KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

65. évfolyam 9. szám Budapest, 2015. december

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, V. emelet 5.106.; Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1.A, V. emelet 5.106., 1117–Budapest, Hungary telephone: +36 (1) 372-2850 or on the Postal address H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary, or on the Internet: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

A Milne-egyenlőtlenség és társai, avagy ellenállások álruhában I.

„A matematika a fizika része. A fizika kísérleti tudomány, a természettudomány része. A matematika a fizikának az a része, amelyben a kísérletek olcsók.” E mondatokkal kezdte a matematika tanításáról szóló előadását (lásd [3]) a 20. század egyik zseniális matematikusa, Vlagyimir Igorevics Arnold (1937–2010), aki a fizikai intuíciót a matematikai gondolkodás nélkülözhetetlen elemének tekintette (egyedi látásmódjáról bárki képet kaphat az idézett előadásából, illetve a magyarul középiskolai szakköri füzetként megjelent [2] könyvecskéjéből). Bár Arnold iménti kijelentése kissé merésznek tűnik, annyi mindenesetre bizonyos, hogy számos, tisztán matematikainak látszó eredmény mögött valójában a józan ész számára teljesen világos és természetes fizikai elvek bújnak meg. Ezek a rejtett gondolatok gyakran roppant váratlan helyeken bukkannak fel – a [7] könyv például egy egész sereg meglepő összefüggésre világít rá –, és gyönyörű megnyilvánulásai a két tudományterület egymáshoz való szoros kötődésének.

Jelen írásunk célja is éppen az, hogy egy szép és talán kevéssé ismert példáját mutassuk annak, ahogyan egyszerű fizikai meggondolások matematikai álruhát öltenek. Mindössze ellenállásokat kell megfelelő módon összekapcsolni, és rögtön nevezetes egyenlőtlenségekhez jutunk, mint például a számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség, a Milne-egyenlőtlenség, amely egy KöMaL feladat megoldásában is szerephez jutott, valamint a Minkowski-egyenlőtlenség egy speciális esete. Cikkünkben az említett egyenlőtlenségeket először ellenállás-hálózatokbeli fizikai megfontolások segítségével „bizonyítjuk”, majd matematikailag is igazoljuk, közben pedig a történeti hátterükről szintén szót ejtünk. Mindvégig csupán elemi eszközökre támaszkodunk, nagyrészt matematikára, az elején egy kis fizikával fűszerezve. Néhány eredményt feladat formájában fogalmazunk meg és tűzünk ki, ezzel elősegítve a témában való elmélyülést. Kezdődjön tehát a kaland.

1. Bemelegítés: dióhéjban az eredő ellenállásról

Mielőtt rátérnénk az egyenlőtlenségekre, elevenítsük fel, hogy mit tanulunk a fizikaórán ellenállások soros és párhuzamos kapcsolása esetén az eredő ellenállásról. Aki úgy érzi, hogy mindenre emlékszik, vagy még frissek az ismeretei, az (első olvasáskor) nyugodtan ugorjon a következő szakaszra.

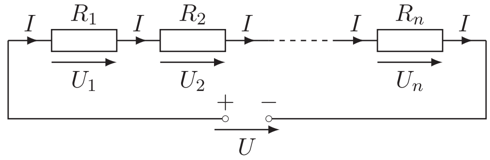
Ha egy U feszültségű áramforrásra az $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ellenállásokat sorosan kapcsoljuk az *1. ábrán* látható módon, akkor mindegyik ellenálláson ugyanakkora I áram folyik keresztül, az áramforrás feszültsége azonban megoszlik az ellenállásokon, méghozzá Kirchhoff huroktörvénye alapján

$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n, \tag{1.1}$$

ahol U_i az i-edik ellenállásra eső feszültség. Mivel Ohm törvénye szerint $U_i = R_i \cdot I$ és $U = R_\mathrm{e} \cdot I$, ahol R_e jelöli az eredő ellenállást, amellyel az n darab ellenállás helyettesíthető, ezért az (1.1) összefüggés alapján $R_\mathrm{e}I = R_1I + R_2I + \ldots + R_nI$. Következésképpen

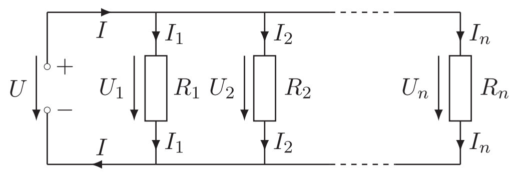
$$R_\mathrm{e} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n, \tag{1.2}$$

tehát soros kapcsolás esetén az eredő ellenállás az egyes ellenállások összege.



1. ábra. Ellenállások soros kapcsolása

Ezzel szemben, ha az $R_1, R_2, \ldots, R_n$ (nem nulla) ellenállásokat a *2. ábrának* megfelelően párhuzamosan kapcsoljuk az áramforrásra, akkor az egyes ellenállásokra ugyanakkora U feszültség esik, viszont különböző nagyságú $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ára-



2. ábra. Ellenállások párhuzamos kapcsolása

mok folynak rajtuk keresztül, amelyek összege Kirchhoff csomóponti törvénye szerint éppen az áramforráson áthaladó áram nagysága: $I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$. Ekkor ismét Ohm törvényét alkalmazva

$$\frac{U}{R_\mathrm{e}} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \ldots + \frac{U}{R_n},$$

így

$$\frac{1}{R_\mathrm{e}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n},$$

vagyis párhuzamos kapcsolás esetén az eredő ellenállás reciproka az egyes ellenállások reciprokainak összegével egyezik meg. Az eredő ellenállás tehát az egyes ellenállások reciprokösszegének reciproka, vagyis az $R_1, \ldots, R_n$ pozitív számok harmonikus közepének n-edrésze:

$$R_\mathrm{e} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}}. \tag{1.3}$$

(A későbbiekben – többek között tipográfiai és esztétikai okokból kifolyólag – néhol reciprok helyett (-1)-edik hatványt fogunk írni.)

1.1. történeti megjegyzés. Érdekességképpen megemlítjük, hogy *Gustav Robert Kirchhoff* (1824–1887) az egykori poroszországi Königsberg (mai nevén Kalinyingrád) városában született, majd tanult, és 1845-ben egyetemistaként fogalmazta meg a hurok- és csomóponti törvényt. A város hídjait bejáró sétáról szól a középiskolások körében is bizonyára jól ismert königsbergi hidak problémája, amelyet a svájci *Leonhard Euler* (1707–1783) oldott meg 1736-ban – innen ered az Euler-séta elnevezés is –, és indította el ezzel a gráfelmélet fejlődését.

2. Rayleigh monotonitási törvénye

Az előző szakaszban átismételt összefüggések mellett az eredő ellenállással kapcsolatban szükségünk lesz még egy észrevételre, amelyet gyakran Rayleigh monotonitási elveként vagy törvényeként emlegetnek – a változatosság kedvéért mi is mindkét megnevezést használni fogjuk.

2.1. elv (Rayleigh monotonitási elve/törvénye). Ha ellenállások egy hálózatában valamelyik ellenállást növeljük, akkor a hálózat eredő ellenállása nem csökkenhet; valamely ellenállást csökkentve pedig az eredő ellenállás nem növekedhet.

2.2. történeti megjegyzés. Az elvet a később Nobel-díjjal kitüntetett angol fizikus, *John William Strutt* (1842–1919), ismertebb nevén *Lord Rayleigh* 1871-ben hangtani vizsgálódásai során használta. Ennek segítségével adott alsó és felső becslést különböző elektromos vezetők ellenállására. Rayleigh módszerére a kiváló skót fizikus, *James Clerk Maxwell* (1831–1879) a Tanulmány az elektromosságról és mágnességről című, 1873-ban megjelent – az azóta a nevét viselő Maxwell-egyenletek első alakját is tartalmazó – híres művében is hivatkozik. Mindketten úgy fogalmazták az elvet, hogy ha egy vezető valamely részének ellenállását megváltoztatjuk, és a többi részt változatlanul hagyjuk, akkor az egész vezető ellenállása nő, ha a rész ellenállását növeltük, és csökken, ha csökkentettük (lásd Maxwell [8] művének 353–354. oldalait).

Rayleigh törvénye minden bizonnyal sokak számára nem igényel magyarázatot, szemléletesen teljesen világos vagy legalábbis hihető. Az mindenesetre biztos, hogy az 1. és 2. ábrák hálózatai esetében érvényes, hiszen könnyen látható, hogy az eredő ellenállást megadó (1.2) és (1.3) kifejezések bármely R_i ellenállás növelésével növekednek.

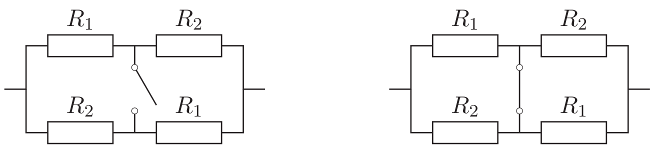
Valószínűleg sokkal látványosabb Rayleigh törvénye, ha áramkörök helyett például vízvezeték-hálózatra gondolunk, amelyben egy szakasz leszűkítésével a rendszerben adott időegység alatt átfolyó víz mennyisége nem növekedhet. Ennél még meggyőzőbb lehet, ha eszünkbe jutnak a különböző úthálózatokon kialakuló torlódások, amelyek egy-egy útszakasz leszűkítése vagy lezárása következtében alakulnak ki. Aki az előbbi szemléltető példák ellenére továbbra is – és talán nem alaptalanul – kételkedik, annak Maxwell véleményét ajánljuk a figyelmébe (lásd Maxwell művének korábban idézett oldalait), amely szerint *„Ez az elv magától értetődőnek tekinthető . . . ”*.

Természetesen matematikailag semmilyen szemlélet, intuíció vagy akár egy zseniális tudós kijelentése nem bizonyító erejű, de ez számunkra most nem is lényeges, hiszen a későbbiekben az elvet éppen az eredmények intuitív megsejtésére szeretnénk használni, nem pedig bizonyításra (és emiatt remélhetőleg az is megbocsájtható, ha ebben a fizikáról szóló részben a szemléletesség érdekében néhol esetleg kevésbé egzaktul fogalmaztunk a kelleténél). Annyit azért mindenképpen érdemes hozzáfűznünk, hogy Rayleigh törvénye valójában levezethető egy másik fizikai elvből, amely szerint egy adott hálózaton átfolyó egységnyi áram az összes lehetséges áthaladó egységnyi áramok közül a minimális energiaveszteséggel járó. Ezt az elvet szokás az ír fizikus, *William Thomson* (1824–1907), ismertebb nevén Lord Kelvin nevéhez kötni. Mindezekről bővebben olvashatunk az [5], [7] könyveknek a monotonitási elvről szóló fejezeteiben.

Végül megemlítjük, hogy a monotonitási törvény közlekedési hálózatokkal való illusztrációja egyáltalán nem légből kapott, ugyanis az elektromos hálózatok és az úgynevezett véletlen bolyongások elmélete – amelyben egy elágazásban a véletlen határozza meg a továbbhaladás irányát – szoros kapcsolatban áll egymással (erről bővebben olvashatunk a kiváló és nagyrészt középiskolások számára is érthető [5] könyvben).

3. A számtani és harmonikus közép egyenlőtlensége

Ennyi fizikai bevezető után térjünk most rá a matematikára: milyen eredményeket nyerhetünk az elektromos ellenállásokra vonatkozó ismereteink segítségével? Meglepő módon a számtani és a harmonikus közép közötti egyenlőtlenség egyszerűen „kipottyan" Rayleigh monotonitási törvényéből.



(a) Nyitott kapcsoló (b) Zárt kapcsoló

3. ábra. Számtani és harmonikus közép elektromos hálózatokban

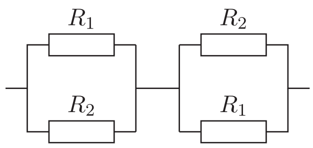
Tekintsük ugyanis a *3. ábrán* látható kapcsolási rajzokat: kétféle sorrendben sorosan kapcsolt R_1 és R_2 ellenállásokat párhuzamosan kapcsoltunk, és a két ágat egy kapcsolóval kötöttük össze, amely először nyitott, aztán zárt állapotban van. Számítsuk ki mindkét esetben a hálózat eredő ellenállását a kapcsoló belső ellenállását elhanyagolhatónak feltételezve. Nyitott kapcsoló esetén az egyes ágakban az eredő ellenállás $R_1 + R_2$, így a rendszer eredő ellenállása

$$R_\mathrm{e}^\mathrm{nyitott} = \frac{1}{\frac{1}{R_1+R_2} + \frac{1}{R_1+R_2}} = \frac{R_1+R_2}{2}.$$

Zárt kapcsoló esetén az ellenállás-hálózat egyenértékű a *4. ábrán* látható rendszerrel, amelyben sorba van kapcsolva két komponens, mindegyikben párhuzamosan kapcsolt R_1 és R_2 ellenállásokkal. Ekkor mindkét komponens eredő ellenállása $\left(R_1^{-1} + R_2^{-1}\right)^{-1}$, ezért a rendszer eredő ellenállása

$$R_\mathrm{e}^\mathrm{zárt} = \frac{2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}.$$

És most jön a csavar. Rayleigh monotonitási törvénye alapján a kapcsoló zárásával a hálózat ellenállása nem növekedhet, hiszen nyitott állapotban a kapcsoló „végtelen



4. ábra. Zárt kapcsoló esete átrajzolva

ellenállású", míg zárás után az ellenállása nulla – a közlekedési hálózatos példával élve, a város egy eddig felújítás alatt álló útján megindulhat a forgalom. Ebből következően $R_{\mathrm{e}}^{\text{nyitott}} \geqslant R_{\mathrm{e}}^{\text{zárt}}$, azaz

$$\frac{R_1+R_2}{2} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}, \tag{3.1}$$

ami éppen az R_1, R_2 pozitív számok számtani és harmonikus közepei közötti egyenlőtlenség.

Ahogy korábban, most is hangsúlyozzuk, hogy az iménti érvelés nem bizonyítás, hanem inkább egy fizikai elv látványos megjelenési formája (vagy akinek jobban tetszik, tekinthet a matematikai eredményre úgy, mint az elv egy speciális esetének bizonyítására). Természetesen a (3.1) egyenlőtlenség jól ismert, és egy korrekt igazolását nyerjük az alábbi egyszerűen ellenőrizhető azonosság segítségével, amelyből az egyenlőség feltétele, nevezetesen $R_1=R_2$ is azonnal következik:

$$\frac{R_1+R_2}{2} - \frac{2}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{(R_1-R_2)^2}{2(R_1+R_2)}. \tag{3.2}$$

Jegyezzük meg azt is, hogy a (3.1) egyenlőtlenség pozitív számokra egyenértékű a számtani és mértani közepek egyenlőtlenségével, hiszen mindkét oldalnak az $(R_1+R_2)/2$ kifejezéssel való szorzása után az

$$\frac{(R_1+R_2)^2}{4} \geqslant R_1R_2$$

alakot ölti, ahol az egyes oldalakon éppen a megfelelő közepek négyzete áll.

Dacára annak, hogy a számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség előbbi „bizonyítása" igen meglepő és szellemes, mégsem terjedt el igazán a matematikai köztudatban. Bár a gondolatmenet általánosítása már 1960-ban megjelent (a történeti hátteret lásd részletesen a 7.11. megjegyzésben), mégis viszonylag kevés olyan helyen tesznek említést róla, amely széles olvasóközönségnek szól (angolul a [7] könyvben és a [10] cikkben, magyar nyelvű szakirodalomban szinte sehol), és csak szűkebb körben ismerik. A szerző közvetlen munkatársai körében végzett mini közvéleménykutatás szerint lényegében teljesen ismeretlen, pedig az ötlet figyelemre méltó és messzemenően általánosítható. Folytassuk is ennek bemutatását.

4. Egy általánosítás

Az előző szakaszbeli gondolatmenet talán legkézenfekvőbb általánosítása, ha R_1 és R_2 ellenállások helyett (az egyszerűség kedvéért kis betűvel jelölt) a, b, c, d ellenállásokat tekintünk az *5. ábrán* látható módon. Ekkor nyitott kapcsoló esetén az eredő ellenállás

$$R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{nyitott}}=\frac{1}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}}=\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d},$$

míg zárt kapcsoló mellett

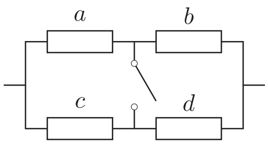
$$R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{zárt}}=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}+\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}=\frac{ac}{a+c}+\frac{bd}{b+d}.$$

A monotonitási elv alapján $R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{nyitott}}\geqslant R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{zárt}}$, vagyis

$$\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d}\geqslant\frac{ac}{a+c}+\frac{bd}{b+d}.$$

Az imént megsejtett egyenlőtlenség egy matematikailag helyes bizonyítása – a (3.2) azonosság mintájára – az alábbi észrevételen múlik:

$$\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d}-\frac{ac}{a+c}-\frac{bd}{b+d}=\frac{(ad-bc)^2}{(a+b+c+d)(a+c)(b+d)}. \tag{4.1}$$



5. ábra. A (4.2) egyenlőtlenség hálózata

4.1. feladat. Ellenőrizzük a (4.1) azonosságot.

A (4.1) összefüggésből az egyenlőség kérdésére is azonnal választ kapunk, és rögtön meg is fogalmazhatjuk egy állítás formájában az eredményt.

4.2. állítás. *Legyenek a, b, c, d nemnegatív valós számok, amelyekre $a+c>0$ és $b+d>0$. Ekkor*

$$\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d}\geqslant\frac{ac}{a+c}+\frac{bd}{b+d}, \tag{4.2}$$

és egyenlőség csakis $ad=bc$ esetén áll fenn.

4.3. megjegyzés. Az egyenlőség $ad=bc$ feltételét – itt most lényeges, hogy a, b, c, d nem lehetnek különböző előjelűek – átfogalmazhatjuk úgy is, hogy az (a,b) és (c,d) síkbeli vektorok azonos irányúak (beleértve azt az esetet is, amikor valamelyik esetleg nullvektor). Valóban, ez utóbbi összefüggés azt jelenti, hogy van olyan $\lambda\geqslant 0$ szám, amelyre $a=\lambda c$ és $b=\lambda d$. Ha $\lambda=0$, akkor $(a,b)=(0,0)$, így a két vektor azonos irányú; ha pedig $\lambda>0$, akkor $d=b/\lambda$, és így $ad=(\lambda c)\cdot(b/\lambda)=bc$. Fordítva, amennyiben $ad=bc\neq 0$, akkor $a/c=b/d=\lambda>0$, hiszen ebben az esetben a, b, c, d pozitív számok. Ha pedig $ad=bc=0$, akkor a szimmetria miatt feltehető, hogy $a=0$, ekkor $b=0$ vagy $c=0$; az első esetben $(a,b)=(0,0)$, míg a másodikban $(a,b)=(0,b)$, $(c,d)=(0,d)$, mindkétszer a kérdéses vektorok azonos irányúak.

4.4. feladat. Mutassuk meg, hogy nemnegatív a,b,c,d számok esetén az (a,b) és (c,d) vektorok pontosan akkor azonos irányúak, amikor az (a,c) és (b,d) vektorok azonos irányúak.

Bevezetve a

$$H(x,y)=\frac{2xy}{x+y} \tag{4.3}$$

jelölést az x, y nemnegatív és egyszerre nem nulla számok harmonikus közepére (a harmonikus közép eredeti formájában az $x,y>0$ feltételezés lenne szükséges), a (4.2) egyenlőtlenség 2-vel való szorzás után a következő, könnyen megjegyezhető alakot ölti:

$$H(a+b,c+d)\geqslant H(a,c)+H(b,d). \tag{4.4}$$

4.5. feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a (4.4) egyenlőtlenség (vagy esetleg a fordított iránya) igaz marad-e, ha a harmonikus közepet a számtani ($A(x,y)$), mértani ($G(x,y)$) és négyzetes ($Q(x,y)$) közepek valamelyikére cseréljük, ahol

$$A(x,y)=\frac{x+y}{2},\quad G(x,y)=\sqrt{xy},\quad Q(x,y)=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

A (4.2) egyenlőtlenség akármelyik alakját is nézzük, azt gondolhatnánk, hogy valószínűleg nem tartozik a versenyfeladatokban leggyakrabban alkalmazott egyenlőtlenségek közé. Ez azonban nem feltétlenül igaz, hiszen a (4.2) egyenlőtlenség nemrég például a KöMaL-ban is felbukkant, méghozzá a 2012. májusi számban kitűzött **B. 4461.** és **A. 563.** jelű feladatok egyik megoldásában kapott szerepet (lásd a nyomtatásban és az interneten közölt [6] megoldásokat). Az említett feladatok cikkünk témakörén kívül esnek, ezért most ezekre nem térünk ki. Annyit viszont még mindenképpen megemlítünk, hogy a két feladat megoldásában valójában a (4.2) egyenlőtlenség alábbi általánosítására volt szükség.

4.6. állítás. *Legyenek a, b, c, d nemnegatív valós számok, amelyekre $a+c>0$ és $b+d>0$, továbbá legyen $p\geqslant 1$ valós szám. Ekkor*

$$(a+b+c+d)^{p-2}(a+b)(c+d)\geqslant (a+c)^{p-2}ac+(b+d)^{p-2}bd,$$

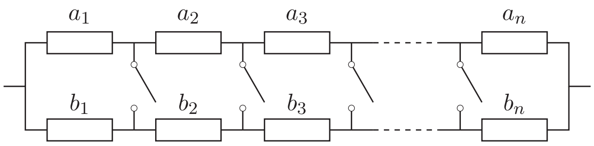
és egyenlőség csak abban az esetben áll fenn, ha $p=1$ és $ad=bc$.

4.7. feladat. Igazoljuk a 4.6. állítást (a $p=1$ eset ismeretében). (Segítség: $(a+c)^{p-2}=(a+c)^{p-1}/(a+c)$.)

Térjünk vissza ezek után az ellenállásokra és folytassuk a Rayleigh-féle monotonitási törvény alkalmazásainak sorát.

