KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

71. évfolyam 1. szám Budapest, 2021. január

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.; Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: szerk@komal.hu
Internet: http://www.komal.hu
This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary telephone: +36 (1) 372-2850 or on the Postal address H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary, or on the Internet: www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml.

A 61. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása II.

Második nap*

4. feladat. *Adott egy $n>1$ egész szám. Egy hegynek egy lejtőjén n^2 állomás van, csupa különböző magasságon. Két felvonótársaság, A és B mindegyike k felvonót üzemeltet; mindegyik felvonóval egy állomásról egy magasabban fekvő állomásra lehet eljutni (közbülső megállás nélkül). Az A társaság k felvonójának k különböző kezdőpontja és k különböző végpontja van, és magasabbról induló felvonó magasabbra is érkezik. Ugyanezek a feltételek teljesülnek B-re. Azt mondjuk, hogy egy felvonótársaság* összeköt *két állomást, ha a lejjebbi állomásról indulva el lehet jutni a feljebbire az adott társaság egy vagy több felvonóját használva (nincs megengedve semmilyen más mozgás az állomások között).*

Határozzuk meg a legkisebb olyan pozitív egész k számot, amelyre biztosak lehetünk abban, hogy van két olyan állomás, amelyet mindkét felvonótársaság összeköt.

Nagy Nándor megoldása. Először is meg fogjuk mutatni, hogy $k=n(n-1)$ esetén még léteznek olyan A és B felvonóparkok, amelyek nem kötnek össze mindketten egy állomáspárt. Ehhez számozzuk $[1,n^2]$ egész számaival az állomásokat, magasságuk szerint növekvő sorrendben. Tekintsük a következő szabályt: Az A társaság csupán szomszédos sorszámú állomások között létesít járatot, és pontosan akkor, ha a kisebbik sorszám nem osztható n-nel. Ezzel szemben a B társaság bármely két olyan állomás között közlekedik, amelyek sorszámának különbsége n. Mivel mindkét társaság csak egy adott hosszúságú felvonót üzemeltet, ezért magasabb állomásról magasabb célra visz egy adott társaság liftje. Elmondható az is, hogy az A társaság által összekötött állomások távolsága szükségszerűen kisebb, mint n, míg a B társaság által összekötött állomások távolsága osztható n-nel, így legalább n.

Ezután megmutatjuk, hogy $k=n(n-1)+1$ esetén már biztosan van olyan állomáspár, amelyet az A és B is összeköt. Tekintsük azt a két irányított gráfot, amelynek csúcsai az állomások, élei pedig az A illetve B társaság liftjeinek felelnek meg.

Mivel társaságon belül minden kezdő- és végpont eltérő, ezért minden csúcs be- és kifoka is maximum 1 lehet, ezért tudhatjuk, hogy az így képződő gráf egyértelműen láncokra osztható, amelyek akár egyeleműek is lehetnek. (Az előbbi példában 1, 2, …, n például az A gráfjában láncot alkot.) Tegyük fel indirekten, hogy még így sem lesz közös összekötött pár: A körmentesség miatt, ha n^2 csúcsra felveszünk n^2-n+1 élet (mondjuk az A társaság felvonóit), akkor ezzel $n-1$ darab összefüggő komponens lesz a gráfban, ami jelen esetben mind lánc. Azonban most B láncait tekintve elmondható, hogy egyikben sem lehet több mint $n-1$ csúcs, hiszen ha B-ben lenne legalább n állomást tartalmazó lánc, akkor a skatulya-elv miatt

*Az első nap feladatainak megoldását a decemberi számban közöltük.

létezne benne kettő olyan, amelyek A gráfjában azonos láncba tartoznak. Logikai szimmetria miatt az is teljesül, hogy B-ben összesen $n-1$ lánc van, vagyis A láncai sem tartalmazhatnak $n-1$-nél több csúcsot. Így azonban A gráfjában az összes lánc összes állomását véve legfeljebb csak $(n-1)^2$ állomást számláltunk meg, ami kevesebb, mint n^2; ellentmondás. Tehát k legkisebb megfelelő értéke $n(n-1)+1$.

5. feladat. *Adott egy kártyapakli, amely $n>1$ kártyából áll. Mindegyik kártyára egy pozitív egész szám van felírva. A pakli olyan, hogy bármely két kártyán lévő szám számtani közepe egyúttal a mértani közepe is néhány (egy vagy több) kártyán lévő számnak.*

Milyen n-ekre következik ebből, hogy a kártyákon álló számok mind egyenlők?

Beke Csongor megoldása. Legyen d a kártyákon lévő számok legnagyobb közös osztója. Készítsünk egy másik kártyapaklit, amiben minden kártyára az eredeti kártyán lévő szám d-ed részét írjuk. Mivel a számtani és mértani közepek ezzel mind d-ed részükre csökkentek, ha az eredeti pakli megfelelő volt, akkor az új is, valamint az új pakilban a számok legnagyobb közös osztója 1.

Tegyük fel, hogy az eredeti palkiban nem volt mindegyik kártyán ugyanaz a szám. Ekkor az új kártyapakliban nem mindegyik szám 1, ezért a legnagyobb kártyán lévő számnak van prímosztója. Legyen a a legnagyobb szám, p egy prímosztója. Legyen b a legnagyobb olyan szám a kártyákon, ami nem osztható p-vel; ilyen kártya létezik, mivel a kártyák legnagyobb közös osztója 1.

Az a és b számok számtani közepét is fel lehet írni a kártyákon lévő számok mértani közepeként, ezért:

$$\frac{a+b}{2}=\sqrt[k]{P},$$

ahol a P szám k darab kártyán szereplő szám szorzata. Ha nem szerepel b-nél nagyobb szám ezek között, akkor $\sqrt[k]{P}\leqslant b<\frac{a+b}{2}$, mivel $a>b$. Ezért a P szorzatban van b-nél nagyobb tényező, azaz P osztható p-vel.

$$(a+b)^k=2^k\cdot P.$$

A jobb oldal osztható p-vel, ezért a bal oldal is, ami csak úgy lehet, ha $a+b$ is osztható p-vel, mivel p prím. Itt a osztható p-vel, b pedig nem, ezért az összegük nem osztható p-vel, azaz ellentmondást kaptunk. Tehát tetszőleges $n>1$-re következik, hogy a kártyákon álló számok mind egyenlők.

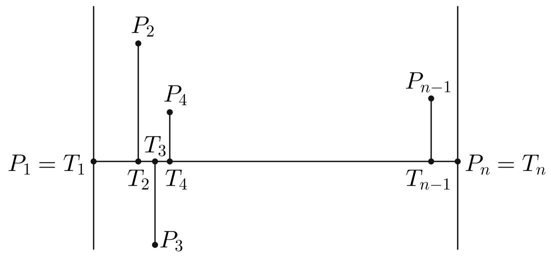
6. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan c pozitív konstans, amellyel igaz a következő állítás:*

Tekintsünk egy $n>1$ egész számot és egy n pontból álló $\mathcal{S}$ halmazt a síkban úgy, hogy $\mathcal{S}$ bármely két különböző pontjának távolsága legalább 1. Ebből következik, hogy van olyan, $\mathcal{S}$-et szétválasztó ℓ egyenes, hogy $\mathcal{S}$ bármely pontjának ℓ-től való távolsága legalább $cn^{-1/3}$.

(Egy ℓ egyenes szétválasztja *pontoknak egy $\mathcal{S}$ halmazát, ha valamely, $\mathcal{S}$-nek két pontját összekötő szakasz átmetszi ℓ-et.)*

Megjegyzés. *Gyengébb eredményre, amelyben $cn^{-1/3}$ helyett $cn^{-\alpha}$ áll, járhat részpontszám az $\alpha>1/3$ konstans értékétől függően.*

Tóth Balázs megoldása. Legyen d az S ponthalmaz átmérője, azaz a legnagyobb távolság, ami két S-beli pont között előáll. Legyen az egyik átmérő két végpontja P_1 és P_n. Állítsunk merőlegest a P_1P_n szakaszra P_1-ben, és P_n-ben is. S minden pontja ezen két egyenes által meghatározott sávba fog esni, hiszen ha a sávon kívül lenne pont, annak távolsága vagy P_1-től vagy P_n-től nagyobb lenne d-nél. A P_1-ben állított merőleges egyenest kezdjük el párhuzamosan tolni, amíg el nem érjük a P_n-ben állított merőlegest. A tolás közben az egyenes minden S-beli ponton át fog menni. Számozzuk meg S-nek a P_1-től és P_n-től különböző pontjait P_2-től P_{n-1}-ig úgy, hogy amelyiken később halad át az egyenes, annak legyen nagyobb a sorszáma. (Hogyha két ponton ugyanakkor halad át az egyenes akkor mindegy, hogy milyen sorrendben számozzuk meg őket.) Legyen P_i-nek a P_1P_n szakaszra vett merőleges vetülete T_i.



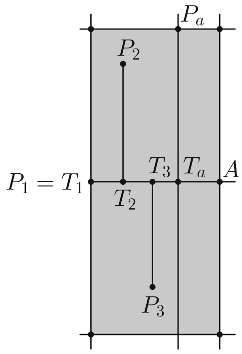
Jelöljük d_i-vel a T_iT_{i+1} szakasz hosszát, vagy pedig legyen $d_i = 0$, hogyha ezen két pont egybeesik. Ekkor $d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1} = T_1T_n = P_1P_n = d$ teljesülni fog, mivel a P_1P_n szakaszon sorban vannak a T_i pontok. Legyen x a $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ számok maximuma. Hogyha $x = d_j$, akkor a T_jT_{j+1} szakasz felezőmerőlegese olyan egyenes lesz, ami szétválasztja S-et, mivel P_1 és P_n különböző oldalán van, és minden S-beli ponttól legalább $\frac{x}{2}$ távolságra van: ha ugyanis egy S-beli pont közelebb lenne hozzá, akkor annak a merőleges vetülete P_1P_n-re a T_jT_{j+1} szakasz belsejébe esne, ami nem lehet, mivel sorban szerepelnek a T_i pontok a P_1P_n szakaszon.

Ezek szerint elég lenne belátni, hogy $x \geqslant cn^{-\frac{1}{3}}$ valamilyen c konstansra.

Mivel a d hosszú P_1P_n szakaszt $n-1$ szakaszra osztottuk fel, és ezek közül vettük a maximális hosszt, így a skatulyaelv miatt $x \geqslant \frac{d}{n-1} \geqslant \frac{d}{n}$ teljesülni fog.

Vegyük a P_1P_n szakaszon azt az A pontot, amelyre $P_1A = 1$, és vizsgáljuk azt a sávot, amit a P_1P_n-re P_1-ben, illetve A-ban állított merőleges meghatároz. Legyenek az ebbe a sávba (vagy a határára) eső S-beli pontok $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Mivel mindkét egyenes merőleges P_1P_n-re, így a pontok számozása miatt valóban az első k pont fog a sávba esni valamilyen $1 \leqslant k \leqslant n$-re.

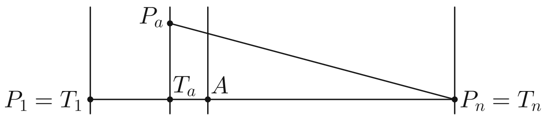
A P_1T_{k+1} távolság nagyobb, mint 1, hiszen P_{k+1} és így T_{k+1} is kívül esik a sávból. Ugyanakkor $P_1T_{k+1} = d_1 + d_2 + \ldots + d_k \leqslant kx$, tehát $1 < kx$ teljesül, azaz $\frac{1}{x} < k$. T_{k+1} csak akkor nem létezik, hogyha $k = n$, ami viszont csak akkor lehet, ha $P_1P_n = 1$, azaz $d = 1$, ekkor viszont $n \leqslant 3$ kell, hogy teljesüljön, azonban kis n-re nem szükséges vizsgálni az állítást, mert c-t választhatjuk olyan kicsire, hogy valamilyen N korlátra $n < N$ esetén mindig teljesüljön $x \geqslant cn^{-\frac{1}{3}}$, hisz tudjuk, hogy $x \geqslant \frac{d}{n} \geqslant \frac{1}{n}$.



Vizsgáljuk a $P_2, P_3, \ldots, P_k$ pontok P_1P_n szakasztól való távolságát, azaz a P_iT_i szakaszok hosszát. Legyen ezek maximuma t. Ekkor a $P_1, P_2, \ldots, P_k$ pontok az *ábra* szerint befoglalhatóak egy $1 \times 2t$-s téglalapba.

Ezt a téglalapot le tudjuk fedni legfeljebb $8t + 2$ darab $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$-es négyzettel, hiszen az 1 hosszú oldal mentén 2 ilyen négyzet kell, a $2t$ hosszú oldal mentén pedig legfeljebb $4t + 1$, hiszen $\frac{\lfloor 4t+1 \rfloor}{2} \geqslant \frac{4t}{2} = 2t$. Egy ilyen $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$-es négyzetbe legfeljebb egy S-beli pont eshet, hiszen egy ilyen négyzeten belül két pont egymástól való távolsága legfeljebb az átló hossza, azaz $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ lehet. Ennek alapján $k \leqslant 8t + 2$, hiszen legfeljebb ennyi kis négyzettel lefedhető a terület, ahova a k darab S beli pont esik. Mivel $\frac{1}{x} < k$, így $\frac{1}{x} \leqslant 8t + 2$, azaz $\frac{1}{8x} - \frac{1}{4} \leqslant t$. Hogyha $\frac{1}{16x} < \frac{1}{4}$ akkor $\frac{1}{4} < x$, amivel megfelelő c-re $x \geqslant cn^{-\frac{1}{3}}$ teljesül, így elég azt vizsgálni, hogyha $\frac{1}{16x} \geqslant \frac{1}{4}$. Ekkor

$$\frac{1}{8x} - \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{8x} - \frac{1}{16x} = \frac{1}{16x}, \quad \text{tehát} \quad \frac{1}{16x} \leqslant t.$$



Legyen P_a az a pont, amire $P_aT_a = t$ és $1 \leqslant a \leqslant k$. Vizsgáljuk a P_aP_n távolságot. A $P_aT_aP_n$ háromszög derékszögű, így a Pitagorasz-tétel szerint

$$P_aP_n^2 = P_aT_a^2 + T_aP_n^2 = t^2 + T_aP_n^2 \geqslant t^2 + (d-1)^2,$$

hiszen $P_1T_a \leqslant 1$ és $P_1T_a + T_aP_n = d$. Azt is tudjuk, hogy $P_aP_n \leqslant d$, hisz d az átmérő, így

$$d^2 \geqslant P_aP_n^2 \geqslant t^2 + (d-1)^2 \geqslant \frac{1}{256x^2} + d^2 - 2d + 1.$$

Átrendezve $2d - 1 \geqslant \frac{1}{256x^2}$, így $2d \geqslant \frac{1}{256x^2}$, tehát $x^2 \geqslant \frac{1}{512d}$, azaz $x \geqslant c \cdot \frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}$ egy megfelelő pozitív c konstansra.

Hogyha $d \geqslant n^{\frac{2}{3}}$, akkor az $x \geqslant \frac{d}{n}$ egyenlőtlenségből $x \geqslant \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n} = n^{-\frac{1}{3}}$.

Hogyha $d \leqslant n^{\frac{2}{3}}$, akkor az $x \geqslant c \cdot \frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}$ egyenlőtlenségből

$$x \geqslant c \cdot \frac{1}{\left(n^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} = c \cdot n^{-\frac{1}{3}}.$$

Mindkét esetben azt kaptuk, hogy $x \geqslant c \cdot n^{-\frac{1}{3}}$ egy megfelelő c pozitív konstansra, és éppen ezt akartuk, így valóban létezik a feladat feltételét teljesítő egyenes.

Egy különös életút, Ramanujan II. rész

Ramanujan eddig legjelentősebbnek bizonyult felfedezése paradox módon egy hibás állítása kapcsán jött napvilágra, ismét egy példát adva, hogy zseniális emberek hibái olykor termékenyebbek, mint közepesek egyes korrekt munkái. Ennek megvilágítása némi előkészületeket igényel. Ha x tetszőleges, akár komplex szám, úgy

$$(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^k)=1-x^{k+1},$$

azaz

$$1+x+x^2+\ldots+x^k=\frac{1-x^{k+1}}{1-x},$$

ahol k tetszőleges egész szám és $x\neq 1$. Ebből egy pontosan meghatározott értelemben adódik,[1] hogy ha $|x|<1$, úgy

(1) $$1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots=\frac{1}{1-x}.$$

Ha $|x|<1$, akkor $|x^3|<1$ is igaz, azaz (1) alkalmazható x helyett x^3-nal. Így adódik

(2) $$1+x^3+x^6+\ldots+x^{3k}+\ldots=\frac{1}{1-x^3},$$

vagy még x-szel, illetve x^2-tel szorozva, $|x|<1$-re adódik

(3) $$x+x^4+\ldots+x^{3k+1}+\ldots=\frac{x}{1-x^3}$$

és

(4) $$x^2+x^5+\ldots+x^{3k+2}+\ldots=\frac{x^2}{1-x^3}.$$

Fenti formulákat fel lehet fogni egyrészt, hogy a bal oldalon álló végtelen sorok számértékét fix $|x|<1$-re egyszerű zárt alakban megadja a jobb oldal. Másrészt

[1] Ha $c_1, c_2, \ldots$ valós (akár komplex) számok, a $c_1+c_2+\ldots+c_k+\ldots$ végtelen összegen az $S_n=c_1+c_2+\ldots c_n$ sorozat határértékét értjük, ha ez létezik. Ha a határérték nem létezik, az összeget nem értelmezzük. Az $1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots$ függvényeket tekintve, az $1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots$ összeg minden $|x|<1$-re egy olyan számsor, amelyre a végtelen összeg a fenti definíció értelmében létezik, ha viszont $|x|\geqq 1$, az összeg nem létezik. Azt a függvényt, mely minden x-hez a végtelen összeget rendeli, ha ez létezik, és különben nincs értelmezve, az $1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots$ függvények összegfüggvényének nevezzük.

Ugyanígy tetszőleges $a_0, a_1x, a_2x^2, \ldots, a_kx^k, \ldots$ függvények összegét is definiálhatjuk, erről van szó az 13. oldalon.

azonban úgy is lehet érteni – ramanujanszerű heurisztikával –, hogy a jobb oldalakon levő „törteket” kifejezzük „x alapú szám rendszerben”. – Szükségünk lesz a komplikáltabbnak látszó

$$\frac{2+x}{1+x+x^2}$$

előállítására is. Mivel $|x|<1$-re

$$\frac{2+x}{1+x+x^2}=\frac{(2+x)(1-x)}{(1+x+x^2)(1-x)}=\frac{2-x-x^2}{1-x^3}=2\frac{1}{1-x^3}-\frac{x}{1-x^3}-\frac{x^2}{1-x^3}=$$

$$=2\cos\left(0\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{1-x^3}+2\cos\left(1\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\frac{x}{1-x^3}+2\cos\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\frac{x^2}{1-x^3},$$

tehát (2), (3), (4) alkalmazható. Így rögtön látható, hogy $|x|<1$-re

$$2\cos\left(0\cdot\frac{2\pi}{3}\right)+2\cos\left(1\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\cdot x+\ldots+2\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\cdot x^k+\ldots=\frac{2+x}{1+x+x^2}. \tag{5}$$

Az (1) formula bal oldalán x hatványai állanak úgy, hogy mindegyik együttható 1. Nem nehéz (1)-ből levezetni, hogy $|x|<1$ mellett

$$1+2x+3x^2+\ldots+(k+1)x^k+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2},$$

amit írjunk binomiális együtthatókkal

$$\binom{1}{1}+\binom{2}{1}x+\binom{3}{1}x^2+\ldots+\binom{k+1}{1}x^k+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2} \tag{6}$$

alakba. Hasonlóan $|x|<1$-re nyerhető, hogy

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}x+\ldots+\binom{k+2}{2}x^k+\ldots=\frac{1}{(1-x)^3}. \tag{7}$$

(1)-be x helyett $(-x)$-et téve, adódik, hogy $|x|<1$-re

$$1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^k x^k+\ldots=\frac{1}{1+x}. \tag{8}$$

A fenti formulák bal oldalaiban közös, hogy x nemnegatív egész kitevős hatványai lépnek fel a kitevőtől függő együtthatókkal. Közös alakjuk tehát

$$a_0+a_1x+\ldots+a_kx^k+\ldots, \tag{9}$$

és igazolható, hogy mindig van olyan $A\geqslant 0$ szám, hogy a (9) alatti ún. hatványsornak egy pontosan meghatározott értelemben van összege, ha $|x|<A$. Ez az összeg

– ilyen x-ekre – fog függeni x-től; ezt $f(x)$-szel jelöljük. Az előbbi példákban a jobb oldalak igen egyszerű alakú függvényeknek adódtak; ez általában messze nincs így. De ha most $f(x)$-et írjuk elő és ennek hatványsorát próbáljuk megtalálni, illetve legalább együtthatóinak közelítő viselkedését, az sem könnyű feladat általában.

Második előkészületként tekintsük a pénzkifizetési problémát, tehát azt, hogy n forintos követelést hányféleképp lehet (1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 és 500 forintosokkal) kifizetni. Ha pl. $n = 500$, akkor a feladat úgy is fogalmazható, hogy hányféleképp lehet az 500-ast felváltani. Ha az 1 Ft-osok száma egy kifizetésnél x_1, a 2 Ft-osoké x_2, az 5 Ft-osoké x_3, a 10-eseké x_4, a 20-asoké x_5, az 50-eseké x_6, a 100-asoké x_7, az 500-asoké x_8, úgy két feltétel szükséges a kifizetéshez:

a) $x_1, x_2, \dots, x_8$ nemnegatív egészek,

b) hogy ki legyen elégítve az

$$1 \cdot x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 20x_5 + 50x_6 + 100x_7 + 500x_8 = n$$

egyenlet. Rögtön látható, hogy *a*) és *b*) teljesülése tényleg egy pénzkifizetési módot ad, *a*) és *b*) egyben elégségesek is. A feladat – mindjárt általánosítva – arra vezetett tehát, hogy adott $b_1, b_2, \dots, b_k$ különböző pozitív egész számok mellett hány megoldása van nemnegatív egészekben a

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_kx_k = n \tag{10}$$

egyenletnek. Jelöljük ezt (n-et tekintve változónak) $P_k(n)$-nel (bár ez a b-ktől is függ, de ezek, mint mondottuk, fixeknek tekintendők).

Harmadik előkészületnek tekintsük a (10) feladat egy szellemes átfogalmazását, amely Eulertől származik. Tekintsük most $f(x)$-et az

$$f(x) = \frac{1}{(1 - x^{b_1})(1 - x^{b_2}) \dots (1 - x^{b_k})} \tag{11}$$

speciális alakban, és próbáljunk hozzá (9) alakú hatványsort találni, ha $|x| < 1$. Ez esetben $|x^{b_1}| < 1$, azaz (1) alkalmazható x helyett x^{b_1}-gye1, azaz

$$\frac{1}{1 - x^{b_1}} = 1 + x^{b_1 \cdot 1} + x^{b_1 \cdot 2} + \ldots + x^{b_1 x_1} + \ldots .$$

Ugyanígy

$$\frac{1}{1 - x^{b_2}} = 1 + x^{b_2 \cdot 1} + x^{b_2 \cdot 2} + \ldots + x^{b_2 x_2} + \ldots$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{1 - x^{b_k}} = 1 + x^{b_k \cdot 1} + x^{b_k \cdot 2} + \ldots + x^{b_k x_k} + \ldots .$$

A bal oldalakat összeszorozva, épp a (11) alatti $f(x)$-et kapjuk; a jobb oldalakat úgy szorozva, ahogy több tagot több taggal szoktunk,

$$x^{b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_kx_k}$$

alakú tagok összességét kapjuk. Ha tehát azt nézzük, hogy ilyen módon hányszor kaphatunk egy rögzített n mellett x^n-t, úgy ezen együttható $P_k(n)$. (A fenti eljárásban hallgatólagosan úgy kezeltünk „végtelen sok tagú" összegeket, mint véges sok tagúaknál megszoktuk, ez azonban jelen esetben igazolhatólag helyes.) Így tehát előáll $|x| < 1$-re az

$$1 + P_k(1) \cdot x + P_k(2) \cdot x^2 + \ldots + P_k(n) \cdot x^n + \ldots = \frac{1}{(1 - x^{b_1}) \ldots (1 - x^{b_k})} \tag{12}$$

meglepő formula.

