KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

71. évfolyam 9. szám Budapest, 2021. december

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1050 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8800 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

A háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásai II.

III.

Ha a és b tetszőleges valós számok, akkor abszolút értékükre teljesül, hogy $|a+b| \leqslant |a|+|b|$. Ezt nevezzük a valós számokra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségnek. A bizonyítás pl. négyzetre emeléssel történhet, hiszen bármely x és y valós számra $|x|^2 = x^2$, továbbá $|x| \cdot |y| = |xy|$, ezért ekvivalens egyenlőtlenségekkel dolgozva

$$\begin{aligned} |a+b| &\leqslant |a|+|b|, \\ |a+b|^2 &\leqslant (|a|+|b|)^2, \\ (a+b)^2 &\leqslant a^2+2|a||b|+b^2, \\ 2ab &\leqslant 2|ab|, \end{aligned}$$

ami az abszolútérték definíciója miatt igaz. Egyenlőség csakis akkor áll fenn, ha a számok előjele azonos.

A háromszög-egyenlőtlenség véges sok valós számra:

$$|x_1+x_2+\ldots+x_n| \leqslant |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|.$$

Ennek igazolása teljes indukcióval nem nehéz.

12. példa. *Legyenek adottak az $a \leqslant b$ valós számok. Igazoljuk, hogy a valós számokon értelmezett $f(x) = |x-a|+|x-b|$ függvény minimális értéke $b-a$, melyet pontosan akkor vesz fel, ha $a \leqslant x \leqslant b$.*

Megoldás. Felhasználva, hogy tetszőleges valós számokra $|x|+|y| \geqslant |x+y|$, valamint $|a| = |-a|$, kapjuk:

$$f(x) = |x-a|+|x-b| = |x-a|+|b-x| \geqslant |x-a+b-x| = b-a,$$

továbbá egyenlőség pontosan akkor, ha $x-a$ és $b-x$ előjele azonos, vagyis $a \leqslant x \leqslant b$.

13. példa. *Határozzuk meg a valós számokon értelmezett*

a) $\qquad f(x) = |x+1|+|x|+|x-2|,$

b) $\qquad g(x) = |x+1|+|x-2|+|x-3|+|x-7|$

függvény minimális értékét és a minimumhelyét.

Megoldás. Tekintsük a számegyenesen azokat a helyeket, ahol az abszolútérték jeleken belüli kifejezés értéke 0 és az előző példa állításának megfelelően végezzünk becsléseket.

a) $$f(x)=|x+1|+|2-x|+|x|\geqslant|x+1+2-x|+|x|=3+|x|\geqslant 3,$$

továbbá egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=0$, ez a minimumhelye.

b) $$\begin{aligned} g(x)&=|x+1|+|7-x|+|x-2|+|3-x|\geqslant\\ &\geqslant|x+1+7-x|+|x-2+3-x|=8+1=9, \end{aligned}$$

továbbá egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $-1\leqslant x\leqslant 7$ és $2\leqslant x\leqslant 3$, azaz $2\leqslant x\leqslant 3$, így ezek mindannyian minimum helyek.

Megjegyzés. A megoldásban leírt módon kereshető meg az

$$f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+\ldots+|x-a_n|$$

függvény minimuma, ahol az a_i-k adott valós számok. Páratlan n-re az a) esettel, páros n-re pedig a *b*) esettel analóg eredmény adódik. Ennek a problémának pl. a statisztikában van szerepe: az ún. eltérésösszeg függvénynek a medián zérushelye lesz.

14. példa. *Mutassuk meg, hogy ha x, y, z valós számok, akkor*

$$|x|+|y|+|z|\leqslant|x-y+z|+|x+y-z|+|-x+y+z|.$$

Megoldás. Vegyük észre, hogy

$$\frac{x+y-z}{2}+\frac{x-y+z}{2}=x,$$

így a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$\frac{|x+y-z|}{2}+\frac{|x-y+z|}{2}\geqslant|x|.$$

Ugyanígy becsülhető meg felülről $|y|$ és $|z|$ is. A három egyenlőtlenséget összeadva adódik a bizonyítandó állítás. Az egyenlőség esetének vizsgálatát az olvasóra hagyjuk.

15. példa. *Az a, b, c adott valós számok olyanok, hogy $|x|\leqslant 1$ esetén $|ax^2+bx+c|\leqslant 1|$. Igazoljuk, hogy akkor $|x|\leqslant 1$ esetén $|cx^2+bx+a|\leqslant 2$.*

Megoldás. A háromszög-egyenlőtlenség, valamint $0\leqslant 1-x^2\leqslant 1$ miatt

$$\begin{aligned} |cx^2+bx+a|&=|cx^2-c+c+bx+a|\leqslant|cx^2-c|+|c+bx+a|=\\ &=|c|(1-x^2)+|c+bx+a|\leqslant|c|+|bx+c+a|. \end{aligned}$$

Legyen $x=0$, ekkor a feltétel szerint $|c|\leqslant 1$. Mivel $f(x)=bx+c+a$ lineáris függvény, így a $[-1;1]$ intervallumon maximális értékét valamelyik végpontban felveszi. Tekintettel arra, hogy $f(1)=a+b+c$, $f(-1)=a-b+c$, a feltétel szerint pedig ezek abszolút értéke legfeljebb 1, kapjuk, hogy

$$|cx^2+bx+a| \leqslant |c|+|bx+c+a| \leqslant 1+1=2,$$

amit éppen bizonyítani szerettünk volna.

IV.

Ha z_1 és z_2 komplex számok, akkor teljesül rájuk, hogy $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$, ahol $|z|$ a z komplex szám abszolút értékét jelöli. Egyenlőség pontosan akkor, ha $z_1=\lambda z_2$, ahol λ pozitív valós szám. Ennek az állításnak a bizonyítása könnyen jön abból, ha tudjuk, hogy a komplex számok azonosíthatók a sík helyvektoraival. Természetesen algebrai úton is belátható az abszolút érték definíciója, valamint mechanikus számolás segítségével. Most is érvényes természetes általánosítás:

$$|z_1+z_2+\ldots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|.$$

16. példa. *Bizonyítsuk be a 2. példában szereplő állítást komplex számok segítségével.*

Megoldás. Mivel a $z=a+bi$ komplex szám abszolút értéke $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, ezért a háromszög-egyenlőtlenség komplex számokra érvényes alakját felhasználva

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}=|1+xi|+|1+yi|+|1+zi| \geqslant$$
$$\geqslant \big|3+i(x+y+z)\big|=|3+i|=\sqrt{10}\,.$$

A feladat állítása könnyen általánosítható n darab pozitív számra, melyek összege 1. Ha $x_1,x_2,\ldots,x_n>0$ és $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$, akkor

$$\sqrt{1+x_1^2}+\sqrt{1+x_2^2}+\ldots+\sqrt{1+x_n^2} \geqslant \sqrt{1+n^2}.$$

A megoldás hasonlóan történhet, mint három változó esetén.

17. példa. *Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ konvex négyszögre*

$$AB\cdot CD+BC\cdot DA \geqslant AC\cdot BD.$$

Mikor teljesül egyenlőség?

Megoldás. Helyezzük el a négyszöget a komplex számsíkon és feleltessük meg az A, B, C, D csúcsoknak rendre az a, b, c, d komplex számokat. A bizonyítandó állítással ekvivalens, hogy

$$|b-a|\cdot|d-c|+|c-b|\cdot|d-a| \geqslant |c-a|\cdot|d-b|.$$

Ismert, hogy tetszőleges z_1, z_2 komplex számokra $|z_1|\cdot|z_2|=|z_1z_2|$, ezért a háromszög-egyenlőtlenséget is figyelembe véve

$$\big|(b-a)(d-c)\big|+\big|(c-b)(d-a)\big| \geqslant \big|(c-a)(d-b)\big|,$$
$$|bd-bc-ad+ac|+|cd-ac+ab-bd| \geqslant |cd-bc-ad+ab|.$$

Vizsgáljuk most meg az egyenlőség esetét. Ez pontosan akkor áll fenn, ha valamely $\lambda > 0$ valós számra

$$(b-a)(d-c) = \lambda(c-b)(d-a),$$

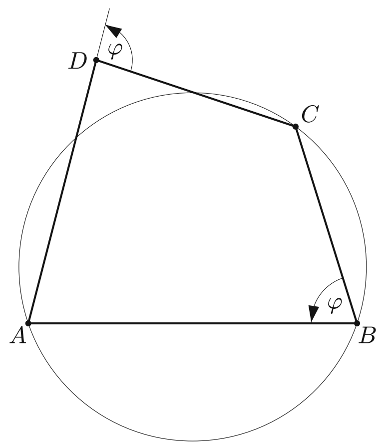
azaz

$$\frac{a-b}{c-b} = \lambda\frac{d-a}{c-d}.$$

Ami ekvivalens azzal, hogy

$$\arg\frac{a-b}{c-b} = \arg\frac{d-a}{c-d} = \varphi,$$

ami a húrnégyszögek tétele és megfordítása szerint pontosan akkor teljesül, ha az $ABCD$ konvex négyszög húrnégyszög.



A feladat állítása az ún. általánosított Ptolemaiosz-tétel. Ez speciális esetként (egyenlőség) tartalmazza a már az ókorban is ismert, húrnégyszögekre érvényes tételt. További alkalmazásokat, érdekességeket illetően javasolt irodalom: [4] és [5].

18. példa. *Mutassuk meg, hogy ha P az ABC háromszög síkjának valamely pontja, akkor*

$$\frac{PA\cdot PB}{CA\cdot CB} + \frac{PB\cdot PC}{AB\cdot AC} + \frac{PC\cdot PA}{BC\cdot BA} \geqslant 1.$$

(AMM)

Megoldás. Helyezzük el a pontokat a komplex számsíkon. Például az A pontnak feleljen meg az a komplex szám, a P pontnak a p komplex szám és így tovább. Ekkor a bizonyítandó állítás:

$$(*)\qquad \frac{|p-a|\cdot|p-b|}{|c-a|\cdot|c-b|} + \frac{|p-b|\cdot|p-c|}{|a-b|\cdot|a-c|} + \frac{|p-c|\cdot|p-a|}{|b-c|\cdot|b-a|} \geqslant 1.$$

Ismert, hogy bármely z_1, z_2 komplex számokra $|z_1|\cdot|z_2| = |z_1z_2|$ és $z_2 \neq 0$ mellett $\frac{|z_1|}{|z_2|} = |\frac{z_1}{z_2}|$, így a háromszög-egyenlőtlenséget is felhasználva $(*)$-hoz elegendő igazolnunk, hogy

$$\left|\frac{(p-a)(p-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(p-b)(p-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(p-c)(p-a)}{(b-c)(b-a)}\right| \geqslant 1.$$

Most megmutatjuk, hogy az abszolút érték jelen belüli mennyiség értéke 1. (Ez mechanikus számolással is megy természetesen, most mégis inkább egy elegánsabb módszert alkalmazunk). A kifejezés felírható

$$(p-a)(p-b)(p-c)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{(c-a)(c-b)}\cdot\frac{1}{p-c} + \frac{1}{(a-b)(a-c)}\cdot\frac{1}{p-a} + \frac{1}{(b-c)(b-a)}\cdot\frac{1}{p-b}\right)$$

alakban. Legyen $P(x)$ legfeljebb másodfokú polinom, valamint a, b és c páronként különböző számok. A Lagrange-féle interpolációs formula szerint

$$(**)\qquad P(x)=A(x-b)(x-c)+B(x-a)(x-c)+C(x-a)(x-b)=$$
$$=(x-a)(x-b)(x-c)\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right),$$

ahol
$$A=\frac{P(a)}{(a-b)(a-c)},\quad B=\frac{P(b)}{(b-c)(b-a)},\quad C=\frac{P(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

Ha most a $P(x)\equiv 1$ választással élünk, akkor $(**)$ miatt

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}=\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

Innen $x=p$ helyettesítéssel kapjuk az állításunkat.

Megjegyzés. Tegyük fel, hogy n páronként különböző helyen ismert a legfeljebb $(n-1)$-ed fokú $P(x)$ polinom értéke: $P(x_i)=y_i$, ahol $i=1,2,\dots,n$. A Lagrange-féle interpolációs polinom egyértelműen megadja a $P(x)$ polinomot a következő alakban:

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n}y_i\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}.$$

A $(**)$ állítás a következő gondolatmenettel is megkapható. Legyen

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c},$$

ahol $P(x)$ tetszőleges, legfeljebb másodfokú polinom, valamint a, b és c páronként különböző számok. (Elemi törtekre bontás.) Innen $(x-a)$-val történő szorzás után

$$\frac{P(x)}{(x-b)(x-c)}=A+(x-a)\left(\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right).$$

Ha most tekintjük az $x\to a$, $x\neq a$ határátmenetet, akkor

$$A=\frac{P(a)}{(a-b)(a-c)}.$$

Hasonlóan adódnak a B-re és C-re vonatkozó formulák is.

A fentebb látott gondolatmenetekre még egy szép alkalmazást mutatunk. Legyenek $a_1,a_2,\dots,a_n$ páronként különböző valós számok, valamint $0\leqslant k\leqslant n$ természetes szám. Tekintsük az

$$S_n(k)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{\prod\limits_{j\neq i}(a_i-a_j)}$$

összeget. Ekkor

$$S_n(k)=\begin{cases}0, & \text{ha } 0\leqslant k\leqslant n-2,\\ 1, & \text{ha } k=n-1,\\ \sum a_i, & \text{ha } k=n.\end{cases}$$

Induljunk ki abból, hogy bármely, legfeljebb $(n-1)$-ed fokú $P(x)$ polinomra

$$(*)\qquad \frac{P(x)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{x-a_i},$$

ahol A_i alkalmas konstans. Akár a Lagrange-féle interpolációs polinomot, akár a fentebb látott, határérték számítást használó gondolatmenetet alkalmazzuk, kapható, hogy bármely i-re

$$A_i=\frac{P(a_i)}{\prod\limits_{j\neq i}(a_i-a_j)},$$

továbbá

$$(**)\qquad P(x)=\sum_{i=1}^{n}A_i\prod_{j\neq i}(x-a_j)=\sum_{i=1}^{n}P(a_i)\prod_{j\neq i}\frac{x-a_j}{a_i-a_j}.$$

Legyen először $P(x)\equiv x^{k+1}$, ahol $0\leqslant k\leqslant n-2$ természetes szám. A $(*)$ összefüggés miatt, ha $x=0$, akkor

$$0=-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{\prod\limits_{j\neq i}(a_i-a_j)}\ \Leftrightarrow\ S_n(k)=0.$$

A $(**)$ formulát a $P(x)\equiv x^{n-1}$ polinomra alkalmazva kapjuk, hogy

$$x^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}a_i^{n-1}\prod_{j\neq i}\frac{x-a_j}{a_i-a_j}.$$

Mivel ez azonosság, ezért a jobb oldalon álló polinomban x^{n-1} együtthatója 1, vagyis

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{n-1}}{\prod\limits_{j\neq i}(a_i-a_j)}=1.$$

Végül tekintsük a $P(x)\equiv x^n-\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)$, legfeljebb $(n-1)$-ed fokú polinomot. Ebben a polinomban x^{n-1} együtthatója $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$, így $(**)$ miatt

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}A_i,\quad \text{ahol}\quad A_i=\frac{a_i^n}{\prod\limits_{j\neq i}(a_i-a_j)}.$$

Ezzel beláttuk az $S_n(k)$ összegre vonatkozó mindhárom állítást.

Feladatok önálló gondolkodásra

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszög a, b, c oldalhosszaira

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{a}{c}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}\right|<1.$$

2. Tudjuk, hogy $a_i>0$, $b_i>0$, ahol $i=1,2,\ldots,n$. Bizonyítsuk, hogy

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}\,.$$

3. Bizonyítsuk, hogy tetszőleges a, b, c valós számokra

$$\sqrt{a^2-a+1}+\sqrt{b^2-b+1}+\sqrt{c^2-c+1}\geqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2+a+b+c+3}\,.$$

4. Mutassuk meg, hogyha az a, b és c valós számokra

$$|a-b|\geqslant|c|,\quad |b-c|\geqslant|a|,\quad |c-a|\geqslant|b|,$$

akkor a három szám közül az egyik egyenlő a másik kettő összegével.

5. Határozzuk meg az összes olyan a és b valós számot, melyekre teljesül, hogy minden $0\leqslant x\leqslant 1$ esetén $|x^2-ax-b|\leqslant\frac{1}{8}$.

(*KöMaL*)

6. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c komplex számokra

$$|a|+|b|+|c|+|a+b+c|\geqslant|a+b|+|b+c|+|c+a|.$$

(*Hlawka*)

7. Igazoljuk, hogy ha $a,b,c>0$, akkor

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}\leqslant$$
$$\leqslant a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}\,.$$

(*AoPS*)

8. Igazoljuk, hogy ha M és N az ABC háromszög síkjának két, egymástól különböző pontja, akkor

$$\frac{CM\cdot CN}{CA\cdot CB}+\frac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}+\frac{BM\cdot BN}{BC\cdot BA}\geqslant 1.$$

(*Hayashi*)

Szakirodalom

[4] Reiman István: *Geometria és határterületei,* Gondolat (1986).

[5] Titu Andreescu – Dorin Andrica: *Complex Numbers from A to ... Z,* Birkhäuser (2006).

Schultz János

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Felírjuk az 1; 2; 3; 4; 5 számjegyek sorbarendezésével képezhető összes ötjegyű számot.

a) Mennyi ezeknek az ötjegyű számoknak az összege? (*6 pont*)

b) Hány olyan számtani sorozat létezik, melynek első tagja 12 345, szerepel benne az 54 321 is, és a differenciája pozitív egész szám? (*6 pont*)

2. Egy sorsjegy ára 1000 Ft. A sorsjegy lehetséges nyereményei: 2 000 Ft, 5 000 Ft, 20 000 Ft, 100 000 Ft, 500 000 Ft.

Ezek valószínűsége rendre: 11%, 5%, 0,81%, 0,17%, 0,02%.

a) Mennyi a nyeremény várható értéke? (*3 pont*)

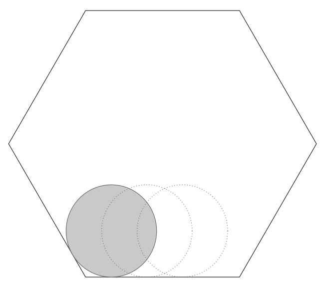
b) Mekkora a valószínűsége, hogy nem nyerünk, ha egy sorsjegyet vásárolunk? (*2 pont*)

Tíz alkalommal veszünk egy-egy sorsjegyet. Mekkora a valószínűsége, hogy

c) legalább kétszer nyerünk; (*5 pont*)

d) pontosan háromszor nyerünk? (*3 pont*)

3. Egy 10 cm oldalú, szabályos hatszög alakú fehér tálca pereme mellett végiggörgetünk egy 6 cm átmérőjű, alul festékes korongot. Mekkora az ilyen módon beszínezett terület? A választ mm^2 pontossággal adjuk meg. (*12 pont*)

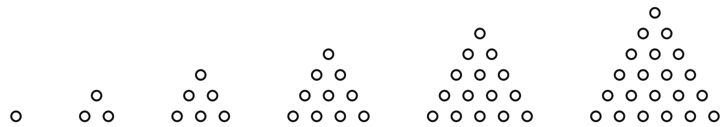


4. *a*) Adjuk meg az $x=\frac{y^2}{8}+3$ egyenletű parabolához a $P(0;-1)$ pontból húzható érintők egyenletét. (*8 pont*)

b) Határozzuk meg azokat a valós x értékeket, melyekben az $f(x)=\sin^2 x+$ $+\cos x$ függvény grafikonjának érintője párhuzamos az x-tengellyel. (*6 pont*)

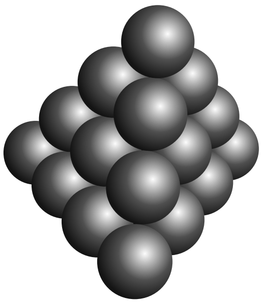
II. rész

5. A pitagoreusok azokat a természetes számokat nevezték háromszögszámnak, amely számú kavicsot az *ábrán* látható módon háromszög alakba lehet rendezni.



