KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

65. évfolyam 1. szám Budapest, 2015. január

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Székely Péter: Emelt szintű gyakorló feladatsor . . . 2

Ratkó Éva, Schmieder László: Megoldásvázlatok a 2014/9. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz . 3

Matematika C gyakorlat megoldása (1226.) 10

Matematika feladatok megoldása (4558., 4582., 4591., 4595., 4600., 4602., 4603., 4604., 4607., 4611., 4636.) 11

Matematika és fizika totó 26

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (445–450.) 27

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1266–1272.) 28

A B pontversenyben kitűzött feladatok (4678–4686.) 29

Matematikus képzés a BME-n 31

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (632–634.) 32

Matematikaképzések az ELTE TTK-n 32

Matematika tanárképzés az ELTE TTK-n 34

Informatikából kitűzött feladatok (364–366., 95.) . . 34

Matematika és fizika totó megoldása 39

Fizika feladatok megoldása (4600., 4621., 4627., 4629., 4637., 4640., 4642., 4648., 4656., 4661.) . . 43

Fizikából kitűzött feladatok (347., 4693–4703.) . . . 57

Problems in Mathematics 59

Problems in Informatics 61

Problems in Physics 63

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, V. emelet 5.106.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, V. emelet 5.106., 1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

1. Ábrázoljuk és jellemezzük az alábbi függvényt a lehető legbővebb számhalmazon:

$$f : x \longmapsto \left(\frac{2^x+5}{2^{x+1}-10} - \frac{2^x-5}{2^{x+1}+10} - \frac{50}{25-4^x}\right) : \frac{5\cdot 2^x}{2^x-5}. \qquad (\textit{11 pont})$$

2. Mennyi a valószínűsége, hogy a háromjegyű pozitív egészek közül találomra olyat választunk, mely az 5, a 7, illetve a 11 egyikével sem osztható? (*12 pont*)

3. Matematikus barátunk statisztikát csinál a kiránduláson készített 500 fényképéről. Azt találja, hogy a méretük átlaga 2,84 MB, s a legnagyobb méretű képe 3,65 MB-os.

a) Mennyi a méretük szórásának legkisebb értéke?

b) Legfeljebb mekkora lehet a méretük szórása, ha a terjedelem 1,62 MB? (*14 pont*)

4. A fixhajtású kerékpárnál fontos a lánc feszessége. Az első lánckerék sugara 104 mm, fogszáma 52, a hátsó lánckerék adatai pedig 32 mm és 16 fog. (A lánckerék sugarát úgy mértük, hogy az megegyezik egy, a lánckerékre illeszkedő láncszem középpontjának a lánckerék középpontjától mért távolságával.) Milyen hosszú láncra van szükségünk, ha a két lánckerék középpontjának távolsága 450 mm? Hány láncszemet tartalmaz ez a lánc? (*14 pont*)

II. rész

5. Milyen $m \in \mathbb{R}$ paraméter esetén lesz hegyesszögű α megoldása a következő egyenletnek?

$$\cos^2\alpha - (18-2m)\cos\alpha + m^2 + 3m + 3 = 0 \qquad (\textit{16 pont})$$

6. Ábrázoljuk a következő ponthalmazt a koordinátasíkon:

$$H := \left\{ P(x;y) \;\middle|\; \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2-1} \leqslant 0 \;\wedge\; |y| \leqslant 1 \right\}$$

Mekkora a ponthalmaz területe? (*16 pont*)

7. Az $ABCD$ négyzet alapú egyenes gúla AE odalalélének P pontjára teljesül, hogy $AP : PE = 1 : 2$, valamint a CE oldalélének R pontjára igaz, hogy $CR : RE = 1 : 2$.

a) Milyen arányban osztja a B csúcson, valamint a P és R pontokon átmenő sík a DE élt?

b) Hány százaléka a keletkező síkmetszet területe az alap négyzetlap területének, ha a gúla magassága az alaplap átlójának másfélszerese? (*16 pont*)

8. Készítsünk „mérőhengert”, mely az $f(x)=x^{10}$, ahol $x\in[-1;1]$ függvény y tengely körüli megforgatásával jön létre. A koordinátarendszer egységeit dm-ben mérjük. Készítsünk deciliterenként beosztást az oldalán. (Milyen magasságoknál lesznek az osztásvonalak?) (*16 pont*)

9. Egy „piramisjáték” elindítója a második hétre már 4 embert sikeresen beszervezett, így öten lettek. (Az első hét a tervezés ideje volt.) A szervezés olyan jól sikerült, hogy a harmadik héttől kezdve minden héten a következő sorozat szerint alakult az összes résztvevő száma: $a_n=3a_{n-1}-8$.

a) Hányan vettek részt az ötödik héten a játékban?

b) Mutassuk meg, hogy az összes résztvevők száma monoton növekvő sorozatot alkot.

c) Írjuk fel explicit alakban a sorozatot.

d) Igazoljuk, hogy a sorozat utolsó számjegyei $n=2$-től kezdve periodikus sorozatot alkotnak. (*16 pont*)

Székely Péter
Budapest

Megoldásvázlatok a 2014/9. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. *Jenci rollert szeretne vásárolni, ezért elindul a boltba valamennyi pénzzel, mind három fabatkás. A boltban csak egyfajta roller van, az ára 19 fabatka. A boltosnak azonban csak öt fabatkásai vannak. Hogyan tudják a legkevesebb pénzdarab fölhasználásával lebonyolítani az üzletet?* (*11 pont*)

Megoldás. A háromfabatkások száma legyen x, az ötfabatkásoké pedig y. Ekkor $3x-5y=19$. Ebből x-et kifejezve kapjuk, hogy

$$x=\frac{5y+19}{3}=y+6+\frac{2y+1}{3}.$$

Mivel x és y egész számok, ezért $\frac{2y+1}{3}$ is egész, vagyis $3\mid 2y+1$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $y=3k+1$.

Ha $y=3k+1$, akkor

$$x=y+6+\frac{2y+1}{3}=3k+1+6+\frac{2(3k+1)+1}{3}=3k+7+2k+1=5k+8.$$

A legkisebb megoldást akkor kapjuk, ha $k=0$. Ekkor $x=8$, $y=1$, vagyis Jenci 8 darab háromfabatkással fizet és 1 darab ötfabatkást kap visszajárónak.

2. *Három szomszédos páratlan négyzetszám összege egy csupa azonos számjegyből álló négyjegyű szám. Határozzuk meg a négyjegyű számot.* (*12 pont*)

Megoldás. Felírhatjuk a következő egyenletet:

$$(2a-1)^2+(2a+1)^2+(2a+3)^2=\overline{bbbb},$$

ahol $a\in\mathbb{N}^+$, $b\neq 0$ pedig számjegy. A jobb oldal alakítható:

$$\overline{bbbb}=1111\cdot b=11\cdot 101\cdot b.$$

A bal oldalon a zárójeleket felbontva és a tagokat összevonva kapjuk, hogy:

$$12a^2+12a+11=11\cdot 101\cdot b.$$

Mivel a jobb oldal osztható 11-gyel, ezért a bal oldal is: $11\mid 12a^2+12a+11$, amiből következik, hogy $11\mid 12a^2+12a$. Mivel $(11,12)=1$, ezért innen $11\mid a^2+a$ következik. Mivel $a^2+a=a(a+1)$, ezért vagy a, vagy $a+1$ a 11 többszöröse. Azt is tudjuk, hogy $f(a):=12a^2+12a+11$ értéke legfeljebb 9999, és hogy pozitív egész a esetén $f(a)$ szigorúan monoton nő.

Vizsgáljuk meg a szóba jövő eseteket. Ha $a=10$, akkor $f(a)=1331$. ha $a=11$, akkor $f(a)$ értéke 1594. Ha $a=21$, akkor $f(a)$ értéke 5555, illetve ha $a=22$, akkor $f(a)=6083$. Ha $a=32$, akkor $f(a)$ már ötjegyű, tehát más megoldás nem lehetséges. Tehát a négyjegyű szám az 5555.

3. *Az $ABCD$ négyszög AB és CD oldala merőleges egymásra. Az AC szakasz felezőpontja E, a BD szakaszé F. Bizonyítsuk be, hogy $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=4\overline{EF}^2$.* (*14 pont*)

Megoldás. Legyen a DC és az AB egyenes metszéspontja O, és jelölje az O pontból az egyes pontokba mutató vektorokat a megfelelő kisbetű. Tudjuk, hogy $\mathbf{e}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}$ és $\mathbf{f}=\frac{\mathbf{b}+\mathbf{d}}{2}$. Mivel $\overrightarrow{EF}=\mathbf{f}-\mathbf{e}$, így

$$4\overrightarrow{EF}^2=4(\mathbf{f}-\mathbf{e})^2=4\left(\frac{\mathbf{b}+\mathbf{d}}{2}-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}\right)^2=(\mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{c})^2.$$

Mivel **bd**, **bc**, **ad** és **ac** a merőlegesség miatt 0, így

$$(\mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{c})^2=(\mathbf{b}-\mathbf{a})^2+(\mathbf{d}-\mathbf{c})^2+0=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2.$$

Azt kaptuk, hogy $4\overrightarrow{EF}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2$, így a bizonyítást befejeztük.

4. *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:*

$$x-y=7,$$
$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=7.$$ (*14 pont*)

Megoldás. Használjuk fel, hogy $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, és legyen $a=\sqrt[3]{x}$, $b=\sqrt[3]{y}$. Ekkor $7=a^2+ab+b^2$ és ebből

$$7=a^3-b^3=(a-b)\big(a^2+ab+b^2\big)=(a-b)\cdot 7,$$

vagyis $a-b=1$ és így $a=b+1$ következik. Ekkor $a^3=(b+1)^3=b^3+1+3b(b+1)$. Az első egyenletből $a^3=7+b^3$. A két egyenlet bal oldala megegyezik, így a jobb oldaluk is egyenlő:

$$b^3+1+3b(b+1)=7+b^3,$$

amiből

$$3b^2+3b-6=0, \quad b^2+b-2=(b-1)(b+2)=0.$$

Ha $b=\sqrt[3]{y}=1$, akkor $y=1^3=1$, és $x=7+1=8$, ami kielégíti az egyenletrendszert.

Ha $b=\sqrt[3]{y}=-2$, akkor $y=(-2)^3=-8$ és $x=7-8=-1$, ami szintén jó megoldás.

II. rész

5. *Adott egy* 14 cm *sugarú körlap, melyből kivágunk egy körcikket, amely egy kúp palástja. Mekkora az így kapható legnagyobb térfogatú kúp, és milyen nagy ekkor a körcikk középponti szöge?* (*16 pont*)

Megoldás. Legyen a körcikk középponti szöge α (rad) $(0<\alpha<2\pi)$, a hozzá tartozó ív hossza pedig k_α. Ekkor $\frac{k_\alpha}{2\cdot 14\cdot\pi}=\frac{\alpha}{2\pi}$, amiből $k_\alpha=14\alpha$.

A kúp magassága legyen m, alapkörének sugara R. Alkotója tudjuk, hogy 14. A kúp alaplapjának kerülete $R\cdot 2\pi=k_\alpha$, amiből

$$R=\frac{k_\alpha}{2\pi}=\frac{14\alpha}{2\pi}=\frac{7\alpha}{\pi}.$$

Felírva a Pitagorasz tételt a kúp magassága, alkotója és alapkörének sugara által alkotott derékszögű háromszögre: $R^2+m^2=14^2=196$, amiből

$$m=\sqrt{196-R^2}=\sqrt{196-\frac{49\alpha^2}{\pi^2}}.$$

A kúp térfogata:

$$V(\alpha)=\frac{R^2\pi m}{3}=\frac{\frac{49\alpha^2}{\pi^2}\cdot\pi\cdot\sqrt{196-\frac{49\alpha^2}{\pi^2}}}{3}=\frac{7^3}{3\pi}\alpha^2\sqrt{4-\frac{\alpha^2}{\pi^2}}.$$

$V(\alpha)$ egy nyílt intervallumon értelmezett függvény, ezért ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0:

$$0=V'(\alpha)=\frac{7^3}{3\pi}\left[2\alpha\sqrt{4-\frac{\alpha^2}{\pi^2}}+\alpha^2\cdot\frac{-\frac{2\alpha}{\pi^2}}{2\sqrt{4-\frac{\alpha^2}{\pi^2}}}\right].$$

Mivel $\alpha\neq 0$, ezért osztva $\frac{7^3}{3\pi}\cdot\alpha$-val, illetve a gyökös kifejezéssel szorozva a következőt kapjuk:

$$0=2\left(4-\frac{\alpha^2}{\pi^2}\right)-\frac{\alpha^2}{\pi^2}.$$

$$0=8\pi^2-2\alpha^2-\alpha^2=8\pi^2-3\alpha^2.$$

Ebből (mivel $\alpha > 0$)

$$\alpha = \sqrt{\frac{8}{3}}\pi.$$

Mivel a deriváltfüggvényt pozitív kifejezésekkel osztva és szorozva kaptuk a $8\pi^2 - 3\alpha^2$ másodfokú függvényt, így azok előjele adott α esetén megegyezik. A másodfokú függvény menetét figyelembe véve a deriváltfüggvény $\alpha = \sqrt{\frac{8}{3}}\pi$ helyen pozitívból negatívba vált, így az az eredeti függvény maximumhelye. A térfogat ekkor

$$V = \frac{7^3}{3\pi}\frac{8}{3}\pi\sqrt{4 - \frac{\frac{8}{3}\pi^2}{\pi^2}} = \frac{7^3 \cdot 8}{9}\pi\sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1106{,}0145.$$

6. *A kosárlabda mérkőzéseken a büntetődobások szabálya a következő: a büntetőt végző játékos kétszer vagy háromszor dobhat, minden kosárral* 1 *pontot szerezhet, összesen legföljebb* 2*-t. Egy kosaras $p > 0$ valószínűséggel dob be egy büntetőt.*

a) Milyen p valószínűség esetén szerez a játékos ugyanakkora eséllyel 1*, illetve* 2 *pontot?*

b) Írjuk föl tetszőleges p valószínűség mellett a büntetődobásokkal szerzett pontok várható értékét. (*16 pont*)

Megoldás. Jelölje az X változó azt, hogy a játékos hány pontot szerez.

a) 1 pontot úgy kaphat, ha a három dobásból kettőt kihagy, egyet bedob. Erre nyilván három lehetősége van, tehát $P(X = 1) = 3(1 - p)^2 p$. Két pontot vagy úgy kaphat, hogy az első vagy a második dobást kihagyja, a többit bedobja, vagy pedig az első kettőt bedobja (és ekkor többet nem dob). Tehát $P(X = 2) = 2p^2(1-p)+p^2 = p^2(3-2p)$. Ha a kettő egyenlő, akkor:

$$3(1 - p)^2 p = p^2(3 - 2p).$$

Mivel $p \neq 0$, ezért oszthatunk vele, majd felbontjuk a zárójeleket:

$$3\big(1 - 2p + p^2\big) = p(3 - 2p),$$

$$0 = 5p^2 - 9p + 3,$$

$$p = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 60}}{10} = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{10}.$$

Ebből a nagyobbik gyök 1-nél nagyobb, tehát az egyetlen megoldás a $p = \frac{9-\sqrt{21}}{10} \approx 0{,}4417$.

b) Felhasználva az *a*) pontban kapott értékeket:

$$E(X) = 2 \cdot p^2(3 - 2p) + 1 \cdot 3(1 - p)^2 p + 0 \cdot P(X = 0) =$$
$$= 6p^2 - 4p^3 + 3p - 6p^2 + 3p^3 = -p^3 + 3p.$$

7. *A lakásunk fűtését biztosító gázkazán elavult, sokszor javításra szorul, melynek költsége évente* 15 000 Ft*. Egy új kazán, amely hosszú ideig nem szorul javításra,* 400 000 Ft*-ért kapható. Érdemes volna új készüléket vásárolni. Erre két lehetőségünk van. Az egyik, hogy megtartjuk a régi készüléket, takarékoskodunk, és csak akkor veszünk újat a jelenlegi áron (megfigyelésünk szerint minden évben kapható hasonló készülék ilyen áron), amikor összejön rá a pénz. A banknál havi* 10 000 Ft *befizetésével egy külön takarékszámlán gyűjtjük a pénzt, amelyre éves* 2% *kamatot kapunk, amit havonta jóváírnak. Ebben* *az esetben azonnal megvásároljuk a készüléket, amint a pénz rendelkezésre áll, de sajnos minden megkezdett évben ki kell fizetnünk a javítás költségét.*

A másik lehetőség, hogy folyószámlahitelből megvesszük a készüléket. Ennek éves kamata 20,41%. *A családi költségvetésből a kölcsön törlesztésére évi* 135 000 Ft-ot *tudunk szánni.*

Melyik a számunkra pénzügyileg kedvezőbb eset? (*16 pont*)

Megoldás. Ha félretesszük a pénzt, akkor n hónap után akkor tudjuk megvásárolni a készüléket, amikor a $400\,000 \leqslant \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \cdot 10\,000$ egyenlőtlenség teljesül, ahol $q = \sqrt[12]{1{,}02}$. Az egyenlőtlenség mindkét oldalát 10 000-rel osztva, majd rendezve ($q-1>0$, tehát nem fordul meg a relációsjel):

$$40(q-1) \leqslant q^{n+1}-1,$$

$$40q-39 \leqslant q^{n+1}.$$

Mivel $q>1$, ezért az $x \mapsto \log_q x$ függvény szigorúan monoton növekedő. Azaz

$$\log_q(40q-39) \leqslant n+1,$$

$$\frac{\ln(40q-39)}{\ln q} - 1 \leqslant n,$$

$$37{,}766 \leqslant n,$$

vagyis 38 havi befizetésre van szükség, ami összesen 380 000 Ft, a régi készülék karbantartási költségével együtt legfeljebb 440 000 Ft.

Ha kölcsönt veszünk fel, akkor évente 135 000 Ft-ot fizetünk be. Ha a 400 000 Ft-ot k év alatt kifizetjük, akkor a következő egyenlőtlenség teljesül:

$$400\,000 \cdot 1{,}2041^k \leqslant 135\,000 \cdot \frac{1{,}2041^k - 1}{0,2041}.$$

Osztva 1000-rel és rendezve:

$$400 \cdot 1{,}2041^k \leqslant 661{,}4405 \cdot \left(1{,}2041^k - 1\right),$$

$$661{,}4405 \leqslant 261{,}4405 \cdot 1{,}2041^k,$$

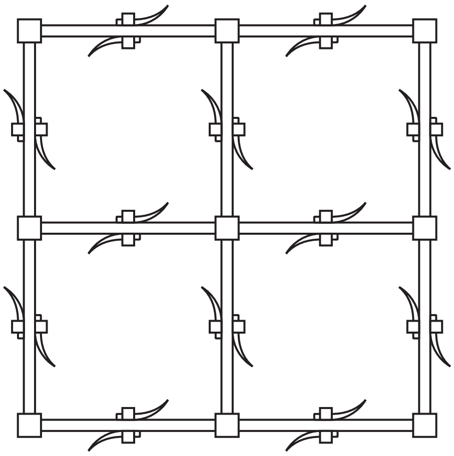
$$2{,}529985 \leqslant 1{,}2041^k,$$

$$\frac{\ln 2{,}529985}{\ln 1{,}2041} \leqslant k,$$

$$4{,}9976 \leqslant k.$$

Tehát 5 évig kell fizetni a kölcsönt, ami összesen $5 \cdot 135\,000 = 675\,000$ Ft, ami jóval több a 440 000-nél.

8. *A mellékelt* ábra *egy vas kerítés négy ismétlődő elemét mutatja oldalnézetből. A hosszú elemek mérete* 30 cm *és* 4 cm, *az őket egymáshoz kapcsoló négyzetek oldala* 8 cm. *Az íves elemeket kapcsoló négyzetek oldala* 4 cm, *a mellettük megtalálható négyzet oldala* 2 cm. *Az íves elemek merőlegesen csatlakoznak a* 4 cm *oldalú négyzethez és két körív*

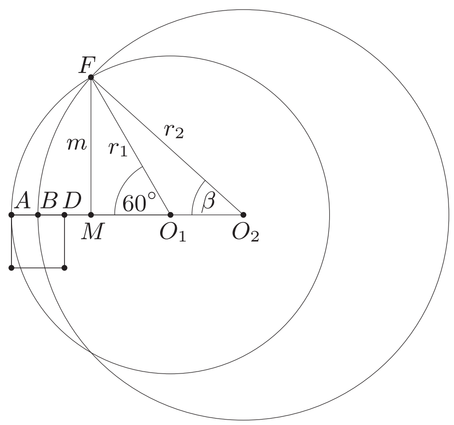


határolja őket, melyek középpontja a négyzet csatlakozó oldalélének meghosszabbításán van. A kisebb kör sugara 12 cm, *a hozzá tartozó ív a* 4 cm-es *négyzet csúcsánál indul és* 60°*-os középponti szögű. A nagyobb sugarú körív a négyzet oldalának középpontjánál kezdődik. A kerítés teljes vasszerkezete* 2 cm *vastagságú, függőlegesen négy, vízszintesen huszonnégy ismétlődő elemből áll.*

a) Számítsuk ki az íves elemet létrehozó nagyobb sugarú kör sugarát és a hozzá tartozó ív középponti szögét.

b) Számítsuk ki az íves elemek oldalnézetből látható területét.

c) Hány kg *vasra volt szükség a kerítéshez? (A vas sűrűsége* $7{,}86\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.) (*16 pont*)



Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Tudjuk, hogy $r_1 = 12$, $AB = BD = 2$. Mivel $FO_1M = 60^\circ$, ezért $m = 6\sqrt{3}$ és $MO_1 = 6$. Ez utóbbiból

$$DM = AO_1 - AD - MO_1 = r_1 - 4 - 6 = 2$$

következik.

a) Tudjuk, hogy

$$r_2 = BO_2 = BD + DM + MO_1 + O_1O_2 = \\ = 2 + 2 + 6 + O_1O_2,$$

amiből $O_1O_2 = r_2 - 10$. Írjuk fel a Pitagorasz-tételt az FMO_2 háromszögre:

$$\left(6\sqrt{3}\right)^2 + (6 + O_1O_2)^2 = r_2^2,$$
$$36 \cdot 3 + (r_2 - 4)^2 = r_2^2,$$
$$124 = 8r_2, \qquad r_2 = 15{,}5 \text{ cm}.$$

Ebből pedig (felhasználva, hogy β hegyesszög)

$$\beta = \arcsin\frac{m}{r_2} = \arcsin\frac{6\sqrt{3}}{15{,}5} \approx 42{,}10^\circ.$$

b) Az O_1 középpontú, r_1 sugarú, 60°-os középponti szögű körcikk területét t_1-gyel, az O_2 középpontú, r_2 sugarú és β középponti szögű körcikk területét pedig t_2 vel jelölve egy íves elem területe:

$$T = [t_1 - t_{FMO_1\triangle}] - [t_2 - t_{FMO_2\triangle}] =$$
$$= \left[\frac{60}{360} \cdot 12^2\pi - \frac{6\sqrt{3} \cdot 6}{2}\right] - \left[\frac{42{,}10}{360} \cdot 15{,}5^2\pi - \frac{6\sqrt{3}(15{,}5 - 4)}{2}\right] \approx 15{,}71 \text{ cm}^2.$$

c) Egy hosszú elem és a hozzá csatlakozó két íves elem és négy négyzet területe együtt $2\cdot(15{,}71+2\cdot 2+4\cdot 4)+30\cdot 4=191{,}42\ \mathrm{cm}^2$. Mivel ebből összesen $24\cdot(4+1)+4\cdot(24+1)=$ $=220$ darab van, ez együtt $220\cdot 191{,}42=42\,112{,}4\ \mathrm{cm}^2$.

