KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

65. évfolyam 3. szám Budapest, 2015. március

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: NAGY GYULA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: OLÁH VERA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Kiadó igazgatója: KULCSÁR CECÍLIA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.,
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, V. emelet 5.106.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, V. emelet 5.106.,
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

1. A Bergengóc ötvösök kétféle fémből készítik ékszereiket.

A holdfém sűrűsége 5000 kg/m^3, beszerzési ára 1000 ft/g (a „ft” a Bergengóc fizetőeszköz, a fémtallér rövidítése).

A napfém sűrűsége 6000 kg/m^3, beszerzési ára 2000 ft/g.

A fémekből kétféle ötvözetet készítenek. Az első ötvözet 1 cm^3-éhez 0,6 cm^3 holdfémet és 0,4 cm^3 napfémet használnak fel, míg a második ötvözet 1 cm^3-éhez 0,4 cm^3 holdfémet és 0,6 cm^3 napfémet használnak fel (az ötvözés során nem kell anyagveszteséggel számolni).

a) Mennyi a kétféle ötvözet grammonkénti anyagköltsége?

Az elkészült ékszerek árát úgy kalkulálják, hogy az ékszer grammban adott tömegét megszorozzák az adott ötvözet grammonkénti anyagköltségével, és erre tesznek még rá 20%-ot.

b) Mennyi annak az ötvösnek a haszna, aki a 6,3 grammos első ötvözetből álló nyakláncot tévedésből úgy adja el, mintha a második ötvözetből készült volna?

(*11 pont*)

2. Hány olyan (egybevágóságtól eltekintve) különböző téglalap van, melynek oldalai (cm-ben) egész számok, míg területe és kerülete (cm^2-ben és cm-ben) 100-nál nem nagyobb négyzetszám? (*12 pont*)

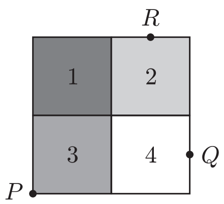
3. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

$$a)\qquad \log_4(x+1)+\log_4(x+2)=\log_2\sqrt{6},$$

$$b)\qquad \frac{2x^2-3x+1}{x^2-3x+2}-\frac{2x^2-2x-12}{x^2-7x+12}=1.$$

(*14 pont*)

4. Peti tíz egyforma 2 egység élű építőkockából tornyot épít. A torony alapja 4 cm × 4 cm-es négyzet, de az egyes részeinek más-más a magassága.



(A felülnézeti *ábra* azt mutatja, hogy egy-egy rész hány darab 2 × 2 × 2 cm-es kockából áll.)

Az ábrán látható P, Q, R pontok az egyes részek legmagasabbban lévő építőkockáinak a felső lapján vannak. P az egyik négyzetlap csúcsa, míg Q és R a felső négyzetlapok megfelelő éleinek felezőpontjai.

a) Mekkora a (térbeli) PQR háromszög P-nél lévő szöge?

b) Peti 4 piros, 3 fehér, 2 zöld és 1 kék kockából építi meg a fenti tornyot.

Hányféle különböző felülnézeti ábra áll így elő? (A nem identikus egybevágósági transzformációval egymásba vihető ábrákat különbözőnek tekintjük.)

(*14 pont*)

II. rész

5. *a*) Igazoljuk, hogy a következő két sorozat konvergens, és közös a határértékük:

$$a_n = \frac{6n^2 - n - 1}{2n^2 + n + 1}, \qquad b_n = \sqrt{n^2 + 6n + 12} - n.$$

b) Igazoljuk, hogy a fenti a_n sorozat minden tagja kisebb a fenti b_n sorozat valamennyi tagjánál. (*16 pont*)

6. A térbeli derékszögű-koordináta-rendszerben felveszünk 3 piros pontot: $A(1;0;0)$, $B(2;0;0)$, és $C(3;0;0)$, valamint 3 fehér pontot: $D(0;1;0)$, $E(0;2;0)$, és $F(0;3;0)$, valamint 3 zöld pontot: $G(0;0;1)$, $H(0;0;2)$, és $I(0;0;3)$.

a) Véletlenszerűen kiválasztunk a kilenc pont közül hármat úgy, hogy a kiválasztott pontok egy háromszög csúcsai legyenek. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az így kapott háromszögnek vannak azonos színű csúcsai?

b) A kilenc pont közül válasszunk ki úgy néhányat, hogy az általuk meghatározott test térfogata a lehető legnagyobb legyen. Mely csúcsokat válasszuk ki, és mekkora lesz ekkor a kérdéses térfogat? (*16 pont*)

7. Tekintsük a derékszögű koordináta-rendszerben a következő két kört:

$$k_1 : x^2 + 4x + y^2 + y = 2 \quad \text{és} \quad k_2 : x^2 - 6x + y^2 - 4y = 12.$$

Mekkora annak a síkrésznek a területe, amelyet mind a két kör lefed?

(*16 pont*)

8. A p paraméter mely értékeire lesz a

$$px^2 - (p-1)x - \frac{3}{4}p + \frac{1}{2} = 0$$

a) egyenletnek egy megoldása;
b) egyenletnek két megoldása, az egyik pozitív, a másik negatív;
c) egyenletnek gyöke a -3;
d) egyenlet gyökeinek az aránya $1:2$? (*16 pont*)

9. Kati „peches"-számai a 3-as, és a 7-es.

Egy nap 1-től kezdve elkezdte felírni a pozitív egészeket, de azokat a számokat, amikben volt hármas, vagy hetes jegy kihagyta.

a) Milyen számjegyekből áll a Kati által felírt 2015-dik szám?

b) Hanyadik számként írta fel Kati a 2015-ös számot? (*16 pont*)

Sztranyák Attila
Budapest

Megoldásvázlatok a 2015/2. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. *Számítsuk ki az A kifejezés pontos értékét:*

$$A=\left(\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}}\right)^{-2}\cdot\left(14-\sqrt{12}-\sqrt{96}\right)^2\cdot\left(\frac{2^2}{2015}\right)^{-1}. \qquad (11\ pont)$$

Megoldás.

$$\tfrac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}=\tfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\tfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4-3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2,$$

$$\tfrac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}=\tfrac{\left(5-2\sqrt{6}\right)^2}{25-24}=\left(5-2\sqrt{6}\right)^2.$$

$$A=\left(2-\sqrt{3}+5-2\sqrt{6}\right)^{-2}\cdot2^2\left(7-\sqrt{3}-2\sqrt{6}\right)^2\cdot\tfrac{2015}{2^2}=$$

$$=\left(7-\sqrt{3}-2\sqrt{6}\right)^{-2}\cdot\left(7-\sqrt{3}-2\sqrt{6}\right)^2\cdot2015=2015.$$

2. *Egy sakkversenyen mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig* 25 *játszmát fejeztek be, és mindenkinek még hátravan* 4 *játszmája. Hány sakkozó vesz részt a versenyen?* (*12 pont*)

Megoldás. Legyen a részvevők száma n, így mindenki $n-1$ mérkőzést játszik. Ha minden sakkozónak még 4 mérkőzése van hátra, akkor eddig mindenki $n-1-4=n-5$ mérkőzést játszott. Ez összesen $\frac{n(n-5)}{2}$ mérkőzés. Tehát az $\frac{n(n-5)}{2}=25$ egyenletet kell megoldanunk. Az $n^2-5n-50=0$ másodfokú egyenlet pozitív megoldása $n=10$. Tehát 10 sakkozó vesz részt a versenyen.

3. *Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:*

$$\frac{625^x-81^x}{375^x+135^x}=\frac{2}{\sqrt{15}}. \qquad (14\ pont)$$

Megoldás. A hatványalapokat bontsuk prímtényezők szorzatára, ezután az egyenlet:

$$\frac{(5^x)^4-(3^x)^4}{(5^x)^3\cdot3^x+(3^x)^3\cdot5^x}=\frac{2}{\sqrt{15}}.$$

Vezessük be az $a=5^x$ és $b=3^x$ új változókat, ekkor

$$\frac{a^4-b^4}{a^3\cdot b+b^3\cdot a}=\frac{2}{\sqrt{15}}.$$

Szorzattá alakítva a számlálót és a nevezőt, majd egyszerűsítve ($a^2+b^2\neq0$):

$$\frac{\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right)}{ab\left(a^2+b^2\right)}=\frac{2}{\sqrt{15}},$$

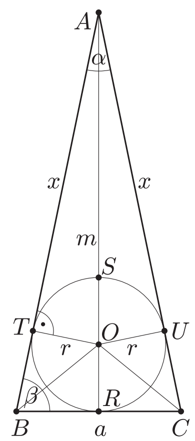
$$\frac{a^2-b^2}{ab}=\frac{2}{\sqrt{15}},$$

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{2}{\sqrt{15}}.$$

Az $y=\frac{a}{b}=\left(\frac{5}{3}\right)^x$ új változót bevezetve: $y-\frac{1}{y}=\frac{2}{\sqrt{15}}$, $\sqrt{15}\,y$-nal ($y\neq 0$) beszorozva a $\sqrt{15}y^2-2y-\sqrt{15}=0$ másodfokú egyenletet kapjuk.

Az egyenlet megoldásai: $y_1=-\frac{3}{\sqrt{15}}$ és $y_2=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Az első, negatív megoldás nem lehet pozitív szám hatványa, így a második megoldásból kapjuk az eredeti egyenlet egyetlen megoldását: $\left(\frac{5}{3}\right)^x=\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$. Mivel az $x\to\left(\frac{5}{3}\right)^x$ függvény szigorúan monoton függvény, ezért ebből $x=\frac{1}{2}$ következik.

4. *Egy egyenlő szárú háromszög súlypontja illeszkedik a háromszög beírható körére. Mekkorák a háromszög szögei? Bizonyítsuk be, hogy a beírt kör szárakon lévő két érintési pontja három egyenlő részre osztja a kör kerületét.* (*14 pont*)



Megoldás. Az S pont illeszkedik az alaphoz tartozó magasságra és a beírt körre. Mivel a súlypont harmadolja a súlyvonalat, így a magasság harmada egyenlő a kör átmérőjével: $\frac{m}{3}=2r$ vagyis $m=6r$.

Az AOT derékszögű háromszögben $OT=r$ és $OA=m-r=5r$, vagyis $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{5r}=0{,}2$, amiből $\alpha\approx 23{,}7^\circ$, és innen $\beta\approx\approx 78{,}46^\circ$.

A szimmetria és az érintőszakaszok egyenlősége miatt $AT=AU=x$, $BT=BR=CR=CU=\frac{a}{2}$.

A feladat második részének bizonyításához írjuk fel a háromszög területét kétféleképpen:

$$T_{ABC\triangle}=\frac{a\cdot m}{2}=\frac{a\cdot 6r}{2}=3ar,$$

másrészt

$$T_{ABC\triangle}=2T_{ATO\triangle}+4T_{BRO\triangle}=2\cdot\frac{x\cdot r}{2}+4\cdot\frac{a\cdot r}{4}=xr+ar.$$

A kettőt egyenlővé téve kapjuk, hogy $3ar=xr+ar$, vagyis $2ar=xr$, amiből következik, hogy $2a=x$.

A háromszög kerülete:

$$K_{ABC\triangle}=2x+4\cdot\frac{a}{2}=2x+2a=3x.$$

Mivel $AT=AU=x$, a T és U érintési pontok valóban harmadolják a háromszög kerületét.

II. rész

5. *Vizsgáljuk meg az alábbi egyenlet megoldhatóságát az m paraméter függvényében:*

$$\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x+2\sin^2x+2\cos^2x+3m^2=4m(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x).\qquad (16\ pont)$$

Megoldás. Ismeretes, hogy $a\geqslant 0$ esetén $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$, hasonlóan $a\leqslant 0$ esetén $a+\frac{1}{a}\leqslant -2$.

Vezessük be az $y=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$ új változót, ekkor $y\leqslant -2$ vagy $2\leqslant y$, valamint

$$\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x+2\sin^2x+2\cos^2x=\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x+2=(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2=y^2.$$

Az egyenletünk az új változóval: $y^2+3m^2=4my$, rendezve $y^2-4my+3m^2=0$. Az egyenlet diszkriminánsa: $D=16m^2-12m^2=4m^2$, így $D\geqslant 0$. A megoldóképletet alkalmazva a két megoldás:

$$y_{1,2}=\frac{4m\pm\sqrt{16m^2-12m^2}}{2}=2m\pm|m|,$$

ahonnan $y_1=m$ és $y_2=3m$.

Nincs megoldása az egyenletnek, ha $m=0$, mert $y=0$ lenne.

Ha $0<m$ és $3m<2$, vagyis $m<\frac{2}{3}$, akkor nem lesz megoldás.

Hasonlóan, $m<0$ és $-2<3m$, azaz $-\frac{2}{3}<m$ esetén szintén nem lesz megoldás.

Tehát nincs megoldása az egyenletnek, ha $-\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}$.

Egy megoldást kapunk y-ra, ha $0<m<2$ és $2\leqslant 3m$, vagyis $\frac{2}{3}\leqslant m<2$, vagy ha $-2<m<0$ és $3m\leqslant -2$, vagyis $-2<m\leqslant -\frac{2}{3}$.

Ilyenkor az eredeti egyenlet megoldásait a

$$\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}=3m,\quad \text{azaz a}\quad \operatorname{tg}^2x-3m\cdot\operatorname{tg}x+1=0$$

egyenlet megoldásával kapjuk. Az egyenlet diszkriminánsa $D=9m^2-4\geqslant 0$, amiből $|m|\geqslant\frac{2}{3}$, ami az m-re adott fenti feltételek esetén teljesül.

Ha $m\leqslant -2$ vagy $2\leqslant m$, akkor mindkét y-ra kapott értéket visszahelyettesíthetjük, és a megoldásokat a $\operatorname{tg}^2x-3m\cdot\operatorname{tg}x+1=0$ és a $\operatorname{tg}^2x-m\cdot\operatorname{tg}x+1=0$ egyenletek gyökei adják. Az egyenletek diszkriminánsát megvizsgálva, az $|m|\geqslant\frac{2}{3}$ és $|m|\geqslant 2$ feltételeket kapjuk a megoldhatóságra, melyek az m-re adott fenti feltételek esetén teljesülnek.

6. *A teafűből a forró vízben a kellemes ízeket adó anyagok gyorsabban kioldódnak, mint a káros csersavak. Előfordul, hogy a teafüvet véletlenül hosszabb ideig hagyjuk a vízben, mint szükséges lenne, ilyenkor a csersavaktól keserű lesz a tea. Az időt percekben mérve, a* $t\in[0,30]$ *intervallumon közelítsük a percenként kioldódó csersav mennyiségét a* $v(t)=-t^3+25t^2+150t$ *függvénnyel. Hány százalékkal több csersav oldódik ki a teafűből, ha a szükséges* 5 perc *helyett* 10 *vagy* 15 percig *benne felejtjük a filtert a vízben?*

(*16 pont*)

Megoldás. Számoljuk ki az 5 perc alatt kioldódó A mennyiséget:

$$A=\int_0^5 -t^3+25t^2+150t\,dt=\left[-\frac{t^4}{4}+25\cdot\frac{t^3}{3}+150\cdot\frac{t^2}{2}\right]_0^5\approx$$
$$\approx -156{,}25+1041{,}7+1875=2760{,}45.$$

A 10 perc alatt kioldódó B mennyiség:

$$B=\int_0^{10} -t^3+25t^2+150t\,dt=\left[-\frac{t^4}{4}+25\cdot\frac{t^3}{3}+150\cdot\frac{t^2}{2}\right]_0^{10}\approx$$
$$\approx -2500+8333{,}3+7500=13\,333{,}3.$$

A 15 perc alatt kioldódó C mennyiség:

$$C=\int_0^{15} -t^3+25t^2+150t\,dt=\left[-\frac{t^4}{4}+25\cdot\frac{t^3}{3}+150\cdot\frac{t^2}{2}\right]_0^{15}\approx$$
$$\approx -12\,656{,}25+28\,125+16\,875=32\,343{,}75.$$

Ha 10 percre felejtjük a vízben a teafüvet, akkor

$$\frac{B-A}{A}=\frac{13\,333{,}3-2760{,}45}{2760{,}45}\approx 3{,}83=383\%\text{-kal}$$

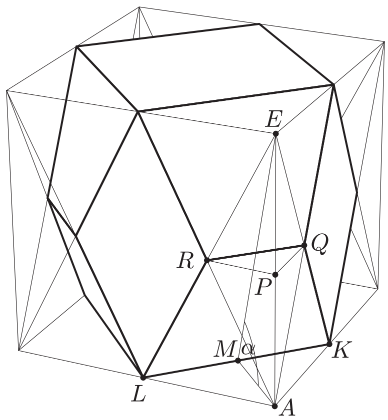
több, ha pedig 15 percig, akkor

$$\frac{C-A}{A}=\frac{32\,343{,}75-2760{,}45}{2760{,}45}\approx 10{,}72=1072\%\text{-kal}$$

több csersav oldódik ki, mintha betartottuk volna az 5 percet.

7. *Egyik lapjára állított* 18 cm *élhosszúságú kockából kiindulva bonbonos dobozt tervezünk. Az alap és fedőlap oldalfelező pontjait összekötjük a szemközti lap közelebbi csúcsaival, az* ábrának *megfelelően. A keletkező háromszög alapú gúlákat elhagyjuk a kockából. Az így létrejött testet, a bonbonos dobozt, papírból fogjuk elkészíteni,* 30% *ragasztási felület, illetve hulladék ráhagyásával. Mennyi papírra lesz szükségünk? Mekkora lesz a doboz térfogata? Mekkora szöget zárnak be a trapéz alakú lapok egymással?* (*16 pont*)

Megoldás. Vizsgáljuk meg az egyik elhagyott háromszög alapú gúlát, $AKLE$-t, ennek térfogata: $V=\frac{9\cdot 9\cdot 18}{2\cdot 3}=243\ \text{cm}^3$. A $PQRE$ gúla hozzá hasonló, a hasonlóság aránya $\lambda=\frac{1}{2}$, a térfogatuk aránya $\lambda^3=\frac{1}{8}$, így az $AKLPQR$ háromszög alapú csonka gúla térfogata



$$V_1=\frac{7}{8}V=\frac{1701}{8}.$$

Nyolc darab ilyen csonkagúlát vágunk ki a kockából, így a doboz térfogata

$$V_D=18^3-8\cdot\frac{1701}{8}=4131\ \text{cm}^3.$$

A doboz felszíne két négyzetből, nyolc egyenlő szárú trapézból és nyolc egyenlő szárú háromszögből áll.

A négyzet területe: $T_N=\left(9\sqrt{2}\right)^2=162\ \text{cm}^2$.

A trapéz alapjai: $9\sqrt{2}$ és $\frac{9\sqrt{2}}{2}$, szárai

$$s=\sqrt{9^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2}=\frac{9\sqrt{5}}{2},$$

magassága:

$$m=\sqrt{\left(\frac{9\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{27\sqrt{2}}{4}.$$

Így a trapéz területe:

$$T_T=\frac{9\sqrt{2}+\frac{9\sqrt{2}}{2}}{2}\cdot\frac{27\sqrt{2}}{4}=\frac{729}{8}\ \text{cm}^2.$$

A háromszög területe:

$$T_H = \frac{9\cdot 9}{2} = \frac{81}{2}\ \mathrm{cm}^2.$$

A doboz felszíne:

$$A = 2T_N + 8T_T + 8T_H = 2\cdot 162 + 8\cdot\frac{729}{8} + 8\cdot\frac{81}{2} = 324 + 729 + 324 = 1377\ \mathrm{cm}^2.$$

Tehát a ráhagyással együtt $1377\ \mathrm{cm}^2 \cdot 1{,}3 = 1790{,}1\ \mathrm{cm}^2$ papír szükséges a doboz elkészítéséhez.

A KL szakasz felezőpontja legyen az M pont, $AM = \frac{AK}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$. Az $\alpha = AME\sphericalangle$ a trapéz alakú oldal alaplappal bezárt szöge:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AE}{AM} = \frac{18\sqrt{2}}{9} = 2\sqrt{2}, \quad \text{amiből} \quad \alpha \approx 70{,}53^\circ.$$

A két trapéz alakú oldallap szöge ennek a szögnek a duplája: $2\alpha \approx 141{,}06^\circ$.

8. *Mekkora szögben látszik az alábbi körök közös húrja az origóból?*

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 8x - 8y + 22 = 0. \qquad (16\ pont)$$

Megoldás. Teljes négyzetté alakítás után:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25 \quad \text{és} \quad (x-4)^2 + (y-4)^2 = 10.$$

Ebből leolvasható a két kör középpontja és sugara: $K_1(-2;1)$, $r_1 = 5$, $K_2(4;4)$, $r_2 = \sqrt{10}$.

A két kör egyenletét kivonva egymásból a $12x + 6y = 42$ egyenletet kapjuk, amiből $y = -2x + 7$ következik. Ez a húr egyenesének egyenlete. Ezt visszahelyettesítve az első kör egyenletébe az $(x+2)^2 + (-2x+6)^2 = 25$ másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek a megoldásai $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Ezeket visszahelyettesítve az egyenes egyenletébe kapjuk, hogy $y_1 = 1$, $y_2 = 5$. Tehát a közös húr végpontjainak koordinátái $A(1;5)$ és $B(3;1)$.

Az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok szögét kell megadnunk:

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos\gamma = \sqrt{26}\cdot\sqrt{10}\cdot\cos\gamma.$$

Másrészt a koordinátákból: $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 3 + 5 = 8$. Ezekből $\cos\gamma = \frac{8}{\sqrt{260}} \approx 0{,}4961$, amiből $\gamma \approx 60{,}26^\circ$.

9. *A zöldséges* 1 *hetes,* 2 *hetes és* 3 *hetes narancsokat árul. Annak a valószínűsége, hogy egy* 1 *hetes narancs romlott,* 0,01. *Ez a valószínűség a tapasztalatok szerint hetente megduplázódik. A zöldségesnél jelenleg* 25 kg 1 *hetes,* 17 kg 2 *hetes és* 6 kg 3 *hetes narancs van. A narancsok tömege egyformának tekinthető,* 5 db 1 kg. *Egyik reggel a pakoláskor összekeveredtek a narancsok.*

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott narancs romlott?

b) Véletlenszerűen kiválasztottunk egy narancsot, ami jó. Mekkora a valószínűsége, hogy 3 *hetes?*

c) Vettünk 40 dkg *narancsot. Mekkora a valószínűsége, hogy mind jó? És annak, hogy a fele romlott?** (16 *pont*)

*A 2015. februári számban a feladat szövege tévesen jelent meg. A hibáért elnézést kérünk. (A szerk.)

Megoldás. Jelölje A, B, illetve C rendre azt az eseményt, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott narancs 1 hetes, 2 hetes, illetve 3 hetes; R pedig azt az eseményt, hogy egy narancs romlott. Az A, B és C események teljes eseményrendszert alkotnak.

Adott, hogy $P(R|A)=0{,}01$, $P(R|B)=0{,}02$, $P(R|C)=0{,}04$. Mivel 5 darab narancs 1 kg, ezért 1 hetes narancsból 125, 2 hetesből 85, míg 3 hetesből 30 darab van, ez összesen 240 db narancs. Így a következőket tudjuk még:

$$P(A)=\frac{125}{240},\quad P(B)=\frac{85}{240}\quad \text{és}\quad P(C)=\frac{30}{240}.$$

a) A teljes valószínűség tételét használva:

$$P(R)=P(A)P(R|A)+P(B)(P(R|B)+P(C)P(R|C)=$$

$$=\frac{125}{240}\cdot 0{,}01+\frac{85}{240}\cdot 0{,}02+\frac{30}{240}\cdot 0{,}04\approx 0{,}0173.$$

b) $$P(C|\overline{R})=\frac{P(C\overline{R})}{P(\overline{R})}=\frac{P(C)P(\overline{R}|C)}{P(\overline{R})}=\frac{P(C)\big(1-P(R|C)\big)}{1-P(R)}=$$

$$=\frac{\frac{30}{240}\cdot(1-0{,}04)}{1-0{,}0173}\approx 0{,}1221.$$

c) Felhasználjuk, hogy $P(\overline{R}|A)=1-P(R|A)=0{,}99$, $P(\overline{R}|B)=1-P(R|B)=0{,}98$ és $P(\overline{R}|C)=1-P(R|C)=0{,}96$.

