KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

65. évfolyam 6. szám Budapest, 2015. szeptember

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: OLÁH VERA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Kiadó igazgatója: KULCSÁR CECÍLIA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.,
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A matematika bizottság vezetője: HERMANN PÉTER
Tagjai: KÁROLYI GERGELY, KISS GÉZA, KISS GYÖRGY, KÓS GÉZA, KÓS RITA, LORÁNT LÁSZLÓ, LORÁNTFY LÁSZLÓ, NAGY GYULA, PACH PÉTER PÁL
A fizika bizottság vezetője: RADNAI GYULA
Tagjai: GÁLFI LÁSZLÓ, HOLICS LÁSZLÓ, HONYEK GYULA, SIMON LÁSZLÓ, SZÁSZ KRISZTIÁN, VIGH MÁTÉ, VLADÁR KÁROLY, WOYNAROVICH FERENC
Az informatika bizottság tagjai: FARKAS CSABA, FODOR ZSOLT, GÉVAY GÁBOR, SCHMIEDER LÁSZLÓ, SIEGLER GÁBOR, WEISZ ÁGOSTON
Borítók: SCHMIEDER LÁSZLÓ
Fordítók: GRÓF ANDREA, TASNÁDI ANIKÓ, LÓCZI LAJOS
Szerkesztőségi titkár: TRÁSY GYÖRGYNÉ

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, V. emelet 5.106.; Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1.A, V. emelet 5.106., 1117–Budapest, Hungary telephone: +36 (1) 372-2850 or on the Postal address H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary, or on the Internet: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.

Főszerkesztőváltás a KöMaL-nál

Nagy Gyula 2001 szeptemberétől kezdve, 14 tanéven keresztül vezette a szerkesztőség munkáját. A fizika és a matematika mellett a 2001 szeptemberében induló informatika pontversenyért is ő volt a felelős. Vezetése alatt rengeteg innováció történt a lapnál. 2004-től az Abacus pontversenyből a KöMaL versenyzésre áttérők számára egy könnyebb, K pontversenyt indított a lap, 2006-ban pedig további kínálatbővítésként az internetes Tesztversenyt. Nevéhez fűződik a `versenyvizsga.hu` portál elindítása és fejlesztése, elősegítette a fizikai kísérletek portáljának létrejöttét, az Irány a Nobel-díj CD (KöMal 1994–2003) kiadását. Nagy energiát fektetett a KöMaL angol nyelvű számainak elkészíttetésébe és terjesztésébe: 2002 és 2005 között öt angol szám is megjelent. Sajnos a szűkös és gyakran kiszámíthatatlan anyagi feltételek nem tették lehetővé, hogy a jó kezdeményezések minden évben továbbfejleszthetők legyenek. Ezért csak egy alkalommal jelent meg a KöMaL füzetek sorozat (Pataki János írásával) és az Emelt szintű, illetve Bővített emelt szintű matematika érettségi feladatgyűjtemény. Bár a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapot előfizetők száma 1990 óta lassan egyre csökkenő tendenciát mutat, a főszerkesztő a szerkesztőbizottságok áldozatkész munkájával máig megőrizte azt a színvonalat, ami a tehetséges fiatalok folyamatos fejlesztéséhez több mint egy évszázad során bevált, miközben továbbfejlesztette a lap körüli tevékenységeket az új évezred irányai mentén. Köszönjük!

Idén ősztől **Ratkó Éva** a főszerkesztő, aki 1998 óta a lap munkatársa.

Oláh Vera
MATFUND Alapítvány

Beszámoló az 56. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról

Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát július 4–16. között Thaiföldön, Chiang Mai városában rendezték meg.

A versenyen 104 ország 577 diákja vett részt. Ez a résztvevő országok számát tekintve csúcsbeállítás, a résztvevő versenyzők számát tekintve pedig abszolút csúcs. (2009-ben, Brémában is 104 ország vett részt, de ott a versenyzők száma csak 565 volt.) A legtöbb ország a megengedett maximális létszámú, 6 fős csapattal szerepelt; az alábbi listában az országnév után zárójelben tüntettem fel az adott ország versenyzőinek számát, ha ez hatnál kevesebb volt.

A résztvevő országok: *Albánia, Algéria, Amerikai Egyesült Államok, Argentína, Ausztrália, Ausztria, Azerbajdzsán, Banglades, Belgium, Belorusszia, Bolívia (5), Bosznia-Hercegovina, Botswana, Brazília, Bulgária, Chile (2), Ciprus, Costa Rica, Csehország, Dánia, Dél-Afrika, Dél-Korea, Ecuador, Észak-Korea,* *Észtország, Finnország, Franciaország, Fülöp-Szigetek, Ghána (5), Görögország, Grúzia, Hollandia, Hong Kong, Horvátország, India, Indonézia, Irán, Írország, Izland, Izrael, Japán, Kambodzsa, Kanada, Kazahsztán, Kína, Kirgizisztán, Kolumbia, Koszovo, Kuba (1), Lengyelország, Lettország, Liechtenstein (1), Litvánia, Luxemburg (2), Macedónia, Magyarország, Makaó, Malajzia, Marokkó, Mexikó, Moldova, Mongólia, Montenegro (3), Nagy-Britannia, Németország, Nicaragua (3), Nigéria, Norvégia, Olaszország, Oroszország, Örményország, Pakisztán, Panama (3), Paraguay, Peru, Portugália, Puerto Rico (3), Románia, El Salvador (4), Spanyolország, Sri Lanka, Svájc, Svédország, Szaúd-Arábia, Szerbia, Szingapúr, Szíria, Szlovákia, Szlovénia, Tadzsikisztán (5), Tajvan, Tanzánia (3), Thaiföld, Törökország, Trinidad és Tobago (4), Tunézia (4), Türkmenisztán, Uganda (5), Új-Zéland, Ukrajna, Uruguay, Üzbegisztán, Venezuela (2), Vietnam.*

A versenyen szokás szerint mindkét napon négy és fél óra alatt 3–3 feladatot kellett megoldani. (A feladatokat alább közöljük.) Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont járt, így egy versenyző maximális teljesítménnyel 42 pontot szerezhetett. A verseny befejezése után megállapított ponthatárok szerint aranyérmet a 26–42 pontot elért, ezüstérmet a 19–25 pontos, míg bronzérmet a 14–18 ponttal rendelkező tanulók szereztek. Dicséretben részesültek azok a versenyzők, akiknek 14-nél kevesebb pontjuk volt, de egy feladatot hibátlanul megoldottak.

A magyar csapatból

Williams Kada (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 10. o.t.) 25 ponttal,

Szabó Barnabás (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált Isk. és Gimn., 11. o.t.) 22 ponttal és

Fehér Zsombor (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált Isk. és Gimn., 12. o.t.) 21 ponttal *ezüstérmet,*

Janzer Barnabás (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált Isk. és Gimn., 12. o.t.) 16 ponttal,

Baran Zsuzsanna (Debreceni Fazekas Mihály Gimn., 10. o.t.) 15 ponttal és

Di Giovanni Márk (Győr, Révai Miklós Gimn. és Koll., 12. o.t.) 14 ponttal *bronzérmet* szerzett.

A magyar csapat vezetője *Pelikán József* (ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék), helyettes vezetője *Dobos Sándor* (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.) volt. *Kós Géza* (MTA SZTAKI, ELTE TTK) a problémakiválasztást előkészítő bizottság meghívott tagjaként vett részt az olimpián.

Az országok (nem-hivatalos) pontversenyében Magyarország a 20–21. helyen végzett. A csapatverseny élmezőnyének sorrendje így alakult (megszerzett pontszámaikkal):

1. USA 185, 2. Kína 181, 3. Dél-Korea 161, 4. Észak-Korea 156, 5. Vietnam 151, 6. Ausztrália 148, 7. Irán 145, 8. Oroszország 141, 9. Kanada 140, 10. Szingapúr 139, 11. Ukrajna 135, 12. Thaiföld 134, 13. Románia 132, 14. Franciaország 120, 15. Horvátország 119, 16. Peru 118, 17. Lengyelország 117, 18. Tajvan 115, 19. Mexikó 114, **20–21. Magyarország** és Törökország 113, 22–24. Brazília, Japán és Nagy-Britannia 109, 25. Kazahsztán 105, 26. Örményország 104, 27. Németország

102, 28. Hong Kong 101, 29–32. Bulgária, Indonézia, Olaszország és Szerbia 100 ponttal.

Szeretnék köszönetet mondani a versenyzők tanárainak. Az alábbi felsorolásban minden tanár neve után monogramjukkal jelöltem azokat a diákokat, akik a tanítványaik:

Árki Tamás (DGM), *Bruder Györgyi* (DGM), *Dobos Sándor* (BZs, DGM, FZs, JB, SzB, WK), *Gyenes Zoltán* (FZs, JB, SzB), *Juhász Péter* (DGM), *Kiss Gergely* (FZs, JB), *Kiss Géza* (SzB), *Kosztolányi József* (WK), *Lakatos Tibor* (BZs), *Mike János* (WK), *Molnár-Sáska Gábor* (WK), *Pósa Lajos* (BZs, DGM, FZs, JB, SzB, WK), *Schultz János* (WK), *Surányi László* (FZs, JB, SzB), *Táborné Vincze Márta* (SzB), *Tóth Mariann* (BZs).

Ugyancsak szeretnék köszönetet mondani Dobos Sándornak, mint a központi olimpiai előkészítő szakkör vezetőjének, továbbá azoknak a tanároknak, fiatal matematikusoknak és egyetemistáknak, akik a felkészítésben közreműködtek.

Chiang Mai környéke természeti és kulturális látványosságokban is bővelkedik – ezekből a szervezők igyekeztek minél többet megmutatni. A legemlékezetesebb program azonban legtöbbünknek alighanem az elefántparkban tett látogatás volt. (E sorok szerzője is először ült életében elefántháton.)

Az olimpiát közvetlenül megelőző intenzív edzőtáborhoz Rockenbauer Gabriella (a tavalyi ezüstérmes Homonnay Bálint édesanyja) biztosított számunkra helyszínt, amiért ezúton is szeretnénk köszönetet mondani.

A következő matematikai diákolimpiát Hong Kong rendezi, 2016. július 6–16. között.

Pelikán József

Az 56. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatai*

Első nap

1. feladat. A sík pontjainak egy véges $\mathcal{S}$ halmazát *kiegyensúlyozott*nak nevezzük, ha $\mathcal{S}$ bármely két különböző A, B pontjához van $\mathcal{S}$-nek olyan C pontja, amire $AC = BC$. $\mathcal{S}$-et *centrum-nélküli*nek nevezzük, ha $\mathcal{S}$ bármely három páronként különböző A, B, C pontjára teljesül az, hogy nincs $\mathcal{S}$-nek olyan P pontja, amire $PA = PB = PC$.

(a) Mutassuk meg, hogy bármely $n \geqslant 3$ egész számhoz létezik n elemű kiegyensúlyozott halmaz.

(b) Határozzuk meg azokat az $n \geqslant 3$ egészeket, amelyekre létezik n elemű kiegyensúlyozott, centrum-nélküli halmaz.

2. feladat. Határozzuk meg azokat a pozitív egész számokból álló (a, b, c) számhármasokat, amelyekre az

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

számok mindegyike 2-hatvány.

(*2-hatvány egy 2^n alakú egész szám, ahol n egy nemnegatív egész szám.*)

*Az olimpia honlapja: `http://www.imo2015.org/`.

3. feladat. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, amiben $AB > AC$. Legyen Γ ezen háromszög körülírt köre, H a magasságpontja és F az A-ból kiinduló magasság talppontja. Legyen M a BC szakasz felezőpontja. Legyen Q Γ-nak az a pontja, amire $HQA\sphericalangle = 90°$, és K Γ-nak az a pontja, amire $HKQ\sphericalangle = 90°$. Feltesszük, hogy az A, B, C, K, Q pontok mind különbözőek, és ilyen sorrendben követik egymást a Γ körön.

Bizonyítsuk be, hogy a KQH és FKM háromszögek körülírt körei érintik egymást.

Második nap

4. feladat. Az ABC háromszög körülírt köre Ω, a körülírt kör középpontja O. Egy A középpontú Γ kör a BC szakaszt a D és E pontokban metszi, ahol B, D, E, C páronként különböző pontok, amelyek a BC egyenesen ebben a sorrendben fekszenek. Legyenek F és G a Γ és Ω körök metszéspontjai, ahol A, F, B, C, G ebben a sorrendben követik egymást az Ω körön. Legyen K a BDF háromszög körülírt körének és az AB szakasznak a másik metszéspontja. Legyen L a CGE háromszög körülírt körének és a CA szakasznak a másik metszéspontja.

Tegyük fel, hogy az FK és GL egyenesek különbözők és az X pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az X pont az AO egyenesen fekszik.

5. feladat. Jelölje $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre teljesül

$$f\big(x + f(x + y)\big) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

minden x, y valós számra.

6. feladat. Egész számok egy $a_1, a_2, \ldots$ sorozata rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ minden $j \geqslant 1$-re;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ minden $1 \leqslant k < \ell$-re.

Bizonyítsuk be, hogy van két olyan pozitív egész: b és N, hogy

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

teljesül minden olyan m és n egész számra, amire fennáll $n > m \geqslant N$.

Olimpiai előkészítő szakkörök a 2015/2016. tanévben

A Bolyai János Matematikai Társulat által szervezett Olimpiai felkészülés az alábbiak szerint történik:

Budapest: az első alkalom szeptember 18-án lesz, utána kéthetente pénteken, a Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnáziumban (Budapest, Horváth M. tér 8.), 14.30-tól. További információk: `http://matek.fazekas.hu/portal/szakkorok/`, szakkörvezető: *Dobos Sándor.*

Csongrád megye: az első szeptember 17-én lesz, utána kéthetente csütörtökön, a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetében (Aradi vértanúk tere 1., I. emelet, Riesz terem), 15.00 és 17.00 között, szakkörvezető: *Kosztolányi József.*

Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskola veszprémi és szolnoki foglalkozásai 11–12. évfolyamosok számára. A jelentkezést a diákok egyénileg végezhetik el az Erdős Iskola honlapján 2015. szeptember 21-ig: `http://erdosiskola.mik.uni-pannon.hu/`. Az idei első foglalkozások időpontjai: Szolnokon október 3–5., Veszprémben október 10–12.

Sain Márton (1915–1997)

Száz éve született a Nincs királyi út! szerzője

A híres matematikatörténész, gimnáziumi tanár 100 éve, július 28-án látta meg a napvilágot. Születésének centenáriuma alkalmából méltó megemlékeznünk életéről és munkásságáról. A lap fiatal olvasói számára talán tanulságul szolgálhat középiskolai éveire való hangsúlyosabb visszatekintés.

Sain Márton tanár-tanító családban született a ma már Romániához tartozó Máramarosszigeten (Sighetu Marmaţiei). Az elvesztett első világháborút követően a család áttelepült a megmaradt országrészbe: 1919-től gyermekéveit Orosházán töltötte, ahol édesapja polgári iskolai rajztanárként kereste kenyerét. Elemi iskoláit és a középiskola alsó négy évfolyamát ebben az alföldi kisvárosban végezte. (Abban az időben minden gimnázium nyolc évfolyamos volt, ahová legrövidebb úton az egyébként hatosztályos elemi iskola négy évfolyamának elvégzése után lehetett bekerülni.)

A gimnázium felső négy osztályát a szomszédos Hódmezővásárhely nagymúltú református iskolájában végezte, mely éppen diákkorában, 1930-ban vette fel az oktatásra oly sokat áldozó erdélyi fejedelem, Bethlen Gábor nevét. Középiskolás évei éppen a gazdasági világválság idejére estek (1929–33), így szüleinek komoly áldozatot kellett hozniuk taníttatása érdekében. Az évi 80 pengős tandíj elengedését csak az újonnan belépők nem kérhették, de a havi 58 pengős internátusi, valamint az évi egyszeri 37 pengős beírási díjakét senki sem. (Összehasonlításképpen: a KöMaL akkori éves előfizetési díja 8 pengő volt.) Ugyanakkor a jól tanuló diákok – miként különösen a felsőoktatásban most is – különböző ösztöndíjak elnyerésével tudták valamennyire mérsékelni taníttatásuk terheit.

A gimnáziumban matematikára *Falábú Dezső,* fizikára *Varga Dezső* tanította. Kiemelkedő matematikai képessége már korán megmutatkozott: ötödik osztályban például 42(!) társa közül egyedül ő szerzett (az akkor jelesnek számító) 1-es osztályzatot „mennyiségtanból”. Mindvégig az osztály legjobbjai között volt, végül ketten érettségiztek kitüntetéssel.

Az őt különösen érdeklő szaktárgyak tanulása mellett igyekezett szellemét, lelkét és testét a lehető legsokoldalúbban kiművelni. Rendkívüli tárgyként előbb az angolt, majd a vívást vette fel. (Ekkor a „humán” gimnáziumokban latin, görög és német nyelvet kellett kötelezően tanulniuk a diákoknak.) Az iskola diák-közéletében aktív szerepet játszott: az Attila sportkör alelnöke, majd titkára, nyolcadikban a Református Ifjúsági Egyesület főtitkára, a Petőfi Önképzőkör titkára volt. Utóbbiban először mint „reményekre jogosító" költő tűnt fel, majd Rapcsák Andrással közös dolgozatával elnyerte a fizika pályázatot. Végzős diákként ő mondta az október 6-i iskolai ünnepségen az emlékbeszédet. Visszatekintve mindez már előre vetítette a két kultúra (humán és reál) határán kibontakozó későbbi életművét, de tanulságként talán azt is elmondhatjuk, hogy bármilyen későbbi kimagasló szakmai teljesítmény előfeltétele a szűk szakterületen túlterjedő látókör.

A gimnázium elvégzése után a Pázmány Péter Tudományegyetemen szerzett matematika–fizika szakos középiskolai tanári oklevelet 1938-ban. Kisgyermekkorát az első, pályakezdését a nemsokára kitörő második világháború tette rendkívül nehézzé. 1939 és 47 között előbb kiképzés, majd fegyvergyakorlatok, később hadiszolgálat és hadifogság miatt 8 év gyakorlatilag kiesett életének potenciálisan legtermékenyebb időszakából. Több, rövidebb ideig tartó alkalmazás mellett három intézményben töltött tanárként 9-9 évet: a Budapesti Református Gimnáziumban (ma Lónyay Utcai Református Gimnázium), majd pályája végén az ELTE Apáczai Csere János, illetve Radnóti Miklós Gyakorló Iskolájában. 1978 és 1984 között nyugdíjas óraadóként matematikatörténetet adott elő az ELTE Tanárképző Főiskolán.

1986-ban jelent meg fő műve, amely országosan is igazán ismertté tette, a *Nincs királyi út! – Matematikatörténet.* Könyve annyira alapmű, hogy tapasztalataim szerint – kissé *Simonyi Károly A fizika kultúrtörténetéhez* hasonlóan – számos humán érdeklődésű kolléga könyvespolcán is megtalálható. Ezt megelőzően 1980-ban a Gondolat zsebkönyvek sorozatban adták ki *A fény birodalma* című könyvét, ma már hihetetlennek tűnő 20 000 példányban. Már csak *A Fény Nemzetközi Éve* alkalmából is érdemes (újra) elővennie minden fizikatanárnak és fizikával komolyabban foglalkozni kívánó diáknak ezt az érdekes, a történetiséget és a mély szakmai tartalmat ideálisan ötvöző könyvecskét.

Nevét két további, talán ma is gyakrabban forgatott hozzá köthető kiadvány segít megőrizni: a *Matematikatörténeti* és a *Fizikatörténeti ABC.* Előbbinek egyedüli, utóbbinak *ifj. Gazda Istvánnal* társszerzője, s mindkét könyv nagyon hasznos az érettségire való felkészülésben is. Érdekesség, s számomra szívmelengető, hogy három könyvének is (egyik) lektora a hódmezővásárhelyi születésű, szintén Széchenyi-díjas *Vekerdi László* volt (akinek édesapja iskolánkban tanított matematikát, fizikát és latint 1922-ig). Emellett Sain Márton szerkesztője és társszerzője volt annak a *Matematika feladatgyűjteménynek,* melyet a hetvenes-nyolcvanas években tulajdonképpen az egész ország használt, így diákkoromban én magam is annak feladatain pallérozódtam.

Sain Márton 1997. február 19-én hunyt el. Elhivatott életével, hazánk műszaki–természettudományos műveltségét jelentősen gazdagító munkásságával álljon példaként a jelen és jövő generációk előtt.

Berecz János
matematika–fizika szakos tanár
Hódmezővásárhely, Bethlen Gábor Református Gimnázium

EGMO 2015

Április 14-én felszállt a repülőnk … De igazából a történet nem itt kezdődik. Hiszen a sportolóknál sem az a pár perc a lényeg, hanem a felkészülés, amit ezúton is szeretnénk megköszönni iskolai tanárainknak egyenként, illetve *Nagy Zoltánnak, Kabos Eszternek, Bérczi-Kovács Erikának* és *Dobos Sándornak.* Sokat segítettek munkájukkal, eredményeink őket is dicsérik.

Részvételünket idén is a Bolyai János Matematikai Társulat tette lehetővé, ezúton is köszönjük a támogatásukat. Egyenpulóverünkért és csapatzászlónkért pedig a Prezinek vagyunk nagyon hálásak.

Felszállt a repülő, és kisvártatva megérkeztünk Minszkbe. Első ránézésre jobb volt, mint képzeltük; a régi szovjetuniós kollégium és a nehézkesen közlekedő lift csak a megérkezésnél tűnt fel, ahogyan a verseny előtti estén tönkrement WC is a túlságosan szorgalmas szerelővel. Eszter csak hosszú könyörgés után tudta kitessékelni, minden kulturális különbség ellenére. Az ételek nagyon érdekesek voltak, akinek volt mersze, az kipróbálhatott jó pár tradicionális fogást, de rántott csirkével és krumplipürével is át lehetett vészelni.

A versenyre egyenruhás kislányok és kisfiúk kísértek minket, kétszer négy és fél óra gondolkodási idő volt adott, tehát összesen 129 600 másodperc alatt a magyar csapat összehozott egy ötödik helyet, egyénenként pedig **Baran Zsuzsanna** egy arany-, **Fekete Panna** egy ezüst-, **Gyulai-Nagy Szuzina** egy bronz-, én pedig egy ezüstérmet.

A kétnapi fáradtság után különösen jólestek a programok. Voltunk állatkertben, ahol még a verseny előtt lazíthattunk a trambulinokon, ilyenkor még – az egyébként fagyos időben – a kabátok is lekerültek. Láthattunk egy csodás balettelőadást egy monumentális és gyönyörű helyen. Voltunk da Vinci múzeumban, ahol megcsillogtathattuk fizika tudásunk, körülnéztünk a városban, fotózkodtunk Leninnel a parlament előtt és még egy középkori várra is jutott időnk.

A nyitó és a záró eseményen egyenpulóverünkben pompázva különböző előadásokat láthattunk és persze megkaptuk az érmeinket, amit utána az afterpartyn külön is megünnepelhettünk. A társasozások alatt eddigre összeszokott társaság itt már önfeledten tudott mulatni.

Általában igaz volt, hogy amit a körülmények miatt nem tudtak megadni a szervezők, azt túláradó kedvességgel, például fantasztikus kísérőnkkel pótolták. Vele még az sem okozott problémát, hogy az utcákon szó szerint senki nem beszélt angolul.

Április 20-án pedig szerintem mindegyikünk egy maradandó élménnyel és pár új baráttal térhetett haza. Akik pedig jövőre mennek, azoknak sok sikert és jó szórakozást kívánunk!

