KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

71. évfolyam 4. szám Budapest, 2021. április

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Lovász László az Abel-díj idei egyik kitüntetettje . 194

Bizonyítsunk sokféleképpen – egy érettségi feladat továbbgondolása . . . 195

Varga Péter: Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire . . . 205

Csányi Tibor: Megoldásvázlatok a 2021/3. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához . . . 209

Matematika feladatok megoldása (5100., 5112., 5140.) . . . 219

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1665–1671.) . . . 223

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5166–5173.) . . . 224

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (797–799.) . . . 226

Informatikából kitűzött feladatok (535–537., 53., 152.) . . . 227

KöMaL-tervek 2021-re . . . 232

Fizika gyakorlatok megoldása (725., 726., 730.) . . . 233

Fizika feladatok megoldása (5252., 5262., 5267., 5270., 5274., 5282., 5286., 5289., 5291., 5301.) . . 235

Fizikából kitűzött feladatok (404., 741–744., 5315–5325.) . . . 249

Felhívás kérdőív kitöltésére . . . 253

Problems in Mathematics . . . 253

Problems in Physics . . . 255

Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: OLÁH VERA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A matematika bizottság vezetője:
HERMANN PÉTER
Tagjai: BÍRÓ BÁLINT, GYENES ZOLTÁN, HUJTER BÁLINT, KÁROLYI GERGELY, KISS GÉZA, KÓS GÉZA, KÓS RITA, LORÁNT LÁSZLÓ, ÖKÖRDI PÉTERNÉ, PACH PÉTER PÁL, VÍGH VIKTOR

A fizika bizottság vezetője:
RADNAI GYULA
Tagjai: BARANYAI KLÁRA, HOLICS LÁSZLÓ, HONYEK GYULA, OLOSZ BALÁZS, SIMON LÁSZLÓ, SZÁSZ KRISZTIÁN, SZÉCHENYI GÁBOR, VIGH MÁTÉ, VLADÁR KÁROLY, WOYNAROVICH FERENC

Az informatika bizottság vezetője:
SCHMIEDER LÁSZLÓ
Tagjai: BUSA MÁTÉ, FARKAS CSABA, FODOR ZSOLT, LÁSZLÓ NIKOLETT, LÓCZI LAJOS, SIEGLER GÁBOR, SZENTE PÉTER, TÓTH TAMÁS

Fordítók: GRÓF ANDREA, TASNÁDI ANIKÓ
Szerkesztőségi titkár: TRÁSY GYÖRGYNÉ

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from
the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.
A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.

Lovász László az Abel-díj idei egyik kitüntetettje

Március számunkra egyik legfontosabb eseménye az Abel-díj idei kihirdetése volt: ezúton is gratulálunk Lovász Lászlónak. Lovász László matematikai pályája is úgy indult, hogy már általános iskolásként rendszeresen megoldotta a KöMaL feladatait. A mellékelt fénykép a KöMaL arcképcsarnokában található róla az 1962–63-as tanévből.

Több interjú is készült vele a díj elnyerése alkalmából, mi a Telex cikkére* szeretnénk felhívni a figyelmet.

A beszélgetésben, ami egyben kultúrtörténeti utazás is, kiderül, hogyan kapcsolódik a diszkrét matematika és az elméleti számítógép-tudomány és hogy az algoritmusok használata miként hozott egy új gondolkodásmódot a matematika világába. Megtudhatjuk, miként vélekedett a véletlenszám-generátorokról *Neumann János* és *Erdős Pál,* illetve hogyan kapcsolódik az LLL (Lovász Lokális Lemma) ahhoz a tűhöz, (ami elveszett) a szénakazalban.

A cikk természetesen kitér Lovász László MTA elnöki éveire és a Barabási-Albert Lászlóval közös részvételére a DYNASNET projektben (a European Research Council legrangosabb tudományos pályázatának nyertes programja, a Rényi Alfréd Matematikai Intézet és a CEU háttér támogatásával). Megtudhatjuk azt is, miért nem kezdett kutatásokat a matematikus a pandémia lefolyásával kapcsolatban. Az interjú harmadik harmadában a digitális oktatásról, a matematika oktatásáról és a tehetséggondozásról olvashatjuk az akadémikus gondolatait. Arra a kérdésre, hogy „mi az oka annak, hogy a sok nemzet közül a magyarok ennyire jó matekosok?" utalva *Lax Péter* és *Szemerédi Endre* Abel-díjára, Lovász az erős hagyománnyal rendelkező különböző tehetséggondozó iskolákat említi, többek között a KöMaL-t.

Lovász László számos feladatot javasolt a KöMaL-ba az évtizedek során, ezek közül egyet most felelevenítünk.

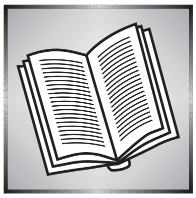
F. 3281. Egy szelet csokoládét több lépésben osztunk részekre. Minden lépésben a már meglevő részek közül a legnagyobb tömegűt (ha több ilyen van, azok egyikét) osztjuk tovább úgy, hogy a kapott új darabok egyike se legyen nagyobb tömegű, mint a most tovább osztott rész fele. Igazoljuk, hogy a k-adik lépés után kapott részek mindegyike kisebb, mint az eredeti csokoládé tömegének a $2/(k+1)$-edrésze.

KöMaL, 1999. április

A Szerkesztőség

*`https://telex.hu/tudomany/2021/03/17/lovasz-laszlo-avi-wigderson-abel-dij`

Bizonyítsunk sokféleképpen – egy érettségi feladat továbbgondolása

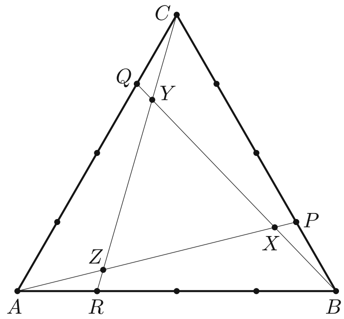


1. Előzmények

A 2020. októberi matematika érettségi emelt szintű írásbeli vizsga 9.*b*) feladata a következő volt[1]:

9.*b*) Jelölje a 4 egység oldalú ABC szabályos háromszög BC oldalának B-hez közelebbi negyedelőpontját P, a CA oldal C-hez közelebbi negyedelőpontját Q, az AB oldal A-hoz közelebbi negyedelőpontját pedig R. Jelölje továbbá AP és BQ szakaszok metszéspontját X, BQ és CR szakaszok metszéspontját Y, végül CR és AP szakaszok metszéspontját Z (*1. ábra*).

Határozza meg az XYZ háromszög területét!



1. ábra

A hivatalos javítási útmutatóban a feladatra négy megoldás található. Ebben a cikkben néhány észrevétel mellett további megoldási és általánosítási lehetőségeket sorolunk fel.

2. A hivatalos megoldások

Röviden áttekintjük a javítási útmutatóban szereplő megoldásokat.[2]

Előzetesen megállapíthatjuk, hogy a harmadrendű forgásszimmetria miatt:

– az ABP, BCQ, CAR háromszögek egybevágók;

– az ABX, BCY, CAZ háromszögek egybevágók;

– az ARZ, BPX és CQY háromszögek egybevágók;

– az XYZ háromszög szabályos.

I. megoldás. A ZX szakasz hosszát számítjuk ki, ebből az XYZ háromszög területe már számolható.

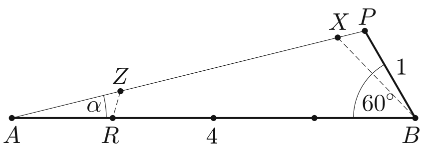
Az ABP háromszögben ismert három adat, így meghatározhatjuk pl. a koszinusztétellel az AP szakasz hosszát és a $BAP\sphericalangle = \alpha$ szöget. Ekkor az AZR háromszögben ismerünk három adatot ($ARZ\sphericalangle = APB\sphericalangle = 120^\circ - \alpha$), így pl. a szinusz-

[1] `https://www.oktatas.hu/bin/content/dload/erettsegi/feladatok_2020osz_emelt/e_mat_20okt_fl.pdf`

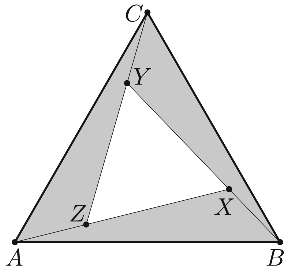
[2] `https://www.oktatas.hu/bin/content/dload/erettsegi/feladatok_2020osz_emelt/e_mat_20okt_ut.pdf`

tétellel AZ és ZR kiszámolható. És mivel $XP = ZR$, így $ZX = AP - AZ - ZR$ (*2. ábra*).

Az XYZ szabályos háromszög területe pedig $t = \frac{\sqrt{3}}{4}ZX^2$. (A számadatokkal $t \approx 2{,}13$.)



2. ábra

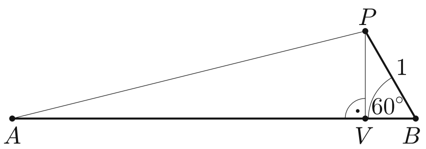


3. ábra

II. megoldás. Kiszámítjuk az ABX háromszög területét, majd az ABC háromszög területéből kivonjuk ennek a 3-szorosát.

Mint az I. megoldásban, kiszámítjuk AP-t és az α szöget. Ekkor az ABX háromszögben is három adat ismert ($ABX\sphericalangle = 60° - \alpha$), így meghatározható az AX oldal, és az ABX háromszög területét megkapjuk a trigonometrikus területképlet alkalmazásával (*3. ábra*).

III. megoldás. A ZX szakasz hosszát számítjuk ki, mint az I. megoldásban, de most trigonometria alkalmazása nélkül.



4. ábra

A P pont AB-re eső merőleges vetületét jelöljük V-vel (*4. ábra*). Rendre meghatározhatjuk PV és VB hosszát (a PVB „félszabályos” háromszög befogói), majd AV-t ($AV = AB - VB$), végül AP-t (az AVP derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével).

Az ABP és a BXP háromszögek hasonlók, mert két szögük egyenlő ($PBX\sphericalangle = PAB\sphericalangle = \alpha$, lásd a *2. ábrát*). A megfelelő oldalak arányából egyrészt $\frac{XP}{PB} = \frac{PB}{PA}$, innen XP számolható; másrészt $XB = 4XP$ ($= AZ$).

$ZX = AP - XB - XP$, vagyis megkaptuk a szabályos háromszög egy oldalát.

IV. megoldás. A ZX szakasz hosszát számítjuk ki, erősebb trigonometriai eszközök segítségével.

Az ABP háromszögben szinusztétellel $\frac{\sin\alpha}{\sin(120° - \alpha)} = \frac{1}{4}$, innen az addíciós tételek segítségével kiszámítjuk α-t. Az ABX háromszögben ismert három adat, így az oldalakat meghatározhatjuk a szinusztétellel, például

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 120°} = \frac{BX}{4} \quad \text{és} \quad \frac{\sin(60° - \alpha)}{\sin 120°} = \frac{AX}{4}$$

alapján. Ezután az XYZ háromszög oldala már adódik:

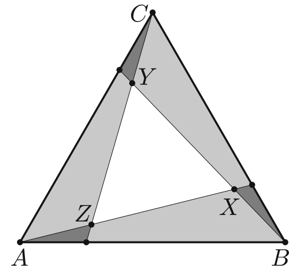
$$ZX = AX - AZ = AX - BX.$$

3. Egy további megoldás

Ez a megoldás a fejlesztés során sokáig szerepelt az útmutatóban, de végül nem került be.

V. megoldás. A III. megoldás módosításával a keresett területet „kiszitáljuk”.

Az XYZ háromszög területét megkaphatjuk úgy is, hogy az ABC háromszög területéből levonjuk az ABP háromszög területének 3-szorosát, majd hozzáadjuk az ARZ háromszög területének 3-szorosát (ugyanis az előző levonásnál az ARZ háromszög területét 6-szor vontuk le, holott csak 3-szor kellett volna, *5. ábra*).



5. ábra

A szokásos módon járunk el: az ABP háromszögben a területet kiszámíthatjuk a trigonometrikus területképlettel, majd meghatározhatjuk AP és α értékét. Az ARZ háromszögben pedig ismerjük a szögeket és az AR oldalt, így a területe már számolható.

4. Általánosítás

Az egyik általánosítási lehetőség, ha tetszőleges, $\frac{1}{2}$-nél kisebb $r = AR : AB$ aránnyal dolgozunk. (A kitűzött feladatban $r = \frac{1}{4}$ volt.)

Jelölje az ABC háromszög oldalainak hosszát a, ekkor tehát $AR = BP = CQ = ar$.

Az ABP háromszögben a koszinusztételből $AP = a\sqrt{1 - r + r^2}$.

Az ABP és a BXP háromszögek hasonlóságából (III. megoldás) $\frac{XP}{PB} = \frac{PB}{PA}$, innen

$$XP = \frac{a^2 r^2}{a\sqrt{1 - r + r^2}} = a \cdot \frac{r^2}{\sqrt{1 - r + r^2}};$$

valamint

$$BX = AZ = \frac{XP}{r} = a \cdot \frac{r}{\sqrt{1 - r + r^2}}.$$

$$ZX = AP - AZ - XP = a\sqrt{1 - r + r^2} - \frac{ar}{\sqrt{1 - r + r^2}} - \frac{ar^2}{\sqrt{1 - r + r^2}},$$

átalakítások után $ZX = a \cdot \frac{1-2r}{\sqrt{1-r+r^2}}$ adódik.

Az XYZ háromszög területe:

$$T_{XYZ} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{(1 - 2r)^2}{1 - r + r^2}.$$

Megjegyzések:

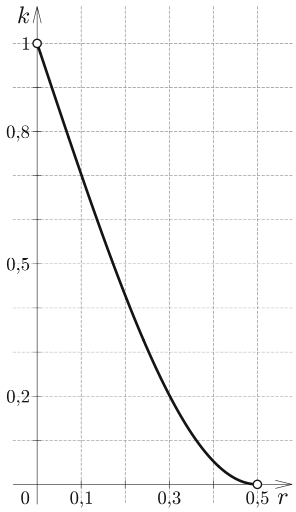
– Megkaptuk az egyes szakaszok hosszának arányát: $AZ : ZX : XP = r : (1-2r) : r^2$;

– s megkaptuk az XYZ és ABC háromszögek területének arányát is:

$$\frac{T_{XYZ}}{T_{ABC}} = \frac{(1-2r)^2}{1-r+r^2}.$$

– Az $a = 4$ és $r = \frac{1}{4}$ helyettesítésekkel megkapjuk a III. megoldásban szereplő pontos értékeket:[3]

$$T_{XYZ} = \frac{16\sqrt{3}}{13}, \qquad AZ : ZX : XP = 4 : 8 : 1, \qquad \frac{T_{XYZ}}{T_{ABC}} = \frac{4}{13}.$$



6. ábra

– Érdekességképpen ábrázolhatjuk a $k : \,]0; 0{,}5[\, \to \mathbb{R}$; $k(r) = \frac{T_{XYZ}}{T_{ABC}} = \frac{(1-2r)^2}{1-r+r^2}$ függvényt (*6. ábra*).

Néhány érdekes függvényérték:

$$k\left(\frac{1}{20}\right) = \frac{108}{127};\ \ k\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{100}{133};$$

$$k\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{64}{91};\ \ k\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{9}{21};\ \ k\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{7};$$

$$k\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{19};\ \ k\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{1}{37};\ \ k\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{1}{61};$$

$$k\left(\frac{n}{2n+1}\right) = \frac{1}{3n^2+3n+1}.$$

5. További megoldások területarányok segítségével

Ezekben a megoldásokban azt használjuk fel, hogy az azonos magasságú háromszögek területe arányos az alapjukkal.

VI. megoldás $\left(r = \frac{1}{4}\right)$. Mivel $\frac{BP}{PC} = \frac{AR}{RB} = \frac{1}{3}$, így

$$\frac{T_{BPZ}}{T_{CPZ}} = \frac{1}{3}, \quad \text{illetve} \quad \frac{T_{ARC}}{T_{BRC}} = \frac{1}{3} \quad \text{és} \quad \frac{T_{ARZ}}{T_{BRZ}} = \frac{1}{3}.$$

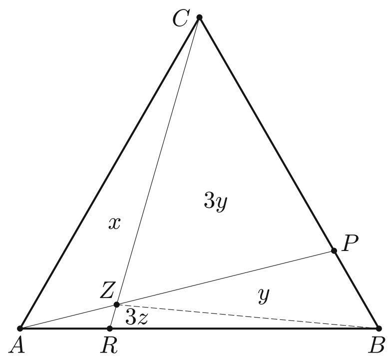
Ez az arány a területek különbségére is megmarad, így

$$\frac{T_{ARC} - T_{ARZ}}{T_{BRC} - T_{BRZ}} = \frac{T_{AZC}}{T_{BZC}} = \frac{1}{3}$$

is teljesül.

[3]Minden megoldás részletes kidolgozása olvasható honlapunkon a teljes cikkben (az ábrák számozása a teljes cikket követi). Megpróbálhatjuk az önálló kidolgozásukat. `https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml`

Húzzuk be a BZ szakaszt, és jelölje a *7. ábra* szerinti részháromszögek területét x, y, z, az ABC háromszög területét T. Ekkor az ábrán szereplő másik két háromszög területe $3y$ és $3z$. A fenti összefüggések alapján felírható az alábbi egyenletrendszer:



7. ábra

$$\frac{x}{4y} = \frac{1}{3}, \tag{1}$$

$$x + 3y = \frac{3}{4}T. \tag{2}$$

(1)-ből $y = \frac{3x}{4}$, ezt (2)-be írva $x = \frac{3}{13}T$.

A forgásszimmetria miatt kapjuk (II. megoldás), hogy

$$T_{XYZ} = T - 3x = \tfrac{4}{13}T.$$

Megjegyzések:

– Nem kellett kiszámolnunk z értékét, de $T_{ARC} = z + x = \frac{T}{4}$-ből $z = \frac{T}{52} = \frac{1}{12}x$.

– A kapott eredmény természetesen összhangban van az általánosítás

$$T_{XYZ} = \frac{(1-2r)^2}{1-r+r^2}T$$

formulájával, $r = \frac{1}{4}$ esetén.

– Észrevehetjük, hogy nem használtuk fel, hogy az ABC háromszög oldalai egyenlők, vagyis eredményünk tetszőleges háromszögre igaz.

Második általánosítás. Ha tetszőleges T területű háromszögben behúzzuk az oldalakat megfelelő módon negyedelő szakaszokat (továbbiakban: osztószakaszok), akkor a keletkezett XYZ háromszög területére

$$T_{XYZ} = \frac{4}{13}T.$$

A további megoldások az általános ABC háromszögre vonatkoznak.

VII. megoldás (harmadik általánosítás). A hagyományos módon legyen az ABC háromszög oldalainak hossza rendre a, b, c, ekkor $AR = rc$ és $BP = ra$.

Próbáljuk meg a VI. megoldás alapján kidolgozni a bizonyítást.

6. További megoldások hasonlóság alkalmazásával

Ezekben a megoldásokban párhuzamost húzunk valamelyik egyenessel, és egy kijelölt hasonlósági centrummal kapott hasonló háromszögek oldalainak arányára vonatkozó egyenlőségeket írunk fel. (A párhuzamos egyeneseken egyenlő váltószögek vagy egyállású szögek keletkeznek.) Többféle lehetőségünk is van: a párhuzamost húzhatjuk valamelyik csúcsból, osztószakasz talppontjából vagy az osztószakaszok metszéspontjából; és amivel párhuzamost húzunk, az lehet az ABC háromszög valamelyik oldala vagy osztószakasza. (És természetesen ezeket a módszereket vegyesen is alkalmazhatjuk.)

VIII. megoldás. Párhuzamost húzunk a B csúcson át az AC oldallal, ennek az AP és CR egyenesekkel való metszéspontját jelölje D és E (*9. ábra*). A könnyebb leírás kedvéért vezessük még be az $AZ=u$, $ZP=v$, $PD=w$ jelölést is.

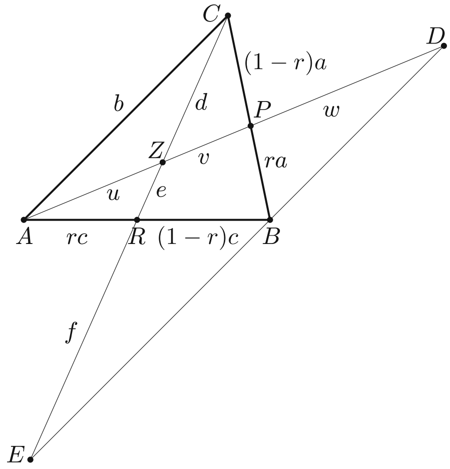
A DPB és APC háromszögek hasonlók, ezért $\frac{w}{u+v}=\frac{r}{1-r}$ és $DB=\frac{br}{1-r}$.

A BRE és ARC háromszögek hasonlók, ezért $BE=\frac{b(1-r)}{r}$.

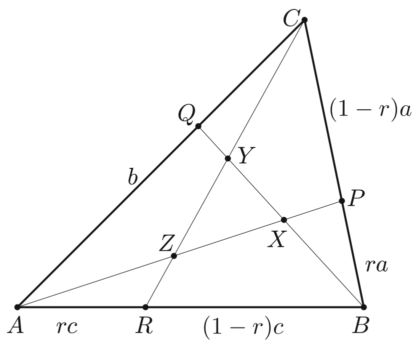
Végül aDZE és $AZC$is hasonló háromszögek, innen

$$\frac{v+w}{u}=\frac{DB+BE}{AC}=\frac{r}{1-r}+\frac{1-r}{r}.$$

Ha az u, v, w-re kapott két összefüggésből kiküszöböljük w-t, akkor megkapjuk az $\frac{u}{v}$ arányt. Az első egyenletből $w=\frac{r}{1-r}(u+v)$, a másodikból $w=u\frac{2r^2-2r+1}{r(1-r)}-v$, a jobb oldalak egyenlőségéből pedig, némi átalakítás után, $\frac{u}{v}=\frac{r}{(1-r)^2}$ adódik.



9. ábra



10. ábra

Ugyanígy meghatározhatjuk a $\frac{CZ}{ZR}$ osztásarányt is. Ha a CZ, ZR, RE szakaszokat rendre d, e, f jelöli, akkor a keletkezett hasonló háromszögekből

$$\frac{f}{e+d}=\frac{1-r}{r}\quad \text{és}\quad \frac{f+e}{d}=\frac{r}{1-r}+\frac{1-r}{r},$$

vagyis az előző megoldás $\frac{u}{v}$ arányához képest r és $(1-r)$ szerepet cserél. Az egyenletrendszerből kapjuk, hogy $\frac{d}{e}=\frac{1-r}{r^2}$.

