KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

65. évfolyam 4. szám Budapest, 2015. április

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: NAGY GYULA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: OLÁH VERA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Kiadó igazgatója: KULCSÁR CECÍLIA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.,
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

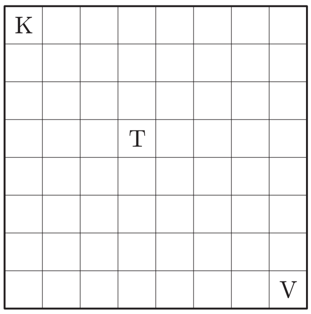
A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, V. emelet 5.106.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, V. emelet 5.106.,
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

1. Bizonyítsuk be, hogy $\lg 2$ irracionális. (*11 pont*)



2. *a*) Hány különböző útvonalon juthatunk el a 8×8-as sakktáblán a bal felső sarokban lévő, az *ábrán* K-val jelölt mezőről a jobb alsó sarokban lévő, V-vel jelölt mezőre, ha bármely érintett mezőről csak az alatta lévő, vagy a jobb oldalán lévő mezőre léphetünk?

b) Hány olyan útvonal van ezek között, amely a kiinduló mezőtől számított negyedik oszlop és negyedik sor kereszteződésében lévő, T-vel jelölt mezőt nem érinti? (*12 pont*)

3. *a*) Bizonyítsuk be, hogy ha az (a_n) végtelen számtani sorozat elemei természetes számok és ezek között van köbszám, akkor a sorozatnak végtelen sok köbszám eleme van.

b) Ha például a sorozatban szerepel a 125, és a sorozat differenciája 3, akkor lehet-e 125-nél kisebb köbszám a sorozatban? (*10 + 4 pont*)

4. Bútorok hegyes sarkai sérülést okozhatnak. Különösen kisgyermekekre jelentenek veszélyt egy asztal sarkai. Éppen ezért az 1 m × 1 m-es asztalunk lapját lekerekítettük az asztallap síkjára merőlegesen tartott fűrésszel olyan körívek mentén, amelyek középpontja egybeesik a négyzet alakú felület középpontjával. A négy oldalél mindegyikéből 80 cm hosszú egyenes szakasz maradt meg. Az egyenletes vastagságú asztallap tömege eredetileg 7 kg volt. Mekkora lett a tömege az átalakítás után? (*14 pont*)

II. rész

5. Egy dobókockával kétszer dobunk.

a) Hány elemi esemény alkotja az eseményteret?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege legalább 9?

c) Mekkora annak a feltételes valószínűsége, hogy a dobott számok összege legalább 9, ha az első dobott szám legalább 5?

d) Mekkora annak a feltételes valószínűsége, hogy a dobott számok összege legalább 9, ha az első dobott szám legfeljebb 4? (*2 + 4 + 5 + 5 pont*)

6. Az $f(x)=x^3+ax^2+2x$ függvényről tudjuk, hogy inflexiós érintője párhuzamos az $x+y=0$ egyenletű egyenessel. Határozzuk meg az a együttható értékét. Igazoljuk, hogy a függvény inflexiós pontja az x-tengelyen van. (*16 pont*)

7. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\leqslant\sqrt[4]{8}\,,$$

ha $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$. (*16 pont*)

8. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott a beírt és a körülírt körének sugara. Mi a megoldhatóság feltétele? (Elegendő a szerkesztés menetét leírni.) (*16 pont*)

9. Egy harckocsizó alakulatnál szolgáló férfiak 40 fős csoportjában a testmagasság (x_i) és a testtömeg (y_i) adatait a következő táblázat tartalmazza:

testmagasság x_i [cm]	testtömeg y_i [kg]
162	70, 77
163	61
164	58, 64, 68
165	73
166	62, 65, 70
167	65, 66, 75, 80
168	63, 69, 71, 79
169	64, 70, 75, 76
170	58, 61, 71, 75, 75, 88
171	67, 68, 75, 77
172	61, 65, 70, 84
173	58, 77
174	63, 80

a) Ha a kg-ban mért testtömeget a m-ben mért testmagasság négyzetével elosztjuk, akkor az úgynevezett testtömeg-indexet kapjuk. A katonaorvos egy bizonyos egész számnál nagyobb testtömeg-index esetén minősít valakit túlsúlyosnak. Mekkora ez az érték, ha az orvos szerint a szóbanforgó csoportban a túlsúlyosok aránya 10%?

b) Számítsuk ki az $\overline{x}$ és $\overline{y}$ átlagokat. Jelölje u azoknak az (x_i,y_i) értékpároknak a számát, amelyeknél a két adat az átlaghoz képest ugyanabban az irányban tér el, v pedig azoknak a számát, ahol az eltérés ellentétes irányú. Számítsuk ki az $\frac{u-v}{u+v}$ hányadost. Mire következtethetünk ebből? (*8 + 8 pont*)

Loránt László
Budapest

Megoldásvázlatok a 2015/3. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. *A Bergengóc ötvösök kétféle fémből készítik ékszereiket.*

A holdfém sűrűsége 5000 kg/m^3*, beszerzési ára* 1000 ft/g (*a* „ft” *a Bergengóc fizetőeszköz, a fémtallér rövidítése*).

A napfém sűrűsége 6000 kg/m^3*, beszerzési ára* 2000 ft/g.

A fémekből kétféle ötvözetet készítenek. Az első ötvözet 1 cm^3*-éhez* 0,6 cm^3 *holdfémet és* 0,4 cm^3 *napfémet használnak fel, míg a második ötvözet* 1 cm^3*-éhez* 0,4 cm^3 *holdfémet és* 0,6 cm^3 *napfémet használnak fel* (*az ötvözés során nem kell anyagveszteséggel számolni*).

a) *Mennyi a kétféle ötvözet grammonkénti anyagköltsége?*

Az elkészült ékszerek árát úgy kalkulálják, hogy az ékszer grammban adott tömegét megszorozzák az adott ötvözet grammonkénti anyagköltségével, és erre tesznek még rá 20%*-ot.*

b) *Mennyi annak az ötvösnek a haszna, aki a* 6,3 grammos *első ötvözetből álló nyakláncot tévedésből úgy adja el, mintha a második ötvözetből készült volna?* (*11 pont*)

Megoldás. *a*) A kétféle fém cm^3-enkénti anyagköltsége:

$$a_1 = 1000\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}}\right)\cdot 5\ \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) = 5000\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{cm}^3}\right) \quad \text{és}$$

$$a_2 = 2000\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}}\right)\cdot 6\ \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) = 12\,000\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{cm}^3}\right).$$

A két ötvözet cm^3-enkénti tömege és anyagköltsége:

$$m_1 = 0{,}6\ \left(\text{cm}^3\right)\cdot 5\ \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) + 0{,}4\ \left(\text{cm}^3\right)\cdot 6\ \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) = 5{,}4\ \text{g} \quad \text{és}$$

$$k_1 = 0{,}6\ \left(\text{cm}^3\right)\cdot 5000\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}}\right) + 0{,}4\ \left(\text{cm}^3\right)\cdot 12\,000\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}}\right) = 7800\ \text{ft}, \quad \text{illetve}$$

$$m_2 = 0{,}4\ \left(\text{cm}^3\right)\cdot 5\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}}\right) + 0{,}6\ \left(\text{cm}^3\right)\cdot 6\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}}\right) = 5{,}6\ \text{g} \quad \text{és}$$

$$k_2 = 0{,}4\ \left(\text{cm}^3\right)\cdot 5000\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}}\right) + 0{,}6\ \left(\text{cm}^3\right)\cdot 12\,000\ \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}}\right) = 9200\ \text{ft}.$$

Így a grammonkénti anyagköltségek:

$$k_{1\text{g}} = \frac{7800\ \text{ft}}{5{,}4\ \text{g}} \approx 1444{,}4\ \frac{\text{ft}}{\text{g}}, \quad \text{és} \quad k_{2\text{g}} = \frac{9200\ \text{ft}}{5{,}6\ \text{g}} \approx 1642{,}9\ \frac{\text{ft}}{\text{g}}.$$

b) 6,3 gramm anyagköltsége az első ötvözetből:

$$\frac{7800\ \text{ft}}{5{,}4\ \text{g}}\cdot 6{,}3\ \text{g} = 9100\ \text{ft}.$$

A nyaklánc eladási ára:

$$\frac{9200\ \text{ft}}{5{,}6\ \text{g}} \cdot 6{,}3\ \text{g} \cdot 1{,}2 = 12\,420\ \text{ft}.$$

Így az ötvös haszna: $12\,420 - 9100 = 3320$ ft.

2. *Hány olyan (egybevágóságtól eltekintve) különböző téglalap van, melynek oldalai* (cm-*ben*) *egész számok, míg területe és kerülete* (cm^2-*ben és* cm-*ben*) 100-*nál nem nagyobb négyzetszám?* (*12 pont*)

Megoldás. A téglalap oldalai: $a \leqslant b$, így $a \leqslant 10$. A területre és a kerületre: $a \cdot b = n^2 \leqslant 100$ és $2(a+b) = k^2 \leqslant 100$, így $nk \leqslant 10$.

I. Ha $a = b$, akkor a téglalap négyzet, így a terület mindig négyzetszám, a kerület pedig $4a = k^2$ miatt pontosan akkor négyzetszám, ha $a = b$ négyzetszám. Vagyis az 1×1-es, 4×4-es, 9×9-es téglalap megfelelő.

II. Ha $a < b$, akkor $a \leqslant 9$ is teljesül. Az esetet két részre osztjuk:

II.1. Ha $a = 1$, akkor $b = n^2$, és a kerületből $2 + 2n^2 = k^2$. Mivel ekkor k páros négyzetszám, így 4-gyel is osztható, de ez csak akkor lehet, ha n páratlan. A lehetséges eseteket ($n = 3, 5, 7, 9$) végigpróbálva csak $n = 7$ ad jó megoldást. Ekkor $a = 1$, $b = 7^2 = 49$, vagyis az 1×49-es téglalap is jó.

II.2. Ha $1 < a < b$, akkor a az n^2-nek egy n-nél kisebb pozitív osztója és $b = \frac{n^2}{a}$. Ez az a érték az $n = 2, 3, 5, 7$ prímek esetén csak $a = 1$ lehet, ezt pedig már megvizsgáltuk. Nézzük végig a többi esetet is:

Ha $n = 4$: $a = 2$ esetén $2(a+b) = 2(2+8) = 20 \neq k^2$.
Ha $n = 6$: $a = 2$ esetén $2(a+b) = 2(2+18) = 40 \neq k^2$, míg
$a = 3$ esetén $2(a+b) = 2(3+12) = 30 \neq k^2$, míg
$a = 4$ esetén $2(a+b) = 2(4+9) = 26 \neq k^2$.
Ha $n = 8$: $a = 2$ esetén $2(a+b) = 2(2+32) = 68 \neq k^2$, míg
$a = 4$ esetén $2(a+b) = 2(4+16) = 40 \neq k^2$.
Ha $n = 9$: $a = 3$ esetén $2(a+b) = 2(3+27) = 60 \neq k^2$.
Ha $n = 10$: $a = 2$ esetén $2(a+b) = 2(2+50) = 104 > 100$, míg
$a = 4$ esetén $2(a+b) = 2(4+25) = 58 \neq k^2$, míg
$a = 5$ esetén $2(a+b) = 2(5+20) = 50 \neq k^2$.

Vagyis összesen négy ilyen téglalap van, ezek méretei: 1×1, 4×4, 9×9, és 1×49.

3. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*

$$a)\qquad \log_4(x+1) + \log_4(x+2) = \log_2 \sqrt{6},$$

$$b)\qquad \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 7x + 12} = 1.$$

(*14 pont*)

Megoldás. A logaritmus definíciója miatt az $x + 1 > 0$ feltételnek teljesülnie kell, amiből $x > -1$. Használva a logaritmus azonosságait, a jobb oldalt is 4-es alapra alakítva:

$$\log_4\big((x+1)(x+2)\big) = \log_4 6.$$

Mivel a logaritmus-függvény szigorúan monoton függvény, innen $(x+1)(x+2) = 6$, és így $x^2 + 3x - 4 = 0$, amiből $x_1 = 1$ és $x_2 = -4$ adódik.

Ezek közül csak az első megoldás megfelelő, vagyis az egyenlet megoldása: $x = 1$.

b) A törtek számlálóit és nevezőit szorzattá alakítva:

$$\frac{(2x-1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}-\frac{(2x+4)(x-3)}{(x-3)(x-4)}=1.$$

Innen $x \notin \{1; 2; 3; 4\}$.

Egyszerűsítve a törteket, majd a maradék nevezőkkel szorozva:

$$(2x-1)(x-4)-(2x+4)(x-2)=(x-2)(x-4).$$

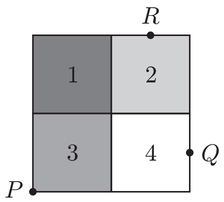
Elvégezve a zárójelfelbontásokat:

$$2x^2-9x+4-2x^2+8=x^2-6x+8,$$

innen $x^2+3x-4=0$, amiből $x_1=1$ és $x_2=-4$ adódik.

Ezek közül csak a második megoldás megfelelő, vagyis az egyenlet megoldása: $x=-4$.

4. *Peti tíz egyforma 2 egység élű építőkockából tornyot épít. A torony alapja* 4 cm × 4 cm*-es négyzet, de az egyes részeinek más-más a magassága.*



(*A felülnézeti* ábra *azt mutatja, hogy egy-egy rész hány darab* 2 × 2 × 2 *cm-es kockából áll.*)

Az ábrán látható P, Q, R pontok az egyes részek legmagasabban lévő építőkockáinak a felső lapján vannak. P az egyik négyzetlap csúcsa, míg Q és R a felső négyzetlapok megfelelő éleinek felezőpontjai.

a) *Mekkora a* (*térbeli*) *PQR háromszög P-nél lévő szöge?*

b) *Peti* 4 *piros,* 3 *fehér,* 2 *zöld és* 1 *kék kockából építi meg a fenti tornyot.*

Hányféle különböző felülnézeti ábra áll így elő? (*A nem identikus egybevágósági transzformációval egymásba vihető ábrákat különbözőnek tekintjük.*)

(*14 pont*)

Megoldás. *a*) Az a, b, c élhosszú téglatest testátlóinak hossza $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

A P, Q, és R pontok között futó térbeli szakaszok tekinthetők a megfelelő téglatestek testátlóinak: PQ-nál a téglatest élei 2, 4 és 1; QR-nél 3, 4 és 1; RP-nél pedig 3, 4 és 2.

Ezek alapján a P, Q, R pontok között lévő távolságok:

$$r=d(PQ)=\sqrt{21}\,,\quad p=d(QR)=\sqrt{26}\,,\quad q=d(RP)=\sqrt{29}\,.$$

Koszinusz-tétellel kiszámoljuk a P-nél lévő (p-vel szemközti) γ szöget:

$$p^2=q^2+r^2-2qr\cos\gamma,\quad \text{így}\quad \cos\gamma=\frac{q^2+r^2-p^2}{2qr}=\frac{29+21-26}{2\sqrt{29}\,\sqrt{21}}=\frac{12}{\sqrt{609}},$$

amiből $\gamma\approx 60{,}9^\circ$.

b) A piros, fehér, zöld, kék színeket P, F, Z, K betűvel jelölve a feladat ekvivalens azzal, hogy 4 db P, 3 db F, 2 db Z és 1 db K betűből hányféle 4 betűs „szó” képezhető. Vizsgáljuk meg a lehetséges eseteket aszerint, hogy a felülnézeti rajzon a színek hogy látszódnak.

I. Valamely színből 4 látható. Ekkor a színek száma rendre 4, 0, 0, 0. Mivel csak a P-ből van 4 darab, ezért ez 1 eset.

II. Valamely színből 3 látható. A színek száma ekkor 3, 1, 0, 0. Az első szín kettőből (P, F), a második szín háromból választható, vagyis hatféleképpen választhatunk színt. Ha a színeket már kiválasztottuk, a négybetűs szó $\frac{4!}{3!}=4$-féleképpen képezhető. Így itt $6\cdot 4=24$ eset van.

III. Valamely színből 2 látható. Ekkor a színek száma 2, 2, 0, 0 vagy 2, 1, 1, 0. Az első esetben a két látható szín háromból (P, F, Z) választható $\binom{3}{2}=3$-féleképpen. Ha a színeket már kiválasztottuk, a négybetűs szó $\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$-féleképpen képezhető. Így itt $3\cdot 6=18$ eset van. A második esetben az első szín háromból (P, F, Z), a kimaradó (negyedik) szín szintén háromból választható, vagyis a színeket kilencféleképpen választhatjuk. Ha a színeket már kiválasztottuk, a négybetűs szó $\frac{4!}{2!}=12$-féleképpen képezhető, így itt $9\cdot 12=108$ eset van.

IV. Végül, ha minden színből 1 látható, akkor nyilván $4!=24$ eset van.

Vagyis összesen $1+24+18+108+24=175$-féle felülnézeti ábra van.

II. rész

5. *a) Igazoljuk, hogy a következő két sorozat konvergens, és közös a határértékük:*

$$a_n=\frac{6n^2-n-1}{2n^2+n+1},\qquad b_n=\sqrt{n^2+6n+12}-n.$$

b) Igazoljuk, hogy a fenti a_n sorozat minden tagja kisebb a fenti b_n sorozat valamennyi tagjánál. (*16 pont*)

Megoldás. *a)* A számláló és a nevező minden tagját osztva n^2-tel:

$$a_n=\frac{6n^2-n-1}{2n^2+n+1}=\frac{6-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

Mind a számlálóban, mind a nevezőben az első tagok kivételével nullsorozatról van szó, így $a_n\to\frac{6}{2}=3$.

A másik sorozatot a konjugáltjával bővítve:

$$b_n=\frac{\left(\sqrt{n^2+6n+12}-n\right)\left(\sqrt{n^2+6n+12}+n\right)}{\sqrt{n^2+6n+12}+n}.$$

Innen:

$$b_n=\frac{6n+12}{\sqrt{n^2+6n+12}+n}=\frac{6+\frac{12}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n}+\frac{12}{n^2}}+1}\ \to\ \frac{6}{1+1}=3.$$

b) Az első sorozatnál mind a számláló, mind a nevező mindig pozitív, és mivel

$$6n^2-n-1<6n^2+3n+3=3\left(2n^2+n+1\right),$$

azért $a_n<3$ minden n-re.

A második sorozatnál

$$b_n=\sqrt{n^2+6n+12}-n>\sqrt{n^2+6n+9}-n=(n+3)-n=3.$$

Mivel a közös határértéknél az a_n sorozat minden tagja kisebb, míg a b_n sorozat minden tagja nagyobb, igazoltuk a *b)* pontot is.

6. *A térbeli derékszögű-koordináta-rendszerben felveszünk* 3 *piros pontot:* $A(1;0;0)$, $B(2;0;0)$, *és* $C(3;0;0)$, *valamint* 3 *fehér pontot:* $D(0;1;0)$, $E(0;2;0)$, *és* $F(0;3;0)$, *valamint 3 zöld pontot:* $G(0;0;1)$, $H(0;0;2)$, *és* $I(0;0;3)$.

a) Véletlenszerűen kiválasztunk a kilenc pont közül hármat úgy, hogy a kiválasztott pontok egy háromszög csúcsai legyenek. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az így kapott háromszögnek vannak azonos színű csúcsai?

b) A kilenc pont közül válasszunk ki úgy néhányat, hogy az általuk meghatározott test térfogata a lehető legnagyobb legyen. Mely csúcsokat válasszuk ki, és mekkora lesz ekkor a kérdéses térfogat? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Akkor van (nem elfajuló) háromszög, ha a kiválasztott három pont nincs egy egyenesen. Ez csak három esetben (ABC, DEF, valamint GHI választása esetén) nem teljesül. Mivel 9 pont közül hármat $\binom{9}{3}=84$-féleképp választhatunk ki, azért összesen $84-3=81$ olyan háromszög van, melyek csúcsai a 9 csúcs közül kerülnek ki.

Ezek közül rosszak azok, melyeknek három különböző színű csúcsa van. Ezek száma $3^3=27$. Így összesen $81-27=54$ olyan háromszög van, melynek vannak azonos színű csúcsai, így a kérdéses valószínűség: $\frac{54}{81}=\frac{2}{3}$.

b) Mivel az $ACDFGI$ test az összes többi testet tartalmazza, a kérdéses test ez a csonka gúla. A térfogata legegyszerűbben úgy számolható ki, hogy az $OCFI$ gúla térfogatából kivonjuk az $OADG$ gúla térfogatát (az O pont az origó). A térfogat így:

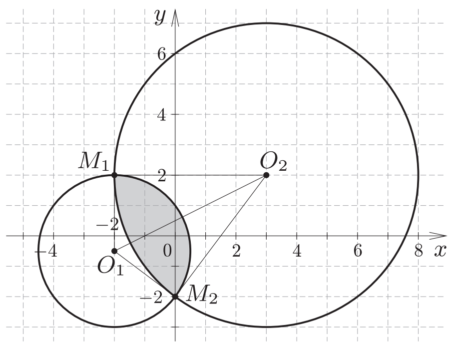
$$V=\frac{3^3}{6}-\frac{1^3}{6}=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}.$$

Vagyis a térfogat: $\frac{13}{3}$.

7. *Tekintsük a derékszögű koordináta-rendszerben a következő két kört:*

$$k_1: x^2+4x+y^2+y=2 \quad \textit{és} \quad k_2: x^2-6x+y^2-4y=12.$$

Mekkora annak a síkrésznek a területe, amelyet mind a két kör lefed? (*16 pont*)



Megoldás. A körök középpontjainak és sugarainak kiszámításához átalakítjuk az egyenleteket. Jelölje a k_1 és a k_2 kör sugarát, illetve középpontját rendre r_1 és r_2, illetve O_1 és O_2. A k_1 kör esetén

$$(x+2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}=\left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

azaz $O_1\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$, $r_1=\frac{5}{2}$.

A k_2 kör esetén $(x-3)^2+(y-2)^2=$ $=25$, azaz $O_2(3;2)$, $r_2=5$.

Az első kör egyenletéből kivonva a második körét:

$$10x+5y=-10, \quad \text{amiből} \quad y=-2x-2.$$

Ezt behelyettesítve mondjuk az első egyenletbe: $x^2+4x+(-2x-2)(-2x-1)=2$, amiből $x^2+4x+4x^2+6x+2=2$, vagyis $5x^2+10x=0$, tehát $x_1=-2$ és $x_2=0$ adódik.

Innen (behelyettesítéssel) a két kör metszéspontjai: $M_1(-2;2)$, és $M_2(0;-2)$. Mivel

$$d(O_1O_2)=\sqrt{5^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{125}{4}},\quad d(O_1M_2)=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2},$$

és

$$d(O_2M_2)=\sqrt{3^2+4^2}=5=\sqrt{25}=\sqrt{\frac{100}{4}},$$

emiatt (a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint) az $O_1M_2O_2\sphericalangle$ derékszög. Innen az $M_2O_1M_1$ szöget α-val, az $M_1O_2M_2$ szöget β-val jelölve:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{\frac{25}{4}}}{\sqrt{\frac{125}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \text{amiből}\quad \alpha\approx 126{,}87^\circ,$$

és innen $\beta\approx 53{,}13^\circ$.

A kérdéses metszet területének kiszámításához az O_1 középpontú M_2M_1 ívhez tartozó körcikk területét és az O_2 középpontú M_1M_2 ívhez tartozó körcikk területét összeadjuk, és ebből kivonjuk az $O_1M_1O_2M_2$ derékszögű deltoid területét, melynek oldalai 5 és 2,5 egység hosszúak.