Khayouti Sára

Felhívás

2016. április 14. és 20. között egy romániai üdülővárosban, Buşteni-ben rendezik az ötödik Európai Leány Matematikai Diákolimpiát, az EGMO-t (`www.egmo.org`). Az idei versenyen, amelyről egy beszámolót is olvashatunk, egy arany-, két ezüst- és egy bronzéremmel Magyarország az összesített 5. helyet érte el. Jövőre is négyfős csapattal indulhatunk, melynek összetétele 2016. elején derül ki. A válogatás szempontjai: válogatóversenyek (2015 őszén és 2016 elején), nemzetközi matematikaversenyek, országos versenyek (matematika OKTV, Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, Arany Dániel Matematikaverseny), a KöMaL A és B pontversenyei.

A versenyen való sikeres szerepléshez, illetve a kiutazó csapatba kerüléshez is alapvetően nélkülözhetetlen az alapos felkészülés, ezt többféleképpen is szeretnénk segíteni. Év közben időközönként küldünk az érdeklődőknek (tematikus) feladatsorokat; ezekre küldött megoldásokra személyesen is visszajelzünk, illetve lehet kérdezni is. Emellett az őszi válogatóig legeredményesebb diákok részt vehetnek a téli brit–magyar közös IMO felkészítő táborban.

Érdemes minél előbb, akár már kilencedikesként bekapcsolódni, minden lány jelentkezését szeretettel várjuk, akit érdekel a versenyrészvétel lehetősége és nem riad vissza attól, hogy ezért komolyabb munkát fektessen be!

Aki szeretne részt venni a válogatásban és felkészülésben vagy bármilyen kérdése van, írjon minél előbb a `nagyzoltanrolant@gmail.com` címre. További tudnivalók itt: `http://www.cs.elte.hu/~nagyzoli/EGMO.html`

Bérczi-Kovács Erika, Kabos Eszter, Nagy Zoltán Lóránt

Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

1. Egy közvélemény-kutatás kérdéseire az első hónapban 700 ember válaszolt, mindenki pontosan egyet választott a felkínált három lehetőségből. A feleletek aránya $4:7:14$ volt. Ezután még néhány ember részt vett a közvélemény-kutatásban, így a feleletek aránya $6:9:16$ lett. Legkevesebb hány ember válaszolt utólag a kérdésekre? Ebben az esetben végül melyik lehetőséget hányan választották? (*11 pont*)

2. A mosogatógépünkön háromféle program van. Egy mosogatáshoz az A program 30%-kal több elektromos energiát, viszont 20%-kal kevesebb vizet használ, mint a B program. A B program 15%-kal kevesebb elektromos energiát és 25%-kal több vizet használ egy mosogatáshoz, mint a C program. Mindhárom program futtatásakor 50 Ft-ba kerül az alkalmazott mosogatószer. Egy mosogatás az A programmal 165 Ft-ba, a B programmal 150 Ft-ba kerül. Mennyibe kerül a C programmal egy mosogatás? (*12 pont*)

3. Hányféleképpen húzhatunk ki a 32 lapos magyar kártyából 6 lapot úgy, hogy legyen köztük pontosan két piros, két zöld és két ász? (*14 pont*)

4. Egy kecske egy kerítéssel védett 10×3 m-es virágágy körüli, elegendően nagy réten legel. A kecskét 16 m hosszú kötéllel a kerítés 10 méteres oldalának felezőpontjánál levert cölöphöz kötötték. Mekkora területen legelheti le a füvet a kecske? Hányadrészére csökken ez a terület, ha a kötél hosszát 10 méterre csökkentik? (*14 pont*)

II. rész

5. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$\log_4\left(4\sin^2 2x\right) = 2 - \log_2(-2\operatorname{tg} x). \qquad (16\ pont)$$

6. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a hatoslottó húzáson a 45 számból (visszatevés nélkül) 6-ot kihúzva, a hat lottószámot növekvő sorrendbe rakva egy számtani sorozat egymást követő tagjait kapjuk? (*16 pont*)

7. Milyen görbét ír le az $y = x^2 - 2(m-3)x + m - 8$ parabola csúcsa, ha az m paraméter értéke végigfut a valós számok halmazán? Az m paraméter mely értékénél lesz a csúcs ordinátája maximális? Adjuk meg ebben az esetben a parabola $P(0; -5)$ ponton átmenő érintőinek egyenletét. (*16 pont*)

8. Az azonos tengerszint feletti magasságban fekvő Hencida és Boncida között a távolság 5 km. Hencidából egy közeli hegy csúcsa 30°-os, Boncidából pedig 11°-os szög alatt látszik. Hencidából a hegy csúcsát és Boncidát összekötő szakasz látószöge 120°-os.

a) Milyen magas a hegy?

b) A két várost összekötő szakasz felénél elindítanak egy távirányításos repülőgép modellt, ami végig a szakaszfelező merőleges síkjában mozog. Mennyire közelítheti meg repülés közben a hegy csúcsát? (*16 pont*)

9. János egy vízzel teli hordó aljára 4 mm átmérőjű lyukat fúrt és a kifolyó víz sebességét vizsgálta. A Bernoulli-egyenletből levezette, hogy $v = \sqrt{2gx}$, ahol x a vízszint pillanatnyi magassága. Megmérte, hogy a teli hordóból az első másodpercben 62,8 cm^3 víz folyt ki. (A sebességet itt állandónak vehetjük, a rövid mérési idő miatt.) Ezután megállapította, hogy 5 perc alatt pontosan 10 cm-rel csökkent a vízszint. Feltételezzük, hogy a vízszint exponenciálisan csökken az $x = h \cdot 2^{-t/T}$ függvény szerint, ahol h a kezdeti vízszint magassága, T pedig a hordóban lévő víz „felezési ideje". A hordót üresnek tekinthetjük, ha már csak 1 cm magas a vízszint benne. A teli állapotból mennyi idő alatt ürül ki a hordó? (*16 pont*)

Lorántfy László
Dabas

Tájékoztató a folyóirat előfizetéséről

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok megrendelhető a kiadónál, a MATFUND Alapítványnál a szerkesztőség címén; valamint a következő címen: `http://www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`. Előfizetési díj a 2015–2016-os tanévre (2015 szeptemberétől 2016 májusáig) 8100 Ft. Azonos címre küldendő, 10-nél nagyobb példányszámú megrendelés esetén a csoportos előfizetési díj 7200 Ft, 50-nél nagyobb példányszámú megrendelés esetén 6500 Ft.

Változás a korábbi évekhez képest, hogy Lapunk előfizetői az előfizetett példány címlapján látható előfizetői azonosító segítségével a kitűzött feladatainkhoz már a lap nyomtatott változatának megjelenésével egyidejűleg hozzáférhetnek.

A Bolyai János Matematikai Társulat (BJMT) tagjai által igénybevehető kedvezményekről kérjük, olvassa el a Társulat honlapján a „Tagsági információk”-at: `www.bolyai.hu`. **Megrendelőlap és részletes tájékoztató igényelhető** a szerkesztőségben.

Azok, akik az idén kérik felvételüket a Bolyai János Matematikai Társulatba, felvételi kérelmük elbírálása után (legközelebb várhatóan októberben) értesítést és tagdíjbefizetési csekket kapnak, ezért külön nem szükséges előbb jelentkezniük.

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok példányonként 950 Ft-ért megvásárolható a szerkesztőségben. Ugyanitt a lap korábbi számai is beszerezhetők (címünk az első oldal alján található).

Kérjük versenyzőinket, hogy a KöMaL 2015–2016-os tanévi matematika, fizika és informatika pontversenyének *versenykiírását* figyelmesen olvassák el!

Versenykiírás*
a KöMaL 2015–2016-os tanévre kiírt pontversenyeire

A most induló pontversenyek 2015 szeptemberétől 2016 májusáig tartanak, havonta az újonnan kitűzött feladatcsoportok megoldásait lehet beküldeni.

Minden egyes postán küldött megoldást – feladatonként külön-külön – **négyrét hajtsunk össze** (több lapból álló dolgozatokat egybe) úgy, hogy a **fejléc kívülre kerüljön.** Kézírással készült megoldást csak postai úton fogadunk el. Ha a megoldó kézzel készít ábrát és azt jól látható minőségben beszkenneli, majd beilleszti a dokumentumba, azt elfogadjuk. A további formai követelményeket *A matematika és fizika dolgozatok formája* című fejezet tartalmazza.

A versenyekbe minden általános iskolás és középiskolás korú tanuló **benevezhet.** A versenyben csak a nevezés után beküldött megoldásokat értékeljük, nevezés nélkül beküldött megoldásokat utólag sem értékelünk. Kérjük, hogy a versenyzők **1–12-ig** jelöljék, **hányadik osztályba járnak** (az osztály egyéb jelölését – pl. 11.b – nem kell feltüntetni).

FONTOS! A versenyek egyéni versenyek; a versenyzőknek önállóan kell elkészíteniük a példák megoldásait. Szigorúan tilos a kitűzött fel-

*Kérjük, hogy azok is olvassák el a versenykiírás szövegét, akik megoldásaikat elektronikus úton küldik be.

adatokat a beküldési határidő előtt másokkal megvitatni, vagy másoktól segítséget kérni a feladatok megoldásához. A közösen készített vagy másolt dolgozatokat – beleértve az eredeti szerzőét is – *nem versenyszerűnek értékeljük,* és a szerzők nevét honlapunkon is közöljük. A csoportosan másolt dolgozatokat visszaküldjük az osztályt tanító tanárnak. Súlyosabb, az egész pontversenyt veszélyeztető esetekben (pl. a feladatok megtárgyalása internetes fórumokon) az érintett versenyzőket kizárjuk a versenyből.

A versenyfeltételeket az alábbiakban ismertetjük.

A benevezés módja

A pontversenybe a `https://www.komal.hu/nevezesilap` internetes címen található „Nevezési lap" kitöltésével és beküldésével lehet benevezni. A versenyekbe be lehet kapcsolódni a tanév során később is.

A nagyon gyakori családnevű versenyzők válasszanak egy *háromjegyű* jelzőszámot is, és mind a nevezési lapon, mind pedig az év során beküldött dolgozataik fejlécére az így bővített nevet írják (pl. Kiss 349 Anna, Szabó 344 Péter). Kérjük viszont, hogy a továbbiakban ezt a számot *minden egyes* beküldött dolgozatukon tüntessék föl.

Kérjük, hogy azok a versenyzők, akik tavaly már választottak jelzőszámot, **idén is ugyanazt a számot** használják!

A pontversenyeinkre történő regisztráció során kérjük, adja meg a címlapon látható előfizetői azonosítóját, mert ezzel tudjuk biztosítani aktuális kitűzött feladatainkhoz a teljes elektronikus hozzáférést a lap nyomtatott változatának megjelenésével egyidejűleg. Az előfizetői azonosítóját megtalálja a folyóiratra ragasztott etiketten. Előfizetői azonosító hiányában a feladatokhoz történő elektronikus hozzáférést korlátozzuk (csak a hónap 28-ától jelennek meg a feladatok honlapunkon is). Amennyiben előbb történik a regisztráció, mint az előfizetés, a regisztráció később módosítható, és az előfizetői azonosító megadását követően a havi feladatsorok elektronikusan teljes körűen elérhetők lesznek az előfizető számára. Lapunk pontversenyében a részvétel a 2015/2016-os tanévre továbbra is térítésmentes, tehát regisztrációval előfizetői azonosító hiányában is lehetséges. Kérjük azonban versenyzőink szüleit, hozzátartozóit, vagy az őket támogató intézményeket, cégeket, hogy Lapunkra történő előfizetésükkel segítsék pontversenyünk fennmaradását.

Matematika versenyek

Ebben a tanévben négyféle versenyt indítunk növekvő nehézségi sorrendben **K**, **C**, **B** és **A** kategóriában. Egy tanuló több pontversenyben is indulhat, de **K**-ban és **B**-ben egyszerre nem. **Minden feladatra csak egy megoldást értékelünk.** Természetesen örömmel várunk általánosításokat, megjegyzéseket, másfajta megoldási vagy kitűzésre tett javaslatokat, ezeket szívesen közöljük, sőt, a pontversenyen kívül **különdíj** formájában is elismerjük.

K *pontverseny* – az **ABACUS** és a **KöMaL** közös pontversenye kezdőknek – csak 9. osztályosoknak

A **K** jelű feladatokra kizárólag kilencedik osztályosoktól várunk megoldást szeptembertől márciusig, 7 fordulóban.

Az ABACUS a KöMaL rendelkezésére bocsátja a pontversenyében csak 8. osztályosoknak kitűzött három feladatát, emellett havonta további három feladatot ad, amelyek csak a KöMaL-ban jelennek meg. Minden feladat teljes megoldása 6 pontot ér.

C *pontverseny* – matematika gyakorlatok

A **C** pontverseny gyakorlatait azoknak az olvasóinknak ajánljuk, akik kezdetben túl nehéznek vagy szokatlannak találják a **B** és **A** kategória feladatait. Itt rendszeresen közlünk az iskolai tananyaghoz szorosabban kapcsolódó gyakorlatokat, azok találhatnak itt kedvükre valót, akik valamivel – de nem sokkal – szeretnének túllépni az iskolai matematika keretein, vagy emelt szintű érettségit kívánnak tenni matematikából.

A gyakorlatok egy része általános iskolásoknak is ajánlható, más részük azonban a 11–12. évfolyam tanulmányaira támaszkodik. Minden hónapban hét gyakorlatot tűzünk ki, ebből az 1–5. gyakorlatokra a legfeljebb 10. évfolyamosok, a 3–7. gyakorlatokra pedig a 11–13. évfolyamosok küldhetnek be megoldást. Minden dolgozatra legfeljebb 5 pont kapható. A **C** pontversenyt három kategóriában értékeljük. Az első: a 8. évfolyamig, a második: a 9., 10. évfolyamosok, a harmadik: a 11., 12. évfolyamosok.

B *pontverseny* – matematika feladatok

A **B** pontversenyben havonta összesen 9 feladatot tűzünk ki. A feladatok sorrendje megfelel az iskolai tananyagnak: **egy feladatsoron belül az alacsonyabb sorszámúakat ajánljuk a fiatalabbaknak.** A feladatok – szándékaink szerinti – nehézségét a közölt pontszám jelzi (ez 3, 4, 5 vagy 6 lehet). A **B** pontversenyben az eredményes versenyzéshez nincs szükség valamennyi feladat megoldására. Nem kell tehát mind a 9 feladatra megoldást küldeni, feladatsoronként mindenkinek a **legtöbb pontot elért, legfeljebb 6 megoldását számítjuk be a pontversenybe** (amelybe azonban először a nem versenyszerűeket számítjuk be). Ki-ki gondolja végig, mely példákkal foglalkozna szívesen, hogyan érhetné el a legtöbb pontot. A **B** pontverseny eredményét 5 korcsoportban tartjuk nyilván: a 8. évfolyamig, a 9., 10., 11. és 12. évfolyamokban.

A *pontverseny* – matematika problémák

A legfelkészültebb diákok számára jelent továbbra is kihívást az **A** pontverseny, melyet a matematikus pályára vagy nemzetközi versenyekre készülőknek ajánlunk. E verseny résztvevőit nem különítjük el évfolyamonként, mindannyian együtt versenyeznek, minden megoldásra egységesen legfeljebb 5 pontot kaphatnak.

Fizika versenyek

M *pontverseny* – fizika mérési feladatok

Havonta 1 mérési feladatot tűzünk ki, valamennyi korosztály számára közösen. A feladatok megoldásával 6–6 pontot lehet szerezni. A mérési feladatok kidolgozásánál hasznos lehet a korábbi számainkban megjelent megoldások tanulmányozása. A mérési jegyzőkönyv feltétlenül tartalmazza a mérés elvének áttekinthető leírását (a mérési elrendezés vázlatos rajzával, esetleg fotókkal), megfelelő számú és pontosságú mérési adatot (áttekinthető táblázatban, a mértékegységeket is megadva), a mérési adatok kiértékelését (lehetőleg grafikusan ábrázolva), és a hiba nagyságrendjének becslését. A mért és számított mennyiségeket ne adjuk meg **indokolatlanul sok tizedesjeggyel,** hanem csak a becsült hibával összhangban álló pontossággal. A mérési jegyzőkönyv legyen viszonylag tömör, de annyira áttekinthető, hogy annak alapján bárki meg tudja ismételni a leírt mérést. Nagyon sok (50-nél több) mérési adat esetén elegendő azoknak csak egy „reprezentatív" részét beküldeni és a többinek csak az átlagát közölni. A 6 oldalnál hosszabb jegyzőkönyv tartalmazzon egy rövid (kb. 1/2 oldalas) összefoglalást.

P *pontverseny* – fizika feladatok

Havonta kb. 10 elméleti feladatot tűzünk ki, nem nehézségi, hanem az életkornak megfelelő sorrendben. A pontszámokat a feladat után feltüntetjük. Mindenki szabadon választhat a kitűzött elméleti feladatok közül. A 9–12. évfolyamosoknak **legfeljebb 5,** a náluk fiatalabbaknak **legfeljebb 3** megoldását (azonban először a nem versenyszerűeket) számítjuk be a pontversenybe. Az elméleti versenyt korosztályonként (8. évfolyamig, 9., 10., 11., 12. évfolyam) külön-külön összesítjük és értékeljük, a mérési versenytől függetlenül.

Informatika verseny

I *pontverseny* – informatika alkalmazási és programozási feladatok

Havonta három **I** jelű és egy **I/S** jelű feladatot tűzünk ki. A feladatok egy része általános iskolásoknak is ajánlható, nagyobb része azonban a középiskolai tanulmányokra támaszkodik. Alapvető célunk, hogy e feladatok segítsék a felkészülést az informatika versenyekre és az emelt szintű érettségire. Minden hónapban a négy kitűzött feladatból a három legmagasabb pontszámot elért feladat pontszámát számítjuk be az **I** pontversenybe.

Az **I**-jelű pontversenyben minden hónapban egy programozási, egy informatika alkalmazói feladatot, valamint egy olyan érdekes problémát tűzünk ki, amely tartalmában vagy a megoldás eszközében szokatlan, például hasznos, ám kevésbé ismert vagy elterjedt szoftver megismerését igényli. A feladatok egyike jellegében és formájában is lényegében megegyezik az emelt szintű érettségin kitűzött feladatokkal, ezt az (É) betűvel jelezzük a feladat sorszáma mellett. Versenyzőink ezen feladatok megoldásával a vizsgára való felkészülést, az ilyen típusú feladatok megoldásában való jártasságot szerezhetik meg, és tudásukat lemérhetik.

Az **I/S** jelű feladatok Nemes Tihamér Verseny és OKTV szintű, az **I** jelű programozási feladatoknál nehezebb, de az **S** jelűeknél könnyebb programozási feladatok. A megoldáshoz szükséges ismeretek és algoritmusok a két verseny versenykiírásában megtalálhatóak, pl. a `http://tehetseg.inf.elte.hu` és a `http://www.oktatas.hu` oldalakon.

S *pontverseny* – nehezebb programozási feladatok

Az **S** pontverseny egy havonta kitűzött nehezebb **S** programozási feladatból és az **I/S** feladatból áll. Mindkét feladat a programozási versenyekre való felkészítést szolgálja. A megoldáshoz szükséges ismeretek és alkalmazandó algoritmusok körét a Nemzetközi Informatikai Diákolimpiákon alkalmazott IOI Syllabus tartalmazza, lásd `http://www.ioinformatics.org/a_d_m/isc/iscdocuments/ioi-syllabus.pdf`.

Az **S** és **I/S**-jelű feladatok értékelésénél az eredmény helyességén kívül azt is figyelembe vesszük, hogy az algoritmusok mennyire hatékonyak, nagyméretű bemenő adatok esetén is lefutnak-e legfeljebb néhány perc alatt, illetve nem igényelnek-e túlságosan sok memóriát. A futási időre vonatkozó limitet és a memóriakorlátot a feladat leírása tartalmazhatja.

A matematika és fizika dolgozatok formája

A szerkesztőség munkatársainak általában nagy mennyiségű dolgozatot kell rövid idő alatt feldolgozniuk. A postán beküldött dolgozatok szétválogatása, javítása és a pontszámok gyors könyvelése akkor lehetséges, ha versenyzőink betartják az alábbi formai követelményeket:

- Minden egyes megoldás **külön lapra** kerüljön. Ez azért nagyon fontos, mert a különböző feladatok más-más javítóhoz kerülnek. A lapok **A4 méretűek** (kb. 21 cm × 30 cm) legyenek.
- **Minden egyes** beküldött lap **bal felső sarkában** nyomtatott betűkkel szerepeljen:
  - a példa betűjele (A, B, C, K, M, P) és száma **pirossal,**
  - a beküldő teljes **neve** és **osztálya,**
  - az **iskola neve** városnévvel együtt,
  - a beküldő **e-mail** címe.
- Törekedjünk az **olvasható írásra** és a rendezett külalakra!

MINTA dolgozat fejlécéhez:

C. 1304.
Szabó 172 István 9. évf.
Miskolc, Földes Ferenc Gimn.
e-mail: pisti@foldes.hu

Jelöljük a kapitány életkorát (években kifejezve) K-val, a hajóét H-val. A hajó $H-K$ évvel ezelőtt volt annyi idős, mint …

Azokat a dolgozatokat, amelyeken nincs feltüntetve osztály és iskola városnévvel együtt, több feladat megoldását tartalmazzák egy lapon, vagy külalakjuk miatt értékelhetetlenek, nem versenyszerűnek tekintjük.

A matematika és fizika dolgozatok tartalmáról

Maximális pontszám csak teljes megoldásért jár. A puszta eredményközlést nem értékeljük. A kimondott állításokat matematikából bizonyítani kell, fizikából az alaptörvényeket alkalmazva igazolni. A matematika példák megoldásaként csupán számítógépes programot nem fogadunk el!

Törekedjünk a megoldások rövid, olvasható leírására. A geometria feladatok megoldásához mellékeljünk ábrát vagy ábrákat. Lapunkban a megoldások többségét közöljük: ajánljuk ezek tanulmányozását.

Levezetés és hivatkozás nélkül csak a középiskolai tananyagban szereplő tételeket fogadjuk el. Közismert tételekre (pl. Menelaosz-tétel, Hölder-egyenlőtlenség stb.) elegendő a nevükkel hivatkozni, egyéb esetekben fel kell tüntetni az idézett forrást (cím, oldalszám vagy internet-cím). Tételekre való hivatkozáskor azt is meg kell mutatni, miért teljesülnek a tétel feltételei, és hogyan következik a tétel állításából a bizonyítás gondolatmenetének következő lépése.

Többször előfordult már, hogy egy-egy feladat szerepelt valamely példatárban, vagy megtalálták az interneten. Arra is láttunk példát, hogy egy folyóiratcikkben a feladatban kitűzöttel lényegében ekvivalens, vagy annál általánosabb állítás bizonyítása szerepelt. Célunk továbbra is versenyzőink problémamegoldó képességének feljesztése, nem pedig a keresőprogramok tesztelése, ezért **nem adunk teljes pontszámot azokra a dolgozatokra, amelyek csak a megoldás helyét közlik; a végeredményhez vezető megoldást részletesen le kell írni.**

Kérjük, hogy ha a megoldáshoz könyvekben vagy az interneten talált írásokat használnak fel, és ezekből idéznek, tüntessék fel a felhasznált forrásokat.

Az informatika megoldások tartalmi követelményei

Az **I** jelű programozási feladatok megoldását C, C++, Pascal, Python, Java, Basic vagy C# nyelvek illetve, az **I/S** és **S** jelű feladatok megoldását C, C++, Pascal vagy Java nyelvek valamelyikén kell elkészíteni. A fejlesztéshez bármilyen fejlesztőkörnyezet (IDE) használható, azonban az értékelés mindenképpen a következőkkel történik:

- C/C++: Code::Blocks 13.12 (MinGW) vagy Visual C++ 2013 Express,
- Pascal: FreePascal 2.6.4, Lazarus 1.0.10,
- Visual Basic, C#: Visual Studio 2013 Express,
- Python 3.4.1,
- Java: NetBeans 8 JDK 7

Beküldés előtt tehát mindenképpen ellenőrizendő, hogy a forráskód a fenti listában szereplő eszközzel is fordítható, illetve helyesen működik-e. Csak olyan programokat értékelünk, amelyek a fent megjelölt fordítók egyikével lefordíthatók, illetve – számításos jellegű feladatoknál – a kiadott mintabemenetek legalább felére hiba nélkül, rövid időn belül lefutnak, és megfelelő formátumú, értelmes, de nem feltétlen helyes kimenetet adnak.

