KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

65. évfolyam 8. szám Budapest, 2015. november

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, V. emelet 5.106.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, V. emelet 5.106., 1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Közlemény a tanulmányi versenyek feladatainak és eredményeinek megjelenéséről

Mivel mind az Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, mind az Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny feladatai és eredményei megtalálhatóak az interneten, ezért a KöMaL-ban ezentúl nem jelennek meg. Honlapunkon elérhetőek lesznek, a `http://www.komal.hu/hirek/verseny/index.h.shtml` címen.

55. Rátz László Vándorgyűlés

Vác, 2015. július 7–10.

Idén a matematikatanárok vándorgyűlésének helyszíne Vác volt. A rendezést az Apor Vilmos Katolikus Főiskola vállalta. A főszervező *Horváth Alice* volt, aki munkatársaival együtt minden időpontban a legnagyobb segítséget nyújtotta mindenkinek.

A megnyitón *Sirák Péter,* a főiskola tanára játszott orgonán, majd a köszöntőket követően sor került a Beke Manó-emlékdíjak átadására. Ezt követően először *Kárpáti Andrea,* majd a tavalyi Rátz Tanár Úr Életműdíjas *Kubatov Antal* előadását hallgathattuk meg.

A délelőttök során most is a megszokottan magas színvonalú előadások és szemináriumok közül válogathattak a tanítók és a tanárok mindhárom szekcióban. Az egyik legnagyobb érdeklődésre számot tartó előadás az érettségivel kapcsolatos tervezett változásokról szólt, az ehhez kapcsolódó cikkünk a 454–458. oldalon olvasható. Az egyre népszerűbb tanárversenyt az Akadémiai Kiadó, a Műszaki Kiadó, a MATEGYE Alapítvány és a TypoTex Kiadó támogatta, a verseny feladatait és az eredményeket külön közöljük.

A vándorgyűlés időben éppen az idei nyár egyik nagyon meleg, majd nagyon viharos időszakára esett, így a szabadidőnkben vagy a melegben pihegtünk, vagy a záport igyekeztük megúszni. A férfi focimeccset ezúttal a vidék csapata nyerte, az ezt követő női kosárlabdán örömjáték volt. Vácon is, a Dunakanyarban is lehetett barangolni, de nagyon népszerű volt a szervezett kirándulás is, amely a Vácrátóti Botanikus Kertbe vezetett.

Az előadások anyagai megtekinthetők a vándorgyűlés honlapján, amelyet a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium matematika munkaközössége gondoz (`http://rlv.berzsenyi.hu/2015`).

A 2016-os Vándorgyűlésre Bajára várja ismét nagy létszámban a matematikatanárokat a Bolyai János Matematikai Társulat.

Miklós Ildikó

A középiskolás tanárverseny feladatai

A verseny időtartama 90 perc. A feladatok pontozása: minden helyes válasz 5 pontot ér; helytelen válaszra 0 pont, válasz nélkül hagyott kérdésekre 1-1 pontot jár.

1. Juli kiszámolta 2015-nek a 2016-nál kisebb természetes szám kitevőjű hatványait, majd összeadta a kapott számokat. Melyik az összeg legkisebb helyiértékén álló számjegy?
(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 5; (E) 6.

2. Egy statisztikai minta elemei 7; 2; 14; 21; 191 és 41. Egy új adat hozzávételével a minta terjedelme 15-tel nő. Melyik lehet az új adat?
(A) -17; (B) -13; (C) -10; (D) 205; (E) 208.

3. Hány olyan 2015-jegyű szám van, amelyre teljesül, hogy bármely két számjegyének a szorzata ugyanannyi? (A) 0; (B) 9; (C) 12; (D) 18; (E) 2015.

4. Mennyi a $\frac{\sin 10^\circ \cdot \sin 80^\circ}{\cos 70^\circ}$ tört értéke? (A) $\frac{1}{4}$; (B) $\frac{1}{3}$; (C) $\frac{1}{2}$; (D) $\frac{2}{3}$; (E) 1.

5. Hány valós megoldása van az $x^7 + 2x^3 + 3 = 0$ egyenletnek?
(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 4; (E) 7.

6. Hány olyan számrendszer van, amelyben a 441 alakú szám négyzetszám, és amelynek n alapszámára teljesül, hogy $n \leqslant 10$? (A) 5; (B) 6; (C) 7; (D) 8; (E) 9.

7. Hány elemű halmaz a $\lg \sin x + \lg \cos x = \lg \sin(-2x)$ egyenlet értelmezési tartománya? (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 2015; (E) végtelen sok.

8. Az *ábrán* látható összeadásban minden betű egy számjegyet jelöl és B = 7. Hány különböző háromjegyű számot jelölhet a SOR szó, ha az azonos betűk azonos számokat jelölnek?
(A) 200; (B) 216; (C) 243; (D) 270; (E) 300.

$$\begin{array}{r} \mathrm{V\,Á\,C} \\ +\,\mathrm{V\,Á\,R\,O\,S} \\ \hline \mathrm{B\,Á\,J\,O\,S} \end{array}$$

9. Évit teniszedzés után minden alkalommal édesapja viszi haza autóval, aki pontosan az edzés végére érkezik meg. Egyik nap az edzés hamarabb ért véget, és Évi az edzés után azonnal elindult gyalog haza a szokott útvonalon. Negyed óra múlva találkozott az autóval érkező édesapjával. Azonnal beszállt az autóba, és így a megszokottnál 10 perccel korábban ért haza. Hány perccel hamarabb ért véget a szokásosnál az edzés, ha minden más a megszokott időpontban és tempóban zajlott, és az autó megfordulásához, valamint a beszálláshoz szükséges időtartamtól eltekintünk?
(A) 10; (B) 15; (C) 20; (D) 25; (E) 30.

10. Hány megoldása van az egész számok halmazán az $(x-2015)^{4030-2x} = 1$ egyenletnek? (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) végtelen sok.

11. Hány fok abban a háromszögben a két kisebb belső szög nagyságának a különbsége, amelynek a leghosszabb oldala 10 cm, és két magasságára is igaz, hogy a hossza legalább akkora, mint a hozzá tartozó alap hossza?
(A) 0; (B) 10; (C) 20; (D) 30; (E) 45.

12. Mennyi az $\left|\left|\sqrt{2015} - x\right| - \sqrt{18\,135}\right| = \sqrt{8060}$ egyenlet gyökeinek a szorzata?
(A) -2015; (B) 0; (C) 2015; (D) 8060; (E) 18 135.

13. Sárkányföldön ötfejű, hatfejű és hétfejű sárkányok élnek. A hatfejűek mindig hazudnak, az ötfejűek és a hétfejűek mindig igazat mondanak. Egyszer négy sárkány találkozott. Tűztorok azt állította, hogy négyüknek összesen 24, Parázsorr azt, hogy 23, Füstfül azt, hogy 22, Lángnyelv pedig azt, hogy 21 fejük van. Hogy hívják az igazmondó sárkányt?
(A) Tűztorok; (B) Parázsorr; (C) Füstfül; (D) Lángnyelv; (E) Ezekből az adatokból nem lehet meghatározni.

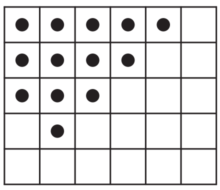
14. Hány olyan $\overline{abc}$ alakú háromjegyű szám van, melyre a $\frac{73}{a^3+b^3+c^3}$ tört természetes szám? (A) 6; (B) 7; (C) 9; (D) 10; (E) 12.

15. Mi az értékkészlete a valós számok halmazán értelmezett valós értékű $f(x) = x^2 - \lfloor x^2 \rfloor$ függvénynek (a $\lfloor b \rfloor$ a b szám egészrészét jelöli)?
(A) $[0; 0{,}25[$; (B) $[0; 0{,}4[$; (C) $[0; 0{,}49[$; (D) $[0; 0{,}64[$; (E) $[0; 1[$.

	A dobott számok
1. dobás	5; 7; 2; 6; 9
2. dobás	1; 2; 10; 7; 3
3. dobás	9; 8; 4; 1; 5
4. dobás	6; 5; 4; 7; 3

16. Öt érme oldalaira felírtuk az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 és 10 számokat úgy, hogy minden érme minden oldalára egy szám került. Peti ötször egymás után feldobta az öt érmét, és leírta az első négy dobás után az öt érmén látható öt számot (lásd táblázat). Megállapította, hogy az ötödik dobás után az öt érmén látható számok összege a lehető legkisebb lett. Mennyi volt az ötödik dobás után az öt érmén látható számok összege? (A) 15; (B) 16; (C) 17; (D) 18; (E) 19.

17. Legyen S_n az $1! + 2! + 3! + \ldots + n!$ összeg, ahol n 25-nél kisebb pozitív egész szám. Kiválasztunk két tetszőleges S_n összeget. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott két összeg egyike prímszám?
(A) $\frac{1}{24}$; (B) $\frac{1}{12}$; (C) $\frac{3}{24}$; (D) $\frac{1}{6}$; (E) $\frac{1}{4}$.



18. Egy 6×5-ös négyzetrács 13 négyzetére egy-egy fekete korongot helyeztünk (lásd ábra). A korongokat lépésekkel mozgatjuk a táblán. Egy lépés abból áll, hogy először kiválasztunk egy sorból vagy egy oszlopból három egymás melletti olyan négyzetet, hogy csak a középső és egyik szélső négyzeten legyen korong, ezután pedig a szélső négyzeten lévő korongot áthelyezzük a másik szélső négyzetre. Legkevesebb hány lépésben érhető el, hogy minden korong kezdetben üres négyzetre kerüljön át?
(A) 15; (B) 24; (C) 27; (D) 30; (E) Az átrendezés nem valósítható meg.

19. Egy szobában 10 szék van egy sorban egymás mellett. A székek kezdetben üresek. Időnként valaki leül egy üres székre, és ugyanakkor az egyik szomszédja, ha van, feláll. Hány ember ülhet egyszerre a székeken, ha az emberek száma a lehető legnagyobb?
(A) 5; (B) 7; (C) 8; (D) 9; (E) 10.

20. Hány fok annak a háromszögnek a legnagyobb szöge, amelynek a területe $T = \frac{a^2+b^2}{4}$, ahol a és b a háromszög két oldalának hossza?
(A) 60; (B) 75; (C) 90; (D) 105; (E) 120.

21. Melyik kifejezéssel egyenlő a $\sin^6 x + \cos^6 x$ összeg, ha $\sin x \cdot \cos x = p$?
(A) $1 - 6p$; (B) $1 - 3p^2$; (C) $1 - p^2$; (D) $1 + p^2$; (E) $1 + 3p^2$.

22. Legyen f az a függvény, amely minden valós x-hez a számegyenes x-et jelölő pontjának a $[0; 2]$ intervallum attól legtávolabb lévő, egész számot jelölő pontjától való távolságát rendeli. Mi ennek az f függvénynek a hozzárendelési szabálya?
(A) $f(x) = |x - 1| - 1$; (B) $f(x) = |2 - x| - 1$; (C) $f(x) = |x - 1| + 1$;
(D) $f(x) = |x + 1|$; (E) $f(x) = 2|x + 1|$.

23. Hány olyan n természetes szám van, melyre az $n^5 - n^4 - 2n^3 + 2n^2 + n - 1$ polinom helyettesítési értéke négyzetszám?
(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 5; (E) végtelen sok.

24. Az ABC háromszög A csúcsból induló magasságának hossza harmonikus közepe azon két szakasz hosszának, amelyekre a magasság a BC oldalt bontja. Mennyi a $\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$ összeg, ha β a háromszögnek a B, γ a C csúcsnál lévő belső szöge?
(A) 1; (B) $\frac{3}{2}$; (C) 2; (D) $\frac{5}{2}$ (E) 3.

25. Hány olyan $(x; y; z)$ rendezett számhármas van, melyre $64^x + 16^y + 4^z = 321$, ha $x; y; z \in \mathbb{N}$? (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4.

26. Mennyi a $\frac{4\sqrt{2}+2}{2^{x-1}+2^{2-x}+1}$ tört lehető legnagyobb értéke?
(A) $\frac{1}{2}$; (B) $\frac{2}{3}$; (C) $\frac{3}{4}$; (D) $\frac{4}{5}$; (E) 2.

27. Egységnyi élű fehér kockákból n egységnyi élű kockát állítunk össze ($n \geqslant 5$), majd a kapott kocka lapjait pirosra festjük. Hány olyan egységnyi élű kocka lesz, amelynek van olyan, vele lappal érintkező szomszédja, amelynek nála 1-gyel több piros lapja van?
(A) $2n^2 + n + 4$; (B) $4n^2 + 36$; (C) $6n^2$; (D) $6n^2 - 36n + 56$; (E) $6n^2 - 12n + 8$.

28. A P és Q pontok egy AB átmérőjű félkörív pontjai. Az R pont az OB sugár egy olyan pontja, amelyre $OPR\sphericalangle = OQR\sphericalangle = 10°$. Hány fok a $QOB\sphericalangle$ nagysága, ha $POA\sphericalangle = 40°$? (A) 10; (B) 15; (C) 20; (D) 25; (E) 30.

29. Ernő ötöslottó szelvényeket töltött ki. Minden lehetséges számötöst pontosan egy szelvényen jelölt be. Hány olyan szelvény van ezek között, melyben a bejelölt öt szám közül legalább három szomszédos? (Az ötöslottó szelvényeken az első 90 pozitív egész számból kell ötöt bejelölni.)
(A) $86 \cdot 87$; (B) $86 \cdot 3653$; (C) $86 \cdot 3654$; (D) $86 \cdot 3740$; (E) $86 \cdot 3741$.

30. Legyen P az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög BC átfogójának olyan pontja, melyre $BP < PC$. Hány fok a $PAB\sphericalangle$ nagysága, ha létezik derékszögű háromszög, amelynek oldalai PA, PB és PC? (A) 20; (B) 25; (C) 30; (D) 35; (E) 40.

A feladatsort **Csordásné Szécsi Jolán** állította össze

A középiskolás tanárverseny eredménye

1. Koncz Levente (Budapest, Óbudai Árpád Gimn.) .... 140 pont
2. Fridrik Richárd (Szegedi Tudományegyetem) .... 136 pont
3. Fonyóné Németh Ildikó (Keszthelyi Vajda János Gimn.) .... 115 pont
3. Fonyó Lajos (Keszthelyi Vajda János Gimn.) .... 115 pont
5. Szaszkó-Bogárné Eckert Bernadett (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.) .... 113 pont
6. Baloghné Cseh Judit (Szolnoki Varga Katalin Gimn.) .... 112 pont
7. Cs. Nagy András (Váci Boronkay György Szakközépiskola) .... 105 pont
8. Merényi Imre (Váci Boronkay György Szakközépiskola) .... 104 pont
9. Czinki József (Budapest, Óbudai Árpád Gimn.) .... 103 pont
10. Tigyi István (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.) .... 101 pont.

Az általános iskolás tanárverseny* eredménye

1. Csordás Péter (Kecskeméti Katona József Gimn.) .... 136 pont
1. Nagy Tibor (Kecskeméti Református Ált. Isk.) .... 136 pont
3. B. Varga József (Temerini Petar Kocsity Ált. Isk.) .... 125 pont
4. Tóth Gabriella (Palicsi Miroslav Antic Ált. Isk.) .... 111 pont
5. Egyed László (Bajai III. Béla Gimn.) .... 109 pont
6. Csordás Mihály (Kecskeméti Mategye Alapítvány) .... 105 pont.

*Az általános iskolás tanárverseny feladatait nem közöljük.

A 2015. évi Beke Manó Emlékdíjasok

A Beke Manó Emlékdíj Bizottság döntése alapján 2015-ben a díj második fokozatában részesült **Ábrahám Gábor, Hillné Benkó Katalin, Stukovszkyné Henk Éva, Rigó István, Sisa Sándorné, Szabados Anikó** és **Bereczkiné Székely Erzsébet.**

A részletes indoklás honlapunkon (`www.komal.hu`) olvasható.

Az ellenőrzés kérdésköre a matematika érettségi vizsga javítási-értékelési útmutatóiban[1]

Bevezetés

A matematika érettségi feladatsorokat és javítási útmutatókat készítő bizottság tagjai nincsenek könnyű helyzetben, amikor a matematikai precizitás és a vizsgázóktól reálisan elvárható igényesség között kell egyensúlyozniuk. Egyszerre kell, hogy megfeleljenek a szakma (középiskolai és felsőoktatási tanárok) elvárásainak, miközben nem veszíthetik szem elől azt a tényt sem, hogy a diákok nagy része nem matematikusi pályára készül. A kétszintű érettségi bevezetése óta megfigyelhető, hogy a feladatsorokat és a javítási útmutatókat összeállító bizottság bizonyos kérdésekben nem alakított ki egységes álláspontot. Ez egyfelől nyilván a személyi változások következménye, másfelől viszont az érettségi vizsga jellegzetességéből fakad. Azáltal ugyanis, hogy a matematika érettségi vizsga – néhány feladattól eltekintve – nem teszt-jellegű, az egyes pontok megítélése bizonyos esetekben vita tárgyát képezheti.

A megoldások ellenőrzésének és a válasz megadásának kérdése az egyik olyan témakör, amelynek megítélése és kezelése nem egységes sem a matematikatanárok körében, sem az elmúlt évek érettségi feladatsorainak javítási útmutatóiban. Komoly dilemma, hogy miközben fő szabályként a feladatok megoldásának ellenőrzését várjuk, az sem lenne szerencsés, ha ennek a kompetenciának az értékelése túl nagy súlyt kapna az összpontszámban. A feladatsor elején, a vizsgázókhoz szóló *Fontos tudnivalók*-ban szerepel, hogy az eredményeket szöveges válaszként is meg kell fogalmazni, de az ehhez kapcsolódó pontos elvárások sem tisztázottak.

Az alábbiakban vázoljuk, hogy melyek azok az esetek, amikor véleményünk szerint lehet egyértelmű elvárásokat megfogalmazni, és jelezzük, hogy melyek azok a helyzetek, amikor erre nem látunk lehetőséget.

Ez az írás szándékosan tömör és lényegre törő. A tömörséget úgy próbáljuk enyhíteni, hogy a legfontosabb megállapítások mellé segítő példákat adunk. A témát részletesebben is kifejtettük, ez az anyag a Fazekas Mihály Gimnázium honlapján, ezen belül a Matematika oktatási portálon található meg[2].

---

[1]Ez a tanulmány a TÁMOP 3.1.1-11/1-2012-0001 XXI. századi közoktatás (fejlesztés, koordináció) II. szakasz keretében készült.

[2]`http://goo.gl/7VLzHz`.

Az ellenőrzés kérdése

A matematika feladatok egy részét egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek láncolatának felírásával oldjuk meg. A feladatban kitűzött probléma megoldása során felírt egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek vagy ekvivalensek az eredeti problémával, vagy nem. (Két egyenletet – egyenletrendszert, egyenlőtlenséget –, illetve egy feladatot és egy egyenletet ekvivalensnek nevezünk, ha a megoldáshalmazuk megegyezik.)

Ha a vizsgázó *ekvivalens átalakításokat* hajt végre (értve ez alatt az eredeti feladattal való ekvivalenciát is), akkor befejezésként két lehetősége van: *vagy ennek a tényét kell rögzítenie, vagy a kapott gyököket ellenőriznie kell az eredeti feladatba történő behelyettesítéssel.*

Ha a vizsgázó *nem ekvivalens átalakításokat* végez, akkor *behelyettesítéssel kell ellenőriznie.* Az ellenőrzés célja nem a számolási hibák kiszűrése, hanem az, hogy megvizsgáljuk: a feladat megoldása során kapott gyökök az eredeti feladatnak is megoldásai-e. Az ellenőrzés megtörténtének megítélése a javító tanárra van bízva, de a fő szabály: a vizsgázó tevékenysége mögött érdemi munkának kell látszania, nem elég az ellenőrzés tényének megemlítése. (Így az „ekvivalens átalakításokat hajtottam végre" tanulói megállapításra csak akkor adható az ellenőrzésért járó pont, ha a vizsgázó valóban minden szükséges feltételt figyelembe vett.)

Három esetet különböztethetünk meg:

I. A „sima" egyenletek megoldása

A fenti felosztás (vagyis egy egyenlet megoldásának ekvivalenciája) általában egyértelmű azoknál a példáknál, ahol a feladat egy „sima" (közvetlen feladatként kitűzött) egyenlet megoldása.

II. A modellalkotást igénylő, szöveges feladatok megoldásának ellenőrzése

Összetettebb a kérdés az úgynevezett szöveges feladatok megoldása során. Ezek esetében ugyanis az ekvivalencia feltételeinek megállapítása jóval nehezebb lehet, mint a behelyettesítés elvégzése. Ezeknél a feladatoknál általában elvárás az ellenőrzés elvégzése, mégpedig az eredeti feladat szövegébe (tehát nem a felírt egyenletbe) történő behelyettesítéssel. Mint az előbb említettük, a vizsgázó dolgozatában ennek látható nyoma kell, hogy legyen. (Az utóbbi években megfigyelhető változás, hogy az értékelési útmutató az ellenőrzés végrehajtására vonatkozó részleteket is tartalmaz.)

III. Azoknak a feladatoknak a köre, ahol az egyenleteket eszközként alkalmazzuk.

Sok olyan feladat van, ahol a megoldás során egyenleteket oldunk meg (koszinusztétel felírása, alakzatok metszéspontjának meghatározása stb.), különösebb modellalkotás nélkül. Ezeknek a feladatoknak a megoldása során *általában* nem várjuk el az egyenletek megoldásának ellenőrzését. Ezt egyfelől a kialakult tanítási gyakorlat, másfelől az az elv támasztja alá, hogy ne legyen túlreprezentálva az ellenőrzési kompetencia a vizsga során (1. példa).

Néhány további megállapítás

Az elmúlt 10 évben kialakult szokás, hogy a *középszintű érettségi I. részében az ellenőrzést az útmutató nem várja el, annak végrehajtásáért ott nem jár pont.*

Azoknál a *szöveges feladatoknál,* melyek megoldása során *egyszerű* egyenleteket, egyenletrendszereket *nyilvánvalóan ekvivalens lépésekkel* old meg a vizsgázó, *a válasz megadása helyettesítheti a visszahelyettesítéssel történő ellenőrzést vagy az ekvivalenciára való hivatkozást* (2. példa).

Egyenlőtlenségeket algebrai úton *csak ekvivalens átalakításokkal* oldhat meg a vizsgázó, hiszen ilyenkor nincs lehetőség az általában végtelen számú gyök behelyettesítéssel történő ellenőrzésére.

Az *egyenletrendszerek* kezelése is külön vizsgálandó. Az egyenletrendszerek ekvivalenciájának bonyolult elméleti háttere van. (Elég itt most ebből annyit megemlíteni, hogy egyenletrendszerrel csak egyenletrendszer lehet ekvivalens.) *A „sima" egyenletrendszerek* (behelyettesítéssel történő) *ellenőrzéséért általában jár pont* (3. példa). Ha egy feladatban (pl. alakzatok metszéspontjának meghatározása) *az egyenletrendszert eszközként használjuk, akkor általában nem várjuk el az ellenőrzést* (4. példa).

Szintén problémát jelenthet az *irracionális gyökök* kezelése. Ezeknél nem fogadható el a közelítő értékük behelyettesítése az eredeti egyenletbe, *csak az egyenletek ekvivalens átalakításai* és az ezekre való hivatkozás, illetve a pontos értékkel történő visszahelyettesítés.

Egyenletek *grafikus megoldása* esetén pont jár a leolvasott értékek visszahelyettesítéséért az eredeti egyenletbe, ez a tanítási gyakorlat alapján a megoldás része.

Az ellenőrzés és válasz megadásának bármilyen sorrendje elfogadható.

15. **a)** Egy számtani sorozat első tagja 5, differenciája 3. A sorozat első n tagjának összege 440. Adja meg n értékét!

15. a)		
(A szöveg alapján felírható egyenlet:) $440=\frac{2\cdot 5+(n-1)\cdot 3}{2}\cdot n$.	1 pont	
Ebből $3n^2+7n-880=0$.	2 pont	
A negatív gyök $\left(-\frac{55}{3}\right)$ a feladatnak nem megoldása.	1 pont	
$n=16$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a sorozat tagjait egyenként kiszámolva vizsgálja a kívánt összeg elérését, és jó eredményre jut, akkor a teljes pontszám jár.

