KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

65. évfolyam 2. szám Budapest, 2015. február

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: NAGY GYULA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: OLÁH VERA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Kiadó igazgatója: KULCSÁR CECÍLIA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.,
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, V. emelet 5.106.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, V. emelet 5.106.,
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Jelentés a 2014. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2014. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 10-én, 14 órai kezdettel rendezte meg a következő huszonhárom helyszínen: Békéscsaba, Bonyhád, Budapest, Csíkszereda, Debrecen, Eger, Győr, Kaposvár, Kecskemét, Kolozsvár, Miskolc, Nyíregyháza, Pécs, Révkomárom, Salgótarján, Sopron, Szeged, Székesfehérvár, Szolnok, Szombathely, Tatabánya, Veszprém és Zalaegerszeg.

A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására az alábbi bizottságot kérte fel: *Biró András, Fleiner Tamás* (elnök), *Frenkel Péter, Kós Géza, Maga Péter, Pach Péter Pál* (titkár), *Pelikán József.* Maga Péter külföldi tartózkodása miatt nem vett részt a bizottság munkájában.

A bizottság szeptember 20-i ülésén a következő feladatokat tűzte ki:

1. *Egy n tagú társaság minden tagja legalább egy, de legfeljebb $n-2$ tagot ismer a többiek közül, az ismeretség mindig kölcsönös. Bizonyítsuk be, hogy a társaság négy alkalmasan választott tagja leültethető egy asztal köré úgy, hogy mindegyikük pontosan egyet ismerjen a két asztalszomszédja közül.*

2. *Legyen ABC hegyesszögű háromszög, és legyen P olyan pont a háromszög belsejében, amely nem illeszkedik a háromszög egyik magasságvonalára sem. Az A, B, illetve C csúcsból induló magasság talppontját jelölje rendre A_1, B_1, illetve C_1. Messék a háromszög köré írt kört az AP, BP, CP félegyenesek rendre az A_2, B_2, C_2 pontokban. Bizonyítsuk be, hogy az AA_1A_2, BB_1B_2 és CC_1C_2 körívek egy ponton mennek át.*

3. *Legyen K egy zárt konvex sokszöglemez, X pedig egy pont K síkjában. Mutassuk meg, hogy X a K sokszöglemez belsejébe vagy kerületére vihető a K bizonyos oldalegyeneseire alkalmas sorrendben végzett véges sok tengelyes tükrözés egymásutánjával, ha ugyanarra az oldalegyenesre többször is tükrözhetünk.*

A bizottság a beérkezett dolgozatok átnézése után, december 1-jei ülésén a következő jelentést fogadta el:

„A verseny minden helyszínen rendben zajlott le. Budapesten a megjelent 42-ből 41, míg a további helyszíneken összesen 53 versenyző adott be dolgozatot.

Az idei versenyen az első feladat bizonyult a legkönnyebbnek: számos versenyző helyesen oldotta meg. A második feladatra 10 lényegében helyes megoldás érkezett, míg a harmadik feladatban bár többen értek el részeredményt, a megoldás közvetlen közelébe mindössze öt versenyző jutott el.

Egyetlen versenyző oldotta meg mindhárom feladatot. Ezért a teljesítményéért

I. díjban és 50 000 Ft pénzjutalomban részesül

Di Giovanni Márk, a győri Révai Miklós Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Árki Tamás, Pósa Lajos, Dobos Sándor* és *Juhász Péter*).

Két versenyző az első két feladat helyes megoldása mellett nagyrészt megoldotta a harmadik feladatot is. Ezért

II. díjban és fejenként 25 000 Ft pénzjutalomban részesül

Fehér Zsombor, a Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Dobos Sándor, Pósa Lajos, Kiss Gergely* és *Kós Géza*) és

Janzer Barnabás, a Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Dobos Sándor, Gyenes Zoltán, Pósa Lajos, Surányi László* és *Kiss Gergely*).

Két további versenyző akadt, akiknek teljesítménye lényegesen több két megoldott feladatnál. Ennek megfelelően

I. dicséretet és fejenként 10 000 Ft pénzjutalmat kap

Maga Balázs, a Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója, jelenleg az ELTE matematika BSc szak hallgatója (tanárai *Hraskó András, Kiss Gergely, Hegedűs Pál, Surányi László, Dobos Sándor* és *Juhász Péter* voltak), aki megoldotta az első feladatot, a másodikban a kitűzöttnél valamivel gyengébb eredményt igazolt, a harmadikra adott megoldása pedig hiányos, valamint

Simon Péter, a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium érettségizett tanulója, jelenleg az ELTE hallgatója (tanárai *Juhász Péter, Nemecskó István, Pósa Lajos* és *Sztranyák Attila* voltak), aki az első két feladatot oldotta meg és a harmadikban is jó irányba indult.

Hat versenyző lényegében két feladatot oldott meg. A bizottság

II. dicséretben és fejenként 5000 Ft pénzjutalomban részesíti az alábbi versenyzőket:

Baran Zsuzsanna, a debreceni Fazekas Mihály Gimnázium 10. osztályos tanulója, (tanárai *Tóth Mariann, Lakatos Tibor* és *Pósa Lajos*);

Gyulai-Nagy Szuzina, a szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai *Ábrahám Gábor, Tigyi István* és *Kosztolányi József*);

Homonnay Bálint, a Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója, jelenleg az ELTE BTK szabad bölcsész hallgatója (tanárai *Hraskó András, Pósa Lajos, Kiss Gergely* és *Pelikán József* voltak);

Kúsz Ágnes, a makói József Attila Gimnázium érettségizett tanulója, jelenleg az ELTE matematika BSc szak hallgatója (tanárai *Rójáné Oláh Erika* és *Kosztolányi József* voltak);

Nagy-György Pál, a szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Ábrahám Gábor* és *Schultz János*), valamint

Szabó Barnabás, a Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai *Gyenes Zoltán, Kiss Géza, Surányi László, Dobos Sándor* és *Pósa Lajos*).

A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző és felkészítő tanár munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva szívből gratulál."

A 2014. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása

1. *Egy n tagú társaság minden tagja legalább egy, de legfeljebb $n-2$ tagot ismer a többiek közül, az ismeretség mindig kölcsönös. Bizonyítsuk be, hogy a társaság négy alkalmasan választott tagja leültethető egy asztal köré úgy, hogy mindegyikük pontosan egyet ismerjen a két asztalszomszédja közül.*

1. megoldás. Legyen A a társaság egy olyan tagja, aki a társaságból a lehető legtöbb személyt ismeri. Legyen B egy olyan illető, akit A nem ismer, C pedig legyen B egy ismerőse. Mivel C-nek legfeljebb annyi ismerőse van, mint A-nak, ezért függetlenül attól, hogy A és C ismeri-e egymást, A-nak legalább annyi C-től különböző ismerőse van, mint ahány A-tól különböző ismerőse van C-nek. A konstrukció folytán C ismeri azt a B-t, akit A nem ismer. Ezért A-nak bizonyosan van olyan C-től különböző D ismerőse, akit C nem ismer. Ekkor ha A, B, C és D ebben a sorrendben ülnek az asztalhoz, akkor éppen a feladatban kirótt feltételt teljesítik. $\square$

2. megoldás. Készítsük el az élszínezett G gráfot az n pontú teljes gráfból az alábbiak szerint. A G gráf csúcsait kölcsönösen egyértelműen megfeleltetjük a társaság tagjainak, és G egy éle akkor legyen piros, ha a csúcsoknak megfelelő tagok nem ismerik egymást, egyébként pedig az adott él színe legyen zöld.

A bizonyítandó állítás átfogalmazható úgy, hogy ha a teljes gráf éleit úgy színezzük pirosra és zöldre, hogy minden csúcsból indul piros és zöld él is, akkor a gráfban van tarka négyszög, azaz négy különböző A, B, C és D csúcs úgy, hogy míg az AB és CD élek pirosak, addig a BC és DA élek zöldek. Az alábbiakban ezt az állítást fogjuk n szerinti teljes indukcióval igazolni. Ez az állítás $n=1$ esetén nyilvánvalóan teljesül, hiszen a feltevés lehetetlent kíván.

Tegyük fel tehát, hogy legfeljebb $n-1$ csúcsú gráfokra már igazoltuk az indukciós állítást, és a vizsgált G-nek n csúcsa van. Legyen A a G egy csúcsa. Ha az A törlésével keletkező $G-A$ gráf minden csúcsából indul piros és zöld él is, akkor kész vagyunk, hisz az indukciós feltevés miatt $G-A$-ban van tarka négyszög, ami persze egyúttal G-ben is tarka négyszög. Feltehetjük tehát, hogy $G-A$ egy B csúcsából (mondjuk) csak piros él indul (és persze AB zöld). Ha most $G-B$-ben nincs tarka négyszög, akkor az indukciós feltevés miatt $G-B$-ben van olyan C csúcs, amelyből csupa egyszínű él indul.

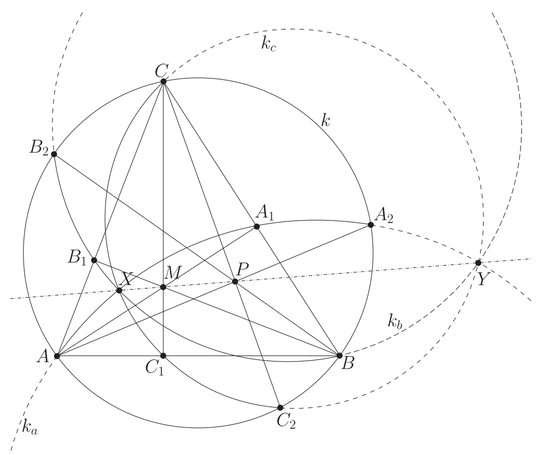
Ha $A=C$, akkor a zöld AB élen kívül A-ból és B-ből csak piros élek indulnak. Legyen BX egy piros, XY pedig egy zöld él. Mivel XY zöld, ezért $Y \neq A$, tehát $ABXY$ tarka négyszög. Ha pedig $A \neq C$, akkor legyen AD egy A-ból induló piros él. A konstrukció folytán AB zöld, BC piros, CD zöld és DA piros, tehát $ABCD$ egy G-beli tarka négyszög. Az indukciós állítást ezzel igazoltuk, a bizonyítás ezzel teljes. $\square$

Megjegyzés. Általában nem igaz, hogy egy 4-személyesnél nagyobb asztalhoz is biztosan le tudjuk ültetni a társaság néhány tagját a feladatban leírt módon. Ha ugyanis a társaságban van két olyan ismerős, hogy egyikük se ismeri a társaság egyetlen más tagját sem, továbbá e két ismerősön kívül mindenki mindenkit ismer, akkor teljesül a feladatban kirótt feltétel, de 4-nél több ember nem ültethető le a kívánt módon.

2. *Legyen ABC hegyesszögű háromszög, és legyen P olyan pont a háromszög belsejében, amely nem illeszkedik a háromszög egyik magasságvonalára sem. Az A, B, illetve C csúcsból induló magasság talppontját jelölje rendre A_1, B_1, illetve C_1. Messék a háromszög köré írt kört az AP, BP, CP félegyenesek rendre az A_2, B_2, C_2 pontokban. Bizonyítsuk be, hogy az AA_1A_2, BB_1B_2 és CC_1C_2 körívek egy ponton mennek át.*

Megoldás. Jelölje az ABC, AA_1A_2, BB_1B_2 és CC_1C_2 köröket rendre k, k_a, k_b, illetve k_c; az ABC háromszög magasságpontja legyen M. A feltétel szerint az ABC háromszög hegyesszögű, ezért az A_1, B_1, C_1, M pontok k belsejében vannak.

A k kerületén az AA_2, BB_2 és CC_2 pontpárok páronként elválasztják egymást, ezért a k_a, k_b és k_c körök közül bármelyik kettő metszi egymást úgy, hogy az egyik metszéspontjuk k belsejében, a másik metszéspontjuk k-n kívül helyezkedik el. Legyen a k_a és a k_b körök metszéspontja k belsejében X, a másik metszéspontjuk legyen Y. Azt fogjuk megmutatni, hogy a k_c kör is átmegy az X és Y pontokon.



A P pont k-ra vonatkozó hatványa

$$PA \cdot PA_2 = PB \cdot PB_2 = PC \cdot PC_2.$$

Ezek a szorzatok egyben a P hatványai a k_a, k_b, illetve k_c körökre. Tehát a P pontnak a k_a, k_b és k_c körökre vonatkozó hatványa ugyanakkora.

Hasonlóan, az M pontnak az ABA_1B_1, BCB_1C_1, CAC_1A_1 körökre vonatkozó hatványa

$$MA \cdot MA_1 = MB \cdot MB_1 = MC \cdot MC_1.$$

Ezek a szorzatok pedig az M hatványai a k_a, k_b, illetve k_c körökre. Tehát az M pontnak a k_a, k_b és k_c körökre vonatkozó hatványa is ugyanakkora.

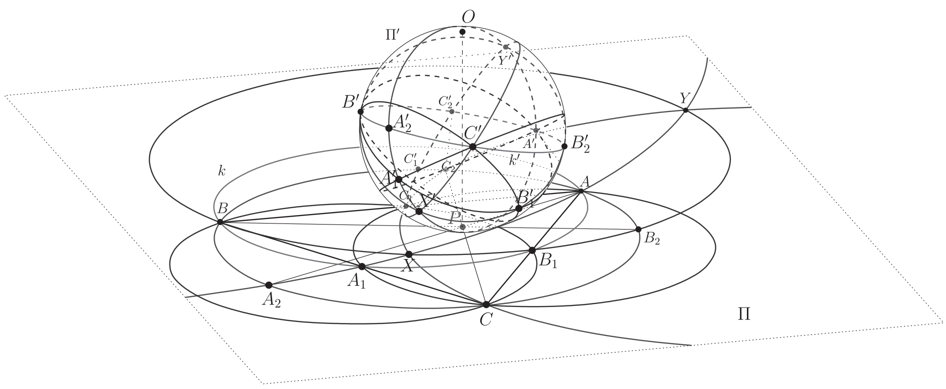
A feltétel szerint P és M különböző. Így a PM egyenes a k_a, k_b és k_c körök közös hatványvonala. A három kör tehát egy körsorhoz tartozik, így k_a és k_b metszéspontjain átmegy k_c is.

Ezzel megmutattuk, hogy a k_a, k_b, illetve k_c körök k-n belüli ívei, nevezetesen az AA_1A_2, BB_1B_2 és CC_1C_2 körívek egy ponton mennek át. $\square$

Megjegyzés. Egy alkalmas sztereografikus projekcióval (térbeli inverzióval) visszavezethetjük az állítást arra a jól ismert tényre, hogy a gömbfelületen bármely három körvonal páronként vett hatványvonalai egy átmérőre illeszkednek.

Jelöljük Π-vel az ABC háromszög síkját, és legyen Γ az a gömb, amelynek a k főköre. A P pontban állítsunk merőleges egyenest Π-re; legyen ennek egyik döféspontja a Γ-val O. Invertáljuk az ábrát az O középpontú, P-n átmenő gömbre; a szokásos módon tetszőleges x objektum képét jelöljük x'-vel. Az inverzió jól ismert tulajdonságai szerint a Π sík képe az OP átmérőjű Π' gömb; a Π síkban fekvő körök képei a gömbfelületen fekvő körvonalak. Speciálisan, a BCB_1C_1, a CAC_1A_1 és az ABA_1B_1 körök képei a $B'C'B_1'C_1'$, a $C'A'C_1'A_1'$ és az $A'B'A_1'B_1'$ körvonalak.

A Γ gömb definíciója szerint a Π sík és a Γ gömb merőlegesen metszi egymást a k kör mentén. Mivel az inverzió szögtartó, az Γ' sík és a Π' gömb is merőlegesen metszi egymást a k' kör mentén, így k' a Π' gömbnek főköre.



Vegyük észre, hogy az A' és A_2' pontokon a Π' gömbnek legalább két különböző főköre is átmegy: ilyen a k' kör, és az $OA'PA_2'$ kör is. (Utóbbi átmegy az átellenes O és P pontokon, de nem szerepel az *ábrán.*) Ebből következik, hogy a Π' gömbön A' és A_2' átellenes pontok, és az $A'A_1'A_2'$ körvonal is főkör. Ez a főkör átmegy a $C'A'C_1'A_1'$ és az $A'B'A_1'B_1'$ körök metszéspontjain, A'-n és A_1'-n; tehát az $A'A_1'A_2$ körvonal nem más, mint $C'A'C_1'A_1'$ és az $A'B'A_1'B_1'$ körök hatványvonala.

Hasonlóan kapjuk, hogy a $B'C'B_1'C_1'$ és az $A'B'A_1'B_1'$ kör hatványvonala a $B'B_1'B_2'$ főkör, illetve hogy a $B'C'B_1'C_1'$ és az $C'A'C_1'A_1'$ kör hatványvonala a $C'C_1'C_2'$ főkör.

A három hatványvonal két, egymással átellenes közös ponton megy át; jelölje ezeket X' és Y' úgy, hogy X és O a k' főkör ellentétes oldalán legyenek. Az X', Y' pontokat O-ból visszavetítve a Π síkra, megkapjuk az AA_1A_2, BB_1B_2, és CC_1C_2 körök közös pontjait: az X pont a k körön belül, az Y pont a k körön kívül lesz.

3. *Legyen K egy zárt konvex sokszöglemez, X pedig egy pont K síkjában. Mutassuk meg, hogy X a K sokszöglemez belsejébe vagy kerületére vihető a K bizonyos oldalegyeneseire alkalmas sorrendben végzett véges sok tengelyes tükrözés egymásutánjával, ha ugyanarra az oldalegyenesre többször is tükrözhetünk.*

Megoldás. Alkossák a H halmazt a K sokszöglemez S síkjának mindazon pontjai, amelyek véges sok, a K oldalegyeneseire végzett tükrözés egymásutánjával K-ba vihetők. A mi feladatunk a $H=S$ egyenlőség igazolása. Világos, hogy $K\subseteq H$, továbbá a konstrukció folytán H tükrös K minden oldalegyenesére. Legyen $\mathcal{E}$ a H tükörtengelyeinek halmaza. Világos, hogy ha $t_1,t_2\in\mathcal{E}$ és t_1' a t_1 tükörképe t_2-re, akkor $t_1'\in\mathcal{E}$, ahol azaz H tükrös minden olyan egyenesre is, amelyet H egy tükörtengelyének a H egy másik tükörtengelyére való tükrözésével kapunk.

Mivel $K\subseteq H$, ezért H tükörszimmetriái folytán K-nak minden olyan K' képe is H-ban fekszik, amit K-ból $\mathcal{E}$-beli egyenesekre vonatkozó tükrözések egymásutánjával kapunk. Ráadásul az így kapható K' sokszögek minden oldalegyenese $\mathcal{E}$-beli, azaz a H egy tükörtengelye.

Jelölje $r\geqslant 0$ esetén K^r az S sík azon pontjait, amelyek legfeljebb r távolságra vannak a K sokszöglemeztől. Megmutatjuk, hogy $K^r\subseteq H$ teljesül alkalmas $r>0$ esetén. Válasszunk egy olyan $R>0$ számot, amelyre a K csúcsai köré írt R sugarú körlemezek mindegyikének a K-val vett metszete körcikk. Egy ilyen R sugarú körcikk tükörképe a körcikket határoló sugár egyenesére H-ban fekszik, hiszen a tükrözés tengelyére H szimmetrikus. Sőt: ha a tükörképként kapott körcikket tükrözzük egy azt határoló sugár egyenesére, akkor az így kapott kép is H-ban marad, és ugyanez az így kapott tükörképek tükörképeire is igaz. Ezért a K csúcsai köré írt R sugarú körlemezek mindegyike része H-nak. Tekintsük a K sokszöglemeznek, a K csúcsai köré írt R sugarú köröknek és a K-nak a K oldalegyeneseire vett tükörképeinek K^* unióját. Könnyen látható, hogy van olyan $r>0$ szám, amelyre $K^r\subseteq K^*$ teljesül, tehát alkalmas n-re

$$K^r\subseteq K_1\cup K_2\cup\ldots\cup K_n\subseteq H, \tag{1}$$

ahol minden egyes K_i-t a H bizonyos tükörtengelyeire való tükrözések egymásutánjával kapunk K-ból.

Most tegyük fel, hogy $K^t\subseteq H$ valamely $t>0$-ra. Vegyük észre, hogy ha azokat a tükrözéseket, amelyek a K sokszöget K_i-be viszik a K helyett a K^t alakzatra végezzük el, akkor a kapott kép éppen K_i^t lesz. Vagyis ha $K^t\subseteq H$, akkor $K_i^t\subseteq H$, amiből (1) miatt

$$K^{(r+t)}\subseteq K_1^t\cup K_2^t\cup\ldots\cup K_n^t\subseteq H$$

következik. Az adódott tehát, hogy ha $K^t\subseteq H$, akkor $K^{t+r}\subseteq H$. Láttuk azonban, hogy $K^r\subseteq H$, ezért $K^{2r}\subseteq H$, innen $K^{3r}\subseteq H$ stb. Így aztán

$$H\subseteq S=K^r\cup K^{2r}\cup K^{3r}\cup\ldots\subseteq H$$

adódik, ahonnan $H=S$ következik, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk. □

Megjegyzések. 1. Úgy kaphatunk egy lehetséges másik megoldást a feladatra, ha követjük a fenti bizonyítás első két bekezdését, majd azt igazoljuk, hogy az S sík lefedhető azokkal a K-val egybevágó sokszöglemezekkel, amelyeket K-ból megkaphatunk annak az operációnak a véges sokszori alkalmazásával, amelyben egy sokszöglemezt tükrözünk annak egy oldalegyenesére. Minden így kapott K' sokszöglemez ugyanis része H-nak, hiszen H szimmetrikus az operáció során használt tükörtengelyekre. Érdemes megfigyelni az alábbiakat. Legyen P a K sokszöglemez S síkjának egy pontja. Kössük össze P-t a K

egy Q belső pontjával, és indítsunk el egy biliárdgolyót Q-ból a QP félegyenes mentén. Ha a K sokszöglemezt egy biliárdasztalnak gondoljuk, amelynek határát elérve a bilárdgolyó a fizikai törvényeknek megfelelően pattan vissza (azaz úgy, hogy a visszapattanó golyó pályáját tükrözve az éppen elért oldal egyenesére pontosan az adott oldal elérését megelőző pályaegyenes meghosszabbítását kapjuk), akkor a K sokszöglemeznek az a pontja, amelybe a biliárdgolyó $|\overline{PQ}|$ távolság megtétele után kerül, egy olyan pont lesz, amelybe P betükrözhető. Ha a feladat megoldását erre a megfigyelésre szeretnénk alapozni, akkor vizsgálni kell, mi is történik akkor, ha a biliárdgolyó az útja során K egy csúcsába jut. Nem lehetetlen ezt az esetet jól kezelni, de azt sem nehéz igazolni, hogy ilyenkor Q helyett választható K-nak egy másik Q' pontja, amelyből a golyót útjára indítva már nem ütközünk K csúcsába. Egy másik nehézség annak igazolása, hogy bármelyik pontból bármelyik irányba is indítjuk a biliárdgolyót, az tetszőlegesen nagy távolságot meg tud tenni a K sokszöglemezen. Ennek belátását az olvasóra bízzuk.

2. Könnyen látható, hogy a feladatban nem lényeges feltétel a K sokszöglemez konvex volta. Tekintsük ugyanis K összes oldalegyenesét. Ezek a síkot konvex tartományokra bontják fel. A konstrukcióból adódóan minden ilyen tartomány vagy része K-nak vagy diszjunkt K belsejétől. Tekintsünk egy K-ban elhelyezkedő, konvex K' tartományt. A K' minden oldalegyenese egyúttal oldalegyenese K-nak is, ezért ha a K'-re igazoltuk a feladat állítását, akkor abból azonnal következik, hogy K is rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Sőt, az is igaz, hogy K oldalegyeneseire végrehajtott tükrözések egymásutánjával K síkjának tetszőleges pontja a K-nál szűkebb K' konvex sokszöglemez belsejébe vagy határára tükrözhető.

