



## Előszó

A magyar matematikai élet és a Bolyai János Matematikai Társulat egyik meghatározó alakja, Császár Ákos életének 94. évében, 2017. december 14-én eltávozott közülünk. 24 éven keresztül volt a Társulat vezető tisztségviselője. (Főtitkár: 1966–1980, elnök: 1980–1990.)

Társulatunk elhatározta, hogy a Matematikai Lapok egy rövid különszámát szenteli korábbi elnöke emlékének. Hatalmas késéssel, de végre elkészült. A kis füzet tartalmazza az MTA honlapján megjelent akkori nekrológot, az Érintőben róla megjelent megemlékezést és végül személyes emlékeket. Az anyagok között sok az ismétlés, átfedés. De úgy gondoltuk, hogy ez nem baj, hiszen ugyanannak a ténynek több nézőpontból való megvilágítása pontosabb képet ad. Másrészt a szerzők írásainak összefésülése reménytelen vállalkozásnak tűnt.

Császár Ákos matematikai munkásságáról már korábban megjelent egy kiváló áttekintés Komjáth Péter tollából (In Memoriam Ákos Császár (1924–2017), *Acta Mathematica Hungarica* **158** (2019), 251–270), amit nem tartottunk célszerűnek itt megismételni.

Budapest, 2022. május 8.

Katona Gyula

## Elhunyt Császár Ákos matematikus, az MTA rendes tagja

2017. december 14-én, életének 94. évében elhunyt Császár Ákos, az MTA rendes tagja, az általános topológia nemzetközileg elismert szaktekintélye.

Császár Ákos 1924-ben született Budapesten. Tanulmányait Budapesten végezte, 1947-ben a Pázmány Péter Tudományegyetemen szerzett matematika-fizika szakos középiskolai tanári oklevelet. Még ugyanabban az évben „Sub Laurea Almae Matris” kitüntetéses doktorrá avatták.

Egyetemi oktatói pályafutását 1946-ban a Budapesti Műszaki Egyetemen kezdte. 1952-től oktatott az ELTE Természettudományi Karán, 1957-től egyetemi tanárként. 1994-ben lett az ELTE professor emeritusa. 1952-től 1992-ig, negyven éven át látott el tanszékvezetői feladatot az ELTE-n. A tanszék neve a matematikai és egyetemi közélet e meglehetősen viharos négy évtizedében többször változott, az állandóságot, a tanszék minőségi oktató- és kutatómunkáját Császár Ákos garantálta. Kollégái és tanítványai mindig csodálták páratlan vezetői egyéniségét, higgadtságát, korrektségét és precízségét. Előadásaira, szabatos, mindig gondosan megfogalmazott mondataira tanítványok százai emlékeznek.

Tudományos tevékenységének két fő területe a valós függvénytan és a topológia volt. Az 1940-es, 1950-es években írt valós függvénytan munkái kiemelkedő, ma már klasszikusnak számító eredményeket tartalmaznak. Az 1950-es évek végétől érdeklődése a topológia felé fordult, az általános topológia nemzetközileg elismert szaktekintélye volt. Ő alkotta meg a szintopogén tér fogalmát, amely a topologikus terek, az uniform terek és a szomszédsági terek közös általánosítása. A szintopogén terek elméletének alapos kidolgozása tekinthető talán a legnagyobb hatású eredményének. Tudományos adatbázisok mintegy 180 referált munkájáról tudnak, ezek között négy szakkönyv szerepel.

Az általános topológia alapjairól szóló könyvét három nyelven is kiadták. Császár Ákos nevét több matematikai fogalom, így a Császár-derivált és a Császár-poliéder is őrzi.

Császár Ákos a tudományos közélet számos kulcspozícióját is betöltötte. 1970-ben lett a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja, 1979-től rendes tag. Több cikluson át volt az akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának elnöke és tagja az MTA Elnökségének.

1960 és 1993 között mellékállásban vezette az MTA Matematikai Kutatóintézetében a Topológiai Osztályt, és megteremtette a magyar topológiai iskolát. 1966-tól 1980-ig a Bolyai János Matematikai Társulat főtitkára, majd 1980-tól 1990-ig elnöke, 1990-től pedig tiszteletbeli elnöke volt. Két nemzetközi szakfolyóirat főszerkesztője és több nemzetközi folyóirat szerkesztőbizottságának tagja volt.

A tudományos ismeretterjesztésben (TIT) is óriási szerepet vállalt.

Tudományos és közéleti munkáját számos elismerésben részesítették. 1962-ben Akadémiai Díjat, 1963-ban Kossuth-díjat kapott. 1981-ben a Csehszlovák Tudományos Akadémia Bolzano-aranyéremmel tüntette ki. 1983-ban neki ítelték a Szele Tibor-emlékérmét. 1984-ben elnyerte a Munka Érdemrend arany fokozatát, 1992-ben pedig az ELTE-emlékérmét. 1994-ben a Magyar Köztársasági Érdemrend Középkeresztjét kapta. 1999-ben elnyerte az Arany János Közalapítvány a Tudományért nagydíját. 2008-ban ismeretterjesztői munkásságáért Szily Kálmán-emlékéremben részesült. 2009-ben elnyerte az Akadémiai Aranyérmét.



## Juhász István: Néhány emlék és kép Császár Ákosról

Legelső találkozásom Császár Ákossal még középiskolás koromban történt, 1960 körül, a Bolyai Társulat által szervezett Ifjúsági Matematikai Kör egy rendezvényén. Ezen Császár Ákos tartott – természetesen bevezető jellegű – előadást a topológiáról. Az első fénykép nagyjából ebben az időben készült róla. Máig élénken emlékezem arra, ahogy különböző felületek – pl. Möbius-szalag – papírból készült modelljeit szedte elő egy kis bőröndből, és azután egy nagy ollóval vagdosta őket.



Nem sokkal később, pontosan 1961 őszén megkezdtem tanulmányaimat az ELTE TTK matematikus szakán – nagy szerencsémre ez a szak éppen akkor indult –, ahol az analízis előadásokat ő tartotta. Ezek az előadások – persze nem csak a mi évfolyamunknak – azóta legendás hírnévre tettek szert, precizitásuk és tökéletesre csiszolt voltuk miatt. Másodéves koromban újabb szerencse ért, mivel a Tudományos Diákkör tagjai kiválaszthattak maguknak egy professzort, aki segítette, mentorálta őket. Ekkor engem már elsősorban a topológia érdekelt, részben a fent említett IMK-előadás hatására, így természetesen Császár Ákost választottam, aki rendkívül szívélyesen és a rá jellemző alapossággal foglalkozott velem, az igazán zöldfülű kezdővel. Ennek köszönhettem, hogy már másodév végén megírtam első cikkemet, ami az ELTE matematikai folyóiratában, az *Annales*ben jelent meg. Ennek egyébként hosszú ideig ő volt a főszerkesztője.

Rengeteget tanultam tőle a továbbiakban is, így például számos speciális előadását hallgattam, és – annak ellenére, hogy közös munkánk nem volt, mivel Hajnal Andrással dolgoztam együtt – kapcsolatunk igen szoros maradt. A következő fényképet 1965-ben vagy 66-ban Tihanyban készítette rólunk, Ákossal és feleségével, Klárral a neves szovjet topológus, Jurij Mihajlovics Szmirnov, akinek a nevét a híres Nagata–Szmirnov-féle metrizációs tételből, meg persze számos egyéb jelentős topológiai eredményből ismerhetjük. (Sajnos ő nem szerepel a képen, akkor még a szelfik divatja nem létezett.) 1963 őszén – tehát harmadéves koromban – egy félévet Moszkvában, a Lomonoszov Egyetemen tanultam, méghozzá Szmirnov „szárnyai alatt”, így történt, hogy mikor Szmirnov később Császár Ákos meghívására Magyarországra látogatott, én is velük tarthattam, pl. Tihanyba.



A matematikus szak elvégzése után, 1966-ban – újabb szerencse – a Császár-tanszékre kerültem, ahol kilenc évet töltöttem mint tanársegéd, majd adjunktus. Hajnal András szintén ezen a tanszéken volt, majd 1970 körül átkerült a Matematikai Kutatóba (ma Rényi-intézet), s 1974-ben én is követtem oda. Körülbelül ebben az időszakban készülhetett a harmadik kép, ame-

## Néhány emlék és kép Császár Ákosról

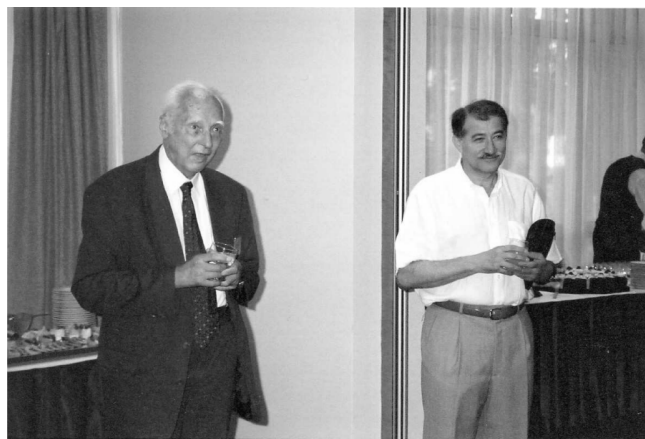
7

Ilyen Ákos szenvedélyesen magyaráz valamit T. Sós Verának, aki szintén a Császár-tanszéken volt kollégánk. Ezt a képet a neten találtam, így csak azt tudom, hogy egy hajón készült, nyilvánvalóan egy nemzetközi konferenciához kapcsolódó kiránduláson. Nagyon tetszik még nekem, hogy a kép jobb alsó sarkában Erdős Pál – a híres Pali bácsi – szundikál, illetve valószínűleg valami matematikai problémán gondolkodik. Császár és Hajnal mellett Erdős volt, aki meghatározó „role model” volt számomra.



A negyedik kép, melyen mindketten rajta vagyunk, a Bolyai Társulat egy közgyűlésén készült, talán 2000-ben. Ekkor Ákos a Társulat tiszteletbeli elnöke, s mint ilyen a közgyűlés levezető elnöke volt, én pedig a főtitkári tisztelet töltöttem be. Ákos a Társulat munkájában hosszú-hosszú évtizedeken keresztül játszott meghatározó szerepet.





Az ötödik kép a 60. születésnapom alkalmából 2003-ban rendezett konferencia bankettjén készült, ahol – számomra igazán hízelgő módon – Ákos méltatott, visszaemlékezve akkor már több mint negyvenéves kapcsolatunkra.



A hatodik kép is ehhez a konferenciához kapcsolódik, az ebből az alkalomból nálunk rendezett partin, a házunk erkélyén készült Ákosról és Kláriról. Szomorú, de ez volt az utolsó alkalom, mikor nálunk jártak.

A hetedik kép 2009-ben készült, amikor is Császár Ákos a Magyar Tudományos Akadémia legrangosabb kitüntetését, az Akadémiai Aranyérmet vehette át Pálinkás Józseftől, az MTA akkori elnökétől az MTA azévi közgyűlésén.

## Néhány emlék és kép Császár Ákosról

9



Ide kívánczik annak megemlézése, hogy már 1981-ben érte hasonló megtiszteltetés, ugyanis ekkor kapta meg a Csehszlovák Tudományos Akadémia Bolzano-érmét. Ennek átadását örökíti meg az utolsó kép.



Császár Ákos elhunyt alkalmából számos méltatás jelent meg a médiában, s nemrég a Rényi Intézetben, éppen 95-ödik születésnapján emlékülés is tartottunk emléke előtt tisztelegve. Ezzel az írással s a hozzá kapcsolódó néhány képpel ehhez szerettem volna hozzájárulni.

## Győry Kálmán: Emlékezés Császár Ákosra

1968-ban, az azévi Schweitzer-verseny eredményhirdetésén találkoztam először Császár Ákossal. Losonczi Lászlóval a verseny titkáraiként a Bolyai Társulat előadótermében ismertettük a feladatok megoldásait, összesen 12 megoldást általánosításokkal és egyebekkel együtt. Császár Ákos akkor már az egyik legtekintélyesebb magyarországi matematikus volt, nagy tudású, igazi úriember. Kedvesen, biztatóan váltott velünk néhány szót.

A következő emlékeim az 1993–1999-es időszakból származnak. Az MTA 1993. évi közgyűlése választott meg levelező tagnak. Ugyanazon közgyűlés döntött a Fizikai és Matematikai Tudományok Osztályának szétválásáról. Az új, Matematikai Tudományok Osztályának első elnöke Császár Ákos volt, én a helyettese lettem. Mivel frissen választott levelező tag voltam, izgultam, hogyan tudok eleget tenni a feladatnak. Tagtársaim megnyugtattak, hogy „Császár Ákos mellett semmi okom aggodalmaskodni, ő majd mindent elrendez”. Ez valóban így is történt, sokat tanultam tőle igényességben, precizításban, vezetői stílusban. Őt követően 1999 és 2005 között én voltam az osztályelnök. Bölcs, segítő tanácsaira, hozzászólásaira mindig számíthattam. Nagyon jólesett, hogy megbízatásom lejártakor Császár Ákos meleg szavakkal méltatta az osztályelnöki tevékenységemet.

2004-ben a Rényi Intézetben köszöntötte az Osztály a híres Big Five tagjait, közöttük Császár Ákost 80. születésnapjuk alkalmából. Nagyon büszkék voltunk rájuk, a köszöntésért mindannyian hálásak voltak. Császár Ákos a szokott helyén, a második sorban ült. Egyedül arra panaszkodott, hogy még a második sorból sem hallott mindent jól.

2008 nyarán Császár Ákosékkal egy hetet töltöttünk együtt az MTA balatonalmádi üdülőjében. Órákon át beszélgettünk tudományról, közéletről, politikáról és sok egyébről. Császár Ákos rendkívül udvarias, ugyanakkor távolságtartó ember volt. Úgy éreztem, hogy nyaralásunk alatt közel kerültünk egymáshoz.

Sajnos az évek múltával a hallása tovább romlott. Ő, aki minden ülésen részt vett, fegyelmezetten végigülte a napirendi pontokat, kénytelen volt visszavonulni otthonába. Többször hívtam telefonon a lakásán. Ha a felesége, Klárika otthon volt, ő segített „beszélgetni” Császár Ákossal. Sajnos Klárika halála után ettől a lehetőségtől is elestem.

## Emlékezés Császár Ákosra

11

Szomorúan vettük tudomásul, hogy még a temetésére sem mehettünk el, nem tudtunk tőle végső búcsút venni. Később, a Rényi Intézetben tartott megemlékező ülésen tudtam elmondani a hallgatóságnak emlékeimet, visszaemlékezésemet. Nagyon tiszteltem, becsültem, szerettem Császár Ákost.

## Katona Gyula:

### Emlékeim Császár professzor úrról

Harmadikos vagy negyedikes középiskolás koromban találkoztam vele először. Ugyanis beiratkoztam a József Attila Szabadegyetem „matematika” előadássorozatára, és ott komoly egyetemi tanárok népszerűsítették a matematikát. Köztük Császár Ákos. Emlékszem, mennyira megdöbbentem, amikor felrajzolt egy hosszabb „ $a$ ” és egy rövidebb „ $b$ ” szakaszt egymás mellé, és azt mondta, hogy ezek ugyanolyan „számosságúak”. És bizonyította is. A végeiket összekötve egy  $m$  metszéspont keletkezett, abból indulva „ $a$ ” minden pontjának pontosan egy pont felelt meg „ $b$ ”-ben. Tehát „ugyanannyian” vannak. Másrészt az egyik hosszabb volt, mint a másik, akkor azon több pont volt. Akkor számomra feloldhatatlan volt az ellentmondás. Ma már értem: a „számosság” és a „mérték” különböző fogalmak.

Harmadéves koromban találkoztam vele ismét. Ő tanította a matematikus évfolyamunknak a valós függvénytant. Pontosan 8:15-kor belépett az előadóterembe, és elkezdte az előadást. A tanév elején még sokan voltunk bent a 15-ös évfolyamból kezdéskor, de később előfordult, hogy csak kettenhárman. A többiek később szivárogtak be, de a professzor úr nem tett rá megjegyzést. Nem mertük kipróbálni, hogy akkor is elkezd-e pontosan az előadást, ha nincs ott senki. A táblán egymás alá írta a sorokat, mintha egy könyvből másolná. Persze, mert a könyv már ott volt a fejében, később meg is jelent egyetemi jegyzetként. Minden pontos volt, sosem kellett javítania. Általában triviális definíciókkal, állításokkal kezdte. Az én figyelmem elkalandozott („hiszen ez triviális”), mire oda kezdtem figyelni, már nem értettem, mert nehéz matematika volt. Természetesen mondta is, szép, kerek mondatokban. Néha lopva az órájára pillantott, de ez nem okozott döccenést sem a beszédében vagy írásában. Egyszer a tábla szélénél véletlenül lelépett a dobogóról. Ez sem akasztotta meg egy pillanatra sem az előadást. Soha semmi oda nem tartozót nem mondott. Egy kivételre emlékszem. Szász Domokossal duruzsoltunk, nevetgélünk valamin, amikor hirtelen odafordult:

– Mondja meg nekem Szász Domokos, mi olyan mulatságos! Doma lélekjelenléte kiváló volt:

– Professzor úr, leesett a rádiórom, mindketten lehajoltunk, és összeütöttük a fejünket.

– Hát ez valóban mulatságos – mondta, és folytatta az előadást.