A két narancs kiválasztására a következő lehetőségek vannak: mindkettő 1 hetes; mindkettő 2 hetes; mindkettő 3 hetes; egyik 1, másik 2 hetes; egyik 1, másik 3 hetes; egyik 2, másik 3 hetes.

$$P(\text{mindkét narancs jó})=$$

$$=\frac{\binom{125}{2}}{\binom{240}{2}}\cdot P(\overline{R}\mid A)^2+\frac{\binom{85}{2}}{\binom{240}{2}}\cdot P(\overline{R}\mid B)^2+\frac{\binom{30}{2}}{\binom{240}{2}}\cdot P(\overline{R}\mid C)^2+$$

$$+\frac{125\cdot 85}{\binom{240}{2}}\cdot P(\overline{R}\mid A)\cdot P(\overline{R}\mid B)+\frac{125\cdot 30}{\binom{240}{2}}\cdot P(\overline{R}\mid A)\cdot P(\overline{R}\mid C)+$$

$$+\frac{85\cdot 30}{\binom{240}{2}}\cdot P(\overline{R}\mid B)\cdot P(\overline{R}\mid C)=$$

$$=\frac{1}{240\cdot 239}\cdot\big(125\cdot 124\cdot 0{,}99^2+85\cdot 84\cdot 0{,}98^2+30\cdot 29\cdot 0{,}96^2\big)+$$

$$+\frac{1}{240\cdot 239}\cdot(2\cdot 125\cdot 85\cdot 0{,}99\cdot 0{,}98+2\cdot 125\cdot 30\cdot 0{,}99\cdot 0{,}96+2\cdot 85\cdot 30\cdot 0{,}98\cdot 0{,}96)=$$

$$=\frac{55\,393{,}428}{240\cdot 239}\approx 0{,}9657.$$

A másik kérdésre a választ hasonló gondolatmenettel kapjuk meg:

$$P(\text{a fele narancs jó}) =$$

$$= \frac{\binom{125}{2}}{\binom{240}{2}} \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}01 + \frac{\binom{85}{2}}{\binom{240}{2}} \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}02 + \frac{\binom{30}{2}}{\binom{240}{2}} \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}04 +$$

$$+ \frac{125 \cdot 85}{\binom{240}{2}} \cdot (0{,}99 \cdot 0{,}02 + 0{,}01 \cdot 0{,}98) + \frac{125 \cdot 30}{\binom{240}{2}} \cdot (0{,}99 \cdot 0{,}04 + 0{,}01 \cdot 0{,}96) +$$

$$+ \frac{85 \cdot 30}{\binom{240}{2}} \cdot (0{,}98 \cdot 0{,}04 + 0{,}02 \cdot 0{,}96) =$$

$$= \frac{1622{,}642}{240 \cdot 239} \approx 0{,}0283.$$

Lorántfy László
Dabas

Matematika feladatok megoldása

B. 4575. *Ősi hagyományai szerint a Fejszámolók törzse az éveknek a szerencsés, illetve a baljós besorolást adja. Például* 2013 *szerencsés év, mert az első* 2013 *pozitív egészet be lehet sorolni legalább két csoportba úgy, hogy bármely két csoportban lévő számok összege és darabszáma is egyenlő. Ha ez nem lehetséges, akkor az év a baljós jelzőt kapja. Melyek a baljós évek?*

(*6 pont*) Javasolta: *Káspári Tamás* (Paks)

I. megoldás. Azt fogjuk belátni, hogy pontosan az 1 és a prímszámok a baljósak, az összetett számok pedig a szerencsések. Az 1 nyilvánvalóan baljós. Ha pedig n prímszám, és az első n számot $d \geqslant 2$ egyenlő elemszámú részre osztjuk, akkor $d \mid n$ miatt csak $d = n$ lehetséges, vagyis minden szám egy külön csoportba kerül, ekkor viszont a csoportokon belüli összegek nem egyeznek.

Most tegyük fel, hogy n összetett szám. Ha $2 < n$ páros, akkor n darab kételemű csoportot hozhatunk létre, amelyek mindegyikében $n+1$ az összeg: $(1, n)$; $(2, n-1)$; $\ldots$; $\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\right)$. Tehát a 2-nél nagyobb páros számok szerencsések.

Végül, tegyük fel, hogy az n összetett szám páratlan. Legyen a legkisebb prímosztója p. Mivel n összetett, ezért n/p egy 1-nél nagyobb egész szám, így p definíciója miatt $p \leqslant n/p$. Mivel n páratlan, ezért n/p is az, vagyis $n = p(p+2k)$, ahol k nemnegatív egész szám. Megmutatjuk, hogy az első n pozitív egész számot szét lehet osztani p egyforma méretű csoportba úgy, hogy mindegyik csoporton belül ugyanannyi az elemek összege. Először osszuk be az $1, 2, \ldots, p^2$ számokat. Ehhez írjuk őket egy $p \times p$-es táblázat mezőibe úgy, hogy az i-edik sor j-edik eleme $(i-1)p + j$ legyen. Azt állítjuk, hogy ha a beosztásnál minden csoportba minden sorból és minden oszlopból pontosan egy elem kerül, akkor olyan p elemű csoportokat hozunk létre, amelyekben az elemek összege $\big(0+1+\ldots+(p-1)\big)p+$ $+(1+2+\ldots+p)$. Legyen ugyanis S egy tetszőlegesen kiválasztott csoport. Ekkor

$$\sum_{(i-1)p+j\in S}(i-1)p+j=\sum_{(i-1)p+j\in S}(i-1)p+\sum_{(i-1)p+j\in S}j=$$
$$=\big(0+1+\ldots+(p-1)\big)p+(1+2+\ldots+p),$$

ahol az első összeg kiszámításánál azt használtuk, hogy S minden sorból, a másodiknál pedig azt, hogy S minden oszlopból pontosan egy elemet tartalmaz. Továbbá a kívánt beosztás megvalósítható, például úgy, ha az egyik csoportot a főátlón lévő számok $\big(1,p+2,2p+3,\ldots,(p-1)p+p\big)$ alkotják, a többit pedig ennek „eltoltjai". Be kell még osztanunk a $p^2+1,p^2+2,\ldots,p^2+2kp$ számokat. Ehhez először képezzünk belőlük kp darab párt: x párja legyen $2p^2+2kp+1-x$, vagyis a párok: $\big(p^2+1,p^2+2kp\big)$; $\big(p^2+2,p^2+2kp-1\big)$; $\ldots$; $\big(p^2+kp,p^2+kp+1\big)$. Az első p^2 pozitív egész előbbi csoportokba osztását egészítsük ki úgy, hogy mindegyikhez hozzáveszünk k darab párt. Így egyrészt minden csoportban ugyanannyi lesz az elemek összege, másrészt a csoportok elemszáma is egyezni fog: $p+2k$ lesz. Ezzel beláttuk, hogy a páratlan összetett számok is szerencsések.

A baljós évek tehát az első és a prímszám sorszámú évek.

Molnár-Sáska Zoltán (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 8. évf.)

II. megoldás (annak igazolására, hogy a páratlan összetett számok szerencsések). Tegyük fel, hogy n páratlan összetett szám. Legyen $n=ab$, ahol a és b 1-nél nagyobb páratlan számok. Mivel b páratlan, így $b\geqslant 3$. Először 1-től $3a$-ig a darab hármas csoportba osztjuk a számokat. Legyen $a=2l+1$. Tekintsük a következő beosztást:

$$(1,3l+2,6l+3);\ (2,3l+3,6l+1);\ \ldots;\ (l+1,4l+2,4l+3);$$
$$(l+2,2l+2,6l+2);\ (l+3,2l+3,6l);\ \ldots;\ (2l+1,3l+1,4l+4).$$

Mindegyik csoportban az összeg $9l+6$. Ha $b=3$, akkor készen vagyunk, hiszen $a>1$ darab hármas csoportba osztottuk a számokat, amelyekben az összeg egyenlő. Ha $b>3$, akkor $3a+1$-től n-ig osszuk a számokat $\frac{b-3}{2}\cdot a$ darab kettes csoportba az alábbi módon:

$$(3a+1,ab),\ (3a+2,ab-1),\ \ldots,\ \left(3a+\frac{b-3}{2}\cdot a,ab+1-\frac{b-3}{2}\cdot a\right).$$

Mindegyik kettes csoportban az összeg $ab+3a+1$. Az első n pozitív egész számot most úgy osztjuk a csoportba, hogy minden csoport az egyik hármas és $\frac{b-3}{2}$ darab kettes csoport uniója legyen. Ekkor a csoportok száma $a>1$, a csoportok mérete b, továbbá bármely két csoportban ugyanannyi az összeg, hiszen azok hármas és kettes részcsoportjait „párosíthatjuk", és azokban az összeg egyenlő.

Szabó Barnabás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

103 dolgozat érkezett. 6 pontos 53, 5 pontos 2, 4 pontos 5, 3 pontos 8, 2 pontos 17, 1 pontos 11, 0 pontos 7 dolgozat.

B. 4605. *Tegyük fel, hogy α és β olyan, egymástól különböző valós számok, amelyek közül legalább az egyik nem egész. Igaz-e, hogy biztosan létezik olyan n pozitív egész szám, amelyre $\alpha^n-\beta^n$ nem egész?*

(5 pont)

Megoldás. Megmutatjuk, hogy biztosan létezik ilyen n. Ha $n=1$ és $n=2$ közül egyik sem megfelelő, akkor $\alpha-\beta$ és $\alpha^2-\beta^2$ egész számok. Mivel $\alpha-\beta\neq 0$, ezért $\alpha+\beta=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$ racionális szám, és így az

$$\alpha=\frac{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)}{2}\quad \text{és a}\quad \beta=\frac{(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)}{2}$$

számok is racionálisak. Mivel α és β különbsége egész, ezért egyszerűsítés utáni alakjukban a nevező ugyanaz: legyen $\alpha=\frac{a}{c}$ és $\beta=\frac{b}{c}$, ahol a, b, c olyan egész számok, amelyekre $(ab,c)=1$. Az $\alpha^n-\beta^n$ szám pontosan akkor egész, ha c^n osztja az

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$$

számot. Az $n=1$ esetből $c\mid a-b$ adódik, vagyis a és b azonos maradékot adnak c-vel osztva. Mivel α és β közül legalább az egyik nem egész, ezért $|c|\neq 1$, vagyis a c egész számnak létezik p prímosztója. Mivel $c\mid a-b$, ezért $a\equiv b\ (p)$, és így

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}\equiv na^{n-1}\ (p).$$

Mivel $(ab,c)=1$, ezért $p\nmid a$. Így, ha az n szám nem osztható p-vel, akkor abból, hogy $c^n\mid a^n-b^n$ az is következik, hogy $p^n\mid a-b$-nek is teljesülnie kell, hiszen az $a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}$ összegnek nem osztója p. Elég tehát mutatni egy olyan n pozitív egész számot, amelyre $p\nmid n$ és $p^n\nmid a-b$. Mivel $a-b$ egy 0-tól különböző egész szám, ezért ilyen n nyilvánvalóan létezik: például $n=p|a-b|+1$ megfelelő. (Ugyanis ezzel a választással $|a-b|<n<p^n$, így mindkét feltétel teljesülése könnyen ellenőrizhető.) Vagyis biztosan létezik olyan n, amelyre $\alpha^n-\beta^n$ nem egész.

Zsók Bianka (Bonyhádi Petőfi S. Ev. Gimn., 9. évf.)

50 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 19 versenyző: Ágoston Péter, Baran Zsuzsanna, Csépai András, Csernák Tamás, Di Giovanni Márk, Forrás Bence, Gyulai-Nagy Szuzina, Kúsz Ágnes, Lajkó Kálmán, Maga Balázs, Molnár-Sáska Zoltán, Nagy Kartal, Nagy-György Pál, Schwarcz Tamás, Simkó Irén, Szebellédi Márton, Szőke Tamás, Williams Kada, Zsók Bianka. 4 pontos 4, 3 pontos 4, 2 pontos 2, 1 pontos 11, 0 pontos 10 dolgozat.

B. 4609. *Melyik az a legkisebb pozitív c szám, amelyre igaz, hogy tetszőleges $a_1,a_2,\ldots,a_n$ valós számok közül kiválasztható néhány, amelyek összegének a hozzá legközelebbi egésztől vett távolsága legfeljebb c?*

(6 pont)

Megoldás. Azt fogjuk igazolni, hogy a legkisebb ilyen szám $c=\frac{1}{n+1}$. Először is, ha $a_1=a_2=\ldots=a_n=\frac{1}{n+1}$, akkor a lehetséges összegek $\frac{1}{n+1},\frac{2}{n+1},\ldots,\frac{n}{n+1}$, vagyis $\frac{1}{n+1}$-nél kisebb c-re nem teljesül az állítás. Most megmutatjuk, hogy $c=\frac{1}{n+1}$-re már teljesül. Legyenek tehát $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszőleges valós számok. Tekintsük az $s_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$ összegeket $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Ha ezek között van olyan, amelynek törtrésze legfeljebb $\frac{1}{n+1}$, vagy legalább $\frac{n}{n+1}$, akkor készen is vagyunk, hiszen egy ilyen összegnek a legközelebbi egésztől vett eltérése legfeljebb $\frac{1}{n+1}$. Ha pedig nincs köztük ilyen, akkor a skatulya-elv miatt az

$$\left[\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}\right], \ \left[\frac{2}{n+1}, \frac{3}{n+1}\right], \ \ldots, \ \left[\frac{n-1}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right]$$

intervallumok közül legalább az egyikbe két összeg is esik, mondjuk s_i és s_j (ahol $i<j$). Ekkor viszont az $s_j - s_i = a_{i+1} + \ldots + a_j$ összeg legközelebbi egésztől vett távolsága legfeljebb $\frac{1}{n+1}$. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

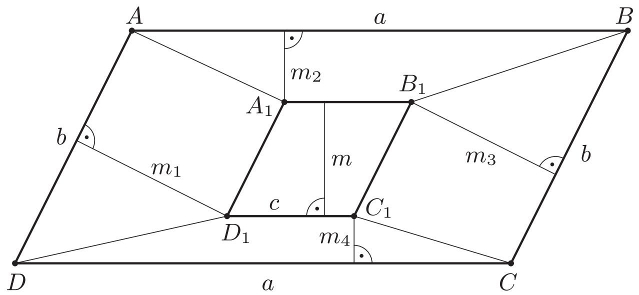
Várkonyi Dorka (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn., 9. évf.)

34 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 22 versenyző: Ágoston Péter, Badacsonyi István András, Baran Zsuzsanna, Bereczki Zoltán, Csépai András, Csernák Tamás, Di Giovanni Márk, Fekete Panna, Fonyó Viktória, Gyulai-Nagy Szuzina, Kabos Eszter, Katona Dániel, Kovács Márton, Kúsz Ágnes, Lajkó Kálmán, Maga Balázs, Mócsy Miklós, Nagy Gergely, Nagy-György Pál, Szőke Tamás, Várkonyi Dorka, Williams Kada. 3 pontos 1, 1 pontos 4, 0 pontos 7 dolgozat.

B. 4613. *Legyen az $A_1B_1C_1D_1$ rombusz az $ABCD$ paralelogramma belsejében úgy, hogy az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{A_1B_1}$, valamint a $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{B_1C_1}$ vektorok egyirányúak. Mutassuk meg, hogy $ABCD$ pontosan akkor rombusz, ha az AA_1D_1D és a BCC_1B_1 négyszögek területének összege egyenlő az ABB_1A_1 és a CDD_1C_1 négyszögek területének összegével.*

(*3 pont*) (Matlap, Kolozsvár, *Longáver Lajos* nagybányai tanár feladata)

Megoldás. A feladat feltételei alapján az $A_1B_1C_1D_1$ rombusz oldalai párhuzamosak az $ABCD$ paralelogramma oldalaival. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit és legyen $T_{ADD_1A_1} = T_1$, $T_{ABB_1A_1} = T_2$, $T_{BCC_1B_1} = T_3$, $T_{CDD_1C_1} = T_4$, valamint m_a és m_b a paralelogramma megfelelő magasságai, T pedig a területe.



1. ábra

Ekkor $T_1+T_3=T_2+T_4$ pontosan akkor teljesül, ha

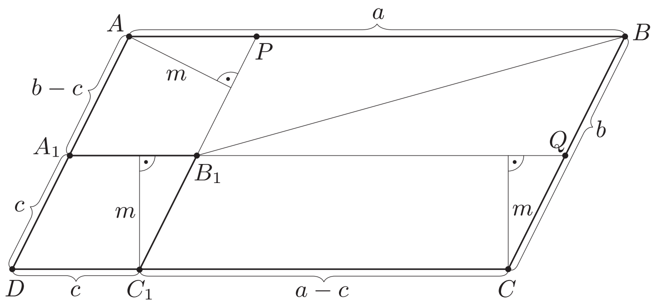
$$\frac{(c+b)}{2}m_1+\frac{(c+b)}{2}m_3=\frac{(c+a)}{2}m_2+\frac{(c+a)}{2}m_4,$$

vagyis

$$\frac{(c+b)}{2}(m_1+m_3)=\frac{(c+a)}{2}(m_2+m_4),\quad \text{azaz}$$
$$(c+b)(m_b-m)=(c+a)(m_a-m).$$

Ez ekvivalens a $cm_b+T-bm=cm_a+T-am$ egyenlőséggel. Ebből következik, hogy a szemközti területek összegének egyenlősége nem függ a rombusz helyzetétől.

Helyezzük a rombuszt a paralelogramma D csúcsához úgy, hogy $D=D_1$ legyen (*2. ábra*).



2. ábra

Ekkor az ABB_1A_1 és BCC_1B_1 trapézok területének egyenlőségét kell vizsgálni.

Húzzuk be a BPB_1Q paralelogramma BB_1 átlóját. Ez felezi a paralelogramma területét, tehát elegendő az APB_1A_1 és QCC_1B_1 paralelogrammák területének egyenlőségét vizsgálni:

$$T_{APB_1A_1}=(b-c)\cdot m\quad \text{és}\quad T_{QCC_1B_1}=(a-c)\cdot m.$$

Így a két terület pontosan akkor egyenlő, ha $(b-c)=(a-c)$, vagyis ha $a=b$. Tehát az $ABCD$ paralelogramma pontosan akkor rombusz, ha $T_1+T_3=T_2+T_4$.

Szakács Lili Kata (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9.évf.) dolgozata alapján

114 dolgozat érkezett. 3 pontos 47, 2 pontos 40, 1 pontos 22, 0 pontos 4 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 4614. *Tegyük fel, hogy $x_1,\ldots,x_n$ és $y_1,\ldots,y_n$ olyan nemnegatív számokból álló monoton növő sorozatok, amelyekre az n tag összege 1.*

a) Legfeljebb mekkora lehet $\min_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|$?

b) Legfeljebb mekkora lehet $\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$?

(*5 pont*)

Megoldás. *a*) Ha $n=1$, akkor $x_1=y_1=1$, és így a feladatban kérdezett minimum értéke 0. A továbbiakban a $2\leqslant n$ esettel foglalkozunk. Mivel az $x_1,\dots,x_n$ nemnegatív számok összege 1, és x_1 közülük a(z egyik) legkisebb, ezért

$$0\leqslant x_1\leqslant \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}=\frac{1}{n}.$$

Ehhez hasonlóan $0\leqslant y_1\leqslant \frac{1}{n}$, és így $|x_1-y_1|\leqslant \frac{1}{n}$ is teljesül. Tehát a

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|\leqslant \frac{1}{n}$$

egyenlőtlenség mindig teljesül. Másrészt, ha például a két sorozat

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{1}{n}\qquad \text{és}\qquad y_1=\ldots=y_{n-1}=0,\quad y_n=1,$$

akkor $|x_1-y_1|=\ldots=|x_{n-1}-y_{n-1}|=\frac{1}{n}$, és $|x_n-y_n|=1-\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{n}$. Tehát léteznek olyan sorozatok, amelyekre $\min_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|=\frac{1}{n}$, azaz az $\frac{1}{n}$-es becslés nem javítható. Ezzel beláttuk, hogy $n\geqslant 2$ esetén a feladat *a*) kérdésére a válasz $\frac{1}{n}$.

b) Mindkét sorozat tagjai nemnegatív számok, ezért

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=|x_n-y_n|+\sum_{i=1}^{n-1}|x_i-y_i|\leqslant|x_n-y_n|+\sum_{i=1}^{n-1}(x_i+y_i)=$$

$$=\max(x_n,y_n)-\min(x_n,y_n)+1-x_n+1-y_n=2-2\min(x_n,y_n).$$

Mivel az $x_1,\dots,x_n$ számok összege 1, és x_n közülük a(z egyik) legnagyobb, ezért $x_n\geqslant\frac{1}{n}$, és ehhez teljesen hasonlóan $y_n\geqslant\frac{1}{n}$ is igazolható. Így $2-2\min(x_n,y_n)\leqslant$ $\leqslant 2-\frac{2}{n}$, vagyis a kérdéses összeg legfeljebb $2-\frac{2}{n}$ lehet. Azonban az *a*) rész megoldásában szereplő sorozatokra láttuk, hogy

$$|x_1-y_1|=\ldots=|x_{n-1}-y_{n-1}|=\frac{1}{n}\quad\text{ és }\quad |x_n-y_n|=1-\frac{1}{n},$$

így a $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$ összeg értéke éppen $2-\frac{2}{n}$. Tehát az összeg lehetséges legnagyobb értéke $2-\frac{2}{n}$.

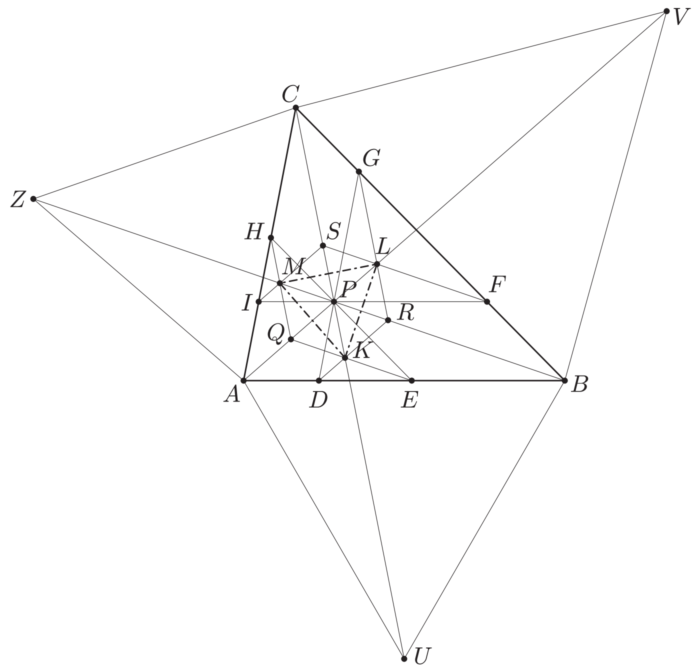
Schwarcz Tamás (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 11. évf.)

49 dolgozat érkezett. 5 pontos 28, 4 pontos 4, 3 pontos 10, 2 pontos 4, 1 pontos 1, 0 pontos 2 dolgozat.

B. 4615. *Az ABC háromszög mindegyik szöge kisebb, mint* 120°*. A háromszög izogonális pontja P. A P ponton keresztül húzzunk párhuzamos egyeneseket az oldalakkal. A párhuzamosok metszete az AB oldallal D és E, a BC oldallal F és G, a CA oldallal pedig H és I. Legyenek a DEP, FGP, HIP háromszögek izogonális pontjai K, L és M. Mutassuk meg, hogy a KLM háromszög szabályos.*

(*5 pont*) Javasolta: *Miklós Szilárd* (Herceghalom)

Megoldás. Ismert, hogy az izogonális pont úgy is megszerkeszthető, hogy a háromszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket szerkesztünk, majd ezek külső csúcsait az eredeti háromszög ellentétes csúcsával összekötjük. A három összekötő szakasz egy pontban, a háromszög izogonális pontjában metszi egymást. Legyenek az AB, BC és CA oldalakra kifelé rajzolt szabályos háromszögek harmadik csúcsai rendre U, V, Z. Az is ismert, hogy a P-nél keletkező hat darab szög mindegyike $60°$-os.