Ha az AP és CR szakaszok osztásaránya már ismert, akkor a megoldás többféleképpen is befejezhető. Az osztószakaszok szimmetrikus szerepe miatt $\frac{AX}{XP}=\frac{CZ}{ZR}$, innen megkaphatjuk a korábbról ismert $AZ:ZX:XP=r:(1-2r):r^2$ arányokat (a levezetést az olvasóra bízzuk), és ez a másik két osztószakasz esetén is fennáll. Ekkor például rendre felírhatjuk a következő háromszögek területét (*10. ábra*):

$$T_{RCB}=\frac{RB}{AB}T_{ABC}=\frac{1-r}{1}T_{ABC};$$

$$T_{RBY}=\frac{RY}{RC}T_{RCB}=\frac{1-2r+r^2}{r^2-r+1}\cdot\frac{1-r}{1}T_{ABC};$$

$$T_{ZBY}=\frac{ZY}{RY}T_{RBY}=\frac{1-2r}{1-2r+r^2}\cdot\frac{1-2r+r^2}{r^2-r+1}\cdot\frac{1-r}{1}T_{ABC};\quad \text{végül}$$

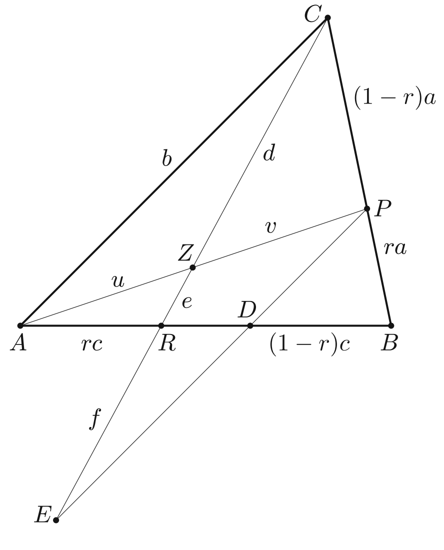
$$T_{ZXY}=\frac{XY}{BY}T_{ZBY}=\frac{1-2r}{1-r}\cdot\frac{1-2r}{1-2r+r^2}\cdot\frac{1-2r+r^2}{r^2-r+1}\cdot\frac{1-r}{1}T_{ABC}=$$

$$=\frac{(1-2r)^2}{r^2-r+1}T_{ABC}.$$

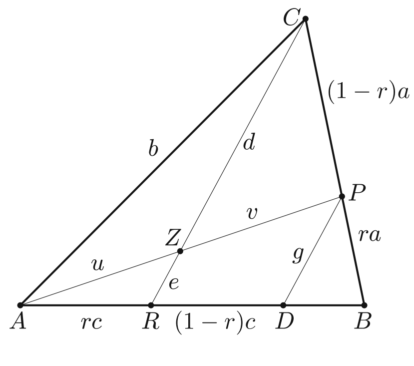
A további megoldásokat tehát visszavezethetjük két osztószakasz osztásarányának meghatározására.

IX. megoldás. Párhuzamost húzunk a P ponton át az AC oldallal, ennek az AB és CR egyenesekkel való metszéspontját jelölje D és E (*11. ábra*). A könnyebb leírás kedvéért vezessük még be az $AZ=u$, $ZP=v$, $CZ=d$, $ZR=e$, $RE=f$ jelöléseket.

Próbáljuk meg önállóan befejezni.



11. ábra



12. ábra

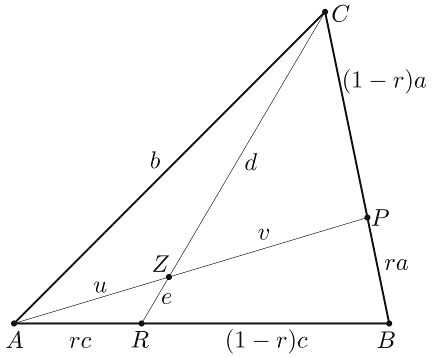
X. megoldás. Párhuzamost húzunk a P ponton át a CR szakasszal, ennek az AB egyenessel való metszéspontját jelölje D (*12. ábra*). A hagyományos jelölésekkel $AZ=u$, $ZP=v$, $CZ=d$, $ZR=e$, és legyen $PD=g$.

Az előző két megoldáshoz hasonlóan, a mellékelt ábra segítségével próbáljuk meg bizonyítani a feladat állítását.

XI. megoldás. Egy további, hasonló gondolatmeneten alapuló megoldás olvasható a cikkben.

7. További megoldások

Néhány olyan megoldási módszer következik, amiket a tanulók ritkábban alkalmaznak.



14. ábra

XII. megoldás (szabadvektorok). Dolgozhatunk szabadvektorokkal is. Legyen $\overrightarrow{AB}=\mathbf{x}$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{y}$, és u, v, d, e jelentése a szokásos (*14. ábra*). Kétféleképpen is felírhatjuk az $\overrightarrow{AZ}$ vektort.

Egyrészt $\overrightarrow{AP}=\mathbf{x}+r(\mathbf{y}-\mathbf{x})$, így

$$\overrightarrow{AZ}=\frac{u}{u+v}\overrightarrow{AP}=\frac{u}{u+v}\big(\mathbf{x}+r(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big)=$$

$$=\mathbf{x}\frac{u}{u+v}(1-r)+\mathbf{y}\frac{u}{u+v}r.$$

Másrészt $\overrightarrow{AR}=r\mathbf{x}$, $\overrightarrow{RC}=\mathbf{y}-r\mathbf{x}$, $\overrightarrow{RZ}=\frac{e}{e+d}(\mathbf{y}-r\mathbf{x})$, és így

$$\overrightarrow{AZ}=r\mathbf{x}+\frac{e}{e+d}(\mathbf{y}-r\mathbf{x})=\mathbf{x}\frac{dr}{e+d}+\mathbf{y}\frac{e}{e+d}.$$

Az

$$\mathbf{x}\frac{u}{u+v}(1-r)+\mathbf{y}\frac{u}{u+v}r=\mathbf{x}\frac{dr}{e+d}+\mathbf{y}\frac{e}{e+d}$$

vektoregyenlet helyettesíthető két skaláregyenlettel:

$$\frac{u}{u+v}(1-r)=\frac{dr}{e+d}\quad \text{és}\quad \frac{u}{u+v}r=\frac{e}{e+d}.$$

A két egyenlet hányadosából $\frac{1-r}{r}=\frac{dr}{e}$, innen $\frac{d}{e}=\frac{1-r}{r^2}$, azaz megkaptuk az egyik jól ismert összefüggést.

Vegyük az első egyenlet reciprokát:

$$\left(1+\frac{v}{u}\right)\frac{1}{1-r}=\frac{1}{r}+\frac{e}{dr},$$

az előbb kapott összefüggés miatt

$$\left(1+\frac{v}{u}\right)\frac{1}{1-r}=\frac{1}{r}+\frac{r}{1-r}.$$

Innen pedig $\frac{v}{u} = \frac{(1-r)^2}{r}$, mint korábban már láttuk.

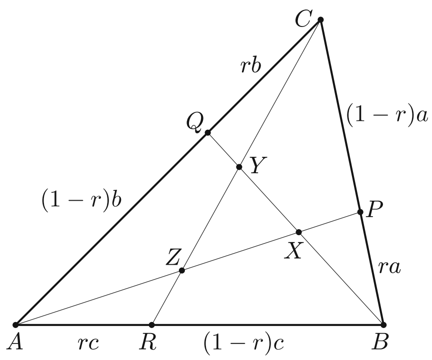
A megoldás innen már (a korábbiakhoz hasonló módon) befejezhető.

Megjegyzés. Kicsit elegánsabb (egyszerűbb) lett volna a $v = 1 - u$ és $e = 1 - d$ jelölések alkalmazása; ekkor u, v és d, e a megfelelő szakaszok hosszának arányát jelentik.

A **XIII.** és a **XIV. megoldás** egyaránt helyvektorokkal dolgozik, az utóbbi súlyozott pontrendszer súlypontjának tulajdonságait használja fel. A megoldások a honlapon olvashatók.

XV. megoldás. Menelaosz tételét alkalmazzuk: Tekintsünk egy ABC háromszöget, és egy egyenest, ami a háromszög BC, CA, illetve AB oldalegyenesét rendre az A_1, B_1, illetve C_1 pontban metszi. Ekkor az alábbi, előjeles szakaszok arányaira:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = -1.$$



16. ábra

Írjuk fel a tételt a BCR háromszögre és az AP egyenesre (*16. ábra*).

A tétel szerint ekkor (figyelmen kívül hagyva a szakaszok előjelét)

$$\frac{RA}{AB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CZ}{ZR} = r \cdot \frac{r}{1-r} \cdot \frac{CZ}{ZR} = 1, \quad \text{azaz} \quad \frac{ZR}{ZC} = \frac{r^2}{1-r}.$$

Majd írjuk fel a tételt a CAR háromszögre és a BQ egyenesre. A tétel szerint ekkor

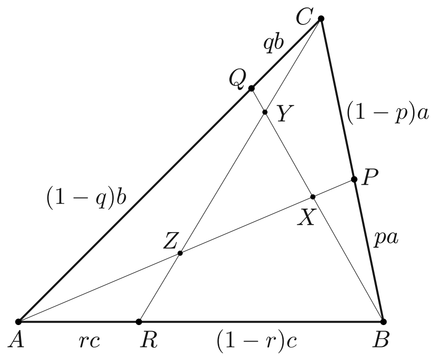
$$\frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AB}{BR} \cdot \frac{RY}{YC} = \frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{1-r} \cdot \frac{RY}{YC} = 1, \quad \text{azaz} \quad \frac{YC}{YR} = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Innen $CY : YZ : ZR = r : (1-2r) : r^2$ könnyen adódik.

8. Észrevételek, általánosítás tetszőleges háromszögre és arányokra

XVI. (Általánosítás.) Korábban láttuk, hogy a $\frac{T_{XYZ}}{T_{ABC}}$ arány kiszámításához elegendő az AP és CR szakaszok osztásarányát meghatározni. Észrevehetjük, hogy az $AR = rc$ és $BP = ra$ összefüggéseket felhasználó összes korábbi megoldásunk elvégezhető az $AR = rc$ és $BP = pa$ arányokkal is. Ebből pedig az következik, hogy tetszőleges $0 < r, p, q < 0{,}5$ választás esetén is meghatározhatjuk a $\frac{T_{XYZ}}{T_{ABC}}$ arányt (*17. ábra*).

A feladat tehát tetszőleges háromszögre, (majdnem) tetszőleges r, p, q paraméterekkel is megoldható. (Ez az ún. Routh-tétel: `https://en.wikipedia.org/wiki/Routh%27s_theorem`.)



17. ábra

XVII. Az alapfeladatban (szabályos háromszög, adott r) ABC és XYZ szabályos háromszögek voltak, tehát hasonlók is. Felmerül a kérdés, hogy tetszőleges háromszögben, adott r esetén öröklődik-e a hasonlóság. Ellenőrizzük, hogy ha az ABC háromszög derékszögű, de nem egyenlő szárú, akkor az XYZ háromszög nem derékszögű, így nem lehet hasonló az ABC háromszöghöz. A felmerülő kérdésre a honlapon lévő cikkben olvasható a részletes válasz.

9. Zárás

A feladatlapokat és a javítási-értékelési útmutatókat összeállító tételkészítő bizottságnak – több szempontot figyelembe véve – mérlegelnie kell, hogy egy-egy feladatnak hány különböző megoldása kerüljön be az útmutatóba. A javítási útmutatónak több célja is van, és ezek közül csak az egyik a dolgozatok minél egyszerűbb, pontosabb és egységesebb kijavításának elősegítése. Az adott vizsgaidőszakban vizsgázók is elsősorban az útmutatóból tájékozódnak a lehetséges helyes megoldásokról, de ezen túl az útmutatónak szolgálnia kell a későbbi évfolyamok eredményes felkészülését is.

E célokból következik, hogy mindenképpen szerepeljenek azok a megoldások, melyek várhatóan sok dolgozatban fognak megjelenni. Sokszor szerepelnek olyan megoldások is, melyek csak kevés dolgozatban fordulnak elő, de valamilyen szempontból figyelemre méltóak, például különösen egyszerűek vagy elegánsak, „szépek". Ugyanakkor nem szerencsés, ha az útmutató túl terjengős lesz a megoldások nagy száma miatt, el kell kerülni ezek öncélú szaporítását. A közölt megoldások ezért legyenek valóban lényegesen különbözőek. Az V. megoldás sokáig benne volt a tervezett útmutatóban, végül – tekintettel az utolsó említett szempontra – mégis kikerült belőle, hiszen alapelveit tekintve sokban hasonlít a III. megoldásra, így kevés újat mond, ötödikként talán túlzás lett volna szerepeltetni.

Végül még egy érdekesség: ez a feladat tulajdonképpen a 2017. májusi emelt szintű feladatsor 8/b. feladata[4] „ikerfeladatának" is tekinthető. Ott a szabályos háromszög szögeit, itt az oldalait osztottuk egyenlő részekre. Mindkét feladatra sok,

[4]`https://www.oktatas.hu/bin/content/dload/erettsegi/feladatok_2017tavasz_emelt/e_mat_17maj_fl.pdf`

változatos megoldás készíthető, melyek a geometria számos szépségét felvonultatják. A javítási útmutatóba ezek közül akkor is csak néhány kerülhetett bele, ezért aztán az a feladat is a KöMaL-ban élt tovább[5].

A matematika érettségi tételkészítő bizottság

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A(-1;4)$, $B(7;-2)$ és $C(5;8)$.

a) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a C ponton és a háromszöget két egyenlő területű részre osztja. (*4 pont*)

b) Számítsuk ki, hogy az y tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz. (*6 pont*)

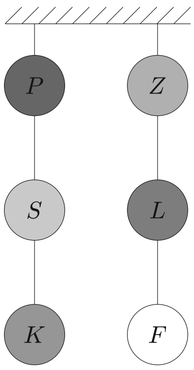
2. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$|x-2|^{2x^2-11x+14}=1. \qquad (6\ pont)$$

b) Oldjuk meg az 1-nél nagyobb egész számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$7\cdot\binom{n}{2}=2\cdot\binom{n+2}{3}. \qquad (7\ pont)$$

3. Egy céllövöldében az *ábrán* látható módon felfüggesztettek hat különböző színű lufit. Azt a szabályt vezették be, hogy csak arra a lufira szabad lőni, amelyik a két felfüggesztés bármelyikében éppen legalul van.



a) Hány különböző sorrendben lőhető le a fenti szabály szerint a hat lufi? (*5 pont*)

Ebben a céllövöldében egy nyolcfős társaság szórakozott, ahol az első öt személy 3, 1, 5, 2 és 3 lufit talált el.

b) Hány lufit talált el a maradék három személy külön-külön, ha a társaság találatainak átlaga 3, mediánja 2,5 lett? (*5 pont*)

Nagyszámú megfigyelés alapján megállapították, hogy 0,4 annak a valószínűsége, hogy egy céllövő elsőre eltalálja a kiszemelt lufit.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a céllövő 6 lövésből legalább 5 lufit eltalál? (*4 pont*)

[5] `http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=201959` (KöMaL, 2017. november)

4. Egy mértani sorozat első három tagja ebben a sorrendben $\sin\alpha$, $\sin 2\alpha$ és $2\cos^2\alpha$. Ennek a sorozatnak nem tagja a nulla és hányadosa negatív szám.

a) Számítsuk ki a sorozat második tagjának pontos értékét. (*6 pont*)

Az $\{a_n\}$ sorozatot a következőképpen adtuk meg:

$$a_n = \begin{cases} 3n-2, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ 0{,}1\cdot(-1{,}1)^n, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

b) Számítsuk ki a sorozat első 101 tagjának összegét. Az eredményt egész számra kerekítve adjuk meg. (*8 pont*)

II. rész

5. Az a és b pozitív számok számtani közepe 4, mértani (geometriai) közepe 2.

a) Számítsuk ki a két szám négyzetes közepének pontos értékét. (*5 pont*)

Az x tengely, az $x=p$, az $x=q$ és az $y=\frac{1}{x^2}$ egyenletű görbe által határolt síkidom területe megegyezik az x tengely, az $x=q$, az $x=r$ és az $y=\frac{1}{x^2}$ egyenletű görbe által határolt síkidom területével, ahol $p,q,r>0$ és $p<q<r$.

b) Igazoljuk, hogy a q szám a p és r számok harmonikus közepe. (*5 pont*)

Az ABC háromszög A csúcsánál lévő belső szögének nagysága 70°, B csúcsánál lévő belső szögének nagysága pedig 35°. Jelölje D a BC oldal C-n túli meghosszabbításának azt a pontját, amelyre a $DAC\sphericalangle = 35^\circ$.

c) Igazoljuk, hogy az AD szakasz hossza a BD és CD szakaszok hosszának mértani (geometriai) közepe. (*6 pont*)

6. Egy n pontú egyszerű gráf minden pontjának 15 a fokszáma. Komplementer (kiegészítő) gráfjának 18 éle van. (A G gráf komplementere az a gráf, amelynek pontjai megegyeznek G pontjaival, és amelyben két pont pontosan akkor van összekötve éllel, ha G-ben nincs összekötve.)

a) Hány pontú ez a gráf? (*6 pont*)

Egy 18 pontú teljes gráf éleit a piros, fehér és zöld színekkel színeztük ki úgy, hogy a fehér élek száma kétszerese a piros élek számának, és a három különböző színű él számának a szorzata a legnagyobb.

b) Hány zöld éle van az így kiszínezett gráfnak? (*6 pont*)

Internetes ismeretségi hálózatokban, mint például a Facebook vagy a LinkedIn, két személy között akkor jön létre a kapcsolat, ha azt mindkét fél visszaigazolta. Ilyen módon bármely két személy között vagy egyáltalán nincs kapcsolat, vagy pontosan egy kapcsolat létezik.

Egy 18 főből álló mintában 16 résztvevőnek 2, a többi 2 résztvevőnek pedig 1 egymás közötti kapcsolata van. Azt is tudjuk továbbá, hogy jelenleg bármely két személy között létezik közvetlen vagy közvetett kapcsolat, azaz az ismeretségeket követve bármelyik résztvevőtől bármelyik másikig el tudunk jutni a hálózaton belül.

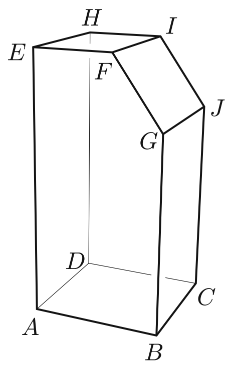
c) Mutassuk meg, hogy a már létező kapcsolatok közül bármelyiket megszüntetve a hálózat szétesik, azaz biztosan lesz legalább két olyan személy, akik között sem közvetlen, sem közvetett kapcsolat nem marad. (*4 pont*)

7. Az *1. ábrán* látható kézfertőtlenítőt tartalmazó flakon azon részét modelleztük a *2. ábrán,* ameddig megtöltik fertőtlenítőszerrel. Ez a töltési rész úgy keletkezett, hogy az $ABCD$ négyzet alapú egyenes hasábból a megadott módon levágtunk egy testet. Az így keletkezett flakon belső méretei: $AB = 6{,}5$ cm, $AE = 13{,}5$ cm, $EF = 4$ cm és $BG = 10$ cm. (A flakonban lévő adagoló pumpa által elfoglalt térrészt nem vesszük figyelembe.)

a) Számítsuk ki a töltési rész térfogatát. A választ egész ml-re kerekítve adjuk meg. (*5 pont*)

A fertőtlenítő 96% hatóanyagot tartalmaz, azaz 96%-os töménységű. Egy felhasználó elhasználja a flakonban lévő mennyiség 1%-át, majd az elhasznált mennyiség helyére ugyanannyi vizet önt. (Feltételezzük, hogy a hatóanyag és a víz egyenletesen keveredik.) Tudjuk, hogy a fertőtlenítőszer még 50%-os töménységben is elfogadható hatásfokkal véd.

1. ábra



2. ábra

b) Legfeljebb hányszor lehet a fenti műveletet megismételni, ha azt szeretnénk, hogy a fertőtlenítőszer továbbra is elfogadhatóan hatásos legyen? (*5 pont*)

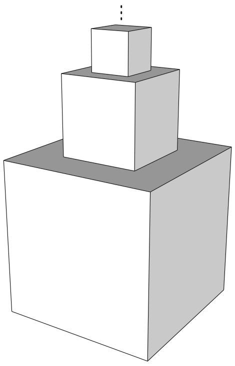
Az alábbi táblázat egy vállalkozásban dolgozók koreloszlását mutatja, valamint az adott korcsoportra vonatkozó *tünetmentesen fertőző* tulajdonság előfordulási valószínűségét a járvány egy adott szakaszában.