Nyertünk-e azonban ezzel a szép formulával valamit a $P_k(n)$-ek meghatározására, ami célunk volt? A dolog lényegén nem változtatunk, ha a számítási részletek lehetőleg egyszerűvé tétele végett csak a

$$k = 3, \qquad b_1 = 1, \qquad b_2 = 2, \qquad b_3 = 3$$

esetet tekintjük (10)-ben, azaz keressük az

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = n \tag{13}$$

egyenlet nemnegatív x_1, x_2, x_3-ban való megoldásai $P_3^*(n)$ számát. Egyrészt (12)-ből adódik, hogy

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_3^*(n) x^n, \tag{14}$$

hacsak $|x| < 1$. Másrészt azonban kipróbálhatólag igaz az

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + \tag{15}$$

$$+ \frac{17}{72} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2+x}{1+x+x^2}$$

azonosság. Beírva (7), (6), (1), (8), (5)-öt (15)-be, adódik hogy

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = 1 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \ldots, \tag{16}$$

ahol

$$a_n = \frac{1}{6}\binom{n+2}{2} + \frac{1}{4}\binom{n+1}{1} + \frac{17}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{2}{9} \cos \frac{2\pi n}{3}. \tag{17}$$

Így $|x| < 1$-re adódott az

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

függvényre két, látszólag egészen különböző alakú hatványsoralak. Bebizonyítható általánosan, hogy – kissé pongyolán kifejezve – egy függvénynek $|x|<1$-ben *csak egy* hatványsora van. Ebből adódik, hogy

$$P_3^*(n)=\frac{1}{6}\binom{n+2}{2}+\frac{1}{4}\binom{n+1}{1}+\frac{17}{72}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2\pi n}{3}. \tag{18}$$

Erre a formulára még visszatérünk. – A (10) alatti általános esetben hasonló gondolatmenettel nyilván hasonló eredmény nyerhető.

Ha speciálisan a b_p számokként az első k pozitív egész számot vesszük, úgy (12)-ből $|x|<1$-re

$$1+P_k(1)\cdot x+P_k(2)\cdot x^2+\ldots+P_k(n)\cdot x^n+\ldots=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)}. \tag{19}$$

De mi a helyzet, ha összeadandók gyanánt nemcsak az első k egészet, hanem *minden* egészet megengedünk? Ha tehát az

$$1x_1+2x_2+\ldots=n \tag{20}$$

egyenlet megoldásainak számát nemnegatív egészekben $p(n)$-nel jelöljük, úgy (19) után $|x|<1$-re az

$$\begin{aligned}&1+p(1)\cdot x+p(2)\cdot x^2+\ldots+p(k)\cdot x^k+\ldots=\\&=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)\ldots}\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{Q(x)}\end{aligned} \tag{21}$$

formula várható.[2] Ezt már Euler tudta a 18. század közepén; itt a végtelen sok tényezős szorzatnak pontos értelem adható. De ebből nyerni $p(n)$ pontos meghatározását az előbbivel analóg módon, senkinek sem sikerült, és más módon sem, egészen Ramanujan Angliába jöveteléig. Ekkor egy alkalommal Hardyval diszkutálták Ramanujan egy állítását első leveléből. Ez arra vonatkozott, hogy ha tekintjük $|x|<1$-ben fix összegfüggvény gyanánt az

$$\frac{1}{1-2x+2x^4-2x^9+2x^{15}-\ldots}$$

függvényt, úgy Ramanujan azt állította, hogy az ehhez tartozó a_n^* együtthatók az

$$a_n^*=\left\{\frac{1}{4n}\left(\frac{e^{\pi\sqrt{n}}+e^{-\pi\sqrt{n}}}{2}-\frac{e^{\pi\sqrt{n}}-e^{-\pi\sqrt{n}}}{2\pi\sqrt{n}}\right)\right\} \tag{22}$$

formulából határozhatók meg, ahol $\{x\}$ az x-hez legközelebbi egészet jelenti. Ennek bizonyítására Ramanujan egy egészen újszerű, de teljesen heurisztikus utat vázolt, amiről kiderült, hogy (22)-t nem adja ugyan ki, az nem is igaz, de rájöttek arra, hogy

[2] Ezzel a jelöléssel azt akarjuk kifejezni, hogy az egyenlőségi jel egyik oldalát a másikkal definiáljuk. (*Szerk.*)

$p(n)$ meghatározására igenis alkalmas. Ez önmagában is jelentős eredmény; később sok alkalmazása lett a fizikában és a statisztikus csoportelméletben. Fő jelentősége azonban az, hogy Hardy és Littlewood felfedezték, hogy Ramanujan zseniális alapgondolata, kombinálva azt a nyugati analízis legkifinomultabb technikájával, a számelmélet több klasszikus problémájában azelőtt hihetetlen eredményeket tud produkálni.

Most csak két ilyen problémát említek meg egészen röviden. Miután Lagrange 1770-ben bebizonyította, hogy minden pozitív egész n szám előállítható, mint legfeljebb 4 pozitív egész szám négyzeteinek összege, Waring ugyanezen évben sejtésképp kimondotta, hogy analóg tétel létezik négyzetek helyett k-adik hatványokra is, ahol k tetszőleges, 1-nél nagyobb pozitív egész. Pontosabban szólva azt sejtette, hogy minden $k \geqslant 2$ egészre és pozitív egész n-re, alkalmas

$$a = a(k)\text{-val az}$$

$$n = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_a^k$$

egyenlet megoldható nemnegatív egész $(x_1, x_2, \ldots, x_a)$-val. A lényeges az állításban nyilván az, hogy a felhasznált k-adik hatványok száma n-től nem függ; ha ezt nem kötnénk ki, úgy

$$n = 1^k_{\underbrace{1}} + 1^k_{\underbrace{1}} + \ldots + 1^k_{\underbrace{n}}$$

a feladat megoldása volna. Lagrange előbb említett tétele a jelölés mellett azt állítja, hogy $a(2) = 4$.

Bár az általános sejtést Hilbert 1909-ben bebizonyította, eljárása az $a(k)$-nak csupán a létezését bizonyította be, számértékét *elvileg* nem adhatta ki, és még kevésbé a megoldások számát. A $k = 3$ esetre szorítkozva Hardy és Littlewood az

$$1 + x^{1^3} + x^{2^3} + \ldots + x^{m^3} + \ldots = f_0(x)$$

függvényből kiindulva képezték az $f_0(x)^b$ függvényt, egyelőre határozatlan b pozitív egésszel. Ennek hatványsorában x^n együtthatója épp azt fogja jelenteni, hogy n hányféleképp állítható elő mint b darab nemnegatív egész szám 3. hatványainak összege; ha b-t sikerül úgy megválasztani, hogy $f_0(x)^b$ minden együtthatója pozitív, úgy Waring sejtése igaz, és a keresett $a(3) \leqslant b$. Itt lépett be döntő újításként Ramanujan ötlete; ezzel nyerték az $a(k)$-ra az első explicit korlátot, mely szerint

$$a(k) \leqslant (k-2)2^{k-1} + 5$$

minden egész $k \geqslant 2$-re, ha n „elég nagy”.

Nem térve ki az azóta ezen a téren elért óriási haladásra, megemlítem a második klasszikus problémát, a gyenge Goldbach-sejtést[3], mely 1742-ből való és azt állítja, hogy minden minden 5-nél nagyobb páratlan pozitív egész szám előállítható

[3]2013-ban Harald Helfgott publikált a gyenge Goldbach-sejtésre egy bizonyítást, ám az még nem jelent meg recenzált szakértői folyóiratban. A bizonyítás, melyet a matematikusok széles körben elfogadottnak tekintenek, itt olvasható: `https://arxiv.org/pdf/1305.2897.pdf`. (Szerk.)

mint legfeljebb 3 prímszám összege. Ezen kérdés reménytelennek látszó nehézségét Hardy és Littlewood 1923-ban törték meg, ismét Ramanujan alapgondolatából kiindulva; egy *teljes* bizonyításhoz, legalábbis $n > e^{250}$ esetére, először Vinogradov jutott 1935-ben, tovább javítva az eredeti utat.

Fontossá vált eredményeket tovább idézhetnék Ramanujannak Hardyval való közös munkájából; ezek, ha *alapgondolatuk* Ramanujantól jött is, nem jellemzőek analitikus látásmódjára, a szép formulákban kifejezett összefüggések felfedezésére való intuíciójára. Ezek sokkal mélyebben fekvők, elemzésük, váratlanságuk, mélységük érzékeltetése sokkal több előkészületet igényel, mint a föntebb látott partícióké.[4] De alapvetőbb nehézség az, hogy nem világos, egyáltalán mi tesz egy formulát, egy „száraz matematikai formulát" – ahogy a köznyelv mondja – széppé? Először ezt elemezzük kissé általánosan, azután konkrétabban egy olyan formulát fogunk boncolgatni, amely Ramanujan korai naplójában szerepel, ha azt – Ramanujan tudta nélkül – Euler közel 200 évvel korábban felfedezte, de amelyhez az előkészületek aránylag könnyebbek és ezek nehezén is már előbb túlestünk.

Mi tesz tehát egy formulát széppé? Ehhez először tekintsünk egy formulát, amelyet nem neveznék szépnek. A közismert

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

formula hasznos. De az egyenlőség két oldalán levő kifejezések egyrészt eleve hasonló jellegűek, másrészt a legegyszerűbb gondolattal, a bal oldalon kijelölt szorzás elvégzésével a formula érvényességének belátása egy általános iskolásnak sem jelent problémát. Ezt tehát nem nevezhetném „szép" formulának. Más a helyzet pl. a klasszikus

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots = \sin x \tag{23}$$

formulánál, ahol a jobb oldalon x a szögnek ívmértékben kifejezett nagysága. Itt a két oldalon álló mennyiségek egészen különböző jellegűek, a $\sin x$ geometriai származtatású mennyiség és ezért az összefüggés annak, aki először látja, egészen meglepő, váratlan jellegű. Még paradox is első ránézésre, hiszen a formula tetszőleges nagy valós x-ekre is igaz; a bal oldal *egyes* tagjai külön-külön óriási nagyok lesznek, ha x nagy, viszont az összeg-függvény, a $\sin x$, csak $+1$ és -1 közötti értéket vehet fel. Tehát a (23) formula meglepő tartalma röviden az, hogy – a szólásmondás megfordításával – sok nagy kevésre mehet. Éspedig nem triviális módon, mint pl. a triviális

$$x - x = 0$$

formulában. Továbbá a (23) formula helyességének belátása bizonyos dolgok tudása nélkül, direkt módon, semmiképp nem evidens. Mégis aránylag könnyen látható, hogy az $f(x)$ függvények egy elég általános osztályára a hatványsorát megtalálni nem nehéz feladat, és szerencsére a $\sin x$ függvény ehhez a függvényosztályhoz

[4]Partíció: természetes számnak természetes számok összegeként való előállítása. (*Szerk.*)

tartozik. De szép a (18) formula is. Az egyenlőség két oldalán látszólag egészen különböző jellegű kifejezések állnak; a jobb oldaliról önmagában az sem evidens, hogy egész szám (pedig nyilván annak kell lennie). Az is különös, hogyan kerül a jobb oldalra egy periodikus tag, a $2\cos\frac{2\pi n}{3}$. Tehát a formula jellege váratlan és meglepő. Hasznos is, hiszen a bal oldal *direkt* kiszámításához n^2-rendű számú műveletet kellene végrehajtani, a jobb oldal kiszámításához egy szorzás és öt összeadás elég. Bebizonyítása *direkt,* mint láttuk, nem egyszerű; ha már *tudjuk* a formulát, egy verifikálás teljes indukcióval nem nehéz, ui. ez esetben igazolható, hogy

$$P_3(n)-P_3(n-3)=1+\left[\frac{n}{2}\right],$$

illetve

$$P_3(2m)-P_3(2m-3)=1+m,$$
$$P_3(2m+1)-P_3(2m-2)=1+m.$$

Mint mondottuk, a „Ramanujan-rendűen szép" formulák illusztrálására befejezésül egy Eulertől származó régebbi formulát fogunk kissé behatóbban elemezni.

E formula a (21) alatti $Q(x)$-nek

$$1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots. \tag{24}$$

alakú előállítására vonatkozik, az együtthatók meghatározására. Hogyan állna az ember egy ilyen kérdéshez? Képezné a részszorzatokat:

$$\Pi_2\overset{\text{def}}{=}(1-x)(1-x^2)=1-x-x^2+x^3,$$

$$\Pi_3\overset{\text{def}}{=}(1-x)(1-x^2)(1-x^3)=1-x-x^2+x^4+x^5-x^6,$$

$$\Pi_4\overset{\text{def}}{=}(1-x^4)\Pi_3=1-x-x^2+2x^5-x^8-x^9+x^{10},$$

$$\Pi_5\overset{\text{def}}{=}(1-x^5)\Pi_4=1-x-x^2+x^5+x^6+x^7-x^8-x^9-x^{10}+x^{13}+x^{14}-x^{15}.$$

A Π_6-ot már direkt nem képezzük, csak két észrevételt teszünk. Először is az új tényező x-nek 6-nál kisebb kitevőjű hatványát már nem tudja érinteni, viszont x^6 kiesik, azaz

$$\Pi_6=1-x-x^2+x^5+2x^7+\ldots.$$

Vagyis a továbbiakban x^3, x^4 és x^6 biztosan nem fog fellépni és mindegyik így kezdődik:

$$1-x-x^2+x^5.$$

Π_7-et képezve nyilván x^7 együtthatója $+1$ lesz, azaz Π_7-től kezdve *mindegyik* részletszorzat kezdete:

$$1-x-x^2+x^5+x^7. \tag{25}$$

Az eddigi próbálkozások nem sok fogódzót adnak az a_n-együtthatók szabályára azonfelül, hogy azt sejtetik, hogy az együtthatók „elég szabálytalanul" csak 0 és

± 1 lehetnek. Ha tovább folytatnánk $\Pi_8, \ldots, \Pi_{15}$ képzését, újabb meglepetésként adódna az előbbivel analóg gondolatmenettel, hogy Π_{15}-től kezdve az elején x^7 után nagyobb hézag következik és minden ilyen Π már úgy kezdődik, hogy

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15}.$$

Itt már van egy kis fogódzó; ui. észrevehető, hogy a ténylegesen fellépő exponensek különbségei rendre $2-1=1$, $7-5=2$, $15-12=3$. Csak éppen a „kezdő” 1, 5, 12 kitevőkről nem látszik az első 15 részletszorzat után sem valami szabályosság. És még hosszú ideig.

Euler–Ramanujan szóban forgó tétele mármost egészen pontosan megadja az összes a_n-együtthatók képzési szabályát. Különös – és teljesen váratlan – módon minden attól függ, hogy n előállítható-e

$$n = \frac{3k^2+k}{2} \tag{26}$$

alakban egy pozitív vagy negatív egész k-val és Euler tételének első fele azt mondja ki, hogy

$$a_n = 0, \tag{27}$$

ha n *nem* (26) alakú. Ha sorban

$$k = 0,\ +1,\ -1,\ +2,\ -2,\ +3,\ -3,\ \ldots,$$

úgy rendre

$$\frac{3k^2+k}{2} = 0,\ 2,\ 1,\ 7,\ 5,\ 15,\ 12,\ \ldots$$

ami azt jelenti, hogy a ténylegesen fellépő tagok (24)-ben

$$x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^5,\ x^7,\ \ldots\text{-hez}$$

tartoznak. Ez egyezésben van (25)-tel, de még nem ad felvilágosítást arról, hogy a (26) alatti n-ekre mi a_n értéke. Euler tételének második fele erre válaszol, és azt mondja ki, hogy az ilyen n-ekre

$$a_n = (-1)^k. \tag{28}$$

Ez már rögtön ad felvilágosítást arra, hogy (25)-ben x és x^2 együtthatója miért -1, míg x^5 és x^7 együtthatója $+1$. Maga a szép formula kiírt alakja az, hogy $|x| < 1$-re

$$(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)\ldots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k x^{\frac{3k^2+k}{2}}.$$

Mondanom sem kell, hogy a szépséget a formula *tartalmára*, és nem a *formájára* értem.

A tétel szép, először is, mert váratlan, hiszen a bevezetőben leírt próbálkozást jó sokáig kellene a vájt fülűnek is csinálnia, míg az együttható szabályra rájön.

A tétel szép, mert a kapott szabály, ha rendkívül szokatlan is, elegánsan, röviden, pár szóval megvilágítható volt. A tétel szép, mert helyessége egyáltalán nem evidens, igazán *egyszerű* bizonyítás rá máig sincs, indukciós vagy másfajta verifikálás nem megy, még akkor sem, ha a vájt fülű az együttható szabályra empirikusan már rájött. A tétel szép, mert belőle rögtön következik egy másik, ugyancsak váratlan állítás. Ha a (21) alatti $Q(x)$ helyett az

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^m)\dots\text{-re} \tag{29}$$

vonatkozólag kérdeznénk, hogy

$$1+c_1x+c_2x^2+\dots+c_nx^n+\dots$$

alakba írva, mi a c_n együttható értéke, az előbbiek alapján nyilvánvaló felelet az, hogy annyiszor 1, ahányféleképp n előállítható

$$n=x_1+x_2+\dots+x_l \tag{30}$$

alakban, ahol l tetszőleges egész és

$$1\leqslant x_1<x_2<x_3<\dots<x_l. \tag{31}$$

Vagyis ahányféleképpen n előállítható *különböző* pozitív egészek összegeként. Ha $Q(x)$-et most ezen szemszögből nézzük, akkor minden (30)–(31) alatti előállítás, amelynél l páros, $+1$-gyel, amelynél l páratlan, (-1)-gyel járul a_n-hez. Tehát azt nyertük, hogy

$$a_n=\Pi_1-\Pi_2, \tag{32}$$

ahol Π_1 azt jelenti, hogy n hányféleképp állítható elő mint *páros sok* különböző pozitív egész szám összege, Π_2 pedig mint *páratlan sok* különböző pozitív egészé. Így Euler tétele mellékesen kiadja azt, hogy az n pozitív egész ugyanannyiféleképp állítható elő páros sok különböző pozitív egész összegeként, mint páratlan sok ilyen összegeként, *kivéve, ha* n a (26) *alakba írható,* amikor is 1-gyel több, illetve kevesebbféleképp aszerint, hogy k páros, illetve páratlan. Ha valakinek azt a kérdést tennénk fel az előzmények nélkül, mit gondol, egy n pozitív egész szám páros vagy páratlan sok különböző pozitív egész szám összegeként állítható-e elő többféleképp, nagy valószínűséggel azt felelné, hogy mindig, talán az első pár n kivételével, ugyanannyiféleképp, hiszen nincs semmi ok, hogy egyikből több legyen, mint a másikból. Nagyon meg lenne lepve, ha hallaná, hogy ez alól *végtelen* sok kivétel van, és ezek épp a (26) alatti n-ek!

Szép tétel általában nem izolált érdekességű. Ez áll a szóban forgó Euler-tételre is. (24) és (21)-ből

$$\begin{gathered}(1+a_1x+a_2x^2+\dots+a_\mu x^\mu+\dots)(1+p(1)\cdot x+\\+p(2)\cdot x^2+\dots+p(\nu)x^\nu+\dots)=1.\end{gathered} \tag{33}$$

Ha $n\geqslant 1$, akkor a jobb oldalon x^n együtthatója 0, a bal oldalon pedig

$$p(n)+p(n-1)\cdot a_1+p(n-2)\cdot a_2+\dots+p(1)\cdot a_{n-1}+a_n.$$

Az említett egyértelműségi tétel miatt ez 0, azaz

$$(34)\qquad p(n) = -a_1p(n-1) - a_2p(n-2) - \ldots - a_{n-1}p(1) - a_n.$$

Ez tehát a $p(n)$-re egy rekurzív formula. Ha ezt $p(n)$ értékeinek számítására akarjuk felhasználni, akkor ez egy igen jól használható formula. Ugyanis a $p(\nu)$-k igen nagy számok; ha (34)-ben sok tag van, akkor ez nagyon sok számolást jelent. De Euler tétele szerint az a_ν-együtthatók java része 0, úgy hogy (34) valójában jóval kevesebb tagot tartalmaz. Ez a tény még ma, a gyors számítógépek korában is hasznos, hiszen pl.

$$p(200) = 3\,972\,999\,029\,388,$$

de Ramanujan korában neki rendkívül sokat jelentett. Éspedig azért, mert még Indiában megkezdett vizsgálatai a $p(n)$-ek oszthatósági tulajdonságaira vonatkozólag mindig konkrétan kiszámolt $p(n)$-eken konstatált *numerikus* észrevételekkel kezdődtek. Márpedig Ramanujannak ezek és az ezekből kiinduló, máig is csak naplójában levő feljegyzései indították B. Birch oxfordi professzort 1975-ben, tehát Ramanujan halála után több, mint 50 évvel, hogy „A look back at Ramanujan's Notebooks" c. dolgozatában[5] leírjon olyan mondatot, hogy „... They support the view that Ramanujan's insight into the arithmetics of modular forms was even greater than has been realized ...”[6] mindezt egy emberről, aki középiskoláit sem tudta elvégezni!

Turán Pál

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Az f függvény olyan, hogy minden $x \in \mathbb{R}^+$-re $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{\log_2^2 x}}$. Hol veszi fel a függvény a 2 értéket? (*6 pont*)

b) Adott egy g függvény úgy, hogy minden $x \in D_g$-re $g(x+1) = \frac{2g(x)+1}{2}$ és $g(2021) = 2021$. Mennyi $g(2020)$? (*4 pont*)

2. *a*) Huba a bolhapiacon szeretné eladni az okostelefonját. Tapasztalatból tudja, hogy az ár $\frac{1}{5}$ részét lealkudják a vásárlók, ezért a megállapított érték $\frac{1}{4}$ részével többet kér, így az alku után éppen annyit kap, amennyit szeretne. Ezúttal azonban a telefon értékének 90%-ával tért haza. Hányadrészét kapta meg Huba a telefon piacon kihirdetett árának? (*5 pont*)

[5] Visszapillantás Ramanujan naplóira.