Vagyis a metszet területe:

$$T\approx\frac{2{,}5^2\cdot\pi\cdot 126{,}87^\circ}{360^\circ}+\frac{5^2\cdot\pi\cdot 53{,}13^\circ}{360^\circ}-5\cdot\frac{5}{2}\approx 6{,}01.$$

A két kör által közösen lefedett síkrész területe: $T\approx 6{,}01$.

8. *A p paraméter mely értékeire lesz a*

$$px^2-(p-1)x-\frac{3}{4}p+\frac{1}{2}=0$$

a) egyenletnek egy megoldása;
b) egyenletnek két megoldása, az egyik pozitív, a másik negatív;
c) egyenletnek gyöke a -3;
d) egyenlet gyökeinek az aránya $1:2$? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Ha $p=0$ (vagyis az egyenlet elsőfokú), akkor $x=-\frac{1}{2}$ (ekkor egy megoldás van.)

Különben az egyenlet másodfokú, és egy megoldása pontosan akkor van, ha az egyenlet diszkriminánsa 0:

$$D=(p-1)^2-4\cdot p\cdot\left(-\frac{3}{4}p+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=p^2-2p+1+3p^2-2p=4p^2-4p+1=(2p-1)^2=0.$$

Innen $p=\frac{1}{2}$. Vagyis $p=0$, és $p=\frac{1}{2}$ esetén van az egyenletnek egy megoldása.

A *b*)–*c*)–*d*) pontok nem teljesülhetnek $p=0$ esetén. Így a továbbiakban $p\neq 0$. Mivel D „szép", adjuk meg a p segítségével az egyenlet két megoldását:

$$x_{1,2}=\frac{p-1\pm|2p-1|}{2p},\quad \text{innen}\quad x_1=\frac{3p-2}{2p},\quad x_2=\frac{-p}{2p}=-\frac{1}{2}.$$

Innen egyszerűen adódnak a válaszok:

b) Mivel a negatív gyök megvan, így $\frac{3p-2}{2p} > 0$, és ebből $p > \frac{2}{3}$, vagy $p < 0$.

c) $-3 = \frac{3p-2}{2p}$, innen $p = \frac{2}{9}$.

d) Itt két eset van aszerint, hogy melyik gyök a nagyobb. Vagy $-1 = \frac{3p-2}{2p}$, és így $p = \frac{2}{5}$, vagy $-\frac{1}{4} = \frac{3p-2}{2p}$, és így $p = \frac{4}{7}$.

9. *Kati „peches”-számai a* 3*-as, és a* 7*-es.*

Egy nap 1*-től kezdve elkezdte felírni a pozitív egészeket, de azokat a számokat, amikben volt hármas, vagy hetes jegy kihagyta.*

a) *Milyen számjegyekből áll a Kati által felírt* 2015*-dik szám?*

b) *Hanyadik számként írta fel Kati a* 2015*-ös számot?* (*16 pont*)

Megoldás. Használjunk 8-as számrendszert. A Kati által felírt számok tekinthetők 8-as számrendszerbeli számoknak, csak jól el kell készítenünk a két számrendszer (a „rendes 8-as számrendszer”, és Katié) közötti „kódtáblát”. Ez a tábla a következő:

8-as számrendszerben	0	1	2	3	4	5	6	7
Katinál	0	1	2	4	5	6	8	9

Vagyis pl. a 8-as számrendszerbeli 53 megegyezik a Kati-féle 64 alakú számmal. Ezt a továbbiakban $53_8 = 64_K$-ként fogjuk jelölni.

a) A 8-as számrendszerben a 2015-dik számot pl. ismételt 8-cal való maradékos osztásokkal meghatározhatjuk:

$$2015 = 251 \cdot 8 + 7, \quad 251 = 31 \cdot 8 + 3, \quad 31 = 3 \cdot 8 + 7, \quad 3 = 0 \cdot 8 + 3.$$

Vagyis $2015_{10} = 3737_8$. Mivel $3737_8 = 4949_K$, ezért a Kati listáján szereplő 2015-dik szám a 4949.

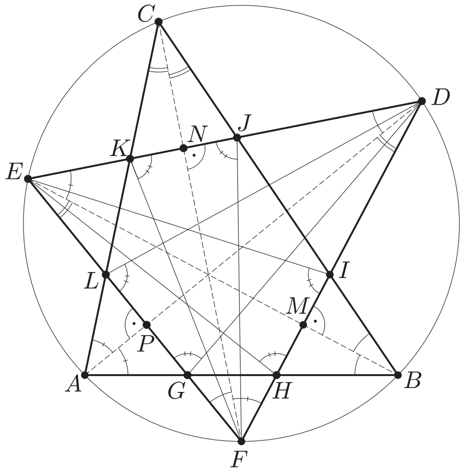
b) Mivel $2015_K = 2014_8 = 2 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 4 = 1036_{10}$, ezért Kati a 2015-t a saját listáján az 1036-dik számként írta fel.

Sztranyák Attila
Budapest

Matematika feladatok megoldása

B. 4559. *Az ABC háromszög köré írt körét az A-ból, B-ből és C-ből induló belső szögfelezők rendre a D, E és F pontokban metszik. A DEF és ABC háromszögek oldalainak metszéspontjai az A-tól B irányába elindulva rendre G, H, I, J, K és L. Mutassuk meg, hogy a DGL, EHI és FKJ háromszögek egymáshoz hasonlók.*

(*6 pont*) Javasolta: *Miklós Szilárd* (Herceghalom)



Megoldás. Jelölje az ABC háromszög szögeit rendre 2α, 2β és 2γ. Legyen továbbá $AD\cap EF=P$, $BE\cap\cap FD=M$ és $CF\cap DE=N$.

Az azonos íven nyugvó kerületi szögek egyenlősége miatt ekkor $ADE\sphericalangle=ABE\sphericalangle=\beta$, $DEB\sphericalangle==DAB\sphericalangle=\alpha$ és $BEF\sphericalangle=BCF\sphericalangle==\gamma$. Tehát a DEP háromszögben a D-nél és E-nél lévő szögek összege $\beta+(\alpha+\gamma)=90^\circ$, ezért a háromszög harmadik szöge derékszög, vagyis $AD\perp EF$. Ugyanígy kapjuk, hogy $BE\perp FD$ és $CF\perp DE$.

Az LAG háromszögben tehát az A csúcsból induló AP szögfelező merőleges a szemközti oldalra. Ezért AP a háromszögnek szimmetriatengelye, $LA=GA$ és $LP=PG$. Viszont az AP egyenes D-n is átmegy, tehát $LD=DG$, vagyis a DGL háromszög is egyenlőszárú. Ugyanígy kapjuk, hogy az EHI és FKJ háromszögek is egyenlőszárúak, és ezen háromszögek szimmetriatengelye BE, illetve CF.

A háromszögek hasonlóságának belátásához elegendő megmutatnunk, hogy alapon fekvő szögeik egyenlőek. Mivel $CKD\sphericalangle=CKJ\sphericalangle=90^\circ-\gamma$, ezért $DKL\sphericalangle==90^\circ+\gamma$. Ekkor az $FDKL$ négyszögben a szemközti szögek összege

$$DKL\sphericalangle+LFD\sphericalangle=DKL\sphericalangle+EFC\sphericalangle+CFD\sphericalangle=90^\circ+\gamma+\beta+\alpha=180^\circ,$$

vagyis a négyszög húrnégyszög. E húrnégyszög köréírt körében $DKF\sphericalangle$ és $DLF\sphericalangle$ ugyanahhoz a DF ívhez tartozó kerületi szögek, ezért $DKF\sphericalangle=DLF\sphericalangle$. Ugyanígy kapjuk, hogy $DEGH$ is húrnégyszög, amiből pedig $DGE\sphericalangle=DHE\sphericalangle$ következik.

Tehát a DGL, EHI és FKJ háromszögek olyan egyenlőszárú háromszögek, melyeknek az alapon fekvő szögeik egyenlőek, ezért a háromszögek hasonlóak egymáshoz.

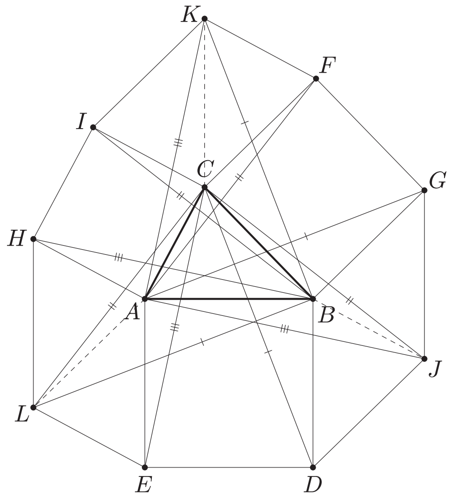
Sándor Krisztián (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

54 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 22 versenyző: Andi Gabriel Brojbeanu, Emri Tamás, Fekete Panna, Fonyó Viktória, Geng Máté, Győrfi-Bátori András, Jákli Aida Karolina, Katona Dániel, Lajkó Kálmán, Leipold Péter, Lengyel Ádám, Maga Balázs, Nagy-György Pál, Nagy-György Zoltán, Sándor Krisztián, Sárosdi Zsombor, Schwarcz Tamás, Simkó Irén, Szebellédi Márton, Szőke Tamás, Tulassay Zsolt, Williams Kada. 5 pontos 20, 4 pontos 4, 3 pontos 3, 2 pontos 2, 0 pontos 3 dolgozat.

B. 4566. *Az ABC háromszög oldalaira kifelé az $ABDE$, $BCFG$ és $CAHI$ négyzeteket rajzoltuk, majd a DBG, FCI és HAE háromszögeket a $DBGJ$, $FCIK$ és $HAEL$ paralelogrammákká egészítettük ki. Igazoljuk, hogy*

$$AKB\sphericalangle+BLC\sphericalangle+CJA\sphericalangle=90^\circ.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Miklós Szilárd* (Herceghalom)



I. megoldás. Az ABC, KCF, CKI, HLA, EAL, BDJ és JGB háromszögek egybevágóak, hiszen két azonos hosszúságú oldaluk egyenlő szöget zár be. (Például $LE = HA = CA$, $AE = AB$, valamint

$$HAE\sphericalangle = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - CAB\sphericalangle = $$
$$= 180^\circ - CAB\sphericalangle,$$

tehát

$$LEA\sphericalangle = 180^\circ - HAE\sphericalangle = CAB\sphericalangle.$$

A többi háromszögre is hasonlóan bizonyítható.) Az *ábrán* az egyvonalas, a kétvonalas, illetve a háromvonalas szakaszok páronként megkaphatóak egymásból egy valamelyik oldal hosszával, arra merőlegesen való eltolásból, illetve máshogy párosítva 90°-os elforgatással. Például

$$FCK\triangle \cong CBA\triangle, \quad KCF\sphericalangle = ABC\sphericalangle \quad \text{és} \quad FC \perp CB,$$

ezért az FCK háromszöget 90°-os forgatás viszi a CBA háromszögbe, vagyis $CK \perp BA$ és egyenlő vele. Hasonlóan $LA \perp BC$ és $LA = BC$, valamint $JB \perp AC$ és $JB = AC$. Mindebből következik, hogy $CK \parallel BD$ és $CK = BD$, vagyis $DBKC$ paralelogramma, így $DC = BK$. Hasonlóan $LB = AG$, $LC = AF$, $BI = JC$, $JA = BH$, $EC = AK$. Másrészt $ABG\triangle \cong KCB\triangle$, mert három oldaluk egyenlő. Mivel $AB \perp KC$, így a két háromszög 90°-os forgatással megkapható egymásból, így $AG \perp KB$ is teljesül. Hasonlóan látható be a többi szakaszra is a merőlegesség.

Ezekből következik, hogy $AKB\sphericalangle = JAG\sphericalangle$ (háromvonalas–egyvonalas szög). Ugyanígy $BLC\sphericalangle = GAF\sphericalangle$ (egyvonalas–kétvonalas szög), valamint $CJA\sphericalangle = FAK\sphericalangle$ (kétvonalas–háromvonalas szög).

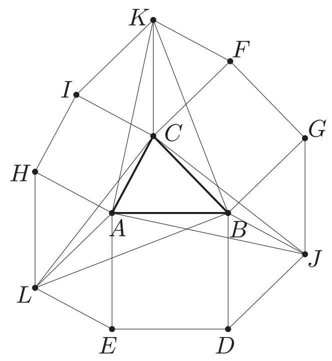
Tehát $AKB\sphericalangle + BLC\sphericalangle + CJA\sphericalangle = JAG\sphericalangle + GAF\sphericalangle + FAK\sphericalangle = JAK\sphericalangle$, ami két háromvonalas szakasz által bezárt szög, melyek egymásból 90°-os elforgatással kaphatók, tehát $JAK\sphericalangle = 90^\circ$.

Ezzel az állítást beláttuk.

Megjegyzések: 1. A B-nél lévő egyvonalas, illetve a C-nél lévő kétvonalas 90°-os szögbe ugyanígy átforgathattuk volna a három szöget. 2. Hasonlóan belátható, hogy $ECD\sphericalangle = JAG\sphericalangle$ és $IBH\sphericalangle = FAK\sphericalangle$, amiből látszik, hogy a feladat ekvivalens egy könnyebben megfogalmazható állítással: Ha egy tetszőleges ABC háromszögre kifele $ABDE$, $BCFG$ és $CAHI$ négyzeteket rajzolok, akkor $FAG\sphericalangle + HBI\sphericalangle + ECD\sphericalangle = 90^\circ$.

Kabos Eszter (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) megoldása alapján

II. megoldás. $BDJ\triangle \cong ABC\triangle$, mert D-nél és B-nél ugyanakkora szögek vannak és $AB = BD$, illetve $BC = DJ$. Hasonlóan $BDJ\triangle \cong CKI\triangle \cong \cong HLA\triangle \cong ABC\triangle$. Ezért $AL = a$, $BJ = b$ és $CK = c$.



$BJC\triangle \cong ACL\triangle$, mert $BJ = AC$, $BC = AL$ és $JBC\sphericalangle = \gamma + 90^\circ = LAC\sphericalangle$. Hasonlóan $ABL\triangle \cong CKB\triangle$ és $ABJ\triangle \cong KCA\triangle$.

A bizonyítás további részében irányított szögekkel számolunk. Az eddigiekből következik, hogy

$$BLC\sphericalangle + AKB\sphericalangle + CJA\sphericalangle =$$
$$= BLA\sphericalangle + ALC\sphericalangle + AKC\sphericalangle + CKB\sphericalangle + CJB\sphericalangle + BJA\sphericalangle =$$
$$= KBC\sphericalangle + BCJ\sphericalangle + JAB\sphericalangle + ABL\sphericalangle + LCA\sphericalangle + CAK\sphericalangle.$$

Tekintsük az AKB, a BLC és a CJA háromszögek belső szögeinek összegét:

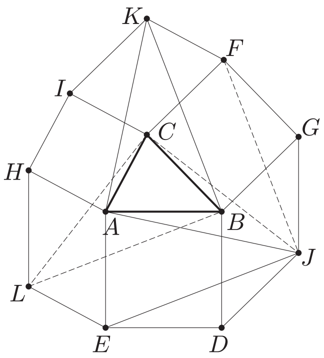
$$3\cdot 180^\circ = BAK\sphericalangle + AKB\sphericalangle + KBA\sphericalangle + BLC\sphericalangle + LCB\sphericalangle + CBL\sphericalangle +$$
$$+ CJA\sphericalangle + JAC\sphericalangle + ACJ\sphericalangle =$$
$$= (AKB\sphericalangle + BLC\sphericalangle + CJA\sphericalangle) + (\alpha + CAK\sphericalangle) + (\beta + KBC\sphericalangle) +$$
$$+ (\gamma + LCA\sphericalangle) + (\beta + ABL\sphericalangle) + (\alpha + JAB\sphericalangle) + (\gamma + BCJ\sphericalangle) =$$
$$= (AKB\sphericalangle + BLC\sphericalangle + CJA\sphericalangle) + (2\alpha + 2\beta + 2\gamma) +$$
$$+ (CAK\sphericalangle + KBC\sphericalangle + LCA\sphericalangle + ABL\sphericalangle + JAB\sphericalangle + BCJ\sphericalangle) =$$
$$= (AKB\sphericalangle + BLC\sphericalangle + CJA\sphericalangle) + 2\cdot 180^\circ + (AKB\sphericalangle + BLC\sphericalangle + CJA\sphericalangle).$$

Tehát $180^\circ = 2(AKB\sphericalangle + BLC\sphericalangle + CJA\sphericalangle)$, azaz $90^\circ = AKB\sphericalangle + BLC\sphericalangle + + CJA\sphericalangle$, és ezt kellett bizonyítani.

Di Giovanni Márk (Győr, Révai Miklós Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. Nagyon sok megoldó az ábra miatt olyan következtetésre jutott, ami általános háromszögre nem teljesül. Ezt esetszétválasztással vagy irányított szögek használatával lehetett kiküszöbölni.

III. megoldás. Egy $\overrightarrow{v}$ vektor 90°-kal való elforgatottját jelölje $\overrightarrow{v}'$, egy P pontét pedig P'.



Ekkor

$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IK}=-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}'+\overrightarrow{CF}=$$

$$=-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}'+\overrightarrow{BC}',$$

amiből

$$\overrightarrow{AK}'=\left(-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}'+\overrightarrow{BC}'\right)'=$$

$$=\left(-\overrightarrow{CA}\right)'+\left(\overrightarrow{CA}'\right)'+\left(\overrightarrow{BC}'\right)'=$$

$$=-\overrightarrow{CA}'-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC}.$$

Felírható, hogy $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}'+\overrightarrow{BC}'$.

Tudjuk, hogy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}$, és így

$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)'=\overrightarrow{AB}'+\overrightarrow{BC}'+\overrightarrow{CA}'=\overrightarrow{0}'=\overrightarrow{0},$$

így $\overrightarrow{AB}'+\overrightarrow{BC}'=-\overrightarrow{CA}'$ és $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$, tehát $\overrightarrow{AK}'=\overrightarrow{AJ}$. Tehát a K pont A körüli $-90°$-os elforgatottja a J pont, a B pont elforgatottja az E pont, ezért az $AKB\triangle$ elforgatottja az $AJE\triangle$. Emiatt $AKB\sphericalangle=AJE\sphericalangle$.

Hasonlóan belátható, hogy a $BLC\triangle$ C körüli $+90°$-os elforgatottja az $FJC\triangle$, ami miatt $BLC\sphericalangle=FJC\sphericalangle$.

Tehát $AKB\sphericalangle+BLC\sphericalangle+CJA\sphericalangle=AJE\sphericalangle+FJC\sphericalangle+CJA\sphericalangle=FJE\sphericalangle$. Erről kéne belátni, hogy 90°. Mivel $\overrightarrow{JE}=\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{DE}$, így

$$\overrightarrow{JE}'=\left(\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{DE}\right)'=\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{DE}\right)'=\overrightarrow{GB}'+\overrightarrow{DE}'=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{JG}=\overrightarrow{JF}.$$

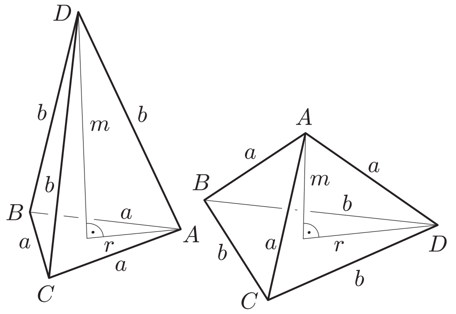
Tehát az F pont az E pont J körüli $-90°$-os elforgatottja. Ezzel beláttuk, hogy $FJE\sphericalangle=90°$, a bizonyítást befejeztük.

99 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 19 versenyző: Balogh Tamás, Barabás Ábel, Di Giovanni Márk, Egyházi Anna, Fekete Panna, Geng Máté, Kabos Eszter, Kocsis Júlia, Kúsz Ágnes, Lajkó Kálmán, Leipold Péter, Machó Bónis, Maga Balázs, Nagy-György Pál, Nagy-György Zoltán, Schwarcz Tamás, Varga Rudolf, Viharos Loránd Ottó, Williams Kada. 4 pontos 57, 3 pontos 9, 2 pontos 3, 1 pontos 6, 0 pontos 2 dolgozat. Nem versenyszerű: 3 dolgozat.

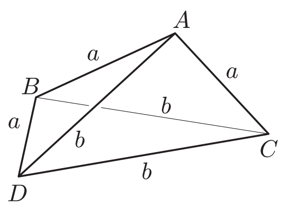
B. 4569. *Két tetraéderről tudjuk, hogy mindkettőnek pontosan* 3 *darab* a *hosszúságú és* 3 *darab* $b>a$ *hosszúságú éle van. A* b/a *arány milyen értékeinél következik ebből, hogy a két tetraéder egybevágó?*

(*5 pont*)

Megoldás. Vizsgáljuk meg, hogy az a és b hosszúságú élek egymáshoz képest hogyan helyezkedhetnek el egy $ABCD$ tetraéderben. Mivel a tetraédernek 4 csúcsa van, ezért biztosan van olyan csúcs, melyben legalább 2 darab a hosszúságú él találkozik. Választhatjuk úgy a csúcsok jelölését, hogy $AB=AC=a$ legyen. Ha a harmadik a hosszúságú él BC vagy AD, akkor a tetraédernek van szabályos háromszöglapja, az első esetben ABC, a második esetben pedig BCD (*1. ábra*). Ha a harmadik a hosszúságú él nem BC és nem is AD, akkor választhatjuk úgy a jelölést, hogy BD hossza legyen a, ez a harmadik eset (*2. ábra*).



1. ábra

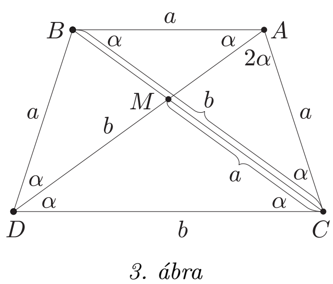


2. ábra

Meghatározzuk, hogy az egyes esetekben milyen b/a arányok esetén létezik tetraéder.

Az első és a második esetben legyen a szabályos háromszöglap körülírt körének sugara r, a kör középpontja K, ennek és a tetraéder negyedik csúcsának távolsága pedig m. Az ADK háromszög a tetraéderek szimmetriája miatt mindkét esetben derékszögű, ezért Pitagorasz tétele szerint $m^2=AD^2-r^2$. Pontosan akkor létezik tetraéder, ha $m>0$, azaz $AD>r$ teljesül. Ismert, hogy ha egy szabályos háromszög oldalának hossza h, akkor a háromszög körülírt körének sugara $h\sqrt{3}/3$. Tehát az első esetben mindig létezik tetraéder, mert $b>a$ miatt $b>a\sqrt{3}/3$ mindig teljesül, a második esetben pedig pontosan akkor van ilyen tetraéder, ha $a>b\sqrt{3}/3$, azaz $a\sqrt{3}>b$ fennáll.

A harmadik esetben először megkeressük azt az a/b arányt, amikor a tetraéder négyszöggé fajul, azaz csúcsai egy síkba esnek. Ekkor az $ABDC$ négyszög oldalainak és átlóinak hosszát is ismerjük (*3. ábra*). Mivel megfelelő oldalaik hossza megegyezik, ezért a CAB és ABD háromszögek egybevágó egyenlőszárú háromszögek. Ebből következik, hogy C-nek az AB szakasz felezőmerőlegesére vonatkozó tükörképe D, és ezért az $ABDC$ négyszög szimmetrikus trapéz.



