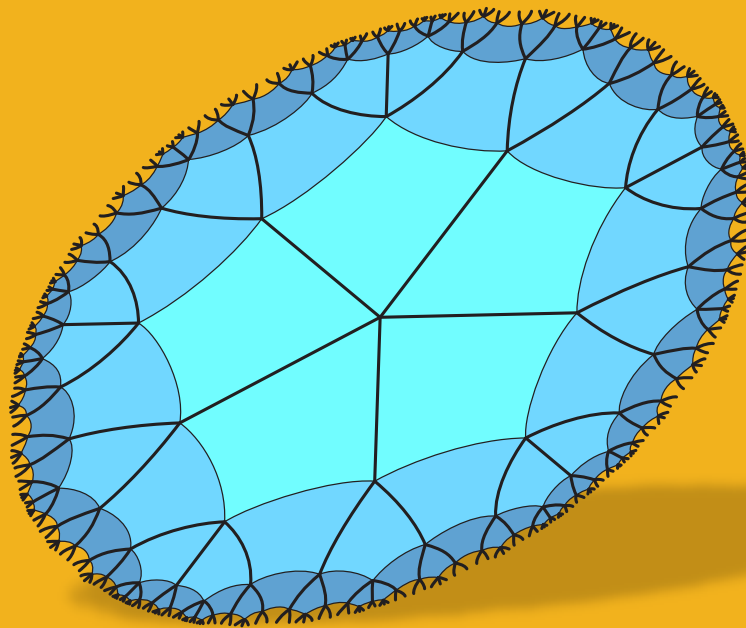


# Dimenziók

**Matematikai Közlemények**

**X. kötet**



**SOE FMK Informatikai és Matematikai Intézet  
Soproni Tudós Társaság  
2022**



# **Dimenziók**

**Matematikai Közlemények**

**X. kötet**

**SOE FMK Informatikai és Matematikai Intézet**

**Soproni Tudós Társaság**

**2022**

**A Dimenziók – Matematikai Közlemények** 2013 óta évente egyszer megjelenő tudományos folyóirat. A kéziratokat a szerkesztőbizottság tagjai, vagy független bírálók véleményezik, de a tartalomért a szerzők a felelősök.

**SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:**

Nagy Zsolt (címzetes egyetemi docens, középiskolai tanár)

Németh László (SOE, egyetemi docens)

Szalay László (SOE, egyetemi tanár)

**SZERKESZTŐ:**

Németh László

**TECHNIKAI SZERKESZTŐ:**

Németh László

**KIADÓ:**

Soproni Egyetem

Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar

Informatikai és Matematikai Intézet

9400 Sopron, Bajcsy-Zsilinszky utca 4.

és

MTA VEAB Soproni Tudós Társaság

9400 Sopron, Csatkai Endre utca 6-8.

Elektronikus elérhetőség: <http://matematika.emk.uni-sopron.hu/dimenziok>

HU ISSN 2064-2172

© Szabadon terjeszthető a forrás megjelölésével.

## **Tartalomjegyzék**

Elemi majdnem-Johnson-poliéderek és számítógépes modellezésük .....	3
A Cayley-Dickson-féle mátrixok algebrájáról.....	17
Covid variánsok időbeli változásának vizsgálata.....	23
A természetes szelekció vizsgálata varianciaanalízissel .....	37
Covid adatsor időbeli változásának vizsgálata új belépő variánsok esetén.....	47
A Coulomb-féle súrlódással csillapított rezgőmozgás – oktatói szemmel.....	59
Gerjesztett rezgések differenciálegyenletes modelljei .....	71
Konvex sokszöglemezek elsőfajú rögzítése .....	81
Lichtenstein's integral equation for the Stokes problem via conformal mapping.....	87



## Elemi majdnem-Johnson-poliéderek és számítógépes modellezésük

**Talata István**

BGE Külkereskedelmi Kar, Budapest,  
Óbudai Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Budapest  
talata.istvan@uni-bge.hu

**Bölcskei Attila**

BGE Külkereskedelmi Kar, Budapest,  
Óbudai Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Budapest  
bolcskei.attila@uni-bge.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** Bevezetjük az elemi majdnem-Johnson-poliéderek fogalmát az elemi Johnson-poliéderekhez analóg módon olyan poliéderekre, melyeknek a laphálói nem egyeznek meg semelyik, szabályos sokszöglapok által határolt konvex poliéder laphálójával sem, de minden lapjuk szabályos sokszöghöz közeli alakú, és lapjainak mindegyik csúcskonfigurációja megvalósítható szabályos sokszögekkel, valamint ezen poliéderek nem kaphatók meg bizonyos geometriai műveletekkel ilyen típusú egyszerűbb vagy nevezetes poliéderekből sem. Áttekintjük a jelenleg ismert elemi majdnem-Johnson-poliédereket, és bemutatjuk, hogy azok hogyan modellezhetők geometriai módszerekkel, azaz valamely geometriai szoftverrel megvalósított térbeli geometriai szerkesztésekkel.

**ABSTRACT.** We introduce the notion of elementary near-miss Johnson solids analogously to elementary Johnson solids: these are such convex polyhedra whose face lattices are different from the face lattice of any convex polyhedron bounded by regular polygonal faces only, but the shapes of all of their faces are close to regular polygons in some sense, every vertex configuration of the faces can be obtained by regular polygons also, and furthermore, these polyhedra can not be obtained by some specific geometric operations from simpler or well-known polyhedra. We overview the elementary near-miss Johnson solids known in present, and we show how to model such polyhedra using geometric methods only, that is, how to create a virtual model of that polyhedron using space geometric construction steps with a geometry software.

### 1. Bevezetés

A Johnson-poliéderek azok a 3-dimenziós konvex poliéderek, melyeknek minden lapjuk szabályos sokszög, de különböznek az uniform poliéderektől (azaz a szabályos testektől, arkhimédészi testektől, szabályos hasáboktól és szabályos antiprizmáktól).

Majdnem-Johnson-poliédereken olyan 3-dimenziós konvex poliédereket értünk, melyeknek minden lapjuk közelítőleg szabályos sokszög alakú (erre matematikailag pontosabb definíciót fogalmazzunk meg a 4. fejezetben), de nincs olyan konvex poliéder, melynek minden lapja szabályos sokszög és a laphálója megegyezne egy ilyen poliéder laphálójával (ld. [7], ott

ál-Johnson-poliédereknek nevezik az ilyen poliédereket, angolul a „near-miss Johnson solids” elnevezés a használatos).

Az elemi majdnem-Johnson-poliédereket az elemi Johnson-poliéderekhez (ld. [6]) analóg módon definiáljuk az 5. fejezetben, azaz ezek a poliéderek nem kaphatók meg bizonyos geometriai műveletekkel egyszerűbb majdnem-Johnson-poliéderekből és más nevezetes poliéderekből (pl. uniform poliéderekből, katalán testekből) sem. Ezen felül még egy kikötést teszünk az elemi majdnem-Johnson-poliéderekre, nevezetesen, hogy lapjainak bármely csúcskonfigurációja megvalósítható szabályos sokszöglapokkal, amely ekvivalens azzal, hogy az egyes csúcsokra illeszkedő lapok csúcsszögeinek az összege kisebb legyen  $360^\circ$ -nál, ha pontosan szabályos sokszöglapok csúcsszögeivel számolunk. Ez a feltétel biztosítja, hogy csak véges sok elemi majdnem-Johnson-poliéder létezzon (ld. ezt az 5. fejezetben), és mivel az ilyen poliéderek lapjainak csúcsszögei közelítik a szabályos sokszögek csúcsszögeit, ezért ebből a feltételből következik, hogy bármely csúcsra legfeljebb 5 lap illeszkedik.

Míg a Near-miss Johnson Solid című Wikipédia weblapon (ld. [5]) felsorolt majdnem-Johnson-poliéderek között a nem elemi majdnem-Johnson-poliéderek vannak túlnyomó többségben, addig a Johnson Solid Near Misses című Orchidpalms weblapon felsorolt 31 poliéderekből a túlnyomó többség elemi majdnem-Johnson-poliéder. A majdnem-Johnson-poliédereknek a szerzők által ismert legteljesebb listája a Near-miss Johnson solid, Polytope Wiki – Miraheze (ld. [4]) weblapon található, ez a lista magában foglalja az említett Orchidpalms listának mind a 31 poliédereit, de még ezen felül is tartalmaz néhány elemi majdnem-Johnson-poliédert. Amíg a [7] cikk többségében olyan példákat mutat be a majdnem-Johnson-poliéderek geometriai modellezéséről, amelyek egy kivételtől, a 2. példától eltekintve nem elemi majdnem-Johnson-poliéderek, a jelen tanulmányban csakis elemi majdnem-Johnson-poliéderek geometriai modellezését vizsgáljuk és erre mutatunk be példákat.

Az elemi majdnem-Johnson-poliéderek geometriai szoftverrel történő számítógépes modellezési lehetőségeit a 6. fejezetben mutatjuk be. Mint ahogy az elemi Johnson-poliéderek családja kettébontható szerkeszthető és nemszerkeszthető poliéderekre, úgy az elemi majdnem-Johnson-poliéderek családja is kettébontható szerkeszthetőség szempontjából: a geometriai módszerekkel közvetlenül szerkeszthető poliéderekre, ill. a csak paraméteres geometriai modellezéssel előállítható poliéderekre. Mindkét típusból mutatunk be példákat az 6. fejezetben, mégpedig többségében olyan poliédereket, melyek lapjai csak háromszögek vagy négyszögek, mert ezekre a legegyszerűbb vizsgálni a poliéderlapok alakjának a szabályos sokszögtől való eltérésének a mértékét.

Mindezek előtt, a 2. fejezetben azonban felidézünk bizonyos, a témakörünkhöz kapcsolódó alapfogalmakat, majd a 3. fejezetben összefoglaljuk a szabályos sokszöglapok által határolt konvex poliéderek számunkra fontos tulajdonságait, főbb típusait, mert a további fejezetekben ezzel analóg módon, a majdnem-Johnson-poliéderek esetében szeretnénk a hasonló tulajdonságokat megfogalmazni és a főbb típusokat meghatározni.

## 2. Kapcsolódó fogalmak

Ebben a cikkben mindenhol 3-dimenziós konvex poliéderekkel fogunk foglalkozni, tehát poliéderen a továbbiakban mindig 3-dimenziós és konvex poliédert értünk, mégpedig olyan típusút, amely korlátos, és így előáll véges sok pontjának, pl. a csúcsainak a konvex burkaként.

Egy poliédert szerkeszthetőnek nevezünk (ezt olykor úgy is mondjuk, hogy euklideszi-típusú szerkesztéssel megszerkeszthető), ha minden csúcsa megszerkeszthető, amennyiben adott egy élének két csúcsa (egymástól racionális számmal mérhető távolságra) egy síkban – ezt a síkot hívjuk alapsíknak –, és a következő alakzatok megszerkesztésére van mód (ha a megfelelő input paramétereik már megszerkesztettek): gömb (adott középponttal és sugárral, ez utóbbit két pont – a távolságukkal – határozza meg), sík (adott három, nem egy egyenesre



első pontjával), térbeli egyenes (adott két pontjával), térbeli kör (adott egy egyenessel, mint tengellyel, és egy kerületi pontjával). Ezen felül két megszerkesztett alakzat metszéspontjait vagy metszésvonalát (melyek egyenesek vagy körök lehetnek) is megszerkeszthetőnek vesszük. Ezek a műveletek a síkbeli körzővel-vonalzóval történő szerkesztési lépésekhez hasonlóan úgy bővítik a megszerkesztett térbeli pontok halmazát, hogy azok koordinátái megfelelő másodfokú testbővítések egymás utáni alkalmazásával mindig megkaphatók. A geometriai szoftverek összes tipikus, gömböt, síkot, kört és egyenest szerkesztő parancsa (pl. párhuzamos vagy merőleges sík, ill. egyenes szerkesztése) mind visszavezethető az előbb felsorolt alapparancsokra, ahogy a tér egy megszerkesztett síkján a szokásos körzővel-vonalzóval történő szerkesztési lépések is. A szerkesztés során persze a poliéder éleit és lapjait is megszerkesztjük: térbeli szakasz, (ill. térbeli sokszög) megszerkeszthető, ha a végpontjai (ill. csúcspontjai) már megszerkesztettek.

Egy poliéder laphálóján a poliéder csúcsai, élei és lapjai által a tartalmazás relációra nézve meghatározott Boole-algebrát (másnéven Boole-hálót) értjük. Konvex poliéder esetén a lapháló ekvivalens egy síkgráf Boole-hálójával (síkgráf esetén az éleknek csak a gráf csúcsaiban lehet egymással közös pontjuk), ekkor a gráf csúcsai a poliéder csúcsainak, a gráf élei a poliéder éleinek, a gráf élei által határolt, csúcsot belső pontként nem tartalmazó síkbeli tartományok pedig a poliéder lapjainak vannak megfelelően (egyetlen tartomány nem korlátos, ez is a poliéder egyik lapjának felel meg). Ez azért hasznos, mert így síkgráfként könnyen ábrázolható egy konvex poliéder lapstruktúrája.

### 3. Szabályos sokszöglapok által határolt konvex poliéderek

Ebben a fejezetben áttekintjük, hogy az arkhimédészi testek és a Johnson-poliéderek nagy része milyen geometriai műveletekkel állítható elő a laphálójukból vagy származtatható más olyan konvex poliéderekből, melyeknek minden lapjuk szabályos sokszög. Ezen túlmenően, az elemi Johnson-poliéderek és a nemszerkeszthető Johnson-poliéderek fontosabb tulajdonságait is felelevenítjük (ld. [6]).

Az 5 szabályos test és az arkhimédészi testek többségének csúcskonfigurációi (azaz az egy csúcsban található lapok), és így az egész poliéder is megszerkeszthető felhajtásokkal (ld. [6], benne az 1. ábrát és a Bevezetés elején a hozzá tartozó magyarázatot) – ez a módszer minden olyan szabályos, és arkhimédészi test esetén jól használható, ahol 3 lap találkozik egy csúcsban, de a szimmetriák kihasználásával a többi szabályos, ill. arkhimédészi testre is elkészíthetők a felhajtások, kivéve a pisze kocka és pisze dodekaéder eseteit (ez a két test nemszerkeszthető, ld. [6]).

Az arkhimédészi testek többsége a szabályos testekből vagy másik arkhimédészi testből előállítható csonkolás, kibővítés, vagy pizsésítés műveleteivel: 1) csonkolás esetén olyan síkokkal szelünk egy poliédert, hogy mindegyik lapja lap marad (csak az eredetinek egy része lesz), és új lapjai keletkeznek; 2) kibővítés esetén a test összes lapja, vagy bizonyos típusú lapjai egységesen kifelé kerülnek eltolásra (síkjukra merőlegesen eltolva, az ugyanolyan típusú lapokat ugyanakkora távolságra), és a konvex burkot képezzük, ekkor új lapok is keletkeznek; 3) pizsésítés esetén a test összes lapja egységesen kifelé kerül eltolásra (síkjukra merőlegesen eltolva, az ugyanolyan típusú lapokat ugyanakkora távolságra) és egyúttal elforgatásra (az ugyanolyan típusú lapokat ugyanakkora szöggel elforgatva a súlypontjuk körül a síkjukban). Az, hogy az újonnan keletkező lapok szabályos sokszögek legyenek, az első két művelet során megszerkeszthető (a szelő síkok helyzetének, ill. az eltolás távolságának a megszerkesztésével), a harmadik műveletnél pedig 1-paraméteresen szerkeszthető poliédermodell segítségével elérhető, hogy csakis szabályos és egyenlő szárú háromszöglapok keletkezzenek, majd megfelelő paraméterbeállítással megvalósítható, hogy az egyenlő szárú háromszöglapok

tetszőlegesen közeli legyenek szabályos háromszögekhez (emiatt a pisze kocka és a pisze dodekaéder tetszőleges pontossággal modellezhetők, 1-paraméteres szerkesztéssel), ld [6].

A Johnson-poliéderek többsége előállítható szabályos testekből, arkhimédészi testekből vagy másik Johnson-poliéderből, szabályos hasábokból és szabályos antiprizmákból (a szabályos hasábok és prizmák mind szerkeszthetők – ezek olyan hasábok, ill. prizmák, melyeknek lapjaik szabályos sokszögek) levágás vagy bővítés műveleteivel: levágáson olyan síkkal történő szelést értünk, amelyet a kiindulási poliéder csúcsai feszítenek ki, és a szelősík nem metsz bele lap relatív belsejébe, bővítésen pedig két olyan poliéder unióját értjük, melyek metszete egy közös lapjuk. A 92 darab Johnson-poliéder (amelyek J1-J92 elnevezésekkel kerültek meghatározásra) közül a J1-J83 poliéderek előállíthatók ilyen műveletekkel.

A J84-J92 poliédereket elemi Johnson-poliédereknek nevezzük, mivel azok nem állíthatók elő az előző bekezdésben leírt módon – tehát 9 darab ilyen poliéder van a 92 darab Johnson-poliéder között. Közülük a J91 és J92 poliéderek az egyik arkhimédészi test, az ikozidodekaéder határának bizonyos részét (4, ill. 7 lapját tartalmazó összefüggő határdarabot) felhasználva könnyen megszerkeszthetők térben (így ez a két poliéder megszerkeszthető), valamint a J87 poliéder a J86 poliédernek egy négyzet alapú gúlával történő bővítése. Belátható, hogy a J84-J90 poliéderek nemszerkeszthető Johnson-poliéderek, ill. a J84-J86 és J88-J90 poliéderek együtt primitív nemszerkeszthető poliéderek (mivel egyik sem szerkeszthető meg, még a többi ilyen poliéder felhasználásával sem). De a nemszerkeszthető Johnson-poliéderek mindegyike tetszőleges pontossággal modellezhető 1-paraméteres szerkesztéssel, majd a paraméterérték megfelelő beállításával, ld [6].

