványtan valószínűségszámítás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Horváth Eszter, Fried Katalin 2022. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Úton az egyenletek használata felé

Január a középiskolai írásbeli felvételik ideje. Gyermekünk, unokánk, távolabbi rokonunk vagy ismerőseink egyike-másika felvételizik. Hallunk azokról a feladatokról, amelyek kihívást jelentettek számukra.

Előfordulhat, hogy megkérnek, segítsünk a vizsgára való felkészülésben. Az első, hogy megismerkedjünk az elmúlt évek felvételi követelményeivel. Szerencsére 2001 óta a feladatsorok elérhetőek az Oktatási Hivatal honlapján:

`https://www.oktatas.hu/kozneveles/kozepfokufelvetelieljaras/kozpontifeladatsorok`

Az Érintő 2021. márciusi számában olvashatunk a tavalyi nyolcosztályos, hatosztályos és négyosztályos gimnáziumi felvételik általános értékeléséről.

A hatosztályos gimnáziumok felvételi anyagait tanulmányozva láthatjuk, hogy minden évben előfordulnak olyan szöveges feladatok, amelyeket felnőttként ösztönösen egyenlettel oldanánk meg. Milyen eszközei vannak a hatodik osztályos gyerekeknek ilyen problémák megoldására? A korábbi években a betűs kifejezések használata, nyitott mondatok, egyszerű egyenletek megoldása a hatodik évfolyam második felében szerepelt, tehát már akkor is a felvételi időszak után. Az új NAT bevezetésével ezek a módszerek későbbi évfolyamokra kerültek. Tehát ma az egyenletmegoldás nem a 12 éves diákoktól elvárt rutin. Ők vajon hogyan birkóznak meg a szöveges feladatokkal, mennyire tudnak betűket használni az összefüggések leírására? Logikai következtetéseket használnak? Esetleg egyenletmegoldási módszerekhez hasonlót alkalmaznak? Megfogalmazva a fő kérdést: **Tanítsuk meg nekik az egyenletek megoldásának néhány szokásos módszerét a felvételire készülve?**

A Kempelen Farkas Gimnázium hatodikos diákjainak feladtunk 8 olyan példát, amelyek az előző 10 év valamelyikében felvételi feladatok voltak. Bizonyos feladatokat órán, másokat otthon oldottak meg szorgalmi feladatként. Az órán egyénileg dolgoztak, otthon több idejük volt a megoldásra, esetleg szülői segítséget is kaphattak. Azt kértük tőlük, hogy megoldásaikat indokolják is, ellentétben a központi írásbeli feladatok követelményeivel, ahol csak a végeredményt kell megadniuk, a javítási útmutató általában ezt értékeli.

Az alábbiakban bemutatunk néhány megoldást a diákok munkáiból. Elemezzük gondolkodásmódjuk sajátosságait, értékeit. Javaslatokat teszünk arra, hogy a felvételi rendszerétől függetlenül **a mindennapi tanítási gyakorlatban milyen módszerek megismertetését ajánljuk ebben az életkorban**.

Ezeket a feladatokat tanárszakos hallgatók is megoldották, – természetesen egyenlettel – de kérésre adtak más típusú megoldásokat is. Erről is beszámolunk a cikk végén.

A tankönyvek is változatos módszereket kínálnak a szöveges feladatok megoldására, ezekre a tankönyvekre is utalunk a befejezésben.

A feladatokra a kitűzés dátumával és a feladatsorban elfoglalt sorszámukkal fogunk hivatkozni. A megoldásokat nem szó szerint idézzük. A 12 éves gyerek megoldásában sokszor meg kell érezni a mögötte lévő gondolatot, amit esetleg még nem tud korrekt módon szavakba önteni. A cikk olvasója számára érthető formára hoztuk, eközben figyeltünk arra, hogy ne hamisítsuk meg a benne lévő eredeti gondolatot – több feladat esetében a diákmunka fotóját is megadtuk. Többféle megoldás született mindegyik feladat, feladatrész esetében. Megadtuk a feladat megoldását egyenlet alkalmazása nélkül és egyenlet használatával is.

1. (2022. január 22. – 9. feladat)

Anna és Berci lemérte egy téglalap alakú kert három szomszédos oldala hosszának összegét. Az Anna által lemért oldalak hosszának összege 72 méter, a Berci által lemért oldalak hosszának összege 75 méter.

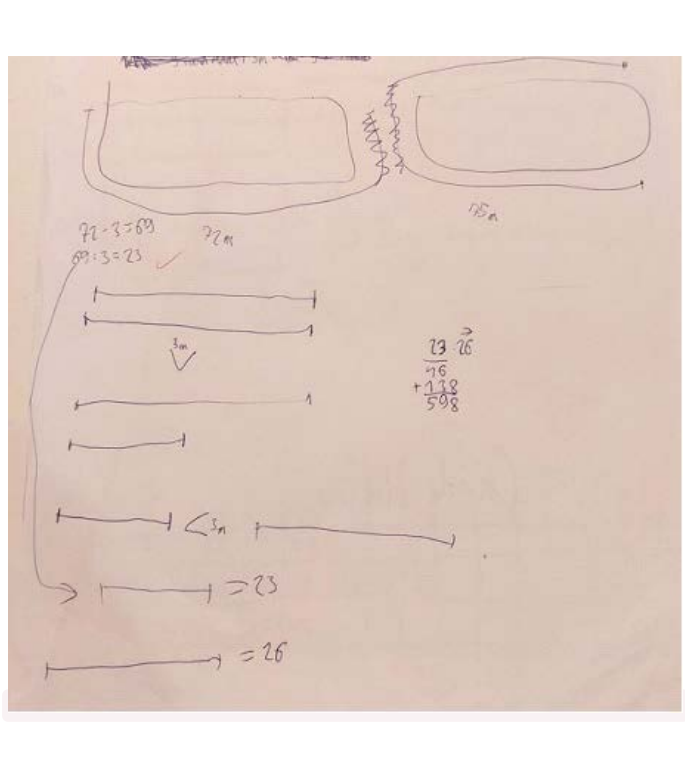
a) Hány méterrel hosszabb a kert hosszabb oldala a rövidebbnél?

b) Hány méter a kert rövidebb oldalának hossza?

c) Hány méter a kert kerülete?

d) Hány négyzetméter a kert területe?

Egy megoldás következtetéssel:


72−3=69
69:3=23
72m
75m
3m
23 26
·26
+138
598
<3m
=23
=26

Ebből a leírásból ez a gondolatmenet olvasható ki:

A téglalap két oldala a és b:

$$75-a=72-b$$

a) Ebből látható, hogy az a oldal 3 méterrel nagyobb b-nél.

b) Ezért $72-3=69$ a rövidebb oldal háromszorosa, azaz $b=69:3=23$ (m).

c) A hosszabb oldal $a=23+3=26$. A kerület $k=2\cdot(a+b)=98$ (m)

d) A terület $t=26\cdot23=598$ (m^2)

Sokan használtak betűket az összefüggések leírására. Néhányan eljutottak az egyenletrendszer megoldásáig is.

$$2a+b=72$$

$$2b+a=75$$

Összeadva:

$$3a+3b=147$$

$$a+b=49$$

A kerület

$$k=2\cdot49=98$$

$$a=72-49=23$$

$$b=49-23=26$$

Kicsit „bonyolultabban”:

$$2a+b=72$$

$$2b+a=75$$

$$(72-2a)\cdot2+a=75$$

$$144-4a+a=75$$

$$69-3a=0$$

$$69=3a$$

$$a=23$$

$$b=26$$

2. (2020. január 18. – 8. feladat)

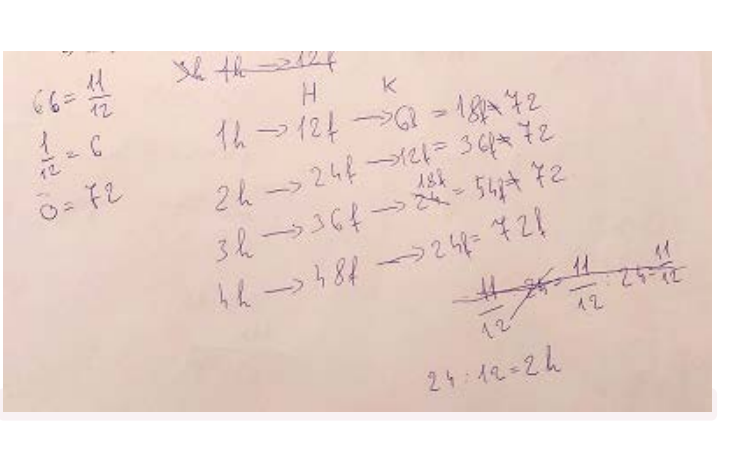
Hajni az őszi szünetben matematikafeladatokat gyakorolt. Hétfőtől minden reggel kijelölte az aznapi feladatokat. Keddtől kezdve minden nap hatszor annyi feladatot jelölt ki, mint amennyit előző nap nem tudott helyesen megoldani. Hétfőn és kedden is az aznapra kijelölt feladatok $\frac{11}{12}$ részét oldotta meg helyesen. Ezen a két napon Hajni összesen 66 feladatot oldott meg helyesen.

a) Hányszor annyi feladatot nem tudott megoldani helyesen hétfőn, mint kedden?

b) Hány feladatot oldott meg helyesen hétfőn?

c) Hány feladatot nem tudott helyesen megoldani kedden?

A feladatot megoldhatjuk próbálgatással:


66 = 11/12
1/12 = 6
6 = 72
H K
12 → 12 → 6 → 18 ≠ 72
24 → 24 → 12 → 36 ≠ 72
36 → 36 → 18 → 54 ≠ 72
48 → 48 → 24 → 72
23:1 = 2:1

Ezt a megoldást így írhatjuk le a felnőttek nyelvén:

Hétfőn és kedden Hajni 66 feladatot oldott meg helyesen. Ez a feladatok $\frac{11}{12}$ része. Ekkor $\frac{1}{12}$ rész 6 feladat. Összesen $66+6=72$ feladattal foglalkozott.

Hétfő	Hétfőn hibás	Kedd	Kedden hibás	Összesen
12	1	6	0,5	$18\neq72$
24	2	12	1	$36\neq72$
36	3	18	1,5	$54\neq72$
48	4	24	2	72 jó

Ebből megadható a válasz a kérdésekre.

Következtethetünk

a) Hétfőn a feladatok $\frac{11}{12}$ részét megoldotta, $\frac{1}{12}$ részét pedig nem.

$\frac{1}{12}\cdot6=\frac{1}{2}$, tehát kedden fele annyi feladatot tűzött ki, mint amennyit hétfőn. Kedden fele annyi feladatból fele annyit oldott meg és fele annyit nem, mint hétfőn.

A válasz az *a)* kérdésre: kétszer annyit.

b) A 66 feladatot 2:1 arányban kell felosztani: $66:3=22, 22\cdot2=44$, tehát 44 feladatot oldott meg helyesen hétfőn.

c) Kedden 22 feladatot oldott meg helyesen. Ez a feladatok $\frac{11}{12}$ része. Az $\frac{1}{12}$ rész $22:11=2$, tehát kedden 2 feladatot nem oldott meg helyesen.

Egyenlettel így dolgozhatunk:

Hétfőn x feladat. Megoldva $\frac{11}{12}x$, hibás $\frac{1}{12}x$.

Kedden $6\cdot\frac{1}{12}x=\frac{1}{2}x$. Megoldva $\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{12}x=\frac{11}{24}x$.

$$\frac{11}{12}x+\frac{11}{24}x=66$$

$$\frac{33}{24}x=66$$

$$33x=66\cdot24=1684$$

$$x=1584:33=48$$

Ebből könnyen megkapjuk a feltett kérdésekre a válaszokat

Két ismeretlennel így jutunk eredményre:

hétfő: x	helyes $\frac{11}{12}x$	helytelen $\frac{1}{12}x$
kedd: $y=\frac{6}{12}x=\frac{1}{2}x$	helyes $\frac{11}{12}y$	helytelen $\frac{1}{12}y$

$$\frac{11}{12}x+\frac{11}{12}y=66$$

$$\frac{1}{12}x+\frac{1}{12}y=6$$

$$x+y=72$$

$$x+\frac{1}{2}x=72$$

$$3x=144$$

$$x=48$$

3. (2020. január 23. – 10. feladat)

Az osztály tanulói közül 12-en járnak matematika-szakkörre. 5-tel több fiú nem jár matematika-szakkörre, mint ahány lány jár. Ugyanannyi fiú jár matematika-szakkörre, mint ahány lány nem jár. A lányok közül 2-vel többen járnak matematika-szakkörre, mint ahányan nem járnak.

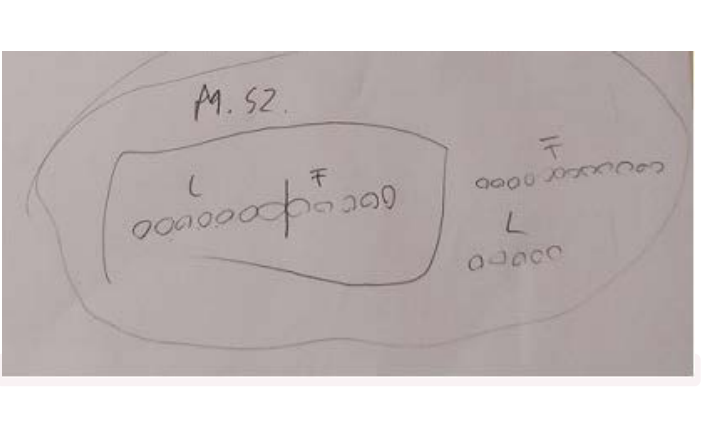
a) Hány lány jár az osztályba?

b) Hány fiú jár az osztályba?

c) Hány lány jár matematika-szakkörre?

Több jó megoldást találtunk a megoldások között minden indoklás nélkül. Azt tételezzük fel, hogy a gyerekek agyában a megoldáshoz vezető út összetettebb, mint amit ebben a korban meg tudnak fogalmazni. Ha ilyenkor például szakkörön rákérdezünk, akkor szóban körül tudják írni a gondolatmenetüket.

Ilyen gondolkodásra utal, amit ez a gyerek írt:



Láttunk egyenletrendszeres megoldást is:

Jelölések:

FJ fiú jár szakkörre, FN nem jár. LJ Jár szakkörre, LN nem jár.

A feladat feltételei:

$$FN=LJ+5$$

$$FJ=LN$$

$$LJ=LN+2$$

$$FJ+LJ=12$$

ebből következik:

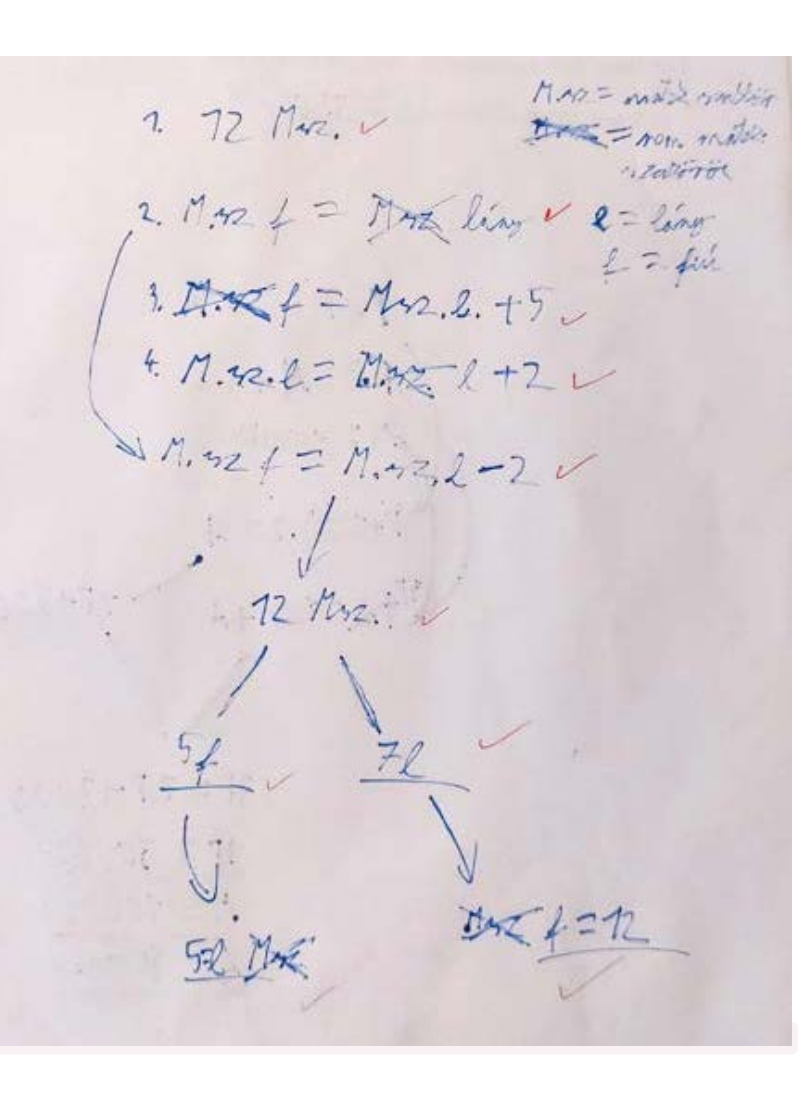
$$FJ+2=LJ$$

$$FJ=5=LN$$

$$LJ=7$$

$$FN=12$$

Ilyesmit mutat ez a munka:


1. 72 Mat.
2. M.sz. f = M.sz. lány
3. f = M.sz. l. +5
4. M.sz. l. = l +2
M.sz. f = M.sz. l. −2
12 M.sz.
5f
7l
5l
f = 12

Van, aki találgat:

12 szakkörös van. Tudjuk, hogy több lány jár mint fiú. Ez ilyen felosztásban lehetséges:

LJ	FJ
11	1
10	2
9	3
8	4
7	5

Csak az utolsó sor adataival nem jutunk ellentmondásra:

$$LN=FJ=5;\ FN=LJ+5=12.$$

…és találkoztunk a felnőttes megoldással is (otthon született), feltételezzük, hogy szülői segítség van mögötte. **Táblázatban foglaljuk össze, amit tudunk**:

	Jár	Nem jár
L	x	$x-2$
F	$x-2$	$x+5$
Össz	12	

$$x+x-2=12$$

$$x=7$$

4. (2019. január 24. – 10. feladat)

Peti és az öccse, Marci egy könyvet vásároltak édesanyjuk születésnapjára az édesapjukkal közösen. A két gyerek együtt feleannyit fizetett, mint az édesapa. Peti harmadannyit fizetett, mint az öccse és az édesapja együtt. Marci 1000 Ft-ot fizetett.

a) Az édesapa hányadrészét fizette a könyv árának?

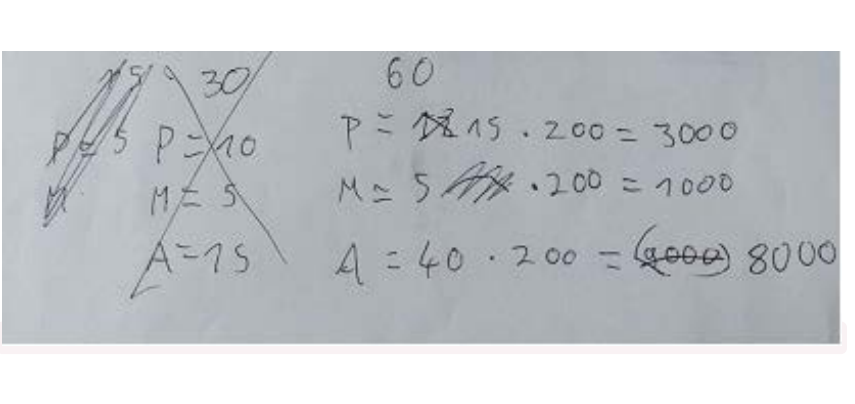
b) Peti hányadrészét fizette a könyv árának?

c) Hány forintot fizetett Peti?

d) Hány forintot fizetett az apa?

e) Hány forintba került a könyv?

A faladatot megoldhatjuk arányos következtetéssel:


30
60
P = 10
M = 5
A = 15
P = 15 · 200 = 3000
M = 5 · 200 = 1000
A = 40 · 200 = 8000

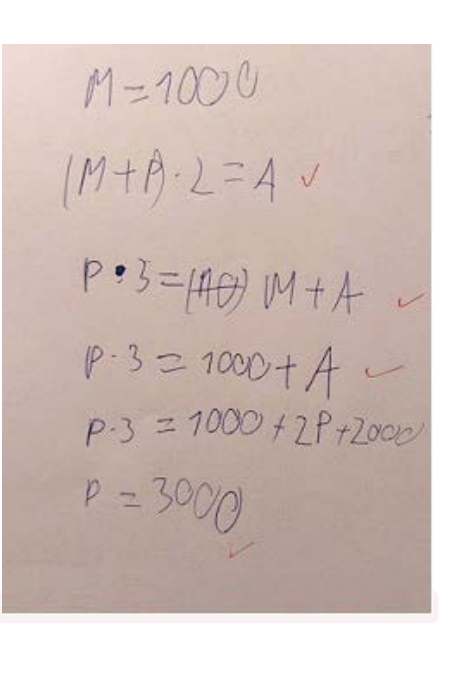
A fenti megoldásban ez a gondolat:

Az apa $\frac{2}{3}$-át, Peti $\frac{1}{4}$-ét fizette a könyvnek.

Ha 60 Ft lenne a könyv ára, akkor Peti 15-öt, apa 40-et, Marci 5-öt fizetne. Marci 200-szor annyit, 1000 Ft-ot fizet, ezért Peti $15\cdot200=3000$ Ft-ot, apa $40\cdot200=8000$ Ft-ot fizetett.

A könyv ára így 12 000 Ft.

Van olyan diák, aki betűket használ és egyenletet old meg:

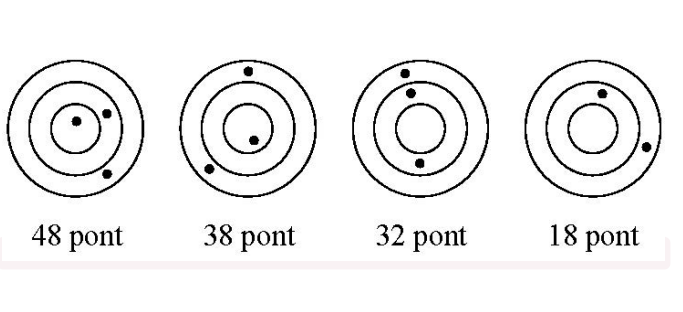

M = 1000
(M+P)·2 = A
P·3 = M+A
P·3 = 1000+A
P·3 = 1000+2P+2000
P = 3000

Petinek P forintja, Marcinak M forintja, édesapjuknak A forintja volt: $A=8000$.

Tehát a könyv ára 12 000 Ft.

5. (2016. január 16. – 7. feladat)

Az ábrán négy egyforma céltábla látható. A céltáblákon a lövések helyét pöttyök jelölik. A céltáblák alá odaírtuk, hogy hány pontot érnek összesen a céltáblára érkezett lövések (lásd ábra).



a) Hány pontot ér egy lövés, ha a legbelső körbe esik?

b) Hány pontot ér egy lövés, ha a legkülső sávba esik?

Következtetéssel:

A harmadik és az utolsó ábra alapján a belső tartomány értéke $48-18=30$ pont.

A harmadik és a negyedik ábra alapján a középső tartomány értéke $32-18=14$ pont.

A negyedik ábra alapján a külső tartomány értéke $18-14=4$ pont.

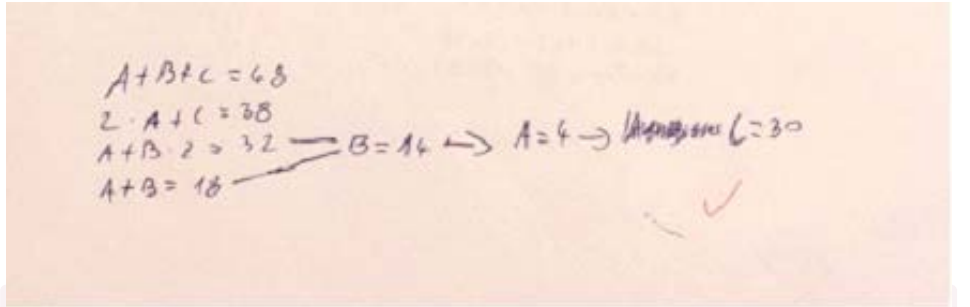
Ezt a gondolatmenetet egyenletekkel is leírhatjuk:

A belső tartomány a pont, a középső b pont, a külső tartomány c pont.

$$\begin{aligned} a+b+c&=48 \qquad (1)\\ a+2c&=38 \qquad (2)\\ 2b+c&=32 \qquad (3)\\ b+c&=18 \qquad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} (1)-(4) & a=30\\ (3)-(4) & b=14\\ (4) & c=4 \end{array}$$

Ehhez hasonló gondolatmenetet találtunk ebben a megoldásban is:


A+B+C = 48
2·A+C = 38
A+B·2 = 32
A+B = 18
B = 16
A = 4
C = 30

6. (2015. január 17. – 8. feladat)

Jancsi egy tábla csokoládét szeretne venni, de ehhez 60 Ft-ja hiányzik. Ezt a tábla csokit Sanyi sem tudja megvenni, mert 45 Ft-ja hiányzik hozzá. Együtt annyi pénzük van, hogy vehetnek egy ilyen tábla csokoládét, és még marad 10 Ft-juk.

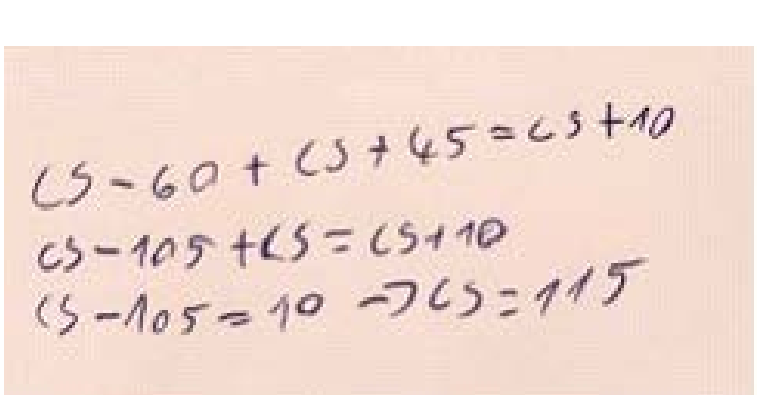
a) Kinek van több pénze és mennyivel?

b) Hány forintba kerül egy tábla csokoládé?

c) Hány forintja van Sanyinak?

A diákok általában egyenletet használtak a megoldáshoz:

A csoki cs forintba kerül:

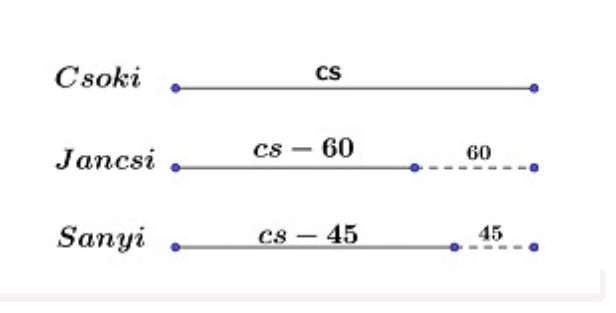

cs − 60 + cs + 45 = cs + 10
cs − 105 + cs = cs + 10
cs − 105 = 10 → cs = 115

a) Sanyinak 15 forinttal több pénze van.

b) Egy csoki 115 forintba kerül.

c) Sanyinak 70 forintja van.

Ábrával és következtetéssel:



Jancsi pénzéhez 70 Ft-ot kell adnunk, hogy a csoki áránál 10 forinttal többet kapjunk, ezért Sanyinak 70 Ft-ja van. Sanyi pénzéhez 55 forintot kell adni, hogy a csoki áránál 10 Ft-tal többet kapjuk, ezért Jancsinak 55 forintja van. A csoki $55+60=70+45=115$ forintba kerül.

7. (2014. január 18. –10. feladat)

Dóri, Sári és Anna a legutóbbi, matematikából írt dolgozatukról beszélgettek. A dolgozatukra kapott pontszámaikról a következőket mondták:

Dóri: Hármunk pontjainak összege 258, és nem az enyém lett a legrosszabb hármunk közül.

Anna: Nem az enyém a legjobb, de három ponttal magasabb hármunk pontszámának átlagánál.

Sári: Kettőtök pontjainak összege 30-cal több az én pontszámom kétszeresénél.

a) Kinek lett legkevesebb pontja hármuk közül?

b) Hány pontot kapott a dolgozatára Anna?

c) Hány pontot kapott a dolgozatára Sári?

Hogyan értsük, ha ezt írja egy diák:

< < nem A
nem A < <
< < nem S

Talán így:

A nagyságrendet úgy írjuk le, hogy írunk két < jelet, és beillesztjük a megfelelő információt a megfelelő helyre.

A nem a legnagyobb: … < … < nem A (Mert Anna ezt állítja.)

A nem a legkisebb (Mert nagyobb az átlagnál.): nem A < … < … (Ebből már következik, hogy A a középső.)

S nem a legnagyobb: … < … < nem S (Mert S kisebb, mint A és D átlaga. Ebből már következik, hogy D a legnagyobb.)

Tehát:

$$S<A<D$$

Az adatok közötti kapcsolatokat sokan leírták betűkkel:

$$258=D+A+S$$

$$S\cdot2+30=D+A$$

A megoldáshoz így juthatunk el:

$$A=258:3+3=89$$

$$D+S=258-89=169$$

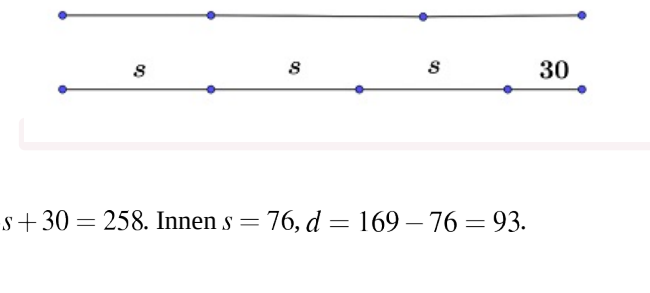
$$2S=D+89-30=D+59$$

$$2S=169-S+59$$

$$3S=228$$

$$S=228:3=76$$

Ha ábrát használunk:



Ez alapján $3s+30=258$. Innen $s=76, d=169-76=93$.

8. (2014. január 23. – 7. feladat)

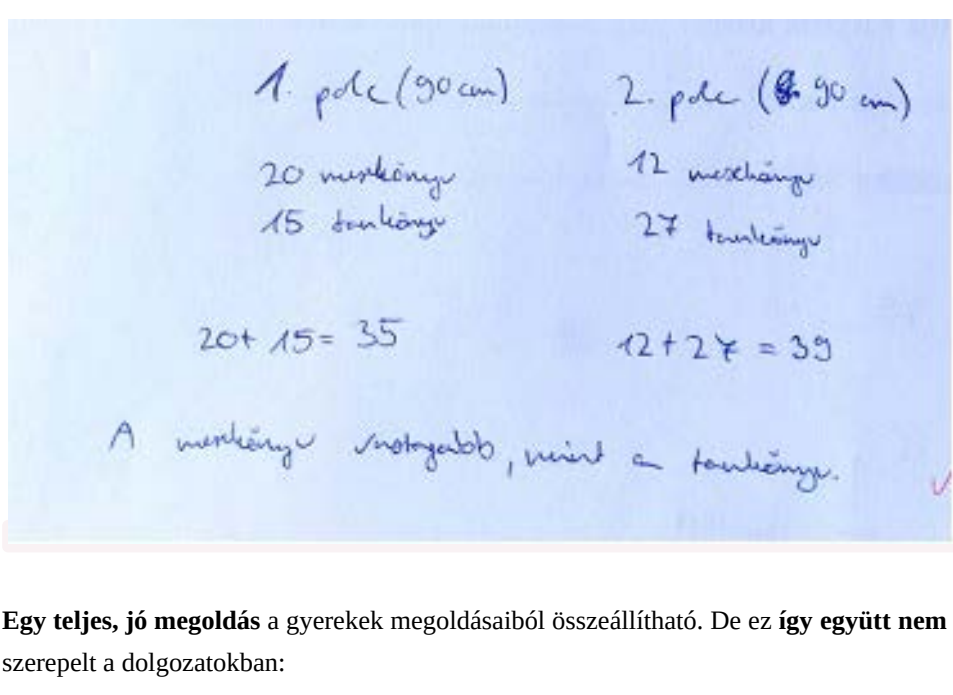
A könyvesbolt két egyforma hosszúságú polcára egyforma vastagságú mesekönyveket és egyforma vastagságú tankönyveket állítottunk egymás mellé. Az egyik polcot 20 mesekönyvvel és 15 tankönyvvel töltöttük ki, a másikat 12 mesekönyvvel és 27 tankönyvvel.

a) Hány tankönyv vastagsága egyenlő két mesekönyv vastagságával?

b) Hány mesekönyvvel tölthető ki a polc teljesen?

c) Hány centiméter vastag egy tankönyv, ha a polc hossza 90 cm?

Egy gondolat arra, hogy a mesekönyv a vastagabb:


1. polc (90 cm)
2. polc (90 cm)
20 mesekönyv
15 tankönyv
12 mesekönyv
27 tankönyv
20 + 15 = 35
12 + 27 = 39
A mesekönyv vastagabb, mint a tankönyv.

Egy teljes, jó megoldás a gyerekek megoldásaiból összeállítható. De ez **így együtt nem** szerepelt a dolgozatokban:

A második polcon $27-15=12$ tankönyvvel van több.

Az első polcon $20-12=8$ mesekönyvvel van több.

Ezért 12 tankönyv olyan vastag, mint 8 mesekönyv, tehát 3 tankönyv vastagsága egyenlő 2 mesekönyv vastagságával.

Az első polcon a $15=5\cdot3$ tankönyvet $5\cdot2=10$ mesekönyvre válthatjuk, ezért a polc szélessége 30 mesekönyvvel vastagságával egyezik meg, egy mesekönyv 3 cm vastag. 2 mesekönyv 6 cm, tehát 1 tankönyv 2 cm vastag.