Fleiner Tamás

Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

1. Számítsuk ki az A kifejezés pontos értékét:

$$A=\left(\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}}\right)^{-2}\cdot\left(14-\sqrt{12}-\sqrt{96}\right)^2\cdot\left(\frac{2^2}{2015}\right)^{-1}. \qquad (\textit{11 pont})$$

2. Egy sakkversenyen mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig 25 játszmát fejeztek be, és mindenkinek még hátravan 4 játszmája. Hány sakkozó vesz részt a versenyen? (*12 pont*)

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{625^x-81^x}{375^x+135^x}=\frac{2}{\sqrt{15}}. \qquad (\textit{14 pont})$$

4. Egy egyenlő szárú háromszög súlypontja illeszkedik a háromszög beírható körére. Mekkorák a háromszög szögei? Bizonyítsuk be, hogy a beírt kör szárakon lévő két érintési pontja három egyenlő részre osztja a kör kerületét. (*14 pont*)

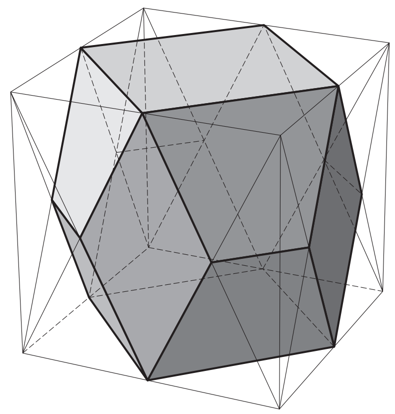
II. rész

5. Vizsgáljuk meg az alábbi egyenlet megoldhatóságát az m paraméter függvényében:

$$\mathrm{tg}^2\,x+\mathrm{ctg}^2\,x+2\sin^2 x+2\cos^2 x+3m^2=4m(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x).\qquad (16\ pont)$$

6. A teafűből a forró vízben a kellemes ízeket adó anyagok gyorsabban kioldódnak, mint a káros csersavak. Előfordul, hogy a teafüvet véletlenül hosszabb ideig hagyjuk a vízben, mint szükséges lenne, ilyenkor a csersavaktól keserű lesz a tea. Az időt percekben mérve, a $t\in[0,30]$ intervallumon közelítsük a percenként kioldódó csersav mennyiségét a $v(t)=-t^3+25t^2+150t$ függvénnyel. Hány százalékkal több csersav oldódik ki a teafűből, ha a szükséges 5 perc helyett 10 vagy 15 percig benne felejtjük a filtert a vízben? (*16 pont*)

7. Egyik lapjára állított 18 cm élhosszúságú kockából kiindulva bonbonos dobozt tervezünk. Az alap és fedőlap oldalfelező pontjait összekötjük a szemközti lap közelebbi csúcsaival, az *ábrának* megfelelően. A keletkező háromszög alapú gúlákat elhagyjuk a kockából. Az így létrejött testet, a bonbonos dobozt, papírból fogjuk elkészíteni, 30% ragasztási felület, illetve hulladék ráhagyásával. Mennyi papírra lesz szükségünk? Mekkora lesz a doboz térfogata? Mekkora szöget zárnak be a trapéz alakú lapok egymással? (*16 pont*)



8. Mekkora szögben látszik az alábbi körök közös húrja az origóból?

$$x^2+y^2+4x-2y-20=0,$$
$$x^2+y^2-8x-8y+22=0.\qquad (16\ pont)$$

9. A zöldséges 1 hetes, 2 hetes és 3 hetes narancsokat árul. Annak a valószínűsége, hogy egy 1 hetes narancs romlott, 0,01. Ez a valószínűség a tapasztalatok szerint hetente megduplázódik. A zöldségesnél jelenleg 25 kg 1 hetes, 17 kg 2 hetes és 6 kg 3 hetes narancs van. A narancsok tömege egyformának tekinthető, 5 db 1 kg. Egyik reggel a pakoláskor összekeveredtek a narancsok.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott narancs romlott?

b) Véletlenszerűen kiválasztottunk egy narancsot, ami jó. Mekkora a valószínűsége, hogy 3 hetes?

c) Vettünk 2 kg narancsot. Mekkora a valószínűsége, hogy mind jó? És annak, hogy legalább 3 romlott? (*16 pont*)

Lorántfy László (Dabas)

Megoldásvázlatok a 2015/1. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

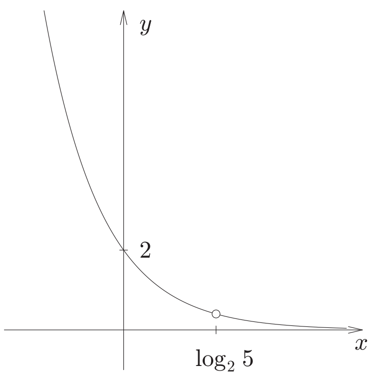
1. *Ábrázoljuk és jellemezzük az alábbi függvényt a lehető legbővebb számhalmazon:*

$$f: x \longmapsto \left(\frac{2^x+5}{2^{x+1}-10}-\frac{2^x-5}{2^{x+1}+10}-\frac{50}{25-4^x}\right):\frac{5\cdot 2^x}{2^x-5}. \qquad (11\ pont)$$

Megoldás. Legyen $a=2^x$. Ekkor a megfelelő feltételek mellett ($a>0$ és $a\neq 5$, vagyis $x\neq \log_2 5$):

$$\left(\frac{a+5}{2a-10}-\frac{a-5}{2a+10}-\frac{50}{25-a^2}\right):\frac{5a}{a-5}=$$

$$=\frac{(a+5)^2-(a-5)^2+100}{2(a-5)(a+5)}\cdot\frac{a-5}{5a}=\frac{20a+100}{2(a+5)}\cdot\frac{1}{5a}=\frac{2}{a}.$$



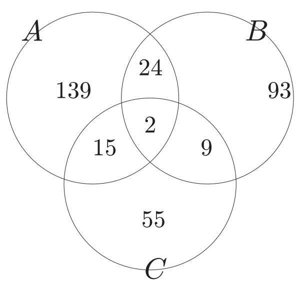
Az ábrázolandó függvény tehát

$$f: x\mapsto \frac{2}{2^x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}.$$

Jellemzése:
- $D_f=\mathbb{R}\setminus\{\log_2 5\}$,
- $R_f=\mathbb{R}^+\setminus\left\{\frac{2}{5}\right\}$,
- nullahelye nincs,
- tengelymetszete $y=2$-nél,
- szigorúan monoton csökkenő $x\in D_f$-en,
- konvex.

2. *Mennyi a valószínűsége, hogy a háromjegyű pozitív egészek közül találomra olyat választunk, mely az* 5, *a* 7, *illetve a* 11 *egyikével sem osztható?* (*12 pont*)

Megoldás. $9\cdot 10\cdot 10=900$ háromjegyű szám van. Legyen A az 5-tel, B a 7-tel és C a 11-gyel osztható számok halmaza. Ekkor



$$|A|=180,$$
$$|B|=128,$$
$$|C|=81,$$
$$|A\cap B|=26,$$
$$|A\cap C|=17,$$
$$|B\cap C|=11 \quad\text{és}$$
$$|A\cap B\cap C|=2.$$

A 7-tel, vagy 11-gyel, vagy 13-mal oszthatók száma (a logikai szita módszere szerint):

$$|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=337.$$

Tehát a keresett valószínűség:

$$p=\frac{\text{jó esetek száma}}{\text{összes eset}}=\frac{563}{900}=0{,}626.$$

3. *Matematikus barátunk statisztikát csinál a kiránduláson készített* 500 *fényképéről. Azt találja, hogy a méretük átlaga* 2,84 MB, *s a legnagyobb méretű képe* 3,65 MB-os.

a) Mennyi a méretük szórásának legkisebb értéke?

b) Legfeljebb mekkora lehet a méretük szórása, ha a terjedelem 1,62 MB? (*14 pont*)

Megoldás. *a*) A szórás legkisebb értéke ugyanott van, ahol a négyzetéé. Így D^2 minimumát keressük, s a számtani és kvadratikus közepek közötti egyenlőtlenséggel adjuk meg azt:

$$D^2=\frac{(3{,}65-2{,}84)^2+\sum_{i=1}^{499}(2{,}84-x_i)^2}{500}.$$

Ekvivalens átalakításokkal:

$$500D^2-(3{,}65-2{,}84)^2=\sum_{i=1}^{499}(2{,}84-x_i)^2.$$

A jobb oldalra felírva a számtani-kvadratikus közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\sum_{i=1}^{499}(2{,}84-x_i)^2=499\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{499}(2{,}84-x_i)^2}{499}}\right)^2\geqslant 499\left(\frac{\sum_{i=1}^{499}|2,84-x_i|}{499}\right)^2\geqslant$$

$$\geqslant 499\left(\frac{\sum_{i=1}^{499}(2{,}84-x_i)}{499}\right)^2\geqslant 499\left(\frac{499\cdot 2,84-\sum_{i=1}^{499}x_i}{499}\right)^2.$$

A kapott kifejezés értéke konstans, hiszen a $\sum_{i=1}^{499}x_i$ a maradék 499 elem összege, $500\cdot 2{,}84-3{,}65$. Ez azt jelenti, hogy a bal oldalon lévő kifejezés értéke legalább ekkora, s az egyenlőség akkor áll fenn, ha minden maradék elem ugyanakkora és legfeljebb 2,84. Legyen ez az érték x^*. Ekkor az átlagra igaz, hogy $2{,}84=\frac{499x^*+3{,}65}{500}$, amiből $x^*=2{,}8384<2{,}84$. Tehát a szórás $x^*=2{,}8384$ esetén lesz a legkisebb, s ez a minimális érték $D=0{,}036$.

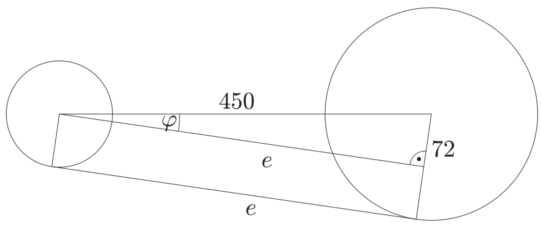
b) A legnagyobb szórás akkor lesz, ha minden kép mérete a legtávolabb van az átlagtól. Miután a legnagyobb 3,65 MB-os, ebből kell 250 darab, s 250 darab kell abból a méretből, mely az ellenkező irányban tér el ugyanennyit az átlagtól. Ekkor a szórás:

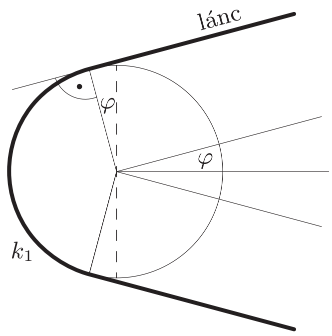
$$D=\sqrt{\frac{250\cdot(x_{\max}-\overline{x})^2+250\cdot(\overline{x}-x_{\min})^2}{500}}=\sqrt{\frac{500(3{,}65-2{,}84)^2}{500}}=3{,}65-2{,}84=0{,}81.$$

4. *A fixhajtású kerékpárnál fontos a lánc feszessége. Az első lánckerék sugara* 104 mm, *fogszáma* 52, *a hátsó lánckerék adatai pedig* 32 mm *és* 16 fog. *(A lánckerék sugarát úgy mértük, hogy az megegyezik egy, a lánckerékre illeszkedő láncszem középpontjának a lánckerék középpontjától mért távolságával.) Milyen hosszú láncra van szükségünk, ha a két lánckerék középpontjának távolsága* 450 mm? *Hány láncszemet tartalmaz ez a lánc?* (*14 pont*)

Megoldás. Az érintőszakasz hossza: $e = \sqrt{450^2 - 72^2} = 444{,}2$ mm.

$$\varphi = \arcsin \frac{72}{450} \approx 9{,}207^\circ.$$





A középponti szögek tételét felhasználva (miszerint az ívek aránya egy adott körben megegyezik a hozzájuk tartozó középponti szögek arányával):

$$\frac{k_1}{2 \cdot 32 \cdot \pi} = \frac{180^\circ - 2\varphi}{360^\circ} \implies k_1 \approx 90{,}25 \text{ mm},$$

$$\frac{k_2}{2 \cdot 104 \cdot \pi} = \frac{180^\circ + 2\varphi}{360^\circ} \implies k_2 \approx 360{,}15 \text{ mm}.$$

Így a teljes lánc hossza: $l = k_1 + k_2 + 2e \approx 1338{,}8$ mm.

Egy láncszem hossza: $\frac{2 \cdot 104 \cdot \pi}{52} \approx 12{,}566$ mm. Így a láncszemek számára $n \approx \frac{1338{,}8}{12{,}566} \approx$ $\approx 106{,}54$-et kapunk. Tehát legalább 107 láncszemre van szükségünk.

II. rész

5. *Milyen $m \in \mathbb{R}$ paraméter esetén lesz hegyesszögű α megoldása a következő egyenletnek?*

$$\cos^2 \alpha - (18 - 2m) \cos \alpha + m^2 + 3m + 3 = 0 \qquad (16\ pont)$$

Megoldás. Ahhoz, hogy legyen gyök, $D \geqslant 0$-nak kell teljesülnie:

$$(18 - 2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(m^2 + 3m + 3\right) \geqslant 0,$$

$$324 - 72m - 12m - 12 \geqslant 0,$$

$$\frac{26}{7} \geqslant m.$$

Ahhoz, hogy pozitív gyöke legyen (α akkor hegyesszögű, ha $\cos \alpha > 0$), mivel $x_1 \cdot x_2 > 0$ ($m^2 + 3m + 3 > 0$ igaz állítás), az $x_1 + x_2 > 0$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Ebből ismét a Viète-formulák felhasználásával az $m < 9$ feltételt kapjuk.

A koszinusz függvény maximális értéke 1, s a feltétel miatt 1 sem lehet (α hegyesszög, így a 0° érték nem lehetséges). Emiatt a $\cos\alpha<1$ feltételnek is fenn kell állnia. A

$$\frac{18-2m\pm\sqrt{312-84m}}{2}<1$$

egyenlőtlenségből a

$$\pm\sqrt{78-21m}<m-8$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A korábbi feltételek miatt ennek a jobb oldala negatív, tehát a bal oldalon lévő kifejezésnél is csak a negatív érték lehetséges. A négyzetre emelés során a relációjel megfordul:

$$\begin{aligned}78-21m&>m^2-16m+64,\\0&>(m+7)(m-2),\\-7&<m<2.\end{aligned}$$

A feltételek alapján a megoldás:

$$\underbrace{m\leqslant\frac{26}{7}\quad\text{és}\quad m<9\quad\text{és}\quad -7<m<2}_{-7<m<2}.$$

6. *Ábrázoljuk a következő ponthalmazt a koordinátasíkon:*

$$H:=\left\{P(x;y)\;\middle|\;\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2-1}\leqslant 0\;\wedge\;|y|\leqslant 1\right\}$$

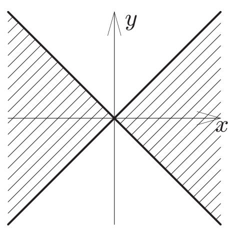
Mekkora a ponthalmaz területe? (*16 pont*)

Megoldás. A nevezőben lévő kifejezés az origó középpontú egységkör egyenletére emlékeztet. Emiatt a következő eseteket érdemes megvizsgálni:

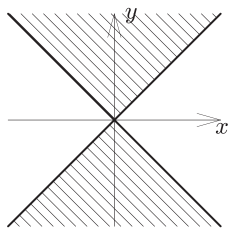
a) a körön belüli pontokról, vagy

b) a körön kívüli pontokról van szó.

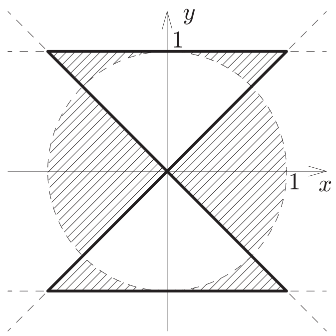
a) Ha a nevező negatív, vagyis az origó középpontú egységkörön belüli pontokról van szó, akkor a számlálónak nemnegatívnak kell lennie. Ekkor az $x^2\geqslant y^2$ áll fenn. E második feltételnek az *ábrán* látható pontok tesznek eleget.



b) Ha a nevező pozitív, vagyis az origó középpontú egységkörön kívüli pontokról van szó, akkor a számlálónak negatívnak kell lennie. Ekkor az $x^2\leqslant y^2$ áll fenn. E második feltételnek az *ábrán* látható pontok tesznek eleget.



A két fenti esetet, az egységkört, valamint az $|y| \leqslant 1$ feltételeket összevetve a következő ponthalmazt kapjuk:



A két negyedkör-cikk területéhez hozzáadva a négy kis szögletet kapjuk a keresett területet:

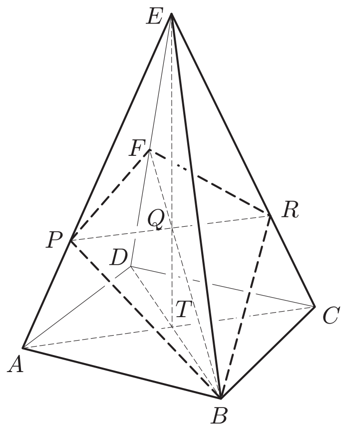
$$T = 2 \cdot \frac{1^2\pi}{4} + 4 \cdot \left[\frac{1 \cdot 1}{2} - \frac{1^2\pi}{8}\right] = \frac{\pi}{2} + 2 - \frac{\pi}{2} = 2.$$

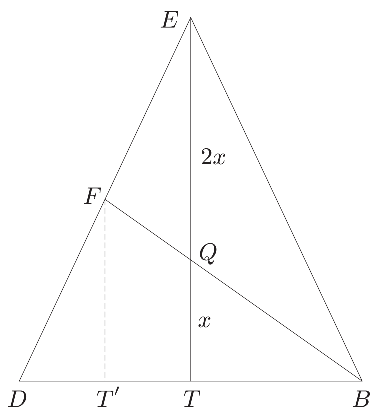
7. *Az $ABCD$ négyzet alapú egyenes gúla AE odalalélének P pontjára teljesül, hogy $AP : PE = 1 : 2$, valamint a CE oldalélének R pontjára igaz, hogy $CR : RE = 1 : 2$.*

a) Milyen arányban osztja a B csúcson, valamint a P és R pontokon átmenő sík a DE élt?

b) Hány százaléka a keletkező síkmetszet területe az alap négyzetlap területének, ha a gúla magassága az alaplap átlójának másfélszerese? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel az $ABCDE$ egyenes gúla, a PR szakasz a magasságot a Q harmadolópontban metszi. Vegyük a gúla DBE síkmetszetét. A DBE háromszögben a TE súlyvonalat a Q pont $1 : 2$ arányban osztja, tehát Q súlypont. Így a BQ meghosszabbítása a DE oldalt az F felezőpontban metszi (szintén súlyvonal).





b) Az egyenes gúla szimmetriája miatt $BF \perp PR$, a síkmetszet deltoid. Területét az átlók segítségével számoljuk ki.

A PR szakasz az AC 2/3-ad része, valamint a T' pont felezi az TD szakaszt (párhuzamos szelők tétele).

A feltétel szerint $TE = 3x = \frac{3}{2}DB$, tehát $TB = x$, amiből következik, hogy $\alpha = 45°$. Innen

$$\frac{T_{BRFP}}{T_{ABCD}} = \frac{\frac{PR\cdot BF}{2}}{\frac{AC\cdot BD}{2}} = \frac{\frac{2}{3}AC\cdot\sqrt{2}BT'}{AC\cdot BD} = \frac{\frac{2}{3}AC\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3}{4}BD}{AC\cdot BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tehát a $BRFP$ négyszög területe kb. 70,7 %-a az alaplap területének.

8. *Készítsünk „mérőhengert", mely az $f(x)=x^{10}$, ahol $x\in[-1;1]$ függvény y tengely körüli megforgatásával jön létre. A koordinátarendszer egységeit* dm-ben *mérjük. Készítsünk deciliterenként beosztást az oldalán. (Milyen magasságoknál lesznek az osztásvonalak?)* (*16 pont*)

Megoldás. Az egyszerűbb számolás kedvéért döntsük meg a mérőedényt 90°-kal. Így a megadott $f(x)=x^{10}$ függvény helyett annak inverzét, a $g(x)=\sqrt[10]{x}$ függvényt kell az x tengely körül megforgatnunk. A megforgatott függvény h_i intervallumhatárait kell úgy meghatározni, hogy a keletkező szeletek térfogata 1 legyen:

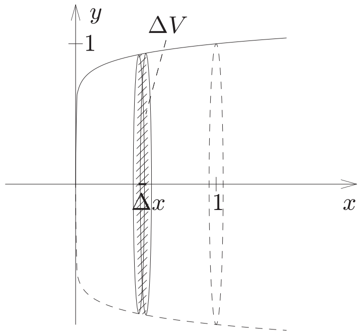
$$\int_0^{h_1} g(x)\,dx = \int_0^{h_1} \left(\sqrt[10]{x}\right)^2 \pi\,dx = 1$$

$$\pi\int_0^{h_1} x^{\frac{1}{5}}\,dx = 1,$$

$$\frac{5}{6}\pi\left[x^{\frac{6}{5}}\right]_0^{h_1} = 1,$$

$$\frac{5}{6}\pi {h_1}^{\frac{6}{5}} = 1,$$

$$h_1 \approx 0{,}4484 \text{ (dm)}.$$



Hasonlóképpen az integrált 2-ig számolva kaphatjuk a $h_2\approx 0{,}7990$ (dm) értéket. A következő osztás már nem fér az edény oldalára.

9. *Egy „piramisjáték" elindítója a második hétre már 4 embert sikeresen beszervezett, így öten lettek. (Az első hét a tervezés ideje volt.) A szervezés olyan jól sikerült, hogy a harmadik héttől kezdve minden héten a következő sorozat szerint alakult az összes résztvevő száma: $a_n = 3a_{n-1}-8$.*

a) Hányan vettek részt az ötödik héten a játékban?

b) Mutassuk meg, hogy az összes résztvevők száma monoton növekvő sorozatot alkot.

c) Írjuk fel explicit alakban a sorozatot.

d) Igazoljuk, hogy a sorozat utolsó számjegyei $n=2$-től kezdve periodikus sorozatot alkotnak. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Helyettesítsük be az egymást követő értékeket az adott rekurzív képletbe:

$$a_2 = 5, \qquad a_3 = 3\cdot 5 - 8 = 7,$$
$$a_4 = 3\cdot 7 - 8 = 13, \qquad a_5 = 3\cdot 13 - 8 = 31.$$

b) a_n akkor monoton növekedő, ha $3 \cdot a_{n-1} - 8 \geqslant a_{n-1}$, azaz $2a_{n-1} \geqslant 8$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$ esetén.

Ezt teljes indukcióval tesszük meg:

(*i*) Belátható, hogy az első elemekre teljesül: $10 \geqslant 8$, $14 \geqslant 8$, $\dots$.

(*ii*) Tegyük fel, hogy egy tetszőleges $(k-1)$-dik elemre teljesül az állítás, azaz $2a_{k-1} \geqslant 8$, ahol $k > 2$.

(*iii*) Belátjuk, hogy a következő elemre, a_k-ra is teljesül az állítás:

$$2a_k \underset{\text{def.}}{=} 6a_{k-1} - 16 = 3 \cdot (2a_{k-1}) - 16 \underset{\text{ind. felt.}}{\geqslant} 24 - 16 = 8.$$

Tehát a sorozat valóban monoton növekedő.

c) Írjuk fel az egyes elemek részletes kiszámítását:

$$\begin{aligned} a_4 &= 3 \cdot (3 \cdot 5 - 8) - 8, \\ a_5 &= 3 \cdot \big(3 \cdot (3 \cdot 5 - 8) - 8\big) - 8, \\ &\vdots \\ a_n &= 3^{n-2} \cdot 5 - 8 \cdot \big(3^{n-3} + 3^{n-4} + \dots + 3^0\big). \end{aligned}$$

Felhasználva a mértani sorozat első n elemére vonatkozó összegképletet:

$$a_n = 5 \cdot 3^{n-2} - 8 \cdot \frac{3^{n-2} - 1}{3 - 1} = 5 \cdot 3^{n-2} - 4 \cdot 3^{n-2} + 4 = 3^{n-2} + 4 \quad (n \geqslant 2).$$

d) Írjuk fel az első néhány végződést: 5, 7, 3, 1, 5, $\dots$.