Korcsoport	**20–30 éves**	**31–40 éves**	**41–50 éves**	**51–65 éves**
Dolgozók száma	20	40	30	10
Tünetmentesen fertőző valószínűség	0,4	0,3	0,2	0,1

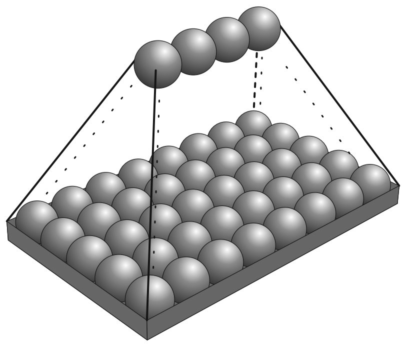
c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha találkozunk két dolgozóval, akkor lesz köztük legalább egy fertőző? A választ egy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg. (*6 pont*)

8. Egy társasjátékban a játékosok különböző méretű kockákból „tornyot” építenek (lásd *3. ábra*). A legalsó kocka éle 16 cm, a rárakott kockáké 8 cm és 4 cm. Az építést tovább folytatva minden újonnan felrakott kocka élhossza a közvetlenül előtte felrakott kocka élhosszának a fele.

a) Mekkora lenne a keletkező „torony” felszíne, ha az építést végtelen sokáig lehetne folytatni? (A felszínhez a legalsó szint alaplapjának területét is vegyük figyelembe.) (*6 pont*)



3. ábra



4. ábra

Egy másik játékban egyforma méretű gömböket rakunk az ábrán látható átlátszó műanyag tartóba. A tartó legalján, annak oldalaival párhuzamosan, 5 sorban soronként 8 gömb érintkezik egymással, a vízszintes talajjal és a szélsők a tartóval is. Az így elhelyezett gömbök közötti „gödrökbe” újabb gömböket teszünk, ezáltal egy újabb szint jön létre. Ezt az eljárást folytatva újabb és újabb szintek keletkeznek, majd kialakul egy háztető alakú „prizma” (lásd *4. ábra*). Tekintsük az így keletkezett legfelső szintet elsőnek, és lefelé haladva sorrendben a többit második, harmadik, …, és n. szintnek. Ekkor megfigyelhető, hogy az n. szinten n^2+3n darab gömb lesz.

b) Számítsuk ki, hogy hányadik szinten fejeződik be az eljárás, ha a „prizma” építését képzeletben lefelé csak addig folytatjuk, amíg a legalsó szinten legalább 2021 darab gömb lesz. (*4 pont*)

c) Igazoljuk, hogy ha az n. szinten pontosan n^2+3n darab gömb van, akkor az n szintű prizmában összesen $\frac{n(n+1)(n+5)}{3}$ gömb van. (*6 pont*)

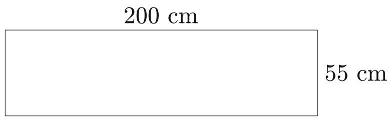
9. Nyári szünetben a 4 éves Peti és a 10 éves Kati nem járt óvodába, illetve iskolába. Napközben sokféle játékot játszottak, de a legnépszerűbb a céltáblára dobálás volt. A céltábla előtt bizonyos távolságra egy csíkot ragasztottak a padlóra, ezzel jelölve meg azt a helyet, ahonnan dobni lehet. Napközben, ha a család bármelyik tagja arra jár, véletlenszerűen dob a táblára egy „dobónyíllal”. A céltáblájukon mind a négy körgyűrű szélessége a középen elhelyezkedő kis kör sugarával egyezik meg, és azonos nagyságú területet ugyanakkora valószínűséggel találnak el. Ha valaki eltalál egy körgyűrűt vagy a belső kört, akkor annyi pontot szerez, amekkora szám van arra a részre írva. Ha valaki a körvonalat találja el, akkor a nagyobb pontszám jár neki.

a) Mennyi a szerzett pontszámok várható értéke, ha nagyon sok dobást hajtanak végre? (*5 pont*)

Kati lemásolta a céltábla koncentrikus köreit egy papírra. Hatféle színezője volt. A középső kis körlapot és a négy körgyűrűt úgy színezte ki, hogy a kis körlap és a külső körgyűrű azonos színű, de bármelyik két szomszédos rész különböző színű lett.

b) Határozzuk meg a különböző színezések számát, ha egy színezéshez legalább 3 színt használt. (*7 pont*)

Az óvodában a 29 ballagó gyerek mindegyike kapott egy 10 cm sugarú körlapot, amire búcsúajándékként tetszőleges rajzot készíthettek. Az óvodapedagógusok úgy rakták ki az alkotásokat egy 200 cm széles és 55 cm magas parafalemezre, hogy bármelyik két körlap még részben sem fedte egymást, és egyetlen körlap se nyúlt túl az alábbi lemezen.



c) Adjuk meg a körlapok egy ilyen lehetséges elhelyezését. (*4 pont*)

Varga Péter
Budapest

Megoldásvázlatok a 2021/3. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán.*

a) $x-1 \leqslant \dfrac{x^2-x+6}{x^2+x-6}$. (*6 pont*)

b) $\log_{0,5}(-x^2+6x-8) \leqslant 2+\log_{0,5} 3$. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A tört nevezője nem lehet zérus, emiatt $x \neq 2$ és $x \neq -3$. Közös nevezőre hozzuk és nullára rendezzük az egyenlőtlenséget:

$$\frac{x^3-x^2-6x}{x^2+x-6} \leqslant 0.$$

Szorzattá alakítjuk a bal oldalt:

$$\frac{x(x-3)(x+2)}{(x-2)(x+3)} \leqslant 0.$$

A hányados értéke pontosan akkor nulla, ha a számlálója 0. A hányados értéke pontosan akkor negatív, ha a tényezők között nincs 0, és páratlan sok tényezője negatív, vagyis $x<-3$ vagy $-2\leqslant x\leqslant 0$ vagy $2<x\leqslant 3$.

b) A logaritmus értelmezése alapján $-x^2+6x-8>0$, amely akkor teljesül, ha $2<x<4$. Az egyenlőtlenség jobb oldalát átalakítjuk a logaritmus definíciójának segítségével:

$$\log_{0,5}(-x^2+6x-8)\leqslant \log_{0,5}0{,}25+\log_{0,5}3.$$

A logaritmus azonosságát felhasználva összevonjuk a jobb oldalon álló kifejezést:

$$\log_{0,5}(-x^2+6x-8)\leqslant \log_{0,5}0{,}75.$$

A 0,5 alapú logaritmus függvény szigorú monoton csökkenését figyelembe véve, a relációs jel megfordításával elhagyjuk a logaritmusokat, így a következő másodfokú egyenlőtlenséghez jutunk:

$$-x^2+6x-8\geqslant 0{,}75.$$

A másodfokú egyenlőtlenség megoldása $2{,}5\leqslant x\leqslant 3{,}5$, amely megfelel a kikötésnek.

2. *A* 688, 1204 *és a* 2021 *számok ugyanannak a természetes számokból álló,* 1*-nél nagyobb differenciájú a_n számtani sorozatnak a tagjai.*

a) Határozzuk meg az a_n sorozat differenciáját. (*4 pont*)

b) Mennyi az a_n sorozat négyjegyű tagjainak összege? (*6 pont*)

c) Igazoljuk, hogy a 688, 1204 *és a* 2021 *számok nem lehetnek ebben a sorrendben egy mértani sorozat egymást követő tagjai.* (*3 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel a sorozat tagjainak különbsége a differencia többszöröse, ezért az $1204-688=516$ és a $2021-1204=817$ 1-nél nagyobb közös osztóit keressük. Az $516=2^2\cdot 3\cdot 43$ és a $817=19\cdot 43$. A két számnak a 43 az egyetlen 1-nél nagyobb közös osztója, tehát a sorozat differenciája a 43.

b) A sorozat első négyjegyű tagja az 1032, az utolsó a 9976. A sorozatnak 209 négyjegyű tagja van, hiszen $1032+(n-1)\cdot 43=9976$, amelyből $n=209$. Így a négyjegyű tagok összege:

$$S_{209}=\frac{1032+9976}{2}\cdot 209=1\,150\,336.$$

c) A mértani sorozat definíciója alapján az egymást követő tagok hányadosa állandó. A megadott 3 számra ez nem teljesül, ugyanis $\frac{1204}{688}\neq\frac{2021}{1204}$.

3. *Az óceánon egy kutatócsoportnak elromlott a hajója. Két mentőcsapat siet segítségükre. A kutatók épp derékszögben látják a két mentőhajót, amikor az egyik az $A(4;5)$ és a másik a $B(5;-3)$ pontban láthatók a radaron. A koordinátarendszer egysége a valóságban* 1 km.

a) A koordinátarendszer mely pontjában van a kutatóhajó, ha a három hajó által közrefogott háromszög területe a valóságban 15 km^2*, és a kutatócsoport helyének abszcisszája* 1. (*7 pont*)

A radaron véletlenszerűen felbukkan egy tengeralattjáró a hajók által közrefogott háromszögön belül.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a tengeralattjáró az abszcissza-tengely alatt bukkan fel? (*6 pont*)

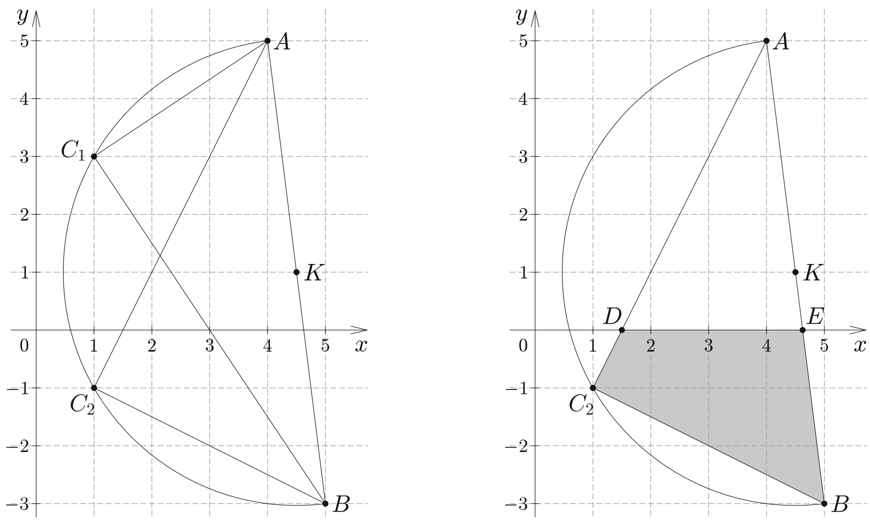
Megoldás. *a*) Mivel a kutatók a két mentőhajót derékszög alatt látják, ezért az AB átmérőjű Thalész-körön vannak (*1. ábra*). A kör átmérője

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(5-4)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{65}\,,$$

a kör középpontja az AB szakasz $K\left(\frac{9}{2};1\right)$ felezőpontja, így a kör egyenlete:

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{65}{4}.$$

A kutatócsoport helyének első koordinátája 1, emiatt a kutatók a $C_1(1;3)$ vagy $C_2(1;-1)$ pontban lehetnek. Az ABC_1 háromszög területe 13 területegység, az ABC_2 háromszög területe 15 területegység. Tehát a kutatóhajó a $C_2(1;-1)$ pontban van.



1. ábra *2. ábra*

b) A valószínűséget a $BEDC_2$ négyszög és az AC_2B háromszög területének hányadosaként számoljuk ki (*2. ábra*). A $BEDC_2$ négyszög területét megkapjuk, ha az AC_2B háromszög területéből kivonjuk az ADE háromszög területét. A C_2A egyenes meredeksége 2, ezért az x-tengelyt a $D\left(\frac{3}{2};0\right)$ pontban metszi. Az AB egyenes meredeksége -8, így az x-tengelyt az $E\left(\frac{37}{8};0\right)$ pontban metszi. A DE szakasz hossza $\frac{37}{8} - \frac{3}{2} = \frac{25}{8}$.

$$T_{BEDC_2} = 15 - \frac{\frac{25}{8}\cdot 5}{2} = \frac{115}{16}.$$

A kérdezett valószínűség:

$$P = \frac{\frac{115}{16}}{15} = \frac{23}{48}.$$

4. *Az $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + d$ harmadfokú függvény lokális minimumhelye egyben zérushelye is.*

a) Határozzuk meg d értékét. *(7 pont)*

Legyen az f függvény lokális minimumhelye m, maximumhelye n.

b) Mekkora területet zár közre az x-tengely, az $x = m$, az $x = n$ egyenesek és az $y = f(x)$ egyenletű görbe? *(6 pont)*

Megoldás. *a)* Ahol a függvénynek lokális szélsőértéke van, ott

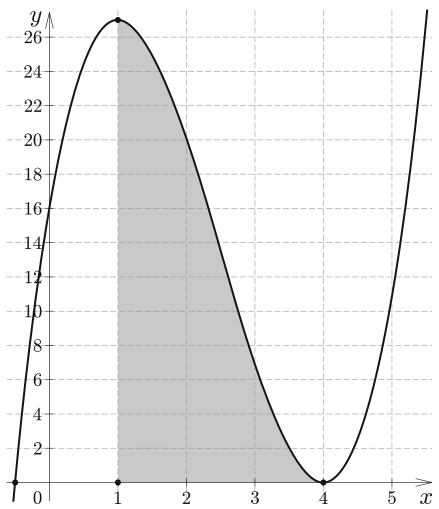
$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai $x_1 = 1$ és $x_2 = 4$.

A függvény második deriváltja $f''(x) = 12x - 30$. $f''(1) = 12 - 30 = -18 < 0$, emiatt $x = 1$-ben a függvénynek lokális maximuma van.

$$f''(4) = 48 - 30 = 18 > 0,$$

emiatt $x = 4$ a függvény lokális minimumhelye, egyben zérushelye is. Ebből következően



$$f(4) = 2 \cdot 4^3 - 15 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 + d = 0,$$

amelyből $d = 16$.

b) Az *a)* feladat megoldása alapján $m = 4$ és $n = 1$. A függvény az $[1; 4]$ intervallumon az x-tengely fölött helyezkedik el. A görbe alatti terület:

$$T = \int_1^4 (2x^3 - 15x^2 + 24x + 16) =$$

$$= \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{15x^3}{3} + \frac{24x^2}{2} + 16x\right]_1^4 = \frac{81}{2}.$$

II. rész

5. *A MathCoffie Rt.* 6 *féle kávékeveréket gyárt (Arcusa, Binoma, Ciklona, Dodeka, Expona és Faktora). Pepi ki szeretné próbálni mindegyiket, ezért* 2 *dobozzal vett mindegyik fajtából. A kávékeverékek* 3 *különböző árkategóriában kaphatók. Az Arcusa és a Binoma I. árkategóriájú, a Ciklona és a Dodeka II. árkategóriájú,* *az Expona és a Faktora III. árkategóriába tartozik. A II. kategóriájú kávé ára az I. és III. kategóriájú kávék árának az átlaga. A II. és I. kategóriák árának aránya* $\frac{10}{33}$*-dal kisebb, mint a III. és I. kategóriák árának aránya.*

a) Milyen árban vannak az egyes kávéfajták, ha Pepi a kávékért 15 480 Ft*-ot fizetett?* (*8 pont*)

Pepi mindegyik típusú kávéból az egyik dobozt megnyitotta, hogy megkóstolja a kávékat, majd visszazárta, így kívülről nem állapítható meg, hogy melyeket nyitotta ki. Pepi testvérei Pipi és Pepe szemet vetettek Pepi kávéjára, és véletlenszerűen elvettek a 12 *dobozból két-két dobozzal.*

b) Hányféleképp vihettek el két-két különböző típusú dobozt, ha számít, hogy a doboz bontott volt vagy sem? (*5 pont*)

c) Feltéve, hogy mindkét testvér két különböző típusú kávét vitt el, mi a valószínűsége, hogy a 6 *bontatlan doboz mindegyike otthon maradt?* (*3 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen az A és B kávé ára x, a C és D kávé ára y, az E és F kávé ára pedig z. A feltételek alapján felírható a következő egyenletrendszer:

$$\frac{x+z}{2}=y,$$

$$\frac{y}{x}+\frac{10}{33}=\frac{z}{x},$$

$$4x+4y+4z=15\,480.$$

Az egyenleteket rendezzük:

$$x-2y+z=0,$$

$$10x+33y-33z=0,$$

$$x+y+z=3870.$$

A harmadik egyenletből kivonva az első egyenletet $3y=3870$ adódik, amelyből $y=1290$. Ezt visszahelyettesítve az első két egyenletbe, majd rendezve azokat:

$$x+z=2580,$$

$$10x-33z=-42\,570.$$

Ebből $x=990$ és $z=1590$. Tehát az A és B típusú kávé ára 990 Ft, a C és D ára 1290 Ft és az E és F típusú kávé ára 1590 Ft.

b) 3 esetet különböztetünk meg aszerint, hogy hány olyan kávétípus van, amelyet mindketten választottak:

1. eset: Ha nem választottak egyforma kávéfajtát, akkor Pipi 6 kávéfajtából választott kettőt, és abból a kettőből 4-féleképp vihetett haza aszerint, hogy bontottakat vitt vagy sem. Pepe pedig 4 kávéfajtából választott kettőt, azokból szintén négyféleképp vihetett haza. Ezek alapján az első esetben $\binom{6}{2}\cdot 4\cdot\binom{4}{2}\cdot 4=1440$-féleképp választhattak.

2. eset: Ha egy kávéfajtából mindketten vittek, akkor a közös fajta 6-féle lehet, és ezt kétféleképp vehették el aszerint, hogy ki választotta a bontottat. A maradék 10 kávéból Pipi $5 \cdot 2 = 10$-féleképp választhatott, Pepe már csak $4 \cdot 2 = 8$-féleképp, mert nem választhatta ugyanazt a fajtát, mint Pipi. Ez $6 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 8 = 960$ lehetőség.

3. eset: Ha mindketten ugyanazt a kétfajta kávét választották, akkor a 6 kávéfajtából először kiválasztották a két közöset, majd azokból 4-féleképp vehettek el aszerint, hogy ki melyiket választotta. Ez $\binom{6}{2} \cdot 4 = 60$ lehetőség.

Tehát összesen $1440 + 960 + 60 = 2460$-féleképp vehetnek el a kávékból.

c) Legyen az A esemény az, hogy a hat bontatlan doboz otthon maradt, a B esemény pedig, hogy mindkét testvér különböző típusút vitt el. Ekkor

$$P(AB) = P(A) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2}} = \frac{90}{2970} = \frac{1}{33},$$

hiszen ha minden bontatlan doboz otthon maradt, akkor a két testvér biztosan különböző fajtákat választott, és azokból is csak a bontottat. $P(B) = \frac{2460}{2970} = \frac{82}{99}$, mert ez a *b*) feladat valószínűsége.

A fentiek alapján a kérdéses feltételes valószínűség:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{33}}{\frac{82}{99}} = \frac{3}{82}.$$

6. *Egy egység oldalú szabályos kilencszög csúcsai $A_1; A_2; \ldots; A_9$. Szerkesszünk félköröket $A_1A_3; A_2A_4; \ldots; A_7A_9; A_8A_1; A_9A_2$ szakaszokra, mint átmérőre a kilencszögön belül.*

a) Igazoljuk, hogy a félköröket érintő kör átmérőjének hossza

$$\frac{\cos 40^\circ - \sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}. \qquad (9\ pont)$$

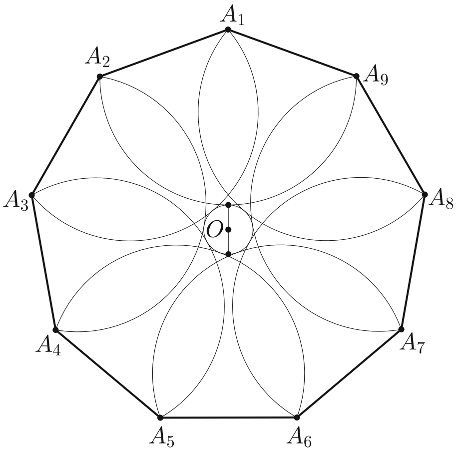
Húzzuk be a szabályos kilencszög összes átlóját, majd színezzük pirosra azokat a szakaszokat (átlókat, oldalakat), amelyek a csúcsok indexeit tekintve különböző paritásúakat kötnek össze, a többi szakaszt pedig fessük kék színűre.

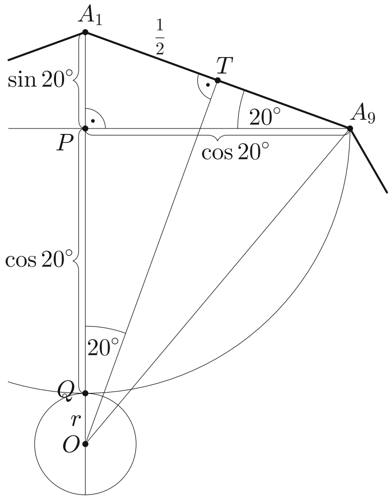
b) Hányféle úton lehet eljutni az A_1 csúcsból az A_9 csúcsba piros szakaszokon úgy, hogy minden csúcsot pontosan egyszer érinthetünk? (*3 pont*)

c) Mennyi a valószínűsége, hogy ha véletlenszerűen kiválasztunk a szakaszok közül kettőt, akkor azok különböző színűek? (*4 pont*)

Megoldás. *a*) *Ábrát* készítünk a feladathoz, és használjuk annak jelöléseit.

A keresett érintő kör O középpontja egyben a szabályos kilencszög középpontja is, sugara legyen r. Az A_9A_2 átmérőjű félkör középpontja P. A félkör az A_1O szakaszt az Q pontban metszi. A szabályos kilencszög belső szöge 140°, ezért $A_1OT\sphericalangle = A_1A_9P\sphericalangle = 20^\circ$. $A_1A_9 = 1$, ezért $A_1P = \sin 20^\circ$ és $A_9P = \cos 20^\circ$. Mivel A_9 és Q is az A_9A_2 átmérőjű félkörre illeszkedik, ezért $PA_9 = PQ = \cos 20^\circ$.





Az A_1OT háromszögben felírjuk $\sin 20°$-ot a háromszög oldalainak segítségével:

$$\sin 20° = \frac{1}{2 \cdot (r + \cos 20° + \sin 20°)}.$$

Ebből kifejezzük az érintő kör átmérőjét, $2r$-t:

$$2r = \frac{1}{\sin 20°} - 2\cos 20° - 2\sin 20°.$$

A jobb oldali kifejezést közös nevezőre hozzuk, majd alkalmazzuk a kétszeres szögek szögfüggvényeire vonatkozó összefüggéseket:

$$2r = \frac{1 - 2\sin^2 20° - 2\sin 20° \cos 20°}{\sin 20°} = \frac{\cos 40° - \sin 40°}{\sin 20°}.$$

Ezzel az állítást bizonyítottuk.

b) Az A_1 csúcsból csak páros indexű csúcsba léphetünk (ez 4 lehetőség), onnan páratlanba (ez 3 lehetőség), majd újra párosba (ez szintén 3 lehetőség), és így minden csúcson végighaladva az A_9 csúcsban fejeződik be az út. Ez összesen

$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 144$$

lehetőség.

c) A kilencszöget egy kilenccsúcsú gráfnak tekinthetjük, és megadjuk a piros szakaszokból álló részgráf éleinek számát. Ebben az öt páratlan indexű csúcs fokszámának mindegyike 4, a négy páros indexűé pedig 5. A fokszámok összege ezek alapján $5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 40$, tehát 20 piros él van a gráfban. A gráfnak összesen $\binom{9}{2} = 36$ éle van, ebből következően $36 - 20 = 16$ kék színű él van. A klasszikus valószínűségi modell (hipergeometrikus eloszlás) alapján a valószínűség:

$$P = \frac{20 \cdot 16}{\binom{36}{2}} = \frac{320}{630} \approx 0{,}508.$$

7. *a) Jellemezzük az*

$$a_n = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{3^n}$$

sorozatot monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából. (*9 pont*)

b) Mutassuk meg, hogy minden n pozitív egész számra

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \ldots + \frac{4n}{3^n} = 3 - \frac{2n+3}{3^n}. \qquad (\textit{7 pont})$$

Megoldás. *a)*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3^{n+2} - 2n - 5}{3^{n+1}} - \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{3^n} = \frac{4n+4}{3^{n+1}} > 0$$

minden n pozitív egész számra, ezért a sorozat szigorúan monoton nő.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 3^n}{3^n} - \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3^n} - \lim_{n\to\infty} \frac{3}{3^n} = 3 - 0 - 0 = 3,$$

tehát a sorozat konvergens, és a határértéke 3.