A CU egyenes egybeesik a PK egyenessel, hiszen a PDE háromszög minden oldala párhuzamos az ABC háromszög megfelelő oldalaival, tehát a csúcsokból az izogonális pontba menő egyenesek is párhuzamosak. Mivel ezek a két háromszög esetében átmennek a P ponton is, ezért egybeesnek. Ugyanezt beláthatjuk a GPF és HPI háromszögeknél is a megfelelő oldalakkal. Ugyanezzel a módszerrel azt is bizonyíthatjuk, hogy a HAE, DBG és FCI háromszögek izogonális pontjai is rajta vannak a P pontot a megfelelő csúccsal összekötő szakaszokon. Legyenek ezek az izogonális pontok rendre Q, R és S. A KLM háromszög izogonális pontja P, mert az eddigiek alapján $MPK\sphericalangle = KPL\sphericalangle = LPM\sphericalangle = 120°$. Most használjuk fel azt a fentebb már említett tulajdonságot, hogy az izogonális pontnál keletkező szögek mindegyike $60°$. A K, L, M, Q, R, S pontok mindegyike izogonális pont, tehát a PKR, RPL, LPS, SPM, MPQ és QPK háromszögek mindegyike szabályos, egymással egybevágó háromszög. A KPL, LPM és LPM háromszögek $120°$-os szárszögű egyenlő szárú háromszögek, az alapon fekvő szögek $30°$-osak, a KLM háromszög tehát szabályos.

Kocsis Júlia (Dunakeszi, Radnóti Miklós Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

43 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 34, 4 pontot 4 versenyző. 3 pontos 1, 2 pontos 3, 1 pontos 1 tanuló dolgozata.

B. 4616. *Mely n-ekre adnak az $1!, 2!, \ldots, n!$ számok páronként különböző maradékot n-nel osztva?*

(*4 pont*)

Megoldás. Ha $n=1$, 2 vagy 3, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy különböző maradékot adnak n-nel osztva. Ha $n=4$, akkor $2!=2$ és $3!=6$ azonos maradékot adnak 4-gyel osztva, azaz $n=4$ nem felel meg a feltételnek. Belátjuk, hogy ha $4<n$ összetett szám, akkor $(n-1)!$ osztható n-nel. Ha az n szám felírható $n=ab$ alakban, ahol $0<a<b<n$ egészek, akkor a és b is szerepel az $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)$ szorzatban, és így $n\mid(n-1)!$ valóban teljesül. Csak akkor nem írható fel ilyen alakban n, ha egy p prímszám négyzete, de ekkor $2p<n=p^2$, hiszen $n>4$, és ezért $2n=p(2p)\mid(n-1)!$, azaz $n\mid(n-1)!$ ekkor is fennáll. Tehát $(n-1)!$ és $n!$ egyaránt 0 maradékot adnak n-nel osztva, vagyis a 4-nél nagyobb összetett számok sem felelnek meg a feltételnek. Végül, ha $n>3$ prímszám, akkor a Wilson-tétel miatt $(n-1)!\equiv-1$ (n), és ezért $(n-2)!\equiv 1$ (n), hiszen $(n-1)!=(n-1)(n-2)!\equiv$ $\equiv-(n-2)!$ (n). Tehát $(n-2)!$ és $1!$ azonos maradékot adnak n-nel osztva, így $1\neq n-2$ miatt a 3-nál nagyobb n prímszámok sem megfelelők. Tehát n értéke 1, 2 vagy 3 lehet.

Vágó Ákos (Szeged, Radnóti Miklós Kís. Gimn. és Ált. Isk., 9. évf.)

95 dolgozat érkezett. 4 pontos 41, 3 pontos 22, 2 pontos 15, 1 pontos 6, 0 pontos 11 dolgozat.

B. 4617. *Mekkora szöget zárhat be egy derékszögű háromszög átfogója és az egyik befogóhoz tartozó súlyvonal?*

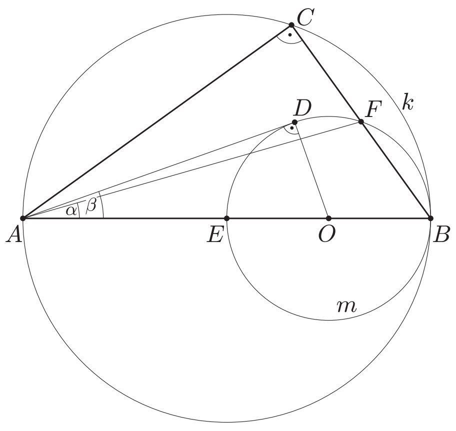
(*4 pont*) Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

I. megoldás. Legyen az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának felezőpontja E, BC befogójának felezőpontja F, a befogóhoz tartozó súlyvonalnak és az AB átfogónak a szöge α, az AB átfogó Thalész-köre k, ennek a B középpontú, 1/2 arányú középpontos hasonlóságnál kapott képe pedig az m kör. Ekkor m az EB szakasz Thalész-köre, középpontja az AB szakasz B-hez legközelebbi O negyedelőpontja (*1. ábra*).

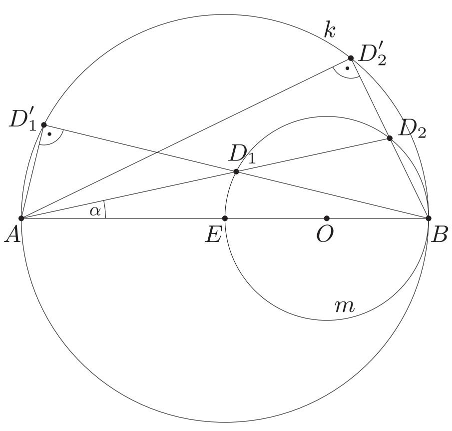
Az F pont felezi BC-t és C rajta van k-n, ezért F rajta van m-en, tehát az AF egyenesnek és m-nek van közös pontja. Így α legfeljebb akkora, mint az A-ból m-hez húzott AD érintő és AB által bezárt β szög. Ezt a szöget az AOD derékszögű háromszögből határozhatjuk meg.

$$\sin\beta=\frac{OD}{OA}=\frac{\frac{1}{4}AB}{\frac{3}{4}AB}=\frac{1}{3},\quad\text{azaz}\quad \beta=\arcsin\frac{1}{3}\approx 19{,}47^\circ.$$

Megmutatjuk, hogy minden $0^\circ<\alpha\leqslant\arcsin\frac{1}{3}$ esetén van olyan derékszögű háromszög, melyben az átfogó és az egyik befogóhoz tartozó súlyvonal szöge α. Ha a feltétel teljesül, akkor az AB egyenes egyik oldalára felmérve az α szöget, annak AB-tól különböző szára metszi m-et a D_1 és D_2 pontokban, illetve érinti m-et D-ben, ha $\alpha=\arcsin\frac{1}{3}$ (*2. ábra*). Mivel D_i rajta van m-en, azért ha B-ből



1. ábra



2. ábra

kétszeresére nagyítjuk, akkor a kapott D_i' pont rajta lesz m kétszeresre nagyított képén, k-n, azaz az AB szakasz Thalész-körén. Ezért ha $i=1,2$, akkor az ABD_i' háromszög derékszögű, és a BD_i' befogójához tartozó AD_i súlyvonala α szöget zár be az átfogójával.

Scheidler Barnabás (Bonyhád, Petőfi S. Ev. Gimn., 8. évf.)
dolgozatát felhasználva

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, legyen továbbá $AB=2$, $BC=2a$, $AC=2b$ és $AF=s$. Az ABC és AFC háromszögek derékszögűek, ezért Pitagorasz tétele szerint $4=4a^2+4b^2$, illetve $s^2=a^2+4b^2$, amikből kapjuk, hogy

$$(1) \qquad s^2=1+3b^2, \quad \text{s így} \quad s=\sqrt{1+3b^2}, \quad \text{valamint} \quad s^2-a^2=4b^2.$$

Az α szög koszinuszát az ABF háromszög BF oldalára felírt koszinusztételből kifejezve, majd (1)-et felhasználva kapjuk, hogy

$$\cos\alpha=\frac{AB^2+AF^2-BF^2}{2\cdot AB\cdot AF}=\frac{4+s^2-a^2}{4s}=\frac{1+b^2}{\sqrt{1+3b^2}}.$$

A 2 átfogójú ABC derékszögű háromszög befogója $2b$, ezért b tetszőleges 0 és 1 közti értéket felvehet, így feladatunkat visszavezettük a $(0;1)$ intervallumon értelmezett

$$f(b)=\frac{1+b^2}{\sqrt{1+3b^2}}$$

függvény értékkészletének meghatározására. Az f függvényt ugyanezzel a képlettel definiálhatjuk az összes valós számon. Az így kiterjesztett függvény nyilván folytonos az egész számegyenesen, és ezért

$$\lim_{b\to 0} f(b)=f(0)=1, \quad \text{valamint} \quad \lim_{b\to 1} f(b)=f(1)=1$$

teljesül. A függvénynek a $(0;1)$ intervallumon lévő minimumát kisebb átalakítás után a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget felhasználva határozzuk meg.

$$\frac{1+b^2}{\sqrt{1+3b^2}}=\frac{\frac{1}{3}(1+3b^2)+\frac{2}{3}}{\sqrt{1+3b^2}}=\frac{\sqrt{1+3b^2}}{3}+\frac{2}{3\sqrt{1+3b^2}}\geqslant$$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{\sqrt{1+3b^2}}{3}\cdot\frac{2}{3\sqrt{1+3b^2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

A függvény a $(0;1)$ intervallumon csak 1-nél kisebb értékeket vesz fel, mert ha $0<b<1$, akkor $b^4<b^2$ miatt $\left(1+b^2\right)^2=1+2b^2+b^4<1+3b^2$, tehát $1+b^2<$ $<\sqrt{1+3b^2}$, és ezért $f(b)<1$. Így a $(0;1)$ intervallumon értelmezett f függvény értékkészlete a $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3},1\right)$ intervallum. Ezért α minden olyan hegyesszöget felvesz, amelyre $\frac{2\sqrt{2}}{3}\leqslant\cos\alpha<1$ teljesül.

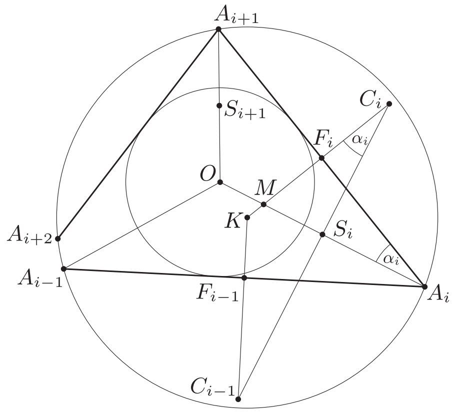
Tehát egy derékszögű háromszög átfogója és az egyik befogóhoz tartozó súlyvonala által bezárt szög tetszőleges 0°-nál nagyobb, de $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx 19{,}47°$-nál nem nagyobb értéket felvehet.

104 dolgozat érkezett. 4 pontos 63, 3 pontos 15, 2 pontos 9, 1 pontos 12, 0 pontos 5 dolgozat.

B. 4618. *Az $A_1A_2\ldots A_n$ sokszögbe és köré is írható kör. A beírt kör középpontja O, továbbá az OA_iA_{i+1} kör középpontja C_i ($i=1,2,\ldots,n$, és $A_{n+1}=A_1$). Igazoljuk, hogy $C_1,C_2,\ldots,C_n$ egy körön vannak.*

(*5 pont*)

Megoldás. Legyen a sokszög köré írt körének középpontja K.



A C_i pont rajta van az A_iA_{i+1}, OA_i és OA_{i+1} felező merőlegesén. Ezek talppontjai sorban F_i, S_i, S_{i+1}. Az OA_i szögfelező, ezért

$$\alpha_i=OA_iA_{i-1}\sphericalangle=OA_iA_{i+1}\sphericalangle.$$

A $KF_{i-1}A_iF_i$ négyszögben a belső szögek összege

$$360°=2\alpha_i+2\cdot 90°+F_{i-1}KF_i\sphericalangle,$$

vagyis

$$F_{i-1}KF_i\sphericalangle=180°-2\alpha_i.$$

Jelöljük OA_i és F_iK metszéspontját M-mel. Az A_iMF_i és C_iMS_i derékszögű háromszögek hasonlók, mert M-nél fekvő hegyesszögük közös. Emiatt $MC_iS_i\sphericalangle=$ $=KC_iS_i\sphericalangle=\alpha_i$. Az eddigiek alapján a $KC_{i-1}C_i$ háromszögben $KC_iC_{i-1}\sphericalangle=\alpha_i$,

$C_iKC_{i-1}\sphericalangle = 180° - 2\alpha_i$, így $KC_{i-1}C_i\sphericalangle = \alpha_i$. Beláttuk, hogy a $KC_{i-1}C_i$ háromszög egyenlő szárú, $KC_{i-1} = KC_i$. Ez bármely két szomszédos kör középpontjaira teljesül, tehát a C_i pontok mind egy K körüli körön helyezkednek el.

Szegi Bogát (Szeged, Radnóti Miklós Kís. Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

29 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 19 versenyző: Andó Angelika, Cseh Kristóf, Di Giovanni Márk, Dinev Georgi, Fekete Panna, Forrás Bence, Gáspár Attila, Győrfi-Bátori András, Gyulai-Nagy Szuzina, Kovács Márton, Lajkó Kálmán, Machó Bónis, Maga Balázs, Mócsy Miklós, Nagy-György Pál, Schwarcz Tamás, Simkó Irén, Szakács Lili Kata, Williams Kada. 4 pontos 9, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4622. *Egy* 3×3-*as táblázat mezőibe úgy írtuk be az* $1, 2, \ldots, 9$ *számokat, hogy mind a négy* 2×2-*es négyzeten belül ugyanannyi a számok összege. Mi lehet ez az összeg?*

(*5 pont*)

Megoldás. Legyen a keresett összeg S, és jelöljük a táblázatba írt számokat az a, b, c, d, e, f, g, h, i betűkkel a következő *ábra* szerint:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Ha összeadjuk a 2×2-es négyzeteken belüli összegeket, akkor a sarokmezőkbe írt számokat egyszer számoljuk, a középső mezőbe írtat négyszer, a fennmaradó négy mezőbe írt számokat pedig kétszer. Mivel az összes szám összege $1+2+\ldots+9=45$, ezért $4S = 45 + 3e + (b+d+f+h)$. Mivel a b, d, e, f, h számok az $\{1, 2, \ldots, 9\}$ halmaz különböző elemei, ezért

$$3e + (b+d+f+h) = 2e + (b+d+e+f+h) \geqslant 2\cdot 1 + (1+2+3+4+5) = 17,$$

hiszen $e \geqslant 1$ és a $(b+d+e+f+h)$ összeg legalább akkora, mint az öt legkisebb elem összege. Így $4S \geqslant 45 + 17 = 62$, és ezért $S \geqslant 16$, hiszen S egész.

Most tekintsünk egy olyan kitöltött táblázatot, amely teljesíti a feltételt, és mindegyik 2×2-es négyzetben a számok összege S. Cseréljük le minden x elemét $10-x$-re, ekkor a táblázatba írt számok ugyancsak $10-9=1, 10-8=2, \ldots, 10-1=9$ lesznek. Sőt, így is fennáll, hogy bármely 2×2-es részben a számok összege azonos: értéke $40-S$, hiszen ha az x, y, z, t számok voltak eredetileg valamely 2×2-es részben, ahol $x+y+z+t=S$, akkor helyükre $10-x$, $10-y$, $10-z$, $10-t$ kerül, ezek összege pedig $40-(x+y+z+t) = 40-S$. Tudjuk, hogy bármely megfelelő táblázatban $S \geqslant 16$, így mivel az előbbi cserével is olyan táblázathoz jutunk, amelyben a 2×2-es részek összege ugyanannyi, ezért $40-S \geqslant 16$ is fennáll. Tehát $16 \leqslant S \leqslant 24$, vagyis S értéke csak a $[16, 24]$ intervallumba eső egész szám lehet. Ezek az értékek valóban lehetségesek, amint azt a következő kitöltések mutatják:

8	4	9
3	1	2
5	7	6

8	2	5
6	1	9
7	3	4

8	1	6
7	2	9
5	4	3

8	1	6
7	3	9
4	5	2

7	6	1
3	4	9
8	5	2

Ez az 5 táblázat az $S=16,17,18,19,20$ értékekre mutat példát. A fent említett cserével ezekből az ezeket 40-re kiegészítő értékekre, azaz $S=24,23,22,21$ esetén is megfelelő táblázat kapható. Tehát a 2×2-es résztáblázatokban a számok összege $16,17,\dots,24$ lehet.

Williams Kada (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn. és Ált. Isk., 9. évf.)

95 dolgozat érkezett. 5 pontos 53, 4 pontos 11, 3 pontos 6, 2 pontos 8, 1 pontos 8, 0 pontos 8 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 4625. *Hány olyan (A,B) rendezett pár van, ahol A és B egy rögzített n elemű halmaz részhalmazai és $A\subseteq B$?*

(*4 pont*)

I. megoldás. Ha B-nek k eleme van, akkor, mivel egy k elemű halmaznak összesen 2^k részhalmaza van, az A halmaz 2^k féle lehet. Az n elemű alaphalmaznak $\binom{n}{k}$ darab k elemű részhalmaza van, így a feladat feltételeinek megfelelő (A,B) párok száma összesen

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k.$$

A binomiális tétel szerint ennek az összegnek az értéke éppen $(1+2)^n=3^n$. Tehát az $A\subseteq B$ feltételnek eleget tevő rendezett (A,B) párok száma 3^n.

Hansel Soma (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn. és Ált. Isk., 9. évf.)

II. megoldás. Legyen a feladatban szereplő n elemű halmaz egy tetszőleges eleme x. Mivel $A\subseteq B$, ezért a következő három lehetőség közül pontosan az egyik teljesül, továbbá az A és B halmazok egyértelműen meghatározzák, hogy melyik:

- $x\in A$ és $x\in B$;
- $x\notin A$ és $x\in B$;
- $x\notin A$ és $x\notin B$.

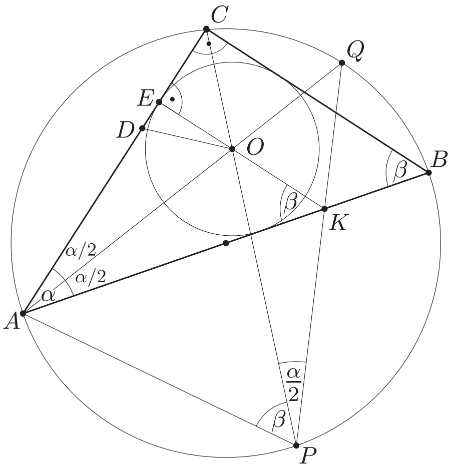
Ugyanis, ha $x\in A$ és $x\notin B$, akkor A nem részhalmaza B-nek, ezért ez nem lehetséges. Megfordítva, ha mind az n elemre a fenti három lehetőség valamelyike áll fenn, vagyis nincs olyan x elem, amelyre $x\in A$, de $x\notin B$ teljesülne, akkor $A\subseteq B$ is teljesül. A különböző elemekre egymástól függetlenül (az összes lehetséges módon) eldönthető, hogy a három lehetőség közül melyik teljesül, és ez már meghatározza A-t és B-t, ezért a feladat kérdésére a válasz 3^n.

Gáspár Attila (Miskolc, Földes F. Gimn., 8. évf.)

79 dolgozat érkezett. 4 pontos 63, 3 pontos 9, 2 pontos 1, 1 pontos 5, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4627. *Az ABC háromszög derékszögű C csúcsából induló szögfelező a körülírt kört a P, az A-ból induló szögfelező pedig a Q pontban metszi. A PQ és AB szakaszok metszéspontja K. A beírt kör középpontja O, az AC oldalon levő érintési pont E. Bizonyítsuk be, hogy az E, O és K pontok egy egyenesbe esnek.*

(*4 pont*) Javasolta: *Sárosdi Zsombor* (Veresegyház)



Megoldás. Legyen $CAB\sphericalangle=\alpha$, ekkor $CBA\sphericalangle=\beta=90^\circ-\alpha$. A kerületi szögek tétele miatt:

$$CPA\sphericalangle=CBA\sphericalangle=90^\circ-\alpha,$$

hasonlóan

$$BAQ\sphericalangle=CAQ\sphericalangle=CPQ\sphericalangle=\frac{\alpha}{2}.$$

Így $OAK\sphericalangle=OPK=\frac{\alpha}{2}$, ezért $OKPA$ húrnégyszög.

Az $OKPA$ húrnégyszög köré írt körben $OKA\sphericalangle=OPA\sphericalangle=90^\circ-\alpha$, mivel azonos íven nyugvó kerületi szögek.

Hosszabbítsuk meg OK-t, legyen OK és AC metszéspontja D. A háromszög belső szögeinek összege 180°, ezért

$$KDA\sphericalangle=180^\circ-DKA\sphericalangle-DAK\sphericalangle=90^\circ.$$

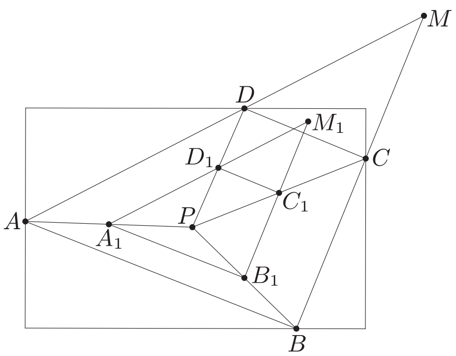
Így $KDA\sphericalangle=90^\circ$. Az O-nak az AC-re való merőleges vetülete az E pont. Ebből következik, hogy $D=E$, tehát E, O és K kollineárisak.

Szebellédi Márton (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

68 dolgozat érkezett. 4 pontos 57, 3 pontos 4, 2 pontos 3, 1 pontos 4 dolgozat.

B. 4632. *Két egyenes metszéspontja nem fért rá a papírlapra. Szerkesszük meg a papírlap egy adott pontján és a metszésponton átmenő egyenes papírlapra eső részét.*

(*3 pont*)



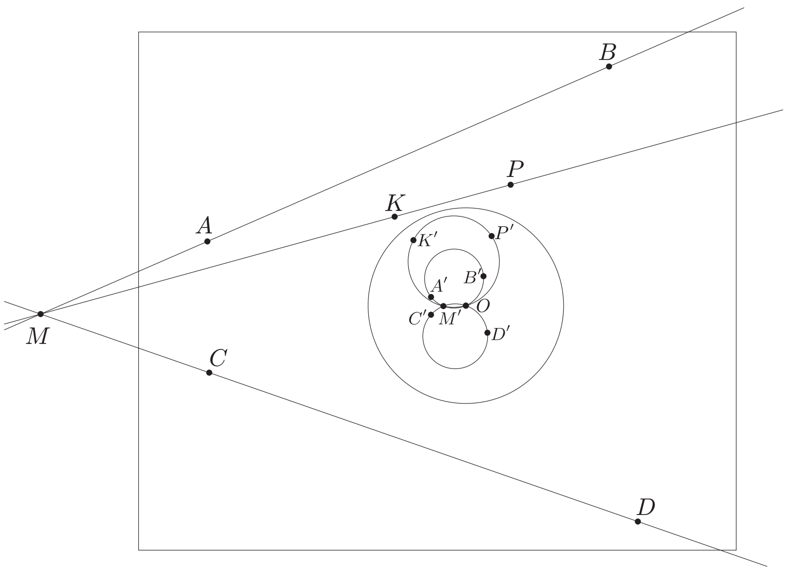
1. ábra

I. megoldás. Az adott egyenes és a lap szélének a metszéspontjai legyenek A, B, C és D, a két egyenes metszéspontja M, az adott pont pedig P (*1. ábra*).