A negyedik elem után az ötös végződést kapjuk ismét, amelyen a rekurzió képletét alkalmazva ismét a 7-es végződést kapjuk stb.

(A kétjegyű számokat $10N + c$ alakban felírva megmutatható, hogy az egyesek helyiértékén álló jegyen végzett művelet adja az újabb végződést, mely független a többi számjegytől: $3 \cdot (10N + c) - 8 = (3N) \cdot 10 + (3c - 8)$.)

Székely Péter
Budapest

Matematika feladatok megoldása

B. 4598. *Az $ABCD$ húrnégyszög átlóinak metszéspontja E, az AB és CD oldalak felezőpontja K, illetve M, az E pont merőleges vetülete a BC és AD oldalon pedig L és N. Bizonyítsuk be, hogy a KM és LN egyenesek merőlegesek egymásra.*

(*5 pont*) (Kvant)

I. megoldás. Legyen az AE szakasz felezőpontja F, a BE szakaszé pedig G. Az ANE és BLE háromszögek derékszögűek, ezért az AE, illetve EB átmérőjű

Thalész-körök ezen háromszögek köré írható körei, középpontjaik F és G. Emiatt $AF=FE=FN$ és $BG=GE=GL$.

Az $ABCD$ húrnégyszög, ezért $CBD\sphericalangle=CAD\measuredangle=\varphi$, mivel a CD ívhez tartozó kerületi szögek. Így az előbbi derékszögű háromszögekben a középponti és kerületi szögek összefüggését felhasználva $NFE\sphericalangle=2\varphi$ és $EGL\sphericalangle=2\varphi$ (*1. ábra*).

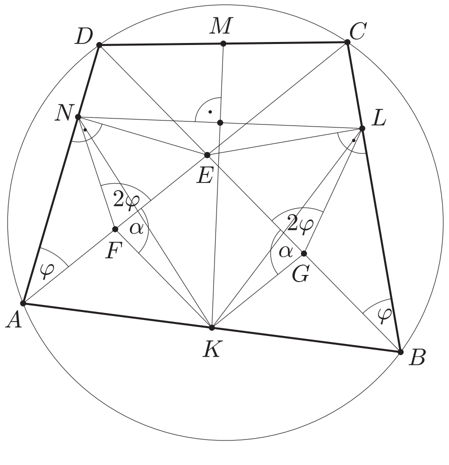
Az ABE háromszögben KF és KG középvonalak, ezért az $EFKG$ négyszög paralelogramma, így szemközti szögei egyenlők: $EFK\sphericalangle=KGE\sphericalangle=\alpha$.

Mivel $KG=FE=FN$ és $KF=GE=GL$, azért $NFK\triangle\cong KGL\triangle$, mivel két oldaluk és a közbezárt szög megegyezik. Tehát $NK=KL$, vagyis az LNK háromszög egyenlő szárú, így NL alapjának felezőmerőlegese átmegy a K ponton.

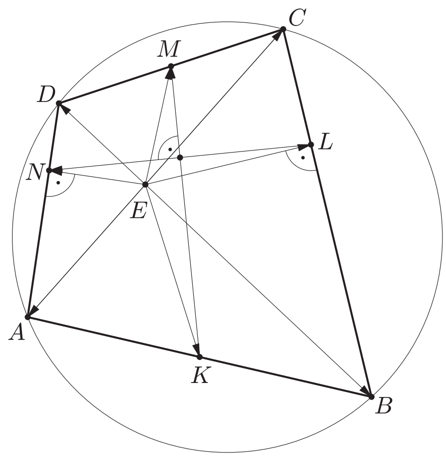
Hasonló gondolatmenettel belátható, hogy az LNM háromszög is egyenlő szárú, és LN alapjának felezőmerőlegese átmegy az M ponton.

Beláttuk, hogy az LN szakasz felezőmerőlegese átmegy K és M pontokon is, vagyis KM valóban merőleges az NL szakaszra, sőt még felezi is.

Az ábrán $CBD\sphericalangle$ és $CAD\sphericalangle$ hegyesszögek. Ilyenkor L és N pontok a BC és AD szakaszok belső pontjai. Ha a két szög tompaszög lenne, akkor ezek a pontok az AD és BC szakaszok meghosszabbításán keletkező külső pontok lesznek, de a gondolatmenet változatlanul működik.



1. ábra



2. ábra

Ha a két szög derékszög, akkor a pontok a CD szakasz Thalész-körén lesznek rajta, azaz L és N megegyezik az A és B pontokkal. Ekkor KM egyenes a Thalész-kör átmérője, ami áthalad LN, azaz AB húr felezőpontján, ezért éppen a húr felezőmerőlegese.

Győrfi-Bátor András (Kaposvár, Táncsics Mihály Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Dolgozzunk vektorokkal! Legyen E az origó, a négy csúcsba mutató vektor $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ (*2. ábra*). M helyvektora $\frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}$ és K helyvektora $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, tehát

$$\overrightarrow{KM}=\frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}=\frac{\mathbf{d}-\mathbf{a}}{2}+\frac{\mathbf{c}-\mathbf{b}}{2}.$$

Az EN egyenes irányvektora az $\overrightarrow{AD}=\mathbf{d}-\mathbf{a}$ vektor $90°$-os elforgatottja, az EL egyenesé pedig a $\overrightarrow{CB}=\mathbf{b}-\mathbf{c}$ vektoré. ($\mathbf{d}-\mathbf{a}$ $90°$-os elforgatottját jelölje $(\mathbf{d}-\mathbf{a})^{90}$. Mindkettőt pozitív irányba forgatjuk.)

$$\overrightarrow{LN}=\overrightarrow{EN}-\overrightarrow{EL}=\alpha\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{a})^{90}-\beta\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})^{90}=\alpha\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{a})^{90}+\beta\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b})^{90},$$

ahol $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Tehát ha $\alpha=\beta$, akkor az $\overrightarrow{LN}$ vektor valóban merőleges az $\overrightarrow{KM}$ vektorra.

Azt kell tehát még belátnunk, hogy az EN és EL távolságok úgy aránylanak egymáshoz, mint a négyszög AD és CB oldalai.

Mivel $ABCD$ húrnégyszög, $EDA\sphericalangle=BCE\sphericalangle$ és $EAD\sphericalangle=CBE\sphericalangle$, valamint nyilván $AED\sphericalangle=CEB\sphericalangle$. Így EDA háromszög hasonló ECB-hez, vagyis

$$\alpha=\frac{EN}{AD}=\frac{EL}{CB}=\beta,$$

tehát igaz az arányokra vonatkozó állítás.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Kabos Eszter (Budapesti Fazekas M. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

38 dolgozat érkezett. 5 pontos 32, 4 pontos 4, 3 pontos 2 dolgozat.

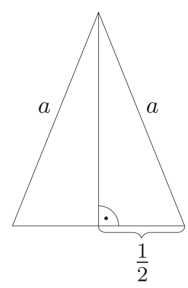
B. 4601. *Egy tetraéder egyik lapja egységnyi oldalú szabályos háromszög, továbbá van 3 darab a hosszúságú éle. Legfeljebb mekkora területű lehet a tetraéder merőleges vetülete egy síkon?*

(*6 pont*)

Megoldás. A tetraédernek négy csúcsa van, ezért bármely síkon lévő merőleges vetülete vagy háromszög, vagy konvex négyszög.

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor a vetület háromszög. E háromszög csúcsai a tetraéder három csúcsának vetületei, a tetraéder negyedik csúcsának vetülete pedig a háromszögbe esik. Tehát a vetület területe megegyezik az egyik lap vetületének területével. Ismert, hogy ha egy T területű sokszöget a síkjával α szöget bezáró síkra vetítünk és a vetület területe T_v, akkor $T_v=T\cos\alpha$ (ennek bizonyítása megtalálható pl. Hajós György: *Bevezetés a geometriába,* 36.7. tétel).

Tetraéderünknek kétfajta lapja van. Az egységnyi oldalú szabályos háromszög, ennek területe $\frac{\sqrt{3}}{4}$, valamint az olyan egyenlőszárú háromszög, amelynek alapja 1, szárai pedig a hosszúak. Az ilyen háromszög alaphoz tartozó magassága Pitagorasz tételéből következően $\sqrt{a^2-1/4}$ (*1. ábra*), ezért területe $\frac{\sqrt{a^2-1/4}}{2}$. Mivel $\cos\alpha \leqslant 1$, a tetraéder vetületének t területére

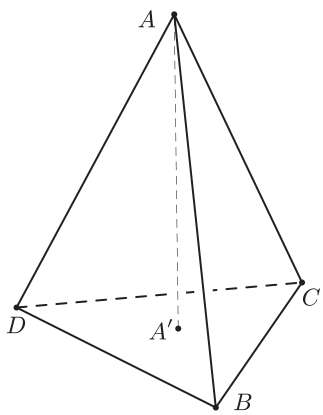


1. ábra

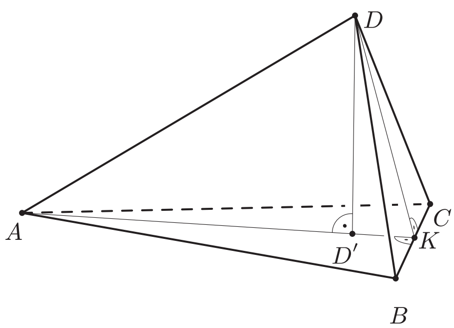
$$(1) \qquad t \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \text{illetve} \quad t \leqslant \frac{\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}}{2}$$

teljesül.

A tetraéder szabályos háromszöglapjának síkjára vetítünk, akkor e lap vetülete önmaga, a negyedik csúcs vetülete pedig a tetraéder szimmetriája miatt e lap középpontjába esik (*2. ábra*), tehát ebben az esetben a vetület területe $t=\frac{\sqrt{3}}{4}$. Ha pedig a csúcsok betűzését úgy választjuk, hogy $AB=AC=AD=a$ és $BC=CD=DB=1$ teljesül és az ABC lap síkjára vetítünk, akkor megmutatjuk, hogy a negyedik csúcs vetülete e lap belső pontja lesz, s így a vetület területe $t=\frac{\sqrt{a^2-1/4}}{2}$ (*3. ábra*). Mivel A is és D is egyenlő távolságra van B-től és C-től, ezért a BC szakasz felezőmerőleges síkjában A is és D is benne van, tehát $AD \perp BC$. Ezért ha a BC él felezőpontja K, akkor az AKD sík merőleges az ABC síkra. Vagyis D-nek az ABC síkon lévő vetülete megegyezik az AKD háromszög D-ből induló magasságának talppontjával. Ez pedig az AK szakasz belső pontja, ugyanis a háromszög oldalainak hossza $AD=a$, $AK=\sqrt{a^2-1/4}$ és $KD=\frac{\sqrt{3}}{2}$, tehát leghosszabb (AD) oldalának négyzete kisebb, mint a másik két oldal négyzetének összege, vagyis AKD hegyesszögű háromszög.



2. ábra



3. ábra

Ha a vetület konvex négyszög, akkor annak mind a négy csúcsa a tetraéder egy-egy csúcsának a vetülete, a négyszög e és f hosszú átlói pedig a tetraéder két kitérő élének vetületei. Sem a három darab 1 hosszú, sem a három darab a hosszú tetraéderélek közt nincsenek kitérőek, ezért feltehetjük, hogy az e hosszúságú átló valamely 1 hosszú, az f hosszúságú átló pedig valamely a hosszú tetraéderél vetülete. Merőleges vetítésnél bármely szakasz képének hossza legfeljebb akkora, mint az eredeti szakasz hossza, ezért $e \leqslant 1$ és $f \leqslant a$. Ismert, hogy ha egy konvex négyszög átlóinak hossza e és f, az átlók szöge pedig φ, akkor a négyszög területe $(ef\sin\varphi)/2$. Tehát ebben az esetben a tetraéder vetületének t területére

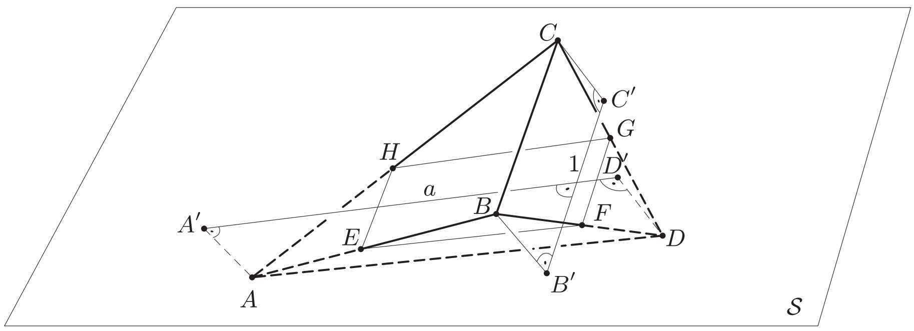
$$t \leqslant \frac{ef\sin\varphi}{2} \leqslant \frac{ef}{2} \leqslant \frac{a}{2} \tag{2}$$

teljesül.

Válasszuk a csúcsok betűzését ugyanúgy, mint az előző példában, legyen továbbá az AB, AC, DB és DC élek felezőpontja rendre E, H, F és G (*4. ábra*). Ekkor az ABD és ACD háromszögekben EF és GH az AD élhez, az ABC és BCD háromszögekben pedig HE és FG a BC élhez tartozó középvonalak. Ezért $EF \parallel AD \parallel GH$ és $HE \parallel BC \parallel FG$. Vagyis az E, F, G és H pontok egy $\mathcal{S}$ síkba esnek és paralelogrammát alkotnak. Továbbá a párhuzamosságok miatt az AD és BC egyenesek is párhuzamosak $\mathcal{S}$-sel. Mivel merőleges vetítésnél a vetítés irányára merőleges szakaszok hossza nem változik, ez azt jelenti, hogy az $ABCD$ tetraéder $\mathcal{S}$-en lévő merőleges vetülete egy olyan $A'B'C'D'$ négyszög, melyben $A'D' = AD = a$ és $B'C' = BC = 1$. Továbbá $AD \perp BC$ miatt $A'D' \perp B'C'$ is fennáll. Vagyis az $ABCD$ tetraéder $\mathcal{S}$ síkra eső merőleges vetületének t területére

$$t = \frac{a \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ}{2} = \frac{a}{2}$$

teljesül.



4. ábra

Most már csak azt kell megvizsgálnunk, hogy a különböző értékei esetén az (1) és (2) egyenlőtlenségek közül melyik ad nagyobb felső korlátot a vetület területére. A feladatban leírt tetraéder nyilván pontosan akkor létezik, ha a nagyobb, mint az egységnyi oldalú szabályos háromszög köré írható kör sugara, azaz ha $\frac{\sqrt{3}}{3} < a$. A $\frac{\sqrt{a^2-1/4}}{2} \leqslant \frac{a}{2}$ egyenlőtlenség triviálisan teljesül, ezért azt kell meghatároznunk, hogy $\frac{\sqrt{3}}{4} \leqslant \frac{a}{2}$ mikor áll fenn. Ez pontosan akkor teljesül, ha $\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant a$.

Tehát $\frac{\sqrt{3}}{3} < a \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ esetén a tetraéder bármely síkon lévő merőleges vetületének területe legfeljebb $\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant a$ esetén pedig legfeljebb $\frac{a}{2}$ lehet.

Simkó Irén (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 12. évf.)
dolgozatát felhasználva

29 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 10 versenyző: Ágoston Péter, Csépai András, Di Giovanni Márk, Fekete Panna, Fonyó Viktória, Forrás Bence, Kúsz Ágnes, Maga Balázs, Simkó Irén, Williams Kada. 5 pontos 4, 4 pontos 3, 3 pontos 3, 2 pontos 4, 1 pontos 4, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4629. *Oldjuk meg a*

$$2\sin\frac{3x}{2} = 3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

egyenletet.

(*5 pont*)

Megoldás. Alkalmazzuk az $x = t + \frac{2\pi}{3}$ helyettesítést. Ekkor az egyenlet

$$2\sin\left(\frac{3t}{2}+\pi\right) = 3\sin(t+\pi)$$

alakra hozható. Ezután kihasználva, hogy a szinusz függvény páratlan, látjuk, hogy

$$-2\sin\left(\frac{3t}{2}\right) = -3\sin t, \quad 2\sin\left(\frac{3t}{2}\right) = 3\sin t.$$

Egy kezelhetőbb alakot kaptunk. A szög háromszorosára és kétszeresére vonatkozó addíciós tételek $\frac{t}{2}$-re történő alkalmazásával

$$2\cdot\sin\frac{t}{2}\left(3-4\sin^2\frac{t}{2}\right) = 3\cdot 2\cdot\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}.$$

Rendezés is kiemelés után

$$\sin\frac{t}{2}\left(3-4\sin^2\frac{t}{2}-3\cos\frac{t}{2}\right) = 0.$$

Szorzat abban az esetben lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Emiatt

$$\sin\frac{t}{2} = 0 \quad \text{vagy} \quad 3-4\sin^2\frac{t}{2}-3\cos\frac{t}{2} = 0.$$

Az első egyenletből

$$\frac{t}{2} = k\pi \iff t = 2k\pi \iff x = \frac{2\pi}{3}+2k\pi, \quad \text{ahol} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

A második egyenlet a négyzetes összefüggés beírása után $\cos\frac{t}{2}$-re másodfokú:

$$3-4+4\cos^2\frac{t}{2}-3\cos\frac{t}{2}=0,\quad 4\cos^2\frac{t}{2}-3\cos\frac{t}{2}-1=0.$$

Ennek megoldásai

$$\cos\frac{t}{2}=1\quad\text{és}\quad\cos\frac{t}{2}=-\frac{1}{4}.$$

Ezek közül az elsőnek a gyökeit a $\sin\frac{t}{2}=0$ megoldásainál már rögzítettük.

A $\cos\frac{t}{2}=-\frac{1}{4}$ megoldásai

$$t\approx 1{,}8235+2l\pi\ (l\in\mathbb{Z}),\quad\text{illetve}\quad t\approx 4{,}4597+2m\pi\ (m\in\mathbb{Z}).$$

Innen a további x értékek

$$x\approx 3{,}9179+2l\pi\ (l\in\mathbb{Z}),\quad\text{továbbá}\quad x\approx 0{,}2709+2m\pi\ (m\in\mathbb{Z}).$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, az egyenlet összes megoldását megkaptuk, amelyek behelyettesítéssel ellenőrizhetők is.

Schefler Barna (Hám János Liceum, Szatmárnémeti, 9. évf.)
dolgozata alapján

34 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 24, 4 pontot 3 versenyző. 3 pontos 3, 2 pontos 1, 1 pontot kapott 2, 0 pontot 1 versenyző.

B. 4630. *Az A, B, C és D pontok nem esnek egy síkba. Határozzuk meg azon P pontok mértani helyét, amelyekre $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$.*

(*5 pont*)

Megoldás. Legyen az AC szakasz felezőpontja F_{AC}, a BD szakaszé F_{BD}. A paralelogramma-tétel miatt:

$$2PA^2+2PC^2=AC^2+4PF_{AC}^2,$$

$$2PB^2+2PD^2=BD^2+4PF_{BD}^2.$$

A feladatban szereplő egyenlőség tehát pontosan akkor teljesül, ha

$$AC^2+4PF_{AC}^2=BD^2+4PF_{BD}^2,$$

$$AC^2-BD^2=4PF_{BD}^2-4PF_{AC}^2,$$

$$PF_{BD}^2-PF_{AC}^2=\frac{AC^2-BD^2}{4}.$$

Az $\frac{AC^2-BD^2}{4}$ konstans, jelöljük c-vel. Helyezzük el az F_{AC} és F_{BD} pontokat egy koordináta-rendszerbe, $F_{AC}(0,0,0)$ és $F_{BD}(a,0,0)$. Legyenek P koordinátái

(x,y,z). Ekkor $PF_{AC}^2=x^2+y^2+z^2$ és $PF_{BD}^2=(x-a)^2+y^2+z^2$. Az egyenletünk:

$$(x-a)^2+y^2+z^2-x^2-y^2-z^2=c,$$

$$-2ax+a^2=c,$$

$$x=\frac{a^2-c}{2a}.$$

Ez egy síknak az egyenlete, amely merőleges az x tengelyre, vagyis az $F_{AC}F_{BD}$ egyenesre. Az $ABCD$ tetraéder körülírt gömbjének középpontján nyilván átmegy, mert itt $PA=PB=PC=PD$, tehát a feltétel triviálisan igaz. Így a feladatban szereplő mértani hely a tetraéder köréírt gömbjének középpontján átmenő, az $F_{AC}F_{BD}$ egyenesre merőleges sík.

Csernák Tamás (Budapesti Fazekas M. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

33 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 13, 4 pontot 13 versenyző. 3 pontos 6, 1 pontos 1 dolgozat.

B. 4633. *Egy háromszög belsejében felveszünk néhány pontot úgy, hogy közülük semelyik három (beleértve a csúcsokat is) nem esik egy egyenesre. A pontokat egymással és a háromszög csúcsaival úgy kötjük össze, hogy a kapott szakaszok ne messék egymást, és a háromszöget a lehető legtöbb kis háromszögre bontsák. Bizonyítsuk be, hogy a keletkezett kis háromszögek száma páratlan.*

(*3 pont*)

Megoldás. Legyen a háromszög belsejében felvett pontok száma n, a keletkezett kis háromszögek száma pedig k. Mivel az összekötő szakaszokat úgy rajzoltuk meg, hogy a lehető legtöbb kis háromszöget kapjuk, azok az eredeti háromszöget csupa háromszögre bontják. Ha ugyanis lenne a felbontásban háromnál több oldalú sokszög, annak néhány megfelelő átlóját meghúzva további kis háromszögeket kapnánk.

Mivel bármely háromszögben a belső szögek összege 180°, a keletkezett kis háromszögek belső szögeinek összege $k\cdot 180^\circ$. E szögek összegét viszont úgy is megkaphatjuk, hogy egyrészt minden belső pontnál van 360°, másrészt az eredeti háromszög csúcsainál lévő összes szöget, azaz 180°-ot is egyszer számolnunk kell. Tehát

$$k\cdot 180^\circ=n\cdot 360^\circ+180^\circ.$$

Ebből kapjuk, hogy $k=2n+1$, azaz a keletkezett kis háromszögek száma mindig páratlan.

Varga Péter, (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 11. évf.) dolgozatát felhasználva

100 dolgozat érkezett. 3 pontos 93, 2 pontos 7 dolgozat.

B. 4640. *Számítsuk ki a*

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{2j}(-3)^j$$

összeget.