Az **I**-jelű pontversenyben kitűzött alkalmazói feladatok megoldásához a Microsoft Office 2007/2010/2013 vagy a LibreOffice 5.0 vagy az OpenOffice 4.1 irodai szoftvercsomagok valamelyike használható. A javítást a programok legfrissebb változataival fogjuk értékelni. A harmadik típusú feladatok jórészt szabadon fölhasználható programok, esetleg kereskedelmi szoftverek időkorlátos próbaváltozatához kapcsolódnak.

Az **S** és **I/S** jelű feladatokra adott megoldásokhoz dokumentációt kell készíteni és a forráskódot kommentekkel kell ellátni. A különálló dokumentációban a megoldás elvi menetének, algoritmusának ismertetését várjuk, döntően három részre tagolva: rövid áttekintés az algoritmusról; majd az algoritmus részletes menete; végül egy rövid útmutató a kód értelmezéséhez, leírás a megvalósítás sajátosságairól.

A forráskód kommentezésének lényege, hogy segítségével – a dokumentáció ismeretében – könnyen megérthető legyen az egyes kódsorok, kódrészletek feladata, szerepe a megoldás menetében. Ennek megfelelően az egyes osztályokat, függvényeket, kisebb-nagyobb összefüggő kódrészleteket, a nehezebben érthető technikai megoldásokat, illetve a fontosabb (globális és lokális) változókat és típusokat kell mindenképp megjegyzéssel ellátni.

Az informatika megoldások formai követelményei

Az informatika feladatok megoldásait kizárólag a KöMaL honlapján, az elektronikus munkafüzetben lehet beküldeni, illetve feltölteni. Amennyiben a megoldás több fájlból áll, úgy egy, a fájlok mindegyikét és a dokumentációt is tartalmazó, a feladat sorszámával egyező nevű mappát kell ZIP tömörítéssel becsomagolva egyetlen fájlként beküldeni. Ügyeljünk arra, hogy a tömörített állományokba futtatható fájlok (pl. a fejlesztéskor létrejövő `.exe` állomány) ne kerüljenek.

A programozási feladatoknál a forráskód első soraiban megjegyzésként szerepeljen

- a feladat száma;
- a versenyző teljes neve (jelzőszámmal) és osztálya;
- az iskola neve városnévvel együtt;
- a versenyző e-mail címe;
- az alkalmazott fordítóprogram neve és verziószáma.

Szöveges dokumentumok (például dokumentáció) esetén az adatok – a matematika és fizika feladatokhoz hasonlóan – a fájl elején, táblázatkezelő feladatoknál pedig külön munkalapon szerepeljenek, amelynek neve ADATOK legyen.

Kérjük, hogy a programozási feladatoknál a program be- és kimenete mindig a feladatban megadott módon valósuljon meg. Erre azért van szükség, mert a beküldött programokat sokféle tesztadatra lefuttatjuk, és ezt igyekszünk automatizálni.

Az informatika feladatokkal kapcsolatos bárminemű kérdéseket, esetleges reklamációkat az `inf-szerk@komal.hu` címre várjuk.

A dolgozatok beküldése postán

A matematika és fizika dolgozatokat postán küldhetik be, vagy felölthetik az internetes munkafüzet felületen. Az informatika feladatok megoldását kizárólag az internetes munkafüzeten keresztül küldhetik be. **Megoldásokat e-mailben nem fogadunk.**

Postai beküldés esetén a dolgozatokat a következő címre várjuk:

KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

A matematika és a fizika feladatok egy borítékban is beküldhetők. Kérjük, mindenki ügyeljen a helyes címzésre. A rossz címre küldött dolgozatokat nem tudjuk értékelni.

A postán beküldött megoldásokhoz **kísérőjegyzéket** kérünk a minta szerint, minden borítékban egy külön papíron felsorolva az összes beküldött dolgozat jelét és számát. A név, osztály és iskola feltétlenül szerepeljen a kísérőjegyzéken!

MINTA kísérőjegyzékhez:

Kísérőjegyzék
Szabó 172 István 9. évf.
Miskolc, Földes Ferenc Gimn.

A 2015. évi 6. számból a következő feladatokra küldök megoldást:
B. 4723., B. 4725., B. 4726., B. 4729., B. 4731.
Összesen 5 dolgozat.

A megoldások elkészítése és beküldése az Elektronikus Munkafüzetben

Az elektronikus munkafüzet egy webes felület, amellyel az otthon, előre elkészített dolgozatokat feltölthetik, de a megoldás közvetlen beírására, szerkesztésére is lehetőséget ad. **Kézírással készült megoldást csak postai úton fogadunk el.** Képletek szerkesztéséhez a KöMaL fórumban bevált TEX rendszert használjuk. Ha a megoldó kézzel készít ábrát és azt jól látható minőségben beszkenneli, majd beilleszti a dokumentumba, azt elfogadjuk.

A munkafüzet használata esetén

- A megoldások módosíthatók, átszerkeszthetők a beküldési határidőig.
- Ellenőrizhető, hogy a megoldások épségben megérkeztek.
- A javító közvetlenül a megoldás mellé írhatja rövid értékelését a megoldásról és a kapott pontszámot.
- Versenyzőinket e-mailben értesítjük a pontszámok változásairól.
- Rövid kérdés vagy üzenet küldhető a javítónak, ő pedig ugyanitt válaszolhat.

Az Elektronikus Munkafüzet használatához szükséges jelszót a nevezési lap kitöltésekor küldjük el versenyzőinknek.

Az elektronikus munkafüzet címe:

`https://www.komal.hu/munkafuzet`

Ha valaki hibát talál, vagy új bővítéseket szeretne javasolni, küldjön e-mailt a `munkafuzet@komal.hu` címre, vagy pedig írja meg a KöMaL fórum Internetes munkafüzet című témájában. Segítségét előre is köszönjük.

A beküldési határidő

A beküldési határidő **minden kategóriában** a lap megjelenését követő **hónap 10. napja;** munkaszüneti nap esetén a következő munkanap. A határidő azt jelenti, hogy a küldeményt legkésőbb a határidő napján 24 óráig kell postára adni. (Kérjük, ellenőrizzék a postai bélyegző dátumát, mert későbbi dátumot nem fogadunk el.) **A határidő betartását szigorúan ellenőrizni fogjuk. A határidő után a személyesen behozott dolgozatokat sem fogadjuk el!** Elektronikus beküldés esetén vegyék figyelembe az Internet esetleges hibáit, ilyen okokra hivatkozva sem fogadunk el késedelmes dolgozatokat.

Értékelés

A pontversenyek állását és versenyzőink részletes eredményeit 2015. november végétől a honlapunkon folyamatosan közöljük. A versenyben résztvevő hozzájárul a dolgozatának név nélküli, valamint a szerkesztett változat névvel történő közléséhez. A matematika, fizika és informatika feladatokkal kapcsolatos kérdéseket a `mat-szerk@komal.hu`, `fiz-szerk@komal.hu`, illetve `inf-szerk@komal.hu` címekre várjuk. Reklamációkat a feladat értékelése után két hétig fogadunk el.

Mind a matematika, mind a fizika versenyek hivatalos végeredménye a 2016. szeptemberi számunkban jelenik meg. A legeredményesebb versenyzők arcképét 2016. decemberi számunkban közöljük. A legjobbak a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány pályadíjait és tárgyjutalmakat kapnak a 2016. évi KöMaL Ankét rendezvényén. Az okleveleket postán küldjük el.

Néhány megjegyzés

A folyóirat elektronikus változatát havonta frissítjük. A mindenkori pontszámokat (a legeredményesebb versenyzők fényképeivel) rendszeresen közöljük. A lapban kitűzött feladatok a kitűzés hónapjának 28. napjától hozzáférhetők a honlapon.

Javasoljuk, hogy beküldött dolgozataik másolatotát őrizzék meg, hogy a lapban közölt megoldással össze tudják hasonlítani. Ha a dolgozat esetleg elvész a postán, csak másolat esetén tudjuk elfogadni a reklamációt.

Szép, érdekes és nem közismert feladatokat javasolhatnak kitűzésre. A javasolt feladatokat (megoldásokkal együtt) a szerkesztőség címére küldjék el.

A diákok elfogadott javaslatait év végén beszámítjuk a különdíjért folyó versenybe.

Szeretnénk, ha a kitűzött kérdések nem zárulnának le véglegesen a beküldési határidővel, a közölt megoldással. Erre teremt lehetőséget az internetes KöMaL-fórum. Bármely, a lapunkban megjelent feladathoz, cikkhez kapcsolódó megjegyzést, általánosítást szívesen látunk és alkalomadtán közöljük.

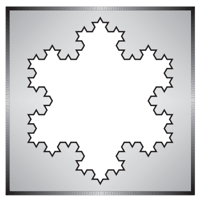
Örömmel fogadunk feladatjavaslatokat, cikkeket, szakköri munkáról szóló beszámolókat, közlésre alkalmas iskolai pályamunkákat. Javaslataikat, közleményeiket elküldhetik postán, vagy személyesen juttathatják el szerkesztőségünkbe.

Kérjük a szerkesztőségnek szánt üzeneteket a `szerk@komal.hu` e-mail címre küldeni.

Végezetül mindenkinek eredményes tanévet és sikeres versenyzést kíván a

Szerkesztőség

C gyakorlat megoldása



C. 1286. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x,$$
$$x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y.$$

Megoldás. Az első egyenletet alakítva: $y^2 = x(x-1)(x-2)$. A bal oldal nemnegatív, tehát a jobb oldal is: $x \in [0;1] \cup [2;+\infty[$. A második egyenletből ugyanígy $y \in [0;1] \cup [2;+\infty[$.

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet:

$$y^2 - x^2 = x^3 - y^3 - 3x^2 + 3y^2 + 2x - 2y.$$

Rendezzük, majd bontsuk szorzattá a jobb oldalt:

$$0 = x^3 - y^3 - 2x^2 + 2y^2 + 2x - 2y,$$

$$0 = (x-y)\big(x^2+xy+y^2\big) - 2(x-y)(x+y) + 2(x-y),$$

$$0 = (x-y)\big(x^2+xy+y^2-2x-2y+2\big),$$

$$0 = (x-y)\big[(x-1)^2+(y-1)^2+xy\big].$$

Egy szorzat akkor 0, ha egyik tényezője 0.

I. eset: $x-y=0$. Ekkor $x=y$, és az eredeti egyenletek alapján:

$$x^2 = x^3 - 3x^2 + 2x, \quad \text{amiből} \quad 0 = x^3 - 4x^2 + 2x = x\big(x^2-4x+2\big).$$

Ebből $x_1 = y_1 = 0$, illetve

$$x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Vagyis $x_2 = y_2 = 2-\sqrt{2}$ és $x_3 = y_3 = 2+\sqrt{2}$.

II. eset: $(x-1)^2+(y-1)^2+xy=0$. Tudjuk, hogy $(x-1)^2 \geqslant 0$, $(y-1)^2 \geqslant 0$ és mivel x és y is nemnegatív, ezért $xy \geqslant 0$. A három összege csak akkor lehet 0, ha mindhárom tag 0. Az első két tagból $x=y=0$, ám ekkor $xy=1\neq 0$.

Ebben az esetben nem kaptunk megoldást.

Farkas Dóra (Budaörsi Illyés Gy. Gimn. és KSZKI, 12. évf.)

Megjegyzések. 1. Sokan azt írták, hogy mivel a két egyenlet szimmetrikus, ezért $x=y$. Ez nem feltétlenül igaz. Lásd pl. *Ábrahám Gábor:* Az $f^{-1}(x)=f(x)$ típusú egyenletekről, avagy az írástudók felelőssége és egyéb érdekességek c. cikkét (KöMaL, 2010. december, és `www.komal.hu/cikkek/abraham/abraham.h.shtml`).

2. A szorzattá bontás után többen x-re rendezték a második tényezőt, majd felírták a megoldóképletet: $x^2+(y-2)x+\big(y^2-2y+2\big)=0$, amiből

$$x = \frac{-y+2 \pm \sqrt{(y-2)^2 - 4(y^2-2y+2)}}{2} = \frac{-y+2 \pm \sqrt{-3y^2+4y-4}}{2}.$$

A gyökjel alatti kifejezés diszkriminánsa $D = 16-48 < 0$, ezért ekkor nincs megoldás.

3. Azt, hogy x és y nem lehet negatív, többen úgy látták be, hogy ha pl. $x<0$, akkor $x^3<0$, $-3x^2<0$ és $2x<0$, így ezek összege is negatív lenne, ám $y^2 \geqslant 0$ miatt ez nem lehetséges.

40 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 15 versenyző: Bereczki Zoltán, Egyházi Anna, Farkas Dóra, Fehér Balázs, Fényes Balázs, Fülöp Erik, Jójárt Alexandra, Kasó Ferenc, Matusek Márton, Mészáros 01 Viktória, Porupsánszki István, Sándor Gergely, Szűcs Dorina, Telek Máté László, Vida Máté Gergely. 4 pontos 7, 2 pontos 11, 0 pontos 1 dolgozat. Nem versenyszerű 6 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 4619. *Oldjuk meg az*

$$x^2-4x+3=\sqrt{1+\sqrt{x-1}}$$

egyenletet.

(*5 pont*) Javasolta: *Kovács Béla* (Szatmárnémeti)

I. megoldás.* A négyzetgyök alatt nemnegatív szám áll: $x\geqslant 1$. Mivel a jobb oldal ekkor pozitív, a bal oldal is az: $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)>0$. Mivel $x<1$ nem teljesülhet, azt kapjuk, hogy $x>3$. Az egyenletet átrendezve:

$$(x-2)^2+1=\sqrt{1+\sqrt{x-1}}+2. \tag{1}$$

Az $f:(3;+\infty)\to(2;+\infty)$, $f(x)=(x-2)^2+1$ függvény szigorúan monoton növekvő, bijektív az értelmezési tartományán, ezért invertálható. Inverz függvénye az $f^{-1}:(2;+\infty)\to(3;+\infty)$, $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+2$. Vegyük itt mindkét oldal értékét $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+2$-nél:

$$f^{-1}\big(f^{-1}(x)\big)=\sqrt{1+\sqrt{x-1}}+2.$$

A jobb oldal épp (1) jobb oldala. Ezek alapján az egyenlet:

$$f^{-1}\big(f^{-1}(x)\big)=f(x),$$

ami pontosan akkor igaz, ha $f^{-1}(x)=f\big(f(x)\big)$, vagyis ha $x=f\big(f\big(f(x)\big)\big)$.

Mivel az f függvény szigorúan monoton növekvő, ezért $f(x)>x$ esetén $f\big(f(x)\big)>f(x)>x$, amiből $f\big(f\big(f(x)\big)\big)>f\big(f(x)\big)>f(x)>x$ következik. Hasonlóan, ha $f(x)<x$, akkor $f\big(f\big(f(x)\big)\big)<f\big(f(x)\big)<f(x)<x$.

Tehát $x=f\big(f\big(f(x)\big)\big)$ csak akkor teljesülhet, ha $x=f(x)$, és ekkor valóban igaz is.

Így

$$(x-2)^2+1=x,\quad \text{amiből}\quad x^2-5x+5=0.$$

A megoldóképlet alapján $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt5}{2}$. Csak a nagyobb gyök teljesíti az $x>3$ kikötést, vagyis $x=\frac{5+\sqrt5}{2}$.

*Érdemes tanulmányozni *Ábrahám Gábor:* Az $f^{-1}(x)=f(x)$ típusú egyenletekről, avagy az írástudók felelősége és egyéb érdekességek c. cikkét (KöMaL, 2010. december, és `www.komal.hu/cikkek/abraham/abraham.h.shtml`).

Behelyettesítve az eredeti egyenletbe, mindkét oldalon $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ adódik, tehát a megoldás jó.

Lengyel Ádám (Budapest, Városmajori Gimn. és Kós K. Ált. Isk., 11. évf.) megoldása alapján

II. megoldás. Mivel $x=1$ nem megoldás, ezért legyen $a=\sqrt{x-1}>0$. Ekkor $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=a^2\big(a^2-2\big)$ és $\sqrt{1+\sqrt{x-1}}=\sqrt{1+a}$. Ebből $a^2\big(a^2-2\big)=\sqrt{1+a}$, amit négyzetre emelve $a^4\big(a^4-4a^2+4\big)=1+a$. Ezt rendezve $a^8-4a^6+4a^4-a-1=0$.

Próbáljuk meg a bal oldalt szorzattá alakítani:

$$\begin{aligned} a^8-4a^6+4a^4-a-1&=a^8-a^7-a^6+a^7-a^6-a^5-2a^6+2a^5+2a^4-\\ &\quad -a^5+a^4+a^3+a^4-a^3-a^2+a^2-a-1=\\ &=\big(a^2-a-1\big)\big(a^6+a^5-2a^4-a^3+a^2+1\big). \end{aligned}$$

Ez pontosan akkor 0, ha az egyik tényezője az.

A második tényezőt vizsgálva:

$$\begin{aligned} a^6+a^5-2a^4-a^3+a^2+1&=a^6-2a^3+1+a^5-2a^4+a^3+a^2=\\ &=\big(a^3-1\big)^2+a^3(a-1)^2+a^2>0, \end{aligned}$$

mivel az első két tag nemnegatív, a harmadik pedig pozitív.

Ha az első tényező 0: $a^2-a-1=0$, amiből $a_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Mivel $a>0$, csak a pozitív megoldás jön szóba: $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Mivel $x=a^2+1$, így ebből

$$x=1+\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{10+2\sqrt{5}}{4}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

Ami behelyettesítve valóban jó megoldást ad.

Andi Gabriel Brojbeanu (Targoviste, „Constantin Carabella" National College, 11. évf.)

Megjegyzés. Aki egy 8-ad-fokú polinomot indoklás nélkül szorzattá alakított, legfeljebb 3 pontot kaphatott.

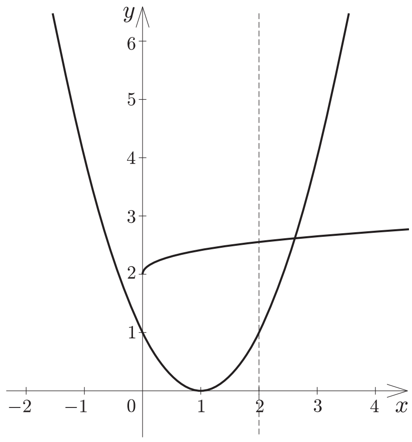
III. megoldás. Az előző megoldásokból $x\geqslant 3$ és az egyenlet $(x-1)(x-3)=\sqrt{1+\sqrt{x-1}}$.

Legyen $a = x - 1 \geqslant 2$, ekkor

$$(a-1)^2 - 1 = \sqrt{1+\sqrt{a}},$$

vagyis $(a-1)^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{a}}$.

Az $y = (x-1)^2$ függvény grafikonja $x \geqslant 2$ esetén a megfelelő parabolának egy szigorúan monoton növekedő része, amely végig konvex. Az $y = 1 + \sqrt{x}$ függvény gyökfüggvény, aminek menete még egy gyökvonással lényegében nem változik (nem keletkezik benne inflexiós pont, végig konkáv). Így a két grafikon egy pontban metszi egymást.



Mivel $a > 0$, gyököt vonhatunk mindkét oldalból: $a - 1 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{a}}}$, amiből

$$a = 1 + \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{a}}}. \tag{2}$$

Ha a helyére a jobb oldalon behelyettesítenénk a értékét, vagyis a jobb oldalt, majd ezt az eljárást végtelen sokszor megismételnénk, úgy egy végtelen sorozatot kapnánk: $1 + \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}$. Azt sejtjük, hogy az egyenletben szereplő a értéke ez a sorozat, vagyis a bárhova behelyettesíthető a sorozaton belül, tehát:

$$a = 1 + \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}} = 1 + \sqrt{a}, \quad \text{ebből} \quad a - 1 = \sqrt{a}.$$

Innen $x - 2 = \sqrt{x-1}$, négyzetre emelve $x^2 - 4x + 4 = x - 1$, rendezve

$$x^2 - 5x + 5 = 0.$$

Ennek az egyetlen, a kikötésnek megfelelő gyöke $x = 2{,}5 + \sqrt{1{,}25}$. Mivel több gyök nincs, ez az egyetlen megoldás.

Németh Róbert (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) megoldása alapján

Megjegyzés. Mivel $a > 0$, a (2) egyenlet mindkét oldalából gyököt vonva azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{a} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{a}}}},$$

amiből $f(y) = \sqrt{1+y}$ jelöléssel az I. megoldásbeli $y = f\big(f\big(f(y)\big)\big)$ alakot kapjuk.

83 dolgozat érkezett. 5 pontos 32, 4 pontos 3, 3 pontos 15, 2 pontos 17, 1 pontos 5, 0 pontos 10 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 4649. *Legyenek a síkon $e_1, e_2, \ldots, e_n$ különböző egyenesek, f pedig egy olyan egyenes, mely egyikükkel sem párhuzamos. Tekintsük az f-fel párhuzamos összes f_α egyenest. Legyen S_α az $f_\alpha \cap e_1, f_\alpha \cap e_2, \ldots, f_\alpha \cap e_n$ pontok súlypontja. Mutassuk meg, hogy az S_α pontok kollineárisak.*

(*6 pont*) Javasolta: *Csikós Balázs* (Budapest)

I. megoldás. Legyen S_0 az $f \cap e_1, f \cap e_2, \ldots, f \cap e_n$ pontok súlypontja. Ekkor S_0 nyilván rajta van az f egyenesen. Vegyünk fel egy Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy az origója S_0 legyen, az y tengely egyenese pedig essen egybe f-fel. Ebben a koordinátarendszerben f egyenlete $X = 0$, az e_i egyenes egyenlete pedig minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén felírható $Y = m_i X + b_i$ alakban, mert ezen egyenesek egyike sem párhuzamos f-fel.

Ha az f-fel párhuzamos f_α egyenes egyenlete $X = \alpha$, akkor az $f_\alpha \cap e_i$ pont koordinátái $(\alpha, m_i\alpha + b_i)$. Tehát a súlypont koordinátáinak kiszámítására vonatkozó szabály alapján $\alpha = 0$ esetén kapjuk, hogy

$$S_0 = (0,0) = \left(0, \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n}\right),$$

azaz $\sum_{i=1}^n b_i = 0$, általában pedig

$$S_\alpha = \left(\frac{n\alpha}{n}, \frac{\sum_{i=1}^n (m_i\alpha + b_i)}{n}\right) = \left(\alpha, \frac{\sum_{i=1}^n m_i\alpha}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n}\right) = \left(\alpha, \frac{\sum_{i=1}^n m_i\alpha}{n}\right).$$

Az S_0 és S_α $(\alpha \neq 0)$ pontok összekötő egyenesének egyenletét az ismert képlet szerint felírva, majd azt rendezve kapjuk, hogy

$$(\alpha - 0)(Y - 0) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i\alpha}{n} - 0\right)(X - 0),$$

$$\alpha Y = \frac{\sum_{i=1}^n m_i\alpha}{n} X,$$

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{n} X. \tag{1}$$

Ebben az egyenletben nem szerepel α, vagyis az S_α pont az α értékétől függetlenül rajta van az (1) egyenletű egyenesen, tehát az S_α pontok kollineárisak.

Csépai András (Dunakeszi, Radnóti M. Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

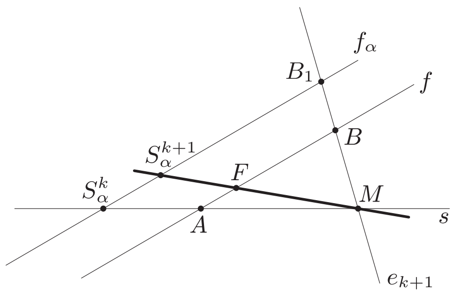
II. megoldás. A feladat állítását az egyenesek száma szerinti teljes indukcióval látjuk be. Ha $n = 1$, akkor S_α megegyezik f_α és e_1 metszéspontjával, azaz valamennyi súlypont az e_1 egyenesen van.

Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz az állítás. Legyen $n = k + 1$. Jelölje S_α^k az $f_\alpha \cap e_1, f_\alpha \cap e_2, \ldots, f_\alpha \cap e_k$ pontok súlypontját. Az indukciós feltevés szerint az S_α^k pontok egy egyenesre esnek. Jelölje ezt az egyenest s. Egy adott f_α esetén S_α^k éppen $f_\alpha \cap s$, mert a súlypont nyilván illeszkedik f_α-ra is. (Az nem lehet, hogy

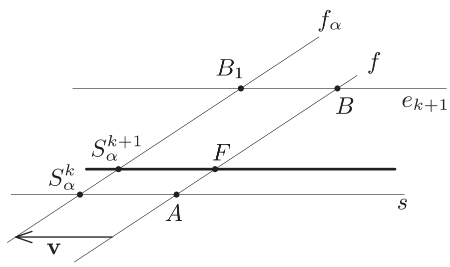
s és f_α egybeessenek, mert akkor más, f_α-val párhuzamos egyenesnek nem lenne közös pontja s-sel.)

Tekintsük most az $f_\alpha \cap e_1, f_\alpha \cap e_2, \dots, f_\alpha \cap e_{k+1}$ pontok S_α^{k+1} súlypontját. Ez a súlypontszerkesztési tétel (ezt részletesebben lásd a megoldás utáni megjegyzésben) szerint megegyezik az S_α^k és $f \cap e_{k+1}$ pontok által meghatározott szakaszt $1 : k$ arányban osztó ponttal (a szakasz esetleg elfajulhat egyetlen ponttá). Azt kell tehát megmutatnunk, hogy ezek az osztópontok egy egyenesre esnek. Két esetet különböztetünk meg.

Ha s nem párhuzamos e_{k+1}-gyel, akkor a metszéspontjukat jelölje M. Egy tetszőleges, f-fel párhuzamos, M-en át nem menő egyenes messe s-et A-ban, e_{k+1}-et pedig B-ben. Az AB szakasz $1 : k$ arányú osztópontját jelölje F (*1. ábra*). Megmutatjuk, hogy minden S_α^{k+1} pont illeszkedik az MF egyenesre. Ha f_α átmegy M-en, akkor s-et és e_{k+1}-et is M-ben metszi, így a metszéspontok „osztópontja” is M lesz. Ha f_α nem megy át M-en, akkor az s-sel való metszéspontja S_α^k. Ha $f_\alpha \cap e_{k+1} = B_1$, akkor az $S_\alpha^k B_1$ szakasz $1 : k$ arányú osztópontja S_α^{k+1}. Tekintsük azt az M középpontú ϕ hasonlóságot, ami A-t S_α^k-ba viszi. Ekkor ϕ a B pontot B_1-be viszi, mert B képe illeszkedik az e_{k+1} egyenesre és a B képét S_α^k-val összekötő szakasz párhuzamos AB-vel, F képe pedig S_α^{k+1}, mert a hasonlóság aránytartó. Tehát ebben az esetben az S_α^{k+1} pontok illeszkednek az MF egyenesre.



1. ábra



2. ábra

Ha s párhuzamos e_{k+1}-gyel, akkor a feltételekből következik, hogy f nem párhuzamos velük. Legyen f-nek s-sel, illetve e_{k+1}-gyel való metszéspontja A, illetve B, az AB szakasz $1 : k$ arányú osztópontja pedig F (*2. ábra*). Megmutatjuk, hogy ekkor minden S_α^{k+1} pont illeszkedik az F-en átmenő, s-sel párhuzamos t egyenesre. Tekintsük most azt az eltolást, ami az f egyenest f_α-ba viszi és $\mathbf{v}$ meghatározó vektora párhuzamos az s egyenessel. Ennél az eltolásnál az A képe $f_\alpha \cap s = S_\alpha^k$, a B képe $f_\alpha \cap e_{k+1}$, és ezért F képe az AB szakasz $1 : k$ arányú osztópontja, azaz S_α^{k+1}. Vagyis az $\overrightarrow{FS_\alpha^{k+1}}$ vektor párhuzamos s-sel, tehát ebben az esetben az S_α^{k+1} pontok illeszkednek a t egyenesre.

Ezzel beláttuk, hogy az állítás $n = k + 1$-re is igaz, s így minden n pozitív egész számra teljesül.

Baran Zsuzsanna (Debrecen, Debreceni Fazekas M. Gimn. 10. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A *súlypontszerkesztési tételnek* több változata van. Feladatunk megoldása során mi a következő, egyszerű formáját használtuk:

Ha a térben egy n pontból álló $\mathcal{P}$ halmazt tetszőleges módon felosztunk egy $1 \leqslant k \leqslant n-1$ pontból álló $\mathcal{P}_1$ és egy $n-k$ pontból álló $\mathcal{P}_2$ halmazra, akkor $\mathcal{P}$ súlypontja megegyezik a $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ súlypontjait összekötő szakaszt $(n-k):k$ arányban osztó ponttal.

Bizonyítás. Jelöljük egy tetszőleges kezdőpontból a $\mathcal{P}$ pontjaiba mutató vektorokat $\mathbf{p}_i$-vel, a súlypontokba mutató vektorok pedig legyenek rendre $\mathbf{s}$, $\mathbf{s}_1$ és $\mathbf{s}_2$. Ekkor a súlypont helyvektorára vonatkozó képlet szerint

$$\mathbf{s}=\frac{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\dots+\mathbf{p}_n}{n},\quad \mathbf{s}_1=\frac{\mathbf{p}_{i_1}+\mathbf{p}_{i_2}+\dots+\mathbf{p}_{i_k}}{k},\quad \mathbf{s}_2=\frac{\mathbf{p}_{i_{k+1}}+\mathbf{p}_{i_{k+2}}+\dots+\mathbf{p}_{i_n}}{n-k}.$$

Ezért

$$\mathbf{s}=\frac{k\mathbf{s}_1+(n-k)\mathbf{s}_2}{k+(n-k)},$$

ami a szakaszt adott arányban osztó pont helyvektorára vonatkozó ismert képlet alapján bizonyítja tételünket.

57 dolgozat érkezett. 6 pontos 32, 5 pontos 11, 4 pontos 7, 3 pontos 1, 2 pontos 1, 1 pontos 2, 0 pontos 1 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 4658. *Oldjuk meg a*

$$8^{2x-1}-1=343^{x-1}+\frac{3}{14}28^x$$

egyenletet.

(*6 pont*)

Megoldás. A hatványok átírásával

$$2^{3(2x-1)}-1=7^{3(x-1)}+\frac{3}{14}\cdot 2^{2x}7^x.$$

Ebben a formában már látható, hogy érdemes az $a=2^{2x-1}$ és $b=7^{x-1}$ új ismeretlenek bevezetésével kezelhetőbb szerkezetűvé tenni egyenletünket. Az exponenciális kifejezések pozitívak, tehát $a,b>0$.

$$a^3-b^3-1-3ab=0.$$

A következő lépéshez felhasználjuk az ismert

$$u^3+v^3+w^3-3uvw=(u+v+w)\big(u^2+v^2+w^2-uv-vw-wu\big)$$

algebrai azonosságot. (Az azonosság a jobb oldalon kijelölt szorzás elvégzésével és összevonással néhány lépésben igazolható.)

Legyen az azonosságban $u=a, v=-b$ és $w=-1$. Az eddigiek alapján az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható:

$$(a-b-1)\big(a^2+b^2+1+ab+a-b\big)=0.$$

Szorzat csak abban az esetben lehet nulla, ha egyik tényezője nulla, így elegendő az

$$a-b-1=0 \quad \text{és} \quad a^2+b^2+1+ab+a-b=0$$

egyenleteket megoldani. Tekintsük előbb a második egyenletet. Ezt – a szokásos módon – kettővel szorozva, három teljes négyzet összegévé alakíthatjuk:

$$2a^2+2b^2+2+2ab+2a-2b=0,$$

$$(a+b)^2+(a+1)^2+(b-1)^2=0.$$

Négyzetösszeg csak abban az esetben lehet nulla, ha mindegyik tag nulla. Ebben az esetben ez nem teljesülhet, mivel a és b is pozitívak, vagyis $(a+b)^2$ és $(b+1)^2$ is biztosan pozitív.

Az egyenlet összes megoldásait tehát kizárólag az

$$a-b-1=0$$

esetből kaphatjuk. A változók eredeti jelentése szerint pedig:

$$2^{2x-1}-7^{x-1}-1=0.$$

Alakítsuk úgy az első tagot, hogy a kitevő ott is $(x-1)$ legyen:

$$2\cdot 4^{x-1}-7^{x-1}-1=0.$$

Az egyenletet rendezve és osztva a pozitív 4^{x-1}-nel:

$$2-\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}=\left(\frac{7}{4}\right)^{x-1}.$$

Vizsgáljuk meg a két oldalon található függvényeket konvexitás szerint. Mind a $\left(\frac{7}{4}\right)^{x-1}$, mind pedig az $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$ kifejezésekkel meghatározott függvények szigorúan konvexek az egész értelmezési tartományukon, a valós számok halmazán. A (-1)-gyel történő szorzás szemléletesen az x-tengelyre vonatkozó tükrözést jelent, így az $f(x)=-\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$, illetve a 2-vel fölfelé eltolt $g(x)=2-\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$ függvény már szigorúan konkáv. Ismert, hogy egy konvex és egy konkáv függvénynek legfeljebb két metszéspontja lehet. Ezek a metszéspontok az $x=1$ és $x=2$ helyettesítésekkel azonnal adódnak is. ($2-1=1$, illetve $2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$.)

Átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért $x=1$, $x=2$ valóban megoldásai az eredeti egyenletnek.

Csépai András (Dunakeszi, Radnóti Miklós Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 79 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 33, 5 pontot 1 versenyző. 4 pontos 4, 3 pontos szintén 4, 2 pontos 17 tanuló dolgozata. 1 pontot kapott 10, 0 pontot 9 tanuló. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 4660. *Egy körmérkőzéses bajnokságban mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszik. A győzelem* 3*, a döntetlen* 1*, a vereség* 0 *pontot ér, pontegyenlőség esetén a csapatok közti sorrendet sorsolással állapítják meg. A bajnokság jelenleg is tart, a tabellát az A csapat vezeti. Tudjuk, hogy ha A a hátralevő fordulókban pontosan x pontot szerez még, akkor biztosan bajnok lesz. Ha viszont A több, mint x pontot szerez, akkor nem biztos, hogy az élen végez. (A szerezhet még x-nél több pontot.) Hány forduló van még hátra a bajnokságból?*

(*5 pont*) Javasolta: *Vígh Viktor* (Szeged)

Megoldás. Jelöljük n-nel a hátralevő fordulók számát. Meg fogjuk mutatni, hogy $n>1$ esetén mindig lehet példát adni a feladat állítására, ám $n=1$ esetén nem.

Ha $n=1$, akkor már csak 1 forduló van hátra, és amennyiben az A csapat több pontot szerez mint x, akkor is biztosan megnyeri a bajnokságot, hiszen már x pont szerzése estén is nyert volna.

Ha $n\geqslant 2$, akkor $x=3n-4$-re adunk példát az állításra. Legyen a tabellán 2. csapat a B, neki van a legnagyobb esélye, hogy utolérje az élen álló csapatot. Tegyük fel, hogy A játszik még B-vel, hogy B a hátralévő többi, nem A ellen vívott mérkőzését megnyeri, és hogy rajtuk kívül van még legalább két csapat, akik egymás között mindig döntetlent játszanak (ekkor ugyanis egyik sem éri utol a B csapatot sem).

Az A csapat csak akkor szerezhet n fordulóban $3n-4$ pontot, ha kettő kivételével minden meccsét megnyeri, a maradék kettőn pedig döntetlent játszik. Így ha A-nak k pontja volt, és B-nek $k-3$, akkor A-nak $k+3n-4$ lesz, míg B-nek $(k-3)+(3n-2)=k+3n-5$, vagyis A megnyeri a bajnokságot.

A csak úgy szerezhet az utolsó n fordulóban $3n-3$ pontot, ha pontosan egy meccset elveszít, a többit megnyeri. Ha a B ellen veszít, akkor a végén $k+3n-3$ pontja lesz, míg B-nek $k-3+3n$. Tehát pontegyenlőség alakul ki, ekkor sorsolással döntenek, vagyis nem biztos, hogy A nyer.

A-nak lehet úgy 3-mal több pontja, mint B-nek, ha az eddigi összes meccsét megnyerte, B pedig pontosan egyet elveszített, a többit pedig megnyerte. Ha eddig m forduló volt, akkor A-nak $3m$, B-nek pedig $3m-3$ pontja van. A többi csapat egymással mindig döntetlent játszott, nekik m pontjuk van, kivéve a harmadik helyezettet, aki a B-t legyőzte. Ennek a csapatnak $m+2$ pontja van. Teljesülnie kell, hogy $3m-3>m+2$, amiből $m\geqslant 3$ következik. Tehát az általunk adott példában a fordulók száma legalább $3+n$, a csapatok száma pedig legalább $4+n$.

Bereczki Zoltán (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn. és Ált. Isk. 12. évf.) és *Geng Máté* (Budapest, Németh László Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

58 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 23 versenyző: Baran Zsuzsanna, Bereczki Zoltán, Cseh Viktor, Csorba Benjámin, Czirkos Angéla, Éles Márton, Geng Máté, Hansel Soma, Horeftos Leon, Horváth Miklós Zsigmond, Katona Dániel, Lajkó Kálmán, Márki-Zay Anna, Mikulás Zsófia, Mócsy Miklós, Nagy Kartal, Nagy-György Pál, Schwarcz Tamás, Szakály Marcell, Szebellédi Márton, Temesi András, Tóth Viktor, Zólomy Kristóf. 4 pontos 13, 3 pontos 7, 2 pontos 8, 1 pontos 2, 0 pontos 1 dolgozat. Nem versenyszerű: 4 dolgozat.

B. 4676. *A számegyenesen egy bolha ugrál. A 0-ból indul, minden ugrásának hossza* 1*, és a következő ugrás mindig* p *valószínűséggel az előzővel egyező,* $1-p$ *valószínűséggel pedig ellentétes irányú. Mennyi annak a valószínűsége, hogy visszajut a* 0*-ba?*

(*6 pont*)

Megoldás. Jelöljük q-val annak a valószínűségét, hogy a bolha visszajut a 0-ba. A szimmetria miatt feltételezhetjük, hogy pozitív irányba indul el. Jelöljük r-rel annak a valószínűségét, hogy az 1-ből eljut a 0-ba, ha az 1-re a 2-ből érkezett.

Ha $p=1$, akkor $q=0$, biztos, hogy a bolha nem tér vissza a 0-ba.

Tegyük fel mostantól, hogy $p\neq 1$. Az első ugrás után feltevésünk szerint a bolha az 1-ben van, innen $1-p$ valószínűséggel egyből visszaugrik a 0-ba, p valószínűséggel pedig tovább a 2-re. Utóbbi esetben annak a valószínűsége, hogy a bolha visszatér az 1-be, szintén q. Ilyenkor az 1-be a 2-ből érkezik, így annak a valószínűsége, hogy ezután eljut a 0-ba r. Ezért az alábbi egyenlet írható fel:

$$q=(1-p)+pqr. \tag{1}$$

Most keressünk ehhez hasonló egyenletet r-re is. Miután az 1-be a 2-ből érkezett, p valószínűséggel továbbugrik a 0-ba, $1-p$ valószínűséggel pedig visszaugrik a 2-re. Innen az előzőekhez hasonlóan q valószínűséggel jut vissza az 1-re és onnan r valószínűséggel jut el a 0-ba, ezért

$$r=p+(1-p)qr. \tag{2}$$

A két egyenletet összeadva

$$r+q=qr+1,$$

amiből átrendezés és szorzattá alakítás után a

$$0=(1-q)(1-r)$$

összefüggést kapjuk. Ez az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $r=1$ vagy $q=1$. Ha $r=1$, akkor (2)-be behelyettesítve

$$1=p+(1-p)q,$$

és így

$$(1-p)(1-q)=0.$$

Mivel $p\neq 1$, azért $q=1$, vagyis $q=1$-nek mindenképpen teljesülnie kell.

Tehát ha $p\neq 1$, akkor 1 valószínűséggel visszajut a 0-ba, $p=1$ esetén viszont biztos, hogy nem jut vissza.

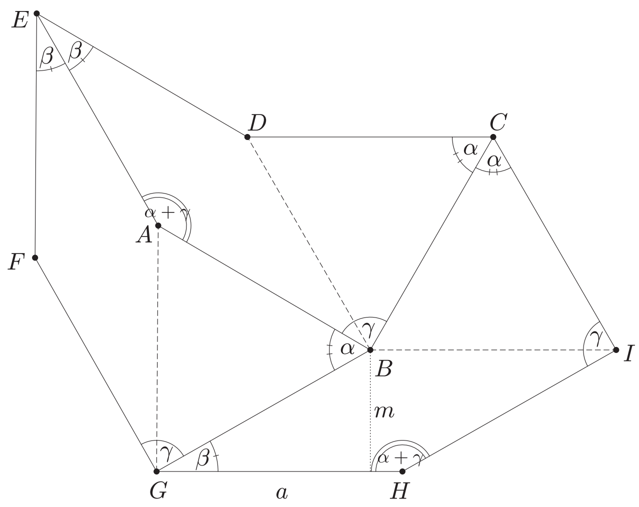
Gáspár Attila (Miskolc, Földes F. Gimn., 9. évf.)

41 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 12 versenyző: Alexy Marcell, Csépai András, Döbröntei Dávid Bence, Gáspár Attila, Horváth Miklós Zsigmond, Katona Dániel, Kovács Benedek, Nagy-György Pál, Porupsánszki István, Schwarcz Tamás, Szebellédi Márton, Williams Kada. 5 pontos 6, 4 pontos 4, 3 pontos 1, 2 pontos 2, 0 pontos 15 dolgozat. Nem versenyszerű: 1 dolgozat.

B. 4681. *Mekkora a* **C. 1240.** *feladatban szereplő ötszög területe?*

(*4 pont*)

Megoldás. A **C. 1240.** feladat megoldásából* tudjuk, hogy valamennyi szakasz hossza 7 cm.



Jelöljük a szögeket az *ábrán* látható módon α-val, β-val és γ-val. Az egybevágóság miatt $BAE\sphericalangle = CBG\sphericalangle = IHG\sphericalangle = \alpha + \gamma$.

A $CBGHI$ ötszögben a szögek összege:

$$\alpha + (360° - \alpha - \gamma) + \beta + (\alpha + \gamma) + \gamma = 3 \cdot 180° = 540°,$$

amiből $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Ez azt mutatja, hogy a GB szakasz párhuzamos a HI szakasszal, így a $BGHI$ négyszög rombusz, vagyis a BI távolság is $a = 7$ cm. Ekkor a CBI háromszög szabályos, amiből $\alpha = 60°$.

Az α szög értékének ismeretében $\beta + \gamma = 120°$, valamint a szabályos háromszög és a rombusz szögeiből az I pontban $\gamma = 60° + \beta$. Ezekből a szögek kiszámíthatók: $\beta = 30°$ és $\gamma = 90°$.

A rombusz magassága: $m = a \cdot \sin\beta = \frac{a}{2}$, területe pedig $T_R = a \cdot m = \frac{a^2}{2}$. A CBI háromszög területe: $T_H = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. A teljes $CBGHI$ ötszög területe így:

$$T = T_R + T_H = \frac{2+\sqrt{3}}{4}a^2 \approx 45{,}72\ \text{cm}^2.$$

Adorján Dániel (Budapest, Szent István Gimn., 10. évf.) és *Katona Dániel* (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn. 12. évf.) dolgozata alapján

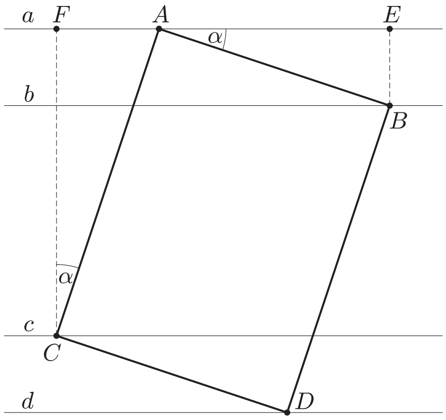
86 dolgozat érkezett. 4 pontos 63, 3 pontos 10, 2 pontos 2, 1 pontos 1, 0 pontos 10 dolgozat.

* `http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=C1240&l=hu`.

B. 4691. *Tekintsünk négy párhuzamos egyenest a síkon. Legyenek ezek sorrendben a, b, c és d. Tudjuk, hogy a és b távolsága* 1*, b és c távolsága* 3*, c és d távolsága szintén* 1*. Tekintsük azokat a téglalapokat, amelyek csúcsai közül mind a négy egyenesen pontosan egy helyezkedik el. Hogyan kapjuk meg azt a téglalapot, amelynek a lehető legkisebb a területe, és mekkora ez a terület?*

(*3 pont*)

Megoldás. Legyenek a téglalap a, b, c, és d egyeneseken lévő csúcspontjai rendre A, B, C, illetve D. Állítsunk merőlegeseket a B és C pontokból az a egyenesre, talppontjaik legyenek E és F (*ábra*).



A $BAE\sphericalangle = ACF\sphericalangle$ merőleges szárú szögek, jelöljük őket α-val.

Az ABE derékszögű háromszögben $BE = 1$, így $AB = \frac{1}{\sin\alpha}$.

Az ACF derékszögű háromszögben $CF = 4$, így $AC = \frac{4}{\cos\alpha}$.

A téglalap területe:

$$T = AB \cdot AC = \frac{4}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{8}{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{8}{\sin 2\alpha}.$$

A téglalap területe akkor lesz minimális, ha $\sin 2\alpha$ értéke maximális. Ez a $0 \leqslant \alpha \leqslant 90°$ tartományban $\alpha = 45°$-nál lesz, ekkor $\sin 2\alpha = \sin 90° = 1$.

Tehát a legkisebb területű téglalap az lesz, ahol az AB oldal $45°$-os szöget zár be az a egyenessel. Ekkor a téglalap területe $T = 8$ területegység.

Marozsák Tóbiás (Budapest, Óbudai Árpád Gimn. 9. évf.) és
Szemerédi Levente (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn. és Ált. Isk., 9. évf.)
dolgozata alapján

129 dolgozat érkezett. 3 pontos 86, 2 pontos 18, 1 pontos 15, 0 pontos 9 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (463–468.)

K. 463. Egy pénzösszeget négy ember között osztottak szét. Az első 3000 Ft-tal többet kapott, mint a teljes összeg harmada, a második 6000 Ft-tal többet kapott, mint a teljes összeg negyede, a harmadik 9000 Ft-tal többet kapott, mint a teljes összeg ötöde, a negyedik pedig 12 000 Ft-tal többet, mint a teljes összeg hatoda. Hány forint volt a teljes összeg?

K. 464. Az iskolában a tanár azt a feladatot adta, hogy 1-től 1000-ig számoljanak el a tanulók. Egy számítási lépés során kétféle dolog közül választhatnak: az éppen aktuális eredményüket megszorozzák egy általuk előre kiválasztott egyjegyű a számmal, vagy hozzáadnak 1-et. Melyik számot válasszuk a-nak, hogy a lehető legkevesebb lépésben teljesítsük a feladatot?