Egyenlettel leírva:

A mesekönyv vastagsága m, a tankönyvvé t:

$$20m+15t=90$$

$$12m+27t=90$$

$$20m-12m=27t-15t$$

$$8m=12t$$

$$2m=3t$$

$$20m+5\cdot2m=30m=90$$

$$m=3$$

$$t=2$$

****

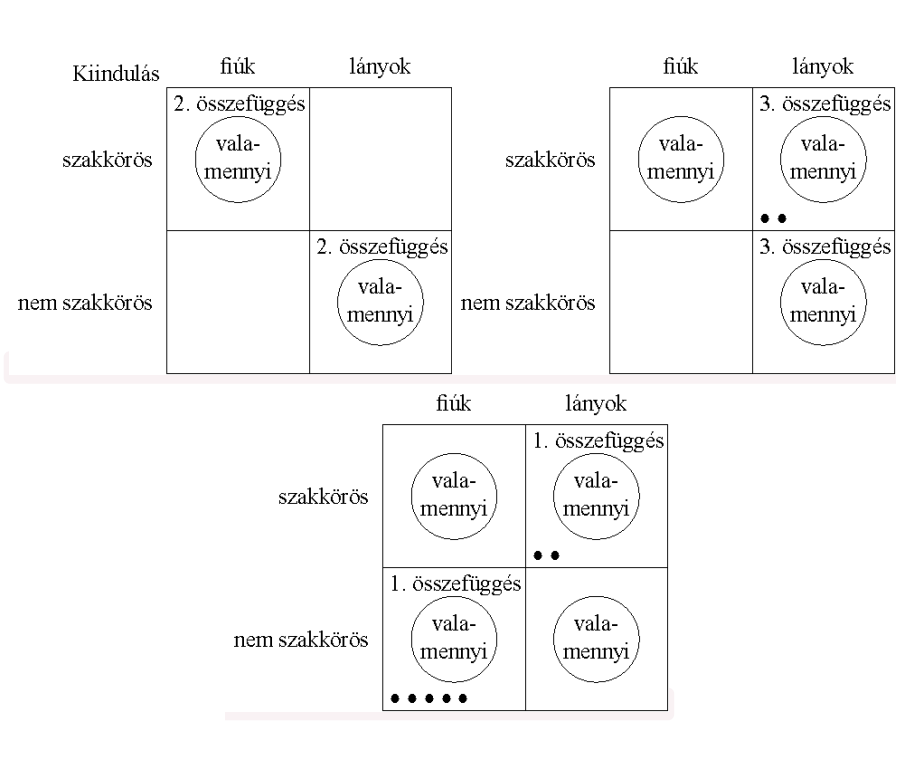
Ennek a 8 feladatnak a bemutatásával szerettük volna megmutatni, hogy az ilyen típusú feladatok komoly gondolkodási képességet kívánnak a hatodikos diákoktól. Ennek a felvételinek a célja az átlagosnál jobb képességű, tudású gyerekek mérése, a legjobbak kiválasztása, így fontos szerepük van ezeknek a nehezebb feladatoknak. Természetesen a feladat kitűzőinek figyelembe kell venniük a fiatal korból adódó gondolkozási módokat.

Elfogadom.

Tanárszakos hallgatók megoldásai

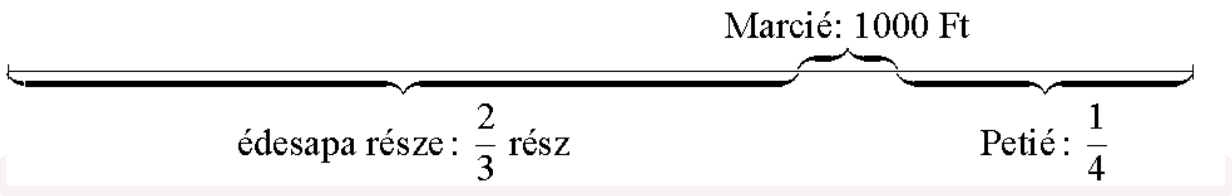
A tanárképzésben, az Elemi matematika tantárgy keretében lehetőség nyílik arra, hogy a tanárjelöltek megismerkedjenek elemi feladatmegoldási stratégiákkal, amennyiben gyerekkorukban ez kimaradt volna. A fenti feladatokat megoldattuk tanár szakos hallgatókkal is. A hallgatók mindegyike egyenlettel oldotta meg azokat, ám amikor azt is kikötöttük, hogy csak elemi módszerekkel dolgozhatnak, nagyon változatos megoldásötletekkel álltak elő. Említünk közülük kettőt.

A 3. feladatra halmazábrás megoldás készült (a lépéseket a követhetőség kedvéért külön ábrákra rajzoltuk):



Ezután a következtetés: két „valamennyi” meg kettő az 12, tehát a valamennyi 5-öt jelent, az osztály létszáma $4\cdot5+2+7=27$

A 4. feladat az olyan típusba sorolható, ahol egy mennyiséget arányokban, illetve értékekben határozunk meg. Ezeket akár szemléltetéssel és következtetéssel, vagy akár tisztán következtetéssel is meg lehet oldani.



Segít a szemléltetésben, ha az arányok a szakasz egyik oldalára, a mennyiségek a másik oldalra kerülnek. Ebből leolvasható (ami következtetéssel is adódik): édesapa az ár $\frac{2}{3}$, Peti az $\frac{1}{4}$ részét, ketten együtt a $\frac{11}{12}$ részét fizették ki, a hiányzó rész, az $\frac{1}{12}$, a Marci által befizetett 1000 Ft-nak felel meg, vagyis a könyv ára 12 000 Ft.

Hogyan jelennek meg ezek a módszerek a tankönyvekben?

Az 1978-as tantervhez kapcsolódóan (de már korábban is) a tankönyvek nagy hangsúlyt fektettek feladatok következtetéssel, szemléltetéssel történő megoldására. A mai 6. osztályos matematika tankönyvekben is többféle módszert láthatunk:

OH-MAT06TA Matematika 6. tankönyv ehhez kapcsolódó témakörei:

`https://www.tankonyvkatalogus.hu/pdf/OH-MAT06TAteljes.pdf`

Nyitott mondatok

Szöveges feladatok

OH-MAT06TB Matematika 6. tankönyv ehhez kapcsolódó témakörei:

`https://www.tankonyvkatalogus.hu/pdf/OH-MAT06TBteljes.pdf`

Nyitott mondatok megoldása lebontogatással, fordítás a matematika nyelvére

Szöveges feladatok megoldása szakaszos ábrázolással

Szöveges feladatok megoldása, fordítás a matematika nyelvére

A tankönyvek két változatának más a szerepe az oktatásban. A B változat a jobb képességű diákoknak több lehetőséget ad, a tehetséggondozásra szempontjaira talán jobban figyel. Azt is meg kell említenünk, hogy ezekben a könyvekben, ezen az évfolyamon betűk használata nem szerepel, mivel az új NAT-ban ez későbbi évfolyamokon kerül elő.

Visszatekintés tanári szemmel

A leírt megoldásokban láthatjuk, hogy tanítványaink „ösztönösen” használnak betűket, betűs kifejezéseket már ebben az életkorban is a matematikai kapcsolatok leírására. Egyszerű egyenleteket megoldanak. Mutattunk példát arra, hogy a feladatok próbálgatással, következtetéssel, arányosítással, ábrával, táblázat használatával is megoldhatók.

A próbálkozás mint módszer, természetes, de tudjuk, hogy csak akkor korrekt, ha minden esetet megvizsgálunk. Ezért, ha a megvizsgálandó esetek száma nem véges, akkor ez az irány nehezebb lehet, mint egy egyszerűbb következtetés. A szemléltetés, az arányos gondolkodás, a szisztematikus próbálkozás, a kétféle módon megadott mennyiségek összepárosítása mind nagyon fontos elemi gondolatok.

Ebben az életkorban szívet melengető kreatív ötletekkel állnak elő a gyerekek egy-egy feladatmegoldás során. Leírni viszont nem tudják precízen, ezért fontos, hogy a tanórákon, szakkörökön lehetőségük legyen szóban elmagyarázni a gondolataikat. Ehhez beszélgetésre van szükség, amelyben rá tudunk kérdezni a homályosabb részekre, ezzel is fejlesztve azt a képességet, hogy az indoklásokat kellő részletességgel tudják elmondani, leírni. Sajnos a központi írásbeli felvételikben erre nincs mód. Kérdéses, hogy a javításnál vajon minden javító tanár felismeri és mögé képzeli a meglévő tanulói gondolatokat, vagy sem. Engedi-e a megoldókulcs, hogy ezek a megoldások is teljes pontszámot érjenek? Fel merik-e vállalni a javító tanárok, hogy teljes értékű megoldásnak fogadják el az adott megoldást?

Az ilyen feladatmegoldások értékesek a logikus gondolkodásra nevelés szempontjából. Szomorú lenne, ha ezek helyett túl gyorsan tanulnák meg a gyerekek az egyenletmegoldás rutinját. Azt is látjuk, hogy amikor a szülők, tanárok a hatosztályos felvételire készítik a gyerekeket, akkor az egyenletmegoldásra is tanítják őket. Ezt „megtiltani” nem lehet. De tudjuk, hogy lehet és szabad másképp is. Sok gyerek használ ügyesen betűket az öszefüggések leírására és jó következtetéseket tud tenni ezek alapján, de ebben az életkorban ne siettessük az absztraktabb gondolkodást

Írásunk végén megköszönjük Csébics Anikónak, Nagy Emesének és Romhányi Katalinnak, a Kempelen Farkas Gimnázium tanárainak, hogy tanítványaikkal megírattják a felvételi feladatokat, illetve a témával kapcsolatos gondolataikat megosztották velünk.

Fried Katalin, ELTE TTK Matematikai Intézet
Horváth Eszter, Kempelen Farkas Gimnázium

matematikatanítás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

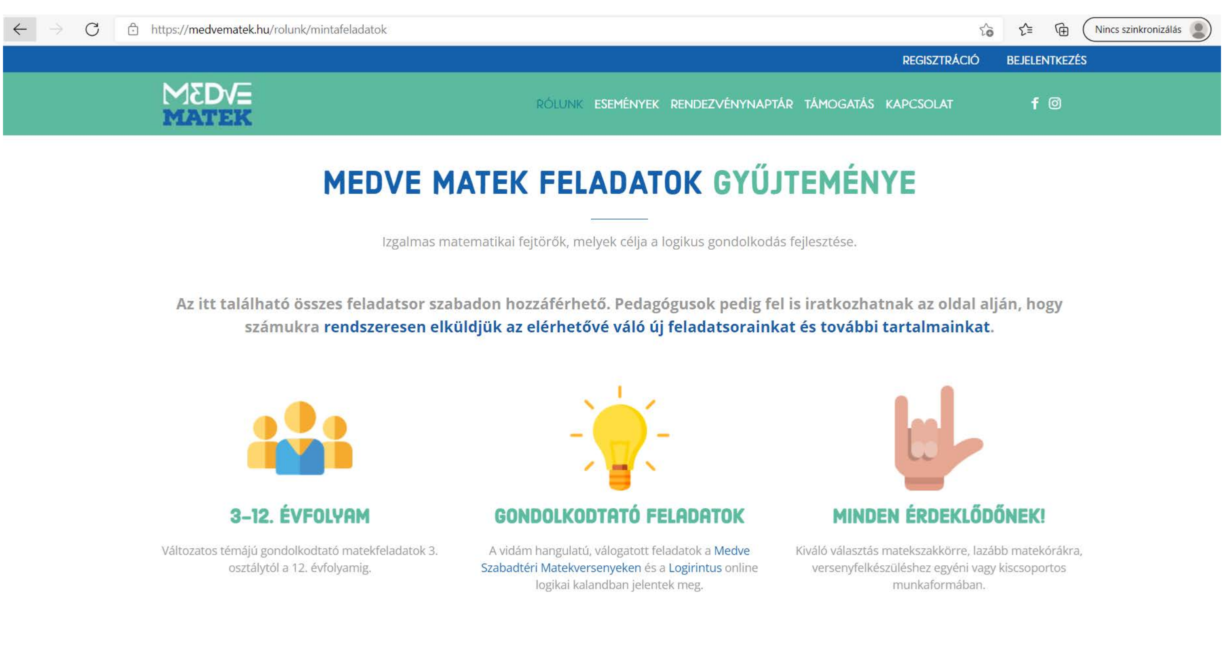
Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

Szerkesztő 2022. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Tavaszi felkészülés

Az április-májusi Medve Szabadtéri Matekversenyre – országszerte 18 helyszínre – március végéig lehet kedvezményesen jelentkezni tanároknak és csapatoknak 3.-tól 12. osztályosokig A készüléshez a Medve Matek csapata összeállított egy mintafeladatsort, ez is, a pontos időpontok, helyszínek, és a nevezés megtalálható honlapjukon.



https://medvematek.hu/rolunk/mintafeladatok

MEDVE MATEK FELADATOK GYŰJTEMÉNYE

Izgalmas matematikai fejtörők, melyek célja a logikus gondolkodás fejlesztése.

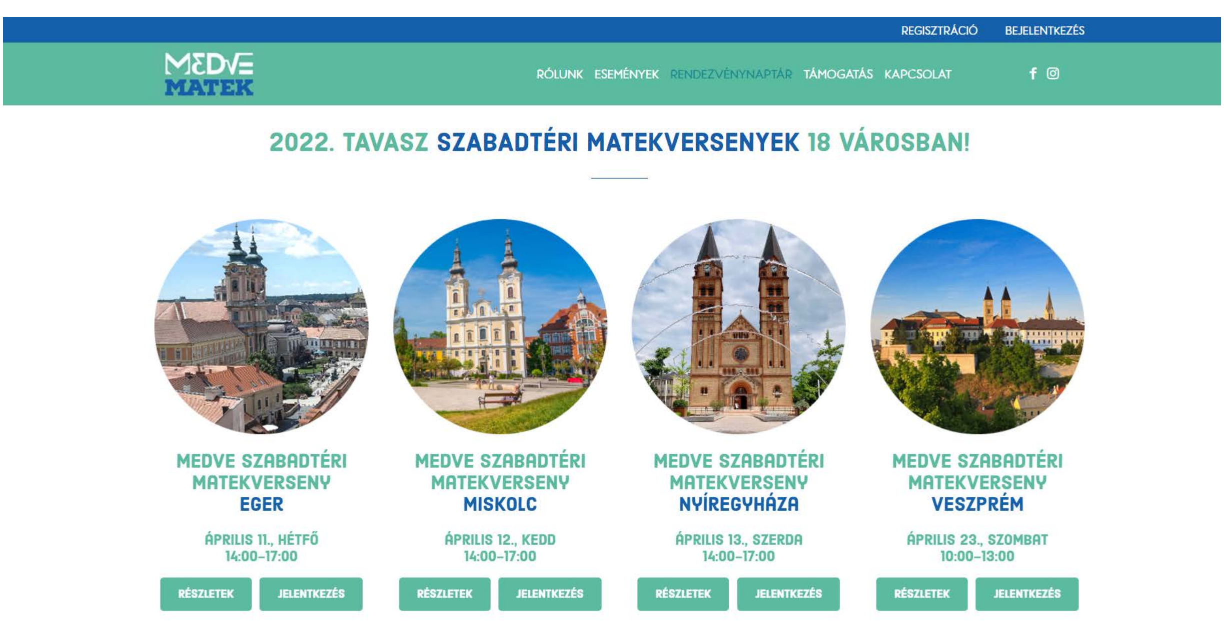
Az itt található összes feladatsor szabadon hozzáférhető. Pedagógusok pedig fel is iratkozhatnak az oldal alján, hogy számukra rendszeresen elküldjük az elérhetővé váló új feladatsorainkat és további tartalmainkat.

3–12. ÉVFOLYAM
Változatos témájú gondolkodtató matekfeladatok 3. osztálytól a 12. évfolyamig.

GONDOLKODTATÓ FELADATOK
A vidám hangulatú, válogatott feladatok a Medve Szabadtéri Matekversenyeken és a Logirintus online logikai kalandban jelentek meg.

MINDEN ÉRDEKLŐDŐNEK!
Kiváló választás matekszakkörre, lazább matekórákra, versenyfelkészüléshez egyéni vagy kiscsoportos munkaformában.

Nincs szinkronizálás
REGISZTRÁCIÓ
BEJELENTKEZÉS
MEDVE MATEK
RÓLUNK
ESEMÉNYEK
RENDEZVÉNYNAPTÁR
TÁMOGATÁS
KAPCSOLAT



2022. TAVASZ SZABADTÉRI MATEKVERSENYEK 18 VÁROSBAN!

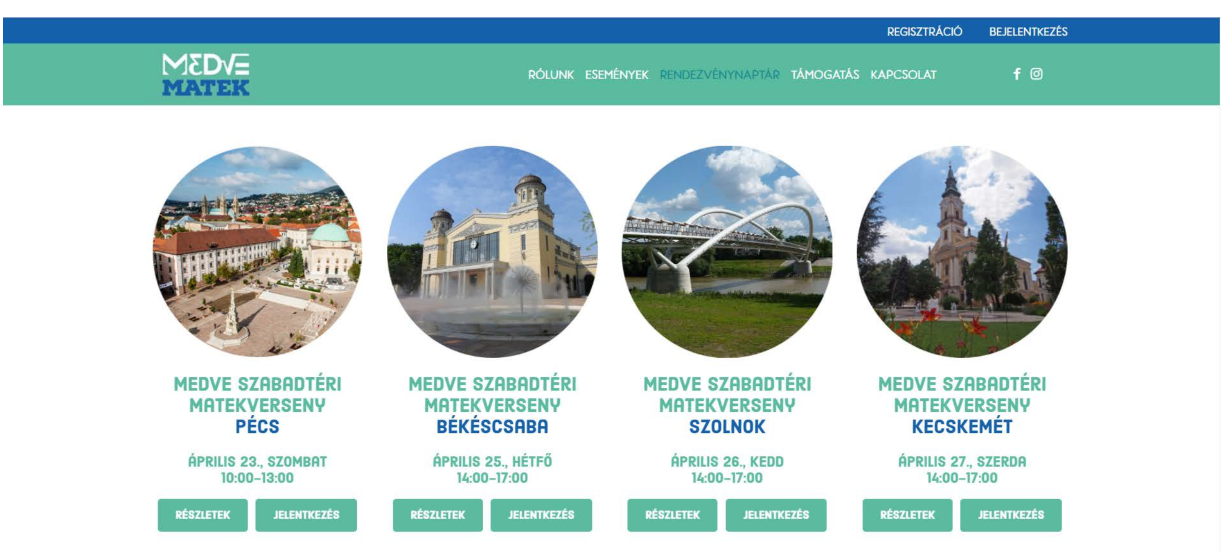
MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY EGER
ÁPRILIS 11., HÉTFŐ 14:00–17:00

MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY MISKOLC
ÁPRILIS 12., KEDD 14:00–17:00

MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY NYÍREGYHÁZA
ÁPRILIS 13., SZERDA 14:00–17:00

MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY VESZPRÉM
ÁPRILIS 23., SZOMBAT 10:00–13:00

REGISZTRÁCIÓ
BEJELENTKEZÉS
MEDVE MATEK
RÓLUNK
ESEMÉNYEK
RENDEZVÉNYNAPTÁR
TÁMOGATÁS
KAPCSOLAT
RÉSZLETEK
JELENTKEZÉS



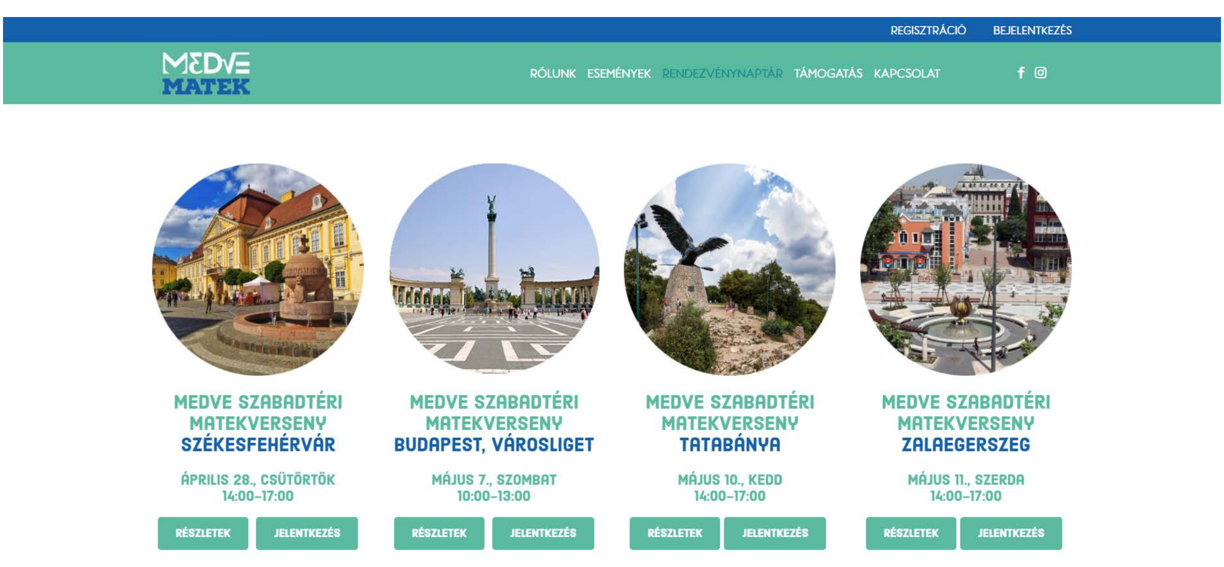
MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY PÉCS
ÁPRILIS 23., SZOMBAT 10:00–13:00

MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY BÉKÉSCSABA
ÁPRILIS 25., HÉTFŐ 14:00–17:00

MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY SZOLNOK
ÁPRILIS 26., KEDD 14:00–17:00

MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY KECSKEMÉT
ÁPRILIS 27., SZERDA 14:00–17:00

REGISZTRÁCIÓ
BEJELENTKEZÉS
MEDVE MATEK
RÓLUNK
ESEMÉNYEK
RENDEZVÉNYNAPTÁR
TÁMOGATÁS
KAPCSOLAT
RÉSZLETEK
JELENTKEZÉS



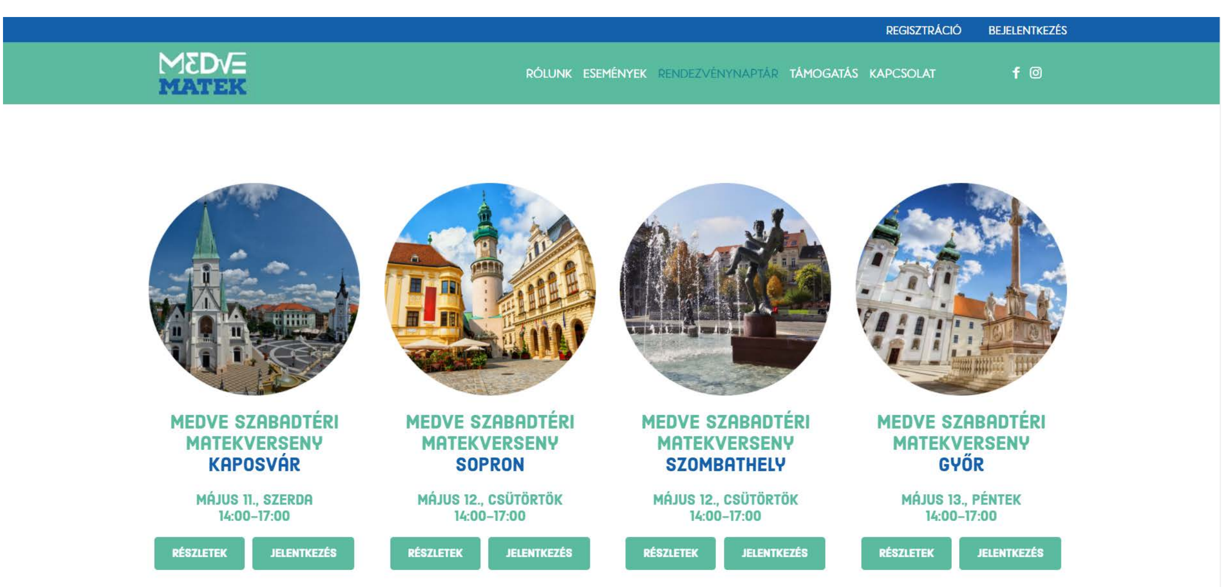
MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY SZÉKESFEHÉRVÁR
ÁPRILIS 28., CSÜTÖRTÖK 14:00–17:00

MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY BUDAPEST, VÁROSLIGET
MÁJUS 7., SZOMBAT 10:00–13:00

MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY TATABÁNYA
MÁJUS 10., KEDD 14:00–17:00

MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY ZALAEGERSZEG
MÁJUS 11., SZERDA 14:00–17:00

REGISZTRÁCIÓ
BEJELENTKEZÉS
MEDVE MATEK
RÓLUNK
ESEMÉNYEK
RENDEZVÉNYNAPTÁR
TÁMOGATÁS
KAPCSOLAT
RÉSZLETEK
JELENTKEZÉS



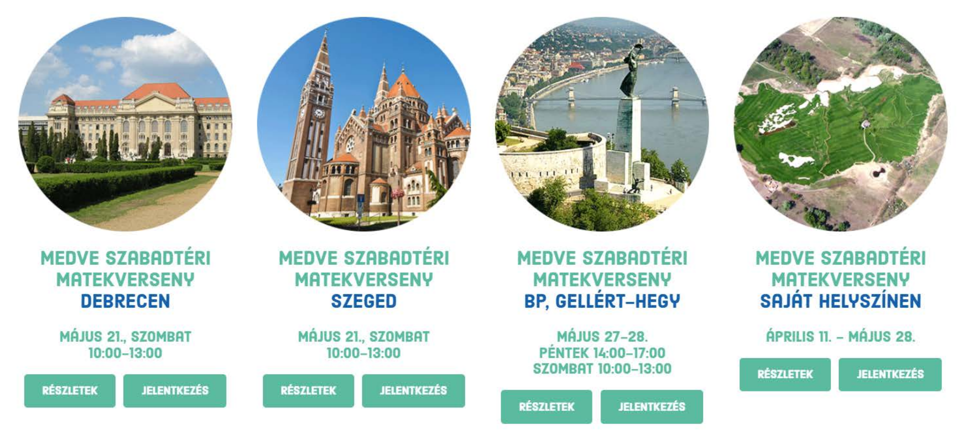
MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY KAPOSVÁR
MÁJUS 11., SZERDA 14:00–17:00

MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY SOPRON
MÁJUS 12., CSÜTÖRTÖK 14:00–17:00

MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY SZOMBATHELY
MÁJUS 12., CSÜTÖRTÖK 14:00–17:00

MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY GYŐR
MÁJUS 13., PÉNTEK 14:00–17:00

REGISZTRÁCIÓ
BEJELENTKEZÉS
MEDVE MATEK
RÓLUNK
ESEMÉNYEK
RENDEZVÉNYNAPTÁR
TÁMOGATÁS
KAPCSOLAT
RÉSZLETEK
JELENTKEZÉS



MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY DEBRECEN
MÁJUS 21., SZOMBAT 10:00–13:00

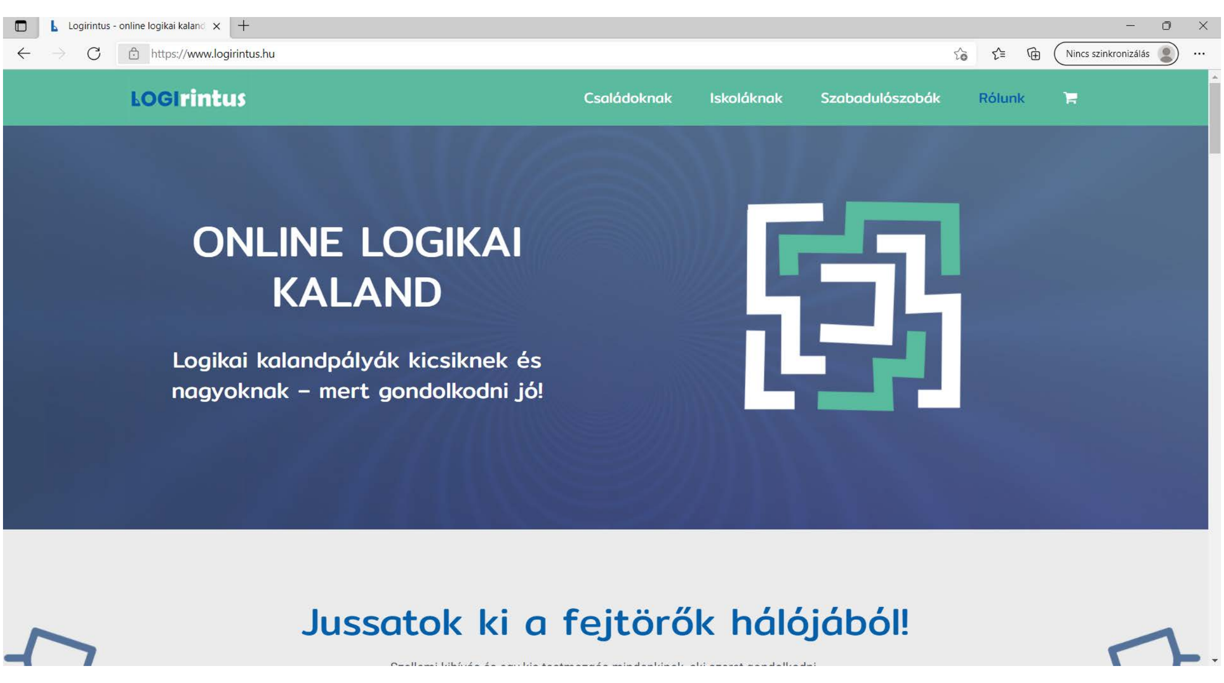
MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY SZEGED
MÁJUS 21., SZOMBAT 10:00–13:00

MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY BP, GELLÉRT-HEGY
MÁJUS 27–28.
PÉNTEK 14:00–17:00
SZOMBAT 10:00–13:00

MEDVE SZABADTÉRI MATEKVERSENY SAJÁT HELYSZÍNEN
ÁPRILIS 11. – MÁJUS 28.

RÉSZLETEK
JELENTKEZÉS

A Medve Matek szervezőit már bemutattuk 2017-ben és 2020-ban is, amikor elindították a nagysikerű szabadtéri versenyek „pótlására” a Logirintus online versenyeit. 2022 február utolsó hetére ismét ingyenes matekórai Logirintus pályákkal készültek, ráadásul ezúttal két különböző témakörben is. Megszokott matekos pályáik mellett pénzügyi tudatosságot fejlesztő kalandpályákkal is kedveskedtek az induló diákoknak. A kalandjáték egyértelműen nagy siker, és jó, hogy nemcsak iskolai, de családi játékra is van lehetőség.



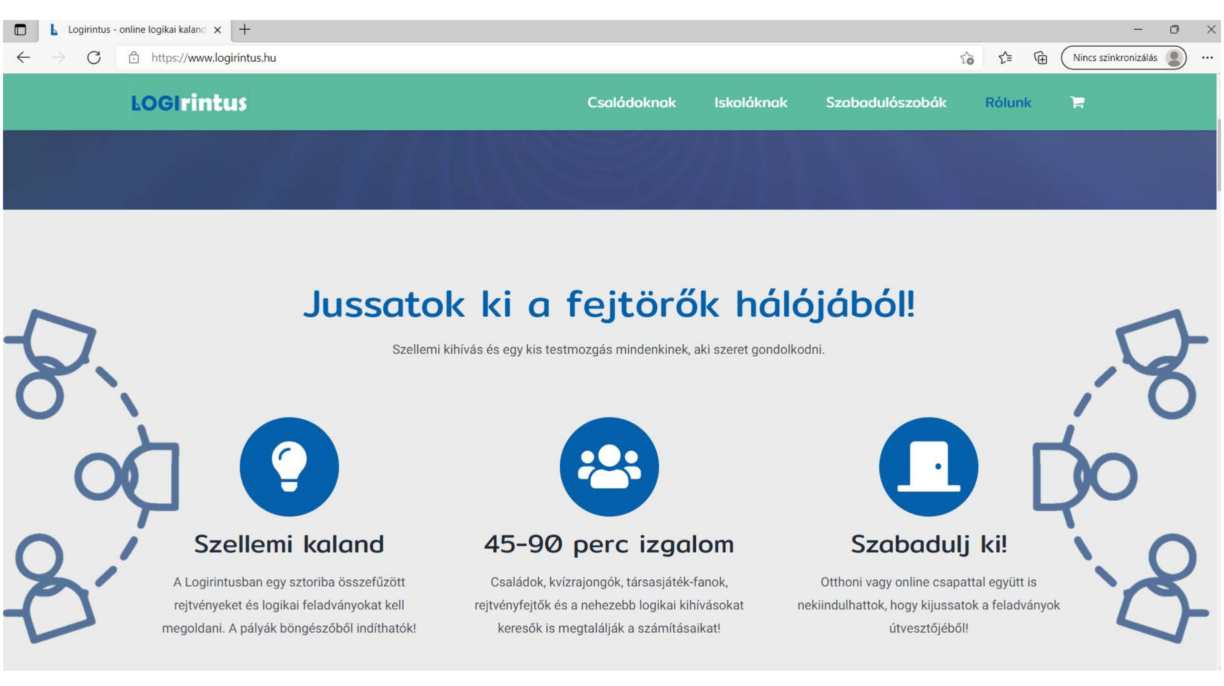
https://www.logirintus.hu

ONLINE LOGIKAI KALAND

Logikai kalandpályák kicsiknek és nagyoknak – mert gondolkodni jó!

Jussatok ki a fejtörők hálójából!

Logirintus - online logikai kaland
Nincs szinkronizálás
LOGIrintus
Családoknak
Iskoláknak
Szabadulószobák
Rólunk



Jussatok ki a fejtörők hálójából!

Szellemi kihívás és egy kis testmozgás mindenkinek, aki szeret gondolkodni.

Szellemi kaland
A Logirintusban egy sztoriba összefűzött rejtvényeket és logikai feladványokat kell megoldani. A pályák böngészőből indíthatók!

45-90 perc izgalom
Családok, kvízrajongók, társasjáték-fanok, rejtvényfejtők és a nehezebb logikai kihívásokat keresők is megtalálják a számításaikat!