A sorozat konvergens, tehát korlátos. A sorozat monoton növekvő, ezért a legnagyobb alsó korlátja megegyezik a sorozat első elemével, tehát $\inf(a_n) = \frac{4}{3}$. A legkisebb felső korlátja pedig a sorozat határértékével egyezik meg, tehát $\sup(a_n) = 3$.

b) A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

$n = 1$-re $\frac{4}{3} = 3 - \frac{2+3}{3}$ teljesül.

Tegyük fel, hogy $n = k$-ra

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \ldots + \frac{4k}{3^k} = 3 - \frac{2k+3}{3^k}.$$

Igazoljuk az „öröklődést” $n = (k+1)$-re, vagyis

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \ldots + \frac{4k}{3^k} + \frac{4(k+1)}{3^{k+1}} = 3 - \frac{2(k+1)+3}{3^{k+1}}.$$

Használjuk fel az indukciós feltételt az egyenlet bal oldalán:

$$3 - \frac{2k+3}{3^k} + \frac{4(k+1)}{3^{k+1}} = 3 - \frac{2(k+1)+3}{3^{k+1}}.$$

Az egyenlet mindkét oldalából kivonva 3-at, majd szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy $-(6k+9) + 4k + 4 = -(2k+5)$, amelyből a zárójelek felbontása és összevonás után $-2k - 5 = -2k - 5$.

Az öröklődést igazoltuk, tehát az állítás igaz.

8. *a) Igazoljuk, hogy minden pozitív valós számpárra ha $x^2 + 4y^2 = 12xy$, akkor*

$$\lg(x + 2y) - 2\lg 2 = \frac{\lg x + \lg y}{2}. \qquad (\textit{6 pont})$$

b) Van-e megoldása az $x^2 + 4y^2 = 12xy$ egyenletnek a pozitív egész számok halmazán? Válaszunkat indokoljuk. (*10 pont*)

Megoldás. *a*) Alakítsuk át az elérni kívánt alakot 2-vel való szorzás után a logaritmus azonosságainak alkalmazásával:

$$\lg\,(x+2y)^2 - \lg 2^4 = \lg x + \lg y,$$
$$\lg\,(x+2y)^2 = \lg(16xy).$$

A logaritmusok elhagyhatók, mert a logaritmus függvény kölcsönösen egyértelmű.

A kapott $(x+2y)^2 = 16xy$ egyenletben a zárójel felbontása és rendezés után az $x^2+4y^2=12xy$ alakhoz jutunk. Minden átalakítás ekvivalens volt a pozitív számok halmazán, ezért azok visszafelé is elvégezhetők, így az állítást igazoltuk.

b) Az egyenlet x-re nézve másodfokú, ezért rendezzük 0-ra: $x^2-12xy+4y^2=0$. Írjuk fel a másodfokú egyenlet megoldóképletét:

$$x_{1,2} = \frac{12y \pm \sqrt{144y^2-16y^2}}{2} = 6y \pm 4\sqrt{2}y.$$

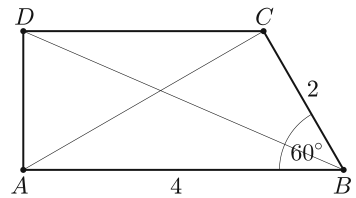
Ha y pozitív egész szám, akkor x-re irracionális számot kapunk, tehát az egyenletnek nincs megoldása a pozitív egész számok halmazán.

9. *Egy derékszögű trapéz hegyesszöge* 60°*-os, hosszabbik alapjának és hosszabbik szárának aránya* $2:1$.

a) *Határozzuk meg a trapéz átlóinak arányát.* (*6 pont*)

A trapézt megforgatjuk a hosszabbik alapja, majd a hosszabbik szára körül.

b) *Határozzuk meg a kapott testek térfogatának arányát.* (*10 pont*)



Megoldás. *a*) *Ábrát* készítünk a feladathoz, és használjuk a jelöléseit.

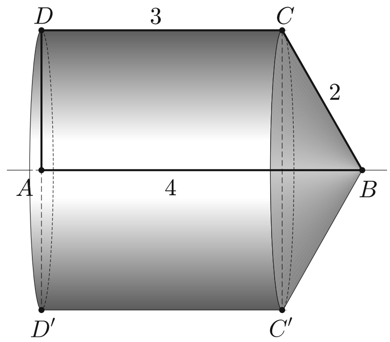
A megoldás során többször felhasználjuk, hogy a félszabályos háromszög szögei 30°, 60° és 90°, oldalainak aránya $1:\sqrt{3}:2$. Mivel az átlók arányát kell meghatározni, ezért a hasonlóságot kihasználva rögzíthetjük a hosszabbik alap hosszát az egyszerűség kedvéért 4 egységnek. Ekkor a hosszabbik szár hossza 2 egység. Az ABC háromszög félszabályos, mivel a 60°-os szöget közrefogó két oldal aránya $1:2$. Emiatt az $ACB\sphericalangle = 90^\circ$, $BAC\sphericalangle = 30^\circ$ és az AC szakasz hossza $2\sqrt{3}$. A $CAD\sphericalangle = 60^\circ$, mert a $BAC\sphericalangle$ pótszöge. Ebből következően az ACD derékszögű háromszög szintén egy félszabályos háromszög, így az AD oldal hossza $\sqrt{3}$ és a CD oldal hossza 3 egység. Ezek után a BD átló hosszát az ABD derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel alkalmazásával kiszámoljuk:

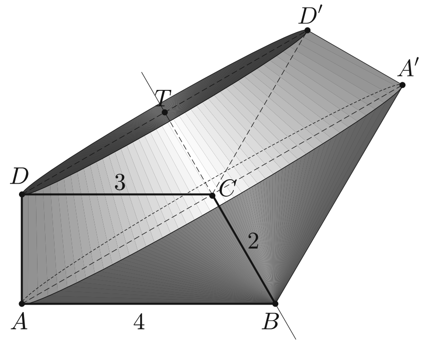
$$BD = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{19}\,.$$

A fentiek alapján az átlók aránya

$$\frac{AC}{BD} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}} = \frac{2\sqrt{57}}{19}.$$

b) *Ábrát* készítünk a feladathoz, és használjuk a jelöléseit.





Az első ábrán látható a hosszabbik alap körüli forgatással nyert test. A test térfogatát egy azonos alapkörű henger és kúp térfogatának összegeként kapjuk meg. Az alapkör sugara a trapéz AD magasságával egyenlő, tehát $r_h = r_k = \sqrt{3}$ egység hosszú, a henger magassága $m_h = CD = 3$, a kúp magassága $m_k = AB - CD = 1$ egység. A fentiek alapján az első test térfogata

$$V_1 = r_h^2 \pi m_h + \frac{r_k^2 \pi m_k}{3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi \cdot 3 + \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi \cdot 1}{3} = 10\pi.$$

A második ábrán látható a hosszabbik szár körüli forgatással nyert test. A test térfogatát úgy kapjuk meg, ha egy kúp és egy csonkakúp térfogatának összegéből kivonjuk egy kisebb kúp térfogatát. A kis kúp csúcsa egybeesik a nagy kúp alapkörének középpontjával, mivel az AC átló merőleges a BC szárra. A nagy kúp sugara megegyezik a csonkakúp alapkörének sugarával: $r_{\text{nk}} = R_{\text{csk}} = AC = 2\sqrt{3}$. A csonkakúp fedőkörének sugara megegyezik a kisebbik kúp alapkörének sugarával. A DCT háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, mert oldalaik páronként párhuzamosak. A hasonlóság aránya

$$\frac{DC}{AB} = \frac{3}{4}, \quad \text{így} \quad r_{\text{csk}} = r_{kk} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

A nagy kúp magassága $m_{\text{nk}} = CB = 2$, a csonkakúp és a kis kúp magassága $m_{\text{csk}} = m_{kk} = TC = \frac{3}{2}$. A fentiek alapján a második test térfogata:

$$V_2 = \frac{r_{\text{nk}}^2 \pi m_{\text{nk}}}{3} + \frac{\pi m_{\text{csk}}}{3}\left(R_{\text{csk}}^2 + R_{\text{csk}} r_{\text{csk}} + r_{\text{csk}}^2\right) - \frac{r_{kk}^2 \pi m_{kk}}{3} =$$

$$= 8\pi + \frac{111\pi}{8} - \frac{27\pi}{8} = \frac{37\pi}{2}.$$

A két test térfogatának aránya:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{10\pi}{\frac{37}{2}\pi} = \frac{20}{37}.$$

Csányi Tibor
Budapest

Matematika feladatok megoldása

B. 5100. *Mutassuk meg, hogy n szomszédos egész szám közül mindig kiválasztható néhány (legalább egy), melynek összege osztható $(1+2+\ldots+n)$-nel.*

(*6 pont*) *Kovács Benedek* és *Várkonyi Zsombor* ötletéből

Megoldás.

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

n darab egymást követő egész szám teljes maradékrendszert alkot modulo n, az $(n+1)$-gyel osztva pedig egy kivételével (legyen ez a kivétel d) minden maradékot felvesz. Az n darab egymást követő egész szám közül kössünk össze kék színű éllel két számot, ha az összegük osztható n-nel, illetve pirossal, ha $(n+1)$-gyel osztható az összegük. Így egy n csúcsú gráfot kapunk, amiben minden csúcs fokszáma legfeljebb 2, és minden csúcsból legfeljebb egy piros és egy kék él indul ki. Tekintsük a gráf összefüggő komponenseit. Mivel minden csúcs legfeljebb másodfokú, egy ilyen komponens csak kör, *alternáló* (váltakozó színű egymáshoz csatlakozó élekből álló) út, vagy izolált pont lehet. Minden számból kiindul egy piros és egy kék él, kivéve az n-nel osztva 0 és – páros n esetén – $\frac{n}{2}$ maradékot adó (A és B), valamint az $(n+1)$-gyel osztva 0 és (páratlan n esetén) $\frac{n+1}{2}$ maradékot adó (C és E), illetve esetleg az $n+1-d$ maradékot adó D számokból.

Tekintsük az A csúcsot tartalmazó komponenst, ami – mivel A-ból nem indul kék él – csakis alternáló út lehet. Ha ennek az alternáló útnak a másik végpontja nem a D csúcs, akkor ezen alternáló út csúcsainak megfelelő számok összege osztható $n(n+1)/2$-vel:

1. Ha a másik végpont B, akkor n páros, és $A+B \equiv 0+\frac{n}{2} \pmod{n}$ osztható $\frac{n}{2}$-vel, a többi szám a kék élek mentén párokba állítható, ezért összegük osztható n-nel. Az út valamennyi csúcsát a piros élek mentén párokba állítva adódik, hogy a megfelelő számok összege osztható $(n+1)$-gyel. Az egymáshoz relatív prím $\frac{n}{2}$ és $n+1$ számokkal való oszthatóságból következik, hogy az összeg $\frac{n}{2}\cdot(n+1)$-gyel is osztható.

2. Ha a másik végpont C, akkor a kék élek mentén történő párokba állításból csak az (n-nel osztható) A marad ki, a többiek összege osztható n-nel. A piros élek mentén párokba állításból csak a C marad ki, ami viszont osztható $(n+1)$-gyel, ezért ekkor az útba eső számok összege még $n(n+1)$-gyel is osztható.

3. Ha a másik végpont E, akkor a helyzet az előbbihez hasonló, mindössze E csupán $\frac{n+1}{2}$-vel osztható, amiből pontosan a kívánt állítást kapjuk.

Ha viszont a D csúcs a másik végpont, akkor C is csúcsa a gráfnak, és a C-t tartalmazó alternáló út komponens másik végpontja – n párosságától, illetve páratlanságától függően – B vagy E. Ekkor – a fenti esetekhez hasonlóan – ez utóbbi alternáló úthoz tartozó összeg lesz $n(n+1)/2$ többszöröse, tehát készen vagyunk.

Nádor Benedek (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) megoldása alapján

23 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 6 versenyző: Baski Bence, Füredi Erik Benjámin, Kovács Tamás, Nádor Benedek, Németh Márton, Sztranyák Gabriella. 5 pontos 4, 4 pontos 1, 3 pontos 1, 2 pontos 3, 1 pontos 4, 0 pontos 3 dolgozat. Nem számítjuk a versenybe a születési dátum vagy a szülői nyilatkozat hiánya miatt: 1 dolgozat.

B. 5112. *Egy kártyapakliban p darab piros és k darab kék kártya van. Hányféleképpen választhatunk ki a pakliból kártyákat úgy, hogy a piros kártyák száma n-nel több legyen, mint a kék kártyák száma?*

(*4 pont*)

I. megoldás. Először a következő segédtételt igazoljuk: ha a, b és m adott pozitív egészek, melyekre $a+b \geqslant m$, akkor

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{a}{i}\binom{b}{m-i} = \binom{a+b}{m}.$$

Bizonyítás: Ha egy társaságban a nő és b férfi van, akkor közülük $\binom{a+b}{m}$-féleképpen választhatunk ki m főt – ez éppen a bizonyítandó azonosság jobb oldala. Másrészt összeszámlálhatjuk úgy is az eseteket, hogy 0 nőt és m férfit, vagy 1 nőt és $m-1$ férfit, vagy 2 nőt és $m-2$ férfit, …, vagy i nőt és $m-i$ férfit, …, vagy m nőt és 0 férfit választunk ki. Ezeknek a lehetőségeknek a száma nyilván az azonosság bal oldala.

A feladatra térve jelöljük t-vel a kiválasztott kék kártyák számát, ekkor a kiválasztott piros kártyák száma $n+t$; t értéke 0-tól k-ig mehet. Ezeket

$$\binom{p}{n+t}\binom{k}{t} = \binom{p}{n+t}\binom{k}{k-t}\text{-féleképpen}$$

választhatjuk ki. A feladat kérdésére a válasz ezek összege. Használjuk fel a segédtételt $a := p$, $b := k$, $m := n+k$, $i := n+t$ helyettesítéssel. Ekkor a szummából látszólag kimarad néhány tag, ám azokra a t értékekre (mikor t értéke $-n$ és -1 között lenne) $\binom{k}{k-t}$ értéke 0. Ezt kapjuk:

$$\sum_{t=0}^{k}\binom{p}{n+t}\binom{k}{k-t}=\sum_{n+t=n}^{n+k}\binom{p}{n+t}\binom{k}{n+k-(n+t)}=$$

$$=\sum_{n+t=0}^{n-1}\binom{p}{n+t}\binom{k}{n+k-(n+t)}+\sum_{n+t=n}^{n+k}\binom{p}{n+t}\binom{k}{n+k-(n+t)}=$$

$$=\sum_{n+t=0}^{n+k}\binom{p}{n+t}\binom{k}{n+k-(n+t)}=\binom{p+k}{n+k}.$$

Csonka Illés (Pécs, Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimn., 9. évf.)

II. megoldás. Ha $n>p$, akkor a pakliban nincs elég piros kártya ahhoz, hogy létezzen megfelelő kiválasztás, tehát ebben az esetben a válasz 0. Így a továbbiakban $n\leqslant p$.

Állítsuk párba az $n+k$ elemszámú kártyarészhalmazokat, és a feladat feltételeinek megfelelő halmazokat. Minden H részhalmaz egyértelműen felírható, mint $H=H_k\cup H_p$, ahol H_k csak kék, H_p csak piros kártyákat tartalmaz. Jelölje továbbá K a kék kártyák halmazát. Legyen $f(H)=(K\backslash H_k)\cup H_p$. Mivel $K\backslash\{K\backslash H_k\}=H_k$, f egy involúció, vagyis olyan (X,Y) párokba rendezi a részhalmazokat, melyekben $f(X)=Y$ és $f(Y)=X$. Most megmutatjuk, hogy ha X egy, a feladat feltételeinek megfelelő részhalmaz, akkor $f(X)$ elemszáma $n+k$. A feladat szerint $|X_k|+n=|X_p|$. Így (felhasználva, hogy $\{K\backslash X_k\}\cap X_p=\emptyset$):

$$\big|f(X)\big|=\big|(K\backslash X_k)\cup X_p\big|=|K\backslash X_k|+|X_p|=|K|-|X_k|+|X_p|=k+n.$$

Megfordítva, ha X elemszáma $n+k$, vagyis $|X_k|+|X_p|=n+k$, akkor $f(X)=$ $=(K\backslash X_k)\cup X_p$, így $f(X)$-ben $\big|f(X)_k\big|=k-|X_k|$ kék és $\big|f(X)_p\big|=|X_p|$ piros kártya van, és $\big|f(X)_p\big|=|X_p|=n+k-|X_k|=n+\big|f(X)_k\big|$. Vagyis ha X elemszáma $n+k$, akkor $f(X)$ megfelel a feladat feltételeinek.

Ebből (illetve f kölcsönösen egyértelmű voltából) következik, hogy f párokba rendezi az $n+k$ elemszámú, és a feladatnak megfelelő halmazokat, vagyis az utóbbiból annyi van, mint az előbbiből, ami $\binom{p+k}{n+k}$.

Lovas Márton (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 10. évf.)

80 dolgozat érkezett. 4 pontos 26, 3 pontos 8, 2 pontos 11, 1 pontos 8, 0 pontos 24 dolgozat. Nem versenyszerű 2 dolgozat. Nem számítjuk a versenybe a születési dátum vagy a szülői nyilatkozat hiánya miatt: 1 dolgozat.

B. 5140. *Egy szigeten* 10 *ország található, ezek közül némelyek szomszédosak egymással, mások nem. Mindegyik ország egy saját valutát használ. Mindegyik országban egyetlen pénzváltó működik, a következő szabályok szerint: aki az adott ország valutájából* 10 *darabot befizet, az kap az összes szomszédos ország valutájából* 1-1 *darabot. Arisztid és Tasziló fejenként* 100-100 *egységgel rendelkeznek mindegyik ország valutájából. Ezután mindketten a nekik tetsző sorrendben váltogatják a pénzüket a különböző országok pénváltóiban, amíg csak van olyan valutájuk, amit tudnak váltani (tehát legalább* 10 *darab van belőle). Bizonyítsuk be, hogy a végén pontosan ugyanannyi bergengóc tallérja lesz Arisztidnek és Taszilónak (a bergengóc tallér a sziget egyik országának valutája).*

(*6 pont*) *Mészáros Gábor* (Budapest) ötletéből

Megoldás. Azt látjuk be, hogy mindketten minden egyes országban ugyanannyiszor váltottak pénzt – csak a váltások sorrendje különbözhet. Ebből következik, hogy a végén mindkettőjüknek ugyanannyi lesz minden valutából, hiszen egy országban elvégzett tranzakció ugyanolyan hatással van egy szereplő vagyonára, függetlenül attól, hogy azt mikor végzi el.

(Indirekt bizonyítás.) Tegyük fel, hogy van olyan ország, amelyben Taszilió többször váltott pénzt, mint Arisztid. Nézzük meg, hogy milyen sorrendben váltott Taszilió. Tekintsük azt a valutát, amiből leghamarabb váltott többet, mint Arisztid összesen abból a valutából. Legyen ez a valuta a C országban, és keressük Taszilió első olyan váltását, amikor azzal együtt már többször váltott a C ország valutájából, mint Arisztid összesen. Ezen váltás előtti pillanatot nevezzük a *kritikus helyzetnek.*

Amikor Arisztid már nem tud többet váltani, a C országgal szomszédos országokban biztosan legalább annyiszor váltott már, mint Taszilió a kritikus helyzetig. Mivel

1. Arisztid a C ország valutáját pontosan annyiszor váltotta fel, mint Taszilió a kritikus helyzetig;
2. és a szomszédos országokban történő váltásokból Arisztidnak legalább ugyanannyi bevétele volt a C ország valutájából, mint Taszilónak a kritikus helyzetig;

ezért Arisztidnak a végén legalább annyi C-beli valutája van, mint Taszilónak a kritikus helyzetben. Arisztid (a pénzváltásai végén) nem tud többet váltani, Taszilió pedig még biztosan tudott legalább egyet a C országéból, ez ellentmondás.

Tehát Arisztid és Taszilió tényleg minden egyes országban ugyanannyiszor váltottak pénzt.

Fülöp Csilla (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 10. évf.)

Egyéb megoldási kísérletek. Több versenyző próbált a következő módon érvelni.

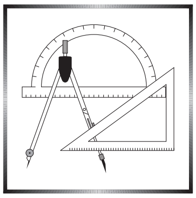
Ha valamelyik ország pénzéből összegyűlik legalább 10 darab, akkor azt előbb-utóbb be kell majd váltani. Mivel mindig pontosan ugyanolyan szomszédos valutákat kapunk a pénzünkért cserébe, ezért *mindegy, hogy mikor* váltjuk be. Tehát tekinthetjük a következő váltássort:

1. Váltsunk be 10-szer minden egyes országban, a váltások után az egyes országok valutájából lesz: $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ darabunk.
2. Ezután váltsunk be minden i-re az i-edik országban $\left\lfloor \frac{a_i}{10} \right\rfloor$ alkalommal. A váltások után az egyes országok valutájából lesz: $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{10}$.
3. Ismételjük az előző lépést, ameddig nem csökken minden valutánk darabszáma 10 alá.

Az így gondolkodó megoldóknak abban igaza van, hogy ezeket a váltásokat előbb-utóbb tényleg el fogjuk tudni végezni. Arra azonban senki nem írt kellően meggyőző érvet, hogy egy másféle váltássorozattal miért nem lehet esetleg elérni, hogy valamelyik országban ennél is többször tudjunk váltani. Az így érvelő dolgozatok általában 4 pontot kaptak.

44 dolgozat érkezett. 6 pontos 20 versenyző: Bán-Szabó Áron, Csonka Illés, Duchon Márton, Fülöp Csilla, Hegedűs Dániel, Jánosik Máté, Kercsó-Molnár Anita, Kovács Tamás, Kökényesi Márk Péter, Mezey Dorottya, Móra Márton Barnabás, Móricz Benjámin, Nádor Benedek, Németh Márton, Simon László Bence, Sztranyák Gabriella, Terjék András József, Tóth Bálint, Török Ágoston, Varga Boldizsár. 5 pontos 2, 4 pontos 13, 3 pontos 1, 2 pontos 5, 1 pontos 1, 0 pontos 2 dolgozat.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1665–1671.)