Ő volt az egyetlen tanáraink közül, aki elegánsan, úgy öltözött, ahogy addig egy egyetemi tanárt elképzeltem. Úgy hallottuk, hogy ő kérte a Tanulmányi osztályt, hogy 8 órára osszák be az előadását, így jobban ki tudta használni az idejét. Sajnos az én véleményemet nem vették figyelembe. Gyakran nem is voltam képes beérni, és nagy késéssel meg szégyelltem már bemenni. De szerencsére későbbi feleségem, Virág Ildi mindig beért időben, rendesen jegyzetelt, abból tudtunk együtt tanulni, tűrhetően le tudtam vizsgázni. De igazán csak akkor értettem meg az egészet, amikor első munkahelyemen, a Távközlési Kutatóintézetben a kutatómérnököknek tanítottam a mértékelmélet alapú valószínűségyszámítást. Természetesen a feleségem által készített „Császár-jegyzet”-ből. Jóval később még írtam is olyan cikkeket, amikben a mértékelmélet lényeges szerepet játszott.

Egyetemi éveim után nem sokkal én lettem a Bolyai János Matematikai Társulat Alkalmazott Matematikai Szakosztályának titkára, s mint ilyen, részt vettem a Társulat elnökségi és választmányi ülésein, ahol Császár Ákosnak hosszú ideig vezető szerepe volt. 1966-tól 1980-ig ő volt a Társulat főtitkára, onnantól pedig 1990-ig az elnöke. Egy élmény volt őt az üléseken figyelni. Szép, erős orgánuma volt. Tökéletes, kerek, nyomdakész mondatokban beszélt. Ügyelt a szabályok betartására, de szenvedélye volt a Társulat hatékony működésének elősegítése. Számomra a Társulat és Császár Ákos fogalmai szinte összemosódtak. Bizonyos szempontokból – stílusbeli különbözőségeink ellenére – példaképem volt. De azt hiszem, kevésben tudtam utánozni később, amikor én kerültem hasonló funkciókba.

Egyszer azért egy kicsit összekülönböztünk. Mint lelkes fiatal, buzgó „újseprű” javaslatokkal bombáztam a vezetést, hogy miket kellene csinálni még a Társulatnak. A főtitkár váratlanul így válaszolt az egyik ötletemre:

– Javaslatokat tenni könnyű, de mindig egy-egy személyt kell hozzájuk rendelni, akik elvégzik a feladatot!

Persze egyéb feladatai példás végzése mellett rendíthetetlenül publikált. Első cikke 23 éves korában jelent meg, az utolsót 87 évesen írta. 64 év! Külső szemlélő számára egy állandóan csakis szorgalmasan dolgozó ember benyomását keltette. Pedig volt életének könnyedebb, játékosabb része is. Például a csacsi-pacsi készítés. Mi az? Például „Katona köröm, Katónak öröm” egy csacsi-pacsi. Tehát két olyan értelmes szöveget kell kitalálni, amik egymástól csak a legelső betűkben és a szóközökben különböznek. Császár Ákos alkotta meg a leghosszabbat:

- Buszon hatalmas vadász kalaposan tőkcsavart dug asztalába, s badar álma:
- Huszonhat alma s vad ászka lapos, antik, csavart dugaszt a lábasba darál ma.

Feleségével párban komolyan bridzsezett is. És sokat kirándultak. Ehhez kapcsolódik egy kis történet, ami végképp nem illett a róla felületesen kialakítható képbe.

Dobogókőn voltak kirándulni, és ott elveszett Ákos macija. Újsághirdetést adott fel, megtalálták, így a történet boldog véget ért.

## Simonovits Miklós: Emlékeim Császár Ákosról

Császár Ákost 4. osztályos gimnazista koromban ismertem meg, 1962 tavaszán, és 1967-től 1985 végéig volt a főnököm. Ákostól nagyon sokat tanultam az élet számtalan területén, és matematikát is sokat tanultam tőle, sőt tudományszervezést is.

Azt mindig nagyon élveztem, hogy körbe voltam véve nagyon okos emberekkel, akiktől sokat lehetett tanulni. Matematikailag persze legtöbbit nem Ákostól tanultam, hanem elsősorban Sós Verától, Erdős Páltól és Turán Páltól. De emellett nagyon sokat tanultam Hajnal Andrástól is, mindhárom fent említett területen, és még sok más kitűnő tanáromtól, diáktársamtól, kollégámtól.

Ákostól érdeklődési területe, kutatásai tőlem kicst távolabb estek, de ennek ellenére tőle is nagyon sok matematikát tanultam az előadásaiból, a speciális előadásaiból és szemináriumából.

---

Az egyetem elvégzése után Sós Vera meghívására az Analízis I Tanszékre kerültem oktatónak, és 18 évig oktattam az ELTE-n, az utolsó két évben a Számítógéptudományi Tanszék oktatójaként: az első 16 évben Császár volt a tanszékvezetőm, egy kicsi, de nagyon kiemelkedő tanszéken (az ELTE-n töltött 18 évből az utolsó két évben a Lovász-tanszéken dolgoztam). Tanszékünkön dolgoztak például Szász Pál, Péter Rózsa, Ruzsa Imre (az idősebb), Urbán Jancsi, Rényi Kató, Sós Vera, Hajnal András, Juhász István, Pósa Lajos, Laczkovich Miki, Elekes Gyuri, Petruska Gyuri, sőt, bár ez kicsit megtévesztő, Lovász László is. (A fiatalabbakat most nem sorolom fel.)

Ahogy elmondom újra és újra, a tanszék kiemelkedően jó tanszék volt, és ennek egyik fontos oka volt, hogy Császár megbízott bennünk, akkor is, amikor a fiatalabb kollégák odavételéről volt szó: nem próbálta a tanszékét csak a saját választottjaival tölteni fel.

---

Császár Ákost érettségi előtt ismertem meg: Reiman Pistához jártam olimpiai szakkörre. Reiman kitűnő tanárom volt, nagyon sokat köszönhettem neki, és egyebek között 1962-ben meghívott néhány matematikust, hogy adjon elő nekünk „igazi” matematikáról. Köztük volt Császár és Sós Vera is. Császár topológiáról adott elő, Sós Vera pedig Turán gráftételéről, aminek bővebb környezete később az egyik fő kutatási területemmé vált.

1962 őszén bekerültem az ELTE nappali tagozatára, matematika szak-  
ra. Ekkor találkoztam Ákossal újra, de csak azért, mert az analízisóránk  
ugyanazon teremben volt, ahol előtte Ákos tartott órát a Bollobás–Juhász-  
évfolyamnak. Ákosra mindig a pontosság volt jellemző, a találkozásunkkor  
azonban valahogyan tovább tartotta az órát, mint kellett volna, mi pedig, akik  
még egy hónapja sem jártunk egyetemre, többször is benyitottunk a terembe.  
Ákos végül nagyon mérgesen jött ki a tanteremből, és hangosan ránk szólt,  
mondván, hogy ő is ismeri az órát. Meg kell jegyeznem, hogy visszatekint-  
ve ez az eset azért meglepő, mert nagyon más, mint amilyennek általában  
láttam Ákost. Ákos nagyon zárkózott ember volt, nem nagyon lehetett leol-  
vasni arcáról az érzelmeit, és keveset beszélt olyasmiről, ami nem tartozott a  
matematikához vagy az oktatáshoz.

Elsőéves koromban heti 36 óránk volt, többnyire matematika. (A „több-  
nyire” itt azt jelenti, hogy persze voltak tornaóráink is, amit úszással is ki  
lehetett váltani, és voltak ideológiai óráink is, az első évben például filozófia-  
történet, amit egyébként a legendás Márkus György tartott.) Analízist és  
kombinatorikát Sós Vera oktatott, az előadásokat és a gyakorlatokat is Vera  
tartotta, a két tantárgyat összesen heti 9 órában. Imádtuk az óráit. Az algebrát  
Fried Ervintől tanultuk. Ervinnek nagyon egyéni előadási stílusa volt, de azt  
is nagyon szerettem, abból is sokat tanultunk. Egy évvel később Császár vet-  
te át az analízis oktatását, és gyakran elgondolkoztunk azon, hogy miért pont  
úgy adja elő az anyagot, ahogyan előadta. Ákos nagyon precízen, de egy  
kicsit formálisan adta elő az anyagot. Egy fizikus barátom a következővel  
jellemmezte Ákos stílusát:

Hogy milyen is volt Császár? Megtanította, amit kellett, az  
utolsó epszilonig, de hiányzott mindig az előszó, vagy akár  
utószó: mire megy ez a tétel? Szép a hosszú bizonyítás, de  
mi neki az értelme? Lehetett volna közvetlenebb egy nem  
profi-matematikus társaság előtt, de a maga módján érdekes je-  
lenségként tiszteltük.

A 4. félévben Császár *valós függvénytant* oktatott nekünk. Magát a  
tantárgyat én nagyon szerettem, de azt nem tudtam, hogy bizonyos tan-  
anyagrészeket Ákos miért vett bele az anyagba. Sok évvel később meg  
is kérdeztem Ákost erről, és azt válaszolta, hogy ezzel alkalmazkodott a  
*valószínűesszámítás* oktatásához. Ákosra egyébként is jellemző volt, hogy  
sokszor csinált az oktatásban olyasmit, aminél nem értettem, hogy miért

csinálja úgy, ahogy csinálja, de ha megkérdeztem, akkor kérdésekre mindig nagyon világos – és többnyire meggyőző – választ kaptam. Persze, nem mindig értettem vele egyet. Egyszer, sok évvel később, amikor már évek óta dolgoztam Ákos keze alatt, például megkérdeztem, miért nem tesz ábrákat a jegyzeteibe. Lényegében azt válaszolta, hogy nem bízik az ábrákban, azok könnyen becsapják az olvasót. Én magam azóta is elkötelezett híve vagyok a leírt matematikai szövegekben az ábráknak. (Már ahol ez lehetséges. Ismert eset erről, hogy Rényiinek egyszer egy lexikon szócikknél Erdei-Grúz, az Akadémia akkori elnöke kifogásolta az ábra hiányát. Azt hiszem, a Banach-terekről szólt ez a szócikk. Rényi – nem éppen a legudvariasabban – megválaszolta Erdei-Grúznak, hogy ehhez nem lehet ábrát illeszteni.)

Térjünk vissza egy percre a valós függvénytanra. Ez az anyag sokkal bonyolultabbnak tűnt, mint a többi addig tanult matematika tantárgy. Fritz Jóskával, évfolyamtársammal sokat beszélgettünk róla. Itt éreztük először, hogy jól jönne valami kiegészítő irodalom az anyaghoz. Erre Halmos *Measure Theory* c. könyvét használtuk, ahogyan ez akkorig divatos volt. A Halmos-féle felépítésnek számtalan előnye volt, talán elegánsabb volt, könyve tele volt feladatokkal, melyek megoldásával sokkal mélyebben megérthettük az anyagot, és mindegyik fejezetben csak kevés tételt emelt ki Halmos. Császár felépítése abból indult ki, hogy a térben a téglatestek mértékét már tudjuk, ebből kell minden halmaz külső mértékét kiszámítani, majd ezek segítségével – az úgynevezett Carathéodory-módszerrel – kiválogatni a mérhető halmazokat. Ez sokkal munkaigényesebb volt, és csak később értettem meg a Császár által használt felépítés előnyeit.

— . —

Ákosra minden tekintetben jellemző volt valamilyen nagy hatékonyság. Amikor a tanszékére kerültem, hamarosan kiválasztott engem is gyakorlatvezetőjének. Akkoriban analízisórát tartott a matematika szakos hallgatóinak, mondjuk heti 4 órában, mondjuk hétfőn és szerdán 8.15-től 10 óráig, egy 15 perces szünettel. Utána találkozott a gyakorlatvezetőivel, hogy elmondja, milyen anyagokat adott le az órán, és milyen anyagok vagy feladatok feldolgozását várja el tőlük a gyakorlatokon. Mindezt 5 vagy 10 perc alatt elvégezte. A kezdő gyakorlatvezetőit, legalábbis a korai éveiben meglátogatta a gyakorlataikon, hogy megnézze, hogyan vezetik a gyakorlatokat. De egyre több kitűnő gyakvezetője lett, a nálam fiatalabbak közül megemlíteném például Pósa Lajost, Laczkovich Mikit, Elekes Gyurit.

Akkoriban szokásos volt, hogy a professzorok egy része kísérettel (sleppel) járt. Ákos nem érezte ennek szükségét, sem a saját fontosságát nem akarta ezzel növelni, sem annak szükségét nem érezte, hogy mi újra meghallgassuk a tananyagot. Én úgy éreztem, hogy teljesen megbízott a gyakvezetői szakmai tudásában. Hozzám a munkába állásom elején egyszer bejött a gyakorlatomra, talán tett néhány apróbb megjegyzést, de utána soha nem ellenőrzött bennünket.

Előfordult olyan is, hogy megbetegedett, ilyenkor megkért valamelyikünket, hogy helyettesítsük. Elmondta részletesen, hogy mely tételleket és bizonyításukat adjuk elő, de mint mondtam, teljesen megbízott bennünk. Természetesen erre meg is volt az alapja, a tanszékére kitűnő oktatókat vett fel, nem emlékszem másik olyan tanszékre, ahonnan ilyen sok nagydoktor vagy akadémikus került ki.

Egy olyan dolog volt, amikor nagyon nem értettem vele egyet. Az 1980-as évek elején megnőtt a feszültség a matematikus szakterületen. A kialakult viták is nagyon élesekké váltak. Egyszer, amikor valaki a szemébe hazudott, megkérdeztem Ákost, miért nem olvasott be az illetőnek. Erre Ákos azt válaszolta, hogy ő nem tudja azt mondani valakinek, hogy hazudik.

— . —

Ákos persze nemcsak a tanszékvezetőm és a végén az intézetvezetőm volt, de a matematikai közélet vezető alakja is volt. Sok évig volt a Bolyai János Matematikai Társulat főtitkára, és – bár formailag az elnök felette állt – valójában a főtitkár volt akkoriban a Társulat vezetője. Ákos nagyon sok évig vezette a Társulatot. Emellett az Akademián is fontos szerepet vitt.

— . —

Ákos legendás ember volt. Nagyon szerette a zenét, erről is sok legenda szólt, én csak annyit írok róla, hogy a koncerteken néha a zenét partitúrával hallgatta. Más ilyen ismerősöm nem volt. Nagyon szerette a természetet, járt kirándulni feleségével, Császár Kláival. Egyszer néhány évfolyamtársammal a Pilisben kirándulva találkoztunk velük. Ami meglepett bennünket, hogy amikor egy órával később összetalálkoztunk Ákosékkal a turistaházban, ott ült feleségével egy asztalnál, és Klári egyik jegyzetét javígtatták.

Ugyancsak a természet iránti rajongását mutatta, hogy egy kanadai kongresszuson szabad idejében Észak-Amerika fáiról szóló könyvvel sétálgatott körbe. Emellett persze ismert volt róla, hogy szeretett bridzselni is, de ez nem

## Emlékeim Császár Ákosról

19

volt olyan meglepő, sok más matematikus bridzselt vagy sakkozott akkorigan magas szinten.

Ákosról még sokáig írhatnék, de itt inkább abbahagynám. Inkább csak összefoglalóként annyit mondok, hogy mindenben, amit csinált nagyon jó és megbízható volt.

**Helyreigazítás.** A Matematikai Lapok 2017–18/2. számában a 49. oldalon tévesen azt írtuk, hogy Simon Károly kapta a 2016. évi Szele Tibor-emlékérmét. Helyesen ő a 2017. évi érmet kapta. A díjazott és az olvasók elnézését kérjük.



## Társulati élet – 2018

### Szele Tibor-emlékérem

A Bolyai János Matematikai Társulat Szele Tibor-emlékérem bizottsága a 2018. évi érmet **Győri Ervinnek** ítélte oda.

#### Indoklás:

*Győri Ervin* a Rényi Alfréd Matematikai Intézet tudományos tanácsadója, az extremális kombinatorika nemzetközi hírű kutatója.

Az önálló kutatómunkát – Katona Gyula tanítványaként – igen korán elkezdte. 1976-ban bizonyította be – Lovásztól függetlenül – az azóta Győri–Lovász-tétel néven ismert tételt  $k$ -szorosan összefüggő gráfok összefüggő részekre „darabolásáról”, ami egyszerre adta bizonyítását Frank András és Stephen Maurer sejtéseinek. A bizonyítás nemcsak független volt Lovásztól, de alapvetően különböző: míg Lovász topológiai eszközöket használt, Győri tisztán gráfelméleti eszközök segítségével találta meg a rendszert egy rendkívül bonyolult struktúrában.

1981-ben egy fontos minimax tételt sikerült intervallumokra bizonyítania, ami Győri-tétel néven vált ismertté.

Munkásságában egyre nagyobb helyet foglalt és foglal el az extremális gráfelmélet, illetve általában az extremális problémák vizsgálata. Számos több évtizedes sejtést, Erdős-problémát sikerült megoldania. Az utóbbi években új módszerek kidolgozásával egy továbbra is bővülő cikksorozatban áttörő eredményeket ért el extremális hipergráfelméletben. 1994-től az MTA doktora. 2013-ban Akadémiai díjat kapott.

Viszonylag későn (2005) került kapcsolatba hallgatókkal, amikor a Közép-európai Egyetem elindította a PhD iskoláját, de azóta rendkívül intenzíven vett részt ebben a munkában. Összesen (kb.) 24 fiatalnak volt témavezetője (Master Thesis vagy szakdolgozat, PhD, Fulbright-ösztöndíj).

