KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

71. évfolyam 2. szám Budapest, 2021. február

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405. Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405. 1117–Budapest, Hungary telephone: +36 (1) 372-2850 or on the Postal address H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary, or on the Internet: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Jelentés a 2020. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2020. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 2-án, közép-európai idő szerint 14 órai kezdettel rendezte meg – a verseny történetében először – online formában.

A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására az alábbi bizottságot kérte fel: *Biró András, Frenkel Péter, Harangi Viktor, Kós Géza, Maga Péter* (titkár), *Pach Péter Pál* (elnök), *Tóth Géza.* A bizottság szeptember 3-ai ülésén a következő feladatokat tűzte ki:

1. *Legyenek n és k pozitív egészek. Adott n zárt körlap a síkon úgy, hogy közülük bárhogyan is választunk $k+1$ körlapot, mindig van két olyan kiválasztott körlap, amelyeknek nincs közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy az n körlap besorolható legfeljebb $10k$ osztályba úgy, hogy azonos osztályba eső két körlapnak sosincs közös pontja.*

2. *Határozzuk meg azokat a racionális számok halmazán értelmezett, nemnegatív valós értékű f függvényeket, melyekre teljesül, hogy tetszőleges x, y racionális számokra*

- $f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$,
- $f(xy)=f(x)f(y)$,
- $f(2)=1/2$.

3. *Egy városban N ház van. Télapó minden karácsonykor végigjárja a házakat valamilyen sorrendben. Mutassuk meg, hogy ha N elég nagy, akkor teljesül, hogy három egymást követő évben mindig található 13 olyan ház, amit (a három közül) két évben is ugyanabban a sorrendben látogatott meg. Határozzuk meg a legkisebb N számot, melyre ez fennáll.*

A bizottság a(z elektronikusan) beérkezett dolgozatok átnézése után, november 16-ai ülésén a következő jelentést fogadta el:

„A verseny rendben zajlott le: a 73 regisztrált versenyzőtől összesen 58 dolgozat érkezett be.

Az idei versenyen a második feladatot 5-en oldották meg helyesen vagy lényegében helyesen, a harmadik feladatra szintén 5 helyes megoldás érkezett. A legnehezebbnek bizonyult első feladatnál két helyes megoldás mellett egy versenyző jutott a megoldás közelébe.

Egyetlen versenyző oldotta meg lényegében mindhárom feladatot. Ezért

I. díjban és 45 000 Ft pénzjutalomban részesül

Gyimesi Péter, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Varga Mária, Szűcs Gábor* és *Pósa Lajos*).

Három versenyző oldott meg helyesen két feladatot. Ezért a teljesítményért

II. díjban és 25 000 Ft pénzjutalomban részesül

Beke Csongor, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Varga Mária* és *Szűcs Gábor*) a második és a harmadik feladat megoldásáért,

Tóth Balázs, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Gyenes Zoltán, Kiss Géza, Dobos Sándor* és *Nikházy László*) a második és a harmadik feladat megoldásáért,

Várkonyi Zsombor, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Fazakas Tünde, Kocsis Szilveszter, Pósa Lajos* és *Dobos Sándor*) az első és a harmadik feladat megoldásáért.

Dicséretben és 10 000 Ft pénzjutalomban részesül

Füredi Erik, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Fazakas Tünde, Kocsis Szilveszter* és *Dobos Sándor*), mert az első feladatban a megoldás közelébe jutott és félig megoldotta a harmadik feladatot,

Szabó Kornél, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Fazakas Tünde, Kocsis Szilveszter, Dobos Sándor, Gyenes Zoltán, Surányi László* és *Pósa Lajos*) a harmadik feladat helyes megoldásáért,

Weisz Máté Barnabás, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Schultz János* és *Tigyi István*) a második feladat helyes megoldásáért.

A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző, felkészítő tanár és a lebonyolításban közreműködő kolléga munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva gratulál."

A 2020. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása

1. *Legyenek n és k pozitív egészek. Adott n zárt körlap a síkon úgy, hogy közülük bárhogyan is választunk $k+1$ körlapot, mindig van két olyan kiválasztott körlap, amelyeknek nincs közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy az n körlap besorolható legfeljebb $10k$ osztályba úgy, hogy azonos osztályba eső két körlapnak sosincs közös pontja.*

Megoldás. Legyen $k \geqslant 1$ rögzített. Az állítást $10k$ helyett $9k$-ra bizonyítjuk, n szerinti teljes indukcióval.

Az állítás $n=1$-re triviális, hiszen $9k \geqslant 9 > 1$. Tegyük fel, hogy $n>1$ és kisebb értékekre már beláttuk az állítást. Legyen $\mathcal{D}$ az n darab zárt körlap halmaza, amelyek között nincs k-nál több páronként metsző. (Vagyis bármely $k+1$ között van két diszjunkt.) Tegyük fel, hogy $D \in \mathcal{D}$ a körlapjaink közül egy minimális sugarú. Feltehetjük, hogy D sugara 1 és középpontja O. Legyenek $D_1, \dots, D_\ell \in \mathcal{D}$ a D-t metsző körlapok. Minden i-re $(1 \leqslant i \leqslant \ell)$ D_i sugara legalább 1. Legyen $x_i \in D \cap D_i$. Kicsinyítsük le D_i-t x_i-ből 1 sugarúra, D_i' a kapott körlap.

Legyen C az O középpontú 3 sugarú körlap. Mivel D_i' metszi D-t, $D_i' \subseteq C$. Ugyanakkor, mivel $D_i' \subseteq D_i$, a $D, D_1', \dots, D_\ell'$ egységsugarú körlapok között nincs k-nál több páronként metsző. Speciálisan, egy pontot sem tartalmaz közülük több, mint k. Ezért

$$\sum_{i=1}^{\ell} t(D_i') + t(D) \leqslant kt(C),$$

tehát $(\ell+1)\pi \leqslant 9k\pi$, vagyis $\ell \leqslant 9k-1$. ($t(X)$ az X területét jelöli.)

Az indukciós feltevés alapján osszuk be a $\mathcal{D} \setminus D$ halmazba tartozó körlapokat a feltételeknek megfelelően legfeljebb $9k$ osztályba. Mivel a D körlapot legfeljebb $9k-1$ körlap metszi, a $9k$ osztály közül valamelyikben nincs a D-t metsző körök közül egy sem. Tegyük D-t ebbe az osztályba és ez egy megfelelő beosztását adja $\mathcal{D}$ körlapjainak. Ezzel beláttuk az állítást. $\square$

2. *Határozzuk meg azokat a racionális számok halmazán értelmezett, nemnegatív valós értékű f függvényeket, melyekre teljesül, hogy tetszőleges x, y racionális számokra*

- $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$,
- $f(xy) = f(x)f(y)$,
- $f(2) = 1/2$.

I. megoldás. Először vegyük észre, hogy

$$f(1) = f(1^2) = f(1)^2,$$

így $f(1) \in \{0, 1\}$. Ugyanakkor

$$1/2 = f(2) = f(1+1) \leqslant f(1) + f(1) = 2f(1),$$

így $f(1) \geqslant 1/4$, ennélfogva $f(1) = 1$.

Vegyük azt is észre, hogy

$$f(-1)^2 = f\big((-1)^2\big) = f(1) = 1,$$

és mivel $f(-1) \geqslant 0$, ezért $f(-1) = 1$. Ebből az is következik, hogy minden a racionális számra $f(-a) = f(-1)f(a) = f(a)$.

Továbbá az 1-hez hasonlóan a 0-ra is

$$f(0) = f(0^2) = f(0)^2,$$

így $f(0) \in \{0, 1\}$. Ugyanakkor

$$f(0) \leqslant f(4) + f(-4) = 2f(2 \cdot 2) = 2f(2)f(2) = 1/2,$$

tehát $f(0) = 0$.

Legyen most $p \geqslant 3$ tetszőleges prímszám, belátjuk, hogy $f(p) \leqslant 1$. Legyen ugyanis indirekte $f(p) = \alpha > 1$. Tegyük fel, hogy p-nek a 2-es számrendszerben m jegye van, ekkor minden k-ra p^k-nak a 2-es számrendszerben legfeljebb mk jegye van. Ekkor p^k felírható legfeljebb mk darab 2-hatvány összegeként, a 2-hatványokon f legfeljebb 1, így azt kapjuk, hogy

$$\alpha^k = f(p^k) \leqslant mk.$$

Megmutatjuk, hogy ez elegendően nagy k-ra nem teljesülhet, ez az ellentmondás mutatja majd, hogy $f(p) \leqslant 1$. Legyen ugyanis $h > 0$ olyan, hogy $1 + h < \alpha$. Ekkor $k \geqslant 2$-re

$$\alpha^k > (1+h)^k \geqslant 1 + \binom{k}{2}h^2 \geqslant 1 + k^2h^2/4$$

(hiszen $\binom{k}{2} = (k^2 - k)/2$, és mivel $k \geqslant 2$, a kivonandó k-t $k^2/2$-vel felülről becsülve $\binom{k}{2} \geqslant (k^2 - k^2/2)/2 = k^2/4$). Ha most $k > 4m/h^2$, akkor $k^2h^2/4 > mk$, tehát $\alpha^k > mk$, ami valóban ellentmondás. Tehát $f(p) \leqslant 1$.

Ekkor, mivel minden egész szám prímek szorzata, azt is megkaptuk, hogy $f(n) \leqslant 1$, ha n egész szám.

A következő lépésben ugyanerre a $p \geqslant 3$ prímre azt is belátjuk, hogy $f(p) < 1$ is ellentmondásra vezet. Tegyük fel ugyanis, hogy $f(p) = \beta < 1$. Válasszuk meg most k-t olyan nagynak, hogy $\beta^k < 1/2$. (Ezt megtehetjük, hiszen az előző részben látottak alapján $1/\beta > 1$-nek van olyan hatványa, ami 2-nél nagyobb, és ezen hatvány reciproka β egy 1/2-nél kisebb hatványa.) Mivel p^k páratlan szám, alkalmas n egész számra $p^k + 2n = 1$, és így a feltételek alapján

$$f(1) \leqslant f(p^k) + f(2n) = \beta^k + f(2)f(n) < 1/2 + 1/2 = 1,$$

ami ellentmondás.

Tehát az f függvény minden páratlan prímen az 1 értéket veszi fel.

A számelmélet alaptételének egyszerű következménye, hogy minden 0-tól különböző racionális szám egyértelműen írható fel $2^k \cdot \frac{m}{n}$ alakban, ahol m és $0 < n$ egymáshoz relatív prím, páratlan számok, k pedig egész (negatív is lehet). Az eddigiek alapján világos, hogy f értéke ezen racionális számnál 2^{-k} kell legyen.

Be kell még látnunk, hogy ez az f megfelel a feltételeknek. A szorzási feltétel világos, az összeadásihoz pedig vegyük észre, hogy ha $a_1 = 2^{k_1} \cdot \frac{m_1}{n_1}$ és $a_2 = 2^{k_2} \cdot \frac{m_2}{n_2}$ egymás ellentettje, akkor az állítás triviális, hiszen $f(0) = 0$. Ha pedig a_1 és a_2 nem egymás ellentettje, akkor az összegükben a 2-es kitevője legalább $\min(k_1, k_2)$, hiszen az összegük

$$\frac{2^{k_1}m_1n_2 + 2^{k_2}m_2n_1}{n_1n_2} = 2^{\min(k_1,k_2)} \cdot \frac{2^{k_1-\min(k_1,k_2)}m_1n_2 + 2^{k_2-\min(k_1,k_2)}m_2n_1}{n_1n_2},$$

ahol a nevező páratlan, a számláló pedig egy egész szám, mely esetleg még tartalmazhat 2-eseket pozitív kitevővel, de negatívval biztosan nem. Ekkor

$$f(a_1 + a_2) \leqslant 2^{\min(k_1,k_2)} = \max(f(a_1), f(a_2)) \leqslant f(a_1) + f(a_2),$$

így a bizonyítás kész. □

II. megoldás. Először vegyük észre, hogy

$$f(1)/2 = f(1)f(2) = f(1 \cdot 2) = f(2) = 1/2,$$

így $f(1) = 1$.

Vegyük azt is észre, hogy

$$f(-1)^2 = f\big((-1)^2\big) = f(1) = 1,$$

és mivel $f(-1) \geqslant 0$, ezért $f(-1) = 1$. Ebből az is következik, hogy minden racionális a-ra $f(-a) = f(-1)f(a) = f(a)$.

Továbbá az 1-hez hasonlóan a 0-ra is

$$f(0)/2 = f(0)f(2) = f(0 \cdot 2) = f(0),$$

tehát $f(0) = 0$.

Vegyük észre, hogy minden természetes k kitevőre $f(2^k) = f(2)^k = 1/2^k$. Mivel minden természetes szám felírható véges sok különböző 2-hatvány összegeként, ezért az f függvény értéke minden természetes helyen kisebb, mint $1 + 1/2 + 1/4 + \dots = 2$. De akkor $f(n) = \sqrt[k]{f(n^k)} < \sqrt[k]{2}$ minden természetes n-re és pozitív egész k-ra, ahonnan $f(n) \leqslant 1$ minden természetes, és így minden egész n-re.

Ugyanakkor minden páratlan egész n-re és természetes k-ra léteznek olyan u és v egész számok, hogy

$$un + v2^k = (n, 2^k) = 1.$$

Ekkor

$$1 = f(1) \leqslant f(un) + f(v2^k) = f(u)f(n) + f(v)f(2^k) \leqslant f(n) + 1/2^k.$$

Ezért minden k-ra $1 - 1/2^k \leqslant f(n)$, és így $f(n) \geqslant 1$. Tehát $f(n) = 1$ minden páratlan egész n-re. Így minden természetes k-ra és páratlan n-re

$$f(2^k n) = f(2^k)f(n) = \frac{1}{2^k}.$$

Az f függvény szorzattartó tulajdonsága miatt tetszőleges egész k-ra és páratlan egész m-re és n-re $f(2^k n/m) = f(2^k n)/f(m) = 1/2^k$.

Még ellenőriznünk kell, hogy ez az f megfelelő, ezt például az I. megoldásban látott módon tehetjük meg. □

Megjegyzés. A 2. feladat Ostrowski nevezetes tételének[1] speciális esete.

3. *Egy városban N ház van. Télapó minden karácsonykor végigjárja a házakat valamilyen sorrendben. Mutassuk meg, hogy ha N elég nagy, akkor teljesül, hogy három egymást követő évben mindig található 13 olyan ház, amit (a három közül) két évben is ugyanabban a sorrendben látogatott meg. Határozzuk meg a legkisebb N számot, melyre ez fennáll.*

[1]Lásd például a következő linket:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Ostrowski%27s_theorem`

I. megoldás. Ha csupán azt akarjuk belátni, hogy létezik megfelelő N (és nem akarjuk meghatározni a legkisebb ilyen N értékét), akkor a Ramsey-tétel segítségével a következőképpen láthatjuk be gyorsan az állítást. Tekintsük az N csúcsú teljes gráfot, ahol minden csúcs az egyik háznak felel meg. Színezzünk két ház közti élt pirosra / zöldre / kékre, ha Télapó ugyanabban a sorrendben látogatta meg őket az 1. és 2. / 1. és 3. / 2. és 3. évben. Világos, hogy minden él legalább egy színt kap. A Ramsey-tétel szerint elég nagy N-re mindenképpen lesz 13 csúcsú, egyszínű teljes részgráf, ami éppen a feladat állításával ekvivalens.

Ha a legjobb N értéket akarjuk meghatározni, akkor más megközelítésre van szükségünk. Erdős és Szekeres alábbi tételét fogjuk alkalmazni:

Erdős–Szekeres-tétel. Legyen k és ℓ pozitív egész; ekkor minden $k\ell+1$ hosszú, különböző számokból álló sorozatból kiválasztható $k+1$ hosszú monoton növő vagy $\ell+1$ hosszú monoton csökkenő részsorozat.

Legyen $N=12^3+1$ és számozzuk meg a házakat az első év bejárásának sorrendjében 1-től N-ig. A második év bejárási sorrendjére ezen számokból álló sorozatként gondolunk. Alkalmazzuk erre a sorozatra az Erdős–Szekeres-tételt $k=12$, illetve $\ell=12^2$ választással. Ha $k+1=13$ hosszú monoton növő részsorozatot találunk, akkor azonnal kész is vagyunk, mert ekkor az 1. és 2. évben az ezekhez tartozó 13 házat ugyanolyan sorrendben látogatta meg Télapó. Tegyük fel tehát, hogy $\ell+1=12^2+1$ hosszú monoton csökkenő részsorozatot találtunk. Most tekintsük kizárólag ezt a 12^2+1 házat, amelyet ezek szerint Télapó az első két évben éppen fordított sorrendben járt be. Ha most alkalmazzuk az Erdős–Szekeres-tételt $k=\ell=12$ választással arra a 12^2+1 hosszú sorozatra, ahogy a harmadik évben látogatta meg Télapó ezeket a házakat, akkor mindenképpen végeztünk: ha monoton növő sorozatot kapunk, akkor az 1. és 3. évben lesz egyforma sorrend; monoton csökkenő esetben pedig a 2. és 3. évben.

Végül megmutatjuk, hogy $N=12^3$-ra még nem igaz az állítás (és így ennél kisebb N-ekre sem). A házakat címkézzük meg különböző (a,b,c) hármasokkal, ahol $a,b,c\in\{0,1,2,\dots,11\}$. Legyen $x\geqslant 12$ tetszőlegesen rögzített, és minden (a,b,c) hármashoz rendeljünk három értéket a következő módon:

$$f_1(a,b,c)=ax^2+bx+c,$$
$$f_2(a,b,c)=ax^2-bx-c,$$
$$f_3(a,b,c)=-ax^2-bx+c.$$

Ha az i-edik évben a házakat a címkéik f_i értéke szerinti növekvő sorrendben látogatja meg Télapó ($i\in\{1,2,3\}$), akkor könnyen ellenőrizhető, hogy nem lesz 13 ház, melyek két évben is ugyanabban a sorrendben kerültek sorra. $\square$

II. megoldás. A házak halmazát $\mathcal{S}$-sel fogjuk jelölni. Azt, hogy az s házat Télapó az i-edik évben (ahol $i\in\{1,2,3\}$) nem később látogatja meg, mint az s' házat úgy jelöljük, hogy $s\preceq_i s'$. Ez tehát azt jelenti, hogy vagy $s=s'$, vagy s-et (szigorúan) előbb látogatta meg, mint s'-t.

A házak ezen bejárási sorrendjeire úgy is hivatkozunk majd, mint a házak egy-egy sorbarendezése.

Legyen $n=13$. Először megmutatjuk, hogy $N=(n-1)^3$ még nem elég. (Ebből persze következik, hogy ennél kisebb N értékek sem megfelelők.) Megadjuk az $\mathcal{S}=\{(i,j,k):\ 1\leqslant i,j,k\leqslant n-1\}$ halmaz elemeinek háromféle sorbarendezését úgy, hogy ne létezzen n elem, amelynek kétféle rendezés szerint is ugyanaz a sorrendje. A $\preceq_1$ rendezés legyen az úgynevezett lexikografikus rendezés:

$$(i,j,k)\preceq_1(i',j',k')\iff$$
$$\iff (i<i')\text{ vagy }(i=i'\text{ és }j<j')\text{ vagy }(i=i',j=j'\text{ és }k\leqslant k').$$

A másik két rendezés definíciója hasonló, azzal a különbséggel, hogy bizonyos koordináták esetén ‘„fordított” sorrendet veszünk. Legyen

$$(i,j,k)\preceq_2(i',j',k')\iff$$
$$\iff (i>i')\text{ vagy }(i=i'\text{ és }j<j')\text{ vagy }(i=i',j=j'\text{ és }k\geqslant k'),$$
$$(i,j,k)\preceq_3(i',j',k')\iff$$
$$\iff (i>i')\text{ vagy }(i=i'\text{ és }j>j')\text{ vagy }(i=i',j=j'\text{ és }k\leqslant k').$$

Megvizsgáljuk, hogy ℓ darab (különböző) hármas milyen feltételek mellett alkothat növekvő sorrendet kétféle rendezés szerint is.

Először tegyük fel, hogy

$$(i_1,j_1,k_1)\preceq_1\cdots\preceq_1(i_\ell,j_\ell,k_\ell)$$

és

$$(i_1,j_1,k_1)\preceq_2\cdots\preceq_2(i_\ell,j_\ell,k_\ell).$$

A rendezések definíciójából rögtön következik, hogy $i_1=\cdots=i_\ell=:i_0$. A hármasok tehát $(i_0,*,*)$ alakúak. Továbbá, egy rögzített j_0 mellett csak egyetlen $(i_0,j_0,*)$ alakú elem lehet a hármasok között, hiszen

$$(i_0,j_0,k)\preceq_1(i_0,j_0,k')\quad\text{és}\quad(i_0,j_0,k)\preceq_2(i_0,j_0,k')$$

esetén $k\leqslant k'$-nek és $k\geqslant k'$-nek is teljesülnie kell. Tehát ebben az esetben $\ell\leqslant n-1$.

Most tegyük fel, hogy

$$(i_1,j_1,k_1)\preceq_1\cdots\preceq_1(i_\ell,j_\ell,k_\ell)$$

és

$$(i_1,j_1,k_1)\preceq_3\cdots\preceq_3(i_\ell,j_\ell,k_\ell).$$

Az előző esethez hasonlóan következik, hogy

$$i_1=\cdots=i_\ell=:i_0\quad\text{és}\quad j_1=\cdots=j_\ell=:j_0,$$

tehát a hármasok $(i_0,j_0,*)$ alakúak, számuk szintén legfeljebb $n-1$ lehet.

Végül tegyük fel, hogy

$$(i_1,j_1,k_1)\preceq_2\cdots\preceq_2(i_\ell,j_\ell,k_\ell)\quad\text{és}\quad(i_1,j_1,k_1)\preceq_3\cdots\preceq_3(i_\ell,j_\ell,k_\ell).$$

Ekkor a definíció alapján az derül ki, hogy bármely i_0 esetén csak egyetlen $(i_0, *, *)$ alakú hármas lehet, ekkor is $\ell \leqslant n-1$.

Ez azt jelenti, hogy ebben a példában nincs n ház, melyeket két évben is ugyanolyan sorrendben járt be Télapó.

Tehát $(n-1)^3$ még nem feltétlenül elég. Belátjuk, hogy $N = (n-1)^3 + 1$ már igen. Minden házhoz rendeljünk hozzá egy rendezett hármast a következő módon. Egy házhoz akkor rendeljük az (a, b, c) hármast, ha

- a a leghosszabb olyan házsorozat hossza, mely az első két rendezés szerint is növekvő sorrendben van, és a szóban forgó házzal kezdődik,
- ehhez hasonlóan, b a leghosszabb olyan házsorozat hossza, mely az első és a harmadik rendezés szerint is növekvő sorrendben van, és a szóban forgó házzal kezdődik,
- végül c a leghosszabb olyan házsorozat hossza, mely a második és harmadik rendezés szerint is növekvő sorrendben van, és a szóban forgó házzal kezdődik.