3. ábra

Ha tehát $ABC\sphericalangle=\alpha$, akkor

$$ACB\sphericalangle=BAD\sphericalangle=BDA\sphericalangle=\alpha \quad \text{és} \quad CAB\sphericalangle=ABD\sphericalangle=180^\circ-2\alpha.$$

A trapéz alapjainak párhuzamossága miatt $ABC\sphericalangle$ és $DCB\sphericalangle$ váltószögek, és így $DCA\sphericalangle = DCB\sphericalangle + BCA\sphericalangle = 2\alpha$. Az ADC és a BCD háromszögek is egybevágó egyenlő szárú háromszögek, vagyis $DAC\sphericalangle = DCA\sphericalangle = 2\alpha$. Az ABC háromszögben a szögek összegét felírva kapjuk, hogy

$$180^\circ = ABC\sphericalangle + BCA\sphericalangle + (BAD\sphericalangle + DAC\sphericalangle) = \alpha + \alpha + (\alpha + 2\alpha) = 5\alpha,$$

amiből kapjuk, hogy $\alpha = 36^\circ$. Ebből következik, hogy $DCA\sphericalangle = 72^\circ$ és $ADC\sphericalangle = 36^\circ$.

Ha az $ABDC$ trapéz átlóinak metszéspontja M, akkor $MD = MC$, továbbá

$$AMC\sphericalangle = 180^\circ - (BCA\sphericalangle + DAC\sphericalangle) = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ.$$

Tehát az AMC háromszög is egyenlő szárú, $MC = AC = a$, és a szögek egyezősége miatt hasonló az ADC háromszöghöz. Ezért a két háromszögben a megfelelő oldalak aránya megegyezik, vagyis

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AM} = \frac{AC}{AD - MD} = \frac{AC}{AD - MC}, \quad \text{azaz} \quad \frac{b}{a} = \frac{a}{b-a}.$$

Ebből rendezés után

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} - 1 = 0.$$

A másodfokú egyenletet megoldva és figyelembe véve, hogy $b/a > 1$, kapjuk hogy

$$\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Számolásunkból a szinusztételt és a megfelelő addíciós tételt alkalmazva következik, hogy

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = 2\cos 36^\circ,$$

ebből pedig kapjuk, hogy

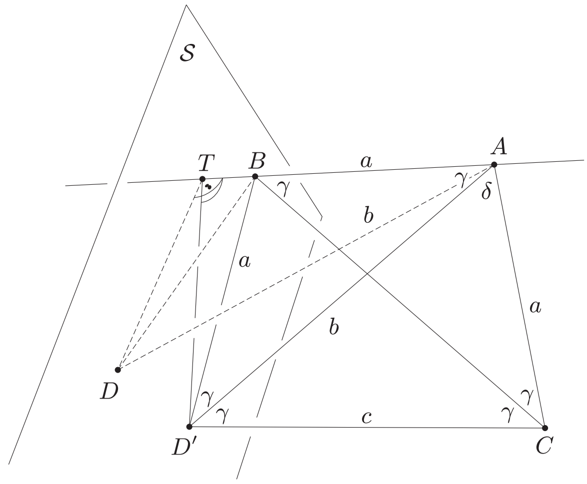
$$\sin 36^\circ = \sqrt{1-\cos^2 36^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

amiket a későbbiekben használni fogunk.

Megmutatjuk, hogy pontosan akkor létezik a harmadik esetben leírt tetraéder, ha

$$1 < \frac{b}{a} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ha létezik tetraéder, akkor a D csúcs nincs benne az ABC síkban. Forgassuk el a tetraéder ABD lapját az AB egyenes körül úgy, hogy a D csúcs D' képe az ABC síkba kerüljön. Ekkor $ABD'C$ szimmetrikus trapéz, mert az ABD' és



4. ábra

ABC háromszögek egybevágó egyenlőszárú háromszögek (*4. ábra*). Legyen $\gamma = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \sphericalangle BAD' = \sphericalangle BD'A$. Mivel az AB egyenes körül forgatunk, ezért a forgatás során a D pont egy olyan $\mathcal{S}$ síkban mozog, mely merőleges az AB egyenesre. Ezért az AB-vel párhuzamos CD' egyenes is merőleges $\mathcal{S}$-re. Ez viszont azt jelenti, hogy $\mathcal{S}$-nek a C-hez legközelebbi pontja D', tehát $b = CD > CD' = c$. Mivel bármely háromszögben igaz, hogy nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, ezért ekkor

$$\delta = D'AC\sphericalangle < ACD'\sphericalangle = ACB\sphericalangle + BCD'\sphericalangle = ACB\sphericalangle + ABC\sphericalangle = 2\gamma.$$

Vagyis az ABC háromszögben a szögek összegére kapjuk, hogy $180^\circ = \delta + 3\gamma < 5\gamma$, tehát $36^\circ < \gamma$. Ezért a szinusztétel alapján

$$\frac{b}{a} = \frac{AD'}{AC} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin\gamma} = 2\cos\gamma < 2\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Megfordítva, ha $1 < \frac{b}{a} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ teljesül, akkor legyen D' az ABC sík azon pontja, melyre $ABD'C$ szimmetrikus trapéz. A $b > a$ feltételből következik, hogy az AB felezőmerőlegese által meghatározott két félsík közül B és D' az egyikben, A és C pedig a másikban van. Jelölje γ és δ ugyanazokat a szögeket, mint az előző bekezdésben. Az ABC egyenlőszárú háromszögből kapjuk, hogy

$$\cos\gamma = \frac{\frac{BC}{2}}{AB} = \frac{b}{2a}.$$

Tehát

$$\frac{1}{2} < \cos\gamma < \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad \text{azaz} \quad 60^\circ > \gamma > 36^\circ.$$

Ezért

$$D'AC\sphericalangle = \delta = 180^\circ - 3\gamma < 72^\circ < 2\gamma = D'CA\sphericalangle.$$

S mivel bármely háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van, ezért $CD' < AD' = b$.

Ha a D'-ből az AB egyenesre állított merőleges talppontja T, akkor

$$D'T = b\sin\gamma > b\sin 36^\circ = b\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Forgassuk az ABD' háromszöget az AB egyenes körül valamelyik irányban. A forgatás során D' egy olyan T középpontú körvonalon mozog, melynek síkja merőleges az AB egyenesre és a CD' távolság nyilván folytonosan változik. Amikor az elforgatás szöge éppen 180°, azaz a D' pont átkerül D'-nek az AB egyenesre vonatkozó D'' tükörképébe, akkor a $CD'D''$ derékszögű háromszögből kapjuk, hogy

$$CD'' > D'D'' = 2D'T > b\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} > b.$$

Ezért a forgatás során lesz egy olyan helyzet, amikor D' képének és C-nek a távolsága b. Az ehhez a helyzethez tartozó $ABCD$ tetraéder eleget tesz a feltételeknek.

A két tetraéder egybevágósága pontosan akkor következik a feladat feltételeiből, ha a három eset közül csak az egyikben leírt tetraéder valósítható meg. Mivel az első esethez tartozó tetraéder minden $b > a$ értékre létezik, ezért azt kell megnéznünk, hogy a másik két eset mikor nem építhető meg. A létezés feltétele a második esetben $b/a < \sqrt{3}$, a harmadikban pedig $b/a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Mivel $\sqrt{3} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ezért a két tetraéder egybevágóságának feltétele a $b/a \geqslant \sqrt{3}$ egyenlőtlenség teljesülése.

Mándoki Sára (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozatát felhasználva

81 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 16 versenyző: Badacsonyi István András, Balogh Tamás, Csépai András, Di Giovanni Márk, Fekete Panna, Frank György, Gyulai-Nagy Szuzina, Kabos Eszter, Kovács Márton, Maga Balázs, Mándoki Sára, Nagy-György Pál, Simkó Irén, Simon Kristóf, Viharos Loránd Ottó, Williams Kada. 4 pontos 6, 3 pontos 2, 2 pontos 26, 1 pontos 16, 0 pontos 14 dolgozat. Nem versenyszerű: 1 dolgozat.

B. 4623. *Egy konvex négyszögben az átlók négy olyan háromszöget határoznak meg, amelyek területe egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ennek a négy egésznek a szorzata nem végződhet* 2014*-re.*

(*3 pont*)

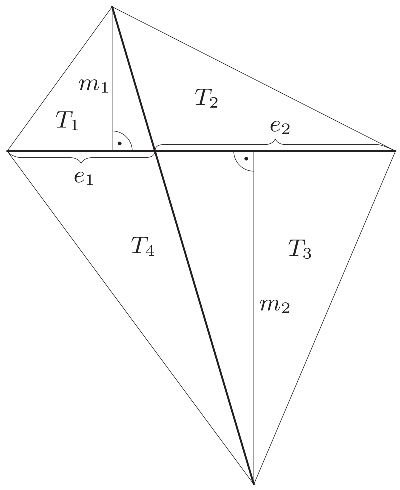
Megoldás. Először megmutatjuk, hogy a két-két szemközti háromszög területének szorzata egyenlő. Jelölje a háoszögek területét az *ábra* szerint T_1, T_2, T_3 és T_4. A háromszögeknek az egyik átlóhoz tartozó magasságai legyenek m_1 és m_2, ennek az átlónak az átlók metszéspontja által meghatározott szakaszai pedig legyenek e_1 és e_2. Ekkor

$$2T_1 = e_1m_1, \quad 2T_2 = e_2m_1,$$

$$2T_3 = e_2m_2 \quad \text{és} \quad 2T_4 = e_1m_2,$$

tehát

$$T_1T_3 = \frac{e_1e_2m_1m_2}{4} = T_2T_4.$$



Ezért $T_1T_2T_3T_4 = (T_1T_3)^2$, vagyis a négy terület szorzata négyzetszám. Tudjuk, hogy a négyzetszámok 4-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot adnak. Mivel a számok 4-es maradéka csak az utolsó két számjegyüktől függ, ezért ha egy szám 2014-re végződik, akkor a 4-es maradéka megegyezik a 14-nek a 4-es maradékával, azaz 2-vel. Tehát a területek szorzata nem végződhet 2014-re.

Varga Péter (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn. és Szki., 10. évf.) dolgozata alapján

126 dolgozat érkezett. 3 pontos 105, 2 pontos 7, 1 pontos 8, 0 pontos 4 dolgozat. Nem versenyszerű: 2 dolgozat.

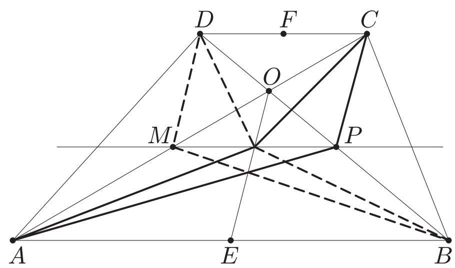
B. 4624. *Az $ABCD$ trapézban jelölje E és F az AB, illetve CD alap felezőpontját, O pedig az átlók metszéspontját. Az OA, OE és OB szakaszokat egy alapokkal párhuzamos egyenes rendre az M, N és P pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy az $APCN$ és $BNDM$ négyszögek területe egyenlő.*

(*3 pont*) Javasolta: *Longáver Lajos* (Nagybánya)

Megoldás. A négyszögeket az MN, illetve NP átlók két-két háromszögre bontják, ezért

$$T_{APCN} = T_{APN} + T_{PCN} \quad \text{és}$$

$$T_{BNDM} = T_{BNM} + T_{NDM}.$$



Az MNP egyenes párhuzamos a trapéz alapjaival. Ebből egyrészt a párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján

$$\frac{MN}{AE} = \frac{NP}{EB}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{MN}{NP} = \frac{AE}{EB}$$

következik, s mivel E felezi az AB szakaszt, ezért kapjuk, hogy $MN = NP$. Másrészt a párhuzamosság miatt a PCN és NDM háromszögek C illetve D, valamint az APN és BNM háromszögek A, illetve B csúcsaihoz tartozó magasságok is megegyeznek. Ezért

$$T_{APN} = T_{BNM} \quad \text{és} \quad T_{PCN} = T_{NDM},$$

amiből a feladat állítása következik.

Nagy Odett (Szeged, Radnóti M. Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

128 dolgozat érkezett. 3 pontos 111, 2 pontos 9, 1 pontos 4, 0 pontos 4 dolgozat.

B. 4626. *Igazoljuk, hogy* $(1+a)^4(1+b)^4 \geqslant 64ab(a+b)^2$ *tetszőleges* $a, b \geqslant 0$ *számokra teljesül.*

(*6 pont*)

Megoldás. Vegyük észre, hogy a bal oldalon $(1+a)(1+b) = 1+a+b+ab$, illetve a jobb oldalon is szerepel ab első, $a+b$ pedig második hatványon. Próbáljuk meg valamelyik közepek közötti egyenlőtlenséget felhasználni. Mivel a jobb oldalon $a+b$ a második kitevőn szerepel, ezért a négy kifejezés, amire felírjuk majd az összefüggést, legyen 1, $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+b}{2}$ és ab. Tudjuk, hogy minden nemnegatív. Legkézenfekvőbb a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenség felírása:

$$\frac{1+\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}+ab}{4} \geqslant \sqrt[4]{1\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)ab}.$$

Ezt alakítva:

$$\frac{(1+a)(1+b)}{4} \geqslant \sqrt[4]{\frac{(a+b)^2ab}{4}},$$

$$\frac{(1+a)^4(1+b)^4}{4^4} \geqslant \frac{(a+b)^2ab}{4},$$

$$(1+a)^4(1+b)^4 \geqslant 4^3(a+b)^2ab = 64(a+b)^2ab,$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

52 dolgozat érkezett. 6 pontos 28, 5 pontos 13, 3 pontos 1, 0 pontos 10 dolgozat.

B. 4637. *Sir Bedevir csak akkor indul el egy lovagi tornán, ha tudja, hogy legalább 1/2 valószínűséggel győzni fog. Bármely összecsapás esetén az ellenfelek győzelmének valószínűsége a harcképességükkel arányos. Bedevir harcképessége* 1, n*-edik ellenfelének a harcképessége pedig* $\frac{1}{2^{n+1}-1}$. *Hány lovag jelentkezhetett a tornára, ha Bedevir gondos számolás után úgy döntött, hogy ő is elindul?*

(*5 pont*) (*EMMV*)

Megoldás. Egy összecsapásban, ha a felek harcképessége a és b, akkor az a, illetve b harcképességű fél rendre $\frac{a}{a+b}$, illetve $\frac{b}{a+b}$ valószínűséggel győz.

Tehát Bedevir és az n-edik ellenfele közötti összecsapásban Bedevir győzelmének B_n valószínűsége:

$$B_n = \frac{1}{1+\frac{1}{2^{n+1}-1}} = \frac{2^{n+1}-1}{\left(2^{n+1}-1\right)+1} = \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}.$$

Becsüljük a tagokat alulról:

$$\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} = 1-\frac{1}{2^{n+1}} > 1-\frac{1}{2^{n+1}-1} = \frac{\left(2^{n+1}-1\right)-1}{2^{n+1}-1} =$$

$$= \frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1} = \frac{2(2^n-1)}{2^{n+1}-1} = 2\cdot\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}.$$

Legyen Bedevir ellenfeleinek száma k. Ekkor – mivel az összecsapások egymástól függetlenek – annak a valószínűsége, hogy Bedevir lesz a torna győztese:

$$P_k(B) = \prod_{n=1}^{k} B_n = \prod_{n=1}^{k} \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} > \prod_{n=1}^{k} 2\cdot\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1} = 2^k \prod_{n=1}^{k} \frac{2^n-1}{2^{n+1}-1} =$$

$$= 2^k\cdot\frac{2-1}{4-1}\cdot\frac{4-1}{8-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2^{k-1}-1}{2^k-1}\cdot\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1} = 2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}-1} > \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.$$

Tehát tetszőleges (bármilyen nagy) k-ra $P_k(B) > \frac{1}{2}$.

Mivel ez volt a feltétele Bedevir indulásának, ezért tetszőlegesen sok lovag jelentkezhetett a tornára (a jelentkezők száma Bedevirrel együtt $k+1$).

Seress Dániel (Debreceni Ref. Koll. Dóczy Gimn., 12. évf.)

65 dolgozat érkezett. 5 pontos 32, 4 pontos 10, 3 pontos 6, 2 pontos 1, 1 pontos 9, 0 pontos 7 dolgozat.

B. 4645. *Tetszőleges n és k pozitív egészekre legyen*

$$H_1 = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\} \quad \textit{és} \quad H_2 = \{1+k, 3+k, 5+k, \ldots, 2n-1+k\}.$$

Létezik-e minden n-hez olyan k, hogy a $H_1 \cup H_2$ halmaz összes elemének szorzata négyzetszám legyen?

(*5 pont*)

Megoldás. Jelöljük a $H_1 \cup H_2$ halmaz összes elemének szorzatát A-val. Az a sejtés, hogy $k = 2n+1$ minden n-re megfelelő választás. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Adott n esetén jelölje k_n és A_n a megfelelő k, illetve A értéket.

i) $n = 1$-re $k_1 = 3$, $H_1 = \{1\}$, $H_2 = \{4\}$. Látható, hogy

$$H_1 \cup H_2 = \{1, 4\}, \quad \text{így} \quad A_1 = 1\cdot 4, \quad \text{ami négyzetszám.}$$

ii) Az indukciós feltevés alapján

$$\begin{aligned}A_n &= 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(1+k)(3+k)\cdot\ldots\cdot(2n-1+k)=\\&=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(1+2n+1)(3+2n+1)\cdot\ldots\cdot(2n-1+2n+1)=\\&=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+2)(2n+4)\cdot\ldots\cdot(4n)\end{aligned}$$

négyzetszám.

iii) Most igazoljuk az állítást $n+1$-re. A $k_{n+1}=2n+3$ beírásával

$$\begin{aligned}A_{n+1} &= 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)(1+2n+3)(3+2n+3)\cdot\ldots\cdot\\&\qquad\cdot(2n-1+2n+3)(2n+1+2n+3)=\\&=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)(2n+4)(2n+6)\cdot\ldots\cdot(4n+2)(4n+4)=\\&=\frac{A_n}{2n+2}(2n+1)(4n+2)(4n+4)=\frac{A_n}{2n+2}(2n+1)2(2n+1)2(2n+2)=\\&=A_n\cdot 4\cdot(2n+1)^2.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint A_n négyzetszám, így A_{n+1} is az. Tehát létezik minden n-hez alkalmas k, nevezetesen $k=2n+1$.

Gál Boglárka (Lovassy László Gimn., Veszprém, 12. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 108 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 97, 4 pontot 4 versenyző, továbbá 2 pontos 1, 1 pontos 1, 0 pontos 5 versenyző dolgozata.

B. 4647. *Tegyük föl, hogy* 100 *zárt egységkör együttesen lefed egy tőlük különböző* 101*-ediket. Mutassuk meg, hogy a* 100 *közül valamelyik lefedi egy másiknak a legfelső (legnagyobb ordinátájú) pontját.*

(*6 pont*) Javasolta: *Pálvölgyi Dömötör* (Budapest)

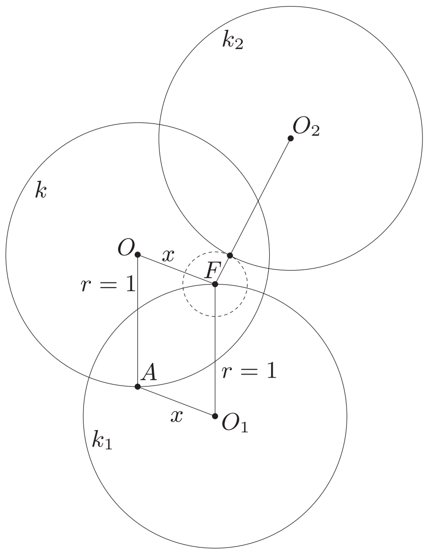
Megoldás. Legyen a lefedett kör k, középpontja O, a legalsó pontja A. Az A pontot lefedi egy kör, ez legyen a k_1, ennek a középpontja legyen O_1 és a legfelső pontja F.

$OA \parallel FO_1$ és $OA=FO_1=1$, ezért az $AOFO_1$ négyszög paralelogramma. Jelöljük az AO_1 szakasz hosszát x-szel. A k_1 kör lefedi az A pontot, ezért $x\leqslant 1$. Így $OF=x\leqslant 1$, tehát a k kör lefedi F-et.

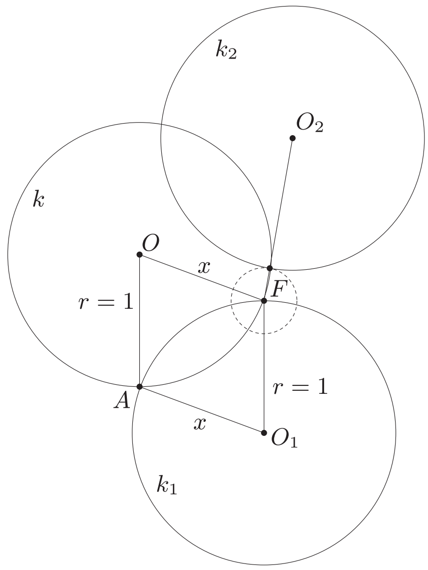
Jelölje az F-hez legközelebbi kör középpontját O_2, és legyen $FO_2=d$.

Ha $d\leqslant 1$, akkor F le van fedve. A továbbiakban legyen $d>1$.

Ha $x<1$, akkor rajzoljunk egy F középpontú, $\varrho=\min(1-x,d-1)$ sugarú kört, legyen ez k_3 (*1. ábra*). Mivel $d>1$, így k_3 egyetlen belső pontját sem fedi le k_1-től különböző kör a 100 kör közül, és a k_1 nem fedi le az egészet, így k_3 nincs teljesen lefedve. Mivel $k_3\subset k$, így k sincs teljesen lefedve. Ez ellentmondás, tehát ez az eset nem jöhet létre.



1. ábra



2. ábra

Ha $x=1$, akkor k áthalad az F ponton. Rajzoljunk egy F középpontú, $\varrho = d-1$ sugarú kört, legyen ez k_3 (*2. ábra*). Mivel k és k_1 egybevágó, de különböző körök, így k_3-on belüli részeik is egybevágóak, de különbözőek. Így k-nak lesz olyan k_3-on belüli pontja, amit nem fed le a k_1 és a többi kör sem, mert k_2 a legközelebbi kör. Ez is ellentmondás, tehát ez az eset sem lehetséges.

Vagyis d sosem nagyobb 1-nél.

Tehát a lefedett kör legalsó pontját lefedő kör legfelső pontja mindig le van fedve.

Tomcsányi Gergely (Vác, Boronkay György Műszaki Szki. és Gimn., 11. évf.)
megoldása alapján

51 dolgozat érkezett. 6 pontos 37, 5 pontos 7, 4 pontos 4, 2 pontos 1, 0 pontos 2 dolgozat.

