KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

71. évfolyam 5. szám Budapest, 2021. május

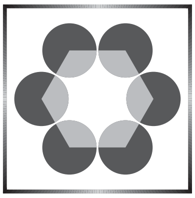
Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: OLÁH VERA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405. Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405. 1117–Budapest, Hungary telephone: +36 (1) 372-2850 or on the Postal address H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary, or on the Internet: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

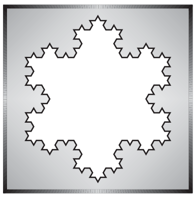


Kedves Olvasóink!

Köszönjük, hogy ebben a tanévben velünk tartottak. A következő tanévre szóló megrendelésről az információk várhatóan augusztus közepén kerülnek fel a honlapunkra.

Várjuk szíves megrendelésüket.

A Kiadó



Fraktálok és dimenziószámok

Kivonat: Cikkünkben körüljárjuk a rekurzió alapvető példáit, ennek kapcsán rátérünk a végtelenül önhasonló fraktálokra, ahol pedig felmerül a dimenziószám kérdése. Újabb alapozás után leírunk egy modellt, melynek segítségével értelmezhetjük egy alakzat dimenziószámát.

Akit érdekel, hogyan készültek a cikk ábrái, tekintse a dolgozat végén a források jegyzékét, illetve nézze meg az Informatika rovatban megjelenő Önhasonló fraktálok ábrázolása LaTeX-ben című cikket a 289. oldalon.

1. A rekurzió

Az önhasonló fraktálok megértéséhez hasznos, ha először tisztázzuk a rekurzió fogalmát, egy-két példával kiegészítve.

1.1. Sorozatok

Az iskolai anyag keretei közt a legtöbben először itt találkoznak a rekurzió fogalmával:

$$a_n = 2^n \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = 2 \quad \wedge \quad a_n = 2 \cdot a_{n-1}.$$

Ebben a sorozatban az első elem 2, minden ezt követő elem pedig az őt megelőző elem kétszerese, tehát kifejezhető az előző elemből, ez a tulajdonság a rekurzió alapja. Az egyszerűbb sorozatok hozzárendelési szabályait általában meglehetősen egyszerű ilyenné átalakítani, bár ez általában nem előnyös, hiszen ebből az alakból egy adott elemhez csak az őt megelőző összes elem ismeretével, lépésenként tudunk eljutni. Viszont vannak olyan sorozatok, amelyeknek központi tulajdonságuk, hogy rekurzívan adjuk meg elemeiket. Talán a legismertebb ezek közül a Fibonacci-sorozat:

$$F_1 = 1 \quad \wedge \quad F_2 = 1 \quad \wedge \quad F_n = F_{n-2} + F_{n-1}.$$

A Fibonacci-sorozatnak is létezik egy, a kívántnál bonyolultabb közvetlen hozzárendelési szabálya, amelyhez nem kell végigszámolnunk az összes elemet. Ennek ellenére van benne valami megragadó, hogy minden elem „függ” az őt megelőzőektől. Persze tetszőlegesen sok ilyen rekurzív sorozat alkotható, a Fibonacci-sorozat egyszerűsége és érthetősége folytán lett ennek a kategóriának a legismertebb tagja.

1.2. Máshol az életben

Egyszer volt, hol nem volt egy icipici házikó,
Icipici házikóban icipici ágyikó.
Ottan élt, éldegélt egy icipici lencsi lány,
Icipici anyukával túl az Óperencián.

Icipici lencsi lányka lencsi babát ringatott,
Anyuka is ezt csinálta, s boldogságban éltek ott.
Amikor este lett, az icipici lányka félt,
S icipici anyukája mondott egy mesét, HOGY

(Közismert gyermekdal)

Ahogyan az *Icipici kis mesében* is láthatjuk, a történet tartalmazza önmagának tökéletes másolatát, végtelenül sokszor. Így akár azt is mondhatnánk rá, hogy végtelenül önhasonló.

Hasonló a helyzet akkor is, ha egy kamerával felveszünk egy TV-t, úgy, hogy közben ugyanerre a TV-re folyamatosan küldjük a kamera által felvetteket. Ennek a jelenségnek egy modernebb verziója látható az első belső borítón.

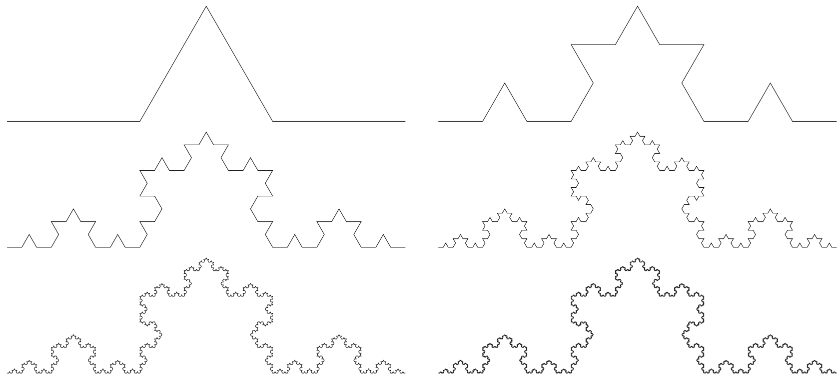
1.3. Végtelenül önhasonló fraktálok

De mi lenne, ha számok, történetek vagy képek helyett geometriai alakzatokat (elsősorban szakaszokat) „ágyaznánk önmagukba”? Nos, az ilyen végtelenül önhasonló részekből álló alakzatokat nevezzük végtelenül önhasonló fraktáloknak. A fraktál szó a latin „fractus” szóból ered, jelentése törött, töredezett. Ez az elnevezés Benoît Mandelbrot lengyel származású matematikustól származik, aki 1975-ben publikálta első könyvét (*Les objets fractals, form, hasard et dimension*) ezekről a végtelenül komplex geometriai alakzatokról. Nézzük is meg, hogyan épülnek fel.

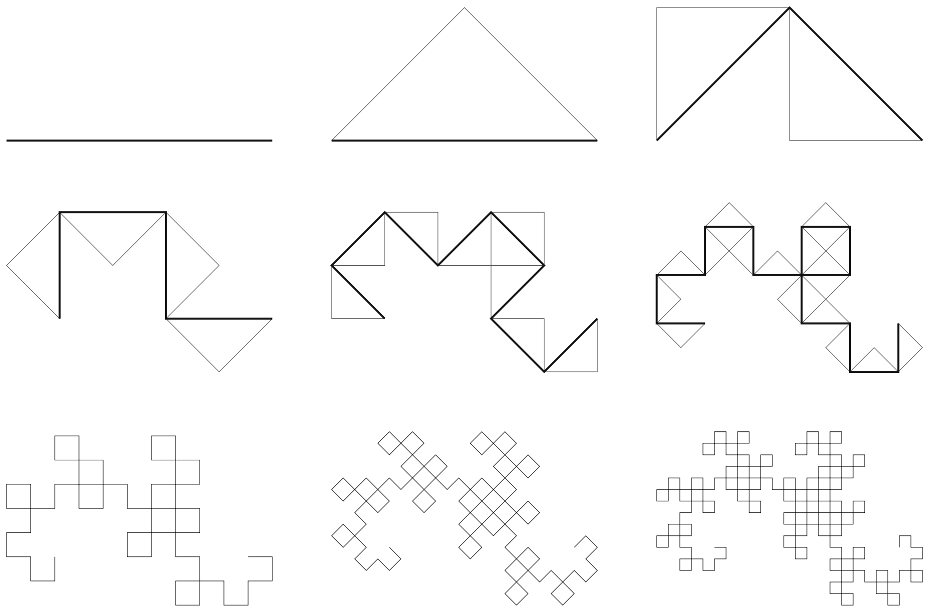
A következő három példa mindegyikében ezeket lépéseket ismételgetjük: lesz egy-egy egyszerű szabályunk, hogy minden, az ábrán található szakaszt *mivel* fogunk helyettesíteni a következő lépésben. Ezek a *valamik* kisebb szakaszokból állnak majd, amik ezután még több kis *valamivé* fognak változni. Nézzük is a példákat.

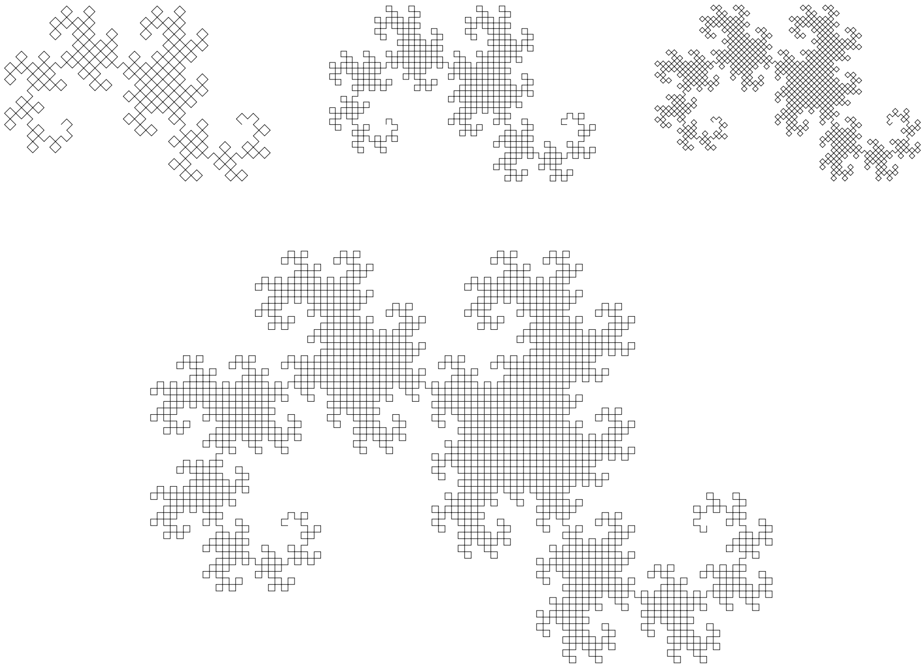
(A következőkben a kifejtett szabályok alapján generált ábrák láthatók, ezekkel a kedves olvasó már találkozhatott a KöMaL informatika rovatában is [1], [2]).

1.3.1. Koch-görbe. A Koch-görbe a legegyszerűbb végtelenül önhasonló fraktálok közé tartozik. A rekurzív szabály a következő: minden szakasz középső harmadát az afölé emelhető szabályos háromszög másik két oldalával helyettesíti. Figyeljük meg, hogy minden lépés harmadolja az *ábrán* látható szakaszok hosszát – ez a későbbiekben még fontos lesz. Emellett jelentős az is, hogy minden lépés $\frac{4}{3}$-szorozza a görbe hosszát, a végtelen sok lépéssel kapott tökéletes Koch-görbe tehát végtelenül hosszú.

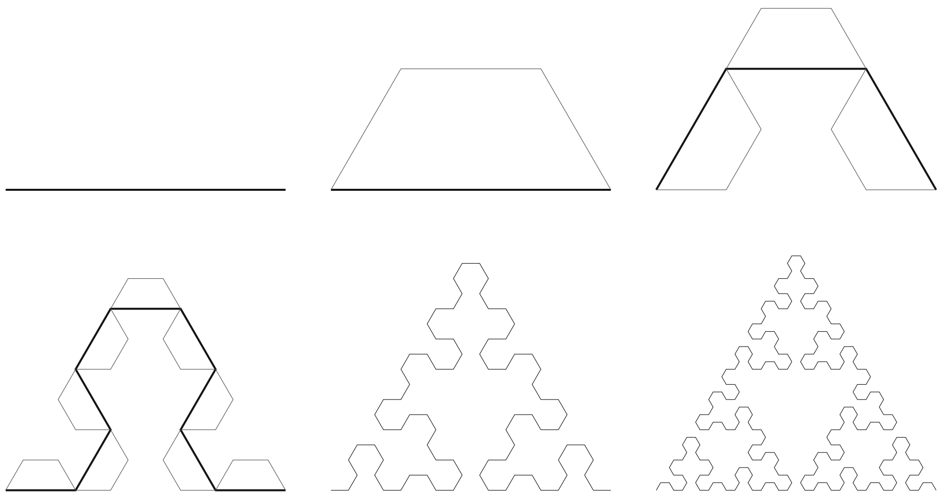


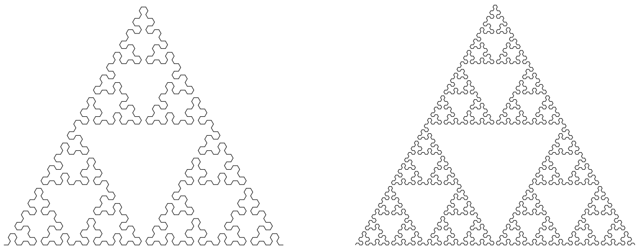
1.3.2. Sárkány-görbe. Ez már egy leheletnyivel bonyolultabb. Itt minden szakaszt a fölé emelhető egyenlő szárú, derékszögű háromszög másik két oldalával helyettesítünk, de úgy, hogy egyszer a görbe egyik oldalára, másszor a másik oldalára essen a harmadik csúcs. (Ez egy csöppet bonyolult leírva, így az első pár iterációnál az újabbikat vastagítással jelöltük, az előző iterációt feketével meghagyva. Reméljük, ez segíti a megértést.) Itt a szakaszok hossza a Pitagorasz-tételnek megfelelően $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$-szeresére változik. Érdekesség, hogy egy másik hozzárendelési szabállyal is ugyanehhez a görbéhez jutunk: ha a görbét a jobb oldali vége körül pozitív irányba elforgatjuk, és hozzátűzzük az eredetihez. Ebben az esetben természetesen a kapott alakzat egyre növekszik, hiszen a szakaszok hossza nem változik, viszont a számuk kétszereződik – ha ezzel a szabállyal is állandó „méretű" görbét szeretnénk kapni, minden lépés után $\frac{1}{\sqrt{2}}$-vel kell megszorozni az *ábra* távolságegységét.



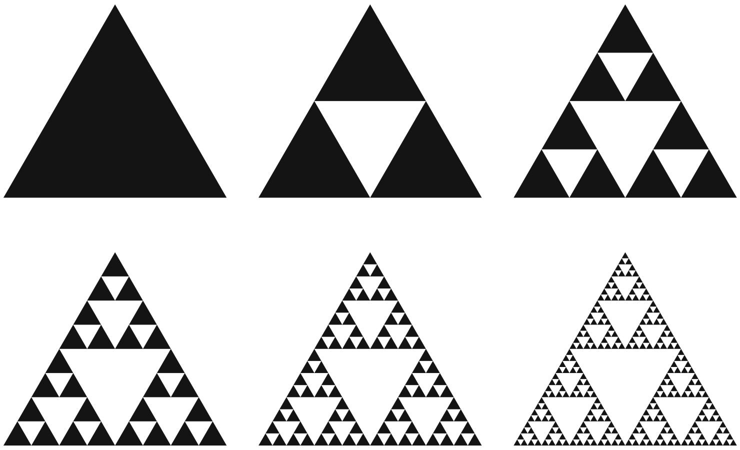


1.3.3. Sierpiński-háromszög. Itt minden szakaszt egy szabályos hatszög felével helyettesítünk, a Sárkány-görbéhez hasonlóan itt is váltogatjuk, hogy a vonal melyik oldalára duzzadjon ki – ezen kívül azt is, hogy az adott lépésben melyik oldalon kezdünk.





De várjunk csak. Ezt a mintát ismerjük, de általában nem így szoktunk eljutni hozzá.



Itt minden fekete háromszögnek fehérre festjük a középvonalháromszögét. Viszont az első esetben hosszúságokkal, itt pedig területekkel dolgoztunk, mégis ugyanahhoz az ábrához jutottunk. Ha utánaszámolunk, az első esetben a vonal hossza a végtelenbe tart, mert minden lépéssel konstans $\frac{3}{2}$-szeresére nő a hossza, a második esetben a terület viszont nullához, mert minden lépéssel konstans $\frac{3}{4}$-ére csökken. Ez az egész sok kérdést felvet, de a legégetőbb talán az, hogy: akkor hány dimenziós is a Sierpiński-háromszög?

2. A dimenzió fogalma

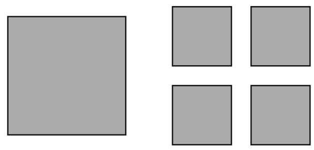
2.1. Hogyan értelmezzük a való életben?

A továbbiakban érdemes bevezetnünk egy fogalmat, ami általánosítja a hossz, terület, térfogat fogalmát minden dimenziószámra. Hívjuk tömegnek. Ez gyakorlatilag annyit mutat meg, hogy az adott alakzat megépítése esetén mennyi anyagot használnánk fel. A különböző dimenziószámú esetekben az alakzat „méretének" változtatásával különböző összefüggéseket fogunk kapni a „méret" és a tömeg közt.

Képzeljük el, hogy egy drótdarabot felosztunk feleakkora oldalhosszú egységekre. Egy ideális, egydimenziós drót esetén két tökéletes, kicsinyített mást kapunk, ezeknek tömege tehát feleakkora lesz, mint az eredeti drótó.

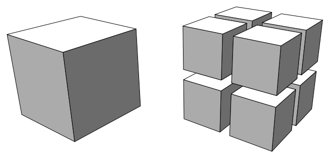
$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

Ha egy négyzet alakú fémlapot szeretnénk feleakkora olalhosszú kis négyzetekre felosztani, négy darabot kapnánk, a tömeg pedig értelemszerűen a negyedére csökkenne.



$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

A szemléletesség kedvéért vizsgáljuk meg a fémkocka esetét is. A feleakkora élhosszúságú kockákból nyolcra lesz szükség, ezeknek tömege így az eredeti tömegének nyolcada lesz.



$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Talán úgy nyer a legegyszerűbben értelmet a dimenziószám fogalma, ha rákérdezünk, hogy a vizsgált dolgot hány olyan kis darabra tudjuk szétosztani, ami önmagának egy bizonyos hosszaránnyal kicsinyített mása. Észrevehetjük, hogy fennáll egy szép egyenlőség:

$$K^D = N,$$

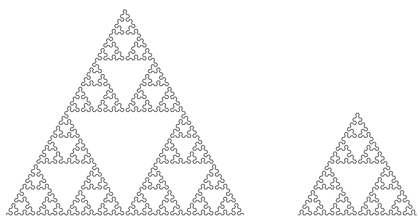
ahol N a kis alakzatok és az eredeti alakzat közötti tömegarány, K a kis alakzatok és az eredeti alakzat közötti hosszarány, D pedig a dimenzió száma. Ha pedig a dimenziószámot szeretnénk kifejezni, a logaritmus pontosan az ilyen jellegű kérdések megválaszolására lett kitalálva:

$$D = \log_K N.$$

2.2. A végtelenül önhasonló fraktálok dimenziója

Értelemszerűen ugyanezt a képletet a végtelenül önhasonló fraktáloknál is be lehet vetni, hiszen egyik alapvető tulajdonságuk, hogy önmaguk kisebb másolataiból állnak.

2.2.1. Sierpiński-háromszög

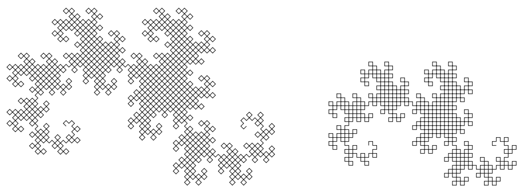


$$D = \log_2 3 \approx 1{,}585$$

Az egészen magától értetődő: a Sierpiński-háromszög önmagának három olyan másolatából áll, amelynek oldalhossza fele az eredeti oldalhossznak. Így akármilyen hihetetlen, az alakzat dimenziószáma nem egy egész szám, sőt irracionális. Ez megválaszolja a korábban felvetett kérdésünket: a Sierpiński-háromszögnek azért nem volt kielégítő tulajdonsága sem a hossz, sem a terület, mert abban a dimenziószámban, amiben létezik, ezek a tulajdonságok nem vonhatók párhuzamba a tömeggel.

A hossz csak egydimenziós, a terület csak kétdimenziós alakzatoknál működőképes helyettesítése az általánosabb tömeg koncepciójának.

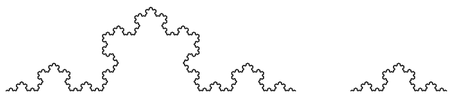
2.2.2. Sárkány-görbe



$D = \log_{\sqrt{2}} = 2$

Az előző részben leírtaknak megfelelően tudjuk, hogy ha két sárkánygörbét egy derékszöggel elforgatva a végeiknél összeillesztünk, egy $\sqrt{2}$-ször akkora „nagyságú” sárkánygörbét kapunk. Ha ezt ismerve kiszámoljuk a Sárkány-görbe dimenziószámát, kettőt kapunk. Ebbe kicsit hunyorogva bele lehet látni az értelmet: az alakzat belsejében tökéletes négyzetháló alakul ki, erről pedig intuitívan jön, hogy kétdimenziós.

2.2.3. Koch-görbe



$D = \log_3 4 \approx 1{,}262$

Itt a Sierpiński-háromszöghöz hasonló módon indulunk el: négy kis Koch-görbéből egyetlen, háromszoros nagyságú Koch-görbét lehet építeni. Még egy irracionális dimenziószámú alakzat.