[6] „Mindezek alátámasztják azt, hogy Ramanujan többet látott meg a moduláris formák aritmetikájából, mint eddig gondoltuk ...”

b) Vacsora után Huba $n = 1$-től 100-ig sorban felírta az n után következő pozitív egész szám négyzetének és n négyzetének a különbségét. Testvére, Luca meglátta a számsort és elölről kezdve bekarikázott 24 prímszámot. Meglepve látta, hogy az utolsó bekarikázott szám a sorban éppen annyiadik helyen áll, ahány gyertya volt aznap édesanyja születésnapi tortáján. Hány éves Huba anyukája? (*8 pont*)

3. *a*) Mennyi az alábbi táblázatban szereplő számok összege? (*8 pont*)

1	2	3	$\dots$	n
2	3	4	$\dots$	$n+1$
3	4	5	$\dots$	$n+2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	$n+1$	$n+2$	$\dots$	$2n-1$

b) Hétfőn Gabi vett néhány részvényt, másnap 10 százalékot veszítettek értékükből, ám szerdán nőtt az értékük 10 százalékkal. Ez így folytatódott azon a héten és még a következő héten is. Hogyan változott Gabi részvényeinek értéke a második hét utolsó napjára? (*5 pont*)

4. Adott az $A(2020; 2021)$, $B(2027; 2025)$, $C(2022; 2027)$ és a $D(2026; 2022)$ pont a Descartes-féle koordinátarendszerben. Legyen az E pont az AB és a CD szakasz metszéspontja.

a) Határozzuk meg az AE és az EB szakaszhosszak arányát. (*7 pont*)

b) Számítsuk ki a négy adott pont által meghatározott négyszög kerületét és területét. (*8 pont*)

II. rész

5. *a*) Az A halmaz az $ax^2 - bx + c = 0$ egyenlet $\big(a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $b^2 - 4ac \geqslant 0\big)$ összes valós gyökének reciprokát tartalmazza. Fejezzük ki az A halmaz elemeinek összegét az a, b, c paraméterek segítségével. (*6 pont*)

b) Öten beszélgetnek a pozitív egész számokat tartalmazó B halmazról. Tudják, hogy B-ben van legalább egy olyan elem, ami nagyobb 1-nél és ha a B halmaz tartalmaz egy n számot, akkor az összes n-nél nagyobb számot is tartalmazza, kivéve esetleg az n néhány többszörösét. A következő állítások hangzanak el a beszélgetés során:

Andi: „B számossága véges."

Bulcsú: „Végtelen sok olyan pozitív egész szám van, ami nincs benne B-ben, és végtelen sok olyan, ami benne van."

Cecília: „Szerintem az összes pozitív prímszám benne van a B halmazban."

Dani: „$B = \mathbb{Z}^+$."

Emőke: „Létezik egy olyan m pozitív egész szám, hogy B tartalmazza az összes m-nél nagyobb egész számot."

Ki(k)nek van biztosan igaza? Indokoljuk válaszunkat. (*6 pont*) *c*) Később az intervallumok is szóba kerülnek. Adott két valós szám: x és y, amelyekre igaz, hogy $0 < x < y < 1$. Melyik intervallumban van $x\sqrt{y}$?

Andi: „$]0;x[$."
Bulcsú: „$]x;y[$."
Cecília: „$]x;1[$."
Dani: „$]y;1[$."
Emőke: „$]1;\infty[$."

Ki(k)nek van igaza és miért? (*4 pont*)

6. *a*) Győr idén ünnepli várossá válásának 750. évfordulóját. Erre az alkalomra egy építész három kör alakú szökőkutat tervezett úgy, hogy közülük kettő egybevágó, sugaruk hossza 12 méter, kívülről érintik egymást és egy fasort is, amely egy egyenest határoz meg. Milyen hosszú a harmadik szökőkút sugara, ha az kívülről érinti a másik kettőt és a fasor egyenesét is? (A szökőkutak a fasornak ugyanazon az oldalán vannak.) (*8 pont*)

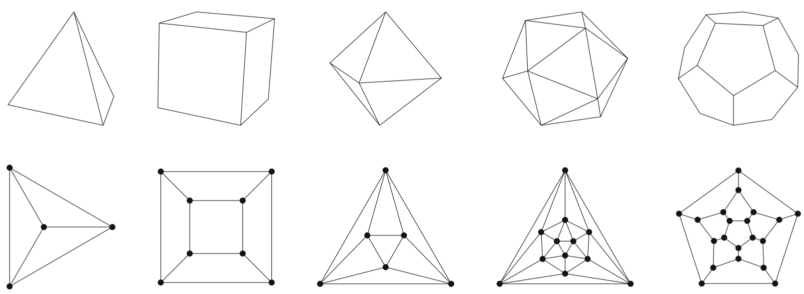
b) Egy másik építész egy hatalmas teret álmodott meg, amelyet tíz, egymást kívülről érintő kör határol. A körök középpontjai egy 121 méter kerületű tízszöget alkotnak. Számítsuk ki a legnagyobb kör r_1 sugarát, ha tudjuk, hogy két-két darab $r_2 = \frac{1}{3}r_1$; $r_3 = \frac{1}{3}r_2$; $r_4 = \frac{1}{3}r_3$ és $r_5 = \frac{1}{3}r_4$ sugarú kör van, a tizedik kör sugara pedig $r_6 = \frac{1}{3}r_5$. (*8 pont*)

7. *a*) Nevesincs-sziget lakói minden számot kétféle kavics sorozatával ábrázolnak. A $\triangle$ alakú kavics 1-gyel növeli az előtte álló kavicsok által meghatározott számot, a $\otimes$ pedig 7-tel való szorzást jelent. Például a $\triangle\triangle\triangle\otimes\triangle\otimes\triangle\triangle$ a 156-os számot jelenti. Legalább hány kavics kell a 2021 kirakásához? (*5 pont*)

b) Janka összegyűjtötte a 2021 kirakásához minimálisan szükséges számú kavicsot, és véletlenszerűen lerakta sorban egymás mellé az összeset. Hány különböző módon történhetett ez meg, ha csak az számít, hogy az adott helyen milyen formájú kavics áll? (*5 pont*)

c) Ezután Janka találomra kivett egy kavicsot a 20-ból, megmutatta barátnőjének, majd visszatette. Ezt még kétszer megismételte. Írjuk fel a $\triangle$ alakú kavicsok számának eloszlását és határozzuk meg a várható értéket. (*6 pont*)

8. *a*) Az öt szabályos testet a következő síkbeli gráfok segítségével ábrázoltuk. Lehetséges-e bármelyiket a ceruzánk felemelése nélkül megrajzolni úgy, hogy minden élen pontosan egyszer húzzuk át a ceruzát? (*6 pont*)



b) Marika egységnyi élhosszúságú, pirosra festett kockákból szeretne összeragasztani egy $5 \times 5 \times 5$-ös nagyobb kockát. Hány gramm ragasztóra van szüksége összesen, ha két kis kocka 1-1 lapját 250 milligramm ragasztóval lehet stabilan összeragasztani? (*4 pont*)

c) Az összeragasztás során kiderült, hogy összesen 150 kiskocka állt Marika rendelkezésére. A kiskockák 8 százaléka cinkből készült, a többi alumíniumból. Marika véletlenszerűen válogatta ki a szükséges kockákat. Legyen az A esemény az, hogy a nagyobb kocka nem lett cinkelt (azaz nem tartalmaz cinket), a B esemény pedig az, hogy a nagyobb kocka az összes cinkből készült kiskockát tartalmazza. Az A vagy a B esemény bekövetkezésének valószínűsége a nagyobb? (*6 pont*)

9. *a*) Fricinek 14 nap múlva lesz a szalagavatója, és addigra minél hosszabb szakállat szeretne növeszteni. Most naponta fél millimétert nő a szakálla és éppen ma borotválkozott. A boltban vásárolt egy olyan balzsamot, amelyet közvetlenül borotválkozás után a teljesen sima bőrre kenve, a szakállnövekedés sebessége az előző napi másfélszeresére nő. Legfeljebb milyen hosszú lehet Frici szakálla a szalagavató napján, ha egyik napon sem borotválkozik 1-nél többször? (*7 pont*)

b) Legyen α egy szabályos sokszög külső szögének nagysága és tudjuk, hogy az $\left(1+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)$ kifejezés értéke a lehető legkisebb. Határozzuk meg a szabályos sokszög csúcsainak számát. (*9 pont*)

Kozma Katalin Abigél
Győr

Megoldásvázlatok a 2020/12. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Hány olyan egész szám van, amelyre teljesül, hogy* $(x+2)^3-(x-2)^3 < 2020$? (*5 pont*)

Ha barátunk találkozik egy lánnyal a vizsgaidőszakban, akkor $\frac{2}{3}$ *valószínűséggel szerelmes lesz belé. Ha szerelmes, akkor nem tud koncentrálni, ezért csak* 10% *az esélye annak, hogy fel tud készülni a vizsgáira, míg ha éppen nem szerelmes, akkor ez az arány* 70%.

b) *Mutassuk meg, hogy a sikeres vizsga valószínűsége* 0,3. (*5 pont*)

c) *Ha tudjuk, hogy sikerült a vizsgája, mennyi annak a valószínűsége, hogy szerelmes?* (*2 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel $(x+2)^3 = x^3+6x^2+12x+8$ és $(x-2)^3 = x^3-6x^2+12x-8$, ezért $(x+2)^3-(x-2)^3 = 12x^2+16$. Meg kell oldjuk a $12x^2+16<2020$ egyenlőtlenséget. Ennek megoldása: $|x| < \sqrt{167} \approx 12{,}9$.

Mivel x egész szám, ezért: $x \in \{-12; -11; \ldots; -1; 0; 1; \ldots; 11; 12\}$. Ennek a halmaznak 25 eleme van. Tehát 25 olyan egész szám van, amely kielégíti az egyenlőtlenséget.

b) Vezessük be az alábbi eseményeket. SZ: szerelmes lesz a barátunk, V: sikeres vizsgát tesz a barátunk. A feladat szerint $P(\mathrm{SZ}) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(\overline{\mathrm{SZ}}) = \frac{1}{3}$, $P(\mathrm{V} \mid \mathrm{SZ}) = 0{,}1$, $P(\mathrm{V} \mid \overline{\mathrm{SZ}}) = 0{,}7$. A teljes valószínűség tétele szerint

$$P(\mathrm{V}) = P(\mathrm{V} \mid \mathrm{SZ}) \cdot P(\mathrm{SZ}) + P(\mathrm{V} \mid \overline{\mathrm{SZ}}) \cdot P(\overline{\mathrm{SZ}}) = 0{,}3.$$

c) Bayes tétele szerint

$$P(\mathrm{SZ} \mid \mathrm{V}) = \frac{P(\mathrm{V} \mid \mathrm{SZ}) \cdot P(\mathrm{SZ})}{P(\mathrm{V})} = \frac{0{,}1 \cdot \frac{2}{3}}{0{,}3} = \frac{2}{9}.$$

2. *a*) *Egy mértani sorozat harmadik tagja* 32*, a hatodik tagja* 2048*. Számítsuk ki a sorozat első hat tagjának az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését.* (*6 pont*)

Tekintsük a következő állításokat.

A: Egy adatsokaság mediánja mindig eleme az adatsokaságnak.

B: Ha $f(x) = 3x + 2$ *és* $g(x) = |x| - 1$*, akkor* $f\big(g(x)\big) = 3 \cdot |x| - 1$*. (Itt* $f\big(g(x)\big)$ *összetett függvény képzését jelöli.)*

C: Ha egy sorozat nem konvergens, akkor nem monoton.

b) *Döntsük el, hogy igazak vagy hamisak az állítások. Mindenhol indokolni is kell, példával, ellenpéldával, számolással stb.* (*6 pont*)

c) *Fogalmazzuk meg a C állítás megfordítását. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása. Válaszunkat indokoljuk.* (*2 pont*)

Megoldás. *a*) Jelölje a sorozat első tagját a_1, a hányadosát q. Ekkor $a_1q^2 = 32$ és $a_1q^5 = 2048$. Ezeket osszuk el egymással. Kapjuk, hogy $\frac{a_1q^5}{a_1q^2} = q^3 = 64 \Rightarrow q = 4 \Rightarrow a_1 = 2$.

Tehát a sorozat első hat tagja: 2, 8, 32, 128, 512, 2048. Ezen számok átlaga $\overline{x} = 455$, így az első hat tagnak az átlagtól mért átlagos abszolút eltérése:

$$\frac{|455-2| + |455-8| + |455-32| + |455-128| + |455-512| + |455-2048|}{6} = 550.$$

b) Az A állítás hamis, mert pl. az 1, 2, 3, 4 számok esetén a medián $\frac{2+3}{2} = 2{,}5$.

A B állítás igaz, ugyanis $f\big(g(x)\big) = f\big(|x| - 1\big) = 3 \cdot \big(|x| - 1\big) + 2 = 3 \cdot |x| - 1$.

A C állítás hamis, ugyanis az $a_n = n$ sorozat nem konvergens, de monoton.

c) Az C állítás megfordítása: *Ha egy sorozat nem monoton, akkor nem konvergens.* Vagy másképpen mondva: *Ha egy sorozat konvergens, akkor monoton.*

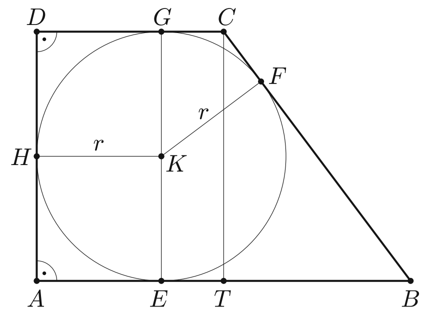
Az állítás hamis, ugyanis az $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ sorozat konvergens, de nem monoton.

3. *a) Egy derékszögű trapézba kör írható. Az alapok hossza* 150 cm *és* 300 cm. *Mekkora a beírt kör sugara?* *(7 pont)*

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\log_2(x^2y) = 4,$$
$$\log_4 x - 3\log_4 y = -\frac{5}{2}.$$ *(7 pont)*

Megoldás. *a)* Jelölje r a beírt kör sugarát. Az $AEKH$ és $HKGD$ négyszögek négyzetek és külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők, ezért $FC = GC = 150 - r$ és $BF = BE = 300 - r$.



Ezért $BC = 450 - 2r$. A TCB háromszögben $TC = 2r$ és $TB = 150$. Pitagorasz tétele szerint

$$(2r)^2 + 150^2 = (450 - 2r)^2 \ \Rightarrow\ r = 100.$$

Tehát a kör sugara 100 cm.

Megjegyzés. Máshogyan is megkaphattuk volna, hogy $BC = 450 - 2r$. Az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög, ezért a szemközti oldalak összege megegyezik és így $300 + 150 = 2r + BC \Rightarrow BC = 450 - 2r$.

b) A kifejezések akkor értelmezettek, ha $x, y > 0$. A logaritmus definíciója miatt $\log_2(x^2y) = 4 \Rightarrow x^2y = 16$. A logaritmus azonossága és definíciója miatt

$$\log_4 x - 3\log_4 y = \log_4 x - \log_4 y^3 = \log_4 \frac{x}{y^3} = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{y^3}{32}.$$

Innen $x^2 = \frac{y^6}{1024}$. A másik egyenletből $x^2 = \frac{16}{y}$. Tehát $\frac{y^6}{1024} = \frac{16}{y} \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 2$.

Ellenőrzés.

4. *a) Tekintsük a* $(8 \times 8$*-as) sakktábla mezőinek középpontjait egy gráf csúcsainak. Két csúcs között pontosan akkor vezessen él, ha az egyik mezőről el lehet jutni a másikra egy szabályos futólépéssel. Hány éle van az így kapott gráfnak? (A futó átlósan képes lépni akármennyit.)* *(5 pont)*

b) Adott az f függvény: $f(x) = 90x^2 - 6x^3$. Határozzuk meg a p lehetséges értékeit úgy, hogy $\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ teljesüljön. *(6 pont)*

7	7	7	7	7	7	7	7
7	9	9	9	9	9	9	7
7	9	11	11	11	11	9	7
7	9	11	13	13	11	9	7
7	9	11	13	13	11	9	7
7	9	11	11	11	11	9	7
7	9	9	9	9	9	9	7
7	7	7	7	7	7	7	7

Megoldás. *a*) A sakktáblába be fogjuk írni az egyes csúcsok fokszámait. A fokszámösszeg:

$$28 \cdot 7 + 20 \cdot 9 + 12 \cdot 11 + 4 \cdot 13 = 560.$$

Ismert, hogy a fokszámösszeg az élek számának a kétszerese, ezért az élek száma 280.

b) Integrálunk és használjuk a Newton–Leibniz-tételt:

$$\int_0^p (90x^2 - 6x^3)\,\mathrm{d}x = \left[30x^3 - \frac{3}{2}x^4\right]_0^p = \left(30p^3 - \frac{3}{2}p^4\right) - (0-0) = p^3 \cdot \left(30 - \frac{3}{2}p\right).$$

A feladat feltétele szerint $p^3 \cdot \left(30 - \frac{3}{2}p\right) = 0 \Rightarrow p_1 = 0,\ p_2 = 20$.

Tehát a feladat két megoldása $p_1 = 0$ és $p_2 = 20$.

II. rész

5. *a*) *Melyek azok a háromjegyű pozitív egész számok, amelyekhez megadható olyan hárompontú egyszerű gráf, hogy annak fokszámai megegyeznek a háromjegyű szám számjegyeivel? Minden esetben adjuk is meg a megfelelő gráfokat.* (*6 pont*)

Tekintsük a következő, a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett függvényt:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6}.$$

b) *Ábrázoljuk az $f(x)$ függvényt.* (*6 pont*)

c) *Hány rácsponton megy át a függvény? (Rácspont: olyan pont a koordinátarendszerben, amelynek mindkét koordinátája egész szám.)* (*4 pont*)

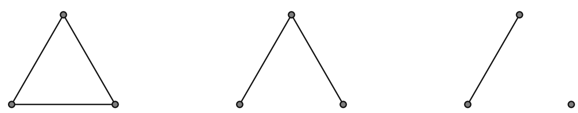
Megoldás. *a*) A gráf egyszerű, ezért a pontok fokszámai 0, 1, 2 lehetnek. A lehetséges fokszámsorozatok:

1. eset: 2, 2, 2. Ehhez 1 darab háromjegyű szám tartozik: 222.

2. eset: 2, 1, 1. Ehhez 3 darab háromjegyű szám tartozik: 211, 121, 112.

3. eset: 1, 1, 0. Ehhez 2 darab háromjegyű szám tartozik: 110, 101.

A gráfok:

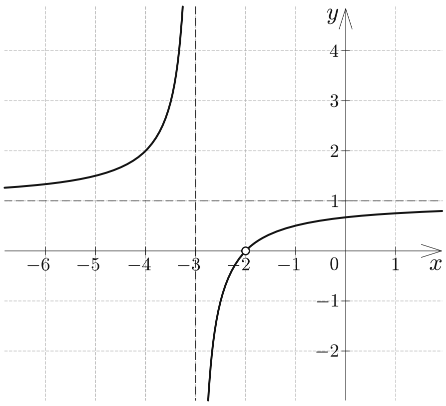


b) A nevezőt és a számlálót is szorzattá tudjuk alakítani pl. nevezetes azonosságok, gyöktényezős alak segítségével. Kapjuk, hogy $x^2+4x+4=(x+2)^2$ és $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$. Ezért

$$f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}=$$

$$=\frac{(x+2)^2}{(x+2)(x+3)}=\frac{x+2}{x+3}=$$

$$=1-\frac{1}{x+3}.$$



A függvény értelmezési tartománya: $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2;-3\}$.

c) Feladatunk azt meghatározni, hogy hány x egész szám esetén teljesül, hogy $\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$ is egész szám. Tudjuk, hogy az értelmezettség miatt $x\in\mathbb{Z}\setminus\{-2;-3\}$ és

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}=1-\frac{1}{x+3}.$$

Ezért ahhoz, hogy ez egész kifejezés tudjon lenni, teljesülni kell, hogy $x+3\mid 1$.

1. eset: Ha $x+3=1\Rightarrow x=-2$, de ez nem lehetséges.

2. eset: Ha $x+3=-1\Rightarrow x=-4$. Ez megfelelő.

Tehát a függvény 1 rácsponton megy át, mely a $P(-4;2)$.

6. *a*) *Jelölje p_n az n-edik pozitív prímszámot. Hány* 0*-ra végződik a*

$$p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_{2020}$$

szorzat? (*3 pont*)

Az ABC háromszög oldalai: $AB=9$ cm, $BC=7$ cm, $CA=6$ cm.

b) *Mutassuk meg, hogy a beírt kör sugara egy tizedre kerekítve* 1,9 cm. (*2 pont*)

c) *Mekkora érintési szakaszok húzhatók a B csúcsból a beírt körhöz?* (*4 pont*)

d) *Mekkora annak a konkáv síkidomnak a területe, amelyet a B csúcsból húzott két érintési szakasz és a beírt kör íve határol?* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) A 0-ra végződés a 10-zel való oszthatósággal kapcsolatos. A szám pontosan annyi 0-ra fog végződni, ahányszor maximálisan osztható 10-zel. A kérdés az, hogy a szám 2-nek és 5-nek legfeljebb hányadik hatványával osztható. A szorzatban a 2 az egyedüli páros szám és van 5-ös a szorzatban. Ezért a szám 10-zel osztható, de 100-zal már nem.

A szorzat 1 darab 0-ra végződik.

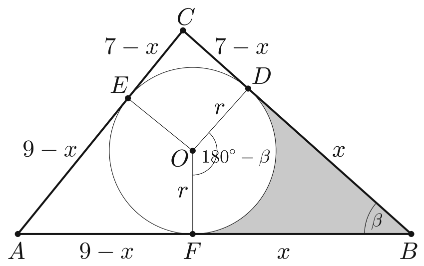
b) A félkerület: $s=11$ (cm). Területe Hérón-képlettel: $T=\sqrt{11\cdot 2\cdot 4\cdot 5}\approx$ $\approx 20{,}976$ (cm^2). A beírt kör sugara:

$$r=\frac{T}{s}\approx\frac{20{,}976}{11}\approx 1{,}907 \text{ (cm)},$$

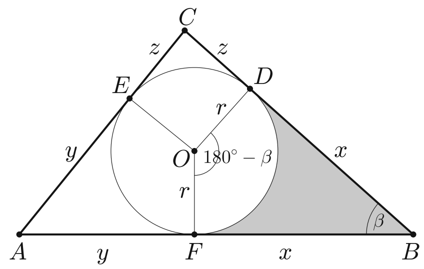
ami egy tizedesjegyre kerekítve valóban 1,9 (cm).

c) *I. megoldás.* Készítsünk *ábrát.* Külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők. (Mindent cm-ben adunk meg.) Ha $BF=BD=x$, akkor $AF=$ $=AE=9-x$ és $CD=CE=7-x$. Felírjuk AC-t: $AC=(9-x)+(7-x)=6\Rightarrow$ $x=5$ (cm).

Tehát az érintési szakasz hossza 5 cm.



I. megoldás



II. megoldás

II. megoldás. Készítsünk *ábrát.* Külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők. (Mindent cm-ben adunk meg.) Legyen $BF=BD=x$, $AF=AE=y$ és $CD=CE=z$. Ekkor $x+y=9$, $x+z=7$, $y+z=6$. Összeadva az egyenleteket kapjuk, hogy $2(x+y+z)=22\Rightarrow x+y+z=11$. Innen $x=(x+y+z)-(y+z)=$ $=11-6=5$.

Tehát az érintési szakasz hossza 5 cm.