A hosszú elemeket összekapcsoló négyzetek összes területe

$$(4+1)(24+1)\cdot 8\cdot 8=8\,000\ \mathrm{cm}^2,$$

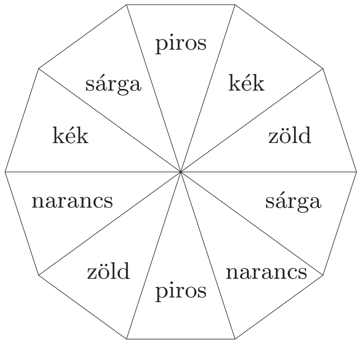
a kerítés teljes területe oldalnézetből $42\,112{,}4+8\,000=50\,112{,}4\ \mathrm{cm}^2$.

A kerítés térfogata tehát $2\cdot 50\,112{,}4=100\,224{,}8\ \mathrm{cm}^3$.

Mivel a vas sűrűsége $7{,}86\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, így a kerítés vasszerkezetének tömege

$$100\,224{,}8\cdot 7{,}86=787\,766{,}928\ \mathrm{g}\approx 787{,}77\ \mathrm{kg}.$$

9. *Egy társasjáték szabályos tízszög alakú tábláját a következő módon szeretnénk kiszínezni: öt szín (piros, kék, zöld, sárga, narancs) mindegyikét kétszer felhasználva a tíz cikket úgy színezzük ki, hogy mindegyik színpár pontosan egy esetben legyen egymással szomszédos cikk színe. Az* ábrán *egy jó színezés látható. (A tábla díszített, ezért az elforgatásokkal és tükrözésekkel kapott színezések különböznek egymástól.)*



a) *Ha öt szomszédos cikket már kiszíneztünk öt különböző színnel, akkor a többit – szintén minden színt egyszer felhasználva – hányféleképpen színezhetjük ki?*

b) *Adjunk példát olyan színezésre, ahol nincs egymás mellett öt különböző színű cikk.*

(*16 pont*)

Megoldás. A színeket az egyszerűség kedvéért jelöljük az 1-től 5-ig terjedő egész számokkal. Egy cikket kitüntetve, majd az óramutató járását követve írjuk le a színezést. Az *ábrán* látható színezés pl. (1234513524).

a) A színezés a következő: (12345xxxxx). Az 1-es mellé 3, 4 vagy 5 kerülhet.

I. eset: a 3-as kerül oda, ekkor a színezés így alakul: (12345xxxx3). A 3 mellett csak 5 állhat, az 5 mellett pedig 1 vagy 2. A másik 5 mellett is 1 vagy 2 állhat, az utolsó szabad helyen pedig 4. Vagyis két ilyen színezés van: (1234524153) vagy (1234514253).

II. eset: a 4-es kerül oda. A 4 mellé csak 2 kerülhet, a 2 mellé csak 5. Az 5 mellé 1 vagy 3. A másik 4 mellé 5 kerül, a maradék helyre pedig 3 vagy 1. A két lehetőség, amit kaptunk: (1234531524) vagy (1234513524).

III. eset: az 5 kerül oda, mellé a 2 vagy a 3 mehet. Ha 2, akkor ezt az esetet kapjuk: (1234524135). Ha 3, akkor ezt: (1234531425).

Ez összesen 6 lehetőség.

b) Az *a*) részben használt jelöléssel egy megfelelő színezés: (1231534524).

Ratkó Éva, Schmieder László
Budapest

C gyakorlat megoldása

C. 1226. Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számpárok halmazán:

$$x^2-3y^2+2xy-2x-10y+20=0.$$

I. megoldás. Próbáljuk meg a bal oldalt teljes négyzetek összegeként vagy különbségeként felírni. Mivel szerepel benne $2xy$ és $-2x$, nézzük meg, mi marad, ha az $(x+y-1)^2$ kifejezést beírjuk:

$$x^2-3y^2+2xy-2x-10y+20=(x+y-1)^2-4y^2-8y+19=$$
$$=(x+y-1)^2-(2y+2)^2+23.$$

Tehát az egyenlet így alakul:

$$(x+y-1)^2-(2y+2)^2=-23,$$
$$(x+y-1+2y+2)(x+y-1-2y-2)=-23,$$
$$(x+3y+1)(x-y-3)=-23.$$

A -23 kétféleképpen áll elő két egész szám szorzataként: $-23=(-1)\cdot 23=$ $=1\cdot(-23)$.

I. eset: $x+3y+1=-1$, $x-y-3=23$. Az elsőből a másodikat kivonva: $4y+4=-24$, amiből $y=-7$, és innen $x=19$.

II. eset: $x+3y+1=1$, $x-y-3=-23$. Ebből $4y+4=24$, amiből $y=5$ és $x=-15$ következik.

III. eset: $x+3y+1=23$, $x-y-3=-1$. Innen $4y+4=24$, amiből $y=5$ és $x=7$ következik.

IV. eset: $x+3y+1=-23$, $x-y-3=1$, ahonnan $4y+4=-24$, és így $y=-7$ és $x=-3$ következik.

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, így a négy megoldás: $(x_1;y_1)=(19;-7)$, $(x_2;y_2)=(-15;5)$, $(x_3;y_3)=(7;5)$, $(x_4;y_4)=(-3;-7)$.

Porupsánszki István (Miskolc, Földes ferenc Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. Írjuk fel a másodfokú egyenlet megoldóképletét x-re:

$$0=x^2-3y^2+2xy-2x-10y+20=x^2+2(y-1)x-3y^2-10y+20,$$

$$x_{1;2}=\frac{-2(y-1)\pm\sqrt{4(y-1)^2-4\big(-3y^2-10y+20\big)}}{2}=$$
$$=-y+1\pm\sqrt{y^2-2y+1+3y^2+10y-20}=-y+1\pm\sqrt{4y^2+8y-19}.$$

Az y egész szám, ezért x akkor egész, ha a gyök alatt négyzetszám áll: $4y^2+8y-19=n^2$, ahol $n\in\mathbb{Z}^+$. Ezt tovább alakítva: $(2y+2)^2-23=n^2$, azaz $(2y+2)^2-n^2=23$. Mivel $2y+2$ és n is egész, két olyan négyzetszámot keresünk, melyek különbsége 23. A négyzetszámok sorozata az első 13 elemig felírva:

$$0;\ 1;\ 4;\ 9;\ 16;\ 25;\ 36;\ 49;\ 64;\ 81;\ 100;\ 121;\ 144.$$

A különbség ezután csak nő, ezért az egyetlen megoldás (a nem szomszédos elemeket is végignézve) a $144-121=23$. Tehát $(2y+2)^2=121+23=144$, amiből $2y+2=\pm 12$.

I. eset: $2y+2=12$, ebből $y=5$ és $x_{1;2}=-5+1\pm\sqrt{4\cdot 25+8\cdot 5-19}=4\pm 11$, $x_1=7$ és $x_2=-15$.

II. eset: $2y+2=-12$, ebből $y=-7$ és $x_{3;4}=7+1\pm\sqrt{4\cdot 49-8\cdot 7-19}=8\pm 11$, $x_3=19$ és $x_4=-3$.

Az egyenlet megoldásai: $(7;5)$, $(-15;5)$, $(19;-7)$, $(-3;-7)$.

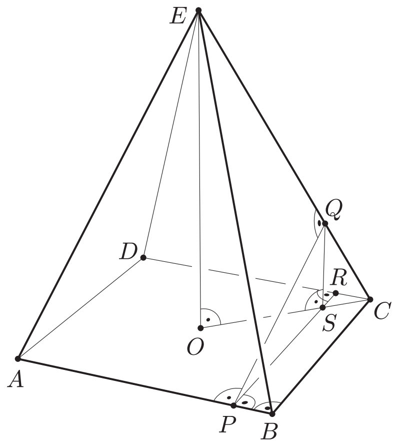
Telek Máté László (Salgótarján, Táncsics Mihály Közg. és Ker. Szki., 12. évf.)

87 dolgozat érkezett. 5 pontos 68 versenyző. 4 pontos 5, 3 pontos 4, 2 pontos 4, 1 pontos 2, 0 pontos 2 dolgozat. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 4558. *Az egységnyi alapélű, $ABCD$ négyzet alapú szabályos gúla csúcsa E. Az AB alapél P, továbbá az EC oldalél Q pontjára teljesül, hogy PQ merőleges AB-re is és EC-re is. Tudjuk továbbá, hogy $AP:PB=6:1$. Mekkorák az oldalélek?*

(*5 pont*)



I. megoldás. Legyen O az $ABCD$ négyzet középpontja, R a DC szakasz C-hez legközelebbi hetedelőpontja, S pedig a Q pont merőleges vetülete az $ABCD$ síkon.

A gúla szabályosságából következően a CE egyenes merőleges vetülete az $ABCD$ síkon a CO egyenes, ezért S rajta van a CO egyenesen. Mivel $AP:PB=6:1$, a PR egyenes párhuzamos BC-vel, vagyis merőleges AB-re. PQ is merőleges AB-re, ezért AB merőleges a PQR síkra. Tehát az AB-re merőleges QS egyenes benne van a PQR síkban, vagyis S illeszkedik a PR egyenesre.

A CRS háromszög derékszögű és egyenlőszárú, ezért $RS=1/7$ és $CS=CR\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{7}$. A QSC és EOC háromszögek hasonlóak, mert megfelelő oldalaik párhuzamosak. A hasonlóság aránya $CS:CO=\frac{\sqrt{2}}{7}:\frac{\sqrt{2}}{2}=2:7$. Ha tehát $CQ=y$, akkor $CE=\frac{7y}{2}$.

A QSC és QSP derékszögű háromszögekben Pitagorasz tétele szerint

$$QS^2=CQ^2-CS^2=y^2-\frac{2}{49},$$

$$QP^2=QS^2+SP^2=\left(y^2-\frac{2}{49}\right)+\left(\frac{6}{7}\right)^2=y^2+\frac{34}{49}.$$

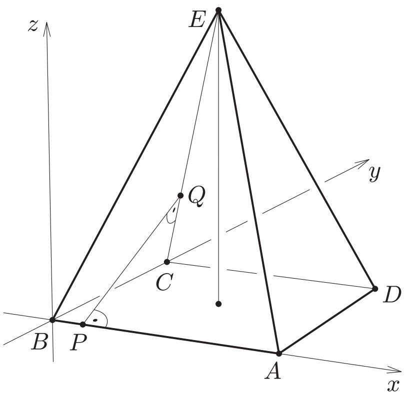
Végül a PQC és PBC derékszögű háromszögek közös PC átfogójának négyzetét szintén Pitagorasz tétele szerint felírva kapjuk, hogy

$$PC^2=CQ^2+QP^2=BC^2+BP^2,\quad \text{azaz}\quad y^2+\left(y^2+\frac{34}{49}\right)=1+\frac{1}{49}.$$

Ezt az egyenletet rendezve $2y^2=\frac{16}{49}$, azaz $y=\frac{\sqrt{8}}{7}$ adódik.

Tehát a gúla oldaléleinek hossza $CE=\frac{7y}{2}=\sqrt{2}$.

Nagy Gergely (Győr, Révai M. Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján



II. megoldás. Vegyünk fel egy térbeli derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy az $ABCD$ négyzet B csúcsa legyen az origó, A és C pedig az x, illetve y tengely pozitív felén legyen. Ekkor $A(1,0,0)$ és $C(0,1,0)$, a gúla szabályossága miatt pedig $E(1/2,1/2,e)$ ahol $|e|\neq 0$ az E csúcs $ABCD$ laptól való távolsága. Az $AP:PB=6:1$ arány miatt $P(1/7,0,0)$.

Legyen $CQ:CE=\lambda$. Ekkor a szakaszt adott arányban osztó pont koordinátáira vonatkozó képlet alapján kapjuk, hogy $Q\left(\frac{\lambda}{2},1-\frac{\lambda}{2},e\lambda\right)$. A PQ szakasz és az x tengely merőlegessége miatt P és Q első koordinátája megegyezik, azaz $1/7=\lambda/2$, vagyis $\lambda=2/7$. Tehát $Q\left(\frac{1}{7},\frac{6}{7},\frac{2e}{7}\right)$. Ezért

$$\overrightarrow{PQ}=\left(0,\frac{6}{7},\frac{2e}{7}\right)\quad \text{és}\quad \overrightarrow{CE}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},e\right).$$

A feltétel szerint e két vektor merőleges egymásra, ezért skaláris szorzatuk 0. Ezt felírva kapjuk, hogy

$$0\cdot\frac{1}{2}+\frac{6}{7}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{2e}{7}\cdot e=0,\quad \text{azaz}\quad e^2=\frac{3}{2}.$$

A CE szakasz hossza két pont távolságképlete alapján

$$CE=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+e^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}}=\sqrt{2}.$$

Tehát a gúla oldalélei $\sqrt{2}$ hosszúságúak.

Leitereg Miklós (Budapest, Veres P. Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

99 dolgozat érkezett. 5 pontos 72, 4 pontos 9, 3 pontos 5, 2 pontos 9, 1 pontos 3, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4582. *Jelölje $d(n)$ az n pozitív egész szám pozitív osztóinak a számát. Határozzuk meg azokat az n számokat, amelyekre*

$$d\big(n^3\big)=5\cdot d(n).$$

(*3 pont*) Javasolta: *Di Giovanni Márk* (Győr, Révai Miklós Gimnázium)

Megoldás. Az $n=1$ nem megoldása az egyenletnek, ezért $n\geqslant 2$. Legyen n prímtényezős felbontása $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$, ahol $k\geqslant 1$, $p_1,p_2,\dots,p_k$ különböző prímszámok, és $a_1,a_2,\dots,a_k$ pozitív egészek. Ezekkel a jelölésekkel

$$d(n)=(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_k+1),$$

$$d\big(n^3\big)=(3a_1+1)(3a_2+1)\dots(3a_k+1).$$

A $3a_i+1$ alulról becsülhető:

$$3a_i+1=2a_i+a_i+1\geqslant 2a_i+2=2(a_i+1).$$

Ezt felhasználva

$$5\cdot d(n)=5\cdot(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_k+1)=(3a_1+1)(3a_2+1)\dots(3a_k+1)\geqslant$$

$$\geqslant 2(a_1+1)2(a_2+1)\dots 2(a_k+1)=2^k\cdot d(n),$$

$$5\cdot d(n)\geqslant 2^k\cdot d(n),$$

ahol k pozitív egész. Ebből már látható, hogy csak $k=1$ és $k=2$ lehetséges.

Ha $k=1$, akkor

$$5(a_1+1)=3a_1+1,\qquad a_1=-2,$$

nem kapunk megoldást.

Legyen végezetül $k=2$. Ekkor kapjuk, hogy

$$5(a_1+1)(a_2+1)=(3a_1+1)(3a_2+1),$$

$$5=4a_1a_2-2a_1-2a_2+1,$$

$$5=(2a_1-1)(2a_2-1).$$

Az 5 csak egyféleképpen bontható pozitív egészek szorzatává. Látjuk, hogy a_1 és a_2 közül az egyik 1, a másik 3. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a_1 = 3$ és $a_2 = 1$. Tehát $n = p^3 \cdot q$, ahol p és q különböző prímek.

Az ilyen alakú számok valóban megoldások, mert $d(n) = d\big(p^3q\big) = 4 \cdot 2 = 8$ és $d\big(n^3\big) = d\big(p^9q^3\big) = 10 \cdot 4 = 40$.

Kacz Dániel (Bonyhád, Petőfi S. Evangélikus Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

159 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 106, 2 pontot 21 versenyző. 1 pontos 22, 0 pontos 9 dolgozat. Nem értékeltük 1 tanuló dolgozatát.

B. 4591. *Legyen α irracionális szám. Minden q pozitív egészre legyen $N_q(\alpha) = \min\left\{\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| : p \in \mathbb{Z}\right\}$, vagyis a legközelebbi olyan törttől való távolság, amely felírható q nevezővel (nem feltétlenül redukált alakban). Mutassuk meg, hogy létezik olyan k, amelyre*

$$\sum_{q=1}^{k} N_q(\alpha) > 1.$$

(*6 pont*) Javasolta: *Maga Péter* (Budapest)

Megoldás. Legyen $\|\beta\| = \min\big\{|\beta - n| : n \in \mathbb{Z}\big\}$. Először igazoljuk azt a jól ismert állítást, hogy tetszőleges β, γ valós számokra fennáll a $\|\beta + \gamma\| \leqslant \|\beta\| + \|\gamma\|$ egyenlőtlenség. Definíció szerint léteznek olyan b és c egész számok, melyekre $\beta - b = \pm\|\beta\|$ és $\gamma - c = \pm\|\gamma\|$. Így

$$\|\beta + \gamma\| \leqslant |\beta + \gamma - (b + c)| \leqslant |\beta - b| + |\gamma - c| = \|\beta\| + \|\gamma\|.$$

Az imént bevezetett jelöléssel

$$N_q(\alpha) = \min\left\{\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| : p \in \mathbb{Z}\right\} = \frac{1}{q}\min\big\{|q\alpha - p| : p \in \mathbb{Z}\big\} = \frac{\|q\alpha\|}{q}.$$

Vizsgáljuk most

$$N_{2q}(\alpha) + N_{2q+1}(\alpha) = \frac{\|2q\alpha\|}{2q} + \frac{\big\|(2q+1)\alpha\big\|}{2q+1}$$

értékét. Először megmutatjuk, hogy a $\|2q\alpha\| \geqslant \|\alpha\|/2$ és a $\big\|(2q+1)\alpha\big\| \geqslant \|\alpha\|/2$ egyenlőtlenségek közül legalább az egyik teljesül. Ha ugyanis $\|2q\alpha\| < \|\alpha\|/2$, akkor

$$\big\|(2q+1)\alpha\big\| = \|2q\alpha + \alpha\| \geqslant \|\alpha\| - \|2q\alpha\| \geqslant \|\alpha\| - \|\alpha\|/2 = \|\alpha\|/2.$$

Tehát az állítás valóban teljesül.

Ekkor viszont az $N_{2q}(\alpha) \geqslant \frac{\|\alpha\|/2}{2q}$ és az $N_{2q+1}(\alpha) \geqslant \frac{\|\alpha\|/2}{2q+1}$ egyenlőtlenségek közül is legalább az egyik teljesül, és mivel $N_{2q}(\alpha)$ és $N_{2q+1}(\alpha)$ is nemnegatív, valamint $\max(2q, 2q+1) \leqslant 3q$, azért $N_{2q}(\alpha) + N_{2q+1}(\alpha) \geqslant \frac{\|\alpha\|/2}{3q}$.

Ezt az egyenlőtlenséget $q=1,2,\dots,\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor$-re felírva és összeadva a következő becslést kapjuk:

$$\sum_{q=1}^{k} N_q(\alpha) \geqslant \sum_{q=1}^{\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor} \frac{\|\alpha\|}{6q}.$$

Az α irracionális, ezért $\|\alpha\|>0$, továbbá $\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}=\infty$, így elegendően nagy k-ra

$$\sum_{q=1}^{k} N_q(\alpha) \geqslant \sum_{q=1}^{\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor} \frac{\|\alpha\|}{6q} > 1$$

teljesül.

Fekete Panna (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

8 dolgozat érkezett. 6 pontos Ágoston Péter, Fekete Panna, Maga Balázs, Williams Kada. 5 pontos Kúsz Ágnes, Mócsy Miklós. 4 pontos 1 versenyző. 0 pontos 1 versenyző.

B. 4595. *Jelölje $d(n)$ az n pozitív egész szám pozitív osztóinak a számát. Oldjuk meg a*

$$d\big(n^3\big)=n$$

egyenletet.

(*5 pont*) Javasolta: *Di Giovanni Márk* (Győr)

Megoldás. Az $n=1$ nyilván megoldás, mivel $d\big(1^3\big)=d(1)=1$.