Fennáll, hogy egy tetszőleges, szabályos sokszöglapok által határolt konvex poliéder (tehát szabályos test, arkhimédészi test, szabályos hasáb, szabályos antiprizma, vagy Johnson-poliéder) rendelkezik olyan szimmetriákkal, amelyekkel a laphálója rendelkezik: azaz, ha a laphálónak vesszük egy tetszőleges automorfizmusát (azaz olyan illeszkedéstartó leképezését önmagára, melyben különböző csúcsok képei különböző csúcsok, élek képei élek, lapok képei lapok), akkor van olyan önmagára képező egybevágósága is a testnek (forgatása, tükrözése), amely a csúcsait, éleit, lapjait pontosan a lapháló adott automorfizmusa szerint képezi önmagára.

#### 4. Majdnem-Johnson-poliéderek

A majdnem-Johnson-poliéderek olyan 3-dimenziós konvex poliéderek, melyeknek mindegyik lapjuk vagy szabályos sokszög, vagy olyan sokszög, melynek az alakja közeli egy szabályos sokszöghöz (ha egy ilyen poliédernek egy lapja  $n$ -szög, akkor annak az alakja egy szabályos  $n$ -szöghöz kell, hogy közel legyen). Ez persze nem egy matematikailag precíz definíció, de azzá tudjuk tenni a következőkben.

Szemléletesen azt szeretnénk megragadni, hogy mikor nem vehető észre, hogy egy poliédernek nem minden lapja szabályos sokszöglap, vagy mikor ítéljük úgy, hogy mindegyik lapjának az alakja igen közeli egy szabályos sokszöghöz.

Az egyik lehetőség az lenne, hogy valamilyen távolságfogalmat használunk, pl. Hausdorff-metrikát, és adott lap esetén, ha az konvex  $n$ -szög, akkor megkeressük, hogy melyik az a szabályos  $n$ -szög, amely a legközelebb esik hozzá ebben a metrikában, és ezt a távolságot tekintjük a szabályos sokszög alakjától való eltérésnek. Azonban ez egy eléggé bonyolult számítási feladat. Ennél kicsit egyszerűbb lenne annak kiszámítása, hogy az  $n$ -szög csúcsai mennyire közel helyezkednek el egy körvonalhoz, és az egymást követő csúcsok távolsága mennyire egyező. Ebben az esetben viszont a csúcsokhoz valamilyen értelemben közel elhelyezkedő kör meghatározása lenne bonyolult feladat.

A másik lehetőség, hogy a lapok alakját meghatározó, könnyen kinyerhető paraméterekre – mondjuk a poliéder élhosszaira és lapjainak csúcshögeire – adunk meg feltételeket ahhoz, hogy a poliéder lapjai szabályos sokszögeket közelítsenek. Egy szabályos  $n$  szöghöz közeli  $n$ -szög oldalhosszai arányainak a maximuma közeli kell, hogy legyen az 1-hez, a szögeinek az eltérése a szabályos  $n$  szög csúcshögének értékétől is kicsi kell, hogy legyen. Továbbá, az egész poliéder esetén elvárt, hogy az egyes, akár egymástól távoli lapok élhosszai is közeli legyenek egymáshoz, mert ellenkező esetben ez annak lenne észrevehető jele, hogy az egyes sokszöglapok nem mind szabályos sokszögek.

Az utóbb felvázolt lehetőséget megvalósítva, két mennyiséget vezetünk be: a maximális élarányt (az egész poliéderre), és a maximális szögeltérést (a poliéder  $n$ -szög lapjaira, minden szöbe jöhető  $n$  esetén). Legyen  $r(P)$  a  $P$  poliéder leghosszabb és legrövidebb éleit tekintve azok élhosszainak aránya (mindig legalább 1 nagyságú), és legyen  $d(P, n)$  a  $P$  poliéder  $n$ -szög lapjai csúcshögének a maximális eltérése (abszolút értékben) a szabályos  $n$ -szög csúcshögének értékétől. Ha  $r(P)$  kisebb, mint  $1 + \varepsilon$  valamely  $\varepsilon > 0$  esetén, és  $d(P, n)$  kisebb, mint  $\delta_n$  valamely  $\delta_n > 0$  esetén (ahol  $n$  végigfut azon  $I_P = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$  számokon, melyre léteznek  $P$ -nek  $n$ -szög lapjai), akkor azt mondjuk, hogy poliéder az  $(\varepsilon, \{\delta_k\}_{k \in I_P})$ -hibahatárokon belül majdnem-Johnson-poliéder. (Megjegyezzük, hogy ez a feltétel finomabb, mint az [7] cikkben szereplő feltétel, mivel abban az élarányok csupán lapokon belül kerülnek kiszámításra, a szögeltérés is kicsit másképp van kiszámítva, valamint nincs kimondva, hogy  $n$ -szöglapok esetén minden egyes  $n$ -re külön érdemes megadni a szögeltérés maximális elfogadott mértékét.) Az  $1 + \varepsilon$  értéket a poliéder maximális élarányra adott szigorú felső korlátjának nevezzük, a  $\delta_n$  értékeket pedig a poliéder  $n$ -szöglapjai szögeinek a szabályos sokszög szögeitől való maximális abszolút eltérésére adott szigorú felső korlátnak.

A szakirodalomban az  $\varepsilon$  értékét szokás nézni, a szögeltéréseket már nem mindig vizsgálják. Például a Polytope Wiki – Miraheze weblapon (ld. [4]) az  $\varepsilon < 0,1$  értékekhez talált poliéderek vannak felsorolva (egy kivételes esettől eltekintve), az Orchidpalms weblapon található poliéderekre az élek és a szögek abszolút eltéréseit is összegzik. Saját tapasztalataink alapján élhosszakra az  $\varepsilon = 0,02$  vagy  $\varepsilon = 0,03$  már eléggé kielégítő értékek ahhoz, hogy ne, vagy csak alig vegyük észre az oldalhosszak különbözőségét, szögekre pedig  $3 \leq n \leq 5$  esetén  $1^\circ - 2^\circ$  közötti  $\delta_n$  értékek tűnnek ilyenek.

A definícióból is következik, hogy a majdnem-Johnson-poliéderek általában nem egyértelműen meghatározott poliéderek, mert tudunk kicsit változtatni úgy a poliéder alakján (pl. a poliédert más, az eredeti modell élhosszaihoz és lapjainak csúcshögéhez közeli élhosszakkal, ill. csúcshögökkel megszerkesztve), hogy a laphálója ugyanaz marad, a lapok alakja esetleg kicsit változik, de az általunk választott hibahatárokon belül maradunk az élarányokat és a szöghögbönségeket tekintve (ez a helyzet, ha szigorúan a hibahatárokon belül voltak az  $r(P)$  és  $d(P, n)$  mennyiségek a módosított poliéder esetén is). Ezért egy adott  $P$  majdnem-Johnson-poliéder konstruálása esetén arra törekszünk, hogy olyan poliéder legyen a végeredmény, melynek az  $r(P)$  és  $d(P, n)$  értékei a lehető legkisebbek, vagy legalábbis minél közelebb vannak bizonyos referencia értékekhez, ld. a fentebb említett  $\varepsilon = 0,02$ , ill.  $3 \leq n \leq 5$  esetén az  $1^\circ - 2^\circ$  közötti  $\delta_n$  értékeket. Ezért előfordul, hogy amikor elkészülünk az adott laphálójú poliéder modellezésével, még megvizsgáljuk, hogyan lehetne módosítani a modellezésen (bemeneti paraméterértékeken, pl. bizonyos élhosszakon, lapok csúcshögökön, vagy akár szerkesztési lépéseken) úgy, hogy a poliéder laphálója ne változzon, hanem például csak bizonyos élhosszai vagy szögei módosuljanak minimálisan, hogy az  $r(P)$  és/vagy  $d(P, n)$  értékei csökkenjenek, de ne egymás rovására.

A legegyszerűbb eset, ha a majdnem-Johnson-poliédert úgy tudjuk modellezni kielégítő hibahatárokon belül, hogy csak a háromszöglapjai között lehetnek nem szabályosak. Ebben az esetben elég csak arra törekednünk, hogy az élhosszak arányainak maximumát minimalizáljuk, mivel egy háromszög szögeit meghatározzák az oldalainak arányai, és ha az oldalak aránya

közel van 1-hez, akkor a szögei közel vannak  $60^\circ$ -hoz. Egy ennél kicsit komplikáltabb eset az, amikor a négyszöglapok is lehetnek nemszabályosak, ilyenkor a négyszöglapok csúcsszögeinek  $90^\circ$ -tól való eltéréseinek maximumát is szeretnénk minimalizálni, vagy legalábbis  $1^\circ - 2^\circ$ -os határon belül tartani.

Geometriai módszerekkel újabb majdnem-Johnson-poliédereket kaphatunk más nevezetes poliéderekből vagy egyszerűbb majdnem-Johnson-poliéderekből. Ilyenek az arkhimédészi testek előállításánál használható műveletek: csonkolás, kibővítés és pizsítés; valamint a Johnson-poliéderek előállításánál használható műveletek: levágás és bővítés (ld. 3. fejezetet). Például a focilabda (csonka ikozaéder) csonkolásával, kibővítésével, ill. pizsítésével kaphatók meg a [7] cikk 3-5. példáiban szereplő majdnem-Johnson-poliéderek. Ezen felül olyan uniform poliéderek, Johnson-poliéderek, és majdnem-Johnson-poliéderek esetén, amelyeknek csak háromszög-, négyszög- vagy hatszöglapjaik vannak, alkalmazható a lapok rácsfelosztása, és a rácspontok megfelelő elmozgatásával újabb, több lapot, élt és csúcst tartalmazó majdnem-Johnson-poliédert készíthetünk el (ld. [7]). Megemlítjük még, hogy bizonyos katalán testek lapjaira közel szabályos sokszögeket rajzolva, majd azok konvex burkát véve is előállnak majdnem Johnson-poliéderek (ld. [4]), itt az kerül kihasználásra, hogy a katalán testek az arkhimédészi testek duálisaiként szabályos csúcsalakzatokkal rendelkeznek, azaz egy olyan síkkal lemetszve a csúcs közelében a testet, amely merőleges a csúcs és a testközéppont egyenesére, szabályos sokszöget kapunk. Az ilyen poliéder nyilván előáll a katalán testre alkalmazott szelések eredményeképp is, tehát csonkolással.

## 5. Elemi majdnem-Johnson-poliéderek

Mivel végtelen sok egymástól különböző laphálójú majdnem-Johnson-poliéder létezik, és ilyeneket elő lehet állítani geometriai műveletek egymás utáni alkalmazásával (elég csak felosztásokat alkalmaznunk megfelelő kiindulási poliéderre), ahogy ezt az előző fejezetben láttuk, ezért felvetődik a kérdés, hogy a majdnem-Johnson-poliéderek osztályozható-e valamilyen módon, azaz leírható-e valamilyen módon ennek a poliéderosztálynak a szerkezete, de egyelőre erre még sejtés sincs.

Felosztások eredményeképp olyan poliédercsúcsok jönnek létre, melyeknél az arra illeszkedő lapok csúcsszögeinek az összege  $360^\circ$  lenne, ha a lapok ténylegesen szabályos sokszöglapok lennének, valamint csonkolás, kibővítés és pizsítés esetén is létrejöhetnek ilyen csúcsok (ld. a 3-5. példák mindegyike ilyen típusú majdnem-Johnson-poliéder a [7] cikkben), így ha ezt az esetet kizárjuk (hívjuk ezt a feltevést kizárási feltételnek a későbbiekben), akkor máris változik a helyzet. Tehát a kizárási feltétel azt jelenti, hogy a poliéder minden csúcsánál az arra illeszkedő lapok csúcsszögeinek az összege kisebb, mint  $360^\circ$  akkor is, ha az egyes lapok tényleges csúcsszögei helyett az ugyanannyi oldalú szabályos sokszög csúcsszögeivel számolunk. Ebből a feltételből következik, hogy legfeljebb 5 lap illeszkedik egy ilyen poliédernek egy tetszőleges csúcsára.

Különben ez a kizárási feltétel ekvivalens azzal, hogy a poliéder lapjainak bármely csúcskonfigurációja megvalósítható szabályos sokszöglapokkal, azaz ha a poliéder bármely csúcsához vesszük azokat a lapokat, melyek arra a csúcsra illeszkednek, és kicseréljük mindegyik lapot ugyanannyi oldalszámú szabályos sokszöglappal, akkor létezik olyan konvex poliéder, amelynek csúcsa az adott csúcs, és az adott csúcsra illeszkedő lapjai pontosan a kicserélt szabályos sokszöglapok, amelyek közül két lapnak pontosan akkor van közös éle, ha azoknak a lapoknak is volt közös élük, melyekre ezeket kicseréltük.

Belátható, hogy a kizárási feltételnek megfelelő majdnem-Johnson-poliédereket tekintve, már csak véges sok ilyen poliéder létezik bizonyos  $\{\delta_k\}_{k \in I_p}$  hibahatárokon belül (csak a  $\delta_3, \delta_4, \delta_5, \dots$  abszolút szögeltérésekre kell megfelelő hibahatárokat felállítani). Ez azért van így,

mert a lapok oldalszámára, és emiatt a poliéder csúcsainak a számára is tudunk felső korlátot mondani (ld. Grünbaum és Johnson [1] cikkéhez hasonló módon lehet becslést adni erre, az említett cikkben a Johnson-poliéderek csúcsszámára adtak felső korlátot). A poliéder lapjainak számára 41 adódik felső korlátként, ill. nagyobb  $\delta_n$  ( $n \geq 3$ ) hibakorlátok az abszolút szögeltérésekre nagyobb felső korlátot implikálnak a poliéder csúcsszámára a bizonyításban, de ettől még nem biztos, hogy előfordulhatnak, mivel az eddig ismert majdnem-Johnson poliédereknek legfeljebb 15-szöglapjai vannak és legfeljebb 240 csúcsuk (ld. [4]). Az adódik, hogy  $\delta_n \geq 0$  ( $n \geq 3$ ) esetén, ha fennáll  $\delta_3 + \delta_4 < 30^\circ$ ,  $\delta_3 + \delta_5 < 12^\circ$ ,  $\delta_5 + \delta_6 < 12^\circ$ , akkor  $n \geq 7$  esetén megfelelően kicsinynek választott  $\delta_n$  értékekre véges sok majdnem-Johnson-poliéder van. Így ha csak olyan majdnem-Johnson-poliédereket tekintünk a fenti kizárási feltétellel, melyeknek minden lapja  $n$ -szög, ahol  $3 \leq n \leq 6$ , akkor a  $\delta_3 = \delta_4 = \delta_6 = 6^\circ$  és  $\delta_5 = 5^\circ$  hibahatárok már garantálják azt, hogy véges sok ilyen poliéder létezik.

A Johnson-poliéderek osztályozásával több publikáció is foglalkozott 1964-67 között (ld. [1], [2] [8]), ennek során a poliéderek csúcsszámára adott felső korlátokon kívül több állítás bebizonyításával egyre szűkült a szóba jöhető poliéderek köre; majd végül véges sok eset átvizsgálása maradt hátra, és akkor kiderült, hogy ezek közül több esetben létezik olyan konvex poliéder, melynek mindegyik lapjának az alakja igen közeli egy szabályos sokszöghöz. De azt is érdemes végiggondolni, hogy azok az állítások, melyekkel kizártak bizonyos tulajdonságú poliédereket a Johnson-poliéderek közül, lehet, hogy majdnem teljesülnek. Így kiderült, hogy bár nem létezik olyan Johnson-poliéder, melynek szabályos 7-szög, 9-szög, 11-szög vagy 12-szög valamelyik lapja, azért ilyen típusú majdnem-Johnson-poliéderek még léteznek (ld. [4]).

Az elemi Johnson-poliéderek definíciójával analóg módon, de a végesség szempontját is szem előtt tartva (amely ekvivalens szabályos sokszöglapokkal történő lokális modellezhetőséggel), vezetjük be az elemi majdnem-Johnson-poliéderek definícióját a következőkben.

Egy konvex poliédert elemi majdnem-Johnson-poliédernek nevezünk, ha a poliéder lapjainak bármely csúcskonfigurációja megvalósítható szabályos sokszöglapokkal, és a poliéder nem állítható elő a következőkben felsorolt geometriai műveletekkel más nevezetes poliéderekből (mint pl. uniform poliéderekből, Johnson-poliéderekből, katalán testekből, szabályos sokszög alapú hasábokból, gúlákból és kettősgúlákból) és más, nála egyszerűbb (azaz nála kevesebb lépésben megszerkeszthető vagy geometriai módszerekkel modellezhető) majdnem-Johnson-poliéderekből: csonkolás, kibővítés, pízésítés, levágás, bővítés, felosztás és átrendezés (ez utóbbi művelet során egy szabályos poliéder lapjaiból vagy laphoz tartozó lapjaiból azok mozgatása és csúcsaik mentén történő olyan szerkeszthető összeillesztésük után képzünk konvex burkot, amely során a lapok a konvex burok határán maradnak, és új lapok is keletkeznek, mint a Miraheze (ld. [4]) weblapon a tetrated dodecahedron és a chiral tetrated dodecahedron poliéderek esetén).

Ahogy az elemi Johnson-poliéderek között kétféle típusú poliéder van: szerkeszthető és nemszerkeszthető poliéderek, ehhez hasonlóan az elemi majdnem-Johnson-poliéderek között is találhatunk kétféle poliédertípust. Azonban a szerkeszthetőség nem egy megfelelő tulajdonság a típusokra bontáshoz ebben az esetben, mivel minden elemi majdnem-Johnson-poliéder szerkeszthető lesz, legalábbis lesz szerkeszthető reprezentánsa a felvett hibakorlátokon belül.

Hiszen ha nem szerkeszthető közvetlenül egy ilyen poliéder, akkor egy szerkeszthető paraméteres poliédermodellként előállítható, megfelelő paraméterértékek beállításával, és minden paraméterhez lesz 1-1 intervallum, amelyben bármely paraméterérték megfelelő lesz ahhoz, hogy a poliéder majdnem-Johnson-poliéder legyen az adott hibahatáron belül. Így minden egyes paraméter esetén felveszünk egy szerkeszthető értéket az adott intervallumában, és ekkor az eredményül kapott poliéder is szerkeszthető lesz.