Soroljuk fel a legeredményesebbeket. Fleiner Tamás (postdocként Győri Ervin volt a témavezetője a Rényi Intézetben; most docens BME-n), Szántó Ágnes (szakdolgozat; North Carolina State Univ., assoc. prof.), Nguyen Hoi (Master’s; Ohio State Univ., assistant prof.), Keszegh Balázs (PhD; Grünwald-díjat és Akadémiai Ifjúsági díjat kapott, Rényi Intézet, tudományos főmunkatárs), Mezei Tamás (PhD; Rényi Intézet), Cory Palmer (PhD; Univ. Montana, assistant prof.), Nathan Lemons (PhD; Los Alamos

Nat. Lab., postdoc.), Mészáros Gábor (PhD; Univ. Memphis, Faudree Assistant Prof.), Nika Salia (PhD; Rényi Intézet).

Heti rendszerességgel találkozik tanítványai egy-egy csoportjával, akikkel közösen oldanak meg nehéz problémákat. Hallgatóival közösen mintegy 20 cikket publikált a hipergráfok extrémális problémáinak témaköréből. Külföldi tanítványai Magyarországot tekintik matematikai hazájuknak, gyakran járnak „haza”. Nathan Lemons például jelenleg is „sabbatical”-ját tölti a Rényi Intézetben.

## Beke Manó-emlékdíj

A 2018. évi Beke Manó-emlékdíj Bizottság körültekintő mérlegelés után úgy határozott, hogy a díjat **Bíró Éva, dr. Csóka Gézáne, Csordásné Szécsi Jolán, Gulyásné Nemes Katalin, Maróti Lászlóné, Maksa Gyula és Paulovits György** kapják.

### Indoklások:

*Bíró Éva* a vásárosnaményi Eötvös József Általános Iskola tanítója, intézményvezető-helyettese, hosszú évek óta magas színvonalú szakmai-pedagógiai munkát végez. Fontos feladatának tekinti, hogy 3. és 4. osztályos diákjaival minél jobban megszerettesse a matematikát, ennek révén az alkotó gondolkodást. Tevékenységét a gyerekek iránti szeretet hatja át. Munkájának sikerességét mutatja, hogy „emelt” matekosai sorozatosan jó eredménnyel szerepelnek országos és megyei matematikaversenyeken. A Zrínyi Ilona Matematikaverseny és a Bolyai Matematika Csapatverseny megyei fő szervezője. Kezdeményezője, elindítója és feladatírója volt a 2013-ig tartó Buk-sitörő megyei matematika versenynek, melynek feladatai kiadványban is megjelentek. Szervezője az Alapműveleti matematikaversenynek is.

Naprakész a tudás átadásának módszereiben. Egyaránt nagy figyelmet fordít tanítványai tehetségének kibontakoztatására és a felzárkóztatásra szoruló tanulók differenciált foglalkoztatására. Diákok, szülők és kollégák véleményére is támaszkodva ítélte a Beke Manó-emlékdíj Bizottság Bíró Évának a díjat.

*Dr. Csóka Gézáne*, a győri Műszaki Szakképzési Centrum Jedlik Ányos Gépipari és Informatikai Szakgimnázium tanára nagy tapasztalatú, munkáját szakmai és módszertani szempontból egyaránt igényesen végző tanár. 2015-től mestertanári fokozattal rendelkezik.

Tehetségfejlesztő munkájának eredményeként sok diákja érettségizik matematikából emelt szinten, tanítványai országos matematikaversenyek döntőjének résztvevői, megyei matematikaversenyek dobogós helyezettjei.

Jelentős az iskola falain kívül végzett szakmai munkája is. A Győr-Moson-Sopron Megyei Pedagógiai Intézet matematika szaktanácsadója középiskolai területen, szakértőként dolgozik többek között pedagógiai értékelés, tehetségfejlesztés, szaktárgyi oktatás területeken. A matematikai nevelés fejlesztésének érdekében folyamatos munkakapcsolatban van a megye matematikatanáraival, előadásokat, konzultációkat tartott a matematika szakdidaktika fontos témáiról és a tananyag érdekes vagy problémás fejezetinek tanításáról. Előadásaival, konzultációs foglalkozásaival a megye határain túl is sikereket ért el. Ezeknek a témáknak legtöbbike cikk formáját is öltötte, amelyek a megyei Pedagógiai Intézet havonta megjelenő *HÍREK* című folyóiratában olvashatók.

A fenti sokoldalú és nagy hatósugarú tevékenysége alapján dr. Csóka Gézáné méltó a Beke Manó-emlékdíjra.

*Csordásné Szécsi Jolán*, a kecskeméti Katona József Gimnázium nyugalmazott tanára, mint a kiemelkedő matematikatanárok mindegyike, pályájának kezdetétől egyaránt nagy gondot fordított a tehetséggondozásra és a matematika iránt kevésbé érdeklődő tanulók képzésére. Feladatának tekintette, hogy velük is megismerettesse, megértesse a matematikát.

Hatékony pedagógiai módszereivel elérte, hogy tanítványai nagy számban vegyenek részt matematikaversenyeken. A diákok döntőbe jutásának, dobogós helyezéseinek egyik alapja, hogy a tanárnő biztatására rendszeres megoldói az *Abacus* és a *KöMaL* matematikai pontversenyeinek. A matematikaversenyek alkotó közreműködője is: 2007-től a Gordiusz/Zrínyi 9–12 matematikai verseny egyik évfolyamának feladatait állítja össze. 2012 óta mi, tanárok is az általa összeállított feladatok megoldásával versenyezhetünk a középiskolai tanárversenyen itt, a Vándorgyűlésen.

24 matematikai feladatgyűjteménynek szerkesztője, illetve társszerzője. Ezek: A Mozaik Kiadó Matematika versenytesztjei, a Mategye Alapítvány kötetei a Zrínyi versenyekről, valamint a Kecskeméti matematikai füzetek kötetei.

Példamutató emberi tulajdonságai a diákokkal kialakított jó kapcsolatán kívül abban is megmutatkoznak, hogy megértő és segítőkész a fiatal kollégákkal is.

Mindezek alapján Csordásné Szécsi Jolán méltó a Beke Manó-emlékdíjra.

*Gulyásné Nemes Katalin*, a miskolci Herman Ottó Gimnázium tanára az iskola nevelőtestületének meghatározó személyisége, aki szakmai felkészültségével, eredményes munkájával, gyermekközpontú pedagógiai hitvallásával vívta ki kollégái és tanítványai elismerését. Az iskola matematika munkaközösségének vezetője, ezzel is hatással van a gimnázium jelentősebb eredményeire. Szakvizsgázott tehetséggondozó diplomát szerzett tehetséggondozás szakirányban, és ezen a területen kiemelkedő munkát végez a felkészítő foglalkozások vezetésében és a versenyek szervezésében. Tanítványai a Magyarországon megrendezésre kerülő minden jelentősebb matematikaversenyen indulnak, és kiemelkedő eredményeket érnek el. Az elmúlt öt évben az OKTV-n, a Nemzetközi Magyar Matematikaversenyen, a Varga Tamás Matematikaversenyen, a Zrínyi Ilona Matematikaversenyen és a Kockakobak versenyen voltak tanítványai az első tíz között.

Csapatversenyeken is nagyon jó eredménnyel szerepeltek a tanárnő diákjai: a Dürer Verseny, a Bolyai Matematika Csapatverseny, a Kecse Kupa Csapatverseny dobogósai között találjuk őket.

Szakmai felkészültsége, lelkiismeretes munkája és a tehetséggondozásban elért kiemelkedő eredményei alapján Gulyásné Nemes Katalin méltó a Beke Manó-emlékdíjra.

*Maróti Lászlóné*, a Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Gyakorló Iskolájának nyugalmazott szakvezető tanára pályája során a tanulás és a tanítás sok lépcsőjét megjárta, és ezek mindegyike tapasztalatot és eredményeket jelentett értékes pedagógiai tevékenységében. Általános iskolai, majd középiskolai tanári diplomát szerzett matematikából. A Gyakorló Iskolába kerülése előtt tanított tanyai, kisközségi, járási székhelyen levő általános iskolában is. Széleskörű tapasztalatokat szerzett hátrányos helyzetből induló, érdeklődő gyerekek fejlesztését szolgáló módszerek kidolgozásában éppúgy, mint a többgenerációs értelmiségi családok jó képességű gyerekeinek kibontakoztatásában, vagy a szerényebb képességűek fejlesztésében, felzárkóztatásában.

Mindkét szegmensre külön tematikát dolgozott ki, gyűjtötte és gyártotta a gyakorlást, megerősítést szolgáló feladatsorokat, illetve a kibontakozást inspiráló érdekes problémákat, fejtörőket. Ezek képezték a később publikált, 1993 és 2017 között megjelent öt feladatgyűjteményének alapját.

Tanításának szerves részévé vált a differenciálás. Nagy hangsúlyt fektetett a tiszta fogalmak megalapozására, kialakítására, amihez a manuális tevékenykedtetés és a vizuális tapasztalás lehetőségeinek kihasználása adta

az alapot. Tanóráin és szakkörein készítette fel tanítványait a matematikaversenyekre, ahol diákjai több esetben is az élen végeztek.

Nyugállományba vonulása óta is dolgozik a Zrínyi Ilona Matematikaverseny szervezésében és a Bonifert Domokos Nemzetközi Matematikaverseny feladatkitűző csoportjában.

Tanítványi közül többen választották a matematikatanári pályát.

Ennek a gazdag és termékeny életpályának méltó elismerése a Beke Manó-émlékdíj.

*Maksa Gyula*, a Debreceni Egyetem Matematikai Intézetének egyetemi tanára oktatói pályája során az Analízis Tanszék profiljához tartozó főkéllégiumi tárgyakból tartott előadást matematikus és matematikatanár szakos hallgatóknak. Oktatott, illetve kutatott az Amszterdami Egyetemen, a kanadai Waterloo Egyetemen, a Katowicei Egyetemen, a Berni Egyetem Matematikai Intézetében. Több mint 100 előadást tartott, többnyire nemzetközi konferenciákon. 2001 és 2004 között Széchenyi István Ösztöndíjban részesült.

Számos szakdolgozatnak, diplomamunkának, két OTDK dolgozatnak, három fokozatszerzéssel zárult PhD fokozatnak volt témavezetője. Középiskolás diákok szakmai témavezetőjeként részt vállalt a Debreceni Egyetem TTK nyári tábor megrendezésében. Visszatérő előadója a Matematikai Intézet által koordinált regionális matematika szakköröknek.

Kiemelkedő szerepet játszik a matematika szakdidaktika magas szintű oktatásában és szervezésében. Főszerkesztője a hazai kiadású *Teaching Mathematics and Computer Science* nemzetközi didaktikai folyóiratnak, 2008 óta vezetője a Debreceni Egyetem Matematika és Számítástudományok Doktori Iskolája Didaktika (szakmódszertan) programjának. Egyik szervezője a Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások konferenciasorozatának.

Kutatóként és oktatóként is nagy hatású egyéniség. Munkája során jelentős tanítványi kört nevelt ki maga körül.

Ezt a gazdag szakmai pályát ismerjük el a Beke Manó-émlékdíj odaítélésével.

*Paulovits György*, a debreceni Bethlen Gábor Közgazdasági Szakgimnázium tanára matematikusi, valamint matematika és magyar nyelv és irodalom szakos tanári diplomát szerzett. Pályakezdése óta folyamatosan kiemelt feladatának tekinti a tehetséggondozást, versenyfelkészítést. Nagyon sok csoportos és egyéni tehetséggondozó foglalkozást, szakkört tartott és tart. Diákjai az országos matematikaversenyek döntőjének résztvevői, he-

lyezettjei. Ezen eredményeken túl fontos számára, hogy tanítványai kiváló egyetemek legnépszerűbb szakjain is megállják a helyüket. Legtöbb korábbi tanítványával – akik kiváló közgazdászok, középiskolai vagy egyetemi matematikaoktatók lettek – azóta is kapcsolatban áll. Tevékenysége kiterjed a pedagógiai innováció területére is. Bemutató órák, belső továbbképzések keretében segíti kollégáit és népszerűsíti a számítógépes matematikaoktatást, az interaktív tábla használatát.

Didaktikai fejlesztő munkája is jelentős. Szakkönyvi fejezetet írt a Debreceni Egyetem *Szaktárnet* pályázati programjának keretében megjelenő kötetébe *A matematika oktatásának gyakorlati kérdései* címmel. Az egyetemen gyakorlatot vezetett Elemi matematika és Matematika tanítása tárgyakból. Több tucat tanárjelölt hallgató mentorálását végezte.

Mindezek alapján megállapíthatjuk, hogy Paulovits György tapasztalt, ismert és elismert tanáregyéniség, szakmai és módszertani felkészültsége kiemelkedő. Méltó a Beke Manó-emlékdíjra.

## Grünwald Géza-emlékérem

A Grünwald Géza-emlékérem jogelődjét, a Grünwald Géza-emlékdíjat a Bolyai János Matematikai Társulat 1951-ben alapította a matematikai alap kutatásban kiemelkedő tudományos eredményeket elérő, fiatal magyar matematikusok jutalmazására. 2018-ban a Társulat a jutalmazhatók körét kiterjesztette a Magyarországon tanulmányokat folytatott külföldi kutatókra is.

2018-ban a Grünwald Géza-emlékéremre hat felterjesztés érkezett, melyek kivétel nélkül magas színvonalúak voltak. A Bizottság öt díj odaítéléséről döntött. A díjazottak tudományos munkássága a matematika különféle területeire összpontosul. Az előző évekhez hasonlóan idén is a Bizottság módjában állt az ország különböző egyetemeinek, illetve kutatóintézeteinek munkatársait kitüntetni. A Bizottság szavazatai alapján az idei díjazottak a következők: **Gaál Marcell, Lovas Attila, Abhishek Met-huku, Nemes Gergő és Szakács Nóra.**

## Indoklások:

*Gaál Marcell Gábor* 1991-ben született. Alapszakos diplomáit 2014-ben a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen szerezte villamosmérnöki, illetve gazdasági szakon. Ezt követően ugyancsak a BME-n végzett matematikus mesterképzést, majd 2016-tól a Szegedi Tudományegyetem doktorandusza.

Gaál Marcell eddig 10 cikket publikált nemzetközi folyóiratokban, és további 5 dolgozata van megjelenés alatt. Munkáiban elsősorban mátrixok, illetve különböző operátoralgebrák ( $C^*$ -algebrák és Neumann-algebrák) részstruktúráinak megőrzési problémáit vizsgálta. Ezen problémák olyan transzformációk zárt alakkal történő leírását jelentik, melyek invariánsan hagynak bizonyos, az illető struktúrára jellemző numerikus mennyiségeket, operációkat vagy relációkat. Tanulmányaiban elsősorban funkcionálanalízisbeli apparátusra támaszkodott, de egyes problémák megoldásában algebrai módszereket is sikeresen alkalmazott, többek között a reprezentációelmélet és a Lie-csoportok területéről. Társszerzőjével együtt véges Neumann-algebrákon igazolták a pozitív definit mátrixokra vonatkozó Minkowski-determináns-egyenlőtlenség egy operátoralgebrai megfelelőjét. Különböző operátorközepekkel kapcsolatos megőrzési problémákat tanulmányozott. A Fourier-analízis területéről származó extrémális problémákat is vizsgált. Legújabb munkáiban pedig a kvantum-információelméletben alapvető fontosságú relatív entrópia és divergencia jellegű mennyiségeket megőrző leképezéseket tanulmányozta.

Kiemelkedő eredményeire tekintettel Gaál Marcell a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

*Lovas Attila* 1989-ben született. 2012-ben diplomázott a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematika BSc szakán, majd 2014-ben szerzett ugyanitt MSc fokozatot. A BME Doktori Iskolájában 2017-ben védte meg doktori disszertációját, témavezetője Andai Attila volt. Jelenleg a BME Analízis Tanszékének adjunktusa.

Lovas Attila 6 már megjelent és egy publikálás alatt lévő dolgozat szerzője. Kutatásait a matematikai fizika, szűkebben a nem kommutatív (másképpen: kvantum) információgeometria területén végzi. Ezen belül három kérdéskörben ért el jelentős eredményeket. Egyrészt a Heisenberg-féle határozatlansági reláció több új, hasznos általánosítását adta, ahol a fizikai mennyiségek különböző típusú kovarianciáira vonatkozóan bizonyított relációkat. Másik munkájában a kvantum összefonódottság témáját vizsgálta. Több esetben meghatározta, hogy mekkora valószínűséggel szeparált egy véletlenszerűen választott állapot. Igazolta a témába vágó Milz–Strunz-sejtést, valamint meghatározta a valós számtest feletti Hilbert-tér esetén a szeparáltsági valószínűséget. Harmadik témája pedig a kvantumcsatornák vizsgálata, amelyeket a kvantummechanikai állapotok közötti átmenetek, illetve kvantumszámítógépek megengedett lépéseinek leírására használnak.

Az elért eredményei elengedhetetlenek többek között a véletlen csatornák numerikus analízisének és a csatornák kapacitásának becslésének.

Kiemelkedő eredményeire tekintettel Lovas Attila a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

*Abhishek Methuku* 1990-ben született. Chennaiban szerzett diplomát számítástudományból. Ezután 2013-ban a Közép-európai Egyetem hallgatója lett: először 2 évig a mesterkurzuson, majd 3 évig PhD disszertációján dolgozott, amit 2018 novemberében védett meg. Jelenleg az École Polytechnique Fédérale de Lausanne posztdoktor kutatója.