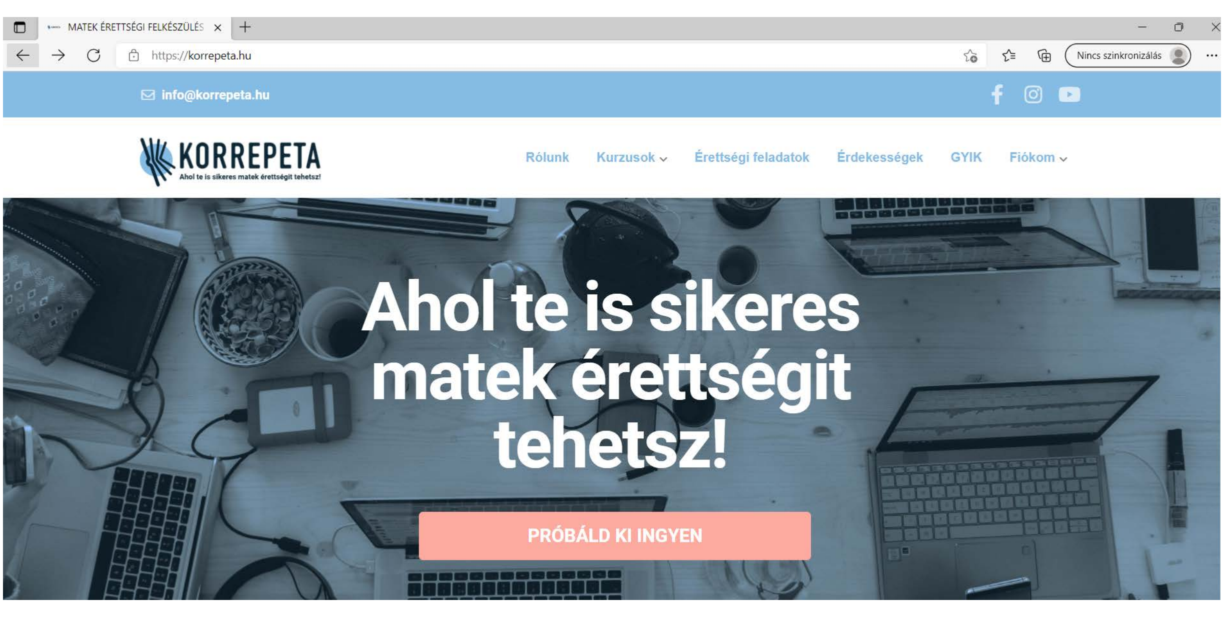
Szabadulj ki!
Otthoni vagy online csapattal együtt is nekiindulhattok, hogy kijussatok a feladványok útvesztőjéből!

Logirintus - online logikai kaland
https://www.logirintus.hu
Nincs szinkronizálás
LOGIrintus
Családoknak
Iskoláknak
Szabadulószobák
Rólunk

MEDVE
MATEK
Tanári Klub

Hírlevelük szerint a február utolsó hetén rendezett Logikai fejtörők hetén húszezren vettek rész. A regisztrált tanárok mindannyian megkapják a hírlevelet és letölthetik a tanórai Logirintus pályák megoldásfüzeteit. A szervezők létrehozták a Medve Matek Tanári Klub nevű Facebook-csoportot, hogy a tanárokkal közelebbi kapcsolatot ápoljanak, és ott is megosszák a versenyfelkészítő tartalmakat. Facebookon a Logirintus oldalon, vagy a https://www.logirintus.hu/ oldalon minden információt és tudnivalót megkaphat bárki az elkövetkező játékokról. Legközelebb 2022 őszén várható hasonló esemény.

Ugyancsak színvonalas online felkészítést ígér Gerőcs László tanár úr, aki KORREPETA elnevezésű honlapján középszintű és emelt szintű érettségire felkészítő kurzusokkal és videós tartalmakkal segíti a 12.-es diákokat.



https://korrepeta.hu

info@korrepeta.hu

Ahol te is sikeres matek érettségit tehetsz!

MATEK ÉRETTSÉGI FELKÉSZÜLÉS
Nincs szinkronizálás
KORREPETA
Ahol te is sikeres matek érettségit tehetsz!
Rólunk
Kurzusok
Érettségi feladatok
Érdekességek
GYIK
Fiókom
PRÓBÁLD KI INGYEN

☐ beszámolók ☐ matematikatanítás

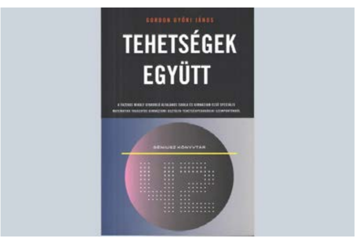
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ** ROVATBAN ELSŐSORBAN OLYAN KÖNYVEKRŐL SZERETNÉNK TUDÓSÍTANI ÉS OLYAN ELEKTRONIKUSAN ELÉRHETŐ ÍRÁSOKAT AJÁNLUNK, AMELYEK A MATEMATIKA BÁRMELY RÉSZE VAGY KAPCSOLATAI IRÁNT ÉRDEKLŐDŐK SZÁMÁRA KÍVÁNATOSAK LEHETNEK. (ROVATSZERKESZTŐ: *TÓTH JÁNOS.)*

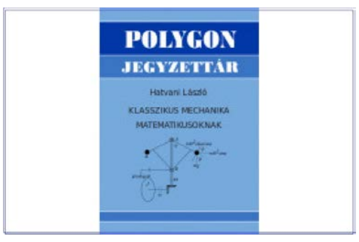


Oláh Vera

2022. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Tehetségek együtt – Specmat 1962–2022

Idén 60 éve, 1962 szeptemberében indult el Magyarországon az első speciális matematika tagozatos gimnáziumi osztály. Nagyon sokan írtak már róluk, rengeteg interjú készült legendás tagjaival, a nemrég megjelent kiadvány szerzője, *Gordon Győri János* azonban egy, a teljes osztályra kiterjedő kutatás eredményeit foglalja össze. Legfontosabb kérdése: ötven év távlatából a kutatásban részt vevők hogyan tekintenek vissza a speciális matematika tagozaton töltött éveikre, különösen tehetségpedagógiai szempontból. Tovább...



Gyebrószki Gergely

2022. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Klasszikus mechanika matematikusoknak

Hatvani László: Klasszikus mechanika matematikusoknak című könyve végigvezet minket az analitikus mechanika fejlődésének főbb állomásain, megmutatja, milyen utat jártak be a mechanika tudományterületét mai alakjára formáló őseink, mindezt matematikus szemléletmóddal. A *Polygon jegyzettár* kötetét *Gyebrószky Gergely* ismerteti.

Mark Kac
A véletlen rejtélyei

Szerkesztő

2022. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Mark Kac: A véletlen rejtélyei

Az egyik legjobb tudományos népszerűsítő könyv, amelyet valaha olvastam. Bölcs, szellemes, időszerű. – írta az Érintőben 2020-ban az angol nyelvű könyvről Simonovits András. A könyv most megjelent magyar nyelven is, Gyárfás Vera fordításában.. A véletlen rejtélyei…

LAKATOS
IMRE
A
GYAKORLÓ
MATEMATIKUS
FILOZÓFIÁJA

Kutrovátz Gábor

2022. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Lakatos Imre írásai matematikáról és a matematika filozófiájáról

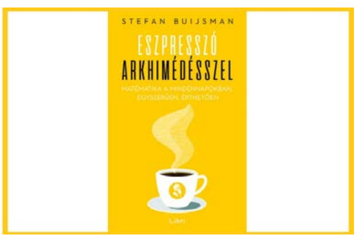
„A gyakorló matematikus filozófiája” című kötetről *Kutrovácz Gábor* könyvismertetése *Lakatos Imre* matematikára vonatkozó nézeteiről nyújt bepillantást Karl Popper kritikai filozófiája, Pólya György matematikai heurisztikája és Hegel dialektikája mentén. „A matematika története, a filozófia iránymutatását nélkülözve, *vakká*, a matematika filozófiája, mellőzve a matematika történetének legérdekesebb problémáit, *üressé* válik” – idézi a „Bizonyítások és cáfolatok”-ból. Tovább...

Ferenczi Miklós

2022. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A gyakorló matematikus filozófiája

A Typotex kiadó 2021-ben jelentette meg *Lakatos Imre*: A gyakorló matematikus filozófiája című könyvét. A kötet a híres tudományfilozófus, Lakatos Imre (1922–1974) dolgozataiból egy összeállítás – *Máté András* szerkesztésében. Témája a matematika filozófiája, cikkei kiváló gondolatébresztők, egy részük főleg filozófusokhoz, egy részük inkább matematikusokhoz szól. Külön csemege, hogy a kötet több dolgozatát Lakatos nem a nyilvánosságnak szánta, e dolgozatok első ízben jelennek meg magyarul. *Ferenczi Miklós* gondolatai következnek a könyvről...



Tóth János

2022. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Eszpresszó Arkhimédésszel

Stefan Buijsman nemrég megjelent könyvének alcíme: *Matematika a mindennapokban, egyszerűen, érthetően.* Ez a könyv kellemes meglepetés: friss, jól olvasható és nem tartalmatlan. Az egyik oka ennek (a képletek mellőzése mellett) az a tény, hogy nagyon sok történeti, filozófiai vagy éppen kulturális antropológiai tudásra támaszkodva beszél a matematika mibenlétéről, alkalmazhatóságáról, szépségéről. Érdeklődő ifjúnak, tanárnak, sőt matematikusnak is ajánlja *Tóth János*...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Oláh Vera 2022. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Tehetségek együtt – Specmat 1962–2022

Dr. Győri János, az ELTE Pedagógiai és Pszichológiai Karának oktatója, a Tehetséggondozás, tehetségfejlesztés szakirányú képzésének vezetője nem matematika, hanem magyar szakos tanár, írásaiban azonban nem először foglalkozik a matematikaoktatás, ezen belül is a matematikai tehetségek speciális témakörével.

Megjelent például számos cikkén túl *A matematikatanítás mestersége – Mestertanárok a matematikáról* (10 vezető matematikatanárral készült), Halmos Mária, Munkácsy Katalin és Pálfalvi Józsefné társszerzőkkel közös interjúkötete (Gondolat, 2007), vagy a Magyar Tehetségsegítő Szervezetek Szövetsége kiadásában a MATEHETSZ Géniusz Könyvtár sorozatában *A tehetséggondozás nemzetközi horizontja I. és II.*, amelyekben az Európai Unión belüli és kívüli tehetséggondozás (köztük a matematikai) jó gyakorlatairól számol be, elsősorban saját tapasztalatai alapján.

2021. őszén megjelent 75 oldalas tanulmánya már a Géniusz Könyvtár 42. kötete, az érdeklődők ezt is, mint az előző 41-et, pdf-ben is letölthetik a MATEHETSZ honlapjáról.

GORDON GYŐRI JÁNOS
TEHETSÉGEK EGYÜTT
GÉNIUSZ KÖNYVTÁR
Tehetségek együtt
A Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium első speciális matematika tagozatos gimnáziumi osztálya tehetségpedagógiai szempontokból.
Adaptív nevelés és oktatás
1
Tehetségfejlesztés a biológiatudományban
2
Drámapedagógia a tehetséggondozásban
3
A reflektív gondolkodás fejlesztése
4
Géniusz Könyvsorozat
A tehetség kézikönyve

A Tehetségek együtt című könyv a 2016-ban elindult kutatás összegzése, amelyben az immár 60 évvel ezelőtt, 1962. szeptemberében a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumban elindult első (speciális) matematika tagozatos osztály összes elérhető egykori tanulójával és néhány akkori tanárukkal készült interjú. Csak páran közülük, akik a szakma nagyjaiként széleskörűen ismertek: Andréka Hajnal, Berkes István, Laczkovich Miklós, Lovász László, Major Péter, Pelikán József, Pósa Lajos, Vesztergombi Katalin, vagy tanáruk, Rábai Imre. Rajtuk kívül is az osztályból többen kivételes (több esetben nem is matematikai) karriert futottak be.

Az eltelt több mint fél évszázad során már többen megpróbálták elemezni, megfejteni, mi volt a titka ennek a páratlanul sikeres osztálynak, a korán felfedezett matematikai tehetség, a kitüntetett figyelem kivételes oktatásuk során, vagy a matematika szeretetén túl minden másra is nyitott osztályközösség?

Ám óhatatlanul felmerülhetnek e kutatás alapkérdései is:

- Nem rombolja-e az ilyenféle képzési forma a társadalmi és oktatási egyenlőséget, nem generál-e destruáló elitizmust az oktatásban és a társadalomban, illetve az oktatási intézmények keretein belül?
- A kiemelkedő tehetségek együttnevelése egy területen nem teszi-e „szakbarbárrá” a tehetségeket, akik sok más hasonló társukkal együtt történő fejlesztésük miatt is esetleg elveszítik a reális kapcsolódásukat a világgal, a társadalommal, más tanulócsoportokkal, és így ebben a vonatkozásban is izoláltakká válnak?
- A matematika tagozatos osztályokra jellemző képzési folyamat és struktúra (a tehetségek azonosítása, szelektálása, az intenzív képzés, a sok más kimagasló képességű tanulóval történő együttnevelés, a versenyek és versengés, valamint a képzési forma sok más jellemzője) nem válik-e személyiségrombolóvá, életre szóló traumát okozó fiatalkori tapasztalattá, vagy legalábbis ezzel a képzési formával nem veszítenek-e ezek a tanulók többet, mint amennyit nyernek a fejlődésükben?

A tehetségesek együttnevelésének előnyei vagy hátrányai érdekelték Gordon Győri Jánost a tehetséges tanulók pedagógiai fejlesztése során. Megfogalmazása szerint a Fazekasos specmat-osztály létrehozása se nem szegregálás, se nem szeparálás, inkább teljesítményszelekció. A megkérdezettek többsége rengeteget profitált szakmai és emberi, erkölcsi értelemben is az addig nálunk soha ki nem próbált speciális matematikai tehetséggondozásból. Négyéves – sőt, mint kiderül, ez többeknél (akik egyetemi csoporttársak is lettek) csaknem tízéves – erősen összetartó közösségük magja a mai napig is összejár.

Sajnos a tanulmány a rögzített rengeteg órányi interjúból csak néhány részletet közöl, pedig egy-egy beszélgetés bizonyára önmagában is érdekes lehet. Ráadásul az interjúalanyokat a szerző az anonimitás érdekében két nagybetűvel (nem a saját monogramjukkal) jelöli, és ez a kódolás mesterkéltnek hat annak, aki a szövegből ráismer egyik vagy másik híres professzor ismert történetére.

A 12. oldalon a szerző felsorolta (köszönetet mondva) az interjút bevállaló alanyait, a történeti hűség és teljesség kedvéért meg lehetett volna említeni azokat a volt osztálytársakat is, akik elhunytak – pl. Loparits (Szeredi) Éva –, vagy valamiért nem voltak elérhetők.

A 16. oldal 2. lábjegyzete szerint a Fazekasban azóta is hagyomány, hogy a specmat-osztály a „C” osztály. Megemlíthető, hogy ezt a következő évtől a Berzsenyi Gimnázium is átvette: a „C” lett minden évben a speciális matematika tagozatos osztály. Mindkét iskolában, ha a césekről volt szó, az egyértelműen a fura matekos figurákat jelentette.

Kár, hogy a 23. oldalon végül nem derül ki, pontosan kik és pontosan miért javasolták és döntötték el 60 éve a legelső matematika tagozatos osztály elindítását, helyszínét.

Rábai Imre nem volt a Középiskolai Matematikai Lapok rovatának szerkesztője (34. o.), viszont tény, hogy hosszú évekig az ő átgondolt, tökéletesen felépített feladatsorait tűzte ki a folyóirat az emelt szintű érettségire felkészítés céljából.

Az Irodalomban felsorolt hivatkozások közül az alábbi link téves: Surányi L. (2012). Kevés ilyen inspiráló légkört tapasztaltam: Ötvenéves a speciális matematikai tagozat. Természet Világa, 6. http://www.termeszetvilaga.hu/szamok/tv2012/tv1206/suranyi.html Letöltve: 2021. 03. 14. A jó link: https://www.termeszetvilaga.hu/archiv/szamok/tv2012/tv1206/suranyi.html

A *Tehetségesek együtt* egy kutatást leíró tanulmány, mégis érdekes és olvasmányos. Kicsit más megvilágításban mutatja be minden tehetséget gondozó pedagógus számára, mint egyedi jó gyakorlatot, a matematikusok körében ismert sztori hátterét, szereplőit, tanulságait. Szeretettel ajánlom az Érintő olvasóinak is.

Oláh Vera

☐ matematikatörténet ☐ recenzió ☐ matematikatanítás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

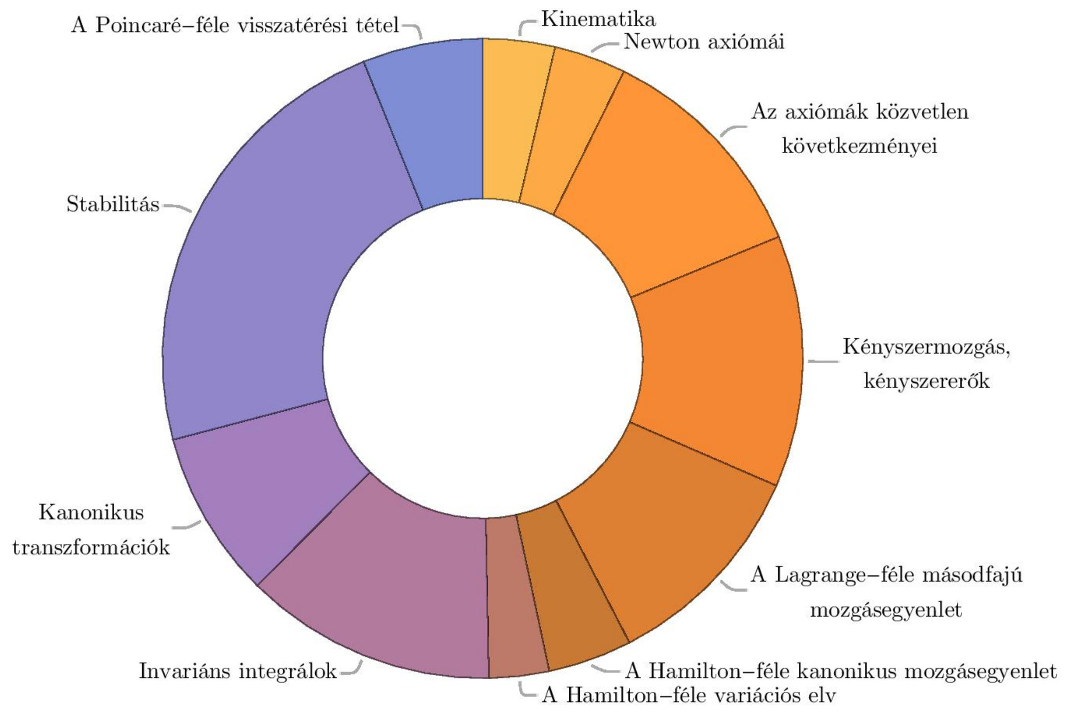
Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Gyebrószki Gergely 2022. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Klasszikus mechanika matematikusoknak

Ha valaki egy bestseller regényt vagy filmforgatókönyvet írna a mechanika tudományterületéről és annak „szuperhőseiről”, akkor minden bizonnyal a szereplők között lenne Isaac Newton, Joseph-Louis Lagrange, William Rowan Hamilton, Jules Henri Poincaré és még néhányan. Mit szólna, kedves olvasó, ha azt mondanám, hogy ennek a regénynek a változata egyetemi jegyzet formájában már elérhető a kiadók polcain?

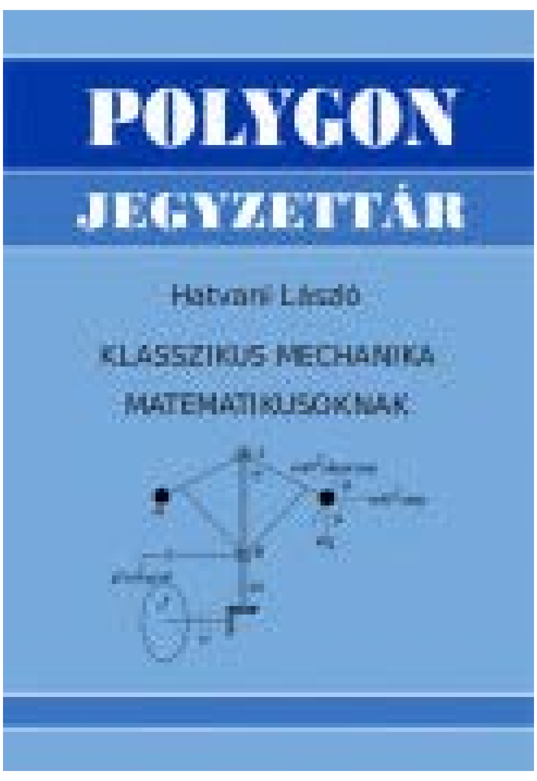
Hatvani László: *Klasszikus mechanika matematikusoknak* című könyve végigvezet minket az analitikus mechanika fejlődésének főbb állomásain, megmutatja, milyen utat jártak be a mechanika tudományterületét mai alakjára formáló őseink.



A könyv terjedelmének fejezetek közti eloszlása (165 oldal, a Függeléket figyelmen kívül hagyva)

Gépészmérnökként, BSc, MSc és PhD tanulmányaim során, több éven keresztül jómagam is megismertem ezt a fejlődéstörténetet, és közel áll hozzám, valamint kedves számomra a könyv felépítését meghatározó szemléletmód. A Newton-féle axiómáktól a Lagrange- és Hamilton-féle mozgásegyenletekig tartó út sok szempontból nem egyszerű, cserébe viszont lenyűgöző.

Úgy gondolom, hogy a könyv kiváló munkát végez abban, hogy végigvezesse az olvasót ezen az úton; a fejezetek aránya egymáshoz képest szerintem kiegyensúlyozott, a matematikus szemléletben (definíció, tétel, bizonyítás, következmény) tálalt tudásanyagot kellő mennyiségű magyarázó szöveg támogatja az olvashatóság megkönnyítésének érdekében. A történelmi kitekintések pedig tovább színesítik a belíveket.


POLYGON
JEGYZETTÁR
Hatvani László
KLASSZIKUS MECHANIKA MATEMATIKUSOKNAK

A könyvet a „mechanika és a matematika együttműködésének legfontosabb hozadékával, a stabilitáselmélettel” (idézet az Előszóból), valamint a Poincaré-féle visszatérési tétellel foglalkozó fejezetek zárják.

Jó szívvel tudom ajánlani ezt a művet azoknak a matematikusoknak, akik nyitottak a klasszikus mechanika alapvető *építőkövei* iránt, valamint azoknak a gépészmérnököknek, akik szívesen tekintenek a mechanikára matematikus szemléletmóddal is.

Gyebrószki Gergely

BME Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanika Tanszék

alkalmazott matematika recenzió

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

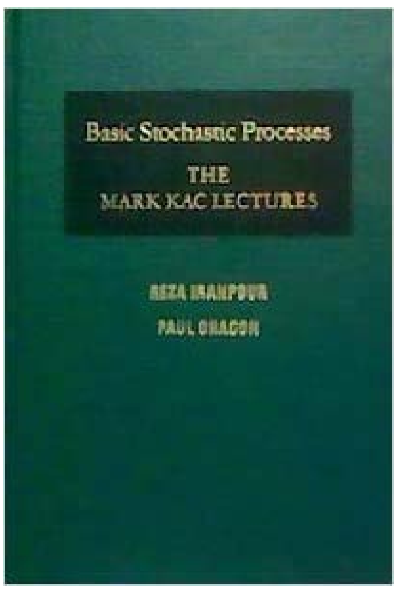
Szerkesztő 2022. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Mark Kac: A véletlen rejtélyei

Mark Kac: A véletlen rejtélyei, Typotex, Budapest, 2022.

Mark
Kac
A
véletlen
rejtélyei
TYPOTEX
Önéletrajz

2020-ban az Érintő Könyvespolc rovatában megjelent egyik kedves szerzőnk élvezetes ismertetése Mark Kac önéletrajzi könyvéről. „Az egyik legjobb tudományos népszerűsítő könyv, amelyet valaha olvastam. Bölcs, szellemes, időszerű. Le kellene fordítani magyarra!" – írta. Örömmel jelenthetjük, hogy a könyv – Gyárfás Vera fordításában – megjelent magyar nyelven is.



Iranpour, R. és Chacon, P., Basic Stochastic Processes. The Mark Kac Lectures (MacMillan Publishing Company, New York és Collier MacMillan Publishers, London, 1988) kötetében publikálták Mark Kac előadásait. Erről rovatszerkesztőnk, Tóth János írt (igaz, 20 évvel ezelőtt) az Alkalmazott Matematikai Lapok 15. (1990–1991) számában a 421–422. oldalon. (http://real-j.mtak.hu/454/1/ALKMAT_15.pdf), erre a könyvismertetésre is felhívjuk a figyelmet, hátha ez is sikeres lesz. Utolsó mondata ugyanis így hangzik: „Ha több lehetősége lenne manapság matematikai tárgyú könyvek megjelentetésének Magyarországon, akkor javasolnám, hogy az ismertetett könyv kerüljön fel a lefordítandók listájára."

---

recenzió valószínűségszámítás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Kutrovátz Gábor 2022. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Lakatos Imre írásai matematikáról és a matematika filozófiájáról

Lakatos Imre: A gyakorló matematikus filozófiája (Typotex, 2021)
https://www.typotex.hu/book/11781/lakatos_imre_mate_a_gyakorlo_matematikus_filozofiaja

Lakatos Imre, aki a tudományfilozófia és a matematikafilozófia nemzetközi porondjának egyik központi alakjává vált, tanulmányait a Debreceni Tudományegyetemen kezdte matematikából, fizikából és filozófiából, ahol 1946-ban doktorált „A természettudományos fogalomalkotás szociológiája” című dolgozatával. A második világháborút követő viharos években politikai szerepet vállalt, miközben nagyobb számban jelentetett meg főként publicisztikai szintű tanulmányokat a tudomány lehetőségeiről és társadalmi szerepéről a kommunista keretek között. Ám gyorsan ívelő karrierje derékba tört, amikor internáló táborba zárták (1950–53). Ezután az MTA Alkalmazott Matematikai Intézetében kapott állást mintegy „mentőövként”. 1956-ban disszidált Magyarországról.

Második doktori értekezését a Cambdridge-i Egyetemen írta az ötvenes évek végén, matematikatörténeti és matematikafilozófiai témából. 1960-tól Karl Popper, a világhírű tudományfilozófus tanítványa és kollégája, majd később utódja lett a *London School of Ecomonics* Filozófiai, Logikai és Tudománymódszertani Tanszékén. Ebben az időszakban elsősorban tudományfilozófiai tárgyú cikkeket publikált, és újszerű elképzeléseivel, tudományos felkészültségével, valamint részletgazdag és szabatos érvelési stílusával hamar a nemzetközi élvonalba került. Karrierje csúcsán, 1974-ben hunyt el váratlanul.

Lakatos sosem jelentetett meg egy *magnum opus*t, amely összefoglalná – egyébként talán reménytelenül szerteágazó – nézeteit. Legfontosabb szövegei három posztumusz kötetben láttak napvilágot. A cambridge-i doktori disszertációját, mely továbbdolgozott formában folyóiratcikkekben is megjelent, végül 1976-ban adták ki könyvként *Proofs and refutations* címmel. A magyar fordítás (*Bizonyítások és cáfolatok*) viszonylag hamar, 1981-ben kijött. Általánosabb tudományfilozófiai tanulmányai képezték a *Philosophical Papers* 1. kötetének anyagát, amely 1978-ban jelent meg *The Methodology of Scientific Research Programmes* címmel. Ezen írások zöme megtalálható a *Lakatos Imre tudományfilozófiai írásai* című fordításgyűjteményben (1997). A *Philosophical Papers* 2. kötete főként a matematika- és logikafilozófiai témájú cikkeit közölte szintén 1978-ban, *Mathematics, science and epistemology* címmel, ám ezek a nagy hatású írások ezidáig nem voltak fordításban elérhetők. Ezt a mulasztást orvosolja *A gyakorló matematikus filozófiája* című, hiánypótló mű.

Az igényesen kivitelezett kötet szerkesztését Máté András végezte el messzemenő alapossággal és kompetenciával, akinek a bevezető tanulmányát bátran ajánlhatjuk az alábbi rövid ismertetés elmélyítése céljából. A fordítások a legkiválóbb szakemberek, jelesül Benedek András, Forrai Gábor, Kiss Olga és Máté András munkái. A kötetet a Typotex Kiadónak és az MTA támogatásának köszönhetjük.

Lakatos matematikára vonatkozó nézeteit talán azzal érdemes bevezetni, ha megnevezzük azt a három fő forrást, amelyet a második disszertációjának köszönetnyilvánításában megjelölt mint legfontosabb inspirációit (lásd a jelen kötet 99. oldalának szerkesztői jegyzetét): Popper kritikai filozófiáját, Pólya matematikai heurisztikáját és Hegel dialektikáját.

1. *Popper kritikai filozófiája.* A hatvanas évek elején, amikor a legnagyobb figyelmet szentelte a matematika filozófiájának, Lakatos erőteljesen Karl Popper intellektuális befolyása alá került. Ugyan Popper az empirikus tudományok filozófiájával foglalkozott, ám Lakatos megtalálta annak a módját, hogy a popperi filozófia legfontosabb elemeit lehetőség szerint átemelje a matematikafilozófia területére, ahogy az már a szövegei címadásából is kiderül: erre utal cambridge-i doktori disszertációjának címe is, a *Logic of Mathematical Discovery* (vö. Popper: *Logic of Scientific Discovery*, 1959), illetve az ebből később összeállított könyv címe, a *Proofs and Refutations* (vö. Popper: *Conjectures and Refutations*, 1962).

Poppernél az empirikus elméletek legfontosabb tulajdonsága a cáfolhatóság, a „falszifikálhatóság”; Lakatos ezzel párhuzamosan hangsúlyt fektet mind a matematika „kváziempirikus” jellegére, vagyis a tapasztalati tudományokkal mutatott hasonlóságaira, mind pedig a matematikai cáfolatok jelentőségére. A tudás megalapozásának hagyományos kérdése a cáfolható, nem tévedhetetlen matematika esetén éppúgy értelmetlenné válik, mint ahogy Popper „fallibilis”, tévedéseknek kitett tudományfelfogásában: a megalapozásra törekedő formalista matematikafilozófia egy kalap alá kerül a hasonló szándékú pozitivista tudományfilozófiával. A Popper és Lakatos számára egyaránt fontosabb kérdés azt firtatja, hogy miként hozhat létre a tudósok többé-kevésbé esetleges (és külső tényezők által befolyásolt) tevékenysége objektív, racionálisan megindokolható tudást. A választ – mindkét szerző – a kritikai vita lehetőségében és „tudástermelő” szerepében találta meg.

2. *A Pólya-féle matematikai heurisztika.* Lakatos az Alkalmazott Matematikai Intézetben töltött évei során ismerkedett meg Pólya György heurisztikai elméletével, sőt Pólya talán leghíresebb írását, a *How to Solve It* című könyvet ő fordította magyarra (*A gondolkodás iskolája*, 1969). Pólya az elméletek formális aspektusai helyett a matematikai tevékenység informális vonatkozásaira hívta fel a figyelmet. Ezért őt sem a matematikafilozófia hagyományos problematikája, az elméletek megalapozásának kérdése izgatta, hanem a matematikai problémák megoldásának heurisztikus eljárásait, vagyis intuitív „ökölszabályait” próbálta megállapítani. A heurisztika vizsgálata lehetővé teszi Lakatos számára, hogy kilépjen az „igazolás kontextusának” szigorú, formális korlátai közül, és a „felfedezés kontextusába” tartozó matematikai gyakorlat egycsapásra az elméletek fejlesztésének közegévé válhat. A formális és informális területek folyamatos kölcsönhatásának és szerves egymásra utaltságának tanulmányozásával sajátos válasz kínálkozik a tudás gyarapodásának kérdésére.

3. *A hegeli dialektika.* A hegeli filozófia hatása, elsősorban a marxista-lukácsiánus álláspontjának köszönhetően már igen korán, a negyvenes évek közepétől megfigyelhető Lakatos gondolkodásában. Bár később – hirdetett szándékai szerint – élesen szembefordult korábbi filozófiai alapállásával, a hegeli hatás mindvégig meghatározó módon jelen van írásaiban, és helyenként expliciten is alkalmazta a hegeliánus fogalmakat és nézeteket. Lakatos mindig ellenérzésekkel viseltetett az olyan filozófiák iránt, melyek merev, történetietlen és reflektálatlan fogalmi sémában próbálják megragadni tárgyukat, és ez az ellenérzés különösen hangsúlyos a matematikai tárgyú vizsgálataiban. Így a formalista nézetekkel szemben a matematikai fogalmak fejlődésének dialektikáját próbálta kidolgozni, miközben szem előtt tartotta mind a filozófia történeti szituáltságát, mind pedig a történetírás filozófiailag irányított természetét.

Mindezek bővebb kifejtéséhez most vegyük szemügyre azt a korban uralkodó matematikafelfogást, a formalizmus és a logicizmus elemeiből gyúrt bevett nézetet, amellyel Lakatos szembeszállt. Ez a felfogás a matematikát formális elméletekkel azonosítja, vagyis mesterséges és szimbolikus nyelven megfogalmazott, axiomatikus-deduktív rendszerekkel. A logicisták szerint (mint Gottlob Frege és a fiatal Bertrand Russell) szerint a matematikai axiómák bizonyossága a logikai intuícióból származik. Ez azt jelenti, hogy a matematika axiómái tulajdonképpen logikailag igaz állítások (tautológiák), tagadásuk pedig önellentmondás. Ebben az esetben a matematika tételeinek igazsága ugyanabból a forrásból táplálkozik, mint a matematikai bizonyítások helyessége, vagyis a logikából, amely viszont – a hagyományos elképzelés szerint – megkérdőjelezhetetlen. A matematika tehát minden kétségen felül tévedhetetlen tudomány.