Ezért az elemi majdnem-Johnson-poliédereket inkább úgy csoportosítjuk, hogy megkülönböztetjük a geometriai módszerekkel közvetlenül szerkeszthető poliédereket és a geometriai módszerekkel közvetlenül nem szerkeszthető poliédereket (amelyek azért az eddigi tapasztalatok alapján 1-paraméteres modellezéssel előállíthatók). Geometriai módszerekkel közvetlenül szerkeszthetőnek mondunk egy elemi majdnem-Johnson-poliédert, ha felhajtásokkal vagy más, csak geometriai jelentéssel bíró segédalakzatok (pl. hasábok, gúla) szerkesztésének segítségével meg tudjuk szerkeszteni a poliédert a kívánt hibahatáron belül, a laphálójának az ismeretében, de a lapszögeinek, testátlói hosszának előzetes ismerete (ill. közelítő ismerete) nélkül.

Például, ha egy ilyen poliéderben minden csúcs fokszáma legalább 4, és a csúcsalakzatok nem feltétlenül szimmetrikusak, akkor nem tudjuk elkezdni a poliéder modellezését egyik csúcsban sem, mert nem ismerjük a csúcshoz illeszkedő lapok által bezárt lapszögeket, tehát ez geometriai módszerekkel közvetlenül nem szerkeszthető. De ha felvesszünk egy paramétert, mondjuk két, egymással szomszédos lap bezárt szögét, akkor e szög ismeretében egy negyedfokú csúcs csúcskonfigurációja már megszerkeszthető lesz, tehát el tudjuk kezdeni a poliédermodellezést paraméteres modellezésként, és szükség esetén újabb paraméterek felvételével elkészíthető az adott laphálójú poliédermodell. A paraméterérték(ek) megfelelő beállításával elérhet, hogy a poliéder minél több éle és szöge megfelelően közel legyen a kívánatoshoz, de ha még ezután is szeretnénk bizonyos élhosszakon vagy szögek nagyságán javítani, akkor a paraméteres modell bemeneti adatain (felhasznált csúcshölygek, élhosszak) kell kissé változtatni úgy hogy az eredményül kapott poliéder jobb hibahatároknak megfeleljen.

## 6. Számítógépes modellezés

A következőkben az Orchidpalms (ld. [3]) weblap 1-31. és a Polytope Wiki – Miraheze weblap (ld. [4]) 1-74. példái közül mutatjuk be néhány elemi majdnem-Johnson-poliédernek a modellezését (a Miraheze lap tartalmazza az Orchidpalms weblap példáit, de azok részletesebb ismertetését nem, ezek az Orchidpalms weblapon találhatóak meg). A példákra O.sorszám, ill. M.sorszám alakban hivatkozunk (az Orchidpalms lapon a példák meg vannak sorszámozva, a Miraheze lapon nem, de ott gyakran szerepelnek elnevezések a poliéderekre). A következőben leginkább olyan poliédereket modellezzünk, melyek lapjai háromszögek és négyszögek, mert ekkor a legegyszerűbb a majdnem-Johnson-poliéderek hibavizsgálata (valamint, ha lehetséges, nemszabályos sokszöglapok csak a háromszöglapok közül kerülnek majd ki). Nem elhanyagolható módon, ezek a poliéderek hasonlítanak a legjobban az elemi Johnson-poliéderek többségét adó nemszerkeszthető elemi Johnson-poliéderekre.

Tudomásunk szerint az említett két weblapon bizonyos szoftverek használatával minél több, általában legfeljebb 5-ödfokú csúccsal rendelkező majdnem-Johnson-poliédereket konstruáltak, a teljesség igénye nélkül (tehát lehet, hogy nem az összes ilyen van felsorolva). A hibakorlátokra próbáltak jó értéket megadni, de nincs szisztematikus optimalizálási szándéknak nyoma a megoldásokban (és persze más hibafüggvényekkel is számoltak).

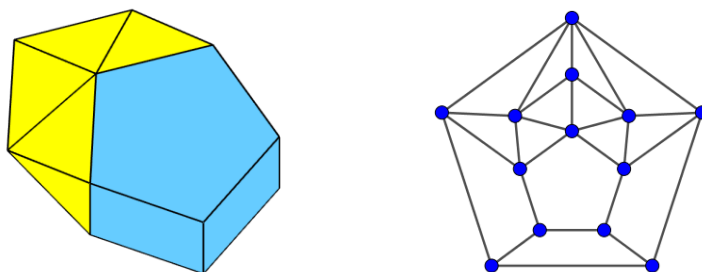
A vizsgálataink alapján a [3] és [4] weblapokon szereplő elemi majdnem-Johnson-poliéderek a következők: O.1-12, O13-21, O23-31, M.21, M.22, M.30. Ezek vagy közvetlenül szerkeszthető térbeli euklidészi-típusú szerkesztéssel, vagy 1-paraméteres poliédermodellel állíthatók elő, melynél a paraméterérték megfelelő beállítása után kapunk egy poliédermodellt (közülük geometriai módszerekkel közvetlenül szerkeszthető: O.1, O.3-9, O.11-12, O.14-15, O.17-20, O.29, O.30, M.21, M.22 – megjegyezzük, hogy az M.21 poliéder szerepel a [7] cikk 2. példájában). De mindkét esetben azon kívül, hogy az élhosszak egy része azonos, az adott poliéder elkészítéséhez szükséges szerkesztési/modellezési lépések elvégzése után lesz olyan él (vagy lesznek olyan élek), melyek hossza nem ez a közös hossz, sőt elég távol lehet a hossza (ill. hosszuk) ettől az értéktől és/vagy akár bizonyos csúcshölygek abszolút eltérései is pozitívak

lehetnek a hozzájuk tartozó szabályos sokszög csúcshögtértékétől). Ekkor a poliéder szerkesztését (vagy az 1-paraméteres modell szerkesztését) módosítani kell, hogy a szerkesztés során felhasznált több élhossz (és esetleg csúcshögtérték) se pontosan ugyanakkora legyen, ez befolyással van a végeredmény poliéderen az élhosszakra és szögökre, és egyes módosításokkal elérhető, hogy az élék hossza közelebb kerüljön egymáshoz, legálább 10%-on belülre, de ha lehet, akkor még ennél is közelebb egymáshoz, és a szögeltérések is elég kicsik legyenek. A sok lehetséges paraméter miatt teljes optimalizálást nem végeztünk, csak ad-hoc csökkentést az élarányok maximumán.

A nem háromszöglapokat lehetőleg meghagytuk szabályosoknak, vagy minimálisan módosítottuk azokat úgy, hogy minél nagyobb szimmetria maradjon meg esetükben és az egész poliéder esetén is. Vannak olyan elemi majdnem-Johnson-poliéderek, amikor már a konstrukció elején vagy közben ellentmondásba ütközik a szerkesztés, ha szabályos sokszöglapokat próbálunk használni, ekkor már a szerkesztés közben szükséges változtatni bizonyos lapok alakján, általában ilyenkor is törekedtünk a legnagyobb fokú szimmetria megtartására és megpróbáltuk a lap szabályostól eltérő alakváltozását minimalizálni, vagy paraméter bevezetésével később tovább módosíthatóvá tenni.

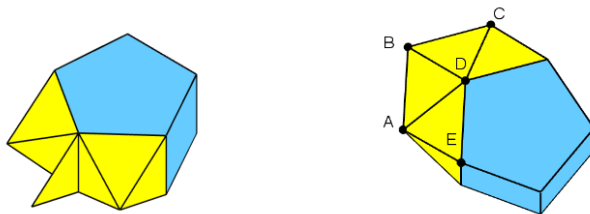
### 6.1. Geometriai módszerekkel közvetlenül szerkeszthető poliéderek

**1. példa.** (O.1, ld. 1. ábra) Egy 1 élhosszú szabályos ötszögre 1 magasságú hasábot emelünk, majd a hasáb két egymás melletti négyzetlapjára olyan négyzet alapú gúlákat rajzolunk a hasábról kifelé, melyek háromszöglapjai szabályos háromszögek. A két gúla egymásnak síkra vonatkozó tükörképe, ebbe a tükrözési síkba olyan szabályos háromszöget rajzolunk, amelynek a két gúla közös éle az alapja, és nem metsz bele a hasáb belsejébe (ld. 2. ábra).



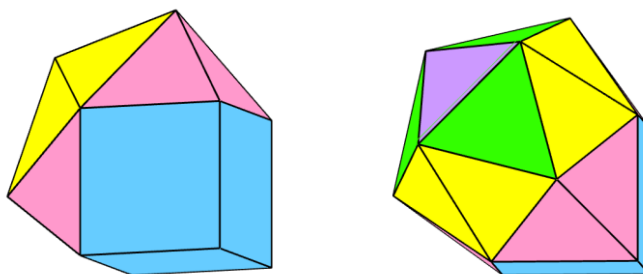
1. ábra. Az 1. példa elemi majdnem-Johnson-poliédere és annak laphálója

A hasáb, a két gúla és a háromszög konvex burkát vesszük. Ekkor újabb négy háromszöglap keletkezik. Két él lesz, amely nem 1 hosszú:  $AB = BC \approx 1,0091$ , és a poliéder lapszögei az  $AD$  és  $CD$  éleknél (valamint két tükörkép éleknél, amely a 2. ábrán nem látszik) kb.  $179,75^\circ$ -osak, azaz közel  $180^\circ$ -osak, de így még épp a konvex burkok határán vannak. Tehát a megszerkesztett  $P$  poliédernek csak a háromszöglapjai között vannak nem szabályos sokszöglapok, a maximális élaránya  $r(P) < 1,01$  (valamint a maximális szögeltérése a háromszöglapokon kisebb, mint  $0,61^\circ$ ). Így ez egy elemi majdnem-Johnson-poliéder  $\varepsilon = 0.01$  és  $\delta_3 = 0,61^\circ$  hibahatárokon belül.

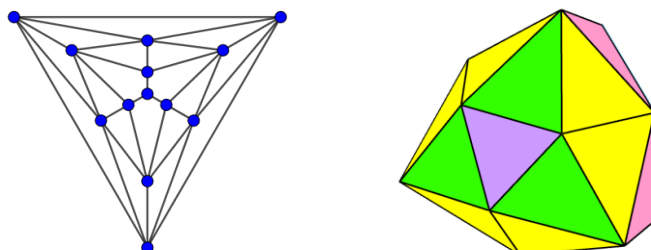


2. ábra. Segédábra a szerkesztés menetéhez; valamint jelölések a szerkesztés magyarázatához az 1. példa esetén

**2. példa.** (O.4, ld. 3. ábra) Megszerkesztjük egy egységoldalú kockának három olyan lapját, melyek egy csúcsban találkoznak, majd a lapok uniójának relatív határán minden élre 1-1 szabályos háromszöglapot illesztünk. Ezek páronként 1-1 olyan közös élben találkoznak, melynek végpontja két négyzetlap közös csúcsa. A keletkezett háromszöglapok azon éleire, melyek nem szomszédosak más éllel, újabb szabályos háromszöglapokat illesztünk (összesen 6 darabot), ezek páronként 1-1 olyan közös élben találkoznak, melynek végpontja egyetlen négyzetlapra illeszkedik. Ezzel a poliéder mindegyik csúcsát megszerkesztettük. Végül a kimaradó 4 darab háromszöglapot rajzoljuk meg. A keletkezett poliéder  $120^\circ$ -os forgásszimmetriával rendelkezik, és 3 élén (amelyek egyforma nagyságúak, és egy szabályos háromszöglap oldalain helyezkednek el) kívül mindegyik éle 1 hosszúságú. Ha most megismételjük a konstrukciót úgy, hogy az egyes szerkesztett háromszöglapok csak közel szabályosak (de a forgásszimmetriát nem rontjuk el), akkor ügyes élhosszválasztásokkal elérhető, hogy közel egyforma hosszú legyen mindegyik él,  $\varepsilon = 0.013$  hibahatár adódik. Ha pedig négyzetek helyett négyzethez közeli alakú rombuszokat is megengedünk, akkor egy kicsit még jobban csökkenthető a maximális élarány.



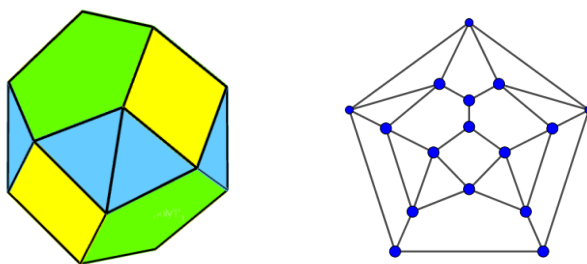
3. ábra. A 2. példa elemi majdnem-Johnson-poliédere két nézetből



4. ábra. A 2. példa elemi majdnem-Johnson-poliéderének laphálója, és a poliédermodell alakja az élhosszmódosítások előtt



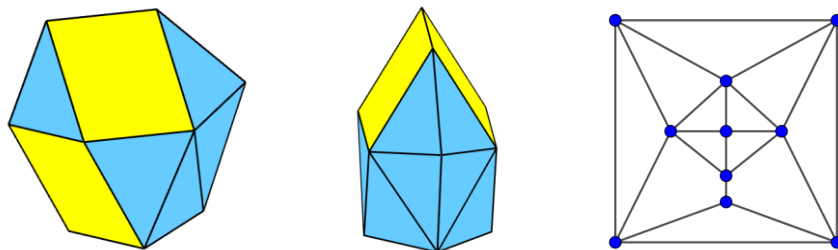
**3. példa.** (O.6, ld. 5. ábra) A poliédernek látszólag két szabályos ötszöglapja van, melyek közös éllel rendelkeznek. Hozzájuk csatlakozik 1-1 négyzet két oldalról. Ezt a konfigurációt tükrözzük egy, a szimmetriasíkjára merőleges és az ötszöglapok közös élével párhuzamos síkra, tegyük fel, hogy ez a sík vízszintes az  $xyz$ -koordináta-rendszerben. Majd forgassuk el  $90^\circ$ -kal a tükrözött lapokat a függőleges szimmetriatengelyük körül, és függőlegesen mozgassuk el ugyanazzal a vektorral úgy, hogy a transzformált lapok 1-1 szabad csúcsa csatlakozzon az eredeti lapok 1-1 szabad csúcspontjához (szabad csúcsponon olyan csúcsot értünk, mely egyetlen lapra illeszkedik a 4 lapból álló konfiguráció lapjaiból). De sajnos ez nem lehetséges, mivel a forgatási tengelytől más távolságra vannak a szabad csúcsok a négyzetek és az ötszögek esetén.



5. ábra. A 3. példa elemi majdnem-Johnson-poliédere és annak laphálója

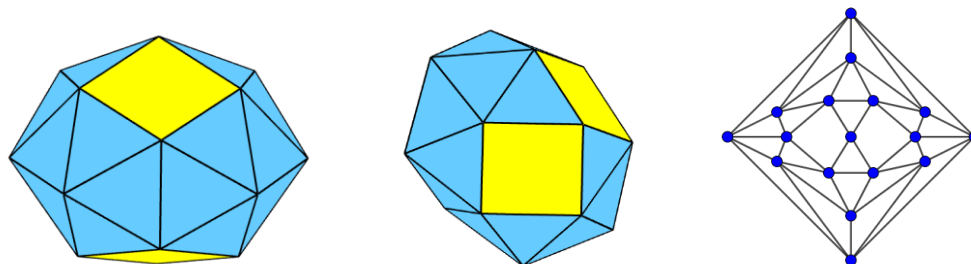
Módosítsuk a konstrukciót: maradjanak az ötszöglapok szabályosak, de a négyszöglapok nem. E négyszöglapok szabad csúcsai a konfiguráció függőleges szimmetriasíkján és a négyszöglap másik 3 csúcspontjának a síkjában kell, hogy elhelyezkedjenek. Vegyük a két szomszédos ötszöglap által bezárt szöveget változtathatónak, azaz paraméternek, és maradjon meg ugyanaz a szimmetriája a poliédernek. Ekkor a 4 lapos konfigurációt ugyanúgy forgatva a tükrözése után, mint az a szerkesztés elején szerepelt, egyetlen, (és megszerkeszthető) olyan függőleges vektorral történő eltolás van, hogy a transzformált négyszöglapok 3-3 fix csúcsa egy síkba kerül az eredeti konfiguráció 1-1 ötszögének szabad csúcsával, ezt az eltolást elvégezve, megkapjuk a négyszöglapok 4-edik csúcsait. Szimmetria miatt az összes csúcs ismert már, így a háromszöglapok is megszerkeszthetők. A paramétert beállíthatjuk úgy, hogy az élhosszak maximális aránya és a négyszöglap szögeinek abszolút eltérése a  $90^\circ$ -tól is kicsi legyen ( $\varepsilon = 0,074$  .  $\delta_3 = 4,8^\circ$ ,  $\delta_4 = 2,2^\circ$ ).

**4. példa.** (O.18, ld. 6. ábra) Két, háromszög alapú szabályos hasábot illesztünk egymáshoz közös négyzetlapjuk mentén úgy, hogy a háromszöglapjaik síkjai merőlegesek legyenek egymásra. Majd az egyik hasáb háromszöglapjára szabályos tetraédert emelünk, a mellette levő másik hasábnak az ezzel a háromszöglappal közös élű négyzetlapjára pedig szabályos gúlát. Vesszük az egész alakzat konvex burkát, ekkor két új háromszöglap keletkezik a gúla és a tetraéder között. Ha módosítjuk a konstrukciót nem teljesen szabályos háromszög alapokra, nem teljesen szabályos tetraéderre, ill. gúlára úgy, hogy a négyzetlapok szabályosak maradjanak, akkor megfelelően közeli élhosszak választásával a végén keletkező két egybevágó háromszöglap alakja közelebb lesz egy szabályos háromszöghöz (hibahatárnak  $\varepsilon = 0,05$  adódik).