Abhishek Methukunak 34 cikke született, ebből 14 jelent meg, és további 4 publikálásra elfogadott. Főleg az extrémális kombinatorika és a sztochasztikus kombinatorika területén dolgozik. Több eredménye kapcsolódik a Sperner-tétel különböző általánosításaihoz. Itt egy rögzített halmaz részhalmazainak egy bizonyos családjának maximális számosságát szeretnék megadni azon feltételek mellett, hogy egy bizonyos, csak tartalmazásokkal megadott konfiguráció nem fordul elő a családban. Társ szerzőivel vizsgálták a problémát abban az esetben, amikor a kizárt poset egy rombusz; itt cikkek sorozata született egyre jobb becsléseket adva, majd Methuku és társ szerzői bizonyították az eddigi legerősebb eredményt. Továbbá általános becsléseket adtak a részhalmazok családjának számosságára a kizárt posetben található leghosszabb lánc hosszának függvényében. Győri Ervin vezetésével pedig  $r$ -uniform hipergráfokhoz kapcsolódó problémákat vizsgáltak. Sikeresen általánosították Erdős és Gallai eredményét, mely felső becslést ad egy gráf éleinek számára a leghosszabb út hosszának függvényében.

Kiemelkedő eredményeire tekintettel Abhishek Methuku a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

*Nemes Gergő* 1988-ban született. Az ELTE-n szerezte meg a BSc fokozatot 2010-ben, majd az MSc fokozatot 2012-ben. Ezután a CEU-n doktorált 2015-ben. Hároméves külföldi tartózkodása (Skócia és Japán) után 2018 decemberétől az MTA Rényi Intézetének MTA Prémium Posztdoktori Ösztöndíjas munkatársa. Tudományos elismertségét számos korábbi díj és ösztöndíj mutatja.

Nemes Gergőnek 28 megjelent és 2 közlésre elfogadott publikációja van, melyek többsége egyszemű, és számos hivatkozással bírnak. Fő kutatási területe az aszimptotikus analízis, amelyen belül kiemelten foglalkozik exponenciális és hiperaszimptotikus problémákkal. Az utóbbi témakör az 1990-es évek elején indult rohamos fejlődésnek, és központi fogalma a Stokes-



jelenség és a reszurgencia. Doktori disszertációjában és a hozzá kapcsolódó cikkeiben Nemes Gergő megmutatta, hogyan lehetséges a reszurgencia felhasználásával éles becsléseket adni integrálokból származó aszimptotikus és hiperaszimptotikus sorok hibatagjaira. Későbbi munkáiban a módszert tovább finomította, és aszimptotikusan optimális hibabecsléseket sikerült levezetnie, amelyek igen fontosnak bizonyultak. Speciális esetekben vizsgálta az ún. magasabb rendű Stokes-jelenséget, és megmutatta, hogy az aszimptotikus sor optimális megszakítása esetén a jelenség folytonosan és nem ugrásszerűen történik. Továbbá általánosított Laplace-integrálok aszimptotikus sorbafejthetőségére bizonyított fontos tételt.

Kiemelkedő eredményeire tekintettel Nemes Gergő a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

*Szakács Nóra* 1988-ban született. 2010-ben matematika alapszakos diplomát, majd 2012-ben MSc fokozatot szerzett a Szegedi Tudományegyetemen. Ugyanitt doktorált 2016-ban, azóta pedig az SZTE Bolyai Intézet adjunktusa. 2017 őszét posztdoktori ösztöndíjjal a Portói Egyetemen töltötte, 2019 tavaszi félévében pedig a Yorki Egyetemen fog dolgozni.

Szakács Nórának eddig négy publikációja jelent meg neves folyóiratokban, további két cikke pedig be van nyújtva közlésre. Fő kutatási területe az inverz monoidok elmélete. Az inverz monoidok a csoportok természetes általánosításai, és ahogyan a csoport a szimmetria mérésére szolgáló eszközzé vált a matematikában, úgy az inverz monoidok a parciális szimmetria mérésére valók. Széles körben ismert kérdés, hogy van-e véges  $F$ -inverz fedője minden véges inverz monoidnak. Auinger és Szendrei redukálta ezt a problémát arra a kérdésre, hogy létezik-e minden véges gráfhoz olyan lokálisan véges csoportvarietás, amely részgráfok bizonyos tulajdonsággal rendelkező leszálló láncát határozza meg. Szakács Nóra adott csoportvarietás esetén vizsgálta ezt a tulajdonságot, és igazolta, hogy leírható kizárt minorok segítségével. Az Abel-csoportok varietására meg is adta a megfelelő minorokat. Ezen kívül több cikkében is foglalkozott az  $F$ -inverz fedőkkel, és vonatkozó eredményeket általánosított inverz monoidok szélesebb osztályára. Társzerzőkkel közös munkájában pedig leírták a véges gráfok parciális automorfizmusaiént előálló inverz monoidok struktúráját.

Kiemelkedő eredményeire tekintettel Szakács Nóra a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

## Farkas Gyula-emlékdíj

A Bizottság a beérkezett javaslatok alapján 2018-ban négy Farkas Gyula-emlékdíjat adományozott. A díjazottak: **Maria Vittoria Barbarossa, Boros Balázs, Csató László és Vizi Zsolt.**

### Indoklások:

*Maria Vittoria Barbarossa* 1984-ben született Olaszországban, Perugia városában. Matematikai tanulmányait szülővárosában kezdte. A BSc diplomát követően a Müncheneri Műszaki Egyetemen (Technische Universität München) szerzett MSc, majd PhD fokozatot. Ezután a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének tudományos munkatársa volt Röst Gergely kutatócsoportjában. Jelenleg a Heidelbergi Egyetemen dolgozik.

Maria Barbarossa 12 tudományos publikáció szerzője, ezek többsége szegedi affiliációval jelent meg vezető folyóiratokban, úgy mint a *Journal of Mathematical Biology* vagy a *SIAM Journal on Applied Mathematics*. Magas színvonalú elméleti matematikai eredményeket ért el a késleltetési egyenletek stabilitásának vizsgálata terén. Ezen túlmenően munkái konkrét, a matematikán kívül eső alkalmazásokhoz is kötődnek; erre példa a baktériumok kommunikációját irányító biológiai mechanizmusok matematikai leírása. Ezeknek a multidiszciplináris kutatásoknak az eredményeit – biológus társszerzőkkel – részben biológiai folyóiratokban publikálta. Munkái több mint 100 hivatkozást kaptak.

Maria Barbarossa posztdoktori munkája során a szegedi matematikus közösség fontos tagjává vált, és szakmai kapcsolatait a mai napig aktívan ápolja. Részt vett a szegedi differenciálegyenlet-konferencia és az epidemiológiai nyári iskola szervezésében, és bekapcsolódott a gyógyszerész- és a biológushallgatók oktatásába. Megszervezte a Müncheneri Műszaki Egyetem (TU München) és a Szegedi Tudományegyetem közötti Erasmus-kapcsolatot: ezen belül müncheni diákokat fogadott Szegeden, akik irányítása alatt írták meg diplomamunkájukat. A magyar Nemzeti Kiválósági Program von Neumann fiatal kutatói ösztöndíjasa volt.

Újabb tudományos munkáinak fókuszában a matematikai epidemiológia és az immunológia kapcsolatának egyik fundamentális problémája áll: nevezetesen az egyedi immunitás gyengülésének és szakaszos frissítésének, valamint a járványterjedés dinamikájának az interakciója. Nagy szerepe volt az ebola modellezésével kapcsolatos, komoly visszhangot kiváltó tanulmány elkészítésében, ami a járvány végső szakaszára nagyon pontos predikciókat adott.

Maria Vittoria Barbarossa munkásságával nagyban hozzájárult a magyar matematikai biológiai iskola fejlődéséhez és nemzetközi elismertségéhez.

A felsorolt érdemei alapján Maria Vittoria Barbarossa Farkas Gyula-emplékdíjban részesül.

*Boros Balázs* 1984-ben született Hódmezővásárhelyen. 2008-ban végzett az ELTE TTK alkalmazott matematikus szakán, valamint a Vrije Universiteit Amsterdam matematikus szakán a két egyetem közötti együttműködés keretében. PhD fokozatát 2013-ban szerezte meg az ELTE TTK Matematika Doktori Iskolájának Alkalmazott Matematika Programjában.

2011-től 2015-ig az ELTE Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszékén dolgozott tudományos segédmunkatársként, tanársegédként, majd adjunktusként. 2016 januárjától a Linzi Johann Radon Institute, majd 2017 áprilisától a Bécsi Egyetem posztdoktori munkatársa. Mindezek mellett 2014 óta a budapesti Falkstenen AB tudományos kutatója.

Első kutatási területe a kriptográfia, pontosabban a kis számítási igényű autentikációs eljárások kidolgozása volt. Ebben a témakörben 3 konferenci cikket publikált. 2008 óta foglalkozik formális reakciókinetikával, ez volt diplomamunkájának és doktori értekezésének is a témája. Ezen belül tömeghatás típusú kinetikával ellátott reakciók stacionárius pontjának létezését, illetve annak a paraméterektől való függését tanulmányozta. A Lotka–Farkas-reakció vizsgálatán keresztül eljutott fontos dinamikai kérdésekhez, így a lokális és globális stabilitáshoz, a permanenciához, illetve a centrumproblémához. Eredményeit a szakterület kiemelkedő folyóirataiban tette közzé, úgy mint a *Mathematical Biosciences*, a *Journal of Mathematical Chemistry*, vagy a *Journal of Differential Equations*.

Egy évtizedek óta megoldatlan probléma végső tisztázását tartalmazó, eddig csak az arXivon elérhető dolgozatát 2018 novemberében fogadta el a *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. Ebben Boros Balázs bebizonyította, hogy minden gyengén megfordítható reakciónak létezik pozitív stacionárius pontja. Az utóbbi 5 évben több rangos nemzetközi konferencián tartott előadást Angliában, Dániában, Magyarországon, Portugáliában, Ausztriában, illetve 4 alkalommal az Egyesült Államokban is. A <http://scholar.google.com> tanúsága szerint dolgozataira mintegy kétszáz hivatkozást kapott.

A felsorolt érdemei alapján Boros Balázs Farkas Gyula-emplékdíjban részesül.

Csató László a Budapesti Corvinus Egyetem Gazdaságelemzés szakán, BSc képzésben 2009-ben, majd Gazdaságmatematikai elemző szakán MSc képzésben 2011-ben végzett. Ezt követően az Általános és Kvantitatív Közgazdaságtan Doktori Iskolában szerezte meg a PhD fokozatát 2015-ben Temesi József és Fülöp János témavezetése mellett. Jelenleg az MTA SZTA-KI Mérnöki és Üzleti Intelligencia Kutatólaboratórium Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoportjának a tagja. Ezen túlmenően a Budapesti Corvinus Egyetem Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszékének is az adjunktusa.

Kutatási területe a döntéselmélet, a preferenciamodellezés és alkalmazásai. Módszertani eszköztára elsősorban az operációkutatás, a potenciális alkalmazási területek között azonban mind az egyéni és a társadalmi döntések elmélete, mind pedig a közgazdaságtan szerepelnek. Elméleti eredményei elsősorban a döntési és rangsorolási módszerek axiomatikus megalapozására, alkalmazásokhoz kötődő munkái pedig sportolók, felsőoktatási intézmények, ill. tudományos folyóiratok rangsorolására vonatkoznak. Az előbb említett, egyetemi felvételi jelentkezések (Felvi) adatbázisára támaszkodó alkalmazás különös matematikai kihívása a probléma nagy mérete.

Szakmai díjai (OTDK I. helyezés, Apáczai-ösztöndíj, Corvinus kiváló kutató, MTA SZTAKI publikációs díj) közül kiemelkedik az MTA Prémium Posztdoktori Ösztöndíja (2016–2019).

Kivételes munkabírása és szorgalma nagyfokú önállósággal társul. 35 tudományos munkája közül 10 nemzetközi, impakt faktoros folyóiratcikk, ezen belül 8 cikke egyszerzős. Számos magyar nyelvű folyóiratcikke is megjelent, többek között a *Közgazdasági Szemle*ben és a *Magyar Tudomány*ban. Több tudománynépszerűsítő cikket írt magyarul és angolul, továbbá egy doktorjelölt témavezetője. Eredményeire több mint 60 független hivatkozás ismert.

A felsorolt érdemei alapján Csató László Farkas Gyula-émlékdíjban részesül.

Vizi Zsolt 1989-ben született Makón. Matematikai tanulmányait a Szegedi Tudományegyetemen folytatta Karsai János és Röst Gergely témavezetésével. TDK dolgozatában először igazolta visszanyúló bifurkáció létezését impulzív vakcinálási modellekben. A munkát Rényi Kató-émlékdíjjal is jutalmazták, az ebből készült cikket a rangos *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* folyóirat publikálta.

PhD tanulmányai alatt kiemelkedően szép tudományos eredményeket ért el a hálózatokon történő nem-markovi járványterjedés egyik fontos problémájának megoldásával, amihez komoly analitikus (nemlineáris funkcionál-differenciálegyenletek elméletébe vágó), numerikus és algoritmikus módszereket ötvözt.

A 2017-ben megvédett PhD értekezésének fő eredményeit a hálózatelmélet területén vezető folyóirat, a *Physical Review Letters*, valamint a szintén nagyon tekintélyes *Proceedings of the Royal Society A* folyóiratok publikálták. Az előbbi cikk több mint 40 hivatkozást kapott nem sokkal a megjelenése után. Összes hivatkozásainak száma megközelíti a százat.

Vizi Zsolt számos tanulmányi ösztöndíjat nyert (Eötvös Loránd Hallgatói Ösztöndíj, Campus Hungary), illetve ösztöndíjat kapott a torontói York University Agent Based Modelling laboratóriumába, ahol az ebola terjedésének ágens alapú modellezésével foglalkozott. Az EPIDELAY kutatócsoport ebola modellezési munkájához is nagyban hozzájárult, a járványok térbeli terjedését látványosan illusztráló számítógépes vizualizációt készített.

Vizi Zsolt kiváló előadó, mintegy tucatnyi konferencián szerepelt előadóként, és számos matematikát népszerűsítő előadást tartott. Kiemelendő az is, hogy Forum Mathematicum néven szemináriumi sorozatot szervezett, ahol az ipar legkülönbözőbb területein dolgozó matematikusokat hívott meg, akik bemutatták a hallgatóknak a matematika különböző alkalmazási lehetőségeit ipari problémák megoldásában. Jelenleg a Bosch cég munkatársa, ahol önvezető járművek fejlesztésén dolgozik, de továbbra is aktívan részt vesz a szegedi matematikai életben közös ipari-egyetemi kutatási projektekkkel és hallgatók témavezetésével.

A fentiek alapján Vizi Zsolt az alkalmazott matematika területén végzett eredményes munkájáért Farkas Gyula-emlékdíjban részesül.

## Rényi Kató-emlékdíj

A Rényi Kató-emlékdíj I. fokozatát kapták: **Arnóczki Tímea**, a Debreceni Egyetem végzett alkalmazott matematikus MSc szakos hallgatója, ugyanott PhD hallgató, valamint **Papp Ágoston**, a Debreceni Egyetem matematikus MSc szakos hallgatója.

### Indoklások:

A Rényi Kató-emlékdíj Bizottság alapos vita után a következő döntést hozta: a Rényi Kató-emlékdíj első fokozatát és 60 000 forintot kap **Arnóczki**

**Tímea**, a Debreceni Egyetem végzett alkalmazott matematikus MSc szakos hallgatója, jelenleg ugyanott PhD hallgató és **Papp Ágoston**, a Debreceni Egyetem matematikus MSc szakos hallgatója.

**Arnóczki Tímea** [1] dolgozatában pontosan leírja az összes olyan teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestet, amely tartalmaz legfeljebb 10, illetve prím indexű primitív algebrai egészeket, egyúttal meg is határozza ezeket az elemeket. Azt is igazolja, hogy az ilyen indexű elemekkel rendelkező teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestek száma végtelen.

A [2] dolgozat fő eredménye szerint, ha  $a$  1 vagy 3 és  $A$  többszöröse  $a$ -nak vagy ha  $a$  2, 4, 6 vagy 12 és  $A$  többszöröse  $2a$ -nak, akkor végtelen sok olyan teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtest létezik, aminek testindexe  $a$  és minimális indexe  $A$ . Ez T. Nakahara 1983-as eredményét kiterjeszti a testindex összes lehetséges értékére.

#### Arnóczki Tímea publikációi

- [1] T. Arnóczki: Elements with prime and small indices in bicyclic biquadratic fields, *Periodica Math. Hung.*, **77**(2018), 83–93.
- [2] T. Arnóczki, G. Nyul: Minimal index of bicyclic biquadratic number fields, közlésre benyújtva.

**Papp Ágoston** Az [1] és [2] cikkben a szerzők azon  $n$  számok sűrűségét vizsgálják, amelyekre  $n!$  prímfaktorainak kitevői bizonyos kongruenciáknak tesznek eleget.

A [3] dolgozatban a szerzők belátják, hogy ha  $A!B! = C!$ ,  $A \leq B < C - 1$ ,  $(A, B, C) \neq (6, 7, 10)$ , akkor  $C < 5(B - A)$  és  $B - A > 10^6$ . A bizonyítás számelméleti függvényekre vonatkozó explicit becsléseket kombinál elemi érvelésekkel.