5. A Milne-egyenlőtlenség

Egy további általánosítási lehetősége az 5. ábrán szereplő hálózatnak, ha két ellenállás helyett n darabot kapcsolunk sorosan, majd két ilyen rendszert párhuzamosan kapcsolunk össze a *6. ábrán* látható módon. Ekkor az összes kapcsolót



6. ábra. Az (5.1) egyenlőtlenség hálózata

nyitva hagyva, az egyes ágakban az eredő ellenállás $a_1+\ldots+a_n$ és $b_1+\ldots+b_n$, így az eredő ellenállás

$$R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{nyitott}}=\frac{(a_1+\ldots+a_n)(b_1+\ldots+b_n)}{a_1+\ldots+a_n+b_1+\ldots+b_n}.$$

Zárt kapcsolók mellett a hálózat a *7. ábrán* láthatóval egyenértékű, ahol párhuzamosan kapcsolt a_i, b_i ellenállásokból álló komponensek vannak sorosan kapcsolva. Az egyes komponensek eredő ellenállása $a_ib_i/(a_i+b_i)$, ebből következően az összes kapcsoló zárása után a 6. ábra hálózatának eredő ellenállása

$$R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{zárt}}=\frac{a_1b_1}{a_1+b_1}+\ldots+\frac{a_nb_n}{a_n+b_n}.$$

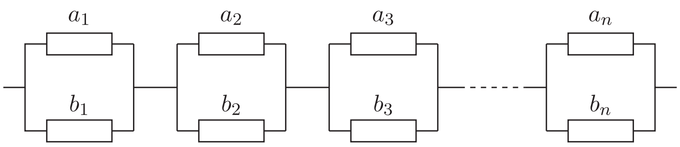
Mivel a Rayleigh-féle monotonitási törvény szerint $R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{nyitott}}\geqslant R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{zárt}}$, ezért $a_i+b_i>0$ $(i=1,\ldots,n)$ esetén várhatóan igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{(a_1+\ldots+a_n)(b_1+\ldots+b_n)}{a_1+\ldots+a_n+b_1+\ldots+b_n}\geqslant\frac{a_1b_1}{a_1+b_1}+\ldots+\frac{a_nb_n}{a_n+b_n}, \tag{5.1}$$

amit másképpen (2-vel való szorzás után) úgy is írhatunk, hogy

$$H(a_1+\ldots+a_n,b_1+\ldots+b_n)\geqslant H(a_1,b_1)+\ldots+H(a_n,b_n). \tag{5.2}$$

Ez $n=2$ esetén éppen a (4.2) egyenlőtlenség, ebből pedig teljes indukcióval nem



7. ábra. A 6. ábra hálózata átrajzolva zárt kapcsolók esetén

nehéz belátni az általános esetet. Valóban, ha n-re igaz az (5.2) egyenlőtlenség, akkor az $a=a_1+\ldots+a_n$, $b=a_{n+1}$, $c=b_1+\ldots+b_n$, $d=b_{n+1}$ szereposztással a (4.2) egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy

$$H(a_1+\ldots+a_n+a_{n+1},b_1+\ldots+b_n+b_{n+1})\geqslant$$
$$\geqslant H(a_1+\ldots+a_n,b_1+\ldots+b_n)+H(a_{n+1},b_{n+1}),$$

ahol a jobb oldalon az indukciós feltevés alkalmazásával éppen $(n+1)$-re adódik az (5.2) egyenlőtlenség.

Az iménti indukciós gondolatmenet segítségével azt sem nehéz igazolni, hogy egyenlőség csakis akkor áll fenn, ha az $(a_1, \ldots, a_n)$ és $(b_1, \ldots, b_n)$ vektorok azonos irányúak, amin azt értjük, hogy létezik $\lambda \geqslant 0$ szám, amellyel $a_i = \lambda b_i$ minden $i = 1, \ldots, n$ esetén. Valóban, az egyenlőség feltétele $n = 2$ esetén a 4.3. megjegyzésből következik. Ha pedig n-re már tudjuk a feltételt, akkor az indukciós lépésből kiolvasható, hogy csak úgy lesz egyenlőség $(n+1)$-re, ha az indukciós feltevésben is egyenlőség áll fenn, tehát az $(a_1, \ldots, a_n)$ és $(b_1, \ldots, b_n)$ vektorok azonos irányúak, valamint az is szükséges, hogy az

$$(a, b) = (a_1 + \ldots + a_n, a_{n+1})$$

és

$$(c, d) = (b_1 + \ldots + b_n, b_{n+1}) = \big(\lambda(a_1 + \ldots + a_n), b_{n+1}\big)$$

vektorok azonos irányúak legyenek. Ebből szükségképpen $a_{n+1} = \lambda b_{n+1}$ adódik, tehát az $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ és $(b_1, \ldots, b_{n+1})$ vektorok azonos irányúak.

Érvényes tehát a következő állítás.

5.1. állítás. *Legyenek a_i, b_i $(i = 1, \ldots, n)$ nemnegatív számok, amelyekre $a_i + b_i > 0$ minden $i = 1, \ldots, n$ esetén. Ekkor*

$$\frac{(a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n)}{a_1 + \ldots + a_n + b_1 + \ldots + b_n} \geqslant \frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} + \ldots + \frac{a_n b_n}{a_n + b_n},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha az $(a_1, \ldots, a_n)$ és $(b_1, \ldots, b_n)$ vektorok azonos irányúak.

Érdemes megjegyeznünk, hogy az 5.1. állítás előbbiekben bemutatott teljes indukciós bizonyítása mellett az általános esetben is működik az $n = 2$ esetén alkalmazott (4.1) azonosságnak megfelelő négyzetösszeggé való alakítás ötlete. Ennek tömör és átlátható megfogalmazásához azonban célszerű bevezetnünk egy – sokak számára bizonyára már ismerős – jelölést.

5.2. jelölés. Ha $a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges valós számok, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

amit úgy olvasunk, hogy „szumma $i = 1$-től n-ig a_i”. Használni fogjuk még a

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}$$

típusú jelölést is, amelyben – magától értetődően – az $1 \leqslant i < j \leqslant n$ feltételt kielégítő összes i, j indexpárra kell összegezni.

A szummás jelölés segítségével az 5.1. állítás valójában egy – kis odafigyeléssel és türelemmel – könnyen ellenőrizhető azonosságra vezethető vissza, amelyet az alábbi feladatban fogalmazunk meg (a feladat megoldása jó gyakorlási lehetőség a szummás jelölésmód elsajátításához).

5.3. feladat. Mutassuk meg, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\right) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{(a_ib_j-a_jb_i)^2}{(a_i+b_i)(a_j+b_j)}.$$

5.4. történeti megjegyzés. Az 5.1. állításban szereplő egyenlőtlenséget az irodalomban szokás Milne-egyenlőtlenségnek is hívni. *Edward Arthur Milne* (1896–1950) angol asztrofizikus és matematikus 1925-ben csillagászati vizsgálódásai kapcsán írta fel az egyenlőtlenség folytonos változatát integrálok segítségével (lásd a [9] cikket), és a bizonyítás közben lényegében megfogalmazta az általunk kimondott diszkrét változatot is. A Milne-egyenlőtlenség igazolását feladatként a neves kanadai, többnyire nehezebb versenyfeladatok kitűzésére specializálódott Crux Mathematicorum folyóirat is kitűzte 1996-ban. Egy évvel később három különböző megoldást jelentettek meg, amelyek egyike éppen az 5.3. feladatban szereplő azonosság (lásd [1]).

A szakasz zárásaként a nevezetes egyenlőtlenségekkel foglalkozó [4] könyvecske egy nehezebb feladatát idézzük, amely a Milne-egyenlőtlenség fényében szinte nyilvánvalóvá egyszerűsödik (ezért próbáljuk többféleképpen is megoldani, és a könyv megoldását is olvassuk el).

5.5. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1,\ldots,a_n$ pozitív valós számok, akkor

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_n}} - \frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \geqslant \frac{1}{n}.$$

Hivatkozások

[1] F. Ardila, K. W. Lau, V. N. Murty, Solution to problem 2113, *Crux Mathematicorum,* **23** (1997), 112–114. Elektronikus változat: `https://cms.math.ca/crux/v23/n2/page112-128.pdf`.

[2] V. I. Arnold, *Katasztrófaelmélet,* Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

[3] V. I. Arnold, A matematika tanításáról (fordította: Kersner Róbert), *Magyar Tudomány,* 1998. október, 1247–1251. Elektronikus változat angolul: `http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html`.

[4] Ábrahám Gábor, *Nevezetes egyenlőtlenségek,* MOZAIK Oktatási Stúdió, Szeged, 1995.

[5] P. G. Doyle, J. L. Snell, *Random Walks and Electric Networks,* The Carus Mathematical Monographs, No. 22, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984. Elektronikus változat: `https://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/walks/walks.pdf`.

[6] KöMaL B. 4461. és A. 563. feladatok megoldása, *KöMaL,* 2012/5, 273–274. Elektronikus változat: `http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=B4461`.

[7] M. Levi, *The Mathematical Mechanic: Using Physical Reasoning to Solve Problems,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2009.

[8] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Volume 1, Calendron Press, Oxford, 1873. Elektronikus változat: `https://archive.org/details/atreatiseonelec03maxwgoog`.

[9] E. A. Milne, Note on Rosseland's integral for the stellar absorption coefficient, *Mon. Not. R. Astron. Soc.,* **85** (1925), 979–984. Elektronikus változat: `http://mnras.oxfordjournals.org/content/85/9/979.full.pdf`.

[10] A. Witkowski, Proof Without Words: An Electrical Proof of the AM-HM Inequality, *Math. Mag.,* **87** (2014), 275. Elektronikus változat: `http://www.jstor.org/stable/10.4169/math.mag.87.4.275`.

Besenyei Ádám
`badam@cs.elte.hu`

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét közelítő értékek használata nélkül:

$$a = \sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ, \qquad b = \frac{5^{\lg 20}}{20^{1+\lg 5}},$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$ (*4 + 5 + 4 pont*)

2. Egy háromszögben két oldal hosszának különbsége $a - b = 4$ cm, a velük szemközti szögek $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 40^\circ$. Mekkora a háromszög területe? (*12 pont*)

3. Egy matematikai teszt megírásában egy középiskola 100 tanulója vett részt, és az átlagpontszámuk 100. Az alsóévesek száma 50%-kal több, mint a felsőéveseké, a felsőévesek átlagpontszáma pedig 50%-kal magasabb, mint az alsóéveseké. Mennyi a felsőévesek átlagpontszáma? (*13 pont*)

4. Egy szabályos hatszög alapú gúla alapélei 5 cm, oldalélei 10 cm hosszúságúak. Mekkora a gúla térfogata, a beírt és köré írt gömb sugara? Mekkora egy oldallapnak az alaplappal bezárt szöge? (*13 pont*)

II. rész

5. *a*) Mennyi $\lg x - \lg y$ értéke, ha az x, y számokra teljesül a

$$2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0$$

feltétel?

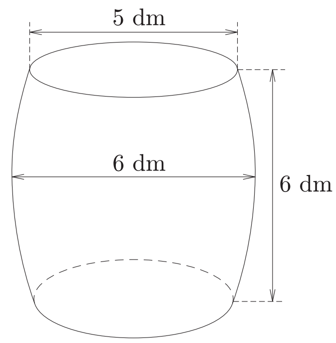
b) Oldjuk meg a valós számok halmazán a $4^{x+\frac{1}{2}} - 5 \cdot 6^x + 9^{x+\frac{1}{2}} = 0$ egyenletet.

c) Milyen $0 \leqslant \alpha < 360^\circ$ szögek a megoldásai a

$$4\sin^2\alpha - 5\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 5\cos^2\alpha = 2$$

egyenletnek? (*5 + 5 + 6 pont*)

6. Egy hordó legnagyobb átmérője 6 dm, legkisebb átmérője 5 dm, magassága 6 dm. (Ezek a hordó belső méretei.) A hordó olyan forgástestnek tekinthető, amely egy szimmetrikus parabolaív forgatásával keletkezett.



a) Mekkora a hordó térfogata?

b) Hány százalékos hibát vétünk, ha a hordó térfogatát olyan hengerrel közelítjük, amelynek magassága megegyezik a hordóéval, átmérője pedig a hordó legkisebb és legnagyobb átmérőjének számtani közepével? (*16 pont*)

7. *a*) Hányféleképpen állítható elő a 2016 szomszédos pozitív egész számok összegeként?

b) Adjunk meg egy olyan, 2016-nál nagyobb, pozitív egész számot, amely nem állítható elő szomszédos pozitív egész számok összegeként. (*16 pont*)

8. Az AB átmérőjű kör egy pontja P. Az AB egyenesnek C az a pontja, amelyre $AP = PC$. P mely helyzetében lesz az ACP háromszög területe maximális? (*16 pont*)

9. Ha felírjuk az összes olyan ötjegyű számot, amelyben az 1 és 2 számjegyeken kívül más jegy nem szerepel, akkor mennyi lesz

a) a felírt számok összege,

b) a felírt számjegyek összege,

c) annak a valószínűsége, hogy két véletlenszerűen kiválasztott ilyen számban ugyanannyi a számjegyek összege? (*5 + 4 + 7 pont*)

Katz Sándor
Bonyhád, Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium

Megoldásvázlatok a 2015/8. sz. emelt szintű matematika gyakorló feladatsorhoz

I. rész

1. *Milyen α valós paraméter esetén lesz a következő egyenletnek egy megoldása?*

$$\frac{x^2\cos\alpha + x + \frac{1}{2}\sin\alpha}{x^2 - \frac{1}{2}} = 0. \qquad (11\ pont)$$

Megoldás. A nevezőben nem állhat nulla, tehát $x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Egy tört akkor lehet nulla, ha a számlálója nulla, vagyis

$$x^2\cos\alpha + x + \frac{1}{2}\sin\alpha = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek akkor lesz pontosan egy megoldása, ha

a) Nem másodfokú az egyenlet, vagyis a másodfokú tag együtthatója nulla. Ekkor $\cos\alpha = 0$, azaz

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (\text{ahol } k \in \mathbb{Z}).$$

Ekkor

$$x + \frac{1}{2}\sin\alpha = 0,$$

melyre

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{esetén} \qquad x_1 = -\frac{1}{2},$$
$$\alpha_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{esetén} \qquad x_2 = \frac{1}{2}.$$

b) Másodfokú az egyenlet ($\cos\alpha \neq 0$), s ekkor az egyenlet diszkriminánsa nulla. Ebből

$$1 - 4 \cdot \cos\alpha \cdot \frac{1}{2}\sin\alpha = 0,$$

vagyis $\sin 2\alpha = 1$ adódik. Ennek gyökei $\alpha = \frac{\pi}{4} + l\pi$, ahol $l \in \mathbb{Z}$. A paraméter ezen értékei azonban nem felelnek meg a feltételeknek, hiszen $\alpha = \frac{\pi}{4}$ esetén $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ esetén $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ adódik.

Tehát az egyenletnek csak $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ esetén lesz egy valós gyöke.

2. *Óvodás korú kisöcsénk a játék rulett-zsetonokat használja toronyépítésre. Az első korongoszlop mellé magasabbat állít, majd a következőket ugyanannyival növeli, mint a korábbiakat. Így egy lépcsős toronysorozatot hoz létre mackójának.*

a) Milyen sorozatot alkotnak a tornyok magasságai?

b) Az első tornytól kezdve csoportosítsuk a tornyokat hármasával. Igazoljuk, hogy a hármas csoportokban szereplő tornyok magasságainak összege számtani sorozatot alkot.

c) A sorba rendezett tornyok elejéről kisöcsénk elvett n darab tornyot, majd megszámoltatta velünk, hogy hány zsetonja van összesen. Ezután elvett még n db *tornyot, s ismét megkérdezte, hogy az előzővel együtt most hány zsetonja is van. Ebből a két adatból meg tudnánk-e mondani, hogy még n tornyot elvéve, hány zsetonunk is lesz az előzőkkel együtt?*

(*12 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel a szomszédos tornyok magasságai ugyanannyival növekednek, ezért számtani sorozatot alkotnak. (Ez a számtani sorozat definíciója.)

b) Jelölje az *a*)-beli sorozat általános tagját a_n, differenciáját pedig d. Ekkor az új sorozat egy általános elemét így írhatjuk fel:

$$b_n = a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = 3 \cdot a_{3n} - 3d = 3a_1 - 6d + n \cdot 9d.$$

Ebből kiolvasható a számtani sorozat definíciója, a $9d$-s állandó növekedés. Vagy igazolhatjuk az állítást a

$$2b_n = b_{n-1} + b_{n+1}, \quad 2(3 \cdot a_{3n} - 3d) = (3a_{3n} - 12d) + (3a_{3n} + 6d)$$

összefüggéssel is.

c) Legyen

$$s_n = b = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = a_1 n + \frac{(n-1)nd}{2},$$

$$s_{2n} = c = \frac{2a_1 + (2n-1)d}{2} \cdot 2n = 2a_1 n + \frac{(2n-1)2nd}{2},$$

$$s_{3n} = \frac{2a_1 + (3n-1)d}{2} \cdot 3n = \frac{6a_1 n + (3n-1)3nd}{2} = 3a_1 n + \frac{9n \cdot nd}{2} - \frac{3nd}{2}.$$

Ekkor

$$c - b = a_1 n + \frac{3n \cdot nd}{2} - \frac{nd}{2},$$

amiről látható, hogy éppen az s_{3n} harmada. Tehát $s_{3n} = 3(c-b)$.

3. *Az A halmaz elemei olyan* 100*-nál kisebb pozitív a egészek, melyekre* $\sin(a \cdot 10^\circ) = 0{,}5$. *A B halmaz elemei a* 100*-nál kisebb hattal osztható természetes számok.*

a) $|A| = ?$ $|B| = ?$

b) *Definiáljuk a C halmazt a következőképpen:* $C := \{1; 2; 3; 6; A\}$, *ahol az A halmaz a C eleme.* $|C \setminus B| = ?$

c) *Hány páros elemű részhalmaza van C-nek?* (*14 pont*)

Megoldás. *a*) A $\sin(a \cdot 10^\circ) = 0{,}5$ egyenlet megoldásai

$$a \cdot 10^\circ = 30^\circ + k \cdot 360^\circ, \qquad \text{illetve} \qquad a \cdot 10^\circ = 150^\circ + l \cdot 360^\circ,$$

melyekből a 100-nál kisebb a értékek a 3, 39, 75, illetve 15, 51, 87. Tehát $|A| = 6$.

A B halmaz elemei: $0, 6, 12, \ldots, 96$. Tehát $|B| = 17$.

b) $C \setminus B = \{1; 2; 3; A\}$, tehát $|C \setminus B| = 4$.

c) Az öt elemű C halmaznak a páros elemű részhalmazai a 0, 2, illetve 4 eleműek. Ezekből rendre $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{4}$ van, ami összesen $1 + 10 + 5 = 16$ darab.

4. *A Balaton valósághű modelljét szeretnénk elkészíteni. Az adatok szerint a Balaton hossza* 77 km, *felszíne* 594 km^2, *átlagos mélysége* 3,6 m, *legmélyebb pontja* 11 m.

a) *Hány centiméter mélyen lesz a modellünk legmélyebb pontja a felszínhez képest, ha annak hossza a terepasztalon* 1 m?

b) *Mennyi a modellünk léptéke (méretaránya)?*

c) *Hány centiliter víz kell a modellhez, ha azt valóban vízzel szeretnénk feltölteni?*

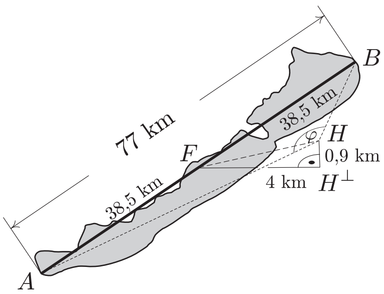
d) *A Balatont egy helikopterről fentről is megtekintjük, hogy lássuk, mennyire hasonlít a modellünkre. A tó két legtávolabbi, egymástól* 77 km*-re lévő pontját nézzük hossztengelyére merőlegesen, középpontja felé repülve.* 4 km *távolságban,* 900 m *magasról mekkora szögben látjuk a tavat?* (*14 pont*)

Megoldás. *a*) A megfelelő hosszúságok arányát felírva

$$\frac{h}{11 \text{ m}} = \frac{1 \text{ m}}{77 \text{ km}} = \frac{1 \text{ m}}{77\,000 \text{ m}}, \quad \text{amiből} \quad h = \frac{11 \text{ m}}{77\,000} \approx 0{,}0143 \text{ cm} \quad \text{adódik.}$$

b) Az előző részben felírt megfelelő hosszúságok aránya a hasonlóság aránya: $\lambda = \frac{1}{77\,000}$. Tehát a lépték $1 : 77\,000$.

c) A Balatonban $V = 594 \cdot 10^6 \cdot 3{,}6$ (m^3) víz van. A modellben $V' = \lambda^3 \cdot V \approx 0{,}468$ cl víz van.



d) Legyen a Balaton két legtávolabbi pontja A és B, a közepe F. Az AB szakaszra merőlegesen érkező helikopter a 0,9 km magasan lévő H pontból nézi az AB távolságot, a H pont merőleges vetülete a Balaton síkjára $H^{\perp}$. A feladat az $AHB\sphericalangle$ szög meghatározása.

Az $FHH^{\perp}\triangle$ derékszögű, így

$$\overline{FH}=\sqrt{4^2+0{,}9^2}=4{,}1\ \text{km}.$$

$FH\perp FB$, és így $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{FB}{FH}$, tehát $\varphi\approx 167{,}84^\circ$.

II. rész

5. *Egy bank a következő ajánlattal kívánja ügyfelei körét bővíteni: aki a megadott határidőig pénzét áthozza a fiókba fél éves lekötéssel, az első hat hónapban évi* 5% *kamatot kap. Az* apró betűs részt *elolvasva megtudhatjuk, hogy fél év után havi lekötéssel, évi* 1,5% *kamattal marad a fiókban a pénzünk. (A havi lekötés azt jelenti, hogy amennyiben előbb vesszük ki a pénzünket, a teljes kamatot elveszítjük a csonka hónapra.)* 1 *millió forintot teszünk be a bankba. Ezen feltételek ismeretében válaszoljunk a következő kérdésekre:*

a) *Mennyi pénzünk lesz fél év múlva?*

b) *Mennyit kamatozott egy év alatt a betett* 1 *millió forintunk?*

c) *Korábbi bankfiókunkban hagyva a pénzünket évi* 2%*-os a kamatot kapnánk havi lekötés mellett. Legfeljebb mennyi időre éri meg áthozni a pénzünket az új helyre?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Fél év alatt 5% kamattal kell számolni, de nem a teljes évre, csupán feleannyi időre. Így $1\,000\,000\cdot(1+0{,}05)^{\frac12}$, vagyis egészre kerekítve 1 024 695 Ft-unk lesz.

b) A teljes évre a kamat:

$$(1+0{,}05)^{\frac12}\cdot(1+0{,}015)^{\frac12}\approx 1{,}032\,4,$$

tehát kb. 3,24% a kamat a teljes évre.