6. ábra. A 4. példa elemi majdnem-Johnson-poliédere két nézetből, és a poliéder laphálója

**5. példa.** (O.10, ld. 7. ábra) Tegyük fel, hogy vízszintes az  $xyz$ -koordináta-rendszerben a poliédernek az a négyzetlapja, amelynek nincs közös csúcsa másik négyzetlappal, és az is feltehető, hogy 1 az oldalhossza, és a lap a poliéder tetején helyezkedik el (de még nem tudjuk hol). Ekkor a négyzetlap két átlóján áthaladó függőleges sík mindegyike szimmetriasík, és a poliéder legalsó csúcsa szimmetria miatt a két szimmetriasík közös egyenesén van rajta. Vegyünk fel két, egymásra merőleges, függőleges síkot, ezek lesznek a szimmetriasíkok. Ezek metszetegyenesén vegyünk fel egy pontot, ez lesz a legalsó csúcs. Az ehhez illeszkedő két négyzetlapot és két szabályos háromszöglapot meg tudjuk szerkeszteni, majd a négyzetlapok átlóján áthaladó szimmetriasíkon meg tudjuk szerkeszteni a poliéder keresztmetszetét (amely egy ötszög). Ez alapján a felül elhelyezkedő négyzetlap is megszerkeszthető (mert az átlója, mint keresztmetszet, már adott). A többi csúcs pedig sorra megszerkeszthető 3-3 olyan egységgömb metszéspontjaként, melyek középpontjai már megszerkesztett csúcsok.



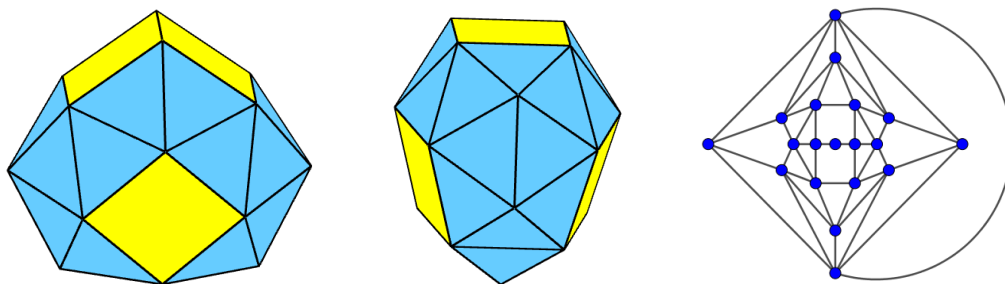
7. ábra. A 5. példa elemi majdnem-Johnson-poliédere két nézetből, és a poliéder laphálója

A szerkesztés végén lesz két él (és a velük szimmetrikus helyzetben levő élek), melyek nem 1 hosszúságúak. A modell szerkesztését módosítva úgy, hogy a négyszöglapok maradjanak négyzetlapok, de a többi megszerkesztett 1 élhosszú él helyett csak ahhoz közeli élhosszakat szerkesztve meg, ezen élhosszak ügyes beállításával minden él egymáshoz közeli hosszúságúnak adódik már (hibahatárnak  $\varepsilon = 0,073$  jön ki).

## 6.2. 1-paraméteres geometriai modellezéssel előállítható poliéderek

**6. példa.** (O.2, ld. 8. ábra) 1-paraméteres poliédermodellt készítünk, ebben a két, közös éllel rendelkező négyzetlap által bezárt szöveget vesszük paraméternek. Feltehető, hogy a két négyzet egységnyi élhosszú, ezeket megszerkesztjük. A közös él felezőmerőleges síkjára szimmetrikus lesz a megszerkesztett poliéder. A közös él egyik végpontjától 1 távolságra levő újabb poliédercsúcs megszerkeszthető 3 olyan egységgömb metszéspontjaként, melyek középpontjai a négyzetek csúcsai közül kerülnek ki. Ez egy újabb négyzetlap csúcsa. Az ezzel átellenes csúcs megszerkeszthető, mivel az említett szimmetriasík túloldalán levő hasonló elhelyezkedésű

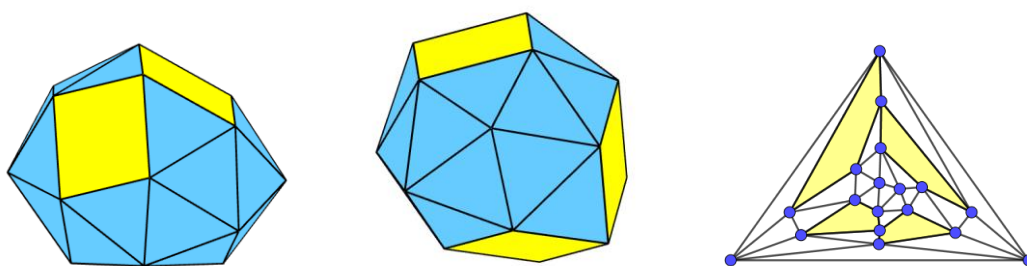
négyzet hasonló csúcsától 1 távolságra van – a poliédernek két négyzet által bezárt szögfelezősíkjában (amely szintúgy szimmetriasík) síkbeli szerkesztéssel adódik ez a csúcs.



8. ábra. A 6. példa elemi majdnem-Johnson-poliédere két nézetből, és a poliéder laphálója

Ezután a négyzetlap másik két csúcsa és a poliéder összes többi csúcsa is könnyen megszerkeszthető. A szerkesztés végén lesz két él (és a velük szimmetrikus helyzetben levő élek), melyek nem 1 hosszúságúak. A paraméter beállításával ezek közül az egyik él tetszőlegesen közel kerülhet az 1 hosszúsághoz. A modell szerkesztését módosítva úgy, hogy a paramétert úgy állítsuk be, hogy mindkét változó élhossz, 1-hez minél közelebbi legyen, minden él egymáshoz közeli hosszúságúnak adódik már (hibahatárnak  $\varepsilon = 0,012$  jön ki).

**7. példa.** (O.16, ld. 9. ábra) 1-paraméteres poliédermodellt készítünk. Két  $180^\circ$ -os forgásszimmetriája van ennek a poliédernek: az egyik szimmetriatengely két olyan poliédercsúcsot köt össze, melyekre két-két négyzet illeszkedik; a másik szimmetriatengely két olyan élfelező pontot köt össze, melyek két-két olyan háromszöglapra illeszkednek, amelyek összes csúcsa valamely négyzetlap csúcsa is egyben. Először két, közös csúcsú, 1 oldalhosszú négyzetlapot és két, közöttük elhelyezkedő szabályos háromszöglapot szerkesztünk meg úgy, hogy a négy lap közös csúcsából kiinduló élek végpontjai egy téglalapot határozzanak meg. Majd közülük az egyes négyzetlapokhoz 1-1 olyan szabályos háromszöglapot szerkesztünk, amelynek közös éle van valamelyik négyzetlappal, és egy ilyen háromszöglapnak a hozzá közös éllel csatlakozó négyszöglappal bezárt szögét paraméternek vesszük fel (mindkét szög ugyanakkora a  $180^\circ$ -os forgásszimmetria miatt).



9. ábra. A 7. példa elemi majdnem-Johnson-poliédere két nézetből, és a poliéder laphálója

A két, utoljára szerkesztett háromszöglapnak azokhoz a csúcsaihoz, melyek nincsenek rajta négyzetlappal közös élén, megszerkesztjük a forgástengelyen levő olyan poliédercsúcsot, amely tőlük  $\sqrt{2}$  távolságra van (egy-egy újabb egység oldalhosszú négyzetlap átellenes csúcsában), majd az erre az élre illeszkedő két négyzetlapot és a közöttük elhelyezkedő háromszöglapokat (ez utóbbiak nem feltétlenül szabályos háromszögek) úgy, hogy a

poliédercsúcsból kiinduló élek végpontjai téglalapot határozzanak meg. A maradék 4 csúcs megszerkeszthető olyan egységgömb-hármasok metszéspontjaként, melyek középpontja alkalmasan választott, már megszerkesztett poliédercsúcs.

A szerkesztés végén lesz három él (és a velük szimmetrikus helyzetben levő élek), melyek nem 1 hosszúságúak. A paraméter beállításával ezek közül az egyik él tetszőlegesen közel kerülhet az 1 hosszúsághoz. A modell szerkesztését módosítva úgy, hogy a megszerkesztett egységnyi élhosszak helyett csak ahhoz közeli élhosszakat szerkesztünk meg, ügyes élhosszbeállítások után, minden él egymáshoz közeli hosszúságúnak adódik már (hibahatárnak  $\varepsilon = 0,062$  jön ki).

## 7. Összefoglaló

Amint az az 5. fejezetben szerepel, véges sok elemi majdnem-Johnson-poliéder létezik (ekvivalensnek tekintve a megegyező laphálójú poliédereket), ha a  $(\{\delta_k\}_{k \in I_p})$  abszolút szögeltérés-hibahatárokat megfelelően kicsinynek választjuk. Érdekes lenne az összes ilyen poliéder meghatározása.

Felvetődhet, hogy kiszámítsuk a legjobb  $(\varepsilon, \{\delta_k\}_{k \in I_p})$ -hibakorlátokat az egyes elemi majdnem-Johnson-poliéderek esetén, legalábbis néhány egyszerűbb esetben. Talán könnyebben megoldható ez a probléma azon konvex poliéderekre megszorítkozva, amelyeknél a nem szabályos sokszöglapok csak a háromszöglapok közül kerülnek ki, mert ekkor a szögeltérésekkel nem kell foglalkoznunk, csak az élarányokkal.

## Köszönetnyilvánítás.

Szeretnénk megköszönni Németh Lászlónak és Szalay Lászlónak, hogy erről a témakörrel előadhatott az első szerző Sopronban a Matematika Oktatása és Kutatása Szeminárium (MOKUS) 2022-es programjában.

## Irodalomjegyzék

- [1] **Grünbaum, B., Johnson, N. W.**, The faces of a regular-faced polyhedron, J. of London Math. Soc. **40** (1965) 577-586. doi:10.1112/jlms/s1-40.1.577
- [2] **Johnson, N. W.**, Convex Solids with Regular Faces, Canadian Journal of Mathematics. **18** (1966) 169–200. doi:10.4153/cjm-1966-021-8
- [3] Johnson Solid Near Misses, Orchidpalms, <https://www.orchidpalms.com/polyhedra/acroheda/nearmiss/jsmn.htm>
- [4] Near-miss Johnson solid, Polytope Wiki – Miraheze, [https://polytope.miraheze.org/wiki/List\\_of\\_near-miss\\_Johnson\\_solids](https://polytope.miraheze.org/wiki/List_of_near-miss_Johnson_solids)
- [5] Near-miss Johnson solid, Wikipedia, [https://en.wikipedia.org/wiki/Near-miss\\_Johnson\\_solid](https://en.wikipedia.org/wiki/Near-miss_Johnson_solid)
- [6] **Talata, I.**, Nemszerkeszthető Johnson-poliéderek számítógépes modellezése dinamikus geometriai módszerekkel, Dimenziók VIII (2020) 15-24. doi:10.20312/dim.2020.02
- [7] **Talata, I.**, Majdnem szabályos sokszöglapok által határolt konvex poliéderek számítógépes modellezése, Dimenziók IX (2021) 3-12. doi:10.20312/dim.2021.01
- [8] **Zalgaller, V. A.**, "Convex Polyhedra with Regular Faces". Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova (in Russian). **2** (1967), 1–221.

## A Cayley-Dickson-féle mátrixok algebrájáról

**Péntek Kálmán**  
ELTE SEK BDPK  
Matematikai Tanszék  
pentek.kalman@sek.elte.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Minden véges dimenziós asszociatív algebra a teljes mátrixalgebra egy alkalmas részalgebrájával reprezentálható. Ismertek azonban olyan véges dimenziós algebrák, amelyek nem asszociatívak, így nem írhatók le klasszikus mátrixok segítségével. Max August Zorn 1931-ban értelmezte a vektor-mátrixok struktúráját, amelyek a klasszikus mátrixok egy természetes általánosítását alkotják. Zorn a split oktoniók alternatív algebráját eredményesen írta le ezen vektor-mátrixok segítségével.

Mi egy tetszőleges, nem kettő karakterisztikájú  $F$  test fölé építünk vektor-mátrix struktúrát, s megvizsgáljuk a legfontosabb algebrai tulajdonságait. Ha az  $F^3$  vektortérben alkalmas skaláris és vektoriális szorzat van értelmezve, akkor a felépített vektor-mátrixok struktúrája egy alternatív algebra lesz akkor és csakis akkor, ha az  $F^3$  vektortérben érvényes a Grassmann-azonosság. E vektor-mátrixok struktúrája viszont egy kompozíciós algebrát alkot akkor és csakis akkor, ha az  $F^3$  vektortérben a Lagrange-azonosság teljesül.

ABSTRACT. Every finite dimensional associative algebra can be represented by a suitable subalgebra of the complete matrix algebra. However, there are known finite dimensional algebras which are non-associative, and so cannot be described by using classical matrices. In 1931 Max August Zorn defined the structure of vector-matrices, which form a natural generalization of classical matrices. Zorn showed that the alternative algebra of split octonions could be represented by these vector-matrices.

We build up a vector-matrix structure over an arbitrary  $F$  field of characteristic not equal to two and analyse its most important algebraic properties. If a suitable scalar and cross product is defined in the  $F^3$  vector space, then the constructed vector-matrix structure will be an alternative algebra if and only if the Grassmann identity applies to the  $F^3$  vector space. The structure of these vector-matrices will form a composition algebra if and only if Lagrange's identity applies to the  $F^3$  vector space.

### Előszó

A számok fogalmának általánosítása természetes útján haladva jó ideig asszociatív rendszerekkel találkozunk. Ilyenek a valós, a komplex, sőt még a klasszikus kvaterniók algebrája is. Ezek a struktúrák mind reprezentálhatók megfelelő teljes mátrixalgebra alkalmas részalgebráival.

Már a XIX. század közepén kiderült, hogy léteznek olyan érdekes algebrai rendszerek, amelyek viszont nem asszociatívak, így a klasszikus mátrixok segítségével történő reprezentálás nem jöhet szóba. Közülük elsőként a zérusosztókat is tartalmazó split oktoniók algebráját sikerült Max August Zorn német matematikusnak reprezentálnia a klasszikus

mátrixok egy érdekes általánosításának segítségével (ZORN, 1931, 1933). Ezek voltak a vektor-mátrixok, amelyek megkonstruálása során Zorn az euklideszi vektortér klasszikus skaláris szorzatára és vektorális szorzatára támaszkodott.

Később a vektor-mátrixokat eredményesen használták más algebrai struktúrák kutatása során is (PAIGE, 1956), (WELLS, 2010). A mértékadó szakirodalom fontos példaként tárgyalja a Zorn-féle vektor-mátrixok struktúráját (EBBINGHAUS et al, 1991), (MCCRIMMON, 2004), (ROSENFELD, 1997), (BREMNER et al, 2013). A klasszikus euklideszi skaláris szorzástól és vektoriális szorzástól eltérő műveleteket igénylő vektor-mátrix struktúrák bukkantak fel (PÉNTÉK, 2020a, 2020b, 2021) dolgozataiban. Ebben a dolgozatban ezen érdekes Zorn-féle vektor-mátrixok struktúráját vizsgáljuk meg

## 1. Bevezetés

Legyen a továbbiakban  $F$  egy tetszőleges,  $\neq 2$  karakterisztikájú test a 0 összeadási és az 1 szorzási neutrális elemmel. Jelölje  $F^3$  az  $F$  test elemeiből képzett rendezett elemhármasok halmazát. Közismert, hogy az  $F$  elemeivel, mint skalárokkal komponensenként történő szorzással, továbbá a komponensenként értelmezett összeadással  $F^3$  egy 3-dimenziós vektorteret alkot az  $F$  test felett. Ha tehát  $r \in F, X = (x_1, x_2, x_3)$  és  $Y = (y_1, y_2, y_3) \in F^3$ , akkor

- (1) skalárral való szorzás:  $r \cdot (x_1, x_2, x_3) := (r \cdot x_1, r \cdot x_2, r \cdot x_3)$ ,
- (2) összeadás:  $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ .

Képezzük ezután az  $F$ , illetve az  $F^3$  elemeiből a

$$(3) \text{Zorn}(F) := \left\{ \begin{pmatrix} a & U \\ V & b \end{pmatrix} : a, b \in F, U, V \in F^3 \right\}$$

alakú hipermátrixok halmazát, amelyet a továbbiakban *Zorn-féle vektor-mátrixok* halmazának, vagy más elnevezéssel *Cayley-Dickson-féle mátrixok* halmazának nevezünk.

Az  $F$  test és az  $F^3$  vektortér műveleteire támaszkodva műveleteket értelmezhetünk a  $\text{Zorn}(F)$  halmazban a következő módon:

- (4) skalárral való szorzás: ha  $r \in F, \begin{pmatrix} a & U \\ V & b \end{pmatrix} \in \text{Zorn}(F)$ , akkor legyen

$$r \cdot \begin{pmatrix} a & U \\ V & b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cdot a & r \cdot U \\ r \cdot V & r \cdot b \end{pmatrix};$$

- (5) összeadás: ha  $\begin{pmatrix} a & U \\ V & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & W \\ Z & d \end{pmatrix} \in \text{Zorn}(F)$ , akkor legyen

$$\begin{pmatrix} a & U \\ V & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & W \\ Z & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a + c & U + W \\ V + Z & b + d \end{pmatrix}.$$

Egyszerűen, bár hosszadalmas számolással beláthatjuk, hogy érvényes a következő

**1. Tétel.** A  $\text{Zorn}(F)$  halmaz a (4) és (5) műveletekkel egy 8-dimenziós vektorteret alkot az  $F$  test felett.

Legyen ezután az  $F^3$  olyan vektortér, amelyre megköveteljük még a következők teljesülését is:

- (a) Létezik egy *skaláris szorzásnak* nevezett  $\circ : F^3 \times F^3 \rightarrow F$  szimmetrikus, bilineáris leképezés az  $F^3$  vektortérben.

- (b) Létezik egy *vektoriális szorzásnak* nevezett  $\times : F^3 \times F^3 \rightarrow F^3$  antiszimmetrikus, bilineáris leképezés az  $F^3$  vektortérben.
- (c) A vektoriális szorzat eredménye legyen ortogonális a szorzat mindkét tényezőjére: bármely  $U, V \in F^3$  esetén  $(U \times V) \circ U = 0$  és  $(U \times V) \circ V = 0$  teljesül.

A skaláris és vektoriális szorzat bilineáris tulajdonságából könnyen következik, hogy mindkét művelet balról és jobbról is disztributív a vektorok összeadására nézve. Így tetszőleges  $U \in F^3$  esetén könnyen belátható az alábbi tulajdonságok teljesülése:

$$(6) \quad U \circ 0 = 0 \circ U = 0 \text{ és } U \times 0 = 0 \times U = 0$$

itt  $0 = (0,0,0)$  az  $F^3$  vektortér zérusvektora.