#### Papp Ágoston publikációi

- [1] Papp Á.: Sűrűségi problémák az  $n!$  sorozatban, OTDK dolgozat, 2017, 23 pp.
- [2] L. Hajdu, Á. Papp: On asymptotic density properties of the sequence  $(n!)_{n=0}^{\infty}$ , *Acta Arith.* **184** (2018), 317–340.
- [3] L. Hajdu, Á. Papp, T. Szakács: On the equation  $A!B! = C!$ , *J. Number Theory* **187** (2018), 160–165.

Társulati élet – 2018

35

### **Patai László-díj**

2018-ban felterjesztés hiányában a díj nem került kiosztásra.

## Jelentés a 2018. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat 2018. október 26. és november 5. között rendezte meg a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, továbbá azok vehettek részt, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 2018-ban fejezték be.

A verseny lebonyolítására a Társulat a következő bizottságot kérte fel: Keleti Tamás (elnök), Kiss Viktor (titkár), Csikvári Péter, Elekes Márton, Frenkel Péter, Harangi Viktor, Károlyi Gyula, Kós Géza, Kun Gábor, Nagy János, Pálvolgyi Dömötör, Terpai Tamás.

A bizottság október 17-i ülésén kiválasztotta a 11 kitűzendő feladatot. A bizottság köszönetét fejezi ki mindazoknak, akik feladatot javasoltak a versenyre. A kitűzött feladatokat javasolták: 1. Solymosi József, 2. Károlyi Gyula, 3. Pach János, Korándi Dániel és Tomon István, 4. Damásdi Gábor, 5. Ruzsa Imre, 6. Kós Géza, 7. Pálffy Péter Pál, 8. Buczolic Zoltán, 9. Lempert László, 10. Kós Géza, 11. Szűcs András és Terpai Tamás.

A verseny eredményes volt, 22-en indultak rajta, összesen 79 megoldást nyújtottak be.

A versenybizottság november 28-i ülésén megállapította, hogy egyetlen versenyző oldott meg lényegében tíz feladatot (1., 2., 3., 4., 5., 8., 9., 11., apró pontatlanságtól eltekintve a 6. feladatot, illetve apró, javítható hibáktól eltekintve a 7. feladatot).

Ennek alapján

*I. díjban és 100 000 forint pénzdíjban részesül*

**Szőke Tamás**, az ELTE elsőéves, matematikus mesterszakos hallgatója.

Egy versenyző oldott meg lényegében nyolc feladatot (1., 2., 3., 4., 5., 7., 9., valamint apró pontatlanságoktól eltekintve a 6. feladatot).

Ennek alapján

*II. díjban és 60 000 forint pénzdíjban részesül*

**Csernák Tamás**, az ELTE másodéves, matematikus mesterszakos hallgatója.

Egy versenyző oldott meg hét feladatot (1., 2., 3., 4., 7., 8., 9., valamint részeredmény az 5. és 6. feladatban).



Ennek alapján

*III. díjban és 50 000 forint pénzjutalomban részesül*

**Maga Balázs**, az ELTE másodéves, matematikus mesterszakos hallgatója.

Egy versenyző oldott meg öt feladatot (1., 2., 4., 7., 9.).

Ennek alapján *kiemelt dicséretben* részesül

**Gáspár Attila**, az ELTE elsőéves, matematika alapszakos hallgatója.

További öt versenyző oldott meg három, vagy annál több feladatot.

Ennek alapján *dicséretben* részesül

**Borbényi Márton**, az ELTE másodéves, matematika alapszakos hallgatója,

**Imolay András**, az ELTE elsőéves, matematika alapszakos hallgatója,

**Markó Ádám**, az ELTE harmadéves, matematika alapszakos hallgatója,

**Matolcsi Dávid**, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója és

**Schweitzer Ádám**, az ELTE elsőéves, matematika alapszakos hallgatója.

Közülük Borbényi Márton megoldotta a 1., 2. és 7., valamint apró pontatlanságtól eltekintve a 6. feladatot. Imolay András megoldotta az 1., 2. és 4., feladatot, valamint értékes részeredményt ért el a 7. feladatban. Markó Ádám megoldotta az 1. és 7. feladatot, javítható hibáktól eltekintve a 6. feladatot, és értékes részeredményt ért el a 2. feladatnál. Matolcsi Dávid megoldotta az 1., 3., 4. és 5. feladatot. Schweitzer Ádám megoldotta az 1. és 8. feladatot, apró pontatlanságoktól eltekintve a 7. és 9. feladatot.

A elsőéves alapszakos hallgatók közül legjobban szerepelt, ennek alapján *a legjobb első évesnek járó díjban és 20 000 forint pénzjutalomban* részesül

**Gáspár Attila**, az ELTE hallgatója.

Legalább egy feladatot helyesen megoldott

**Ágoston Péter**, az ELTE másodéves, matematikus mesterszakos hallgatója,

**Csépai András**, az ELTE elsőéves, matematikus mesterszakos hallgatója,

**Daróczi Sándor**, az ELTE elsőéves, matematika alapszakos hallgatója,

**Kovács Benedek**, a Cambridge-i Egyetem elsőéves, matematika alapszakos hallgatója,

38 Jelentés a 2018. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

**Kubasch Alexander**, az ELTE harmadéves, matematika alapszakos hallgatója,

**Pálffy Máté**, az ELTE harmadéves, matematika alapszakos hallgatója,

**Porupsánszki István**, az ELTE elsőéves, matematikus mesterszakos hallgatója,

**Seress Dániel**, az ELTE harmadéves, matematika alapszakos hallgatója.

A versenyen részt vevő bármelyik diák kérheti, hogy írjuk meg, melyik megoldásukat hogyan értékelte a bizottság. Ehhez írjanak egy emailt a bizottság titkárának a `kiss.viktor@renyi.mta.hu` címre.

A díjakat a Morgan Stanley Magyarország Elemző Kft. támogatta, ezért a versenybizottság köszönetét fejezi ki.

## A 2018. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatainak megoldásai

**1. feladat.** Legyen  $S \subset \mathbb{R}$  zárt halmaz és  $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Definiáljunk egy  $G$  gráfot az alábbiak szerint. A gráf csúcsai azon  $x \in \mathbb{R}^n$  pontok, amelyekre  $f(x, x) \notin S$ . Az  $x, y \in \mathbb{R}^n$  csúcsokat akkor és csak akkor kötjük össze éllel, ha  $f(x, y) \in S$  vagy  $f(y, x) \in S$ . Igazoljuk, hogy a  $G$  gráf kromatikus száma megszámlálható.

(Solymosi József)

**1. megoldás (Solymosi József).** Mivel  $S$  zárt, ezért a gráf minden csúcsához van olyan nyílt környezet, amelyben nincs két csúcs ami össze lenne kötve éllel (itt használtuk hogy  $f$  folytonos és  $f(x, x)$  nincs  $S$ -ben). Ezek a környezetek a csúcsok halmazának egy fedését adják nyílt halmazokkal, így belőlük kiválasztható egy megszámlálható részfedés. Rendeljünk ezen megszámlálható sok környezethez egy-egy különböző színt, majd a gráf minden csúcsát az egyik fedő környezet színével színezve jó színezést kapunk.

**2. megoldás.** Mivel ( $S$  zártságát és  $f$  folytonosságát használva) a csúcsok  $V$  halmaza nyílt, így felírható  $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$  növekvő unióként alkalmas  $K_i$  kompakt halmazokkal. Elegendő belátni, hogy minden  $i$ -re  $K_i$  pontjai jól színezhetőek véges sok színnel, hiszen ekkor nyilván ugyanez áll  $K_{i+1} \setminus K_i$  pontjaira is, és ezen színezésekben különböző  $i$ -kre diszjunkt véges

színhalmazokat választva adódik  $V$  egy jó színezése megszámlálható sok színnel. A  $K_i$  csúcshalmaz jó színezését a következőképpen kapjuk. Mivel az élek  $E$  halmaza ( $S$  zárttságát és  $f$  folytonosságát használva) zárt, a  $K_i$ -n belül futó élek  $(K_i \times K_i) \cap E$  halmaza kompakt, és  $V$  definícióját használva diszjunkt a  $\{(x, x) : x \in K_i\}$  kompakt halmaztól. Így a két halmaz távolsága pozitív, amiből következik, hogy alkalmas  $\varepsilon > 0$  számra  $K_i$ -n belül nem köt össze él  $\varepsilon$ -nál közelebbi pontokat. Ekkor viszont egy  $\varepsilon$ -nál kisebb átmérőjű kis kockákból álló rács kockáiból a  $K_i$ -t metsző véges sokat mind különböző színűre színezve kapjuk  $K_i$  egy jó színezését véges sok színnel.

**2. feladat.** Egy  $\mathcal{F}$  halmazcsaládot *igazán rendesnek* hívunk, ha tetszőleges  $A, B \in \mathcal{F}$  esetén létezik olyan  $C \in \mathcal{F}$  halmaz, melyre  $A \cup B = A \cup C = B \cup C$ . Legyen

$$f(n) = \min \left\{ \max_{A \in \mathcal{F}} |A| : \mathcal{F} \text{ igazán rendes és } |\cup \mathcal{F}| = n \right\}.$$

Igazoljuk, hogy az  $f(n)/n$  sorozat konvergens, és határozzuk meg a határértékét.

(Károlyi Gyula)

**Megoldás (Csikvári Péter).** A következő három észrevételből következni fog, hogy a sorozat konvergens, és a határérték  $\frac{1}{2}$ :

- $f(n_1 + n_2) \leq f(n_1) + f(n_2)$ ,
- $f(n) \geq \frac{n}{2}$ ,
- $f(2^k - 1) = 2^{k-1}$ .

Az első észrevételből és a Fekete-lemmából azonnal következik, hogy a sorozat konvergens. Sőt ilyenkor azt is tudjuk, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = \inf_n \frac{f(n)}{n}$ . A második és harmadik észrevételből pedig következik, hogy ez az infimum éppen  $\frac{1}{2}$ .

Az  $f(n_1 + n_2) \leq f(n_1) + f(n_2)$  egyenlőtlenség abból következik, hogy ha van egy  $\mathcal{F}_1$  igazán rendes halmazcsaládunk az  $\{1, 2, \dots, n_1\}$  halmazon és egy  $\mathcal{F}_2$  igazán rendes halmazcsaládunk az  $\{n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2\}$  elemeken, akkor  $\mathcal{F} = \{A_1 \cup A_2 \mid A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}$  egy igazán rendes halmazcsalád  $n_1 + n_2$  elemen.

A második észrevételt indukcióval bizonyítjuk. A feladat feltétele úgy is megfogalmazható, hogy tetszőleges  $A, B$  esetén létezik egy  $C$ , melyre  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq C \subseteq A \cup B$ . Legyen  $A$  egy legnagyobb méretű halmaz egy  $\mathcal{F}$  igazán rendes halmazcsaládban. Ekkor tetszőleges  $B \in \mathcal{F}$  esetén  $|A \cap B| \geq |B \setminus A|$ , különben az  $A, B$  halmazokhoz tartozó  $C$  halmaz mérete nagyobb lenne  $|A|$ -nál. Feltehető, hogy  $A$  nem egyezik meg az  $n$  elemű  $X$  alaphalmazzal, különben kész vagyunk. Tekintsük a következő  $\mathcal{F}'$  családot az  $X \setminus A$  halmazon:

$$\mathcal{F}' = \{B \setminus A \mid B \in \mathcal{F}\}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez is igazán rendes halmazcsalád, így az indukció szerint van olyan  $B' \in \mathcal{F}'$  eleme, melyre  $|B'| \geq (n - |A|)/2$ . Ekkor létezik egy  $B \in \mathcal{F}$ , melyre  $B' = B \setminus A$ . Ekkor  $|A \cap B| \geq |B \setminus A|$  miatt  $|B| \geq 2|B'| \geq n - |A|$ . Mivel  $|A| \geq |B|$ , ezért  $|A| \geq n - |A|$ , vagyis  $|A| \geq n/2$ .

Mivel  $f(n) \geq n/2$ , ezért azonnal kapjuk, hogy  $f(2^k - 1) \geq 2^{k-1}$ , vagyis csak egy konstrukciót kell mutatnunk, ahol ez eléretik. Legyen az alaphalmaz  $X = \mathbb{F}_2^k \setminus \{0\}$ . A halmazcsalád elemei pedig legyenek a következő halmazok:  $H_a = \{x \in \mathbb{F}_2^k \mid (a, x) = 1\}$ , ahol  $a \in X$ , és az  $(a, x)$  skalárszorzat  $\mathbb{F}_2$ -ben van kiszámolva; ezek a halmazok éppen az 1-kodimenziós alterek komplementerei. Ekkor minden  $a \in X$  esetén  $|H_a| = 2^{k-1}$ . Továbbá  $a \neq b$  esetén  $H_a \cup H_b = H_a \cup H_{a+b} = H_b \cup H_{a+b}$ , hiszen  $(a+b, x) = (a, x) + (b, x)$  miatt a három halmaznak ugyanaz a komplementere. Végül a halmazcsalád elemeinek uniója a teljes  $X$  alaphalmaz, hiszen egyedül a nullvektor merőleges minden nemnulla vektorra.

**3. feladat.** Egy  $n \times n$ -es mátrixot *jólfésültnek* hívunk, ha minden eleme 0 vagy 1, és nem tartalmazza az  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrixot részmátrixként. Lássuk be, hogy van olyan  $c > 0$  konstans, amelyre teljesül, hogy bármely  $n \times n$ -es jólfésült mátrixnak van olyan, legalább  $cn \times cn$ -es részmátrixa, melynek minden eleme egyforma. (Egy jólfésült mátrix tartalmazhatja a  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  mátrixot részmátrixként.)

(Pach János, Korándi Dániel és Tomon István)

**Megoldás (Pálvölgyi Dömötör).** A bizonyítás során megmutatjuk, hogy ha egy jólfésült mátrix nem tartalmazna  $cn \times cn$ -es, egyforma elemekből

álló részmátrixot, akkor a középső néhány oszlop és sor mindegyikében vagy nagyon sok 0-s, vagy nagyon sok 1-es van. Viszont sok sorban és oszlopban ugyanaz kell, hogy a domináns elem legyen, ebből pedig kihozzuk, hogy mégis csak lesz nagy részmátrix egyenlő elemekkel.  $c = 1/20$ -ra látjuk be a feladatot.

Ha  $n < 20$ , akkor egy  $1 \times 1$ -es részmátrix megteszi, ha pedig  $n \geq 20$ , akkor vehetünk olyan bal oldali, középső és jobb oldali oszlopokat ( $B$ ,  $K$ ,  $J$ ), hogy a középsők az összes legalább felét, a bal és jobb oldaliak pedig az oszlopok legalább  $1/5$ – $1/5$ -ét kitegyék.

Tegyük fel, hogy a középső ( $K$ -ban lévő) oszlopok közül van olyan, aminek a (felülről) első néhány eleme között legalább  $n/20$  db 0-s van, a későbbi (maradék alsó) elemei között meg legalább  $n/20$  db 1-es van. Vegyünk egy ilyen oszlopot, és jelöljük ezen elemeinek megfelelő sorokat  $A_0$ -val és  $A_1$ -gyel.

Ekkor ha az  $A_0 \times B$  részmátrix valamely oszlopában szerepel 1-es, akkor az  $A_1 \times B$  részmátrix ugyanezen oszlopában csupa 1-es van. Emiatt vagy  $A_0 \times B$ -ben van  $n/20 \times n/10$  méretű csupa 0 részmátrix, vagy  $A_1 \times B$ -ben van  $n/20 \times n/10$  méretű csupa 1 részmátrix.

Ha a  $K$ -beli oszlopvektorok között olyan van, aminek az első néhány eleme között legalább  $n/20$  db 1-es van, a maradék elemei között meg legalább  $n/20$  db 0-s van, akkor ugyanígy készen vagyunk, ha a  $J$ -beli oszlopokat vizsgáljuk.

Ha a  $K$ -beli oszlopvektorok között olyan van, amiben legalább  $n/10$  db 0-s és  $n/10$  db 1-es is van, akkor arra szükségszerűen teljesül a fenti két lehetőség valamelyike. Tehát a továbbiakban tegyük fel, hogy az összes  $K$ -beli oszlopvektorban az elemek legalább  $9/10$ -e ugyanaz. Analóg módon a sorokat is szétosztjuk három részre, fenti, középső és lenti részekre ( $F$ ,  $K'$ ,  $L$ ), és ugyanígy gondolkodva feltehetjük, hogy  $K'$ -ben minden sor elemeinek legalább  $9/10$ -e egyforma. Újra az oszlopokat vizsgálva, az általánosság megszorítása nélkül választhatunk legalább  $n/4$ , de legfeljebb  $n/3$   $K$ -beli oszlopot, amiben az elemek  $9/10$ -e 1-es, jelöljük ezen oszlopokat  $E$ -vel. A  $K' \times E$  részmátrixban legfeljebb  $n^2/30$  db 0-s van, használva, hogy  $E$  az oszlopok legfeljebb  $1/3$ -át teszi ki.

Mivel minden  $K'$ -beli sor domináns elemeinek legalább  $9/10 - 3/4 = 3/20$  része ideesik, legfeljebb  $(n^2/30)/(3n/20) = 2n/9$  darab sorvektorban lehet 0-s a domináns elem, azaz legalább  $n/2 - 2n/9 = 5n/18$ -ban az 1-es lesz az.

Ha minden 1 domináns oszlop- és sorvektor metszeténél 1-es van, akkor találtunk egy homogén részmátrixot. Különben lesz kettő, amiknek a met-

42 Jelentés a 2018. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

szete 0. De ekkor a sorvektorban a korábbi 1-esek oszlopai és az oszlopvektorban a későbbi 1-esek sorai által meghatározott részmátrix csak 1-eseket tartalmazhat.