2.3. Nem végtelenül önhasonló fraktálok dimenziója

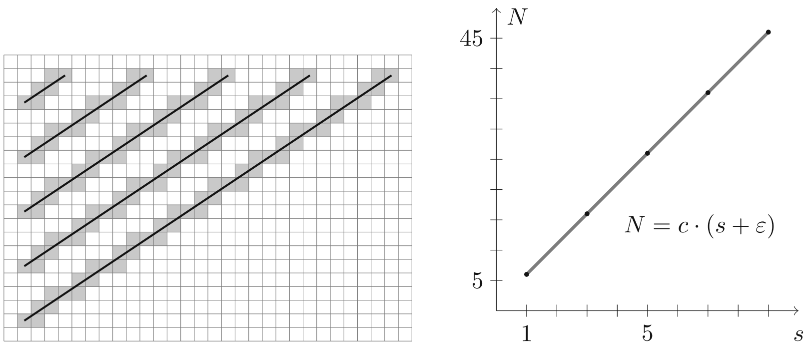
Felvetődik a kérdés, hogy milyen fraktál létezik még, ha a korábbi példáinkat a „végtelenül önhasonló” jelző előzte meg. Ami azt illeti, léteznek nem végtelenül önhasonló fraktálok is. Sőt, tökéletlen világunkban ezek gyakorlatilag mindenhol ott vannak. Egy klasszikus példa erre Norvégia partvonalának hossza, ennek vizsgálata. Ugyanis minél közelebbről figyeljük meg, annál több részletet vélünk felfedezni, annál hosszabbnak tűnik a partvonal. Bizonyos értelemben a vizsgálat pontosításával a végtelenbe tart (az, hogy ennek egy szinten túl fizikailag nincs értelme, ne legyen akadály: a matematikai kiteljesedés érdekében kezeljük a partvonalat tökéletesen, végtelenül részletesnek). Ez a tulajdonság emlékeztethet minket például a Sierpiński-háromszög végtelen kerületére. Ha viszont eljutottunk idáig, egyszerűen nem tudjuk nem feltenni magunknak a kérdést: *Hány dimenziós Norvégia partvonala?*

3. Egy másik modell a dimenziószámra

Mivel a nem végtelenül önhasonló fraktálok nem építhetőek fel önmaguk másolataiból – így Norvégia partvonala sem –, egy másik modellt kell alkalmaznunk.

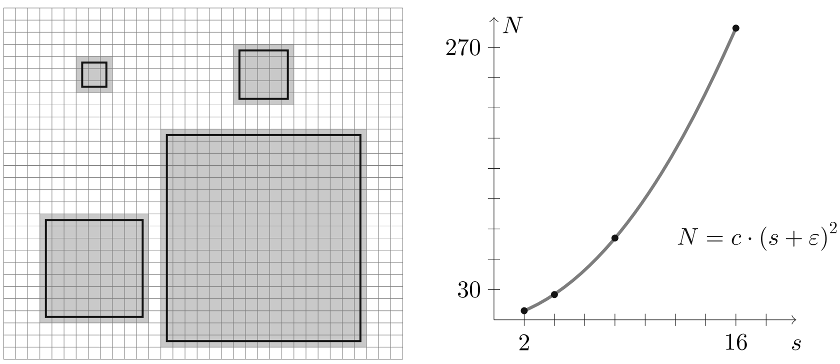
3.1. Egész dimenziószámú alakzatok dimenziója

Vegyünk fel egy egység-négyzetrácsot. Ha ebben felveszünk egy (tetszőleges) szakaszt, annak valahány egységnégyzettel lesznek közös pontjai, számoljuk meg ezeket. Változtassuk meg a szakasz hosszát, számoljuk meg, hogy így hány egységnégyzettel van közös pontja és jegyezzük fel a hossz-egységnégyzetszám számpárt. Ismételjük meg ezt a folyamatot tetszőlegesen sokszor, majd eredményeinket ábrázoljuk grafikonon.

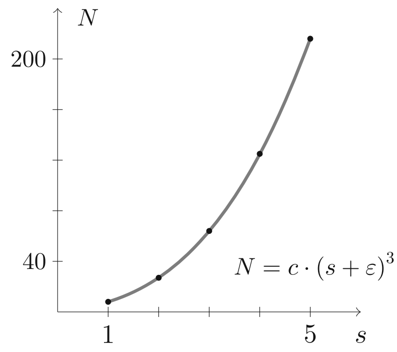


N az „érintett” egységnégyzetek száma, c egy konstans együttható, s pedig a szakasz hossza. Az ε egy olyan konstans, ami a viszonylag kicsi mért alakzatok miatt lép fel, nagyobb skálán teljesen elhanyagolható lenne, de a korrektség kedvéért – hogy a képlet pontos legyen – feltüntettük.

Ha ugyanezt egy négyzettel végezzük el (egyszerű hossz helyett az oldalhosszt vizsgálva), a következőre jutunk:



Sajnos papíralapon nem szemléltethető megfelelően, de egységkockahálóval, kockákkal és élhosszal dolgozva a következő összefüggés jön ki:



Levonhatjuk tehát azt a következtetést, hogy a modellünk a következő összefüggés szerint adja meg az alakzat dimenziószámát:

$$N = c \cdot s^D.$$

A logaritmus alapvető azonosságai alapján:

$$\ln N = \ln (c \cdot s^D),$$
$$\ln N = \ln c + D \cdot \ln s.$$

(Itt c-hez hasonlóan $\ln c$ egy konstans, ezért a jövőben legyen $c' := \ln c$.) Tehát ha a mért adatokat logaritmikus beosztású skálán ábrázoljuk, egy lineáris összefüggést kapunk, ahol D az egyenes meredeksége.

Vegyük észre, hogy a kapott összefüggések midegyikében a kapott meredekség egyenlő a vizsgált alakzatok dimenziószámával (ahogy ε a nullához tart). Ez egyelőre egy jó jel, nézzük meg, hogy a végtelenül önhasonló fraktálokra is alkalmazható-e ez a modell.

3.2. Végtelenül önhasonló fraktálok

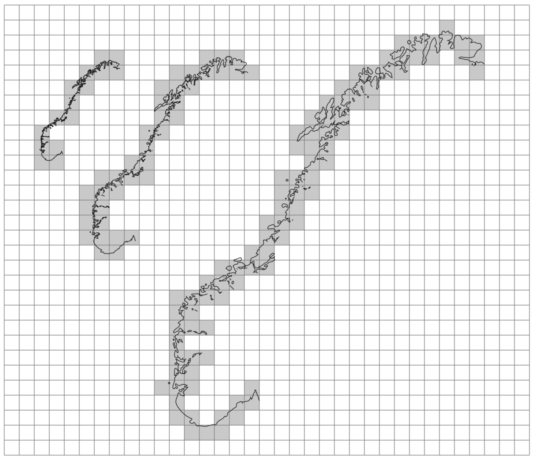
(A következőkben ábrázolt esetek túl kicsik ahhoz, hogy ilyen tiszta összefüggés szülessen belőlük, de a szemléletesség érdekében inkább ezt választottuk. Ahhoz, hogy korrektebb és pontosabb képlethez – és így dimenziószámhoz – jussunk, nagyságrendekkel nagyobbra kellene növelnünk a vizsgált alakzatokat.)

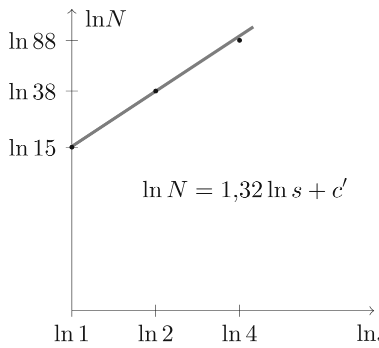
A Sierpiński-háromszöget megvizsgálva az első belső borító középső ábráján látható esetet, hasonlóképpen a Koch-görbét vizsgálva ugyanitt az alul levő ábrán látható esetet kapjuk.

Amint látjuk, a modellünk végtelenül önhasonló fraktálokra is kiválóan működik. A szakirodalom egyébként ezt a módszert angolosan *box counting* módszernek hívja.

3.3. Nem végtelenül önhasonló fraktálok

Ezzel tehát leírtunk egy olyan modellt, ami nem csak ugyanazokat a dimenziószámokat adja eredményül, mint az első, intuitívabb modellünk, hanem bármelyik tetszőleges alakzat dimenziószámát is meg tudja adni. Ennek ismeretében már minden eszközünk megvan, hogy választ kapjunk arra, mi Norvégia partvonalának dimenziószáma. A következő részben a saját mérésünk látható, amit a leírt módszerrel hajtottunk végre: különböző méreteknél megszámoltuk az érintett dobozokat.





A mérésünk szerint tehát Norvégia partvonala egy nagyjából 1,32-dimenziós alakzat. Sajnos ez nem teljesen stimmel, nagyobb skálákon, mások által elvégzett mérések alapján a dimenziószám 1,522 körül van. Ez nem hatalmas gond, hiszen tudtuk, hogy ilyen kis skálán nem várhatunk pontos eredményt, a célunk inkább a módszer szemléltetése volt.

Ez a témakör természetesen még sokkal szélesebb, mint amit ebben a cikkben feldolgoztunk. Nem beszélhetünk úgy a fraktálokról, hogy ne említenénk meg például a Mandelbrot-halmazt. Azonban ez a téma annyira komplex és sokoldalú, hogy ismertetése önmagában is megérdemelne egy hasonló hosszúságú cikket. Ha a kedves olvasónak felkeltette az érdeklődését a cikk, különbözőbbnél különbözőbb irányokba elágazó cikkeket és feladatokat találhat a KöMaL korábbi számaiban. Van köztük fizikafeladat, amely kihasználja a végtelen önhasonlóságot [3], matematikai cikk a lazán kapcsolódó káoszelméletről [4], a fraktálok fényelhajlításának bemutatása [5], és a Mandelbrot-halmaz változatosságának kriptográfiai hasznosításáról szóló cikk is [6].

Források

A cikkben látható ábrák saját készítésűek, a rekurzív képernyőkép kivételével az összes a LaTeX TikZ csomagjával készült (néhány helyen az alacsonyabb szintű, a TikZ alapját alkotó PGF nyelvet használva). A fraktálokat Lindenmayer-rendszerekkel programoztuk.

- PGF:
  `https://mirror.szerverem.hu/ctan/graphics/pgf/base/doc/pgfmanual.pdf`
- TikZ:
  `https://www.bu.edu/math/files/2013/08/tikzpgfmanual.pdf`

- Lindenmayer-rendszerek:
`https://texample.net/tikz/examples/lindenmayer-systems/`

A cikk alapvető gondolatainak oroszlánrésze a következő két videóból származik:

- Vihart – Doodling in Math Class: DRAGONS:
`https://youtu.be/EdyociU35u8`
- 3Blue1Brown – Fractals are typically not self-similar:
`https://youtu.be/gB9n2gHsHN4`

Hivatkozások

[1] **I. 188.** feladat
`https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=I188&l=hu`

[2] **S. 41.** feladat
`https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=S41&l=hu`

[3] Fehér Szilveszter, Kovács Péter Tamás – *4789. fizika feladat*
`http://db.komal.hu/KomalHU/felhivatkoz.phtml?id=54239`

[4] Simonovits András – *Egyensúly, ciklus és káosz dinamikus rendszerekben*
`http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=201845`

[5] *Fényelhajlás fraktálon*
`http://komal.elte.hu/cikkek/szines/fenyelhajlas/feny.h.shtml`

[6] Genda Attila – *Titkosítás fraktálok segítségével*
`http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=201755`

Szép Emma, Varga Pál Patrik
Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimnázium végzős diákjai

Megoldásvázlatok a 2021/4. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A(-1;4)$, $B(7;-2)$ és $C(5;8)$.*

a) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a C ponton és a háromszöget két egyenlő területű részre osztja. (*4 pont*)

b) Számítsuk ki, hogy az y tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz. (*6 pont*)

Megoldás. a) A keresett egyenes a C ponton átmenő súlyvonal egyenese. Az AB szakasz felezőpontja: $F(3;1)$. A súlyvonal egyenesének (egy) normálvektora: $\mathbf{n}(7;-2)$, egyenlete $7x-2y=19$.

b) I. megoldás. Legyen a keresett pont $P(0;y)$. Ekkor $\overrightarrow{PA}(-1;4-y)$ és $\overrightarrow{PB}(7;-2-y)$. A $\overrightarrow{PA}$ és $\overrightarrow{PB}$ vektorok pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha skaláris szorzatuk 0.

$$(-1)\cdot 7+(4-y)\cdot(-2-y)=0,$$

$$y^2-2y-15=0,$$

$$y_1=5 \quad \text{és} \quad y_2=-3.$$

Tehát $P_1(0;5)$ és $P_2(0;-3)$.

II. megoldás. (Felhasználva az *a*) feladatban kiszámított F pont koordinátáit vagy az ebben a feladatban kiszámított szakasz felezőpontjának koordinátáit.)

Mivel az AB szakasz Thalész-köre azon pontok halmaza, amelyekből az AB szakasz derékszögben látszik, így ennek a körnek és az y tengelynek a metszéspontjai a keresett pontok.

A kör (középpontja: $F(3;1)$,) sugara:

$$r=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(7+1)^2+\big((-2)-4\big)^2}}{2}=5.$$

A kör egyenlete: $(x-3)^2+(y-1)^2=25$. A kör y tengellyel való metszéspontját az $x=0$ helyettesítéssel kapjuk, így $y^2-2y-15=0$, $y_1=5$ és $y_2=-3$.

Tehát $P_1(0;5)$ és $P_2(0;-3)$.

2. *a*) *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:*

$$|x-2|^{2x^2-11x+14}=1. \qquad (6\ pont)$$

b) *Oldjuk meg az* 1*-nél nagyobb egész számok halmazán az alábbi egyenletet:*

$$7\cdot\binom{n}{2}=2\cdot\binom{n+2}{3}. \qquad (7\ pont)$$

Megoldás. *a*) Egy nemnegatív alapú hatvány értéke csak akkor lehet 1, ha alapja 1 vagy kitevője 0 és alapja nem 0.

Ha $x\geqslant 2$, akkor $x-2=1$, ahonnan $x=3$.

Ha $x<2$, akkor $-x+2=1$, ahonnan $x=1$.

Ha $2x^2-11x+14=0$, akkor $x_1=\frac{7}{2}$ és $x_2=2$.

Mivel 0 nem lehet a hatvány alapja, ezért a 2 nem megoldás (a többi érték viszont igen, mert megfelelnek a feltételeknek). Ekvivalens átalakításokat végeztünk, így az 1, a 3 és a $\frac{7}{2}$ gyöke az eredeti egyenletnek.

Megjegyzés. Ha a megoldó mind a négy gyököt megoldásnak tekinti, akkor megoldására legfeljebb 5 pontot kapjon.

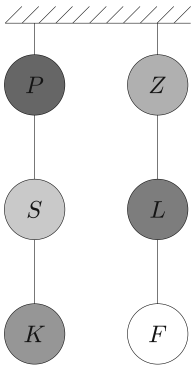
b)
$$7\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1}=2\cdot\frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{3\cdot 2\cdot 1}.$$

(Mivel $n>1$, így mindkét oldalt n-nel osztva:)

$$7\cdot\frac{n-1}{2}=\frac{(n+2)\cdot(n+1)}{3}.$$

Nullára rendezve: $2n^2-15n+25=0$, $n_1=5$ és $n_2=\frac{5}{2}$. Az $\frac{5}{2}$ nem egész szám, így az egyetlen megoldás csak az 5 lehet.

Ellenőrzés: $7\cdot 10=2\cdot 35=70$ valóban.



3. *Egy céllövöldében az ábrán látható módon felfüggesztettek hat különböző színű lufit. Azt a szabályt vezették be, hogy csak arra a lufira szabad lőni, amelyik a két felfüggesztés bármelyikében éppen legalul van.*

a) Hány különböző sorrendben lőhető le a fenti szabály szerint a hat lufi? *(5 pont)*

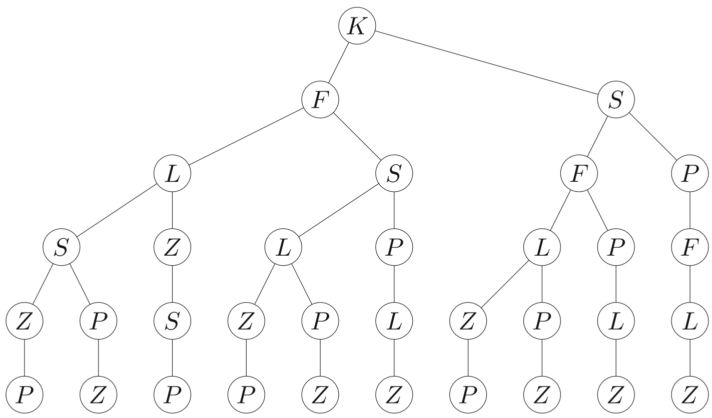
Ebben a céllövöldében egy nyolcfős társaság szórakozott, ahol az első öt személy 3, 1, 5, 2 *és* 3 *lufit talált el.*

b) Hány lufit talált el a maradék három személy külön-külön, ha a társaság találatainak átlaga 3, *mediánja* 2,5 *lett?* *(5 pont)*

Nagyszámú megfigyelés alapján megállapították, hogy 0,4 *annak a valószínűsége, hogy egy céllövő elsőre eltalálja a kiszemelt lufit.*

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a céllövő 6 *lövésből legalább* 5 *lufit eltalál?* *(4 pont)*

Megoldás. *a) I. megoldás.* Jelölje B, ha a bal oldali felfüggesztés legalsó lufiját, J pedig, ha a jobb oldalit lövik le. Mivel mindegyik felfüggesztésen 3 lufi van, ezért háromszor lövünk balra és háromszor jobbra, így egy adott sorrendet 3 db B és 3 db J betű valamilyen jelsorozatával írhatunk le. Ezt tekinthetjük 6 elem ismétléses permutációjának, amelyben 3-3 elem megegyezik, így a keresett sorrendek száma: $\frac{6!}{3!\cdot 3!}=20$.



II. megoldás. Ha az első találat a kék lufi, akkor a lehetséges folytatást az *ábrán* követhetjük végig.

Ebben az esetben 10-féle lövési sorrend alakulhat ki.

Ha az első találat a fehér lufi, akkor (a K és F, az S és L, illetve a P és Z betűk cseréje miatt) ugyancsak 10-féle lövési sorrend keletkezik.

Összesen tehát $(10 + 10 =)$20-féle különböző lövési sorrend lehetséges.

Megjegyzés. Ha a megoldó rendezetten felsorolja az összes lehetőséget, és ez alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.

b) I. megoldás. Jelölje az ismeretlen találatokat x, y és z (ahol $x \leqslant y \leqslant z \leqslant 6$ és $x, y, z \in \mathbb{N}$).

Ha a találatok átlaga 3, akkor $x + y + z = 10$.

Ha az első öt találat (nem csökkenő sorrendben) 1, 2, 3, 3, 5, akkor a következő esetek lehetségesek:

x	0	0	1	1	2	2	2	3
y	4	5	3	4	2	3	4	3
z	6	5	6	5	6	5	4	4

A mediánra vonatkozó feltétel miatt nem lehetséges a 0, 4, 6, a 0, 5, 5, az 1, 3, 6, az 1, 4, 5, a 2, 3, 5, a 2, 4, 4 és a 3, 3, 4 eset (ekkor a medián 3).

Tehát a maradék három személy egyike 6, a másik kettő pedig 2-2 találatot ért el.

II. megoldás. A találatokat nem csökkenő sorrendbe rendezve a medián miatt a 4. és 5. találat csak az 1 és 4 vagy a 2 és 3 lehet. 1 és 4 nem lehet, mert ekkor nem lenne 3-as találat.

Innentől mutatunk két megoldási módot.

1. mód: Ha a 4. és 5. találat 2 és 3, akkor az 1. találat lehet az 1, a 6. pedig a 3, így a 7. vagy 8. találat lehet 5. A 2. és 3. találat legfeljebb 2. Ha a 8. találat lenne az 5, akkor a 7. találat 3, 4 vagy 5 lehet. De ekkor a 2. és 3. találatok összege rendre csak 7, 6 vagy 5 lehetne, ami 1 és 2 találatokból nem lehetséges.

Tehát a 8. találat csak 6, a 2. és 3. találat csak 2 lehet, így a maradék három személy egyike 6, a másik kettő pedig 2-2 találatot ért el.

2. mód: A hiányzó 3 szám összege 10, hiszen az átlag miatt a 8 szám összege 24, a megadottaké pedig 14. Mivel két összeadandó kisebb 2,5-nél, egy pedig nagyobb, és valamennyi 0 és 6 közötti egész, ezért csak a $2 + 2 + 6 = 10$ lehetőség marad. Tehát a maradék három személy egyike 6, a másik kettő pedig 2-2 találatot ért el.

Megjegyzés. Ha a megoldó indoklás nélkül megadja a helyes megoldást, akkor 2 pontot kapjon.

c) Annak a valószínűsége, hogy a céllövő elsőre nem találja el a kiszemelt lufit 0,6. Annak a valószínűsége, hogy 5 lufit talál el:

$$\binom{6}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^1 \approx 0{,}037.$$

Annak a valószínűsége, hogy 6 lufit talál el: $0{,}4^6 \approx 0{,}004$. A keresett valószínűség ezek összege: $(0{,}037 + 0{,}004 \approx)0{,}041$.

4. *Egy mértani sorozat első három tagja ebben a sorrendben* $\sin\alpha$, $\sin 2\alpha$ *és* $2\cos^2\alpha$. *Ennek a sorozatnak nem tagja a nulla és hányadosa negatív szám.*

a) Számítsuk ki a sorozat második tagjának pontos értékét. (*6 pont*)

Az $\{a_n\}$ *sorozatot a következőképpen adtuk meg:*

$$a_n = \begin{cases} 3n-2, & \textit{ha } n \textit{ páros,} \\ 0{,}1\cdot(-1{,}1)^n, & \textit{ha } n \textit{ páratlan.} \end{cases}$$

b) Számítsuk ki a sorozat első 101 *tagjának összegét. Az eredményt egész számra kerekítve adjuk meg.* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* A mértani sorozat definíciója szerint:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha} \quad (\text{ahol } \sin\alpha \neq 0 \text{ és } \cos\alpha \neq 0).$$

Mivel $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, ezért az egyenlet bal oldalát $\sin\alpha$-val, jobb oldalát $2\cos\alpha$-val egyszerűsítve: $2\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Mivel $\cos\alpha \neq 0$, így a $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ egyenletet kapjuk.

Tudjuk, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ezért

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{vagy} \quad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mivel a hányados negatív szám, ezért a sorozat második tagja csak $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ lehet.

II. megoldás. A mértani sorozat definíciója szerint:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha} \quad (\text{ahol } \sin\alpha \neq 0 \text{ és } \cos\alpha \neq 0).$$

Mivel $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, ezért az egyenlet bal oldalát $\sin\alpha$-val, jobb oldalát $2\cos\alpha$-val egyszerűsítve, majd a nevezővel szorozva:

$$\sin 2\alpha = \cos\alpha.$$

Mivel tetszőleges α szög esetén

$$\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

a következő egyenletet kapjuk:

$$\sin 2\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Az előbbi egyenletet megoldva:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, \quad \text{vagy} \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + 2l\pi, \quad \text{ahol } k, l \in \mathbb{Z}.$$

Mivel a harmadik tag pozitív és a hányados negatív, ezért az első tag csak $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ lehet. Mivel a hányados negatív szám, ezért a sorozat második tagja csak $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ lehet.

b) Mivel $a_{2k} = 6k - 2$ és $a_{2k+2} = 6k + 4$, így $a_{2k+2} - a_{2k} = 6$, ezért a páros sorszámú tagok (minden $k \in \mathbb{Z}^+$ esetén) számtani sorozatot alkotnak. Ennek a számtani sorozatnak az első tagja 4, differenciája 6.