A vektoriális szorzás antiszimmetrikus tulajdonságából pedig következik kihasználva azt, hogy az  $F$  test karakterisztikája  $\neq 2$ , tetszőleges  $U \in F^3$  esetén teljesül:

$$(7) \quad U \times U = 0.$$

Ezután már algebrává fejleszthetjük a  $Zorn(F)$  vektorteret a következő szorzási művelet bevezetésével: tetszőleges  $\begin{pmatrix} a & U \\ V & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & W \\ Z & d \end{pmatrix} \in Zorn(F)$  esetén

$$(8) \quad \begin{pmatrix} a & U \\ V & b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c & W \\ Z & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a \cdot c + U \circ Z & a \cdot W + d \cdot U - V \times Z \\ c \cdot V + b \cdot Z + U \times W & b \cdot d + V \circ W \end{pmatrix}.$$

Nem nehéz, bár hosszadalmas számolással igazolható a következő

**2. Tétel.** A  $Zorn(F)$  halmaz a (4), (5) és (8) műveletekkel egy 8 dimenziós, neutrális elemes algebrát alkot az  $F$  test felett az  $\mathbb{E} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  neutrális elemmel. Itt  $1 \in F$  a szorzás neutrális eleme és  $0 \in F^3$  a zérusvektor.

Az így nyert struktúra neve: *Cayley-Dickson-féle mátrixok algebrája*, vagy más elnevezéssel a *Zorn-féle vektor-mátrixok algebrája*

## 2. A vektor-mátrixok algebrájáról

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk a Zorn-féle vektor-mátrixok algebrájának néhány fontos típusát.

**3. Tétel.** A Zorn-féle vektor-mátrixok algebrája egy kvadratikus algebra.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy tetszőleges  $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} a & U \\ V & b \end{pmatrix} \in Zorn(F)$  esetén léteznek olyan  $\lambda, \mu \in F$  elemek, hogy  $\mathbb{X}^2 = \lambda \cdot \mathbb{E} + \mu \cdot \mathbb{X}$  előállítás adható meg. Ekkor  $Zorn(F)$  műveleteinek felhasználásával

$$\mathbb{X}^2 = \begin{pmatrix} a \cdot a + U \circ V & (a + b) \cdot U \\ (a + b) \cdot V & b \cdot b + U \circ V \end{pmatrix}, \text{ továbbá } \lambda \cdot \mathbb{E} + \mu \cdot \mathbb{X} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \cdot a & \mu \cdot U \\ \mu \cdot V & \lambda + \mu \cdot b \end{pmatrix}$$

adódik. E két vektor-mátrix egybevetéséből  $\mu = a + b$  és  $\lambda = U \circ V - a \cdot b$  következik. Mivel ezen  $\mu, \lambda \in F$  elempár ki is elégíti kívánt előállítást, így a  $Zorn(F)$  valóban egy kvadratikus algebra.  $\square$

**Definíció.** Az  $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} a & U \\ V & b \end{pmatrix} \in Zorn(F)$  vektor-mátrix determinánsán a  $det(\mathbb{X}) := a \cdot b - U \circ V \in F$  elemet, nyomán pedig a  $t(\mathbb{X}) := a + b \in F$  értéket értjük.

**Megjegyzés.** A 3. Tételben szereplő  $\mathbb{X} \in Zorn(F)$  vektor-mátrixra teljesül a  $det(\mathbb{X}) = -\lambda$  és a  $t(\mathbb{X}) = \mu$  összefüggés. Ekkor a  $Zorn(F)$  algebra kvadratikus voltát kifejező összefüggés átrendezés után az

$$(9) \quad \mathbb{X}^2 - t(\mathbb{X}) \cdot \mathbb{X} + det(\mathbb{X}) \cdot \mathbb{E} = \mathbb{O}$$

alakot ölti, ahol  $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Zorn(F)$  a zérus vektor-mátrix.

Ezután azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy mi lesz annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a  $Zorn(F)$  vektor-mátrixok stuktúrája egy alternatív algebra legyen.

Ha  $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} a_1 & U_1 \\ V_1 & b_1 \end{pmatrix}, \mathbb{Y} = \begin{pmatrix} a_2 & U_2 \\ V_2 & b_2 \end{pmatrix} \in Zorn(F)$  két tetszőleges vektor-mátrix, akkor ezen struktúra pontosan akkor lesz egy alternatív algebra, ha teljesülnek az alábbi korlátozott „asszociatív” tulajdonságok:

$$(10) \quad (\mathbb{X} * \mathbb{X}) * \mathbb{Y} = \mathbb{X} * (\mathbb{X} * \mathbb{Y}) \text{ és } (\mathbb{X} * \mathbb{Y}) * \mathbb{Y} = \mathbb{X} * (\mathbb{Y} * \mathbb{Y}).$$

Tekintsük az első összefüggést és számítsuk ki annak mindkét oldalát, majd komponensről komponensre haladva vessük össze a két eredményül kapott vektor-mátrixot. Ha a bal felső komponenseket hasonlítjuk össze, akkor a kijelölt műveletek elvégzése és az azonos tagok mindkét oldalról történő elhagyása után a (6) és (7) felhasználásával adódik e komponensek egyenlősége. Teljesen hasonlóan kapható a jobb alsó komponensek egyenlősége is.

Ha a jobb felső komponenseket hasonlítjuk össze, akkor itt is a kijelölt műveletek elvégzése és az azonos tagok mindkét oldalról történő elhagyása után a (7) felhasználásával a következő összefüggés marad:

$$(11) \quad (U_1 \circ V_1) \cdot U_2 = (V_1 \circ U_2) \cdot U_1 - V_1 \times (U_1 \times U_2).$$

Itt a jobb oldali első tagnál felhasználva a skaláris szorzat (a) szerinti kommutatív voltát, továbbá a jobb oldali második tagnál a vektoriális szorzat (b) szerinti anti-kommutatív szabályát a (11) átrendezés után az alábbi formát ölti:

$$(12) \quad (U_1 \circ V_1) \cdot U_2 - (U_2 \circ V_1) \cdot U_1 = (U_1 \times U_2) \times V_1,$$

amely pedig a Grassmann-azonosság – más elnevezéssel – kifejtési tétel.

Teljesen hasonlóan adódik bal alsó komponensek összehasonlításából is a Grassmann-azonosság érvényesülése.

A bemutatott úthoz teljesen hasonlóan tárgyalható analóg azonos eredménnyel ekvivalens átalakításokon keresztül a (10) második összefüggése is. Az elmondottak alapján igaz a következő

**4. Tétel.** A  $Zorn(F)$  vektor-mátrixok struktúrája egy alternatív algebrát alkot akkor és csak akkor, ha az (a) – (c) feltételeknek is eleget tevő  $F^3$  vektortérben érvényes a (12) Grassmann-féle azonosság.

Ezután azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a  $Zorn(F)$  vektor-mátrixok struktúrája egy kompozíciós algebra legyen.

Ha  $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} a_1 & U_1 \\ V_1 & b_1 \end{pmatrix}, \mathbb{Y} = \begin{pmatrix} a_2 & U_2 \\ V_2 & b_2 \end{pmatrix} \in Zorn(F)$  két tetszőleges vektor-mátrix, akkor ezen struktúra pontosan akkor lesz egy kompozíciós algebra, ha  $\neq 2$  karakterisztikájú test feletti



olyan neutrális elemes algebra, amelyben értelmezve van egy multiplikatív norma (nem elfajuló kvadratikus forma az algebrában, mint vektortérben). Ez a norma a  $Zorn(F)$  algebrában a vektor-mátrix determinánsa, amelynek multiplikatív voltát fejezi ki a

$$(13) \quad \det(X * Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$$

összefüggés, amely lényegében a determinánsok szorzási tételének teljesülését jelenti.

Tekintsük tehát a (13) összefüggést és számítsuk annak mindkét oldalán található kifejezést, majd hasonlítsuk össze a két oldalt. A (c) alkalmazásával és mindkét oldalról a megegyező tagok elhagyásával a (13) egyenlősége a következő összefüggésre redukálható:

$$(14) \quad (U_1 \circ V_2) \cdot (V_1 \circ U_2) + (V_1 \times V_2) \circ (U_1 \times U_2) = (U_1 \circ V_1) \cdot (U_2 \circ V_2).$$

Felhasználva a skaláris szorzat kommutatív szabályát a (14) egyszerű átrendezésével ekvivalens átalakításokon keresztül közvetlenül adódik a közismert Lagrange-azonosság:

$$(15) \quad (U_1 \times U_2) \circ (V_1 \times V_2) = \begin{vmatrix} U_1 \circ V_1 & U_1 \circ V_2 \\ U_2 \circ V_1 & U_2 \circ V_2 \end{vmatrix}.$$

A fentiek alapján igaz a következő

**5. Tétel.** A  $Zorn(F)$  vektor-mátrixok struktúrája egy kompozíciós algebrát alkot akkor és csak akkor, ha az (a) – (c) feltételeknek is eleget tevő  $F^3$  vektortérben érvényes a (15) Lagrange-féle azonosság.

**Megjegyzés.** Speciálisan, ha  $\mathcal{R}$  jelöli a valós számok testét, akkor  $Zorn(\mathcal{R})$  a klasszikus euklideszi skaláris szorzattal és vektoriális szorzattal egy 8-dimenziós split (felhasadó – zérusosztókat is tartalmazó) kompozíciós algebrát alkot az  $\mathcal{R}$  test felett.

## Irodalomjegyzék

- [1] **Bremner, M.R, Muakami, L. I., and Shestakov, I. P.,** (2013): Nonassociative Algebras. In: Hogben, L. (ed.): Handbook of Linear Algebra. CRC Press.
- [2] **Ebbinghause, H.D. Hermes, H. Hirzebruch, F. Koecher, M. Mainzer, M. Mainzer, K. Neukirch, J. Prestel, A. Remmert, R.** (1991): Numbers. Springer.
- [3] **McCrimmon, K.** (2004): Taste of Jordan Algebras, Springer-Verlag, New York.
- [4] **Paige, L. J.,** (1956): A class of simple Moufang loops. Proc. Amer. Math. Soc. 7. 471-482.
- [5] **Péntek, K.,** (2020a): Az általánosított oktonióalgebrákról. Savaria Természettudományi és Sporttudományi Közlemények 18. Szombathely, 7-20.
- [6] **Péntek, K.,** (2020b): Az általánosított hiperbolikus kvaternióalgebrákról. Dimenziók. Matematikai Közlemények. Sopron, VIII. 25-33. doi:10.20312/dim.2020.03
- [7] **Péntek, K.,** (2021): Az általánosított hiperbolikus oktonióalgebrákról. Dimenziók, Matematikai Közlemények, Sopron, IX. 13-22. doi:10.20312/dim.2021.02
- [8] **Rosenfeld, B.** (1997): Geometry of Lie groups. Kluwer Academic Publisher, Netherlands. doi:10.1007/978-1-4757-5325-7
- [9] **Wells, A.,** (2010): Moufang loops arising from Zorn vector matrix algebras. Comment. Math. Univ. Carolin 51 (2), 371-388.
- [10] **Zorn, M. A.,** (1931): Theorie der alternativen Ringe. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. Springer, Berlin/Heidelberg. 123-147.
- [11] **Zorn, M. A.,** (1933): Alternativkörper und quadratische systeme. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. Springer Berlin/Heidelberg. 395-402.



## Covid variánsok időbeli változásának vizsgálata

Csanády Viktória

Soproni Egyetem

Informatikai és Matematikai Intézet

csanady.viktoria@uni-sopron.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** A különböző covid variánsok gyakoriságának időbeli változása, a változás tendenciája matematikai modellek alkalmazásával jellemezhető. Az alábbiakban az egyes covid variánsok modellezése kerül bemutatásra Gauss függvények és telítési függvények felhasználásával. A vizsgálat során az egyes variánsok adatsorai függetlenül a többi variáns adataitól kerülnek tárgyalásra.

**ABSTRACT.** The change in the frequency of different covid variants over time on the tendency of the change can be characterized by applying mathematical models. Below, a modelling of each covid variant is presented using Gaussian functions and saturation functions. During the examination, the data sets of each variant are compared to the data of all other variants.

### 1. Bevezetés

Ismert tény, hogy a COVID-19 először 2019 novemberében a kelet-kínai Vuhan városában (Hupei-tartomány) jelent meg, majd ezt követően számos variánsa nehezítette a helyzetet az idő során. Az alábbiakban az egyes variánsok időfüggő folyamata a vizsgálat tárgya, csupán azonban matematikai oldalról vizsgálva, megfelelő modellek bevezetése révén. Az adatokhoz történő hozzájutás meglehetősen könnyűnek bizonyul a hétköznapi ember számára is, megbízhatóságuk azonban némi szórást feltételez. Az egyes variánsok vonatkozásában pedig a felelhető adatbázis már kevésbé könnyen elérhető. Ugyancsak problémát okoz a hétfégi adatok kumulációja, melyet hazánkban általában késleltetve bocsátottak nyilvánosságra. A vizsgált adathalmaz így a szomszédos Ausztria adatait tartalmazza 2021. 1. hetétől 2022. 28. hetével bezárólag, összesítve és variánsenként.

Az alábbiakban a variánsok előfordulási gyakoriságai kerülnek elemzésre, feltételezve az effajta folyamatok jellemző lefutását, így az egyes adatsorok haranggörbe jellegét, illetve a variánsenként kumulált adathalmazok telítődési jellegét. A két alkalmazott függvény [1] a transzformált Gauss görbe [4] valamint a telítődési függvények közül a transzformált Awrami függvény [3]. Az illesztések pontosságának ellenőrzésére a mindenkori korrelációs együttható, (nem lineáris korrelációs együttható) értékének ismerete ad lehetőséget, figyelembe véve, hogy biológiai folyamatok esetén a vizsgált érték alacsonyabb lehet, nem várható el olyan magas korreláció, mint pontosan mérhető fizikai jellemzőknél.

A cél azonban az, hogy a vizsgálat igazolja azt a tényt, hogy az egyes variánsok gyakoriságának időbeli változása eleget tesz a feltételezett tendenciáknak, így a gyakoriságok a haranggörbe jellegnek, illetve a kumulált halmazok a telítési jellegnek.

A felhasznált modellek becslést adnak az adatsorok lokális maximum helyeire és értékeire, a folyamat gyakorisági változási sebességének azon helyére és értékére, amelyben a folyamat tendenciája megtorpan, konvex-konkáv illetve konkáv-konvex irányban. Továbbá a telítési függvény lehetőséget kínál aszimptotikus jellegéből adódóan, hogy adott hibahatár esetén becslést adjon a folyamat lecsengésére.

Az illesztés során alkalmazott software a STATISTICA, a modellek paramétereinek számíttatása során a kezdőértékek jól becsülhetők.

A vizsgálat tárgya:

- ausztriai covid adatok 2021. 1. hét – 2022. 28. hét [2]. Heti lebontás vírus variánsokra illetve összesített adatszámra.

A vizsgált adathalmaz és az alkalmazott modellek:

Az adathalmaz esetében eltekintünk a teljes részletességtől az adatok fellelhetők a fentiekben megadott cím alatt.

Naptári hetek	B.1.1.7 (Alpha)	B.1.351 (Beta)	B.1 (Gamma)	B.1.617.2 (Delta)	BA.1 (Omikron)	BA.2/BA.3 (Omikron)	BA.4/BA.5 (Omikron)	B.1.1.529 nem differenciált (Omikron)	Össz esetek száma
2021-W01	108	7	0	0	0	0	0	0	115
2021-W02	352	59	0	0	0	0	0	0	411
2021-W03	456	137	0	0	0	0	0	0	593
2021-W04	1052	179	0	0	0	0	0	0	1231
2021-W05	1978	123	0	1	0	0	0	0	2102
2021-W06	1980	110	0	0	0	0	0	0	2090
2021-W07	3659	88	0	0	0	0	0	0	3747
2021-W08	7690	147	0	0	1	1	0	0	7839
2021-W09	9601	97	0	0	0	0	0	0	9698
2021-W10	11411	103	1	0	0	0	0	0	11515
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2022-W22	0	0	0	3	31	5053	1858	41	6986
2022-W23	1	0	0	2	42	5692	3991	69	9797
2022-W24	0	0	0	0	55	7400	7542	100	15097
2022-W25	0	0	0	1	78	6633	13920	78	20710
2022-W26	0	0	0	1	73	1676	21932	51	23733
2022-W27	0	0	0	1	121	934	21173	43	22272
2022-W28	0	0	0	2	112	669	21751	82	22616

1. táblázat. Covid adatok

*Az alkalmazott regressziós modellek:*

- Transzformált Gauss függvény

- matematikai alakja:

$$y = \frac{b_3}{e^{(b_2(x-b_1))^2}} + b_0$$

- számítógépes alak:

$$var2 = b3/\exp(b2 * (var1 - 1 * b1))^2) + b0.$$

- Awrami telítési függvény

- matematikai alakja:

$$y = b_3 \left(1 - e^{-(b_2x)^{b_1}}\right) + b_0$$

- számítógépes alak:

$$var2 = b3 * \left(1 - \exp\left(-1 * ((b2 * var1)^{b1})\right)\right) + b0.$$

A modellek rövid jellemzése:

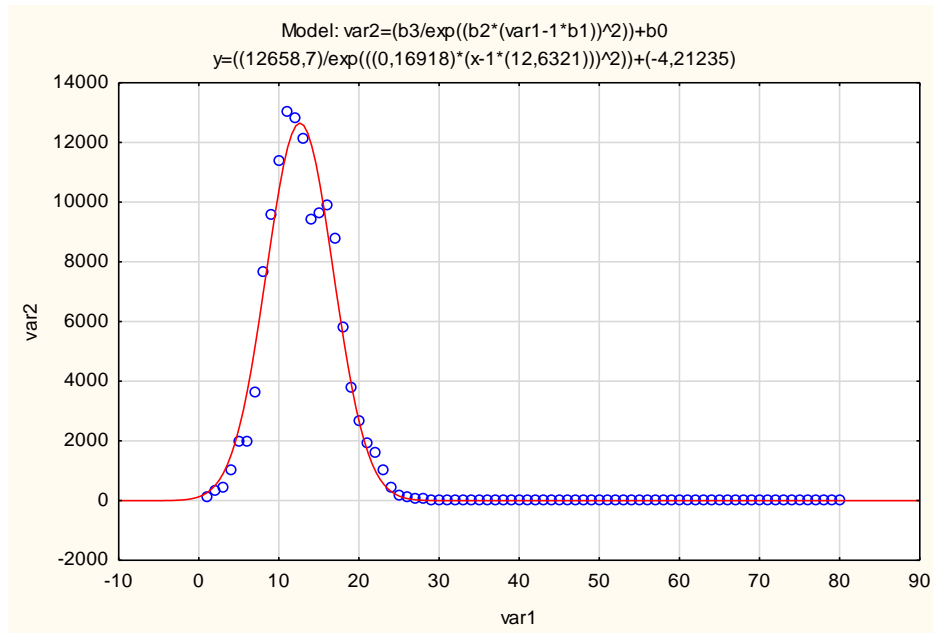
Az alkalmazott Gauss függvény négy paraméteres általános modell, ami rendelkezik a szükséges eltolási és nyújtási paraméterekkel. A paraméterek értékeiből pontosan megadhatók a modell fő matematikai jellemzői, így a lokális szélsőérték helye és értéke, továbbá számíthatók az inflexiós koordináták, melyek a folyamat változását jellemzik. A négy paraméter kezdőértékének megadása az adathalmazból becsülhető szükség esetén. Az alkalmazott Awrami telítési függvény kis változtatással három paraméteres, nem tartalmazza a függőleges eltolást a folyamat jellege miatt. A három paraméter kezdőértéke nem igényel bonyolult becslést a program által megadott kezdőérték szükség esetén módosítható az adatsor alapján. A paraméterek ismeretében jellemezhető a folyamat változása az inflexiós pont ismeretében, valamint adott hibahatárra számítható a lecsengés várható időpontja. Az illesztések során a modell változói:

- VAR1 = Naptári hetek sorszáma
- VAR2 = B.1.1.7 Alpha
- VAR3 = B.1.351 Béta
- VAR4 = B.1 Gamma
- VAR5 = B.1.617.2 Delta
- VAR6 = BA.1 Omikron
- VAR7 = BA.2/BA.3 Omikron
- VAR8 = BA.4/BA.5 Omikron
- VAR9 = B.1.1.529 nem differenciált Omikron.