Világos, hogy ha egy házhoz az (a, b, c) hármast rendeljük, akkor a, b, c pozitív egész számok, továbbá, ha van köztük olyan, ami legalább n, akkor készen vagyunk. Tegyük fel tehát indirekten, hogy nincs köztük olyan, ami legalább n. A lehetséges hármasok száma $(n-1)^3$, így mivel $(n-1)^3 + 1$ ház van, a skatulyaelv szerint biztosan lesz két ház, s és s', melyekhez ugyanazt, mondjuk az (a, b, c) hármast rendeltük. A két ház közül valamelyiket a három év közül legalább kettőben előbb látogatta meg Télapó, mint a másikat. Az évek (és a házak) közötti logikai szimmetria alapján feltehető, hogy például s-et az első és a második évben előbb látogatta meg, mint s'-t. Tudjuk, hogy van egy a hosszú házsorozat, ami s'-vel kezdődik, és az első két rendezés szerint növekvő sorozatot alkot. Ennek elejére téve s-et egy s-sel kezdődő, $a+1$ hosszú, az első két rendezés szerint is növekvő házsorozatot kapunk, ami ellentmond annak, hogy s-hez is az (a, b, c) hármast rendeltük. Ez az ellentmondás igazolja, hogy valóban lesz megfelelő n hosszú házsorozat, vagyis n olyan ház, amit két évben is ugyanabban a sorrendben látogatott meg.

Ezzel megmutattuk, hogy létezik megfelelő N érték, éspedig $N = (n-1)^3 + 1$. A feladatban $n = 13$, vagyis a legkisebb megfelelő N értéke $N = 1729$. $\square$

Megjegyzés. A megoldás során nem játszott szerepet, hogy $n = 13$. A feladatot azért ezzel a speciális értékkel tűztük ki, mert így a válasz éppen 1729, ami az úgynevezett „taxicab number"[2] (vagy Hardy–Ramanujan szám): a legkisebb olyan szám, ami kétféleképpen is előáll két (pozitív) köbszám összegeként: $1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$. Ezen tulajdonsága a megoldás során persze nem játszott szerepet, de éppen 2020-ban volt Srinivasa Ramanujan halálának 100-adik évfordulója, így az ő tiszteletére választottuk ezt a speciális értéket.[3]

Pach Péter Pál

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Taxicab_number`

[3] *Turán Pál:* Egy különös életút, Ramanujan. I. rész: *KöMaL* (2020/9), 453–459., II. rész: *KöMaL* (2021/1), 6–16.

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Hány megoldása van az egész számok halmazán a következő egyenlőtlenségnek?

$$\left|1-\frac{x-1}{x}\right|>\frac{1}{2021}. \qquad (3\ pont)$$

b) Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\log_2 x+\log_4 x-2\log_8 x=\frac{5}{3}. \qquad (3\ pont)$$

c) Határozzuk meg azokat az x, y és z valós számokat, amelyekre:

$$12x^2+15y^2+4z^2-12xy-12yz-8z+16=0. \qquad (6\ pont)$$

2. *a*) Igazoljuk, hogy $\log_{2020} 2021$ irracionális szám. (*4 pont*)

b) Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\cos 2x+\cos\frac{3}{5}x=2. \qquad (6\ pont)$$

c) A következő két állításról döntsük el, hogy igaz vagy hamis. Válaszunkat indokoljuk. (*4 pont*)

I. Van olyan 6 csúcsú nem összefüggő egyszerű gráf, amelyiknek minden csúcsa másodfokú.

II. Ha egy 6 csúcsú összefüggő egyszerű gráfban a fokszámok 1, 1, 1, 3, 3, 3, akkor a gráfban biztosan van kör.

3. Evelin minden nap iszik egy kávét vagy egy teát. Ha tegnap kávét ivott, akkor 0,3 valószínűséggel iszik ma is. Ha teát ivott tegnap, akkor 0,6 valószínűséggel ma kávét iszik.

a) Ha Evelin tegnap kávét ivott, mekkora a valószínűsége, hogy holnap teát iszik? (*4 pont*)

b) Hosszú távon Evelin a napok hány százalékában iszik kávét? (*7 pont*)

c) Hosszú távon Evelin a napok hány százalékában iszik teát? (*2 pont*)

4. Egy n oldalú szabályos sokszög alapú egyenes hasáb magassága és alaplapjának az oldalai is 1 cm-esek.

a) Ha a hasáb lapátlóinak és testátlóinak összege 6960, akkor hány csúcsa van az alaplapját képező szabályos n-szögnek? (*5 pont*)

b) Mekkora ennek a hasábnak a felszíne és a térfogata? (*7 pont*)

II. rész

5. *a*) Adjuk meg az $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény legbővebb értelmezési tartományát. (*1 pont*)

b) Mennyi az $f(x)$ függvény határértéke + végtelenben, azaz $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=?$ (*3 pont*)

c) Mennyi az $f(x)$ függvény maximuma a $[0;2]$ intervallumon, és ezt hol veszi fel? (*6 pont*)

d) Számítsuk ki a következő határozott integrál értékét:

$$\int_0^2 (x^3+1)f^2(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (3\ pont)$$

e) Mennyi annak a „serleg” alakú testnek a térfogata, mely testet úgy kapjuk meg, hogy az $f(x)$ függvénynek a $[0;2]$ intervallumon vett grafikonját az x tengely körül megforgatjuk? (Természetesen a nyak feletti részről van szó és az egység legyen 1 cm. A kép csak illusztráció.) (*3 pont*)

6. Emeljünk egy merőleges szakaszt az $ABCD$ téglalap síkjára a D pontban úgy, hogy a szakasz másik végpontjára, M-re igazak a következők: $MA=12\sqrt{2}$, $MB=4\sqrt{34}$, $MC=20$.

Ha a hosszúságokat centiméterben mérjük, számítsuk ki:

a) a téglalap oldalainak hosszát; (*7 pont*)

b) az MAB háromszög síkjának az $ABCD$ téglalap síkjával bezárt szögét; (*6 pont*)

c) az $ABCDM$ test térfogatát. (*3 pont*)

7. Képzeljük el, hogy a 2025-ös évben vagyunk. *Pénzügytudatos Patrik* pontosan öt évvel ezelőtt, 2020-ban egy nagyobb összeghez jutott és azzal a céllal vásárolt ebből 10 millió forintért egy államkötvényt (vagyis befektette a pénzét), hogy az öt éves futamidő leteltével, amikor felveszi a kamatokkal megnövelt összeget, azt felhasználja lakásvásárlásra.

a) Öt év elteltével mekkora lett a kamatokkal növelt összeg, ha a kamat számítása a következők szerint történik? Az öt éves futamidőt hat kamatozási periódusra osztották, és az egyes időszakaszokban változó mértékű kamatlábat állapítottak meg. Az első félévben az éves kamat 3,50% (vagyis félévre 1,75%), a második félévre az éves kamat 4,00% (vagyis erre a félévre 2%). A második évtől kezdve már egész évente változik a kamat és ezen belül egész évre vonatkozóan ugyanakkora mértékű: a második évre 4,50%, a harmadikra 5,00%, a negyedikre 5,50%, végül az ötödikre 6,00%. Lényeges továbbá, hogy az egy-egy kamatozási periódus végén létrejött, a névérték kamattal megnövelt összege képezi a következő kamatperiódus során a kamatszámítás alapját (kamatos kamat). (*5 pont*)

b) Pénzügytudatos Patrik házastársa is rendelkezik egy öt éves futamidejű, hasonló névértékű, de fix kamatozású állampapírral, melynek az éves kamata 5% és ez is éppen 2025-ben jár le. Ezen kívül a házaspár kap az államtól 10 millió forint vissza nem térítendő családalapítási támogatást. Ezt a három forrást felhasználva százezresekre kerekítve mekkora összegből tud a házaspár lakást vásárolni? (*5 pont*)

c) Pénzügytudatosék mellett másik három baráti házaspár is lakást vásárol, mégpedig valamennyien egy új építésű lakóparkban, amely a 10 lakásos „Zöld Ház”-ból és a 20 lakásos „Fehér Ház”-ból áll. A beruházó a viták elkerülése végett sorsolással dönt arról, hogy a 30 lakás közül melyiknek melyik család legyen a tulajdonosa. A sorsolásnál ügyelnek arra, hogy bármelyik lakáshoz ugyanakkora eséllyel lehessen hozzájutni. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a négy házaspár közül kettő a „Zöld Ház”-ba, a másik kettő pedig a „Fehér Ház”-ba költözhet? (*6 pont*)

8. *a*) Adott az $\{x_n\}$ valós számsorozat, ahol $x_1 = \sqrt{2}$ és $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, ha $n \geqslant 1$. Igazoljuk, hogy az $\{x_n\}$ sorozat konvergens és határozzuk meg $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ értékét. (*7 pont*)

b) Igazoljuk, hogy ha az x és y pozitív számok összege 2, akkor

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geqslant 4. \qquad (5\ pont)$$

Forrás:
`https://varlexikon.hu/varpalota`

Egy négyzet alakú várban a csúcsoknál egy-egy torony áll, az Északi Torony (E), a Keleti Torony (K), a Déli Torony (D) és a Nyugati Torony (N). Őrségben a várfal tetején lévő négy falszakaszon sétálnak a várőrök. Az Északi Toronyban lévő őrszobából indulnak és toronytól toronyig haladva az ÉK, KD, DN és NE közül mindig pontosan hat falszakaszon haladnak végig egy őrjárat során. (Értelemszerűen egy falszakasz többször is szerepelhet egy őrjárat során, például akkor, ha a következő toronynál egyből visszafordul a várőr.)

c) Legfeljebb hány tagú a várőrség, ha mindegyikük különböző útvonalon sétált? (Az őrjáratnak nem kell feltétlenül az Északi Toronynál végződnie. Két útvonalat nem tekintünk különbözőnek, ha ugyanazokat a falszakaszokat tartalmazza ugyanabban a sorrendben.) (*4 pont*)

9. *a*) Egy egységoldalú négyzet belsejében és oldalain lévő pontok mindegyikét kiszíneztük két szín valamelyikével. Mutassuk meg, hogy létezik két egyszínű pont, amelyek legalább $\frac{\sqrt{5}}{2}$ távolságra vannak egymástól. (*6 pont*) *b*) A $K(1;3)$ középpontú, 2 egység sugarú kör belsejében melyek azok a pontok, amelyeknek a koordinátái a következő egyenletrendszer gyökei?

$$2^x + 2^{y-\frac{1}{2}} = 3,$$
$$16x^2 - 16xy + 4y^2 = 9. \qquad (8\ pont)$$

c) Mekkora szöget zár be egymással az a két vektor, amelyek közös kezdőpontja a $K(1;3)$ pont, és az egyik az origóba, a másik pedig a $P(10;0)$ pontba mutat? (*2 pont*)

Mihályi Gyula
Székesfehérvár

Megoldásvázlatok a 2021/1. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Az f függvény olyan, hogy minden $x \in \mathbb{R}^+$-re $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{\log_2^2 x}}$. Hol veszi fel a függvény a 2 értéket?* (*6 pont*)

b) *Adott egy g függvény úgy, hogy minden $x \in D_g$-re $g(x+1) = \frac{2g(x)+1}{2}$ és $g(2021) = 2021$. Mennyi $g(2020)$?* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Az $f(x) = 2$ feltételből felírhatjuk a $2 = \sqrt{2 + \sqrt{\log_2^2 x}}$ egyenletet, amelynek mindkét oldala pozitív, így négyzetre emelhetjük, majd rendezzük.

$$2 = \sqrt{\log_2^2 x} = |\log_2 x|; \quad \log_2 x = \pm 2; \quad x_1 = 4,\ x_2 = \frac{1}{4}.$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk.

b) A $g(x+1) = \frac{2g(x)+1}{2}$ feltételt $x = 2020$-ra felírva, valamint a $g(2021) = 2021$ alapján

$$\frac{2g(2020)+1}{2} = 2021, \quad g(2020) = \frac{4041}{2} = 2020{,}5.$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk.

2. *a*) *Huba a bolhapiacon szeretné eladni az okostelefonját. Tapasztalatból tudja, hogy az ár $\frac{1}{5}$ részét lealkudják a vásárlók, ezért a megállapított érték $\frac{1}{4}$ részével többet kér, így az alku után éppen annyit kap, amennyit szeretne. Ezúttal azonban a telefon értékének 90%-ával tért haza. Hányadrészét kapta meg Huba a telefon piacon kihirdetett árának?* (*5 pont*)

b) *Vacsora után Huba $n = 1$-től 100-ig sorban felírta az n után következő pozitív egész szám négyzetének és n négyzetének a különbségét. Testvére, Luca* *meglátta a számsort és elölről kezdve bekarikázott* 24 *prímszámot. Meglepve látta, hogy az utolsó bekarikázott szám a sorban éppen annyiadik helyen áll, ahány gyertya volt aznap édesanyja születésnapi tortáján. Hány éves Huba anyukája?*

(*8 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen az okostelefon ára x. A kihirdetett ár $\frac{5}{4} \cdot x$, a kapott pénz $0{,}9 \cdot x$. Az arányuk:

$$\frac{0{,}9x}{\frac{5}{4}x} = \frac{18}{25}.$$

Huba a kihirdetett ár $\frac{18}{25}$ részét kapta meg.

b) Az n után következő pozitív egész szám négyzetének és n négyzetének a különbsége: $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, tehát Huba az 1-nél nagyobb páratlan számokat írta fel egymás után, növekvő sorrendben. A huszonnegyedik pozitív, páratlan prímszám a 97, így $2n + 1 = 97$, $n = 48$.

Huba édesanyja 48 éves.

3. *a*) *Mennyi az alábbi táblázatban szereplő számok összege?* (*8 pont*)

1	2	3	...	n
2	3	4	...	$n+1$
3	4	5	...	$n+2$
...	...	...	...	...
n	$n+1$	$n+2$	...	$2n-1$

b) *Hétfőn Gabi vett néhány részvényt, másnap* 10 *százalékot veszítettek értékükből, ám szerdán nőtt az értékük* 10 *százalékkal. Ez így folytatódott azon a héten és még a következő héten is. Hogyan változott Gabi részvényeinek értéke a második hét utolsó napjára?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) A táblázat első sorában egy $d = 1$ differenciájú számtani sorozat első n tagja szerepel, az első tag 1, így a számok összege: $S_{n_1} = \frac{n(n+1)}{2}$. Minden szám 1-gyel nagyobb a felette lévő számnál, és egy sorban n darab szám van, ezért a sorok közötti differencia n.

A sorokban lévő számok összegei is számtani sorozatot alkotnak, így az n darab sor, azaz a táblázatban szereplő számok összege:

$$S_n = \frac{2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (n-1) \cdot n}{2} \cdot n = n^3.$$

b) A részvények eredeti árát x-szel jelölve, másnap az értékük $x \cdot 0{,}9$ lesz, harmadnap $x \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}1 = x \cdot 0{,}99$. Ez kétnaponta ismétlődik, így 12 nap alatt hatszor következik be. Összesen 13 nap telik el, így az érték a második vasárnapon:

$$x \cdot 0{,}99^6 \cdot 0{,}9 = 0{,}8473x.$$

A részvények értéke 84,73 százaléka az eredeti értéknek, tehát 15,27 százalékkal csökkent.

4. *Adott az $A(2020;2021)$, $B(2027;2025)$, $C(2022;2027)$ és a $D(2026;2022)$ pont a Descartes-féle koordinátarendszerben. Legyen az E pont az AB és a CD szakasz metszéspontja.*

a) Határozzuk meg az AE és az EB szakaszhosszak arányát. *(7 pont)*

b) Számítsuk ki a négy adott pont által meghatározott négyszög kerületét és területét. *(8 pont)*

Megoldás. *a) 1. megoldás.* $\overrightarrow{AC}=(2;6)$ és $\overrightarrow{DB}=(1;3)$, így $\overrightarrow{AC}=2\cdot\overrightarrow{DB}$. Az $\overrightarrow{AC}$ párhuzamos a $\overrightarrow{DB}$ vektorral, és $|\overrightarrow{AC}|=2\cdot|\overrightarrow{DB}|$. A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján $\frac{AC}{DB}=\frac{AE}{EB}=2$.

Az AE és az EB szakaszhosszak aránya $2:1$.

2. megoldás.

$$AB: 4x-7y=-6067,$$
$$CD: 5x+4y=18\,218.$$

Az egyenletrendszer megoldása a két egyenes metszéspontja: $E\left(\frac{6074}{3};\frac{6071}{3}\right)$. A kérdéses arány:

$$AE:EB=\left(\frac{6074}{3}-2020\right):\left(2027-\frac{6074}{3}\right)=\frac{14}{3}:\frac{7}{3}=2:1.$$

b) Az $ADBC$ négyszög kerülete:

$$K=AD+DB+BC+CA=$$
$$=\sqrt{6^2+1^2}+\sqrt{1^2+3^2}+\sqrt{(-5)^2+2^2}+\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}=$$
$$=\sqrt{37}+\sqrt{10}+\sqrt{29}+\sqrt{40}\approx 20{,}95 \text{ egység}.$$

Az AB szakasz hossza $\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{65}$. Ebből és a fent kapott szakaszhosszakból

$$\cos ACB\sphericalangle=\frac{2}{\sqrt{40\cdot 29}} \quad \text{és} \quad \cos ADB\sphericalangle=-\frac{9}{\sqrt{37\cdot 10}},$$

tehát

$$\sin ACB\sphericalangle=\sqrt{\frac{1156}{40\cdot 29}} \quad \text{és} \quad \sin ADB\sphericalangle=\sqrt{\frac{289}{37\cdot 10}}.$$

Az $ADBC$ négyszög területe:

$$T_{ADBC}=T_{ABC_\triangle}+T_{ABD_\triangle}=\frac{AC\cdot BC\cdot\sin(ACB\sphericalangle)}{2}+\frac{AD\cdot DB\cdot\sin(ADB\sphericalangle)}{2}=$$
$$=17+8{,}5=25{,}5 \text{ területegység}.$$

II. rész

5. *a) Az A halmaz az* $ax^2-bx+c=0$ *egyenlet* $\big(a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *és* $b^2-4ac\geqslant 0\big)$ *összes valós gyökének reciprokát tartalmazza. Fejezzük ki az A halmaz elemeinek összegét az a, b, c paraméterek segítségével.* *(6 pont)*

b) Öten beszélgetnek a pozitív egész számokat tartalmazó B halmazról. Tudják, hogy B-ben van legalább egy olyan elem, ami nagyobb 1-nél és ha a B halmaz tartalmaz egy n számot, akkor az összes n-nél nagyobb számot is tartalmazza, kivéve esetleg az n néhány többszörösét. A következő állítások hangzanak el a beszélgetés során:

Andi: „B számossága véges."

Bulcsú: „Végtelen sok olyan pozitív egész szám van, ami nincs benne B-ben, és végtelen sok olyan, ami benne van."

Cecília: „Szerintem az összes pozitív prímszám benne van a B halmazban."

Dani: „$B=\mathbb{Z}^+$."

Emőke: „Létezik egy olyan m pozitív egész szám, hogy B tartalmazza az összes m-nél nagyobb egész számot."

Ki(k)nek van biztosan igaza? Indokoljuk válaszunkat. *(6 pont)*

c) Később az intervallumok is szóba kerülnek. Adott két valós szám: x és y, amelyekre igaz, hogy $0<x<y<1$. *Melyik intervallumban van* $x\sqrt{y}$*?*

Andi: „$]0;x[$."

Bulcsú: „$]x;y[$."

Cecília: „$]x;1[$."

Dani: „$]y;1[$."

Emőke: „$]1;\infty[$."

Ki(k)nek van igaza és miért? *(4 pont)*

Megoldás. *a) 1. eset.* Ha $b^2-4ac=0$, akkor A-nak egy eleme van, a $\frac{b}{2a}$ reciproka, ami $\frac{2a}{b}$. A kérdéses összeg értéke $\frac{2a}{b}$.

2. eset. Ha $b^2-4ac>0$, akkor A-nak két eleme van: $\frac{1}{x_1}$ és $\frac{1}{x_2}$.

$$S=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}.$$

A Viéte-formulákat alkalmazva a szóban forgó összeg

$$S=\frac{-\left(-\frac{b}{a}\right)}{\frac{c}{a}}=\frac{b}{c}.$$

b) Egy lehetséges B halmaz például a pozitív egész számok halmaza, emiatt Andi és Bulcsú állítása hamis. Cecíliának, illetve Daninak sincs igaza, hiszen a $B=\mathbb{Z}^+\setminus\{1;2\}$ is megfelel az összes feltételnek.

Legyen $m=n$, ahol n az az 1-nél nagyobb pozitív egész szám, amiről tudjuk, hogy B-nek eleme. Ekkor m és $m+1$ relatív prímek, azaz $m+1$ nem többszöröse

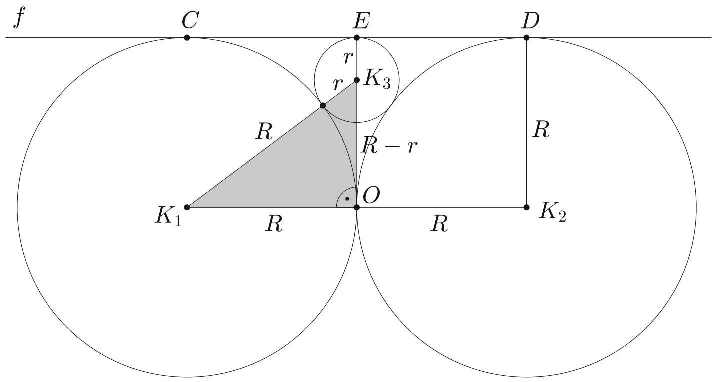
m-nek, így biztosan eleme B-nek. Ugyanezen gondolatmenet mentén haladva, ha $m+1 \in B$, akkor $m+2 \in B$, amiből következik, hogy $m+3 \in B$, és így tovább. B tehát tartalmazza az összes m-nél nagyobb pozitív egész számot, így Emőkének igaza van.

c) Ha $y \in \mathbb{R}$ és $0 < y < 1$, akkor $0 < \sqrt{y} < 1$. Ekkor $0 < x \cdot \sqrt{y} < x < y < 1$, ami azt jelenti, hogy ezúttal Andinak van igaza és a többiek tévednek.

6. *a*) *Győr idén ünnepli várossá válásának* 750. *évfordulóját. Erre az alkalomra egy építész három kör alakú szökőkutat tervezett úgy, hogy közülük kettő egybevágó, sugaruk hossza* 12 *méter, kívülről érintik egymást és egy fasort is, amely egy egyenest határoz meg. Milyen hosszú a harmadik szökőkút sugara, ha az kívülről érinti a másik kettőt és a fasor egyenesét is? (A szökőkutak a fasornak ugyanazon az oldalán vannak.)* (*8 pont*)

b) *Egy másik építész egy hatalmas teret álmodott meg, amelyet tíz, egymást kívülről érintő kör határol. A körök középpontjai egy* 121 *méter kerületű tízszöget alkotnak. Számítsuk ki a legnagyobb kör r_1 sugarát, ha tudjuk, hogy két-két darab $r_2 = \frac{1}{3}r_1$; $r_3 = \frac{1}{3}r_2$; $r_4 = \frac{1}{3}r_3$ és $r_5 = \frac{1}{3}r_4$ sugarú kör van, a tizedik kör sugara pedig $r_6 = \frac{1}{3}r_5$.* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Jelöljük a két egybevágó kör középpontját K_1-gyel és K_2-vel, sugaruk hosszát R-rel, egyetlen közös pontjukat O-val. Legyen a harmadik (kisebb) kör középpontja K_3, sugarának hossza r, amely a közös f érintőegyenest az E pontban érinti.