Az első hat háromszögszám: 1, 3, 6, 10, 15, 21.

a) Számítsuk ki a kilencedik és a századik háromszögszámot. (*2 pont*)



b) Bizonyítsuk be, hogy az első n háromszögszám összege $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. (*6 pont*)

c) A golyós piramis nevű térbeli logikai játék elemeiből ezt a tetraéderszerű építményt kell összeállítani. Milyen magas az építmény, ha a golyók átmérője 2 cm? (A megoldást cm-ben egy tizedes jegy pontossággal adjuk meg.) (*8 pont*)

6. A hangerőt a hanghullámok intenzitása határozza meg, amelynek mértékegysége $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. Az egyenlőnek érzékelt hangerő-különbségek egyenlő intenzitásarányokat takarnak. A hangerő mértékegysége a decibel.

Az emberi fül ingerküszöbe az $I_0=10^{-12}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. Ezt nevezzük 0 decibelnek. Bármely más I intenzitású hang hangerejét a $H=10\cdot\lg\frac{I}{I_0}$ dB képlet adja meg.

a) Hány dB a $3\cdot 10^{-9}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ intenzitású halk beszéd? (*3 pont*)

b) Mekkora a mennydörgés intenzitása, ha a hangereje 125 dB? (*4 pont*)

c) Az intenzitást 5-szörösére növelve hány dB hangerő-emelkedést érünk el? (*3 pont*)

Az érzékelt hangmagasság a hang rezgésszámával áll összefüggésben. Az egyenlőnek hallott hangközök egyenlő rezgésszám-arányokat takarnak. Pl. ha egy hangot egy másiknál egy oktávval magasabbnak érzékelünk, akkor a rezgésszáma az előbbiének 2-szerese. A rezgésszám a hangmagasság függvényében tehát exponenciálisan nő.

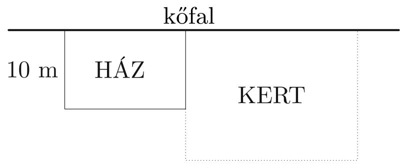
A kromatikus skála az oktávot 12 egyenlő hangközre, ún. félhangokra osztja. Ha egy hang egy másiknál félhanggal magasabb (pl. C és Cisz), akkor a rezgésszáma $\sqrt[12]{2}$-szöröse az előbbiének.

d) Hányszorosa a nagyterc hangközben (négy félhang) a magasabb hang rezgésszáma a mélyebbének? (Pontos arányszámot adjon meg.) (*2 pont*)

e) Adjunk képletet, amellyel egy tiszta zenei hangközről a rezgésszámok x aránya ismeretében kiszámíthatjuk, hogy hány félhangnyi távolságot jelent. (*4 pont*)

7. *a*) A ferde háztetőn egy kémény árnyéka épp a tető lejtésének irányába esik. Mekkora a tető dőlésszöge, ha a kémény 1 m magas, árnyéka 86 cm, és ugyanekkor a kertben növő 120 cm-es napraforgó árnyéka 75 cm? (*8 pont*)

b) A telken a ház mellett szeretnénk elkeríteni egy 450 m^2-es, téglalap alakú kiskertet. Mekkorák legyenek a kiskert oldalai, hogy a legrövidebb kerítést kelljen építeni? (Ahol fal van, nem kell kerítés. A kert mélysége legalább akkora legyen, mint a házé.) (*8 pont*)

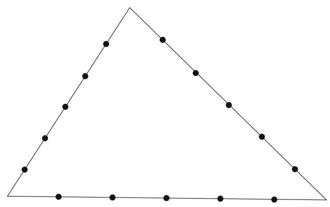


8. Számítsuk ki a derékszögű koordinátarendszerben az egyenlőtlenségekkel megadott két ponthalmaz pontos területét:

a) $6(x+y)-2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 6(x+y)+7$. (*7 pont*)

b) $(x-3)^2+1 \leqslant y \leqslant 5$. (*9 pont*)

9. *a*) A háromszög oldalain 5–5–5 pontot jelöltünk ki. Hány háromszöget határoz meg a tizenöt pont?

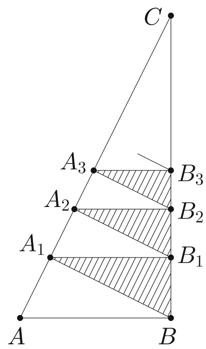


Az ABC derékszögű háromszög AB befogója 10 egység, BC befogója 20 egység hosszúságú.

A_1 a B csúcsból az AC oldalra állított merőleges, B_1 az A_1-ből BC-re állított merőleges talppontja. Ugyanígy A_2 a B_1-ből AC-re állított merőleges, B_2 az A_2-ből BC-re állított merőleges talppontja, és így tovább.

b) Számítsuk ki az A_1B_1, A_2B_2 és A_3B_3 szakasz hosszát. (*5 pont*)

c) Az eljárást a végtelenségig folytatva keletkezik a vonalkázással jelölt háromszögek végtelen sorozata. Számítsuk ki a háromszögek területének összegét. (*6 pont*)



Deák Anna
Budapest

Megoldásvázlatok a 2021/8. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:*

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}<\frac{13}{27}.\qquad (5\ pont)$$

b) *Oldjuk meg az alábbi egyenletet a* $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ *intervallumon:*

$$1+4\sin x-4\cos^2 x=0.\qquad (6\ pont)$$

Megoldás. *a*) Alkalmazzuk a hatványozás azonosságait:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x}}{\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=\frac{13}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<\frac{13}{27}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x}<\frac{1}{9}.$$

Tehát $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<\frac{1}{9}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$. Az $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért a nagyobb értéket a kisebb helyen veszi fel, azaz a megoldás $x>2$.

b) Használjuk fel, hogy $\cos^2 x=1-\sin^2 x$. Ekkor

$$1+4\sin x-4\cdot(1-\sin^2 x)=0\ \Rightarrow\ 4\sin^2 x+4\sin x-3=0.$$

Ez $\sin x$-ben egy másodfokú egyenlet, megoldásai: $\sin x=\frac{-3}{2}$ vagy $\sin x=\frac{1}{2}$.

1. eset: Ha $\sin x=\frac{-3}{2}$. Ennek nincs megoldása, mert $\forall x\in\mathbb{R}$ esetén $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$.

2. eset: Ha $\sin x=\frac{1}{2}$. Mivel $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$, ezért $x_1=\frac{5\pi}{6}$ és $x_2=\frac{13\pi}{6}$.

Tehát a megoldások $x_1=\frac{5\pi}{6}$ és $x_2=\frac{13\pi}{6}$.

Ellenőrzés vagy ekvivalenciára való hivatkozás.

2. *a*) *Kata és Máté nemrég tanulták az iskolában az osztókat. Kitaláltak egy játékot. A játékot Kata kezdi és felváltva mondanak az n pozitív egész szám osztói közül egyet úgy, hogy olyan osztót nem mondhatnak, amely korábban már elhangzott. Az veszít, aki már nem tud újabb osztót mondani. Hány olyan n pozitív egész szám van az* $\{1;2;3;\ldots;25\}$ *halmazban, amely esetén Kata nyer?* (*4 pont*)

b) *Hány olyan n pozitív egész szám van a* $\{1;2;3;\ldots;2021\}$ *halmazban, amelyre igaz, hogy* $2^{n+3}+2^n$ *négyzetszám?* (*5 pont*)

c) *Adjuk meg a p valós paraméter lehetséges értékeit, ha az alábbi polinom összevont alakjában a másodfokú tag együtthatója* -3*:*

$$(x-1)^2\cdot(p+2x)^2.\qquad (5\ pont)$$

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* Kata pontosan akkor nyer, ha az osztók száma páratlan. Egy szám osztói osztópárokba rendezhetők. Ha az osztók száma páratlan, akkor valamely osztónak önmaga a párja. Tehát a szám négyzetszám. Az $\{1;2;3;\ldots;25\}$ halmazban a négyzetszámok: 1; 4; 9; 16; 25. Ezek száma 5. Tehát 5 olyan szám van, amely esetén Kata nyer.

II. megoldás. Kata pontosan akkor nyer, ha az osztók száma páratlan. Ha az n szám kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, akkor osztóinak száma

$$(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1).$$

Az osztók száma páratlan, ezért $\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_k$ mindegyike páros.

Tehát $n = p_1^{2\beta_1} \cdot p_2^{2\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\beta_k} = \left(p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}\right)^2$, azaz négyzetszám.

Az $\{1;2;3;\ldots;25\}$ halmazban a négyzetszámok: 1; 4; 9; 16; 25.

Ezek száma 5. Tehát 5 olyan szám van, amely esetén Kata nyer.

Megjegyzés. Akár végig is lehet próbálni az összes számot és a végére juthatunk így is a feladatnak.

b) *I. megoldás.* Mivel $2^{n+3}+2^n = 8\cdot 2^n + 2^n = 9\cdot 2^n$ és a 9 négyzetszám, ezért a kifejezés pontosan akkor lesz négyzetszám, ha 2^n négyzetszám. Ez akkor teljesül, ha n páros szám.

Az $\{1;2;3;\ldots;2021\}$ halmazban 1010 darab páros szám van.

II. megoldás. Ha $n=1$, akkor a kifejezés értéke 18, ami nem négyzetszám.

Ha $n=2$, akkor a kifejezés értéke 36, ami négyzetszám.

Vegyük észre, hogy ha n értékét egyesével növeljük, akkor a kifejezés értéke mindig a kétszeresére növekszik, ugyanis

$$2^{n+4}+2^{n+1} = 2\cdot 2^{n+3} + 2\cdot 2^n = 2\cdot(2^{n+3}+2^n).$$

Tehát, ha valamely n-re a kifejezés négyzetszám, akkor $(n+2)$-re is négyzetszám.

És nyilván, ha valamely n-re a kifejezés nem négyzetszám, akkor $(n+2)$-re sem négyzetszám. Ezért a számunkra megfelelő értékek $n \in \{2;4;6;\ldots;2020\}$. Tehát 1010 megoldás van, amely megfelel nekünk.

c) Bontsuk fel a zárójeleket és rendezzük a polinomot a változó csökkenő hatványai szerint:

$$g(x) = (x-1)^2\cdot(p+2x)^2 = (x^2-2x+1)\cdot(4x^2+4px+p^2) =$$
$$= 4x^4+(4p-8)x^3+(p^2-8p+4)x^2+(4p-2p^2)x+p^2.$$

A másodfokú tag együtthatója p^2-8p+4, ezért meg kell oldjuk az $p^2-8p+4=-3$ egyenletet. Ennek a megoldásai: $p_1=1$ és $p_2=7$.

Megjegyzés. Nem feltétlenül kellett volna összeszorozni minden tagot minden taggal, hiszen másodfokú tag csak úgy keletkezhet, ha másodfokút konstanssal vagy elsőfokút elsőfokúval szorzunk.

3. *a) Egy dobozban van 7 különböző pár kesztyű. A dobozból egyesével, visszatevés nélkül húzunk ki kesztyűket mindaddig, amíg nem kapunk egy pár kesztyűt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ehhez legfeljebb 3-szor kell húzzunk a dobozból?* *(7 pont)*

	11.-es	12.-es
Fiúk	4	3
Lányok	2	3

b) Az iskola 11.-es és 12.-es legjobb 12 matekos diákjának nemek szerinti és évfolyam szerinti eloszlását a táblázat *tartalmazza. A tanáruk véletlenszerűen választott közülük diákokat a körzeti matekversenyre. A verseny szabályzata szerint egy csapatban ketten indulnak (a csapattagok között nincs kitüntetettség), akik közül legalább az egyikük lány (akár mindkettő résztvevő lehet lány) és a két résztvevő nem lehet ugyanarról az évfolyamról. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a tanáruk a versenyszabályzatnak megfelelő nevezést adott le? Eredményünket* 3 *tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.* *(5 pont)*

Megoldás. *a)* Két olyan eset van, amikor legfeljebb 3 húzásból lesz egy pár kesztyű a kihúzottak között.

1. eset: Ha második húzásra egy pár kesztyű lesz nálunk. Ennek a valószínűsége

$$\frac{14\cdot 1}{14\cdot 13}=\frac{1}{13},$$

ugyanis elsőre még bármit húzhatunk, másodikra pedig csak annak a párját tudjuk húzni.

2. eset: Ha a harmadik húzásra lesz meg az első pár kesztyű. Ennek a valószínűsége

$$\frac{14\cdot 12\cdot 2}{14\cdot 13\cdot 12}=\frac{2}{13},$$

ugyanis elsőre bármit húzhatunk, másodikra nem húzhatjuk annak a párját, tehát 12 közül húzhatunk, majd harmadikra az egyik már kihúzott kesztyűnek kell a párját kihúzni.

Tehát a keresett valószínűség

$$P(\text{legfeljebb 3 húzás elég})=\frac{1}{13}+\frac{2}{13}=\frac{3}{13}.$$

Megjegyzés. Az első esetnél azonnal tudtuk volna mondani az $\frac{1}{13}$ valószínűséget, ugyanis az első kesztyű még bármi lehet és marad 13 kesztyű a dobozban. Ez a 13 az összes eset száma és csak 1 kedvező van: ha az először kihúzottnak a párját húzzuk másodiknak.

b) Az összes eset száma $\binom{12}{2}=66$.

Az alábbi összeállítások esetén ad le jó nevezést a tanár:

1. eset: 11.-es lány és 12.-es lány. Ekkor a kedvező esetek száma $2\cdot 3=6$.

2. eset: 11.-es lány és 12.-es fiú. Ekkor a kedvező esetek száma $2\cdot 3=6$.

3. eset: 12.-es lány és 11.-es fiú. Ekkor a kedvező esetek száma $3\cdot 4=12$.

$P(\text{jó a nevezés})=\frac{6+6+12}{66}=\frac{4}{11}$, ami 3 tizedesjegyre kerekítve 0,364.

4. *Adott az* $x^2+y^2+18x-4y+45=0$ *egyenletű* k *kör.*

a) Igazoljuk, hogy a k *kör középpontjának koordinátái* $K(-9;2)$. (*2 pont*)

b) Határozzuk meg a k *kör* $P(-7;8)$ *pontjába húzható érintőjének egyenletét.* (*3 pont*)

c) Adottak az $A(1;1)$, $B(10;4)$, $C(2;8)$ *pontok. Mutassuk meg, hogy a három pont által meghatározott háromszög köré írható körének középpontja illeszkedik az* $x+3y=17$ *egyenletű egyenesre.* (*9 pont*)

Megoldás. *a*) Teljes négyzetté alakítást hajtunk végre:

$$x^2+y^2+18x-4y+45=0,$$

$$(x+9)^2-81+(y-2)^2-4+45=0.$$

Azaz $(x+9)^2+(y-2)^2=40$.

Innen a kör középpontja leolvasható: $K(-9;2)$.

b) Az érintőnek adott a $P(-7;8)$ pontja. Ez valóban pontja a körnek, amiről a koordináták behelyettesítésével meggyőződhetünk.

Egy normálvektora a $\overrightarrow{KP}(2;6)$ vektor. Az érintő egyenlete

$$2x+6y=2\cdot(-7)+6\cdot 8,$$

azaz egyszerűsítve $x+3y=17$.

c) A háromszög köré írt körének középpontját az oldalfelező merőlegesek metszéspontjaként kapjuk meg. Elég két oldalfelezési pont: $F_a(6;6)$ és $F_c\left(\frac{11}{2};\frac{5}{2}\right)$. Az F_a ponton áthaladó e oldalfelező merőleges egy normálvektora $\overrightarrow{n}_e=\overrightarrow{CB}(8;-4)$, egyenlete $2x-y=6$.

Az F_c ponton áthaladó f oldalfelező merőleges egy normálvektora

$$\overrightarrow{n}_f=\overrightarrow{AB}(9;3),$$

egyenlete $3x+y=19$. Legyen O a háromszög köré írt kör középpontja. Ekkor $e\cap f=\{O\}$, azaz meg kell oldani az alábbi egyenletrendszert:

$$2x-y=6,$$

$$3x+y=19.$$

Ennek megoldása $x=5$; $y=4$. Tehát $O(5;4)$. Ez a pont valóban illeszkedik az $x+3y=17$ egyenletű egyenesre, ugyanis $5+3\cdot 4=17$.

II. rész

5. *Egy derékszögű háromszög oldalaiból álló minta terjedelme* 18 *egység, a medián* 24 *egység.*

a) Igazoljuk, hogy a háromszög oldalainak hossza 7; 24 *és* 25 *egység.* (*5 pont*)

b) Adjuk meg a háromszög beírt és köré írt körének középpontjának távolságát.
(7 pont)

A fenti háromszög befogóin megjelöljük azokat a belső osztópontokat, amelyek a derékszögű csúcstól egész egység távolságra helyezkednek el.

c) Hány olyan háromszög adható meg, melyeknek csúcsai ezen belső osztópontok közül kerülnek ki? *(4 pont)*

Megoldás. *a)* A háromszög három oldala legyen nagyság szerint rendezve $a \leqslant b < c$. Mivel a medián 24, ezért $b = 24$. Mivel a terjedelem 18, ezért $c = a + 18$. Pitagorasz tétele szerint $a^2 + 24^2 = (a+18)^2$. Ezt megoldva kapjuk, hogy $a = 7$.

Tehát a háromszög oldalainak hossza valóban 7; 24 és 25 egység.

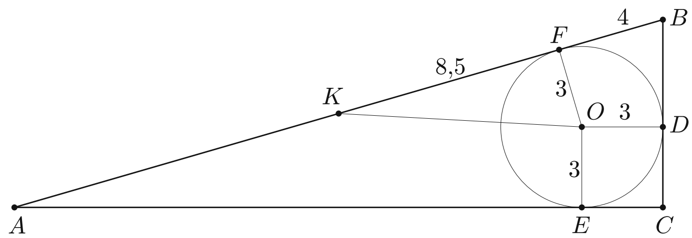
b) I. megoldás. Az ABC háromszög területe $T = \frac{7 \cdot 24}{2} = 84$. Félkerülete $s = 28$, ezért beírt körének sugara $r = \frac{T}{s} = 3$. Az $OECD$ négyszög négyzet, ezért $CD = 3$, így $BD = 4$. Külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, ezért $BF = BD = 4$. Thálész tételének megfordítása miatt a háromszög köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja és a kör sugara $R = \frac{c}{2} = 12{,}5$. Mivel $BK = 12{,}5$ és $BF = 4$, ezért $KF = 8{,}5$. A KFO háromszög derékszögű, ezért Pitagorasz tétele szerint

$$KO^2 = 8{,}5^2 + 3^2 \;\Rightarrow\; KO = \frac{\sqrt{325}}{2} \approx 9{,}01.$$

Megjegyzés. A háromszög beírt köre sugarának hosszát megkaphattuk volna a csak derékszögű háromszögekre érvényes $r = \frac{a+b-c}{2}$ képlettel is. Ekkor szintén

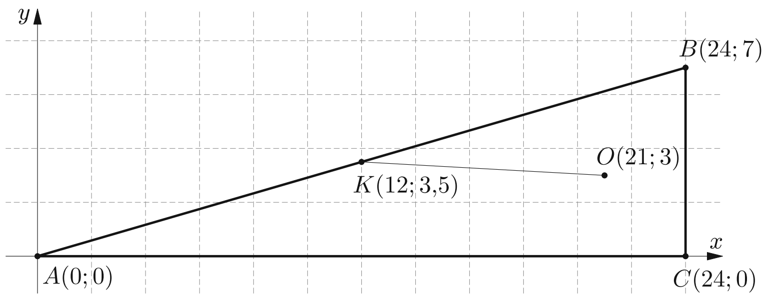
$$r = \frac{7 + 24 - 25}{2} = 3$$

adódik.



II. megoldás. Helyezzük el a háromszöget derékszögű koordinátarendszerben, a csúcsok legyenek $A(0;0)$, $B(24;7)$, $C(24;0)$. Thalész tételének megfordítása miatt a háromszög köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja, azaz $K\left(12; \frac{7}{2}\right)$.

Az ABC háromszög területe $T = \frac{7 \cdot 24}{2} = 84$. Félkerülete $s = 28$, ezért beírt körének sugara $r = \frac{T}{s} = 3$, és így a beírt kör középpontjának koordinátái $O(21;3)$. A feladat kérdése az KO távolság meghatározása: $KO = \frac{\sqrt{325}}{2} \approx 9{,}01$.



c) I. megoldás. A hosszabb befogón 23 darab, a rövidebb befogón pedig 6 osztópont található. Háromszög akkor jön létre, ha az egyik befogó pontjai közül kettőt és a másik befogó pontjai közül egyet kiválasztunk. A háromszögek száma

$$\binom{23}{2}\cdot\binom{6}{1}+\binom{23}{1}\cdot\binom{6}{2}=1518+345=1863.$$

II. megoldás. A hosszabb befogón 23 darab, a rövidebb befogón pedig 6 osztópont található. Komplementer módszerrel dolgozunk. Az összes ponthármasok száma $\binom{29}{3}=3654$. A rossz esetek jelenleg azt jelentik, hogy a kiválasztott 3 pont egy egyenesre illeszkedik.