(A második félévben már csak 1,5% volt a kamat, így $1\,024\,695\cdot(1{,}015)^{\frac12}\approx 1\,032\,352$ forintunk lett.)

b) A feladat megállapítani, hogy hány évre érdemes áthozni a pénzünket a feltételeknek megfelelően. (Feltételezzük, hogy a két bank egyéb költségei nem különböznek, és így csak a hűségidőn múlik, hogy érdemes-e átmenni egyik bankból a másikba.)

$$1\,000\,000\cdot 1{,}02^n=1\,000\,000\cdot 1{,}05^{\frac12}\cdot 1{,}015^{n-\frac12},$$

$$\left(\frac{1{,}02}{1{,}015}\right)^n=\left(\frac{1{,}05}{1{,}015}\right)^{\frac12},$$

$$n=\frac{\frac12\ln\left(\frac{1{,}05}{1{,}015}\right)}{\ln\left(\frac{1{,}02}{1{,}015}\right)}\approx 3{,}45.$$

Tehát kb. három és fél évnél kevesebb időtartam esetén megéri áthozni a pénzt az új feltételeknek megfelelően. (Vagyis hosszabb időre nem éri meg áthozni a pénzünket.)

6. *Ugorjunk másfél évet. Az egyetemek új előírása miatt a 2017-es érettségin igen sokan választották a matematikát emelt szinten. 10%-uknak 90% feletti lett az eredménye.*

a) Az emelt szinten érettségiző diákok közül véletlenszerűen megkérdezve 10-et mekkora annak az esélye, hogy közülük pontosan ketten 90% feletti érettségit tettek?

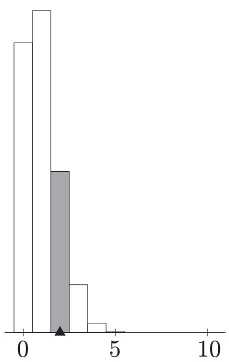
b) Internetes felmérésen 100 diákot kérdeztek meg véletlenszerűen az emelt szinten érettségizők közül. Mekkora a valószínűsége, hogy legfeljebb 2-en vizsgáztak 90% feletti eredménnyel? És annak, hogy a 100 megkérdezett diákból legfeljebb ketten vannak azok, akiknek nem sikerült 90% felett az eredményük?

c) (Az emelt szinten túlmutató kérdés.) Az OH statisztikájában kutakodunk. A 40 000 emelt szintű vizsgázó eredményét tekintve 90%-os biztonsággal hány 90% feletti eredményes vizsgázóra számíthatunk? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az érettségizők nagy száma miatt binomiális eloszlással számolhatunk. A visszatevéses urna-modell szerint 0,1 valószínűséggel választhatjuk ki a 90% feletti tanulókat, s a maradék nyolcat 0,9 valószínűséggel. Ezen tanulókat pedig $\binom{10}{2}$-féleképpen választhatjuk ki. Eszerint

$$P(X=2)=\binom{10}{2}\cdot 0{,}9^8\cdot 0{,}1^2\approx 0{,}1937.$$

Tehát kb. 19,37% annak az esélye, hogy pontosan két 90% feletti eredményű tanulót találunk az adathalmazban.



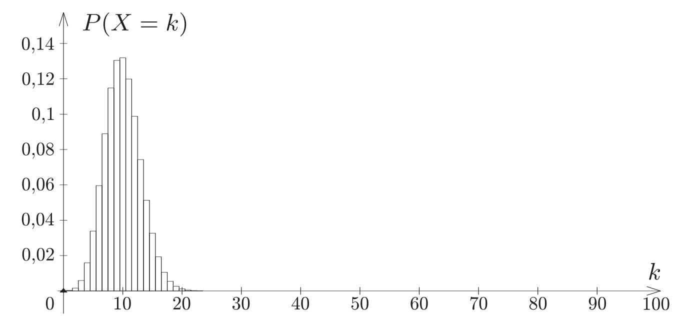
(A grafikonról jól látszik, hogy a legnagyobb esélye annak lenne, hogy egy tanulót találunk, aki a feltételnek megfelel.)

b) Annak az esélye, hogy legfeljebb két 90% feletti eredményt nyújtó diákot találjunk, azzal egyezik meg, hogy pontosan kettő, vagy pontosan egy, illetve egy ilyen diákot sem találunk a 10 tanuló között.

$$P(X\leqslant 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\sum_{i=0}^{2}\binom{100}{i}\cdot 0{,}9^{100-i}\cdot 0{,}1^i\approx$$

$$\approx 0{,}000\,027+0{,}000\,295+0{,}001\,623=0{,}001\,945.$$

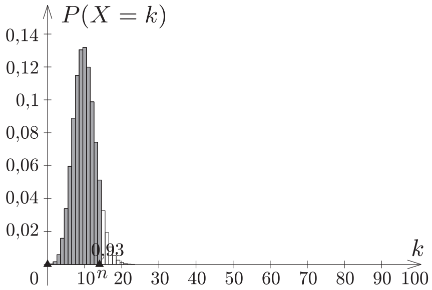
Tehát annak az esélye, hogy legfeljebb két 90% feletti eredményt író tanulót találunk, kb. 0,19%, közel nulla. (Ez a lenti grafikonon is jól leolvasható, a görbe bal széle.)



Annak az esélye, hogy legfeljebb két olyan diákot találjunk, akiknek nem sikerült 90% felett az érettségijük, megegyezik azzal, hogy 0, 1 vagy 2 ilyen diák van.

$$P(Y \leqslant 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) = \sum_{i=0}^{2} \binom{100}{i} \cdot 0{,}1^{100-i} \cdot 0{,}9^{i} \approx 0.$$

c) A feladat szerint nem szeretnénk nagyon hibázni, 90% biztonsággal akarjuk meghatározni azon vizsgázók számát, akik 90%-nál jobban teljesítettek. A kérdés tehát az, hogy legfeljebb hány ilyen tanulóra számíthatunk 90%-os biztonsággal.



Az előző grafikonokból is jól látszik, hogy eszerint azt az n értéket keressük, melynél kisebb n-ekre az oszlopok területe a teljes grafikon területének 90%-a lesz. Ez a számítás binomiális eloszlással legfeljebb számítógép segítségével (pl. GeoGebra – ld. a GEOMATECH[1] oldalán lévő statisztikai feladatokat) lenne elvégezhető, így közelítsük eloszlásunkat normális eloszlással.

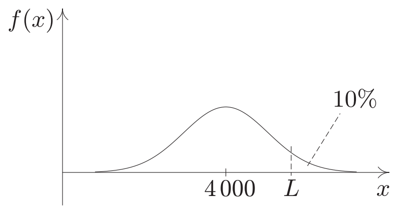
Az eloszlás várható értéke $E(X) = 0{,}1 \cdot 40\,000 = 4\,000$, szórása

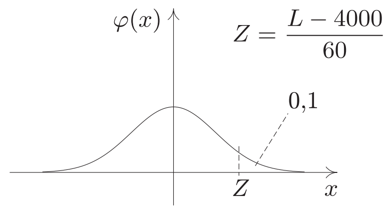
$$D(X) = \sqrt{0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 40\,000} = 60.$$

A normális eloszláshoz a görbénket transzformálnunk kell, hogy a jól ismert Gauss-görbét megkapjuk $\left(f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$:

1. toljuk el a maximumát az y-tengelyhez ($E(X)$-szel való eltolás);

2. alakítsuk úgy át, hogy területe 1 legyen (osszuk $D(X)$-szel „belül”, hogy merőleges affinitást hajtsunk végre az x-tengely irányában).





Ekkor a görbe alatti integrálás lenne a feladatunk, de „szerencsére” a függvénytáblázat $\Phi(Z)$-táblázatát használva visszakereshetjük, hogy milyen x abszcisszáig integrálva lenne a görbe alatti terület 0,9:

$$P(X \leqslant L) = \Phi\left(\frac{L-4000}{60}\right) = 0{,}9, \qquad \frac{L-4000}{60} = 1{,}28, \qquad L = 4076{,}8.$$

Tehát elegendő legfeljebb 4 077 tanulót mondani, hogy 90% biztonsággal eltaláljuk, hogy hányan írták meg 90%-nál jobban a dolgozatot.

7. *Adott a valós számok halmazán értelmezett f függvény:*

$$f : x \longmapsto \frac{x}{1-|x|}.$$

a) *Ábrázoljuk a függvényt a* $]-1;2] \setminus \{1\}$ *intervallumon.*

[1] `http://tananyag.geomatech.hu/`.

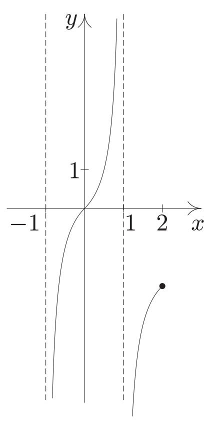
b) Adott a $g(x)=2x$ függvény. Mi lesz az $f\circ g$ függvény értékkészlete a $]-1;2]$ intervallumon?

c) Határozzuk meg az f függvény inverzét a $]-1;1[$ intervallumon, s ábrázoljuk az f^{-1} függvényt. (*16 pont*)

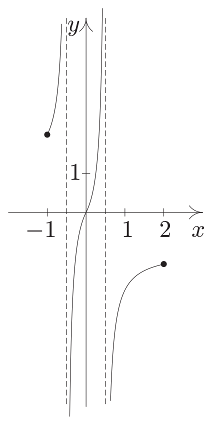
Megoldás. *a*) A függvény ábrázolásához bontsuk fel az abszolútértéket:

$$f:x\longmapsto\begin{cases}\dfrac{x}{1-(-x)}=\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{x+1}{x+1}+\dfrac{-1}{x+1}=\dfrac{-1}{x+1}+1, & \text{ha } x<0,\ x\neq-1,\\[2mm] \dfrac{x}{1-x}=-\dfrac{x-1+1}{x-1}=\dfrac{-1}{x-1}-1, & \text{ha } x\geqslant 0,\ x\neq 1.\end{cases}$$

Ezekről az alakokról jól leolvashatók a függvénytranszformációk. A megfelelő intervallumokon ábrázoljuk a függvényeket (*1. ábra*).



1. ábra



2. ábra

b) Az $f(x)\to f(2x)$ függvénytranszformáció egy x tengely irányú merőleges affinitásnak felel meg (x tengely irányában történő zsugorítás, *2. ábra*).

Természetesen ezt is meggondolhatjuk az abszolútérték bontásának segítségével:

$$f:x\longmapsto\begin{cases}\dfrac{2x}{1-(-2x)}=\dfrac{x}{\frac{1}{2}+x}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}+1, & \text{ha } x<0,\ x\neq-\dfrac{1}{2},\\[2mm] \dfrac{2x}{1-2x}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}-1, & \text{ha } x\geqslant 0,\ x\neq\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Ábrázolás nélkül is, az előzőek alapján, látható, hogy a függvény értékkészlete a teljes valós számhalmaz.

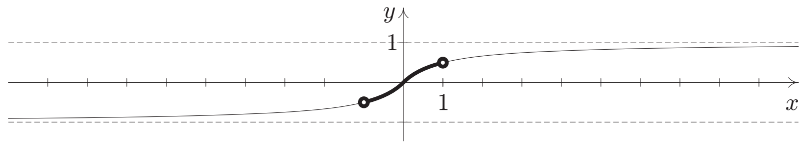
c) A függvény a $]-1;1[$ intervallumon kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, így invertálható.

$x<0$ esetén:

$$y=\frac{x}{1+x}\quad\xrightarrow{x\leftrightarrow y}\quad x=\frac{y}{1+y}\quad\longrightarrow\quad y=\frac{-1}{x-1}-1.$$

$x \geqslant 0$ esetén:

$$y = \frac{x}{1-x} \quad \xrightarrow{x \leftrightarrow y} \quad x = \frac{y}{1-y} \quad \longrightarrow \quad y = \frac{-1}{x+1} + 1.$$



A vastagon ábrázolt rész a kért $]-1;1[$ intervallumon értelmezett függvény.

8. *Lakásunk nappali szobája hatszög alakú, melynek oldalai rendre $AB = 3{,}4$, $BC = 2{,}3$, $CD = 2{,}3$, $DE = 2{,}3$, $EF = 3{,}4$, valamint $FA = 3{,}7$ méteresek. Az AB és a BC, valamint a DE és az EF oldalak merőlegesek egymásra. A szoba parkettázásához szeretnénk megállapítani az alapterületét, melyet kétféleképpen teszünk meg.*

Mi megmérjük a szoba AD átlóját, melyet 4,8 méteresnek találunk, míg fiaink a szoba F csúcsánál lévő szöget határozzák meg, melyet 120°-nak mérnek. A hosszúságot 5 cm-es pontossággal, míg a szöget 5°-os pontossággal tudjuk eszközeinkkel megmondani.

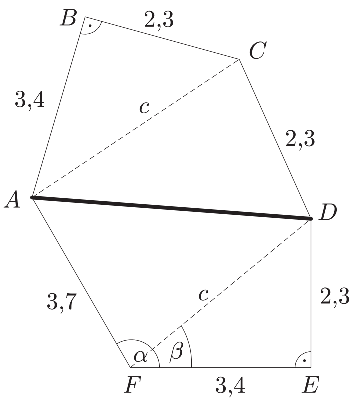
a) A szög vagy a hosszúság relatív hibája nagyobb?

b) Mekkorák a területek a két esetben?

c) Mennyire pontosan ismerjük a két esetben az AD átlót?

d) Melyik mérést fogadjuk el inkább? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Tudjuk, hogy a hosszúság abszolút hibája: $H(\overline{AB}) = 0{,}05$ m. A relatív hibája: $R(\overline{AB}) = \frac{0{,}05}{4{,}8} \approx 0{,}01$, vagyis közelítőleg 1%. A szög esetén: $H(AFE\sphericalangle) = 5^\circ$, $R(AFE\sphericalangle) = \frac{5}{120} \approx 0{,}04$, ami 4%. Tehát a szög relatív hibája a nagyobb.



b) Készítsük el a szoba vázlatrajzát. Az *ábrán* látható c oldalt Pitagorasz-tétel segítségével számíthatjuk ki:

$$c = \sqrt{2{,}3^2 + 3{,}4^2} \approx 4{,}1.$$

Az első esetben a ABC és DEF háromszögek területét két befogójuk segítségével, míg a két belső háromszög területét Heron-képlet segítségével határozhatjuk meg:

$$T = 2 \cdot \frac{2{,}3 \cdot 3{,}4}{2} + \sqrt{5{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}3 \cdot 1{,}5} + \\ + \sqrt{6{,}3 \cdot 2{,}6 \cdot 2{,}2 \cdot 1{,}5} \approx 19{,}88 \text{ m}^2.$$

A második esetben az α szög segítségével határozzuk meg AD hosszúságát (koszinusztétel). Az FED háromszögben $\operatorname{tg} \beta = \frac{2{,}3}{3{,}4}$, amiből $\beta \approx 34{,}08^\circ$.

$$AD = \sqrt{3{,}7^2 + c^2 - 2 \cdot 3{,}7 \cdot c \cdot \cos(\alpha - \beta)} \approx 5{,}33.$$

Ezután a területeket hasonlóképpen határozhatjuk meg:

$$T' = 2 \cdot \frac{2{,}3 \cdot 3{,}4}{2} + \sqrt{5{,}1 \cdot 1{,}27 \cdot 2{,}8 \cdot 1} + \sqrt{8{,}815 \cdot 1{,}715 \cdot 2{,}115 \cdot 1{,}985} \approx 18{,}38\ \mathrm{m}^2.$$

c) A hosszmérést ± 5 cm hibával végezhetjük, ezért 475 cm $< AD <$ 485 cm, a szöggel való számolásnál 530 cm-t kaptunk, tehát biztosan sokkal pontatlanabb ez az adat.

d) A két esetben – a hibaszámítás tekintetében – azonos műveletsorozatokat hajtunk végre az AD átlón, így a második esetben nagyobb hibával ismerjük a területet, mint az elsőben.

9. *A mérnökök egy gépkocsi mozgását figyelték műszerek segítségével négy másodpercen át. A pillanatnyi sebességek* (m/s-*ban*) *mért adataira a számítógép a következő függvényt illesztette:*

$$v(t) = 2{,}5t^3 - 16t^2 + 33t + 5.$$

a) *Mekkora sebességre gyorsult fel az autó az első másodperc végére?*

b) *A sebességváltás pillanatában nem gyorsult az autó. Mikor volt ez?*

c) *A gépkocsi pillanatnyi fogyasztását (centiliterben mérve)*[2] *a következő függvény írja le:*

$$F(t) = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \big(v'(t) + 50t\big).$$

Hány centiliter üzemanyag fogyott az első két másodperc alatt? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az első másodperc végére

$$v(t) = 2{,}5 \cdot 1^3 - 16 \cdot 1^2 + 33 \cdot 1 + 5 = 24{,}5\ (\mathrm{m/s}),$$

azaz 88,2 km/h sebességre gyorsult fel.

b) Amikor az autó nem gyorsul, akkor a Δt idő alatti sebességváltozása nulla. Ezek szerint a sebesség deriváltjának nullahelyét keressük.

$$v'(t) = 7{,}5 \cdot t^2 - 32 \cdot t + 33 = 0.$$

Ennek nullahelyei $t_1 = 1{,}745$ s-nál, illetve $t_2 = 2{,}522$ s-nál vannak. Ekkor nem gyorsult az autó, tehát ekkor lehettek a sebességváltás pillanatai. (Ehhez automata sebességváltót lehet elképzelni, mellyel a Forma-1 pilótái versenyeznek.)

c) A megadott függvény a gépkocsi pillanatnyi fogyasztását adja meg. Az első két másodperc alatt a gépkocsi fogyasztását ennek a függvénynek a $[0; 2]$ intervallumon vett határozott integrálja adja meg.

$$\int_0^2 F(t)\,dt = \int_0^2 2 \cdot 10^{-2} \cdot \big(v'(t) + 50t\big)\,dt =$$

$$= \int_0^2 2 \cdot 10^{-2} \cdot \big(7{,}5 \cdot t^2 - 32 \cdot t + 33 + 50t\big)\,dt =$$

$$= 2 \cdot 10^{-2} \left[7{,}5\frac{t^3}{3} + 18\frac{t^2}{2} + 33t\right]_0^2 = 2{,}44\ (\mathrm{cl}).$$

Székely Péter
Budapest

[2]Sajnálatos módon a feladatba hiba csúszott, eredetileg a centiliter szó helyett liter szerepelt. A hibáért elnézést kérünk.

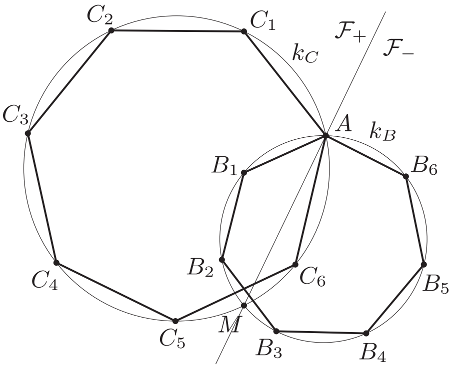
Matematika feladat megoldása

B. 4671. *Legyenek $AB_1B_2\dots B_6$ és $AC_1C_2\dots C_6$ azonos körüljárású szabályos hétszögek. Mutassuk meg, hogy a $B_1C_1, B_2C_2, \dots, B_6C_6$ egyenesek egy ponton mennek át.*

(*5 pont*) Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

Megoldás. Legyen az $AB_1B_2\dots B_6$ hétszög körülírt köre k_B, az $AC_1C_2\dots C_6$ hétszög körülírt köre pedig k_C. A k_B és k_C körök átmennek A-n. Jelölje a két kör A-tól különböző metszéspontját M (ha a két kör A-ban érinti egymást, akkor $M\equiv A$). Megmutatjuk, hogy $i=1,2,\dots,6$ esetén a B_iC_i egyenesek mindegyike átmegy M-en.

Legyen $\alpha=\frac{180^\circ}{7}$. Ez a szabályos hétszögek oldalaihoz tartozó kerületi szög mind a k_B, mind pedig a k_C körben. Az α szög segítségével meg fogjuk határozni az AMB_i és AMC_i szögeket. Két fő esetet különböztetünk meg, annak megfelelően, hogy a B_i és C_i csúcsok az AM egyenes (ha a két kör A-ban érinti egymást, akkor az A-beli közös érintőjük) által meghatározott két félsík közül ugyanabba vagy különbözőekbe esnek.



1. ábra

Feltehetjük, hogy a hétszögek pozitív körüljárásúak. Nevezzük az AM egyenes által meghatározott félsíkok közül pozitívnak azt, amelyik a k_B és k_C körök A-ból M-be menő ívei közül a pozitív irányút tartalmazza, negatív félsíknak pedig a másikat, s jelölje e nyílt félsíkokat $\mathcal{F}_+$ és $\mathcal{F}_-$ (*1. ábra*). Ekkor a kerületi szögek tételét alkalmazva kapjuk, hogy

$$AMB_i\sphericalangle=\begin{cases}AMB_1\sphericalangle+B_1MB_2\sphericalangle+\ldots+B_{i-1}MB_i\sphericalangle=i\alpha, & \text{ha } B_i\in\mathcal{F}_+,\\ AMB_6\sphericalangle+B_6MB_5\sphericalangle+\ldots+B_{i+1}MB_i\sphericalangle=(7-i)\alpha, & \text{ha } B_i\in\mathcal{F}_-,\end{cases}$$

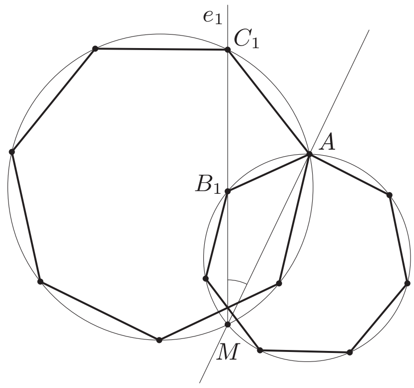
s ugyanígy

$$AMC_i\sphericalangle=\begin{cases}i\alpha, & \text{ha } C_i\in\mathcal{F}_+,\\ (7-i)\alpha, & \text{ha } C_i\in\mathcal{F}_-.\end{cases}$$

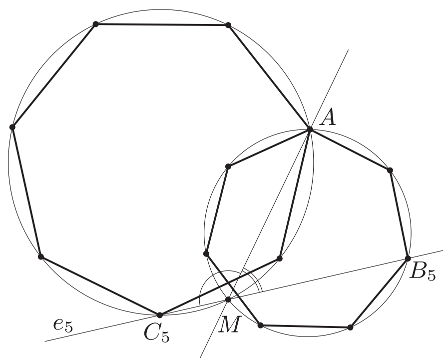
Ezek után már egyszerűen beláthatjuk, hogy az M, B_i és C_i pontok minden $i=1,2,\dots,6$ esetén egy egyenesbe esnek. Ha $M\equiv B_i$ vagy $M\equiv C_i$, akkor ez nyilvánvaló. Ha B_i és C_i közül mindkettő az $\mathcal{F}_+$ vagy az $\mathcal{F}_-$ félsíkba esik, akkor $AMB_i\sphericalangle = AMC_i\sphericalangle$, és mivel B_i és C_i az AM egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak, ezért ebből következik, hogy B_i és C_i ugyanazon az M-ből kiinduló félegyenesen helyezkednek el (*2. ábra*). Ha viszont B_i és C_i különböző félsíkokban vannak, akkor

$$AMB_i\sphericalangle + AMC_i\sphericalangle = i \cdot \alpha + (7-i) \cdot \alpha = 180^\circ,$$

s mivel B_i és C_i az AM egyenesnek különböző oldalain vannak, ezért ebből következik, hogy B_i, C_i és M kollineárisak (*3. ábra*).