$n\neq 1$ esetén legyen n prímtényezős felbontása $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$, ahol minden $\alpha_i>0$ és $p_1<p_2<\dots<p_k$ prímek. Az osztók számára vonatkozó ismert összefüggés alapján

$$d\big(n^3\big)=d\Big(\big(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}\big)^3\Big)=(3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1)\dots(3\alpha_k+1).$$

A feladatban szereplő egyenlet így a következő formában írható fel:

$$(3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1)\dots(3\alpha_k+1)=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}.$$

A bal oldal minden zárójelében 3-mal osztva 1 maradékot adó szám áll, így a szorzat is 1 maradékot ad 3-mal osztva. Ezek szerint a prímek között nem szerepelhet a 3. Az egyenletet törtes alakban átírhatjuk:

$$\frac{3\alpha_1+1}{p_1^{\alpha_1}}\cdot\frac{3\alpha_2+1}{p_2^{\alpha_2}}\cdot\ldots\cdot\frac{3\alpha_k+1}{p_k^{\alpha_k}}=1. \tag{1}$$

Mivel a bal oldali (pozitív) tényezők szorzata 1, a tényezők között van olyan, amely legalább 1, vagyis van olyan j, amelyre

$$1\leqslant\frac{3\alpha_j+1}{p_j^{\alpha_j}}.$$

Először vizsgáljuk meg a $p_j \neq 2$ esetet. Ekkor (mivel $p_j \neq 3$), $5 \leqslant p_j$, tehát

$$1 \leqslant \frac{3\alpha_j+1}{p_j^{\alpha_j}} \leqslant \frac{3\alpha_j+1}{5^{\alpha_j}}.$$

$\alpha_j = 1$-re az $1 \leqslant \frac{3\alpha_j+1}{5^{\alpha_j}}$ egyenlőtlenség nem teljesül, így semmilyen $1 < \alpha_j$-re sem teljesül, mivel a $\frac{3\alpha+1}{5^\alpha}$ sorozat szigorúan monoton csökken, hiszen

$$\frac{3\alpha+1}{5^\alpha} > \frac{3\alpha+4}{5^{\alpha+1}},$$

$$5(3\alpha+1) > 3\alpha+4,$$

$$12\alpha+1 > 0.$$

Ezzel beláttuk, hogy $p_j \neq 2$ esetén $1 \leqslant \frac{3\alpha_j+1}{p_j^{\alpha_j}}$ nem teljesülhet. Következésképpen n prímtényezős felbontásában szerepel a 2, melynek α_1 kitevőjére

$$1 \leqslant \frac{3\alpha_1+1}{2^{\alpha_1}}.$$

Az egyenlőtlenség $\alpha_1 = 1, 2, 3$-ra teljesül, $\alpha_1 = 4$-re viszont nem. Így, mivel a $\frac{3\alpha+1}{2^\alpha}$ sorozat pozitív α esetén szigorúan monoton csökken (ez a fenti, $\frac{3\alpha+1}{5^\alpha}$ sorozatnál látott módon belátható), $\alpha_1 > 4$-re sem igaz. Ezzel beláttuk, hogy

$$n = 2 \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} \quad \text{vagy} \quad n = 2^2 \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} \quad \text{vagy} \quad n = 2^3 \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}.$$

a) $n = 2 \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ esetén

$$n = d\big(n^3\big) = 4 \cdot (3\alpha_2+1) \ldots (3\alpha_k+1),$$

ahonnan n osztható 4-gyel. Ezek szerint ez az eset nem lehetséges, mert az n prímtényezős felbontásában a 2 csak első hatványon szerepel.

b) $n = 2^2 \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ esetén

$$n = d\big(n^3\big) = 7 \cdot (3\alpha_2+1) \ldots (3\alpha_k+1),$$

így n prímtényzős felbontásában szerepel a 7. Ha első hatványon szerepel, és több prímosztója nincs n-nek, akkor $n = 2^2 \cdot 7 = 28$, melyre $d\big(n^3\big) = (3 \cdot 2+1)(3 \cdot 1+1) = 28$, tehát ez megoldás. Ha az n prímtényezős felbontásában a 7 az 1-nél nagyobb hatványon szerepelne, vagy más prímosztói is lennének n-nek, akkor az (1) egyenlőség nem teljesülhetne, hiszen a bal oldalon álló kifejezést biztosan csökkentenénk, így kisebb lenne 1-nél (ha a 7 nagyobb hatványon szerepelne, akkor azért, mert a $p_i(\alpha) = \frac{3\alpha+1}{p_i^\alpha}$ sorozat szigorúan monoton csökken, ha pedig n prímtényezős felbontásában más prímek is szerepelnének, akkor azért, mert $\frac{3\alpha_i+1}{p_i^{\alpha_i}} < 1$, ha $p_i \neq 2$). Így ebben az esetben $n = 28$ az egyetlen megoldás.

c) $n=2^3\cdot p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ esetén

$$n=d(n^3)=10\cdot(3\alpha_2+1)\dots(3\alpha_k+1),$$

tehát az n prímtényzős felbontásában szerepel az 5. Az $n=2^3\cdot 5=40$ megoldása a feladatnak, más megoldás pedig ebben az esetben sincs (ugyanúgy csak csökkenteni tudnánk (1)-ben a bal oldal értékét, ahogyan az előző részben).

Ezzel beláttuk, hogy a feladat megoldásai $n=1$, $n=28$ és $n=40$.

Schwarcz Tamás (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

79 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 35, 4 pontot 18 versenyző. 3 pontos 4, 2 pontos 3, 1 pontos 12, 0 pontos 7 dolgozat.

B. 4600. *Szét lehet-e osztani az első n prímszámot két részre úgy, hogy azokban a tagok összege megegyezzen, ha*

a) $n=2013^{2014}$*;*

b) $n=2014^{2013}$*?*

(*6 pont*)

I. megoldás. *a*) Jelölje az első n prímszámot $p_1<p_2<\ldots<p_n$.

Megadunk egy algoritmust, amellyel két részre lehet őket osztani úgy, hogy a két részben a tagok összege megegyezzen, ha $n=2013^{2014}$.

Először p_n-et betesszük az első részbe, utána p_{n-1}-et a második részbe. Ezután minden lépésben a még be nem osztott prímszámok közül a legnagyobbat oda tesszük, ahol a tagok összege kisebb (ha éppen egyenlő a két összeg, akkor tetszés szerint választunk). Vagyis a k-adik lépés után a $p_n,p_{n-1},\dots,p_{n-k+1}$ prímek lesznek szétosztva két részre.

Megmutatjuk, hogy a két részben a tagok összege legfeljebb p_{n-k+1}-gyel, vagyis az utoljára beosztott prímmel térhet el. Ezt k szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk, $k=1$-re az állítás nyilvánvalóan teljesül.

Tegyük fel, hogy az állítást már igazoltuk k-ra, megmutatjuk, hogy $k+1$-re is igaz. Az indukciós feltevés szerint a $p_n,p_{n-1},\dots,p_{n-k+1}$ prímeket két részre lehet osztani úgy, hogy a két részben a tagok összege legfeljebb p_{n-k+1}-gyel tér el. Ha a soron következő p_{n-k} prím beosztása után abban a részben lesz nagyobb a tagok összege, ahova kerül, akkor legfeljebb p_{n-k}-val lehet nagyobb, mint a másik részben, hiszen eddig a másik részben nagyobb (vagy éppen ugyanannyi) volt a tagok összege. Ha pedig továbbra is a másik részben marad nagyobb az összeg, akkor az eltérés az indukciós feltevést is használva legfeljebb $p_{n-k+1}-p_{n-k}$. Ez viszont Csebisev tétele szerint valóban legfeljebb p_{n-k}, hiszen ellenkező esetben a p_{n-k} szám és annak kétszerese közé nem esne prím.

Ezzel beláttuk, hogy tetszőleges $1\leqslant k\leqslant n$ esetén a k-adik lépés után a két részben a tagok összege legfeljebb p_{n-k+1}-gyel, vagyis az utoljára beosztott prímmel térhet el. Ez egyben azt is jelenti, hogy az utolsó prím, vagyis a 2 hozzáadása után a két rész különbsége legfeljebb 2 lesz. A különbség nem lehet 1, hiszen $n=2013^{2014}$

esetén az első n prímszám összege páros, így a két részben a számok összegének ugyanaz a paritása. Ha a különbség 0, akkor készen vagyunk, találtunk egy jó beosztást.

Most tegyük fel, hogy a különbség 2. Ekkor a 2 hozzáadása előtt a két részben az összeg éppen egyenlő, ezt a közös értéket jelölje S. A szimmetria miatt feltehető, hogy a 3 az első részbe került. Ekkor az 5 nem kerülhetett az első részbe, ugyanis ekkor a 7 beosztása után a két részben $S-8$, illetve S lett volna a prímek összege, és így 7-nél nagyobb lett volna a különbség. Tehát az 5 a második részbe került.

Először tegyük fel, hogy a 7 az első részbe került. A 11 nem kerülhetett az első részbe, mert akkor a 13 beosztása utáni különbség $(S-5)-(S-3-7-11)=$ $=16>13$ lett volna, így a 11 a második részbe került. Ha a 11-et áttesszük az első részbe, a 3-at és a 7-et pedig a másodikba, akkor az elsőben $S+1$, a másodikban $S-1$ lesz az összeg, így a 2-t a másodikba téve egyenlő összegeket kapunk.

Végül tegyük fel, hogy a 7 a második részbe került. Az előzőekhez hasonlóan látható, hogy a 11 csak az első részbe kerülhetett. Ekkor viszont a 11-et áttéve a második részbe, az 5-öt és a 7-et pedig az elsőbe, a két kialakuló összeg megint $S+1$ és $S-1$, vagyis a 2-t a második részbe téve ismét egyenlő összegeket kapunk.

Ezzel megmutattuk, hogy $n=2013^{2014}$ esetén a kívánt szétosztás megvalósítható.

b) A 2014^{2013} szám páros, így az első 2014^{2013} prímszám összege páratlan, hiszen egy darab páros szám (2) és páratlan sok páratlan szám összege. Ebből azonnal következik, hogy nem lehet két részre osztani az első 2014^{2013} prímszámot úgy, hogy azokban a tagok összege megegyezzen.

Lajkó Kálmán (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn. és Ált. Isk., 9. évf.)

II. megoldás az *a*) részre. Az I. megoldásban ismertetett algoritmust használva a következőképpen is okoskodhatunk. Legyen az $n-5$-ödik lépés után kapott két összeg A és B, melyek eltérése az előzőek szerint legfeljebb $p_6=13$. Legyen $A\leqslant B$. Mivel $n=2013^{2014}$ esetén $A+B$ páros (páros sok páratlan prím összege), ezért $B-A$ lehetséges értékei: $0,2,4,6,8,10,12$. Elég megmutatni, hogy a $2,3,5,7,11$ prímeket mindegyik esetben szét lehet úgy osztani két részre, hogy a két rész különbsége éppen $B-A$ legyen. Ehhez a 12-nél nem nagyobb páros nemnegatív egészeket kell felírnunk az első 5 prímszám előjeles összegeként, ami mindegyik esetben megtehető:

$$0=2-3+5+7-11,\quad 2=-2+3+5+7-11,\quad 4=-2-3+5-7+11,$$

$$6=2+3+5+7-11,\quad 8=-2-3-5+7+11,$$

$$10=-2+3+5-7+11,\quad 12=2-3-5+7+11.$$

Mócsy Miklós (Budapesti Fazekas M. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

57 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Ágoston Péter, Csernák Tamás, Kúsz Ágnes, Lajkó Kálmán, Maga Balázs, Mócsy Miklós, Nagy-György Pál, Szabó Barnabás, Williams Kada. 5 pontos 4, 4 pontos 1, 3 pontos 1, 1 pontos 41, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4602. *Egy húrtrapéz átlói merőlegesek egymásra. Bizonyítsuk be, hogy a trapéz köré írható kör középpontjának az egyik alaptól mért távolsága egyenlő az átlók metszéspontjának a másik alaptól mért távolságával.*

(*3 pont*)

I. megoldás. Az *1. ábra* jelöléseit használva, legyenek E és F az alapok felezőpontjai, P és Q az átlók felezőpontjai; P és Q egyenlő távolságra vannak az alapoktól, így rajta vannak a trapéz középvonalán.

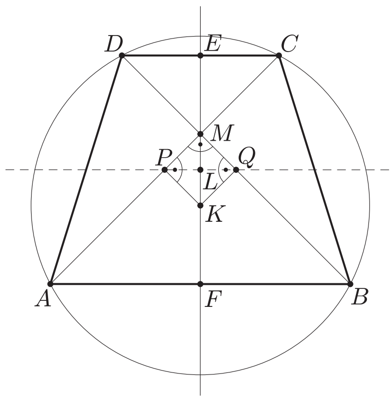
A trapéz átlói a körülírt kör húrjai, ezért felező merőlegesük átmegy a kör K középpontján. $PM = QM$, ezért és a derékszögek miatt a $PKQM$ négyszög négyzet.

Legyen a PQ szakasz felezőpontja L. Mivel L illeszkedik a trapéz középvonalára, $LE = LF$. Az L pont a $PKQM$ négyzet középpontja, így $LM = LK$, vagyis

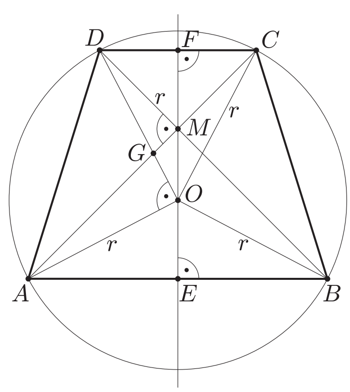
$$ME = LE - LM = LF - LK = KF,$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

Kosztolányi Kata (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn., 9. évf.) megoldása alapján



1. ábra



2. ábra

II. megoldás. A *2. ábra* jelöléseit használva $AEO\sphericalangle = DFO\sphericalangle = 90^\circ$ és $AOE\sphericalangle = 180^\circ - 90^\circ - DOF\sphericalangle = 90^\circ - DOF\sphericalangle$, ezért az AEO és OFD háromszögek egybevágók (szögeik páronként egyenlők és $AO = OD = r$). Ebből következik, hogy $EO = DF$.

Az átlók derékszöget zárnak be, és EF szimmetria tengely, ezért a DCM derékszögű háromszöget az FM oldalfelező merőleges két egyenlő szárú derékszögű háromszögre bontja. Ebből pedig már következik, hogy $FM = DF = EO$.

Nagy-György Zoltán (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

139 dolgozat érkezett. 3 pontos 50, 2 pontos 50, 1 pontos 17, 0 pontos 18 dolgozat. Nem versenyszerű 4 dolgozat.

B. 4603. *Egy egyenes körkúp felszíne A, térfogata V. Igazoljuk, hogy $A^3 \geqslant 72\pi \cdot V^2$.*

(*4 pont*)

Megoldás. Legyen a kúp alaplapjának sugara r, a magassága m, az alkotója pedig a. A kúp felszín-, illetve térfogatképlete:

$$A = r^2\pi + r\pi a = r\pi(r+a), \qquad V = \frac{r^2\pi m}{3}.$$

Ezeket behelyettesítve az igazolandó egyenlőtlenségbe:

$$r^3\pi^3(r+a)^3 \geqslant \frac{72\pi r^4\pi^2 m^2}{9}.$$

A lehetséges egyszerűsítések után pedig:

$$(r+a)^3 \geqslant 8r \cdot m^2.$$

Pitagorasz tétele alapján tudjuk, hogy $m^2 = a^2 - r^2 = (a+r)(a-r)$. Ezt beírva egyszerűsíthetünk a pozitív $(a+r)$-rel is:

$$(r+a)^2 \geqslant 8r(a-r).$$

Rendezés után

$$a^2 + 2ar + r^2 \geqslant 8ar - 8r^2, \qquad a^2 - 6ar + 9r^2 = (a-3r)^2 \geqslant 0.$$

Teljes négyzetet kaptunk, az átalakításaink ekvivalensek voltak, így az eredeti egyenlőtlenség igaz. Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha

$$a = 3r, \quad m = r\sqrt{8} = 2\sqrt{2}r.$$

Németh Balázs (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., 8. évf.)
dolgozata alapján

125 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 101, 3 pontot 4 versenyző. 2 pontos 11, 1 pontot kapott 5, nem versenyszerű 3, nem értékeltük 1 tanuló dolgozatát.

B. 4604. *Oldjuk meg az*

$$x^3 + \left(\frac{x}{2x-1}\right)^3 = \frac{243}{64}$$

egyenletet.

(*5 pont*) Javasolta: *Kovács Béla* (Szatmárnémeti)

I. megoldás. A nevezőben nem lehet nulla, így $x \neq \frac{1}{2}$. A egyenlet bal oldalán két köb összege szerepel, amelynek a felírásához az összeg köbét használjuk majd fel. Ennek érdekében írjuk fel először a bal oldalon szereplő x és $\frac{x}{2x-1}$ összegének köbét. Egyrészt

$$\left(x + \frac{x}{2x-1}\right)^3 = \left(\frac{(2x-1)x + x}{2x-1}\right)^3 = \left(\frac{2x^2}{2x-1}\right)^3,$$

másrészt a köbös azonosság alapján, az egyenletet felhasználva

$$\left(x+\frac{x}{2x-1}\right)^3 = x^3+\left(\frac{x}{2x-1}\right)^3+3x^2\frac{x}{2x-1}+3x\left(\frac{x}{2x-1}\right)^2=$$

$$=\frac{243}{64}+3\left(\frac{x^3}{2x-1}+\frac{x^3}{(2x-1)^2}\right)=$$

$$=\frac{243}{64}+3\left(\frac{(2x-1)x^3+x^3}{(2x-1)^2}\right)=\frac{243}{64}+3\left(\frac{2x^4}{(2x-1)^2}\right).$$

A kétféle felírás egybevetésével

$$\left(\frac{2x^2}{2x-1}\right)^3=\frac{243}{64}+3\left(\frac{2x^4}{(2x-1)^2}\right).$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 64-gyel, majd ezután vezessük be az y új ismeretlent az $\frac{8x^2}{2x-1}$ helyett:

$$64\left(\frac{2x^2}{2x-1}\right)^3=243+3\cdot 64\left(\frac{2x^4}{(2x-1)^2}\right),\quad y^3-6y^2-243=0.$$

Ha az egyenletnek van racionális gyöke, amely $y=\frac{p}{q}$ alakban áll elő, akkor $p\mid a_0=-243$ és $q\mid a_3=1$, tehát a racionális gyök egész. Mivel $243=3^5$, legfeljebb öt próbálkozás után látható, hogy ennek az egyenletnek $y=9$ megoldása, mert

$$9^3-6\cdot 81-243=729-486-243=0.$$

A megtalált gyök ismeretében alakítsuk szorzattá az egyenletet:

$$(y-9)\big(y^2+3y+27\big)=0.$$

A második tényező nem lehet nulla, mert az $y^2+3y+27=0$ egyenlet diszkriminánsa negatív. Tehát y-ra egyedüli megoldás az $y=9$. Visszahelyettesítve

$$\frac{8x^2}{2x-1}=9,\qquad 8x^2-18x+9=0.$$

Ennek az egyenlet a gyökei megoldóképlettel már számolhatók:

$$x_1=\frac{3}{4}\quad\text{és}\quad x_2=\frac{3}{2},$$

amelyek – mint arról behelyettesítéssel meggyőződhetünk – valóban megoldásai is az egyenletnek.

Geng Máté (Budapest, Németh László Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Legyen $y=\frac{x}{2x-1}$. Ezt átrendezve

$$x=2xy-y, \qquad 2xy=x+y.$$

Látjuk, hogy amennyiben $x+y=a$, úgy $2xy=a$. Ezzel az új jelöléssel az eredeti egyenlet bal oldala

$$x^3+y^3=(x+y)\big(x^2-xy+y^2\big)=a\big(a^2-3xy\big)=a\left(a^2-\frac{3}{2}a\right).$$

Behelyettesítve, 64-gyel szorozva és rendezve a

$$64a^3-96a^2-243=0$$

alakú egész együtthatós harmadfokú egyenletet kapjuk. Az első megoldásnál már megismert eljárás szerint, ha az egyenletnek van racionális gyöke, akkor annak számlálója a 243-nak, nevezője pedig a 64-nek osztója. Ebből néhány próbálkozással látható, hogy $a=\frac{9}{4}$ megoldása az egyenletnek, kiemelhető a $(4a-9)$ tényező az egyenletből:

$$(4a-9)\big(16a^2+12a+27\big)=0.$$

A $16a^2+12a+27=0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív, nincs valós gyöke. A harmadfokú egyenlet egyetlen valós gyöke tehát $a=\frac{9}{4}$. Innen

$$2xy=x\left(\frac{x}{2x-1}\right)=\frac{9}{4}, \qquad 8x^2-18x+9=0, \qquad x_1=\frac{3}{2} \text{ és } x_2=\frac{3}{4}.$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy mindkét tört valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

Andó Angelika (Szeged, Radnóti Miklós Kís. Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

102 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 41, 4 pontot 20 versenyző. 3 pontos 6, 2 pontot kapott 14, 1 pontos 12, 0 pontos 5 dolgozat. Nem versenyszerű 4 tanuló dolgozata.

B. 4607. *Az a, b, c oldalú háromszög beírt körének középpontján átmenő egyenes a c oldalt P-ben, a b oldalt pedig Q-ban metszi. Legyen $AP=p$ és $AQ=q$. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{a+b+c}{bc}.$$

(*5 pont*) *Kacsó Ferenc* (Matlap, Kolozsvár)

I. megoldás. Jelölje a háromszög csúcsait a szokásos módon A, B és C, a beírt kör középpontját O, sugarát r, az A-nál lévő szög pedig legyen α (*1. ábra*).

Írjuk fel az APQ háromszög területét kétféleképpen:

$$T_{APQ}=\frac{pq\sin\alpha}{2} \quad \text{és} \quad T_{APQ}=T_{APO}+T_{AOQ}=\frac{pr}{2}+\frac{qr}{2}=\frac{(p+q)r}{2}.$$

Ebből kapjuk, hogy

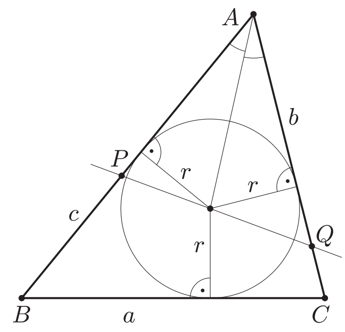
(1) $$pq\sin\alpha = (p+q)r.$$

Az ABC háromszög területét kétféleképpen felírva pedig:

$$T_{ABC} = \frac{(a+b+c)r}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2},$$

azaz

(2) $$(a+b+c)r = bc\sin\alpha$$



1. ábra

adódik. Az (1) és (2) egyenlőségek megfelelő oldalait összeszorozva kapjuk, hogy

$$pq\sin\alpha\cdot(a+b+c)r = (p+q)r\cdot bc\sin\alpha,$$

amiből $bcpqr\sin\alpha \neq 0$-val való osztás és rendezés után a bizonyítandó

$$\frac{a+b+c}{bc} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$$

egyenlőséget kapjuk.

Török Zsombor (Bonyhád, Petőfi Sándor Ev. Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Először belátunk egy segédtételt.

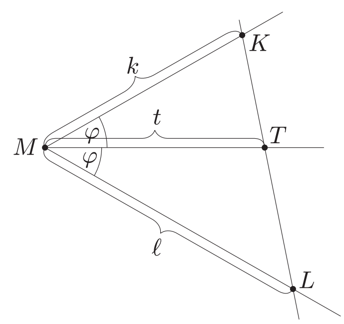
Ha valamely M csúcsú szög szögfelezőjének rögzített T pontján átmenő tetszőleges egyenes a szög szárait a K és L pontokban metszi, akkor az $1/MK+1/ML$ kifejezés értéke független a szelőegyenes helyzetétől.

Legyen a szög nagysága 2φ, $MT=t$, $MK=k$ és $ML=\ell$ (*2. ábra*). Ekkor

$$k\ell\sin 2\varphi = 2T_{MKL} = 2T_{MTK} + 2T_{MTL} =$$
$$= tk\sin\varphi + t\ell\sin\varphi.$$

Ebből rendezés után

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{\ell} = \frac{\sin 2\varphi}{t\sin\varphi}$$



2. ábra

adódik, ami bizonyítja segédtételünk állítását.

