KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

65. évfolyam 5. szám Budapest, 2015. május

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, V. emelet 5.106.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, V. emelet 5.106., 1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Szakaszok ekvioptikus görbéi

Bevezető

Ekvioptikus, azaz egyenlő látószögű. Ha adott a síkon két görbe, úgy azok ekvioptikus görbéjén (röviden ekvioptikusán) azon pontok mértani helyét értjük, melyekből a két görbe ugyanakkora szögben látszik. A látószög annak a legkisebb szögnek a nagysága, amelynek szögszárain kívül nincs pontja a görbének.

Találkozhatunk még az *izoptikus* kifejezéssel, mely jelentése állandó látószögű. Adott egy síkgörbe és egy rögzített α szög. Ekkor azon pontok mértani helye, melyekből a görbe α szögben látszik, a görbe α-izoptikusa. Amennyiben $\alpha = 90^\circ$, úgy az α-izoptikust *ortoptikusnak* is nevezzük. Két görbe azonos szögű izoptikusainak metszéspontjai alkotják tehát az ekvioptikus görbét.

Az olvasó például meggondolhatja, hogy két nem metsző kör ekvioptikusa egy harmadik kör, egy parabola ortoptikusa egyenes, míg az ellipszisek és hiperbolák ortoptikusai körök. Az ellipszisek és hiperbolák α-izoptikusai általában negyedrendű görbék.

Jelen cikkünkben szakaszok ekvioptikusait fogjuk vizsgálni, azzal a kiegészítéssel, hogy a szögeket irányítottan nézzük, modulo 180°. Ez biztosítja azt a kényelmet, hogy például egy szakasz α-izoptikusa a teljes körvonal legyen (ne pedig két külön körív, melyek egymás tükörképei a szakasz egyenesére).

Definíció. Adottak a síkon az A, B, C, D pontok. Az AB és CD szakaszok *ekvioptikus görbéjének* nevezzük és $S(A,B,C,D)$-vel jelöljük azon pontok mértani helyét, melyekből a két szakasz egyenlő irányított szögben látszik:

$$S(A,B,C,D) = \big\{P \mid APB\sphericalangle \equiv CPD\sphericalangle \pmod{180^\circ}\big\}.$$

Megjegyezzük, hogy pl. A-hoz „nagyon közeli" P pontokra az $APB\sphericalangle$ minden lehetséges értéket felvesz, ezért $P = A$ esetén a fenti egyenlőséget igaznak tekintjük. Tehát az A, B, C, D pontok is elemei a fenti halmaznak.

A görbe néhány tulajdonsága

1. állítás. *Két szakasz ekvioptikusa mindig egy legfeljebb harmadrendű görbe.*

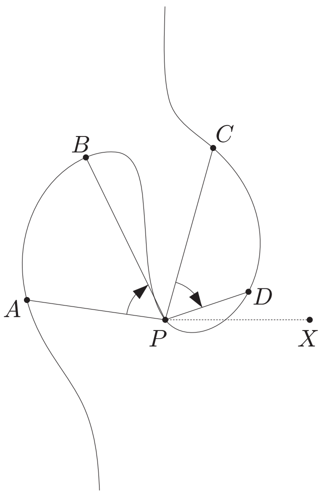
Bizonyítás. Legyenek a pontok koordinátái $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$, $D(d_1,d_2)$ és $P(x,y)$, továbbá legyen P merőleges vetülete az y-tengelyre $X(0,y)$ (*1. ábra*). Ekkor az APB szög tangense kifejezhető az AP és BP szakaszok m_a, m_b meredeksége, és a tangens addíciós képlete alapján:

$$\operatorname{tg} APB\sphericalangle = \frac{\operatorname{tg} APX\sphericalangle - \operatorname{tg} BPX\sphericalangle}{1+\operatorname{tg} APX\sphericalangle \operatorname{tg} BPX\sphericalangle} =$$

$$= \frac{m_a - m_b}{1+m_a m_b} = \frac{\dfrac{y-a_2}{x-a_1} - \dfrac{y-b_2}{x-b_1}}{1+\dfrac{y-a_2}{x-a_1}\cdot\dfrac{y-b_2}{x-b_1}} =$$

$$= \frac{(y-a_2)(x-b_1)-(y-b_2)(x-a_1)}{(x-a_1)(x-b_1)+(y-a_2)(y-b_2)} =$$

$$= \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}.$$



1. ábra

A számlálóban az xy tag éppen kiesik, ezért f_1 elsőfokú, f_2 pedig másodfokú polinom. Ugyanígy, $\operatorname{tg} CPD\sphericalangle = g_1(x,y)/g_2(x,y)$, ahol g_1 elsőfokú, g_2 másodfokú. Mivel $\operatorname{tg} APB\sphericalangle = \operatorname{tg} CPD\sphericalangle$ éppen ekvivalens azzal, hogy $APB\sphericalangle \equiv CPD\sphericalangle$ (mod 180°), a keresett görbe egyenlete $f_1/f_2 = g_1/g_2$, azaz $0 = f_1g_2 - f_2g_1$, ami valóban (legfeljebb) harmadrendű görbe.

2. állítás. *Amennyiben $ABDC$ deltoid, úgy $S(A,B,C,D)$ egy kör és egy egyenes uniója.*

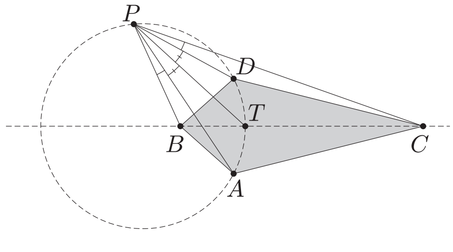
1. bizonyítás (*Koordinátageometria*). Legyen a deltoid szimmetriatengelye pl. BC, és vegyük fel a koordináta-rendszert úgy, hogy BC legyen az x-tengely, AD pedig az y-tengely. Ekkor $a_1=0$, $b_2=0$, $c_2=0$, $d_1=0$, $a_2+d_2=0$, így a $0=f_1g_2-f_2g_1$ egyenlet egy kis számolással a következő alakra hozható:

$$0 = y\cdot\Big(\big(x^2+y^2\big)(b_1+c_1) + x\big(2a_2^2 - 2b_1c_1\big) - a_2^2(b_1+c_1)\Big).$$

Az első tényező az $y=0$ egyenes, a második tényező pedig egy kör egyenlete, hiszen x^2 és y^2 együtthatói megegyeznek, és nincs xy tag.

Ebből a megoldásból az derült ki, hogy az egyenes a deltoid szimmetriatengelye, a kör pedig tükrös erre az egyenesre.

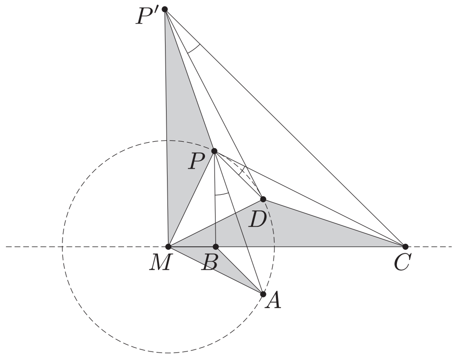
2. bizonyítás (*Apollóniusz-kör*). Vegyünk egy tetszőleges P pontot az ekvioptikus görbéről, és legyen T az APD kör és a BC egyenes (egyik) metszéspontja (*2. ábra,* az ekvioptikus szaggatott vonallal van jelölve). Ekkor szimmetria miatt T az AD ív felezőpontja, így $APT\sphericalangle \equiv TPD\sphericalangle$. Ezt hozzáadva ahhoz, hogy $BPA\sphericalangle \equiv DPC\sphericalangle$, azt kapjuk, hogy $BPT\sphericalangle \equiv TPC\sphericalangle$ (mod 180°).



2. ábra

Az $APDT$ kör tükrös BC-re, és T rajta van $BPC\sphericalangle$ szögfelezőjén, ezért ez a kör nem más, mint a B, C pontok T-n átmenő Apollóniusz-köre (amennyiben P nincs rajta a BC egyenesen). Mivel D is rajta van ezen az Apollóniusz körön, ezért tetszőleges P pont esetén $BP/PC = BD/DC$, vagyis az $APDT$ kör állandó. Így P mértani helye a B, C pontok D-n átmenő Apollóniusz-köre, továbbá a nyilvánvaló BC egyenes.

Ebből a megoldásból az is kiderült, hogy a mértani helyként kapott kör nem csak egyszerűen tükrös az egyenesre, hanem egy konkrét Apollóniusz kör. Ezt szintén érdemes megjegyezni.



3. ábra

3. bizonyítás (*Forgatva nyújtás*). Legyen M azon φ forgatva nyújtás középpontja, melyre $\varphi(AB) = CD$ (*3. ábra*). Ismert, hogy ekkor M rajta van az AB, BD, DC, CA egyenesek közül bármely három által meghatározott háromszög köréírt körén. Legyen P egy pont az M középpontú MD sugarú k körön. Amennyiben a φ forgatva nyújtás során az ABP háromszög képe CDP', úgy létezik olyan M középpontú φ' forgatva nyújtás is, melyre $\varphi'(BD) = PP'$.

Ekkor a φ forgatva nyújtás miatt $MDC_\triangle \sim MBA_\triangle$, a deltoid szimmetriája miatt az $MBA_\triangle$ és $MBD_\triangle$ háromszögek egybevágóak és ellentétes körüljárásúak, a φ' forgatva nyújtás miatt pedig $MBD_\triangle \sim MPP'_\triangle$. Mivel olyan P pontot vettünk, ami rajta van k-n, tehát $MD = MP$, ezért az $MDC_\triangle$ és $MPP'_\triangle$ háromszögek egybevágóak és ellentétes körüljárásúak. Ez pedig azt jelenti, hogy $CDPP'$ húrtrapéz, így $DPC\sphericalangle \equiv DP'C\sphericalangle \equiv BPA\sphericalangle \pmod{180^\circ}$, a φ forgatva nyújtást is használva. Így a k kör minden P pontja rajta van $S(A,B,C,D)$-n, továbbá a BC egyenes is rajta van, és tudva, hogy a görbe harmadrendű, ezért más pontja nincs is.

A 2. állításra fogunk adni egy 4. bizonyítást is, ehhez azonban meg kell ismernünk a *Cserebere-tételt* (csak a cikkben nevezzük így).

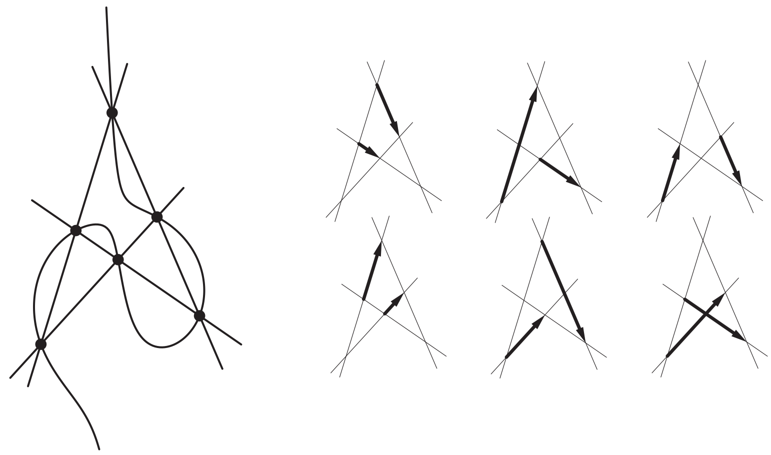
A Cserebere-tétel

Elérkeztünk cikkünk fő attrakciójához. A most következő tétel arról szól, hogy ekvioptikus görbét valójában nem két szakaszhoz rendelünk, hanem négy egyeneshez.

3. állítás (Cserebere-tétel). *Adottak a síkon az a, b, c, d egyenesek, melyek közül semelyik háromnak sincs közös pontja. Kiválasztunk közülük kettőt, pl. a-t és b-t, majd tekintjük azt a két szakaszt, amit a másik két egyenes, c és d metsz ki belőlük. Ekkor ezen két szakasz ekvioptikus görbéje nem függ attól, hogy melyik két egyenest választottuk ki. Tehát például b és c* felcserélhető:

$$S(a \cap c, a \cap d, b \cap c, b \cap d) = S(a \cap b, a \cap d, c \cap b, c \cap d).$$

A *4. ábra* jobb oldali részén a lehetséges $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok vannak berajzolva. A Cserebere-tétel szerint a hat ábra közül bármelyik esetén $S(A,B,C,D)$ a bal oldali harmadrendű görbe lesz.



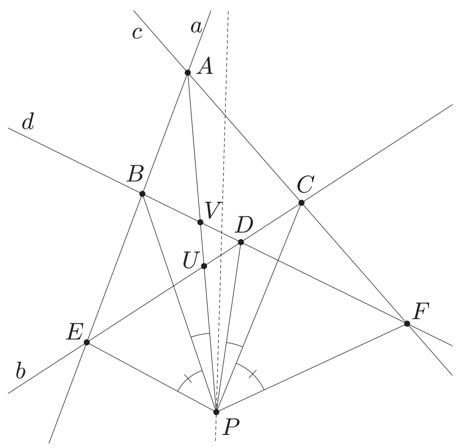
4. ábra

A bizonyításhoz *kettősviszonyokat* fogunk használni. A projektív geometriáról és kettősviszonyról bővebben az [1], [2], vagy [3] hivatkozásokban lehet olvasni.

Bizonyítás. Legyen $A=a\cap c$, $B=a\cap d$, $C=b\cap c$, $D=b\cap d$, $E=a\cap b$, $F=c\cap d$, $U=AP\cap b$ és $V=AP\cap d$ (*5. ábra*). Megmutatjuk, hogy ha $APB\sphericalangle\equiv CPD\sphericalangle$, akkor $BPE\sphericalangle\equiv FPC\sphericalangle$ (mod 180°), minden más egyenesfelcserélés ezzel egyenértékű állításhoz vezet. Az A pontból d-ről b-re való vetítés során a következő kettősviszony megmarad:

$$(BVDF)=(EUDC).$$

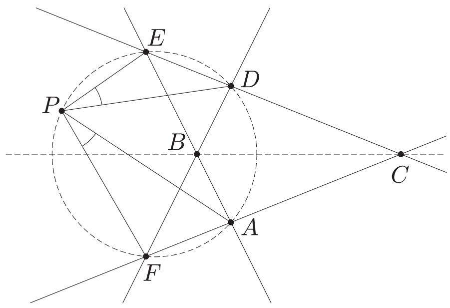
Tetszőleges kettősviszony „visszafelé” is leírható, így $(EUDC)=(CDUE)$. A P körüli sugársorokkal megfogalmazva ugyanezt:



5. ábra

$$(PB,PA,PD,PF)=(PC,PD,PA,PE).$$

Az $APD\sphericalangle$ szögfelezőjére tükrözve PA képe PD, és PB képe PC. Egy kettősviszony értéke és három egyenese alapján a negyedik egyenes egyértelmű, ezért az előző kettősviszonyok csak akkor lehetnek egyenlők, ha PE képe PF. Ekkor $BPE\sphericalangle\equiv$ $\equiv FPC\sphericalangle$ (mod 180°), így a Cserebere-tételt beláttuk.



6. ábra

2. állítás, 4. bizonyítás (*Cserebere-tétel*). Legyenek az $ABDC$ deltoid szemközti oldalainak metszéspontjai $E=AB\cap CD$ és $F=AC\cap BD$ (*6. ábra*). Ekkor a Cserebere-tétel szerint $S(A,B,C,D)=S(A,F,E,D)$. Azonban az $AFED$ húrtrapéz szárainak ekvioptikusát könnyű megtalálni: szimmetria miatt a BC egyenes, a kerületi szögek tétele miatt pedig az $AFED$ kör minden pontja rajta van az ekvioptikus görbén. Tehát deltoid esetén az ekvioptikus valóban egy kör és egy egyenes uniója.

A köri ideális pontok

Komplex projektív síknak nevezzük azon $(x,y,z)\neq(0,0,0)$, $x,y,z\in\mathbb{C}$ komplex számhármasok halmazát, melyben az (x,y,z) és $(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$ pontokat azonosnak tekintjük minden $\lambda\neq 0$, $\lambda\in\mathbb{C}$ esetén. A *valós* projektív síkot úgy lehet elképzelni, hogy a 3-dimenziós euklideszi térben az origón átmenő $\{(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$ egyeneseket elmetsszük a $z=1$ síkkal. Amelyik egyenest tényleg elmetszi, ott kapunk valódi (x,y) pontot, amelyik egyenes pedig párhuzamos vele, abban az esetben beszélünk ideális pontról. A komplex projektív síkon sincs ez másképp: az $(x,y,0)$ pontokat nevezzük ideális pontoknak.

Mivel $(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$, a projektív síkon minden alakzat egyenlete homogén x, y, z-re nézve. Így egy kör egyenlete az $x^2+y^2+axz+byz+cz^2=0$ alakot ölti. Habár az euklideszi síkon nevetségesnek tűnik a kérdés, mégis megkérdezhetjük: van-e a körnek ideális pontja? A meglepő válasz erre az, hogy a komplex síkon igenis van. Ugyanis $z=0$ helyettesítéssel $x^2+y^2=0$ adódik, melynek van nemnulla megoldása: az $y=\pm ix$. Ami még meglepőbb, hogy az így kapott

$$(1,i,0),\qquad(1,-i,0)$$

pontok minden lehetséges körön rajta vannak. Van tehát két olyan pont valahol a komplex végtelenben, melyek minden körre illeszkednek. Ezért ezeket a pontokat *köri ideális pontoknak* nevezzük.

Ha adott két kör egyenlete: k_1 és k_2, akkor tetszőleges λ,μ esetén $\lambda k_1+\mu k_2$ is egy kör egyenlete. A $\mathcal{K}=\{\lambda k_1+\mu k_2\mid\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$ halmazt *körsornak* nevezzük. Körsorok segítségével adhatunk egy újabb módot az ekvioptikus görbe előállítására: adott egy $\mathcal{K}$ körsor és egy φ forgatva nyújtás, és a körsor minden k köréhez vesszük a forgatva nyújtás szerinti képével való metszéspontjait, tehát a

$$\{k\cap\varphi(k)\mid k\in\mathcal{K}\}$$

halmazt. Ha $\mathcal{K}$ hiperbolikus, azaz fix A, B pontokon átmenő körsor, és $\varphi(AB)=$ $=CD$, akkor $\{k\cap\varphi(k)\mid k\in\mathcal{K}\}=S(A,B,C,D)$, hiszen az AB szakasz α szögű látókörének képe a CD szakasz α szögű látóköre lesz, így metszéspontjuk rajta van az ekvioptikus görbén.

A köri ideális pontok bármely két kör metszetén rajta vannak, ezért benne vannak a $\left\{k \cap \varphi(k) \mid k \in \mathcal{K}\right\}$ halmazban is, és mivel ez a körsoros előállítás ugyanazt a ponthalmazt adja, mint az ekvioptikus görbés előállítás, a köri ideális pontok tetszőleges ekvioptikus görbén rajta vannak. Ugyanerről persze meggyőződhetünk az 1. állításbeli $0 = f_1g_2 - f_2g_1$ egyenletbe való helyettesítéssel is.

Annak, hogy az ekvioptikus egy olyan speciális harmadrendű görbe, ami átmegy a köri ideális pontokon, egy következménye a

4. állítás. *Amennyiben két szakasz ekvioptikusa tartalmaz egy valódi (azaz nem komplex és nem ideális) egyenest, akkor a görbe maradék része egy kör.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a harmadrendű görbe

$$(Ax + By + C)(Dx^2 + Exy + Fy^2 + Gx + Hy + I) = 0$$

alakban felbomlik egy elsőfokú és egy másodfokú polinom szorzatára, ahol az együtthatók mind valós számok. Tudjuk, hogy ezen a görbén rajta vannak a köri ideális pontok, így homogenizálva, majd

$$(x, y, z) = (1, i, 0)$$

helyettesítéssel:

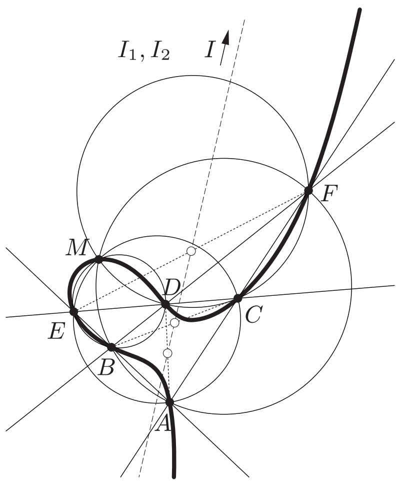
$$(A + Bi)(D + Ei - F) = 0.$$

Az első tényező csak akkor lehet nulla, ha $A = B = 0$, azonban ez nem ad valódi egyenest. Így a második tényezőnek kell nullának lennie, ahonnan $D = F$ és $E = 0$, azaz a másodfokú tényezőben x^2 és y^2 együtthatói megegyeznek, továbbá nincs xy tag. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy a harmadrendű görbe egy egyenes és egy (valós vagy képzetes) kör uniója.

Tulajdonképpen azt használtuk, hogy ha egy másodrendű görbe átmegy a köri ideális pontokon, akkor az a görbe egy kör. Megjegyzendő azonban a paralelogramma esete: ha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, akkor $S(A, B, C, D)$ felbomlik ugyan egy egyenes és egy másodrendű görbe uniójára, de mégsem tartalmaz kört. Ebben az esetben ugyanis az egyenes az ideális egyenes, tehát a köri ideális pontokon az $Ax + By + C = 0$ egyenletű alakzat megy át.

A köri ideális pontok segítségével újabb bizonyítást adhatunk a 2. állításra és a Cserebere-tételre:

2. állítás, 5. bizonyítás (*Köri ideális pontok*). A deltoid szimmetriatengelye nyilvánvalóan része az ekvioptikus görbének. A 4. állítás alapján pedig a maradék egy kör, így készen vagyunk. (Az is könnyen megállapítható, hogy melyik kör, ugyanis a 6. ábra jelöléseivel az A, D, E, F pontoknak rajta kell lenniük az ekvioptikuson, tehát a körön is.)



7. ábra

Cserebere-tétel, 2. bizonyítás. Legyen a négy egyenes 6 metszéspontja a szokásos módon A, B, C, D, E, és F (*7. ábra*). Ekkor ez a 6 pont rajta van bármelyik ekvioptikuson, pl. $S(A,B,C,D)$-n és $S(E,B,C,F)$-en. A két köri ideális pont: I_1 és I_2 is mindkettőn rajta van. Miquel tétele szerint tetszőleges négy egyenesre az ABF, ACE, CDF, BDE köröknek van közös pontja. Ha ez a közös pont M, akkor $AMB\sphericalangle \equiv AFB\sphericalangle \equiv \equiv CFD\sphericalangle \equiv CMD\sphericalangle$ (mod 180°), így M rajta van $S(A,B,C,D)$-n, és ugyanígy rajta van $S(E,B,C,F)$-en is.

Keressük meg $S(A,B,C,D)$ valós ideális pontját: ehhez az 1. állításbeli $0=f_1g_2-g_1f_2$ egyenlet homogenizált alakját írjuk fel, majd $z=0$-t helyettesítünk:

$$0=(b_2x+a_1y-a_2x-b_1y)\big(x^2+y^2\big)-(d_2x+c_1y-c_2x-d_1y)\big(x^2+y^2\big),$$

$$0=x(b_2+c_2-a_2-d_2)-y(b_1+c_1-a_1-d_1).$$

Tehát $S(A,B,C,D)$ ideális pontja az $I(b_1+c_1-a_1-d_1, b_2+c_2-a_2-d_2, 0)$ pont. Az AD és BC szakaszok felezőpontjai $U\Big(\frac{a_1+d_1}{2}, \frac{a_2+d_2}{2}, 1\Big)$ és $V\Big(\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2}, 1\Big)$, így a koordináták $I=2(V-U)$ összefüggése alapján I, U, V egy egyenesre esik. Ismert, hogy tetszőleges négy egyenesre az AD, BC, EF szakaszok felezőpontjai egy egyenesre esnek, így I rajta van $S(E,B,C,F)$-en is.