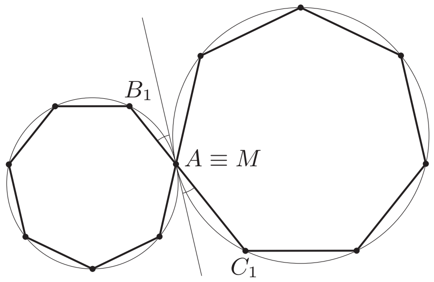


2. ábra

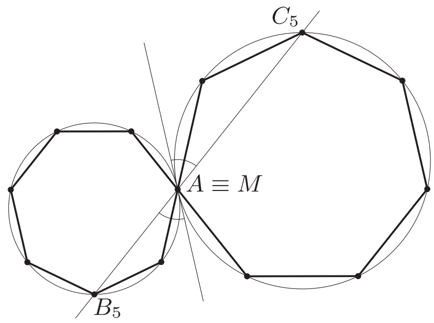


3. ábra

Az előző bekezdésben leírtak $M \equiv A$ esetén is igazak, csak azt kell meggondolnunk, hogy ekkor $AMB_i\sphericalangle$ és $AMC_i\sphericalangle$ a megfelelő érintőszárú kerületi szögeket jelöli (*4.* és *5. ábra*).



4. ábra



5. ábra

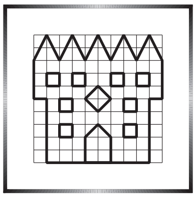
Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Kocsis Júlia (Dunakeszi, Radnóti M. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. A megoldás során nem használtuk ki, hogy a sokszögek oldalszáma 7. Ugyanezzel a gondolatmenettel belátható az állítás tetszőleges n-szögekre is. Sőt tulajdonképpen azt bizonyítottuk be, hogy ha tekintjük az egymást az A pontban metsző k_B

és k_C körvonalak azon B_φ és C_φ pontjait, melyekre az ugyanolyan irányítású AB_φ és AC_φ ívekhez tartozó középponti szögek megegyeznek, akkor a $B_\varphi C_\varphi$ egyenesek átmennek k_B és k_C másik (esetleg A-val egybeeső) metszéspontján.

80 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 24 versenyző: Andó Angelika, Baran Zsuzsanna, Bodolai Előd, Cseh Kristóf, Csépai András, Döbröntei Dávid Bence, Fekete Panna, Gál Boglárka, Glattfelder Hanna, Hansel Soma, Kocsis Júlia, Kovács Péter Tamás, Nagy Dávid Paszkál, Németh Balázs, Papp Marcell, Polgár Márton, Schrettner Bálint, Schwarcz Tamás, Szebellédi Márton, Szécsényi Nándor, Tomcsányi Gergely, Tóth Viktor, Varga-Umbrich Eszter, Williams Kada. 4 pontos 24, 3 pontos 10, 2 pontos 11, 1 pontos 7, 0 pontos 4 dolgozat.



A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (481–486.)

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

K. 481. Mennyi a számok összege a 20×20-as szorzótáblában? (Az *ábrán* az 5×5-ös szorzótáblát látjuk.)

K. 482. Egy bicikligyárban az elkészült bicikliket szisztematikusan tesztelik. Minden ötödiken a fékeket, minden negyediken a fogaskerekeket és minden hetediken a váltót. 435 biciklit gyártanak naponta. Hány olyan bicikli kerül ki a gyárból naponta, amelyen semmit sem tesztelnek?

K. 483. Hányféleképpen lehet felírni egy kör kerületére az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat úgy, hogy semelyik két szomszédos szám összege se legyen többszöröse a 3, 5 és 7 egyikének se?

K. 484. Írjuk 1-től n-ig a természetes számokat egy-egy kártyára. Melyik az a legkisebb n, melyre akárhogy is osztjuk két csoportra a kártyákat, az egyikben lesz két kártya, amelyeken szereplő számok összege négyzetszám?

K. 485. Az óriás és Babszem Jankó elmennek a sárkány várához. Az óriás ugyan 3,5 m-rel magasabb Jankónál, de nem éri fel a földön állva a várfal tetejét. Ezért felemeli a tenyerén Babszem Jankót a feje fölé, akinek így éppen sikerül felkapaszkodnia a 6 méter 20 cm magas várfalra. Az Óriásnak hosszú keze van, a testmagasságának 40%-ával a feje fölé tudja nyújtani a kezét, míg Babszem Jankó csak a magasságának 20%-áig tud felnyúlni a feje fölé. Milyen magas az Óriás, illetve Babszem Jankó?

K. 486. Hány olyan ötjegyű pozitív egész szám van, melyben a számjegyek összege és szorzata is páros?

Beküldési határidő: 2016. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1322–1328.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1322. Melyik az a legnagyobb hétjegyű szám, amit úgy kapunk, hogy egy számtani sorozat három egymást követő, pozitív egész tagját közvetlenül egymás után írjuk?

Quantum, 1998

C. 1323. Egy derékszögű háromszögben az A csúcsból induló szögfelező BC oldallal való metszéspontja legyen T. A BC oldal felezőpontja F, az F-ben állított felezőmerőleges metszéspontja a háromszög másik oldalával M. Mekkorák a háromszög szögei, ha tudjuk, hogy $ATFM$ deltoid? (Az A a háromszög bármely csúcsát jelölheti.)

Feladatok mindenkinek

C. 1324. Ági szívecske alakú mézeskalácsokat süt karácsonyra. A mézecskalács formája egy 6 cm oldalú négyzet és két szomszédos oldalához illeszkedő félkör egyesítéseként jön létre. Az összegyúrt tésztát mindig ugyanolyan vastagságúra és egész deciméter oldalhosszúságú négyzet alakba nyújtja (a méreten túl lógó részeket levágja, és a testvérének adja). A szívecskéket úgy vágja ki a négyzetből, hogy egyik sarkához illeszti a szaggató forma sarkát, hogy az oldalak is egybeessenek, majd ugyanebben az irányban helyezi el a lehető legszorosabban újra és újra a szaggatót a kivágott szívek mellé. Hány szívecskét tud sütni Ági, ha kezdetben egy 1 m^2-es tésztája van, és a formázás utáni maradékot mindig újra gyúrja?

C. 1325. Jelölje a_n a $\sqrt{n}$-hez legközelebbi egész számot. Mekkora az

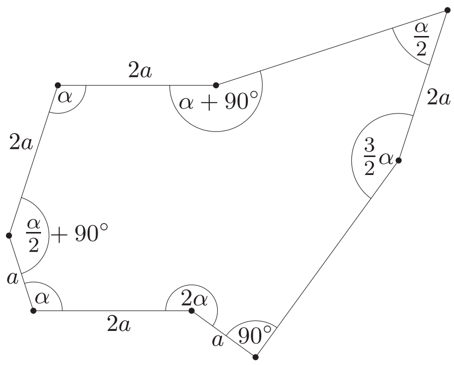
$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{484}}$$

összeg?

C. 1326. Egy derékszögű trapéz alakú telek kerülete 400 m. A trapéz egyik szára az alappal 45°-os szöget zár be. Mekkora alap esetén lenne a telek területe a lehető legnagyobb?

Feladatok 11. évfolyamtól

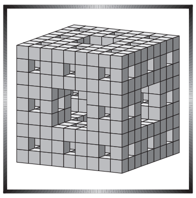
C. 1327. Hogyan tudjuk az *ábrán* látható tulajdonságokkal rendelkező nyolcszöget egy belső pontjából induló szakaszokkal négy részre darabolni úgy, hogy a kapott részekből két, egybevágó szabályos ötszöget rakhassunk össze?



C. 1328. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$2^{\sin^2 x} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}.$$

Beküldési határidő: 2016. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4750–4758.)

B. 4750. Anna szerint a háromjegyű, Balázs szerint az ötjegyű számok közül választva lesz nagyobb a valószínűsége annak, hogy a kapott számban van 6-os számjegy. Melyiküknek van igaza?

(*3 pont*) *Matlap* (Kolozsvár)

B. 4751. Igazoljuk, hogy $3^n + 5^n$ egyetlen pozitív egész n esetén sem négyzetszám.

(*4 pont*) Javasolta: *Somlai Gábor* (Budapest)

B. 4752. Egy egyenes a közös pont nélküli k_1, illetve k_2 körből rendre az egyenlő hosszúságú AB és CD húrokat metszi ki. A metszéspontok sorban A, B, C és D. Egy P pontra teljesül, hogy PA érinti a k_1, PD pedig a k_2 kört. Adjuk meg a $\frac{PA}{PD}$ arányt a két kör sugarának felhasználásával.

(*4 pont*) *M&IQ*

B. 4753. Bizonyítsuk be, hogy bármely $x > 0$ számra

$$\sqrt{2x\sqrt{(2x+1)\sqrt{(2x+2)\sqrt{2x+3}}}} < \frac{15x+6}{8}.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Deák Imre* (Székelyudvarhely)

B. 4754. Az ABC háromszög D belső pontján átmenő AD, BD és CD egyenesek a szemközti oldalakat rendre az A_1, B_1 és C_1 pontokban metszik. Az A_1B_1 szakasz felezőpontja C_2, B_1C_1 felezőpontja A_2, C_1A_1 felezőpontja pedig B_2. Mutassuk meg, hogy az AA_2, BB_2 és CC_2 egyenesek egy ponton mennek át.

(*5 pont*) Javasolta: *Miklós Szilárd* (Herceghalom)

B. 4755. Az ABC háromszögben a CB, illetve a CA oldalhoz írt k_A, illetve k_B körök a megfelelő oldalakat a D, illetve az E pontban érintik. Mutassuk meg, hogy a DE egyenes a k_A és k_B körökből egyenlő hosszúságú húrokat metsz ki.

(*4 pont*) Javasolta: *Williams Kada* (Szeged, Radnóti M. Gimn.)

B. 4756. Adott az egységkocka belsejében néhány gömb, melyek felszínének összege 2015. Mutassuk meg, hogy

a) van olyan egyenes, amely ezek közül legalább 500 gömböt metsz,

b) van olyan sík, amely ezek közül legalább 600 gömböt metsz.

(*6 pont*) Erdélyi Magyar Matematikaverseny

B. 4757. Tízes számrendszerben a k darab 1-esből álló számot jelölje A_k. Hány olyan pozitív egész szám van, amely nem állítható elő az A_k valamely többszöröse számjegyeinek összegeként?

(*6 pont*) Javasolta: *Williams Kada* (Szeged, Radnóti M. Gimn.)

B. 4758. Legalább hány különböző oldalegyenese van egy (nem feltétlenül konvex) 2015-szögnek?

(*6 pont*) Javasolta: *Lenger Dániel* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2016. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Novemberi számunkban a **B. 4748.** feladat hibásan jelent meg. A feladat szövegét honlapunkon kijavítottuk, és versenyzőinket e-mailben is értesítettük a változásról. Mivel a hiba elég korán kiderült, a feladat beküldési határideje (december 10.) nem változik. A feladat javított szövege a következő:

B. 4748. Forgassuk meg a $\mathcal{H}$ háromszöget egy, a síkjában fekvő, de őt nem metsző egyenes körül. Bizonyítsuk be, hogy a keletkezett test térfogata megegyezik $\mathcal{H}$ területének és a $\mathcal{H}$ súlypontja által a forgatás során leírt kör kerületének a szorzatával.

(*5 pont*)

A hibáért és az okozott kellemetlenségért elnézést kérünk.

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (656–658.)

A. 656. Legyen $p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ valós együtthatós polinom, amelyre $x\geqslant 0$ esetén $p(x)\geqslant 0$. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges c, d pozitív számok esetén

$$a_0+a_1(c+d)+a_2(c+d)(c+2d)+\ldots+a_n(c+d)(c+2d)\ldots(c+nd)\geqslant 0.$$

A. 657. Legyen $\{x_n\}$ a van der Korput sorozat, azaz ha a pozitív egész n bináris alakja $n=\sum_i a_i2^i$ $\big(a_i\in\{0,1\}\big)$, akkor $x_n=\sum_i a_i2^{-i-1}$. Legyen V a síkbeli (n,x_n) pontok halmaza, ahol n pozitív egész. Legyen G az a gráf, melynek csúcshalmaza V, és amelyben két különböző csúcsot, p-t és q-t akkor és csak akkor kötjük össze éllel, ha van olyan – a koordinátatengelyekkel párhuzamos állású – R téglalap, melyre $R\cap V=\{p,q\}$. Igazoljuk, hogy G kromatikus száma véges.

Schweitzer Miklós emlékverseny, 2015

A. 658. A háromdimenziós, origó középpontú egységgömb S^2 határán egy w szélességű sávon egy w szélességű, origóra szimmetrikus gömbövet értünk. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $c>0$ konstans, amelyre minden pozitív egész n esetén S^2 lefedhető n darab egyforma szélességű sávval úgy, hogy minden pontot legfeljebb $c\cdot\sqrt{n}$ sáv tartalmaz.

Schweitzer Miklós emlékverseny, 2015

Beküldési határidő: 2016. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Novemberi számunkban az **A. 653.** és az **A. 654.** feladat is pontatlanul vagy hibásan jelent meg. A feladatok szövegét honlapunkon kijavítottuk, és versenyzőinket e-mailben is értesítettük a változásról. Mivel a hiba elég korán kiderült, a feladatok beküldési határideje (december 10.) nem változik. A feladatok javított szövege a következő:

A. 653. Legyen $n\geqslant 2$ egész. Igazoljuk, hogy akkor és csak akkor léteznek olyan $a_1,\ldots,a_{n-1}$ egész számok, amelyekre

$$a_1\operatorname{arctg}1+a_2\operatorname{arctg}2+\ldots+a_{n-1}\operatorname{arctg}(n-1)=\operatorname{arctg}n,$$

ha $\big(1^2+1\big)\big(2^2+1\big)\ldots\big((n-1)^2+1\big)$ osztható $\big(n^2+1\big)$-gyel.

A. 654. Legyen $p(x)$ olyan legfeljebb n-edfokú polinom, amire $0<x\leqslant 1$ esetén $\big|p(x)\big|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$. Mutassuk meg, hogy $\big|p(0)\big|\leqslant 2n+1$.

A hibákért és az okozott kellemetlenségért elnézést kérünk.

MŰEGYETEM 1782

BME TTK
MATEMATIKA

Miért minket válassz?

- Matematika képzésünk 2015-ben is első a QS World University Rankings magyar listáján.
- Matematika BSc képzésünk a sikeres nemzetközi tapasztalatokra épülve újult meg.
- A Modellalkotási szemináriumon a gyakorlat neves szakértői adnak betekintést az alkalmazásokba.
- A Témalabor kurzus gyakorlati tapasztalatot és szakmai kapcsolatokat ad a választott témában.
- Személyes tutorrendszer, személyes támogatás.

Matematika BSc **BSc**

Alapozás után, a harmadik félévtől:

- elméleti és alkalmazott specializáció;
- adattudomány, mérnöki matematika, operációkutatás és sztochasztika sáv.

Alkalmazott matematikus MSc **MSc**

A specializációk és képzési nyelvük:

- alkalmazott analízis, magyar;
- operációkutatás, magyar;
- pénzügy-matematika, angol;
- sztochasztika, angol.

Matematikus MSc **MSc**

Többféle tanulmányi rend:

- analízis vagy optimalizálás specializáció,
- személyre szabott egyéni tanulmányi rend.
  Felkészítés a tudományos karrierre.

Matematikus PhD **PhD**

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Elhelyezkedési lehetőségek széles választéka

bankok

biztosítók

vállalati fejlesztőcsoportok

startup cégek

piacvezető nemzetközi nagyvállalatok

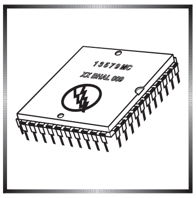
informatikai vállalkozások

államigazgatás

egyetemi intézetek és tanszékek

MTA kutatóintézetek

http://felvi.math.bme.hu



Gráfalgoritmusok 3.

Az előző részekben a szélességi és a mélységi keresés, illetve bejárás algoritmusaival ismerkedtünk meg. Nézzük meg példák segítségével, hogy miként használhatók föl ezek az algoritmusok gráfokra visszavezethető problémák megoldására. A továbbiakban több olyan feladatot is megvizsgálunk, amelyek a Nemes Tihamér Verseny és az Informatika OKTV Programozói kategóriájában lettek kitűzve. A feladatok teljes szövege elérhető a `http://nemes.inf.elte.hu` oldalon, ezért itt a cikkben csak a probléma lényegét írjuk le, vagy a feladat szövegéből idézünk.

1. probléma (OKTV 2014/15, második forduló, 3. feladat). Bergengócia vasúthálózata olyan, hogy bármely városból bármely másik városba csak egyféleképpen lehet eljutni. Minden vonat a fővárosból (1-es sorszámú város) indul, és valamely olyan városig megy, ahonnan már nincs tovább vasúti pálya. A városok száma N ($2 \leqslant N \leqslant 10\,000$), a vasúti pálya bármely városból legfeljebb 10-felé ágazhat. Két város között a vonatút hossza a köztük levő `vasútállomások száma + 1`. Készítsünk programot, amely megadja a leghosszabb olyan vonatút hosszát, ahol a vasút nem ágazik el!

A feladat leírásából azonnal látható, hogy a városok tekinthetők egy (irányítatlan) gráf csúcsainak, a közvetlen vasúti kapcsolatok pedig a csúcsok közötti éleknek. Mivel bármely két kiválasztott város között pontosan egy útvonal van, ezért a gráfban nincs kör. Azt is tudjuk még, hogy az 1-es számú város kitüntetett, innen indulnak a vonatok, tehát a gráf azon részét kell vizsgálnunk, amely innen elérhető. A fővárosból nyilván minden városhoz vezet vonatút, ezért egy összefüggő gráfunk van. A feladatot leíró gráf tehát körmentes és összefüggő, vagyis egy fa, amelynek az 1-es számú csúcsa a gyökere.

A feladatban akár 10 000 város is szerepelhet, ami azt jelenti, hogy egy 0 vagy 1 értékeket tartalmazó szomszédsági mátrix a legegyszerűbb esetben $10\,000 \times$ $\times\, 10\,000 \times 1$ bájton tárolható, tehát a tárolása 100 MB memóriaterületet igényel. Most azonban ennél sokkal kevesebb hely is elegendő, mivel egy csúcshoz legföljebb 10 él csatlakozik. Tároljuk tehát egy $10\,000 \times 10$-es két dimenziós tömbben a kapcsolatokat. Az `él[i,j]` legyen az i-edik csúcs j-edik szomszédja (a szomszédok sorrendje most nem lényeges, helyezzük el őket egyszerűen a bemenetről való olvasás sorrendjében). Fölvehetünk még egy `fok[i]` táblázatot, amely megadja, hogy az i-edik csúcsnak hány szomszédja van (ez a csúcs fokszáma). Ebből tudni fogjuk, hogy az `él[i,j]` tömb első `fok[i]` számú eleme egy szomszédos csúcs sorszáma, a nagyobb indexű elemek nem jelentenek semmit.

A feladat megoldásához először készítsük el a bemenet földolgozásával az `él` és a `fok` tömböket (melyek indexelése most induljon 1-től). Adott tehát N város 1-től sorszámozva, és valahány szomszédsági kapcsolat, amelyek számpárokként olvashatók a bemeneti állományból.

```
Előkészítés
    Be: N
    fok[minden csúcsra] = 0
    Ciklus amíg nincs vége a bemenetnek
        Be: csúcs1,csúcs2
        fok[csúcs1] := fok[csúcs1]+1
        él[csúcs1][fok[csúcs1]] := csúcs2
        fok[csúcs2] := fok[csúcs2]+1
        el[csúcs2][fok[csúcs2]] := csúcs1
    Ciklus vége
Előkészítés vége
```

Folytassuk a megoldás lényegi részével. Kérdés, hogy vajon milyen módon találhatnánk meg a leghosszabb elágazás nélküli rész(ek) hosszát? A megismert gráfalgoritmusok közül a mélységi bejárás tűnik a feladathoz megfelelőnek. Legyen a fa gyökere, tehát az 1-es csúcs, a start csúcs. A mélységi bejárás a pontosan két szomszéddal rendelkező csúcsokon egyenesen halad előre, amíg egy olyan csúcshoz nem ér, amelynek csak egy szomszédja van – ezeket a fában levélnek hívjuk – vagy egy olyan csúcshoz, amelynek kettőnél több szomszédja van. Ezt a tulajdonságot kihasználva módosítsuk az algoritmust úgy, hogy számítsa ki a keresett útvonalak hosszát.