B. 4648. *Egy egyenlő oldalú tetraéder élei* 13, $\sqrt{281}$ *és* 20 *egység hosszúságúak. Határozzuk meg két lapjának a hajlásszögét.*

(*5 pont*)

Megoldás. Az egyenlő oldalú tetraéder szemközti élei egyenlő hosszúak, így a bennfoglaló paralelepipedon lapjain az átlók egyenlők, vagyis a paralelogramma lapok téglalapok, a bennfoglaló paralelepipedon téglatest. A tetraéder élei a bennfoglaló téglatest lapátlói, így a téglatest élei Pitagorasz-tételek segítségével számolhatók:

$$a^2+b^2=281, \qquad b^2+c^2=169, \qquad c^2+a^2=400.$$

Az egyenletrendszer megoldása $a=16$, $b=5$, $c=12$. Helyezzük el a tetraédert célszerűen a koordináta-rendszerben:

$$A(0,0,0), \quad B(16,5,0), \quad C(16,0,12), \quad D(0,5,12).$$

Mivel két-két-két él megegyezik, ezért három különböző hajlásszög van. Legyenek az ABC, ACD, az ABC, ABD, valamint az ACD, ABD síkok által meghatározott hajlásszögek rendre φ_1, φ_2, φ_3. Az ABC sík esetében az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok mindegyikére merőleges $\underline{n}(U,V,1)$ vektor lesz a sík normálvektora. Ez mindkét, nem párhuzamos vektorra merőleges:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\underline{n}=16U+5V=0,$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\underline{n}=16U+12=0.$$

Ebből az egyenletrendszerből $\underline{n}\left(-\frac{3}{4},\frac{12}{5},1\right)$, illetve az ezzel párhuzamos $\underline{n}_{ABC}(15,-48,-20)$. Az A ponton átmenő ABC sík egyenlete ez alapján

$$15x-48y-20z=0.$$

Hasonló számolással az ACD sík egyenlete

$$-15x-48y+20z=0.$$

A két sík normálvektora

$$\underline{n}_{ABC}(15,-48,-20), \quad \underline{n}_{ACD}(-15,-48,20).$$

Mivel a normálvektorok merőlegesek a megfelelő síkra, illetve – jelen esetben – a szögtartománnyal ellentétes irányba mutatnak, ha skalárszorzatukat vesszük, megkapjuk az általunk keresett φ_1 hajlásszög kiegészítő szögét. Tehát

$$\underline{n}_{ABC}\cdot\underline{n}_{ACD}=|\underline{n}_{ABC}|\cdot|\underline{n}_{ACD}|\cdot\cos(180^\circ-\varphi_1).$$

Ebből

$$\cos\varphi_1=-\frac{-15^2+48^2-20^2}{15^2+48^2+20^2}=-\frac{1679}{2929}, \qquad \varphi_1\approx 124{,}98^\circ.$$

A további szögek meghatározásához az ABD sík normálvektora

$$\underline{n}_{ABD}(15,-48,20).$$

Az előzőhöz teljesen hasonló számítással, figyelembe véve a skaláris szorzat felírásánál, hogy a tetraéder belseje felé, vagy ellentétes irányba mutatnak a normálvektorok, megkapjuk, hogy

$$\varphi_2=\arccos\frac{2129}{2929}\approx 43{,}38^\circ, \quad \text{illetve} \quad \varphi_3=\arccos\frac{2479}{2929}\approx 32{,}18^\circ.$$

Vághy Mihály (Budapest, Németh László Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 83 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 13, 4 pontot 24, 3 pontot 17 versenyző. 2 pontos 9, 1 pontos 18, 0 pontos 2 versenyző dolgozata.

B. 4651. *Az n pozitív egész számot egzotikusnak nevezzük, ha osztható a pozitív osztóinak számával. Bizonyítsuk be a következő állításokat:*

a) Ha egy egzotikus szám páratlan, akkor ez a szám négyzetszám.

b) Végtelen sok egzotikus szám van.

(3 pont)

Megoldás. Az $n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\dots\cdot p_\ell^{k_\ell}$ prímtényezős felbontású pozitív egész szám pozitív osztóinak száma

$$d(n)=(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_\ell+1)=\prod_{i=1}^{\ell}(k_i+1).$$

a) Ha az egzotikus szám páratlan, akkor minden osztója is csak páratlan lehet, tehát az osztók száma is páratlan. A fentiek alapján az osztók számát úgy kaptuk, hogy mindegyik prímkitevőhöz egyet adtunk és ezeket összeszoroztuk. Látjuk, hogy k_i+1 minden $i=1,2,\dots,\ell$ esetén páratlan szám, vagyis minden k_i páros. Az n szám mindegyik prímtényezőjének kitevője páros, az n négyzetszám.

b) Tekintsük az $n=p^{p-1}$ alakú pozitív egészeket, ahol p páratan prímszám. Mivel a prímszámok száma végtelen, ezekből a számokból végtelen sok van. Az ilyen alakú számok osztóinak száma $d(n)=p-1+1=p$, tehát $d(n)\mid n$. Ezzel végtelen sok egzotikus számot találtunk.

Kocsis Júlia (Dunakeszi, Radnóti Miklós Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés: A feladat *b*) kérdésére bár a legtöbben a fenti konstrukciót választották, további érdekes egzotikus számokat is mutattak a versenyzők. A teljesség igénye nélkül ezek közül néhány:

$$3^2\cdot p^2,\quad 2^3\cdot p,\quad 2^{2^m-1}.$$

264 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 197, 2 pontot 55 tanuló, 1 pontos 6, 0 pontos 4 versenyző dolgozata. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

B. 4653. *Hány olyan pozitív egészekből álló a, b, c rendezett számhármas van, amelyre igaz, hogy $[a,b,c]=10!$ és $(a,b,c)=1$? (Az (a,b,c) a legnagyobb közös osztót, az $[a,b,c]$ pedig a legkisebb közös többszöröst jelenti.)*

(4 pont)

Megoldás. A 10! szám prímtényezős felbontása:

$$10!=2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7^1.$$

Tegyük fel, hogy 10! kanonikus alakjában a p prímszám az α-adik hatványon szerepel. Ekkor $(a,b,c)=1$ és $[a,b,c]=10!$ teljesülése esetén a, b, c között szerepelnie kell olyan számnak, ami nem osztható p-vel, olyannak, amit p pontosan az α-adik hatványon oszt, és a harmadik számban is legfeljebb α lehet p kitevője. Ha ezek a feltételek mind a négy prímosztóra teljesülnek, továbbá az a, b, c számok összes prímosztója a 2, 3, 5, 7 közül kerül ki, akkor $(a,b,c)=1$ és $[a,b,c]=10!$ valóban teljesül.

Vizsgáljuk most meg, hogy az a,b,c számok prímtényezős felbontásában p kitevője (ahol p a $10!$ egyik prímosztója) hányféle módon választható meg. Legyen a három kitevő $0,\alpha$ és β. Ha $0<\beta<\alpha$, akkor 6-féle sorrend lehetséges, ha $\beta=0$ vagy $\beta=\alpha$, akkor pedig 3-3. Tehát összességében p kitevőjének megválasztására a három számban $6(\alpha-1)+2\cdot 3=6\alpha$ lehetőség van. A különböző prímosztókra a kitevőket egymástól függetlenül válaszhatjuk meg, így az olyan a,b,c pozitív egész számokból álló rendezett hármasok száma, amelyekre teljesül a feltétel, összesen $(6\cdot 8)\cdot(6\cdot 4)\cdot(6\cdot 2)\cdot(6\cdot 1)=82\,944$.

Radnai Bálint (Veszprém, Lovassy László Gimn., 9. évf.)

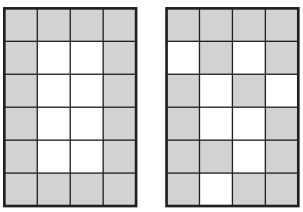
209 dolgozat érkezett. 4 pontos 81, 3 pontos 19, 2 pontos 37, 1 pontos 46, 0 pontos 20 dolgozat. Nem versenyszerű: 6 dolgozat.

B. 4661. *Adott egy n oszlopot és k sort tartalmazó sakktábla, melynek bizonyos mezőire korongokat helyeztünk (minden mezőre legfeljebb egyet). Nevezzünk két korongot szomszédosnak, ha egy sorban vagy oszlopban vannak, és az őket összekötő szakaszon nincs további korong. Minden korongnak legfeljebb három szomszédja van. Legfeljebb hány korong van a sakktáblán?*

(*6 pont*) Javasolta: *Williams Kada* (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn.)

I. megoldás. Ha minden korongnak legfeljebb három szomszédja van, vagyis legfeljebb három másik korongot „lát” a táblán, akkor ez azt jelenti, hogy legalább egy irányban nincs szomszédja. Mondhatjuk úgy, kinéz a tábláról egy ablakon, ahol az „ablak” a sakktábla kerületének egységnyi része.

Megállapíthatjuk, hogy a sarokba bármilyen elrendezés mellett elhelyezhető korong anélkül, hogy bármely más korong kilátását zavarná. Ez azért igaz, mert a szélső sorokban és oszlopokban álló korongok közvetlenül kilátnak a tábláról, hiszen egyik oldaluk a tábla kerületén van. A sarokba elhelyezett négy korong összesen 8 ablakot takar el.



Ezután marad még $2(n+k)-8$ ablak. A legtöbb korongot akkor tudjuk elhelyezni, ha mindegyik pontosan egy ablakon lát ki. Ilyen elrendezés létezik, például ha az összes szélső mezőt korongokkal töltjük fel. Ebből további jó megoldásokat generálhatunk, a szélső korongok beljebb tologatásával, de újabb korongot már nem tudunk elhelyezni (*ábra*).

Megállapítható, hogy $n,k\geqslant 2$ esetén a korongok száma legfeljebb $2(n+k)-4$ lehet. Ha $n=1$ vagy $k=1$, akkor legfeljebb annyi korong helyezhető el a táblán, ahány mező van, ilyenkor minden korongnak legfeljebb két szomszédja van.

Adorján Dániel (Budapest, Szent István Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Az, hogy egy korongnak hány szomszédja van, azt mutatja meg, hogy az „oszlopában fölötte", „oszlopában alatta", „sorában tőle balra", illetve a „sorában tőle jobbra" irányok közül hányban van másik korong.

Vegyünk egy olyan elrendezést, ahol a lehető legtöbb korong van a táblán úgy, hogy minden korongnak legfeljebb három szomszédja van. Ekkor minden sarokban kell lennie korongnak, mert ha valamelyikben nem lenne, oda téve még egy korongot egy több korongból álló megfelelő elrendezést kapnánk. (A sarokba tett korongnak legfeljebb két szomszédja lehet. Az elhelyezéssel csak olyan korongok szomszédjainak a száma nőhet, amelyek szélső sorban vagy oszlopban vannak, így a szomszédságaik száma nem nőhet 3 fölé.)

Jelöljük meg azokat a korongokat, amelyek fölött abban az oszlopban már nincs másik korong. Ez oszloponként legfeljebb 1, így összesen legfeljebb n db jelölést jelent. Most jelöljük meg azokat, amik a saját oszlopukban a legalsók, ez megint legfeljebb n db jelölés. Jelöljük meg azokat is, amik a sorukban az elsők, ezekből legfeljebb k db van, majd azokat is, amik a sorukban az utolsók, ezekből is legfeljebb k db van. Ez összesen legfeljebb $2k+2n$ db jelölés, de a sarkokban lévő korongokat kétszer jelöltük meg. Ezek szerint legfeljebb $2k+2n-4$ db megjelölt korong lehet.

Jelöletlen korong nem maradhatott, mert ha lenne, az azt jelentené, hogy az oszlopában alatta és fölötte és a sorában előtte és mögötte is van másik korong, azaz négy szomszédja van.

Tehát legfeljebb $2k+2n-4$ korong helyezhető el a táblán megfelelő módon.

Ha $n, k \geqslant 2$, akkor ennyi valóban elhelyezhető, például ha az összes szélső mezőt korongokkal töltjük fel. Ekkor a sarkokban lévő korongoknak két, a többinek pedig három szomszédja lesz.

Ha $k=1$ vagy $n=1$, akkor legfeljebb annyi korong helyezhető el a táblán, ahány mező van. Ilyenkor a két szélső korongnak egy-egy, a többinek két-két szomszédja lesz.

Baran Zsuzsanna (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

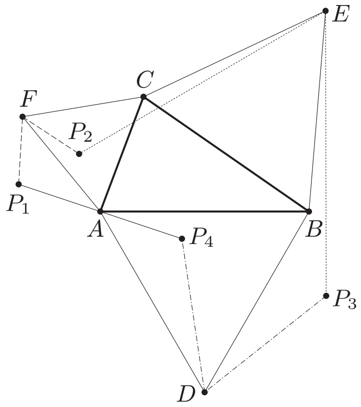
109 dolgozat érkezett. 6 pontos 44, 5 pontos 28, 4 pontos 5, 3 pontos 3, 2 pontos 1, 1 pontos 21, 0 pontos 6 dolgozat. Nem versenyszerű: 1 dolgozat.

B. 4662. *Az ABC háromszög oldalaira kifelé rajzolt szabályos háromszögek harmadik csúcsai D, E és F. Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha adottak a D, E és F pontok.*

(*4 pont*) Javasolta: *Miklós Szilárd* (Herceghalom)

Megoldás. Az $ACF\sphericalangle, CEB\sphericalangle$ és $BDA\sphericalangle$ 60°-os szögek, mivel szabályos háromszögek csúcsairól van szó.

Vegyünk fel egy tetszőleges P_1 pontot. Forgassuk el ezt F pont körül pozitív irányba 60°-kal, ekkor megkapjuk a P_2 pontot. Ezt követően a P_2-t forgassuk el E körül pozitív irányba 60°-kal, ekkor kapjuk a P_3 pontot. Végül a P_3 pontot forgassuk el a D körül pozitív irányba 60°-kal, ekkor jutunk a P_4 ponthoz.



Egymás után három azonos irányú 60°-os forgatást végeztünk el, tehát egy $3\cdot 60^\circ = 180^\circ$-os forgatást. A 180°-os forgatás egy középpontos tükrözésnek felel meg. A háromszögek szabályossága miatt A-t 60°-kal pozitív irányba F körül elforgatva a C ponthoz jutunk, ezt E körül pozitív irányba 60°-kal elforgatva a B pontot kapjuk meg, ezt pedig D körül pozitív irányba szintén 60°-kal elforgatva visszakapjuk az A pontot. Tehát az összesen 180°-os forgatást elvégezve A-ból visszajutunk A-ba, tehát A a fixpontja a középpontos tükrözésnek.

Azt látjuk, hogy P_1-et A-ra tükrözve a P_4 pontot kaptuk. Mivel középpontosan tükröztünk, az A pont éppen a P_1P_4 szakasz felezőpontja. Így az A pontot a leírtak alapján meg is tudjuk szerkeszteni. A-ból pedig megszerkeszthető a háromszög többi csúcsa is: A-t pozitív irányba F körül elforgatva megkapjuk a C pontot, C-t E körül pozitív irányba szinén 60°-kal elforgatva megkapjuk a B pontot is. Tehát megszerkesztettük az ABC háromszöget.

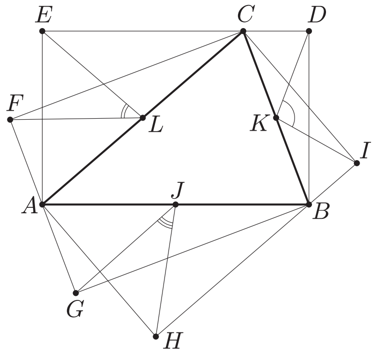
Előfordulhat a szerkesztés során, hogy nem létezik a P_1P_4 szakasz, mivel a két pont egybeesik. Ekkor P_1 a középpontos tükrözés fixpontja, vagyis éppen a keresett A csúcs. Ezután a szerkesztés az előbb leírtak szerint, két forgatással fejezhető be.

Török Tímea (Bonyhádi Petőfi Sándor Evang. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

91 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 48, 3 pontot 20 tanuló, 2 pontos 12, 1 pontos 5, 0 pontos 4 versenyző dolgozata. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

B. 4664. *Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldalára befelé az $ABDE$ téglalapot írjuk úgy, hogy a C pont a DE oldalra kerüljön. Hasonlóan definiáljuk a $BCFG$ téglalapot és a $CAHI$ téglalapot. (Az A az FG szakaszra, a B pedig a HI szakaszra esik.) Az AB, BC és CA oldalak felezőpontjai rendre J, K és L. Igazoljuk, hogy a $GJH\sphericalangle$, $IKD\sphericalangle$ és $ELF\sphericalangle$ szögek összege 180°.*

(*4 pont*) Javasolta: *Miklós Szilárd* (Herceghalom)



Megoldás. Készítsük el a feladatban szereplő betűzésekkel az *ábrát.*

Az ABC háromszög szögeit a szokásos módon rendre α, β, γ-val jelöljük. Fejezzük ki az állításban szereplő szögeket az α, β, γ segítségével.

Az $ACE\sphericalangle = CAB\sphericalangle = \alpha$, mert váltószögek. Az ECA háromszög derékszögű, átfogója AC, ennek felezőpontja L. Az E és F pontok az AC szakasz Thalész-körén helyezkednek el, $AL = FL = EL = CL$. Az ELC háromszög egyenlő szárú, így $LEC\sphericalangle = LCE\sphericalangle = \alpha$, tehát $ELC\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha$. Hasonlóan számolható az $FLA\sphericalangle$ szög is, $FLA\sphericalangle = 180^\circ - 2\gamma$. A két előbbi alapján

$$ELF\sphericalangle = 180^\circ - ELC\sphericalangle - FLA\sphericalangle = 180^\circ - 180^\circ + 2\alpha - 180^\circ + 2\gamma = 2\alpha + 2\gamma - 180^\circ.$$

A feladatban szereplő másik két szögre ugyanezzel a gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} IKD\sphericalangle &= 180^\circ - CKD\sphericalangle - IKB\sphericalangle = 180^\circ - (180^\circ - 2\beta) - (180^\circ - 2\gamma) = \\ &= 2\beta + 2\gamma - 180^\circ, \\ GJH\sphericalangle &= 180^\circ - AJG\sphericalangle - HJB\sphericalangle = 180^\circ - (180^\circ - 2\beta) - (180^\circ - 2\alpha) = \\ &= 2\beta + 2\alpha - 180^\circ. \end{aligned}$$

Végül a három kifejezett szög összege:

$$ELF\sphericalangle + IKD\sphericalangle + GJH\sphericalangle = 4\alpha + 4\beta + 4\gamma - 3\cdot 180^\circ = 4(\alpha+\beta+\gamma) - 3\cdot 180^\circ = 180^\circ.$$

A feladat állítását igazoltuk.

Dobák Dávid (Kecskemét, Katona József Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

167 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 159, 3 pontot 4 tanuló, 2 pontos 1, 1 pontos 1, 0 pontos 2 versenyző dolgozata.

B. 4666. *Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészre*

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)\left[\frac{n}{k}\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right]^2.$$

(*5 pont*)

I. megoldás. Definiáljuk az f_n függvényt a pozitív egész számpárokon a következőképpen:

$$f_n(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \left[\frac{n}{x}\right] \geqslant y, \\ 0, & \text{ha } \left[\frac{n}{x}\right] < y. \end{cases}$$

Nyilván $f_n(x,y)$ értéke pontosan akkor 1, ha $\frac{n}{x} \geqslant y$, vagyis ha $\frac{n}{y} \geqslant x$, ezért

$$f_n(y,x) = f_n(x,y).$$

A bevezetett jelöléssel az összeg a következőképpen alakítható:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)\left[\frac{n}{k}\right] = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)\left(\sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]} 1 + \sum_{j=\left[\frac{n}{k}\right]+1}^{n} 0\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left((2k-1)\sum_{j=1}^{n} f_n(k,j)\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (2k-1) f_n(k,j) =$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)f_n(j,k)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{j}\right]}(2k-1)\cdot 1+\sum_{k=\left[\frac{n}{j}\right]+1}^{n}(2k-1)\cdot 0\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{j}\right]}(2k-1)=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{n}{j}\right]^2=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]^2.$$

Gáspár Attila (Miskolc, Földes F. Gimn., 9. évf.)

II. megoldás. Megoldásomhoz ötletet adott a *KöMaL Fórum:* Érdekes matekfeladatok 3931. bejegyzése.

Rajzoljunk oszlopdiagramot a derékszögű koordináta-rendszer első síknegyedébe úgy, hogy az x tengely k-adik egységszakasza fölé $\left[\frac{n}{k}\right]^2$ magasságú oszlopot rajzolunk. Az oszlopok együttes területe ekkor a jobb oldal értékét adja, és az oszlopok „ereszkednek", ahogy k értéke nő. Most tekintsük ezt, mint sordiagramot: nézzük meg, milyen hosszú sor lóg ki az y tengely a $\left((k-1)^2\right)$-ediktől a k^2-edik egységszakaszig terjedő tartományából. Mivel csak négyzetszám magasságú oszlopok vannak, az itt kilógó sorok együtt egy téglalapot alkotnak, melynek területe a két oldalának a szorzata. Az egyik oldala $2k-1$, a másik pedig az a hossz, amennyire ez benyúlik. A téglalap addig tart, amíg az a-adik oszlop magassága legalább k^2, azaz

$$\left[\frac{n}{a}\right]^2\geqslant k^2,\quad \left(\frac{n}{a}\right)^2\geqslant k^2,\quad \left(\frac{n}{k}\right)^2\geqslant a^2,\quad \frac{n}{k}\geqslant a.$$

Mivel a egész, azért $\left[\frac{n}{k}\right]\geqslant a$. Tehát a sorok által alkotott k-adik téglalap területe $(2k-1)\left[\frac{n}{k}\right]$; ezzel azt kaptuk, hogy a bal oldali összeg is a diagram területét adja. Ezzel bizonyítottuk az állítást.

Hansel Soma (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn. és Ált. Isk., 10. évf.)

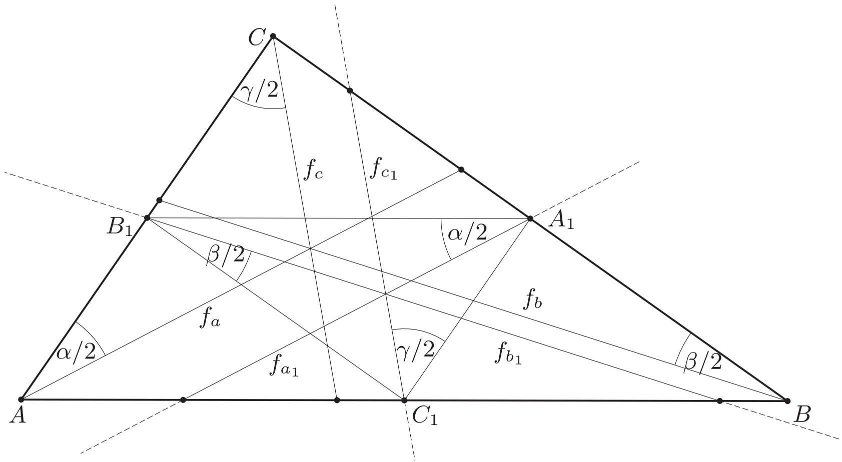
36 dolgozat érkezett. 5 pontos 31, 4 pontos 2, 2 pontos 1, 0 pontos 2 dolgozat.

B. 4670. *Az ABC háromszög oldalainak felezőpontjai legyenek A_1, B_1 és C_1. Bocsássunk A_1-ből merőlegest az A csúcshoz tartozó szögfelezőre, B_1-ből a B-hez, C_1-ből pedig a C-hez tartozóra. A B_1-et tartalmazó merőleges és a C_1-et tartalmazó merőleges metszéspontja legyen A_2, hasonlóan kapjuk a B_2, C_2 pontokat. Mutassuk meg, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek egy pontban metszik egymást.*

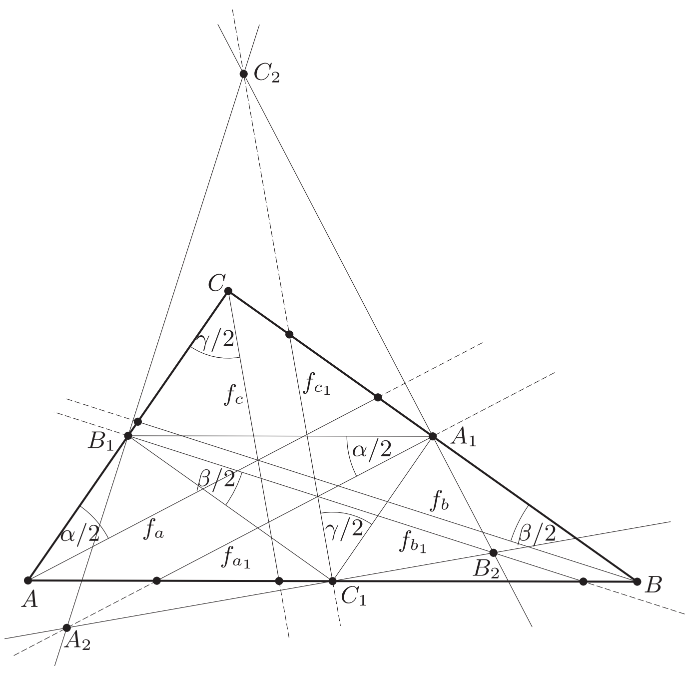
(*3 pont*) Javasolta: *Sárosdi Zsombor* (Veresegyház)

Megoldás. Legyenek az A, B, C pontokból induló belső szögfelezők f_a, f_b, f_c. Az $A_1B_1C_1$ középvonal háromszög belső szögfelezői legyenek f_{a_1}, f_{b_1}, f_{c_1}. Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek oldalai páronként párhuzamosak és megfelelő szögeik egyenlők, ezért $f_{a_1}\parallel f_a$, $f_{b_1}\parallel f_b$, $f_{c_1}\parallel f_c$.