(*5 pont*)

I. megoldás. Legyen

$$S_m=\sum_{j=0}^{[m/2]}\binom{m}{2j}(-3)^j.$$

Azt állítjuk, hogy S_{2n} értéke 2^{2n}, ha n osztható 3-mal, és -2^{2n-1} különben. Az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Az $n=1,2,3$ esetekben könnyen ellenőrizhető, hogy valóban teljesül:

$$S_2=1-3\cdot 1=-2,\quad S_4=1-3\cdot 6+9\cdot 1=-8,\quad S_6=1-3\cdot 15+9\cdot 15-27\cdot 1=64.$$

Az indukcióhoz elég megmutatni, hogy $m>3$ esetén $S_m=(-8)S_{m-3}$, hiszen ebből $S_{2n}=(-8)S_{2n-3}=64S_{2(n-3)}$, amiből már azonnal következik az állítás. Az $S_m=$ $=(-8)S_{m-3}$ összefüggés igazolásához először az $\binom{m}{2k}$ binomiális együtthatót írjuk fel a Pascal-háromszög $(m-3)$-adik sorában lévő binomiális együtthatók összegeként:

$$\binom{m}{2j}=\binom{m-1}{2j-1}+\binom{m-1}{2j}=\binom{m-2}{2j-2}+2\binom{m-2}{2j-1}+\binom{m-2}{2j}=$$

$$=\binom{m-3}{2j-3}+3\binom{m-3}{2j-2}+3\binom{m-3}{2j-1}+\binom{m-3}{2j},$$

ahol az $\binom{a}{b}$ kifejezés értékét $b<0$ és $a<b$ esetén is 0-nak tekintjük. Ezt felhasználva

$$S_m=\sum_{j=0}^{[m/2]}\left(\binom{m-3}{2j-3}+3\binom{m-3}{2j-2}+3\binom{m-3}{2j-1}+\binom{m-3}{2j}\right)(-3)^j.$$

Számoljuk meg, hogy ebben az összegben mi lesz $\binom{m-3}{\ell}$ együtthatója, ha $0\leqslant\ell\leqslant$ $\leqslant m-3$. Ha $\ell=2k+1$ páratlan szám, akkor a kérdéses együttható

$$1\cdot(-3)^{k+2}+3\cdot(-3)^{k+1}=0,$$

ha pedig $\ell=2k$ páros, akkor

$$3\cdot(-3)^{k+1}+1\cdot(-3)^k=-8\cdot(-3)^k.$$

Azaz

$$S_m = \sum_{k=0}^{[(m-3)/2]} \binom{m-3}{2k} (-8)(-3)^k = -8S_{m-3}.$$

Ezzel igazoltuk, hogy a kérdezett összeg értéke 3-mal osztható n esetén 2^{2n}, 3-mal nem osztható n esetén pedig -2^{2n-1}.

Baran Zsuzsanna (Debrecen, Fazekas M. Gimn.), 9. évf.

II. megoldás. Tekintsük a

$$z = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

alakú komplex számot és határozzuk meg a $2n$-edik hatványát (ahol n pozitív egész szám). A szám trigonometrikus alakjából a De Moivre-képletet alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$z^{2n} = 2^{2n}\left(\cos\left(n\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(n\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Másrészről, az algebrai alakból a binomiális tételt használva:

$$z^{2n} = \sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}\cdot 1^{2n-j}\cdot\left(\sqrt{3}i\right)^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{2j}(-3)^j + i\sqrt{3}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{2n}{2j+1}(-3)^j.$$

A z^{2n} szám kétféle felírásában a valós részeket összehasonlítva

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{2j}(-3)^j = 2^{2n}\cdot\cos\left(n\cdot\frac{2\pi}{3}\right)$$

adódik.

Fonyó Viktória (Keszthely, Vajda J. Gimn.), 12. évf.

33 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 21 versenyző: Ágoston Péter, Baran Zsuzsanna, Bereczki Zoltán, Csépai András, Csernák Tamás, Di Giovanni Márk, Fekete Panna, Fonyó Viktória, Geng Máté, Győrfi-Bátori András, Katona Dániel, Kovács Márton, Kúsz Ágnes, Lajkó Kálmán, Maga Balázs, Mócsy Miklós, Nagy-György Pál, Schwarcz Tamás, Seress Dániel, Williams Kada, Öreg Botond. 4 pontos 4, 3 pontos 2, 2 pontos 2, 1 pontos 1, 0 pontos 3 dolgozat.

B. 4650. *Létezik-e olyan* $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ *alakú függvény, melyre alkalmas páronként különböző* $x_1, \ldots, x_5$ *valós számokkal*

$$f(x_1) = x_2, \quad f(x_2) = x_3, \quad f(x_3) = x_4, \quad f(x_4) = x_5, \quad f(x_5) = x_1$$

teljesül?

(*6 pont*) Javasolta: *Károlyi Gyula* (Budapest)

I. megoldás. Megadunk egy ilyen függvényt. Legyen $a=c=1$ és $d=0\ne b$. Az $x_1\ne 0$ értékét később megválasztva, legyen

$$x_2=f(x_1)=\frac{x_1+b}{x_1},$$

$$x_3=f(x_2)=\frac{\frac{x_1+b}{x_1}+b}{\frac{x_1+b}{x_1}}=\frac{(b+1)x_1+b}{x_1+b},$$

$$x_4=f(x_3)=\frac{\frac{(b+1)x_1+b}{x_1+b}+b}{\frac{(b+1)x_1+b}{x_1+b}}=\frac{(2b+1)x_1+b^2+b}{(b+1)x_1+b},$$

$$x_5=f(x_4)=\frac{\frac{(2b+1)x_1+b^2+b}{(b+1)x_1+b}+b}{\frac{(2b+1)x_1+b^2+b}{(b+1)x_1+b}}=\frac{\big(b^2+3b+1\big)x_1+2b^2+b}{(2b+1)x_1+b^2+b},$$

$$x_1=f(x_5)=\frac{\frac{\big(b^2+3b+1\big)x_1+2b^2+b}{(2b+1)x_1+b^2+b}+b}{\frac{\big(b^2+3b+1\big)x_1+2b^2+b}{(2b+1)x_1+b^2+b}}=\frac{(3b^2+4b+1)x_1+b^3+3b^2+b}{\big(b^2+3b+1\big)x_1+2b^2+b}.$$

Az utóbbi összefüggést rendezve:

$$\big(b^2+3b+1\big)x_1^2-\big(b^2+3b+1\big)x_1-\big(b^3+3b^2+b\big)=0,$$

azaz

$$\big(b^2+3b+1\big)\big(x_1^2-x_1-b\big)=0.$$

Ez biztosan teljesül, ha az első tényező nulla – például, ha $b=\frac{-3+\sqrt5}{2}$. Legyen továbbá $x_1=2$, ekkor

$$x_2=\frac{2+b}{2}\approx 0{,}809,\qquad x_3=\frac{x_2+b}{x_2}\approx 0{,}528,$$

$$x_4=\frac{x_3+b}{x_3}\approx 0{,}276,\qquad x_5=\frac{x_4+b}{x_4}\approx -0{,}382.$$

Tehát az

$$f(x)=\frac{x-\frac{3-\sqrt5}{2}}{x}$$

függvény a fenti x_i értékekkel megfelel.

Porupsánszki István (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. A tangens függvény jól ismert

$$\operatorname{tg}(y+\beta)=\frac{\operatorname{tg} y+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg} y\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

összegzési képletére emlékezve legyen $a=1$, $b=\operatorname{tg}\beta$, $c=-\operatorname{tg}\beta$, $d=1$, az x változót pedig írjuk $x=\operatorname{tg} y$ alakba; ekkor az

$$x\longmapsto f(x)=\frac{x+b}{-cx+1},\quad \text{azaz}\quad \operatorname{tg} y\longmapsto\frac{\operatorname{tg} y+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg} y}=\operatorname{tg}(y+\beta)$$

függvény megfelelő, ha a $\operatorname{tg}(y+k\beta)$ $(k=0,1,\dots,4)$ értékek értelmezettek, páronként különbözők és $\operatorname{tg} y=\operatorname{tg}(y+5\beta)$. Mivel a tangens függvény értelmezett és szigorúan monoton növő mindegyik nyílt $\left(\frac{2k-1}{2}\pi,\frac{2k+1}{2}\pi\right)$ intervallumon és periodikus π szerint, $b=\operatorname{tg}(\pi/5)$ és $x_1=0$ választással a feladat követelményeit kielégítő függvényt kapunk.

Fekete Panna (Pécs, Leöwey Klára Gimn., 12. évf.)

24 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott versenyző: Andó Angelika, Bereczki Zoltán, Csépai András, Fekete Panna, Geng Máté, Kovács Márton, Nagy-György Pál, Porupsánszki István, Schefler Barna, Schwarcz Tamás, Szőke Tamás, Williams Kada. 0 pontos: 12 dolgozat.

B. 4655. *Megoldható-e a pozitív egész számpárok halmazán a*

$$2012^{2015}=\binom{n}{2}+\binom{k}{2}$$

egyenlet?

(*5 pont*) Javasolta: *Maga Balázs*

Megoldás. $\binom{m}{2}=\frac{m(m-1)}{2}$, így az egyenlet a következő alakba írható:

$$2012^{2015}=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}.$$

Rendezve:

$$\begin{aligned}
2\cdot 2012^{2015}&=n(n-1)+k(k-1),\\
2\cdot 2012^{2015}&=n^2-n+k^2-k,\\
8\cdot 2012^{2015}&=4n^2-4n+4k^2-4k,\\
8\cdot 2012^{2015}+2&=4n^2-4n+1+4k^2-4k+1,\\
8\cdot 2012^{2015}+2&=(2n-1)^2+(2k-1)^2.
\end{aligned}$$

Az egyenlet jobb oldalán két négyzetszám összege áll. Azt fogjuk belátni, hogy az egyenlet bal oldala, vagyis $8\cdot 2012^{2015}+2$ nem írható fel két négyzetszám összegeként.

Vizsgáljuk először az egyenlet két-két oldalának 7-tel való osztási maradékát.

A bal oldal 7-tel osztva ugyanazt a maradékot adja, mint $2012^{2015}+2$. A 2012 7-tel osztva 3-at ad maradékul, így a bal oldal 7-es maradéka $3^{2015}+2$. A 3-hatványok 7-es maradéka periodikus, minden hetedik 3-hatvány ugyanazt a maradékot adja, mivel $3^3=27$ maradéka 6, azaz -1, így $3^6=\left(3^3\right)^2$ maradéka $(-1)^2=1$. Ebből következik, hogy 3^{2015}-nek a 7-es maradéka ugyanannyi, mint 3^5-é, ami pedig 5, így 3^5+2 osztható 7-tel, tehát az egyenlet bal oldala osztható 7-tel.

Az egyenlet jobb oldalán két (páratlan) szám négyzetösszege áll. A négyzetszámok 7-es maradéka ugyanaz, mint a 0^2, $(\pm1)^2$, $(\pm2)^2$, $(\pm3)^2$ számoké, ezért a $\{0;1;2;4\}$ halmazból kerülhet ki. Az előbb beláttuk, hogy az egyenlet bal oldala osztható 7-tel, így a jobb oldalnak is oszthatónak kell lennie vele. A lehetséges maradékok összegeit megvizsgálva kiderül, hogy ez csak úgy történhet meg, ha mindkét négyzetszám osztható 7-tel. Ekkor viszont mindkettő osztható $7^2=49$-cel is, vagyis az egyenlet jobb oldala osztható 49-cel. Ezért a továbbiakban a bal oldal 49-es maradékát vizsgáljuk.

A 3-hatványok 49-es maradéka szintén periodikus: $3^4=81$ maradéka -17, így 3^5 maradéka $49+3(-17)=-2$, tehát $3^{20}=\left(3^5\right)^4$ maradéka $(-2)^4=16$, ezért 3^{21} maradéka $3\cdot16=48$, vagyis -1; ebből következik, hogy 3^{42} maradéka a 49-cel történő maradékos osztásnál $(-1)^2=1$. (Ugyanezt az Euler–Fermat-tételből is megkaphattuk volna.)

Mivel $2012=49\cdot41+3$ és $2015=42\cdot47+41$, a 2012^{2015}-nek a 49-es maradéka egyenlő 3^{41} maradékával; jelöljük ezt x-szel. Mivel $3^{42}=3\cdot3^{41}$ a 49-cel osztva 1-et, azaz -48-at ad maradékul, $3x+48=3(x+16)$ osztható 49-cel. Így $x+16$ is osztható 49-cel, tehát 3^{41} maradéka $x=33$. Ezért a bal oldalnak, $8\cdot2012^{2015}+2$-nek a 49-es maradéka $8\cdot33+2=266$-nek a 49-es maradéka, ami 21, így nem osztható 49-cel.

Azt kaptuk, hogy az egyenlet bal oldala nem osztható 49-cel, de a jobb oldala igen. Ellentmondásra jutottunk, tehát az egyenletnek nincs megoldása a pozitív egész számpárok körében.

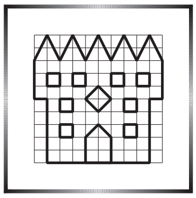
Németh Balázs (Budapesti Fazekas M. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)

Megjegyzések. 1. Az Euler–Fermat-tétel a következőt állítja: Ha m pozitív egész, és az m-mel való osztási maradékok között az m-hez relatív prímek száma $\varphi(m)$, akkor minden, az m-hez relatív prím a egész számra $a^{\varphi(m)}$-nek az m-mel való osztási maradéka 1 (azaz $a^{\varphi(m)}-1$ osztható m-mel). A feladat fenti megoldásában $\varphi(49)=42$ szerepelt.

2. Ha egy $4k+3$ alakú pozitív p prímszám osztója két négyzetszám összegének, akkor a két négyzetszámnak külön-külön is osztója; tehát ekkor a két négyzetszám összege p^2-nel is osztható. (A megoldásban ennek $p=7$ esete szerepelt.) Több is igaz: egy pozitív egész pontosan akkor írható föl két (nemnegatív) négyzetszám összegeként, ha prímtényezős alakjában minden $4k+3$ alakú pozitív prímszám páros kitevőn szerepel.

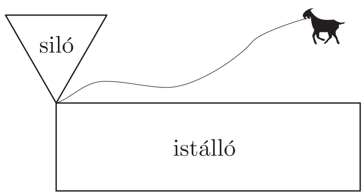
46 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 20 versenyző: Andi Gabriel Brojbeanu, Andó Angelika, Cseh Kristóf, Döbröntei Dávid Bence, Fekete Panna, Gáspár Attila, Gyulai-Nagy Szuzina, Lajkó Kálmán, Leitereg Miklós, Mócsy Miklós, Nagy Kartal, Nagy-György Pál, Németh Balázs, Porupsánszki István, Schrettner Bálint, Schwarcz Tamás, Széles Katalin, Szőke Tamás, Tihanyi Áron, Williams Kada. 4 pontos 3, 3 pontos 2, 2 pontos 3, 1 pontos 5, 0 pontos 13 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (451–456.)



K. 451. A kő-papír-olló játékban három szabályt kell ismerni a játékosoknak: a kő kicsorbítja az ollót, az olló elvágja a papírt, a papír becsomagolja a követ, így eldől, hogy melyik győzi le a másikat. Hány új szabályt kell megalkotnunk, ha behozunk a játékba négy újabb lehetőséget (pl. gyufa, szemüveg, telefon, bélyegző)? Milyen alapelv szerint kell az új szabályokat létrehoznunk ahhoz, hogy az új játék is az eredetihez hasonlóan kiegyensúlyozott legyen?

K. 452. Egy istállóhoz csatlakozik egy takarmány tárolására szolgáló siló, melynek alakja szabályos háromszög alapú hasáb.



Az istállóépület hosszabbik oldalának hossza 9 méter, a siló egy oldalának hossza (felülnézetben) 3 méter. A siló és az istálló találkozási pontjához kikötöttek egy kecskét (az *ábrának* megfelelően) egy 9 méter hosszú kötéllel. A kötelet a kecske nem tudja elszakítani, és a kötél nem nyúlik meg. Az épületek körül fű van, nincs kerítés, semmi olyan tereptárgy, ami a kecskét a legelésben akadályozná. Mekkora nagyságú területet tud a kecske lelegelni?

K. 453. Egy dolgozat átlaga 71 pont volt. A tanár azonban egy feladat értékelésénél hibázott, így minden tanulónak adott a dolgozatára még 1 pontot. A dolgozatok összpontszáma így 936-ra változott. Hány gyerek írta meg ezt a dolgozatot?

K. 454. A következő műveletekben szereplő számok számjegyeit nagyon sok helyen betűkkel helyettesítettük. A különböző betűk különböző, az azonos betűk azonos számjegyet jelentenek. Egyik betű sem jelenti az 1-et.

$$1\cdot \mathrm{G}+1=\mathrm{H},$$
$$1\mathrm{A}\cdot \mathrm{G}+2=\mathrm{HG},$$
$$1\mathrm{AB}\cdot \mathrm{G}+3=\mathrm{HGF},$$
$$1\mathrm{ABC}\cdot \mathrm{G}+4=\mathrm{HGFE},$$
$$1\mathrm{ABCD}\cdot \mathrm{G}+5=\mathrm{HGFED}.$$

Adjuk meg a betűk értékét.

K. 455. Ha a 2015-öt felírjuk a 2-es számrendszerben, akkor palindrom számot kapunk: 11111011111. Hány olyan XXI. századi évszám van, amelynek 2-es számrendszerbeli alakja szintén palindrom?

Kiss Sándor (Nyíregyháza) ötlete alapján

K. 456. A b alapú számrendszerben felírt 220, 251 és 304 számok három egymást követő négyzetszám. Mennyi b értéke?

❄

Beküldési határidő: 2015. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1273–1279.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1273. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n,k\in\mathbb{N}$ esetén $3^{4n}+4\cdot 7^{4k}$ osztható 5-tel.

C. 1274. Egy cég 482 dolgozója 30 járművel csapatépítő tréningre utazik, amelyek 4, 19, illetve 21 utast tudnak szállítani. Minden járműnek tele kell lennie. Melyik járműből hányra van szükségük? Az összes megoldást adjuk meg.

Feladatok mindenkinek

C. 1275. Melyik az a legnagyobb ötjegyű $\overline{abcde}$ pozitív egész, ami osztható a $\overline{bcde}$, $\overline{cde}$, $\overline{de}$ és e számok mindegyikével?

C. 1276. Az $ABCD$ paralelogramma AB, BC, CD, DA oldalainak belső pontjai rendre X, Y, Z, V, amelyekre fennáll:

$$\frac{AX}{XB}=\frac{BY}{YC}=\frac{CZ}{ZD}=\frac{DV}{VA}=k,$$

ahol a k egy $\frac{1}{2}$-nél kisebb pozitív állandó. Mekkora k értéke, ha az $XYZV$ négyszög területe az $ABCD$ paralelogramma területének 68%-a?

C. 1277. Az r^2 értékétől függően hány megoldása van az

$$x^2+y^2=r^2,$$
$$|x|+|y|=2$$

egyenletrendszernek?

Feladatok 11. évfolyamtól

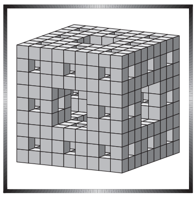
C. 1278. Határozzuk meg n értékét, ha $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ és $\binom{n}{3}$ egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagja.

C. 1279. Határozzuk meg azon $ABCD$ négyzeteket, melyek A csúcsa a $(4;-2)$ pont, B csúcsa rajta van a $b:\ (x-5)^2+(y-2)^2=25$ körön, D csúcsa pedig a $d:\ 4x+3y+2=0$ egyenesen.

❄

Beküldési határidő: 2015. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4687–4695.)

B. 4687. Sámson felírja egy papírlapra az 123456789-es számot. Ezután bármely két szomszédos számjegy közé beszúrhat szorzásjelet, akár többet is különböző helyekre, vagy egyet sem. A szorzásjelek közé eső számjegyeket egy számként összeolvasva egy számok szorzatából álló kifejezést kap, például $1234\cdot 56\cdot 789$. Legfeljebb mekkora lehet a kapott szám?

(*3 pont*) Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)

B. 4688. Ha mindkét kifejezésben 50-50 kettes és hármas szerepel felváltva, akkor az alábbi számok közül melyik a nagyobb:

$$2^{3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^3}}}}}}} \quad \text{vagy} \quad 3^{2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3^2}}}}}}} \quad ?$$

(*5 pont*)

B. 4689. Van-e olyan ötszög alapú gúla, amelyet egy sík szabályos hatszögben metsz?

(*6 pont*)

B. 4690. Egy egyetemről 9 matematikus együtt vett részt egy konferencián. Mivel az előadások unalmasak voltak, többször is elaludtak, mindegyikük legfeljebb 4 alkalommal. Bármelyik két matematikus esetén előfordult, hogy egyszerre aludtak. Mutassuk meg, hogy volt olyan időpont, amikor legalább hárman aludtak.

(*5 pont*)

B. 4691. Tekintsünk négy párhuzamos egyenest a síkon. Legyenek ezek sorrendben a, b, c és d. Tudjuk, hogy a és b távolsága 1, b és c távolsága 3, c és d távolsága szintén 1. Tekintsük azokat a téglalapokat, amelyek csúcsai közül mind a négy egyenesen pontosan egy helyezkedik el. Hogyan kapjuk meg azt a téglalapot, amelynek a lehető legkisebb a területe, és mekkora ez a terület?

(*3 pont*)

B. 4692. Egy hegyesszögű háromszög oldalait a, b és c, az ezekkel szemköztes szögeit α, β és γ, a megfelelő oldalakon nyugvó magasságvonalak hosszát pedig m_a, m_b és m_c jelöli. Igazoljuk, hogy

$$\frac{m_a}{a}+\frac{m_b}{b}+\frac{m_c}{c}\geqslant 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 2\beta}+\frac{1}{\sin 2\gamma}\right)+\sqrt{3}\,.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Williams Kada* (Szeged, Radnóti M. Gimn.)

B. 4693. Az ABC háromszög AC oldalán lévő K pontra $AK=2KC$ és $ABK\sphericalangle=2KBC\sphericalangle$ teljesül. Jelölje F az AC oldal felezőpontját, az A pont BK szakaszra eső merőleges vetületét pedig L. Igazoljuk, hogy az FL és BC egyenesek merőlegesek egymásra.

(*5 pont*)

B. 4694. Keressük meg az összes olyan p_1, q_1, p_2, q_2 valós számokat, melyekre teljesül, hogy az $x^3+p_1x+q_1=0$ egyenletnek gyökei a p_2 és q_2, az $x^3+p_2x+q_2=0$ egyenletnek pedig gyökei a p_1 és q_1 számok.

(*4 pont*) Javasolta: *Bertalan Zoltán* (Budapest)

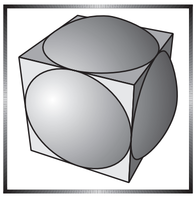
B. 4695. A sík pontjainak egy permutációjáról tudjuk, hogy ha három pont egy körön van, akkor a képeik is egy körön vannak. Mutassuk meg, hogy ennél a permutációnál három pont pontosan akkor van egy egyenesen, ha a képeik is egy egyenesen vannak.

(*5 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2015. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (635–637.)

A. 635. Mutassuk meg, hogy minden $c>0$ valós számhoz létezik olyan n pozitív egész, amire $\varphi\big(\sigma(n)\big)>cn$. (Tetszőleges k pozitív egészre $\varphi(k)$ a k-nál nem nagyobb, k-hoz relatív prím pozitív egészek számát, $\sigma(k)$ pedig a k pozitív osztóinak összegét jelöli.)

Javasolta: *Szabó Barnabás* (Budapest)

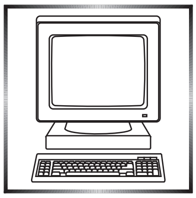
A. 636. Adott egy konvex $ABCD$ négyszög és a BCD háromszög belsejében egy P pont úgy, hogy az $ABPD$ négyszög érintőnégyszög, továbbá az $ABPD$ négyszög beírt köre, a BCP háromszög beírt köre és a CDP háromszög beírt köre páronként érintik egymást. Jelölje Q és R a megfelelő körök érintési pontjait a BP, illetve a DP szakaszon. Legyen S a BP és az AR egyenesek metszéspontja, T a DP és az AQ egyenesek metszéspontja, végül U a BT és a DS egyenesek metszéspontja. Mutassuk meg, hogy a CU egyenes felezi a BCD szöget.

A. 637. Legyen n pozitív egész. Legyen $\mathcal{F}$ egy olyan halmazrendszer, amely egy n elemű X halmaz összes részhalmazának több, mint a felét tartalmazza. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{F}$-ből mindig kiválasztható $\lceil \log_2 n\rceil+1$ halmaz úgy, hogy ezek együtt szeparálják X elemeit, vagyis X bármely két különböző eleméhez van olyan kiválasztott halmaz, amely a kettő közül pontosan egyet tartalmaz.