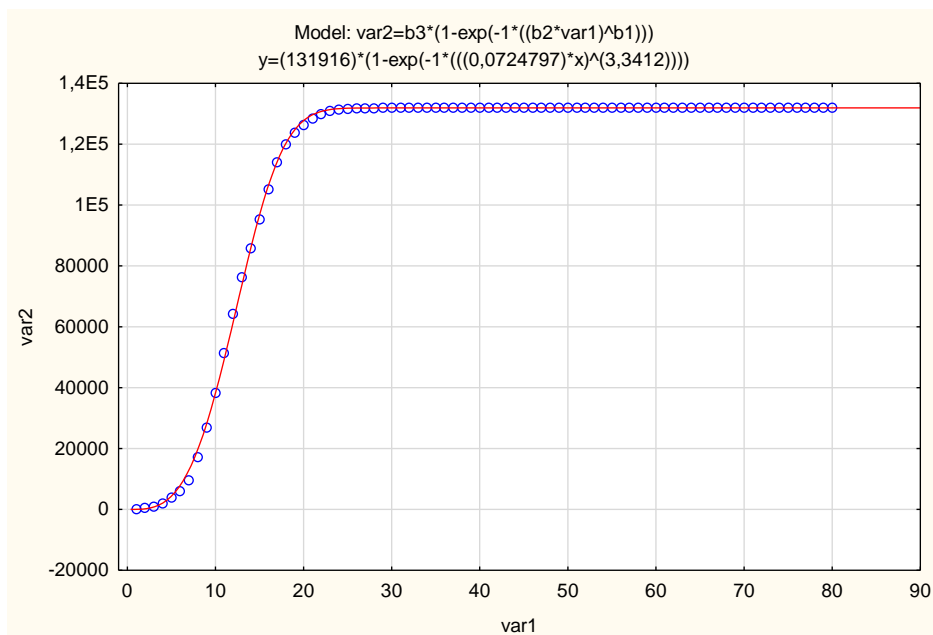
## 2. Számított eredmények, kiértékelés

### 2.1. A covid variánsok adatsorainak regressziós eredményei

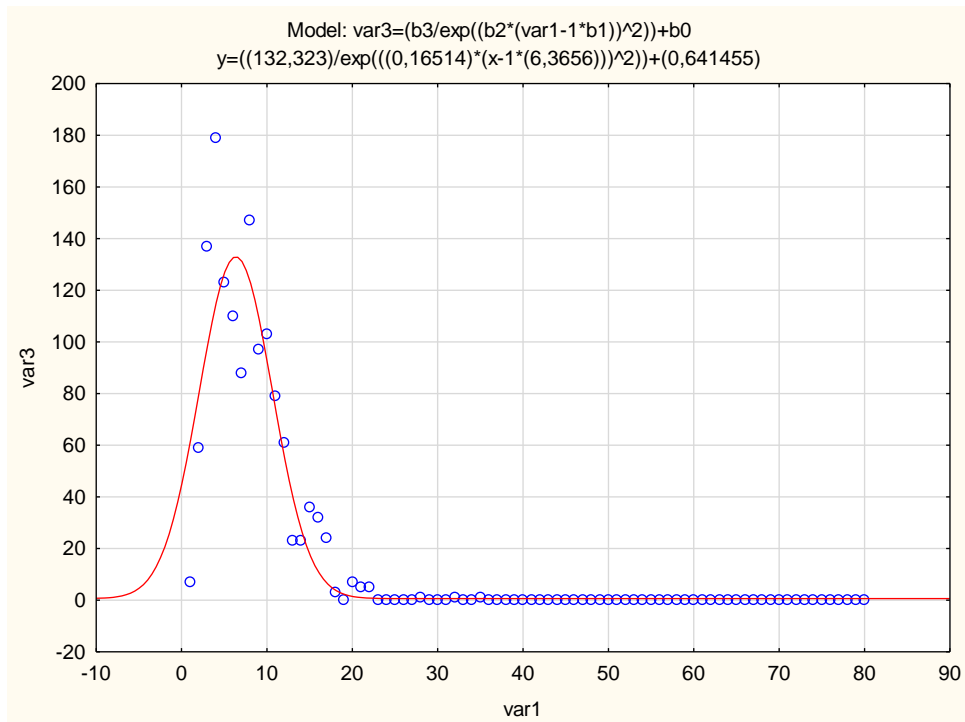
Mind a nyolc vírus variáns esetén elsőként a Gauss alkalmazás eredményeit tüntetjük fel majd közvetlen utána az Awrami eredményeit grafikus reprezentációkban.