Ezek száma $\binom{23}{3}+\binom{6}{3}=1771+20=1791$. A háromszögek száma

$$3654-1791=1863.$$

6. *a) Ottónak* 55 *emelt matekos diákja van, akikkel tesztet írat koordinátageometriából.*

A teszten 3 *kérdés van és minden egyes kérdésre* 3 *válaszlehetőség, melyek közül pontosan* 1 *helyes válasz van. Mutassuk meg, hogy van legalább* 3 *olyan diák, akik pontosan ugyanúgy töltötték ki a tesztet. (Két tesztkitöltést akkor tekintünk azonosnak, ha az egyes kérdésekre adott válasz minden egyes esetben megegyezik.)* (*5 pont*)

b) A fenti 55 *diák közül András, Bogi, Csaba, Dani, Emese, Feri, Gizi és Huba úgy töltötték ki a teszt első kérdését, hogy minden egyes válaszlehetőség legalább egyszer előfordult a válaszaik között* (3 *válaszlehetőség volt minden egyes kérdésre*)*. Hányféle különböző kitöltést tud adni a* 8 *tanuló csak az első kérdésre, ha csak az számít, hogy az egyes válaszlehetőségeket hányan jelölték meg?* (*6 pont*)

c) A diákok közül Ilona, József, Kati, Laci, Marci és Nóri nagyon rosszul teljesítettek a teszten, ezért Ottó úgy döntött, hogy a jobb teljesítés érdekében alakítsanak ki tanulópárokat (*azaz* 2 *diákból álló csoportokat*)*. Hányféleképpen alakíthat ki a* 6 *diák tanulópárokat, ha az egyes tanulópárok között és a tanulópárokon belül sincs kitüntetettség a diákok között?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Mindhárom kérdésre egymástól függetlenül háromféleképpen válaszolhatnak a diákok, ezért a tesztet $3^3=27$ különböző módon lehet kitölteni.

Mivel $55 = 2 \cdot 27 + 1$, ezért a skatulyaelv szerint biztosan lesz legalább 3 olyan diák, akik pontosan ugyanúgy töltötték ki a tesztet.

b) I. megoldás. A feladat feltétele szerint mindegyik válaszlehetőséget legalább egy diák megjelölte, ezért lényegében az a feladatunk, hogy a maradék 5 diákot osszuk szét. Az alábbi esetek adódnak:

1. eset: $5 + 0 + 0$, ebből 3 lehetőségünk van.

2. eset: $4 + 1 + 0$, ebből 6 lehetőségünk van.

3. eset: $3 + 2 + 0$, ebből 6 lehetőségünk van.

4. eset: $3 + 1 + 1$, ebből 3 lehetőségünk van.

5. eset: $2 + 2 + 1$, ebből 3 lehetőségünk van.

Tehát összesen 21 különböző kitöltést tud adni a 8 diák.

II. megoldás. Az egyes válaszlehetőségekre érkezzen rendre x; y; z válasz. Ekkor x; y; z olyan pozitív egész számok, amelyekre $x + y + z = 8$. Képzeljük el azt, hogy 8 almát (az ábrán a pöttyök szemléltetik az almákat) osztunk szét három gyerek között, akik mindegyike kap legalább egy almát. Annyiféleképpen tudjuk felbontani a 8-at három összeadandóra, ahányféleképpen a köztük lévő 7 résnél elhelyezünk két összeadás jelet. Ezek száma $\binom{7}{2} = 21$.

$$\bullet \quad \bullet + \bullet \quad \bullet + \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet$$

c) I. megoldás. A rosszul teljesítő diákok legyenek A; B; C; D; E; F. Először keressünk tanulópárt A-nak. A többi 5 diák közül akármelyik lehet a párja, ez 5 lehetőség, legyen pl. B. Most keressünk tanulópárt C-nek. A többi 3 diák közül akármelyik lehet a párja, ez 3 lehetőség, legyen pl. D. A maradék két diák pedig egy párt alkot. Az összes lehetőségek száma $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$.

II. megoldás. Először a 6 diákból kijelölünk egy párt. Ezt $\binom{6}{2} = 15$-féle módon tehetjük meg. A maradék 4 diákból kiválasztunk egy másik párt, ezt $\binom{4}{2} = 6$ különböző módon tehetjük meg. A megmaradt 2 tanuló pedig egy párt fog alkotni. Ekkor minden párt $3! = 6$-szor számoltunk meg, ezért az összes lehetőségek száma $\frac{15 \cdot 6}{6} = 15$.

Megjegyzés. Ha 6 helyett $2n$ számú diákot kellene párokba rendezni, akkor azt az első megoldás alapján $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$-féle módon tehetnénk meg. A második megoldás alapján pedig

$$\frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{2n}{2}}{n!}$$

féle módon. Ebből adódik, hogy tetszőleges pozitív egész n esetén:

$$\frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{2n}{2}}{n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1).$$

7. *Szorgalmas Szonja elhatározza, hogy koordinátageometriai hiányosságait szorgos gyakorlással orvosolja. Ezért minden egyes nap megold* 20 *ilyen jellegű feladatot. Még nem megy neki olyan jól, ugyanis minden nap csak* 5 *feladatot tud helyesen megoldani.*

Egy héten át minden egyes nap megkéri Lusta Lujzát, hogy ellenőrizze le mind a 20 *feladatot. Lujza nem nézi végig az összes feladatot. Minden egyes nap csak* 3*, általa véletlenszerűen kijelöltet ellenőriz le.*

a) Mutassuk meg, hogy három tizedesjegyre kerekítve 0,601 *annak a valószínűsége, hogy az adott napon a* 3 *ellenőrzött feladatból lesz helyesen megoldott feladata Szonjának.* (*4 pont*)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 7 *nap alatt legfeljebb egyszer fordul elő az, hogy lesz helyesen megoldott feladata Szonjának? Válaszunkat* 4 *tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.* (*5 pont*)

c) Legalább hány napon keresztül kell Lujzának átnéznie a feladatokat az ő sajátos módszerével, hogy legalább 99,99%*-os valószínűséggel legyen olyan nap, amikor van helyesen megoldott feladata Szonjának?* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Komplementer módszerrel fogunk dolgozni.

$$P(\text{lesz jó feladat}) = 1 - P(\text{mindhárom rossz}) = 1 - \frac{\binom{15}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{137}{228},$$

ami 3 tizedesjegyre kerekítve 0,601.

b) Mivel $P(\text{lesz jó feladat}) \approx 0{,}601$, ezért $P(\text{mindegyik rossz}) \approx 0{,}399$.

$$P(\text{legfeljebb egyszer lesz jó feladat}) =$$
$$= P(7 \text{ csak rossz}) + P(1 \text{ van jó és } 6 \text{ csak rossz}) =$$
$$= 0{,}399^7 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}601 \cdot 0{,}399^6 \approx 0{,}018\,58,$$

ami 4 tizedesjegyre kerekítve 0,0186.

c) Lujza a feladatokat n napon keresztül nézze át. Ekkor a feltétel szerint

$$P(\text{van jó feladatos nap}) \geqslant 0{,}9999 \;\Rightarrow\; 1 - P(\text{mindegyik rossz}) \geqslant 0{,}9999,$$

azaz $0{,}0001 \geqslant P(\text{mindegyik rossz}) = 0{,}399^n$. Tehát meg kell oldjuk a $0{,}0001 \geqslant 0{,}399^n$ egyenlőtlenséget. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát és vegyük figyelembe, hogy ez szigorúan monoton növekvő függvény. Alkalmazzuk a logaritmus azonosságot:

$$0{,}0001 \geqslant 0{,}399^n \;\Rightarrow\; \lg 0{,}0001 \geqslant \lg 0{,}399^n \;\Rightarrow\; -4 \geqslant n \cdot \lg 0{,}399.$$

Mivel $\lg 0{,}399 < 0$, ezért az osztáskor fordul a relációsjel iránya. $\frac{-4}{\lg 0{,}399} \leqslant n$, azaz $10{,}02 \leqslant n$. Tehát Lujzának legalább 11 napon keresztül kell átnéznie Szonja feladatait a feltétel teljesüléséhez.

8. *a*) *Egy számtani sorozat első* 9 *tagjának összege* 198*. Mekkora a sorozat első tagja és differenciája, ha az első* 18 *tagjának összege* 639? (*4 pont*)

b) *Egy mértani sorozat hányadosa* 2*. A sorozat n-edik tagja* 16 *és az első n tag összege* 31,75*. Határozzuk meg n értékét.* (*5 pont*) *c) Igazoljuk, hogy az* $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ *sorozat szigorúan monoton növekedő.* (*5 pont*)

d) Adjuk meg az $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ *sorozat legkisebb tagját.* (*2 pont*)

Megoldás. *a*) Ismert, hogy $S_n = \frac{2a_1+(n-1)\cdot d}{2} \cdot n$, ezért $S_9 = \frac{2a_1+8d}{2} \cdot 9$ és $S_{18} = \frac{2a_1+17d}{2} \cdot 18$. Tehát a feladat szövege szerint $2a_1 + 8d = 44$ és $2a_1 + 17d = 71$. Ez egy elsőfokú, lineáris egyenletrendszer, melyet pl. megoldhatunk úgy, hogy kivonjuk egymásból a két egyenletet. Kapjuk, hogy $(2a_1 + 17d) - (2a_1 + 8d) = 71 - 44$, azaz $d = 3$. Innen $a_1 = 10$ adódik.

Ellenőrzés a feladat szövege alapján.

b) *I. megoldás.* Felhasználjuk, hogy $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ és $q \neq 1$ esetén $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$.

Tehát $a_1 \cdot 2^{n-1} = 16$ és $a_1 \cdot \frac{2^n-1}{2-1} = 31{,}75$. Azaz $a_1 \cdot 2^n = 32$ és $a_1 \cdot (2^n - 1) = 31{,}75$. Innen kapjuk, hogy $a_1 \cdot 2^n - a_1 = 31{,}75$, tehát $32 - a_1 = 31{,}75 \Rightarrow a_1 = 0{,}25$. Adódik, hogy $0{,}25 \cdot 2^{n-1} = 16$. Ez az exponenciális egyenlet átírható $2^{-2} \cdot 2^{n-1} = 2^4$ alakba, ahonnan már könnyen adódik, hogy $n = 7$.

Ellenőrzés a feladat szövege alapján.

II. megoldás. Mivel $a_n = 16$ és $q = 2$, ezért $a_{n-1} = 8$; $a_{n-2} = 4$; $a_{n-3} = 2$ stb. Nyilván mindig pozitív tagokat kapunk, ezért elég azt megnézni, hogy meddig kell összeadni visszafelé ezeket a tagokat, hogy megkapjuk az $S_n = 31{,}75$ értéket. Mivel $16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 0{,}5 + 0{,}25 = 31{,}75$, ezért $n = 7$.

Ellenőrzés a feladat szövege alapján.

c) Feladatunk megmutatni, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén teljesül, hogy $a_{n+1} > a_n$. Ez ekvivalens azzal, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén teljesül, hogy $a_{n+1} - a_n > 0$. Ha

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}, \quad \text{akkor } a_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
&a_{n+1} - a_n = \\
&= \left(\frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \\
&= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2} = \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0.
\end{aligned}$$

Tehát megmutattuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekedő.

d) Mivel a *c*) feladatrész szerint a sorozat szigorúan monoton növekedő, ezért a legkisebb tagja éppen $a_1 = \frac{1}{2}$.

9. *Adott az 3; 4; 5; $x+7$; $11-x$ öt elemből álló minta.*

a) Mutassuk meg, hogy a minta szórásnégyzete $\frac{2x^2-8x+40}{5}$. (A minta szórásnégyzete a minta szórásának a négyzete.) *(5 pont)*

b) Írjuk fel az $f(x)=\frac{2x^2-8x+40}{5}$ függvénynek az $x_0=7$ abszcisszájú pontjába húzható érintőjének az egyenletét. (Abszcissza: a pont első koordinátája.) *(5 pont)*

c) Mekkora területet zár közre az x tengely, az $x=0$; $x=6$ egyenes és az $f(x)=$ $=\frac{2x^2-8x+40}{5}$ függvény? *(6 pont)*

Megoldás. *a) I. megoldás.* Az átlaguk $\bar{x}=\frac{3+4+5+(x+7)+(11-x)}{5}=6$.

A szórásnégyzet

$$\sigma^2=\frac{(\bar{x}-x_1)^2+\ldots+(\bar{x}-x_5)^2}{5}=$$

$$=\frac{(6-3)^2+(6-4)^2+(6-5)^2+\big[6-(x+7)\big]^2+\big[6-(11-x)\big]^2}{5}.$$

Azaz

$$\sigma^2=\frac{9+4+1+(x^2+2x+1)+(x^2-10x+25)}{5}=\frac{2x^2-8x+40}{5}.$$

II. megoldás. Az átlaguk $\bar{x}=\frac{3+4+5+(x+7)+(11-x)}{5}=6$.

A szórásnégyzet

$$\sigma^2=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2}{5}-\bar{x}^2=\frac{3^2+4^2+5^2+(x+7)^2+(11-x)^2}{5}-6^2=$$

$$=\frac{9+16+25+(x^2+14x+49)+(x^2-22x+121)}{5}-36=\frac{2x^2-8x+40}{5}.$$

b) Mivel $f(7)=\frac{2\cdot7^2-8\cdot7+40}{5}=16{,}4$ és $f'(x)=\frac{4x-8}{5}$ $\Rightarrow$ $f'(7)=\frac{4\cdot7-8}{5}=4$, ezért az érintő egyenlete az $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ iránytényezős egyenlet alapján $y-16{,}4=4\cdot(x-7)$, azaz $y=4x-11{,}6$.

c) A függvénynek nincs valós zérushelye. Ezt a megoldóképletből kapjuk vagy abból, hogy az *a)* feladat szerint egy nem állandó mintának a szórásnégyzetéről van szó.

Használjuk a Newton–Leibniz tételt:

$$T=\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^6\frac{2x^2-8x+40}{5}dx=\left[\frac{2}{15}x^3-\frac{4}{5}x^2+8x\right]_0^6=$$

$$=\left(\frac{2}{15}\cdot6^3-\frac{4}{5}\cdot6^2+8\cdot6\right)-(0)=48.$$

Fridrik Richárd
Szeged

Matematika feladatok megoldása

B. 5145. *Mutassuk meg, hogy azoknak az n hosszúságú nullákból és egyesekből álló sorozatoknak a száma, amelyekben pontosan k-szor fordul elő, hogy 0 után 1 következik, éppen* $\binom{n+1}{2k+1}$.

(*4 pont*) (*Angol olimpiai válogatóverseny feladata*)

I. megoldás. Alakítsuk át a számsorozatokat úgy, hogy minden szám helyét jelölje egy pont és ha két szomszédos szám nem egyezik meg, akkor a második után írjunk be egy strigulát. Egy blokknak tekintjük a két szomszédos strigula közötti számokat. Tudjuk, hogy k-szor fordul elő, hogy 0 után 1 van. Válasszuk szét az eseteket a legelső, illetve az utolsó szám alapján.

1. eset. A sorozat 0-val kezdődik, és 1-re végződik. Ekkor az $n-1$ helyre $2k-1$ strigula kerül ($2k$ darab blokk van), ezért ezeknek az eseteknek a száma éppen $\binom{n-1}{2k-1}$, hiszen két pont közé legfeljebb egy strigula kerülhet.

2. eset. Ha a sorozat 0-val kezdődik, és 0-ra végződik, akkor $2k+1$ darab blokk keletkezik, ezért az esetek száma $\binom{n-1}{2k}$.

3. eset. Ha a sorozat 1-gyel kezdődik, és 1-re végződik, akkor is $2k+1$ darab blokk keletkezik, ezért az esetek száma ebben az esetben is $\binom{n-1}{2k}$.

4. eset. A sorozat 1-gyel kezdődik, és 0-ra végződik. Ekkor az $n-1$ helyre $2k+1$ strigula kerül, így már $2k+2$ darab blokk van. Az esetek száma $\binom{n-1}{2k+1}$.

Összesen

$$\binom{n-1}{2k-1}+\binom{n-1}{2k}+\binom{n-1}{2k}+\binom{n-1}{2k+1}$$

ilyen sorozat van.

A kifejezés átalakításához alkalmazzuk a következő azonosságot:

$$\binom{a-1}{b-1}+\binom{a-1}{b}=\binom{a}{b}.$$

Ez azért igaz, mert egyrészt egy a fős csoportból egy b főből álló focicsapatot $\binom{a}{b}$-féleképpen választhatunk ki. Másrészt, ha például Aladár tagja a társaságnak, akkor olyan focicsapatot, amelynek Aladár is tagja $\binom{a-1}{b-1}$-féleképpen választhatunk ki. Olyan focicsapatot pedig, amelyben Aladár nincs benne $\binom{a-1}{b}$ különböző módon állíthatunk össze. Ezek összege éppen egyenlő az összes lehetséges b fős focicsapat számával. Ezzel a fenti azonosságot igazoltuk.

Most alkalmazzuk az azonosságot először 2-2 tag; majd újból a kapott 2 tag összeadására:

$$\binom{n-1}{2k-1}+\binom{n-1}{2k}+\binom{n-1}{2k}+\binom{n-1}{2k+1}=\binom{n}{2k}+\binom{n}{2k+1}=\binom{n+1}{2k+1}.$$

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Dezső Kende Barnabás (Budapest XIV. kerületi Szent István Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Definiáljunk két függvényt. Legyen $f_1(n,k)$ azon n hosszú, nullákból és egyesekből álló számsorozatok száma, amelyek 1-gyel kezdődnek, és 0 után éppen k-szor jön 1, illetve $f_0(n,k)$ azon n hosszú, nullákból és egyesekből álló számsorozatok száma, amelyek 0-val kezdődnek, és 0 után éppen k-szor jön 1.

Indukcióval azt fogjuk belátni, hogy $f_0(n,k)=\binom{n}{2k}$ és $f_1(n,k)=\binom{n}{2k+1}$.

Ha $n=1$, akkor $f_0(1,k)=\binom{1}{2k}$, amelynek értéke $k=0$ esetén 1, a többi esetben 0, ami megfelel a számsorozatok számának, és $f_1(1,k)=\binom{1}{2k+1}$, amelynek értéke $k=0$ esetén 1, egyébként 0, ami szintén megfelelő.

Az 1-gyel kezdődő, n hosszú sorozatok száma (ahol k-szor fordul elő a 01) ugyanaz, mint az $n-1$ hosszú ilyen sorozatoké, mert az első és a második tag között nem történhet meg, hogy 0 után 1 jön. Így $f_1(n,k)=f_0(n-1,k)+f_1(n-1,k)$. A 0-val kezdődő sorozatok esetén, amennyiben a második helyen 1 van, akkor csak $(k-1)$-szer kell még előfordulnia a 01-nek, mert egyszer már előfordult. Így $f_0(n,k)=f_0(n-1,k)+f_1(n-1,k-1)$.

Tegyük fel, hogy $n-1$-re igaz az indukciós feltevés. Ekkor

$$f_1(n,k)=f_0(n-1,k)+f_1(n-1,k)=\binom{n-1}{2k}+\binom{n-1}{2k+1}=\binom{n}{2k+1}$$

és

$$f_0(n,k)=f_0(n-1,k)+f_1(n-1,k-1)=\binom{n-1}{2k}+\binom{n-1}{2k-1}=\binom{n}{2k}.$$

Ezzel az indukció készen van.

Ekkor az összes ilyen számsorozat száma:

$$f_0(n,k)+f_1(n,k)=\binom{n}{2k}+\binom{n}{2k+1}=\binom{n+1}{2k+1}.$$

Lovas Márton (Békásmegyeri Veres Péter Gimn., (10. évf.)

III. megoldás. Ahhoz, hogy legyen egy olyan sorozatunk, amelyben k-szor fordul elő az, hogy egy 0-t közvetlenül 1 követ, legalább k db 0-t és 1-et kell tartalmaznia a sorozatnak. A sorozatban a 0-k száma k-tól $(n-k)$-ig terjedhet, mert mindig kell legalább k db 1 is.

A sorszámozásunk balról jobbra történik és egyértelmű.