Feladatok 10. évfolyamig

C. 1665. A *KÖMAL* szó minden betűje egy-egy tízes számrendszerbeli számjegyet jelöl. Határozzuk meg a $\overline{KÖMAL}$ ötjegyű számot, ha fennállnak a következő egyenlőségek:

$$M + Ö + L = \overline{KA}, \tag{1}$$

$$Ö + L = \overline{KK}, \tag{2}$$

$$K + Ö + M = 10, \tag{3}$$

$$A \cdot L = 42. \tag{4}$$

C. 1666. Az ABC hegyesszögű háromszög A pontból induló belső szögfelezőjének metszéspontja a B-ből induló belső szögfelezővel, valamint a BC oldallal K, illetve D. Az A pontból induló belső szögfelező metszéspontja a B-ből induló belső szögfelezővel, valamint a BC oldallal K, illetve D. Az AD szögfelezőre a K pontban állított merőleges az AB oldalt az E pontban metszi. Az E pontból a BC-re állított merőleges talppontja F. Bocsássunk merőlegest a D pontból az AB egyenesre, a merőleges talppontja T. Bizonyítsuk be, hogy T pont illeszkedik a KEF háromszög körülírt körére.

Feladatok mindenkinek

C. 1667. Legyen

$$A=(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^{2021},$$
$$B=(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+\ldots+(-2)^{2021}$$

és

$$C=(-3)^1+(-3)^2+(-3)^3+\ldots+(-3)^{2021}.$$

Határozzuk meg a $B+C-A$ szám utolsó számjegyét.

C. 1668. Az $ABCD$ paralelogramma AB, BC, CD, DA oldalainak felezőpontjai rendre E, F, G, H. Az AF és AG egyenesek a BD átlót a K, illetve L pontban metszik. Mutassuk meg, hogy az EFK és GHL háromszögek területének összege az EKL háromszög területével egyenlő.

C. 1669. Adott az $N=\overline{abc}$ tízes számrendszerbeli háromjegyű szám. Az $M=\overline{abc}$ nem tízes számrendszerbeli szám értéke $2N$. Határozzuk meg az N számot.

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1670. Legyenek a és b tetszőleges egész számok, amelyekre $3a-2b$ osztható 13-mal. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $4a+19b$ és $38a+57b$ is osztható 13-mal.

C. 1671. Az $ABCD$ paralelogramma S síkjára merőlegesen az AE, BF, CG, DH szakaszokat állítottuk az S sík által meghatározott egyik féltérben. A $CGEA$ és $DHFB$ négyszögek területét T, illetve t jelöli. Igazoljuk, hogy ha

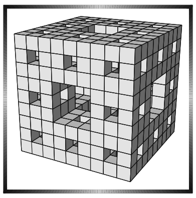
$$\frac{T}{t}=\frac{AC}{BD},$$

akkor az E, F, G, H pontok egy síkra illeszkednek.

❄

Beküldési határidő: 2021. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5166–5173.)

B. 5166. Vannak-e olyan 3-nál nagyobb p, r prímszámok, amelyekre $2p^2+7r^2+2021$ számjegyeinek összege négyzetszám?

(*3 pont*)

B. 5167. Adott a síkon két kör úgy, hogy vannak közös belső érintőik. Mutassuk meg, hogy e közös érintők érintési pontjain átmenő kör középpontja felezi a két kör középpontjait összekötő szakaszt.

(*3 pont*) Javasolta: *Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 8.C. osztály*

B. 5168. Felírjuk 1-től 100-ig az egész számokat egy-egy cédulára. A száz darab cédula közül kiválasztunk 16 darabot. Található-e biztosan négy olyan cédula a kiválasztottak között, hogy közülük kettőn-kettőn álló számok összege megegyezik?

(*6 pont*)

B. 5169. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt[3]{2x+11}+\sqrt[3]{3x+4}=\sqrt[3]{x+9}+\sqrt[3]{4x+6}.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Szalai Máté* (Szeged)

B. 5170. Az α és β hegyesszögekre $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\alpha+\beta=90^\circ$.

(*4 pont*)

B. 5171. Az $OLMN$ és $OABC$ tetraéderek úgy helyezkednek el, hogy az A, B és C pontok rendre az OL, OM és ON félegyenesek pontjai. Az LMN háromszög beírt körének középpontja egybeesik az ABC háromszög súlypontjával. Mutassuk meg, hogy az $OLMN$ tetraéder térfogata legalább akkora, mint az $OABC$ tetraéderé. Mi a feltétele annak, hogy a két tetraéder térfogata egyenlő legyen?

(*5 pont*) (*Angol olimpiai válogatóverseny feladata, 1980*)

B. 5172. Hat szabályos dobókockát egy dobópohárral egyszerre elgurítunk. A nem 6-ost mutató kockákat visszatesszük a pohárba, és újra gurítunk. Ha még mindig van olyan kocka, ami nem 6-os, akkor ezeket ismét a pohárba tesszük, és harmadszor is gurítunk. Ezt addig ismételjük, amíg minden kocka hatost nem mutat. Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan hatszor gurítunk?

(*6 pont*)

B. 5173. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja H, körülírt körének középpontja O. Legyen D és E az AB, illetve AC szakasz belső pontja. Az ADE háromszög magasságpontja és körülírt körének középpontja H', illetve O'. Mutassuk meg, hogy a HH' és OO' egyenesek akkor és csak akkor párhuzamosak, ha $BD=CE$.

(*6 pont*) Javasolta: *Bán-Szabó Áron* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2021. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (797–799.)

A. 797. Egy üres halmazt nem tartalmazó H halmazrendszer *szövevényes,* hogy ha minden A és B H-beli diszjunkt halmazpárra létezik $b \in B$, hogy $A \cup \{b\}$ is H-ban van vagy létezik $a \in A$, hogy $B \cup \{a\}$ is H-ban van.

Tegyük fel, hogy n egyelemű halmaz, $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}$, mind a szövevényes H halmazrendszerben van. Mutassuk meg, hogy ha $n > k(k+1)/2$, akkor van H-ban egy legalább $k+1$ elemű halmaz, és ez minden k-ra éles, azaz ha $n = k(k+1)/2$, akkor még lehet minden H-beli halmaz legfeljebb k elemű.

A. 798. Legyen $0 < p < 1$ adott. Kezdetben van n darab pénzérménk, melyeket feldobva mindegyik eredménye p eséllyel fej, $1 - p$ eséllyel írás (a dobások eredménye egymástól független). Egy körben feldobjuk a pénzérméket, és kivesszük azokat, melyeknél az eredmény fej. Ezt addig ismételjük, amíg az összes érme el nem fogy. Jelölje k_n az ehhez szükséges körök számának várható értékét. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $c > 0$ szám, mellyel minden n pozitív egész esetén teljesül, hogy

$$c\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) < k_n < 1 + c\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

A. 799. Egy adott $A_1A_2B_1B_2$ négyszögre a P pontot *fenomenálisnak* nevezzük, ha az A_1A_2 és B_1B_2 szakaszok ugyanakkora szögben látszanak a P pontból (azaz a PA_1A_2 és PB_1B_2 – akár degenerált – háromszögek P-nél lévő (irányítatlan) belső szögei megegyeznek).

A síkon meg van jelölve három nem egy egyenesen fekvő pont, A_1, A_2 és B_1. Bizonyítandó, hogy létezik egy körlap, melynek tetszőleges B_2 pontjára $A_1A_2B_1B_2$ egy konvex négyszög, melyhez egy derékszögű vonalzó segítségével szerkeszthető hét különböző fenomenális pont.

Egy derékszögű vonalzóval a következő két szerkesztési lépés megengedett:

i) ha adva van két pont, akkor megszerkeszthető a rajtuk átmenő egyenes;

ii) ha adva van egy pont és egy egyenes, akkor megszerkeszthető a pontból az egyenesre állított merőleges.

Javasolta: *Bán-Szabó Áron* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2021. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 535. Lőrinc nagyon kedveli a pozitív egész számokat. Most kitalált egy pozitív egészekből álló növekvő számsorozatot, amit számláncnak nevezett el. A lánc egy tetszőlegesen választott pozitív egésszel kezdődik, ez a lánc első száma. Minden további számot az őt megelőző számból készítünk. A lánc tetszőleges n-edik számára igaz, hogy ő és a rákövetkező szám legnagyobb közös osztója az n-edik prímszám. Ha több ilyen szám is van, akkor a láncba azok közül a legkisebbet tesszük bele. Ha nincs megfelelő szám, akkor a lánc megszakad.

Lőrinc kiszámolt néhány láncot különböző számokkal indulva, de úgy látta, hogy a láncok nagyon rövidek, csak legföljebb négy hosszú láncot talált. Ilyen volt például a 160, 162, 165, 170. Szerette volna tudni, hogy melyek azok a legföljebb háromjegyű számok, amelyeket első számnak választva a lánc legalább öt hosszú.

Készítsünk programot, amely megadja Lőrinc kérdésére a választ, tehát a legalább öt hosszú, 1000-nél kisebb egésszel induló láncokat.

A standard kimenet minden sorában egy-egy olyan lánc szerepeljen, amelyek a leghosszabbak a kétjegyű számmal kezdődő láncok között.

Beküldendő egy tömörített `i535.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 536 (É). Az autóversenyzés a technikai sportok közé tartozik. Van olyan ága, ahol nem lehet minden autó a versenypályán, kevés az előzési lehetőség, ezért egyenként indítják a versenyzőket. Ebben az esetben az utolért versenyzőnek utat kell adnia a mögötte érkező gyorsabbnak.

Egy ilyen autóverseny adatai állnak rendelkezésre az `autoforras.txt` tabulátorral tagolt, UTF-8 kódolású állományban.

A versenyen 36-an indultak, róluk a következő adatokat tudjuk (az adatok indítási sorrendben vannak): az autók azonosítója, a rajtolás és a célba érkezés időpontja másodperc pontossággal.

Táblázatkezelő program segítségével oldjuk meg a következő feladatokat.

A megoldás során vegyük figyelembe a következőket:

- *Segédszámításokat a* K *oszloptól jobbra végezhetünk.*
- *Amennyiben lehetséges, a megoldás során képletet, függvényt, hivatkozást használjunk, hogy az alapadatok módosítása esetén is a kívánt eredményeket kapjuk.*

1. Töltsük be az `autoforras.txt` szövegfájlt a táblázatkezelőbe az A1-es cellától kezdődően. Munkánkat `i536` néven mentsük el a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
2. Hozzuk létre a munkalapon a minta szerinti cellákban a hiányzó szövegeket, feliratokat, amelyek a további munkát segítik.
3. A D oszlop celláiban számítsuk ki az autók versenyidejét. Ha a versenyző nem ment végig a pályán, mert például műszaki hibája volt, vagy a versenybírók kizárták, akkor a nem fejezte be felirat jelenjen meg.
4. Az I5-ös cellában írassuk ki, hogy hány versenyző nem fejezte be a versenyt.
5. Az E oszlop celláiban adjuk meg, hogy a versenyzők a célba érkezéskor, az addig beérkezettek eredmények ismeretében, hányadik helyen álltak. A versenyt nem befejezők mindannyian az utolsó sorszámot kapják.
6. Az I2-es cellában adjuk meg, hogy hány versenyző kaphatta azt az információt a csapatától a saját célba érkezésekor, hogy az első háromban van.
7. Az F oszlop celláiban határozzuk meg, hogy a verseny befejeztével ki hányadik helyezést ért el. Azonos versenyidők esetén (holtverseny) a versenyzők azonos helyezésűek és a következő helyezési sorszámot nem adják ki. Például három azonosan eredménnyel negyedik helyezést elért versenyző után a következő versenyző a hetedik helyezett.
8. Az I10:J19-es cellákban függvények segítségével adjuk meg a helyezési lista első tíz versenyzőjének azonosítóját és helyezését. Azonos helyezésű versenyzők lehetnek.
9. Az A oszlop celláiban jelenítsük meg félkövér betűstílussal azoknak az autóknak az azonosítóját, akiknek az eredmények alapján biztosan előznie kellett a pályán. Alkalmazzunk feltételes formázást, hogy más eredmények esetén is helyes formázást kapjunk.
10. Az A:F cellatartományban az első három helyezett sorának celláiban a cellakitöltést az érem színének megfelelően, feltételes formázással adjuk meg: arany RGB(255,215,0), ezüst RGB(192,192,192), bronz RGB(204,153,102).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Azonosító	Rajt	Cél	Versenyidő	Helyezés célba éréskor	Végső helyezés			Legjobb 3-ban gondolhatta magát:	
2	YZ984	9:15:30		nem fejezte be	36	36			[illegible]	
3	FD551	9:17:05	10:29:11	1:12:06	2	14				
4	GA563	9:18:40	10:33:51	[illegible]	[illegible]	[illegible]			Kiesett versenyzők:	
5	QS195	9:20:08	10:37:23	[illegible]	[illegible]	[illegible]			[illegible]	
6	**WY672**	9:21:38	10:29:03	[illegible]	[illegible]	[illegible]				
7	JD329	9:23:12	10:43:00	[illegible]	[illegible]	[illegible]				
8	**EM426**	9:24:45	10:41:19	[illegible]	[illegible]	[illegible]				
9	YV120	9:26:16		[illegible]	[illegible]	[illegible]			Azonosító	Helyezés
10	SQ910	9:27:43	10:45:46	[illegible]	[illegible]	[illegible]		1	[illegible]	[illegible]
11	**YX247**	9:29:17	10:37:07	[illegible]	[illegible]	[illegible]		2	[illegible]	[illegible]
12	**TI314**	9:30:52	10:44:49	[illegible]	[illegible]	[illegible]		3	[illegible]	[illegible]
13	**RX410**	9:32:20	10:45:23	[illegible]	[illegible]	[illegible]		4	[illegible]	[illegible]

11. A munkalap celláiban az igazítást a mintának megfelelően készítsük el.

Beküldendő egy tömörített `i536.zip` állományban a munkafüzet, valamint egy rövid dokumentáció, amelyből kiderül az alkalmazott táblázatkezelő neve és verziószáma.

I. 537. A táblázatkezelők újabb és újabb verzióiban egyre több gyári függvény segíti a felhasználók munkáját. Némi kreativitással praktikusan használhatjuk munkánkhoz, feladatainkhoz. Ennek a kreativitásnak a kiaknázásáról szól ez a feladat.

Hozzuk létre a táblázatkezelőben az `i537` nevű munkafüzetet, annak függvény névre átnevezett egyetlen munkalapjára a mintán látható cellákban sárga háttérrel szereplő alapadatokat gépeljük be, és formázzuk a minta szerint.

	A	B	C	D	E	F
1	2	3	6			
2	1	1	2			
3				12	8	=MAX(A1:C1)*MAX(A2:C2)
4				**12**	8	=C1*DARABTELI(A1:C2;A2)
5						
6						

A D oszlopba a D3 cellától kezdve lefelé írjunk olyan – függvényeket is tartalmazó – képleteket, amelyek eredménye a mintán látható 12 érték. A felhasznált képletekben és a függvények argumentumaiban csak az A1:C2 tartomány cellái szerepelhetnek (nem feltétlenül az összes), más cellahivatkozások és konstansok nem. Nem számít függvényhasználatnak, ha az eredmény az adott függvény nélkül is ugyanaz az érték, tehát ha egy egész értéket adó, függvény nélküli képlet eredményét függvénnyel kerekítjük.

Nézzünk meg néhány példát:

Képlet	**Minősítés**	
`=A1*B1+C1`	✘	nem jó, nincs benne függvény
`=12*Min(A1:C2)`	✘	nem jó, konstans van benne
`=Max(A1:C1)*MAX(A2:C2)`	✓	jó
`=2*C1`	✘	nem jó, nincs benne függvény és konstans van benne
`=C1*darabteli(A1:C2;A2)`	✓	jó
`=C1*darabteli(A1:C2;2)`	✘	nem jó, konstans van benne
`=Kerekítés(C1*C2;B2-A2)`	✘	nem jó, a `C1*C2` eleve 12

A feladat: Keressünk a D oszlopba minél több lényegesen eltérő, a feltételeknek megfelelő függvényt. Nem lényegesen eltérőek az alábbi párok:

`Max(A1:C1)*MAX(A2:C2)` és `Max(A2:C2)*MAX(A1:C1)`

`Max(A1:C1)*MAX(A2:C2)` és `Max(B1:C1)*MAX(B2:C2)`

`C1*darabteli(A1:C2;A2)` és `C1*darabteli(A1:C2;B2)`

Az E oszlopban jelenjen meg a D oszlopban megjelenő képlet eredménye úgy, mintha a C1 cella értéke 4 lenne. Az F oszlopban jelenjen meg a D oszlop ugyanezen sorában szereplő képlet szövege.

A D, E és F oszlop nem üres cellái kapják meg a mintán a D3 cellában látható formázást (szegélyezett halványkék hátterű).

Minden, a feltételeknek megfelelő sorért 0,2 pont kapható, de az összes pontszám nem haladhatja meg a 10 pontot. A fenti jó példák felsorolásáért sem jár pont.

A feladatban nem használható saját függvény vagy makró.

Beküldendő egy `i537.zip` tömörített mappában a táblázatkezelő munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáshoz alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

I/S. 53. Adott egy N hosszú bitsorozat. Az i-edik bitet $B[i]$-vel jelöljük. Minden lehetséges $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant N$-re a bitsorozat x-edik elemétől az y-adik eleméig terjedő részét kiegyensúlyozottnak nevezzük, ha ugyanannyi 1-es értékű bitet tartalmaz, mint 0-s értékűt (tehát ha a $B[x]$, $B[x+1]$, $\ldots$, $B[y]$ bitek közt azonos számú az 1-es és a 0-s értékű).

Adjuk meg, hogy hány olyan x, y páros van, amire kiegyensúlyozott részt kapunk.

Bemenet: az első sor tartalmazza az N számot, a második az N hosszú bitsorozatot.

A kimenet egyetlen sorában adjuk meg, hogy hány kiegyensúlyozott rész van.

Bemenet (a / jel sortörést jelent)	**Kimenet**
`5 /10101`	`6`

A keresett x, y párosok: $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(1,4)$, $(2,5)$.

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 10^5$.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $N \leqslant 1000$.

Beküldendő egy `is53.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 152. A LONG teniszbajnokságra $2N-1$ versenyző nevezett. Közülük kell kiválasztani a legjobb N játékost, akik díjat kapnak. A sok nevezőre való tekintettel nem szeretnének mindenkit egyszerre versenyeztetni, ezért a versenyt több napon keresztül bonyolítják le. A versenyzők egy várólistára kerülnek, és hogy melyik nap és kivel játszanak meccset, azt a következők szerint határozzák meg.

Az első nap a várólista első N versenyzője versenyez egymással egyenes kiesésben, azaz, ha valaki veszít, aznap már nem játszhat. Ők megkapják az $1, 2, \ldots, N$ sorszámokat. Egy nap több körből áll, és egyszerre csak egy meccset játszanak. Mindig az a két játékos játssza a következő meccset, akik még nem játszottak az adott körben és a sorszámuk a legkisebb. (Első a másodikkal, harmadik a negyedikkel stb. ebben a sorrendben.) Minden kör végén, ha valaki partner nélkül marad, akkor továbbjut a következő körbe. Ezt addig csinálják, amíg már csak egy versenyző marad, ő lesz a nap győztese.

Egy mérkőzés győztese az a versenyző, aki „több trükköt ismer". Egyenlőség esetén a mérkőzés aznapi sorszáma dönt. Ha ez páratlan, akkor a kisebb sorszámú versenyző nyer, ha páros, akkor a nagyobb sorszámú.

Minden nap végén kiosztják a díjakat. Elsőként a nap győztese kap díjat, majd azok a versenyzők, akiket a győztes ejtett ki, a kiesés szerinti fordított sorrendben egy-egy pontot kapnak. (A pontok a napok során összeadódnak.) Ha valaki így összegyűjt két pontot, és még nincs meg az N számú díjazott, akkor ő is díjazottá válik.

Ha még nincs meg az N számú díjazott, akkor újabb nap következik. Ezen a napon szintén N versenyző játszik. Az előző napon díjazottak helyére a díjazás sorrendjében bekerülnek a várólistáról a következő olyan játékosok, akik még nem versenyeztek. Ha például a hármas sorszámú versenyző nyert, és az előző napon még a kettes és ötös is díjat kapott ebben a sorrendben, akkor a következő három versenyző a várólistáról a hármas, kettes és ötös sorszámmal versenyez ezen a napon.

Bemenet: az első sor az N számot tartalmazza. A második sor $2N-1$ pozitív számot tartalmaz. Az i-edik szám a várólistán i-edik versenyző által ismert trükkök számát adja meg.

Kimenet: a kimenet i-edik sora az i-edik napon díjazottak számát, majd a díjazott(ak) sorszámát tartalmazza a díjazás sorrendjében.

Példa:

Bemenet	**Kimenet** (a / jel sortörést helyettesít)
`5 / 4 3 2 4 1 2 5 1 4`	`1 1 / 3 4 5 2 / 1 4`

Magyarázat: az első nap mérkőzései mérkőzés sorszáma : győztes – vesztes formátumban: $1:1-2$, $2:4-3$, $3:1-4$, $4:1-5$, győztes: 1., pontot kap: $5, 4, 2$. Új játékos 2 trükkel az 1. sorszámú helyre. A második nap: $1:2-1$, $2:4-3$, $3:4-2$, $4:4-5$, győztes: 4., pontot kap: $5, 2, 3$. Új játékosok $5, 1, 4$ trükkökkel a $4, 5, 2$ helyekre. A harmadik nap: $1:2-1$, $2:4-3$, $3:4-2$, $4:4-5$, győztes: 4., pontot kap: $5, 2, 3$. A 3. sorszámú versenyző már nem kap díjat, mert megvan az N díjazott.

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 32\,768$, $1 \leqslant$ ismert trükkök száma $\leqslant 1024$. *Időkorlát:* 1 mp.

Értékelés: A pontok 50%-a kapható, ha $N < 100$.

Beküldendő egy `s152.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2021. május 15.

❄

KöMaL-tervek 2021-re

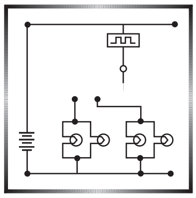
A *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok Informatika rovattal* népszerűségét szeretnénk megnövelni mind a tanárok, mind a diákok körében, ehhez kérjük az olvasók segítségét és véleményét.