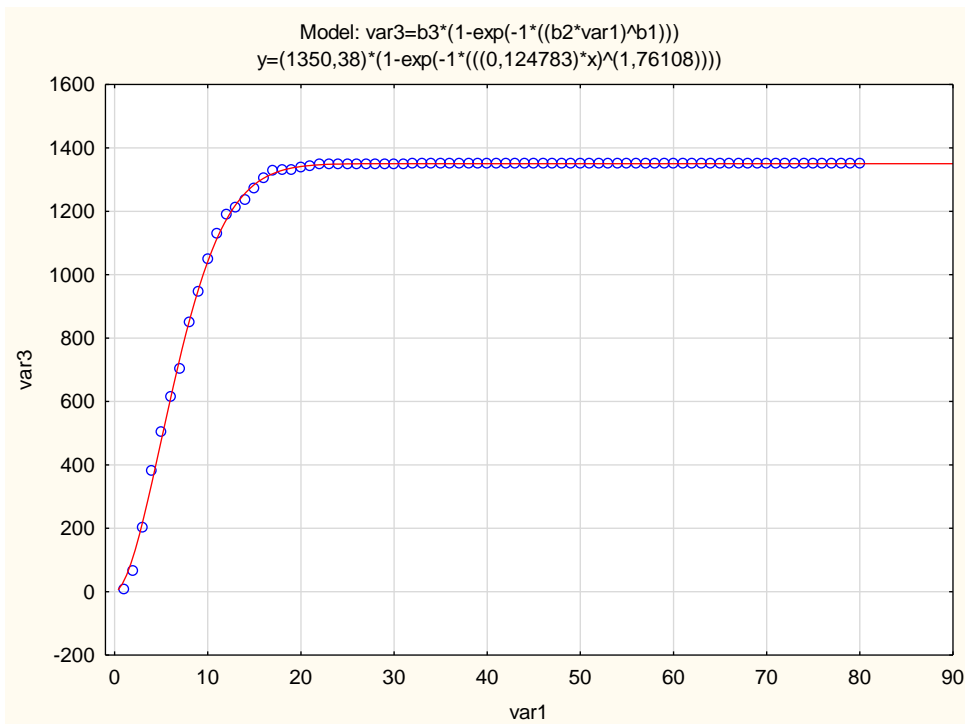
1. ábra. B.1.1.7 Alpha GAUSS



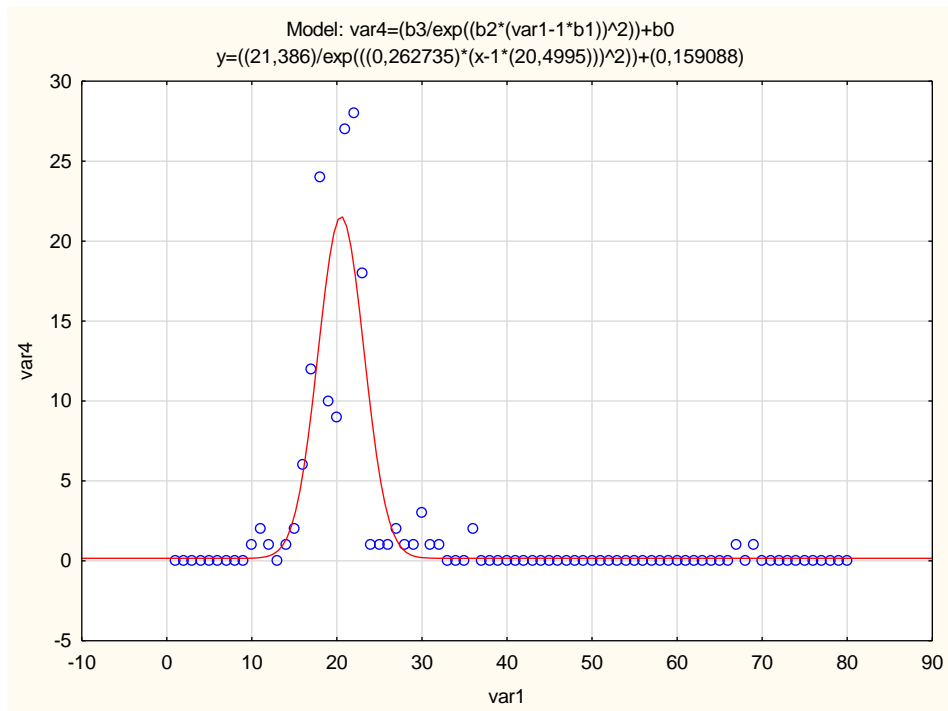
2. ábra. B.1.1.7 Alpha AWRAMI



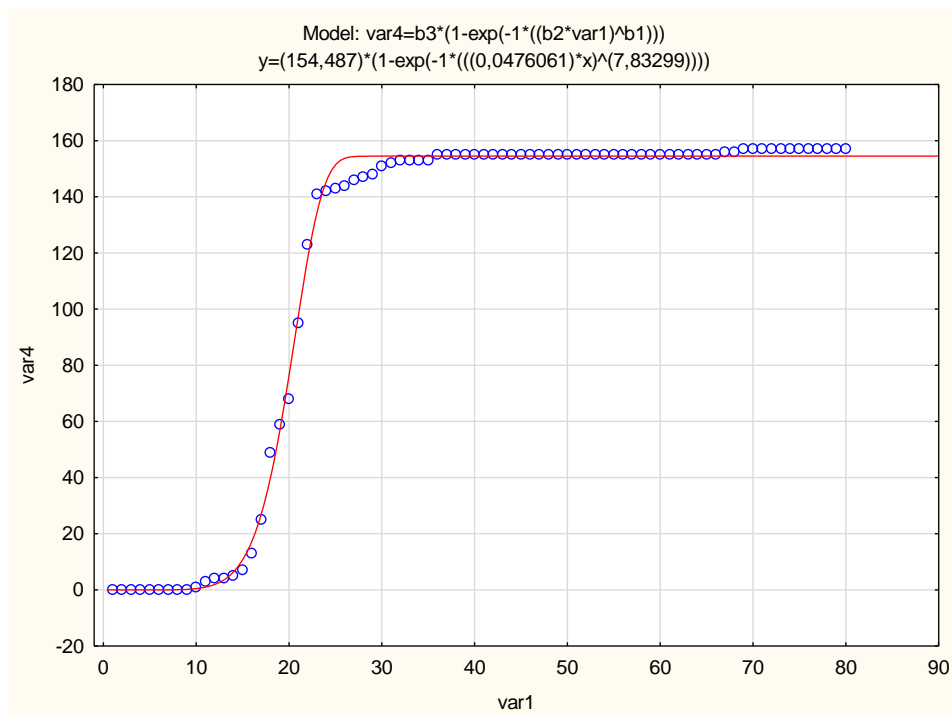
3. ábra. B.1.351 Beta GAUSS



4. ábra. B.1.351 Beta AWRAMI

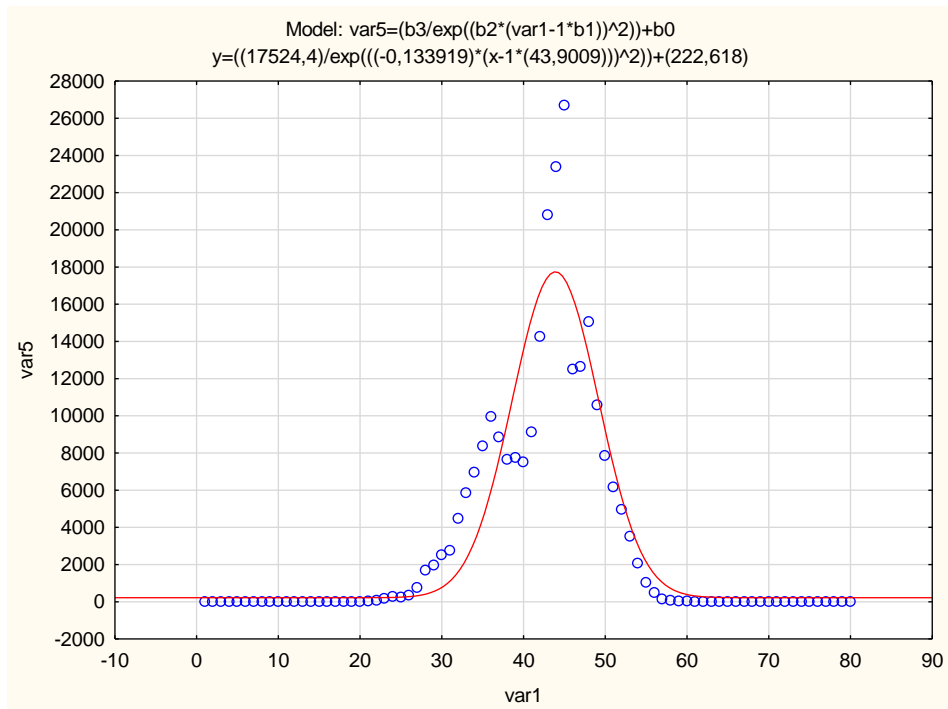


5. ábra. B.1 Gamma GAUSS

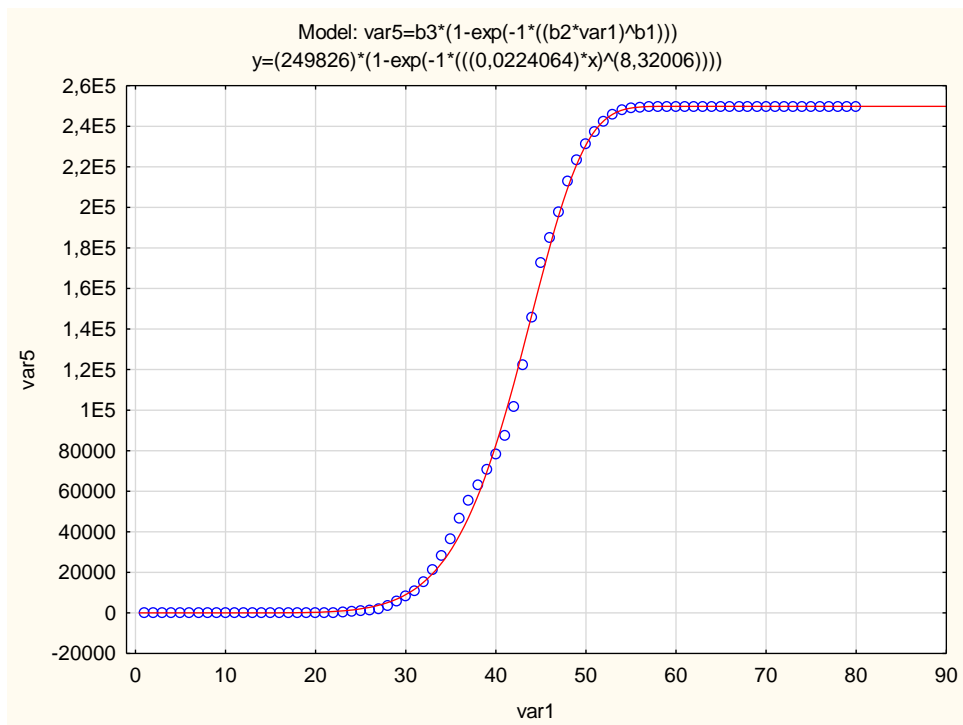


6. ábra. B.1 Gamma AWRAMI

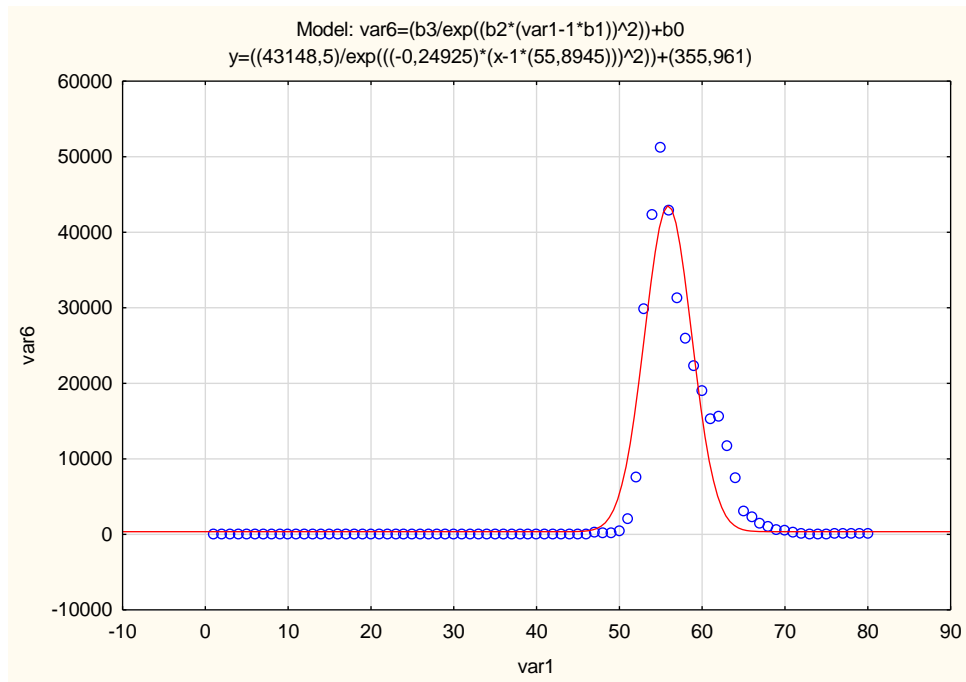




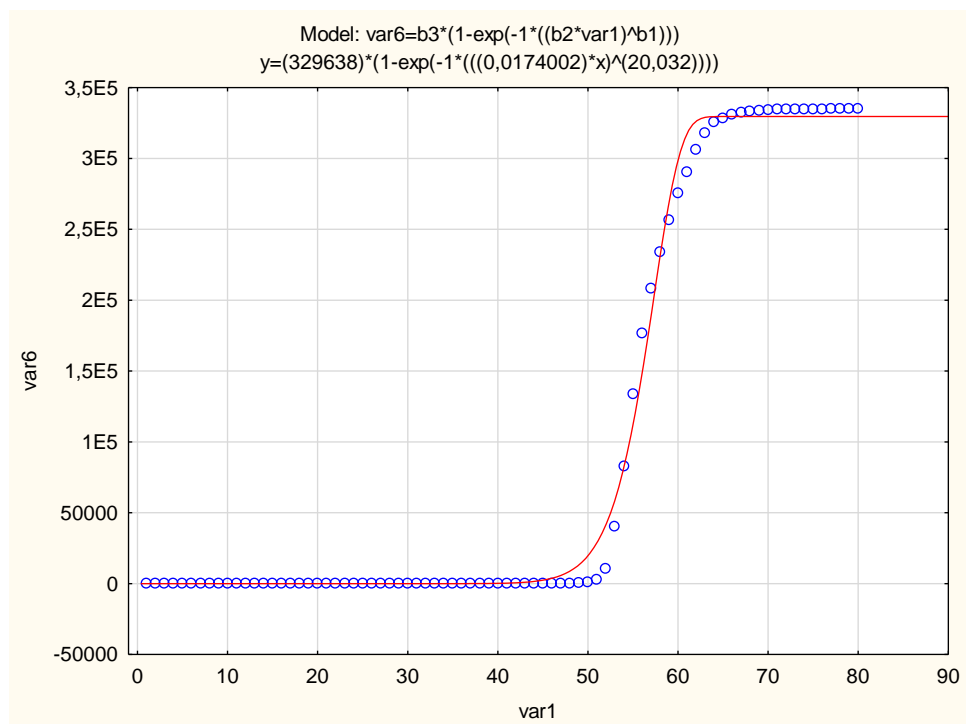
7. ábra. B.1.617.2 Delta GAUSS



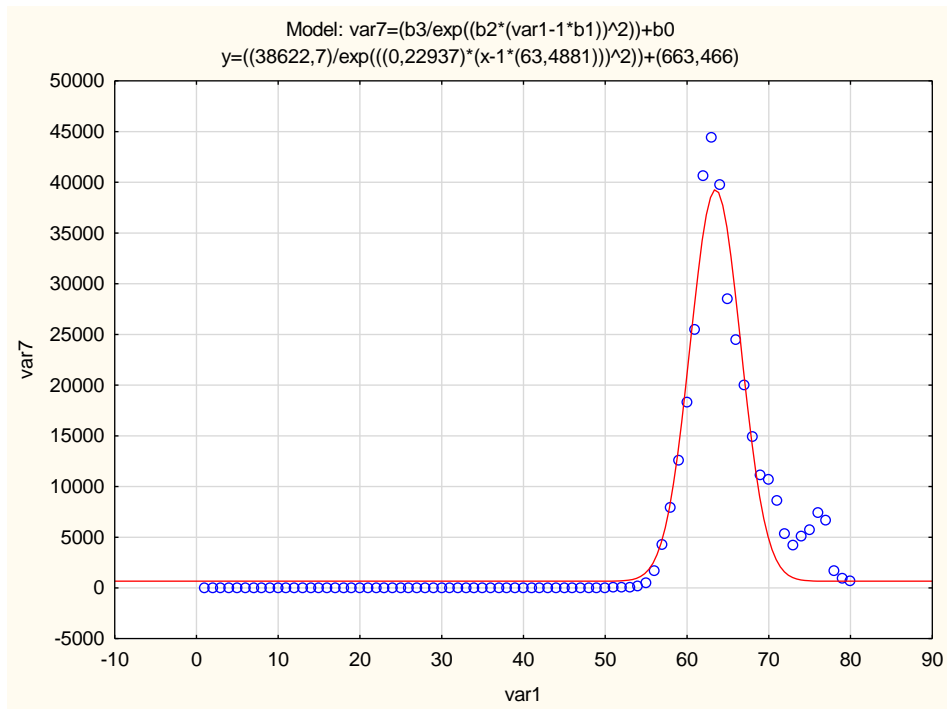
8. ábra. B.1.617.2 Delta AWRAMI



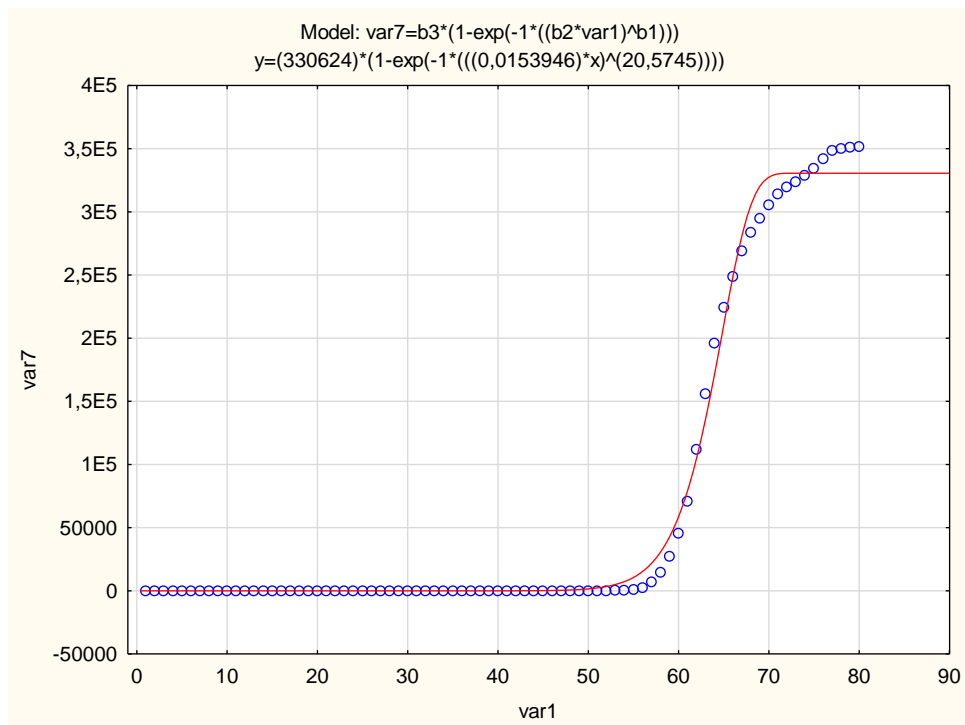
9. ábra. BA.1 Omikron GAUSS



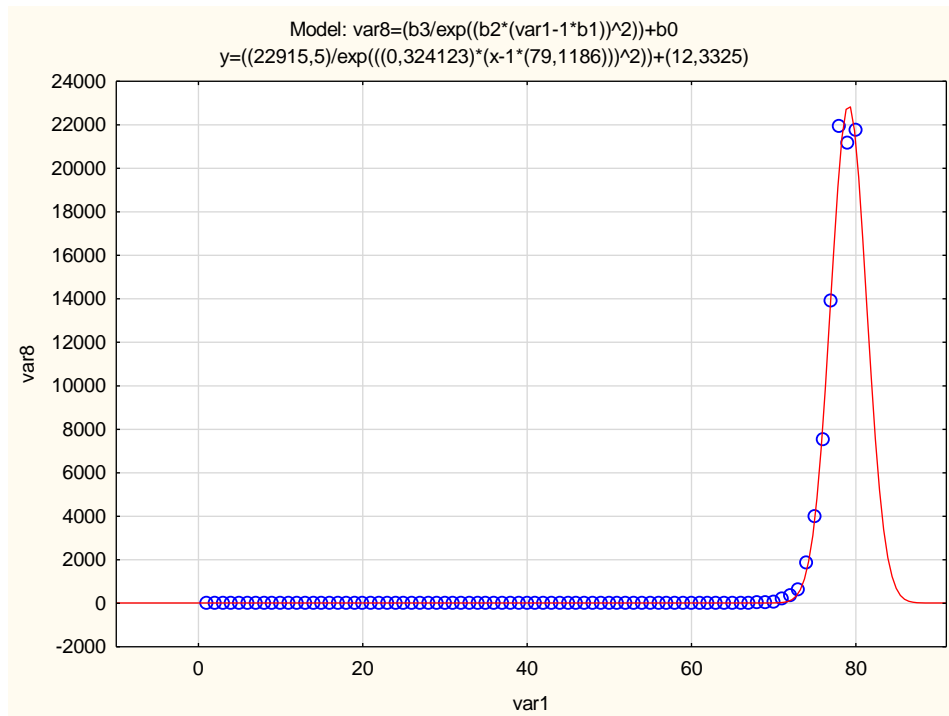
10. ábra. BA.1 Omikron AWRAMI



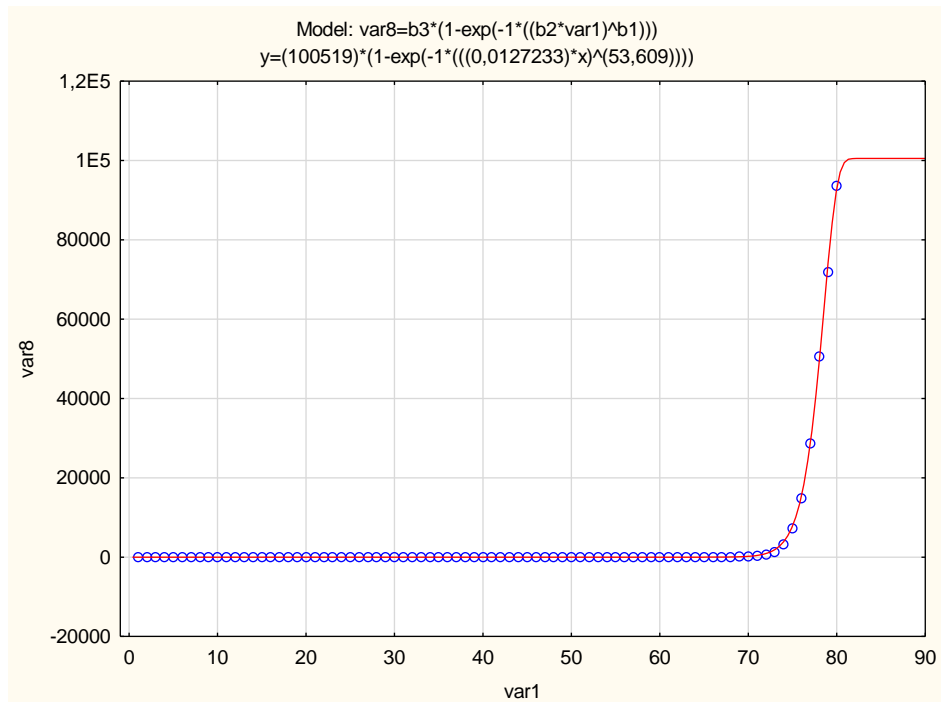
11. ábra. BA.2/BA.3 Omikron GAUSS



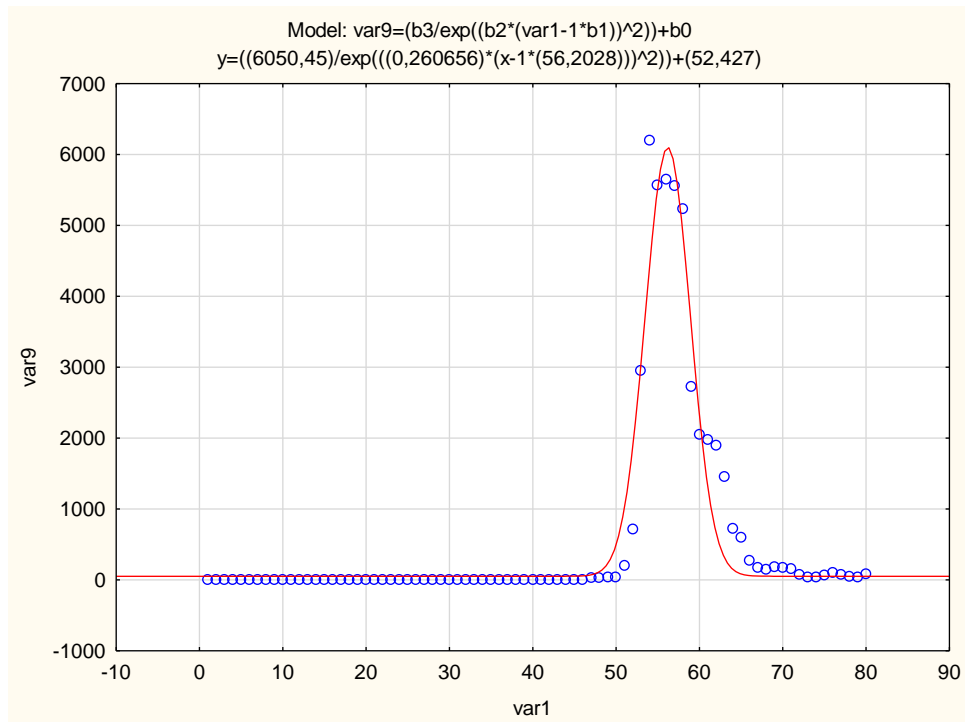
12. ábra. BA.2/BA.3 Omikron AWRAMI



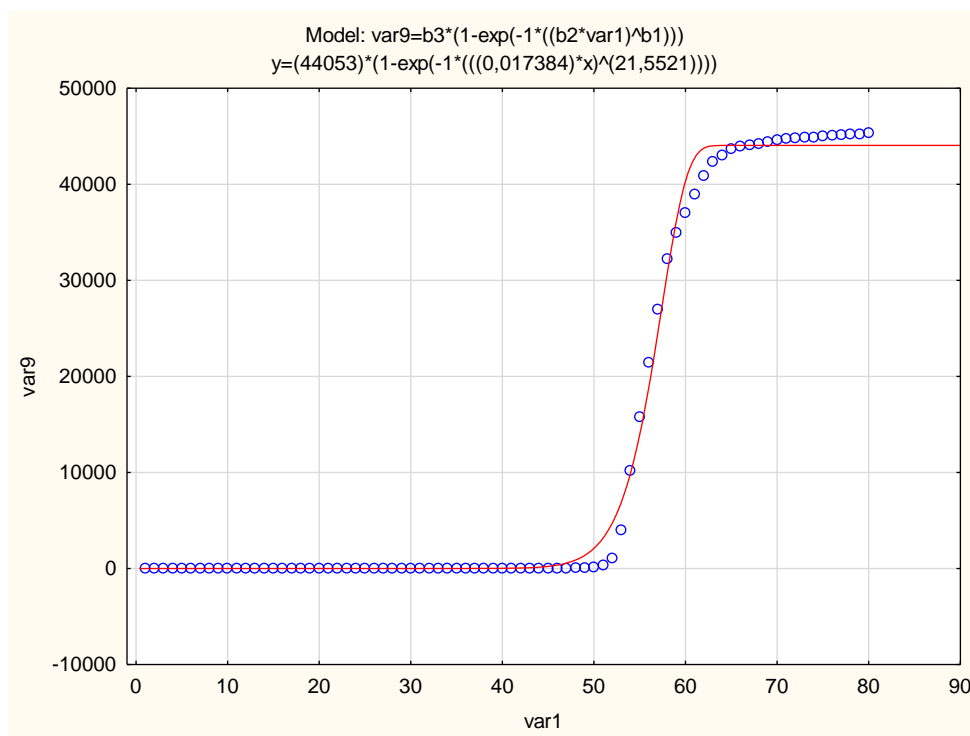
13. ábra. BA.4/BA.5 Omikron GAUSS



14. ábra. BA.4/BA.5 Omikron AWRAMI



15. ábra. B.1.1.529 nem deff. Omikron GAUSS



16. ábra. B.1.1.529 nem deff. Omikron AWRAMI

## 2.2. Elemzés, értékelés

### *A covid variánsok regressziós vizsgálatának elemzése illesztett modellenként:*

- *A Gauss görbe illesztésének eredményei:*

Az alábbi táblázat összefoglalja az egyes vírus variánsok tényleges és becült lokális maximum helyeit, valamint az azokhoz tartozó becült maximum értékek %-os hibáját illetve a korrelációs együttható értékét.