1. példa (középszintű feladatsor, 2014. május), melynek *a*) feladata megoldása során az útmutató eltekint az egyenlet (pozitív egész) gyökének ellenőrzésétől

15. Egy végzős osztály diákjai projektmunka keretében különböző statisztikai felméréseket készítettek az iskola tanulóinak körében.

a) Éva 150 diákot kérdezett meg otthonuk felszereltségéről. Felméréséből kiderült, hogy a megkérdezettek közül kétszer annyian rendelkeznek mikrohullámú sütővel, mint mosogatógéppel. Azt is megtudta, hogy 63-an mindkét géppel, 9-en egyik géppel sem rendelkeznek.
A megkérdezettek hány százalékának nincs otthon mikrohullámú sütője?

15. a) első megoldás		
A mosogatógéppel rendelkezők számát jelölje x, a mikrohullámú sütővel rendelkezők száma ekkor $2x$.	1 pont	
Valamelyik géppel 141-en rendelkeznek: $2x+x-63=141$,	2 pont	
amiből $x=68$.	1 pont	
Nincs mikrohullámú sütője $(150-2\cdot 68=)$ 14 megkérdezettnek,	1 pont	
ők az összes megkérdezett kb. 9,3%-át jelentik.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. példa (középszintű feladatsor, 2013. október), melynek *a*) alfeladata megoldása során az útmutató eltekint a felírt egyenlet ellenőrzésétől. Ezt indokolja egyfelől az egyenlet egyszerűsége, másfelől az, hogy a kérdés megválaszolásával a vizsgázó tulajdonképpen ellenőrzi, hogy az általa megadott értékek megfelelnek a feladat feltételeinek

13. **a)** Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$x+4=\sqrt{4x+21}$$

b) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y valós számot jelöl!

$$\left.\begin{aligned} 3x+y&=16 \\ 5x-2y&=45 \end{aligned}\right\}$$

13. b) első megoldás		
(Behelyettesítő módszerrel:) $y=16-3x$	1 pont	
$5x-32+6x=45$	1 pont	
$11x=77$	1 pont	
$x=7$	1 pont	
$y=-5$	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

3. példa (középszintű feladatsor, 2013. október), melynek *b*) alfeladata megoldása során az útmutató elvárja az egyenletrendszer ellenőrzését

17. Adott a koordináta-rendszerben két pont: $A(1; -3)$ és $B(7; -1)$.

a) Írja fel az A és B pontokra illeszkedő e egyenes egyenletét!

b) Számítással igazolja, hogy az A és a B pont is illeszkedik az $x^2+y^2-6x-2y=10$ egyenletű k körre, és számítsa ki az AB húr hosszát!

Az f egyenesről tudjuk, hogy illeszkedik az A pontra és merőleges az AB szakaszra.

c) Számítsa ki a k kör és az f egyenes (A-tól különböző) metszéspontjának koordinátáit!

17. c) első megoldás		
Az f egyenes egy normálvektora: $\overrightarrow{AB}(6;2)$	1 pont	
Az f egyenes egyenlete $3x+y=0$.	2 pont	
A metszéspont koordinátáit a k kör és az f egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásával kapjuk.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
Az f egyenes egyenletéből $y=-3x$.	1 pont	
Ezt a kör egyenletébe helyettesítve: $x^2+9x^2-6x-2\cdot(-3x)=10$.	1 pont	
$x^2=1$	1 pont	
Ennek (az 1-től különböző) megoldása $x=-1$.	1 pont	
Így a keresett pont a $C(-1; 3)$.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

4. példa (középszintű feladatsor, 2013. október), melynek c) alfeladatának megoldása során az útmutató eltekint az egyenletrendszer megoldásának ellenőrzésétől

Összegzés

Úgy véljük, hogy az ellenőrzés kérdését illetően fent megfogalmazott véleményünk a kérdés kezelésének egységesítése irányába tett lépés. A diákokban a tanítás során kialakítandó önellenőrzési kompetenciát nagyon fontosnak tartjuk. Ennek az érettségi vizsga során történő számonkérése – a megfelelő arányban – szintén lényeges.

Azt javasoljuk, hogy a szaktanári munka során a diákoktól várjuk el a rendszeres ellenőrzést. A feladatsort és a hozzátartozó értékelési útmutatót összeállító bizottság azonban akkor jár el helyesen, ha az érettségi vizsgán az ellenőrzést csak ott értékeli pontokkal, ahol feltétlenül szükséges.

Csapodi Csaba, Koncz Levente,
Kósa Tamás, Orosz Gyula

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Milyen α valós paraméter esetén lesz a következő egyenletnek egy megoldása?

$$\frac{x^2\cos\alpha + x + \frac{1}{2}\sin\alpha}{x^2 - \frac{1}{2}} = 0. \qquad (\textit{11 pont})$$

2. Óvodás korú kisöcsénk a játék rulett-zsetonokat használja toronyépítésre. Az első korongoszlop mellé magasabbat állít, majd a következőket ugyanannyival növeli, mint a korábbiakat. Így egy lépcsős toronysorozatot hoz létre mackójának.

a) Milyen sorozatot alkotnak a tornyok magasságai?

b) Az első toronytól kezdve csoportosítsuk a tornyokat hármasával. Igazoljuk, hogy a hármas csoportokban szereplő tornyok magasságainak összege számtani sorozatot alkot.

c) A sorba rendezett tornyok elejéről kisöcsénk elvett n darab tornyot, majd megszámoltatta velünk, hogy hány zsetonja van összesen. Ezután elvett még n db tornyot, s ismét megkérdezte, hogy az előzővel együtt most hány zsetonja is van. Ebből a két adatból meg tudnánk-e mondani, hogy még n tornyot elvéve, hány zsetonunk is lesz az előzőkkel együtt? (*12 pont*)

3. Az A halmaz elemei olyan 100-nál kisebb pozitív a egészek, melyekre $\sin(a\cdot 10^\circ) = 0{,}5$. A B halmaz elemei a 100-nál kisebb hattal osztható természetes számok.

a) $|A| =?$ $\qquad |B| =?$

b) Definiáljuk a C halmazt a következőképpen: $C := \{1; 2; 3; 6; A\}$, ahol az A halmaz a C eleme. $|C \setminus B| =?$

c) Hány páros elemű részhalmaza van C-nek? (*14 pont*)

4. A Balaton valósághű modelljét szeretnénk elkészíteni. Az adatok szerint a Balaton hossza 77 km, felszíne 594 km^2, átlagos mélysége 3,6 m, legmélyebb pontja 11 m.

a) Hány centiméter mélyen lesz a modellünk legmélyebb pontja a felszínhez képest, ha annak hossza a terepasztalon 1 m?

b) Mennyi a modellünk léptéke (méretaránya)?

c) Hány centiliter víz kell a modellhez, ha azt valóban vízzel szeretnénk feltölteni?

d) A Balatont egy helikopterről fentről is megtekintjük, hogy lássuk, mennyire hasonlít a modellünkre. A tó két legtávolabbi, egymástól 77 km-re lévő pontját nézzük hossztengelyére merőlegesen, középpontja felé repülve. 4 km távolságban, 900 m magasról mekkora szögben látjuk a tavat? (*14 pont*)

II. rész

5. Egy bank a következő ajánlattal kívánja ügyfelei körét bővíteni: aki a megadott határidőig pénzét áthozza a fiókba fél éves lekötéssel, az első hat hónapban évi 5% kamatot kap. Az *apró betűs részt* elolvasva megtudhatjuk, hogy fél év után havi lekötéssel, évi 1,5% kamattal marad a fiókban a pénzünk. (A havi lekötés azt jelenti, hogy amennyiben előbb vesszük ki a pénzünket, a teljes kamatot elveszítjük a csonka hónapra.) 1 millió forintot teszünk be a bankba. Ezen feltételek ismeretében válaszoljunk a következő kérdésekre.

a) Mennyi pénzünk lesz fél év múlva?

b) Mennyit kamatozott egy év alatt a betett 1 millió forintunk?

c) Korábbi bankfiókunkban hagyva a pénzünket évi 2%-os a kamatot kapnánk havi lekötés mellett. Legfeljebb mennyi időre éri meg áthozni a pénzünket az új helyre? (*16 pont*)

6. Ugorjunk másfél évet. Az egyetemek új előírása miatt a 2017-es érettségin igen sokan választották a matematikát emelt szinten. 10%-uknak 90% feletti lett az eredménye.

a) Az emelt szinten érettségiző diákok közül véletlenszerűen megkérdezve 10-et mekkora annak az esélye, hogy közülük pontosan ketten 90% feletti érettségit tettek?

b) Internetes felmérésen 100 diákot kérdeztek meg véletlenszerűen az emelt szinten érettségizők közül. Mekkora a valószínűsége, hogy legfeljebb 2-en vizsgáztak 90% feletti eredménnyel? És annak, hogy a 100 megkérdezett diákból legfeljebb ketten vannak azok, akiknek nem sikerült 90% felett az eredményük?

c) (Az emelt szinten túlmutató kérdés.) Az OH statisztikájában kutakodunk. A 40 000 emelt szintű vizsgázó eredményét tekintve 90%-os biztonsággal hány 90% feletti eredményes vizsgázóra számíthatunk? (*16 pont*)

7. Adott a valós számok halmazán értelmezett f függvény:

$$f\,:\,x\longmapsto\frac{x}{1-|x|}.$$

a) Ábrázoljuk a függvényt a $]-1;2]\setminus\{1\}$ intervallumon.

b) Adott a $g(x)=2x$ függvény. Mi lesz az $f\circ g$ függvény értékkészlete a $]-1;2]$ intervallumon?

c) Határozzuk meg az f függvény inverzét a $]-1;1[$ intervallumon, s ábrázoljuk az f^{-1} függvényt. (*16 pont*)

8. Lakásunk nappali szobája hatszög alakú, melynek oldalai rendre $AB=3{,}4$, $BC=2{,}3$, $CD=2{,}3$, $DE=2{,}3$, $EF=3{,}4$, valamint $FA=3{,}7$ méteresek. Az AB és a BC, valamint az DE és az EF oldalak merőlegesek egymásra. A szoba parkettázásához szeretnénk megállapítani az alapterületét, melyet kétféleképpen teszünk meg.

Mi megmérjük a szoba AD átlóját, melyet 4,8 méteresnek találunk, míg fiaink a szoba F csúcsánál lévő szöget határozzák meg, melyet 120°-nak mérnek. A hosszúságot 5 cm-es pontossággal, míg a szöget 5°-os pontossággal tudjuk eszközeinkkel megmondani.

a) A szög vagy a hosszúság relatív hibája nagyobb?

b) Mekkorák a területek a két esetben?

c) Mennyire pontosan ismerjük a két esetben az AD átlót?

d) Melyik mérést fogadjuk el inkább? (*16 pont*)

9. A mérnökök egy gépkocsi mozgását figyelték műszerek segítségével négy másodpercen át. A pillanatnyi sebességek (m/s-ban) mért adataira a számítógép a következő függvényt illesztette:

$$v(t) = 2{,}5t^3 - 16t^2 + 33t + 5.$$

a) Mekkora sebességre gyorsult fel az autó az első másodperc végére?

b) A sebességváltás pillanatában nem gyorsult az autó. Mikor volt ez?

c) A gépkocsi pillanatnyi fogyasztását (literben mérve) a következő függvény írja le:

$$F(t) = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \big(v'(t) + 50t\big).$$

Hány centiliter üzemanyag fogyott az első két másodperc alatt? (*16 pont*)

Székely Péter
Budapest

Megoldásvázlatok a 2015/7. sz. emelt szintű matematika gyakorló feladatsorhoz

I. rész

1. *Hány olyan* 4 *darab egész számból álló adatsokaság van, melynek mediánja* 1*, átlaga* 2*, szórásnégyzete pedig* 3*? Mi(k) ez(ek) az adatsokaság(ok)?* (*12 pont*)

Megoldás. Az adatsokaság elemei nemcsökkenő sorrendben legyenek $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. A medián 1, és ez most – mivel páros számú adat van – a két középső szám átlaga, ezért $c = 2 - b$.

Valamint az átlag miatt a négy szám összege $a + b + (2 - b) + d = 8$, ezért $d = 6 - a$. Vagyis az elemek $a \leqslant b \leqslant 2 - b \leqslant 6 - a$. A szórásnégyzetre kapott feltétel miatt

$$3 = \frac{(a-2)^2 + (b-2)^2 + (2-b-2)^2 + (6-a-2)^2}{4} = \frac{2a^2 - 12a + 2b^2 - 4b + 24}{4}.$$

Innen $12 = 2a^2 - 12a + 2b^2 - 4b + 24$. Ezt 2-vel osztva, és a jobb oldalon teljes négyzeteket kialakítva, végül rendezve, a $4 = (a-3)^2 + (b-1)^2$ egyenlet adódik.

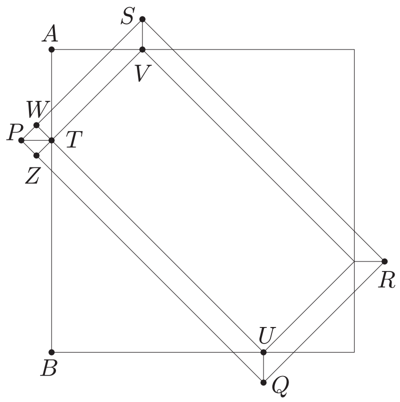
Mivel a és b egész számok, ezért a 4 két négyzetszám összege. Ez csak úgy lehet, ha $0 = (a-3)^2$ és $4 = (b-1)^2$, vagy fordítva, $4 = (a-3)^2$ és $0 = (b-1)^2$.

Az első esetben $a = 3$ és $|b - 1| = 2$, amiből a $3; -1; 3; 3$, illetve a $3; 3; -1; 3$ adatnégyeseket kapjuk. Ezek egyike sem jó, mert a mediánjuk 3.

A második esetben $|a - 3| = 2$ (innen $a = 5$ vagy $a = 1$) és $b = 1$ adódik. Mivel $a \leqslant b$, ezért $a = 1$. Az így kapott négy szám kielégíti a feltételeket.

Vagyis egyetlen megfelelő számnégyes van: $1, 1, 1, 5$.

2. *Egy* 1 méter *oldalhosszúságú, négyzet alakú asztallapra egy téglalap alakú abroszt terítünk. Az abrosz hosszabb oldalai kétszer olyan hosszúak, mint a rövidebbek, és úgy helyezzük az asztalra, hogy középvonalai egybeessenek az asztallap átlóival. Így az abrosz mind a négy sarka az asztallap síkjához képest* 10 cm*-rel lelóg. Az asztallap hány százalékát fedi a terítő ebben a helyzetben?* (*13 pont*)



Megoldás. A feladat során deciméterben fogunk számolni. Tekintsük az *ábrát,* ahol A, B az asztallap két csúcsa, P, Q, R, S a terítő csúcsai visszahajtva az asztallap síkjába, míg T, U, V a P, Q, S csúcsoknak az asztallap megfelelő oldaléleire vett merőleges vetületei.

Legyen a terítő két oldalának hossza $PS = x$, illetve $PQ = 2x$, valamint $AT = a$. Ekkor $TB = 10 - a$.

A feladat szerint $PT = QU = SV = 1$. Így a terítő elrendezése miatt

$$PZ = PW = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ekkor

$$TV = x - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = x - \sqrt{2} \quad \text{és} \quad TU = 2x - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2x - \sqrt{2}.$$

Az ATV és a BUT háromszögek egyenlő szárú derékszögű háromszögek, így $TV = \sqrt{2}a$ és $TU = \sqrt{2}(10 - a) = 10\sqrt{2} - \sqrt{2}a$. Innen a-ra és x-re a következő egyenleteket kapjuk: $x - \sqrt{2} = \sqrt{2}a$ és $2x - \sqrt{2} = 10\sqrt{2} - \sqrt{2}a$. Az egyenleteket összeadva, majd mindkét oldalhoz $2\sqrt{2}$-t adva: $3x = 12\sqrt{2}$, amiből $x = 4\sqrt{2}$ adódik.

Vagyis a terítő oldalai $4\sqrt{2}$ és $8\sqrt{2}$ hosszúak.

Így a terítő teljes területe $4\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2} = 64$. Viszont az asztallapot nem fedi a négy saroknál lévő egybevágó egyenlő szárú, derékszögű háromszög. Ezek közül kettőt-kettőt együtt véve éppen két olyan négyzet kapható, melyek átlói 2 dm hosszúak. Így az abrosz asztallapot nem fedő részének a területe: $2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = 4$.

Ezek szerint az abrosz az asztal 100 dm^2-es területéből pontosan 60 dm^2-t fed le, vagyis az abrosz az asztallapnak pontosan a 60%-át fedi le.

Megjegyzés. Mivel a terítő hosszabb oldala rövidebb az asztallap átlójánál $\left(8\sqrt{2} < 10\sqrt{2}\right)$, ezért valóban a fenti ábrán lerajzolt elrendezés valósul meg.

3. *Oldjuk meg a következő egyenletet az egész $(x; y)$ számpárok halmazán:*

$$2x - 2 - \sqrt{8x + 4} = -\left|\frac{3y - 2}{5}\right|. \qquad (\textit{14 pont})$$

Megoldás. A $\sqrt{8x+4}$ miatt $-\frac{1}{2} \leqslant x$, és mivel x egész, ezért legalább 0. A bal oldalt átalakítva:

$$(2x+1) - 2\sqrt{2x+1} - 3 = (2x+1) - 2\sqrt{2x+1} + 1 - 4.$$

Ez utóbbit $\sqrt{2x+1}$-ben teljes négyzetté alakítva az egyenletünk a következő alakra hozható:

$$\left(\sqrt{2x+1} - 1\right)^2 - 4 = -\left|\frac{3y-2}{5}\right|.$$

Mivel a jobb oldal nem pozitív, a bal sem lehet az. Vagyis $\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2 \leqslant 4$, innen $\left|\sqrt{2x+1}-1\right| \leqslant 2$, vagyis $-1 \leqslant \sqrt{2x+1} \leqslant 3$. Innen $2x+1 \leqslant 9$, végül $x \leqslant 4$ adódik. Vagyis x lehetséges értékei 0, 1, 2, 3 és 4.

Helyettesítsük be ezeket az értékeket rendre az egyenlet bal oldalába.

Az $x=1$, $x=2$ és $x=3$ esetén a bal oldal értéke irracionális. Mivel a jobb oldal racionális (hiszen y egész), ezek nem adnak megoldásokat.

Ha $x=0$, akkor a bal oldal értéke: $0-2-\sqrt{0+4}=-4$. Ekkor $4=\left|\frac{3y-2}{5}\right|$, tehát vagy $4=\frac{3y-2}{5}$, amiből $y=\frac{22}{3}$, ami nem megoldás; vagy $-4=\frac{3y-2}{5}$, amiből $y=-6$, ami megoldás.

Ha $x=4$, akkor a bal oldal értéke: $8-2-\sqrt{32+4}=0$. Ekkor $0=\left|\frac{3y-2}{5}\right|$, vagyis $y=\frac{2}{3}$, ami szintén nem megoldás.

Összesen egyetlen megfelelő számpár van, és ez az $x=0$, $y=-6$.

4. *Az $f(x)=\sqrt{x}$ függvény grafikonját elmetsszük az $x=b$ egyenletű függőleges egyenessel. Az egyenes, $f(x)$, és az x-tengely által bezárt S síkidom területe $t=18$.*

a) Mennyi b pontos értéke?

b) Az S síkidomot megforgatjuk az x-tengely körül. Mekkora a keletkezett forgástest térfogata? (*12 pont*)

Megoldás. *a*) A kérdéses terület számolható integrál segítségével:

$$T = 18 = \int_0^b \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^b x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + c\right]_0^b = \frac{2}{3}\cdot b^{\frac{3}{2}}, \quad \text{innen } 27 = b^{\frac{3}{2}}, \text{ végül } b = 9.$$

b) A kérdéses térfogat:

$$V = \pi \int_0^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^9 x\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{1}{2}\cdot x^2 + c\right]_0^9 = \frac{81}{2}\pi \approx 127{,}23.$$

II. rész

5. *a) Igazoljuk, hogy az $x^3+3x^2-3x-1=0$ egyenletnek van egyjegyű pozitív egész megoldása.*

b) Oldjuk meg az $x^3+3x^2-3x-1=0$ egyenletet a valós számok halmazán.

c) Adjuk meg a tangensra vonatkozó addíciósképletek és nevezetes szögek szögfüggvényei segítségével a 105° és a 165° szögek tangenseinek a pontos értékét.

d) Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$(\operatorname{tg} x + 2)^2 = 7 + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x. \qquad (\textit{16 pont})$$

Megoldás. *a*) Az $x=1$ megoldás, ez behelyettesítéssel ellenőrizhető. (A racionális gyökteszt mutatja, hogy nem is lehet más pozitív egész megoldás.)

b) Mivel $x=1$ megoldása az egyenletnek, az egyenlet bal oldala felírható

$$x^3+3x^2-3x-1=(x-1)\big(ax^2+bx+c\big)$$

alakban alkalmas a, b, c valós konstansokkal.

Két polinom akkor egyezik meg, ha együtthatóik rendre azonosak. Így

$$(x-1)\big(ax^2+bx+c\big)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c=1\cdot x^3+3\cdot x^2-3\cdot x-1$$

miatt rendre $a=1$, $b=4$, $c=1$ adódik.

Az egyenletet $(x-1)(x^2+4x+1)=0$ szorzatalakra hozva a bal oldal második tényezőjéből adódik, hogy $x_2=-2-\sqrt{3}$, illetve $x_3=-2+\sqrt{3}$ az egyenlet két irracionális gyöke a korábban megtalált $x_1=1$ mellett.

c) Felhasználva a $\operatorname{tg}45^\circ=1$, $\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$ és $\operatorname{tg}120^\circ=-\sqrt{3}$ értékeket, valamint a következő addíciós képletet:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},$$

kapjuk:

$$\operatorname{tg}105^\circ=\operatorname{tg}(45^\circ+60^\circ)=\frac{1+\sqrt{3}}{1-1\cdot\sqrt{3}}=\frac{\big(1+\sqrt{3}\,\big)^2}{\big(1-\sqrt{3}\,\big)\big(1+\sqrt{3}\,\big)}=\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}=-2-\sqrt{3}\,.$$

Hasonlóan:

$$\operatorname{tg}165^\circ=\operatorname{tg}(45^\circ+120^\circ)=\frac{1-\sqrt{3}}{1-1\cdot\big(-\sqrt{3}\,\big)}=\frac{\big(1-\sqrt{3}\,\big)^2}{\big(1+\sqrt{3}\,\big)\big(1-\sqrt{3}\,\big)}=\frac{4-2\sqrt{3}}{-2}=$$
$$=-2+\sqrt{3}\,.$$

d) A $\operatorname{tg}x$ és $\operatorname{ctg}x$ függvények értelmezési tartománya miatt $x\neq k\cdot\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$, ugyanezen okokból sem $\operatorname{tg}x$, sem $\operatorname{ctg}x$ nem lehet 0.

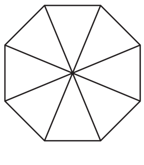
Elvégezve a zárójelfelbontást, és rendezve az egyenletet: $\operatorname{tg}^2x+3\operatorname{tg}x-3-\operatorname{ctg}x=0$ adódik. Innen $\operatorname{tg}x$ $\big(=\frac{1}{\operatorname{ctg}x}\neq 0\big)$-szel szorozva a $\operatorname{tg}^3x+3\operatorname{tg}^2x-3\operatorname{tg}x-1=0$ egyenletet kapjuk. Ez $\operatorname{tg}x$ helyére új változót bevezetve az új változóban éppen a *b*)-beli egyenlet. Vagyis $(\operatorname{tg}x)_{1,2,3}=-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3};1$.

A *c*) pontot figyelembe véve, rendre megoldva az egyenleteket:

ha $\operatorname{tg}x=-2-\sqrt{3}$, akkor $x_1=\dfrac{7\pi}{12}+k\cdot\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$;

ha $\operatorname{tg}x=-2+\sqrt{3}$, akkor $x_2=\dfrac{11\pi}{12}+l\cdot\pi$ $(l\in\mathbb{Z})$, végül

ha $\operatorname{tg}x=1$, akkor $x_3=\dfrac{\pi}{4}+m\cdot\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$ adódik megoldás gyanánt.