Ezután eredeti feladatunk megoldása már egyszerű. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, továbbá legyen a B-ből induló szögfelező és az AC oldal metszéspontja D. A szögfelezőtétel szerint D a c és a oldalak arányában osztja az AC szakaszt, ezért

$AD = \frac{cb}{c+a}$. Másrészt O rajta van az ABC szögfelezőin, ezért a BAC szögre és az O pontra alkalmazhatjuk segédtételünket. E szerint

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{c} + \frac{1}{\frac{cb}{c+a}} = \frac{1}{c} + \frac{c+a}{cb} = \frac{a+b+c}{bc},$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

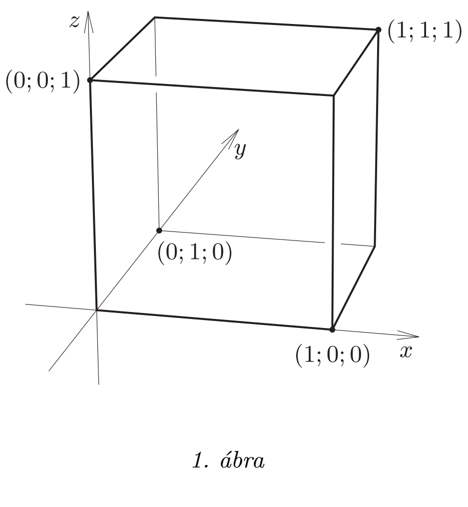
78 dolgozat érkezett. 5 pontos 72, 4 pontos 3, 2 pontos 1, 1 pontos 1 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 4611. *Tükrözzünk a térben valamilyen sorrendben egy kocka mind a hat lapjának a síkjára. A hat tükrözés egymásutánja hány különböző transzformációt eredményez?*

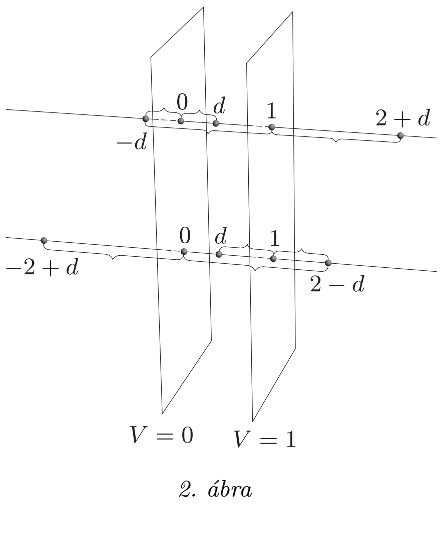
(*6 pont*)

Megoldás. Vegyünk fel egy térbeli derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy az origója legyen a kocka egyik csúcsa, tengelyei essenek egybe a kocka e csúcsán átmenő élegyeneseivel, az egységet pedig válasszuk úgy, hogy a kocka origóval szemközti csúcsa az $(1;1;1)$ pont legyen.

Ekkor a kocka lapsíkjainak egyenletei rendre $X=0$, $X=1$, $Y=0$, $Y=1$, $Z=0$ és $Z=1$ (*1. ábra*). Az e síkokra való tükrözések egy tetszőleges $(a;b;c)$ pontot rendre a $(-a;b;c)$, $(2-a;b;c)$, $(a;-b;c)$, $(a;2-b;c)$, $(a;b;-c)$ és $(a;b;2-c)$ pontokba visznek át. Tehát a tükrözések során mindig csak a pont egyik koordinátája változik, párhuzamos síkokra való tükrözések esetén ugyanaz a koordináta, merőleges síkokra való tükrözések esetén pedig más-más koordináta. Vagyis az egymásra merőleges síkokra való tükrözések sorrendje felcserélhető, két egymással párhuzamos síkra való tükrözés pedig a pontok két-két koordinátáját változatlanul hagyja, egy koordinátáját pedig vagy 2-vel növeli, vagy 2-vel csökkenti ($d \longmapsto -d \longmapsto 2-(-d) = d+2$, vagy $d \longmapsto 2-d \longmapsto -(2-d) = d-2$, *2. ábra*),



1. ábra



2. ábra

azaz e két tükrözés egymásutánja egy olyan 2 hosszú vektorral való eltolás, mely vektor párhuzamos valamelyik koordinátatengellyel.

A hat tükrözés után tehát az $(a;b;c)$ pont az $(a\pm 2; b\pm 2; c\pm 2)$ pontba kerül. Vagyis a tükrözések egymásutánja megfelel egy eltolásnak valamely $\mathbf{v} = (\pm 2; \pm 2; \pm 2)$ vektorral. Ezért az előjelek választásától (ami a párhuzamos síkokra való két-két tükrözés sorrendjén múlik) függően $2^3 = 8$ különböző transzformációt kaphatunk.

Olexó Gergely (Budapesti Fazekas M. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. A hat tükrözés egymásutánjaként kapott eltolások mindegyikének iránya párhuzamos a kocka valamelyik testátlójával, hossza pedig a testátló kétszerese.

82 dolgozat érkezett. 6 pontos 34, 5 pontos 21, 4 pontos 11, 3 pontos 7, 2 pontos 6, 1 pontos 3 dolgozat.

B. 4636. *Egy háromszög melyik belső pontjában maximális az oldalaktól mért távolságok szorzata?*

(*4 pont*) Javasolta: *Kósa Tamás* (Budapest)

Megoldás. Legyenek ennek a pontnak a háromszög BC, AC, AB oldalaitól mért távolságai rendre x, y, z, a háromszög oldalai pedig a, b, c. A BPC, CPA, APB háromszögek területének összege adja az egész háromszög területét, így:

$$ax + by + cz = 2T,$$

ahol T a teljes háromszög területe. A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget felírva ax-re, by-ra és cz-re:

$$\frac{2T}{3} = \frac{ax+by+cz}{3} \geqslant \sqrt[3]{ax\cdot by\cdot cz} = \sqrt[3]{abc\cdot xyz},$$

$$\left(\frac{2T}{3\sqrt[3]{abc}}\right)^3 \geqslant xyz.$$

A bal oldal konstans, hiszen T, a, b, c mind állandók egy adott háromszög esetén, a jobb oldalon pedig a vizsgált szorzat áll. Így az akkor lesz a legnagyobb, ha a számtani-mértani középnél egyenlőség áll fenn. Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$\frac{ax}{2} = \frac{by}{2} = \frac{cz}{2} = \frac{T}{3},$$

vagyis a kis háromszögek területei megegyeznek, és ez a nagy háromszög területének harmada.

Először belátjuk, hogy csak egy olyan pont létezhet a háromszög belsejében, amelyre ez igaz. Ugyanis például $\frac{ax}{2} = \frac{T}{3}$ miatt a pontnak rajta kell lennie az a-val párhuzamos, attól $\frac{m_a}{3}$ távolságra haladó egyenesen, és hasonlóan igaz ez a többi oldalra is. Viszont mivel az eredeti oldalak közül semelyik kettő nem párhuzamos, így a velük párhuzamos egyenesek közt se lesz két párhuzamos, tehát legfeljebb egy metszéspontjuk lehet. A háromszög súlyvonalairól tudjuk, hogy a háromszög területét hat egyenlő részre osztják, illetve a súlypontot a csúcsokkal összekötve három egyenlő területű háromszöget kapunk.

Tehát a súlypontra lesz maximális az oldalaktól mért távolságok szorzata.

Szőke Tamás (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, 11. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. Ugyanezt a feladatot a fizika rovatban is kitűztük (**P. 4648.** feladat), megoldása ebben a számban az 52. oldalon található.

56 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 40, 3 pontot 6 versenyző. 1 pontos 6, 0 pontos 4 versenyző dolgozata.

MATEMATIKA ÉS FIZIKA TOTÓ
a 2014. évi Őszi KöMaL Ankéton*

1. Mekkora a legkisebb szöge annak a deltoidnak, amely köré írható kör, és a köréje írt kör középpontja rajta van a beírt körön? 38,17° (1); 39,17° (2); 40,17° (X).

2. Három könnyű rugós erőmérőt egymás után sorba kapcsolunk, és sima asztalra teszünk. Az erőmérősor egyik végét jobbra, másik végét balra húzzuk 3-3 newton erővel. Hány newton erőt mutatnak az erőmérők? Egy newtont (1); három newtont (2); kilenc newtont (X).

3. Dani elfelejtette barátja telefonszámának körzetszám utáni részét. Arra emlékszik, hogy az első jegye 7, az ötödik 2. Tudja, hogy a szám hatjegyű, páratlan, és 3-mal, 4-gyel, 7-tel, 9-cel, 11-gyel és 13-mal osztva ugyanazt a maradékot adja. Mennyi a hat számjegy összege? 16 (1); 18 (2); 19 (X).

4. Két különböző sűrűségű, de azonos keresztmetszetű fémpálca összehegesztésével egyetlen egyenes, adott hosszúságú pálcát készítünk kétféle módon: (A) az eredeti pálcák egyforma hosszúságúak, (B) egyforma tömegűek voltak. Melyik esetben kerül messzebb a felemás pálca tömegközéppontja a felezőpontjától? Az (A) esetben (1); a (B) esetben (2); mindkét esetben ugyanoda kerül a súlypont (X).

5. Hányféleképpen fizethető ki 5 darab érmével 170 forint, ha a rendelkezésünkre álló címletek: 10, 20, 50 és 100 forintos? 1 (1); 2 (2); 4 (X).

6. Ostornyél egyik végére 80 cm hosszú, vékony cérnaszálon elenyésző tömegű tollpihét kötünk. Az ostornyél végét 1 méter sugarú körön mozgatjuk egyenletesen. Mekkora sugarú körpályán mozog a tollpihe? 100 cm (1); 80 cm (2); 60 cm (X).

7. Hány nem egybevágó tetraéder van, melyben az élek hosszát nagyság szerint rendezve 2, 3, 4, 5, 6 és 8 cm hosszúságok adódnak? 0 (1); 1 (2); 2 (X).

*A matematika feladatokat *Ratkó Éva*, a fizika feladatokat *Gnädig Péter* állította össze. A megoldásokat a 38. lapon közöljük.

8. Kozmetikai tükörre van szükségünk, de éppen nincs elérhető közelségben egy sem. Helyette egy 6 dioptriás sík-domború lencse sík felületét egy síktükörhöz nyomjuk, és ezt próbáljuk meg használni. Hány dioptriás optikai rendszert kapunk így? Nulla (1); hat (2); tizenkettő (X).

9. Egy 10 emeletes házban egyszer a lift a földszintről indult. Útja során csak egész emeleten állt meg, mégpedig minden emeleten pontosan egyszer. Közben legfeljebb hány méter utat tett meg, ha két szomszédos szint közti különbség 4 méter? 220 (1); 230 (2); 240 (X).

10. Egy α hajlásszögű, jó hosszú lejtőre bizonyos magasságból egy kicsiny, tökéletesen rugalmas labdát ejtünk. A pattogó labda (légellenállás nélküli esetben) parabolapályák mentén mozog. Hol helyezkednek el a parabolák fókuszpontjai? A lejtő esésvonalával párhuzamos, ferde egyenes mentén (1); az esésvonalnál meredekebb egyenes vonal mentén (2); a fókuszpontok nem esnek egy egyenesre (X).

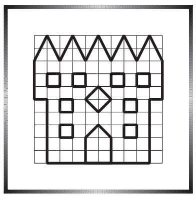
11. Milyen kapcsolat van a szabályos tetraéderben az élérintő gömb sugara, a beírt gömb sugara és a köré írt gömb sugara között? A beírt gömb sugara mértani középarányosa a élérintő gömb és a tetraéder köré írt gömb sugarának (1). Az élérintő gömb sugara mértani középarányosa a tetraéderbe és a tetraéder köré írt gömb sugarának (2). A tetraéder köré írt gömb sugara mértani középarányosa az élérintő gömb és a tetraéderbe írt gömb sugarának (X).

12. Hogyan változtassuk a vízgőzzel telített levegő térfogatát annak érdekében, hogy a vízgőz egy része kicsapódjon a levegőből? Növeljük a térfogatot (1); csökkentsük a térfogatot (2); mindkét módon megoldható a vízgőz kicsapatása (X).

13. Legfeljebb hány lovat helyezhetünk el az 5×5-ös sakktáblán úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást? 12 (1); 13 (2); 14 (X).

13+1. Minek nagyobb a kapacitása, egy $10\cdot\sqrt{2}\approx 14{,}1$ cm oldalélű fémkockának, vagy egy 10 cm sugarú fémgömbnek? A kockának (1); a fémgömbnek (2); éppen egyforma (X).

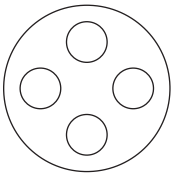
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (445–450.)



K. 445. A $PQRS$ négyzet P sarkát a szemközti R sarokra hajtva, majd a Q-t az R sarokra hajtva az így kapott alakzat területe 9 cm^2. Mennyi az eredeti négyzet területe?

K. 446. Jancsinak két cégnél van munkája, mindkét cég órabérben fizet. Ha egy adott hónapban az első cégnél kétszer annyit dolgozik, mint a másodiknál, akkor a havi fizetése 4/5 része annak, mintha ezt fordítva csinálná. Hány órát kell dolgoznia az első cégnél, hogy megkeresse a második cég által 10 órára fizetett bérét?

K. 447. Találhatunk-e olyan x és y természetes számokat, melyekre teljesül, hogy $x^2 + y^2 = 2015$?



K. 448. Egy kör alakú tárcsán négy korong helyezkedik el az *ábrának* megfelelően. Hányféleképpen színezhetjük ki a korongokat négy szín segítségével, ha a tárcsa középpontja körüli, a tárcsa síkjában történő forgatással egymásba vihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek? A színezéshez a négy színből tetszőlegesen választhatunk, egy korong egyszerre csak egy színnel színezhető.

K. 449. Sebi 98 pontos tesztje 1 ponttal növelte az eddigi pontátlagát, míg a következő 70 pontos 2 ponttal rontotta. Hány tesztet írt összesen Sebi?

K. 450. Az $1, 14, 27, \ldots$ számtani sorozatban hány jegyű a második olyan szám, amely csupa 2-es számjegyből áll?

❄

Beküldési határidő: 2015. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1266–1272.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1266. Oldjuk meg az $5(2n+1)(2n+3)(2n+5) = \overline{ababab}$ egyenletet, ahol n pozitív egész számot, a és b különböző számjegyet, $\overline{ababab}$ pedig egy hatjegyű számot jelöl.

Javasolta: *Számadó László* (Budapest)

C. 1267. Adott a síkon egy konvex szögtartomány, belsejében egy S pont. Határozzuk meg (például a szerkesztési eljárás megadásával) azt az egyenest, amely által a szögtartományból levágott háromszög súlypontja éppen az S pont.

Feladatok mindenkinek

C. 1268. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a és b valós számokra fennáll:

$$a^4 + b^4 + 2 \geqslant 4ab.$$

C. 1269. Legalább hány oldala van annak a szabályos sokszögnek, amelynél a körülírt kör sugara a beírt kör sugarának legfeljebb 1,1-szerese?

C. 1270. Rajzoltunk néhány egyenest és kört egy lapra úgy, hogy bármely kettőnek van metszéspontja és semelyik három nem megy át közös ponton. Hány kört és hány egyenest rajzoltunk, ha összesen 75 metszéspontjuk van?

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1271. Rajzoljuk meg egy derékszögű háromszög körülírt körének a háromszöget tartalmazó félkörét. A félkörhöz húzzunk a háromszög befogóival párhuzamos érintőket. Ezek az átfogó egyenesével az eredetihez hasonló háromszöget határoznak meg.

Mekkorák a háromszög szögei, ha a külső háromszög területe 6-szorosa a belső háromszög területének?

Légrádi Imre (Sopron) javaslata alapján

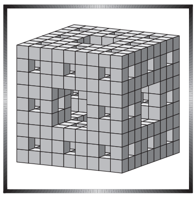
C. 1272. Egy 100-tagú számtani sorozat összege a 68. tag nélkül 838, a 13. tag nélkül pedig 849. Mekkora a kihagyott tagok értéke?

❄

Beküldési határidő: 2015. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (4678–4686.)



B. 4678. Annipanni és Boribon felváltva számjegyeket írnak egymás mellé, balról jobbra haladva a papíron. Annipanni kezd egy 0-tól különböző számjeggyel. Addig folytatják a játékot, amíg egy 100-jegyű számot nem kapnak. Boribon nyer, ha a kapott szám 11-gyel osztva 5 maradékot ad, ellenkező esetben Annipanni. Mind a ketten nagyon tudják a matekot. Melyikük nyeri meg a játékot?

(*4 pont*) Javasolta: *Károlyi Gyula* (Budajenő)

B. 4679. Bizonyítsuk be, hogy 39 egymás után következő természetes szám között mindig van olyan, amelyben a számjegyek összege osztható 11-gyel.

(*3 pont*)

B. 4680. Határozzuk meg a

$$3^n = 2n^2 + 1$$

egyenlet egész megoldásait.

(*3 pont*)

B. 4681. Mekkora a **C. 1240.** feladatban szereplő ötszög területe?

(*4 pont*)

B. 4682. Adott k pozitív egész számhoz keressük meg azt a legnagyobb m pozitív egészet, amelyre a következő teljesül: ha a síkon $3k$ különböző pont közül legfeljebb m darab esik egy egyenesbe, akkor a pontok k darab hármas csoportba oszthatók úgy, hogy az egy csoportban lévő pontok egy háromszög csúcsai.

(*5 pont*) Javasolta: *Frank András* (Nagykovácsi)

B. 4683. Van-e olyan sík, amely egy szabályos ötszög alapú egyenes gúlát

a) tengelyesen,

b) középpontosan

szimmetrikus hatszögben metsz?

(*6 pont*)

B. 4684. Az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra, a metszéspontjuk E. Az E pontból bocsássunk merőlegest mind a négy oldalegyenesre. Tekintsük mindegyik merőlegesnek a szemközti oldallal való metszéspontját. Igazoljuk, hogy ez a négy pont egy olyan körön van, amelynek középpontja az átlók felezőpontját összekötő szakaszra illeszkedik.

(*5 pont*) Javasolta: *Miklós Szilárd* (Herceghalom)

B. 4685. Adjuk meg $x^2 + y^2 + z^4$ legkisebb lehetséges értékét, ha ha x, y és z olyan pozitív számok, melyek összege 34.

(*5 pont*)

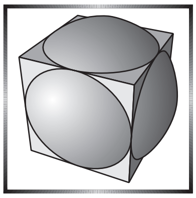
B. 4686. A sík egész koordinátájú rácspontjain egy bolha ugrál. Tud-e úgy ugrálni, hogy minden rácspontban pontosan egyszer járjon, az ugrásainak a hossza pozitív egész szám legyen és minden pozitív egész pontosan egyszer forduljon elő az ugrások hosszai között?

(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2015. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (632–634.)

A. 632. Legyen $ABCD$ konvex négyszög. Az ABC háromszögben legyen I és J a beírt kör, illetve az A csúccsal szemközti hozzáírt kör középpontja. Az ACD háromszögben legyen K, illetve L a beírt, illetve az A csúccsal szemközti hozzáírt kör középpontja. Mutassuk meg, hogy az IL és JK egyenesek, valamint a BCD szög felezője egy ponton mennek át.

Orosz feladat

A. 633. Bizonyítsuk be, hogy ha n elegendően nagy pozitív egész szám, akkor bármely n különböző pozitív egész között van négy olyan, amelyek legkisebb közös többszöröse nagyobb, mint $n^{3,99}$.

A. 634. Legyen $n \geqslant 2$ egész szám, és legyen $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ n-szer differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy az $f^{(n)}(x) = 0$ egyenletnek legalább $n-1$ különböző megoldása van.

❄

Decemberi számunkban az **A. 631.** feladat szövegébe hiba csúszott: a bizonyítandó egyenlőtlenség helyesen

$$\sum \frac{1}{|I_i \cup I_j|} \geqslant k^2.$$

A feladat szövegét honlapunkon kijavítottuk. A hibáért elnézést kérünk.

Beküldési határidő: 2015. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Matematikaképzések az ELTE TTK-n

Kedves leendő Egyetemista! Feltételezzük, hogy a *KöMaL* olvasójaként szívesen foglalkozol matematikával, és felmerülhetett már Benned az a gondolat, hogy életpályádul ennek a szép tudománynak a művelését választod, illetve szeretnél megismerkedni alkalmazásaival a műszaki, gazdasági és pénzügyi élet különböző területein. Talán olvastad egy amerikai felmérés eredményét, amely szerint a legjobb foglalkozás a matematikusé, és közvetlenül utána a szintén matematikai előképzettséget igénylő aktuárius és statisztikus következik (`www.careercast.com/jobs/content/JobsRated_10BestJobs`). Esetleg még nem döntöttél, de leginkább matematikából folytatnál felsőfokú tanulmányokat?

Minderre kitűnő lehetőség nyílik az ország egyik legnagyobb múltú egyetemén, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán, ahol világhírű professzoroktól tanulhatsz, a többi között *Laczkovich Miklóstól,* a Tarski-féle kör négyszögesítési probléma megoldójától és a Wolf-, Bolyai- és Kyoto-díjas *Lovász Lászlótól,* a Nemzetközi Matematikai Unió 2006 és 2010 közötti elnökétől, aki jelenleg az MTA elnöke. Pezsgő diákélet vár rád az ELTE korszerű számítógépparkkal felszerelt, a KöMaL szerkesztőségének is otthont adó modern lágymányosi épületegyüttesében.

A bolognai képzési rendszerbe illeszkedik BSc képesítést nyújtó hároméves matematikai alapképzésünk. Itt az első évben többféle lehetőség közül választhatsz, hogy előismereteidnek, képességeidnek vagy tanulási sebességednek megfelelően milyen szinten, milyen részletességgel, milyen mélységben sajátítod el az első év kötelező törzsanyagát. Az első év végén pedig arról dönthetsz, hogy az alábbi három szakirány melyikén kívánsz továbbhaladni.

A **matematikus szakirány** programja sokat megőriz méltán világhírű hagyományainkból, ugyanakkor szilárd alapokat nyújt a modern matematika műveléséhez, jól felkészítve hallgatóinkat a leendő kutatói munkára.

Az **alkalmazott matematika** ma már az élet szinte minden területén nélkülözhetetlen, és az ilyen képzettségű munkaerő iránt egyre növekszik az igény. Ezt a szakirányt tehát azoknak ajánljuk, akiket elsősorban a matematika alkalmazásai érdeklik.

Az előzőkhöz képest viszonylag új, **matematikai elemző** szakirányt azon jelentkezők számára indítjuk, akik ismereteiket később inkább a matematikán kívül szeretnék majd gyümölcsöztetni. Itt szerzett tudásukat hasznosíthatják például gazdasági területen, médiában, a matematika népszerűsítésében, a közművelődésben.

A szakirányokról és a képzés egyéb vonatkozásairól további részletek a `www.cs.elte.hu` honlapon a Képzések menüpont alatt találhatók.

A legkiemelkedőbb hallgatók az egyetemi oktatómunkába is bekapcsolódhatnak, és világszerte jó eséllyel pályázhatnak ösztöndíjakra, külföldi részképzésre (pl. az Erasmus+ program keretében).

Az alapképzést további kétéves szakasz követ(het)i (mesterképzés vagy röviden MSc), egyetemünkön a Matematikai Intézet gondozásában matematikus, alkalmazott matematikus, valamint biztosítási és pénzügyi matematika mesterszakok indulnak. BSc-t végzett hallgatóink természetesen más (bel- és külföldi) oktatási intézmény programjain is folytathatják tanulmányaikat. A mesterszakot végzettek közül a legkiválóbbak számára biztosítjuk az egyetemen a doktori fokozat megszerzésének lehetőségét (PhD-képzés).

Felhívjuk a figyelmet, hogy 2013-tól a matematika tanár képzés újfent osztatlan rendszerben történik (l. az erre vonatkozó külön tájékoztatónkat).