Schweitzer Miklós Emlékverseny, 2014

Beküldési határidő: 2015. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



Informatikából kitűzött feladatok

I. 367. Egy $M\times N$ $(5\leqslant M,N\leqslant 100)$ négyzetből álló négyzetháló egyes négyzeteiben átlósan egy tükröt helyeztünk el, amelynek mindkét oldala tökéletesen visszaveri a fényt. A tükrök a négyzetek középpontja körül könnyen elfordulhatnak. A fény egy időegység alatt egy egységnyi (a négyzet oldalhosszának megfelelő) utat tesz meg. A fénysugár a négyzetháló oldalára merőlegesen lép be, valamely négyzet oldalfelező pontján át. Minden pillanatban, amikor a fénysugár a négyzetháló egy négyzetének oldalához ér, a tükrök 90 fokkal elfordulnak.

A bemeneti fájl első sorában a sorok, majd az oszlopok száma olvasható. A második sor adja meg, hogy milyen irányból (`b`, `j`, `f`, `l`), hányadik egységben (fentről lefele és balról jobbra számozunk) lép be a rendszerbe a fény. Az alatta levő M sor mindegyikében pontosan N karakter van. A szóköz karakter (a mintán `o`) jelöli azokat az egységeket, ahol nincs tükör, a `\` és `/` karakterek pedig a tükröket, valamint azok kezdeti állapotát mutatják.

A kimeneti fájl első sorában a kilépésig eltelt idő, a második sorában pedig – a bemenet második sorával egyező formában – a kilépési hely olvasható. Ha a fény nem lép ki a rendszerből, az első sorba a `-1` érték kerüljön, a második pedig maradjon üresen.

Bemenet	**Kimenet**

`5 5`
`b 2`
`ooooo`
`o\o/o`
`ooooo`
`o/o\o`
`ooooo`
	`5`
	`b 4`

A program első parancssori argumentuma a bemeneti fájl neve, a második pedig a kimeneti fájl neve legyen.

Beküldendő egy tömörített `i367.zip` állományban a program forráskódja (`i367.pas`, `i367.cpp`, ...), valamint a program rövid dokumentációja (`i367.pdf`), amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztő környezetben fordítható.

I. 368 (É). Barátunk számítógépet szeretne vásárolni, de nem tud eligazodni a processzorok egyes tulajdonságai között. Segítségül néhány CPU jellemzőiből, valamint informatika áruházakból és azok árlistáiból adatbázist építettünk, hogy megkönnyítsük a választást és a vásárlást.

Készítsünk új adatbázist `i368` néven. Honlapunkról letölthető az `ixyz.zip` állományban a `cpu.csv`, `ceg.csv` és `arlista.csv` – pontosvesszővel tagolt, UTF-8 kódolású – szöveges állomány. A szöveges fájlok az első sorban tartalmazzák a mezőneveket. A táblák szerkezete a következő leírás szerint. Importáljuk az állományokat és hozzuk létre a **cpu**, **ceg** és **arlista** táblákat, majd állítsuk be a megfelelő típusokat és kulcsokat.

Táblák:

cpu (id, tipus, foglalat, magszal, orajel, turbo, csikszel, TDP, BM1, BM2, BM3, grafika)

id	a processzor azonosítója (egész szám), kulcs;
tipus	a processzor gyártója és típusa (szöveg);
foglalat	a processzor foglalata (szöveg);
magszal	a processzorban található magok és egyszerre végrehajtható szálak száma (szöveg);

orajel	a működési frekvencia GHz mértékegységben átlagos használat mellett (lebegőpontos szám);
turbo	nagyobb igénybevételnél elérhető maximális működési frekvencia GHz mértékegységben (lebegőpontos szám);
csikszel	a processzor gyártásakor alkalmazott csíkszélesség nm mértékegységben (egész szám);
TDP	a használat közben fölvett legnagyobb teljesítmény watt értékben (egész szám);
BM1, BM2, BM3	különböző processzorsebességet mérő tesztek eredményei – a nagyobb értékek mutatnak gyorsabb végrehajtást (egész számok);
grafika	a processzorral egybeépített grafikus egység típusa (szöveg).

ceg (caz, ir, cim, nev, web)

az	az informatikai üzlet azonosítója (egész szám), kulcs;
ir	a budapesti üzlet négyjegyű irányítószáma, amelynek második és harmadik számjegye mutatja, hogy a cég mely kerületben található – pl. 1046 esetén a IV. kerületben (egész szám);
cim	az üzlet címe (szöveg);
nev	az üzlet neve (szöveg);
web	az üzlet egyben webáruház (logikai).

arlista (caz, pid, ar)

caz	az üzlet azonosítója (egész szám), caz és pid együtt kulcs;
pid	a processzor azonosítója (egész szám), a kulcs része;
ar	a processzor ára az adott üzletben (egész szám).

Az **arlista** tábla kapcsolja össze a processzorok és cégek adatait, úgy, hogy természetesen minden üzletben egy termék csak egyszer, egy áron szerepel.

A következő feladatok megoldásánál a lekérdezéseket, táblákat és jelentéseket a zárójelben olvasható néven mentsük. Ügyeljünk arra, hogy a megoldásban pontosan a kívánt mezők az előírt néven szerepeljenek.

Szeretnénk megtudni, hogy mely processzorok a leggyorsabbak a három mért sebesség alapján. A három érték átlagát közvetlenül nem érdemes átlagolnunk, hiszen értékeik különböző tartományokba esnek, ezért a három sebesség mindegyikénél kiválasztjuk a maximumot, majd minden értéket a saját legnagyobb értékéhez viszonyítunk.

1. A számításhoz először hozzunk létre egy lekérdezést, amely az MBM1, MBM2 és MBM3 névvel meghatározza az egyes sebességértékek maximumát. (`1maxbm`)
2. Ezután készítsünk egy lekérdezést, amiben a processzorok id azonosítója és a három sebesség a megfelelő maximális értékkel történő osztás után szerepel SBM1, SBM2, SBM3 néven, valamint egy *teljesitmeny* mező, amely az előző három érték átlaga. (`2teljes`)
3. Készítsünk lekérdezést, amely teljesítmény szerinti csökkenő sorrendben megadja a processzorok és foglalatuk típusát és a teljesítmény értékét. (`3sorban`)

A processzorok csíkszélességének csökkentésével csökken a fogyasztás is. Ugyanakkor az egyre összetettebb, nagyobb órajellel működő, több processzormagot és esetleg beépített grafikus egységet is tartalmazó CPU-k fogyasztása meghaladja a kisebb tudású processzorok fogyasztását. Vizsgáljuk meg, hogy mennyiben támasztják alá az adatok ezeket az általános meglátásokat.

4. Bővítsük a **cpu** táblát egy GP nevű logikai mezővel, és készítsünk módosító lekérdezést, amely értékét meghatározza, hogy van-e grafikus egység a processzorban. (`4gp`)
5. Adjuk meg lekérdezéssel a processzormagok és szálak száma, valamint a csíkszélesség értéke szerinti csoportosításban az adott csoportba sorolható, grafikus egységet nem tartalmazó processzorok számát és fogyasztásuk átlagát. (`5fogyaszt`)
6. Készítsünk lekérdezést, amely megadja azoknak a processzoroknak a típusát, teljesítményét és fogyasztását, amelyek alap és turbo órajele között legalább 0,5 GHz a különbség. (`6turbo`)
7. Készítsünk lekérdezést, amely megadja a legalább 60% teljesítményű processzorok közül az első három legkisebb fogyasztású típusát és azon cégek nevét, akik forgalmazzák ezeket a processzorokat. (`7kisfogy`)

Barátunk végül is úgy dönt, hogy egy 8 magos AMD processzort választ, ezért most szeretné tudni, hogy milyen áron érhetők el ezek a IV. és XIII. kerületi boltokban.

8. Készítsünk lekérdezést, amely kilistázza a fenti feltételnek megfelelő processzorok típusát, teljesítményét, árát, valamint az üzletek nevét, irányítószámát és címét. (`8amd8`)

Barátunk közben úgy dönt, hogy nem csak abban a két kerületben érdeklik a fenti processzorok, hanem bármelyik webáruházban megvásárolná őket.

9. Adjuk meg lekérdezéssel annak a cégnek a nevét, amelynél a választott processzorok közül a legolcsóbban elérhető a választott eszközök egyike, valamint adjuk meg a processzor típusát és árát. (`9web`)

Barátunk végül úgy gondolja, hogy érdemes lenne megvizsgálni a talált processzorral hasonló árfekvésű többi CPU-t is, hátha egy kicsit több pénzért sokkal jobbat kaphatunk.

10. Készítsünk jelentést, amelyen megjelenítjük a 30 000–40 000 Ft árkategóriába eső processzorok típusát, teljesítményét, grafikus egységének típusát, árát, azon üzletek nevét, ahol a fenti tartományba eső árban kapható. A jelentés legyen a processzorok típusa szerint csoportosítva, azon belül ár szerint növekvő sorrendbe rendezve. A jelentés cím legyen „További processzorok 30-40 ezerért”, az adatok feletti fejléc „Típus, Ár, Cég Neve, Teljesítmény, Grafika” szavakból álljon. A jelentés A4-es méretben, álló tájolással készüljön, az összes mező és érték legyen teljes egészében látható. a Ha szükséges, készítsünk az adatok kiválasztásához lekérdezést. (`10többi`)

Forrás: a processzorokra vonatkozó adatok a CHIP magazin 2015. januári számából valók.

Beküldendő egy tömörített állományban (`i368.zip`) a megoldást tartalmazó adatbázis vagy az SQL lekérdezéseket tartalmazó szövegfájl (`i368.odb`, `i368.accdb`, `i368.sql`), valamint egy rövid dokumentáció (`i368.txt`, `i368.pdf`), amelyből kiderül az alkalmazott adatbázis-kezelő neve és verziószáma.

I. 369. Írjunk egy olyan programot, ami az alábbi, mínuszokból és `X`-ekből, valamint sortörésekből álló szöveget ebben a formában kiírja a kimenetre. A program nem olvashat be fájlból és nem írhat fájlba. A feladatban cél az, hogy a forráskód minél kevesebb karaktert tartalmazzon. Vigyázat, a programnak pontosan ugyanezt a szöveget kell kiírnia, nem szabad eltéveszteni!

```
------------------XXXXX------------------
--------------XXXXXX-XXXXX---------------
------------XXXXX------XXXXX-------------
---------XXXXX-----------XXXXX-----------
------XXXXX----------------XXXXX---------
---XXXXX----------------------XXXXX------
-XXXX---------------------------XXXXXX---
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXX-----------XXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXX-------------XXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXX---------------XXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXX-----------------XXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXX-------------------XXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXX---------------------XXXXXXXXXXXXX
XXXXXX-----------------------XXXXXXXXXXXX
XXXXX-------------------------XXXXXXXXXXX
XXXX---------------------------XXXXXXXXXX
XXX-----------------------------XXXXXXXXX
XX-------------------------------XXXXXXXX
X---------------------------------XXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXX---------XXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
```

Pontozás: A programhoz mellékelt, a helyes megoldás elvét tömören, de érthetően leíró dokumentáció 1 pontot ér. A program pontozása a következőképp zajlik: aki a legkevesebb karakterrel megoldotta (a forráskód mérete a legkisebb), az további 9 pontot kap. A többiek a legkisebb méretű programhoz viszonyítva százalékos arányban kapnak pontot.

Beküldendő egy tömörített `i369.zip` állományban a program forráskódja (`i369.pas`, `i369.cpp`, ...) az `.exe` és más, a fordító által generált állományok nélkül, valamint a program rövid dokumentációja (`i369.txt`, `i369.pdf`, ...), amely a fentieken túl megadja, hogy a forrás mely fejlesztői környezetben fordítható.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: **2015. március 10.**

S. 96. Egy D ($1 \leqslant D \leqslant 10^{15}$) hosszú rudat szeretnénk szétvágni N ($1 \leqslant N \leqslant$ $\leqslant 500\,000$) db kisebb rúdra. Tudjuk a kisebb rudak hosszát: az i-edik hossza r_i ($1 \leqslant r_i \leqslant 10^{15}$) és azt is tudjuk, hogy a kisebb rudak összhossza D. Egy L hosszú rúd szétvágása tetszőleges hosszúságú két részre L forint. Egy vágással egyszerre csak egy rudat szabad kettévágni. Daraboljuk föl a lehető legolcsóbban a teljes D hosszú rudat a megadott r_i hosszú részekre.

A program olvassa be a standard input első sorából N-et és D-t, majd a következő N sorból az r_i szóközzel elválasztott egészeket, majd írja a standard output első sorába a minimális pénzt, amennyivel megoldható a szétdarabolás.

Példa bemenet (a második sortól egy sorban):	Példa kimenet:
`4 9` `2 1 3 3`	`18`

Pontozás és korlátok: A programhoz mellékelt, a helyes megoldás elvét tömören, de érthetően leíró dokumentáció 1 pontot ér. A programra akkor kapható meg a további 9 pont, ha bármilyen hibátlan bemenetet képes megoldani az 1 mp futásidőkorláton belül.

Beküldendő egy tömörített `s96.zip` állományban a program forráskódja (`s96.pas`, `s96.cpp`, ...) az `.exe` és más, a fordító által generált állományok nélkül, valamint a program rövid dokumentációja (`s96.txt`, `s96.pdf`, ...), amely a fentieken túl megadja, hogy a forrás mely fejlesztői környezetben fordítható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: **2015. március 10.**

❄

ERICSSON-DÍJ 2015

Felhívás díjazandó tanárok ajánlására

A 2015. évi Ericsson-díjat a pedagógusok elismerésére idén is június elején, a tanév végével adja át az Ericsson Magyarország.

Az Ericsson Magyarország Kutatás-Fejlesztési Igazgatósága által 1999-ben alapított díjat általános-, vagy középiskolákban fizikát vagy matematikát oktató pedagógusok nyerhetik el. Az elismerés azért jött létre, hogy támogassa, elismerje és erősítse a magyarországi, világviszonylatban is kiemelkedő matematikai és természettudományos alapképzést. Az Ericsson Magyarország elkötelezte magát a hazai oktatás fejlesztése mellett; vállalásának fontos része ez a díj. Az 1700 fős hazai vállalat nemcsak a telekommunikációs ipar egyik legnagyobb munkáltatója, hanem 1200 fős Kutató-Fejlesztő Központjával a legnagyobb telekommunikációs és informatikai kutatással, szoftver és hardverfejlesztéssel foglalkozó szellemi centrum Magyarországon. Számára ezért elengedhetetlen a kiválóan képzett fiatal diplomás munkaerő. A díjra esélyes pedagógusok szakmai munkája és emberi hozzáállása teszi lehetővé, hogy a hazai műszaki és természettudományi diplomával rendelkezők tudása megfelelő szellemi értéket képviseljen, és vonzóvá tegye a beruházást infokommunikációs csúcstechnológiák kutatás-fejlesztésébe Magyarországon.

Az ERICSSON-DÍJAKAT 2015-ben két kategóriában ítélik oda:

1. „Ericsson a matematika és fizika népszerűsítéséért" díj

2 matematikát és 2 fizikát tanító pedagógus részére egyenként 250 000 Ft-tal járó díj.

Azok kaphatják, akik tanítványaikkal aktívan bekapcsolódtak a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok vagy az ABACUS folyóiratának pontversenyeibe, vagy a tanítás mellett évek óta a legtöbbet teszik a tantárgyuk iránti érdeklődés felkeltéséért és megszerettetéséért.

2. „Ericsson a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért" díj

2 matematikát és 2 fizikát tanító pedagógus részére egyenként 250 000 Ft-tal járó díj.

Azok kaphatják, akiknek tanítványai a legjelentősebb hazai vagy nemzetközi egyéni versenyeken, például a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok vagy az ABACUS versenyein, vagy a Varga Tamás, Kalmár László, Zrínyi Ilona, Arany Dániel matematikaversenyek, matematika vagy fizika OKTV, Öveges József, Jedlik Ányos, Mikola Sándor, Szilárd Leó fizikaversenyek, a Nemzetközi Matematika vagy Fizika Diákolimpiák, a Kürschák József matematikai tanulóversenyek vagy az Eötvös Loránd fizikaversenyek valamelyikén a 2009–2010-es tanévtől kezdődően elnyerték az első öt díj egyikét.

A díjakat a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány ítéli oda, a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Ericsson-díjbizottságainak ajánlása alapján. A díjazandókra írásos javaslatot nyújthatnak be szakmai és társadalmi szervezetek, a javasolt tanár tevékenységét ismerő kollégák, tanítványok. **Az ajánlásnak tartalmaznia kell a javasolt személy részletes szakmai jellemzését,** különös tekintettel azokra a szempontokra, amelyek alapján a díjra érdemesnek tartják. Pályázatot csak a különböző kategóriák **Pályázati adatlapjain** nyújthatnak be, elektronikus formában. Az adatlap letölthető a `www.komal.hu` vagy a `http://www.ericsson.hu/ericsson-dij-2015/` internet címről. Ha a korábbi években már javasolt tanár nem kapott díjat, a felterjesztést (hivatkozva a már beküldött jellemzésre, esetleg kiegészítve azt) kérjük, ismételjék meg!

A pályázatokat kizárólag e-mailben fogadjuk el, melyhez csatolják a jelölt pályázati adatlapját.

A beérkezési határidő: **2015. április 1.** E-mail cím: `matfund@komal.hu`. A bizottságok a benyújtott írásos javaslatok alapján 2015. április 23-ig döntést hoznak a jelöltek sorrendjéről. A bizottságok részletes indoklását tartalmazó jelentése után a MATFUND kuratóriuma 2015. április 30-áig dönt a díjazandók személyéről. A díjkiosztó ünnepségre 2015. június elején kerül sor.

Tizennegyedik Rátz Tanár Úr Életműdíj átadó

Budapest, 2014. november 27.

Idén is a Magyar Tudományos Akadémián adták át a Rátz Tanár Úr Életműdíjakat. Az Ericsson Magyarország, a Graphisoft és a Richter Gedeon Nyrt. által létrehozott Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért 2001 óta ítéli oda az életműdíjat, amely mára a hazai természettudományos oktatás, és egyben a közoktatás egyik legrangosabb elismerése lett. A személyenként 1,5 millió forintos Rátz Tanár Úr Életműdíjat évente két-két matematika, fizika, kémia és 2005 óta két biológia szakos tanárnak ítélik oda, aki kimagasló szerepet tölt be tárgya népszerűsítésében és a fiatal tehetségek gondozásában.

„A tudásalapú társadalomban a legfontosabb infrastruktúra az oktatás, ezért ne csak a világhírű tudósaink, hanem tanáraik nevét is ismerjük …" – így szól a Rátz Tanár Úr Életműdíj mottója. Mikor világhírű, magyar származású tudósainkkal büszkélkedünk, kevés szó esik tanáraikról. Rátz tanár úr a legendás Fasori Gimnázium tanára volt és többek között Neumann Jánost és Wigner Jenőt is tanította. Az alapítvány az ő nevét választotta, hogy adózzon nagy múltú és kiváló oktatási kultúránk előtt és méltányolja azon pedagógusainkat, akik ma is áldozatos szakmai munkájukkal és kiemelkedő eredménnyel képzik a jövő tehetségeit.

Mindhárom alapító sikerének alapja az eredményes kutatás-fejlesztés, ennek alapja pedig magas szintű természettudományos oktatás. A mai tudásalapú társadalomban rendkívül nagy szükség van a közoktatás, ezen belül a természettudományos oktatás támogatására és az ott elért sikerek elismerésére – vallják az alapítók.

A három vállalat továbbra is kiemelt figyelmet kíván fordítani nemcsak a természettudományos oktatás támogatására, hanem arra is, hogy a kinevelt tehetségeknek olyan munkalehetőséget kínáljanak, amiért érdemes hazájukban maradva keresni a szakmai boldogulást.

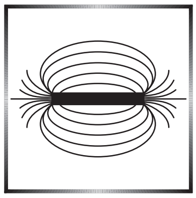
2014. díjazott tanárai:

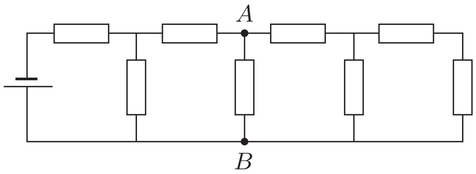
Kubatov Antal (matematika);
Békefi Zsuzsa (matematika);
Tóth Eszter (fizika);
Zátonyi Sándor (fizika);
Böddiné Schróth Ágnes (kémia);
Endrész Gyöngyi (kémia);
Szalainé Tóth Tünde (biológia);
Kánitz József (biológia).

Források: `www.ratztanarurdij.hu`, `www.komal.hu`, `www.wikipedia.hu`.

Oláh Vera

Fizika feladatok megoldása



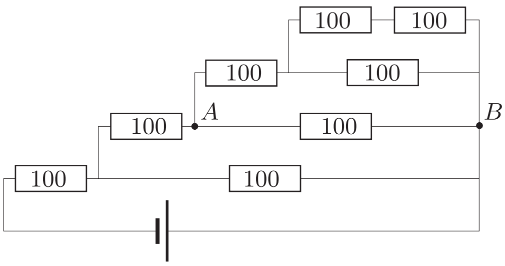


P. 4652. *Nyolc darab, egyenként* 100 Ω*-os fogyasztóból álló hálózatban az A és B pont között* 50 V *feszültséget mérünk.*

Mekkora teljesítményt vesz fel ez a fogyasztókör a telepből?

(*4 pont*) *Mátrai Tibor fizikaverseny,* Eger

Megoldás. A kapcsolást átrajzolhatjuk az *a*) ábrán látható módon, így jobban látszanak a sorosan és a párhuzamosan kapcsolt elemek. (Az ellenállások nagyságát a kis téglalapokban tüntettük fel az ohm mértékegység jelölése nélkül.)

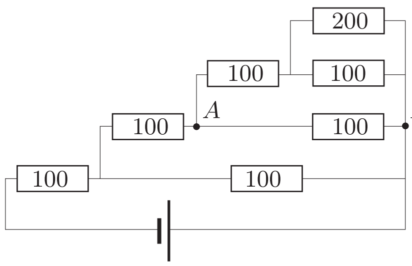


a)

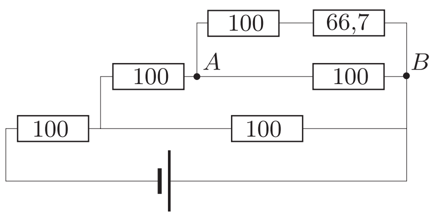
A sorosan, illetve párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredője az ismert

$$R_{\text{soros}} = R_1 + R_2, \qquad \text{illetve} \qquad R_{\text{párhuzamos}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

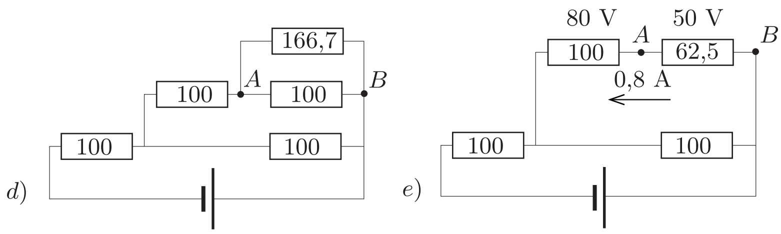
képletek alapján számítható. Ezeket alkalmazva több lépésen keresztül (lásd a *b*), *c*) és *d*) *ábrákat*) eljutunk az *e*) *ábrán* látható elrendezéshez.



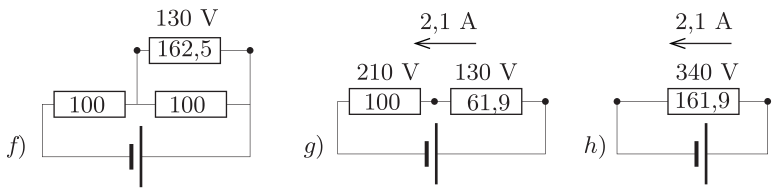
b)



c)



Mivel tudjuk, hogy az A és B pontok között 50 V a feszültség, kiszámíthatjuk, hogy a 62,5 Ω-os ellenálláson átfolyó áram erőssége 0,8 A. Ugyanekkora áram folyik át a vele sorosan kapcsolt 100 Ω-os ellenálláson is, ezen tehát 80 V feszültség esik.