Mivel $a_{2k+1} = 0{,}1 \cdot (-1{,}1)^{2k+1}$ és $a_{2k-1} = 0{,}1 \cdot (-1{,}1)^{2k-1}$, így

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = (-1{,}1)^2 = 1{,}21,$$

ezért a páratlan sorszámú tagok (minden $k \in \mathbb{Z}^+$ esetén) mértani sorozatot alkotnak.

Ennek a mértani sorozatnak az első tagja $-0{,}11$, hányadosa 1,21. Az első 101 tag között 50 tagja van a számtani sorozatnak és 51 tagja a mértani sorozatnak.

A számtani sorozat 50 tagjának összege:

$$S_{50} = \frac{8 + 49 \cdot 6}{2} \cdot 50 = 7550.$$

A mértani sorozat 51 tagjának összege:

$$S_{51} = (-0{,}11) \cdot \frac{1{,}21^{51} - 1}{1{,}21 - 1} \approx -8733{,}76.$$

(Mivel $S_{50} + S_{51} \approx -1183{,}76$ így) a keresett összeg egészre kerekítve -1184.

II. rész

5. *Az a és b pozitív számok számtani közepe 4, mértani (geometriai) közepe 2.*

a) Számítsuk ki a két szám négyzetes közepének pontos értékét. (*5 pont*)

Az x tengely, az $x = p$, az $x = q$ és az $y = \frac{1}{x^2}$ egyenletű görbe által határolt síkidom területe megegyezik az x tengely, az $x = q$, az $x = r$ és az $y = \frac{1}{x^2}$ egyenletű görbe által határolt síkidom területével, ahol $p, q, r > 0$ és $p < q < r$.

b) Igazoljuk, hogy a q szám a p és r számok harmonikus közepe. (*5 pont*)

Az ABC háromszög A csúcsánál lévő belső szögének nagysága 70°, B csúcsánál lévő belső szögének nagysága pedig 35°. Jelölje D a BC oldal C-n túli meghosszabbításának azt a pontját, amelyre a $DAC\sphericalangle = 35°$.

c) Igazoljuk, hogy az AD szakasz hossza a BD és CD szakaszok hosszának mértani (geometriai) közepe. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* A feladat szövege alapján:

$$a + b = 8,$$
$$ab = 4.$$

Az első egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 64.$$

Mivel $ab=4$, így $a^2+b^2=56$.

A két szám négyzetes közepe: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=\sqrt{28}\,.$

II. megoldás. A feladat szövege alapján:

$$a+b=8,$$
$$ab=4.$$

Az első egyenletből kifejezve b-t, majd behelyettesítve a második egyenletbe: $a(8-a)=4$. Rendezve és megoldva:

$$a_1=4+2\sqrt{3}\quad \text{és}\quad a_2=4-2\sqrt{3}\,,$$
$$b_1=4-2\sqrt{3}\quad \text{és}\quad b_2=4+2\sqrt{3}\,.$$

A két szám négyzetes közepe:

$$\sqrt{\frac{\left(4+2\sqrt{3}\,\right)^2+\left(4-2\sqrt{3}\,\right)^2}{2}}=\sqrt{28}\,.$$

Megjegyzés. Ha a megoldó a négyzetes közép értékét közelítő értékkel adja meg, akkor megoldására 4 pontot kapjon.

b) Tekintsük a megadott görbének azt a részét, amely a pozitív valós számok halmazán értelmezett $g(x)=\frac{1}{x^2}$ függvény grafikonja. A g függvény primitív függvényei (határozatlan integrálja):

$$\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+c.$$

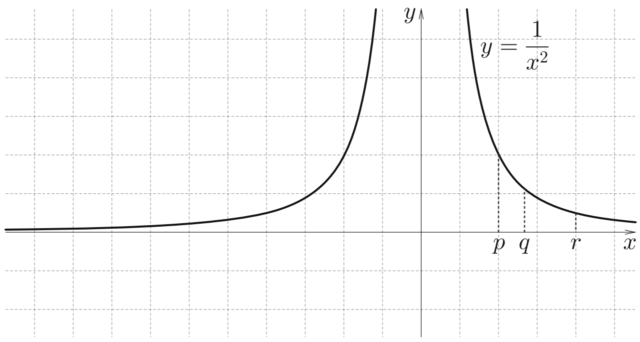
A g függvény minden függvényértéke pozitív, ezért a $[p;q]$, illetve a $[q;r]$ intervallumon a görbe alatti terület:

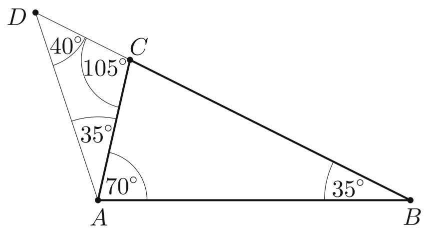
$$\int\limits_p^q \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{x}+c\right]_p^q=-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\quad \text{és}\quad \int\limits_q^r \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{x}+c\right]_q^r=-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}.$$

A feltétel szerint: $-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}$, ahonnan q-t kifejezve:

$$q=\frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{r}},$$

ami valóban a p és r számok harmonikus közepe.





c) Az ACD háromszög ismeretlen szögei 40° és 105°.

Az ABD háromszög hasonló az CAD háromszöghöz, mert szögeik páronként egyenlők. A megfelelő oldalak arányát felírva:

$$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD}.$$

Ebből AD-t kifejezve: $AD^2=BD\cdot CD$, ami valóban a BD és CD szakaszok hosszának mértani (geometriai) közepe.

6. *Egy n pontú egyszerű gráf minden pontjának* 15 *a fokszáma. Komplementer (kiegészítő) gráfjának* 18 *éle van. (A G gráf komplementere az a gráf, amelynek pontjai megegyeznek G pontjaival, és amelyben két pont pontosan akkor van összekötve éllel, ha G-ben nincs összekötve.)*

a) Hány pontú ez a gráf? (*6 pont*)

Egy 18 *pontú teljes gráf éleit a piros, fehér és zöld színekkel színeztük ki úgy, hogy a fehér élek száma kétszerese a piros élek számának, és a három különböző színű él számának a szorzata a legnagyobb.*

b) Hány zöld éle van az így kiszínezett gráfnak? (*6 pont*)

Internetes ismeretségi hálózatokban, mint például a Facebook vagy a LinkedIn, két személy között akkor jön létre a kapcsolat, ha azt mindkét fél visszaigazolta. Ilyen módon bármely két személy között vagy egyáltalán nincs kapcsolat, vagy pontosan egy kapcsolat létezik.

Egy 18 *főből álló mintában* 16 *résztvevőnek* 2, *a többi* 2 *résztvevőnek pedig* 1 *egymás közötti kapcsolata van. Azt is tudjuk továbbá, hogy jelenleg bármely két személy között létezik közvetlen vagy közvetett kapcsolat, azaz az ismeretségeket követve bármelyik résztvevőtől bármelyik másikig el tudunk jutni a hálózaton belül.*

c) Mutassuk meg, hogy a már létező kapcsolatok közül bármelyiket megszüntetve a hálózat szétesik, azaz biztosan lesz legalább két olyan személy, akik között sem közvetlen, sem közvetett kapcsolat nem marad. (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Az n pontú egyszerű gráfban a fokszámok összege $15n$. A komplementer gráf éleinek száma 18, így ebben a gráfban a fokszámok összege $2 \cdot 18 = 36$.

Az egyszerű és a komplementer gráf fokszámainak összege egyenlő egy teljes gráf fokszámainak összegével, azaz $n(n-1) = 15n + 36$. Ebből $n^2 - 16n - 36 = 0$. Ennek pozitív gyöke a 18, (negatív gyöke a -2), tehát a gráfnak 18 pontja van.

Ellenőrzés a szöveg alapján: A 18 pontú egyszerű gráf fokszámainak összege 270, a kiegészítő gráfé 36, melyek összege valóban 306. Vagy a 18 pontú egyszerű gráfnak 135 éle van, a kiegészítő gráfjának 18, melyek összege 153, ami valóban egy 18 pontú teljes gráf éleinek száma.

b) *I. megoldás.* A 18 pontú teljes gráf éleinek száma: $\binom{18}{2} = 153$. Jelölje a piros élek számát p, ekkor a fehér élek száma $2p$, a zöldeké $153 - 3p$, így

$$f(p) = p \cdot 2p \cdot (153 - 3p) = -6p^3 + 306p^2$$

(ahol $0 \leqslant p \leqslant 51$ és p egész szám).

Terjesszük ki az f függvény értelmezési tartományát a $[0; 51]$ zárt intervallumra. Ekkor az $f(p) = -6p^3 + 306p^2$ függvénynek csak ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0.

$$f'(p) = -18p^2 + 612p.$$
$$f'(p) = 0, \quad \text{ha} \quad p = 0 \quad \text{vagy} \quad p = 34.$$

A $p = 0$ helyen f' negatívból pozitívba, a $p = 34$ helyen pozitívból negatívba megy át, ezért a f-nek $p = 0$-ban minimuma, $p = 34$-ben maximuma van.

Az így kiszínezett gráfnak 51 darab zöld éle van.

b) *II. megoldás.* A 18 pontú teljes gráf éleinek száma: $\binom{18}{2} = 153$. Jelölje a piros élek számát p, ekkor a fehér élek száma $2p$, a zöldeké $153 - 3p$, így

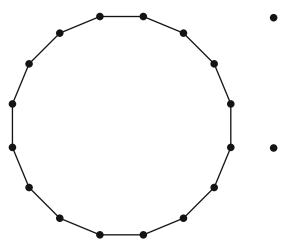
$$f(p) = p \cdot 2p \cdot (153 - 3p).$$

Az $f(p)$ kifejezés pontosan akkor maximális, ha a $\frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot (51 - p)$ szorzat maximális. A számtani és mértani közép közti összefüggés alapján:

$$\sqrt[3]{\frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot (51 - p)} \leqslant \frac{\frac{p}{2} + \frac{p}{2} + (51 - p)}{3} = 17,$$

ahol egyenlőség csak $\frac{p}{2} = 51 - p$, azaz $p = 34$ esetén áll fenn.

Az így kiszínezett gráfnak 51 darab zöld éle van.



c) *I. megoldás.* Ha bármelyik 1 kapcsolattal rendelkező személy kapcsolatát megszüntetjük, akkor ő teljesen el lesz szigetelve a többiektől, ekkor ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Az a 16 fő, akiknek 2 kapcsolata van, nem ismerheti „körbe” egymást, mert ekkor az 1 kapcsolattal bíró személyek nem tudnának hová csatlakozni.

Ezt figyelembe véve az egyetlen lehetséges megoldás a láncszerű hálózat.

Ebben pedig csakugyan igaz, hogy bármelyik kapcsolatot megszüntetve a hálózat szétesik.

II. megoldás. Ha 18 főből álló összefüggő hálózatot szeretnénk építeni, akkor a legelső embertől eltekintve minden új belépőnek legalább 1 kapcsolattal csatlakoznia kell a már meglévő hálózathoz. Ez minimálisan 17 kapcsolatot jelent.

Jelenleg pontosan $\frac{16\cdot 2+2}{2}=17$ kapcsolat található a hálózatban. Ez az összefüggő hálózathoz szükséges minimális érték, ha ezt csökkentjük, a hálózat tényleg szétesik.

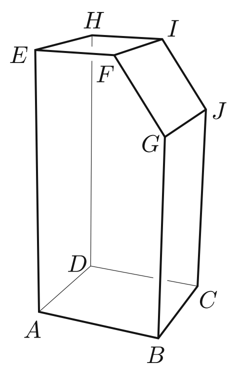
Megjegyzés. Ha a megoldó a kapcsolatok és a személyek száma közötti viszonyról felismeri, hogy fagráfról van szó, és hivatkozik a tanult tételre, mely szerint ez a minimális élű összefüggő gráf, akkor megoldására teljes pontszámot kapjon.

7. *Az* 1. ábrán *látható kézfertőtlenítőt tartalmazó flakon azon részét modellezzük a* 2. ábrán, *ameddig megtöltik fertőtlenítőszerrel. Ez a töltési rész úgy keletkezett, hogy az $ABCD$ négyzet alapú egyenes hasábból a megadott módon levágtunk egy testet. Az így keletkezett flakon belső méretei:* $AB=6{,}5$ cm, $AE=13{,}5$ cm, $EF=4$ cm *és* $BG=10$ cm. *(A flakonban lévő adagoló pumpa által elfoglalt térrészt nem vesszük figyelembe.)*

a) Számítsuk ki a töltési rész térfogatát. A választ egész ml-re kerekítve adjuk meg. (*5 pont*)

A fertőtlenítő 96% *hatóanyagot tartalmaz, azaz* 96%*-os töménységű. Egy felhasználó elhasználja a flakonban lévő mennyiség* 1%*-át, majd az elhasznált mennyiség helyére ugyanannyi vizet önt. (Feltételezzük, hogy a hatóanyag és a víz egyenletesen keveredik.) Tudjuk, hogy a fertőtlenítőszer még* 50%*-os töménységben is elfogadható hatásfokkal véd.*

1. ábra



2. ábra

b) Legfeljebb hányszor lehet a fenti műveletet megismételni, ha azt szeretnénk, hogy a fertőtlenítőszer továbbra is elfogadhatóan hatásos legyen? (*5 pont*)

Az alábbi táblázat egy vállalkozásban dolgozók koreloszlását mutatja, valamint az adott korcsoportra vonatkozó tünetmentesen fertőző *tulajdonság előfordulási valószínűségét a járvány egy adott szakaszában.*

Korcsoport	**20–30 éves**	**31–40 éves**	**41–50 éves**	**51–65 éves**
Dolgozók száma	20	40	30	10
Tünetmentesen fertőző valószínűség	0,4	0,3	0,2	0,1

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha találkozunk két dolgozóval, akkor lesz köztük legalább egy fertőző? A választ egy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.
(*6 pont*)

Megoldás. *a*) A négyzet alapú hasáb térfogata:

$$V_1 = 6{,}5^2 \cdot 13{,}5 = 570{,}375\ (\mathrm{cm}^3).$$

A levágott test olyan (derékszögű) háromszög alapú (egyenes) hasáb, melynek alapélei 2,5 cm és 3,5 cm hosszúak, magassága pedig 6,5 cm. A levágott test térfogata:

$$V_2 = \frac{2{,}5 \cdot 3{,}5}{2} \cdot 6{,}5 = 28{,}4375\ (\mathrm{cm}^3).$$

A töltési rész térfogata a négyzet alapú és a háromszög alapú hasáb térfogatának különbsége:

$$V_1 - V_2 = 570{,}375 - 28{,}4375 = 541{,}9375\ (\mathrm{cm}^3),$$

ami kb. 542 (ml).

b) Minden töltésnél 1%-kal csökken a töménység, ezért az n. töltés után $0{,}96 \cdot 0{,}99^n$ lesz a töménység. Megoldandó tehát a $0{,}96 \cdot 0{,}99^n \geqslant 0{,}5$, azaz a

$$0{,}99^n \geqslant \frac{0{,}5}{0{,}96}$$

egyenlőtlenség. Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve és a logaritmus megfelelő azonosságát alkalmazva:

$$n \cdot \lg 0{,}99 \geqslant \lg \frac{0{,}5}{0{,}96}.$$

Ebből $n \leqslant 64{,}9$. Így az újratöltést legfeljebb 64-szer lehet megismételni.

c) *I. megoldás.* A tünetmentesen fertőző alkalmazottak száma az egyes korcsoportok létszámának és a hozzájuk tartozó előfordulási valószínűségeknek a szorzata, azaz

$$20 \cdot 0{,}4 + 40 \cdot 0{,}3 + 30 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}1 = 27.$$

100-ból 2 dolgozót összesen $\binom{100}{2}$(= 4950)-féleképpen választhatunk ki (összes eset száma).

27 fertőzöttből és 73 nem fertőzöttből 1 fertőzőt és 1 nem fertőzőt $\binom{27}{1} \cdot \binom{73}{1}$ (= 1971)-féleképpen, 2 fertőzőt $\binom{27}{2}$(= 351)-féleképpen választhatunk ki (a feladat megoldásának szempontjából kedvező esetek száma). A kérdezett valószínűség (a kedvező esetek számának és az összes eset számának a hányadosa:)

$$\frac{1971 + 351}{4950} = \frac{2322}{4950} \approx 0{,}5.$$

II. megoldás. A tünetmentesen fertőző alkalmazottak száma az egyes korcsoportok létszámának és a hozzájuk tartozó előfordulási valószínűségeknek a szorzata, azaz $20\cdot 0{,}4+40\cdot 0{,}3+30\cdot 0{,}2+10\cdot 0{,}1=27$. A kérdezett valószínűséget megkapjuk, ha a biztos esemény valószínűségéből kivonjuk annak a valószínűségét, hogy a két alkalmazott egyike sem fertőző.

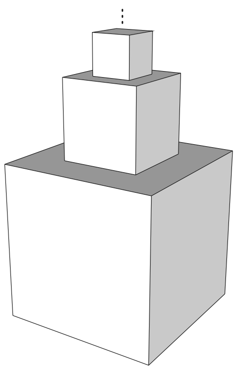
100-ból 2 dolgozót összesen $\binom{100}{2}$(= 4950)-féleképpen választhatunk ki (összes eset száma). 73 nem fertőzöttből 2 nem fertőzőt $\binom{73}{2}$(= 2628)-féleképpen választhatunk ki (a feladat megoldásának szempontjából kedvező esetek száma).

Annak a valószínűsége, hogy a két alkalmazott egyike sem fertőző: $\frac{2628}{4950}$. A kérdezett valószínűség:

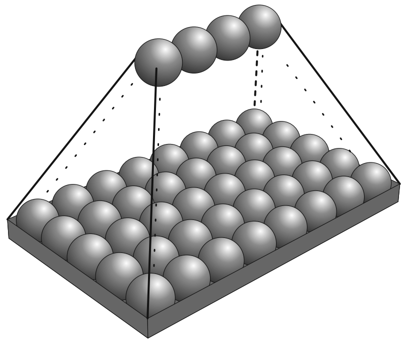
$$1-\frac{2628}{4950}=\frac{2322}{4950}\approx 0{,}5.$$

8. *Egy társasjátékban a játékosok különböző méretű kockákból „tornyot” építenek* (*lásd* 3. ábra). *A legalsó kocka éle* 16 cm, *a rárakott kockáké* 8 cm *és* 4 cm. *Az építést tovább folytatva minden újonnan felrakott kocka élhossza a közvetlenül előtte felrakott kocka élhosszának a fele.*

a) Mekkora lenne a keletkező „torony” felszíne, ha az építést végtelen sokáig lehetne folytatni? (A felszínhez a legalsó szint alaplapjának területét is vegyük figyelembe.) (*6 pont*)



3. ábra



4. ábra

Egy másik játékban egyforma méretű gömböket rakunk az ábrán látható átlátszó műanyag tartóba. A tartó legalján, annak oldalaival párhuzamosan, 5 *sorban soronként* 8 *gömb érintkezik egymással, a vízszintes talajjal és a szélsők a tartóval is. Az így elhelyezett gömbök közötti „gödrökbe” újabb gömböket teszünk, ezáltal egy újabb szint jön létre. Ezt az eljárást folytatva újabb és újabb szintek keletkeznek, majd kialakul egy háztető alakú „prizma”* (*lásd* 4. ábra). *Tekintsük az így keletkezett legfelső szintet elsőnek, és lefelé haladva sorrendben a többit második, harmadik, ..., és n. szintnek. Ekkor megfigyelhető, hogy az n. szinten n^2+3n darab gömb lesz.*

b) Számítsuk ki, hogy hányadik szinten fejeződik be az eljárás, ha a „prizma” építését képzeletben lefelé csak addig folytatjuk, amíg a legalsó szinten legalább 2021 *darab gömb lesz.* (*4 pont*) *c) Igazoljuk, hogy ha az n. szinten pontosan n^2+3n darab gömb van, akkor az n szintű prizmában összesen $\frac{n(n+1)(n+5)}{3}$ gömb van.* *(6 pont)*

Megoldás. *a)* Az építmény oldallapjainak területösszege:

$$S = 4\cdot(16^2+8^2+4^2+\ldots).$$

A zárójelben egy végtelen mértani sor összege szerepel, ahol $q=\frac{1}{4}$.

Mivel $|q|<1$, a mértani sor konvergens, így az összegképletet használva:

$$S = 4\cdot\frac{256}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4096}{3}\ (\approx 1365{,}33)\ (\mathrm{cm}^2).$$

Az alaplap és a fedőlapok területösszege:

$$S' = 16^2+(16^2-8^2)+(8^2-4^2)+\ldots = 2\cdot 16^2 = 512\ (\mathrm{cm}^2).$$

Tehát az építmény felszíne:

$$\left(\frac{4096}{3}+512=\right)\frac{5632}{3}\approx 1877{,}33\ \mathrm{cm}^2.$$

b) Az $n^2+3n\geqslant 2021$ egyenlőtlenség legkisebb pozitív egész megoldását keressük. Az $n^2+3n-2021=0$ egyenlet gyökei: $n_1\approx 43{,}48$ és $n_2\approx -46{,}48$.

Mivel a másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív, ezért az egyenlőtlenség megoldása: $n\leqslant -46{,}48$ vagy $n\geqslant 43{,}48$.

Tehát a 44. szinten fejeződik be az eljárás.

Megjegyzés. Ha a megoldó további indoklás nélkül, próbálgatással találja meg az $n=44$ megoldást, akkor 1 pontot kapjon.

c) I. megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk.