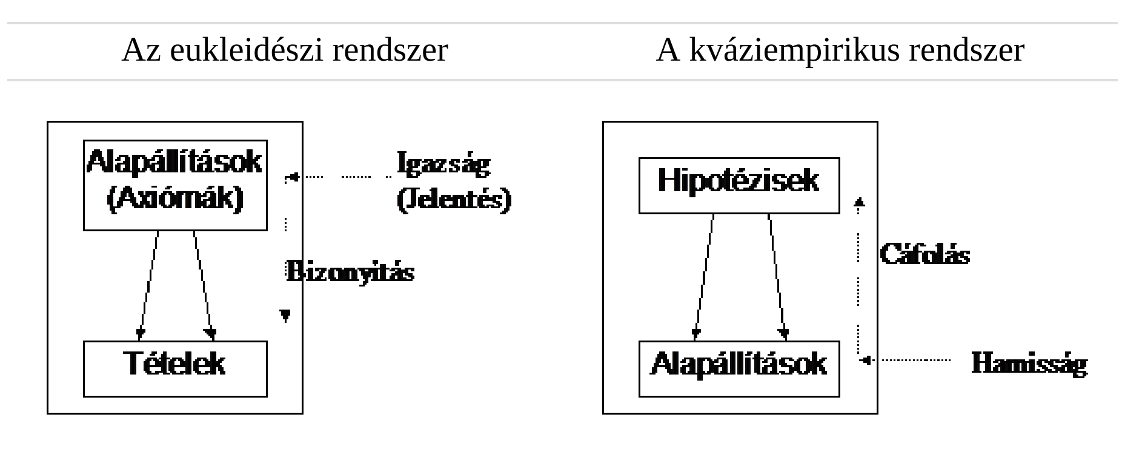
Egy a priori logikai intuíció működésének feltételezése azonban védhetetlen álláspontnak bizonyult. Abban a fregei logikai elméletben, amelyik egy ilyesfajta intuícióra épít, ugyanúgy ellentmondások lépnek fel, mint a szintén csak tiszta alapfogalmakból kiindulni kívánó naiv halmazelméletben (lásd pl. Russell-paradoxon). Az ellentmondások kiküszöbölése érdekében Russell önkényes és túl szigorú korlátokat szabott a matematika számára (a típusokra vonatkozó megszorításával), és ráadásul kénytelen volt olyan axiómákat is alkalmazni (pl. kiválasztási axióma, reducibilitási axióma), melyeket semmiféle a priorinak tűnő logikai intuíció nem támaszt alá. Az ellentmondásokat „elegánsabban” kiküszöbölő elmélet, a Zermelo-féle axiomatikus halmazelmélet irányába történő elmozdulás a logicista program elárulását jelenti, hiszen a halmazelméleti axiómák némelyike semmiképpen sem tarthat igényt az intuíció, pláne egy tévedhetetlen intuíció általi igazolásra.

A matematika megalapozására irányuló vállalkozások közül David Hilbert formalista programja bizonyult a legsikeresebbnek. Ha a logicista program kudarcát az ellentmondások okozták, akkor az alapokat biztosítani kívánó elmélet legfőbb feladata abban áll, hogy a matematika olyan felépítését kínálja, amelyik bizonyíthatóan mentes az ellentmondásoktól. Ennek érdekében a hilberti felfogás formális, axiomatikus-deduktív szintaktikai kalkulusokkal azonosítja a matematikai elméleteket, melyekkel szemben két fő követelményt támaszt: a kalkulus legyen egyfelől ellentmondásmentes, másfelől pedig teljes, vagyis – ez utóbbi követelmény szerint – minden olyan tételt, amely az elmélet nyelvén megfogalmazható, képesek legyünk vagy bizonyítani, vagy pedig cáfolni. A matematikai elméletek tehát szigorúan véve tartalmatlan, jelentés nélküli szimbólumrendszerek, és az interpretáció művelete, mellyel jelentést tulajdonítunk nekik, már nem matematikai tevékenység.

Ahhoz tehát, hogy a matematikai tudást valamilyen értelemben biztos alapokra helyezzük, e felfogás szerint nem maguknak a matematikai elméleteknek kell alapot keresni (hiszen azok teljesen szabad és önkényes konstrukciók), hanem a formális-deduktív rendszerek tulajdonságaira vonatkozó elméletnek, az ún. metamatematikának vagy bizonyításelméletnek. Ez az elmélet azonban Hilbert igényei szerint sem nem formális, sem nem axiomatikus, ugyanis egyfajta biztos intuícióból merítkezik, és ennek megfelelően csak szigorúan véges és konstruktív eszközöket enged meg. Ez a hivatkozás az a priori intuícióra mutatja (Lakatos szerint), hogy a formalista program hívei végső soron a matematika eukleidészi felfogását vallják (lásd alább), és ezt támasztja alá az is, hogy a formalisták a matematikát kizárólag bizonyító jellegű tudománynak tekintik.

E program kudarcára – ismét csak Lakatos szerint – 1931-ben derült fény, amikor is Kurt Gödel két híres nemteljességi tétele bebizonyította, hogy a formalista filozófiának mindkét alapkövetelménye tarthatatlan: egyetlen, a matematika céljaira elég erős kalkulus sem lehet szintaktikai értelemben teljes, és egyetlen ilyen kalkulus sem képes bizonyítani magáról a konzisztenciát. Lakatos elismeri, hogy a matematikusok közösségének jelentős hányada még nem adta meg magát ennek a kudarcnak, és a Gödel-tételek negatív eredményeit a metalogikában, a bizonyításelméletben és hasonló területeken próbálják megkerülni. Ám minden ilyen kísérlet kilép a formalista program eredeti keretei közül, hiszen feladja Hilbertnek a bizonyításelméletre vonatkozó azon követelményét, hogy az szigorúan csak „intuitíve alátámasztott” eszközöket használhat.

Ahogy Lakatos kifejti, ezek a kritizált metamatematikai programok egyaránt eukleidészi jellegűek (lásd az *1. ábrát*), azaz az igazságot az alapállítások szintjén igyekeznek biztosítani, amely – deduktív elméletek lévén – továbböröklődik az alapállításokból levezetett tételekre. Ha tehát sikerülne biztosítani az axiómák kétségen felüli igazságát, akkor azzal a matematika tévedhetetlen tudománnyá válna. Ahogy láthattuk, Lakatos szerint ez a próbálkozás sikertelennek bizonyult, hiszen sem a logikai intuíció, sem a véges és konstruktív eszközökre alapozott eljárások nem képesek megalapozni a formális rendszerek igazságát. Érdemesebb tehát egy fallibilista, popperi ösztönzésű keretben értelmezni a matematikát, amely „kváziempirikus” rendszerként tekint rá, vagyis az igazságérték a következmények, levezetett tételek szintjén kerül az elméletekbe. Innen ugyan nem tud „felfelé” öröklődni, hiszen a levezetett konklúziók igazsága nem garantálja a kiinduló alaptételek igazságát, ám amennyiben kiderülne, hogy egy tétel hamis, akkor ez a hamisság már maga után vonja az alaptételek (legalább egyikének) hamisságát, vagyis popperi értelemben megcáfolja az elméletet.



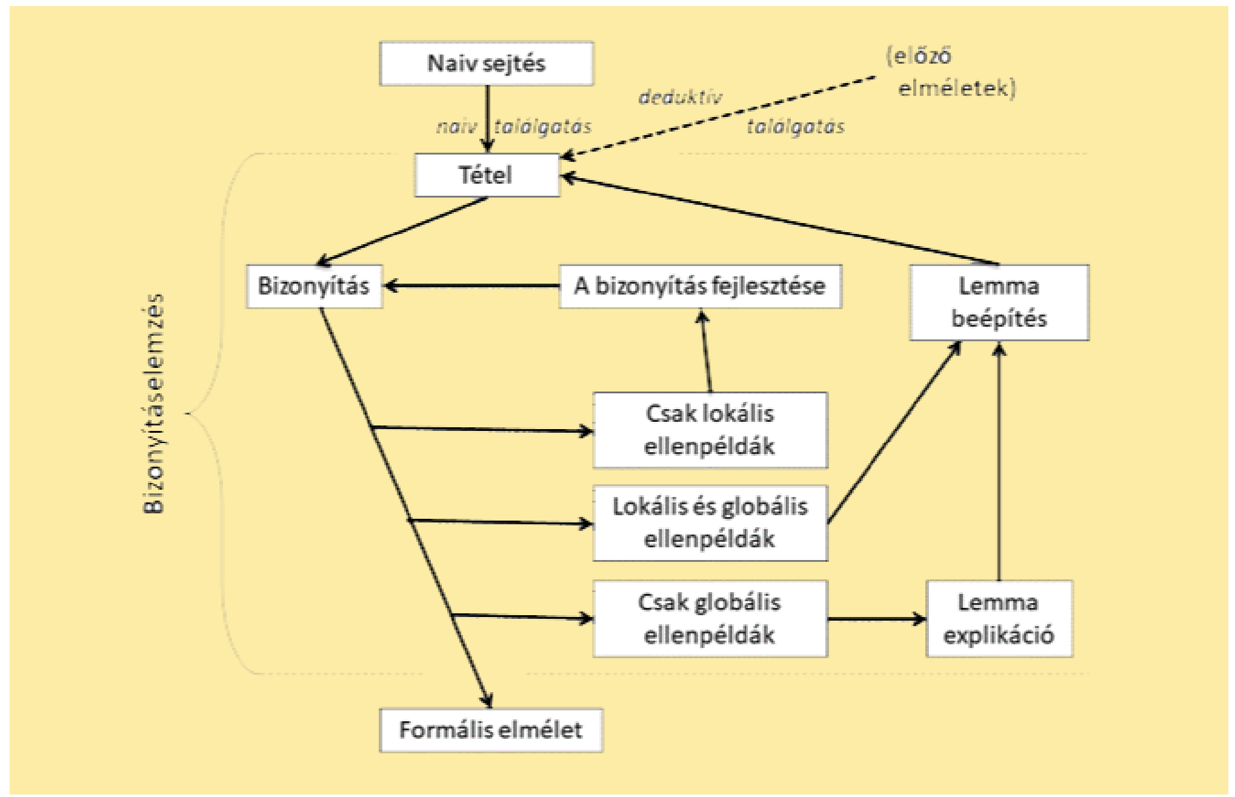
1. ábra: Az érett tudományos elméletek két alaptípusa Lakatos szerint – melyekből valójában csak a jobb oldalit tartja plauzibilisnek.

De hogyan gondolja Lakatos, hogy a matematikai elméletek megcáfolhatók? Miként a „kváziempirikus” elnevezés sugallja, itt nem léteznek olyan szinguláris, térben és időben meghatározott, érzékszervek szolgáltatta tapasztalati tények, amelyek az empirikus elméleteket érvénytelenítik. A matematikára jellemző cáfolatok egyik típusát, a formális cáfolatokat az alaptételekből levezetett logikai ellentmondások jelentik. Mivel a matematika abszolút konzisztenciabizonyítása (a hilberti értelemben) kivitelezhetetlennek bizonyult, ezért egy ilyen logikai cáfolat lehetőségével mindig számolni kell. Az alaposan próbára tett, jól bevált elméletek esetében ez persze nem több, mint egy tisztán logikai eshetőség, hiszen az ellentmondás jelenléte igen valószínűtlen. Születőben lévő elméleteknél azonban szem előtt kell tartani ezt a lehetőséget, ezt bizonyítja például a naiv halmazelmélet bukásának története, vagy az infinitezimálszámítás fogalmi kudarcsorozata a Cauchy–Weierstrass-féle „szigorúság forradalma” előtt.

A cáfolatok másik, az előzőnél jóval fontosabb típusát nyújtják az informális cáfolatok. Ezek akkor lépnek fel, amikor a formális elmélet képtelen kielégítő leírást adni az intuitív elképzelések azon csoportjáról, amelyik a formalizálást megelőző ún. informális elméletet alkotja. A formális elmélet ugyanis semmi több, mint egy tetszőleges szintaktikai „játék”, amely csak akkor használható a matematika céljaira, ha képes kielégítően megragadni a tárgyát, az intuíció és a korábbi matematikai tevékenység által felismert (létrehozott) objektumok birodalmát. Ez a fajta cáfolat persze akár figyelmen kívül is hagyható, hiszen a matematika saját, formális nyelvén nem jut kifejezésre, így aztán ez a jelenségtípus teljesen érdektelen, sőt értelmetlen a metamatematika ideálját követő matematikafilozófiák számára. Ám számos matematikus mégis elégedetlen az informálisan cáfolt elméletekkel – Lakatos példaként hozza fel a sokaságok Riemann-féle elméletét (amely nem tudott számot adni a Möbius-szalagról), a Kolmogorov-elméletet (amely értelmesnek tűnő kérdéseket képtelen megválaszolni), vagy a Zermelo–Frankel-féle halmazelméletet (amelyben a kontinuum-hipotézis kérdése eldönthetetlennek bizonyult).

Világos tehát, hogy Lakatos szerint a matematikai tudás nem pusztán szintaxis, hanem *szól valamiről*. Pólya hatására Lakatos komoly szerepet tulajdonított a matematikai felfedezés olyan elemeinek – pl. induktív általánosítás, analogikus érvelés, gondolatkísérletek –, melyeket általában a „valódi” matematikai tevékenységen kívülre, annak előszobájába szokás utalni. Ezek az eljárások – és az analízis és szintézis részben hozzájuk kötődő módszerei – segítenek felfedezni és egyre pontosabban megragadni a matematikai elmélet tárgyát. Hiszen a matematikai elméletek sosem formális kalkulusokként adódnak a matematikusok számára, hanem ellenkezőleg, a formális elméleteket a matematikusok hozzák létre, méghozzá azzal a céllal, hogy precíz, logikailag áttekinthető keretbe foglalják a már eleve meglevő informális elméleteiket. A formalizálás szerepe éppen abban áll, hogy az informális, az intuíció bizonytalanságával terhelt elméleteket alávesse az egzakt, logikus fogalmi elemzés lehetőségének. A bizonyítás és a bizonyításelemzés kölcsönhatása a fogalmak, kijelentések és módszerek egyre pontosabb meghatározásához vezet. Ez a formalizálási és pontosítási folyamat teszi lehetővé a matematikai ismeretek fejlődését, a tudás növekedését.

Bár e kötet csak rövidebben utal a *Bizonyítások és cáfolatok* téziseire (főként a 4. fejezeten keresztül), de érdemes megjegyezni, hogy Lakatos abban a művében fejti ki hosszasan és mesteri módon, egy „ideális” tantermi dialógus formájában az elméletek fejlődésére vonatkozó elképzeléseit. Itt a diákok a tanár segítségével rekonstruálják azt a történetet, amely a Descartes–Euler-féle poliéder-sejtés felbukkanásától az axiomatikus algebrai topológia születéséig ível, és amelyben kezdettől fogva jelentős szerepet játszottak a szemléletes gondolatkísérletek, ellenpéldák és bizonyításkritikák. A részletek mellőzésével a *2. ábra* érzékelteti, milyen főbb lépések ciklikus bejárására van szükség ahhoz, hogy létrejöjjön egy formális, euklidésznek tűnő rendszer.



2. ábra: A matematikai elméletek fejlődésének folyamatábrája a *Bizonyítások és cáfolatok* alapján rekonstruálva

A formális elméletek azonban csupán végtermékei – a kötet címével élve – a „gyakorló filozófus” tevékenységének, és ha ezekre fókuszál a matematikafilozófia, akkor az olyan, mintha az élettant azonosítanánk a holttestek elemzésével (*Bizonyítások és cáfolatok*, 16. o., jegyzet). A lényeg – vagyis a matematikafilozófia tárgya – az a *folyamat*, amely során a létrejönnek ezek a tárgyukat már pontosan, de kiüresedve megragadó elméletek, vagyis az a mód, ahogyan a matematikai tudás fejlődik és gyarapszik.

Végezetül röviden utalnánk arra, hogy bár Lakatos sosem írt egy szintetizáló elemzést, ám a matematikáról alkotott elképzelései számos ponton összecsengenek általános tudományfilozófiai nézeteivel. Mindkettőben komoly szerepet kap a heurisztika, amely részint negatív (mit nem szabad csinálni) és részint pozitív (mit akarunk elérni, és milyen elköteleződésekhez ragaszkodunk). Mindkét területen nagy hangsúlyt fektetett mind a cáfolatokra és azok szerepére a „kutatási programok” javításában, mind pedig azokra a módokra, ahogyan a tudósok szembeszállnak a cáfolatokkal. Azok közé a szerzők közé tartozik (kisebb mértékben Popperral, nagyobban Thomas Kuhnnal egyetemben), akik a tudománytörténet szerepére irányították a figyelmet a tudományfilozófiában.

Lakatos is szorosan összetartozónak véli e két területet: „a matematika története, a filozófia iránymutatását nélkülözve, *vakká*, a matematika filozófiája, mellőzve a matematika történetének legérdekesebb problémáit, *üressé* válik” (*Bizonyítások és cáfolatok*, 15), majd rövidítve megismétli ezt az állítást (amely Kant egyik tézisének parafrázisa) az egyik legfontosabb tudományfilozófiai írásának kezdőmondataként: „A tudományfilozófia a tudománytörténet nélkül üres, a tudománytörténet a tudományfilozófia nélkül vak.” (*Lakatos Imre tudományfilozófiai írásai*, 65.) Amint haszontalan dolog úgy filozofálni a tudományról és a matematikáról, hogy nem vesszük figyelembe annak valódi történetét, hasonlóan lehetetlen olyan történetet írni róluk, amely ne igazodna előzetes elvárásainkhoz és ítéleteinkhez. Ez utóbbit felismerve feladatunk, hogy tudatosítsuk ezen filozófiai elemek jelenlétét és működését, így szándékosan „racionális rekonstrukciót” kínálva a valódi történetről, amely felfedi a történeti és kulturális esetlegességek mögött a matematika belső, valódi logikáját, vagyis azt, amit a „gyakorló matematikus” felfedez és követ a cáfolatok és a kritikai diszkusszió hatására.

Kutrovátz Gábor
egyetemi docens
BME Filozófia és Tudománytörténet Tanszék

Megjegyzések

1. Ez az ismertetés főleg egy korábbi, a témát bővebben kifejtő tanulmányon alapul: Kutrovátz Gábor: „3.4.2. Lakatos matematikafilozófiája” In Gulyás László, Kampis György, Kutrovátz Gábor, Ropolyi László, Soós Sándor, Szegedi Péter: *Bevezetés a tudományfilozófiába*. Budapest: ELTE, 2013, 61–68. (Elérhető online: https://ttk.elte.hu/dstore/document/855/book.pdf.) Ezt a szöveget itt rövidítve és átdolgozva közöljük.
2. Molnár Zoltán Gábor recenziója is megjelent (ezúttal nem az Érintőben), A heurisztika gerillaharcosa címmel, itt olvasható: https://www.typotex.hu/review/11781/3883/a_heurisztika_gerillaharcosa

recenzió matematikafilozófia

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

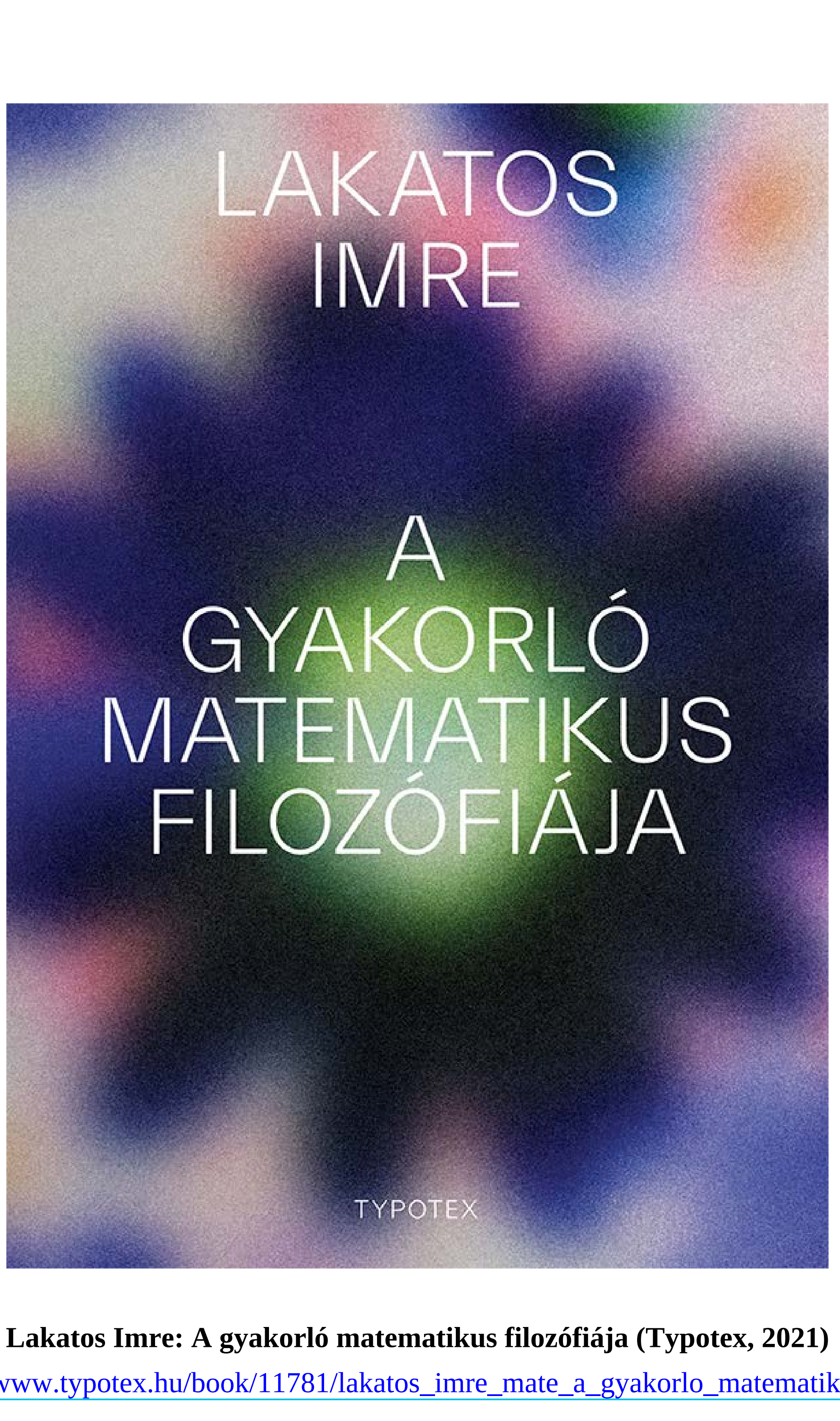
Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

Ferenczi Miklós 2022. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A gyakorló matematikus filozófiája



Lakatos Imre: A gyakorló matematikus filozófiája (Typotex, 2021)
https://www.typotex.hu/book/11781/lakatos_imre_mate_a_gyakorlo_matematikus_filozofiaja

A kötet címéről

A kötet a híres tudományfilozófus, Lakatos Imre (1922–1974) dolgozataiból egy összeállítás – szerkesztette Máté András (jelen írás utolsó részében találja az olvasó a kötet tartalomjegyzékét). A dolgozatokat összefogó téma a matematika filozófiája. A kötet címe két szempontból is kissé problematikus. Egyrészt fantáziacím, nem Lakatostól ered. Címnek talán szerencsésebb lett volna csak „A gyakorló matematikus filozófiája" és alcímnek a „Lakatos Imre írásai". Másrészt, a cím magyarázatra szorul. Alaposabb megértéséhez a kötetnek legalább az első két cikkét lenne érdemes tanulmányozni. Kísérletet teszünk arra, hogy érzékeltessük röviden a cím jelentését.

A 19. sz. végétől a 20. sz. közepéig jelentős fordulatok következtek be a matematika filozófiájában. A fő áramlatok, csak címszavakban, a következők voltak:

1. 19. sz. vége, 20. sz. eleje. Törekvés a matematika cáfolhatatlan és kimerítő megalapozására, azaz az úgynevezett *infallibilista* megközelítés (többek között, Frege, Russell, Hilbert munkássága). A klasszikus axiomatikus módszer modernizálása, a formalizálás bevezetése, a matematika formállogikai (deduktív) felépítése. Igyekezet átfogó alapok létrehozására (Cantor halmazelmélete). Ezt a korszakot az antinómiák felbukkanása (Russell) zárta le.

2. Törekvések az antinómiák kiküszöbölésére (például Zermelo és Fraenkel halmazelmélete, 1908, 1930). Gödel nevezetes negatív eredménye, a nemteljességi tétel (1931), „valamire való" elmélet konzisztenciája a rendszeren belül megfogalmazható, de nem bizonyítható, következésképpen, mindig létezik az elméletben nem bizonyítható állítás. Gödel eredménye lezárja a fenti 1. korszakot.

3. Gödel tételének hatása. A matematikában sem létezik a világ teljes megismerése, csak fokozatos és relatív megismerés létezik. A nagy rendszerek esetén csak relatív ellentmondástalansági bizonyítások léteznek. Az axiómákat és konzisztenciájukat végső soron nem a logikai eszközök, hanem, hosszú távon, a *tapasztalás* igazolhatja. Nincs éles különbség a *matematika és a természettudományok* módszere között (legfeljebb az alkalmazott dedukció mennyiségében van különbség). Ez a matematikának egy *fallibilista* megközelítése, úgynevezett *empirista* megközelítés.

Lakatos alapjában véve egyetért az empirikus megközelítéssel, de azt kissé módosítja és más megvilágításba helyezi, máshová teszi a hangsúlyokat. Nála nincs súly a deduktív felépítésen és az axiómákon, hanem szerinte a matematika középpontjában a *problémák* (a hipotézisek, sejtések) állnak. Szerinte ezeket elsődleges vizsgálni. Vagy logikai *visszavezetéssel*, tehát redukcióval egyszerűbb problémákra (végső soron axiómákra), vagy/és *tapasztalással*. Szükséges a problémát alaposan elemezni, több oldalról megvilágítani. Nagy jelentőséget tulajdonít a *cáfolat* módszerének. Lakatos nagyjából ezeket érti a *gyakorló matematikus filozófiáján*. Megközelítését *kvázi-empirizmus*nak nevezi.

Érdemes mindehhez hozzátenni, hogy nagy hatással volt Lakatosra Pólya György munkássága (többek között *A problémamegoldás iskolája* c. műve). Ennek is része volt abban, ahogyan összekapcsolódik Lakatos absztrakt filozófiája és a *gyakorló matematikus* fogalma. Ezután önvizsgálatot tarthatnak a matematikusok, hogy hozzájuk az empirista, a kvázi-empirista matematikafilozófia, vagy esetleg egy harmadik megközelítés áll-e közelebb.

Tévedett-e Cauchy?

(*nemstandard valós számok*, *nemstandard analízis*)

A kötetben egyetlen olyan matematikai *problémát* találunk, amelyet Lakatos részletesen elemez, a folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatai határfüggvényének folytonosságára vonatkozó híres Seidel-tétel állítását (3. dolgozat). Ismertetjük tömören Lakatos írását.

Ismert a matematikatörténetből, hogy a matematika precízzé tételének nagy úttörője, Cauchy, a következő, az utókor által „hibásnak" tartott tételt bizonyította: Folytonos függvények bármely sorozatának limeszfüggvénye is folytonos.

Hiányzott a konvergáló függvények sorozatára az *egyenletes konvergencia* feltétele. Könnyű példát találni arra, hogy az egyenletes konvergencia feltétele nélkül Cauchy tétele hamis. Ilyen példa már Cauchy korában ismert volt, sőt maga Cauchy is ismerte. Nem nehéz Cauchy bizonyításában megtalálni a „hibát".

Maga Cauchy kissé ingadozott. Egyrészt hitt tétele igazában. Másrészt, ismerve az ellenpéldát és a kritikákat, érezte, hogy létezik valami tisztázatlanság a tétele körül. A problémához hasonlóan viszonyult híres pályatársa, Abel is. Több évtizedig tartott, amíg Seidel megalkotta az egyenletes konvergencia fogalmát, és bizonyította a tétel egyenletes konvergenciával kiegészített változatát. Igazi „rejtélynek" tűnik, hogy olyan zseniális matematikusok, mint Cauchy vagy Abel, miért bizonyultak szűklátókörűnek ebben a kérdésben?

A rejtély csak akkor került közelebb a megoldáshoz, amikor 1960 körül Abraham Robinson megalkotta a *nemstandard* valós szám fogalmát, és létrehozta az arra épülő elméletet, a *nemstandard analízist*. Ez az elmélet a matematikailag addig kétesnek tekintett Leibniz-féle infinitezimális elmélet precíz megvalósításának és kiterjesztésének tekinthető. Robinson azt állította, hogy elméletében interpretálva, helyes Cauchy tétele. Azaz, ha valós számon nemstandard (akár végtelen) valós számot értünk, konvergencián nemstandard konvergenciát, akkor Cauchy eredeti tétele igaz. Visszapergetve a tudománytörténetet, tudjuk, hogy Cauchy, vagy Abel még a Leibniz-féle infinitezimális elmélet hatása alatt állt. Vagyis Robinson szerint a kritikus tétel mögött egy mai nemstandardnak számító (nemstandard valósakra épülő) tétel áll. Seidel viszont a közönséges valós számokra bizonyította tételét, tehát annak ma is ismert, hagyományos alakját bizonyította. Seidel tehát nem értette meg Cauchyt és viszont, két malomban őröltek. Csavar a történetben, hogy azóta tudománytörténészek kiderítették, hogy Cauchy még csak nem is pontosan a robinsoni értelemben értette tételét, hanem egy ahhoz közel álló verzió szerint.

A történet számos tanulsággal szolgál a tudománytörténet számára. Például azzal, hogy milyen fontos mélyre ásni az állításoknál a felhasznált alapfogalmakat illetően. De nemcsak a fenti történet tanulságos, hanem a benne foglalt *nemstandard valós számnak* (és a nemstandard analízisnek) létrejötte is – jelen sorok írója szerint. Ez önmagáért is megér egy kis kitérőt.

Leibniz a maga korában megalkotta és sikeresen használta az infinitezimálisok elméletét, de az elmélet nem tudott kiteljesedni. Hosszú próbálkozások után sem sikerült az elméletet precízzé tenni matematikailag. A gordiuszi csomót később Weierstrass vágta el, amikor létrehozta a határérték fogalmának egy egészen más definícióját, az ε-δ-s definíciót. Ez elterjedt és sikeres lett. A Leibniz-féle elméletet tulajdonképpen már el is temették, amikor Robinson váratlanul rátalált azokra a modern keretekre, amelyekben a Leibniz-féle elmélet egy változata precízen rekonstruálható, sőt elmélyíthető.

A „régi-új" elméletet azonban mégsem fogadta az a lelkesedés a matematikusok körében, ami talán elvárható lett volna Leibniz elméletének kb. 300 éves tetszhalála után. A következő kérdések merülnek fel:

1. Robinson eredményeit elemezve kiderült, hogy ahogyan egy szokásos valós szám racionális számok konvergens sorozataival azonosítható, úgy egy *nemstandard* valós szám *hagyományos* valós számok konvergens (vagy végtelenhez tartó) sorozataival azonosítható. Vagyis a nemstandard valós szám a hagyományos valós szám egy kézenfekvő általánosítása. Miért nem fedezték fel ezt a fogalmat 300 évig?

2. A konvergencia leibnizi megközelítése (az x_n valós sorozat konvergál A-hoz, ahol A véges, ha az $\{x_n\} - A$ nemstandard szám egy infinitezimális) természetesebbnek tűnik, mint Weierstrass ε-δ-s definíciója. Miért tartunk még mindig ki kizárólagosan, például az oktatásban, a Weierstrass-féle definíció mellett? Hasonló mondható például a függvény folytonosságának definíciójáról is.

3. Számos klasszikus valósanalízisbeli tétel elegánsabban, természetesebben bizonyítható (az általánosításnak számító) nemstandard analízisben, mint a hagyományosban. Hasonló jelenséggel találkozhatunk például a komplex függvénytanban. De, amíg a komplex függvénytanban örülni tudunk ezeknek a szép bizonyításoknak, és tanítjuk őket, addig ritkán hallunk a fent idézett nemstandard bizonyításokról.

Az 1. kérdéssel kapcsolatban az juthat eszünkbe, hogy a matematika fejlődése nem egyenes vonalú. Például a negatív szám fogalma egyidejűleg jött létre a komplex szám fogalmával. A 2. és 3. kérdés megválaszolása talán meghaladja a matematika filozófiájának kereteit, és csupán az új felfedezések elfogadásának tehetetlenségére, lassúságára vezethető vissza.

Kiket szólít meg a kötet?

A kötet tartalomjegyzéke a következő:

Előszó (Máté András): Lakatos Imre – egy nyugtalanító gondolkodó
1. A végtelen regresszus és a matematika alapjai
2. Az empirizmus reneszánsza a mai matematikafilozófiában?
3. Cauchy és a kontinuum: A nemstandard analízis jelentősége a matematika történetében és filozófiájában.
4. Mit bizonyít egy matematikai bizonyítás?
5. Az analízis és szintézis módszere
6. A szükségszerűség. Kneale és Popper.
7. Változások az induktív logika problematikájában.
8. A tudomány társadalmi felelőssége.
Irodalom

Az Előszó szerint a dolgozatok matematikusokhoz és filozófusokhoz is szólnak. Úgy foglalnék állást, hogy az 5., 6. és 7. dolgozat jobbára filozófusok számára emészthető, míg a 3., nemstandard analízisről szóló dolgozat inkább a matematikusok számára. Kiemelném az empirizmussal foglalkozó 2. dolgozatot, amelyik leginkább kapcsolódik a kötet címéhez. Külön csemege, hogy a kötet több dolgozatát Lakatos nem a nyilvánosságnak szánta, e dolgozatok első ízben jelennek meg magyarul (lásd a kötet lábjegyzeteit).

A kötet dolgozatai ugyan 1974 előtt készültek, de a szerkesztő kiemeli, hogy a mondanivaló napjainkban a reneszanszát éli. Azonban úgy gondolom, hogy a hetvenes évek óta történtek a matematikában átütő változások – ilyen például az algoritmikus, a számítógépes szemlélet, vagy a rendszerszemlélet térhódítása – ezek a változások, értelemszerűen, a matematika filozófiáját is befolyásolják (például sokat foglalkozott a matematika azzal, hogy mely egyenletekhez található „megoldóképlet", de ma már megoldottnak tekinthetjük az egyenletet azzal is, ha a gyökök meghatározására ismerünk algoritmusokat).

Mindent egybevetve, a kötet cikkei kiváló gondolatébresztők, mint Lakatosnál általában. A matematika filozófiája iránt érdeklődőket nem kényeztetik túlságosan el napjainkban értékes olvasmányokkal, ezért is üdvözöljük a nagy gonddal készített összeállítást.