Alkalmazzunk az $ABCD$ négyszögre egy P középpontú, $\frac{1}{2}$ arányú kicsinyítést. Ezt könnyen megtehetjük, hiszen az AP, BP, CP és DP szakaszok A_1, B_1, C_1 és D_1 felezőpontjai a papírra esnek. Az A_1D_1 és B_1C_1 egyenesek metszéspontja adja az M pont képét, M_1-et, és P, M_1 és M egy egyenesen vannak. Tehát, ha az M_1 pont a papírra esik, akkor a $PM_1=PM$ egyenes megszerkeszthető. Ha M_1 még nem esik a papírra, akkor folytathatjuk az eljárást az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög P pontra vonatkozó, $\frac{1}{2}$ arányú kicsinyítésével. Ha a keletkező M_2 pont sem esik a papírra, akkor az eljárást mindaddig folytatjuk, amíg az M_n pont már a papírra fog esni. Ez véges lépésben elérhető. A keresett egyenes a PM_n lesz.

Győrfy-Bátori András (Kaposvári Táncsics Mihály Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Rajzoljunk egy olyan kört, ami teljesen ráfér a papírra, nem megy át egyik egyenesen sem, és az adott P pont nem egyezik meg a kör O középpontjával. Szerkesszük meg a két egyenesnek erre a körre vonatkozó inverzét. Ekkor a két egyenes két metsző, O ponton átmenő körbe megy át, ezek az $A'B'O$ és $C'D'O$ körök. A két kör O ponton kívüli másik, M' metszéspontja lesz a papíron kívül eső M pont inverz képe. A PM egyenes inverz képe egy olyan kör lesz, ami átmegy az O, P' és M' pontokon. Ezt a kört meg tudjuk szerkeszteni, majd egy olyan K' pontját invertálva, aminek a képe a papírlapra esik, megkapjuk a $PK = PM$ egyenest (*2. ábra*).



1. ábra

Ezek a szerkesztések elvégezhetők, hiszen ha adott egy egyenes két pontja, akkor megszerkeszthető az inverz képe és fordítva.

Szebellédi Márton (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

89 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 20 versenyző: Baran Zsuzsanna, Csernák Tamás, Csilling Tamás, Di Giovanni Márk, Fonyó Viktória, Győrfi-Bátori András, Hansel Soma, Janzer Orsolya Lili, Katona Dániel, Kovács Márton, Mándoki Sára, Nagy Kartal, Nagy-György Pál, Radnai Bálint, Schwarcz Tamás, Szebellédi Márton, Tóth Viktor, Vágó Ákos, Vu Mai Phuong, Williams Kada. 2 pontos 41, 1 pontos 24, 0 pontos 4 dolgozat.

B. 4634. *Milyen n és k pozitív egészekre lesz $\binom{n}{k}$ prímhatvány?*

(*5 pont*)

Megoldás. A Legendre-formula szerint $m!$ prímtényezős felbontásában a p prímszám kitevője

$$\sum_{i=1}^{M}\left[\frac{m}{p^i}\right],$$

ahol M a legnagyobb olyan egész, amelyre $p^M \leqslant m$. Ebből következik, hogy $\binom{n}{k}$ prímtényezős felbontásában a p prímszám kitevője

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{k}{p^i}\right]-\left[\frac{n-k}{p^i}\right]\right),$$

ahol N a legnagyobb olyan egész szám, amelyre még $p^N \leqslant n$. Mivel minden x, y valós számra fennáll az $[x+y]-[x]-[y] \leqslant 1$ egyenlőtlenség, ebben az összegben minden tag értéke legfeljebb 1, vagyis $\binom{n}{k}$ prímtényezős felbontásában p kitevője legfeljebb N. Mivel $p^N \leqslant n$, az $\binom{n}{k}$ minden prímhatvány osztója legfeljebb n. Így $\binom{n}{k}$ csak akkor lehet prímhatvány, ha $k=1$ vagy $k=n-1$, és $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$ prímhatvány, hiszen $1<k<n-1$ esetén $\binom{n}{k}>n$, ha pedig $k=n$, akkor $\binom{n}{k}=1$.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\binom{n}{k}$ pontosan akkor prímhatvány, ha n prímhatvány és $k=1$ vagy $k=n-1$.

Gyulai-Nagy Szuzina (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn. és Ált. Isk.), 10. évf.

Megjegyzések. 1. Sylvester és Schur egy nevezetes tétele szerint, ha $2k \leqslant n$, akkor az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatónak van k-nál nagyobb prímosztója. Ha $\binom{n}{k}=p^\alpha$ prímhatvány, akkor ez a prímosztó csak p lehet, és mivel a $n(n-1)\dots(n-k+1)$ szorzatnak pontosan egy tagját osztja, ezért $\binom{n}{k}=p^\alpha \leqslant n$ azonnal adódik.

2. A feladat egy lehetséges általánosítása, ha azt vizsgáljuk, hogy az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható mikor lehet teljes hatvány. Erről a problémáról Győry Kálmán: *Binomiális együtthatók és teljes hatványok** című cikkében olvashatunk, ami a KöMaL 1999/1. számában jelent meg.

35 dolgozat érkezett. 5 pontos Andó Angelika, Baran Zsuzsanna, Di Giovanni Márk, Forrás Bence, Gyulai-Nagy Szuzina, Kúsz Ágnes, Lajkó Kálmán, Maga Balázs, Porupsánszki István, Schwarcz Tamás, Szőke Tamás, Tóth Viktor, Williams Kada. 4 pontos 2, 2 pontos 5, 1 pontos 8, 0 pontos 5 dolgozat. Nem versenyszerű: 2 dolgozat.

B. 4635. *Az ABC hegyesszögű háromszögben $AB<AC$. A háromszög köré írt kör középpontja O, a magasságpont M. Szerkesszük meg a BC oldalszakaszon azt a P pontot, amelyre $AOP\sphericalangle = PMA\sphericalangle$.*

(*4 pont*)

* `http://www.komal.hu/cikkek/gyory/binom/binom.h.shtml`.

Megoldás. Legyen P a kívánt tulajdonságú pont a BC szakaszon. Ekkor $AOP\sphericalangle = PMA\sphericalangle$, amit jelöljünk β-val.

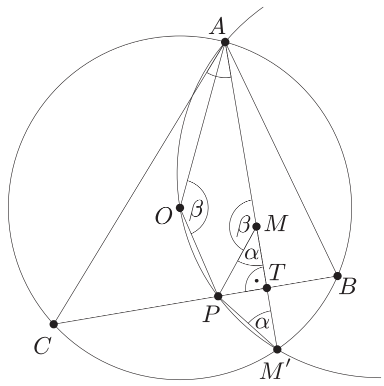
Tükrözzük az M pontot a BC oldalra, tükörképe legyen M', ami rajta van a háromszög köré írt körön. A tükrözés miatt $PMM'\sphericalangle = PM'M\sphericalangle$, melyet jelöljön α.

Mivel $AMP\sphericalangle + PMM'\sphericalangle = \beta + \alpha = 180°$, az $AOPM'$ négyszög húrnégyszög, hiszen két szemközti szögének összege: $AOP\sphericalangle + PM'M\sphericalangle = \beta + \alpha = 180°$.

Ezek alapján a P pont szerkesztése:

Az M magasságpontot tükrözzük a BC oldalra, majd megszerkesztjük az AOM' háromszög körülírt körét, ez a kör a BC oldalt a P pontban metszi.

Mivel $AB < AC$, az AOM' háromszög sosem lesz elfajuló, és mindig csak egy megoldás van, mivel a két körülírt kör A-ban és M'-ben metszi egymást, így az ABC háromszög körülírt körén belül csak egy metszéspontja lehet az AOM' háromszög köré írt körnek és a BC oldalnak.



Csitári Nóra (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

14 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 9 versenyző: Csitári Nóra, Fonyó Viktória, Glattfelder Hanna, Kuchár Zsolt, Nagy-György Pál, Németh Hanna, Sal Kristóf, Szakács Lili Kata, Williams Kada. 2 pontos 2, 1 pontos 2, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4638. *Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tetszőleges valós számok. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^4 + k^2}{x_k^2}\right)^2 - n^2(n+1)^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^4 - k^2}{x_k^2}.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Paulovics Zoltán* (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., 12. évf.)

Megoldás. A feladat szövegében nem szerepelt, de nyilvánvalóan az x_i számok egyike sem lehet 0, továbbá az n és k pozitív egészek. Azt fogjuk belátni, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesülhet, ha $x_k^2 = k \cdot x_1^2$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, minden más esetben a bal oldal nagyobb, mint a jobb oldal. Ha a jobb oldal negatív, akkor a bal oldal a gyökjel miatt biztosan nagyobb, mint a jobb. Tehát feltehetjük, hogy a jobb oldal nemnegatív. Ekkor a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, és az egyenlőtlenség iránya sem változik.

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^4+k^2}{x_k^2}\right)^2-n^2(n+1)^2\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^4-k^2}{x_k^2}\right)^2,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^4+k^2}{x_k^2}\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^4-k^2}{x_k^2}\right)^2\geqslant n^2(n+1)^2.$$

Alkalmazva az $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ azonosságot a bizonyítandó egyenlőtlenség a következő alakba írható:

$$\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^4+k^2}{x_k^2}\right)+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^4-k^2}{x_k^2}\right)\right]\cdot\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^4+k^2}{x_k^2}\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^4-k^2}{x_k^2}\right)\right]\geqslant$$
$$\geqslant n^2(n+1)^2.$$

Az összevonások után:

$$\left[2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\right]\cdot\left[2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{x_k^2}\right)\right]\geqslant n^2(n+1)^2.$$

Most 4-gyel osztva és részletesen felírva az összegeket

$$\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{4}{x_2^2}+\ldots+\frac{n^2}{x_n^2}\right)\geqslant\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=(1+2+\ldots+n)^2.$$

Ez pedig a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenség négyzetre emelt alakja a következő két sorozatra:

$$\overrightarrow{a}(x_1,x_2,\ldots,x_n),\qquad\overrightarrow{b}\left(\frac{1}{x_1},\frac{2}{x_2},\ldots,\frac{n}{x_n}\right).$$

Egyenlőség itt akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\frac{x_1}{\frac{1}{x_1}}=\frac{x_2}{\frac{2}{x_2}}=\ldots\frac{x_n}{\frac{n}{x_n}},\qquad x_1^2=\frac{x_2^2}{2}=\ldots=\frac{x_n^2}{n}.$$

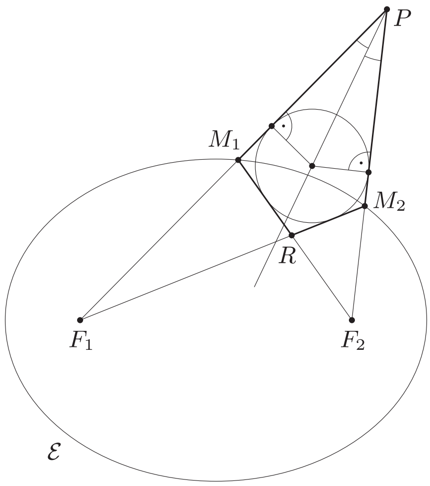
Kovács Márton (Dunakeszi, Radnóti Miklós Gimn., 11 évf.) dolgozata alapján

45 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 23, 4 pontot 19 versenyző. 3 pontos 1, 1 pontos 1, 0 pontos 1 versenyző dolgozata.

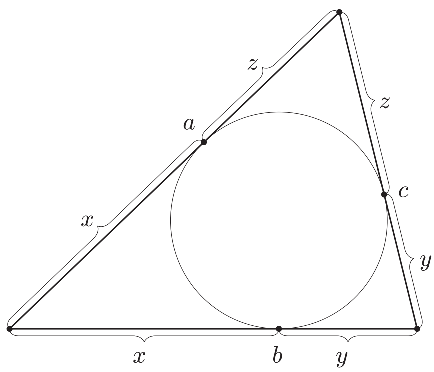
B. 4639. *A P pont az F_1 és F_2 fókuszpontú $\mathcal{E}$ ellipszis olyan külső pontja, amely nincs rajta a nagytengely egyenesén. Legyen a PF_1 szakasz és $\mathcal{E}$ metszéspontja M_1, a PF_2 szakasz és $\mathcal{E}$ metszéspontja M_2, az M_1F_2 és M_2F_1 egyenesek metszéspontja pedig R. Bizonyítsuk be, hogy PM_1RM_2 érintőnégyszög.*

(*5 pont*) Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

I. megoldás. Ha PM_1RM_2 érintőnégyszög, akkor a beírható köre egyúttal az F_1M_2P háromszögnek és az F_2M_1P háromszögnek is beírható köre. Vizsgáljik meg, hogy e két háromszögben a beírható kör a P csúcstól milyen távolságra érinti a P-n átmenő oldalakat. Ha e két távolság egyenlő, akkor a két kör egybeesik, mert az F_1PF_2 szög szárait a szög csúcsától adott távolságra érintő kör egyértelműen létezik, középpontja a szög száraira az adott távolságban állított merőlegesek metszéspontja, sugara pedig e metszéspontnak a száraktól való távolsága (*1. ábra*).



1. ábra



2. ábra

Ismert, hogy ha egy háromszög oldalai a, b és c, akkor a beírt kör oldalakon lévő érintési pontjainak a csúcsoktól való távolsága rendre $(a+b-c)/2$, $(b+c-a)/2$ és $(c+a-b)/2$. (Ennek bizonyítását a *2. ábra* alapján az olvasóra bízzuk, csak annyit kell felhasználni, hogy külső pontból egy körhöz húzott két érintő hossza megegyezik.)

Az F_1M_2P háromszög beírt köre tehát P-től $\frac{PF_1+PM_2-F_1M_2}{2}$, az F_2M_1P háromszög beírt köre pedig P-től $\frac{PF_2+PM_1-F_2M_1}{2}$ távolságra érinti az F_1PF_2 szög szárait. Megmutatjuk, hogy e két távolság egyenlő. Ehhez elegendő azt belátnunk, hogy

$$PF_1 + PM_2 - F_1M_2 = PF_2 + PM_1 - F_2M_1,$$

azaz

$$(PM_1 + M_1F_1) + PM_2 - F_1M_2 = (PM_2 + M_2F_2) + PM_1 - F_2M_1$$

teljesül. Ezt rendezve kapjuk, hogy elegendő megmutatnunk az

$$M_1F_1 + F_2M_1 = M_2F_2 + F_1M_2$$

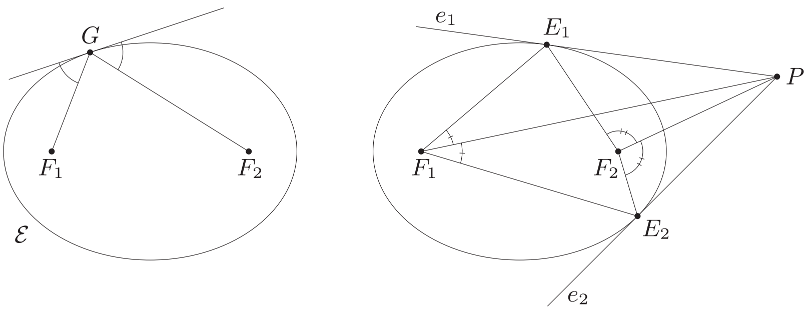
egyenlőség fennállását, ami viszont azonnal következik abból, hogy M_1 és M_2 rajta vannak az F_1 és F_2 fókuszú $\mathcal{E}$ ellipszisen.

Tehát az F_1M_2P és az F_2M_1P háromszögek beírható körei egybeesnek, így ez a kör érinti a PM_1RM_2 négyszög minden oldalát, ezért PM_1RM_2 érintőnégyszög.

Fekete Panna (Pécs, Leőwey K. Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

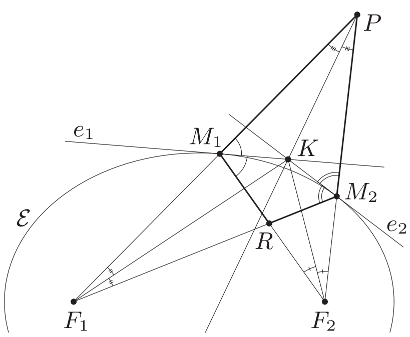
II. megoldás. A megoldás során felhasználjuk a kúpszeletek két tulajdonságát. A következő két lemma bizonyítása megtalálható pl. lapunk egy korábbi cikkében (*Kiss Gy.: Amit jó tudni a kúpszeletekről,* I. és II. rész, KöMaL 54. évf. (2004), 450–459[1] és 514–519[2]; 8, illetve 11. tétel).

1. lemma. *A $\mathcal{K}$ kúpszelet tetszőleges G pontjában az érintő felezi a G-hez tartozó vezérsugarak szögét* (3. ábra).



3. ábra

2. lemma. *Ha egy külső P pontból érintőket húzunk a kúpszelethez, akkor a P-t az érintési pontokkal összekötő szakaszok a kúpszelet fókuszából vagy egyenlő, vagy pedig egymást $180°$-ra kiegészítő szögekben látszanak. Az utóbbi eset csak hiperbolánál fordul elő* (3. ábra).



4. ábra

Legyen $i=1,2$ esetén $\mathcal{E}$ érintője az M_i pontban e_i, a két érintő metszéspontja pedig K (*4. ábra*). Ekkor az 1. lemma szerint e_1 felezi a $PM_1F_2\sphericalangle$-et, e_2 pedig a $PM_2F_1\sphericalangle$-et, mert az $\mathcal{E}$-n lévő M_i ponthoz tartozó vezérsugarak F_1M_i és F_2M_i. A 2. lemmából pedig $M_1F_2K\sphericalangle = M_2F_2K\sphericalangle$, valamint $M_1F_1K\sphericalangle = M_2F_1K\sphericalangle$ következik, mert a K pontból $\mathcal{E}$-hez húzott KM_1 és KM_2 érintőszakaszok $\mathcal{E}$ fókuszaiból egyenlő szögekben látszanak. Tehát a PM_1F_2 háromszögben KM_1 és KF_2 belső szögfelezők, ezért

[1] `http://www.komal.hu/cikkek/2004-11/kupszeletek1.h.shtml`.
[2] `http://www.komal.hu/cikkek/2004-12/kupszeletek2.h.shtml`.

a háromszög beírható körének középpontja K. Bármely háromszögben a szögfelezők egy ponton mennek át, ezért KP felezi az $F_1PF_2\sphericalangle$-et. Ugyanígy kapjuk, hogy a PM_2F_1 háromszög beírható körének középpontja is K, a $PM_2F_1\sphericalangle$-et felezi M_2K.

A K pont tehát a PM_1RM_2 négyszög M_1, M_2 és P csúcsából induló belső szögfelezőjén is rajta van, ezért a négyszög mind a négy oldalegyenesétől való távolsága ugyanaz az r érték. A PM_1RM_2 négyszög nyilván konvex, ezért a K körül rajzolt r sugarú kör a négyszög mind a négy oldalszakaszát belső pontban érinti. Ezzel beláttuk, hogy PM_1RM_2 érintőnégyszög.

Nagy-György Pál (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

17 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 14 versenyző: Ágoston Péter, Baran Zsuzsanna, Cseh Kristóf, Fekete Panna, Forrás Bence, Geng Máté, Győrfi-Bátori András, Gyulai-Nagy Szuzina, Kúsz Ágnes, Lajkó Kálmán, Nagy-György Pál, Schrettner Bálint, Simkó Irén, Williams Kada. 4 pontos 1, 3 pontos 1, 2 pontos 1 dolgozat.

B. 4643. *Léteznek-e olyan n és k egész számok, amelyekre*

$$n^3-n-1=k^2-k+1?$$

(*3 pont*) Javasolta: *Williams Kada* (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn.)

I. megoldás. Vizsgáljuk meg a két oldal 3-mal való lehetséges osztási maradékait.

A bal oldal: $n^3-n-1=n\big(n^2-1\big)-1=(n-1)n(n+1)-1$. Látható, hogy a kapott különbség első tagja mindig osztható 3-mal, hiszen 3 egymást követő egész szám szorzata. Ebből a szorzatból még kivonunk 1-et, tehát a bal oldal 3-mal osztva (minden n egészre) 2-t ad maradékul.

A jobb oldal: $k^2-k+1=k(k-1)+1$. Mivel k egész, az összeg első tagja csak $k=3l+2$ (ahol l egész) esetén lesz 3-mal nem osztható. Ha 3-mal osztható az első tag, akkor a jobb oldal 3-mal osztva 1-et ad maradékul, ami kizárja az egyenlőség lehetőségét a bal oldallal. A továbbiakban tehát csak $k=3l+2$ alakú számok esetén vizsgáljuk a jobb oldalt. Ekkor

$$k^2-k+1=(3l+2)^2-(3l+2)+1=9l^2+9l+3=3\cdot\big(3l^2+3l+1\big),$$

tehát a jobb oldal osztható 3-mal.

Vagyis beláttuk, hogy a bal oldal mindig 2-t, a jobb oldal pedig 1-et vagy 0-t ad osztási maradékul a 3-mal való osztásnál. Ezzel bebizonyítottuk, hogy nem léteznek olyan n és k egész számok, amelyekre teljesülne az egyenlet.

Kovács Dávid (Veszprém, Lovassy László Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Rendezzük át az egyenletet:

$$n^3-n-1=k^2-k+1,$$
$$k^2-k-n^3+n+2=0.$$

Tekintsük n-et paraméternek, ekkor az egyenlet k-ban másodfokú, és így $k_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{D}}{2}$, ahol

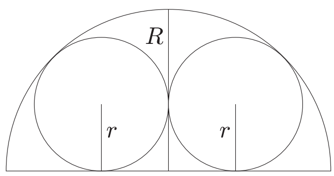
$$D = 1 - 4\big(-n^3 + n + 2\big) = 4n^3 - 4n - 7 = 4(n-1)n(n+1) - 9 + 2.$$

A k csak akkor lehet egész szám, ha D négyzetszám. A jobb oldali összeg első két tagja osztható 3-mal, így D-nek a 3-mal való osztási maradéka 2.

Ha egy szám $3p+1$ alakú, akkor $(3p+1)^2 = 9p^2 + 6p + 1$; ha $3p+2$ alakú, akkor $(3p+2)^2 = 9p^2 + 12p + 3 + 1$. Mindkét esetben a 3-mal való osztási maradék 1. Ez viszont azt jelenti, hogy D nem lehet négyzetszám, így k nem lehet egész szám, vagyis nem léteznek olyan n és k egész számok, amelyekre teljesülne az egyenlet.

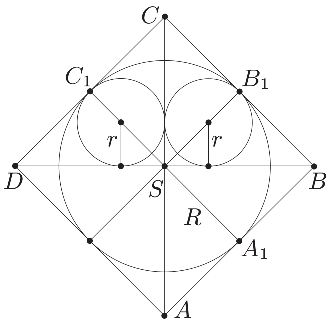
Borbényi Márton (Kaposvári Táncsics Mihály Gimn., 10. évf.) és
Szajbély Zsigmond (Szeged, Radnóti Miklós Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

292 dolgozat érkezett. 3 pontos 239, 2 pontos 26, 1 pontos 12, 0 pontos 14 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.



B. 4644. *Egy R sugarú félkörbe két r sugarú, egymást kívülről, a félkörívet és az átmérőt pedig belülről érintő kört írtunk az* ábra *szerint. Határozzuk meg az r sugarat.*

(*3 pont*)



1. ábra

I. megoldás. Húzzuk meg az r és R sugarú körök közös érintőit, és hosszabbítsuk meg az R sugarú kör adott átmérőjét mindkét irányban (*1. ábra*). A keletkező BCD háromszöget tükrözzük a BD átfogójára. Az így létrejött $ABCD$ négyszög nyilvánvalóan négyzet, oldalai $2R$ hosszúak.

A négyzet területe: $T_{ABCD} = 4R^2$.

