KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

65. évfolyam 7. szám Budapest, 2015. október

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, V. emelet 5.106.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, V. emelet 5.106.,
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Az 56. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

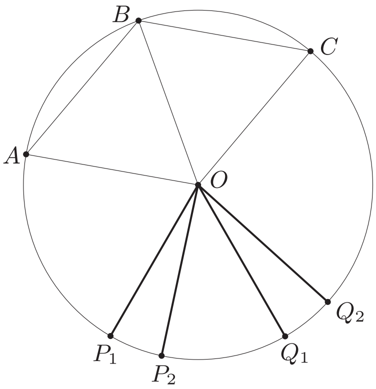
A szerkesztőség

1. *A sík pontjainak egy véges $\mathcal{S}$ halmazát* kiegyensúlyozott*nak nevezzük, ha $\mathcal{S}$ bármely két különböző A, B pontjához van $\mathcal{S}$-nek olyan C pontja, amire $AC=BC$. $\mathcal{S}$-et* centrum-nélküli*nek nevezzük, ha $\mathcal{S}$ bármely három páronként különböző A, B, C pontjára teljesül az, hogy nincs $\mathcal{S}$-nek olyan P pontja, amire $PA=PB=PC$.*

(*a*) *Mutassuk meg, hogy bármely $n\geqslant 3$ egész számhoz létezik n elemű kiegyensúlyozott halmaz.*

(*b*) *Határozzuk meg azokat az $n\geqslant 3$ egészeket, amelyekre létezik n elemű kiegyensúlyozott, centrum-nélküli halmaz.*

Di Giovanni Márk megoldása. *a*) Ha n páratlan, akkor tekintsünk egy szabályos n-szöget és lássuk be, hogy ez egy kiegyensúlyozott halmaz. Ehhez tekintsünk két tetszőleges, különböző A és B pontot és a távolságukat ívhosszban mérve (a sokszög körülírt köre mentén). Ekkor a két távolság (a hosszabb és rövidebb ív mentén) összege n, azaz páratlan, ezért az egyik távolság páratlan a másik pedig páros. Ha viszont az egyik ív hossza páros, akkor S tartalmazza az ívfelezőpontot, ami ugyanakkora távolságra van A-tól és B-től.



Ha n páros, akkor tekintsünk egy kört és S legyen a következő pontok halmaza: a kör O középpontja és a kör kerületének néhány pontja az *ábra* szerint: A, B, C úgy, hogy $ABCO$ rombusz legyen, továbbá tetszőleges k darab pont $(P_1,P_2,\ldots,P_k)$, illetve ezen pontok O körüli $60°$-os pozitív iránybeli elforgatottja $(Q_1,Q_2,\ldots,Q_k)$.

Nyilván megválaszthatjuk a P_i-pontokat úgy, hogy az összes általunk kiválasztott pont különböző legyen. Ekkor S-nek pontosan $2k+4$ darab eleme van (ahol k tetszőleges nemnegatív egész). Tekintsünk most két különböző S-beli pontot. Ha mindkettő a kör kerületén van, akkor a kör középpontja egyenlő távol van tőlük. Ha az egyik a kör középpontja, akkor mivel A B-nek, B C-nek, illetve Q_i P_i-nek a $60°$-os elforgatottja, ezért a szabályos háromszögek miatt azonnal találunk olyan pontot, ami a két kiválasztott ponttól egyenlő távolságra van. Ezzel beláttuk, hogy S kiegyensúlyozott. Továbbá $2k+4$ felveszi az összes 3-nál nagyobb páros számot.

Tehát minden $n \geqslant 3$ egészre létezik n elemű kiegyensúlyozott halmaz.

b) Azt állítjuk, hogy pontosan a páratlan n-ekre létezik n elemű kiegyensúlyozott, centrum-nélküli halmaz.

Ha n páratlan, akkor a szabályos n-szög kiegyensúlyozott halmaz (ezt már korábban beláttuk), továbbá bármely három pontját is választjuk ki, az a pont, amely mindhármuktól egyenlő távolságra van, éppen a körülírt körük középpontja, ami nyilván megegyezik a szabályos n-szög körülírt körének középpontjával. Ez a pont viszont nem S-beli, tehát S centrum-nélküli.

Lássuk most be, hogy páros n-re nem létezik ilyen S halmaz. Legyen $n=2k$ és tegyük fel indirekt, hogy találtunk ilyen S-et. Ekkor egy tetszőleges A csúcshoz legfeljebb $k-1$ darab S-beli pontpár található úgy, hogy A rajta legyen a felezőmerőlegesükön, mert ha létezne k ilyen pár, akkor a $2k-1$ csúcs közül lenne olyan B pont, amihez tartozó két felezőmerőlegesen is rajta lenne az A pont. Tekintsük ezen felezőmerőlegeseket meghatározó szakaszokat: BC-t és BD-t. Ekkor $AB=AC$ és $AB=AD$-ből $AB=AC=AD$ következik, tehát S-nek van centruma, ami ellentmond eredeti feltevésünknek. Tehát S-nek minden csúcsa legfeljebb $k-1$ darab különböző S-beli pontpár által meghatározott felezőmerőlegesen lehet rajta. Viszont összesen $\binom{2k}{2}=k(2k-1)$ darab pontpár van, amelyek mindegyikéhez tartozik egy felezőmerőleges, továbbá minden pontpár által meghatározott felezőmerőlegesen van legalább egy darab S-beli pont.

Tehát $k(2k-1) \leqslant 2k(k-1)$, azaz $k \geqslant 2k$, ami nyilvánvalóan ellentmondás. Így páros n-re nincsen kiegyensúlyozott, centrum-nélküli halmaz.

Összefoglalva: pontosan a páratlan n-ekre létezik kiegyensúlyozott, centrum-nélküli S halmaz.

2. *Határozzuk meg azokat a pozitív egész számokból álló (a,b,c) számhármasokat, amelyekre az*

$$ab-c, \quad bc-a, \quad ca-b$$

számok mindegyike 2*-hatvány.*

(2-hatvány egy 2^n alakú egész szám, ahol n egy nemnegatív egész szám.)

Szabó Barnabás megoldása. A szokásos módon $v_2(x)$ jelöli egy x pozitív egész prímfelbontásában a 2 hatványkitevőjét. A továbbiakban hivatkozás nélkül fel fogjuk használni azt az ismert állítást, mely szerint $v_2(x)>v_2(y)$ esetén $v_2(x\pm y)=v_2(y)$, és $v_2(x)=v_2(y)=t$ esetén $v_2(x\pm y)\geqslant t+1$. Ha $a=1$, akkor $ab-c$ és $ac-b$ közül az egyik nem pozitív, így nem lehet 2-hatvány. Tehát $a\neq 1$, hasonlóan $b,c\neq 1$.

1. eset: minden változó páros. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $v_2(a)\geqslant v_2(b)\geqslant v_2(c)\geqslant 1$. Ekkor $v_2(ab-c)=v_2(c)$, de $ab-c$ 2-hatvány, így $ab-c\leqslant c$, azaz $ab\leqslant 2c$. A $v_2(ac-b)=v_2(b)$ egyenlőségből kapjuk, hogy $ac\leqslant 2b$. A két egyenlőtlenséget összeszorozva nyerjük, hogy $a\leqslant 2$, de $a\neq 1$, így $a=2$. Ezt visszahelyettesítve kapjuk, hogy $2b\leqslant 2c$ és $2c\leqslant 2b$, azaz $b=c$, viszont ekkor $v_2(bc-a)=v_2(b^2-2)=1$, tehát $b^2-2=2^1$ lesz, ahonnan $b=c=2$. Az első eset tehát az $(a,b,c)=(2,2,2)$ számhármast adja, ami valóban megfelelő.

2. eset: egyik változó páratlan. Feltehető, hogy c lesz páratlan. Tegyük fel, hogy $v_2(a)\neq v_2(b)$, mondjuk $v_2(a)>v_2(b)$. Ekkor a páros, tehát $ab-c$ páratlan, azaz $ab-c=1$. Másrészt, $v_2(bc-a)=v_2(b)$, így $bc-a=2^{v_2(b)}$ osztója b-nek, $bc-a\leqslant b$. Ekkor $ab-1=c\leqslant\frac{b+a}{b}\leqslant 1+a$, ahonnan $a(b-1)\leqslant 2$, így $a=2$ és $b=2$, ami ellentmond $v_2(a)>v_2(b)$-nek.

Tehát $t=v_2(a)=v_2(b)$. Először tegyük fel, hogy $t\geqslant 1$. Ekkor $2|ab$, így $ab-c= =1$. A c-t behelyettesítve

$$bc-a=ab^2-(a+b)=2^x,$$

$$ca-b=a^2b-(a+b)=2^y,$$

ahol feltehető, hogy $x\leqslant y$. A kettőt kivonva, $2^x(2^{y-x}-1)=ab(a-b)$ adódik. Hogyha $x=y$, akkor $a=b$ lesz, és $a^3-2a=a\big(a^2-2\big)=2^x$. Mivel a páros, $v_2(a^2-2)=1$, így $a^2-2=2^1$, $a=2$ adódik. Ebből kapjuk a $(3,2,2)$ számhármast.

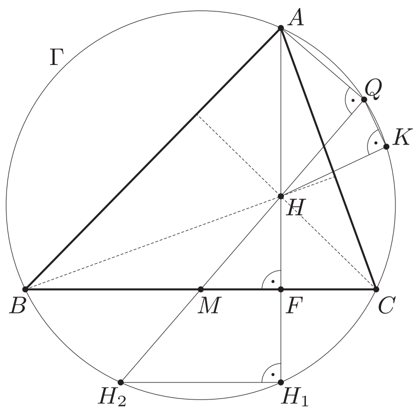
Ha $x<y$, akkor $2^x(2^{y-x}-1)=ab(a-b)$ miatt $v_2\big(ab(a-b)\big)=x$, de $v_2(a-b)\geqslant t+1$, így $x\geqslant 3t+1$. Ebből $v_2\big(ab^2-(a+b)\big)=x\geqslant 3t+1$, de $v_2\big(ab^2\big)= =3t$ miatt $v_2(a+b)=3t$. Másrészt $3t>t+1$ miatt $v_2(a-b)=v_2\big(2a-(a+b)\big)= =t+1$, azaz $x=v_2\big(ab(a-b)\big)=3t+1$. Legyen $ab^2=2^{3t}d$ és $a+b=2^{3t}e$, ekkor az egyenletbe helyettesítve és 2^{3t}-vel osztva $d-e=2$, tehát $\frac{d}{e}\leqslant 3$, ezért $ab^2\leqslant 3(a+b)$. Ebből $b\geqslant 2$ miatt $a\leqslant\frac{3}{b^2}a+\frac{3}{b}\leqslant\frac{3}{4}a+\frac{3}{2}$, ahonnan $a\leqslant 6$. Ha $a=2$, akkor $2b^2\leqslant 6+3b$, innen $b=2$ (hiszen $v_2(b)=1$), innen ismét kapjuk a $(3,2,2)$ számhármast. Hasonló vizsgálattal adódik, hogy $a=4$ esetén nincs megoldás, míg $a=6$ esetén kapjuk a $(2,6,11)$ hármast.

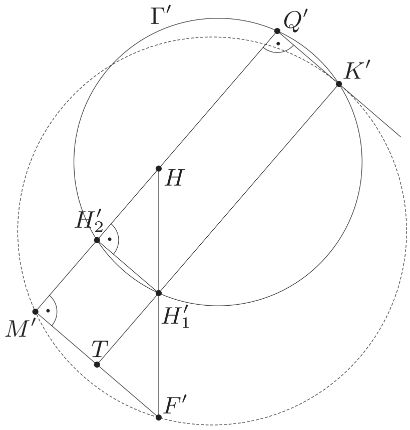
Most azt az esetet vizsgáljuk, amikor $t=0$, azaz mindhárom szám páratlan. Legyen $bc-a=2^x$, $ca-b=2^y$, $ab-c=2^z$. Feltehető, hogy $x\leqslant y\leqslant z$. Ekkor $2^y\mid(ab-c)-(ac-b)=(b-c)(a+1)$ és $2^y\mid(ab-c)+(ac-b)=(b+c)(a-1)$. Nyilván $v_2(b-c)=1$ vagy $v_2(b+c)=1$, innen $a\geqslant 2^{y-1}-1$. Viszont $(a+b)(c-1)= =2^x+2^y\leqslant 2^{y+1}$, de $a+b\geqslant 2^{y-1}$, tehát $c\leqslant 5$. $c=5$ esetén $b=1$ lenne, ami ellentmondás. Tehát csak $c=3$ lehetséges. Mivel $b>1$, így $a<2^y-1$ tehát $a=2^{y-1}+1$ vagy $a=2^{y-1}-1$. Az előbbi esetből egyszerű számolás után ellentmondásra jutunk, míg az utóbbiból a $(3,5,7)$ megoldást kapjuk, ami valóban jó. A megoldások tehát: $(2,2,2)$, $(3,2,2)$, $(2,6,11)$ és $(3,5,7)$ és persze ezek permutációi.

3. *Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, amiben $AB>AC$. Legyen Γ ezen háromszög körülírt köre, H a magasságpontja és F az A-ból kiinduló magasság talppontja. Legyen M a BC szakasz felezőpontja. Legyen Q Γ-nak az a pontja, amire $HQA\sphericalangle=90^\circ$, és K Γ-nak az a pontja, amire $HKQ\sphericalangle=90^\circ$. Feltesszük, hogy az A, B, C, K, Q pontok mind különbözőek, és ilyen sorrendben követik egymást a Γ körön.*

Bizonyítsuk be, hogy a KQH és FKM háromszögek körülírt körei érintik egymást.

Janzer Barnabás megoldása. Legyen a H pont tükörképe a BC egyenesre (vagyis az F pontra) H_1, az M pontra H_2. Ismert, hogy H_1 és H_2 a Γ körön vannak, továbbá H_2 az A-val átellenes pont. A Thalész-tétel megfordításából a QH egyenes Γ-t az A-val átellenes pontban, vagyis H_2-ben metszi. Ezért HQ és HM is átmegy H_2-n, vagyis H_2, M, H és Q egy egyenesen vannak. Az A, H és H_1 pontok egy egyenesen vannak, ezért a Thalész-tételből $H_2H_1H\sphericalangle = 90°$. Az A, B, C pontokra a továbbiakban nincs szükségünk a megoldás során.





Invertáljunk H középponttal. Ekkor M', H_2', H, Q' ilyen sorrendben egy egyenesen vannak. HQ Thalész-köre (melyen K rajta van) egy $M'Q'$-re merőleges egyenesbe megy át (hiszen középpontja rajta van a H_2MHQ egyenesen). Hasonlóan HM és HH_2 Thalész-körének képe is egy $M'Q'$-re merőleges egyenes, előbbi körön F, utóbbin H_1 rajta van. Továbbá H_2' és H_1' rendre a HM' és HF' szakasz felezőpontja. Γ' egy kör, mely áthalad a Q', H_2', H_1', K' pontokon.

$Q'H_2'H_1'K'$ négyszög derékszögű trapéz és húrnégyszög egyben, ezért téglalap. Messe $K'H_1'$ egyenes $M'F'$-t a T pontban. $M'F'H$-ban $H_1'T$ középvonal, mivel H_1' felezőpont és $H_1'T$ párhuzamos HM'-vel. Ezért $TH_1'K'$ egyenes szakaszfelező merőlegese az $M'F'$ szakasznak, így a szimmetria miatt $M'F'K'$ körülírt köre érinti (az $M'F'$-vel párhuzamos) $Q'K'$ egyenest. Így ősképeik is érintik egymást, ami pont a bizonyítandó állítás.

4. *Az ABC háromszög körülírt köre Ω, a körülírt kör középpontja O. Egy A középpontú Γ kör a BC szakaszt a D és E pontokban metszi, ahol B, D, E, C páronként különböző pontok, amelyek a BC egyenesen ebben a sorrendben fekszenek. Legyenek F és G a Γ és Ω körök metszéspontjai, ahol A, F, B, C, G ebben a sorrendben követik egymást az Ω körön. Legyen K a BDF háromszög körülírt körének és az AB szakasznak a másik metszéspontja. Legyen L a CGE háromszög körülírt körének és a CA szakasznak a másik metszéspontja.*

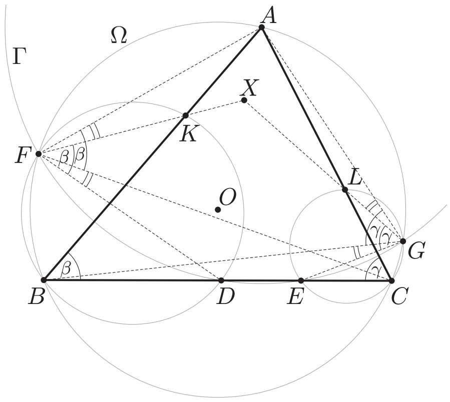
Tegyük fel, hogy az FK és GL egyenesek különbözők és az X pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az X pont az AO egyenesen fekszik.

Baran Zsuzsanna megoldása. Először belátom, hogy $BGE\sphericalangle = DFC\sphericalangle$.

$BCF\sphericalangle (= DCF\sphericalangle) = BGF\sphericalangle$, mert Ω körnek azonos ívén nyugvó kerületi szögek.

Az FCD háromszögben $DFC\sphericalangle + DCF\sphericalangle + FDC\sphericalangle = 180^\circ$. Mivel $FDEG$ húrnégyszög, az is igaz, hogy $FDE\sphericalangle + FGE\sphericalangle = FDE\sphericalangle + BGF\sphericalangle + BGE\sphericalangle = 180^\circ$.

Ezek szerint $DFC\sphericalangle = 180^\circ - DCF\sphericalangle - FDC\sphericalangle = 180^\circ - BGF\sphericalangle - FDE\sphericalangle = BGE\sphericalangle$.



A kerületi szögek tétele miatt az is igaz, hogy

$$DFK\sphericalangle = DBK\sphericalangle \text{ (}BDK\text{ kör }DK\text{ ívén nyugszanak)} = CBA\sphericalangle = CFA\sphericalangle \text{ (}\Omega\ AC\text{ ívén nyugszanak)},$$

$$EGL\sphericalangle = ECL\sphericalangle \text{ (}CEL\text{ kör }EL\text{ ívén nyugszanak)} = BCA\sphericalangle = BGA\sphericalangle \text{ (}\Omega\ AB\text{ ívén nyugszanak)}.$$

$$AFK\sphericalangle = AFD\sphericalangle - DFK\sphericalangle = AFD\sphericalangle - CFA\sphericalangle = DFC\sphericalangle = BGE\sphericalangle = AGE\sphericalangle - BGA\sphericalangle = AGE\sphericalangle - EGL\sphericalangle = AGL\sphericalangle.$$

Ezek szerint $AFX\sphericalangle = AFK\sphericalangle = AGL\sphericalangle = AGX\sphericalangle$.

Az AFG háromszög egyenlőszárú (AF és AG egyaránt Γ sugarai), ezért $AFG\sphericalangle = AGF\sphericalangle$ és A illeszkedik az FG szakasz felezőmerőlegesére.

$OF = OG$ (Ω sugarai), ezért O is illeszkedik az FG szakasz felezőmerőlegesére. Így az AO egyenes az FG szakasz felezőmerőlegese.

$$XFG\sphericalangle = |AFG\sphericalangle - AFX\sphericalangle| = |AGF\sphericalangle - AGX\sphericalangle| = XGF\sphericalangle.$$

Ezek szerint az XFG háromszög egyenlőszárú, így az X pont illeszkedik az FG szakasz felezőmerőlegesére, azaz az AO egyenesre. Ezt akartuk belátni.

Mivel a feladatban megadták, hogy a pontok milyen sorrendben helyezkednek el a BC szakaszon, illetve az Ω körön, diszkusszióra nincs szükség.

5. *Jelölje $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát. Határozzuk meg az összes olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre teljesül*

$$f\big(x+f(x+y)\big)+f(xy)=x+f(x+y)+yf(x) \tag{1}$$

minden x, y valós számra.

Williams Kada megoldása. Mindenekelőtt keressük meg (1) lineáris megoldásait, vagyis az $f(x)=ax+b$ alakúakat! Beírva (1)-be, majd kibontva és átrendezve:

$$a\big(x+a(x+y)+b\big)+b+axy+b=x+a(x+y)+b+y(ax+b),$$

$$\big(a^2-1\big)x+\big(a^2-a-b\big)y+(ab+b)=0. \tag{$*$}$$

Meggondolható, hogy ez éppen akkor állhat fenn minden x, y-ra, hogyha $(*)$-ban mindhárom együttható nulla, ami csak akkor lehet igaz, ha $(a,b)=(1,0)$ vagy $(-1,2)$, azaz $f(x)=x$ vagy $f(x)=2-x$. Ennek a meggondolása nem tartozik a megoldáshoz, viszont ebből sejthető meg, hogy ez a kettő lesz (1)-nek az összes megoldása. Jól látható, hogy ezeknél $(*)$ együtthatói tényleg mind nullák lesznek, vagyis hogy $f(x)=x$ és $f(x)=2-x$ valóban megoldása (1)-nek.

Helyettesítsünk $x=0$-t, majd pedig $y=1$-et (1)-be, nyerjük:

$$f\big(f(y)\big)+f(0)=f(y)+yf(0), \tag{2}$$

$$f\big(x+f(x+1)\big)=x+f(x+1). \tag{3}$$

Kezdésképpen könnyű megtalálni $f(0)$ lehetséges értékeit: írjunk (2)-be előbb $y=0$-t: $f\big(f(0)\big)=0$ adódik, amiért (2)-be most $y=f(0)$-t helyettesítve

$$f\Big(f\big(f(0)\big)\Big)+f(0)=f\big(f(0)\big)+f(0)^2,$$

azaz $2f(0)=f(0)^2$ adódik, ahonnan $f(0)=2$ vagy $f(0)=0$.

1. eset: $f(0)=2$, itt az $f(x)=2-x$ megoldást várjuk.

Ez az eset egy trükkös észrevétellel elintézhető. Figyeljük meg ugyanis, hogy (3) szerint $x+f(x+1)$ minden x-re fixpontja f-nek. Ellenben a megcélzott $x\mapsto 2-x$ függvénynek csak az 1 a fixpontja. Ha belátnánk, hogy $f(0)=2$ esetén f-nek csak az 1 lehet fixpontja, abból következne, hogy $x+f(x+1)$ fixpont lévén minden x-re, azonosan 1 kell legyen, vagyis $f(x+1)=1-x$ minden x-re, azaz $f(t)=2-t$ bármely t-re ($t:=x+1$).

Belátjuk tehát, hogy $f(0)=2$-re $f(a)=a$-ból $a=1$ következik. Ehhez (2)-t vegyük szemügyre, $y=a$-t helyettesítve: $f\big(f(a)\big)+2=f(a)+2a$, $a=1$ adódik. Ez igazolja, hogy $f(0)=2$ esetén $f(x)=2-x$.

2. eset: $f(0)=0$, itt az $f(x)=x$ megoldást várjuk.

Ezúttal bonyolultabban járunk el: azt vesszük észre, hogy ha (1)-be x, y helyett $-x$, $-y$-t helyettesítünk, azzal $f(xy)$ ugyanúgy jelen marad, és ezért kiejthetjük:

$$f(xy)=-f\big(x+f(x+y)\big)+\big(x+f(x+y)\big)+yf(x)$$

$$f(xy)=-f\big(-x+f(-x-y)\big)+\big(-x+f(-x-y)\big)-yf(-x).$$

Itt gyakran üti fel fejét $x+y$ és ellentettje, kényelmesebb az $y:=k-x$ jelölést használni:

$$(4)\qquad -f\big(x+f(k)\big)+\big(x+f(k)\big)+(k-x)f(x)=$$
$$=-f\big(-x+f(-k)\big)+\big(-x+f(-k)\big)-(k-x)f(-x).$$

A megoldáshoz először meghatározunk néhány $f(\pm k)$ értéket, majd pedig az adódó összefüggéseket összehasonlítjuk, amikből már némi munka árán kifejezhetjük $f(x)$-et.

Már tudjuk, hogy $f(0)=0$, írjunk hát (4)-be $k=0$-t, rögtön barátságosabb lesz:

$$-f(x)+x-xf(x)=-f(-x)-x+xf(-x),$$
$$(5)\qquad 2x=(x+1)f(x)+(x-1)f(-x).$$

Ha (3)-ba $x=-1$-et írunk, akkor $f(0)=0$ miatt $f(-1)=-1$ nyerhető, illetve (5)-be $x=1$-et írva, megkapjuk, hogy $2=2f(1)$, $f(1)=1$. Vagyis (4)-be már írhatunk $k=1$-et is:

$$-f(x+1)+(x+1)+(1-x)f(x)=-f(-x-1)-(x+1)-(1-x)f(-x).$$

Itt viszont (5) szerint $-(1-x)f(-x)$ helyére $2x-(x+1)f(x)$ írható, vagyis

$$-f(x+1)+2(x+1)=(x-1)f(x)-f(-x-1)+2x-(x+1)f(x),$$
$$2+2f(x)=f(x+1)-f(-x-1).$$

Ha ezt x helyett $x-1$-re írjuk fel, akkor

$$(6)\qquad 2+2f(x-1)=f(x)-f(-x)$$

adódik.