K. 465. Egy kincsesláda elektronikus zárszerkezetét nyolc darab kis kapcsoló vezérli. Minden kapcsoló kétféle állásban lehet, felfelé vagy lefelé kapcsolva. A zár akkor nyílik ki, ha minden kapcsoló felfelé áll. Bármelyik kapcsolót átkapcsolhatjuk egyik állásából a másikba. Egy automatika azonban érzékeli, hogy melyik kapcsoló állásán változtattunk, és azonnal három másik kapcsolót is átkapcsol az aktuális állásából az ellenkező állásba. (Az automatika által átkapcsolt kapcsolók továbbiakat már nem fordítanak át.) Az alábbi táblázatban találhatjuk, hogy melyik kapcsoló állásának megváltoztatásakor melyik három kapcsoló állása változik meg (az egyszerűség kedvéért megszámoztuk a kapcsolókat).

Átkapcsolt kapcsoló sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8
Vele együtt megváltozó kapcsolók sorszáma	2, 5, 7	1, 3, 8	5, 6, 7	1, 6, 8	2, 3, 6	2, 5, 8	1, 3, 4	1, 4, 7

a) Kezdetben minden kapcsoló lefelé áll, kivéve a 6-ost és a 7-est. Ebből a helyzetből indulva két kapcsoló átkapcsolásával ki tudjuk nyitni a ládát. Melyik két kapcsolót kell használnunk?

b) Kezdetben minden kapcsoló lefelé áll, kivéve a 7-est. Ebből az állásból indulva kinyitható-e a láda a kapcsolók segítségével?

K. 466. Hány olyan egész szám van 1-től 2015-ig, melynek 10-es számrendszerbeli alakjában van 5-ös, de nincs 7-es számjegy?

K. 467. Legyen p egy 3-nál nagyobb és 1000-nél kisebb prímszám. Mekkora az esélye, hogy $p-1$ vagy $p+1$ osztható 6-tal?

K. 468. A $\frac{30-x}{91}$ egyszerűsíthető törtben az x pozitív egész számot jelöl. Adjuk meg a tört összes lehetséges értékét egyszerűsített alakban.

❄

Beküldési határidő: 2015. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1301–1307.)

Feladatok 10. évfolyamig

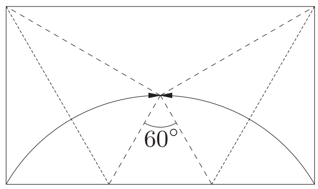
C. 1301. Bizonyítsuk be, hogy ha x_1 és x_2 pozitív valós számok, akkor

$$(x_1 + x_2 + 1)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 1\right) \geqslant 9.$$

C. 1302. Adott egy O középpontú, r sugarú kör, és rajta kívül egy P pont. A P-ből húzott érintők érintési pontjai a körön legyenek Q és R. Mekkora legyen az $|OP|$ távolság, hogy a $PQOR$ négyszög területe megegyezzen a kör területével?

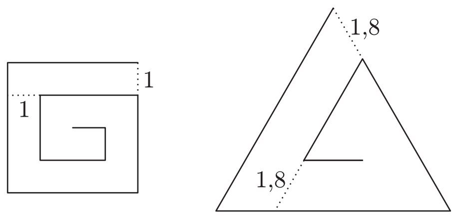
Feladatok mindenkinek

C. 1303. Egy 130 cm^2 területű, téglalap alakú origami papír két szomszédos csúcsát szimmetrikusan középre hajtottuk úgy, hogy a középre hajtott két oldal szabályos háromszöget formáz az *ábra* szerint. Mekkorák az eredeti papírlap oldalai?



C. 1304. Két játékos felváltva felír a táblára egy-egy természetes számot 1-től 10-ig. A szabály szerint csak olyan számot írhatnak fel, amely a táblán lévő számok egyikének sem osztója. Az a játékos veszít, aki a soron következő lépését nem tudja megtenni. Mutassuk meg, hogy ha a kezdő játékos jól játszik, akkor biztosan nyer.

C. 1305. Egy n egység oldalú négyzetből spirált készítünk az *ábrán* látható módon úgy, hogy a négyzet csúcsából indulva, befelé haladva mindig egy egységgel azelőtt törjük meg a vonalat, minthogy az belemetszene a spirál már meglévő részébe. Hasonló módon az $1{,}8\,n$ egység oldalú szabályos háromszögből képzett spirálnál a metszéspontot mindig 1,8 egységgel előzzük meg. (Az ábra $n = 4$ esetén mutatja a két spirált.) Milyen n érték mellett lesz a két spirál hossza megegyező?



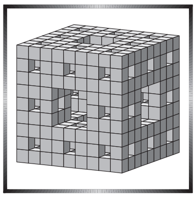
Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1306. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben két oldal is legfeljebb akkora, mint a hozzájuk tartozó magasság, akkor a háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög.

C. 1307. Milyen q valós számra lesznek a $\left(3-\sqrt{5}\right)$, $\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}-q\right)$, $\left(0{,}6-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ számok egy mértani sorozat egymást követő szomszédos elemei?

Beküldési határidő: 2015. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4723–4731.)

B. 4723. Megadható-e végtelen sok prímszám, melyek közül bármely 2015 összege összetett szám?

(*3 pont*) Javasolta: *Mészáros Gábor* (Budapest)

B. 4724. Oldjuk meg és ábrázoljuk az

$$x+y-xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy}\leqslant 2$$

egyenlőtlenséget.

(*4 pont*)

B. 4725. Mutassuk meg, hogy ha egy egyszerű gráfnak 7 csúcsa van és nincs 4 hosszú köre, akkor van olyan csúcsa, aminek a foka legfeljebb 2.

(*4 pont*)

B. 4726. Az $ABCD$ négyzet AB, illetve BC oldalán lévő P, illetve Q pontra $BP=BQ$. Jelölje T a B csúcsból a PC szakaszra bocsátott merőleges talppontját. Bizonyítsuk be, hogy a $DTQ\sphericalangle$ derékszög.

(*4 pont*)

B. 4727. Határozzuk meg az összes olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre tetszőleges x, y-ra $f(x+y)+f(x)f(y)=x^2y^2+2xy$.

(*5 pont*)

B. 4728. Legyen e egy kocka valamelyik élegyenese. Hány olyan egyenes van a térben, ami a kocka 12 élegyenese közül pontosan azokat metszi, amelyek e-hez képest kitérők?

(*3 pont*)

B. 4729. Adott az $ABCD$ négyszög, melynek C-nél és D-nél levő szöge derékszög. Szerkesszük meg a CD szakasznak azt a P pontját, melyre $APD\sphericalangle = 2\,BPC\sphericalangle$.

(*5 pont*)

B. 4730. Adottak a síkon az egymást E-ben érintő k_1 és k_2 körök. Kijelöltük mindkét k_i körön ($i = 1, 2$) az X_i és Y_i pontot úgy, hogy a két X_iY_i egyenes a körök közös belső érintőjén messe egymást. Bizonyítsuk be, hogy az X_1X_2E és Y_1Y_2E körök centrálisa, valamint az X_1Y_2E és X_2Y_1E körök centrálisa szintén a közös belső érintőn metszi egymást.

(*5 pont*) Javasolta: *Williams Kada* (Szeged, Radnóti M. Gimn.)

B. 4731. Legyen $0 \leqslant a, b, c \leqslant 2$, és $a + b + c = 3$. Határozzuk meg

$$\sqrt{a(b+1)} + \sqrt{b(c+1)} + \sqrt{c(a+1)}$$

legnagyobb és legkisebb értékét.

(*6 pont*) Javasolta: *Williams Kada* (Szeged, Radnóti M. Gimn.)

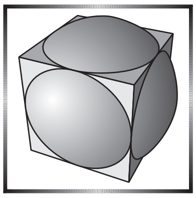
Beküldési határidő: 2015. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Figyelem! Az idei Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 2015. október 9-én, pénteken 14 órakor kerül megrendezésre. A budapesti terembe (BME Informatika épület IB028) csak 2 órától lehet bemenni (előadás lesz). További információt a Bolyai János Matematikai Társulattól lehet kérni a 201-6974-es telefonszámon.

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (647–649.)



A. 647. Legyen k nemnegatív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy csak véges sok n pozitív egész esetén léteznek olyan diszjunkt A és B halmazok, amelyekre $A \cup B = \{1; 2; \ldots; n\}$ és

$$\left|\prod_{a\in A} a - \prod_{b\in B} b\right| = k$$

teljesül.

Javasolta: *Maga Balázs* (Budapest)

A. 648. Az ABC hegyesszögű háromszög BC, CA és AB oldalainak felezőpontjai rendre D, E, illetve F. A háromszög C pontból induló magasságának talppontja T_1. Egy, a C ponton áthaladó, de a T_1 pontra nem illeszkedő egyenesen az A-ból és B-ből bocsátott merőlegesek talppontjai T_2, illetve T_3. Bizonyítsuk be, hogy a DEF kör átmegy a $T_1T_2T_3$ kör középpontján.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

A. 649. Egy konvex poliédernek minden lapja négyszög. Mutassuk meg, hogy a poliéder lapjait háromszögekre bonthatjuk egy-egy átló meghúzásával úgy, hogy a poliéder minden csúcsánál páros számú háromszög találkozzon.

Javasolta: *Nagy János* (Budapest)

Beküldési határidő: 2015. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Informatikából kitűzött feladatok

I. 379. A nyugatot benépesítő telepesek sokan ismerték egymást, akár még leveleztek is volna, de arról gyakran fogalmuk sem volt, hogy egy másik család vajon merre lehet. Postakocsi nem volt, csak a szomszédok találkoztak. Mivel más módjuk nem volt, a terület feltérképezésére a következőt találták ki:

Ha két szomszéd találkozik, akkor kicserélik ismereteiket. Ez azt jelenti, hogy egyik a másiktól megtudja, hogy az kikről tud már. Ha az adott illetőről még nem tudott, akkor feljegyzi a nevét és azt, hogy kitől hallott róla. Ha ezután bármilyen üzenetet kíván egyik telepes egy másiknak eljuttatni, akkor azt kéri meg a továbbításra, akitől először hallott róla.

Megfelelően sok találkozás után mindenki tudomást szerez a terület minden telepeséről.

Feltételezzük, hogy kezdetben mindenki ismeri a szomszédjait, de más családokat nem. A `szomszed.txt` fájl tartalmazza a szomszédság leírását. A `talalkozas.txt` pedig a találkozásokat írja le időrendben (ki, kivel).

A standard bemenetről olvassuk be, hogy ki kinek akar üzenetet küldeni. Határozzuk meg, hogy hányadik találkozást követően indíthatja útjára az üzenetet, valamint azt, hogy az üzenet milyen úton jut el a címzetthez.

Példa (a többsoros bemeneteknél a példában a sortörések helyett `/` jelet írtunk):

`szomszed.txt`	`talalkozas.txt`	Bemenet	Kimenet

`1 2 / 1 3 / 1 4 / 1 5 /`
`2 3 / 2 6 / 2 7 / 2 8 /`
`2 9 / 8 10 / 8 11`
	`2 8 / 4 1 /`
	`2 1 / 2 7`
		`4 11`	`3`
			`4 1 2 8 11`

Beküldendő egy tömörített `i379.zip` állományban a program forráskódja és megoldás rövid leírását bemutató dokumentáció, amely egyben megadja, hogy a forrás mely fejlesztő környezetben fordítható.

I. 380. Öröknaptár (É). Táblázatkezelő programokkal viszonylag könnyű meghatározni, hogy egy adott dátum milyen napra esik. Sajnos ezek a programok az 1900. január 1. előtti dátumokat nem kezelik. Ezekben az esetekben a „számítógép előtti idők” hagyományos módszerét alkalmazhatjuk, amely három segédtáblából áll. Az első segédtábla az évhez rendel egy indexszámot, a második az így kapott indexszámhoz és a hónap sorszámához ad egy kulcsszámot. Végül az így kapott kulcsszám és a nap sorszámának összegéből a harmadik tábla adja meg a nap nevét.

Példánkban 1848. március 15-ét keressük. Az 1848-hoz tartozó indexszám 45, a 45-höz és a márciushoz tartozó kulcsszám pedig 2. Végül 2 + 15 összegét visszakeresve szerdát kapunk.

Évek indexszámai

1	1805	1833	1861
3	1818	1846	1874
4	1819	1847	1875
45	1820	**1848**	1876
0	1821	1849	1877
1	1822	1850	1878

Hónapok kulcsszámai

	1	2	**3**	4
0	0	3	3	6
43	3	6	0	3
44	4	0	1	4
45	5	1	2	5
46	6	2	3	6

A kapott számértékhez rendelt nap

1	8	15	22	29	36	Hétfő
2	9	16	23	30	37	Kedd
3	10	**17**	24	31		Szerda
4	11	18	25	32		Csütörtök
5	12	19	26	33		Péntek
6	13	20	27	34		Szombat

Ebben a feladatban a segédtáblák birtokában kell elkészítenünk egy táblázatkezelő munkalapját úgy, hogy az meghatározza, milyen napra esett egy adott dátum. A segédtáblákat a `tablak.txt` UTF kódolású, tabulátorokkal tagolt állomány tartalmazza.

1. Töltsük be a táblázatkezelő program egyik munkalapjára az A1 cellától kezdve a `tablak.txt` adatfájlt, majd mentsük a munkafüzetet `oroknaptar` néven a program alapértelmezett formátumában.
2. Első feladatunk az év indexszámának meghatározása, amit két lépésben fogunk elvégezni. Első lépésben képlet segítségével jelenítsük meg a 36. sor celláiban, hogy a C1 cellában megadott év a B5:T35 segédtábla adott oszlopában hányadik sorban szerepel. Ha az adott oszlopban nem szerepel az évszám, úgy a 36. sor megfelelő cellájában 0-t jelenítsünk meg.
3. Második lépésben függvény segítségével jelenítsük meg a C1 cellában lévő év indexszámát a C2 cellában. Az indexszámot az A5:A35 tartományban találjuk, sorszámát a 36. sor 0-tól különböző eleme adja meg.
4. Következő feladatunk a kulcsszám meghatározása az E2 cellában. A kulcsszám az előzőekben meghatározott indexszámtól és a hónap E1 cellában megadott sorszámától függ. A kulcsszámot az A39:M53 segédtáblából kell függvény al-

kalmazásával visszakeresnünk, a segédtábla oszlopait a hónapok azonosítják (B39:M39), sorait pedig az indexszámok (A40:A53).

5. A nap visszakereséséhez határozzuk meg képlettel a G2 cellában a kapott kulcsszám (E2) és a nap sorszámának (G1) összegét.
6. Utolsó lépésként meghatározzuk az adott nap elnevezését. Ehhez keressük meg képlet alkalmazásával az A57:G63 segédtáblában a G2 cellában kapott összeget, és írassuk az I2 cellába a szám sorában, az utolsó oszlopban található nap nevét.
7. Mindhárom segédtábla (A5:T35, A39:M53, A57:G63) celláit határoljuk belül vékony, kívül vastag vonallal. A megadott dátumhoz tartozó három cella, valamint a nap elnevezését tartalmazó cella tartalma legyen félkövér, háttere pedig halványszürke.
8. Feltételes formázás alkalmazásával emeljük ki félkövér, sötétvörös színnel:
   a) a B5:T35 tartományból a C1 cellában szereplő évszámot,
   b) a B39:M39 oszlopfejlécből az E1 cellában szereplő hónapot,
   c) az A40:A53 sorfejlécből a C2 cellában szereplő indexszámot, és
   d) a B40:M53 tartományból a G2 cellában szereplő számértéket.

Letölthető fájl: `tablak.txt`.

Minta:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Év:	**1848**	Hónap:	**3**	Nap:	**15**		
2		Index:	45	Kulcs:	2	Számérték	17	Nap:	**Szerda**
3									
4	Évek indexszámai								
5	1		1585	1613	1641	1669	1697	1709	1737
6	2		1586	1614	1642	1670	1698	1710	1738
7	3		1587	1615	1643	1671	1699	1711	1739
8	44		1588	1616	1644	1672		1712	1740
9	4						1700		
10	6		1589	1617	1645	1673		1713	1741
11	0		1590	1618	1646	1674		1714	1742
12	1		1591	1619	1647	1675		1715	1743
13	42		1592	1620	1648	1676		1716	1744
14	4		1593	1621	1649	1677		1717	1745

Beküldendő egy tömörített `i380.zip` állományban a megoldást tartalmazó munkafüzet és a megoldás rövid leírását bemutató dokumentáció.

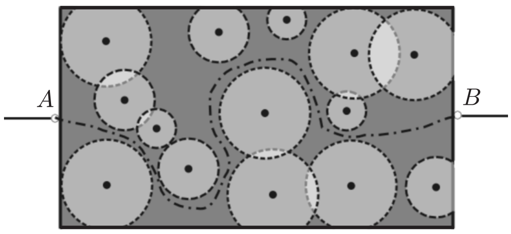
I. 381. Készítsünk weblapot a HTML5 és CSS3 újdonságainak rövid bemutatására, természetesen a fenti szabványoknak megfelelő formában.

A kiinduló index.html oldal legyen olyan elrendezésű, hogy felül egy fejlécből, alul egy lábrészből és középen egy tartalomrészből álljon. A fejlécbe helyezzünk el a témához illő logókat bal oldalon, mellette jelenjen meg a „HTML5 – CSS3 újdonságok és érdekességek” cím. A tartalom részben 300 px széles, azonos magasságú dobozok legyenek, amelyek egy-egy újdonságot mutatnak be. A nyolc doboz mindegyike egy azonos méretű képet és egy mondatot tartalmazzon, valamint legyen hivatkozás egy olyan weboldalra, ahol a témát bővebben kifejtik. Ezek között legyen egy olyan doboz, amelynek témáját a `kedvenc.html` oldalon mi magunk magyarázzuk el, az oldalon működő példával. A `kedvenc.html` oldal szerkezete legyen a főoldalhoz hasonló, de a tartalom rész egy dobozában helyezzük el a kedvenc újdonság leírását. A lábrészt impresszumként használjuk föl, ahol adjuk meg adataink (név, évfolyam, iskola, város) és a HTML5 és CSS3 ellenőrzés logókat.

A két oldal kinézetét és elrendezését egy közös forma.css állomány segítségével adjuk meg. A weboldal különböző méretű megjelenítőkön is jól nézzen ki, tehát a megjelenítő szélességétől függően másként rendezzük el az oldalt. Egyrészt a fejléc és lábléc logói csak közepes és nagyobb megjelenítőkön legyenek láthatóak, de a szövegek minden betűje mindig jelenjen meg. Másészt a főoldal dobozai egymástól egyenlő távolságban legyenek elrendezve, a legnagyobb megjelenítőkön egy sorban négy, majd fokozatosan kevesebb, míg a legkisebbeken soronként egy. Az oldal színvilága a szürke árnyalataira épüljön, más színt csak a képeknél használjunk.

Beküldendő egy tömörített `i381.zip` állományban a weboldalt tartalmazó mappa.

I/S. 1. Egy kisfeszültséggel működő áramkörben egy vékony fémlemez van, amelyből egy automata körlemezeket vág ki. Feladatunk annak eldöntése, hogy az áramkör zárt marad-e a körlemezek eltávolítása után, van-e kontaktus az A és a B pont között.



A fémlemez $N \times M$ $(10 \leqslant N, M \leqslant 1000)$ téglalap alakú, amelyből K $(0 \leqslant K \leqslant 100)$ kört vágunk ki. A körök metszhetik egymást, középpontjaik (x_i, y_i egészek) a lemezen belül vannak, és a sugaraik $(0 < r_i \leqslant \min(N, M))$ ismert egészek. A fémlemez N hosszú és M széles, az A pont az $x = 0$, míg a B pont az $x = N$ helyen kapcsolódik a fémlemezhez (vagyis a lemez teljes oldalsó szélével össze vannak kötve). A körök kivágása a körlemez és kerületének eltávolításával jár, tehát az éppen érintkező körök érintkezési pontjai sem maradnak a fémlemezen.

A program olvassa be a standard input első sorából N-et, M-et és K-t, majd a következő K sorból a körök középpontjainak koordinátáit és sugarait (nemnegatív egészek), majd írja a standard output első és egyetlen sorába a „Vezet” vagy „Nem vezet” szavakat attól függően, hogy az áramkör zárt maradt-e a körök eltávolítása után.

Példa bemenet:	**Példa kimenet:**

`55 50 4`
`25 45 10`
`10 40 12`
`22 21 15`
`50 12 13`
	`Vezet`

Pontozás és korlátok: A programhoz mellékelt, a helyes megoldás elvét tömören, de érthetően leíró dokumentáció 1 pontot ér. A programra akkor kapható meg a további 9 pont, ha bármilyen hibátlan bemenetet képes megoldani az 1 mp futásidőkorláton belül.

Beküldendő egy tömörített `is1.zip` állományban a program forráskódja és dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztő környezetben fordítható.

S. 100. Adott N ($1 \leqslant N \leqslant 300\,000$) db négyzet, melyek oldalai párhuzamosak a koordináta-rendszer tengelyeivel. Minden négyzet pontosan $K \times K$-as méretű ($1 \leqslant K \leqslant 1\,000\,000$). Adottak a négyzetek középpontjai az $(x; y)$ koordinátáikkal ($-1\,000\,000 \leqslant x, y \leqslant 1\,000\,000$). Optimális esetben a négyzetek nem lógnak egymásba, viszont előfordulhat, hogy egy vagy több négyzetpárnak mégis van közös területe.

A program olvassa be a standard input első sorából N-et és K-t, majd a következő N sorból az x_i, y_i középpontokat. A program írjon a standard output első és egyetlen sorába `0`-t, ha nincs egymásba lógó négyzetpár, `-1`-et, ha több négyzetpár is egymásba lóg, végül a közös terület nagyságát, ha pontosan egy négyzetpár lóg egymásba.

Példa bemenet:	Példa kimenet:

`4 6`
`0 0`
`8 4`
`-2 1`
`0 7`
	`20`

Magyarázat: az 1-es és a 3-as négyzetek lógnak egymásba.

Pontozás és korlátok: A programhoz mellékelt, a helyes megoldás elvét tömören, de érthetően leíró dokumentáció 1 pontot ér. A programra akkor kapható meg a további 9 pont, ha bármilyen hibátlan bemenetet képes megoldani az 1 mp futásidőkorláton belül.

Beküldendő egy tömörített `s100.zip` állományban a program forráskódja, valamint a program rövid dokumentációja, amely a fentieken túl megadja, hogy a forrás mely fejlesztői környezetben fordítható.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: **2015. október 10.**

Öt érem a 46. Nemzetközi Fizikai Diákolimpián

(Mumbai, India, 2015. július 4–13.)

A magyar csapat 4 ezüstéremmel és 1 bronzéremmel végzett a Mumbaiban (India) július 4. és 13. között megrendezett versenyen, és ezzel az országok közti nem-hivatalos versenyben 84 ország közül az előkelő 12. helyezést érte el.