Helyezzünk el sorban ℓ db 0-t ($k \leqslant \ell \leqslant n-k$). Azt $\binom{\ell}{k}$-féleképpen dönthetjük el, hogy a sorban melyik 0-k után kerüljön közvetlenül 1 (a 0-kat megkülönböztetjük sorszámuk szerint).

Azt, hogy az 1-esek közül mely sorszámú álljon közvetlenül 0 után, $\binom{n-\ell}{k}$-féleképpen dönthetjük el. Adott kiválasztás esetén a közvetlenül 0-k után álló 1-esek helyzete egyértelműen meghatározza a nem közvetlenül 0 mögött álló 1-esek helyzetét is (ezek az 1-esek 0-k elé és/vagy 1 után kerülhetnek). A sorszámuk az egymáshoz viszonyított helyüket is megadja.

Adott ℓ esetén a megfelelő sorozatok száma: $\binom{\ell}{k} \cdot \binom{n-\ell}{k}$. ℓ lehetséges értékei: $k; k+1; \ldots; n-k-1; n-k$.

Az eseteket összegezve a következő kifejezést kapjuk:

$$\binom{k}{k} \cdot \binom{n-k}{k} + \binom{k+1}{k} \cdot \binom{n-k-1}{k} + \ldots +$$

$$+ \binom{n-k-1}{k} \cdot \binom{k+1}{k} + \binom{n-k}{k} \cdot \binom{k}{k}.$$

A fenti összegre kell bebizonyítani, hogy egyenlő $\binom{n+1}{2k+1}$-gyel. Az $\binom{n+1}{2k+1}$ egyenlő $n+1$ különböző elem $(2k+1)$-edrendű ismétlés nélküli kombinációinak számával.

Csoportosítsuk ezeket a kombinációkat aszerint, hogy a $(k+1)$-edik kiválasztott elem hol helyezkedik el a sorban (mi a mezőjének sorszáma). A sorszáma legalább $k+1$, legfeljebb pedig $n-k+1$ lehet.

Ha a sorszáma $k+1$, akkor az ehhez tartozó kombinációk száma

$$\binom{k}{k} \cdot \binom{n-k}{k}.$$

Ha a sorszáma $k+2$, akkor az ehhez tartozó kombinációk száma

$$\binom{k+1}{k} \cdot \binom{n-k-1}{k}.$$

$$\vdots$$

Ha a sorszáma $n-k$, akkor az ehhez tartozó kombinációk száma

$$\binom{n-k-1}{k} \cdot \binom{k+1}{k}.$$

Ha a sorszáma $n-k+1$, akkor az ehhez tartozó kombinációk száma

$$\binom{n-k}{k} \cdot \binom{k}{k}.$$

Ez a csoportosítás lefedi az $n+1$ elem összes $2k+1$-edrendű ismétlés nélküli kombinációját. Ezzel igazoltuk, hogy

$$\binom{n+1}{2k+1} = \binom{k}{k} \cdot \binom{n-k}{k} + \binom{k+1}{k} \cdot \binom{n-k-1}{k} + \dots +$$

$$+ \binom{n-k-1}{k} \cdot \binom{k+1}{k} + \binom{n-k}{k} \cdot \binom{k}{k}.$$

A megfelelő számsorozatok száma valóban $\binom{n+1}{2k+1}$.

Nagy Levente (Debreceni Fazekas Mihály Gimn., 11. évf.)

Összesen 79 dolgozat érkezett. 4 pontos 61, 3 pontos 9, 2 pontos 4 dolgozat. 1 pontot 1, 0 pontot 3 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 1 dolgozat.

B. 5165. *Legyen k egy adott pozitív egész. Van-e olyan $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, amelyre*

$$f(x) + f\big(f(x)\big) = x + k$$

minden $x \in \mathbb{N}$ esetén?

(*6 pont*) Javasolta: *Lovas Márton* (Budapest)

I. megoldás. Nincs. Ezt teljes indukcióval igazolhatjuk minden $k \in \mathbb{Z}^+$-ra. Mielőtt erre rátérnénk, belátunk egy lemmát, ami többször is hasznos lesz a bizonyítás során.

Lemma. Ha f a feltételeknek megfelelő függvény (egy tetszőleges, rögzített k-ra), akkor f-nek nincs zérushelye, tehát csak pozitív egész értékeket vesz fel.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy egy $x \in \mathbb{N}$-re $f(x) = 0$. Tudjuk, hogy

$$f(x) + f\big(f(x)\big) = x + k.$$

Helyettesítsünk az egyenletbe $f(x)$-et:

$$f\big(f(x)\big) + f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = f(x) + k.$$

Behelyettesítve $f(x) = 0$-t a következő két egyenlet adódik:

$$f(0) = x + k,$$

$$f(0) + f\big(f(0)\big) = k.$$

A második egyenletet az elsőből kivonva:

$$-f\big(f(0)\big) = x.$$

Tudjuk, hogy $f\big(f(0)\big)$ és x is természetes szám, vagyis $-f\big(f(0)\big) \leqslant 0$ és $x \geqslant 0$. Így egyenlőség csak $f\big(f(0)\big) = x = 0$ esetén állhat fenn. Ekkor pedig $x = 0$-ban van zérushely, vagyis $f(0) = 0$. Felírjuk az eredeti egyenletet $x = 0$-ra:

$$f(0) + f\big(f(0)\big) = 0 + k,$$
$$0 + f(0) = k,$$
$$0 + 0 = k,$$

ami egyetlen pozitív egész k-ra sem lehetséges, vagyis ellentmondásra jutottunk. □

Most térjünk át a teljes indukciós bizonyításra. $k = 1$-re indirekt tegyük fel, hogy van megfelelő f függvény. Ekkor az ismert egyenlet $x = 0$-ra:

$$f(0) + f\big(f(0)\big) = 0 + 1,$$
$$f(0) + f\big(f(0)\big) = 1.$$

Ami $f(0), f\big(f(0)\big) \in \mathbb{N}$ esetén csak úgy lehet, ha az egyik tag 0 és a másik 1. Ekkor pedig van zérushely, ami ellentmond a lemmánknak.

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy ha egy k pozitív egészre nincs megfelelő függvény, akkor $k + 1$-re sincs. Ehhez indirekt tegyük fel, hogy van megfelelő f_{k+1} függvény. Definiálunk egy $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényt az alábbi hozzárendelési szabállyal:

$$f_k(x) = f_{k+1}(x + 1) - 1.$$

Nyilván ez minden $x \in \mathbb{N}$-re értelmezett és az is biztos, hogy mindig nemnegatív egész értékeket vesz fel, hiszen a lemma szerint f_{k+1}-nek nincs zérushelye, vagyis minden függvényértéke legalább 1 és egész szám. Az indirekt feltételből könnyen levezethető, hogy f_k megfelelő függvény k-ra. Ha f_{k+1} megfelel $k + 1$-re, akkor tetszőleges $x \in \mathbb{N}$ esetén teljesülnek a következők:

$$f_{k+1}(x + 1) + f_{k+1}\big(f_{k+1}(x + 1)\big) = x + 1 + k + 1,$$
$$f_{k+1}(x + 1) - 1 + f_{k+1}\big(f_{k+1}(x + 1) - 1 + 1\big) - 1 = x + k,$$
$$f_k(x) + f_k\big(f_{k+1}(x + 1) - 1\big) = x + k,$$
$$f_k(x) + f_k\big(f_k(x)\big) = x + k.$$

Vagyis f_k megfelel a feltételeknek k-ra, ami ellentmond az indukciós feltételünknek.

Duchon Márton (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 9. évf.)

II. megoldás. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $a \neq b$ természetes számok, amelyekre $f(a) = f(b) := c$. Ekkor $f(a) + f\big(f(a)\big) = c + f(c) = a + k$, vagyis $f(c) = a + k - c$, hasonlóan $f(b) + f\big(f(b)\big) = c + f(c) = b + k$. Ekkor $a + k = c + f(c) = b + k$, innen $a = b$, ami ellentmond a feltevésünknek. Tehát f minden természetes értéket legfeljebb egyszer vesz fel, azaz injektív.

Nézzük azt az esetet, amikor valamilyen a értékre $f(a)=a$. Ekkor $f^r(a)=a$ minden r pozitív egészre, ezért $f(a)+f\big(f(a)\big)=a+k$, vagyis $a=k$.

Vizsgáljuk meg azokat az a-kat, amelyekre $f(a)>a$. Ekkor

$$f(a)+f\big(f(a)\big)=a+k$$

szerint $f(a)-a=k-f\big(f(a)\big)$. Itt az egyenlet bal oldala pozitív, ezért $k>f\big(f(a)\big)$. Mivel k darab k-nál kisebb természetes szám van, azért legfeljebb k darab olyan a szám lehet, amelyre $f(a)>a$.

Vegyünk egy tetszőleges b egészet; b-re nézve három eset lehetséges:

1. Minden r pozitív egészre $f^r(b)>f^{r+1}(b)$. Ekkor a $g(w):=f^w(b)$ függvény szigorúan monoton csökken. Mivel csak pozitív értékeket vehet fel, van egy legkisebb, értéke $g(w)$-nek, melyet jelöljön m. Erre a w-re $g(w+1)<g(w)=m$, ami ellentmondás, ez az eset nem lehetséges.

2. Van olyan r pozitív egész, amelyre $f^r(b)=f^{r+1}(b)$. Ekkor $f\big(f^{r-1}(b)\big)=$ $=f^r(b)=f^{r+1}(b)=f\big(f^r(b)\big)$ és f injektivitása miatt $f^{r-1}(b)=f^r(b)$, és így tovább, $b=f(b)$ következik. Akkor viszont $b+b=f(b)+f\big(f(b)\big)=b+k$ szerint $b=k$. Ez az eset tehát csak $b=k$-ra teljesülhet.

3. Van olyan r pozitív egész, amelyre $f^r(b)<f^{r+1}(b)$. A fentiek alapján ez teljesül minden $b\neq k$ értékre. Emiatt

$$f^{r+1}(b)+f^{r+2}(b)=f\big(f^r(b)\big)+f\Big(f\big(f^r(b)\big)\Big)=f^r(b)+k<f^{r+1}(b)+k,$$

ezért $f^{r+2}(b)<k$.

Tehát minden $x\neq k$ pozitív egészhez van olyan t, amelyre $f^t(x)<k$.

Tekintsük azt az irányított $\mathcal{G}$ gráfot, amelynek a csúcsai a természetes számok, és egy a csúcsból akkor indul irányított él egy b csúcsba, ha $f(a)=b$. Ekkor – mivel az f függvény injektív – minden csúcs be- és ki-foka is legfeljebb 1. Nevezzük egy a-hoz tartozó láncnak azon x csúcsok összességét, amik előállnak $x=f^w(a)$ alakban, vagy amelyekre $f^w(x)=a$. Mivel $\mathcal{G}$-ben minden csúcs ki- és be-foka is legfeljebb 1, két láncnak nem lehet közös csúcsa (mert ez a csúcs vagy a függvény egyértelműségét, vagy az injekciót elrontaná). A gráf tehát egymástól diszjunkt irányított végtelen utak és irányított körök egyesítése. Vizsgáljuk azon p egészek láncait, amelyekre $0\leqslant p<k$, és amikre létezik olyan legkisebb r pozitív egész, hogy $f^r(p)\geqslant k$.

Ezekre

$$f^{r+1}(p)+f^r(p)=f\Big(f\big(f^{r-1}(p)\big)\Big)+f\big(f^{r-1}(p)\big)=f^{r-1}(p)+k<2k,$$

ezért $f^{r+1}(p)<k$.

Általában, látható, hogy a függvény értéke minden kilépés után azonnal visszatér a $[0,k-1]$ intervallumba. Mivel a $[0,k-1]$ intervallumnak k darab eleme van, minden ilyen csúcs rajta van pontosan egy irányított körön, aminek a hossza legfeljebb $2k+2$. Ebből következik, hogy legfeljebb $(2k+2)k$ olyan szám van, ami

k-nál kisebb számmal van egy körön, tehát létezik végtelen sok olyan szám, ami nincs egy körön, és így egy láncon se egyetlen k-nál kisebb számmal sem. Ez ellentmond annak a korábbi eredménynek, ami szerint minden $x \neq k$ pozitív egészhez van olyan t, amelyre $f^t(x) < k$.

Nádor Benedek (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

42 dolgozat érkezett. 6 pontos 25, 5 pontos 9, 4 pontos 1, 3 pontos 3, 0 pontos 4 dolgozat.

B. 5195. *Mutassuk meg, hogy minden* $(x; y)$ *pozitív valós számokból álló számpár és minden* $0 < p < 1$ *valós szám esetén fennáll az* $x^p \cdot y^{1-p} < x + y$ *egyenlőtlenség.*

(*3 pont*)

I. megoldás. Az egyenlőtlenséget ekvivalens lépéseken keresztül átalakítjuk a következőképpen:

$$x^p \cdot y^{1-p} < x + y,$$

$$x^p \cdot \frac{y}{y^p} < x + y,$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p < \frac{x+y}{y},$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p < \frac{x}{y} + 1.$$

1. eset. Ha $0 < \frac{x}{y} < 1$, akkor $\left(\frac{x}{y}\right)^p < 1$, hiszen $0 < a < 1$ alap esetén az $f(u) = a^u$ függvény szigorúan monoton csökkenő, tehát

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p < \left(\frac{x}{y}\right)^0 = 1,$$

ezért

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p < \frac{x}{y} + 1.$$

2. eset. Ha $\frac{x}{y} > 1$, akkor $\left(\frac{x}{y}\right)^p < \frac{x}{y}$, hiszen $a > 1$ alap esetén az $f(u) = a^u$ függvény szigorúan monoton növő, tehát

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p < \left(\frac{x}{y}\right)^1 = \frac{x}{y},$$

így

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p < \frac{x}{y} + 1.$$

3. eset. Ha $\frac{x}{y}=1$, akkor $1<2$, vagyis $\left(\frac{x}{y}\right)^p<\frac{x}{y}+1$.

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Tóth Bálint (Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium, 12. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Ha $x<y$, akkor az $x'=y$, $y'=x$, $p'=1-p$ számokra az állítás ugyanaz: $x+y=x'+y'$ és $x^p\cdot y^{1-p}=x'^{p'}\cdot y^{1-p'}$. Ezért feltehetjük, hogy $x\geqslant y$. Ekkor $y^{1-p}\leqslant x^{1-p}$, mert a pozitív valós számok halmazán értelmezett pozitív hatványfüggvények monoton növők, így

$$x^p\cdot y^{1-p}\leqslant x^p\cdot x^{1-p}=x<x+y.$$

Az egyenlőtlenség két oldalát nézve megkaptuk a feladat állítását.

Jánosik Máté (Révai Miklós Gimnázium, Győr, 12. évf.)

III. megoldás. Vegyük észre, hogy az egyenlőtlenség voltaképpen szimmetrikus x-ben és y-ban, ugyanis a $p\leftrightarrow 1-p$ cserével az állítás önmagába megy át. Így feltehetjük, hogy $x\geqslant y$.

Legyen tehát $y=ax$, ahol $a\leqslant 1$. (Mivel $x>0$, ezért a biztosan létezik.) Ekkor az egyenlőtlenség a vele ekvivalens $x^p\cdot(xa)^{1-p}=xa^{1-p}<x+y$ alakra hozható. Mivel $a\leqslant 1$, ezért minden nemnegatív kitevős hatványára is teljesül ugyanez, ez közismert. Így tehát $xa^{1-p}\leqslant x<x+y$, utóbbi azért, mert $y>0$. Ezzel az állítást beláttuk.

Varga Boldizsár (Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium, 9. évf.)

IV. megoldás. Vegyük észre, hogy az x és y két pozitív szám, ezért felírható rájuk a súlyozott számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség (ahol az x-hez tartozó súly p, az y-hoz tartozó súly $1-p$; a súlyok összege éppen 1 és mindkettő pozitív):

$$x^p\cdot y^{1-p}\leqslant p\cdot x+(1-p)\cdot y.$$

Mivel $p<1$, ezért $p\cdot x<x$, és teljesen hasonlóan, mivel $1-p<1$, ezért $(1-p)\cdot y<$ $<y$. Az előzőből következik, hogy

$$x^p\cdot y^{1-p}\leqslant p\cdot x+(1-p)\cdot y<x+y,$$

amivel beláttuk a feladat állítását.

Bognár András Károly (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

V. megoldás. A feladat szimmetriája miatt feltehetjük, hogy $x\geqslant y$. Ekkor $x^p\geqslant y^p$ és $x^{1-p}\geqslant y^{1-p}$, másrészt $x^p\cdot x^{1-p}+y^p\cdot y^{1-p}=x+y$, ahol $0<p<1$.

A rendezési tételt alkalmazva felírhatjuk, hogy

$$x^{1-p}\cdot y^p+y^{1-p}\cdot x^p\leqslant y^{1-p}\cdot y^p+x^{1-p}\cdot x^p.$$

Mivel $x^{1-p} \cdot y^p > 0$, ezért $x^p \cdot y^{1-p} < y^{1-p} \cdot y^p + x^{1-p} \cdot x^p$, erről pedig az előzőekben beláttuk, hogy éppen $x+y$, azaz

$$x^p \cdot y^{1-p} < x + y,$$

ami éppen a feladat állítása.

Szalontai Júlia (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Összesen 127 dolgozat érkezett. 3 pontos 99, 2 pontos 10 dolgozat. 1 pontot 6, 0 pontot 12 versenyző kapott.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (709–713.)

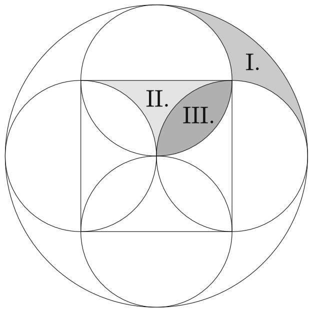
K. 709. Egy család egy egzotikus hagymafajtát termeszt saját fogyasztásra. A hagymából minden évben 400 darabot szeretnének megenni. A hagyma magról kel ki, melyet minden évben a növényen is meg tudunk termelni. Minden egyes hagymanövény 51 magot tud hozni, de ha már „felmagzott”, akkor az a része, melyet a család „hagymaként” elfogyasztana, elsorvad, mert a benne levő anyagokat a magok növekedésére fordítja. Minimálisan hány magot kell az első évben beszerezni, ha azokból az adott évre kívánt mennyiségű hagymát, továbbá annyi magot szeretnének kitermelni, hogy a továbbiakban már sose kelljen magot vásárolni?

K. 710. Néhány dodekaédert és néhány ikozaédert tettünk az asztalra. A testeknek összesen 792 csúcsuk és 936 lapjuk van. Hány dodekaéder és hány ikozaéder van az asztalon?

K. 711. Andi kedvenc száma a 2468. Bandi kedvenc száma is négyjegyű és tudjuk, hogy pontosan két olyan számjegye van, ami megegyezik Andi kedvenc számának két számjegyével, ráadásul a megegyező számjegyek ugyanazon a helyi értéken vannak a két számban. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, ami ezek alapján Bandi kedvenc száma lehetne?

K/C. 712. Egymás mellé helyezünk 2022 db négyzet alakú falapot, majd 2021 db korongra felírjuk az egész számokat 1-től 2021-ig. A korongokat tetszőleges sorrendben elhelyezzük a falapokon úgy, hogy a jobb szélső négyzetre nem helyezünk korongot (minden falapra egy korong kerül). Ezek után egy lépésben egy tetszőleges korongot áthelyezhetünk az éppen üresen álló fanégyzetre. A célunk az, hogy a korongokon álló számok balról jobbra haladva növekvő sorrendben legyenek, és a jobb szélső négyzet üres legyen. Maximálisan hány lépésre van ehhez szükségünk? Mutassunk is olyan kezdeti elrendezést, amely az általunk megállapított maximális lépésszámot igényli a sorba rendezéshez.

K/C. 713. Egy 6 cm oldalhosszúságú négyzet oldalaira – mint átmérőkre – egy-egy kört rajzoltunk, majd a négyzet középpontja körül megszerkesztettük azt a kört, melynek a sugara a négyzet oldalával egyenlő. Három síkrészt jelöltünk az *ábrán* (I., II., III.). Számítsuk ki az I., II. és III. részek területét.