A K_1OK_3 háromszög derékszögű, befogóinak hossza: $K_1O = R$ és $K_3O = OE - K_3E = R - r$, átfogója $K_1K_3 = R + r$. Ekkor Pitagorasz tétele alapján felírhatjuk a következő egyenletet:

$$(R+r)^2 = R^2 + (R-r)^2.$$

Rendezés után $r = \frac{R}{4}$, amelybe $R = 12$-t helyettesítve $r = 3$.

A harmadik szökőkút sugarának hossza 3 méter.

b) A feltételek alapján $r_5 = 3r_6$; amit felhasználva $r_4 = 3r_5 = 9r_6$. Hasonlóképpen kapjuk, hogy $r_3 = 27r_6$, $r_2 = 81r_6$ és $r_1 = 243r_6$.

A körök átmérőhosszainak összege egyenlő a tízszög kerületével:

$$2\big[r_1 + 2(r_2 + r_3 + r_4 + r_5) + r_6\big] = 121.$$

Alkalmazva a fenti összefüggéseket:

$$2\big[243r_6 + 2(81r_6 + 27r_6 + 9r_6 + 3r_6) + r_6\big] = 121,$$

$$r_6 = \frac{1}{8}, \qquad r_1 = 243r_6 = \frac{243}{8}.$$

A legnagyobb kör sugara 30,375 méter hosszúságú.

7. *a*) *Nevesincs-sziget lakói minden számot kétféle kavics sorozatával ábrázolnak. A* $\triangle$ *alakú kavics* 1*-gyel növeli az előtte álló kavicsok által meghatározott számot, a* $\otimes$ *pedig* 7*-tel való szorzást jelent. Például a* $\triangle\triangle\triangle\otimes\triangle\otimes\triangle\triangle$ *a* 156*-os számot jelenti. Legalább hány kavics kell a* 2021 *kirakásához?* (*5 pont*)

b) *Janka összegyűjtötte a* 2021 *kirakásához minimálisan szükséges számú kavicsot, és véletlenszerűen lerakta sorban egymás mellé az összeset. Hány különböző módon történhetett ez meg, ha csak az számít, hogy az adott helyen milyen formájú kavics áll?* (*5 pont*)

c) *Ezután Janka találomra kivett egy kavicsot a* 20*-ból, megmutatta barátnőjének, majd visszatette. Ezt még kétszer megismételte. Írjuk fel a* $\triangle$ *alakú kavicsok számának eloszlását és határozzuk meg a várható értéket.* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A 2021 hetes számrendszerbeli alakja:

$$2021 = 5 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7 + 5.$$

Ez alapján állapítjuk meg a kavicsok minimális számát. A kirakáshoz kell

$$5 + 6 + 1 + 5 = 17 \text{ darab}$$

$\triangle$ alakú kavics, és annyi $\otimes$ kavics, ahány összeadásjel van a fenti felírásban, azaz 3 darab.

Összesen legalább 20 kavics kell.

b) A sorrendek száma például az ismétléses permutáció segítségével számolható ki:

$$P_{20}^{\{3;17\}} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = 1140.$$

c) Legyen X a $\triangle$ alakú kavicsok száma, ekkor $X \in \{0;1;2;3\}$. Ez egy binomiális eloszlás, amelynek paraméterei: $n=3$ és $p=\frac{17}{20}$. A keresett eloszlás:

$$P(X=0)=\binom{3}{0}\left(\frac{17}{20}\right)^0\left(\frac{3}{20}\right)^3=\frac{27}{8000},$$

$$P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{17}{20}\right)^1\left(\frac{3}{20}\right)^2=\frac{459}{8000},$$

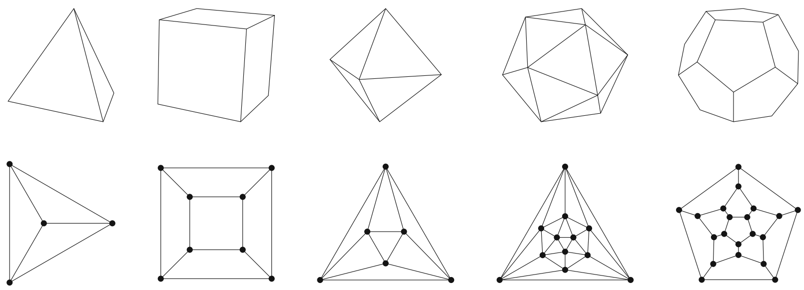
$$P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{17}{20}\right)^2\left(\frac{3}{20}\right)^1=\frac{2601}{8000},$$

$$P(X=3)=\binom{3}{3}\left(\frac{17}{20}\right)^3\left(\frac{3}{20}\right)^0=\frac{4913}{8000}.$$

A várható érték:

$$E(X)=n\cdot p=3\cdot\frac{17}{20}=\frac{51}{20}.$$

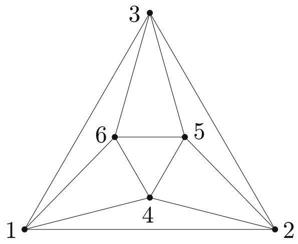
8. *a*) *Az öt szabályos testet a következő síkbeli gráfok segítségével ábrázoltuk. Lehetséges-e bármelyiket a ceruzánk felemelése nélkül megrajzolni úgy, hogy minden élen pontosan egyszer húzzuk át a ceruzát?* (*6 pont*)



b) *Marika egységnyi élhosszúságú, pirosra festett kockákból szeretne összeragasztani egy* $5\times5\times5$*-ös nagyobb kockát. Hány gramm ragasztóra van szüksége összesen, ha két kis kocka 1-1 lapját* 250 *milligramm ragasztóval lehet stabilan összeragasztani?* (*4 pont*)

c) *Az összeragasztás során kiderült, hogy összesen* 150 *kiskocka állt Marika rendelkezésére. A kiskockák* 8 *százaléka cinkből készült, a többi alumíniumból. Marika véletlenszerűen válogatta ki a szükséges kockákat. Legyen az A esemény az, hogy a nagyobb kocka nem lett cinkelt (azaz nem tartalmaz cinket), a B esemény pedig az, hogy a nagyobb kocka az összes cinkből készült kiskockát tartalmazza. Az A vagy a B esemény bekövetkezésének valószínűsége a nagyobb?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A ceruza felemelése nélkül úgy megrajzolni a gráfot, hogy minden élen pontosan egyszer haladjunk át akkor, és csak akkor lehet, ha – legfeljebb két csúcspont kivételével – minden csúcs fokszáma páros. Ha egy csúcsba megérke-



zünk, onnan tovább kell indulnunk, ezért páros a fokszám, kivéve esetleg a kezdő és a befejező csúcspontot. A fenti tulajdonsággal kizárólag a középső gráf rendelkezik, ezért az oktaédert ábrázoló gráfot meg lehet rajzolni (minden csúcspont fokszáma páros).

Például ha a mellékelt *ábrán* lévő számozott csúcspontokon a következő sorrendben haladunk át: $1; 2; 3; 1; 4; 5; 6; 4; 2; 5; 3; 6; 1$.

b) A kiskockáknak összesen $6 \cdot 125 = 750$ lapja van, ebből a nagykocka felülete $6 \cdot 5^2 = 150$-et tartalmaz, különbségük $750 - 150 = 600$, ez mind belülre kerül a nagykockában. 600 kiskockalapot kell összeragasztani, ez 300 darab ragasztást jelent, így a szükséges ragasztó tömege: $300 \cdot 0{,}25 = 75$ gramm.

c) *1. megoldás.* $150 \cdot 0{,}08 = 12$ cinkből készült kiskocka van és 138 alumíniumból készült. Marika 150 kiskockából 125-öt választ, így összesen $\binom{150}{125}$ eset van.

Az A esemény akkor, és csak akkor következik be, ha Marika mind a 125 kiskockát a 138 alumíniumkocka közül választja, tehát a kedvező esetek száma ekkor: $\binom{138}{125}$.

A B esemény akkor, és csak akkor következik be, ha Marika mind a 12 cinkkockát kiveszi és a még szükséges 113 kockát a 138 aluminíumkocka közül választja, tehát a kedvező esetek száma ekkor: $\binom{138}{113}$.

A keresett valószínűségek:

$$p(A) \approx 3{,}016 \cdot 10^{-11}, \quad \text{illetve} \quad p(B) \approx 1{,}02 \cdot 10^{-1}.$$

A B esemény bekövetkezésének valószínűsége (nagyságrendekkel) nagyobb.

2. megoldás. $150 \cdot 0{,}08 = 12$ cinkből készült kiskocka van és 138 alumíniumból készült. Most a 150 kiskocka közül a cinkből készülteket tekintjük és megnézzük, hogy bekerültek-e a nagykockába, vagy nem. Így összesen $\binom{150}{12}$ eset van.

Az A esemény akkor, és csak akkor következik be, ha a 25 kimaradó kiskocka közé kerül a 12 cinkkocka, tehát a kedvező esetek száma ekkor: $\binom{25}{12}$.

A B esemény akkor, és csak akkor következik be, ha a nagykockába bekerülő 125 kiskocka tartalmazza mind a 12 cinkkockát, ekkor a kedvező esetek száma: $\binom{125}{12}$.

A keresett valószínűségek:

$$p(A) \approx 3{,}16 \cdot 10^{-11}, \quad \text{illetve} \quad p(B) \approx 1{,}02 \cdot 10^{-1}.$$

A B esemény bekövetkezésének valószínűsége (nagyságrendekkel) nagyobb.

9. *a*) *Fricinek* 14 *nap múlva lesz a szalagavatója, és addigra minél hosszabb szakállat szeretne növeszteni. Most naponta fél millimétert nő a szakálla és éppen ma borotválkozott. A boltban vásárolt egy olyan balzsamot, amelyet közvetlenül borotválkozás után a teljesen sima bőrre kenve, a szakállnövekedés sebessége az előző napi másfélszeresére nő. Legfeljebb milyen hosszú lehet Frici szakálla a szalagavató napján, ha egyik napon sem borotválkozik* 1*-nél többször?* (*7 pont*) *b) Legyen α egy szabályos sokszög külső szögének nagysága és tudjuk, hogy az $\left(1+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)$ kifejezés értéke a lehető legkisebb. Határozzuk meg a szabályos sokszög csúcsainak számát.* (*9 pont*)

Megoldás. *a*) Fricinek 14 nap áll rendelkezésére. Minden nap választhat, hogy borotválkozik vagy nem. Tegyük fel, hogy legalább egyszer megborotválkozik, ekkor lenullázza az előtte esetlegesen meglévő szakállát, amit úgy növeszthetett, hogy nem borotválkozott. Ebből következik, hogy a maximális szakállhosszt úgy érheti el, ha az első néhány napban borotválkozik, utána pedig már nem.

Legyen n (14-nél kisebb természetes szám) azon napok száma, amíg Frici naponta egyszer borotválkozik, utána pedig $14-n$ napig nem. Ekkor a szakáll hossza n függvényében:

$$l(n)=0{,}5\cdot 1{,}5^n\cdot(14-n)=7\cdot 1{,}5^n-0{,}5\cdot 1{,}5^n\cdot n.$$

Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=7\cdot 1{,}5^x-0{,}5\cdot 1{,}5^x\cdot x$ függvényt. Az f deriváltfüggvénye:

$$f'(x)=7\cdot\ln 1{,}5\cdot 1{,}5^x-0{,}5\cdot 1{,}5^x-0{,}5\cdot 1{,}5^x\cdot\ln 1{,}5\cdot x.$$

A függvénynek ott lehet lokális szélsőértéke, ahol a derivált nulla:

$$7\cdot\ln 1{,}5\cdot 1{,}5^x-0{,}5\cdot 1{,}5^x-0{,}5\cdot 1{,}5^x\cdot\ln 1{,}5\cdot x=0,$$

$$x=\frac{7\cdot\ln 1{,}5-0{,}5}{0{,}5\cdot\ln 1{,}5}\approx 11{,}53.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy itt tényleg lokális maximuma van az f függvénynek, ami azt jelenti, hogy az $l(n)$ függvénynek $n=11$ vagy $n=12$ lehet a maximumhelye. $l(11)=129{,}75$; $l(12)=129{,}75$, így ez a maximális szakállhossz.

Frici szakálla legfeljebb 129,75 milliméter hosszú lehet a szalagavató napján.

b) A műveletek elvégzésével, összevonással, majd a pitagoraszi azonosság alkalmazásával a kifejezést a következő alakra hozzuk:

$$\left(1+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)=1+\frac{2}{\sin\alpha^2\cdot\cos^2\alpha}=1+\frac{2}{\sin\alpha^2\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)}.$$

Alkalmazzuk $\sin^2\alpha$-ra és $\left(1-\sin^2\alpha\right)$-ra a számtani és mértani közép közötti összefüggést:

$$\sqrt{\sin^2\alpha\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)}\leqslant\frac{1}{2},$$

amelyből négyzetre emelve (megtehetjük, hiszen mindkét oldal nemnegatív):

$$\sin^2\alpha\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)\leqslant\frac{1}{4},$$

$$1+\frac{2}{\sin\alpha^2\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)}\geqslant 1+\frac{2}{\frac{1}{4}}=9,$$

a kifejezés minimális értéke 9, amely egyenlőség esetén teljesül.

Az egyenlőség akkor, és csak akkor áll fenn, ha $\sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, ahol $0° < \alpha \leqslant 120°$, hiszen egy szabályos sokszög külső szögének nagysága. Ekvivalens átalakítások után:

$$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

amelynek egyetlen megoldása az adott intervallumban: $\alpha = 45°$.

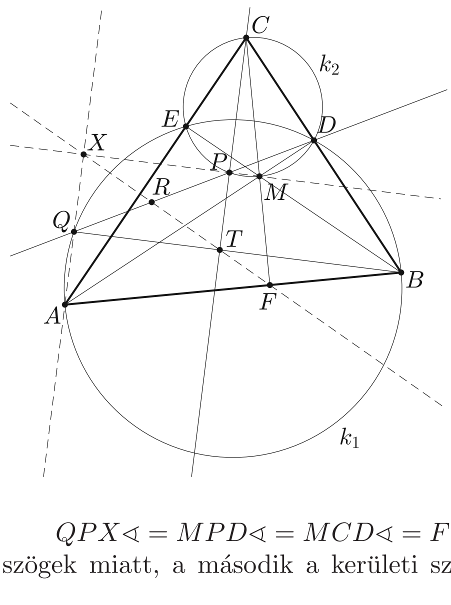
45° nagyságú külső szögei a szabályos nyolcszögnek vannak, tehát a sokszög csúcsainak száma 8.

Kozma Katalin Abigél
Győr

Matematika feladatok megoldása

B. 5005. *Az ABC hegyesszögű háromszög magasságvonalainak talppontja a BC, CA, AB oldalakon rendre D, E, F, az ABC háromszög magasságpontja M. Jelölje az AB, mint átmérő fölé rajzolt kört k_1, a DEM háromszög körülírt körét k_2. Vegyük föl a k_2 körnek a D pontot nem tartalmazó EM ívén az E, M pontoktól különböző P pontot. Messe a DP egyenes a k_1 kört másodszor a Q pontban, és legyen a PQ szakasz felezőpontja R. Mutassuk meg, hogy az AQ, MP, FR egyenesek egy pontban metszik egymást.*

(*6 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)



I. megoldás. Használjuk az A, B, C csúcsoknál lévő szögek hagyományos jelölését.

Legyen AQ és MP metszéspontja X. Azt akarjuk belátni, hogy X rajta van az FR egyenesen. Az első észrevétel, hogy AB Thalesz-körén (k_1-en) rajta van D és E (mivel ADB és AEB szög derékszög). A második, hogy k_2-n rajta van C, ugyanis CM Thalész-körén is rajta van D és E (a CDM és CEM szög derékszög).

Először azt látjuk be, hogy a QXP szög derékszög.

$QPX\sphericalangle = MPD\sphericalangle = MCD\sphericalangle = FCB\sphericalangle = 90° - \beta$, az első egyenlőség a csúcsszögek miatt, a második a kerületi szögek tétele miatt van. $AQD\sphericalangle = 180° - \beta$, mert $AQDB$ húrnégyszög, tehát $PQX\sphericalangle = \beta$ (kiegészítő szögek). Vagyis azt kaptuk, hogy PQX háromszög hasonló ABD-hez, mivel két-két szögük egyenlő, tehát a $QXP\sphericalangle$ derékszög.

A QXP háromszög derékszögű, a köréírt körének középpontja R (az átfogó felezőpontja), vagyis $XR = PR$, tehát

$$RXP\sphericalangle = RPX\sphericalangle = QPX\sphericalangle = 90^\circ - \beta$$

(a QPX szög nagyságát már korábban kiszámoltuk).

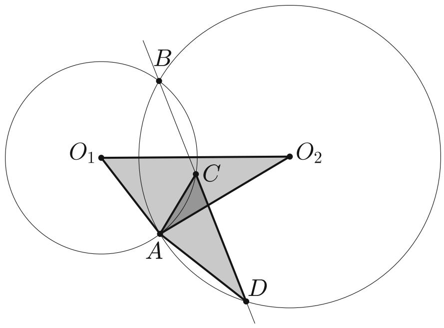
AM Thalész-körén rajta van F, mert az MFA szög 90°-os, de rajta van X is, mivel az AXM szög is derékszög. Tehát $AFMX$ húrnégyszög. Emiatt

$$FXP\sphericalangle = FXM\sphericalangle = FAM\sphericalangle = BAD\sphericalangle = 90^\circ - \beta.$$

Azt kaptuk, hogy $FXP\sphericalangle = RXP\sphericalangle$. Az F és R pontok a PX egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak, mivel mindkettő a QXP irányított szög által meghatározott tartományba esik: az R azért, mert QP felezőpontja, F pedig az AB szakasz egy pontja, és A és B is a tartományban van. B pedig azért van ott, mert P az EM ív egy belső pontja, és a B akkor kerül éppen a tartomány határára, ha $P \cong E$ (akkor a PM egyenesen éppen rajta van a B pont). Tehát R és F az XP egyenes ugyanazon oldalán vannak, és $FXP\sphericalangle = RXP\sphericalangle$, azaz F, R és X egy egyenesen van. Tehát az AQ, FR, MP egyeneseknek van egy közös pontja, az X, és ezt kellett bizonyítani.

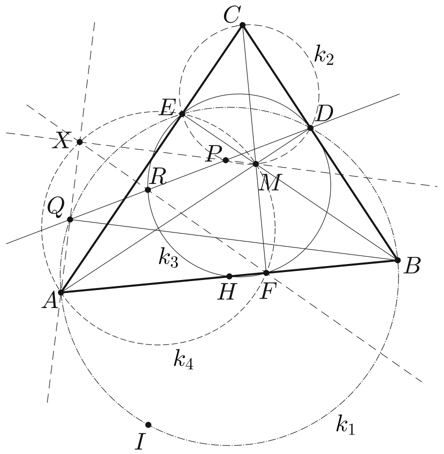
Dobák Dániel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. *Segédállítás:* Ha egy O_1 és egy O_2 középpontú kör az A és B pontokban metszi egymást, és adott egy-egy C és D pontjuk úgy, hogy az ACD háromszög megkapható az AO_1O_2 háromszög A középpontú forgatva nyújtásával, akkor a CD egyenes átmegy a B ponton.



Valóban, a forgatva nyújtás szögtartó transzformáció, így $CDA\sphericalangle = O_1O_2A\sphericalangle$. Tudjuk, hogy $O_1O_2A\sphericalangle = BO_2A\sphericalangle/2$ a szimmetria miatt és $BO_2A\sphericalangle = 2 \cdot BDA\sphericalangle$ a kerületi és középponti szögek tétele alapján, tehát $CDA\sphericalangle = BDA\sphericalangle$, így B, C és D kollineárisak.

A feladat megoldására térve legyen f az az E középpontú forgatva nyújtás, ami a D pontot P-be viszi. Legyen $X = f(A)$, AB felezőpontja H, D pont H-ra vett tükörképe pedig I. A forgatva nyújtás hasonlósági transzformáció, így mivel a P pont mértani helye egy kör, azért $f(A)$, $f(H)$ és $f(I)$ mértani helye is egy-egy kör lesz. A Thalész-tétel megfordításából tudjuk, hogy k_1 középpontja H. Legyen k_3 az ABC háromszög Feuerbach-köre (a H, E, D pontokon átmenő kör) és k_4 az $AEMF$ húrnégyszög köréírt köre.



Ekkor a k_1, k_2, k_3 és k_4 kör is átmegy az E ponton. Tudjuk, hogy a k_2 kört ugyanaz az E középpontú forgatva nyújtás viszi k_3-ba, amelyik D-t H-ba, a k_1 körbe ugyanaz, mint amelyik D-t I-be, k_4-be pedig ugyanaz, mint amelyik D-t A-ba. Tudjuk tehát, hogy mivel a P pont a k_2 körön van, az eddigieket felhasználva $f(H)$ a k_3-on, $f(I)$ a k_1 körön, végül $f(A)$ a k_4 körön található.

A segédállítást felhasználva tudjuk, hogy az $f(A)f(I)$ egyenes átmegy az A ponton, mivel a k_1-en az I, a k_4-en az A pontot választva az elforgatott egyenes átmegy a k_1 és k_4 körök E-től különböző metszéspontján, az A ponton. Hasonló módon kapjuk, hogy az $f(H)f(A)$ egyenes átmegy az F ponton (a k_3 és k_4 körök E-től különböző metszéspontja F), valamint az $f(D)f(A)$ egyenes átmegy M-en (mivel a k_2 és k_4 körök E-től különböző metszéspontja M). Ezen kívül ismert, hogy az ID szakasz felezőpontja H, így az f forgatva nyújtásról tudjuk, hogy az $f(I)f(D)$ szakasz felezőpontja $f(H)$.

Az eddigiekből egyértelműen következik, hogy $f(I)=Q$, hiszen PD a Q pontban metszi k_1-et, $f(I)$ pedig rajta van a k_1 körön, és $f(I)P$ átmegy D-n; hasonlóan levezethető, hogy $f(H)=R$.

Azt is bizonyítottuk, hogy $f(A)P$ átmegy az M ponton, $f(A)f(I)$ átmegy A-n, $f(A)f(H)$ pedig az F ponton, vagyis az AQ, FR, PM egyenesek mind átmennek $f(A)$-n. Ezzel az állítást igazoltuk: mindhárom egyenes átmegy azon a ponton, amelyiket A-ból kapjuk ugyanazzal az E középpontú forgatva nyújtással, amelyik D-t P-be viszi.