$n=1$ esetén az állítás igaz, mert

$$a_1 = 1^2+3\cdot 1 = 4 \quad \text{és} \quad S_1 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(1+5)}{3} = 4.$$

Ha valamely $k\in\mathbf{N}^+$ esetén igaz az állítás, akkor azt kell belátnunk, hogy $k+1$ esetén is igaz, vagyis

$$\frac{k\cdot(k+1)\cdot(k+5)}{3}+(k+1)^2+3(k+1) = \frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+6)}{3}.$$

Mindkét oldalt $(k+1)$-gyel osztva $(k\neq -1)$:

$$\frac{k\cdot(k+5)}{3}+(k+1)+3 = \frac{(k+2)\cdot(k+6)}{3}.$$

Mindkét oldalt 3-mal szorozva:

$$k^2+5k+3k+3+9 = k^2+8k+12.$$

Az összevonások után:

$$k^2+8k+12=k^2+8k+12.$$

Ez azonosság, ami minden $k\in\mathbf{N}^+$ esetén igaz.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti állításunk is igaz.

II. megoldás. Az összeget az egyes tagok segítségével felírva:

$$S_n=(1^2+3\cdot 1)+(2^2+3\cdot 2)+\ldots+(n^2+3\cdot n).$$

A jobb oldali összeg tagjait csoportosítva:

$$S_n=1^2+2^2+\ldots+n^2+3\cdot(1+2+\ldots+n)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+3\cdot\frac{n+1}{2}\cdot n.$$

Ezek alapján:

$$S_n=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+3\cdot\frac{n+1}{2}\cdot n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}\cdot\left(\frac{2n+1}{3}+3\right)=$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+5)}{3},$$

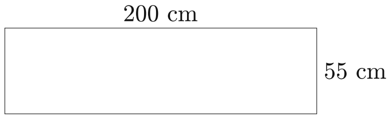
ami a bizonyítandó állítás.

9. *Nyári szünetben a 4 éves Peti és a 10 éves Kati nem járt óvodába, illetve iskolába. Napközben sokféle játékot játszottak, de a legnépszerűbb a céltáblára dobálás volt. A céltábla előtt bizonyos távolságra egy csíkot ragasztottak a padlóra, ezzel jelölve meg azt a helyet, ahonnan dobni lehet. Napközben, ha a család bármelyik tagja arra jár, véletlenszerűen dob a táblára egy „dobónyíllal". A céltáblájukon mind a négy körgyűrű szélessége a középen elhelyezkedő kis kör sugarával egyezik meg, és azonos nagyságú területet ugyanakkora valószínűséggel találnak el. Ha valaki eltalál egy körgyűrűt vagy a belső kört, akkor annyi pontot szerez, amekkora szám van arra a részre írva. Ha valaki a körvonalat találja el, akkor a nagyobb pontszám jár neki.*

a) Mennyi a szerzett pontszámok várható értéke, ha nagyon sok dobást hajtanak végre? *(5 pont)*

Kati lemásolta a céltábla koncentrikus köreit egy papírra. Hatféle színezője volt. A középső kis körlapot és a négy körgyűrűt úgy színezte ki, hogy a kis körlap és a külső körgyűrű azonos színű, de bármelyik két szomszédos rész különböző színű lett.

b) Határozzuk meg a különböző színezések számát, ha egy színezéshez legalább 3 színt használt. *(7 pont)*



Az óvodában a 29 *ballagó gyerek mindegyike kapott egy* 10 cm *sugarú körlapot, amire búcsúajándékként tetszőleges rajzot készíthettek. Az óvodapedagógusok úgy rakták ki az alkotásokat egy* 200 cm *széles és* 55 cm *magas parafalemezre, hogy bármelyik két körlap még részben sem fedte egymást, és egyetlen körlap se nyúlt túl a lemezen.*

c) Adjuk meg a körlapok egy ilyen lehetséges elhelyezését. (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Az egyes részek eltalálásának valószínűségét a megfelelő részek és a céltábla területének arányával számíthatjuk ki. Jelölje r a legkisebb kör sugarát, ekkor a céltábla sugara $5r$. A részek területe növekvő sorrendben:

$$r^2\pi, \quad 3r^2\pi, \quad 5r^2\pi, \quad 7r^2\pi \quad \text{és} \quad 9r^2\pi.$$

Az egyes valószínűségek növekvő sorrendben:

$$p_1 = \frac{1}{25}, \quad p_2 = \frac{3}{25}, \quad p_3 = \frac{5}{25}, \quad p_4 = \frac{7}{25} \quad \text{és} \quad p_5 = \frac{9}{25}.$$

A szerzett pontszámok várható értéke:

$$100 \cdot \frac{1}{25} + 90 \cdot \frac{3}{25} + 80 \cdot \frac{5}{25} + 70 \cdot \frac{7}{25} + 60 \cdot \frac{9}{25} == 72.$$

b) (Esetszétválasztás a színek száma szerint.)

Ha Kati pontosan 3 *színt használ:* Jelölje a három színt A, B, C, a legbelső körlemezt és a körgyűrűket kifelé haladva sorban 1., 2., 3., 4. és 5. Ha a legbelső körlemez (1.) és a külső körgyűrű (5.) A színű, akkor a közöttük lévő 3 körgyűrű (2., 3., 4.) közül a középső vagy A, vagy nem A színű.

Ha a középső körgyűrű (3.) A színű, akkor a két szomszédja sorrendben BC vagy CB.

Ha a középső körgyűrű (3.) nem A színű, akkor a három belső körgyűrű CBC vagy BCB színű lehet csak.

Tehát ha a két szélső A színű, akkor 4 lehetőség van.

A szélső körgyűrűk színe 3-féle lehet, így három adott színnel $3 \cdot 4 = 12$-féleképpen színezhetők ki. Mivel Kati a 6 színből hármat $\binom{6}{3} = 20$-féleképpen választhat ki, ezért három színnel összesen $20 \cdot 12 = 240$-féle színezés lehetséges.

Ha Kati pontosan 4 *színt használ:* Jelölje a négy színt A, B, C és D.

Ha a legbelső körlemez (1.) és a külső körgyűrű (5.) A színű, akkor a középső körgyűrű (3.) nem lehet A színű (mert 4 színt kell felhasználni), így a 2., 3. és 4. körgyűrű $3! = 6$-féleképpen színezhető ki.

A szélső körgyűrűk színe 4-féle lehet, így négy adott színnel $4 \cdot 6 = 24$-féleképpen színezhetők ki. Mivel Kati a 6 színből négyet $\binom{6}{4} = 15$-féleképpen választhat ki, ezért négy színnel összesen $24 \cdot 15 = 360$-féle színezés lehetséges.

Ha Kati pontosan 5 *vagy* 6 *színt használ:* 5 vagy 6 színnel a megadott feltételek mellett nem színezhető ki az ábra, mert ekkor 5 mezőt kell színezni úgy, hogy ezekből kettő azonos színű legyen, így a maradék három helyre legfeljebb három szín használható.

Tehát összesen $(240+360=)600$ lehetőség van a színezésre.

c) Az alsó sorban 10 egymást érintő körlap helyezhető el. Ha a második sorba is 10 körlapot helyezünk el, akkor ezek fölé a harmadik sorba már csak szomszédos köröket érintő körlapok férnének el. Ekkor a három egymást érintő kör középpontja által alkotott szabályos háromszög oldalának hossza 20 cm, magassága $10\sqrt{3}(\approx 17{,}32)$ cm lesz. Így a három sorból álló sáv szélessége $10+10\sqrt{3}+30= =40+10\sqrt{3}\approx 57{,}32>55$ cm lenne, tehát így nem fér el a 29 körlap.

Ha az alsó sor fölé úgy helyezünk el köröket, hogy bármely három egymást érintő kör középpontja 20 cm oldalhosszúságú szabályos háromszöget alkosson, akkor a második sorban 9 kör fér el. Ekkor a fölötte lévő harmadik sorba ismét 10 kör helyezhető el, ha a három sor magassága 55 cm-nél nem nagyobb.

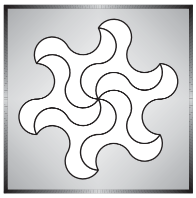
Tekintsük azt a szabályos háromszöget, amelynek egyik oldalának végpontjai az alsó sorban az első és a harmadik körök középpontja. Ekkor ennek a háromszögnek az oldala 40 cm, magassága $20\sqrt{3}\approx 34{,}64$ cm hosszú lesz.

Így a három sorból álló sáv szélessége: $20\sqrt{3}+20\approx 54{,}64<55$ cm, tehát az elrendezés létezik, és eleget tesz a feltételeknek.

Megjegyzések. Ha a megoldó megad egy helyes elrendezést, de annak létezését nem bizonyítja, akkor legfeljebb 2 pontot kapjon.

Fridrik Richárd (Szeged), **Kovácsné Hadas Ildikó** (Budapest),
Németh László (Fonyód), **Sáfár Lajos** (Ráckeve),
Varga Péter (Budapest)

Matematika feladat megoldása

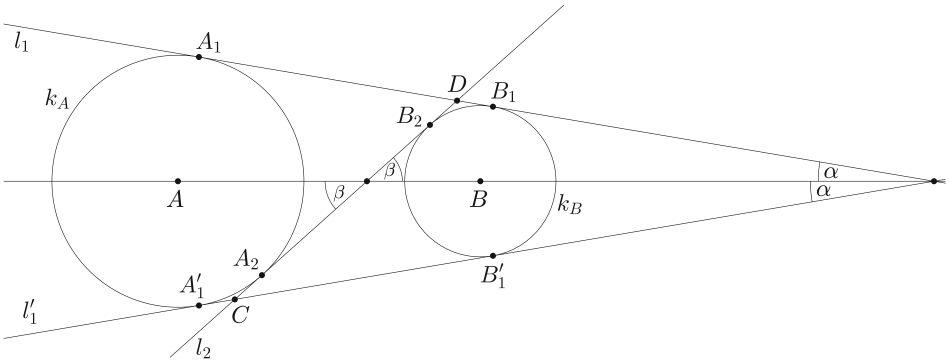


B. 5008. *Adottak az A középpontú k_A és a B középpontú k_B körök. Az l_1 egyenes A_1-ben érinti k_A-t és B_1-ben k_B-t; az l_2 egyenes pedig A_2-ben érinti k_A-t és B_2-ben k_B-t. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2 és a B_1B_2 szakaszok AB egyenesre vett merőleges vetülete egyenlő hosszúságú.*

(*3 pont*)

Megoldás. Amennyiben két külső vagy két belső érintőt húztunk be, a megfelelő pontok vetületei egybeesnek, nincs mit bizonyítanunk. A feladat valódi állítása arra az esetre vonatkozik, ha mindkét körhöz húzható külső és belső érintő is és az egyik egyenes külső, a másik belső érintő. Legyen l_1 a közös külső, l_2 pedig a közös belső érintő.

I. megoldás. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit.



1. ábra

Felhasználva a külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőségét:

$$A_1'B_1' = A_1'C + CB_1' = CA_2 + CB_1' = CA_2 + CA_2 + A_2B_2 = 2CA_2 + A_2B_2,$$

$$A_1'B_1' = A_1B_1 = A_1D + DB_1 = A_2D + DB_1 = A_2B_2 + B_2D + DB_1 =$$
$$= A_2B_2 + 2DB_2.$$

Tehát

$$A_1'B_1' = 2CA_2 + A_2B_2 = A_2B_2 + 2DB_2,$$

amiből $CA_2 = DB_2$. Legyen

$$CA_2 = CA_1' = DB_2 = DB_1 = x.$$

A_1 merőleges vetülete az AB egyenesre megegyezik A_1' merőleges vetületével, ugyanígy B_1' és B_1 vetülete is megegyezik. Tehát

$$A_1A_2 \text{ vetülete} = A_1'A_2 \text{ vetülete} = A_1'C \text{ vetülete} + CA_2 \text{ vetülete} =$$
$$= x \cdot \cos\alpha + x \cdot \cos\beta,$$

$$B_1B_2 \text{ vetülete} = B_1D \text{ vetülete} + DB_2 \text{ vetülete} = x \cdot \cos\alpha + x \cdot \cos\beta,$$

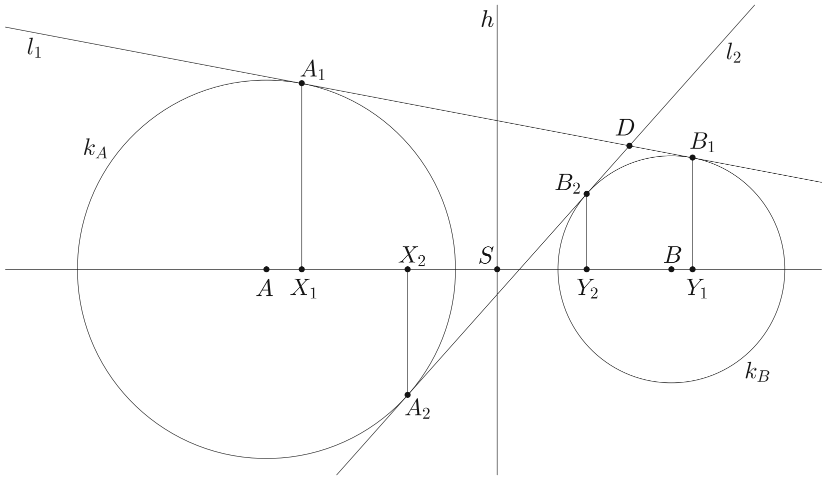
tehát az A_1A_2 és a B_1B_2 szakaszok vetületének hossza valóban megegyezik.

Geretovszky Anna (Szegedi Radnóti Miklós. Kís. Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. Vegyük a két kör hatványvonalát. Ez felezi az érintési szakaszokat és merőleges AB-re, tehát az érintési szakaszok AB-re merőlegesen vetített képét is felezi. Jelölje A_1, A_2, B_1, B_2 vetületét rendre X_1, X_2, Y_1, Y_2, a hatványvonal és az AB egyenes metszéspontját pedig S a *2. ábra* szerint.

A hatványvonal felezi az X_1Y_1 és az X_2Y_2 szakaszt, azaz

$$X_1S = SY_1 \quad \text{és} \quad X_2S = SY_2.$$



2. ábra

Ekkor a két-két szakasz különbsége is egyenlő, vagyis

$$X_1X_2 = X_1S - X_2S = SY_1 - SY_2 = Y_1Y_2,$$

ezzel az állítást beláttuk.

Győrffy Johanna (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) megoldása alapján

45 dolgozat érkezett. 3 pontos 25, 2 pontos 6, 1 pontos 1, 0 pontos 13 dolgozat.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1672–1678.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1672. Határozzuk meg az összes olyan p, r számpárt, amelyre p, r és $\frac{p+r}{p-r}$ is pozitív prímszám.

C. 1673. Egy trapézt átlói négy háromszögre bontanak. A trapéz alapjain fekvő háromszögek területének összege a trapéz területének $\frac{13}{18}$ része. Mekkora lehet a trapéz másik alapja, ha az egyik 5 cm hosszú?

Feladatok mindenkinek

C. 1674. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan derékszögű háromszög van, melyben az oldalak mérőszámai pozitív egészek és az átfogó egy egységgel hosszabb az egyik befogónál.

Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

C. 1675. Az ABC háromszög AB oldalának egy D belső pontjára

$$\frac{AD}{DB} = \frac{m}{n} < \frac{1}{2},$$

ahol m, n pozitív számok. Az E pont a háromszög kerületének egy, a D-től különböző pontja úgy, hogy a DE egyenes a háromszög területét $1:2$ arányú részekre osztja. Adjuk meg, hogy az m és n számoktól függően az E pont mely oldalra esik és milyen arányban osztja azt.

C. 1676. Mutassuk meg, hogy $2019^{2021} + 2021^{2019}$ osztható 4040-nel. Igaz-e a feladat következő általánosítása: ha a és b egymást követő pozitív páratlan számok, akkor $a^b + b^a$ osztható $a+b$-vel?

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1677. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\left|2 \cdot \log_2 \sqrt{x^2 - x} + 3 + \frac{1}{\log_4 \sqrt{x^2 - x}}\right| = 2$$

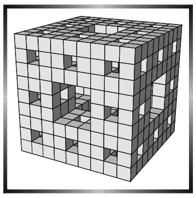
egyenletet.

C. 1678. Egy négyoldalú szabályos gúla minden éle a hosszúságú. Kössük össze a gúla lapjainak középpontjait minden lehetséges módon. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett szakaszok közül bármelyik hármat kiválasztva a szakaszokból lehet háromszöget szerkeszteni.

❄

Beküldési határidő: 2021. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5174–5181.)

B. 5174. Mutassuk meg, hogy tetszőleges pozitív egész n esetén

$$(2n)! \leqslant \left(n^2 + n\right)^n.$$

(*3 pont*) Javasolta: *Szalai Máté* (Szeged)

B. 5175. Az ABC háromszögben $AC=BC$, az AC oldal egy belső pontja D, az ABD kör középpontja K. Mutassuk meg, hogy $BCDK$ húrnégyszög.

(*3 pont*)

B. 5176. Egy körre úgy szeretnénk ráírni az első n pozitív egész számot (mindegyiket pontosan egyszer), hogy bármely három szomszédos számot összeadva pontosan kétféle érték forduljon elő. Adjuk meg n lehetséges értékeit.

(*4 pont*) (*Skót versenyfeladat*)

B. 5177. Az ABC derékszögű háromszögben az AB átfogóhoz tartozó magasság a CD szakasz. A CD átmérőjű k kör az AC és BC befogókat másodszor rendre az E és F pontokban metszi. A k körhöz az E pontban rajzolt érintő a BC befogó egyenesét a P, az AB átfogót az M pontban metszi, a k körhöz az F pontban szerkesztett érintő az AC befogó egyenesét a Q, az AB átfogót az N pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy

$$4\cdot MN^2=PE^2+QF^2+2\cdot EF^2.$$

(*5 pont*)

B. 5178. Legyen x pozitív valós szám. Mutassuk meg, hogy

$$\sqrt{6x+9}+\sqrt{16x+64}\leqslant\left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}+\frac{8}{\sqrt{x}}\right).$$

(*4 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 5179. Van-e olyan egész számokból álló H halmaz, amelyre teljesül, hogy a 0 kivételével minden egész szám végtelen sokféleképpen felírható néhány, egymástól különböző H-beli elem összegeként, de a 0 nem írható fel ilyen módon?

(*6 pont*)

B. 5180. Az $ABCDEFG$ szabályos hétszög köré írt kör sugara r. Igazoljuk, hogy az A középpontú, $2r$ sugarú kör átmegy a BCE háromszög magasságpontján.

(*5 pont*)

B. 5181. Adott a síkon nyolc pont, melyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre és semelyik öt nincs egy körön. Legfeljebb hány olyan kör lehet, mely az adott pontok közül négyre illeszkedik?

(*6 pont*) Javasolta: *Imolay András* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2021. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (800–802.)

A. 800. Egy véges, egyszerű, összefüggő G gráf mindegyik csúcsát különböző színűre színezzük, és a következő játékot játsszuk. Egy lépés során véletlenszerűen, egyenletes eloszlással kiválasztunk egy csúcsot, majd véletlenszerűen, egyenletes eloszlással kiválasztjuk annak az egyik szomszédját, és átszínezzük olyanra, mint az eredetileg választott csúcs (ha már eleve egyszínűek, nem csinálunk semmit). A játék akkor ér véget, ha az összes csúcs színe egyforma.

Állapítsuk meg a G gráf ismeretében minden egyes csúcsra, hogy mekkora valószínűséggel ér véget a játék úgy, hogy az összes csúcs olyan színű, mint az adott csúcs.

Javasolta: *Matolcsi Dávid* (Budapest)

A. 801. Az m pozitív egész szám mely értékeire lehet találni $p,q\in\mathbb{C}[x]$ legalább másodfokú polinomokat, melyekre $x(x+1)\dots(x+m-1)=p\big(q(x)\big)$ teljesül?

Javasolta: *Navid Safaei* (Teherán)

A. 802. Legyen P egy adott szabályos 100-szög. Bizonyítsuk be, hogy ha vesszük két P-vel egybevágó sokszög unióját, a kapott alakzat kerületének és területének aránya legfeljebb akkora, mint P kerületének és területének aránya.

❄

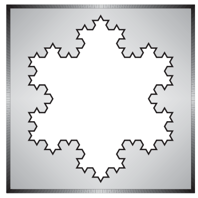
Beküldési határidő: 2021. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Ada-Winter Péter (1923–2020)

Nemrég értesültünk róla, hogy Ada-Winter Péter, egykori szerkesztőnk elhunyt. Az ő kezdeményezésére és vezetésével indult el első ízben informatika rovat lapunkban, 1976 szeptemberében, akkor még Számítástechnika Rovat címen. A rovat célja egy akkor divatos programnyelv, a Fortran megismertetése mellett az volt, hogy feladatokon keresztül bemutassuk, hogyan alkalmazható a számítógép matematikai feladatok megoldásában. A bizottság tagjaként (1976 és 1981 között) több értékes cikket és megoldandó feladatot adott közre lapunkban.

A KöMaL Szerkesztősége

Önhasonló fraktálok ábrázolása LaTeX-ben



A kedves olvasó már olvashatott ebben a számban a fraktálokról és dimenziószámokról a 258. oldalon. Most abba szeretnénk beavatni, hogyan lehet ezeket az alakzatokat ábrázolni a LaTeX nyelv segítségével.

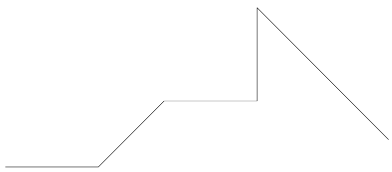
A cikkben található összes ábrához a TikZ csomagot használtuk, a „mindenre is jó" `\draw` paranccsal együtt. A csomagot a `\usepackage{tikz}` paranccsal tudjuk elérhetővé tenni, rajzolni pedig az alábbi formában tudunk:

```
\begin{tikzpicture}
    \draw [];
\end{tikzpicture}
```

No de mit szeretnénk rajzol(tat)ni? Az önhasonló fraktálok megjelenítéséhez a Lindenmayer Arisztid, magyar biológus által formalizált L-rendszereket fogjuk használni, a TikZ erre kifejlesztett csomagjának segítségével. Az L-rendszerek használatához be kell szúrnunk a `\usetikzlibrary{lindenmayersystems}` parancsot is.