Egyetemünkön gondosan ápolt hagyomány, hogy a rátermett, tehetséges diákok neves professzorok vezetésével bekapcsolódnak a tudományos kutatásba. A legkiválóbb hallgatók matematikai versenyeken is sikerrel szerepelnek, például az Egyetemi Hallgatók Nemzetközi Matematikaversenyén 2007-ben és 2008-ban is az ELTE csapata végzett az élen – olyan nagyhírű egyetemeket is megelőzve, mint a Yale, a Princeton vagy a Moszkvai Állami Egyetem; de idén is az előkelő 2. helyen végeztek, 73 egyetem csapatának versenyében.

Matematika tanárképzés az ELTE TTK-n

Az ELTE Természettudományi Karán sok évtizedes múltra tekint vissza a matematika szakos tanárképzés. Az általános és középiskolák részéről mindig jelentős igény mutatkozott a nálunk végzett matematika tanárok iránt, akik közül sokan külföldön is sikeres oktatói pályát futottak be.

A matematika szakos tanári pályát elsősorban azoknak a középiskolás diákoknak ajánljuk, akiknek öröm érdekes matematikai feladatokon gondolkodni és jó érzést okoz a megoldásokra másokat is rávezetni, másokkal is megosztani azt az élvezetet, amit a matematika megismerése jelent.

A 2013/2014-es tanévtől kezdődően a tanárképzés osztatlan formában zajlik. Tanári szakképzettséget kétszakos formában lehet szerezni $4+1$ vagy $5+1$ éves képzés keretében, amelyben a plusz egy év szakmai gyakorlat teljesítésére szolgál. Ily módon a tanárképzésre való jelentkezés során a leendő hallgatóknak egy szakpárt kell megjelölni. Az ELTE-n a matematika szak mellé természettudományos szakokon és az informatikán kívül választani lehet a bölcsész szakok (például a magyar, a történelem vagy a nyelvszakok) közül is. A tanárképzés első három évében szakpáronként egységes képzésben részesülnek hallgatóink. A matematika szakterületi tárgyaknál az oktatás szemléletében már az első három évben is nagy hangsúlyt kap az iskolai matematikatanítással való kapcsolat. A harmadik év végén a hallgatónak kell eldönteni, hogy általános iskolai vagy középiskolai tanári végzettséget kíván szerezni a két szakjából. Ezen döntéstől függően vagy egy 2 féléves vagy pedig egy 4 féléves képzési programot kell elvégezni. Ekkor kerül sor a szaktárgyi tanítási gyakorlatok teljesítésére, melyekre az ELTE hallgatóinak a legjobb budapesti iskolákban, kiváló vezetőtanárok irányítása mellett nyílik lehetőségük. A szakterületi záróvizsgák letétele után a hallgatóknak még egy egyéves szakmai gyakorlatot kell elvégezniük egy iskolában, melynek során módjuk lesz begyakorolni a tanári munka mesterfogásait.

Informatikából kitűzött feladatok

I. 364 (É). Egy $n\times n$-es négyzetekből (mezőkből) álló pályán egy robotot irányítunk. A robot a pálya üres mezőin tud mozogni egyenesen fölfelé, lefelé, jobbra és balra. A pályát mind a négy oldalról fal veszi körbe, ugyanakkor a belső négyzetek egy része is akadály, melyeken a robot nem tud áthaladni. A robotot az F, L, J, B nagybetűk sorozatával lehet irányítani, és úgy mozog, hogy a betű hatására elindul az aktuális helyéről a jelzett irányba és addig megy, amíg szabad előtte a pálya, majd megáll az első útjába eső akadály vagy fal mellett. Példaként tekintsük az *ábrán* látható, $n=10$ értékhez tartozó pályát.

Készítsünk programot `i364` néven, amely megoldja a következő feladatokat:

1. Olvassuk be a `palya.txt` szöveges állományból a pálya adatait. A szöveges állomány első sorában $1\leqslant n\leqslant 20$ értéke található, a következő sorában a pályán

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	X
1											1
2						X					2
3								X			3
4		X									4
5					X						5
6											6
7			X								7
8						X			X		8
9											9
0				X							0
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	X

megtalálható akadályok száma, majd minden ezt követő sorban az akadályok oszlop és sor koordinátái szóközzel elválasztva.

2. Rajzoljuk ki a beolvasott pályát karakterekkel úgy, hogy a sarkokat és a belső akadályokat nagy X betűvel, a falakat mindegyik oldalon a sor és oszlop koordináták utolsó számjegyével jelöljük.
3. Kérjünk be a felhasználótól egy oszlop és egy sor koordinátát, és adjuk meg, hogy a pályán szabad-e az így megadott mező. A kimenet például a következő: „A (3,5) mező szabad."
4. Válasszunk véletlenszerűen egy szabad mezőt a pályáról, és tároljuk el a koordinátáit a többi programrész megoldásához, és írjuk ki a képernyőre: „A robot induló helye a (6,4) mező."
5. Adjuk meg azoknak a mezőknek a koordinátáit, amelyekre az előbb választott induló mezőről egy lépésben el lehet jutni. A fenti példában a kimenet: „Egy lépésben elérhetőek a (6,3), (6,7), (3,4), (10,4) mezők."
6. Kérjünk be a felhasználótól egy karaktersorozatot, amely a robotnak adott parancsokat jelenti. A szövegből csak az irányokat jelző kis- vagy nagybetűket értelmezzük, a többi karaktert hagyjuk figyelmen kívül. Írjuk a `mozgas.txt`

Példa bemenet (`palya.txt`)	Példa kimenet (`mozgas.txt`)
10 8 2 4 3 7 4 10 5 5 6 2 6 8 8 3 9 8	6 4 6 3 6 3 7 3 7 10 7 10 5 10 5 6

szöveges állományba a kiinduló helynek és azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyeken megáll a robot a parancssorozat végrehajtása közben. A robot mozgatása a 4. feladatban kisorsolt mezőről induljon. Példaként legyen a bekért karaktersorozat „FFjLeBF”.

7. Az előbb bekért parancssorozatot javítsuk és egyszerűsítsük úgy, hogy csak a megfelelő irányok nagybetűit tartalmazza, és hagyjunk el belőle minden olyan lépést, amely az adott pályán nem változtatja meg a robot helyét. A kimenet a példában legyen: „A javított lépéssorozat: FJLBF”.

Beküldendő egy tömörített `i364.zip` állományban a program forráskódja (`i364.pas`, `i364.cpp`, ...) az `.exe` és más, a fordító által generált állományok nélkül, valamint a program rövid dokumentációja (`i364.txt`, `i364.pdf`, ...), amely a fentieken túl megadja, hogy a forrás mely fejlesztői környezetben fordítható.

I. 365. Egy terménykereskedelemmel és raktározással foglalkozó vállalkozás egyetlen nagy telephellyel rendelkezik, amelynek 5 teherkapuja van. A vállalkozás egyféle terménnyel foglalkozik, amit 10 kamionnal szállít a termelőktől a raktárba, illetve a raktárból a vevőkhöz. A kamionok, a rakodási idők hosszúsága miatt, a kapukon óránként legfeljebb egyszer haladhatnak át. A raktárnál az a szabály, hogy a kamionok bármelyik kapun ki és be közlekedhetnek, de áthaladáskor meg kell állniuk, amíg a rendszámukat, az áthaladás időpontját (1–100), irányát (Be vagy Ki), a kapu sorszámát (1–5) és a jármű súlyát (0,0–100,0) elektronikusan rögzítik.

Példa a kapuknál rögzített adatokra:

Rendszám	Óra	Irány	Kapu	Súly (t)
ZU-6245	2	Be	1	31,6
WV-5078	3	Be	1	5,4
ZU-6245	3	Ki	1	5,4
HN-9314	7	Ki	1	6,8
...				

A honlapunkról letölthető az `i365.zip` állományban az 5 kapunál rögzített adatok listája a `kapu1.txt`, `kapu2.txt`, ..., `kapu5.txt` fájlban és a kamionok adatai a `teherautok.txt` fájlban (tabulátorokkal tagolt, UTF-8 kódolású szövegállomány).

A megoldás során vegyük figyelembe a következőket:

– *A megoldás során törekedjünk képlet, függvény, hivatkozás használatára.*

– *A megoldás során az* E *oszloptól jobbra végezhetünk segédszámításokat.*

– *A megoldásban saját függvényt vagy makrót nem használhatunk.*

1. Nyissuk meg táblázatkezelő program segítségével a kapuknál rögzített adatok fájljait és tartalmukat másoljuk egy **Raktár** nevű munkalapra, közös táblázatba. Ügyeljünk, hogy a táblázatnak csak egy fejléce legyen, a feleslegeseket töröljük. A táblát mentsük a táblázatkezelő saját formátumában `i365` néven.
2. Helyezzük el a **Teherautók** nevű munkalapon a kamionok adatait úgy, hogy az első beolvasott adat az A1-es cellába kerüljön.

3. Rendezzük **Raktár** munkalapon az adatokat a kamionok rendszáma és azon belül a kapun való áthaladás órája szerint.

A további kérdésekre a válaszokat a **Teherautók** munkalapon jelenítsük meg úgy, hogy minden meghatározott érték előtti cellában, vagy az oszlopok feletti cellában a tartalomra utaló felirat legyen.

4. Határozzuk meg, hogy a vizsgált időszakban a kamionok külön-külön mennyi terményt szállítottak be a raktárba, illetve szállítottak ki. (Egy kamion által szállított termény súlya a kapunál mért és az önsúly különbsége.)
5. Adjuk meg annak a kamionnak a rendszámát, amely a legtöbb termést szállította be a raktárba.
6. Írassuk ki, hogy a kamionok az első kapun történő áthaladása előtt a telepen vagy azon kívül voltak-e.
7. Olvassunk be egy időpontot a megadott időszakban és írjuk ki, hogy hány kamion van a telepen éppen ekkor. A megadott órában átlépőket már ne vegyük figyelembe.
8. Írjuk ki, hogy az adatok alapján legalább hány kamion szabálytalanul nem állt meg a kapunál az adatok rögzítéséhez.
9. Határozzuk meg, hogy melyik óra volt a legforgalmasabb.

Beküldendő egy tömörített állományban (`i365.zip`) a táblázatkezelő munkafüzet (`i365.xlsx`, `i365.ods`, ...), illetve egy rövid dokumentáció (`i365.txt`, `i365.pdf`, ...), amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziója.

I. 366. A mellékelt logót számtalanszor láttuk már a weblapon, a Facebookon, a papíralapú kiadáson. A weblapon látható változatot animált megjelenítéssel szeretnénk megújítani. A megoldásban ugyanazon alakzatokat használjuk, mint a statikusban, de az eredménynek nem feltétlenül kell teljes mértékben egyeznie az eredetivel.

KöMaL

Az animációs műveletek között legyen mozgatás, forgatás, méretváltoztatás és színváltoztatás. Fontos, hogy az összbenyomás elegáns, visszafogott legyen. A feladat megoldásához az SVG kapcsán javasoljuk a következő lapokat is:

- `http://svg.elte.hu/`.
- `http://tutorials.jenkov.com/svg/index.html`.

Beküldendő HTML dokumentumban (`i366.html`) a megoldás, amelyben az animáció egy svg tagben szerepel. A HTML dokumentumban szerepeljen azon weblapok linkje is, amelyek segítséget nyújtottak a probléma megoldásában.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: **2015. február 10.**

S. 95. Gézának van öt csomag kártyapaklija, mindegyikben ugyanazok a kártyák találhatók. Minden kártyán áll egy egész szám, de egyik pakliban sem áll ugyanaz a szám két kártyán. Így ha egy bizonyos számú lap szerepel az egyik pakliban, akkor az összes többiben is szerepel pontosan egyszer. Géza szereti, ha a kártyái szép sorrendben vannak, ezért elrendezte a paklikban a kártyákat valamilyen sorrendben, mind az öt pakliban azonos módon.

Éjszaka jött egy gonosz manó, és megpróbálta Gézát átverni a következő módszerrel: fogott egy paklit, és abból kiválasztott néhány kártyát. Kivette őket a pakliból, majd valahogy visszatette őket (nem feltétlen a helyükre, de ugyanabba a pakliba). Ugyanezt a műveletet megismételte a maradék négy paklival is. Viszont egy bizonyos számú kártyát csak egy pakliban mozgatott át, tehát a többi pakliban az ugyanolyan számú kártyához nem nyúlt. Géza reggel nagyon összezavarodott, mindenképp vissza szerette volna állítani a paklik eredeti sorrendjét. Segítsünk neki.

A program olvassa be a standard input első sorából N-et ($1 \leqslant N \leqslant 50\,000$), majd a következő $5 \cdot N$ sorból az a_i szóközzel elválasztott egészeket. Az első N szám jelenti az első pakli átrendezett sorrendjét, a következő N szám a következő pakli sorrendjét stb. Írjuk a standard output első N sorába a paklik közös eredeti sorrendjét. (Helytakarékosság miatt most mind a bemenetben az $5 \cdot N$, mind a kimenetben az N sorban lévő számokat egy sorba írtuk, a sorvégeket egy / jellel jelöltük.)

Példa bemenet:	Példa kimenet:
5 10 20 30 40 50 / 20 10 30 40 50 / 30 10 20 40 50 / 40 10 20 30 50 / 50 10 20 30 40	10 / 20 / 30 / 40 / 50

Pontozás és korlátok: A programhoz mellékelt, a helyes megoldás elvét tömören, de érthetően leíró dokumentáció 1 pontot ér. A programra akkor kapható meg a további 9 pont, ha bármilyen hibátlan bemenetet képes megoldani az 1 mp futásidőkorláton belül.

Beküldendő egy tömörített `s95.zip` állományban a program forráskódja (`s95.pas`, `s95.cpp`, ...) az `.exe` és más, a fordító által generált állományok nélkül, valamint a program rövid dokumentációja (`s95.txt`, `s95.pdf`, ...), amely a fentieken túl megadja, hogy a forrás mely fejlesztői környezetben fordítható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: **2015. február 10.**

❄

Matematika és fizika totó megoldása*

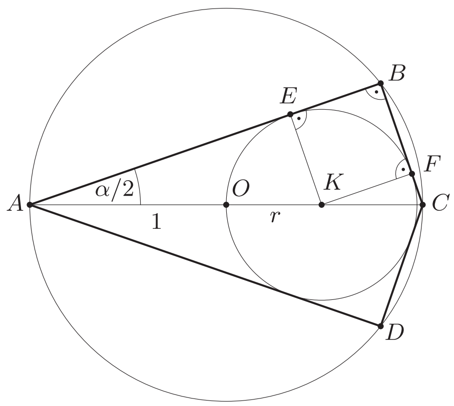
A telitalálatos szelvény:

$$1, 2, X, \quad X, 2, X, \quad 2, X, 1, \quad 2, 2, X, \quad 2, 2.$$

A legtöbb (13) találatot *Fehér Zsombor* (Budapesti Fazekas M. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) és *Sal Kristóf* (Budapesti Fazekas M. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) érte el.

Az alábbiakban rövid útmutatást adunk a feladatok megoldásához.

1. $ABCD$ deltoidunk húrnégyszög, ezért az AC szimmetriatengelye a körülírt körben átmérő, továbbá a B csúcsnál levő szöge derékszög. Legyen még a körülírt kör középpontja O, a beírt köré – szintén a tengelyen – K, és legyen $KC < KA$, sugaraik 1, illetve r, végül a beírt kör érintési pontja az AB oldalon E, a BC-n F.



A KE és a KF sugár párhuzamos a BC, illetve a BA oldallal, ezért AKE és KCF hasonló derékszögű háromszögek:

$$AE : KE = KF : CF,$$

$$AE \cdot CF = KE \cdot KF = r^2.$$

Az átfogók pedig $1 + r$, illetve $1 - r$, mert O rajta van a beírt körön és K az OC sugáron, így

$$AE \cdot CF = \sqrt{(1+r)^2 - r^2} \cdot \sqrt{(1-r)^2 - r^2} = \sqrt{(1+2r)(1-2r)}.$$

Ezeket egybevetve r^2-re másodfokú egyenletet kapunk, és abból

$$1 - 4r^2 = r^4, \qquad r = \sqrt{\sqrt{5} - 2} \approx 0{,}4859,$$

(r^2 másik értéke negatív).

Most már a deltoid A csúcsánál levő α szögre

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{1+r}, \qquad \alpha \approx 38{,}17°,$$

a C-nél levő szög ennek kiegészítő szöge, vagyis ennél nagyobb.

2. A rugókat egyforma nagyságú erő feszíti, és ha ez nem 3 N lenne, akkor a középső rugó végpontjai nem lennének egyensúlyban.

3. Jelöljük T-vel a keresett telefonszámot. T 3-mal osztva 0, 1 vagy 2 maradékot adhat. Tudjuk azt is, hogy T páratlan, tehát 4-gyel osztva páratlan maradékot ad. Eszerint a szóban forgó közös maradék 1.

A feltételből következik, hogy $T - 1$ osztható 3-mal, 4-gyel, 7-tel, 9-cel, 11-gyel és 13-mal. Egyelőre csak annyit használunk föl, hogy $T - 1$ osztható $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$-gyel:

*A kérdések a 26. oldalon találhatók.

1001 hatjegyű többszörösei $ABCABC$ alakúak. Mivel T páratlan, nem végződik 0-ra, és így $T-1$ és T csak az utolsó számjegyükben különböznek. Így $A=7$, $B=2$, tehát

$$T-1=72\ C\ 72\ C.$$

A 9-cel való oszthatóság miatt $T-1$ jegyeinek összege is osztható 9-cel. Mivel

$$7+2+C+7+2+C=18+2C,$$

így $2C$ is 9 többszöröse. Ez csak a $C=0$ vagy a $C=9$ esetben lehetséges, de $T-1$ utolsó jegye páros. Ha $C=0$, akkor valamennyi feltétel teljesül, azaz $T=720\ 721$.

4. A tömegközéppont mindkét esetben

$$x=\frac{\ell}{4}\,\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_2+\varrho_1}$$

távolságra lesz az ℓ hosszú, ϱ_1 és ϱ_2 sűrűségű részekből álló pálca középpontjától.

5. Az alábbi egyenletrendszert kell megoldanunk, ahol x a 10, y a 20, z az 50, végül t a 100 forintos érmék számát jelöli:

$$(1)\qquad x+y+z+t=5,$$

$$(2)\qquad 10x+20y+50z+100t=170.$$

A második egyenlet tizedrészéből kivonva az elsőt, kapjuk az eredetivel ekvivalens

$$(1)\qquad x+y+z+t=5,$$

$$(3)\qquad y+4z+9t=12$$

egyenletrendszert.

A megoldások nem negatívak, így (3) alapján $t\leqslant 1$. Két esetet különböztetünk meg, aszerint, hogy $t=1$ vagy $t=0$.

a) Ha $t=1$, akkor egyenletrendszerünk így alakul:

$$(1a)\qquad x+y+z=4,$$

$$(3a)\qquad y+4z=3.$$

(3a) alapján $z<1$, így $z=0$, és $y=3$, végül (1a) szerint $x=1$.

b) Ha $t=0$, akkor egyenletrendszerünk:

$$(1b)\qquad x+y+z=5,$$

$$(3b)\qquad y+4z=12.$$

(3b) alapján $y=12-4z$, emiatt y osztható 4-gyel. Mivel (1b) szerint $y\leqslant 5$, így $y=4$, vagy $y=0$. Ha $y=4$, akkor $z=2$, de (1b)-ből $y+z\leqslant 5$, tehát így nem kapunk gyököt.

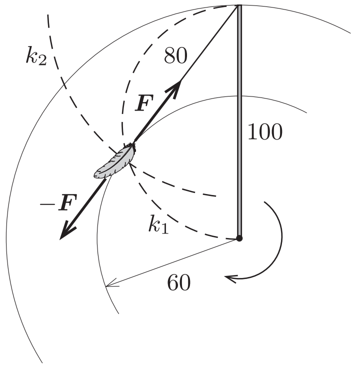
Ha $y=0$, akkor $z=3$, így (1b)-ből $x=2$.

Minden lehetőséget végignéztünk, így az egyenletrendszernek két megoldása van. Ezek:

$$x_1=1;\qquad y_1=3;\qquad z_1=0;\qquad t_1=1,$$

$$x_2=2;\qquad y_2=0;\qquad z_2=3;\qquad t_2=0.$$

6. Ha a tollpihe valamilyen állandósult pályán mozog, akkor ez csak kör lehet, hiszen ilyenkor a tollpihe az ostornyéllel együttforgó koordinátarendszerből szemlélve *áll.* A tollpihe elhanyagolhatóan kicsi tömege miatt a Newton-egyenletben a nehézségi erő és ma helyébe nullát írhatunk. A mozgásegyenlet tehát erre az állításra egyszerűsödik: a cérnaszálban ható erő és a közegellenállási erő eredője *nulla.*

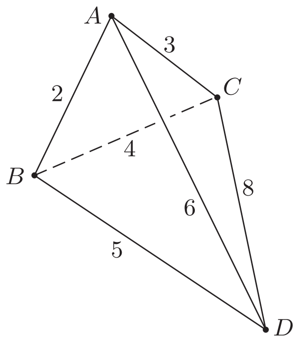


A cérnaszál egyenese a tollpihe pályakörének érintője. A pályakör sugarát az *ábrán* látható ($R = 100$ cm átmérőjű) k_1 Thalész-kör és az ostornyél mozgásban levő vége körüli $L = 80$ cm sugarú k_2 kör metszéspontja adja meg; nagysága:

$$r = \sqrt{R^2 - L^2} = 60 \text{ cm}.$$

(Ha a cérna hosszabb lenne, mint a pálca, akkor a tollpihének *nem* alakulhatna ki stabil, állandósult pályája.)

7. Próbáljunk meg tetraédert építeni az adott élekből. Nem szerepelhetnek ugyanabban a háromszögben a 2 cm-es és a 8 cm-es élek, hiszen a 2 cm-es élt a többi négy közül még a legnagyobb, a 6 cm-es él sem egészíti ki 8 cm-nél hosszabbra, márpedig egy háromszögben két oldal összege nagyobb a harmadiknál. Jelöljük a 2 cm-es él végpontjait A-val, B-vel, a 8 cm-eséit C-vel, D-vel, tudjuk már, hogy ezek különbözőek.



A többi 4 él mindegyikének az egyik végpontja az A, B, a másik a C, D pontok közül való. Válasszuk úgy a betűzést, hogy a 3 cm-es él két végpontja A és C legyen. Az ABC háromszög harmadik oldala, BC most már csak a 4 cm-es él lehet, hiszen a másik kettő mellett az $AB + AC = 5$ cm-es összeg túl kicsi lenne. Ugyancsak kevés az 5 cm-es él az ACD háromszög harmadik oldalának, így $AD = 6$, $BD = 5$. Ezek mellett az ABD háromszögben $AD = 6$ cm, $AB + BD = 7$ cm, a BCD háromszögben $CD = 8$ cm, $BC + BD = 9$ cm, tehát a keresett tetraéder valóban létrejön.