A honlap főoldaláról (`www.komal.hu`) elérhető anonim kérdőívet mindazok kitölthetik, akik ismerik, vagy akár nem ismerik a KöMaL tartalmát és pontversenyeit, külön-külön a diákok és nem diákok (szülők, tanárok, kutatók, érdeklődők). Minél többen küldik vissza a honlapunkon megtalálható online űrlapokat, annál többet tudnánk meg jövőbeni olvasóink igényeiről.

kérdőív diákok részére

kérdőív nem diákok részére

A KöMaL matematika, fizika, informatika versenyeihez és Ifjúsági Ankétjához a MATFUND Alapítvány részére a Nemzeti Tehetség Program a 2020. július 1. és 2021. június 30. közötti időszakra tizenötmillió forint támogatást biztosított (NTP-TMV-M-20-A-0003). A 2020-as ankét elmaradt, az erre szánt összeget átcsoportosítjuk a KöMaL-archívum bővítésére az eddig feldolgozatlan évekkel. A versenyek online beküldéssel jól haladnak, a feladatok kitűzése és a folyóirat is (pdf-ben) minden hónapban megjelenik a `komal.hu` honlapon. A nyomtatott lap megjelentetése is folyamatos, postán küldjük megrendelőinknek. A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok kiadását 2 050 000 forinttal (NTP-TMV-M-20-A-0003), a 2021. június utolsó hetére tervezett KöMaL nyári matematika és fizika tehetséggondozó tábor megrendezését 2 500 000 forinttal támogatja a Nemzeti Tehetség Program (NTP-TÁB-20-0042). Nagyon reméljük, hogy a tábor a 2019-eshez hasonló helyszínen színvonalasan megrendezhető lesz, ha úgy látjuk, hogy igen, akkor a májusi számunkban közzétesszük a felhívást.



Fizika gyakorlatok megoldása

G. 725. *A Bükkben haladó, Miskolcot Egerrel összekötő kacskaringós hegyi út kb.* 50 km *hosszú. Egy nyári vasárnap délelőtt mindkét irányban erős volt a forgalom. Az átlagosan* 35 km/h *sebességű autók mindkét irányban haladva átlagosan* 1 *percenként találkoztak egy-egy szembejövő gépkocsival. Becsüljük meg, hány (oda- és visszafelé haladó) autó tartózkodott egyszerre ekkor a teljes útszakaszon!*

(*3 pont*)

Megoldás. Kövessünk gondolatban egy adott autót! Az a célunk, hogy becslést adjunk: hány autó volt akkor az útszakaszon, amikor a kiválasztott autónk éppen elindult az út egyik végéről. Meg fogjuk számolni, hogy hány autó jött vele szembe, de csak azokat, amelyek már akkor az útszakaszon voltak, amikor az autónk elindult. Percenként találkozik egy autóval, és átlagosan 35 km/h sebességgel megy, ami azt jelenti, hogy $35\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\cdot\frac{1\ \mathrm{h}}{60}=\frac{7}{12}$ kilométerenként találkozik egy-egy autóval.

Ha az útszakasz felét megtette már, és ezután találkozik egy másik autóval, akkor a szembe jövő autó nem volt még rajta a kérdéses úton, amikor a mi autónk elindult. Ezért csak azokat az autókat kell összeszámolnunk, amelyekkel az első 25 kilométeren találkozott. Tudjuk, hogy 7/12 kilométerenként találkozik egy másik autóval, ezért $25/(7/12)=300/7$ autóval találkozik átlagosan. Ezzel csak azokat az autókat számoltuk meg, amelyek a mi autónkkal szemben haladtak. Viszont tudjuk, hogy ugyanennyi megy vele megegyező irányban. Ezek szerint átlagosan $600/7\approx 85{,}71$ autó volt az úton, de mivel tört számú autónak nincs értelme, ezért kerekítenünk kell. Azt mondhatjuk tehát, hogy az adott időben kb. 86 autó lehetett a teljes útszakaszon.

Szanyi Attila (Bonyhád, Petőfi S. Ev. Gimn., Koll. és Ált. Isk., 10. évf.)

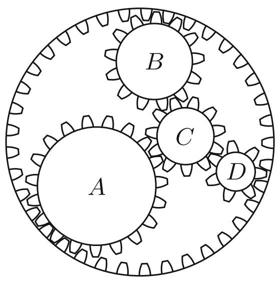
54 dolgozat érkezett. Helyes 28 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 13 , hibás 12, nem versenyszerű 1 dolgozat.

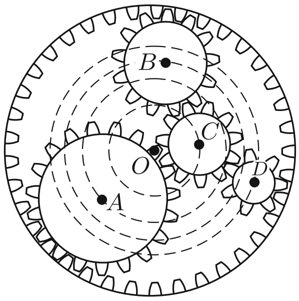
G. 726. *Az* ábrán *látható négy belső fogaskerék körbejár, a külső pedig áll. (A fogaskerekek mozgása a honlapon megtekinthető.)*

a) *Hasonlítsuk össze a fogaskerekek keringési idejét!*

b) *Rakjuk a fogaskerekeket a középpontjuk sebessége szerint növekvő sorrendbe!*

(*4 pont*)





Megoldás. *a*) Mivel a fogaskerekek a mozgásuk során egymáshoz képest ugyanolyan helyzetben maradnak, a középpontjaik O pont körüli mozgásának szögsebessége (ω) megegyezik, vagyis keringési idejük is ugyanakkora.

b) A fogaskerekek középpontjainak keringési ideje megegyezik, ezért minél nagyobb sugarú körpályán mozognak a középpontok, annál nagyobb a sebességük ($v_i = r_i\omega$). A fogaskerék-középpontok sebességének sorrendje tehát

$$v_C < v_A < v_B < v_D.$$

Cynolter Dorottya (Budapest, Veres Pálné Gimn., 10. évf.)

46 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 13, hibás 6 dolgozat.

G. 730. *Egy kerékpáros versenyen az első és a második helyen állók állandó* $v_0 = 50$ km/h *nagyságú sebességgel haladnak. Az elsőnek* $d = 100$ m *előnye van. Egy adott pillanatban – már a cél közelében – a harmadik helyen álló rákapcsol,* $v_1 = 55$ km/h *nagyságú sebességgel megelőzi a másodikat, és ezt a sebességet tartani is tudja. Az előzés helyétől milyen messze lehet a cél, ha az első helyen álló versenyző megnyeri a versenyt?*

(*4 pont*)

Megoldás. Az első helyen álló versenyzőnek az előzés helyétől számítva 100 méterrel, azaz 0,1 kilométerrel rövidebb távot kell megtennie, mint a most már második helyen álló versenyzőnek. Legyen az előzés helye x távolságra a céltól! Ekkor a másodiknak x távolságot kell megtennie 55 km/h sebességgel, az elsőnek $x - 0{,}1$ km távolságot 50 km/h sebességgel. Akkor nyeri az első helyen álló a versenyt, ha az előtte lévő távolságot rövidebb idő alatt tudja megtenni, mint a második.

Tudjuk, hogy egyenletes mozgásnál az idő a távolság és sebesség hányadosa, így a következő egyenlőtlenséget írhatjuk fel:

$$\frac{x - 0{,}1\ \mathrm{km}}{50\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} < \frac{x}{55\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}.$$

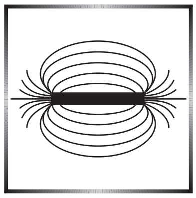
Az 50 km/h és az 55 km/h legkisebb közös többszörösével (550 km/h-val) megszorozva az egyenlőtlenség mindkét oldalát, azt kapjuk, hogy

$$11\,x - 1{,}1\ \mathrm{km} < 10\,x, \quad \text{vagyis} \quad x < 1{,}1\ \mathrm{km} = 1100\ \mathrm{m}.$$

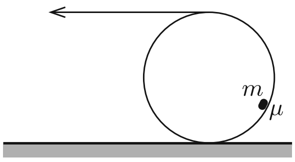
Az előzés tehát a céltól számított 1100 méternél kisebb távolságnál történhetett, ha a gyorsabb kerékpáros nem tudta utolérni még a célvonal előtt az előtte haladót.

Szanyi Attila (Bonyhád, Petőfi S. Ev. Gimn. és Koll., 10. évf.)

54 dolgozat érkezett. Helyes 27 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 19, hiányos (1 pont) 2, hibás 1, nem versenyszerű 5 dolgozat.

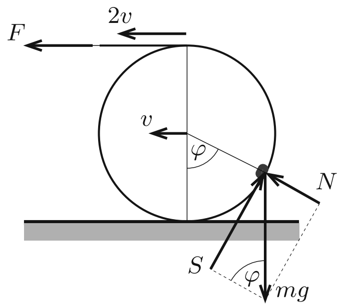


Fizika feladatok megoldása



P. 5252. *M tömegű, vékony falú csőre fonalat csévélünk, és a fonalat húzva az* ábrán *látható módon a csövet állandó sebességgel gurítjuk. A cső tisztán gördül a vízszintes talajon. A cső belsejébe kis méretű, m tömegű testet helyeztünk, ami odabent állandósult szöghelyzetben csúszik, a súrlódási együttható itt μ. Mekkora vízszintes fonálerő szükséges az állandó sebesség fenntartásához?*

(*5 pont*) Közli: *Vladár Károly,* Kiskunhalas



Megoldás. Legyen az állandósult szöghelyzetben a kis testtől a cső tengelyére bocsátott merőleges egyenes és a cső tengelyével párhuzamos függőleges sík által bezárt szög φ. Jelöljük az *ábrán* látható módon a cső által a kis testre kifejtett, sugárirányú nyomóerő nagyságát N-nel, az érintőirányú súrlódási erőt pedig S-sel.

A kis test sem a sugár, sem az érintő irányában nem gyorsul, emiatt

$$N - mg\cos\varphi = 0,$$

illetve

$$S - mg\sin\varphi = 0, \quad \text{vagyis} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{S}{N} = \mu.$$

Legyen a cső tengelyének állandó sebessége v. Ehhez a fonalat valamekkora F erővel és $2v$ nagyságú sebességgel kell húznunk. Mivel a cső csúszásmentesen gördül, a cső minden pontja a tengelyéhez képest v sebességgel mozog, azaz a kis test és a cső falának relatív sebessége az érintkezési pontban v.

A súrlódás folytán időegységenként disszipált energia Sv, ezt a húzóerő teljesítménye fedezi:

$$Sv = F \cdot 2v,$$

azaz

$$F = \frac{1}{2}S = \frac{mg}{2}\sin\varphi = \frac{mg}{2}\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{mg}{2}\,\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

39 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 16, hibás 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5262. *Forma 1-es pilóták olyan versenyen vesznek részt, ahol nem a legnagyobb sebességgel lehet eredményesen szerepelni. Egy kijelölt, $d=1250$ m hosszúságú távolságot állandó sebességgel kell megtenni, majd mindenkinek $a=2\ \mathrm{m/s^2}$ lassulással kell megállni. Az győz, aki az indulástól számítva a legrövidebb idő alatt áll meg.*

a) Mekkora sebességgel kell haladnia az állandó sebességű szakaszon a győztes pilótának, ha a lehető legrövidebb idő alatt akar megállni?

b) Mekkora utat tesz meg ekkor az indulástól a megállásig?

(*4 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

I. megoldás. *a*) A $d=1250$ m hosszúságú szakaszt állandó v sebességgel haladva $t_1=d/v$ idő alatt teszi meg az autó, majd állandó $a=2\ \mathrm{m/s^2}$ lassulással $t_2=v/a$ idő alatt tud lefékezni. A teljes menetidő

$$t=\frac{d}{v}+\frac{v}{a}.$$

Ennek a $t(v)$ kifejezésnek keressük a minimumát.

Az A számtani és a G mértani közepekre vonatkozó nevezetes $G\leqslant A$ egyenlőtlenség szerint

$$\frac{t}{2}=\frac{\frac{d}{v}+\frac{v}{a}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{d}{v}\cdot\frac{v}{a}}=\sqrt{\frac{d}{a}}=25\ \mathrm{s},$$

vagyis a győztes idő legalább 50 s. Ez a határeset akkor valósulhat meg, ha a középértékekben egyenlő nagyságú mennyiségek fordulnak elő, vagyis

$$\frac{d}{v}=\frac{v}{a},\qquad \text{azaz}\qquad v=\sqrt{da}=50\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}=180\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Ekkora sebesség mellett $t_1=t_2=\sqrt{d/a}=25$ s.

b) A verseny nyertesének teljes úthossza:

$$s=d+\frac{a}{2}t_2^2=d+\frac{a}{2}\cdot\frac{d}{a}=\frac{3}{2}\,d=1875\ \mathrm{m}.$$

Schmercz Blanka (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Az egyenletes mozgás v sebessége és a teljes menetidő (t) kapcsolata:

$$\frac{d}{v}+\frac{v}{a}=t,\quad \text{vagyis}\quad v^2-v(at)+ad=0.$$

Ez az egyenlet (adott d, a és t mellett) v-re nézve másodfokú, aminek akkor van megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív:

$$(at)^2-4ad\geqslant 0,\qquad \text{azaz}\qquad t\geqslant 2\sqrt{\frac{d}{a}}=50\ \mathrm{s}.$$

a) A minimális időt visszahelyettesítve a másodfokú egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$v^2 - 2v\sqrt{ad} + ad \equiv \left(v - \sqrt{ad}\right)^2 = 0,$$

tehát a győztes sebessége

$$v = \sqrt{ad} = 50\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b) Az egyenletes mozgás ideje

$$t_1 = \frac{1250\ \mathrm{m}}{50\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 25\ \mathrm{s},$$

tehát a fékezés ideje $t_2 = 25$ s. A fékezés során megtett út

$$d_2 = \frac{v^2}{2a} = 625\ \mathrm{m},$$

a teljes út pedig $d + d_2 = 1875$ m.

Megjegyzés. A feladat szövege nem adott információt az „indulás" körülményeiről. A megoldás során feltételeztük, hogy a d hosszúságú szakasz elejére már v sebességre felgyorsulva érkeznek a versenyzők, és „indulásnak" az időmérés kezdetét tekintjük.

Fekete András Albert (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

102 dolgozat érkezett. Helyes 69 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 13, hiányos (1–2 pont) 10, nem versenyszerű 10 dolgozat.

P. 5267. *Pista vizsgálgatja szemüvegét. A szemüveg a Nap fényét a lencsétől* 50 cm*-re fókuszálja. Észreveszi, hogy a Nap fényét visszaverve két fényesebb pont (fókuszpont) is található, az egyik* 17*, a másik* 7 cm*-rel a lencse előtt. Mekkora a lencse anyagának törésmutatója?*

(*5 pont*) *Tichy Géza* (1945–2021) feladata

Megoldás. Vizsgáljuk azt az esetet, mikor a Nap fénye visszaverődik. Ekkor két fókuszpont látható. Az egyik a lencse Nap felőli oldaláról közvetlenül visszaverődő fénysugarak találkozási pontja. Mivel ezek a sugarak ténylegesen fókuszálódnak, nyilván egy *homorú* felületről verődnek vissza. Tehát a lencsét határoló egyik gömbfelület kívülről nézve homorú, a sugara legyen R_1.

A lencse a rajta teljesen áthaladó napsugarakat is fókuszálja, vagyis gyűjtőlencse. Ez akkor teljesül, ha a lencsét határoló másik gömbfelület kívülről nézve domború, és a görbületi sugara $R_2 < R_1$.

A Nap felőli oldal másik fókuszpontjában azok a fénysugarak találkoznak, amelyek a homorú gömbfelületen belépnek a lencsébe, a lencsét határoló másik gömbfelületről visszaverődnek, majd ismét áthaladnak a lencsén és végül kilépnek abból. A nagyobb görbületi sugarú, homorú gömbfelületnek (mint homorú tükörnek) a fókusztávolsága $f_1 = R_1/2$, és ez a megadott 7 és 17 cm valamelyike. Könnyen belátható, hogy a két érték közül a nagyobb tartozik ehhez a tükörhöz, hiszen a „hátsó" tükör fókusztávolsága ($R_2 < R_1$ miatt) már önmagában kisebb, mint az „első” tüköré, és ezt a távolságot a gyűjtőlencsén való kétszeri áthaladás még jobban csökkenti.

Ezek szerint $R_1 = 0{,}34$ m, és a másik fókusztávolság $f_2 = 0{,}07$ m, ami

$$D_{\text{eredő}} = \frac{1}{f_2} = 14{,}3\ \frac{1}{\text{m}}$$

dioptriának felel meg. Tudjuk még, hogy a lencse fókusztávolsága $f_{\text{lencse}} = 0{,}5$ m, vagyis a lencse dioptriája:

$$D_{\text{lencse}} = \frac{1}{f_{\text{lencse}}} = 2\ \frac{1}{\text{m}}.$$

A leképző eszköz egy három részből (két lencséből és egy tükörből) álló rendszerként képzelhető el. Az egymás mögé helyezett vékony lencsék dioptriája és a homorú tükör dioptriája összeadódik:

$$D_{\text{eredő}} = D_{\text{lencse}} + \frac{2}{R_2} + D_{\text{lencse}}.$$

Innen a domború felület görbületi sugara kiszámítható:

$$R_2 = \frac{2}{D_{\text{eredő}} - 2D_{\text{lencse}}} = 0{,}194 \text{ m}.$$

A homorú-domború lencse

$$D_{\text{lencse}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

dioptriájú, ahonnan a lencse anyagának keresett törésmutatója:

$$n = \frac{D_{\text{lencse}}}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} + 1 = 1{,}91.$$

Toronyi András (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 11. évf.)

18 dolgozat érkezett. Helyes Bonifert Balázs és Toronyi András megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (2–3 pont) 14 dolgozat.

P. 5270. *A radon* 222*-es izotópjának felezési ideje* 5508 perc. *Hány nap elteltével csökken egytizedére a radon aktivitása?*

(*4 pont*) *Tankönyvi feladat nyomán*

Megoldás. A sugárzó anyag aktivitás arányos az el nem bomlott atommagok számával:

$$A(t) = \frac{\ln 2}{T} N(t),$$

ahol $T=5508$ perc a felezési idő, t az eltelt idő és $N(t)=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$ (N_0 a kezdeti atommagszám).

Keressük azt az eltelt t időt, amelyre

$$A(t)=\frac{1}{10}A_0,\qquad \text{vagyis}\qquad \frac{\ln 2}{T}N(t)=\frac{\ln 2}{T}\,\frac{N_0}{10},$$

tehát

$$N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}=\frac{N_0}{10},\qquad \text{azaz}\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{t/(5508\ \text{perc})}=\frac{1}{10}.$$

Eszerint

$$\frac{t}{5508\ \text{perc}}=\frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}5}=3{,}322,$$

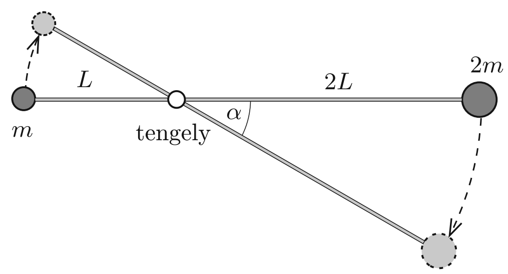
vagyis a keresett idő:

$$t=18\,297\ \text{perc}\approx 12{,}7\ \text{nap}.$$

Barta Gergely (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn., 12. évf.)

91 dolgozat érkezett. Helyes 67 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 13, hiányos (1–2 pont) 8, hibás 3 dolgozat.

P. 5274. *Az* ábrán *látható, $3L$ hosszúságú, elhanyagolható tömegű, merev rúd a bal oldali végétől L távolságra lévő, rögzített vízszintes tengely körül súrlódásmentesen foroghat a függőleges síkban. A rúd végeihez m, illetve $2m$ tömegű, kis méretű testeket erősítünk, és a rudat vízszintes helyzetben tartjuk. Egy adott pillanatban a rudat elengedjük.*

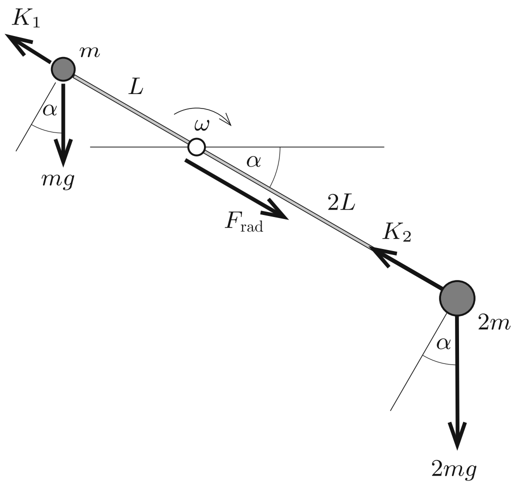


a) Mekkora a rúd által a tengelyre kifejtett erő rúdirányú összetevője abban a pillanatban, amikor a rúd α szöget zár be a vízszintes iránnyal?

b) Határozzuk meg az α szöget abban a pillanatban, amikor a rúd által a tengelyre kifejtett teljes erő $4mg$ nagyságú!

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

Megoldás. *a*) A feladat megoldása során kihasználjuk, hogy a rúd tömege elhanyagolhatóan kicsi, ezért a rúdra ható erők és forgatónyomatékok eredője is zérus. Legyen a rúd által a testekre kifejtett erő rúdirányú összetevője K_1 és K_2 (*1. ábra*). (A rúdra merőleges irányban ható erőket az ábrán nem tüntettük fel.)



1. ábra

A rendszer tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = mL^2 + (2m)(2L)^2 = 9mL^2.$$

Az energiamegmaradás törvényét felhasználva kiszámíthatjuk a rúd α szögű elfordulásához tartozó ω szögsebességet:

$$\frac{1}{2}\Theta\omega^2 + mgL\sin\alpha - 2mg(2L)\sin\alpha = 0,$$

$$\frac{1}{2}(9mL^2)\omega^2 = 3mgL\sin\alpha,$$

ahonnan

$$\omega^2 = \frac{2g}{3L}\sin\alpha.$$

A dinamika alapegyenlete szerint a rúdirányú mozgásegyenletek:

$$2m(2L)\,\omega^2 = K_2 - 2mg\sin\alpha,$$

vagyis

$$K_2 = \frac{14}{3}mg\sin\alpha,$$

illetve

$$mL\omega^2 = mg\sin\alpha - K_1,$$

tehát

$$K_1 = \frac{1}{3}mg\sin\alpha.$$

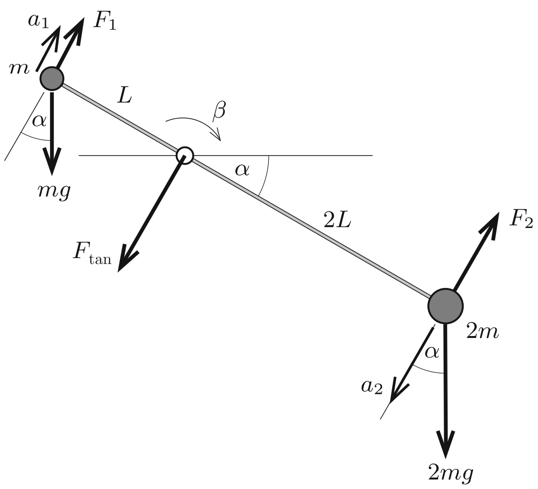
A rúd által a tengelyre kifejtett eredő erő rúdirányú (radiális) komponensének nagysága az elhanyagolható tömegű rúd mozgásegyenletéből adódik:

$$K_1 + K_2 - F_{\text{rad}} = 0,$$

vagyis

$$F_{\text{rad}} = K_1 + K_2 = 5mg\sin\alpha.$$

b) A rúd a rúdra merőleges irányban is fejt ki erőt a testekre, hiszen azok a körpályájuk érintőjének irányában (tangenciálisan) is gyorsulnak. Jelöljük az érintő irányú erőket F_1-gyel és F_2-vel, a megfelelő gyorsulásokat pedig a_1-gyel és a_2-vel (*2. ábra*).