Az SBC háromszög területe:

$$T_{SBC\triangle} = \frac{T_{ABCD}}{4} = R^2.$$

A Pitagorasz-tételt használva a négyzet átlója:

$$AC = \sqrt{(2R)^2 + (2R)^2} = \sqrt{8R^2} = 2\sqrt{2}\,R,$$

amiből

$$SB = SC = \frac{AC}{2} = \sqrt{2}\,R.$$

$T_{SBC\triangle} = r \cdot s$, ahol s a félkerület:

$$s = \frac{SB + SC + BC}{2} = \frac{\sqrt{2}\,R + \sqrt{2}\,R + 2R}{2} = \sqrt{2}\,R + R = R\big(\sqrt{2} + 1\big).$$

Ebből

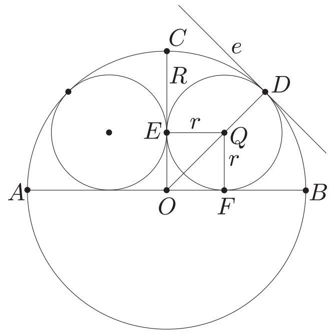
$$r=\frac{T_{SBC\triangle}}{s}=\frac{R^2}{R(\sqrt{2}+1)}=\frac{R}{(\sqrt{2}+1)}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)}=\frac{(\sqrt{2}-1)R}{2-1}=(\sqrt{2}-1)R.$$

Tehát az r sugár hossza $(\sqrt{2}-1)R$.

Somogyi Pál (Somorja, Madách Imre Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Legyen e az O középpontú, R sugarú és a Q középpontú, r sugarú körök közös érintője (*2. ábra*). Az érintési pontban húzott sugár merőleges az érintőre, emiatt a Q pont rajta van az OD szakaszon:

$$OD=OQ+QD=OQ+r=R.$$



2. ábra

$BOC\sphericalangle=90°$, valamint az OB és OC szakaszok is érintői az r sugarú körnek, így $OFQ\sphericalangle=OEQ\sphericalangle=90°$, és $EQ=FQ=r$, ezért az $OFQE$ négyszög négyzet. A Pitagorasz-tételt használva a négyzet átlója:

$$OQ=\sqrt{r^2+r^2}=\sqrt{2}\,r.$$

Tehát

$$R=OQ+r=\sqrt{2}\,r+r=r\cdot(\sqrt{2}+1),$$

amiből

$$r=\frac{R}{(\sqrt{2}+1)}=\frac{R}{(\sqrt{2}+1)}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)}=(\sqrt{2}-1)R.$$

Telek Máté László (Salgótarjáni Táncsics Mihály Szki., 13. évf.) dolgozata alapján

308 dolgozat érkezett. 3 pontos 221, 2 pontos 61, 1 pontos 20, 0 pontos 5 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 4646. *A p paraméter mely értékei esetén áll fenn az*

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)^3\geqslant\frac{p}{\operatorname{tg}^2 x}$$

egyenlőtlenség bármely $0<x<\frac{\pi}{2}$ *esetén?*

(*4 pont*) Javasolta: *Faragó András*

Megoldás. Az egyenlőtlenség bal oldala és a jobb oldal nevezője mindig pozitív, ezért az egyenlőtlenség biztosan teljesül, ha p értéke negatív vagy nulla. A továbbiakban p pozitív értékeit vizsgáljuk.

Szorozzunk a pozitív $\sin^3 x$-szel, és használjuk az

$$\frac{1}{\mathrm{tg}^2\, x}=\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\sin^2 x}$$

azonosságot:

$$(1+\sin x)^3 \geqslant p\sin x(1-\sin x)(1+\sin x),$$

illetve

$$(1+\sin x)^2 \geqslant p\sin x(1-\sin x).$$

Rendezés után a következő másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk $\sin x$-re:

$$(1+p)\sin x^2+(2-p)\sin x+1\geqslant 0.$$

Itt $p\leqslant 2$ esetén a bal oldal minden tagja nemnegatív, ezért az egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül.

Ha $p>2$, akkor abban az esetben, amikor az $(1+p)y^2+(2-p)y+1=0$ egyenletnek valósak a gyökei, a gyökök összege $p-2>0$, szorzatuk pedig az ugyancsak pozitív $\frac{1}{1+p}<\frac{1}{3}$. Ilyenkor tehát mindkét gyök pozitív és legalább egyikük kisebb 1-nél, ezért – alkalmas x-re – előáll $\sin x$ alakban. Ha a két valós gyök különböző, akkor mindkettőnek van olyan környezete, ahol a másodfokú kifejezés értéke negatív. Az egyenlőtlenség tehát a $p>2$ esetben pontosan akkor teljesül, ha a diszkrimináns nem pozitív:

$$0\geqslant (2-p)^2-4(1+p)=p^2-8p=p(p-8),$$

vagyis ha $p\leqslant 8$.

Tehát a feladat feltételének a $p\leqslant 8$ számok tesznek eleget.

Zsakó Ágnes (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn., 11. évf.)

106 dolgozat érkezett. 4 pontos 48, 3 pontos 26, 2 pontos 13, 1 pontos 4, 0 pontos 8 dolgozat. Nem versenyszerű 7 dolgozat.

B. 4654. *Az ABC háromszögben legyen AD magasság, BE szögfelező, CF pedig súlyvonal. Bizonyítsuk be, hogy az AD, BE és CF egyenesek pontosan akkor metszik egymást egy pontban, ha ED párhuzamos AB-vel.*

(*4 pont*)

Megoldás. I. Tegyük fel, hogy ED párhuzamos AB-vel. Ekkor a párhuzamos szelők tétele miatt:

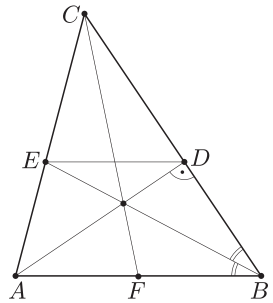
$$\frac{CE}{EA}=\frac{CD}{DB},$$

amiből $AF=FB$ miatt következik, hogy

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,$$

azaz a Ceva-tétel megfordításának értelmében az AD, BE és CF egyenesek egy ponton mennek át.

II. Tegyük fel, hogy az AD, BE és CF egyenesek egy ponton mennek át. Ekkor Ceva tételének értelmében igaz, hogy



$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,$$

amiből $AF=FB$ miatt

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,$$

és így

$$\frac{CE}{EA}=\frac{CD}{DB}.$$

Ebből a párhuzamos szelők tételének megfordítását felhasználva következik, hogy ED párhuzamos AB-vel.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Geng Máté (Budapest, Németh László Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

161 dolgozat érkezett. 4 pontos 77, 3 pontos 30, 2 pontos 37, 1 pontos 14, 0 pontos 3 dolgozat.

B. 4663. *Határozzuk meg a*

$$2x^3-y^3=5$$

egyenlet egész megoldásait.

(*4 pont*) Javasolta: *Károlyi Gyula* (Budajenő)

Megoldás. Vizsgáljuk az egyenlet bal oldalán lévő kifejezés 9-es maradékát. Először megmutatjuk, hogy a köbszámok 9-es maradéka 0, 1 vagy 8 lehet. Legyen ugyanis $a=9k+m$, ahol k és m egészek, és $0\leqslant m\leqslant 8$. Ekkor

$$a^3=(9k+m)^3=9^3k^3+3\cdot 9^2k^2m+3\cdot 9km^2+m^3=9N+m^3,$$

ahol N egész, és m^3 értékei:

$$0^3=0,\quad 1^3=1,\quad 2^3=8,\quad 3^3=27=9\cdot 3,$$

$$4^3=64=9\cdot 7+1,\quad 5^3=125=9\cdot 13+8,\quad 6^3=9\cdot 24,$$

$$7^3=343=9\cdot 38+1,\quad 8^3=512=9\cdot 56+8.$$

Ennek alapján a bal oldalon a lehetséges 9-es maradékok a 0, 1, 2, 3, 6, 7 vagy 8. Tehát a két oldal 9-es maradéka semmilyen x, y egész számra sem egyezik meg, ezért az egyenletnek nincs egész megoldása.

148 dolgozat érkezett. 4 pontos 120, 3 pontos 12, 2 pontos 4, 1 pontos 7, 0 pontos 5 dolgozat.

Pályázati felhívás

A Bolyai János Matematikai Társulat pályázatot hirdet a **Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok főszerkesztői munkakörének betöltésére** 2015. augusztus 1-től.

A pályázónak matematika szakos tanári, okleveles matematikus, vagy okleveles alkalmazott matematikus diplomával és legalább 5 éves szakmai gyakorlattal kell rendelkeznie.

Feladata a lap matematika részének szerkesztése, a számok nyomdakész előállításának megszervezése évi 9 alkalommal; az éves pontverseny, eredményhirdetés, díjazás lebonyolítása, kapcsolattartás a médiával; együttműködés a kiadóval az éves költségvetés tervezésében, a pályázatok, szerződések megírásában és tartalmi megvalósításában. A főszerkesztő felel a matematika, fizika és informatika szerkesztőbizottságok és a KöMaL honlapjának működtetéséért.

Előnyt jelent a szerkesztői gyakorlat, a kiadói tapasztalat, jó nyelvérzék (magyar és idegen nyelveken), részvétel középiskolások tehetséggondozásában, kommunikációs és szervezési készség.

Bérezés a pedagógus bértábla vagy vállalkozói szerződés alapján, a munka- vagy megbízási díjas szerződést a MATFUND Alapítvány, a KöMaL kiadója köti.

A munkavégzés helyszíne: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A, 5.106.

Pályázatában kérjük, írja le, milyen tevékenységekkel és erőforrásokkal tervezi a KöMaL hagyományainak megőrzését, illetve tartalmi-formai megújulását. A pályázathoz csatolja szakmai önéletrajzát és küldje el e-mailben a Bolyai Társulat címére, ahol további tájékoztatást is kaphat: `bolyai.tarsulat@renyi.mta.hu`.

Beadási határidő: 2015. május 4.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (457–462.)

K. 457. A birka-iskola szabálya, hogy aki nem megy be az iskolába, az jutalmat kap. Hétfőn a birka-iskola tanulóinak 10%-a hiányzott. Kedden a hétfői hiányzók 10%-a már jött iskolába, viszont a hétfői jelenlevők 10%-a otthon maradt. A tanulók hány százalékának nem jár jutalom a keddi napért?

K. 458. Jancsi szöget szeretne venni. Bemegy egy boltba, ahol 10 dkg szög 180 Ft-ba kerül. Itt nem tudja megvenni a kívánt mennyiséget, mert hiányzik hozzá 1430 Ft-ja. Ezért bemegy egy másik boltba, ahol csak 120 Ft-ba kerül 10 dkg szög. Itt megvásárolja azt a mennyiséget, amennyit szeretne, és még marad 490 Ft-ja. Hány kg szögre volt szüksége?

K. 459. Karcsi bácsi a 2 méter 60 cm-es létráját a falnak támasztva akarta kicserélni a falon levő lámpa kiégett izzóját. Először a létrát úgy támasztotta a falnak, hogy az alja a faltól 156 cm-re volt, de így még nem érte el a lámpát. A létra tetejét 32 cm-rel feljebb kellett emelnie, hogy elérje a lámpát, ezt úgy oldotta meg, hogy közelebb vitte a falhoz a létra alját. Hány centiméterrel vitte közelebb?

K. 460. Egy 10 egység sugarú kör középpontja az O pont. A körvonal három pontja (A, B és C) úgy helyezkedik el, hogy az O pont az ABC háromszög belsejében van. Tudjuk, hogy az AB szakasz hossza 12 egység, és az ABC szög nagysága 60°.

a) Hány egység távolságra van az O pont az AB szakasztól?

b) Hány egység hosszú az AC szakasz?

K. 461. Egy négyzetrácsos papírra rajzoltunk egy koordinátarendszert, majd a papírt összehajtottuk egy egyenes mentén. Az összehajtás során a $(30;12)$ pont a $(-2;-4)$ pontra került. Hol metszi a hajtásvonal a tengelyeket?

K. 462. *a*) f a valós számok halmazán értelmezett függvény. Tudjuk, hogy tetszőleges a és b esetén teljesül, hogy $f(a)-f(b)=f(a\cdot b)$. Mennyi $f(2015)$ értéke?

b) Van-e olyan, a valós számok halmazán értelmezett g függvény, melyre tetszőleges a és b esetén teljesül, hogy $g(a)-g(b)=2\cdot g(a\cdot b)-2$?

Beküldési határidő: 2015. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1280–1286.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1280. Bizonyítsuk be, hogy ha az m és n természetes számok relatív prímek, akkor $m+n$ és m^2+n^2 legnagyobb közös osztója 1 vagy 2.

C. 1281. Egy trapéz szárainak metszéspontját jelölje M. Az alapokkal párhuzamos, M-en átmenő egyenesen jelölje A és B az egyenes metszéspontját a trapéz átlóinak meghosszabbításával. Bizonyítsuk be, hogy $|AM|=|BM|$.

Feladatok mindenkinek

C. 1282. Hány megoldása van a $2^a+3^b+4^c+5^d+6^e=22$ egyenletnek, ha a, b, c, d, e egész számok?

C. 1283. Az $ABCD$ trapéz hosszabbik, AB alapja nem nagyobb a CD alap háromszorosánál. Felezzék a trapéz területét az e és f egyenesek, melyek rendre párhuzamosak a BC és DA szárakkal. Jelölje az e metszéspontját AB-vel P, f metszéspontját pedig Q, továbbá a DC-vel való metszéspontokat rendre P' és Q'.

a) Igazoljuk, hogy az e és f egyenesek M metszéspontja illeszkedik a trapéz középvonalára.

b) Ha $PQ'P'Q$ négyszög paralelogramma, akkor hányadrésze lesz MPQ háromszög területe az $ABCD$ trapéz területének?

C. 1284. Magyar kártyából öt lapot húzva melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy az öt lap azonos színű vagy annak, hogy van köztük négy azonos szám vagy figura?

(*Német versenyfeladat*)

Feladatok 11. évfolyamtól

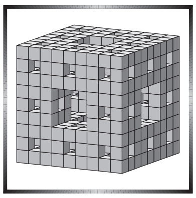
C. 1285. Egy egyenlő szárú háromszögbe írható kör sugarának hosszát elosztjuk a körülírható kör sugarának hosszával. Legfeljebb mekkora lehet a kapott hányados?

C. 1286. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x,$$
$$x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y.$$

Beküldési határidő: 2015. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4696–4704.)

B. 4696. Hány olyan n pozitív egész szám van, amelyre n és 2015 mértani és harmonikus közepe is egész szám?

(*3 pont*)

B. 4697. Bizonyítsuk be, hogy bármely derékszögű érintőtrapéz rövidebbik szára egyenlő az átlók metszéspontján áthaladó, az alapokkal párhuzamos egyenesnek a trapézba eső szakaszával.

(*4 pont*)

B. 4698. Mutassunk példát olyan $H_1, H_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ halmazokra, amelyekre a következő feltételek teljesülnek:

a) Tetszőleges n pozitív egészre $|H_n| = n$.

b) Tetszőleges n, k pozitív egészekre $H_n \cap H_k = H_{(n,k)}$, ahol (n,k) az n és k legnagyobb közös osztóját jelöli.

(*5 pont*)

B. 4699. Szerkesszünk deltoidot, ha tudjuk, hogy van körülírt köre, adott annak a sugara, valamint a körülírt- és beírt körei középpontjának a távolsága.

(*4 pont*)

B. 4700. Oldjuk meg a

$$\left(\sqrt{1+\sin^2 x} - \sin x\right)\left(\sqrt{1+\cos^2 x} - \cos x\right) = 1$$

egyenletet.

(*5 pont*)

B. 4701. Legyen $A_1B_1C_1D_1$ egy négyszög. Ha valamilyen n pozitív egészre az $A_nB_nC_nD_n$ pontnégyest már definiáltuk, akkor legyen A_{n+1} a $B_nC_nD_n$ háromszög súlypontja; a pontok szerepének ciklikus cseréjével hasonlóan definiáljuk a B_{n+1}, C_{n+1} és D_{n+1} pontokat is. Mutassuk meg, hogy akármilyen nagy négyszögből indultunk is ki, az A_n pontsorozatnak csak véges sok tagja esik az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög súlypontja köré írt egységsugarú körön kívülre.

(*4 pont*) Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)

B. 4702. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan pont létezik, amely egy adott kocka három páronként kitérő élegyenesétől egyenlő távolságra van.

(*5 pont*)

B. 4703. Tegyük föl, hogy az x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 számok abszolút értéke legfeljebb 1, összegük pedig 0. Mutassuk meg, hogy

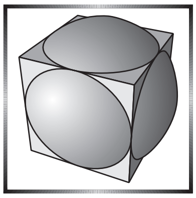
$$3\sum_{i=1}^{5}\sqrt{1-x_i^2} \leqslant \sum_{i=1}^{5}\sqrt{9-(x_i+x_{i+1})^2}\,.$$

(*6 pont*) Javasolta: *Williams Kada* (Szeged, Radnóti M. Gimn.)

B. 4704. A k_1 kör belülről érinti a különböző sugarú k_2 és a k_3 köröket, a k_2 és a k_3 pedig belülről érinti a k_4 kört. Mutassuk meg, hogy k_1 és k_4 hatványvonala átmegy k_2 és k_3 külső hasonlósági pontján.

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2015. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (638–640.)

A. 638. Van-e olyan egyszerű, zárt töröttvonal a 3-dimenziós derékszögű koordináta-rendszerben, amelynek mindhárom koordinátasíkra vett merőleges vetülete egy-egy körmentes gráf?

Javasolta: *Imre Leader* (Cambridge)

A. 639. Egy háromszög szögharmadoló egyenesei a háromszög belsejében egy konvex hatszöget határolnak. Bizonyítsuk be, hogy ennek a hatszögnek a szemközti csúcsokat összekötő átlói egy pontban metszik egymást.

Javasolta: *Bertalan Zoltán* (Békéscsaba)

A. 640. Határozzuk meg mindazokat a p prímszámokat és pozitív egész n számokat, amikre a $(k+1)^n-2k^n$ alakú számok ($k=1,2,\dots,p$) teljes maradékrendszert alkotnak p-vel osztva.

❄

Beküldési határidő: 2015. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 370 (É). Egy vad hegyi folyón csak egy rossz állapotú függőhídon lehet átkelni. A híd egymáshoz rögzített kötelekből és azokra keresztbe erősített lécekből áll. A lécek hiányosak és kevés van belőlük.

Felújítás, illetve a lécek átrendezése előtt megmérték az egymás melletti lécek távolságát a bal parttól a jobbig. Rendelkezésünkre állnak és a honlapunkról letölthetők a centiméterekben mért adatok a `hid.txt` állományban.

Az állomány első sorában a függőhíd H hossza található ($300\leqslant H\leqslant 50\,000$), második sorában az elméletileg meghatározott biztonságos L lépéshossz ($40\leqslant L\leqslant 80$) van. Az ezt követő N sor ($1\leqslant N\leqslant H$) a lécek távolságát tartalmazza.

A léceken való lépkedés akkor biztonságos, ha távolságuk kisebb az L lépéshossznál. (A lécek annyira keskenyek, hogy saját szélességük elhanyagolható.)

Például (a `/` jel soremelést jelöl): `352 / 75 / 28 / 74 / 84 / 22 / 69 / 73 / ...`

A példában a híd hossza 352 cm, a biztonságos lépéstávolság 75 cm, az első léc a bal parttól 28 cm, majd a második léc az elsőtől 74 cm távolságban van.

Készítsünk programot `i370` néven, amely megoldja az alábbi feladatokat.

A képernyőre írást igénylő részfeladatok eredményének megjelenítése előtt írjuk a képernyőre a feladat sorszámát (például `4. feladat:`). Az ékezet nélküli kiírás is megengedett.

1. Olvassuk be a `hid.txt` állomány adatait és a következő feladatokat ezek alapján oldjuk meg.
2. Írjuk ki a képernyőre az utolsó léc és a jobb part távolságát.
3. Adjuk meg centiméterben, hogy a bal partról indulva milyen távolságig lehet biztonságosan a hídon átmenni. Ha a teljes hídon biztonságosan lehet közlekedni, akkor írjuk ezt ki.
4. Írjuk ki a híd leghosszabb olyan szakaszának kezdő és utolsó lécének sorszámát, ahol végig veszélyesen nagy távolságban vannak a lécek.
5. Egy lécet el kell távolítanunk. Hány helyről választhatunk olyat, amelyet felszedve az előzőről a következőre még biztonságosan át lehet lépni?
6. Gyűjtsük ki és írjuk ki a képernyőre azoknak a lécpároknak a sorszámait, amelyek közé legalább egy újabb lécet kell elhelyezni a biztonságos átkeléshez. Például: `2-3`.
7. Adjuk meg, hogy minimálisan hány lécet kell majd a teljes hídra felszerelni a biztonságos állapot eléréséhez.
8. A még rossz állapotú hídon ketten kézen fogva szeretnének átmenni. Megállapodnak, hogy a biztonság kedvéért a hídon végig minden lábuk külön lécen legyen. Léceket visznek magukkal, hogy ahol kell, maguk előtt lefektessék azokat. A hátsó ember visszanyúlva egy lépés távolságban egy általuk letett lécet fel is tud venni és társának előre tudja adni. Számoljuk ki, hogy minimálisan hány léccel a kezükben induljanak el a hídon, hogy biztonságosan át tudjanak kelni. (A hídon már eredetileg ott lévő lécek rögzítve vannak és nem felszedhetők.)
Példa: `A` és `B` ember lábainak helye mozgásuk során: `A_láb1 5`, `A_láb2 4`, `B_láb1 3`, `B_láb2 2`, `B` az 1. lécet felveheti, ha nincs rögzítve, előre adhatja. `A` előre letehet egy lécet L távolságban, `A_láb2 6`, `B_láb2 4`, a 2. lécet felveheti ...

Beküldendő a program forráskódja (`i370.pas`, `i370.cpp`, ...), valamint a program rövid dokumentációja (`i370.txt`, `i370.pdf`, ...), amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztő környezetben fordítható.