III. megoldás. Írjuk fel a koszinusztételt az ABC háromszögben:

$$6^2=9^2+7^2-2\cdot 9\cdot 7\cdot\cos\beta\ \Rightarrow\ \cos\beta=\frac{47}{63}\ \Rightarrow\ \beta\approx 41{,}752^\circ.$$

Az FBO háromszögben:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{r}{x}\ \Rightarrow\ x=\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\approx\frac{1{,}907}{\operatorname{tg}20{,}876^\circ}\approx 5 \text{ (cm)}.$$

Tehát az érintési szakasz hossza 5 cm.

d) Írjuk fel a koszinusztételt az ABC háromszögben:

$$6^2=9^2+7^2-2\cdot 9\cdot 7\cdot\cos\beta\ \Rightarrow\ \cos\beta=\frac{47}{63}\ \Rightarrow\ \beta\approx 41{,}752^\circ.$$

Az $OFBD$ négyszög deltoid, területe:

$$T_{OFBD}=2\cdot T_{OFB}=2\cdot\frac{rx}{2}=rx=9{,}535 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Most meghatározzuk a körcikk területét $r = 1{,}907$ (cm-rel számolva:

$$T_{\text{körcikk}} = \frac{r^2\pi \cdot (180° - \beta)}{360°} \approx 4{,}387\ (\text{cm}^2).$$

A konkáv alakzat területe: $T_{\text{konkáv}} = T_{OFBD} - T_{\text{körcikk}} \approx 5{,}15\ (\text{cm}^2)$.

Tehát a konkáv síkidom területe 5,15 cm^2.

7. *a) Adjuk meg a $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y = 2020$ egyenletű k kör középpontját és sugarát.* (*4 pont*)

b) Egy négyzet két szemközti csúcsának koordinátái $A(1;1)$ és $C(5;3)$. Írjuk fel a négyzetbe írható kör egyenletét. (*4 pont*)

c) Írjuk fel azoknak az egyeneseknek az egyenletét, amelyek egyszerre felezik a fenti négyzet és a k kör területét. (*3 pont*)

d) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$3^{2(x+1)(x-2)} = 9^{\frac{x+1}{x-2}}.$$ (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Osszuk el 3-mal az egyenletet és alakítsunk ki teljes négyzeteket.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = \frac{2020}{3} \ \Rightarrow\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{2035}{3}.$$

Tehát a kör középpontja $K(1;-2)$ és sugara $r = \sqrt{\frac{2035}{3}}$.

b) A négyzet középpontja az AC szakasz felezőpontja, mely megegyezik a beírható kör középpontjával is. Jelöljük ezt F-fel. Ekkor $F(3;2)$. Kapjuk, hogy $AF = \sqrt{5}$, ezért a beírt kör sugara $r = \frac{AF}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$, ezért az egyenlete

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = \frac{5}{2}.$$

c) A k kör és a négyzet területét egyszerre felező egyenes biztosan átmegy a kör és a négyzet középpontján. Mivel $K(1;-2)$ és $F(3;2)$, ezért egyetlen egyenes van, amely megfelel a feltételeknek. Ennek egy irányvektora $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{KF} = (2;4) \Rightarrow \overrightarrow{n}(2;-1)$.

Az egyenes egyenlete: $2x - y = 4$.

d) Először kikötést végzünk: $x \neq 2$. Az $f(x) = 9^x$ függvény szigorú monotonitása miatt:

$$3^{2(x+1)(x-2)} = 9^{\frac{x+1}{x-2}} \ \Rightarrow\ 9^{(x+1)(x-2)} = 9^{\frac{x+1}{x-2}} \ \Rightarrow\ (x+1)(x-2) = \frac{x+1}{x-2}.$$

Innen $(x+1)(x-2)^2 - (x+1) = 0$ adódik, majd kiemelés után kapjuk, hogy $(x+1) \cdot \left[(x-2)^2 - 1\right] = 0$. Egy szorzat akkor és csakis akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, azaz $x + 1 = 0$ vagy $(x-2)^2 - 1 = 0$. Innen adódnak az $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ gyökök.

Ellenőrzés.

8. *a) Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelyre teljesül, hogy bármely két számjegye relatív prím egymáshoz?* (*7 pont*)

b) Egy dobozban cukorkák vannak, 2 *narancsos és* 3 *citromos. Addig veszünk ki cukorkákat (a kivett cukorkákat elszopogatjuk), amíg mindkét fajtából húzunk legalább egyet. Határozzuk meg annak az öt eseménynek a valószínűségét, hogy ehhez* 1, 2, 3, 4, *illetve* 5 *cukorka kihúzására lesz szükség, majd számítsuk ki a húzások számának várható értékét.* (*9 pont*)

Megoldás. *a*) Esetszétválasztást fogunk végezni több szempont alapján. Először megnézzük, hogy van-e 0 a számjegyek között.

1. eset: Ha van 0 a jegyek között, akkor csak 1-esek lehetnek még a számjegyek között. A képezhető háromjegyű számok: 101 és 110. Ez 2 lehetőség.

2. eset: Ha nincs 0 a számjegyek között. Itt 3 esetet fogunk megvizsgálni.

2/a. eset: Ha a számjegyek mind egyformák. Ekkor a számjegy csak 1-es lehet. A képezhető háromjegyű szám: 111. Ez 1 lehetőség.

2/b. eset: Ha a számjegyek között két egyforma és egy tőlük különböző van. A két egyforma számjegy csak 1-es lehet, míg a tőlük különböző harmadik számjegy 8-féle lehet $(2; 3; \ldots; 9)$.

Az 1, 1, 2 számjegyekből 3 darab háromjegyű számot tudunk képezni, ez igaz a többi esetben is. Így ekkor összesen $8 \cdot 3 = 24$ lehetőség van.

2/c. eset: Ha a számjegyek különböznek egymástól. Ekkor az $1, 2, \ldots, 9$ számjegyekből képezünk 6 darab csoportot: $\{1\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{2; 4; 8\}$, $\{3; 9\}$, $\{6\}$.

Itt két lényegesen eltérő esetet fogunk vizsgálni.

2/c-i. eset: Ha a számjegyek között van 6-os. Ekkor a maradék két számjegy az 1, 5, 7 közül kerül ki. Erre $\binom{3}{2} = 3$ lehetőség van. Ekkor $3 \cdot 3! = 18$ háromjegyű számot tudunk képezni.

2/c-ii. eset: Ha a számjegyek között nincs 6-os. Ezen eseten belül további 3 alesetet fogunk megkülönböztetni aszerint, hogy a $\{2; 4; 8\}$ és $\{3; 9\}$ nagyobb elemszámú csoportokból bekerülnek-e elemek a számjegyek közé.

2/c-ii-A. eset: Ha mindkét csoportból kerül be egy-egy elem. Ekkor összesen $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3! = 108$ háromjegyű szám képezhető.

2/c-ii-B. eset: Ha csak az egyik csoportból kerül be elem. Ekkor összesen $5 \cdot \binom{3}{2} \cdot 3! = 90$ háromjegyű szám képezhető.

2/c-ii-C. eset: Ha egyik csoportból sem kerül be elem. Ekkor az 1, 5, 7 számjegyekkel kell dolgozni. Ekkor összesen $3! = 6$ háromjegyű szám képezhető.

Tehát összesen $2 + 1 + 24 + 18 + 108 + 90 + 6 = 249$ háromjegyű szám felel meg a feltételeknek.

Megjegyzés. A *2/c. eset*-et másképp is megoldhattuk volna. Felsoroljuk az összes olyan számhármast (a követhetőség kedvéért számjegyei szerint növekvő sorrendben), amelyben nincs 0 számjegy, minden számjegye különböző és megfelel a feltételeknek. Ezek az alábbiak: 123, 125, 127, 129, 134, 135, 137, 138, 145, 147, 149, 156, 157, 158, 159, 167, 178, 179, 189, 235, 237, 257, 259, 279, 345, 347, 357, 358, 378, 457, 459, 479, 567, 578, 579, 589, 789. Ezek száma 37, így belőlük $37 \cdot 3! = 222$ háromjegyű szám képehető és a *2/c. esetben* valóban ennyi esetet számolhatunk meg, ugyanis $18 + 108 + 90 + 6 = 222$.

b) Jelölje ξ azt, hogy hány cukorkát kell ahhoz kihúzni, hogy mindkét fajta cukorkából legyen nálunk. Ekkor $P(\xi = 1) = 0$. Legfeljebb 4 húzás szükséges ahhoz, hogy legyen narancsos és citromos is a kihúzottak között. Ezért $P(\xi = 5) = 0$. Jelölje N a narancsos és C a citromos cukorkát. Jelölje NC azt, hogy először narancsosat, majd utána citromosat húzunk.

Ekkor $P(\mathrm{NC}) = \frac{2\cdot 3}{5\cdot 4} = 0{,}3$. Akkor kell pontosan kettőt húzni, ha NC vagy CN a húzás. Ezért

$$P(\xi = 2) = P(\mathrm{NC}) + P(\mathrm{CN}) = \frac{2\cdot 3}{5\cdot 4} + \frac{3\cdot 2}{5\cdot 4} = 0{,}6.$$

Akkor kell pontosan hármat húzni, ha NNC vagy CCN a húzás.

$$P(\mathrm{NNC}) = \frac{2\cdot 1\cdot 3}{5\cdot 4\cdot 3} = 0{,}1.$$

Mivel $P(\mathrm{CCN}) = \frac{3\cdot 2\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3} = 0{,}2$, ezért $P(\xi = 3) = P(\mathrm{NNC}) + P(\mathrm{CCN}) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$.

Akkor kell pontosan négyet húzni, ha CCCN a húzás.

$$P(\xi = 4) = P(\mathrm{CCCN}) = \frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 0{,}1.$$

A várható érték: $E(\xi) = 2\cdot 0{,}6 + 3\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}1 = 2{,}5$.

9. *Bergengócia* 2025*-re foci világbajnokságot szeretne rendezni, melyet a frissen felépített stadionban rendeznek meg. A rendezvény logója egy* 2025 *pontú teljes gráf lesz, melynek éleit piros, fehér és zöld színnel színezik. (Minden élt kiszíneznek és minden él csak egyfajta színű lehet. Nem feltétlenül kell mindegyik színt használni, de csak ezeket használhatják.) Közvéleménykutatás keretében kiderítették, hogy azok a legszebb színezések, ahol a fehér élek száma kétszerese a piros élek számának (és egyik sem 0).*

a) Hányféle értéke lehet a piros élek számának? (*4 pont*)

Egy sajtótájékoztatón azt is elmondták, hogy a fenti színezések közül egy olyat fognak választani, amelyben a különböző színű élek számának a szorzata a legnagyobb lesz.

b) Hány piros színű éle lesz a logónak? (*6 pont*)

c) János egy szabályos tízszög átlói közül véletlenszerűen kijelöl ötöt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek között az élek között lesz legalább egy a legrövidebb vagy a leghosszabb átlók közül? Az eredményt normálalakban adjuk meg. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A 2025 pontú teljes gráf éleinek száma $\binom{2025}{2} = 2\,049\,300$. Ha a piros élek száma p, akkor a fehérek száma $2p$ és a zöldek száma $2\,049\,300 - 3p$. Ezek mindegyike pozitív, ezért $1 \leqslant p \leqslant 683\,100$. Tehát 683 100-féle értéke lehet a piros élek számának.

b) I. megoldás. A függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(p) = p \cdot 2p \cdot (2\,049\,300 - 3p) = -6p^3 + 4\,098\,600p^2$$

és értelmezési tartománya az $\{1; 2; \ldots; 683\,100\}$ halmaz. Tekintsük a függvényt folytonosnak. A függvény deriváltja: $f'(p) = -18p^2 + 8\,197\,200p$. A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol $f'(p) = 0$. Ennek megoldásai: $p_1 = 0$ és $p_2 = 455\,400$. Ha $0 < p < 455\,400$, akkor $f'(p) > 0$. Ha $455\,400 < p \leqslant 683\,100$, akkor $f'(p) < 0$. A függvénynek $p = 455\,400$ helyen helyi maximuma van.

Tehát a piros színű élek száma 455 400.

II. megoldás. A függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(p) = p \cdot 2p \cdot (2\,049\,300 - 3p) = -6p^3 + 4\,098\,600p^2$$

és értelmezési tartománya az $\{1; 2; \ldots; 683\,100\}$ halmaz. Tekintsük a függvényt folytonosnak. A függvény deriváltja: $f'(p) = -18p^2 + 8\,197\,200p$. A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol $f'(p) = 0$. Ennek megoldásai: $p_1 = 0$ és $p_2 = 455\,400$. Az egyedüli kritikus pont a 455 400.

A függvény második deriváltja: $f''(p) = -36p + 8\,197\,200$. Mivel $f''(455\,400) = -8\,197\,200 < 0$, ezért itt helyi maximuma van a függvénynek.

Tehát a piros színű élek száma 455 400.

III. megoldás. A függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(p) = p \cdot 2p \cdot (2\,049\,300 - 3p) = -6p^3 + 4\,098\,600p^2$$

és értelmezési tartománya az $\{1; 2; \ldots; 683\,100\}$ halmaz. Írjuk fel az $1{,}5p$, $1{,}5p$, $2\,049\,300 - 3p$ mennyiségek számtani és mértani közepét. Számtani közép:

$$\frac{1{,}5p + 1{,}5p + (2\,049\,300 - 3p)}{3} = 683\,100.$$

Mértani közép:

$$\sqrt[3]{1,5p \cdot 1,5p \cdot (2\,049\,300 - 3p)}.$$

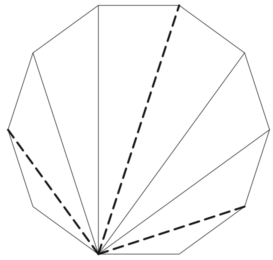
A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség szerint:

$$\sqrt[3]{1{,}5p \cdot 1{,}5p \cdot (2\,049\,300 - 3p)} \leqslant 683\,100.$$

A közepek között akkor lehetséges egyenlőség, ha minden szereplő mennyiség megegyezik, azaz $1{,}5p = 2\,049\,300 - 3p$. Ennek a megoldása $p = 455\,400$.

Tehát a piros színű élek száma 455 400.

c) Az átlók száma $\frac{10\cdot 7}{2}=35$. Az *ábrán* szaggatott vonallal berajzoltuk, hogy az egy csúcsból húzható 7 átlóból 3 olyan, ami „rövid” vagy „hosszú”. A „rövid” vagy „hosszú” élek száma összesen $\frac{10\cdot 3}{2}=15$, ezért a többi él száma 20.

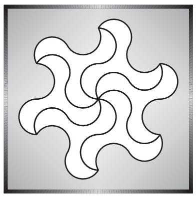


$$P(\text{lesz hosszú vagy rövid}) =$$
$$= 1-P(\text{nincs benne egyik sem}) = 1-\frac{\binom{20}{5}}{\binom{35}{5}}.$$

A keresett valószínűség kb. 0,9522, ami normálalakban megadva $9{,}522\cdot 10^{-1}$.

Fridrik Richárd
Szeged

Matematika feladat megoldása



B. 5049. *Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan pozitív egész (a,b) pár létezik, amelyre*

$$2019<\frac{2^a}{3^b}<2020.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

I. megoldás. A bizonyítás során többször fogjuk használni a következő lemmát: Ha $0<r<1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$.

Először találunk egy olyan (s,t) (pozitív egészekből álló) számpárt, amelyre $1>X:=\frac{2^s}{3^t}>\frac{2019}{2020}$. Ilyen például ($s=1054$, $t=665$), ugyanis 10-es alapú logaritmusokra áttérve:

$$0>1054\lg 2-665\lg 3\approx 317{,}28561-317{,}28563=-0{,}00002>$$
$$>\lg 2019-\lg 2020\approx 3{,}3051-3{,}3054=-0{,}0003.$$

Ennek segítségével vegyük 2-nek tetszőlegesen nagy, 2020-nál nagyobb hatványait – legyen egy ilyen hatvány 2^c – és ezt szorozzuk meg X-nek egy olyan k-adik hatványával, amelyre $2019<X^k\cdot 2^c<2020$. Ilyen k biztosan létezik, hiszen lemmánkat használva egyrészt $\lim\limits_{n\to\infty} X^n=0$, azaz rögzített c-re

$$2^c\cdot\lim_{n\to\infty} X^n=0;$$

másrészt a $(2019,2020)$ intervallumot nem ugorhatja át X^k, hiszen akkor

$$2020 \leqslant X^k, X^{k+1} \leqslant 2019,$$

és így $X \leqslant \frac{2019}{2020}$ lenne, ami ellentmondás.

Nyilván különböző c számokra X-nek különböző k-adik hatványai rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy $2^c \cdot X^k \in (2019,2020)$, ezért az így kapott törtek nevezőjében a 3 mindig más hatványon fog szerepelni. Tehát valóban találtunk végtelen sok $\frac{2^a}{3^b}$ alakú számot 2019 és 2020 között.

Kocsis Anett (Győr, Révai Miklós Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Elsőként megjegyezzük, hogy $\log_2 3$ irracionális. Ellenkező esetben ugyanis $\log_2 3 = a/b$, valamilyen a és b pozitív egészekre, melyeknek legnagyobb közös osztója 1. Ekkor $= 2^{a/b} = 3$, azaz $2^a = 3^b$. Ennek az egyenletnek az egyetlen egész megoldása $a = b = 0$, ami nyilván nem jó, tehát $\log_2 3$ valóban irracionális.

Írjuk ezután a kívánt $2019 < \frac{2^a}{3^b} < 2020$ egyenlőtlenséget

$$a - \log_2 2020 < b \log_2 3 < a \ - \log_2 2019$$

alakba.

Belátjuk, hogy a (törtrészekből álló) $f_i := \{i \log_2 3\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ sorozatnak végtelen sok eleme található bármely $[x; y] \subset (0; 1)$ intervallumon. Először megjegyzendő, hogy minden $i < j$ indexpárra $f_i \neq f_j$. Ellenkező esetben ugyanis $(j - i) \log_2 3 = z$ egész szám lenne, ellentmondva $\log_2 3$ irracionalitásának. Megmutatjuk, hogy bármilyen kicsi ε-ra létezik olyan (A, B) egész számpár, amelyre $|f_A - f_B| < \varepsilon$. Legyen $1/n < \varepsilon$, és osszuk fel a $[0; 1]$ intervallumot n egyenlő részre, majd vegyük az f_j sorozat első $n + 1$ elemét. Osztópontokra egyikük sem eshet, mivel az azt jelentené, hogy $\log_2 3$-nak egy egész számszorosa racionális. Így viszont a skatulyaelv miatt van köztük kettő ugyanabban a részintervallumban, tehát egymástól $1/n$-nél kisebb távolságra. Ha f_A és f_B ilyen $(A < B)$, akkor tekintsük a $g_i = f_{1+i\cdot(B-A)}$ sorozatot; ez $f_A - f_B$ előjelétől függően egy $\pm\varepsilon'$ (ahol $0 < \varepsilon' < \varepsilon$) differenciájú számtani sorozat modulo 1. Ekkor az $[x; y]$ intervallumban legalább $\frac{y-x}{\varepsilon'} - 1$ értéke lesz a g_j sorozatnak, ami ε (és így ε') csökkentésével tetszőlegesen nagy lehet. Így az $\big(1 - \{\log_2 2020\}; 1 - \{\log_2 2019\}\big)$ intervallumon is végtelen sok eleme van f_i-nek. Ha $f_b = \{b \log_2 3\}$ ilyen, akkor

$$1 - \{\log_2 2020\} < \{b \log_2 3\} < 1 - \{\log_2 2019\}.$$

Mindkét egyenlőtlenségben mindkét oldalhoz $[b \log_2 3]$ hozzáadásával:

$$[b \log_2 3] + 1 - \{\log_2 2020\} < b \log_2 3 < [b \log_2 3] + 1 - \{\log_2 2019\}.$$

Figyelembe véve, hogy $[\log_2 2019] = [\log_2 2020] = 10$, válasszuk a értékét $a = 11 + [b \log_2 3]$-nak. Ekkor a fenti egyenlőtlenségek éppen a kívánt

$$a - \log_2 2020 < b \log_2 3 < a - \log_2 2019$$

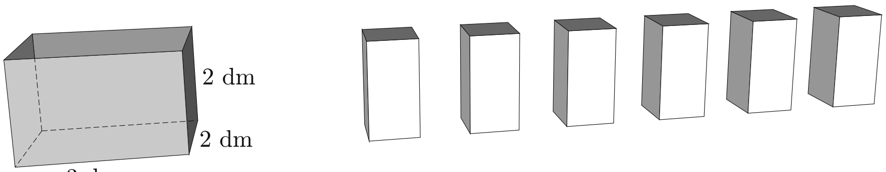
alakot öltik, vagyis az a, b pár egy megoldását adja az eredeti egyenlőtlenségnek.

Noszály Áron (Debreceni Fazekas M. Gimn., 12. évf.)

54 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 19 versenyző: Argay Zsolt, Beke Csongor, Biczó Benedek, Bukva Dávid, Csizmadia Miklós, Fleiner Zsigmond, Füredi Erik Benjámin, Győrffi Ádám György, Hervay Bence, Jánosik Áron, Jánosik Máté, Kocsis Anett, Mácsai Dániel, Nádor Benedek, Noszály Áron, Stomfai Gergely, Terjék András József, Tiderenczl Dániel, Zempléni Lilla. 4 pontos 7, 3 pontos 6, 2 pontos 5, 1 pontos 6, 0 pontos 11 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (679–683.)

K. 679. Peti még 3 éves korában kapta meg hat darabból álló építőjátékát, melyben minden építőelem téglatest alakú. Az elemek mérete 1 dm $\times$ 1 dm $\times$ 2 dm. A tartódoboz belső mérete 3 dm $\times$ 2 dm $\times$ 2 dm és minden oldala más színű. Hányféle különböző elrendezésben pakolhatja be Peti a hat elemet a dobozába, ha az építőelemek ugyanolyan színűek és nem különböztetjük meg őket? (A dobozból nem lóghat ki egy építőelem sem.)



K. 680. Egy kocka négy lapját befestettük pirosra, majd a kockát szétvágtuk 125 darab egyforma kiskockára. Ezek között hány olyan lehet, amelynek egyik lapja sem festékes?

K. 681. Határozzuk meg, hány olyan háromszög van, melyben az oldalak hossza centiméterben mérve egész szám, és a leghosszabb oldala 2021 cm hosszú (lehet több ilyen oldala is).

K. 682. Háromféle különböző számkártyánk van, mindegyikből elegendően sok. A számkártyákon egy-egy számjegy van. Ezekből a számkártyákból elkészítjük az összes lehetséges különböző pozitív négyjegyű számot. Ezeknek a négyjegyű számoknak az összege 689 931. Melyik az a három számjegy, ami a számkártyákon szerepel?

K. 683. A körbe írható $ABCDEFG$ hétszögben az $ABC\sphericalangle$, $CDE\sphericalangle$ és $EFG\sphericalangle$ szögek összege nagyobb 450°-nál. Mutassuk meg, hogy a köré írt kör középpontja nem lehet sem a hétszögön belül, sem annak valamelyik oldalán.

(*The University of Stirling, school mathematics competition, 1983*)

Beküldési határidő: 2021. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1644–1650.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1644. Egy keskeny, 10 cm × 30 cm méretű, téglalap alakú tepsiben sütit sütöttünk, melynek a széle lett a legropogósabb. A sütit úgy vágjuk fel, hogy a vágások az oldalakkal párhuzamosan, végig futnak. Hány darabra osztható a sütemény, ha azt szeretnénk, hogy minden darabon ugyanakkora rész legyen a ropogós széléből?