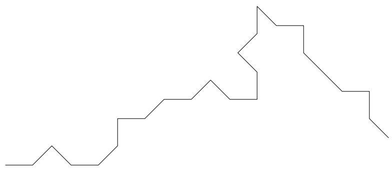
Először azonban meg kell értenünk, hogy hogyan is működnek ezek az L-rendszerek. Ebben a jelölésrendszerben vonalak és szögelfordulások váltják egymást, megadva egy utat, amit ceruzánkkal követve megrajzolhatjuk a kívánt alakzatot. Ez a koncepció ismerős lehet azoknak az olvasóknak, akik találkoztak már a teknőcgrafikával, amelyet először csak a Logo nyelven, de ma már több programozási nyelven is elérhetünk.

A vonalakat szokás szerint tetszőleges nagybetűkkel (nálunk a „forward" szóból indulva F, és ha több különböző vonal kell, az ábécében innen elindulva $G, H, \dots$), a szögeket pedig a $+$ és $-$ jelekkel jelöljük, attól függően, hogy pozitív vagy negatív irányba fordulunk (az alapértelmezett kezdőirány $0°$, tehát az x tengely pozitív iránya). A szögeknek nem itt szabhatjuk meg a nagyságát, minden $+$ és $-$ ugyanakkora szöget jelent. A szögek nagyságát az ábra parancsának meghívásánál tudjuk majd megadni. Ekkor tehát a $45°$-kal vett „$F+F-F++F---FF$" képe például:



(Az ábra forrásában egyébként már itt is L-rendszereket használtunk, ez egy nulladrendű alakzat. Nemsokára ezt bővebben is kifejtjük.)

Igen, de itt nem hogy fraktálokról nem beszélünk, még az önhasonlóságról sem esett szó. Itt jönnek képbe az L-rendszerek: ezeknek a segítségével megadhatunk egy szabályt, ami alapján egy alakzat továbbfejlődik, minden szakaszát kicserélve *valami másra*. Az érthetőség érdekében nézzünk meg egy példát: az előbb látott alakzatnak minden szakaszán a menetirány szerinti bal oldalra rakjunk egy „kidudorodást" (ennek gyakorlati megvalósítását a következőkben bemutatjuk). Szeretnénk hangsúlyozni, hogy egyelőre még nem beszélünk önhasonló alakzatról, az önhasonlóság akkor fog elkezdődni, amikor a „kidudorodásokra" is kisebb „kidudorodásokat" teszünk majd.



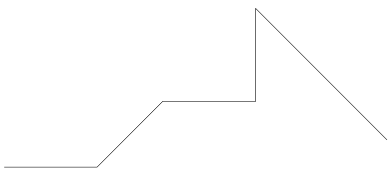
A trükk az, hogy a szabályunk szerint minden „F"-et „$F + F - - F + F$"-re cserélünk, ezzel elérve a „kidudorodás" hatását. Természetesen az új ábránk több vonalból áll, mint az előző. Annak érdekében, hogy elférjen a papíron, a vonalak hosszúságát csökkentjük. Kis elemi geometriával gyorsan kiszámolható, hogy az eredeti hosszt $\left(2+\sqrt{2}\,\right)$-vel kell elosztani. Az olvasónak javasoljuk ennek belátását.

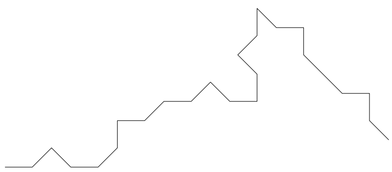
Az általunk használt L-rendszer definíciója tehát:

```
\pgfdeclarelindenmayersystem{example}{
    \rule{F -> F+F--F+F}
}
```

ahol az „`example`" az adott L-rendszer neve, amivel később hivatkozni tudunk rá.

A bemutatott két görbe a hozzájuk tartozó programkóddal együtt:





```
\begin{center}
    \begin{tabular}{cc}
        \begin{tikzpicture}
            \draw
            [l-system={example, step=35pt, angle=45,
                axiom=F+F-F++F---FF, order=0}]
            lindenmayer system;
        \end{tikzpicture}
        &
        \begin{tikzpicture}
            \draw
            [l-system={example, step=10.2513pt, angle=45,
                axiom=F+F-F++F---FF, order=1}]
```

```
            lindenmayer system;
        \end{tikzpicture}
    \end{tabular}
\end{center}
```

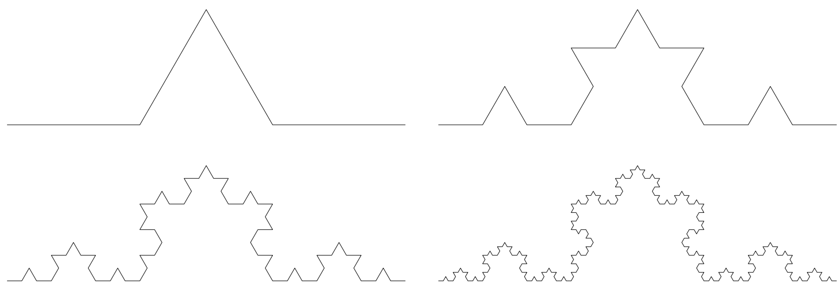
ahol a „`center`” és a „`tabular`” az ábrák oldal közepén való egymás mellé rendezéséért felelős, tehát egy egysoros, középre igazított táblázatot hozunk létre a segítségükkel. Az l-system paraméterei közül a „`step`” a vonalak hosszát, az „`angle`” pedig a + és − szögek nagyságát adja meg. Az „`order`” annyit mutat meg, hogy az „`axiom`”-ban definiált alakzatra hányszor alkalmazzuk a szabályt. Ezért a 0-adrendű alakzat kódja megegyezik az axiómában definiálttal, az elsőrendű kódja pedig

$$(F+F--F+F)+(F+F--F+F)-(F+F--F+F)++$$
$$(F+F--F+F)---(F+F--F+F)(F+F--F+F),$$

ahol a zárójelek csupán a megértést igyekeznek segíteni. Értelemszerűen a másodrendű alakzatot úgy kapnánk meg, ha ez elsőrendű kódjába minden F helyére behelyettesítenénk az $(F+F--F+F)$-et. (A szögletes zárójelekben lévő programkódot azért tördeltük, hogy kiférjen az oldalra, egyébként egy sorban is működik.)

Az irracionális számmal való osztás miatt a `step`-re csúnyácska értékeket kapunk. Ez megkerülhető a `\foreach` parancs használatával, ennek részleteit azonban itt nem közöljük, mert túlságosan elkanyarodnánk a cikk témájától. A kedves olvasót azonban bátorítjuk, hogy nézzen utána.

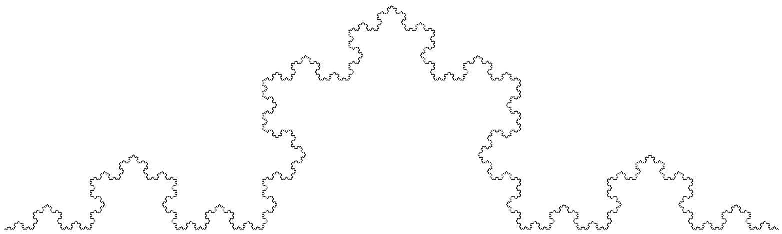
Az újság matematika rovatából már megismerhettük a Koch-görbét, melynek képzési szabálya kísértetiesen hasonlít arra, amit az előző példában láttunk:



A szabály tehát itt is pont ugyanaz, mint az első példában volt, a két fő különbség, hogy egyetlen egyenes szakaszból indulunk ki (az *ábrán* az elsőtől a negyedrendűig szerepelnek az alakzatok), illetve, hogy 45°-os szögek helyett 60°-os szögekkel dolgozunk. Emiatt a szögváltozás miatt az egymást követő iterációkban az oldalak hosszának aránya is változik, $2+\sqrt{2}$ helyett 3 az arány.

Mivel a kidudorodások egyre kisebbek, nem kell túl sok iteráción végigmennünk ahhoz, hogy eljussunk a szabad szemmel (akár képernyőn, akár nyomtatásban) nem kivehető különbségekhez.

A következőkben látható egy hatodrendű Koch-görbe, a hozzá tartozó kóddal együtt:



```
\pgfdeclarelindenmayersystem{koch}{
    \rule{F -> F+F--F+F}}

\begin{center}
    \begin{tikzpicture}
        \draw
        [l-system={koch, step=0.4pt, angle=60, axiom=F, order=6}]
        lindenmayer system;
    \end{tikzpicture}
\end{center}
```

A másik cikkünkben látható többi fraktál hozzárendelési szabályai az ott leírtaknak megfelelően:

- Sárkány-görbe:

```
\pgfdeclarelindenmayersystem{sarkany}{
    \symbol{G}{\pgflsystemdrawforward}
    \rule{F -> +F--G+}
    \rule{G -> -F++G-}}
```

- Sierpiński-háromszög:

```
\pgfdeclarelindenmayersystem{sierpinski}{
    \symbol{G}{\pgflsystemdrawforward}
    \rule{F -> +G-F-G+}
    \rule{G -> -F+G+F-}}
```

A két fraktál rajzolásának parancsát nem adjuk meg, ezt az előbbiek alapján az olvasóra bízzuk.

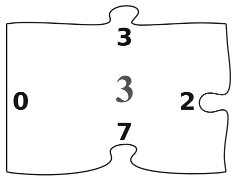
Ahogyan a kedves olvasó ebben a cikkben látta, a LaTeX-ben való szerkesztés megkönnyíti a matematikai ábrázolást és szép, letisztult formát ad. A LaTeX-es programozáshoz mi az overleaf.com felületét ajánlanánk, ahol a kedves olvasó ki tudja próbálni a fentebb leírt alakzatok szerkesztését és akár másokkal közösen is szerkesztheti a programkódot.

Szép Emma, Varga Pál Patrik
Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimnázium végzős diákjai

Informatikából kitűzött feladatok

I. 538. A puzzle játék során lapokat kell ábrarészlet, illetve az oldalak illeszkedése alapján összerakni. Készítsünk programot `i538` néven, amely egy $N\times N$-es puzzlet kirak az összekevert lapokból. A puzzle biztosan kirakható, a lapok mind rendelkezésre állnak és nem kell őket forgatni. A lapok 1-től $N\times N$-ig számozottak, és az oldalakat, ezzel az illeszkedést a szomszéd lapokhoz nem ismétlődő pozitív egész számok adják. Ha a lap egyik oldalán 0 érték szerepel, akkor az a puzzle szélén helyezkedik el.

A program *standard bemenetének* első sorában N ($N\leqslant 10$), a sorok és oszlopok száma van. A következő N sorban, soronként 5 darab nemnegatív szám szerepel. Az első a lap sorszáma, a mintán a 3-as, majd felülről indulva az óramutató járásának megfelelően az oldalakat azonosító számok. Azokat a lapokat lehet összerakni, ahol az illesztendő oldalakon azonos szám szerepel.

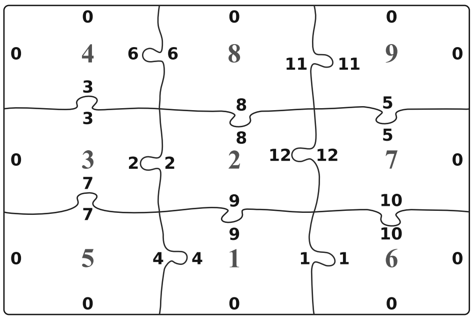


egy lap mintája

A program *standard kimenetén* szóközzel elválasztva a kirakott puzzle kártyáinak sorszáma szerepeljen sorfolytonosan.

Bemenet (a / jel sortörést jelent)	**Kimenet**
`3 / 1 9 1 0 4 / 2 8 12 9 2 / 3 3 2 7 0 4 0 6 3 0 / 5 7 4 0 0 / 6 10 0 0 1 / 7 5 0 10 12 / 8 0 11 8 6 / 9 0 0 5 11`	`4 8 9 3 2 7 5 1 6`

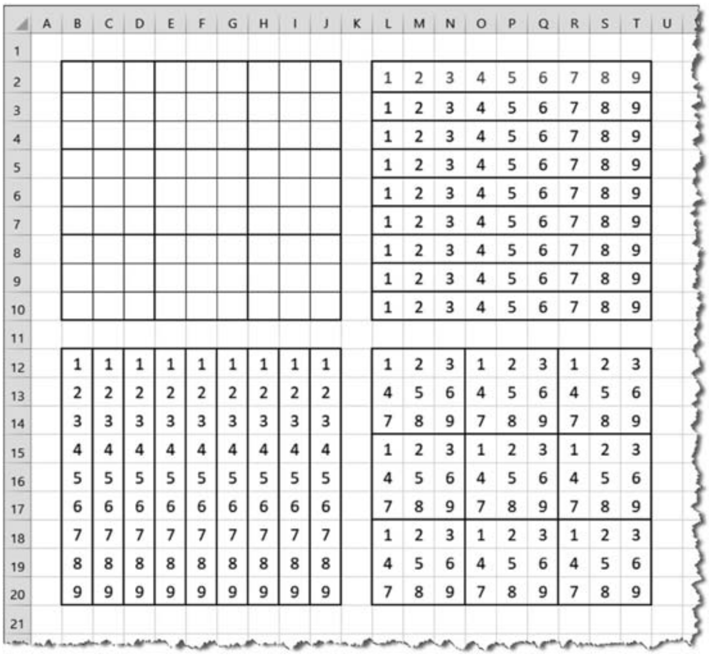
Magyarázatul a kirakott puzzle:



Beküldendő egy tömörített `i538.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 539. A Sudoku népszerűsége a sakkéval és a Rubik-kockáéval vetekszik. A Rubik-kockához hasonlóan sok változata van, a 4×4-es, a 9×9-es, a 16×16-os és az egynél több táblát összeillesztő láncolt feladatok. Ebben a feladatban a hagyományos 9×9-es Sudoku megoldásához készítünk némi segítséget. A Sudokuval már foglalkoztunk 2006 szeptemberében az **I. 136.** és 2007 novemberében az **S. 29.** számú feladatokban, de más aspektusokból.

Hozzuk létre táblázatkezelőben az `i539` nevű munkafüzetet, abban pedig a Sudoku nevű munkalapot. Ezen állítsunk be 14 pt méretű Calibri típusú betűket és a megfelelő sormagasságot és oszlopszélességet, rajzoljuk meg a mintán látható szegélyeket és készítsük el a *mintán* látható táblázatokat.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1																					
2												1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3												1	2	3	4	5	6	7	8	9	
4												1	2	3	4	5	6	7	8	9	
5												1	2	3	4	5	6	7	8	9	
6												1	2	3	4	5	6	7	8	9	
7												1	2	3	4	5	6	7	8	9	
8												1	2	3	4	5	6	7	8	9	
9												1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10												1	2	3	4	5	6	7	8	9	
11																					
12		1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	2	3	1	2	3	1	2	3	
13		2	2	2	2	2	2	2	2	2		4	5	6	4	5	6	4	5	6	
14		3	3	3	3	3	3	3	3	3		7	8	9	7	8	9	7	8	9	
15		4	4	4	4	4	4	4	4	4		1	2	3	1	2	3	1	2	3	
16		5	5	5	5	5	5	5	5	5		4	5	6	4	5	6	4	5	6	
17		6	6	6	6	6	6	6	6	6		7	8	9	7	8	9	7	8	9	
18		7	7	7	7	7	7	7	7	7		1	2	3	1	2	3	1	2	3	
19		8	8	8	8	8	8	8	8	8		4	5	6	4	5	6	4	5	6	
20		9	9	9	9	9	9	9	9	9		7	8	9	7	8	9	7	8	9	
21																					

A négy szegélyezett terület közül a jobb felsőbe kerül majd a Sudoku feladvány, a jobb felső, bal alsó és jobb alsó terület rendre azt fogja megmutatni, hogy az egyes sorokból, oszlopokból és szegmensekből melyik számjegyek hiányoznak még.

5	2	1		9	8	4		6
9	6			2			5	3
	3		5	6	4			
	8		2			7		
2	1						9	8
		5			3		6	
			9	4	1		8	
3	4			8		6	1	5
1		8	6	3		9	4	2

Keressünk a neten egy Sudoku feladványt, vagy gépeljük be az itt adott minta alapszámait. Az alapszámokat emeljük ki félkövér betűstílussal és halványszürke háttérszínnel.

Gondoskodjunk arról, hogy a másik három területen csak azok a számok legyenek láthatók, amelyek az adott sorból, oszlopból vagy szegmensből hiányoznak.

Segítség a Sudoku kitöltésekor, ha egy számot kiválasztva a munkalap feltűnően megjeleníti a már beírt ilyen számokat, az egyes számjegyek darabszámát, továbbá azt, ha hibázunk a kitöltéskor, azaz olyan sorba vagy oszlopba írnánk be egy számjegyet, ahol ez a szám már szerepel. Mindezek érdekében hozzuk létre a következő mintán látható cellákat. A szükséges helyeken alkalmazzunk cellaegyesítést, eltérő betűméretet, egyéni számformátumot. Az X2 cella kitöltése legördülő lista segítségével történjen. A listában a számjegyek mellett szerepeljen a − (kivonás) jel.

A munkalapon csak a Sudoku nem alapszámot tartalmazó mezői és az X2 mező adatát lehessen megváltoztatni, lapvédelemre a komal szót használjuk jelszóként.

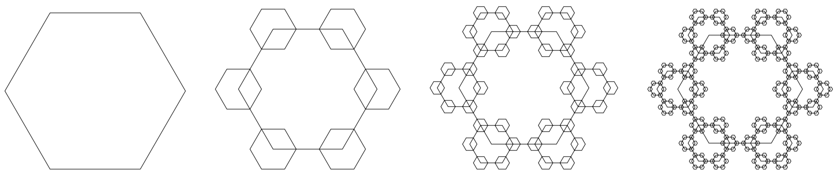
Ügyeljünk arra is, hogy a Z3:Z11 tartomány adatai akkor is helyes értékeket mutassanak, ha újabb számok kerülnek a Sudoku táblájába.

Feltételes formázással szabályozzuk, hogy az alábbi három ábra példáiban szereplő feliratok, színezések csak a megfelelő esetben, tehát szám kiválasztása, hiba vagy sikeres befejezés esetén jelenjenek meg.

Segédszámításokat az AB oszloptól kezdődően végezhetünk. A feladatban nem használható saját függvény vagy makró. A feladathoz tartozó három *ábra* a hátsó belső borítón található.

Beküldendő egy `i539.zip` tömörített mappában a táblázatkezelő munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáshoz alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

I. 540. Lapunkban két cikk jelent meg önhasonló alakzatokról, azok tulajdonságairól, illetve az alakzatok LaTeX nyelven történő megrajzolásáról. Készítsük el a KöMaL logóra emlékeztető alábbi fraktált:



A cikkekben bemutatott Lindenmayer-rendszer segítségével dolgozzunk, a mintán az 1–4-edrendű ábrák szerepelnek.

Beküldendő a négy ábrát megrajzoló LaTeX forráskód.

I/S. 54. N darab gyöngyöt fűztek körbe nyakláncnak. Minden gyöngyszem vagy piros vagy kék. Egy lépésben kiválaszthatunk három szomszédos gyöngyöt és mindegyik színét az ellenkezőjére válthatjuk. Adjuk meg, hogy megoldható-e az, hogy az összes gyöngy ugyanolyan színű legyen.

Bemenet: az első sor tartalmazza az N számot. A következő sor tartalmaz N betűt, ami az egyes gyöngyszemeket írja le: `P` betű jelöl egy piros, `K` egy kék gyöngyöt. A szemeket körbe fűzték, tehát az első és utolsó gyöngyszemek szomszédok.

Kimenet: egyetlen sorba írjunk ki `1`-et, ha lehetséges, `-1`-et ha nem lehetséges hogy minden gyöngyszem ugyanolyan színű legyen.

Bemenet	**Kimenet**
`5 / PKPPK`	`1`

Egy lehetséges lépéssorozat: `PKPPK` – `KPPPP` – `PKKPP` – `KKKKK`.

Korlátok: $2 \leqslant N \leqslant 10^5$. Időkorlát: 0,3 mp.

Értékelés: a pontok 30%-a kapható, ha $N \leqslant 10$.

Beküldendő egy `is54.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 153. Van egy derékszögű koordináta-rendszerünk, amelyben kezdetben három pont helyezkedik el. Egymás után újabb pontokat veszünk hozzá a ponthalmazhoz. Minden egyes új pont után szeretnénk tudni, mekkora a legkisebb területű konvex sokszög területe, mely minden eddig felvett pontot tartalmaz – a matematikusok ezt a sokszöget konvex buroknak nevezik. (Egy konvex sokszög tartalmaz egy pontot, ha a pont a sokszög belsejében, élén, vagy csúcsán helyezkedik el.)

Bemenet: Az első három sorban az eredeti három pont x és y koordinátái szerepelnek. A negyedik sorban az ezekhez hozzávett pontok N számát adjuk meg. A következő N sor mindegyike egy újonnan felvett pont x és y koordinátáit tartalmazza.

Kimenet: N sort kell kiírni, melyek mindegyike az i-edik pont hozzávétele utáni terület *kétszeresét* tartalmazza (ez mindig egész szám).

Példa:

Bemenet (a `/` jel sortörést helyettesít)	Kimenet (a `/` jel sortörést helyettesít)
`-1 -1 / 1 -1 / 1 1 / 2 / -1 1 2 2`	`8 / 12`

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 10^5$, $-10^8 \leqslant xy \leqslant 10^8$, a koordináták egész számok, a kezdeti három pont nincs egy egyenesen. *Időkorlát:* 1 mp.

Értékelés: a pontok 30%-a kapható, ha $N \leqslant 100$.

Beküldendő egy `s153.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2021. június 15.

Mérési feladat megoldása

M. 400. *Vizsgáljuk meg, hogy egy, a tövénél levágott fenyőág súlypontja a hosszának hányad részénél helyezkedik el! Végezzük el a mérést a levágott oldalágakra is, figyelve, hogy a fenyőágak ne nagyon hajoljanak meg! Hasonlítsuk össze a kapott eredményeket! A fenyőág lehet egy karácsonyfa legalsó ága, amelyet tőben választunk le a törzsről, mielőtt a tartólábakat felszereljük.*

(*6 pont*) Közli: *Horváth Norbert,* Budapest

Megoldás. *1. Felhasznált eszközök:*
– 3 db hosszabb fenyőág, amit a törzsről vágtunk le,
– mérőszalag,
– metszőolló,
– szék (aminek a háttámláját használjuk alátámasztásnak).