Tehát van 10 különböző pontunk (különbözőek, mert az állítás 4 általános helyzetű egyenesről szólt): A, B, C, D, E, F, M, I_1, I_2, és I, melyek rajta vannak $S(A,B,C,D)$-n és $S(E,B,C,F)$-en is. Márpedig két teljesen különböző harmadrendű görbének legfeljebb csak 9 metszéspontja lehet, ha 10 van, az azt jelenti, hogy van közös komponensük. Tegyük fel, hogy a két görbe nem azonos, ekkor mindkettő felbomlik egy egyenesre és egy másodfokú görbére. Ha az egyenes részük különböző, akkor azoknak legfeljebb 1 metszéspontjuk lehet a 10-ből, azonban a maradék 9 pontra nem illeszthető másodrendű görbe, akármelyik 9 pontról is legyen szó. Ha pedig a másodrendű részük különböző, akkor azoknak 4 metszéspontjuk lehet a 10-ből, de a maradék 6 pont nem eshet egy egyenesre. Tehát a két harmadrendű görbe megegyezik, és ezzel beláttuk, hogy $S(A,B,C,D)=S(E,B,C,F)$.

Komplex függvénytan

Eddigi példáinkon valahányszor egy kör és egy egyenes volt az ekvioptikus görbe, az egyenes átment a kör középpontján. Megmutatjuk, hogy ez szükségszerű, sőt, bizonyítást adunk egy sokkal általánosabb állításra, melynek az a következménye, hogy ha az ekvioptikus görbe „egyszeresen önátmetsző”, akkor ebben a pontban a görbe két érintője merőleges egymásra.

Ehhez az ekvioptikus problémát egy újabb szemszögből közelítjük meg: dolgozzunk a komplex számsíkon. Komplex függvénytannal kapcsolatban ajánljuk az olvasónak Szőkefalvi Nagy Béla klasszikus művét: [4].

Legyen $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ tetszőleges komplex függvény, és legyen

$$R(f)=\big\{z\mid z\in\mathbb{C},\ f(z)\in\mathbb{R}\big\}$$

azon pontok halmaza, ahol f valós értéket vesz fel. Amennyiben az A, B, C, D pontok a komplex számsíkon az a, b, c, d komplex számoknak felelnek meg, úgy tekintsük az

$$f(z)=\frac{\dfrac{z-a}{z-b}}{\dfrac{z-c}{z-d}}=\frac{(z-a)(z-d)}{(z-b)(z-c)}$$

függvényt. Legyen a z számnak megfelelő pont P, ekkor $f(z)$ pontosan azon z értékekre lesz valós, melyekre

$$0\equiv\arg f(z)\equiv\arg\frac{z-a}{z-b}-\arg\frac{z-c}{z-d}\equiv APB\sphericalangle-CPD\sphericalangle\pmod{180^\circ}.$$

Így ebben az esetben az ekvioptikus görbéhez jutottunk, $R(f)=S(A,B,C,D)$.

A görbe z_0 pontját n-szeres *szinguláris pontnak* hívjuk ($n\geqslant 2$), ha az $f'(z_0)$, $f''(z_0)$, $f'''(z_0)$, $\ldots$ deriváltak közül az n-edik, $f^{(n)}(z_0)$ az első, amely nem nulla. Ez egy görbén általában úgy jelenik meg szemléletesen, hogy a z_0 pontban a görbe n-szer „átmetszi saját magát”. A legtöbb egyenes általában m különböző pontban metsz egy m-edrendű görbét, az n-szeres szinguláris ponton áthaladó egyenesek azonban csak $(m-n+1)$ pontban.

5. állítás. *Ha egy f (akárhányszor differenciálható) komplex függvény $R(f)$ görbéjén van egy n-szeres szinguláris pont, akkor az ottani n érintő közül a szomszédosak mind ugyanakkora, $\frac{180^\circ}{n}$ szöget zárnak be.*

Bizonyítás. Írjuk fel f Taylor-sorát a z_0 pontban:

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)\cdot(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2}\cdot(z-z_0)^2+\frac{f'''(z_0)}{3!}\cdot(z-z_0)^3+\ldots.$$

Ha az első $(n-1)$ derivált értéke z_0-ban nulla, akkor a függvény

$$e(z)=f(z_0)+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\cdot(z-z_0)^n$$

közelítése alapján kapott $R(e)$ halmaz a z_0-beli érintők egyenletét adja meg. Mivel $f(z_0)$ valós, pontosan akkor kapunk $e(z)$-re is valós értéket, ha

$$0\equiv\arg\left(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\cdot(z-z_0)^n\right)\equiv\arg\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}+n\cdot\arg(z-z_0)\pmod{180^\circ},$$

$$\arg(z-z_0)=-\frac{1}{n}\arg\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}+k\cdot\frac{180^\circ}{n}$$

valamely k egész számra. Tehát valóban, a z_0-beli érintők z pontjaira adódó lehetséges $(z-z_0)$ komplex számok szögei közül a szomszédosak különbsége mindig $\frac{180^\circ}{n}$.

Ezzel megmutattuk, hogy ha egy ekvioptikus görbe tartalmaz kétszeres szinguláris pontot, akkor a görbe ebben a pontban merőlegesen metszi önmagát.

Feladatok

Végezetül néhány gyakorló feladat:

1. feladat. Adott egy egyenesen négy pont A, B, C, D sorrendben. Mi azon pontok mértani helye, melyekből az AB és CD szakaszok ugyanakkora szögben látszanak?

2. feladat. Az $ABCD$ paralelogramma síkjában fekvő E pontra teljesül, hogy $AEB\sphericalangle \equiv DEC\sphericalangle \pmod{180^\circ}$.

a) Bizonyítsuk be, hogy $BAE\sphericalangle \equiv ECB\sphericalangle \pmod{180^\circ}$.

b) Határozzuk meg az ilyen tulajdonságú E pontok halmazát.

3. feladat. Az ABC háromszög A, B, C csúcsaiból kiinduló belső szögfelezők a szemközti oldalakat az E, F, G pontokban metszik. EF és CG metszéspontja P, EG és BF metszéspontja Q. Bizonyítsuk be, hogy $BAQ\sphericalangle = PAC\sphericalangle$.

4. feladat (*IMO 2014/3. nyomán*). Adott egy $ABCD$ deltoid, melynek AC a szimmetriatengelye, és egy P pont úgy, hogy a B, D pontok az APC szögtartományban vannak, és $APD\sphericalangle = BPC\sphericalangle$. Bizonyítsuk be, hogy a PAB és PCB szögek belső szögfelezői a PB egyenesen metszik egymást.

5. feladat (*Szimmedián-lemma*). Az ABC háromszög köréírt körének B és C-beli érintői E-ben metszik egymást. A háromszög A oldalához tartozó súlyvonalat tükrözzük az A-ból kiinduló belső szögfelezőre (ezt hívjuk szimmediánnak). Bizonyítsuk be, hogy E rajta van az így kapott egyenesen.

6. feladat (*KöMaL, A. 632.*). Legyen $ABCD$ konvex négyszög. Az ABC háromszögben legyen I és J a beírt kör, illetve az A csúccsal szemközti hozzáírt kör középpontja. Az ACD háromszögben legyen K, illetve L a beírt, illetve az A csúccsal szemközti hozzáírt kör középpontja. Mutassuk meg, hogy az IL és JK egyenesek, valamint a $BCD\sphericalangle$ szögfelezője egy ponton mennek át.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani Hraskó András tanár úrnak áldozatos munkájáért, észrevételeiért, és mindennemű támogatásáért. Köszönöm matematikatanáraimnak, Dobos Sándor, Kiss Gergely, Gyenes Zoltán, Surányi László, Pósa Lajos tanár uraknak az elmúlt évek során nyújtott kiemelkedő munkájukat. Köszönetet mondok továbbá minden más ismerősömnek, akik biztatásukkal segítették e cikk létrejöttét.

Hivatkozások

[1] Hajós György, *Bevezetés a geometriába*, 44. fejezet (projektív sík, kettősviszony), Tankönyvkiadó, 1971.

[2] Horvay Katalin, Reiman István, *Projektív geometria,* Tankönyvkiadó, 1980.

[3] Dobos Sándor, Hraskó András, *Projektív geometria,* fejezet a Matkönyv, Geometria 11–12. évfolyam kötetben,
`http://matkonyv.fazekas.hu/cache/pdf/vol_geometria_iii.pdf`

[4] Szőkefalvi Nagy Béla, *Komplex függvénytan,* Polygon jegyzet, 2009.

Fehér Zsombor
Budapesti Fazekas M. Gyak. Gimn.
12. osztály, mat. tagozat
`fzsombor@fazekas.hu`

Megoldásvázlatok a 2015/4. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

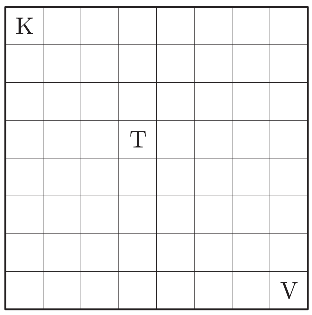
1. *Bizonyítsuk be, hogy* lg 2 *irracionális.* (*11 pont*)

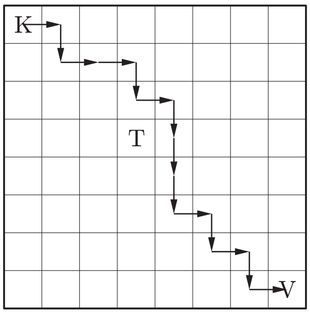
Megoldás. Bizonyításunk indirekt. Abból indulunk ki, hogy lg 2 pozitív valós szám. Ha lg 2 racionális szám volna, akkor felírható lenne p/q alakban, ahol p és q pozitív egész számok. A logaritmus fogalma alapján ekkor $10^{\frac{p}{q}}=2$, mindkét oldalt q-adik hatványra emelve $10^p=2^q$.

Mivel 10^p osztható 5-tel, 2^q viszont nem, ezért az egyenlőség nem állhat fenn. lg 2 tehát nem lehet racionális, ami egy valós szám esetében azt is jelenti, hogy irracionális.

2. *a*) *Hány különböző útvonalon juthatunk el a* 8×8*-as sakktáblán a bal felső sarokban lévő, az* ábrán K*-val jelölt mezőről a jobb alsó sarokban lévő,* V*-vel jelölt mezőre, ha bármely érintett mezőről csak az alatta lévő, vagy a jobb oldalán lévő mezőre léphetünk?*

b) *Hány olyan útvonal van ezek között, amely a kiinduló mezőtől számított negyedik oszlop és negyedik sor kereszteződésében lévő,* T*-vel jelölt mezőt nem érinti?* (*12 pont*)





1. ábra

Megoldás. *a*) Az *1. ábra* illusztrációképpen egy lehetséges útvonalat mutat.

Az útvonalat leírhatjuk egy j (jobbra) és l (lefelé) betűkből álló jelsorozattal is:

$$\text{jljjljlllljljlj}.$$

Bármely útvonal, amely a szabályoknak megfelel, összesen 14 lépésből áll; ezek közül 7 történik jobbra és 7 lefelé. Annyi különböző útvonal van, ahány különböző jelsorozat, mivel a megfelelés kölcsönösen egyértelmű.

A különböző útvonalak száma az ismétléses permutációk szerint: $P_{14(7;7)}^{\text{ism}} = \frac{14!}{7!7!} = 3432$.

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a $C_{14;7} = \binom{14}{7}$ kombinációkat vesszük alapul.

b) A kérdés megválaszolásához kiszámítjuk, hogy hány különböző útvonal halad át a negyedik oszlop negyedik sorában lévő mezőn (T), és ezt a számot levonjuk az előbb kapott 3432-ből.

A kiinduló K mezőből összesen 6 lépéssel jutunk a T mezőre, és ez $\binom{6}{3} = 20$-féleképpen történhet. Innen a V-vel jelölt végállomásra $\binom{8}{4} = 70$-féleképpen juthatunk el. Az első útszakasz bármelyikéhez a második bármelyike párosítható, ezért $20 \cdot 70 = 1400$ útvonal érinti a T mezőt. Ebből következik, hogy $3432 - 1400 = 2032$ viszont nem érinti.

3. *a*) *Bizonyítsuk be, hogy ha az* (a_n) *végtelen számtani sorozat elemei természetes számok és ezek között van köbszám, akkor a sorozatnak végtelen sok köbszám eleme van.*

b) *Ha például a sorozatban szerepel a* 125, *és a sorozat differenciája* 3, *akkor lehet-e* 125-*nél kisebb köbszám a sorozatban?* (*10 + 4 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen a sorozat köbszám eleme $a_k = c^3$ ($c \geqslant 0$ egész szám) és d a sorozat differenciája. Ezek ismeretében kiszámíthatjuk

$$c^3 + \left(3c^2 + 3cd + d^2\right)d$$

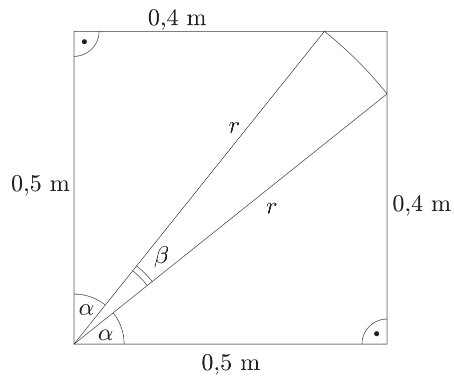
értékét. Nyilvánvaló, hogy ez sorozatunk eleme, és ez is köbszám, mégpedig $(c+d)^3$.

Könnyen látható ugyanilyen alapon, hogy $(c+2d)^3$, $(c+3d)^3$, $\ldots$ szintén elemei a sorozatnak.

b) 125-nél kisebb nem negatív köbszámok a 0, 1, 8, 27 és 64. Mivel a sorozat differnciája 3, ezek közül csak azok jöhetnek szóba, amelyeknek 125-től való eltérése osztható 3-mal. Ebből a szempontból csak a 8 felel meg. Mármost ha teljesül, hogy a sorozat kezdő eleme $a_1 \leqslant 8$, akkor van a sorozatnak 125-nél kisebb köbszám eleme, egyébként nincs.

4. *Bútorok hegyes sarkai sérülést okozhatnak. Különösen kisgyermekekre jelentenek veszélyt egy asztal sarkai. Éppen ezért az* $1\ \text{m} \times 1\ \text{m}$*-es asztalunk lapját lekerekítettük az asztallap síkjára merőlegesen tartott fűrésszel olyan körívek mentén, amelyek középpontja egybeesik a négyzet alakú felület középpontjával. A négy oldalél mindegyikéből* 80 cm *hosszú egyenes szakasz maradt meg. Az egyenletes vastagságú asztallap tömege eredetileg* 7 kg *volt. Mekkora lett a tömege az átalakítás után?* (*14 pont*)

Megoldás. Osszuk az asztallapot négy egybevágó részre a középvonalak mentén. A négy negyed egyikét a *2. ábra* mutatja.



2. ábra

Az ábrázolt felület két derékszögű háromszögből és egy r sugarú körcikkből áll. A háromszögek területe együttvéve 0,2 m^2. A körcikk középponti szöge $\beta = 90^\circ - 2\alpha$, ahol $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}8$. Innen a szögek két tizedesjegy pontossággal:

$$\alpha = 38{,}66^\circ \quad \text{és} \quad \beta = 12{,}68^\circ.$$

A körcikk területe

$$\pi r^2 \cdot \frac{\beta}{360^\circ} = \pi \cdot 0{,}41\ \text{m}^2 \cdot \frac{12{,}68^\circ}{360^\circ} \approx 0{,}045\,368\ \text{m}^2,$$

mivel $r^2 = \left(0{,}5^2 + 0{,}4^2\right)\ \text{m}^2 = 0{,}41\ \text{m}^2$.

Az asztallap tömege arányos területének nagyságával, amely eredetileg 1 m^2 volt és $4 \cdot (0{,}2 + 0{,}0453\,68)\ \text{m}^2 = 0{,}981\,47\ \text{m}^2$ lett, a kérdéses tömeg ezért $7\ \text{kg} \cdot 0{,}981\,47 =$ $= 6{,}870$ kg.

II. rész

5. *Egy dobókockával kétszer dobunk.*

a) Hány elemi esemény alkotja az eseményteret?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege legalább 9?

c) Mekkora annak a feltételes valószínűsége, hogy a dobott számok összege legalább 9, *ha az első dobott szám legalább* 5?

d) Mekkora annak a feltételes valószínűsége, hogy a dobott számok összege legalább 9, *ha az első dobott szám legfeljebb* 4? *(2 + 4 + 5 + 5 pont)*

Megoldás. *a*) Az eseményteret 36 elemi esemény alkotja, amelyet egy 6×6-os táblázattal szemléltetünk (*3. ábra*). Ez a további kérdések megválaszolásához is hasznos lesz.

1;1	1;2	1;3	1;4	1;5	1;6
2;1	2;2	2;3	2;4	2;5	2;6
3;1	3;2	3;3	3;4	3;5	3;6
4;1	4;2	4;3	4;4	4;5	4;6
5;1	5;2	5;3	5;4	5;5	5;6
6;1	6;2	6;3	6;4	6;5	6;6

A B_2 B_1

3. ábra

b) A klasszikus valószínűség szerint $P = \frac{k}{n}$ (a kedvező esetek száma osztva a lehetséges esetek számával). Jelölje A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege legalább 9. A kedvező esetek száma $k = 10$ és $P(A) = \frac{10}{36} = 0{,}2\dot{7}$.

c) Az A esemény feltételes valószínűsége a B eseményre mint feltételre vonatkozóan: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$. B_1 jelölje azt az eseményt, hogy az első dobott szám legalább 5.

$P(B_1)=\frac{1}{3}$. Az AB_1 esemény az A és a B_1 halmaz közös része 7 elemi eseményt tartalmaz. $P(AB_1)=\frac{7}{36}$,

$$P(A|B_1)=\frac{\frac{7}{36}}{\frac{1}{3}}=\frac{7}{12}=0{,}58\dot{3}.$$

d) Jelölje B_2 azt az eseményt, hogy az első dobott szám legfeljebb 4. $P(B_2)=\frac{2}{3}$. Az AB_2 eseményt 3 elemi esemény alkotja.

$$P(AB_2)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}\quad\text{és}\quad P(A|B_2)=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{8}=0{,}125.$$

A $P(A)$, $P(A|B_1)$ és $P(A|B_2)$ valószínűségeket összehasonlítva megállapítható, hogy a feltételként szereplő esemény a valószínűségeket jelentősen befolyásolhatja kedvező vagy kedvezőtlen irányban is.

Megjegyezzük, hogy a feltételes valószínűség meghatározásánál a feltételül szabott esemény tulajdonképpen a biztos esemény szerepét veszi át. Például a *d*) pontban vizsgált esetben úgy is számolhatunk, hogy B_2 24 elemi eseményből álló eseménytér, amelyen belül a kedvező esetek száma 3, a valószínűség pedig $\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$.

6. *Az $f(x)=x^3+ax^2+2x$ függvényről tudjuk, hogy inflexiós érintője párhuzamos az $x+y=0$ egyenletű egyenessel. Határozzuk meg az a együttható értékét. Igazoljuk, hogy a függvény inflexiós pontja az x-tengelyen van.* (*16 pont*)

Megoldás. Az $f(x)$ függvény első deriváltja: $f'(x)=3x^2+2ax+2$. Ez bármely helyen megadja az érintő meredekségét.

A második derivált: $f''(x)=6x+2a$. $f''(x)=0$, ha $x_0=-\frac{a}{3}$. Itt a függvénynek inflexiós pontja van, mivel $f''(x)$ x_0-nál előjelet vált (negatívból pozitívba).

Az inflexiós érintő meredeksége az $x+y=0$ egyenletű egyenessel való párhuzamosság folytán -1. Tehát

$$f'(x_0)=3\cdot\frac{a^2}{9}-2\cdot\frac{a^2}{3}+2=-1,$$

innen $a^2=9$, vagyis $a_1=3$, $a_2=-3$.

Ha $a_1=3$, akkor $x_{01}=-1$ és $f(x_{01})=0$.

Ha pedig $a_2=-3$, akkor $x_{02}=1$ és $f(x_{02})$ szintén egyenlő 0-val, tehát az inflexiós pont mindkét esetben az x-tengelyen van.

7. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\leqslant\sqrt[4]{8},$$

ha $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$. (*16 pont*)

Megoldás. Mivel a bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldalán pozitív mennyiségek állnak, ezek négyzetei között fennálló reláció az eredeti egyenlőtlenségre is igaz. Tehát elég azt bizonyítani, hogy

$$\sin x+\cos x+2\sqrt{\sin x\cdot\cos x}\leqslant\sqrt{8}\quad\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

(1)

$$\sin x+\cos x=\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}=\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}=\sqrt{1+\sin 2x}\leqslant\sqrt{2}$$

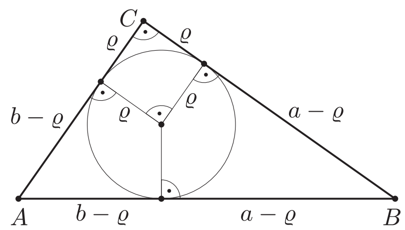
és

$$(2) \qquad 2\sqrt{\sin x\cos x}=\sqrt{2}\sqrt{\sin 2x}\leqslant\sqrt{2},$$

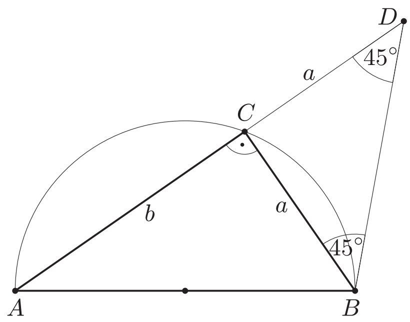
ezért a bal oldal $2\sqrt{2}$-nél, vagyis $\sqrt{8}$-nál nem lehet nagyobb.

8. *Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott a beírt és a körülírt körének sugara. Mi a megoldhatóság feltétele? (Elegendő a szerkesztés menetét leírni.)* (*16 pont*)

Jelölje ϱ a beírt, r pedig a körülírt kör sugarát. (A derékszögű háromszög oldalait a szokásos módon jelöljük.) A Thalész-tétel értelmében $c=2r$. A beírt kör sugarára fennáll: $c=a+b-2\varrho$. Ehhez azt kell látni (*4. ábra*), hogy a derékszög csúcsánál kialakul egy ϱ oldalú négyzet, továbbá azt, hogy külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők.



4. ábra

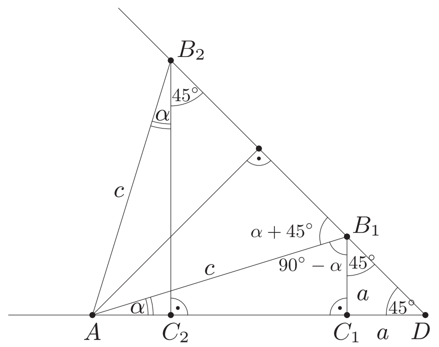


5. ábra

A felírt összefüggésekből $2(r+\varrho)=a+b$.

A feladat ezek után úgy is szólhatna, hogy szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott az átfogója és a két befogó összege. Ehhez a *5. ábra* ad segítséget. Az ABC derékszögű háromszög b befogójának meghosszabbítására felmértük az a befogót: $AD=a+b$.

Mivel BCD egyenlő szárú derékszögű háromszög, a D-nél fekvő szöge 45°. Ezek alapján a szerkesztés menete a következő. Egy 45°-os szög egyik szárára a D csúcsból kiindulva felmérjük az $a+b$ hosszúságú szakaszt: így kapjuk az A pontot. A másik szárból kimetsszük azt a B pontot, amely az A ponttól $c=2r$ távolságra van. Mivel az ABD háromszög megszerkesztéséhez két oldal és a kisebbikkel szemközti szög áll rendelkezésre (nem egybevágósági alapeset), általában két megfelelő csúcspont, B_1 és B_2 adódik (*6. ábra*.)