C. 1645. Egy hegyesszögű háromszögben – a szokásos jelöléseket használva – m_b, a, b, c ebben a sorrendben egymás utáni pozitív egész számok. Mekkora a háromszög területe?

Javasolta: *Tatár Zsuzsanna Mária* (Esztergom)

Feladatok mindenkinek

C. 1646. Oldjuk meg az $(xy-1)^2=(x+1)^2+(y+1)^2$ egyenletet az egész számpárok halmazán.

Javasolta: *Szalai Máté* (Szeged)

C. 1647. Egy egyenlő szárú háromszög száraihoz tartozó súlyvonalak merőlegesek egymásra. Jelölje r és R a háromszög beírt és körülírt körének sugarát. Határozzuk meg az $\frac{r}{R}$ arány pontos értékét.

C. 1648. Arthur király és Sir Lancelot gyalog-galopp versenyt rendeznek. Sir Lancelot azt mondja Arthur királynak: „Felség, az ön gyalog-galopp sebessége az enyémnek csak a $\frac{2}{3}$-a, ezért adok önnek 100 méter előnyt és a kijelölt versenypálya hosszán belül biztosan utolérem. Ha pedig ön 2 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$-mal csökkentené a sebességét, én pedig 5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$-mal és 50 méter előnyt adnék önnek, akkor is utolérném a pályán. A kétféle utolérési időtartam összege éppen 75 másodperc.” Határozzuk meg Arthur király és Sir Lancelot gyalog-galopp sebességét.

Feladatok 11. évfolyamtól

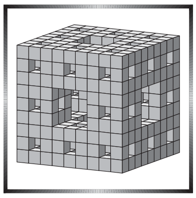
C. 1649. Egy húrnégyszög átlói merőlegesen metszik egymást az M pontban. Az átlók a négyszöget háromszögekre bontják. Bizonyítsuk be, hogy bármelyik háromszög M-ből induló magasságvonala és a szemközti háromszög M-hez tartozó súlyvonala egy egyenesre esik.

C. 1650. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenséget, ahol $a,b,c>1$:

$$\log_{ab} c \leqslant \frac{\log_a c+\log_b c}{4}.$$

Beküldési határidő: 2021. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5142–5149.)



B. 5142. Egy focibajnokság egy csoportjában négy csapat szerepelt. A csoportban mindenki mindenkivel egyszer játszott. Győzelemért 3, döntetlenért 1, vereségért 0 pont járt. A két legtöbb pontot összegyűjtő csapat továbbjutott, a másik kettő kiesett. Pontegyenlőség esetén sorsolással döntöttek. Melyek azok a p számok, amelyekre előfordulhat, hogy egy továbbjutónak és egy kiesőnek egyaránt p pontja lett?

(*3 pont*)

B. 5143. Oldjuk meg a $16x^2+9x+117=24x\sqrt{x+13}$ egyenletet a valós számok körében.

(*4 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5144. Az $ABCD$ konvex négyszög területe t, egy belső pontja O. Mutassuk meg, hogy

$$2t\leqslant OA^2+OB^2+OC^2+OD^2.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

(*3 pont*)

B. 5145. Mutassuk meg, hogy azoknak az n hosszúságú nullákból és egyesekből álló sorozatoknak a száma, amelyekben pontosan k-szor fordul elő, hogy 0 után 1 következik, éppen $\binom{n+1}{2k+1}$.

(*4 pont*) (*Angol olimpiai válogatóverseny feladata*)

B. 5146. Adott egy egységnyi térfogatú T téglatest, és belsejében egy M pont. Tükrözzük az M pontot a téglatest lapsíkjaira, a kapott 6 képpont konvex burka legyen D. Határozzuk meg a $T\cap D$ test térfogatát.

(*5 pont*)

B. 5147. Legyen $k>1$ pozitív egész szám. Megadható-e a pozitív egészek olyan

a) tetszőlegesen nagy, véges

b) végtelen

részhalmaza, melyben bármely k elem legnagyobb közös osztója 1-nél nagyobb, továbbá bármely $k+1$ elem legnagyobb közös osztója 1?

(*5 pont*) Javasolta: *Mészáros Gábor* (Budapest)

B. 5148. Az ABC háromszögnek C-nél derékszöge van. A háromszögbe írt kör a BC befogót a D, az AC befogót az E pontban érinti. A BC oldalhoz hozzáírt kör a BC szakaszt a G pontban érinti; hasonlóan, az AC oldalhoz hozzáírt kör az AC szakaszt a H pontban érinti. A DH és EG szakaszok metszéspontja M. Mutassuk meg, hogy a DGM és az EHM háromszögek köré írt körök M-től különböző metszéspontja a beírt körre esik.

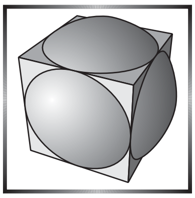
(*6 pont*)

B. 5149. Hányféleképpen lehet kitölteni egy 6×6-os táblázat mezőit az $1, 2, \ldots, 36$ számokkal úgy, hogy bárhogy választunk 6 mezőt, melyek közül semelyik kettő nincs egy sorban vagy oszlopban, a kiválasztott mezőkbe írt számok összege mindig ugyanannyi legyen?

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2021. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (791–792.)

A. 791. Adva van egy villanykörte, amely piros, zöld vagy kék színnel tud világítani, és háromállású kapcsolók egy végtelen H halmaza, ahol mindegyik kapcsolónál meg van jelölve a három állás a piros, kék és zöld színekkel. A következőket tudjuk még:

i) Mindegyik kapcsolóállásnál egyértelműen meghatározott színnel világít a villanykörte.

ii) Ha mindegyik kapcsoló ugyanarra az adott színre van állítva, a villanykörte is az adott színnel világít.

iii) Ha két kapcsolóállásnál mindegyik kapcsolóra igaz, hogy különböző állásban van, akkor a két állásnál a villanykörte más színnel világít.

Készítsük el a H bizonyos részhalmazaiból álló U halmazt a következő módon: minden kapcsolóállásnál nézzük meg a villanykörte színét, és tegyük bele az U halmazba azon kapcsolók halmazát, melyek állása megegyezik a villanykörte színével.

Bizonyítsuk be, hogy U ultraszűrőt alkot H-n.

(U ultraszűrő H-n, ha teljesíti a következőket:

a) Az üres halmaz nincs benne U-ban.

b) Ha két halmaz benne van U-ban, a metszetük is benne van U-ban.

c) Ha egy halmaz benne van U-ban, minden nála bővebb H-beli részhalmaz is benne van U-ban.

d) Egy halmaz és H-beli komplementere közül pontosan az egyik van U-ban.)

Lásd még az **N. 35.*** feladatot az 1994-es évfolyam májusi számából.

A. 792. Legyen $p\geqslant 3$ prímszám és $0\leqslant r\leqslant p-3$. Legyenek $x_1,x_2,\dots,x_{p-1+r}$ egész számok, melyekre $\sum\limits_{j=1}^{p-1+r} x_j^k\equiv r \pmod p$ minden $1\leqslant k\leqslant p-2$-re.

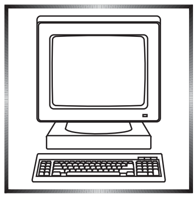
Mik lehetnek az $x_1,x_2,\dots,x_{p-1+r}$ számok maradékai modulo p?

Javasolta: *Matolcsi Dávid* (Budapest)

Beküldési határidő: 2021. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok



I. 526. András szereti az egész számokat és a számrendszereket. Azon töprengett, hogy vannak-e olyan számok, amelyeket több különböző alapú számrendszerben felírva a számjegyek összege ugyanaz az érték. Hamar rájött, hogy például az 1 szám felírása mindegyik számrendszerben 1, tehát a számjegyek összege is azonos. A 2 szám alakja 2-es számrendszerben 01, minden más számrendszerben 2, vagyis a számjegyek összege egy kivétellel itt is 2. Gondolta, hogy az egyjegyű számoknál ez nem olyan érdekes tulajdonság, ezért a többjegyűekkel kezdett foglalkozni. Sokat számolt, de rájött, hogy a témakört alaposabban csak számítógépes programmal tudná megvizsgálni.

Segítsünk Andrásnak. Készítsünk programot, amely megadja azokat a tízes számrendszerben legalább kétjegyű, de legföljebb hatjegyű pozitív egészeket, amelyeknek a lehető legtöbb számrendszerben azonos a számjegyeinek összege. A program a kimenet első sorába írja ki, hogy legföljebb hány számrendszerben azonosak a számok, majd a következő sorba növekvő sorrendbe írja ki ezeket a számokat. A program csak a kettestől a tízesig terjedő számrendszerekben vizsgálódjon.

Beküldendő egy `i526.zip` tömörített állományban a forrásprogram és egy rövid dokumentáció, amely megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 527 (É). Egy társaságban többen vannak, akik különböző helyekről ismerik egymást, de vannak szép számmal olyanok is, akik még sohasem találkoztak. Az ismeretségek kölcsönösek.

*`http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=FelHivatkoz&id=41643`

Zoltán nagyon érdeklődik a gráfok iránt, ezért gyorsan feltérképezi a társaságot az ismeretségek alapján. Egy papírra feljegyzi az egymást ismerők monogramját a következő formában: `KP NZ JJ SA NZ BC` ... A leírásban párok fordulnak elő, tehát `KP` és `NZ` ismeri egymást, `JJ` és `SA` ismeri egymást ... A monogramok minden esetben az angol ABC két nagybetűjéből állnak, és nincs két azonos monogrammal jelölt személy. Minden ismeretség csak egyszer kerül feljegyzésre, és teljesen véletlenszerű, hogy melyik fél szerepel azon elsőként vagy másodikként.

Zoltán később több kérdést is megfogalmazott, amely az ismeretségekre vonatkozik. Mivel a társaság elég nagy, ezért úgy gondolta, hogy a kérdésekre előbb választ kaphat, ha számítógépes programot készít. Segítsünk neki, oldjuk meg a következő feladatokat.

1. A párok monogramjai a honlapunkról letölthető `parok.txt` szöveges állomány egy sorában vannak egy-egy szóközzel elválasztva, legföljebb 500 monogram, azaz 250 ismeretség. Olvassuk be és tároljuk el a további feldolgozáshoz a monogramokat és az ismertségeket. Részlet a `parok.txt` állományból:
   `KP NZ JJ SA NZ BC MP AC BJ KC KJ MP ...`
2. Adjuk meg, hogy hány személy szerepel az állományban.
3. Kérjük be egy személy monogramját, és adjuk meg a monogramjaik ABC-sorrendjében az ismerőseit.
4. Adjuk meg, hogy melyik személynek van a legtöbb ismerőse a társaságban. Ha több ilyen személy van, akkor elegendő az egyiket megadni: írjuk ki a monogramját és ismerőseinek számát.
5. Kérjük be egy másik személy monogramját, és adjuk meg, hogy hány közös ismerőse van az előbbi feladatban bekért személlyel.
6. Adjuk meg, kik azok, akik nem ismerik az előbb bekért személyt és annak egyetlen ismerősét sem.

```
1. feladat:
A parok.txt állományt beolvastam.
2. feladat:
Az állományban 47 személy szerepel.
3. feladat:
Adja meg egy személy monogramját: MP
MP ismerősei: AC BJ DA KC KJ OP
4. feladat:
A legtöbb ismerőse KC személynek van, szám szerint 13.
5. feladat:
Kérem adja meg egy másik személy azonosítóját: SA
MP és SA közös ismerőseinek száma 6.
6. feladat:
MP-t és ismerőseit sem ismeri DD KH LU ZS.
```

Beküldendő egy tömörített `i527.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 528. Évről-évre új naptárt készítünk és ragasztunk a falra, holott csak 14 különböző hételrendezésű év létezik, ha a mozgó vallási ünnepek időpontjától (húsvét, pünkösd, purim stb.) eltekintünk.

Készítsük el az azonos naptárú éveket megadó listát táblázatkezelő segítségével `naptárak` néven.

	A	B
1	**Év**	**Azonosak**
2	2021	2010
3		2021
4		2027
5		2038
6		2049
7		2055
8		2066
9		2077
10		2083
11		2094
12		2100

Az A1 és B1 cella legyen a minta szerinti, az A2 cella kezdetben legyen üres, de a minta szerinti formátumú.

Ha az A2 cellába begépelünk egy 2000 és 2399 közötti egész számot, a B2 cellától kezdődően növekvő rendezettséggel jelenjenek meg azok az évszámok, amelyek 2000 és 2399 közé esnek, és naptáruk azonos az A2 cellába írt évszámú év naptárával. Állítsuk be, hogy a formátum a mintának megfelelő legyen.

Ügyeljünk arra, hogy amennyiben az A2 cella üres vagy tartalma nem a 2000–2399 tartományba eső egész szám (pl. 25, 4,31, „Martfű”, HAMIS), a B oszlopban ne jelenjen meg semmi a keretezett, színezett mezőkben.

Segédszámításokat végezhetünk a C oszloptól jobbra, amelyek értelmezését feliratokkal segítsük elő vagy a dokumentációban írjuk le. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy `i528.zip` tömörített mappában a táblázatkezelő munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáshoz alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

I/S. 50. Egy televíziós vetélkedő döntőjében két vagy három versenyző szerepel. A végső sorrendet közönségszavazással határozzák meg. Mindenki csak egy versenyzőre és legfeljebb egyszer szavazhat. A szavazás vége előtt öt perccel megmutatják az addig leadott szavazatok százalékos eloszlását. Pontosabban század százalékra kerekítve kiírják az állást anélkül, hogy megmondanák, melyik szám melyik versenyzőhöz tartozik.

Peti már biztosra tudja ki fog nyerni (a kedvenc versenyzője), így arra kíváncsi, mit tudhat meg még a számokból. Most azt szeretné megtudni, hogy legalább hányan adták le a szavazatukat a döntőben. Készítsünk programot, amely válaszol Peti kérdésére több ilyen vetélkedő esetén.

Bemenet: az első sor a vetélkedők, azaz a megoldandó esetek N száma. Ezután N sorban egy-egy lehetséges állás szerepel, mindegyikben legfeljebb három, a mintával megegyező formátumú szám.

Kimenet: a legkisebb szavazószám, amire igaz, hogy létezik olyan szavazateloszlás, amely a kiírt százalékos értékeket adja.

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 100$. *Időkorlát:* 0,1 mp.

Példa:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**

`6`
`28.57% 71.43% / 0.01% 99.99%`
`11.11% 33.33% 55.56% / 0.01% 0.01% 99.97%`
`0.01% 0.01% 99.98% / 0.01% 0.01% 99.99%`
	`7 / 6667 / 9 / 6667`
	`8000 / 13334`

Figyelem: a kerekített számok összege nem feltétlenül ad 100%-ot.

Értékelés: A pontok 40%-a kapható, ha a döntőben két versenyzőre lehet szavazni. További 60% kapható, ha a versenyzők száma három.

Beküldendő egy `is50.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 149. Adott egy N csúcsból álló fa, csúcsait pozitív egész számokkal jelöljük, gyökere az 1-es csúcs. A fa minden P csúcsára szeretnénk tudni, hogy hányféleképpen tudunk kiválasztani a fából egy K darab csúcsból álló rendezett sorozatot úgy, hogy az abban szereplő csúcsok legközelebbi közös őse a P csúcs legyen. Két kiválasztás különböző, ha abban a választott csúcsok eltérőek, vagy ha a csúcsok sorrendje különböző. A választásban egy csúcs többször is előfordulhat. A K darab csúcs legközelebbi közös őse az a csúcs, ami őse a K csúcs mindegyikének, és a lehető legmesszebb van a gyökértől.

Bemenet: az első sor tartalmazza az N és a K számot. A következő $N-1$ sor mindegyike egy x és y számot tartalmaz, ami azt jelenti, hogy közöttük fut él.

Kimenet: adjunk meg egy sorban N darab számot. Az i-edik szám jelentse a megoldást akkor, ha $P=i$. A megoldások nagyon nagyok is lehetnek, ezért azok számának modulo 10^9+7 maradékát adjuk meg.

Példa:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`7 2 / 1 2 / 1 6 / 2 3 / 2 4 / 2 5 / 3 7`	`23 19 3 1 1 1 1`

Magyarázat: nézzük $P=2$ esetét ($K=2$, tehát két csúcsot kell sorrendben választani, amelyek legközelebbi közös őse a 2-es csúcs). A lehetséges kiválasztások: 2-2, 2-3, 2-7, 2-4, 2-5, 3-2, 3-4, 3-5, 7-2, 7-4, 7-5, 4-2, 4-3, 4-7, 4-5, 5-2, 5-4, 5-3, 5-7.

Korlátok: $3 \leqslant N \leqslant 10^5$, $2 \leqslant K \leqslant 10^{10}$, $0 \leqslant xy \leqslant N-1$. Időkorlát: 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 30%-a kapható, ha $K \leqslant 2$.

Beküldendő egy `s149.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2021. február 15.

Matematikai képzések az ELTE TTK-n

Kedves leendő Egyetemista! A *KöMaL* olvasójaként bizonyára szívesen foglalkozol matematikával, és felmerülhetett már Benned az a gondolat, hogy életpályádul ennek a szép tudománynak a művelését választod, illetve szeretnél megismerkedni alkalmazásaival a műszaki, gazdasági és pénzügyi élet különböző területein.

Az alkalmazott matematika ma már az élet szinte minden területén nélkülözhetetlen, és az ilyen képzettségű munkaerő iránt egyre növekszik az igény. A *Fortune* magazin cikke szerint a legjelentősebb változás az üzleti életben az ipari forradalom óta a matematikai algoritmusok térhódítása (`http://fortune.com/2015/01/22/the-algorithmic-ceo/`). Egy amerikai felmérés évről évre a legjobb foglalkozások között tartja számon a matematikust és a szintén matematikai előképzettséget igénylő adattudóst, aktuáriust és statisztikust (`https://www.careercast.com/jobs-rated/best-jobs-of-2019`). Mindez Magyarországra is igaz, az ELTE-n végzett matematikusokat nemcsak a kutatóintézetek, egyetemek várják, hanem számos cég is, igen jó fizetéssel.

Esetleg még nem döntöttél, de leginkább matematikából folytatnál felsőfokú tanulmányokat? Minderre kitűnő lehetőség nyílik az ország egyik legnagyobb múltú egyetemén, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán, ahol világhírű professzoroktól és lelkes, közvetlen fiatal oktatóktól tanulhatsz. Pezsgő diákélet vár rád az ELTE korszerű számítógépparkkal felszerelt, a KöMaL szerkesztőségének is otthont adó modern lágymányosi épületegyüttesében.

A bolognai képzési rendszerbe illeszkedik BSc képesítést nyújtó hároméves matematikai alapképzésünk. Itt az első évben hallgatói és oktatói mentorok biztosítják, hogy mindenki be tudjon illeszkedni és találjon előismereteinek, képességeinek és tanulási sebességének megfelelő nehézségű feladatokat. Az első év végén dönthetsz arról, hogy milyen témákkal szeretnél a továbbiakban behatóbban foglalkozni.

A kínálat széles: aki szeretne, az elmélyedhet az elméleti matematika kérdéseiben, hiszen szinte minden fontos területről hirdetünk kurzusokat. Ezek építenek a magyar matematikai kutatások méltán világhírű hagyományaira, ugyanakkor szilárd alapokat nyújtanak a modern matematika műveléséhez, jól felkészítve hallgatóinkat a leendő kutatói munkára.

Akit viszont az alkalmazások érdekelnek, megteheti, hogy az alapok elsajátítása után olyan modern témákkal is foglalkozzon, mint az adattudomány vagy a mesterséges intelligencia matematikai kérdései. Azoknak is ajánljuk a matematika alapképzési szakot, akik ismereteiket később inkább a matematikán kívül szeretnék majd gyümölcsöztetni. Itt szerzett tudásukat hasznosíthatják például gazdasági területen, médiában, a matematika népszerűsítésében, a közművelődésben – és a megszerzett matematikai gondolkodásmód mindvégig segíteni fogja őket a munkájukban.

A képzés egyéb vonatkozásairól további részletek a `http://www.math.elte.hu/` honlapon a Képzések menüpont alatt találhatók. Ajánljuk a középiskolásoknak szóló oldalainkat is, ahol végzett diákjainkkal készült interjúk is láthatók.

A legkiemelkedőbb hallgatók az egyetemi oktatómunkába is bekapcsolódhatnak, és világszerte jó eséllyel pályázhatnak ösztöndíjakra, külföldi részképzésre (pl. az Erasmus+ program keretében).

Az alapképzést további kétéves szakasz követ(het)i (mesterképzés vagy röviden MSc), egyetemünkön a Matematikai Intézet gondozásában matematikus, alkalmazott matematikus, valamint biztosítási és pénzügyi matematika mesterszakok indulnak. BSc-t végzett hallgatóink természetesen más (bel- és külföldi) oktatási intézmény programjain is folytathatják tanulmányaikat. A mesterszakot végzettek közül a legkiválóbbak számára biztosítjuk a doktori fokozat megszerzésének lehetőségét (PhD-képzés).

Egyetemünkön gondosan ápolt hagyomány, hogy a rátermett, tehetséges diákok neves professzorok vezetésével bekapcsolódnak a tudományos kutatásba. A legkiválóbb hallgatók matematikai versenyeken is sikerrel szerepelnek, például az Egyetemi Hallgatók Nemzetközi Matematikaversenyén az elmúlt tíz évben kétszer is az ELTE csapata végzett az élen több, mint 70 egyetem csapatának versenyében – olyan nagyhírű egyetemeket is megelőzve, mint a Yale, a Princeton vagy a Moszkvai Állami Egyetem.

Matematikatanár-képzés az ELTE TTK-n

Az ELTE Természettudományi Karán sok évtizedes múltra tekint vissza a matematika szakos tanárképzés. Az általános és középiskolák részéről mindig jelentős igény mutatkozott a nálunk végzett matematikatanárok iránt, akik közül sokan külföldön is sikeres oktatói pályát futottak be.

A matematika szakos tanári pályát elsősorban azoknak a középiskolás diákoknak ajánljuk, akik számára örömet jelent érdekes matematikai feladatokon gondolkodni, és jó érzést okoz a megoldásokra másokat is rávezetni, másokkal is megosztani azt az élvezetet, amit a matematika megismerése jelent.

A tanárképzés osztatlan formában zajlik. A tanárképzésre való jelentkezés során a leendő hallgatóknak egy szakpárt kell megjelölni. Az ELTE-n a matematika szak mellé természettudományos szakokon és az informatikán kívül választani lehet a bölcsész szakok (például a magyar, a történelem vagy a nyelvszakok) közül is. A szaktárgyi tanítási gyakorlatok teljesítésére az ELTE hallgatóinak a legjobb budapesti iskolákban, kiváló vezetőtanárok irányítása mellett nyílik lehetőségük.

Bátran állíthatjuk tehát, hogy a KöMaL minden olvasójának testhezálló képzést tudunk nyújtani az ELTE Matematikai Intézetében. Ha személyesen is szeretnél találkozni leendő oktatóiddal, beszélgetni a mostani egyetemistákkal, akkor gyere el az ELTE TTK nyílt napjára február 3-án!

Fizika alapszak az ELTE TTK-n

Kedves továbbtanuló Fizikabarátok!