6. *Egy szabályos nyolcszögbe az* ábra *szerint a középpontján keresztül nyolc egyforma egyenlő szárú háromszöget rajzolunk be.*

a) *Mekkora a háromszögek súlypontjai által meghatározott szabályos nyolcszög, illetve az eredeti nyolcszög területének az aránya?*

b) *Kati az ábrának megfelelő pörgettyűket csinál. A pörgettyűk felső felén lévő nyolc kis háromszög mindegyikét kifesti a piros, fehér, vagy zöld színek valamelyikével (a pörgettyű alját nem festi le).*

Hányféle különböző pörgettyűt készíthet Kati, ha az élben szomszédos háromszögek színét különbözőnek szeretné, de nem ragaszkodik ahhoz, hogy mind a három színt felhasználja? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Vegyük az eredeti nyolcszög köré írható körének sugarát $R=1$-nek (ez megtehető).

Az ábrán lévő háromszögek olyan egyenlő szárú háromszögek, melyeknek alapjukkal szemközt 45°-os szöge van. Egy ilyen háromszög alapjának magassága egyben súlyvonal is, valamint a 45°-os csúcsszöget felezi. A csúcstól a súlypontig terjedő szakasz a magasság-súlyvonalnak a 2/3-a, ez az új nyolcszög köré írható körének sugara.

Ezek alapján az új nyolcszög köré írható körének sugara

$$r=\cos 22{,}5^\circ\cdot\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{3}\approx 0{,}616.$$

Ez a hasonlóság aránya. Ennek négyzete a kérdéses területek aránya, vagyis

$$\frac{t_{\text{új}}}{T_{\text{régi}}}=\frac{2+\sqrt{2}}{9}\approx 0{,}379.$$

b) A feladat szövege alapján az egymásba forgatható pörgettyűk azonosnak tekintendőek.

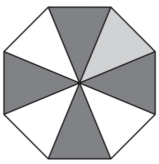
*b*1) Ha csak két színt használunk fel, és rögzítjük melyik ez a két szín, akkor csak egyféle pörgettyűt tudunk csinálni (hiszen felváltva kell szerepelni a két színnek a festett háromszögek között.) A felhasznált két színt (vagy a nem felhasznált egyet) háromféleképpen választhatjuk ki. Tehát itt 3 eset van.

*b*2) Ha mind a három szín szerepel, akkor – aszerint, hogy az egyes színeket hányszor használjuk – a következő esetek lehetnek: $4,3,1$ / $4,2,2$ / $3,3,2$.

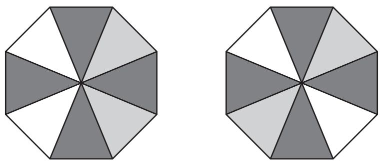
*b*21) A „$4,3,1$” eset. Azt a színt, amelyikből 4 háromszög van 3-féleképpen, amiből 1 van, már csak 2-féleképpen választhatjuk, vagyis színeket 6-féleképpen választhatunk.

Ha már kiválasztottuk, hogy melyik színből mennyi lesz, akkor viszont már csak egyféle pörgettyű készíthető, hiszen amelyik színből 4 van, azt csak úgy tehetjük le, hogy minden két ilyen színű háromszög között pontosan egy másféle színű háromszög található. A másmilyen színek pedig a forgatás miatt csak egyféleképp „helyezhetők el”.

Tehát itt összesen 6 eset lehetséges.



*b*21)



*b*22)

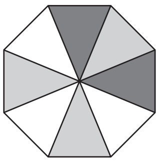
*b*22) A „4, 2, 2" eset. Azt a színt, amelyikből 4 háromszög van 3-féleképpen választhatjuk. Vagyis színeket most csak 3-féleképpen választhatunk.

Ha már kiválasztottuk, hogy melyik színből mennyi lesz, akkor azt a színt, amelyikből 4 van, most is csak egyféleképpen tehetjük le. A két egyforma színből az egyik fajtát a maradék négy helyre kétféleképpen is tehetjük. Vagy úgy, hogy egy háromszög legyen közöttük, vagy úgy, hogy egymással szemben legyenek (lásd az *ábrákat*). Vagyis itt $3\cdot 2=6$ eset lehetséges.

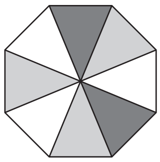
*b*23) A $3, 3, 2$ eset. Azt a színt, amelyikből 2 háromszög van 3-féleképpen választhatjuk. Vagyis színeket megint csak 3-féleképpen választhatunk.

Ha pl. a pirosból van kettő, akkor három lehetőség van aszerint, hogy a két piros háromszög között 1, 2, vagy 3 háromszög kap más színt. Vizsgáljuk meg ezeket rendre.

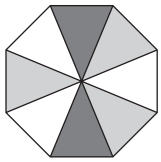
*b*231) Ha a két piros között egy háromszög más színű. Ennek a háromszögnek a színét 2 szín közül választhatjuk. Ha viszont már választottunk (legyen pl. zöld), akkor a maradék 5 színezetlen háromszög közül 3 – a zöldtől különböző – azonos szín van még, ami csak egyféleképpen színezhető jól. Vagyis itt összesen 2 eset lehetséges.



*b*231)



*b*232)



*b*233)

*b*232) Ha a két piros között két háromszög más színű. Ezen két háromszögnek a színét 2-féleképpen választhatjuk ki. Hasonlóan a maradék 4 színezetlen háromszög is kétféleképpen színezhető. Vagyis itt a színek figyelembevételével $2\cdot 2=4$ eset lehetséges.

*b*233) Ha a két piros egymással átellenes. Itt (látszólag) két eset van (felülről az óramutató járásával egyezően indulva): PZFZPFZF és PFZFPZFZ. Ezek viszont egy 180 fokos forgatással egymásba forgathatóak. Vagyis itt 1 eset van. A „3, 3, 2" esetben tehát $3\cdot(2+4+1)=21$ lehetőség van a színezésre.

Vagyis $3+6+6+21=36$-féleképpen színezhető ki a pörgettyű.

7. *a*) *Adjuk meg a $P(-1;1)$, és $Q(3;3)$ pontokon átmenő e egyenes egyenletét.*

b) *Az $f(x)=x^2-6x+8$ egyenletű függvény grafikonjának melyik az a pontja, amelyikbe húzott érintő merőleges a fenti $e=PQ$ egyenesre?*

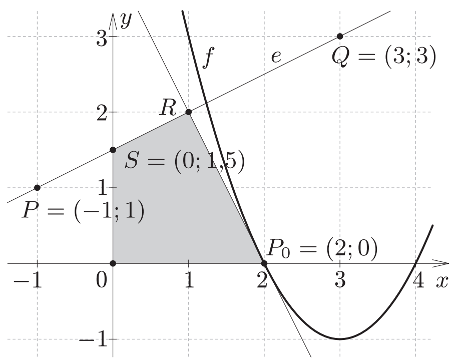
c) *Adjuk meg az e egyenes, az érintő, illetve a két koordináta-tengely által bezárt (az első síknegyedbe eső) konvex négyszög területét.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A P-ből Q-ba mutató $\mathbf{v}=(4;2)$ irányvektor alapján az egyenes meredeksége $\frac{1}{2}$. Emiatt az y-tengelyt $\frac{3}{2}$-nél metszi, vagyis a PQ egyenes egyenlete: $y=\frac{x+3}{2}$.

b) Az érintő pontosan akkor merőleges az iménti egyenesre, ha meredekségeik szorzata -1. Mivel a PQ egyenesének meredeksége $\frac{1}{2}$, így az érintő meredeksége -2.

Szükség van még az érintő egy pontjára. Ez például deriválással meghatározható. Az $f(x)=x^2-6x+8$ függvény tetszőleges $P_0=\big(x_0;f(x_0)\big)$ pontjába húzott érintő meredeksége éppen $f'(x_0)=2x_0-6$. Ennek kell -2-nek lennie. Innen $x_0=2$, és így $P_0=(2;0)$ adódik az érintési pontra.

c) Foglaljuk az eddigieket egy *ábrába.* Az érintési ponton átmenő -2 meredekségű érintő egyenlete: $y=-2x+4$. Nekünk az OP_0RS négyszög területe kell.



Az R pont az $y=-2x+4$ és az $y=\frac{x+3}{2}$ egyenesek közös pontja. Az egyenletek jobb oldalát egyenlővé téve $-2x+4=$ $=\frac{x+3}{2}$, majd $x=1$, és innen $y=2$. Vagyis R koordinátái: $R(1;2)$.

Innen az OP_0RS négyszög területe gyorsan meghatározható. Például az OP_0TV 2 oldalhosszú négyzet (ahol $T(2;2)$, $V(0;2)$) területéből kivonva a megfelelő $\frac{1}{4}$, illetve 1 területű, az OP_0RS-hez nem tartozó derékszögű háromszögek területét, a kérdéses terület:

$$T_{OP_0RS}=4-1-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}.$$

8. *Egy téglatest térfogata* 8 cm^3. *Ha a téglatest minden élét* 1 *centiméterrel megnöveljük, akkor egy* 27 cm^3 *térfogatú téglatestet kapunk. Mekkora térfogatú téglatestet kapunk, ha ismét megnöveljük az éleket* 1-1 *centiméterrel?* (*16 pont*)

Megoldás. Jól látszik, hogy az eredeti téglatest lehet egy 2 cm élhosszú kocka. Kérdés az, hogy lehet-e más. Legyenek az eredeti téglatest egy csúcsba futó élei az a, b, c pozitív számok. Ekkor $abc=8$ az eredeti térfogat.

Kétszer alkalmazzuk a háromtagú számtani-, és mértani közép közötti összefüggést. Először:

$$2=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3},\quad\text{vagyis}\quad 6\leqslant a+b+c,$$

és egyenlőség csak az $a=b=c=2$ esetben lehetséges. Másodszor:

$$4=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\sqrt[3]{ab\cdot ac\cdot bc}\leqslant\frac{ab+ac+bc}{3},\quad\text{vagyis}\quad 12\leqslant ab+ac+bc,$$

és egyenlőség csak az $a=b=c=2$ esetben lehetséges. Az új térfogatra kapott feltétel szerint:

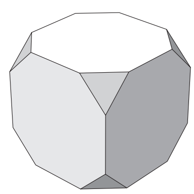
$$27=(a+1)(b+1)(c+1)=abc+ab+ac+bc+a+b+c+1\geqslant 8+12+6+1=27.$$

Ez nyilván csak úgy lehet, ha $6=a+b+c$ és $12=ab+ac+bc$ egyaránt teljesül, vagyis, ha az eredeti téglatest kocka.

Azaz valóban csak a 2 cm élű kocka lehetett az eredeti test.

Így az újabb növelés után kapott téglatest térfogata: $4^3=64$ (cm^3).

9. *Egy játékgyártó vállalat az* ábrának *megfelelő műanyag játékkockákat gyárt. A gyártás során elkészítik a „sértetlen”* 2 cm *élhosszú kockákat, majd a nyolc csúcs mindegyikénél az éleken kimérve az azonos d távolságokat levágnak egy-egy olyan tetraédert, melynek alaplapja szabályos háromszög. A levágott tetraéderek anyagát összegyűjtik, és ebből a hulladékanyagból később új játékkockákat gyártanak. (Ezek hulladékát is összegyűjtik. Általában nem kell*



anyagveszteséggel számolnunk a gyártás során, illetve a hulladékot nem keverik a nem hulladék anyaggal össze.)

a) Mekkora a d távolság pontos értéke, ha pontosan 48 *darab játékkocka hulladékából állítható elő egy, mind a nyolc csúcsában ép* 2 cm *élhosszú kocka?*

b) A nem hulladékanyagból készült kockák mind első osztályúak a minőség szempontjából, míg a hulladékból készült kockáknak csak 80%*-a első osztályú, a többi hibás. A gyártó cég* 20 *éve változatlan feltételekkel, változatlan gyártósoron gyártja játékait. A hulladék- és a nem hulladékanyagból készült kockák a gyártás során egy tárolóba kerülnek, ahol összekeverednek. A jubileum alkalmából egy exkluzív* 200 *darabos játékkocka szettet adnak ki díszdobozba csomagolva. Mekkora az esélye, hogy a dobozba legalább két darab hibás dobókocka kerül?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Egy levágott kis tetraéder térfogata:

$$V=\frac{d\cdot\frac{d\cdot d}{2}}{3}=\frac{d^3}{6}.$$

Vagyis a hulladék mennyisége egy kockánál: $\frac{8d^3}{6}$. A szöveg alapján:

$$48\cdot\frac{8d^3}{6}=64d^3=2^3,\quad \text{innen}\ \ d^3=\frac{1}{8},\quad \text{és végül}\ \ d=\frac{1}{2}.$$

Vagyis a kérdéses d távolság éppen 5 mm.

b) Legyen pontosan 48 ép kockára való anyagunk. Abból legyárthatunk 48 csonkolt dobókockát, és azok maradékából pontosan egy újabb ép kockát kapunk. Vagyis 48 ép egységnyi anyagból 1 ép egységnyi maradék keletkezik. Mivel nem kell anyagveszteséggel számolni, a gyártás során felhasznált teljes anyagmennyiség $\frac{1}{48}$ része készül hulladék anyagból.* Az összes kocka

$$\frac{1}{48}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{240}$$

része hibás, és így $\frac{239}{240}$ eséllyel első osztályú egy játékkocka.

Számoljuk ki a komplementer esetet, vagyis azt, hogy mekkora az esély arra, hogy pontosan 0 vagy 1 darab hibás kocka van:

$$P(0\ \text{hibás})=\left(\frac{239}{240}\right)^{200}\approx 0{,}4338,\quad \text{illetve}$$

$$P(1\ \text{hibás})=\binom{200}{1}\cdot\left(\frac{239}{240}\right)^{199}\cdot\left(\frac{1}{240}\right)^{1}=200\cdot\frac{239^{199}}{240^{200}}\approx 0{,}3630.$$

Annak az esélye, hogy pontosan 0 vagy 1 darab kocka hibás, kb. $0{,}4338+0{,}3630=0{,}7968$, azaz annak a valószínűsége, hogy a szettben legalább két darab hibás játékkocka van, körülbelül 20,32%.

Sztranyák Attila
Budapest

*Húsz éve változatlan feltételekkel gyártják a kockákat, tehát tekinthetjük úgy, hogy a kockagyártás folyamata hosszú távú, rendszeresen érkezik friss nyersanyag, és az összes hulladék felhasználásra kerül.

Matematika feladatok megoldása

B. 4687. *Sámson felírja egy papírlapra az* 123456789*-es számot. Ezután bármely két szomszédos számjegy közé beszúrhat szorzásjelet, akár többet is különböző helyekre, vagy egyet sem. A szorzásjelek közé eső számjegyeket egy számként összeolvasva egy számok szorzatából álló kifejezést kap, például* $1234 \cdot 56 \cdot 789$. *Legfeljebb mekkora lehet a kapott szám?*

(*3 pont*) Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)

Megoldás. Válasszuk ki tetszőleges helyen az első szorzásjel helyét, ezzel osszuk fel az eredeti számot A-ra és B-re. Legyen k a B szám hossza. Az eredeti szám értéke $A \cdot 10^k + B$, míg a szorzásjel beszúrásával keletkező szorzat értéke $A \cdot B$. Mivel a B szám k darab számjegyből áll, ezért $10^k > B$. Így

$$A \cdot 10^k + B > A \cdot B + B \geqslant A \cdot B.$$

Ezt a gondolatmenetet alkalmazhatjuk minden további szorzásjel beszúrásakor.

Ebből megállapítható, hogy minden szorzásjel beszúrása csökkenti a kifejezés értékét. A legnagyobb számot tehát úgy kapjuk, ha nem szúrunk be szorzásjelet.

Így a lehető legnagyobb szám a 123 456 789.

Adorján Dániel (Budapest, Szent István Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

150 dolgozat érkezett. 3 pontos 67, 2 pontos 35, 1 pontos 15, 0 pontos 32 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

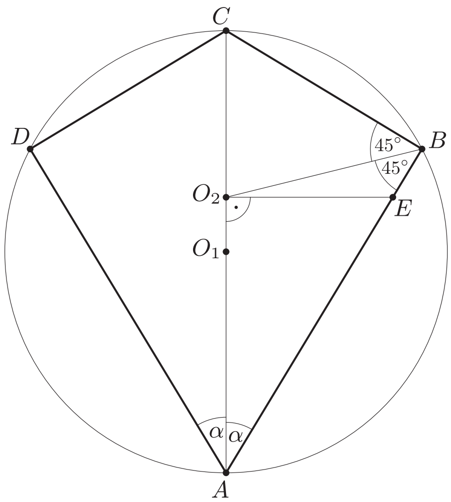
B. 4699. *Szerkesszünk deltoidot, ha tudjuk, hogy van körülírt köre, adott annak a sugara, valamint a körülírt- és beírt körei középpontjának a távolsága.*

(*4 pont*)

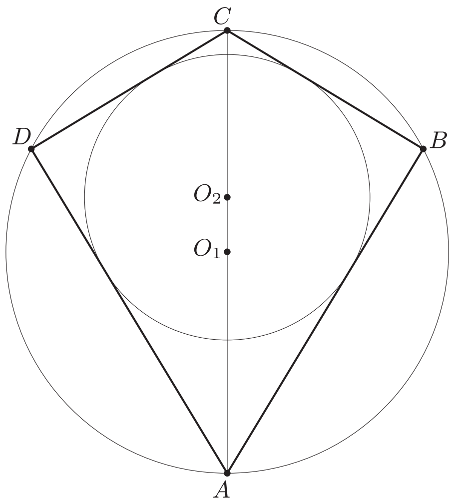
Megoldás. Legyen a szerkesztendő $ABCD$ deltoid szimmetriatengelye az AC átló, jelöljük a deltoid A-nál lévő szögét 2α-val. Mivel a deltoidnak van körülírt köre, ezért szemközti szögeinek összege 180°, tehát a szimmetria miatt B-nél és D-nél lévő szögei derékszögek. Ezért B és D rajta van az AC átló Thalész-körén, ami egyúttal a deltoid körülírt köre is. Ennek O_1 középpontja tehát az AC átló felezőpontja. Jelöljük a deltoid beírt körének középpontját O_2-vel. Ez a pont a deltoid belső szögfelezőinek a metszéspontja, tehát rajta van az AC átlón és

$$ABO_2\sphericalangle = CBO_2\sphericalangle = 45^\circ$$

(lásd az *1. ábrát*).



1. ábra



2. ábra

A szögfelezőtétel szerint

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AO_2}{O_2C}. \tag{1}$$

Ha $O_2 \equiv O_1$, akkor $AB = BC$, a szerkesztendő deltoid négyzet, amit AC átlójának ismeretében könnyen megszerkeszthetünk. Ha $O_1O_2 > 0$, akkor A és C szimmetrikus szerepe miatt feltehetjük, hogy $AB > BC$. Jelöljük az O_2-ben AC-re állított merőleges és az AB szakasz metszéspontját E-vel. Ekkor az ABC és AO_2E derékszögű háromszögek hasonlóak, mert A-nál lévő hegyesszögük megegyezik, mindkettőben α. Ezért

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{AO_2}{O_2E},$$

amiből az (1) egyenlőség miatt $O_2C = O_2E$ következik.

Ezek alapján a szerkesztés már egyszerűen elvégezhető. Megrajzoljuk a deltoid O_1 középpontú körülírt körét és kijelöljük egyik átmérőjét, ennek két végpontja A és C. Az O_1C sugárra O_1-ből felmérve az adott O_1O_2 távolságot megkapjuk O_2-t. Az O_2-ben AC-re állított merőlegesre O_2-ből az O_2C távolságot felmérve kapjuk E-t. Az AE egyenes és a körülírt kör A-tól különböző metszéspontja adja B-t, ennek AC-re vonatkozó tükörképe pedig D-t.

Az így szerkesztett $ABCD$ deltoid nyilván eleget tesz a feladat feltételeinek. A feladatnak egy megoldása van, ha O_1O_2 kisebb, mint a deltoid körülírt körének sugara, ha pedig ez nem teljesül, akkor nincs megoldása.

Varga-Umbrich Eszter (Pápa, Pápai Ref. Koll. Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

102 dolgozat érkezett. 4 pontos 28, 3 pontos 66, 2 pontos 3, 1 pontos 4, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4701. *Legyen $A_1B_1C_1D_1$ egy négyszög. Ha valamilyen n pozitív egészre az $A_nB_nC_nD_n$ pontnégyest már definiáltuk, akkor legyen A_{n+1} a $B_nC_nD_n$ háromszög súlypontja; a pontok szerepének ciklikus cseréjével hasonlóan definiáljuk a B_{n+1}, C_{n+1} és D_{n+1} pontokat is. Mutassuk meg, hogy akármilyen nagy négyszögből indultunk is ki, az A_n pontsorozatnak csak véges sok tagja esik az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög súlypontja köré írt egységsugarú körön kívülre.*

(*4 pont*) Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)

Megoldás. Használjunk az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög S súlypontjából induló helyvektorokat, betűzzük őket a végpontjuknak megfelelő kisbetűkkel; ekkor

$$\frac{\mathbf{a_1}+\mathbf{b_1}+\mathbf{c_1}+\mathbf{d_1}}{4}=\mathbf{s}=\mathbf{0}, \quad \text{vagyis} \quad \mathbf{a_1}+\mathbf{b_1}+\mathbf{c_1}+\mathbf{d_1}=\mathbf{0}.$$

Állítsuk elő az $\overrightarrow{SA_2}=\mathbf{a_2}$ vektort:

$$\mathbf{a_2}=\frac{\mathbf{b_1}+\mathbf{c_1}+\mathbf{d_1}}{3}=-\frac{1}{3}\mathbf{a_1}.$$

Hasonlóan állíthatjuk elő az $\overrightarrow{SB_2}=\mathbf{b_2}$, $\overrightarrow{SC_2}=\mathbf{c_2}$ és $\overrightarrow{SD_2}=\mathbf{d_2}$ vektorokat.

Állítás. $\mathbf{a_n}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\mathbf{a_1}$ minden $n>1$, $n\in N$ esetén; és hasonlóan a $\mathbf{b_n}$, $\mathbf{c_n}$, $\mathbf{d_n}$ vektorokra.

Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk.

$n=2$-re láttuk, hogy igaz.

Tegyük fel, hogy n-re igaz, és lássuk be $n+1$-re.

$$\mathbf{a_{n+1}}=\frac{\mathbf{b_n}+\mathbf{c_n}+\mathbf{d_n}}{3}=\frac{1}{3}\cdot\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\mathbf{b_1}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\mathbf{c_1}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\mathbf{d_1}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}(\mathbf{b_1}+\mathbf{c_1}+\mathbf{d_1})=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}(-\mathbf{a_1})=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\mathbf{a_1}.$$

Hasonló gondolatmenettel belátható az állítás a másik három $n+1$ indexű vektorra.

Így az SA_n, SB_n, SC_n, SD_n szakaszok egyre rövidülnek, hosszuk minden határon túl csökken, vagyis véges k küszöbindex után az $n>k$ indexű A_n pontok mind az S középpontú egységsugarú körön belül lesznek, tehát csak véges számú ilyen pont esik a körön kívülre.

Szász Dániel Soma (Szeged, Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

51 dolgozat érkezett. 4 pontos 35, 3 pontos 8, 2 pontos 4, 0 pontos 4 dolgozat.

B. 4705. *Legyen p páratlan prímszám. Mutassuk meg, hogy az*

$$x^2+px=y^2$$

egyenletnek pontosan egy megoldása van a pozitív egész számpárok körében.

(*4 pont*) Javasolta: *Németh Balázs* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Gimn., 9. évf.)

Megoldás. Az egyenlet ekvivalens átalakításával a bal oldalon két kifejezés szorzatát alakítjuk ki:

$$4x^2+4px=4y^2,$$
$$(2x+p)^2-p^2=4y^2,$$
$$(2x+p)^2-4y^2=p^2,$$
$$(2x+p+2y)(2x+p-2y)=p^2.$$

Mivel p prímszám, p^2-nek csak 3 osztója van: 1, p, p^2. Tehát a $2x+p+2y$ és $2x+p-2y$ szorzótényezők mindegyike p, vagy az egyik p^2 és a másik 1. Ha mindkettő p, akkor $2x+p+2y=2x+p-2y$, amiből $2y=-2y$, vagyis $y=0$, ezt viszont nem engedik meg a feladat feltételei.

Mivel $2x+p+2y>2x+p-2y$, így egy lehetőségünk maradt:

$$2x+p+2y=p^2 \quad \text{és} \quad 2x+p-2y=1.$$

A két egyenletet összeadva: $4x+2p=p^2+1$, amiből $4x=p^2-2p+1=(p-1)^2$. Tehát $x=\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Visszahelyettesítve a $2x+p+2y=p^2$ egyenletbe:

$$2y=p^2-p-2x, \quad \text{amiből}$$

$$y=\frac{p\cdot(p-1)}{2}-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2=\frac{2p^2-2p-p^2+2p-1}{4}=\frac{p^2-1}{4}=\frac{(p-1)\,(p+1)}{4}.$$

Mivel p páratlan prímszám, $p-1$ és $p+1$ is páros szám, így x és y is pozitív egész szám.