Beszorozva (6)-ot $(x-1)$-gyel, majd hozzáadva (5)-öt:

$$2(x-1)+2(x-1)f(x-1)+2x=(x-1)f(x)+(x+1)f(x),$$
$$(7)\qquad (x-1)f(x-1)+(2x-1)=xf(x).$$

Ezután (6)-ba $x=-1$-et írva, $f(-2)=-2$, majd pedig (6)-ba $x=2$-t írva, $f(2)=2$ nyerhető.

A befejezéshez írjunk (4)-be $k=2$-t:

$$-f(x+2)+(x+2)+(2-x)f(x)=-f(-x-2)+(-x-2)-(2-x)f(-x),$$

ahol $f(x+2)-f(-x-2)=2+2f(x+1)$ érvényes (6) szerint, így

$$2(x+2)+(2-x)\cdot\big(f(x)+f(-x)\big)=2+2f(x+1).$$

Beszorozva $(x+1)$-gyel, (7) miatt adódik:

$$2(x+2)(x+1)-(x-2)(x+1)\cdot\big(f(x)+f(-x)\big)=2(x+1)+2\big(xf(x)+2x+1\big),$$

$$2(x^2+3x+2)-2(x+1)-2(2x+1)=(x^2-x-2)\big(f(x)+f(-x)\big)+2xf(x),$$
$$2x^2=(x^2+x-2)f(x)+(x^2-x-2)f(-x).$$

Ezt pedig $(x-1)$-gyel tovább szorozva és (5)-öt használva:

$$2x^2(x-1)=(x-1)(x^2+x-2)f(x)+(x^2-x-2)\big(2x-(x+1)f(x)\big),$$

$$2x^2(x-1)-2x(x^2-x-2)=\big[(x-1)(x^2+x-2)-(x+1)(x^2-x-2)\big]f(x),$$

$$2x\big(x^2-x-(x^2-x-2)\big)=$$

$$=\Big[x\big((x^2+x-2)-(x^2-x-2)\big)-\big((x^2+x-2)+(x^2-x-2)\big)\Big]f(x),$$

$$4x=\big[x\cdot(2x)-(2x^2-4)\big]f(x),$$

amiből már világos, hogy $f(x)=x$, bármely x-re.

Tehát két megoldásunk van: $f(x)=x$ és $f(x)=2-x$, és ezeket már leellenőriztük.

6. *Egész számok egy $a_1, a_2, \ldots$ sorozata rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:*

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ minden $j \geqslant 1$-re;

(ii) $k+a_k \neq \ell+a_\ell$ minden $1 \leqslant k < \ell$-re.

Bizonyítsuk be, hogy van két olyan pozitív egész: b és N, hogy

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n}(a_j-b)\right| \leqslant 1007^2$$

teljesül minden olyan m és n egész számra, amire fennáll $n>m\geqslant N$.

Fehér Zsombor megoldása. Legyen $c_j=a_j+j$. Ekkor az (i) feltétel azt mondja ki, hogy $j+1\leqslant c_j\leqslant j+2015$, a (ii) feltétel pedig azt, hogy a c_j számok mind különbözőek.

Megmutatjuk, hogy a $c_1, c_2, \ldots$ sorozat véges sok kivétellel minden pozitív egész számot felvesz. Tegyük fel ugyanis, hogy legalább 2016-ot nem vesz fel, és legyen t egy olyan pozitív egész, ami nagyobb ennél a 2016 számnál. Ekkor az (i) feltétel alapján a $\{c_1, c_2, \ldots, c_t\}$ halmaz minden eleme az $[1, t+2015]$ intervallumba esik, és mivel (ii) szerint t különböző elemről van szó, ezért ebből az intervallumból $\{c_1, c_2, \ldots, c_t\}$ éppen 2015 pozitív egész számot nem vesz fel. Azonban feltevésünk szerint az ennél bővebb $\{c_1, c_2, \ldots\}$ halmaz legalább 2016 darab t-nél kisebb pozitív egész számot nem vesz fel, ami pedig ellentmondás.

A feladatnak megfelelő b számot válasszuk meg annyinak, amennyi a $c_1, c_2, \ldots$ sorozat által fel nem vett pozitív egészek száma, N pedig legyen egy olyan szám, ami nagyobb ennél a b darab kimaradó számnál. A fenti gondolatmenetből az is látható, hogy $b\leqslant 2015$. Az m, n pozitív egészekre a továbbiakban feltesszük, hogy $N\leqslant m<n$.

A feladatunk lényegében az, hogy egy $\sum a_j$ kifejezést megfelelő korlátok közé szorítsunk, ami nyilván ugyanaz, mint $\sum c_j$ megfelelő korlátok közé szorítása. Tudjuk, hogy $\{c_{m+1},\dots,c_n\}$ minden eleme az $[m+2,n+2015]$ intervallumba esik, és mivel ezen intervallum $n-m+2014$ egész számából $n-m$ van az előző halmazban, ezért 2014 egész szám marad ki. Vizsgáljuk meg közelebbről ezt a 2014 számot: ki fog derülni, hogy közülük $b-1$ darab az $[m+2,n+2015]$ intervallum „elején”, $2015-b$ pedig a „végén” helyezkedik el.

Mivel a $\{c_1,c_2,\dots\}$ halmaz b darab egész számot nem vesz fel az $[1,\infty)$ intervallumból, ezért a $\{c_{m+1},c_{m+2},\dots\}$ halmaz $b+m$ számot nem vesz fel $[1,\infty)$-ből. Ez $c_j>j$ alapján azt jelenti, hogy a $\{c_{m+1},c_{m+2},\dots\}$ halmaz $b-1$ számot nem vesz fel $[m+2,\infty)$-ből. Mivel azonban $m+2>N$, ezért ezen $b-1$ számot is felveszi valahol a $c_1,c_2,\dots$ sorozat, csak még c_{m+1} előtt. Így ez a $b-1$ szám mindegyike olyan c_k, melyre $k\leqslant m$, így $c_k\leqslant k+2015\leqslant m+2015$ alapján ezek a számok mind az $[m+2,m+2015]$ intervallumba esnek.

Tehát azon 2014 egész közül, melyek az $[m+2,n+2015]$ intervallumban benne vannak, de a $\{c_{m+1},\dots,c_n\}$ halmazban nem, $b-1$ darab az $\{c_1,\dots,c_m\}$ halmazban van, a maradék $2015-b$ darab pedig szükségképpen a $\{c_{n+1},\dots\}$ halmazban. Ezen $2015-b$ szám mindegyike legalább $n+2$, így ezek az $[n+2,n+2015]$ intervallumba esnek.

Ezen a ponton álljunk meg egy pillanatra, és vegyük észre, hogy a feladat megoldásával lényegében készen vagyunk. Csak az alapján, hogy a 2014 kimaradó szám valahol az $[m+2,n+2015]$ intervallumban van, még nem tudnánk pontos becslést mondani, hiszen m,n-et kicsivel megváltoztatva az egyik kimaradó szám szabadon „átugorhatna” az intervallum elejéről a végére, ezzel nagy ($n-m$ nagyságrendű) változást eredményezve. De azáltal, hogy a 2014 kimaradó szám közül mindig $b-1$ van az intervallum elején, és $2015-b$ a végén (ahol a b egy univerzális paramétere a sorozatnak!), ilyen ugrások nem történhetnek meg, csak az intervallum szélein lévő rövid (2014 hosszú) intervallumok belsejében mozoghatnak a kimaradó számok. Így lehetséges az, hogy m,n-től független, 1007^2 nagyságrendű becslést fogunk tudni mondani.

Nem maradt más hátra, minthogy kiszámoljuk a 2014 kimaradó szám összegének lehetséges legkisebb és legnagyobb értékét, majd ezt visszavezessük a feladatbeli összegre. Tudjuk, hogy a 2014 szám felbontható valahogy egy $b-1$ és egy $2015-b$ elemű csoportra, melyek elemei rendre az $[m+2,m+2015]$, illetve az $[n+2,n+2015]$ intervallumból valók. (Előfordulhat, hogy ez a két intervallum átfedi egymást, de ez nem okoz gondot.) Mivel a számok különbözőek, ezért a 2014 szám összege legalább

$$\big((m+2)+(m+3)+\dots+(m+b)\big)+$$
$$+\big((n+2)+(n+3)+\dots+(n+2016-b)\big)=$$
$$=\frac{(b-1)(2m+b+2)}{2}+\frac{(2015-b)(2n+2018-b)}{2}=h_{\min},$$

legfeljebb pedig

$$\big((m+2017-b)+\dots+(m+2015)\big)+\big((n+b+1)+\dots+(n+2015)\big)=$$

$$=\frac{(b-1)(2m+4032-b)}{2}+\frac{(2015-b)(2n+2016+b)}{2}=h_{\max}.$$

Ha H jelöli az előbbi 2014 kimaradó szám összegét, akkor a feladatban szereplő összeg így írható:

$$\sum_{j=m+1}^{n}(a_j-b)=\sum_{j=m+1}^{n}(c_j-j-b)=\sum_{i=m+2}^{n+2015}i-H-\sum_{j=m+1}^{n}j-\sum_{j=m+1}^{n}b=$$

$$=\frac{(n+2014-m)(n+m+2017)}{2}-H-\frac{(n-m)(n+m+1)}{2}-b(n-m).$$

A $h_{\min}\leqslant H\leqslant h_{\max}$ becslést alkalmazva, a kifejezések egyszerűsítése után végül a következőt kapjuk:

$$b^2-2016b+2015\leqslant\sum_{j=m+1}^{n}(a_j-b)\leqslant -b^2+2016b-2015.$$

Így tehát valóban,

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n}(a_j-b)\right|\leqslant -b^2+2016b-2015=1007^2-(b-1008)^2\leqslant 1007^2.$$

Rajzoljuk meg a másik metszéspontot is!

Jótanács: *Ha egy feladat egy kör és egy egyenes, vagy két kör egy bizonyos metszéspontját kéri, akkor rajzoljuk meg a bizonyítandó állítást a másik metszésponttal is, és vizsgáljuk a kétféle esetet egyszerre, ugyanazon az ábrán.*

Két példát szeretnék mutatni arra, hogy ez az elv hogyan használható versenyfeladatok megoldásában. Mindkét példa a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián szerepelt. Az elsőt, amit a nemzetközi zsűri közepes nehézségű feladatnak szánt, a közel száz országból válogatott 548 versenyző közül csak 86 tudta megoldani – ennyien kapták meg a maximális 7 pontot –, és további 7 kapott 6-ot vagy 5-öt. (A magyar csapat összesen $1+1$ pontot szerzett.) A másik példa az idei 3. feladat, ezt az 577 versenyő közül 30 oldotta meg kifogástalanul, és még egyvalaki kapott 6 pontot. (A magyarok közül négyen kaptak egy-egy pontot.)

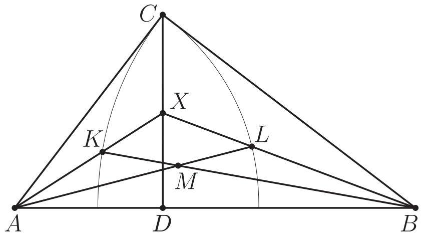
Gondoljuk meg, hogy mi is van a Jótanács mögött. Képzeljük el, hogy egy feladatot, ahol valamilyen geometriai egybeesést (pl. három egyenes egy ponton megy át) kell bizonyítani, koordinátákkal oldunk meg. Először különböző betűket választunk a szabadon megválasztható paraméterek, például a különböző pontok koordinátáinak jelölésére, utána pedig ezekkel a betűkkel kifejezzük a korábbiaktól függő pontok koordináit és a különböző görbék, egyenesek egyenleteiben szereplő együtthatókat. Ha pontosan számolunk, a végén a bizonyítandó állítás egy algebrai azonosság kell, hogy legyen.

Kör és egyenes, illetve két kör metszéspontjának kiszámításához másodfokú egyenletet kell megoldanunk. Az eredmény egy gyökös kifejezés lesz: a metszéspont koordinátáiban megjelenik egy kellemetlen négyzetgyök (a másodfokú egyenlet két gyökének különbsége), amit azután magunkkal kell cipelnünk. A megoldás végén egy négyzetgyökös azonosságot kell ellenőriznünk. Itt jön a lényeg. Tapasztalhattuk, hogy a négyzetgyökös azonosságok többnyire akkor is igazak maradnak, ha a pozitív négyzetgyök helyett a negatívat vesszük; ezért a legtöbb esetben *a bizonyítandó állítás a másik metszésponttal is igaz.* Az is előfordul, hogy egy feladaton belül több ilyen metszéspontpár is szerepel; ilyenkor a bizonyítandó állításnak még több példányát fedezhetjük fel az ábrában.

A Viète-formulák egyszerű összefüggéseket biztosítanak egy másodfokú egyenlet gyökei között; a geometriai ábránkban ezeknek a metszéspontpárok közötti geometriai kapcsolatok felelnek meg. Úgy is mondhatjuk, hogy a feladat által leírt alakzat csupán része egy nagyobb ábrának, és a nagyobb ábráról, ahol a másik metszéspontot is felvesszük, több geometriai összefüggést olvashatunk le. Természetesen a nagyobb ábra még nem jelenti azt, hogy a megoldás innen kezdve automatikus, de több esélyünk van meglátni a megoldást, mintha az ábrának csak egy kicsi részletében keresgélnénk.

1. feladat (IMO 2012/5).

Legyen az ABC háromszögben $BCA\sphericalangle = 90°$, és legyen D a C-ből induló magasságvonal talppontja. Legyen X a CD szakasz belső pontja. Legyen K az AX szakasznak az a pontja, amire $BK = BC$. Hasonlóan, legyen L a BX szakasznak az a pontja, amire $AL = AC$. Legyen M az AL és BK egyenesek metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy $MK = ML$.



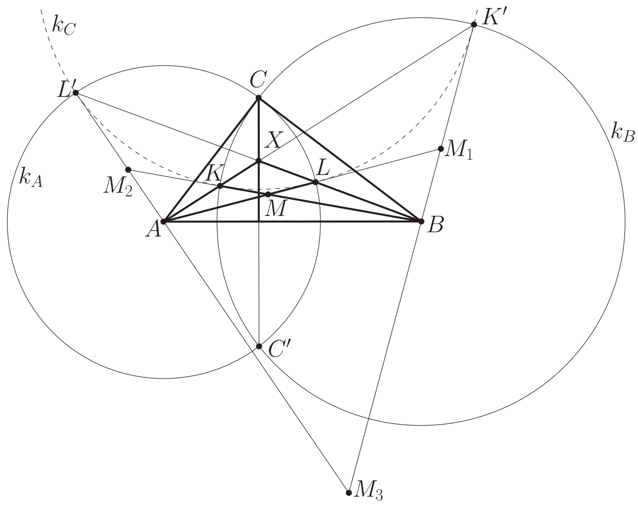
Mit is jelent az a mondat, hogy „*Legyen K az AX szakasznak az a pontja, amire $BK = BC$*”? Hogy szerkesztenénk meg a K pontot? Egyszerű: az AX szakaszt elmetsszük a B középpontú, C-n átmenő k_B körrel. Hasonlóan, az L pont a BX szakasz és az A középpontú, C-n átmenő k_A kör metszéspontja.

Most keressük elő a tarisznyánkból az otthonról hozott hamuban sült Jótanácsot, és alkalmazzuk. Az AX egyenes két pontban metszi a k_B kört, az egyik a már ismert K pont; a másikat jelöljük K'-vel. Hasonlóan, a BX egyenes kétszer metszi a k_A kört; az egyik metszéspont az L; a másikat jelölje L'. Végül, a k_A és a k_B kör is kétszer metszi egymást; az egyik metszéspont C; a másik a C tükörképe az AB egyenesre; legyen ez C'.

Az X pontnak a k_B és a k_A körre vonatkozó hatványa

$$XK \cdot XK' = XC \cdot XC' = XL \cdot XL',$$

ebből pedig láthatjuk, hogy a K, K', L, L' pontok egy körön vannak; jelöljük ezt a kört k_C-vel.



A megoldás kulcsa az az észrevétel, hogy az AL és BK szakasz érinti a k_C kört. Az A pont a k_B és k_C körök hatványvonalán, az KK' egyenesen van, tehát az A pontnak a k_B és k_C körre vonatkozó hatványa ugyakkora; az A pontból ugyanolyan hosszú érintőket húzhatunk a két körhöz. Az egyik ilyen érintő az AC szakasz, amely merőleges a k_B kör BC sugarára. Ezért az összesen négy érintési pontot a k_A kör metszi ki a k_B és k_C körökből; ez a négy pont a k_B körön C és C', a k_C körön pedig L és L'. Az AL és AL' szakaszok tehát érintik k_C-t. Hasonlóan láthatjuk, hogy a BK és a BK' szakasz is érinti k_C-t.

Végül, az MK és ML szakaszok éppen az M pontból a k_C körhöz húzott érintő szakaszok, tehát egyforma hosszúak.

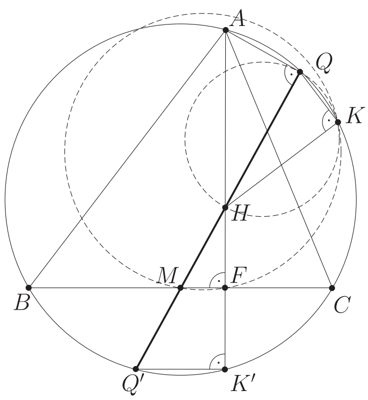
Ha maradéktalanul végre akarjuk hajtani a Jótanácsot, akkor megrajzoljuk az AL' és BK' egyenesek további metszéspontjait is; az ábrán ezeket jelöli M_1, M_2 és M_3. A bizonyítandó állításnak összesen négy példányát találhatjuk meg az ábrában:

$$MK = ML, \quad M_1K' = M_1L, \quad M_2K = M_2L' \text{ és } M_3K' = M_3L'.$$

2. feladat (IMO 2015/3).*

Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, amiben $AB > AC$. Legyen Γ ezen háromszög körülírt köre, H a magasságpontja és F az A-ból kiinduló magasság talppontja. Legyen M a BC szakasz felezőpontja. Legyen Q Γ-nak az a pontja, amire $HQA\sphericalangle = 90°$, és K Γ-nak az a pontja, amire $HKQ\sphericalangle = 90°$. Feltesszük, hogy az A, B, C, K, Q pontok mind különbözőek, és ilyen sorrendben követik egymást a Γ körön.

Bizonyítsuk be, hogy a KQH és FKM háromszögek körülírt körei érintik egymást.



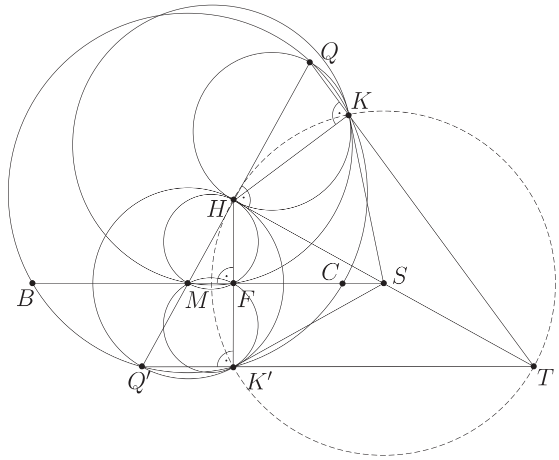
A megoldás első lépése egy egyszerű észrevétel: a Q pont az MH félegyenesen van. Jól ismert, hogy egy háromszög magasságpontjának az oldalegyenesekre, illetve az oldalak felezőpontjaira vonatkozó tükörképei a körülírt körön vannak, utóbbiak a körülírt körön a csúcsokkal átellenes pontok. Legyen H tükörképe a BC egyenesre K', az M pontra Q'. (Hogy miért ilyen furcsán jelöljük ezt a két pontot, rövidesen kiderül.) Ekkor tehát AQ' a körnek átmérője. Mivel $AQH\sphericalangle$ derékszög, a Thalész-tétel megfordítása miatt a QH egyenes átmegy a kör A-val átellenes pontján, Q'-n. Tehát a HQ egyenes tartalmazza a HQ' szakaszt és annak felezőpontját, M-et. Ebből láthatjuk, hogy a Q, H, M, Q' pontok, ebben a sorrendben, egy egyenesen vannak.

Innentől kezdve már nem lesz szükségünk az A pontra.

Most alkalmazzuk a Jótanácsot. A Q pont a körülírt kör és az MH egyenes egyik metszéspontja; a másik metszéspont Q'. Mi történne, ha a Q pont helyett a Q' ponttal kellene megoldanunk a feladatot? Először is észrevehetjük, hogy a K pont helyett a K' pontot kell használnunk: ez az a pont a körön, amire $Q'K'H\sphericalangle = 90°$. Mivel $Q'K'H\sphericalangle = 90°$, a $K'Q'H$ kör középpontja az M pont; az MK' szakasz ennek a körnek egy sugara. Hasonlóan, mivel $K'FM\sphericalangle = 90°$, az $FK'M$ körnek $K'M$ egy átmérője. Így a $K'Q'H$ és az $FK'M$ kör középpontja is az MK' egyenesre esik, a két kör a K' pontban érinti egymást. Ha tehát a feladatban a Q pontot kicseréljük a Q' pontra, egy könnyen ellenőrizhető állítást kapunk.

Tekintsük most a háromszög körülírt körét, a HQK kört és $HQ'K'$ kört, valamint ezek páronként vett hatványvonalait. A HQK körben HQ, a $HQ'K'$ körben HQ' átmérő és Q, H, Q' egy egyenesen vannak. Ezért a HQK és a $HQ'K'$ körök érintik egymást. Tehát a három kör páronként vett hatványvonalai a metszéspontokat összekötő QK, illetve a $Q'K'$ egyenesek, valamint a HQK és $HQ'K'$ körök belső közös érintője, az MH egyenesre H-ban állított merőleges. Ezek egy ponton, a három kör hatványpontján mennek át; jelöljük ezt T-vel. A K-nál és K'-nél

*Az idei olimpiai feladatok megoldását a 386–395. oldalakon közöljük.



levő derékszögek miatt $HK'TK$ húrnégyszög, a köré írt körben HT átmérő. Legyen most S a $HK'TK$ kör középpontja, ami nem más, mint a HT szakasz felezőpontja; ekkor tehát $SH = SK = SK' = ST$. A HK' húr felező merőlegese, a $BMFC$ egyenes is átmegy S-en, a kör középpontján.

Az SH szakasz érinti a HKQ és a $HK'Q'$ kört is. Mivel pedig $SH = SK = SK'$, az SK szakasz a K pontban érinti a HKQ kört, az SK' szakasz pedig K'-ben érinti a $HK'Q'$ kört. Az S pontnak a HMF körre vonatkozó hatványa $SM \cdot SF = SH^2 = SK^2$; ebből következik, hogy az FKM kör a K pontban érinti az SK szakaszt. Az SK szakaszt tehát az FKM kör és a HKQ kör is érinti a K pontban; a két kör tehát egymást is érinti.

Kós Géza

KöMaL archívum – 30 évfolyam feladatai és cikkei

A Középiskolai Matematikai Lapok legelső évfolyama az 1893–94-es tanévben jelent meg. A folyóirat az első és a második világháború miatt is megszűnt néhány évre, de mindkétszer újraindult, és az 1950-es évektől a mai napig minden tanévben 9 számot adnak ki belőle. A KöMaL-ban megjelent több mint harmincötezer oldalnyi feladat- és cikkanyag teszi ki a KöMaL archívumát.

A KöMaL első 100 évét 1893–1993-ig az 1994-ben elkészített dupla CD foglalta össze, 2000 és 2006 között pedig az Oktatási Minisztérium honlapján, a `http://www.sulinet.hu/komal` címen jelent meg az archívum, 1999 decemberéig feldolgozva a füzeteket. A feladatokra és cikkekre különféle jellemzőik alapján lehetett keresni ezeken a CD-ken és a sulineten is, de a folyóirat valódi digitalizálása ekkor még nem valósult meg, hiszen csak az eredeti oldalak szkennelt képei voltak elérhetők. Az „Irány a Nobel-díj KöMaL 1994–2003" CD-n az 1994 utáni 10 év matematika, fizika és informatika anyaga már teljesen kereshető elektronikus formátumban volt olvasható.

Mára a fent említett alkalmazások egyike sem működik, túlhaladta őket az idő. Azonban az eltelt évek alatt – idén pedig a Nemzeti Tehetség Program „A matematikai, a természettudományos és a műszaki, informatikai kompetenciák, valamint a szakmatanuláshoz szükséges kompetenciák erősítése a köznevelési intézményekben című, NTP-MTI-M-14 számú pályázatának köszönhetően – folyamatosan gondoztuk a KöMaL-tartalmak adatbázisát.