A KöMaL évszázados hagyományokat követve vezeti be a középiskolásokat a matematika és a fizika tantárgyak rejtelmeibe. Ez a tudás jól használható az egyetemi fizikatanulás során is. A KöMaL feladatmegoldóinak és olvasóinak egyik természetes továbbtanulási iránya a fizika választása. Akik szeretik a fizikát és ezzel szeretnék felkészültségüket fejleszteni, azoknak hasznos továbbtanulás az egyetemi *fizika alapképzés.* Nemcsak a leendő kutatóknak, de minden kreatív problémamegoldást igénylő munkahelyen elhelyezkedőnek felhasználható tudást nyújt ez a képzés. Azok számára is jó alap, akik később nem a fizikus mesterszakokon folytatják tanulmányaikat, hanem geofizikus, meteorológus, csillagász, környezettudományi vagy anyagtudományi mesterképzésben tanulnak tovább. A KöMaL-ban elmélyített fizikai tárgyi tudás szakmai ismeretei a fizikatanár képzésben is kamatoztathatók azok számára, akik kedvet éreznek életük során diákok tanítására.

A fizika tárgy tudása, amit a fizika alapszakokon el lehet sajátítani, számos munkahelyen ad lehetőséget a karrier építésére. A kutatóintézeteken kívül a pénzügyi, műszaki világ nagyvállalatainak kutatási és fejlesztési projektjein, vagy kisebb cégekben alkalmazott problémamegoldó képességhez társuló fizikai tudást és informatikai készségeket igénylő projekteken lehet elhelyezkedni a fizikatanulás során megszerzett képességek felhasználásával.

Az ELTE TTK fizika alapszakja egyedülálló módon egyesíti a lehetőségeket! Az itt szerzett alapszakos diploma számos mesterképzésben felhasználható egyetemünkön belül és kívül úgy, hogy már az alapképzés során a speciális továbbtanulás alapozó témáiban lehet krediteket szerezni.

Az ELTE TTK további lehetőséget is nyújt a fizika tanulására az osztatlan tanárképzési szakokon. A fizika szak mellett a matematika, kémia a leggyakoribb párosítás, de informatika, történelem vagy nyelvi szakok is elterjedtek második tanári szakként. Az osztatlan tanárképzésben szerzett diploma fizikából egyedülállóan keresett képesítés a munkaerőpiacon. Napjainkban ez egy hiányszakma és biztos elhelyezkedést jelent azok számára, akik szeretnének ezen a társadalmilag is fontos pályán elhelyezkedni.

A fizika alapszak tárgyainak kínálata az ELTE TTK-n kifejezetten széles. A kötelező tárgyak szilárd alapja jelenti a szakma megismerését, de emellett számos részterület bevezető tananyaga elsajátítható. Az ELTE TTK Fizikai Intézetének munkatársai a biológiai fizika, elméleti fizika, anyagtudomány, asztrofizika, komplex rendszerek statisztikus fizikája, kvantummechanikai témakörök – például kvantumszámítógépek leírása –, részecskefizika, nehézionfizika, atommagfizika témákban nemzetközi kutatásokba is bevonják az érdeklődő diákokat. A kutatás iránt is érdeklődő diákok számára bejáratott út vezet a tudományos diákköri projektek felé.

Ezen diákok által végzett kutatási eredmények diákkonferenciákon mutathatók be, melynek országos rendszerében az ELTE TTK hallgatói évek óta kiválóan teljesítenek és sikereket érnek el. A diákköri kutatómunkák kiváló alapot adnak a külföldi egyetemeken történő mesterképzésben vagy doktori iskolában történő továbbtanulásra.

A tanárszakos osztatlan képzés felhasználja az ELTE többi karain oktatott pedagógiai és tanításmódszertani szakmai tudást is. A tanárszakosok többször lehetőséget kapnak a tanítási módszerek kipróbálására és a tapasztalt tanárok mesterség-elemeinek megtanulására. Az ELTE három gyakorlóiskolája kiváló terep a tanári szakma komplex elsajátítására, de számos más középiskolában is lehet gyakorlatokat végezni.

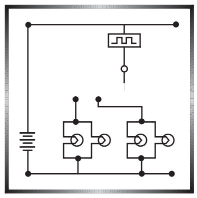
Az ELTE TTK fizikaképzése nemzetközi szintű, amit az is jelez, hogy számos alapszakos diplomával rendelkező diákunk folytatta már rangos angol, svájci vagy német egyetemen a fizikatanulását. Ezekre az egyetemekre az ELTE-n a legjobb eredménnyel végző diákoknak jó esélye van bejutni az elmúlt évek statisztikái alapján.

Az ELTE-n végzett fizikusok nemzetközi léptékben is versenyképesek. A mesterképzésben diplomát szerzők nagy része sikeresen jut be doktori iskolába vagy itthon vagy külföldön, az Egyesült Államoktól kezdve Japánig számos nívós egyetemen. Az ELTE TTK-n folyó fizikai témájú kutatások sok esetben világszínvonalú kutatóhelyekkel történő együttműködésben valósulnak meg. Diákjaink eljuthatnak a svájci CERN részecskefizikai kutatócentrumba, vagy a LIGO amerikai gravitációshullám-detektor eredményeit elemezhetik. Számos további európai, kiemelkedő centrumba lehet Erasmus ösztöndíjat nyerni, ami az ELTE-s diákok felkészültségét jelentősen növeli és az itt elvégzett képzések jó alapot biztosítanak a kutatási kérdések sikeres megoldására, a komplex problémamegoldási képességek fejlesztésére és a későbbi kutatási vagy ipari fejlesztési állások elnyerésére.

A képzés további részleteiről az alábbi weblapon lehet információkat szerezni: `https://physics.elte.hu`.

Az ELTE TTK hallgatói élete vidám és szerteágazó. A Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete számos programot szervez a hallgatóinknak. Külföldi diákkonferenciákon vagy cseregyakorlatokon lehet részt venni, szabadidős programok és a fizika tárgyakban felkészítő programok szerepelnek a palettán. A fizika népszerűsítésében is jártasságot lehet szerezni, a közösségi programok is gyakran népszerűek. A fizika szakokhoz jól szervezett mentorprogram társul. Minden évfolyamon több kiképzett mentor segít a tárgyak felvétele körüli kérdésekben, az optimális egyetemi stratégiák megtalálásában, és átadják a felsőbb éves diákok által összegyűjtött tapasztalatokat. Az ELTE TTK fizika alapszakja jól szervezett, barátságos képzés. Diákjaink nagy százalékban választják az ELTE TTK-t a továbbtanulásra.

Az ELTE TTK fizika képzéseiről személyesen is tapasztalatot lehet szerezni a kari online nyílt hét keretében a Fizikai Intézet által szervezett programon: `https://ttk.elte.hu/nyilthet2021`.



Fizika gyakorlatok megoldása

G. 714. *A Föld jégsapkái és gleccserei jelenleg mintegy* 30 000 000 km^3 *jeget tartalmaznak. Becsüljük meg, hogy nagyjából mennyivel emelkedne a tengerek és az óceánok vízszintje, ha ez a hatalmas mennyiségű jég mind elolvadna!*

(*3 pont*)

Megoldás. A jégsapkák és gleccserek a talajon vannak, tehát nem szorítanak ki vizet. A víz sűrűsége: 1 kg/dm^3, a jégé 0,9 kg/dm^3, tehát a megolvadt jég vizének térfogata a jéggel azonos tömegű víz térfogatának csak 90%-a. A Föld közelítőleg gömb alakú, sugara kb. 6400 km, és a felszínének 0,71 része tenger, illetve óceán.

A gömb felszíne: $A = 4r^2\pi$, ami itt körülbelül 510 millió km^2, ennek 71%-a, 360 millió km^2 a tengerek és óceánok felszínének nagysága. (Hasonló értéket kapunk, ha összeadjuk az óceánoknak a Négyjegyű függvénytáblázatokban is megtalálható méreteit.)

A 30 millió km^3 jégből 27 millió km^3 víz keletkezik. Ez összesen

$$\frac{27 \text{ millió km}^3}{360 \text{ millió km}^2} = 0{,}075 \text{ km} = 75 \text{ m}$$

vízszintemelkedésnek felel meg.

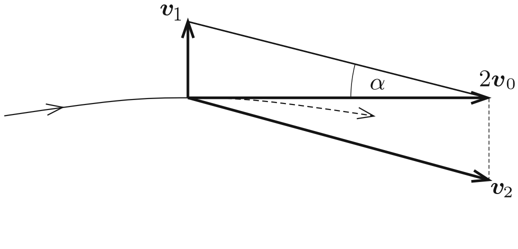
Dancsák Dénes (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 9. évf.)

72 dolgozat érkezett. Helyes 39 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 10, hiányos (1 pont) 20, hibás 3 dolgozat.

G. 716. *Egy ágyúból kilőtt gránát pályájának legfelső pontján* 100 m/s *sebességgel haladva két egyforma tömegű darabra robban szét. Az egyik darab* 50 m/s *sebességgel függőlegesen felfelé indul el. Milyen irányba és mekkora sebességgel indul el a másik darab? (A gránátban lévő robbanóanyag tömege elhanyagolható.)*

(*3 pont*)

Megoldás. Legyen a gránát tömege $2m$, a szétrobbant részek mindegyikének tömege pedig m. A gránát $\boldsymbol{v}_0$ sebességvektora a robbanás pillanatában vízszintes irányú és $v_0 = 100$ m/s nagyságú. A függőlegesen felfelé elinduló darab kezdősebessége: $v_1 = |\boldsymbol{v}_1| = 50$ m/s.



Jelöljük a másik darab kezdősebességét $\boldsymbol{v}_2$-vel, irányát (a vízszinteshez képest lefelé) pedig α-val. A lendületmegmaradás törvénye szerint $2m\boldsymbol{v}_0 = m\boldsymbol{v}_1 + m\boldsymbol{v}_2$, azaz $2\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$.

Az *ábráról* leolvasható, hogy

$$v_2^2 = (2v_0)^2 + v_1^2 = \left(200\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \left(50\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 42\,500\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2},$$

azaz $v_2 \approx 206$ m/s, és a vízszintessel bezárt szöge:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{v_1}{2v_0} = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} \approx 14^\circ.$$

Janecskó Patrícia (Oberursel, Németország,
Frankfurt International School, 9. évf.)

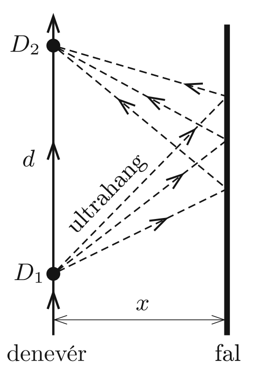
55 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 19, hiányos (1 pont) 7, hibás 8, nem versenyszerű 3 dolgozat.

G. 717. *Egy denevér a barlang falával párhuzamosan repül* 45,0 m/s *sebességgel. Egy rövid ultrahang jelet bocsát ki, melynek visszhangját* 0,120 s *múlva hallja meg. Milyen távol repül a denevér a faltól? A barlangban az ultrahang terjedési sebessége* 333 m/s.

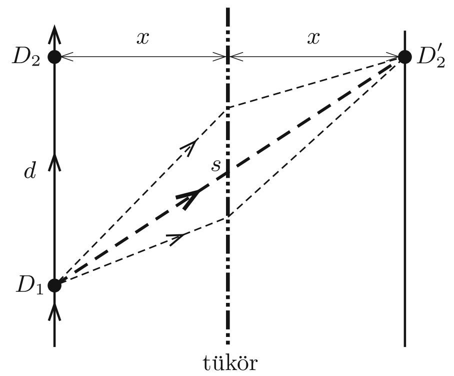
(*4 pont*)

Megoldás. Rajzoljuk le a denevér repülési útvonalát és a barlang falát (*1. ábra*). Az ultrahang a D_1 pontból indul ki, és a falról visszaverődve a D_2 pontban érkezik vissza a denevérhez. Az ábrán látható $d = D_1D_2 = 5{,}4$ m az a távolság, amit a denevér a megadott idő alatt a megadott sebességgel megtesz.

A hang a denevértől kiindulva különböző irányokban terjed, és a barlang faláról különböző irányokban verődik vissza. A denevér azt a hangot hallja meg legelőször, amelyik a legrövidebb idő alatt, tehát a legrövidebb utat megtéve jut vissza hozzá.



1. ábra



2. ábra

Tükrözzük a D_2 pontot a barlang falának síkjára (*2. ábra*). A különböző irányban haladó hanghullámok teljes útjának hossza megegyezik a D_1-et D_2'-vel összekötő, a fal (a tükör) síkjánál esetleg megtörő szakaszok együttes hosszával. Ezek közül a D_1D_2' *egyenes* szakasz a legrövidebb, és ennek hossza az a távolság, amennyit az ultrahang a megadott t idő alatt megtesz:

$$s = v_{\text{hang}} \cdot t = 333\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}120\ \text{s} = 39{,}96\ \text{m}.$$

A $D_1D_2D_2'$ derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tétel alapján

$$2x = \sqrt{s^2 - d^2} \approx 39{,}6\ \text{m},$$

a denevér és a barlang falának távolsága tehát $x \approx 19{,}8$ m.

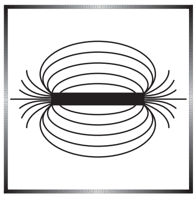
Schneider Dávid (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 10. évf.)

Megjegyzések. 1. Ugyanezt az eredményt úgy is megkaphatjuk, ha feltételezzük, hogy az ultrahang a síktükörhöz érkező fényhez hasonlóan verődik vissza, vagyis a beesési szög megegyezik a visszaverődés szögével. Ez akkor igaz, ha a barlang fala elegendően „sima”, a sík felülettől legfeljebb az ultrahang hullámhosszának megfelelő mértékben tér csak el.

2. Sok versenyző indokolatlan pontossággal (pl. $x = 19{,}813\,344$ m-nek) adta meg a denevér útvonalának és a barlang falának távolságát. Ennek nem sok értelme van, hiszen a denevér fülének mérete és a barlang falának göcsörtössége sok-sok nagyságrenddel felülmúlja a megadott szám utolsó számjegyeinek megfelelő távolságokat. A fizikai mennyiségek kiszámított értékét annyi számjegy pontossággal szabad csak megadni, amennyit komolyan vehetünk. Ez a pontosság nem haladhatja meg a feladat szövegében megadott „bemenő adatok” pontosságát. (A szerk.)

81 dolgozat érkezett. Helyes 47 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 11, hibás 2, nem versenyszerű 18(!) dolgozat.
Figyelem! A KöMaL pontversenyei (a mérési verseny kivételével) *egyéni* versenyek!

Fizika feladatok megoldása



P. 5229. *A súlytalanság állapotában egymástól $2L$ távolságra két, egyenként Q nagyságú ponttöltést rögzítünk. A töltések között, a szimmetriatengely körül, a felezőmerőleges síkban R sugarú körpályán kering egy m tömegű, Q-val ellentétes előjelű q ponttöltés.*

a) Adjuk meg a keringési időt a pályasugár függvényében!

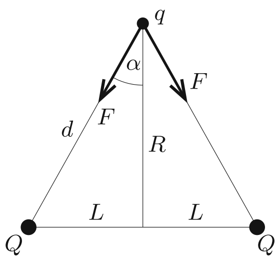
b) Elemezzük az $R \ll L$ és az $R \gg L$ határeseteket!

c) Állapítsuk meg, melyik a nagyobb: a körpályán keringésnek, vagy ugyanezen testnek a körpálya egyik átmérője mentén történő, R amplitúdójú rezgésének az ideje!

(A gyorsuló töltés sugárzásából és a légellenállásból adódó fékeződéstől eltekinthetünk.)

(*6 pont*) Közli: *Woynarovich Ferenc,* Budapest

Megoldás. *a*) Az *ábra* jelöléseit használva kiszámíthatjuk, hogy az F erő nagysága:



$$F = k\frac{Qq}{d^2} = k\frac{Qq}{R^2+L^2}.$$

Az erők „vízszintes" komponensei kiejtik egymást, a „függőlegesek" pedig összeadódnak. Az ábrán α-val jelölt szög koszinusza:

$$\cos\alpha = \frac{R}{d} = \frac{R}{\sqrt{R^2+L^2}}.$$

A körpályán egyenletesen keringő test mozgásegyenlete:

$$ma = F_{\text{eredő}} = 2F\cos\alpha = 2k\frac{QqR}{\left(R^2+L^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mivel az m tömegű test állandó v nagyságú sebességgel körpályán mozog, a keringési ideje kiszámolható a gyorsulásából:

$$T = \frac{2\pi R}{v} \qquad \text{és} \qquad a = \frac{v^2}{R},$$

ahonnan a keringési idő:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2kQq}}\left(R^2+L^2\right)^{\frac{3}{4}}.$$

b) $R \ll L$ esetben a keringési idő kifejezése így közelíthető:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2kQq}}\,L^{\frac{3}{2}}\left(\frac{R^2}{L^2}+1\right)^{\frac{3}{4}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{m}{2kQq}}\,L^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{3}{4}\frac{R^2}{L^2}\right).$$

Ha R-et elhanyagoljuk L mellett, akkor

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2kQq}}\,L^{\frac{3}{2}}.$$

Ebben a közelítésben a keringési idő *nem* függ a körpálya sugarától.

$R \gg L$ esetén

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2kQq}}\,R^{\frac{3}{2}}\left(\frac{L^2}{R^2}+1\right)^{\frac{3}{4}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{m}{2kQq}}\,R^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{3}{4}\frac{L^2}{R^2}\right).$$

Ha L-et elhanyagoljuk R mellett, akkor

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2kQq}}\,R^{\frac{3}{2}}.$$

Ebben a közelítésben a keringési idő *nem* függ a Q nagyságú töltések távolságától.

c) A rezgő test mozgásegyenlete:

$$ma(x) = 2F\cos\alpha = 2k\frac{Qqx}{\left(x^2+L^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

ahol $a(x)$ a test pillanatnyi gyorsulását jelöli abban a helyzetben, ahol a test x távolságban van Q töltések felezőpontjától (vagyis az egyensúlyi helyzetétől).

Látható, hogy a mozgás *nem* egyenletesen gyorsuló, hiszen $a(x) \neq$ állandó, de *nem* is harmonikus rezgőmozgás, mert $a(x)$ nem arányos x-szel. A mozgás időbeli leírása meglehetősen bonyolult, elemi eszközökkel nem adható meg, és emiatt a rezgés idejét sem tudjuk pontosan kiszámítani. De erre nincs is szükségünk, a rezgésidőt csak a keringés idejével akarjuk összehasonlítani.

Tudjuk, hogy a mozgás során minden pillanatban $R^2 \geqslant x^2$ (és a mozgás fordulópontjait leszámítva határozott egyenlőtlenség áll fenn), ezért ha a mozgásegyenletben a tört nevezőjében az x^2-et R^2-tel helyettesítjük, akkor (az $x = \pm R$ pontokat leszámítva) az erőt megadó kifejezés kisebb lesz az eredetinél:

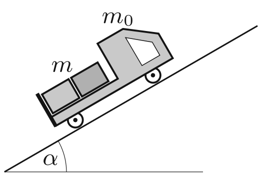
$$2k\frac{Qqx}{\left(x^2+L^2\right)^{\frac{3}{2}}} > 2k\frac{Qqx}{\left(R^2+L^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

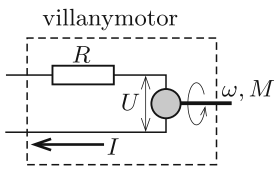
Az egyenlőtlenség jobb oldalának megfelelő erőtörvény egy harmonikus rezgőmozgást ír le, és ezen rezgés periódusideje éppen a körmozgáséval egyenlő. Mivel a tényleges rezgés „rugóállandója” ennél az állandónál nagyobb, a kialakuló rezgés periódusideje *kisebb* lesz, mint a keringésé.

Bonifert Balázs (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 11. évf.)

22 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 9, hiányos (1–3 pont) 4 dolgozat.

P. 5238. *Egy m_0 tömegű elektromos játékautó m tömegű teherrel a platóján állandó sebességgel halad felfelé egy α hajlásszögű lejtőn. Az r sugarú kerekeket meghajtó villanymotort állandósult állapotban modellezhetjük egy R ellenállással sorosan kapcsolt olyan áramköri elemmel, amelynek U feszültsége a tengely ω szögsebességével arányos ($U = \gamma\omega$), az I árama pedig a tengelyek által kifejtett M forgatónyomatékkal arányos ($I = M/\gamma$). A kisautó egy olyan teleppel működik, amelynek üresjárati feszültsége U_0, belső ellenállása pedig $R_{\rm b}$.*





Adatok: $m_0 = 300$ g, $\alpha = 30°$, $r = 2$ cm, $\gamma = 1{,}2$ Vs, $U_0 = 4{,}5$ V, $R = 0{,}8\ \Omega$, $R_\mathrm{b} = 1{,}2\ \Omega$. *(A kerekek és a lejtő közötti tapadási súrlódás elég nagy, így az autó nem csúszik meg.)*

a) Mekkora állandósult sebességgel halad a kisautó, ha $m = 600$ g *teher van a platóján?*

b) Mekkora m *teher esetén lesz a legjobb a szállítás hatásfoka? (A hatásfokon a teher emelésére fordított energia és a telep által leadott energia hányadosát értjük.)*

(5 pont) Közli: *Olosz Balázs,* Pécs

Megoldás. *a*) A játékautóra a lejtővel párhuzamosan a nehézségi erő lejtővel párhuzamos komponense és a talajnál fellépő S nagyságú tapadó súrlódási erő hat. A kiskocsi egyenletesen mozog, tehát

$$S = (m + m_0)g\sin\alpha.$$

Az S erőnek a tengelyekre kifejtett teljes forgatónyomatéka $M = Sr$, ami a feladat szövege szerint $I\gamma$-val egyezik meg, vagyis az áramkörben folyó áram:

$$I = \frac{(m + m_0)gr\sin\alpha}{\gamma}. \tag{1}$$

A kerekek nem csúsznak meg, tehát $\omega r = v$, továbbá a feladat szövege szerint az ideális áramköri elemre jutó feszültség:

$$U = \gamma\omega = \frac{\gamma v}{r}.$$

A körben folyó áram:

$$I = \frac{U_0 - U}{R_\mathrm{b} + R} = \frac{U_0 - (v\gamma/r)}{R_\mathrm{b} + R}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletek összevetésével a játékautó sebessége kifejezhető és kiszámítható:

$$v = \frac{U_0 r}{\gamma} - \frac{(m + m_0)gr^2\sin\alpha\,(R_\mathrm{b} + R)}{\gamma^2} \approx 7{,}2\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}.$$

b) A hasznos (mechanikai) teljesítmény tetszőleges m teher esetén:

$$P_\mathrm{mech.} = mgv\sin\alpha = mg\sin\alpha\left(\frac{U_0}{\gamma}r - \frac{(m + m_0)gr^2\sin\alpha}{\gamma^2}(R_\mathrm{b} + R)\right),$$

az összes (elektromos) teljesítmény pedig

$$P_\mathrm{el.} = U_0 I = U_0\frac{M}{\gamma} = \frac{U_0}{\gamma}(m + m_0)gr\sin\alpha.$$

A hatásfok:

$$\eta=\frac{P_{\text{mech.}}}{P_{\text{el.}}}=\frac{m}{(m+m_0)}-\frac{mgr\sin\alpha}{U_0\gamma}(R_{\text{b}}+R),$$

amit az adatok behelyettesítése után (a tömegeket kg egységekben számolva) így írhatunk:

$$\eta(m)=\frac{m}{m+0{,}3}-\frac{m}{27}.$$

Grafikus ábrázolással, deriválással, vagy algebrai egyenlőtlenség alkalmazásával megállapíthatjuk, hogy a legnagyobb hatásfok $m\approx 2{,}55$ kg-os teherhez tartozik, és a maximum értéke 80%.