Ezért az A_1, B_1, C_1 pontokból az f_a, f_b, f_c szögfelezőkre bocsájtott merőlegesek az f_{a_1}, f_{b_1}, f_{c_1} egyenesekre is merőlegesek lesznek, és így ezek lesznek az $A_1B_1C_1\triangle$ külső szögfelezői.



Egy háromszög két csúcsában húzott külső és a harmadik csúcsban húzott belső szögfelezője egy pontban, a háromszög hozzáírt körének középpontjában metszi egymást, ezért az $A_1B_1C_1\triangle$ külső szögfelezőinek A_2, B_2, C_2 metszéspontjain rendre áthaladnak az f_{a_1}, f_{b_1}, f_{c_1} szögfelezők. Ezek rendre egybeesnek az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesekkel.



Vagyis az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek az $A_1B_1C_1\triangle$ belső szögfelezői, ezért egy pontban metszik egymást.

Gál Boglárka (Veszprém, Lovassy L. Gimn. 12. évf.) dolgozata alapján

35 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 13 versenyző: Csépai András, Gál Boglárka, Geng Máté, Gyulai-Nagy Szuzina, Heinc Emília, Juhász Dániel, Kerekes Anna, Khayouti Sára, Nagy Dávid Paszkál, Németh Balázs, Polgár Márton, Vankó Miléna, Williams Kada. 2 pontos 5, 1 pontos 8, 0 pontos 9 dolgozat.

B. 4672. *Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész számokon értelmezett, valós értékeket felvevő f függvényt, amelyre tetszőleges n pozitív egész esetén teljesül, hogy*

$$\frac{p}{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}=\frac{p+1}{f(n)}-\frac{p+1}{f(n+1)},$$

ahol p rögzített pozitív szám.

(*5 pont*) Javasolta: *Kovács Béla* (Szatmárnémeti)

Megoldás. Válasszuk meg $f(1)$ értékét tetszőleges, 0-tól különböző valós számnak (egyébként a lépések során 0-val osztanánk): legyen $f(1)=a$, ahol $a\neq 0$. Az összefüggés alapján kiszámolhatjuk f első néhány értékét:

$$f(1)=a,\quad f(2)=(p+1)\cdot a,\quad f(3)=\frac{(p+1)(p+2)}{2}\cdot a,$$

$$f(4)=\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}\cdot a.$$

Ezek alapján azt sejtjük, hogy ha $n\geqslant 2$, akkor

$$f(n)=\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}{(n-1)!}\cdot a=\frac{(p+n-1)!}{p!(n-1)!}\cdot a=\binom{p+n-1}{p}a.$$

Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk. Láthattuk, hogy $n=2,3,4$-re igaz. Tegyük fel, hogy n-ig igaz, és bizonyítsunk $n+1$-re. Feltételünk szerint:

$$\frac{p}{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}=\frac{p+1}{f(n)}-\frac{p+1}{f(n+1)},$$

ebbe írjuk be az indukciós feltevésünket ($f(1)$-et $\binom{p}{p}a$-ként írva):

$$\frac{p}{\binom{p}{p}a+\binom{p+1}{p}a+\ldots+\binom{p+n-1}{p}a}=\frac{p+1}{\binom{p+n-1}{p}a}-\frac{p+1}{f(n+1)}.$$

Alkalmazzuk az ismert

$$\binom{p}{p}+\binom{p+1}{p}+\ldots+\binom{p+n-1}{p}=\binom{p+n}{p+1}$$

összefüggést: Ezt beírva:

$$\frac{p}{\binom{p+n}{p+1}a}=\frac{p+1}{\binom{p+n-1}{p}a}-\frac{p+1}{f(n+1)},$$

$$\frac{p+1}{f(n+1)}=\frac{p+1}{\binom{p+n-1}{p}a}-\frac{p}{\binom{p+n}{p+1}a}=\frac{(p+1)p!(n-1)!}{(p+n-1)!a}-\frac{p(p+1)!(n-1)!}{(p+n)!a}=$$

$$=\frac{(p+n)(p+1)!(n-1)!-p(p+1)!(n-1)!}{(p+n)!a}=$$

$$=\frac{n(p+1)!(n-1)!}{(p+n)!a}=\frac{(p+1)!n!}{(p+n)!a},$$

$$f(n+1)=a\frac{(p+n)!}{p!n!}=a\binom{p+n}{p},$$

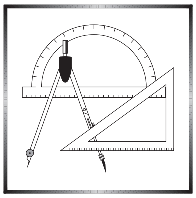
és éppen ezt akartuk belátni. Ezzel indukciós bizonyításunkat befejeztük.

Könnyen látható behelyettesítéssel, de előbbi bizonyításunkból is látszik, hogy a felírt alakú függvények valóban ki is elégítik minden n-re az összefüggést. Így tehát pontosan a következő függvények megfelelők: $f(n)=\binom{p+n-1}{p}a$, ahol a tetszőleges nemnulla valós szám.

Szőke Tamás (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. évf.)

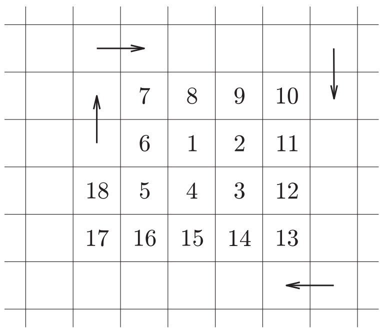
50 dolgozat érkezett. 5 pontos 29, 4 pontos 17, 2 pontos 1, 1 pontos 1, 0 pontos 2 dolgozat.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1287–1293.)



Feladatok 10. évfolyamig

C. 1287. Egy elég nagy négyzethálós lapra csigavonalban haladva felírjuk a pozitív egész számokat az *ábra* szerint. Melyik számok állnak a 2015 felett és alatt?



C. 1288. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalának a B csúcshoz közelebb eső harmadolópontja H, a BC oldal felezőpontja pedig F. Milyen arányban osztja az AF és DH szakaszok metszéspontja ezeket a szakaszokat?

Feladatok mindenkinek

C. 1289. Van 5 darab ötforintos, 10 darab tízforintos és 20 darab húszforintos pénzérménk. Hányféleképpen válthatunk fel 500 Ft-ot a pénzérmék felhasználásával?

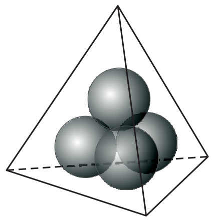
C. 1290. Oldjuk meg az $(x;y)$ egész számpárok körében a $2xy+2x-5y=40$ egyenletet.

C. 1291. Az x-tengely mely pontjából látszik legnagyobb szögben az $A(2;4)$ és $B(6;1)$ pontok által meghatározott szakasz?

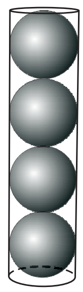
Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1292. Oldjuk meg a $\left(3\sqrt{3}\right)^n-\left(2\sqrt{2}\right)^n=2^n+3^n+\sqrt{6}^{\,n}$ egyenletet a pozitív egészek körében.

C. 1293. Az Alfa sportszergyártó négyesével csomagolja a teniszlabdákat: gúlába rendezve egy szabályos tetraéder alakú dobozba (*1. ábra*). Az AFLA cég szintén négyesével csomagolja a teniszlabdákat: egymásra téve egy hosszú henger alakú (alul-felül zárt) dobozba (*2. ábra*). Mekkora az eltérés a kétféle doboz felülete között, ha egy teniszlabda átmérője 6,50 cm?



1. ábra

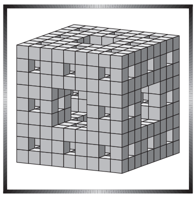


2. ábra

❄

Beküldési határidő: 2015. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4705–4713.)

B. 4705. Legyen p páratlan prímszám. Mutassuk meg, hogy az $x^2+px=y^2$ egyenletnek pontosan egy megoldása van a pozitív egész számpárok körében.

(*4 pont*) Javasolta: *Németh Balázs* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Gimn., 9. évf.)

B. 4706. Az $ABCD$ téglalap oldalai $AB=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ és $BC=1$. Legyen E az AB szakasz azon belső pontja, amelyre $AE=1$. Mutassuk meg, hogy

$$ACE\sphericalangle=2\cdot EDB\sphericalangle.$$

(*3 pont*) Javasolta: *Miklós Szilárd* (Herceghalom)

B. 4707. Legyen $t>1$ páratlan egész szám. Mutassuk meg, hogy csak véges sok olyan, t-nél nem kisebb n, k egészekből álló pár létezik, amelyre $S=\binom{n}{t}+\binom{k}{t}$ prím.

(*5 pont*) Javasolta: *Maga Balázs* (Budapest)

B. 4708. Az ABC hegyesszögű háromszög körülírt körének középpontja O, magasságpontja M. Tükrözzük az A pontot a BC oldal felezőmerőlegesére, a B pontot a CA oldal felezőmerőlegesére, végül a C pontot az AB oldal felezőmerőlegesére, a tükörképek rendre A_1, B_1, C_1. Legyen az $A_1B_1C_1$ háromszög beírt körének középpontja K. Bizonyítsuk be, hogy az O pont felezi az MK szakaszt.

(*5 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 4709. Oldjuk meg az

$$x^2+y^2=13,$$
$$x^3+y^3=35$$

egyenletrendszert.

(*3 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 4710. A síkbeli $\mathcal{P}$ ponthalmazról tudjuk, hogy minden egységsugarú körlemez a belsejében tartalmazza legalább egy pontját. Igaz-e, hogy biztosan van olyan egységsugarú zárt körlemez, amely legalább három $\mathcal{P}$-beli pontot tartalmaz?

(*4 pont*)

B. 4711. Legyen $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Számítsuk ki az

$$f(0/2015)+f(1/2015)+f(2/2015)+\ldots+f(2014/2015)+f(2015/2015)$$

összeg értékét.

(*5 pont*)

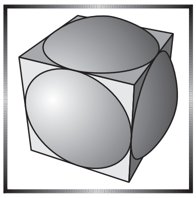
B. 4712. Hány százalékát pazaroljuk el egy ceruzának? Tegyük fel, hogy a ceruza végtelen hosszú henger alakú, és benne a grafit is egy hengeres rúd, a hengerek tengelye pedig egybeesik. Kihegyezzük a ceruzát úgy, hogy a grafit hegye tökéletes kúp alakú, melynek nyílásszöge 12 fok. A használat során a ceruza és a papírlap által bezárt szög mindig 42 fok. Egészen addig használjuk a ceruzát, amíg már akárhogyan is forgatjuk a tengelye körül, nem tudunk írni vele, mert a fa karcolni kezdi a papírt. Ekkor újra kihegyezzük a ceruzát, egészen addig, hogy a ceruza hegye újra 12 fokos kúp legyen, de nem tovább, vagyis a grafit hegyének csúcsa nem változik a hegyezés során, az csak a használat során kopik. A grafit hány százalékát pazaroljuk el azzal, hogy a hegyezések során mindig valamennyit leforgácsolunk? Többet vagy kevesebbet pazarol az, aki 45 fokban tartja a ceruzát, és mennyivel?

(*5 pont*) Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)

B. 4713. Az ABC háromszög B és C csúcsain áthaladó kör az AB oldalt D-ben, az AC oldalt E-ben metszi. A CD és BE egyenesek metszéspontja O. Legyen M az ADE, N pedig az ODE háromszög beírt körének középpontja. Bizonyítsuk be, hogy az MN egyenes felezi a kisebbik DE ívet.

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2015. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (641–643.)

A. 641. Van-e a síkbeli négyzetrácsnak olyan S véges, nemüres részhalmaza, amelyben minden pontnak legalább két szomszédja szintén S-beli, és S nem tartalmaz négy olyan pontot, amelyek egy (nem feltétlenül tengelypárhuzamos) négyzet csúcsai?

Javasolta: *Sustik Mátyás* (San Francisco)

A. 642. Legyen $n \geqslant 3$, és legyenek $x_1, \dots, x_n$ nemnegatív számok, továbbá legyen $A = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $B = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ és $C = \sum_{i=1}^{n} x_i^3$. Igazoljuk, hogy

$$(n+1)A^2B + (n-2)B^2 \geqslant A^4 + (2n-2)AC.$$

A. 643. Tetszőleges pozitív egész n esetén jelöljük $P(n)$-nel az n^2+1 legnagyobb prímosztóját. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan (a,b,c,d), pozitív egészekből álló számnégyes létezik, amire $a<b<c<d$ és $P(a)=P(b)=P(c)=P(d)$.

Beküldési határidő: 2015. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Informatikából kitűzött feladatok

I. 373. A szöveg formázásának hatékony módja a stílusok alkalmazása. Használatuk esetén az egyes szövegegységek jellemzőit nem egyenként, hanem a hozzájuk rendelt stílusok segítségével állítjuk be. A legtöbb programban a stílusok nem önállóan létező elemek, hanem fastruktúrába rendezhetők. Egy szövegegység adott tulajdonságát a helyben, egyedileg megadott érték határozza meg. Ha az hiányzik, akkor a hozzárendelt stílusban vagy a struktúrában a felette levő stílusok közül a hozzá legközelebbiben szereplő beállítás a meghatározó.

A feladatban a fentiek leegyszerűsített modelljével dolgozunk: a szövegegységek bekezdések, a tulajdonságaik pozitív egészek. Készítsünk programot `i373` néven, amely a stílusok leírását a lehető legtömörebbé alakítja, az egyes szövegrészek tényleges jellemzőit pedig meghatározza.

A bemeneti fájl két részből áll. Az első rész első sora a tárolt stílusok s száma. A következő s sor egy-egy stílus leírását tartalmazza. Az első karakter a stílus neve (az angol ábécé nagybetűje), a következő a struktúrában felette lévő stílus neve (a fa csúcsa esetén önmaga), majd a tulajdonság–érték párosok (az angol ábécé kisbetűje–pozitív szám). Az értékeket pontosan egy szóköz választja el. A következő sorban a szöveg bekezdéseinek b száma található, amely legfeljebb 500 lehet. A következő b sorban egy-egy bekezdés leírása található. Az első karakter az alkalmazott stílus neve, majd a bekezdésben egyedileg érvényes tulajdonság–érték párosok olvashatók az előző részhez hasonló formában.

A kimeneti fájl szerkezete pontosan egyezik a bemeneti fájl szerkezetével. Az első rész tartalmazza az egyszerűsített stílusokat, ahol azok a tulajdonságok nem jelennek meg, amelyek nem módosítják a struktúrában felettük lévő stílusokban beállított értékeket. A második részben az egyes bekezdésekben ténylegesen érvényre jutó tulajdonságok jelenjenek meg.

Bemenet:	Kimenet:

`4`
`A A b 1 c 2 e 4`
`F A b 2`
`D F a 3 b 2 c 2`
`C A b 1 c 3 e 5 a 3`
`3`
`A f 4 b 3 d 2`
`C`
`D f 2 b 1`
	`4`
	`A A b 1 c 2 e 4`
	`F A b 2`
	`D F a 3`
	`C A c 3 e 5 a 3`
	`3`
	`b 3 c 2 d 2 e 4 f 4`
	`b 1 c 3 e 5 a 3`
	`a 3 b 1 c 2 e 4 f 2`

A program első parancssori argumentuma a bemeneti fájl neve, a második pedig a kimeneti fájl neve legyen.

Beküldendő egy tömörített `i373.zip` állományban a program forráskódja (`i373.pas`, `i373.cpp`, ...), valamint a program rövid dokumentációja (`i373.txt`, `i373.pdf`, ...), amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztő környezetben fordítható.

I. 374 (É). Egy Magyarországra most érkező autógyártó kereskedelmi pontokat és márkaszervizeket hoz létre vidéki városainkban, többnyire a megyeszékhelyeken és megyénként néhány nagyobb településen. A `motelep.csv` tabulátorokkal tagolt, UTF-8 kódolású szöveges állományban rendelkezésre áll az ország városainak neve, a városok térképes elhelyezéséhez X és Y koordináták (méter mértékegységben), valamint a megye, amelyhez a város tartozik és – amelyik városban lesz – a létesítendő telephely neve. Oldjuk meg táblázatkezelő program segítségével a következő feladatokat. A megoldást mentsük `i374` néven a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában. A megoldáshoz rendelkezésre áll még egy `momegyek.png` nevű kép, amely Magyarország megyetérképét tartalmazza. Mindkét állomány honlapunkról letölthető.

1. Töltsük be a `motelep.csv` állományt egy munkalap A1-es cellájától kezdve és nevezzük át a munkalapot **városok** névre. A táblázat fejléce álljon a Város, TérképX, TérképY, Megye és Telephely szavakból, melyek jelenjenek meg félkövér betűstílussal, szürke háttérszínnel, vízszintesen középre igazítva.
2. Az X és Y koordinátákat kerekítsük egészre, majd az eredeti adatokat cseréljük le a kerekített értékekre, és a továbbiakban ezekkel számoljunk. A munkalap nem üres celláit szegélyezzük vékony szegéllyel. Az adatokat rendezzük a megye, illetve azon belül a városok neve szerint.
3. Készítsünk diagramot, amelyen ábrázoljuk a városokat egy **városok diagram** munkalapra. A városok helyét jelentő körvonal nélküli körök RGB $(132, 60, 12)$ színnel legyenek kitöltve.
4. A diagram rajzterületének háttereként a `momegyek.png` képet adjuk meg. A diagram tengelyeit úgy állítsuk be, hogy ne kerüljön város az országhatáron túlra, és a Budapest körüli települések is nagyjából a főváros határához kerüljenek. Legnyugatibb városunk, Szentgotthárd, valamint a fővárostól észak felé eső Balassagyarmat éppen a határvonalon legyenek.
5. A diagramnak ne legyen jelmagyarázata. A „**Magyarország városai és megyéi**" diagramcím a bal felső részben, Magyarországon kívül, a jelölőkkel azonos betűszínnel és narancssárga RGB $(255, 230, 153)$ háttérszínnel jelenjen meg. A tengelyeket és vezetőrácsokat ne jelenítsük meg a diagramon.
6. Szűrjük ki egy másik munkalapra a városok közül azoknak az összes adatát, amelyeken telephelyet létesít majd a gyár. Ezt a munkalapot **telephely** névre nevezzük is át, és formázzuk a **városok** munkalap megjelenéséhez hasonlóan. Hozzunk létre a **telephely diagram** nevű munkalapon egy az előzővel megegyező formátumú diagramot a telephelyek városaiból, melynek diagramcíme „**Magyarországi telephelyek**" szöveg legyen.
7. Készítsünk egy **távolságok** munkalapot, amely megadja az (X, Y) koordináták és a Pitagorasz-tétel segítségével az összes város és a telephelyként szereplő városok térkép szerinti távolságát. A munkalap A2 cellájától lefelé hivatkozással adjuk meg az összes város nevét, illetve a B1-es cellától jobbra rendre a telephelyek városainak nevét.
8. Az első oszlopban és az első sorban lévő városok közötti távolságot adjuk meg a sorok és oszlopok metszéspontjában található cellákban egy másolható képlet segítségével km mértékegységben, egész számként megjelenítve. A CA oszloptól vagy a 350. sortól segédcellák használhatók a számításokhoz.
9. Készítsünk egy **keresés** nevű munkalapot, amely alkalmas arra, hogy megmutassa, hol vannak egy adott városhoz az adott távolságon belüli telephelyek. Az A1-es cellába a „**Város**" szöveget írjuk, az A2-es cellába egy magyar város nevét, a B1-es cellába a „**Telephely**" és a C1 cellába a „**Távolság**" szöveget. A B2-es cellában határozzuk meg a legközelebbi telephely városát és a C2-es cellában a két város távolságát km-ben. Ebben a cellában a meghatározott érték mellett jelenjen meg a „km" mértékegység.

	Baja	Kalocsa	Kecskemét	Komló	Mohács	Pécs	Szigetvár	Békéscsaba	Gyula	Orosháza	Kazincbarcika	Miskolc	Ózd	Sárospatak	Sátoraljaújhely
Bácsalmás	29	52	91	83	52	84	119	148	161	114	256	246	244	308	308
Baja	0	38	98	54	30	56	91	172	185	138	263	255	248	319	319
Dunavecse	81	43	55	97	105	108	132	163	178	135	195	191	176	260	260
Hajós	26	18	72	70	56	76	109	154	168	121	236	229	222	293	293
Izsák	75	42	28	108	104	117	146	133	148	104	188	181	173	248	248
Jánoshalma	31	37	73	83	60	87	121	141	155	107	239	229	226	292	292

Beküldendő egy tömörített `i374.zip` fájlban a megoldás rövid leírása (`i374.pdf`), amely tartalmazza a használt táblázatkezelő program nevét és verzióját, valamint a megoldást adó táblázatkezelő munkafüzet (`i374.xlsx`, `i374.ods`, ...).

I. 375. Készítsük el a közlekedési csomópont probléma mechanikai modelljének számítógépes változatát.

A probléma lényege: adott három város, egy közös közlekedési csomóponthoz szeretnének utat építeni úgy, hogy az összköltség minimális legyen. Az eredeti probléma mechanikai interpretációját Pólya György adta, amelynek lényege: helyezzünk el a három pontban egy-egy csigát, azokon vessünk át egy-egy kötelet, amelyet fogjunk össze egy közös pontban, a túlsó végükre pedig egy-egy azonos nagyságú súlyt erősítsünk. A rendszer egyensúlyi állapota – amikor a közös pontban ható erők kioltják egymást – adja meg a csomópont helyét. (Pólya György: *Indukció és analógia,* Gondolat, 1988, 165–171.)

A fenti rendszert általánosítsuk n pontra. A megjelenítést egyszerűsítsük azzal, hogy a csigákat a pontokat tartalmazó síkon egy adott helyen vágott lyukkal helyettesítjük. A fonalakat egy közös pontból a lyukakhoz vezetett szakaszokkal ábrázoljuk. (A közös pont a lyukon nem haladhat át.) A modell 3 pontra itt tekinthető meg: `http://demonstrations.wolfram.com/PolyasMechanicalModelForTheFermatPoint/`.

A számítógépes modell a következőképpen legyen használható:

- n értékét a 3 és 8 között szabadon megadjuk;
- a lyukak helyét a felületen megadhatjuk, de véletlenszerű elhelyezést is választhatunk;
- a program az egyensúlyi helyzet felé lépésenként halad az alábbiak szerint:
  - *a.* a felületet felülnézetből látjuk;
  - *b.* a közös pontra ható erőket a belőle induló, fonálirányban mutató egységvektorokkal szemléltetjük;
  - *c.* léptetéskor az összeköttetési pontot a program a fenti egységvektorok eredőjének irányába mozdítja.