A fa önmagában is egy rekurzív struktúra, hiszen bármely csúcs tekinthető gyökérnek, amelyből szintén egy fa ágai nőnek. A bejárás során bármely csúcsnál tartunk, az onnan kiinduló, még el nem ért részgráf szintén egy fa, amelynek a gyökere az aktuális csúcs. Induljunk ki tehát a rekurzív mélységi bejárás algoritmusából, és módosítsuk azt. A neve legyen `MBR_hossz`, és tartalmazzon még egy paramétert, amely azt mutatja, hogy milyen hosszú egy megfelelő, eddig talált út, amely az aktuális csúcshoz vezet. Ha a hívó 0 értékkel hív egy csúcsot, azzal jelzi, hogy 2-nél magasabb fokszámú, tehát nem lehet egy keresett út része. Itt legföljebb indulhat egy megfelelő út. A hívó nullánál nagyobb argumentuma jelzi, hogy egy megfelelő úton járunk, egy kettes fokszámú szomszédtól érünk ide, és az adott csúcstól függ, hogy mi a folytatás. Az eredmény előállításához a rekurzív eljárást alakítsuk függvénnyé, amely adja vissza a belőle induló fa rész leghosszabb megfelelő útvonalának hosszát. Így a fa gyökerének hívása a teljes gráfban található leghosszabb megfelelő út hosszát adja, vagyis a feladat megoldását. Rekurzív függvényünk tehát bármely csúcsnál a csúcs fokszáma és a kapott hossz argumentum alapján a következőket teheti:

- ha egy levélnél vagyunk, akkor az argumentumként kapott hossznál eggyel nagyobb értéket kell visszaadnunk, hiszen egy megfelelő út végére értünk;
- ha egy olyan csúcsnál járunk, amelynek fokszáma kettő, akkor meghívjuk a rekurzív függvényt eggyel nagyobb hossz argumentummal a még el nem ért szomszédos csúcsra, és visszaadjuk a hívónak az onnan kapott értéket;
- ha a fokszám meghaladja a kettőt, akkor meghívjuk `0` hosszúsággal az összes, még be nem járt faághoz vezető szomszédos csúcsra a rekurzív függvényt. Ezen hívások eredményeit és az aktuális csúcs hívásakor kapott `hossz+1`-et összehasonlítjuk, és a legnagyobb értéket adjuk eredményként vissza. A `hossz`

növelése itt is érthető, hiszen az aktuális csúccsal szintén egy megfelelő útvonal végére értünk.

Látszik, hogy a `hossz` paraméterben kapott érték növelése az elágazás mindegyik részében szerepel, de a gondolatmenetet jobban tükrözi, ha nem emeljük ki az elágazások elé. Ezek alapján a következő algoritmust készíthetjük el:

```
Leghosszabb elágazás nélküli út hossza(gráf, él, fok)
    jártunk[minden csúcsra] := nem
    MBR_hossz(0)
Leghosszabb elágazás nélküli út hossza vége

MBR_hossz(csúcs,hossz)
    jártunk[csúcs] := igaz
    Ha fok[csúcs] = 1 akkor
        MBR_hossz := hossz+1
    Különben ha fok[csúcs] = 2 akkor
        szomszéd := el[csúcs][1]
        Ha jártunk[szomszéd] akkor szomszéd := el[csúcs][2]
        MBR_hossz := MBR_hossz(szomszéd,hossz+1)
    Különben
        hossz := hossz+1
        Ciklus sz := 1-től fok[csúcs]-ig
            szomszéd := él[csúcs][sz]
            Ha nem jártunk[szomszéd] akkor
                akthossz := MBR_hossz(szomszéd,0)
                Ha akthossz > hossz akkor hossz := akthossz
            Elágazás vége
        Ciklus vége
        MBR_hossz := hossz
    Elágazás vége
MBR_hossz vége
```

Az algoritmus helyes eredményt ad minden olyan gráfra, amelyben legalább egy él van az induló csúcsból, de a feladat leírása alapján ez föltételezhető. A feladat megoldását tehát megkapjuk a mélységi bejárás rekurzív algoritmusának módosításával.

2. probléma (Nemes Tihamér Verseny 2014/15, 9–10. osztályosok, 2. forduló, 3. feladat). Egy kémszervezetben minden tagnak legfeljebb két beosztottja lehet. Az üzenetek a tagoktól 1 nap alatt jutnak el a közvetlen beosztottjaikhoz. A főnök az 1-es sorszámú tag. Készíts programot, amely megadja, hogy a főnöktől induló üzenetet az üzenetküldéstől számítva hányadik napon kapja meg a legtöbb tag!

A standard bemenet első sora a tagok számát tartalmazza ($2 \leqslant N \leqslant 10\,000$), majd $N-1$ sorban a kapcsolatok (A_i, B_i) leírása következik, ami azt jelenti, hogy az A_i sorszámú tag közvetlen beosztottja a B_i sorszámú tag ($1 \leqslant A_i \neq B_i \leqslant N$).

A feladat leírásából látszik, hogy most is egy fával van dolgunk, amelynek a gyökere az 1-es számú csúcs. A bemeneti számpárok rendezettek, ezért tekintsük a gráfot irányítottnak. Mivel minden csúcs legföljebb két kimenő élt tartalmaz, ezért az előző feladathoz hasonlóan érdemes egy $2 \cdot N$ méretű `él` táblázatot fölvenni a kapcsolatok tárolására. A `fok` tömbre most nincs is szükségünk: jelöljük az `él` táblázat második oszlopában negatív értékkel, ha csak egy kivezető él van az adott csúcsból, vagy írjunk mindkét oszlopba negatív számot, ha a csúcs egy levél.

A feladat megoldása egy maximális érték kiválasztását jelenti. Ezt akkor tudjuk megtenni, ha bejárjuk a fát és minden csúcsnál tudjuk, hogy milyen távol van a kezdő csúcstól. Úgy tűnik, hogy a szélességi bejárás segíthet a megoldásban, mivel az algoritmus a `start` csúcstól vett távolságuk sorrendjében éri el a csúcsokat. Most az útvonalakat nem akarjuk megismerni, ezért a `honnan` táblázatra nincs szükségünk, sőt a `jártunk` tömb sem kell, mert egy fában nem érhetünk el egy csúcsot kétféle úton. De szükségünk lesz egy N méretű táblázatra, amelybe a bejárás közben bejegyezzük a csúcsok távolságát az 1-es csúcstól.

A bemeneti adatok feldolgozása és az él táblázat kitöltése után következik a bejárás az irányított gráfban, ami csak annyiban bővül az eredeti szélességi bejáráshoz képest, hogy minden elért csúcs esetén megadja, hogy a szomszédjai távolsága eggyel nagyobb a csúcs távolságánál.

```
Szélességi bejárás – távolságok(él)
    Sor_legyen_üres
    Sorba(1)
    távolság[1] = 0
    Ciklus amíg nem üres a Sor
        Sorból(csúcs)
        szomszéd := él[csúcs][1]
        Ha szomszéd > 0 akkor
            Sorba(szomszéd)
            távolság[szomszéd] = távolság[csúcs]+1
            szomszéd := él[csúcs][2]
            Ha szomszéd >0 akkor
                Sorba(szomszéd)
                távolság[szomszéd] = távolság[csúcs]+1
            Elágazás vége
        Elágazás vége
    Ciklus vége
Szélességi bejárás – távolságok vége
```

A bejárás lefutása után minden, az 1-es csúcsból elérhető csúcsra megkapjuk a tőle való távolság értékét, és nincs más dolgunk, mint a maximumot kiválasztani a `távolság` tömbből.

Feladatok:

1. Módosítsuk az 1. probléma rekurzív megoldását úgy, hogy ne a fa gyökétől induljon a bejárás. Vajon helyes eredményt kapunk ebben az esetben is? Milyen csúcsoktól indulva kapunk helyes eredményt?

2. Módosítsuk a mélységi bejárás nem rekurzív algoritmusát úgy, hogy az 1. probléma megoldását adja!

3. Olvassuk el a Nemes Tihamér Verseny 2014/15, 9–10. osztályosok, 3. forduló, 2. feladat feladatát, és gondoljuk végig, hogy pontosan miben különbözik az eddig megoldott problémáktól! Oldjuk meg az eddig megismertek alapján (kisebb bemeneti értékekre) a feladatot! Gondoljuk végig, mire volna szükség a megoldáshoz nagyobb bemeneti értékek esetén!

Schmieder László

Néhányan a 2014–2015-ös tanév legszorgalmasabb megoldói közül

8–9. évfolyam

1. sor: *Schrettner Jakab* 8. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Tófalusi Ádám* 8. o. (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.), *Bukor Benedek* 8. o. (Selye János Gimn.), *János Zsuzsa Anna* 9. o. (Budapest, Óbudai Árpád Gimn.), *Németh Csilla Márta* 9. o. (Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Techn. Infokommunikációs Szki.).

2. sor: *Németh Balázs* 9. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Páhoki Tamás* 9. o. (Pécsi Leőwey Klára Gimn.), *Gáspár Attila* 9. o. (Földes Ferenc Gimn.), *Döbröntei Dávid Bence* 9. o. (Türr István Gimn. és Koll.), *Fekete Balázs Attila* 9. o. (Pécsi Leőwey Klára Gimn.).

3. sor: *Molnár-Sáska Zoltán* 9. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Varga-Umbrich Eszter* 9. o. (Pápai Református Koll. Gimn.), *Szemerédi Levente* 9. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Marozsák Tóbiás* 9. o. (Óbudai Árpád Gimn.), *Simon Dániel Gábor* 9. o. (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn.).

4. sor: *Keresztfalvi Bálint* 9. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Szakály Marcell* 9. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Alexy Marcell* 9. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Pszota Máté* 9. o. (Selye János Gimn.), *Vankó Miléna* 9. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.).

5. sor: *Lakatos Ádám* 9. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Rittgasszer Ákos* 9. o. (Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), *Szécsényi Nándor* 9. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Kovács Tamás* 9. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Veres Károly* 9. o. (Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimn.).

10–11. évfolyam

1. sor: *Williams Kada* 10. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Kocsis Júlia* 10. o. (Dunakeszi Radnóti Miklós Gimn.), *Szentivánszki Soma* 10. o. (Pécsi Leőwey Klára Gimn.), *Kovács Péter Tamás* 10. o. (Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimn.), *Schrettner Bálint* 10. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.).

2. sor: *Baran Zsuzsanna* 10. o. (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.), *Klász Viktória* 10. o. (Koch Valéria Gimn., Ált. Isk., Óvoda, Koll. és Pedagógiai Intézet), *Jakus Balázs István* 10. o. (Baár-Madas Református Gimn., Ált. Isk. és Koll.), *Iván Balázs* 10. o. (Mátyás Király Gimn.), *Csenger Géza* 10. o. (Selye János Gimn.).

3. sor: *Kormányos Hanna Rebeka* 10. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Mándoki László* 10. o. (ELTE Radnóti Miklós Gyak. Ált. Isk. és Gyak. Gimn.), *Andó Angelika* 10. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Lajkó Kálmán* 10. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Cseh Kristóf* 10. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.).

4. sor: *Tóth Viktor* 10. o. (Kaposvári Táncsics Mihály Gimn.), *Sallai Krisztina* 10. o. (Békés Megyei Hunyadi János Gimn., Speciális Szakisk. és Koll.), *Németh Gábor* 10. o. (Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimn.), *Várkonyi Dorka* 10. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Ardai István Tamás* 10. o. (Baár-Madas Református Gimn., Ált. Isk. és Koll.).

5. sor: *Temesvári Bence* 10. o. (ELTE Radnóti Miklós Gyak. Ált. Isk. és Gyak. Gimn.), *Coulibaly Patrik* 11. o. (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn.), *Czirkos Angéla* 10. o. (Kecskeméti Bolyai János Gimn.), *Szakács Lili Kata* 10. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Kosztolányi Kata* 10. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.).

11. évfolyam

1. sor: *Sal Kristóf* (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Forrai Botond* (Baár-Madas Református Gimn., Ált. Isk. és Koll.), *Szabó Barnabás* (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Gyulai-Nagy Szuzina* (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Asztalos Bogdán* (Baár-Madas Református Gimn., Ált. Isk. és Koll.).

2. sor: *Polgár Márton* (Németh László Gimn.), *Csorba Benjámin* (Egri Szilágyi Erzsébet Gimn. és Koll.), *Wiandt Péter* (Bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimn. és Koll.), *Németh Flóra Boróka* (Keszthelyi Vajda János Gimn.), *Szántó Benedek* (Keszthelyi Vajda János Gimn.).

3. sor: *Körtefái Dóra* (Hajdúböszörményi Bocskai István Gimn.), *Kósa Szilárd* (Sárbogárdi Petőfi Sándor Gimn.), *Horváth Miklós Zsigmond* (Gymnasium Schillerstrasse), *Stein Ármin* (Bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimn. és Koll.), *Szépfalvi Bálint* (Óbudai Árpád Gimn.).

4. sor: *Somogyi Pál* (Madách Imre Gimn.), *Bencsik Bálint* (Óbudai Árpád Gimn.), *Szücs Patrícia* (Szekszárdi Garay János Gimn.), *Brányi Balázs* (Óbudai Árpád Gimn.), *Tanner Martin* (Bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimn. és Koll.).

5. sor: *Csurgai-Horváth Bálint* (Budapest XIV. Kerületi Szent István Gimn.), *Matusek Márton* (Pannonhalmi Bencés Gimn., Egyházzenei Szki. és Koll.), *Molnár Szilárd* (Mikes Kelemen Líceum), *Osváth Tibor Attila* (Budapest XIV. Kerületi Szent István Gimn.), *Szűcs Kilián Ádám* (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.).

12. évfolyam

1. sor: *Holczer András* (Pécsi Janus Pannonius Gimn.), *Fekete Panna* (Pécsi Leőwey Klára Gimn.), *Fényes Balázs* (Budapest XVI. Kerületi Szerb Antal Gimn.), *Egyházi Anna* (Németh László Gimn.), *Weisz Ambrus* (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.).

2. sor: *Fehér Zsombor* (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Fehér Balázs* (Egri Szilágyi Erzsébet Gimn. és Koll.), *Nagy-György Pál* (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Dombai Tamás* (Szekszárdi Garay János Gimn.), *Csathó Botond* (Debreceni Református Koll. Dóczy Gimn.).

3. sor: *Olosz Balázs* (Pécsi Tudományegyetem Babits Mihály Gyak. Gimn. és Szki.), *Nagy Gergely* (Szegedi Tudományegyetem Ságvári Endre Gyak. Gimn.), *Janzer Barnabás* (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Porupsánszki István* (Földes Ferenc Gimn.), *Schwarcz Tamás* (Budapest XIII. Kerületi Berzsenyi Dániel Gimn.).

4. sor: *Di Giovanni Márk* (Révai Miklós Gimn. és Koll.), *Berta Dénes* (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Bereczki Zoltán* (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Marosvári Kristóf* (Keszthelyi Vajda János Gimn.), *Mócsy Miklós* (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.).

5. sor: *Mándoki Sára* (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Katona Dániel* (Budapest XIII. Kerületi Berzsenyi Dániel Gimn.), *Leitereg Miklós* (Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), *Kovács Balázs Marcell* (ELTE Radnóti Miklós Gyak. Ált. Isk. és Gyak. Gimn.), *Trócsányi Péter* (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.).

Informatikából kitűzött feladatok

I. 388. Ma már mindenki számára megszokott, hogy a térképek északi tájolásúak, de ez alig néhány száz éve van így. Korábban az adott kultúrkörnek megfelelő irányt használtak. Az egyiptomiak a Nílus folyásirányát, az amerikai telepesek a vándorlás irányát (nyugat), az európaiak pedig északot.

Ebben a feladatban csak olyan térképeket használunk, amelyek a négy fő égtáj valamelyike szerint tájoltak. A feladatban szereplő térképek más és más céllal készültek, más és más nevezetes pontok szerepelnek rajtuk. Ezen pontok koordinátáinak ismeretében kell megállapítanunk az egyes térképek tájolását. A térképeken az origó más és más pontban lehet.

`terkep.be`	`terkep.ki`
`6 E`	`E`
`4 2 8 10 6 2 7 3 5 8 1 9 9`	`N`
`2 1 8 1 7 5 8`	`X`
`2 8 0 4 3 4 2`	`K`
`4 2 3 10 5 7 6 3 5 7 7 7 4`	`D`
`3 4 0 2 5 2 0 7 4 0`	`K`
`2 7 0 -3 2 -4 3`	

A bemeneti fájl első sora tartalmazza a térképek ($T \leqslant 50$) számát és attól egy szóközzel elválasztva az első térkép tájolását (`E`, `K`, `D`, `N`). A következő T sor mindegyikében az első szám az adott térképen szereplő pontok (N) számát adja meg. Ezt követően N számhármas szerepel, amelyből az első szám a pont sorszáma, utána pedig annak X és Y koordinátája az adott térképen. A soron belüli határoló jel a szóköz. A pontok száma összességében legfeljebb 50. A koordináták értéke a $[-1000; 1000]$ intervallumban van az adott tájolású térképen, de a különböző térképek egyesítésével az intervallum megnőhet.

A kimeneti fájl pontosan N sort tartalmazzon, amelyben soronként egy karakter, a térkép tájolása álljon. Ha a tájolás nem állapítható meg, akkor a sorban az `X` karakter szerepeljen.

Beküldendő egy tömörített `i388.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás vázlatos leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 389 (É). Az atlétika női versenyei közül a legösszetettebb a hétpróba. Ezzel foglalkozó adatbázis-kezelési feladat volt az **I. 338**-as. Egy verseny eredményeinek kiértékelését most táblázatkezelővel végezzük el.

A hétpróba hét versenyszáma: 100 m gátfutás, 200 m és 800 m futás, magasugrás, távolugrás, súlylökés és gerelyhajítás. A verseny pontozásos rendszerű.

A versenyszámokat nemzetközi ponttáblázat alapján értékelik, amelyben minden elért eredménynek megvan a maga pontszáma.

A versenyszám pontszámának kiszámítására a következő képletet használják a versenyző X eredményét figyelembe véve:

$$\text{pont} = \left[A \cdot |X - B|^C\right]$$

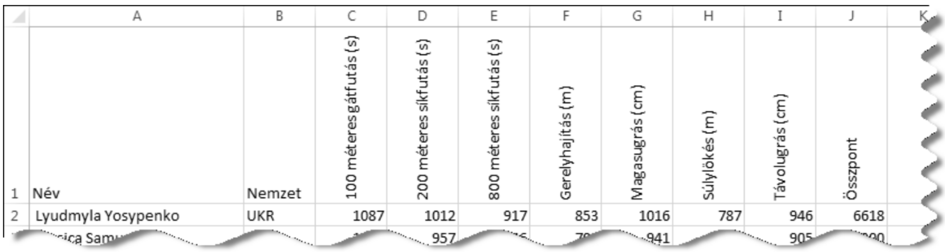
(ahol [ ] a kifejezés egészrészét, | | az abszolút értékét jelenti).

Az A, B és C konstansok a Nemzetközi Atlétikai Szövetség által közölt, versenyszámonként eltérő konstansok.

Versenyszám	A	B	C
200 m	4,990870	42,5	1,810
800 m	0,111930	254,0	1,880
100 m gát	9,230760	26,7	1,835
Magasugrás	1,845230	75,0	1,348
Távolugrás	0,188807	210,0	1,410
Súlylökés	56,02110	1,5	1,050
Gerelyhajítás	15,98030	3,8	1,040

A 2012. évi nyári olimpiai játékok hétpróba verseny adatait és az előző táblázatban lévő konstansokat rögzítettük a `hetforras.txt` tabulátorral tagolt, UTF-8 kódolású állományban.

1. Töltsük be a `hetforras.txt` szövegfájlt a táblázatkezelőbe az A1-es cellától kezdődően. (Az A1:I4 tartományban a fenti táblázat transzponált változata található.) A munkalap neve legyen **eredmények**. Munkánkat `hetproba` néven mentsük el a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
2. Hozzunk létre új munkalapot **pontszámok** néven, és a minta szerinti fejlécet alakítsuk ki az első sorban.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Név	Nemzet	100 méteres gátfutás (s)	200 méteres síkfutás (s)	800 méteres síkfutás (s)	Gerelyhajítás (m)	Magasugrás (cm)	Súlylökés (m)	Távolugrás (cm)	Összpont
2	Lyudmyla Yosypenko	UKR	1087	1012	917	853	1016	787	946	6618
3				957			941		905	

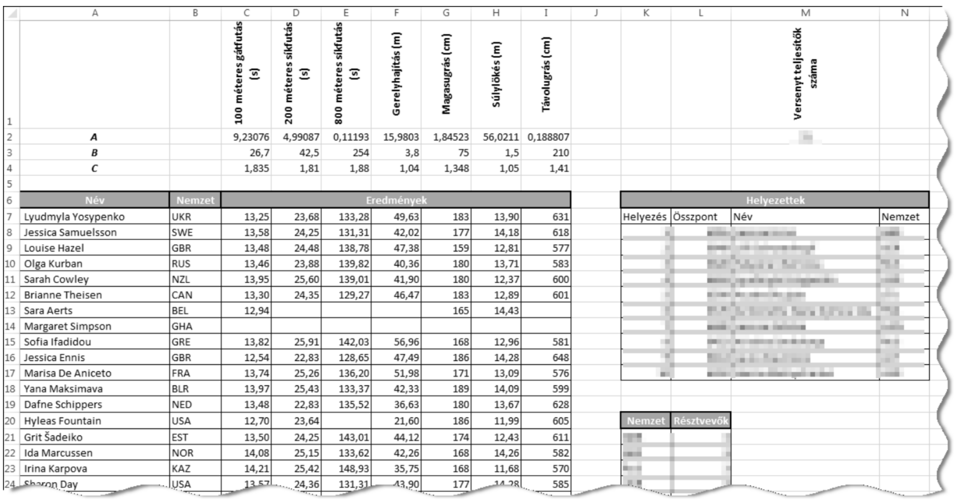
3. Ezen a munkalapon az A2:B40 cellákban – az **eredmények** munkalap A7:B45 celláira hivatkozva – jelenítsük meg a 39 versenyző nevét és nemzetiségét.
4. A C2:I40 cellákban, a fent megadott számítási módszer szerint, egyetlen képlettel és annak másolásával határozzuk meg a versenyzők versenyszámonként

elért pontszámát. Ha a versenyeredmény cella üres, akkor a kifejezés szerint az erre hivatkozó pontszám cellája is legyen üres.

5. A J2:J40 cellákban adjuk meg a versenyzők versenyszámonként elért pontszámainak összegét, ha mind a hét versenyszámból pontszámmal rendelkeznek, különben a „Nincs” felirat jelenjen meg.

A következő feladatokat az **eredmények** munkalapon végezzük el.