Ferenczi Miklós
emeritus professzor
BME Algebra Tanszék

recenzió matematikafilozófia

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

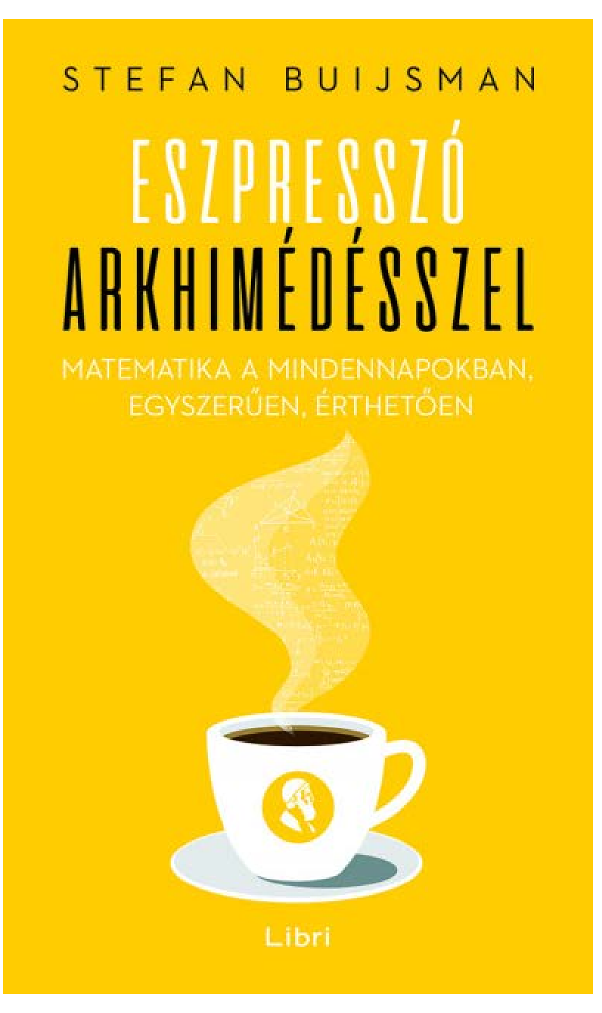
Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Tóth János 2022. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Eszpresszó Arkhimédésszel

Matematika a mindennapokban, egyszerűen, érthetően.


STEFAN BUIJSMAN
ESZPRESSZÓ ARKHIMÉDÉSSZEL
MATEMATIKA A MINDENNAPOKBAN, EGYSZERŰEN, ÉRTHETŐEN
Libri

Gyanakodva vettem a kezembe a könyvet. Nem Typotex, nem Polygon: mi a szösz?! Előítéleteimet rossz tapasztalatok növelték. De nemcsak ehhez képest, hanem abszolút értelemben is kellemes meglepetés a könyv. Sok olyan írás van, amelyik a matematika megkedveltetését tűzi ki célul, de nem könnyű őket megkülönböztetni egymástól, egy idő után egyszerűen unalmasak. Ez a könyv viszont teljesen más, friss, jól olvasható és nem tartalmatlan. Az egyik oka ennek (a képletek mellőzése mellett) az a tény, hogy nagyon sok történeti, filozófiai vagy éppen kulturális antropológiai tudásra támaszkodva beszél a matematika mibenlétéről, alkalmazhatóságáról, szépségéről.

A példák sorát a Google Maps-szel, a Google keresőjével, a Netflix-szel indítja: hogyan dolgoznak, és hol van a matematika a tevékenységük mögött. Az alapető adatszerkezet mindhárom esetben egy irányított gráf.

A Google Maps úgy működik, ahogyan mi terveznénk meg az utat egy metrótérképen: az útszakaszokhoz időtartamokat rendelünk, majd olyan szakaszokat fűzünk össze, amelyek összhossza a lehető legkisebb. Nyilván minőségileg nehezebb meghatározni egy alkalmas útvonalat Ulan Bator Történeti Múzeumától Eritrea valamelyik épületéig, mint a Rákóczi tértől a II. János Pál pápa térig. Sajnos, az általános feladat (az utazó ügynök problémája) finoman szólva is meglehetősen nehéz, épp emiatt számos ötlet született arra, hogy gyakorlatilag speciális fontos esetekben is elfogadható időn belül szülessen megoldás.

A Google keresőjével kapcsolatban megismerkedhetünk az algoritmus lényegével (azzal a részével, ami már nem üzleti titok): a keresett kifejezés szempontjából fontos oldalakat kínálja fel a program, a fontosságot pedig a keresések alapján dinamikusan, folyamatosan felújítja.

A Netflix megnézi, hogy azok, akik az általam éppen most megnézett filmeket nézték, milyen más alkotásokat élveztek. Ezekután (először) azt kínálja föl, amelyik esetén a legtöbb a közös néző. Hiányossága, hogy mindig csak a megnézettekhez hasonló filmeket ajánl nekem, és soha nem lep meg – még kellemetlenül sem.

A Facebookról könnyedén áttérünk a neuronhálózatokra, hiszen mindkettő irányított gráfokkal dolgozik. Bár a neuronhálózatok manapság (a genetikai algoritmusokkal együtt) a mesterséges intelligencia csodafegyverei, azt azért érdemes kiemelni, hogy (szerzőnk felfogásától eltérően) az idegrendszeri modellezéshez semmi közük. Túlzott optimizmust sugároz az a kijelentése, amely szerint „eljön az a pillanat, amikor a számítógép már minden képre helyes választ fog adni.” Nem jön el, ez követelménynek is értelmetlen.

A gráfok olyan fontosak, mintha a könyvet magyar matematikus írta volna. A történet természetesen Kalinyingrád (leánykori nevén Königsberg) hídjaival kezdődik.

Ezek után a matematika fikozófiai hátteréről esik szó.

A matematikai fogalmak ontológiájával kapcsolatban az is fölmerül, hogy azok Sherlock Holmes létéhez hasonlatosak. Érdemes idézni ehhez az angol humor egy remek példáját, amely szerint 2005. október 16-án „The Royal Society of Chemistry is to bestow an Extraordinary Honorary Fellowship upon Sherlock Holmes, the first detective to exploit chemical science as a means of detection.” (https://www.rsc.org/news-events/articles/2005/10-october/sherlock-holmes-fellowship/ . El tudnánk ilyet képzelni Németországban, vagy akár csak Magyarországon? Gondoljunk csak a Chuck Norris hídra, amely végül a meglehetősen unalmas Megyeri híd nevet kapta.)

Szépség, előrejelző képesség: elmélet ereje

Szerzőnk szemtelenül fiatal, kutatási területe a matematikafilozófia és a kognitív tudomány, továbbá ismeretterjesztő műveket ír. A fordítás kellemesen olvasható, ami egy profitól több tucatnyi, nagyon különböző könyv lefordítása után el is várható. Ami nem várható el, mégis teljesül, az az, hogy alig van benne félrefordítás, pedig Fenyves Miklós közel sem matematikus: néderlandista, ha van ilyen szó. (Miért ne lenne? Geométer is van.) Egy szisztematikus félrefordítás mégis akad: ahol a *differenciál* szó önmagában áll, mindenütt derivált (esetleg: differenciálhányados) kellene. Sajnos, a magyar matematikai szaknyelv a *differenciál* és az *integrál* szót nem olyan szép szimmetrikusan használja mint az elvárható lenne. A 98. oldalon szereplő *bizonyíték* szó helyett *bizonyítás* lenne a helyes.

Apróbb, jelentéktelen elnézések előfordulnak: a 62. oldalon fehér golyókról esik szó, míg az ábra golyói meglehetősen feketék, de legalább is sötétszürkék. Abban, hogy Mezopotámiát a mai Iránba helyezik a mai Irak helyett, az eredeti szöveg hiányában nem tudom eldönteni, ki a bűnös.

A 99. oldalon a meg nem nevezett kínai eredmény (matematikusoknak elárulható) a kínai maradéktétel a XIII. századból, bár már ennél ezer évvel korábban is születtek erre vonatkozó kínai eredmények. A *Matematika művészete kilenc fejezetben* című könyv eredeti címének és szerzőjének nevével nem könnyű elbánni. Többféleképpen lehet átírni a kínai neveket, Magyarországon sikerült egy különlegesen rossz megoldást választani. A rémtörténetről írt Vida [4]; talán az eredetinél könnyebben érhető el az erről szóló összefoglalónk: [1, 240. oldal]. Ennek előrebocsátása után nevezzük így a szerzőt: Ch'in Chiu-Shao vagy Qin Jiushao, ez elegendő ahhoz, hogy valaki a MacTutorban utánanézhessen (https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Qin_Jiushao/).

Ahhoz már hozzászoktunk, hogy pszichológiai vizsgálatokban a KSz (kísérleti személy) általában rab, katona vagy egyetemi hallgató. Újabb fejlemény (ami a könyvből is kiderül), hogy csecsemőket is fárasztanak matematikai problémákkal – nem érdektelen eredményeket elérve. (Ebben szerzőnk elkövetőként is részt vett.) Lehet tudni, hogy ha a csecsemő valami szokatlant lát, akkor hosszabb ideig nézi, mint a megszokottat. Ha mutatunk neki néhány alkalommal három pöttyöt, azután négyet, nem lepődik meg. De ha most hirtelen hatot kap, hosszasan elmélázik, ami azt mutatja, hogy az világos számára, hogy a hat több, mint a három.

A derivált fogalmához szerzőnk szépen elmagyarázza, hogy miért egyméteres szakaszon mérik meg az autók sebességét. A görögökről szólván az állítja, hogy „badarságnak tartották ezt a végtelenesdit”. Azért ehhez hozzáfűzhető, hogy esetleg ügyesen kikerülték, lásd Eudoxosz munkásságát akár itt: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Eudoxus/ , akár itt: [3, 20–22. oldal].

És „végül a fizika sem nélkülözheti az integrálokat…” Hát nem végül, hanem elsősorban, ha már említtetik Isaac Newton neve. Vö. ezzel: Szegedi kollégánk, Hatvani László akadémikus írja [2, vii. oldal]: „Sajnos, az utóbbi idők reformjai megszüntettek a matematikus és matematikatanár szakokon minden kísérleti és elméleti fizikai kurzust.” Kérdésemre Simon L. Péter megerősítette, hogy az ELTE TTK-n is ugyanez a helyzet. A BME TTK-n az elméleti irányultságúaknak kötlező a Fizika 1., az alkalmazóknak (!) nem.

A könyv sokat foglalkozik az adóval – végighaladva az emberiség történelmén. Milyen hatást gyakorolhat a gazdaságra az osztalékadó eltörlése? „Az ilyen kérdések megválaszolására tartja fenn Hollandia a Központi Tervirodát, ahol alaposan megvizsgálják a kormány tervét, és kiszámolják az előre látható hatásaikat.” (Még elképzelni is borzasztó! Mit szólna ehhez Vas Zoltán vagy Faluvégi Lajos, hogy az Országos Tervhival elnökei közül csak két nevesebbet említsek?)

Néhány szép, tiszta, áttekinthető, színes (!) ábra is található a könyvben. Jó fordítás, szép ábrák, szép könyv, jó szöveg. Külön kiemelem, hogy nagyon változatos, gazdag az irodalomjegyzék, önmagában ez is hasznos olvasmány.

Mindent összevéve a kiadó vagy a fordító jól választott, ezt a könyvet a szerző ugyan fiatalabb önmagának szánta, de jó szívvel ajánlom érdeklődő ifjúnak, tanárnak, és elképzelhető, hogy akár matematikus számára is élvezetesen múlna az olvasására szánt idő.

Stefan Buijsman: Eszpresszó Arkhimédésszel. Matematika a mindennapokban, egyszerűen, érthetően. Libri, Budapest, 2020. Fordította: Fenyves Miklós, 230 oldal, 3799 Ft.

Irodalomjegyzék

[1] Csermely P., Gergely P., Koltay T., Tóth, J.: *Kutatás és közlés a természettudományokban*, Osiris Kiadó, Budapest, 1999.
https://www.szaktars.hu/osiris/view/csermely-peter-gegely-pal-koltay-tibor-toth-janos-kutatas-es-kozles-a-termeszettudomanyokban-osiris-kezikonyvek-1999/

[2] Hatvani L.: *Klasszikus mechanika matematikusoknak*, Szegedi Egyetemi Kiadó, Polygon Szeged, 2021.

[3] Simonovits András: *Válogatott fejezetek a matematika történetéből*, Typotex, Budapest, 2009.

[4] Vida J.: Átírás: zűr vagy pinyin, *HVG* 1996. január 23., 73.

Tóth János

☐ alkalmazott matematika ☐ recenzió ☐ matematikafilozófia

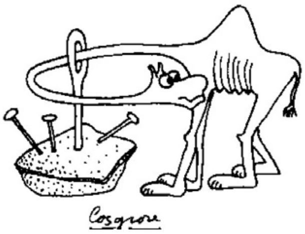
Érintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **TUDOMÁNY** MENÜPONT TÖBBFÉLE, A MATEMATIKA TUDOMÁNYÁHOZ KAPCSOLÓDÓ FUNKCIÓT TAKAR..**A TUDOMÁNY– TÖRTÉNET ROVAT** CÉLJA ELSŐSORBAN MATEMATIKATÖRTÉNETI JELLEGŰ ÍRÁSOK KÖZLÉSE. **A MI IS …?ROVAT** A MAI MATEMATIKA TUDOMÁNYÁRÓL KÍVÁN SZÓLNI A HOZZÁÉRTŐKNEK.
(ROVATSZERKESZTŐK: *BESENYEI ÁDÁM; STIPSICZ ANDRÁS.*)



Tara Holmes, Stipsicz András

2022. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is... a szimplektikus geometria?

Nem tud átbújni a szimplektikus teve a tű fokán: *Ian Stewart* 1987-es Nature-beli cikkének humoros grafikája is szerepel *Tara Holmes* írásában, amelyet *Stipsicz András* fordított le a *Notices of the AMS* 2016. decemeberi számából: Mi is a szimplektikus geometria?

Pink István

2022. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A Baker-módszer és egy alkalmazása

Pink István írásának célja, hogy rövid betekintést nyújtson a diofantikus számelmélettel foglalkozó kutatók által sokszor idézett és alkalmazott Baker-módszerbe. A 19. század közepétől napjainkig tartó, híres tételek nyomán létrejött történet a transzcendens számok bevezetésével indul. A fényképen *Alan Baker* (1939–2018) Fields-érmes brit matematikus. Tovább...

Röst Gergely

2022. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Az ukrán matematika egyik ékköve: Sarkovszkij tétele

Olekszandr Sarkovszkij 85 éves, Kijevben született, egész életében ott dolgozott, és jelenleg is ott él. 1964-ben publikálta eredményeit orosz nyelven, az Ukrajnszki Matematicski Zsurnal hasábjain. Ez az egyik kedvenc matematikai tételem, egyetemista koromban én is kikerestem a cikket és próbáltam megérteni, írtam is róla egy esszét Pintér Lajos tanár úr analízis kurzusán. – írja *Röst Gergely*...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Tara Holmes, Stipsicz András 2022. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is... a szimplektikus geometria?

Az euklideszi geometriában, egy $\mathbb{R}$ feletti vektortérben a hosszúságok és a szögek a legfontosabb mérőszámok, és a dolgok merevek. A szimplektikus geometriában a kétdimenziós mérőszámok a kulcsszereplők, és a komplex számok a természetes skalárok. Kiderül, hogy a szimplektikus struktúrák sokkal rugalmasabbak, mint a komplex függvénytan holomorf függvényei, vagy a Riemann-geometria metrikái.

A „szimplektikus” szó Hermann Weylnek a csoportokról szóló klasszikus könyvében bevezetett kifejezés tükörfordítása. A szó valójában a komplex görög megfelelője, azaz a latin com-plexus (egybefonva) szóösszetétel tagonkénti görög fordítása:

$$\sigma\upsilon\mu - \pi\lambda\varepsilon\kappa\tau\iota\kappa o\zeta.$$

Weyl annak a Lie-csoportnak a jelölésére javasolta ezt a szót, amely megtartja a nemelfajuló ferdén szimmetrikus bilineáris formát. Ezt megelőzően a szóbanforgó Lie-csoportot „egyenes komplex csoportnak” vagy „abeli lineáris csoportnak” nevezték (arra utalva, hogy Abel is tanulmányozta ezt a csoportot).

Egy (valós) M sokaságon lévő ω 2-forma olyan matematikai objektum, amely minden $p \in M$ pontban két érintővektort kap változóként, és ezekre egy valós számot ad, mégpedig ferdén szimmetrikus és bilineáris módon. Pontosabban, ω egy

$$\omega_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

ferdén szimmetrikus leképezés-családot ad meg, amely $p \in M$-től sima módon függ. Az $\omega \in \Omega^2(M)$ 2-forma szimplektikus, ha zárt (vagyis külső deriváltja, $d\omega$ teljesíti a $d\omega = 0$ egyenletet) és nemelfajuló, vagyis minden ω_p nemelfajuló. Ez utóbbi feltétel ekvivalens avval, hogy minden nemnulla $v \in T_pM$ érintővektornak van egy szimplektikus „barátja”, vagyis egy olyan $w \in T_pM$ vektor, amelyre $\omega_p(v,w) = 1$. Egy szimplektikus sokaság pedig egy ω szimplektikus formával ellátott (valós) M sokaság.

A nemelfajulóságnak fontos következményei vannak. Tisztán lineáris algebrai alapon, a Gram–Schmidt-eljárás ferdén szimmetrikus analógját alkalmazva, minden $p \in M$ pontban kiválaszthatjuk T_pM-nek egy ω_p-vel kompatibilis bázisát. A bázis keresését egy v_1 nemnulla vektorral kezdjük, majd megkeressük ennek w_1 szimplektikus barátját. E két vektor a ferde szimmetria miatt lineárisan független. Ezután lehasítjuk a v_1 és w_1 által kifeszített kétdimenziós alteret, és rekurzívan folytatjuk az eljárást, míg egy

$$v_1, w_1, \dots, v_d, w_d$$

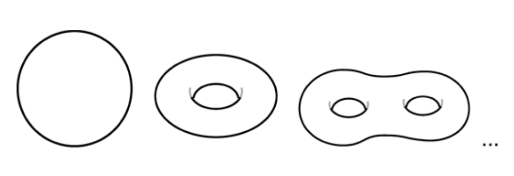
bázist nem kapunk, ami páros sok báziselemet tartalmaz. Tehát a szimplektikus sokaságok páros dimenziósak. A fenti gondolatmenet alapján minden érintőtérre gondolhatunk komplex vektortérként is, ahol v_i és w_i egy komplex alteret feszítenek ki. Az $\omega^d = \omega \wedge \ldots \wedge \omega \in \Omega^{2d}(M)$ legmagasabb ék-hatvány sehol sem tűnik el, hiszen minden érintőtéren

$$\omega^d(v_1, \dots, w_d) \neq 0.$$

Másszóval, ω^d egy térfogati forma, így M szükségképp irányítható. A szimplektikus geometriának fontos kapcsolatai vannak az algebrai kombinatorika, az algebrai geometria, dinamika, matematikai fizika és reprezentációelmélet felé. Az ezen kapcsolatokat mutató legfontosabb példák a következők:

(1) $M = S^2 = \mathbb{CP}^1$, és $\omega_p(v,w)$ a v és w által meghatározott paralellogramma előjeles területe;

(2) M egy, az 1. ábrán mutatott tetszőleges Riemann-felület, és ω az (1)-ben megismert területi forma;



1. ábra. A területi forma egy Riemann-felületen szimplektikus geometriát definiál.

(3) $M = \mathbb{R}^{2d}$ és $\omega_{std} = \sum_{i=1}^{d} dx_i \wedge dy_i$; ezt a formát standard szimplektikus formának is nevezik.

(4) $M = T^*X$, az X sokaság koérintő nyalábja, amire fázistérként tekintünk, a p-koordináták X-ben a helyet jelölik, a q-koordináták pedig a koérintő irányban a momentumot, és $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$

(5) M egy sima komplex projektív varietás, és ω-t a Fubini–Study-forma indukálja (ez a példa magában foglalja a sima normális tórikus varietásokat is);

(6) $M = \mathfrak{O}_\lambda$ egy kompakt, összefüggő féligegyszerű G Lie csoport koadjungált orbitja, amelyet az ω Kostant–Kirillov–Souriau-formával látunk el. A $G = SU(n)$ választással ezek a példák magukban foglalják a $\mathbb{CP}^{n-1}$ komplex projektív tereket, a $\mathfrak{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ Grassmann-sokaságokat és az $\mathfrak{Fl}(\mathbb{C}^n)$ teljes zászlósokaságokat, továbbá az összes részleges zászlósokaságokat is.

Számos irányítható sokaság nem hordoz szimplektikus struktúrát. Például a páros, legalább 4-dimenziós gömbök nem szimplektikusak. Ennek oka az, hogy egy kompakt sokaságon Stokes tétele biztosítja, hogy $[\omega] \neq 0 \in H^2(M;\mathbb{R})$. Másszóval egy kompakt szimplektikus sokaságnak szükségképpen van nemtriviális 2-dimenziós kohomológiája.. S^2 az egyetlen ilyen gömb.

A (3) példa különösen érdekes Gaston Darboux tizenkilencedik századi matematikus differenciálformákra vonatkozó munkája alapján. Munkájának egy következménye

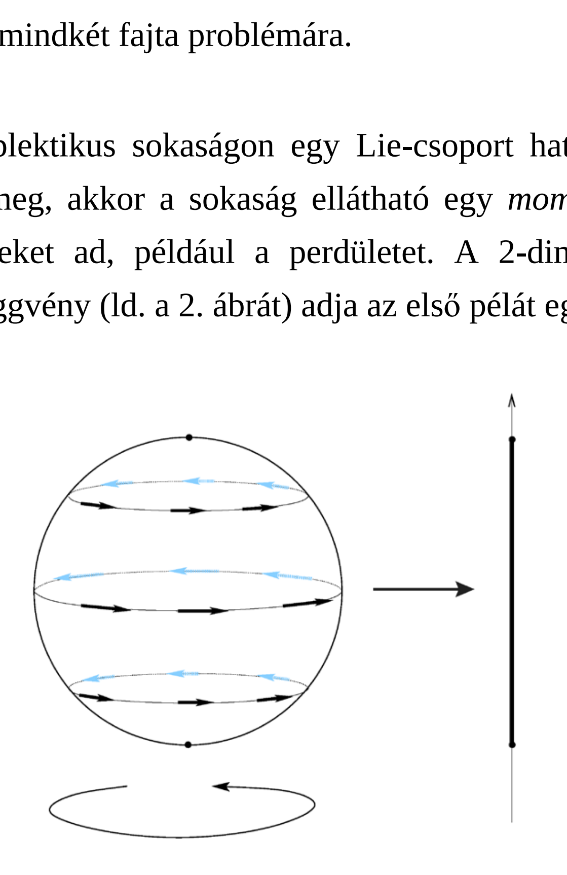
Darboux tétele. *Legyen M egy $2d$-dimenziós sokaság ω szimplektikus formával. Ekkor minden $p \in M$ pontra létezik egy olyan U, $x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d$ koordinátákkal ellátott térkép, hogy ezen*

$$\omega = \sum_{i=1}^{d} dx_i \wedge dy_i = \omega_{std}.$$

Ez a tétel pontosítja azt az állítást, hogy a szimplektikus geometria flexibilis/rugalmas. A Riemann-geometriában lokális invariánsok (mint például a görbület) különböztetik meg a metrikákat. Darboux tétele szerint lokálisan minden szimplektikus forma identikus. Ilymódon csak olyan globális topologikus kérdések maradnak, mint *Mi egy adott szimplektikus sokaság kohomológia-gyűrűje?*, vagy a finomabb, szimplektikus kérdés: *Milyen nagy lehet egy adott szimplektikus sokaságon egy Darboux-térkép?*.

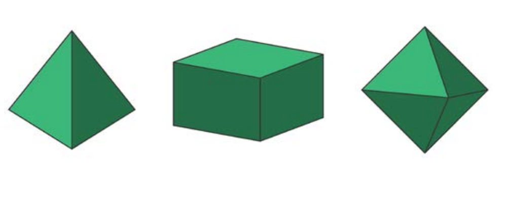
Az 1970-es és 80-as években kifejlesztett két eszköz drámai fejlődést tett lehetővé a szimplektikus geometriában és a topológiában. Marsden és Weinstein, Atiyah, valamint Guillemin és Sternberg a **momentumleképezés** tulajdonságait leírva megoldhatóvá tették az első, kohomológiákra vonatkozó kérdést. Gromov pedig **pszeudoholomorf görbék** bevezetésével adott eszközt a második típusú kérdések megtámadására. Nézzünk néhány példát mindkét fajta problémára.

Amennyiben egy szimplektikus sokaságon egy Lie-csoport hatásában megmutatkozó szimmetria figyelhető meg, akkor a sokaság ellátható egy *momentumleképezéssel*. Ez megmaradó mennyiségeket ad, például a perdületet. A 2-dimenziós gömbfelületen értelmezett magasságfüggvény (ld. a 2. ábrát) adja az első pélát egy ilyen leképezésre.



2. ábra. Az S^1 körvonalnak az S^2 gömbön való forgatások menti hatásához tartozó momentumleképezés.

Ez esetben a megmaradó mennyiség épp a perdület, és a magasságfüggvény egyszerű példáját adja egy perfekt Morse-függvénynek S^2-n. Amennyiben a Lie-csoport az S^1 körvonal $T = S^1 \times \ldots \times S^1$ hatványa, azt mondjuk, hogy a sokaság egy Hamilton-féle T-tér, a momentumleképezést pedig $\phi\colon M \to \mathbb{R}^n$ jelöli. 1982-ben Atiyah, és tőle függetlenül Guillemin és Sternberg a következő konvexitási tételt látta be (ld. a 3. ábrát):

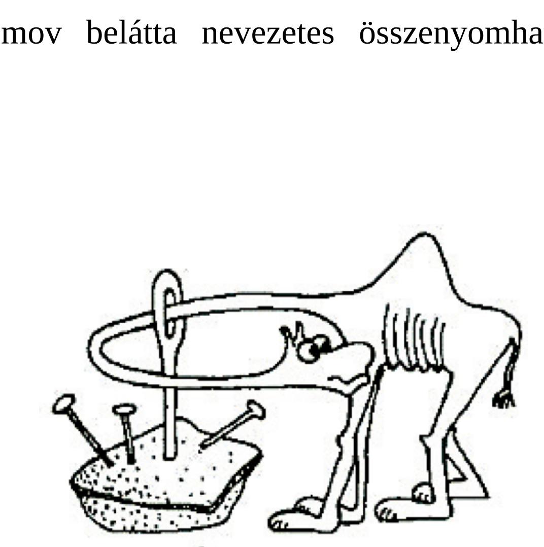


3. ábra. Atiyah és Guillemin-Sternberg belátták, hogy amennyiben egy szimplektikus sokaság bizonyos szimmetriáknak tesz eleget, úgy a momentumleképezésnél származó képe egy konvex politóp.

Konvexitási tétel. *Egy M kompakt Hamilton-féle T-tér esetén a $\phi(M)$ kép egy konvex politóp, amely épp az M^T T-fixpontok $\phi(M^T)$ képének konvex burka.*

E tétel szoros kapcsolatot teremt egyrészt a szimplektikus és az algebrai geometria, másrészt a diszkrét geometria és a kombinatorika között. Atiyah bizonyítása azt is megmutatja, hogy a momentumleképezés (Bott értelmében) Morse-függvényt ad M-en, így a differenciáltopológia eszköztárát is elérhetővé teszi ahhoz, hogy M globális topológiai tulajdonságait megértsük. Momentumleképezéseket **szimplektikus hányadosok** készítéséhez is használni lehet.

(2) példánk szerint a kétdimenziós szimplektikus geometria nem más, mint területmegőrző geometria. Mivel egy szimplektikus forma egy térfogati formát ad, természetesen vetődik fel a kérdés, hogy magasabb dimenziókban is így van-e ez, vajon a szimplektikus geometria ott is ugyanolyan flexibilis, mint a térfogatmegőrző geometria: egy szimplektikus sokaság bárhogy nyújtható és/vagy összenyomható, feltéve, hogy a térfogatát megőrizzük? Pszeudoholomorf görbék alkalmazásával Gromov megmutatta, hogy ez nem így van, a szimplektikus leképezések sokkal merevebbek, mint térfogatmegőrző társaik. Jelölje $B^{2d}(r)$ az $\mathbb{R}^{2d}$ térben lévő r sugarú golyót. 1985-ben Gromov belátta nevezetes összenyomhatatlansági tételét (ld. a 4. ábrát):



4. ábra. Az összenyomhatatlansági tétel geometriai tartalmat ad annak az állításnak, hogy egy teve nem tud átbújni a tű fokán: egy szimplektikus teve nem fér bele egy olyan térbe, amelynek egyik kétdimenziós iránya nagyon szűk, függetlenül attól, hogy a többi irányban mekkora a tér. Cosgrove grafikája eredetileg Ian Stewart „A szimplektikus teve” című cikkében jelent meg (1987, Nature) – köszönjük, hogy itt ismét felhasználhatjuk.

Összenyomhatatlansági tétel. *Pontosan akkor létezik egy olyan $B^{2d}(R) \to B^2(r) \times \mathbb{R}^{2d-2}$ beágyazás, mely megőrzi az ω_{std} standard szimplektikus formát, ha $R \leq r$.*

A tétel egyik iránya világos: ha $R \leq r$, akkor a megkívánt beágyazás nyilván létezik. Hogy megtalálja egy ilyen leképezés akadályát, Gromov egy $B^2(r) \times \mathbb{R}^{2d-2}$-beli pszeudoholomorf görbét és a szimplektikus beágyazást használta ahhoz, hogy egy $B^{2d}(R)$-beli minimális felületet adjon, ami már kikényszeríti az $R \leq r$ egyenlőtlenséget. Másrészt viszont nyilván minden r és R választásra létezik térfogatmegőrző leképezés. Informálisan szólva, a szimplektikus teve nem tud átbújni a tű fokán. Gromov fenti munkája rengeteg további eredményhez vezetett a szimplektikus invariánsok elméletében, mindegyik pszeudoholomorf görbéket használva alapnak. Ezen konstrukciók bonyolult komplex analitikus elveket és Fredholm-elméletet alkalmaznak. Nagyon fontos részét képezik napjaink szimplektikus topológiai és türörszimmetriai kutatásainak, és fontos perspektívát nyújtanak négy-sokaságok invariánsainak megértéséhez is.

A momentumleképezésről további részletek [1]-ben találhatók, míg a pszeudoholomorf görbék elméletét [2] dolgozza fel.

Irodalomjegyzék

[1] A. Cannas da Silva, Lectures on Symplectic Geometry, Lecture Notes in Mathematics, 1764, Springer-Verlag, Berlin, 2001. MR 1853077

[2] D. McDuff and D. Salamon, Introduction to Symplectic Topology, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, New York, 1995. MR 1373431

Tara S. Holm

Tara S. Holm a Cornell Egyetem matematika professzora, és a *Notices of the AMS* külső munkatársa. Cikke a Simons Foundation támogatásával a 2016. decemberi számban jelent meg. Az Érintő a dolgozatot az AMS és a szerző engedélyével közli. A fordítást *Stipsicz András* készítette.

Tara S. Holm: What is....Symplectic Geometry? *Notices Amer. Math. Soc.* Vol. 63 Num. 11.(December 2016) 1252-1254 (The graduate student section) ©2016 American Mathematical Society, https://www.ams.org/publications/journals/notices/201611/rnoti-p1252.pdf.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Pink István 2022. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A Baker-módszer és egy alkalmazása

Ezen cikk célja, hogy rövid betekintést nyújtson a diofantikus számelmélettel foglalkozó kutatók által sokszor idézett és alkalmazott, Alan Baker Fields-érmes matematikus nevével fémjelzett, ún. Baker-módszerbe.

Ehhez először néhány alapvető definíciót ismertetünk. Az $\alpha \in \mathbb{C}$ komplex számot *algebrai számnak* nevezzük, ha α gyöke egy nem azonosan nulla egész együtthatós polinomnak. Megmutatható, hogy minden α algebrai szám esetén létezik egyetlen olyan minimális fokszámú $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis $m_\alpha(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k \in \mathbb{Z}[x]$ egész együtthatós polinom, amelyre $a_0 > 0$, $\mathrm{lnko}(a_0, a_1, \ldots, a_k) = 1$ és amelynek α gyöke. Ezt a polinomot az α *definiáló polinomjának*, ezen polinom fokszámát pedig α *fokának* nevezzük. Ha az $\alpha \in \mathbb{C}$ szám nem algebrai, akkor *transzcendensnek* hívjuk.

1844-ben Liouville [19] konstruált először explicit módon transzcendens számokat. Megmutatta, hogy pl. a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$ szám transzcendens. Megjegyezzük, hogy míg transzcendes számokat konstruálni viszonylag egyszerű, addig jóval nehezebb feladat megmutatni egy adott komplex számról, hogy transzcendens-e vagy sem. Ebben a tekintetben megemlítjük, hogy Hermite 1873-ban igazolta, hogy az e szám transczcendens, míg Lindemann 1882-ben bizonyította a π transzcendenciáját.

1900-ban a Párizsban megrendezett II. Nemzetközi Matematikai Kongresszuson David Hilbert, a világ ekkor már elismerten egyik legnagyobb matematikusa, „Matematikai problémák” címmel tartott, később óriási jelentőségre szert tevő előadást, amiben felsorolta a matematika szerinte legfontosabb problémáit. Ebből a hetedik probléma bizonyos alakú számok transzcendenciájára vonatkozik.

1. probléma. (Hilbert 7. problémája) *Ha $\alpha \neq 0, 1$ algebrai szám és β irracionális algebrai szám, akkor α^β transzcendens.*

A fenti problémát Hilbert nagyon nehéznek érezte és ezzel kapcsolatban az alábbi megjegyzéseket tette:

„A 7. probléma nagyon nehéz, így érdemes összehasonlítani néhány ismert problémával.

A Riemann-hipotézis bizonyítása irányába az utóbbi években komoly előrehaladás történt, így nagyon remélem, hogy még megérem a bizonyítását.

Számos biztató eredmény van a Fermat-sejtéssel kapcsolatban is, ezért talán a hallgatóság legfiatalabb tagjai megérik a sejtés bizonyítását.

Annak a bizonyítását azonban, hogy a $2^{\sqrt{2}}$ transzcendens szám, a jelenlevők közül senki sem fogja látni.”

Ma már tudjuk, hogy Gelfond és Schneider alább ismertetendő tételének köszönhetően (ld. 1. tétel), Hilbert 7. problémája megoldottnak tekinthető, valamint Wiles [27] munkájának köszönhetően a Fermat-sejtést is sikerült igazolni. A Hilbert által „legkönnyebbnek” gondolt probléma, azaz a Riemann-sejtés, még mindig megoldatlan.

Gelfond és Schneider tételének ismertetéséhez szükségünk lesz egy nemnulla komplex szám logaritmusának a főértékére[1]. Mint ismert, minden $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ felírható $\alpha = r\mathrm{e}^{i\phi}$ alakban, ahol $r, \phi \in \mathbb{R}, r = |\alpha| > 0$. Ekkor $\log\alpha$ alatt a *logaritmus főértékét* értjük, azaz $\log\alpha := \ln r + i\phi$, ahol $-\pi < \phi \leq \pi$.