A megoldást bármely programozási eszközzel elkészíthetjük. Ügyeljünk a szép megjelenésre és a könnyű használhatóságra.

Beküldendő egy tömörített (`i375.zip`) állományban a megoldás leírása (`i375.pdf`), amely tartalmazza megoldás lényeges lépéseinek ismertetését; valamint a program forrásnyelvi változata és a fordításához és működéséhez szükséges fájlok.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: **2015. május 10.**

S. 98. Szeretnénk a számítógépünket felújítani, ezért vásárolnunk kell bele néhány alkatrészt, így a régieket az újakra tudjuk cserélni. A lehető legolcsóbban szeretnénk a felújítást elvégezni, így a legkevesebb alkatrészt szeretnénk megvásárolni (mindegyik azonos árban van). Viszont előfordulhat, hogy valamilyen összetartozó k db alkatrész közül $k-1$-et újra cserélünk, ekkor kötelezően a k-adikat is ki kell cserélni. A boltban összesen N ($1 \leqslant N \leqslant 1\,000\,000$) típusú alkatrész található (1-től N-ig számozva). Az összetartozó csoportok mérete bármekkora lehet, de összes méretük legfeljebb 250 000 lehet. Tudjuk továbbá azt is, hogy az 1-es számú alkatrészt mindenképp ki kell cserélnünk.

A program olvassa be a standard input első sorából N-et és C-t (a csoportok számát), majd a következő C sorból a csoportban lévő alkatrészek db_i számát, majd a csoportban lévő alkatrészek típusát db_i darab 1 és N közötti egész formájában. A két csoportnak akár közös elemei is lehetnek. A program írja a standard output első sorába a megvásárolandó alkatrészek minimális számát. Magyarázat: a példában az 1, 2, 3, 4-es számú alkatrészeket kell megvenni.

Példa bemenet:	Példa kimenet:
10 4 2 1 3 2 3 4 6 1 2 3 4 6 7 4 4 3 2 1	4

Pontozás és korlátok: A programhoz mellékelt, a helyes megoldás elvét tömören, de érthetően leíró dokumentáció 1 pontot ér. A programra akkor kapható meg a további 9 pont, ha bármilyen hibátlan bemenetet képes megoldani az 1 mp futásidőkorláton belül.

Beküldendő egy tömörített `s98.zip` állományban a program forráskódja (`s98.pas`, `s98.cpp`, ...) az `.exe` és más, a fordító által generált állományok nélkül, valamint a program rövid dokumentációja (`s98.txt`, `s98.pdf`, ...), amely a fentieken túl megadja, hogy a forrás mely fejlesztői környezetben fordítható.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: **2015. május 10.**

A csillagok színei

Népszerű csillagászati művekben, filmekben gyakran utalnak rá, hogy a csillagok a legkülönfélébb színűek lehetnek. Közismertek az olyan kifejezések, mint „vörös óriás” vagy „fehér törpe”, de beszélünk pl. „sárga óriásokról” vagy „kék szuperóriásokról” is. A Mars közismert állandó jelzője „a vörös bolygó”. A weboldalakon vagy népszerű tudományos cikkekben, könyvekben gyakran látott látványos égboltfelvételek színei egyenesen lenyűgözőek. Mégis, ha egy sötét éjszakán az égre tekintünk, az ott látott fénylő pontok színében csak enyhe árnyalati különbségeket fedezhetünk fel.

Ennek oka az emberi látás fiziológiájában keresendő. Mint ismeretes, szemünk fényérzékeny sejtjei két típusba sorolhatók. Nappali világosságban a látás feladatát elsősorban a színérzékenységgel is rendelkező csapsejtek végzik. A Hubble űrtávcső és más nagy teleszkópok látványos égboltfelvételein – ha a valós színek hű reprodukálása a cél – a különböző hullámhossztartományokban felvett monokrom képeket teszik a megfelelő színekben egymásra. Mivel az így nyert képeket monitorunkon vagy a könyvek oldalain kellően erős fényerősséggel szemléljük, szemünk csapsejtjei segítségével színeiket teljes mélységükben élvezhetjük.

A csapok fényérzékenysége azonban korlátozott, ezért csökkenő fényerősség mellett a fényérzékelés egyre nagyobb mértékben a másik sejttípusra, a pálcikákra hárul, melyeknek viszont nincs színérzékelése. A látott színek élénksége ennek megfelelően a fényerősség függvénye – okkal nevezi a magyar „szürkületnek” a nappal és az éjszaka közötti átmenetet! Ez a mechanizmus az evolúció során nyilván nem véletlenül, hanem a jel–zaj viszonyt, illetve a fényből kivont információtartalom egyidejű optimalizálásának követelményének megfelelően alakult ki.

Vörös az ég alja – vulkán tört ki tegnap ...

Ez a magyarázata annak is, hogy bár a felkelő vagy lenyugvó csillagok fénye a napéhoz hasonlóan jóval vörösebbé válik, a csillagok esetében ez a jelenség kevésbé szembeötlő, mint a fényes napkorongnál. Kevésbé feltűnő, de nem észrevehetetlen: a legelterjedtebb magyarázat szerint éppen ezért nevezték az égbolt legfényesebb állócsillagát, a közismerten fehér színű Siriust az ókori megfigyelők következetesen vörösnek. Az ókori csillagászok ugyanis nagy hangsúlyt helyeztek a kelési és nyugvási jelenségek megfigyelésére, így észleléseiket rendszerint a látóhatárhoz közel végezték. (Persze ez csak a fenti ún. „vörös Sirius rejtély” legprózaibb magyarázata. Akadnak egyéb spekulációk is, melyek különféle egzotikus asztrofizikai vagy légköroptikai folyamatokat feltételeznek.)

Mint ismeretes, a lenyugvó nap és körötte az égbolt vörös színe a fény légkörön át megtett hosszabb útja következtében megnövekedett légköri fényszórásnak köszönhető. Az ibolyától a zöldig terjedő színtartományban a szórás főként a levegő molekuláin történő Rayleigh-szórást jelenti. A kiszóródott fény adja az égbolt kék színét. A sárga és vörös színű fény ugyanakkor főként a légkör felső rétegeiben lebegő mikroszkopikus méretű szemcséken, az ún. aeroszolokon szóródik. Ezek mennyisége erősen változó. Nagy vulkánkitöréseket követően hónapokig, sőt évekig lebeghetnek a sztratoszférában apró kénsavcseppek, melyek a fényszórást igen megnövelik. Ezzel befolyásolják bolygónk éghajlatát is: az indonéz szigetcsoportban fekvő Tambora 1815-ös kitörését pl. a gyászos emlékű „nyár nélküli év" követte, mely Európában súlyos éhínséget okozott. De az aeroszolok jótékonyabb hatásaként ilyenkor a szokottnál látványosabb naplementékben is gyönyörködhetünk. Nemrégiben D. Olson amerikai csillagász mutatott rá, hogy az expresszionizmus előfutárának tekintett norvég festő, Edvard Munch híres festménye, „A sikoly" nem oly mértékben a művész fantáziájának terméke, mint azt korábban gondolták: Munch feltehetőleg a Krakatau 1885-ös kitörését követő, világszerte csodált „vulkáni naplementék" egyikét örökítette meg.

Zöld csillagok helyett zöld ködök

Az égbolt színeivel kapcsolatos másik zavarba ejtő körülmény, hogy a csillagok kéktől vörösig terjedő színskáláján nem fordulnak elő zöld csillagok. Monokromatikus, azaz egyetlen hullámhosszúsággal kisugárzott fényt zöld színűnek a 495–570 nm hullámhossztartományban érzékelünk. Kétségkívül vannak olyan csillagok, melyek sugárzása ebben a tartományban éri el maximális intenzitását. (Ezek egyébként az 5100 és 5800 K közötti felületi hőmérsékletű csillagok – közéjük tartozik a Nap is!). A csillagok fénye azonban nem monokromatikus, hanem nagyon is széles hullámhossztartományban bocsátódik ki: a kibocsátás hullámhosszfüggését az ún. Planck-függvény írja le. Ezért még az ilyen csillagok által kibocsátott fény zöme is a zöld tartományon kívül esik, s a színkeverés törvényei, valamint a Planck-függvényt követő intenzitáseloszlás következtében összességében sárgásnak látjuk őket (noha érdekes módon a monokromatikus fényt csak az igen szűk 570–590 nm hullámhossztartományban érzékeljük sárgának).

Mégiscsak akadnak ugyanakkor olyan források az égbolton, melyek zöldes árnyalatban pompáznak. Ezeket a fenti gondolatmenet alapján az elsősorban egyes jól meghatározott hullámhosszakra koncentrált, ún. vonalas sugárzást kibocsátó égitestek, az *emissziós ködök* között kell keresnünk. Az emissziós ködök olyan ritka csillagközi felhők, melyekbe forró, kékes színárnyalatú csillag ágyazódik. A kék csillag jelentős ultraibolya sugárzást is kibocsát, mely a felhő anyagát ionizálja. Az ionizációs és rekombinációs folyamatok dinamikus egyensúlya során folyamatosan alakulnak ki épp most rekombinálódott, magas gerjesztettségű atomok és ionok. Ezek elektronjai egyre alacsonyabb energiaszintekre „bucskáznak", s ennek során bocsátják ki a vonalas sugárzást.

Valóban, már régen észrevették, hogy egyes kicsiny kompakt, ún *planetáris ködök* kimondottan zöldes színben ragyognak. Amikor 150 éve, a csillagászati spektroszkópia – és ezzel az asztrofizika – hajnalán színképüket először felvették, két erős színképvonal tűnt fel bennük 496 és 501 nm hullámhossznál. Földi laboratóriumokban ezekkel a vonalakkal még soha nem találkoztak, ezért kezdetben egy új kémiai elem vagy anyag, a „nebulium" jelenlétével próbálták értelmezni őket (lat. nebula = köd). Végül azonban 1927-ben a kétszer ionizált oxigén vonalaiként sikerült azonosítani őket. A vonalak nagyon kis valószínűségű, ún. tiltott atomi átmenetekhez tartoznak, ezért csak a csillagközi tér nagyon alacsony sűrűségű közegében jöhetnek létre, ahol a kibocsátó ionok közötti ütközések elég ritkák ahhoz, hogy elektronjaik „megvárhassák" a spontán fotonkibocsátást.

Irodalom

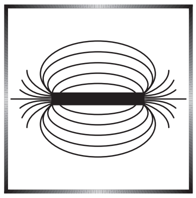
[1] Bernolák Kálmán: A fény. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[2] R. S. Hunter: The Measurement of Appearance. Wiley Interscience, 1975.

[3] C. R. Kitchin: Astrophysical Techniques. 5th ed. CRC Press, 2009.

[4] J. Holtzman: Observational Techniques. `http://ganymede.nmsu.edu/holtz/a535/ay535notes.html`.

Petrovay Kristóf



Fizika feladatok megoldása

P. 4638. *Egy testet* 12 m/s *sebességgel függőlegesen felfelé hajítunk a Holdon. Mekkora lesz a test sebessége a fölfelé mozgás félidejében? És a fölfelé mozgás közben félúton?*

(*3 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

Megoldás. Az egyenletesen lassuló mozgást végző test sebessége az *idővel arányosan* csökken, a felfelé mozgás félidejében tehát a test sebessége a v_0 kezdősebesség fele,

$$v_1 = \frac{1}{2}v_0 = 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

lesz.

A felfelé mozgó test mozgási energiája a megtett *úttal arányosan* csökken, tehát félúton a mozgási energia éppen a kezdeti értékének fele lesz. Mivel a mozgási energia a sebesség négyzetével arányos, a feleakkora energiához

$$v_2 = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \approx 8{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

sebesség tartozik.

Megjegyzés. Az eredmény független a nehézségi gyorsulás számértékétől, tehát a Földön eldobott testre is érvényes lenne, ha a mozgás során a közegellenállás elhanyagolható.

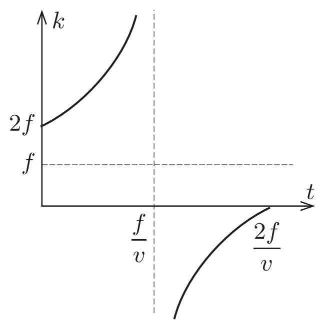
Több dolgozat alapján

78 dolgozat érkezett. Helyes 56 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 22, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 4684. *A homorú tükör görbületi középpontjából kiindulva egy pont mozog egyenletesen és egyenes vonalban a tükör optikai középpontjáig. Adjuk meg és ábrázoljuk a kép helyét az idő függvényében!*

(*4 pont*) *Strasser V. Benő* (1884–1966) feladata

Megoldás. A gömbtükör görbületi sugara a kétszeres fókusztávolsággal egyezik meg. Ha a mozgó pont sebessége v, akkor az indulásától számított t idő múlva a tükörtől $2f-vt$ távol lesz, ekkora a képalkotás szempontjából figyelembe vehető tárgytávolság. A leképezési törvény szerint



$$\frac{1}{f}=\frac{1}{2f-vt}+\frac{1}{k},$$

ahonnan a képtávolság:

$$k(t)=\frac{2f-vt}{f-vt}\,f.$$

Ez a függvény a $t=f/v$ időpillanatban (amikor a mozgó test éppen a tükör fókuszpontjához érkezik) nincs értelmezve, ekkor nincs képalkotás. A függvény grafikonja egy hiperbola két ágának $0\leqslant vt<2f$ (de $vt\neq f$) része.

Tóth Miklós (Keszthely, Vajda János Gimn., 8. évf.) dolgozata alapján

37 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 1, hiányos (1–2 pont) 8, hibás 6 dolgozat.

P. 4687. *A világűrben két pontszerűnek tekinthető test bizonyos távolságra helyezkedik el. Ha az egyik testet nem engedjük elmozdulni, a másik test* $T_1=6$ perc *múlva fog nekiütközni. Fordított esetben ez az idő* $T_2=8$ perc*. Mennyi idő telik el az ütközésig, ha mindkét test szabadon elmozdulhat?*

(*5 pont*) Közli: *Szász Krisztián,* Budapest

I. megoldás. Jelöljük a nagyobb tömegű test tömegét M-mel, a kisebbét m-mel, a kezdeti távolságukat pedig R-rel!

Foglalkozzunk először azzal az esettel, amikor az M tömegű test nem tud elmozdulni. Az energiák vizsgálatából kiindulva meghatározhatjuk a másik test v_m sebességét a testek közötti r távolság függvényében:

$$-\gamma\frac{mM}{R}=\frac{1}{2}mv_m^2-\gamma\frac{mM}{r},$$

ahonnan

$$v_m(r)=\sqrt{2\gamma M\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)}.$$

Ugyanezt a számítást a másik testre is elvégezhetjük. Ha az m tömegű test rögzített, akkor a tőle éppen r távolságban lévő másik (M tömegű) test sebessége

$$v_M(r) = \sqrt{2\gamma m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}$$

lesz.

Osszuk fel az R távolságot sok kicsiny, egyenként Δr hosszúságú szakaszra. Az egyes szakaszok legyenek olyan kicsinyek, hogy a mozgó testek sebességét a szakasz mentén jó közelítéssel állandónak tekinthessük. Azokat a szakaszokat, amelyek ugyanolyan messze vannak a másik (rögzített) testtől, a mozgó testek

$$\Delta t_m = \frac{\Delta r}{v_m(r)},$$

illetve

$$\Delta t_M = \frac{\Delta r}{v_M(r)}$$

időtartamok alatt futják be. A fenti két egyenletet elosztva egymással a

$$\frac{\Delta t_m}{\Delta t_M} = \sqrt{\frac{m}{M}}$$

arányossághoz jutunk, majd ebből összegzéssel (a mozgások teljes idejének ismert értékeit felhasználva) megkapjuk a testek tömegének arányát:

$$6 \text{ perc} = \sum \Delta t_m = \sqrt{\frac{m}{M}} \sum \Delta t_M = \sqrt{\frac{m}{M}} \cdot 8 \text{ perc},$$

vagyis

$$\frac{M}{m} = \left(\frac{8}{6}\right)^2 = \frac{16}{9}.$$

Ha mindkét test szabadon elmozdulhat, vagyis nem hat rájuk külső erő, a rendszer kezdetben álló tömegközéppontja mindvégig nyugalomban marad. Amikor a két test összeütközik, az ütközés nyilván a tömegközéppont helyénél következhet be. Kezdetben az m tömegű test a tömegközépponttól

$$R_m = \frac{M}{m+M} R = \frac{16}{25} R$$

távolságra van, és a későbbiekben is fennmarad ez az arány: amikor a testek távolsága valamekkora r értékre csökken, a tömegközéppont és az m tömegű test távolsága $x = \frac{16}{25} r$ lesz. Az m tömegű testre ható erő ilyenkor

$$F(r) = -\gamma \frac{mM}{r^2} = -\gamma \frac{mM}{\left(\frac{25}{16}x\right)^2},$$

amit

$$F(x) = -\gamma \frac{m^* m}{x^2}$$

alakban is felírhatunk, ahol

$$m^* = \left(\frac{16}{25}\right)^2 M.$$

Látható, hogy az m tömegű test (az M tömegű test vonzásának hatására) éppen úgy mozog, mintha a rögzítettnek tekinthető tömegközéppontban egy m^* tömegű fiktív test helyezkedne el, ennek gravitációs vonzóereje hatna az m tömegű testre, és a másik (az M tömegű) test egyáltalán nem is lenne jelen.

Mennyi idő alatt ütközik az m tömegű test az m^* tömegű (rögzített) vonzócentrumnak? Erre a kérdésre ismét az energiatétel felhasználásával kaphatunk választ. A test sebessége x távolságban a vonzócentrumtól:

$$v(x) = \sqrt{2\gamma m^* \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{16}{25}R}\right)}.$$

(Kihasználtuk, hogy az indulásnál a test $x = R_m = \frac{16}{25}R$ távol volt a tömegközépponttól.)

Osszuk fel a test pályáját a kezdőponttól a tömegközéppontig kicsiny Δx hosszúságú szakaszokra. Egy-egy ilyen szakaszon

$$\Delta t(x) = \frac{\Delta x}{v(x)}$$

idő alatt halad végig a test, a mozgás teljes ideje pedig ezen kis időtartamok összege lesz. Hasonlítsuk össze ezeket az időtartamokat az első esetben (rögzített m tömegű testnél) kiszámított időtartamokkal! Ha az x távolságokat az ottani r értékek $\frac{16}{25}$ arányú kicsinyítésének választjuk, a szakaszok hosszának aránya

$$\frac{\Delta x}{\Delta r} = \frac{16}{25},$$

a sebességek aránya pedig

$$\frac{v(x)}{v_m(r)} = \frac{\sqrt{2\gamma m^* \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{16}{25}R}\right)}}{\sqrt{2\gamma M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}} = \frac{\sqrt{2\gamma \left(\frac{16}{25}\right)^2 M \left(\frac{1}{\frac{16}{25}r} - \frac{1}{\frac{16}{25}R}\right)}}{\sqrt{2\gamma M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}} = \frac{4}{5}.$$

Ezek szerint

$$\frac{\Delta t(x)}{\Delta t_m(r)} = \frac{\Delta x}{\Delta r} \cdot \frac{v_m(r)}{v(x)} = \frac{16}{25} \cdot \frac{5}{4} = \frac{4}{5}.$$

Ez az arány a kicsiny időtartamok összegére is érvényes, tehát ha mindkét testet elengedjük, azok

$$T = \sum \Delta t(x) = \frac{4}{5} \sum \Delta t_m(r) = \frac{4}{5} \cdot 6 \text{ perc} = 4{,}8 \text{ perc}$$

múlva fognak találkozni.

Kaposvári Péter (Miskolc, Herman O. Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Jelöljük a keresett időt T_3-mal! Megmutatjuk, hogy nemcsak a feladatban szereplő gravitációs erő hatására mozgó testeknél, hanem *tetszőleges* erőtörvény esetén fennáll:

$$\frac{1}{T_3^2} = \frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2},$$

vagyis a megadott T_1 és T_2 időtartamok mellett

$$T_3 = \sqrt{\frac{T_1^2 T_2^2}{T_1^2 + T_2^2}} = 4{,}8 \text{ perc}.$$

Ha az r távolságra lévő testek között ható erő $F(r)$, akkor egy m tömegű test mozgásegyenlete (az origóban rögzített másik test erőterében):

$$ma = F(r). \tag{1}$$

Ezen egyenlet megoldását az teszi egyértelművé, hogy tudjuk: $t = 0$ pillanatban a test $r = R$ távol van az origótól (R ismert érték), és a test sebessége nulla. Az ütközésig eltelő időt az $r(T_1) = 0$ feltétel határozza meg.

Hasonlóan a másik test rögzítése esetén az M tömegű test mozgásegyenlete:

$$Ma = F(r). \tag{2}$$

Ha mindkét test elmozdulhat, akkor tömegközéppontban fognak összeütközni, így érdemes az egyik test tömegközépponttól mért távolságának időbeli változását vizsgálni. Ha mondjuk az m tömegű testet tekintjük, akkor annak a tömegközéppontól mért távolsága

$$x = \frac{M}{m+M} r,$$

ahol r a két test pillanatnyi távolságát jelöli. A test mozgásegyenlete:

$$ma_x = F(r).$$

Ebben az egyenletben a_x az x távolságnak megfelelő gyorsulás, vagyis $x(t)$ változási ütemének (a sebességének) változási üteme. Mivel az erőtörvényben az r távolság szerepel, célszerű a gyorsulást is erre a mennyiségre vonatkoztatni. Kihasználva x és r arányosságát, a gyorsulások kapcsolata:

$$a_x = \frac{M}{m+M} a_r,$$

és a mozgásegyenlet

$$ma_r = \frac{m+M}{M} F(r),$$

amit az $a_r \equiv a$ jelöléssel így is írhatunk:

$$\frac{mM}{m+M}\, a = F(r). \tag{3}$$

A fenti képletben szereplő $\frac{mM}{m+M}$ kifejezést a két testből álló rendszer *redukált tömegének* nevezik. Ez a kifejezés a tömegeket szimmetrikusan tartalmazza, emiatt az M tömegű test mozgásegyenlete – az r távolságnak megfelelő gyorsulással kifejezve – ugyancsak a (3) egyenlet.