Hervay Bence (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

III. megoldás. Használjuk az első megoldás ábrájának jelöléseit. Legyen ismét az MP és AQ egyenesek metszéspontja X, továbbá legyen a CP és BQ egyenesek metszéspontja T.

Az első megoldásnál leírtak szerint az XQT, XPT, QXP szögek mind derékszögek. A $QTPX$ négyszög három szöge derékszög, így a negyedik is az, a négyszög téglalap.

A téglalap átlói felezik egymást, az X, R és T pontok egy egyenesen fekszenek.

Most pedig alkalmazzuk a Desargues-tételt[1]* a QTP és AFM háromszögekre. A két háromszög egyenesre nézve perspektív, mivel a megfelelő oldalak metszéspontjai mind a BC oldalegyenesen helyezkednek el:

$$QP\cap AM=\{D\},\quad QT\cap AF=\{B\},\quad TP\cap FM=\{C\}.$$

*Ld. pl. Kós Géza: Térbe kilépő bizonyítások I., KöMaL 69. évf. 7. szám 395–396. oldal.

A tétel szerint ekkor a két háromszög pontra nézve is perspektív: az MP, AQ és TF egyenesek egy pontban metszik egymást. Az MP és AQ metszéspontja az X pont, így ez a közös metszéspont csak az X pont lehet.

Tehát az F, T és X pontok egy egyenesen helyezkednek el. Korábban beláttuk, hogy XT felezőpontja R, vagyis az F, T, R és X pontok egy egyenesen vannak, az állítást igazoltuk.

Györffy Ágoston (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Az első és második megoldásból is következik, hogy R az ABC háromszög Feuerbach-körének pontja.

Összesen 28 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 26 versenyző, 3 pontos 1, 0 pontos szintén 1 tanuló dolgozata.

B. 5024. *Legyen p egy páratlan prímszám. A $\binom{p-2}{0}, \binom{p-2}{1}, \ldots, \binom{p-2}{p-2}$ számok mindegyikét maradékosan elosztjuk p-vel. Hányféle különböző maradékot kapunk?*

(*4 pont*) Javasolta: *Gyenes Zoltán* és *Hujter Bálint* (Budapest)

I. megoldás. A $\binom{p-2}{0}, \binom{p-2}{1}, \ldots, \binom{p-2}{p-2}$ számsornak $p-1$ darab eleme van (ami a feladat szerint páros szám). Mivel $\binom{p-2}{i} = \binom{p-2}{p-2-i}$, így bármilyen számmal osztva is ugyanazt a maradékot adják, speciálisan p-vel osztva is. Párba lehet rendezni a számsort úgy, hogy egy párban a maradékok ugyanazok (i párja $p-2-i$, és ezek nem lesznek ugyanazok a binomiális együtthatók, mert ha $i = p-2-i$, akkor $2i = p-2$ lenne, de a bal oldal páros, míg a jobb oldal páratlan). Látjuk, tehát, hogy legfeljebb $\frac{p-1}{2}$-féle maradékot kaphatunk csak. Azt állítjuk, hogy ennyit kapunk is, azaz a fenti párokon kívül nem lesz két olyan együttható, amely ugyanazt a maradékot adja p-vel osztva.

A maradékok a fentiek szerint szimmetrikusak lesznek (azaz az első $\frac{p-1}{2}$ maradék ugyanaz, mint a második $\frac{p-1}{2}$), így elég ezt az állítást belátni: Ha $0 \leqslant i < j < \frac{p-2}{2}$, akkor $\binom{p-2}{i} - \binom{p-2}{j}$ nem osztható p-vel.

$$\binom{p-2}{i} - \binom{p-2}{j} = \frac{(p-2)!}{i! \cdot (p-2-i)!} - \frac{(p-2)!}{j! \cdot (p-2-j)!}.$$

Szorozzuk meg a különbséget $j! \cdot (p-2-i)!$-sal. Mivel ebben a szorzatban minden tényező kisebb, mint p, és a p prím, így ez nem változtat azon, hogy a különbség osztható-e p-vel vagy sem; kapjuk:

$$(p-2)! \cdot \big[(i+1) \cdot \ldots \cdot j - (p-2-j+1) \cdot \ldots \cdot (p-2-i)\big].$$

Azt tudjuk, hogy $z \equiv (-1) \cdot (p-z) \pmod p$. Azaz a különbség p-vel vett maradéka nem változik, ha $(p-2-j+1)$ helyett $(-1)(2+j-1) = -(j+1)$-et írunk stb.

Ezt elvégezve és átrendezve kapjuk a fenti különbségre azt, hogy annak maradéka p-vel osztva ugyanannyi, mint

$$(p-2)! \cdot \big[(i+1) \cdot \ldots \cdot j - (-1)^{j-i} \cdot (i+2) \cdot \ldots \cdot (j+1)\big]$$

maradéka. Ezt viszont kiemeléssel átírhatjuk erre a formára:

$$(p-2)! \cdot (i+2) \cdot \ldots \cdot j \cdot \big[(i+1) - (-1)^{j-i} \cdot (j+1)\big].$$

Itt a szögletes zárójel előtti tényezők mind kisebbek, mint p – megjegyezve, hogy $j = i+1$ esetén az $(i+2) \cdot \ldots \cdot j$ rész-szorzat üres, ezért értéke 1 –, így ez a rész biztosan nem osztható p-vel; az oszthatóságot az dönti el, hogy a szögletes zárójelben lévő rész osztható-e p-vel vagy sem.

A szögletes zárójelben lévő rész viszont csak akkor lehetne osztható p-vel, ha $(i+1) = (j+1)$ (ami nyilván nem fordulhat elő, hiszen $i < j$), vagy ha $(j+1) + (i+1) = p$ és $j - i$ páratlan (de ez sem fordulhat elő, mert akkor $i + j = p - 2$ lenne, viszont ez nem teljesülhet az $i < j < \frac{p-2}{2}$ feltétel miatt).

Azaz a kapott szám biztosan nem osztható p-vel, így az eredeti különbség sem osztható. Ez azt jelenti, hogy igazoltuk az állításunkat, mely szerint ha $0 \leqslant i < j < \frac{p-2}{2}$, akkor $\binom{p-2}{i} - \binom{p-2}{j}$ nem osztható p-vel.

A feladat kérdésére a válasz: $\frac{p-1}{2}$.

Sebestyén Pál Botond (Budapest, Baár-Madas Református Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Indukcióval azt fogjuk belátni, hogy $k \leqslant p-2$ esetén $\binom{p-2}{k}$ maradéka p-vel osztva $(-1)^k(k+1)$.

Elsőként vizsgáljuk meg a $k = 0$ és $k = 1$ eseteket:

$\binom{p-2}{0} = 1$, tehát $(-1)^0 \cdot 1 = 1$ maradékot ad p-vel osztva, $\binom{p-2}{1} = p - 2$, tehát $(-1)^1 \cdot (1+1) = -2$ maradékot ad.

Az indukciós lépésben tegyük fel, hogy $\binom{p-2}{k}$ maradéka p-vel osztva $(-1)^k(k+1)$. Ekkor egyrészt a binomiális együttható kifejtése alapján

$$\binom{p-2}{k+1} = \binom{p-2}{k} \cdot \frac{p-k-2}{k+1},$$

másrészt tudjuk, hogy $\binom{p-2}{k} - (-1)^k(k+1)$ osztható p-vel. Szorozzuk meg ezt a különbséget egy p-nél kisebb számmal, $(p-k-2)$-vel és osszuk el egy szintén p-nél kisebb számmal, $(k+1)$-gyel. A kapott szám biztosan egész lesz, mert

$$\left[\binom{p-2}{k} - (-1)^k(k+1)\right]\frac{p-k-2}{k+1} =$$

$$= \binom{p-2}{k+1} - (-1)^k(p-k-2) \equiv \binom{p-2}{k+1} - (-1)^{k+1}(k+2) \pmod{p},$$

és mivel p-nél kisebb számmal osztottunk és szoroztunk a kapott egész szám továbbra is osztható lesz p-vel, azaz $\binom{p-2}{k+1}$-nek a p-vel való osztási maradéka $(-1)^{k+1}(k+2)$.

A belátott összefüggést (a binomiális együtthatók szimmetriája miatt) elegendő a $0 \leqslant k < \frac{p-2}{2}$ esetekre alkalmazni. Ekkor viszont a kapott maradékok mind különbözőek, hiszen $0 \leqslant k < t < \frac{p-2}{2}$ esetén

$$1 \leqslant \left|(-1)^k(k+1) - (-1)^t(t+1)\right| < 2 \cdot \frac{p-2}{2} + 2 = p.$$

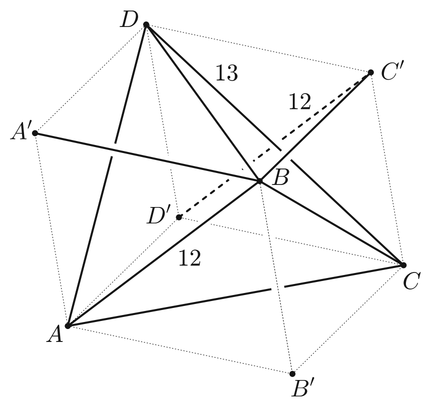
Kovács Tamás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

Összesen 51 dolgozat érkezett. 4 pontos 38, 3 pontos 8 dolgozat. 2 pontot és 1 pontot 2–2 tanuló, 0 pontot 1 tanuló kapott.

B. 5089. *Egy tetraéder két kitérő éle egymásra merőleges, hosszuk* 12 *és* 13*, egyeneseik távolsága* 14 *egység. Határozzuk meg a tetraéder térfogatát.*

(*3 pont*)

Megoldás. Minden tetraéder köré pontosan egy paralelepipedon írható oly módon, hogy a tetraéder mindegyik éléhez odatoljuk a vele szemköztes élt, és az ilyen – most már közös ponton átmenő – élpárok által meghatározott síkok lesznek a paralelepipedon lapjainak síkjai. Ennek a paralelepipedonnak a kitérő lapátlói a tetraéder élei. Ezt a paralelepipedont a tetraéder bennfoglaló paralelepipedonjának nevezzük. Könnyen igazolható, ismert tény, hogy a tetraéder térfogata egyharmada a bennfoglaló paralelepipedon térfogatának.



A 12 cm-es és 13 cm-es élek a tetraéder kitérő élei, így a bennfoglaló paralelepipedon egyik paralelogramma lapjának átlói az egymásra merőleges $C'D'$ és CD élek. A paralelepipedon e lapjának területe az átlók alapján $\frac{12 \cdot 13}{2} = 78$ területegység. A paralelepipedon ehhez a laphoz tartozó magassága éppen a két kitérő él távolsága, tehát a megadott 14 egység. A paralelepipedon térfogata így $V = 78 \cdot 14$ térfogategység. Az eddigiek alapján a tetraéder térfogata ennek harmadrésze, vagyis $\frac{78 \cdot 14}{3} = 364$ térfogategység.

Wiener Anna (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 8. évf.) dolgozata alapján

Összesen 67 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 14, 2 pontot 32 tanuló. 1 pontos 17, 0 pontos 4 versenyző dolgozata.

B. 5116. *Legyen $a, b, c > 0$ és $x, y, z \geqslant 0$. Igazoljuk, hogy ha $x + aby \leqslant a(y + z)$, $y + bcz \leqslant b(z + x)$, és $z + cax \leqslant c(x + y)$, akkor $x = y = z = 0$ vagy $a = b = c = 1$.*

(*6 pont*) Javasolta: *George Stoica* (Saint John, Kanada)

Megoldás. Az a, b és c pozitív számok, így az egyenlőtlenségekben oszthatunk velük:

$$\frac{x}{a} + by \leqslant y + z,$$

$$\frac{y}{b} + cz \leqslant z + x,$$

$$\frac{z}{c} + ax \leqslant x + y.$$

Ezeket összeadva:

$$\frac{x}{a} + by + \frac{y}{b} + cz + \frac{z}{c} + ax \leqslant 2x + 2y + 2z,$$

$$x\left(\frac{1}{a} + a\right) + y\left(\frac{1}{b} + b\right) + z\left(\frac{1}{c} + c\right) \leqslant 2(x + y + z).$$

Vizsgáljuk a bal oldal egy-egy tagját; például

$$x\left(\frac{1}{a} + a\right) \geqslant 2x, \tag{1}$$

hiszen a pozitív a-val szorozva, majd rendezve:

$$x + xa^2 \geqslant 2xa,$$

$$x(a^2 - 2a + 1) \geqslant 0,$$

$$x(a - 1)^2 \geqslant 0.$$

Ez a feladat feltételei alapján teljesül ($x \geqslant 0$). Egyenlőség akkor és csak akkor áll fönn, ha $x = 0$ vagy $a = 1$. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az (1) egyenlőtlenség is fennáll, és $x = 0$, illetve $a = 1$ esetén teljesül (1)-ben is az egyenlőség.

Logikai szimmetria miatt a bal oldal minden tagját hasonlóan becsülve:

$$x\left(\frac{1}{a} + a\right) + y\left(\frac{1}{b} + b\right) + z\left(\frac{1}{c} + c\right) \geqslant 2(x + y + z).$$

Mivel korábban az ezzel ellenkező irányú egyenlőtlenséget igazoltuk, egyenlőség áll fenn, aminek szükséges és elégséges feltétele: $x = 0$ vagy $a = 1$; és $y = 0$ vagy $b = 1$; és $z = 0$ vagy $c = 1$ teljesülése. Vegyük sorra ennek lehetséges eseteit – figyelembe véve, hogy az x, y, z ismeretlenek és a, b, c ismeretlenek szimmetrikus szerepet töltenek be.

1. eset: $x=y=z=0$; teljesül a feladat állítása.

2. eset: $x=y=0$ és $c=1$ (felhasználva a szimmetriát, ugyanez lesz $x=z=0$ és $b=1$; valamint az $y=z=0$ és $a=1$ esetén is). Ekkor a feladat feltételei alapján: $z+cax\leqslant c(x+y)$, azaz $z\leqslant 0$, így z is 0; teljesül az állítás.

3. eset: $x=0$ és $b=c=1$ (ugyanez a gondolatmenet érvényes a szimmetria miatt az $y=0$ és $a=c=1$; valamint a $z=0$ és $a=b=1$ esetben is). Ekkor $y+bcz\leqslant b(z+x)$ miatt: $y+z\leqslant z$, azaz $y\leqslant 0$, amiből $y=0$. Az $x=y=0$ és $c=1$ esetről pedig a 2. esetnél már láttuk, hogy teljesíti az állítást.

4. eset: $a=b=c=1$; teljesíti a feladat állítását.

Ezzel az összes lehetőséget végignéztük, tehát a feladat állítását beláttuk.

Seres-Szabó Márton (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

57 dolgozat érkezett. 6 pontos 36, 4 pontos 4, 3 pontos 2, 2 pontos 1, 1 pontos 6, 0 pontos 5 dolgozat. Nem versenyszerű: 3 dolgozat.

B. 5118. *Lehet-e* x, $\dfrac{14x+5}{9}$ *és* $\dfrac{17x-5}{12}$ *egyszerre egész szám?*

(*3 pont*)

I. megoldás. A feladat alapfeltétele: $x\in\mathbb{Z}$. Mivel $3\mid 9$ és $3\mid 12$, ezért $3\mid 14x+5$ és $3\mid 17x-5$-nek is teljesülnie kell. Ha $3\mid a$ és $3\mid b$, akkor $3\mid a+b$ is igaz. Tehát ekkor $3\mid 14x+5+17x-5$. Összevonva: $3\mid 31x$.

Mivel $(3;31)=1$, ezért $3\mid x$. Ekkor viszont $3\mid 14x$, így $14x+5$ 3-as maradéka 2 lesz. Hasonlóan $3\mid 17x$, így $17x-5$ 3-as maradéka -2, azaz 1 lesz. Ekkor se $14x+5$, se $17x-5$ nem lesz osztható 3-mal, tehát $\frac{14x+5}{9}$ és $\frac{17x-5}{12}$ nem lehetnek egész számok.

Így ellentmondásra jutottunk, tehát a három szám nem lehet egyszerre egész.

II. megoldás. Tételezzük fel, hogy mind a három szám egész. Ekkor a két törtet a következő módon lehet alakítani:

$$\frac{14x+5}{9}=\frac{9x+5x+5}{9}=x+\frac{5(x+1)}{9},$$

$$\frac{17x-5}{12}=\frac{12x+5x-5}{12}=x+\frac{5(x-1)}{12}.$$

Mivel feltettük, hogy mind a három szám egész, így $\frac{5(x+1)}{9}$ és $\frac{5(x-1)}{12}$ is egész, tehát $9\mid 5(x+1)$ és $12\mid 5(x-1)$. $(5;9)=1$ és $(5;12)=1$ miatt $9\mid x+1$ és $12\mid x-1$.

Mivel 9 és 12 a 3 többszörösei, ezért $3\mid x+1$-nek és $3\mid x-1$-nek is igaznak kell lennie. Az első esetben az x szám 3-as maradéka 2, míg a második esetben az x szám 3-as maradéka 1. Ezzel viszont ellentmondásra jutottunk. Tehát a három szám nem lehet egyszerre egész.

Zömbik Barnabás (Budapest V. Ker. Eötvös József Gimn., 9. évf.) megoldása alapján

III. megoldás. Tegyük fel, hogy x, $\frac{14x+5}{9}$ és $\frac{17x-5}{12} \in \mathbb{Z}$. Vizsgáljuk a maradékosztályokat kongruenciával.

A feltételek alapján:

$$14x + 5 \equiv 0 \quad (9).$$

Így

$$14x + 5 \equiv 0 \quad (3),$$
$$17x + 5 \equiv 0 \quad (3),$$
$$17x - 4 \equiv 0 \quad (3).$$

Mivel $\frac{17x-5}{12} \in \mathbb{Z}$ is igaz kell, hogy legyen, így:

$$17x - 5 \equiv 0 \quad (12),$$
$$17x - 5 \equiv 0 \quad (3).$$

$17x - 5$ és $17x - 4$ nem lehet egyszerre 3 többszöröse, így ellentmondásra jutottunk. Tehát a három szám nem lehet egyszerre egész.

Kovács Gábor Benedek (Kiskunhalasi Bibó István Gimn., 12. évf.) megoldása alapján

IV. megoldás. A feladat alapfeltétele: $x \in \mathbb{Z}$. Tegyük fel, hogy $\frac{14x+5}{9}$ és $\frac{17x-5}{12} \in \mathbb{Z}$ is igaz. Legyen $\frac{14x+5}{9} = n$ és $\frac{17x-5}{12} = m$ $(n, m \in \mathbb{Z})$.

Fejezzük ki mindkét egyenletből x-et:

$$x = \frac{9n-5}{14} = \frac{12m+5}{17}.$$

Rendezzük n-re az egyenletet:

$$153n - 85 = 168m + 70,$$

$$n = \frac{168m+155}{153}.$$

Mivel $n \in \mathbb{Z}$, így $\frac{168m+155}{153} \in \mathbb{Z}$. Alakítsuk át a törtet:

$$\frac{168m+155}{153} = m + 1 + \frac{15m+2}{153}.$$

Mivel $m \in \mathbb{Z}$, így $\frac{15m+2}{153} \in \mathbb{Z}$. $3 \mid 153$, ezért $3 \mid 15m+2$ is igaz kell, hogy legyen. Mivel $3 \mid 15$, így $3 \mid 15m$. Viszont $3 \nmid 2$, így ellentmondásra jutottunk. Tehát a három szám nem lehet egyszerre egész.

Ungár Éva (Budapest, Lauder Javne Gimn., 11. évf.) megoldása alapján

V. megoldás. A feladat alapfeltétele: $x \in \mathbb{Z}$. Mivel $3 \mid 9$ és $3 \mid 12$, így próbálkozzunk a 3-as maradékok vizsgálatával. Az x szám 3-as maradéka 0, 1 vagy 2 lehet. Vizsgáljuk meg az egyes eseteket.

1. eset: $x = 3k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ekkor:

$$\frac{14x+5}{9} = \frac{14 \cdot 3k + 3 + 2}{9} = \frac{3 \cdot (14k+1) + 2}{9}$$

és

$$\frac{17x-5}{12} = \frac{17 \cdot 3k - 6 + 1}{12} = \frac{3 \cdot (17k-2) + 1}{12}.$$

Az első tört számlálójának 3-as maradéka 2, a második tört számlálójának pedig 1, így egyik tört sem lesz egész.

2. eset: $x = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ekkor:

$$\frac{14x+5}{9} = \frac{14 \cdot (3k+1) + 5}{9} = \frac{14 \cdot 3k + 14 + 5}{9} = \frac{3 \cdot (14k+6) + 1}{9}$$

és

$$\frac{17x-5}{12} = \frac{17 \cdot (3k+1) - 5}{12} = \frac{17 \cdot 3k + 17 - 5}{12} = \frac{3 \cdot (17k+4)}{12}.$$

Ebben az esetben a második tört számlálója osztható lesz 3-mal, ugyanakkor az első törté 1-et ad maradékul 3-mal osztva, tehát így sem lehet mindegyik tört egész.

3. eset: $x = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ekkor:

$$\frac{14x+5}{9} = \frac{14 \cdot (3k+2) + 5}{9} = \frac{14 \cdot 3k + 28 + 5}{9} = \frac{3 \cdot (14k+11)}{9}$$

és

$$\frac{17x-5}{12} = \frac{17 \cdot (3k+2) - 5}{12} = \frac{17 \cdot 3k + 34 - 5}{12} = \frac{3 \cdot (17k+9) + 2}{12}.$$

Ebben az esetben az első tört számlálója osztható 3-mal, a második tört számlálója azonban 2-t ad maradékul 3-mal osztva. Tehát így sem lehet mindkét tört egész.

Az összes esetet megvizsgálva ellentmondásra jutottunk, tehát a három szám nem lehet egyszerre egész.

Hajdú Bálint (Szekszárdi Garay János Gimn., 12. évf.)
megoldása alapján

VI. megoldás. Tegyük fel, hogy mindhárom szám egész. Legyen ekkor

$$\frac{14x+5}{9} = n \quad \text{és} \quad \frac{17x-5}{12} = m.$$

Vizsgáljuk meg az $s = 3n + 8m - 16x$ számot. Mivel $x, n, m \in \mathbb{Z}$, így $s \in \mathbb{Z}$ is igaz kell, hogy legyen.

$$s = 3n + 8m - 16x = 3 \cdot \frac{14x+5}{9} + 8 \cdot \frac{17x-5}{12} - 16x =$$

$$= \frac{14x+5}{3} + \frac{2 \cdot (17x-5)}{3} - 16x = \frac{14x + 5 + 34x - 10 - 48x}{3} = -\frac{5}{3}.$$

Mivel $-\frac{5}{3}$ nem egész szám, ezért ellentmondásra jutottunk. Tehát a három szám nem lehet egyszerre egész.

Halász Henrik (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 10. évf.) megoldása alapján

Megjegyzések. 1. A honlapon közölt megoldás hasonló ötleten alapul: azt mutatja meg, hogy $4m-3n=x-\frac{10}{3}$.