6. Az M2 cellában határozzuk meg függvény segítségével a versenyt teljesítők számát. A versenyt az teljesítette, aki mind a hét versenyszámban pontokat szerzett.
7. A K8:N17 cellákban képlettel adjuk meg az első tíz helyezett versenyző pontszámát, nevét és nemzetiségének rövidítését. A hétpróba győztese a legtöbb pontot elérő versenyző (feltételezhetjük, hogy azonos pontszámokat nem értek el a versenyzők).
8. A C50:I50 cellákban határozzuk meg a versenyszámonkénti győztesek nevét. Azonos eredmények esetén elegendő egyikőjük nevét megadnunk.
9. A hétpróba versenyen nemzetenként többen is részt vehetnek. A K20:L20 cella alatt soroljuk fel a versenyzők száma szerint csökkenő sorrendben, hogy az egyes nemzetekből hány induló volt. A megoldásban a K oszlopban nem szükséges a képletek használata, megfelelő a nemzetek hárombetűs rövidítésének kigyűjtése is.
10. Az **eredmények** munkalap celláit formázzuk a *minta* szerint.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1			100 méteres gátfutás (s)	200 méteres síkfutás (s)	800 méteres síkfutás (s)	Gerelyhajítás (m)	Magasugrás (cm)	Súlylökés (m)	Távolugrás (cm)				Versenyt teljesítők száma	
2	*A*		9,23076	4,99087	0,11193	15,9803	1,84523	56,0211	0,188807					
3	*B*		26,7	42,5	254	3,8	75	1,5	210					
4	*C*		1,835	1,81	1,88	1,04	1,348	1,05	1,41					
5														
6	Név	Nemzet	Eredmények								Helyezettek			
7	Lyudmyla Yosypenko	UKR	13,25	23,68	133,28	49,63	183	13,90	631		Helyezés	Összpont	Név	Nemzet
8	Jessica Samuelsson	SWE	13,58	24,25	131,31	42,02	177	14,18	618					
9	Louise Hazel	GBR	13,48	24,48	138,78	47,38	159	12,81	577					
10	Olga Kurban	RUS	13,46	23,88	139,82	40,36	180	13,71	583					
11	Sarah Cowley	NZL	13,95	25,60	139,01	41,90	180	12,37	600					
12	Brianne Theisen	CAN	13,30	24,35	129,27	46,47	183	12,89	601					
13	Sara Aerts	BEL	12,94				165	14,43						
14	Margaret Simpson	GHA												
15	Sofia Ifadidou	GRE	13,82	25,91	142,03	56,96	168	12,96	581					
16	Jessica Ennis	GBR	12,54	22,83	128,65	47,49	186	14,28	648					
17	Marisa De Aniceto	FRA	13,74	25,26	136,20	51,98	171	13,09	576					
18	Yana Maksimava	BLR	13,97	25,43	133,37	42,33	189	14,09	599					
19	Dafne Schippers	NED	13,48	22,83	135,52	36,63	180	13,67	628					
20	Hyleas Fountain	USA	12,70	23,64		21,60	186	11,99	605		Nemzet	Résztvevők		
21	Grit Šadeiko	EST	13,50	24,25	143,01	44,12	174	12,43	611					
22	Ida Marcussen	NOR	14,08	25,15	133,62	42,26	168	14,26	582					
23	Irina Karpova	KAZ	14,21	25,42	148,93	35,75	168	11,68	570					
24	Sharon Day	USA	13,57	24,36	131,31	43,90	177	14,28	585					

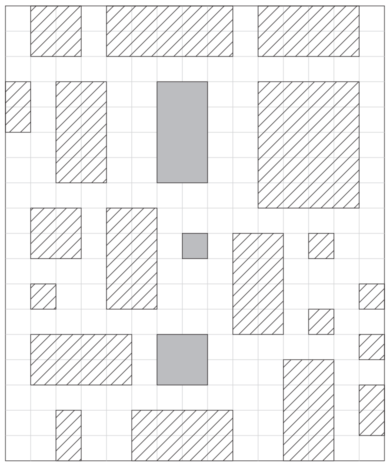
Beküldendő egy tömörített `i389.zip` állományban a munkafüzet (`hetproba.xlsx`, `hetproba.odt`), valamint egy rövid dokumentáció, amelyből kiderül az alkalmazott táblázatkezelő neve és verziószáma.

I. 390. A mobilappok egyre népszerűbbek, sok játék és hasznos program megtalálható közöttük. A három legelterjedtebb mobil operációs rendszer mindegyikéhez elérhetők ingyenes fejlesztőeszközök, amelyek segítségével mi is készíthetünk mobilalkalmazást. Írjunk mobilappot, amellyel egy ismert logikai játékot lehet játszani.

A játékban $N \times N$ négyzetlap szerepel négyzetes elrendezésben. A lapok két oldala különböző színű. A játékos bármely lap megérintésével megfordíthatja a lappal oldalszomszédos lapokat, így azok ellentétes színűre váltanak (a megérintett lap nem). A játék célja, hogy minden lap azonos színű felével legyen látható. A játék kezdetekor lehessen megadni N értékét ($3 \leqslant N \leqslant 12$). Az alkalmazás ezután hozzon létre egy olyan véletlenszerű lapszínezést, amelyből az egyszínű állapot elérhető.

Beküldendő egy tömörített (`i390.zip`) állományban az Android, iOS vagy Windows Phone alkalmazás futtatható változata és teljes forrása, valamint a fejlesztéshez fölhasznált fejlesztői rendszer elektronikus elérhetősége és a fejlesztés lépéseinek vázlatos leírása.

I/S. 4. Egységnyi magas, különböző szélességű és hosszúságú K ($0 \leqslant K \leqslant 10\,000$) darab doboz elszórtan helyezkedik el egy $N \times M$ ($10 \leqslant N, M \leqslant 100\,000$) téglalap alakú területen. A dobozok oldalai párhuzamosak a téglalap oldalaival, nem érintkeznek egymással és nem láthatjuk őket felülről, mert le vannak takarva.



Készítsünk programot `is4` néven, amely megadja, hogy hány olyan doboz van, amit biztos, hogy nem látunk meg, ha minden oldalról benézhetünk. Egy doboz láthatóságához elegendő valamely oldalának részletét megfigyelnünk. Benézni csak a téglalap oldalaira merőlegesen, egyenes irányban tudunk. A mintán a satírozott dobozok láthatóak és a szürkék nem.

A program olvassa be a standard input első sorából N-et, M-et és K-t, majd a következő K sorból a dobozok bal felső, illetve jobb alsó sarkainak X és Y koordinátáit (pozitív egész számok). A program írja a standard output első és egyetlen sorába a nem látható dobozok számát. Futási időkorlát 1 mp.

Példa a bemenetre (a `/` jel új sort jelöl):	**Példa a kimenetre:**

`16 19 15`
`1 14 2 16 / 2 4 6 6 / 2 7 3 8 /`
`2 9 4 11 / 2 17 4 19 / 3 1 4 3 /`
`3 12 5 16 / 5 7 7 11 / 5 17 10 19 /`
`6 1 10 3 / 8 7 10 10 / 6 12 9 15 /`
`11 5 14 10 / 7 5 10 6 / 10 11 12 15`
	`3`

Beküldendő egy tömörített `is4.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás vázlatos leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

S. 103. Egy országban N város található. Megbíztak minket, hogy tervezzünk utakat a városok közt úgy, hogy bármelyik városból bármelyikbe egyféleképp lehessen eljutni. Mivel egy út megépítésének költsége egyenesen arányos a hosszával, így szeretnénk minimalizálni a megépülő utak összes hosszát. Az országban nagy hegyek is vannak, ezért nem építhetünk utat bármely két város között, hanem csak a bemenő adatokban megadott M db utat lehet megépíteni. Az útépítést vállaló cég technikai okok miatt nem tud egy adott úthosszból háromnál többet megépíteni, ezért az úthálózatot úgy kell kialakítani, hogy bármely hosszúságú útból legföljebb három szerepeljen benne. Kérdés, hogy hányféleképp tudjuk megépíteni a lehető legkisebb összhosszúságú úthálózatot.

A program olvassa be a standard input első sorából N-et és M-et ($1 \leqslant N \leqslant 50\,000$, $1 \leqslant M \leqslant 200\,000$), majd a következő M sorból az a_i, b_i, c_i szóközzel elválasztott egészeket, melyek jelentése: az a_i városból a b_i városba építhetünk c_i ($1 \leqslant c_i \leqslant 1\,000\,000$) hosszú kétirányú utat. A program írja a standard output első és egyetlen sorába a legrövidebb összhosszúságot, amelyből megépíthető a hálózat, illetve a lehetőségek számának 1 000 000 007-tel vett osztási maradékát.

Példa bemenet:	Példa kimenet:
4 5 1 2 1 3 4 1 1 3 2 1 4 2 2 3 2	4 3

Magyarázat: Ha az 1 hosszúságú éleket, és bármelyik 2 hosszúságú élet választjuk, akkor kapjuk a legrövidebbet.

Pontozás és korlátok: A programhoz mellékelt, a helyes megoldás elvét tömören, de érthetően leíró dokumentáció 1 pontot ér. A programra akkor kapható meg a további 9 pont, ha bármilyen hibátlan bemenetet képes megoldani az 1 mp futásidőkorláton belül.

Beküldendő egy tömörített `s103.zip` állományban a program forráskódja, valamint a program rövid dokumentációja, amely a fentieken túl megadja, hogy a forrás mely fejlesztői környezetben fordítható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: **2016. január 10.**

❄

Jelentés a 2015. évi Ericsson-díjazottakról

Idén tizenhetedik alkalommal kerülnek kiosztásra az Ericsson-díjak, melyek eredeti célja, hogy elismerjék azoknak a közoktatásban résztvevő pedagógusoknak a munkáját, akik sokat tesznek azért, hogy a magyar általános és középiskolai természettudományos képzés a világ élvonalában járjon. A több mint 1500 fős magasan képzett mérnöki gárdával rendelkező Ericsson Magyarország többek között e díj megalapításával is elkötelezte magát a hazai oktatás fejlesztése mellett, számára különösen fontos az ő munkájuk.

Az Ericsson-díj 2015. évi pályázati kiírása szerint általános- vagy középiskolákban fizikát vagy matematikát oktató pedagógusok, összesen nyolcan részesülhetnek ebben az elismerésben. A Bolyai János Matematikai Társulat április 14-én, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat április 7-én megtartott Ericsson-díjbizottsági ülésein meghozta döntéseit. A matematika népszerűsítéséért díjra 20, tehetségeinek gondozásáért díjra 26 felterjesztés érkezett. A fizika népszerűsítéséért díjra 14, tehetségeinek gondozásáért díjra 20 jelöltet javasoltak. Közülük választotta ki a két társulat bizottsága az idei díjazásra javasoltakat. A javaslatokat a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány kuratóriuma jóváhagyta. Ennek alapján:

Az „ERICSSON a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért” 2015. évi díját matematikából
Lengyel Csaba, a váci Boronkay György Műszaki Szki., Gimn. és Koll. tanára és
Remeténé Orvos Viola, a Debreceni Fazekas Mihály Gimn. tanára kapta.

Az „ERICSSON a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért” 2015. évi díját fizikából
Dudics Pál, a Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyak. Gimn. tanára és
Tölgyesiné Irmes Marianna, a Dunakeszi Radnóti Miklós Gimn. tanára kapta.

Az „ERICSSON a matematika és fizika népszerűsítéséért” 2015. évi díját matematikából
Fodor Zsolt, a veszprémi „SÉF” Vendéglátóipari, Kereskedelmi és Idegenforgalmi Szakképző Isk. tanára és
Pataki János, a budapesti Lauder Javne Zsidó Közösségi Óvoda, Ált. Isk. és Zenei Alapfokú Művészeti Isk. tanára kapta.

Az „ERICSSON a matematika és fizika népszerűsítéséért” 2015. évi díját fizikából
Csatári László, a debreceni Szent József Gimn. és Szki. tanára és
Nyerkiné Alabert Zsuzsanna, a dunaújvárosi Rudas Közgazdasági Szki., Szakisk. és Koll. tanára kapta.

A díjazottakról részletesebben honlapunkon olvashatnak, a róluk készült portréfilmeket pedig a youtube-on lehet megtekinteni.

Gratulálunk az elismeréshez!

Oláh Vera
a MATFUND alapítvány képviselője

A gravitációs többtestprobléma két speciális esete

Amint az jól ismert, egy centrális gravitációs térben egy m tömegű testre (amit nevezzünk bolygónak)

$$\boldsymbol{F} = -\gamma \frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r}$$

erő hat, tehát a mozgásegyenlete

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\gamma \frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r}, \tag{1}$$

ahol M a centrumban elhelyezkedő tömeget, $\boldsymbol{r}$ a mozgó test helyvektorát, γ pedig a Newton-féle gravitációs állandót jelöli.[1]

Az (1) egyenlet megoldása *ellipszis, parabola* vagy *hiperbola* attól függően, hogy a mozgó test teljes

$$E = -\gamma \frac{mM}{r} + \frac{1}{2}m(\dot{\boldsymbol{r}})^2 \tag{2}$$

energiája *negatív, nulla* vagy *pozitív*, és az adott kúpszelet (egyik) fókusza éppen a centrumba esik. Ellipszispálya esetén a bolygó keringési ideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\gamma M}},$$

ahol a az ellipszis nagytengelyének a fele. Ez a leírás (mivel rögzített vonzócentrumot és egyetlen bolygót feltételez) eléggé idealizált, ennek ellenére nagyon pontosan írja le pl. a Naprendszerünk bolygóinak a mozgását. Ennek az az oka, hogy a Naprendszer összes tömegének legnagyobb része (99,87%-a) a Napban van, a bolygók pályasugarai pedig eléggé eltérnek egymástól, így a bolygók egymásra gyakorolt tömegvonzása, és az a tény, hogy a Nap maga is a közös tömegközéppont körül mozog, csak igen kicsi korrekciót okoz.

A következőkben két olyan esetet tárgyalunk meg részletesen, amelyekben ezek a feltételek nem teljesülnek: megvizsgáljuk, hogyan mozog két közel azonos tömegű égitest (ikercsillag) egymás gravitációs terében, és bemutatjuk a gravitációs háromtest-probléma egy igen speciális, de nagyon szép esetét.

[1] A cikkben azt a gyakorlatot követjük, hogy egy vektort és annak nagyságát ugyanaz a szimbólum jelöli, csak a vektort magát félkövér karakterrel szedjük; így pl. r az $\boldsymbol{r}$ vektor nagysága. Egy mennyiség jele fölé tett pont a mennyiség időbeli változásának ütemét jelzi, így $\dot{\boldsymbol{r}}$ a tömegpont sebessége, $\ddot{\boldsymbol{r}}$ pedig a gyorsulása.

Az ikercsillagok mozgása

Tegyük fel, hogy a két égitestre egymáson kívül nem hat semmi! Ekkor nyilván a közös tömegközéppont körül mozognak, ezért érdemes a koordináta-rendszerünk origóját ehhez a ponthoz rögzíteni. Ez az impulzusmegmaradás miatt inerciarendszer. Legyen a két tömeg m_1 és m_2, a helyvektorok pedig $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$! A koordinátarendszer választásunkból következik, hogy a mozgás során minden pillanatban

$$m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = 0 \qquad \text{és} \qquad m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 = 0.$$

Ebben a koordináta-rendszerben tehát csak olyan kezdeti feltételnek van értelme, amely a fenti egyenleteknek megfelel, és tulajdonképpen csak egy független koordinátánk van. Mivel az erőtörvényben a két test távolsága szerepel, független változónak érdemes pl. az $\boldsymbol{r}_{1,2} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ vektort választani ($|\boldsymbol{r}_{1,2}| = r_{1,2} = r_1 + r_2$). Ennek segítségével a két mozgásegyenlet

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\gamma\frac{m_2}{(r_{1,2})^3}\boldsymbol{r}_{1,2} \qquad \text{és} \qquad \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \gamma\frac{m_1}{(r_{1,2})^3}\boldsymbol{r}_{1,2},$$

melyeket kivonva egymásból az

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{1,2} = -\gamma\frac{m_1+m_2}{(r_{1,2})^3}\boldsymbol{r}_{1,2}$$

egyenletet kapjuk, ami (1)-gyel azonos szerkezetű, hiszen

$$\boldsymbol{r}_{1,2} \Leftrightarrow \boldsymbol{r}, \qquad r_{1,2} \Leftrightarrow r, \qquad m_1 + m_2 \Leftrightarrow M$$

helyettesítésekkel a két egyenlet egymásba átírható. Ennek megfelelően a megoldásuk is azonos, vagyis az origóból felmért $\boldsymbol{r}_{1,2}$ vektor végpontja kúpszeletet rajzol le. Annak feltételét, hogy ez milyen kúpszelet, (2)-ből a megfelelő

$$\boldsymbol{r}_{1,2} \Leftrightarrow \boldsymbol{r}, \qquad m_1 + m_2 \Leftrightarrow M$$

helyettesítéssel kapjuk meg: a pálya *ellipszis, parabola* vagy *hiperbola,* ha a

$$-\gamma\frac{m_1+m_2}{r_{1,2}} + \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{r}}_{1,2})^2$$

mennyiség *negatív, nulla* vagy *pozitív.* A (2) kifejezés előjele nem függ m-től, ezért azt itt elhagytuk, de vegyük észre, hogy ha nem hagyjuk el, hanem a helyére $\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$-t helyettesítünk, kihasználva a teljes impulzus nulla voltát, megkapjuk a rendszer teljes energiáját:

$$E = -\gamma\frac{m_1m_2}{r_1+r_2} + \frac{1}{2}m_1(\dot{\boldsymbol{r}}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\boldsymbol{r}}_2)^2.$$

Tehát – a fizikai érzékünkkel összhangban – most is mondhatjuk: az energia negatív vagy pozitív volta dönti el a pálya alakját. (Természetesen ez így csak ebben a tömegközépponti koordináta-rendszerben igaz. Ha a közös tömegközéppont mozog, ahhoz is tartozik egy energiajárulék, ami azonban nem befolyásolja a testek egymáshoz viszonyított mozgását.) Érdemes megjegyezni, hogy az egyes testek pályája geometriai értelemben hasonló ahhoz a síkgörbéhez, amelyet az $\boldsymbol{r}_{1,2}$ vektor kirajzol. A megfelelő fókuszpontok a közös tömegközéppontba esnek, és pl. ellipszispálya esetén az $\boldsymbol{r}_{1,2}$ ellipszisének fél nagytengelye $a = (r_{1,2\,\mathrm{max}} + r_{1,2\,\mathrm{min}})/2$ azonos a két ellipszis a_1 és a_2 fél nagytengelyének összegével. (Az indexben megjelenő max és min jelzés értelemszerűen az adott mennyiség maximális és minimális értékére utal.) Ennek megfelelően a keringési idő

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(a_1+a_2)^3}{\gamma(m_1+m_2)}}.$$

A háromtest-probléma egy speciális esete

Most tekintsünk három, minden más objektumtól függetlennek tekinthető égitestet! A tömegek legyenek m_1, m_2 és m_3, és a koordináta-rendszerünk origójának válasszuk most is a közös tömegközéppontot. Az $\boldsymbol{r}_i$ koordináták és az $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ sebességek $(i = 1, 2, 3)$ most az

$$(3) \qquad m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3 = 0 \qquad \text{és} \qquad m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 + m_3\dot{\boldsymbol{r}}_3 = 0$$

egyenleteket elégítik ki. A három mozgásegyenlet:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\gamma\frac{m_2}{(r_{1,2})^3}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) - \gamma\frac{m_3}{(r_{1,3})^3}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3),$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = -\gamma\frac{m_1}{(r_{1,2})^3}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) - \gamma\frac{m_3}{(r_{2,3})^3}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3),$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_3 = -\gamma\frac{m_2}{(r_{2,3})^3}(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2) - \gamma\frac{m_1}{(r_{1,3})^3}(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1),$$

ahol az előzőekhez hasonlóan az $r_{i,j}$ az i és j indexű tömegpontok távolsága. Ez a csatolt egyenletrendszer már kezelhetetlenül bonyolult, de igen egyszerűvé válik abban a speciális esetben, amikor $r_{1,2} = r_{1,3} = r_{2,3} = R$, azaz a testek egy R oldalhosszú, egyenlő oldalú háromszög csúcsain helyezkednek el. Ekkor (3) segítségével mind a három az

$$(4) \qquad \ddot{\boldsymbol{r}}_i = -\gamma\frac{m_1+m_2+m_3}{R^3}\boldsymbol{r}_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

alakra hozható.

Mi következik ebből? Nevezetesen az, hogy ha egy pillanatban mindhárom test sebessége ugyanúgy arányos a helyvektorával, azaz

$$(5) \qquad \dot{\boldsymbol{r}}_i = \kappa\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

akkor ez a mozgás során így is marad. Itt az első tag egy egyenletes tágulás, melyben a κ egy 1/s dimenziójú mennyiség, a második tag pedig egy egyszerű forgás, melyben az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor merőleges a három test síkjára. Ilyen sebességek mellett nyilván nem változik az $\boldsymbol{r}_i$ helyvektorok egymáshoz viszonyított mérete és iránya, és (4) miatt az $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ sebességek is arányosak maradnak a megfelelő helyvektorokkal, csak κ és a szögsebességvektor nagysága, ω változik az idővel. Következésképp ilyen kezdeti feltételek mellett a három test által kijelölt háromszög végig egyenlő oldalú marad, a

$$\lambda_i = \frac{r_i}{R} \tag{6}$$

arányok a mozgás során állandók, és a mozgásegyenletek

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = -\gamma \frac{\lambda_i^3(m_1+m_2+m_3)}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i \qquad (i=1,2,3) \tag{7}$$

alakba írhatók. (A λ_i együtthatók csak a tömegarányoktól függenek, viszonylag könnyen megadhatók, de a magunk elé tűzött feladat szempontjából a konkrét alakjuk nem érdekes.)

A (7) és (1) egyenletek azonos alakja, és a háromszög arányainak változatlansága alapján állíthatjuk, hogy a három test egymáshoz hasonló kúpszeletpályákon mozog a közös tömegközéppont körül. Ugyan mindegyik más-más effektív centrális tömeget „lát”, de éppen ez biztosítja a pályák időbeli szinkronját. Ezzel összhangban ellipszispálya esetén bármelyik test keringési idejére ugyanaz adódik:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a_i^3}{\gamma\lambda_i^3(m_1+m_2+m_3)}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\gamma(m_1+m_2+m_3)}},$$

ahol

$$a_i = \frac{r_{i,\min}+r_{i,\max}}{2}, \qquad \text{illetve} \qquad a = \frac{R_{\min}+R_{\max}}{2}.$$

Végezetül szólnunk kell a pálya alakját meghatározó feltételről. Senki nem lepődik meg azon, hogy azt most is az

$$E = -\gamma\frac{m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}{R} + \frac{1}{2}m_1(\dot{\boldsymbol{r}}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\boldsymbol{r}}_2)^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{\boldsymbol{r}}_3)^2 \tag{8}$$

teljes energia előjele határozza meg, de hogy ez hogyan hozható ki a (2)-ből formálisan adódó

$$-\gamma\frac{m_i\lambda_i^3(m_1+m_2+m_3)}{r_i} + \frac{1}{2}m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)^2 \tag{9}$$

kifejezésből, azt a *Függelékben* mutatjuk be.