6. ábra

A megszerkeszteni kívánt ABC derékszögű háromszög C csúcsát a B_1, illetve a B_2 pontból az AD szakaszra bocsátott merőlegesek C_1, illetve C_2 talppontja adja. Habár két háromszöget kaptunk, a megoldás egyértelmű, mivel az AB_1C_1 és AB_2C_2 háromszögek egybevágóak. Ezt az átfogók és az α-val jelölt hegyesszögek egyenlősége biztosítja. (Az α szög az AB_2C_2 háromszögben a B_2 csúcsnál fekszik.)

Abban az esetben, ha $c\sqrt{2} = a + b$, akkor B_1 és B_2 egybeesik: az ABC háromszög egyenlő szárú.

Ha $c\sqrt{2} < a + b$, akkor nincs megoldás.

Más szóval a megoldhatóság feltétele: $2r\sqrt{2} \geqslant 2(r + \varrho)$, vagyis $\varrho \leqslant r\big(\sqrt{2} - 1\big)$.

9. *Egy harckocsizó alakulatnál szolgáló férfiak* 40 *fős csoportjában a testmagasság* (x_i) *és a testtömeg* (y_i) *adatait a következő táblázat tartalmazza:*

testmagasság x_i [cm]	testtömeg y_i [kg]
162	70, 77
163	61
164	58, 64, 68
165	73
166	62, 65, 70
167	65, 66, 75, 80
168	63, 69, 71, 79
169	64, 70, 75, 76
170	58, 61, 71, 75, 75, 88
171	67, 68, 75, 77
172	61, 65, 70, 84
173	58, 77
174	63, 80

a) Ha a kg*-ban mért testtömeget a* m*-ben mért testmagasság négyzetével elosztjuk, akkor az úgynevezett testtömeg-indexet kapjuk. A katonaorvos egy bizonyos egész számnál nagyobb testtömeg-index esetén minősít valakit túlsúlyosnak. Mekkora ez az érték, ha az orvos szerint a szóbanforgó csoportban a túlsúlyosok aránya* 10%*?*

b) Számítsuk ki az $\overline{x}$ *és* $\overline{y}$ *átlagokat. Jelölje* u *azoknak az* (x_i, y_i) *értékpároknak a számát, amelyeknél a két adat az átlaghoz képest ugyanabban az irányban tér el,* v *pedig azoknak a számát, ahol az eltérés ellentétes irányú. Számítsuk ki az* $\frac{u-v}{u+v}$ *hányadost. Mire következtethetünk ebből?* *(8 + 8 pont)*

Megoldás. *a)* Azt a négy egyént kell megtalálnunk, akiknek a testtömeg-indexe a 40 fős alakulatban a legnagyobb. Ezek:

x_i	y_i	Index
170	88	30,45
162	77	29,34
167	80	28,69
172	84	28,39

A következő $(168; 79)$ már csak 27,99.

Természetesen ehhez nem szükséges mind a negyven adatot kiszámítani, de azért körültekintően kell eljárni.

Az orvos tehát 28-nál nagyobb testtömeg-index esetén minősít valakit túlsúlyosnak.

b) Az átlagok:

$$\overline{x} = \frac{6744}{40} = 168,6 \text{ cm},$$

$$\overline{y} = \frac{2794}{40} = 69,85 \text{ kg}.$$

Az adatpárokat négy kategóriába sorolva:

x_i [cm]; y_i [kg]	Gyakoriság		
$x_i < 169$; $y_i < 70$		10	$u = 23$
$x_i \geqslant 169$; $y_i \geqslant 70$		13	
$x_i < 169$; $y_i \geqslant 70$		8	$v = 17$
$x_i \geqslant 169$; $y_i < 70$		9	

A keresett hányados: $\frac{u-v}{u+v} = \frac{6}{40} = 0{,}15$. Ez azt jelzi, hogy a testmagasság és a testtömeg között milyen szoros a kapcsolat. Értéke nyilván $+1$ és -1 között mozoghat. Ha x_i és y_i minden esetben ugyanabba az irányba térne el az átlagtól, akkor $+1$, ha pedig minden esetben ellentétes irányú lenne az eltérés, akkor -1 volna az értéke. Ezek nagyon erős összefüggést jelentenének. Ha viszont a hányados 0, akkor a két jellemző egymástól függetlennek tekinthető.

Esetünkben a 0,15-os érték azt mutatja, hogy a testmagasság és testtömeg között meglepően gyenge a kapcsolat, bár igaz, hogy az átlagosnál magasabb egyének körében az átlagosnál nagyobb tömegűek felé billen a mérleg.

Loránt László
Budapest

Helyesbítés

A 2015/2. sz. emelt szintű gyakorló feladatsor **4.** feladatában a bizonyítandó állítás helyesen így hangzik:

Bizonyítsuk be, hogy a beírt kör szárakon lévő két érintési pontja és a szárak közös végpontja három egyenlő részre osztja a háromszög kerületét.

A **megoldás** utolsó mondata pedig helyesen:

Mivel $AT = AU = x$, az A, T és U pontok valóban harmadolják a háromszög kerületét.

A hibáért elnézést kérünk.

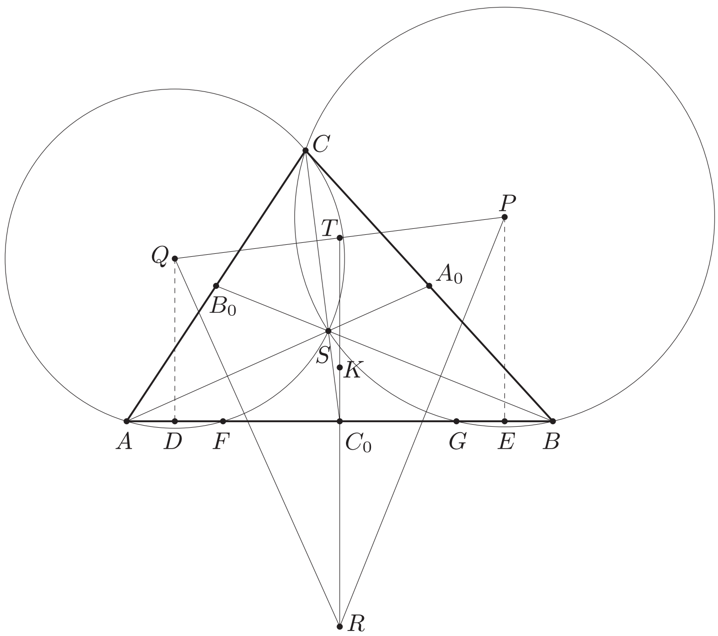
(*A szerk.*)

Matematika feladatok megoldása

B. 4539. *Az ABC háromszög súlypontja S, köréírt körének középpontja K. A BCS, CAS és ABS háromszögek köré írt körök középpontjai P, Q és R. Bizonyítsuk be, hogy a PQR háromszög súlypontja K.*

(*5 pont*) Javasolta: *Sárosdi Zsombor* (Veresegyház)

Megoldás. A PQR háromszög oldalai az SA, SB, SC szakaszok felezőmerőlegesei. Elegendő megmutatni, hogy az ABC háromszög oldalfelező merőlegesei a PQR háromszög súlyvonalai, hiszen ekkor a három egyenes közös K pontja a PQR háromszög súlypontja lesz. Ezt szimmetria okok miatt elég egy felezőmerőlegesre bizonyítani.



Jelölje az oldalak felezőpontjait az *ábra* szerint A_0, B_0 és C_0, valamint PQ-nak és AB felezőmerőlegesének metszéspontját T. Ha megmutatjuk, hogy T felezi a PQ szakaszt, akkor bebizonyítottuk az állítást. Vetítsük a PQ szakaszt merőlegesen AB-re, P és Q képe legyen rendre E, illetve D. T képe nyilván C_0, amivel AB felezőpontját jelöltük. Amennyiben T felezőpont, C_0 felezi ED-t is, amiből $AD = EB$. Megfordítva: ha ez igaz, a feladat állítása is igaz.

A CS egyenes az ACS és BCS háromszögek köré írt körök közös húrja, vagyis hatványvonala. Emiatt C_0-nak a két körre vonatkozó hatványa ugyanakkora, vagyis a körök AB-vel vett második metszéspontját G-vel és F-el jelölve:

$$C_0F \cdot C_0A = C_0G \cdot C_0B.$$

Mivel $C_0A = C_0B \neq 0$, leoszthatunk vele. Azt kapjuk, hogy $C_0F = C_0G$. Mivel C_0 felezőpont, ebből következik, hogy $AF = BG$. AF és BG rendre az ACS, illetve BCS körök húrjai, így a D és E pontok felezik őket (mivel középpontból húrra bocsátott merőlegesek talppontjai). Tehát az $AF = BG$ egyenlőséget kettővel osztva kapjuk, hogy $AD = EB$. Ezzel pedig bebizonyítottuk az állítást.

Sárosdi Zsombor (Budapest, Németh László Gimn., 11. évf.)

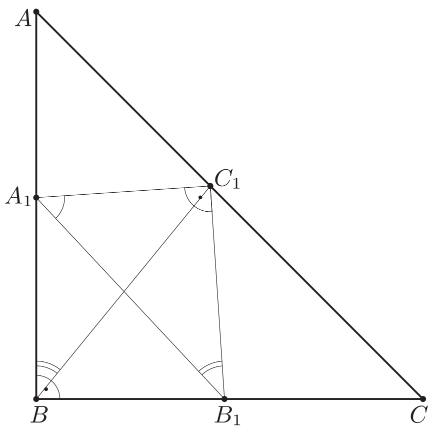
27 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 22 versenyző: Badacsonyi István András, Balogh Tamás, Bereczki Zoltán, Bingler Arnold, Bogár Blanka, Di Giovanni Márk, Dinev Georgi, Emri Tamás, Fonyó Viktória, Forrás Bence, Janzer Barnabás, Janzer Olivér, Maga Balázs, Makk László, Petrényi Márk, Sándor Krisztián, Sárosdi Zsombor, Simkó Irén, Somogyvári Kristóf, Szabó Tímea, Tossenberger Tamás, Venczel Tünde. 4 pontos 1, 3 pontos 1, 1 pontos 1, 0 pontos 2 dolgozat.

B. 4548. *Adott az ABC egységnyi befogójú, egyenlő szárú derékszögű háromszög, valamint az AB oldalon az A_1, a BC oldalon a B_1 és a CA átfogón a C_1 pont. Minimálisan mekkora lehet az A_1B_1 távolság, ha az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszögek hasonlók?*

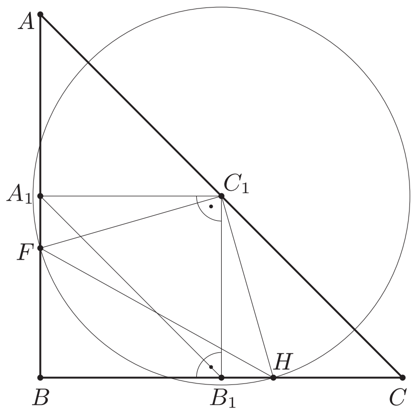
(*4 pont*) *Kvant*

Megoldás. Az $A_1B_1C_1$ háromszög derékszögű csúcsa vagy valamelyik befogón vagy az átfogón van.

I. eset: a derékszögű csúcs az átfogón található. Ekkor az $A_1BB_1C_1$ négyszög húrnégyszög, mivel szemközti szögeinek összege 180° (*1. ábra*).



1. ábra



2. ábra

Az azonos húrhoz tartozó kerületi szögek egyenlők, így $A_1BC_1\sphericalangle = A_1B_1C_1\sphericalangle = 45°$, tehát az $ABC\sphericalangle$-et a BC_1 szakasz felezi. Mivel az ABC háromszög egyenlő szárú, ezért ez a szögfelező egyben oldalfelező is, és így a C_1 pont az AC szakasz felezőpontjában található (*2. ábra*).

Legyen a B_1 pont a BC, az A_1 pont pedig az AB oldal felezőpontja. Ekkor az $A_1B_1C_1$ és az ABC háromszög közötti hasonlósági arány 1:2. Mivel $BC = 1$, ezért $AC = \sqrt{2}$ és így $A_1B_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tekintsünk egy másik, C_1 csúcsú, egyenlő szárú derékszögű háromszöget. Mivel $C_1B_1 \perp BC$, ezért ilyet csak úgy kapunk, ha egy C_1 középpontú, $r > C_1B_1$ sugarú körrel metsszük el az ABC háromszög befogóit. A kapott háromszög befogója így nagyobb lesz, mint C_1B_1, és így nyilván az átfogója is nagyobb lesz, mint az $A_1B_1C_1$ háromszögé: $FH > A_1B_1$.

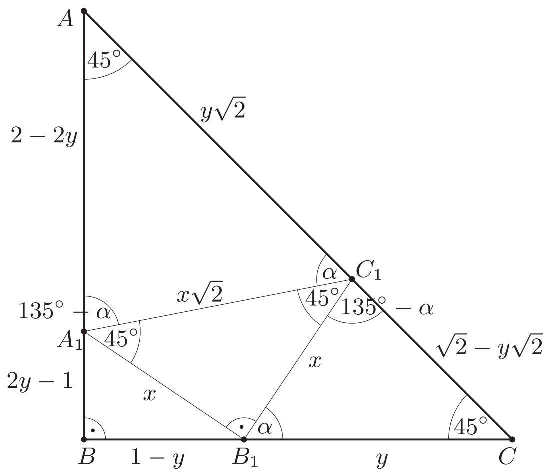
Tehát ebben az esetben A_1B_1 minimuma $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

II. eset: a derékszögű csúcs az egyik befogón található.

Legyen $A_1B_1 = x$ és $B_1C = y$. Ekkor $A_1C_1 = x\sqrt{2}$.

Jelölje a CB_1C_1 szöget α. Ekkor $CC_1B_1\sphericalangle = 180° - 45° - \alpha = 135° - \alpha$. Ebből $AC_1A_1\sphericalangle = 180° - CC_1B_1\sphericalangle - B_1C_1A_1\sphericalangle = \alpha$ és így $AA_1C_1\sphericalangle = 135° - \alpha$. Tehát a $B_1CC_1\triangle$ és a $C_1AA_1\triangle$ a szögei egyenlőek, ezért a két háromszög hasonló. Így

$$\frac{AC_1}{y} = \frac{x\sqrt{2}}{x}, \quad \text{amiből} \quad AC_1 = y\sqrt{2} \quad (\textit{3. ábra}).$$



3. ábra

Mivel $BC = 1$, ezért egyrészt $BB_1 = 1 - y$, másrészt $AC = \sqrt{2}$, és ebből $CC_1 = \sqrt{2} - y\sqrt{2}$. Tudjuk, hogy $AA_1 = \sqrt{2}CC_1$, amiből $AA_1 = \sqrt{2}\left(\sqrt{2} - y\sqrt{2}\right) = 2 - 2y$, és így $A_1B = 1 - (2 - 2y) = 2y - 1$.

Az A_1BB_1 háromszögben felírhatjuk a Pitagorasz-tételt:

$$(2y-1)^2 + (1-y)^2 = x^2, \quad \text{vagyis} \quad 5y^2 - 6y + 2 = x^2.$$

Látható, hogy x-nek pontosan akkor van minimuma, amikor az $5y^2-6y+2$ kifejezésnek (ha a kifejezés értéke ott pozitív). Ennek a másodfokú függvénynek a minimumhelye $y=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\cdot 5}=\frac{3}{5}$-ben van, ekkor

$$A_1B_1=x=\sqrt{5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2-6\cdot\frac{3}{5}+2}=\frac{\sqrt{5}}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tehát az A_1B_1 távolság minimálisan $\frac{\sqrt{5}}{5}$ lehet.

Emri Tamás (Budapest, Városmajori Gimn., 11. évf.)
megoldása alapján

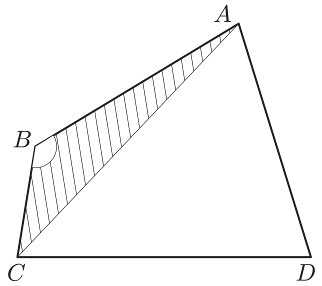
44 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 24 versenyző: Balogh Menyhért, Baran Zsuzsanna, Bingler Arnold, Csépai András, Emri Tamás, Fekete Panna, Gyulai-Nagy Szuzina, Janzer Barnabás, Janzer Olivér, Katona Dániel, Khayouti Sára, Kovács Márton, Makk László, Mezősi Máté, Mócsy Miklós, Nagy Gergely, Nagy-György Pál, Pap Tibor, Sagmeister Ádám, Sal Kristóf, Simkó Irén, Somogyvári Kristóf, Talyigás Gergely, Vető Bálint. 3 pontos 7, 2 pontos 7, 1 pontos 5, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4642. *Adott a síkban öt pont úgy, hogy közülük semelyik három nincs egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy az általuk meghatározott háromszögek közül legfeljebb hét hegyesszögű.*

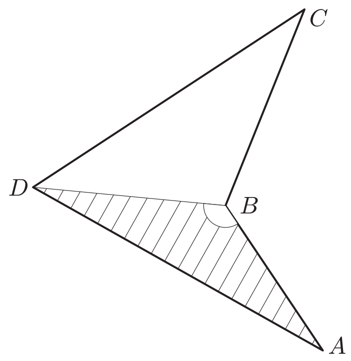
(*4 pont*)

Megoldás. Válasszunk ki a pontok közül négyet. Ezt $\binom{5}{4}=5$-féleképpen tehetjük meg. A kiválasztott pontok (amiket jelöljön A, B, C és D) vagy egy konvex-, vagy egy konkáv négyszög csúcsait adják meg.

Bármely négyszögben a belső szögek összege 360°. Ha a négyszög konvex, akkor legnagyobb szöge legalább $\frac{360^\circ}{4}=90^\circ$. Ha ez pl. a B csúcsnál van (*1. ábra*), akkor az öt pont által meghatározott háromszögek közül az ABC biztosan nem hegyesszögű. Ha a négyszög konkáv, akkor feltehetjük, hogy a B-nél lévő belső szöge nagyobb mint 180° (*2. ábra*). Ezt a szöget a BD átló két részre osztja, ha ezek közül pl. az $ABD\sphericalangle$ a nagyobb, akkor az ABD háromszög tompaszögű.



1. ábra



2. ábra

Tehát bármely négy pontot is választjuk, az általuk meghatározott $\binom{4}{3}=4$ háromszög közül legalább az egyik nem hegyesszögű. Az öt kiválasztás közül bármelyik ponthármas pontosan kettőben szerepel együtt (az A, B, C hármashoz vagy D-t, vagy az ötödik, E pontot választhatjuk negyediknek), tehát egy adott nem hegyesszögű háromszöget legfeljebb két választásnál számolunk. Vagyis az öt pont által meghatározott nem hegyesszögű háromszögek száma legalább $5/2=2{,}5$. De mivel ez a szám nyilván egész, ebből az is következik, hogy legalább 3.

Tehát az öt pont által meghatározott 10 háromszög között legfeljebb $10-3=7$ hegyesszögű van.

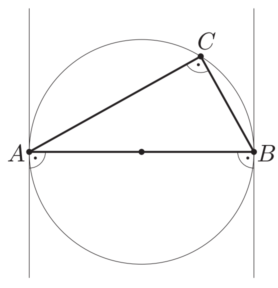
Varga-Umbrich Eszter (Pápa, Pápai Ref. Koll. Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

172 dolgozat érkezett. 4 pontos 95, 3 pontos 24, 2 pontos 21, 1 pontos 16, 0 pontos 16 dolgozat.

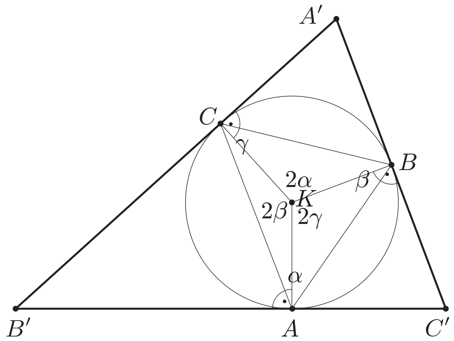
B. 4652. *Egy háromszög szögei α, β és γ. Mekkorák annak a háromszögnek a szögei, amelyet a körülírt körhöz a csúcsokban húzott érintők alkotnak?*

(*3 pont*)

Megoldás. Jelöljük a háromszög csúcsait a szokásos módon A, B, C-vel. Ha a háromszög derékszögű, pl. $\gamma=90^\circ$, akkor AB a körülírt kör átmérője, ezért a körülírt körhöz az A-ban és B-ben húzott érintők párhuzamosak (*1. ábra*), tehát ebben az esetben az érintők nem alkotnak háromszöget. A továbbiakban feltesszük, hogy az ABC háromszög nem derékszögű. Legyenek a körülírt körhöz a csúcsokban húzott érintők által alkotott háromszög csúcsai A', B' és C', a körülírt kör középpontja pedig K. A kerületi és középponti szögek közti összefüggés alapján a körülírt kör A-t nem tartalmazó BC ívéhez tartozó középponti szög 2α, a B-t nem tartalmazó CA ívéhez tartozó középponti szög 2β, a C-t nem tartalmazó AB ívéhez tartozó középponti szög pedig 2γ. A kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, ezért $KA\perp B'C'$, $KB\perp C'A'$ és $KC\perp A'B'$. A továbbiakban megkülönböztetjük a hegyesszögű és a tompaszögű háromszög esetét.



1. ábra

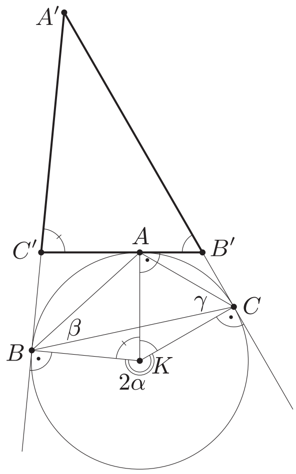


2. ábra

Ha ABC hegyesszögű (*2. ábra*), akkor a körülírt köre az $A'B'C'$ háromszögnek beírt köre. A $KAC'B$, $KBA'C$ és $KCB'A$ négyszögek húrnégyszögek, mert két-

két szemközti szögük derékszög. A keresett szögek éppen ezen húrnégyszögek K-val szemközti szögei. Bármely húrnégyszögben a szemközti szögek összege 180°, ezért ebben az esetben az $A'B'C'$ háromszög szögei $180^\circ-2\alpha$, $180^\circ-2\beta$ és $180^\circ-2\gamma$.

Ha ABC tompaszögű, akkor feltehetjük, hogy $\alpha>90^\circ$ (*3. ábra*). Ekkor az ABC háromszög körülírt köre az $A'B'C'$ háromszögnek a $B'C'$ oldalához hozzáírt köre. Ebben az esetben a $KAC'B$, $KAB'C$ és $KCA'B$ négyszögek húrnégyszögek, mert két-két szemközti szögük derékszög. A keresett szögek most a $KCA'B$ húrnégyszög K-val szemközti szöge, valamint a $KAB'C$ és $KAC'B$ húrnégyszögek K-val szemközti csúcsnál lévő külső szögei. Bármely húrnégyszögben a szemközti csúcsnál lévő külső szög megegyezik az eredeti csúcsnál lévő belső szöggel, ezért ebben az esetben az $A'B'C'$ háromszög szögei $180^\circ-(360^\circ-2\alpha)=2\alpha-180^\circ$, 2γ és 2β.



3. ábra

Kosztolányi Kata (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn., 10. évf.)
dolgozatát felhasználva

Megjegyzés. Nagyon sok megoldó (több, mint 60%) elfelejtkezett a nem hegyesszögű háromszögek vizsgálatáról. Pedig illett volna gyanút fogniuk akkor, amikor leírták, hogy a keresett szög pl. $180^\circ-2\alpha$, ami ugye $90^\circ<\alpha$, azaz tompaszögű háromszög esetén negatív.