2. ábra

A rúdra ható eredő forgatónyomaték (a rúd elhanyagolhatóan kicsi tehetetlenségi nyomatéka miatt) *nulla:*

$$F_1 L = F_2(2L).$$

Határozzuk meg a rendszer β szöggyorsulását!

$$\Theta\beta = 2mg(2L)\cos\alpha - mgL\cos\alpha,$$

$$9mL^2\beta = 3mgL\cos\alpha,$$

ahonnan

$$\beta = \frac{g}{3L}\cos\alpha.$$

A testek tangenciális gyorsulása

$$a_1 = L\beta = \frac{1}{3}g\cos\alpha,$$

illetve

$$a_2 = 2L\beta = \frac{2}{3}g\cos\alpha.$$

A dinamika alapegyenletét a rúdra merőleges irányra felírva:

$$\frac{1}{3}mg\cos\alpha = F_1 - mg\cos\alpha, \qquad \text{vagyis} \qquad F_1 = \frac{4}{3}mg\cos\alpha,$$

$$(2m)\frac{2}{3}g\cos\alpha = 2mg\cos\alpha - F_2, \qquad \text{azaz} \qquad F_2 = \frac{2}{3}mg\cos\alpha.$$

A rúd által a tengelyre kifejtett eredő erő tangenciális komponensének nagysága

$$F_{\text{tan}} = F_1 + F_2 = 2mg\cos\alpha.$$

A megadott feltétel szerint

$$\sqrt{F_{\text{rad}}^2 + F_{\text{tan}}^2} = 4mg,$$

$$16\,m^2g^2 = 25\,m^2g^2\sin^2\alpha + 4\,m^2g^2\cos^2\alpha,$$

$$16 = 25\sin^2\alpha + 4\left(1 - \sin^2\alpha\right),$$

azaz

$$\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{4}{7}} = 49{,}1^\circ.$$

Somlán Gellért (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 11. évf.)

46 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 30, hibás 4, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5282. *Légpárnás asztalon mágneskorong mozog egy fémlap felett. Az örvényáramok hatására a sebességgel arányos fékezőerő hat a korongra. Egy alumíniumlap felett haladva a korong* 30 cm *út megtétele után áll meg, egy rézlap felett ugyanez a távolság csak* 20 cm. *Mekkora út megtétele után áll meg a mágneskorong, ha először egy* 15 cm *széles rézlap felett halad el, majd egy alumíniumlap felett folytatja mozgását? (A korong kezdősebessége mindhárom esetben ugyanakkora.)*

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. Legyen a korongra ható erő nagysága F, a sebesség és az erő közötti arányossági tényező C, vagyis

$$F = C \cdot v.$$

Az erőlökés definíciója szerint a lendületváltozást okozó erő nagysága

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t}, \quad \text{ebből} \quad Cv\Delta t = m\Delta v.$$

Összegezzük a kicsiny Δt időtartamokhoz tartozó sebességváltozásokat:

$$C\sum v\Delta t = m\sum \Delta v.$$

A bal oldalon szereplő összeg a megtett úttal, a jobb oldali összeg pedig ezen út során bekövetkező teljes sebességváltozással egyenlő:

$$C \cdot s = m(v_0 - v_{\text{végső}}).$$

Az aluminiumlapnál valamekkora $C_{\text{alu.}}$, a rézlapnál pedig egy $C_{\text{réz}}$ arányossági tényezővel határozza meg a fékezőerő és a sebesség kapcsolatát. A megállásig befutott utak ismeretében:

$$C_{\text{alu.}}(0{,}3\ \text{m}) = mv_0, \tag{1}$$

illetve

$$C_{\text{réz}}(0{,}2\ \text{m}) = mv_0. \tag{2}$$

A harmadik esetben bontsuk két részre a mozgást. A rézlap felett mozgó mágneskorong sebessége v_0-ról valamekkora $v_{\text{köztes}}$-re csökken, majd az alumíniumlap felett mozogva x út megtétele után megáll. Felírhatjuk, hogy

$$C_{\text{réz}}(0{,}15\ \text{m}) = m(v_0 - v_{\text{köztes}}),$$

valamint

$$C_{\text{alu.}}x = mv_{\text{köztes}}.$$

A fenti két egyenletet összeadva kapjuk, hogy

$$C_{\text{alu.}}x + C_{\text{réz}}(0{,}15\ \text{m}) = mv_0. \tag{3}$$

Fejezzük ki az (1) és (2) egyenletből az ismeretlen fékezési tényezőket, majd helyettesítsük be azokat (3)-ba:

$$\frac{mv_0}{0{,}3\ \text{m}}\,x + \frac{mv_0}{0{,}2\ \text{m}}\,0{,}15\ \text{m} = mv_0,$$

tehát

$$\frac{x}{0{,}3\ \text{m}} = 1 - \frac{0{,}15\ \text{m}}{0{,}2\ \text{m}},$$

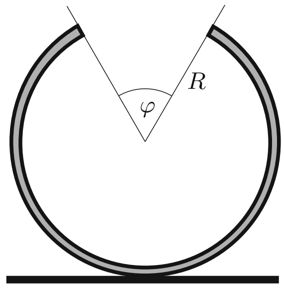
ahonnan

$$x = 0{,}3\ \text{m} - 0{,}3\ \text{m} \cdot \frac{0{,}15}{0{,}2} = 0{,}075\ \text{m} = 7{,}5\ \text{cm}.$$

Tehát a harmadik mozgás során a mágneskorong 15 cm-t halad rézlapon, és 7,5 cm-t alumíniumlapon, így összesen 22,5 cm út megtétele után áll meg.

Fekete András Albert (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

31 dolgozat érkezett. Helyes 24 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 4 dolgozat.



P. 5286. *Egy R sugarú, homogén tömegeloszlású, φ szöggel „hiányos" vékony hengerpalástot vízszintes asztalra fektetünk az* ábrán *látható módon. A hengerpalástot kissé kimozdítjuk egyensúlyi helyzetéből, majd elengedjük. Határozzuk meg a hengerpalást rezgőmozgásának periódusidejét! Feltételezhetjük, hogy súrlódás elegendően nagy, így a hengerpalást a rezgőmozgás közben nem csúszik meg.*

Adatok: $R=0{,}2$ m; $\varphi=\pi/3$.

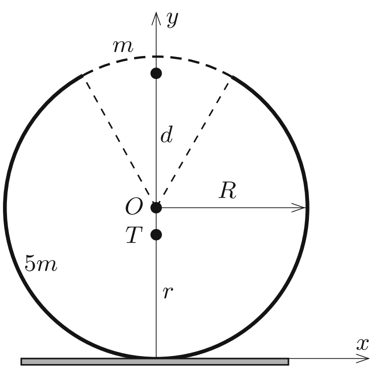
(*5 pont*) Közli: *Takács Árpád,* Budapesti Berzsenyi D. Gimn.

Megoldás. Legyen a hengerpalást hiányzó részének tömege m, ekkor a hiányos hengerpalást tényleges tömege $5m$. Első lépésben határozzuk meg az $5m$ tömegű test T tömegközéppontjának helyét, annak a talajtól mért r távolságát (*1. ábra*). A hiányzó rész tömegközéppontja (ha ott lenne anyag) a henger tengelyétől

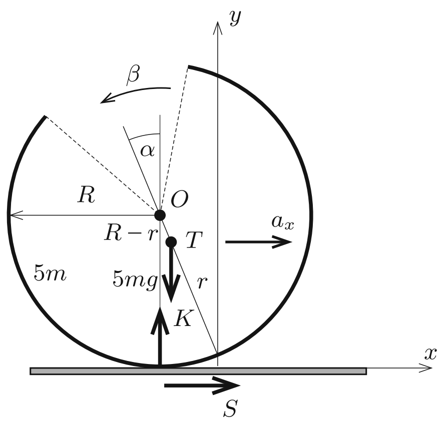
$$d=\frac{\sin\varphi/2}{\varphi/2}R=\frac{3R}{\pi}$$

távolságra van. Ha az m tömegű és az $5m$ tömegű részeket egy teljes hengerré illesztenénk össze, annak tömegközéppontja éppen a henger tengelyére, vagyis az O pontba kerülne:

$$\frac{5m\,r+m(R+d)}{6m}=R,\quad\text{ahonnan}\quad r=\frac{5R-d}{5}=\left(1-\frac{3}{5\pi}\right)R.$$



1. ábra



2. ábra

Határozzuk meg ezután a hiányos hengerpalásnak a T tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát. Felhasználva a Steiner-tételt:

$$\Theta_O=\Theta_T+5m(R-r)^2=5mR^2,$$

ahonnan

$$\Theta_T = 5mR^2\left(1 - \frac{9}{25\pi^2}\right).$$

Vizsgáljuk meg a hiányos hengerpalást mozgásának dinamikai egyenleteit! Vegyük fel a test kicsiny α szögű elfordulásakor fellépő erőket, az elmozdulást és a gyorsulást, valamint a szöggyorsulást a *2. ábrán* látható módon. Mivel kis szögekre $\sin\alpha \approx \alpha$ és $\cos\alpha \approx 1$, a tömegközéppont vízszintes elmozdulása:

$$x = -R\alpha + (R - r)\sin\alpha \approx -r\alpha,$$

a függőleges elmozdulás pedig α^2-tel arányos nagyságú, tehát másodrendűen (elhanyagolhatóan) kicsi. Ennek megfelelően a tömegközéppont gyorsulásának komponensei:

$$a_x = -r\beta \qquad \text{és} \qquad a_y = 0,$$

ahol β a test szöggyorsulása.

A Newton-féle mozgásegyenletek:

$$5ma_x = S, \qquad \text{vagyis} \qquad S = -5mr\beta,$$

illetve

$$0 = K - 5mg,$$

a tömegközéppont körüli forgás dinamikai egyenlete pedig

$$\Theta_T\beta = S\big[R - (R - r)\cos\alpha\big] - K(R - r)\sin\alpha.$$

Ismét alkalmazva a kis szögek szögfüggvényeire érvényes közelítő képleteket, valamint S és K fentebb kiszámított kifejezéseit behelyettesítve kapjuk, hogy

$$(\Theta_T + 5mr^2)\beta = -5mg(R - r)\alpha.$$

Ebből látható, hogy

$$\beta = -\frac{5mg(R - r)}{\Theta_T + 5mr^2}\,\alpha \equiv -\omega^2\alpha,$$

vagyis az α szög időbeli változása egy ω körfrekvenciájú harmonikus rezgőmozgás. A mozgás periódusideje (Θ_T és r korábban kiszámított értékének behelyettesítése után):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{(10\pi - 6)R}{3g}} \approx 2{,}6\ \text{s}.$$

Somlán Gellért (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 11. évf.)

19 dolgozat érkezett. Helyes Somlán Gellért, Toronyi András és Téglás Panna megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 14 dolgozat.

P. 5289. *Egy transzmissziós, nagy felbontású optikai rácsra, melynek rései függőlegesen állnak, párhuzamos, monokromatikus fénynyalábot bocsátunk. Kísérletünkben a fénynyaláb merőleges az optikai rácsra, és a rácson való áthaladás után első rendben* 30°*-kal térül el jobbra is és balra is. Ezután a rácsot a középső rés mint tengely körül* 30°*-kal elforgatjuk. Milyen irányokban lép ki most fénynyaláb a rácsból?*

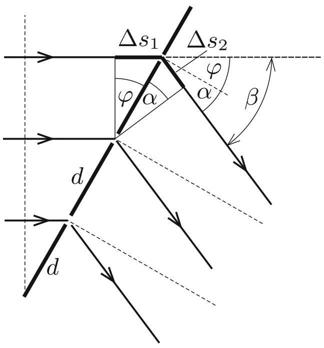
(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. Ha a fénynyaláb merőleges az optikai rácsra és a nyaláb első rendben 30°-os szögben térül el, akkor a rácson két szomszédos résen elhajló fénysugár útkülönbsége:

$$\Delta s = d\sin 30^\circ,$$

ahol d a rácsállandó. Legyen a használt fény hullámhossza λ. A nyaláb első rendben térül el 30°-kal, vagyis ekkor két szomszédos résen elhajló fénysugár útkülönbsége éppen λ. Innen kifejezhetjük a rácsállandót:

$$\lambda = d\sin 30^\circ \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{\lambda}{\sin 30^\circ} = 2\lambda.$$



A kísérletben a rácsot $\varphi = 30^\circ$-kal elforgatjuk. Ekkor a fénysugarak már eleve valamekkora útkülönbséggel érkeznek a rácshoz. Két szomszédos résen elhajló fénysugár kezdeti útkülönbsége legyen Δs_1. Tegyük fel, hogy a rácsot az óramutató járásával egyező irányba forgattuk el, ekkor az *ábrán* látható elrendezést kapjuk.

Az ábra alapján a kezdeti útkülönbség:

$$\Delta s_1 = d\sin\varphi = 2\lambda\sin 30^\circ = \lambda.$$

A fénysugarak a réseken elhajlanak, ezzel megváltozik az útkülönbségük. A rácsra merőleges egyeneshez képest α szögben elhajló szomszédos fénysugarak rács által létrehozott útkülönbsége legyen Δs_2. Legyen $\alpha > 0$, ha a fénysugarak a rácson jobbra hajlanak el (az ábra alja felé), és legyen $\alpha < 0$, ha a fénysugarak a rácson balra hajlanak el (az ábra teteje felé). A kezdeti irányhoz képest a fénysugarak elhajlása $\beta = \varphi + \alpha$ nagyságú. (β-ra is ugyanazt az előjelkonvenciót alkalmazzuk, amit α-ra.) Ahhoz, hogy a fénysugarak erősítsék egymást, az összes útkülönbségüknek a hullámhossz egész számú többszörösével kell megegyeznie:

$$\Delta s_1 + \Delta s_2 = n\lambda \qquad \Rightarrow \qquad \Delta s_2 = n\lambda - \Delta s_1 = (n-1)\lambda.$$

A rés által létrehozott útkülönbség így írható fel:

$$\Delta s_2 = d\sin\alpha = (n-1)\lambda.$$

Innen kapjuk, hogy

$$\sin\alpha = (n-1)\frac{\lambda}{d} = (n-1)\frac{\lambda}{2\lambda}, \quad \text{vagyis} \quad \sin\alpha = \frac{n-1}{2}.$$

Mivel $0 < \alpha < 90°$, ezért a fenti kifejezésnek csak akkor van megoldása α-ra, ha n a 0, 1 és 2 értékek valamelyikét veszi fel. Ekkor a megoldások:

$$\alpha = -30°,\ 0°,\ 30°;$$

vagyis az eltérülés a kezdeti irányhoz képest:

$$\beta = \alpha + \varphi = 0°,\ 30°,\ 60°.$$

Az elhajlási rendeket úgy számozzuk, hogy az útkülönbség $n\lambda$-val legyen egyenlő. Ennek megfelelően a fénynyaláb nulladrendben $\beta = 0°$-kal, első rendben jobbra 30°-kal, másodrendben pedig jobbra 60°-kal térül el, ha a rácsot az óramutató járásával megegyező irányban forgattuk el.

Toronyi András (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 11. évf.)

18 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1 pont) 2, hibás 1, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5291. *Egy szénmonoxid-érzékelő berendezés akkor ad riasztó jelzést, ha a* CO*-gáz sűrűsége a levegőben eléri a* $4\cdot 10^{-6}$ kg/m^3 *értéket.*

a) Hány CO*-molekulát lélegzik be ilyenkor az ember egyetlen* 500 cm^3*-es lélegzetvétellel?*

b) Mekkora egy CO*-molekula átlagos energiája a tüdőben* 37 °C*-on?*

c) Mekkora a sebessége egy átlagos energiával rendelkező CO*-molekulának?*

(*4 pont*) *Egyetemi felvételi feladat nyomán*

Megoldás. *a*) 500 cm^3 levegőben lévő CO-molekulák össztömege:

$$m = \left(4\cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)\cdot(5\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^3) = 2\cdot 10^{-9}\ \mathrm{kg}.$$

Egyetlen CO-molekula tömege:

$$m_0 = \frac{0{,}028\ \mathrm{kg/mol}}{6{,}022\cdot 10^{23}\ (1/\mathrm{mol})} = 4{,}65\ \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}.$$

Ezek szerint 500 cm^3 levegőben lévő CO-molekulák száma:

$$N = \frac{m}{m_0} = \frac{2\cdot 10^{-9}\ \mathrm{kg}}{4{,}65\ \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}} = 4{,}3\cdot 10^{16}.$$

b) Egyetlen ($f = 5$ szabadsági fokú) CO-molekula átlagos energiája:

$$E = \frac{f}{2}kT = \frac{5}{2}\cdot\left(1{,}38\cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right)\cdot 310\ \mathrm{K} = 1{,}07\cdot 10^{-20}\ \mathrm{J}.$$

c) A mozgási energia 3 szabadsági fokára átlagosan

$$E_\mathrm{m} = \frac{3}{5}E = 6{,}42\cdot 10^{-20}\ \mathrm{J}$$

energia jut. Eszerint a molekulák átlagos sebessége (pontosabban fogalmazva a sebességnégyzet átlagának négyzetgyöke):

$$v=\sqrt{\frac{2E_\mathrm{m}}{m_0}}=\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}42\cdot 10^{-21}\ \mathrm{J}}{4{,}65\ \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}}}\approx 525\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Dóra Márton (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 11. évf.)

84 dolgozat érkezett. Helyes 34 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 26, hiányos (1–2 pont) 17, hibás 6, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5301. *Pontszerű Q töltés elektromos erőterében, tőle R távolságban szabadon forgó, p momentumú, pontszerű elektromos dipólus van. Mekkora munkát kell végeznünk, ha a dipólust a rögzített töltéstől nagyon messzire (a „végtelenbe”) távolítjuk?*

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

I. megoldás. A dipólus szabadon foroghat, ezért a mozgás során a dipólus Q-val ellentétes előjelű töltése a lehető legközelebb lesz Q-hoz, a vele azonos előjelű pedig a lehető legtávolabb. Ez akkor teljesül, ha a három töltés (Q, $-q$, q sorrendben) egy egyenesen fekszik.

Mekkora a potenciális energiája a rendszernek, ha a dipólus R távolságra van Q-tól? Legyen q a dipólus azon töltésének nagysága, amely azonos előjelű Q-val, valamint legyen a dipólus két töltésének távolsága ℓ. A dipólus erőssége (momentuma) $p=q\ell$. A dipólust akkor nevezzük pontszerűnek, ha az ℓ távolság 0-hoz, q pedig előjelétől függően $\pm\infty$-hez tart. Véges töltéstávolság esetén

$$E_\mathrm{pot}=k\frac{(-q)Q}{R-\ell/2}+k\frac{qQ}{R+\ell/2}=kqQ\left(\frac{1}{R+\ell/2}-\frac{1}{R-\ell/2}\right)=$$

$$=-kQ\frac{q\ell}{R^2-\ell^2/4}=-kQ\frac{p}{R^2-\ell^2/4},$$

pontszerű dipólusra ($\ell\ll R$) pedig $E_\mathrm{pot}=-k\frac{Qp}{R^2}$. Mivel q és Q azonos előjelűek, ezért Q és p is azonos előjelű. Eszerint a pQ szorzat biztosan pozitív, tehát a potenciális energia mindig negatív. A „végtelenben” ez a kifejezés nulla értéket vesz fel.

Ahhoz, hogy végtelen messzire vigyük a dipólust,

$$W=\Delta E_\mathrm{pot}=0-\left(\frac{-kQp}{R^2}\right)=k\frac{pQ}{R^2}>0$$

munkát kell végeznünk.

Gurzó József (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. A szabadon forgó dipólus úgy áll be, hogy a pozitív fele Q-tól legtávolabb, a negatív fele pedig Q-hoz a lehető legközelebb legyen. (Feltételeztük, hogy $Q>0$. Amennyiben $Q<0$, a megoldás ugyanúgy érvényes marad, ha valamennyi töltés előjelét megfordítjuk.)

Mivel az elektrosztatikus erőtér *konzervatív,* bármilyen módon eltávolíthatjuk a dipólust a ponttöltéstől, a munkavégzés csak a kezdeti- és a végállapottól függ. Forgassuk el a dipólust először 90°-kal úgy, hogy a momentumának iránya a dipólust a ponttöltéssel összekötő egyenesre merőlegessé váljék. Az elforgatás során $W=pE$ munkát kell végeznünk, ahol E a ponttöltés térerőssége a dipólus helyén:

$$W=pE=k\frac{pQ}{R^2}.$$

(Ezt a képletet úgy láthatjuk be, hogy meggondoljuk, mennyi munkát kell végezzünk, ha a dipólus $+q$ töltését elforgatással az ottani elektromos térerősséggel ellentétes irányában ℓ távolsággal odébb helyezzük.)

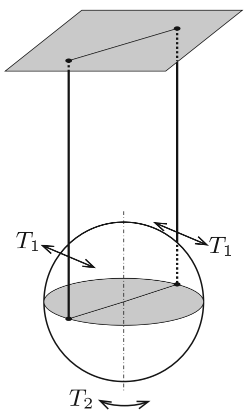
Az elforgatott helyzetben a dipólusra forgatónyomaték és az $\boldsymbol{E}$ térerősségre merőleges irányban erő hat, de az $\boldsymbol{E}$ irányú erő *nulla,* bármekkora is R. (A $\pm q$ töltésre az elektromos tér egyforma nagyságú, de majdnem ellentétes irányú erőt fejt ki.) Az elforgatott dipólust tehát a rajta áthaladó erővonal mentén tetszés szerinti távolságra elmozdíthatjuk anélkül, hogy munkát végeznénk. Így a folyamat során végzett teljes munka

$$W=k\frac{pQ}{R^2}.$$

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

22 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (2–3 pont) 2, hibás 3, nem versenyszerű 5 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok



M. 404. Az *ábra* szerint felfüggesztett vékony falú labdát kis kitéréssel lendítsük ki a fonalak síkjára merőlegesen, majd mérjük meg a lengésidőt (T_1). Ezután a nyugalomban lévő labdát forgassuk el kissé a függőleges tengelye körül, és mérjük meg a torziós lengésidőt (T_2). A mért értékekből számítsuk ki a $\frac{T_1}{T_2}$ arányt!