Bonifert Balázs (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

12 dolgozat érkezett. Helyes Bonifert Balázs, Békési Ábel, Fekete András Albert, Kertész Balázs, Selmi Bálint, Somlán Gellért, Toronyi András és Viczián Anna megoldása. Kicsit hiányos (3–4 pont) 4 dolgozat.

P. 5242. *Egy felhőben* 2 mm *átmérőjű, gömb alakú esőcseppek lebegnek. Mekkora sebességgel áramlik felfelé az* 1 kg/m^3 *sűrűségű levegő a felhőben? (A közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányos.)*

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

Megoldás. Üljünk át a felfelé áramló levegővel együtt mozgó koordinátarendszerbe! Innen nézve az esőcseppek lefelé mozognak az álló levegőben, mégpedig épp azzal a v sebességgel, amellyel az eredeti koordináta-rendszerben a levegő áramlik felfelé a felhőben. Mivel állandó sebességről van szó, így az erőegyensúly feltétele teljesül: $F_{\text{neh.}}=F_{\text{közeg.}}$, ahol

$$F_{\text{neh.}}=mg=\frac{4}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3\pi\varrho_{\text{víz}}\,g$$

a d átmérőjű esőcsepp súlya,

$$F_{\text{közeg.}}=\frac{1}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2\pi k\,\varrho_{\text{levegő}}\,v^2$$

pedig az esőcseppre ható közegellenállási erő. ($k=0{,}45$ a gömb alakú esőcsepp alaktényezője.) A fenti összefüggésekből kifejezhető az esőcsepp sebessége:

$$v=\sqrt{\frac{4d\,\varrho_{\text{víz}}\,g}{3\,k\,\varrho_{\text{levegő}}}}=\sqrt{\frac{4\cdot(2\cdot10^{-3}\text{ m})\cdot(1000\text{ kg/m}^3)\cdot(9{,}81\text{ m/s}^2)}{3\cdot0{,}45\cdot(1\text{ kg/m}^3)}}\approx 7{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ugyanekkora sebességgel áramlik felfelé a levegő az eredeti koordináta-rendszerből nézve, ha az esőcseppek mozdulatlanul lebegnek.

Téglás Panna (Révkomárom, Szlovákia, Selye János Gimn., 11. évf.)

90 dolgozat érkezett. Helyes 51 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 22, hiányos (1–2 pont) 15, hibás 2 dolgozat.

P. 5243. *Egy sportcsarnokban a kézilabdázók az indítást gyakorolják úgy, hogy a terem falával párhuzamosan futva a falhoz dobott labdát elkapják. Az egyik játékos a faltól 3 méterre, folyamatosan* 5 m/s *sebességgel szalad. A teremhez képest legalább mekkora sebességgel kell eldobnia a labdát ahhoz, hogy utána épp az eldobás magasságában tudja majd elkapni? A labda ütközését a fallal tekintsük tökéletesen rugalmasnak.*

(*5 pont*) Közli: *Kis Tamás,* Heves

I. megoldás. Jelöljük az eldobott labda sebességének a falra merőleges komponensét v_1-gyel, a függőleges komponensét v_2-vel, a játékos sebességét pedig v_3-mal, és legyen a játékos és a fal távolsága d.

A labda $t=d/v_1$ idő alatt éri el a falat. A falnak pattanó labda függőleges sebessége nulla kell legyen, ellenkező esetben a visszapattanó labda nem érhetné el a játékost. Eszerint $v_2-gt=0$, vagyis $v_2=gt$. Másrészt v_3 a játékos futási sebességével (5 m/s-mal) egyezik meg, ha nem így lenne, a játékos nem kaphatná el a visszapattanó labdát.

A labda sebességének nagysága az eldobás pillanatában

$$v=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}=\sqrt{\frac{d^2}{t^2}+g^2t^2+v_3^2}.$$

Mivel a számtani és a mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenség szerint

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{t^2}+g^2t^2\right)\geqslant\sqrt{\frac{d^2}{t^2}\cdot g^2t^2}=gd,$$

az eldobott labda sebessége legalább

$$v_{\min}=\sqrt{2gd+v_3^2}\approx 9{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Barkóczi Zsombor (Heves, Eötvös J. Középisk., 10. évf.)

II. megoldás. Ahhoz, hogy a játékos elkapja a labdát, a labda sebességének a játékos mozgási irányával párhuzamos komponense meg kell egyezzen a játékos $v_0=5$ m/s-os sebességével.

A labda falra merőleges és függőleges irányú mozgásából adódó eredő $\boldsymbol{v}$ sebességének nagyságát jelöljük v-vel, a vízszintessel bezárt szögét pedig α-val. Bontsuk fel $\boldsymbol{v}$-t egy vízszintes v_1 és egy függőleges v_2 komponensre:

$$v_1=v\cos\alpha,\qquad \text{és}\qquad v_2=v\sin\alpha.$$

A labda vízszintes (v_1 irányú) sebességkomponense a fallal való ütközéskor ellentétes irányúra fordul. A mozgás pályagörbéje (pontosabban: a pályagörbének a játékos mozgásirányára merőleges vetülete) egy „félbehajtott parabola”, és a mozgás ebben a síkban egy ferde hajítás. A vízszintes irányban megtett út $s=2\cdot 3\ \mathrm{m}=6$ m, és a ferde hajítás teljes ideje $T=\frac{2v_2}{g}$, illetve a megtett út

$$s=v_1T=\frac{2v_1v_2}{g}=\frac{v^2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{v^2\sin 2\alpha}{g}.$$

Ebből kifejezhető v értéke:

$$v=\sqrt{\frac{sg}{\sin 2\alpha}},$$

illetve az eldobott labdának a teremhez viszonyított teljes sebessége:

$$v_{\text{labda}}=\sqrt{v^2+v_0^2}=\sqrt{\frac{sg}{\sin 2\alpha}+v_0^2}.$$

Ez a kifejezés akkor lesz minimális, ha a gyökjel alatt a lehető legkisebb szám áll. Mivel sg és v_0 rögzített, v_{labda} minimuma $\sin 2\alpha$ maximumánál lesz, amikor $\sin 2\alpha=1$, vagyis $\alpha=45^\circ$. A legkisebb eldobási sebesség nagysága:

$$v_{\text{labda}}^{(\min)}=\sqrt{2gs+v_0^2}\approx 9{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Jánosik Máté (Győr, Révai Miklós Gimn., 11. évf.)

58 dolgozat érkezett. Helyes 40 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 13, hibás 2 dolgozat.

P. 5244. *Egy bizonyos fajta elemi részecske szilárd anyagban mozogva a megtett úttal arányosan veszít az energiájából, és valahol megáll. A* $v_0=10^7$ m/s *kezdősebességű részecskék egy ritkább anyagba* $s_1=3$ cm, *egy sűrűbb anyagba pedig* $s_2=2$ cm *mélyen hatolnak be. Mekkora út megtétele után állnak meg az ugyanekkora kezdősebességű részecskék, ha a sűrűbb anyag* $d=1{,}5$ cm *vastag rétegén áthatolva a ritkább anyagba érnek?*

(*4 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

I. megoldás. A részecske akkor fog megállni, amikor a (mozgási) energiája nullára csökken. Számoljuk ki, hogy mekkora a részecske energiája akkor, amikor a sűrűbb anyagból átlép a ritkább anyagba. Mivel az energiavesztés arányos a megtett úttal, a kezdetben E_0 energiával rendelkező részecskére a következő aránypár írható fel:

$$\frac{E_0}{2\ \text{cm}}=\frac{E_{\text{vesztett}}}{1{,}5\ \text{cm}},\qquad \text{vagyis}\qquad E_{\text{vesztett}}=\frac{3}{4}E_0.$$

Eszerint a részecske $\frac14 E_0$ energiával érkezik a ritkább anyagba.

Ha a ritkább anyagban az $\frac14 E_0$ energiájú részecske x út megtétele után áll meg, akkor ez az aránypár érvényes:

$$\frac{E_0}{3\ \text{cm}}=\frac{\frac14 E_0}{x},\qquad \text{azaz}\qquad x=\frac34\ \text{cm}.$$

Tehát a részecskék összesen $1{,}5\ \text{cm}+x=2{,}25$ cm út megtétele után állnak meg.

Mihalik Bálint (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. Az $E_0=\frac{1}{2}mv_0^2$ kezdeti energiájú részecske energiája s hosszúságú út megtétele után

$$E=E_0-A\,s$$

értékre csökken, ahol A a szilárd anyagra jellemző állandó. Amikor a részecskék megállnak, a (mozgási) energiájuk nullára csökken. Ha a kétféle közegben ez s_1 és s_2 út megtétele után következik be, akkor

$$0=E_0-A_1s_1,\qquad \text{illetve}\qquad 0=E_0-A_2s_2,$$

tehát az anyagokra jellemző állandók:

$$A_1=\frac{mv_0^2}{2s_1}\qquad \text{és}\qquad A_2=\frac{mv_0^2}{2s_2}.$$

A feladatban szereplő mozgás két részre bontható. A 2-es jelű (sűrűbb) anyag d vastag rétegen áthaladva a részecske energiája E_1 értékre csökken:

$$E_1=E_0-A_2d,$$

majd az 1-es jelű (ritkább) anyagban még x hosszúságú utat fut be:

$$0=E_1-A_1x.$$

A fenti egyenletekből következik, hogy

$$0=E_0-A_2d-A_1x,$$

tehát

$$x=\frac{E_0-A_2d}{A_1}=\frac{E_0-\frac{mv_0^2d}{2s_2}}{\frac{mv_0^2d}{2s_1}}=\frac{\frac{mv_0^2}{2}-\frac{mv_0^2d}{2s_2}}{\frac{mv_0^2d}{2s_1}}=s_1\left(1-\frac{d}{s_2}\right).$$

A teljes megtett út

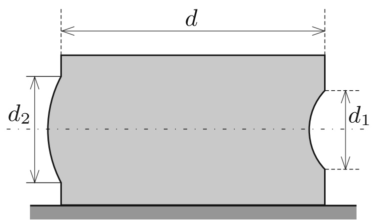
$$d+x=d+s_1-\frac{s_1d}{s_2}=\left(1{,}5+3{,}0-\frac{3{,}0\cdot 1{,}5}{2{,}0}\right)\ \text{cm}=2{,}25\ \text{cm}.$$

Megjegyzés. A részecske kezdősebessége lényegesen kisebb, mint a vákuumbeli fénysebesség (annak mindössze $\frac{1}{30}$ része), ezért jogosan használtuk a mozgási energia nemrelativisztikus képletét.

Molnár Barnabás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

77 dolgozat érkezett. Helyes 62 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 7, hibás 1, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5247. *Egy téglatest alakú akvárium két szemközti oldalán egy-egy kör alakú nyílás van, melyeket vékony, kis nyílásszögű gömbsüvegek fednek (lásd az* ábrát*). A gömbsüvegek közös optikai tengelye vízszintes. A befelé domboruló gömbsüveg görbületi sugara r, a kifelé domborulóé $2r$. A gömbsüvegek teteje alacsonyabban van, mint az akváriumban lévő, $n=4/3$-os törésmutatójú víz felszíne.*



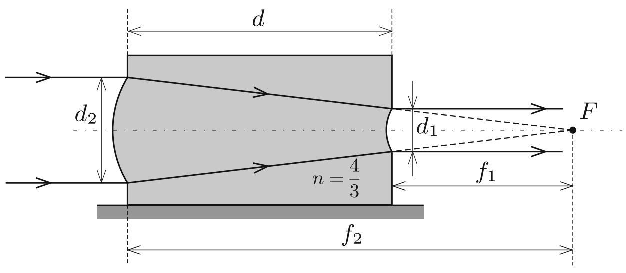
a) Mekkora d távolságra van egymástól az akvárium gömbsüvegeket tartalmazó két oldala, ha az egyik gömbsüvegre vízszintesen érkező, párhuzamos fénysugarak a másik gömbsüvegen át vízszintesen, párhuzamosan hagyják el az akváriumot?

b) Mekkora a két gömbsüveg d_2, illetve d_1 átmérőjének aránya, ha az akváriumba bármelyik gömbsüvegen át belépő, vízszintes fénynyaláb teljes egészében a másik gömbsüvegen lép ki?

c) Az optikai tengelyen, az akvárium közepén van egy piciny halacska. Hol látható ez az egyik, illetve a másik oldali gömbsüvegen át nézve?

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

Megoldás. Az $R=2r$ görbületi sugarú gömbsüvegre érkező párhuzamos fénysugarak a határfelületen megtörve az F pontban (a törőfelület jobb oldali fókuszpontjában) találkoznának, ha mindvégig a vízben haladnának (*1. ábra*). Ezek a fénysugarak az r görbületi sugarú gömbsüvegen megtörve ismét párhuzamossá válnak, tehát a befelé domboruló felület jobb oldali fókuszpontja ugyancsak az F pont.

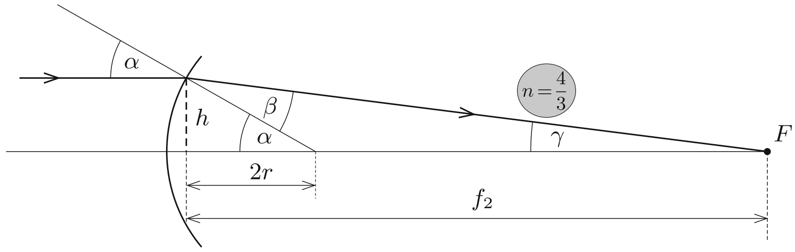


1. ábra

Ha sikerül meghatároznunk az f_1 és f_2 fókusztávolságokat, ezek segítségével már megkaphatjuk az akvárium szélességét és a gömbsüvegek átmérőjének arányát:

$$d=f_2-f_1, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{d_2}{d_1}=\frac{f_2}{f_1}.$$

Tekintsük azt a fénysugarat, amelyik az optikai tengelytől *kicsiny* h távolságban haladva eléri a kifelé domboruló gömbsüveget, azon megtörve, majd az n törésmutatójú vízben haladva f_2 távolságban érné el az optikai tengelyt (*2. ábra*).



2. ábra

A kicsiny beesési szögre igaz, hogy

$$\frac{h}{2r} = \operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha,$$

a törési szögre pedig a törési törvény alapján:

$$\beta \approx \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} \approx \frac{\alpha}{n}.$$

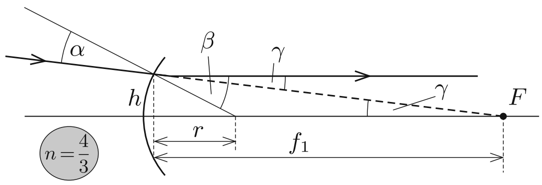
Fennáll továbbá, hogy a 2. ábrán látható γ szögre

$$\frac{h}{f_2} = \operatorname{tg}\gamma \approx \gamma, \qquad \text{valamint} \qquad \alpha = \beta + \gamma.$$

A fenti egyenletekből következik, hogy

$$f_2 = \frac{h}{\gamma} = \frac{h}{\alpha-\beta} = \frac{h}{\alpha}\,\frac{n}{n-1} = 2r\frac{n}{n-1} = 8r.$$

Ezek után határozzuk meg a víz felől az r sugarú (befelé domborodó) gömbsüveghez érkező fénysugarakat (*3. ábra*). Ezek a sugarak az F pont felé tartanak, de a fénytörés után párhuzamosan haladnak tovább.



3. ábra

A fénytörés törvénye szerint (kis szögek esetén)

$$\beta \approx \sin\beta = n\sin\alpha \approx n\alpha, \qquad \text{azaz} \qquad \beta = n\alpha,$$

valamint

$$\frac{h}{f_1} = \operatorname{tg}\gamma \approx \gamma = \beta - \alpha = \beta\left(1-\frac{1}{n}\right) \approx \frac{h}{r}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Innen leolvashatjuk, hogy

$$f_1 = \frac{n}{n-1}r = 4r.$$

a) A fenti részeredményeket kihasználva kapjuk, hogy az akvárium szélessége: $d = f_2 - f_1 = 4r$.

b) Az 1. ábráról leolvasható, hogy a keresett arány:

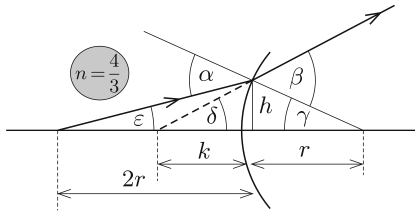
$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{f_2}{f_1} = 2.$$

c) Az akvárium közepénél elhelyezkedő piciny halacska mindkét görbült felülettől $2r$ távol van. A halacskából a bal oldali gömbsüveg felé kiinduló fénysugarak (mivel a halacska a középpontjában helyezkedik el) törésmentesen haladnak tovább, tehát a hal (virtuális) képe ugyanott keletkezik, ahol a halacska ténylegesen megtalálható.

Ha a jobb oldali gömbsüvegen keresztül nézzük a halat, a *4. ábra* jelöléseivel a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$\beta = n\alpha,$$

$$\beta = \delta + \gamma, \qquad \alpha = \varepsilon + \gamma.$$



4. ábra

Másrészt igaz, hogy

$$\varepsilon = \frac{h}{2r}, \qquad \delta = \frac{h}{k}, \qquad \gamma = \frac{h}{r}.$$

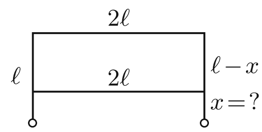
Ezekből kifejezhetjük a halacska (virtuális) képének a befelé domborodó gömbsüvegtől mért távolságát:

$$k = \frac{2r}{3n-2} = r.$$

Somlán Gellért (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 11. évf.)

11 dolgozat érkezett. Helyes Tóth Ábel, Kertész Balázs, Fekete András Albert és Somlán Gellért megoldása. Kicsit hiányos (1–3 pont) 7 dolgozat.

P. 5248. *Egy 4ℓ hosszúságú ellenálláshuzalt a két negyedelőpontjában derékszögben meghajlítottunk. Hol kell ehhez hozzákötni a 2ℓ hosszúságú, ugyanebből a huzalból levágott vezetőt, ha azt akarjuk, hogy a huzalvégek között kialakuló eredő ellenállás megegyezzen egyetlen 2ℓ hosszúságú vezető ellenállásával?*



(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

Megoldás. A huzal egyes darabjainak ellenállása arányos a hosszúságukkal: $R_L = k \cdot L$, ahol R_L az L hosszúságú huzal ellenállása. (A k arányossági tényező mindegyik huzaldarabra ugyanakkora.).

Soros és párhuzamos kapcsolásokra vonatkozó képletek szerint az eredő ellenállás:

$$R_{\text{eredő}} = kx + \left(\frac{1}{2k\ell} + \frac{1}{k(\ell - x) + 2k\ell + k(\ell - x)}\right)^{-1} + kx = 2k\left(x + \ell\frac{2\ell - x}{3\ell - x}\right).$$

A feladat szövege szerint $R_{\text{eredő}} = R_{2\ell} = 2k\ell$, vagyis

$$2k\left(x + \ell\frac{2\ell - x}{3\ell - x}\right) = 2k\ell,$$

$$\ell\frac{2\ell - x}{3\ell - x} = \ell - x,$$

ahonnan az

$$x^2 - 3x\ell + \ell^2 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek egyik gyöke nagyobb mint ℓ, ez *nem* megoldás; a másik gyök:

$$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\ell \approx 0{,}38\,\ell.$$

Kozaróczy Csaba (Miskolci Herman O. Gimn., 12. évf.)

72 dolgozat érkezett. Helyes 42 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 17, hiányos (1–2 pont) 11, hibás 2 dolgozat.

P. 5257. Eötvös Loránd *a saját königsbergi tanáráról* – Franz Ernst Neumann (1798–1895) *– elnevezett fizikai törvényt az alábbi módon mutatta be. Két hosszú, egymással párhuzamosan és vízszintesen, a teremben magasan kifeszített fémhuzal végeit az egyik oldalon érzékeny galvanométerrel kötötte össze, a másik végükre egy, a huzalokra merőleges, mozgatható fémrudat helyezett. Ezután a huzalokon mint síneken végigcsúsztatta a rájuk helyezett, vízszintes fémrudat. A huzalok távolsága* 2 m *volt, a rúd végig a huzalokra merőleges maradt. Az akkori mérések szerint a földi mágneses térerősség iránya* 62°*-os szöget zárt be a vízszintessel, a mágneses térerősség vízszintes komponensének nagyságát pedig* 0,2 *oerstednek mérték az akkoriban használatos CGS rendszerben.*

Mekkora sebességgel húzhatta Eötvös Loránd a fémrudat akkor, amikor megállapítható volt, hogy 80 μV *feszültség jutott a galvanométerre?*

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. A Neumann-törvény szerint az ℓ hosszúságú, hosszirányra merőlegesen v sebességgel mozgó fémrúd végei között $U = B\ell v$ nagyságú feszültség indukálódik, ahol B a külső mágneses indukciónak a fémrúdra és a sebességre merőleges (esetünkben a függőleges) komponense.

Az oersted a mágneses térerősség régen használt egysége, SI-egységrendszerben 1 Oe $H = \frac{10^3}{4\pi}$ A/m mágneses térerősségnek felel meg (lásd pl. a Négyjegyű függvénytáblázatokban *az SI-mértékegységrendszeren kívüli mértékegységek* táblázatát). Vákuumban (mágneses szempontból a levegő is vákuumnak tekinthető) 1 oerstednek megfelelő mágneses indukcióvektor nagysága

$$\mu_0 H = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}} \cdot \frac{10^3}{4\pi}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = 1 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m}^2} = 10^{-4}\ \mathrm{T}.$$

Ha a földi mágneses térerősség vízszintes komponense 0,2 Oe, akkor a mágneses indukcióvektor vízszintes összetevője $B_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ T, tehát a függőleges komponense

$$B = B_1 \cdot \mathrm{tg}\,62^\circ = 3{,}76 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}.$$

A bemutatott kísérletben $\ell = 2$ m és $U = 80 \cdot 10^{-6}$ V értékek szerepeltek, a Neumann-törvény szerint tehát

$$v = \frac{U}{B\ell} = 1{,}06\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

sebességgel mozgathatta Eötvös Loránd a fémrudat.

Több dolgozat alapján

20 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 11, hiányos (2 pont) 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

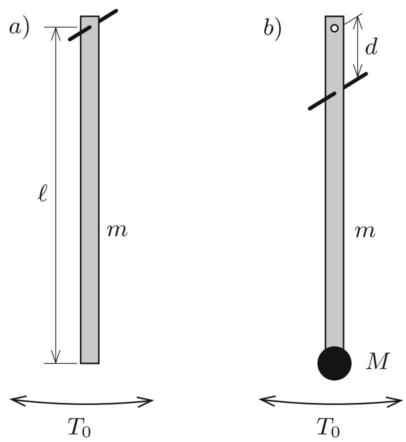
M. 401. Készítsünk egy m tömegű, ℓ hosszúságú, homogén tömegeloszlású, az egyik végén tengelyezett, vékony lécből fizikai ingát. (m és ℓ szabadon választható értékek, amelyeket a mérés során nem változtatunk.)

a) Mérjük meg a kissé kitérített inga T_0 lengésidejét!

Ezután helyezzük át a forgástengelyt a léc egyik végétől d távolságra, és rögzítsünk a léc másik végére egy pontszerűnek tekinthető, M tömegű testet (például egy darab gyurmát). Ha megfelelően választjuk meg M nagyságát, akkor az így kapott fizikai inga lengésideje az eredeti T_0-lal egyezik meg.

b) Mérjük meg, hogyan függ a M/m tömegarány a d/ℓ távolságaránytól!