269 dolgozat érkezett. 3 pontos 86, 2 pontos 152, 1 pontos 21, 0 pontos 9 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 4656. *Mutassuk meg, hogy bármely négyoldalú konvex testszögletnek létezik paralelogramma alakú síkmetszete.*

(*4 pont*)

I. megoldás. Középiskolában rendszeresen előforduló feladat a következő: konvex szögtartomány tetszőleges P belső pontján keresztül húzható olyan egyenes, amelynek szögszárak közé eső szakaszát az adott P pont felezi. A megoldáshoz középpontosan tükrözni kell az egyik szögszárat az adott P pontra. A konvexitás miatt a tükrözött félegyenes metszi a másik szögszárat. Ez a pont lesz az egyik szakaszvégpont. Ezt a pontot a P-vel összekötve kapjuk a megfelelő egyenest.

Az előbbi eredmény felhasználásával tekintsük a négyoldalú konvex térszöglet két-két szemben lévő félegyenese által meghatározott szögtartományokat, továbbá ezek metszetét, ami egy félegyenes. Ezt követően vegyünk ennek a metszésvonalnak a tartományba eső félegyenesén egy tetszőleges K pontot, amely a paralelogramma középpontja lesz. Most használjuk fel az előbb idézett feladat eredményét, hogy konvex szögtartományban bármely ponthoz lehet úgy egy szakasz húzni, hogy a szakasz végpontjai a szárakon vannak, s a szakasz felezőpontja az adott pont.

Ezt végezzük el a K ponttal és a két szögtartománnyal. Így keletkezik négy olyan pont, ami két metsző egyenesen helyezkedik el, tehát egy síkban van, és a négyszög átlói felezik is egymást, tehát valóban egy paralelogrammát kapunk.

Nagy Kartal (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Tekintsünk egy tetszőleges konvex testszögletet. Legyen a csúcsa P. Induljanak P-ből az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ egységvektorok, melyek rendre a P-ből induló élekre illeszkednek, körüljárásuk egyik sorrendjében.

Legyen α tetszőleges pozitív valós szám. Ismert, hogy a tér bármely vektora (egyértelműen) előállítható három nem komplanáris vektor lineáris kombinációjaként. A $\vec{b}$, $\vec{d}$ és $-\vec{c}$ vektorok nem komplanárisak, így léteznek olyan β, γ és δ valós számok, hogy $\alpha\vec{a}=\beta\vec{b}+\delta\vec{d}+\gamma(-\vec{c})$. Ekkor $\gamma\vec{c}-\delta\vec{d}=\beta\vec{b}-\alpha\vec{a}$. Az egyenlet két oldalán lévő vektorok párhuzamosak egymással, hiszen egyenlőek, valamint kezdő és végpontjaik a négy „élen” vannak (β, γ és δ pozitívak, hiszen a konvexitás miatt $\alpha\vec{a}$ végpontja a $\vec{b}$, $\vec{d}$ és $-\vec{c}$ vektorok által kifeszített térrészben van), így a rájuk illeszkedő sík paralelogrammát metsz ki a testszögletből.

Kátay Tamás (Debreceni Fazekas Mihály Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

64 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 48, 3 pontot 2 versenyző. 2 pontos 2, 1 pontos 5, 0 pontos 6 tanuló dolgozata. Nem értékeltünk 1 dolgozatot.

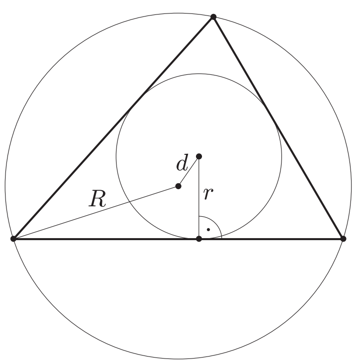
B. 4657. *Egy háromszög beírható körének a sugara r, a körülírt körének sugara pedig R. Tegyük föl, hogy $R<r(\sqrt{2}+1)$. Következik-e a feltételből, hogy a háromszög hegyesszögű?*

(*5 pont*) Javasolta: *Káspári Tamás* (Paks)

I. megoldás. Induljunk ki a feltételből és alakítsuk át, majd ismét használjuk fel az eredeti feltételt. Így kapjuk, hogy:

$$R<r\big(\sqrt{2}+1\big),\quad R^2<Rr\big(\sqrt{2}+1\big),$$

$$R^2-2Rr<Rr\big(\sqrt{2}-1\big)<r\big(\sqrt{2}+1\big)\cdot r\big(\sqrt{2}-1\big)=r^2.$$



Euler tétele szerint, ha d jelöli a háromszög beírható köre és körülírt köre középpontjának a távolságát, akkor

$$d^2=R^2-2Rr.$$

Feltételünkből tehát $d^2<r^2$, azaz $d<r$ következik.

A két kör középpontjának a távolsága kisebb, mint a beírt kör sugara, ezért a körülírt kör középpontja a beírt kör belsejében, s így a háromszög belsejében van. Viszont egy háromszög körülírt körének középpontja pontosan akkor van a háromszög belsejében, ha a háromszög hegyesszögű. Tehát a $R<r\big(\sqrt{2}+1\big)$ feltételből következik, hogy a háromszög hegyesszögű.

Telek Máté László (Salgótarján, Táncsics M. Közg. és Ker. Szki., 12. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy ha egy háromszögben teljesül az eredeti feltétel átalakításával kapott, azzal ekvivalens

$$\frac{r}{R}+1>\frac{1}{\sqrt{2}+1}+1=\sqrt{2}$$

egyenlőtlenség, akkor a háromszög hegyesszögű.

Jelölje a háromszög szögeit α, β és γ. Tudjuk, hogy

$$\frac{r}{R}+1=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$$

(ennek bizonyítását lásd a megoldás utáni megjegyzésben). Ezért elég azt megmutatnunk, hogy ha a háromszög nem hegyesszögű, akkor

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\sqrt{2}.$$

Feltehetjük, hogy γ a legnagyobb szög. Ekkor $\gamma\geqslant 90^\circ$, és ezért $\alpha+\beta\leqslant 90^\circ$, továbbá $\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)$. Tehát azt kell belátnunk, hogy

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\leqslant\sqrt{2}.$$

A koszinuszok összegére vonatkozó képletet alkalmazva, felhasználva, hogy $0<\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant 1$, végül pedig a kétszeres szög koszinuszának képletét használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos(\alpha+\beta)\\&\leqslant 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1.\end{aligned}$$

Bevezetve a $\delta=\frac{\alpha+\beta}{2}$ jelölést azt kell tehát megmutatnunk, hogy ha $0^\circ\leqslant\delta\leqslant$ $\leqslant 45^\circ$, azaz $1\geqslant\cos\delta\geqslant\sqrt{2}/2$, akkor

$$2\cos\delta-2\cos^2\delta+1\leqslant\sqrt{2}.$$

Ez rendezés és teljes négyzetté kiegészítés után ekvivalens a

$$0\leqslant\left(\cos\delta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2\sqrt{2}-3}{4}$$

egyenlőtlenséggel. A $\cos\delta$-ra vonatkozó feltétel miatt itt a jobb oldal akkor a legkisebb, ha $\cos\delta = \sqrt{2}/2$, s értéke ekkor 0. Vagyis az egyenlőtlenség mindig fennáll, ami bizonyítja állításunkat.

Megjegyzés. Ha a háromszög oldalait a szokásos módon a, b és c, kerületét $2s$, területét pedig T jelöli, akkor az ismert $r = \frac{T}{s}$ és $R = \frac{abc}{4T}$ összefüggéseket és Héron képletét felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{r}{R} + 1 = \frac{4T^2}{sabc} + 1 = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) + 2abc}{2abc}. \tag{1}$$

A szögek koszinuszait a koszinusztételből kifejezve majd közös nevezőre hozva pedig azt kapjuk, hogy

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \tag{2}$$

$$= \frac{-a^3-b^3-c^3+ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2}{2abc}.$$

Ezután egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az (1) és (2) egyenlőségek jobb oldalán álló kifejezések megegyeznek, ami bizonyítja a feladat megoldásában felhasznált azonosságot.

70 dolgozat érkezett. 5 pontos 42, 4 pontos 15, 3 pontos 3, 2 pontos 3, 1 pontos 1, 0 pontos 6 dolgozat.

B. 4665. *Az m paraméter függvényében adjuk meg az*

$$mX + 4 = \left|X^2 - 10X + 21\right|$$

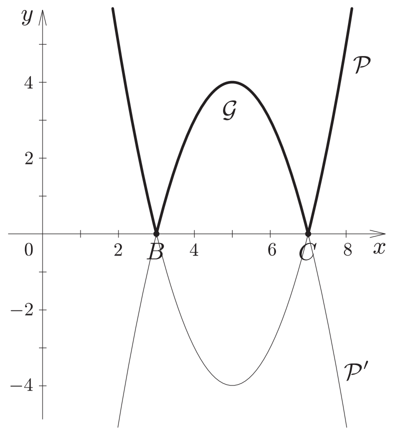
egyenlet megoldásainak számát.

(*3 pont*) Javasolta: *Grallert Krisztina* (Balassagyarmat)

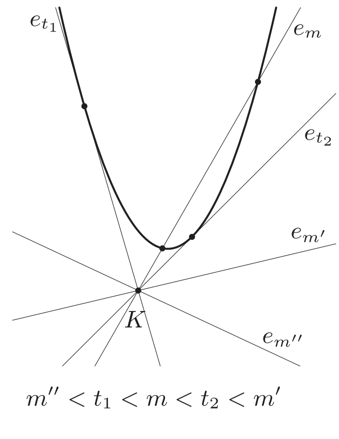
I. megoldás. A feladatot grafikusan oldjuk meg. Derékszögű koordinátarendszerben ábrázoljuk az $Y = mX + 4$ és az $Y = \left|X^2 - 10X + 21\right|$ függvényeket. A két görbe közös pontjainak a száma adja az eredeti egyenlet megoldásainak számát.

Az $Y = mX + 4$ egy egyenes egyenlete. Jelöljük ezt az egyenest e_m-mel. Ha $X = 0$, akkor $Y = 4$, ezért e_m mindig átmegy a koordinátarendszer $A = (0;4)$ pontján. Az egyenes meredeksége az m értékétől függ, s tekinthetjük úgy, hogy ha m-et változtatjuk, akkor e_m az A körül forog.

Az $Y = X^2 - 10X + 21$ függvény képe egy olyan felfelé nyíló $\mathcal{P}$ parabola, mely a $B = (3;0)$ és a $C = (7;0)$ pontokban metszi az x tengelyt (mert az $x^2 - 10x + 21 = 0$ egyenlet gyökei 3 és 7). Ezért az $Y = \left|X^2 - 10X + 21\right|$ függvény $\mathcal{G}$ képét úgy kapjuk, hogy $x \leqslant 3$, valamint $7 \leqslant x$ esetén tekintjük $\mathcal{P}$ megfelelő íveit, ha pedig $3 < x < 7$, akkor $\mathcal{P}$-nek az x-tengelyre vonatkozó $\mathcal{P}'$ tükörképét, ami éppen az $Y = -\left(X^2 - 10X + 21\right)$ egyenletű parabola megfelelő íve (*1. ábra*). Azt kell tehát meghatároznunk, hogy az e_m egyenesnek hány közös pontja van a két parabola darabjaiból összerakott görbével.



1. ábra



2. ábra

Tudjuk, hogy egy külső K pontból egy parabolához két érintő húzható (lásd pl. *Kiss Gy.:* Amit jó tudni a kúpszeletekről I. és II., *KöMaL* **54** (2004), 450–459. és 514–518. o.; `http://www.komal.hu/cikkek/2004-11/kupszeletek1.h.shtml`). Ha a koordinátarendszerben egy parabola tengelye függőleges, akkor a K-n átmenő egyenesek közül a függőlegesnek egy közös pontja van a parabolával, ha pedig a K-ból a parabolához húzott érintők meredeksége $t_1 < t_2$, akkor a K-n átmenő m meredekségű egyeneseknek $t_1 < m < t_2$ esetén nincs, $m < t_1$ és $t_2 < m$ esetén pedig pontosan két közös pontjuk van a parabolával (*2. ábra*).

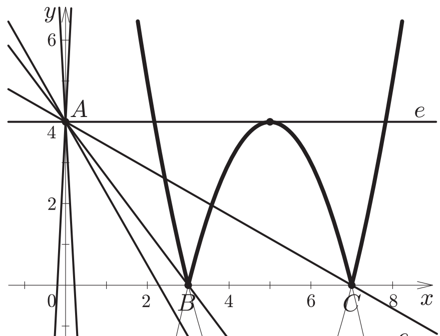
Határozzuk meg az A-ból $\mathcal{P}$-hez húzható érintők meredekségét. Az e_m egyenes akkor érintő, ha az

$$mx + 4 = x^2 - 10x + 21, \quad \text{azaz} \quad x^2 - (10 + m)x + 17 = 0$$

egyenletnek egy megoldása van. Ez pontosan akkor teljesül, ha az egyenlet diszkriminánsa 0, vagyis ha

$$(10 + m)^2 - 4 \cdot 17 = 0, \quad \text{azaz}$$
$$m^2 + 20m + 32 = 0,$$

amiből kapjuk, hogy $m_{1,2} = -10 \pm \sqrt{68}$. Ugyanígy kapjuk, hogy az A-ból $\mathcal{P}'$-höz húzható érintők meredeksége $m_3 = 0$ és $m_4 = 20$. A metszéspontok számának meghatározásához még szükségünk van az AB és AC egyenesek meredekségére, ami a pontok koordinátáiból könnyen adódik, AB esetén $m_5 = (0 - 4)/(3 - 0) = -4/3$, AC esetén pedig $m_6 = (0 - 4)/(7 - 0) = -4/7$ (*3. ábra*).



3. ábra

Ezek után az $mX+4=\left|X^2-10X+21\right|$ egyenlet megoldásainak számát leolvashatjuk a 3. ábráról.

- Ha $m<-10-\sqrt{68}$, akkor 2 megoldás van, mert e_m két-két pontban metszi $\mathcal{P}$-t is és $\mathcal{P}'$-t is, de a négy metszéspont közül csak kettő tartozik $\mathcal{G}$-hez, mert a $\mathcal{P}'$-vel vett metszéspontok az x tengely alatt vannak.
- Ha $m=-10-\sqrt{68}$, akkor 1 megoldás van, mert e_m érinti $\mathcal{P}$-t és két pontban metszi $\mathcal{P}'$-t, de e két utóbbi pont nem tartozik $\mathcal{G}$-hez, mert az x tengely alatt vannak.
- Ha $-10-\sqrt{68}<m<-4/3$, akkor a megoldások száma 0, mert e_m és $\mathcal{P}$ valamennyi (nulla, egy, vagy kettő) metszéspontja, továbbá e_m és $\mathcal{P}'$ két metszéspontja is az x tengely alatt van, ezért nem tartozik $\mathcal{G}$-hez.
- Ha $m=-4/3$, akkor 1 megoldás van, mert e_m két-két pontban metszi $\mathcal{P}$-t is és $\mathcal{P}'$-t is, de a négy metszéspont közül kettő egybeesik B-vel, a másik kettő pedig nem tartozik $\mathcal{G}$-hez, mert az x tengely alatt van.
- Ha $-4/3<m<-4/7$, akkor 2 megoldás van, mert e_m két-két pontban metszi $\mathcal{P}$-t is és $\mathcal{P}'$-t is, de a metszéspontok közül csak egy-egy tartozik $\mathcal{G}$-hez, mert a másik két pont az x tengely alatt van.
- Ha $m=-4/7$, akkor 3 megoldás van, mert e_m két-két $\mathcal{G}$-hez tartozó pontban metszi $\mathcal{P}$-t is és $\mathcal{P}'$-t is, de a négy metszéspont közül kettő egybeesik C-vel.
- Ha $-4/7<m<0$, akkor 4 megoldás van, mert e_m két-két pontban metszi $\mathcal{P}$-t is és $\mathcal{P}'$-t is, és a metszéspontok mindegyike $\mathcal{G}$-hez tartozik.
- Ha $m=0$, akkor 3 megoldás van, mert e_m két pontban metszi $\mathcal{P}$-t és érinti $\mathcal{P}'$-t, és a közös pontok mindegyike $\mathcal{G}$-hez tartozik.
- Ha $0<m$, akkor 2 megoldás van, mert e_m két $\mathcal{G}$-hez tartozó pontban metszi $\mathcal{P}$-t, a $\mathcal{P}'$-vel közös pontjai (nulla, egy vagy kettő, attól függően, hogy $m<20$, $m=20$ vagy $m>20$) pedig az x tengely alatt vannak, ezért nem tartoznak $\mathcal{G}$-hez.

Kovács Péter Tamás (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., 11. évf.)
dolgozatát felhasználva

II. megoldás. Az abszolútérték definiciója szerint $X^2-10X+21\geqslant 0$ esetén az $mX+4=X^2-10X+21$, míg $X^2-10X+21<0$ esetén az $mX+4=-\left(X^2-10X+21\right)$ egyenletet kell megoldanunk.

1. eset. Ha $X^2-10X+21\geqslant 0$, akkor $X\geqslant 7$ vagy $X\leqslant 3$. Vizsgáljuk meg, hogy az $X^2-(m+10)X+17=0$ egyenlet megoldásai milyen m értékek esetén esnek a megadott tartományokba. A megoldóképlet alapján a gyökök

$$X_1=\frac{m+10+\sqrt{m^2+20m+32}}{2} \quad \text{és} \quad X_2=\frac{m+10-\sqrt{m^2+20m+32}}{2}.$$

Tehát csak akkor vannak valós gyökök, ha $m^2+20m+32\geqslant 0$, azaz ha $m\leqslant -10-\sqrt{68}$ vagy $-10+\sqrt{68}\leqslant m$ teljesül.

Ha $X_1 \geqslant 7$, akkor ezt átrendezve kapjuk, hogy $\sqrt{m^2+20m+32} \geqslant 4-m$. Ha $4-m \geqslant 0$, akkor a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás. Rendezés után $m \geqslant -\frac{4}{7}$ következik. Összevonva a feltétellel: $4 \geqslant m \geqslant -\frac{4}{7}$. Ha $m>4$, akkor a diszkrimináns nemnegatív, $4-m<0$, tehát az egyenlőtlenség teljesül. Vagyis összegezve: $m \geqslant -\frac{4}{7}$. Ha $X_1 \leqslant 3$, akkor ezt átrendezve kapjuk, hogy $\sqrt{m^2+20m+32} \leqslant -4-m$, ami csak akkor teljesülhet, ha $-4 \geqslant m$. Továbbá a $m^2+20m+32 \geqslant 0$ egyenlőtlenségnek is fenn kell állnia, ezért $m \leqslant -10-\sqrt{68}$. Ekkor négyzetreemelés és rendezés után kapjuk, hogy $m \leqslant -4/3$, tehát az $X_1 \leqslant 3$ egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $m \leqslant -10-\sqrt{68}$.

Ha $X_2 \geqslant 7$, akkor ezt átrendezve kapjuk, hogy $m-4 \geqslant \sqrt{m^2+20m+32}$, amiből négyzetreemelés és újabb rendezés után $m \leqslant -4/7$ következik. Ha ez teljesül, akkor $m-4<0$, ezért a négyzetreemelés nem volt ekvivalens átalakítás, az eredeti egyenlőtlenség nem áll fenn. Tehát $X_2 \geqslant 7$ soha nem teljesül. Ha $X_2 \leqslant 3$, akkor ezt átrendezve kapjuk, hogy $m+4 \leqslant \sqrt{m^2+20m+32}$. Ez $m \leqslant -10-\sqrt{68}$ esetén nyilván teljesül, ha pedig $-10+\sqrt{68} \leqslant m$, akkor négyzetreemelés és rendezés után kapjuk, hogy $m \geqslant -4/3$. Ekkor a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás, az eredeti egyenlőtlenség is fennáll.

2. eset. Ha $X^2-10X+21<0$, akkor a $3<X<7$ egyenlőtlenségeknek kell teljesülni. Ebben az esetben az $X^2+(m-10)X+25=0$ egyenletet kell megoldanunk, aminek gyökei

$$X_3=\frac{-m+10+\sqrt{m^2-20m}}{2} \quad \text{és} \quad X_4=\frac{-m+10-\sqrt{m^2-20m}}{2}.$$

Csak akkor vannak valós gyökök, ha $m^2-20m \geqslant 0$, azaz ha $m \leqslant 0$ vagy $20 \leqslant m$ teljesül.

Ha $3<X_3<7$, akkor ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$m-4<\sqrt{m^2-20m}<m+4.$$

Ha $m \leqslant 0$, akkor a bal oldali egyenlőtlenség nyilván teljesül, a jobb oldaliból pedig négyzetreemelés és újabb rendezés után $m>-4/7$ következik. Ha ez teljesül, akkor $m+4>0$, ezért a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás, az eredeti egyenlőtlenség is fennáll. Ha $m \geqslant 20$, akkor négyzetreemelés és rendezés után a bal oldali egyenlőtlenségből $m<-4/3$ adódik, tehát ez az egyenlőtlenség nem állhat fenn.

Ha $3<X_4<7$, akkor ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$\sqrt{m^2-20m}<-m+4 \quad \text{és} \quad -m-4<\sqrt{m^2-20m}.$$

Ha $m \leqslant 0$, akkor az első egyenlőtlenségből négyzetreemelés és újabb rendezés után $m>-4/3$ következik. Ha ez teljesül, akkor $m+4>0$, ezért a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás, az eredeti egyenlőtlenség is fennáll, a második egyenlőtlenség pedig nyilván teljesül, ha $-4/3<m \leqslant 0$. Ha $m \geqslant 20$, akkor az első egyenlőtlenség jobb oldalán negatív szám áll, tehát ekkor nem teljesülhet az egyenlőtlenség.

A kapott eredményeinket a következő táblázatban foglalhatjuk össze:

m értéke	megoldások száma
$m < -10-\sqrt{68}$	2
$m = -10-\sqrt{68}$	1
$-10-\sqrt{68} < m < -\frac{4}{3}$	0
$m = -\frac{4}{3}$	1
$-\frac{4}{3} < m < -\frac{4}{7}$	2
$m = -\frac{4}{7}$	3
$-\frac{4}{7} < m < 0$	4
$m = 0$	3
$0 < m$	2

Baglyas Márton (Bonyhád, Petőfi S. Ev. Gimn. és Koll., 11. évf.)
dolgozatát felhasználva

144 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 22 versenyző: Andó Angelika, Baglyas Márton, Balogh Menyhért, Borbényi Márton, Erdei Ákos, Fehér Balázs, Gál Boglárka, Hegyi Zoltán, Horváth Péter, Kasó Ferenc, Kerekes Anna, Kovács Viktória, Kovács Péter Tamás, Lakatos Ádám, Nagy-György Zoltán, Pálfi Mária, Polgár Márton, Széles Katalin, Urbán Miklós Vlagyimír, Vághy Mihály, Varga-Umbrich Eszter, Wiandt Péter. 2 pontos 22, 1 pontos 81, 0 pontos 13 dolgozat. Nem versenyszerű 6 dolgozat.

B. 4669. *Közismert, hogy a* 777 *fejű sárkányoknak minden nyakán* 9 *vagy* 13 *fej ül. Két sárkány egyforma, ha ugyanannyi* 9 *fejű nyakuk van. Hány különböző* 777 *fejű sárkány van?*

(*3 pont*) Javasolta: *Károlyi Gyula* (Budajenő)

I. megoldás. Jelölje x a 777 fejű sárkány 9 fejű nyakainak számát, és y a 13 fejű nyakainak számát. Ekkor $9x+13y=777$, ahol $x,y\in N$.

Nyilván $13y\leqslant 777$, amiből $y\leqslant\left[\frac{777}{13}\right]=59$. Tehát $0\leqslant y\leqslant 59$.

$13y=777-9x=3(259-3x)$. Mivel $3\mid 3(259-3x)$, ezért $3\mid 13y$, vagyis $(13,3)=1$ miatt $3\mid y$.

259 nem osztható 3-mal, ezért 9 nem osztója $3(259-3x)$-nek, és így $13y$-nak sem, ezért y-nak sem. Vagyis y csak $9k+3$ vagy $9k+6$ alakú lehet.