2. A mérés menete. Ha egy test alátámasztási pontja a súlypontja alatt van, akkor a test egyensúlyban van, tehát nyugalomban marad. A súlypont helyének megállapításánál ezt a tényt használjuk ki. A mérendő ágat helyezzük a szék háttámlájának tetejére úgy, hogy egyensúlyban legyen (ne billenjen el), vagyis a súlypontja kerüljön az alátámasztási felület fölé. Mivel a szék háttámlája elég keskeny, a súlypont helyzete viszonylag pontosan meghatározható. Ugyanezt meg lehetne tenni a „klasszikus” módon is, amelynél az ujjunkon egyensúlyozzuk az ágat, de ennél számos technikai nehézség lépne fel (pl. a tüskék akadályozzák az ujjunk csúsztatását).

Ezután a mérőszalaggal lemérjük a súlypont és az ág töve közötti távolságot, majd az ág teljes hosszát. Az adatokat feljegyezzük, majd kiszámoljuk a távolságok arányát. A következő lépésben vágjunk le három oldalágat, és végezzük el a mérést azokra is az előbb ismertetett módon. Ezt az egészet ismételjük meg a másik két nagy ág esetében is, majd foglaljuk táblázatba az adatokat.

3. Mérési adatok:

Megnevezés	hossz [cm]	súlypont [cm]	arány
1. főág	82	38	0,46
1.1 mellékág	53	28	0,53
1.2 mellékág	59	28	0,47
1.3 mellékág	48	24	0,50

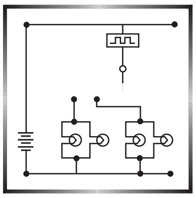
Megnevezés	hossz [cm]	súlypont [cm]	arány
2. főág	79	40	0,51
2.1 mellékág	51	26	0,51
2.2 mellékág	54	27	0,50
2.3 mellékág	28	20	0,71
3. főág	63	30	0,48
3.1 mellékág	38	17	0,45
3.2 mellékág	53	26	0,49
3.3 mellékág	40	20	0,50

Az adatokból megállapíthatjuk, hogy a súlypont az ág méretétől és alakjától függetlenül jó közelítéssel az ág felénél helyezkedik el. (Ez elég meglepő, mert egy homogén háromszög-lemez súlypontja a magasság harmadánál található. A két eset közötti eltérést a tüskék nem egyenletes eloszlása okozhatja.)

4. Hibalehetőségek, hibabecslés. A hosszúságmérés pontossága kb. 0,5 cm (ezért az adatokat centiméterre kerekítve adtuk meg). Ennél pontosabban azért nem lehetett mérni, mert a tűlevelek akadályozták az ág finom mozgatását, és a szék karfájának mérete is korlátozta a hosszúságok mérését. Ezeknél lényegesebb volt a különböző ágaknál mért adatok szórása. A kérdezett arányszámra végül azt mondhatjuk, hogy 50 ± 5 százalék közötti érték.

Jeszenői Sára (Kecskemét, Katona J. Gimn., 10. évf.)

13 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Csonka Illés, Horváth Anikó, Jeszenői Sára és Ludányi Levente megoldása. Kicsit hiányos (5 pont) 4, hiányos (3–4 pont) 5 dolgozat.



Fizika gyakorlat megoldása

G. 733. *Egy kútból vizet húzunk fel. A kút mélysége* 10 méter, *a veder tömege* 2 kg, *a lánc tömege* 3 kg, *és a veder űrtartalma* 12 liter. *Mekkora a vízhúzás mechanikai hatásfoka? Függ-e a hatásfok a kút mélységétől?*

(*3 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

Megoldás. A vízhúzás hatékonysága a vízen végzett munka (ebben az esetben a víz helyzeti energiájának változása) és az összes elvégzett munka hányadosa:

$$\eta = \frac{W_{\text{hasznos}}}{W_{\text{összes}}}. \qquad (1)$$

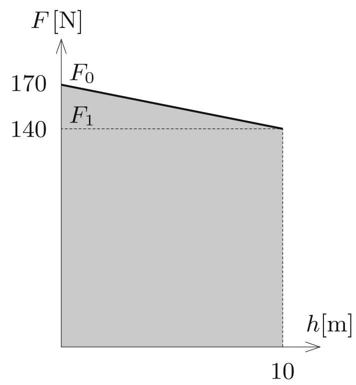
A folyamat elején a láncot

$$F_0 = (m_{\text{víz}} + m_{\text{vödör}} + m_{\text{lánc}})g$$

erővel kell húzzuk, a végén azonban már

$$F_1 = (m_{\text{víz}} + m_{\text{vödör}})g$$

erő is elegendő, hiszen a láncot már nem kell tartanunk. A vödör lassú emelése során a gyorsulás elhanyagolható, az erő nagysága csak a lánc hosszváltozása miatt változik.



Az *ábra* a húzóerőt mutatja a vízfelszín feletti magasság függvényében. Az általunk végzett munka a trapéz területével egyenlő:

$$W_{\text{összes}} = \frac{(m_{\text{víz}} + m_{\text{vödör}} + m_{\text{lánc}})g + (m_{\text{víz}} + m_{\text{vödör}})g}{2}\Delta h.$$

A hasznos munka a víz helyzeti energiájának növekedésével egyezik meg:

$$W_{\text{hasznos}} = m_{\text{víz}} g \Delta h,$$

ahol $m_{\text{víz}} = V_{\text{vödör}} \varrho_{\text{víz}}$, és $\Delta h = 10$ m az emelés magassága, vagyis a kút mélysége. A hatásfok tehát (1) alapján:

$$\eta = \frac{2m_{\text{víz}}}{(m_{\text{víz}} + m_{\text{vödör}} + m_{\text{lánc}}) + (m_{\text{víz}} + m_{\text{vödör}})}. \tag{2}$$

Behelyettesítve az adatokat:

$$\eta = \frac{2 \cdot 12\ \text{dm}^3 \cdot 1\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}}{2 \cdot \left(12\ \text{dm}^3 \cdot 1\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} + 2\ \text{kg}\right) + 3\ \text{kg}} = \frac{24}{31} \approx 0{,}77.$$

A vízhúzás hatásfoka tehát kb. 77%.

A (2) összefüggésben egyetlen paraméter van, ami függ a kút mélységétől, ez a *lánc tömege*, hiszen minél mélyebb a kút, annál hosszabb, annál nehezebb lánc kell. Ha az arányossági tényezőt c jelöli:

$$m_{\text{lánc}} = c\Delta h,$$

vagyis a lánc tömege méterenként 0,3 kg, akkor a hatásfok:

$$\eta = \frac{2m_{\text{víz}}}{(m_{\text{víz}} + m_{\text{vödör}} + c\Delta h) + (m_{\text{víz}} + m_{\text{vödör}})},$$

ami a kút mélységének növelésével *csökken.*

Czirók Tamás (Budapest, Eötvös J. Gimn., 10. évf.)

39 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 20, hiányos (1 pont) 5 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása

P. 5255. *Egy igen hosszú,* $m=10$ g *tömegű, egyenes szigetelőszál középpontja felett, attól* $d=5$ cm*-re egy* $Q=3\cdot10^{-7}$ C *töltésű, pontszerű test van rögzítve. A szigetelőszálat is rögzítjük, majd egyenletes töltéseloszlással* $\sigma=-2\cdot10^{-6}$ C/m *lineáris töltéssűrűséggel feltöltjük. Mekkora gyorsulással indul el a szál, ha rögzítését lökésmentesen feloldjuk?*

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

Megoldás. Határozzuk meg az ℓ hosszúságú, töltött szigetelőszál elektromos terét attól d távolságban, ahol $\ell\gg d$!

Vegyünk fel egy d sugarú, ℓ hosszú hengert, amely teljesen körülfogja a szigetelőszálat, és a szál tengelye egybeesik a henger szimmetriatengelyével. Írjuk fel erre az elrendezésre az elektrosztatika Gauss-féle fluxustörvényét. A levegő permittivitása jó közelítéssel megegyezik a vákuuméval, illetve $\ell\gg d$ miatt a henger lapjain kilépő elektromos fluxus elhanyagolható, továbbá a hengerpaláston az elektromos erőtér nagysága – jó közelítéssel – állandó E nagyságúnak tekinthető, ezért

$$\sigma\ell\cdot\frac{1}{\varepsilon_0}=E\cdot 2d\pi\cdot\ell,$$

vagyis az elektromos térerősség a száltól d távolságban

$$E=\frac{\sigma}{2d\pi\varepsilon_0}.$$

Így a Q töltésű testre ható erő:

$$F=QE=\frac{Q\,\sigma}{2d\pi\varepsilon_0}.$$

Mivel Q és σ ellentétes előjelűek, a szál és a rögzített ponttöltés között ható erő *vonzóerő.* Newton III. törvénye alapján a szálra is éppen F nagyságú, felfelé mutató elektroszatikus erő hat. Ehhez (előjelesen) hozzáadódik az mg nagyságú, lefelé mutató nehézségi erő.

Amikor feloldjuk a szál rögzítését, akkor – Newton második törvényéből következően – a szál az $F-mg$ erő hatására

$$a=\frac{F}{m}-g=\frac{|Q\,\sigma|}{2d\pi\varepsilon_0\,m}-g\approx 11{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

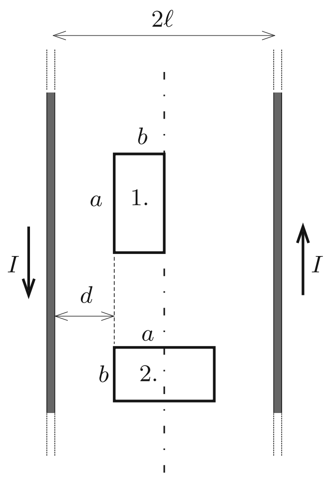
gyorsulással indul el függőlegesen *felfelé.* (A megoldás során feltételeztük, hogy a töltött szál mindvégig vízszintes helyzetű.)

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

49 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 25, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 4, nem versenyszerű 4 dolgozat.

P. 5279. *Két nagyon hosszú, egymástól* 2ℓ *távol lévő egyenes vezetőhuzal mindegyikében* I *erősségű, de ellentétes irányú áram folyik. A vezetők síkjában, az egyik vezetőtől* $d=\ell-b$ *távolságban egy* a *és* b *oldalhosszúságú téglalap alakú vezetőkeretet helyeztünk el, először az* ábrán *látható* 1-es, *majd a* 2-es *helyzetben* $(0<a-b<\ell)$. *Melyik esetben nagyobb a kereten átmenő mágneses fluxus?*

(*4 pont*) *Cserti József* (Budapest) feladata nyomán



Megoldás. Egyetlen vezetőtől származó indukcióvektor nagysága: $B(r)=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, ahol r a vezetőtől mért távolság. A két egyenes vezető áramától származó indukcióvektorok – a jobbkéz-szabály szerint – ugyanabból az irányból metszik a vezetőkeret felületét, ezért a téglalapok minden pontjában összeadódik a két vezető mágneses indukcióvektora. Ha egy, a vezetők síkjában a felezővonaltól x távolságra lévő pontot nézünk, akkor ott az eredő indukcióvektor nagysága

$$B(x)=\frac{\mu_0 I}{2\pi(\ell-x)}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(\ell+x)}=\text{állandó}\cdot\frac{1}{\ell^2-x^2}.$$

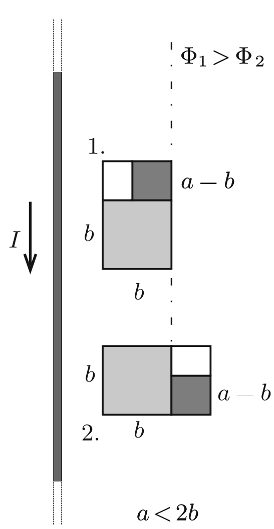
Ezek szerint minél nagyobb x (minél messzebb van a pont a felezővonaltól), annál nagyobb lesz azon a helyen B értéke. A továbbiakban két állítás érvényességét fogjuk felhasználni.

(*i*) Ha két egybevágó alakzat az áramok felezővonalához viszonyítva ugyanúgy (vagy a tükrözött helyzetben) helyezkedik el, akkor a rajtuk áthaladó mágneses fluxus megegyezik. Nevezzük ezt A állításnak.

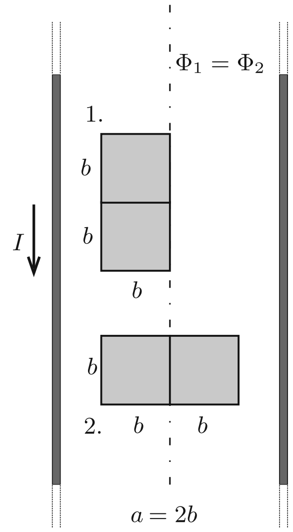
(*ii*) Ha van két olyan alakzatunk, amelyek által lefedett terület ugyanakkora, továbbá az egyik alakzat bármelyik pontját tekintve ott a mágneses indukcióvektor nagysága nagyobb, mint a másik alakzat bármelyik pontjában vett indukcióvektor nagysága, akkor az első alakzathoz tartozó mágneses fluxus biztosan nagyobb a másik fluxusánál. Legyen ez a B állítás.

A megadott határok között három esetet fogunk vizsgálni.

1. Ha $a<2b$, akkor az 1-es és a 2-es helyzetű vezetőkeretet az *1. ábrán* látható módon darabolhatjuk fel két négyzetre és egy téglalapra. A halványan, illetve sötétebben jelölt négyzetekre vonatkozó fluxus – az A esetnek megfelelően – páronként megegyezik, a két helyzetnek megfelelő teljes mágneses fluxus „kisebb-nagyobb viszonyát” a fehér téglalapok fogják eldönteni. Az 1-es helyzetben a fehér téglalap minden pontja távolabb van a szimmetriatengelytől, mint a 2-es helyzetben, tehát – a B állításnak megfelelően – kijelenthetjük, hogy $\Phi_1>\Phi_2$.

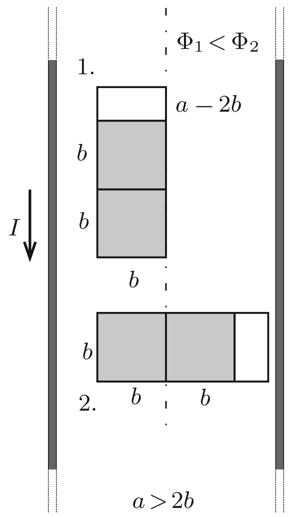


1. ábra



2. ábra

2. Ha $a=2b$, akkor a keret által határolt téglalap mindkét helyzetben két egybevágó négyzetre darabolható (*2. ábra*), így – az A állítás szerint – fennáll, hogy $\Phi_1 = \Phi_2$.



3. ábra

3. Amennyiben $a>2b$, a vezetőkeretek téglalapjai a *3. ábrán* látható módon darabolhatók kétkét négyzetre és egy-egy téglalapra. A négyzeteken áthaladó mágneses fluxus a két esetben megegyezik (A állítás), a téglalapon áthaladó fluxus pedig (a B állításnak megfelelően) az 1. helyzetben biztosan kisebb, mint a 2. helyzetben, tehát az eredő fluxusok viszonya: $\Phi_1 < \Phi_2$.

Páhán Anita Dalma (Budapest, Eötvös J. Gimn., 11. évf.)

15 dolgozat érkezett. Helyes Mihalik Bálint, Páhán Anita Dalma, Somlán Gellért, Téglás Panna és Tóth Ábel megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 4 dolgozat.

P. 5285. *Lapos, korong alakú, m tömegű test vízszintes, érdes felületen nyugszik. Egy D direkciós erejű rugó egyik végét a korong közepéhez erősítjük, majd a másik végét vízszintes irányban lassan húzni kezdjük. Kezdetben a rugó feszítetlen. A test egy ideig mozdulatlan, majd megindul, és egyenes vonalban mozog. A korong megindulásának pillanatában a rugó másik végét rögzítjük.*

a) Mekkora lesz a test maximális sebessége?

b) Mennyi idő alatt éri el a maximális sebességet?

c) Mekkora távolságot tesz meg a korong a maximális sebesség eléréséig?

d) Hogyan mozog a korong a továbbiakban, feltételezve, hogy a rugó mindig egyenes marad?

A korong és az érdes felület között a csúszási súrlódási együttható μ, a tapadási súrlódás együtthatója pedig μ_0 ($\mu_0 > \mu$).

(*5 pont*) Közli: *Wiedemann László,* Budapest

Megoldás. *a*) Először számítsuk ki, hogy mekkora lesz a rugó x_0 megnyúlása a test megindulása előtti pillanatban. A testre függőleges irányban két erő hat ebben a pillanatban: az mg nagyságú nehézségi erő, valamint az érdes felület által kifejtett N nagyságú nyomóerő. A test függőleges irányban nem gyorsul, vagyis a két erő kiegyenlíti egymást:

$$mg = N.$$

A testre vízszintes irányban is két erő hat: a rugó Dx_0 nagyságú húzóereje és a tapadási súrlódási erő. Az utóbbi nagysága a test megindulása előtti pillanatban a legnagyobb:

$$F_{\max} = \mu_0 N = \mu_0 mg.$$

Ebben a pillanatban a test még nem gyorsul, vagyis a két erő kiegyenlíti egymást:

$$Dx_0 = \mu_0 mg \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = \frac{\mu_0 mg}{D}.$$

A testre a megindulása után is négy erő hat. Függőlegesen ugyanaz a kettő, ami eddig, és ezek továbbra is kiegyenlítik egymást ($mg = N$), vízszintesen pedig a rugó által kifejtett erő, valamint az

$$S = \mu N = \mu mg$$

nagyságú súrlódási erő. A rugóerő kezdetben gyorsítja a testet, a súrlódás pedig lassítja. A korong sebessége addig növekszik, amíg a két erő egyenlővé nem válik. Legyen ebben az „egyensúlyi" helyzetben a rugó megnyúlása x_1.

$$Dx_1 = \mu mg \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{\mu mg}{D}.$$

Írjuk fel ezután a munkatételt a test megindulása és a maximális $v_{\max}$ sebességű állapot közötti folyamatra. A rugó $x_0 - x_1$ úton gyorsítja a testet, a súrlódás pedig ugyanekkora úton lassítja.

$$\sum W = \Delta E_{\text{mozg.}},$$

vagyis (a rugóerő átlagos értékével számolva)

$$\frac{Dx_0 + Dx_1}{2}(x_0 - x_1) - \mu mg(x_0 - x_1) = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 - 0.$$

Innen (behelyettesítve az x_0-ra és x_1-re kapott kifejezéseket) a maximális sebességre a következő összefüggést kapjuk:

$$v_{\max} = (\mu_0 - \mu)g\sqrt{\frac{m}{D}}.$$

b) A test a megindulása után harmonikus rezgőmozgást fog végezni a megállásáig, hiszen a rá ható eredő erő az elmozdulással arányosan változik. Ennek a rezgőmozgásnak a periódusideje*:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}.$$

A test nulla kezdősebességgel indul, így a periódusidő negyede, vagyis

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{D}}$$

idő múlva lesz a sebessége maximális.

c) A rugó megnyúlása a mozgás kezdetekor x_0, a test legnagyobb sebességénél pedig x_1, vagyis ezalatt a korong

$$\Delta x = x_0 - x_1 = (\mu_0 - \mu)\frac{mg}{D}$$

távolságot tesz meg.

d) A korong a további mozgása során egyre jobban lassul, és valahol megáll. Jelöljük a rugó megnyúlását ebben a helyzetben x_2-vel. Ha $x_2 > 0$, akkor a korong megállásának pillanatában a rugó *megnyújtott,* $x_2 = 0$ esetén *feszítetlen,* $x_2 < 0$ esetben pedig összenyomott állapotban lesz. Elvben előfordulhatna, hogy a korong ismét megindul, és még további rezgéseket végez. Megmutatjuk, hogy nem ez valósul meg, hanem a korong a megállása után *megtapad* az érdes felületen.

Írjuk fel ismét a munkatételt, de most a korong megindulása és a megállása közötti mozgásra:

$$\frac{Dx_0 + Dx_2}{2}(x_0 - x_2) - \mu mg(x_0 - x_2) = 0 - 0.$$

Ez x_2-re nézve másodfokú egyenlet, amelynek egyik gyöke: $x_2 = x_0$. Ez az indulás pillanatának állapota, számunkra érdektelen. A másik gyök:

$$x_2 = \frac{2\mu mg}{D} - x_0,$$

azaz x_0 korábban kiszámított értékét felhasználva

$$x_2 = \frac{mg}{D}(2\mu - \mu_0).$$

*A súrlódás jelenléte nem befolyásolja a rezgésidőt, csak az egyensúly helyzetét tolja el a súrlódásmentes esethez képest.

A korong teljes elmozdulása az indulásától a megállásáig:

$$s = x_0 - x_2 = \frac{mg}{D}\mu_0 - \frac{mg}{D}(2\mu - \mu_0) = 2\Delta x,$$

vagyis éppen kétszer akkora, mint az indulástól a maximális sebesség eléréséig megtett út.

A súrlódási együtthatók számértékétől függően elvben három lehetőség valósulhat meg.

(*i*) Ha $\mu_0 < 2\mu$, akkor $x_2 > 0$, és a rugóerő $Dx_2 = mg(2\mu - \mu_0)$. Ez biztosan kisebb, mint a tapadási súrlódási erő legnagyobb értéke:

$$mg(2\mu - \mu_0) < mg\mu_0, \qquad \text{hiszen} \qquad \mu < \mu_0.$$

A korong tehát a továbbiakban nem mozdul meg.

(*ii*) Ha $\mu_0 = 2\mu$, akkor $x_2 = 0$, tehát a rugó feszítetlen állapotban van a megállás pillanatában, és nyilvánvaló, hogy a korong a továbbiakban nyugalomban marad.

(*iii*) Ha $\mu_0 > 2\mu$, akkor $x_2 < 0$, vagyis az összenyomott rugó

$$D|x_2| = mg(\mu_0 - 2\mu)$$

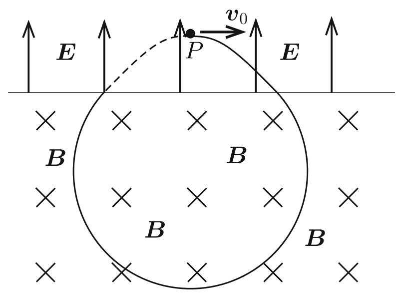
nagyságú tolóerőt fejt ki a korongra. Ez kisebb, mint a tapadási súrlódási erő legnagyobb értéke, hiszen $\mu_0 - 2\mu < \mu_0$, tehát a korong nem fog megmozdulni.