2. Mint látható, a megoldások elég sokfélék voltak, a többi megoldás csak kis mértékben tért el a közölt megoldásoktól.

3. Ha valaki indoklás nélkül csak annyit írt, hogy nem lehet a három szám egyszerre egész szám, nem kapott pontot.

Róka Bálint, javító

197 dolgozat érkezett. 3 pontos 169, 2 pontos 11, 1 pontos 5, 0 pontos 6 dolgozat. Nem versenyszerű 3 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (684–688.)

K. 684. *a*) Zsófi és Balázs egy 10×5 kockából álló csokit darabolnak fel, és közben egy játékot játszanak, melyben a tét három kocka csoki. A csokit felváltva törik el a kockákra osztó vonalak mentén, és az veszít a játékban, aki először tör le egy egy kockából álló darabot a csokiból. A játék során egyszerre csak egy darabot foghatnak meg, és törhetnek ketté a megadott szabály szerint. A játékot Zsófi kezdi. El tudja-e érni, hogy ő nyerjen?

b) Az első játék után Balázs visszavágót kért, azzal a feltétellel, hogy megint Zsófi kezdjen, de most az nyerjen, aki először tör egy egy kockából álló darabot. El tudja-e érni Zsófi, hogy ismét ő nyerjen?

K. 685. Pisti elment gombát szedni. Mivel egyre gyakorlottabb, ezúttal 62 vargányát talált, így az elmúlt egy évben a gombagyűjtéseire vonatkozóan a megtalált vargányák átlagos darabszámát 30-ról 32-re emelte. Hány vargányát kellett volna találnia a legutolsó alkalommal, hogy az átlag 33-ra emelkedjen?

K. 686. Felírjuk 1-től 100-ig az egész számokat egy-egy cédulára. A 100 darab cédula közül kiválasztunk véletlenszerűen 20 darabot. Mutassuk meg, hogy mindig találunk a kiválasztottak között négy olyat, hogy közülük kettőn-kettőn álló számok összege megegyezik.

K. 687. Egy utca egyik oldalán áll valahány játékrobot. Egy lépésben pontosan négy robotnak tudunk parancsot adni, hogy menjen át az út túloldalára. Hány robot esetén lehet elérni, hogy a robotok az utca túloldalára kerüljenek át?

K. 688. *a*) Párba lehet-e állítani az $1, 2, 3, 4, \ldots, 23, 24$ számokat úgy, hogy minden párban a számok összege négyzetszám legyen?

b) Párba lehet-e állítani az $1, 2, 3, 4, \ldots, 21, 22$ számokat úgy, hogy minden párban a számok összege négyzetszám legyen?

Beküldési határidő: 2021. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1651–1657.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1651. Egy számsorozat tagjait a következő módon képezzük: a sorozat első tagja 895, a következő tagot pedig mindig úgy kapjuk, hogy az előző tag számjegyeinek összegét megszorozzuk 61-gyel. Határozzuk meg a sorozat 2021. tagját és az első 2021 tag összegét.

C. 1652. Két derékszögű háromszögnek egységnyi a rövidebb befogója. Mindkettő háromszögben a derékszögnél levő csúcs egységnyire van az átfogó harmadolópontjától: az egyik esetében a közelebbi, a másik esetében a távolabbi harmadolóponttól. Igazoljuk, hogy a háromszögek egységtől különböző oldalai között van három, amelyből derékszögű háromszög szerkeszthető.

Feladatok mindenkinek

C. 1653. Hány megoldása van az egész számpárok körében az

$$|x| + |y| < 2021$$

egyenlőtlenségnek?

C. 1654. Adjuk meg azoknak a köröknek a sugarát, amelyek érintik az $f(x) = \frac{3x-6}{4}$ és a $g(x) = \frac{28-4x}{3}$ függvények grafikonját, valamint az x tengelyt.

C. 1655. Oldjuk meg a $2(x + y - 1831)^2 = (2x - 1802)(2y - 1860)$ egyenletet a valós számpárok halmazán.

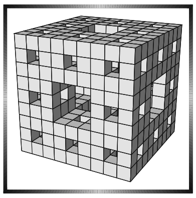
Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1656. Egy számtani sorozat három szomszédos tagja 3-nál nagyobb prímszám. Mutassuk meg, hogy a sorozat differenciája osztható hárommal.

Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

C. 1657. Az ABC derékszögű háromszög BC és CA befogóira kifelé a BCD és CAE szabályos háromszögeket rajzoljuk. Bizonyítsuk be, hogy az AB, CD és CE szakaszok felezőpontjai szabályos háromszöget alkotnak.

Beküldési határidő: 2021. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5150–5157.)

B. 5150. Igazoljuk, hogy csak véges sok olyan pozitív egész szám van, amelyet nem lehet megkapni úgy, hogy egy kisebb számhoz hozzáadjuk annak valamelyik számjegyét. Melyik a legnagyobb ezek közül?

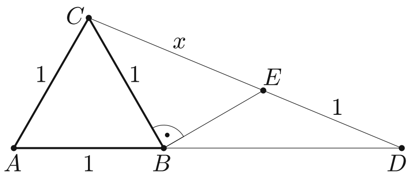
(*4 pont*)

B. 5151. Igazoljuk, hogy ha $a^2 = b^2 + ac = c^2 + ab$, akkor az a, b, c számok közül valamelyik kettő egyenlő.

(*3 pont*)

B. 5152. Határozzuk meg azokat az 1-nél nagyobb pozitív egész számokat, amelyek összes pozitív osztóját fel lehet írni egy körvonalra úgy, hogy a szomszédos osztók hányadosa mindig prímszám legyen.

(*5 pont*) Javasolta: *Lenger Dániel* (Budapest) és *Szűcs Gábor* (Szikszó)



B. 5153. Legyenek A, B, C egy egységnyi oldalú szabályos háromszög csúcsai, míg D egy pont az AB oldal B-n túli meghosszabbításán. A BC szakaszra B-ben állított merőleges a CD szakaszt az E pontban metszi. Határozzuk meg a CE szakasz hosszát, ha $ED = 1$.

(*4 pont*) Javasolta: *Szilassi Lajos* és *Tarcsay Tamás* (Szeged)

B. 5154. Adjuk meg az összes olyan pozitív egészeken értelmezett, pozitív egész értékű f függvényt, amelyre $f\big(f(n)\big) = 2n$ és $f(4n-3) = 4n-1$ teljesül bármely pozitív egész n esetén.

(*4 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5155. Az $ABCD$ konvex négyszögnek nincsenek párhuzamos oldalai, az AB és CD egyenesek metszéspontja M. Az AB oldal belsejében az X, a CD oldal belsejében pedig az Y pont úgy mozog, hogy közben $AX : XB = DY : YC$.

Mutassuk meg, hogy az MXY köröknek van még egy, M-től különböző közös pontja.

(*5 pont*)

B. 5156. Legyen K egy konvex $2n$-szög, amelynek minden oldala egységnyi, és szemközti oldalai párhuzamosak. Mutassuk meg, hogy K-t fel lehet bontani véges sok egységnyi oldalhosszúságú rombuszra. Hány rombuszból állhat egy ilyen felbontás?

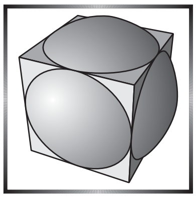
(*6 pont*)

B. 5157. A diákok a táblára felírtak néhány egész számot. Hárman (egymástól függetlenül) véletlenszerűen kiválasztanak egy-egy táblára írt számot, és leírják a füzetükbe. Mutassuk meg, hogy a három leírt szám összege legalább 1/4 valószínűséggel 3-mal osztható.

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2021. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (793–794.)



A. 793. Adva van egy 43 dimenziós térbeli véges S ponthalmaz konvex burkában egy 47 csúcsú P poliéder. Mutassuk meg, hogy kiválaszthatjuk S-nek legfeljebb 2021 pontját úgy, hogy már az ő konvex burkukban is benne legyen P, és ez éles.

Javasolta: *Pálvölgyi Dömötör,* Budapest

A. 794. Egy négyzetrácson egy n darab négyzetből álló P poliminót egy lépésben fel lehet emelni a négyzetrácsról, és egy új pozícióba vissza lehet tenni (egy ilyen lépésnél minden egybevágósági transzformáció megengedett, amely a négyzetrácsot önmagába viszi), ha a régi és az új pozíció pontosan $n-1$ darab közös egységnégyzetet tartalmaz. A P poliminóra azt mondjuk, hogy n területű *pillangó,* ha ilyen lépések sorozatával el lehet érni, hogy a P által eredetileg elfoglalt összes egységnégyzet felszabaduljon.

Hányféle nem egybevágó 10^6+1 területű pillangót lehet találni?

Javasolta: *Nikolai Beluhov,* Bulgaria

Beküldési határidő: 2021. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Informatikából kitűzött feladatok

I. 529. Nevezzük *rendes* számoknak azokat a pozitív egészeket, amelyekben minden számjegy értéke nagyobb annál, mint ahányadik helyiértéken (balról jobbra számolva) megtalálható a számjegy. Például a 256 rendes szám, mivel az első helyen van egy 2-es, a második helyen van egy 5-ös és a harmadik helyen van egy 6-os. A 2538 viszont nem rendes szám, mert a harmadik helyen egy 3-as áll.

Készítsünk programot, amely megadja az N-edik rendes számot ($1 \leqslant N \leqslant 100\,000$). A program a standard bemenetről olvassa be N értékét, majd a standard kimenet egyetlen sorába írja ki az N-edik rendes számot.

Beküldendő egy tömörített `i529.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

	A	B
1	1	1234
2	2	1243
3	3	1324
4	4	1342
5	5	1423
6	6	1432
7	7	2134
8	8	2143
9	9	2314
10	10	2341
11	11	2413
12	12	2431
13	13	3124
14	14	3142
15	15	3214
16	16	3241
17	17	3412
18	18	3421
19	19	4123
20	20	4132
21	21	4213
22	22	4231
23	23	4312
24	24	4321
25		
26		
27		

I. 530. Néhány elem összes sorbarendezését, azaz az ismétlés nélküli permutációját nem is olyan könnyű számítógéppel megadni.

Táblázatkezelő programban hozzuk létre az `i530` nevű munkafüzetet. Ebben készítsük el az A, B, C, D, E karakterek összes lehetséges permutációját lexikografikus sorrendben az ABCDE-től az EDCBA-ig. A *minta* szerint számozzuk és jelenítsük meg az eseteket. Arra figyeljünk, hogy az A oszlopban csak akkor jelenjen meg szám, továbbá mellette a B oszlopban csak akkor legyen a cellának szegélye és `#FFFFCC` kódú héttérszíne, ha tartalmaz adatot. Az A:B tartomány adatait igazítsuk vízszintesen középre. (A mintán az 1, 2, 3, 4 számjegyek összes lehetséges sorrendjét látjuk.)

Segédszámításokat a külön erre a célra létrehozott Permutáció munkalapon végezhetünk, a Munka1 munkalapon csak az A:B tartomány tartalmazhat adatokat. A megoldáshoz makró vagy más program nem használható, csak a táblázatkezelő beépített függvényei.

Beküldendő egy `i530.zip` tömörített állományban a táblázatkezelő munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amely megadja, hogy a program melyik táblázatkezelő hányas verziójában készült és egy kb. húszsoros magyarázat a megoldás módszeréről.

I. 531 (É). Ebben a feladatban egy kis létszámú iskola tanulóinak adatait elemezzük adatbázis-kezelő segítségével. A tanulók adatait a `tanulo.txt`, az osztályok adatait pedig az `osztaly.txt` tabulátorral tagolt, UTF-8 kódolású szövegfájlok tartalmazzák. A mezőnevek az első sorban vannak.

Készítsünk új adatbázist `i531` néven, és a mellékelt adatállományokat importáljuk az adatbázisba a forrásállományokkal azonos néven. A létrehozás során állítsuk be a megfelelő típusokat és kulcsokat.

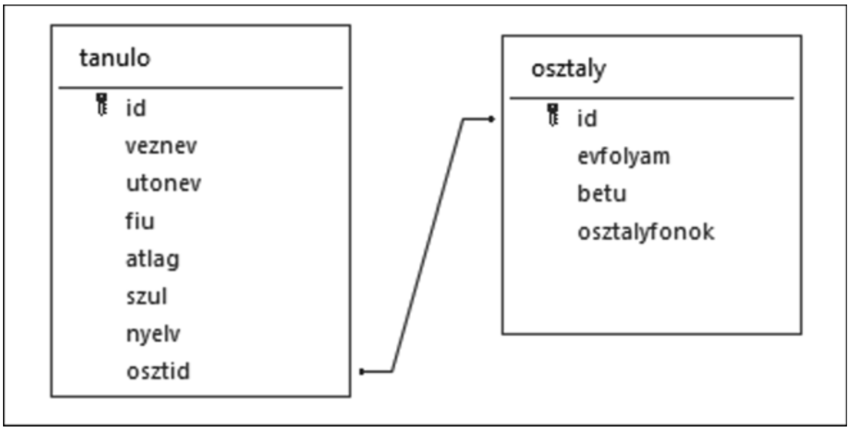
Táblák:

tanulo (id, veznev, utonev, fiu, atlag, nyelv, osztid)

id	A tanuló azonosítója, ez a kulcs (számláló).
veznev	A tanuló vezetékneve (szöveg).
utonev	A tanuló utóneve (szöveg). Minden tanulónak csak egy utóneve van.
fiu	A tanuló neme (logikai). Igaz, ha a tanuló fiú, és hamis, ha lány.
atlag	A tanuló előző félévi tanulmányi átlaga (két tizedesjegy pontosságú valós szám).
szul	A tanuló születési dátuma (dátum).
nyelv	A tanuló által választott második idegen nyelv (szöveg).
osztid	A tanuló osztályát azonosító szám (idegen kulcs).

osztaly (id, evfolyam, betu, osztalyfonok)

id	Az osztály azonosítója, ez a kulcs (szám).
evfolyam	Az osztály az adott tanévben melyik évfolyamra jár (szám).
betu	Az osztály betűjele az adott évfolyamon (szöveg).
osztalyfonok	Az osztályfőnök neve (szöveg).



Készítsük el a következő feladatok megoldását. Az egyes lekérdezéseknél ügyeljünk arra, hogy mindig csak a kért értékek jelenjenek meg és más adatok ne. A megoldásokat a zárójelben lévő néven mentsük el.

1. Listázzuk ki a 4,5-nél jobb tanulmányi eredményt elért tanulók vezeték- és utónevét, átlagát, valamint osztályának évfolyamát és betűjelét az osztályok szerinti, azon belül pedig az átlag szerinti sorrendben. (1jelesek)
2. Írassuk ki lekérdezéssel az osztályok évfolyamát, betűjelét, létszámát és osztályátlagát. Az adatok átlag szerint csökkenő sorrendben jelenjenek meg. Az osztályátlagokat két tizedesjegyre kerekítve írassuk ki. (2osztalyok)
3. Zöld Alma szeretne nyelvi tanulmányutat szervezni a vele azonos nyelvet tanuló diákoknak. Kiket kell megkeresnie? A lekérdezésben jelenjen meg az érintett tanulók vezeték- és utóneve, valamint osztályuk évfolyama és betűjele, de maga Zöld Alma ne legyen a listában. (3alma)
4. A tanévnyitó ünnepélyen a belépő kilencedik osztályokat mindig az iskola legfiatalabb, már tavaly is ide járó tanulója köszönti. Az idén van olyan diák, aki valamennyi kilencedikesnél fiatalabb. Adjuk meg a tanuló vezeték- és utónevét, valamint évfolyamát és osztályát. Ha több ilyen tanuló is van, mindegyiket adjuk meg. (4fiatal)
5. Az iskolában az egyik legnépszerűbb idegen nyelv a francia. Ennek ellenére vannak olyan osztályok, amelyekben senki sem választotta. Az alábbi lekérdezés ezeket az osztályokat adja meg. Mit kell írnunk ehhez a ... helyére? A teljes lekérdezést készítsük el. (5francia)
```
SELECT DISTINCT evfolyam, betu
FROM tanulo, osztaly
WHERE osztid NOT IN (...)
AND osztid=osztaly.id;
```
6. Az iskolában az „a" osztályok reál, a „b" osztályok humán tagozatosok. Igaz-e, hogy a reál tagozatos osztályokban a fiúk, a humán tagozatos osztályokban a lányok száma nagyobb? Készítsünk lekérdezést, amely kiíratja a fiúk és lányok számát mindkét tagozaton, az alábbi mintának megfelelően. (6real)

8fiúklányok

Tagozat	Nem	Fő
Reál	Fiúk	20
Reál	Lányok	12
Humán	Fiúk	20
Humán	Lányok	8

7. Határozzuk meg osztályonként a legjobb átlagú tanulókat. A lekérdezés jelenítse meg a tanulók osztályának évfolyamát és betűjelét, a tanulók vezeték- és utónevét, valamint átlagát. A lista legyen az évfolyam, azon belül osztály és a tanulók neve szerinti sorrendben. Ha egy osztályban több ilyen tanuló is van, mindegyik jelenjen meg. (7legjobbak)
8. Készítsünk jelentést, amely a mintának megfelelő szerkezetben listázza ki az iskola névsorát osztályonként. A jelentés címe és az adatok címsora a mintának megfelelően, ékezethelyesen jelenjen meg. (8Lista)

Osztályonkénti névsor

Osztály	Osztályfőnök	Tanuló	
9. a	Rettegett Iván		
		Fa	Zoltán
		Mák	Virág
		Moth	Oszkár

Beküldendő egy tömörített `i531.zip` állományban az adatbázis, valamint egy rövid dokumentáció, amelyből kiderül az alkalmazott adatbázis-kezelő neve, verziószáma.

I/S. 51. Adott egy kép, amit egy N sorból és M oszlopból álló pixelrács reprezentál. Jelöljük az i-edik sor j-edik pixelét $P[i][j]$-vel. Minden pixel három különböző értéket vehet fel: `R` = piros, `G` = zöld, `B` = kék. A képeknél elég ritka, hogy egy $P[i][j]$ pixel egyik élszomszédja sem azonos színű a $P[i][j]$ pixellel, ezért ezeket *gyanús* pixeleknek hívjuk. *Hibás* pixelnek nevezzük azokat, amelyek gyanúsak, és egyik élszomszédjuk sem gyanús. Készítsünk programot, amely megadja a hibás pixelek számát.

Bemenet: az első sor tartalmazza az N és az M számot. A következő N sor mindegyike a pixelrács egy adott sorát reprezentálja. Minden sor pontosan M karakterből áll, ezek értéke lehet `R`, `G` vagy `B`. Az i-edik sor j-edik betűje a kép $P[i][j]$ pixelét írja le.

Kimenet: Adjuk meg a hibás pixelek számát.

Példa:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesíti)	**Kimenet**
`4 4 / RRGB / RRRB / RRGG / RGRB`	`1`

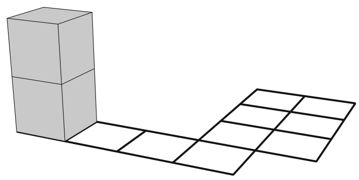
Magyarázat: a $P[1][3]$, $P[4][2]$, $P[4][3]$, $P[4][4]$ pixelek gyanúsak, melyek közül csak a $P[1][3]$ hibás.

Korlátok: $3 \leqslant N, M \leqslant 100$, $P[i][j] =$ `R` vagy `G` vagy `B`. Időkorlát: 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha tudjuk, hogy minden gyanús pixel hibás.

Beküldendő egy `is51.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 150. Van egy $N \times M$ mezőből álló játéktáblánk, melynek egyes mezői lyukasak. Van továbbá egy $1 \times 1 \times 2$ oldalú téglatestünk, melyet a következő szabályok szerint mozgathatunk a táblán: a téglatestnek minden lépés után teljes felületével szilárd mezőn kell állnia (különben leesik); a téglatestet minden lépésben egy hosszú



vagy egy rövid, a talajon lévő élén átforgatva mozgathatjuk a szomszédos mezőkre.

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy el lehet-e juttatni a táblán elhelyezett téglatestet a kiinduló mezőjéről egy adott célmezőre. A téglatestnek a kiinduló és a célmezőjén is egy 1×1-es oldalán kell állnia.

Bemenet: az első sor tartalmazza a tábla sorainak és oszlopainak számát, azaz N-et és M-et. A következő N sor mindegyikében M karakter található. Az i-edik sor j-edik karaktere „`#`", ha a mező nem lyukas, és „`.`", ha a mező lyukas. A következő sorban a megválaszolandó kérdések Q száma szerepel. Az utána lévő Q sor mindegyikében egy téglatest kezdő mezőjének sor- és oszlopindexe, majd egy célmező sor- és oszlopindexe szerepel szóközzel elválasztva. A sorokat és oszlopokat nullától indexeljük.

Kimenet: az a szám, ahány kérdésre igen a válasz.

Példa:

Bemenet (a `/` jel sortörést helyettesíti)	**Kimenet**

`4 5`
`...##/...##/...##/####.`
`2 / 3 0 0 4 / 2 4 0 4`
	`1`

Magyarázat: az első téglatest az alábbi lépésekkel eljuthat a célba: elfektetés a $(3,1)$ és $(3,2)$ mezőkre, felállítás a $(3,3)$-ra, elfektetés az $(1,3)$ és $(2,3)$ mezőkre, átfordítás az $(1,4)$–$(2,4)$-re, felállítás a $(0,4)$-re. A második téglatest nem juttatható el a célba álló helyzetben.

Korlátok: $1 \leqslant N, M \leqslant 200$, $1 \leqslant Q \leqslant 10\,000$. *Időkorlát:* 0,5 mp.

Értékelés: A pontok 50%-a kapható, ha $Q = 1$.

Beküldendő egy `s150.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2021. március 15.

❄

Közlemény

A szerkesztőség elköltözött, az új cím:

1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.

A telefonszám és a postai cím nem változott.

Fizika gyakorlat megoldása

G. 722. *Felül nyitott edényben gázlángon vizet forralunk. Közvetlenül a gáz elzárása és a láng kialvása után fehér gőzfelhőt figyelhetünk meg az edény felett. Magyarázzuk meg ezt a jelenséget!*

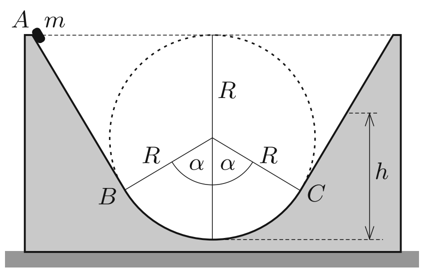
(*3 pont*)

Megoldás. Az edényben lévő víz a melegítés közben erőteljesen párolog, vízpárát juttatva az edény fölötti levegőbe. Ez a folyamat egy áramlás is egyben, hiszen a forró pára mindig felfelé száll, és a korábban képződött rétegek helyét átveszik az újonnan képződöttek. Ez a párolgás nem annyira szembeötlő jelenség, mint amit a feladat leír, hiszen a vízgőz átlátszó, és a levegő a melegítés hőfokán képes ezt a páratartalmat megtartani. Amint a melegítés megszűnik, ez az áramlás is megáll, tehát az intenzív párolgásból adódó páratartalom az edény közelében marad. Ezután – szintén a hőforrás hiánya miatt – gyors lehűlés következik be. A hideg levegő kevesebb párát tud megtartani, aminek következtében a maradék páratartalom ködszerű, fehér gőzfelhő formájában kicsapódik. A gőzfelhőben lévő parányi vízcseppeken szóródik a fény, ezért az jól látható.