1. eset: $y=9k+3\leqslant 59$, azaz $0\leqslant k\leqslant 6$.

$$9x+13(9k+3)=777,\quad 9x+13\cdot 9k=738,\quad x+13k=82,\quad x=82-13k.$$

Ez minden $0\leqslant k\leqslant 6$ esetén pozitív szám.

Így a 9 fejű és 13 fejű nyakakra vonatkozó lehetséges $(x;y)$ számpárok:

$$(82;3),\quad (69;12),\quad (56;21),\quad (43;30),\quad (30;39),\quad (17;48)\ \text{ és }\ (4;57).$$

2. eset: $y=9l+6\leqslant 59$, azaz $0\leqslant l\leqslant 5$.

$$9x+13(9l+6)=777,\quad 9x+13\cdot 9l=699.$$

A bal oldal osztható 9-cel, a jobb oldal viszont nem, ez ellentmondás, így ez az eset nem ad megoldást.

Tehát összesen hét különböző 777 fejű sárkány létezik.

Kátay Tamás (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Legyen a 9-fejű nyakak száma a, a 13-fejű nyakak száma b.

Ekkor teljesül a következő összefüggés: $9a+13b=777$, amiből

$$a=\frac{777-13b}{9}=86-b+\frac{3-4b}{9}.$$

Az a és b értéke akkor megfelelő, ha mindkét oldal egész szám és pozitív; ebből egyelőre csak az előbbi követelménnyel foglalkozunk. Ez pontosan akkor teljesül, ha b is és $\frac{3-4b}{9}=x$ is egész, azaz $4b+9x=3$, vagyis $b=\frac{3-9x}{4}=-2x+\frac{3-x}{4}$. Ez akkor és csak akkor egész, ha tetszőleges y egésszel $3-x=4y$, vagyis $x=3-4y$. Ez azt jelenti, hogy

$$b=-2(3-4y)+y=-6+9y \quad \text{és} \quad a=86-(-6+9y)+(3-4y)=95-13y.$$

Szükséges még, hogy a és b egyike se legyen negatív: $a=95-13y\geqslant 0$, azaz $y\leqslant 7$, valamint $b=-6+9y\geqslant 0$, vagyis $y\geqslant 1$. Így $y=1,2,3,4,5,6,7$ lehet, tehát 7 különböző értékpár adódott $(a;b)$-re, ennyi különböző 777 fejű sárkány van.

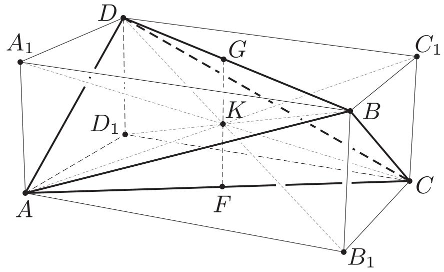
214 dolgozat érkezett. 3 pontos 115, 2 pontos 51, 1 pontos 46, 0 pontos 2 dolgozat.

B. 4677. *Igazoljuk, hogy ha az $ABCD$ tetraéder egyenlő oldalú (azaz szemközti élei egyenlő hosszúak), akkor a D-ből induló magasságvonal talppontja rajta van az ABC háromszög Euler-egyenesén.*

(*6 pont*) Javasolta: *Szabó Csaba* (Budapest)

I. megoldás. A megoldás kulcsa az a tény, hogy egy egyenlő oldalú tetraéder körülírt gömbjének K középpontja egybeesik a tetraéder S súlypontjával.

Tekintsük az egyenlő oldalú tetraéderünk $AB_1CD_1A_1BC_1D$ bennfoglaló paralelepipedonját (*1. ábra*). Mivel a szemközti paralelogrammalapok nem megfelelő



1. ábra

átlói egyenlők, ezért minden lapja téglalap, vagyis igazából téglatestet adtunk meg. Ekkor K éppen a téglatest köré írt gömb középpontja, hisz ez a gömb A, B, C, D-t tartalmazza. Továbbá S az AC oldal F felezőpontját (AB_1CD_1 középpontját) és a BD oldal G felezőpontját (A_1BC_1D középpontját) összekötő szakasz felezőpontja. Mindkettő definíció a téglatest középpontját adja meg, ezért $K = S$.

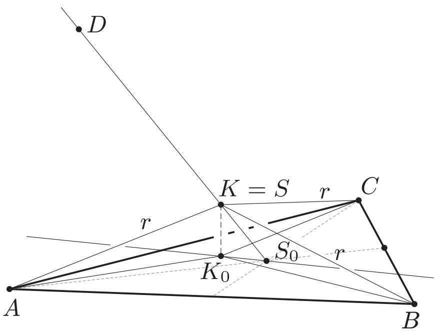
Legyen S_0 az ABC háromszög súlypontja. A tetraéder geometriájából ismert, hogy S a DS_0 súlyvonal S_0-hoz közelebbi negyedelőpontja. Legyen K merőleges vetülete az ABC síkra K_0, akkor az

$$AK_0K, \quad BK_0K, \quad CK_0K$$

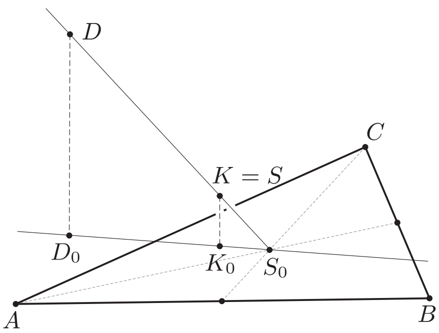
háromszögek egybevágóak, hiszen derékszögű háromszögek, melyeknek átfogója (r) és K_0K befogója megegyezik, emiatt

$$K_0A = K_0B = K_0C,$$

vagyis K_0 az ABC háromszög köré írt kör középpontja (*2. ábra*).



2. ábra



3. ábra

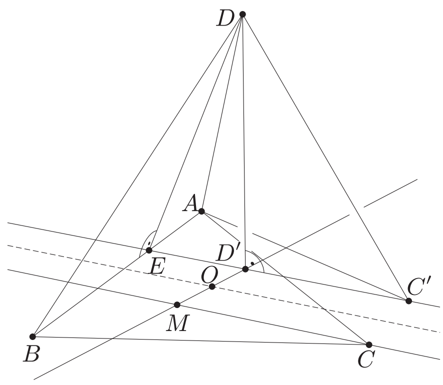
Tekintsük az S_0 középpontú 4-szeres nagyítást. Ezzel a transzformációval, mint tudjuk, S képe D lesz, s eközben K_0 (az $S = K$ pont vetülete az ABC síkon) a D pont vetületébe, D_0-ba képződik (*3. ábra*).

Ezzel megkaptuk, hogy a D pont merőleges vetülete, vagyis a tetraéder D-ből induló magasságának talppontja az ABC háromszög S_0K_0 Euler-vonalára illeszkedik.

Megjegyzés. A feladat kitűzése, így a megoldás is feltételezi, hogy az ABC háromszögnek van Euler-vonala, azaz $S_0 \neq K_0$. Ismert, hogy ez pontosan akkor áll fenn, ha ABC háromszög nem szabályos. Vagyis a feladat állítása és a bizonyítás csakis nem szabályos, egyenlő oldalú tetraéderekre érvényes. (Szabályos tetraéderben D vetülete ABC-re éppen $S_0 = K_0$.)

Williams Kada (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn. és Ált. Isk., 10. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Jelöljük az ABC háromszög magasságpontját M-mel, a köréírt körének középpontját O-val, és a D-ből induló magasság talppontját D'-vel (*4. ábra*). Tükrözzük C-t az AB szakasz ABC síkban lévő felező merőleges egyenesére, ami áthalad az O ponton, a tükörképe legyen C'. A tükrözés miatt $AC = BC'$ és $BC = AC'$. A tetraéder egyenlő oldalú, ezért $AC = BD$ és $BC = AD$. Ekkor $AC' = AD$ és $BC' = BD$, ezért az $ABD\triangle \cong ABC'\triangle$, vagyis D és C' rajta van az AB szakaszra és ABC síkra merőleges $C'DE$ síkon. Ebben a síkban fut a tetraéder DD' magassága, ezért D' rajta van a $C'E$ egyenesen, ami az ABC háromszög CM magasságának O pontra vett tükörképe. Hasonlóan belátható, hogy D' pont rajta van az ABC háromszög többi magasságának O-ra való tükörképén is, ezért a D' pont M tükörképe O-ra. M és O rajta van az Euler-egyenesen, ezért D' is.



4. ábra

Gáspár Attila (Miskolc, Földes F. Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

34 dolgozat érkezett. 6 pontos 29, 5 pontos 2, 4 pontos 2, 2 pontos 1 dolgozat.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1294–1300.)

Feladatok 10. évfolyamig

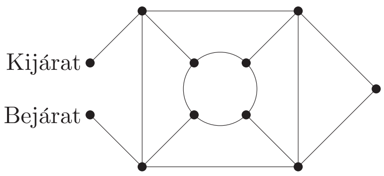
C. 1294. Fejezzük ki a $\frac{13}{38}$ törtet $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ alakban, ahol m és n pozitív egész számok.

C. 1295. Az $ABCD$ négyszög C és D csúcsánál levő szög megegyezik, továbbá az A és B csúcsnál levő belső szögfelezők E metszéspontja a CD oldalra esik. Bizonyítsuk be, hogy E felezi a CD oldalt.

Feladatok mindenkinek

C. 1296. Mekkorák annak a hegyesszögű egyenlőszárú háromszögnek a szögei, melynek súlypontját az egyik magasság talppontjára tükrözve a tükörkép a háromszög alapjának egyenesére esik?

C. 1297. Egy cirkuszban a fő attrakció az oroszlán és az elefánt mutatványa. Az állatok szeszélyessége miatt azonban nem mindig valósítható meg ez a két produkció. Az oroszlán az előadások $\frac{4}{5}$ részében lép porondra, míg az elefánt csak $\frac{3}{4}$ részében. Szerencsés cirkusz lévén, az előadások 99%-ában legalább az egyik állat szerepel. Mekkora valószínűséggel láthatjuk mindkét állatot egy műsoron?



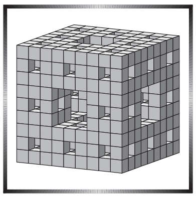
C. 1298. A mellékelt *ábra* egy parkot szemléltet, ahol a szakaszok mutatják az ösvényeket. Hányféleképpen juthatunk el a bejárattól a kijáratig, ha minden ösvényen legfeljebb egyszer mehetünk végig, és az ösvényekről nem térhetünk le?

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1299. Oldjuk meg az $x^3+(1-3b)x^2+\big(3b^2+2b-6\big)x-b^3+b^2-6b+9=0$ egyenletet, ha $x-b\geqslant 0$.

C. 1300. Egy konvex négyszög oldalainak hossza sorban $\sqrt{a}$, $\sqrt{a+3}$, $\sqrt{a+2}$ és $\sqrt{2a+5}$, mindkét átlója $\sqrt{2a+5}$ hosszú. Határozzuk meg a négyszög legnagyobb szögét.

Beküldési határidő: 2015. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4714–4722.)

B. 4714. Adott a síkon 2015 pont. Mutassuk meg, hogy ha közülük bármely négy egy konvex négyszög négy csúcsa, akkor a pontok egy konvex 2015-szög csúcsai.

(*4 pont*)

B. 4715. Adjuk meg az összes pozitív egész számokból álló (a,b) számpárt, amelyre $a^{(b^2)}=b^a$ teljesül.

(*5 pont*)

B. 4716. Az $ABCDE$ szabályos ötszögből kivágtuk az AB és AE élek által meghatározott $ABFE$ rombuszt. Határozzuk meg a megmaradó $BCDEF$ konkáv ötszöglemez súlypontját.

(*3 pont*) Javasolta: *Dombi Péter* (Pécs)

B. 4717. Oldjuk meg az

$$|1-x| = \left|2x - 57 - 2\sqrt{x-55} + \frac{1}{x - 54 - 2\sqrt{x-55}}\right|$$

egyenletet.

(*4 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 4718. Az $ABCDA'B'C'D'$ kocka $B'C'$ élének felezőpontja E, $C'D'$ élének felezőpontja pedig F. Az AEF sík két részre osztja a kockát. Határozzuk meg a két rész térfogatának arányát.

(*5 pont*)

B. 4719. Bizonyítsuk be, hogy bármely $a \geqslant b$ pozitív egész számokra teljesül, hogy

$$\sum_{j=0}^{b} \sum_{i=j}^{a-b+j} \binom{i}{j}\binom{a-i}{b-j} = (a+1)\binom{a}{b}.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Porupsánszki István* (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 12. évf.)

B. 4720. Legyenek a és n olyan pozitív egészek, amelyekre $a^n - 1 \mid n$. Bizonyítsuk be, hogy az $a+1$, a^2+2, $\ldots$, a^n+n számok mind különböző maradékot adnak n-nel osztva.

(*6 pont*)

B. 4721. A k kör érinti az ABC egyenlő szárú háromszög AB és AC szárait, a BC alapját pedig K-ban és L-ben metszi. Az AK szakasz a k kört másodszor az M pontban metszi. A K pont B-re, illetve C-re vonatkozó tükörképe rendre P és Q. Igazoljuk, hogy k érinti a PMQ háromszög köré írt kört.

(*6 pont*)

B. 4722. Egy n-elemű halmaz minden permutációját kiszíneztük a piros, fehér és zöld színek valamelyikével. Jelölje N_{PFZ} azt, hogy hányféleképpen lehet egymás után egy piros, majd egy fehér, végül egy zöld permutációt végrehajtani úgy, hogy végül minden elem a helyére kerüljön vissza. Hasonlóan, jelölje N_{ZFP} azt, hogy hányféleképpen lehet egymás után egy zöld, egy fehér, végül egy piros permutációt végrehajtani úgy, hogy végül minden elem a helyére kerüljön vissza. Mutassuk meg, hogy $N_{PFZ} = N_{ZFP}$.

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2015. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (644–646.)

A. 644. Legyen $f(x,y)$ kétváltozós, egész együtthatós polinom, ami sem x-, sem y-irányban nem konstans. Mutassuk meg, hogy

$$\max_{a,b\in[-2,2]} \big|f(a,b)\big| \geqslant 4.$$

Erdélyi Tamás (College Station, Texas) ötletéből

A. 645. Létezik-e végtelen sok (nem feltétlenül konvex) 2015-szög a síkon úgy, hogy közülük bármely háromnak van közös belső pontja, de semelyik négynek nincs közös belső pontja?

A. 646. Pamacs és Cézár a következő játékot játssza. Először Pamacs két csontot elás a téglalap alakú kert sarkaiban. Összesen 45 cm mélyre áshat, tehát a két csontot vagy különböző sarokba rejti, és a mélységeik összege legfeljebb 45 cm, vagy pedig egy helyre, és mindkét csontnak legfeljebb 45 cm mélyen kell lennie. A földet gondosan elsimítja, így nem lehet ránézésre megállapítani, hogy mely sarokba rejthette el a csontokat. Cézár ezek után gödröket áshat ki, melyek mélységének összege összesen 1 m. Cézár célja az, hogy minél nagyobb eséllyel megtalálja mindkét csontot, Pamacs célja pedig az, hogy minél nagyobb valószínűséggel megtarthassa magának legalább az egyiket.

(a) Mutassuk meg, hogy Pamacs ügyesen játszva elérheti, hogy 1/2-nél nagyobb valószínűséggel rejtve maradjon legalább az egyik csontja, függetlenül Cézár stratégiájától.

(b) Ha mindkét kutya optimálisan játszik, Pamacs mekkora eséllyel jár sikerrel?

Javasolta: *Csóka Endre* (Warwick)

❄

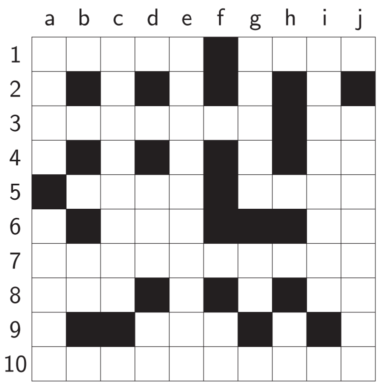
Beküldési határidő: 2015. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

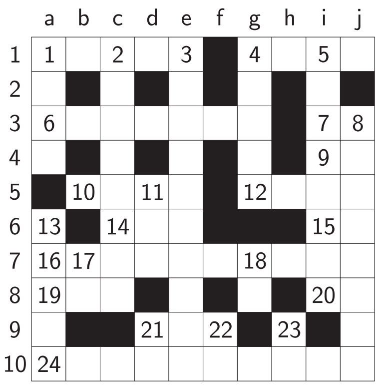
❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 376. A keresztrejtvényfejtés széles körben elterjedt népszerű játék. Sok változatát fejlesztették ki. A hagyományos változatban a szavak elválasztására fekete mezők szolgálnak. A megfejtésekkel az üres mezők vízszintesen balról jobbra, illetve függőlegesen felülről lefelé tölthetők ki. A mezők számozása a bal felső sarokból indul, ahol a vízszintes vagy függőleges megoldás szava kezdődik. Minden olyan mező számot kap, ahol vízszintesen vagy függőlegesen megfejtés kezdődik. A feladatban szereplő keresztrejtvények egybetűs szavakat nem tartalmaznak. Ha egy mező vízszintes és függőleges szó első betűjét is tartalmazza, akkor csak egy számot kap.

Keresztrejtvény hálója és számozása:





A feladatok megoldásának teszteléséhez rendelkezésünkre áll egy, a honlapunkról letölthető `halo.txt` fájl, amelyben egy $N\times M$ $(5\leqslant N,M\leqslant 15)$ méretű keresztrejtvény hálója van leírva. Az állomány első sorában N és M értéke szerepel szóközzel elválasztva, majd a következő N sor a mezők állapotát tartalmazza. A fekete mezőket „`f`”, az üreseket „`.`” karakter ábrázolja.

Példa `halo.txt` fájl

`4 5`
`..f..`
`.f..f`
`.ff..`
`...f.`

Készítsünk programot `i376` néven, amely az alábbi problémákat oldja meg:

Minden képernyőre írást igénylő részfeladat megoldása előtt írjuk ki a feladat sorszámát. Ha a felhasználótól kérünk be adatot, jelenítsük meg a képernyőn, hogy milyen értéket várunk (például a 4. feladat esetén: „4. feladat - Adjunk meg egy mezőt: ”). Az ékezetmentes kiírás is elfogadott.

1. Olvassuk be a `halo.txt` állományban talált adatokat, és azok felhasználásával oldjuk meg a következő feladatokat.
2. Írjuk ki a képernyőre, hogy a keresztrejtvény hálójában hány fekete és hány üres mező van.
3. Határozzuk meg azt a sort, illetve azt az oszlopot, amelyben a legtöbb fekete mező van. Ha több ilyen van, akkor a legkisebb sorszámút írassuk ki a képernyőre.
4. Kérjük be a felhasználótól a keresztrejtvény egy mezőjének koordinátáját (például: 10h) és írjuk ki, hogy be kell-e majd számozni.
5. Írjuk ki a képernyőre, hogy a keresztrejtvény hálójában vízszintesen hány $2, 3, \ldots, 10$ betűs szó helyezhető el.
6. A szabályoknak megfelelően számozzuk be a keresztrejtvény mezőit és írjuk az eredményt a `szamozott.txt` állományba. A mezők tartalmát 3 karakternyi helyre írjuk ki.
7. Írassuk ki, hogy a keresztrejtvénybe írandó szavakhoz hány vízszintes és hány függőleges meghatározás tartozik.

Példa `szamozott.txt` fájl

```
  1     f  2
     f  3     f
     f  f  4  5
  6        f
```

Beküldendő a program forráskódja (`i376.pas`, `i376.cpp`, ...), valamint a program rövid dokumentációja (`i376.txt`, `i376.pdf`, ...), amely tartalmazza a megoldás leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztő környezetben fordítható.

I. 377. Az `oktatas.hu` portál évről évre megjeleníti a tantárgyi OKTV döntők eredményét:

`http://www.oktatas.hu/kozneveles/tanulmanyi_versenyek/oktv_kereteben/dijazottak_eredmenyek`

Az eredménylistát PDF formátumú dokumentumként adják meg tantárgyanként. A formátum módot ad ugyan arra, hogy egyszerű szöveges keresést végezzünk, de összetett keresést vagy statisztikai feldolgozást nem támogat.

A portál üzemeltetőitől azt a feladatot kaptuk, hogy tervezzünk adatbázist az eredmények tárolására és tervezzük meg azt a folyamatot, amely során az adatok átvihetők a fájlokból az adatbázisba. Teszt céllal az informatika tárgy alkalmazói kategóriája utolsó öt évének adatait kell a megtervezett adatbázisba betöltenünk.

A megoldáshoz csak a fenti címen elérhető fájlokat használhatjuk. A szükséges konverziós lépésekhez tetszőleges – lehetőleg ingyenes – programot igénybe vehetünk.

Az üzemeltetők kikötötték, hogy az adatbázist a Microsoft Access alapértelmezett formátumában vagy MySQL dump fájlként kell leadni, mivel a hétköznapokban ezeket az eszközöket használják.

Beküldendő egy tömörített állományban (`i377.zip`) a megoldás leírása (`i377.pdf`) és az adatbázis (`i377.accdb`, `i377.sql`). A leírás tartalmazza az adatbázis modelljét (a táblák kapcsolatát) kifejező képet, a használt adatbázis-kezelő nevét és verzióját, valamint a PDF fájlok feldolgozásának reprodukálható folyamatát, a közben felvetődő technikai vagy tartalmi jellegű problémákat és azok megoldását is.

I. 378. Adott egy $N\times M$ pixelből álló fekete-fehér kép, amelyet táblázatos elrendezésben 0 és 1 számokkal írunk le. Egy ilyen képet akkor tekintünk szépnek, ha az élszomszédos mezők közül minél több azonos. Célunk az eredeti kép szebbé alakítása bizonyos pixelek értékének megcserélésével. Egy képpont cseréje Q forintba kerül. Az átalakított kép szépségét úgy vesszük figyelembe, hogy minden élszomszédos, különböző színű pixelpár további P forint „költséget" jelent. Keressük meg néhány adott képre azt az átalakítást, amely mellett a lehető legkisebb a $P+Q$ költség.

Programot nem kell beküldeni, egyedül a három, honlapunkról letölthető (`in.1`, `in.2`, `in.3`) képre kell három kimenetet adni (`out.1`, `out.2`, `out.3`). A bemenet első sorában négy egész szám áll: N, M, P, Q – a táblázat sorainak, oszlopainak száma, illetve a két költséget leíró paraméter. Ezután N sor következik, mindegyikben M karakter: a fénykép. A kimenet szintén egy $N\times M$-es táblázat a bemenethez hasonló formában. A feladatra nem feltétlenül kell optimális megoldást adni, mivel a feladat beküldői egymással versenyeznek: az kap 10 pontot, akinek a három bemenetre összesen a legkisebb a $P+Q$ költség, a többiek arányosan kevesebbet. Például a következő kép esetén:

```
4 4 2 3
1101
1010
1100
1010
```

egy lehetséges (nem feltétlenül optimális) átalakítás:

```
1111
1110
1100
1110
```

Itt $6\cdot 2+3\cdot 3=21$ forint a költség.

Beküldendő a három átalakított fénykép egy tömörített (`i378.zip`) állományban.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: **2015. június 10.**

S. 99. Egy M ($1 \leqslant M \leqslant 100\,000$, M egész szám) hosszú falon N ($1 \leqslant N \leqslant 5000$) repedés keletkezett. Az egyszerűség kedvéért a repedéseket mint pontokat képzeljük el a falon, helyüket a fal egyik végétől valamilyen x ($1 \leqslant x \leqslant M$, egész) koordináták adják meg. Célunk az, hogy lefessük a fal minden repedését. Úgy festünk, hogy kinyitunk egy w feliratú doboz festéket, amely pontosan w hosszú falrész festésére alkalmas, majd a tartalmával lefestünk egy x_0 és x_1 koordinátákkal határolt falrészt ($w = x_1 - x_0 + 1$). A kiválasztott tartományon belül természetesen lefestjük az ép falrészeket is – akár többször is. Addig nyitunk ki újabb festékesdobozt és festünk, amíg minden repedést el nem tüntettünk. A festéshez minden w ($1 \leqslant w \leqslant M$) egész számra pontosan egy w feliratú, és ismert b_j árú doboz festék áll rendelkezésre. Egy hosszabb festés nem feltétlenül drágább, mint egy rövidebb, sőt egy nagyobb doboz festék ára lehet egy kisebb doboz festék árával egyenlő, vagy annál kisebb is. Fessük le a lehető legolcsóbban az összes repedést a falon.