**Megjegyzés.** Ha adott a síkon  $n$  pont és  $n$  egyenes, amiket sorbarakunk  $x$ -koordinátájuk, illetve meredekségük szerint, és készítünk belőlük egy mátrixot, amibe aszerint írunk 0-t, illetve 1-et, hogy az adott pont az egyenes fölött van-e, akkor  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ -mentes mátrixot kapunk. Tehát a feladatból következik, hogy lesz  $cn$  pont és  $cn$  egyenes, hogy vagy az összes pont az összes egyenes fölött lesz, vagy mind alatta.

**4. feladat.** Legyen  $P$  egy véges ponthalmaz a síkon, melyre teljesül, hogy bármely két pontjának távolsága egész szám. Lássuk be, hogy  $P$  pontjai színezhetőek három színnel úgy, hogy bármely két azonos színű pont távolsága páros legyen.

(Damásdi Gábor)

**1. megoldás (Kun Gábor).** A  $P$  halmaz pontjait komplex számokkal azonosítjuk. Feltehető, hogy  $0 \in P$  és  $n \in P$  is teljesül egy  $n$  páratlan egész számra. Legyen  $a+ib \in P$  tetszőleges. Ekkor  $(a^2+b^2)+n^2-((a-n)^2+b^2) = 2an$  páratlan. Ezért minden  $x+iy \in nP$  elemre teljesül, hogy  $2x$  egész szám. A továbbiakban az  $nP$  halmazt vizsgáljuk, és jelöljük  $P$ -vel az egyszerűség kedvéért, hiszen ennek minden jó színezése az eredeti halmaznak is egy jó színezését adja.

$2x$  egész szám minden  $x+iy \in P$ -re, ezért  $(2y)^2$  is egész kell, hogy legyen. Azaz alkalmas  $m$  egész számra és  $d$  négyzetmentes, pozitív egész számra  $y = \frac{m}{2}\sqrt{d}$  teljesül. Belátjuk, hogy  $d$  ugyanaz kell, hogy legyen minden  $x+iy \in P$ -re, amikre  $y \neq 0$ :

Legyen  $x_1+iy_1, x_2+iy_2 \in P, y_1 = \frac{m_1}{2}\sqrt{d_1} \neq 0, y_2 = \frac{m_2}{2}\sqrt{d_2} \neq 0$ . Ekkor  $(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = (x_1-x_2)^2 + m_1^2 d_1/4 + m_2^2 d_2/4 - m_1 m_2 \sqrt{d_1 d_2}/2$ . Ez a kifejezés négyzetszám kell, hogy legyen. Az összeg első három tagja racionális. Ezért a negyedik, utolsó tagnak is racionálisnak kell lennie, ami csak úgy teljesülhet, ha  $d_1 = d_2$ . Azaz létezik olyan  $d$  négyzetmentes, pozitív egész szám, hogy  $P \subseteq \Lambda = \{a/2 + i\sqrt{d}b/2 : a, b \in \mathbb{Z}\}$ .

Először  $\Lambda$  vagy egy  $P$ -t tartalmazó részrácsa pontjait fogjuk majd színezni kettő vagy négy színnel úgy, hogy az azonos színű pontok távolsága soha ne legyen páratlan egész szám.

Ha  $d$  páros, akkor  $d \equiv 2(4)$ , ezért  $|a/2 + i\sqrt{db}/2|^2 = a^2/4 + db^2/4$  csak úgy lehet egész szám, ha  $a$  és  $b$  is páros, ezért  $P \subseteq 2\Lambda$ . Továbbá ha  $a^2/4 + db^2/4$  páratlan, akkor  $a \equiv 2(4)$ . Így  $2\Lambda$  pontjai már két színnel is színezhetők  $a/2$  paritásának megfelelően.

Ha  $d$  páratlan és  $d \equiv 1(4)$ , akkor  $a^2/4 + db^2/4$  csak úgy lehet egész szám, ha  $a$  és  $b$  is páros, ezért  $P \subseteq 2\Lambda$ . És akkor lesz páratlan, ha  $\frac{a+b}{2}$  páratlan. Ezért  $2\Lambda$  pontjai ismét két színnel színezhetők, ezúttal  $\frac{a+b}{2}$  paritása szerint.

Ha  $d \equiv -1(4)$ , akkor  $a^2/4 + db^2/4$  pontosan akkor egész szám, ha  $a + b$  páros. Két alesetet különböztetünk meg:

Ha  $d \equiv -1(8)$  és  $a^2/4 + db^2/4$  páratlan, akkor  $a$  és  $b$  is páros, és a kettő közül pontosan egy osztható négygyel. Ez esetben is  $P \subseteq 2\Lambda$ , és  $2\Lambda$  pontjai két színnel színezhetők  $\frac{a+b}{2}$  paritása szerint.

Ha  $d \equiv 3(8)$ , akkor  $a^2/4 + db^2/4$  pontosan akkor páratlan, ha  $a$  és  $b$  is páratlan, vagy ha mindkettő páros és pontosan az egyik osztható négygyel. Ez alapján  $\Lambda$ -nak azon  $a + ib$  alakú elemeit, melyekre  $(a + b)$  páros, négy színnel színezhetjük –  $a$  paritása és  $\frac{a+b}{2}$  paritása szerint. Az azonos színű pontok távolsága nem lehet páratlan szám. Vegyük észre, hogy a különböző színű pontok távolságának négyzete viszont mindig páratlan. Meg kell még mutatnunk, hogy  $P$  nem tartalmazhat mind a négy színosztályból pontot, így  $P$  három színnel színezhető. Elég belátnunk, hogy nincs négy pont a síkon, melyek közül bármely kettő távolsága páratlan.

Indirektül bizonyítunk. A tetraéder térfogatát az élhosszakkal kifejező Cayley–Menger-determináns ebben az elfajuló esetben, amikor a tetraéder pontjai egy síkba esnek, nulla. Jelölje a pontok közti távolságot  $d_{i,j}$ , ahol  $1 \leq i, j \leq 4, i \neq j$ . Számoljuk ki a determinánst modulo 8.

$$0 \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{1,2}^2 & d_{1,3}^2 & d_{1,4}^2 \\ 1 & d_{2,1}^2 & 0 & d_{2,3}^2 & d_{2,4}^2 \\ 1 & d_{3,1}^2 & d_{3,2}^2 & 0 & d_{3,4}^2 \\ 1 & d_{4,1}^2 & d_{4,2}^2 & d_{4,3}^2 & 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \equiv 4.$$

A második egyenlőségnél felhasználtuk, hogy a távolságok páratlanok, a harmadik egyenlőségnél pedig az első oszlopot kivontuk a többiből. Ellentmondásra jutottunk, tehát nem létezik négy olyan pont a síkon, hogy bármely kettő távolsága páratlan. Ezzel a feladat bizonyítását befejeztük.

**2. megoldás (Harangi Viktor).** Tekintsük azt a  $G$  gráfot, amelynek csúcsai  $P$  pontjai, és két csúcs akkor van összekötve éllel, ha a megfelelő távolság páratlan. Azt kell belátnunk, hogy  $G$  csúcsai jól-színezhetők 3 színnel. Ez a következő állításból könnyen következik majd.

**Lemma.**  $G$  nem tartalmazhatja a következő gráfokat feszített részgráfként:

- $K_4$ : teljes gráf 4 csúcson;
- $P_3$ : 3 hosszú út (azaz 4 csúcs és 3 él);
- $H$ : az a négy csúcsú gráf, amit egy három ágú csillagból kapunk egy további él hozzávételével.

Először tegyük fel, hogy adott egy  $G$  gráf, mely nem tartalmazza a fenti feszített részgráfokat. Megmutatjuk, hogy 3-színezhető. Feltehetjük, hogy  $G$  összefüggő, hiszen elég komponensenként megadni a színezést. Két esetet különböztetünk meg.

**1. eset:  $G$  nem tartalmaz  $K_3$ -at.** Azt állítjuk, hogy ekkor semmilyen páratlan kört nem tartalmaz, azaz páros gráf, azaz két színnel is jól-színezhető. Indirekten vegyünk egy minimális hosszú páratlan kört. Vegyük észre, hogy nem lehet egyetlen „átló” sem behúzva a körben, mert akkor találnánk rövidebb páratlan kört is. Tehát ez a kör egy feszített részgráfja  $G$ -nek, ráadásul legalább öt hosszú, mert  $G$  nem tartalmaz  $K_3$ -at a feltevésünk szerint. Ekkor viszont találunk feszített  $P_3$ -at is a gráfban, ami ellentmondás.

**2. eset:  $G$  tartalmaz  $K_3$ -at.** Legyen  $v_1v_2v_3$  egy három hosszú kör. Mivel nincs feszített  $K_4$  és  $H$  a gráfban, ezért minden további  $u$  csúcsra igaz, hogy  $v_1, v_2, v_3$  közül vagy eggyel sincs, vagy pontosan kettővel van összekötve. Ez alapján négy osztályba sorolhatjuk a többi csúcsot:  $U_\emptyset, U_{1,2}, U_{1,3}, U_{2,3}$ . Az  $U_{i,j}$  osztályban lévő csúcsok össze vannak kötve  $v_i$ -vel és  $v_j$ -vel is, így az osztályon belül már nem mehet él, különben találnánk  $K_4$ -et. Egy  $U_\emptyset$  osztályban lévő pont  $v_1, v_2, v_3$  csúcsok semelyikével nincs összekötve. Ekkor viszont  $U_{i,j}$  osztálybeli szomszédja sem lehet, különben könnyen találnánk feszített  $P_3$ -at. Azonban feltevésünk szerint  $G$  összefüggő, így  $U_\emptyset$  valójában nem tartalmazhat csúcsot. Ekkor viszont készen vagyunk, hiszen a  $\{v_1\} \cup U_{2,3}; \{v_2\} \cup U_{1,3}; \{v_3\} \cup U_{1,2}$  három független halmazra bontja  $G$  csúcsait.

Be kell még bizonyítanunk a Lemma állítását. Ez azonnal következik abból, hogy tetszőleges négy pontot választva  $P$ -ből a távolságnégyzetekből álló Cayley–Menger-determináns 0 (lásd előző megoldás). Ha modulo 8



Jelentés a 2018. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

45

nézzük a determinánst, akkor látjuk, hogy nem lehet  $K_4$  a gráfban:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv 4 \pmod{8}.$$

Ha pedig modulo 4, akkor kizárhatjuk a feszített  $P_3$ , illetve a feszített  $H$  előfordulását:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv 2 \pmod{4}, \text{ illetve } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv 2 \pmod{4}.$$

**5. feladat.** Tetszőleges  $n$  természetes számra legyen

$$f(n) = \sum_{p|n} p^{k_p},$$

ahol  $p$  végigfut  $n$  prímosztóin, és  $k_p$  az az egész szám, amelyre

$$p^{k_p} \leq n < p^{k_p+1}.$$

Mekkora

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n) \log \log n}{n \log n} ?$$

(Ruzsa Imre)

**Megoldás (Ruzsa Imre).** A válasz 1. Mivel  $f(n) \leq n\omega(n)$ , a felső becslés nyilvánvaló. Készítünk olyan  $n$  számot, amelyre közel éles. Evégett válasszunk egy  $c > 1$  számot (kb. a cél  $1/c$ -szerese lesz  $f(n)$ ), majd  $k$  és  $x$  számokat (ezek összefüggése majd kiderül).

Tekintsük a  $(p^j, cp^j)$  intervallumokat, ahol  $p$  az első  $k$  prímszám valamelyike, és  $j$ -t pedig az  $x \leq p^j < px$  feltétel definiálja. Ezen intervallumok logaritmusának a hossza  $\log c$ , és mind részei az  $[x, cp_k x]$  intervallumnak,

46 Jelentés a 2018. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

amely logaritmusának hossza  $\log(cp_k)$ , ahol  $p_k$  a  $k$ -adik prím. Így van olyan szám, amely közülük legalábbis

$$r = \left\lceil \frac{k \log c}{\log(cp_k)} \right\rceil$$

darabban benne van. Legyen  $m$  ilyen szám, és legyenek  $q_1, \dots, q_r$  az intervallumokat meghatározó prímek (ha  $> r$  van, csak  $r$ -et tartunk meg). Legyen  $n$  olyan szám, hogy

$$q_1 \dots q_r | n, \quad m \leq n \leq m + q_1 \dots q_r.$$

Ekkor

$$f(n) \geq \frac{rm}{c} \geq \frac{r(n - q_1 \dots q_r)}{c} > \frac{r(n - p_k^r)}{c}.$$

Az  $x$ -et úgy érdemes választani, hogy  $p_k^r$ -nél némileg nagyobb legyen, mondjuk  $x = kp_k^r$ . Ekkor

$$\frac{f(n)}{n} > \frac{r}{c} \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Megbecsüljük a szereplő számokat:

$$\log n \sim \log x = \log k + r \log p_k \sim r \log k \sim k \log c,$$

$$k \sim \frac{\log n}{\log c}, \quad r \sim \frac{\log n}{\log k} \sim \frac{\log n}{\log \log n},$$

$$f(n) \sim \frac{n \log n}{c \log \log n}.$$

**6. feladat.** Bizonyítsuk be, hogy ha  $a$  egész szám, és  $d$  pozitív osztója az  $a^4 + a^3 + 2a^2 - 4a + 3$  számnak, akkor  $d$  negyedik hatvány modulo 13.

(Kós Géza)

**Megoldás (Seress Dániel megoldása alapján).** Mivel  $d$  pozitív, előáll prímszámok szorzataként; ezért az állítást elég a  $d$  (pozitív) prímosztóra igazolni. Legyen  $d = p$  prím.

Legyen  $\varepsilon$  primitív 13-adik egységgyök  $\mathbb{F}_p$  fölött. (A  $p = 13$  esetben  $x^{13} - 1 = (x - 1)^{13}$  miatt az 1 az egyetlen 13-adik egységgyök; ha viszont  $p \neq 13$ , akkor a  $x^{13} - 1$  polinomnak nincsenek többszörös gyökei, így 13 különböző 13-adik egységgyök létezik.)

A kalapból nyuszi: legyen

$$A = \varepsilon + \varepsilon^3 + \varepsilon^9, \quad B = \varepsilon^2 + \varepsilon^6 + \varepsilon^5, \quad C = \varepsilon^4 + \varepsilon^{12} + \varepsilon^{10} \quad \text{és} \quad D = \varepsilon^8 + \varepsilon^{11} + \varepsilon^7$$

( $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ -ban az  $\varepsilon \mapsto \varepsilon^2$  automorfizmus hatása  $A \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto A$  lenne), és vegyük észre, hogy

$$X^4 + X^3 + 2X^2 - 4X + 3 = (X - A)(X - B)(X - C)(X - D).$$

Feltehető, hogy  $A = a \in \mathbb{F}_p$ . Ekkor minden nemnegatív egész  $k$ -ra – a kis Fermat-tételt  $k$ -szor alkalmazva –

$$A = A^{p^k} = \varepsilon^{p^k} + \varepsilon^{3p^k} + \varepsilon^{9p^k}.$$

Ha  $p$  nem negyedik hatvány modulo 13, akkor  $k = 1$  vagy  $k = 2$  választással  $A = C$  adódik.

Ekkor az  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^3$  és  $\varepsilon^9$  elemek a következő,  $\mathbb{F}_p$  fölötti polinom gyökei:

$$(X - \varepsilon)(X - \varepsilon^3)(X - \varepsilon^9) = X^3 - AX^2 + CX - 1, \quad (*)$$

amely  $C = A$  miatt szorzattá bomlik:  $(X - 1)(X^2 + X + 1 - AX)$ . Így az  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^3$  és  $\varepsilon^9$  elemek valamelyike 1, ahonnan  $p = 13$ , ami negyedik hatvány modulo 13, ellentmondás.

**1. megjegyzés.** Más módon, indirekt feltevés nélkül is belátható, hogy ha  $A \in \mathbb{F}_p$ , akkor  $C \in \mathbb{F}_p$ . Ha  $p \neq 3$ , akkor ez a  $3C = 3 - 2A - A^3$  azonosságból következik, ha pedig  $p = 3$ , akkor az

$$\begin{aligned} (X - A)(X - B)(X - C)(X - D) &= X^4 + X^3 + 2X^2 - 4X + 3 = \\ &= X^4 + X^3 - X^2 - X = \\ &= X(X - 1)(X + 1)^2 \end{aligned}$$

azonosságból. Sőt,  $B = A^2 - 2C$  és  $D = C^2 - 2A$  is  $\mathbb{F}_p$ -beli.

A megoldás egy másik lehetséges befejezése a következő. Az  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^3$  és  $\varepsilon^9$  elemek ciklikusan egymás köbei, így ha valamelyikük  $\mathbb{F}_p$ -beli, akkor a másik kettő is. Ellenkező esetben  $(*)$  irreducibilis  $\mathbb{F}_p$  fölött, és a gyökök  $\mathbb{F}_{p^3}$ -ben vannak. Mindegyik esetben igaz, hogy  $\varepsilon \in \mathbb{F}_{p^3}$ , így  $\varepsilon$  rendje osztja az  $\mathbb{F}_{p^3}$  test multiplikatív csoportjának rendjét:  $13 \mid p^3 - 1$ , más szóval  $p^3 \equiv 1 \pmod{13}$ , avagy  $p$  negyedik hatvány modulo 13.