Tehát minden p-re pontosan egy pozitív egész megoldást kapunk x-re és y-ra.

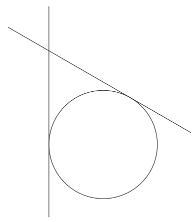
Nagy Dávid Paszkál (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

96 dolgozat érkezett. 4 pontos 54, 3 pontos 9, 2 pontos 6, 1 pontos 11, 0 pontos 16 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (475–480.)

K. 475. Írjuk be a lenti mezőkbe az egész számokat 1-től 15-ig úgy, hogy bármely két szomszédos mezőben álló szám összege négyzetszám legyen.

K. 476. Adjuk meg az összes olyan pozitív egész számot, melyeknek ezresre kerekített értéke kétszer akkora, mint a százasra kerekített értéke. (A kerekítési szabályok alkalmazása során 5, 50, 500, … végződésű számok esetén már felfelé kerekítünk.)



K. 477. Jancsi éppen azt tanulja, hogyan kell evőpálcikákkal enni. Gyakorlásképpen a két összefogott evőpálcikával egy 4 cm átmérőjű golyót kell felvennie az *ábrán* látható módon. (A gömböt akkor lehet felemelni, ha középpontja illeszkedik a pálcikák által meghatározott síkra.) A két evőpálcika Jancsi kezében éppen 60 fokos szöget zár be egymással. Mekkora távolságra van az akció során a pálcikák találkozási pontjától a gömb (ehhez a ponthoz) legközelebbi pontja?

K. 478. Tamás gazda a boltban szeretne venni 4 méternyi láncot, melynek métere 210 Ft-ba kerül. Az eladó megpróbálja rábeszélni, hogy inkább vigye el mind a 10 métert, ami még ebből a láncból maradt. Tamás gazda továbbra is ragaszkodik a 4 méterhez, azonban észreveszi, hogy a boltos szándékosan rosszul mérte a levágandó darabot, ezért az 4 méternél rövidebb lett. Így azt kéri a boltostól, hogy mégis inkább a másik darabot adja el neki, aki, hogy a csalása ki ne derüljön, kénytelen 6 méter áráért eladni a másik darabot Tamás gazdának. Ha nem vette volna észre a csalást, akkor Tamás gazdának 14/9-szer annyiba került volna egy méter lánc, mint amennyibe ezzel a kis ravaszsággal került. Hány méter láncot kapott Tamás gazda?

K. 479. Az $\left((-a^{-b})^{-c}\right)^{-d}$ kifejezésben a, b, c, d helyére az 1, 2, 3, 4 számokat írva melyik esetben lesz a kifejezés értéke minimális, melyik esetben maximális?

K. 480. A következő összeadásban az ötféle betű az öt páratlan számjegyet jelenti valamilyen sorrendben: $a+\overline{bb}+\overline{ccc}+\overline{dddd}+\overline{eeeee}$. Adjuk meg az összes ilyen alakban előállítható ötjegyű szám összegét.

Beküldési határidő: 2015. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1315–1321.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1315. Egy csokoládégyárban a kész csokimasszát 100 grammos adagokban öntik táblákba. A gépek hibája miatt pontosan minden 45. tábla eltörik, és ezt még csomagolás előtt egy ellenőr visszaolvasztja a masszába. Ám az ellenőr figyelmetlen, és minden 21. törött táblát továbbenged csomagolásra. 10 tonna masszából hány tábla törött csokoládé kerül ki a piacra?

C. 1316. Egy teremben 3 oszlopban és 6 sorban – összesen 18 helyre – ül le 10 lány és 7 fiú. Hány különböző ülési rend lehetséges, ha egy oszlopba és egy sorba nem ülhet csupa fiú vagy csupa lány?

Feladatok mindenkinek

C. 1317. Az $ABCDE$ ötszög A, B, C és D csúcsánál levő belső szögek rendre $90°$, $60°$, $150°$ és $150°$, továbbá $AB=2BC=\frac{4}{3}AD$. Bizonyítsuk be, hogy az AE és CD egyenesek metszéspontját az AD és BC egyenesek metszéspontjával összekötő szakasz párhuzamos AB-vel.

C. 1318. Az 518 számnak van egy érdekes tulajdonsága. Képezzük azt a hat darab háromjegyű számot, amelyek számjegyei az 518 számjegyeinek különböző permutációi. Az így kapott számok átlaga éppen 518. Keressük meg az ilyen tulajdonságú különböző számjegyekből álló háromjegyű számokat.

C. 1319. Egy négyszög oldalfelező pontjai egy négyzet csúcsait alkotják. A négyszög területe 50, két szemközti oldala 5 és $\sqrt{85}$. Mekkora a másik két oldal?

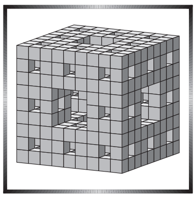
Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1320. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$4x^2y^2+z^4+\sqrt{3x^2y-6x^2}+16=7z^2+4xyz.$$

C. 1321. Hány olyan különböző 6 csúcsú egyszerű gráf van, amelynek 5 éle van?

Beküldési határidő: 2015. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4741–4749.)

B. 4741. Hány olyan tengelyesen szimmetrikus háromszög van, melynek egyik oldala kétszer olyan hosszú, mint a háromszög valamelyik magassága, ha az egymáshoz hasonló háromszögeket nem tekintjük különbözőnek?

(*3 pont*)

B. 4742. Mutassuk meg, hogy az $n\geqslant 3$ csúcsú teljes gráf éleire írhatunk 1-et, 2-t vagy 3-at úgy, hogy minden csúcsban különböző legyen az oda befutó élekre írt számok szorzata.

(*4 pont*)

B. 4743. Az ABC háromszög beírható köre a BC, AC és AB oldalakat rendre az A_1, B_1 és C_1 pontban érinti. Legyenek az AC_1B_1, BA_1C_1 és CB_1A_1 háromszögek magasságpontjai rendre M_A, M_B és M_C. Mutassuk meg, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög egybevágó az $M_AM_BM_C$ háromszöggel.

(*4 pont*) Javasolta: *Miklós Szilárd* (Herceghalom)

B. 4744. Legyen n nemnegatív egész szám. Határozzuk meg a 7 kitevőjét a $3^{7^n}+4^{7^n}$ prímtényezős alakjában.

(*5 pont*) Javasolta: *Williams Kada* (Szeged, Radnóti M. Gimn.)

B. 4745. Legyen n pozitív egész szám. Oldjuk meg az

$$\frac{1}{\sin^{2n} x}+\frac{1}{\cos^{2n} x}=2^{n+1}$$

egyenletet.

(*4 pont*) Javasolta: *Longáver Lajos* (Szatmárnémeti)

B. 4746. Az ABC háromszög beírható köre a BC, AC és AB oldalakat rendre az A_1, B_1 és C_1 pontban érinti. Az AA_1 szakasznak a beírható körrel való másik metszéspontja Q. Az A ponton átmenő, BC-vel párhuzamos egyenest az A_1C_1 és A_1B_1 egyenesek a P és R pontban metszik. Igazoljuk, hogy $PQR\sphericalangle=B_1QC_1\sphericalangle$.

(*5 pont*) (*Kvant*)

B. 4747. Az idei év legelső játékhetében a hatoslottó különleges meglepetéssel szolgált, ugyanis öt egymás utáni számot húztak ki a 45-ből. A kihúzott nyerőszámok a következők voltak: 37, 38, 39, 40, 41, 45. A hír hamar bejárta a sajtót, de vajon tényleg annyira különlegesek? Nevezzünk tökéletesnek egy számsort, ha hat közvetlenül egymás után álló számból áll, és majdnem tökéletesnek, ha a hatból pontosan öt közvetlenül egymást követi. Hány különböző tökéletes, illetve majdnem tökéletes kombináció van? Figyelembe véve, hogy a hatoslottót több mint 26 éve játsszák, és eddig 1227 játékhét volt, mekkora a valószínűsége annak, hogy ennyi idő alatt kihúznak legalább egy tökéletes vagy majdnem tökéletes számsort?

(*3 pont*) Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)

B. 4748. Forgassuk meg a $\mathcal{H}$ háromszöget egy, a síkjában fekvő, de őt nem metsző egyenes körül. Bizonyítsuk be, hogy a keletkezett test térfogata megegyezik $\mathcal{H}$ kerületének és a $\mathcal{H}$ súlypontja által a forgatás során leírt kör területének a szorzatával.

(*5 pont*)

B. 4749. A hegyesszögű ABC háromszög B és C csúcsából induló magasságvonal talppontja az AC, illetve AB oldalon rendre D és E, a BC oldal felezőpontja F. Az AF és DE szakaszok metszéspontja M, az M pontnak a BC szakaszra eső merőleges vetülete N. Bizonyítsuk be, hogy az AN szakasz felezi a DE szakaszt.

(*6 pont*) Tanára, dr. Kálmán Attila emlékére javasolta *Bíró Bálint* (Eger)

❄

Beküldési határidő: 2015. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (653–655.)

A. 653. Legyen $n \geqslant 2$ egész. Igazoljuk, hogy akkor és csak akkor léteznek olyan $a_1, \ldots, a_{n-1}$ egész számok, amelyekre

$$a_1 \operatorname{arctg} 1 + a_2 \operatorname{arctg} 2 + \ldots + a_{n-1} \operatorname{arctg}(n-1) = \operatorname{arctg} n,$$

ha $n^2 + 1$ összetett szám.

Az IMC 2015 (Blagoevgrad) feladata alapján

A. 654. Legyen $p(x)$ olyan legfeljebb n-edfokú polinom, amire $0 < x \leqslant 1$ esetén $\left|p(x)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$. Mutassuk meg, hogy $\left|p(0)\right| \leqslant n + \frac{1}{2}$.

A. 655. A k_1 és k_2 körök az A és a B pontokban metszik egymást. A C és D pontok a k_1, az E és F pontok pedig a k_2 körön helyezkednek el úgy, hogy A, C, E, illetve B, D, F kollineáris. Az ACE egyenesen G, a BDF egyenesen H egy újabb pont. A CH egyenes az FG egyenest I-ben, a k_1 kört másodszor J-ben metszi. A DG egyenes az EH egyenest K-ban, a k_1 kört másodszor L-ben metszi. A k_2 kör az EHK és FGI egyeneseket másodszor az M, illetve az N pontban metszi. Az $A, B, C, \ldots, N$ pontok különbözők. Mutassuk meg, hogy I, J, K, L, M és N egy körön vagy egy egyenesen vannak.

Beküldési határidő: 2015. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 385. A Playfair-féle titkosítási eljárást* a fizikai tanulmányainkból ismert Charles Wheatstone találta ki 1854-ben, de azt barátjáról, a módszert népszerűsítő Lord Playfairről nevezték el. Magát az eljárást már az első világháború előtt feltörték, azonban az ausztrálok még a II. világháborúban is használták. (Akkoriban, számítógépek nélkül, a feltöréshez szükséges idő még hosszabb volt, mint amennyi ideig az információ titkosnak számított.)

* *Forrás:* `https://hu.wikipedia.org/wiki/Playfair-rejtjel`.

Az eljárás alapját egy 5×5-ös táblázat alkotja, amely az angol ábécé betűit tartalmazza (az angol ábécé 26 betűs, így ebből egyet, esetünkben a Q-t, el kell hagyni). Természetesen ezt a táblát csak a küldő és fogadó fél ismerheti.

A titkosítandó szöveget (példánkban FINOM IZ) betűpárokra tagoljuk, szükség esetén az utolsót egy megválasztott jellel (a feladatban legyen X) kiegészítjük. Hasonló módon járunk el, ha a betűpár két eleme azonos, például az AA betűpárt AX AX betűpárokká alakítjuk át.

Az eljárás a betűpárokhoz rendel betűpárokat az alábbiak szerint:

- Ha a két betű a táblázatban egy sorban van, akkor azokat a tőlük eggyel jobbra lévő betű rejtjelezi. Az utolsó oszlopban lévő betűt az adott sor első betűje követi (FI $\rightarrow$ RN).
- Ha a két betű egy oszlopban van, akkor azokat az alattuk lévő betű rejtjelezi. Az utolsó sorban lévő betűt az adott oszlop első betűje követi. (NO $\rightarrow$ VN).
- Végül, ha a két betű különböző sorban és különböző oszlopban van, akkor tekintsük azt a „betűtéglalapot”, amelyben a két betű egy „átló” két végpontja. A betűket ekkor a saját sorukban, a téglalap másik csúcsánál lévő betűkkel helyettesítjük. (MI $\rightarrow$ KF).

K	O	M	A	L
I	N	F	R	T
P	V	E	S	Y
B	Z	C	X	G
J	D	W	H	U

F	I		N	O		M	I		Z	X
R	**N**		**V**	**N**		**K**	**F**		**C**	**G**

A program első parancssori argumentuma egy karakter, amely megadja, hogy a felhasználó az adatokat rejtjelezni vagy visszafejteni szeretné-e (R/V), második a Playfair-rejtjelező táblázatot sorfolytonosan tartalmazó fájl neve, a harmadik a rejtjelezendő/visszafejtendő adatokat tartalmazó fájl neve, a negyedik pedig a kimeneti fájl neve legyen.

Feltételezhetjük, hogy a bemeneti adatok csak az angol ábécé fentieknek megfelelő nagybetűit tartalmazzák. A programot úgy készítsük el, hogy a rejtjelezendő/visszafejtendő állomány mérete tetszőleges, akár több GB-os is lehet.

Beküldendő egy `i385.zip` tömörített állományban a program forráskódja és dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztő környezetben fordítható.

Letölthető fájlok (egy lehetséges Playfair-rejtjel, valamint egy lehetséges rejtjelezendő fájl): `kod.txt`, `be.txt`.

I. 386 (É). Egy kisváros Juhász Gyuláról elnevezett iskolájának weblapján a 2011-es tanév kezdetétől minden nap a névadó egy-egy versét ajánlják a látogatók figyelmébe. A verseket a látogatók lájkolhatják. Az adatbázis három tanév adatait tartalmazza.

Készítsünk új adatbázist `jgy` néven. A mellékelt két – tabulátorokkal tagolt, UTF-8 kódolású – szöveges állományt (vers.txt, napverse.txt) importáljuk az adatbázisba a fájlnévvel azonos néven (**vers**, **napverse**). Az állomány első sora a mezőneveket tartalmazza. A létrehozás során állítsuk be a megfelelő típusokat és kulcsokat.

Táblák:

vers (id, ev, cim)

id	A vers azonosítója (szám), kulcs.
ev	A vers alkotási éve (szám).
cim	A vers címe (szöveg).

napverse (datum, versid, like)

datum	A vers ajánlásának dátuma (dátum), kulcs.
versid	A vers azonosítója (szám).
like	Az adott napi lájkolók száma (szám).

A következő feladatok megoldásánál a lekérdezéseket a zárójelben olvasható néven mentsük. Ügyeljünk arra, hogy a megoldásban pontosan a kívánt mezők szerepeljenek.

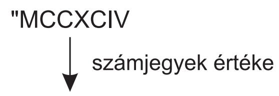
1. Listázzuk ki az ajánlás dátumának sorrendjében a 2011. szeptemberben ajánlott verseket. A vers címét és az alkotási évet jelenítsük meg. (`2szept`)
2. Adjuk meg, hogy a többször választott versek közül átlagosan melyik három gyűjtötte a legtöbb lájkot. (`3like`)
3. Készítsünk jelentést, amely a 2013/2014 telén (december és február között) ajánlott verseket készítési évük szerint csoportosítva ábécérendben listázza ki. (`4tel`)
4. Határozzuk meg azokat a verseket, amelyeket mind a négy naptári évben választottak. (`5negyev`)
5. Határozzuk meg azokat a verseket, amelyeket csak 2011-ben választottak. (`6csak2011`)
6. Határozzuk meg, hogy mely napokon fordult elő, hogy a választott vers ugyanabból az évből származott, mint az előző napi. (`7azonosev`)
7. Határozzuk meg, hogy Juhász Gyulának az első vagy az utolsó alkotói évtizedében született-e több vers. Az alkotói évtized első évét jelenítsük meg. (`8evtized`)

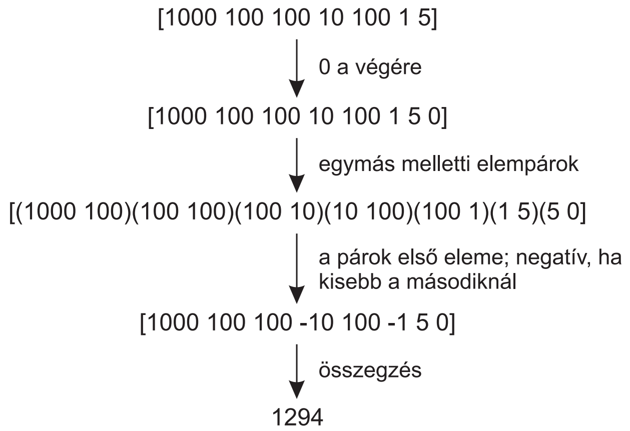
Beküldendő egy tömörített állományban (`i386.zip`) a megoldást tartalmazó adatbázis vagy az SQL lekérdezéseket tartalmazó szövegfájl, valamint egy rövid dokumentáció, amelyből kiderül az alkalmazott adatbázis-kezelő neve és verziószáma.

I. 387. A római számok arab számokká alakítása volt a témája a 2012. májusi emelt szintű informatika érettségi gyakorlati vizsga táblázatkezelés feladatának. Az ott megadott algoritmust funkcionális programozással is megvalósíthatjuk.

Alakítsuk át a római számokat arab számokká a megadott algoritmus alapján Logo nyelvű programmal. A római szám íráshelyességének vizsgálata most nem szükséges. Csak 1-től 4000-ig terjedő, nagybetűs római számokkal foglalkozunk, amelyek legfeljebb 20 karakterrel leírhatók.

Az átalakítás algoritmusa:





Az adott számjegy előjele akkor negatív, ha az utána következő számjegy nála nagyobb. Az utolsó számjegyérték mindenképpen pozitív.

Készítsük el az algoritmus egyes lépéseit megvalósító Logo szavakat, majd ezek segítségével az átváltást végrehajtó római_tízes szót.

Példa a parancsra	Eredmény
római_tízes "MCCXCIV	1294

A megoldás során csak a programozási nyelv automata és funkcionális részét használjuk. Ne alkalmazzunk változókat, csak paraméterezést.

Beküldendő a program projektállománya, forráskódja (`i387.imp`).

I/S. 3. Egy boltban $1 \leqslant N \leqslant 1000$ árut lehet vásárolni. Ehhez $1 \leqslant P \leqslant 1\,000\,000\,000$ pénz áll rendelkezésünkre. Minden terméknek van egy A_i ára, és egy H_i házhozszállítási költsége, így a teljes költség az i. árura $A_i + H_i$ (nemnegatív egészek, A_i a feladat megkönnyítése miatt páros). Van egy kuponunk, amivel egy választott termék árát megfelezhetjük, azaz $A_i/2 + H_i$-ért kaphatjuk meg, ha az i. termékre használjuk fel. Adjuk meg, legfeljebb hány terméket tudunk megvásárolni a boltban, ha egyetlen kupont használhatunk fel.

A program olvassa be a standard input első sorából N-et és P-t, majd a következő N sorból az A_i, H_i szóközzel elválasztott egészeket, és írja a standard output első és egyetlen sorába maximálisan megvásárolható termékek számát.

Példa bemenet:	Példa kimenet:

`5 24`
`4 2`
`2 0`
`8 1`
`6 3`
`12 5`
	`4`

Magyarázat: az első 4 terméket meg tudjuk venni, ha a 3.-ra használjuk fel a kupont.

Pontozás és korlátok: A programhoz mellékelt, a helyes megoldás elvét tömören, de érthetően leíró dokumentáció 1 pontot ér. A programra akkor kapható meg a további 9 pont, ha bármilyen hibátlan bemenetet képes megoldani az 1 mp futásidőkorláton belül.

Beküldendő egy tömörített `is3.zip` állományban a program forráskódja az `.exe` és más, a fordító által generált állományok nélkül, valamint a program rövid dokumentációja, amely a fentieken túl megadja, hogy a forrás mely fejlesztői környezetben fordítható.

S. 102. Egy robot a következő utasítások szerint mozog: először a 0 pozícióból indul, majd a `15 R` utasításra 15 lépést jobbra lép, és a `20 L` utasításra 20 lépést balra. A robotnak N utasítást adnak, $1 \leqslant N \leqslant 300\,000$. Az utasítások lépésszámai pozitív egészek, a robot legfeljebb 1 000 000 000 távolságra mehet el a kezdőpozíciótól. Adott még egy K szám. Az a kérdés, hogy hány pozíción volt, vagy haladt át a robot legalább K-szor.

A program olvassa be a standard input első sorából N-et és K-t, majd a következő N sorból az a_i, c_i szóközzel elválasztott számot és karaktert, melyek a robot mozgását írják le. A program írja a standard output első és egyetlen sorába a megfelelő pozíciók számát.

Példa bemenet:	Példa kimenet:

`6 2`
`2 R`
`6 L`
`1 R`
`8 L`
`1 R`
`2 R`
	`6`

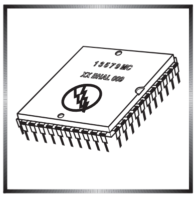
Pontozás és korlátok: A programhoz mellékelt, a helyes megoldás elvét tömören, de érthetően leíró dokumentáció 1 pontot ér. A programra akkor kapható meg a további 9 pont, ha bármilyen hibátlan bemenetet képes megoldani az 1 mp futásidőkorláton belül.

Beküldendő egy tömörített `s102.zip` állományban a program forráskódja az `.exe` és más, a fordító által generált állományok nélkül, valamint a program rövid dokumentációja, amely a fentieken túl megadja, hogy a forrás mely fejlesztői környezetben fordítható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: **2015. december 10.**

❄



Gráfalgoritmusok 2.

Az előző részben két csúcs között kerestünk útvonalat egy gráfban. Az ott megismert szélességi keresés a start csúcstól a cél csúcsig megtalál egy legrövidebb útvonalat, ha van út a két csúcs között. Amennyiben a keresés során nem adunk meg cél csúcsot, akkor a start csúcsból elérhető összes csúcsra kapunk egy legrövidebb útvonalat, vagyis bejárja a start csúcsból elérhető részgráfot. Az útvonal úgy áll elő, hogy a keresés során mindegyik érintett csúcshoz följegyezzük, hogy melyik szomszédjától értünk el hozzá.

A szélességi keresés/bejárás természetesen csak az egyik lehetséges módja a start csúcstól egy másikhoz vezető út megtalálásának, vagy a start csúcsból elérhető csúcsokhoz vezető utak fölírásának. Amikor ki akarunk találni egy labirintusból, akkor a gyakorlatban inkább a *mélységi keresés* algoritmusát követjük. Elindulunk a (valamilyen sorrend szerinti) első járaton, majd megérkezünk a járat végéhez. Ha ez a kijárat (a gráfban a cél), akkor a keresésnek vége, ha nem, akkor két eset lehetséges: vagy nem tudunk tovább menni, innen nem nyílnak további járatok, vagy ez egy elágazás, ahonnan nyílnak más, még nem bejárt részek. Ha zsákutcában vagyunk vagy az adott elágazás minden járatát már bejártuk, akkor visszamegyünk ahhoz az elágazáshoz, ahonnan ide érkeztünk, és ott a (sorrend szerinti) következő járaton folytatjuk a keresést. Ha elágazáshoz értünk, akkor az előbb leírt stratégiát ismételjük meg, a következő, még el nem ért szomszéd felé indulunk el.

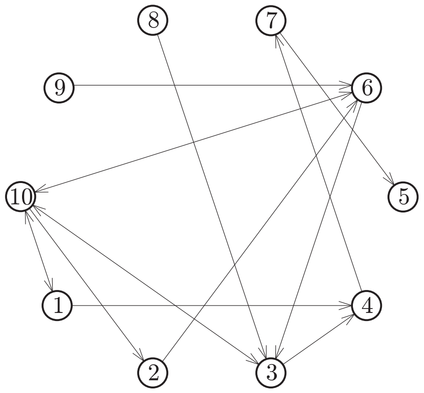
Az előbbi példában labirintusra megfogalmazott eljárás gráfokra is működik, ha az elágazásoknak megfeleltetjük a csúcsokat és a járatoknak az éleket. Bár egy labirintus megfelelője egy irányítatlan gráf, a mélységi bejárás az irányított gráfokat is a fent leírt módon bejárja, ha az éleken az irányítottságnak megfelelően haladunk előre. Visszalépéskor az irányítottsággal ellentétes irányban is haladhatunk. Ez a mozgás nem lesz a megtalált útvonal része, ahogy a szélességi keresésnél is egyik csúcsból egy nem szomszédos csúcsba léptünk az algoritmus végrehajtása közben.