Ma a `http://db.komal.hu/KomalHU` címről induló alkalmazás lehetővé teszi a digitális archívum webes megjelenítését a MathML nyelvű oldalak nézéséhez alkalmas böngésző program (Mozilla, Firefox) segítségével. Fontos, hogy **Mozilla/Firefox böngészőben nyissuk meg a KöMaL archívumát,** mivel sem Internet Explorerben, sem Google Chrome-ban nem kapunk helyes képleteket! A tartalmat alapvetően MathML formátumban tesszük közzé, de lehetőség van annak PDF formában történő letöltésére is.

Mit tud a KöMaL webes archívuma?

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 30 évfolyama – 1984 és 2013 között – többféle szempont szerint kereshető, és a kiválogatott feladatok, cikkek kinyomtathatóak. Az összetett kereséssel igazi kincsestárban kutathatnak ingyenesen az olvasók: lehet keresni cikkekben és feladatokban többek között cím, szöveg, kategória (pl. versenyek), témakör és név alapján.

Az archívum azonban nemcsak 30 évet dolgoz fel: mindenki megtalálható benne, akinek a neve vagy fényképe diákként, szerzőként a folyóiratban bármikor megjelent, köztük hazánk számos híres tudósa, ma ismert személyisége. A lap megalapítása, 1893 óta megjelent összes számának tartalomjegyzéke, összes feladatának témája és cikkének címe is kikereshető, a megjelenés pontos helyével együtt.

A digitalizálás ellenőrzését követően fokozatosan az 1984 előtt megjelent füzetek is teljesen elérhetőek lesznek a fenti címről. Addig is a KöMaL archívumból kikeresett tartalmakat meg lehet találni a korábban beszkennelt formában.

Aki saját CD-t szeretne írni, amelyen az 1893-1993 között megjelent KöMaL oldalak szkennelt képeit megnézheti, a `www.komal.hu/cd/cd.zip` címről töltheti le a fájlokat. (Zip archívum, 525 MB.)

Kérjük, hogy ha a lap számainak böngészése során tartalmi tévedést vagy formai hibát talál, jelezze azt az `archiv@komal.hu` címen, hogy minél előbb kijavíthassuk.

EMMI OKTATÁSKUTATÓ ÉS FEJLESZTŐ INTÉZET EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ Nemzeti Tehetség Program

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Hány olyan 4 darab egész számból álló adatsokaság van, melynek mediánja 1, átlaga 2, szórásnégyzete pedig 3? Mi(k) ez(ek) az adatsokaság(ok)? (*12 pont*)

2. Egy 1 méter oldalhosszúságú, négyzet alakú asztallapra egy téglalap alakú abroszt terítünk. Az abrosz hosszabb oldalai kétszer olyan hosszúak, mint a rövidebbek, és úgy helyezzük az asztalra, hogy középvonalai egybeessenek az asztallap átlóival. Így az abrosz mind a négy sarka az asztallap síkjához képest 10 cm-rel lelóg. Az asztallap hány százalékát fedi a terítő ebben a helyzetben? (*13 pont*)

3. Oldjuk meg a következő egyenletet az egész $(x;y)$ számpárok halmazán:

$$2x-2-\sqrt{8x+4}=-\left|\frac{3y-2}{5}\right|. \qquad (14\ pont)$$

4. Az $f(x)=\sqrt{x}$ függvény grafikonját elmetsszük az $x=b$ egyenletű függőleges egyenessel. Az egyenes, $f(x)$, és az x-tengely által bezárt S síkidom területe $t=18$.

a) Mennyi b pontos értéke?

b) Az S síkidomot megforgatjuk az x-tengely körül. Mekkora a keletkezett forgástest térfogata? (*12 pont*)

II. rész

5. *a*) Igazoljuk, hogy az $x^3+3x^2-3x-1=0$ egyenletnek van egyjegyű pozitív egész megoldása.

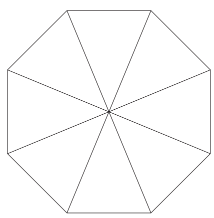
b) Oldjuk meg az $x^3+3x^2-3x-1=0$ egyenletet a valós számok halmazán.

c) Adjuk meg a tangensra vonatkozó addíciósképletek és nevezetes szögek szögfüggvényei segítségével a $105°$ és a $165°$ szögek tangenseinek a pontos értékét.

d) Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$(\operatorname{tg} x+2)^2=7+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x. \qquad (16\ pont)$$

6. Egy szabályos nyolcszögbe az *ábra* szerint a középpontján keresztül nyolc egyforma egyenlő szárú háromszöget rajzolunk be.



a) Mekkora a háromszögek súlypontjai által meghatározott szabályos nyolcszög, illetve az eredeti nyolcszög területének az aránya?

b) Kati az ábrának megfelelő pörgettyűket csinál. A pörgettyűk felső felén lévő nyolc kis háromszög mindegyikét kifesti a piros, fehér, vagy zöld színek valamelyikével (a pörgettyű alját nem festi le).

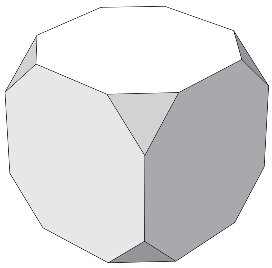
Hányféle különböző pörgettyűt készíthet Kati, ha az élben szomszédos háromszögek színét különbözőnek szeretné, de nem ragaszkodik ahhoz, hogy mind a három színt felhasználja? (*16 pont*)

7. *a*) Adjuk meg a $P(-1;1)$, és $Q(3;3)$ pontokon átmenő e egyenes egyenletét.

b) Az $f(x)=x^2-6x+8$ egyenletű függvény grafikonjának melyik az a pontja, amelyikbe húzott érintő merőleges a fenti $e=PQ$ egyenesre?

c) Adjuk meg az e egyenes, az érintő, illetve a két koordináta-tengely által bezárt (az első síknegyedbe eső) konvex négyszög területét. (*16 pont*)

8. Egy téglatest térfogata 8 cm^3. Ha a téglatest minden élét 1 centiméterrel megnöveljük, akkor egy 27 cm^3 térfogatú téglatestet kapunk. Mekkora térfogatú téglatestet kapunk, ha ismét megnöveljük az éleket 1-1 centiméterrel? (*16 pont*)



9. Egy játékgyártó vállalat az *ábrának* megfelelő műanyag játékkockákat gyárt. A gyártás során elkészítik a „sértetlen” 2 cm élhosszú kockákat, majd a nyolc csúcs mindegyikénél az éleken kimérve az azonos d távolságokat levágnak egy-egy olyan tetraédert, melynek alaplapja szabályos háromszög. A levágott tetraéderek anyagát összegyűjtik, és ebből a hulladékanyagból később új játékkockákat gyártanak. (Ezek hulladékát is összegyűjtik. Általában nem kell anyagveszteséggel számolnunk a gyártás során, illetve a hulladékot nem keverik a nem hulladék anyaggal össze.)

a) Mekkora a d távolság pontos értéke, ha pontosan 48 darab játékkocka hulladékából állítható elő egy mind a nyolc csúcsában ép 2 cm élhosszú kocka?

b) A nem hulladékanyagból készült kockák mind első osztályúak a minőség szempontjából, míg a hulladékból készült kockáknak csak 80%-a első osztályú, a többi hibás. A gyártó cég 20 éve változatlan feltételekkel, változatlan gyártósoron gyártja játékait. A hulladék- és a nem hulladékanyagból készült kockák a gyártás során egy tárolóba kerülnek, ahol összekeverednek. A jubileum alkalmából egy exkluzív 200 darabos játékkocka szettet adnak ki díszdobozba csomagolva. Mekkora az esélye, hogy a dobozba legalább két darab hibás dobókocka kerül? (*16 pont*)

Sztranyák Attila
Budapest

Megoldásvázlatok a 2015/6. sz. emelt szintű matematika gyakorló feladatsorhoz

I. rész

1. *Egy közvélemény-kutatás kérdéseire az első hónapban* 700 *ember válaszolt, mindenki pontosan egyet választott a felkínált három lehetőségből. A feleletek aránya* $4:7:14$ *volt. Ezután még néhány ember részt vett a közvélemény-kutatásban, így a feleletek aránya* $6:9:16$ *lett. Legkevesebb hány ember válaszolt utólag a kérdésekre? Ebben az esetben végül melyik lehetőséget hányan választották?* (*11 pont*)

Megoldás. A 700 ember válaszát arányosan elosztva a lehetőségeket először 112, 196, 392 ember választotta. A második esetben az arányszámok összege 31, így gondolhatnánk, hogy a 700-at követő 31-el osztható szám megfelelő lesz. Ez a 713. Ezt arányosan elosztva 138, 207, 368 jön ki a lehetőségeket választók számára. Ez azonban nem lehetséges, mert a harmadik lehetőséget választók száma csökkenne ez előző esethez képest. Tehát keressük a legkisebb, 392-nél nagyobb 16-al osztható számot. Ez a $400 = 25 \cdot 16$. Így a végső szavazók száma legkevesebb $25 \cdot 31 = 775$. Tehát legkevesebb 75 ember válaszolt utólag és ekkor az adott lehetőségeket 150, 225 és 400 ember választotta.

2. *A mosogatógépünkön háromféle program van. Egy mosogatáshoz az A program 30%-kal több elektromos energiát, viszont 20%-kal kevesebb vizet használ, mint a B program. A B program 15%-kal kevesebb elektromos energiát és 25%-kal több vizet használ egy mosogatáshoz, mint a C program. Mindhárom program futtatásakor 50 Ft-ba kerül az alkalmazott mosogatószer. Egy mosogatás az A programmal 165 Ft-ba, a B programmal 150 Ft-ba kerül. Mennyibe kerül a C programmal egy mosogatás?* (*12 pont*)

Megoldás. A B program x Ft értékű elektromos energiát és y Ft értékű vizet használ egy mosogatás alkalmával: $x + y + 50 = 150$. Az A program $1{,}3x$ Ft értékű elektromos energiát, és $0{,}8y$ Ft értékű vizet használ egy mosogatás alkalmával. A költségre vonatkozó egyenlet: $1{,}3x + 0{,}8y + 50 = 165$.

A következő egyenletrendszert kapjuk x-re és y-ra:

$$\begin{aligned} x + y &= 100, \\ 1{,}3x + 0{,}8y &= 115. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 70$, $y = 30$.

A feltételek alapján a C program futtatása során az elektromos energia ára: $x/0{,}85 \approx$ ≈ 82 Ft, a víz ára: $y/1{,}25 = 24$ Ft. A mosogatószer árát is figyelembe véve a C programmal egy mosogatás $82 + 24 + 50 = 156$ Ft-ba kerül.

3. *Hányféleképpen húzhatunk ki a 32 lapos magyar kártyából 6 lapot úgy, hogy legyen köztük pontosan két piros, két zöld és két ász?* (*14 pont*)

Megoldás. *1. eset:* A két ász éppen a piros és a zöld ász. Ekkor még egy piros lapot kell választanunk a maradék 7 piros közül, egy zöldet a maradék 7 zöld közül és 2 lapot a nem piros, nem zöld és nem ász 14 lap közül. Az esetek száma:

$$N_1 = \binom{7}{1} \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{14}{2} = 7 \cdot 7 \cdot \frac{14 \cdot 13}{2} = 4459.$$

2. eset: Az egyik ász a piros ász, a másik nem a zöld ász. Ekkor kell egy ászt választanunk a másik két ász közül, majd egy piros lapot a maradék 7 piros közül, két zöld lapot a nem ász 7 zöld közül és még egy lapot a nem piros, nem zöld és nem ász 14 lap közül. Az esetek száma:

$$N_2 = 2 \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{14}{1} = 2 \cdot 7 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 14 = 4116.$$

3. eset: Az egyik ász a zöld ász, a másik nem a piros ász. $N_3 = N_2 = 4116$.

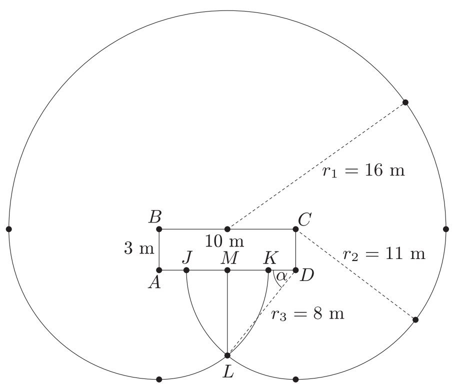
4. eset: A makk és a tök ászt választjuk. Ekkor kell még 2 piros lapot választanunk a nem ász 7 piros közül, 2 zöld lapot pedig a nem ász 7 zöld közül. Az esetek száma:

$$N_4 = \binom{7}{2} \cdot \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 441.$$

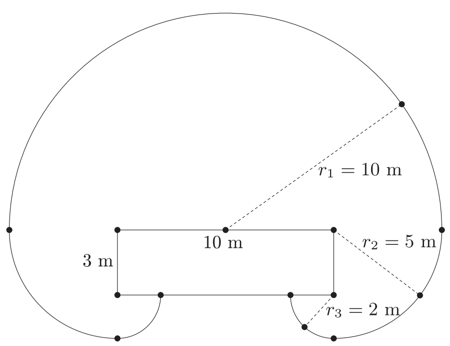
Az összes esetek száma: $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 4459 + 2 \cdot 4116 + 441 = 13\,132$.

4. *Egy kecske egy kerítéssel védett* 10×3 *m-es virágágy körüli, elegendően nagy réten legel. A kecskét* 16 m *hosszú kötéllel a kerítés* 10 *méteres oldalának felezőpontjánál levert cölöphöz kötötték. Mekkora területen legelheti le a füvet a kecske? Hányadrészére csökken ez a terület, ha a kötél hosszát* 10 *méterre csökkentik?* (*14 pont*)

Megoldás. A 16 méteres kötél esetén a lelegelhető terület egy 16 m sugarú félkörből és két-két 11 és 8 m sugarú negyed körből áll. A virágágyás mögött a 8 m sugarú negyed körök átfedik egymást (*1. ábra*). Ezt a területet duplán számoljuk a fél és negyed körök területének összegzésekor, tehát egyszer le kell vonni. A keletkező JKL idomot egy egyenes szakasz és két körív határolja. Állítsunk merőlegest az L pontból a JK szakaszra. A merőleges szakasz M talppontja a JK szakasz és az AD szakasz felezőpontja lesz. Így két egybevágó fél körszelet jött létre. A fél körszelethez tartozó középponti szögre a DML derékszögű háromszögben: $\cos\alpha = 5/8$, amiből $\alpha \approx 51{,}32^\circ$. A két fél körszeletből egy egész körszeletet összeállítva a 8 cm sugarú körben, a hozzá tartozó körcikk középponti szöge: $2\alpha \approx 102,64^\circ$.



1. ábra



2. ábra

A körszelet területe, amit majd le kell vonnunk:

$$T_{\text{szelet}} = T_{\text{cikk}} - T_{\triangle} = \frac{8^2\pi}{360^\circ} \cdot 102{,}64^\circ - \frac{8^2 \sin(102{,}64^\circ)}{2} \approx 57{,}32 - 31{,}22 = 26{,}1 \text{ m}^2,$$

$$T_{16} = \frac{\left(16^2 + 11^2 + 8^2\right) \cdot \pi}{2} - T_{\text{szelet}} \approx 692{,}72 - 26{,}1 = 666{,}62 \text{ m}^2.$$

A megrövidített, 10 m hosszú kötél esetén (*2.ábra*):

$$T_{10} = \frac{\left(10^2 + 5^2 + 2^2\right) \cdot \pi}{2} = 64{,}5\pi \approx 202{,}6 \text{ m}^2,$$

$$\frac{T_{10}}{T_{16}} = \frac{202{,}6 \text{ m}^2}{666{,}62 \text{ m}^2} \approx 0{,}304.$$

A lelegelhető terület közel 30%-ára csökken a kötél lerövidítésével.

II. rész

5. *Oldjuk meg az alábbi egyenletet:*

$$\log_4\left(4\sin^2 2x\right) = 2 - \log_2(-2\operatorname{tg} x). \qquad (16\ pont)$$

Megoldás. $\sin 2x = 2\sin x\cos x \neq 0$ és $\operatorname{tg} x < 0$ esetén átalakítva az egyenlet bal, majd jobb oldalát:

$$\log_4\left(4\sin^2 2x\right) = \frac{\log_2\left(4\sin^2 2x\right)}{\log_2 4} = \frac{\log_2\left(4\sin^2 2x\right)}{2};$$

$$2 - \log_2(-2\operatorname{tg} x) = \log_2 4 - \log_2(-2\operatorname{tg} x) = \log_2\frac{4}{-2\operatorname{tg} x}.$$

Ezután az egyenlet:

$$\frac{\log_2\left(4\sin^2 2x\right)}{2} = \log_2\frac{4}{-2\operatorname{tg} x},$$

amiből

$$\log_2\left(4\sin^2 2x\right) = \log_2\left(\frac{2}{-\operatorname{tg} x}\right)^2.$$

Mivel a $\log_2 x$ függvény szigorúan monoton növekvő, így

$$4\sin^2 2x = \left(\frac{2}{-\operatorname{tg} x}\right)^2,$$

amiből

$$4\cdot 4\sin^2 x\cos^2 x = \frac{4\cos^2 x}{\sin^2 x}, \quad \text{és így} \quad 4\sin^4 x\cos^2 x = \cos^2 x.$$

Mivel $\cos x \neq 0$, ezért $4\sin^4 x = 1$, vagyis $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, amiből $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Mivel $\operatorname{tg} x < 0$, ezért a megoldás $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

6. *Mennyi annak a valószínűsége, hogy a hatoslottó húzáson a* 45 *számból (visszatevés nélkül)* 6*-ot kihúzva, a hat lottószámot növekvő sorrendbe rakva egy számtani sorozat egymást követő tagjait kapjuk?* (*16 pont*)

Megoldás. Az összes lehetséges eset száma $C_{45}^6 = \binom{45}{6} = 8\,145\,060$.

Kedvező eset az, ahol a kihúzott számokat növekvő sorrendbe rendezve azok a következő alakúak: a, $a+r$, $a+2r$, $a+3r$, $a+4r$, $a+5r$, ahol $a, r \in \mathbb{N}^+$, $a \leqslant 40$, $r \leqslant 8$.

Az a lehetséges értékei $r = 1$ esetén $1, 2, \ldots, 40$; $r = 2$ esetén $1, 2, \ldots, 35$; $r = 3$ esetén $1, 2, \ldots, 30$; $\ldots$; $r = 8$ esetén $1, 2, 3, 4, 5$.

Összesítve a kedvező eseteket: $40 + 35 + 30 + \ldots + 5 = \frac{40+5}{2}\cdot 8 = 180$ eset. Tehát a valószínűség:

$$p = \frac{180}{8\,145\,060} \approx 2{,}210\cdot 10^{-5}.$$

7. *Milyen görbét ír le az* $y = x^2 - 2(m-3)x + m - 8$ *parabola csúcsa, ha az* m *paraméter értéke végigfut a valós számok halmazán? Az* m *paraméter mely értékénél lesz a csúcs ordinátája maximális? Adjuk meg ebben az esetben a parabola* $P(0;-5)$ *ponton átmenő érintőinek egyenletét.* (*16 pont*)

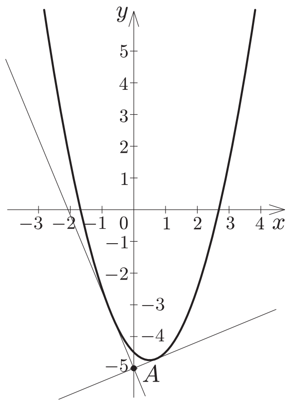
Megoldás.

$$y = x^2 - 2(m-3)x + m - 8 = \big(x - (m-3)\big)^2 - (m-3)^2 + m - 8.$$

A parabola csúcsa $x = m-3$-nál van, ordinátája ekkor $y = -(m-3)^2 + m - 8 = -(m-3)^2 + (m-3) - 5$, vagyis a csúcs az $y = -x^2 + x - 5$ egyenletű parabolán fog mozogni. Az

$$y = -x^2 + x - 5 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{3}{4}$$

függvény maximuma $x = \frac{1}{2}$-nél van, értéke $y = -4\frac{3}{4}$. Tehát a parabola csúcsa $x = m - 3 = \frac{1}{2}$, azaz $m = 3{,}5$ esetén lesz a legmagasabban.



3. ábra

Az érintő egyenlete $y = kx - 5$ alakú. A parabola egyenlete $y = x^2 - x - 4{,}5$. Keressük a k paraméter értékeit, ha az egyenes a parabola érintője. Ez akkor lesz, ha az egyenesnek és a parabolának egy közös pontja van.

$$kx - 5 = x^2 - x - 4{,}5, \quad \text{vagyis} \quad x^2 - (1+k)x + 0{,}5 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa: $D = (1+k)^2 - 2 = 0$, amiből $(1+k)^2 = 2$, vagyis $1 + k = \pm\sqrt{2}$. Így $k_1 = \sqrt{2} - 1$ és $k_2 = -\sqrt{2} - 1$ a két lehetséges érték. Tehát az érintők egyenlete:

$$y = \big(\sqrt{2} - 1\big)x - 5 \quad \text{és} \quad y = \big(-\sqrt{2} - 1\big)x - 5 \quad (\textit{3. ábra}).$$

8. *Az azonos tengerszint feletti magasságban fekvő Hencida és Boncida között a távolság* 5 km. *Hencidából egy közeli hegy csúcsa* $30°$*-os, Boncidából pedig* $11°$*-os szög alatt látszik. Hencidából a hegy csúcsát és Boncidát összekötő szakasz látószöge* $120°$*-os.*

a) Milyen magas a hegy?

b) A két várost összekötő szakasz felénél elindítanak egy távirányításos repülőgép modellt, ami végig a szakaszfelező merőleges síkjában mozog. Mennyire közelítheti meg repülés közben a hegy csúcsát? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A *4. ábra* jelöléseit használjuk. Legyen x a hegy magassága. A CTH és CTB derékszögű háromszögekben $\sin 30° = \frac{x}{a}$, illetve $\sin 11° = \frac{x}{b}$, ebből $a = 2x$ és $b = \frac{x}{\sin 11°} \approx 5{,}24x$.

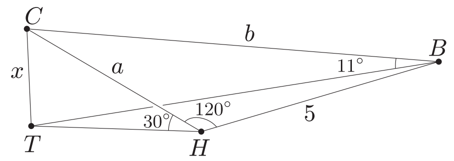
A CHB háromszögben felírhatjuk a koszinusztételt a b oldalra, majd behelyettesítjük az előbb kapott összefüggéseket: $b^2 = a^2 + 5^2 - 2 \cdot a \cdot 5 \cdot \cos 120°$.

$$(5{,}24x)^2 = (2x)^2 + 25 - 2 \cdot 2x \cdot 5 \cdot (-0{,}5), \quad \text{ebből}$$

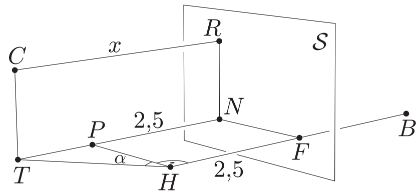
$$27{,}4576x^2 = 4x^2 + 25 + 10x, \quad \text{bal oldalra rendezve}$$

$$23{,}4576x^2 - 10x - 25 = 0.$$

Az egyenletet megoldva és a magasságra kapott negatív megoldást elvetve: $x = 1{,}2673$. Tehát a hegy magassága (ahhoz a tengerszint feletti magassághoz képest, ahol Hencida és Boncida is fekszik) kb. 1267 m.



4. ábra



5. ábra

b) Az *5. ábra* jelöléseit használjuk. A legkisebb távolság esetén a repülőgép (R) rajta van a HB szakasz $\mathcal{S}$ felező merőleges síkján, a hegy csúcsának magasságában. A keresett távolság CR. Ennek a vízszintes szakasznak a vízszintes síkra eső merőleges vetülete TN, amely a $TNFH$ derékszögű trapéz hosszabbik alapja lesz. A *4. ábra* szerint

$$TH = \frac{x}{\operatorname{tg} 30^\circ} \approx 2{,}195 \quad \text{és} \quad TB = \frac{x}{\operatorname{tg} 11^\circ} \approx 6{,}520.$$

Jelölje a TN szakaszon P azt a pontot, amelyre $PHB\sphericalangle = 90^\circ$, és legyen $\alpha = THP\sphericalangle$. A THB háromszögben a koszinusz tétel alapján

$$6{,}520^2 = 2{,}195^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2{,}195 \cdot \cos(\alpha + 90^\circ),$$

amiből $\cos(\alpha+90^\circ) \approx -0{,}5782$, azaz $\alpha + 90^\circ \approx 125{,}32^\circ$, vagyis $\alpha \approx 35{,}32^\circ$. A TPH derékszögű háromszögben:

$$TP = TH \cdot \sin\alpha \approx 2{,}195 \cdot 0{,}5777 \approx 1{,}268,$$
$$RC = TN = TP + PN = 1{,}268 + 2{,}5 = 3{,}768.$$

Tehát a repülőgép a hegycsúcsot kb. 3768 méterre közelítheti meg.