Hilbert 7. problémáját Gelfond és Schneider egymástól függetlenül igazolta (ld. [13] és [23]).

1. tétel. (Gelfond és Schneider egymástól függetlenül (1934)) *Legyenek $\alpha_1 \neq 0, 1, \alpha_2 \neq 0, 1$ valamint $\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0$ olyan tetszőleges algebrai számok, amelyekre $\log\alpha_1$ és $\log\alpha_2$ lineárisan függetlenek a racionális számtest fölött[2]. Ekkor*

$$\beta_1 \log\alpha_1 + \beta_2 \log\alpha_2 \neq 0. \tag{1}$$

Megmutatható, hogy az 1. tétel implikálja Hilbert 7. problémáját, így végtelen sok példát szolgáltat transzcendens számokra. Ezért pl. a Hilbert által felvetett $2^{\sqrt{2}}$ szám transzcendens. Továbbá, mivel a jól ismert Euler-formula miatt $\mathrm{e}^{i\pi} = -1$, ezért Hilbert 7. problémáját felhasználva adódik, hogy az e^π szám is transzcendens, hiszen

$$\mathrm{e}^\pi = \mathrm{e}^{-i^2\pi} = (\mathrm{e}^{i\pi})^{-i} = (-1)^{-i}.$$

A Gelfond és Schneider által egymástól függetlenül igazolt 1. tétel az $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ algebrai számokra tett bizonyos feltételek mellett azt állítja, hogy az (1) kétváltozós logaritmikus lineáris forma nem lehet nulla. Természetes módon merül fel tehát a kérdés, hogy ekkor a $|\beta_1\log\alpha_1 + \beta_2\log\alpha_2|$ mennyiség mennyire lehet közel nullához. Ebben a tekintetben megemlítjük Gelfond egy 1935-ben közölt eredményét (ld. [14]).

2. tétel. (Gelfond (1935)) *Legyenek $\alpha_1 \neq 0, 1, \alpha_2 \neq 0, 1$ olyan tetszőleges algebrai számok, amelyekre $\log\alpha_1$ és $\log\alpha_2$ lineárisan függetlenek a racionális számtest fölött és tegyük fel, hogy β_1, β_2 olyan tetszőleges egészek, amelyek közül legalább az egyik nemnulla. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy $C = C(\varepsilon, \alpha_1, \alpha_2) > 0$ effektíve meghatározható konstans[3] úgy, hogy*

$$|\beta_1\log\alpha_1 + \beta_2\log\alpha_2| > C\exp\left(-(\log B)^{5+\varepsilon}\right), \tag{2}$$

ahol $B = \max\{3, |\beta_1|, |\beta_2|\}$.

Gelfond megjegyezte, hogy az 1. tétel valamint a 2. tételben szereplő (2) becslés megfelelő kiterjesztése tetszőleges $n \geq 2$ változós logaritmikus lineáris formákra jelentős eredményekre vezetne a diofantikus approximáció valamint a diofantikus egyenletek elméletében. Az áttörést, valamint Gelfond és Schneider 1. tételének, illetve Gelfond 2. tételének messzemenő kiterjesztéseit Alan Baker 1960-as évekbeli kitűnő munkái hozták meg.

Az alábbi tétel Baker [1], [2], [3] egyik meghatározó eredménye, mely tetszőleges $n \geq 2$ változós logaritmikus lineáris formák algebrai számok feletti lineáris függetlenségével kapcsolatos. Ez az eredmény kiterjesztése Gelfond és Schneider 1. tételének.

3. tétel. (Baker (1966,1967)) *Legyen $n \geq 2$ egy pozitív egész és legyenek $\alpha_i \neq 0, 1$ ($1 \leq i \leq n$) tetszőleges algebrai számok, valamint jelölje $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ számok logaritmusainak a főértékét. Tegyük fel, hogy $\beta_1, \ldots, \beta_n$ olyan tetszőleges algebrai számok, amelyek közül legalább egy nemnulla. Ha $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ lineárisan függetlenek a racionális számtest fölött, akkor*

$$\beta_1\log\alpha_1 + \ldots + \beta_n\log\alpha_n \neq 0.$$

Megemlítjük még Baker [1] alábbi eredményét, amely kiterjesztése Gelfond 2. tételének tetszőleges $n \geq 2$ változós logaritmikus lineáris formákra. A tétel kimondásához használjuk egy α algebrai szám *naív magasságának* a fogalmát, ami nem más mint az α $\mathbb{Z}$ feletti definiáló polinomja együtthatói abszolútértékének a maximuma.

4. tétel. (Baker (1966)) *Legyen $n \geq 2$ pozitív egész, és legyenek $\alpha_i \neq 0, 1$ ($1 \leq i \leq n$) tetszőleges algebrai számok, valamint jelölje $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ számok logaritmusainak a főértékét. Tegyük fel, hogy $\beta_1, \ldots, \beta_n$ olyan algebrai számok, amelyek közül legalább egy nemnulla. Ha $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ lineárisan függetlenek a racionális számtest fölött, akkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy $C = C(\varepsilon, n, d, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) > 0$ effektíve kiszámítható konstans úgy, hogy*

$$|\beta_1\log\alpha_1 + \cdots + \beta_n\log\alpha_n| > C\exp\left(-(\log B)^{n+1+\varepsilon}\right),$$

ahol d, illetve B jelöli a β_i ($1 \leq i \leq n$) algebrai számok fokainak, illetve naív magasságainak egy felső korlátját.

Látható, hogy Baker fenti tételében az alsó korlát hasonló struktúrájú mint a 2. tételben, sőt az általános esetben a $(\log B)$ kitevőjében $n + 1 + \varepsilon$ áll, ami némileg javítása az $n = 2$ esetben szereplő $5 + \varepsilon$ nagyságrendnek.

Két évvel Baker fenti tétele után Feldman [11] a 4. tétel alábbi javítását igazolta.

5. tétel. (Feldman (1968)) *Legyen $n \geq 2$ pozitív egész és legyenek $\alpha_i \neq 0, 1$ ($1 \leq i \leq n$) algebrai számok, valamint jelölje $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ számok logaritmusainak a főértékét. Tegyük fel, hogy $\beta_1, \ldots, \beta_n$ olyan algebrai számok, amelyek közül legalább egy nemnulla. Ha $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ lineárisan függetlenek a racionális számtest fölött, akkor létezik egy $C = C(n, d, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) > 0$ effektíve kiszámítható konstans úgy, hogy*

$$|\beta_1\log\alpha_1 + \cdots + \beta_n\log\alpha_n| > \exp\left(-C\log B\right),$$

ahol d, illetve B jelöli a β_i ($1 \leq i \leq n$) algebrai számok fokainak, illetve naív magasságainak egy felső korlátját.

Megjegyezzük, hogy az 5. tételben a $(\log B)$-től való függés éles, azaz ez nem gyengíthető tovább. A diofantikus egyenletekre való alkalmazáskor a $\beta_1, \ldots, \beta_n$ algebrai számok egészek és fontos még, hogy a C értéke explicit módon kiszámítható legyen.

Ebben a tekintetben Baker [4] volt az első, aki 1968-ban Feldman fenti eredményének teljesen explicit verzióját igazolta.

6. tétel. (Baker (1968)) *Legyen $n \geq 2$ pozitív egész, legyenek $\alpha_i \neq 0, 1$ ($1 \leq i \leq n$) algebrai számok, valamint jelölje $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ számok logaritmusainak a főértékét, és tegyük fel, hogy $0 < \delta \leq 1$. Lgyenek továbbá $b_1, \ldots, b_n$ olyan egészek, amelyek közül legalább egy nemnulla, és legyen $B = \max\{|b_1|, \ldots, |b_n|\}$. Ha*

$$0 < |b_1\log\alpha_1 + \cdots + b_n\log\alpha_n| < \exp\left(-(\delta B)\right),$$

akkor

$$B < \left(4^{n^2}\delta^{-1}d^{2n}\log A\right)^{(2n+1)^2},$$

ahol $d \geq 4$, illetve $A \geq 4$ jelöli az α_i ($1 \leq i \leq n$) algebrai számok fokainak, illetve naív magasságainak egy felső korlátját.

Ezek után kiderült, hogy Baker logaritmikus lineáris formákra vonatkozó explicit tételei alkalmazhatók diofantikus egyenletek széles osztályaira. Nevezetesen, ezen tételek segítségével effektív felső korlátok nyerhetők jónéhány sokat vizsgált klasszikus diofantikus egyenletcsalád megoldásainak a méretére, úgy mint Thue-egyenletek [5], szuper- és hiperelliptikus egyenletek [8], Mordell-típusú egyenletek [6], [7], Schinzel–Tijdeman-egyenlet [24], Catalan-egyenlet [26], kétváltozós egységegyenletek [16], [17], diszkrimináns és indexforma egyenletek [15], szétesőforma egyenletek [18], lineáris binér rekurzív sorozatokkal kapcsolatos diofantikus egyenletek [22], [25] stb. Megjegyezzük, hogy ezeken a területeken a Győry Kálmán által alapított debreceni számelméleti iskola számos tagja ért el szép eredményeket (ld. pl. Győry Kálmán, Pethő Attila, Brindza Béla, Gaál István, Pintér Ákos, Hajdu Lajos, Bérczes Attila, Tengely Szabolcs, Pink István idevonatkozó munkáit).

Baker explicit eredményeit kombinálva egy – Baker és Davenport [9] által kidolgozott – redukciós eljárással, kiderült, hogy a 120 az egyetlen olyan pozitív egész szám, amellyel az $\{1, 3, 8\}$ diofantikus hármas kiterjeszthető az $\{1, 3, 8, 120\}$ diofantikus négyessé.[4] Ez a kiváló eredmény is megmutatta, hogy a Baker által kidolgozott módszer kombinálása bizonyos redukciós eljárásokkal kiválóan alkalmas lehet konkrét diofantikus egyenletek teljes megoldáshalmazának leírására. Nevezetesen, kombináljuk Baker fenti explicit tételét (pl. 6. tétel) vagy ezen tétel alábbiakban ismertetendő valamelyik javítását (pl. 7. Tétel) bizonyos redukciós eljárásokkal (pl. lánctört-algoritmus, Baker–Davenport redukciós algoritmus, LLL-algoritmus). Ezen a ponton megemlítjük Bugeaud [10] 2018-ban megjelent könyvét, amely egy kiváló áttekintő mű a Baker-módszerrel kapcsolatban.

A cikk hátralevő részében először ismertetjük a nemnulla logaritmikus lineáris formákra vonatkozó, Matveevtől [20] származó jelenlegi legélesebb alsó becslést, majd egy konkrét példán keresztül megmutatjuk, hogy a 7. tétel és lánctört-algoritmus kombinációja milyen hatékony eszközként szolgál egy bizonyos diofantikus egyenlet összes megoldásának meghatározására.

Ehhez szükségünk lesz az alábbi jelölésekre. Egy $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrai szám esetén jelölje továbbra is $m_\alpha(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k \in \mathbb{Z}[x]$ ($a_0 > 0$, $\mathrm{lnko}(a_0, a_1, \ldots, a_k) = 1$) az α definiáló polinomját valamint legyenek $\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(k)}$ az α közönséges konjugáltjai (azaz az m_α polinom $\mathbb{C}$-beli gyökei). Ekkor α *abszolút logaritmikus magasságán* a

$$\mathrm{h}(\alpha) := \frac{1}{k}\left(\log a_0 + \sum_{i=1}^{k}\log\max\left\{1, |\alpha^{(i)}|\right\}\right)$$

mennyiséget értjük.

Legyenek $\alpha_i \neq 0, 1$ ($1 \leq i \leq n$) algebrai számok, és jelölje $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ logaritmusainak a főértékét. Legyen $\mathbb{K}$ egy olyan algebrai számtest[5], amely tartalmazza az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebrai számokat, és legyen $d = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. Tekintsük a

$$\Lambda = b_1\log\alpha_1 + \cdots + b_n\log\alpha_n, \tag{3}$$

logaritmikus lineáris formát, ahol $b_1, \ldots, b_n$ olyan egészek, amelyek közül legalább egy nemnulla. Legyen

$$\log A_i = \max\left\{\mathrm{h}(\alpha_i), \frac{|\log\alpha_i|}{d}, \frac{0{,}16}{d}\right\}, \quad (1 \leq i \leq n)$$

és

$$B = \max\{|b_1|, \ldots, |b_n|, 3\}.$$

7. tétel. (Matveev (2000)) *Ha (3)-ban $\Lambda \neq 0$, akkor*

$$\log|\Lambda| \geq -C(n, \varkappa)d^{n+2}\log A_1 \cdots \log A_n \log(\mathrm{e}d)\log(\mathrm{e}B),$$

ahol $\varkappa = 1$, ha $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ és $\varkappa = 2$ egyébként, valamint

$$C(n, \varkappa) = \min\left\{\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}n\right)^{\varkappa}30^{n+3}n^{3{,}5}, 2^{6n+20}\right\}.$$

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a 7. tétel és a lánctört-algoritmus kombinációja hogyan alkalmazható a Catalan-egyenlet egy speciális esetének a teljes megoldására. Szükségünk lesz még az alábbi jól ismert technikai lemmára.

Lemma. *Ha x olyan valós szám, amelyre $|x - 1| < \frac{1}{2}$, akkor $|x - 1| \geq \frac{|\log x|}{2}$.*

A cikk utolsó részében vizsgálatunk tárgyát az

$$x^n - y^m = 1$$

Catalan-egyenlet[6] azon speciális esete képezi, amikor $(x, y) = (3, 2)$. Nevezetesen tekintsük a

$$3^n - 2^m = 1 \tag{4}$$

diofantikus egyenletet az n, m pozitív egész ismeretlenekkel. Világos, hogy az $(n, m) = (1, 1)$ és $(n, m) = (2, 3)$ megoldásai a (4) egyenletnek. A 7. tételt a lánctört-algoritmussal kombinálva megmutatjuk, hogy a fentieken kívül nincs is más megoldás, azaz az $(n, m) \in \{(1, 1), (2, 3)\}$ a (4) összes megoldása a pozitív egészek körében.

Tegyük fel, hogy (n, m) egy megoldása a (4) egyenletnek. Elemi nagyságrendi meggondolással adódik, hogy

$$m \geq n. \tag{5}$$

A (4) egyenlet mindkét oldalát 2^m-nel osztva, és abszolút értéket véve, kapjuk, hogy

$$|3^n2^{-m} - 1| = \frac{1}{2^m}. \tag{6}$$

A továbbiakban két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy (6)-ban

$$|3^n2^{-m} - 1| \geq \frac{1}{2} \text{ vagy } |3^n2^{-m} - 1| < \frac{1}{2}.$$

Ha $|3^n2^{-m} - 1| \geq \frac{1}{2}$, akkor (6) azt implikálja, hogy

$$\frac{1}{2^m} = |3^n2^{-m} - 1| \geq \frac{1}{2},$$

amiből $m \leq 1$ adódik. Ez viszont (5) miatt éppen az $(n, m) = (1, 1)$ megoldást adja.

Tegyük most fel, hogy $|3^n2^{-m} - 1| < \frac{1}{2}$. A Lemmát az $x = 3^n2^{-m}$ választással alkalmazva azt nyerjük, hogy $|3^n2^{-m} - 1| \geq \frac{|\log(3^n2^{-m})|}{2}$, ami (6) miatt az

$$|n\log 3 - m\log 2| \leq \frac{1}{2^{m-1}} \tag{7}$$

egyenlőtlenségre vezet. Jelölje Λ a (7) bal oldalán szereplő

$$\Lambda := n\log 3 - m\log 2$$

logaritmikus lineáris formát. Ekkor (7)-ből azt kapjuk, hogy

$$\log|\Lambda| \leq -(m-1)\log 2. \tag{8}$$

Ha most $\Lambda = 0$ lenne, akkor $3^n = 2^m$ adódna, ami n és m pozitív egész volta miatt lehetetlen. Ezért a továbbiakban feltehető, hogy $\Lambda \neq 0$. A célunk az, hogy a Baker-módszer felhasználásával nemtriviális alsó becslést nyerjünk a $\log|\Lambda|$ mennyiségre. Ehhez alkalmazzuk a 7. tételt az alábbi paraméterekkel: $n = 2$, $b_1 = n$, $\alpha_1 = 3$, $b_2 = -m$, $\alpha_2 = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $d = 1$, $\kappa = 1$. Mivel $\mathrm{h}(\alpha_1) = \mathrm{h}(3) = \log 3$ és $\mathrm{h}(\alpha_2) = \mathrm{h}(2) = \log 2$, ezért a $\log A_1 := \log 3$ és $\log A_2 := \log 2$ választás megfelelő. Továbbá (5) miatt élhetünk a $B := \max\{m, 3\}$ választással. Így a 7. tétel miatt adódik, hogy

$$\log|\Lambda| \geq -(30^5 \cdot 2^{3{,}5} \cdot \mathrm{e})(\log 3)(\log 2)(\log(\max\{m, 3\})). \tag{9}$$

Végül, a (8) és (9) összevetéséből az

$$\frac{m-1}{\log(\max\{m, 3\})} \leq (30^5 \cdot 2^{3{,}5} \cdot \mathrm{e})(\log 3)$$

következik, amiből egyszerű számolás után adódik, hogy

$$m < 2 \cdot 10^{10}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy ha a (4) egyenletnek van olyan (n, m) megoldása, melyre

$$|3^n2^{-m} - 1| < \frac{1}{2}, \tag{10}$$

akkor

$$\max\{m, n\} = m < 2 \cdot 10^{10}. \tag{11}$$

Ez egyrészt igen ígéretes, hiszen az ismeretlenek méretére kapott felső korlát teljesen explicit, másrészt viszont túl nagy ahhoz, hogy (4) megoldásait a (11) korlát alatt direkt módon le tudjuk számolni és meg tudjuk határozni. Ezért szükséges a (11) korlát redukálása, melyhez a lánctört-algoritmust hívjuk segítségül. A (7) mindkét oldalát $(m \cdot \log 3)$-mal leosztva az

$$\left|\frac{n}{m} - \frac{\log 2}{\log 3}\right| \leq \frac{1}{m \cdot 2^{m-1} \cdot \log 3} \tag{12}$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

Ha $\max\{m, n\} = m \leq 3$, akkor a (4) egyenlet (10) feltételnek eleget tevő összes (n, m) megoldása triviálisan leszámlálható. Azt kapjuk, hogy $(n, m) = (2, 3)$ az egyetlen ilyen megoldás.

Tegyük fel végül, hogy $\max\{m, n\} = m \geq 4$. Ekkor $\frac{1}{m \cdot 2^{m-1} \cdot \log 3} < \frac{1}{2m^2}$, és ezért Legendre egy tétele (ld. [12], 368. oldal, 2. Megjegyzés) és (12) miatt azt nyerjük, hogy $\frac{n}{m}$ szükségképpen a $\gamma := \frac{\log 2}{\log 3}$ valós szám egy közelítő törtje. Ezt kombinálva (11)-gyel azt kapjuk, hogy a (4) egyenlet (10) feltételt kielégítő (n, m) megoldása a γ azon közelítő törtjei közül kerülhet ki, amelyekre

$$m < 2 \cdot 10^{10}.$$

Ilyen közelítő törtből viszont kevés van. Egy gyors számítógépes ellenőrzés mutatja, hogy a γ 23-adik konvergensének a nevezője már nagyobb, mint $2 \cdot 10^{10}$, ezért elegendő a γ első 22 darab konvergensét kiszámolni. További gyors számítógépes vizsgálat igazolja, hogy ezen 22 darab $\frac{p_i}{q_i}$ ($1 \leq i \leq 22$) konvergensre fennáll, hogy

$$\min_{1 \leq i \leq 22}\left|\frac{p_i}{q_i} - \gamma\right| > 8{,}8 \cdot 10^{-22},$$

amiből persze

$$\left|\frac{n}{m} - \frac{\log 2}{\log 3}\right| > 8{,}8 \cdot 10^{-22} \tag{13}$$

is következik. Végül a (12) és (13) összefüggéseket kombinálva azt nyerjük, hogy

$$8{,}8 \cdot 10^{-22} < \frac{1}{m \cdot 2^{m-1} \cdot \log 3},$$

amiből $m \leq 64$ adódik. A $\max\{m, n\} = m \leq 64$ felső korlát már elegendően kicsi ahhoz, hogy a (4) egyenlet $4 \leq m \leq 64$ és $1 \leq n \leq m$ feltételeknek eleget tevő (n, m) megoldásait megadjuk. Kiderül, hogy ilyen megoldás nincs. Ezért a (4) egyenlet összes megoldása a pozitív egészekre nézve éppen az $(n, m) = (1, 1)$ és $(n, m) = (2, 3)$.

A fenti kidolgozott példa is jól tükrözi, hogy milyen erős eszköz a Baker-módszer a diofantikus egyenletek elméletében. Segítségével nagy, de teljesen explicit felső korlátok nyerhetők bizonyos diofantikus egyenletek megoldásainak méretére. Végül az így kapott Baker-típusú korlátokat valamilyen hatékony redukciós eljárással (pl. lánctört-algoritmus, Baker–Davenport-algoritmus, LLL-algoritmus) redukálva leírható ezen diofantikus egyenletek teljes megoldáshalmaza.

Irodalomjegyzék

[1] A. Baker, *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. I*, Mathematika 12 (1966), 204–216.

[2] A. Baker, *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. II*, Mathematika 14 (1967), 102–107.

[3] A. Baker, *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. III*, Mathematika 14 (1967), 220–228.

[4] A. Baker, *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. IV*, Mathematika 15 (1968), 204–216.

[5] A. Baker, *Contributions to the theory of Diophantine equations. I. On the representation of integers by binary forms*, Phil. Trans. Royal Soc. London A263 (1968), 173–191.

[6] A. Baker, *Contributions to the theory of Diophantine equations. II. The Diophantine equation* $y^2 = x^3 + k$, Phil. Trans. Royal Soc. London A263 (1968), 193–208.

[7] A. Baker, *The diophantine equation* $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, J. London Math. Soc. 43 (1968), 1–9.

[8] A. Baker, *Bounds for the solutions of the hyperelliptic equation*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 65 (1969), 439–444.

[9] A. Baker and H. Davenport, *The equations* $3x^2 - 2 = y^2$ *and* $8x^2 - 7 = z^2$, Quart. J. Math. Oxford (2) 20 (1969), 129–137.

[10] Y. Bugeaud, *Linear forms in logarithms and applications*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 28, European Mathematical Society, 2018.

[11] N. I. Feldman, *Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers*, Mat. Sb. 77 (1968), 256–270 (in Russian). English translation in Math. USSR. Sb. 6 (1968) 393–406.

[12] Freud Róbert és Gyarmati Edit, Számelmélet, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006.

[13] A. O. Gelfond, *On Hilbert’s seventh problem, Dokl. Akad. Nauk SSSR 2 (1934), 1–3 (in Russian) and 4–6 (in French) Sur le septième problème de Hilbert*, Izv. Akad. Nauk SSSR 7 (1934), 623–630.

[14] A. O. Gelfond, *Sur les approximations des nombres transcendants par des nombres algébriques*, C. R. Acad. Sc. URSS 2 (1935), 177–182.

[15] K. Győry, *Sur les polynomes ä coefficients entiers et de discriminant donne III*, Publ. Math. Debrecen 23 (1976), 141-165.

[16] K. Győry, *On the number of solutions of linear equations in units of an algebraic number field*, Comment. Math. Helv. 54 (1979), 583–600.

[17] K, Győry, *On the solutions of linear diophantine equations in algebraic integers of bounded norm*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 22/23 (1980), 225–233.

[18] K. Győry, *Bounds for the solutions of decomposable form equations*, Publ. Math. Debrecen 52 (1998), 1-31.

[19] J. Liouville, *Remarques relatives à des classes très étendues de quantités dont la valeur n’est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris 18 (1844), 883–885 et 910–911.

[20] E. M. Matveev, *An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in logarithms of algebraic numbers. II*, Izv. Ross. Acad. Nauk Ser. Mat. 64 (2000), 125–180 (in Russian); English translation in Izv. Math. 64 (2000), 1217–1269.

[21] P. Mihailescu, *Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture*, J. Reine Angew. Math. 572 (2004), 167–195.

[22] A. Pethő, *Diophantine properties of linear recursive sequences. II*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.) 17 (2001), 81–96.

[23] Th. Schneider, *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen*, J. Reine Angew. Math. 172 (1934), 65–74.

[24] A. Schinzel and R. Tijdeman, *On the equation* $y^m = P(x)$ Acta Arithmetica 31 (1976), 199-204.

[25] T. N. Shorey and C. L. Stewart, *On the Diophantine equation* $ax^{2t} + bx^ty + cy^2 = d$ *and pure powers in recurrence sequences*, Math. Scand. 52 (1983), 24–36.

[26] R. Tijdeman, *On the equation of Catalan*, Acta Arithmetica 29 (1976) , 197-209.

[27] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 3, 443–551.

Pink István
Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet

Lábjegyzetek

---

[1] A valós logaritmusfüggvény kiterjeszthető $\mathbb{C}$-re, ami érdekes módon $2\pi i$ szerint periodikus lesz.

[2] A $\log\alpha_1, \log\alpha_2$ számokat lineárisan függetlennek nevezzük a racionális számtest fölött, ha $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}, r_1\log\alpha_1 + r_2\log\alpha_2 = 0$-ból következik, hogy $r_1 = r_2 = 0$. Általánosabban, a $\log\alpha_1, \log\alpha_2, \ldots, \log\alpha_n$ számokat lineárisan függetlennek nevezzük a racionális számtest fölött, ha $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$, $r_1\log\alpha_1 + r_2\log\alpha_2 + \ldots + r_n\log\alpha_n = 0$-ból következik, hogy $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$.

[3] A területen megszokott szóhasználat szerint ez azt jelenti, hogy C értéke a paraméterek rögzítése után explicit módon kiszámolható.

[4] Pozitív egészek egy $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ halmazát diofantikus m-esnek nevezzük, ha $a_ia_j + 1$ teljes négyzet minden $1 \leq i < j \leq m$ esetén.

[5] Az algebrai számtest egy olyan test, melynek minden eleme algebrai szám.

[6] 1844-ben Eugène Charles Catalan belga matematikus a neves Crelle folyóirat szerkesztõjéhez írt levelében az alábbi sejtést fogalmazta meg: *A természetes számok növekvõ sorrendbe rendezett teljes hatványaiból álló* $4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 125, 128, 144, 169, \ldots$ *sorozatában egyetlen olyan pár van, amelyek különbsége* 1. *Ez a pár a* 8 *és a* 9. A fenti sejtés ekvivalens módon átfogalmazható exponenciális diofantikus egyenletek segítségével, ami a szakirodalomban Catalan-sejtés (Catalan-egyenlet) néven vált ismertté. Nevezetesen, az $x^n - y^m = 1$ egyenletet, ahol $x > 1, y > 1, n > 1, m > 1$ ismeretlen egészek, Catalan-egyenletnek nevezzük. A Catalan-sejtés szerint ezen egyenlet egyetlen megoldása $(x, y, n, m) = (3, 2, 2, 3)$. A Baker-módszer felhasználásával Tijdeman [26] 1976-ban effektív felső korlátot nyert $\max\{x, y, n, m\}$-re, míg Mihailescu [21] 2004-ben teljes egészében igazolta a sejtést.

Mi is...? számelmélet

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon: ›

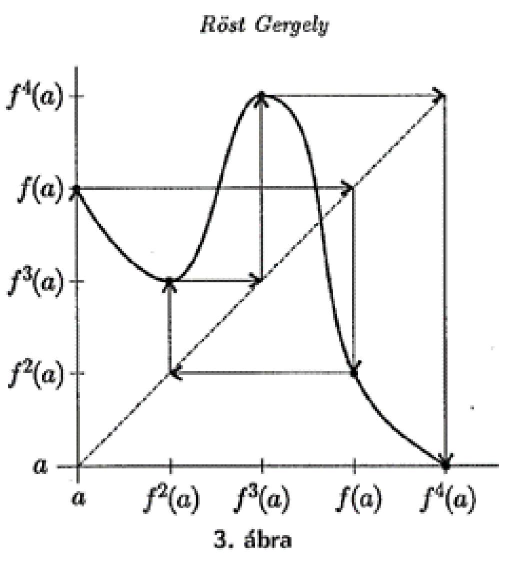
Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Röst Gergely 2022. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Az ukrán matematika egyik ékköve: Sarkovszkij tétele

1975-ben Li és Yorke amerikai matematikusok egy nagyon érdekes cikket közöltek *Period three implies chaos* címmel. Ebben a tanulmányban jelent meg először a káosz, mint matematikai fogalom. Miről is szólt az ő munkájuk? Tekintsünk egy folytonos függvényt, ami egy intervallumot, például a $[0,1]$-et önmagába képezi, vagyis 0 és 1 közötti értékeket vehet föl. Vegyünk egy kiindulási számot, és értékeljük ki ott ezt a függvényt. Ekkor kapunk egy új számot. Most értékeljük ki a függvényünket ezen az új helyen, és ezt ismételgessük, magyarul szólva iteráljuk a függvényt. Kapunk tehát egy pontsorozatot, amit felfoghatunk úgy is, hogy az f függvény által meghatározott módon bolyongunk a $[0,1]$ intervallumban. A kérdés az, hogy hova juthatunk. Lehetnek olyan x számok, amelyekre $f(x)=x$ (úgynevezett fixpont), és akkor végig egyhelyben toporgunk. Ha van két különböző x és y pont, hogy $f(x)=y$ és $f(y)=x$, akkor világos, hogy két lépés után mindig visszatérünk az x pontba. Ezeket 2-periodikus pontoknak nevezzük. Hasonlóan definiálhatóak a 3, 4, …, k-periodikus pontok is, amikor éppen k lépés után érünk vissza először a kiindulási helyzetbe.



Példa 5-periodikus pontra a lent idézett Polygon-cikkből.

Li és Yorke egyik fontos eredménye a következő: ha egy függvénynek van 3-periodikus pontja, akkor tetszőleges k-ra létezik k-periodikus pontja is, vagyis végtelen sok periodikus pont van, és az összes lehetséges periódus szükségszerűen előfordul. Ez azért elég meghökkentően hangzik első hallásra. A cikkben persze más is van, érdemes elolvasni. Mindez olyan nagy érdeklődést váltott ki a matematikusok körében, hogy azóta több mint ötezer hivatkozást kapott, vagyis ennyi matematikai publikáció idézi Li és Yorke eredményeit.

Most jön a csavar: kiderült, hogy már egy évtizeddel korábban egy fiatal ukrán matematikus a fent említettnél sokkal többet bizonyított. Az illetőt úgy hívják, hogy Olekszandr Sarkovszkij, és 1964-ben publikálta eredményeit orosz nyelven, az Ukrajnszki Matematicski Zsurnal hasábjain. A szegedi Bolyai Intézet könyvtárában egyébként megtalálható ez a folyóirat, diákkoromban én is kikerestem a cikket és próbáltam megérteni.

Sarkovszkij az alábbit csinálta: rendezzük sorba a pozitív egész számokat, de ne a szokásos módon, hogy 1,2,3,…, hanem egy egészen speciális rendezés szerint:

$$\begin{aligned}
&3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec 11 \prec 13 \prec 15 \prec \ldots \prec \\
\prec\ &2\cdot 3 \prec 2\cdot 5 \prec 2\cdot 7 \prec 2\cdot 9 \prec \ldots \prec \\
\prec\ &2^2\cdot 3 \prec 2^2\cdot 5 \prec 2^2\cdot 7 \prec \ldots \prec \\
\prec\ &2^3\cdot 3 \prec \ldots \prec \\
&\vdots \\
\prec\ &\ldots \prec 2^5 \prec 2^4 \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.
\end{aligned}$$

Vagyis kezdjük a páratlan számokkal növekvő sorrendben, majd jönnek a páratlan számok kétszeresei, aztán 2^2-szorosai, 2^3-szorosai, és így tovább, végül a kettőhatványok csökkenő sorrendben. Világos, hogy minden számot felsoroltunk, és az is, hogy bármely két számról könnyen el tudjuk dönteni, hogy melyik van előrébb. Sarkovszkij tétele azt állítja, hogy ha egy függvénynek van k-periodikus pontja, akkor van n-periodikus pontja is, ha n a k után jön ebben a rendezésben. Például 8-periodikus pont létezéséből következik 4-periodikus és 2-periodikus pont létezése, 3-periodikus pont létezéséből következik az összes periódus (ez a speciális eset éppen Li–Yorke tétele), 5-periodikus pont létezéséből következik az összes periódus kivéve három, és így tovább.

Ez az egyik kedvenc matematikai tételem, egyetemista koromban írtam is róla egy esszét Pintér Lajos tanár úr analízis kurzusán, ami később a szegedi Polygon folyóiratban is megjelent (X. kötet, 1. szám, 2000), itt elolvasható a teljes bizonyításnak egy olyan elemi változata, ami akár középiskolás tudással is megérthető.

Sarkovszkij tétele tehát sokkal részletesebben feltárja a periodikus pontok közötti viszonyokat, az ukrán folyóiratban közölt cikke azonban annyira eltűnt a süllyesztőben, hogy a megjelenését követő tíz éves időszakból én egyetlen hivatkozást sem tudtam fellelni. A nemzetközi matematikus világ csak jóval Li és Yorke cikke után fedezte fel Sarkovszkijt, és kiderült, hogy a hatvanas években ő már egy egész sor szenzációs eredményt közölt, amiről addig szinte senki sem tudott. Így, ha nagy késéssel is, de végül megkapta a megérdemelt elismerést, és a diszkrét dinamikai rendszerek területén ma már nem létezhet tankönyv Sarkovszkij eredményeinek ismertetése nélkül.

A képen Olekszandr Sarkovszkij (forrás: `https://en.wikipedia.org/wiki/Oleksandr_Mykolayovych_Sharkovsky`)

A történet szereplői közül James Yorke 80 éves, a University of Maryland professzora, és még manapság is aktívan publikál új eredményeket. Tien-Yien Li 2020-ban, 75 éves korában elhunyt. Sarkovszkij 85 éves, de 2020-ban még publikált egy cikket. Kijevben született, egész életében ott dolgozott, és jelenleg is az orosz hadsereg által éppen ostromlott városban él.