A csapat és eredményeik (a maximális pontszám 50):

Öreg Botond (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. oszt.) *ezüstérem* (41,9 pont), felkészítő tanár: *Horváth Gábor;*

Holczer András (Pécsi Janus Pannonius Gimn., 12. oszt.) *ezüstérem* (38,2 pont), felkészítő tanár: *Dombi Anna, Kotek László;*

Sal Kristóf (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. oszt.) *ezüstérem* (36,9 pont), felkészítő tanár: *Kotek László, Horváth Gábor;*

Balogh Menyhért (Budapest, Baár-Madas Református Gimn., 11. oszt.) *ezüstérem* (33,9 pont), felkészítő tanár: *Horváth Norbert;*

Tompa Tamás Lajos (Miskolc, Földes F. Gimn., 10. oszt.) *bronzérem* (31,0 pont), felkészítő tanár: *Zámborszky Ferenc, Kovács Benedek.*

Az országok közti nem-hivatalos verseny (pont- és éremtáblázat, az első 30 helyezett):

	Ország	**Pontszám**		**Ország**	**Pontszám**
1.	Kína	234,3	16.	Japán	168,2
2.	Dél-Korea	229,3	17.	Németország	168,1
3.	Tajvan	222,1	18.	Örményország	163,9
4.	USA	217,9	19.	Izrael	162,1
5.	Oroszország	217,6	20.	Fehéroroszország	159,4
6.	Hongkong	210,9	21.	Bulgária	158,3
7.	Szingapúr	209,1	22.	Csehország	157,7
8.	Irán	207,5	23.	Törökország	157,6
9.	Vietnam	207,2	24.	Nagy-Britannia	155,7
10.	Thaiföld	196,3	25.	Franciaország	155,1
11.	Románia	195,5	26.	Olaszország	152,5
12.	**Magyarország**	**181,9**	27.	Lengyelország	152,2
13.	India	178,5	28.	Ausztrália	135,3
14.	Indonézia	170,7	29.	Kanada	134,5
15.	Ukrajna	169,9	30.	Szlovákia	134,3

	Ország	**Arany-érem**	**Ezüst-érem**	**Bronz-érem**	**Dicséret**
1.	Kína	5			
2.	Dél-Korea	4	1		

	Ország	**Arany-érem**	**Ezüst-érem**	**Bronz-érem**	**Dicséret**
3.	Tajvan	4	1		
4.	USA	4	1		
5.	Oroszország	4	1		
6.	Hongkong	3	2		
7.	Vietnam	3	2		
8.	Irán	2	3		
9.	Románia	2	2	1	
10.	Szingapúr	1	4		
11.	Thaiföld	1	4		
12.	Japán	1	2	2	
13.	Fehéroroszország	1	1	3	
14.	Lengyelország	1		3	1
15.	Észtország	1		1	2
16.	Kazahsztán	1		1	2
17.	**Magyarország**		**4**	**1**	
18.	India		4	1	
19.	Indonézia		3	2	
20.	Ukrajna		3	2	
21.	Németország		3	2	
22.	Izrael		3	2	
23.	Csehország		3	2	
24.	Törökország		3	2	
25.	Örményország		2	3	
26.	Bulgária		2	3	
27.	Nagy-Britannia		2	3	
28.	Franciaország		2	3	
29.	Olaszország		2	2	1
30.	Szlovákia		1	3	1

Az olimpiára való készülés szokás szerint a budapesti (*Szász Krisztián, Tasnádi Tamás, Vankó Péter, Vigh Máté*), miskolci (*Zámborszky Ferenc*), pécsi (*Kotek László*) és szegedi (*Hilbert Margit, Sarlós Ferenc*) olimpiai szakkörökön, valamint a BME Fizika Tanszékén szervezett mérési foglalkozásokon kezdődött. Tavasszal két hétvégi felkészítő programot is rendeztünk, ahol a szakkörvezetőkön kívül *Gnädig Péter* és *Honyek Gyula* tartott előadást. A csapatot a szakkörök résztvevői és az országos versenyeken kimagasló eredményeket elért tanulók közül az áprilisban megrendezett kétfordulós Kunfalvi Rezső versenyen válogattuk ki. A résztvevőknek a versenyen az olimpián szokásos stílusú elméleti és mérési feladatokat kellett megoldaniuk. Az egymást követő fordulók – az olimpiához hasonlóan – a versenyzők fizikai állóképességét is próbára tették. A csapat kiválasztásánál a válogatóversenyen elért eredmény mellett a korábbi versenyeredményeket és a KöMaL mérési versenyében elért eredményt is figyelembe vettük.

A felkészülés következő lépéseként a csapat részt vett az immár hagyományos Román-Magyar előolimpián. A verseny ebben az évben Romániában, Kolozsváron, a belvárosban található Unitárius Kollégiumban került megrendezésre. A versenyen az öt csapattagon kívül három fiatalabb, a válogatóversenyen eredményesen szereplő diák is részt vett. A versenyzőket Honyek Gyula, Vankó Péter és Vigh Máté kísérte.

Ezen kívül a Dombóvár-Gunarason megrendezett nyári KöMaL-táboron tartottunk a csapatnak egy ötnapos felkészítést.

A csapat július 4-én, szombat reggel, Vankó Péter (BME Fizikai Intézet) és Vigh Máté (ELTE Fizikai Intézet) csapatvezetőkkel és Szász Krisztián (MTA Wigner Fizikai Kutatóintézet) megfigyelővel indult Indiába, ahová frankfurti átszállás után másnap kora hajnalban érkezett meg.

Vasárnap délután volt a (nagyon hosszú) megnyitó, majd a csapatvezetők hétfőn reggeltől (másnap hajnalig) vitatták meg és fordították le a mérési feladatokat, amelyeket a versenyzőknek kedd délelőtt kellett megoldaniuk. A mérési feladatok a fény nemzetközi évéhez illően optikai mérések voltak: diffrakció segítségével kellett vizsgálni csavarvonal alakú (a DNS molekulát modellező) szerkezeteket, valamint víz felszínén kialakuló kapillárishullámokat. A mérésekhez a rendezők nagyon jó minőségű eszközöket készítettek. Érdekesség, hogy a mérés második része – az olimpiainál sokkal kezdetlegesebb berendezéssel – szerepelt a Kunfalvi válogatóversenyen is.

Szerdán ismét a csapatvezetők dolgoztak: megvitatták és lefordították az elméleti feladatokat. Csütörtökön délelőtt, a mérési fordulóhoz hasonlóan, a versenyzőknek ismét 5 órájuk volt a feladatok megoldására. Az első feladat a Nap által kibocsátott fotonokkal és neutrínókkal foglalkozott, a második feladat a szélsőértékelvekkel, míg a harmadik feladat az atomreaktorok tervezésének néhány kérdésével. Az elméleti feladatok csalódást okoztak: nem voltak sem különösebben érdekesek, sem nagyon eredetiek. A nehézséget a tavalyi évhez hasonlóan a hosszú levezetések, számítások okozták. (A feladatok szövege a KöMaL októberi, megoldásuk a novemberi számában fog megjelenni.)

A két forduló között és a verseny után a rendezők különböző programokat szerveztek Mumbaiban, és a diákoknak Mumbaion kívül is. Mindnyájan jártunk Dél-Mumbai városközpontjában, ahol sok szép, az angol gyarmati időből származó épület látható, körülötte pedig hatalmas forgalom, utcai árusok és rengeteg ember. A tanárok ellátogattak a Mumbai északi részébe beékelődő Sanjay Gandhi nemzeti parkba, ahol megnézték a buddhista szerzetesek által az ókorban kivájt Kanheri barlangokat, és egy rövid látogatást tettek a Godrej lakatgyárban. A diákok egy vidámparkban és egy traktorgyárban jártak.

Szabadidőnkben bementünk a városba, és sétáltunk a szálloda környékén is. Megdöbbentő, hogy egymáshoz milyen közel látni épülő felhőkarcolókat, nyolcsávos utakat, luxuscikkek óriásplakátjait és hatalmas dobozvárosokat, szeméttel borított nyomortelepeket. Rengeteg kisgyerek is él az utcán. Eközben a csapatvezetők és a rendezők is kijavították a dolgozatokat, majd következett a szokásos egyeztetés a végleges pontszámról. A verseny szabályai és a versenyzők által elért eredmények alapján 42,2 ponttól aranyérmet, 33 ponttól ezüstérmet, 24 ponttól bronzérmet és 18 ponttól dicséretet lehetett kapni.

Vasárnap délelőtt került sor a (megnyitónál is hosszabb) díjkiosztóra és záróünnepségre, majd egy elegáns tóparti szállodában a búcsúebédre. Éjszakai indulással és müncheni átszállással 13-án, hétfőn délelőtt érkeztünk haza.

Köszönettel tartozunk az Emberi Erőforrások Minisztériumának, a BME Fizikai Intézetnek és az ELTE Fizikai Intézetének, melyek a válogatóversenyek és a felkészítés során helyet és eszközöket biztosítottak a munkához, valamint a MOL-nak és az MTA Energiatudományi Kutatóközpontnak anyagi támogatásukért.

Jövőre az olimpiát július 10–18. között a svájci Zürichben rendezik meg. A versenyre való felkészülést az idei évtől már 4 vidéki szakkör, valamint a budapesti elméleti és mérési szakkör segíti (a szakkörökről a legátfogóbb információ a `http://ipho.elte.hu/` honlapon található):

Székesfehérvár: *Orosz Gábor* (Óbudai Egyetem Alba Regia Műszaki Kar, Székesfehérvár, Budai út 45.),

Szeged: *Hilbert Margit* (Szegedi Tudományegyetem, Dóm tér 9. I. em. Budó Ágoston terem),

Pécs: *Kotek László* (Pécsi Tudományegyetem, Fizikai Intézet, Ifjúság útja 6.),

Miskolc: *Zámborszky Ferenc* (Földes Ferenc Gimn., 3525 Miskolc, Hősök tere 7.),

Budapest: *Vankó Péter* (BME, Fizikai Intézet, 1111 Budafoki út 8. Fizikus Hallgatói Labor, F épület, III. lépcsőház, II. emelet). Az elméleti szakkört hétfőnként 3-tól 5 óráig tartjuk, jelentkezni nem kell, az első foglalkozás október 5-én lesz. Info: `http://eik.bme.hu/~vanko/labor/Bpszakkor.pdf`. A tehetséggondozó mérési szakkörre írásban jelentkezni kell (erről lásd még külön felhívásunkat). Info: `http://eik.bme.hu/~vanko/labor/Tehetseggondozas.pdf`.

A fenti szakkörökön való *aktív* részvétel mellett elsősorban önálló munkával, a KöMaL elméleti és mérési feladatainak rendszeres megoldásával lehet készülni a jövő évi Fizikai Diákolimpiára.

Eredményes felkészülést kívánunk!

Szász Krisztián, Vankó Péter és **Vigh Máté**

Tehetséggondozás: Mérési szakkör a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Fizikai Intézetében

A fizika iránt érdeklődő, tehetséges középiskolás diákok számára a BME Fizikai Intézet gyakorlati foglalkozásokat tart. A foglalkozásokon lehetőséget biztosítunk arra, hogy a tanulók mérőpárokban fizikai kísérleteket és méréseket végezhessenek. A foglalkozásokra októbertől kezdődően kéthetente, kedden 15.00-tól 18.00-ig kerül sor, összesen tíz alkalommal. Információ: `http://mono.eik.bme.hu/∼vanko/labor/Tehetseggondozas.pdf`.

Az érdeklődők e-mail-ben jelentkezhetnek **2015. szeptember 30-ig** az alábbi címen:

`vanko@mono.eik.bme.hu`

Elsősorban a gimnáziumok utolsó két évfolyamára járók jelentkezését várjuk. A jelentkezők írjanak pár sort magukról, ismertessék a fizika és a matematikai tanulmányaik során elért eredményeiket (versenyeredmények, KöMaL szereplés stb.) és továbbtanulási elképzeléseiket.

A foglalkozások ingyenesek! Minden jelentkezőt e-mail-ben értesítünk (aki nem kap választ, küldje el még egyszer a jelentkezését).

Vankó Péter

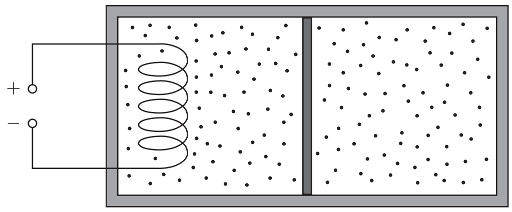
Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny[1] Budapest, 2015. április 8–10.

1. forduló, elméleti rész[2]

1. feladat. (Ez a feladat három független, kisebb részből áll.) (*150 p*)

1.A. Egy függőleges tengelyű mérőhenger falába sűrűn, egyenletes elrendezésben apró lyukakat fúrtunk. A hengert H magasságig feltöltjük vízzel, melynek következtében a lyukakon (a mérőhenger falára merőlegesen) vékony vízsugarak lövellnek ki. Milyen alakú a vízsugarak burkolófelülete? (A vízsugarak nem akadályozzák egymást, és folyamatos utántöltéssel gondoskodunk a hengerben a vízszint állandóságáról.) (*50 p*)

1.B. Hőszigetelt hengert egy könnyen mozgó, hőszigetelő dugattyú oszt két részre az *1. ábrán* látható módon. A két rekeszben azonos anyagmennyiségű és



1. ábra

[1]*Kunfalvi Rezső* (1905–1998) a Nemzetközi Fizikai Diákolimpiák egyik alapítója és sok éven keresztül a magyar csapat felkészítője, vezetője volt. 1959-től 1975-ig ő szerkesztette a KöMaL (korábban KML) fizika „rovatát”. Emlékét az olimpiai válogatóverseny is őrzi.

[2]Az elméleti forduló időtartama 4 óra volt. A feladatok hibátlan megoldásával összesen 450 pontot lehetett szerezni. Az összes feladathoz egyetlen, közös adattáblázat tartozik (lásd a feladatsor végét), ami a feladatokban szereplő konstansokat, fizikai állandókat és hasznos matematikai összefüggéseket tartalmazza.

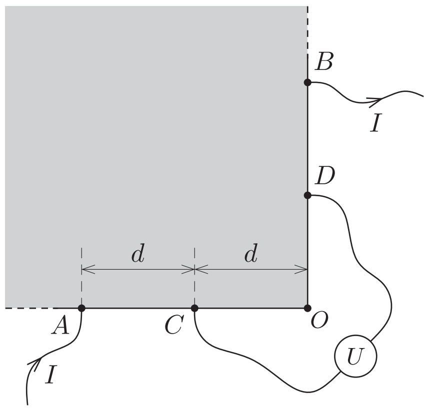
A feladatok megoldásához író- és rajzeszközökön, valamint kétsoros (nem grafikus) számológépen kívül semmilyen segédeszköz (könyv, füzet, internet, számítógép, mobiltelefon stb.) nem volt használható.

A verseny igyekezett követni a Nemzetközi Fizikai Diákolimpia elméleti versenyeinek stílusát, nehézségi fokát, és azok formai követelményeihez igazodott.

A feladatokat *Vigh Máté* (ELTE), a magyar csapat egyik felkészítője állította össze.

A feladatok megoldását a jövő havi számunkban közöljük.

(kezdetben) azonos hőmérsékletű héliumgáz van. A bal oldali térrészben lévő gázt egy fűtőszál segítségével lassan melegíteni kezdjük. Mekkora ebben a folyamatban a bal oldali gáz mólhője, amikor a dugattyú elmozdulása még kicsi? (*50 p*)



2. ábra

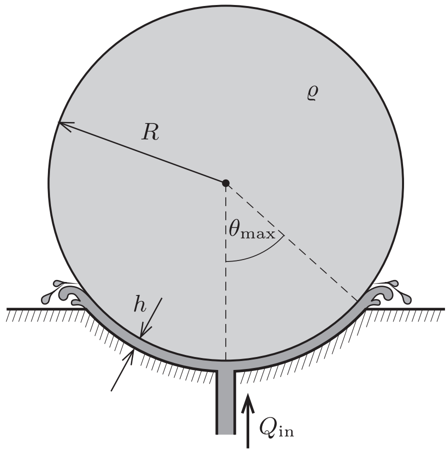
1.C. Egy nagyméretű, négyzet alakú, vékony fémlemez anyagának fajlagos ellenállását szeretnénk megmérni. Ehhez a lemez egyik csúcsának közelében kiválasztjuk a két szomszédos oldalélen található A, B, C és D pontokat a *2. ábrán* látható módon. (Az A és B pontok távolsága a kiválasztott csúcstól $2d$, a C és D pontoké pedig d, ahol d sokkal kisebb a fémlemez oldalhosszánál.)

Ha az A pontba I erősségű áramot vezetünk, a B pontból pedig elvezetjük azt, akkor a C és D pontok közé kapcsolt voltmérő U feszültséget jelez. Határozzuk meg a fémlemez ϱ fajlagos ellenállását, ha tudjuk, hogy a lemez vastagsága δ! (*50 p*)

2. feladat. Furfangos szökőkút (*150 p*)

Köztereken, parkokban gyakran láthatunk olyan szökőkutat, amely „vízen úszó” gránitgömbből vagy gránithengerből áll (lásd a *3. ábrát*). Az ilyen szökőkutak felépítése a következő: a (rendszerint tömör) gránitgömb vagy gránithenger egy jól illeszkedő vályúban található, melynek alján rés van. A résen keresztül egy szivattyú folyamatosan vizet pumpál a vályúba, amely a vályú pereménél kifolyik. A gránittömb és a vályú között vékony (általában 1–2 milliméter vastagságú) víz-

3. ábra



4. ábra

réteg alakul ki, így a gránit nem érintkezik a vályú falával, csak a vízzel. Vajon hogyan képes megtartani a víz a nála sokkal nagyobb sűrűségű gránittömb súlyát? Ez a feladat ezzel a kérdéssel foglalkozik.

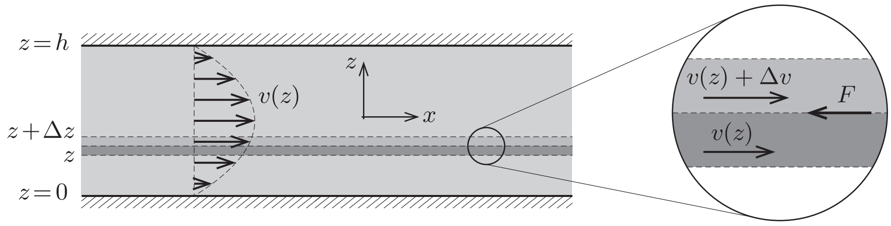
Az egyszerűség kedvéért a gránittömböt egy L hosszúságú, R sugarú, ϱ sűrűségű tömör hengernek tekintjük, ahol $L \gg R$. A vályú alján található befolyónyílás legyen egy L hosszúságú, keskeny rés, így a feladat során elegendő csupán a *4. ábrán* látható síkmetszetben vizsgálódnunk. A vályú magasságát a $\theta_{\max}$ szöggel jellemezhetjük. A résen áthaladó vízhozamot az időegység alatt befolyó víz térfogatával írhatjuk le, amely időben állandó:

$$Q_{\mathrm{be}} \equiv \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

A feladatban vizsgált konkrét szökőkútnál legyen $L = 2$ m, $R = 0{,}3$ m, $\theta_{\max} = 30°$; a gránit ϱ sűrűsége pedig a víz $\varrho_{\text{víz}}$ sűrűségének 2,75-szerese.

2.1. A víz hidrosztatikai felhajtóereje nyilván nem képes megtartani a gránithenger súlyát. Adjuk meg a felhajtóerő és a gránithengerre ható nehézségi erő hányadosát ϱ, $\varrho_{\text{víz}}$ és $\theta_{\max}$ segítségével, majd adjuk meg az eredményt számszerűen is! (*10 p*)

A továbbiakban a felhajtóerő szerepét hanyagoljuk el! A gránithengert megtartó erő megértéséhez figyelembe kell vennünk az áramló víz belső súrlódását. Ehhez tekintsünk egy folyadékot, amely két vízszintes, párhuzamos, egymástól h távolságra lévő síklap között lassan áramlik x irányban (lásd az *5. ábrát*).



5. ábra

Ha két szomszédos folyadékréteg (például az 5. ábrán látható, az alsó síklaptól z és $z+\Delta z$ távolságra található rétegek) különböző sebességgel mozog, akkor közöttük a Δv relatív sebességükkel és az érintkezési felületük nagyságával arányos súrlódási erő ébred (Newton-féle súrlódási törvény):

$$F = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta z}, \tag{1}$$

ahol η a folyadék anyagára jellemző állandó, a viszkozitás. Ez az erő benne van a folyadékok érintkezési felületének síkjában, és a relatív sebességgel ellentétes irányba mutat. A $\sigma = F/A$ mennyiséget nyírófeszültségnek nevezzük.

2.2. Mivel a folyadék z irányban nem áramlik, így ebben az irányban nem hat nyírófeszültség, ezért a folyadékban a nyomás csak az x koordinátától függ, z-től nem. Mutassuk meg, hogy stacionárius (időben állandó) áramlás esetén a $\sigma(z)$

nyírófeszültség térbeli változása (gradiense) és a $p(x)$ nyomás gradiense között fennáll a

$$\frac{\Delta p}{\Delta x}=\frac{\Delta \sigma}{\Delta z} \tag{2}$$

összefüggés. (*20 p*)

2.3. A (2) egyenlet bal oldala csak x-től, jobb oldala pedig csak z-től függ, ezért mindkét oldalnak külön-külön állandónak kell lennie. Jelöljük ezt az állandót $-K$-val, ahol K pozitív mennyiség:

$$\frac{\Delta p}{\Delta x}=\frac{\Delta \sigma}{\Delta z}=-K.$$

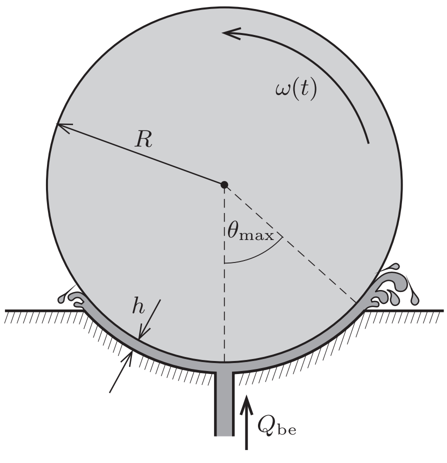
Lássuk be, hogy a síklapok között a folyadék sebessége a

$$v(z)=Az^2+Bz+C \tag{3}$$

függvénnyel írható le, és határozzuk meg az A, B és C konstansok értékét η, h és K segítségével! (A folyadék sebessége a síklapoknál nulla.) (*25 p*)

2.4. A szökőkút esetében a vízréteg vastagsága sokkal kisebb a gránithenger sugaránál, ezért használhatjuk a **2.2–2.3** részfeladatokban kapott eredményeket. Határozzuk meg, mekkorának kell lennie a túlnyomásnak a vályú alján (a víz beáramlási pontjánál) ahhoz, hogy a gránithenger egyensúlyban legyen! Válaszunkat ϱ, R, $\theta_{\max}$ és a g nehézségi gyorsulás segítségével adjuk meg! (Számításainkban a hengerre érintőirányban ható nyírófeszültség hatását és a Bernoulli-törvényből származó nyomáscsökkenést hanyagoljuk el.) (*30 p*)

2.5. Határozzuk meg a vályú alján található nyíláson beáramló víz Q_{be} hozamát, ha ismert, hogy a vályú és a gránithenger közötti vízréteg vastagsága h. A választ az η, ϱ, $\theta_{\max}$, g, L és h mennyiségek felhasználásával adjuk meg. (*25 p*)



6. ábra

2.6. Ha a gránithengert tengelye körül forgásba hozzuk, a **2.3.** részfeladatban a víz sebességprofiljára kapott (3) formulát módosítani kell egy z-vel egyenesen arányos tag hozzáadásával:

$$v(z,\omega)=v(z)\pm Dz,$$

ahol $v(z,\omega)$ a henger ω szögsebességétől függő sebességprofil, D a szögsebességet tartalmazó arányossági tényező, a $\pm$ előjel pedig a henger két oldalán áramló folyadékrészre utal. Fejezzük ki D értékét ω, R és h segítségével, ha továbbra is fennáll, hogy a víz falakhoz viszonyított relatív sebessége zérus. (*15 p*)

2.7. Forgás közben a víz által kifejtett nyírófeszültség fékezi a gránithengert. Milyen mozgást végez ekkor a henger? Adjuk meg a henger szögsebességét az idő függvényében, ha a kezdeti szögsebessége ω_0. A választ ϱ, R, h, $\theta_{\max}$, ω_0 és η segítségével adjuk meg! *(25 p)*

3. feladat. Fehér törpék keletkezése *(150 p)*

A Naphoz hasonló, életük derekán járó csillagok stabil objektumok. A csillag belsejében magfúzió útján folyamatosan termelődő energia igyekezne a csillag anyagát kifelé lökni; ez az effektus akadályozza meg a gravitációs összeomlást és tartja fenn a stabil egyensúlyt. Az egyensúlyi állapot mindaddig fennáll, amíg el nem fogy az összes hidrogén: ekkor a gravitációs vonzás elkezdi összeroppantani a csillagot. A Nappal megegyező (vagy ahhoz közeli) tömegű csillagok esetében ez az összeroskadás nem tart örökké: a *fehér törpe* állapot elérésével a csillag stabilizálódik, az összeroppanás befejeződik. Ez a feladat a fehér törpék keletkezésének fizikájával foglalkozik.