9. *János egy vízzel teli hordó aljára* 4 mm *átmérőjű lyukat fúrt és a kifolyó víz sebességét vizsgálta. A Bernoulli-egyenletből levezette, hogy* $v = \sqrt{2gx}$, *ahol* x *a vízszint pillanatnyi magassága. Megmérte, hogy a teli hordóból az első másodpercben* 62,8 cm^3 *víz folyt ki. (A sebességet itt állandónak vehetjük, a rövid mérési idő miatt.) Ezután megállapította, hogy* 5 *perc alatt pontosan* 10 cm*-rel csökkent a vízszint. Feltételezzük, hogy a vízszint exponenciálisan csökken az* $x = h \cdot 2^{-t/T}$ *függvény szerint, ahol* h *a kezdeti vízszint magassága,* T *pedig a hordóban lévő víz „felezési ideje”. A hordót üresnek tekinthetjük, ha már csak* 1 cm *magas a vízszint benne. A teli állapotból mennyi idő alatt ürül ki a hordó?*

(*16 pont*)

Megoldás. A lyuk átmérője $d = 4$ mm, sugara $r = 2$ mm $= 0{,}2$ cm. Keresztmetszete $A = r^2\pi = 0{,}2^2\pi \approx 0{,}1257$ cm^2. A $t = 1$ sec alatt kifolyó vízmennyiség $V = Avt$, amiből a sebesség

$$v = \frac{V}{At} = \frac{62,8\ \text{cm}^3}{0{,}1257\ \text{cm}^2 \cdot 1\ \text{sec}} \approx 499{,}6\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \approx 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A $v = \sqrt{2gx}$ képletből kiszámíthatjuk a hordóban lévő víz kezdeti magasságát:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{5^2}{2 \cdot 10} = 1{,}25\ \text{m} = 125\ \text{cm}.$$

A vízszint 5 perc alatt 10 cm-rel csökken, így $t = 300$ sec esetén $x = 115$ cm. Ezeket behelyettesítve a képletbe a felezési idő meghatározható: $115 = 125 \cdot 2^{-300/T}$, amiből

$$T = \frac{-300 \cdot \lg 2}{\lg \frac{115}{125}} = 2494\ \text{sec} \approx 41{,}6\ \text{perc}.$$

T ismeretében kiszámítható az $x=1$ cm vízmagassághoz tartozó idő, ami a hordó kiürülését jelenti: 1 cm $=125$ cm $\cdot\, 2^{-t/2494}$, amiből

$$t=\frac{-2494\cdot\lg\frac{1}{125}}{\lg 2}\approx 17\,373\ \text{sec}=4\ \text{óra}\ 49\ \text{perc}\ 33\ \text{sec}$$

alatt ürül ki a hordó.

Lorántfy László
Dabas

Matematika feladat megoldása

B. 4692. *Egy hegyesszögű háromszög oldalait a, b és c, az ezekkel szemköztes szögeit α, β és γ, a megfelelő oldalakon nyugvó magasságvonalak hosszát pedig m_a, m_b és m_c jelöli. Igazoljuk, hogy*

$$\frac{m_a}{a}+\frac{m_b}{b}+\frac{m_c}{c}\geqslant 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 2\beta}+\frac{1}{\sin 2\gamma}\right)+\sqrt{3}\,.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Williams Kada* (Szeged, Radnóti M. Gimn.)

Megoldás. A hagyományos és a trigonometrikus háromszög területképlet és a szinusztétel felhasználásával:

$$\frac{m_a}{a}=\frac{2T}{a^2}=\frac{ab\cdot\sin\gamma}{a^2}=\frac{b\cdot\sin\gamma}{a}=\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Hasonlóan:

$$\frac{m_b}{b}=\frac{\sin\gamma\sin\alpha}{\sin\beta}\quad\text{és}\quad\frac{m_c}{c}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Az addíciós képleteket felírva:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\quad \sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta,\quad \sin 2\gamma=2\cdot\sin\gamma\cos\gamma.$$

Ezeket behelyettesítve az egyenlőtlenségbe és a műveleteket elvégezve az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}+\frac{\sin\gamma\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}\geqslant\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha}+\frac{\cos\gamma\cos\alpha}{\sin\beta}+\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\gamma}+\sqrt{3}\,.$$

A bal és a jobb oldal első tagjának különbségét átalakítva:

$$\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}-\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha}=\frac{\sin\beta\sin\gamma-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha}=\frac{-\cos(\beta+\gamma)}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\cos\big(\pi-(\beta+\gamma)\big)}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ezt hasonlóan elvégezve a második és harmadik taggal, majd a kapott eredményt beírva az egyenlőtlenségbe: $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma \geqslant \sqrt{3}$. A kotangens függvény a $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon szigorúan konvex. Ezért felírhatjuk rá a Jensen-egyenlőtlenséget:

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma}{3} \geqslant \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

amiből $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma \geqslant \sqrt{3}$. Az egyenlőség a Jensen-egyenlőtlenségben akkor áll fenn, ha $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

Ezzel az állítást igazoltuk.

Hansel Soma (Szeged, Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

52 dolgozat érkezett. 5 pontos 42, 4 pontos 6, 3 pontos 1, 1 pontos 3 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (469–474.)

K. 469. Egy festéket 2 : 1,5 arányban kell hígítani, azaz 1,5 liter festékhez 2 liter vizet kell adni, hogy jó legyen. Piktor Viktor először készített 9 liter keveréket, amibe fele-fele arányba kevert festéket és vizet. Ekkor észbekapott, és kiszámolta, mennyi vizet kellene még hozzáadnia, hogy jó legyen az arány, azonban tévedésből víz helyett annyi festéket tett még hozzá, amennyi vizet kellett volna. Másodjára azonban már nem hibázott, megfelelő mennyiségű víz hozzáadásával végül jó hígítású keveréket kapott. Hány liter keveréke lett végül?

K. 470. Kétféle méretű kockánk van, mindkettő élhossza egész cm. A piros kockák éle 5 cm-rel nagyobb, mint a kékeké. A kockákból összesen 15 db-ot egymásra tettünk, így egy 140 cm magas tornyot kaptunk. Mekkora a kockák éle, ha a piros és a kék kockák száma közötti eltérés a lehető legkisebb?

K. 471. Bori pénztárcájában kevés apró maradt: 1 db 5 Ft-os, 1 db 10 Ft-os, 1 db 20 Ft-os, 3 db 50 Ft-os, 3 db 100 Ft-os. Hány különböző összeget tud ezek segítségével pontosan (visszaadás nélkül) kifizetni?

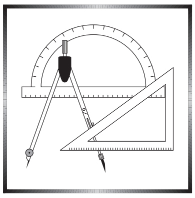
K. 472. Mennyi az összege az összes olyan pozitív kétjegyű számnak, amelynek pontosan 12 osztója van?

K. 473. Mennyi a számjegyek összege a $2^{2015}\cdot 15$ szorzat bináris (kettes számrendszerben felírt) alakjában?

K. 474. Anna és Balázs szókitalálósat játszik. Anna gondol egy négybetűs értelmes magyar szóra, amit Balázs próbál kitalálni. Ha Balázs tippel egy négybetűs szót, akkor Anna elárulja, hogy az ő szavából hány betű szerepel benne, és közülük hány van jó, illetve rossz helyen. Mi lehetett Anna szava?

Balázs tippjei	Jó betűk száma jó helyen	Jó betűk száma rossz helyen
RÓKA	1	0
OKOS	0	0
IKRA	2	0
RITA	1	1
DANÓ	0	3

Beküldési határidő: 2015. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1308–1314.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1308. Alkalmas háromszögeket kettévágunk a legnagyobb szögüknél levő csúcson átmenő egyenessel két egyenlőszárú háromszögre. Mekkorák lehetnek egy tompaszögű háromszög szögei, ha a kettévágást két különböző módon is meg tudjuk tenni?

C. 1309. Egy tetszőleges háromszög területét jelölje t, köréírt körének sugarát R, beírt körének sugarát pedig r. Igazoljuk, hogy $\frac{t}{3} < Rr$.

Feladatok mindenkinek

C. 1310. Sanyi egy négynapos túrára 19 500 Ft-ot vitt magával. Minden nap elköltötte meglévő pénzének egyharmadát és utána még egy állandó összeget. Mekkora volt ez az állandó összeg, ha a túra végére pénze éppen elfogyott?

C. 1311. Az $\frac{1}{3}$; 0,375; 1; 1,4; $\sqrt{2}$; $\frac{13}{8}$; 2; $\frac{13}{5}$; $\frac{8}{3}$; 3; 4; $\sqrt{18}$; $\sqrt{32}$ számok mindegyikét ellátjuk pozitív, vagy negatív előjellel, majd az így kapott számokat összeadjuk. Hányféle különböző előjelezéssel kaphatunk összegként 1-et?

C. 1312. Határozzuk meg x^2+y^2 értékét, ha tudjuk, hogy $xy+x+y=44$ és $x^2y+xy^2=448$.

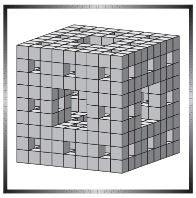
M&IQ

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1313. Egy egyenlő oldalú háromszög egyik csúcsa a $(0;1)$ pont. Két további csúcsa közül az egyik az x tengelyen, a másik az $y=3$ egyenletű egyenesen van. Mekkora a háromszög területe?

C. 1314. Egy háromszög két oldala egységnyi hosszú, közrezárt szögük 108°. Írjunk a háromszögbe szabályos ötszöget úgy, hogy az ötszög oldalai közül három a háromszög oldalaira essen. Mekkorák a beírt ötszög oldalai?

Beküldési határidő: 2015. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4732–4740.)

B. 4732. Egy 36 fős osztály tanulóinak a matematika átlagait osztályfőnökük beírja egy 6×6-os táblázatba. Mindegyik tanulónak más az átlaga. Az osztályfőnök megjelöli minden oszlopban a legnagyobb értéket. Azt találja, hogy a megjelölt 6 szám mind különböző sorban van. Ezek után megjelöli minden sorban a legnagyobb átlagot. Most pedig azt tapasztalja, hogy ezek mind különböző oszlopban helyezkednek el. Bizonyítsuk be, hogy a kétféle módszerrel ugyanazt a 6 átlagot jelölte meg.

(*3 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 4733. Egy $n\geqslant 2$ csúcsú egyszerű, összefüggő gráf minden élére 1-est vagy 2-est írunk. Ezután minden csúcshoz hozzárendeljük a belőle kiinduló élekre írt számok szorzatát. Mutassuk meg, hogy lesz két olyan csúcs, melyekhez ugyanazt a számot rendeltük.

(*3 pont*) Javasolta: *Ademir Hujdurović* (Koper)

B. 4734. Egy 2015 oldalélű kockarács néhány mezőjét (egységkockáját) ismeretlen fertőzés támadta meg. A fertőzés úgy terjed, hogy ha a kocka valamelyik oldalélével párhuzamos sorában legalább t mező fertőzött ($1\leqslant t\leqslant 2015$), úgy egy perccel később a sorban minden mező fertőzötté válik. Határozzuk meg, hány, kezdetben fertőzött mező esetén

a) válik lehetségessé,

b) lehetünk biztosak benne,

hogy a fertőzés a kocka valamennyi mezőjét eléri.

(*6 pont*) Javasolta: *Mészáros Gábor* (Budapest)

B. 4735. Szerkesszünk húrnégyszöget, ha adott két-két szemközti oldalegyenesének a metszéspontja, az egyik csúcsa, valamint az ezen áthaladó átló egyenese.

(*4 pont*)

B. 4736. Legyen n pozitív egész szám. Oldjuk meg a

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sum_{i=1}^{n} \left|x_i^3\right| = \sum_{i=1}^{n} \frac{2|x_i|^3}{x_i^2+1}$$

egyenletrendszert.

(*5 pont*) Javasolta: *Williams Kada* (Szeged, Radnóti M. Gimn.)

B. 4737. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasságának talppontja D. Az $ACD\sphericalangle$ és a $BCD\sphericalangle$ szögfelezője az AB átfogót rendre az E és F pontokban metszi. Határozzuk meg az ABC háromszög beírt, és a CEF háromszög körülírt köre sugarainak arányát.

(*5 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 4738. Az AB átmérőjű k körnek az A és B pontoktól különböző tetszőleges pontja C. Bocsássunk merőlegest a C pontból az AB átmérőre, a merőleges talppontja az AB szakaszon D, illetve a merőlegesnek a k körrel való második metszéspontja E. A C középpontú, CD sugarú kör a k kört a P és Q pontokban metszi. Legyen a CE és PQ szakaszok metszéspontja M. Határozzuk meg $\frac{PM}{PE}+\frac{QM}{QE}$ értékét.

(*4 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 4739. Tekintsük azokat az x valós számokat, amelyekre $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$ pozitív egész szám. Határozzuk meg közülük azokat, amelyekre $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x$ prímszám.

(*4 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

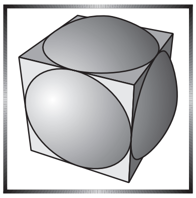
B. 4740. Nyolc egységkockát úgy ragasztunk össze egy testté, hogy a megfelelő éleik párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy a kapott test felszíne legalább 24 egység. Ha a kapott test üreges, akkor csak a külső felszín számít.

(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2015. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (650–652.)

A. 650. Adott egy ABC hegyesszögű háromszög, és a C-ből induló magasságvonalán egy X pont. Legyenek az AB egyenesen D és E azok a pontok, amelyekre $DCB\sphericalangle = ACE\sphericalangle = 90°$. Legyen a DX szakaszon K, az EX szakaszon pedig L az a pont, amelyre $BK = BC$, illetve $AL = AC$. Messe az AL egyenes BK-t Q-ban, BC-t pedig R-ben, végül messe a BK egyenes AC-t P-ben. Mutassuk meg, hogy a $CPQR$ négyszög érintőnégyszög.

A. 651. Határozzuk meg mindazokat a $P(x)$ valós együtthatós polinomokat, amelyekre

$$P\big(x^3-2\big) = P(x)^3 - 2$$

teljesül.

CIIM 2015, Mexikó

A. 652. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $C > 1$ szám, amelyre a következő tulajdonság teljesül: valahányszor $n > 1$, és $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ olyan pozitív egészek, amelyekre az $\frac{1}{a_0}, \frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ számok számtani sorozatot alkotnak, $a_0 > C^n$.

CIIM 2015, Mexikó

Beküldési határidő: 2015. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Mi a matematika és kik a matematikusok?

2015. november 23-án, hétfőn, 15:30-tól az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet és a Bolyai János Matematikai Társulat szervezésében a Magyar Tudomány Ünnepe alkalmából kötetlen beszélgetés lesz matematika iránt érdeklődő középiskolásokkal matematikai karrierlehetőségekről, oktatásról, tehetséggondozásról.

A program során több, karrierje különböző fokán álló matematikussal ismerkedhetnek meg az érdeklődők. Az előadók kiválasztásának egyik szempontja a matematika, illetve a matematikus közösség sokszínűségének „felvillantása”, ezzel is közelebb hozva mindkettőt a fiatalokhoz.

Helyszín: MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Budapest, V. ker., Reáltanoda utca 13–15, Nagyterem.

Kapcsolattartó: Patkós Balázs, e-mail: `patkos.balazs@renyi.mta.hu`.

További információ a `http://www.renyi.hu` honlapon olvasható.

Kedves Kollégák!

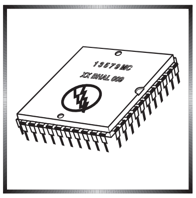
Az idén is megrendezzük az évenkénti hagyományos, immáron 27. Varga Tamás Módszertani Napokat.

Ideje: 2015. november 6. péntek 15–19 óra és november 7. szombat 9–17 óra.

Helyszíne: ELTE TTK Lágymányosi kampusz Déli épület, 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C.

További információk: `www.komal.hu/hirek/VTN_2015_toborzo.docx`.

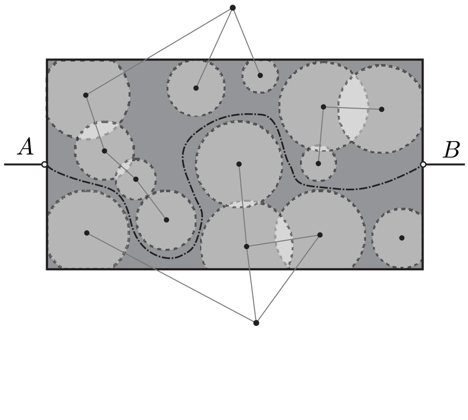
Vancsó Ödön
`vancso.odon@gmail.com`



Gráfalgoritmusok 1.

A gráfok sok hétköznapi probléma szemléltetésére és vizsgálatára alkalmasak. Ezekben a feladatokban a gráfok csúcsai például egy elemet, helyet, állapotot jelölnek, míg a gráf élei az egyes elemek közötti kapcsolatot, az állapotok közötti átmenetet mutatják. Ábrázolhatjuk például gráffal egy terület úthálózatát, ahol a csúcsok a városoknak és a közlekedési csomópontoknak felelnek meg, míg az utak az éleknek. Alkalmazhatjuk a gráfokat a sakkjáték menetének leírására is: a kezdőállásból elérhető összes állásnak megfeleltetünk egy-egy csúcsot, míg a szabályos lépéseknek a csúcsok közötti irányított éleket.

A KöMaL idei informatika pontversenyében kitűzött **I/S. 1.** feladat is megoldható egy gráfban útvonal keresésével. A feladatban az a kérdés, hogy egy fémlap A és B csatlakozási pontja között vezető marad-e azok után, hogy belőle körlap alakú területeket eltávolítottunk. A megoldáshoz készítsünk egy gráfot, amelynek csúcsai a körök középpontjai, valamint a lemezen kívül a csatlakozási pontokat nem tartalmazó oldalak mellett egy-egy pont. A gráfban legyen él azon csúcsok között, amelyek körei érintik vagy metszik egymást, illetve a körök és a lemezen kívüli pontok között, ha a kör érinti vagy metszi a fémlemez megfelelő oldalát. Ha van útvonal a gráfban a felső és alsó fémlapon kívüli csúcsok között, akkor nem lehet összeköttetés a fémlap A és B oldala között – és megfordítva.



A kérdés eldöntése tehát azt igényli, hogy keressünk utat a gráf két lemezen kívüli csúcsa között. Ha kézzel, ceruzával kellene megoldani a feladatot egy papírra rajzolt gráfnál, akkor feltehetőleg megoldanánk a problémát; egy kisebb gráfon ránézésre, egy nagyobb gráfon némi ügyességgel. Ha az útkeresést egy számítógép végzi (mert pl. rendkívül nagy és bonyolult a gráf), akkor egy olyan műveletsorozatot kell megadnunk a számára, amely tetszőleges gráfon elvezet a kiinduló csúcstól a célba, vagy megadja, hogy a cél nem elérhető. Ez utóbbi választ persze csak akkor adhatja, ha a kiinduló csúcsból elérhető összes csúcsot már megvizsgálta, és azok között nem volt a cél.

Általánosságban egy tetszőleges gráfban az útkereső algoritmus valamilyen sorrendben bejárja a start csúcsból elérhető teljes részét a gráfnak. Például a következő egyszerű eljárással: ha a start csúcs egyben nem a cél, akkor megnézi, hogy a start csúcsból közvetlenül elérhető csúcsok (szomszédok) között van-e a cél. Ha itt sem találja, akkor a szomszédok szomszédjait nézi meg, és így tovább. Ha eljutottunk közben a célig, akkor van út; ha pedig már nincs olyan él, amelyen új, még nem érintett csúcshoz érhetünk, akkor a keresés szintén véget ér, mert nincs út. A gráfok ilyen módszeres átvizsgálását leíró algoritmusokat a gráf bejárásának nevezzük.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen tudással rendelkezünk mi a gráf bejárásakor, és készítsünk ennek megfelelően algoritmust. Észrevehetjük, hogy a már egyszer megvizsgált csúcsokat úgy kerülhetjük el, ha valahogyan megjelöljük őket, pl. átszínezzük. Ezt a program is meg tudja tenni, pl. jelzi minden csúcsnál, hogy jártunk-e már ott. Kezdetben csak a start csúcs kap ilyen jelzést, a többi nem. Ezenkívül tudnunk kell, hogy egy csúcs szomszédjainak vizsgálata után melyik csúcson folytassuk a keresést. Az eddig megvizsgált részgráfot és a még nem érintett csúcsokat összekötő éleken kell továbbhaladnunk. Az így elérhető csúcsok egy-egy korábban elért csúcs szomszédjai. Tegyük azt, hogy minden új csúcs elérésekor följegyezzük a még meg nem látogatott szomszédokat. Kezdetben csak a start csúcs legyen a jegyzetben. A számítógép haladjon végig a följegyzett csúcsokon, vizsgálja meg, hogy elértük-e a célt, illetve bővítse a jegyzetet, amikor új szomszédokat talál.

Legyen egy gráfban két csúcs távolsága az egyiktől a másikig vezető útvonalak közül a legkevesebb élen áthaladó út éleinek száma; illetve végtelen, ha nincs közöttük út. Ha a jegyzetünknek mindig a végére írunk, és az elejéről vesszük a következő vizsgálandó csúcsot, akkor először a start csúcsot érintjük (0 távolság), aztán az ő szomszédjait (a start csúcstól 1 távolság), majd ezek szomszédjait (2 távolság), és így tovább. A gráf csúcsait így a start csúcstól való távolságuk monoton növekvő sorrendjében érjük el. Ez azt jelenti, hogy a d távolságban lévő csúcsok vizsgálata után kezdjük vizsgálni a $d+1$ távolságra lévő csúcsokat, tehát ez az algoritmus egyben a legrövidebb utat fogja megtalálni a start és a cél között (ha van út).

Az algoritmus működése közben megjelöli a már meglátogatott csúcsokat. Kereséskor azok a csúcsok, amelyekben már jártunk, de még vannak nem érintett szomszédjai, egyfajta „határvonalat” alkotnak a bejárt és nem bejárt csúcsok között. Ez a határ fokozatosan bővül, amikor a feljegyzésből egy újabb csúcsot megvizsgálunk. A keresés folyamatosan növeli a határ távolságát a kiinduló csúcstól, ugyanakkor a határvonal egyre hosszabb, mivel egyre több csúcs tartozik hozzá.

Ezen tulajdonságok miatt a fent leírt útkereső algoritmust szélességi keresésnek nevezték el.

```
Szélességi keresés (gráf, start, cél)
    jártunk(csúcsok start kivételével) := nem
    jártunk(start) := igen
    följegyzés := üres
    följegyzéshez fűz := start
    megvan_a_cél := hamis
    Ciklus amíg van följegyzés és nincs meg a cél
        csúcs := vegyük a következő csúcsot a följegyzésből
        Ha csúcs a cél akkor megvan_a_cél := igaz
        különben
            szomszéd := csúcs első szomszédja
            Ciklus amíg van szomszéd
                Ha nem jártunk(szomszéd) akkor
                    följegyzéshez := szomszéd
                    jártunk(szomszéd) := igaz
                Elágazás vége
                szomszéd := csúcs következő szomszédja
            Ciklus vége
        Elágazás vége
    Ciklus vége
Szélességi keresés vége
```

Az algoritmus befejeződésekor a megvan_a_cél nevű logikai változóból tudhatjuk meg, hogy sikerült-e utat találni. Ezzel gyakorlatilag megoldottuk a fémlap vezetésével kapcsolatos feladatot. Természetesen föl kell előtte építenünk a gráfot, azaz tudnunk kell, hogy mely csúcsok között van él. Mivel a feladatban legföljebb 100 körről van szó (és kell még két csúcs a körökön kívül), ezért megtehetjük, hogy fölveszünk egy 102×102-es táblázatot, amelynél az 5. sor 16. oszlopában lévő érték jelzi, hogy az 5. és 16. gráfcsúcs között van-e él. Mivel a kapcsolat itt szimmetrikus, azaz a gráf nem irányított, így nyilván ugyanez az érték szerepel a 16. sor 5. oszlopában. Legyen például 0, ha nincs él és 1, ha van él. A feladatban logikai értékek is állhatnának a táblázatban, de a későbbiek miatt maradjunk mégis a számoknál. Az így létrejövő táblázatot a gráf szomszédsági mátrixának hívjuk. A mátrix kitöltése geometriai számításokkal történhet a körök sugarai és koordinátái, valamint a fémlap méretei alapján.