48 Jelentés a 2018. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

**2. megjegyzés.** A  $p \equiv 0, 1, 3, 9 \pmod{13}$  esetek mind lehetségesek. Például a  $(p = 13, a = 3)$ ,  $(p = 521 = 13 \cdot 20 + 1, a = 7)$ ,  $(p = 3, a = 0)$ ,  $(p = 113 = 13 \cdot 8 + 9, a = 4)$  párok mind teljesítik a feltételt.

Ezeket a példákat egy közös esetben is belesűrítjük: például  $a = 250$  esetén  $a^4 + a^3 + 2a^2 - 4a + 3 = 3921999003 = 3^2 \cdot 13 \cdot 79 \cdot 211 \cdot 2011$ ; itt  $13 \equiv 0 \pmod{13}$ ,  $79 \equiv 1 \pmod{13}$ ,  $211 \equiv 3 \pmod{13}$  és  $2011 \equiv 9 \pmod{13}$ .

Kicsit általánosabban, minden olyan  $p$  prímhez, amelyre  $p \equiv 0, 1, 3, 9 \pmod{13}$ , létezik olyan  $a$ , amire  $p \mid a^4 + a^3 + 2a^2 - 4a + 3$ . Ha  $p \neq 13$ , tehát  $13 \nmid p^3 - 1$ , akkor a  $\mathbb{F}_{p^3}^*$  ciklikus csoport rendje osztható 13-mal, ezért a 13-adik egységgyökök  $\mathbb{F}_{p^3}$ -beliek, az  $A, B, C, D$  elemek pedig  $\mathbb{F}_p$ -beliek.

**7. feladat.** Határozzuk meg azokat az  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  függvényeket, amelyek teljesítik az

$$\begin{aligned} & f(f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), f(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, f(a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})) \\ &= f(f(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}), f(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}), \dots, f(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})) \end{aligned}$$

egyenlőséget az  $a_{ij} \in \{0, 1\}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) elemek tetszőleges választása mellett.

(Pálffy Péter Pál)

**Megoldás (Kun Gábor).** Nevezzük az  $f$  függvény  $i$ -edik koordinátáját semlegesnek, ha tetszőleges  $x_1, \dots, x_n$  elemekre

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

lineárisnak, ha tetszőleges  $x_1, \dots, x_n$  elemekre

$$f(x_1, \dots, x_n) \neq f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

és  $(a, b)$ -döntőnek, ahol  $a, b \in \{0, 1\}$ , ha  $f(x_1, \dots, x_n) = b$ , amennyiben  $x_i = a$ .

**Lemma.**  $f$  minden koordinátája vagy semleges, vagy lineáris, vagy alkalmas  $(a, b)$  pár(ok)ra  $(a, b)$ -döntő.

**Bizonyítás.** Indirektül bizonyítunk: Tegyük fel, hogy az első koordináta egyik feltételt sem teljesíti. Mivel nem semleges és nem lineáris, vannak olyan elemek,  $x_2, \dots, x_n$  és  $y_2, \dots, y_n$ , hogy  $f(0, x_2, \dots, x_n) \neq$

$f(1, x_2, \dots, x_n)$ , viszont  $f(0, y_2, \dots, y_n) = f(1, y_2, \dots, y_n)$ . Mivel  $x_1$  nem döntő koordináta, ezért minden  $2 \leq k \leq n$ -re vannak olyan  $a_{i,2}, \dots, a_{i,n}$  elemek, hogy  $f(y_i, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}) = x_i$ . Legyen  $a_{i,1} = y_i$  és  $a_{1,i} = x_i$  minden  $2 \leq i \leq n$  esetén. Nézzük meg az egyenlőség mindkét oldalát, mint egyváltozós függvényt  $a_{1,1}$ -ben, hogy hogyan függ  $a_{1,1}$ -től! A jobb oldal nem függ tőle, hiszen  $f(0, a_{2,1}, \dots, a_{n,1}) = f(0, y_2, \dots, y_n) = f(1, y_2, \dots, y_n) = f(1, a_{2,1}, \dots, a_{n,1})$ . A bal oldal viszont  $f(f(a_{1,1}, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$ , ami  $a_{1,1}$  választásától függően mindkét értéket felveheti. Az egyenlőség nem teljesül  $a_{1,1}$  egyik választására, ami bizonyítja a lemmát.  $\square$

Milyen tulajdonságú koordinátái lehetnek egyszerre  $f$ -nek a felsoroltakból?

Világos, hogy  $f$ -nek nem lehet egyszerre egy lineáris és egy másik,  $(a, b)$ -döntő koordinátája semmilyen  $(a, b)$  párra.

Tegyük fel, hogy ha van  $(a, b)$ -döntő koordinátája és  $a \neq b$ . Megmutatjuk, hogy a többi változó semleges, azaz  $f$  konstans vagy egyváltozós (affin) lineáris függvény. Az egyszerűség kedvéért legyen ez az első koordináta, továbbá legyen  $a = 0, b = 1$ . Ha  $f(1, \dots, 1) = 0$ , akkor legyen  $a_{1,i} = 1$  minden  $1 \leq i \leq n$  esetén. Ezek miatt az egyenlet bal oldala mindenképpen 1. A függvény többi változója semleges, különben a többi  $a_{i,j}$  választható úgy, hogy a jobb oldal viszont 0 legyen. Ha pedig  $f(1, \dots, 1) = 1$ , akkor legyen ismét  $a_{1,i} = 0$  minden  $1 \leq i \leq n$  esetén. Ezek miatt az egyenlet bal oldala mindenképpen 1. A függvény többi változója az első kivételével pedig semleges, különben a többi  $a_{i,j}$  választható úgy, hogy a jobb oldal viszont 0 legyen.

Az is egyértelmű, hogy  $f$ -nek nem lehet egyszerre  $(0, 0)$ -döntő és  $(1, 1)$ -döntő koordinátája. Így minden alkalmas  $f$  koordinátái – a semlegesek kivételével – vagy mind lineárisak, vagy mind  $(0, 0)$ -döntők, vagy mind  $(1, 1)$ -döntők. Most már karakterizálhatjuk az egyenletet teljesítő függvényeket.

Ha minden koordinátája semleges, akkor  $f$  konstans.

Ha minden koordinátája lineáris vagy semleges, akkor alkalmas  $H \subseteq \{1, \dots, n\}$  halmazra vagy  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \in H} x_i$ , vagy  $f(x_1, \dots, x_n) = 1 + \sum_{i \in H} x_i$ , ahol modulo 2 adunk össze.

Ha minden koordináta semleges vagy  $(0, 0)$ -döntő, akkor alkalmas  $H \subseteq \{1, \dots, n\}$ -re  $f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in H} x_i$ .

Ha pedig minden koordináta semleges vagy  $(1, 1)$ -döntő, akkor alkalmas  $H \subseteq \{1, \dots, n\}$ -re  $f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{i \in H} x_i$ .

50 Jelentés a 2018. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

Ezek valóban teljesítik a feladat egyenlőségét, más függvényre pedig nem teljesül.

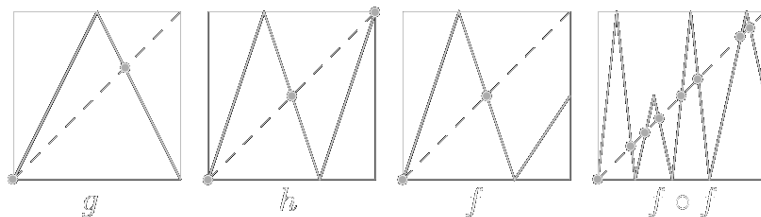
**8. feladat.** Létezik-e olyan szakaszonként lineáris, folytonos, szürjektív  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  leképezés, amelyre  $f(0) = f(1) = 0$ , és minden pozitív egész  $n$ -re

$$2,0001^{(n-10)} < P_n(f) < 2,9999^{(n+10)}$$

teljesül, ahol  $P_n(f)$  az olyan  $x$  pontok száma, amelyekre  $\underbrace{f(\dots f(x) \dots)}_n = x$ ?

(Buczolich Zoltán)

**1. megoldás (Kós Géza).** Először az  $f(1) = 0$  feltételt elfelejtve egy megoldás: Az ábrán a  $g$  függvény nem jó, mert  $g^n$ -nek  $2^n$ , vagyis túl kevés fixpontja van. A  $h$  függvény meg azért nem jó, mert  $h^n$ -nek  $3^n$ , vagyis túl sok fixpontja van.



Próbáljunk ki valamit a kettő között, mondjuk az  $f$ -et:

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = 1, \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = \frac{1}{2}.$$

Az  $f \circ f$  függvény 8 lineáris szakaszból áll, ebből 5 „hosszú”: a szakasz mentén a függvény mindent felvesz 0-tól 1-ig.

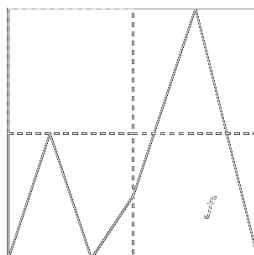
Indukcióval, az  $f^{2n}$  legfeljebb  $8^n$  lineáris szakaszból áll, ezekből legalább  $5^n$  hosszú. Minden lineáris szakaszon legfeljebb 1 fixpont van, mert a meredekségek csak 1-nél nagyobbak vagy  $(-1)$ -nél kisebbek lehetnek; a hosszú szakaszokon pontosan 1 fixpont van. Tehát

$$5^n \leq P_{2n}(f) \leq 8^n.$$

Ugyanígy, az  $f^{2n+1}$  legfeljebb  $3 \cdot 8^{2n}$  lineáris szakaszból áll, ebből legalább  $2 \cdot 5^{2n}$  hosszú.

$$2 \cdot 5^n \leq P_{2n+1}(f) \leq 3 \cdot 8^n.$$

Ezek után jöjjön a konstrukció az eredeti feladatra:



$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = 1, \quad f(1) = 0.$$

A bal alsó sarok a korábbi függvény, felére kicsinyítve.

A kis ( $\frac{1}{2}$ -nél nem nagyobb) fixpontok száma ugyanaz, mint fent. A nagy ( $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb) fixpontok száma triviálisan  $2^n$ . Tehát

$$5^n + 2^{2n} \leq P_{2n}(f) \leq 8^n + 2^{2n}$$

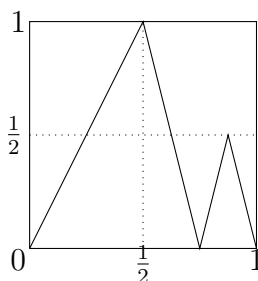
és

$$2 \cdot 5^n + 2^{2n} \leq P_{2n+1}(f) \leq 3 \cdot 8^n + 2^{2n},$$

amiből

$$(\sqrt{5})^{n-1} < P_n(f) < (2\sqrt{2})^{n+1}.$$

**2. megoldás (Kiss Viktor).** Legyen  $f$  a képen látható függvény, azt mutatjuk meg, hogy ez jó.



Könnyen meggondolható, hogy  $f^n$  grafikonja is néhány hosszú (azaz 0-tól 1-ig menő), illetve néhány rövid (azaz 0-tól  $\frac{1}{2}$ -ig menő) szakaszból áll.

52 Jelentés a 2018. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyéről

Sőt,  $f^n(\frac{1}{2}) = 0$ , ha  $n > 1$ , szóval ezek a szakaszok vagy a  $[0, \frac{1}{2}]$  intervallumban, vagy az  $[\frac{1}{2}, 1]$  intervallumban vannak. Jelölje  $h_n^b$  az  $f^n$  bal oldalára,  $[0, \frac{1}{2}]$ -be eső hosszú szakaszok számát,  $r_n^b$  a rövidekét,  $h_n^j$  a jobb oldali hosszú szakaszok hosszát,  $r_n^j$  pedig a rövidekét. Könnyen meggondolható, hogy  $f^{n+1}$  grafikonja  $[0, \frac{1}{2}]$ -en azt csinálja, amit  $f^n$   $[0, 1]$ -en,  $[\frac{1}{2}, 1]$ -en pedig egyszer bejárja  $f^n$  egészét (visszafele), kétszer pedig  $f^n$   $[0, \frac{1}{2}]$ -be eső részét.

Így  $h_{n+1}^b = h_n^b + h_n^j$ ,  $r_{n+1}^b = r_n^b + r_n^j$ ,  $h_{n+1}^j = 3 \cdot h_n^b + h_n^j$ ,  $r_{n+1}^j = 3 \cdot r_n^b + r_n^j$ . Az is világos, hogy  $P_n(f) = h_n^b + h_n^j + r_n^b$ , tehát csak ezeket a mennyiségeket kellene becsülni.

Most belátjuk, hogy  $h_{n+2}^b = 2 \cdot h_{n+1}^b + 2 \cdot h_n^b$ , valamint hasonlóan  $h_n^j$ -re.

$$\begin{aligned} h_{n+2}^b &= h_{n+1}^b + h_{n+1}^j = h_{n+1}^b + 3 \cdot h_n^b + h_n^j = \\ &= h_{n+1}^b + (2 \cdot h_n^b + h_{n+1}^b) = 2 \cdot h_{n+1}^b + 2 \cdot h_n^b. \end{aligned}$$

Hasonlóan,

$$\begin{aligned} h_{n+2}^j &= 3 \cdot h_{n+1}^b + h_{n+1}^j = 3 \cdot h_n^b + 3 \cdot h_n^j + h_{n+1}^j = \\ &= h_{n+1}^j + 2 \cdot h_n^j + h_{n+1}^j = 2 \cdot h_{n+1}^j + 2 \cdot h_n^j. \end{aligned}$$

Világos, hogy az analóg állítások elmondhatóak az  $r_n^b$  és  $r_n^j$  sorozatokra. A szokásos módszerekkel zárt formulát adva a sorozatokra kiszámolható, hogy  $f^n$  fixpontjainak száma  $(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n$ .

Ha nem akarjuk ezt használni, akkor észrevehetjük, hogy  $2 \cdot 1^n < h_{n+1}^b, h_n^j, r_{n+1}^b, r_{n+1}^j < 2 \cdot 9^n$  teljesül  $n = 3, 4$  esetén, és innen könnyű indukcióval belátni, használva a rekurziót, hogy minden nagyobb  $n$ -re is fog.

**9. feladat.** Legyen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  egészfüggvény, és tegyük fel, hogy a deriváltakból álló  $f^{(n)}$  függvénysorozat pontonként konvergens. Bizonyítsuk be, hogy ekkor alkalmas  $C$  komplex számmal  $f^{(n)}(z) \rightarrow Ce^z$  pontonként.

(Lempert László)

**Megoldás (Kós Géza).** A feltételből csak annyit használunk fel, hogy az  $(f^{(n)}(0))_{n=1}^\infty$  sorozat konvergens. (Emellett a lenti bizonyításból valójában az is adódik, hogy a konvergencia lokálisan egyenletes.)

Legyen  $C = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(0)$  és  $g(z) = f(z) - Ce^z$ ; ekkor  $g^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) - C \rightarrow 0$ . Legyen a  $g(z)$  egészfüggvény 0 körüli hatványsora  $g(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ ; a feltétel szerint  $g^{(n)}(0) = n! \cdot a_n \rightarrow 0$ .



Vegyük egy tetszőleges  $z \in \mathbb{C}$  számot és egy tetszőleges  $\varepsilon > 0$ -t. Mivel  $n! \cdot a_n \rightarrow 0$ , van olyan  $n_0$ , hogy  $n > n_0$  esetén  $n! \cdot |a_n| < e^{-|z|}\varepsilon$  teljesül. Ekkor

$$\begin{aligned} \left| f^{(n)}(z) - Ce^z \right| &= \left| g^{(n)}(z) \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) \cdots (k+n) a_{k+n} z^k \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdots (k+n) \cdot |a_{k+n}| \cdot |z|^k < \\ &< \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdots (k+n) \frac{e^{-|z|}\varepsilon}{(k+n)!} |z|^k = \\ &= e^{-|z|}\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|} \cdot e^{-|z|}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tehát minden  $z$ -hez és  $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan  $n_0$ , hogy minden  $n \geq n_0$ -ra  $\left| f^{(n)}(z) - Ce^z \right| < \varepsilon$ , vagyis  $f^{(n)}(z) \rightarrow Ce^z$  pontonként.

**10. feladat.** Adott a 3 dimenziós hiperbolikus térben a  $P$  sík és négy különböző egyenes: az  $a_1$  és  $a_2$  egyenesek merőlegesek  $P$ -re, az  $r_1$  és  $r_2$  egyenesek pedig nem metszik  $P$ -t, és távolságuk  $P$ -től ugyanakkora. Jelölje  $i = 1, 2$  esetén  $S_i$  azt a forgásfelületet, melyet úgy kaphatunk, hogy  $r_i$ -t körbeforgatjuk  $a_i$  körül. Mutassuk meg, hogy  $S_1$  és  $S_2$  közös pontjai lefedhetők két síkkal.

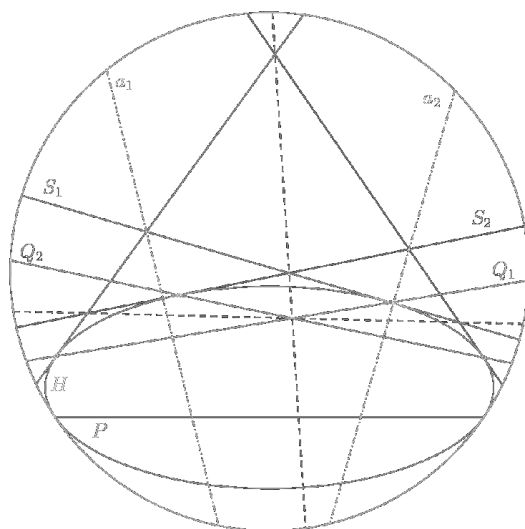
(Kós Géza)

**1. megoldás (Frenkel Péter).** Ha valamely  $i$ -re  $r_i$  egy  $a_i$ -re merőleges síkban van, akkor  $S_i$  is abban a síkban van, és készen vagyunk. A továbbiakban feltesszük, hogy egyik  $i$ -re sem történik ez.