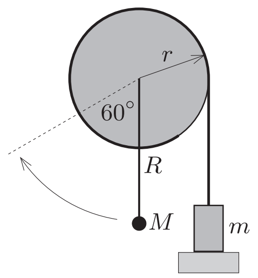
Tovább haladva (lásd az f), g) és h) *ábrákat*) végül eljutunk az egyetlen ellenállást tartalmazó helyettesítő kapcsolásig, és erről leolvashatjuk, hogy a fogyasztókör által felvett teljesítmény:

$$P = 340\ \mathrm{V} \cdot 2{,}1\ \mathrm{A} = 714\ \mathrm{W}.$$

Hamrik Szabin (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 9. évf.)

108 dolgozat érkezett. Helyes 75 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 16, hibás 11 dolgozat.

P. 4655. *Középen tengelyezett, $r = 0{,}1$ m sugarú, igen könnyű korong peremére fonalat tekertünk, annak szabad végére egy $m = 100$ g tömegű testet erősítettünk. A koronghoz elhanyagolható tömegű rúd csatlakozik, amelynek végére, a korong tengelyétől $R = 0{,}2$ m távolságban egy kisméretű, M tömegű testet rögzítettünk.*



Kezdetben a rendszer az ábrán látható helyzetben nyugalomban van. A m tömeg alátámasztását hirtelen elvéve a M tömegű test az ábrán szaggatott vonallal jelölt 60°-os helyzetet éppen eléri. Kis csillapítású lengések után a rúd egyensúlyba kerül, ekkor φ szöget zár be a függőlegessel.

a) Mekkora a rúdon levő test M tömege?

b) Mekkora a φ szög?

c) Az egyensúlyi helyzetből kicsit kimozdítva a rendszert, mekkora rezgésidejű mozgás jön létre?

(*5 pont*) *Izsák Imre Gyula természettudományi fizikaverseny,* Zalaegerszeg

Megoldás. *a*) Az *ábrán* látható, $\alpha=60^\circ$-os szögelfordulásnak megfelelő helyzetben az m tömegű test az eredeti helyzetéhez képest

$$h_1=r\alpha=0{,}1\ \mathrm{m}\cdot\frac{\pi}{3}=0{,}105\ \mathrm{m}$$

szinttel mélyebbre, a M tömegű test pedig

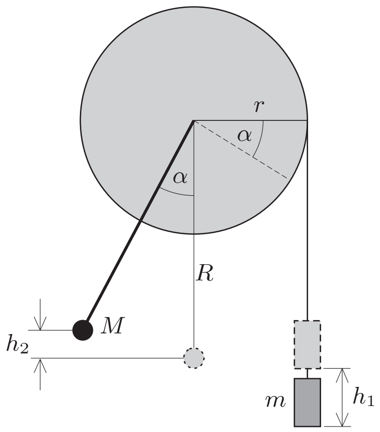
$$h_2=R(1-\cos\alpha)=0{,}1\ \mathrm{m}$$

szintkülönbségnek megfelelő értékkel magasabbra kerül. Mivel a mozgási energia kezdetben is és ebben az állapotban is nulla, a rendszer helyzeti energiája sem változhatott meg:

$$\Delta E_\mathrm{h}=Mgh_2-mgh_1=0,$$

ahonnan a rúdon lévő test tömege:

$$M=\frac{h_1}{h_2}m=105\ \mathrm{g}.$$



b) Az új egyensúlyi helyzetet a forgatónyomatékok egyensúlya jellemzi:

$$mgr=MgR\sin\varphi,$$

vagyis

$$\sin\varphi=\frac{mr}{MR}\approx 0{,}48;\qquad \varphi\approx 28{,}6^\circ.$$

c) Az egyensúlyi állapottól $\Delta\varphi$ szöggel eltérő helyzetben (vagyis amikor a rúd $\varphi+\Delta\varphi$ szöget zár be a függőlegessel) a rendszerre ható forgatónyomaték:

$$M(\Delta\varphi)=mgr-MgR\sin(\varphi+\Delta\varphi)=mgr-MgR(\sin\varphi\cos\Delta\varphi+\cos\varphi\sin\Delta\varphi).$$

Kihasználva, hogy kicsiny szögeknél $\cos\Delta\varphi\approx 1$ és $\sin\Delta\varphi\approx\Delta\varphi$, a forgatónyomaték így írható:

$$M(\Delta\varphi)=[mgr-MgR\sin\varphi]-MgR\cos\varphi\cdot\Delta\varphi.$$

A szögletes zárójelben álló kifejezés az egyensúlyi feltétel miatt *nulla,* a forgatónyomaték tehát

$$M(\Delta\varphi)=-D^*\,\Delta\varphi,$$

ahol $D^*=MgR\cos\varphi$ az ún. direkciós forgatónyomaték.

A forgómozgás alapegyenlete szerint:

$$M=\Theta\beta,$$

ahol $\Theta=MR^2+mr^2$ a rendszer tehetetlenségi nyomatéka, β pedig a pillanatnyi szöggyorsulás. A szögelfordulás időbeli változását leíró $\Theta\beta=-D^*\,\Delta\varphi$ egyenlet és a rezgőmozgás $ma = -D\,\Delta x$ egyenletének hasonló alakjából leolvashatjuk, hogy a csavarodási rezgések periódusideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D^*}} = 2\pi\sqrt{\frac{MR^2 + mr^2}{MgR\cos\varphi}} \approx 1{,}1\ \text{s}.$$

Molnár Szilárd (Sepsiszentgyörgy, Románia, Mikes K. Elm. Líceum, 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A *c*) alkérdésre energetikai megfontolások alapján is válaszolhatunk. Ha a rendszert $\Delta\varphi$ szöggel kitérítjük az egyensúlyi helyzetéből, a helyzeti energia változása (a kis szögekre vonatkozó közelítő képletek alkalmazásával):

$$\Delta E_{\text{h}} = E_{\text{h}}(\varphi + \Delta\varphi) - E_{\text{h}}(\Delta\varphi) = MgR\cos\varphi - MgR\cos(\varphi + \Delta\varphi) - mgr\,\Delta\varphi =$$

$$= MgR\cos\varphi(1 - \cos\Delta\varphi) + MgR\sin\varphi\sin\Delta\varphi - mgr\,\Delta\varphi \approx$$

$$\approx MgR\cos\varphi\cdot 2\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2} + \ [MgR\sin\varphi - mgr]\,\Delta\varphi \approx \frac{1}{2}MgR\cos\varphi\cdot(\Delta\varphi)^2.$$

(Kihasználtuk, hogy a szögletes zárójelben álló kifejezés az egyensúlyi feltétel szerint 0.)

Látható, hogy az egyensúlyi helyzetéből kitérített rendszer helyzeti energiája a kitérés négyzetével arányos, éppen úgy, mint egy megnyújtott rugó rugalmas energiája. Emiatt állíthatjuk, hogy mindkét test harmonikus rezgőmozgást fog végezni, a m tömegű test rezgési amplitúdója $A_1 = r\,\Delta\varphi$, a M tömegű testé pedig $A_2 = R\,\Delta\varphi$ lesz, amennyiben $\Delta\varphi$ a maximális szögkitérés. Ha a rezgőmozgás körfrekvenciája $\omega = (2\pi)/T$, akkor az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor a mozgási energia:

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2}m(A_1\omega)^2 + \frac{1}{2}M(A_2\omega)^2 = \frac{1}{2}\big(mr^2 + MR^2\big)\omega^2(\Delta\varphi)^2.$$

A helyzeti és a mozgási energia legnagyobb értékeinek egyenlőségéből a körfrekvenciára

$$\omega^2 = \frac{MgR\cos\varphi}{mr^2 + MR^2},$$

a periódusidőre pedig

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mr^2 + MR^2}{MgR\cos\varphi}} \approx 1{,}1\ \text{s}$$

adódik.

(G. P.)

59 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 38, hiányos (1–3 pont) 5, hibás 2 dolgozat.

P. 4659. 20 cm *sugarú, vékony falú fémgömb belsejében koncentrikusan egy* 10 cm *sugarú fémgolyót helyezünk el. A belső golyót a külső gömbön levő nyíláson keresztül egy nagyon hosszú vezetékkel földeljük. A külső gömbnek* 10^{-8} *C töltést adunk. Mennyi lesz most a külső gömb potenciálja?*

(*6 pont*) *Nemzetközi fizikaverseny feladata*

I. megoldás. Jelöljük a külső fémgömb sugarát R-rel, töltését Q-val, a belső fémgolyó sugarát pedig r-rel.

Tekintsük először azt az esetet, amikor a belső golyó nincs földelve. Ekkor a potenciálja megegyezik a külső gömb potenciáljával:

$$U_r = U_R = k\frac{Q}{R},$$

hiszen a külső elektromos tér megegyezik egy Q nagyságú ponttöltés terével, a fémgömbön belül pedig nulla a térerősség, a potenciál tehát itt mindenhol ugyanakkora.

Nézzük most azt az esetet, amikor a belső golyón Q^* töltés van, a külső gömb pedig töltetlen. Ekkor a belső golyó potenciálja

$$U_r^* = k\frac{Q^*}{r},$$

a külső fémgömbé pedig

$$U_R^* = k\frac{Q^*}{R}.$$

Ha mindkét fémen töltés található, akkor a fenti két eset együttesével (szuperpoziciójával) számolhatunk, amelyet a töltések, illetve a potenciálok összegzésével kaphatunk meg. Ha a belső golyó földelve van, akkor a potenciálja nulla, tehát

$$U_r + U_r^* = k\frac{Q}{R} + k\frac{Q^*}{r} = 0, \qquad \text{ahonnan} \qquad Q^* = -\frac{r}{R}Q,$$

a külső gömb (eredő) potenciálja pedig

$$U = U_R + U_R^* = k\frac{Q}{R} + k\frac{Q^*}{R} = k\frac{Q}{R}\left(1 - \frac{r}{R}\right) = 225\ \text{V}.$$

II. megoldás. Egy gömbkondenzátor kapacitása

$$C = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

ahol R_1 a belső, R_2 pedig a külső gömb sugara.

A feladatban szereplő elrendezés egyenértékű egy $R_1 =$0,1 m és $R_2 =$0,2 m sugarú gömbkondenzátor, valamint egy $R_1 =$0,2 m és $R_2 \gg R_1$ sugarú gömbkondenzátor párhuzamos kapcsolásával. Az egyik kondenzátort a fémgolyó és a fémgömb belső felülete, a másikat a fémgömb külső felülete és a „végtelen távoli" földelés valósítja meg. A kondenzátorok fegyverzeteit a hosszú vezeték, illetve a fémgömb anyaga köti össze, ezek valósítják meg a párhuzamos kapcsolást.

A megadott adatokkal mindkét kondenzátor kapacitása 22,2 pF, párhuzamos eredőjük tehát 44,4 pF-os. Így a külső fémgömb potenciálja (a földeléshez képest)

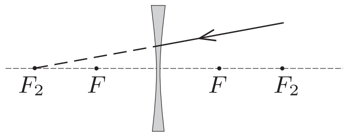
$$U = \frac{10^{-8}\ \text{C}}{4{,}44\cdot 10^{-11}\ \text{F}} = 225\ \text{V}.$$

Több dolgozat alapján

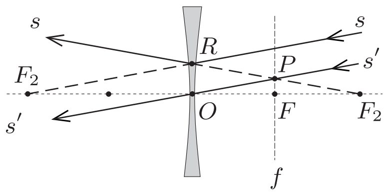
Megjegyzés. Sok megoldó elkövette azt a hibát, hogy a külső fémgömböt és a belső fémgolyót egyszerűen egy gömbkondenzátornak tekintette, $+Q$ és $-Q$ töltéssel. Ha ez így lenne, akkor a nagyobb gömbön kívül (a nulla össztöltés miatt) nem alakulna ki elektromos tér, tehát a fémgömb is nulla potenciálú kellene, hogy legyen. Másrészt a fémgömb és a fémgolyó közötti elektromos tér miatt a fémgolyó nem lehet ugyancsak nulla potenciálú, pedig ténylegesen az, hiszen leföldeltük. Ez az ellentmondás mutatja, hogy hibás a feltevés; a belső fémgolyó töltése nem lehet ugyanakkora nagyságú, mint a külső fémgömbé.

31 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Hibás 11, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 4666. *Hogyan halad tovább a lencsén való áthaladás után az a fénysugár, amelyik egy szórólencse túloldali „kétszeres" fókusza felé tart?*



(*4 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest



Megoldás. Indítsunk el a kérdéses s fénysugárral párhuzamosan egy másik, a lencse O középpontján irányváltoztatás nélkül továbbhaladó s' sugarat is. A párhuzamos sugarakat a lencse az F fókuszpontjára illeszkedő f fókuszsík valamely pontjába képezi le. Ez a pont rajta fekszik az s' egyenesen is, tehát csakis az *ábrán* látható P pont lehet.

A P pontban a szórólencse látszólagos képet hoz létre a „végtelen távoli" tárgyról, tehát a párhuzamos sugarak a lencsén átjutva úgy haladnak tovább, mintha a P pontból indultak volna. Ez az s sugárra is érvényes, az tehát a PR egyenes meghosszabbítása mentén halad tovább a lencse bal oldalán.

Az ábráról leolvasható, hogy $OR = 2 \cdot FP$, a megtört s sugár tehát úgy halad, mintha F_2-ből, a jobb oldali „kétszeres" fókuszból indult volna el.

Tompa Tamás Lajos (Miskolc, Földes F. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

43 dolgozat érkezett. Helyes 29 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (2 pont) 4, hibás 2, nem versenyszerű 1, nem értékelhető 2 dolgozat.

P. 4674. *A függőleges tengelyű,* 10 cm *sugarú és* 20 cm *menetemelkedésű, csavarvonal alakú drótpályán súrlódásmentesen tud mozogni egy átfúrt, kicsiny gyöngyszem. A pálya egyik pontjából elengedjük a gyöngyöt.*

Mekkora lesz a gyorsulása 1 menetnyi süllyedés után?

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

Megoldás. A gyöngy gyorsulása két komponensből tehető össze: egy menetirányú (a csavarvonal pillanatnyi érintőjének irányába mutató) gyorsulásból, valamint egy sugárirányú (a csavarvonal tengelyére merőleges, tehát vízszintes) centripetális gyorsulásból.

Az $r = 0{,}1$ m sugarú, $h = 0{,}2$ m menetemelkedésű csavarvonalat (az érintő irányú gyorsulás szempontjából) tekinthetjük egy olyan (felcsavart) lejtőnek, amelynek alapja $\ell = 2r\pi = 0{,}63$ m, magassága 0,2 m, tehát a hajlásszöge

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{h}{\ell} = 17{,}6^\circ.$$

Ezen a lejtőn a gyöngyszem menetirányú gyorsulása:

$$a_1 = g\sin\alpha = 3{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A centripetális gyorsulást a gyöngyszem

$$v' = v\cos\alpha = \sqrt{2gh}\cos\alpha$$

vízszintes sebességkomponenséből számíthatjuk ki ($v = \sqrt{2gh}$ a gyöngy sebességének nagysága 1 menetnyi süllyedés után). A megadott számadatokkal $v' = 1{,}89\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, és így a centripetális gyorsulás nagysága:

$$a_2 = \frac{v'^2}{r} \approx 35{,}7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A menetirányú gyorsulás és a centripetális gyorsulás egymásra merőleges vektorok, eredőjük nagyságát tehát a Pitagorasz-tétel segítségével számíthatjuk ki:

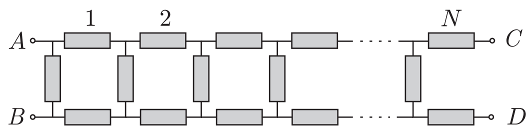
$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \approx 36\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Látható, hogy az eredő gyorsulást lényegében a centripetális gyorsulás határozza meg, mellette a pályamenti gyorsulás nem számottevő.

Szántó Benedek (Keszthely, Vajda J. Gimn., 11. évf.)

82 dolgozat érkezett. Helyes 32 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 10, hiányos (1–3 pont) 34, hibás 6 dolgozat.

P. 4681. *Az ábrán látható, $3N$ darab egyforma ellenállásból álló láncból zárt szalagot készíthetünk kétféle módon:*



a) az A és C, illetve a B és D kivezetéseket páronként összekötjük;

b) az A és D, illetve a B és C kivezetéseket páronként összekötjük (Möbius-szalag).

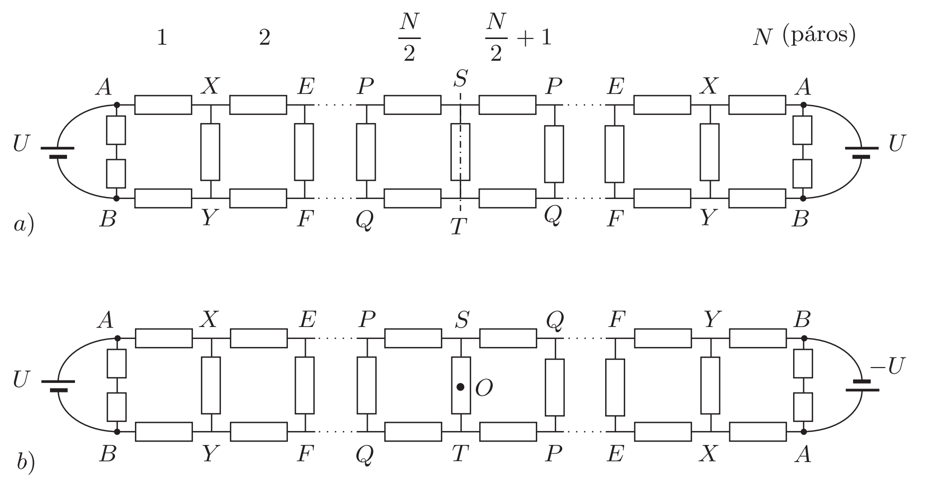
Melyik esetben lesz nagyobb az eredő ellenállás a szalag A és B pontja között?

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

I. megoldás. A feladatban szereplő szalag A és B pontja közötti (egységnyi nagyságúnak tekinthető) ellenállást helyettesíthetjük a szalag mindkét végét lezáró, egyenként 2 egységnyi ellenállással. Ezek párhuzamos eredője ugyanis (a szalag végeinek összekapcsolása után) az eredeti, egyetlen 1 egységnyi ellenállással egyenlő. Ha az így átalakított lánc egyik végére valamekkora U feszültséget kapcsolunk, a másik végének két pontja közé pedig – valamilyen polaritással – ugyanakkora ($\pm U$) feszültséget kötünk, akkor lánc két végének összekapcsolásától akár el is tekinthetünk; a kialakuló árameloszlás (és az abból kiszámolható eredő ellenállás) az összekapcsolt és az összekapcsolatlan ellenállásláncra ugyanaz lesz.

Az azonos polaritású feszültségforrásokra kapcsolt (sima) szalagban a felező egyenesre nézve *tengelyesen szimmetrikus,* az ellentétes polaritású feszültségre kapcsolt (Möbius-) szalagban pedig annak O középpontjára nézve *centráliusan (középpontosan) szimmetrikus* feszültségeloszlás alakul ki. Az azonos potenciálú pontokat összekapcsolhatjuk, és ha így két pont közé két darab 1 egységnyi ellenállás kerül párhuzamosan kapcsolva, ezeket helyettesíthetjük egyetlen $\frac{1}{2}$ egységnyi ellenállással. Az alábbi ábrákon az 1 egységnyi ellenállást *üres* téglalappal, az $\frac{1}{2}$ egységnyi ellenállást pedig *szürke* téglalappal fogjuk jelölni.

Ha N páros, akkor az *1. ábrán* látható két helyzet jön létre (az azonos betűkkel jelölt pontok azonos potenciálúak). Ezeket a kapcsolásokat a *2. ábrán* bemutatott módon alakíthathatjuk át. Jól látszik, hogy az A és B közötti eredő ellenállás az a) esetben *nagyobb,* mint a b) esetnek megfelelő Möbius-szalagnál, hiszen a két kapcsolás csak a jobb oldali utolsó ágban különbözik egymástól, és az a b) esetben kisebb ellenállású. (Kihasználtuk, hogy a b) esetben a centrális szimmetria miatt az S és T pont azonos potenciálú, a közöttük lévő ellenállás tehát rövidzárral is helyettesíthető.)

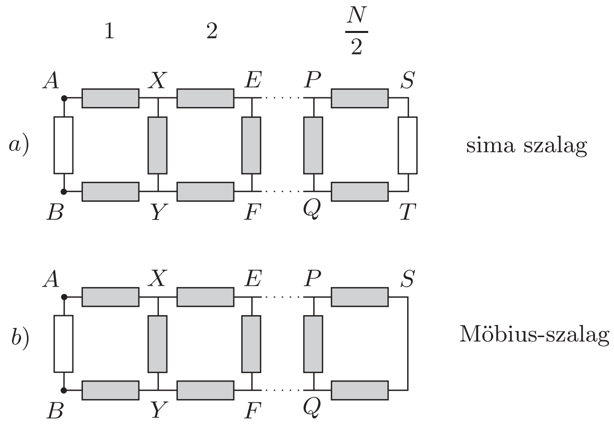


1. ábra

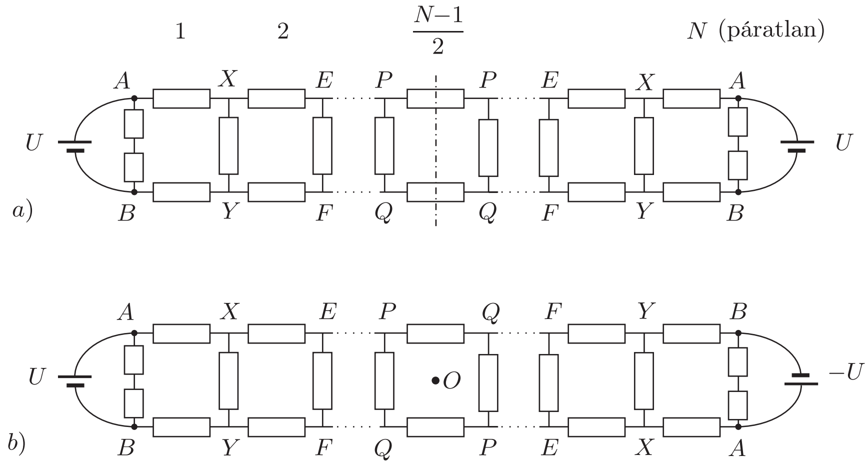
A páratlan N-nek megfelelő kapcsolásokat a *3. ábra* mutatja.

Az ekvipotenciális pontok összekötése után kialakuló kapcsolások a (*4. ábrán*) láthatók. Most is a b) esetben lesz kisebb az A és B pontok közötti eredő ellenállás, hiszen csak a jobb szélső ágban különbözik a két kapcsolás, és a szélső ág ellenállása a Möbius-szalagos kapcsolásban a kisebb.

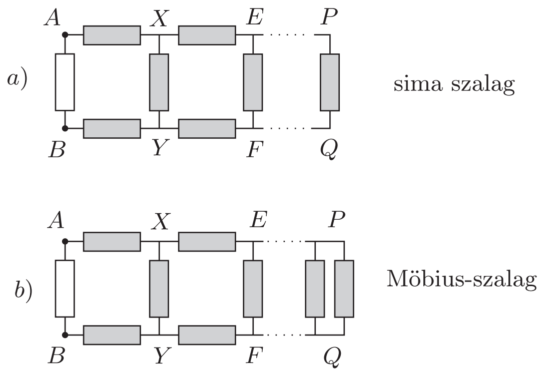
Kaposvári Péter (Miskolc, Herman O. Gimn., 12. évf.)