Jeszenői Sára (Kecskeméti Katona J. Gimn., 10. évf.)

47 dolgozat érkezett. Helyes 26 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 14, hibás 3, nem versenyszerű 4 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5251. *Az m tömegű, kis méretű testet az* ábrán *látható, rögzített hasáb A pontjában kezdősebesség nélkül elengedjük. A test a bal oldali egyenes szakaszon és az R sugarú köríven súrlódásmentesen csúszik. A jobb oldali egyenes szakasz nem súrlódásmentes, a súrlódási tényező μ.*

a) Mekkora erővel nyomja a test a hasábot a pálya legmélyebb pontján?

b) Mekkora a test sebessége a C pontban?

c) Milyen h magasságba emelkedik fel a test?

Adatok: $m = 0{,}6$ kg, $R = 30$ cm, $\alpha = 60^\circ$, $\mu = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

Megoldás. *a*) A mozgás azon szakaszán, ahol nincs súrlódás, alkalmazható a mechanikai energiamegmaradás tétele. A test helyzeti energiája az A pont és a pálya legmélyebb pontja között $\Delta E_\mathrm{h} = mg\cdot 2R$ értékkel csökken. Ez akkor egyezik meg a v sebességgel haladó test $E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv^2$ mozgási energiájával, ha

$$v = \sqrt{4gR} = \sqrt{4\cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}3\ \mathrm{m}} \approx 3{,}43\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

ekkora tehát a pálya alsó részénél körmozgást végző test kerületi sebessége. A pálya legmélyebb pontján a körmozgást végző test centripetális gyorsulását a testre ható mg nagyságú nehézségi erő és a pálya által kifejtett N nagyságú nyomóerő előjeles összege biztosítja:

$$m\frac{v^2}{R} = N - mg,$$

ahonnan

$$N = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right) = 5\,mg = 5\cdot 0{,}6\ \mathrm{kg}\cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \approx 29{,}4\ \mathrm{N}$$

adódik. Ekkora erővel nyomja a hasáb a testet függőlegesen felfelé, tehát (a hatás-ellenhatás törvénye szerint) ugyanekkora erőt fejt ki a test a hasábra függőlegesen lefelé.

b) A test a C pontban $R + R\cos\alpha = \frac{3}{2}R = 0{,}45$ méterrel alacsonyabban van, mint az A pontban volt. Az energiamegmaradás tétele szerint

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = mg\cdot\frac{3}{2}R,$$

vagyis a test sebessége a C pontban

$$v_C = \sqrt{3gR} = \sqrt{3\cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}3\ \mathrm{m}} = 2{,}97\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

nagyságú lesz.

c) Miután a test letér a körpályáról, egy $\alpha = 60^\circ$-os meredekségű lejtőn halad tovább. A test mozgását egyrészt a nehézségi erő lejtő irányú komponense, másrészt a súrlódási erő lassítja. Ezek eredője:

$$F = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = mg\sin\alpha + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\cdot mg\cos\alpha = \frac{3}{2}mg\sin\alpha,$$

és ennek megfelelően a test lassulása

$$|a| = \frac{3}{2}\,g\sin\alpha = 12{,}74\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Ekkora lassulással a lejtő aljánál v_C sebességgel rendelkező test

$$\Delta t = \frac{v_C}{|a|} = 0{,}233\ \mathrm{s}$$

idő múlva áll meg. Mivel az egyenletesen lassuló test átlagsebessége

$$\overline{v} = \frac{1}{2}v_C = 1{,}485\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

a megállásig megtett út hossza: $s = \overline{v} \cdot \Delta t = 0{,}346$ m. Ennek megfelelően a lejtőn mozgó test függőleges emelkedési magassága

$$h_1 = s \cdot \sin\alpha = 0{,}30\ \mathrm{m},$$

amihez hozzáadva a C pontnak a pálya legalsó pontjához viszonyított

$$h_2 = R(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}R = 0{,}15\ \text{m-es}$$

magasságát, az emelkedés teljes magasságára a $h = h_1 + h_2 = 0{,}45$ m eredményt kapjuk.

Kovács Kinga (Kecskeméti Katona J. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

91 dolgozat érkezett. Helyes 43 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 16, hiányos (1–3 pont) 26, hibás 5, nem értékelhető 1 dolgozat.

P. 5253. *Az Orfűn található Pécsi-tó átlagos vízmélysége* 3,3 *méter. A* 25 °C-*os víz hőmérsékletének mekkora változása okozná a vízszint fél centiméteres süllyedését?*

(*4 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

Megoldás. Legyen a tó kezdeti hőmérséklete $t_0 = 25$ °C, kezdeti átlagos mélysége $d_0 = 3{,}3$ m, kezdeti térfogata V_0, a térfogatváltozás ΔV, a tó átlagos mélységének megváltozása $\Delta d = -0{,}5\ \mathrm{cm} = -5 \cdot 10^{-3}$ m, a keresett hőmérséklet-változás Δt, $t_0 + \Delta t = t_1$, és a víz sűrűsége t_1 hőmérsékleten ϱ_1.

Az egyszerűség kedvéért tekintsük úgy, hogy a tó medrének fala függőleges az adott fél centiméteren. (Ez nyilván nem igaz, de a meder falának ferdeségéből adódó térfogatkülönbség az egész tó fél centiméter vastag rétegének térfogatához képest elhanyagolhatóan kicsi.) Megállapíthatjuk, hogy

$$\Delta V = \frac{\Delta d}{d_0}\,V_0 = -\frac{0{,}5}{330}\,V_0.$$

A függvénytáblázat szerint

$$\varrho_{25\,^\circ\mathrm{C}} = 997{,}07\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

Számítsuk ki, hogy mekkora a víz sűrűsége a keresett t_1 hőmérsékleten! Mivel a víz tömege (m) állandó,

$$\varrho_{t_1} = \frac{m}{V_0 + \Delta V} = \frac{m}{\left(1 - \frac{0{,}5}{330}\right) \cdot V_0} = \varrho_{25\,^\circ\mathrm{C}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{0{,}5}{330}} =$$

$$= 997{,}07\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{0{,}5}{330}} \approx 998{,}58\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

Ugyancsak a függvénytáblázat adatai szerint:

$$\varrho_{15\,^\circ\mathrm{C}} = 999{,}126\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

és

$$\varrho_{20\,^\circ\mathrm{C}} = 998{,}23\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3},$$

tehát a keresett t_1 hőmérséklet 15 °C és 20 °C közé esik.

Közelítsük a víz sűrűség–hőmérséklet függvényét a [15 °C; 20 °C]-os intervallumon egy lineáris függvénnyel, mely értéke 15 °C-nál $\varrho_{15\,^\circ\mathrm{C}} = 999{,}126\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, 20 °C-nál $\varrho_{20\,^\circ\mathrm{C}} = 998{,}23\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Ennek a lineáris függvénynek a meredeksége:

$$\frac{\varrho_{20\,^\circ\mathrm{C}} - \varrho_{15\,^\circ\mathrm{C}}}{20\,^\circ\mathrm{C} - 15\,^\circ\mathrm{C}} \approx -0{,}179\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3(^\circ\mathrm{C})}.$$

Lineáris interpolációnál ugyanezt a meredekséget adja a $\frac{\varrho_{t_1} - \varrho_{15\,^\circ\mathrm{C}}}{t_1 - 15\,^\circ\mathrm{C}}$ hányados, azaz felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{\varrho_{t_1} - \varrho_{15\,^\circ\mathrm{C}}}{t_1 - 15\,^\circ\mathrm{C}} = -0{,}179 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3\ (^\circ\mathrm{C})}.$$

Innen

$$t_1 = \frac{\varrho_{t_1} - \varrho_{15\,^\circ\mathrm{C}}}{-0{,}179\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3\cdot{}^\circ\mathrm{C}}} + 15\,^\circ\mathrm{C} = \frac{998{,}58 - 999{,}126}{-0{,}179}\,^\circ\mathrm{C} + 15\,^\circ\mathrm{C} \approx 18\,^\circ\mathrm{C}.$$

A tó hőmérséklete tehát 18 °C-ra változik, azaz a víz lehűlése:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = 18\,^\circ\mathrm{C} - 25\,^\circ\mathrm{C} = -7\,^\circ\mathrm{C}.$$

Barta Gergely (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. A legtöbb versenyző a víz térfogatváltozását a víz valamilyen hőmérséklethez tartozó hőtágulási együtthatójának segítségével próbálta meghatározni. Ez meglehetősen pontatlan eljárás, hiszen a víz sűrűség–hőmérséklet összefüggése csak nagyon kicsiny szakaszokon tekinthető lineáris függvénynek. (Ezt a tulajdonságot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a víz hőtágulási együtthatója erősen hőmérsékletfüggő.) Pontosabb eredményt kapunk, ha a sűrűség–hőmérséklet kapcsolatot táblázatból keressük ki. Az interneten megtalálható táblázatok (vagy sűrűségkalkulátorok) használatával még a lineáris interpoláció fáradságos munkáját is elkerülhetjük.

94 dolgozat érkezett. Helyes 35 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 16, hiányos (1–2 pont) 25, hibás 13, nem versenyszerű 5 dolgozat.

P. 5256. *Hogyan változik meg egy síkkondenzátor kapacitása, ha a fegyverzetek közötti térrész két felét két különböző dielektromos állandójú, homogén, elektromosan szigetelő anyaggal töltjük ki, és a két réteget elválasztó felület*

a) a fegyverzetekre merőleges sík;

b) a fegyverzetekkel párhuzamos sík?

(*4 pont*) Közli: *Wiedemann László,* Budapest

Megoldás. Legyen a kétféle anyag relatív dielektromos állandója $\varepsilon_1^{(\mathrm{rel})}$ és $\varepsilon_2^{(\mathrm{rel})}$. Tudjuk, hogy ha egy C kapacitású kondenzátort egyenletesen kitöltünk $\varepsilon^{(\mathrm{rel})}$ relatív dielektromos állandójú anyaggal, akkor a kapacitás $C' = \varepsilon^{(\mathrm{rel})}C$-re változik.

a) Ebben az esetben az elrendezés felfogható két *párhuzamosan* kapcsolt kondenzátorként, melyek egyike $\varepsilon_1^{(\mathrm{rel})}$, másika $\varepsilon_2^{(\mathrm{rel})}$ relatív dielektromos állandójú anyaggal van kitöltve, hiszen ott is az egyik és másik oldalon lévő fegyverzetek külön-külön össze vannak kötve egymással, és így ekvipotenciálisak, éppen úgy, mint a mi esetünkben. Az így kapott két kondenzátor fegyverzetének területe feleakkora, mint az eredetié, és a kitöltő szigetelőanyagot is figyelembe véve kapacitásaik

$$C_1 = \varepsilon_1^{(\mathrm{rel})}\frac{C}{2}, \qquad \text{illetve} \qquad C_2 = \varepsilon_2^{(\mathrm{rel})}\frac{C}{2}.$$

Az eredő kapacitás párhuzamos kapcsolásnál ezek összege:

$$C' = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_1^{(\mathrm{rel})} + \varepsilon_2^{(\mathrm{rel})}}{2}C.$$

Ezek szerint a relatív dielektromos állandók *számtani* közepével szorzódik meg az eredeti kapacitás. Az is könnyen belátható, hogy ha más arányban osztják fel az egyes szigetelők a kondenzátor térfogatát, akkor szorzótényezőnek a *súlyozott* számtani közepet kapjuk.

b) Ebben az esetben a kétféle szigetelőanyagot elválasztó felület pontjai ekvipotenciálisak, hiszen a határfelület síkja párhuzamos a fegyverzetekkel. Ha ide két, vezetékkel összekötött, vékony fémlapot rakunk, attól nem változik meg az elektromos tér szerkezete, így sem a töltéselrendeződés, sem az eredő kapacitás nem változhat meg. Így két, különböző szigetelővel kitöltött kondenzátor *soros* kapcsolását kapjuk. A két új kondenzátor fegyverzetei közti távolság az eredeti érték fele, így a szigetelőanyagok jelenlétét is figyelembe véve a kapacitásuk

$$C_1 = 2\varepsilon_1^{(\mathrm{rel})}C \qquad \text{és} \qquad C_2 = 2\varepsilon_2^{(\mathrm{rel})}C.$$

Az eredő kapacitás soros kapcsolásnál:

$$C'' = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{2}{\frac{1}{\varepsilon_1^{(\mathrm{rel})}} + \frac{1}{\varepsilon_2^{(\mathrm{rel})}}}C = \frac{2\varepsilon_1^{(\mathrm{rel})}\varepsilon_2^{(\mathrm{rel})}}{\varepsilon_1^{(\mathrm{rel})} + \varepsilon_2^{(\mathrm{rel})}}C.$$

Ilyenkor tehát a dielektromos állandók *harmonikus* közepével szorzódik meg az eredeti kapacitás. Ha a kétféle szigetelőanyag nem fele-fele arányban osztja fel a kondenzátor térfogatát, akkor súlyozott harmonikus középként kapjuk meg az eredő kapacitást.

Tóth Ábel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

35 dolgozat érkezett. Helyes 13 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 9, hiányos (1–2 pont) 9 , hibás 3, nem értékelhető 1 dolgozat.

P. 5260. *Vízszintes tengelyű, rögzített hengeren súrlódó fonalat vetünk át. Ha a fonál bal oldali végére m tömegű nehezéket, a jobb oldalira pedig $3m$ tömegűt akasztunk, akkor az álló helyzetből elengedett testek* $2\ \mathrm{m/s^2}$ *nagyságú gyorsulással mozognak.*

a) Mekkora gyorsulással mozognak a testek, ha mindkét oldalon először megduplázzuk, majd megháromszorozzuk a tömegüket?

b) Mekkora gyorsulással mozognak a testek, ha a jobb oldalon meghagyjuk a $3m$ nagyságú tömeget, de a bal oldali fonálvégre $8m$ tömegű testet akasztunk?

c) Hogyan válasszuk meg a bal oldali fonálvégre akasztott test tömegét, miközben a jobb oldalon megmarad a $3m$ tömeg, hogy elengedés után a rendszer nyugalomban maradjon?

A fonál nagyon könnyű, továbbá a fonál és a henger közötti csúszási súrlódás együtthatója megegyezik a tapadási súrlódás együtthatójával.

(*6 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

Megoldás. Az *1. ábra* az alapelrendezést mutatja. A testek gyorsulása $a = 2\ \mathrm{m/s^2}$. Az egyes testekre K_1 és K_2 nagyságú fonálerő hat. A fonál súrlódik a hengeren, emiatt $K_1 \neq K_2$. A jobb oldali test lefelé mozog, a bal oldali felfelé, ilyenkor $K_1 > K_2$.

Jelöljük a fonálerők arányát λ-val:

$$\frac{K_1}{K_2} = \lambda > 1.$$

A λ szám nagysága nyilván függ a súrlódási együtthatótól, a geometriai viszonyoktól, és elvben függhetne még a K_1 erő nagyságától is. Mivel λ dimenziótlan, K_1 pedig newton dimenziójú, λ *nem függhet* K_1-től, tehát a további esetekben (ha a fonál csúszik a hengeren) ugyanakkora számnak tekinthető.

Megjegyzés. A λ arányszám és a súrlódási együttható (μ) kapcsolatát felsőbb matematikai módszerekkel, az ún. kötélsúrlódási alapegyenlet megoldásával lehet meghatározni. Az eredmény: $\lambda = \mathrm{e}^{\mu\pi}$. Erre az összefüggésre azonban a feladatban feltett kérdések megválaszolásához nem lesz szükségünk.

Írjuk fel mindkét testre a dinamika alapegyenletét, és fejezzük ki a kötélerők arányát!

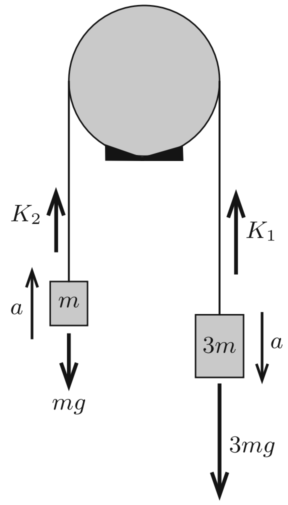
$$\begin{aligned} 3mg - K_1 &= 3ma \qquad \Rightarrow \qquad K_1 = 3m(g-a), \\ K_2 - mg &= ma \qquad \Rightarrow \qquad K_2 = m(g+a), \end{aligned}$$

ahonnan

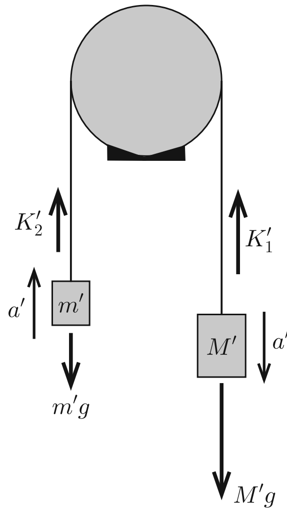
$$\lambda = \frac{K_1}{K_2} = \frac{3(g-a)}{g+a} = 1{,}98 \approx 2.$$

(A kötélsúrlódási egyenlet szerint ez kb. $\mu = 0{,}2$-nek felel meg.)

Írjuk fel a mozgásegyenleteket általánosan, más tömegek esetére is! A fonál jobb oldali végén legyen egy M', a bal oldalin egy m' tömegű test ($M' > m'$), a rájuk



1. ábra



2. ábra

ható fonálerők nagysága pedig K_1' és K_2'. A nagyobb tömegű test a' gyorsulással kezd el mozogni lefelé (*2. ábra*).

A fonál és a henger közötti súrlódási tényező továbbra is μ, tehát a fonálerők aránya ugyanakkora, mint az alapesetben:

$$\frac{K_1'}{K_2'} = \lambda = 1{,}98 \approx 2.$$

A mozgásegyenletek tehát

$$M'g - K_1' = M'a' \qquad \Rightarrow \qquad K_1' = M'(g - a'),$$
$$K_2' - m'g = ma' \qquad \Rightarrow \qquad K_2' = m'(g + a'),$$

valamint $K_1' = \lambda K_2'$. Innen a gyorsulás:

$$a' = \frac{(M'/m') - \lambda}{(M'/m') + \lambda} \cdot g. \tag{1}$$

a) Ha a tömegeket az eredeti értékek kétszeresére, illetve háromszorosára növeljük ($m' = 2m$ és $M' = 6m$, illetve $m' = 3m$ és $M' = 9m$), akkor a tömegek aránya ugyanakkora marad, mint az alapesetben volt ($M'/m' = 3$), tehát a gyorsulás mindegyik esetben

$$a' = \frac{3 - 1{,}98}{3 + 1{,}98} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 2{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

b) Ebben az esetben a bal oldali test a nagyobb tömegű, az fog tehát lefelé mozogni. Cseréljük fel a jobb és a bal oldalt, hogy az (1) összefüggést használhassuk. Most $M' = 8m$ és $m' = 3m$, tehát a testek gyorsulása:

$$a' = \frac{8 - 3 \cdot 1{,}98}{8 + 3 \cdot 1{,}98} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1{,}45\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

c) Milyen tömegarány esetén fordul elő, hogy a nehezebb test még *éppen* nem tudja elhúzni a könnyebbet, vagyis erőegyensúly van, de ha a nagyobb tömegű testet egy nagyon kicsit meglökjük lefelé, akkor egyenletesen ($a' = 0$ gyorsulással) fog mozogni? Az (1) összefüggés szerint ennek feltétele: $M' = \lambda m' \approx 2m'$. (Kihasználtuk, hogy a csúszási súrlódás együtthatója megegyezik a tapadási súrlódás együtthatójával.)

Két esetet kell megkülönböztetnünk. Ha a jobb oldali $M' = 3m$ tömeg a nagyobb, akkor a bal oldali fonálvégen legalább $m' = 1{,}5\,m$ tömegű test kell legyen. Ha viszont a $3m$ tömeg a kisebb, akkor megint fel kell cserélnünk a jobb és a bal oldalt, m' lesz $3m$ nagyságú és M' legfeljebb $\lambda m' \approx 6m$ lehet.

Összefoglalva: ha a jobb oldalon $3m$ tömegű test van, akkor a bal oldali fonálvégre legalább $1{,}5\,m$, de legfeljebb $6m$ tömegű testet kell akasztani ahhoz, hogy a rendszer elengedés után nyugalomban maradjon.

Toronyi András (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 11. évf.) és
Kertész Balázs (Debreceni Ref. Koll. Dóczy Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

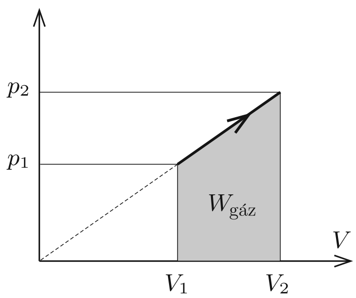
42 dolgozat érkezett. Helyes Fekete András Albert, Toronyi András, Kertész Balázs és Varga Vázsony megoldása. Kicsit hiányos (5 pont) 5, hiányos (1–4 pont) 30, hibás 2, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5266. *Az f szabadsági fokú molekulákból álló ideális gáz valamely egyensúlyi folyamata során úgy tágul ki, hogy közben nyomása a térfogatával egyenes arányban növekszik. A végzett munkánál hányszor több hőt vesz fel ilyenkor a gáz?*

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. A gáz úgy tágul, hogy a nyomása arányos a térfogatával, vagyis

$$\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}, \qquad \text{tehát} \qquad p_1V_2 = p_2V_1. \tag{1}$$



Szemléltessük a folyamatot p–V diagramon. A gáz munkája a sötétebben jelölt trapéz területe:

$$W_{\text{gáz}} = \frac{(p_1+p_2)(V_2-V_1)}{2} =$$

$$= \frac{p_2V_2 - p_1V_1 + (p_1V_2 - p_2V_1)}{2},$$

ami (1) alapján így is felírható:

$$W_{\text{gáz}} = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{2}.$$

Vizsgáljuk most a gáz belső energiájának megváltozását. Ha a gáz molekuláinak f szabadsági foka van, akkor

$$\Delta E_\mathrm{b} = \frac{f}{2} nR\Delta T = \frac{f}{2}\Delta(pV) = \frac{f}{2}(p_2V_2 - p_1V_1).$$

A hőtan I. főtétele szerint

$$\Delta E_\mathrm{b} = Q + W_\text{gázon}, \qquad \text{vagyis} \qquad Q = \Delta E_\mathrm{b} + W_\text{gáz} = \frac{f+1}{2}(p_2V_2 - p_1V_1).$$

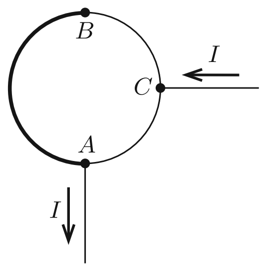
Leolvashatjuk, hogy a keresett arány:

$$\frac{Q}{W_\text{gáz}} = f + 1.$$

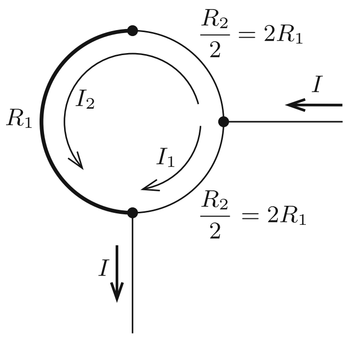
Koszta Benedek (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.)