A hiperbolikus tér Cayley–Klein–Beltrami-modelljében  $P$  egy  $\mathbb{R}^3$ -beli síknak, mindegyik  $a_i$  és  $r_i$  egy-egy  $\mathbb{R}^3$ -beli egyenesnek, az  $S_i$  pedig valamely másodrendű felületnek (hengernek, kúpnak vagy egyköpenyű hiperboloidnak) az egységgyóba eső része.

*I. eset:*  $r_1$  és  $r_2$  távolsága  $P$ -től pozitív, azaz ultraparallelek  $P$ -hez.

Legyen  $H$  azon pontok mértani helye, amelyek olyan távol vannak  $P$ -től, mint  $r_1$  és  $r_2$  mindketteje. Ez a  $H$  egy hiperszféra, amely mindkét  $S_i$ -t egy-egy kör mentén érinti. A modellben  $H$  egy ellipszoid. Legyen  $Q_i$  annak a síknak a négyzete, amelyben  $S_i$  és  $H$  érintési pontjai vannak.



*II. eset:*  $r_1$  és  $r_2$  távolsága  $P$ -től nulla, azaz párhuzamosak  $P$ -vel.

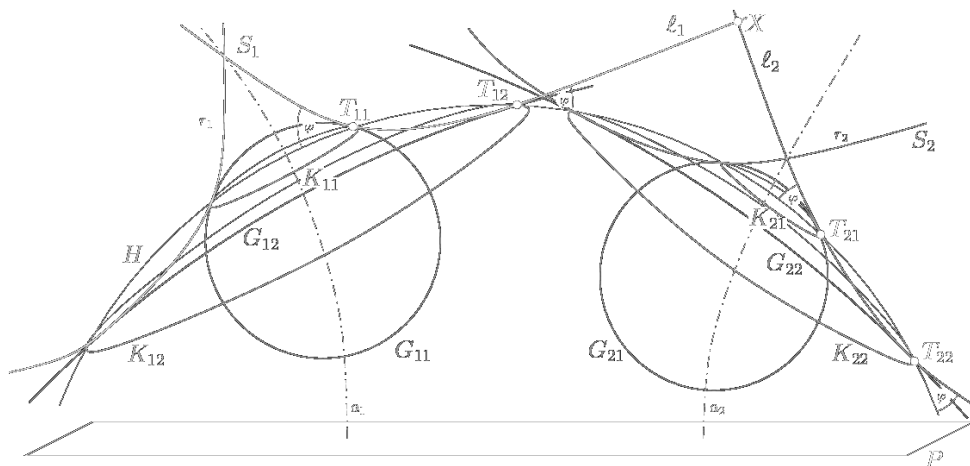
Legyen  $H$  a végtelen távoli gömb. A modellben  $H$  az egységsgömb. Legyen  $Q_i$  annak a két síknak az uniója, amelyeken az  $S_i$  végtelen távoli pontjai vannak: az egyik sík  $P$ , a másik sík az  $r_i$  nem  $P$ -n lévő végtelen távoli pontjának  $a_i$  körüli elforgatottjaira illeszkedik – ha  $r_i$  párhuzamos  $a_i$ -vel is, akkor a közös végtelen távoli pontjukban vesszük  $H$  érintősíkját.

*Mindkét eset:* Az így definiált  $Q_i \subset \mathbb{R}^3$  elfajuló másodrendű felület tagja az  $S_i$ -t  $H$ -val összekötő felületsornak. Így mindkét  $Q_i$  a  $H$ ,  $S_1$  és  $S_2$  feszítette lineáris másodrendűfelület-sereg tagja, s emiatt a  $Q_1$  és  $Q_2$  által kifeszített (esetleg az egyetlen  $Q_1 = Q_2$  felületből álló) felületsornak van egy  $Q$  közös tagja az  $S_1$  és  $S_2$  által kifeszített felületsorral. Ez a  $Q$  két (esetleg egybeeső) sík uniója, és az  $S_1$  és  $S_2$  összes közös pontja illeszkedik rá.

**2. megoldás (Kós Géza).** Feltételezzük, hogy  $S_1$  és  $S_2$  a  $P$  síknak ugyanazon az oldalán van (különben nem lehet közös pontjuk), és egyik sem esik bele egy síkba.

Vegyünk fel  $P$ -nek az  $S_i$ -ket tartalmazó oldalán egy  $H$  távolságfelületet, amelynek pontjai a  $P$ -től azonos távolságban vannak, és ezt a távolságot válasszuk olyan nagynak, hogy  $H$  elmesse az  $r_1$  és  $r_2$  egyeneseket, és velük együtt  $S_1$ -et és  $S_2$ -t is. A szimmetria miatt az  $r_i$  egyenesek ugyanakkora  $\varphi$  szögben, egyszer vagy kétszer döfik a  $H$  hiperszférát, ennek megfelelően mindkét  $S_i$  egy vagy két körvonalban metszi  $H$ -t; jelölje ezeket a körvonalakokat  $K_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ). Ha csak egy-egy körvonal van, akkor az egyszerűség kedvéért legyen  $K_{i1} = K_{i2}$ .

Illesszünk mindegyik  $K_{ij}$  körre egy olyan  $G_{ij}$  állandó görbületű felületet (gömböt, horoszférát vagy hiperszférát), amely a kör mentén érinti az  $S_i$  felületet.



Tekintsünk most egy tetszőleges  $X \in S_1 \cap S_2$  pontot. Ezen átmegy mindkét  $S_i$ -nek egy-egy  $\ell_i$  alkotója (az  $r_i$  egyenes egy elforgatottja), amely érinti a  $G_{i1}$ , illetve a  $G_{i2}$  szférát.

Legyen  $T_{ij} = \ell_i \cap K_{ij}$  az  $\ell_i$  alkotónak a  $K_{ij}$  körre eső pontja. Az  $\ell_1$  és  $\ell_2$  egyenesek ugyanakkora,  $\varphi$  szögben döfik  $H$ -t, ezért a két egyenes mentén mért  $XT_{11}$  és  $XT_{12}$  távolságok – valamilyen sorrendben – megegyeznek a  $XT_{11}$  és  $XT_{12}$  távolságokkal.

Ha  $XT_{11} = XT_{21}$  (és egyúttal  $XT_{12} = XT_{22}$ ), akkor az  $X$  pontból egyforma hosszú érintőt lehet húzni a  $G_{11}$  és  $G_{21}$  szférákhoz, ezért  $X$  illeszkedik  $G_{11}$  és  $G_{21}$  hatványsíkjára (egyben illeszkedik  $G_{12}$  és  $G_{22}$  hatványsíkjára is). Ha pedig  $XT_{11} = XT_{22}$  (és egyúttal  $XT_{12} = XT_{21}$ ), akkor az  $X$  pont illeszkedik  $G_{11}$  és  $G_{22}$  hatványsíkjára (egyben illeszkedik  $G_{12}$  és  $G_{21}$  hatványsíkjára is).

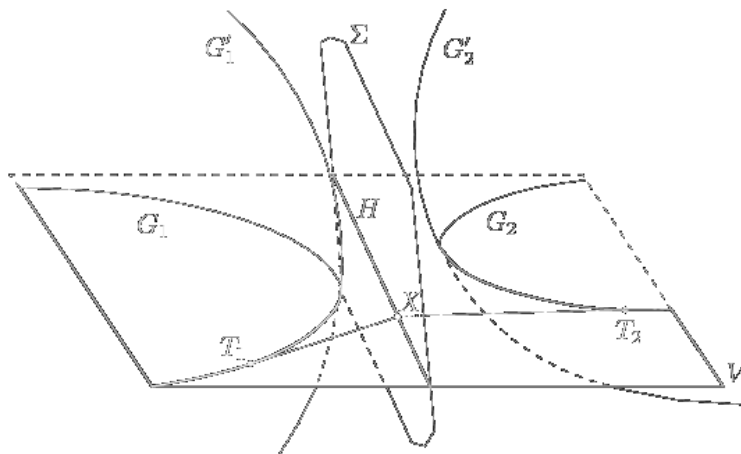
Tehát  $G_{11}$  és  $G_{21}$  hatványsíkja, valamint  $G_{11}$  és  $G_{22}$  hatványsíkja együttesen lefedi a  $S_1 \cap S_2$  halmazt.

**Megjegyzés.** Ismert, hogy azok az  $X$  pontok, ahonnan két adott gömbhöz, horo- vagy hiperszférához egyenlő hosszúságú érintőt lehet húzni, egy síkban vannak. Legyen  $G_1$  és  $G_2$  a két felület és  $XT_1$ ,  $XT_2$  ezekhez húzott egyenlő érintő szakaszok.

Az objektumainkat helyezzük el a 4 dimeziós tér egy 3 dimeziós  $V$  hipersíkjában. Illesszünk a két felületre egybevágó, 4 dimeziós  $G'_1$  és  $G'_2$  hiperszférákat. Az  $XT_1$ ,  $XT_2$  szakaszok a  $G'_1$  és  $G'_2$  hiperszférákat is érintik,

56 Jelentés a 2018. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

ezért  $X$  benne van  $G'_1$  és  $G'_2$  (3 dimenziós)  $\Sigma$  szimmetria-hipersíkjaiban. A kérdéses  $X$  pontok (ha léteznek) a 2 dimenziós  $V \cap \Sigma$  síkban vannak.



**11. feladat.** Egy  $m$  dimenziós sima sokaságot *parallelizálhatónak* nevezünk, ha van rajta  $m$  darab sima érintő vektormező, melyek minden pontban lineárisan függetlenek. Bizonyítsuk be, hogy ha  $M$  egy zárt, irányítható,  $2n$  dimenziós, 0 Euler-karakterisztikájú sima sokaság, mely immertálható egy parallelizálható  $(2n + 1)$  dimenziós  $N$  sima sokaságba, akkor  $M$  maga is parallelizálható.

(Szűcs András, Terpai Tamás)

**Megoldás (Szűcs András, Terpai Tamás).** Rögzítsünk egy  $\langle, \rangle$  Riemann-metrikát  $N$ -en, és válasszunk egy  $v_1, \dots, v_{2n+1} \in \Gamma(TN)$  trivializációját  $N$  érintőnyalábjának. Ez megad egy  $\kappa : TN \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ ,  $\kappa(v) = (\langle v, v_1 \rangle, \dots, \langle v, v_{2n+1} \rangle)$  fibrumonkénti lineáris izomorfizmust  $TN$ -ből a pont feletti triviális  $2n + 1$  rangú nyalábbbá.  $\mathbb{R}^{2n+1}$ -en válasszunk egy irányítást, ezt  $\kappa$ -val visszahúzva kapunk egy irányítást  $TN$ -en.

Legyen  $f : M \looparrowright N$  egy immerzió, és rögzítsük  $M$  egy irányítását. Minden  $p \in M$  pontban  $df(T_p M)$  egy 1 kodimenziós irányított altere  $T_{f(p)} N$ -nek, így a két lehetséges egységnyi normálvektorból kanonikusan kiválaszthatjuk az egyiket; jelölje ezt  $\tilde{\nu}(p)$ . Ezt a vektort  $\kappa$ -val előretolva és  $(\mathbb{R}^{2n+1})$  szokásos Riemann-metrikájában) egységnyire visszahozva kapjuk a  $\nu(p) = \frac{\kappa(\tilde{\nu}(p))}{\|\kappa(\tilde{\nu}(p))\|} \in T_0 \mathbb{R}^{2n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+1}$  vektort minden  $p \in M$  esetén. A normálás miatt  $\nu$  az  $S^{2n}$  egységgömbre képez, és azt állítjuk, hogy  $TM \cong$

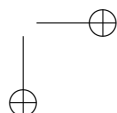
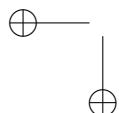
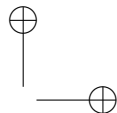
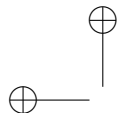
$\nu^*TS^{2n}$ . Valóban, a  $T_pM \ni v \mapsto \kappa(df(v)) + \nu(p) \in \mathbb{R}^{2n+1}$  leképezés egy fibrumonkénti izomorfizmus  $TM$ -ből  $TS^{2n}$ -be a  $\nu : M \rightarrow S^{2n}$  leképezés felett.

Belátjuk, hogy a  $\nu$  leképezés foka 0. Vegyünk ugyanis egy olyan  $\uparrow \in S^{2n}$  vektort, melyre  $\uparrow$  és  $-\uparrow$  egyaránt reguláris értéke  $\nu$ -nek (Sard tétele garantálja, hogy majdnem minden  $S^{2n}$ -beli vektor ilyen), és minden  $p$ -re vetítsük a  $\uparrow$  vektort merőlegesen a  $H_p = \kappa(df(T_pM))$  hipersíkra; ennek a vektornak a  $\kappa \circ df_p$  leképezés inverzével vett képe legyen  $w_p \in T_pM$ . A  $w$  vektormező  $M$ -en izolált nullhelyekkel rendelkezik, mégpedig pontosan a  $\uparrow$  és a  $-\uparrow$  vektorok  $\nu$  szerinti ősképei azok; most kiszámítjuk ezeknek az indexét.

Minden  $p \in M$ ,  $\nu(p) = \uparrow$  nullhely esetén azonosítsuk  $TM$  egy  $p$  körüli részének a fibrumait  $H_p$ -vel (ami a  $\uparrow$ -re merőleges  $\mathbb{R}^{2n+1}$ -beli vektorokból áll) úgy, hogy a  $T_qM$  érintőteret először a  $\kappa \circ df_q$  leképezéssel azonosítjuk  $H_q$ -val, majd azt  $H_q$ -ra merőlegesen  $-\nu(q)$ -val párhuzamosan – vetítjük  $H_p$ -re. Ez a definíció mindaddig értelmes (és sima trivializációt ad), amíg  $H_q$  nem merőleges  $H_p$ -re, ami  $p$  kellően kicsinek választott környezetében már teljesül. Ezzel az azonosítással  $\uparrow$  merőleges vetülete  $H_q$ -ra ugyanaz, mint  $\uparrow$  vetülete  $H_p$ -re  $\nu(q)$ -val párhuzamosan, ami viszont  $p$  körül elsőrendben megegyezik  $-\nu(q)$  merőleges vetületével  $H_p$ -re. Ha tehát a  $w$  vektormezőt az előbbi azonosítással  $T_pM$ -beli vektormezővé alakítjuk, akkor annak 0-beli indexe (ami  $w$ -nek a  $p$ -beli indexével egyenlő) ugyanaz, mint a vele elsőrendben megegyező  $u \mapsto (\kappa \circ df_p)^{-1}(-d\nu_p(u))$ ,  $u \in T_pM$  vektormezőé. Ez utóbbi vektormező lineáris, tehát 0-beli indexe megegyezik az őt megadó lineáris leképezés 0-beli (lokális) fokával, ami pedig a  $\nu$  leképezés  $p$ -beli (lokális) fokának  $(-1)^{2n} = 1$ -szerese.

Ugyanezt a számolást elvégezve a  $\nu^{-1}(-\uparrow)$ -beli nullhelyeken,  $p$ -ben az  $u \mapsto (\kappa \circ df_p)^{-1}(d\nu_p(u))$  vektormezőhöz jutunk, aminek ugyancsak megegyezik az indexe a  $\nu$  leképezés  $p$ -beli (lokális) fokával. Összeadva a  $\nu$  leképezés  $\uparrow$  és  $-\uparrow$  értékeken számolt foksámát azt kapjuk, hogy  $\nu$  foksámának a kétszerese megegyezik a  $w$  vektormező nullhelyeinek algebrai számával, ami a Poincaré–Hopf-tétel szerint  $\chi(M) = 0$ .

Mivel a  $\nu$  leképezés foka 0, a Hopf-tétel szerint  $\nu$  nullhomotóp, és így az általa visszahúzott  $\nu^*TS^{2n} \cong TM$  vektornyaláb triviális, azaz  $M$  paralelizálható.



## Tartalom

Előszó . . . . .	2
Elhunyt Császár Ákos matematikus, az MTA rendes tagja . . . . .	3
Juhász István: Néhány emlék és kép Császár Ákosról . . . . .	5
Győry Kálmán: Emlékezés Császár Ákosra . . . . .	10
Katona Gyula: Emlékeim Császár professzor úrról . . . . .	12
Simonovits Miklós: Emlékeim Császár Ákosról . . . . .	15
Társulati élet – 2018 . . . . .	21
Szele Tibor-émlékérem . . . . .	21
Beke Manó-émlékdíj . . . . .	22
Grünwald Géza-émlékérem . . . . .	26
Farkas Gyula-émlékdíj . . . . .	30
Rényi Kató-émlékdíj . . . . .	33
Patai László-díj . . . . .	35
Jelentés a 2018. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről	36
A 2018. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatainak megoldásai . . . . .	38

## Contents

Preface .....	2
Ákos Császár, mathematician, full member of the HAS passed away ..	3
István Juhász: Some memories and pictures of Ákos Császár .....	5
Kálmán Győry: Remembering Ákos Császár .....	10
Gyula Katona: My memories of Professor Császár .....	12
Miklós Simonovits: My memories of Ákos Császár .....	15
Society News 2018 .....	21
Schweitzer Contest in Higher Mathematics 2018 .....	36