Letölthető fájl: `hid.txt`

I. 371. A sportegyesületekben a technikai vezetők egyik feladata a bajnokságban résztvevő csapatok mérkőzéseinek egyeztetése. Rendelkezésünkre áll a `merkozesek.txt` forrásállományban egy folyamatosan frissített havi naptár a csapatok mérkőzéseinek időpontjaival. A technikai vezető – velünk ellentétben – nem nagyon ért a táblázatkezeléshez, ezért egy-egy dátum alá ugyan be tudja írni, hogy melyik csapat fog aznap játszani, illetve, ha a mérkőzés aznap elmarad, akkor ki is tudja törölni a csapat nevét, de más szerkesztésre nem vállalkozik. Az egyesületben 8 csapat van és egy hónapban legfeljebb 15 játéknap lehetséges.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**október 1.**	**október 4.**	**október 5.**	**október 8.**	**október 11.**	**október 12.**	**október 15.**	**október 1**
2	serdülő fiú	serdülő lány	serdülő lány	felnőtt férfi	felnőtt nő	junior lány	felnőtt férfi	felnőtt f
3	felnőtt férfi	junior lány	junior lány	senior férfi	serdülő lány	serdülő fiú	senior férfi	senior f
4	felnőtt nő	felnőtt nő	felnőtt férfi	felnőtt nő	junior fiú	felnőtt férfi	serdülő fiú	
5	serdülő lány	senior férfi	senior férfi	serdülő fiú			junior fiú	felnőtt nő
6	junior lány	serdülő fiú	junior fiú		senior nő	serdülő lány		junior lá
7	senior nő	junior fiú	senior nő	junior fiú	serdülő fiú		serdülő fiú	serdülő
8								junior fiú
9								

Segítsük a munkáját a csapatok tájékoztató adatainak elkészítésével. Táblázatkezelő program segítségével oldjuk meg a következő feladatokat. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

1. Töltsük be a tabulátorokkal tagolt, UTF-8 kódolású `merkozesek.txt` szövegfájlt a táblázatkezelőbe a mintának megfelelően. A megoldásnak adatok változtatása esetén is jól kell működnie. Munkánkat `i371` néven mentsük el a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
2. Hozzunk létre egy új munkalapot, amely majd az egyik csapat adatait és a rájuk vonatkozó információkat fogja megjeleníteni.
   Példa a serdülő fiú csapat munkalapjára:

	A	B	C	D
1	**Mérkőzések időpontja**	**serdülő fiú**		
2	október 1.	Mérkőzések száma:	11 darab	
3	október 4.	Legkisebb pihenő:	1 nap	
4	október 8.	Egymás utáni napok:	2	
5	október 11.			
6	október 12.			
7	október 15.			
8	október 19.			
9	október 25.			
10	október 26.			
11	október 29.			
12				
13				
14				
15				

3. Alakítsuk ki a minta szerinti táblázatszerkezetet és az első sor, valamint a B oszlop feliratait készítsük el. A D oszloptól jobbra segédszámításokat végezhetünk, amelyek értelmezését feliratokkal segítsük elő.
4. A B2 cellába írjuk be, hogy az aktuális munkalap információi melyik csapatra vonatkoznak. Később ennek a munkalapnak a másolásával és a csapat nevének a megváltoztatásával annak a csapatnak az információit szeretnénk látni.
5. Az A2 cellától lefelé írassuk ki azokat a dátumokat, amikor a csapatnak mérkőzése lesz. Az időpontok rendezetten jelenjenek meg, közöttük üres cella nem lehet. A megjelenítésnek a lehetséges 15 napra kell működnie. Az utolsó mérkőzés dátuma után a többi cella üresen jelenjen meg.
6. A C2 cellában határozzuk meg, hogy a csapat az aktuális hónapban hány mérkőzést fog játszani.
7. A C3 cellában határozzuk meg, hogy hány nap a legkisebb pihenőidő két játéknap között.
8. A C4 cellában határozzuk meg, hogy hányszor fordul elő, hogy az adott hónapban egymás utáni napokon lesz mérkőzése a csapatnak.
9. Formázzuk a táblázatot és a C oszlopban állítsuk be a mértékegységeket a minta szerint.
10. Másoljuk le a munkalapot még legalább két példányban és a B2 cellájuk átírásával másik két csapat adatait jelenítsük meg. A munkalapokat nevezzük el a csapatnevek szerint.

Beküldendő a táblázatkezelő munkafüzet (`i371.xls`, `i371.ods`, …), illetve egy rövid dokumentáció (`i371.txt`, `i371.pdf`, …), amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

A megoldáshoz szükséges letölthető állomány: `merkozesek.txt`.

I. 372. Az OpenGL egy térbeli alakzatok számítógépes megjelenítésére alkalmas platformfüggetlen programozási felület. Elsősorban C nyelven készülnek hozzá programok, de a versenykiírásban szereplő más nyelveken is elérhető, pl. Lazarusban vagy Visual Basicben. Az interneten több magyar és idegen nyelvű irodalom, film és példaprogram található, amelyekből tájékozódhatunk a programozásáról. Érdemes a GLUT vagy más, az adott programozási nyelven és környezetben elérhető OpenGL kiegészítőt fölhasználni.

Készítsünk OpenGL alkalmazást, amely egy kocka belsejében pattogó pontszerű test mozgását mutatja. A program a kocka éleit és a lassan pattogó test pályáját jelenítse meg. A test véletlenszerű kezdősebességgel induljon és a kocka felületével tökéletesen rugalmasan ütközzön. A megjelenítésnél alkalmazzunk perspektivikus vetítést, a programban lehessen zoomolni, azaz közelíteni és távolodni a kockától, valamint úgy mozgatni a „kamerát”, hogy az mindig a kocka középpontja felé nézzen.

Beküldendő egy tömörített `i372.zip` állományban a program dokumentációja (`i372.txt`, `i372.pdf`) és a program fordításához szükséges forrásállományok.

A dokumentáció pontosan adja meg, hogy milyen programozási nyelven és környezetben, mely kiegészítők segítségével fordítható és futtatható a program.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: **2015. április 10.**

❄

S. 97. Egy elefántcsorda szép rendezetten, egy sorban halad. Az elefántokat 1-től N-ig számozzuk ($1 \leqslant N \leqslant 100\,000$). Az 1-es elefánt a legkisebb, és szép sorban az N-edik a legnagyobb. Az lenne a célravezető, ha a legkisebb elefánt menne legelöl, a második utána, stb. Ám ez nem feltétlenül van így. Egy elefántpár – a sorból kiválasztott két elefánt – rossz sorrendben van, ha a nagyobb megy előrébb. Számoljuk ki, hogy hány elefántpár van rossz sorrendben.

A program olvassa be a standard input első sorából N-et, majd a következő sorból N egész számot, melyek az elefántokat jelölik sorrendben, majd írja a standard output első és egyetlen sorába a rossz elefántpárok számát.

Példa bemenet:	Példa kimenet:
`5` `4 3 1 2 5`	`5`

Magyarázat: az `(1,3)`, `(1,4)`, `(2,3)`, `(2,4)` és `(3,4)` párok vannak rossz sorrendben.

Pontozás és korlátok: A programhoz mellékelt, a helyes megoldás elvét tömören, de érthetően leíró dokumentáció 1 pontot ér. A programra akkor kapható meg a további 9 pont, ha bármilyen hibátlan bemenetet képes megoldani az 1 mp futásidőkorláton belül.

Beküldendő egy tömörített `s97.zip` állományban a program forráskódja (`s97.pas`, `s97.cpp`, ...) az `.exe` és más, a fordító által generált állományok nélkül, valamint a program rövid dokumentációja (`s97.txt`, `s97.pdf`, ...), amely a fentieken túl megadja, hogy a forrás mely fejlesztői környezetben fordítható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: **2015. április 10.**

❄

Egy áldozatkész feladatkitűző emlékére

Bakonyi Gábor
1932. 08. 19.–2010. 12. 30.

A KöMaL-nak az az olvasója, aki egy-egy érdekes feladat kapcsán a feladatközlő nevére is odafigyel, amely a kitűzött fizika feladat után szerepel, nemcsak élő személyek nevével találkozhat itt. A korán elhunyt *Szegedi Ervin* (1957–2006) vagy *Varga István* (1952–2007) még életükben beküldött feladataiból mind a mai napig válogat a szerkesztő bizottság. Róluk haláluk alkalmából szépen megemlékeztünk. Előfordul azonban, hogy nem értesülünk időben a feladatot beküldő személy haláláról, s az illető még elhunyta után is élőként szerepel a KöMaL-ban. Ilyen feladatkitűzőnk volt Bakonyi Gábor (1932–2010), aki immár ötödik éve csak szellemében van közöttünk. Adósságot törlesztünk most, amikor gyermekei jóvoltából megemlékezhetünk áldozatos életéről.

❄

Bakonyi Gábor 1932-ben született Komáromban. Szülei pedagógusok voltak, édesapja matematika-rajz tanár, édesanyja tanítónő volt. A II. világháború után Komárom északi részét Szlovákiához csatolták, így gimnáziumi tanulmányai egy részét szlovákul végezte. 1948-ban kitelepítették őket és az akkor megvalósított lakosságcsere eredményeképpen Magyarországra kerültek.

Az érettségi után a Budapesti Műszaki Egyetem Vegyészmérnöki Karán folytatta tanulmányait. 1954-ben a Villamosipari Anyagok Technológiája Tanszéken tanársegédi állást kapott. Rövid ideig a Keményfémipari Vállalatnál mint kutatómérnök dolgozott, de 1956 októberében, 24 évesen az egyik utolsó paralízisjárványban súlyosan megfertőződött. Több mint két évig kórházban kezelték, de soha többé nem nyerte vissza egészségét. Ő, aki annyira szeretett kirándulni, mindkét lábára megbénult és ettől kezdve csak a jobb kezét tudta használni. A kétségbeejtő helyzet ellenére nem adta fel a reményt. Mérnök testvére segítségével egyedi, akkumulátorral meghajtott rokkantkocsit terveztek, amivel önállóan tudott lakáson belül és kívül közlekedni. 1960 novemberében megnősült és 50 évig boldog házasságban élt *Varga Judittal,* aki önzetlenül, szeretetben állt mellette élete végéig. Két gyermekük, majd három unokájuk született.

Nagyon fontosnak tartotta mindvégig, hogy családját a nehézségek ellenére saját erejéből tartsa el. Évtizedekig végzett fordítási, referálási munkákat az Országos Műszaki Könyvtárnak főleg oroszból, angolból, németből, de a műszaki szakterületen otthon volt a szláv nyelvek bármelyikében. Délutánonként diákokat korrepetált és készített fel felvételire matematikából, fizikából és kémiából.

Sokat olvasott, házi könyvtára is folyamatosan gyarapodott szakkönyvekkel. Szórakozásként megismerkedett a számítógépek világával és szimulációs programokat készített fizikából. Mindig valamilyen fizikai probléma megoldásán törte a fejét és eközben rengeteg feladatot talált ki. Ezek közül egy csokorra való 1974-ben megjelent *Termodinamika, Optika és Atomfizika Példatár* címen a Műszaki Könyvkiadó gondozásában. Az 1970-es évektől kezdődően évtizedekig küldött be főként fizika feladatokat a KöMaL részére. Az archívum utolsó 25 évének adatai szerint ebben az időszakban összesen 81 feladatát közölte a lap. 1978-ban az ő nevéhez fűződik *Frantisek Latka Matematikai Képletgyűjteményének* fordítása. 1985-ben ennek folytatásaként elkészült a *Fizikai képletgyűjtemény,* amelyben mint társszerző szerepelt *Tasnádi Péternével* együtt.

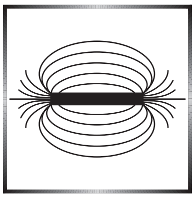
2010-ben, 78 évesen halt meg, egy minden nehézség ellenére kiteljesedett, boldog élet után.

Publikációk:

[1] Bakonyi Gábor: *Optika Termodinamika Atomfizika Példatár,* Műszaki Könyvkiadó, 1974, ISBN 963-10-0759-6.

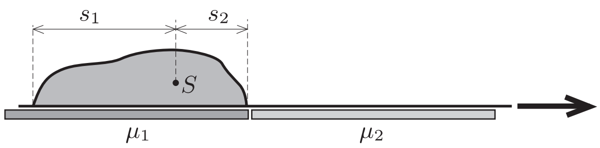
[2] Bakonyi Gábor, Tasnádi Péterné: *Fizikai Képletgyűjtemény,* Műszaki Könyvkiadó, 1985, ISBN 963-10-6679-7.

R.Gy.



Fizika feladatok megoldása

P. 4630. *Egy zsáknyi homok vízszintes felületen egy könnyű szőnyegen fekszik. Az M tömegű zsákot a szőnyeg segítségével lassan át akarjuk húzni egy viszonylag sima felületről egy érdesebb felületre. Mennyi munkát kell végeznünk, ha a felületek és a szőnyeg közötti súrlódási együttható μ_1, illetve μ_2? A zsák súlya nem egyenletesen oszlik el a szőnyegen, de tudjuk, hogy a tömegközéppontja a széleitől s_1, illetve s_2 távolságban van. (Lásd még a* **P. 4554.** *feladat megoldását a KöMaL* 2014. *évi áprilisi számának* 237. *oldalán!)*

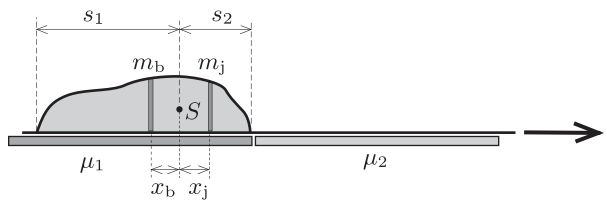


(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. Képzeljük el, hogy a testet függőleges síkokkal felosztjuk nagyon keskeny sávokra úgy, hogy az S tömegközépponttól a szélek felé haladva az i-edik jobb oldali sáv súlyának S-re vonatkoztatott forgatónyomatéka éppen akkora legyen, mint (nagyságát tekintve) az i-edik bal oldali sávé. (Ez biztosan megtehető, hiszen az egész test súlyának forgatónyomatéka a tömegközéppontra vonatkoztatva nulla.)

Jelöljük egy-egy ilyen sáv tömegét és a tömegközépponttól mért távolságát az *ábrán* látható módon. A forgatónyomatékok egyensúlyának feltétele:

$$x_{\mathrm{b}} m_{\mathrm{b}} = x_{\mathrm{j}} m_{\mathrm{j}}. \tag{1}$$



Számítsuk ki azt a munkát, amit akkor végeznénk el, hogy ha csak ezt a két kis részt húznánk át (összesen $s_1 + s_2$ elmozdulással) az egyik felületről a másikra. Mivel az egyes részek a saját súlyuknak megfelelő erővel nyomják a vízszintes felületet, továbbá a súrlódási erő a nyomóerő és az aktuális súrlódási együttható szorzata, a végzett munka:

$$W^{(\text{pár})} = m_{\mathrm{b}} g \mu_1 (s_2 + x_{\mathrm{b}}) + m_{\mathrm{b}} g \mu_2 (s_1 - x_{\mathrm{b}}) + m_{\mathrm{j}} g \mu_1 (s_2 - x_{\mathrm{j}}) + m_{\mathrm{j}} g \mu_2 (s_1 + x_{\mathrm{j}}),$$

amit így is felírhatunk:

$$W^{(\text{pár})} = (m_{\mathrm{b}} + m_{\mathrm{b}}) g (\mu_1 s_2 + \mu_2 s_1) + (\mu_1 - \mu_2) g [m_{\mathrm{b}} x_{\mathrm{b}} - m_{\mathrm{j}} x_{\mathrm{j}}]. \tag{2}$$

A szögletes zárójelben álló kifejezés (1) szerint nulla, $W^{(\text{pár})}$ csak a két kis rész össztömegétől függ, a helyzetüktől nem. A (2) összefüggésnek megfelelő munkákat az egész zsákra összegezve megkapjuk az egész zsák áthúzásához szükséges teljes munkát:

$$W^{(\text{teljes})} = \sum_{\text{a zsákra}} W^{(\text{pár})} = Mg(\mu_1 s_2 + \mu_2 s_1).$$

Lőrincz Zoltán (Révkomárom, Selye János Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. Az a feltevés, hogy az egyes „sávok” éppen a saját súlyuknak megfelelő erővel nyomják a szőnyeget, nem magától értetődő és általában nem is igaz. Ha például a szőnyegre különböző magasságú téglaoszlopokat állítunk, akkor az említett feltevés csak akkor jogos, ha az egyes oszlopok között nem lépnek fel nyíróerők. Amennyiben homokzsák helyett pl. egy négylábú asztalt húzunk át az egyik felületről a másikra, az asztal középső részeinek van súlya, mégsem nyomják ezek a részek a szőnyeget.

A közölt megoldásban szereplő számítás mégis érvényes tetszőleges belső „szerkezetű” homokzsákra, vagy bármilyen más alakzatra. Helyettesítsük ugyanis a képletekben az $m_{\mathrm{b}} g$ és $m_{\mathrm{j}} g$ súlyokat a szőnyeg megfelelő pontjainál ható F_{b} és F_{j} nyomóerőkkel. Kihasználva, hogy ezen erők eredője a test Mg súlyával egyenlő, a forgatónyomatékuk összege pedig az S pontra nézve nulla, a számítás minden lépése és a végeredménye is érvényes marad.

(G. P.)

38 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Hiányos (3 pont) 16, hibás 4 dolgozat.

P. 4658. *Hány neutron keletkezik egy nap alatt a Paksi Atomerőmű egy reaktorában, illetve a BME Oktatóreaktorában? (Feltesszük, hogy mindkét reaktor folyamatosan,* 24 *órán át üzemel.)*

Adatok: *egy paksi reaktor hőteljesítménye* 1485 MW, *az oktatóreaktor maximális hőteljesítménye* 100 kW. *Egy hasadás során* 185 MeV *energia szabadul fel, és átlagosan* 2,43 *neutron keletkezik.*

(*3 pont*) *Szilárd Leó nukleáris fizikaverseny,* Paks

Megoldás. Tudjuk, hogy $1\ \mathrm{MeV} = 1{,}6\cdot 10^{-13}$ J, tehát egy-egy hasadás során $185\ \mathrm{MeV} = 2{,}96\cdot 10^{-11}$ J energia szabadul fel.

A paksi atomerőmű reaktorának $1485\ \mathrm{MW} = 1485\cdot 10^6$ W, a BME oktatóreaktorának maximálisan $100\ \mathrm{kW} = 100\cdot 10^3$ W a hőteljesítménye.

Egy nap alatt a paksi atomerőmű reaktorából

$$1485\cdot 10^6\ \mathrm{W}\cdot 24\ \mathrm{h} = 1485\cdot 10^6\ \mathrm{W}\cdot 86\,400\ \mathrm{s} = 1{,}28\cdot 10^{14}\ \mathrm{J}$$

energia szabadul fel, tehát naponta

$$\frac{1{,}28\cdot 10^{14}}{2{,}96\cdot 10^{-11}} = 4{,}33\cdot 10^{24}$$

hasadás történik, vagyis $4{,}33\cdot 10^{24}\cdot 2{,}43 = 1{,}05\cdot 10^{25}$ neutron keletkezik.

Egy nap alatt a BME oktatóreaktorában legfeljebb

$$100\cdot 10^3\ \mathrm{W}\cdot 24\ \mathrm{h} = 100\cdot 10^3\ \mathrm{W}\cdot 86\,400\ \mathrm{s} = 8{,}64\cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

energia szabadulhat fel, vagyis

$$\frac{8{,}64\cdot 10^9}{2{,}96\cdot 10^{-11}} = 2{,}9\cdot 10^{20}$$

hasadás történhet, így (maximális hőteljesítmény mellett) naponta

$$2{,}9\cdot 10^{20}\cdot 2{,}43 = 7{,}09\cdot 10^{20}$$

neutron keletkezhet.

Fekete Balázs Attila (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 9. évf.)

68 dolgozat érkezett. Helyes 46 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 13, hiányos (1 pont) 6, hibás 2, nem értékelhető 1 dolgozat.

P. 4664. *Tompkins úr* álmában Furcsavilágban járt, ahol a fizika törvényei majdnem ugyanazok, mint a nálunk, „csupán" a tömegvonzás tér el a megszokott Newton-törvénytől. Reggel felébredve Tompkins úr visszaemlékezett, hogy Furcsavilág egyetlen „Napja" körül számos bolygó kering, és ezekre három „Kepler-törvény" érvényes:*

*George Gamow: *Tompkins úr kalandjai a fizikával* c. könyvének főszereplője.

1. *A bolygók pályája ellipszis, és annak* középpontjában *van a Nap.*

2. *A bolygók* vezérsugara *a mozgás során ... (a folytatást sajnos elfelejtette Tompkins úr).*

3. *Mindegyik bolygó keringési ideje (az ellipszis kis- és nagytengelyének hosszától függetlenül)* ugyanakkora.

Vajon hogy néz ki a furcsavilági fizikakönyvekben a gravitáció törvénye, és mit állít a második „Kepler-törvény”?

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. A bolygók mozgását a gravitációs erő határozza meg. Ha a leírt törvények tetszőleges ellipszispályákon mozgó bolygókra érvényesek, akkor igazak annak speciális eseteire, a körpályákon keringő égitestekre is. Tekintsük először a Nap körül különböző sugarú körpályákon keringő, különböző tömegű két bolygó esetét, majd az ezek mozgásából kikövetkeztetett erőtörvényt alkalmazzuk az általános esetre is.

Az égitestek keringési ideje (T_1 és T_2) az (R_1 és R_2) sugaraktól független állandó, tehát $T_1=T_2$. Az egyenletes körmozgás állandó kerületi sebessége miatt

$$\frac{2\pi R_1}{v_1}=T_1=T_2=\frac{2\pi R_2}{v_2},\qquad \text{vagyis}\qquad \frac{R_1}{v_1}=\frac{R_2}{v_2}.$$

A keringéshez szükséges centripetális erőt a gravitációs erő biztosítja. Általánosan $F=mv^2/R$, tehát a két kiszemelt bolygóra:

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{v_1^2}{v_2^2}\cdot\frac{R_2}{R_1}=\frac{m_1R_1}{m_2R_2}.$$

(Az utolsó lépésnél kihasználtuk v és R arányosságát.) A gravitációs erő tehát egyenesen arányos az R sugárral (a két test távolságával) és a keringő test m tömegével. A középponti testre (a Napra) nyilván ugyanakkora gravitációs erő hat, ezért ez az erő arányos a másik test M tömegével is. Ezek szerint Furcsavilág gravitációs törvénye:

$$F=fmMr,$$

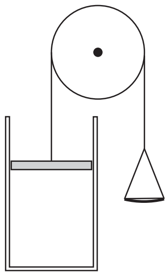
ahol m és M az egymást vonzó két test tömege, r a távolságuk, f pedig egy univerzális állandó. A gravitációs erő a Napot és a bolygót összekötő egyenes irányába mutat, más kitüntetett irány nem található a két égitest pillanatnyi helyzetében. (Ha nem így lenne, sérülne az említett egyenes körüli elforgathatóság szimmetriája.) Az erőtörvény vektoros alakja tehát: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-fmM\cdot\boldsymbol{r}$.

A bolygókra ható gravitációs erő a bolygó mozgása során mindvégig a Nap felé mutat, tehát *centrális erő.* A centrális erők tétele alapján a Naptól a bolygóhoz húzott vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol, tehát a „II. Kepler-törvény” Furcsavilágban is ugyanúgy szól, mint a mi Naprendszerünkben.

A bolygók általános (tehát nem kör alakú pályán történő) mozgása egy derékszögű koordinátarendszerben felbontható x és y irányú összetevőkre. Az x irányú erőkomponens az x koordinátával is és a bolygó tömegével is arányos, az ilyen irányú mozgás tehát *harmonikus rezgőmozgás* lesz, melynek periódusideje sem a test tömegétől, sem pedig a rezgés amplitúdójától nem függ. Ugyanez érvényes az y irányú koordináta időbeli változására is. A teljes mozgás azonos frekvenciájú, egymásra merőleges harmonikus rezgések *szuperpozíciója,* ami valóban olyan ellipszispályát eredményez, melynek középpontja a vonzócentrumnál található.

Gula Miklós (Székesfehérvár, Ciszterci Szent István Gimn., 12. évf.)
dolgozata felhasználásával

39 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 15, hibás 3 dolgozat.



P. 4665. *Az ábrán látható függőleges hengerben a dugattyú alatt normál állapotú levegő van. A dugattyú súrlódás nélkül mozoghat, tömege megegyezik az állócsiga másik oldalán levő serpenyő tömegével. Mikor mozdul el jobban a dugattyú, ha a serpenyőbe, vagy a dugattyúra szórunk rá ugyanannyi homokot? (Feltehetjük, hogy a hőmérséklet állandó marad.)*

(*4 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

Megoldás. Mivel a dugattyú tömege megegyezik a serpenyő tömegével, a hengerben lévő levegő nyomása kezdetben a p_0 légköri nyomással egyenlő. Ha az A keresztmetszetű dugattyúra mg súlyú homokot szórunk, a bezárt levegő nyomása megnő, térfogata lecsökken. Az állapotegyenlet szerint

$$p_0V_0=p_1V_1,$$

ahol

$$p_1=p_0+\frac{mg}{A}$$

a bezárt levegő megváltozott nyomása. A dugattyú elmozdulása:

$$\Delta h_1=\frac{V_0}{A}-\frac{V_1}{A}=\frac{V_0}{A}\left(1-\frac{p_0}{p_0+\frac{mg}{A}}\right)=\frac{V_0}{A}\cdot\frac{mg}{p_0A+mg}.$$

Hasonló módon számolható a serpenyőbe szórt homok esete. Ilyenkor a hengerben lévő gáz nyomása lecsökken, a gáz térfogata megnő, a dugattyú kifelé mozdul:

$$p_0V_0=p_2V_2,$$

ahol

$$p_2=p_0-\frac{mg}{A}.$$

A dugattyú elmozdulása:

$$\Delta h_2=\frac{V_2}{A}-\frac{V_0}{A}=\frac{V_0}{A}\left(\frac{p_0}{p_0-\frac{mg}{A}}-1\right)=\frac{V_0}{A}\cdot\frac{mg}{p_0A-mg}.$$

Látható, hogy a serpenyőbe szórt homok esetében nagyobb a dugattyú elmozdulása, hiszen

$$\frac{\Delta h_2}{\Delta h_1}=\frac{p_0A+mg}{p_0A-mg}>1.$$

Kormányos Hanna Rebeka (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn. 10. évf.)