Röst Gergely
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

A cikk szerkesztése közben kaptuk a szomorú hírt, hogy egy Harkovot ért orosz rakétatámadásban meghalt Julia Zdanovska, a 2017-es EGMO (Lányok Európai Matematikai Olimpiája) ezüstérmese. Gyomorszorító arra gondolni, hogy az orosz megszállók által a napokban bombázott Kijevben és Harkovban, a tudomány két fellegvárában számos matematikus kollégánk, köztük több kedves barátunk van jelenleg is életveszélyben. A háború borzalmaival szemben tehetetlenül állva mély emberi együttérzésünket fejezzük ki ezzel az írással is kollégáink iránt.

matematikatörténet

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **GAZDA(G)SÁG** NEVET ADTUK A **GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET ROVATNAK**, AMELYBEN BEMUTATJUK, HOL, MIKÉPPEN HASZNÁLJÁK FEL A MATEMATIKÁT, MILYEN GAZDAG IS AZ A KÖR, AMELYIK ÉRINTI EZT A TUDOMÁNYÁGAT. (ROVATSZERKESZTŐK: *ILLÉS TIBOR, MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR ÉS RÖST GERGELY.*)

Oláh Vera

2022. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Matézis a Müpában

2021-ben egy új családi koncertsorozat indult a Müpában, a „Matematika a zenében”. Püthagorasz húrja, Bach, a matematikus, Mozart kockajátéka, Aranymetsző zeneszerzők címmel hirdették meg az egyes részeket. Kiknek jutott az eszébe? *Körmendy Zsoltot*, a Müpa Családi és Ifjúsági Programok szerkesztőjét kérdeztük, akinek első diplomája matematika-fizika szakos tanár.

fizikai szemle
2021/11

Kondor Imre

2022. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

A 2021-es fizikai Nobel-díjas Giorgio Parisi

Giorgo Parisi kutatási területe rendkívül széles, a fizikával összefüggésben a matematikában, a biológiában, sőt a társadalomtudományokban is. A magyar valószínűségelméleti iskola tagjai közül többen is foglalkoznak a sztochasztikus folyamatok elméletének Parisi által inspirált új fejezeteivel. A fizikai rendszerekben, az atomitól a bolygóléptékű szintig tapasztalt zavarok és fluktuációk kölcsönhatásainak feltárása terén alkotott elméletét díjazták 2021-ben Nobel-díjjal. A díjazottról *Kondor Imre* fizikus írt 2021 végén a Fizikai Szemlében. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Oláh Vera 2022. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Matézis a Müpában

Dr. Körmendy Zsolt, matematika-fizika szakos tanár, ének-zenetanár, karvezető, a Zeneakadémián a tanárképzés tanszékvezetője, a Müpa Családi és Ifjúsági Programok szerkesztője. Hogyan lett matematikatanárból zenész?

Körmendy Zsolt

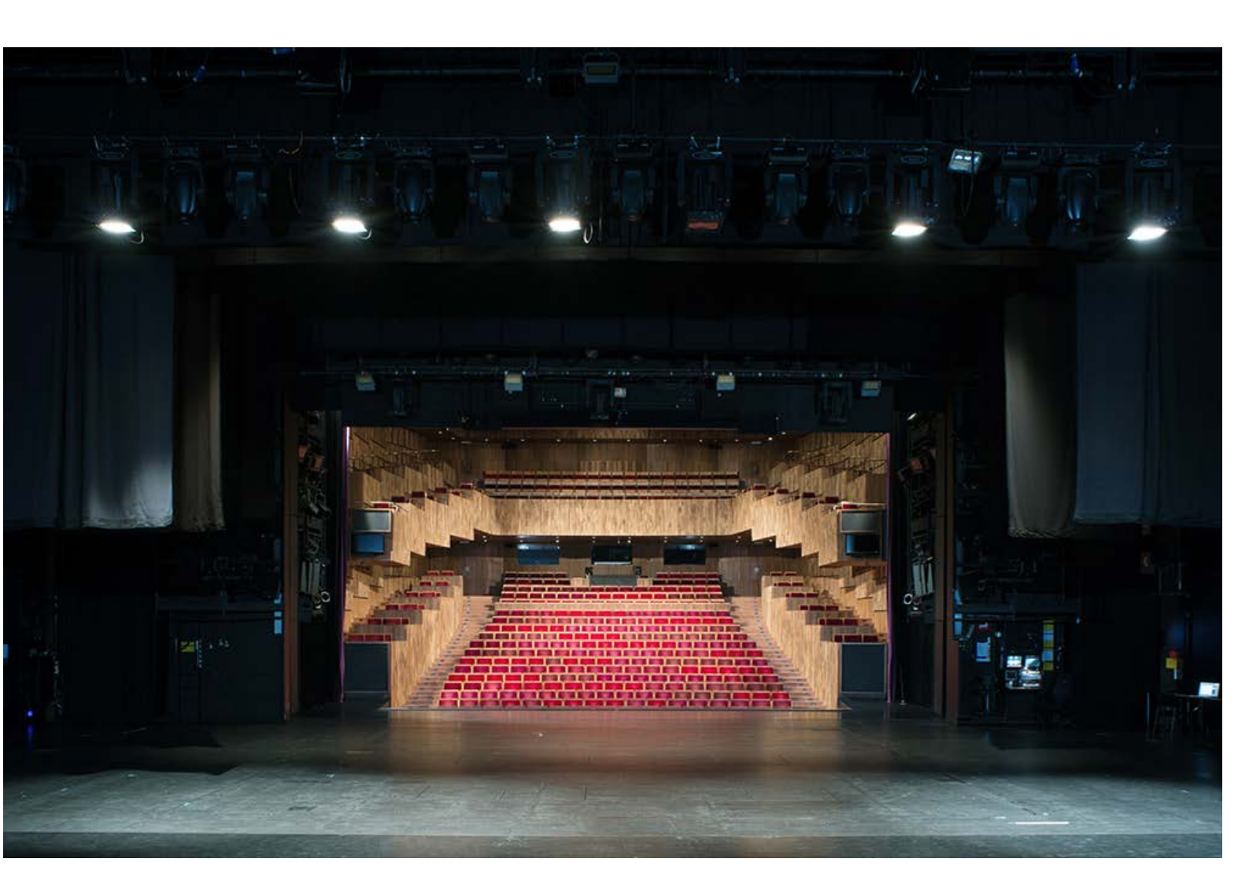
Gyerekkoromban tanultam zenét, amit egy idő után abbahagytam. A gimnáziumban később belekerültem egy olyan baráti körbe, ahol nagyon sokan készültek a Zeneakadémiára, és ott kiderült, hogy van érzékem a zenéhez, megy nekem a vezénylés. Előtte világéletemben mérnök akartam lenni. Az utolsó évben a matematikatanárom az iskolában lehetőséget adott arra, hogy órát tartsak a társaimnak. Vonzott a pedagóguspálya, és mivel még nem voltam felkészülve a Zeneakadémiára, ezért elhatároztam, elvégzem a matematika-fizika tanári szakot. Így kerültem az ELTE-re, közben végig tanultam zenét is, majd a diploma megszerzése után felvettek a Zeneakadémiára, ahol elvégeztem a karvezetői szakot. A Trefort Gimnáziumba kerültem tanárnak. Itt nagyon sokféle lehetőséget kaptam, sok mindennel foglalkoztam az énektanítás mellett: zenekart és kórust vezettem, diákönkormányzatot segítő tanár voltam, az általános iskolai évfolyamokon matematikát is tanítottam, és fizika labort vezettem. A gimnáziumi tanítás után a Müpában kezdtem el foglalkozni az ifjúsági programok szerkesztésével, majd ebből is doktoráltam az ELTE Neveléstudományi Iskolájában, és ezt is oktattam a Zeneakadémián, ahol jelenleg a tanárképzés tanszékvezetője vagyok.

2021-ben egy új sorozatot indított a Müpában „Matematika a zenében” címmel. A négy részből már három lement, az első novemberben a „Püthagorasz húrja” címet viselte. Az ismertető szerint: „A filozófus követői, a püthagoreusok a világ jelenségeit aritmetikai és geometriai szabályszerűségek alapján vélték megragadhatónak. Püthagorasz gyakorlati tapasztalatait a tudománytörténetben először matematizálta, amikor az akkordok hangközeit a húrhosszok számarányaival fejezte ki. A szám, az arány egész világunk, benne a művészetek és a tudomány építőköve is.”

A második rész meglepő címe: „Bach, a matematikus”. „Arról, hogy a legnagyobb barokk zeneszerzőt, Johann Sebastian Bachot milyen mélyen és elkötelezetten foglalkoztatta a számok tudománya, rengeteg elemzés és vad összeesküvés-elmélet született az elmúlt évszázadokban. Mert az lehet, hogy csupán városi legenda, hogy megszállottan rajongott a tizennégyes számért, az viszont egészen biztos, hogy több mint száz évvel korábban „feltalálta” a zenei Möbius-szalagot…”

A sorozat harmadik eleme lett „Mozart kockajátéka”, amit 2022 februárjában mutattak be. „Mozart művében, a Musikalisches Würfelspiel-ben, a Zenei kockajátékban 176 ütemet jegyzett le, melyet az előre megadott játékszabályok alapján, két dobókocka segítségével lehet kombinálni. A végeredmény a komponista korának közkedvelt műfaja, a véletlenszerűen generált, és bármilyen meglepően hangzik, tökéletes menüett.”

Akinek ezek után kedve támad, 2022. május 22-én a 11 órától a Fesztiválszínházban megismerkedhet az „Aranymetsző zeneszerzőkkel”: „Az aranymetszés vagy a Fibonacci-számok a természetben, a növény- és állatvilágtól az emberi testig bezárólag a legváratlanabb helyeken bukkannak fel, de nem csak ott: a fogalmaknak a zene művészetéhez is közük van. Méghozzá nagyon is szorosan, gondoljunk csak arra, hogy számos zeneszerző művében találni váratlan zenei fordulatot az ütemszám aranymetszetében.”


Müpa Fesztiválszínház (Réthey Prikkel Tamás felvétele)

Honnan jött a sorozat ötlete, volt-e előzménye, és mi az a matematikából, ami benne van a zenében?

Azt gondolom, hogy a Müpának feladata, hogy egyfajta missziós tevékenységet folytasson. Mi nemcsak szórakoztatni vagyunk hivatottak, bár fontos, hogy legyenek szórakoztató elemek, de az is nagyon fontos, hogy emeljük a lécet, és megszólítsunk olyan rétegeket, olyan csoportokat, akik ennek a kihívásnak szívesen állnak elébe: mondjuk megértsenek kicsit bonyolultabb, nem olyan egyszerűen feldolgozható összefüggéseket.

Egyetemi hallgatóimmal, amikor a zene mibenlétéről beszéltünk, előkerült a zenetörténész Eggebrecht sokat idézett gondolata: „az európai értelemben vett zene matematizált érzelem, érzelemmel telített matézis”. Vagyis a zenének tulajdonképpen kettős arculata van, ezt én egy kicsit mindig a fény kettős természetéhez hasonlítom: az egyik az emóció, a másik a matézis. Ez a kettő egymással kölcsönhatásban létezik a zenében és ez adja a zene lényegét, a valóságos tartalmát. Ebből kiindulva úgy éreztem, ezt igen fontos lenne megmutatni a gyerekeknek, ezért az előző évadban szerkesztettem egy iskolásoknak szóló sorozatot, az „Érzelmek iskolája – alapérzelmek a zenében” címmel. A négy alapérzelmes modellt követve egy négy koncertes, az alapérzelmeket hordozó zeneművekből összeállított műsort készítettünk, ahol a témát beszélgetéssel egybekötve dolgozzuk fel. Sajnos a sorozat a Covid járvány miatt félbeszakadt.

Mi a négy alapérzelem?

A meglepetés és félelem egyben, a harag, az öröm, és a szomorúság. Többféle alapérzelem-elmélet létezik, van, amelyik többet nevez meg, de nekem ez a négyes modell felelt meg, mert négy koncertre volt lehetőség.

Az érzelmi rész után jött az ötlet, hogy mi lenne, ha a matézis részét is megnéznénk. Valójában magától értetődő volt a gondolat, hiszen rengeteg egymástól elkülönülő módon lehet feltérképezni a zene matematikai vonásait.

A tervben a következő témákat vázoltam fel:

Talán a legelsők az akusztikai–fizikai vonások, például a hangközök vagy a hangrendszerek számviszonyai, akár a hangolásokig elmenve, illetve a harmóniák számviszonyai, amiket a püthagoreusi gondolkodás és a középkori zenetudomány (az akkori tudás a zenéről) nagyon erősen felnagyított és kizárólagos módon erre koncentrált, amivel a zenének egy bizonyos lényegi része elveszett. Az ókorban a harmonikusok és kanononikusok vitája végigkísérte a zenéről szóló diskurzust: a kanonikusok, a „kanon”-on, a fogólapon lefogható és mérhető távolságok alapján, szemben a harmonikusokkal, akik az érzékelés (aisthesis) révén próbálták a zenét megragadni.

A püthagoreusi hagyomány, a számszerűség nagyon konkrétan és szűkreszabottan képes kezelni a zenét, de például az akusztika tudományban nagy jelentősége van. Izgalmas például, hogy a hangrendszerek és a használatban lévő létező hangsorok milyen természetes és egyszerű számszerű viszonyokkal írhatók le, mint mondjuk a pentatónia. Sose felejtem el, Kistétényi Melinda volt az egyik tanárom a Zeneakadémián, (zseniális zenész volt, hihetetlen füle és agya volt) és ő mesélte, hogy gyerekkorában a wc-tartály csöpögő vizét hallgatva megállapította, hogy pentaton hangokat hall.

Ezek az egyszerű számarányok megjelennek a hangrendszerek szervező erőiként.

A másik ilyen fontos irány az arányok kérdése a zenében. Részben meghatározzák ezek az arányok a zenei formákat, és vagy explicit, vagy implicit módon, de jelen vannak. Egy zeneszerző alkothat tudatosan bizonyos formai keretekhez igazodva. Elvileg végtelen variációs lehetőség van a hangokban is, mégsem véletlenszerűen választunk, hiszen a zene belső törvényszerűségei mást diktálnak. A formai megoldásokban is sokkal több lehetőség lenne a használatban levőknél, de az évszázadok során kikristályosodtak bizonyos formák, amelyek például bizonyos szimmetriákra, visszatérésekre, variációkra épülnek; ez is egy matematikailag megragadható jelenség.

A következő, hogy a szimmetriáknál maradjunk: maga a szimmetria értelmezése is sajátos a zenében, mert létezik mindenféle szimmetria, ami megfeleltethető klasszikus geometriai transzformációknak, például egy *tükörfordítás* egy vízszintes tengelyre vonatkozó tengelyes tükrözéssel ragadható meg, a *rákfordítás* egy függőleges tengely mentén való tükrözéssel, és a *rák-tükör* pedig egy középpontos tükrözéssel. Tehát ezek a nagyon egyszerű transzformációk, hozzá a nagyítás és a kicsinyítés, ami a zenében az *augmentáció* és *diminúció* fogalmával ragadható meg, mind jelen vannak. A sorozatunkban, ahol különösen Bachra koncentráltunk, hiszen ő a legnagyobb, és az ő nagy fúgagyűjteményeiben is megjelennek a tükör-rák, rák-tükör fordítások és az augmentáció és diminúció. Az eltolásnak megfeleltethető a kánon, és még van ráadásul diminuált és augmentált kánon, számos lehetőség, és Bach mindet kihasználta.

A zenei szimmetria sajátos, mert igazából amit az aisthesis révén, a valós zenei befogadás során szimmetriajelenségként érzékelünk, az inkább az ismétlődés, visszatérés formájában jelenik meg. Pl. egy háromtagú, A B A szerkezetű formában az A újbóli megjelenését érezzük szimmetriajelenségnek, pedig az nem valódi tükrös szimmetria.

Bachnál ez mennyire volt tudatos? Szigorú formák mentén komponált?

Bach, amikor kánont ír, vagy fúgát, akkor az egy nagyon tudatos kompozíciós eljárás, amit ő a végletekig tökéletesen alkalmaz.

A szigorú formákról el lehet mondani ezeket a szabályszerűségeket, le lehet írni, hogyan néz ki egy szonátaforma, de azt látni kell, hogy a nagy zeneszerzők soha nem betűről betűre vagy pillanatról pillanatra ragaszkodnak ezekhez a keretekhez, hanem a kereteken belül, azokat feszegetve, sokszor kitágítva vagy éppen redukálva a zeneszerzői szabadságukkal élve teszik. Aki nem Mozart, Bach, Beethoven vagy Bartók, az is tud írni ilyet, de az nem lesz érdekes. Tehát lehet tandarabokat írni a szabályok mentén, és lehet alkotni bizonyos keretek között és mégis szabadon. A nagy zeneszerzők általában ezt tették.

A számszerűséggel kapcsolatos a barokkban a harmóniarendszer számszerű kódolása és általában az egész kottaírás is, tehát a notáció, a zene rögzítése. A mai modern kottarendszerünk tulajdonképpen egy koordináta-rendszernek feleltethető meg, ahol a függőleges tengely a hangmagasság-képzetünket reprezentálja. Ez persze csak egy az ókorba visszanyúló asszociáció, hogy a hang magassága összekapcsolható a térbelivel. A vízszintes tengely balról jobbra haladva az írásban pedig az idő koordinátáját mutatja. A diszkrét pontok, amikkel a hangokat jelöljük a mai kottákban, ez is egy vívmány, mert az ember eleinte a hangokat nem diszkrét hangokként értelmezi, hanem legalábbis dallamfordulatonként, vagy pedig ívként, valamiféle összefüggő, folytonos dologként.

Számokkal való összefüggése miatt érdemes megemlíteni, hogy a barokk idején abszolút elterjedt lejegyzésmód volt a basso continuo, a számozott basszus. Itt arról van szó, hogy a basszus szólamhoz képest a harmóniáknak a rendjét nem kottákkal jelölték, hanem számkódokkal. A harmónia egyes hangjainak a basszustól való távolságát jelölték számokkal és egyéb jelekkel. Egy profi continuo játékos a basszus szólamot látva és ezeket a számokat olvasva képes megtölteni harmóniával, és valódi zenei formába önteni a zeneszerző által ilyen módon csak éppen vázlatosan lejegyzett zenei tartalmat. Ez az akkori hagyománynak felelt meg, igazából egy korabeli zenésznek ezt tudnia kellett, a klasszikában ment ki végül a gyakorlatból.

Volt eddig szó szimmetriákról, a formai arányokról, azoknak az esetlegességéről, kiválasztódott néhány fontos forma, szonátaforma, rondóforma, trióforma, ezeket variálták aztán a zeneszerzők.

Egy következő elem a kombinatorika, a legutóbbi koncertünknek ez volt az egyik fontos tartalmi eleme, ez Mozart kockajátéka. Mozartról lehet tudni, hogy neki is matematikai agya és gondolkodásmódja volt. Kitalált egy rendszert, amiben 11 darab első ütemet, ugyanennyi második, harmadik stb. ütemet írt meg. Ezekből 2 kockával kell kidobni, sorban egymás után, ütemenként, hogy a tizenegyféle variációból melyiket játsszuk le, és így kapunk 16 ütemnyi, dupla periódusnyi zenei anyagot. A dobókockával kidobott zene mindig értelmes, élvezhető menüett zene. Volt ennek korábban is előzménye, pl. Haydnnak is tulajdonítanak ilyen Würfelspielt, kockajátékot, de talán Mozarté a leghíresebb.

Ez kombinatorika, ki lehet számolni, hogy hány variációja van ennek a játéknak, hogy hányféleképpen lehet kidobni azt a tizenhat ütemet. Itt felvetődik a gondolat, hogy milyen érdekes, ha azt mondom, hogy van 16 ütem, mondjuk minden ütemben 4 hang, akkor, ha csak hétfokúságban gondolkodunk is, hány variációja lehetne annak, ha mindenféle rendszer nélkül választanánk ki a hangokat, és ebből milyen kevés az, vagy stílusonként mennyire leszűkül, amit zeneként értelmezünk. Itt hihetetlen perspektívák bukkannak föl kombinatorikai szempontból.

Szeretnék pár szót ejteni még a számszimbolikáról: ez már persze nem matematika, de a számok bűvöletének vannak misztikus–ezoterikus vonatkozásai. Az egyik legismertebb az, hogy a középkori keresztény gondolkodásban a hármas szám a Szentháromság miatt a tökéletesség letéteményese. Ugyanígy a zenében is, például a korabeli kora reneszánsz elméletben a hármas lüktetés a perfectus, és a kettes az imperfectus. Tehát a 3 és a 2 viszonya a tökéletes a tökéletlenhez. Az, hogy ez hogyan váltakozik a zenében, Bali János szakterülete, aki a sorozatunk egyik zenei szakértője (eredeti végzettsége matematikus). [1]

A hármas lüktetés az ütemen belüli, vagy a teljes műre vonatkozik?

Ütemen belül is lehet: a korabeli kottaleírás nem úgy jelölte a ritmust, mint ma, hogy a kottajegy fejezi ki pontosan a hang értékét, hanem a kottajegy csak egy alap volt, és ahhoz kapcsolódott a mindenkori zenész tudása által, hogy azt kettes vagy hármas felosztásban kellett elképzelni. Ezek aztán kombinálódnak is, és ahogy fejlődik a zene, és újabb irányzatok jönnek, úgy haladunk abba az irányba, ami a mai kottaírást jellemzi, hogy egyértelműen jelöljük a sor elején, hogy milyen metrumra gondolunk. Mára már a hármas nem élvez elsőséget a párosakkal szemben.

Visszatérve a koordinátarendszerre, egy ma zenét tanuló kisiskolás tanulmányaiban előbb találkozik a kottával, mint a koordinátarendszerrel. Vajon segíti-e őt ez a matematikai fogalom jobb megértésében?

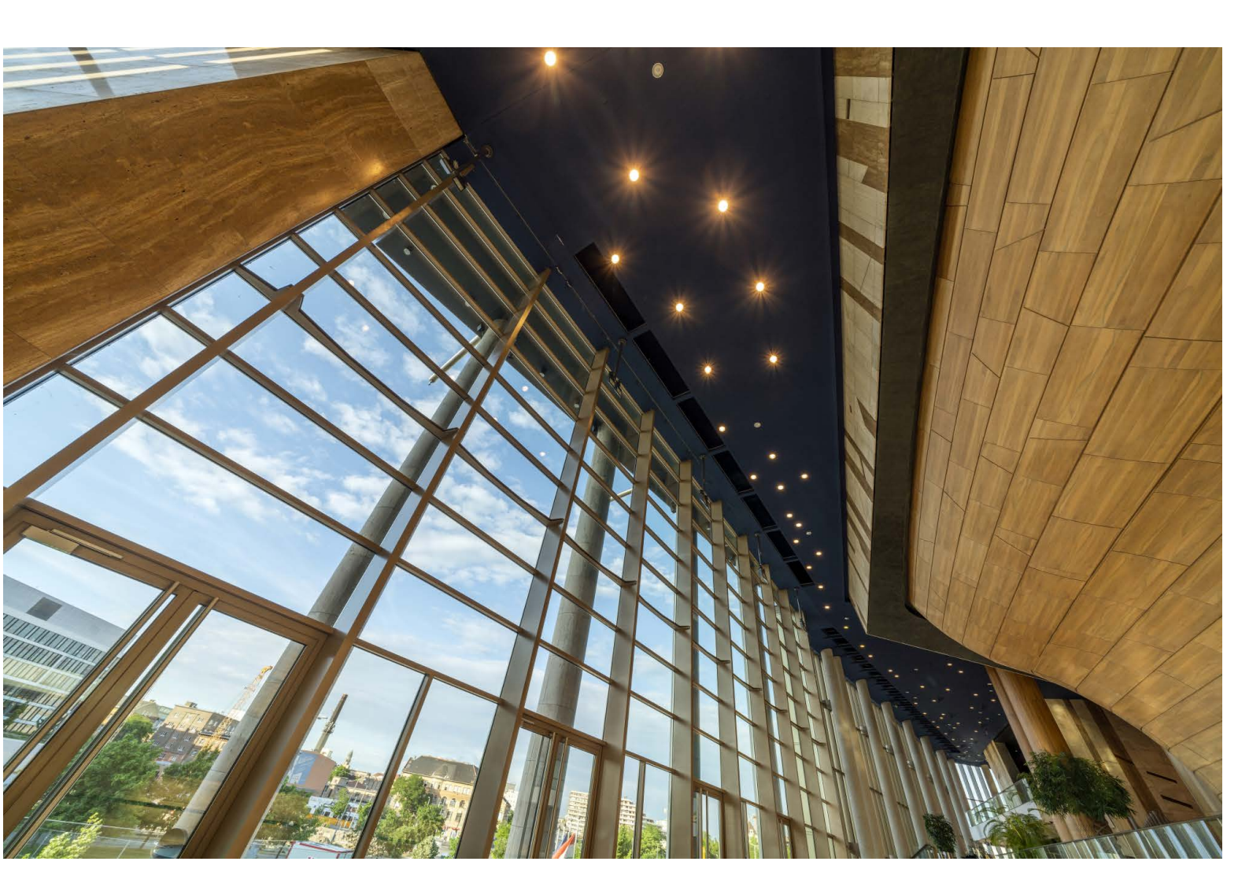
Zenetanárként az a véleményem (sokakkal egyetértésben, másokkal vitatkozva), hogy nem kellene elkezdeni hat-hétéves korban a kottaírást (olvasást) így, ahogy most tanítjuk, ennyire a legelején, míg az alapvető asszociációkra szükség van, hogy a magas−mély térbeli pozícióját megmutassuk, vagy mozgással leképezzük a dallamot. (Egyébként nem is minden kultúrában volt a magas hang fönt, hanem pont fordítva, lent.) A legtöbb óvodás korú gyereknek a magas−mély fogalom sincs meg, általában azt mondják a hangokra, hogy vékony−vastag; megtanítjuk nekik, hogy az nem vékony, hanem magas. Megjegyzik, megtanulják, és aztán jó esetben egy valódi térbeli képzettel is összekapcsolják.

Sokszor elmondjuk, hogy a zenetanulás mi mindenre hat pozitívan, az a kérdés, hogy a matematika és a zene az emberben, az egyénben hogyan tud összekapcsolódni, bizonyos funkciók tudják-e egymást erősíteni, segíteni. Ha mondjuk a gyereknek van egy jó kottaképzete – ami nem biztos, hogy kialakul attól, hogy ő kottából játszik – ez valóban segítheti akár a geometriai szemléletét is, nem tartom kizártnak.

A zene hatása a matematika tanításában máshol is előkerülhet, például a hangérték-arányok és a törtek kapcsolatánál. Egy énektanár a kisiskolásnak gond nélkül mondja, hogy egynegyed vagy egytizenhatod, és bár az ő számfogalmában ez még nincs benne, mégis előkészít valamit, meg tudja érteni, hogy egy egészet fel lehet osztani egyenlő részekre.

Hogyan fordul elő a zenében az aranymetszés, amiről a legközelebbi előadás szól majd?

Bármelyik hasonló, zenéről szóló előadásban előkerülnek gyönyörű csigavonalak, mindenféle, a természetben található képződmények, előkerülhetnek építészeti alkotások, ahol megjelenik az „isteni arány”.


A Müpa belülről (Posztos János fotója)

A zenében a belső arányokat implicit módon érzékeljük, az esztétikai élményt az jelenti, hogy ezek az arányok ott vannak. Nagyon szeretem Leibniz mondását, ami szerintem megragadja a lényeget: „A zene a szellem rejtett számolótevékenysége, amely nem veszi észre, hogy számol.”

Vegyünk pl. egy műalkotást, egy épületet, akár egy egyszerű lakóházat: mitől mondom, hogy ejha? Az az építész valószínűleg beletett valamit, általában tudatosan, ami által ilyenfajta arányok megjelennek. Miért érzünk arányosnak egy emberi testet vagy egy emberi arcot? A legtöbb ember azt se tudja, mi az aranymetszés, viszont mégis ráérez arra, hogy ez az arány így van rendben. A zenében is ez van: ez az arányérzékünk működik, Leibniz szerint ez a rejtett számolás, amikor nem tudjuk, hogy számolunk. Az aranymetszés ugyanígy valamiféle olyan érzést vált ki, hogy a dolgok a helyükön vannak. Fantasztikus dolog az, hogy a természetben vannak számok, amelyeket az embernek nem kitalálnia, csak felfedeznie kellett! Az aranymetszés is ilyen, egy arány, aminek nagyon erős vizuális leképezése is van, ez a zenében ugyanez: az aranymetszés formailag ragadható meg leginkább. Az embernek van egy érzete, hogy a zenében sokszor a csúcspont (akár az irodalomban és másutt is) az aranymetszés közelében jelenik meg. Az „Aranymetsző zeneszerzők” előadásban főleg Bartókot hívjuk segítségül, és itt merül fel a kérdés, hogy vajon a zeneszerzők mennyire ösztönösen vagy tudatosan építkeznek. Bartókot már rengetegen elemezték, nála rengeteg rejtett kis finom aranymetszésre utaló mozzanat van.

Bartók mennyire tudatosan alkalmazta az aranymetszést a műveiben?

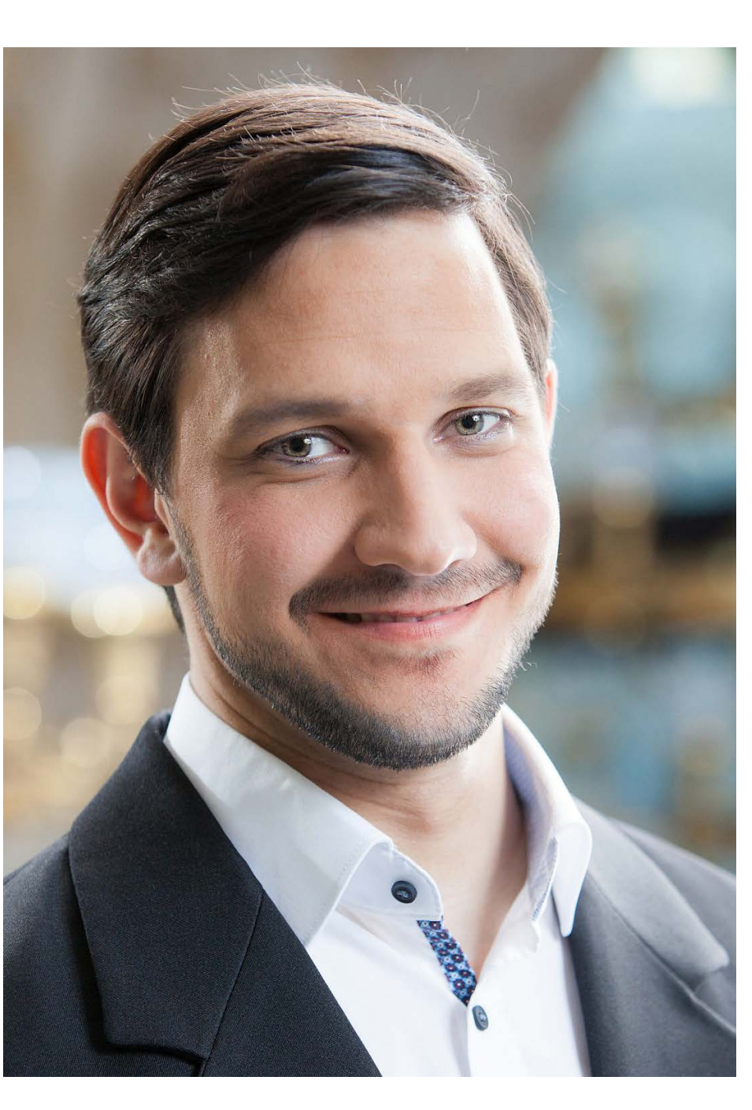
Ezt egy Bartók-szakértőtől kellene megkérdezni. Én úgy tudom, Bartók nagyon tudatos ember volt, ebből gyanítom, hogy a nagy része, amit az elemzések kimutattak, nem lehetett véletlen. Vannak keretek, amiket egy zeneszerző esetleg saját magának állít fel, egy szabályrendszer, de nem mindegy, hogy azon belül tud-e olyan szabadságfokon alkotni, mint mondjuk Bartók. Vagy Bach-hoz visszatérve: nála a számszimbolikának rengeteg eleme van, eljátszott a saját nevének monogramjával, a betűknek a sorszámaival, de nem attól jó Bach zenéje, hogy adott dallamban a hangok összege mennyi, hanem hogy ettől függetlenül élő zenét alkotott.

Hogyan reagál a közönség erre a sorozatra, kik mennek el rá?

Iskolásoknak hirdettük meg, inkább a felső tagozatosokra terveztük.

Gyerekkoncerteknél az a koncepció, amit nem én találtam ki, de én is vallom, hogy jó, ha egy ilyen koncertnek többféle rétege van: egy verbális, egy nonverbális, egy zenei rétege stb. A verbális rétegen belül is a beszélő néha kiszól a felnőtteknek, megenged egy olyan poént, ami nekik szól, vagy egy suta viccet mond, ami egy kisgyerek számára is érthető és mulattatja. Ha ez a szövet elég gazdag, akkor mindenkinek csurran-cseppen valami. Egy kisgyerek a matematikai részből nem sokat ért, de ott van a tesó, együtt a család a vasárnapi koncerten, ő is élvezheti, mert jó zenék szólnak, kedvesen beszélnek hozzájuk, van látvány. Ugyanakkor tanúja voltam egyszer annak, amikor Kocsis Zoltán egy gyerekkoncerten olyan színvonalon beszélt a zenéről, hogy én leesett állal hallgattam, mert nekem is nóvum volt. Tehát mindenféle közönség számára kell adni valamit, így működik. Van közönség, elég szép számmal jöttek a sorozat első három alkalmára.

A jövőben lesz hasonló, mondjuk ennek a sorozatnak a megismétlése? Mik a tervek?