Készítsük el ezek alapján a mélységi bejárás algoritmusát, vagyis keressünk egy kiinduló csúcsból az onnan elérhető csúcsokhoz utakat. Vegyük észre, hogy minden csúcsban ugyanazt a műveletsort kell végrehajtanunk, vagyis bejárnunk a még meg nem látogatott szomszédjai által elérhető részét a gráfnak. Ez az algoritmus nagyon egyszerűen megfogalmazható rekurzívan. Bejárás közben nem szeretnénk egy csúcsot kétszer megvizsgálni, ezért a szélességi kereséshez hasonlóan most is megjelöljük a már meglátogatott csúcsokat egy jártunk tömbben. Az útvonalak tárolásához most is fölveszünk egy honnan táblázatot, amelyből a mélységi bejárás után az összes kiinduló csúcsból elérhető út kiolvasható.

Mélységi bejárás rekurzívan(gráf, start)
    jártunk(csúcsok start kivételével) := nem
    honnan(minden csúcsra) := nem_létező_csúcs
    MBR(start)
Mélységi bejárás rekurzívan vége

```
MBR(csúcs)
    jártunk(csúcs) := igaz
    szomszéd := csúcs első szomszédja
    Ciklus amíg szomszéd létező csúcs
        Ha nem jártunk[szomszéd] akkor
            honnan(szomszéd) := csúcs
            MBR(szomszéd)
        Elágazás vége
        szomszéd := csúcs következő szomszédja
    Ciklus vége
MBR vége
```

A rekurzív megfogalmazás további előnye, hogy a visszalépésről nem kell külön gondoskodnunk: amikor egy csúcsból valamely szomszédos csúcson át elérhető részgráfot bejártuk, vagyis az MBR(szomszéd) eljárás lefutott, akkor a végrehajtás visszakerül a hívó ciklusba, és az adott csúcs következő, még el nem ért szomszédjánál folytatódik a bejárás.



Példaként vegyünk egy irányított gráfot, melynek csúcsai 1-től 10-ig sorszámozottak, és a közöttük lévő kapcsolatokat az alábbi *ábra* szerintiek. Amennyiben a szomszédokat a sorszámuk szerint növekvő sorrendben vesszük, akkor az MBR(1) hívás először végigjárja az $1 \to 4 \to 7 \to 5$ útvonalat, majd visszalépés után az $1 \to 10 \to 2 \to 6 \to 3$ részgráfot.

Az algoritmus nem rekurzív változatában minden csúcsnál megvizsgáljuk, hogy van-e még el nem ért szomszédja, vagy nincs. Az első esetben előre lépünk, a szomszéd lesz az aktuális csúcs, míg az utóbbi esetben visszalépünk ahhoz a szomszédhoz, ahonnan ide érkeztünk. Amikor egy szomszédból visszalépünk, akkor tudnunk kell, hogy melyik csúcsra kell visszalépnünk, valamint tudnunk kell, hogy annál a csúcsnál melyik a következő szomszéd, amelyet még érdemes vizsgálnunk. Ezt a két információt minden előrelépésnél meg kell őriznünk. A rekurzív algoritmusban ez automatikusan történt, mivel minden MBR eljáráshívás csúcs paramétere és szomszéd lokális változója egyedi minden hívásnál. A nem rekurzív algoritmusban nekünk kell gondoskodnunk az információk megőrzéséről.

Mivel több előrelépés adatait is tárolnunk kell, és visszalépéskor mindig a legutolsó előrelépés adataira van szükség, ezért egy *verem* elnevezésű adatszerkezetet használunk föl. A vermet általában akkor alkalmazzuk, amikor az egymás után elhelyezett elemeket éppen fordított sorrendben szeretnénk fölhasználni. A szélességi keresésnél megismert *sorhoz* hasonlóan egyszerűen megvalósítható egy tömbbel és néhány változóval. Legyen a verem adatait tároló tömb v, mérete legyen méret, és mutasson vm az első üres helyre a tömbben. Ha a tömb 1-től sorszámozott, akkor az üres tömbnél vm értéke kezdetben 1. A verem szokásos műveletei: a verembe helyezés és a verem tetejéről egy elem kivétele, valamint annak vizsgálata, hogy a verem üres-e. Megvalósításuk egyszerű, a verembe helyezés például a következő:

```
Verembe(elem)
    Ha vm <= méret akkor
        v[vm] := elem
        vm := vm + 1
    különben
        Hiba: nincs több hely a veremben
    Elágazás vége
Verembe vége
```

A mélységi bejárás nem rekurzív algoritmusát általában nem a fenti leírás szerint, hanem egyszerűbben valósítjuk meg. Az egyszerűsítés alapja az az ötlet, hogy ne a visszalépéshez szükséges adatokat helyezzük a verembe, hanem – megfelelő sorrendben – minden csúcsot, amelyet még nem látogattunk meg. A verem itt hasonlóan szerepet játszik, mint a szélességi bejárásnál a sor. Először az üres verembe helyezzük a start csúcsot, majd amíg a verem nem üres, addig a következőt ismételjük: kiveszünk egy csúcsot a veremből, és ha még nem jártunk ott, akkor megjelöljük, hogy már jártunk, és a verembe helyezzük az összes még föl nem keresett szomszédját. Így gyakorlatilag lecseréljük a verem tetején lévő, most elért csúcsot a még föl nem keresett szomszédjaira. Mivel mindig a verem tetejéről vesszük ki az utolsó oda rakott elemet, ezért a verembe korábban elhelyezett csúcsokhoz – amelyek most a szomszédok alatt vannak – később, csak a szomszédok és részgráfjaik bejárása után érünk el. Kivéve, ha egy szomszéd által kijelölt részgráfban egy korábban a verembe került csúcsot elérünk, de akkor az előbb is következik a mélységi bejárás során, tehát a veremből való kikerüléskor már nincs dolgunk vele.

```
Mélységi bejárás(gráf, start)
    jártunk(csúcsok start kivételével) := nem
    honnan(minden csúcsra) := nem_létező_csúcs
    Verem_legyen_üres
    Verembe(csúcs)
    Ciklus amíg Verem nem üres
        Veremből(csúcs)
        Ha nem jártunk(csúcs) akkor
            jártunk(csúcs) := igaz
            szomszéd := csúcs első szomszédja
            Ciklus amíg szomszéd létező csúcs
                Ha nem jártunk(szomszéd) akkor Verembe(szomszéd)
                szomszéd := csúcs következő szomszédja
            Ciklus vége
        Elágazás vége
    Ciklus vége
Mélységi bejárás vége
```

Amennyiben a gráfot a legegyszerűbb módon, egy szomszédsági mátrixszal adjuk meg, akkor a szomszédokon egy egyszerű ciklussal végig lehet haladni, illetve könnyű megadni az első, vagy valamely szomszéd után következő szomszédot.

Ha egy feladatban útvonalat keresünk egy gráfban a start csúcstól a cél csúcsig, akkor az előbbi két algoritmust úgy kell módosítanunk, hogy hagyják abba a keresést a cél csúcs megtalálásakor. A bejárás rekurzív MBR eljárását most érdemes függvénnyé alakítanunk, hogy visszaadja egy logikai érték formájában a keresés sikerességét.

```
Mélységi keresés rekurzióval(gráf, start, cél)
    jártunk(csúcsok start kivételével) := nem
    honnan(minden csúcsra) := nem_létező_csúcs
    megvan_a_cél := MKR(start)
Mélységi keresés rekurzióval vége

MKR(csúcs)
    jártunk(csúcs) := igaz
    Ha csúcs = cél Akkor MKR := igaz
    különben
        elértük_a_célt := hamis
        szomszéd := csúcs első szomszédja, ahol még nem jártunk
        Ciklus amíg nem igaz elértük_a_célt és szomszéd létező csúcs
            honnan(szomszéd) := csúcs
            elértük_a_célt := MKR(szomszéd)
            Ha még nem igaz elértük_a_célt akkor
                szomszéd := csúcs következő szomszédja, ahol még nem jártunk
            Elágazás vége
        Ciklus vége
        MKR := elértük_a_célt
    Elágazás vége
MKR vége
```

Ne tévesszük össze MKR két különböző jelentését az algoritmus-leíró nyelvben: a függvényhívás végét és az eredmény visszaadását pl. az MKR := elértük_a_célt utasítás jelöli, míg a függvényhívás formája MKR(szomszéd).

Az eddig megismert algoritmusok segítséget nyújtanak egy gráf bejárásában, illetve egy útvonal megtalálásában. Természetesen nem mindig csak erre van szükség, de a bemutatott két bejárás alapját képezi több gráfokkal kapcsolatos algoritmusnak. Egy-egy konkrét probléma megoldásakor sokszor a fenti kétféle keresés módosított változatait alkalmazzuk. A következő részben bemutatunk gráfokkal modellezhető problémákat, melyek a fenti gráfkereső algoritmusokkal megoldhatók.

Kérdések és feladatok:

1. A mélységi keresésnél mi felel meg a görög mitológiából ismert Ariadné fonalának?

2. A szélességi keresés a start csúcstól egy legrövidebb utat talált a cél csúcsig. Igaz-e ez a mélységi keresésre is?

3. Tételezzük föl, hogy lefutott valamelyik keresés vagy bejárást végző algoritmus, és elkészítette a honnan táblázatot. Fogalmazzuk meg az útvonal kiírásának rekurzív és nem rekurzív algoritmusát.

4. Kövessük végig a fenti példában adott gráfon a mélységi bejárás nem rekurzív változatának működését az 1-es csúcstól indulva: észrevehetjük, hogy nem a rekurzív változatnak megfelelően járja be a gráfot. Miért? Hogyan kellene módosítani a nem rekurzív algoritmust, hogy tényleg pontosan egyformán haladjanak?

5. Legföljebb mekkora méretű veremre van szükség egy N csúcsból álló gráf nem rekurzív mélységi bejárásához? Milyen az a gráf, amelynél ez a maximális méretű verem tele is lesz?

6. Készítsük el a mélységi keresés nem rekurzív változatát.

Schmieder László

A 46. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia feladatainak megoldása[1]

Elméleti feladatok

1. feladat. A Napból érkező részecskék

A rész. A Naptól jövő sugárzás

A.1. A Stefan–Boltzmann-törvény alapján: $L_\odot = \left(4\pi R_\odot^2\right)\left(\sigma T_\odot^4\right)$. Innen:

$$T_\odot = \left(\frac{L_\odot}{4\pi R_\odot^2 \sigma}\right)^{1/4} = 5{,}76 \cdot 10^3 \text{ K}.$$

A.2.

$$P_{\text{be}} = \int_0^\infty u(f)\,\mathrm{d}f = \int_0^\infty A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\,\frac{2\pi h}{c^2} f^3 \exp\left(-hf/k_{\mathrm{B}}T_\odot\right)\,\mathrm{d}f.$$

Legyen $x = \frac{hf}{k_{\mathrm{B}}T_\odot}$. Ekkor $f = \frac{k_{\mathrm{B}}T_\odot}{h}x$ és $\mathrm{d}f = \frac{k_{\mathrm{B}}T_\odot}{h}\,\mathrm{d}x$. Ezzel:

$$P_{\text{be}} = \frac{2\pi h A R_\odot^2}{c^2 d_\odot^2}\,\frac{(k_{\mathrm{B}}T_\odot)^4}{h^4}\int_0^\infty x^3 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \frac{2\pi k_{\mathrm{B}}^4}{c^2h^3}T_\odot^4 A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\cdot 6 = \frac{12\pi k_{\mathrm{B}}^4}{c^2h^3}T_\odot^4 A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}.$$

Másik megoldás, amely *nem* használja a Wien-közelítést:

$$P_{\text{be}} = \frac{L_\odot}{4\pi d_\odot^2}A = \sigma T_\odot^4 A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2} = \frac{2\pi^5 k_{\mathrm{B}}^4}{15c^2h^3}T_\odot^4 A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}.$$

A.3.

$$n_\gamma(f) = \frac{u(f)}{hf} = A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\,\frac{2\pi}{c^2} f^2 \exp(-hf/k_{\mathrm{B}}T_\odot).$$

A.4. A hasznos kimenő teljesítményt az $E_{\mathrm{g}} = hf_{\mathrm{g}}$ egy fotonra jutó energiakvantum és az $E \geqslant E_{\mathrm{g}}$ energiájú fotonok számának szorzata adja:

$$\begin{aligned}
P_{\text{ki}} &= hf_{\mathrm{g}}\int_{f_{\mathrm{g}}}^\infty n_\gamma(f)\,\mathrm{d}f = hf_{\mathrm{g}}A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\,\frac{2\pi}{c^2}\int_{f_{\mathrm{g}}}^\infty f^2\exp(-hf/k_{\mathrm{B}}T_\odot)\,\mathrm{d}f = \\
&= k_{\mathrm{B}}T_\odot x_{\mathrm{g}} A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\,\frac{2\pi}{c^2}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T_\odot}{h}\right)^3\int_{x_{\mathrm{g}}}^\infty x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{2\pi k_{\mathrm{B}}^4}{c^2h^3}T_\odot^4 A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}x_{\mathrm{g}}\left(x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\right)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}}.
\end{aligned}$$

[1] Az elméleti feladatok szövegét a múlt havi számunkban közöltük.

A.5. A hatásfok:

$$\eta = \frac{P_{\mathrm{ki}}}{P_{\mathrm{be}}} = \frac{x_{\mathrm{g}}}{6}\big(x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\big)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}}.$$

Ha P_{be}-re az A.2. másik eredményét használjuk, akkor a hatásfok:

$$\eta = \frac{2\pi k_{\mathrm{B}}^4}{c^2h^3}\frac{1}{\sigma}x_{\mathrm{g}}\big(x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\big)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}} = \left(\frac{90}{\pi^4}\right)\frac{x_{\mathrm{g}}}{6}\big(x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\big)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}}.$$

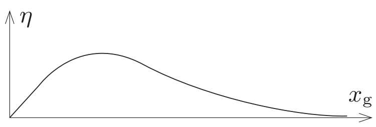
A két eredmény közel van egymáshoz, mert $90/\pi^4 \approx 0{,}92 \approx 1$.

A.6.

$$\eta = \frac{1}{6}\big(x_{\mathrm{g}}^3 + 2x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}}\big)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}}.$$

A határokon érvényes értékek: $\eta(0) = 0$ és $\eta(\infty) = 0$.

Mivel a zárójelben levő polinom kizárólag pozitív együtthatókat tartalmaz, az monoton növekvő. Az exponenciális függvény monoton csökkenő, és a szorzatuknak valahol maximuma van.



$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}} = \frac{1}{6}\big(-x_{\mathrm{g}}^3 + x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\big)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}}\right|_{x_{\mathrm{g}}=0} = \frac{1}{3}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}}\right|_{x_{\mathrm{g}}\to\infty} = 0.$$

Ha az A.2. másik eredményét használjuk, akkor:

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}} = \frac{15}{\pi^4}\big(-x_{\mathrm{g}}^3 + x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\big)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}}\right|_{x_{\mathrm{g}}=0} = \frac{30}{\pi^4} \approx 0{,}31, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}}\right|_{x_{\mathrm{g}}\to\infty} = 0.$$

A.7. A maximális értéket ott veszi fel a függvény, ahol

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}} = \frac{1}{6}\big(-x_{\mathrm{g}}^3 + x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\big)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}} = 0 \quad\Rightarrow\quad p(x_{\mathrm{g}}) \equiv x_{\mathrm{g}}^3 - x_{\mathrm{g}}^2 - 2x_{\mathrm{g}} - 2 = 0.$$

Az egyenlet megoldásához használhatjuk például a felező módszert (más numerikus módszer is elfogadható):

$$\begin{aligned}
p(0) &= -2,\\
p(1) &= -4,\\
p(2) &= -2,\\
p(3) &= 10 \quad\Rightarrow\quad 2 < x_0 < 3,\\
p(2{,}5) &= 2{,}375 \quad\Rightarrow\quad 2 < x_0 < 2{,}5,\\
p(2{,}25) &= -0{,}171 \quad\Rightarrow\quad 2{,}25 < x_0 < 2{,}5.
\end{aligned}$$

A közelítő érték, ahol η-nak maximuma van: $x_0 = 2{,}27$. A maximum: $\eta(2{,}27) = 0{,}457$.

A.8. Az x_g értéke:

$$x_\mathrm{g}=\frac{1{,}11\cdot 1{,}60\cdot 10^{-19}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 5763}=2{,}23,$$

amivel a hatásfok:

$$\eta_\mathrm{Si}=\frac{x_\mathrm{g}}{6}\big(x_\mathrm{g}^2+2x_\mathrm{g}+2\big)\mathrm{e}^{-x_\mathrm{g}}=0{,}457.$$

Ha az A.2. másik eredményét használjuk, akkor:

$$\eta_\mathrm{Si}=\frac{15x_\mathrm{g}}{\pi^4}\big(x_\mathrm{g}^2+2x_\mathrm{g}+2\big)\mathrm{e}^{-x_\mathrm{g}}=0{,}422.$$

A.9. A Nap teljes gravitációs potenciális energiája:

$$\Omega=-\int_0^{M_\odot}\frac{Gm\,\mathrm{d}m}{r}.$$

Az egyenletes tömegeloszlás miatt:

$$\varrho=\frac{3M_\odot}{4\pi R_\odot^3},\qquad m=\frac{4}{3}\pi r^3\varrho,\qquad \mathrm{d}m=4\pi r^2\varrho\,\mathrm{d}r.$$

Ezzel:

$$\Omega=-\int_0^{R_\odot}G\left(\frac{4}{3}\pi r^3\varrho\right)\big(4\pi r^2\varrho\big)\frac{\mathrm{d}r}{r}=-\frac{16\pi^2G\varrho^2}{3}\frac{R_\odot^5}{5}=-\frac{3}{5}\frac{GM_\odot^2}{R_\odot}.$$

A.10.

$$\tau_\mathrm{KH}=\frac{-\Omega}{L_\odot}=\frac{3GM_\odot^2}{5R_\odot L_\odot}=1{,}88\cdot 10^7\ \text{év}.$$

B rész. A Napból jövő neutrínók

B.1. ΔE energia felszabadulása során két neutrínó keletkezik, így

$$\Phi_\nu=2\cdot\frac{L_\odot}{4\pi d_\odot^2\Delta E}=2\cdot\frac{3{,}85\cdot 10^{26}}{4\pi\cdot\big(1{,}50\cdot 10^{11}\big)^2\cdot 4{,}0\cdot 10^{-12}}=6{,}8\cdot 10^{14}\ \mathrm{m}^{-2}\,\mathrm{s}^{-2}.$$

B.2. Legyen ε a neutrínó detektálásának hatásfoka, N_0 a bejövő részecskeszám. Ezzel:

$$\begin{aligned}N_1&=\varepsilon N_0,\\N_\mathrm{e}&=\varepsilon N_0(1-r),\\N_\mathrm{x}&=\varepsilon N_0 r/6,\\N_2&=N_\mathrm{e}+N_\mathrm{x}.\end{aligned}$$

Tehát:

$$(1-r)N_1+\frac{r}{6}N_1=N_2,$$

innen a kérdezett hányados:

$$r = \frac{6}{5}\left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right).$$

B.3. Amikor egy elektron már éppen nem bocsát ki Cserenkov-sugárzást, a sebessége $v_{\text{stop}} = c/n$-re csökken. Az elektron teljes energiája ekkor:

$$E_{\text{stop}} = \frac{m_{\text{e}}c^2}{\sqrt{1 - v_{\text{stop}}^2/c^2}} = \frac{nm_{\text{e}}c^2}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Abban a pillanatban, miután a neutrínó kiütötte az elektront, az elektron energiája:

$$E_{\text{start}} = \alpha\Delta t + \frac{nm_{\text{e}}c^2}{\sqrt{n^2-1}}.$$

A kölcsönhatás előtt az elektron energiája $m_{\text{e}}c^2$. Így a neutrínónak átadott energia:

$$E_{\text{átadott}} = E_{\text{start}} - m_{\text{e}}c^2 = \alpha\Delta t + \left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1\right)m_{\text{e}}c^2.$$

B.4. A ^{7}Be atommagok mozgása miatt Doppler-effektus lép fel a neutrínókra. Mivel az energia relatív megváltozása kicsiny ($\Delta E_{\text{rms}}/E_\nu \sim 10^{-4}$), a nemrelativisztikus Doppler-eltolódással lehet számolni (a relativisztikus számolás szinte azonos eredményt ad). A megfigyelés irányának a z irányt véve:

$$\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_\nu} = \frac{v_{z,\text{rms}}}{c} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}V_{\text{Be}}}{c} = 3{,}85 \cdot 10^{-4}.$$

Tehát a Be atommagok sebességének négyzetes középértéke:

$$V_{\text{Be}} = \sqrt{3} \cdot 3{,}85 \cdot 10^{-4} \cdot 3{,}00 \cdot 10^8\ \text{ms}^{-1} = 2{,}01 \cdot 10^5\ \text{ms}^{-1}.$$

A Nap magjának átlagos hőmérséklete pedig:

$$\frac{1}{2}m_{\text{Be}}V_{\text{Be}}^2 = \frac{3}{2}k_{\text{B}}T_{\text{c}} \quad\Rightarrow\quad T_{\text{c}} = 1{,}13 \cdot 10^7\ \text{K}.$$

2. feladat. A szélsőértékelv

A rész. Szélsőértékelv a mechanikában

A.1. A mechanikai energia megmaradása alapján:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + V_0, \quad \text{amiből} \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2V_0}{m}}.$$

A.2. A határfelületen csak az x irányú sebességkomponens változik (a határfelületen fellépő $-x$ irányú erőlökés hatására), az y irányú nem. Ezért

$$v_{1y} = v_{2y},$$
$$v_1 \sin\vartheta_1 = v_2 \sin\vartheta_2.$$

A.3. A hatás definíciójának megfelelően $A(w)$ az O és P rögzített pontok között:

$$A(w) = mv_1\sqrt{x_1^2 + w^2} + mv_2\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0^2 - w^2)}.$$

Az $A(w)$ hatás akkor lesz minimális, ha w szerinti deriváltja nulla:

$$\frac{v_1 w}{\sqrt{x_1^2 + w^2}} - \frac{v_2(y_0 - w)}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - w)^2}} = 0,$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(y_0 - w)\sqrt{x_1^2 + w^2}}{w\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - w)^2}}.$$

Vegyük észre, hogy ez ugyanaz, mint az A.2.-ben megkapott $v_1 \sin\vartheta_1 = v_2 \sin\vartheta_2$ eredmény!

B rész. Szélsőértékelv az optikában

B.1. A fény sebessége az I-es közegben c/n_1, a II-es közegben c/n_2, ahol c a fénysebesség vákuumban. Legyen a két közeget elválasztó egyenes egyenlete $y = y_0$, a fénysugár pedig az $x = w$ helyen lépjen át egyik közegből a másikba. Az a $\tau(w)$ idő, amíg a fény a $(0; 0)$ origóból a rögzített $(x_0; y_0)$ pontba jut:

$$\tau(w) = \frac{n_1}{c}\sqrt{y_1^2 + w^2} + \frac{n_2}{c}\sqrt{(x_0 - w)^2 + (y_0 - y_1)^2}.$$

A szélsőértéket A.3.-hoz hasonlóan deriválással határozhatjuk meg:

$$\frac{n_1 w}{\sqrt{y_1^2 + w^2}} - \frac{n_2(y_0 - w)}{\sqrt{(x_0 - w)^2 + (y_0 - y_1)^2}} = 0,$$

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2.$$

Ez a Snellius–Descartes-törvény.