Megjegyzések. 1. A cikkben tárgyalt problémák tartalmazzák egymást mint határesetet. Az ikercsillagnál minél nagyobb az egyik csillag tömege a másikénál, annál jobban megközelíti a rendszer a rögzített centrum esetét. Hasonlóan, ha a három test közül az egyik tömege lényegesen kisebb, mint a másik kettőé, az a kettő úgy mozog, mint ahogy azt az ikercsillagoknál látjuk.

2. Az ikercsillagok problémája a gravitációs kéttestprobléma *általános* esete, és a pályák a tömegközépponti rendszerben mindig kúpszeletek. Ezzel szemben a háromtestprobléma általános esete igen bonyolult, nem periodikus, és általában nem is síkmozgás: a három test síkja időben elfordulhat. Az itt tárgyalt eset csak nagyon speciális kezdeti feltételek mellett valósulhat meg, és attól különleges, hogy a testek távolságainak az aránya, így az általuk kitűzött síkidom alakja nem változik a mozgás során. A háromtestproblémának van egy másik olyan megoldáscsaládja is, melyben a távolságok aránya nem változik: a három test háromféle módon is elhelyezhető úgy egy egyenesen, hogy azok egy (5)-nek megfelelő kezdeti sebesség esetén egymással szinkronban, végig egy egyenesen maradva kúpszelet pályán mozogjanak. (Ezek az esetek paraméteresen sajnos nem, csak numerikusan tárgyalhatók.) Így ha két test (mondjuk a két nagyobb) pozícióját és a mozgásuk síkját megadjuk, a harmadik test öt olyan pozícióba helyezhető, melyekben szinkronizált mozgás lehetséges. Ebből három a két (nehezebb) test egyenesére esik (egyik helyzet a két test között, egy-egy pedig a két testen kívül), kettő pedig a fentebb tárgyaltaknak megfelelően az a két pont, amely ugyanolyan távol van az egyes testektől, mint azok egymástól. Abban az esetben, ha a legkisebb tömeg elhanyagolhatóan kicsiny a két nagyobb tömeghez képest, ezt az öt pontot egyik tanulmányozójukról[2] a rendszer *Lagrange-pontjainak* nevezik. Érdekes még, hogy a nagy testek egyenesébe eső Lagrange-pontok *instabilak*, az oda helyezett objektumok bármilyen kicsi zavar esetén gyorsulva kimozdulnak, míg a másik két pont (a nehéz testek tömegarányának nagyságától függően) *lehet stabil* abban az értelemben, hogy az oda helyezett harmadik, kicsiny tömegű test a zavaró hatások ellenére is hosszú ideig az adott pont közelében marad. Ezzel függ össze, hogy a Naprendszerben kisbolygók és aszteroidák egész felhői találhatók a Nap-Jupiter rendszer megfelelő (a Jupitert 60°-kal megelőző, illetve követő) Lagrange-pontjainak a környékén, de találhatók kisbolygók a Neptunusz, a Mars és a Föld pályájához tartozó stabil Lagrange-pontok közelében is.[3]

Függelék

Vegyük észre, hogy ha (9)-et beszorozzuk az

$$\frac{m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}{\lambda_i^2 m_i(m_1+m_2+m_3)}$$

kifejezéssel, és kihasználjuk (6)-ot, akkor a kapott

$$(F1)\qquad -\gamma\frac{m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}{R}+\frac{1}{2}\,\frac{m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}{m_1+m_2+m_3}\cdot\frac{(\dot{\boldsymbol r}_i)^2}{\lambda_i^2}$$

mennyiség első tagja a teljes energia gravitációs része, tehát azt kell belátnunk, hogy a második tag éppen a teljes mozgási energia. Mivel az $\dot{\boldsymbol r}_i$ (5) szerinti felbontásában a két tag egymásra merőleges,

$$(F2)\qquad (\dot{\boldsymbol r}_i)^2=r_i^2\big(\kappa^2+\omega^2\big).$$

[2]Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) olasz születésű francia matematikus és fizikus, aki többek között a számelméletben, a matematikai analízisben és az égitestek mechanikájában ért el nagyon jelentős eredményeket.

[3]A Naprendszer különböző bolygóihoz tartozó Lagrange-pontok közelében elhelyezkedő természetes és mesterséges égitestek impozáns listája található a `https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_objects_at_Lagrangian_points` webhelyen.

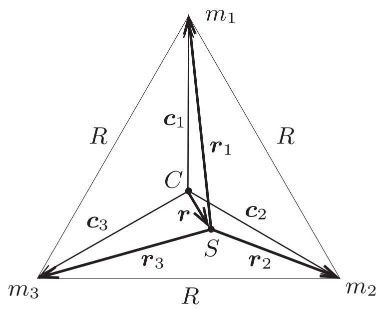
Ennek és (6)-nak a következményeként (F1) második tagja

$$(F3) \qquad \frac{1}{2}\frac{m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}{m_1+m_2+m_3}R^2\big(\kappa^2+\omega^2\big).$$

Ha megmutatjuk, hogy

$$(\mathrm{F4}) \qquad \frac{m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}{m_1+m_2+m_3}R^2 = $$

$$= m_1r_1^2+m_2r_2^2+m_3r_3^2,$$



akkor igazoljuk, hogy (F3) a mozgási energia, tehát (F1) valóban a teljes energia. Márpedig (F4) fennáll, ahogy azt a mellékelt *ábra* segítségével könnyen beláthatjuk.

Ezen a háromszög oldala R, a geometriai súlypontja C, a fizikai tömegközéppontja S, a C-ből az S-be mutató vektor $\boldsymbol{r}$, a C-ből és az S-ből az egyes tömegekhez mutató vektorok $\boldsymbol{c}_i$ és $\boldsymbol{r}_i$. Az (F4) egyenlet jobb oldala a rendszer S-re vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka, amit a Steiner-tétel segítségével összeköthetünk a jól számítható C-re vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékkal. Eszerint

$$(F5) \qquad \sum_{i=1}^{3} m_ir_i^2 = \sum_{i=1}^{3} m_ic_i^2 - r^2\sum_{i=1}^{3} m_i.$$

Ugyanakkor a tömegközéppont definíciójából

$$\sum_{i=1}^{3} m_i\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{r}\sum_{i=1}^{3} m_i.$$

Ezt az egyenletet négyzetre emelve és kihasználva, hogy $\boldsymbol{c}_i\boldsymbol{c}_j=\frac{1}{3}R^2$, ha $i=j$, és $-\frac{1}{6}R^2$, ha $i\neq j$, kiszámíthatjuk r^2-et, és így (F5) jobb oldalát kiértékelve valóban megkapjuk (F4)-et.

Woynarovich Ferenc

Megoldásvázlatok a 2015/8. sz. emelt szintű fizika gyakorló feladatsorhoz

Tesztfeladatok:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	B	C	D	C	B	C	C	B	C	A	C	C	B	D

F1. *a*) A Skodából nézve a kezdősebesség nélkül induló Volvo t idő alatt $s=at^2/2$ utat tesz meg. Esetünkben $s=20$ m, tehát a Volvo $t=\sqrt{2s/a}\approx 6{,}32$ s alatt éri utol a másik autót.

b) A Volvo kezdősebessége $v_0=20$ m/s, az utolérés pillanatában pedig $v_1=$ $=v_0+at=26{,}32$ m/s, az átlagsebessége tehát $\frac{1}{2}(v_0+v_1)=23{,}16$ m/s. Így a kérdéses idő alatt $23{,}16\ \mathrm{m/s}\cdot 6{,}32\ \mathrm{s}\approx 146$ m utat tesz meg.

c) A mozgási energiák aránya (a talajhoz rögzített koordináta-rendszerben):

$$\frac{E_{\text{Volvo}}}{E_{\text{Skoda}}}=\frac{\frac{1}{2}m_{\text{Volvo}}v_1^2}{\frac{1}{2}m_{\text{Skoda}}v_0^2}=\frac{m_{\text{Volvo}}}{m_{\text{Skoda}}}\cdot\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2=\frac{1500}{1000}\left(\frac{26{,}3}{20{,}0}\right)^2\approx 2{,}6.$$

F2. *a*) A léggömb térfogata (az ideális gáz állapotegyenlete alapján):

$$V=\frac{nRT}{p}=\frac{(0{,}15\ \mathrm{mol})\cdot 8{,}31\ \mathrm{J/(mol\,K)}\cdot(295\ \mathrm{K})}{1{,}05\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}}=0{,}0035\ \mathrm{m}^3=3{,}5\ \text{liter}.$$

b) A levegő sűrűségét ugyancsak a $pV=nRT=\frac{m}{M}RT$ gáztörvényből kaphatjuk meg:

$$\varrho=\frac{m}{V}=\frac{pM}{RT}=\frac{10^5\ \mathrm{Pa}\cdot 29\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg/mol}}{8{,}31\ \mathrm{J/(mol\,K)}\cdot(295\ \mathrm{K})}=1{,}18\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

c) A léggömbre ható nehézségi erő:

$$mg=(2+0{,}6)\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s}^2=0{,}026\ \mathrm{N},$$

míg a levegő felhajtóereje:

$$F_{\text{fel}}=\varrho_{\text{levegő}}\cdot V_{\text{léggömb}}\,g=1{,}18\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 0{,}0035\ \mathrm{m}^3\cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}=0{,}041\ \mathrm{N}.$$

A felhajtóerő nagyobb, mint a nehézségi erő, ezért száll fel a léggömb. A mennyezetnél erőegyensúly alakul ki, a mennyezet a fenti két erő különbségével nyomja lefelé a léggömböt:

$$F=0{,}041\ \mathrm{N}-0{,}026\ \mathrm{N}=0{,}015\ \mathrm{N}.$$

A léggömb egy kis darabon belapul, ahol a mennyezethez nyomódik. Erre a kis darabra úgy teljesül az erők egyensúlya, hogy a mennyezet lefelé mutató nyomóereje megegyezik a külső és belső nyomások különbségéből származó felfelé mutató erővel: $F=\Delta p\,A$, amiből a mennyezettel érintkező felület nagysága

$$A=\frac{F}{\Delta p}=\frac{0{,}015\ \mathrm{N}}{5000\ \mathrm{Pa}}=3\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2=3\ \mathrm{mm}^2.$$

Megjegyzés. A számítás során elhanyagoltuk a léggömb mennyezettel érintkező darabkájának a súlyát, a belapult gumidarabra a léggömb többi része által kifejtett rugalmas erőket, valamint a nyomás változását a léggömbön belül. Belátható, hogy ezek jogos elhanyagolások.

F3. *a*) Egyensúlyi helyzetben az elektromos erő és a nehézségi erő eredője fonálirányú:

$$mg\sin 20^\circ - QE\cos 20^\circ = 0,$$

ahonnan

$$E = \frac{mg}{Q}\operatorname{tg} 20^\circ = \frac{0{,}001\ \mathrm{kg}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}{10^{-6}\ \mathrm{C}}\,0{,}364 \approx 3600\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

b) A testre ható gravitációs erő és az elektromos erő eredője $mg/\cos 20^\circ$ nagyságú és mindig ugyanolyan irányú, tehát éppen olyan, mintha a test elektromos erőtér nélküli, de a szokásostól eltérő, $g' = g/\cos 20^\circ \approx 10{,}4\ \mathrm{m/s^2}$ nehézségi gyorsulású, homogén gravitációs térben helyezkedne el. Egy ilyen erőtérben a fonálinga lengésideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g'}} = 1{,}06\ \mathrm{s}.$$

F4. *a*) Írjuk fel mindkét esetben a kapocsfeszültséget az áram függvényeként:

$$U_{\mathrm{k1}} = \mathcal{E} - R_{\mathrm{b}}\,I_1, \qquad U_{\mathrm{k2}} = \mathcal{E} - R_{\mathrm{b}}\,I_2.$$

Ha a két egyenletet egymásból kivonjuk, kiszámíthatjuk a belső ellenállást:

$$R_{\mathrm{b}} = \frac{3900-3800}{240-120}\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{mA}} = 0{,}83\ \Omega.$$

b) Az elektromotoros erőt úgy kaphatjuk meg, ha a belső ellenállást visszahelyettesítjük például az első egyenletbe:

$$\mathcal{E} = U_{\mathrm{k1}} + R_{\mathrm{b}}R_{\mathrm{b}} = 4000\ \mathrm{mV}.$$

c) Újra a kapocsfeszültség-áram függvényt kell használnunk:

$$U_{\mathrm{k}} = \mathcal{E} - R_{\mathrm{b}}\,I = 4000\ \mathrm{mV} - \frac{5}{6}\Omega\cdot 12\ \mathrm{mA} = 3990\ \mathrm{mV}.$$

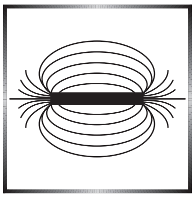
Az akkumulátor teljes teljesítménye:

$$P = \mathcal{E}\cdot I = 4\ \mathrm{V}\cdot 12\ \mathrm{mA} = 48\ \mathrm{mW},$$

a másodpercenkénti energiacsökkenés tehát $P\,\Delta t = 48\ \mathrm{mJ}$.

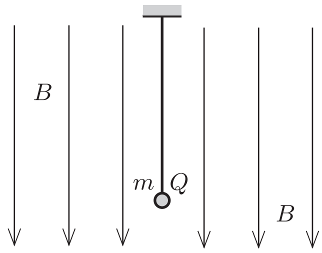
Megjegyzés. Ilyenkor az akkumulátor belső ellenállására jutó veszteség elhanyagolható, hiszen a belső feszültségesés (10 mV) nagyon kicsi a 4000 mV-os elektromotoros erőhöz képest.

Honyek Gyula
Budapest



Fizika feladatok megoldása

P. 4713. *Függőleges, B mágneses indukciójú homogén mágneses mezőben lévő fonálon egy m tömegű, Q töltésű, kisméretű golyó függ. A golyónak akkora és olyan irányú sebességet adunk, hogy az vízszintes síkban egyenletes körmozgást végezzen. Egy másik alkalommal úgy állítjuk ugyanolyan sugarú, vízszintes síkú körpályára a golyót, hogy az a mágneses mezőben ellentétes irányban körözzön.*



a) Határozzuk meg a két fonálerő arányát!

b) Mekkora a szögsebességek nagyságának különbsége a két mozgás során?

(*4 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

Megoldás. *a*) Ha Q pozitív töltés, és a kis test (fölülről nézve) az óramutató járásával ellentétes irányban forog, akkor a rá ható Lorentz-erő a körpálya középpontjának irányába mutat; ha pedig ezzel ellentétesen forog, akkor a Lorentz-erő a kör középpontjától kifelé mutat. (Ha Q negatív, akkor éppen fordított a helyzet.)

Amennyiben a forgómozgás közben a fonál állandó α szöget zár be a függőlegessel, a test függőleges irányban *nem* gyorsul. Ez csak úgy lehetséges, hogy a fonálerő függőleges komponense mindkét esetben a nehézségi erővel egyezik meg:

$$K_1 \cos\alpha = mg, \qquad K_2 \cos\alpha = mg,$$

a fonálerő tehát a két esetben ugyanakkora:

$$K_1 = K_2 = \frac{mg}{\cos\alpha},$$

az arányuk 1.

b) A test vízszintes irányú mozgásegyenlete a kétféle forgásiránynál:

$$\frac{mv_1^2}{r} = mg\operatorname{tg}\alpha + QBv_1,$$

illetve

$$\frac{mv_2^2}{r} = mg\operatorname{tg}\alpha - QBv_2,$$

ahol r a körpálya sugarát, v_1 és v_2 pedig a kerületi sebességeket jelöli. A fenti két egyenlet különbségéből

$$\frac{m}{r}\left(v_1^2 - v_2^2\right) = QB(v_1 + v_2),$$

vagyis

$$\frac{v_1 - v_2}{r} = \frac{QB}{m}$$

következik. A bal oldalon éppen a szögsebességek nagyságának keresett különbsége áll, ami tehát $\Delta\omega = QB/m$.

Németh Flóra Boróka (Keszthely, Vajda J. Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

27 dolgozat érkezett. Helyes 25 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 1, hiányos (1 pont) 1 dolgozat.

P. 4717. *Mekkora szöget kell bezárniuk az $\boldsymbol{F}_1$ és $\boldsymbol{F}_2$ erőknek, hogy az eredőjük nagysága $\boldsymbol{F}_1$ és $\boldsymbol{F}_2$ nagyságának számtani közepével legyen egyenlő? Minő határok között kell lennie az F_1/F_2 viszonynak, hogy a feladatnak legyen megoldása? Milyen határok között kell lennie a két erő szögének?*

(*4 pont*) *Strasser V. Benő* (1884–1966) feladata

Megoldás. Legyen az erők nagysága F_1 és F_2, a szögük pedig α. Az eredő erő nagysága a vektorösszeadás szabálya és a koszinusztétel szerint

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} = \frac{F_1 + F_2}{2},$$

ami algebrai átalakítások után így írható:

$$\frac{2 - 8\cos\alpha}{3} = \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_2}{F_1}.$$

Tudjuk (a számtani és a mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenségből), hogy egy számnak és reciprokának összege legalább 2, emiatt

$$\frac{2 - 8\cos\alpha}{3} \geqslant 2, \qquad \text{azaz} \qquad \cos\alpha \leqslant -\frac{1}{2}.$$

Tehát fennáll, hogy $120° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. Ebben az intervallumban $\cos\alpha$ $-\frac{1}{2}$ és -1 közötti értékeket vesz fel, tehát az erők nagyságának $x = F_1/F_2$ arányára a

$$2 \leqslant x + \frac{1}{x} \leqslant \frac{10}{3}$$

egyenlőtlenség teljesül, aminek megoldása

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{F_1}{F_2} \leqslant 3.$$

A nagyobb erő tehát legfeljebb háromszorosa lehet a másik (F nagyságú) erő nagyságának, és ha az irányuk ellentétes, az eredő erő nagysága ($2F$) valóban F és $3F$ számtani közepe. Ugyancsak teljesül a megadott feltétel két egyforma (F) nagyságú, egymással 120°-os szöget bezáró erő F nagyságú eredőjére is.

Wiandt Péter (Bonyhád, Petőfi S. Evangélikus Gimn., 11. évf.)

46 dolgozat érkezett. Helyes 25 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 13, hiányos (1–2 pont) 8 dolgozat.

P. 4719. *Egy kajakos* 5 m/s *sebességű folyón evez felfelé. Mekkora sebességgel kell eveznie, hogy a lehető legkevesebb munkavégzéssel jusson el adott távolságra? (A közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányos.)*

(*5 pont*) Közli: *Forman Ferenc,* UK, Cambridge

Megoldás. Ha a kajakosnak a parthoz viszonyított sebessége v, akkor a v_0 sebességű folyó vizéhez képest $v+v_0$ sebességgel kell mozognia. A közegellenállási erő és annak teljesítménye szempontjából csak a vízhez viszonyított sebesség lényeges:

$$F(v)=k\cdot(v+v_0)^2,\quad \text{illetve}\quad P(v)=F(v)\cdot(v+v_0)=k\cdot(v+v_0)^3.$$

A folyón felfelé haladva egy adott s távolságot $t=s/v$ idő alatt tesz meg a kajakos, ezalatt

$$W(v)=P(v)\cdot t=ks\cdot\frac{(v+v_0)^3}{v}$$

munkát kell végeznie. Mivel ks a sebességtől független állandó, $W(v)$ minimumát az

$$f(v)\equiv\frac{(v+v_0)^3}{v}$$

függvény minimuma határozza meg.

Alkalmazzuk $f(v)$-re a számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$\frac{(v+v_0)^3}{v}=27\,\frac{\left(\dfrac{v+\frac12 v_0+\frac12 v_0}{3}\right)^3}{v}\geqslant 27\,\frac{v\cdot\frac12 v_0\cdot\frac12 v_0}{v}=\frac{27}{4}v_0^2.$$

Az egyenlőség akkor áll fenn, amikor a kajakos sebessége a parthoz képest

$$v=\frac12 v_0=2{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

a vízhez viszonyítva pedig

$$v+v_0=\frac32 v_0=7{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Fekete Balázs Attila (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 9. évf.)

43 dolgozat érkezett. Helyes 26 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 9, hiányos (1–3 pont) 7, hibás 1 dolgozat.

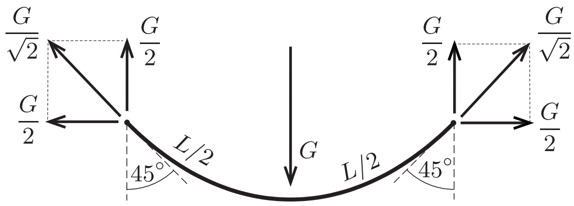
P. 4747. *Egy* 40 cm *hosszúságú lánc két végpontját azonos magasságban rögzítjük az* ábrán *látható módon. Mekkora a lánc görbületi sugara*

a) *a legalsó pontjában,*

b) *a felfüggesztési pontokban?*

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

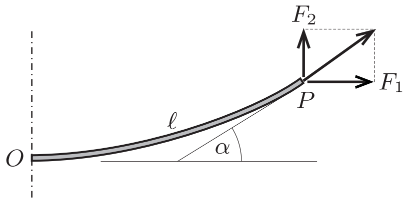
Megoldás. Jelöljük a lánc teljes hosszát L-lel, teljes súlyát G-vel. A lánc két végén ható erők függőleges komponense $G/2$, a vízszintes komponensük pedig (a 45°-os szögek miatt) $\pm(G/2)$ (*1. ábra*).

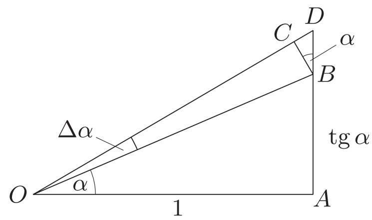


1. ábra

Tekintsük a láncnak egy olyan P pontját, amely pont és a legmélyebb O pont közötti láncdarab hossza ℓ (*2. ábra*). Ennek a láncdarabnak a súlya arányos ℓ-lel, és mivel $\ell = L/2$ esetén a súly $G/2$, általános esetben

$$G(\ell) = \frac{G}{L}\ell.$$





2. ábra *3. ábra*

A P pontban ható (a lánc többi része által kifejtett) erő vízszintes komponense mindenhol ugyanakkora (hiszen a láncdarabra nem hat vízszintes irányú külső erő):

$$F_1 = \text{állandó} = \frac{G}{2},$$

a függőleges komponens pedig a láncdarab súlya:

$$F_2(\ell) = \frac{G}{L}\ell.$$

Ezek ismeretében ki tudjuk számítani a lánc meredekségét a P pontban:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_2}{F_1} = \frac{2}{L}\ell. \tag{1}$$

Mennyit változik ez a meredekség, ha P-ből egy kicsiny $\Delta\ell$-lel hosszabb láncdarab P' végpontjába „megyünk át”? A *3. ábráról* leolvashatjuk, hogy kicsiny $\Delta\alpha$ esetén

$$\Delta(\operatorname{tg}\alpha) = BD \approx BC\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,\Delta\alpha = \left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)\Delta\alpha. \tag{2}$$

(A képlet csak közelítőleg, kicsiny $\Delta\alpha$-ra igaz, mert az OD-re merőleges BC szakasz hosszát egy kicsiny körív hosszával helyettesítettük.)