2. ábra



3. ábra



4. ábra

II. megoldás. Az A és B pontok közötti ellenállást eltávolíthatjuk a kapcsolásból, és vizsgálhatjuk az így kapott „csonkított" (a jobb és a bal oldal felcserélésére nézve szimmetrikus) elrendezést. (A kisebb-nagyobb reláció szempontjából ez a csonkítás nyilván lényegtelen, hiszen ha a maradék lánc eredő ellenállása valamelyik esetben nagyobb, az eltávolított ellenállással együtt is ugyanebben az esetben lesz nagyobb csonkított rész és az eltávolított ellenállás párhuzamos eredője.)

Kapcsoljunk az A és B pontok közé valamekkora (mondjuk U nagyságú) feszültséget, és vizsgáljuk meg, mekkora teljesítményt vesz fel az egész ellenálláslánc. Ezt a teljesítményt kétféle módon is kiszámíthatjuk:

$$P=\frac{U^2}{R_{\text{eredő}}}=R_0\sum_k I_k^2,$$

ahol R_0 az egyforma ellenállások nagysága, I_k pedig a k-adik ellenálláson átfolyó áram erőssége. (A k-ra vett összegzés a teljes láncra, annak minden elemére vonatkozik.) Látható, hogy annál a kapcsolásnál lesz kisebb az eredő ellenállás, amelyiknél az áramerősségek négyzetösszege nagyobb.

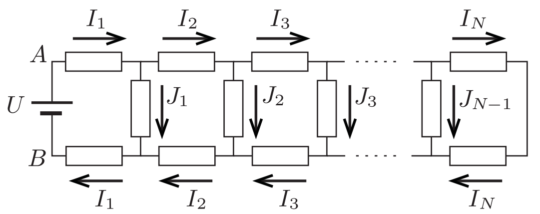
Belátjuk, hogy ez a Möbius-szalagra teljesül, vagyis

(1) $$\sum_{\text{Möbius}} I^2>\sum_{\text{sima}} I^2,$$

és emiatt

(2) $$R_{\text{eredő}}^{(\text{Möbius-szalag})}<R_{\text{eredő}}^{(\text{sima szalag})}.$$

Tekintsük először az *5. ábrán* látható elrendezést, amelyben a szalag bal oldalára adott nagyságú feszültséget kapcsolunk, a jobb oldali kivezetéseit pedig rövidre zárjuk. A kialakuló áramerősségeket az ábrán látható módon jelöljük.

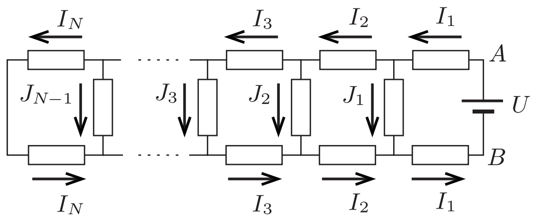


5. ábra

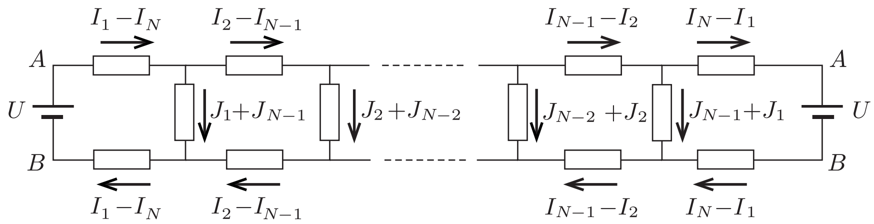
Ha ugyanezt a kapcsolást a jobb és a bal oldal felcserélésével állítjuk össze, abban a *6. ábrán* látható áramok fognak folyni.

Szuperponáljuk egymásra (a megfelelő feszültségek és áramerősségek összeadásával) az 5. és a 6. ábrán látható elrendezést! Ekkor a két-két végpont azonos potenciálú lesz, tehát az eredeti feladat a) kérdésében szereplő módon össze is köthetjük azokat. A kialakuló áramerősségeket a *7. ábra* mutatja. Eszerint a sima szalag ellenállásaiban folyó áramerősségek négyzetösszege:

(3) $$\sum_{\text{sima}} I^2=2\sum_{i=1}^{N}\left(I_i-I_{N+1-i}\right)^2+\sum_{i=1}^{N-1}\left(J_i+J_{N-i}\right)^2.$$



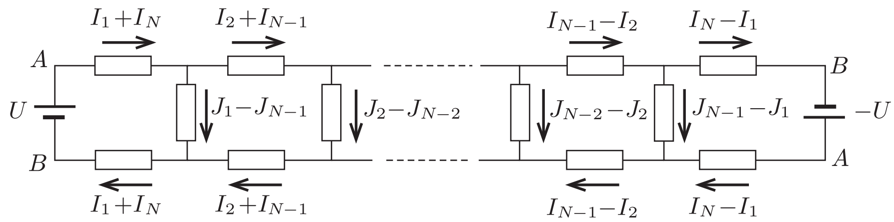
6. ábra



7. ábra

Hasonló módon kapjuk meg a Möbius-szalag megfelelő kifejezéseit is. Ha a 6. ábrán látható kapcsolásban $-U$ feszültséget kötünk a szalag jobb szélére, valamennyi áramerősség iránya megváltozik. A „szuperponált” elrendezésben a bal és a jobb oldali végpontok potenciálja „keresztirányban” egyezik meg egymással, tehát a b) esetnek megfelelően Möbius-szalagként kapcsolható össze az ellenálláslánc (*8. ábra*). Ennek megfelelően az áramok négyzetösszege:

$$\sum_{\text{Möbius}} I^2 = 2\sum_{i=1}^{N}\left(I_i + I_{N+1-i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{N-1}\left(J_i - J_{N-i}\right)^2. \tag{4}$$



8. ábra

Behelyettesítve (3)-at és (4)-et a bizonyítandó (1) egyenlőtlenségbe a négyzetes tagok kiejtése és egyszerűsítések után kapjuk, hogy

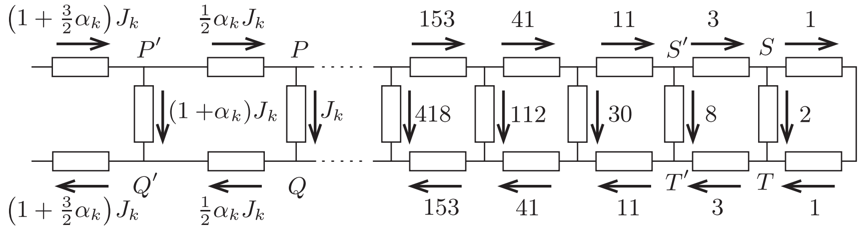
$$2I_1 \cdot I_N + \sum_{i=1}^{N-1}\left(2I_i \cdot I_{N+1-i} - J_i \cdot J_{N-i}\right) > 0.$$

Ez az egyenlőtlenség biztosan igaz, ha a zárójelben szereplő tagok mindegyike pozitív, vagyis ha:

$$\alpha_i \equiv \frac{2I_i}{J_i} > \frac{J_{N-i}}{I_{N+1-i}} \equiv \beta_{N-i}. \tag{5}$$

Belátjuk, hogy a fenti egyenlőtlenség valóban teljesül, mert az α_i arányszámok mindegyike *nagyobb,* mint $1+\sqrt{3}$, a β_i számok pedig mind kisebbek, mint $1+\sqrt{3}$ $(i=1,2,3,\ldots)$.

Kapcsoljunk az 5. ábrán látható láncra akkora feszültséget, hogy a legutolsó (a jobb szélső) ágban 1 egységnyi legyen az áramerősség (*9. ábra*).



9. ábra

Mivel a láncszemek R_0 ellenállását is egységnyinek választhatjuk, az utolsó 2 ellenálláson 2 egységnyi feszültség esik, emiatt az S és T pontok közötti „létrafokon” átfolyó áram is 2 egységnyi. A csomóponti törvény szerint az S pontba befolyó és a T pontból kifolyó áram erőssége 3 egység, az S' és T' pontok közti feszültségesés tehát $3+2+3=8$ egység, és ugyanekkora áram folyik S' és T' között, és így tovább fokonként meghatározhatók az áramerősségek. Kiszámíthatjuk, hogy

$$\alpha_{N-1}=2\cdot\frac{3}{2}=3{,}000, \qquad \beta_1=\frac{2}{1}=2{,}000;$$

$$\alpha_{N-2}=2\cdot\frac{11}{8}=2{,}750, \qquad \beta_2=\frac{8}{3}=2{,}667;$$

$$\alpha_{N-3}=2\cdot\frac{41}{30}=2{,}733, \qquad \beta_3=\frac{30}{11}=2{,}727;$$

$$\alpha_{N-4}=2\cdot\frac{153}{112}=2{,}7321, \qquad \beta_4=\frac{112}{41}=2{,}7317,$$

vagyis az egyik sorozat monoton csökken, a másik monoton növekszik, és (sejthetően) egyre jobban megközelítik az idézett $1+\sqrt{3}\approx 1{,}7320$ „határértéket”.

Ha a lánc valamelyik ágában (pl. a 9. ábrán látható P és Q pontok között) J_k áram folyik, és ismerjük az ehhez az ághoz tartozó α_k arányszámot, akkor a Kirchhoff-féle hurok- és csomóponti törvényből kiszámíthatjuk a szomszédos P' és Q' pontok közötti áram erősségét is, és innen a szomszédos ághoz tartozó α-arányt:

$$\alpha_{k-1}=\frac{2+3\alpha_k}{1+\alpha_k}.$$

Ennek a rekurziós formulának α^* „fixpontja” az $\alpha_{k-1}=\alpha_k$ egyenlet (pozitív) gyökeként adódik:

$$\alpha^*=\frac{2+3\alpha^*}{1+\alpha^*}, \qquad \text{ahonnan} \qquad \alpha^*=1+\sqrt{3}.$$

Algebrai átalakítások után könnyen megkapható, hogy $\alpha_{k-1} < \alpha_k$ (tehát k csökkenésével a sorozat elemei monoton csökkennek), és $\alpha_{k-1} > \alpha^*$, ha $\alpha_k > \alpha^*$.

Hasonló lépésekkel láthatjuk be, hogy a monoton növekvő ($\beta_{k+1} > \beta_k$) sorozatnak is α^* a „fixpontja", és teljesül $\beta_{k+1} < \alpha^*$, ha $\beta_k < \alpha^*$. Ezek szerint az (5) egyenlőtlenség valóban fennáll, vagyis (1) bizonyítást nyert. Ezzel beláttuk, hogy a megcsavarás nélkül összekapcsolt szalag („létra") bármelyik fokának végpontjai között *nagyobb* az eredő ellenállás, mint a megcsavart Möbius-szalag valamelyik fokának végpontjai közötti eredő ellenállás.

Berta Dénes (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 12. évf.)

13 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hibás 1 dolgozat.

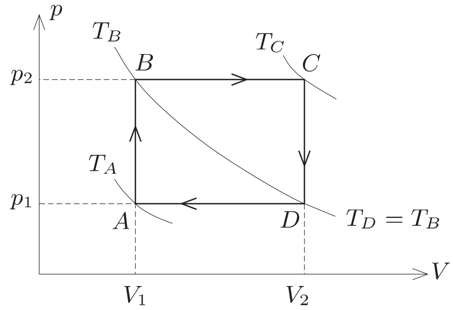
P. 4689. *Egy termodinamikai hőerőgépben a munkavégző közeg kétatomos molekulájú ideális gáz, mely ciklusonként két izobár és két izochor folyamatból álló egyensúlyi körfolyamaton megy át. A gáz legmagasabb hőmérséklete ebben a körfolyamatban* 500 K. *Abban a két állapotban, amikor a gáz izochor folyamatról izobárra tér át, egyenlő a hőmérséklet.*

Mekkora a gáz legalacsonyabb hőmérséklete a körfolyamat során, ha a gép legnagyobb hatásfoka a két szélső hőmérséklet között zajló körfolyamatban 9,9-szer *akkora lehetne, mint amekkora a termodinamikai hatásfok a fenti esetben?*

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. A körfolyamat a $p-V$ diagramon az *ábrán* látható téglalappal szemléltethető. A B és a D állapot hőmérséklete megegyezik, így a gáztörvény szerint

$$V_1 p_2 = V_2 p_1, \quad \text{azaz} \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{V_2}{V_1} = x.$$



Ha sikerül meghatároznunk az x arányszámot, abból a gáz legalacsonyabb hőmérsékletét is kiszámíthatjuk:

$$T_A = \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} \cdot T_C = \frac{1}{x^2} \cdot T_C = \frac{1}{x^2} \cdot 500\ \mathrm{K}.$$

A két szélső hőmérséklet között a legnagyobb hatásfok egy Carnot-folyamattal érhető el:

$$\eta_{\max} = \frac{T_C - T_A}{T_C} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Számítsuk ki a feladatban szereplő körfolyamat termodinamikai hatásfokát is x-szel kifejezve! A kétatomos gáz molekuláinak szabadsági foka $f = 5$, így a gáz mólhője állandó térfogaton $\frac{5}{2}R$, állandó nyomásnál pedig $\frac{7}{2}R$. Ennek megfelelően az $A \to B$

és a $B \to C$ állapotváltozás során felvett hő:

$$Q_{A\to B} = \frac{5}{2}nR(T_B - T_A) = \frac{5}{2}(p_2V_1 - p_1V_1) = \frac{5}{2}p_1V_1(x-1),$$

$$Q_{B\to C} = \frac{7}{2}nR(T_C - T_B) = \frac{7}{2}(p_2V_2 - p_2V_1) = \frac{7}{2}p_1V_1 \cdot x(x-1),$$

a ciklusonként végzett munka pedig az ábrán látható téglalap területe:

$$W_{\text{gáz}} = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = p_1V_1 \cdot (x-1)^2.$$

Eszerint a folyamat hatásfoka (a számunkra érdekes $x > 1$ esetben):

$$\eta(x) = \frac{W_{\text{gáz}}}{Q_{A\to B} + Q_{B\to C}} = 2\frac{(x-1)^2}{(x-1)(7x+5)} = 2\frac{x-1}{7x+5}.$$

Az $\eta_{\max} = 9{,}9\,\eta(x)$ feltétel akkor teljesül, ha fennáll

$$1 - \frac{1}{x^2} = 19{,}8\,\frac{x-1}{7x+5}.$$

Ez ($x - 1 \neq 0$-val egyszerűsítve) a

$$12{,}8x^2 - 12x - 5 = 0$$

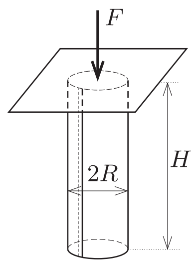
másodfokú egyenletre vezet, amelynek fizikailag értelmes, pozitív megoldása: $x_1 = 1{,}25$. Ennek megfelelően a gáz legalacsonyabb hőmérséklete:

$$T_A = \frac{T_C}{x_1^2} = \frac{500\ \text{K}}{1{,}25^2} = 320\ \text{K}.$$

Fekete Panna (Pécs, Leővey K. Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

41 dolgozat érkezett. Helyes 35 megoldás, hiányos (2–4 pont) 6 dolgozat.

Mérési feladat megoldása



M. 344. A4-es *papírlapokból a rövidebb oldalélek (kb.* 1 cm-es *átfedéssel történő) összeragasztásával papírcsöveket készítünk. A csöveket vízszintes asztallapra állítva, majd tengelyirányú terhelést alkalmazva vizsgáljuk meg, mekkora terhelőerő esetén „csuklanak össze"! Hogyan változik a kritikus terhelőerő a papírcső magasságának függvényében?*

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

Megoldás. *A felhasznált eszközök:* digitális fényképezőgép, alumínium tál (3 literes), műanyag tál (3 literes), csempelap (15 cm $\times$ 15 cm), digitális mérleg (1 gramm pontosságú), víz (kb. 3 liter), A4-es (210 mm $\times$ 297 mm), famentes papírlapok (50 darab, 80 g/m^2), cellux ragasztószalag, olló, farúd, jegyzetfüzet, toll.

A mérés menete:

1. A feladat kiírása szerinti módon A4-es papírlapokból $H=20$, 40, 60, 80, 105, 130, 150, 170, 190, 210 mm magasságú papírhengereket készítettem, minden magasságból 5 darabot, tehát összesen 50 darabot.

2. A ragasztást cellux ragasztószalaggal végeztem a teljes H magasság mentén. A hosszabb papírcsöveket középen kezdetben nem tudtam rendesen összeragasztani, mert ha teljesen belenyúlok a papírcső közepébe és az ujjammal lenyomom a ragasztószalagot, akkor a cső megsérült, behorpadt volna. Ezért egy farudat dugtam a papírcsőbe, mert így az ujjammal már a cső sérülése nélkül nyomogathattam a papírhoz a ragasztót.

3. Egy-egy elkészült papírcsövet vízszintes, sima felületű asztalra állítottam, függőlegesen. A tetejére vízszintesen egy csempelapot tettem, hogy mindenhol egyenletesen érje a nyomás a papírcsövet.

4. A csempére rátettem az alumínium tálat, majd megkértem a segítőmet, hogy kezdje el a műanyag tálból önteni a vizet az alumínium tálba.

5. Addig öntötte a vizet, amíg az alatta lévő papírcső össze nem csuklott. Ebben a pillanatban kezemmel elkaptam a vízzel teli tálat, nehogy leboruljon és kiömöljön a víz. Az összecsuklás pillanatában a segítőm abbahagyta a víz öntését, így éppen csak annyi víz került a tálba, hogy a tál, a csempe és a víz együttes súlyától összeroppanjon a papírcső.

6. A digitális mérleggel megmértem a csempe + az alumínium tál + a tálban lévő víz súlyát, így megkaptam azt a súlyt, amitől a papírcső összecsuklott.

7. A mérést megismételtem további 4, ugyanolyan magasságú papírhengerrel.

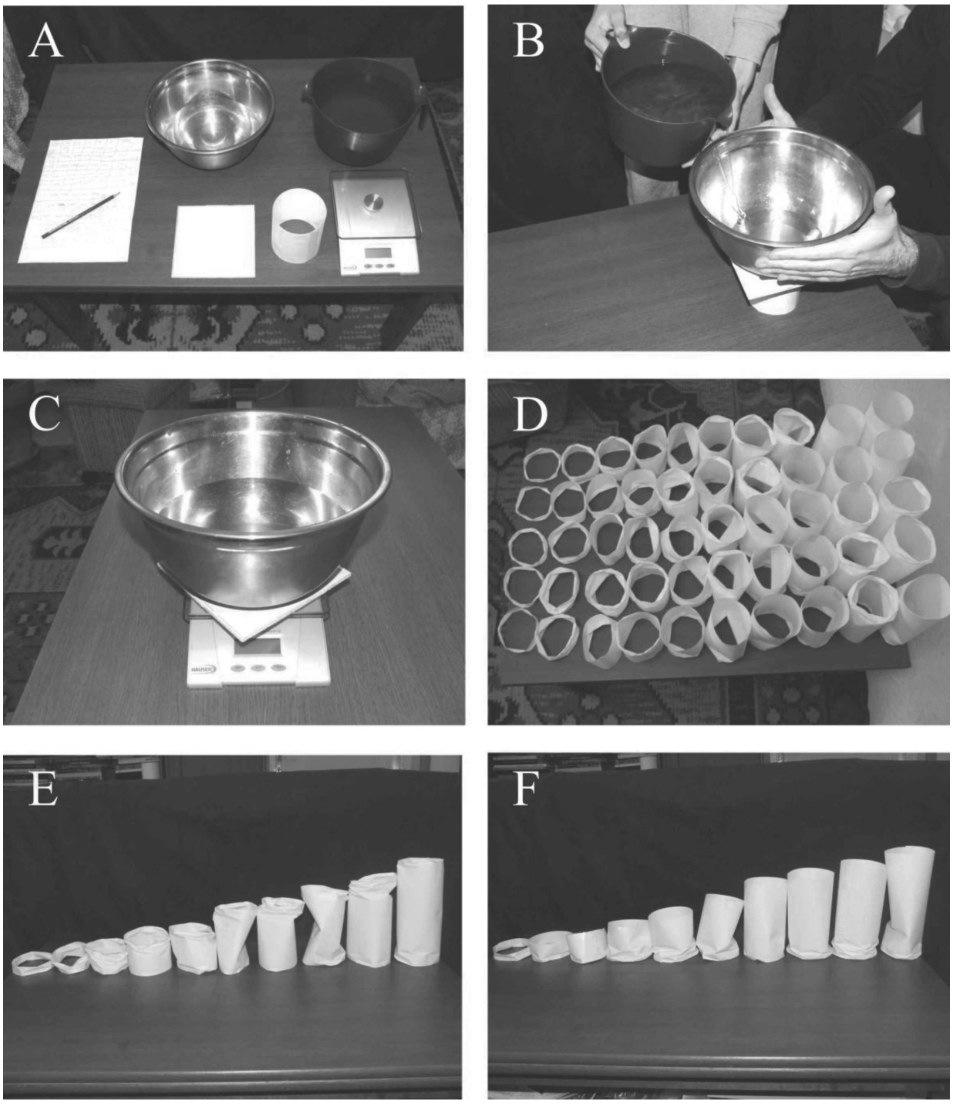
8. A fenti 5 mérést megismételtem további 9, különböző magasságú papírhengerrel is.

9. Az 50 mérési adatot (a papírhenger összecsuklásához szükséges súlyokat) *táblázatba* foglaltam, és az adatokat grafikonon ábrázoltam.

10. Az egyik mérés egyes lépéseiről fényképeket készítettem.

Kiértékelés: 1. A *táblázatból* és a *2. ábra* grafikonjából arra a következtetésre jutottam, hogy a papírhenger összecsuklásához szükséges G súly gyakorlatilag nem függ a henger H magasságától.[1] Látható, hogy a súlyok átlaga össze-vissza (kaotikusan) változik; amint H nő, G átlaga a következőképpen változik: csökken, csökken, nő, csökken, nő, csökken, nő, nő, csökken. Továbbá mind a 10 vizsgált magasság esetén G minimuma és maximuma nagyon eltér egymástól és az átlagtól, vagyis nagy a mért G értékek szórása.

[1] Több versenyző ettől eltérő következtetésre jutott. Megállapították, hogy a magasabb papírhengerek már kisebb terhelés hatására is összeroskadnak, de ennek számszerű jellemzése az adatok nagy szórása miatt általában nem volt meggyőző. (A Javító.)

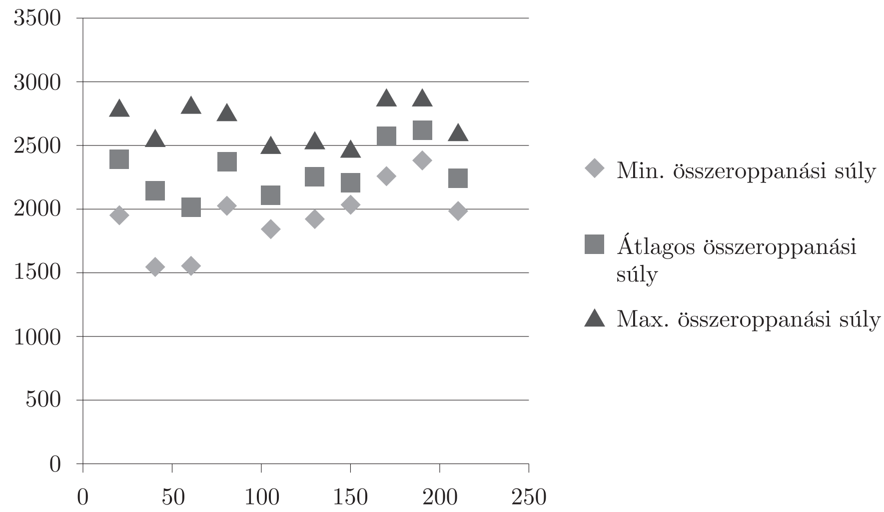


1. ábra. (A) A méréshez használt eszközök. (B) Víz csorgatása a papírhengeren lévő csempére helyezett alumínium tálba. (C) A csempe, az alumínium tál és a tálban lévő víz súlyának megmérése. (D) 10 különböző magasságú, magasságonként 5-5 darab, a terhelés hatására összecsuklott papírhenger fényképe. (E) 10 különböző magasságú, felül összecsuklott papírhenger fényképe. (F) 10 különböző magasságú, alul összecsuklott papírhenger fényképe

2. A táblázatból, valamint az *1.E* és *1.F ábrákból* látszik, hogy adott H magasságú papírhenger olykor alul, néha középen, máskor pedig felül csuklott össze. Az összecsuklás helye is véletlenszerű volt.