B.2. A Snellius–Descartes-törvény alapján $n_0 \sin\alpha_0 = n(y)\sin\alpha$. Ezen kívül felhasználva, hogy $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg}\alpha$ és $\sin\alpha = 1/\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$:

$$n_0 \sin\alpha_0 = \frac{n(y)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sqrt{\left(\frac{n(y)}{n_0 \sin\alpha_0}\right)^2 - 1}.$$

B.3. A B.2. eredményből a változókat szétválasztva és mindkét oldalt integrálva:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(\frac{n_0 - ky}{n_0}\right)^2 - 1}} = -\int \mathrm{d}x.$$

(Felhasználtuk, hogy $\alpha_0 = 90^\circ$ és így $\sin\alpha_0 = 1$.) Használjuk a $\xi = (n_0 - ky)/n_0$ helyettesítést, így:

$$\int \frac{\mathrm{d}\xi\left(-\frac{n_0}{k}\right)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = -\int \mathrm{d}x, \qquad -\frac{n_0}{k}\ln\left(\frac{n_0 - ky}{n_0} + \sqrt{\left(\frac{n_0 - ky}{n_0}\right)^2 - 1}\right) = -x + c.$$

Figyelembe véve az $x=0$ és $y=0$ kezdeti feltételeket $c=0$. Ebből a pálya egyenlete:

$$x=\frac{n_0}{k}\ln\left[\left(\frac{n_0-ky}{n_0}\right)+\sqrt{\left(\frac{n_0-ky}{n_0}\right)^2-1}\,\right].$$

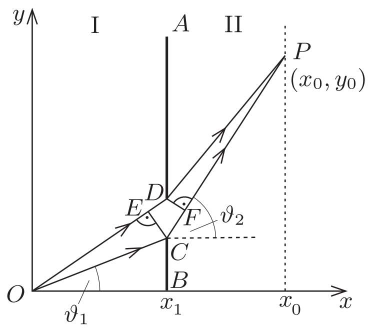
B.4. Felhasználva a megadott adatokat ($y_0=10{,}0$ cm, $n_0=1{,}50$, $k=$ $=0{,}050\ \mathrm{cm}^{-1}$) a B.3. végeredményébe behelyettesítve ($y=-y_0$):

$$x_0=\frac{n_0}{k}\ln\left[\left(\frac{n_0+ky_0}{n_0}\right)+\sqrt{\left(\frac{n_0+ky_0}{n_0}\right)^2-1}\,\right]=24{,}0\ \mathrm{cm}.$$

C rész. A szélsőértékelv és az anyag hullámtermészete

C.1. A részecske de Broglie-hullámhossza $\lambda=\frac{h}{mv}$, amiből a keresett fáziskülönbség (a hatás $\Delta A=mv\Delta s$ definícióját felhasználva):

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta s=\frac{2\pi}{h}mv\Delta s=\frac{2\pi\Delta A}{h}.$$



C.2. Tanulmányozzuk az OCP és ODP pályákat! A geometriai útkülönbség az I-es tartományban ED, a II-es tartományban CF. Ebből $d\ll x_0-x_1$ és $d\ll x_1$ felhasználásával

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{CD}&=\frac{2\pi d\sin\vartheta_1}{\lambda_1}-\frac{2\pi d\sin\vartheta_2}{\lambda_2}=\\&=\frac{2\pi mv_1 d\sin\vartheta_1}{h}-\frac{2\pi mv_2 d\sin\vartheta_2}{h}=\\&=2\pi\frac{md}{h}(v_1\sin\vartheta_1-v_2\sin\vartheta_2)=0\end{aligned}$$

(A.2. vagy B.1. alapján). Ez az eredmény várható, hiszen a klasszikus pálya közelében erősítésnek kell lennie.

D rész. Anyaghullámok interferenciája

D.1. Az energiák alapján

$$qU_1=\frac{1}{2}mv^2,\quad\text{amiből}\quad U_1=\frac{mv^2}{2q}=1{,}139\cdot10^3\ \mathrm{V}.$$

D.2. A fáziskülönbség P-ben:

$$\Delta\varphi_{\mathrm{P}}=\frac{2\pi d\sin\vartheta}{\lambda_1}-\frac{2\pi d\sin\vartheta}{\lambda_2}=2\pi(v_1-v_2)\frac{md}{h}\sin\vartheta=2\pi\beta,$$

amiből

$$\beta=5{,}13.$$

D.3. Az előző rész alapján látható, hogy a legközelebbi olyan helyen, ahol nem várható elektronbecsapódás (kioltás van) $\Delta\varphi = 5{,}5 \cdot 2\pi$. Ez alapján:

$$\frac{mv_1 d \sin\vartheta}{h} - \frac{mv_2 d \sin(\vartheta + \Delta\vartheta)}{h} = 5{,}5;$$

$$\sin(\vartheta + \Delta\vartheta) = \frac{\frac{mv_1 d \sin\vartheta}{h} - 5{,}5}{\frac{mv_2 d}{h}} = \frac{v_1}{v_2}\sin\vartheta - \frac{5{,}5\,h}{mv_2 d} = 0{,}173\,586,$$

$$\Delta\vartheta = -0{,}0036^\circ,$$

amiből a P-hez legközelebbi hely távolsága:

$$\Delta y = (x_0 - x_1)\big[\mathrm{tg}(\vartheta + \Delta\vartheta) - \mathrm{tg}\,\vartheta\big] = -16{,}2\ \mu\mathrm{m}.$$

A negatív előjel azt mutatja, hogy ez a pont P alatt van.

D.4. Az I fluxussűrűség az elektronok v sebességének és N/V sűrűségének szorzata. Ez alapján:

$$N = \frac{I_{\min} V}{v} = 1, \quad \text{amiből} \quad I_{\min} = \frac{v}{V} = \frac{v}{A\,l} = 4 \cdot 10^{19}\ \mathrm{m^{-2}s^{-1}}.$$

3. feladat. Nukleáris reaktor tervezése

A rész. Az üzemanyagrúd

A.1. A magreakció során felszabaduló energiát a tömegdefektusból számolhatjuk:

$$\Delta E = \big[m(^{235}\mathrm{U}) + m(^{1}\mathrm{n}) - m(^{94}\mathrm{Zr}) - m(^{140}\mathrm{Ce}) - 2m(^{1}\mathrm{n})\big]c^2.$$

Összevonás után, a tömegek felhasználásával kapjuk:

$$\Delta E = \big[m(^{235}\mathrm{U}) - m(^{94}\mathrm{Zr}) - m(^{140}\mathrm{Ce}) - m(^{1}\mathrm{n})\big]c^2 = 208{,}7\ \mathrm{MeV}.$$

A.2. Az U_2O (feladatban megadott) sűrűsége a térfogategységre eső molekulák össztömegét jelenti, így ezt elosztva a moláris tömeggel, majd megszorozva az N_A Avogadro-állandóval, megkapjuk az 1 m^3-nyi anyagban található U_2O-molekulák N_1 számát:

$$N_1 = \frac{\varrho N_\mathrm{A}}{M} = 2{,}364 \cdot 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}.$$

Az urán-dioxid molekuláknak azonban csak 0,72%-a tartalmazza a 235-ös uránizotópot, így a feladat kérdésére a válasz:

$$N = 0{,}0072 \cdot N_1 = 1{,}702 \cdot 10^{26}\ \mathrm{m^{-3}}.$$

A.3. Az üzemanyagrúd egységnyi térfogatában N hasadó uránatom van, ezek teljes hatáskeresztmetszete $N\sigma_f$. Ha ezt megszorozzuk a φ neutronfluxussal, az időegység alatt (köbméterenként) bekövetkező hasadások számát kapjuk: $\varphi N\sigma_f$. Minden magreakcióban az A.1. részben kiszámolt ΔE energia szabadul fel, melynek 80%-a alakul hővé, így a hőfejlődés Q üteme:

$$Q = 0{,}8\,\varphi N\sigma_f \Delta E = 4{,}92 \cdot 10^8\ \mathrm{W/m^3}.$$

A.4. A $T_\mathrm{c}-T_\mathrm{s}$ hőmérsékletkülönbség K dimenziójú, így az $F(Q,a,\lambda)$ mennyiség mértékegysége is kelvin kell hogy legyen. Keressük az ismeretlen függvényt $F(Q,a,\lambda)=Q^\alpha a^\beta \lambda^\gamma$ alakban, és vizsgáljuk meg, mekkorának kell választanunk az α,β,γ számokat, hogy kelvin dimenziójú mennyiséget kapjunk. A jobb oldalon szereplő mennyiségek mértékegysége:

$$[Q]=\mathrm{W\ m^{-3}}=\mathrm{kg\ s^{-3}\ m^{-1}},\quad [a]=\mathrm{m},\quad [\lambda]=\mathrm{W\ m^{-1}\ K^{-1}}=\mathrm{kg\ s^{-3}\ m\ K^{-1}}.$$

Ezek felhasználásával az alábbi egyenletet kapjuk a kitevőkre:

$$\mathrm{K}=\left(\mathrm{kg\ s^{-3}\ m^{-1}}\right)^\alpha \mathrm{m}^\beta \left(\mathrm{kg\ s^{-3}\ m\ K^{-1}}\right)^\gamma,$$

amiből $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=-1$ adódik. Tehát az üzemanyagrúd közepének és felületének hőmérsékletkülönbségét megadó formula (a feladatban megadott 1/4-es faktort is visszaírva)[2]:

$$T_\mathrm{c}-T_\mathrm{s}=\frac{Qa^2}{4\lambda}.$$

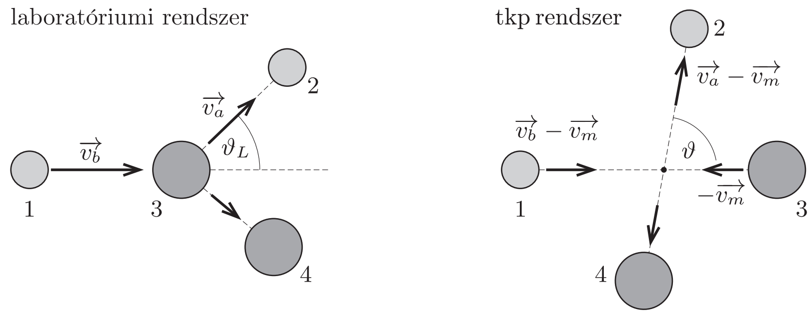
A.5. Az üzemanyagrúd közepének a hőmérséklete nem érheti el az U_2O olvadási hőmérsékletét, míg a külső felületének hőmérséklete a hűtőközeg hőmérsékletével egyezik meg. Így az A.4. részfeladatban kapott összefüggés szerint az üzemanyagrúd sugarának lehetséges legnagyobb a_u értéke

$$a_\mathrm{u}=\sqrt{\frac{4\lambda(T_\mathrm{c}-T_\mathrm{s})}{Q}},$$

ahol most $T_\mathrm{c}=T_\mathrm{olv}=3138$ K, $T_\mathrm{s}=577$ K. A megadott adatokat és Q fentebb kiszámolt értékét behelyettesítve $a_\mathrm{u}=8{,}27\cdot 10^{-3}$ m.

B rész. A moderátor

B.1. Az *ábrán* láthatóak a sebességviszonyok a tömegközépponti koordinátarendszerben. Fontos megjegyezni, hogy a ϑ szög nagyobb, mint ϑ_L.



[2]A dimenzióanalízis módszere egy dimenziótlan szorzótényező erejéig határozatlanul hagyja a megoldást. A helyzetet az tette volna egyértelművé, ha a feladat szövegében megadják, hogy a fizikai mennyiségek hatványainak szorzata előtt álló állandó számértéke éppen 1/4 (– a szerk.).

B.2. A tömegközéppont sebessége a rendszer impulzusának és a teljes tömegének hányadosa:

$$v_m = \frac{v_b}{A+1}.$$

Ugyanekkora sebességgel mozog a tkp rendszerből nézve a laboratóriumi rendszerben kezdetben álló moderátoratom is:

$$V = \frac{v_b}{A+1}.$$

A neutron sebességének nagysága az ütközés előtt a tkp rendszerben:

$$v = v_b - v_m = \frac{A}{A+1} v_b.$$

A tkp rendszerben a rugalmas ütközés során az energia- és impulzusmegmaradás úgy teljesül, hogy a neutron és a moderátoratom is megőrzi az ütközés előtti sebességének nagyságát (rendre v és V), csupán a sebesség iránya változik meg.

B.3. Ütközés után a neutron sebességvektora a laboratóriumi rendszerben $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v_m}$, így a sebességnégyzetének nagysága (a vektorháromszögben felírható koszinusztételből):

$$v_a^2 = v^2 + v_m^2 + 2vv_m \cos\vartheta.$$

Behelyettesítve v és v_m előző részfeladatban kiszámolt értékét:

$$v_a^2 = \frac{A^2 v_b^2}{(A+1)^2} + \frac{v_b^2}{(A+1)^2} + \frac{2Av_b^2}{(A+1)^2}\cos\vartheta,$$

amiből

$$G(\alpha,\vartheta) = \frac{E_a}{E_b} = \frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{A^2 + 2A\cos\vartheta + 1}{(A+1)^2}.$$

Ez kis átalakítással felírható α segítségével is:

$$G(\alpha,\vartheta) = \frac{A^2+1}{(A+1)^2} + \frac{2A}{(A+1)^2}\cos\vartheta = \frac{1}{2}\big[(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\vartheta\big].$$

B.4. Az energiaveszteség akkor a legnagyobb, ha a $G(\alpha,\vartheta)$ mennyiség a lehető legkisebb. Ez (akár intuícióval, akár az előző részben kapott kifejezést vizsgálva) akkor következik be, ha $\vartheta = 180^\circ = \pi$, azaz ha az ütközés lineáris. Ekkor $G(\alpha,\pi) = \alpha$, a legnagyobb relatív energiaveszteség pedig

$$f_l = \left(\frac{E_b - E_a}{E_b}\right)_{\max} = 1 - G(\alpha,\pi) = 1 - \alpha.$$

Most $\alpha = (19/21)^2$, így $f_l \approx 0{,}181$.

C rész. A nukleáris reaktor

C.1. A reaktor térfogata adott: $V=\pi R^2H$. Kérdés, hogyan kell megválasztani az $R:H$ arányt, hogy az elszökő neutronfluxusban szereplő

$$x=\left(\frac{2{,}405}{R}\right)^2+\left(\frac{\pi}{H}\right)^2$$

kifejezés minimális legyen. Fejezzük ki R^2 értékét a térfogattal:

$$x=\frac{2{,}405^2\pi H}{V}+\left(\frac{\pi}{H}\right)^2.$$

Bontsuk az első tagot két egyenlő kifejezés összegére, majd alkalmazzuk a számtani és mértani közepek között fennálló egyenlőtlenséget:

$$x=\frac{2{,}405^2\pi H}{2V}+\frac{2{,}405^2\pi H}{2V}+\frac{\pi^2}{H^2}\geqslant\sqrt[3]{\frac{2{,}405^2\pi H}{2V}\cdot\frac{2{,}405^2\pi H}{2V}\cdot\frac{\pi^2}{H^2}}.$$

A jobb oldalon láthatóan kiesik H, így egy konstans értéket kapunk. Ezt a bal oldali kifejezés akkor veszi fel, ha a benne szereplő három tag értéke megegyezik, azaz

$$\frac{2{,}405^2}{2R^2}=\frac{\pi^2}{H^2},\quad \text{valamint}\quad x=\frac{3\pi^2}{H^2}.$$

Használjuk még fel, hogy stacionárius állapotban az időegység alatt kiszökő és a láncreakcióban termelődő (többlet)neutronok száma megegyezik, vagyis $k_1x\psi=$ $=k_2\psi$, amiből

$$H=\sqrt{\frac{3\pi^2}{x}}=\sqrt{\frac{3\pi^2k_1}{k_2}}\approx 5{,}87\ \text{m},\quad \text{és}\quad R=\frac{2{,}405H}{\sqrt{2}\pi}\approx 3{,}175\ \text{m}.$$

C.2. A $d=0{,}287$ m oldalélű négyzetrácsba rendezett üzemanyag-kazetták mindegyikére d^2 nagyságú keresztmetszet-terület jut a reaktorban. Mivel a reaktor teljes keresztmetszete πR^2 (ahol R az előző feladatrészben meghatározott érték), így a reaktorban elférő kazetták száma legfeljebb

$$F_n=\frac{\pi R^2}{d^2}\approx 387.$$

Egyetlen (henger alakú) fűtőkazetta térfogata $\pi r_{\text{kazetta}}H$ (ahol $r_{\text{kazetta}}=$ $=3{,}617\cdot 10^{-2}$ m), sűrűsége adott ($\varrho=1{,}060\ \text{kg m}^{-3}$), így a fűtőelemek össztömege

$$M=F_n\pi r_{\text{kazetta}}H\varrho\approx 9{,}90\cdot 10^4\ \text{kg}.$$

Kísérleti feladatok

A Fény Nemzetközi Évéhez igazodva a kísérleti fordulóban optikai mérési feladatok voltak. Mindkét mérésben fényelhajlás (diffrakció) segítségével kellett tanulmányozni különböző struktúrákat, így a két feladathoz a (nagyon igényesen elkészített) mérési eszközök részben azonosak voltak. Emiatt a feladatokat csak meghatározott sorrendben lehetett elvégezni.

1. feladat: Diffrakció csavarvonal alakú szerkezeteken

A DNS kettős spirál alakjának felfedezését egy, a DNS molekuláról készült röntgendiffrakciós kép alapozta meg. A mérési feladatban ehhez hasonlóan diffrakció segítségével kellett csavarvonal alakú szerkezetek geometriai paramétereit meghatározni.

A mérési berendezés lézermodulból, mintatartóból, tükrökből (ezek segítségével a szűk helyen meghosszabbítható a fényút) és ernyőből állt, melyeket a mérés előtt gondosan be kellett állítani. A diffrakciós képen kialakuló kioltási helyek távolságát digitális tolómérővel lehetett leolvasni.

A feladat első felében egy nagyon vékony huzalból készült, apró csavarrugó volt a vizsgálat tárgya. A meghatározandó mennyiségek: a csavarrugó R sugara, P menetemelkedése és a rugót alkotó drót a átmérője. Merőleges irányból nézve a rugó vetülete egy cikkcakkvonal, amely egyenértékű két olyan, egymással 2α szöget bezáró drótsorozattal, melyek párhuzamos helyzetű, egyforma vastagságú, egymástól d távolságra lévő drótszakaszokból állnak.

Az elmélet szerint egy a átmérőjű huzalon kialakuló diffrakciós kép intenzitáseloszlása (a ϑ diffrakciós szög függvényében):

$$I(\vartheta) = I(0)\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2, \qquad \text{ahol} \qquad \beta = \frac{\pi a \sin\vartheta}{\lambda}.$$

A középső folt ($\beta = \vartheta = 0$) fényes, a többi olyan irányban, amelyre $\sin\beta = 0$ (de $\beta \neq 0$) az intenzitás zérus, kioltás lesz. Ez alapján az intenzitáseloszlás n-edik minimumának ϑ_n szöge:

$$\sin\vartheta_n = \pm n\frac{\lambda}{a}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Két párhuzamos, egymástól d távolságra lévő, ugyanolyan vastag dróton kialakuló diffrakciós kép két mintázat kombinációja (az egyetlen dróton való elhajlás és a két drót között kialakuló interferencia miatt). A kialakuló intenzitáseloszlás:

$$I(\vartheta) = I(0)\cos^2\delta\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2, \qquad \text{ahol} \qquad \delta = \frac{\pi d \sin\vartheta}{\lambda} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{\pi a \sin\vartheta}{\lambda}.$$

Az ernyőn a két, 2α szöget bezáró drótsorozat két, 2α szöget bezáró diffrakciós képet hozott létre, ebből α leolvasható volt. Mindkét diffrakciós képen megtalálhatóak voltak a drót átmérőjének és a drótok távolságának megfelelő kioltási helyek. Az előző összefüggés alapján is lehetett látni, hogy a diffrakciós képen a finom (apróbb) struktúrákhoz tartoznak a nagyobb távolságok és a durvább (nagyobb) méretekhez a kisebb távolságok. A leolvasott távolságokból grafikus ábrázolás és egyenesillesztés segítségével az a drótátmérőt és a d távolságot meg lehetett határozni, ezekből pedig a csavarvonal R sugarát és P menetemelkedését ki lehetett számítani. A (szabad szemmel alig látható) rugó drótátmérője $a = 0{,}15$ mm, sugara $R = 0{,}75$ mm, menetemelkedése $P = 0{,}9$ mm volt.

A feladat második felében egy, a DNS kettős spirálját modellező síkbeli struktúrát kellett vizsgálni. Itt az előző rész két jellemző távolsága (a és d) mellett egy harmadik (közepes) távolság is megjelenik, és így a diffrakciós képen is háromféle távolságot kellet felismerni és megmérni.

2. feladat: Diffrakció vízfelszínen kialakuló kapilláris hullámokon

A folyadékok felszínén kialakuló és terjedő hullámok viselkedését két erő, a nehézségi erő és a felületi feszültségből származó erő határozza meg. Ha a hullámhossz kisebb egy λ_{kr} kritikus hullámhossznál, akkor a nehézségi erő hatása elhanyagolható, ezek az ún. kapilláris hullámok. ($\lambda_{\mathrm{kr}} = 2\pi\sqrt{\sigma/\rho g}$, ahol σ a folyadék felületi feszültsége, ρ a folyadék sűrűsége, g pedig a nehézségi gyorsulás. A mérési feladatban kialakuló hullámok hullámhossza sokkal kisebb a kritikus hullámhossznál.) A kapillárishullámok a folyadék viszkozitása miatt csillapodnak. A mérési feladatban egy vízminta felületi feszültségét és viszkozitását kellett meghatározni a kapilláris hullámokon létrejövő fényelhajlás alapján.

A kapilláris hullámok hullámhossza a fény hullámhosszához képest aránylag nagy, ezért jól mérhető diffrakcióhoz a fénynek lapos szögben kell esnie a folyadék felületére. (A diffrakciós maximumok távolságának mérése így is nehéz.) A feladat szövegében megadták a laposszögű diffrakció összefüggéseit:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_l} \sin\vartheta \sin\gamma,$$

ahol $k = 2\pi/\lambda_f$ a kapilláris hullámok hullámszáma, λ_l és λ_f a lézerfény, illetve a felületi hullám hullámhossza, ϑ a lézerfény vízszintessel bezárt szöge és γ a diffrakciós képen a központi maximum és az elsőrendű maximum közötti szögtávolság.

A folyadék felszínén a kapilláris hullámokat egy $\omega = 2\pi f$ körfrekvenciájú rezgéskeltő hozza létre. A hullám körfrekvenciájának és hullámszámának kapcsolata a diszperziós reláció:

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} k^q},$$

ahol q egy, a mérés során meghatározandó egész szám (elméleti értéke 3).

A gondos beállítás és a fénysugár szögének megmérése után a különböző frekvenciájú hullámokat egy tablettel vezérelt rezgéskeltővel hozták létre a versenyzők. A diffrakciós maximumok távolságát az ernyő helyére szerelt digitális tolómérőhöz rögzített fotodetektorral mérték, ebből határozták meg a kapillárishullámok hullámszámát. Az $\ln\omega$-$\ln k$ grafikonból leolvasható a diszperziós relációban szereplő q állandó és (ρ ismeretében) a víz σ felületi feszültsége.

A feladat második felében a hullámok csillapítását kellett tanulmányozni. A hullámok h amplitúdója a hullámkeltőtől s távolságra: $h = h_0 e^{-\delta s}$, ahol h_0 az amplitúdó a hullámkeltőnél, δ a csillapítási tényező. A tapasztalat szerint h_0 arányos a rezgéskeltőre kapcsolt feszültség effektív értékének 0,4-edik hatványával, a csillapítási tényező és a folyadék η viszkozitásának kapcsolata:

$$\delta = \frac{8\pi\eta f}{3\sigma}.$$

A mérés során a versenyzők változtatták a hullámkeltő távolságát a fény beesési helyétől, és mérték, hogy a rezgéskeltőre mekkora feszültséget kell kapcsolni ahhoz, hogy a diffrakciós maximum intenzitása (amit a fotodetektor mér) állandó maradjon. A mérési adatokból – megfelelő grafikon megrajzolásával és egyenesillesztéssel – a vízminta viszkozitása meghatározható volt.

Szász Krisztián, Vankó Péter, Vigh Máté

Gyakorló feladatsor emelt szintű fizika érettségire

Tesztfeladatok*

1. Egy labdát nagy magasságból leejtünk. A labdára ható közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányos. Hányszorosára nő a közegellenállási erő pillanatnyi teljesítménye, ha a labda sebessége háromszorosára növekszik?

A) 3-szorosára; *B*) 9-szeresére; *C*) 27-szeresére; *D*) valamilyen más számszorosára.

2. Egy pilóta a repülőgépével függőleges síkú körpályán repül. Mekkora a sebessége a pálya tetőpontján, ha sem az ülés, sem az öv nem fejt ki rá erőt?