Megjegyzés. A fenti összefüggés a differenciálszámítás formuláiból is megkapható:

$$\frac{\mathrm{d}(\operatorname{tg}\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Az (1) és (2) összefüggésekből azt kapjuk, hogy

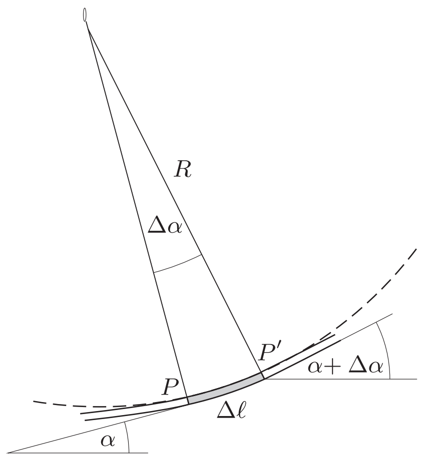
$$(3)\quad \left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)\Delta\alpha = \frac{2}{L}\cdot\Delta\ell = \frac{2}{L}\cdot R\Delta\alpha.$$

Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy $\Delta\ell = R\Delta\alpha$, ahol R a lánc görbületi sugara (a simulókörének sugara) a kérdéses pontban (lásd a *4. ábrát*).

A (3) összefüggésből (2) felhasználásával megkaphatjuk a lánc görbületi sugarát a lánc tetszőleges pontjában:

$$R(\ell) = \frac{L}{2} + \frac{2\ell^2}{L},$$

és így a kérdéses speciális helyeken is.



4. ábra

a) A lánc legalsó pontjában

$$R(\ell = 0) = \frac{L}{2} = 20\ \text{cm},$$

b) a felfüggesztési pontokban pedig

$$R\left(\ell = \frac{1}{2}L\right) = L = 40\ \text{cm}.$$

Bugár Dávid (Révkomárom, Selye J. Gimn., 12. évf.) dolgozata felhasználásával

23 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 2, hibás 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 355. Cseppentsünk vízfelületre étolajat! Hogyan függ az olajfolt átmérője a kicseppentett olaj mennyiségétől?

(*6 pont*) Közli: *Homoki-Nagy Olga,* Monor

P. 4780. Mely szélességi fokokról látható (jó minőségű távcsővel) egy geostacionárius „szinkron műhold”?

(*3 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

P. 4781. Kemping gázfőzőn (amelynek üzemanyaga 80% butánt és 20% propánt tartalmaz) 200 g vizet 15 °C-ról 75 °C-ra melegítünk fel.

Mennyivel változik meg a főző össztömege a melegítés során, ha a melegítés hatásfoka 60%?

(*3 pont*)

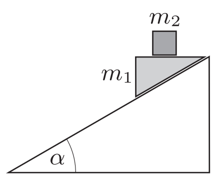
P. 4782. Egy 16 cm és egy 30 cm hosszú fonál egy-egy végét a mennyezethez rögzítjük, egymástól 34 cm távolságban. A fonalak másik végét egy pici, 1,7 dkg tömegű testhez erősítjük.

a) Mekkora erők ébrednek a fonalakban?

b) A rövidebb fonalat elégetjük. Mekkora erő ébred a fonálban abban a pillanatban, amikor az éppen függőleges?

(*4 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 4783. $\alpha = 30°$-os hajlásszögű lejtőre helyezett m_1 tömegű ék és annak vízszintes lapján lévő m_2 tömegű kocka együtt gyorsulva mozog a lejtőn lefelé. Az ék és a lejtő között a súrlódási együttható 0,1.



Legalább mekkora a súrlódási együttható a kocka és az ék között, ha a kocka nem csúszik meg az éken?

(*4 pont*) Közli: *Szabó Miklós,* Eger

P. 4784. A kanadai Large Zenith Telescope 6 méter átmérőjű parabolatükrét úgy hozták létre, hogy egy tálba higanyt öntöttek, és a tálat egyenletesen, percenként 8,5 fordulattal forgatták.

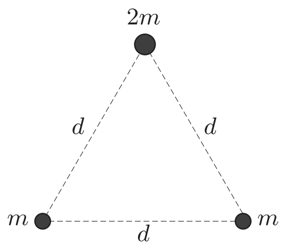
Mekkora lett a parabolatükör fókusztávolsága?

(*4 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest

P. 4785. A Tejútrendszer az úgynevezett spirális galaxisok közé tartozik. Alakját közelíthetjük egy, az átmérőjéhez képest csekély vastagságú, állandó sűrűségű koronggal, amelynek „alja” és „teteje” között a Nap harmonikus rezgőmozgást végez.

Mekkora a rezgés periódusideje, ha a galaxis átlagsűrűsége $5{,}8\cdot 10^{-21}\ \mathrm{kg/m^3}$?

(*5 pont*) Közli: *Forman Ferenc,* Cambridge, UK



P. 4786. Három pontszerű test – más testektől távol – úgy helyezkedik el a világűrben, hogy egy kezdeti pillanatban nem mozognak, és egymástól azonos d távolságban vannak. Két test tömege egyenlő (m), a harmadik tömege $2m$. A gravitációs vonzás hatására a testek mozgásba jönnek és egymásnak ütköznek.

a) Mekkora utat tesznek meg a testek a találkozásig?

b) Mennyi idő telik el a testek ütközéséig?

(Lásd még *„A gravitációs többtestprobléma két speciális esete”* című cikket Lapunk 558. oldalán.)

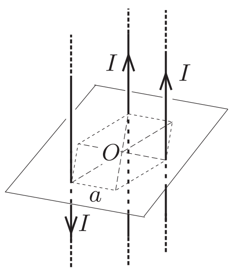
(*5 pont*) *Nagy László fizikaverseny (Kazincbarcika)* nyomán

P. 4787. Egy merev, adiabatikus falú edényben lévő, 17 °C hőmérsékletű héliumgázt 30 méter magasból a Hold felszínére ejtünk.

a) Mekkora lesz a héliumatomok rendezett sebessége a becsapódás pillanatában?

b) Mennyivel nő a héliumatomok rendezetlen, termikus átlagsebessége a becsapódást követően?

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest



P. 4788. Egy $a = 2$ cm oldalú szabályos hatszög minden második csúcsán át, a hatszög síkjára merőlegesen, hosszú, egyenes vezetőkben $I = 10$ A nagyságú áram folyik, kettőben felfelé, egyben pedig lefelé.

a) Mekkora és milyen irányú a mágneses indukció a hatszög középpontjában?

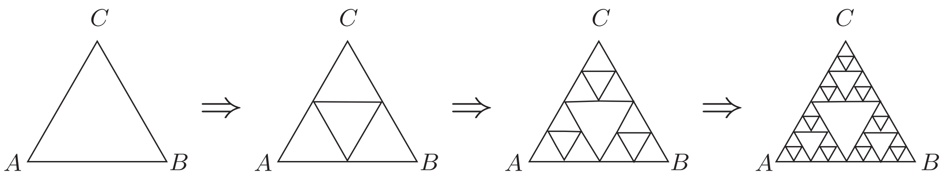
b) Mekkora nagyságú és milyen irányú erő hat az egyes vezetők $\ell = 1$ m hosszúságú darabjára?

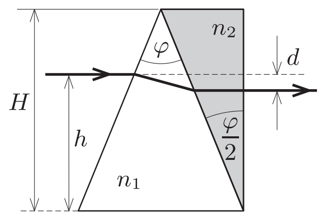
(*4 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 4789. Vékony, egyenletes keresztmetszetű ellenálláshuzalból ún. Sierpinski-háromszöget szeretnénk forrasztani. Ehhez egy szabályos háromszög alakú keretből indulunk ki, melynek A és B csúcsai között R_0 ellenállást mérünk. A kerethez első lépésben hozzáforrasztjuk a háromszög középvonalait, majd második lépésben az így keletkezett négy kis háromszög közül a külső három középvonalait is beforrasztjuk. Az eljárást tovább folytatva önhasonló, fraktálszerű drótkeretet kapunk (lásd az *ábrát*).

Mekkora lesz az A és B pontok közötti ellenállás az n-edik lépés után?

(*5 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest





P. 4790. Egy $\varphi = 45°$ törőszögű, $H = 20$ cm magasságú, egyenlőszárú prizma anyagának törésmutatója $n_1 = 1{,}3$. Ehhez a prizmához egy másik, $\varphi/2$ törőszögű prizmát illesztünk az *ábra* szerint. Az első prizma alaplapjával párhuzamosan, attól $h = 12$ cm távolságban vékony fénynyalábot bocsátunk a prizmára a törőélre merőleges irányban.

a) Mekkora legyen a második prizma n_2 törésmutatója, hogy a második prizmán kilépő sugár párhuzamos legyen a belépő fénysugárral?

b) Mekkora d távolsággal tolódik el egymástól a belépő és a kilépő sugár?

c) Mennyi ideig tartózkodik a fénysugár egy hullámfrontja a kettősprizmában?

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 4791. Petiék kazánja mostanában nagyon furcsa hangokat ad, mintha fel akarna robbanni. Ezért hívnak egy szerelőt, aki megállapítja, hogy lerakódás van a csőben, amit „ki kell majd savazni". Petitől megkérdezi az öccse, hogyan keletkezhetett a furcsa hang, és miért van a kazán vizének hőmérsékletét mérő hőmérő 120 °C-ig skálázva, hiszen akkor már úgyis elforrna a víz. Vajon a cső keresztmetszetének mekkora része záródhatott el?

Mit válaszolt ezekre a kérdésekre Peti?

Adatok: A csőben 80 °C-os víz van, a nyomásmérő 1,2 bar (túl)nyomást mutat, és rendes működés mellett a szivattyú 3 m/s-os sebességgel keringeti a vizet.

(*6 pont*) Közli: *Juhász Péter,* Cambridge, UK

Beküldési határidő: 2016. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 65. No. 9. December 2015)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 1): **K. 481.** What is the sum of the numbers in the 20×20 multiplication table? (The *figure* shows the 5×5 multiplication table.) **K. 482.** In a bicycle factory, the bicycles produced are tested systematically. The brakes are tested on every fifth bike, the gears are tested on every fourth, and the shifter is tested on every seventh one. They manufacture 435 bicycles a day. How many bicycles are issued from the factory per day without anything tested on them? **K. 483.** In how many different ways is it possible to write the numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 on the circumference of a circle so that no sum of adjacent numbers is a multiple of 3, 5 or 7? **K. 484.** Every natural number 1 to n is written on a card. What is the smallest n such that no matter how the cards are divided into two packs, there will always be two cards in one of the packs with two numbers that add up to a perfect square? **K. 485.** Tom Thumb and the giant arrive at the castle of the dragon. Although the giant is 3.5 metres taller than Tom, he still cannot reach the top of the castle wall when he stands on the ground. So he lifts Tom Thumb on his palm over his head. Tom can just climb the wall, which is 6 metres and 20 centimetres high. The giant has long hands: he can reach 40% of his height above the top of his head, while Tom can only reach 20% of his height above the top of his head. How tall is the giant, and how tall is Tom Thumb? **K. 486.** How many five-digit positive numbers are there in which the sum and the product of the digits are both even?

New exercises for practice – competition C (see page 1): **Exercises up to grade 10: C. 1322.** Three consecutive terms of an arithmetic progression of positive integers are written down in a row to form a single number. Find the largest seven-digit number obtained in this way. (*Quantum,* 1998) **C. 1323.** Let T denote the intersection of side BC with the angle bisector drawn from vertex A of a right-angled triangle. Let F denote the midpoint of side BC, and let M be the intersection of the perpendicular bisector drawn at F with another side. Given that the quadrilateral $ATFM$ is a kite, determine the angles of the triangle. (A may denote any vertex of the triangle.) **Exercises for everyone: C. 1324.** Agnes is making gingerbread hearts for Christmas. The pastry cutter has the shape of a 6 cm by 6 cm square with two semicircles attached to two adjacent sides. She always rolls the dough the same thickness, forming a square whose side is a whole number of decimetres. (If any dough remains, she gives it to her sister.) She starts cutting the hearts out of the pastry by placing the corner of the cutter to the corner of the pastry square, carefully aligning the sides. Then she continues by placing the cutter next to the cut-out squares with the same orientation, as close as possible. How many squares can Agnes make if she starts out with a 1 m^2 pastry, and she always kneads together the pastry remaining after cutting out the hearts? **C. 1325.** Let a_n denote the closest integer to $\sqrt{n}$. Determine the sum $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{484}}$. **C. 1326.** The perimeter of a right-angled trapezoidal plot is 400 m. One leg of the right angled trapezium makes an angle of 45° with the base. For what length of the base would the area of the plot be a maximum? **Exercises upwards of grade 11: C. 1327.** With line segments drawn from an interior point, dissect an octagon with the properties shown in the *diagram* into four parts, such that the parts can be put together to form two congruent regular pentagons. **C. 1328.** Solve the following equation: $2^{\sin^2 x}=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}$.

New exercises – competition B (see page 1): **B. 4750.** Ann claims that a random three-digit number is more likely to contain a digit of 6 than a random five-digit number. Bill says it is the other way around. Who is right? (*3 points*) (*Matlap,* Kolozsvár) **B. 4751.** Prove that 3^n+5^n is not a perfect square for any positive integer n. (*4 points*) (Proposed by *G. Somlai,* Budapest) **B. 4752.** Consider circles k_1 with center O_1 and radius r_1, and k_2 with center O_2 and radius r_2. Line PA is tangent to k_1 at A and line PD is tangent to k_2 at D. Segment AD intersects k_1 and k_2 at B and C, respectively. Find PA/PB in terms of r_1 and r_2 if $AB=CD$. (*4 points*) (*M&IQ*) **B. 4753.** Prove that $\sqrt{2x\sqrt{(2x+1)\sqrt{(2x+2)\sqrt{2x+3}}}}<\frac{15x+6}{8}$ for all $x>0$. (*5 points*) (Proposed by *I. Deák,* Székelyudvarhely) **B. 4754.** Lines AD, BD and CD passing through an interior point

D of a triangle ABC intersect the opposite sides at A_1, B_1 and C_1, respectively. The midpoints of the segments A_1B_1, B_1C_1 and C_1A_1 are C_2, A_2 and B_2, respectively. Show that the lines AA_2, BB_2 and CC_2 are concurrent. (*5 points*) (Proposed by *Sz. Miklós,* Herceghalom) **B. 4755.** In a triangle ABC, the escribed circles k_A and k_B drawn to sides CB and CA touch the appropriate sides at D and E, respectively. Show that line DE cuts out equal chords from the circles k_A and k_B. (*4 points*) (Proposed by *K. Williams,* Szeged) **B. 4756.** In the interior of a unit cube, there are some spheres with a total surface area of 2015. Show that *a*) there exists a line that intersects at least 500 spheres, *b*) there exists a plane that intersects at least 600 spheres. (*6 points*) (Hungarian Mathematics Competition of Transylvania) **B. 4757.** Let A_k denote the number that consists of k ones in decimal notation. How many positive integers are there that cannot be obtained as the sum of the digits of any multiple of A_k? (*5 points*) (Proposed by *K. Williams,* Szeged) **B. 4758.** What is the minimum number of different lines determined by the sides of a (not necessarily convex) 2015-sided polygon? (*6 points*) (Proposed by *D. Lenger,* Budapest)

New problems – competition A (see page 1): **A. 656.** Let $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ be a polynomial with real coefficients such that $p(x) \geqslant 0$ for $x \geqslant 0$. Prove that for every pair of positive numbers c and d, $a_0 + a_1(c+d) + a_2(c+d)(c+2d) + \dots + a_n(c+d)(c+2d)\dots(c+nd) \geqslant 0$. **A. 657.** Let $\{x_n\}$ be the van der Korput sequence, that is, if the binary representation of the positive integer n is $n = \sum_i a_i 2^i$ $(a_i \in \{0,1\})$, then $x_n = \sum_i a_i 2^{-i-1}$. Let V be the set of points (n, x_n) in the plane where n runs over the positive integers. Let G be the graph with vertex set V that is connecting any two distinct points p and q if and only if there is a rectangle R which lies in a parallel position to the axes and $R \cap V = \{p, q\}$. Prove that the chromatic number of G is finite. (*Miklós Schweitzer competition,* 2015) **A. 658.** We call a bar of width w on the surface S^2 of the unit sphere in 3-dimension, centered at the origin a spherical zone which has width w and is symmetric with respect to the origin. Prove that there exists a constant $c > 0$ such that for every positive integer n the surface S^2 can be covered with n bars of the same width so that every point is contained in no more than $c\sqrt{n}$ bars. (*Miklós Schweitzer competition,* 2015)

Problems **B. 4748., A. 653.** and **A. 654.** were incorrectly stated in our November issue. The correct problems are:

B. 4748. A triangle $\mathcal{H}$ is rotated about a line lying in its plane but not intersecting it. Show that the volume of the resulting solid equals the product of the area of $\mathcal{H}$ and the perimeter of the circle described by the centroid of $\mathcal{H}$ during the rotation. (*5 points*) **A. 653.** Let $n \geqslant 2$ be an integer. Prove that there exist integers $a_1, \dots, a_{n-1}$ such that $a_1 \operatorname{arctg} 1 + a_2 \operatorname{arctg} 2 + \dots + a_{n-1} \operatorname{arctg}(n-1) = \operatorname{arctg} n$ if and only if (n^2+1) divides $(1^2+1)(2^2+1)\dots\big((n-1)^2+1\big)$. **A. 654.** Let $p(x)$ be a polynomial of degree at most n such that $\big|p(x)\big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$ for $0 < x \leqslant 1$. Prove that $\big|p(0)\big| \leqslant 2n+1$.

Problems in Physics

(see page 570)

M. 355. Drop some cooking oil onto the surface of water. How does the diameter of the oil spot depends on the amount of the oil?

P. 4780. At which latitude should we stand in order that we could observe (by means of a good quality telescope) a geostationary "synchronous satellite"? **P. 4781.** 200 g water is heated on a camping stove from a temperature of 15 °C to a temperature of 75 °C. (The cartridge of the stove contains 80% butene and 20% propane.) By what amount does the total mass of the stove change during the heating process, if the efficiency of heating is 60%? **P. 4782.** One end of a 16 cm-long and a 30 cm-long pieces of rope are attached to the ceiling at a distance of 34 cm. The other ends of the ropes are attached to a small object of mass 17 grams. *a*) Calculate the tensions in the ropes. *b*) The shorter rope is burnt. What is the tension in the other rope when it is vertical? **P. 4783.** A wedge of mass m_1, and a cube of mass m_2 on the horizontal face of the wedge are sliding down along an inclined plane of angle of elevation of $\alpha = 30^\circ$ at the same acceleration. The coefficient of friction between the wedge and the inclined plane is 0.1. What is the minimum value of the frictional coefficient between the wedge and the cube, if the cube does not slip on the wedge? **P. 4784.** The parabolic mirror of the Canadian Large Zenith Telescope is created by a uniformly spinning pan filled with liquid mercury. The diameter of the telescope is 6 m, and the number of revolutions of the pan is 8.5/minutes. Determine the focal length of the parabolic mirror. **P. 4785.** The Milky Way is a so called spiral galaxy. Its shape is approximately a uniform density disc which has a small width with respect to its diameter. The Sun undergoes simple harmonic motion between the "bottom" and the "top" of this disc. What is the period of the SHM, if the average density of the galaxy is $5.8 \cdot 10^{-21}$ kg/m^3? **P. 4786.** There are three point-like objects in space – far from any other objects – such that their initial velocities are zero, and the distance between any two is the same d. Two of the objects have the same mass of m, and the mass of the third one is $2m$. Due to the gravitational force the objects begin to move and they collide with each other. *a*) How much distance do they cover until they meet? *b*) How much time elapses until the collision of the objects? **P. 4787.** There is a sample of 17 °C Helium gas in a container of rigid adiabatic walls. The container is dropped to the surface of the Moon from a height of 30 m. *a*) What will the ordered speed of the Helium atoms be, at the impact of the container? *b*) By what amount does the unordered thermal average speed of the Helium atoms increase after the impact? **P. 4788.** The measure of current flowing in each of three long straight wires through every other vertex of a regular hexagon of edges $a = 2$ cm is $I = 10$ A. Each wire is perpendicular to the plane of the hexagon, and the direction of the current in two of the wires is upward, whilst in the third wire the current flows downward. *a*) What is the magnitude and the direction of the magnetic induction at the centre of the hexagon? *b*) What is the magnitude and the direction of the force exerted on a $\ell = 1$ m long piece of each wire? **P. 4789.** We would like to solder a so called Sierpinski-triangle from a piece of thin wire of uniform cross-section. We start from an equilateral triangle shaped frame, in which the resistance measured between the the vertices A and B is R_0. First the wires at the midlines of the triangle are soldered to the original frame, and then the second step is to solder the wires along the midlines of three outer triangles which were created. The process is continued similarly, and a fractal like frame is created (see the *figure*). What will the resistance between the points A and B be after the n-th step? **P. 4790.** The refractive index of the material of a triangular prism of apex angle $\varphi = 45^\circ$ is $n_1 = 1.3$. The base of the prism is an isosceles triangle of height $H = 20$ cm. Another prism of apex angle $\varphi/2$ is attached to the previously described one as shown in the *figure.* A beam of light enters to the first prism, parallel to the base of the isosceles triangle at a distance of $h = 12$ cm from it. *a*) What should the refractive index of the second prism n_2 be in order that the light beam emerges parallel to the original beam? *b*) By what distance d is the emerging beam displaced with respect to the entering ray? *c*) How long does a wave-front of the light-beam take to travel through the double prism? **P. 4791.** Recently Peter's boiler makes very strange sounds, as if it would explode at any moment. A repairman was asked to have a look, and he said that limescale has deposited in the tube, and it must be descaled. Peter's small brother asked Peter how the strange sound could arise, and why the thermometer, which measures the temperature of the water, is scaled up to 120 °C, since at that temperature the water would boil. What fraction of the tube is closed by the deposited scale? What did Peter answer to these questions? *Data:* The temperature of the water in the tube is 80 °C, the pressure gauge reads 1.2 bar (excess) pressure, and at normal working conditions the pump makes the water flow at a speed of 3 m/s.