Tegyük fel most, hogy az adott elemekből ketten is felépítették a keresett tetraédert. Betűzzük az első tetraéder csúcsait a fenti meggondolás szerint A-val, B-vel, C-vel, D-vel, a másodikét A'-vel, B'-vel, C'-vel, D'-vel, ekkor tehát

$$(1) \qquad AB = A'B',\ AC = A'C',\ BC = B'C',\ AD = A'D',\ BD = B'D',\ CD = C'D'.$$

A második $A'B'C'$ lapja egybevágó az első ABC lapjával, tehát ráhelyezhető úgy, hogy A' az A-ra, B' a B-re, C' a C-re kerüljön. Ezután a D' pont rendre ugyanolyan messze lesz az A, B, C pontoktól, mint a D. Ha D és D' azonosak, készen vagyunk, ha nem, tekintsük a DD' szakaszt. Az A, B, C pontok mindegyike egyenlő távolságra van ennek a végpontjaitól, tehát ezek a pontok benne vannak a szakasz felezőpontján átmenő, a szakaszra merőleges S síkban. Így ha az $ABCD$ tetraédert S-re tükrözzük, az átmegy az $ABCD'$ tetraéderbe. A két tetraéder tehát mindig egybevágó.

8. A lencsén átjutó fénysugarak a síktükrön visszaverődve mégegyszer áthaladnak a lencsén, éppen úgy, mintha két 6 dioptriás lencse lenne egymás mellett. Ezek dioptriaszáma összeadódik, tehát 12 lesz.

9. Tegyük föl, hogy a lift úgy mozgott, hogy maximális utat tett meg. Ekkor minden megállás után irányt változtatott. Ha ugyanis az i-edik, j-edik szintekre egymás után, irányváltoztatás nélkül érkezett volna, akkor az i-edik szinten való megállást kihagyva, majd az út befejezése után ide visszatérve, az így módosított út hosszabb, mint a lift által megtett út, amiről pedig feltettük, hogy maximális.

Jelölje m_i az i-edik megállás szintjét, $i = 1, 2, \ldots, 10$. A lift által megtett út

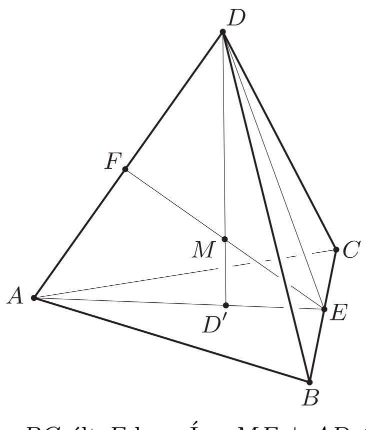
$$m_1 + (m_1 - m_2) + (m_3 - m_2) + (m_3 - m_4) + \ldots + (m_9 - m_{10}) =$$
$$= 2\big[(m_1 + m_3 + m_5 + m_7 + m_9) - (m_2 + m_4 + \ldots + m_8)\big] - m_{10}.$$

Látható, hogy a megtett út akkor maximális, ha a fenti összegben a 10, 9, 8, 7, 6 szintek pozitív, a megmaradó szintek negatív előjellel szerepelnek. Mivel a kivonandók közül m_{10} együtthatója a legkisebb, ezért $m_{10} = 5$, vagyis a lift végül az 5-dik szinten állt meg. A további m_i értékek – a fenti megszorítás mellett – tetszőlegesek lehetnek. A fenti megszorításnak eleget tevő m_i értékekhez tartozó maximális úthossz 220 m.

Megjegyzések. 1. A megoldásból nyilvánvaló, hogy a lift nemcsak egyetlen módon teheti meg a maximális 220 m-t. Az ilyen utak száma $5! \cdot 4! = 2880$.

2. A feladat könnyen általánosítható n emeletes házra. Ekkor a lift maximálisan $2n(n + 1)$ méternyi utat tesz meg.

10. A rugalmas ütközések és a ferde hajítások összefüggéseinek felírása után – elég hosszú számolással – belátható, hogy a parabolák fókuszpontjai az ejtési ponton átmenő, 2α meredekségű egyenesen helyezkednek el. Célszerű a labda mozgását a lejtővel párhuzamos és arra merőleges tengelyekkel rendelkező koordinátarendszerben tárgyalni. A lejtőre merőleges irányban a labda úgy mozog, mintha a nehézségi gyorsulás $g\cos\alpha$ lenne; a felpattanások magassága és az ütközések közötti idő pedig minden ütközés után ugyanakkora. A lejtővel párhuzamos irányban a labda egyenletesen gyorsulva mozog, gyorsulása $g\sin\alpha$.



11. Jelöljük a tetraéder csúcsait A, B, C és D-vel. Mivel a tetraéder szabályos, bármely magasságvonala a szemközti szabályos háromszöget a körülírt körének középpontjában metszi. A magasságvonal körül 120°-kal elforgatva a tetraédert, önmagába megy át. Ez a forgatás a tetraéder köré, a tetraéderbe írt gömböt, valamint az élérintő gömböt is önmagába viszi át, emiatt mindhárom gömbnek a középpontja a tetraéder magasságpontja, M.

Jelöljük a D csúcsnak az ABC síkra való merőleges vetületét D'-vel. A DD' magasságvonal tartalmazza a tetraéder M magasságpontját és MD' a tetraéderbe írható gömb sugarával egyenlő. Érintse az élérintő gömb az AD élt F-ben, a BC élt E-ben. Így $MF \perp AD$ és $ME \perp BC$, továbbá $ME = MF$ és nyilván F felezi AD-t, E felezi BC-t, hiszen $MD = MA = MC = MB$ a tetraéder köré írt gömb sugarával egyenlő. A DEA háromszög egyenlő szárú ($ED = EA$) és MF merőlegesen felezi AD-t, így át kell, hogy menjen a szemközti csúcson, E-n, azaz E, M és F egy egyenesbe esik. Ebből következik, hogy EMD' és DMF háromszögek M csúcsnál levő szögei csúcsszögek, tehát egyenlők, s mivel $MD'E$ és MFD szögük derékszög, így hasonlóak és megfelelő oldalaikra:

$$\frac{EM}{MD'} = \frac{DM}{MF}, \quad ME = MF \quad \text{miatt} \quad EM^2 = MD' \cdot DM.$$

12. Ha a telített vízgőz térfogatát *lassan* csökkentjük, a hőmérséklete állandó marad, a nyomása sem tud megváltozni, mert az csak a hőmérséklettől függ, így a gáztörvény szerint a részecskeszámnak kell csökkennie. A lassan összenyomott gőz egy része tehát *kicsapódik.*

Ha a térfogatot olyan *hirtelen* növeljük meg, hogy nincs idő számottevő hőcserére a vízgőzt tartalmazó tartály és a környezete között, akkor a hőmérséklet lecsökken (adiabatikus tágulás). Az új, alacsonyabb hőmérséklethez tartozó telítési gőznyomás kisebb lesz, mint az eredeti, sőt, annak ellenére, hogy a térfogat nő, a gőz egy része *kicsapódik.*

A gőz kicsapódása tehát a térfogat csökkentésével és növelésével egyaránt előidézhető, a térfogatváltozás tényleges hatása a folyamat sebességétől függ.

13. Az *ábrán* 1-től 25-ig megszámoztuk az 5×5-ös tábla mezőit.

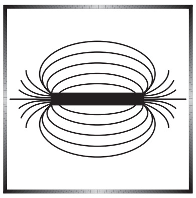
1	20	9	14	3
10	15	2	19	24
21	8	25	4	13
16	11	6	23	18
7	22	17	12	5

Könnyen ellenőrizhető, hogy ha egy ló az 1. számú mezőről kiindulva mindig a soron következő számú mezőre lép, akkor 24 lépésben minden mezőt érint. Így ha 13-nál több lovat állítunk fel az 5×5-ös táblára, akkor ezek közt feltétlenül lesz legalább kettő, amelyek szomszédos sorszámú mezőkre kerülnek, tehát a számozás tulajdonsága miatt ütik egymást. Az 5×5-ös táblán tehát 13 ló elhelyezhető a kívánt módon (minden páratlanadik mezőn egy), annál több már nem.

13+1. Egy általános érvényű tétel szerint ha egy (F_1) zárt felület sehol nem „lóg ki" egy másik (F_2) felület által határolt térrészből, akkor a nekik megfelelő alakú fémtestek kapacitására fennáll: $C_1 < C_2$. (A tétel bizonyításához a feltöltött kondenzátor elektrosztatikus energiáját érdemes vizsgálni, miközben a kisebb felületet apró lépésekben a másiknak megfelelő alakúra „kalapáljuk".)

A fémkocka éppen „belefér" a megadott méretű fémgömbbe, emiatt a kocka kapacitása biztosan kisebb, mint a fémgömbé.

Fizika feladatok megoldása



P. 4600. *Egy d átmérőjű, viszonylag rövid szívószálon keresztül szappanbuborékot fújunk, majd hagyjuk a buborékot ugyanezen a szívószálon keresztül leereszteni. Egy esetben, amikor a felfújt buborék átmérője D volt, a leeresztés idejét* 8 másodpercnek *mértük. Várhatóan mennyi idő alatt ereszt le*

a) egy ugyancsak D átmérőjű buborék egy vastagabb, 2*d átmérőjű szívószálon át;*

b) d átmérőjű szívószálon keresztül az a buborék, amelynek legnagyobb átmérője $2D$ volt?

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. *a*) Tekintsünk a két folyamatban a buborékok azonos V térfogatához tartozó pillanatokat. Attól, hogy a szívószál átmérője kétszer akkora lett, a kiáramló levegő sebessége nem változik. $A = d^2\pi/4$ felületen v sebesség mellett kicsiny Δt idő alatt $\Delta V = Av\Delta t$ térfogatú levegő távozik. Így $(2d)^2\pi/4 = 4A$ felületen $\Delta t/4$ idő alatt ömlik ki ugyanennyi.

Ha mindkét esetben videofelvételt készítünk a buborékok leeresztéséről, majd a $2d$ átmérőjű szívószálhoz tartozó felvételt negyedére lassítva játsszuk le, akkor azon is ugyanazt fogjuk látni, mint az első videón. Hiszen az első felvételen Δt idő alatt ömlik ki ΔV térfogatú levegő, a második videó lejátszásakor a Δt idő a valóságban $\Delta t/4$ időnek felel meg, így ott is ΔV térfogatú levegő távozik. A térfogatok tehát a két felvételen ugyanolyan ütemben csökkennek, így a két felvétel lejátszásakor a leeresztési idők is megegyeznek.

Ha a d átmérőjű szívószálon $t = 8$ másodpercig tart a leeresztés, akkor a $2d$ átmérőjű csövön keresztül a lassított felvételen is 8 másodpercig fog tartani, ami a valóságban $t/4 = 2$ másodpercnek felel meg.

b) Egy r sugarú, α felületi feszültségű buborék belsejében a túlnyomás (a buborék falának mindkét oldalát és a gömbfelület „kétféle irányú" görbületét is figyelembe véve)

$$\Delta p = \frac{4\alpha}{r}.$$

A Bunsen-féle kiömlési törvény szerint ϱ sűrűségű gáz

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\varrho}}$$

sebességgel áramlik ki a rövid csövön. (A Bunsen-törvény azt fejezi ki, hogy a kiáramló gázon végzett munka csak a mozgási energiát növeli, a belső súrlódás nem számottevő.) Eszerint állandó ϱ és α mellett a sebesség a sugár $\left(-\frac{1}{2}\right)$-ik hatványával arányos:

$$v \sim r^{-1/2}.$$

Vegyünk a D és $2D$ átmérőjű buborékok leeresztésének folyamatában V és $8V$ térfogatoknak megfelelő pillanatokat. Ekkor a nagyobb (2-es jelű) buborék sugara a kisebb (1-es jelű) buborék sugarának kétszerese, így a nagyobbikból kiáramló levegő sebessége $1/\sqrt{2}$-ször kisebb, mint a kisebb buborékból távozó levegő sebessége:

$$v_2 = v_1/\sqrt{2}.$$

Mennyi idő alatt lesz a 2-es buborék relatív térfogyatcsökkenése ugyanakkora, mint amennyi a kisebb buborék relatív térfogatváltozása Δt_1 idő alatt? Mivel a kiáramló levegő mindkét esetben ugyanakkora A keresztmetszetű csövön távozik, fennáll

$$-\frac{\Delta V_1}{V_1}=\frac{Av_1\Delta t_1}{V_1}=-\frac{\Delta V_2}{V_2}=\frac{Av_2\Delta t_2}{V_2},$$

ahonnan

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}=\frac{V_2}{V_1}\cdot\frac{v_1}{v_2}=8\sqrt{2}.$$

Ha megint alkalmazzuk a filmlelassítás trükkjét, vagyis a nagyobb buborék leeresztéséről készült felvételt $8\sqrt{2}$-szörösen lelassítva játszuk le, a két buborék méretének relatív csökkenését minden pillanatban ugyanakkorának látjuk, így a teljes leeresztésük ideje is ugyanannyi lesz.

A valóságban (valós időben mérve) a nagyobb méretű buborék mérete

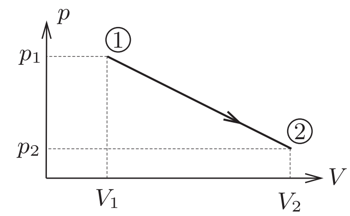
$$T_2=8\sqrt{2}\,T_1\approx 90\ s$$

idő alatt fog nullára csökkenni.

Fehér Zsombor (Budapesti Fazekas M. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

33 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Hiányos (1–3 pont) 12, hibás 3 dolgozat.

P. 4621. *Ideális gáz az ábrán látható folyamaton megy át. A kezdőállapotban* $V_1=2\ \mathrm{dm}^3$*,* $p_1=10^5$ Pa*,* $T_1=300$ K*. A végállapotban* $V_2=8\ \mathrm{dm}^3$*,* $p_2=2{,}5\cdot 10^4$ Pa*. Mekkora a gáz legmagasabb hőmérséklete a folyamat során, és ezt melyik állapotban éri el?*

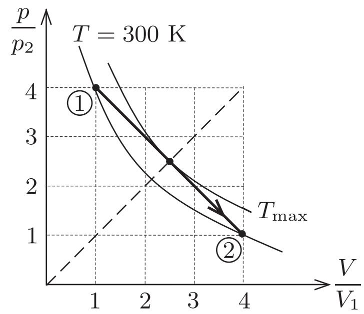


(*4 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

Megoldás. Észrevehetjük, hogy a feladatban szereplő adatokkal

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{V_2}{V_2}=4,\qquad\text{vagyis}\qquad p_1V_1=p_2V_2,$$

tehát az 1-es és a 2-es állapot ugyanazon a $T=300$ K-es izotermán helyezkedik el.



Ábrázoljuk a folyamatot és az izotermákat olyan koordináta-rendszerben, amelynek tengelyeire V/V_1-et és p/p_1-et mértük fel. Ebben a koordináta-rendszerben a folyamatot jellemző egyenes is és a $pV=$ állandó egyenletű, hiperbola alakú izotermák is tükörszimmetrikusak a 45°-os szögben álló, szaggatott vonallal jelölt egyenesre.

A legmagasabb hőmérsékletnek megfelelő izoterma érinti a folyamatot jellemző egyenest, az érintési pont a kezdeti- és a végállapot között félúton,

(1) $$\frac{p}{p_2}=\frac{V}{V_1}=2{,}5$$

értéknél található, vagyis ebben az állapotban a nyomás $2{,}5\,p_2 = 6{,}25 \cdot 10^4$ Pa és a térfogat $V = 2{,}5\,V_1 = 5\ \mathrm{dm}^3$.

A hőmérséklet mindegyik állapotban a nyomás és a térfogat szorzatával arányos. Az (1) összefüggésből leolvasható, hogy a legmagasabb hőmérsékletű állapotban

$$2{,}5^2 = \frac{p}{p_2} \cdot \frac{V}{V_1} = 4\frac{pV}{p_1V_1} = \frac{T_{\max}}{T_1},$$

vagyis

$$T_{\max} = \frac{6{,}25}{4}\,300\ \mathrm{K} = 468{,}75\ \mathrm{K} \approx 470\ \mathrm{K}.$$

Morvay Bálint (Pécs, Szent Mór Iskolaközpont, 12. évf.)
dolgozata felhasználásával

72 dolgozat érkezett. Helyes 45 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 16, hiányos (1–2 pont) 7, hibás 4 dolgozat.

P. 4627. *Egy felfújt lufit két tenyerünk közé fogva előbb-utóbb azt érezzük, hogy a lufi melegíti a kezünket. Hogy lehet ez?*

(*3 pont*) Kérdezi: *Radnai Réka,* Budapest, Andor Ilona Ének-Zenei Ált. Isk.

Megoldás. Mivel az alapján érzünk valamit hidegnek vagy melegnek, hogy mennyi hőt ad át/le a testünk annak a valaminek, ezért a jó hőszigetelő anyagokat melegnek érezzük. A lufiban található levegő nagyon jó hőszigetelő. Miután a lufi anyaga felmelegszik, tenyerünk csak nagyon kevés hőt ad le, ezért érezzük a lufit melegnek.

A környezetünkben található levegőt ennek ellenére nem érezzük mindig melegnek, mivel bőrünkről folyamatosan párologtatunk vizet, és ez energiát vesz el. Mivel a körülöttünk levő levegő szabadon mozoghat, a nedves levegő hamar elillan, így bőrünk folyamatosan párologtathatja a vizet.

Rózsa Tibor (Révkomárom, Szlovákia, Selye J. Gimn., 11. évf.)

26 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott Mályusz Attila és Rózsa Tibor megoldása. Kicsit hiányos (2 pont) 11, hiányos (1 pont) 13 dolgozat.

P. 4629. *Vízszintes, súrlódásos talajon egy mozgásában magára hagyott test mozgási energiája egy adott pillanatban* 900 J, 2 s *múlva már csak* 400 J, *miközben a test ℓ utat tesz meg.*

a) *Az ℓ út hányszorosát teszi meg még a test a megállásig?*

b) *Mennyi idő alatt teszi meg ezt az utat?*

(*4 pont*) Közli: *Dudics Pál,* Debrecen

Megoldás. *a*) A test mozgási energiája a mozgás első szakaszában ℓ úton E_1-ről E_2-re változik:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -500\ \mathrm{J}.$$

Alkalmazzuk a munkatételt a mozgás ezen szakaszára. Mivel a test mozgását (vízszintes talajon) μmg nagyságú, vízszintes irányú súrlódási erő fékezi, fennáll:

$$\Delta E = -\mu mg\,\ell.$$

Jelöljük a test megállásáig megtett utat ℓ'-vel! Így itt is alkalmazható a munkatétel:

$$0 - E_2 = -\mu mg\,\ell'.$$

A fenti két egyenletet elosztva egymással:

$$\frac{\ell}{\ell'} = \frac{E_1 - E_2}{E_2} = \frac{900 - 400}{400} = \frac{5}{4},$$

ahonnan

$$\ell' = \frac{4}{5}\,\ell.$$

b) A test mozgási energiája a sebességének négyzetével arányos, így a mozgás első ($t_1 = 2$ másodpercig tartó) szakaszában a v_1 kezdősebesség és v_2 végsebesség aránya

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} = \sqrt{\frac{900}{400}} = \frac{3}{2}.$$

A test átlagsebessége a mozgás első szakaszában

$$\overline{v} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{5}{6}v_1,$$

a megállásig tartó, t_2 időtartamú második szakaszban pedig

$$\overline{v}' = \frac{v_2 + 0}{2} = \frac{v_1}{3}$$

az átlagsebesség. A megtett utakat az átlagsebességgel és a mozgás idejével kifejezve felírhatjuk, hogy

$$\overline{v}\,t_1 = \ell, \qquad \text{illetve} \qquad \overline{v}'\,t_2 = \ell',$$

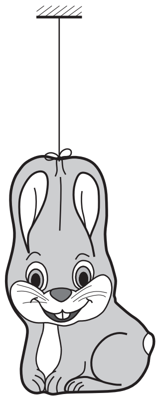
ahonnan

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\overline{v}}{\overline{v}'} \cdot \frac{\ell'}{\ell} = 2.$$

A test tehát a megállásig $t_2 = 2t_1 = 4$ s alatt $\frac{4}{5}\ell$ utat tesz meg.

Iván Balázs (Fonyód, Mátyás Király Gimn., 9. évf.)

102 dolgozat érkezett. Helyes 72 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 11, hiányos (1–2 pont) 18, hibás 1 dolgozat.

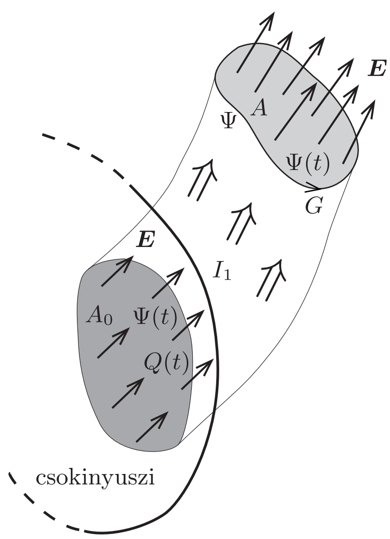


P. 4637. *Szigetelő szálra függesztett, alufóliával bevont csokoládényuszit elektromosan feltöltünk. A nyuszi a levegő csekély vezetőképessége miatt lassan elveszíti a töltését. Milyen lesz kisülés közben a nyuszi körül kialakuló mágneses mező? (Feltehetjük, hogy a levegő vezetőképessége független a helytől.)*

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

Megoldás. A csokinyuszit borító alufólián lévő elektromos töltés *nem egyenletesen* oszlik el, emiatt az időben lassan változó (majdnem sztatikus) elektromos tér általában igen bonyolult térbeli szerkezetű lesz. Annyit azonban állíthatunk, hogy csak a nyuszin kívüli térrészben alakul ki elektromos mező, és hogy az elektromos erővonalak merőlegesen lépnek ki az alufólia (ekvipotenciális) felületéből.

Sejthetjük, hogy az igen bonyolult alakú nyuszi körül egyáltalán *nem* alakul ki mágneses mező (ellenkező esetben a kérdés nem szerepelne a középiskolai feladatok között!), jóllehet a környező levegőben elektromos áram folyik. Ezt a sejtést az alábbiakban be is bizonyítjuk!



Tételezzük fel, hogy kialakulhatna valamilyen (nullától különböző) mágneses mező. Ennek erővonalai zárt görbéket alkotnának, egy ilyen például az *ábrán* látható G görbe lehetne. Erre a görbére az

$$\ddot{O}_B = \sum_G \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\Delta\boldsymbol{r}$$

mennyiség (mágneses örvényerősség, más néven mágneses körfeszültség) nullától különböző lenne, hiszen az erővonal mentén haladva a $\boldsymbol{B}$ és $\Delta\boldsymbol{r}$ vektorok párhuzamosak, skalárszorzatuk tehát a szumma minden tagjában pozitív (vagy ellentétes körüljárás esetén negatív).