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka



G. 729. Ha az olvasztott zsírt egy edényben kihűlni hagyjuk, jól megfigyelhető, hogy a megfagyott zsír felülete kráterszerű lesz, a perem mentén szabályos karima képződik. Miért?

(*3 pont*)

G. 730. Egy kerékpáros versenyen az első és a második helyen állók állandó $v_0 = 50$ km/h nagyságú sebességgel haladnak. Az elsőnek $d = 100$ m előnye van. Egy adott pillanatban – már a cél közelében – a harmadik helyen álló rákapcsol, $v_1 = 55$ km/h nagyságú sebességgel megelőzi a másodikat, és ezt a sebességet tartani is tudja. Az előzés helyétől milyen messze lehet a cél, ha az első helyen álló versenyző megnyeri a versenyt?

(*4 pont*)

G. 731. Egy kertvárosi övezetben, ahol 30 km/h a megengedett legnagyobb sebesség, egy autó – kicsit szabálytalanul – 36 km/h sebességgel halad. Megelőzi őt egy másik, ugyanolyan autó 54 km/h sebességgel. Éppen egymás mellett haladnak, amikor 20 méternyire előttük egy gyerek kiszalad az úttestre. A két autó sofőrje egyszerre kezd el ugyanolyan erősen fékezni.

a) Mekkora „megmaradó" sebességgel halad el a gyerek mellett a gyorsabb autó, ha a lassabb autó éppen megáll a gyerek előtt?

b) Hogyan változik az eredmény, ha figyelembe vesszük azt is, hogy mindkét sofőr reakcióideje kb. 1 másodperc?

(*4 pont*) Közli: *Csapodi Csaba,* Budapest

G. 732. Újsághír (2020. november 17.): „Megérkezett a Nemzetközi Űrállomásra (ISS) a Crew Dragon űrhajó! 27 órás, teljesen automatizált repülést követően dokkolt a Föld felett körülbelül 400 kilométerrel lebegő űrállomáson." Adjunk becslést a következőkre:

a) Hányszor kerülte meg ez az űrhajó a Földet az elindulástól a dokkolásig?

b) Mekkora volt a „lebegő" űrállomás keringési sebessége dokkoláskor?

(*4 pont*)

P. 5283. A „Kihívás Napján" rendezett iskolai futóversenyre három barát, Sebi, Tóni és Zoli is benevezett. A 2,4 km-es távot mindhárman egyenletesen futották végig. Amikor Tóni épp a táv 68%-ánál járt, akkor Sebire még 3 percnyi futás várt. Zoli futása során Sebinél 20 cm-rel több, Tóninál viszont 1 dm-rel kevesebb utat tett meg másodpercenként.

a) Mennyi idő telt el Zoli és Tóni célba érkezése között?

b) Hány méterre volt Sebi a céltól, amikor Tóni beért?

(*4 pont*) Közli: *Kis Tamás,* Heves

P. 5284. Egy alkoholos fertőtlenítő oldat flakonján ezt olvassuk: „Hatóanyag: etil-alkohol (70 V/V%)". Egy másik hatóanyaga 67,9 m/m%-os etanol (etil-alkohol) oldat. Feltételezve, hogy az egyéb adalékanyagok mennyisége elhanyagolható, melyik készítményben nagyobb az alkohol koncentrációja? (Az etanol–víz elegy sűrűsége a koncentráció függvényében megtalálható a Négyjegyű függvénytáblázat kémia részében.) Adjunk általánosan alkalmazható összefüggést az oldat térfogat- és tömegszázalékban kifejezett töménysége és a sűrűsége között!

(*4 pont*) Közli: *Woynarovich Ferenc,* Budapest

P. 5285. Lapos, korong alakú, m tömegű test vízszintes, érdes felületen nyugszik. Egy D direkciós erejű rugó egyik végét a korong közepéhez erősítjük, majd a másik végét vízszintes irányban lassan húzni kezdjük. Kezdetben a rugó feszítetlen. A test egy ideig mozdulatlan, majd megindul, és egyenes vonalban mozog. A korong megindulásának pillanatában a rugó másik végét rögzítjük.

a) Mekkora lesz a test maximális sebessége?

b) Mennyi idő alatt éri el a maximális sebességet?

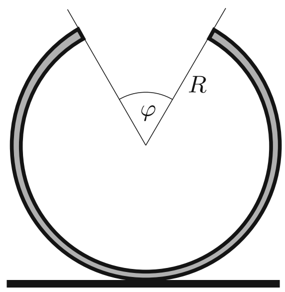
c) Mekkora távolságot tesz meg a korong a maximális sebesség eléréséig?

d) Hogyan mozog a korong a továbbiakban, feltételezve, hogy a rugó mindig egyenes marad?

A korong és az érdes felület között a csúszási súrlódási együttható μ, a tapadási súrlódás együtthatója pedig μ_0 ($\mu_0 > \mu$).

(*5 pont*) Közli: *Wiedemann László,* Budapest

P. 5286. Egy R sugarú, homogén tömegeloszlású, φ szöggel „hiányos" vékony hengerpalástot vízszintes asztalra fektetünk az *ábrán* látható módon. A hengerpalástot kissé kimozdítjuk egyensúlyi helyzetéből, majd elengedjük. Határozzuk meg a hengerpalást rezgőmozgásának periódusidejét! Feltételezhetjük, hogy súrlódás elegendően nagy, így a hengerpalást a rezgőmozgás közben nem csúszik meg.



Adatok: $R = 0{,}2$ m; $\varphi = \pi/3$.

(*5 pont*) Közli: *Takács Árpád,* Budapesti Berzsenyi D. Gimn.

P. 5287. Van három ellenállásunk, rendre 1 ohm, 2 ohm, 3 ohm értékűek. Mindegyiken a megengedett legnagyobb teljesítmény 1 watt lehet. A három ellenállást minden lehetséges módon összekapcsoljuk úgy, hogy mindig mindegyiken folyhasson áram.

a) Milyen határok között változhat a legnagyobb megengedett összteljesítmény?

b) Melyik kapcsolás esetén lehet a legnagyobb összteljesítmény pontosan 2 watt?

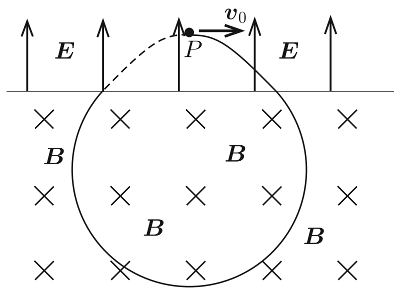
(*4 pont*) Közli: *Varga Zsuzsa,* Szeged

P. 5288. Egy akvárium fala $d = 12$ mm vastagságú, $n_{\text{ü}} = 3/2$ törésmutatójú üvegből készült. Az akváriumban $n_{\text{v}} = 4/3$ törésmutatójú vízben úszkál egy halacska. Kívülről, az akvárium falára merőleges irányból nézve a fal külső felületétől mekkora távolságra lévőnek tűnik a halacskának az a pontja, amely valójában pontosan $t = 20$ cm távolságra van a fal külső felületétől?

(*4 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

P. 5289. Egy transzmissziós, nagy felbontású optikai rácsra, melynek rései függőlegesen állnak, párhuzamos, monokromatikus fénynyalábot bocsátunk. Kísérletünkben a fénynyaláb merőleges az optikai rácsra, és a rácson való áthaladás után első rendben 30°-kal térül el jobbra is és balra is. Ezután a rácsot a középső rés mint tengely körül 30°-kal elforgatjuk. Milyen irányokban lép ki most fénynyaláb a rácsból?

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest



P. 5290. Homogén elektromos mező P pontjából egy pontszerű, negatív töltésű részecskét lövünk ki az elektromos térre merőleges $\boldsymbol{v}_0$ kezdősebességgel. Az $\boldsymbol{E}$ elektromos térerősségre és a $\boldsymbol{v}_0$ sebességvektorra merőleges, homogén mágneses mező is jelen van. A kétféle mezőt egy, az elektromos térerősségre merőleges sík választja el egymástól az *ábra* szerint. Mekkora a mágneses indukcióvektor nagysága, ha a részecske visszatér a P pontba?

(Az egész elrendezés vákuumban van, és a nehézségi erő hatása a részecskére elhanyagolható.)

(*5 pont*) Közli: *Németh László,* Fonyód

P. 5291. Egy szénmonoxid-érzékelő berendezés akkor ad riasztó jelzést, ha a CO-gáz sűrűsége a levegőben eléri a $4 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg/m^3}$ értéket.

a) Hány CO-molekulát lélegzik be ilyenkor az ember egyetlen 500 cm^3-es lélegzetvétellel?

b) Mekkora egy CO-molekula átlagos energiája a tüdőben 37 °C-on?

c) Mekkora a sebessége egy átlagos energiával rendelkező CO-molekulának?

(*4 pont*) *Egyetemi felvételi feladat nyomán*

P. 5292. A β^--bomló ^{14}C felezési ideje 5568 év. Egy bizonyos mennyiségű szénben a 14-es izotóp kezdeti aktivitása 12 MBq volt.

a) Hány atommag bomlott el az első percben?

b) Hány mag bomlott el az első 10 ezer évben?

c) Mekkora volt a kezdeti szén 14-es izotóp össztömege?

d) A kezdethez képest mennyi idő múlva lesz a szénben a 14-es izotóp tömege 1 μg?

(*4 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5293. Egy feketedoboz tetején sok kivezetés van. Tudjuk, hogy belül minden kivezetéspár közé egy-egy ismeretlen ellenállást forrasztottak. Hogyan mérhetjük meg két tetszőleges pont közé kötött ellenállás értékét, ha csupán ellenállásmérőnk és tetszőleges számú röpzsinórunk van?

(*6 pont*) Közli: *Vladár Károly,* Kiskunhalas

❄

Beküldési határidő: 2021. február 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 71. No. 1. January 2021)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 31): **K. 679.** Pete was three years old when he got a set of six rectangular building blocks. The dimensions of the blocks are 1 dm × 1 dm × 2 dm. The dimensions of the interior of the box for storing the blocks are 3 dm × 2 dm × 2 dm and each face is different in colour. In how many different arrangements may Pete place the blocks in the box if the blocks are identical in colour and cannot be distinguished? (It is not allowed for any block to stick out of the box). **K. 680.** Four faces of a cube are coloured red, and then the cube is cut into 125 identical small cubes. What may be the number of small cubes with no red face? **K. 681.** How many triangles are there in which the sides have integer lengths in centimetres, and the longest side is 2021 cm long? (There may be more than one side of this length.) **K. 682.** There is a sufficient number of copies of three different cards, with one digit on each. All possible four-digit positive numbers are formed out of the cards. The sum of these numbers is 689 931. What are the three digits on the cards? **K. 683.** A heptagon $ABCDEFG$ is inscribed in a circle. The sum of angles $\angle ABC$, $\angle CDE$ and $\angle EFG$ is greatrer than 450°. Show that the centre of the circumscribed circle cannot lie either inside the heptagon or on its boundary. (*The University of Stirling, school mathematics competition, 1983*)

New exercises for practice – competition C (see page 32): **Exercises up to grade 10: C. 1644.** We have made a 10 cm × 30 cm rectangular tin of shortbread. It has a delicious crispy edge. We want to divide the bread into pieces by using cuts running all the way parallel to the edges of the tin. How many pieces may we obtain if we would like each piece to have the same length of crispy edge? **C. 1645.** In an acute-angled triangle, the sides are a, b, c, and m_b is the height drawn to side b. The lengths of m_b, a, b, c, in this order, are consecutive positive integers. What is the area of the triangle? (Proposed by *Zs. M. Tatár,* Esztergom) **Exercises for everyone: C. 1646.** Find the integer solutions of the equation $(xy-1)^2=(x+1)^2+(y+1)^2$. (Proposed by *M. Szalai,* Szeged) **C. 1647.** The medians drawn to the legs of an isosceles triangle are perpendicular to each other. Let r and R denote the inradius and circumradius, respectively. Find the exact value of the ratio $\frac{r}{R}$. **C. 1648.** King Arthur and Sir Lancelot are running a horse race. Sir Lancelot says, “Since Your Majesty's speed is only $\frac{2}{3}$ of mine, I will give Your Majesty a handicap of 100 metres, and then I would catch up within the length of the race track. Alternatively, if Your Majesty reduced speed by 2 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ and I reduced mine by

$5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, but I gave Your Majesty a 50 metre handicap only, I would also be able to catch up within the length of the track. The sum of the two time intervals required to catch up is exactly 75 seconds." Determine the speeds of King Arthur and of Sir Lancelot. **Exercises upwards of grade 11: C. 1649.** The diagonals of a cyclic quadrilateral intersect each other at right angles at point M. The diagonals divide the quadrilateral into triangles. Prove that the altitude of any triangle drawn from point M is collinear with the median drawn from point M in the opposite triangle. **C. 1650.** Prove the inequality $\log_{ab} c \leqslant \frac{\log_a c+\log_b c}{4}$ for $a, b, c > 1$.

New exercises – competition B (see page 33): **B. 5142.** In a football championship, there are four teams in a group. Within the group, each team plays every other team once. The teams receive 3 points for winning, 1 point for a draw and 0 points for losing a game. The two teams scoring the highest qualify for the semi-finals, and the other two teams are eliminated. In the case of equal scores, the qualification is decided by chance. Determine those values of the number p for which it may happen that a qualifying team and an eliminated team both have p points. (*3 points*) **B. 5143.** Find the real solutions of the equation $16x^2 + 9x + 117 = 24x\sqrt{x + 13}$. (*4 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 5144.** The area of a convex quadrilateral $ABCD$ is t, and an interior point is O. Show that $2t \leqslant OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$. When will equality occur? (*3 points*) **B. 5145.** Show that there are $\binom{n+1}{2k+1}$ different strings of zeros and ones of length n in which it occurs exactly k times that a 0 is followed by a 1. (*4 points*) (*Problem from a qualifying competition in England for the Olympiad*) **B. 5146.** T is a cuboid of unit volume, and M is a point in its interior. Point M is reflected in the planes of the faces. Let D be the convex hull of the 6 images obtained. Determine the volume of the solid $T \cap D$. (*5 points*) **B. 5147.** Let $k > 1$ be a positive integer. Is there *a*) a finite subset (of any size) *b*) an infinite subset of the set of positive integers in which the greatest common divisor of any k elements is greater than 1 but the greatest common divisor of any $k + 1$ elements is equal to 1? (*5 points*) (Proposed by *G. Mészáros,* Budapest) **B. 5148.** A triangle ABC is right angled at C. The inscribed circle touches the leg BC at point D, and the leg AC at point E. The escribed circle of side BC touches line segment BC at point G; and the escribed circle of side AC touches line segment AC at point H. The intersection of line segments DH and EG is M. Show that the other intersection of the circumscribed circles of triangles DGM and EHM lies on the inscribed circle. (*6 points*) **B. 5149.** In how many different ways is it possible to fill in a 6×6 table with the numbers $1, 2, \ldots, 36$ so that however 6 fields are selected, all lying in different rows and in different columns, the sum of the numbers in 6 such fields should always be the same? (*6 points*)

New problems – competition A (see page 34): **A. 791.** A lightbulb is given that emits red, green or blue light and an infinite set S of switches, each with three positions labeled red, green and blue. We know the following: *i*) For every combination of the switches the lighbulb emits a given color. *ii*) If all switches are in a position with a given color, the lightbulb emits the same color. *iii*) If there are two combinations of the switches where each switch is in a different position, the lightbulb emits a different color for the two combinations. We create the following set U containing some of the subsets of S: for each combination of the switches let us observe the color of the lightbulb, and put the set of those switches in U which are in the same position as the color of the lightbulb. Prove that U is an ultrafilter on S. (U is an ultrafilter on S if it satisfies the following: *a*) The empty set is not in U. *b*) If two sets are in U, their intersection is also in U. *c*) If a set is in U, every subset of S containing it are also in U. *d*) Considering a set and its complement in S, exactly one of these sets is contained in U.) See also problem **N. 35.**[*] from the May issue of 1994 (in Hungarian). **A. 792.** Let $p \geqslant 3$ be a prime number and $0 \leqslant r \leqslant p-3$. Let $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1+r}$ be integer numbers satisfying $\sum_{j=1}^{p-1+r} x_j^k \equiv r \pmod{p}$ for all $1 \leqslant k \leqslant p-2$. What are the possible remainders of numbers $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1+r}$ modulo p? (Submitted by *Dávid Matolcsi,* Budapest)

Problems in Physics

(see page 57)

M. 401. Make a physical pendulum of mass m and of length ℓ, from a uniform-density thin wooden slat which is pivoted at one of the ends. (The values of m and ℓ can be chosen arbitrary, but should be kept constant during the measurement.) *a*) Measure the period of the pendulum T_0 after it is displaced a bit. Then change the position of the pivot by positioning it at a distance of d from one of the ends of the rod, and attach a point-like object of mass M, for example a small piece of plasticine, to the other end. If the mass of the plasticine is chosen carefully, then the period of this pendulum is the same as the original period T_0. *b*) Measure how the ratio of the masses M/m depends on the ratio of the distances d/ℓ.

G. 729. When melted lard is left to cool down in a pot, it can be observed clearly that the surface of the lard is similar to a crater, along the rim a regular flange is formed. Why? **G. 730.** In a bicycle race the first and the second riders are cycling at a constant speed of $v_0 = 50$ km/h. The first rider is 100 m ahead of the second. At a certain moment —close to the finish— the third cyclist begins to speed up and overtakes the second rider at a speed of $v_1 = 55$ km/h, and he is able to maintain this speed. How far is the finish from the point where the overtaking occurred if the first cyclist wins the race? **G. 731.** In a suburban area, where the the speed limit is 30 km/h, a car —a bit illegally— travels at a speed of 36 km/h. Another similar car overtakes it at a speed of 54 km/h. They are just next to each other when a child, who is 20 m ahead, runs to the road. Both drivers start to brake at the same moment, pushing the brakes at the same force. *a*) At what "remaining" speed does the faster car pass the child, if the other car just stops in front of the child? *b*) How does the result change if we consider that both drivers' reaction time is approximately 1 second? **G. 732.** News report (November 17, 2020): "The Crew Dragon spacecraft has arrived at the International Space Station (ISS). After a 27-hour totally autonomous flight it docked with the station, which was floating at a height of approximately 400 kilometres above the surface of the Earth." Estimate the following. *a*) How many times did the spaceship go around the Earth from its launch until it docked? *b*) What was the speed of the "floating" space station when the spaceship docked with it?

P. 5283. Three friends Sebi, Tóni and Zoli entered for the school's running competition held on Challenge Day. All of them covered the 2.4 km distance at a constant speed. When Tóni just covered 68% of the distance, Sebi had another three minutes to run. Zoli covered 20 cm more in each second than Sebi did, while he covered 10 cm less in each second than Tóni did. *a*) How much time elapsed between the moments when Zoli and Tóni reached the finish line? *b*) How far was Sebi from the finish line when Tóni reached it? **P. 5284.** The following can be read on the bottle of an alcoholic disinfectant solution: "Active ingredients: ethyl alcohol (70 V/V%)". The active ingredient contained by another type of solution is 67.9 m/m% ethanol (ethyl alcohol). Assuming that the amount of other additives is negligible, which solution has greater alcohol concentration? (The density of the ethanol-water mixture as a function of concentration can be found in tables.) Give a generally applicable relationship between the concentration of the solution, expressed

[*] `http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=FelHivatkoz&id=41643`

both in volume percent and in mass fraction, and density of the solution. **P. 5285.** A flat, disc-shaped object of mass m is lying at rest on a rough horizontal surface. One end of a spring of force constant k is attached to the centre of the disc, and then the other end is slowly pulled horizontally. Initially the spring is unstretched. The object stays at rest for a while and then it starts to move along a straight line. At the moment when the object starts to move the other end of the spring is fixed. *a*) What is the greatest speed of the object? *b*) How long does it take for the object to reach the maximum speed? *c*) How much distance does the object cover until it reaches its greatest speed? *d*) How will the object move afterwards, assuming that the spring remains straight? The coefficient of kinetic friction between the disc and the surface is μ and the coefficient of static friction is μ_0 ($\mu_0 > \mu$). **P. 5286.** A uniform-density, thin, incomplete cylindrical shell of radius R is placed onto a horizontal tabletop as shown in the *figure.* The angle at the "missing part" of the cylinder is φ. The cylindrical shell is displaced from its equilibrium position a bit and then released. Determine the period of the oscillation of the shell. Assume that friction is big enough and the shell does not slide during its oscillatory motion. *Data:* $R = 0.2$ m; $\varphi = \pi/3$. **P. 5287.** We have three resistors of resistance values 1 ohm, 2 ohms and 3 ohms, each rated at 1 watt. The three resistors are connected in all possible ways, such that some current flows through all of them in each connection. *a*) Between what values does the maximum allowed total power of the circuits vary? *b*) In which connection will the maximum allowed total dissipated power be exactly 2 watts? **P. 5288.** The walls of an aquarium are made of $d = 12$ mm thick glass of refractive index $n_{\mathrm{g}} = 3/2$. There is a fish swimming in the water. The refractive index of water is $n_{\mathrm{w}} = 4/3$. When the fish is observed from outside in the direction which is perpendicular to the wall of the aquarium, at what distance does that point of the fish seem to be which in reality is at a distance of exactly 20 cm from the external surface of the wall? **P. 5289.** A parallel monochromatic beam of light is incident on a high-resolution transmission grating which has vertical slits. In our experiment the light beam is perpendicular to the diffraction grating and the first-order images both towards the right and the left are diffracted by an angle of 30°. Then the diffraction grating is rotated by an angle of 30° about the line which coincides with the slit at the middle of the grating. At what directions will the diffracted beam exit the grating? **P. 5290.** A point-like negatively charged particle is projected from a point P of a uniform electric field perpendicularly to the electric field at a velocity of $\boldsymbol{v}_0$. Uniform magnetic field is also present, which is perpendicular to both the electric field vector $\boldsymbol{E}$ and to the velocity $\boldsymbol{v}_0$. The two types of fields are separated by a plane, which is perpendicular to the electric field vector, as shown in the *figure.* What is the magnitude of the magnetic induction, if the particle returns back to point P? (The whole arrangement is in vacuum, and the effect of the gravitational force on the particle is negligible.) **P. 5291.** A carbon monoxide detector gives an alarm signal when the density of CO in the air reaches the value of $4 \cdot 10^{-6}$ kg/m^3. *a*) How many CO molecules does a person inhale in a single 500 cm^3 breath? *b*) What is the average energy of a single CO molecule in the lung at a temperature of 37 °C? *c*) What is the speed of an average-energy CO molecule? **P. 5292.** ^{14}C isotope undergoes β^- decay and its half life is 5568 years. In a certain amount of carbon, the initial activity of the isotope carbon-14 was 12 MBq. *a*) How many nuclides decayed in the first minute? *b*) How many nuclides decayed in the first ten thousand years? *c*) What was the initial mass of the carbon-14 isotope in the sample? *d*) How much time elapses until the mass of the carbon-14 isotope in the sample decreases to 1 μg? **P. 5293.** There are a lot of terminals at the top of a black box. It is known that inside the box, between any two pairs of terminals a resistor of unknown resistance is soldered. How can we measure the resistance of the resistor between two arbitrary chosen terminals if we have an ohm-meter and a large number of wires?