A program olvassa be a standard input első sorából N-et és M-et, majd a következő N sorból az a_i egészeket, azaz a repedések helyét. A következő M sorban rendre az egyes hosszokhoz tartozó festékes dobozok b_j ára szerepel. Írjuk a standard output első sorába a minimális pénzt, amennyiből a festés megoldható. Helytakarékosság miatt a bemenetben az N, illetve az M sorban lévő számokat `/` jellel elválasztva egy sorba írtuk.

Példa bemenet:	Példa kimenet:

`6 12`
`1 / 2 / 11 / 8 / 4 / 12`
`2 / 3 / 4 / 4 / 8 / 9 / 15 / 16 / 17 / 18 / 19 / 19`
	`9`

Magyarázat: ha veszünk egy 4, egy 1 és egy 2 feliratú vödröt, akkor azokkal pont le tudjuk festeni az összes repedést. Az ár: $4 + 2 + 3 = 9$.

Pontozás és korlátok: A programhoz mellékelt, a helyes megoldás elvét tömören, de érthetően leíró dokumentáció 1 pontot ér. A programra akkor kapható meg a további 9 pont, ha bármilyen hibátlan bemenetet képes megoldani az 1 mp futásidőkorláton belül.

Beküldendő egy tömörített `s99.zip` állományban a program forráskódja (`s99.pas`, `s99.cpp`, ...) az `.exe` és más, a fordító által generált állományok nélkül, valamint a program rövid dokumentációja (`s99.txt`, `s99.pdf`, ...), amely a fentieken túl megadja, hogy a forrás mely fejlesztői környezetben fordítható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: **2015. június 10.**

❄

Egy kreatív fizikatanár emlékére
Dr. Szombathy Miklós
1940. 06. 09. – 2014. 07. 25.

Márciusi számunkban emlékeztünk meg Bakonyi Gáborról, a KöMaL fizika rovatának immár öt éve elhunyt feladatkitűzőjéről. Most egy másik kollégára emlékezünk, aki ugyan csak tavaly halt meg, de az ő haláláról is csak nemrég értesültünk, ezért még halála után is úgy közöltünk tőle feladatokat, mintha életben lenne. Szimbolikusan, szellemében persze közöttünk él ma is, s még egy ideig velünk is marad: az általa kigondolt feladatok őrzik meg mindnyájunk számára Szombathy Miklós (1940–2014) kreatív személyiségét. Életének főbb eseményeit, lelkes fizikatanári tevékenységét felesége jóvoltából idézzük fel az alábbiakban.

❄

Szombathy Miklós Szikszón született, pedagógus családban. Édesapja a jászberényi tanítóképző matematika-fizika szakos tanára volt, így ő is itt járt iskolába, s a Lehel vezér Gimnáziumban érettségizett 1958-ban. Tehetsége és kedve is volt a tanári pályához, ezért akárcsak annak idején édesapja, ő is Szegedre jelentkezett egyetemre. Négy sikeresen elvégzett év után megnősült, feleségével Egerbe költöztek. Az Egerhez közelebb lévő Debrecenben fejezte be egyetemi tanulmányait, itt szerezte meg matematika-fizika szakos középiskolai tanári oklevelét.

1963-tól tanított az egri Gárdonyi Géza Gimnáziumban, ahol hamarosan a fizikai munkaközösség vezetője lett. Felújította a fizikai előadót, bővítette, fejlesztette a fizikai szertárat. Az iskola sok diákja vett részt sikeresen a KöMaL fizika pontversenyén és kísérleti pályázatain. A legsikeresebb Ábrahám Tibor volt, aki bekerült a diákolimpiai csapatba, majd elsős fizikus korában Vladár Károllyal holtversenyben I. díjas lett az Eötvös-versenyen.

Az egri főiskola tanárával, Patkó Györggyel megyei fizika szakkört szerveztek és irányítottak éveken át. Az 1970-ben Egerben rendezett IUPAP kongresszuson, melyre több mint három évtizedes elzártság után először engedték ki a Szovjetunióból Pjotr Kapica fizikust, Szombathy Miklós a Mátrai Tibor elnökletével működő kiállítási bizottság tagja volt.

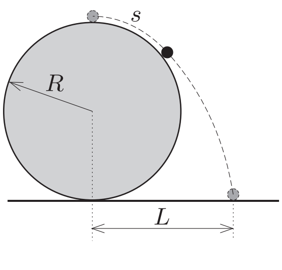
Első, még Szegeden kötött házasságának felbomlása után újranősült és Nyíregyházán kezdett új életet, az ottani főiskolán lett a fizika tanszék oktatója előbb adjunktusi, majd docensi beosztásban. 1984-ben tett természettudományi doktori szigorlatot. Egyetemi, főiskolai előkészítő tanfolyamokat tartott fizikából, és minden évben vállalt érettségi elnökséget, hogy maradjon kapcsolata a közoktatással. Ezt a kapcsolatot erősítette az is, hogy második házasságából született két gyermekének tanulmányait kísérhette figyelemmel. Lánya a KöMaL sikeres feladatmegoldója lett, később informatikusként végzett az egyetemen. Fiából villamosmérnök lett.

A 80-as évek végén családi okból visszatértek Egerbe, itt 1991-ben sikerrel pályázta meg az egyik belvárosi általános iskola igazgatói állását. Tízéves igazgatói működése során nagy figyelmet fordított az általános iskolai természettudományos oktatás fejlesztésére. Megyei versenyeket szervezett, emelt szintű természettudományos osztályokat indított az iskolában. Nyugdíjas korában visszatért a középiskolai fizikához: a megyei Mátrai Tibor fizikaverseny feladatait állította össze: külön-külön feladatsort minden évfolyam számára. Ezekből a feladatokból válogatott a KöMaL fizika szerkesztősége 2007-től kezdve.

Szombathy Miklósnak mindkét házasságából két-két gyermeke született, unokái közül a legidősebb már orvos, a legkisebb pedig még csak egy éves. Nagyon szerette a természetet, a gyalogtúrázást, otthon pedig az olvasást és a komolyzene hallgatást. 74 éves korában ragadta el a kegyetlen betegség, amely ellen méltósággal és kitartással küzdött. Családja, barátai, kollégái és tanítványai őrzik emlékét szeretettel.

R. Gy.

Fizika feladatok megoldása



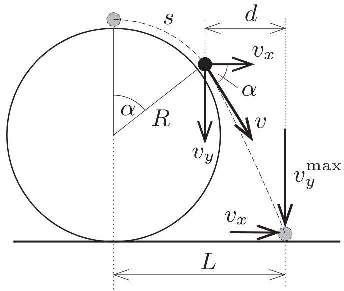
P. 4653. *Egy tökéletesen sima felületű, rögzített gömb legmagasabban levő pontján egy kisméretű (tömegpontnak tekinthető) test van. Ha ezt a testet az egyensúlyi helyzetéből egy kicsit kitérítjük, akkor az egy ideig súrlódás nélkül csúszik a gömb felületén, majd onnan leválva leesik.*

a) Mekkora s utat tesz meg a test a gömbön csúszva az elválás pillanatáig?

b) A gömb függőleges átmérőjétől számítva mekkora L távolságban esik a test a vízszintes alapra?

A gömb sugara $R=1{,}5$ m.

(*4 pont*) *Cornides István matematika–fizika verseny,* Révkomárom (Szlovákia)



Megoldás. Amikor a test még csúszik a gömb felületén, akkor a testre ható erők (a test súlya, valamint a rögzített gömb által kifejtett tartóerő) eredőjének sugár irányú összetevője biztosítja a körmozgáshoz szükséges centripetális erőt. A test akkor válik el a felülettől, amikor a gömb már éppen nem fejt ki erőt a testre. Legyen az elválás pillanatában a test sebessége v, a helyzetét pedig az *ábrán* látható α szöggel jellemezhetjük.

A mozgásegyenlet:

$$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\alpha,$$

továbbá az energiamegmaradás törvénye alapján fennáll:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\alpha).$$

A fenti két egyenletből a szög és a sebesség kiszámítható:

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}, \qquad \alpha = 48{,}2^\circ = 0{,}84 \text{ radián},$$

tehát az elválás pillanatáig megtett út:

$$s = R\alpha = 1{,}26 \text{ m},$$

illetve:

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}\,Rg}.$$

Bontsuk fel a test sebességét vízszintes v_x és függőleges v_y komponensekre! (Az x tengelyt jobbra, az y tengelyt pedig lefelé irányítjuk.) A felülettől való elválás pillanatában

$$v_x = v\cos\alpha = \sqrt{\frac{8}{27}\,Rg}, \qquad v_y = v\sin\alpha = \sqrt{\frac{10}{27}\,Rg}.$$

A mozgás további szakaszában a test vízszintes irányú mozgása egyenletes mozgás, tehát ha a levegőben töltött idő t, a test vízszintes irányú elmozdulása: $d = v_x t$.

A függőleges irányú mozgás egyenletesen gyorsuló mozgás, melynek kezdősebessége v_y, legnagyobb sebessége pedig (a mechanikai energiamegmaradás tétele szerint):

$$v_y^{\max} = \sqrt{(v_y)^2 + 2g\Delta y} = \sqrt{\frac{10}{27}Rg + 2R(1+\cos\alpha)g} = 10\sqrt{\frac{Rg}{27}}.$$

Mivel a függőleges irányú mozgás egyenletesen változó mozgás, a földet érés ideje így is kiszámítható:

$$t = \frac{v_y^{\max} - v_y}{g} = \sqrt{\frac{Rg}{27}}\big(10 - \sqrt{10}\,\big),$$

ahonnan a test vízszintes irányú elmozdulása az elválás pillanatától a földet érésig:

$$d = v_x t = \frac{\sqrt{8}}{27}\big(10 - \sqrt{10}\,\big)R = 0{,}716\,R.$$

A keresett L távolság a fentebb kiszámított d és a gömbfelületen történt elmozdulás vízszintes vetületének összege:

$$L = d + R\sin\alpha = \frac{5}{27}\big(4\sqrt{2} + \sqrt{5}\,\big)R = 1{,}46R = 2{,}19\ \text{m}.$$

Megjegyzés. A feladatban szereplő s és L távolságok sem a test tömegétől, sem a nehézségi gyorsulástól *nem függnek,* így akár a Holdon is érvényesek lennének.

Iván Balázs (Fonyód, Mátyás Király Gimn. 10. évf.) és
Marosvári Kristóf (Fonyód, Keszthely, Vajda J. Gimn. 12. évf.)
dolgozata alapján

106 dolgozat érkezett. Helyes 73 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 14, hiányos (1–2 pont) 11, hibás 7, nem értékelhető 1 dolgozat.

P. 4667. *Szabályos tetraéder csúcspontjaiban azonos előjelű és egyaránt Q nagyságú ponttöltések helyezkednek el. Mekkora nagyságú, ellentétes előjelű ponttöltést kell elhelyezni a tetraéder közepén, hogy a töltésekre ható eredő elektrosztatikus erő zérus legyen? Mekkora a töltésrendszer kölcsönhatási energiája?*

(*5 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest

Megoldás. Jelöljük a szabályos tetraéder középpontjába helyezett ponttöltés *nagyságát* Q'-vel. Ez a töltés (az elrendezés szimmetriája miatt) nyilván egyensúlyban van. A többi töltés egyensúlyának vizsgálatához (ismét a szimmetriára hivatkozva) elegendő az egyik kiválasztott csúcspontban elhelyezkedő töltésre ható elektrosztatikus erők eredőjét kiszámítanunk, és annak eltűnését megkövetelnünk.

Ha a szabályos tetraéder oldalélének hosszát a-val jelöljük (*1. ábra*), akkor az oldallapjainak magassága

$$m = \overline{AR} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a,$$

az oldallap súlypontjának és az egyik csúcsának távolsága pedig

$$\overline{AP} = \frac{2}{3}\,m = \frac{\sqrt{3}}{3}\,a.$$

Eszerint a tetraéder magassága

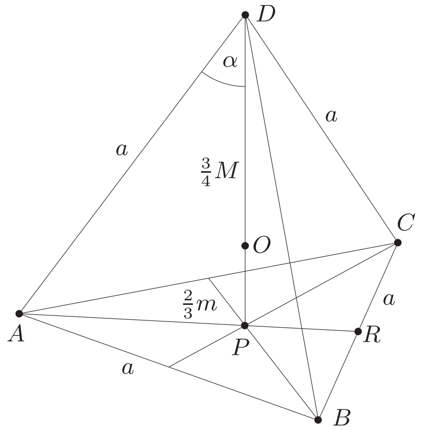
$$M=\overline{DP}=\sqrt{a^2-\left(\frac{2}{3}\,m\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}\,a.$$

Az $\overline{AO}=\overline{OD}$ feltételből megkapható, hogy a tetraéder középpontja a magasságvonal negyedénél található, vagyis a tetraéder középpontjának és az egyik csúcsának távolsága

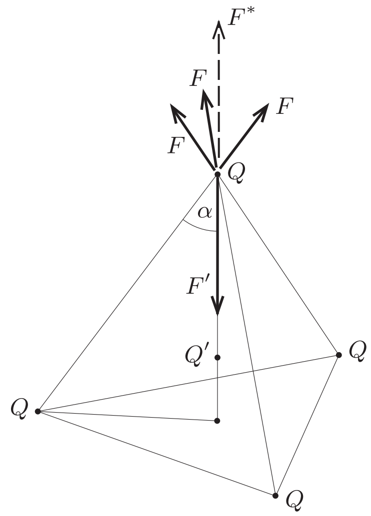
$$\overline{DO}=\frac{3}{4}\,M=\sqrt{\frac{3}{8}}\,a,$$

az 1. ábrán látható α szögre pedig fennáll:

$$\cos\alpha=\frac{M}{a}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$



1. ábra



2. ábra

Az egyik csúcspontban lévő Q nagyságú töltésre bármelyik másik csúcsnál található töltés

$$F=k\frac{Q^2}{a^2}$$

nagyságú taszítóerőt fejt ki. A három másik csúcs töltései által kifejtett erő eredője a szimmetria miatt a tetraéder középpontjával ellentétes irányba mutató és

$$F^*=3F\cos\alpha=3k\frac{Q^2}{a^2}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

nagyságú (*2. ábra*). Ugyanilyen irányú és

$$F'=k\frac{QQ'}{\left(\frac{3M}{4}\right)^2}=\frac{8k}{3}\,\frac{QQ'}{a^2}$$

nagyságú vonzóerőt fejt ki a tetraéder középpontjában elhelyezkedő Q' nagyságú, Q-val ellentétes előjelű töltés.

Az erőegyensúly feltétele: $F' = F^*$, ami

$$Q' = \sqrt{\frac{27}{32}}\,Q \approx 0{,}92\,Q$$

esetén teljesül.

A töltésrendszer teljes kölcsönhatási energiája a töltéspárok megfelelő energiáinak összege:

$$W = 6k\frac{Q^2}{a} - 4k\frac{QQ'}{\left(\frac{3M}{4}\right)} = k\frac{Q}{a}\left(6Q - 4\sqrt{\frac{8}{3}}\,Q'\right),$$

ami Q' fentebb kiszámított értékének behelyettesítésével – érdekes módon – nullának adódik:

$$W = k\frac{Q^2}{a}\left(6 - 4\sqrt{\frac{8}{3}}\sqrt{\frac{27}{32}}\right) = 0.$$

Megjegyzés. Belátható, hogy *bármely* töltésrendszer elektrosztatikus kölcsönhatási energiája *nulla,* ha a rendszer elemei (elektrosztatikus erőhatások szempontjából) egyensúlyban vannak. Ilyen esetben ugyanis a rendszer méreteit – kis lépésben – arányosan megnövelhetjük, méghozzá úgy, hogy eközben nem kell munkát végeznünk (hiszen a rendszer minden elemére ható eredő erő nulla). Ezt a méretnövelést egészen addig folytathatjuk, ameddig a töltések már nagyon távol („végtelen" messze) kerülnek egymástól, vagyis amikor a kölcsönhatási energiájuk nullává válik. Mivel mindezt munkavégzés nélkül tehetjük meg, az energia az eredeti állapotban is nulla kellett, hogy legyen.

Körtefái Dóra (Hajdúböszörmény, Bocskai I. Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

80 dolgozat érkezett. Helyes 33 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 19, hiányos (1–3 pont) 26, hibás 2 dolgozat.

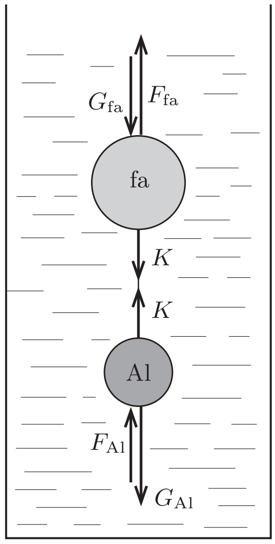
P. 4672. *Egy* 1 dm^3 *térfogatú tömör alumíniumgömböt vékony fonál köt össze egy* 0,5 g/cm^3 *sűrűségű fenyőfából készült gömbbel. A gömbök teljesen vízbe merülnek és nyugalomban vannak.*

a) Mekkora a fagömb térfogata?

b) Mekkora erő feszíti a gömböket összekötő fonalat?

(*3 pont*) *Mátrai Tibor fizikaverseny,* Eger

Megoldás. *a*) Mindkét testre a nehézségi erő (G), a felhajtóerő (F) és a fonalat feszítő erő (K) hat (lásd az *ábrát*). Az egész rendszer egyensúlyának feltétele:



$$G_{\rm fa} + G_{\rm Al} = F_{\rm fa} + F_{\rm Al}.$$

Az erők kifejezhetők a testek térfogatával és a sűrűségével, illetve a víz sűrűségével:

$$V_{\rm fa}\,\varrho_{\rm fa}\,g + V_{\rm Al}\,\varrho_{\rm Al}\,g = V_{\rm fa}\,\varrho_{\rm víz}\,g + V_{\rm Al}\,\varrho_{\rm víz}\,g,$$

ahonnan a fagömb keresett térfogata:

$$V_{\rm fa} = \frac{\varrho_{\rm Al} - \varrho_{\rm víz}}{\varrho_{\rm víz} - \varrho_{\rm fa}} V_{\rm Al} = \frac{2{,}7 - 1{,}0}{1{,}0 - 0{,}5} \cdot 1{,}0\ {\rm dm}^3 = 3{,}4\ {\rm dm}^3.$$

b) A fonalat feszítő erőt az egyik gömb (mondjuk az alumíniumgömb) egyensúlyának feltételéből határozhatjuk meg:

$$G_{\rm Al} = F_{\rm Al} + K,$$

ahonnan

$$K = G_{\rm Al} - F_{\rm Al} = (\varrho_{\rm Al} - \varrho_{\rm víz})\,g\,V_{\rm Al} \approx 17\ {\rm N}.$$

Sallai Krisztina (Mezőkovácsháza, Hunyadi J. Gimn., 10. évf.)

114 dolgozat érkezett. Helyes 78 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 25, hiányos (1 pont) 3, hibás 7, nem értékelhető 1 dolgozat.

P. 4673. *Mekkora a hang terjedési sebessége cseppfolyós levegővel* $-141\ {}^\circ$C*-ra lehűtött hidrogéngázban?*

(*4 pont*) *Nagy Béla* (1881–1954) feladata

Megoldás. A gázokban terjedő hang sebességét a

$$c = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}}$$

összefüggésből határozhatjuk meg (ahol M a móltömeg, R a gázállandó, T az abszolút hőmérséklet, κ pedig a gázra jellemző fajhőhányados). A hidrogén megadott és táblázatban megtalálható adataival ez a sebesség $T = 132$ K hőmérsékleten

$$c = \sqrt{1{,}4 \frac{8{,}31 \cdot 132}{0{,}002}}\ \frac{\rm m}{\rm s} \approx 880\ \frac{\rm m}{\rm s}.$$

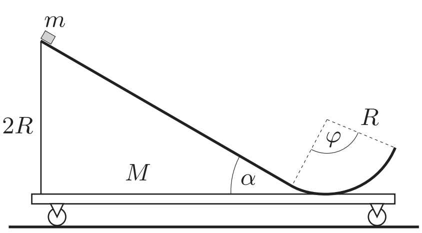
Úgy is eljárhatunk, hogy felhasználjuk a $0\ {\rm C}^\circ = 237$ K hőmérséklethez tartozó, táblázatokban fellelhető 1268 m/s-os hangsebesség adatot. Mivel a hangsebesség (ideális gázokban) az abszolút hőmérséklet négyzetgyökével arányos,

$$c(132\ {\rm K}) = \sqrt{\frac{132}{273}} \cdot c(237\ {\rm K}) \approx 890\ \frac{\rm m}{\rm s}.$$

A kétféle számítás kicsiny eltérése arra utal, hogy az alkalmazott képleteket és a behelyettesített adatokat nem szabad nagyon pontosnak tekinteni; az elméleti számításoknak – csakúgy, mint a mérési eredményeknek – van valamekkora *„hibája”.*

Móricz Melinda (Bp., ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. évf.) és
Tóth Miklós (Keszthely, Vajda János Gimn., 8. évf.)
dolgozata alapján

78 dolgozat érkezett. Helyes 48 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 1, hiányos (1–2 pont) 14, hibás 15 dolgozat.



P. 4677. *Az* ábrán *látható, könnyen gördülő kiskocsira szerelt* $\alpha = 30°$*-os lejtőhöz érintőlegesen* $R = 20$ cm *sugarú körív keresztmetszetű pálya csatlakozik. A kiskocsi és a lejtő össztömege* $M = 0{,}5$ kg. *A pálya mindenhol súrlódásmentesnek tekinthető. A* $2R$ *magas lejtő tetejére egy pontszerűnek tekinthető,* $m = 0{,}3$ kg *tömegű testet helyezünk, majd lökésmentesen elengedjük.*

a) Mekkora lesz a kis test és a kiskocsi elmozdulása, sebessége és gyorsulása abban a pillanatban, amikor a kis test emelkedő mozgása során a legmagasabbra kerül, ha a körlejtő középponti szöge $\varphi = 120°$?

b) Mekkora lesz a kis test és a kiskocsi elmozdulása és sebessége abban a pillanatban, amikor a kis test éppen elhagyja a körlejtőt, ha $\varphi = 90°$?

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

Megoldás. *a)* $\varphi = 120°$ esetén a körlejtő végén a pálya éppen függőleges, tehát a kis test lerepülése pillanatában a kiskocsi és a kis test ugyanakkora vízszintes irányú sebességgel mozog. Ez a közös sebesség azonban a lendületmegmaradás törvénye szerint nulla kell, hogy legyen, hiszen a rendszerre nem hat vízszintes irányú külső erő, így a kezdetben nulla lendület vízszintes komponense nem változhat meg.

A súrlódásmentes mozgás miatt a rendszer mechanikai energiája is változatlan marad. A kis test a pályájának legmagasabb pontjában éppen áll, és ekkor a kiskocsi sem mozog, az emelkedési magasság tehát (a lejtő aljától számítva) $2R = 40$ cm. A kis test gyorsulása a pálya legmagasabb pontjában nyilván $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ (lefelé), a kiskocsi gyorsulása pedig nulla.