Ha egy másik feladatban az útról többet is szeretnénk megtudni, például hogy milyen hosszú, illetve hogy mely csúcsokon halad keresztül, akkor bővítenünk kell az algoritmust. Keresés közben még nem tudhatjuk, hogy azok közül az élek közül, amelyeken áthaladunk, melyek lesznek benne az útban, tehát nem tudjuk megadni az utat. De bármely csúcs elérésekor tudjuk, hogy honnan értünk az adott csúcsba, ezért ha ezt az információt megőrizzük, akkor a cél csúcsból visszafelé kiolvasható a start csúcsig az út. Ehhez vegyünk föl minden csúcshoz egy értéket, amely megadja, hogy melyik csúcsból érkeztünk ide. Ha egy csúcsot nem értünk el, vagy az a start csúcs (ahová nem érkezünk sehonnan), akkor az érték jelentse azt, hogy nincs a keresés során megelőző csúcs. Ha a csúcsokat pl. 1-től sorszámozzuk, akkor legyen ez az érték -1.

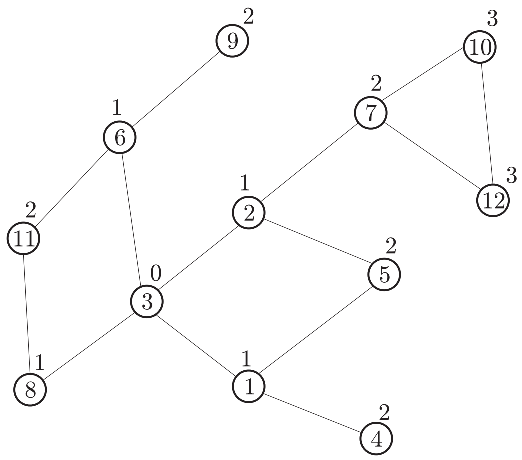
Nézzük meg a szélességi keresés algoritmusának megvalósítását abban az esetben, ha szeretnénk megkapni a keresés által talált utat. Legyenek a gráf csúcsai

1-től N-ig sorszámozottak, és legyen adott egy $N \times N$-es szomszédsági mátrix. Szükségünk van még két N méretű tömbre, melyek keresés közben megmutatják, hogy mely csúcsokban jártunk és hogy az adott csúcsot melyik szomszédjából értük el, illetve egy olyan jegyzetfüzetre, amely segítségével sorra vehetjük a csúcsokat. Ez utóbbihoz egy sor elnevezésű adatszerkezet a leghasznosabb, amelynek a végére tudunk írni és az elejéről tudjuk kiolvasni az elemeket. Könnyen megvalósítható egy tömb és néhány egész változó segítségével. Legyen egy eleje, vége, fhely és darab változó, amely megadja, hogy hol van a tömbben a sor első és utolsó eleme, mennyi a férőhely és most hány elem van a sorban. A sor szokásos műveletei: a végére fűzés és az elejéről való olvasás (ami most egyben az elem eltávolítása is a sor elejéről), valamint annak vizsgálata, hogy a sor üres-e. A kezdetben üres sornál legyen a darab és vége értéke nulla, az eleje pedig egy. A sorba történő befűzés algoritmusa ekkor a következő:

```
Sorba(elem)
    Ha darab<fhely akkor
        vége := vége + 1
        Ha vége = fhely akkor vége := 1
        s[vége] := elem
    különben
        Hiba: nincs több hely a sorban
    Elágazás vége
Sorba vége
```

A sor elejének olvasása és az üresség vizsgálatát végző algoritmusok sem bonyolultabbak. Ha mindezekkel készen vagyunk, akkor a szélességi keresés – kiegészítve az útvonal megjegyzésével – a következőképp néz ki (N a gráf csúcsainak száma és m a gráf szomszédsági mátrixa):

```
Szélességi keresés útvonallal(gráf, start, cél)
    Ciklus i := 1-től N-ig
        jártunk[i] := hamis
        honnan[i] := -1
    Ciklus vége
    Sor_legyen_üres
    Sorba(start)
    jártunk[start] := igaz
    megvan_a_cél := hamis
    Ciklus amíg nem üres a sor és nem igaz megvan_a_cél
        Sorból(csúcs)
        Ha csúcs = cél akkor megvan_a_cél := igaz
        különben
            Ciklus szomszéd := 1-től N-ig
                Ha m[csúcs][szomszéd] = 1 és nem jártunk[szomszéd] akkor
                    Sorba(szomszéd)
                    jártunk[szomszéd] := igaz
                    honnan[szomszéd] := csúcs
                Elágazás vége
            Ciklus vége
        Elágazás vége
    Ciklus vége
Szélességi keresés útvonallal vége
```



A példaként mellékelt gráfban utat keresünk a 3-as számú csúcstól a 12-es számú csúcsig. A gráfon jelöltük a csúcsok fölött a csúcs start csúcstól vett távolságát is. A sor elemeit tároló tömb állapota keresés közben egy adott pillanatban a következő:

index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
elem	3	1	2	6	8	4	**5**	**7**	**9**	**11**		

A tömbben az aktuális sorelemeket jelző eleje mutató értéke 7, a vége értéke 10.

Amennyiben a szélességi keresés algoritmusából kihagyjuk a cél csúcs vizsgálatát, akkor egy olyan algoritmust kapunk, amely bejárja a start csúcsból elérhető részét a gráfnak. Ha az (irányítatlan) gráf összefüggő, akkor a teljes gráfot. A cél vizsgálata nélküli szélességi keresés választ ad arra a kérdésre, hogy egy (irányítatlan) gráf összefüggő-e: ha minden csúcsban jártunk, akkor az.

Az út megkeresésére a most választott módszertől lényegesen eltérő módszerek is vannak. Próbáljunk meg például kijutni egy labirintusból! Ez a probléma is visszavezethető gráfban út keresésére. Legyen a labirintus járatainak végein és a járatok kereszteződésében egy-egy csúcs a labirintusnak megfeleltethető gráfban, a járatok pedig természetesen legyenek az élek. Induljunk el a labirintus egy pontjáról. A szélességi keresés megtalálja ugyan a kijárathoz vezető legrövidebb utat, de a sorból kivett csúcsok sokszor egészen távol vannak egymástól, ezért a valóságban túl sok fölösleges mozgást jelentenek. Sokkal természetesebb megoldás, hogy elindulunk sorrendben az első bal kézre eső járaton, és ha kiértünk, minden rendben, ha zsákutcába jutottunk, akkor visszamegyünk, és ha kereszteződéshez jutottunk, akkor ott is elindulunk a balra eső első járaton, és így tovább. Ha egy sikertelen keresés után visszaérünk egy kereszteződéshez, akkor ott a következő járaton elindulva végezzük az előbbi lépéseket. Ez az algoritmus is megtalál egy cél csúcsot a start csúcsból indulva, de egészen más csúcsokat és éleket érint. Mivel a gráf bejárásának ez a módja olyan, hogy hosszan előremegy a bal első éleken, vagyis elég hamar a start csúcstól távolra jut, ezért mélységi keresésnek nevezték el. Az algoritmus részleteivel a cikk folytatásában foglalkozunk.

Kérdések és feladatok:

1. Mit jelentenek a sakkot leíró gráfban a kimenő él nélküli csúcsok? Van-e a gráfban kör?

2. Hogyan módosítsuk a szélességi keresést úgy, hogy ne a start csúcstól vezető legrövidebb utakat, hanem csak azok hosszát adja meg minden elérhető csúcsra?

3. Legalább mekkora méretű sorra van szükség egy N csúcsból álló gráfban a szélességi keresés közben? Adjunk meg egy gráfot, start és cél csúcsot, amelynél tényleg kell ekkora méretű sor!

4. Tekintsük egy gráf azon részét, amelyet a szélességi keresés érint egy adott csúcsból, vagyis az érintett csúcsokat és a hozzájuk vezető éleket. Lehet-e ebben a gráfban kör?

5. Szeretnénk egy gráf csúcsait kiszínezni két színnel úgy, hogy minden csúcsot kiszínezünk, és a szomszédos csúcsokat mindig különböző színűre festjük. Ez nyilván nem lehetséges bármely gráfban. Módosítsuk úgy a szélességi bejárást, hogy elvégezze a színezést, ha az lehetséges!

Schmieder László

Informatikából kitűzött feladatok

I. 382. A ZUMA egy többféle elrendezésű pályán játszott lövöldözős játék. A játék során a pályán mozgó, kezdetben folytonos sort alkotó, különböző színű golyókat kell lövések segítségével eltüntetni, mielőtt azok bármelyike elérné a pálya végét. Készítsünk programot, amelyben a játékot egy egyenes szakaszon játsszuk, a golyók balról jobbra mozognak és minden időegységben egy lövés történik.

Szabályok:

- a golyók kezdetben a pálya bal oldalán helyezkednek el, közöttük golyó nélküli pozíció nincs;
- balról az első golyó minden időegységben egy egységgel tolódik jobbra;
- minden olyan golyó tolódik, amelynek a szomszédja tolódik;
- a kilőtt golyó tolódás után ér célba, de még ugyanabban az időegységben
  - ◦ ha a találat helyén golyó van, akkor
    - ∗ ha a találat helyén és közvetlenül mellette azonos színű golyók voltak egymás mellett;
      - – azokat eltünteti, helyük üres lesz;
      - – amíg az üressé váló rész két oldalán együttvéve 3 vagy több azonos színű golyó van, azok is eltűnnek;
    - ∗ különben a kilőtt golyó a találat helyére kerül, az ott lévő golyó pedig jobbra tolódik és a jobbra lévő golyók közül mindazok tolódnak, amelyek szomszédja tolódik;

  ◦ ha a találat helyén nincs golyó, akkor
    * ha valamely szomszédjában van golyó, a golyó a célhelyen marad;
    * különben a golyó eltűnik.

A bemeneti fájl első sora a pálya h hosszát, a pályán lévő golyók p számát és a játék során kilőtt golyók k számát tartalmazza. A második sor p darab karaktert tartalmaz, amely a golyók színét jelöli, amelyek sorrendben a pálya bal szélétől helyezkednek el. (A golyók színét az `A`, …, `F` karakterek jelölik.) A következő k sor egy-egy golyó-hely párt tartalmaz: a páros első tagja a golyó színét jelöli, a második tagja pedig a pozíciót, amelyen a golyó a pályát eléri. A kimenet a rendszer állapotát mutatja az utolsó lövést követően.

- Ha az összes golyót sikerült lövésekkel eltüntetni, akkor az első sorba 0 kerüljön, a második sorba azon lövés sorszáma, amely után ez először teljesült.
- Ha valamely golyó elérte a pálya végét, akkor az első sorba a `-1` kerüljön, a második sorba pedig azon lövés sorszáma, amely után ez történt.
- Ha van még golyó a pályán, de egy sem érte el a végét, akkor az első sor az `1` értéket tartalmazza, a második sor pedig h darab karaktert, amely a pályán lévő golyók színét jelöli balról jobbra. Az üres pozíciókra `.` kerüljön.

Az alábbi példa sorai egy-egy, egymástól független állapotokban bekövetkezett lövést és annak eredményét mutatják.

Aktuális állapot	Lövés	Következő állapot
`BAAB......`	`A 2`	`.ABAAB....`
`BAAB......`	`A 3`	`.B..B.....`
`BBAAB.....`	`A 4`	`..........`
`BBAABCCC..`	`A 5`	`......CCC.`
`CBBAABCCC.`	`A 5`	`..........`
`AA...AA...`	`B 4`	`.AAB..AA..`
`AA...AA...`	`B 5`	`.AA...AA..`

Bemenet	Kimenet

`20 10 3`
`ABCDEABCDE`
`A 4`
`B 7`
`A 1`
	`1`
	`...ABACBDEABCDE.....`

A program első parancssori argumentuma a bemeneti fájl neve, a második pedig a kimeneti fájl neve legyen.

Beküldendő egy tömörített `i382.zip` állományban a program forráskódja, valamint a program rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztő környezetben fordítható.

I. 383 (É). A magyarországi hatósági engedéllyel rendelkező bányászati területek néhány adata áll rendelkezésünkre a `telek.txt`, a `banya.txt` és a `nyersanyag.txt` állományokban. Az állományok tabulátorral tagolt, UTF-8 kódolású szövegfájlok, az első sorok a mezőneveket tartalmazzák.

Készítsünk új adatbázist `i383` néven. A mellékelt adatállományokat importáljuk az adatbázisba a forrásállományokkal azonos néven. Beolvasáskor állítsuk be a megfelelő adatformátumokat és kulcsokat, a táblákba ne vegyünk fel új mezőt.

Táblák:

telek (id, telepules, muvmod, allapot, fedoszint, fekuszint)

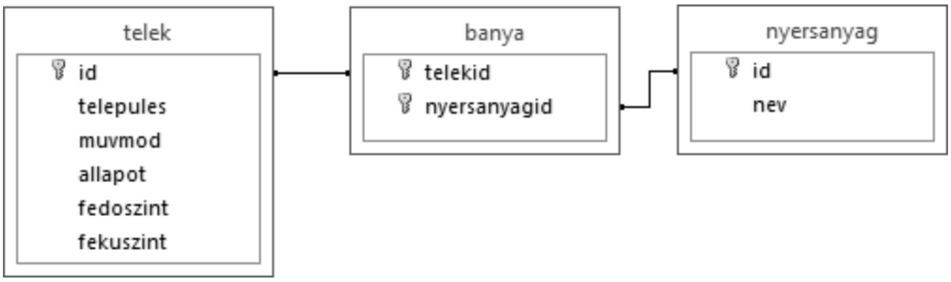
id	A bányatelek azonosítója (szám), ez a kulcs.
telepules	Település neve, amelyhez a bánya tartozik (szöveg).
muvmod	A bánya művelési módja, értéke külfejtés, mélyművelés, mélyfúrás, külfejtés és mélyművelés lehet (szöveg).
allapot	A bányászati tevékenység jellege, értéke M, S, T és B lehet – működő, szünetelő, tájrendező és bezárt állapota szerint (szöveg).
fedoszint	A nyersanyagréteg felső szintje méterben a tengerszinthez képest (szám).
fekuszint	A nyersanyagréteg alsó szintje méterben a tengerszinthez képest (szám).

banya (telekid, nyersanyagid)

telekid	A bányatelek azonosítója (szám), kulcs.
nyersanyagid	Az ásványi nyersanyag azonosítója (szám), kulcs.

nyersanyag (id, nev)

id	Az ásványi nyersanyag azonosítója (szám), ez a kulcs.
nev	Az ásványi nyersanyag neve (szöveg).



Készítsük el a következő feladatok megoldásait. Az egyes lekérdezéseknél ügyeljünk arra, hogy mindig csak a kért értékek jelenjenek meg és más adatok ne. A megoldásokat a zárójelben lévő néven mentsük el.

1. Soroljuk fel lekérdezés segítségével azoknak a településeknek a nevét, ahol zártak be mélyművelésű bányát. A listában minden településnevet egyszer jelenítsünk meg. (`3bezart`)
2. Melyik a legvastagabb szénrétegű bányatelek? Adjuk meg a település nevét és a szénréteg vastagságát. (`4sokszen`)

3. Lekérdezéssel határozzuk meg, hogy a kavicsot termelő bányák milyen más nyersanyagot termelnek, illetve termelhettek még ki. A listában a kavics ne jelenjen meg. (`5kavics`)
4. Adjuk meg a működő bányák közül azokat, ahol 400 és 500 méter tengerszint feletti magasságból nyersanyag termelhető ki. A listában a bánya települése és a bányászott nyersanyag jelenjen meg. (`6magas`)
5. A szénhidrogének – halmazállapottól függetlenül – általában együtt fordulnak elő. Lekérdezés segítségével listázzuk ki azokat a településeket, ahol a bányatelkeken kőolaj és földgáz kitermelése együtt történik. A listában a települések neve és a feltételnek eleget tevő bányatelkek száma jelenjen meg. (`7szenhidrogen`)
6. A fedőszint és a feküszint alapvető információ a bányatelkekről. Az adatbázis karbantartásához ezeket az adatokat be kell szerezni. Készítsünk jelentést azokról a bányatelkekről, ahol a két adat közül legalább az egyik hiányzik. A jelentésben a települések nevét emeljük ki, bányatelkenként adjuk meg a telek azonosítóját, a bányászott ásványi nyersanyag nevét és az esetleg ismert fedőszint, valamint feküszint értékét. A jelentés létrehozását lekérdezéssel vagy ideiglenes táblával készítsük elő. A jelentés elkészítésekor a mintából a mezők sorrendjét, a címet és a mezőnevek megjelenítését vegyük figyelembe. A jelentés formázásában eltérhetünk a mintától. (`8hiany`)

Hiányos fedő- vagy feküszintű bányák

Település neve	Telekazonosító	Fedőszint (m)	Feküszint (m)	Ásványi nyersanyag
Gyékényes				
	1138			
				homokos kavics
Gyöngyössolymos				
	288			
				riolit
Homokterenye				
	1016			
				barnaszén
	1017			
				barnaszén
	1018			
				barnaszén
Kazár				
	1025			

7. A külfejtés, illetve a külfejtés és mélyművelés nyersanyag kitermelési módszer a tájat durván átrendezi. Lekérdezés segítségével határozzuk meg, hogy hány települést érint ilyen művelési módú bányatelek. (`9tajrombolas`)

Beküldendő egy tömörített `i383.zip` állományban az adatbázis és egy rövid dokumentáció, amelyből kiderül az alkalmazott adatbázis-kezelő neve, verziószáma.

Letölthető fájlok: `nyersanyag.txt`, `banya.txt`, `telek.txt`

I. 384. Készítsünk alkalmazást egyszerű (hurok- és többszörös élek nélküli) gráfok szerkesztésére. A program legyen alkalmas legföljebb 20 csúcsot tartalmazó gráf vizuális szerkesztésére, valamint szöveges állományba mentésére és beolvasására.

Szerkesztéskor az üres rajzterületen történő kattintás jelentse egy új csúcspont fölvételét. Két csúcsra kattintás egymás után jelentse az elsőt a másodikkal összekötő (irányítatlan) él berajzolását, ha még nem voltak összekötve; illetve az él törlését, ha már össze voltak kötve. A jobb egérgombbal történő hasonló művelet jelentse irányított élek rajzolását és törlését. Csúcsot a fölötte lenyomva tartott egérgombbal lehessen mozgatni. A csúcsok kapjanak 1-től kiindulva sorszámot. Csúcsot törölni a csúcsra történő dupla kattintással lehessen. Ha egy csúcsot törlünk, akkor természetesen minden élét is töröljük, ugyanakkor minden nála nagyobb sorszámú csúcs száma csökkenjen eggyel. Így egy N csúcsú gráfban a sorszámok mindig 1-től N-ig terjedjenek. A csúcsokat ábrázoljuk egyszerű körként, a sorszámukat írjuk a kör belsejébe. Az éleket szakaszként rajzoljuk, az irányított éleket a szakasz végén nyíllal jelöljük. A programnak nem kell megoldania olyan megjelenítési problémákat, hogy csúcsok körei átfedik egymást vagy egy nem a csúcsba befutó élt. Tételezzük föl, hogy a programot egy ügyes felhasználó kezeli, aki igyekszik a gráf jó elrendezésére.

A program az `M` gomb megnyomására vagy a menüből kiválasztva a Mentés funkciót írja egy `graf.txt` szöveges állományba a gráf adatait. Az állomány első sorában a csúcsok száma (N) és az élek száma (E), valamint a rajzterület szélessége és magassága legyen egy-egy szóközzel elválasztva, a következő N sorban a csúcsok grafikus szerkesztéskor alkalmazott koordinátái (egész számpárok szóközzel elválasztva), majd a következő E sorban a gráf élei (egész számpárok szóközzel elválasztva) szerepeljenek. A program a `B` gomb vagy a Beolvasás funkció esetén törölje a munkaterület és olvassa be a `graf.txt` állományt további szerkesztésre.

A megoldáshoz a versenykiírásban szereplő programozási nyelveket és fejlesztőeszközöket használhatjuk, illetve kliens oldalon futó webes alkalmazásokat is elfogadunk.

Beküldendő egy `i384.zip` tömörített állományban a program forráskódja, valamint a program rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztő környezetben fordítható.

I/S. 2. Adjuk meg a lexikografikusan rendezett n hosszú permutációk közül a k-adikat ($1 \leqslant n \leqslant 14$ és $1 \leqslant k \leqslant n!$). Egy n hosszú permutációnak az $1, 2, \ldots, n$ számok egy sorbarendezését nevezzük. Két permutációt úgy tudunk lexikografikusan rendezni, hogy balról az első helyen, ahol eltérnek a számok számjegyei egymástól, a kisebb számot tartalmazó permutációt soroljuk előrébb. Például $2314 < 2341$.

A program olvassa be a standard input első sorából n-et és k-t, majd írja a standard output első és egyetlen sorába a megfelelő permutációt.

Példa bemenet:	Példa kimenet:
`4 2`	`1 2 4 3`

Pontozás és korlátok: A programhoz mellékelt, a helyes megoldás elvét tömören, de érthetően leíró dokumentáció 1 pontot ér. A programra akkor kapható meg a további 9 pont, ha bármilyen hibátlan bemenetet képes megoldani az 1 mp futásidőkorláton belül.

Beküldendő egy tömörített `is2.zip` állományban a program forráskódja az `.exe` és más, a fordító által generált állományok nélkül, valamint a program rövid dokumentációja, amely a fentieken túl megadja, hogy a forrás mely fejlesztői környezetben fordítható.

S. 101. Adott egy hegység térképe, pontosabban egy $N \times M$-es táblázat az egyes koordináták magasságával, melyek egyike sem nagyobb, mint 1 000 000 000. Továbbá adott néhány nagyon szép hely a hegységben. Azt szeretnénk eldönteni, hogy legalább mennyire nehéz az a túra, amely minden szép helyet meglátogat valamelyik szép helyről kiindulva. Azaz formálisan a legkisebb C számot szeretnénk meghatározni, hogy bármelyik szép helyről bármelyik másikra el lehessen jutni úgy, hogy közben a térképen egy mezőről mindig egy másik olyan élszomszédos mezőre lépünk, melyek szintkülönbsége legföljebb C.

A program olvassa be a standard input első sorából N-et és M-et, a térkép sorainak és oszlopainak számát ($1 \leqslant N, M \leqslant 800$), majd a következő N sorból soronként M db egészet: a magasságokat. Az utána következő N sorból is soronként M db egészet, melyek 0-k, vagy 1-ek lehetnek: 0, ha nem szép a hely, és 1, ha szép. A program írja a standard output első és egyetlen sorába a lehető legkisebb megfelelő C számot.

Példa bemenet:	Példa kimenet:

`3 5`
`20 21 18 99 5`
`19 22 20 16 26`
`18 17 40 60 80`
`1 0 0 0 1`
`0 0 0 0 0`
`0 0 0 0 1`
	`21`

Pontozás és korlátok: A programhoz mellékelt, a helyes megoldás elvét tömören, de érthetően leíró dokumentáció 1 pontot ér. A programra akkor kapható meg a további 9 pont, ha bármilyen hibátlan bemenetet képes megoldani az 1 mp futásidőkorláton belül.

Beküldendő egy tömörített `s101.zip` állományban a program forráskódja az `.exe` és más, a fordító által generált állományok nélkül, valamint a program rövid dokumentációja, amely a fentieken túl megadja, hogy a forrás mely fejlesztői környezetben fordítható.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: **2015. november 10.**

❄

A 46. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia elméleti feladatai[*]

1. feladat. Napból érkező részecskék (összesen *10 pont*).

A Nap felületéről érkező fotonok és a belsejéből érkező neutrínók a Nap belső és külső hőmérsékletéről adhatnak információt, valamint megerősítik, hogy a Nap a benne zajló nukleáris folyamatok miatt ragyog.

A feladatban a következő adatokat használhatjuk: a Nap tömege: $M_\odot = 2{,}00 \cdot 10^{30}$ kg, a Nap sugara: $R_\odot = 7{,}00 \cdot 10^{8}$ m, a Nap luminozitása (egységnyi idő alatt kisugárzott energia): $L_\odot = 3{,}85 \cdot 10^{26}$ W és a Föld–Nap átlagos távolsága: $d_\odot = 1{,}50 \cdot 10^{11}$ m.

Néhány függvény határozatlan integrálja:

$$(i) \qquad \int x\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)\mathrm{e}^{ax} + \text{állandó},$$

$$(ii) \qquad \int x^2\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)\mathrm{e}^{ax} + \text{állandó},$$

$$(iii) \qquad \int x^3\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4}\right)\mathrm{e}^{ax} + \text{állandó}.$$

A rész. A Naptól jövő sugárzás

A.1. *Tegyük fel, hogy a Nap abszolút fekete testként sugároz. Ezt felhasználva határozzuk meg a Nap $T_\odot$ felszíni hőmérsékletét!* (*0,3 pont*)

A napsugárzás spektrumát jó közelítéssel a Wien-féle eloszlás adja meg. Eszerint a Napból a Föld egy adott felületére egységnyi idő alatt, egységnyi frekvenciatartományban érkező energia:

$$u(f) = A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\frac{2\pi h}{c^2}f^3\exp(-hf/k_\mathrm{B}T_\odot),$$

ahol f a frekvencia, A pedig a bejövő sugárzás irányára merőleges felület nagysága.[2]

Ezek után tekintsünk egy, a beeső napsugárzás irányára merőlegesen elhelyezett, A felületű, félvezető anyagból készült, vékony napelemet.