Az (1)–(3) egyenletek csak a bennük szereplő tömegekben különböznek egymástól. Ez a különbség azonban egy trükk segítségével „eltüntethető”. Ha ugyanis a testek mozgásáról k-szoros lassítású videofelvételt készítünk, majd azt normál sebességgel játsszuk le, vagyis a valódi t idő helyett a $t' = t/k$ mennyiség függvényében írjuk le a mozgást, akkor a vesszős „időhöz” tartozó sebességek és gyorsulások mások lesznek, mint az igazi sebességek és gyorsulások:

$$v' = \frac{\Delta r}{\Delta t'} = \frac{\Delta r}{\Delta (t/k)} = k\frac{\Delta r}{\Delta t} = kv,$$

illetve

$$a' = \frac{\Delta v'}{\Delta t'} = \frac{\Delta (kv)}{\Delta (t/k)} = k^2\frac{\Delta v}{\Delta t} = k^2\, a.$$

Ennek megfelelően pl. az (1) egyenlet ilyen alakot ölt:

$$\frac{m}{k^2}\, a' = F(r),$$

ami $k = \sqrt{m}$ választással különösen egyszerű lesz:

$$a' = F(r), \quad \text{ha} \quad k = \sqrt{m}. \tag{1'}$$

Hasonló módon az M tömegű test mozgásegyenlete (rögzített m mellett):

$$a' = F(r), \quad \text{ha} \quad k = \sqrt{M}, \tag{2'}$$

és végül mindkét test szabad mozgása esetén:

$$a' = F(r), \quad \text{ha} \quad k = \sqrt{\frac{mM}{m+M}}. \tag{3'}$$

Az (1′), (2′) és (3′) egyenletek azonos alakja (és az azonos kezdőfeltételek, nevezetesen $r(0) = R$ és $v'(0) = 0$) miatt az összeütközések az egyenletekben szereplő vesszős időben mérve *ugyanakkor,* egy bizonyos $t' = T_0$ „pillanatban” következnek be. Visszatérve a valódi időváltozóra ez annyit jelent, hogy a három esethez tartozó időtartamok:

$$T_1 = \sqrt{m}\,T_0, \qquad T_2 = \sqrt{M}\,T_0 \qquad \text{és} \quad T_3 = \sqrt{\frac{mM}{m+M}}\,T_0.$$

Innen (T_0 kiküszöbölésével) a bizonyítandó

$$\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2} = \frac{1}{T_3^2}$$

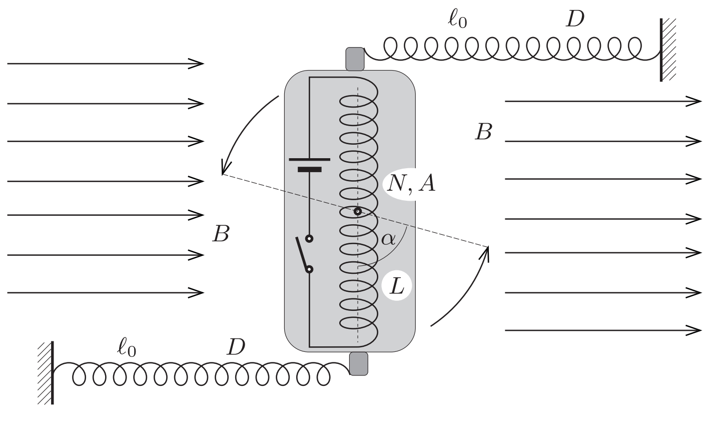
összefüggéshez jutunk.

A fenti, tetszőleges erőtörvénynél érvényes relációt speciális esetekben, pl. a távolsággal arányos rugalmas erőnél, vagy a távolságtól független F_0 erőnél közvetlenül is igazolhatjuk, hiszen ezeknél a mozgás a jól ismert harmonikus rezgőmozgás, illetve az egyenletesen gyorsuló mozgás. Máskor (pl. a Newton-féle gravitációs vonzásnál) az időtartamok kiszámítása nem ilyen egyszerű, de a Kepler-törvények alkalmazásával, vagy az I. megoldásban bemutatott módszerrel (az energiamegmaradás törvényének felhasználásával) megoldható.

(*G. P.*)

40 dolgozat érkezett. Helyes 23 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 14, hibás 1 dolgozat.

P. 4692. *Vízszintes, homogén,* $B = 0{,}05$ T *indukciójú mágneses mezőben egy* $L = 20$ cm *hosszú,* $A = 12\ \mathrm{cm}^2$ *keresztmetszetű,* $N = 400$ *menetszámú, egyenes tekercs vízszintes síkban foroghat a közepén átmenő függőleges tengely körül. A tekercs tengelye kezdetben merőleges a mágneses indukcióvonalakra, és két végén egy-egy* $D = 24$ N/m *direkciós erejű,* $\ell_0 = 20$ cm *hosszúságú, nyújtatlan, másik végén rögzített csavarrugóhoz csatlakozik az* ábra *szerint. A rugók kezdetben merőlegesek az egyenes tekercs tengelyére.*



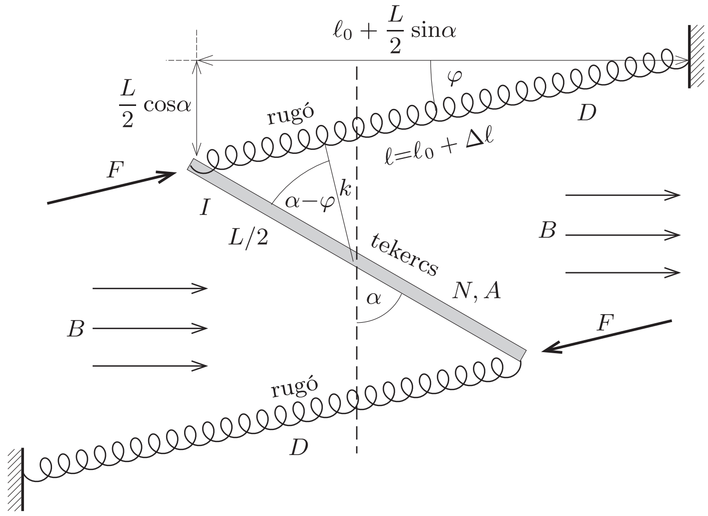
A kapcsoló zárása után a tekercsben áram fog folyni. Mekkora erősségű ez az áram, ha a tekercs $\alpha = 60^\circ$*-os szöggel elfordulva kerül ismét egyensúlyba?*

(*6 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

Megoldás. A tekercs egyensúlyi helyzetében a mágneses mező által kifejtett forgatónyomaték és a rugók forgatónyomatékának összege nulla. A mágneses mező által kifejtett forgatónyomaték az α szöggel elfordult tekercsre

$$M_1 = NIBA\cos\alpha.$$

A rugók megnyúlása ebben a helyzetben az *ábrán* látható derékszögű háromszögből



számítható ki:

$$\Delta\ell = \sqrt{\left(\ell_0 + \frac{L}{2}\sin\alpha\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\cos\alpha\right)^2} - \ell_0 = 0{,}091 \text{ m},$$

és így a rugókat feszítő erő

$$F = D\Delta\ell = 2{,}18 \text{ N}.$$

A rugóknak az eredeti irányukkal bezárt szöge

$$\varphi = \arcsin\frac{\frac{L}{2}\cos\alpha}{\ell_0 + \Delta\ell} = 9{,}9^\circ,$$

és ennek segítségével a rugóerők erőkarja is kiszámítható:

$$k = \frac{L}{2}\cos(\alpha - \varphi) = 0{,}064 \text{ m}.$$

A két rugó által kifejtett forgatónyomaték összesen

$$M_2 = 2Fk = 0{,}28 \text{ Nm},$$

és így a forgatónyomatékok egyensúlyának $M_1 - M_2 = 0$ feltételéből megkapjuk a keresett áramerősséget:

$$I = \frac{2Fk}{BNA\cos\alpha} = \frac{0{,}28}{0{,}05 \cdot 400 \cdot 0{,}0012 \cdot 0{,}5}\ \mathrm{A} = 23{,}3\ \mathrm{A}.$$

Di Giovanni Márk (Győr, Révai M. Gimn., 12. évf.)

34 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 10, hiányos (1–2 pont) 5, hibás 1 dolgozat.

P. 4693. *Hány kelvinen mutat ugyanannyit a* higanyos *hőmérő Celsius- és Fahrenheit-skálán, és mennyi ez az ugyanannyi?*

(*3 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest

Megoldás. A Celsius-skálán t_C hőmérsékletnek a Fahrenheit-skálán

$$t_\mathrm{F} = \frac{9}{5}t_\mathrm{C} + 32$$

hőmérséklet felel meg. A $t_\mathrm{C} = t_\mathrm{C} = x$ feltétel az

$$x = \frac{9}{5}x + 32$$

egyenlet megoldásánál teljesül:

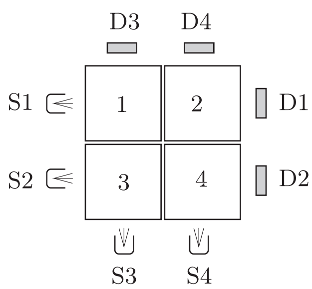
$$x = -40\ ^\circ\mathrm{C} = -40\ ^\circ\mathrm{F},$$

ami az abszolút hőmérsékleti skálán $T = 233$ kelvin. Ilyen hőmérsékletet azonban a *higanyos* hőmérő soha nem mutathat, hiszen a higany $-39\ ^\circ$C-on (234 K-en) *megfagy!*

Fónai Martin (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 11. évf.)

117 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 94, hiányos (1 pont) 9, hibás 4 dolgozat.

P. 4702. *Négy darab* 10 cm *oldalú, különböző anyagi minőségű betonkockát az* ábrának *megfelelően helyezünk egymás mellé, és* ^{60}Co *gammasugárnyalábbal „világítjuk meg" egymás után* 4 *pozícióból* (S1, S2, S3 *és* S4). *A sugárforrásokkal szemben, a betonkockák mögött* 4 *detektort is elhelyeztünk* (D1, D2, D3 *és* D4). *Az első három mérés szerint a betonkockák a sugárzás intenzitását rendre az eredeti érték* 86,76, 71,94 *és* 84,25 *százalékával csökkentik.*



a) Hány százalékkal csökkent intenzitást mér a negyedik detektor?

b) Az 1. *kocka „felezési rétegvastagsága"* 6 cm. *Mekkora ez – az anyagi minőségtől függő – mennyiség a többi kockánál?*

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

Megoldás. Jelölje r_i azt az arányt, amilyen mértékben az i-edik betonkocka csökkenti a rajta áthaladó sugárzás intenzitását ($i = 1, 2, 3, 4$). Mivel az egymás mögött elhelyezkedő betonkockák intenzitáscsökkenési arányszámai összeszorzódnak, az első három mérés alapján állíthatjuk, hogy

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{100 - 86{,}76}{100} = 0{,}1324, \tag{1}$$

$$r_3 \cdot r_4 = \frac{100 - 71{,}94}{100} = 0{,}2806, \tag{2}$$

$$r_1 \cdot r_3 = \frac{100 - 84{,}25}{100} = 0{,}1575. \tag{3}$$

a) A negyedik detektor mérésére jellemző szorzófaktor:

$$r_2 \cdot r_4 = \frac{(r_1\, r_2) \cdot (r_3\, r_4)}{r_1\, r_3} = \frac{0{,}1324 \cdot 0{,}2806}{0{,}1575} = 0{,}2359,$$

ez az eredeti intenzitás 76,41%-os csökkenésének felel meg.

b) Jelöljük d_i-vel azt a távolságot, amelyen áthatolva az i-edik betonkocka anyagában az intenzitás a felére csökken. (Ezt a távolságot nevezik „felezési rétegvastagságnak”.) Egy $d = 10$ cm vastag betonrétegen áthatoló gammasugárzás intenzitáscsökkenését általánosan az

$$r_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{d/d_i} \tag{4}$$

képlet adja meg. Az első kocka adatait felhasználva megkaphatjuk, hogy

$$r_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{10/6} = 0{,}3150.$$

Ebből és az (1)–(3) összefüggésekből kiszámíthatjuk, hogy $r_2 = 0{,}4203$, $r_3 = 0{,}500$, $r_4 = 0{,}5612$; majd ezekből (4) felhasználásával megkapjuk a keresett felezési rétegvastagságokat:

$$d_i = -\frac{\log 2}{\log r_i}, \qquad d_2 = 8\ \text{cm}, \quad d_3 = 10\ \text{cm}, \quad d_4 = 8\ 12\text{cm}.$$

Marozsák Tóbiás (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

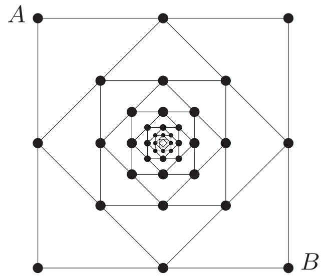
Megjegyzés. A feladat egy korszerű anyagvizsgálati és orvosdiagnosztikai módszer, a komputertomográfia (CT) egyszerű modelljét mutatja be. A *tomográfia* görög elemekből alkotott szó, eredeti jelentése rétegfelvétel. A komputertomográfiás vizsgálatok matematikai alapjait *Johann Radon* (1887–1956) cseh matematikus dolgozta ki 1917-ben, azonban gyakorlati alkalmazásra a számítógépek kifejlesztéséig várni kellett, így az első CT-s röntgenberendezések csak az 1960-as évek végén jelentek meg.

42 dolgozat érkezett. Helyes 33 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 5, hibás 1 dolgozat.

P. 4703. *Az* ábrán *látható alakzatban (amely a közepe felé korlátlanul folytatódik) a fekete körökkel jelzett pontok között* 1 Ω *ellenállású vezetékek vannak.*

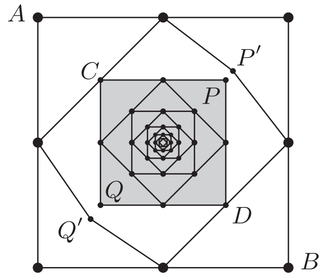
Mekkora az eredő ellenállás az A *és* B *pontok között?*

(*6 pont*) *Amerikai versenyfeladat nyomán*



Megoldás. A kapcsolás szimmetriája miatt az AB egyenes felező merőlegesén elhelyezkedő pontok ekvipotenciálisak, tehát a közöttük esetleg meglévő vezetékek eltávolíthatóak, illetve – ha nem volt közöttük vezeték – az beiktatható. Emiatt az eredeti kapcsolás és az *1. ábrán* látható kapcsolás egyenértékű, hiszen P és P', illetve Q és Q' akár össze van kapcsolva, akár nem, az A és B pontok közötti keresett R eredő ellenállás ugyanakkora.

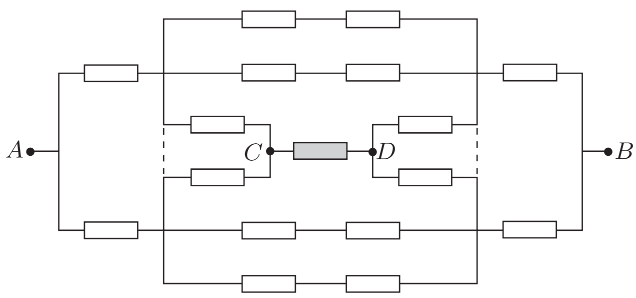
Az 1. ábrán sötétebben jelölt kis négyzetben lévő áramkör C és D pont közötti eredő ellenállása ugyancsak R, ha az ábra közepe felé a kapcsolás korlátlanul ismétlődik:



1. ábra

(1) $$R_{AB} = R_{CD} = R.$$

A kapcsolás az (üres téglalapokkal jelölt) 1 Ω-os ellenállásokkal a *2. ábrán* látható módon rajzolható le.

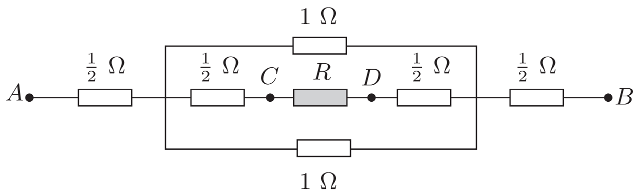


2. ábra

A szaggatott vonalak ekvipotenciális pontjainak rövidre zárása után további egyszerűsítésekre nyílik lehetőség, ahogy azt a *3. ábra* mutatja.

Ennek megfelelően az (1) rekurziós egyenlet (ohm egységekben):

$$R = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{R+1} + 1} + \frac{1}{2},$$



3. ábra

ami az $R^2 - 2 = 0$ másodfokú egyenlettel egyenértékű. Ennek pozitív gyöke adja meg a keresett eredő ellenállást:

$$R = R_{AB} = \sqrt{2}\ \Omega.$$

Bekes Nándor (Budapest, Városmajori Gimn., 10. évf.)

36 dolgozat érkezett. Helyes 29 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 5 dolgozat.

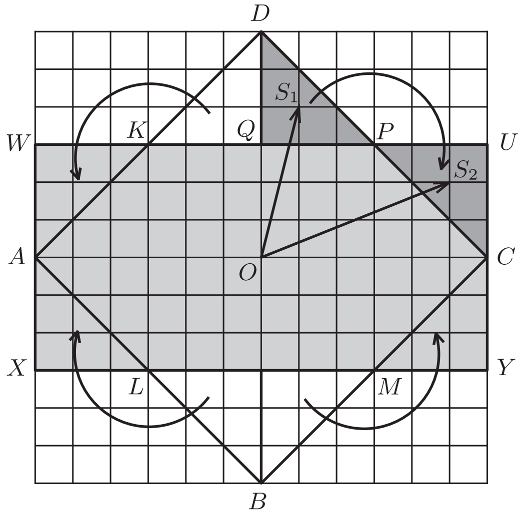
P. 4708. *Téglalap és négyzet alakú lemezt a síkjukra merőleges és középpontjukon átmenő tengely körül forgatunk. A két lemez tömege, vastagsága és sűrűsége ugyanakkora. A téglalap egyik oldala a másiknak fele. Melyik lemeznek van nagyobb tehetetlenségi nyomatéka? (Nem szükséges a tehetetlenségi nyomatékokat külön kiszámítani!)*

(*4 pont*) *Strasser V. Benő* (1884–1966) feladata

Megoldás. A négyzet méretét nyilván tetszőlegesen megválaszthatjuk. Tekintsük például az *1. ábrán* látható $ABCD$ négyzetet, amelynek átlója 12 egység, oldaléle tehát $12/\sqrt{2}$ egység hosszú, így a négyzet területe 72 területegység. (Ez a választás nem megy az általánosság rovására, alkalmas hosszúságegység választásával mindig elérhető; csupán a további számolás leegyszerűsítésére szolgál.) Ugyanekkora területű és $1:2$ oldalarányú az $XYUW$ téglalap is, egy ilyen alakú lemez tömege tehát ugyanakkora, mint a négyzet alakú lemezé.

Szeretnénk összehasonlítani a két lemeznek az O középponton átmenő és a lemezek síkjára merőleges tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát. A tehetetleségi nyomatékok összehasonlítása az itt következő gondolatmanetben azon alapszik, hogy valamely test tehetetlenségi nyomatéka a test egyes részeinek tehetetlenségi nyomatékaiból adható össze. Ha csak azt kérdezzük, hogy melyik lemez tehetetlenségi nyomatéka *nagyobb,* a két síkidom közös részével, vagyis az $ALMCPK$ hatszöggel nem kell foglalkoznunk, csak a 4-4 kis háromszög O-ra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát kell összehasonlítanunk. Megmutatjuk, hogy a PQD háromszög O pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka kisebb, mint a PUC háromszögé, ha tehát a négyzetet az ábrán látható módon átdaraboljuk téglalappá, a tehetetlenségi nyomaték nőni fog.

A két (sötétszürkén jelölt) háromszög egybevágó, területük megegyezik, tehát a nekik megfelelelő lemezdarabok tömege ugyanakkora. A háromszögek tehetetlenségi nyomatéka az S_1, illetve S_2 súlypontra nyilván megegyezik, az O pontra

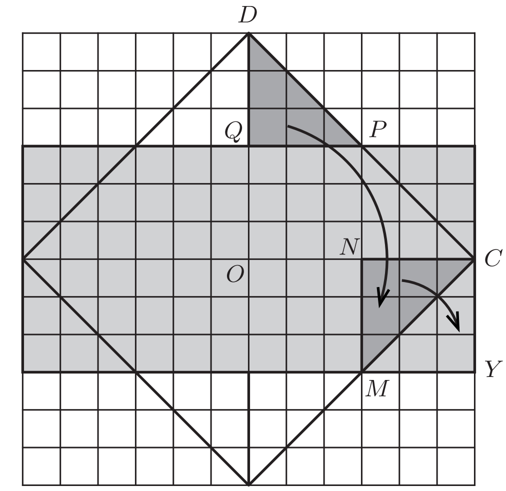


1. ábra

vonatkoztatva tehát (a Steiner-tétel szerint) annak a lemezdarabnak nagyobb a tehetetlenségi nyomatéka, amelyiknek a súlypontja az O ponttól *messzebb* található. Az ábráról leolvasható, hogy

$$\overline{OS_2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} > \sqrt{17} = \overline{OS_1},$$

és hasonló érvényes a másik 3 háromszög-párra is.



2. ábra

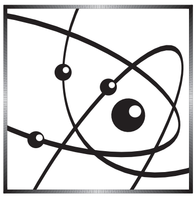
Más módon is elvégezhetjük az „átdarabolást”. Ha a *2. ábrán* látható PQD háromszöget 90°-kal elforgatjuk az O pont körül, az MNC háromszöget kapjuk, amelynek megfelelő lemezdarab tehetetlenségi nyomatéka nyilván ugyanakkora marad, mint amekkora eredetileg volt. Tükrözzük most az MNC háromszöget a CM

átfogójára. A tükrözés során a háromszög minden pontja *messzebb* kerül az O ponttól, a CYM háromszög alakú lemezdarab tehetetlenségi nyomatéka tehát biztosan nagyobb, mint a kiindulási helyzetnek megfelelő PQD alakzaté, és ugyanez érvényes a másik három kis háromszögre is. (Vegyük észre, hogy ennél a gondolatmenetnél nem kellett felhasználnunk a Steiner-tételt.)

Megállapíthatjuk tehát, hogy az azonos területű, azonos vastagságú és azonos sűrűségű (emiatt azonos tömegű) lemezdarabok közül a téglalap alakúnak a középpontjára vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka *nagyobb,* mint a négyzet alakú lemezdarabé.

(*Több dolgozat alapján*)

49 dolgozat érkezett. Helyes 39 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (2 pont) 5 dolgozat.



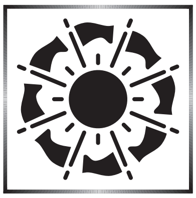
Fizikából kitűzött feladatok

M. 350. Határozzuk meg egy hagyományos, gáztöltésű izzólámpa burájában lévő gáz nyomását!

(*6 pont*) Közli: *Szeder László,* Sárospatak

P. 4725. A szabványos pingponglabda átmérője 40 mm, tömege 2,7 gramm. Mekkora átmérőjű vasgolyót kellene a pingponglabdához ragasztani, hogy együtt éppen lebegjenek a vízben?

(*3 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest



P. 4726. Egy fekete korongot, amelyre vékony, fehér körcikket festettünk, a korong közepén átmenő, rá merőleges tengely körül forgatunk, és stroboszkóppal (periodikusan felvillanó fényforrással) világítunk meg. Milyen összefüggés van a korong n fordulatszáma és az f villogási frekvencia között, ha nemcsak egyetlen egy, hanem p számú, állni látszó fehér körcikket figyelhetünk meg ($p = 2, 3, 4, \dots$)?

(*4 pont*) *Orosz feladat*

P. 4727. Egy homogén fémlemezből különböző alakú, de ugyanakkora területű síkidomokat vágunk ki. Milyen alakú síkidomnak lesz a síkjára merőleges és a tömegközéppontján átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka a lehető legkisebb? (Lásd még a **P. 4708.** feladat megoldását lapunk 246. oldalán!)

(*4 pont*) *Strasser V. Benő* (1884–1966) feladata nyomán

P. 4728. A Rosetta űrszonda leszálló egysége, a Philae, egy olyan üstökös magjára szállt le, amelynek tömege 10^{13} kg, és mivel üreges belül, átlagos sűrűsége csak 0,4 g/cm^3. A leszállás „pattogósra" sikerült, az első visszapattanás után 113 perc múlva érkezett vissza a Philae az üstökös felszínére. Adjunk *becslést* a következőkre:

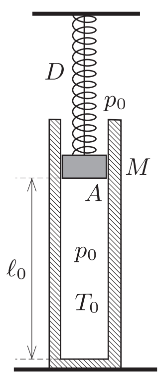
a) Mekkora az üstökös magjának felszínén a gravitációs térerősség, és mekkora a szökési sebesség?

b) Legalább mekkora lehetett az első visszapattanás sebessége, és legfeljebb milyen magasra pattanhatott fel a Philae?

A becsléshez az üstökös magját nem forgó, homogén gömbnek tekinthetjük, a mozgást pedig állandó gyorsulású mozgásnak. Az alkalmazott átlagos gyorsulás meghatározásához használjuk fel a visszapattanás sebessége és magassága közötti egzakt összefüggést.