Szélpál Szilveszter

Igen. Az „érzelmek” sorozatból csak kettő ment le, és most újra beszerkesztettem a következő évadra: a matézis után megint jönnek az érzelmek. Én akár életem végéig is ezt a kettőt forgatnám, mert ennél sűrűbb mondanivalót nehéz lenne találni. Tematikus koncert szervezésénél fontos az, hogy legyen valami üzenet, és sokszor ez csak annyi, hogy pl. legyen szó a vízről, vagy a napsütésről, a tavaszról, vagy a nőkről, bármilyen témát be lehet dobni. Ez a két sorozat ezeknél sokkal inkább zenei tematikát képvisel. Az a meggyőződésem, hogy azon túl, hogy szórakoztatnunk is kell, örömet szereznünk, inkább így mondanám, fontos, hogy a befogadás minőségét tudjuk javítani, tehát aki oda beül, az minél többet fogjon fel a zenében elrejtett különféle rétegű üzenetekből, tartalmakból. Ezen dolgozunk, ezért beszélnek a szakértőink, ezért kérdezget a moderátorunk. Ennek a sorozatnak, mint a másiknak is, az a koncepciója, hogy van mindig van egy szakértő, aki az első koncertünkön Bali János volt, és aki a püthagoreusi hagyományokról és a középkori kora reneszánsz zenéről beszélt. A második koncerten Fazekas Gergely zenetörténész beszélt Bachról, a matematikusról, a harmadik témája volt Mozart kockajátéka Rátz Márton karmesterrel, és az utolsó szól az aranymetsző zeneszerzőkről, szintén Fazekas Gergellyel. Mindig van egy moderátorunk, Szélpál Szilveszter, aki nem mellesleg a Szegedi Nemzeti Színház opera-tagozatának tagja, tehát operaénekes, és a szegedi Ságvári Gimnáziumban fizikatanár. Ugyanakkor ő a „naív kérdező”, a rezonőrt játssza el, ő teszi fel azokat a kérdéseket, amiket föltehetnének a gyerekek. Kérdez és alákérdez a szakértőnek, de úgy, hogy a gyerekek számára is érthető legyen, sőt ha kell, ő tolmácsolja a gyerekeknek a szakértő esetleg „magasröptű” gondolatait, megpróbálja transzformálni a gyerekek számára.[2]

A zenét szinte biztos, hogy többen szeretik, mint a matematikát. Vajon az, hogy a zenében megmutatunk valamit, ami a matematikához kapcsolható, tud-e hatni arra a zeneszeretőre, aki elmegy egy ilyen koncertre? Lehet-e ennek hatására a zeneszerető közönségből matematikaszerető is? Persze fordítva is érvényesülhet a hatás: a zeneszerető matematikus érdeklődésű meglepődet olyan összefüggéseken, amiket ezeken a koncerteken hall.

A közönséget nézve a zeneszerető matematikus könnyen ráismer azokra a dolgokra, amelyeket most elmondtam, de azt gondolom, hogy valamiféle attitűdöt tud megerősíteni náluk ez a fajta felismerés. Tehát ha tudom azt, hogy nekem tetszik valami, és valaki elmagyarázza nekem azt is, hogy miért tetszik, az lehet motiváló hatású. Az emberben van egyfajta kognitív motívum, hogy szeretné megérteni az összefüggéseket, és egy matematikus gondolkodású emberben ez az átlagnál talán még erősebb is, úgyhogy, ha ő ráismer ezekre a dolgokra, vagy azt mondja, hogy igen-igen, ezt éreztem is, de most milyen jó, hogy elmondták, ez nyilván segíti őt, hogy még jobban szeresse, amit addig is szeretett. Hogy a zeneszerető közelebb tud-e kerülni a matematikához? Azt gondolom, hogy ez egy szűkebb réteget érint, eleve egy kiválasztódási folyamat eredménye, hogy ki az, aki eljön erre a koncertre. A másik, hogy remélem, hogy sikerül úgy interpretálni ezeket a dolgokat, hogy ne azt érezze egy gyerek, aki a középső sorban ül, hogy „na most már megint matekról kell hallgatni, nem elég, hogy az iskolában ezt nyomják…” De tudjuk, hogy a gyerekek az iskolai dolgokkal szemben sokszor ellenérzéssel vannak, demotiváltak, ez az iskolarendszerünk hibája és nyomorúsága, tehát ha sikerül egy olyan dolgot jól elővezetnünk, ami az iskolából kiemelve egy új közegben új értelmet nyer, ennek lehet komoly jótéteménye a gyerekek attitűdjére, gondolkodására, a matematikához való viszonyára vonatkozóan. Amint kiderül, hogy a matematika nem is olyan száraz, személytelen, kiderül, hogy milyen fantasztikus, hogy amit én érzek, a tulajdonképpen matematikailag is megragadható, és milyen fantasztikus, hogy egy hangköz, amit tisztának vagy harmonikusnak érzek, az ilyen és ilyen számokkal leírható. Bízunk abban, hogy egy bizonyos csoportnak, bizonyos típusú embereknek ez ad valamit. A többieknek talán nem. Ők továbbra is titokban számolnak a lelkükben.

Lábjegyzetek

[1] Bali Jánossal is készült interjú, amely az Érintő következő számában jelenik meg.

[2] Iskoláskoncertek keretében 2022. ápr. 25-én hétfőn 11 órától is lesz egy koncert, amire oktatási intézmények válthatnak jegyet: A zene számossága - Matematika a zenében

Az interjút Körmendy Zsolttal Oláh Vera készítette.

A fotókat a Müpa bocsátotta rendelkezésünkre, amit ezúton is köszönünk.

matematikatörténet zene

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Kondor Imre 2022. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

A 2021-es fizikai Nobel-díjas Giorgio Parisi

Giorgio Parisi 1948-ban született Rómában, kedvező anyagi körülmények között élő polgári családban. Egyetemi tanulmányait 1967–70 között a római La Sapienza Egyetemen végezte, ahol a matematikus és a fizikus szak között ingadozott, végül a fizika mellett döntött, de megtartotta érdeklődését a matematika iránt is.

Az első egyetemi év után felfedezte a Landau–Lifsic elméleti fizikai tankönyvsorozatot, a második év elejére megtanulta az első három kötet anyagát, Dirac kvantummechanikájával együtt. Schrödingert, Fermit és Paulit olvasott, megelőzte az évfolyamot, így nem is igen követte az előadásokat. Minthogy a második egyetemi éve 1968-ra esett, az egyetemi forrongások egyébként is szétzilálták a tanévet.

Az 1968-as év tapasztalatai lényegesen megváltoztatták a családi hagyományoknak megfelelő polgári, liberális kereszténydemokrata beállítódását, nézetei és kapcsolatai erősen balra tolódtak. Társadalmi elköteleződését és aktivitását a mai napig megőrizte.

A harmadik egyetemi évben került kapcsolatba a kutatómunkával. Nicola Cabibbo kevéssel korábban tért vissza Rómába a CERN-ből, az általa képviselt nagyenergiás részecskefizikai témák tűntek a kor vezető tudományos kérdéseinek, és Parisi is ehhez az irányzathoz csatlakozott. Ugyanakkor érdeklődött a statisztikus fizika problémái iránt is, ez a kettőség is végigkísérte pályáját. Értekezését Cabibbo vezetésével írta meg a mértékelméletekben bekövetkező spontán szimmetriasértés és a Higgs-bozon témaköréből. A szabályok által megengedett legrövidebb idő alatt, 1970-ben jutott el a dolgozata megvédéséig.

Első munkahelye a Frascati Nemzeti Laboratórium volt, ahová 1971 elején lépett be ösztöndíjasként. Ez az időszak a Frascati aranykora volt, ekkor kezdték el a világon egyedülálló berendezésen az elektron-pozitron annihilációs kísérleteket.

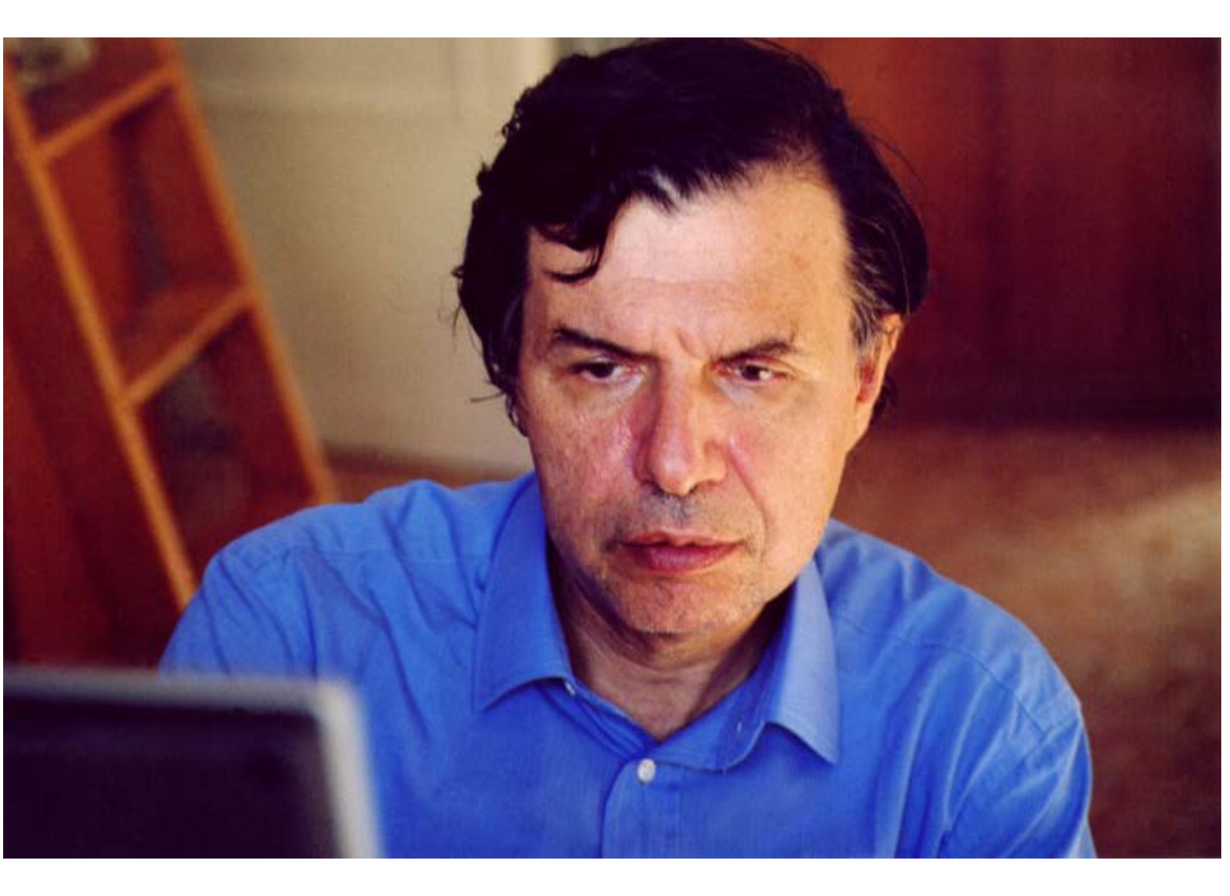
1981-ben az elméleti fizika professzorává nevezték ki az Universita di Roma II Tor Vergata egyetemen, majd 1992-től az Universita di Roma I La Sapienza egyetem kvantumelméleti professzora lett.

Tudományos cikkeinek a száma meghaladja az ezret, a hivatkozások száma ez idő szerint közel 92 000.

Az idők folyamán nyolc könyvet jelentetett meg a kvantum-kromodinamikától az üvegek elméletéig terjedő témakörben, az utolsó 2022 elején jelent meg *In un volo di storni – Le meraviglie dei sistemi complessi* (Seregélyek repülése – A komplex rendszerek csodái) címmel.

Tagja számos tudományos akadémiának. Széleskörű szerkesztői és tudományszervezői tevékenységet folytat.

Pályája során számos kitüntetésben részesült, elnyerte egy olasz fizikus által elnyerhető valamennyi nagytekintélyű hazai és nemzetközi díjat, egészen a 2021-es fizikai Wolf-díjig és a Nobel-díjig.



Parisi kutatási területe rendkívül széles: a kvantumtérelmélettől kezdve a részecskefizikán és statisztikus fizikán át kiterjed a húrelméletre, rácstérelméletekre és spinmodellekre, a numerikus módszerek alkalmazására és továbbfejlesztésére, egészen a nagysebességű tömb-processzorokon alapuló dedikált számítógépek tervezéséig, a káosz, dinamikai rendszerek és turbulencia vizsgálatáig, különböző rendezetlen rendszerek (növekedés, véletlen geometriai sokaságok, fehérje folding), de különösen a spinüvegek[1], ill. a 90-es évek közepe óta a valódi üvegek tanulmányozásáig, a különféle optimalizációs problémák és algoritmusok kutatásáig, immunológiai problémák és neuronhálók, valamint a gépi tanulás és mesterséges intelligencia kutatásáig, de állatcsoportok kollektív viselkedésének a leírásáig is.

Parisi igen barátságos, könnyen megközelíthető, mindenkit figyelmesen meghallgat. A vele folytatott beszélgetések mindenkit rendkívüli mértékben inspirálnak, mégha sokszor nehéz is az érvelését követni, mert rendkívül gyorsan, óriási ugrásokban gondolkodik. Az évek során igen sok munkatárssal és tanítvánnyal dolgozott együtt, a 70. születésnapjára társszerzőiről készült ábra 317 nevet tartalmaz. Tevékenysége más tudományokban is jelentős előrehaladást indukált, pl. a sztochasztikus folyamatok elméletében, operációkutatásban vagy az algoritmusok elméletében.

Korán felismerte, hogy a számítógépek elterjedése és hatékonyságuk hatalmas megnövekedése a numerikus fizikát a kísérleti és elméleti fizika mellé egyenjogú tudományággá fogja tenni. Ennek a gondolatnak a jegyében kezdeményezte Cabibbo a rácstérelméletek szimulációjára kifejlesztett szuperszámítógép megépítését, amiben Parisi központi tervezői szerepet játszott. Az így létrejött APE nevű 1 gigaflop sebességű tömbprocesszort utóbb 100 gigaflopig terjesztették ki, egy időben számos példány épült belőle és kereskedelmi forgalomba is került.

Ugyancsak ebből a megfontolásból szervezte meg munkatársaival a JANUS együttműködést. A döntően olasz és spanyol kutatók által felépített, fizikailag Zaragozában található dedikált számítógépet kifejezetten a spinüvegek szimulációjára tervezték, és a szimulációk területén egyedülálló módon képes megközelíteni a valódi, laboratóriumi spinüvegminták dinamikáját és karakterisztikus hosszúságskáláit.

Parisi szerteágazó kutatási témái közül kiemelkedik a rendezetlen mágnesek egyik változatának, a spinüvegeknek a vizsgálata, ezért a továbbiakban erre a kérdéskörre fogok fókuszálni. A spinüvegekben az atomi mágnesek (spinek) között versengő, nagyságukra és előjelükre nézve is véletlenszerű kölcsönhatások működnek. Minthogy az ilyen belső konfliktus, az együttműködés és versengés, a serkentés és gátlás a legkülönbözőbb tudományos, műszaki, ökológiai, társadalmi, gazdasági és pénzügyi problémák lényeges eleme, a spinüvegek mindezen komplex rendszerek számára a legegyszerűbb iskolapéldát nyújtják, amelynek jól formalizálható keretei között e komplex rendszerek alapvonásai viszonylag egyszerűen vizsgálhatók.

A spinüveg-metafora rendkívül széles körben bizonyult megtermékenyítőnek, és a spinüvegek elméletében kifejlesztett modellek és módszerek olyan tudományágakba is behatoltak, melyek képviselőinek már sejtelme sincs azokról az eredeti összefüggésekről, amelyek között ezek a módszerek kifejlődtek.

A terület alapmodelljét 1975-ben Edwards és Anderson állították fel. A modell eltekint a tényleges spinüveg atomi szerkezetének leírásától és kizárólag a spinekre fókuszál. A legegyszerűbb esetben ezeket a spineket egy kétértékű változó reprezentálja: $s_i = \pm 1$. A spinek között valamilyen adott eloszlásból húzott $J_{i,k}$ véletlen kölcsönhatások működnek. A modell adott spin-konfigurációjában az energia

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i,k} s_i J_{i,k} s_k \tag{1}$$

Ez a standard Ising-modell általánosítása véletlen csatolások esetére. Egyszerűsége dacára máig nem rendelkezünk általánosan elfogadott képpel arról, hogy a modellt pl. a 3-dimenziós rácsra helyezve milyen szerkezetet találunk alacsony hőmérsékleten. A statisztikus fizika szokásos stratégiáját követve Sherrington és Kirkpatrick még ugyanabban az évben, 1975-ben javasolták az Edwards–Anderson-modellnek megfelelő átlagtérmodell bevezetését, ahol is a spinek – feltevés szerint – egy teljes gráfon helyezkednek el, és a $J_{i,k}$ kölcsönhatások minden spinpárt ugyanolyan valószínűséggel kötnek össze pozitív vagy negatív csatolással. Egy ilyen gráf nem helyezhető el véges dimenzióban, ezért gyakran hivatkoznak az átlagtérelméletre végtelen dimenziós modellként.

Sherrington és Kirkpatrick a modellt az ún. replikatrükk segítségével oldották meg. A replikatrükk színes előtörténete Hardy, Littlewood és Pólya 1934-ben megjelent Inequalities című könyvéig nyomozható vissza, később a polimerek statisztikus fizikájában alkalmazták, elsőként éppen Edwards, így természetes módon talált utat a spinüvegek elméletébe. A replikákra a következők miatt van szükség: Az (1) modellben fellépő véletlen csatolások miatt a rendszer minden makroszkópikus jellemzője (belső energia, szabadenergia, entrópia, mágnesezettség stb.) függeni fog ezektől a véletlen változóktól, így maga is véletlen változó lesz. Azt várjuk azonban (és ezt szigorú matematikai meggondolások is bizonyítják), hogy a nagy részecskeszámok limeszében ezek a makroszkópikus mennyiségek függetlené válnak a véletlen csatolások konkrét realizációjától, „önátlagolnak”. Ezért ahelyett, hogy a különböző termodinamikai mennyiségeket megpróbálnánk a véletlen csatolások függvényében kiértékelni (ami lehetetlen feladat volna), elegendő a termikus átlagolás után kapott mennyiségeket a véletlen csatolások szerint kiátlagolni. A Z állapotösszeg logaritmusát (ami egyszerűen függ össze a szabadenergiával) kiátlagolva, abból az egész termodinamika meghatározható. Egy véletlen változó logaritmusát azonban nehéz átlagolni, ezért a $\ln Z$ helyett elképzeljük a rendszer n független másolatát (replikáját), ennek az állapotösszege Z^n lesz, amelynek az átlagolása könnyebben végrehajtható. Ebből a logaritmus átlaga a

$$\ln Z = \lim_{n=0} \frac{1}{n}(Z^n - 1)$$

azonosság segítségével kapható meg. Ennek az eljárásnak az a sarkalatos pontja, hogy a replikák számát jelölő n, amely eredeti értelmezése szerint természetes egész, valamiképpen kiterjesztendő a valós számokra, hogy a képletben szereplő limesz elvégezhető legyen. Diszkrét pontokon definiált függvény ilyen kiterjesztése (analitikus folytatása) azonban nem egyértelmű feladat, és további feltételek nélkül nem mindig vezet helyes eredményre.

Sherrington és Kirkpatrick figyelmen kívül hagyták ezt a nehézséget és végrehajtották a számolást, amelynek során egy ponton a szabadenergia egy $n \times n$ méretű rendparaméter-mátrix $q_{\alpha,\beta}$ függvényében állt elő. Sherrington és Kirkpatrick ennek a mátrixnak a legtermészetesebb parametrizációját választották, amennyiben feltették, hogy a mátrix invariáns a replikák permutációira. Ezt a választást az a meggondolás motiválta, hogy a replikák segédmennyiségekként kerültek be az egész elméletbe, így semmiféle ok nincs arra, hogy megkülönböztetést tegyünk közöttük. Ezzel a feltevéssel Sherrington és Kirkpatrick olyan formulákhoz jutottak, amelyekben a replikaszámban való analitikus folytatás egyszerűen az n változó valós számmá történő átinterpretálásává vált, és az $n \to 0$ limesz elvégezhető volt.

Ezzel a replikaszimmetria feltevése elvezetett volna a spinüvegek átlagtér-elméletének a megoldásához. Ennek az eljárásnak a hibája azonnal kiütközött, amikor kiderült, hogy a rendszer entrópiája alacsony hőmérsékleten negatívvá válik, ami egy ilyen diszkrét rendszerben lehetetlen. Pár évvel később de Almeida és Thouless megmutatták, hogy a replikaszimmetrikus megoldás sérti a termodinamikai stabilitás elvét, ezért biztosan elvetendő. Ezzel megindult a replikaszimmetriát sértő megoldások keresése, ami több csoport sikertelen próbálkozása után Parisit 1979-ben elvezette a helyes megoldásig.

Parisi megoldása példátlanul bonyolult volt, és formális, voltaképp nemlétező matematikai fogalmakkal (pl. 0×0 méretű mátrixokkal) operált. A permutációs szimmetria egészen elképesztő, végtelen sokszor iterált koszorúszorzatra való letörését feltételezte, ezzel együtt végtelen sok rendparamétert vezetett be. Parisi elméletét megjelenésekor még a matematikai szigorra kevéssé érzékeny fizikusi körökben is kétely és idegenkedés fogadta. Az eljárás, amely azóta számos tudományágban megjelent, replikaszimmetria-sértés (replica symmetry breaking, RSB) néven terjedt el a rendezetlen rendszerek elméletében.

A fantasztikusan bonyolult, végtelen sok rendparamétert felvonultató megoldás fizikai jelentésének feltárása több évet váratott magára, míg végül 1983-ban maga Parisi állt elő az elmélet értelmezésével. Kiderült, hogy a spinüveg-átmenet során a fázistér végtelen sok, egymástól makroszkopikus falakkal elválasztott részre (ergodikus komponensre, „völgyre”) bomlik, az elméletben fellépő végtelen sok rendparaméter ezek között a völgyek közti átfedéseket írja le. Az átfedések vizsgálata feltárta a völgyek ultrametrikus geometriáját, a megoldások olyasfajta szerveződését, mint amilyen egy nagy család utolsó generációjának a tagjai között van, ahol az egyedek közti genetikai távolságot a legközelebbi közös ős definiálja. Ennek a képnek pl. az evolúció által létrehozott fajták közti viszonyokhoz való hasonlósága nyilvánvaló, ami lehetővé tette a spinüvegek elméletének a megjelenését egy sor biológiai problémában.

A statisztikus fizika már a születésénél is küzdött az ergodicitás problémájával, vagyis az időbeli átlag és a sokaságra vett átlag közti viszony kérdésével. A fázisátalakulások során a rendszer szimmetriája sérül, bekövetkezik a fázistér felhasadása ergodikus komponensekre. A múlt század hatvanas éveiben a szokásos fázisátmenetek körében sikerült ezt a kérdést rendezni, de voltaképpen bámulatos, hogy az ergodicitás sérülését egyáltalán sikerült beépíteni a statisztikus fizikába. A rendezetlen rendszerek elméletében, speciálisan a spinüvegekben kialakuló ergodicitás-sértés minden korábbinál súlyosabb kihívást jelentett a statisztikus fizika számára, amellyel Parisi heurisztikus megoldását szigorú matematikai alapokra helyezve Michel Talagrand birkózott meg, aki ehhez kidolgozta a sztochasztikus folyamatok elméletének egy egészen új fejezetét, amihez a motivációt Parisi megoldása adta.

Eddig a pontig azt látjuk, hogy ezeknek a furcsa ötvözeteknek, a spinüvegeknek a vizsgálata ugyan hatalmas elméleti fejlődést indukált, de gyakorlati alkalmazásokat nem mutatott fel. Ez a helyzet változott meg 1982-83-ban a bonyolult kombinatorikai optimalizációs problémák, ill. az asszociatív memória modellek és a spinüvegek közti kapcsolat felismerésével. Ez óriási lökést adott a mesterséges neuronhálók elméletének, hatékony optimalizációs algoritmusok bevezetését inspirálta, és széleskörű kapcsolatokat teremtett a statisztikus fizika és a számítógép-tudomány között. A statisztikus inferencia, adatbányászat, gépi tanulás és mesterséges intelligencia kutatásának területén mindenütt felbukkannak a spinüvegek elméletében kidolgozott fogalmak és módszerek. A spinüvegek elméletéből indultak ki az ökonofizika és szociofizika néven ismertté vált új tudományágak is, amelyek a társadalom és a gazdaság különböző folyamatait elemzik statisztikus fizikai módszerekkel. Egy közvetlenül semmiféle gyakorlati hasznot nem hajtó anyagcsalád vizsgálata tehát végeredményben sokezer milliárd dolláros iparágakban használt alkalmazásokhoz vezetett el. Ennek a történetnek megszívlelendő tanulságai vannak a tudományfinanszírozás számára.

Hogy valamennyire érzékeltetni tudjuk a spinüveg-gondolatok fizikán kívüli alkalmazását, adjunk az (1) képletben fellépő mennyiségeknek egészen más jelentést. Gondoljunk el egy vállalatot, amelynek N alkalmazottja van, akiket két részleg között kell a vállalatvezetésnek elosztania. Az i munkatársnak adjunk egy s_i címkét, amely ± 1 értéket vesz fel annak megfelelően, hogy i-t az egyik vagy másik részlegbe osztják be. Az alkalmazottak között azonban intenzív érzelmi kapcsolatok vannak, amelyeket a $J_{i,k}$ csatolások írnak le; $J_{i,k} = +1$, ha i és k barátok, és −1, ha ellenségek. A vezetés érthető módon arra törekszik, hogy lehetőleg egymással baráti viszonyban álló munkatársak kerüljenek ugyanabba a részlegbe, és az ellenségek lehetőség szerint különböző részlegbe kerüljenek. A dolgot az teszi nehézzé, hogy előfordulhat, hogy három munkatárs kölcsönösen ellenséges viszonyban van, vagy az, hogy egy adott munkatársnak van két olyan barátja, akik egymás ellenségei. Az ilyen frusztrált helyzeteket nem lehet mindenkit kielégítő módon kezelni. A vezetés legfeljebb arra törekedhet, hogy a dolgozókat az itt társadalmi feszültségként interpretált H energiafüggvény minimumának megfelelő módon ossza el. Ha most feltételezzük, hogy a munkatársak között ugyanakkora valószínűséggel van baráti, mint ellenséges viszony, kiderül, hogy a H minimumának a megkeresése rendkívül nehéz feladat, amelynek a megoldásához szükséges erőforrásigény (pl. számítógépidő) a dolgozók számával exponenciálisan emelkedik. Ráadásul a feladatnak megint csak exponenciálisan sok közel egyenértékű megoldása van, amelyek közül bármelyiket is választjuk, a dolgozók jelentős része boldogtalan lesz. Ha tiltakozásuk hatására a vezetés egy másik optimumot keres, az ugyanannyi munkatárs érdekeit fogja sérteni, legfeljebb másokét, mint az előbbi megoldásban.

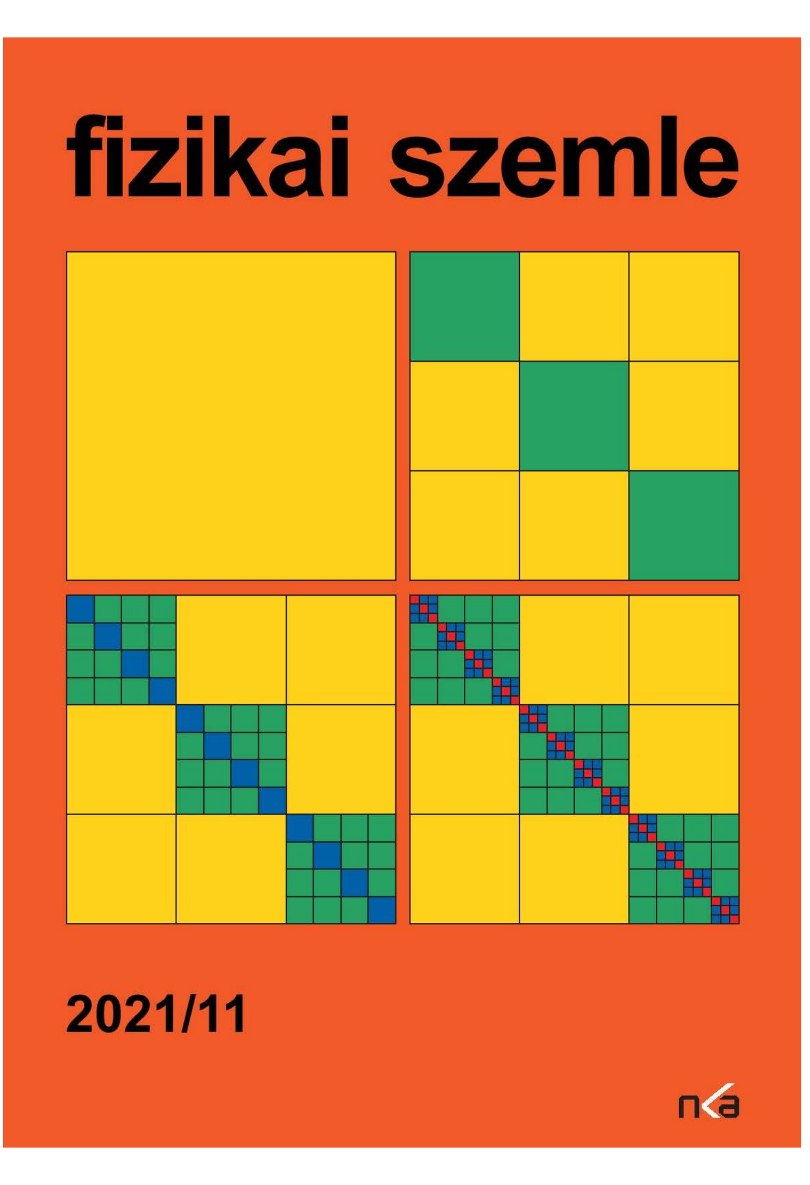
Ha a különböző megoldások közti távolságot azzal jellemezzük, hogy hány munkatárs besorolását kell megváltoztatnunk, hogy az egyik optimumból a másikba jussunk, kiderül, hogy a megoldások egy családfa geometriáját mutatják: lesznek közeli optimumok, kissé távolabbiak, még távolabbiak, stb., de soha nem fordul elő, hogy három különböző optimum között három különböző távolságot találjunk, mint ahogy az sem fordul elő, hogy ha valakinek van egy testvére és egy unokatestvére, akkor a testvérnek az unokatestvér másodunokatestvére legyen. Az ilyen metrikával bíró tereket ultrametrikus térnek hívjuk, és a fentiek szerint a H függvény optimumai ultrametrikus geometriát mutatnak.

Vegyük észre, hogy bár a különböző élőlények közötti genetikai távolságoknak durván ugyanilyen ultrametrikus a szerkezete, ott a „családfákat” a természetes szelekció dinamikája hozza létre. Elgondolkoztató, hogy egy teljesen véletlen szerkezetű problémában ez a szerveződés mindenféle tervezés, vagy kiválasztás nélkül megjelenik: az optimális megoldásoknak ez a szerkezete a nagy számok határesetében spontán épül fel. Parisinek ezt a felismerését, és a modell egzakt megoldásának a megtalálását a Svéd Tudományos Akadémia Nobel-bizottsága a díj odaítélésének egyik döntő indokaként jelölte meg.

Amikor olyan valóságos komplex rendszereket tekintünk, mint amilyen egy élő sejt, az agy, vagy a társadalom, mindig azt látjuk, hogy ezekben a rendszerekben nagyszámú elem (fehérje, idegsejt, ill. a társadalmat alkotó szereplők) között állandó versengés és együttműködés van. Az ilyen rendszerek soha nincsenek egyensúlyban, ehelyett egy többé-kevésbé jól meghatározott munkapont körül ingadoznak, fluktuálnak. Ez az állapotuk hajlékony, a lehetséges optimális állapotok közötti átmenetek révén képesek a környezet változásaihoz alkalmazkodni anélkül, hogy elvesztenék önazonosságukat. Előfordulhat azonban, hogy az együttműködés és versengés, serkentés és gátlás, a fékek és ellensúlyok finom rendszere megsérül, az (1) képletben a csatolások eloszlása túlnyomó többségében pozitívvá válik, ami a sejt esetében rákhoz, az idegrendszerében őrülethez, a társadalom esetében diktatúrához vezet. Ezen a ponton a rendszer komplexitása lehanyatlik, működése súlyosan sérül, vagy egyenesen megszűnik. A komplexitás elvesztése veszélyes. A társadalmi és politikai folyamatok elemzésében a spinüveg-analógia megerősíti Jacob Burkhardt figyelmeztetését: A komplexitás tagadása a zarnokság lényege.

Kondor Imre

az ELTE Fizikai Intézete nyugalmazott egyetemi tanára



Ez az írás a Fizikai Szemle 2021/11. számának 365–368.oldalain megjelent cikk némileg rövidített változata, a szerző és a folyóirat szíves engedélyével közöljük.

A címlapon a replikaszimmetria-sértés Parisi-féle szerkesztésének első lépései: az ábra a rendparaméter-mátrix szerkezetét kívánja érzé keltetni, azonos színű mezők azonos mátrixelemeknek felelnek meg.

Lábjegyzet

[1] A spinüvegek olyan mágneses ötvözetek, amelyekben a mágneses atomok spinje alacsony hőmérsékleten látszólag rendezetlen irányokban áll be. Nevükben az „üveg” arra utal, hogy ez az irány szerinti rendezetlenség modellje lehet például az ablaküvegben az atomok elhelyezkedés szerinti rendezetlenségének.

☐ Nobel-díj ☐ Fizikai Szemle

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 23. szám 2022. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

100

Cím	Szerző
Társulati díjak 2021	Írta: Szerkesztő
MTA Alumni program	Írta: Miklós István
Matematikus történetek: Bollobás Béla	Írta: Szerkesztő
Ugródeszkák matek szakon – Fehér Dániel	Írta: Bérczi-Kovács Erika
Lépcsőházi gondolatok – kongresszus után	Írta: Szathmári Nóra
Járványmatek középiskolásoknak – 3. rész	Írta: Volf Annamária
Úton az egyenletek használata felé	Írta: Horváth Eszter, Fried Katalin
Tavaszi felkészülés	Írta: Szerkesztő
Lakatos Imre írásai matematikáról és a matematika filozófiájáról	Írta: Kutrovátz Gábor
A gyakorló matematikus filozófiája	Írta: Ferenczi Miklós
Eszpresszó Arkhimédésszel	Írta: Tóth János
Tehetségek együtt – Specmat 1962–2022	Írta: Oláh Vera
Klasszikus mechanika matematikusoknak	Írta: Gyebrószki Gergely
Mark Kac: A véletlen rejtélyei	Írta: Szerkesztő
Az ukrán matematika egyik ékköve: Sarkovszkij tétele	Írta: Röst Gergely
Mi is... a szimplektikus geometria?	Írta: Tara Holmes, Stipsicz András
A Baker-módszer és egy alkalmazása	Írta: Pink István
Matézis a Müpában	Írta: Oláh Vera
A 2021-es fizikai Nobel-díjas Giorgio Parisi	Írta: Kondor Imre

Adatkezelés
Elfogadom.