A kis test vízszintes irányú elmozdulása a *kocsihoz képest*

$$\ell_1 = R + R\sin\alpha + \frac{R + R\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha + 1}{\sin\alpha}R = 94{,}6\ \text{cm}.$$

Ha az M tömegű kiskocsi a vizsgált pillanatig x távolsággal mozdul balra, az m tömegű kis test vízszintes irányú elmozdulása pedig $\ell_1 - x$ jobbra, akkor az egész rendszer tömegközéppontjának vízszintes irányú elmozdulása a talajhoz képest:

$$X = Mx - m(\ell_1 - x).$$

Ez az elmozdulás azonban (a vízszintes irányú külső erők hiánya miatt) *nulla,* ahonnan a kocsi, illetve a kis test vízszintes irányú elmozdulása:

$$x=\frac{m}{m+M}\ell_1=35{,}5\ \text{cm}\qquad \text{és}\qquad \ell_1-x=\frac{M}{m+M}\ell_1=59{,}1\ \text{cm}.$$

b) $\varphi=90^\circ$ esetén a körlejtő széle 60°-os szöget zár be a vízszintessel, és a kis test elmozdulása a *kocsihoz képest* vízszintes irányban a lejtő elhagyásának pillanatáig:

$$\ell_2=\frac{\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha+1}{\sin\alpha}R=92{,}0\ \text{cm}.$$

Ezalatt a kiskocsi

$$\frac{m}{m+M}\ell_2=34{,}5\ \text{cm}$$

távolsággal mozdul el balra, a kis test vízszintes irányú elmozdulása pedig a lerepülésének pillanatáig

$$\frac{M}{m+M}\ell_2=57{,}5\ \text{cm}.$$

Abban a pillanatban, amikor a kis test elhagyja a kiskocsin lévő lejtőt, legyen a kocsi sebessége (balra) V, a kis test (talajhoz viszonyított) sebessége pedig jobbra v_x, függőlegesen felfelé pedig v_y. A vízszintes irányú lendület megmaradása miatt

$$MV-mv_x=0,\qquad \text{vagyis}\qquad V=\frac{m}{M}v_x.$$

A kis test a *kocsihoz képest* v_x+V vízszintes és v_y függőleges sebességgel rendelkezik, és ezen sebességek arányát meghatározza a körlejtő meredeksége a pálya szélén:

$$\frac{v_x+V}{v_y}=\operatorname{tg}\alpha,\qquad \text{ahonnan}\qquad v_y=\frac{v_x+V}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{v_x}{\operatorname{tg}\alpha}\left(1+\frac{m}{M}\right).$$

Felírhatjuk még a mechanikai energia megmaradásának törvényét az indítás és a lejtőről való lerepülés pillanatára:

$$mg\cdot 2R=mgR(1-\sin\alpha)+\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2\right),$$

ahonnan V és v_y korábban kifejezett alakját behelyettesítve végül a keresett sebességekre

$$v_x=0{,}80\ \frac{\text{m}}{\text{s}},\qquad v_y=2{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\qquad \text{és}\qquad V=0{,}48\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

adódik.

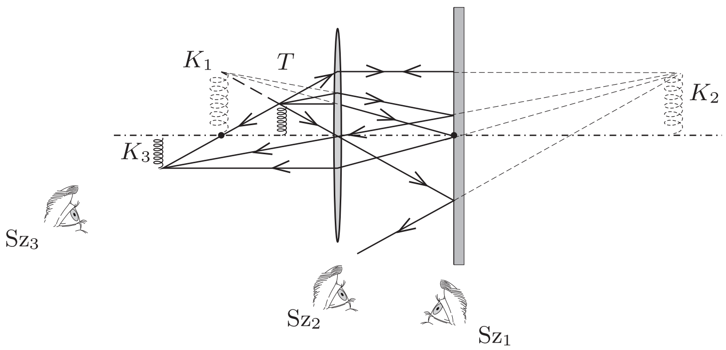
Olosz Balázs (Pécs, Babits M. Gimn., 12. évf.)

42 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 5, hiányos (1–3 pont) 20, hibás 1 dolgozat.

P. 4695. *Egy* 5 *dioptriás lencsétől* 10 cm*-re helyezkedik el egy olyan világító,* 1 cm *hosszú izzószál, amely merőleges az optikai tengelyre. A lencse másik oldalán, ugyancsak az optikai tengelyre merőlegesen helyezünk el egy, a lencse felé forduló síktükröt, tőle* 20 cm*-re. Hol, mekkora és milyen állású képei keletkeznek az izzószálnak?*

(*4 pont*) *Szombathy Miklós* (1940–2014) feladata

Megoldás. Az 5 dioptriás lencse fókusztávolsága 20 cm, így a lencse egyik fókuszpontja éppen a tükör síkjába esik. A nevezetes sugármenetek segítségével megszerkeszthetjük, hogy a lencsén áthaladó fénysugarak a $T=1$ cm-es izzószálról a lencse tárgyoldali fókuszsíkjában (vagyis 20 cm-re a lencsétől) $K_1=2$ cm nagyságú, egyenes állású, látszólagos képet alkotnak. (Az *ábra* nem méretarányos, a „függőleges” méreteket a jobb áttekinthetőség kedvéért erősen megnyújtottuk.) Ezt a képet akkor láthatjuk, ha a szemünkbe csak azok a fénysugarak juthatnak, amelyek a lencsén mindössze csak egyszer haladnak át és a síktükröt sem érik el. Ilyen helyzetet mutat pl. az ábrán látható Sz_1.



A lencsén megtörő fénysugarak egy része eléri a síktükröt és arról visszaverődik. Ezek a sugarak a tükör túlsó oldalán, a tükörtől 40 cm távolságban $K_2=2$ cm nagyságú, egyenes állású, látszólagos képet hoznak létre. Ezt a képet pl. az Sz_2 helyről láthatjuk.

Végül pedig azon fénysugarak, amelyek a tükörről visszaverődve másodszor is áthaladnak a lencsén, a lencsétól 30 cm távolságban $|K_3|=1$ cm nagyságú, fordított állású, valódi képet alkotnak, amely pl. az Sz_3 helyről látható.

Ugyanezeket az eredményeket az

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f}$$

leképezési törvény többszöri alkalmazásaival is megkaphatjuk. Az első leképezés eredménye a $t_1=10$ cm és az $f=20$ cm adatoknak megfelelően

$$k_1=\frac{t_1 f}{t_1-f}=\frac{10\cdot 20}{10-20}\ \mathrm{cm}=-20\ \mathrm{cm}$$

távolságban keletkező látszólagos kép, amelynek mérete:

$$K_1 = -\frac{k_1}{t_1} T = 2 \text{ cm}.$$

(A fenti képletekben $k_1 < 0$ a látszólagos képre, $K_1 > 0$ pedig a kép egyenes állására utal.)

A lencse által létrehozott (látszólagos) kép és a síktükör távolsága

$$t_2 = d - k_2 = 40 \text{ cm},$$

ahol d =10 cm a lencse és a tükör távolságát jelöli. A tükör az első leképezés eredményéből $k_2 = -t_2 = -40$ cm-nek megfelelő helyen, vagyis a tükör túlsó oldalán hoz létre

$$K_2 = -\frac{k_2}{t_2} K_1 = 2 \text{ cm}$$

nagyságú, egyenes állású, látszólagos képet. (A síktükör képalkotásának jellemzői a leképezési törvényből formálisan az $f \to \infty$ határátmenettel kaphatók meg.)

Amennyiben a fénysugarak másodszor is áthaladnak a lencsén, a kialakuló kép helye:

$$k_3 = \frac{t_3 f}{t_3 - f},$$

ahol $t_3 = d - k_2 = 60$ cm, így

$$k_3 = \frac{60 \cdot 20}{60 - 20} \text{ cm} = 30 \text{ cm} > 0,$$

és a kép mérete

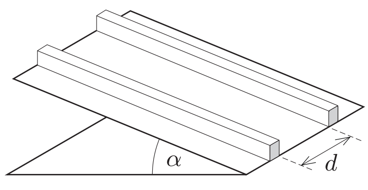
$$K_3 = -\frac{k_3}{t_3} K_2 = -1 \text{ cm} < 0.$$

Az előjelek azt mutatják, hogy a harmadik kép valódi és fordított állású.

Több dolgozat alapján

37 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 16, hiányos (1–2 pont) 8, hibás 1 dolgozat.

P. 4699. *Egy $\alpha = 30°$-os hajlásszögű lejtőn két vékony lemez egy sínpárt alkot. A lemezek távolsága $d = 1{,}6$ cm. A sínpárra 2 cm átmérőjű golyót helyezünk, és ez csúszás nélkül legördül.*

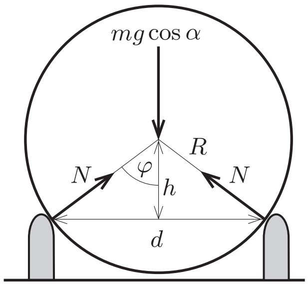


a) Mekkora a golyó középpontjának a gyorsulása?

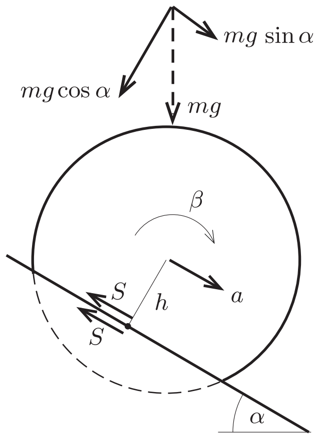
b) μ nagyságú súrlódási együttható esetén milyen meredek lejtőnél csúszik meg a golyó?

(*5 pont*) *Vermes Miklós* (1905–1990) feladata

Megoldás. Vizsgáljuk meg a golyó mozgását kétféle nézetből: a sínekkel párhuzamos irányból (*1. ábra*), illetve a lejtő esésvonalára merőleges, vízszintes irányból (*2. ábra*). A golyóra ható erők: az mg nehézségi erő, a síneknél ható, egyenként N nagyságú nyomóerő és mindkét sínnél S nagyságú súrlódási erő, az ábrákon jelölt irányításokkal. (Az ábrákon csak a további számításban szerepet játszó erőket jelöltük.)



1. ábra



2. ábra

A golyó középpontjának gyorsulását a-val, a szöggyorsulását pedig β-val jelölve a tiszta gördülés feltétele:

$$a = h\beta,$$

ahol

$$h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = 0{,}6\ \text{cm}$$

a golyó középpontjának távolsága a sínek síkjától.

Írjuk fel a golyó mozgásegyenleteit! A lejtőre merőleges irányban a golyó tömegközéppontja nem gyorsul, így

$$mg\cos\alpha - 2N\cos\varphi = 0,$$

ahol $\cos\varphi = h/R = 0{,}6$.

A lejtő esésvonalának irányában a golyó mozgásegyenlete:

$$mg\sin\alpha - 2S = ma.$$

A súrlódási erők forgatónyomatékot fejtenek ki a $\Theta = \frac{2}{5}mR^2$ tehetetlenségi nyomatékú golyóra. A forgómozgás alapegyenlete szerint

$$2Sh = \frac{2}{5}mR^2\beta.$$

A fenti egyenletekből kifejezhető a tömegközéppont gyorsulása és a kényszererők nagysága. A feladatban szereplő $\alpha = 30°$-nál

$$a = \frac{\sin\alpha}{1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{h}\right)^2}\, g = 0{,}234\, g \approx 2{,}32\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

továbbá (tetszőleges α szög esetén)

$$S = \frac{mg}{2}\sin\alpha\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{h}\right)^2}\right) = 0{,}26\, mg\sin\alpha$$

és

$$N = \frac{mg}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi} = 0{,}83\, mg\cos\alpha.$$

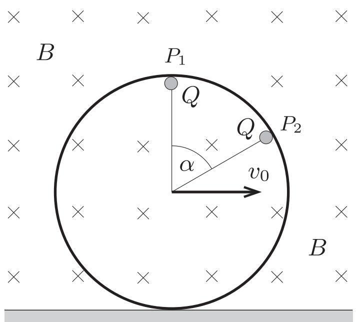
A golyó nem csúszik meg, ha teljesül az $S \leqslant \mu N$ feltétel, vagyis ha (adott súrlódási együttható mellett) fennáll, hogy

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant 3{,}2\,\mu.$$

Iván Balázs (Fonyód, Mátyás Király Gimn., 10. évf.)

53 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 6, hiányos (1–3 pont) 27, hibás 4 dolgozat.

P. 4701. *Függőleges síkban mozgó, szigetelő anyagból készült karika P_1 és P_2 pontjához Q töltésű, kisméretű golyókat úgy, hogy $\alpha = 60°$ (lásd az* ábrát*). A karika B indukciójú, homogén mágneses mezőben van, amelynek erővonalai merőlegesek a karika síkjára. A karikát úgy mozgatjuk, hogy az a szigetelő anyagból készült vízszintes felületen tisztán gördül, és a középpontjának sebessége v_0.*



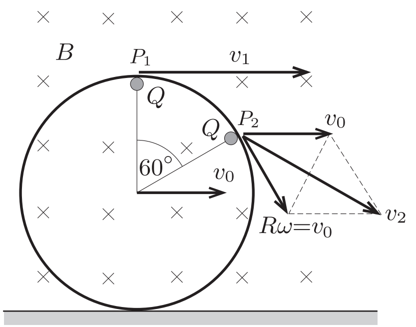
a) Mekkora mágneses erők hatnak az ábrán látható helyzetben az egyes töltött golyókra?

b) A karika mely helyzeteiben nincs a mágneses erők eredőjének forgatónyomatéka a karika középpontjára vonatkoztatva? Ezen helyzetek közül melyikben gyakorol nagyobb erőt a mágneses mező a karikára? Mekkora ez az erő?

c) Határozzuk meg a mágneses erők hatásvonalainak metszéspontját!

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

I. megoldás. *a*) A mágneses térben $\boldsymbol{v}$ sebességgel mozgó, Q töltésű golyóra ható erő a sebességvektorra is és a mágneses indukcióvektorra is merőleges, nagysága $F = QBv$. (Kihasználtuk, hogy $\boldsymbol{B}$ és $\boldsymbol{v}$ merőlegesek egymásra, és az egyértelműség kedvéért feltételezzük, hogy $Q > 0$.)



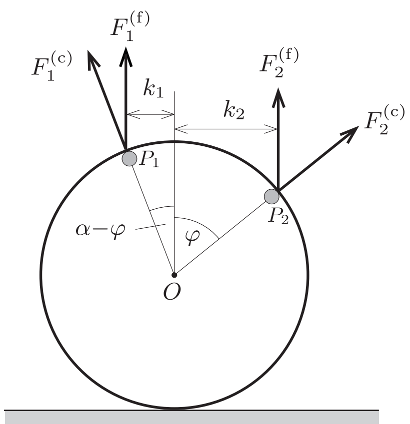
1. ábra

A golyók sebessége az R sugarú karika középpontjának v_0 nagyságú vízszintes sebességéből és a tiszta gördülés $R\omega = v_0$ nagyságú, érintő irányú sebességéből tehető össze (*1. ábra*). A P_1 pontban ez $v_1 = 2v_0$ nagyságú, a P_2 pontban pedig $v_2 = \sqrt{3}\,v_0$ (egy szabályos háromszög kétszeres magasságának megfelelő) nagyságú sebességvektort eredményez, így a kérdéses erők:

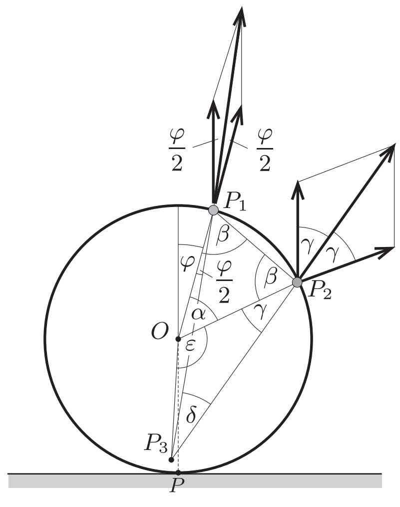
$$F_1 = QBv_1 = 2QBv_0,$$

$$F_2 = QBv_2 = \sqrt{3}\,QBv_0.$$

b) A karika bármely pontjának sebességvektora két vektor (a haladó mozgás és a forgómozgás kerületi sebességének) összegeként állítható elő. A karikához rögzített töltött testre ható mágneses Lorentz-erőt az egyes sebességkomponensekhez tartozó mágneses erők vektori összegeként is megkaphatjuk (szuperpozíció-elv). Tekintsük a karika azon helyzetét, amelyben a P_2 ponthoz tartozó sugár φ szöget zár be a függőlegessel, a P_1-hez tartozó sugár ehhez képest α szöggel „lemarad" (*2. ábra*). Keressük φ azon értékét (vagy értékeit), amely(ek)nél az eredő erőnek *nincs* forgatónyomatéka a karika O középpontjára vonatkoztatva.



2. ábra



3. ábra

Az érintő irányú sebességvektorokhoz tartozó $F_1^{(\mathrm{c})}$ és $F_2^{(\mathrm{c})}$ erők sugár irányúak (centrálisak), az O pontra vonatkoztatott forgatónyomatékuk *nulla*. A vízszintes (transzlációs) sebességnek megfelelő Lorentz-erő függőleges irányú, és a nagysága a karika minden pontjánál ugyanakkora:

$$F_1^{(\mathrm{f})} = F_2^{(\mathrm{f})} = QBv_0.$$

Az erők eredőjének akkor lesz nulla a forgatónyomatéka, ha a megfelelő erőkarok megegyeznek:

$$k_1 = k_2, \qquad \text{vagyis} \qquad \sin(\alpha - \varphi) = \sin\varphi.$$

Ebből – trigonometrikus átalakítások után – a $\operatorname{tg}(\alpha/2) = \operatorname{tg}\varphi$ egyenlet következik, amelynek megoldása:

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} = 30^\circ, \qquad \text{vagy} \qquad \varphi = 180^\circ + \frac{\alpha}{2} = 210^\circ.$$

Mindkét helyzetben a golyók a karika függőleges átmérőjére nézve *szimmetrikusan* helyezkednek el. Sebességük nagysága a „felső” helyzetben nagyobb, ilyenkor az eredő erő nagysága $\big(2+\sqrt{3}\big)Qv_0B$, az „alsó” szimmetrikus helyzetben pedig csak $\big(2-\sqrt{3}\big)Qv_0B$.

c) Tekintsük a karika azon helyzetét, amelyben a P_1 pontba húzott sugár φ szöget, a P_2 ponthoz tartozó sugár pedig $\varphi+\alpha$ szöget zár be a függőlegessel (*3. ábra*). Megmutatjuk, hogy a ponttöltésekre ható mágneses erők hatásvonalainak P_3 metszéspontja *tetszőleges* φ szög esetén a karika és a talaj P érintkezési pontjával esik egybe. (Az ábrát szándékosan kicsit eltorzítottuk, nehogy a bizonyítandó állítást a helyes ábráról indoklás nélkül olvassuk le.)

Használjuk ki, hogy az egyes ponttöltésekre ható mágneses erő két komponense (a tiszta gördülés miatt) ugyanakkora, eredőjük tehát felezi a közöttük lévő φ, illetve $2\gamma = \varphi + \alpha$ nagyságú szöget. Az OP_1P_2 háromszög egyenlő szárú, így

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2}.$$

A $P_1P_2P_3$ háromszög belső szögeinek összegéből

$$\frac{180^\circ - \alpha}{2} - \frac{\varphi}{2} + \frac{180^\circ - \alpha}{2} + \frac{\alpha + \varphi}{2} + \delta = 180^\circ, \qquad \text{vagyis} \qquad \delta = \frac{\alpha}{2}$$

adódik. Ezek szerint (a P_1P_2 körívhez tartozó középponti és kerületi szögek tétele alapján) a P_3 pont a karikán helyezkedik el, méghozzá éppen a karika függőleges átmérőjének alsó végpontjánál, hiszen az OP_2P_3 háromszög belső szögeinek összegéből (kihasználva, hogy $OP_3P_1\sphericalangle = \varphi/2$):

$$\varepsilon + \frac{\varphi + \alpha}{2} + \frac{\varphi}{2} + \delta = 180^\circ,$$

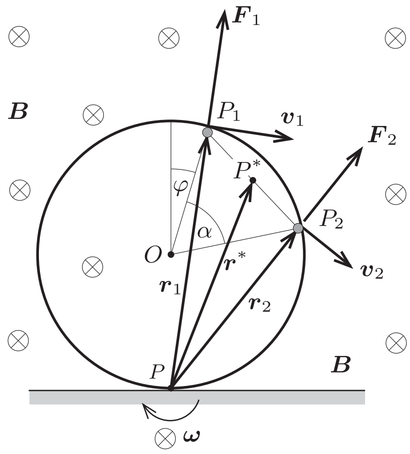
tehát

$$\varepsilon + \alpha + \varphi = 180^\circ$$

adódik. Ezzel beláttuk, hogy a P_3 pont P-vel esik egybe, vagyis a mágneses erők eredője a karika és a talaj érintkezési pontján halad át.

Kasza Bence (Budapest, Budai Ciszterci Szent Imre Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. A karika mozgása minden pillanatban leírható a talaj és a karika érintkezési pontja (a P pont) körüli forgómozgással. (Ezen a ponton átmenő és a karika síkjára merőleges tengelyt *pillanatnyi forgástengelynek* nevezik.) A szögsebesség nagysága nem függ a tengely választásától, értéke bármely tengely, így pl. a karika középpontján átmenő tengely körüli forgásra is $\omega = v_0/R$.



4. ábra

Jelöljük a P pontból P_1-be és P_2-be mutató vektorokat (a karika tetszőleges helyzeténél) $\boldsymbol{r}_1$-gyel és $\boldsymbol{r}_2$-vel, a P_1 és P_2 pontok közötti szakasz felezőpontját pedig P^*-gal (*4. ábra*). A P^* pont a karika O középpontjától $R\left(1+\sqrt{3}/2\right)$ távolságra helyezkedik el, és a P pontból P^*-ba mutató vektor

$$\boldsymbol{r}^* = \frac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2}{2}$$

módon adható meg.

A karika $\boldsymbol{\omega}$ szögsebessége az ábra síkjára merőleges (tehát $\boldsymbol{B}$-vel párhuzamos) vektor, melynek segítségével a sebességek

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_1 \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_2,$$

a megfelelő Lorentz-erők pedig

$$\boldsymbol{F}_1 = Q\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{B} = Q(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{B}, \quad \text{illetve} \quad \boldsymbol{F}_2 = Q\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{B} = Q(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{B}.$$

Kihasználva, hogy $\boldsymbol{r}_{1,2}$ a karika síkjában fekvő vektorok, az egyes erők és az eredőjük így is felírható:

$$\boldsymbol{F}_1 = Q\omega B\,\boldsymbol{r}_1, \qquad \boldsymbol{F}_2 = Q\omega B\,\boldsymbol{r}_2,$$
$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = Q\omega B\,(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) = 2Q\omega B\,\boldsymbol{r}^*.$$

a) A feladat kitűzési ábráján (vagyis a $\varphi = 0$ helyzetben) $|\boldsymbol{r}_1| = 2R$ és $|\boldsymbol{r}_2| = \sqrt{3}R$, így

$$|\boldsymbol{F}_1| = 2Qv_0B, \qquad \text{illetve} \qquad |\boldsymbol{F}_2| = \sqrt{3}\,Qv_0B.$$

b) A mágneses erők eredőjének akkor nincs forgatónyomatéka a karika középpontjára vonatkoztatva, amikor $\boldsymbol{r}^*$ átmegy az O ponton, vagyis amikor $\boldsymbol{r}^*$ függőleges irányú vektor. Ez két esetben, $\varphi = -\alpha/2 = -30°$-nál és $\varphi = \pi - \alpha/2 = -150°$-nál következik be. A töltött golyócskák mindkét helyzetben a függőleges átmérőre nézve szimmetrikusan helyezkednek el. Az eredő erő nagysága

$$|\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2| = 2Q\omega B|\boldsymbol{r}^*| = QBv_0\left(2 \pm \sqrt{3}\right).$$

A pozitív előjel a felső, a negatív pedig az alsó szimmetrikus helyzetnek felel meg. Az eredő erő tehát a *felső helyzetben* lesz nagyobb.

c) Mivel mind az $\boldsymbol{F}_1$, mind pedig az $\boldsymbol{F}_2$ erő hatásvonala áthalad a P ponton, az eredő erő is ezen a ponton halad át, erre a pontra vonatkoztatott forgatónyomatéka a karika tetszőleges helyzetében *nulla.*

Öreg Botond (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn. 12. évf.) és
Sal Kristóf (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn. 11. évf.) dolgozata felhasználásával

36 dolgozat érkezett. Helyes 25 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 8, hiányos (3 pont) 3 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 351. Mérjük meg egy elektrolitkondenzátor „átvezetési" ohmos ellenállását! Mennyire függ ez a rákapcsolt feszültségtől?