Megjegyzés. A fenti megállapítás akkor is érvényes marad, ha a dugattyú és a serpenyő tömege különböző, vagyis ha a hengerben lévő gáz nyomása kezdetben eltér a légköri nyomástól. Ezt legkönnyebben úgy láthatjuk be, hogy felismerjük: az izotermikus állapotváltozást a $p-V$ diagramon egy hiperbola jellemzi, és ez a görbe a fizikailag reális $V>0$ tartományban alulról konvex.

98 dolgozat érkezett. Helyes 76 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 7, hibás 8 dolgozat.

P. 4668. *Konstantánból és krómnikkelből készült huzalok keresztmetszete egyaránt* 1 mm^2. *Adjunk becslést arra vonatkozóan, hogy mekkora hőmérsékletűre melegednek fel a légritkított üvegcsőben lévő huzalok (külön-külön), ha rajtuk* 1 A *erősségű áram folyik! (A környezet hőmérséklete* 20 °C.*)*

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

Megoldás. Egy ℓ hosszúságú, A keresztmetszetű huzal sugara $r=\sqrt{A/\pi}$, felületének nagysága

$$A'=2r\pi\cdot\ell=2\ell\sqrt{A\pi}.$$

(Feltehetjük, hogy $\ell\gg r$, emiatt a felületbe csak a hengerpalást területét számítjuk bele, a huzalvégek területét elhanyagoljuk.)

A huzal ellenállása $R=\varrho\frac{\ell}{A}$, a felvett elektromos teljesítménye tehát I áramerősség esetén

$$P_{\text{fel}}=I^2R=\frac{I^2\varrho\ell}{A},$$

ahol ϱ a huzal anyagának fajlagos ellenállása.

Az elektromos áram hőhatása miatt a huzal hőmérséklete fokozatosan növekszik, és emiatt egyre nagyobb teljesítménnyel ad le hőt. A légritkított csőben a hővezetés elhanyagolható, így a hőleadás sugárzás útján történik. Egy A' felületű, T (abszolút) hőmérsékletű test T_0 hőmérsékletű környezetben sugárzás révén leadott teljesítménye

$$P_{\text{le}}=\varepsilon\sigma\big(T^4-T_0^4\big)A',$$

ahol σ a Stefan–Boltzmann-állandó, ε pedig a felület emissziós tényezője. Az idealizált „abszolút fekete testre" $\varepsilon=1$, valódi anyagok emissziós tényezője pedig 1-nél kisebb; számértéke nagyon sok paramétertől (hőmérséklet, hullámhossz, a felület érdessége, oxidáltsága) függ, emiatt a táblázatokban csak tájékoztató jellegű adatokat találunk.

Állandósult hőmérséklet esetén a felvett és a leadott teljesítmény megegyezik, vagyis

$$\frac{I^2\varrho\ell}{A}=\varepsilon\sigma\big(T^4-T_0^4\big)\cdot 2\ell\sqrt{A\pi},$$

ahonnan a keresett hőmérséklet kifejezhető:

$$T=\sqrt[4]{\frac{\varrho I^2}{2\varepsilon\sigma\sqrt{A^3\pi}}+T_0^4}.$$

A pontos számítást nehezíti, hogy a fajlagos ellenállás is és az emissziós tényező is függ a hőmérséklettől, ráadásul ε-nak sem a nagyságát, sem a hőfokfüggését nem tudjuk megbízhatóan kezelni. Mivel a feladat csak becsült (tehát nagyságrendileg helyes, de nem pontos) értéket kérdez, első közelítésben tekintsük a huzalt abszolút fekete testnek, és ne vegyük figyelembe a fajlagos ellenállások hőfokfüggését. Ebben a (meglehetősen durva) közelítésben a megadott és a táblázatokban megtalálható adatok* felhasználásával a

$$T_{\text{konstantán}}\approx 315\ \mathrm{K}\approx 42\ ^\circ\mathrm{C},\quad \text{illetve}\quad T_{\text{krómnikkel}}\approx 337\ \mathrm{K}\approx 64\ ^\circ\mathrm{C}$$

eredményeket kapjuk.

A megoldás pontosítható, ha figyelembe vesszük a kétféle anyag ellenállásának táblázatokban megtalálható hőfokfüggését. Ekkor a konstantán esetében nem változik az eredmény (ami nem meglepő, hiszen a konstantán éppen olyan összetételű réznikkel ötvözet, amelynek nagyon kicsi a hőfoktényezője), de a krómnikkel huzal állandósult hőmérséklete sem tér el számottevően az első közelítés eredményétől, mindössze 4 fokkal lesz magasabb.

További pontosítást az emissziós tényező reálisabb értékével való számítástól várhatunk. A táblázati adatok szerint a fényes felületű króm, nikkel és réz 100 °C-on $\varepsilon_{\text{króm}}=0{,}08$; $\varepsilon_{\text{nikkel}}=0{,}06$; $\varepsilon_{\text{réz}}=0{,}02$ együtthatókkal jellemezhető, ebből arra következtethetünk, hogy az ötvözeteik sugárzása is hasonló, átlagosan $\varepsilon=0{,}05$ tényezővel írható le. A táblázatok azt is jelzik, hogy a hőmérséklet emelkedésével ε növekszik, volfrám esetében pl. 2000 °C-on az emissziós tényező több, mint 10-szerese a szobahőmérsékleten érvényes mennyiségnek. Mindezek figyelembe vételével (átlagos emissziós együtthatóval és a megfelelő hőfoktényezőkkel számolva) a kialakuló hőmérsékletre a konstantánnál kb. 200 °C-ot, a krómnikkel huzalnál pedig mintegy 300 °C-ot kapunk. Ilyen hőmérsékleteken már érdemes lenne figyelembe venni a fajlagos ellenállások megváltozását is, de gondolhatunk a fémfelületek oxidációjára is (ami erősen megváltoztatja az emissziós tényezőket.) Ezeket a számításokat azonban nem végezzük el, hiszen csak becslést kívántunk adni a huzalok hőmérsékletére.

Csató Botond (Debrecen, DRK Dóczi G. Gimn., 12. évf.),
Forrai Botond (Budapest, Baár-Madas Ref. Ginm., 11. évf.) és
Holczer András (Pécs, Janus Pannonius Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

37 dolgozat érkezett. Helyes 22 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 6, hiányos (1–3 pont) 7, hibás 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.

*A konstantán fajlagos ellenállása $5\cdot 10^{-7}\ \Omega\mathrm{m}$, a krómnikkelé pedig $11\cdot 10^{-7}\ \Omega\mathrm{m}$. Ez utóbbi a Négyjegyű függvénytáblázatban hibásan szerepel, és más táblázatok is igen eltérő adatokat adnak meg. Az ebből adódóan különböző számszerű eredményeket tartalmazó dolgozatokat (ha egyébként helyes gondolatmenetet követtek) teljes értékűnek tekintettük. (A szerk.)

P. 4670. *Függőleges tengelyű, $\ell = 2$ m hosszú, egyrétegű egyenes tekercs átmérője $D = 2$ cm, menetszáma $N = 2000$, benne $I = 10$ A erősségű egyenáram folyik felfelé. (Az áramkör a tekercstől messze záródik.) A tekercs tengelye felé, arra merőleges irányban $v = 2{,}5\cdot 10^6$ m/s sebességű elektronokat indítunk. Mekkora az elektronok pályájának görbületi sugara abban a pontban, amelyben az elektronok már $d = 2$ cm-re megközelítették a tekercs meneteit?*

(*6 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

Megoldás. Egy Q töltésű, m tömegű, v sebességgel mozgó részecske mozgásegyenlete B indukciójú mágneses mezőben:

$$\frac{mv^2}{R} = QvB,$$

ahol R a pályájának pillanatnyi görbületi sugara. A mágneses térben haladó részecske sebessége nem változik meg, v tehát a kezdeti (adott) érték, és így a görbületi sugár:

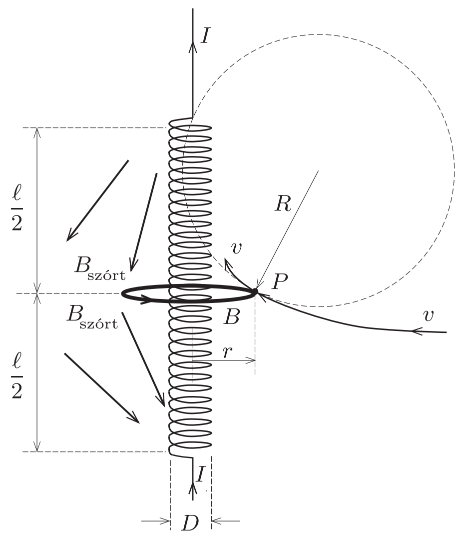
$$R = \frac{mv}{QB}.$$

Ezek szerint, ha ismernénk B értékét a kérdéses pontban, a keresett R-t már könnyen ki tudnánk számítani.

Jóllehet a feladat szövege nem említi, hogy az elektron a tekercs melyik részét közelíti meg, de feltételezzük, hogy körülbelül a tekercs közepénél (vagy attól nem túl messze) található az a pont, ahol az elektron d távolságra kerül a tekercs meneteitől, vagyis ahol már csak

$$r = \frac{D}{2} + d = 0{,}03 \text{ m}$$

távol van a tekercs szimmetriatengelyétől.



Ha egy tekercs elegendően hosszú és a hosszához képest kicsi az átmérője (jelen esetben ezek a feltételek teljesülnek), akkor a tekercs belsejében kialakuló mágneses mező erővonalai a tekercs végeinél „szétszóródva” kívül csak nagyon gyenge mágneses mezőt hoznak létre. Ha ezt a szórt mágneses teret elhanyagoljuk, akkor a mozgó elektron csak egy egyenes vezető mágneses terét „érzi”, az határozza meg a részecske pályájának görbületi sugarát. (A feladat szövege szerint a tekercs „egyrétegű”, tehát az áram be- és kivezetési helye a tekercs különböző végeinél található, és a „messze” záródó áramkör többi része nem rontja el a „végtelen egyenes vezető” alapján számolt mágneses teret.)

Ebben a közelítésben (amelynek jogosságát később még megvizsgáljuk) a mágneses indukció az *ábrán* látható P pontban az ábra síkjára merőlegesen „befelé” mutat, a negatív töltésű (az ábra síkjában mozgó) elektron pályája tehát „felfelé” görbül. A mágneses indukció nagyságát a gerjesztési törvényből számíthatjuk ki, ha azt a tekercset körülvevő r sugarú körre alkalmazzuk. A tekercs forgásszimmetriája miatt $\boldsymbol{B}$ nagysága a körvonal mentén mindenhol ugyanakkora, így fennáll

$$B \cdot 2r\pi = \mu_0 I, \qquad \text{azaz} \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

(Ez a mágneses mező éppen olyan, mint a végtelen egyenes vezető tere, és a nagysága nem függ sem az N menetszámtól, sem pedig a tekercs ℓ hosszától.)

A mágneses mező nagyságának és az elektron mozgásegyenletének ismeretében a pálya görbületi sugara kiszámítható:

$$R = \frac{2\pi m v r}{Q\mu_0 I} = \frac{2\pi \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{6} \cdot 0{,}03\ \mathrm{m}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10} \approx 0{,}21\ \mathrm{m}.$$

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy valóban jogos volt-e a szórt mágneses tér elhanyagolása. A szolenoid belsejében

$$B_0 = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$$

nagyságú, jó közelítéssel homogén mágneses indukció, vagyis

$$\Phi = \frac{D^2\pi}{4} B_0 = \frac{\mu_0 N I D^2 \pi}{4\ell}$$

mágneses fluxus alakul ki. A mágneses erővonalak a vékony tekercs egyik végén (pontosabban annak közelében) lépnek ki, és a másik tekercsvégnél gyűlnek össze. A szórt mágneses tér jól közelíthető a tekercs végpontjaiba képzelt $\pm\Phi$ fluxusú „mágneses ponttöltés” gömbszimmetrikus (a Coulomb-térrel megegyező tulajdonságú „forrás” és „nyelő”) mágneses terének szuperpozíciójával.* A Φ fluxusú gömbszimmetrikus mágneses tér kezdőponttól (a tekercs végpontjaitól) r távolságban

$$B_{\text{szórt}} = \frac{\Phi}{4r^2\pi}$$

erősségű, így az eredő térerősség a tekercs közepénél, közvetlenül a menetek közelében (tehát mindkét tekercsvégtől $r = \frac{1}{2}\ell$ távolságban)

$$B' \approx 2B_{\text{szórt}} = \frac{2\Phi}{\ell^2\pi} = \frac{\mu_0 N I D^2}{2\ell^3}.$$

Hasonlítsuk össze ennek a szórt térnek az erősségét az egyenes vezető korábban kiszámított terével:

$$\frac{B'}{B} = \frac{ND^2 r\pi}{\ell^3} = \frac{2000 \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}03\,\pi}{2^3} \approx 0{,}01 \ll 1,$$

*Lásd pl. a 43. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia 1/C feladatának hasonló gondolatmenetet követő megoldását a KöMaL 2012. évi novemberi számának 492. oldalán.

tehát a szórt tér – a megadott számadatok mellett – valóban elhanyagolható. Ez akkor is igaz, ha az elektronok nem pontosan a tekercs közepénél, hanem a tekercs valamelyik másik részénél (de a végeitől elegendően távol) kerülnek legközelebb a menetekhez.

Sal Kristóf (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) és *Berta Dénes* (Szeges, Radnóti M. Gyak. Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

10 dolgozat érkezett. Helyes Olosz Balázs és Sal Kristóf megoldása. Kicsit hiányos (5 pont) Berta Dénes, Büki Máté, Orosz Bálint és Öreg Botond dolgozata. Hiányos (2–4 pont) 4 dolgozat.

P. 4680. 90 cm *hosszú,* $n=1{,}33$ *törésmutatójú vízzel telt akváriumban hova tegyük az* $r=10$ cm *sugarú „óraüvegekből" és egy rövid csődarabból készített bikonkáv levegőlencsét, hogy a kád mattüveg oldalán levő ábra képe a szemközti oldalon jöjjön létre?*

(*4 pont*) Közli: *Szombathy Miklós,* Eger

Megoldás. A vékony lencsék fókusztávolságát az

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

általános képlet alapján lehet kiszámítani. Esetünkben (mivel bikonkáv lencséről van szó) $R_1=R_2=-10$ cm, a törésmutató pedig a megadott érték reciproka, hiszen a fény a vízből jut a levegőbe, majd ismét a vízbe:

$$n=\frac{1}{1{,}33}\approx 0{,}75.$$

Ezek szerint (centiméter egységekben számolva)

$$\frac{1}{f}=(0{,}75-1)\left(-\frac{1}{10}-\frac{1}{10}\right)=(-0{,}25)\cdot(-0{,}2)=+0{,}25,$$

ahonnan

$$f=\frac{1}{0{,}05}=20\ [\mathrm{cm}].$$

Látható, hogy $f>0$, tehát a bikonkáv levegőlencse a víz alatt gyűjtőlencseként működik.

A leképezési törvény szerint a tárgytávolság (t) és a képtávolság (k) között fennáll:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k},$$

és mivel $t+k$ az akvárium ismert hosszával egyenlő, $k=90-t$. Így a leképezési törvény:

$$\frac{1}{20}=\frac{1}{t}+\frac{1}{90-t},$$

amiből átalakítások után a

$$t^2 - 90t + 1800 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek megoldásai:

$$t_1 = 30\ \text{cm} \qquad \text{és} \qquad t_2 = 60\ \text{cm},$$

fizikailag mindkettő helyes. Az első esetben kétszeres nagyítású, a második esetben pedig felére kicsinyített képet kapunk; mindkettő fordított állású.

Tóth Miklós (Keszthely, Vajda J. Gimn., 8. évf.)

35 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 8, hibás 3 dolgozat.

Mérési feladat megoldása

M. 346. *Gurítsunk el különböző vízszintes felületeken egy tömör hengert úgy, hogy mindvégig csúszásmentesen gördüljön! A mérési adatok alapján határozzuk meg, hogy mekkora csúszó súrlódási együtthatójú test mozogna forgásmentesen csúszva ugyanakkora gyorsulással, mint ahogy a gördülő henger középpontja.*

(*6 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

Megoldás. *1. A mérés előkészítése.* Szükséges eszközök: mérőszalag, stopper, alumíniumhenger. A méréshez használt alumíniumhengert az iskolai szertárból szereztem be; alaplapja kör, látható felületi egyenetlenségek nem voltak rajta. A henger alapkörének sugara 1,5 cm, magassága 7 cm. A mérőszalag hossza másfél méter volt.

2. A mérés menete. A kiszemelt felületen egyenesen végigfektettem a mérőszalagot. A hengert az egyik kezemmel úgy gurítottam el, hogy lehetőleg mindvégig a mérőszalag mentén mozogjon. Ha elfordult a meglökéstől, újra elvégeztem a mérést. A másik kezemmel a stoppert kezeltem; akkor indítottam el, amikor a henger a mérőszalag kezdetéhez ért, majd a megállás pillanatában fejeztem be a mérést. Minden felületen 20 „érvényes" mérést végeztem (csak azokat értékeltem, amelyeknél a henger mindvégig a mérőszalag mellett gurult).

Három különböző felületen végeztem mérést: asztalterítőn, szobaszőnyegen és műanyag padlón. Nagyon sima felületen nem lehet elvégezni a mérést, mert nagyon piciny felületi egyenlőtlenség miatt a henger nem egyenletesen lassulva mozgott, néhol akár gyorsulva is gurulhatott.

3. A mérés kiértékelése. A henger – feltehetően – egyenletesen lassuló mozgást végez, így az út–idő kapcsolat:

$$s = v_0 t + \frac{a}{2} t^2,$$

ahol

$$a=-\frac{v_0}{t},\qquad \text{így}\qquad s=-\frac{a}{t}t^2.$$

Tudjuk továbbá, hogy egy μ súrlódási együtthatóval jellemezhető, forgásmentesen csúszó test gyorsulása $a'=-\mu g$. Így a henger középpontjának mozgására fennáll

$$s=\frac{\mu g}{2}t^2,$$

és mivel $a=a'$, a gördülő henger tömegközéppontjának (negatív) gyorsulása:

$$-a=\mu g.$$

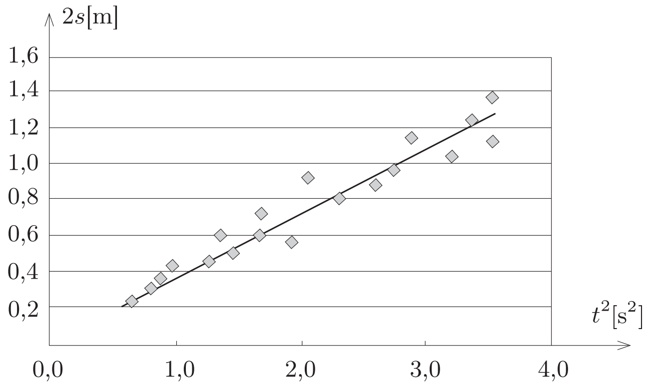
A mérési hibát úgy csökkenthetjük, hogy az összes mérési adatot (az s és t értékeket) olyan grafikonon ábrázoljuk, ahol az y tengelyen a $2s$ értékeket, az x tengelyen pedig a t^2 értékeket tüntetjük fel. Mivel az elméleti megfontolások szerint

$$2s=\mu g\cdot t^2,$$

az ábrázolt mennyiségek között lineáris kapcsolatot várunk. Ha egy olyan egyenest illesztünk a ponthalmazra, amely átmegy az origón (mivel $t=0$ idő alatt $s=0$ utat tesz meg a henger), az így kapott egyenes meredeksége megadja a μg mennyiség értékét, amiből a súrlódási együttható kiszámolható.

Az időmérés pontossága (a reakcióidőnk miatt) kb. 0,2 s-ra becsülhető. A stopper még a századmásodperces adatot is megmutatja, de ilyen pontosan értelmetlen megadni a mért időt, hiszen annak nincs valóságos tartalma. Emiatt a mért időket tizedmásodpercre kerekítve adtam meg. A megtett utat centiméter pontossággal tudjuk meghatározni.

A mért, illetve számított adataimat táblázatokba foglaltam, majd a megfelelő grafikonokat elkészítettem.*



Hasonló módon kaptam meg a másik két felületen gördülő henger út-idő összefüggését és az abból számítható gyorsulásokat.

*Terjedelmi okokból a táblázatokat nem, a grafikonok közül pedig csak egyet, a szőnyegre vonatkozót mellékeljük. (A szerk.)

4. Hibabecslés. A mérési eredmény pontosságát az alábbi hibaforrások határozzák meg:

(*i*) Az út hosszának mérésének pontatlansága kb. 1 cm, amely 34 cm-nyi átlagos útra vonatkoztatva 3%-nyi hibának felel meg.

(*ii*) Az idő mérésének pontatlansága a legnagyobb hibaforrás, nagyságrendje $5-20\%$.

(*iii*) A talaj egyenetlensége tipikus „szisztematikus hiba", számszerű értékét (nagyságrendjét) nehéz lenne meghatározni.

(*iv*) Statisztikai hiba. Az egyenes illesztése az egyes mérések relatív hibáját csökkenti (hiszen az összes adatot egyszerre veszi figyelembe), így a mérés relatív hibáját végül kb. 10% nagyságúnak becsülhetjük.

5. Az eredmények összefoglalása. A mérési eredményekből és a becsült hibákból a kérdéses „effektív súrlódási együtthatókra" ($g=9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$-es nehézségi gyorsulással számolva) végül a következőket kapjuk:

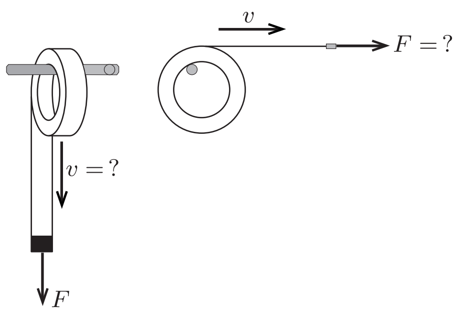
– asztalterítő: $\mu=0{,}0073\pm0{,}0008$;
– szobaszőnyeg: $\mu=0{,}038\pm0{,}004$;
– műanyag padló: $\mu=0{,}010\pm0{,}001$.

Holczer András (Pécs, Janus Pannonius Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

20 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 5, hiányos (3–4 pont) 5 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 349. Vízszintes, rögzített tengelyre helyezzünk egy tekercs átlátszó (cellux- vagy csomagzáró) ragasztószalagot! A szalag végét bizonyos nagyságú erővel húzzuk függőlegesen lefelé. Vizsgáljuk meg, miként tekeredik (tépődik) le a szalag különböző nagyságú húzóerőknél! Keressünk kapcsolatot az *átlagos* letekeredési sebesség és a húzóerő között!



Választható a mérés egy másik változata: adott sebességgel tépjük le a szalagot, és vizsgáljuk az ehhez szükséges erő *átlagos* értékét! (A két mérési lehetőség közül csak az egyiket kell elvégezni!)