A.2. *A Wien-közelítést felhasználva fejezzük ki a napelem felületére beeső napsugárzás teljes P_be teljesítményét az A, $R_\odot$, $d_\odot$, $T_\odot$ paraméterekkel, valamint a c, h, k_B fizikai állandókkal!* (*0,3 pont*)

[*] A hivatalos megoldást és a mérési feladatokat a KöMaL novemberi számában ismertetjük.

A feladatok kidolgozására 5 óra állt rendelkezésre. A három elméleti feladatra összesen 30 pontot lehetett kapni. A részfeladatok után közölt pontszámok az egyes kérdések nehézségi fokára utalnak.

[2] c a fénysebességet, h a Planck-állandót, k_B pedig a Boltzmann-állandót jelöli. Ezek (és még más fizikai állandók) számértékét egy külön táblázatban megkapták a versenyzők.

A.3. *Fejezzük ki az egységnyi idő alatt, egységnyi frekvenciatartományban a napelem felületére beeső fotonok $n_\gamma(f)$ számát az A, $R_\odot$, $d_\odot$, $T_\odot$, f paraméterekkel, valamint a c, h, k_B fizikai állandókkal!* (0,2 pont)

A félvezető anyag, amiből a napelem készült, E_g szélességű tiltott sávval rendelkezik.[3] Alkalmazzuk a következő modellt. Minden, $E \geqslant E_\mathrm{g}$ energiájú foton egy elektront gerjeszt a tiltott sáv fölé. Ez az elektron E_g energiával járul hozzá a hasznos kimenő energiához, az esetleges többletenergiája hő formájában disszipálódik (nem hasznosul).

A.4. *Legyen $x_\mathrm{g} = hf_\mathrm{g}/k_\mathrm{B}T_\odot$, ahol $E_\mathrm{g} = hf_\mathrm{g}$. Fejezzük ki a napelem P_ki hasznos kimenő teljesítményét az x_g, A, $R_\odot$, $d_\odot$, $T_\odot$ paraméterekkel, valamint a c, h, k_B fizikai állandókkal!* (1,0 pont)

A.5. *Fejezzük ki a napelem η hatásfokát x_g segítségével!* (*0,2 pont*)

A.6. *Ábrázoljuk vázlatosan η-t az x_g függvényében! Az $x_\mathrm{g} = 0$ és az $x_\mathrm{g} \to \infty$ esetén érvényes értékeket is tüntessük fel. Mekkora az $\eta(x_\mathrm{g})$ függvény meredeksége $x_{\mathrm{g}=0}$ és $x_\mathrm{g} \to \infty$ esetén?* (*1,0 pont*)

A.7. *Jelöljük x_0-lal x_g azon értékét, ahol η maximális. Írjuk fel azt a harmadfokú egyenletet, amiből x_0 meghatározható! Adjunk becslést x_0 értékére* $\pm 0{,}25$ *pontossággal! Ezt felhasználva számoljuk ki $\eta(x_0)$ értéket!* (*1,0 pont*)

A.8. *Tiszta szilícium esetén* $E_\mathrm{g} = 1{,}11\,\mathrm{eV}$. *Ezt az adatot felhasználva, számoljuk ki a szilíciumból készült napelem η_Si hatásfokát!* (*0,2 pont*)

A 19. század végén *Kelvin* és *Helmholtz* (KH) egy hipotézissel álltak elő a Nap sugárzásának magyarázatára. Feltételezték, hogy a Nap kezdetben egy óriási, elhanyagolható sűrűségű, $M_\odot$ tömegű porfelhő volt, amely folyamatosan húzódott össze. A Nap sugárzása – feltevésük szerint – származhat a lassú zsugorodás során felszabaduló gravitációs potenciális energiából.

A.9. *Tegyük fel, hogy a Nap egyenletes tömegeloszlású. Adjuk meg a Nap jelenlegi Ω gravitációs potenciális energiáját a G gravitációs állandó, $M_\odot$ és $R_\odot$ segítségével!* (*0,3 pont*)

A.10. *A KH-hipotézis alapján becsüljük meg azt a legnagyobb lehetséges τ_{KH} időt (években megadva), ameddig a Nap ragyogni tudna! Tételezzük fel, hogy ezen idő alatt a Nap luminozitása állandó.* (*0,5 pont*)

A fenti módon kiszámolt τ_KH idő nem egyeztethető össze a Naprendszer – meteoritok tanulmányozásával kapható – becsült életkorával. Ez azt mutatja, hogy a Nap energiaforrása *nem* lehet tisztán gravitációs eredetű.

B rész. A Napból jövő neutrínók

1938-ban *Hans Bethe* azt állította, hogy a Nap energiája a benne levő hidrogén héliummá történő magfúziójából származik. A nettó magreakció:

$$4\,{}^1\mathrm{H} \;\to\; {}^4\mathrm{He} + 2\mathrm{e}^+ + 2\nu_\mathrm{e}.$$

A reakcióban keletkező ν_e „elektronneutrínók” tömege zérusnak vehető. Ezek a részecskék a Napból kiszabadulnak, és a Földön történő detektálásuk alátámasztja

[3] A „g” index az angol *gap* (rés) szóra, vagyis a tiltott sáv szélességére utal.

a magreakciók lezajlását a Nap belsejében. A neutrínók által elszállított energia elhanyagolható ebben a feladatban.

B.1. *Számítsuk ki a Földet elérő neutrínók számának* Φ_ν *fluxussűrűségét* $\mathrm{m}^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}$ *egységben! A fenti reakcióban* $\Delta E = 4{,}0\cdot 10^{-12}$ J *energia szabadul fel. Tételezzük fel, hogy a Nap által kisugárzott energia teljes mértékben ebből a reakcióból származik!* (*0,6 pont*)

A Nap magjából a Földig tartó útjuk során a ν_e elektronneutrínók egy része más típusú, ν_x neutrínókká alakul át.[4] A detektor a ν_x neutrínókat $\frac{1}{6}$ akkora hatásfokkal érzékeli, mint amekkora hatásfokkal a ν_e neutrínókat. Ha nem volna neutrínóátalakulás, akkor egy év alatt átlagosan N_1 számú neutrínó detektálását várnánk. Azonban az átalakulás miatt a valóságban egy év alatt átlagosan N_2 számú neutrínót (ν_e-t és ν_x-t együttesen) detektálnak.

B.2. *Határozzuk meg* N_1 *és* N_2 *segítségével, hogy a* ν_e *neutrínók mekkora* r *hányada alakul át* ν_x *neutrínóvá!* (*0,4 pont*)

Ahhoz, hogy a neutrínókat észlelni tudjuk, nagy, vízzel töltött detektorokat építünk. Habár a neutrínók anyaggal való kölcsönhatása meglehetősen ritka, olykor elektronokat löknek ki a detektorbeli vízmolekulákból. Ezek a nagyenergiájú elektronok nagy sebességgel hatolnak át a vízen, mely folyamat során elektromágneses sugárzást bocsátanak ki. Amíg egy ilyen elektron sebessége nagyobb, mint a fény sebessége az n törésmutatójú vízben, a sugárzás (ún. Cserenkov-sugárzás) kúp alakban bocsátódik ki.

B.3. *Tételezzük fel, hogy a neutrínó által kilökött elektron a vízben való haladása során állandó ütemben, időegységenként* α *energiát veszít. Határozzuk meg a neutrínó által az elektronnak átadott energiát* ($E_{\text{átadott}}$) α, Δt, n, m_e *és* c *segítségével, ha az elektron* Δt *ideig bocsát ki Cserenkov-sugárzást! (Tételezzük fel, hogy az elektron a neutrínóval való kölcsönhatása előtt nyugalomban volt.)* (*2,0 pont*)

A Nap belsejében a hidrogén héliummá történő fúziója több lépésben történik. Az egyik ilyen lépés során $^7\mathrm{Be}$ atommag (nyugalmi tömege m_Be) keletkezik. Ezután ez az atommag egy elektront nyelhet el, melynek folyamán egy $^7\mathrm{Li}$ atommag (nyugalmi tömege $m_\mathrm{Li} < m_\mathrm{Be}$) és egy ν_e neutrínó keletkezik. A megfelelő magreakció:

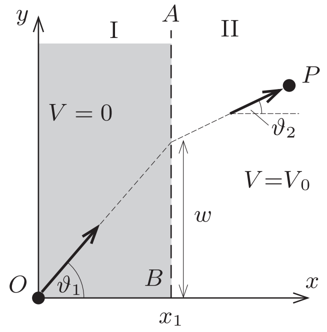
$$^7\mathrm{Be} + \mathrm{e}^- \ \to\ ^7\mathrm{Li} + \nu_\mathrm{e}.$$

Ha egy nyugalomban levő Be atommag ($m_\mathrm{Be} = 11{,}5\cdot 10^{-27}$ kg) elnyel egy ugyancsak nyugvó elektront, a keletkező neutrínó energiája $E_\nu = 1{,}44\cdot 10^{-13}$ J. Azonban a Be atommagok véletlenszerű termikus mozgást végeznek a Nap magjában lévő T_c hőmérséklet miatt, és mozgó neutrínóforrásként viselkednek. Emiatt a kibocsátott neutrínók energiája ΔE_rms négyzetes középértékkel fluktuál.

B.4. *Ha* $\Delta E_\mathrm{rms} = 5{,}54\cdot 10^{-17}$ J, *számoljuk ki a* Be *magok* V_Be *sebességének négyzetes középértékét, majd ezzel adjunk becslést* T_c*-re!* (Útmutatás: ΔE_rms *a megfigyelés irányába mutató sebességkomponens négyzetes középértékétől függ.*) (*2,0 pont*)

[4]Ezen jelenség, az ún. neutrínóoszcilláció kísérleti igazolásáért *Kadzsita Takaaki* japán és *Arthur B. McDonald* kanadai tudósnak ítélték oda a 2015. évi fizikai Nobel-díjat (– a szerk.).

2. feladat. A szélsőértékelv (összesen *10 pont*).



1. ábra

A rész. Szélsőértékelv a mechanikában

Tekintsünk egy vízszintes, súrlódásmentes x-y síkot (*1. ábra*). A síkot az $x = x_1$ egyenlettel megadott AB egyenes két, I és II jelű tartományra osztja. Egy m tömegű, pontszerű test helyzeti energiája az I-es tartományban $V = 0$, míg a II-es tartományban $V = V_0$. A részecskét az O origóból v_1 sebességgel indítjuk el egy, az x tengellyel ϑ_1 szöget bezáró egyenes mentén. A II-es tartományban lévő P pontot v_2 sebességgel éri el egy, az x tengellyel ϑ_2 szöget bezáró egyenes mentén.

A gravitációt és a relativisztikus hatásokat a feladat minden részében elhanyagolhatjuk.

A.1. *Fejezzük ki v_2-t az m, v_1 és V_0 mennyiségek segítségével!* (*0,2 pont*)

A.2. *Adjuk meg v_2-t v_1, ϑ_1 és ϑ_2 segítségével!* (*0,3 pont*)

Definiálunk egy (hatásnak nevezett) $A = m \int v(s)\,\mathrm{d}s$ mennyiséget, ahol $\mathrm{d}s$ a $v(s)$ sebességgel mozgó m tömegű részecske „infinitezimálisan kicsi" elmozdulása a pályája mentén. Az integrálást a pályagörbe mentén kell elvégezni.

Példaként, ha egy részecske állandó v sebességgel mozog egy R sugarú körpályán, akkor az A hatás 1 fordulat alatt $2\pi mRv$ lesz.

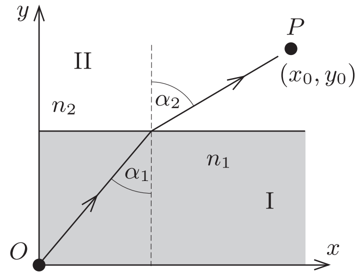
Ha a részecske E energiája állandó, akkor megmutatható, hogy két rögzített végpont között az összes lehetséges pálya közül a részecske ténylegesen azon a pályán fog mozogni, amelyen kiszámítva az A hatásnak szélsőértéke (minimuma vagy maximuma) van. Történeti okokból ezt a szélsőértékelvet a *legkisebb hatás elvének* (LHE) nevezik.

A.3. *A LHE-ből következik, hogy ha egy részecske olyan tartományban mozog, ahol a helyzeti energia állandó, a pályája a két rögzített pont közötti egyenes szakasz lesz. Legyenek az 1. ábrán látható O és P rögzített pontok koordinátái* $(0, 0)$*, illetve* (x_0, y_0)*, továbbá annak a határpontnak a koordinátái, ahol a részecske az I-es tartományból átmegy a II-esbe, legyenek* (x_1, w)*. Fontos, hogy x_1 értéke rögzített, és a hatás csak a w koordináta függvénye. Adjuk meg az $A(w)$ hatásfüggvény alakját! Az LHE alapján keressünk kapcsolatot a v_1/v_2 hányados és a fenti koordináták között!* (*1,0 pont*)

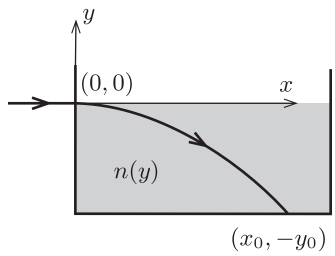
B rész. Szélsőértékelv az optikában

Egy fénysugár az n_1 törésmutatójú I-es közegből az n_2 törésmutatójú II-es közegbe lép át. A két közeget egy x tengellyel párhuzamos egyenes választja el. A fénysugár az y tengellyel az I-es közegben α_1, a II-es közegben α_2 szöget zár be (*2. ábra*). A fénysugár útját egy másik szélsőértékelv, a legkisebb idő elvét megfogalmazó *Fermat-elv* segítségével kapjuk meg.

B.1. *Az elv azt mondja ki, hogy két rögzített pont között a fénysugár olyan pályán halad, amelyen a két pont közötti út megtételéhez szükséges időnek szélsőértéke van. Vezessük le a $\sin\alpha_1$ és $\sin\alpha_2$ közötti összefüggést a Fermat-elv alapján!* (*0,5 pont*)



2. ábra



3. ábra

A *3. ábrán* (vázlatosan) egy olyan lézersugár menete látható, amely vízszintesen lép be egy cukoroldatba. Az oldatban a cukorkoncentráció – és ennek következtében a törésmutató is – csökken a magassággal.

B.2. *Tegyük fel, hogy a törésmutató csak y koordinátától függ, $n = n(y)$. A B.1. részben kapott összefüggés segítségével fejezzük ki a fénysugár pályájának $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ meredekségét az n_0 és $n(y)$ törésmutatók függvényében, ahol n_0 a törésmutató értéke az $y = 0$ helyen! (1,5 pont)*

B.3. *A lézersugár a $(0, 0)$ origóban vízszintesen lép be a cukoroldatba az edény aljához viszonyítva y_0 magasságban, ahogy az a 3. ábrán látszik. Legyen $n(y) = n_0 - ky$, ahol n_0 és k pozitív állandók. Fejezzük ki x-et y és a lézersugár pályáját meghatározó többi mennyiség függvényében! (1,2 pont)*

Felhasználható, hogy:

$$\int \frac{1}{\cos\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta = \ln\left(\frac{1}{\cos\vartheta} + \operatorname{tg}\vartheta\right) + \text{állandó}, \quad \text{vagy}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-1)}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \text{állandó}.$$

B.4. *Határozzuk meg azt az x_0 értéket, ahol a fénysugár eléri az edény alját! Legyen: $y_0 = 10{,}0$ cm; $n_0 = 1{,}50$; $k = 0{,}050\ \mathrm{cm}^{-1}$. (0,8 pont)*

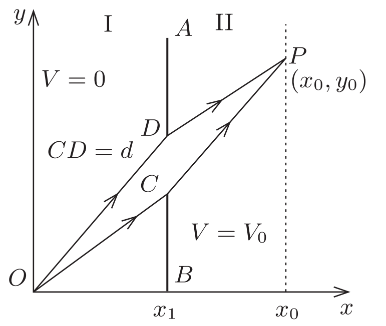
C rész. A szélsőértékelv és az anyag hullámtermészete

Most a legkisebb hatás elve (LHE) és a mozgó részecske hullámtermészetének kapcsolatát fogjuk tanulmányozni. Ehhez azt feltételezzük, hogy az O-ból P-be haladó részecske minden lehetséges pályát befut, és mi azt a pályát keressük meg, amelyen az interferáló de Broglie-hullámok erősítik egymást.

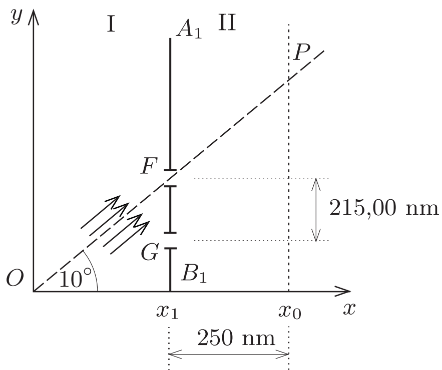
C.1. *A részecske egy infinitezimális kicsi Δs távolsággal elmozdul a pályáján. Fejezzük ki a de Broglie-hullám $\Delta\varphi$ fázisváltozását a hatás ΔA megváltozásával és a Planck-állandóval! (0,6 pont)*

C.2. *Tekintsük újra az A részben szereplő feladatot, ahol a részecske O-ból P-be mozog* (4. ábra). *Tegyünk egy átlátszatlan lemezt a két tartomány közti AB határvonalra. Ezen egy kicsiny, d szélességű CD nyílás van, melyre teljesül, hogy $d \ll (x_0 - x_1)$ és $d \ll x_1$.*

Vegyük fel az OCP és ODP szélső pályákat, úgy, hogy OCP az A részben tárgyalt klasszikus pályán legyen. Határozzuk meg első rendben a két pálya közötti $\Delta\varphi_{CD}$ *fáziskülönbséget!* (*1,2 pont*)



4. ábra



5. ábra

D rész. Anyaghullámok interferenciája

Tekintsünk egy elektronágyút O-ban, amely egy párhuzamosított elektronnyalábot bocsát ki a keskeny F rés irányába. A rés az $x = x_1$ helyen lévő A_1B_1 átlátszatlan elválasztófalon úgy helyezkedik el, hogy az ernyőn lévő P pont, valamint O és F egy egyenesen legyen (*5. ábra*). A sebesség az I-es tartományban $v_1 = 2{,}0000 \cdot 10^7$ m/s, és $\vartheta = 10{,}0000°$. A II-es tartományban olyan a potenciál, hogy a sebesség $v_2 = 1{,}0000 \cdot 10^7$ m/s. Az $x_0 - x_1$ távolság 250,00 mm. (Az elektronok közötti kölcsönhatást hanyagoljuk el.)

D.1. *Számítsuk ki az elektronágyú U_1 gyorsítófeszültségét, ha O-ban az elektronokat nyugalmi helyzetből gyorsítjuk fel!* (*0,3 pont*)

D.2. *Az A_1B_1 elválasztófalon az F rés alatt, attól 215,00 nm távolságra egy másik (G jelű) keskeny rést is létrehozunk. Az F és G réseken át a P pontba érkező de Broglie-hullámok fáziskülönbsége $2\pi\beta$. Számítsuk ki β értékét!* (*0,8 pont*)

D.3. *Mekkora az a P-től mért legkisebb Δy távolság, ahol nem várható elektron becsapódása az ernyőn?* (*1,2 pont*)

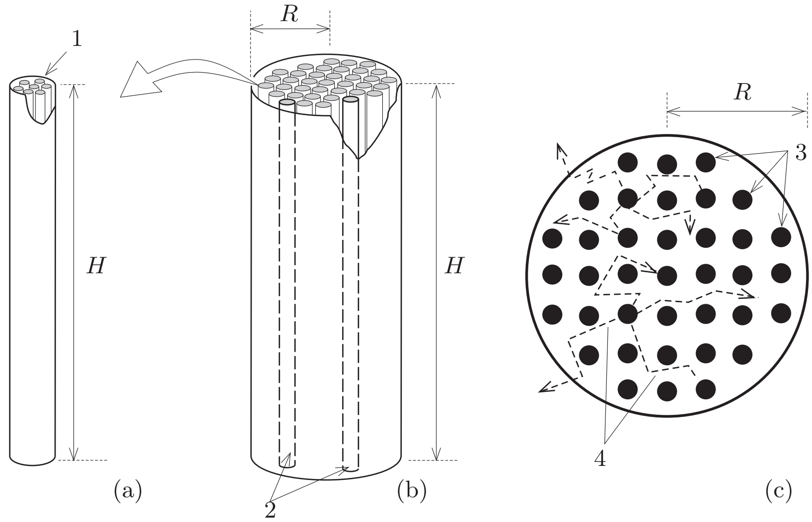
Figyelem! Hasznos lehet a $\sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \approx \sin\vartheta + \Delta\vartheta\cos\vartheta$ közelítés.

D.4. *A sugár négyzetes keresztmetszete* 500 nm × 500 nm, *és a mérési összeállítás hossza* 2 m. *Mekkora az a minimális $I_{\min}$ fluxussűrűség (elektron darabszám/egységnyi merőleges felület/egységnyi idő), amely esetében egy adott időpillanatban átlagosan legalább 1 elektron található a mérési összeállításban?* (*0,4 pont*)

3. feladat. Nukleáris reaktor tervezése (összesen *10 pont*).

Az urán a természetben UO_2 formájában fordul elő, és az uránatomoknak csupán 0,720%-a ^{235}U. Neutron hatására az ^{235}U könnyen elhasad, melynek során 2-3 nagy mozgási energiájú hasadványneutron is kibocsátódik. Ennek a hasadásnak a valószínűsége megnő, ha a hasadást kiváltó neutronok mozgási energiája kicsi. Tehát a hasadványneutronok mozgási energiájának csökkentésével az ^{235}U magok hasadási láncreakciója idézhető elő. Ez képezi az energiatermelő nukleáris reaktor (NR) elvét.

Egy tipikus NR egy H magasságú, R sugarú hengeres tartályból áll, ami az ún. moderátoranyaggal van feltöltve. Ebben tengelyirányban hengeres csövek, az ún. üzemanyag-kazetták helyezkednek el négyzetrácsba rendezve, melyek belsejében H magasságú, szilárd állapotban lévő, természetes UO_2 üzemanyagrudak találhatók. A kazettából kilépő hasadványneutronok ütköznek a moderátorral, így energiát veszítenek, hogy aztán a környező kazettákat a hasításhoz szükséges kicsi energiával érjék el. A *6. ábrán* csak a feladat szempontjából releváns alkatrészek láthatók (pl. a szabályozórudak és a hűtőközeg nem). A hasadás miatt az üzemanyagrudakban fejlődő hő a hosszirányban áramló hűtőközegnek adódik át. Ebben a feladatban az üzemanyagrudakban (A rész), a moderátorban (B rész) és a hengeres geometriájú NR-ben (C rész) zajló fizikai folyamatokat tanulmányozzuk.



6. ábra. A nukleáris reaktor (NR) vázlatos rajza.
(a) Egy üzemanyag-kazetta nagyított képe (1 – üzemanyagrúd).
(b) Az NR képe (2 – üzemanyag-kazetta).
(c) NR felülnézetben (3 – az üzemanyag-kazetták négyzetrácsba rendezve; 4 – tipikus neutronpályák).

A rész. Az üzemanyagrúd

UO_2 adatai: móltömege $M = 0{,}271$ kg mol^{-1}; sűrűsége $\varrho = 1{,}060$ kg m^{-3}; olvadáspontja $T_{\text{olv}} = 3{,}138 \cdot 10^3$ K; hővezetési tényezője $\lambda = 3{,}280$ W m^{-1} K^{-1}.