H (mm) magasság	papírhenger					átlag	a papírhenger összecsuklásának helye		
	1.	2.	3.	4.	5.		alul	középen	felül
210	1991	2114	2108	2606	2366	2237,0	0	0	5
190	2398	2650	2382	2757	2878	2613,0	2	0	3
170	2704	2499	2489	2263	2872	2565,4	4	1	0
150	2440	2035	2033	2472	2050	2206,0	3	0	2
130	1924	2139	2537	2278	2389	2253,4	2	3	1
105	1925	2498	2302	1848	1992	2113,0	5	0	1
80	2510	2026	2765	2742	1821	2372,8	4	0	2
60	1945	1561	1954	2822	1783	2013,0	3	1	1
40	2325	2001	1553	2469	2557	2181,0	1	3	1
20	2241	2383	1950	2575	2802	2390,2	0	5	0

Táblázat. A 10 különböző magasságú, darabonként 5-5 azonos papírhenger összecsuklásához szükséges súlyok tömege (gramm), azok átlaga (gramm), és a papírhenger összecsuklási helyeinek száma



2. ábra. A papírhenger összecsuklásához szükséges súly tömege (gramm, függőleges tengely) a henger H magasságának (mm, vízszintes tengely) függvényében

3. E véletlenszerűség és G nagy szórásának okai részben az alább felsorolt hibalehetőségekre vezethetők vissza. A pontos magyarázatot sajnos nem tudom.

Hibalehetőségek: 1. Amikor összecsuklott egy adott papírcső, még egy igen rövid ideig (néhány tized másodpercig) tovább folyhatott az alumínium tálba a víz, mert az ember reflexei nem tökéletesek. Így egy picit több víz kerülhetett a tálba, mint amennyi a henger összecsuklásához kellett volna valójában. Ezen ismeretlen többletsúly véletlenszerűen változhatott.

2. Amikor abbahagytuk a víz öntését az alumínium tálba, az éppen a levegőben lévő vízoszlop még leért a tálba, így ezáltal is egy kis mennyiséggel több víz került a tálba. Ezen ismeretlen nagyságú többletsúly is véletlenszerűen változhatott.

3. Nem tudtam mindig tökéletesen egyformán vágni a papírlapokat, ezért néha az öszeragasztott papírhenger egyik végén lépcsőszerű eltolódás keletkezett a ragasztás után. Az ilyen papírcsövek gyakran kisebb súly hatására csuklottak össze, mint a pontosabban összeragasztottak.

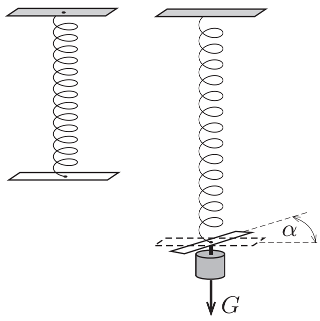
Horváth Sebestyén Lénárd (Vác, Piarista Gimn., 9. évf.)

29 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Asztalos Bogdán, Békési Gergő Bendegúz, Csathó Botond, Holczer András, Horváth Sebestyén Lénárd és Olosz Balázs megoldása. Kicsit hiányos (5 pont) 9, hiányos (2–4 pont) 14 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 348. Egy megterhelt csavarrugónak nemcsak a hossza változik meg, hanem a rugó – ha az egyik vége szabadon elfordulhat – bizonyos mértékig „kicsavarodik”. Mérjük meg, hogyan függ a rugó végének szögelfordulása a terhelő erőtől! Végezzünk méréseket különböző menetszámú és különböző erősségű rugókkal!

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka



P. 4704. Számítsuk ki a higanyos hőmérő gömbjének köbtartalmát 0 °C-nál, ha a 0 °C-os és a 100 °C-os vonalak közötti rész köbtartalma 5 mm^3. Az üveg lineáris hőtágulási együtthatója $8\cdot 10^{-6}$ (1/°C), a higany térfogati hőtágulási együtthatója $1{,}8\cdot 10^{-4}$ (1/°C).

(*3 pont*) *Faragó Andor* (1877–1944) feladata

P. 4705. A Nemzetközi Űrállomás 92 perc alatt kerüli meg a Földet. Tegyük fel, hogy körpályán mozog. Milyen magasan kering a Föld felszíne felett? Mennyit változik naponta a keringési ideje, ha a pályamagassága (két pályakorrekció között) egy nap alatt kb. 100 métert csökken?

(*4 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest

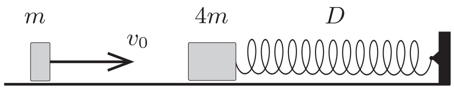
P. 4706. Egy 30 cm alapú, rögzített, egyenes lejtő tetejéről súrlódás nélkül lecsúszik egy test. Legalább mennyi idő alatt ér le a lejtő aljára?

(*4 pont*) *Versenyfeladat nyomán*

P. 4707. Vízszintes felületen egy $m=0{,}2$ kg és egy $4m$ tömegű test súrlódásmentesen mozoghat. A nagyobb tömegű test egy $D=320$ N/m rugóállandójú, nyújtatlan húzó-nyomó rugóhoz van erősítve. A kisebb tömegű test $v_0=5$ m/s sebességgel egyenesen nekiütközik a nyugalomban lévő másik testnek. Az ütközés teljesen rugalmas.

a) Mekkora a rugó maximális összenyomódása?

b) Mennyi lesz a rugóhoz erősített test legnagyobb sebessége és a rugó legnagyobb megnyúlása?



(*4 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 4708. Téglalap és négyzet alakú lemezt a síkjukra merőleges és középpontjukon átmenő tengely körül forgatunk. A két lemez tömege, vastagsága és sűrűsége ugyanakkora. A téglalap egyik oldala a másiknak fele. Melyik lemeznek van nagyobb tehetetlenségi nyomatéka? (Nem szükséges a tehetetlenségi nyomatékokat külön kiszámítani!)

(*4 pont*) *Strasser V. Benő* (1884–1966) feladata

P. 4709. Egy 2 dm élhosszúságú, homogén műanyag kocka tömege 1,0 kg, anyagának Young-modulusza 10^7 N/m^2.

a) Mennyire nyomódik össze ez a kocka, ha egy merev, vízszintes lapra helyezzük?

b) Mennyivel csökken a súlypont magassága?

(*5 pont*) Közli: *Horváth István,* Fonyód

P. 4710. Hőszigetelő edényben lévő 1 kg tömegű, 2 °C hőmérsékletű vízbe annyi 0 °C-os jeget teszünk, hogy a jég éppen elolvadjon, és a víz hőmérséklete 0 °C legyen.

a) Nő vagy csökken eközben a rendszer entrópiája?

b) Adjunk számszerű becslést az entrópiaváltozásra!

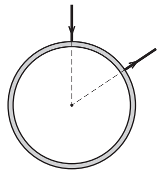
(*5 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

P. 4711. Hat egyforma fonálingát készítünk elhanyagolható súlyú, elektromosan szigetelő fonálból és kicsi, 5 g tömegű fémgömbökből. A fonálingák hossza 0,5 m. A hat ingát egyazon pontban felfüggesztjük, majd ezen ponton átmenő függőleges tengely körül megforgatjuk. Elég hosszú idő múlva a kis gömbök vízszintes síkú, r sugarú körön keringenek.

a) Mekkora r, ha a keringési idő 1 s?

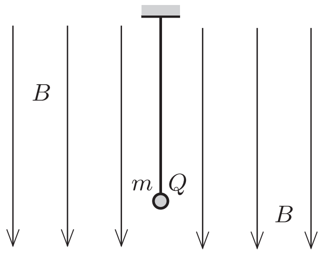
b) Mekkora azonos töltéssel kellene ellátnunk a gömböket, hogy forgás nélkül is ugyanezen az r sugarú körön helyezkedjenek el?

(*4 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron



P. 4712. Egy homogén anyagú, egyenletes keresztmetszetű rézgyűrű mely két pontja közé kapcsolhatunk elektromos feszültségforrást, ha azt szeretnénk elérni, hogy a rézgyűrűben folyó áram keltette mágneses térerősség a gyűrű középpontjában zérus legyen?

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest



P. 4713. Függőleges, B mágneses indukciójú homogén mágneses mezőben lévő fonálon egy m tömegű, Q töltésű, kisméretű golyó függ. A golyónak akkora és olyan irányú sebességet adunk, hogy az vízszintes síkban egyenletes körmozgást végezzen. Egy másik alkalommal úgy állítjuk ugyanolyan sugarú, vízszintes síkú körpályára a golyót, hogy az a mágneses mezőben ellentétes irányban körözzön.

a) Határozzuk meg a két fonálerő arányát!

b) Mekkora a szögsebességek nagyságának különbsége a két mozgás során?

(*4 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

P. 4714. Egy mesterséges hold a Föld körül olyan ellipszispályán kering, amelynek nagytengelye $2a$, kistengelye $2b$. Határozzuk meg a mesterséges hold sebességét

a) pályájának a Földhöz legközelebbi pontjában,

b) pályájának a Földtől legtávolabbi pontjában,

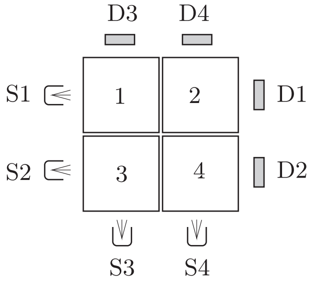
c) a Föld középpontjától r távolságban.

(*5 pont*) *Soós Károly* (1930–2014) feladata

❄

Helyesbítés

A múlt havi számunkban a **P. 4702.** feladat hibásan jelent meg. Az alábbi, helyesbített szövegű feladat megoldása a februári feladatokkal együtt ismételten beküldhető; azt januári feladatként pontozzuk. (A korábban beküldött dolgozatokat nem értékeljük.) A hibáért a feladat kitűzőjétől és a versenyzőktől elnézést kérünk. (A szerk.)



P. 4702. Négy darab 10 cm oldalú, különböző anyagi minőségű betonkockát az *ábrának* megfelelően helyezünk egymás mellé, és ^{60}Co gammasugárnyalábbal „világítjuk meg” egymás után 4 pozícióból (S1, S2, S3 és S4). A sugárforrásokkal szemben, a betonkockák mögött 4 detektort is elhelyeztünk (D1, D2, D3 és D4). Az első három mérés szerint a betonkockák a sugárzás intenzitását rendre az eredeti érték 86,76, 71,94 és 84,25 **százalékával** csökkentik.

a) Hány **százalékkal** csökkent intenzitást mér a negyedik detektor?

b) Az 1. kocka „felezési rétegvastagsága” 6 cm. Mekkora ez – az anyagi minőségtől függő – mennyiség a többi kockánál?

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

Beküldési határidő: 2015. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 65. No. 2. February 2015)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 93): **K. 451.** In the game of rock-paper-scissors, players need to observe three rules: the rock blunts the scissors, the scissors cut the paper, and the paper wraps the rock. These rules decide which weapon wins. How many new rules need to be formulated if four extra weapons are added to the game (for example, matchstick, spectacles, telephone, stamper)? What is the fundamental principle of forming the rules, in order that the new game should be balanced, like the original game? **K. 452.** A silo for storing winter food for cattle is attached to one corner of a rectangular stable. The silo is shaped like a regular triangular prism, with base edges of length 3 metres. The longer side of the stable is 9 metres. With a 9-metre-long rope, a goat is tied to the point where the silo joins with the stable (see the *figure*). The goat cannot break the rope, and the rope will not stretch. The buildings are surrounded with grass, and there is no fence or any other obstacle hindering the goat from grazing. Find the area that the goat can graze. **K. 453.** The mean mark on a test was 71 points. However, the teacher made a mistake in assessing one of the problems, so every student was given an extra point. Thus the total mark on the papers changed to 936. How many students took the test? **K. 454.** Several digits of the numbers in the operations below have been replaced with letters. Different letters stand for different digits, and identical letters stand for identical digits. No letter denotes the digit 1.

$$\begin{gathered}1\cdot \mathrm{G}+1=\mathrm{H},\\ 1\mathrm{A}\cdot \mathrm{G}+2=\mathrm{HG},\\ 1\mathrm{AB}\cdot \mathrm{G}+3=\mathrm{HGF},\\ 1\mathrm{ABC}\cdot \mathrm{G}+4=\mathrm{HGFE},\\ 1\mathrm{ABCD}\cdot \mathrm{G}+5=\mathrm{HGFED}.\end{gathered}$$

Find the value of each letter. **K. 455.** The representation of 2015 in binary notation is a palindrome number: 11111011111. How many years are there in the 21st century whose binary representations are also palindromes? (Based on the idea of *S. Kiss,* Nyíregyháza) **K. 456.** The representations of three consecutive square numbers in base b notation are 220, 251 and 304. Find the value of b.

New exercises for practice – competition C (see page 94): **Exercises up to year 10: C. 1273.** Prove that $3^{4n}+4\cdot 7^{4k}$ is divisible by 5 for all $n,k\in\mathbb{N}$. **C. 1274.**

The 482 employees of a company are taking a team building trip. They can use vehicles seating 4, 19 or 21 people. How many of each kind of vehicle should be used, provided that each vehicle needs to be full? Find all possible solutions. **Exercises for everyone: C. 1275.** Determine the largest five-digit positive integer $\overline{abcde}$ that is divisible by each of the numbers $\overline{bcde}$, $\overline{cde}$, $\overline{de}$ and e. **C. 1276.** X, Y, Z, V are interior points of sides AB, BC, CD, DA of a parallelogram $ABCD$, respectively, such that $\frac{AX}{XB}=\frac{BY}{YC}=\frac{CZ}{ZD}=\frac{DV}{VA}=k$, where k is a positive constant less than $\frac{1}{2}$. Find the value of k, given that the area of quadrilateral $XYZV$ is 68% of the area of parallelogram $ABCD$. **C. 1277.** Depending on the value of r^2, how many solutions do the simultaneous equations $x^2+y^2=r^2$, $|x|+|y|=2$ have? **Exercises upwards of year 11: C. 1278.** Determine the value of n, given that $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ and $\binom{n}{3}$ are three consecutive terms of an increasing arithmetic progression. **C. 1279.** Determine all squares that have vertex A at the point $(4;-2)$, vertex B on the circle $b:\ (x-5)^2+(y-2)^2=25$, and vertex D on the line $d:\ 4x+3y+2=0$.

New exercises – competition B (see page 95): **B. 4687.** Samson wrote the number 123456789 on a sheet of paper. Then he may or may not have placed a multiplication sign between any two consecutive digits. (He may have used several of them, or none at all.) By reading the digits between multiplication signs as a single number, he obtained a product of numbers. For example, $1234\cdot 56\cdot 789$. What is the maximum possible value of the number obtained in this way? (*3 points*) (Suggested by *M. E. Gáspár,* Budapest) **B. 4688.** Which of the numbers below is greater if each expression contains 50 twos and 50 threes alternating: $2^{3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^3}}}}}}}$ or $3^{2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3^2}}}}}}}$? (*5 points*) **B. 4689.** Is there a pentagonal pyramid that can be intersected by a plane in a regular hexagon? (*6 points*) **B. 4690.** 9 mathematicians of a university went to a conference together. Since the presentations were boring, they fell asleep several times, each of them at most 4 times. For any pair of mathematicians, there was a time when they were both sleeping. Show that there was a time instant when at least three of them were sleeping. (*5 points*) **B. 4691.** a, b, c and d are four parallel lines in the plane, in this order. The distance of a and b is 1, the distance of b and c is 3, and the distance of c and d is also 1. Consider the rectangles that have exactly one vertex on each line. How can we obtain the rectangle of minimal area, and what is this area? (*3 points*) **B. 4692.** The sides of an acute-angled triangle are a, b, c, the opposite angles are α, β, γ, and the lengths of the corresponding altitudes are m_a, m_b, m_c, respectively. Prove that $\frac{m_a}{a}+\frac{m_b}{b}+\frac{m_c}{c}\geqslant 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\Big(\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 2\beta}+\frac{1}{\sin 2\gamma}\Big)+\sqrt{3}$. (*5 points*) (Suggested by *K. Williams,* Szeged) **B. 4693.** K is a point on side AC of triangle ABC such that $AK=2KC$ and $\angle ABK=2\angle KBC$. Let F denote the midpoint of side AC, and let L be the orthogonal projection of point A onto the line segment BK. Prove that the lines FL and BC are perpendicular. (*5 points*) **B. 4694.** Find all real numbers p_1, q_1, p_2, q_2 such that the roots of the equation $x^3+p_1x+q_1=0$ are p_2 and q_2, and the roots of the equation $x^3+p_2x+q_2=0$ are p_1 and q_1. (*4 points*) (Suggested by *Z. Bertalan,* Budapest) **B. 4695.** Given that a permutation of the points of the plane maps any three concyclic points to three concyclic points, show that three points are collinear if and only if their images are collinear. (*5 points*)

New problems – competition A (see page 97): **A. 635.** Show that for every positive real number $c>0$ there is a positive integer n such that $\varphi\big(\sigma(n)\big)>cn$. (For an arbitrary postive integer k, $\varphi(k)$ denotes the number of positive integers not exceeding k that are co-prime with k. $\sigma(k)$ is the sum of positive divisors of k.) (Proposed by: *Barnabás Szabó,* Budapest) **A. 636.** There is given a convex quadrilateral $ABCD$ and a point P in the interior of the triangle BCD in such a way that the quadrilateral $ABPD$

has an inscribed circle, and the three inscribed circles of the quadrilateral $ABPD$, the triangle BCP and the triangle CDP, respectively, are pairwise tangent to each other. Denote by Q and R the points tangency on the line segments BP and DP, respectively. Let the lines BP and AR meet at S, let the lines DP and AQ meet at T, and let the lines BT and DS meet at U. Show that the line CU bisects the angle BCD. **A. 637.** Let n be a positive integer. Let $\mathcal{F}$ be a family of sets that contains more than half of all subsets of an n-element set X. Prove that from $\mathcal{F}$ we can select $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ sets that form a separating family on X, i.e., for any two distinct elements of X there is a selected set containing exactly one of the two elements. (*Miklós Schweitzer competition,* 2014)

Problems in Informatics

(see page 97)

See our homepage: `http://www.komal.hu/lap/2015-02/tart.e.shtml`.

Problems in Physics

(see page 122)

M. 348. Not only the length of a loaded helical spring changes, but – if one of the ends of the spring is free to move – to some extent the whole spring is "twisted". Measure how the angular displacement of the end of the spring depends on the load. Carry out the measurement for springs which have different number of turns and for springs which have different strength.

P. 4704. Calculate the cubic content of the spherical bulb of a mercury in glass thermometer at a temperature of 0 °C, if the cubic content of that part of the thermometer which is between the 0 °C mark and the 100 °C mark is 5 mm^3. The coefficient of linear expansion of glass is $8 \cdot 10^{-6}$ (1/°C), and the coefficient of volume expansion of mercury is $1.8 \cdot 10^{-4}$ (1/°C). **P. 4705.** The International Space Station completes a whole revolution around the Earth in 92 minutes. Suppose that its path is circular. How high above the surface of the Earth does it revolve? How much does its period change (between two corrections of its path) if its height changes approximately 100 meters during one day? **P. 4706.** An object slides down frictionlessly from the top of a fixed straight slope of base 30 cm. At least how long does it take for the object to slide down? **P. 4707.** An object of mass $m = 0.2$ kg and another one of mass $4m$ can move frictionlessly along a horizontal surface. The greater mass object is attached to an unstretched spring of spring constant $D = 320$ N/m. (The spring is designed for both compression and tension.) The smaller object collides head-on at a speed of $v_0 = 5$ m/s with the stationary heavy object. The collision is totally elastic. *a*) What is the maximum compression of the spring? *b*) What will the maximum speed of the object attached to the spring be, and what is the greatest extension of the spring? **P. 4708.** A rectangle and a square shaped sheets are rotated about an axle through their centres, the axle is perpendicular to the plane of the sheets. The two sheets have the same mass, same width and the same density. One side of the rectangle is half of its other side. Which sheet has the greater rotational inertia? (It is not necessary to calculate the rotational inertias of the two objects separately.) **P. 4709.** The mass of a uniform density plastic cube of edge 2 dm is 1.0 kg. The Young's modulus of its material is 10^7 N/m^2. *a*) How much is this cube compressed if it is placed to a horizontal surface? *b*) How much does the height of its centre of mass decrease? **P. 4710.** Some ice at a temperature of 0 °C is added to 1 kg water at a temperature of 2 °C. The mixture is in a thermally insulated container and the amount of ice is such, that it just melts whilst the final temperature of the water will be 0 °C. *a*) Will the entropy of the system increase or decrease? *b*) Give numerical estimation for the change in the entropy of the system. **P. 4711.** Six alike simple pendulums are made of electrically insulating threads of negligible mass and of small metal spheres of mass 5 g. The length of each pendulum is 0.5 m. The six pendulums are hung at the same point, and then they are all rotated about a vertical axis through this point. After a long enough time each small sphere revolves along a circular path of radius r in a horizontal plane. *a*) What is the radius r of the path, if the period of the motion is 1 s? *b*) What same amount of charge should be added to the spheres in order that they stay at the circumference of the same radius of circle r, without rotation? **P. 4712.** To which two points of a uniform density and uniform cross section copper ring should an electrical voltage supply be connected in order that the magnetic flux density induced by the current in the ring is to be zero at the centre of the ring? **P. 4713.** A small ball of mass m and of charge Q is hanging on a piece of thread in uniform vertical magnetic field of magnetic induction B. The ball is given an initial velocity such that it undergoes uniform circular motion in a horizontal plane. At another occasion the ball is started such that it moves in the magnetic field along the same radius of circle in the horizontal, but in the opposite direction as it did in the previous case. *a*) Determine the ratio of the two tensions in the thread in the two cases. *b*) What is the difference between the magnitudes of the angular speeds of the two motions? **P. 4714.** A satellite orbits about the Earth along an elliptical path. The major axis of the ellipse is $2a$ and its minor axis is $2b$. Determine the velocity of the satellite *a*) at that point of its path which is the closest to the Earth; *b*) at that point of its path which is the furthest from the Earth; *c*) at a point which is at a distance of r from the centre of the Earth.

P. 4702 (corrected version). Four concrete cubes, which are made of different material, and which all have the side of 10 cm are placed next to each other as shown in the *figure*. They are "illuminated" by a beam of ^{60}Co gamma-ray, from four different positions, (S1, S2, S3 and S4) one after the other. Opposite to the gamma source behind the cubes there are four detectors (D1, D2, D3 and D4). The first three measurements shows that the concrete cubes decrease the intensity of the radiation **by** 86.76, 71.94 and 84.25 percent of the original value, respectively. *a*) What is the intensity of the radiation measured by the fourth detector, expressed in the percentage value of the intensity of the original radiation? *b*) The "thickness of the halving-layer" of the first cube is 6 cm. What is this value for the other cubes (which is characteristic of the material of the cube)?

Problems of the 2014 Kürschák competition

1. Every member of a group of n people knows at least one but at most $n-2$ other members of the group, where acquaintance is a mutual relation. Prove that four appropriately chosen members of the group can be seated around a table such that each one of them knows exactly one out of her two neighbours.

2. Let ABC be an acute triangle and let P be a point inside the triangle that is not incident to any of the altitudes of the triangle. Denote the feet of the altitudes from points A, B and C by A_1, B_1 and C_1, respectively. Let rays AP, BP and CP intersect the circumcircle of the triangle at points A_2, B_2, C_2. Prove that arcs AA_1A_2, BB_1B_2 and CC_1C_2 go through the same point.

3. Let K be a closed convex polygon and let X be any point in the plane of K. Prove that X can be brought to the inside or to the perimeter of polygon K by reflecting in certain sidelines of K in an appropriate order if one can reflect in the same axis several times.