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

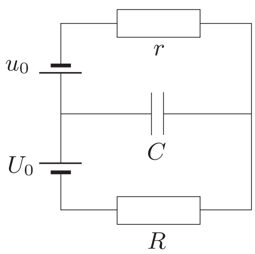
P. 4729. Függőlegesen álló, $A = 5\ \mathrm{dm}^2$ belső keresztmetszetű hőszigetelt hengerben egy fonálra függesztett, $M = 80$ kg tömegű, könnyen mozgó dugattyú zár el $T_0 = 300$ K hőmérsékletű levegőt. A dugattyút egy $D = 6$ N/cm rugóállandójú, nyújtatlan rugó kapcsolja a mennyezethez. A légoszlop hossza $\ell_0 = 1{,}2$ m, kezdetben a külső és a belső nyomás $p_0 = 10^5$ Pa. A fonál egy adott pillanatban elszakad.



a) Mekkora lesz a dugattyú legnagyobb sebessége a létrejövő folyamat során?

b) Mekkora lesz a bezárt levegő legmagasabb hőmérséklete a folyamat során?

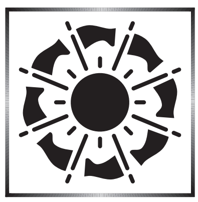
(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest



P. 4730. Az *ábra* szerinti kapcsolásban az áramforrások kapocsfeszültsége állandó. A C kapacitású kondenzátor feszültsége $1{,}8\,U_0$. Ha az U_0 kapocsfeszültségű áramforrás pólusait felcseréljük, akkor a kondenzátor feszültsége $1{,}4\,U_0$-ra csökken. Mekkora az r/R és az u_0/U_0 arány?

(*4 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 4731. A kriptongázzal töltött volfrámszálas izzólámpa által kisugárzott látható fény egyetlen fotonjának energiája, vagy az izzóban lévő kriptongáz egy atomjának átlagos mozgási energiája nagyobb, amikor be van kapcsolva a lámpa?

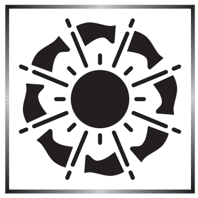


(*4 pont*) Közli: *Bigus Imre,* Sárospatak

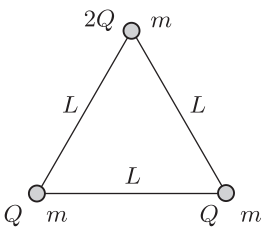
P. 4732. Egy ciklotronban protonokat, deuteronokat és α-részecskéket gyorsítanak. A legnagyobb körpálya sugara 50 cm. A mágneses indukcióvektor nagysága 1 tesla. Legfeljebb mekkora energiára gyorsíthatók fel ezek a részecskék a ciklotronban?

(*4 pont*) *Román feladat*

P. 4733. Egy hengeres üvegrúdban a tengelyével párhuzamosan fénysugarak haladnak, majd a rúd végén kilépnek a levegőbe, és egyetlen pontba fókuszálódnak. Adjuk meg a határfelület alakját jellemző görbe egyenletét az üveg n törésmutatója és az f fókusztávolság függvényében! (Lásd még a **P. 4646.** feladat megoldását lapunk 2014. évi októberi számában!)



(*4 pont*) *R. P. Feynman* nyomán



P. 4734. Szigetelő anyagú, vízszintes, sima felületen három darab m tömegű, kisméretű, pozitív töltésű golyót L hosszúságú, elhanyagolható tömegű, szigetelő fonalakkal kötöttünk össze. Két golyó töltése Q, a harmadiké pedig $2Q$. Egy adott pillanatban a Q töltésű golyókat összekötő fonalat elvágjuk.

a) Mekkora lesz a golyók sebessége abban a pillanatban, amikor a $2Q$ töltésű golyó sebessége a legnagyobb?

b) Mekkora erő feszíti a fonalakat ebben a helyzetben?

c) Mekkora az egyes golyók elmozdulása ebben a pillanatban?

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

P. 4735. A Kozmikus Baleseteket Kivizsgáló Intézet (KOBALKIVI) a következő rövid jelentést írta egyik fizikus szakértőjének:

„A titánfaló kis zöld emberkék egyik kutató űrhajója rátalált egy tökéletesen gömb alakú, homogén, titán anyagú kisbolygóra. A bányászat előkészítésére egy egyenes, a kisbolygó sugarával megegyező hosszúságú alagutat fúrtak, és abba síneket fektettek. (Az alagút mindkét vége a kisbolygó felszínénél volt.) Sajnos az egyik csille, jóllehet befékezték, az alagút egyik végénél belecsúszott az aknába. Eleinte gyorsult, utána fokozatosan lelassult és visszafordult, majd éppen az alagút közepén megállt. A fordulópontnál hajszál híján elütötte az ott álló bányamestert."

A KOBALKIVI a következő kérdésekre várt választ a szakértőtől:

a) Hol (az alagút hányad részénél) állt a bányamester?

b) Mekkora lehetett a csille kerekei és a sínek közötti csúszó súrlódási együttható?

c) Mennyi ideig mozgott a csille, ha a kisbolygó körül, a felszínhez közel keringő űrszonda keringési ideje 24 óra? (A kisbolygónak nincs légköre.)

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Áprilisi pótfeladat.* Magyarázzuk meg a *hátsó belső borítón* látható furcsa óra jeleit!

Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 2015. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 65. No. 4. April 2015)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition C (see page 225): **Exercises up to year 10: C. 1287.** The positive integers are written on a large squared sheet of paper, arranged in a spiral, as shown in the *figure.* What numbers are written in the fields above and below 2015? **C. 1288.** H is the point lying closer to vertex B that divides side AB of parallelogram $ABCD$ in a 1 to 2 ratio. F is the midpoint of side BC. In what ratio does the intersection of line segments AF and DH divide them? **Exercises for everyone: C. 1289.** We have 5 five-forint coins, 10 ten-forint coins and 20 twenty-forint coins (HUF, Hungarian currency). In how many different ways can we pay 500 forints with these coins? **C. 1290.** Solve the equation $2xy+2x-5y=40$ on the set of pairs of integers $(x;y)$. **C. 1291.** Find the point on the x-axis where the line segment formed by points $A(2;4)$ and $B(6;1)$ subtends the greatest angle. **Exercises upwards of year 11: C. 1292.** Solve the equation $\left(3\sqrt{3}\right)^n-\left(2\sqrt{2}\right)^n=2^n+3^n+\sqrt{6}^{\,n}$ on the set of positive integers. **C. 1293.** Alpha & Co. manufacture tennis balls and sell them in packets of four, arranged in a pyramid in a regular tetrahedral box (*figure 1*). Another manufacturer, APHLA, also sells tennis balls in four-packets, arranged in a column in a tall cylindrical box closed at both ends (*figure 2*). What is the difference between the surface areas of the two boxes if the diameter of a tennis ball is 6.50 cm?

New exercises – competition B (see page 226): **B. 4705.** Let p denote an odd prime number. Show that the equation $x^2+px=y^2$ has exactly one solution on the set of pairs of positive integers. (*4 points*) (Suggested by: *B. Németh,* Budapest) **B. 4706.** The sides of rectangle $ABCD$ are $AB=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ and $BC=1$. Let E be the point in the interior of line segment AB with $AE=1$. Show that $\angle ACE=2\cdot\angle EDB$. (*3 points*) (Suggested by *Sz. Miklós,* Herceghalom) **B. 4707.** Let $t>1$ be an odd integer. Prove that there exist only a finite number of pairs of integers n and k, not smaller than t such that $S=\binom{n}{t}+\binom{k}{t}$ is a prime. (*5 points*) (Suggested by *B. Maga,* Budapest) **B. 4708.** O is the centre of the circumscribed circle of triangle ABC, and M is the orthocentre. Point A is reflected in the perpendicular bisector of side BC, B is reflected in the perpendicular bisector of side CA, and finally C is reflected in the perpendicular bisector of side AB. The reflections are denoted by A_1, B_1, C_1, respectively. Let K be the

*A megoldás beküldhető, de nem számít bele a pontversenybe.

centre of the inscribed circle of triangle $A_1B_1C_1$. Prove that point O bisects line segment MK. (*5 points*) (Suggested by *B. Bíró,* Eger) **B. 4709.** Solve the simultaneous equations $x^2+y^2=13$, $x^3+y^3=35$. (*3 points*) (Suggested by *J. Szoldatics,* Budapest) **B. 4710.** $\mathcal{P}$ is a set of points in the plane such that every disc of unit radius has at least one point of $\mathcal{P}$ in its interior. Is it true that there exists a closed disc of unit radius that contains at least three points of $\mathcal{P}$? (*4 points*) **B. 4711.** Let $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Calculate the value of the sum $f(0/2015)+f(1/2015)+f(2/2015)+\dots+f(2014/2015)+f(2015/2015)$. (*5 points*) **B. 4712.** What percentage of a pencil gets wasted? Assume that a pencil is a cylinder, infinitely long, and the graphite rod inside is also cylindrical. The axes of the two cylinders coincide. When the pencil is sharpened, its point is a perfect cone with an apex angle of 12 degrees. When we write with the pencil, its axis always encloses a 42-degree angle with the plane of the paper. We keep using the pencil until we can no longer write with it since no matter how we rotate it about its axis, the wood will scratch the paper. Then the pencil is sharpened again to the shape of a 12-degree cone, but never longer, that is, the tip of the pencil never changes during sharpening, it only wears in writing. What percentage of the graphite is wasted by scraping it off with the sharpener? Will someone holding the pencil at a 45-degree angle waste more than that or less? If so, by how much? (*5 points*) (Suggested by *E. M. Gáspár,* Budapest) **B. 4713.** A circle passing through vertices B and C of triangle ABC intersects side AB at D, and side AC at E. The intersection of lines CD and BE is O. Let M denote the centre of the inscribed circle of triangle ADE, and let N denote the centre of the inscribed circle of triangle ODE. Prove that line MN bisects the smaller arc DE. (*6 points*)

New problems – competition A (see page 228): **A. 641.** Determine whether there is a finite, nonempty subset S of the square grid in the plane such that every element of S has at least two neighbours in S and S does not contain four points that are the vertices of a square (with sides not necessary parallel to the coordinate axes)? (Proposed by: *Mátyás Sustik,* San Francisco) **A. 642.** Let $n\geqslant 3$, let $x_1,\dots,x_n$ be nonnegative numbers, and let $A=\sum_{i=1}^n x_i$, $B=\sum_{i=1}^n x_i^2$ and $C=\sum_{i=1}^n x_i^3$. Prove that $(n+1)A^2B+(n-2)B^2\geqslant A^4+(2n-2)AC$. **A. 643.** For every positive integer n, let $P(n)$ be the greatest prime divisor of n^2+1. Show that there are infinitely many quadruples (a,b,c,d) of positive integers that satisfy $a<b<c<d$ and $P(a)=P(b)=P(c)=P(d)$.

Problems in Informatics

(see page 228)

I. 373. An effective way to format a text is to use styles: various attributes of text blocks can be set simultaneously with the corresponding styles, instead of setting the attributes one by one. In most applications, styles are not separate elements, but they can be given a tree structure. A particular attribute of a text block is determined by a *value* set locally. If a value is not given locally, then that attribute is determined by the one occurring in the corresponding style, or in the closest style above the actual style in the tree structure.

In this task we work with a simplified model of the above: text blocks are paragraphs, and attributes are positive integers. Create your program `i373` to perform the following: for a given description of styles, it should produce another equivalent description, as compact as possible, then list the actual attributes for each text block.

The input file ("Bemenet" in the *example*) consists of two parts. The first line of the first part is the number of the styles s, then each of the following s lines describes a style. The first character (an uppercase letter of the English alphabet) is the style name, the next one is the style name just above the actual style in the tree structure (for the tree root, these first two characters are identical), then each *attribute–value* pair is given in the form of "a lowercase English letter–positive integer". Values are separated by exactly one space character. The second part of the input file first contains the number of paragraphs b ($b \leqslant 500$) in the text. Then each of the following b lines describes a paragraph. The first character is the name of the applied style, then the locally valid attribute–value pairs are listed in a format similar to the one specified in the first part of the file.

The structure of the output file ("Kimenet" in the *example*) is the same as the structure of the input file. The first part of the file contains the simplified style descriptions. In a simplified style description, a particular attribute should not appear if it does not modify the same attribute set in the styles above the actual one in the tree structure. The second part of the file contains a complete description of the actual attributes for each paragraph.

The first and second command line arguments to your program are the name of the input and output files, respectively.

The source code of your program (`i373.pas`, `i373.cpp`, ...) with a short documentation (`i373.txt`, `i373.pdf`, ...) – containing a brief description of your solution and specifying the developer environment to compile the source code – should be submitted as `i373.zip`.

I. 374. A certain car manufacturing company has arrived in Hungary. They want to establish marketing offices and service centers in some Hungarian towns outside the capital, mostly in county towns or in some bigger towns in each county. The tabulator-separated and UTF-8 encoded text file `motelep.csv` contains the town names in the country, the X and Y coordinates (in meters) to locate the towns on the map, the name of the county of each town, and the name of the service center if such center will be established in that town. By using a spreadsheet application, you should solve the following tasks. You should save your solution `i374` in the default application file format. You can also use the image `momegyek.png` containing a county map of Hungary. Both files can be downloaded from our webpage.

1. Open the file `motelep.csv` in a sheet starting from cell A1, then rename the sheet to **városok** (= towns). The sheet heading should contain the titles Város (= town), TérképX (= map X), TérképY (= map Y), Megye (= county) and Telephely (= service center), displayed in bold with gray background and horizontally aligned in the center.
2. Round the X and Y coordinates to integers, replace the original data with these, and use the new data in the following. Non-empty cells of the sheet should be bordered with a thin border. Data should be sorted according to county names, then, within each county, according to town names.
3. Create a diagram to display the towns in a sheet named **városok diagram** (= town diagram). Town locations should be represented by disks without their boundaries and filled with RGB $(132, 60, 12)$ color.
4. The background image of the drawing area of the diagram should be the `momegyek.png` file. The diagram axes should be set such that no towns should appear outside the country, and settlements close to the capital Budapest should appear close to the capital boundary. The westernmost town Szentgotthárd, moreover, Balassagyarmat (located to the north of the capital) should be just on the boundary lines.
5. The diagram should have no legend. The diagram title "**Magyarország városai és megyéi**" should appear in the upper left corner, outside the country, having the same

text color and with orange RGB $(255, 230, 153)$ background color. Axes and grids should not be visible.

6. On a different sheet you should collect all the data corresponding to towns in which a service center will be established. The name of this new sheet should be **telephely**, and it should be formatted as the **városok** sheet. You should create a sheet **telephely diagram** having the same format as the previous diagram and containing the towns with service centers. The diagram title should be "**Magyarországi telephelyek**" (= Hungarian service centers).
7. Create a sheet **távolságok** (= distances) that gives the distance between an arbitrary town and a town with a service center. Distances are measured by using the map (X, Y) coordinates and the Pythagorean theorem. Starting from cell A2 downwards, all town names should appear by using a reference, and all town names with a service center should appear to the right of cell B1.
8. Distances between towns in the first column and towns in the first row should appear in the corresponding cell in the column-row intersection by using a formula that can be copied, having km as a distance unit, and using only integer values. Auxiliary cells for computations can be placed to the right of column CA or below row 350.
9. Create a sheet **keresés** (= search) to display service centers within a given distance from a given town. Cell A1 should contain the text "**Város**", cell A2 should contain the name of a Hungarian town, cell B1 should have the text "**Telephely**", and cell C1 should contain "**Távolság**". In cell B2 the closest town with a service center should appear, and cell C2 should contain their distances in km units. In this cell the numerical value should be followed by the text "km".

A short description of your solution (`i374.pdf`) containing the name and version of the spreadsheet application and your actual solution sheet (`i374.xlsx`, `i374.ods`, ...) should be submitted in a compressed file `i374.zip`.

I. 375. In this task we study a mechanical model for the road junction problem by using a computer simulation.

The junction problem asks the following. We are given the location of three towns. Where to put the junction such that the total cost of roads to be built from the junction to the towns is minimal? A following mechanical model for this problem was given by Pólya György (see in his book *George Pólya: Induction and Analogy in Mathematics,* Princeton Univ. Press, 1954). We fix three pulleys with ropes, join one end of the ropes at a common point, and attach three equal weights on the other ends of the ropes. The equilibrium point of the system (where the forces acting at the common point cancel each other out) gives the location of the road junction.

You should generalize the above model to n points, and display the resulting system on the screen. To simplify the appearance, we replace each pulley with a hole cut in the plane that passes through the n points. Each rope is represented by a line segment joining the holes and the common point. The common point cannot be inside a hole. A model for $n = 3$ created by using the Wolfram Language is found at `http://demonstrations.wolfram.com/PolyasMechanicalModelForTheFermatPoint/`.

Your computer model should have the following properties.

- The user should be able to set the value of n between 3 and 8;
- The user should be able to specify the location of the holes in the plane, but a random hole configuration can also be chosen;
- Your program approximates the equilibrium state iteratively according to the following rules:
  - *a.* the plane is viewed from above;

b. forces acting at the common point are represented by unit vectors along the direction of the ropes;

c. at the next iteration step the common point is moved to the direction determined by the sum of the unit vectors.

You can use any programming environment to solve the task. Your simulation should have a nice appearance and be easy to use.

A description of your solution (`i375.pdf`) containing the main steps and observations, the source code of your program, and any files necessary to compile or run the program should be submitted in a single compressed file (`i375.zip`).

S. 98. We are upgrading our computer, so we have to buy some components, and replace the old ones with new. We want to minimize the total cost, hence we should buy the least number of new components. Each component has the same price. However, it can happen that certain $k-1$ components out of a group of k components belonging together have to be replaced. In this case the kth component should also be replaced. The shop contains N types of components ($1 \leqslant N \leqslant 1\,000\,000$, numbered from 1 to N). A group of components belonging together can have an arbitrary size, but the total size of such groups is at most 250 000. We also know that Component 1 should be replaced anyway.

Your program should read the values of N and C (the number of groups) from the first line of the standard input. Then, from each of the following C lines, it should read the number of components db_i belonging to that group, finally the type of each component in that group as db_i integers between 1 and N. It is possible that two groups have some common components. Your program should write the minimal number of new components to be bought in the first line of the standard output.

In the example, "Példa bemenet" is a sample input, while "Példa kimenet" is the corresponding output. In this situation we have to replace Components 1, 2, 3 and 4.

Scoring and bounds. You can obtain 1 point for a brief and proper documentation clearly describing your solution. Nine further points can be obtained provided that your program solves any arbitrary valid input within 1 second of running time.

The source code (`s98.pas`, `s98.cpp`, ...) without the .exe or any other auxiliary files generated by the compiler but with a short documentation (`s98.txt`, `s98.pdf`, ...), also describing which developer environment to use for compiling the source, should be submitted in a compressed file `s98.zip`.

Problems in Physics

(see page 248)

M. 350. Determine the pressure of the gas in the bulb of a traditional gas filled filament lamp.

P. 4726. The diameter of a standard table-tennis ball is 40 mm, and its mass is 2.7 grams. What is the diameter of that iron ball, which should be attached to the table-tennis ball, in order that they just float in the water? **P. 4727.** A narrow circular sector of a black disc is painted white. The disc is rotated about an axis which goes through its centre, and is perpendicular to the disc, and the rotated disc is illuminated with strobe light (a periodically flashing light source). What is the relationship between the number of revolutions n of the disc and the flashing frequency f, if not only one, but a number of p seemingly steady white sectors can be observed on the disc ($p = 2, 3, 4, \ldots$)? **P. 4728.** Different shapes of planar figures, which have the same area, are cut from a uniform metal sheet. What is the shape of that figure which has the least moment of inertia calculated around an axis which goes through the centre of mass of the figure and which is perpendicular to the plane of the figure? **P. 4729.** Philae, the lander of the space probe called Rosetta, landed on the nucleus of a comet of mass 10^{13} kg, and of average density $0.4\ \mathrm{g/cm^3}$, which is due to the fact that inside the nucleus there are voids. The landing was "bouncy", Philae arrived back to the surface of the nucleus of the comet 113 minutes later after its first bounce. Give *estimation* for the following: *a*) What is the gravitational field strength on the surface of the nucleus of the comet, and what is the escape speed? *b*) What was the least speed of the first bounce, and to what greatest height could Philae bounce back? For the estimation, the nucleus of the comet can be considered as a uniform sphere, which is not rotating, and the motion can be considered as uniformly accelerated. For determining the average acceleration use the exact relationship between the speed and the height of the bouncing. **P. 4730.** An easily moveable piston of mass $M = 80$ kg is suspended by a thread in a vertical cylinder of inner cross section $A = 5\ \mathrm{dm^2}$, and encloses a sample of air at a temperature of $T_0 = 300$ K. The piston is attached to the ceiling by an unstretched spring of spring constant $D = 6$ N/cm. The length of the air column is $\ell_0 = 1.2$ m, and initially the pressure inside and outside is $p_0 = 10^5$ Pa. At a moment the thread breaks. *a*) What will the greatest speed of the piston be during the initiated process? *b*) During the process what will the greatest temperature of the enclosed sample of air be? **P. 4731.** The terminal voltages across the voltage supplies connected as shown in the *figure* are constant. The voltage across the capacitor C is $1.8\,U_0$. If the terminals of the voltage supply U_0 is swapped over then the voltage across the capacitor decreases to $1.4\,U_0$. Determine the ratios of r/R and of u_0/U_0. **P. 4732.** Which is greater: the energy of one photon emitted by a filament lamp made of Tungsten and filled with Krypton, or the average kinetic energy of an atom of the Krypton gas in the lamp, when the lamp is operated? **P. 4733.** In a cyclotron protons, deuterons and α-particles are accelerated. The radius of the greatest circular path is 50 cm. The magnitude of magnetic flux density is 1 Tesla. To what greatest energy can these particles be accelerated in this cyclotron? **P. 4734.** Light-rays travel in a cylinder shaped glass rod parallel to the symmetry axis of the rod, and when they enter to air at the end of the rod they brought to focus at one point. Give the equation of the boundary curve in terms of the refractive index of glass n, and of the focal length f. **P. 4735.** Three small positively charged balls of mass m are attached by massless insulating threads of length L and are placed to a horizontal smooth surface made of some insulating material. Two of the balls both have a charge of Q and the third is charged to $2Q$. At an instant the thread between the two balls of charge Q is cut off. *a*) What are the velocities of the balls at the instant when the ball of charge $2Q$ is the fastest? *b*) What is the tension in the threads at this moment? *c*) What are the displacements of the balls at this moment? **P. 4736.** The Examining Institute for Cosmic Accidents (EXINCA) sent the following short report to one of its experts: *"One of the discovery spaceships of the Titanium-Devouring Little Green Men has found a perfectly spherical uniform Titanium asteroid. In order to make preparations for the mining, a straight tunnel was built and rails were put into it. The length of the tunnel was the same as the radius of the asteroid, and both ends of the tunnel were on the surface of the planet. Unfortunately one of the mine-carts, although its brake was applied, slipped into the shaft at one end of the tunnel. Initially it speeded up, then it slowed down gradually, turned back and then it stopped exactly at the middle of the tunnel. When it turned back it nearly hit the leader of the miners."* EXINCA asked the expert to calculate the following: *a*) Where (at what fraction of the length of the tunnel) did the leader of the miners stand? *b*) What could the coefficient of kinetic friction between the wheels of the mine-cart and the rails be? *c*) How long did the mine-cart move if the period of the spacecraft revolving next to the surface of the asteroid is 24 hours? (The asteroid has no atmosphere.)