A.1. *Tekintsük a következő hasadási reakciót, melyben egy álló* ^{235}U *elnyel egy elhanyagolható mozgási energiájú neutront:*

$$^{235}\mathrm{U} + {}^{1}\mathrm{n} \;\to\; {}^{94}\mathrm{Zr} + {}^{140}\mathrm{Ce} + 2\,{}^{1}\mathrm{n} + \Delta E.$$

Becsüljük meg a hasadás során felszabaduló teljes ΔE *energiát* MeV*-ben! Az atommagtömegek:* $m(^{235}\mathrm{U}) = 235{,}044$ u; $m(^{94}\mathrm{Zr}) = 93{,}9063$ u; $m(^{140}\mathrm{Ce}) = 139{,}905$ u;

$m(^1\mathrm{n}) = 1{,}00867$ u *és* 1 u $= 931{,}502$ MeVc^{-2}. *A töltés megmaradásával ne foglalkozzunk.* (*0,8 pont*)

A.2. *Adjunk becslést a természetes* $\mathrm{UO_2}$*-ban lévő* $^{235}\mathrm{U}$ *atomok térfogategységre eső N számára!* (*0,5 pont*)

A.3. *Tegyük fel, hogy a neutronfluxus-sűrűség az üzemanyagban homogén, nagysága* $\varphi = 2{,}000 \cdot 10^{18}\ \mathrm{m^{-2}s^{-1}}$. *Egy* $^{235}\mathrm{U}$ *atommag hasadási hatáskeresztmetszete (a céltárgy atommag effektív keresztmetszete)* $\sigma_f = 5{,}400 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{m^2}$. *Határozzuk meg az üzemanyagrúdban térfogategységenként fejlődő hő Q keletkezési ütemét* (W m^{-3}-ben), *ha a hasadásból származó energia* 80,00%*-a alakul hővé!* 1 MeV $= 1{,}602 \cdot 10^{-13}$ J. (*1,2 pont*)

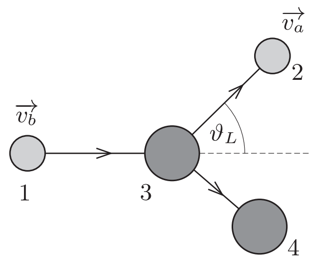
A.4. *Az üzemanyagrúd közepének* (T_c) *és felületének* (T_s) *hőmérséklete közötti különbség állandósult állapotban* $T_\mathrm{c} - T_\mathrm{s} = kF(Q, a, \lambda)$ *alakban írható fel, ahol* $k = \frac{1}{4}$ *egy dimenziótlan állandó, a pedig az üzemanyagrúd sugara. Határozzuk meg* $F(Q, a, \lambda)$*-t dimenzióanalízissel! Itt* λ *az* $\mathrm{UO_2}$ *hővezetési tényezője.* (*0,5 pont*)

A.5. *A hűtőközeg kívánt hőmérséklete* $5{,}770 \cdot 10^2$ K. *Adjunk becslést meg az üzemanyagrúd a sugarának* a_u *felső határára!* (*1,0 pont*)

B rész. A moderátor

Tekintsünk egy kétdimenziós rugalmas ütközést egy 1 u tömegű neutron és egy $A \cdot$ u tömegű moderátoratom között. Az ütközés előtt mindegyik moderátoratomot tekintsük nyugvónak a laboratóriumi vonatkoztatási rendszerben (LR). Jelölje $\overrightarrow{v_b}$ és $\overrightarrow{v_a}$ a neutron sebességvektorát rendre az ütközés előtt (before) és után (after) az LR-ben. Legyen $\overrightarrow{v_m}$ a tömegközépponti (TKP) vonatkoztatási rendszer sebességvektora az LR-hez képest, ϑ pedig a neutron szóródási szöge a TKP rendszerben. Az ütközésekben résztvevő összes részecske nemrelativisztikus sebességgel mozog.

B.1. *A* 7. ábrán *látható az ütközés vázlata az* LR*-ben, ahol* ϑ_L *a szóródási szög. Vázoljuk fel az ütközést a* TKP *rendszerben!*



7. ábra. Az ütközés a laboratóriumi rendszerben.
1 – a neutron az ütközés előtt; 2 – a neutron az ütközés után;
3 – moderátoratom ütközés előtt; 4 – moderátoratom ütközés után

Tüntessük fel a részecskék sebességvektorát az 1*-es,* 2*-es és* 3*-as állapotokban* $\overrightarrow{v_b}$, $\overrightarrow{v_a}$ *és* $\overrightarrow{v_m}$ *segítségével! Jelöljük be a* ϑ *szóródási szöget is!* (*1,0 pont*)

B.2. *Adjuk meg a neutron v, illetve a moderátoratom V ütközés utáni sebességét a* TKP *rendszerben A és* v_b *segítségével!* (*1,0 pont*)

B.3. *Fejezzük ki a* $G(\alpha,\vartheta)=E_a/E_b$ *mennyiséget, ahol* E_b *és* E_a *a neutron* LR*-beli mozgási energiája rendre az ütközés előtt és után, valamint*

$$\alpha\equiv\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2! \qquad (1{,}0\ pont)$$

B.4. *Tegyük fel, hogy az előző kifejezés érvényes* D_2O *molekulára is. Számítsuk ki a neutron lehetséges legnagyobb relatív energiaveszteségét, az* $f_l\equiv\frac{E_b-E_a}{E_b}$ *mennyiséget,* D_2O (20 u) *moderátor esetén.* (*0,5 pont*)

C rész. A nukleáris reaktor

Ahhoz, hogy az NR-t állandó ψ neutronfluxussal működtessük (állandósult állapot), az elszökő neutronokat a reaktorban keletkező többletneutronoknak pótolniuk kell. Egy hengeres geometriájú reaktornál a neutronok szökési üteme $k_1\left[(2{,}405/R)^2+(\pi/H)^2\right]\psi$, a többletneutronok keletkezési üteme pedig $k_2\psi$. A k_1 és k_2 állandók az NR anyagi tulajdonságaitól függenek.

C.1. *Tekintsünk egy* NR*-t, melyre* $k_1=1{,}021\cdot10^{-2}$ m *és* $k_2=8{,}787\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}^{-1}$. *Figyelembe véve, hogy adott térfogat mellett szeretnénk minimalizálni a szökési ütemet a hatékony üzemelés érdekében, határozzuk meg az* NR *méreteit állandósult állapotban!* (*1,5 pont*)

C.2. *Az üzemanyag-kazetták négyzetrácsba vannak rendezve (6/c. ábra), a legközelebbi szomszédok közötti távolság* 0,286 m. *Az üzemanyag-kazetták effektív sugara (mintha tömörek lennének)* $3{,}617\cdot10^{-2}$ m. *Becsüljük meg az üzemanyag-kazetták* F_n *számát a reaktorban, valamint az* NR *állandósult állapotban történő üzemeltetéséhez szükséges* UO_2 *anyag* M *tömegét!* (*1,0 pont*)

A Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny elméleti feladatainak megoldása[1]

1. feladat.

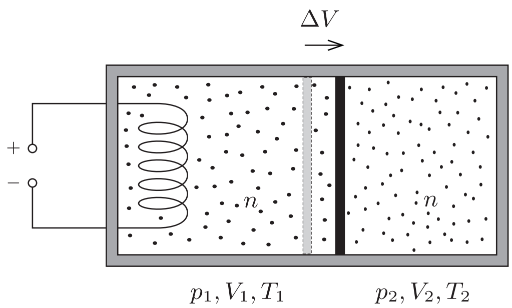
1.A. Ez a részfeladat megegyezik a jelen számunkban kitűzött **P. 4767.** feladattal, emiatt a megoldását később közöljük (– a szerk.).

1.B. Jelöljük a gázok kezdeti állapotjelzőit p_0-lal, V_0-lal és T_0-lal, mólszámukat pedig n-nel (ezek a bal és a jobb oldali rekeszre ugyanakkorák), egy kicsiny hő közlése után kialakuló állapotot pedig jellemezzük az *1. ábrán* látható mennyiségekkel.

A dugattyú egyensúlya miatt $p_1=p_2$, az össztérfogat állandósága miatt pedig

$$V_1=V_0+\Delta V,\qquad V_2=V_0-\Delta V$$

[1] A feladatok szövegét múlt havi számunkban közöltük.



1. ábra

írható. A jobb oldali rekeszben lévő gáz nem vett fel hőt, állapotváltozása adiabatikus, így fennáll

$$p_0 V_0^\kappa = p_2 (V_0 - \Delta V)^\kappa, \qquad \left(\text{héliumra } \kappa = \frac{f+2}{f} = \frac{5}{3}\right),$$

ebből ($\Delta V \ll V_0$ esetén)

(1) $$p_2 = p_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta V}{V_0}}\right)^\kappa \approx p_0 \left(1 + \kappa \frac{\Delta V}{V_0}\right)$$

következik. A bal oldali rekeszben lévő gázra a hőtan I. főtétele szerint

$$Cn\Delta T = \frac{f}{2} nR\Delta T + p_2 \Delta V,$$

ahol C a mólhőt jelöli. Az (1) összefüggés felhasználásával és a $(\Delta V)^2$-tel arányos (másodrendűen kicsiny) tagokat elhagyva

(2) $$C = \frac{f}{2} R + p_0 \frac{\Delta V}{n\Delta T}$$

adódik. Az ideális gázok állapotegyenletéből

$$nR\Delta T = p_0 \Delta V + V_0 \Delta p,$$

ahonnan (1)-et felhasználva

$$nR\Delta T = (1+\kappa) p_0 \Delta V,$$

tehát

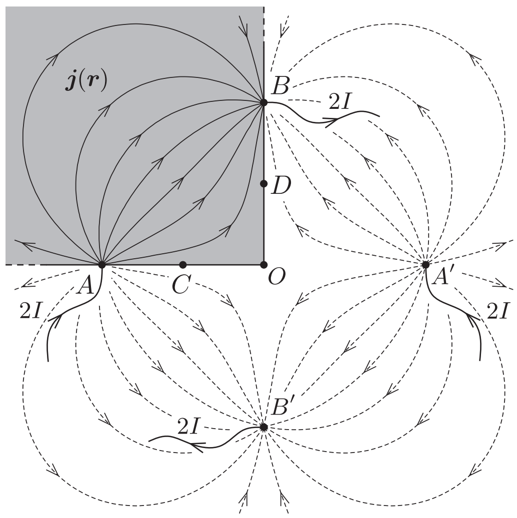
$$\frac{\Delta V}{n\Delta T} = \frac{R}{p_0} \frac{1}{1+\kappa}$$

következik. Ezt (2)-be helyettesítve (tudván, hogy héliumra $f = 3$) megkapjuk a keresett mólhőt:

$$C = \frac{f}{2} R + \frac{1}{1+\kappa} R = \frac{f^2 + 2f}{2(f+1)} R = \frac{15}{8} R.$$

1.C. A cél a voltmérő által jelzett U feszültség és a lemezbe vezetett I áramerősség közötti összefüggés megállapítása. Ha ismernénk a kialakuló kétdimenziós árameloszlás (helyfüggő) $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ áramsűrűségét, akkor az $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \varrho\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ differenciális Ohm-törvényből meghatározhatnánk az elektromos térerősséget a lemez belsejében. A térerősségből a C és D pontok közötti feszültséget integrálással már ki tudnánk számítani. Ez matematikailag nehéz feladat, de szerencsére van egy sokkal könnyebb út.

A fémlemez éleinél a $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ áramsűrűség-vektor élre merőleges komponensének el kell tűnnie. Ez a szokatlan határfeltétel könnyen kezelhető, ha az elektrosztatikában használt tükörtöltés-módszerhez hasonló gondolatmenetet követünk (lásd a *2. ábrát*). Ehhez tükrözzük az A és B pontokat a lemez BD és AC oldaléleire; az így kapott pontokat jelölje A' és B'. A *véges* lemezbeli árameloszlás éppen olyan, amilyen egy *végtelen* kiterjedésű fémlemez egyik negyedében alakulna ki, ha abba az A és A' pontokban egyaránt $2I$ erősségű áramot vezetnénk be, a B és B' pontokból pedig $2I$ áramot vezetnénk el.



2. ábra

Ha csak egyetlen elektródán keresztül vezetnénk $2I$ áramot a végtelen fémlemezbe, akkor az áramsűrűség nagysága

$$j(r) = \frac{2I}{2\pi r\delta}$$

lenne a bevezetési ponttól r távolságra. A lemezbeli térerősség ugyanitt

$$E(r) = \frac{\varrho I}{\pi r\delta}$$

értékű, a potenciál pedig (egy önkényesen választható, r_0 távolságra lévő ponthoz képest)

$$\Phi(r) = -\int_{r_0}^{r} E(r)\,\mathrm{d}r = \frac{\varrho I}{\pi\delta}\ln\frac{r_0}{r}.$$

A C pont potenciálját a valódi és a „tükörelektródák” hatásainak szuperpozíciójaként számolhatjuk. Ha a potenciált a négyzet O csúcsában választjuk nullának (ez a pont valamennyi áram be- és kivezetési pontjától $r_0 = 2d$ távol van), a kérdéses potenciál tehát

$$\Phi_C = \frac{\varrho I}{\pi\delta}\left(\ln\frac{2d}{d} + \ln\frac{2d}{3d} - \ln\frac{2d}{\sqrt{5}d} - \ln\frac{2d}{\sqrt{5}d}\right),$$

egyszerűsítések után:

$$\Phi_C = \frac{\varrho I}{\pi\delta}\ln\frac{5}{3}.$$

Hasonlóan számolhatjuk a D pont potenciálját is, és könnyen látszik, hogy $\Phi_D = -\Phi_C$. A C és D pontok közötti feszültség tehát $2\Phi_C$, ennyit jelez tehát a véges kiterjedésű lemezre kapcsolt voltmérő is:

$$U = \frac{2\varrho I}{\pi\delta}\ln\frac{5}{3}.$$

Ebből a lemez ϱ fajlagos ellenállása kifejezhető:

$$\varrho = \frac{\pi\delta}{2\ln(5/3)}\,\frac{U}{I}.$$

Érdekes, hogy az eredmény nem függ d-től (egészen addig, amíg d sokkal kisebb a négyzetlap oldaléleinél, és sokkal nagyobb δ-nál.)

2. feladat. Furfangos szökőkút

2.1. A „bemerülő” rész térfogata:

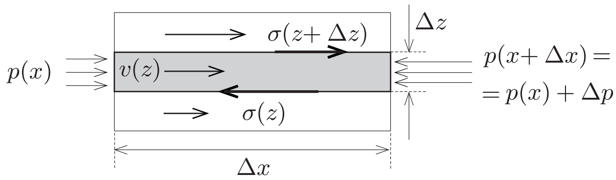
$$V = \left(\frac{2\theta_{\max}}{2\pi}R^2\pi - 2\sin\theta_{\max}R\cdot\cos\theta_{\max}R\cdot\frac{1}{2}\right)L = \frac{R^2L}{2}(2\theta_{\max} - \sin 2\theta_{\max}).$$

A keresett hányados:

$$\frac{F_{\text{fel}}}{mg} = \frac{\varrho_{\text{víz}}\frac{R^2L}{2}(2\theta_{\max} - \sin 2\theta_{\max})g}{\varrho R^2\pi Lg} = \frac{\varrho_{\text{víz}}}{\varrho}\,\frac{1}{2\pi}(2\theta_{\max} - \sin 2\theta_{\max}) = 0{,}010.$$

A felhajtóerő tehát a gránithengerre ható nehézségi erőnek mindössze csak 1%-a.

2.2. Tekintsünk három, egymás feletti folyadékréteget (*3. ábra*). A középső, Δz



3. ábra

vastagságú, ℓ' szélességű és Δx hosszúságú réteg nem gyorsul, a rá ható erők tehát egyensúlyban vannak: $\big[\sigma(z)-\sigma(z+\Delta z)\big]\Delta x\,\ell' = \big[p(x)-p(x+\Delta x)\big]\Delta z\,\ell'$, ebből valóban

$$\frac{\sigma(z+\Delta z)-\sigma(z)}{\Delta z}=\frac{p(x+\Delta x)-p(x)}{\Delta x},\quad \text{vagyis}\quad \frac{\Delta\sigma}{\Delta z}=\frac{\Delta p}{\Delta x}$$

következik.

2.3. Mivel $\frac{\Delta\sigma}{\Delta z}=-K$, így $\sigma(z)=\sigma_0-Kz$. Másrészt a nyírófeszültség definíciója szerint

$$\sigma(z)=\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z},\quad \text{ezért}\quad v(z)=\frac{\sigma_0}{\eta}z-\frac{K}{2\eta}z^2+C.$$

A folyadék sebessége a határokon ($z=0$-nál és $z=h$-nál) zérus, tehát

$$v(z)=\frac{Kh}{2\eta}z-\frac{K}{2\eta}z^2\equiv\frac{K}{2\eta}z(h-z).$$

Ezek szerint a kérdezett együtthatók:

$$A=-\frac{K}{2\eta},\qquad B=\frac{Kh}{2\eta},\qquad C=0.$$

2.4. A nyomás θ függvényében a $\frac{\Delta p}{\Delta x}=-K$ feltételből határozható meg (*4. ábra*):

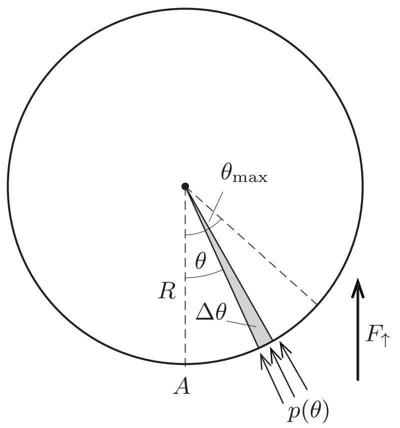
$$p(\theta)=p_A-KR\,\theta.$$

Mivel $p(\theta_{\max})=p_0$, így $p_A=p_0+KR\,\theta_{\max}$, vagyis

$$p(\theta)=p_0+KR(\theta_{\max}-\theta).$$

A hengerpalást egy kicsiny, $\Delta\theta$ szöggel jellemezhető darabkájára ható nyomásból származó erő függőleges komponense:

$$\Delta F_\uparrow=LR\Delta\theta\big(p(\theta)-p_0\big)\cos\theta,$$



4. ábra

hiszen a hengerre mindenhol ható p_0 légnyomás járuléka nyilván kiesik.

Az eredő függőleges irányú erő (a feladatok szövegének végén szereplő matematikai segítség felhasználásával)

$$F_\uparrow=2R^2KL\int_0^{\theta_{\max}}(\theta-\theta_{\max})\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=2R^2KL(1-\cos\theta_{\max}).$$

Ennek az erőnek kell egyensúlyt tartania a gránithenger $R^2\pi L\varrho g$ súlyával:

$$2R^2KL(1-\cos\theta_{\max})=R^2\pi L\varrho g,$$

ahonnan megkapjuk az eddig ismeretlen K állandót:

$$K = \frac{\pi \varrho g}{2(1-\cos\theta_{\max})},$$

valamint a beáramlási pontban a túlnyomást:

$$p_A - p_0 = \frac{\pi \varrho g R \theta_{\max}}{2(1-\cos\theta_{\max})}.$$

Megjegyzés. A hengerre nemcsak a nyomásból, hanem az áramló folyadékban ébredő nyírófeszültségekből származó erő is hat. A $v(z)$ sebességeloszlás ismeretében $\sigma(z)$ is könnyen kiszámítható. Belátható, hogy a nyíróerők járuléka a függőleges irányú erőhöz h/R-szer kisebb, mint a nyomásból adódó járulék, tehát az előbbi valóban elhanyagolható.

2.5. A vályú alján található nyíláson beáramló víz „hozamát" az áramlási sebességprofilból tudjuk meghatározni:

$$Q_{\mathrm{be}} = 2\int_0^h v(z) L\,\mathrm{d}z = 2\int_0^h \frac{K}{2\eta} z(h-z) L\,\mathrm{d}z = \frac{KLh^3}{6\,\eta} = \frac{\pi\varrho g L h^3}{12\,\eta(1-\cos\theta_{\max})}.$$

2.6. A $v(0,\omega)=0$ és $v(h,\omega)=R\omega$ határfeltételekből következik, hogy $D = R\omega/h$, vagyis az áramlási sebességprofil:

$$v(z,\omega) = \frac{Kh}{2\eta}z - \frac{K}{2\eta}z^2 \pm \frac{R\omega}{h}z.$$

2.7. Amíg a henger nem forog, a jobb és a bal oldalhoz tartozó nyírófeszültségek forgatónyomatéka kiegyenlíti egymást. A forgáskor ez az egyensúly felborul. A sebességprofilnak csak az új, $\pm\frac{R\omega}{h}z$ tagjából származó járulékot kell vizsgálnunk. A nyírófeszültségekben ennek megfelelő járulék:

$$\sigma'(z) = \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{R\omega}{h}z\right) = \eta\frac{R\omega}{h}.$$

Ez a (helytől független, de a szögsebességgel arányos) nyírófeszültség mindkét oldalon fékezi a forgást, a forgatónyomatéka

$$M = \sigma'(z)\cdot LR\cdot 2\theta_{\max}\cdot R = \frac{2\eta L R^3\theta_{\max}}{h}\omega.$$

Az $m = R^2\pi L\varrho$ tömegű, $\Theta = \frac{1}{2}mR^2$ tehetetlenségi nyomatékú henger forgásegyenlete:

$$-M = \Theta\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t},$$

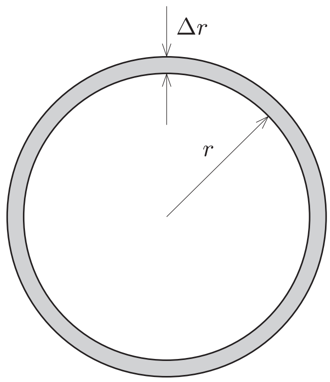
ami a fentebb kiszámított mennyiségek behelyettesítése után így írható:

$$\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{4\eta\theta_{\max}}{\varrho\pi h R}\,\omega(t) \equiv -\lambda\,\omega(t).$$

Ez a (differenciál)egyenlet a radioaktív bomlások egyenletével analóg, így a megoldása a bomlástörvény ismert alakja:

$$\omega(t) = \omega_0 \, \mathrm{e}^{-\lambda t} \equiv \omega_0 \, \mathrm{e}^{-\frac{4\eta\theta_{\max}}{\varrho\pi h R} t}.$$

3. feladat: Fehér törpék keletkezése



5. ábra

3.1. A csillag tömegsűrűsége

$$\varrho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3}.$$

„Rakjuk össze" (gondolatban) a csillagot vékony gömbhéjakból (*5. ábra*)! Amikor a csillag éppen r sugarú, a következő, Δr vastagságú gömbhéj darabkáinak a „végtelenből" történő ideszállításakor

$$\Delta W = -\gamma \frac{\varrho \frac{4\pi r^3}{3} r^3}{r} \cdot \varrho 4\pi r^2 \, \Delta r$$

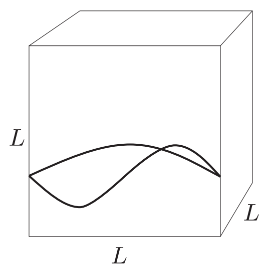
munkát végzünk. A teljes energia ezen munkák összege:

$$E_{\mathrm{grav}} = \sum \Delta W = -\gamma \varrho^2 \frac{16\,\pi^2}{3} \int\limits_0^R r^4 \, \mathrm{d}r = -\frac{3}{5} \cdot \gamma \frac{M^2}{R}.$$

Megjegyzés. A gravitáció és az elektrosztatika egyenletei közötti hasonlóság felismerésével, majd az $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ energiasűrűség integrálásával ugyanerre az eredményre juthatunk.

3.2. Az elektron lehetséges hullámhosszaira (a kocka mindhárom oldalélével párhuzamos irányban) a következő feltétel teljesül (*6. ábra*):

$$n\frac{\lambda}{2} = L \qquad \text{(ahol } n \text{ pozitív egész).}$$



6. ábra

A hullámhossz és az impulzus közötti kapcsolatot a de Broglie-féle $\lambda = h/p$ összefüggés adja meg. Az elektron lehetséges impulzuskomponensei tehát

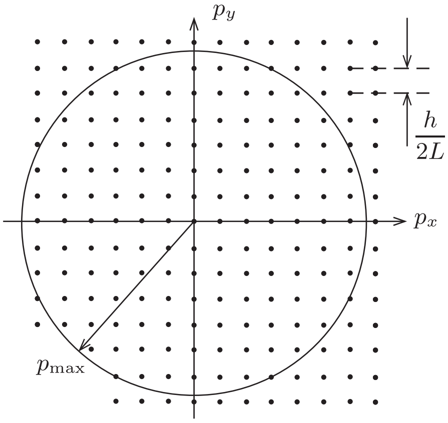
$$p_x = \pm\frac{n_x h}{2L}; \quad p_y = \pm\frac{n_y h}{2L}; \quad p_z = \pm\frac{n_z h}{2L},$$

ahol n_x, n_y és n_z pozitív egészek.