3.1. Vizsgáljunk egy gömb alakú, R sugarú, M tömegű csillagot. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a csillag tömegeloszlása egyenletes. Határozzuk meg a csillag teljes E_{grav} gravitációs energiáját! *(30 p)*

A magfúzió leállásakor a gravitáció összehúzó hatását kezdetben semmi sem tudja ellensúlyozni, ezért a csillag sugara csökkenni kezd. Ez a folyamat azonban egy kvantummechanikai hatásnak (a csillagban lévő elektronok ún. *degenerációs nyomásának*) köszönhetően megállhat, és a csillag stabil végállapotba kerülhet (*fehér törpe*). A **3.2.–3.4.** részfeladatok a degenerációs nyomás fizikai okával foglalkoznak.

3.2. Tekintsünk egy L oldalélű, kocka alakú dobozba zárt elektront. A derékszögű koordináta-rendszerünk tengelyeit válasszuk a kocka oldaléleivel párhuzamosnak. Adjuk meg az elektron (p_x, p_y, p_z) impulzuskomponenseinek lehetséges értékeit L és a h Planck-állandó segítségével! *(20 p)*

3.3. Ha a **3.2.** részfeladatban szereplő kocka alakú dobozba nem egy, hanem N darab $(N \gg 1)$ elektront helyezünk, akkor alapállapotban az elektronok a lehetséges legalacsonyabb energiájú állapotokat töltik be. (Most és a továbbiakban az elektronok közötti Coulomb-kölcsönhatást **hanyagoljuk el**, mert az a kvantumos viselkedésből származó erőhatásnál sokkal gyengébb.) A Pauli-elv értelmében azonban egyszerre legfeljebb két elektron lehet ugyanabban a (p_x, p_y, p_z) számhármassal jellemzett kvantumállapotban. Mutassuk meg, hogy alapállapotban azok az elektronállapotok betöltöttek, melyek impulzusára fennáll a $\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \leqslant p_{\max}$ egyenlőtlenség, és adjuk meg $p_{\max}$ (közelítő) értékét L és N függvényében! *(30 p)*

3.4. Mutassuk meg, hogy ekkor az N elektront tartalmazó rendszer teljes (kinetikus) energiája
$$E_N = \alpha \cdot \frac{h^2}{m_{\text{e}}} N^{\beta} L^{\gamma}$$
alakú, ahol α, β és γ dimenziótlan konstansok. Határozzuk meg ezen konstansok számszerű értékét! (Vegyük figyelembe, hogy N nagy, ezért a szummázást integrállal közelíthetjük. A kocka alakú doboz mérete elegendően nagy ahhoz, hogy a bezárt elektronok viselkedése nemrelativisztikus legyen.) *(40 p)*

Mivel a csillagok nem kocka alakúak, a degenerációs energia pontos kiszámításához a **3.4.** részfeladatban kapott egyenlet kis változtatásra szorul. L helyére a csillag R sugarát helyettesítve, valamint α értékét módosítva azonban helyes formulához jutunk:

$$E_N = \frac{3}{10 \cdot 2^{2/3}} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{4/3} \frac{h^2}{m_\mathrm{e}} N^\beta R^\gamma,$$

ahol β és γ a korábban kapott értékek, N pedig az elektronok száma. (A csillag összességében semleges, és feltehetjük, hogy ugyanannyi protont tartalmaz, mint elektront. A protonok is létrehoznak degenerációs nyomást, ez azonban a nagy tömegük miatt sokkal kisebb, mint az elektronok járuléka, ezért elhanyagolható.)

3.5. A csillag teljes energiája az E_grav gravitációs energia és az E_N degenerációs energia összege. Írjuk fel a teljes energiát a csillag sugarának függvényében, majd határozzuk meg a csillag végső, egyensúlyi R_ft sugarát, az úgynevezett fehér törpe rádiuszt! Számítsuk is ki számszerű értékét a Nap esetére! (*30 p*)

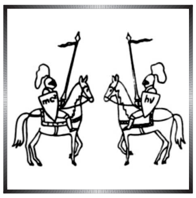
Fizikai állandók táblázata

univerzális gázállandó:	$R = 8{,}314\ \mathrm{J/(mol \cdot K)}$
gravitációs állandó:	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg\ s^2)}$
Planck-állandó:	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}$
elektron tömege:	$m_\mathrm{e} = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
proton tömege:	$m_\mathrm{p} = 1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
a Nap tömege:	$M_\odot = 1{,}989 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$

Hasznos matematikai összefüggések

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1); \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C;$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C; \qquad \int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C.$$



Versenyfelhívás a 2016-os Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenyének (International Young Physicists' Tournament, IYPT) magyarországi fordulójára

Szeretettel várjuk minden – a fizika iránt érdeklődő, angolból is ügyes – középiskolás diák jelentkezését egy izgalmas és modern kihívásokat nyújtó versenyre. A Fizika Világbajnokságnak is nevezett IYPT közel 30 ország csapatának nyújt lehetőséget, hogy összemérjék tudásukat, rátermettségüket és kommunikációs készségüket 17 előre megadott, ún. nyílt végű fizikai problémán keresztül.

Az IYPT a XXI. század kihívásainak megfelelő készségeket vár el az indulóktól: nemcsak a fizikában kell jártasnak lenni, hanem az eredményeket prezentálni és megvédeni is tudni kell! A résztvevő diákok a versenyt megelőzően elvégzett fizikai méréseiket és kutatásaikat egy – angol nyelven előadott – tudományos prezentáció formájában mutatják be két riválís csapatnak. A másik két csapat közül az egyik megvizsgálja az előadás fizikai tartalmát egy kulturált vita formájában, a másik pedig komplex értékést ad az elhangzottakról. A három csapat teljesítményét fizikusokból és fizikatanárokból álló nemzetközi zsűri bírálja el.

Az IYPT verseny magyarországi első fordulójára (HYPT) való jelentkezés határideje: **2015. november 2. éjfél.**

Az első, magyarországi forduló december közepén, az ELTE Természettudományi Karán kerül megrendezésre. Az induló diákoknak itt egy kidolgozott feladat angol nyelvű bemutatásában kell összevetniük tudásukat. A kidolgozott feladatokat először magyar nyelven 2015. november 30-ig kell elküldeni egy dolgozat formájában.

A magyar válogató versenyen kiválasztott 8 diák az ELTE TTK Anyagfizikai Tanszékén végezheti a további felkészüléshez szükséges kutatásait. A felkészülés során nyújtott teljesítmény alapján 3 diák indulhat az osztrák AYPT versenyen, az 5 legjobb diák pedig bekerül az oroszországi Jekatyerinburgban megrendezésre kerülő 29. IYPT magyar csapatába.

Jelentkezés, a feladatok szövege és további információk az hypt.elte.hu weboldalon, illetve az `email.hypt@gmail.com` email címen.

Néhány példa a 2016-ra kitűzött IYPT feladatok közül*

8. Mágneses vasút. Rögzíts egy ceruzaelem két végére vezető bevonatú kis gombmágneseket. Ha ezt egy réztekercsbe helyezed úgy, hogy a mágnesek hozzáérnek a tekercshez, az így kapott „vonat” mozogni kezd. Magyarázd meg a jelenséget, és vizsgáld meg, hogy a megfelelő paraméterek miként befolyásolják a „vonat” sebességét és teljesítményét!

15. Érintésmentes tolómérő. Tervezzél és készíts egy olyan optikai eszközt, ami egy lézermutató segítségével érintkezés nélkül képes egy üveglap vastagságát, törésmutatóját és egyéb tulajdonságait vizsgálni!

17. Őrült bőrönd. Ha egy kétkerekű bőröndöt húzol, bizonyos körülmények között olyan erősen elkezdhet billegni, hogy akár teljesen fel is borulhat. Vizsgáld meg a jelenséget! Megszüntethető-e vagy felerősíthető-e ez a jelenség megfelelő pakolás megválasztásával?

Magyar fizika siker az 1000 mosoly országában

Az idén 28. alkalommal megrendezett Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenyén (eredetileg: International Young Physicists' Tournament, röviden: IYPT) a magyar csapat a legjobb bronzérmes helyezést érte el a thaiföldi Nakhon Ratchasimában 2015. június 27. és július 4. között rendezett versenyen. Az egész éves felkészülés sikeres lezárása mellett, a remek szervezésnek köszönhetően, sikerült belekóstolni a thaiföldi kultúrába és hétköznapokba is.

*Valamennyi feladat megtalálható az `iypt.org` vagy `hypt.elte.hu` oldalon.

A decemberben lezajlott magyar válogatótól hosszú út vezetett a 2015-ös IYPT döntőjéig a thaiföldi Nakhon Ratchasimába. A 12 órás repülőutat egy bő féléves, élményekkel teli felkészülés előzte meg. Az ELTE TTK Anyagfizikai Tanszékének egyik laborját „foglalták el" a magyar diákok, ahol felkészítőik segítségével dolgozhatták ki a versenyre kitűzött problémákat. A tavaly júliusban 17 nyíltvégű probléma (melyeknek nincs előre ismert, egyértelmű megoldása) sok hónapos „körüljárása" alatt sokat tanultak a csapattagok fizikából, és megismerhették a kutatómunka hétköznapjait is: hogyan történik egy-egy mérés, hogyan áll össze egy-egy jelenség elmélete, és miként lesz segítségünkre a programozás a fizikában. Emellett megtanulták el(ő)adni elkészített feladataikat és megvédeni eredményeiket a kritikus kérdések ellenében.

Az idei versenyen 27 ország képviseltette magát a Föld minden zugából. Ez az angol nyelvű verseny nagyon sokrétű felkészültséget vár el a részvevőktől. A diákoknak az egész évben végzett kutatásaikat kellett bemutatni, majd eredményeiket egy opponáló csapattal szemben megvédeni. A magyar csapat jól szerepelt a kutatásaik prezentációja, az angol nyelv használata, a vita és a csapatmunka terén is, hiszen sikerrel „opponálták" és értékelték az ellenfél csapatok prezentációit. Nagy élmény volt a különböző országokból érkezett csapatokkal küzdeni, és látni, hogy a magyar diákok igazi csapattá kovácsolódtak össze.

A magyar csapat felkészülését az ELTE-TTK Anyagfizikai Tanszék két adjunktusa, *Ispánovity Péter Dusán* és *Jenei Péter,* valamint *Izsa Éva* és *Hömöstrei Mihály* fizikatanárok segítették. A magyar résztvevők a „Mesterséges izom", a „Folyadékfilm motor", az „Éneklő fűszál", a „Két lufi" és a „Mágneses inga" című problémákat mutattatták be a zsűrinek és az ellenfél csapatoknak. A feladatokról és a megoldásokról röviden az `hypt.elte.hu` oldalon kapható információ.

Az IYPT a „fizikázás" mellett hagyományosan nagy hangsúlyt fektet arra, hogy a különböző országokból érkező diákok minél jobban megismerjék egymást és a rendező országot. Idén sem volt ez másképp, a diákok közös kiránduláson vettek részt a Wat Non Kum nevű buddhista szentélyben, a Phimai Történeti Parkban és a Khao Yai Nemzeti Park száraz, örökzöld dzsungelében. Alkalom nyílt egy kicsit megismerni Thaiföld kultúráját, konyháját és történelmét is. A csapattagok most láthattak először szinkrotront, az egyik legérdekesebb élmény pedig a tuk-tukkal (helyi taxi) való utazás volt.

A versenyt végül a 9. helyen zárta a magyar csapat, mely a legjobb bronzérmes helyezést jelentette. A 2015-ös magyar IYPT csapat tagjai:

Bánóczki Tímea (Budapest, Német Nemzetiségi Gimn., 10. oszt.);

Beregi Ábel (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 12. oszt., felvételt nyert a University College Londonba);

Biró Ákos (Vác, Boronkay György Műsz. Szki. és Gimn., 11. oszt.);

Laukó András (Budapest, Balassi B. Gimn., 12. oszt., felvételt nyert a BME-re);

Plaszkó Noel (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, 11. oszt.).

Hivatalos partnereink:

Nemzeti Erőforrás Minisztérium — MOL — Eötvös Loránd Fizikai Társulat — ELTE TTK: Anyagfizikai Tanszék

Hömöstrei Mihály, a HYPT szervezője

Gyakorló feladatsor (emelt szintű fizika érettségire)*

A KöMaL matematikus hagyományait követve a 2015–16-os tanévben fizikából is közlünk olyan feladatsorokat, amelyekkel az emelt szintű fizika érettségire készülőket szeretnénk segíteni. A feladatsorok nem tartalmazzák az érettségi II. részét (az „esszé-témaköröket”), mert ezekhez nehéz lenne „hivatalos megoldást” adni. (Az erre készülőknek javasoljuk, hogy a korábbi évek témaköreiből válogassanak, és azokat dolgozzák ki kb. 1 óra alatt.)

A feladatok kidolgozásánál – ha az érettségihez hasonló körülmények között akarja valaki megoldani azokat – csak zsebszámológép és függvénytáblázat használható, és kb. 2,5-3 óra áll rendelkezésre. (Az érettségin a három részre összesen 240 perc időt adnak.)

I. rész (tesztfeladatok)†

1. 100 méter hosszú alumíniumkábel hossza kb. hány centiméterrel változik a -28 fokos téli hideg és a 35 fokos nyári meleg között?

A) 0,15; *B*) 1,5; *C*) 15; *D*) 150.

2. Egy rallyautónak egyik bukkanó utáni ugratás közben a kerekei a levegőben vannak. Ezalatt a gyorsulásának iránya

A) változik, mert a pályája érintőjének irányába mutat;

B) változik, mert a pályájának középpontjába mutat;

C) nem változik, mert mindig függőleges;

D) nem változik, mert mindig nullvektor.

3. 50 Hz frekvenciával szinuszosan változó feszültségű feszültségforrásra sorba kapcsolunk egy 62,8 Ω-os ellenállást és egy 0,1 H induktivitású ideális tekercset. Mekkora a két áramköri elemre jutó effektív feszültség aránya?

A) 2; *B*) $2\sqrt{5}$; *C*) 628.

4. Válassza ki az ideális gázra vonatkozó *igaz* állítást!

A) Adiabatikus folyamat során a gáz hőmérséklete nem változik, mivel a folyamat hőszigetelt körülmények között vagy nagyon gyorsan játszódik le.

B) Ha a gáz térfogata csökken, hőmérséklete növekszik, hiszen külső erő munkát végez rajta.

C) Izochor tágulás során a gáz hőmérséklete csökken.

D) A nemesgázok moláris hőkapacitása (mólhője) nem függ az anyagi minőségtől.

---

*A megoldásokat a jövő havi számunkban közöljük.

†A tesztfeladatok kérdéseire adott válaszok közül minden esetben pontosan egy jó.

5. Egy forma-1-es autó kipörgő kerékkel indul el. Melyik erő gyorsítja a kocsit?

A) A pilóta lábának ereje, ami a gázpedált nyomja.

B) A kerekek és a talaj közti csúszási súrlódási erő.

C) A kerekek és a talaj közti tapadási súrlódási erő.

D) A motor hajtóereje.

6. Válassza ki a hidrogénatom Bohr-modelljére vonatkozó *hamis* állítást!

A) Az elektron első gerjesztett állapotában az energiája $-13{,}6$ eV.

B) Az elektront a Coulomb-erő tartja a proton körüli körpályán.

C) A gázok vonalas színképét a modell a frekvenciafeltétellel magyarázza.

D) Az elektronok csak meghatározott távolságban lehetnek a protontól, a lehetséges pályák sugarai úgy aránylanak egymáshoz, mint az egész számok négyzetei.

7. Az LHC (Large Hadron Collider, magyarul Nagy Hadron Ütköztető – egy szinkrotron típusú részecskegyorsító) kb. 8,5 km átmérőjű gyűrűjében a protonokat közel fénysebességre gyorsítják. Melyik a helyes becslés a gyűrűben lévő mágneses mező (átlagos) erősségére, ha a relativisztikus tömegnövekedés miatt a protonok nyugalmi tömegének 5000-szeresével számolhatunk?

A) 0,04 T; *B*) 0,4 T; *C*) 4 T; *D*) 40 T.

8. Válassza ki az elektromosan töltött, sztatikus állapotú fémdarabra vonatkozó *hamis* állítást!

A) A többlettöltés egyenletesen oszlik el a felületén.

B) A fémdarab minden pontjában azonos a potenciál.

C) A fémfelület minden pontjában igaz, hogy a térerősség vektor merőleges a felületre.

D) A fém belsejében a térerősség nulla.

9. Válassza ki a jelenség megfelelő jellemzését!

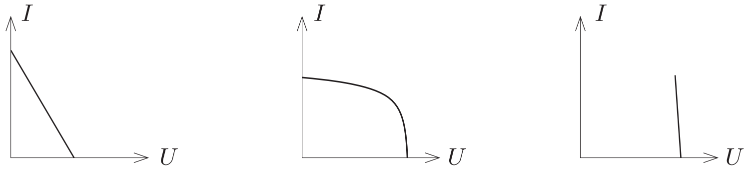
A) A dér megfagyott köd.

B) A köd megfagyott harmat.

C) A zúzmara akkor képződik, mikor egy felszínhez közeli, vékony, nedves levegőréteg harmatpont alá hűl.

D) A harmat akkor képződik, mikor a nedves levegőből a hideg felszínnel érintkezve a vízgőz kicsapódik.

10. Egy ismeretlen feszültségforrásra változtatható ellenállást kapcsolva mérjük a rajta lévő feszültséget és a rajta átfolyó áramot. Döntse el, hogy melyik karakterisztika milyen feszültségforráshoz tartozik!



1. 2. 3.

A) 1. – sokat használt zsebtelep; 2. – napelemcella; 3. – új zsebtelep.

B) 1. – napelemcella; 2. – új zsebtelep; 3. – sokat használt zsebtelep.

C) 1. – új zsebtelep; 2. – sokat használt zsebtelep; 3. – napelemcella.

D) 1. – napelemcella; 2. – sokat használt zsebtelep; 3. – új zsebtelep.

11. Válassza ki a *hamis* állítást!

A) A vízben lévő légbuborék a rá eső párhuzamos fénysugarakat összegyűjti, de nem pontosan egy pontba.

B) Az autó külső visszapillantó tükre domború tükör, amely mindig látszólagos képet ad.

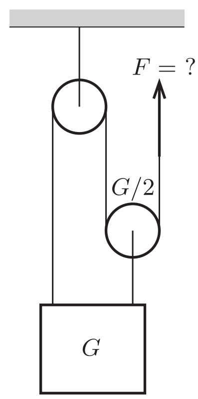
C) A gyűjtőlencse nem adhat egyenes állású, nagyított, valódi képet.

D) Ha a síktükörben nézzük, akkor a síktükör mögött látjuk magunkat.

12. A 235-ös urán izotóp neutronnal való hasítása során keletkezhet 90-es stroncium izotóp és két neutron. Mi a másik hasadási termék?

A) Bárium; *B*) kripton; *C*) xenon.

13. Egy állócsigán és egy $G/2$ súlyú mozgócsigán átvetett kötél szabad végét fogva egyensúlyban tartunk egy G súlyú testet az *ábrán* látható módon.



Mekkora F erővel kell tartani a szabad kötélvéget?

A) $3G/4$; *B*)$2G/3$; *C*) $G/2$; *D*) $G/3$.

14. Kit neveznek az atommag felfedezőjének?

A) Niels Bohr; *B*) Enrico Fermi; *C*) Ernest Rutherford; *D*) Wigner Jenő.

15. Melyik a Naprendszer legnagyobb holdja?

A) A Ganymedes; *B*) a Hold; *C*) a Phobos; *D*) a Titán.

III. rész (számolásos feladatok)

1. Egy 80 cm hosszú húr alaphangjának frekvenciája 440 Hz.

Mekkora a hang hullámhossza a levegőben, ha ott a terjedési sebesség 330 m/s? Mekkora fázissebességgel terjed a rezgés a húron? Ábrázolja a húr duzzadóhelyének hely–idő, sebesség–idő és gyorsulás–idő függvényét 0-tól $2T$ időtartamig, ha a 0 időpillanatot akkor választjuk, amikor a pont a legnagyobb, 0,8 mm-es kitérésben van!

2. Egy cézium fotokatódot 380 nm-es UV fénnyel világítunk meg. A kilépő elektronokat 10 V gyorsítófeszültséggel felgyorsítjuk.

Mekkora lesz ekkor az elektron sebessége?

3. Állandó 108 km/h sebességgel haladva az autópályán belepillantunk a visszapillantó tükörbe. Ekkor a mögöttünk haladó, 1,5 m magas autót 18,75 mm-esnek látjuk. Sebességünket tartva 3 s múlva már 30 mm-esnek látjuk. A tükrünk görbületi sugara 2 m.

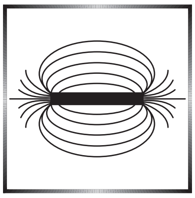
Mennyi utat tettünk meg a 3 s alatt? Határozza meg a tükör fókusztávolságát és a nagyítást mindkét esetben! Feltételezve, hogy az autó is állandó sebességgel jön mögöttünk, határozza meg a sebességét!

4. Egy vízforraló fűtőszála $1{,}4\cdot 10^{-6}$ Ωm fajlagos ellenállású kantálhuzalból készült, amelynek átmérője 1 mm, hossza 15 m. A 230 V-os hálózatról működtetve 1,7 liter vizet melegítünk. A vízmelegítés hatásfoka 86%-os.

Mekkora teljesítményt vesz fel a forraló a hálózatból? Hány perc alatt forralja fel a kezdetben 30 fokos vizet? Ha még ugyanennyi ideig bekapcsolva marad a forraló, akkor mennyi víz marad benne?

(A víz fajhője 4,2 kJ/(kg K), forráshője 2260 kJ/kg.)

Varga Balázs
Budapest



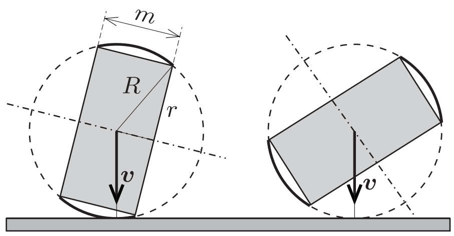
Fizika feladatok megoldása

P. 4696. 8 mm *átmérőjű és* 4 mm *magas, henger alakú gyógyszertabletták kis magasságból hullanak az asztalra. Tételezzük fel, hogy minden térbeli irány egyenlő valószínűségű, és a tabletták nem pattannak fel. A tabletták hány százaléka kerül az asztalon „gurulós" helyzetbe?*

(*4 pont*) *Bakonyi Gábor* (1932–2010) feladata

Megoldás. Jelöljük a gyógyszertabletták alapkörének sugarát r-rel, magasságukat pedig m-mel! Az asztalra függőleges $\boldsymbol{v}$ sebességgel leeső tabletta annak megfelelően kerül gurulós, vagy nem gurulós helyzetbe, hogy a tabletta milyen irányban helyezkedik el a $\boldsymbol{v}$ vektorhoz képest, vagy ami ugyanezt jelenti: a $\boldsymbol{v}$ vektor milyen irányba mutat a tablettához viszonyítva. Ezeket az irányokat jellemezhetjük például azzal, hogy a $\boldsymbol{v}$ vektor (vagy annak meghosszabbítása) melyik pontban döfi át a tabletta köré rajzolt $R=\sqrt{r^2+(m/2)^2}$ sugarú gömbfelületet.

Ha a döféspont az *1. ábra bal felén* látható módon a gömbfelület vastagon jelölt gömbövébe esik, akkor a tabletta (ha nem pattan fel) a hengerpalástjára, tehát *gurulós helyzetbe* kerül. Ha viszont a döféspont a szaggatott vonallal jelölt két gömbsüveg valamelyik pontja (lásd az *1. ábra jobb felét*), akkor a tabletta valamelyik körlapján áll meg, tehát nem tud elgurulni az asztalon.