(*6 pont*) Közli: *Németh László,* Fonyód

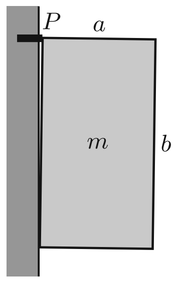
G. 741. Tegyük fel, hogy a hóbortos ötleteiről ismert multimilliárdos, *Elon Musk* úgy akarja közvetlenül meghatározni a Föld körül geostacionárius pályán keringő műholdak számát, hogy ugyanennek a pályának a közvetlen közelébe juttat egy számláló műholdat, amely nem nyugatról keletre, hanem éppen ellenkezőleg, keletről nyugatra halad. Mennyi idő alatt számolja meg ez a műhold az összes, a Földhöz viszonyítva álló műholdat?

(*3 pont*)

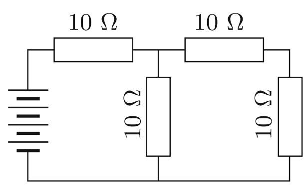
G. 742. Egy egyenes lejtő és egy 20 kg tömegű láda közötti súrlódás olyan nagy, hogy a láda magától nem csúszik lefelé. Ezt a ládát a lejtő aljától a tetejéig 3,0 kJ munkával tudjuk felhúzni, míg a ládát a lejtő tetejéről az aljáig 1,0 kJ munkával lehet eljuttatni. (A húzóerő mindkét esetben párhuzamos a lejtő síkjával, a mozgatás pedig lassú.) Mekkora a lejtő magassága?

(*3 pont*)

G. 743. Egy megpakolt konyhabútor egyik felső szekrénye egy olyan $m=40$ kg tömegű téglatest, melynek „mélysége” $a=40$ cm, magassága $b=75$ cm, tömegközéppontja pedig a geometriai középponttal esik egybe. A szekrényt a fallal érintkező két felső csúcsánál egy-egy tiplis csavarral rögzítik (az *ábrán* ezek egymást fedve a P pontban találhatók). A szekrény a fallal csak az alsó éle mentén érintkezik. Legalább mekkora húzóerőt kell kibírnia a rögzítéseknek külön-külön, hogy a csavarok ne szakadjanak ki a falból? (A falnál a súrlódást hanyagoljuk el!)



(*4 pont*)



G. 744. Az *ábrán* látható áramkör négy egyforma, 10 Ω-os ellenállásból és egy telepből áll.

a) Mekkora a telep kapocsfeszültsége, ha a legtöbb Joule-hőt termelő ellenállás elektromos teljesítménye 360 W?

b) Mekkora a többi ellenállás teljesítménye?

(*4 pont*)

P. 5315. Egy kerékpáros 9 km/h egyenletes sebességgel halad vízszintes terepen, majd 20 másodperc alatt egyenletesen felgyorsul 18 km/h sebességre. Mekkora lesz a kerék egy külső pontjának gyorsulása közvetlenül a gyorsítás befejezése után? A kerék átmérője 72 cm. Mekkora utat tett meg és hányat fordult a kerék a gyorsítás ideje alatt?

(*3 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

P. 5316. Vízszintes, érdes asztallapon nyugvó m_1 tömegű korongnak centrális, egyenes ütközéssel nekicsúszik egy $v_0 = 5$ m/s sebességgel érkező, $m_2 = 1$ kg tömegű másik korong. A csúszási súrlódás együtthatója az egyes korongokra nézve $\mu_1 = 0{,}1$ és $\mu_2 = 0{,}25$.

a) Mekkora a kezdetben nyugvó korong tömege, ha az abszolút rugalmas ütközés után egyszerre állnak meg?

b) Milyen távol lesznek ekkor egymástól?

c) Az ütközéstől számítva mennyi idő múlva állnak meg?

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5317. Egy iskolai bemutató távcső tengelye telihold idején pontosan a Hold közepe felé irányul. Az iskolaudvaron mozdítatlanul álló távcsőben a Hold képe éppen kitölti a látómezőt. Mennyi idő telik el a telihold feltűnése és eltűnése között?

(*3 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 5318. Egyes elképzelések szerint a sötét anyag hipotetikus részecskéi (blacktonok) úgy mozognak az intergalaktikus térben, hogy a sebességükkel ellentétes irányú erő hat rájuk. Az erő nagyságának sebességfüggését ma még nem ismerjük, csak annyit tudunk, hogy két különböző sűrűségű térrészben a fékezőerők aránya minden sebességnél ugyanakkora. Bizonyos v_0 kezdősebességű blackton-részecskék egy ritkább térrészben 3 fényévnyi út megtétele után állnak meg, a sűrűbb térben pedig 2 fényévnyi úton fékeződnek le. Mekkora út megtétele után állnak meg a v_0 kezdősebességű blacktonok, ha egy 1,5 fényév vastagságú, sűrűbb réteg után a ritkább anyageloszlású térbe jutnak?

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

P. 5319. Vízszintes síkon elcsúsztatunk egy m tömegű, ℓ hosszúságú, vékony, homogén pálcát. Egy pillanatban a pálca egyik végének sebességvektora $\boldsymbol{v}_1$, a másiké $\boldsymbol{v}_2$. Mekkora ebben a pillanatban

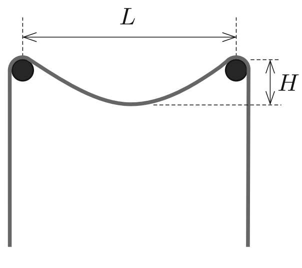
a) a pálca lendülete;

b) a tömegközéppontra vonatkozó perdülete;

c) a teljes mozgási energiája?

(*5 pont*) Közli: *Gelencsér Jenő,* Kaposvár

P. 5320. Függőleges falból két azonos magasságban bevert szög áll ki, melyek távolsága L. A szögekre egy kötelet fektetünk úgy, hogy annak belógása H. Becsüljük meg a kötél teljes hosszát, ha tudjuk, hogy

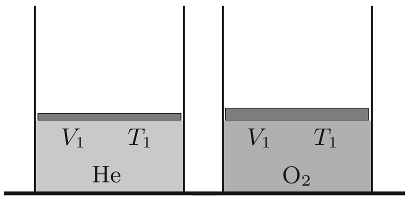


a) $H \ll L$;

b) $L \ll H$.

A súrlódás mindenütt elhanyagolható.

(*5 pont*) Közli: *Berke Martin,* Budapest



P. 5321. Függőleges, alul zárt hengerekben lévő, különböző tömegű, súrlódásmentesen mozgó dugattyúk azonos térfogatú, azonos hőmérsékletű hélium-, illetve oxigéngázt zárnak el. A gázokat lassan azonos hőmérsékletre melegítjük fel. A melegítés során az oxigén belsőenergia-változása 2,5-szer, a tágulási munkája pedig 220 J-lal nagyobb, mint a hélium esetében.

a) Határozzuk meg a gázok kezdeti nyomásának arányát!

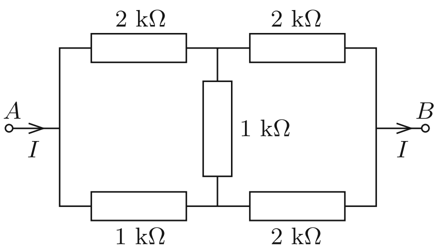
b) Mennyit hőt közöltünk a melegítés során a héliummal, illetve az oxigénnel?

(*4 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

P. 5322. Egy digitális fényképezőgép téglalap alakú szenzorának mérete: 23,5 mm × 15,6 mm, és ez a szenzor 6045 × 4003 képpontot képes rögzíteni. Oldalról, 20 méter távolságból lefényképezünk a géppel egy 40 km/h sebességgel haladó motorcsónakot.

Mekkorának válasszuk a 35 mm gyújtótávolságú objektívvel felszerelt fényképezőgép expozíciós idejét, ha nem szeretnénk, hogy a motorcsónak képe „bemozduljon" (életlenné váljon)?

(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest



P. 5323. Az *ábrán* látható ellenállásrendszer A pontjában $I = 40$ mA erősségű elektromos áram be-, a B csúcsnál kifolyik.

a) Mekkora elektromos áram folyik az egyes ellenállásokon?

b) Mekkora az elektromos teljesítmény az egyes ellenállásokon?

c) Mekkora egyetlen ellenállással lehetne helyettesíteni ezt az ellenállásrendszert?

(*4 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 5324. Közép-Afrikában, egy Kinshasa melletti uránbányában az egyik műszak által kibányászott kőzet uránszurokérc (U_3O_8) tartalma 10 tonna volt.

Becsüljük meg, hogy mennyi rádium volt a kőzetben!

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5325. Egy kamrában hosszú ideje működik egy fagyasztóláda. A hőmérséklet a ládán belül −20 °C, a kamrában 25 °C, a kamrán kívül, a lakás többi részén pedig 20 °C van. Mekkora lesz hosszú idő után a kamrában a hőmérséklet, ha még egy ugyanilyen fagyasztóládát bekapcsolunk?

Feltehetjük, hogy a lakás hőmérséklete a kamrán kívül nem változik. A hűtőládákat tekintsük ideális Carnot-gépeknek, amelyek termosztátja úgy van beállítva, hogy belül fenntartja a -20 °C-os hőmérsékletet.

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

Áprilisi pótfeladat.* Egy függőleges falú medence a csap kinyitása után T idő múlva telik meg. Ezt a vízmennyiséget a lefolyónyílás megnyitása után $2T$ idő alatt lehet leereszteni. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha nyitott lefolyónyílás mellett szeretnénk a medencét a csap megnyitásával feltölteni?

Közli: *Radnai Márton,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 2021. május 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A honlap főoldaláról (`www.komal.hu`) elérhető anonim kérdőívet mindazok kitölthetik, akik ismerik, vagy akár nem ismerik a KöMaL tartalmát és pontversenyeit, külön-külön a diákok és nem diákok (szülők, tanárok, kutatók, érdeklődők). Minél többen küldik vissza a honlapunkon megtalálható online űrlapokat, annál többet tudnánk meg jövőbeni olvasóink igényeiről.

kérdőív diákok részére

kérdőív nem diákok részére

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 71. No. 4. April 2021)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition C (see page 223): **Exercises up to grade 10: C. 1665.** Each letter of the word *KÖMAL* denotes a digit in decimal notation. Given the equalities below, determine the value of the five-digit number $\overline{KÖMAL}$. (1) $M+Ö+L=\overline{KA}$, (2) $Ö+L=\overline{KK}$, (3) $K+Ö+M=10$, (4) $A\cdot L=42$. **C. 1666.** In an acute-angled triangle ABC, let K and D, respectively, be the intersections of the interior angle bisector drawn from point A with the interior angle bisector drawn from B, and with side BC. The perpendicular drawn to angle bisector AD at point K intersects side AB at point E. F is the foot of the perpendicular drawn from point E to BC. T is the foot of the perpendicular drawn from point D to line AB. Prove that T lies on the circumscribed circle of triangle KEF. **Exercises for everyone: C. 1667.** Let $A=(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\dots+(-1)^{2021}$, $B=(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+\dots+(-2)^{2021}$

*A pótfeladat megoldása beküldhető e-mailben a `szerk@komal.hu` címre, de nem számít bele a pontversenybe.

and $C=(-3)^1+(-3)^2+(-3)^3+\dots+(-3)^{2021}$. Determine the last digit of the number $B+C-A$. **C. 1668.** The midpoints of sides AB, BC, CD, DA of a parallelogram $ABCD$ are E, F, G, H, respectively. The lines AF and AG intersect diagonal BD at points K and L, respectively. Show that the sum of the areas of triangles EFK and GHL equals the area of triangle EKL. **C. 1669.** Let N be $\overline{abc}$ a three-digit number in decimal notation. The value of a number $M=\overline{abc}$ represented in some non-decimal notation is $2N$. Determine the number N. **Exercises upwards of grade 11: C. 1670.** Given that a and b are integers such that $3a-2b$ is divisible by 13, prove that $4a+19b$ and $38a+57b$ are also divisible by 13. **C. 1671.** Line segments AE, BF, CG, DH are perpendicular to the plane S of parallelogram $ABCD$, in the same half space formed by plane S. T and t denote the areas of quadrilaterals $CGEA$ and $DHFB$, respectively. Prove that if $\frac{T}{t}=\frac{AC}{BD}$, then the points E, F, G, H are coplanar.

New exercises – competition B (see page 224): **B. 5166.** Are there prime numbers p, r greater than 3 such that the sum of the digits of $2p^2+7r^2+2021$ should be a perfect square? (*3 points*) **B. 5167.** Consider two circles in the plane that have common interior tangents. Show that the circle passing through the points of contact of the internal tangents bisects the line segment connecting the centres of the two original circles. (*3 points*) (Proposed by *the class 8C of Fazekas Mihály Primary and Secondary Grammar School of Budapest*) **B. 5168.** Each of the integers 1 to 100 is written on a piece of paper. 16 pieces of paper are selected out of the 100 pieces. Is it certain that there will always be four pieces of paper among the selected ones such that the sum of the numbers on two of them equals the sum of the numbers on the other two? (*6 points*) **B. 5169.** Find the real solutions of the equation $\sqrt[3]{2x+11}+\sqrt[3]{3x+4}=\sqrt[3]{x+9}+\sqrt[3]{4x+6}$. (*5 points*) (Proposed by *M. Szalai,* Szeged) **B. 5170.** Let α and β be acute angles such that $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$. Prove that $\alpha+\beta=90^\circ$. (*4 points*) **B. 5171.** Let $OLMN$ be a tetrahedron, and the vertices A, B and C of another tetrahedron $OABC$ lie on the rays OL, OM and ON, respectively. The centre of the inscribed circle of triangle LMN coincides with the centroid of triangle ABC. Show that the volume of tetrahedron $OLMN$ is greater than or equal to the volume of tetrahedron $OABC$. On what condition will the volumes of the two tetrahedra be equal? (*5 points*) (*From the British qualifying competition for the olympiad, 1980*) **B. 5172.** Six regular dice are placed in a cup, and rolled simultaneously. Those dice that do not show a 6 are returned to the cup, and rolled again. If there are dice that still not show a 6, those dice are rolled a third time. The procedure is repeated until every dice shows a 6. What is the probability that exactly six rolls are needed? (*6 points*) **B. 5173.** The orthocentre of an acute-angled triangle ABC is H, and the centre of the circumscribed circle is O. Let D and E denote interior points on the line segments AB and AC, respectively. The orthocentre and circumcentre of triangle ADE are H' and O', respectively. Show that lines HH' and OO' are parallel if and only if $BD=CE$. (*6 points*) (Proposed by *Á. Bán-Szabó,* Budapest)

New problems – competition A (see page 226): **A. 797.** We call a system of non-empty sets H *entwined,* if for every disjoint pair of sets A and B in H there exists $b\in B$ such that $A\cup\{b\}$ is in H or there exists $a\in A$ such that $B\cup\{a\}$ is in H. Let H be an entwined system of sets containing the following n one-element sets: $\{1\},\{2\},\dots,\{n\}$. Prove that if $n>k(k+1)/2$, then H contains a set with at least $k+1$ elements, and this is sharp for every k, i.e. if $n=k(k+1)$, it is possible that every set in H have at most k elements. **A. 798.** Let $0<p<1$ be given. Initially we have n coins, all of which has probability p of landing on heads, and probability $1-p$ landing on tails (the results of the tosses are independent from each other). In each round we toss our coins and remove those that result in heads. We keep repeating this until all our coins are removed. Let k_n

denote the expected number of rounds that was needed to get rid of all the coins. Prove that there exists $c>0$ for which the following inequality holds for all positive integers n: $c\Big(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\Big)<k_n<1+c\Big(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\Big)$. **A. 797.** For a given quadrilateral $A_1A_2B_1B_2$ point P is called *phenomenal,* if line segments A_1A_2 and B_1B_2 subtend the same angle at point P (i.e. triangles PA_1A_2 and PB_1B_2 which can be also also degenerate have equal inner angles at point P disregarding orientation). Three non-collinear points, A_1, A_2 and B_1 are given on the plane. Prove that it is possible to find a disc on the plane such that for every point B_2 on the disc quadrilateral $A_1A_2B_1B_2$ is convex for which it is possible to construct seven distinct phenomenal points only using a right ruler. With a right ruler the following two steps are allowed: *i*) given two points it is possible to draw the straight line connecting them; *ii*) given a point and a straight line, it is possible to draw the straight line passing through the given point which is perpendicular to the given line. (Proposed by *Á. Bán-Szabó,* Budapest)

Problems in Physics

(see page 249)

M. 404. Measure the period (T_1) of a thin-walled ball, which is suspended as shown in the *figure* and is displaced a little perpendicularly to the plane of the threads. Then turn a bit the initially stationary ball, about its vertical axis and measure the period of the torsional vibration (T_2). From the measured value calculate the ratio of $\frac{T_1}{T_2}$.

G. 741. Suppose that *Elon Musk* —the multibillionaire known from his whimsical ideas— wants to determine the number of geosynchronous satellites such that he sends a counting satellite next to the path of the geosynchronous satellites. This satellite does not move west to east, but oppositely from east to west. How long does it take for this satellite to count all the satellites, which seem to be at rest with respect to the Earth? **G. 742.** The friction between a 20 kg crate and a straight inclined plane is so big that the crate does not slide down by itself. This crate can be pulled up whilst 3.0 kJ work is done and it can be moved down with 1.0 kJ work. (The pulling force is parallel to the plane of the slope, and the motion of the crate is very slow.) What is the height of the slope? **G. 743.** A fully packed wall cabinet has a shape of a cuboid of width $a=40$ cm, height $b=75$ cm. The (total) mass of the cabinet is 40 kg, and its centre of mass is at its geometric centre. The cabinet is mounted to the wall by means of two screws inserted into wall plugs. The screws are at the two top vertices of the cuboid next to the wall (the *figure* shows a side view of the cabinet, point P is the overlapping position of the two screws). The cabinet touches the wall only along one of its edges at its bottom base. At least what magnitude of pulling force must the fasteners separately withstand, so that the screws are not torn out of the wall? (Neglect friction at the wall.) **G. 744.** The circuit shown in the *figure* consists of four alike resistors each of resistance 10 Ω and a battery. *a*) What is the terminal voltage of the battery if the power dissipation at the resistor which dissipates the greatest thermal energy is 360 W? *b*) What is the dissipated power at the other resistors?

P. 5315. A cyclist is travelling at a constant speed of 9 km/h on a level road, and then in 20 seconds he speeds up uniformly to the speed of 18 km/h. What is the acceleration of a point on the rim of the wheel right after the accelerating period ended? The diameter of the wheel is 72 cm. How much distance was covered, and how many times did the wheel turn in the accelerating period of the motion? **P. 5316.** An $m_2=1$ kg disc sliding at a speed of $v_0=5$ m/s collides head on with another disc of mass m_1 resting on the horizontal rough tabletop. The coefficient of kinetic friction between the table and the discs of masses m_1 and m_2 are $\mu_1 = 0.1$ and $\mu_2 = 0.25$, respectively. *a*) What is the mass of the initially stationary disc, if after the totally elastic collision the two discs stop at the same instant? *b*) How far are they from each other when they stopped? *c*) After the collision how much time elapses until the discs stop? **P. 5317.** The principal axis of a school telescope is pointing exactly towards the centre of the Moon at full moon. The image of the Moon in the stationary telescope, which is in the school yard, totally fills the field of view. How much time elapses between the appearance and the disappearance of the full moon? **P. 5318.** According to some ideas, the hypothetical particles of dark matter (blacktons) move in intergalactic space such that a force opposite to their speed is exerted on them. It is not known yet, how this force depends on the speed of the particle, but it is known that the ratio of the restoring forces of two regions in which the density is different is the same for any speed. Some blackton particles with initial velocity of v_0 stop after covering a distance of 3 light years, in some low-density region, whereas they stop in a distance of 2 light years in some greater-density region. How much distance do blacktons with initial speed of v_0 cover if they first travel in the greater-density region of width 1.5 light years, and then they enter into the lower-density region? **P. 5319.** A uniform-density thin stick of length ℓ and of mass m is made slide along a horizontal surface. At a certain moment the velocity of one end of the stick is $\boldsymbol{v}_1$, whilst that of the other end is $\boldsymbol{v}_2$. At this moment what is the *a*) linear momentum of the stick; *b*) angular momentum of the stick with respect to its centre of mass; *c*) its total kinetic energy? **P. 5320.** Two nails at a distance of L are sticking out of a vertical wall at the same height. A piece of rope is placed to the nails such that it sags to a depth of H. Estimate the length of the rope if it is known that *a*) $H \ll L$; *b*) $L \ll H$. Friction is negligible everywhere. **P. 5321.** Pistons with different masses, which can move frictionlessly, confine samples of oxygen and helium gas into vertical cylinders sealed at their bottoms. The volume of the gases is equal and they are at the same temperature. The two samples of gas are heated slowly to the same temperature. During the heating process the change in the internal energy of the oxygen gas is 2.5 times greater than that of the helium gas, and its work done during the expansion is 220 J greater than the work done by the sample of helium gas. *a*) Determine the ratio of the pressure of the gases at their initial state. *b*) How much heat was absorbed by the oxygen and by the helium during the heating process? **P. 5322.** The size of the sensor of a digital camera is 23.5 mm $\times$ 15.6 mm, and this sensor can capture 6045×4003 pixels. A side photo of a motorboat travelling at a speed of 40 km/h at a distance of 20 m is taken with this camera. What should the exposure time of the camera, which has an objective lens whose focal length is 35 mm, be in order not to gain a blurred image of the motorboat? **P. 5323.** A current $I = 40$ mA flows into a system of resistors shown in the *figure* at point A and flows out of it at point B. *a*) What is the value of the current flowing through each resistor? *b*) What is the dissipated power at each resistor? *c*) What is the resistance of a single resistor with which we could replace the whole system of resistors? **P. 5324.** Some rock mined in one shift in a uranium mine near Kinshasa in Central Africa contained 10 tons of pitchblende (U_3O_8). Estimate the amount of radium in the rock. **P. 5325.** A freezer has been operated in a store room for a long time. The temperature inside the freezer is -20 °C, the temperature in the store-room is 25 °C, and everywhere else in the flat the temperature is 20 °C. After a long time of operation what will the temperature of the store room be if another alike freezer is placed into the store-room? Assume that —apart from the store room— the temperature of the flat does not change. Consider the freezers to be ideal Carnot refrigerators, whose thermostats are adjusted to maintain the inside temperature of -20 °C.