Toronyi András (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 11. évf.)
dolgozatának felhasználásával

Megjegyzés. A különböző anyagok súrlódási együtthatóit összevetve megállapíthatjuk, hogy nagy valószínűséggel az (*i*) eset valósul meg, de a másik két lehetőséget sem tiltja semmilyen fizikai törvény.

49 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 14, hiányos (1–3 pont) 24, hibás 2 dolgozat.

P. 5290. *Homogén elektromos mező P pontjából egy pontszerű, negatív töltésű részecskét lövünk ki az elektromos térre merőleges $\boldsymbol{v}_0$ kezdősebességgel. Az $\boldsymbol{E}$ elektromos térerősségre és a $\boldsymbol{v}_0$ sebességvektorra merőleges, homogén mágneses mező is jelen van. A kétféle mezőt egy, az elektromos térerősségre merőleges sík választja el egymástól az ábra szerint. Mekkora a mágneses indukcióvektor nagysága, ha a részecske visszatér a P pontba?*



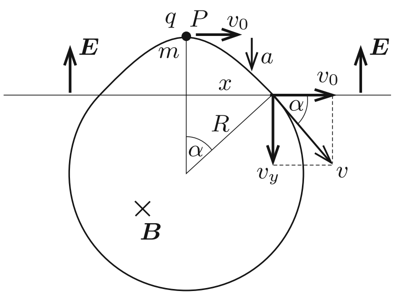
(Az egész elrendezés vákuumban van, és a nehézségi erő hatása a részecskére elhanyagolható.)

(*5 pont*) Közli: *Németh László,* Fonyód

Megoldás. A részecske a homogén elektromos mezőben egy parabola mentén, a homogén mágneses mezőben pedig valamekkora R sugarú körpálya mentén mozog. (Az elektromos térerősséget tekintsük függőlegesen felfelé mutató vektornak, a részecske kezdősebessége ekkor vízszintes irányú vektor. Ezt megtehetjük, hiszen a részecskére ható nehézségi erő elhanyagolható, emiatt lényegtelen az egész elrendezés térbeli helyzete.) A részecske negatív töltése miatt az elektromos térben lefelé mutató erő hat rá, a mágneses térben pedig a körpálya középpontja felé mutató Lorentz-erő határozza meg a mozgását.

A részecske akkor tér vissza a P pontba, ha a kétféle mező határfelületénél a sebessége akkora α szöget zár be a vízszintessel, amelyre teljesül, hogy

$$\sin\alpha = \frac{x}{R},$$



ahol a vízszintes elmozdulás a fél parabolaív menti mozgás idejével kifejezve

$$x = v_0 t$$

(lásd az *ábrát*). Emellett

$$\sin\alpha = \frac{v_y}{v},$$

ahol v_y a síkhoz való érkezés v nagyságú sebességének függőleges komponense.

Az elektromos térben egy m tömegű és q töltésű részecske $a = Eq/m$ gyorsulással mozog, így

$$v_y = at = \frac{Eq}{m}t = \frac{Eq}{m}\cdot\frac{x}{v_0} = \frac{Eq}{m}\cdot\frac{R\sin\alpha}{v_0} = \frac{Eq}{m}\cdot\frac{R}{v_0}\cdot\frac{v_y}{v}.$$

Innen kifejezhetjük a körpályán mozgó részecske sebességének nagyságát:

$$v = \frac{EqR}{mv_0}.$$

A mágneses térben mozgó részecske mozgásegyenlete:

$$Bqv = \frac{mv^2}{R}, \quad \text{ahonnan} \quad B = \frac{mv}{qR} = m\frac{EqR}{mv_0}\cdot\frac{1}{qR} = \frac{E}{v_0}.$$

A mágneses indukcióvektor nagysága tehát $B = E/v_0$ kell legyen, ekkor valósulhat meg a „tojás” alakú zárt pálya.

Selmi Bálint (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

38 dolgozat érkezett. Helyes 32 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (2–3 pont) 3, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5293. *Egy feketedoboz tetején sok kivezetés van. Tudjuk, hogy belül minden kivezetéspár közé egy-egy ismeretlen ellenállást forrasztottak. Hogyan mérhetjük meg két tetszőleges pont közé kötött ellenállás értékét, ha csupán ellenállásmérőnk és tetszőleges számú röpzsinórunk van?*

(*6 pont*) Közli: *Vladár Károly,* Kiskunhalas

Megoldás. Az ellenállásmérővel megmérhetjük a rendszer két tetszőleges kivezetése közötti eredő ellenállást. A röpzsinórok ellenállását hanyagoljuk el.

Jelöljük R_{ij}-vel az i. és a j. kivezetés közé kötött ellenállást. Legyen A és B az a két pont, amelyek közé kapcsolt R_{AB} ellenállás nagyságát szeretnénk meghatározni. Megmutatjuk, hogy három különböző ellenállásmérés eredményéből R_{AB} kiszámítható. Az ellenállásmérőt mindvégig az A és B kivezetések közé fogjuk kapcsolni, csupán a röpzsinórok számán és helyzetén változtatunk. Az A és B pontok között mért eredő ellenállás az egyes esetekben legyen rendre R_1, R_2 és R_3.

1. mérés. Kapcsoljunk röpzsinórokat A és minden $i \neq B$ kivezetés közé, vagyis zárjuk rövidre B kivételével az összes kivezetést. Ekkor a röpzsinórok ellenállását elhanyagolva B-n kívül minden kivezetés ekvipotenciális lesz. Az ekvipotenciális kivezetések és B között minden B-be futó ellenállás párhuzamos kapcsolásra kerül, és a mérőműszer által mutatott R_1 eredő ellenállásra fennáll:

$$\frac{1}{R_1} = \sum_{i,\ i\neq B} \frac{1}{R_{iB}}. \tag{1}$$

2. mérés. Ugyanazt az elrendezést valósítjuk meg, mint az 1. esetben, annyi módosítással, hogy ezúttal az A-ból induló ellenállások párhuzamos kapcsolását valósítjuk meg azzal, hogy B-vel összekapcsolunk minden A-tól eltérő kivezetést. Ezáltal B és minden más, A-tól különböző kivezetési pont lesz ekvipotenciális. Az ekkor A és B között mért R_2 eredő ellenállásra:

$$\frac{1}{R_2} = \sum_{j,\ j\neq A} \frac{1}{R_{Aj}}. \tag{2}$$

3. mérés. Ezúttal minden i, $i \neq A$, $i \neq B$ kivezetést kapcsolunk össze röpzsinórokkal ekvipotenciálissá. Ez az elrendezés azonos azzal, mintha R_{AB} kivételével minden R_{Aj} ellenállás A-ból párhuzamosan egy P pontba lenne kötve, minden R_{iB}, $i \neq A$ pedig P-ből párhuzamosan B-be; ezek mellett pedig természetesen R_{AB} megmarad A és B kivezetések között. Ekkor a mért R_3 ellenállásra:

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{R_{AP} + R_{PB}}, \tag{3}$$

ahol

$$\frac{1}{R_{AP}} = \sum_{j,\ j\neq A,\ j\neq B} \frac{1}{R_{Aj}} = \sum_{j,\ j\neq A} \frac{1}{R_{Aj}} - \frac{1}{R_{AB}}, \tag{4}$$

azaz (2) felhasználásával

$$\frac{1}{R_{AP}} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_{AB}}.$$

Hasonlóan kapjuk (1) felhasználásával, hogy

$$\frac{1}{R_{PB}}=\sum_{i,\ i\neq A,\ i\neq B}\frac{1}{R_{iB}}=\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_{AB}},$$

tehát (3) az alábbira módosul:

$$\frac{1}{R_3}=\frac{1}{R_{AB}}+\frac{1}{\dfrac{1}{\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_{AB}}}+\dfrac{1}{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_{AB}}}}. \tag{4}$$

A (4) összefüggés (meglehetősen bonyolult módon) már csak a három ismert mérési adatot és a kérdezett R_{AB}-t tartalmazza. Fejezzük ki ez utóbbit! (4) átalakításával:

$$\frac{1}{R_3}=\frac{1}{R_{AB}}+\frac{\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_{AB}}\right)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_{AB}}\right)}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{2}{R_{AB}}}.$$

Bevezetve a $p=\frac{1}{R_{AB}}$ jelölést adódik, hogy

$$\frac{1}{R_3}=p+\frac{p^2-p\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{R_1R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-2p}.$$

A jobb oldali tört nevezőjével szorozva a

$$p\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-2p^2+p^2-p\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{R_1R_2}=\frac{1}{R_1R_3}+\frac{1}{R_2R_3}-\frac{2p}{R_3},$$

vagyis a

$$p^2-p\frac{2}{R_3}+\frac{1}{R_1R_3}+\frac{1}{R_2R_3}-\frac{1}{R_1R_2}=0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek megoldása (kihasználva, hogy $R_{AB}>R_3$ miatt $\frac{1}{R_{AB}}<\frac{1}{R_3}$):

$$\frac{1}{R_{AB}}=\frac{1}{R_3}-\sqrt{\frac{1}{R_3^2}-\frac{1}{R_1R_3}-\frac{1}{R_2R_3}+\frac{1}{R_1R_2}}.$$

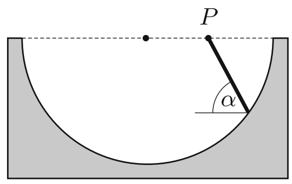
A kérdéses ellenállás nagysága tehát a mérhető mennyiségek bevezetett jelölésével így írható fel:

$$R_{AB}=\frac{R_3}{1-\sqrt{1+\frac{R_3^2}{R_1R_2}-\frac{R_3}{R_1}-\frac{R_3}{R_2}}}.$$

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

10 dolgozat érkezett. Helyes Gurzó József, Kozaróczy Csaba, Tóth Ábel és Varga Vázsony megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1–2 pont) 3, hibás 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5294. *Egy félhenger alakú vályú tengelye vízszintes. A vályú egyik vízszintes sugarának P felezőpontján át különböző hajlásszögű lejtőket fektetünk. Mekkora annak a lejtőnek a hajlásszöge, amelyen egy súrlódásmentesen lecsúszó piciny test leghamarabb éri el a vályú felületét?*



(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

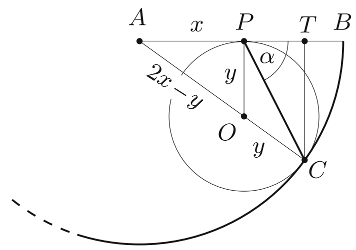
Megoldás. Használjuk fel a feladat megoldásához az ún. *Galilei-kört,* ami a P pontra illeszkedő, függőleges síkban fekvő kör, amelynek a középpontját P-vel összekötő egyenes függőleges. Ha a P ponton áthaladó, különböző meredekségű húrok (lejtők) mentén egyszerre egy-egy súrlódásmentesen mozgó, kicsiny testet indítunk el kezdősebesség nélkül, akkor ezek a testek ugyanannyi idő alatt érik el a körvonalat – állította Galilei. A bizonyításhoz elég annyit tudnunk, hogy az r sugarú kör α hajlásszögű húrjának hossza $\ell = 2r\sin\alpha$, a rajta mozgó tömegpont gyorsulása pedig $a = g\sin\alpha$. Így a lecsúszás ideje:

$$t = \sqrt{\frac{2\ell}{a}} = \sqrt{\frac{4r\sin\alpha}{g\sin\alpha}} = 2\sqrt{\frac{r}{g}},$$

ami valóban független α-tól, és Galilei éppen ezt állította.

A fenti megfontolásból az is következik, hogy a különböző lejtőkön mozgó testek minden időpillanatban egy olyan körön helyezkednek el, amelynek legfelső pontja a P pont, a sugara pedig az eltelt idő négyzetével arányosan nő. Esetünkben elég megkeresnünk azt a legkisebb sugarú kört, aminek a legfelső pontja P, és érinti a vályú síkmetszetét, vagyis a feladat ábráján látható félkört.

Feladatunk az, hogy meghatározzuk az érintési pont és P közötti húrnak a vízszintessel bezárt α szögét (lásd az *ábrát*).



Mivel P a félhenger $2x$-szel jelölt sugarának felezőpontja, így $AP = PB = x$, valamint $AC = 2x$. Az O középpontú, OP sugarú Galilei-kör a C pontban érinti a vályú félkörét. A két kör középpontját összekötő egyenes átmegy az érintési ponton, tehát A, C és O egy egyenesre esnek. A Galilei-kör sugarát jelöljük y-nal.

A körnek P a legfelső pontja, tehát OP függőleges, azaz merőleges a vízszintes AB-re, ezért az AOP háromszög derékszögű. A Pitagorasz-tétel szerint

$$AP^2 + OP^2 = AO^2,$$

vagyis

$$x^2 + y^2 = (2x - y)^2,$$

ahonnan

$$3x^2 - 4xy = x(3x - 4y) = 0$$

következik, és mivel $x \neq 0$, fennáll:

$$y = \frac{3}{4}x.$$

Állítsunk C-ből merőlegest az AB szakaszra, a talppontja legyen T. Ekkor a párhuzamos szelők tétele szerint

$$\frac{AP}{AO} = \frac{AT}{AC}, \qquad \text{azaz} \qquad AT = \frac{2x^2}{2x-y} = \frac{2x^2}{2x - \frac{3}{4}x} = \frac{8}{5}x.$$

AT és AC hosszából a Pitagorasz-tétel segítségével kiszámíthatjuk TC-t:

$$TC = \sqrt{AC^2 - AT^2} = \sqrt{(2x)^2 - \left(\frac{8}{5}x\right)^2} = \frac{6}{5}x.$$

Tudjuk még, hogy

$$PT = AT - AP = \frac{8}{5}x - x = \frac{3}{5}x,$$

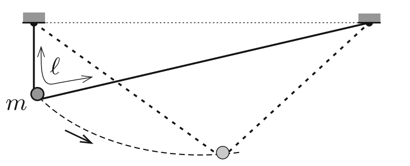
és így a lejtő keresett hajlásszögére

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{TC}{PT} = \frac{\frac{6}{5}x}{\frac{3}{5}x} = 2, \qquad \text{vagyis} \qquad \alpha = 63{,}4^\circ$$

adódik.

Páhán Anita Dalma (Budapest, Eötvös J. Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

52 dolgozat érkezett. Helyes 29 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 5, hiányos (1–3 pont) 11, hibás 7 dolgozat.



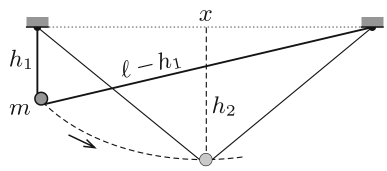
P. 5297. *Egy könnyű, hajlékony, nyújthatatlan damilszál hossza $\ell = 80$ cm. A szál végeit azonos magasságban, egymástól valamekkora távolságban rögzítjük. A szálon egy $m = 5$ g tömegű, közepén átfúrt acélgolyó tud csúszni. Az acélgolyót olyan helyzetből indítjuk, aminél a feszes damilszál egyik része függőleges.*

a) Legfeljebb mekkora sebességre gyorsul fel az acélgolyó, ha a súrlódás és a közegellenállás elhanyagolható?

b) Mekkora erő feszíti a damilt, amikor az acélgolyó sebessége maximális?

(Az acélgolyót tekintsük tömegpontnak!)

(*5 pont*) *Holics László* mérési feladata nyomán



1. ábra

Megoldás. *a*) Jelöljük a damilszál rögzített végpontjainak távolságát x-szel, és fejezzük ki x segítségével, hogy legfeljebb mekkora lehet az acélgolyó helyzeti energiájának megváltozása. A kezdeti elrendezésben az *1. ábrán* h_1-gyel jelölt távolságra felírt Pitagorasz-tétel:

$$x^2 + h_1^2 = (\ell - h_1)^2,$$

ahonnan

$$h_1(x) = \frac{\ell^2 - x^2}{2\ell}. \tag{1}$$

Adott x mellett az acélgolyó legmélyebb helyzetében (amikor a két damilszál egyforma hosszú) a h_2 távolságot ismét a Pitagorasz-tétel alkalmazásával kapjuk meg:

$$\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = h_2^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

vagyis

$$h_2(x) = \frac{\sqrt{\ell^2 - x^2}}{2}. \tag{2}$$

A golyó gravitációs helyzeti energiájának csökkenése (1) és (2) felhasználásával:

$$\Delta E = mg(h_2 - h_1) = mg\left(\frac{\sqrt{\ell^2 - x^2}}{2} - \frac{\ell^2 - x^2}{2\ell}\right).$$

Mivel a súrlódás és a közegellenállás elhanyagolható, a mechanikai energia állandó marad, tehát a golyó legnagyobb sebességére fennáll:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h_2 - h_1),$$

azaz

$$v^2(x) = g\left(\frac{\sqrt{\ell^2 - x^2}}{2} - \frac{\ell^2 - x^2}{2\ell}\right). \tag{3}$$

Vajon mikor (milyen x mellett) legnagyobb a sebesség (és ezzel együtt a sebesség négyzete)? A (3) összefüggés így is felírható:

$$v^2(x) = \frac{g}{\ell} \cdot \sqrt{\ell^2 - x^2}\left(\ell - \sqrt{\ell^2 - x^2}\,\right),$$

amelyre felírva a számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$v^2(x) \leqslant \frac{g}{\ell}\left(\frac{\sqrt{\ell^2 - x^2} + \ell - \sqrt{\ell^2 - x^2}}{2}\right)^2 = \frac{g\ell}{4}.$$

Az acélgolyó legnagyobb sebessége tehát

$$v_{\max} = \frac{\sqrt{g\ell}}{2} \approx 1{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}. \tag{4}$$

Az egyenlőség (4)-ben akkor teljesül, ha

$$\ell - \sqrt{\ell^2 - x^2} = \sqrt{\ell^2 - x^2},$$

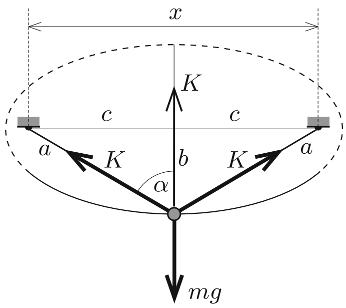
vagyis

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell \approx 0{,}69\ \text{m}.$$

A damilvégeket ekkora távolságban rögzítve a golyó legmélyebb helyzetében a damilszálak a függőlegessel

$$\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = 60^\circ\text{-os},$$

egymással pedig 120°-os szöget zárnak be.



2. ábra

b) Mivel a damilszál nem nyúlik meg, az acélgolyó ellipszispályán fog mozogni, hiszen a két rögzített végponttól mért távolságok összege állandó (*2. ábra*). Az ellipszis paramétereit a szokásos módon jelölve:

$$x = 2c \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{x}{2} \approx 0{,}347\ \text{m},$$

$$\ell = 2a \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{\ell}{2} \approx 0{,}4\ \text{m},$$

továbbá

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = 0{,}2\ \text{m}.$$

A pálya legalsó pontjában (az ellipszis kistengelyének alsó végénél) a golyó sebessége – mint láttuk – $v = \frac{\sqrt{\ell g}}{2}$, és így a függőlegesen felfelé mutató centripetális gyorsulása $\frac{v^2}{R}$ nagyságú, ahol R az ellipszis görbületi sugara (simulókörének sugara) a kérdéses pontban. Ismert (vagy könnyen levezethető), hogy

$$R = \frac{a^2}{b} = \ell = 0{,}8\ \text{m}.$$

Ha a damilt K erő feszíti, akkor a két (egymással 120°-os szöget bezáró) fonálerő eredője függőlegesen felfelé irányuló és ugyancsak K nagyságú lesz. Az acélgolyó mozgásegyenlete:

$$K - mg = m\frac{v^2}{R}, \qquad \text{vagyis} \qquad K = mg + m\frac{v^2}{R} = \frac{5}{4}mg = 0{,}061\ \mathrm{N}.$$

Ludányi Levente (Szeged, SZTE Gyak. Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. Az ellipszis görbületi sugarát a kistengely végpontjában többféle módszerrel is meghatározhatjuk.

1. Ha egy tömegpont egymásra merőleges irányokban azonos körfrekvenciájú, a és b amplitúdójú, $\pi/2$ fáziseltolódású harmonikus rezgőmozgást végez, akkor a koordinátái:

$$x(t) = a\sin\omega t; \qquad y(t) = b\cos\omega t,$$

és a pályagörbe egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A test sebessége $t = 0$ pillanatban: $v_x = a\omega$, $v_y = 0$, a centripetális gyorsulása tehát $-y$ irányú és $A = \frac{v^2}{R}$ nagyságú, ahol R a görbületi sugár. Másrészt a rezgőmozgást végző test gyorsulása $t = 0$ időpontban: $A_x = 0$ és $A_y = -b\omega^2$. A gyorsulás kétféleképpen kiszámított értékét összevetve kapjuk, hogy

$$\frac{a^2\omega^2}{R} = b\omega^2, \qquad \text{azaz} \qquad R = \frac{a^2}{b}.$$

2. Egy R sugarú, az x tengelyt az origóban érintő kör egyenlete: $x^2 + (y - R)^2 = R^2$, azaz $2Ry = x^2 + y^2$. Ha $x \ll R$ és $y \ll R$, akkor y^2 elhanyagolhatóan kicsi $2Ry$ mellett, és a kör az

$$y = \frac{x^2}{2R}$$

egyenletű parabolával közelíthető. Nyújtsuk meg most ezt a parabolát az y tengely mentén λ-szorosára:

$$y' = \lambda\frac{x^2}{2R} = \frac{x^2}{2(R/\lambda)}.$$

Látható, hogy a λ-szoros nyújtás során a görbét legjobban közelítő (ahhoz „simuló") kör sugara az eredeti érték $1/\lambda$-szorosára változik.

Végezzük el ezt a nyújtási transzformációt egy $2a$ nagytengelyű, $2b$ kistengelyű ellipszissel, amely a kistengelyének végpontjában érinti az x tengelyt. Ha a nyújtási faktor $\lambda = a/b$, akkor a simulókör sugara $R' = \frac{b}{a}R$-re változik. De mivel a megnyújtott alakzat egy a sugarú kör, $R' = a$, vagyis $R = a^2/b$.