3.3. Az elektron energiája

$$E = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2},$$

így alapállapotban az összes elektron egy



7. ábra

$$p_{\max} = \sqrt{2m_e E_{\max}}$$

sugarú gömbön belül helyezkedik el a $\boldsymbol{p}$ vektor komponensei által „kifeszített" ún. impulzustérben (lásd a *7. ábrát*, amelyen az áttekinthetőség kedvéért csak két dimenzióban ábrázoltuk az elektronállapotokat). Egy-egy elektronállapot $\left(\frac{h}{2L}\right)^3$ térfogatot foglal el az impulzustérben, így az elektronállapotok száma (jó közelítéssel)

$$N = 2 \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi p_{\max}^3}{\left(\frac{h}{2L}\right)^3}.$$

(A jobb oldalon a 2-es faktor a Pauli-elv miatt jelent meg.) Ebből $p_{\max}$ értéke

$$p_{\max} = \frac{h}{4L}\left(\frac{3}{\pi}N\right)^{1/3}.$$

3.4. Az impulzustérben a p sugarú, Δp vastagságú gömbhéjban lévő elektronállapotok száma:

$$\Delta N = 2\frac{4\pi p^2}{\left(\frac{h}{2L}\right)^3}\Delta p.$$

(A 2-es faktor a jobb oldalon ismét a Pauli-elv miatt szerepel.) Ebben a héjban mindegyik elektron energiája $\frac{p^2}{(2m_e)}$, ezért a héj összes energiája

$$\Delta E = \frac{8\pi p^2}{\left(\frac{h}{2L}\right)^3}\Delta p \cdot \frac{p^2}{(2m_e)} = \frac{32\pi L^3}{h^3 m_e}\, p^4 \Delta p.$$

A teljes elektronrendszer energiája tehát

$$E_N = \frac{32\pi L^3}{h^3 m_e}\int_0^{p_{\max}} p^4 \,\mathrm{d}p = \frac{32\pi L^3}{h^3 m_e} \cdot \frac{p_{\max}^5}{5} = \frac{32\pi}{5}\left(\frac{3}{64\pi}\right)^{5/3} \cdot \frac{h^2}{m_e} \cdot N^{\frac{5}{3}} \cdot L^{-2}.$$

Leolvashatjuk, hogy a keresett dimenziótlan állandók:

$$\alpha = \frac{32\pi}{5}\left(\frac{3}{64\pi}\right)^{5/3} \approx 0{,}018; \qquad \beta = \frac{5}{3}; \qquad \gamma = -2.$$

3.5. A csillag teljes energiája

$$E_{\text{teljes}} = E_{\text{grav}} + E_N = -\frac{3}{5}\gamma\frac{M^2}{R} + \alpha'\frac{h^2}{m_e}N^{5/3}R^{-2}, \quad \text{ahol} \quad \alpha' = \frac{3}{10 \cdot 2^{2/3}}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{4/3}.$$

A csillag egyensúlyi állapotát az $E_{\text{teljes}}(R)$ függvény minimuma adja meg. A szélsőértékhez tartozó R_{ft} csillagsugarat deriválással, vagy $E_{\text{teljes}}(R)$ (ami az $1/R$ változó másodfokú függvénye) teljes négyzetté alakításával lehet meghatározni. A fehér törpe egyensúlyi sugarára így az

$$R_{\text{ft}} = \frac{10}{3}\,\frac{hN^{5/3}\alpha'}{\gamma M^2 m_{\text{e}}}$$

kifejezést kapjuk. Mivel a csillag össztöltése 0, N nemcsak az elektronok, hanem a protonok számával is egyenlő. A csillag össztömegét lényegében a benne lévő (egyenként m_{p} tömegű) protonok adják, így $N \approx M/m_{\text{p}}$. Ezt felhasználva és az ismert adatokat behelyettesítve végül megkapjuk a Naphoz hasonló tömegű fehér törpe sugarát:

$$R_{\text{ft}} = \frac{10}{3}\,\frac{h\alpha'}{\gamma M^{1/3} m_{\text{e}} m_{\text{p}}^{5/3}} = \frac{1}{2^{2/3}}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{4/3}\frac{h^2}{\gamma M^{1/3} m_{\text{e}} m_{\text{p}}^{5/3}} \approx 22\,800\ \text{km}.$$

Vigh Máté

Megoldásvázlatok a 2015/6. sz. emelt szintű fizika gyakorló feladatsorhoz

Tesztfeladatok:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	C	A	D	B	A	C	A	D	A	A	C	C	C	A

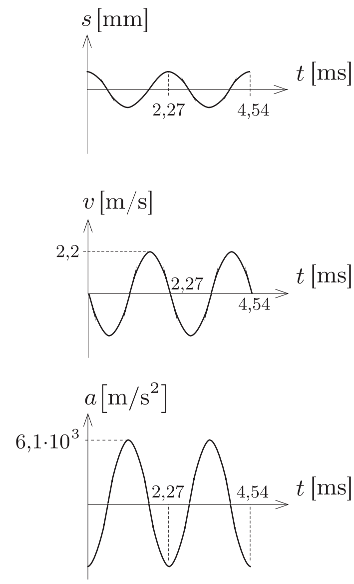
F1. A hullámhossz levegőben:

$$\lambda = \frac{c_{\text{levegőben}}}{f} = \frac{330\ \text{m}\,\text{s}^{-1}}{440\ \text{s}^{-1}} = 0{,}75\ \text{m} = 75\ \text{cm}.$$

A hullámhossz a húron 1,6 m (hiszen a húr teljes hosszára egy félhullám jut), így a fázissebesség

$$c_{\text{húron}} = \lambda_{\text{húron}}\cdot f = 1{,}6\ \text{m}\cdot 440\ \text{s}^{-1} = 704\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A duzzadóhely s kitérése, továbbá annak v sebessége és a gyorsulása időben (az *ábrán* látható módon) periodikusan változik. A rezgés körfrekvenciája: $\omega = 2\pi f = 2{,}76$ kHz, a kitérés legnagyobb értéke a megadott $A = 8\cdot 10^{-4}$ m, a sebesség maximuma $A\omega$, a gyorsulásé pedig $A\omega^2$ módon számítható.



F2. A foton energiája $E = hf = \frac{hc}{\lambda} = 0{,}52$ aJ, és mivel a cézium kilépési munkája 0,31 aJ (táblázati adat), a kilépő elektron mozgási energiája $E_1 = 0{,}21$ aJ. Az elektromos mező munkája $W = eU = 1{,}6$ aJ, az elektron mozgási energiája a folyamat végén $E_2 = E_1 + W = 1{,}8$ aJ, a sebessége tehát

$$v = \sqrt{\frac{2E_2}{m}} = 2{,}00 \cdot 10^6 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

F3. A megtett út

$$s = vt = 30 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 3 \ \mathrm{s} = 90 \ \mathrm{m}.$$

A (domború) visszapillantó tükör fókusztávolsága: $f = -\frac{1}{2}R = -1$ m, a nagyítások pedig a megadott méretek arányából $N_1 = -0{,}0125$ és $N_2 = -0{,}02$. A lencsetörvény szerint

$$N = \frac{k}{t} = \frac{f}{t-f}, \qquad \text{azaz} \qquad t = f\left(\frac{1}{N} + 1\right),$$

ahonnan az autók távolsága kezdetben $t_1 = 79$ m, 3 másodperccel később pedig $t_2 = 49$ m. A két autó relatív sebessége ezek szerint 10 m/s, a hátul jövő autó sebessége tehát 40 m/s = 144 km/h.

F4. A huzal ellenállása

$$R = \frac{1{,}4 \cdot 10^{-6} \ \Omega\,\mathrm{m} \cdot 15 \ \mathrm{m}}{(0{,}5 \ \mathrm{mm})^2 \pi} \approx 26{,}7 \ \Omega,$$

a felvett teljesítmény

$$P_{\mathrm{fel}} = \frac{U^2}{R} = 2{,}0 \ \mathrm{kW},$$

a leadott (melegítésre fordított) hőteljesítmény pedig

$$P_{\mathrm{le}} = \eta P_{\mathrm{fel}} = 1{,}7 \ \mathrm{kW}.$$

A melegítéshez szükséges hő

$$Q = 1{,}7 \ \mathrm{kg} \cdot 70 \ \mathrm{K} \cdot 4{,}2 \ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}} = 500 \ \mathrm{kJ},$$

a melegítéshez szükséges idő tehát

$$t = \frac{Q}{P_{\mathrm{le}}} = 294 \ \mathrm{s} = 4{,}9 \ \mathrm{perc}.$$

Ugyanennyi hő

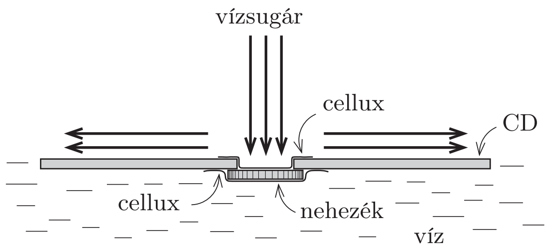
$$m = \frac{Q}{L} = \frac{500 \ \mathrm{kJ}}{2261 \ \mathrm{kJ/kg}} = 0{,}22 \ \mathrm{kg}$$

vizet forral el, tehát 1,48 kg (vagyis 1,48 liter) marad a vízforralóban.

Varga Balázs
Budapest

Fizikából kitűzött feladatok

M. 353. Egy sérült vagy már nem használt CD lemez közepén lévő lyukra „ragasszunk" celluxszalag segítségével egy (vagy több) pénzérmét! (A lyuk átellenes oldalára is ragasszunk celluxot úgy, hogy az ottani kis bemélyedés pereme ne maradjon éles.) A lemezt – a nehezékkel lefelé fordítva – helyezzük óvatosan egy tálban lévő víz felszínére, és adott magasságból engedjünk a közepére vékony, függőleges sugárban vizet. Ha a vízhozam elegendően (de nem túlságosan) nagy, a CD lemez akkor sem süllyed el, ha elengedjük.



Mérjük meg, hogyan függ az „úszáshoz" szükséges minimális vízhozam a lemez és a nehezék együttes tömegétől!

(*6 pont*) Közli: *Baranyai Klára,* Budapest

P. 4758. Milyen hosszú ellenálláshuzalt válasszunk az 1,6 $\Omega\ \mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$ fajlagos ellenállású, 0,1 mm^2 keresztmetszetű vezetékből, hogy a 230 V-os hálózatra kapcsolva 300 W-os merülőforralót készíthessünk belőle?

(*3 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 4759. Mekkora szöget kell bezárni két erőnek, hogy az eredőjük nagysága akkora legyen, mint a két erő nagyságának mértani közepe?

Mi a feltétele annak, hogy ez a szög minimális legyen, és mekkora ez a minimális érték?

(*4 pont*) *Strasser V. Benő* (1884–1966) feladata

P. 4760. Egy autópályán haladó gépkocsi sebessége v_0. Egy adott pillanatban a sebességét egyenletesen változtatni kezdi, és ettől kezdve 84 m hosszúságú utat 3 s, a következő 84 m-t 4 s alatt teszi meg.

Határozzuk meg a gépkocsi v_0 sebességét és állandó a gyorsulását!

(*4 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

P. 4761. Egy érdekes jármű gyorsulása a (v_1, v_2) sebességintervallumban fordítottan arányos a sebességével, azaz $a = A/v$ (A egy adott pozitív állandó).

a) Mennyi idő alatt gyorsul fel a jármű v_1 sebességről v_2-re?

b) Mekkora ezalatt a jármű teljesítménye?

(*4 pont*) Közli: *Sal Kristóf,* Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn.

P. 4762. Az A_0 keresztmetszetű fahenger aljára egy vasdarabot erősítettünk, így a fahenger stabilan úszik abban a ϱ_1 sűrűségű folyadékban, amely egy A_1 keresztmetszetű, hengeres főzőpohárban van. Ez a főzőpohár maga is úszik egy $A_2 > A_1$ keresztmetszetű másik főzőpohárban lévő ϱ_2 sűrűségű folyadékban. E nagyobb pohár is úszik, mégpedig az $A_3 > A_2$ keresztmetszetű, még szélesebb főzőpohárban lévő ϱ_3 sűrűségű folyadékban és így tovább. . .. Összesen n darab főzőpohár helyezkedik el az asztalon, mindegyik pohár tengelye és a fahengeré is függőleges.

Ezután a fahengert függőlegesen lefelé nyomjuk F erővel. (Sem a fahenger alja, sem a főzőpoharaké nem ér hozzá a tartóedény aljához.)

a) Mennyivel nő a fahenger bemerülése az első folyadékba?

b) Mennyivel emelkedik a folyadékszint az első főzőpohárban?

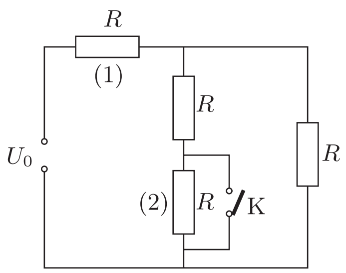
c) Mennyivel emelkedik a folyadékszint az i-edik főzőpohárban?

(*5 pont*) Közli: *Lambodar Mishra,* Ahmedabad, India

P. 4763. Egy üvegkocka egyik lapján belépő fénysugár három olyan oldallapról verődik vissza egymás után, amelyek közös pontja a kocka valamelyik csúcsa. Ezek után a fénysugár ugyanazon a lapon lép ki a kockából, amelyen belépett.

Mit állíthatunk a kilépő fénysugár irányáról?

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest



P. 4764. Az *ábrán* látható elektromos hálózatban minden fogyasztó ugyanakkora R ellenállású. Hány százalékkal változik meg az (1)-es fogyasztó teljesítménye, ha a (2)-es fogyasztót a K kapcsolóval rövidre zárjuk?

(*4 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

P. 4765. Egy 250 mH induktivitású és 0,3 Ω ellenállású tekercsre egy állandó feszültségű telepet kapcsolunk. Mennyi idő múlva éri el a tekercsben folyó áram erőssége a végül beálló stacionárius érték

a) 50%-át;

b) 75%-át?

(*4 pont*) *Orosz példatári feladat*

P. 4766. 200 nm-es ultraibolya fény világít meg egy alumíniumlemezt.

a) Mekkora lesz a kilépő elektronok között a leggyorsabb és a leglassabb elektron mozgási energiája?

b) Mekkora a zárófeszültség?

(*4 pont*) *Román tankönyvi feladat*

P. 4767. Egy függőleges tengelyű mérőhenger falába sok apró lyukat fúrtunk. A hengert H magasságig feltöltjük vízzel, melynek következtében a lyukakon (a mérőhenger falára merőlegesen) vékony vízsugarak lövellnek ki. Milyen alakú a vízsugarak burkolófelülete? (A vízsugarak nem akadályozzák egymást, és folyamatos utántöltéssel gondoskodunk a hengerben a vízszint állandóságáról.)

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest
(Kunfalvi Rezső olimpiai válogatóverseny, 2015)

❄

Beküldési határidő: 2015. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 65. No. 7. October 2015)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 409): **K. 469.** A certain paint needs to be diluted in a 2 : 1.5 ratio, that is, 2 litres of water need to be added to 1.5 litres of paint. Violette Palette, the artist first made 9 litres of a mixture, half paint, half water. Then she realized that this was the wrong ratio, and calculated how much more water to add to achieve the correct proportion. However, instead of the amount of water needed, she added an equal amount of paint by mistake. The second time she did not make any mistake, and added the appropriate quantity of water required for the correct ratio. How many litres of mixture did she get eventually? **K. 470.** We have cubes of two different sizes, each with edges of integer length in cm. The edges of the red cubes are 5 cm longer than the edges of the blue ones. By stacking 15 cubes on top of each other, we got a tower of height 140 cm. How long are the edges if the difference between the numbers of red and blue cubes used is as small as possible? **K. 471.** Barbara has one 5-forint coin (HUF, Hungarian currency), one 10-forint coin, one 20-forint coin, three 50-forint coins and three 100-forint coins in her purse. How many different amounts can she pay exactly (that is, without getting back any change)? **K. 472.** Find the sum of all positive two-digit numbers with exactly 12 divisors. **K. 473.** What is the sum of the digits in the binary (base-2) representation of the product $2^{2015} \cdot 15$? **K. 474.** Ann and Bob are playing a word guessing game. Anna thinks of a meaningful Hungarian word of four letters, which Bob is trying to guess. If Bob tries a certain Hungarian word of four letters, Ann will tell him how many of its letters occur in her word, too, and how many of those are in the correct place and how many are in the wrong place. What may have been the word that Ann had in mind? (No knowledge of the Hungarian language is required. Note that O and Ó are different letters in the Hungarian alphabet.)

Bob's guesses	Number of correct letters in the right position	Number of correct letters in the wrong position
RÓKA	1	0
OKOS	0	0
IKRA	2	0
RITA	1	1
DANÓ	0	3

New exercises for practice – competition C (see page 410): **Exercises up to grade 10: C. 1308.** If appropriate triangles are cut into two parts with a line through the vertex with the largest angle, two isosceles triangles are obtained. What may be the angles of an obtuse-angled triangle if this division into two parts can be accomplished in two different ways? **C. 1309.** t denotes the area of a certain triangle, R is the radius of the circumscribed circle, and r is the radius of the incircle. Prove that $\frac{t}{3} < Rr$. **Exercises for everyone: C. 1310.** Alex took 19 500 forints (HUF, Hungarian currency) with him on a four-day trip. On each day, he spent one third of his remaining money plus a constant amount. What was the constant amount if his money lasted just until the end of the trip? **C. 1311.** Each of the numbers $\frac{1}{3}$; 0,375; 1; 1,4; $\sqrt{2}$; $\frac{13}{8}$; 2; $\frac{13}{5}$; $\frac{8}{3}$; 3; 4; $\sqrt{18}$; $\sqrt{32}$ is given either a plus sign or a minus sign, and then the sum is calculated. In how many different ways may we choose the signs to get 1 as a sum? **C. 1312.** Suppose that $xy+x+y=44$ and $x^2y+xy^2=448$. Then evaluate x^2+y^2. (*M&IQ*) **Exercises upwards of grade 11: C. 1313.** One vertex of an isosceles triangle is the point $(0,1)$. One of the other two vertices lies on the x-axis, and the other lies on the line of equation $y=3$. What is the area of the triangle? **C. 1314.** Two sides of a triangle are of unit length and they enclose an angle of 108°. Inscribe a regular pentagon in the triangle such that three sides of the pentagon lie on the sides of the triangle. How long are the sides of the inscribed pentagon?

New exercises – competition B (see page 411): **B. 4732.** The teacher of a class of 36 students enters the averages of the mathematics test grades in a 6×6 table. Each student has a different mean grade. The teacher marks the largest entry in each column of the table. He finds that all of the 6 marked numbers lie in different rows. Then he marks the largest entry in each row, and finds that these all lie in different columns. Prove that the two sets of six numbers are equal. (*3 points*) (Proposed by *J. Szoldatics,* Budapest) **B. 4733.** Every edge of a simple connected graph of $n\geqslant 2$ vertices is labelled with either a 1 or with a 2. Then each vertex is assigned with the product of the numbers on the edges product of the numbers on the related edges on it. Show that there will be a pair of two vertices assigned with the same number. (*3 points*) (Proposed by *A. Hujdurović,* Koper) **B. 4734.** Some fields (unit cubes) constituting a cubical lattice of edge 2015 units are infected by an unknown disease. The disease will spread if at least t fields in some row parallel to any edge of the cube are infected ($1\leqslant t\leqslant 2015$). In that case, every field of that row will become infected in one minute. Én is javaslok egyet: How many fields need to be infected initially in order to a) make it possible b) be certain that the infection reaches all fields of the cube? (*6 points*) (Proposed by *G. Mészáros,* Budapest) **B. 4735.** Construct a cyclic quadrilateral, given one vertex, the line of the diagonal through the vertex, and the intersections of the lines of the two pairs of opposite sides. (*4 points*) **B. 4736.** Let n be a positive integer. Solve the simultaneous equations

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|=\sum_{i=1}^{n}|x_i^3|=\sum_{i=1}^{n}\frac{2|x_i|^3}{x_i^2+1}.$$

(*5 points*) (Proposed by *K. Williams,* Szeged) **B. 4737.** D is the foot of the altitude drawn to the hypotenuse AB of a right-angled triangle ABC. The angles bisectors of $\angle ACD$ and $\angle BCD$ intersect hypotenuse AB at E and F, respectively. Determine the ratio of the inradius of triangle ABC to the circmradius of triangle CEF. (*5 points*) (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **B. 4738.** C is an arbitrary point of a circle k of diameter AB, different from A and B. Drop a perpendicular from C onto diameter AB. The foot of the perpendicular on line segment AB is D, and the other intersection with the circle k is E. The circle of radius CD centred at C intersects circle k at points P and Q. Let M denote the intersection of line segments CE and PQ. Dertermine the value of $\frac{PM}{PE}+\frac{QM}{QE}$. (*4 points*) (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **B. 4739.** Consider all real numbers x for which $\tan x+\cot x$ is a positive integer. Find those of them for which $\tan^3 x+\cot^3 x$ is a prime number. (*4 points*) (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **B. 4740.** Eight unit cubes, with corresponding edges parallel, are glued together to form a solid. Prove that the surface area of the resulting solid is at least 24 units. Only the outer surface counts, even if the resulting solid contains a cavity. (*6 points*)

New problems – competition A (see page 413): **A. 650.** There is given an acute-angled triangle ABC with a point X marked on its altitude starting from C. Let D and E be the points on the line AB that satisfy $\sphericalangle DCB=\sphericalangle ACE=90^\circ$. Let K and L be the points on line segments DX and EX, respectively, such that $BK=BC$ and $AL=AC$. Let the line AL meet BK and BC at Q and R, respectively; finally let the line BK meet AC at P. Show that the quadrilateral $CPQR$ has an inscribed circle. **A. 651.** Determine all real polynomials $P(x)$ that satisfy

$$P\big(x^3-2\big)=P(x)^3-2.$$

(*CIIM 2015, Mexico*) **A. 652.** Prove that there exists a real number $C>1$ with the following property: whenever $n>1$ and $a_0<a_1<\dots<a_n$ are positive integers such that $\frac{1}{a_0},\frac{1}{a_1},\dots,\frac{1}{a_n}$ form an arithmetic progression, then $a_0>C^n$. (*CIIM 2015, Mexico*)

Problems in Physics

(see page 443)

M. 353. Stick a coin (or several coins) with a piece of cello-tape onto the hole at the middle of a damaged or not used CD disc. (Put cello-tape to the other side of the hole as well in order to make the rim of the small hole smooth.) Carefully place the disc onto the surface of water in a dish – such that the coin is at the bottom of the disc – and from a certain height pour water onto the hole of the disc. The water beam should be narrow and vertical. If the water beam is strong enough (but not too strong) then the CD disc does not sink when it is released. Measure how the minimum amount of water needed for the floating of the disc depends on the total mass of the disc-coin system.

P. 4758. A piece of wire is to be used to make an immersion heater rated at 230 V, and 300 W. What should the length of the wire be, if the cross section of the wire is 0.1 mm^2, and its resistivity is 1.6 $\Omega\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$? **P. 4759.** What should the angle between two forces be, if the magnitude of their sum is the same as the geometric mean of the magnitudes of the forces? Under what conditions will this angle be minimum, and what is this minimum value? **P. 4760.** The speed of a car travelling on a highway is v_0. At a certain instant the speed of the car is started to vary uniformly, and from that instant the first 84 m is covered in 3 s, and the next 84 m is covered in 4 s. Determine the initial speed of the car v_0, and its acceleration a. **P. 4761.** The acceleration of a strange car is inversely proportional to its speed in the speed interval of (v_1, v_2), so $a = A/v$ (A is a positive constant). *a*) How long does it take for the car to speed up from the speed v_1 to the speed v_2? *b*) What is the power of the car during this motion? **P. 4762.** A piece of iron is attached to the bottom of a wooden cylinder of cross section A_0, so the wooden cylinder is floating in a sample of liquid of density ϱ_1, which liquid is in a beaker of cross-section A_1. The beaker is also floating in some liquid of density ϱ_2, in another bigger beaker of cross section $A_2 > A_1$. This beaker is also floating in some liquid of density ϱ_3 in another even wider beaker of cross-section $A_3 > A_2$, and so on $\ldots$. Altogether there are n beakers on the table. The symmetry axes of all beakers and the wooden cylinder are vertical. Then the wooden cylinder is pushed down by a vertical force of F. (Neither the wooden cylinder nor any of the beakers touch the other beaker below them.) *a*) By what amount did the height of immersed part of the wooden cylinder in the first liquid increase? *b*) By what amount did the level of the liquid in the first liquid increase? *c*) By what amount did the level of the liquid in the i-th beaker increased? **P. 4763.** A light-ray entering into a glass cube through one of the faces of the cube is reflected from three faces of the cube. The common point of these three faces is one of the vertices of the cube. Then the reflected light-ray emerges from the same face of the cube as it entered into it. What can be stated about the direction of the emerging light-ray? **P. 4764.** The resistance of each resistor shown in the *figure* is the same R. By what percent will the dissipated power at resistor (1) change if switch K is turned on to create a short circuit through the resistor (2)? **P. 4765.** A coil of inductance 250 mH, and of resistance 0.3 Ω is connected to a battery of constant terminal voltage. How much time elapses until the current through the coil reaches *a*) 50% of the stationary final value; *b*) 75% of the stationary final value? **P. 4766.** An aluminium sheet is illuminated by ultraviolet light of wavelength 200 nm. *a*) what will the kinetic energy of the fastest and the slowest emitted electrons? *b*) What is the stopping voltage? **P. 4767.** Several small holes are drilled into the wall of a cylinder shaped container. The symmetry axis of the cylinder is vertical. The container is filled with water up to a height of H, and due to this, narrow beams of water flow out of the container (perpendicularly to the wall of the cylinder). What is the shape of the envelope of the beams of water? (The water beams do not form obstacles to each other, and the water level in the container is kept constant by refilling the water.)