❄

Beküldési határidő: 2022. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (712–713., 1694–1698.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 712. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 713. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

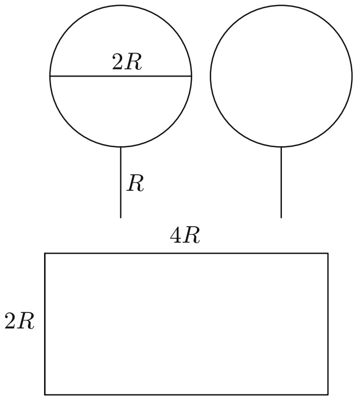
Feladatok mindenkinek

C. 1694. Határozzuk meg az alábbi egyenlet megoldását a valós számok halmazán:

$$x-2021-\frac{x-2020}{2}+\frac{x-2019}{3}-\frac{x-2018}{4}+\frac{x-2017}{5}-\ldots+$$

$$+\frac{x-3}{2019}-\frac{x-2}{2020}+\frac{x-1}{2021}-\frac{x}{2022}=0.$$

Javasolta: *Sáfár Lajos* (Ráckeve)



C. 1695. Egy körvonalhoz rá merőlegesen hozzárögzítünk egy sugárnyi (R) hosszúságú szakaszt (lásd az *ábrát*). Belefér-e két, ilyen szakasszal ellátott kör („serpenyő") egy olyan téglalapba, aminek az egyik oldala a kör átmérője ($2R$), a másik pedig kétszer akkora ($4R$)? Az alakzatok és a téglalap érinthetik, de nem metszhetik és nem fedhetik egymást.

Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)

C. 1696. Adottak az a és a b párhuzamos egyenesek, melyeken kijelölünk rendre 10, illetve 15 darab pontot. Tekintsük az összes olyan szakaszt, melynek egyik végpontja az a, másik pedig a b egyenes kijelölt pontjai közül való. Legfeljebb hány metszéspontja lehet összesen ezeknek a szakaszoknak?

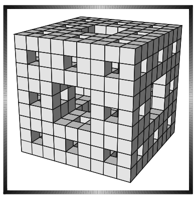
Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1697. Az ABC szabályos háromszögben a BC, CA, AB oldalakon rendre kijelöltük a D, E, F belső pontokat úgy, hogy DEF szabályos háromszög legyen. Ezután a BC és AC oldalakra kifelé a BDA' és AEB' szabályos háromszögeket rajzoltuk. Bizonyítsuk be, hogy az AB oldalon van olyan pont, amelyből az $A'E$ és $B'D$ szakaszok mindegyike derékszögben látszik.

C. 1698. Zoli nem szereti a könyveket, ám elhatározza, hogy ennek ellenére összesen pontosan 2021 oldalt fog elolvasni a 2021. évben, egymást követő napokon. Úgy tervezi, hogy minden nap egy oldallal többet olvas, mint az előző napon. Hány oldalt olvasson első napon, ha tudjuk, hogy Zoli a lehető legtöbb napra szeretné elnyújtani a 2021 oldal elolvasását, ám időhiány miatt nem tud 100 oldalnál többet olvasni egy nap?

Javasolta: *Sáfár Lajos* (Ráckeve)

Beküldési határidő: 2022. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5206–5213.)

B. 5206. Egy n-jegyű $\overline{a_1a_2a_3\dots a_n}$ számot *hegyszerűnek* nevezünk, ha van olyan $1 \leqslant k \leqslant n$ egész, amelyre $a_1, a_2, \dots, a_k$ szigorúan monoton növekvő, míg

$a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ szigorúan monoton csökkenő sorozat. (Például az 1, 121, 1231 számok hegyszerűek, de az 1442 és az 12313 nem hegyszerűek.) Hány hegyszerű szám van?

(*3 pont*)

B. 5207. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geqslant 2$ természetes számra léteznek olyan $2 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ pozitív egész számok, amelyekre

$$x_1! \cdot x_2! \cdot x_3! \cdot \ldots \cdot x_n!$$

négyzetszám.

(*4 pont*)

B. 5208. Egy kör AB és CD húrjai merőlegesek egymásra, a húrok egyenesei a körön kívüli P pontban metszik egymást; a P-ből a körhöz húzott érintőszakasz hossza e. Mutassuk meg, hogy az AD és BC szakaszok hosszainak mértani közepe legalább $\sqrt{2}\,e$.

(*4 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

B. 5209. Egy 2022 elemű, egészekből álló halmaznak legfeljebb hány olyan kételemű részhalmaza lehet, melyre a két elem összege szintén a halmazhoz tartozik?

(*5 pont*)

B. 5210. A $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ és $\mathcal{P}_3$ parabolák fókuszpontja közös, bármely kettő közülük pontosan kettő pontban metszi egymást. A $\mathcal{P}_i$ és $\mathcal{P}_j$ parabolák két metszéspontjára illeszkedő egyenest jelölje e_{ij}. Mutassuk meg, hogy az e_{12}, e_{13} és e_{23} egyenesek illeszkednek egy közös pontra.

(*5 pont*)

B. 5211. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$5^x - 2^y = 1.$$

(*5 pont*)

B. 5212. Igazoljuk, hogy létezik olyan pozitív egész szám, amely legalább 2021-féleképpen állítható elő úgy, hogy egy (tízes számrendszerben felírt) pozitív egész számhoz hozzáadjuk a számjegyeinek összegét.

(*6 pont*) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

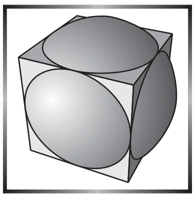
B. 5213. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív valós számok, akkor

$$c\sqrt{a^2+b^2-ab}+a\sqrt{b^2+c^2-bc}\geqslant b\sqrt{c^2+a^2+ca}\,.$$

Milyen esetben teljesül az egyenlőség?

(*5 pont*) Javasolta: *Schultz János* (Szeged)

Beküldési határidő: 2022. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (812–814.)

A. 812. Két játékos a következő játékot játssza: van két kupac, melyekből felváltva kell kavicsokat elvenniük, és az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Ha a kupacok mérete egy adott pillanatban A és B, akkor a soron következő játékos valamelyik kupacból elveheti A egy többszörösét vagy B egy többszörösét.

Határozzuk meg azokat az (k,n) számpárokat, melyekre a második játékosnak van nyerő stratégiája, ha kezdetben az egyik kupacban k, a másikban pedig n darab kavics van.

Javasolta: *Pálvölgyi Dömötör* (Budapest)

A. 813. Legyen p prímszám és k pozitív egész. Legyen továbbá

$$t=\sum_{j=0}^{\infty}\left\lfloor\frac{k}{p^j}\right\rfloor.$$

a) Legyen $f(x)$ egy egész együtthatós, 1 főegyütthatós, k-adfokú polinom, amelynek a konstans tagját osztja p. Bizonyítsuk be, hogy létezik $n\in\mathbb{N}$, amelyre $p\mid f(n)$, de $p^{t+1}\nmid f(n)$.

b) Bizonyítsuk be, hogy a fenti állítás éles, azaz létezik olyan egész együtthatós, 1 főegyütthatós, k-adfokú $g(x)$ polinom, amelynek a konstans tagját osztja p, és ha egy $n\in\mathbb{N}$ esetén $p\mid g(n)$ teljesül, akkor $p^t\mid g(n)$ is igaz.

Javasolta: *Szabó Kristóf* (Budapest)

A. 814. Adott a síkon 666 különböző pont úgy, hogy nem fedhetők le 10 darab egyenessel. Bizonyítandó, hogy ekkor kiválasztható közülük 66 pont úgy, hogy már azok sem fedhetők le 10 darab egyenessel.

Javasolta: *Hujter Mihály* (Budapest)

Beküldési határidő: 2022. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Informatikából kitűzött feladatok

I. 550. Egy bolha tartózkodik a számegyenes 0 pontján. Kétféle mozgásra képes: B hosszút tud ugrani balra, vagy J hosszút tud ugrani jobbra ($1 \leqslant B, J \leqslant 100$ egész számok). Adjuk meg, hogy eljuthat-e a bolha egy tetszőleges C ($-100 \leqslant C \leqslant$ $\leqslant 100$) számhoz. Ha eljuthat, akkor adjuk meg a legrövidebb ugrássorozat hosszát, valamint azt, hogy hány balra és hány jobbra ugrással lehet eljutni 0-tól C-ig.

Készítsünk programot, amely a standard bemenet első sorából beolvassa B, J és C értékét, majd a standard kimenet egyetlen sorába írja a legrövidebb ugrássorozat hosszát, a balra, valamint a jobbra ugrások számát, illetve 0-t, ha a C számhoz a bolha nem tud eljutni. Ha több ugrássorozat van, amellyel a C számhoz a legkevesebb ugrással el lehet jutni, akkor bármelyik megadható.

Példák:

Bemenet	Kimenet
`5 3 10`	`6 1 5`
`21 73 50`	`20 15 5`
`48 82 73`	`0`

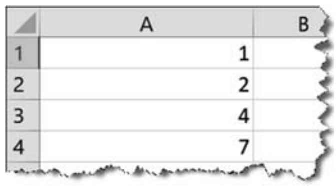
Beküldendő egy tömörített `i550.zip` mappában a megoldást adó program forráskódja és egy rövid dokumentáció, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(*A 2021 októberében kitűzött* **K. 701.** *feladat alapján*)

I. 551. Különböző vastagságú falakat szeretnénk készíteni. Ehhez háromféle, 1, 2 és 3 cm vastagságú lapok állnak rendelkezésre.

Táblázatkezelő program segítségével oldjuk meg a falak készítéséhez használandó lapok számának és sorrendjének számításához kapcsolódó következő feladatokat.

1. Hozzuk létre a táblázatkezelőben a **fal** nevű állományt a program alapértelmezett formátumában.
2. Nevezzük át az első munkalapot **sorrend** névre.
3. Határozzuk meg az A1:A60-as tartomány celláiban, hogy hányféle lényegesen különböző sorrendben lehet balról jobbra összeilleszteni a lapokat úgy, hogy a fal vastagsága az adott cella sorának értékével egyezik meg. (Lényegesen különböző a sorrend, ha az egymás után elhelyezett lapok vastagsága legalább egy helyen eltér, például 3 cm-es falvastagságnál 4 lényegesen különböző összeállítás van: $1, 1, 1$; $1, 2$; $2, 1$ és 3.)



Minta a **sorrend** *munkalaphoz*

4. Hozzuk létre a **max10** nevű munkalapot és állítsuk be a mintaképen látható szürke hátterű cellákat és formátumukat.

5. Ezen munkalap B, C és D oszlopában a második sortól kezdve soroljuk fel, hogy hány 3, 2 és 1 cm-es lapot használhatunk fel a fal elkészítéséhez, ha a fal vastagságát az A2 cellába írt pozitív egész szám adja és mindhárom vastagságból legfeljebb 10–10 lapot használhatunk fel.
6. A kép A3 cellájában olvasható üzenet csak akkor jelenjen meg, ha a megadott falvastagság eléréséhez legalább egyféle lapból 10-nél több darabra lenne szükség. Ebben az esetben a többi cella maradjon üres a B–F oszlopokban a második sortól kezdve.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**méret:**	**3**	**2**	**1**	**sorrend**	**összes sorrend:**	
2	**100**						
3	**Túl vastag!**						
4							
5							

7. Az E oszlopban határozzuk meg, hogy az adott darabszámokból hány lényegesen különböző összeállítás lehetséges. Például 14-es falvastagság összeállítható többek között 4 db 3 cm-es és 1 db 2 centiméteres lapból. Ezek 5 lehetséges sorrendben tehetők egymás után: $3, 3, 3, 3, 2$; $3, 3, 3, 2, 3$; $3, 3, 2, 3, 3$; $3, 2, 3, 3, 3$ és $2, 3, 3, 3, 3$. Ezért ebben a sorban az E oszlopba 5 kerül, természetesen képlet felhasználásával.
8. Az F2 cellában összesítsük az E oszlopban felsorolt esetenkénti sorrendeket.

	A	B	C	D	E	F
1	**méret:**	**3**	**2**	**1**	**sorrend**	**összes sorrend:**
2	**14**	4	1	0	5	3110
3		4	0	2	15	
4		3	2	1	60	
5		3	1	3	140	
6		3	0	5	56	
7		2	4	0	15	
8		2	3	2	210	
9		2	2	4	420	
10		2	1	6	252	
11		2	0	8	45	
12		1	5	1	42	
13		1	4	3	280	
14		1	3	5	504	
15		1	2	7	360	
16		1	1	9	110	
17		0	7	0	1	
18		0	6	2	28	
19		0	5	4	126	
20		0	4	6	210	
21		0	3	8	165	
22		0	2	10	66	
23						
24						

Minta a **max10** *munkalaphoz*

Segédszámításokat mindkét munkalapon a P oszloptól kezdődően végezhetünk. A megoldáshoz makró vagy más program nem használható, csak a táblázatkezelő beépített függvényei.

Beküldendő egy `i551.zip` tömörített állományban a munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amely megadja, hogy a megoldás milyen táblázatkezelő program melyik verziójában készült és egy kb. ötsoros magyarázat a megoldások módszeréről.

I. 552 (É). Az emberiség történelme során többféle számírás és számolási módszer alakult ki. A helyiértékes számrendszer használatának elterjedése előtt a számokat különféle jelekkel, jelcsoportokkal írták le. Az ókori görögöknél az i. e. V. században kialakult *alfabetikus* számírásban például az ABC betűi jelentették a számokat. A megfeleltetés alfa(A) = 1, béta(B) = 2, … egészen kilencig, majd ióta(I) = 10, kappa(K) = 20 stb. A betűkkel nem jelölt számokat a betűkből álló „szavak" segítségével adták meg: a szó értéke a benne szereplő betűk számértékének összegével volt egyenlő.

Alkalmazzuk az alfabetikus számítást az angol ABC betűire, vagyis A = 1, B = 2, … és végül Y = 600 és Z = 700. A következő feladatokban ezekkel a „számokkal" kell számolni és műveleteket végezni. A számokat minden esetben az angol ABC nagybetűivel jelöljük. A feladatok megoldása során törekedjünk a mintának megfelelő input/output megvalósítására. A bemeneteket nem kell ellenőrizni, azok a leírásnak megfelelő, helyes értékek. A kommunikáció során az ékezetmentes kiírás is elfogadott.

1. Írjuk ki az angol ABC nagybetűit.
2. Írjuk ki a fenti nagybetűkkel jelölt számokat.
3. Kérjünk be a felhasználótól egy számot jelentő betűt, és adjuk meg a számértékét.
4. Kérjünk be a felhasználótól egy számot jelentő szót (legföljebb 10 betű), és adjuk meg a számértékét.

A számok felírása nem egyértelmű, például a 31 felírható LA, AJK vagy akár JDGJ alakban is.

5. Kérjünk be a felhasználótól két számot jelentő szót (legföljebb 10 betű), és adjuk meg, hogy egyenlő értékű-e a két szó.
6. Kérjünk be a felhasználótól egy tízes számrendszerben felírt számot, és adjuk meg a neki megfelelő legrövidebb szavak egyikét.
7. Kérjünk be a felhasználótól egy tízes számrendszerben felírt számot, és adjuk meg a neki megfelelő hárombetűs szavak mindegyikét.

Minta:

```
1. feladat:
Az ABC: A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
2. feladat:
A számok: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 200 300
400 500 600 700 800
3. feladat:
Kérek egy betűt:K
```

```
Értéke: 20
4. feladat:
Kérek egy szót:EMU
Értéke: 345
5. feladat:
Kérek egy szót:KSM
Kérek egy másik szót:OLP
Egyenlőek
6. feladat:
Kérek egy számot:256
Egy legrövidebb szó: TNF
7. feladat:
Kérek egy számot:195
A számnak megfelelő hárombetűs szavak: ERS ESR RES RSE SER SRE
```

Beküldendő egy `i552.zip` tömörített állományban a megoldás forráskódja, valamint egy rövid dokumentáció, amely megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

I/S. 58. Egy épület alaprajza egy N oszlopból és N sorból álló négyzetráccsal szemléltethető. A négyzetrács minden egységnégyzete kétféle lehet: foglalt, vagy szabad. Foglalt egységnégyzeteknek megfelelő területekre nem léphet senki, szabad egységnégyzeteknek megfelelő területeken viszont szabadon lehet sétálni.

Tűzriadó esetén az épület minden szabad négyzettel adott területén egy fluoreszkáló nyíl jelenik meg, amely mutatja, merre kell továbbhaladni, hogy biztonságosan elhagyhassuk az épületet. Egy nyíl négy különböző irányba mutathat az alaprajzon: fel, jobbra, le, balra.

Miután felfestésre kerültek a nyilak, tűzriadót tartanak az épületben, hogy kipróbálják, mindenhova jó irányba mutató nyíl került-e. A próba kezdetén minden szabad egységnégyzetnek megfelelő területen pontosan egy ember áll. Minden időegység alatt mindenki megpróbálja végrehajtani az alatta lévő nyíl által mutatott parancsot.

Az alaprajzot és a tűzriadó tervét egy T tömb írja le. Az alaprajzon az i-edik sor j-edik egységnégyzetének állapotát a $T[i][j]$ tömbelem értéke adja: '`*`' = foglalt, '`F`' = felfele nyíl, '`J`' = jobbra nyíl, '`L`' = lefele nyíl és '`B`' = balra nyíl.

Ha egy ember alatt lévő nyíl egy szabad területre mutat, akkor oda átlép az illető. Ha foglalt cellára mutat, akkor helyben marad. Ha az épületből kifelé mutat, akkor biztonságban kijut az épületből és többé nem megy vissza oda a próba során. A próba M időegységig tart. Adjuk meg, hogy M időegység után hányan vannak még az épületben.

A bemenet első sorában az N és M egész szám található. A következő N sor mindegyikében N karakter található: az i-edik sor j-edik eleme $T[i][j]$.

A kimenet egyetlen sorában egy szám szerepeljen: az M időegység után az épületben lévő személyek száma.

Példa:

Bemenet (a `/` sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`4 6 / JJFF / F*BB / FLJJ / FBJB`	`6`

A kezdetben a $T[2][3]$, $T[2][4]$, $T[3][2]$, $T[4][2]$, $T[4][3]$, $T[4][4]$ egységnégyzeteken álló emberek maradnak az épületben 6 időegység után.

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 750$, $T[i][j] \in \{$'*', 'F', 'J', 'L', 'B'$\}$. Időlimit: 0,3 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $1 \leqslant N \leqslant 30$.

Beküldendő egy `is58.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 157. Álmos és Sára kaptak egy nagy tábla mogyorós csokoládét karácsonyra. A csokoládé $N \times N$ db négyzet alakú mezőből áll. Egyes mezőkben van mogyoró, más mezőkben nincs. Úgy szeretnék elosztani a csokoládét, hogy a kapott mogyorós részek számának különbsége minél kisebb legyen. Nem szeretnék azonban túl sok részre vágni a csokoládét, így először N hosszú és egy mező széles sávokra vágják, majd minden sávot középen kettévágnak és az egyik felét Álmos, a másikat Sára kapja (N páros szám). Azt, hogy ki melyik részt kapja, minden sávra külön-külön eldönthetjük. A sávokra vágást soronként és oszloponként is el lehet végezni, így mindkét lehetőséget meg kell vizsgálni.

Készítsünk programot, amely egy tábla mogyorós csokoládéra megadja, mennyi a legkisebb különbség, ami Álmos és Sára mogyorót tartalmazó mezőinek száma között lehet. Azt is adjuk meg, hogy ehhez soronként vagy oszloponként kell-e felvágni a csokoládét.

Bemenet: az első sor tartalmazza a méretet megadó N számot. A következő N sor mindegyike N számot tartalmaz. Ezek mindegyike 0, ha nincs mogyoró a mezőn és 1, ha van.

Kimenet: az első sorba egy `S` karakter írjunk, ha a legkisebb különbséget soronkénti felvágással is el lehet érni, különben pedig egy `O` karaktert. A második sorba az elérhető legkisebb különbség kerüljön.

Példa:

Bemenet (a `/` jel sortörést helyettesít)	**Kimenet** (a `/` jel sortörést helyettesít)
`4 / 1 0 1 0 / 1 1 0 1` `0 1 1 0 / 1 1 0 1`	`S / 0`

Magyarázat: A csokoládé mindkét felvágással igazságosan elosztható.

Korlátok: $2 \leqslant N \leqslant 500$, N páros. Időlimit: 1 mp.

Értékelés: a pontok 30%-a kapható, ha $N \leqslant 10$.

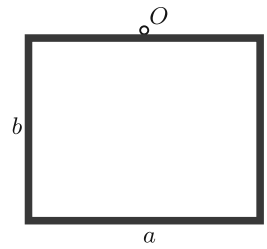
Beküldendő egy `s157.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2022. január 15.