3. Ha egy bolygó a és b féltengelyekkel rendelkező ellipszis mentén mozog, akkor a nagytengely valamelyik végpontjánál felírt Newton-egyenletből kapjuk, hogy a görbületi sugár ott b^2/a. A kis- és nagytengely szerepét felcserélve adódik, hogy a kistengely végpontjában a simulókör sugara a^2/b.

(*G. P.*)

41 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 7, hiányos (1–3 pont) 14, hibás 3, nem versenyszerű 1 dolgozat.

Tájékoztatás nyári KöMaL fizikatáborról

Kedves KöMaL-feladatmegoldó!

Az idei tábort – amennyiben erre a jogszabályok lehetőséget adnak – meg kívánjuk szervezni. Azt gondoljuk, hogy erre reális esély mutatkozik. Természetesen azonban mindig a jogszabályi kereteknek megfelelően fogunk eljárni. A vírushelyzeti egészségügyi óvintézkedéseket figyelemmel kísérjük és minden felhívás, értesítés alkalmával erről is tájékoztatást nyújtunk a táborba jelentkezőknek.

A NYÁRI FIZIKATÁBORT
2021. június 24. és június 30. között

tervezzük megrendezni a több évtizedes hagyományokkal rendelkező Dombóvár-Gunaras Üdülőfaluban, az apartman házakban és a hozzájuk tartozó zöldterületen. A táborba várjuk olyan fizika iránt nyitott tanulók jelentkezését a 9-11. évfolyamokról, akik tudnák vállalni az aktív tábori részvételt a vele járó utazási viszontagságokkal együtt és van védettségi igazolványuk. Elsősorban a KöMaL feladatmegoldóit várjuk, de korlátozott számban más – a fizika iránt határozottan érdeklődő – diák is részt vehet a táborban, ha valamilyen versenyeredménye, vagy a fizikatanárának ajánlása ezt alátámasztja, és részvételi szándékát jelzi a `salmaria@komal.hu` címen.

A táborban (külön tanárokkal és programmal) részt vesz a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára készülő „matematikus csapat” is, és az esti előadásokat (nemzetközileg is ismert előadókkal) közösen hallgathatják meg. A táborba olyan határon túli magyar középiskolásokat is várunk, akik aktív KöMaL versenyzők, vagy a fizika iránt elkötelezett, más versenyeken eredményesen szereplő diákok.

A tábor költségét (szállás + napi háromszori étkezés, fürdőbelépő, jutalmak, előadók tiszteletdíja stb.) pályázati forrásból biztosítja a MATFUND Alapítvány.

Május közepén e-mailben küldjük el a diákoknak a tábori felhívást és a jelentkezési lapot, melyet azoknak kell elektronikusan visszaküldeniük, akik a nyári KöMaL Fizikatábor résztvevői akarnak lenni. A jelentkezési határidő: május 31.

Túljelentkezés esetén a pontverseny pillanatnyi állása, illetve a beérkezett jelentkezések sorrendje lesz a mérvadó.

Bízzunk abban, hogy a járványhelyzet kedvezően alakul, júniusra visszatér a normális élet és a nyári tábor is megtartható lesz!

Budapest, 2021. április 26.

Salamon Mária Ilona
a MATFUND Alapítvány munkatársa

Fizikából kitűzött feladatok

M. 405. Mérjük meg egy keverőcsaptelep vízhozamát először úgy, hogy a csapból hideg víz folyjék, majd úgy is, ha forró víz folyik a csapból! Mérjük meg a hideg és a forró víz hőmérsékletét is. Végül mérjük meg a csaptelep vízhozamát langyos víz esetében is, és számítsuk ki, hogy a langyos vízhozam hányad részét adja a hideg víz, illetve hányad részét adja a forró víz!

(*6 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

G. 745. Milyen halmazállapotokban jelenik meg a gyertya anyaga a gyertya égésekor?

(*3 pont*)

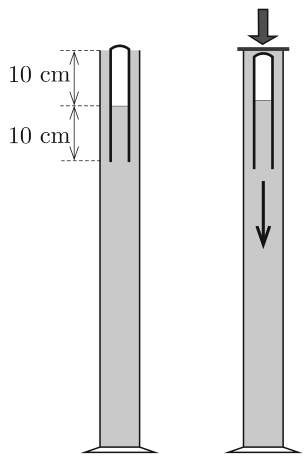
G. 746. Egy madarakat szállító kamion zárt rakterében madarak üldögélnek. Amikor a jármű hangosan dudál, a madarak megijednek. Megnő, lecsökken vagy változatlan marad a kamion és a madarak együttes súlya a madarak felrebbenésekor?

(*3 pont*)

G. 747. Tegyük fel, hogy egy kilogramm aranyból egy atomméret vastagságú réteget hozunk létre. Becsüljük meg, hogy ezzel a réteggel hány futballpályát lehetne bevonni!

(*3 pont*)

G. 748. Egy magas, vízzel telt mérőhengerbe szájával lefelé fordított, 20 cm hosszú kémcsövet (Cartesius-búvárt) helyezünk úgy, hogy a kémcső felső felében levegő, alsó felében pedig víz legyen. Ekkor a kémcső úszik, zárt, felső vége kissé kiemelkedik a mérőhengerben lévő vízből. A mérőhenger tetejét gumilappal zárjuk le, majd akkora erővel nyomjuk lefelé a gumilapot, hogy ennek hatására a kémcsőben lévő levegő nyomása 5 kPa-lal megnő. Ebben a pillanatban a „búvár” elindul lefelé.



a) A „búvár” elmerülésének a kezdetén mekkora volt a kémcsőbe zárt levegőoszlop magassága?

b) Legalább milyen magas a mérőhenger, ha a „búvár” lent marad akkor is, amikor eltávolítjuk a gumilapot a mérőhenger tetejéről?

(*4 pont*)

P. 5326. Egy ismeretlen magasságú toronyból elejtünk egy testet, amely szabadon esik. A közegellenállástól eltekintünk.

a) A torony magasságát gondolatban osszuk két egyenlő részre. Határozzuk meg a két egyenlő szakaszon számított átlagsebességek arányát!

b) Hogyan osszuk fel két részre a $h = 45$ méteres torony magasságát, hogy a második szakaszon számított átlagsebesség négyszerese legyen az első szakaszon számított átlagsebességnek?

(*4 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

P. 5327. Milyen hosszú lenne egy földi nap, ha a változatlan alakú Föld saját tengelye körüli forgása miatt „leesnénk" a Földről az Egyenlítőn?

(*3 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

P. 5328. Satuba fogunk vízszintesen egy könnyű, hosszú acélpálcát. A végére egy nehezéket erősítünk, ami a pálca végét 1 cm-rel nyomja le annak eredeti helyzetéhez képest. Ha kis kitérésű rezgésbe hozzuk, mennyi lesz a rezgésideje?

(*4 pont*) Közli: *Gelencsér Jenő,* Kaposvár

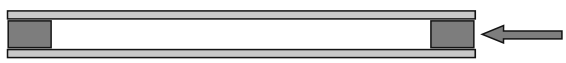
P. 5329. Vízszintes táblán egy krétadarab nyugszik. A táblát meglökve, a tábla hirtelen vízszintes, v_0 nagyságú sebességet kap, majd T idő múlva egy falnak ütközve ugyanilyen hirtelen megáll. Milyen hosszú nyomot hagy a kréta a táblán, ha a kréta és a tábla közötti súrlódási együttható μ?

(*5 pont*) A *Kvant* nyomán

P. 5330. Képzeljünk el egy folyékony halmazállapotú, gömb alakú égitestet. A belső tömegvonzás hidrosztatikai nyomást eredményez. Legyen az égitest vízből, és a gömb sugara $R = 25$ km. Mekkora a hidrosztatikai nyomás a gömb középpontjában?

(*4 pont*) Közli: *Szekeres Béla,* Budapest

P. 5331. Régi, népi játékszer a „krumplilövettyű", ami egy 12 cm hosszú, 0,3 cm^2 belső keresztmetszetű bodzacső. A cső két végét egymás után egy-egy 1 cm hosszúságú krumplihengerrel dugaszoljuk el.



Az egyik krumplidugó a lövedék, a másik pedig a dugattyú szerepét tölti be. A krumplihengerek jól tömítik a csövet, egy ilyen henger megmozdításához (a tapadás legyőzéséhez) legalább 4 N erőt kell kifejtenünk. A csőben mozgó krumplidugóra 3,5 N nagyságú súrlódási erő hat. Miközben a lövedék távozik a bodzacsőből, a rá ható súrlódási erő a csőben lévő hosszával egyenesen arányosan csökken 0-ra. (A krumpli sűrűsége 1,06 g/cm^3, a külső légnyomás 10^5 Pa.)

a) Mennyi a mindkét végén lezárt, „megtöltött" állapotban lévő lövettyűben lévő levegő nyomása?

b) Egy fapálca segítségével a dugattyút lassan addig toljuk a csőben, amíg a lövedéknek szánt krumplihenger egy pukkanás kíséretében hirtelen ki nem repül. Mennyi munkát kell végeznünk a megtöltött lövettyű elsütéséhez?

c) Mekkora sebességgel hagyja el a lövedék a csövet?

(*5 pont*) Közli: *Kis Tamás,* Heves

P. 5332. $L=0{,}2$ m hosszúságú szigetelőfonálon függ egy m tömegű, $Q=1\ \mu\mathrm{C}$ töltésű golyócska. A felfüggesztés alatt $2L$ távolságban van egy ugyanakkora, rögzített, Q ponttöltés.

a) Hogyan függ a fonál függőlegessel bezárt szöge az m tömegtől?

b) Legalább mekkora legyen m, hogy a két golyó közti távolság L legyen?

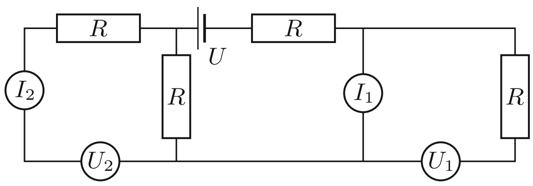
c) Legfeljebb mekkora lehet m, hogy a két golyó közti távolság $3L$ legyen?

(*5 pont*) Közli: *Szabó Endre,* Vágfüzes (Szlovákia)

P. 5333. Hengeres, 2 cm sugarú hosszú egyenes vezetékben áram folyik. A vezeték belsejében, annak tengelyétől 1,5 cm-re a mágneses indukcióvektor nagysága $2\cdot10^{-4}$ T. Mekkora a mágneses indukcióvektor nagysága a vezeték tengelyétől 4 cm távolságban?

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5334. A fizikai kísérletezést kedvelő Rudi születésnapjára elektronikai készletet kapott. Tüstént össze is állította az *ábra* szerinti kapcsolást, melyben az $U=30$ V feszültségű áramforrás belső ellenállása elhanyagolható, a teljesen egyforma feszültségmérők és a teljesen egyforma árammérők pedig ideálisnak tekinthetők. Az ellenállások nagysága $R=50\ \Omega$.



a) Mennyit mutattak a műszerek?

b) Majd megcserélte az 1-es árammérőt az 1-es feszültségmérővel, a 2-es árammérőt a 2-es feszültségmérővel. Mennyit mutattak így a műszerek?

c) Ezt követően visszarendezte a mérőműszereket az eredeti helyükre, majd az 1-es árammérőt és a 2-es feszültségmérőt felcserélte egymással. Mennyit mutattak így a műszerek?

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5335. Ha tiszta ^{238}Pu-ból készítenénk egy 8 cm átmérőjű, tömör golyót, annak felszíne hány Celsius-fok hőmérsékletre állna be, ha a -270 Celsius-fokos világűr egy mindentől távoli pontján magára hagynánk?

(Ilyen izotópot használnak a Naptól távol haladó, „mélyűri” űrszondák energiaellátására a radioizotópos termoelektromos generátorokban.)

(*5 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest

P. 5336. Elég nagy kiterjedésű, széles, sík mező fölött 2 km magasan repül egy szuperszonikus vadászgép vízszintes irányban. A gép hangját a mezőn álló három, egymástól páronként 14 km-re lévő megfigyelő egyszerre hallja meg. A repülőgép éppen az egyik megfigyelő feje felett repül el. Mekkora a vadászgép sebessége?

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

Beküldési határidő: 2021. június 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 71. No. 5. May 2021)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition C (see page 285): **Exercises up to grade 10: C. 1672.** Find all number pairs p, r such that p, r and $\frac{p+r}{p-r}$ are all positive and prime. **C. 1673.** A trapezium is divided into four triangles by its diagonals. The sum of the areas of the triangles lying on the bases of the trapezium make up $\frac{13}{18}$ of the area of the trapezium. Given that the length of one base is 5 cm, what may be the length of the other base? **Exercises for everyone: C. 1674.** Prove that there are infinitely many right-angled triangles in which the measures of the sides are positive integers, and the hypotenuse is one unit longer than one of the legs. (Proposed by *L. Németh,* Fonyód) **C. 1675.** Let D be an interior point of side AB in triangle ABC, and $\frac{AD}{DB}=\frac{m}{n}<\frac{1}{2}$, where m, n are positive integers. A point E, different from D, is marked on the circumference of the triangle such that line DE divides the area of the triangle in a $1:2$ ratio. Depending on the numbers m and n, on which side of the triangle will point E lie, and in what ratio will it divide that side? **C. 1676.** Show that $2019^{2021}+2021^{2019}$ is divisible by 4040. Determine whether the following generalization of the problem is also true: if a and b are consecutive odd positive integers then a^b+b^a is divisible by $a+b$. **Exercises upwards of grade 11: C. 1677.** Solve the equation $\left|2\cdot\log_2\sqrt{x^2-x}+3+\frac{1}{\log_4\sqrt{x^2-x}}\right|=2$ over the set of real numbers. **C. 1678.** The length of each edge of a square-based regular pyramid is a. Connect the centres of the faces of the pyramid in every possible way. Prove that one can always construct a triangle using any three such line segments.

New exercises – competition B (see page 286): **B. 5174.** Prove that $(2n)!\leqslant(n^2+n)^n$ for all positive integers n. (*3 points*) (Proposed by *M. Szalai,* Szeged) **B. 5175.** In a triangle ABC, $AC=BC$, D is an interior point of side AC, and K is the centre of the circle ABD. Show that quadrilateral $BCDK$ is cyclic. (*3 points*) **B. 5176.** The first n positive integers need to be written on the circumference of a circle (each number exactly once), so that the sums of all sets of three adjacent numbers should form exactly two different values. Find all possible values of n. (*4 points*) (*Scottish competition problem*) **B. 5177.** In a right-angled triangle ABC, line segment CD is the altitude drawn to the hypotenuse. The circle k of diameter CD intersects the legs AC and BC again at points E and F, respectively. The tangent drawn to circle k at point E intersects the line of leg BC at point P, and the hypotenuse AB at point M. The tangent drawn to circle k at point F intersects the line of leg AC at point Q, and the hypotenuse AB at point N. Prove that $4\cdot MN^2=PE^2+QF^2+2\cdot EF^2$. (*5 points*) **B. 5178.** Let x be a positive real number. Show that $\sqrt{6x+9}+\sqrt{16x+64}\leqslant \left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}+\frac{8}{\sqrt{x}}\right)$. (*4 points*) (Proposed by *J. Szoldatics,* Budapest) **B. 5179.** Is there a set H of integers with the following property: every nonzero integer can be represented in infinitely many ways as a sum of some distinct elements of H, but 0 cannot be represented at all? (*6 points*) **B. 5180.** The radius of the circumscribed circle of a regular heptagon $ABCDEFG$ is r. Prove that the circle of radius $2r$ centred at A passes through the orthocentre of triangle BCE. (*5 points*) **B. 5181.** Given eight points on the plane, no three of which are collinear and no five of which are concyclic, what is the maximum possible number of circles that pass through four of the points each? (*6 points*) (Proposed by *A. Imolay,* Budapest)

New problems – competition A (see page 288): **A. 800.** In a finite, simple, connected graph G we play the following game: initially we color all the vertices with a different color. In each step we choose a vertex randomly (with uniform distribution), and then choose one of its neighbors randomly (also with uniform distribution), and color it to the the same color as the originally chosen vertex (if the two chosen vertices already have the same color, we do nothing). The game ends when all the vertices have the same color. Knowing graph G find the probability for each vertex that the game ends with all vertices having the same color as the chosen vertex. (Submitted by *Dávid Matolcsi,* Budapest) **A. 801.** For which values of positive integer m is it possible to find polynomials $p,q\in\mathbb{C}[x]$ with degrees at least two such that $x(x+1)\cdots(x+m-1)=p\big(q(x)\big)$? (Submitted by *Navid Safaei,* Tehran) **A. 802.** Let P be a given regular 100-gon. Prove that if we take the union of two polygons that are congruent to P, the ratio of the perimeter and area of the resulting shape cannot be more than the ratio of the perimeter and area of P.

Problems in Physics

(see page 315)

M. 405. Measure the flow rate of a mixing faucet first when cold water flows from the tap, and then when hot water is flowing from the tap. Also measure the temperature of cold and hot water. Finally, measure the flow-rate of the faucet also for lukewarm water, and calculate what proportion of the lukewarm water is cold and hot water.

G. 745. In what states of matter does the material of a candle appear when the candle burns? **G. 746.** Birds sit in the closed cargo hold of a truck, carrying birds. When the vehicle horn honks loudly, the birds get frightened. Does the total weight of the truck and the birds increase, decrease or remain unchanged when the birds fly off? **G. 747.** Suppose that a one-atom thick layer is made from 1 kg gold. Estimate the number of football pitches that can be covered with this gold foil. **G. 748.** A 20-cm long upside down test-tube, whose bottom part is filled with water and whose top part contains air (a Cartesian diver), is placed into a tall graduated cylinder, filled with water. The top of the test-tube is a bit above the level of the water in the cylinder. The top of the graduated cylinder is covered with a sheet of rubber, and then this rubber sheet is pressed down such that the pressure inside the test-tube increases by 5 kPa. At this moment the "diver" starts to move downwards. *a*) What was the height of the air in the test-tube when the "diver" started to sink? *b*) What is the minimum height of the graduated cylinder, if the "diver" stays at the bottom of the cylinder even if the rubber sheet is taken away from the top of the cylinder?

P. 5326. An object is dropped from a tower of unknown height, and it falls freely. Air drag is negligible. *a*) Imagine we divide the height of the tower into two equal parts. Determine the ratio of the average speeds calculated for the two parts. *b*) How should the height of a 45 m high tower be split into two parts in order that the average speed calculated for the second part be four times as much as that calculated for the first part? **P. 5327.** How long would a day on the Earth be if we would "fall off" from the equator of the Earth, due to the rotation of the Earth, provided that the shape of the Earth was not changed? **P. 5328.** A light thin steel rod is clamped and held horizontally. A weight is attached to its free end such that it pulls that end to a 1 cm lower position than it was originally. If it is made to oscillate with small amplitude, what is the period of the oscillation? **P. 5329.** There is a piece of chalk at rest on a horizontal blackboard. The blackboard is suddenly pushed such that it gains a horizontal velocity of v_0, then it collides with a wall after a time of T and it suddenly stops. How long is the track of the chalk on the board if the coefficient of friction between the chalk and the board is μ? **P. 5330.** Imagine a spherical celestial body which is at liquid state. The internal gravitation causes hydrostatic pressure. Let the material of the celestial body be water and let its radius be $R = 25$ km. What is the hydrostatic pressure at the centre of the sphere? **P. 5331.** An old, popular toy is the potato rifle, which is made of a 12 cm long elder tube, whose cross sectional area is 0.3 cm^2. The two ends of the tube are plugged one after the other, each with a 1 cm long potato cylinder. One of the potato plugs acts as the projectile and the other as the piston. The potato cylinders seal the tube well. We know that at least 4 N force must be applied to move a potato cylinder (to overcome friction). In order to move the potato cylinder at a constant speed a force of 3.5 N is required. The latter force decreases to 0 in direct proportion to the length of the projectile in the barrel when the potato cylinder leaves the projectile. (The density of potato is 1.06 g/cm^3, and the external air pressure is 10^5 Pa.) *a*) What is the pressure of the air in the "loaded" rifle, which is sealed at its both ends? *b*) By means of a wooden stick, the potato plug is slowly pushed along the cylinder until the other potato cylinder, the projectile, suddenly pops out of the barrel. How much work do we have to do in order to "fire" a loaded rifle? *c*) At what speed does the potato projectile leave the barrel? **P. 5332.** A small ball of mass m and of charge $Q = 1$ μC hangs on a piece of insulating thread of length $L = 0.2$ m. At a distance of $2L$ below the suspension there is another small fixed ball of charge Q. *a*) How does the angle between the thread and the vertical depend on the mass m? *b*) What should the least value of m be in order to have a distance of L between the two balls? *c*) What should the maximum value of m be in order to have a distance of $3L$ between the two balls? **P. 5333.** Electric current flows in a long, straight cylindrical piece of wire of radius 2 cm. The magnitude of the magnetic flux density inside the wire at a distance of 1.5 cm from the symmetry axis of the wire is $2 \cdot 10^{-4}$ T. What is the magnitude of the magnetic flux density at a distance of 4 cm from the symmetry axis of the wire? **P. 5334.** Rudy, who loves physical experimentation, received an electronics kit for his birthday. He immediately assembled the circuit shown in the *figure.* The internal resistance of the current source of voltage $U = 30$ V is negligible, and the totally alike voltmeters and the totally alike ammeters are considered ideal. The magnitude of the resistances is $R = 50\ \Omega$. *a*) What are the readings on the meters? *b*) Then he swapped ammeter 1 for voltmeter 1 and he also swapped ammeter 2 for voltmeter 2. What are the readings on the meters now? *c*) Then he placed back all the meters to their original positions, and then he swapped ammeter 1 for voltmeter 2. What are the readings on the meters in this case? **P. 5335.** If a solid ball of diameter of 8 cm was made of pure ^{238}Pu, what would the temperature of the surface of this ball be when it is placed into a point in space at a temperature of -270 degrees Celsius, far away from everything. (Such an isotope is used to power "deep space" spacecrafts, travelling far from the Sun, in their radioisotope thermoelectric generators.) **P. 5336.** A supersonic fighter-plane flies 2 km above a fairly large, wide, flat field along a horizontal line. The sound of the fighter is heard at the same instant by three observers standing in the field, 14 km apart pairwise. The fighter is right above the head of one of the observers. What is the speed of the fighter?