51 dolgozat érkezett. Helyes 28 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 9, hiányos (1–2 pont) 11, hibás 3 dolgozat.

P. 5268. *Egy* $d_1 = 3$ mm *és egy* $d_2 = 1{,}5$ mm *átmérőjű rézvezetéket úgy forrasztunk össze, hogy az egyes vezetékdarabok félköröket alkotva* $r = 4$ cm *sugarú körré egészítsék ki egymást. A zárt kör egyik forrasztási pontjához* (A) *és a vékonyabbik huzalból készült félkör felezőpontjához* (C) *egy-egy igen hosszú egyenes vezeték csatlakozik. Határozzuk meg a körvezető középpontjában a mágneses mező indukcióvektorát, ha a csatlakozó vezetékekben* $I = 25$ A *erősségű áram folyik!*



(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest



Megoldás. Legyen a d_1 átmérőjű (tehát a vastagabb) huzal ellenállása R_1. A másik, d_2 átmérőjű (vékonyabb) huzal teljes félkörének ellenállása a keresztmetszetek arányának megfelelően nagyobb:

$$R_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 R_1 = 4R_1,$$

a negyedkörök ellenállása pedig $2R_1$ (lásd az *ábrát*).

Ha a főág I erősségű árama a két ágban I_1 és I_2 erősségű áramokra oszlik, akkor az

$$I_1 + I_2 = I \qquad \text{és} \qquad 2R_1 \cdot I_1 = 3R_1 \cdot I_2$$

összefüggéseknek megfelelően

$$I_1 = \frac{3}{5}I, \qquad \text{illetve} \qquad I_2 = \frac{2}{5}I.$$

Ismert, hogy egy r sugarú, I erősségű árammal átjárt körvezető mágneses indukcióvektorának nagysága a kör középpontjában

$$B=\frac{\mu_0 I}{2r},$$

és a körívek járuléka a mágneses indukcióhoz (a Biot–Savart-törvény szerint) a körívek hosszának megfelelően kisebb. Ezek szerint a negyedkör által létrehozott mágneses indukcióvektor nagysága

$$B_1=\frac{1}{4}\,\frac{\mu_0 I_1}{2r}=\frac{3}{40}\,\frac{\mu_0 I}{r},$$

a háromnegyed kör mentén folyó áram járuléka pedig

$$B_2=\frac{3}{4}\,\frac{\mu_0 I_2}{2r}=\frac{3}{20}\,\frac{\mu_0 I}{r}.$$

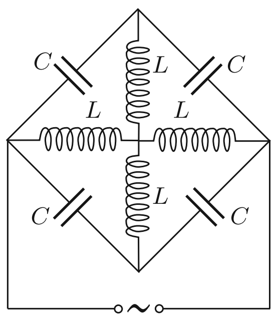
Mindkét indukcióvektor merőleges a kör síkjára, de az irányuk egymással ellentétes ($\boldsymbol{B}_2$ az ábra síkjából kifelé, $\boldsymbol{B}_1$ pedig az ábra síkjába befelé mutat). A két egyenes vezeték árama a kör középpontjában nem hoz létre mágneses indukciót, így az egész elrendezés eredő mágneses indukcióvektorának nagysága

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}_2|-|\boldsymbol{B}_1|=\frac{3}{40}\,\frac{\mu_0 I}{r}=58{,}9\ \mu\mathrm{T},$$

iránya pedig az ábra síkjára merőleges, abból *kifelé* mutat.

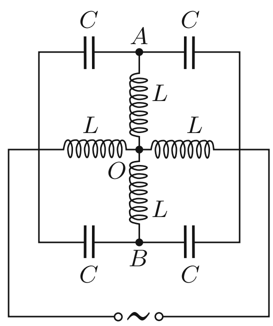
Somlán Gellért (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

25 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1 pont) 2 dolgozat.



P. 5269. *Mekkora frekvenciájú szinuszos váltóárammal szemben képvisel az* ábrán *látható összeállítás végtelen nagy ellenállást?*

(*5 pont*) *Példatári feladat nyomán*



Megoldás. A kapcsolás szimmetriájából következik, hogy az A, O és B pontok ekvipotenciálisak, közöttük nincs feszültség. Így a közöttük lévő két tekercsen nem folyik áram, ezek a tekercsek az áramkörből eltávolíthatók. A négy (páronként sorosan, majd párhuzamosan kapcsolt) kondenzátor eredő kapacitása C, a maradék két (sorosan kapcsolt) tekercs eredő induktivitása pedig $2L$. Tehát a megadott kapcsolás ekvivalens egy párhuzamosan kapcsolt C kapacitású kondenzátorral és $2L$ induktivitású tekerccsel.

Az áramkör akkor képvisel végtelen nagy ellenállást (akkor lesz a főág áramerőssége nulla), ha a kapacitív ellenállás megegyezik az induktív ellenállással:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = X_L = 2\pi f \cdot 2L,$$

vagyis ha a váltóáram frekvenciája:

$$f = \sqrt{\frac{1}{8\pi^2 LC}}.$$

Schmercz Blanka (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. évf.)

14 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 5 dolgozat.

P. 5271. *Egy pontszerű test az* ábrán *látható kétféle útvonalon juthat el az A pontból az ℓ távolságban lévő B pontig. Az a) esetben a test vízszintes egyenes pályán mozog, a b) esetben pedig egy függőleges síkban elhelyezkedő, h mélységű körív mentén. Mindkét mozgás kezdősebessége v_0. Melyik mozgás tart hosszabb ideig? (A súrlódás és a légellenállás elhanyagolható.)*

Adatok: $v_0 = 1$ m/s, $\ell = 1$ m, $h = 2{,}5$ cm.

(*6 pont*) Közli: *Berke Martin,* Budapest

Megoldás. Az *a*) esetben az AB út megtételéhez szükséges idő

$$T_a = \frac{\ell}{v_0} = 1 \text{ s}.$$

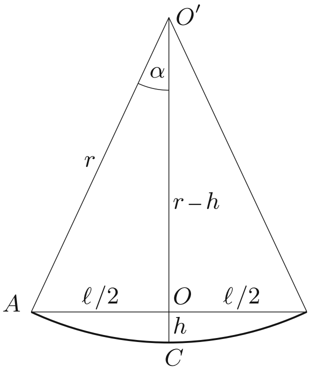
A *b*) esethez (a köríven történő mozgáshoz) tartozó idő legyen T_b. A körív hossza ugyan nagyobb, mint ℓ, de mivel a test sebessége mindvégig nagyobb v_0-nál, a mozgás idejének T_a-val való összehasonlítása nem nyilvánvaló feladat. Az a sejtésünk, hogy $T_b < T_a$. Ha tudunk olyan becslést adni, amely szerint $T_b < T$ és $T < T_a$, ebből már következik, hogy a sejtésünk helyes, vagyis $T_b < T_a$.

Legyen a körív sugara r. Az *1. ábrán* látható derékszögű háromszög oldalai: $AO = \ell/2$, $OO' = r - h$ és $AO' = r$. A Pitagorasz-tétel szerint

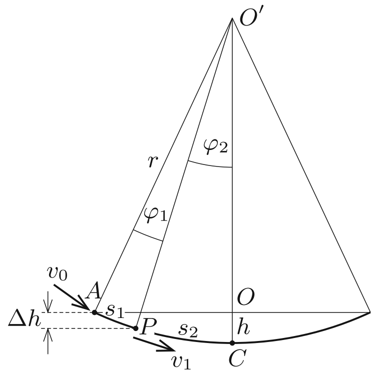
$$r^2 = \frac{\ell^2}{4} + (r-h)^2,$$

ahonnan

$$r = \frac{h}{2} + \frac{\ell^2}{8h} = 5{,}0125 \text{ m}.$$



1. ábra



2. ábra

Az ábrán látható α szöget is meghatározhatjuk:

$$\alpha = \arcsin\frac{\ell}{2r} = 0{,}0999 \text{ (radián).}$$

Megjegyzés. A szokásosnál nagyobb pontosságú számolást az indokolja, hogy egymástól csak kicsit különböző mennyiségeket fogunk összehasonlítani.

Válasszunk a körív mentén egy olyan P pontot, amely az α szöget

$$\varphi_1 = 0{,}1\,\alpha = 0{,}0100 \qquad \text{és} \qquad \varphi_2 = 0{,}9\,\alpha = 0{,}0899$$

nagyságú részre osztja (*2. ábra*). Az egyes ívdarabok hossza:

$$s_1 = r\varphi_1 = 0{,}0501 \text{ m}, \qquad \text{illetve} \qquad s_2 = r\varphi_2 = 0{,}4506 \text{ m}.$$

Megjegyzés. A teljes körív hossza: $2(s_1 + s_2) = r\alpha = 1{,}0015$ m, vagyis mindössze másfél milliméterrel nagyobb, mint az AB egyenes szakasz hossza.

A P pont és az A pont közötti magasságkülönbség

$$\Delta h = r(\cos\varphi_2 - \cos\alpha) = 0{,}0047 \text{ m},$$

emiatt a köríven mozgó pontszerű test sebessége a P pontban (a munkatétel szerint)

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2g\Delta h} = 1{,}045\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Adjunk felső korlátot a köríven történő mozgás T_b idejére! A test sebessége az AP ív mentén (a kezdőpontot leszámítva) mindenhol nagyobb, mint v_0, tehát ezt a pályát rövidebb, mint

$$t_1 < \frac{s_1}{v_0} = 0{,}050 \text{ s}$$

idő alatt futja be a test. Hasonló megfontolással adódik, hogy a PC ív mentén a test sebessége mindenhol nagyobb, mint v_1, tehát a mozgás ideje ezen a részen

$$t_2 < \frac{s_2}{v_1} = 0{,}431 \text{ s}.$$

Látható, hogy az AB íven történő mozgás teljes időtartama:

$$T_b = 2(t_1 + t_2) < 0{,}962\ \mathrm{s} < 1{,}00\ \mathrm{s} = T_a.$$

Sejtésünk tehát helyes volt: a test a b) esetben jut el hamarabb A-ból B-be.

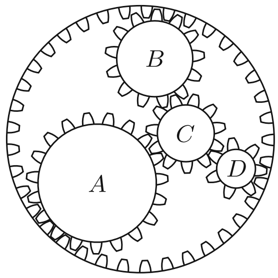
Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

40 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 16, hibás 1 dolgozat.

P. 5272. *Az* ábrán *látható négy belső fogaskerék körbejár, a külső pedig áll. (A fogaskerekek mozgása a honlapon megtekinthető.)*

Mekkora az A, B és C jelű fogaskerék fordulatszáma, ha a legkisebb, D jelű fogaskerék másodpercenként egyszer fordul körbe?

(*5 pont*) Közli: *Baranyai Klára,* Veresegyház



Megoldás. Vizsgáljuk a mozgást egy olyan forgó vonatkoztatási rendszerben, amely a K-val jelölt külső, valamint az A és B kerekek középpontja által meghatározott háromszöghöz van rögzítve. (Ebben a rendszerben az összes kerék egyhelyben forog).

Csúszásmentesen érintkező, forgó kerekek kerületi sebessége megegyezik, tehát a fordulatszámuk fordítottan arányos sugaraikkal, ami viszont a kerületükkel és így a fogaik számával arányos.

Vegyük figyelembe, hogy az új viszonyítási rendszerünk forog, így ebben a D kerék fordulatszáma már nem $1\ \mathrm{s}^{-1}$, hanem egy ismeretlen érték. Jelöljük a forgó rendszerbeli fordulatszámokat a kerék kis betűvel írt jelével (vagyis a D kerék fordulatszáma d), majd számoljuk ki a többi kerék (új vonatkoztatási rendszerbeli) fordulatszámát d-vel kifejezve. A *feladat ábrájáról* leolvasható, hogy a fogak száma rendre 19, 13, 11 és 7, a külső keréké pedig 37. Ezek szerint

$$c = \frac{7}{11}d, \qquad b = \frac{7}{13}d, \qquad a = \frac{7}{19}d \quad \text{és} \quad k = \frac{7}{37}d.$$

A külső kerék $k = \frac{7}{37}d$ fordulatszámmal forog a forgó rendszerünkben, ami azt jelenti, hogy a vonatkoztatási rendszerünk (a fogaskerekek együttes rendszere) a valóságban k fordulatszámmal mozog az álló külső kerékhez képest. A többi fogaskerék valós fordulatszámához meg kell állapítanunk a forgásirányukat. Az a kerék, amelyik azonos irányba forog a vonatkoztatási rendszerünkkel, ahhoz hozzá kell adni k-t (ilyen a C kerék), a többi fordulatszámából pedig ki kell vonnunk k-t. A valós fordulatszámokat n-nel jelölve (és a kerék betűjelével indexelve) ezeket az összefüggéseket kapjuk:

$$n_D = 1\ \frac{1}{\mathrm{s}} = d - k = d - \frac{7}{37}d = \frac{30}{37}d, \quad \text{vagyis} \quad d = \frac{37}{30}\ \frac{1}{\mathrm{s}},$$

továbbá

$$k = \frac{7}{37}d = \frac{7}{30}\ \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Az A, B és C fogaskerekek tényleges fordulatszámának nagysága:

$$n_A = \frac{7}{19}d - k = \frac{259}{570}\ \frac{1}{\mathrm{s}} - \frac{7}{30}\ \frac{1}{\mathrm{s}} = \frac{21}{95}\ \frac{1}{\mathrm{s}},$$

$$n_B = \frac{7}{13}d - k = \frac{259}{390}\frac{1}{s} - \frac{7}{30}\ \frac{1}{\mathrm{s}} = \frac{28}{65}\ \frac{1}{\mathrm{s}},$$

$$n_C = \frac{7}{11}d + k = \frac{259}{330}\frac{1}{s} + \frac{7}{30}\ \frac{1}{\mathrm{s}} = \frac{56}{55}\ \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Megjegyzés. A C kerék forgásiránya *ellentétes* a többiével.

Kozaróczy Csaba (Miskolci Herman O. Gimn., 12. évf.)

58 dolgozat érkezett. Helyes 5 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 7, hiányos (1–3 pont) 44, hibás 2 dolgozat.

P. 5275. *Az egyik kaposvári szökőkútból* 1 *perc alatt* 1 *köbméter víz szökik fel függőlegesen* 5 m *magasra.*

a) Mekkora a villanymotor felvett teljesítménye, ha a szivattyúzás hatásfoka 75%?

b) Mekkora sebességgel áramlik ki a víz a csőből?

c) Mekkora a kilépő vízáram átmérője?

d) Mekkora a vízsugár átmérője 2,5 m *magasságban?*

A légellenállástól és a vízsugár cseppekre szakadásától tekintsünk el.

(*4 pont*) Közli: *Gelencsér Jenő,* Kaposvár

Megoldás. Ismert adatok:
a megfigyelt időtartam: $t = 1$ perc $= 60$ s;
a vízsugár magassága $h = 5$ m;
a t idő alatt kiáramló víz mennyisége: $V = 1\ \mathrm{m}^3$;
a víz sűrűsége: $\varrho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$;
és végül a nehézségi gyorsulás: $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

a) A szivattyúzás hatásfoka: $\eta = 0{,}75$. A megadott idő alatt végzett hasznos munka a víz emelésére fordított munka: $W_\mathrm{h} = mgh = \varrho Vgh$, így a hasznos teljesítmény:

$$P_\mathrm{h} = \frac{\varrho Vgh}{t}.$$

A hatásfok a hasznos és a felvett P_f teljesítmény hányadosa, így

$$P_\mathrm{f} = \frac{P_\mathrm{h}}{\eta} = \frac{\varrho Vgh}{t\,\eta} \approx 1{,}1\ \mathrm{kW}.$$

A villanymotor felvett teljesítménye tehát kb. 1,1 kW.

b) A munkatétel szerint egy m tömegű, v_0 kezdősebességű vízdarabon végzett $-mgh$ munka a mozgási energia megváltozásával egyezik meg:

$$W = -mgh = \Delta E_\mathrm{m} = -\frac{1}{2}mv_0^2,$$

vagyis a kiáramló víz sebessége:

$$v_0 = \sqrt{2gh} = 9{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A vízsugár tehát kb. 10 m/s sebességgel áramlik ki a szökőkút csövéből.

c) Egységnyi idő alatt

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V}{t} = \frac{1}{60}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

térfogatú víz áramlik ki a csőből. Ez így is felírható:

$$\frac{V}{t} = A_0\,\frac{\Delta s}{\Delta t} = A_0 v_0,$$

ahol A_0 a cső keresztmetszete, Δs pedig a víz elmozdulása egy kicsiny Δt idő alatt.

A vízsugár keresztmetszete d_0 átmérőjű kör, így fennáll, hogy

$$\frac{V}{tv_0} = \frac{d_0^2}{4}\pi,$$

ahonnan $d_0 = 4{,}6$ cm. A kilépő vízáram átmérője tehát 4,6 cm.

d) A megadott magasság: $h_1 = 2{,}5$ m. A munkatétel szerint:

$$-mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2,$$

ahonnan a vízsugár sebessége h_1 magasságban

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh_1} = 7{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Az anyagmegmaradást kifejező kontinuitási egyenlet szerint

$$A_0v_0 = A_1v_1, \qquad \frac{d_0^2\pi}{4}v_0 = \frac{d_1^2\pi}{4}v_1,$$

ahonnan a némileg lelassuló vízsugár átmérője

$$d_1 = d_0\sqrt{\frac{v_0}{v_1}} = 0{,}055\ \mathrm{m} = 5{,}5\ \mathrm{cm}.$$

Horváth Anikó (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 12. évf.)

77 dolgozat érkezett. Helyes 37 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 21, hiányos (1–2 pont) 14, hibás 1, nem versenyszerű 4 dolgozat.

P. 5276. *Egy* 25 cm-*es átmérőre felfújt, gömb alakú lufival beszállunk Európa legnagyobb emelkedésű drótkötélpályájának kabinjába, és a hegytetőig utazunk. A kabin nem zár légmentesen, de a belső hőmérsékletét mindvégig a beszállóhely hőmérsékletén tartják. A kabin a tengerszint feletti* 1000 m-*es magasságból indul, és majdnem* 3000 m *magasba viszi fel a turistákat a Zugspitze csúcsáig. A lufin belüli nyomás mindvégig alig nagyobb a külső légnyomásnál.*

Becsüljük meg, mekkora lesz a lufi átmérője, amikor kiszállunk a kabinból!

(*4 pont*) Közli: *Miklós Ildikó,* Tésa

Megoldás. Izotermikus folyamatról van szó, tehát érvényes, hogy $p_1V_1 = p_2V_2$, ahol p a lufiban lévő nyomást jelöli (ami jó közelítéssel a külső légkör aktuális nyomásával egyezik meg), V pedig a lufiban lévő levegő térfogata. (Az 1-es index a beszállóhelyhez, a 2-es a felső állomáshoz tartozó adatokra utal.)

Táblázati adatokból a légnyomás 1000 m magasságban $p_1 \approx 900$ hPa, 3000 m magasságban pedig $p_2 \approx 700$ hPa. Másrészt a V térfogat a (gömb alakúnak tekintett) lufi d ármérője közötti kapcsolat

$$V = \frac{4\pi}{3}\frac{d^3}{8}, \quad \text{ahonnan} \quad \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^3.$$

A táblázati adatok (vagy a barometrikus magasságformula) felhasználásával

$$\frac{p_1}{p_2} \approx \frac{900}{700} \approx 1{,}29, \quad \text{vagyis} \quad d_2 = d_1\sqrt[3]{\frac{V_2}{V_1}} = d_1\sqrt[3]{\frac{p_1}{p_2}} \approx 27 \text{ cm}.$$

A lufi átmérője tehát mintegy 2 centiméternyit nő, mialatt a kabin az alsó állomástól a Zugspitze csúcsáig emelkedik.

Beke Zsolt (Révkomárom, Selye János Gimn., 12. Gimn., 12. évf.)

75 dolgozat érkezett. Helyes 58 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 9, hiányos (1–2 pont) 5, nem versenyszerű 3 dolgozat.

Köszöntő

Holics László a KöMaL Fizika Rovatának 1959. szeptemberi megindulásától kezdve mind a mai napig a Fizika Szerkesztőbizottság folyamatosan aktív tagja. Eddig 468 feladata, 7 cikke és 12 OKTV beszámolója jelent meg. 2021 februárjában a 90. születésnapján azzal a meglepetéssel köszöntjük, hogy jelen számunk *mindegyik* fizika feladatát az ő kitűzésre javasolt problémái alapján állítottuk össze.

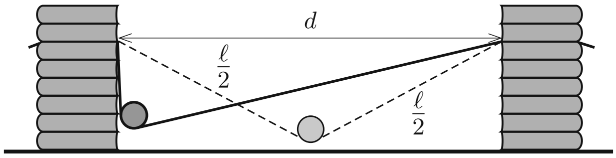
Ugyancsak idén februárban tölti be 90. életévét **Wiedemann László,** a KöMaL fizika pontversenyének ma is aktív feladatkitűzője, akinek 1960 áprilisa és 2020 októbere között 43 feladata jelent meg a Lapunkban.

Mindkettőjüknek jó egészséget és további aktív éveket kíván

a Szerkesztőbizottság

Fizikából kitűzött feladatok

M. 402. Készítsünk vékony papírból $\ell = 80$ cm hosszú papírcsíkot, végeit azonos magasságban, egymástól bizonyos távolságban rögzítsük eltolható állványokon. Helyezzünk a papírcsíkra az *ábrán* látható helyzetben egy kis méretű, körhenger alakú, bontatlan konzervdobozt, és kezdősebesség nélkül engedjük szabadon gördülni. Mérjük meg különböző d távolságok esetén a konzervdoboz szimmetriatengelyének legnagyobb sebességét! Mekkora d-hez tartozik a maximális sebesség?



Útmutatás. A sebesség méréséhez használhatjuk pl. mobiltelefonunkat és a Tracker kiértékelő programot.*

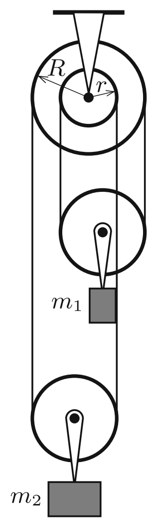
(*6 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

G. 733. Egy kútból vizet húzunk fel. A kút mélysége 10 méter, a veder tömege 2 kg, a lánc tömege 3 kg, és a veder űrtartalma 12 liter. Mekkora a vízhúzás mechanikai hatásfoka? Függ-e a hatásfok a kút mélységétől?