❄

Sokszög alakú keret tehetetlenségi nyomatéka és lengésideje

Bevezetés



1. ábra

Gyakran tapasztaljuk, hogy a falon lévő kép ferdén áll. Meg kell igazítani, hogy a képkeret ismét függőlegesen álljon. Felmerül a kérdés, hogy hogyan lendülne vissza a képkeret, ha az nem érintkezne a fallal, más szóval ha a képkeret súrlódás nélkül lengedezne a felfüggesztési pont körül. Az *1. ábrán* vékony rudakból összeállított, a és b oldalhosszúságú téglalap alakú képkeret látható, amely az O pont körül a saját síkjában periodikus mozgást végezhet.

Ebben a cikkben arra keresünk választ, hogy az egyenletes tömegeloszlású, vékony rudakból összeragasztott sokszög alakú keret hogyan mozog a keret síkjában, ha azt az egyensúlyi helyzetéből kissé kitérítjük. Mennyi lesz a keret lengésének periódusideje kis kitérések esetén? Hogyan határozhatjuk meg ezt a periódusidőt? A válasz egyszerű: a rendszer fizikai ingának tekinthető, melynek periódusideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}, \tag{1}$$

ahol Θ az inga O pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka, m az inga tömege, s pedig az inga tömegközéppontja és a felfüggesztési pont távolsága. Innen látható, hogy tetszőleges, vékony rudakból összerakott sokszög alakú keret lengésidejének kiszámításához a rendszer tehetetlenségi nyomatékát és a tömegközéppontjának helyét kell meghatározni. A továbbiakban egy általános módszert ismertetünk a sokszög alakú keret tehetetlenségi nyomatékának meghatározásra. A formula alkalmazásaként kiszámítjuk egy vízszintes rúd, egy általános háromszög alakú keret, az 1. ábrán látható téglalap alakú keret, egy szabályos sokszög alakú keret lengésének periódusidejét, egy ötágú csillag alakú keret vizsgálatát pedig a pontversenyben kitűzött feladatok között találhatjuk meg.

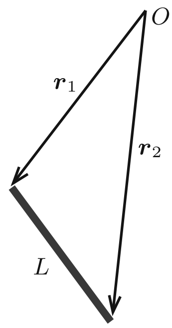
Általános eset

Egy rudakból összeállított, tetszőleges sokszög alakú keret tehetetlenségi nyomatékát kiszámíthatjuk egyetlen rúd tehetetlenségi nyomatéka alapján. Ezért elsőként a *2. ábrán* látható, elhanyagolható vastagságú rúd tehetetlenségi nyomatékát határozzuk meg. A rúd helyzetét a végpontjaiba mutató $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$ vektorokkal adjuk meg.

Az m tömegű és $L = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|$ hosszúságú rúd súlypontjának (vagyis a szakasz felezőpontjának) helyvektora $\boldsymbol{r}_S = \frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{2}$. A rúd tehetetlenségi nyomatéka az O ponton átmenő és a síkra merőleges irányú tengelyre vonatkoztatva:

$$\Theta = \frac{1}{12}\, mL^2 + m|\boldsymbol{r}_S|^2, \tag{2}$$

ahol az első tag egy vékony rúd súlypontján átmenő, a rúdra merőleges irányú tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka, míg a második tag a Steiner-tételnek megfelelő járulék a tehetetlenségi nyomatékhoz, ha a forgástengely nem a rúd súlypontján, hanem azzal párhuzamosan az O ponton megy át.



2. ábra

Könnyen belátható, hogy $L^2 = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)^2 = \boldsymbol{r}_1^2 - 2\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_2^2$. ($\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2$ a két vektor skalárszorzata.) Felhasználva L és $\boldsymbol{r}_S$ fenti alakját a tehetetlenségi nyomaték egyszerű algebrai átalakítással kifejezhető a rúd két végpontjának $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$ helyvektorával:

$$\Theta = \frac{m}{3}\big(\boldsymbol{r}_1^2 + \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_2^2\big). \tag{3}$$

Az alábbi példákban a szükséges számolásokhoz célszerű levezetni Θ egy másik alakját, amelyben a skalárszorzatot kiküszöböljük. A fentiekből látjuk, hogy $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_1 = \big(\boldsymbol{r}_1^2 + \boldsymbol{r}_2^2 - L^2\big)/2$, és ezt a tehetetlenségi nyomaték (3) képletébe beírva kapjuk:

$$\Theta = \frac{m}{6}\big(3\boldsymbol{r}_1^2 + 3\boldsymbol{r}_2^2 - L^2\big). \tag{4}$$

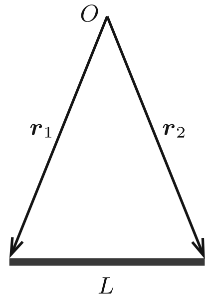
A továbbiakban a (3) és a (4) formulákat fogjuk alkalmazni különböző alakú keretek tehetetlenségi nyomatékának a kiszámítására.

Vízszintes rúd

Korábban a KöMaL hasábjain e cikk szerzője az alábbi feladatot tűzte ki [1]: *„Egy L hosszúságú rudat a két végéhez erősített, azonos hosszúságú fonalak segítségével közös pontban felfüggesztünk. A rudat a fonalak síkjában kicsit kitérítjük. Milyen hosszúságú fonalak esetén lesz a rúd kis lengéseinek periódusideje a lehető legkisebb, és mekkora ebben az esetben a lengésidő?"*

A feladatot (a KöMaL-ban megjelent megoldás helyett) most a (4) formula alkalmazásával oldjuk meg. Legyen az L hosszúságú, m tömegű rúd két végpontjába mutató vektor a *3. ábrán* O-val jelölt felfüggesztési ponthoz viszonyítva $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$. A két fonal hossza $\ell = |\boldsymbol{r}_1| = |\boldsymbol{r}_2|$, valamint a rúd hossza $L = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$. A (4) formula alapján a rúd tehetetlenségi nyomatéka az O pontra vonatkoztatva:

$$\Theta = \frac{m}{6}(6\ell^2 - L^2). \tag{5}$$



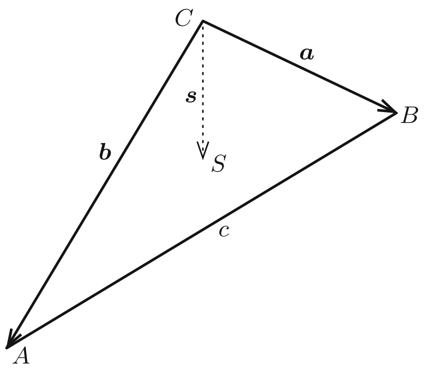
3. ábra

A rúd súlypontja $s=\sqrt{\ell^2-\frac{L^2}{4}}$ távolságra van az O ponttól, és így a rúd lengésének periódusideje (1) alapján:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{6\ell^2-L^2}{3g\sqrt{4\ell^2-L^2}}}, \tag{6}$$

ami megegyezik a KöMaL-ban közölt eredménnyel. Innen – a hivatalos megoldásnak megfelelően – a lengésidő akkor lesz minimális, ha $\ell=L/\sqrt{3}$.

Háromszög alakú keret



4. ábra

Legyen a háromszög alakú keret oldalainak hossza a, b és c. A keretet a *4. ábrának* megfelelően a C pontban egy kis ékkel alátámasztjuk, majd a háromszög síkjában kicsit kitérítjük.

Mekkora lesz a keret kis szögkitérésű lengéseinek periódusideje? Legyen a C pont a koordináta-rendszer középpontja, és jelöljük a C pontból az A, illetve a B pontba mutató vektorokat $\boldsymbol{a}$-val és $\boldsymbol{b}$-vel! Ekkor az A ponttal szemközti rúd végpontjainak helyvektora $\mathbf{0}$ és $\boldsymbol{a}$, a B ponttal szemközti rúd végpontjainak helyvektora $\mathbf{0}$ és $\boldsymbol{b}$, végül a C ponttal szemközti rúd végpontjainak helyvektora $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$. Legyen λ az egységnyi hosszra vonatkoztatott tömeg. Ha a keret teljes tömege m, akkor $\lambda=m/(a+b+c)$. Ezek ismeretében a (3) formula alapján a háromszög alakú keret tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta=\frac{1}{3}\lambda aa^2+\frac{1}{3}\lambda bb^2+\frac{1}{3}\lambda c(a^2+b^2+\boldsymbol{ab}). \tag{7}$$

A fenti képletben az $\boldsymbol{ab}$ skalárszorzatot az alábbiak szerint kifejezhetjük a háromszög oldalainak a, b és c hosszával. A C ponttal szemközti oldal hossza c, és $c^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$. Innen $c^2=a^2+b^2-2\boldsymbol{ab}$, amiből kapjuk, hogy:

$$\boldsymbol{ab}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}. \tag{8}$$

A (7) egyenletbe λ kifejezését beírva és (8)-at felhasználva kisebb algebrai átalakítások után megkapjuk a tehetetlenségi nyomaték végső alakját:

$$\Theta=\frac{m}{6}(2a^2+2b^2-c^2+ac+bc-2ab). \tag{9}$$

Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk az $\boldsymbol{ab}$ skalárszorzat kiszámítása nélkül is a (4) formula alapján. Ugyanakkor mégse volt haszontalan kiszámítani ezt a skalárszorzatot, ugyanis ahogy az alábbiakban látni fogjuk, a súlypont és a felfüggesztési pont távolságának kiszámításához szükségünk lesz erre.

Számoljuk ki a keret tömegközéppontjának s távolságát a C ponttól! A tömegközéppont $\boldsymbol{s}$ helyvektora:

$$\boldsymbol{s} = \frac{\lambda a \frac{\boldsymbol{a}}{2} + \lambda b \frac{\boldsymbol{b}}{2} + \lambda c \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}}{\lambda(a+b+c)} = \frac{\boldsymbol{a}(a+c) + \boldsymbol{b}(b+c)}{2(a+b+c)}, \tag{10}$$

és annak hossza:

$$s = \sqrt{\boldsymbol{s}^2} = \sqrt{\frac{a^2(a+c)^2 + b^2(b+c)^2 + 2\,\boldsymbol{ab}(a+c)(b+c)}{4(a+b+c)^2}} = \tag{11}$$

$$= \sqrt{\frac{a^3 + b^3 - c^3 + 2a^2c + 2b^2c - abc}{4(a+b+c)}}.$$

(Az utolsó lépésnél felhasználtuk az $\boldsymbol{ab}$ skalárszorzat (8) képletét.)

Mindezeket összevetve a lengésidő (1) alapján:

$$T_{\mathrm{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{a+b+c}}{3g}} \sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - c^2 + ac + bc - 2ab}{\sqrt{a^3 + b^3 - c^3 + 2a^2c + 2b^2c - abc}}}. \tag{13}$$

Sikerült kifejezni a lengésidőt csak a háromszög oldalainak hosszával. Hasonló eredményt kapunk, ha a háromszög alakú keret az A, illetve a B ponton van aláékelve, csak az a, b és c oldalakat kell ciklikusan cserélni a fenti képletben.

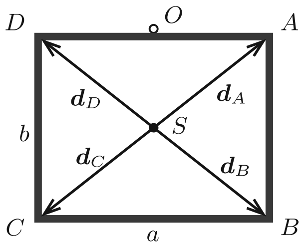
Numerikus példaként legyen $a = 70$ cm, $b = 60$ cm és $c = 30$ cm. Ekkor $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$-tel számolva a $T_{\mathrm{A}} = 1{,}35$ s, $T_{\mathrm{B}} = 1{,}40$ s és $T_{\mathrm{C}} = 1{,}43$ s értékeket kapjuk.

Megjegyzések. 1. Ha $a = b = c$, akkor $T = \pi\sqrt{2\sqrt{3}}\,\sqrt{a/g}$.

2. A keret tömegközéppontja nem egyezik meg a háromszög súlypontjának jól ismert helyével, mert ez utóbbi a háromszög alakú, homogén síklapra vonatkozik. Esetünkben a súlypont a háromszög oldalfelező pontjait összekötő egyenesekből kapott háromszögbe rajzolható kör középpontja lesz (lásd [2]-ben a 132. feladatot).

Téglalap alakú keret

Ebben a részben kiszámoljuk a bevezetőben említett téglalap alakú keret lengésidejét. Először meg kell határozni az *5. ábrán* látható O ponton átmenő, a lap síkjára merőleges irányú forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékot.



5. ábra

Ha a keret teljes tömege m, akkor az egységnyi hosszra vonatkoztatott tömeg $\lambda = \frac{m}{2(a+b)}$. Az S súlypontból a téglalap A, B, C és D sarkába mutató vektorok hossza azonos:

$$|\boldsymbol{d}_A| = |\boldsymbol{d}_B| = |\boldsymbol{d}_C| = |\boldsymbol{d}_D| = d = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

A (4) formula alapján a súlypontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_S = 2\frac{\lambda a}{6}(6d^2 - a^2) + 2\frac{\lambda b}{6}(6d^2 - b^2) = \frac{m}{12}(a+b)^2. \tag{13}$$

Alkalmazva a Steiner-tételt a téglalap alakú keret tehetetlenségi nyomatéka az O pontra vonatkoztatva:

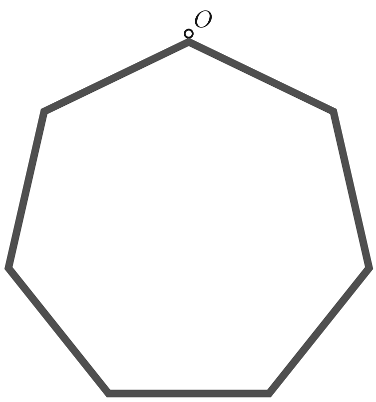
$$\Theta = \Theta_S + m\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{m}{12}(a^2 + 2ab + 4b^2). \tag{14}$$

A téglalapkeret súlypontja a téglalap közepe, ezért az O pont és a súlypont távolsága $s = b/2$. Végül a lengésidő (1) alapján:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + 2ab + 4b^2}{6bg}}. \tag{15}$$

Numerikus példaként legyen $a = 50$ cm és $b = 100$ cm. Ekkor $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$-tel számolva $T = 1{,}88$ s értéket kapunk.

Szabályos sokszög alakú keret



6. ábra

Ebben a részben a szabályos sokszög alakú keret lengésidejét számítjuk ki. Példaként egy $N = 7$ oldalú szabályos sokszöget vizsgálunk, ami az egyik (O-val jelölt) csúcspontjában van felfüggesztve (*6. ábra*).

Legyen a sokszög köré írt kör sugara R. A számításokat jelentősen egyszerűsíthetjük, ha a tehetetlenségi nyomatékot először a súlypontra, majd a Steiner-tétel alkalmazásával a felfüggesztési pontra vonatkoztatva számoljuk ki. Vegyük észre, hogy a keret közepéből, azaz a keret súlypontjából az N-szög minden élének a végpontjaiba mutató vektorok hossza R, és egymással $2\pi/N$ szöget zárnak be. Ezért a (3) formulában ezen vektorok skalárszorzata $R^2\cos\frac{2\pi}{N}$, és minden oldalnak ugyanannyi lesz a járuléka a keret teljes tehetetlenségi nyomatékához, ami így

$$\Theta_S = \frac{Nm}{3}\left(2R^2 + R^2\cos\frac{2\pi}{N}\right).$$

Végül, ha a vonatkoztatási pontot eltoljuk R távolsággal a felfüggesztési pontba, akkor a keret teljes tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = \Theta_S + NmR^2 = \frac{MR^2}{3}\left(5 + \cos\frac{2\pi}{N}\right),$$

ahol $M = Nm$ a keret teljes tömege. A súlypont távolsága az O ponttól $s = R$. Végül a lengésidő (1) alapján:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5 + \cos\frac{2\pi}{N}}{3}}\sqrt{\frac{R}{g}}\,.$$

Szabályos háromszög esetén a lengésidőre

$$T = \sqrt{6}\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 7{,}70\sqrt{\frac{R}{g}}$$

adódik, ami megegyezik a (12) képletből számolt értékkel az $a = b = c = \sqrt{3}\,R$ helyettesítéssel. A 6. ábrán látható hétszögre a lengésidő:

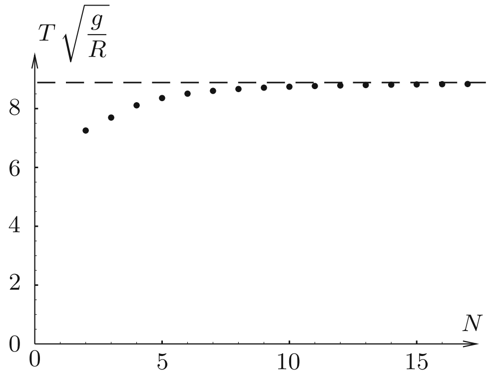
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5 + \cos\frac{2\pi}{7}}{3}}\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 8{,}60\sqrt{\frac{R}{g}}\,.$$

Érdemes megvizsgálni az $N \to \infty$ határesetet. Ekkor a (17) képletben $\cos\frac{2\pi}{N} \to$ $\to 1$, és

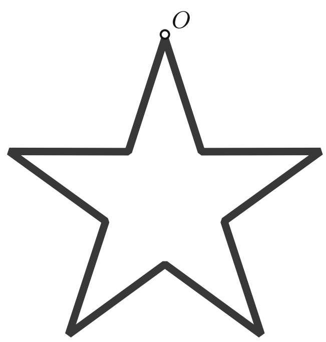
$$T \to 2\pi\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 8{,}89\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Ez az eredmény fizikailag könnyen magyarázható. A szabályos sokszög egy R sugarú körhöz tart. Ennek az M tömegű karikának a tehetetlenségi nyomatéka az O pontra nézve: $\Theta = 2MR^2$. A súlypont $s = R$ távolságra van az O ponttól, és így a lengésidő (1) szerint $T = 2\pi\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$, ami egyezik a fenti számolással.

A *7. ábra* a T lengésidő N-től való függését mutatja $\sqrt{R/g}$ egységekben. Látható, hogy N növelésével a lengésidő – a várakozással összhangban – elég gyorsan tart a karika lengésidejéhez, ami az ábrán a szaggatott vonalnak felel meg.



7. ábra



8. ábra

Ötágú csillag alakú keret

Az általános módszer hatékonyságát illusztrálva kiszámíthatjuk egy bonyolultabb alakzat, például a *8. ábrán* látható ötágú csillag lengésidejét is, ha azt az egyik csúcsánál függesztjük fel. Ennek a számolásnak elvégzését azonban az Olvasóra bízzuk. (Lásd a **P. 5365.** kitűzött feladatot a 571. oldalon.)

Összefoglalás

Elhanyagolható vastagságú, egyenes rudakból összerakott sokszög alakú keretnek a síkjában történő lengéseit vizsgáltuk kis szögkitérések esetén, ha a keret egyik sarkán van felfüggesztve vagy aláékelve. Levezettünk egy általános képletet egy darab egyenes rúdnak a felfüggesztési pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékára a rúd végpontjainak helyvektorai ismeretében (lásd a (3) és (4) egyenleteket). A képleteket felhasználva meghatároztuk egy vízszintes rúd, a háromszög, a téglalap, a szabályos N-szög alakú keret tehetetlenségi nyomatékát és a lengésének periódusidejét, és megfogalmaztuk ugyenezt a kérdést egy ötágú csillag alakú keretre is.

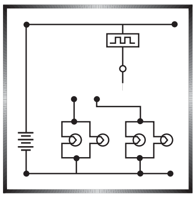
A fenti példák jól illusztrálják a módszer hatékonyságát. Az itt ismertetett módszerrel más alakú keret tehetetlenségi nyomatéka és lengésideje is könnyen kiszámítható.

Ajánlott irodalom

[1] *KöMaL* 2012. évi márciusi szám, 185. old.: **P. 4427.** számú feladat. A megoldás a 2012. évi decemberi szám 559. oldalán jelent meg.

[2] Gnädig Péter, Honyek Gyula, Vigh Máté: *333+ furfangos feladat fizikából,* Typotex Elektronikus Kiadó Kft., Budapest 2017.

Cserti József



Fizika gyakorlatok megoldása

G. 751. *A síktükör által képződő kép ugyanakkora, mint a tárgy. Ha közelebb megyünk a tükörhöz, akkor mégis nagyobbnak látjuk magunkat, mert megnő a látószögünk. A hátunkat úgy tudjuk síktükörrel megnézni, ha két síktükröt használunk, melyek közelítőleg egymással szemben, párhuzamosan helyezkednek el.*

A két tükör közé hova kell állnunk, hogy maximális látószögben lássuk a hátunkat?