A) $\sqrt{gR/2}$; *B*) $\sqrt{gR}$; *C*) $\sqrt{2gR}$; *D*) nulla.

3. Egy jól záró biciklipumpa használatakor a bezárt levegőt tizedakkora térfogatra nyomjuk össze. Hogyan változik eközben a levegő nyomása?

A) Tízszeresére nő. *B*) Kevesebb, mint tízszeresére nő. *C*) Több, mint tízszeresére nő.

4. A diszkóban Miki négyszer távolabbra áll a hangfaltól, mint Misi. Hányszor több hangenergia jut percenként Misi fülébe, mint Mikiébe egy másodperc alatt?

A) 4-szer; *B*) 16-szor; *C*) 60-szor; *D*) majdnem 1000-szer.

5. Melyik csoport tartalmaz csupa olyan eszközt, amelyik a súlytalanság körülményei között is működik?

A) Stopperóra, szemcseppentő, zsebtelep.
B) Ingaóra, kétkarú mérleg, rugós erőmérő.
C) Csipesz, mobiltelefon, kontaktlencse.
D) Higanyos hőmérő, fecskendő, fonálinga.

6. Egy testet felfelé meglökünk egy α hajlásszögű lejtőn, majd hagyjuk szabadon mozogni. Mekkora a felfelé mozgó test gyorsulásának abszolút értéke?

A) $g\mu\cos\alpha$;
B) $g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$;
C) $g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$;
D) Csak a test tömegének az ismeretében adhatjuk meg a helyes választ.

*A válaszok közül minden esetben pontosan egy a helyes.

7. Ha két egyenlő tömegű vas- és ólomdarabot egyforma munkabefektetéssel kalapálunk, az ólom jobban felmelegszik, mint a vas. Miért?

A) Mert alacsonyabb az olvadáspontja, mint a vasé.
B) Mert nagyobb a fajhője, mint a vasé.
C) Mert kisebb a fajhője, mint a vasé.
D) Mert alacsonyabb az olvadáshője, mint a vasé.

8. Adott mennyiségű normálállapotú gáz hőmérsékletét kétféleképpen változtatják meg: izobár, illetve izochor módon. A hőmérséklet-növekedés mindkét esetben ugyanakkora. Melyik folyamatban változik többet a gáz belső energiája?

A) Az izobár folyamatban.
B) Az izochor folyamatban.
C) Mindkét folyamatban ugyanakkora.
D) A kérdésre csak a gázmolekulák szabadsági fokainak számát ismerve tudunk válaszolni.

9. Egy könnyű, jó minőségű csavarrugót állítunk az asztalra. A rugóra ejtünk egy testet, amit a rugó lefékez. A csavarrugó menetei még akkor sem szorulnak egymáshoz, amikor a test a legjobban összenyomja a csavarrugót. Mit állíthatunk a rugóban tárolt maximális energiáról?

A) A rugóban tárolt maximális energia megegyezik a test maximális mozgási energiájával.
B) A rugóban tárolt maximális energia egy kicsit nagyobb, mint a test maximális mozgási energiája.
C) A rugóban tárolt maximális energia egy kicsit kevesebb, mint a test maximális mozgási energiája.
D) A válasz csak a rugóállandónak és a test tömegének az ismeretében adható meg.

10. Két egyforma ceruzaelemet egyszer sorosan, máskor párhuzamosan kapcsolunk. Mikor keletkezik több hő, ha a sorosan, vagy ha a párhuzamosan kapcsolt összeállítást zárjuk rövidre egy másodpercig?

A) Ha sorosan kapcsoltuk őket.
B) Ha párhuzamosan kapcsoltuk őket.
C) Azonos mennyiségű hő keletkezik a két esetben.

11. Két végén rögzített, 1 m hosszú húrt 200 Hz-es transzverzális rezgésben tartunk. A transzverzális hullámok terjedési sebessége a húron 100 m/s. Hány csomópont alakul ki (a rögzített végeken kívül)?

A) Három; *B*) kettő; *C*) egyetlen egy; *D*) nulla.

12. Egy műanyag tokban lévő fém iránytű egyik végéhez (az iránytű tengelyére merőleges irányból) nagyon lassan egy kicsiny, elektromosan töltött testet közelítünk. Megmozdul-e az iránytű?

A) Biztosan nem, mert az elektrosztatikus mező nem hat a mágnesre.
B) Az iránytű elmozdul; az elfordulásának iránya a töltés előjelétől függ.
C) Az iránytűnek a töltéshez közelebbi vége a töltés felé mozdul el.

13. Egy 12 V-os autóakkumulátort egy elektromágneses tekercs kivezetéseire kötünk. Mekkora feszültség keletkezhet a tekercs kivezetésein, ha az áramkört megszakítjuk?

A) Legfeljebb 12 V.
B) Mindig $\sqrt{2}\cdot 12$ V feszültség indukálódik.
C) A keletkező feszültség sokkal nagyobb lehet, mint 12 V.
D) Az akkumulátor lekapcsolásakor a tekercs feszültsége azonnal nullára esik.

14. A Földhöz képest $3\cdot 10^7$ m/s sebességgel mozgó részecske szembe halad egy fotonnal. Mekkora a foton sebessége a részecskéhez képest?

A) $\left(3\cdot 10^8 - 3\cdot 10^7\right)$ m/s;
B) $3\cdot 10^8$ m/s;
C) $\left(3\cdot 10^8 + 3\cdot 10^7\right)$ m/s.

15. Egy alfa-részecske rugalmasan ütközik egy álló céltárgy valamelyik atommagjával. Átadhat-e nagyobb lendületet (impulzust) az alfa-részecske az atommagnak, mint amekkorával saját maga rendelkezett az ütközés előtt?

A) Nem adhat át a sajátjánál nagyobb lendületet (impulzust).
B) Átadhat, ha a céltárgy folyékony hidrogén.
C) Átadhat, ha a céltárgy atommagja is egy alfa-részecske.
D) Átadhat, ha a céltárgy atommagjai legalább 5-ös tömegszámúak.

Számolásos feladatok

1. Egy 1000 kg tömegű Skoda gépkocsi 72 km/h sebességgel halad egy ugyanilyen sebességű, 1500 kg tömegű Volvo előtt. A két autó közötti távolság 20 méter. Ekkor a Volvo előzni kezdi a Skodát, a Volvo gyorsulása 1 m/s^2, ami egészen addig állandónak tekinthető, amíg a két autó egymás mellé nem ér. A Skoda sebessége nem változik, mindvégig 72 km/h marad.

a) Mennyi idő múlva éri utol a Volvo a Skodát?

b) Mekkora utat tesz meg a Volvo az előzés megkezdésétől az utolérés pillanatáig?

c) Hányszor nagyobb a Volvo mozgási energiája az utolérés pillanatában, mint a Skoda mozgási energiája?

2. Egy szobában, ahol a hőmérséklet 22 °C, a légnyomás pedig 100 kPa, egy léggömböt 0,6 g héliummal töltünk meg úgy, hogy benne a gáz nyomása 105 kPa legyen.

a) Mekkora a léggömb térfogata, ha a benne lévő gáz hőmérséklete szintén 22 °C, és a hélium moláris tömege 4 g/mol?

b) Mekkora a levegő sűrűsége a szobában, ha a levegő moláris tömege 29 g/mol?

c) Ha a léggömböt elengedjük, akkor az felemelkedik, és végül a mennyezethez nyomódik. Mekkora erővel szorul a léggömb a mennyezethez, ha a léggömb gumi anyagának tömege 2 g? Mekkora felületen érintkezik a léggömb a mennyezettel?

3. Egy $\ell = 30$ cm hosszú, könnyű, szigetelő fonál végén $m = 1$ g tömegű kicsiny test helyezkedik el, melynek elektromos töltése $Q = 10^{-6}$ C. A fonál másik végét tartva a testet vízszintes irányú, homogén elektromos mezőbe helyezzük. Ennek hatására a fonál olyan egyensúlyi helyzetet vesz fel, hogy a függőlegessel $\varphi = 20°$-os szöget zár be.

a) Mekkora az elektromos térerősség nagysága?

b) Mekkora lengésidővel mozog ez a fonálinga, ha az elektromos mezőben a kicsiny testet kissé kitérítjük egyensúlyi helyzetéből?

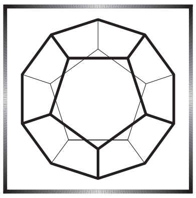
4. Bizonyos mobiltelefonok menürendszerét szakszervizekben bővíteni tudják, így például be lehet állítani, hogy a készülék kijelezze azt is, hogy az akkumulátorának mekkora a pillanatnyi árama, illetve mekkora az akkumulátor kivezetésein mérhető feszültség. Egy ilyen készülék 120 mA áramot és 3900 mV feszültséget jelez, amikor be van kapcsolva a kijelzőjének a megvilágítása. Beszélgetés közben az áram 240 mA értékre nőtt, a feszültség pedig 3800 mV-ra csökkent.

a) Mekkora a készülék akkumulátorának belső ellenállása?

b) Mekkora az akkumulátor elektromotoros ereje?

c) Készenléti üzemmódban ennek a mobilnak 12 mA az áramfelvétele. Mekkora feszültséget jelez a készülék készenléti üzemmódban, és másodpercenként mennyivel csökken ilyenkor az akkumulátor energiája?

Honyek Gyula
Budapest



Nyári Fizika Tábor
Dombóvár, 2015

A KöMaL ebben az évben is megrendezte nyári táborát, Dombóvár-Gunaras kempingjében, június 21–27-e között. A tábor vasárnap délután kezdődött egy rövid eligazítással. Ekkor találkoztunk a szervezőkkel és segítőikkel: *Gnädig Péterrel, Részeg Annával, Vladár Károllyal,* továbbá *Kocsis Vilivel,* a „hajcsárral". Néhány napon keresztül *Vankó Péter* és *Vigh Máté,* a Nemzetközi Fizikai Diákolimpia magyar csapatának vezetői is velünk voltak, ők napközben az olimpiai csapattal „edzettek", este pedig előadásaikkal örvendeztettek meg bennünket. A táborba huszonegy (9–11. évfolyamos) fiatal és az öt olimpikon kapott meghívást.

A tábor célja az volt, hogy egész héten háromfős csapatokban oldjunk meg elméleti, becslési és mérési feladatokat, mindenféle fizikai témakörben. Vasárnap esti feladatunk a háromfős csapatok megalkotása volt. Az ország legkülönbözőbb helyeiről érkeztünk, két tanuló pedig külföldről (Szlovákia, Svédország). Egyvalami mindannyiunkban közös volt: a fizika iránti érdeklődés. Vagy inkább szeretet? Akár szenvedély? Egy szorgalmas munkával, KöMaL fizika feladatok oldogatásával teli év állt mögöttünk, most jött volna el az idő a végső összecsapásra? Gyors ismerkedés után hamar összeálltak a csapatok.

A következő 5 napban a program az arra a napra kapott feladatok megoldása volt. Voltak, akik együtt oldottak meg mindent, voltak, akik szétosztották a munkát, de akármelyik stratégiára is esett a választás, tapasztalatunk ugyanaz volt: hamar eltelt a délelőtt! Ha elakadtunk, a szervezők igyekeztek könyvek ajánlásával vagy pár elindulási ötlettel segíteni rajtunk. A feladatok változatosak, tanulságosak és gondolkodtatóak voltak. Egy vicces példa az egyik becslési feladatunkra: „Becsüljük meg, hány molekulát lélegzünk be minden egyes levegővételnél Julius Caesar utolsó leheletéből, ha azok már egyenletesen elkeveredtek a légkörben.” A mérési feladatok 10 pontot, a becslés 5 és a legfeljebb öt beadható elméleti feladat is 5-5 pontot értek. Este 9-ig volt időnk a megoldásukra. A pontverseny nagyon szorosra sikeredett, szinte naponta változott az állás. A verseny végét egy konstrukciós verseny jelentette, amelynek során a csapatok abban versenyeztek, hogy melyikük repülő szerkezete marad levegőben a legtovább. A legjobb csapatok eredményük alapján könyvet vagy voltmérőt, illetve csokit kaptak.

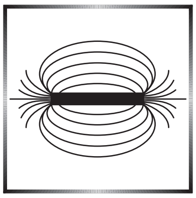
Esti előadásokat hallgathattunk, és – Zentai István fizikus jóvoltából – az egyik éjszaka lehetőségünk nyílt arra, hogy egy komoly csillagászati távcsővel megfigyelhessük a Holdat, a Jupitert, különféle csillagokat és galaxisokat.

A félbevágott pingponglabdán sétáló hangya sorsának számolásába mélyedve és a levegő páratartalmának mérésében elmerülve, észre se vettük, hogy mikor, de barátságok születtek, úgy a kis csapatokon belül, mint azon kívül is. Talán épp ez volt a legmegkapóbb az egész héten; hiába voltunk mind a 21-en erősen „versenyszellemiségűek”, és akármennyire izgatottan is rohantunk megnézni a pillanatnyi állást mutató eredménylistát, ez senkit sem gátolt meg abban, hogy a másikkal megismerkedjen. És nem csak megismerkedjen, hanem megbarátkozzon, akár a tudását is megossza, és talán valahol legbelül egy picit szurkoljon is a másiknak. Valahogy így lett a hét során versenyből játék, és idegenből barát.

Csodálatos hetet töltöttünk így együtt, melyért köszönettel tartozunk a tábor szervezőinek és támogatóinak.

Csapo Aletta (Göteborg, Donnergymnasiet)
Radnai Bálint (Veszprém, Lovassy László Gimn.)
Varga-Umbrich Eszter (Pápai Református Kollégium Gimn.)

Fizika feladatok megoldása



P. 4705. *A Nemzetközi Űrállomás* 92 *perc alatt kerüli meg a Földet. Tegyük fel, hogy körpályán mozog. Milyen magasan kering a Föld felszíne felett? Mennyit változik naponta a keringési ideje, ha a pályamagassága (két pályakorrekció között) egy nap alatt kb.* 100 *métert csökken?*

(*4 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest

Megoldás. A következő adatokat és állandókat ismerjük:
– az Űrállomás keringési ideje: $T=92$ perc $=5520$ s;
– a Föld (közepes) sugara: $R=6371$ km $=6{,}371\cdot 10^6$ m;
– a Föld tömege: $M=5{,}974\cdot 10^{24}$ kg;
– a Newton-féle gravitációs állandó: $\gamma=6{,}673\cdot 10^{-11}$ N m^2/kg^2.

Ha az m tömegű Űrállomás h magasságban, tehát a Föld középpontjától valamekkora $r=R+h$ távolságban kering, akkor a rá ható gravitációs erő

$$F=\gamma\frac{mM}{r^2},$$

a (centripetális) gyorsulása pedig

$$a=r\omega^2=r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

A mozgásegyenlet szerint

$$F=ma,\qquad \text{azaz}\qquad \gamma\frac{mM}{r^2}=mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Innen a keringési pálya sugara, majd annak ismeretében a felszíntől mért távolsága is kiszámítható:

$$r=\sqrt[3]{\frac{\gamma MT^2}{4\pi^2}}\approx 6751 \text{ km},\qquad h=r-R\approx 380 \text{ km}.$$

A keringési idő és a pálya körpályájának sugara közötti összefüggés:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\gamma M}}.$$

Ha ebben a képletben r helyébe a fentebb kiszámítottnál 100 méterrel kisebb értéket írunk, a keringési időre $T'=5519{,}88$ s, vagyis az eredeti értéknél 0,12 másodperccel kevesebb adódik. Ennyivel *csökken* tehát naponta az Űrállomás keringési ideje, ha nem hajt végre pályakorrekciót.

Csurgai-Horváth Bálint (Budapest, Szent István Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. A keringési idő megváltozását két – majdnem egyforma nagyságú – időtartam különbségeként számítottuk ki. Ez nem túl szerencsés eljárás, hiszen ezeket az időtartamokat csak bizonyos pontossággal ismerjük, és általában a különbség (abszolút) hibája is a kisebbítendő és a kivonandó hibájának nagyságrendjébe esik, relatív hibája pedig (ha maga a különbség kicsi) igen naggyá válhat.

A feladatban megadott 92 perces keringési idő nem azt jelenti, hogy $T=92{,}000$ perc, hanem hogy T értéke valahol 91,5 és 92,5 perc közé esik, vagyis 2 jegyre pontos, a harmadik számjegye bizonytalan. (Általános szabály, hogy egy fizikai mennyiség megadott értékét annyira tekintjük pontosnak, amennyire a ténylegesen kiírt számjegyek utalnak.) Emiatt a kiszámított pályasugár is csak ennyire (néhány százaléknyira) pontos, tehát a számszerű értékét csak kb. 60 km-es hiba erejéig „vehetjük komolyan”. Az első kérdésre adott válasz eszerint az, hogy $h\approx(380\pm 60)$ km. Vegyük észre, hogy a százaléknyi pontossággal kiszámított r és az ezreléknyi pontossággal megadható R különbsége már több, mint 15%-ra bizonytalan.

Hasonló módon, de még élesebben jelentkezik ez a probléma az időtartamok különbségénél. A százaléknyira pontos (vagy inkább pontatlan) r-ből, illetve annak 100 méterrel lecsökkenő értékéből kiszámított keringési időről csak annyit mondhatunk, hogy $T' = (5520 \pm 50)$ s (a hibának csak a nagyságrendje lényeges, a számértéke nem). Ennek az időnek és az eredeti $T = 5520$ s-nak a különbsége (a számolási pontosság erejéig) *nulla!* Mindezek ellenére a keringési idő fentebb kiszámított 0,1 másodperces változása *helyes,* ennek okát, javasoljuk, derítse ki az Olvasó.

Ha egymáshoz közeli mennyiségek különbségét kell meghatároznunk, célszerű, ha a paraméterekkel (a fizikai mennyiségeket jelölő betűkkel) végezzük el a számolást, és a numerikus értékeket csak a végképletbe helyettesítjük be. Esetünkben például az

$$r^3 = K \cdot T^2 \qquad \left(K = \sqrt[3]{\gamma M/(4\pi^2)} = \text{állandó}\right)$$

és az

$$(r + \Delta r)^3 = K \cdot (T + \Delta T)^2$$

egyenletek különbségét képezve (és a kis változások négyzetét és köbét elhanyagolva) a következő eredményt kapjuk:

$$\Delta T = \frac{3}{2}\frac{\Delta r}{r}T = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{-0{,}1\ \text{km}}{6751\ \text{km}}\right) \cdot 5520\ \text{s} \approx -0{,}12\ \text{s}.$$

Látható, hogy a fenti eredmény kiszámításánál nem volt szükségünk T és T' nagyon pontos (nagyon sok tizedesjeggyel történő) megadására, illetve ilyen pontosságú kiszámítására.

(G. P.)

85 dolgozat érkezett. Helyes 48 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 14, hiányos (1–2 pont) 15, hibás 8 dolgozat.

P. 4710. *Hőszigetelő edényben lévő* 1 kg *tömegű,* 2 °C *hőmérsékletű vízbe annyi* 0 °C*-os jeget teszünk, hogy a jég éppen elolvadjon, és a víz hőmérséklete* 0 °C *legyen.*

a) *Nő vagy csökken eközben a rendszer entrópiája?*

b) *Adjunk számszerű becslést az entrópiaváltozásra!*

(*5 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

Megoldás. *a*) A jég olvadása (0 °C-nál melegebb vízben) irreverzibilis folyamat, a rendszer entrópiája tehát – a hőtan II. főtétele szerint – a folyamat során biztosan *növekszik.*

b) A víz által leadott

$$Q = m_{\text{víz}} \cdot c_{\text{víz}} \cdot \Delta T = 1\ \text{kg} \cdot 4{,}2\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot 2\ \text{K} = 8{,}4\ \text{kJ}$$

hő fordítódik a jég megolvasztására:

$$Q = L_\text{o} \cdot m_{\text{jég}}.$$

Innen kiszámíthatjuk a jég tömegét (jóllehet a feladatban ez nem volt kérdés):

$$m_{\text{jég}} = \frac{Q}{L_\text{o}} = \frac{8{,}4\ \text{kJ}}{334\ \text{kJ/kg}} = 0{,}025\ \text{kg} = 25\ \text{g}.$$

Számítsuk ki (közelítőleg) a víz és a jég entrópiaváltozását, majd ezek előjeles összegéből adjuk meg az egész rendszer entrópiájának megváltozását! A jég mindvégig $T_{\text{jég}} = 273$ K hőmérsékletű, ezen a hőmérsékleten vesz fel Q hőt, így

$$\Delta S_{\text{jég}} = \frac{Q}{T_{\text{jég}}} = \frac{8{,}4\ \text{kJ}}{273\ \text{K}} = 30{,}77\ \frac{\text{J}}{\text{K}} > 0.$$

A víz entrópiaváltozásának számítása nem ilyen egyszerű, mert a víz hőmérséklete nem állandó, 275 K-ről fokozatosan 273 K-re csökken. Mivel a hőmérséklet (abszolút hőmérsékleti skálán) csak kicsit változik, számolhatunk a

$$T_{\text{átlagos}} = \tfrac{1}{2}(275\ \text{K} + 273\ \text{K}) = 274\ \text{K}$$

hőmérséklettel:

$$\Delta S_{\text{víz}} = -\frac{Q}{T_{\text{átlagos}}} = -\frac{8{,}4\ \text{kJ}}{274\ \text{K}} = -30{,}66\ \frac{\text{J}}{\text{K}} < 0.$$

(A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a víz *lead* hőt.)

A teljes (jég+víz) rendszer entrópiaváltozása:

$$\Delta S_{\text{rendszer}} = \Delta S_{\text{jég}} + \Delta S_{\text{víz}} \approx 30{,}77\ \frac{\text{J}}{\text{K}} - 30{,}66\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \approx 0{,}1\ \frac{\text{J}}{\text{K}} > 0.$$

Ez valóban pozitív, tehát az egész rendszer entrópiája növekszik, ahogy azt már korábban (számolás nélkül) megállapítottuk.

Iván Balázs (Fonyód, Mátyás Király Gimn., 10. évf.)
dolgozata felhasználásával

39 dolgozat érkezett. Helyes 33 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1–3 pont) 4, hibás 1 dolgozat.

P. 4714. *Egy mesterséges hold a Föld körül olyan ellipszispályán kering, amelynek nagytengelye $2a$, kistengelye $2b$. Határozzuk meg a mesterséges hold sebességét*

a) pályájának a Földhöz legközelebbi pontjában,

b) pályájának a Földtől legtávolabbi pontjában,

c) a Föld középpontjától r távolságban.

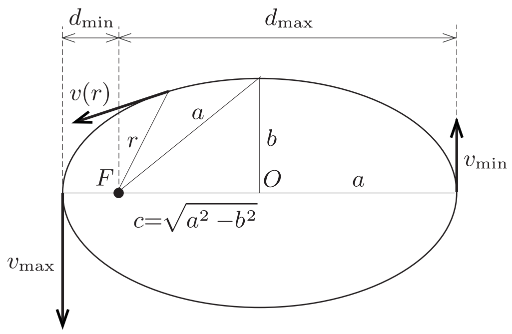
(*5 pont*) *Soós Károly* (1930–2014) feladata

Megoldás. *a*) és *b*) A mesterséges hold legnagyobb, illetve legkisebb távolsága a Föld tömegközéppontjától, vagyis az ellipszispálya F fókuszpontjától:

$$d_{\min} = a - \sqrt{a^2 - b^2}, \qquad d_{\max} = a + \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Az m tömegű műhold összenergiája (a mozgási és a gravitációs energia összege) a mozgás során állandó:

$$E_{\text{összes}} = \frac{1}{2} m v_{\min}^2 - \gamma \frac{Mm}{d_{\max}} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 - \gamma \frac{Mm}{d_{\min}}. \tag{1}$$



(M a Föld tömegét jelöli.)