(*6 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest

P. 4736. Egy hajó a folyón az egyik hídtól a másik hídig halad, majd azonnal visszaindul. Az oda-vissza úthoz hányszor több időre van szüksége, mintha állóvízben haladna?

(*3 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest

P. 4737. Egy üvegprizma egyik lapjára merőlegesen beeső fénysugár a másik lapon 45°-os törési szögben lép ki. Mekkora a prizma törőszöge, ha a fény sebessége ebben az üvegben 240 000 km/s?

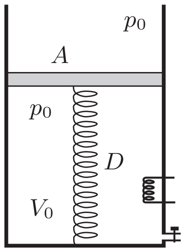
(*3 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 4738. Legalább mekkora sebességgel haladjunk el egy léckerítés mellett, hogy a kerítésen merőlegesen átszűrődő napfényt folytonosan lássuk? A lécek szélessége 5 cm, a réseké 10 cm. Az emberi szem az $\frac{1}{15}$ másodpercnél rövidebb ideig tartó képeket nem képes elkülönítve érzékelni.

(*3 pont*) Közli: *Szász Krisztián,* Budapest

P. 4739. A világ egy olyan helyén, ahol a gravitációs gyorsulás pontosan 10 m/s^2, és semmi sem akadályozza a szabadesést, egy piros és egy zöld színű kő esik egymáshoz közeli függőleges pályán. A piros kő éppen akkor indul, amikor a magasabbról, ugyancsak kezdősebesség nélkül indított zöld kő a piros mellé ér. Kis idő múlva a két kő között 7 m a távolság, majd az innen számított 2 másodperc elteltével ez a távolság 27 m-re nő. Mennyivel magasabbról indult a zöld kő?

(*4 pont*) *Szombathy Miklós* (1940–2014) feladata



P. 4740. Függőleges, alul zárt hengerben lévő súlytalan, súrlódásmentesen mozgó dugattyú alatt a külső légnyomással megegyező, $p_0 = 10^5$ Pa nyomású, $V_0 = 8\ \mathrm{dm}^3$ térfogatú ideális gáz van. A dugattyút az $A = 2\ \mathrm{dm}^2$ keresztmetszetű henger aljával egy $D = 1000$ N/m direkciós erejű rugó köti össze. Egy fizikai kísérlet során a hengeren lévő csapon keresztül a gáz tömegét 50%-kal, az abszolút hőmérsékletét pedig melegítéssel 60%-kal megnöveljük. Határozzuk meg a gáz térfogatát és nyomását a változások után!

(*4 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

P. 4741. A tengerparthoz közeli, magas hegy alján éppen „elfogy" a 20 literes palackban a gáz. Ekkor a szelepet gyorsan elzárjuk, s felvisszük a palackot a hegy tetején lévő kutatóállomásra. Itt újra sikerül használni a gázt. Amikor itt is „kiürül" a tartály, mérleggel megmérjük, s kiderül, hogy a hegy tetején használat közben 4,1 grammal csökkent a palack tömege. A hegy tetején a légnyomás 32 kPa-lal kisebb, mint a tengerszinten. A gáz hőmérséklete a hegy alján és a kutatóállomáson is 27 °C, a levegő sűrűsége a tengerszinten 1,2 kg/m^3.

a) Milyen gáz lehetett a palackban?

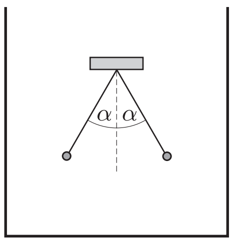
b) Milyen magas a hegy?

(*4 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 4742. Egy C kapacitású, feltöltött kondenzátor W elektromos energiát tárol. Ekkor egy második, töltetlen kondenzátort kapcsolunk hozzá párhuzamosan. Mekkorának válasszuk a második kondenzátor kapacitását ahhoz, hogy ez a kondenzátor az állandósult állapot beállta után a lehető legtöbb elektromos energiát tárolja?

E választás esetén mekkora lesz a két kondenzátorban tárolt összenergia?

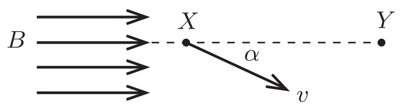
(*4 pont*) Közli: *Bilicz Sándor,* Budapest



P. 4743. Közös pontban felfüggesztett két egyenlő hosszú szigetelő fonál mindegyikén egy-egy kicsiny ebonitgolyó függ, melyeken azonos előjelű és nagyságú elektromos töltés van. A fonalak $2\alpha = 60°$ szöget zárnak be egymással, amikor az ingák egy edény belsejében, de levegőben vannak egyensúlyi helyzetben. Ezután az edény feltöltjük petróleummal annyira, hogy a golyók teljesen a petróleumban legyenek, távol az edény falától és a folyadék felszínétől. Mekkora lesz most a fonalak által bezárt szög?

Adatok: Az ebonit sűrűsége 1200 kg/m^3, a petróleumé 820 kg/m^3. A petróleum relatív dielektromos állandója: $\varepsilon_r = 2$.

(*5 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron



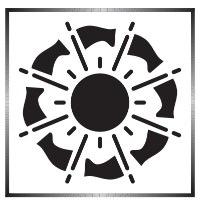
P. 4744. A $B = 0{,}02$ tesla indukciójú homogén mágneses térben ugyanazon B-vonalon két pont (X és Y) helyezkedik el egymástól 10 cm távolságra. Az X ponton egy 800 V feszültséggel felgyorsított elektron halad át, sebessége a B-vonallal α szöget zár be. Mekkora lehet az α szög, ha az elektron az Y ponton is áthalad?

(*5 pont*) *Vermes Miklós* (1905–1990) feladata

P. 4745. Fizikaórán a decibel skáláról tanulnak a diákok. Egyikük megkérdezi a tanárt, hogy van-e maximális erősségű hanghullám. A tanár válasza: „Van! A hangerősség elméleti felső határa 194 dB." Hogyan kaphatjuk meg ezt a furcsa számértéket?

(*5 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Budapest

P. 4746. A fény transzverzális hullám voltának bizonyítására szokás bemutatni a következő kísérletet:



Természetes fényből előállított keskeny, párhuzamos nyalábot ejtünk egy sík üveglapra olyan szögben, hogy a megtört és a visszavert fénysugár merőleges legyen egymásra. Az üveglapról visszaverődő fény útjába egy másik üveglapot helyezünk úgy, hogy a beesési szög itt is ugyanakkora legyen, mint az előbb. Ha ezt a második üveglapot a ráeső fénysugár mint tengely körül elforgatjuk, előállhat olyan eset, hogy erről már egyáltalán nem verődik vissza fénysugár.

a) Hogyan bizonyítja ez a kísérlet a fény transzverzális hullám voltát?

b) Mekkora beesési szöggel esik a fénysugár az üveglapokra, ha az üveg törésmutatója $n = 1{,}5$?

c) Mekkora szöget zár be a két üveglap síkja egymással akkor, amikor a második üveglapról nem verődik vissza fénysugár?

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 4747. Egy 40 cm hosszúságú lánc két végpontját azonos magasságban rögzítjük az *ábrán* látható módon. Mekkora a lánc görbületi sugara

a) a legalsó pontjában,

b) a felfüggesztési pontokban?

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 2015. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 65. No. 5. May 2015)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition C (see page 289): **Exercises up to year 10: C. 1294.** Express the fraction $\frac{13}{38}$ in the form $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$, where m and n are positive integers. **C. 1295.** The angles at vertices C and D of a quadrilateral $ABCD$ are equal, and the intersection E of the interior angle bisectors drawn at vertices A and B lies on the side CD. Prove that E bisects side CD. **Exercises for everyone: C. 1296.** Find the angles of the acute-angled isosceles triangle in which the reflection of the centroid about the foot of an altitude lies on the line of the base. **C. 1297.** The main attractions of the show in a circus are the performances of a lion and an elephant. However, these performances cannot be accomplished if the animals are not in the mood. The lion appears on stage in $\frac{4}{5}$ of the shows, and the elephant only appears in $\frac{3}{4}$ of the shows. The circus is so lucky as to be able to show at least one of the animals in 99% of the shows. What is the probability of both animals appearing in a show? **C. 1298.** The accompanying *diagram* shows a park with line segments representing the footpaths (in the diagram "Bejárat" = "Entrance", "Kijárat" = "Exit"). In how many ways is it possible to get from the entrance to the exit if it is not allowed to leave the footpaths, and each footpath is walked at most once? **Exercises upwards of year 11: C. 1299.** Solve the equation $x^3+(1-3b)x^2+\big(3b^2+2b-6\big)x-b^3+b^2-6b+9=0$, if $x-b\geqslant 0$. **C. 1300.** The lengths of the sides of a convex quadrilateral, in this order, are $\sqrt{a}$, $\sqrt{a+3}$, $\sqrt{a+2}$ and $\sqrt{2a+5}$. The length of each diagonal is $\sqrt{2a+5}$. Determine the greatest angle of the quadrilateral.

New exercises – competition B (see page 290): **B. 4714.** Given 2015 points in the plane, show that if every four of them form a convex quadrilateral then the points are the vertices of a convex 2015-sided polygon. (*4 points*) **B. 4715.** Find all pairs of positive integers (a,b) such that $a^{(b^2)}=b^a$. (*5 points*) **B. 4716.** The rhombus $ABFE$ determined by sides AB and AE is cut out of a regular pentagon $ABCDE$. Determine the centre of mass of the remaining concave pentagonal plate $BCDEF$. (*3 points*) (Suggested by *P. Dombi,* Pécs) **B. 4717.** Solve the equation $|1-x|=\left|2x-57-2\sqrt{x-55}+\frac{1}{x-54-2\sqrt{x-55}}\right|$. (*4 points*) (Suggested by *B. Bíró,* Eger) **B. 4718.** The midpoint of edge $B'C'$ of a cube $ABCDA'B'C'D'$ is E, and the midpoint of edge $C'D'$ is F. The plane AEF divides the cube into two parts. Find the ratio of the volumes of the two parts. (*5 points*) **B. 4719.** Show that

$$\sum_{j=0}^{b}\sum_{i=j}^{a-b+j}\binom{i}{j}\binom{a-i}{b-j}=(a+1)\binom{a}{b}$$

for all positive integers $a\geqslant b$. (*5 points*) (Suggested by *I. Porupsánszki,* Miskolc) **B. 4720.** Let a and n denote positive integers such that $a^n-1\mid n$. Prove that the numbers $a+1$, a^2+2, $\dots$, a^n+n all leave different remainders when divided by n. (*6 points*) **B. 4721.** A circle k touches the legs AB and AC of an isosceles triangle ABC, and intersects the base BC at K and L. Line segment AK intersects the circle k again at point M. The reflections of point K in B and in C are P and Q, respectively. Prove that k is tangent to the circumscribed circle of triangle PMQ. (*6 points*) **B. 4722.** Each permutation of an n-element set is coloured in either red, white or green. Let N_{RWG} denote the number of ways to perform a red permutation followed by a white permutation and then a green permutation, such that each element is restored to its initial position at the end. Analogously, let N_{GWR} denote the number of ways to perform a green permutation followed by a white permutation and then finally a red permutation, such that each element is restored to its initial position. Show that $N_{\mathrm{RWG}} = N_{\mathrm{GWR}}$. (*6 points*)

New problems – competition A (see page 292): **A. 644.** Let $f(x,y)$ be a polynomial with two variables and integer coefficients such that f is constant neither in x- nor in y-direction. Prove that $\max_{a,b\in[-2,2]} \left|f(a,b)\right| \geqslant 4$. (Based on the idea of *Tamás Erdélyi,* College Station, Texas) **A. 645.** Do there exist infinitely many (not necessarily convex) 2015-gons in the plane such that every three of them have a common interior point, but no four have a common point? **A. 646.** Ginger and Rocky play the following game. First Ginger hides two bones in the corners of a rectangular garden. She may dig 45 cm deep altogether, that is, she may either hide the two bones in two different corners, where the sum of their depths may be at most 45 cm, or she may hide them in the same place, both bones at a maximum depth of 45 cm. She levels the ground carefully so that it is impossible to see where she has dug. Then Rocky may dig holes with a total depth of 1 m. Rocky's goal is to maximize the probability of finding both bones, while Ginger's goal is to maximize the probability of keeping at least one for herself. (a) Show that if Ginger plays well she can achieve a probability of more than 1/2 for at least one bone remaining hidden, independently of Rocky's search strategy. (b) What are the chances of Ginger's success if both dogs play optimally? (Proposed by: *Endre Csóka,* Warwick)

Problems in Informatics

(see page 293)

I. 376. Crossword puzzles are popular games and have many variants. In its usual form, words are separated by black squares. When words are entered correctly, solutions can be read horizontally from left to right and vertically from top to bottom. The numbering of the squares begins in the top left corner where the first horizontal or vertical solution word should start, then each square in the puzzle is numbered where a horizontal or vertical word starts. The puzzles in our task do not contain words with one letter. If a square contains the first letter of a word that is simultaneously a horizontal and a vertical solution, then the square gets only one number.

The example shows an empty crossword and its numbered counterpart.

To test your solution, the `halo.txt` file can be downloaded from our web site, containing the description of a crossword of size $N \times M$ ($5 \leqslant N, M \leqslant 15$). The first line of the file contains the values of N and M separated by a space. The following N lines describe the squares: the characters "`f`" and "`.`" represent the black and the empty squares, respectively.

Your program `i376` should solve the following tasks.

If an output is displayed on the screen, the number of the actual task should also appear. Whenever the program prompts the user to enter some data, the type of data should also be displayed; for example, in the 4th task: "Task #4 – Please enter the coordinates of a square: ". Diacritical marks in the output can be omitted.

1. By using the data read from the file `halo.txt`, solve the following tasks.
2. Display on the screen the number of black and the number of empty squares in the puzzle.
3. Determine which row contains the most black squares. If there is more than one such row, the one with the smallest row number should be displayed. Then repeat this counting for the columns.
4. Prompt the user to enter the coordinates of a square in the crossword (e.g. 10h), then display whether it will get a number or not.

5. Display on the screen the number of words with letters $2, 3, \ldots, 10$ that can be placed horizontally in the puzzle.
6. Number the squares in the puzzle according to the rules, then write the result into the file `szamozott.txt`. The content of each square should occupy 3 characters (see the "Példa" example below).
7. Display the number of definitions corresponding to the horizontal and to the vertical words.

The source code (`i376.pas`, `i376.cpp`, ...) of your program with a short documentation (`i376.txt`, `i376.pdf`, ...) of your program and solution, also describing which developer environment to use for compiling the source, should be submitted.

I. 377. The site `oktatas.hu` publishes the final results of the OKTV contests in each year:

`http://www.oktatas.hu/kozneveles/tanulmanyi_versenyek/oktv_kereteben/dijazottak_eredmenyek`

Results for each subject are available as PDF documents. Although one can perform simple text search in this format, but advanced search or statistical processing of the data is not supported.

Your task is to design a database to store the contest results, as well as the process to transfer data from the files to the database. To test your work, you should load the data corresponding to the last 5 years of the applied information technology contest into your database.

You can use only the files available at the web address given above. The necessary conversion steps may be performed by using any (if possible, freely available) program.

Since end-users use the default file format of Microsoft Access, or MySQL dump files, your database should have any of these formats.

The description of your solution (`i377.pdf`) and your database (`i377.accdb`, `i377.sql`) should be submitted in a compressed file (`i377.zip`). Your description should contain an image modeling the database (i.e. the connections between the tables), the name and version number of the database application, your reproducible method to process the PDF files, and any technical or content-related issues you encountered together with their solutions.

I. 378. We are given a black-and-white image of $N \times M$ pixels, described by 0s and 1s arranged in a grid. An image is considered to be *nicer,* if there are more adjacent pixels that are identical. In this exercise, two pixels are adjacent if they share a common edge. Your goal is to make the original image nicer by negating certain pixel values. Negating the value of a single pixel costs Q units of money. However, in the final image, every pair of adjacent pixels with different colors will result in an additional penalty of P units of money.

For some given images you should find the transformation such that the sum of the P and Q quantities is the smallest.

Without submitting a program, your task now is the convert the three input files `in.1`, `in.2` and `in.3` (downloadable from our web site) to `out.1`, `out.2` and `out.3`. The first line of an input file contains 4 integers (N, M, P and Q), describing the number of rows and columns of the grid, and the cost and penalty parameters. The image itself is described in the following N lines, each containing M characters. The output should have a similar format with an $N \times M$ grid of pixel values. You are not required to submit an optimal solution, but solutions will compete against one another: the solution with the smallest total $P + Q$ value for the 3 images will obtain 10 points, and other, suboptimal solutions will get proportionally less points.

A sample input file is presented below, together with a possible (not necessarily optimal) transformation. The total cost $P+Q$ here is $6\cdot 2+3\cdot 3=21$ units of money.

The three output files should be submitted in a compressed file (`i378.zip`).

S. 99. We notice that N cracks ($1\leqslant N\leqslant 5000$) appeared on a wall of length M ($1\leqslant M\leqslant 100\,000$, with integer M). In this exercise, cracks are modeled as points, and their location is given by some integer coordinates x ($1\leqslant x\leqslant M$) measured from one end of the wall. Our goal is to cover all cracks on the wall with paint.

By opening a bucket of paint labeled "w", we can paint a wall segment of length exactly w, bounded by the coordinates x_0 and x_1 ($w=x_1-x_0+1$). Within this wall segment we can of course cover the intact parts of the wall as well, even multiple times. We keep on opening the buckets and painting until all cracks are covered. For each integer w ($1\leqslant w\leqslant M$), we have exactly one bucket of paint labeled "w" and with known cost b_j. Painting a longer wall segment may cost less than painting a shorter one; and it may also happen that the price of a bigger bucket is less than or equal to the price of a smaller bucket. Your task is to cover all cracks on the wall for the minimum cost.

Your program should read the values of N and M from the first line of the standard input, then the a_i integers (describing the crack locations) from the following N lines. The next M lines contain the paint bucket prices b_j corresponding to the consecutive lengths. The first line of the standard output should contain the minimum cost necessary to complete the wall painting. To save space, instead of displaying numbers in N and M input lines, they appear in one line and are separated with `/` characters.

In the example, "Példa bemenet" is a sample input, while "Példa kimenet" is the corresponding output. In this situation, 3 paint buckets with labels "4", "1" and "2" are sufficient to paint all the cracks; the cost is $4+2+3=9$.

Scoring and bounds. You can obtain 1 point for a brief and proper documentation clearly describing your solution. Nine further points can be obtained provided that your program solves any arbitrary valid input within 1 second of running time.

The source code (`s99.pas`, `s99.cpp`, ...) without the .exe or any other auxiliary files generated by the compiler but with a short documentation (`s99.txt`, `s99.pdf`, ...), also describing which developer environment to use for compiling your source, should be submitted in a compressed file `s99.zip`.

Problems in Physics

(see page 313)

M. 351. Measure the equivalent series resistance of an electrolytic capacitor. How does it depend on the applied voltage?

P. 4736. A ship travels along the river from one bridge to another, and when it reaches the second bridge it turns back immediately. By what factor is the time of the round trip on the river greater than that of in still water? **P. 4737.** A light ray is incident on one of the faces of a glass prism perpendicularly to it. The angle of refraction of the light ray on another face of the prism is 45°. What is the apex angle of the prism if the speed of light in this glass prism is 240 000 km/s? **P. 4738.** At what minimum speed should we have to go next to a picket fence, in order to sense the light, passing the fence perpendicularly, continuous? The width of the pickets is 5 cm and the width of the gaps between them is 10 cm. The human eye cannot distinguish between images which lasts less than one-fifteenth of a second. **P. 4739.** A red and a green stone fall freely next to each other along vertical paths at a place of the universe where the acceleration due to gravity is exactly 10 m/s^2 and where nothing prevents free fall. The red stone just starts falling when the green stone reaches it. The green stone also started from rest but from a higher position. After a while the distance between the two stones is 7 m, and then after two more seconds elapses the distance between them will increase to 27 m. How much higher did the green stone start? **P. 4740.** There is a sample of ideal gas in a vertical cylinder, which is closed at its lower base. At the top there is a massless frictionlessly moveable piston. The volume of the sample of ideal gas is $V_0 = 8\ \mathrm{dm}^3$, and its pressure is the same as the ambient air pressure, which is $p_0 = 10^5$ Pa. The piston is attached to the bottom of the cylinder with a spring of spring constant $D = 1000$ N/m. The area of the bottom of the cylinder is $A = 2\ \mathrm{dm}^2$. During a physics experiment the mass of the gas is increased by 50% through a tap on the cylinder, and by heating the absolute temperature of the gas is increased by 60%. Determine the volume and the pressure of the gas after these changes. **P. 4741.** A 20-litre gas cylinder just "runs out" of gas at the foot of a high hill next to the seashore. Then immediately the valve is closed, and the gas cylinder is carried up to the research laboratory at the top of the hill. Here some gas from the cylinder can again be used. When finally the gas cylinder is exhausted again its mass is measured, and it turns out that due to using the gas at the top of the hill its mass decreased by 4.1 grams. The air pressure at the top of the hill is 32 kPa less than at sea level. Both at the sea level and at the laboratory the temperature of the gas is 27 °C, and the density of air at sea level is 1.2 kg/m^3. *a*) What type of gas was in the cylinder? *b*) How high is the hill? **P. 4742.** A capacitor of capacitance C is charged, and it stores W electrical energy. Then another neutral capacitor is connected to it in parallel. What should the capacitance of the second condenser be in order that after the equilibrium is gained the energy of the second condenser is to be the greatest? What will the total energy stored in the two condensers be in this case? **P. 4743.** Two insulating threads, which have the same lengths, are suspended at the same point and at their lower end of each, there is a small ebony ball attached. The balls are given the same amount of like charges. The angle between the threads is $2\alpha = 60^\circ$ when the pendulums are inside a container at rest in air. Then the container is filled with petroleum, such that both balls are in the petroleum, far from the walls of the container and from the surface of the liquid. What is the angle between the threads now? *Data:* The density of ebony is 1200 kg/m^3, the density of petroleum is 820 kg/m^3. The relative dielectric constant of petroleum is $\varepsilon_\mathrm{r} = 2$. **P. 4744.** There are two points (X and Y) on the same B-line at a distance of 10 cm in a uniform magnetic field of magnetic induction $B = 0.02$ tesla. An electron, which was accelerated through a potential difference of 800 V, passes point X, such that its velocity encloses an angle of α with the induction line. What may the value of α be if the electron passes point Y as well? **P. 4745.** The topic of a physics lesson is the decibel scale. One of the students asks the teacher whether there is an upper limit of the maximum intensity sound. The answer is "yes, the theoretical upper limit for the intensity of sound is 194 dB". How is this strange value gained? **P. 4746.** The following experiment is usually shown in order to demonstrate that light is a transverse wave: A narrow parallel beam of natural light hits a plane glass, such that the reflected and the refracted rays are perpendicular to each other. Then another plane glass is used to reflect the reflected ray, such that the angle of incidence is the same as in the previous case. If this latter glass is rotated about an axis which coincides with the incident light ray, then it may happen that there is no reflected ray from this piece of glass. *a*) How does this experiment proves that light is transverse wave? *b*) What is the angle of incidence, if the refractive index of the glass is $n = 1.5$? *c*) What is the angle between the planes of the two pieces of glass when there is no reflected ray from the second glass? **P. 4747.** The two endpoints of a 40 cm long chain are fixed at the same height as shown in the *figure*. What is the radius of the curvature of the chain at *a*) its lowest point; *b*) the points where the chain is suspended?