(*4 pont*)

Megoldás. A síktükör által létrehozott kép mérete ugyanakkora, mint a tágy mérete, és ez igaz a többszörös tükröződés után kialakuló képekre is. Ezek szerint a két tükör között álló ember képének látszólagos nagysága (látószöge) attól függ, hogy az embertől milyen távolságban jön létre a képe. Nagyobb képtávolsághoz kisebb látószög (kisebb látszólagos méret) tartozik, és fordítva: ha kisebb a képtávolság, akkor nagyobb a kép látószöge.

Legyen a tükrök távolsága d, és az arcunk távolsága az egyik tükörtől x. A hátunk ilyenkor $d-x$ távol van a másik tükörtől. A hátsó tükör által létrehozott (virtuális) kép a tükörtől $d-x$, tőlünk $2(d-x)$, tehát az első tükörtől $2(d-x)+x=$ $=2d-x$ távolságban jön létre. Ezt a képet az előttünk lévő tükör saját magától ugyancsak $2d-x$, az arcunktól pedig $(2d-x)+x=2d$ távolságba tükrözi, ott jön létre a kétszeres tükröződés utáni látszólagos kép.

Mivel a hátunk képének a szemünktől mért távolsága x-től független, mindegy, hogy hova állunk, ugyanakkora látószögben, tehát ugyanakkorának látjuk a hátunkat.

Több dolgozat alapján

25 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás, hibás 15 dolgozat.

G. 753. *Az autópályán egymás mögött,* 100 km/h *sebességgel halad két,* 5 m *hosszú gépkocsi. Az autók közötti távolság* 30 m. *Egyszer csak a hátsó autó előzni kezd. Addig gyorsít egyenletesen, amíg egymás mellé nem érnek. Ekkor a gyorsító autó sebessége* 130 km/h, *amit a továbbiakban nem változtat meg. Úgy fejezi be az előzést, hogy* 30 m*-rel az állandó sebességgel haladó másik kocsi elé sorol. Mennyi ideig tartott az előzés?*

(*4 pont*)

Megoldás. Mivel az egyik autó mindvégig egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, inerciarendszerünket ehhez köthetjük. Ebben a rendszerben ez az autó végig állni fog. A 30 m-rel mögötte álló autó álló helyzetből 30 km/h sebességre gyorsít egyenletesen, míg mellé nem ér, majd ezzel a sebességgel tovább haladva 30 m-rel megelőzi az előtte álló autót.

Az autók hossza $\ell_0=5$ m, az autók előzés előtti és utáni távolsága $\ell=30$ m. Az első szakaszban, amikor a hátul haladó autó gyorsul, a megtett út:

$$s_1=\ell_0+\ell=35\ \mathrm{m},$$

az előzést végző autó végsebessége:

$$v=30\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}=8{,}33\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Az egyenletesen gyorsuló mozgás egyenletei:

$$v=at_1,\qquad s_1=\frac{a}{2}t_1^2.$$

Ezekből $t_1=2\frac{s_1}{v}$, tehát

$$t_1=\frac{2\cdot 35\ \mathrm{m}}{8{,}33\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}=8{,}4\ \mathrm{s}.$$

A mozgás második szakaszában, amikor az előző autó egyenletesen halad, a megtett út:

$$s_2 = \ell_0 + \ell = 35 \text{ m},$$

az autók relatív sebessége

$$v = 30\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 8{,}33\ \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

az előzés második részének időtartama

$$t_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{35 \text{ m}}{8{,}33\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 4{,}2 \text{ s}.$$

Az előzés tehát összesen $8{,}4 \text{ s} + 4{,}2 \text{ s} = 12{,}6$ másodpercig tartott.

Hruby Laura (Budapest, Veres Pálné Gimn., 10. évf.)

54 dolgozat érkezett. Helyes 33 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 11, hibás 5, nem versenyszerű 3 dolgozat.

G. 756. *Egy autó kerekében lévő levegő nyomását a benzinkúton* 1,2 bar *értékűnek mutatja a nyomásmérő. Feltételezve, hogy sem a gumiabroncs térfogata, sem a benne lévő levegő hőmérséklete nem változik meg, hány százalékkal nő meg a gumiabroncsban lévő molekulák száma, ha a nyomást az előírt 2,4 bar értékre növeljük?*

(*3 pont*)

Megoldás. Amikor a benzinkút nyomásmérője 1,2 bart mutat, akkor az az érték a kerékben lévő levegő nyomásának és a külső (kb. 1 bar nagyságú) légnyomásnak a különbsége. Ha a mért keréknyomást 1,2 barról 2,4 bar értékűre növeljük, akkor a tényleges (a gáztörvényben szereplő) nyomás $p_1 = 2{,}2$ bar értékről $p_1 = 3{,}4$ bar értékre növekszik.

A gumiabroncsban lévő molekulák számát a gázok $pV = NkT$ állapotegyenlete alapján számíthatjuk ki. (N a részecskeszám, V a gumiabroncs térfogata, T a hőmérséklet, k pedig a Boltzmann-állandó.) A kezdeti állapotban $p_1V = N_1kT$, a felfújt állapotban pedig $p_2V = N_2kT$. Mivel a térfogat, a hőmérséklet és a Boltzmann-állandó mindkét képletben ugyanakkora, a két egyenlet hányadosából kiesnek, és azt kapjuk, hogy az össznyomás egyenesen arányos a molekulák számával:

$$\frac{p_1}{N_1} = \frac{p_2}{N_2},$$

vagyis

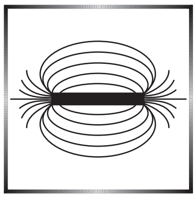
$$N_2 = \frac{p_2}{p_1}N_1 = \frac{3{,}4 \text{ bar}}{2{,}2 \text{ bar}}N_1 = 1{,}55\ N_1.$$

Eszerint a gumiabroncsban lévő molekulák száma a kerék felpumpálása során kb. 55%-kal nő.

Klement Tamás (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 9. évf.)

36 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 3, hiányos (1 pont) 14, hibás 7, nem versenyszerű 1 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5330. *Képzeljünk el egy folyékony halmazállapotú, gömb alakú égitestet. A belső tömegvonzás hidrosztatikai nyomást eredményez. Legyen az égitest vízből, és a gömb sugara* $R = 25$ km. *Mekkora a hidrosztatikai nyomás a gömb középpontjában?*

(*4 pont*) Közli: *Szekeres Béla,* Budapest

Megoldás. Az égitest középpontjától $r < R$ távolságban egy m tömegű testre

$$G(r) = \gamma \frac{mM(r)}{r^2}$$

nagyságú erő hat, ahol $M(r)$ az r sugarú gömbben lévő anyag tömege:

$$M(r) = \varrho \frac{4\pi r^3}{3}$$

(ϱ a víz sűrűsége). A gravitációs gyorsulás tehát

$$g(r) = \frac{G(r)}{m} = \gamma\varrho\frac{4\pi r}{3}.$$

Homogén gravitációs térben a hidrosztatikai nyomás h mélységben $\Delta p = \varrho g h$. Esetünkben azonban a gravitációs gyorsulás nem állandó, az r távolsággal lineárisan változik: $g(r) = \text{állandó} \cdot r$. A lineáris változás miatt számolhatunk $g(r)$ átlagos értékével, a legnagyobb és a legkisebb érték számtani közepével:

$$\overline{g} = \frac{g_{\max} + g_{\min}}{2} = \frac{\gamma\varrho\frac{4\pi R}{3} + 0}{2} = \gamma\varrho\frac{2\pi R}{3}.$$

Az égitest közepénél a nyomás:

$$p = \varrho\overline{g}R = \frac{2\pi}{3}\gamma\varrho^2 R^2 = \frac{2\pi}{3} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1000^2 \cdot 25\,000^2 \text{ Pa} \approx 87{,}3 \text{ kPa}.$$

(Győr, Révai M. Gimn., 10. évf.)

Megjegyzések. 1. Feltételeztük, hogy az égitest nem forog, tehát nem szükséges megkülönböztetni a gravitációs és a nehézségi gyorsulást. Ha az égitest forogna, az alakja nem lehetne gömb.

2. Az égitest felszínénél a nyomást nullának tekintettük. Egy ilyen „égitest" nem maradhatna sokáig folyadék halmazállapotban, mert a felszínénél a (gyakorlatilag) nulla nyomás miatt hamar elforrna.

(G. P.)

18 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 1, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 5 dolgozat.

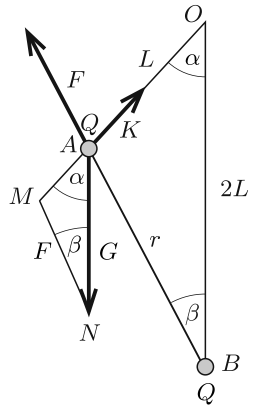
P. 5332. *$L=0{,}2$ m hosszúságú szigetelőfonálon függ egy m tömegű, $Q=1$ μC töltésű golyócska. A felfüggesztés alatt $2L$ távolságban van egy ugyanakkora, rögzített, Q ponttöltés.*

a) Hogyan függ a fonál függőlegessel bezárt szöge az m tömegtől?

b) Legalább mekkora legyen m, hogy a két golyó közti távolság L legyen?

c) Legfeljebb mekkora lehet m, hogy a két golyó közti távolság $3L$ legyen?

(*5 pont*) Közli: *Szabó Endre,* Vágfüzes (Szlovákia)



Megoldás. *a*) Jelöljük a fonálnak a függőlegessel bezárt szögét α-val, a két töltés távolságát pedig r-rel (lásd az *ábrát*). A töltött golyócskára a $\boldsymbol{G}$ nehézségi erő, az $\boldsymbol{F}$ Coulomb-erő és egy fonálirányú $\boldsymbol{K}$ kényszererő hat. Ezek közül az első kettő nagysága:

$$G=mg, \qquad \text{illetve} \qquad F=k\frac{Q^2}{r^2}.$$

Egyensúlyi állapotban $\boldsymbol{G}$ és $\boldsymbol{F}$ eredője fonálirányú, emiatt $OAB\triangle$ és $AMN\triangle$ hasonlóak. Fennáll tehát:

$$(1) \qquad \frac{G}{F}=\frac{2L}{r}, \qquad \text{azaz} \qquad r^3=\frac{2kLQ^2}{mg}.$$

Az r távolság (az $OAB\triangle$-re felírt koszinusztétel segítségével) kifejezhető α függvényeként:

$$r(\alpha)=\sqrt{L^2+(2L)^2-2L\cdot(2L)\cos\alpha}=L\sqrt{5-4\cos\alpha}.$$

Ezt (1)-be helyettesítve, majd $\cos\alpha$-t kifejezve kapjuk a keresett összefüggést:

$$(2) \qquad \cos\alpha=\frac{5}{4}-\left(\frac{kQ^2}{4mgL^2}\right)^{\frac{2}{3}}\approx 1{,}25-0{,}032\frac{1}{m^{2/3}}\ \mathrm{kg}^{2/3}.$$

b) A két töltés közötti távolság akkor lesz L, amikor $\alpha=0$, vagyis $\cos\alpha=1$. (2) szerint ez a feltétel

$$m=m_1=\left(\frac{0{,}032}{0{,}25}\right)^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{kg}\approx 46\ \mathrm{g}$$

tömegnél teljesül. Ha $m>m_1$, akkor (2)-nek nincs megoldása, de az erők egyensúlya $\alpha=0$ mellett továbbra is megvalósul. A két töltés távolsága tehát akkor lesz L, ha m legalább 46 g.

c) $r=3L$ akkor teljesül, ha $\alpha=180^\circ$, vagyis $\cos\alpha=-1$. Ezt (2)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$m=m_2=\left(\frac{0{,}032}{2{,}25}\right)^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{kg}\approx 1{,}7\ \mathrm{g}.$$

Ha $m < m_2$, akkor is megmarad az $r = 3L$ távolság, hiszen a töltések nem kerülhetnek egymástól ennél messzebbre.

Mozolai Bende Brúnó (Budapest, V. Ker. Eötvös J. Gimn., 11. évf.)

21 dolgozat érkezett. Helyes Antalóczy Szabolcs, Biebel Botond, Gábriel Tamás, Kertész Balázs, Mozolai Bende Brúnó, Toronyi András és Téglás Panna megoldása. Kicsit hiányos (3–4 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 7, hibás 1 dolgozat.

P. 5333. *Hengeres,* 2 cm *sugarú hosszú egyenes vezetékben áram folyik. A vezeték belsejében, annak tengelyétől* 1,5 cm*-re a mágneses indukcióvektor nagysága* $2\cdot 10^{-4}$ T. *Mekkora a mágneses indukcióvektor nagysága a vezeték tengelyétől* 4 cm *távolságban?*

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

Megoldás. A vezeték belsejében kialakuló mágneses indukció csak az adott helytől „beljebb” eső áramtól alakul ki, a „kijjebb” folyó áramok járuléka az adott pontban nulla.

Meg kell határoznunk, hogy a 2 cm sugarú vezeték áramának mekkora része folyik az 1,5 cm sugarú hengerpalást felületén belül. Mivel egy hengeres vezetékben folyó áramerősség a vezeték keresztmetszetével, az pedig a sugár négyzetével arányos, felírhatjuk, hogy

$$I(1{,}5\ \mathrm{cm}) = I(2\ \mathrm{cm})\cdot\left(\frac{1{,}5\ \mathrm{cm}}{2\ \mathrm{cm}}\right)^2.$$

Hosszú elektromos vezető körül, attól r távolságban a mágneses indukcióvektor nagysága:

$$B = \mu_0\cdot\frac{I}{2r\pi}.$$

Ezek szerint

$$B(1{,}5\ \mathrm{cm}) = 2\cdot 10^{-4}\ \mathrm{T} = \mu_0\frac{I(2\ \mathrm{cm})\cdot\left(\frac{1{,}5}{2}\right)^2}{2\pi\cdot(1{,}5\ \mathrm{cm})},$$

illetve

$$B(4\ \mathrm{cm}) = \mu_0\frac{I(2\ \mathrm{cm})}{2\pi\cdot(4\ \mathrm{cm})}.$$

A fenti két egyenletet elosztva egymással kapjuk, hogy

$$\frac{B(4\ \mathrm{cm})}{B(1{,}5\ \mathrm{cm})} = \frac{1{,}5}{4}\cdot\left(\frac{2}{1{,}5}\right)^2 = \frac{2}{3},$$

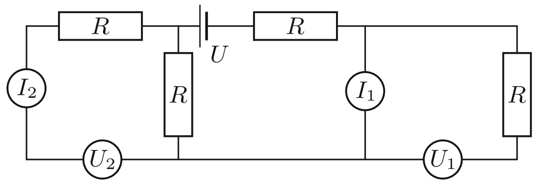
és így a mágneses indukcióvektor nagysága a kérdéses helyen:

$$B(4\ \mathrm{cm}) = \frac{2}{3}\cdot B(1{,}5\ \mathrm{cm}) = \frac{4}{3}\cdot 10^{-4}\ \mathrm{T} \approx 0{,}13\ \mathrm{mT}.$$

Fekete András Albert (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

21 dolgozat érkezett. Helyes 17 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 1, hiányos (1–2 pont) 3 dolgozat.

P. 5334. *A fizikai kísérletezést kedvelő Rudi születésnapjára elektronikai készletet kapott. Tüstént össze is állította az* ábra *szerinti kapcsolást, melyben az* $U = 30$ V *feszültségű áramforrás belső ellenállása elhanyagolható, a teljesen egyforma feszültségmérők és a teljesen egyforma árammérők pedig ideálisnak tekinthetők. Az ellenállások nagysága* $R = 50\ \Omega$.



a) Mennyit mutattak a műszerek?

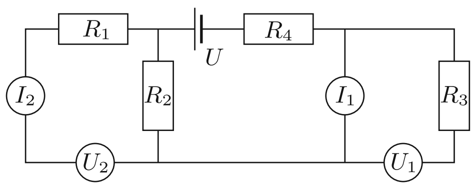
b) Majd megcserélte az 1*-es árammérőt az* 1*-es feszültségmérővel, a* 2*-es árammérőt a* 2*-es feszültségmérővel. Mennyit mutattak így a műszerek?*

c) Ezt követően visszarendezte a mérőműszereket az eredeti helyükre, majd az 1*-es árammérőt és a* 2*-es feszültségmérőt felcserélte egymással. Mennyit mutattak így a műszerek?*

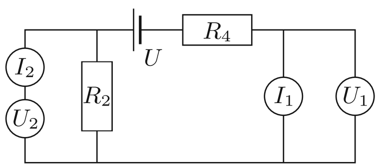
(5 pont) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

Megoldás. Az ideális árammérőknek nincs belső ellenállása, az ideális feszültségmérők ellenállása pedig végtelen nagy, így nem folyik rajtuk áram.

Jelöljük az ellenállásokat az *1. ábrán* látható módon. Mindegyik ellenállás nagysága 50 Ω, az indexek csak helyzetük megkülönböztetésére szolgálnak.



1. ábra



2. ábra

a) Mivel a 2-es feszültségmérő ellenállása végtelen nagy, nem folyik rajta áram, így a vele sorosan kapcsolt 2-es árammérőn és az R_1 ellenálláson sem folyik áram, tehát $I_2 = 0$. Az 1-es feszültségmérő is ideális, ezért rajta és a vele sorosan kapcsolt R_3 ellenálláson nem folyik áram. A *2. ábrán* látható kapcsolási rajzon csak a mérőműszerek és azok az ellenállások szerepelnek, amelyeken áram folyik, mert csak ezek befolyásolják a műszerek által mutatott értékeket. Az 1-es árammérő ideális, ezért nincs rajta potenciálesés, tehát az 1-es feszültségmérő 0 V feszültséget mutat. Az áramkör eredő ellenállása:

$$R_e = R_2 + R_4 = 2R = 100\ \Omega,$$

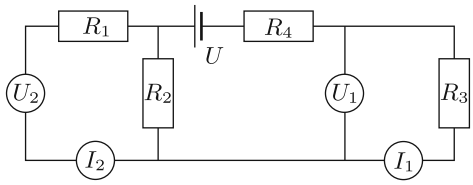
így a főágban folyó áram

$$I = \frac{U}{R_e} = \frac{30\ \text{V}}{100\ \Omega} = 0{,}3\ \text{A}.$$

Az 1-es árammérő a főágban folyó áramerősséget mutatja: $I_1 = 0{,}3$ A. A 2-es feszültségmérő az R_2 ellenálláson eső feszültséget méri:

$$U_2 = R_2 I = 50\ \Omega \cdot 0{,}3\ \text{A} = 15\ \text{V}.$$

b) A *3. ábra* a második eset kapcsolási rajzát mutatja. A 2-es feszültségmérőn



3. ábra

nem folyik áram, így a 2-es árammérőn és az R_1 ellenálláson sem: $I_2 = 0$. A 2-es feszültségmérő az előző esethez hasonlóan R_2 kivezetései között méri a feszültséget, az 1-es feszültségmérő pedig az R_3 ellenállásra jutó feszültséget mutatja. Most csak az R_2, R_3 és R_4 ellenállásokon folyik áram. Az eredő ellenállás:

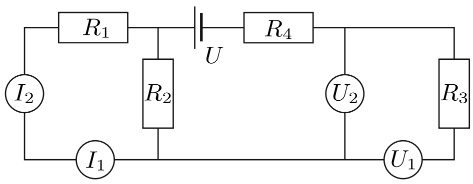
$$R_e = R_2 + R_3 + R_4 = 3R = 150\ \Omega.$$

Az 1-es árammérő a főágban folyó áramot méri:

$$I_1 = \frac{U}{R_e} = \frac{30\ \text{V}}{150\ \Omega} = 0{,}2\ \text{A}.$$

A feszültségmérők által mutatott értékek:

$$U_2 = R_2 I_1 = 10\ \text{V},$$
$$U_1 = R_3 I_1 = 10\ \text{V}.$$



4. ábra

c) A kapcsolási rajz a *4. ábrán* látható. A feszültségmérők végtelen nagy ellenállása miatt az egész áramkörben sehol sem folyik áram: $I_1 = I_2 = 0$. Mindkét feszültségmérő az áramforrással párhuzamosan van kapcsolva, így az áramforrás feszültségét mutatják: $U_1 = U_2 = 30$ V.

Hauber Henrik (Győr, Révai Miklós Gimn., 10. évf.)