Maxwell IV. törvénye szerint az örvényerősség a G görbe által körülölelt A nagyságú felületen átfolyó *teljes* árammal arányos:

$$\ddot{O}_B = \mu_0 \cdot I = \mu_0\,(I_1 + I_2),$$

ahol I_1 az elektromos töltések mozgásából származó szokásos áram, I_2 pedig a Maxwell-féle eltolási áram, amely az elektromos fluxus időbeli változási sebességéből számítható ki:

$$I_2 = \varepsilon_0 \frac{\Delta\Psi}{\Delta t}.$$

Kövessük nyomon (visszafelé) azon elektromos erővonalakat, amelyek az A felületen haladnak keresztül. Ezek az erővonalak a csokinyuszi felületének valamely A_0 nagyságú darabjáról, az ott lévő Q nagyságú töltésből indultak ki, fluxusuk tehát egy adott t időpontban:

$$\Psi(t) = \frac{1}{\varepsilon_0} Q(t).$$

(Felhasználtuk, hogy a nyuszi belsejében nulla az elektromos tér, tehát az összes erővonal „kifelé” indul.) Ugyanekkora az A felületen áthaladó elektromos fluxus is, az eltolási áram nagysága tehát

$$I_2 = \varepsilon_0 \frac{\Delta\Psi}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -I_1.$$

Az utolsó lépésnél kihasználtuk, hogy az A felületen áthaladó (a töltéshordozók mozgásából származó) áram megegyezik az A_0 felületen lévő töltésmennyiség csökkenési sebességével.

Látható, hogy *tetszőleges* G görbe által határolt felületre $I_1 + I_2 \equiv 0$, emiatt a mágneses örvényerősség sehol nem lehet nullától különböző, vagyis a csokinyuszi körül (és még annak belsejében is) a mágneses tér mindenhol *nulla.*

Holczer András (Pécs, Janus Pannonius Gimn., 11. évf.) és
Sal Kristóf (Budapesti Fazekas M. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)
dolgozatának felhasználásával

10 dolgozat érkezett. Helyes Antalicz Balázs, Fehér Zsombor, Holczer András, Janzer Barnabás és Sal Kristóf megoldás. Hiányos (2–4 pont) 5 dolgozat.

P. 4640. *Az ideális gáz belső energiáját a molekulák rendezetlen mozgásához tartozó mozgási energiák összege szolgáltatja. A belső energia változását a hőmérséklet változása jelzi. A gázzal történő rendezett energiaközlést munkának, a rendezetlen energiaközlést hőközlésnek nevezzük. Mely tulajdonságai (állapotjelzői) maradnak változatlanok az állandó tömegű ideális gáznak*

a) csupán hőközlés hatására;

b) csupán munkavégzés hatására;

c) ha folyamatosan annyi munkát végez a gáz, amennyi hőt felvesz?

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. Mindhárom esetben a hőtan első főtételéből indulhatunk ki. Eszerint

$$\Delta E_\mathrm{b} = Q + W,$$

ahol Q a gázzal közölt hő, W a környezet által a gázon végzett munka, ΔE_b pedig a gáz belső energiájának változása (növekedése).

a) Ha csupán hőközlés történik, vagyis nincs munkavégzés, akkor

$$\Delta E_\mathrm{b} = Q.$$

Ebben az esetben a hőtan első főtétele szerint a gázzal közölt hő teljes egészében a gáz belső energiáját növeli. Mivel nincs munkavégzés, ezért ebben az esetben a gáz térfogata állandó. A gáz állapotváltozása *izochor.*

b) Ha csupán munkavégzés történik, vagyis a gáz és a környezete között nincs hőközlés, akkor

$$\Delta E_{\mathrm{b}} = W.$$

A hőtan első főtétele szerint ekkor a gázon végzett munka teljes egészében a gáz belső energiáját növeli. A gáz állapotváltozása adiabatikus, a folyamat során a gáz *entrópiája állandó.*

c) Amennyiben $W = -Q$, az első főtétel szerint

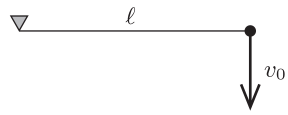
$$\Delta E_{\mathrm{b}} = Q + W = 0,$$

vagyis a gáz *belső energiája állandó.* Ebből következően az ideális gáz hőmérséklete is állandó marad, a folyamat *izotermikus.*

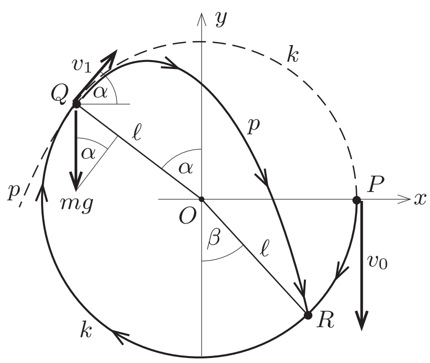
Németh András (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., 11. évf.)

48 dolgozat érkezett. Helyes 13 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 17, hiányos (1–2 pont) 13, hibás 5 dolgozat.

P. 4642. *Egy* $\ell = 20$ cm *hosszú fonálingát a vízszintesig kitérítünk, majd függőlegesen lefelé* $v_0 = 2$ m/s *sebességgel elindítjuk. Mekkora szöget zár be a függőlegessel a fonál, amikor meglazulása után újra megfeszül?*



(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest



Megoldás. A P pontban v_0 sebességgel függőlegesen lefelé indított fonálinga a k körön haladva eljut az *ábrán* látható Q pontba, ahol a fonala meglazul.

Ez akkor következik be, amikor a fonálerő nullává válik, vagyis amikor az mg nehézségi erő fonálirányú komponense éppen biztosítani tudja a v_1 sebességű körmozgásnak megfelelő centripetális erőt:

$$\frac{mv_1^2}{\ell} = mg\cos\alpha, \tag{1}$$

ahol α a függőlegessel bezárt szög a meglazuláskor. A mechanikai energia megmaradásának tételéből kiszámíthatjuk az inga nehezékének sebességét a Q pontban:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg\ell\cos\alpha + \frac{1}{2}mv_1^2. \tag{2}$$

Az (1) és (2) összefüggésekből

$$v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{3}} \approx 1{,}155\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \tag{3}$$

valamint

$$\cos\alpha = \frac{v_1^2}{g\ell} \approx 0{,}68; \qquad \text{vagyis} \qquad \alpha \approx 47{,}2^\circ \tag{4}$$

következik.

A fonál meglazulása után az ingatest letér a k körpályáról, és egy v_1 kezdősebességű, α szögű ferde hajítás p parabolapályáján halad tovább. Ez a parabola valamely R pontban metszi a kört, a fonál ennél a pontnál feszül meg újra. Feladatunk az OR egyenes és a függőleges által bezárt β szög meghatározása.

Vegyünk egy olyan koordináta-rendszert, amelynek O origója az inga felfüggesztési pontja, x tengelye vízszintesen jobbra, y tengelye pedig függőlegesen felfelé mutat. Ebben a rendszerben az ingatest koordinátái t idővel a fonál meglazulása után:

$$x = v_1 t\cos\alpha - \ell\sin\alpha, \tag{5}$$

illetve

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + v_1 t\sin\alpha + \ell\cos\alpha. \tag{6}$$

A fonál akkor feszül meg újra, amikor a végén lévő test ismét ℓ távolságra kerül a felfüggesztési ponttól. Az $x^2+y^2=\ell^2$ összefüggés (5) és (6) behelyettesítésével t-re egy negyedfokú egyenletet ad (összhangban azzal, hogy egy körnek és egy parabolának legfeljebb 4 közös pontja lehet):

$$t^4\cdot\frac{g^2}{4} - t^3\cdot v_1 g\sin\alpha = 0,$$

vagyis

$$t^3\left(t - \frac{4v_1}{g}\sin\alpha\right) = 0. \tag{7}$$

Ennek az egyenletnek $t=0$ *háromszoros gyöke,* ez a megoldás a Q pontnak felel meg.

Megjegyzés. Nem meglepő, hogy $t=0$ háromszoros gyök, hiszen közvetlenül a fonál meglazulásának pillanata előtt a test *helye, sebessége* és *gyorsulása* ugyanakkora, mint ezek a mennyiségek közvetlenül a fonál meglazulása után. Geometriai nyelven megfogalmazva: a k kör és a p parabola Q metszéspontjában a két görbe *érintője is* és a *görbülete is* megegyezik.

A (7) egyenlet számunkra érdekes negyedik gyöke

$$t_4 = \frac{4v_1\sin\alpha}{g} \approx 0{,}345\ \mathrm{s}, \tag{8}$$

a meglazulását követően ennyi idő múlva feszül meg újra a fonál. Az inga nehezékének koordinátái ekkor (5) és (6) szerint, (1) és (8) felhasználásával:

$$x_R = x(t_4) = \ell \sin\alpha\big(4\cos^2\alpha - 1\big) = \ell\sin(3\alpha),$$

$$y_R = y(t_4) = \ell\cos\alpha\big(1 - 4\sin^2\alpha\big) = -\ell\cos(3\alpha),$$

amik a keresett β szöggel is kifejezhetők:

$$x_R = \ell\sin\beta, \qquad y_R = -\ell\cos\beta.$$

Eszerint a fonál szöge az ismételt megfeszülés pillanatában

$$\beta = 180^\circ - 3\alpha \approx 38{,}4^\circ.$$

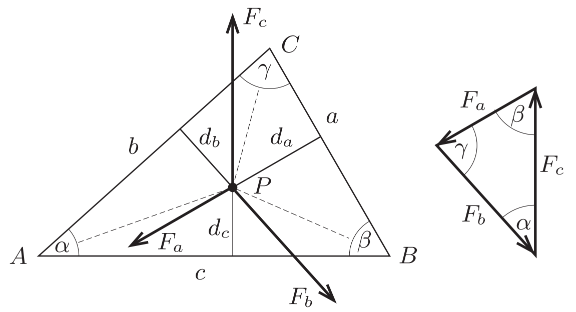
Marosvári Kristóf (Keszthely, Vajda J. Gimn., 11. évf.) és
Fehér Zsombor (Budapesti Fazekas M. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)
dolgozata felhasználásával

48 dolgozat érkezett. Helyes 27 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 11, hibás 8 dolgozat.

P. 4648. *Három, végtelen hosszúnak tekinthető, egy síkban lévő, egymást egy tetszőleges háromszögben keresztező vékony szigetelőpálcát egyenletesen, azonos töltéssűrűséggel feltöltünk. Hová helyezhetünk el egy ponttöltést, hogy egyensúlyban legyen?*

(*6 pont*) Közli: *Kósa Tamás* ötlete alapján *Vass Miklós,* Budapest

I. megoldás. Tekintsük a pálcák által kijelölt háromszög egy belső (P) pontját, és rajzoljuk be az oda helyezett ponttöltésre ható erőket!



Azt a pontot keressük, ahol a ponttöltésre ható elektrosztatikus erők kiegyenlítik egymást, azaz vektori összegük zérus. (Ilyen pont nyilván csak a pálcák által alkotott síkban és a háromszög belsejében lehet.)

Erőegyensúly esetén az egymás végébe rajzolt erővektorok záródó háromszöget alkotnak (lásd az *ábra* jobb oldali részét). Mivel mindegyik erővektor merőleges a háromszög valamely oldalára, az erővektorok alkotta háromszög és az eredeti háromszög hasonló. Így a megfelelő oldalaik aránya megegyezik:

$$\frac{F_a}{a}=\frac{F_b}{b}=\frac{F_c}{c}. \tag{1}$$

Számítsuk most ki, hogy mekkora elektromos térerősség alakul ki egyetlen, nagyon hosszú, egyenletesen feltöltött (hosszegységenként η töltéssel rendelkező) szigetelő pálca környezetében, a pálcától r távolságban. A térerősség – a szimmetria miatt – a pálcára merőleges és mindenhol ugyanakkora $E(r)$ nagyságú. Alkalmazzuk az elektromos fluxus és a töltés nagysága között fennálló Gauss-törvényt egy L hosszúságú, a pálcával azonos szimmetriatengelyű, r sugarú hengerre:

$$E(r)\cdot 2\pi rL=\frac{1}{\varepsilon_0}\eta\,L,$$

ahonnan

$$E(r)=\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\sim\frac{1}{r}.$$

Ezek szerint az egyes (ugyanakkora töltéssűrűségű) pálcák által a ponttöltésre kifejtett erő és a pálcától mért távolság szorzata ugyanakkora. Az ábra jelöléseit követve:

$$d_a\,F_a=d_b\,F_b=d_c\,F_c,$$

amit az (1) arányosságokkal összevetve

$$a\cdot d_a=b\cdot d_b=c\cdot d_c$$

adódik, vagyis a háromszög csúcsaiból a P pontba húzott szakaszok a háromszöget *egyenlő területű* részekre osztják. Ilyen tulajdonságú pont a háromszög belsejében csak egy van: a háromszög *súlypontja.* Nézzük ennek bizonyítását!

Az APB háromszög területe egyharmada az ABC háromszög területének, emiatt d_c megegyezik a c oldalhoz tartozó magasság egyharmadával. Ezek szerint a P rajta lesz az a oldalhoz tartozó magasságnak az a oldalhoz közelebbi harmadoló merőlegesén, és erre a harmadoló merőlegesre a háromszög S súlypontja is illeszkedik.

Mivel az oldalak helyzete szimmetrikus, ugyanez igaz egy másik, például a b oldalhoz tartozó magasságra is. A két harmadoló egyenesnek egyetlen metszéspontja van, a feladat egyetlen megoldása tehát a *háromszög súlypontja.*

II. megoldás. Az elektrosztatikus erők egyensúlyának megkeresése egyenértékű feladat az elektrosztatikus potenciál szélsőértékének meghatározásával. Egy végtelen hosszú egyenesnek tekinthető, egyenletesen töltött szigetelő pálca potenciálja a pálcától mért távolság logaritmusával arányos:

$$U(r)=-\int(E(r)\,\mathrm{d}r=\text{állandó}\cdot\ln r+\text{állandó}.$$

A három (ugyanakkora töltéssűrűségű) pálca elektromos potenciálja az egyes pálcák potenciáljának összege:

$$U_{\text{eredő}} = U_1 + U_2 + U_3 = \text{állandó} \cdot \ln\left(d_a\, d_b\, d_c\right) + \text{állandó}.$$

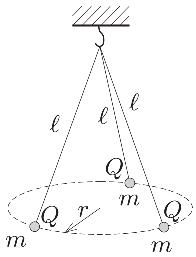
Ez a kifejezés akkor legnagyobb (vagy legkisebb), ha a kérdéses pontban az oldalaktól mért távolságok szorzata maximális. Ezen szélsőérték-feladat megoldása: *a háromszög súlypontja* (lásd a **B. 4636.** feladat megoldását a 25. oldalon! – a Szerk.).

Antalicz Balázs (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Ref. Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A potenciálfüggvény menetéből az egyensúlyi helyzet stabilitására is következtethetünk. Ha a pálcák töltése és a ponttöltés előjele megegyezik, akkor a pálcák síkjában történő elmozdulásokra nézve az egyensúly stabil, a síkra merőlegesen viszont instabil. Ellentétes előjel esetén a helyzet fordított: a pálcák síkjából kitérített ponttöltést az elektromos erőtér visszahúzza, a pálcák síkjában történő elmozdulás hatására viszont valamelyik pálca magához rántja a ponttöltést. Ezek szerint semmilyen előjelű pálca eredő elektrosztatikus erőterében sem alakulhat ki *minden irányban stabil* egyensúlyi helyzet. Ez az állítás a nevezetes Earneshaw-tétel speciális esete.

(G. P.)

25 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Hiányos (3–4 pont) 4, hibás 2 dolgozat.



P. 4656. *Ugyanabban a pontban felfüggesztett három egyenlő hosszú fonálon három azonos nagyságú és tömegű kis gömb függ. Mindegyiknek ugyanakkora töltést adva mekkora sugarú körön fognak elhelyezkedni?*

Adatok: $\ell = 20$ cm, $m = 1{,}3$ gramm, $Q = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ C.

(*5 pont*) *Francia érettségi feladat*

Megoldás. A három gömb – a szimmetria miatt – egymástól egyenlő távolságban fog elhelyezkedni, vagyis egy szabályos háromszöget alkotnak. A háromszög oldalainak d hossza (a kis gömbök távolsága) a kör sugarának $\sqrt{3}$-szorosa.

Mindhárom gömböt taszítja a másik kettő. Mivel a töltésük és a távolságaik egyenlőek, bármelyik kiválasztott (A jelű) gömbre ugyanakkora,

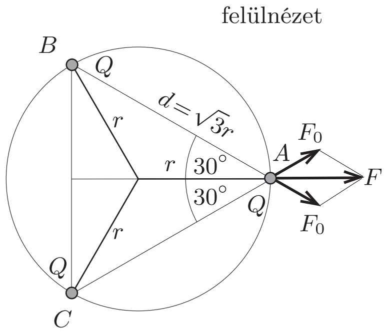
$$F_0 = k\frac{Q^2}{d^2}$$

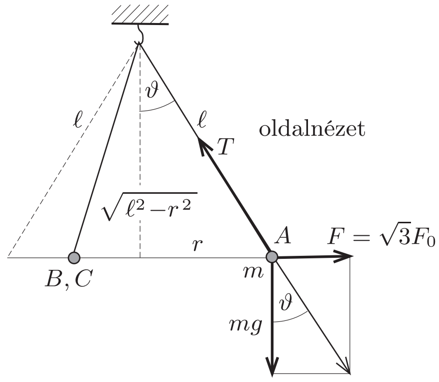
nagyságú, egymással 60°-os szöget bezáró erővel hat a másik kettő, a bal oldali (felülnézeti) *ábrának* megfelelően.

Az ábráról az is leolvasható, hogy a két Coulomb-erő eredője

$$F = 2F_0\cos 30^\circ = \sqrt{3}\,F_0 = \frac{\sqrt{3}kQ^2}{3r^2} \tag{1}$$

nagyságú, és a háromszög kiválasztott csúcsával szemben lévő oldalra merőleges.





Mindegyik gömb, így az A jelű is egyensúlyban van, tehát a rá ható erők eredője nulla. A jobb oldali (oldalnézeti) *ábráról* látható, hogy az egyensúly feltétele: a vízszintes irányú $\boldsymbol{F}$ elektrosztatikus erő és a függőleges irányú $m\boldsymbol{g}$ nehézségi erő eredője ugyanakkora ϑ szöget zárjon be a függőlegessel, mint a fonálban ható $\boldsymbol{T}$ erő:

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{F}{mg}=\frac{r}{\sqrt{\ell^2-r^2}}.$$

Felhasználva az (1) összefüggést, továbbá bevezetve az

$$x=\frac{r^2}{\ell^2} \tag{2}$$

dimenziótlan mennyiséget, az egyensúly feltétele ilyen alakra hozható:

$$1-x=K\cdot x^3, \tag{3}$$

ahol

$$K=3\left(\frac{\ell^2mg}{kQ^2}\right)^2\approx 46{,}5.$$

A (3) harmadfokú egyenlet pl. a *Desmos Graphing Calculator* nevű online függvényábrázoló program segítségével (`www.desmos.com/calculator`) könnnyen megoldható. Az egyenlet mindkét oldalát grafikusan ábrázolva megállapíthatjuk, hogy a két görbének egyetlen metszéspontja van $x=0{,}252$ értéknél, ami (2) alapján $r=0{,}10$ m-nek felel meg.

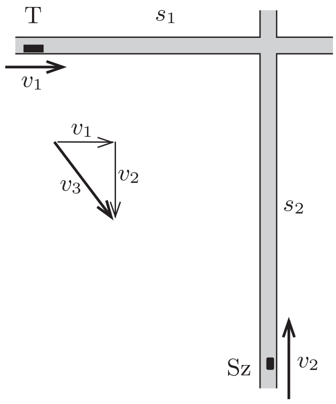
A kicsi, elektromosan töltött gömbök tehát az egyensúly beállta után egy 10 cm sugarú kör mentén, egymástól kb. 17 cm távolságra fognak elhelyezkedni.

Ahaan S. Rungta (USA, Massachusetts, Cambridge, Homeschool, 11. évf.) és
Asztalos Bogdán (Budapest, Baár-Madas Református Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

93 dolgozat érkezett. Helyes 52 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 21, hiányos (2–3 pont) 18, hibás 1, nem értékelhető 1 dolgozat.

P. 4661. *Két egyenes, egymásra merőleges útpálya kereszteződése felé egy személyautó és egy teherautó közeledik. A személyautó vonatkoztatási rendszerében a másik úton haladó teherautó sebességének nagysága* 90 km/h. *A személygépkocsi sebességmérője* 72 km/h-t *mutat. A mérés pillanatában a teherautó* 600 m-re, *a személyautó* 800 m-re *van az útkereszteződéstől. Melyik ér hamarabb a kereszteződéshez, ha mindkettő egyenletesen halad?*

(*4 pont*) Közli: *Szombathy Miklós,* Eger



Megoldás. Jelöljük a teherautó (T) sebességét v_1-gyel, a személyautó (Sz) sebességét v_2-vel; ezek a sebességek az úthoz viszonyított értékek. Tudjuk, hogy

$$v_2 = 72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

a személyautó tehát

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = 40\ \text{s}$$

alatt teszi meg a kereszteződésig az $s_2 = 800$ m-es utat.

A személyautó (mozgó) vonatkoztatási rendszerében a teherautó sebessége két egymásra merőleges sebességvektor összege, a nagysága

$$v_3 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 90\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 25\ \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

ahonnan kiszámítható a teherautó sebessége:

$$v_1 = \sqrt{v_3^2 - v_2^2} = \sqrt{25^2 - 20^2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ekkora sebességgel haladva a teherautó

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = 40\ \text{s}$$

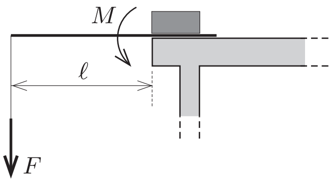
idő alatt teszi meg az $s_1 = 600$ m-es utat.

A két jármű tehát *egyszerre* érkezik az útkereszteződéshez.

Sallai Krisztina (Mezőkovácsháza, Hunyadi J. Gimn., 10. évf.) és
Szemerédi Levente (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn. és Ált. Isk., 9. évf.)
dolgozata alapján

173 dolgozat érkezett. Helyes 149 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 9, hiányos (1–2 pont) 14, nem versenyszerű 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok



M. 347. Rögzítsünk hurkapálcát egy asztal szélére! Terheljük fokozatosan a szabad végét, vagy akasszunk rá erőmérőt! Mérjük meg a pálca eltöréséhez szükséges M forgatónyomatékot, illetve a terhelő erő W munkáját! Változnak-e a mérési eredmények, ha a hurkapálca asztalon túl kinyúló részének ℓ hosszát a felére csökkentjük?

(*6 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

P. 4693. Hány kelvinen mutat ugyanannyit a *higanyos* hőmérő Celsius- és Fahrenheit-skálán, és mennyi ez az ugyanannyi?

(*3 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest

P. 4694. *a*) Hány gramm víz van egy 25 °C-os, 60 m^3 térfogatú szoba levegőjében, ha a relatív páratartalom 50%-os?

b) Hány százalékra nő a relatív páratartalom, ha a szoba hőmérséklete reggelre 20 °C-ra csökken? (Az ablakok be vannak csukva és jól zárnak.)

c) Hány százalék ugyanennek a levegőnek a páratartalma 10 °C-on?