A mozgás során a mesterséges hold perdülete is állandó, így a Földhöz legközelebbi (perigeum) és a legtávolabbi (apogeum) pontban is ugyanakkora:

$$md_{\max}v_{\min}=md_{\min}v_{\max}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletből a két sebesség meghatározható:

$$v_{\max}=\sqrt{2\gamma M\frac{d_{\max}}{(d_{\min}+d_{\max})d_{\min}}}=\sqrt{2\gamma M\frac{2a^2-b^2+2a\sqrt{a^2-b^2}}{2ab^2}},$$

$$v_{\min}=\sqrt{2\gamma M\frac{d_{\min}}{(d_{\min}+d_{\max})d_{\max}}}=\sqrt{2\gamma M\frac{2a^2-b^2-2a\sqrt{a^2-b^2}}{2ab^2}},$$

amelyek a szokásos $c=\overline{OF}=\sqrt{a^2-b^2}$ jelölés alkalmazásával így is felírhatóak:

$$v_{\max}=\sqrt{\frac{\gamma M}{a}\,\frac{a+c}{a-c}},\qquad v_{\min}=\sqrt{\frac{\gamma M}{a}\,\frac{a-c}{a+c}}. \tag{3}$$

c) A műhold teljes energiája (3) és (1) felhasználásával kifejezhető az ismert adatokkal. Például a perigeumból számolva:

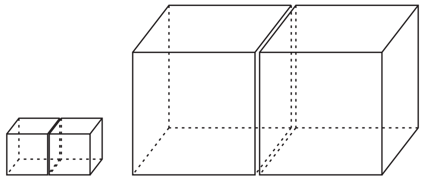
$$E_{\text{összes}}=\gamma\frac{Mm}{2a}\,\frac{a+c}{a-c}-\gamma\frac{Mm}{a-c}=-\gamma\frac{Mm}{2a}.$$

Ez az energia megegyezik a műhold tetszőleges, a Föld középpontjától r távolságú ($d_{\min}<r<d_{\max}$), v sebességű helyzetében számolható összenergiával:

$$E_{\text{összes}}=\frac{1}{2}mv^2-\gamma\frac{Mm}{r}=-\gamma\frac{Mm}{2a},\quad \text{ahonnan}\quad v(r)=\sqrt{\gamma M\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}.$$

Kaposvári Péter (Miskolc, Herman Ottó Gimn., 12. évf.)
megoldása alapján

45 dolgozat érkezett. Helyes 32 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 8, hiányos (1–3 pont) 5 dolgozat.



P. 4718. *Két a oldalélű tömör fémkocka érintkezik egymással az egyik lapjuk mentén. Hányszor nagyobb gravitációs erővel vonzza egymást két* $3a$ *oldalélű, egymással érintkező, ugyanabból a fémből készült tömör fémkocka?*

(*5 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest

I. megoldás. Két tömegpont egymásra $\gamma\frac{m_1m_2}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}$ gravitációs erőt fejt ki. A feladatban szereplő kockáknak van kiterjedésük, és nincsenek olyan messze egymástól, hogy tömegpontként kezelve őket könnyen ki lehetne számolni a rájuk ható erőt. Ha az erő nagyságát nem is, de a két elrendezésben fellépő erők *arányát* egyszerű megfontolással meghatározhatjuk.

Bontsuk fel a két kis kockát nagyon sok kicsiny, pontszerűnek tekinthető részre. Daraboljuk fel a két nagy kockát is ugyanennyi részre, mint a kicsiket olymódon, hogy az egyik felbontás a másik arányos (lineáris méreteiben háromszoros) nagyítása legyen. A kockák között ható gravitációs erő mindkét esetben a felbontás kis részei között ható erők vektori összege.

Hasonlítsuk össze páronként a kis részek között ható erőket az a és a $3a$ oldalélű kockákra. A nagyobb kocka felbontásánál keletkező kicsi részek tömege $3^3=27$-szer nagyobb, mint a kis kockák megfelelelő részeié. A részek közötti távolság viszont mindegyik párnál 3-szor nagyobb a $3a$ oldalélű kockáknál, mint a kisebb párjuknál, így végül az erők aránya $27^2/3^2=81$. Mivel ez az arány mindegyik erőpárra igaz, és a kis darabok között ható erők iránya megegyezik a két elrendezésnél, az eredő erőre is fennáll: a $3a$ oldalélű kockák 81-szer nagyobb gravitációs vonzóerőt fejtenek ki egymásra, mint a kisebb, a oldaélű kockák.

Asztalos Bogdán (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 11. évf.),
Horváth Botond István (Győr, Révai Miklós Gimn., 9. évf.)

II. megoldás. A feladatot a dimenzióanalízis módszerével is megoldhatjuk. A keresett F erő nyilván függ a γ gravitációs állandótól, a testek ϱ sűrűségétől, valamint a d-vel jelölt méretüktől. (Esetünkben $d=a$, illetve $d=3a$.) A paraméterektől való függést kereshetjük hatványok szorzatának alakjában:

$$F\sim\gamma^x\cdot\varrho^y\cdot d^z,$$

ahol x, y és z ismeretlen kitevők. A fenti függvénykapcsolatnak dimenziók szempontjából is helyesnek kell lennie:

$$\mathrm{N}=\left(\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}\right)^x\cdot\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\right)^y(\mathrm{m})^z.$$

A newton, a méter és a kilogramm független mértékegységek (jóllehet a newton nem SI-alapmértékegység), emiatt a hatványkitevőjük külön-külön „rendben kell legyen”, vagyis teljesülnie kell a következő egyenleteknek:

$$1=x,\qquad 0=2x-3y+z,\qquad 0=-2x+y.$$

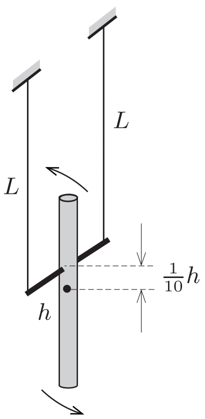
Ezek megoldása: $x=1$; $y=2$ és $z=4$, vagyis a keresett függvénykapcsolat:

$$F \sim \gamma\,\varrho^2\,d^4.$$

Látható, hogy ha a d méretet az eredeti érték 3-szorosára növeljük, a vonzóerő $3^4=81$-szer lesz nagyobb.

56 dolgozat érkezett. Helyes 50 megoldás. Hiányos (2–3 pont) 4, hibás 2 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok



M. 354. Egy adott h hosszúságú (lehetőleg homogén) rudat lássunk el a középpontjától $\frac{1}{10}h$ távolságban lévő, a rúdra merőleges tengellyel. A tengelyt vízszintes helyzetben (bifilárisan) függesszük fel L hosszúságú fonalakra, majd (az *ábrán* látható módon) hozzuk lengésbe a rudat a fonalak által meghatározott síkra merőleges irányban.

Figyeljük meg, hogyan „csatolódik” a kétféle lengőmozgás (a rúd „billegése” és a tengely lengése)! Különböző fonálhosszakat választva határozzuk meg azt az L/h arányt, amelynél a leghosszabb a „lebegés” periódusideje!

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

P. 4768. Mennyi ideig tart a Holdon a földfelkelte?

(*3 pont*) Közli: *Vankó Péter,* Budapest

P. 4769. Az A és B pontok meghatározott – de különben tetszőleges – módon mozoghatnak. Hogyan fejezhető ki az AB távolság felezőpontjának sebessége és gyorsulása az A és B pontok megfelelő adataival?

(*4 pont*) *Faragó Andor* (1877–1944) feladata

P. 4770. Egy m tömegű gyerek fel-le ugrál egy trambulin közepén. Mennyi a gyerek átlagos gyorsulása egyetlen fel-le ugrás teljes idejére vonatkozólag?

(*3 pont*) *Példatári feladat* nyomán

P. 4771. Egy 50 cm^2 keresztmetszetű mérőhengerbe 10 cm magasságig 1,2 $\mathrm{g/cm}^3$ sűrűségű sóoldatot öntünk, majd erre óvatosan (a rétegek összekeveredését elkerülve) 10 cm vastagságú tiszta vizet rétegezünk.

a) Mekkora a nyomás az edény aljában?

b) Mekkora a folyadékok együttes gravitációs helyzeti energiája az edény fenekéhez viszonyítva?

Mennyivel változnak meg ezek a mennyiségek, ha a folyadékokat összekeverjük? (A keveredés közben fellépő térfogatváltozástól eltekinthetünk.)

(*4 pont*) *Versenyfeladat nyomán*

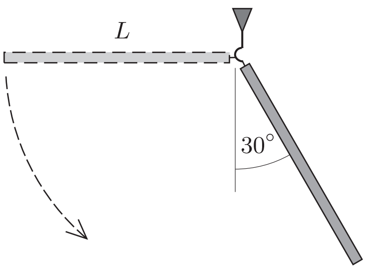
P. 4772. Egy D direkciós erejű, elhanyagolható tömegű, L hosszúságú homogén rugót n részre darabolunk fel.

a) Hogyan végezzük a feldarabolást, ha azt szeretnénk elérni, hogy a kapott kisebb rugókat és azonos m tömegű testeket felváltva egymás után kötve (egy m tömegű testtel a sor végén), majd az egészet fellógatva, nyugalmi állapotban minden rugódarab azonos hosszúságú legyen?

b) Mennyivel kerül lejjebb a tömegközéppont, ha a rugósor alját δ távolsággal lehúzzuk?

(Legyen például $DL = mg$ és $n = 5$.)

(*5 pont*) Közli: *Gáspár Merse Előd,* Budapest



P. 4773. Egy $L = 2$ m hosszú homogén, vékony rúd egyik végével mennyezeti kampóra van felakasztva. A rudat a vízszintesig kitérítjük, majd kezdősebesség nélkül elengedjük. Amikor átlendülve függőleges helyzetén a függőlegessel 30°-os szöget zár be a rúd, a kampóról leválik.

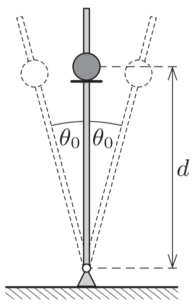
a) Legalább milyen mélyen van a talaj a kampótól mérve, ha a rúd függőleges helyzetben érkezik a talajra?

b) Legfeljebb milyen magasra jut mozgása során a rúd alsó végpontja?

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 4774. Alsó végénél tengelyezett, függőlegesen tartott rúd ütközővel van ellátva, melyen kicsiny gyöngy nyugszik, a tengelytől d távolságban. A rudat az eredeti helyzete körül kicsiny θ_0 szögamplitúdójú harmonikus rezgésbe hozzuk az *ábra* szerint. Mekkora legyen a rezgés frekvenciája, hogy a gyöngy lerepüljön a rúdról? (A súrlódás elhanyagolható.)

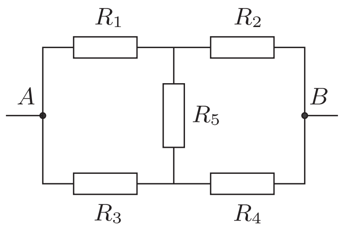
(*5 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest



P. 4775. Vékony réz- és vasszalagot hosszuk mentén több helyen összeszegecselnek úgy, hogy a lemezek távolsága 1 mm. Az így elkészült bimetál szalag 0 °C-on egyenes. Mekkora sugarú körívvé hajlik meg a lemez 200 °C-on?

(*4 pont*) *Szegedi Ervin* (1957–2006) feladata

P. 4776. Mekkora az *ábrán* látható hídkapcsolás R_5 ellenállása, ha az A és B pontok közötti eredő ellenállás 9 Ω?



Adatok: $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$, $R_3 = 15\ \Omega$, $R_4 = 8\ \Omega$.

(*4 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

P. 4777. Egy radarállomáson, amely 20,0 cm-es hullámhosszon bocsát ki elektromágneses impulzusokat, 2778 Hz-es különbséget észlelnek a kibocsátott és a visszavert jel frekvenciája között. Mekkora sebességgel közeledett az a repülőgép, amelyről a visszaverődés történt?

(*4 pont*) *Példatári feladat* nyomán

P. 4778. Két síktükörrel szeretnénk növelni egy téglalap alakú napelempanel hatásfokát. A tükrök a napelem két hosszabb oldalához illeszkednek a napelem teljes hosszában, valamilyen optimális szögben. Tekintsünk egy olyan helyzetet, amikor a Napból érkező fénysugarak közel merőlegesen érik a napelemet. Azt szeretnénk, hogy a Napból érkező és a két tükörről visszaverődő fénysugarak mind a napelemre essenek, egyúttal kétszeresére nőjön a napelem megvilágításának erőssége.

Milyen szélesek legyenek a tükrök, és hány fokos szöget zárjanak be a napelem síkjával, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználni?

(*5 pont*) Közli: *Radnai Márton,* Budapest

P. 4779. Nagy kiterjedésű, földelt fémsík fölött egy R sugarú fémgömb helyezkedik el levegőben, a síktól h távolságban ($R \ll h$). A gömb egy igen vékony fémdróttal a fémsíkhoz van kötve. Egy Q ponttöltést a gömb közelébe viszünk úgy, hogy annak távolsága a gömbtől és a fémsíktól egyaránt h legyen. Ekkor a fémdrótot eltávolítjuk, majd a ponttöltést is eltávolítjuk. Mekkora lesz ezután a fémgömb és a fémsík közötti feszültség?

(*6 pont*) Közli: *Bilicz Sándor,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 2015. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 65. No. 8. November 2015)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 472): **K. 475.** In the fields in the table (see the *figure*), enter the integers 1 to 15 so that the sum of the two numbers in any two adjacent field is a perfect square. **K. 476.** Find all positive integers for which the number obtained by rounding to the nearest thousands is twice the number obtained by rounding to the nearest hundred. (As a rule, numbers ending in 5, 50, 500, ... round upwards.) **K. 477.** Johnny is trying to learn how to eat with chopsticks. To practice, he needs to lift a ball of diameter 4 cm with the chopsticks, as shown in the *diagram.* (A ball can be lifted if its centre lies in the plane of the two sticks.) The two chopsticks in Johnny's hand enclose an angle of 60 degrees. Find the distance of the crossing point of the two sticks from the closest point of the ball during this operation. **K. 478.** Farmer Thomas wanted to buy 4 metres of chain that costs 210 forints (HUF, Hungarian currency) a metre. The shop assistant tried to talk him into buying all the 10 metres they have in stock, but Farmer Thomas insisted on buying 4 metres only. However, he noticed that the assistant, on purpose, made a mistake in measuring the 4 metres, and cut off a shorter piece. Therefore he decided to ask for the other piece instead, which the assistant had to sell him for the price of 6 metres in order to avoid being caught cheating. Had he not noticed the cheating, it would have cost Farmer Thomas 14/9 as much to buy a metre of chain as it actually cost with this clever manoeuvre. How many metres of chain did Thomas get? **K. 479.** In the expression $\left((-a^{-b})^{-c}\right)^{-d}$ the numbers 1, 2, 3, 4 are substituted for a, b, c, d in some order. In which case will the value of the expression be a maximum, and in which case will it be a minimum? **K. 480.** In the following addition, the five letters stand for the five odd digits in some order: $a+\overline{bb}+\overline{ccc}+\overline{dddd}+\overline{eeeee}$. Find the sum of all five-digit numbers that can be represented in this form.

New exercises for practice – competition C (see page 473): **Exercises up to grade 10: C. 1315.** In a chocolate factory, chocolate mass is poured into molds to make 100-gram bars. Owing to a malfunction of machinery, one out of 45 bars breaks in the process. A quality control inspector spots these broken bars before they would get wrapped, and returns them to the molten chocolate mass. However, the inspector misses one out of 21 broken bars and lets them go on to the wrapping machine. Out of 10 tonnes of chocolate mass, how many broken bars of chocolate will get to the market? **C. 1316.** In a classroom there are 18 seats altogether, forming 3 columns and 6 rows. 10 girls and 7 boys sit down in the classroom. How many different seating arrangements are possible if no row or column may consist of all boys or all girls? **Exercises for everyone: C. 1317.** The interior angles lying at vertices A, B, C and D of a pentagon $ABCDE$ are 90°, 60°, 150° and 150°, respectively. Furthermore $AB=2BC=\frac{4}{3}AD$. Prove that the line segment joining the intersection of lines AE and CD to the intersection of lines AD and BC is parallel to AB. **C. 1318.** The number 518 has an interesting property. Consider the six three-digit numbers obtained with the different permutations of the digits of 518. The mean of these numbers is equal to 518. Find all three-digit numbers of different digits with this property. **C. 1319.** The midpoints of the sides of a quadrilateral form a square. The area of the quadrilateral is 50, and two opposite sides are 5 and $\sqrt{85}$. How long are the other two sides? **Exercises upwards of grade 11: C. 1320.** Solve the following equation on the set of real numbers: $4x^2y^2+z^4+\sqrt{3x^2y-6x^2}+16=7z^2+4xyz$. **C. 1321.** How many different simple graphs of 6 vertices and 5 edges are there?

New exercises – competition B (see page 474): **B. 4741.** How many different triangles with an axis of symmetry are there in which one side is twice as long as one of the altitudes? Similar triangles are not considered different. (*3 points*) **B. 4742.**

Show that it is possible to label the edges of a complete graph of $n \geqslant 3$ vertices with 1, 2 or 3, so that the product of the labels of the edges be different at each vertex. (*4 points*) **B. 4743.** The inscribed circle of triangle ABC touches sides BC, AC and AB at points A_1, B_1 and C_1, respectively. Let the orthocentres of triangles AC_1B_1, BA_1C_1 and CB_1A_1 be M_A, M_B and M_C, respectively. Show that triangle $A_1B_1C_1$ is congruent to triangle $M_AM_BM_C$. (*4 points*) (Proposed by *Sz. Miklós,* Herceghalom) **B. 4744.** Let n be a non-negative integer. Determine the exponent of 7 in the prime factor representation of $3^{7^n}+4^{7^n}$. (*5 points*) (Proposed by *K. Williams,* Szeged) **B. 4745.** Let n be a positive integer. Solve the equation $\frac{1}{\sin^{2n} x}+\frac{1}{\cos^{2n} x}=2^{n+1}$. (*4 points*) (Proposed by *L. Longáver,* Szatmárnémeti) **B. 4746.** The inscribed circle of triangle ABC touches sides BC, AC and AB at points A_1, B_1 and C_1, respectively. The other intersection of line segment AA_1 with the inscribed circle is Q. The line through point A parallel to BC intersects the lines A_1C_1 and A_1B_1 at points P and R. Prove that $PQR\sphericalangle = B_1QC_1\sphericalangle$. (*5 points*) (*Kvant*) **B. 4747.** In a certain lottery game, 6 numbers are drawn every week, out of the numbers 1 to 45. The draw of the first week of this year produced surprising results, since five consecutive numbers appeared. The numbers drawn were 37, 38, 39, 40, 41, 45. The news spread fast in the press. The question arises whether the excitement was justified: are these numbers so special? Let a number sequence be called perfect if it consists of six consecutive numbers, and nearly perfect if exactly five numbers out of the six are consecutive. How many perfect and nearly perfect combinations are there? Considering that the lottery game has been played for 26 years, and there have been 1227 weekly draws so far, what is the probability that during a time interval of this length at least one perfect or nearly perfect sequence of numbers is drawn? (*3 points*) (Proposed by *M. E. Gáspár,* Budapest) **B. 4748.** A triangle $\mathcal{H}$ is rotated about a line lying in its plane but not intersecting it. Show that the volume of the resulting solid equals the product of the perimeter of $\mathcal{H}$ and the area of the circle described by the centroid of $\mathcal{H}$ during the rotation. (*5 points*) **B. 4749.** The feet of the altitudes drawn from vertices B and C of an acute-angled triangle ABC on the sides AC and AB are D and E, respectively. The midpoint of side BC is F. The intersection of line segments AF and DE is M, and the orthogonal projection of point M onto the line segment BC is N. Prove that line segment AN bisects line segment DE. (*6 points*) (Proposed by *B. Bíró,* Eger – In memoriam Attila Kálmán)

New problems – competition A (see page 476): **A. 653.** Let $n \geqslant 2$ be an integer. Prove that there exist integers $a_1,\dots,a_{n-1}$ such that $a_1 \operatorname{arctg} 1 + a_2 \operatorname{arctg} 2 + \ldots + a_{n-1} \operatorname{arctg}(n-1) = \operatorname{arctg} n$ if and only if the number n^2+1 is composite. (Based on a problem of IMC 2015, Blagoevgrad) **A. 654.** Let $p(x)$ be a polynomial of degree at most n such that $\left|p(x)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$ for $0<x\leqslant 1$. Prove that $\left|p(0)\right| \leqslant n+\frac{1}{2}$. **A. 655.** Two circles, k_1 and k_2 meet at points A and B. Points C and D lie on k_1, while points E and F lie on circle k_2 in such a way that A, C, E are collinear and B, D, F are collinear, too. Points G and H are other two points on lines ACE and BDF, respectively. The line CH meets FG and k_1 the second time at I and J, respectively. The line DG meets EH and k_1 the second time at K and L, respectively. Circle k_2 meets the lines EHK and FGI the second time at M and N, respectively. The points $A, B, C, \dots, N$ are distinct. Show that I, J, K, L, M and N are either concyclic or collinear.

Problems in Physics

(see page 507)

M. 354. Attach a spindle perpendicularly to a (preferably uniform density) rod of length h at a distance of $\frac{1}{10}h$ from the centre of the rod. Hang the spindle horizontally with threads of lengths L (bifilar suspension), then make the rod swing perpendicularly to the plane determined by the threads (as shown in the *figure*). Investigate how the two types of swinging motions (the wobbling of the rod and the waggling of the spindle) couple. Choose different thread lengths, and determine that ratio of L/h at which the period of the alternation between the two types of oscillation is the longest.

P. 4768. How long does the Earthraise take on the Moon? **P. 4769.** The motion of points A and B is determined – but otherwise not restricted. How can the velocity and the acceleration of the midpoint of the line segment AB be expressed in terms of the appropriate data of points A and B? **P. 4770.** A child of mass m is bouncing on a trampoline. What is the average acceleration of the child during one complete jump (up and down motion)? **P. 4771.** A graduated cylinder of cross-section 50 cm^2 is filled with some salt solution of density 1.2 $\mathrm{g/cm}^3$ up to a height of 10 cm, and then carefully (without mixing the layers) 10 cm-high clean water is stratified onto it. *a*) What is the pressure at the bottom of the cylinder? *b*) What is the total gravitational potential energy of the two samples of liquid with respect to the bottom of the cylinder? By what amount will these quantities change if the two samples of liquid are mixed? (Neglect the change in the volume of the whole mixture due to the mixing process.) **P. 4772.** A negligible mass and homogeneous spring spring of spring constant D and of length L is cut into n pieces. The small pieces of the spring are alternately attached to bodies of mass m each, thus creating a chain (at its end there is a body of mass m). Then the chain is hung. How should the spring be cut, in order to gain the same lengths of springs in the chain when it is hanging at rest. *b*) What distance does the centre of gravity move down if the bottom of the chain is pulled down by a distance of δ? (Let for example $DL = mg$ and $n = 5$.) **P. 4773.** A uniform thin rod of length $L = 2$ m is suspended with a hook at the ceiling. The rod is raised into horizontal position and it is released with zero initial velocity. After passing the vertical position, when the rod encloses an angle of 30° with the vertical, the rod leaves the hook. *a*) What is the least distance between the ground and the hook, if the rod arrives to the ground in a vertical position? *b*) What is the maximum height of the bottom end of the rod during the motion? **P. 4774.** A bumper is mounted to a vertical rod, hinged at its bottom end, at a distance of d from the hinge. There is a small bead at rest on the bumper. The rod is started to vibrate and executes SHM about its original position with a small angular amplitude of θ_0, as shown in the *figure*. What should the frequency of the vibration be in order that the bead flies off? (Friction is negligible.) **P. 4775.** Thin copper and iron strips are riveted together along their length to form a bimetallic strip. The distance between the two strips is 1 mm. The bimetallic strip is flat at the temperature of 0 °C. What will the radius of the bent strip be at a temperature of 200 °C? **P. 4776.** What is the resistance R_5 of the bridge circuit shown in the *figure* if the equivalent resistance between points A and B is 9 Ω? *Data:* $R_1 = 5$ Ω, $R_2 = 12$ Ω, $R_3 = 15$ Ω, $R_4 = 8$ Ω. **P. 4777.** At a radar station where electromagnetic impulses of 20 cm wavelength are emitted, a difference of 2778 Hz is detected between the frequency of the emitted and reflected impulses. What was the velocity of the air-plane which reflected the emitted beam? **P. 4778.** We would like to enhance the efficiency of a rectangular solar PV panel with using two plane mirrors. The mirrors fit along the whole length of the two longer edges of the panel at a sort of optimal angle. Consider the situation when the incident solar rays are nearly perpendicular to the panel. Our aim is to achieve that all the rays coming from the Sun and reflected from the mirrors should fall onto the panel thus the illumination of the panel is doubled. What should the optimal angle and the width of the mirrors be if the material used is to be minimum? **P. 4779.** At a height of h above a broad grounded metal sheet there is a metal sphere of radius R in the air ($R \ll h$). The sphere is joined to the sheet with a very thin piece of metal wire. A point charge is brought near the sphere, such that its distance from both the sphere and the sheet is h. Then we first remove the wire and after the charge. What will the potential difference between the sphere and the sheet be?