(*3 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

G. 734. Egy gépkocsi 3 órán át 80 km/h átlagsebességgel haladt. Három különböző útszakasz mindegyikén egyenletes sebességgel mozgott. A városi csúcsforgalomban $v_1 = 20$ km/h volt a sebessége, az országúton $v_2 = 80$ km/h, és végül az autópályán másfél órán keresztül $v_3 = 120$ km/h sebességgel haladt. Mennyi időt töltött az autó a csúcsforgalomban, és mennyi volt az autó átlagsebessége a városi és az országúti szakaszokon együttesen?

(*3 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

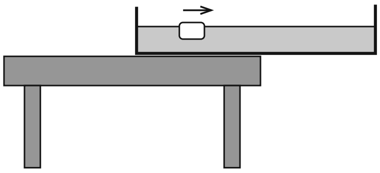


G. 735. Az *ábrán* látható hengerkerék szabadon foroghat egy rögzített tengely körül. A mozgócsigák tömege m_1 és m_2 ($m_1 < m_2$). Milyen irányban és mekkora erővel kell húznunk a bal oldali legszélső kötélszálat, hogy a rendszer egyensúlyban legyen? (A kötél nem csúszik meg a csigákon.)

Adatok: $R = 10$ cm, $r = 5$ cm, $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 3$ kg.

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

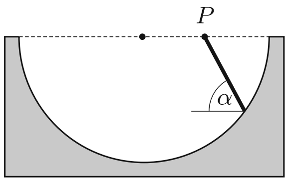
*Ezen alkalmazás használatának ismeretét az emelt szintű fizika érettségin elvárják.



G. 736. Egy nagy, vízzel telt tál annyira nyúlik túl az asztal szélén, hogy *hajszál híján* lebillen. A tál asztal fölötti részénél egy jégkocka úszik a vízen. Nagyon enyhe fuvallat lassan az asztalon kívüli rész felé sodorja a jégkockát. Mikor billen le a tál?

(*3 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5294. Egy félhenger alakú vályú tengelye vízszintes. A vályú egyik vízszintes sugarának P felezőpontján át különböző hajlásszögű lejtőket fektetünk. Mekkora annak a lejtőnek a hajlásszöge, amelyen egy súrlódásmentesen lecsúszó piciny test leghamarabb éri el a vályú felületét?



(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5295. Egy LEGO-motorral hajtott m tömegű kisautó α hajlásszögű lejtőn felfelé indul el. A motor mechanikai teljesítménye (az indulás utáni nagyon rövid időtartamot leszámítva) állandó P értékű. Mekkora lesz a végsebessége? (A kerekek nem csúsznak, és a gördülő ellenállás elhanyagolhatóan kicsi.)

a) Írjuk le, milyen jellegű a kisautó mozgása!

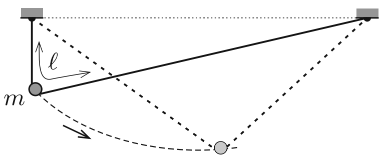
b) Ábrázoljuk vázlatosan egy közös diagramon a teljesítményt, a sebességet, valamint a kerekekre ható tapadási súrlódási erőt az idő függvényében! Készítsük el az erő–sebesség grafikont is!

c) Mekkora a mozgás során a legkisebb súrlódási erő?

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5296. Az 1 °C-os vízben egy belül üres vasgolyó lebeg. Mi történik, ha lassan emelkedik a hőmérséklet? Hány fokos vízben fog újra lebegni a vasgolyó?

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest



P. 5297. Egy könnyű, hajlékony, nyújthatatlan damilszál hossza $\ell = 80$ cm. A szál végeit azonos magasságban, egymástól valamekkora távolságban rögzítjük. A szálon egy $m = 5$ g tömegű, közepén átfúrt acélgolyó tud csúszni. Az acélgolyót olyan helyzetből indítjuk, aminél a feszes damilszál egyik része függőleges.

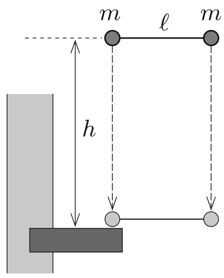
a) Legfeljebb mekkora sebességre gyorsul fel az acélgolyó, ha a súrlódás és a közegellenállás elhanyagolható?

b) Mekkora erő feszíti a damilt, amikor az acélgolyó sebessége maximális?

(Az acélgolyót tekintsük tömegpontnak!)

(*5 pont*) *Holics László* mérési feladata nyomán

P. 5298. Két, egyenként $m=0{,}25$ kg tömegű, kis méretű acélgolyó $\ell=60$ cm hosszú, nyújthatatlan fonállal van összekötve. A két golyót úgy tartjuk, hogy összekötő fonaluk vízszintes egyenes és feszültségmentes. Egy adott pillanatban a két golyót egyszerre, lökésmentesen elengedjük. $h=1{,}8$ m esés után az egyik golyó egy kiálló merev kőpárkányba ütközik. Az ütközés abszolút rugalmas.



a) Mekkora erő feszíti a fonalat az ütközés utáni pillanatban?

b) Milyen magasságban lesz a párkányhoz képest az ütköző golyó az ütközés után $t=\frac{1}{4}$ s múlva?

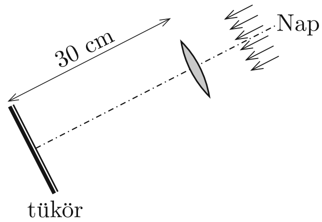
(A közegellenállás elhanyagolható.)

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5299. Egy vízszintes, súrlódásmentes asztalon egyenletes tömegeloszlású, M tömegű, D rugóállandójú, erős spirálrugót egyik végénél húzva F erővel gyorsítunk úgy, hogy annak minden pontja a rugó tengelyének irányában ugyanakkora gyorsulással mozog. Mekkora a rugó hossza, ha nyugalmi állapotban a hossza $\ell_0 \gg F/D$ volt?

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5300. Egy 10 cm átmérőjű, 20 cm gyújtótávolságú lencse optikai tengelye éppen a Nap középpontja felé mutat. A lencsétől 30 cm-re síktükröt helyezünk el az *ábra* szerint. Az optikai tengely mentén hova kell helyezni egy igen kicsi méretű testet, hogy a hőmérséklete a leggyorsabban emelkedjék? Tiszta napsütéses időt feltételezve mennyi idő alatt olvadna meg az ott elhelyezett kicsiny, feketére kormozott alumíniumtégelyben levő 0 °C hőmérsékletű és 0,1 cm^3 térfogatú jégdarab? A lencsén, a tükrön, valamint a testeken fellépő összes energiaveszteség a hasznos energia 20%-a. A napsugárzás intenzitása a Föld felszínén 0,1 W/cm^2, és a Nap képe kisebb, mint a tégely mérete.

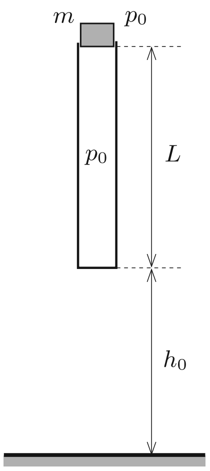


Az optikai tengely mentén található még egy másik pont is, ahová helyezve a tégelyt a benne lévő jég hamarabb megolvad, mint a környező helyek bármelyikénél. Hol van ez a pont, és ott mennyi idő alatt olvad meg a jég?

(*5 pont*) *Holics László* feladata nyomán

P. 5301. Pontszerű Q töltés elektromos erőterében, tőle R távolságban szabadon forgó, p momentumú, pontszerű elektromos dipólus van. Mekkora munkát kell végeznünk, ha a dipólust a rögzített töltéstől nagyon messzire (a „végtelenbe") távolítjuk?

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest



P. 5302. Az *ábrán* látható alul zárt, A keresztmetszetű, felül nyitott csövet függőleges helyzetben tartjuk úgy, hogy egy m tömegű, benne könnyen csúszó, a csőből kissé kiérő tömör, nehéz dugattyút is fogunk.

A külső p_0 légnyomás és a belső nyomás kezdetben megegyezik. A bezárt légoszlop kezdeti hossza L. A cső alja a vízszintes talajtól h_0 magasságra van. A külső és a kezdeti belső hőmérséklet T_0. Ezt a rendszert egy adott pillanatban kezdősebesség nélkül elengedjük. A cső alja az ütközéskor hozzátapad a talajhoz. (A csőben a súrlódás, valamint a külső légkörbeli közegellenállás elhanyagolható.)

a) Mekkora lesz a maximális hőmérséklet a csőben?

b) Mekkora lesz a dugattyú legnagyobb gyorsulása?

c) Milyen magasra emelkedik a csőből kirepülő dugattyú?

Adatok: $A = 0{,}25\ \mathrm{dm}^2$, $m = 0{,}5\ \mathrm{kg}$, $p_0 = 10^5\ \mathrm{Pa}$, $L = 0{,}8\ \mathrm{m}$, $h_0 = 0{,}6\ \mathrm{m}$, $T_0 = 300\ \mathrm{K}$.

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5303. Egy puska 500 m/s sebességű lövedéke fába csapódik, és ott 5 cm-es úton lefékeződik. A lövedék tömör, 4 cm hosszú, 7800 kg/m^3 sűrűségű fémhengernek tekinthető, amelynek fékeződése időben egyenletes.

a) Becsüljük meg, hogy legfeljebb mekkora mechanikai feszültség alakul ki a lövedék lefékeződése során!

b) Becsüljük meg, hogy mekkora elektromos feszültség jön létre a lövedék eleje és vége között az elektronok tehetetlensége miatt!

(*5 pont*) *Holics László* feladata nyomán

P. 5304. Egy mozdulatlan test az Egyenlítőn helyezkedik el. Mikor kisebb a test súlya: délben vagy éjfélkor? Mekkora a test súlyának relatív megváltozása 12 óra alatt?

(A Napon és a Földön kívül más égitestek hatását ne vegyük figyelembe!)

(*6 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 2021. március 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 71. No. 2. February 2021)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 96): **K. 684.** *a*) Sophie and Bertie are playing a game that involves breaking a bar of chocolate into pieces. The chocolate bar consists of 10×5 squares. They take turns in splitting the chocolate along the dividing lines. The player who first breaks off a single square will lose the game. In each move, they are only allowed to touch and split one piece. Sophie starts the game. Can she make sure that she will win, whatever Bertie's moves are? *b*) After the first game, Bertie wants to strike back. He wants Sophie to start again, but with a different rule: the player who first breaks off a single square will win the game. Can Sophie make sure that she will win again? **K. 685.** Steve went picking mushrooms. Since he is becoming better and better at spotting mushrooms, this time he found 62 penny bun mushrooms. The average number in his previous mushroom picking trips had been 30, which was thus increased to 32. How many penny bun mushrooms should he have found in order to increase the mean to 33? **K. 686.** Each of the integers 1 to 100 is written on a separate piece of paper. 20 pieces of paper are drawn at random from the 100 pieces. Show that it is always possible to select four out of the 20 such that the sum of two numbers equals the sum of the other two. **K. 687.** There are some toy robots waiting on one side of a street. In each move, it is allowed to instruct exactly four robots to cross the street. For what number of robots is it possible to make all the robots end up on the other side? **K. 688.** *a*) Is it possible to form pairs out of the numbers $1, 2, 3, 4, \dots, 23, 24$, so that the sum of each pair should be a perfect square? *b*) Is it possible to form pairs out of the numbers $1, 2, 3, 4, \dots, 21, 22$ so that the sum of each pair should be a perfect square?

New exercises for practice – competition C (see page 97): **Exercises up to grade 10: C. 1651.** The terms of a number sequence are generated as follows: the first term is 895, and the following term is always obtained by multiplying the sum of the digits of the previous term by 61. Determine the 2021st term of the sequence, and the sum of the first 2021 terms. **C. 1652.** The shorter leg of each of two right-angled triangles has unit length. In each triangle, the right-angled vertex is at a unit distance from a point dividing the hypotenuse in a $2:1$ ratio: in one case it is the point closer to the right-angled vertex, and in the other case it is the point farther away. Prove that it is possible to select three out of the non-unit sides of the two triangles such that the three lengths form a right-angled triangle. **Exercises for everyone: C. 1653.** How many solutions does the inequality $|x| + |y| < 2021$ have over the set of pairs of integers? **C. 1654.** Find the radius of each circle that is tangent to the graphs of the functions $f(x) = \frac{3x-6}{4}$ and $g(x) = \frac{28-4x}{3}$, and also touches the x-axis. **C. 1655.** Solve the equation $2(x + y - 1831)^2 = (2x - 1802)(2y - 1860)$ over the set of pairs of real numbers. **Exercises upwards of grade 11: C. 1656.** Three consecutive terms of an arithmetic sequence are prime numbers greater than 3. Show that the common difference of the sequence is divisible by 3. (Proposed by *L. Németh,* Fonyód) **C. 1657.** BCD and CAE are regular triangles drawn on legs BC and CA of a right-angled triangle ABC, on the outside. Prove that the midpoints of the line segments AB, CD and CE also form a regular triangle.

New exercises – competition B (see page 98): **B. 5150.** Prove that there are only a finite number of positive integers that cannot be obtained by adding one of the digits of a smaller number to that number. What is the largest of these finite number of integers? (*4 points*) **B. 5151.** Prove that if $a^2 = b^2 + ac = c^2 + ab$, then two of the numbers a, b, c are equal. (*3 points*) **B. 5152.** Determine those positive integers greater than 1 whose positive divisors can all be written on the circumference of a circle so that the ratio of every adjacent pair should be a prime. (*5 points*) (Proposed by *D. Lenger,* Budapest and *G. Szűcs,* Szikszó) **B. 5153.** Let A, B, C denote the vertices of an equilateral triangle of unit side, and let D be a point on the extension of side AB beyond B. The perpendicular drawn to line segment BC at B intersects line segment CD at E (see *figure*). Find the length of CE, given that $ED = 1$. (*4 points*) **B. 5154.** Find all functions f taking on positive integer values, and defined on the set of positive integers such that $f\big(f(n)\big) = 2n$ and $f(4n-3) = 4n-1$ for all positive integers n. (*4 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 5155.** The convex quadrilateral $ABCD$ has no parallel sides, and the intersection of lines AB and CD is M. Point X is moving along the interior of side AB, and point Y is moving along the interior of side CD so that the equality $AX : XB = DY : YC$ remains true. Show that the circles MXY all have another common point, different from M. (*5 points*) **B. 5156.** Let K be a convex polygon of $2n$ vertices where all sides have unit length and the opposite sides are parallel. Show that K can be dissected into a finite number of rhombuses of unit sides. How many rhombuses may there be? (*6 points*) **B. 5157.** There are some integers on the blackboard. Each of three students (independently of each other) selects a number from the board at random, and writes it down in their notebook. Prove that the probability that the sum of the three numbers written down is divisible by 3 is at least 1/4. (*6 points*)

New problems – competition A (see page 99): **A. 793.** In the 43 dimension Euclidean space the convex hull of finite set S contains polyhedron P. We know that P has 47 vertices. Prove that it is possible to choose at most 2021 points in S such that the convex hull of these points also contain P, and this is sharp. (Submitted by *Dömötör Pálvölgyi,* Budapest) **A. 794.** A polyomino P occupies n cells of an infinite grid of unit squares. In each move, we lift P off the grid and then we place it back into a new position, possibly rotated and reflected, so that the preceding and the new position have $n-1$ cells in common. We say that P is a caterpillar of area n if, by means of a series of moves, we can free up all cells initially occupied by P. How many caterpillars of area 10^6+1 are there? (Submitted by *Nikolai Beluhov,* Bulgaria)

Problems in Physics

(see page 121)

M. 402. Make an 80-cm long paper strip from a thin sheet of paper, and attach its ends at the same height to two movable stands, which are at a certain distance from each other. Place a small size cylinder-shaped unopened tin can on the strip as shown in the *figure,* and let it roll without initial speed. In the case of different distances of d between the stands measure the greatest speed of the symmetry axis of the can. At what distance of d will this speed be the maximum?

G. 733. Water is drawn up from a well. The depth of the well is 10 metres, the mass of the bucket is 2 kg, the mass of the chain is 3 kg and the capacity of the container is 12 litres. What is the mechanical efficiency of bringing the water up? Does this efficiency depend on the depth of the well? **G. 734.** A car travelled for 3 hours at an average speed of 80 km/h. The route consisted of three parts in all of which the car travelled at a constant speed. In the heavy traffic of some urban area its speed was $v_1 = 20$ km/h, on the highway its speed was $v_2 = 80$ km/h, while on the dual carriageway its speed was $v_3 = 120$ km/h for one and a half hours. How long was the car in the heavy traffic of the city, and what was the average speed of the car for the total distance travelled in the city and on the highway? **G. 735.** The pulley wheel shown in the *figure* can rotate freely about a fixed shaft. The masses of the movable pulleys are m_1 and m_2 ($m_1 < m_2$). In what direction and at what magnitude of force do we have to pull the thread at the left in order to keep the system in equilibrium? (The thread does not slide on the pulley.) *Data:* $R = 10$ cm, $r = 5$ cm, $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 3$ kg. **G. 736.** A big bowl full of water extends beyond the edge of the table so far, that it is just *on the verge* of tipping over. A piece of ice cube is floating in the water in that part of the bowl which is above the table. A very gentle breeze wafts it towards the part of the bowl which is not above the table. When will the bowl tip over?

P. 5294. A half-cylinder-shaped trough has a horizontal symmetry axis. Through the midpoint of one of the horizontal radii of the trough an inclined plane of angle of elevation of α is laid. What is the angle of elevation of that slope along which a small object slides without friction in the shortest time? **P. 5295.** A small cart of mass m which is driven by a LEGO motor starts to move upward along a slope of angle of elevation of α. The mechanical power of the motor (except for the very beginning of the motion) has a constant value of P. What is the final speed of the cart? (The wheels do not slide and rolling resistance is negligible.) *a*) Describe the motion of the cart. *b*) As a function of the time sketch the graph of the power, speed, and the static frictional force in the same diagram. Sketch the force–velocity diagram as well. *c*) What is the least frictional force during the motion? **P. 5296.** A hollow iron ball is floating in water which is at a temperature of 1 °C. What happens if the temperature slowly rises? What is the temperature of the water in which the ball floats again? **P. 5297.** The length of a light, flexible but unstretchable fishing line is $\ell = 80$ cm. The two ends of the fishing line are fixed at two points at the same height, at a certain distance of each other. A steel marble of mass $m = 5$ g, which has a hole drilled through it, can slide along the fishing line. This bead is started from a position such that one part of the tight fishing line is vertical. *a*) To what maximum speed can the steel marble speed up, if friction and air drag are negligible? *b*) What is the tension in the fishing line when the speed of the steel marble is maximum? **P. 5298.** Two small balls each having a mass of $m = 0.25$ kg are tied by means of an $\ell = 60$ cm long thread, which cannot be stretched. The balls are held such that the thread is horizontal and the tension is zero. At a certain moment the two balls are released, without jerking any of them. After a fall of $h = 1.8$ m one of the balls collides with a protruding rigid stone ledge. The collision is totally elastic. *a*) What is the tension in the thread at the moment right after the collision? *b*) How high above the ledge will the ball, colliding with the ledge, be when $t = 0.25$ s elapses after the collision? (Air drag is negligible.) **P. 5299.** A strong uniform-density spring of mass M and of spring constant D is accelerated by pulling it at one of its ends with a force F along a horizontal, frictionless tabletop such that each point of the spring moves at the same acceleration into the direction of the symmetry axis of the spring. What is the length of the spring if its relaxed length was $\ell_0 \gg F/D$? **P. 5300.** The principal axis of a lens of diameter 10 cm, and of focal length 20 cm points exactly towards the centre of the Sun. A plane mirror is placed 30 cm from the lens as it is shown in the *figure.* Where should a very small object be placed on the principal axis in order that its temperature increase at the greatest rate? Assuming clear sunny weather how long would it take for a small piece of ice placed to that position to melt provided that the ice is kept in a small aluminium jar covered in black soot? The volume of the ice is $0.1\ \mathrm{cm}^3$ and it is at a temperature of $0\ ^\circ$C. The total energy lost in the lens, in the mirror and on the surface of the bodies, is the 20% of the useful energy. The intensity of the radiation of the Sun at the surface of the Earth is $0.1\ \mathrm{W/cm}^2$, and the image of the Sun is smaller than the size of the jar. Along the principal axis there is another point at which the ice in the jar melts sooner than at the neighbouring points. Where is this point and how long does it take for the ice to melt there? **P. 5301.** In the electric field of a point-like charge Q, at a distance of R from it, there is a point-like electric dipole, which can rotate freely and which has a dipole momentum of p. How much work has to be done when the dipole is moved very far ("to infinity") from the charge? **P. 5302.** A tube, closed at its bottom end and open at the its top, having a cross sectional area of A, is held vertically as it is shown in the *figure* such that at its top we also hold a heavy, solid piston of mass m, which can move easily in the tube and which extends a bit beyond the tube. Initially the external pressure p_0 is the same as the pressure inside the tube. The initial length of the air column in the tube is L. The bottom of the tube is at a distance of h_0 from the level ground. The ambient temperature and the initial temperature inside is T_0. The system is released without initial speed at a certain moment. The bottom of the tube sticks to the ground when it collides with it. (Friction inside the tube and the external air resistance is negligible.) *a*) What will the maximum temperature inside the tube be? *b*) What will the maximum acceleration of the piston be? *c*) To what height will the piston go up after leaving the tube? *Data:* $A = 0.25\ \mathrm{dm}^2$, $m = 0.5$ kg, $p_0 = 10^5$ Pa, $L = 0.8$ m, $h_0 = 0.6$ m, $T_0 = 300$ K. **P. 5303.** The bullet of a gun hits a wooden target at a speed of 500 m/s, and penetrates into it to a depth of 5 cm. The bullet can be considered as a solid cylinder of length 4 cm, and of density $7800\ \mathrm{kg/m}^3$, which is decelerated uniformly. *a*) Estimate the maximum of the mechanical tension occurring due to the deceleration of the bullet. *b*) Estimate the maximum value of the voltage which can be measured between the two ends of the cylinder due to the inertia of the electrons. **P. 5304.** A stationary body is located at the equator. In which case will the apparent weight of the object be smaller: at noon or at midnight? What is the relative change in the apparent weight of the object in 12 hours? Neglect the effect of any celestial bodies other than the Sun and the Earth.

Problems of the 2020 Kürschák competition

1. Let n, k be positive integers. Suppose that we have n closed discs in the plane such that among any $k+1$ of them there are two with no common point. Prove that it is possible to divide the discs into at most $10k$ classes with the property that two discs from the same class never have a common point.

2. Give the functions f which map the set of rational numbers to the set of nonnegative real numbers and satisfy the conditions

- $f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$ for any rational numbers x, y,
- $f(xy) = f(x)f(y)$ for any rational numbers x, y,
- $f(2) = 1/2$.

3. There are N houses in a city. Each Christmas Santa visits the houses in a certain order. Prove that if N is sufficiently large, then for three consecutive years it is always possible to choose 13 houses that were visited by Santa in the same order in at least two (out of the three) years. Determine the smallest N for which this implication holds.