(*4 pont*) *Tornyai Sándor fizikaverseny,* Hódmezővásárhely

P. 4695. Egy 5 dioptriás lencsétől 10 cm-re helyezkedik el egy olyan világító, 1 cm hosszú izzószál, amely merőleges az optikai tengelyre. A lencse másik oldalán, ugyancsak az optikai tengelyre merőlegesen helyezünk el egy, a lencse felé forduló síktükröt, tőle 20 cm-re. Hol, mekkora és milyen állású képei keletkeznek az izzószálnak?

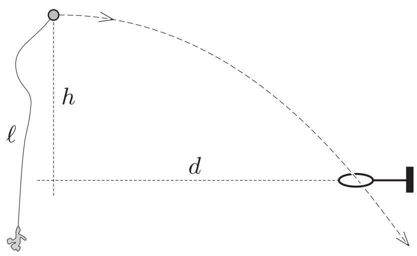
(*4 pont*) Közli: *Szombathy Miklós,* Eger

P. 4696. 8 mm átmérőjű és 4 mm magas, henger alakú gyógyszertabletták kis magasságból hullanak az asztalra. Tételezzük fel, hogy minden térbeli irány egyenlő valószínűségű, és a tabletták nem pattannak fel. A tabletták hány százaléka kerül az asztalon „gurulós” helyzetbe?

(*4 pont*) *Bakonyi Gábor* (1932–2010) feladata

P. 4697. Újsághír: „Egy elektromos versenyautó három másodperc alatt van százon, maximális sebessége 220 km/h, teljesítménye 268 lóerő.” Mekkora lehet az autó tömege?

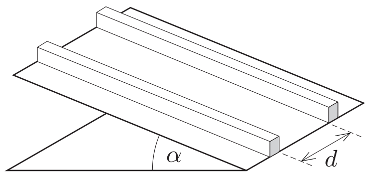
(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest



P. 4698. Egy súlyos vasgolyóhoz ℓ hosszú cérnaszálat, annak végére pedig tollpihét erősítettünk, majd a golyót vízszintes irányban elhajítottuk. A golyó az *ábrán* látható fémkarikán repül keresztül. Mennyi idő alatt halad át a cérnaszál a karikán?

Adatok: $\ell = 1{,}6$ m, $h = 1{,}25$ m, $d = 2$ m.

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest



P. 4699. Egy $\alpha = 30°$-os hajlásszögű lejtőn két vékony lemez egy sínpárt alkot. A lemezek távolsága $d = 1{,}6$ cm. A sínpárra 2 cm átmérőjű golyót helyezünk, és ez csúszás nélkül legördül.

a) Mekkora a golyó középpontjának a gyorsulása?

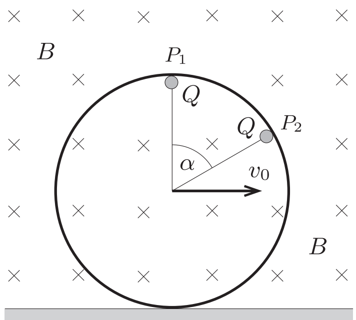
b) μ nagyságú súrlódási együttható esetén milyen meredek lejtőnél csúszik meg a golyó?

(*5 pont*) *Vermes Miklós* (1905–1990) feladata

P. 4700. Egy h magasságú, A keresztmetszetű ($h \ll \sqrt{A}$) homogén fémkorong alkotójával párhuzamosan, nagy gyorsulással mozog ($a \gg g$). Hány elektron jelenik meg a fémkorongnak a gyorsulás irányával ellentétes oldalán?

(*5 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Budapest

P. 4701. Függőleges síkban mozgó, szigetelő anyagból készült karika P_1 és P_2 pontjához Q töltésű, kisméretű golyókat úgy, hogy $\alpha = 60°$ (lásd az *ábrát*). A karika B indukciójú, homogén mágneses mezőben van, amelynek erővonalai merőlegesek a karika síkjára. A karikát úgy mozgatjuk, hogy az a szigetelő anyagból készült vízszintes felületen tisztán gördül, és a középpontjának sebessége v_0.



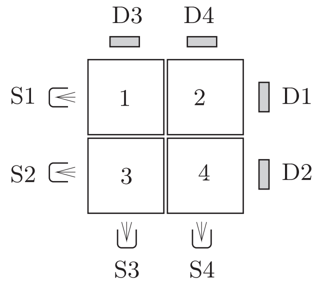
a) Mekkora mágneses erők hatnak az ábrán látható helyzetben az egyes töltött golyókra?

b) A karika mely helyzeteiben nincs a mágneses erők eredőjének forgatónyomatéka a karika középpontjára vonatkoztatva? Ezen helyzetek közül melyikben gyakorol nagyobb erőt a mágneses mező a karikára? Mekkora ez az erő?

c) Határozzuk meg a mágneses erők hatásvonalainak metszéspontját!

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

P. 4702. Négy darab 10 cm oldalú, különböző anyagi minőségű betonkockát az *ábrának* megfelelően helyezünk egymás mellé, és ^{60}Co gammasugárnyalábbal „világítjuk meg” egymás után 4 pozícióból (S1, S2, S3 és S4). A sugárforrásokkal szemben, a betonkockák mögött 4 detektort is elhelyeztünk (D1, D2, D3 és D4). Az első három mérés szerint a betonkockák a sugárzás intenzitását rendre az eredeti érték 86,76, 71,94 és 84,25 százalékára csökkentik.



a) Hány százalékra csökkent intenzitást mér a negyedik detektor?

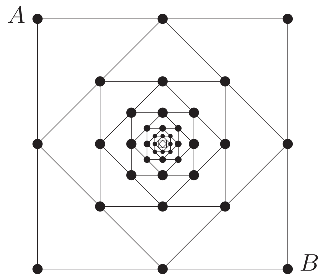
b) Az 1. kocka „felezési rétegvastagsága” 6 cm. Mekkora ez – az anyagi minőségtől függő – mennyiség a többi kockánál?

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 4703. Az *ábrán* látható alakzatban (amely a közepe felé korlátlanul folytatódik) a fekete körökkel jelzett pontok között 1 Ω ellenállású vezetékek vannak.

Mekkora az eredő ellenállás az A és B pontok között?

(*6 pont*) *Amerikai versenyfeladat nyomán*



❄

Beküldési határidő: 2015. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 65. No. 1. January 2015)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 27): **K. 445.** Corner P of a square $PQRS$ is folded up to coincide with corner R. Then Q is also folded to R. The area of the resulting figure is 9 cm^2. What is the area of the original square? **K. 446.** John works for two companies, each paying him by the hour. If he works twice as much for the first company than for the second one during the course of a month, then his monthly wages will be 4/5 as much as they would be if he did it the other way round. How long does he need to work for the first company to earn as much as he is paid by the second company for 10 hours? **K. 447.** Are there natural numbers x and y such that

$x^2 + y^2 = 2015$? **K. 448.** There are four discs on a carousel, arranged as shown in the *diagram.* In how many ways is it possible to colour the four discs with four colours, given that colourings obtained from each other by rotating the carousel around its midpoint in its plane are not considered different? Any colour may be chosen for any disk, but each disc is only allowed to have a single colour. **K. 449.** Sebastian's test score of 98 points increased his average calculated from all previous tests by 1 point. Then his next score of 70 points decreased the average by 2 points. How many tests did Sebastian take altogether? **K. 450.** In the arithmetic sequence $1, 14, 27, \ldots$, how many digits are there in the second number that consists of digits of 2 only?

New exercises for practice – competition C (see page 28): **Exercises up to year 10: C. 1266.** Solve the equation $5(2n+1)(2n+3)(2n+5) = \overline{ababab}$, where n denotes a positive integer, a and b stand for different digits, and $\overline{ababab}$ is a six-digit number. (Suggested by *L. Számadó,* Budapest) **C. 1267.** Given a convex angle in the plane and a point S in its interior, determine the line (e.g. by providing a method of construction) that forms a triangle with the vertex of the given angle such that the centroid of the triangle is the given point. **Exercises for everyone: C. 1268.** Prove that for all real numbers a and b, $a^4 + b^4 + 2 \geqslant 4ab$. **C. 1269.** What is the minimum number of sides of a regular polygon in which the radius of the circumscribed circle is at most 1.1 times the radius of the inscribed circle? **C. 1270.** There are a few lines and a few circles drawn on a sheet of paper. Every two of them intersect each other, but no three pass through the same point. What are the numbers of lines and of circles if the number of intersection points is 75? **Exercises upwards of year 11: C. 1271.** Consider circumscribed circle of a right-angled triangle. Draw the semicircle containing the triangle, and draw tangents to it, parallel to the legs. The parallels together with the line of the hypotenuse form a similar right-angled triangle. Find the angles of the triangle if the area of the outer triangle is 6 times the area of the inner triangle. (Based on the idea of *I. Légrádi,* Sopron) **C. 1272.** The sum of an arithmetic progression of 100 terms is 838 without the 68th term, and 849 without the 13th term. What are the values of the terms left out?

New exercises – competition B (see page 29): **B. 4678.** Ann and Bill take turns writing digits on a sheet of paper, left to right. Ann starts with a nonzero digit, and they continue until a 100-digit number is formed. Bill wins if the resulting number divided by 11 leaves a remainder of 5, otherwise Ann wins. Both players are good at mathematics. Who will win the game? (Suggested by *Gy. Károlyi,* Budajenő) (*4 points*) **B. 4679.** Prove that among any 39 consecutive natural numbers there is a number in which the sum of the digits is divisible by 11. (*3 points*) **B. 4680.** Find the integer solutions of the equation $3^n = 2n^2 + 1$. (*3 points*) **B. 4681.** What is the area of the pentagon in exercise **C. 1240**? (*4 points*) **B. 4682.** For a given positive integer k, find the largest positive integer m such that the following statement should be true: If at most m of $3k$ different points in the plane are collinear, then the points can be divided into k groups of three such that the points in each group form a triangle. (Suggested by *A. Frank,* Nagykovácsi) (*5 points*) **B. 4683.** Is there a plane that intersects a right pyramid of regular pentagonal base in a hexagon with *a*) line symmetry, *b*) central symmetry? (*6 points*) **B. 4684.** The diagonals of a quadrilateral $ABCD$ are perpendicular, they intersect at E. From point E, drop a perpendicular onto the line of each side. Consider the intersection of each perpendicular with the opposite side. Prove that the four points all lie on a circle centred at a point of the line segment connecting the midpoints of the diagonals. (Suggested by *Sz. Miklós,* Herceghalom) (*5 points*) **B. 4685.** Determine the smallest possible value of $x^2 + y^2 + z^4$, where x, y and z are positive numbers that add up to 34. (*5 points*) **B. 4686.**

A flea is jumping on the points of the plane with integer coordinates. Is it possible for the flea to follow a route touching every lattice point exactly once, in which each jump has an integer length, and each integer jump length occurs exactly once? (*6 points*)

New problems – competition A (see page 32): **A. 632.** Let $ABCD$ be a convex quadrilateral. In the triangle ABC let I and J be the incenter and the excenter opposite to vertex A, respectively. In the triangle ACD let K and L be the incenter and the excenter opposite to vertex A, respectively. Show that the lines IL and JK, and the bisector of the angle BCD are concurrent. (*Russian problem*) **A. 633.** Prove that if n is a sufficiently large positive integer then among any n distinct positive integers there are four whose least common multiple is greater than $n^{3.99}$. **A. 634.** Let $n \geqslant 2$ be a in integer and let $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ be an n times differentiable function. Show that the equation $f^{(n)}(x) = 0$ has at least $n-1$ distinct solutions.

Problems in Informatics

(see page 34)

I. 364. We are controlling a robot on an $n \times n$ grid. The robot can move in four directions along empty grid cells. The robot cannot pass through the four walls surrounding the board, and there are also some obstacles inside blocking its way. To control the robot, we use the letters F, L, J and B (= up, down, right, left): when pressing any of these keys, the robot starts moving in a straight line in the given direction until it touches an obstacle or a wall. The example shows a grid with $n = 10$ and with some obstacles ("X").

Your program `i364` should solve the following tasks.

1. Read the board description from the text file `palya.txt`. The first line of the file contains the value of $1 \leqslant n \leqslant 20$, the next line describes the number of obstacles, then each successive line contains the (column and row) coordinates (separated by a space) of the obstacles.
2. You should draw a map of the board by using X characters to denote the corners and inner obstacles, and the last digits of the column and row coordinates to denote the walls on each side.
3. Prompt the user to enter a column/row pair, then check if the corresponding grid cell is empty. The output should be a message such as "The cell (3,5) is empty."
4. Choose a free cell randomly and store its location for later use. A message such as "The starting cell of the robot is (6,4)." should be displayed.
5. Determine the coordinates of the cells that can be reached in one step (that is, in a straight line) by using the given starting cell. By using the previous example, the output would be "The cells (6,3), (6,7), (3,4) and (10,4) can be reached in one step."
6. Prompt the user to enter a character string encoding commands to the robot. Apart from the lowercase and uppercase characters denoting valid directions, all other characters should be ignored. The following data should be written in the text file `mozgas.txt`: the starting cell coordinates, and the coordinates of the cells the robot stops at when executing the movement commands. The robot should start from the cell chosen in Task 4 above. A sample user input can be "FFjLeBF" for example.
7. The previous user input should be corrected and simplified as follows: the modified version should contain only uppercase letters encoding valid directions, but directions that do not change the robot position on the given board should also be ignored. The modified string for the previous example thus becomes "The modified string of directions is FJLBF".

The table in the example contains a sample input ("Példa bemenet") and output ("Példa kimenet").

The source code (`i364.pas`, `i364.cpp`, ...) without the .exe or any other auxiliary files generated by the compiler but with a short documentation (`i364.txt`, `i364.pdf`, ...), also describing which developer environment to use for compiling the source, should be submitted in a compressed file `i364.zip`.

I. 365. There are five gates to the depot of a trading company. The company owns 10 trucks. Due to the length of the loading and unloading process, a truck can pass through a gate at most once in every hour. A truck can use any of the gates to enter or exit the depot, but they have to stop briefly there to electronically register their number plates ("Rendszám" in the example below), the time (1–100 in the "Óra" column) they pass through the gate, their direction (in or out, that is, "Be" or "Ki" in the "Irány" column), the gate number (1–5, "Kapu") and the truck weight $(0,0$–$100,0$ in tons in the "Súly" column—notice that here a comma is used instead of a decimal dot).

The file `i365.zip` (downloadable from our web page) contains the data recorded at the five gates (`kapu1.txt`, `kapu2.txt`, ..., `kapu5.txt`) and the data corresponding to the trucks (`teherautok.txt`, a tabulator-separated and UTF-8 encoded text file).

In your solution you

- *may want to use formulae, functions or links whenever possible;*
- *can perform auxiliary computations only to the right of column* E;
- *should not use macros or user-defined functions.*

1. In your spreadsheet application open the files containing the data recorded at the gates, then copy their content into a single table in a new sheet **Raktár**. Make sure that this new table has only one header (unnecessary headers should be deleted). You should save the table in the default application file format with name `i365`.
2. Place the truck data in a sheet **Teherautók** so that the first data piece is put into cell A1.
3. The data on the **Raktár** sheet should now be sorted according to the truck number plates, then, for the same truck, according to when they passed the gate.

Answers to the following questions should be displayed in the **Teherautók** sheet; a short text describing the actual cell content should precede the cells or should be put in the column headers.

4. For each truck you should determine how many tons of goods they transported in the depot and out of the depot, respectively, in the given period. The amount of transported goods is the difference between the full truck weight and empty truck weight measured at the gate.
5. Give the number plate of the truck that delivered the largest amount of goods into the depot.
6. Display for each truck whether they were in the depot or outside the depot before passing through Gate 1.
7. Read a time value in the given period and display the number of trucks in the depot at that time. Trucks entering or exiting the depot in that hour should not be taken into account.
8. Display, based on the given data, at least how many trucks broke the rules and did not stop at the gates to register their data.
9. Determine the peak hour with respect to truck traffic.

Your sheet (`i365.xlsx`, `i365.ods`,...) containing a short documentation (`i365.txt`, `i365.pdf`, ...) and also describing the name and version number of the spreadsheet application, should be submitted in a compressed file (`i365.zip`).

I. 366. The logo of our journal appears on our web page, on Facebook and in the printed volumes as well. We would like to recreate the web page logo by using animation. Your solution should use the same shapes as in the static version; the final result can be slightly different.

The animation should include some translation, rotation, scaling and changing colors. The overall effect should be elegant and decent. In connection with the SVG, you may visit the following pages:

- `http://svg.elte.hu/`.
- `http://tutorials.jenkov.com/svg/index.html`.

Your solution in HTML format (`i366.html`) and containing the animation in an "svg" tag should be submitted. The HTML document should contain any links that proved to be useful in your work.

S. 95. George has five identical decks of playing cards. Each card contains an integer, and no integer is found on two different cards in a deck. So if a particular number turns up in a deck, then that number can also be found in each of the other decks exactly once. George likes to keep his cards in a particular order: he ordered all five decks in the same way.

During the night, however, a wicked kobold visited George's house. The kobold chose a deck and drew some cards out of it, then put those cards back into the deck in some way (not necessarily to their original place, but into the same deck). The kobold then performed this operation on each of the remaining four decks. But if a particular integer was relocated in a deck, the corresponding card with that integer was not touched again in the other decks. After waking up in the morning, George was perplexed. Fortunately, you can help him restore the original card order in all decks.

Your program should read the value of N ($1 \leqslant N \leqslant 50\,000$) from the first line of the standard input, then the (space-separated) a_i integers from the following $5 \cdot N$ lines. The first N numbers describe the card order in the first deck after the kobold's operation, the second N numbers describe the new card order in the second deck, and so on. The first N lines of the standard output should contain the original, common deck order.

In the example, "Példa bemenet" is a sample input, and "Példa kimenet" is the corresponding output. To save some space in the example, the $5 \cdot N$ input lines and the N output lines are now printed in one line, with the / symbol denoting end-of-line characters.

Scoring and bounds. You can obtain 1 point for a brief and proper documentation clearly describing your solution. Nine further points can be obtained provided that your program solves any arbitrary valid input within 1 second of running time.

The source code (`s95.pas`, `s95.cpp`, ...) without the `.exe` or any other auxiliary files generated by the compiler but with a short documentation (`s95.txt`, `s95.pdf`, ...), also describing which developer environment to use for compiling the source, should be submitted in a compressed file `s95.zip`.

Problems in Physics

(see page 57)

M. 347. Fix a wooden skewer to the rim of the table. Gradually load its free end, or hang a spring balance to it. Measure the torque M needed to break the skewer, and the work W done by the load. Will the measured data change if the length ℓ of that part of the skewer which sticks out of the table is halved?

P. 4693. What is the temperature measured in Kelvins at which a *mercury-in-glass* thermometer reads the same value in Celsius and in Fahrenheit scale, and what is this same value? **P. 4694.** *a*) What is the amount of water in grams in the air of a room of volume 60 m^3 at a temperature of 25 $^\circ$C, if the relative humidity is 50%? *b*) To what per cent value does the relative humidity of the room increase if by the next morning the temperature of the room have decreased to 20 $^\circ$C? (The windows are closed and well sealed.) *c*) What is the relative humidity of the same sample of air at a temperature of 10 $^\circ$C? **P. 4695.** There is a 1 cm long operating electrical filament at a distance of 10 cm from a lens of optical power of 5 dioptres. The filament is perpendicular to the principal axis of the lens. A plane mirror, facing towards the lens, is placed to the other side of the lens, 20 cm from it. The mirror is also perpendicular to the principal axis of the lens. Where are the images of the filament and what is their size? **P. 4696.** Disc shaped tablets of diameter 8 mm and of height 4 mm are falling to the tabletop from a small height. Suppose that all directions have the same probability and the tablets do not bounce back from the tabletop. What percentage of the tablets arrive at the table in "rollable" position? **P. 4697.** In an article of a newspaper the following was written: "An electric racing car reaches a hundred in three seconds, its maximum speed is 220 km/h and its power rating is 268 horsepower." What may the mass of the car be? **P. 4698.** One end of a thread of length ℓ is attached to a heavy iron ball, whilst the other end of the thread a feather is fixed, and the ball is projected in the horizontal direction. The ball flies through the metal ring shown in the *figure.* How long does it take for the thread to pass the metal ring? *Data:* $\ell = 1.6$ m, $h = 1.25$ m, $d = 2$ m. **P. 4699.** Two thin sheets on the surface of a slope of angle of elevation of $\alpha = 30^\circ$ form a pair of rails. The distance between the sheets is $d = 1.6$ cm. A ball of diameter of 2 cm is placed to the rails and it rolls down without slipping. *a*) Calculate the acceleration of the centre of the ball. *b*) If the coefficient of friction is μ, at what angle of elevation will the ball slip on the rails? **P. 4700.** A uniform metal disc of height h and of cross section A ($h \ll \sqrt{A}$) is moving at a great acceleration parallel to the symmetry axis of the disc ($a \gg g$). How many electrons appear at that side of the disc which is opposite of the direction of the acceleration? **P. 4701.** Small balls of charge Q are attached to the points P_1 and P_2 of a ring, made of some insulating material, moving in a vertical plane, such that $\alpha = 60^\circ$. The ring is in a homogeneous magnetic field of induction B, the magnetic field lines are perpendicular to the plane of the ring. The ring is moved such that it rolls without skidding on the horizontal surface which is also made from some insulating material. The speed of the centre of the ring is v_0. *a*) What is the magnitude of the magnetic force exerted on each charge at the position shown in the *figure? b*) At which positions of the ring will the torque of the sum of the magnetic forces calculated about the centre of the ring be zero? Considering only these positions, in which case will the force exerted by the magnetic field on the ring be the greatest and what is this greatest force? *c*) Determine the intersection of the lines of action of the magnetic forces. **P. 4702.** Four concrete cubes, which are made of different material, and which all have the side of 10 cm are placed next to each other as shown in the *figure.* They are "illuminated" by a beam of ^{60}Co gamma-ray, from four different positions, (S1, S2, S3 and S4) one after the other. Opposite to the gamma source behind the cubes there are four detectors (D1, D2, D3 and D4). The first three measurements shows that the concrete cubes decrease the intensity of the radiation to 86.76, 71.94 and 84.25 percent of the original value, respectively. *a*) What is the intensity of the radiation measured by the fourth detector, expressed in the percentage value of the intensity of the original radiation? *b*) The "thickness of the halving-layer" of the first cube is 6 cm. What is this value for the other cubes (which is characteristic of the material of the cube)? **P. 4703.** The resistance of each pieces of wire between the points indicated by the black circles in the arrangement (the pattern continues infinitely towards the centre) shown in the *figure* is 1 Ω. What is the equivalent resistance between the points A and B?