(*6 pont*) Közli: *Nguyen Quang Chinh,* Budapest

P. 4715. Hányszor nagyobb tömeget tudna felemelni valaki egy feleakkora sugarú, de ugyanakkora átlagos sűrűségű Földön?

(*3 pont*) *Faragó Andor* (1877–1944) feladata

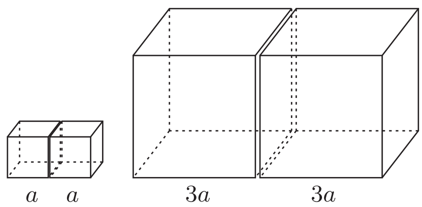
P. 4716. Egy 40 cm hosszúságú fonálingát vízszintesig kitérítünk, majd v_0 nagyságú kezdősebességgel megindítjuk függőlegesen lefelé. Mekkora legyen v_0 értéke, hogy a test a legalsó ponton való áthaladáskor 7-szer akkora erővel húzza a fonalat, mint amikor a legfelső ponton halad át?

(*3 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 4717. Mekkora szöget kell bezárniuk az $\boldsymbol{F}_1$ és $\boldsymbol{F}_2$ erőknek, hogy az eredőjük nagysága $\boldsymbol{F}_1$ és $\boldsymbol{F}_2$ nagyságának számtani közepével legyen egyenlő? Minő határok között kell lennie az F_1/F_2 viszonynak, hogy a feladatnak legyen megoldása? Milyen határok között kell lennie a két erő szögének?

(*4 pont*) *Strasser V. Benő* (1884–1966) feladata

P. 4718. Két a oldalélű tömör fémkocka érintkezik egymással az egyik lapjuk mentén. Hányszor nagyobb gravitációs erővel vonzza egymást két $3a$ oldalélű, egymással érintkező, ugyanabból a fémből készült tömör fémkocka?



(*5 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest

P. 4719. Egy kajakos 5 m/s sebességű folyón evez felfelé. Mekkora sebességgel kell eveznie, hogy a lehető legkevesebb munkavégzéssel jusson el adott távolságra? (A közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányos.)

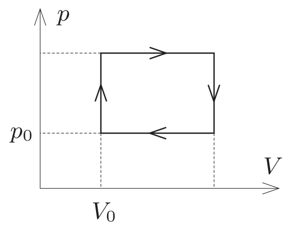
(*5 pont*) Közli: *Forman Ferenc,* UK, Cambridge

P. 4720. A párátlanító készülék úgy működik, hogy a levegőt ventilátorral egy hűtött felületre fújja, és a lecsapódó párát egy tartályban összegyűjti. Mennyi hőt ad át a szoba levegőjének 15 óra alatt a 180 W-os készülék, ha közben 4 liter vizet gyűjtött össze? A szoba hőmérséklete 25 °C.

Ha a párátlanítót hőszivattyúnak tekintjük, mekkora a jósági tényezője (a szobának leadott hő és az elektromos hálózatból felvett energia aránya)?

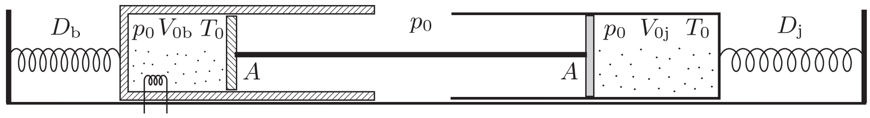
(*4 pont*) Közli: *Vladár Károly,* Kiskunhalas

P. 4721. Adott mennyiségű egyatomos ideális gázzal az *ábrán* látható – két izobár és két izochor folyamatból álló – termodinamikai körfolyamat végzi egy hőerőgép. Mekkora lehet ennek a gépnek a maximális termodinamikai hatásfoka, ha a ciklusonként végzett hasznos munka egyenlő a gáz kezdőállapotbeli $\frac{3}{2}p_0V_0$ belső energiájával?



(*5 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

P. 4722. Vízszintes, súrlódásmentes talajon két, $A = 2\ \mathrm{dm}^2$ keresztmetszetű henger nyugszik. A hengerek könnyen mozgó dugattyúi merev rúddal vannak összekötve. Mindkét henger egy-egy nyújtatlan állapotban lévő rugóhoz van erősítve, melyeknek rugóállandója $D_\mathrm{b} = 24\ \mathrm{kN/m}$, illetve $D_\mathrm{j} = 16\ \mathrm{kN/m}$. A bal oldali, hőszigetelt hengerben elzárt levegő térfogata $V_{0\mathrm{b}} = 20\ \mathrm{dm}^3$, a jobb oldalié $V_{0\mathrm{j}} = 30\ \mathrm{dm}^3$, mindkét gáz kezdeti hőmérséklete $T_0 = 300$ K. A bal oldali hengerbe zárt levegő hőmérsékletét $T_\mathrm{b} = 1200$ K-re emeljük. A külső légnyomás $p_0 = 10^5$ Pa.

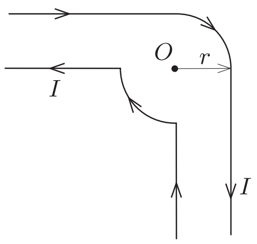


a) Mekkora a két henger és a dugattyú elmozdulása a talajhoz viszonyítva, ha a jobb oldali gáz hőmérsékletét a kezdeti értéken tartjuk?

b) Mekkora a két gáz végső térfogata?

c) Mennyi hőt adott le a bal oldali gázt melegítő izzószál?

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest



P. 4723. Az *ábrán* látható két-két félegyenesből és egy-egy r sugarú negyedkörből álló vezetékben I erősségű áram folyik a nyilakkal megjelölt irányban. Mekkora a $\boldsymbol{B}$ mágneses indukció nagysága a körívek közös O középpontjában?

(*4 pont*) Közli: *Gálfi László,* Budapest

P. 4724. Egy 230 V, 100 W-os izzólámpa volfrámszálának üzemi hőmérséklete 2400 °C. Egy kísérletben zérusról növeljük fokozatosan a lámpára adott feszültséget, és azt tapasztaljuk, hogy 17 V-nál kezd halványan izzani a szál. Mennyi ebben az állapotban az izzószál hőmérséklete, ellenállása, és mennyi a felvett teljesítmény?

Feltehetjük, hogy a kisugárzott teljesítmény jó közelítéssel az abszolút hőmérséklet negyedik hatványával, az ellenállás ötödik hatványa pedig az abszolút hőmérséklet hatodik hatványával arányos, továbbá azt, hogy a hővezetés nem számottevő!

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 2015. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 65. No. 3. March 2015)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 162): **K. 457.** (According to a Hungarian poem for children*) it is a rule in the school for young sheep that students get an award for every day they do not attend the classes. On Monday, 10% of the students were absent. On Tuesday, 10% of those absent on Monday returned, but 10% of those present on Monday stayed at home. What percentage of the students will not get a reward for Tuesday? **K. 458.** Johnny wanted to buy some nails. In one shop, where 100 grams of nails cost 180 forints (HUF, Hungarian currency), he could not buy the quantity needed since he was 1430 forints short. So he went to another shop where 100 grams only cost 120 forints. He bought the quantity he needed, and 490 forints still remained in his pocket. How many kilos of nails did he need? **K. 459.** Uncle Charlie had a ladder of length 2 metres and 60 cm. In order to replace a light bulb in a lamp on the wall, he leaned the ladder against the wall, with the bottom end at a distance of 156 cm from the wall. It turned out that he would need to climb 32 cm higher in order to reach the bulb, so he pushed the bottom of the ladder closer to the wall. By how many centimetres did he push it closer? **K. 460.** A circle of radius 10 units is centred at point O. A, B and C are points on the circle such that O lies in the interior of triangle ABC. Given that the length of line segment AB is 12 units and the measure of angle ABC is 60°, find *a*) the distance of point O from line segment AB, *b*) the length of line segment AC. **K. 461.** A set of coordinate axes is drawn on a sheet of squared paper. Then the sheet is folded along a straight line such that the point $(30;12)$ is moved to the point $(-2;-4)$. Where does the folding line intersect the coordinate axes? **K. 462.** *a*) f is a function defined on the set of real numbers. Given that $f(a)-f(b)=f(a\cdot b)$ for all a and b, find the value of $f(2015)$. *b*) Is there a function g defined on the set of real numbers such that $g(a)-g(b)=2\cdot g(a\cdot b)-2$ for all a and b?

New exercises for practice – competition C (see page 163): **Exercises up to year 10: C. 1280.** Given that the natural numbers m and n are relatively primes, prove that the greatest common factor of $m+n$ and m^2+n^2 is either 1 or 2. **C. 1281.** Let M denote the intersection of the lines of the legs of a trapezium. On a line passing through M and parallel to the bases, let A and B denote the intersections with the extensions of the diagonals. Prove that $|AM|=|BM|$. **Exercises for everyone: C. 1282.** How many solutions does the equation $2^a+3^b+4^c+5^d+6^e=22$ have where a, b, c, d, e are integers? **C. 1283.** The longer base, AB, of trapezium $ABCD$ is not greater than three times the base CD. Lines e and f are parallel to the legs BC and DA, respectively, and each of them halves the area of the trapezium. Let P and Q denote the intersections of AB with e and f, respectively, and let P' and Q' denote their intersections with DC. *a*) Prove that the intersection M of lines e and f lies on the midline of the trapezium. *b*) Given that the quadrilateral $PQ'P'Q$ is a parallelogram, find the ratio of the area of triangle MPQ to the area of the trapezium $ABCD$. **C. 1284.** Five cards are drawn at random from a deck of German cards. Which of the following events has a higher probability: the event that all five are from the same suit, or the event that there are four cards among them with

*`http://www.mdche.u-szeged.hu/~kovacs/sheepshrine_f.html`.

the same denomination? (*Competition problem from Germany*) **Exercises upwards of year 11: C. 1285.** The length of the radius of the inscribed circle of an isosceles triangle is divided by the length of the radius of the circumscribed circle. What is the maximum possible value of the ratio? **C. 1286.** Solve the following simultaneous equations:

$$y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x,$$
$$x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y.$$

New exercises – competition B (see page 164): **B. 4696.** How many positive integers n are there such that the geometric mean and the harmonic mean of n and 2015 are both integers? (*3 points*) **B. 4697.** Prove that if a right-angled trapezium has an inscribed circle, then the shorter leg equals the line segment cut out by the legs from the line parallel to the bases, passing through the intersection of the diagonals. (*4 points*) **B. 4698.** Give an example for sets $H_1, H_2, \ldots \subset \mathbb{N}$ for which the following conditions hold: *a*) $|H_n| = n$ for all positive integers n. *b*) For all positive integers n and k, $H_n \cap H_k = H_{(n,k)}$, where (n,k) is the greatest common divisor of n and k. (*5 points*) **B. 4699.** Construct a bicentric kite if given the radius of its circumscribed circle and the distance between the centres of its circumscribed and inscribed circles. (*4 points*) **B. 4700.** Solve the equation

$$\left(\sqrt{1+\sin^2 x} - \sin x\right)\left(\sqrt{1+\cos^2 x} - \cos x\right) = 1.$$

(*5 points*) **B. 4701.** Let $A_1B_1C_1D_1$ be a quadrilateral. For any set of four points $A_nB_nC_nD_n$ already defined for a positive integer n, let A_{n+1} be the centroid of the triangle $B_nC_nD_n$. B_{n+1}, C_{n+1} and D_{n+1} are defined analogously, with a cyclic permutation of the points. Show that for any starting quadrilateral, the point sequence A_n only has a finite number of points lying outside the unit circle drawn about the centre of mass of the quadrilateral $A_1B_1C_1D_1$. (*4 points*) (Suggested by *E. Gáspár Merse,* Budapest) **B. 4702.** Show that there are infinitely many points equidistant from three pairwise skew edges of a given cube. (*5 points*) **B. 4703.** Given that the absolute values of the numbers x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 are at most 1, and their sum is 0, prove that

$$3\sum_{i=1}^{5}\sqrt{1-x_i^2} \leqslant \sum_{i=1}^{5}\sqrt{9-(x_i+x_{i+1})^2}\,.$$

(*6 points*) (Suggested by *K. Williams,* Szeged) **B. 4704.** The circles k_2 and k_3 have different radii. A circle k_1 touches both of them from the inside. The circles k_2 and k_3 are tangent to a circle k_4 from the inside. Show that the radical axis of k_1 and k_4 passes through the external point of similitude of k_2 és k_3. (*6 points*)

New problems – competition A (see page 166): **A. 638.** Does there exist a simple, closed polyline in the 3-dimensional Cartesian co-ordinate system whose perpendicular projection onto every co-ordinate plane is a cycleless graph? (Proposed by: *Imre Leader,* Cambridge) **A. 639.** The angle trisectors of a triangle bound a convex hexagon in the interior of the triangle. Prove that the diagonals of this hexagon, that connect opposite vertices, are concurrent. (Proposed by: *Zoltán Bertalan,* Békéscsaba) **A. 640.** Find all primes p and positive integers n for which the numbers $(k+1)^n - 2k^n$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ form a complete residue system modulo p.

Problems in Informatics

(see page 166)

I. 370. There is only one old and unstable suspension bridge over a wild mountain river. The bridge consists of cables attached together, and of some planks lying across the cables. At some places there are gaps between the planks, so we want to repair the bridge or rearrange the planks, but we have only a few extra of them.

Someone measured the gaps between the planks from the left bank to the right bank of the river. The file `hid.txt`, downloadable from our webpage, contains these data in centimeters.

The first line of the file contains the length H of the suspension bridge ($300 \leqslant H \leqslant 50\,000$). The second line contains the theoretically determined safe step length L ($40 \leqslant L \leqslant 80$). The following N lines ($1 \leqslant N \leqslant H$) contain the distance between the planks. Walking through the planks is safe, if any plank distance is smaller then the step length L (since each plank is narrow, its width is neglected).

For example (with `/` denoting a newline character): `352 / 75 / 28 / 74 / 84 / 22 / 69 / 73 / ...`

In the example, the bridge length is 352 cm, the safe step length is 75 cm, the distance between the first plank and the left bank of the river is 28 cm, the distance between the first plank and the second plank is 74 cm, and so on.

Your program `i370` should solve the following tasks.

Before writing any result to the screen, the number of the actual task (for example, `Task 4`) should be displayed. Diacritical marks in the output may be omitted.

1. Read the data from the file `hid.txt` and solve the following tasks.
2. Display the distance between the last plank and the right bank of the river.
3. Determine the distance (in cm) up to which we can walk safely on the bridge starting from the left bank. If the entire bridge is safe, then you should display this information.
4. Display the longest connected bridge segment where walking through is not safe, by specifying the starting and final plank numbers of this segment.
5. We want to remove a single plank. In how many ways can we do this such that one can still walk safely through the newly introduced gap?
6. Collect and display all neighboring plank pairs between which at least one new plank should be installed to make the bridge safe. For example: `2-3`.
7. Give the minimum number of planks to be installed to make the bridge safe.
8. Two people would like to cross the original old bridge by holding each other's hands. They agree that no two feet will be put on the same plank. Moreover, they carry some extra planks to put down temporarily in front of them when necessary; after they pass over that plank, the second person can get it again within 1 step length and give it back to the first person. Determine the minimum number of planks they have to carry so that they can safely cross the bridge. Planks originally attached to the bridge cannot be removed.

   Example: the feet positions of person `A` and person `B` as they move along: `A_foot1 5`, `A_foot2 4`, `B_foot1 3`, `B_foot2 2`, `B` can get the first plank if it is not attached and give it to `A`. `A` can put down a plank in front of them at distance L, `A_foot2 6`, `B_foot2 4`, he can get the second plank ...

The source code (`i370.pas`, `i370.cpp`, ...) of your program with its short documentation (`i370.txt`, `i370.pdf`, ...), also describing which developer environment to use for compiling the source, should be submitted.

Downloadable file: `hid.txt`

I. 371. Duties of technical managers of sports clubs include coordinating the schedule of different team matches in a tournament. The source file `merkozesek.txt` contains an up-to-date monthly calendar with a schedule of the team matches. Unlike us, the technical manager does not have much experience with spreadsheet applications: he can register in the table that a team will have a match on a particular date, or, if the match is canceled, he can delete the team name, but he cannot perform other editing tasks. The sports association has 8 teams, and there can be at most 15 days in each month when teams can play.

In the *example,* "fiú" is boy, "lány" is girl, "serdülő" is teenager, "férfi" is man, "nő" is woman, and "felnőtt" is adult.

You should help the technical manager creating and handling the team data by using a spreadsheet application and solving the following tasks. User-defined functions and macros cannot be used in your solution.

1. Open the tabulator-separated and UTF-8 encoded text file `merkozesek.txt` (= matches) in the spreadsheet application according to the example. Your solution should work properly even if the data are changed. Save your work as `i371` in the default application file format.
2. Create a new sheet that will display data and the corresponding information for one team.
   The *example* shows a sheet for the teenager boy team. "**Mérkőzések időpontja**" is the date of the matches, "Mérkőzések száma" is the number of matches, "Legkisebb pihenő" is the minimum number of days (= nap) with rest, and "`Egymás utáni napok`" is consecutive days.
3. According to the example, create the sheet structure, then make the headers for the first line and the labels for column B. You can perform auxiliary computations to the right of column D. These computations should have some remarks or labels so that it is easier to understand them.
4. Cell B2 should contain the team name the actual sheet refers to. If we copy the sheet and change the team name, the corresponding team information should appear.
5. Cells A2 and below should contain the dates when the current team has a match. The dates should be sorted, with no empty cells between them. Your sheet should work for the possible 15 days. Cells below the last match should remain empty.
6. Cell C2 should contain the number of matches in the actual month.
7. Cell C3 should contain the minimum number of days with rest between two consecutive matches.
8. Cell C4 should contain how many times the team will have matches on consecutive days in the actual month.
9. The sheet should be formatted, and column C should contain the units according to the example.
10. Create at least two copies of the sheet. Modify their cell B2 to display the corresponding information for two other teams. The sheet name should be changed to be the same as the team name.

The spreadsheet (`i371.xls`, `i371.ods`, …) together with a short documentation (`i371.txt`, `i371.pdf`, …), also containing the name and version number of the spreadsheet application should be submitted.

The downloadable file necessary to solve the task: `merkozesek.txt`

I. 372. OpenGL is a platform-independent programming interface to display 3D objects. Many C programs are written for it, but other programming languages appearing in the contest rules of this journal, e.g., Lazarus or Visual Basic, are also used. Several references, videos and sample programs can be found on the Internet to learn its programming. It is worth using GLUT or other OpenGL toolkits available in the given programming language or environment.

Create an OpenGL application to simulate the path of a point-like object bouncing slowly within a cube. Your program should display the edges of the cube, and trace the object trajectory. The object should have a random initial velocity, and all collisions with the walls should be perfectly elastic. You should use perspective projection to display the 3D objects. The user should be able to zoom in or out, and there should be an option in which the "camera" is always directed toward the cube center.

You should submit in a compressed file `i372.zip` the documentation of your program (`i372.txt`, `i372.pdf`) and the necessary source files for compiling the program. The documentation should explicitly specify which programming language and environment, and which toolkits should be used to compile and run your program.

S. 97. Elephants in a herd are walking calmly in a single line. Elephants are numbered from 1 to N ($1 \leqslant N \leqslant 100\,000$). Elephant 1 is the smallest one, then gradually, Elephant N is the largest animal of them. It would be nice to have the smallest elephant in the first place, then the second smallest, and so on. However, currently they are not necessarily in this order. We say that a pair of elephants from the line is in wrong order, if the larger animal precedes the smaller. You should determine the number of pairs in wrong order.

Your program should read the value of N from the first line of the standard input, then N numbers from the next line denoting the elephants in the line. The first and only line of the standard output should contain the number of elephant pairs in wrong order.

In the *example,* "Példa bemenet" is sample input, while "Példa kimenet" is the corresponding output.

Explanation: the pairs `(1,3)`, `(1,4)`, `(2,3)`, `(2,4)` and `(3,4)` are in wrong order.

Scoring and bounds. You can obtain 1 point for a brief and proper documentation clearly describing your solution. Nine further points can be obtained provided that your program solves any arbitrary valid input within 1 second of running time.

The source code (`s97.pas`, `s97.cpp`, …) without the `.exe` or any other auxiliary files generated by the compiler but with a short documentation (`s97.txt`, `s97.pdf`, …), also describing which developer environment to use for compiling the source, should be submitted in a compressed file `s97.zip`.

Problems in Physics

(see page 184)

M. 349. A roll of cello-tape (or any other type of transparent adhesive tape) is placed to a fixed horizontal axle. The end of the tape is pulled vertically downward at some particular magnitude of force. Investigate how the tape rolls down (or breaks) at different magnitude of forces. Find the relationship between the *average* roll-off speed and the force. Another type of measurement can also be chosen: tear off the tape at some given speed and investigate the *average* force applied. (Only one of the two different measurements should be carried out.)

P. 4715. How many times greater mass of object could be lifted by a man on another planet which has the same density as the Earth but which has half the radius of the Earth? **P. 4716.** A 40 cm long simple pendulum is displaced horizontally, and then it is given an initial vertically downward speed of v_0. What should the value of v_0 be, in order that the force exerted by the object on the thread is to be seven times greater when the object passes the lowermost point than that of when the object passes the uppermost point? **P. 4717.** What should the angle between the forces $\boldsymbol{F}_1$ and $\boldsymbol{F}_2$ be, in order that the magnitude of their sum is equal to the arithmetic mean of the magnitudes of $\boldsymbol{F}_1$ and $\boldsymbol{F}_2$? In what interval should the F_1/F_2 ratio be in order that the problem have solution? In what interval should the angle between the two forces be? **P. 4718.** Two solid metal cubes of edges a touch each other along one of their faces. How many times greater gravitational force is exerted between two solid metal cubes, made of the same material as the other, whose edges are $3a$, and which also touch each other? **P. 4719.** A kayaker paddles up the river. At what speed should he paddle if he wants to cover a certain distance with the least work? (The drag force is proportional to the square of the speed.) **P. 4720.** The operation of the demister is the following: a fan blows the air towards a cooled surface, and the condensed water vapour is collected in a container. How much heat is given off to the air in the room by the demister, rated at 180 W, in 15 hours, if it collected 4 litres of water? The temperature of the room is 25 °C. If the demister is considered to be a heat pump, what is its coefficient of performance (the ratio of the released heat to the electrical energy consumed)? **P. 4721.** The working substance of a heat engine is a certain amount of monatomic ideal gas. The gas is taken through the cyclic process shown in the *figure* – which consists of two isobaric and two isochoric processes. What can the greatest thermodynamic efficiency of this engine be if in each cycle the useful work is the same as the internal energy of the gas at its initial state, which is $\frac{3}{2}p_0V_0$? **P. 4722.** There are two cylinders of cross section $A = 2\ \mathrm{dm}^2$ at rest on a frictionless, horizontal surface. The pistons of the cylinders can move easily and they are connected with a rigid rod. Each cylinder is connected to an unstretched spring. The values of the spring constant of the springs are $D_\mathrm{b} = 24$ kN/m, and $D_\mathrm{j} = 16$ kN/m. The volume of the air enclosed in the left, insulated cylinder is $V_{0\mathrm{b}} = 20\ \mathrm{dm}^3$, and that of in the right cylinder is $V_{0\mathrm{j}} = 30\ \mathrm{dm}^3$, and the initial temperature of both gases is $T_0 = 300$ K. The temperature of the gas in the left cylinder is increased to $T_\mathrm{b} = 1200$ K. The ambient air pressure is $p_0 = 10^5$ Pa. *a*) What is the displacement of the two cylinders and the piston with respect to the ground if the temperature of the gas in the right cylinder is kept at its initial value? *b*) What are the final values of the volume of the two samples of gas? *c*) How much heat was released by the heating element which heated the gas in the left cylinder? **P. 4723.** Current I in the wires shown in the *figure* flows in the direction of the arrows. (The wire forms two rays and two circular arcs of radius r and of central angle 90°.) What is the magnitude of the magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ at point O which is the common centre of the circles? **P. 4724.** The working temperature of the tungsten filament of an incandescent lamp rated at 230 V and 100 W is 2400 °C. In an experiment the voltage applied to the lamp is gradually increased from zero, and it can be seen that the filament begins to glow at 17 V. What is the temperature and the resistance of the filament in this state, and how much power is dissipated in this state of the bulb? We can assume that the emitted power is proportional to the fourth power of the temperature measured in Kelvins, the fifth power of the resistance is proportional to the sixth power of the absolute temperature and heat conduction is negligible.