1. ábra

A gurulós helyzetbe kerülő gyógyszertabletták számának és az összes lehulló tabletta számának aránya (sok leeső tabletta esetén) a gurulós helyzet *valószínűségével* egyezik meg. Véges sok kimenetellel rendelkező eseményeknél (például a kockadobásoknál) a valószínűséget a kedvező esetek számának és az összes lehetséges eset számának hányadosaként kaphatjuk meg. (A „kedvező” esemény a valószínűségszámítás szokásos szóhasználata, jóllehet esetünkben a gyógyszer elgurulása inkább kedvezőtlennek tekintendő.)

Bonyolultabb a helyzet akkor, ha az események lehetséges végkimenetelének száma és a „kedvező” események lehetséges száma is (elvben) végtelen. Ilyenkor a valószínűséget – nyilván – nem számolhatjuk ki két „végtelen nagy szám” hányadosaként. Az ún. folytonos valószínűségeloszlások kezelésének egyik, esetenként jól használható módja a geometriai módszer.[1] Ha az események kimenetele egy felület pontjaival (esetünkben a gömbfelület egy-egy pontjával) jellemezhető, akkor a kérdéses esemény valószínűsége a kedvező eseményeknek megfelelő felületdarab felszínének és az összes lehetséges eseményhez tartozó teljes felület felszínének hányadosaként számítható ki. Jelen esetben ez a valószínűség

$$P_{\text{elgurul}}=\frac{A_{\text{gömböv}}}{A_{\text{gömbfelszín}}}=\frac{2mR\pi}{4R^2\pi}=\frac{m}{2\sqrt{r^2+(m/2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0{,}45.$$

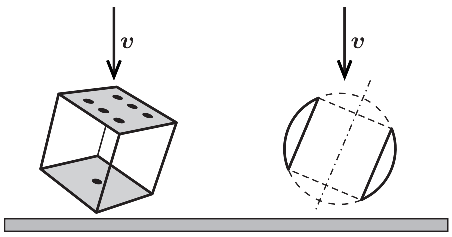
A lehulló gyógyszertablettáknak tehát – várhatóan – mintegy 45 százaléka fog elgurulni.

Fekete Panna (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.) és
Németh Flóra Boróka (Keszthely, Vajda J. Gimn., 11. évf.)
dolgozata felhasználásával

Megjegyzések. 1. A valószínűség geometriai módszerrel történő kiszámítása nem egyértelmű, és emiatt kellő körültekintést igényel. Ha például a gyógyszertabletta köré nem gömböt, hanem – mondjuk – egy nagyobb kockát képzelünk, a leeső tabletta térbeli helyzetét a középpontján átmenő függőleges egyenes és a kocka felszínének döféspontjával is jellemezhetjük. A keresett valószínűség azonban *nem* egyezik meg a kocka felszínén mért megfelelő területek arányával; ha mégis így számolunk, *hibás* eredményt kapunk. Azt, hogy mit jelent a „minden térbeli irány egyenlő valószínűségű” kifejezés (vagyis hogy

[1]Lásd pl. ezt a cikket a KöMaL honlapján: `http://www.komal.hu/cikkek/valszam/valszam.h.shtml`.

milyen felületen mért területek aránya adja meg helyesen a valószínűséget) fizikai feltételek szabják meg. A legtermészetesebb gondolatunkat, miszerint az irányok valószínűségeloszlása a gömbfelületen vett „mérték” szerint egyenletes, kellően pörgő, bukdácsolva leeső tablettáknál a tapasztalat is megerősíti. Lehetne azonban olyan „tablettaejtő gépet” konstruálni, amely használatával más valószínűségeloszlás alakulhatna ki. A mechanikusan kevert golyókkal történő lottósorsolásnál a szkeptikusok régi dilemmája: vajon elég alapos-e a keverés, egyforma-e az esélye (a húzási valószínűsége) mindegyik számnak?



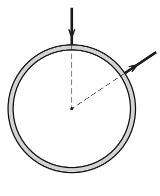
2. ábra

2. Sok versenyző úgy érvelt, hogy mivel az egész feladat (a tabletta leesése és a feltett kérdés is) a henger alakú gyógyszertabletta forgástengelyére nézve *szimmetrikus,* a probléma 2 dimenziós feladatként kezelhető. Ha ez így helyes lenne, a kérdéses valószínűség az 1. ábrán látható vastagon jelölt körívek hosszának és a teljes kör hosszának arányával (a megadott számadatok mellett kb. 0,3-mal) egyezne meg.

Az érvelés azonban *hibás,* egy 3 dimenziós probléma néha még akkor sem kezelhető síkbeli feladatként, ha az elrendezés és a kérdésfeltevés bizonyos tengely körüli (valamekkora szögű) elforgatásokra nézve szimmetrikus. Jól látható ez egy hatlapú dobókockánál. Ha azt kérdezzük, mekkora valószínűséggel esik a (jól megpörgetett) kocka két szemközti (a *2. ábrán* sötétebben jelölt) lapjának valamelyikére, a helyes válasz nyilván 1/3, hiszen a kocka köré rajzolt gömb felületének éppen egyharmadát fedik le a „kedvező” esetnek megfelelő pontok. Ha viszont a kockát oldalnézetben rajzoljuk le (2. ábra jobb oldala), és a feladatot (a másik 4 lap szimmetrikus helyzete miatt) 2 dimenziósnak terkintjük, a keresett valószínűségre (a körívek hosszából) a hibás 1/2 „eredményt” kapjuk.

67 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 48, hibás 7 dolgozat.

P. 4712. *Egy homogén anyagú, egyenletes keresztmetszetű rézgyűrű mely két pontja közé kapcsolhatunk elektromos feszültségforrást, ha azt szeretnénk elérni, hogy a rézgyűrűben folyó áram keltette mágneses térerősség a gyűrű középpontjában zérus legyen?*



(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. A rézgyűrűbe vezetett áram a körívek ellenállásával (tehát a hosszával) fordított arányban oszlik meg a két ág között. A Biot–Savart törvény szerint az egyes körív-vezetékek járuléka a középpontban mérhető mágneses indukcióhoz az áramerősség és a vezeték hosszának szorzatával arányos. Ez a szorzat a két ágban (a be- és kivezetési pontok helyzetétől függetlenül) ugyanakkora, tehát (az áramok ellentétes irányát is figyelembe véve) megállapíthatjuk, hogy a gyűrű középpontjában a rézgyűrűben folyó áramok mágneses tere *mindig nulla.*

Több dolgozat alapján

37 dolgozat érkezett. Helyes 28 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 8, hibás 1 dolgozat.

Eötvös-verseny

Az idei Eötvös-versenyt

2015. október 16-án

pénteken délután 15^{h}-tól 20^{h}-ig rendezi meg az Eötvös Loránd Fizikai Társulat.

A versenyen azok a diákok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Nemcsak magyar állampolgárságú versenyzők indulhatnak, hanem Magyarországon tanuló külföldi diákok, valamint külföldön tanuló, de magyarul értő diákok is.

A megoldásokat magyar nyelven kell elkészíteni, a rendelkezésre álló idő 300 perc. Minden írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos.

Előzetesen jelentkezni nem kell, elegendő egy személyazonosság igazolására szolgáló okmánnyal (személyi igazolvány, diákigazolvány vagy útlevél) megjelenni a verseny valamelyik helyszínén.

A helyszínek és a versennyel kapcsolatos minden további információ megtalálható a verseny honlapján:

`http://mono.eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm`.

Versenybizottság

Pályázati felhívás

A 2015-ös évet az ENSZ (az UNESCO támogatásával) *A Fény Nemzetközi Évének* nyilvánította. Az eseménysorozat részeként a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok fizika szerkesztőbizottsága pályázatot hirdet a Magyarországon vagy bármely más országban élő és tanuló középiskolás (még nem érettségizett) diákok számára három kategóriában:

I. Érdekes, látványos *fénytani jelenség megfigyelése, leírása,* esetleges elméleti magyarázata. A választott téma nem csak új, eddig ismeretlen jelenség lehet (bár ha ilyen, a pályázat természetesen még értékesebb), de a megfigyelés és annak dokumentálása a pályázó(k) *önálló* munkája legyen. A jelenség magyarázatához (a forrás megjelölésével) tankönyveket, szakkönyveket vagy az interneten található anyagokat is fel lehet használni, de a dolgozatból egyértelműen derüljön ki, hogy annak melyik része a pályázó *saját* munkája.

II. Érdekes, látványos *fénytani jelenség fényképezése,* esetleg arról videofelvétel készítése. A felvételt a pályázó saját maga készítse, az interneten megtalálható képek, videók továbbküldése „nem versenyszerű”.

III. A fénytan körébe tartozó (máshol még meg nem jelent) *elméleti vagy kísérleti feladat* közlése, amely kitűzésre alkalmas a KöMaL valamelyik pontversenyében. Az elméleti feladathoz részletes megoldást, mérési feladatnál vázlatos megvalósítási javaslatot tartalmazzon a pályázat.

Az I. kategóriában *legfeljebb 2 fős* „csapatok” is részt vehetnek, a másik két kategória *egyéni* munkát igényel. A pályamunkák **2015. december 31-ig** küldhetők be (magyar vagy angol nyelven), elektronikusan a `szerk@komal.hu`, postán a KÖMAL, 1117 Budapest, Pázmány P. sétány 1/A címre (mindkét esetben FÉNYTANI PÁLYÁZAT megjelöléssel). A beküldött anyagon szerepeljen **a pályázó neve, iskolája** és **osztálya,** esetlegesen a felkészítő (vagy segítő) **tanár neve.**

A pályamunkákat a fizika szerkesztőbizottság zsűrije értékeli. A díjazott munkák szerzői pénzjutalomban részesülnek, a cikkek, fényképek 2016-ban a KöMaL-ban megjelennek, a feladatok kitűzésre kerülnek.

Eredményes munkát kívánunk!

Fizikából kitűzött feladatok

M. 352. Mérjük meg egy rugós „ugráló béka” rugóállandóját! A béka úgy hozható mozgásba, hogy a tapadógumit a rugó tengelyének irányában rányomjuk a korongra. (Aki nem tud ugráló békát beszerezni, egy rugós golyóstollal is elvégezheti a mérést.)

(*6 pont*) *Becslési verseny,* Sárospatak

P. 4748. Elképzelhető-e, hogy a soproni Károly-kilátó tetejéről leejtett fagylaltgömb már a talajra érkezése előtt teljesen felolvad?

(*3 pont*) *Vermes Miklós fizikaverseny,* Sopron

P. 4749. Egy ejtőernyős szélcsendben egyenletesen, 8 m/s sebességgel ereszkedik. Mekkora lesz az ejtőernyős sebességének nagysága, ha 6 m/s sebességű oldalszél fúj?

(*3 pont*) *Jedlik Ányos fizikaverseny,* Nyíregyháza

P. 4750. Ezüst és arany tetszőleges arányban ötvözhető egymással. Egy ilyen ötvözet súlya levegőben 15 N, vízben 14 N. Hány tömegszázalék aranyat tartalmaz az ötvözet?

(*4 pont*) *Versenyfeladat* nyomán

P. 4751. Mit tapasztalunk, ha egy megpendített hangvilla nyelét

a) az asztal lapjához érintjük, vagy

b) vízbe merítjük?

Magyarázzuk meg a tapasztaltakat!

(*4 pont*) *Hatvani István fizikaverseny,* Debrecen

P. 4752. Egy íj idegét (húrját) 200 N erővel feszítjük meg, ezzel a nyilvesszőt 50 cm-rel húzzuk hátra. A feszítőerő arányos az ideg közepének kitérésével. A kihúzott íjjal függőlegesen felfelé lövünk egy 4 dkg tömegű nyilat. Legfeljebb milyen magasra szállhat fel a nyílvessző, ha a rugalmas energia 40%-a hasznosul?

(*4 pont*) *Versenyfeladat* nyomán

P. 4753. Két orgonasíp, amelyek 80, illetve 81 cm hosszúak, 2,6 Hz-es lebegést ad, amikor mindkettő az alapfrekvencián szólal meg. Számoljuk ki a levegőben terjedő hang sebességét és a sípok alaphangjának frekvenciáját ezekből az adatokból!

(*4 pont*) *Versenyfeladat* nyomán

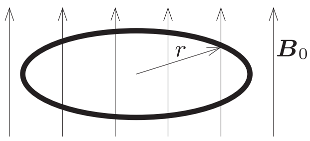
P. 4754. Egy félgömb alakú, 4 dm^3 térfogatú rézedénybe 4 liter 30 °C-os vizet öntve azt tapasztaljuk, hogy a víz hőmérséklete 3 °C-kal csökken, az edényé viszont 27 °C-kal emelkedik. Mekkora az edény falának vastagsága?

(*4 pont*) *Zemplén Győző fizikaverseny,* Nagykanizsa

P. 4755. Rendelkezésünkre áll 4 db 4,5 V-os izzólámpa, valamint egy 12 V-os és egy 3 V-os akkumulátor. Készítsünk az adott eszközök felhasználásával kapcsolást, amellyel az izzólámpák üzemi hőmérsékleten működnek!

(*4 pont*) *Károly Ireneusz fizikaverseny,* Esztergom

P. 4756. $2a$ vastagságú, ϱ fajlagos ellenállású fémhuzalból r közepes sugarú körgyűrűt készítünk ($r \gg a$). A körvezetőt síkjára merőleges, $\boldsymbol{B}_0$ indukciójú homogén mágneses mezőbe helyezzük, majd az indukciót Δt idő alatt egyenletesen nullára csökkentjük. Határozzuk meg a folyamat során indukálódó mágneses mező indukcióvektorának B_{ind} nagyságát a körvezető középpontjában!



(*5 pont*) *Wigner Jenő fizikaverseny,* Békéscsaba

P. 4757. Egy fotocellás áramkör katódjának kilépési munkája $6\cdot 10^{-19}$ J. A katód felületére merőlegesen 250 nm-es hullámhosszúságú ibolyántúli sugárzás érkezik.

a) Mekkora zárófeszültséggel lehet megszüntetni a fotoáramot?

b) Mekkora impulzust vesz fel a katód egy elemi folyamat során, ha az elektron a beeső sugárzással ellentétes irányban repül ki?

c) Változtassuk a sugárzás frekvenciáját! Legfeljebb hányszorosa lehet egy kilépő elektron impulzusa a beeső foton impulzusának?

(*5 pont*) *Budó Ágoston fizikaverseny,* Szeged

Beküldési határidő: 2015. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 65. No. 6. September 2015)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 351): **K. 463.** A certain amount of money was divided among four people. The first one got 3000 forints (HUF, Hungarian currency) more than one third of the total, the second one got 6000 forints more than one fourth of the total, the third one got 9000 forints more than one fifth of the total, and the fourth one got 12 000 forints more than one sixth of the total. What was the total? **K. 464.** A teacher instructed the students to count from 1 to 1000 while keeping the following rules. In each calculation step, one can choose to either multiply the previous result by a fixed one digit number a selected in advance, or just add 1 to it. Which number should be chosen to be a in order to be able to reach 1000 in the least number of steps? **K. 465.** A treasure trunk has an electronic lock mechanism controlled by eight switches. Every switch has two settings: on or off. The lock opens if each switch is on. It is possible to change the setting of any switch to the opposite. However, the electronic sensors will detect which switch has been manipulated, and as a result, three other switches will be automatically changed, too. (These automatic changes will not generate further switches changing.) The table below shows which switch induces which further switches to change. (For simplicity, the switches are numbered.)

Number of switch manipulated	1	2	3	4	5	6	7	8
Numbers of further switches changing automatically	2, 5, 7	1, 3, 8	5, 6, 7	1, 6, 8	2, 3, 6	2, 5, 8	1, 3, 4	1, 4, 7

a) Initially, every switch is off, except for 6 and 7. The trunk can now be opened by manually changing the setting of two appropriate switches. Which two? *b*) Initially, every switch is off, except for 7. Is it possible to open the trunk now by manipulating the appropriate switches? **K. 466.** How many integers are there from 1 to 2015 such that their decimal representation contains a digit of 5, but does not contain any digit of 7? **K. 467.** Let p denote a prime number greater than 3 and less than 1000. What are the chances that $p-1$ or $p+1$ is divisible by 6? **K. 468.** x denotes a positive integer such that the fraction $\frac{30-x}{91}$ can be simplified. Find all possible values of the fraction, expressed in lowest terms.

New exercises for practice – competition C (see page 353): **Exercises up to grade 10: C. 1301.** Prove that if x_1 and x_2 are positive real numbers, then

$$(x_1+x_2+1)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+1\right)\geqslant 9.$$

C. 1302. The tangents drawn from an exterior point P to a given circle of radius r and centre O touch the circle at Q and R. What should be the distance $|OP|$ so that the area of quadrilateral $PQOR$ is equal to the area of the circle? **Exercises for everyone: C. 1303.** The area of a rectangular origami sheet is 130 cm^2. The sheet is folded symmetrically by forming a regular triangle with two adjacent vertices turned inwards, as shown in the *figure.* Find the lengths of the sides of the original sheet. **C. 1304.** Two players are playing the following game: They take turns in writing a natural number 1 to 10 on a blackboard. It is only allowed to write a number that does not divide any of the numbers written on the board previously. If a player is not able to write a new number on the board, he loses the game. Show that the starting player has a winning strategy. **C. 1305.** A spiral is made out of a square of side n units, as shown in the *figure,* by always breaking the line 1 unit before reaching the already existing part of the spiral. Similarly, a spiral is made out of a regular triangle of side $1.8n$ units by breaking the line 1.8 units before closing up. (The diagram shows the two spirals for the case of $n=4$.) For what value of n will the lengths of the two spirals be equal? **Exercises upwards of grade 11: C. 1306.** Prove that if a triangle has two sides that are at most as long as the corresponding altitudes each, then the triangle is an isosceles right-angled triangle. **C. 1307.** For what real number q will the numbers $\left(3-\sqrt{5}\right)$, $\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}-q\right)$, $\left(0,6-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ form a geometric progression?

New exercises – competition B (see page 354): **B. 4723.** Are there infinitely many prime numbers, such that the sum of any 2015 of them is a composite number? (*3 points*) (Proposed by *G. Mészáros,* Budapest) **B. 4724.** Solve the inequality $x+y-xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy}\leqslant 2$ and represent it in the coordinate plane. (*4 points*) **B. 4725.** Show that if a simple graph has 7 vertices and no cycle of length 4 then it has a vertex whose degree is at most 2. (*4 points*) **B. 4726.** In a square $ABCD$, points P and Q lie on sides AB and BC, respectively, and $BP=BQ$. Let T denote the foot of the perpendicular dropped from vertex B to the line segment PC. Prove that $\angle DTQ$ is a right angle. (*4 points*) **B. 4727.** Determine all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that $f(x+y)+f(x)f(y)=x^2y^2+2xy$ for all x and y. (*5 points*) **B. 4728.** Let e be the line of one of the edges of a cube. How many lines of the space intersect exactly those out of the 12 lines containing the edges of the cube which are skew relative to e? (*3 points*) **B. 4729.** A given quadrilateral $ABCD$ has right angles at C and at D. Construct that point P of line segment CD for which $\angle APD=2\angle BPC$. (*5 points*) **B. 4730.** The circles k_1 and k_2 touch at point E. Points X_i and Y_i are marked on each circle k_i $(i=1,2)$ such that the two lines X_iY_i intersect each other on the common interior tangent of the circles. Prove that the line connecting the centres of circles X_1X_2E and Y_1Y_2E, and the other line connecting the centres of circles X_1Y_2E and X_2Y_1E also intersect each other on the common interior tangent of the circles. (*5 points*) (Proposed by *K. Williams,* Szeged) **B. 4731.** Let $0\leqslant a,b,c\leqslant 2$, and $a+b+c=3$. Determine the largest and smallest values of $\sqrt{a(b+1)}+\sqrt{b(c+1)}+\sqrt{c(a+1)}$. (*6 points*) (Proposed by *K. Williams,* Szeged)

New problems – competition A (see page 355): **A. 647.** Let k be a nonnegative integer. Prove that there are only finitely many positive integers n for which there exist two disjoint sets A and B satisfying $A \cup B = \{1, 2, \ldots, n\}$ and $\left|\prod_{a\in A} a - \prod_{b\in B} b\right| = k$. (Proposed by: *Balázs Maga,* Budapest) **A. 648.** In the acute angled triangle ABC, the midpoints of the sides BC, CA and AB are D, E and F, respectively. The foot of the altitude of the triangle starting from C is T_1. On some line, passing through point C but not containing T_1, the feet of the perpendiculars starting from A and B are T_2 and T_3, respectively. Prove that the circle DEF passes through the center of the circle $T_1T_2T_3$. (Proposed by: *Bálint Bíró,* Eger) **A. 649.** A convex polyhedron has only quadrilateral faces. Show that it is possible to split every face into two triangles by drawing one of its diagonals in such a way that at each vertex of the polyhedron, an even number of triangles meet. (Proposed by: *János Nagy,* Budapest)

Problems in Physics

(see page 380)

M. 352. Measure the spring constant of the toy called jumping frog. One can make the frog jump such that the sucker is pressed against the bottom disc, in the direction of the axis of the spring. (If the jumping frog is not available, one can make experiments with a retractable ballpoint pen.)

P. 4748. Can it be possible that the ice-cream ball, which was dropped from the tower called Károly-kilátó in the city of Sopron, melts before it reaches the ground? **P. 4749.** A parachutist descends uniformly at a speed of 8 m/s in calm weather. What will the speed of the parachutist be if there is a 6 m/s crosswind? **P. 4750.** Silver-gold alloys can be made in any ratio of the two constituents. The weight of a particular piece of this type of alloy in air is 15 N, whilst its weight in water is 14 N. What is the percent composition by mass of gold in the alloy? **P. 4751.** What can be observed if the handle of a resonating tuning fork *a*) touches the tabletop, or *b*) is emerged into water? Explain the observations. **P. 4752.** The string of a bow is pulled by a force of 200 N, such that the arrow is moved backwards by a distance of 50 cm. The applied force is proportional to the displacement of the midpoint of the string. With this bow an arrow of mass 40 g is shot vertically upwards. To what maximum height can the arrow fly if 40% of the elastic energy is used? **P. 4753.** The beat frequency of two organ pipes of lengths 80 cm and 81 cm is 2.6 Hz, when both resonate at its fundamental frequency. Calculate the fundamental frequencies of the pipes and the speed of sound in air. **P. 4754.** 4 litres of water at a temperature of 30 °C is poured into a copper hemisphere shaped container of volume 4 dm^3. The temperature of water decreases by 3 °C, whilst the temperature of the container increases by 27 °C. What is the width of the wall of the container? **P. 4755.** We have four filament lamps rated at 4.5 V, and two rechargeable batteries, one rated at 12 V and the other at 3 V. Make a circuit from the given elements, such that all the filament lamps are operated at their working temperatures. **P. 4756.** A circular ring is made of a piece of metal wire of resistivity ϱ and of width $2a$. The radius of the central circle of the ring is r ($r \gg a$). This ring is placed into uniform magnetic field of magnitude $\boldsymbol{B}_0$, which is perpendicular to the plane of the ring. Then the magnetic induction is decreased uniformly to zero in a time of Δt. Determine the magnitude of the induced magnetic field, B_{ind}, at the centre of the ring. **P. 4757.** The work function of the cathode of a photocell in a circuit is $6 \cdot 10^{-19}$ J. Ultraviolet wave of wavelength 250 nm hits the cathode perpendicularly. *a*) What is the stopping potential at which the photo-current becomes zero? *b*) What is the linear momentum given to the cathode, during one elementary process, if the emitted electron is ejected oppositely to the direction of the radiation? *c*) Let us change the frequency of the radiation. At most by what factor can the linear momentum of the emitted electron be greater than that of the entering photon?