25 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 5, hiányos (2–3 pont) 2, hibás 2 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

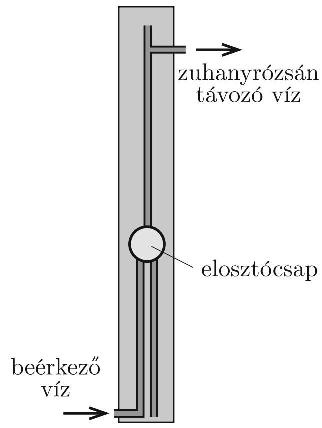
M. 409. Készítsünk piskótát! Mérjük meg a tészta sűrűségét sütés előtt és sütés után. Vizsgáljuk meg, hogy változik-e a kész piskóta sűrűsége attól függően, hogy a tepsi szélén vagy a közepén sült! (Adjuk meg a piskóta receptjét is.)

(*6 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

G. 761. Hogyan írták a HÁTULJA szót a KöMaL felirat hátuljára: szokásos módon vagy tükörírással?

(*3 pont*)

G. 762. A bal oldali *fényképen* egy kerti „szolár” zuhany látható. A függőleges, fekete tartályban lévő vizet a ráeső napsugárzás tudja felmelegíteni. Az alsó (úgynevezett lábmosó) csapból csak hideg víz folyik, míg a felső zuhanyrózsából a középen lévő elosztócsappal beállított hőmérsékletű vízsugarat élvezhetjük. A zuhany működéséhez szükséges hideg víz betáplálása alul történik. Egy lábmosó nélküli zuhany szerkezetét mutatja a *jobb oldali ábra.*



Egészítsük ki az ábrát lábmosóval, majd magyarázzuk el a kerti zuhany működését!

(*4 pont*)

G. 763. Két tömör kockánk van, az egyik alumíniumból készült, a másik rézből. Különlegesen pontos mérlegre téve őket, vákuumban végezve a mérést, gramm pontossággal 1 tonnásnak találjuk mindkettőt. Mekkora lesz a két mérés eredményének a különbsége, ha normál állapotú levegőben mérünk?

(*4 pont*)

G. 764. Egy nyugalmi állapotból induló, szabadon eső test mozgásának utolsó másodpercében ugyanakkora utat tett meg, mint az első három másodperc alatt. Milyen magasról esett le a test? (Hanyagoljuk el a légellenállást.)

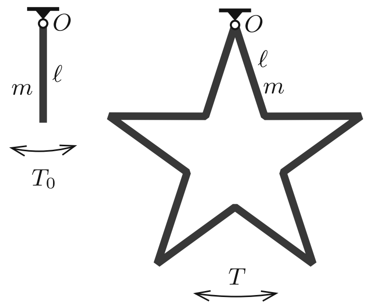
(*4 pont*)

P. 5364. Sima, vízszintes, súrlódásmentes síkon nyugszik egy R sugarú, m tömegű félhenger, domború felével felfelé. A félhenger tetejéről nyugalmi helyzetből indul el súrlódás nélkül egy kis méretű, de ugyancsak m tömegű test. Milyen hosszú utat tesz meg ez a test a félhengeren, mielőtt elválik tőle?

(*5 pont*) Közli: *Szász Krisztián,* Budapest

P. 5365. Egy ℓ hosszúságú, m tömegű, homogén, vékony rudat az egyik végpontjánál felfüggesztünk. Egyensúlyi helyzetéből kicsit kitérítve a lengéseinek periódusideje $T_0 = 2$ s, vagyis ez a rúd egy „ másodpercinga”.

Tíz darab ugyanilyen rudat az *ábrán* látható módon erősítünk össze, majd a merev keretet az egyik csúcsánál fogva felakasztjuk. Az így kialakított ötágú csillag a saját síkjában szabadon elfordulhat az O pont körül.



a) Mekkora a rudak hossza?

b) Mennyi az egyensúlyi helyzetéből kicsit kitérített ötágú csillag lengéseinek T periódusideje?

(Lásd a sokszög alakú keretek lengéseiről szóló cikket lapunk 556. oldalán!)

(*5 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

P. 5366. Ideális gáz állandó nyomáshoz, illetve állandó térfogathoz tartozó fajhőinek hányadosa κ.

a) A gáz adiabatikusan tágul. Mekkora a gáz munkájának és a belső energia megváltozásának aránya?

b) A gáz izotermikusan összenyomódik. Mekkora a gáz munkájának és a felvett hőnek az aránya?

c) A gázt izobár folyamatban melegítjük. Mekkora a gáz munkájának és a felvett hőnek az aránya?

(*4 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5367. Két kis méretű fémgolyót egymástól d távolságban szigetelő állványokon rögzítettünk, majd mindegyikre Q töltést juttattunk.

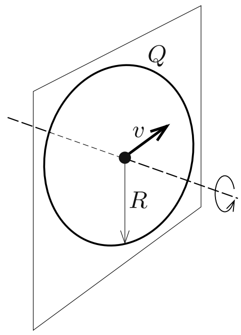
a) Ábrázoljuk vázlatosan az ekvipotenciális felületeket!

b) Milyen potenciálhoz tartozó felület „öleli körül" mindkét töltött golyót?

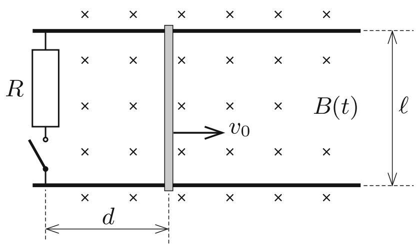
(*4 pont*) A Kvant nyomán

P. 5368. Egy $R=30$ cm sugarú, fémhuzalból készült karikának $Q=6\cdot10^{-6}$ C töltést adunk, majd a középpontján átmenő, a síkjára merőleges tengely körül $\omega=520$ 1/s szögsebességgel megforgatjuk vákuumban. Egy adott pillanatban egy elektron éppen a karika középpontján repül át $v=120$ m/s nagyságú, a karika síkjába eső sebességgel.

Mekkora az elektron pályájának görbületi sugara a karika középpontjában, ha ott a Föld mágneses tere éppen az elektron sebességének irányába mutat?



(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest



P. 5369. Vízszintes síkban ℓ távolságban két párhuzamos fémsín található, melyek (*ábra* szerinti) bal oldali végét kapcsolóval ellátott R ellenállású fogyasztó köti össze. A rendszer függőleges irányú olyan homogén mágneses mezőben van, melyre jellemző mágneses indukcióvektor időben a $B(t)=B_0+kt$ összefüggés szerint változik, ahol B_0 és k ismert állandók. A sínekre merőlegesen egy fémpálcát fektetünk, amely a kapcsoló zárása előtt d távolságra van a fémsínek bal oldali végétől. A sínek és a fémpálca ellenállása elhanyagolható. A $t=0$ időpillanatban a kapcsolót zárjuk, és pálcát a vízszintes síkban, a pálcára merőlegesen v_0 állandó sebességgel mozgatni kezdjük. Határozzuk meg a pálcában folyó áram erősségét a t időpillanatban!

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

P. 5370. Egy rövidlátó ember szemének közelpontja 8 cm-re van a szemétől szemüveg nélkül. Mekkora lesz a közelpontjának a távolsága, ha felveszi -5 dioptriás szemüvegét?

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula*, Veresegyház

P. 5371. A tau-részecske (τ) elektromos töltése ugyanakkora, mint az elektroné. Tömege 3470-szer akkora, mint az elektroné és 1,89-szer akkora, mint a protoné. Nagyon rövid az élettartama ($3 \cdot 10^{-13}$ s), mégis előfordulhat, hogy a protonnal kötött rendszert alkot. Ebben az esetben a két részecske a közös tömegközéppont körül körpályán kering, és a rendszer teljes perdülete $n\hbar$ ($n = 1, 2, \ldots$).

a) Adjuk meg a τ-proton atom és a H-atom színképeiben a megfelelő hullámhosszak arányát!

b) Mekkora a τ-proton atom kötési energiája?

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 5372. Egy rúdinga (egyik végénél felfüggesztett homogén rúd) szabad lengéseinek körfrekvenciája ω. Állandósult állapotban mekkora amplitúdójú rezgéseket végez a rúd alsó végpontja, ha az inga felfüggesztési pontját vízszintes irányban $x(t) = A\cos(2\omega t)$ időfüggésű kitéréssel mozgatjuk? (A közegellenállás kicsi, de nem teljesen elhanyagolható, továbbá $A\omega^2 \ll g$.)

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté*, Biatorbágy

❄

Beküldési határidő: 2022. január 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 71. No. 9. December 2021)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 542): **K. 709.** A family are planning to grow a special type of onion in their garden. They want to eat 400 onion bulbs each year. The onion is grown from a seed. Each onion plant can produce 51 seeds every year if we let it. However, once an onion plant has gone into seeds, its bulb will dissolve during growing the seeds. What is the minimum number of seeds the family need to buy in order to launch the onion project so that they can have the desired quantity of onion bulbs to eat, and they never need to buy seeds any more? **K. 710.** There are some dodecahedra and some icosahedra on the table. The solids have 792 vertices and 936 faces altogether. How many dodecahedra and how many icosahedra are there on the table? **K. 711.** Ann's favourite number is 2468. Ben's favourite number also has four digits, and exactly two of its digits coincide with two digits of Ann's favourite number. Furthermore, each of the matching digits is in the same decimal place in both numbers. Based on this information, how many four-digit positive integers are there which may be Ben's favourite number? **K/C. 712.** We have 2022 square wooden plates arranged in a row, and 2021 discs numbered 1 to 2021. One disc is placed on each wooden plate except for the last one, in a random order. Then in each move, one disc is transferred to the (momentarily) vacant wooden square. Our goal is to have the numbers in increasing order, with the last square left vacant. What is the maximum number of moves that may be needed to achieve that goal? Also give an example for a possible initial arrangement that does require that maximum number of moves. **K/C. 713.** The sides of a square are 6 cm long. A circle is drawn over each side as diameter, as shown in the *figure.* The large circle is centred at the centre of the square and its radius equals the side of the square. Calculate the areas of the regions I., II. and III.

New exercises for practice – competition C (see page 543): **Exercises up to grade 10: K/C. 712.** See the text at Exercises **K. K/C. 713.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1694.** Solve the following equation over the set of real numbers:

$$x-2021-\frac{x-2020}{2}+\frac{x-2019}{3}-\frac{x-2018}{4}+\frac{x-2017}{5}-\dots+$$
$$+\frac{x-3}{2019}-\frac{x-2}{2020}+\frac{x-1}{2021}-\frac{x}{2022}=0.$$

(Proposed by *L. Sáfár,* Ráckeve) **C. 1695.** A perpendicular line segment equal in length to the radius (R) is attached to the circumference of a circle (as shown in the *figure*). Is it possible to fit two such circles with handles ("frying pans") in a rectangle if one side of the rectangle equals the diameter of the circle ($2R$), and the other side is twice as long ($4R$)? The figures and the rectangle are allowed to touch one another but they are not allowed to intersect or overlap. (Proposed by *M. E. Gáspár,* Budapest) **C. 1696.** There are 10 and 15 points marked on two parallel lines a and b, respectively. Consider all line segments formed by the points marked such that one endpoint lies on a, and the other lies on b. How many intersections may these line segments have altogether at most? **Exercises upwards of grade 11: C. 1697.** Interior points D, E, F are marked on sides BC, CA, AB of a regular triangle ABC, respectively, such that DEF is also a regular triangle. Then regular triangles BDA' and AEB' are drawn over the sides BC and AC, respectively, on the outside. Prove that there exists a point on side AB where each of the line segments $A'E$ and $B'D$ subtends a right angle. **C. 1698.** Zoe does not like books but she decides to read a total of 2021 pages during the year 2021. She is going to read on consecutive days, one page more on every day than on the previous day. How many pages should she read on the first day if she would like to spread the project through the largest possible number of days, but she does not have time to read more than 100 pages on any day? (Proposed by *L. Sáfár,* Ráckeve)

New exercises – competition B (see page 544): **B. 5206.** An n-digit number $\overline{a_1a_2a_3\dots a_n}$ is called *hill type* if there exists an integer $1\leqslant k\leqslant n$ for which the sequence $a_1,a_2,\dots,a_k$ is strictly increasing and the sequence $a_k,a_{k+1},\dots,a_n$ is strictly decreasing. (For example, the numbers 1, 121, 1231 are of hill type, whereas 1442 or 12313 are not.) How many hill type numbers are there? (*3 points*) **B. 5207.** Let $n\geqslant 2$ be a natural number. Prove that there exist positive integers $2\leqslant x_1<x_2<x_3<\dots<x_n$, such that $x_1!\cdot x_2!\cdot x_3!\cdot\dots\cdot x_n!$ is a perfect square. (*4 points*) **B. 5208.** The lines of two perpendicular chords AB and CD of a circle intersect at an exterior point P. The length of the tangent drawn from P to the circle is e. Show that the geometric mean of the lengths AD and BC is at least $\sqrt{2}\,e$. (*4 points*) (Proposed by *Sz. Kocsis,* Budapest) **B. 5209.** What is the maximum possible number of two-element subsets in a 2022-element set of integers for which the sum of the two elements also belongs to the set? (*5 points*) **B. 5210.** The parabolas $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ and $\mathcal{P}_3$ have the same focus, and any two of them intersect at exactly two points. Let e_{ij} denote the line passing through the two intersections of the parabolas $\mathcal{P}_i$ and $\mathcal{P}_j$. Show that the lines e_{12}, e_{13} and e_{23} are concurrent. (*5 points*) **B. 5211.** Solve the

following equation over the set of positive integers: $5^x - 2^y = 1$. (*5 points*) **B. 5212.** Prove that there exists a positive integer which can be represented in at least 2021 different ways by taking an appropriate positive integer (in decimal notation), and adding the sum of its digits to it. (*6 points*) (Proposed by *Cs. Sándor,* Budapest) **B. 5213.** Prove that if a, b, c are positive real numbers, then

$$c\sqrt{a^2+b^2-ab}+a\sqrt{b^2+c^2-bc}\geqslant b\sqrt{c^2+a^2+ca}\,.$$

When will equality occur? (*5 points*) (Proposed by *J. Schultz,* Szeged)

New problems – competition A (see page 546): **A. 812.** Two players play the following game: there are two heaps of tokens, and they take turns to pick some tokens from them. The winner of the game is the player who takes away the last token. If the number of tokens in the two heaps are A and B at a given moment, the player whose turn it is can take away a number of tokens that is a multiple of A or a multiple of B from one of the heaps. Find those pair of integers (k,n), for which the second player has a winning strategy, if the initial number of tokens is k in the first heap and n in the second heap. (Proposed by *Dömötör Pálvölgyi,* Budapest) **A. 813.** Let p be a prime number and k a positive integer. Let $t=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\left\lfloor\frac{k}{p^j}\right\rfloor$. *a*) Let $f(x)$ be a polynomial of degree k with integer coefficients such that its leading coefficient is 1 and its constant is divisible by p. Prove that there exists $n\in\mathbb{N}$ for which $p\mid f(n)$, but $p^{t+1}\nmid f(n)$. *b*) Prove that the statement above is sharp, i.e. there exists polynomial $g(x)$ of degree k, integer coefficients, leading coefficient 1 and constant divisible by p such that if $p\mid g(n)$ is true for a certain $n\in\mathbb{N}$, then $p^t\mid g(n)$ also holds. (Proposed by *Kristóf Szabó,* Budapest) **A. 814.** There are given 666 points in the plane such that they cannot be covered with 10 lines. Prove that it is possible to choose 66 of them such that they still cannot be covered with 10 lines. (Proposed by *Mihály Hujter,* Budapest)

Problems in Physics

(see page 570)

M. 409. Let us make a sponge cake. Measure the density of the dough before baking and after baking. Investigate how the density of the finished sponge cake varies depending on whether it was baked on the edge of the cake pan or in the middle. (Enter the sponge cake recipe as well.)

G. 761. How was the word "HÁTULJA" (meaning BACK) written on the back of KöMaL: as usual or in mirror writing? **G. 762.** The *photo on the left* shows a garden solar shower. The incident sunlight heats up the water in the vertical black container. From the lower tap (the so-called leg wash) only cold water flows, while from the upper shower rose we can enjoy the water jet, whose temperature can be set with a single-lever shower mixer positioned in the middle. For the operation of the shower cold water flows in at the bottom. The structure of a shower without a foot wash is shown in the *figure on the right.* Complete the diagram with a foot wash, then explain how the garden shower works. **G. 763.** We have two solid cubes, one made of aluminium and the other made of copper. Placed on a particularly accurate scale they are both measured to be 1 ton to the nearest gram in vacuum. What will the difference between the results of the measurements be if the masses of the cubes are measured in air at standard temperature and pressure (STP)? **G. 764.** An object was released from rest and falls freely. It covered the same distance in the last second of its motion as it did in the first three seconds. From what height did it fall? (Neglect air resistance.)

P. 5364. A solid half cylinder of radius R, and of mass m is lying at rest on a flat, horizontal, frictionless surface with its curved surface facing upwards. From the top of the half cylinder a small object of mass also m, starts from rest and slides down frictionlessly. How much distance does this small object cover sliding on the surface of the cylinder until it leaves it? **P. 5365.** A homogeneous, thin rod of length ℓ, mass m is suspended by one of its ends. The rod displaced slightly from its equilibrium position is swung with period $T_0 = 2$ s. Such a rod is called a seconds pendulum. *a*) What is the length of the rods? A rigid frame jointed from such rods shown in the *figure* is then suspended at one of its corners. This five-pointed star can move freely in its plane about the point O. *b*) What is the oscillation period T of the five-pointed star displaced slightly from its equilibrium position? **P. 5366.** The ratio of the specific heat capacity of an ideal gas at constant pressure to that of at constant volume is κ. *a*) The gas expands adiabatically. What is the ratio of the work done by the gas to the change in its internal energy? *b*) The gas is compressed isothermally. What is the ratio of the work done by the gas to the absorbed heat by the gas? *c*) The gas is heated and it undergoes isobaric expansion. What is the ratio of the work done by the gas to the heat absorbed by the gas? **P. 5367.** Two small metal balls are fixed at a distance of d on isolated rods, and both are given a charge of Q. *a*) Draw the sketch of the equipotential surfaces. *b*) What is the potential of that surface which "surrounds" both charged balls? **P. 5368.** A ring made of a piece of metal wire with a radius of $R = 30$ cm is given a charge of $Q = 6 \cdot 10^{-6}$ C and then the ring is rotated in a vacuum at an angular velocity of $\omega = 520$ 1/s about an axis which is perpendicular to its plane and goes through the centre of the ring. At a certain moment an electron flies through the centre of the ring in the plane of the ring at a speed of $v = 120$ m/s. What is the radius of curvature of the orbit of the electron at the centre of the ring if there the magnetic field of the Earth points in the direction of the velocity of the electron? **P. 5369.** There are two parallel metal rails in a horizontal plane, at a distance of ℓ. The left ends of the rails are connected with a resistor of resistance R and a switch as shown in the *figure.* The arrangement is in vertical uniform magnetic field which varies with time according to the following relation: $B(t) = B_0 + kt$, where B_0 and k are known constants. Perpendicular to the rails, a metal rod is placed at a distance of d from the switch, to the right side of the switch. The resistance of the rails and the metal rod is negligible. At time $t = 0$ the switch is closed and we begin to move the rod in the horizontal plane perpendicularly to the rod, at a constant speed of v_0. Determine the current flowing in the rod at time t. **P. 5370.** The near point of the eye of a short-sighted person is at a distance of 8 cm from his eye, without wearing glasses. What will the distance of the near point of his eye be when he wears his -5 dioptre glasses? **P. 5371.** The electric charge of a tau particle is the same as the electric charge of an electron. Its mass is 3470 times more than that of the electron, and 1.89 times more that of the proton. Its lifetime is very short ($3 \cdot 10^{-13}$ s), but it may occur that it forms a bound system with a proton. In this case the two particles revolve in circular orbit around their common centre of mass, and the total angular momentum of the system is $n\hbar$ ($n = 1, 2, \ldots$). *a*) Determine the ratio of the wavelengths of the corresponding spectral lines of the τ-proton atom and the hydrogen atom. *b*) What is the binding energy of the τ-proton atom? **P. 5372.** The natural angular frequency of a physical pendulum made of a rod (a rigid uniform-density rod pivoted at one end) is ω. In the steady state of the oscillation, what is the amplitude of the oscillation of the bottom end of the rod if the pivoted end of the pendulum is moved horizontally with a displacement, which varies with time according to the following formula: $x(t) = A\cos(2\omega t)$? Air resistance is small but not negligible and $A\omega^2 \ll g$.