Variánsok	Maximum hely (hét)		Maximum érték hibája (%)	R
	Tényleges	Becsült		
VAR2	11	12,6	2,9	0,9891
VAR3	4	6,4	26	0,9418
VAR4	22	20,5	23,9	0,8762
VAR5	45	43,9	35,2	0,9303
VAR6	55	55,9	16,4	0,9537
VAR7	63	63,5	14,5	0,9730
VAR8	78	79,1	4,4	0,9976
VAR9	54	56,2	1,6	0,9668

### 2. táblázat. Gauss modell összefoglaló

- *Az Awrami függvény illesztésének eredményei:*

A megadott táblázatban R a korrelációs együttható, VAR1<sub>H</sub> az az időpont – hét - amittől számítva a függő változó eltérése a határértéktől kisebb, mint 1%. Az eltérés pedig az mutatja, hogy a jelölt időponttól a kísérlet végpontjáig hány % volt a tényleges változás.

Variánsok	VAR1 <sub>H</sub> 1%	Eltérés%	R
VAR2	22,6	1,6	0,9998
VAR3	19	1,5	0,9994
VAR4	25,9	8,3	0,9988
VAR5	54,6	0,03	0,9997
VAR6	63,4	5,1	0,9980
VAR7	71,5	10,7	0,9975
VAR8	79	-	0,9998
VAR9	63,4	0,002	0,9983

### 3. táblázat. AWRAMI modell összefoglaló

### **Értékelés:**

A fentiekben megadott táblázati értékek, valamint bemutatott grafikus reprezentációk azt igazolják, hogy a választott modellek jól illeszkednek az egyes vírus variánsok adatsoraira. Minden egyes esetben a telítési függvényénél az  $R$  érték meghaladja a 0,99-t ami szoros kapcsolatra utal. A Gauss görbe esetében már alacsonyabbak a korrelációs együttható értékek, kirívó a VAR4  $R=0,8762$  értéke, ami még elfogadható szorosságra utal. A bizonytalanságot az adathalmaz ingadozása okozza, aminek tényleges mivoltát nem ismerjük, nem keressük.

A Gauss görbe a maximum helyek értékét jó közelítéssel becsüli, viszont a maximum értékek esetében a VAR3, VAR4 és VAR5 jelentős %-os eltérés mutat, amit a tényleges adatsorok túlzott meredeksége okoz. Az Awrami függvény illeszkedése kifogástalan azonban bizonyos esetekben az 1%-os hibahatár bizonytalan, amit itt az adatsorok ingadozásával magyarázható. A VAR8 esetében nem adható meg értelmes hibahatár, mivel az adatsor még felszökő jellegű, változása nyilván bizonytalan.

Összességében kijelenthető, hogy a felhasznált modellek az egyes vírus variánsok folyamatát jól jellemzik, az adatsorok ingadozása, hirtelen változása ellenére.

### **3. Összefoglaló**

A napjainkban még mindig aktuális covid vírus fertőzöttségi adatai összességében ingadozó jelleget mutatnak. Felmerül a kérdés azonban, hogy ismerve a folyamatban előforduló vírus variánsok esetszámait, azok jellemezhetők-e megfelelő matematikai modellel. Feltételezve azt, hogy az ilyen jellegű folyamatok általában telítési jelleget mutatnak. Ehhez azonban arra van szükség, hogy az egyes variánsok előfordulási adatait ismerjük. A választott adatsorok ennek a kritériumnak megfelelnek, így a modellek illesztése végrehajtható.

Az eredmények azt mutatják, hogy a feltételezett telítési jelleg igazolja a folyamatot, kumulált adatsorok esetén, míg a gyakorisági adatok folyamata jellemezhető egy transzformált Gauss függvénnyel. A magas korrelációs együtthatók ellenére a becslésekben előfordulnak jelentősebb eltérések, ami nyilván magyarázható az ilyen jellegű biológiai folyamatok bizonytalanságával.

### **Irodalomjegyzék**

- [1] Csanády, V., Horváth-Szováti, E., Szalay, L., Alkalmazott statisztika, Sopron, Nyugat-Magyarországi Egyetem Kiadó (2013), 175 p.
- [2] AGES - Österreichische Agentur für Gesundheit und Ernährungssicherheit GmbH, <https://www.ages.at>
- [3] Csanády, V., Nemlineáris regressziók alkalmazása gyakorlati példákban, Dimenziók: Matematikai közlemények 1 (2013) 19-26.
- [4] Csanády, V., Segédlet a kutatási eredmények számítógépes kiértékelése c. PhD. tárgyhoz. (2012) 2-54.





## A természetes szelekció vizsgálata varianciaanalízissel

**Horváth-Szováti Erika**

Soproni Egyetem, Informatikai és Matematikai Intézet  
horvath-szovati.erika@uni-sopron.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** Egy adathalmaz statisztikai elemzésére mutatunk példákat a STATISTICA13 programcsomag segítségével. A varianciaanalízis különböző típusait alkalmazzuk. Ezekkel a mintapéldákkal szemléltetni tudjuk hallgatóink számára, hogy hogyan tudják hasznosítani statisztikai ismereteiket a kísérletek kiértékelésében.

**ABSTRACT.** Here we present some practical examples of ANOVA with STATISTICA13. Students need only a little background knowledge to solve these problems. From the exercises, students can see how useful the science of statistics is in the evaluation of experimental results.

### 1. Bevezetés

Egyetemünk hallgatói nagyon kevés statisztikai módszert ismernek, ugyanis legtöbb szakon csak a matematika egyéb területeivel összevonva, valamely más tantárgy részeként hallgatnak statisztikát. A TDK dolgozatok, szakdolgozatok, illetve diplomamunkák írásakor legtöbbször rákényszerülnek a statisztikai eljárások használatára. Az oktatás során a felhasználói szintű ismeretek átadása a cél, az elméleti háttérből csak a legszükségesebb dolgok kerülnek szóba. Ennek a munkának a célja a varianciaanalízis három legalapvetőbb típusa (egyszempontú, többszempontú és hierarchikus) gyakorlatban történő alkalmazásának bemutatása egy olyan téma kapcsán, amely az erdőmérnök és vadgazdamezőmérnök hallgatók számára érdekes lehet.

### 2. Néhány szó az adatok eredetéről

1889. februárjában egy szokatlanul erős hóvihár és ónos eső után 136 haldokló verebet (*Passer domesticus*) vittek be az amerikai Rhode Island állam fővárosában, Providence-ben lévő Brown Egyetem biológiai laboratóriumába [1]. A madaraknak majdnem a fele (64) elpusztult, a többi életben maradt. Hermon Carey Bumpus, a fiatal biológus feljegyezte mind a túlélő, mind az elpusztult madarak ivarát és egyéb adatait. Ez azóta is a természetes szelekció egy klasszikus példája. A statisztika, mint tudomány a XX. század első felében indult jelentős fejlődésnek. Érdekes megemlíteni, hogy Bumpus kísérlete 19 évvel előzte meg a  $t$ -eloszlás megjelenését, és a szórásnégyzetek elemzésre irányuló első próbálkozások is több mint 30 évvel később, az 1920-as években voltak. Ennek az adatsornak a kiértékelése leginkább a többváltozós statisztika módszereivel hajtható végre, de ezek a módszerek csak a XX. század közepén jelentek meg. A Bumpus által 1889-ben feljegyzett adatok további elemzésére a későbbiek során többen is vállalkoztak. E témában született jó néhány publikáció, kiemelve közülük néhányat: Grant 1972, Johnston et al. 1972, O'Donald 1973, Buttemer 1992. Buttemer

főkomponens-analízissel arra a megállapításra jutott, hogy a verebek életben maradása az energia tartalékaikkal (testzsírtömegükkel) hozható összefüggésbe [2]. Természetesen Bumpus több mint 100 éve elhullott madarain a testzsírtömeg mérést utólag nem lehetett elvégezni, így Buttemer a rendelkezésre álló morfológiai adatok segítségével végzett testzsírtömeg becsléseket.

Ebben a munkában az előbb említett kutatók eredményeitől függetlenül, a hallgatóink által már ismert (vagy számukra egyszerűen megtanítható) statisztikai módszerekkel mutatunk néhány mintafeladatot a Bumpes-féle adatsor kiértékelésére. Az alábbi példákkal nem újabb tudományos eredmények felfedezése és közlése a cél. Ezt már előttünk többen megtették, és a miénknél sokkal bonyolultabb (nem „alap szintű”) statisztikai eljárásokat alkalmaztak. Mi csupán azt szeretnénk megmutatni, hogy hallgatóink az általuk ismert viszonylag egyszerű módszerekkel hogyan és milyen információkhoz juthatnak ebből az adathalmazból.

### 3. Mintafeladatok

Az adatsor az irodalomjegyzékben szereplő [1] forrásból excel formátumban is elérhető. Bumpes a következő adatokat gyűjtötte össze a verebekről: teljes hossz (mm), szárnytávolság (mm), súly (g), csőr hegyétől a tarkóig mért távolság (mm), felkar hossza (in azaz inch, 1 in = 25,4 mm), combcsont hossza (in), lábszárcsont hossza (in), koponya szélessége (in), szegycsont hossza (in), ivar (hím/tojó), elpusztult vagy túlélte. Életkorra utaló feljegyzést csak a hím példányok esetében tett, ott is csak két kategóriát használt: felnőtt/fiatal. Mi az adathalmazt csak mintapéldák bemutatására használjuk, nem szeretnénk a természetes szelekcióra nézve tudományos téziseket megfogalmazni. Emiatt nem láttuk értelmét valamennyi változó vizsgálatának. Itt csak a következőkkel dolgozunk:

- teljes hossz (mm),
- súly (g),
- ivar,
- elpusztult/túlélte.

Az adatokat kigyűjtöttük, a vizsgált módszernek megfelelően csoportosítottuk, ezt követően a kiértékelés során a varianciaanalízis különböző módszereit ([3], [4], [5]) a STATISTICA13 programcsomag segítségével alkalmaztuk.

#### 3.1. Feladat

Vizsgáljuk meg varianciaanalízis segítségével, hogy van-e szignifikáns különbség az élő és holt madarak teljes hossza és súlya között! Tudunk ezekből valamilyen következtetést levonni a természetes szelekcióra nézve?

#### Megoldás.

Egyszempontú (más néven egyutas vagy egytényezős) varianciaanalízissel dolgozunk. Mivel csak két adathalmazt (mintát) hasonlítunk össze, így ez a vizsgálat  $t$ -próbával is elvégezhető lenne. Úgy is fogalmazhatunk, hogy varianciaanalízist kettőnél több minta összehasonlítása esetén érdemes használni. Azért alkalmazzuk mégis ezt a módszert, mert a 3.2. és 3.3. példákban a varianciaanalízis további, speciális eseteit fogjuk bemutatni, így ez a vizsgálat a későbbiekhez kiindulópontul szolgál. A varianciaanalízis módszere csak akkor alkalmazható, ha a populáció normális eloszlású, véletlen mintavétel történt, a hiba varianciák függetlenek és a vizsgált populációk varianciája azonos (azaz igaz rájuk a homoszkedaszticitás vagy más néven homogenitás). Mivel az adatok feltehetőleg normális eloszlást mutatnak

(hiszen ez az élőlények morfológiai adataira általában jellemző), ezt külön nem vizsgáljuk. A homogenitás ellenőrzésére Bartlett-próbát végzünk. Ennek nullhipotézise  $H_0$ : a populációk varianciája egyenlő, az alternatív hipotézis  $H_1$ : van eltérő varianciájú populáció. A próbastatisztika  $\chi^2_{(k-1)}$  eloszlást követ (ahol  $k$  az összehasonlított adathalmazok száma), és jobboldali próba. Ha a próbastatisztikához tartozó valószínűséget  $p$ -vel jelöljük és a szignifikanciaszint jele  $\alpha$ , akkor  $p > \alpha$  esetén a nullhipotézist elfogadjuk, ellenkező esetben elutasítjuk. Az 1. táblázat a teljes hossz, a 2. táblázat pedig a súly adatokra vonatkozó, STATISTICA13 programcsomaggal végzett Bartlett-próba eredményét mutatja. A teljes hossz  $0,091 > \alpha$ , a súly pedig  $0,034 > \alpha$  szignifikanciaszintek esetén mutat homogenitást. A statisztikai vizsgálatok során leggyakrabban az  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszintet szoktuk használni, a teljes hossz adatok szórásnégyzetének egyenlősége az élő és holt populációkban nem utasítható el ezen a szignifikanciaszinten. A súly adatokról ugyanez a kevésbé szigorú,  $\alpha = 0,01$  szignifikanciaszinten mondható csak el. Tehát az adathalmazok a varianciaanalízis alkalmazhatósági feltételeinek eleget tesznek.

Tests of Homogeneity of Variances (Bumpus_verebei_eredeti)					
Effect: "élő/holt"					
	Hartley F-max	Cochran C	Bartlett Chi-Sqr.	df	p
teljes hossz (mm)	1,513864	0,602206	2,851642	1	0,091281

1. táblázat

Tests of Homogeneity of Variances (Bumpus_verebei_eredeti)					
Effect: "élő/holt"					
	Hartley F-max	Cochran C	Bartlett Chi-Sqr.	df	p
súly (g)	1,685482	0,627627	4,510722	1	0,033683

2. táblázat

A varianciaanalízis jobboldali Fisher-próba. Nullhipotézise az egyes csoportokban a vizsgált ismérv várható értékeinek egyenlősége (pl.  $H_0$ : az élő és holt madarak teljes hossza a populációban egyenlő). Ez az eljárás az adatok szóródásának forrását két részre osztja, az egyik a vizsgált szempont (tényező) miatt bekövetkező (vagyis a minták, esetünkben az élő/holt csoportok közötti) eltérések, a másik a mintákon belüli szóródás. Ez utóbbit a program „Error” névvel illeti, mert ez a mérés „hibájából”, „tökéletlenségéből” fakad (pl. egyes madarakat szerencsés légáramlat segítette a túlélésben, stb.). A program megadja a próbastatisztika(k)hoz tartozó valószínűséget. Ha a szignifikanciaszint ennél az értéknél nagyobb, akkor a próbastatisztika az elutasítási tartományba kerül, tehát a csoportok között a vizsgált szempontból eltérés tételezhető fel.

Az 3. táblázat a teljes hosszra a STATISTICA13 programcsomaggal készített ANOVA-táblát mutatja. Látható, hogy az élő/holt sorban az  $F$  próbastatisztikához  $p = 0,003348$  valószínűség tartozik. Ha a szignifikanciaszint ennél az értéknél nagyobb (azaz  $0,003348 < \alpha$ ), akkor a próbastatisztika az elutasítási tartományba kerül, tehát a csoportok között a vizsgált szempontból eltérés tételezhető fel. Tehát elutasítható a  $H_0$  hipotézis, azaz a túlélési esélyeket a madarak hossza feltehetőleg befolyásolta.

Univariate Results for Each DV (Bumpus_verebej_eredeti)					
Sigma-restricted parameterization					
Effective hypothesis decomposition					
Effect	Degr. of Freedom	teljes hossz (mm) SS	teljes hossz (mm) MS	teljes hossz (mm) F	teljes hossz (mm) p
Intercept	1	3452069	3452069	288235.4	0,000000
élő/holt	1	107	107	8,9	0,003348
Error	134	1605	12		
Total	135	1712			

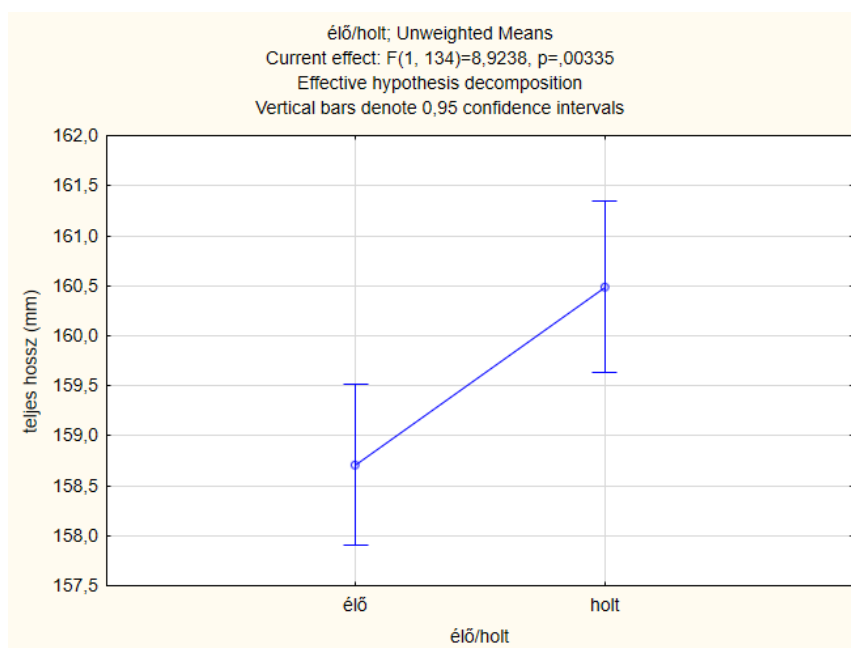
3. táblázat

Az élő és holt madarak súlyát varianciaanalízissel összehasonlítva 4. táblázatot kaptuk, a próbastatisztikához a  $p = 0,011752$  valószínűség tartozik. Ha a szignifikanciaszint ennél az értéknél nagyobb, akkor a csoportok között a vizsgált szempontból eltérés tételvezhető fel. Jól demonstrálható a varianciaanalízis eredménye az 1. és 2. ábrával. Az 1. ábra az élő és holt madarak teljes hosszára felírt 95%-os konfidencia intervallumokat, a varianciaanalízisben kapott  $F_{(1,134)} = 8,9238$  kritikus F értéket, illetve az ehhez tartozó  $p = 0,00335$  valószínűséget mutatja. A 2. ábra ugyanezeket az információkat tartalmazza a madarak súlyára nézve.

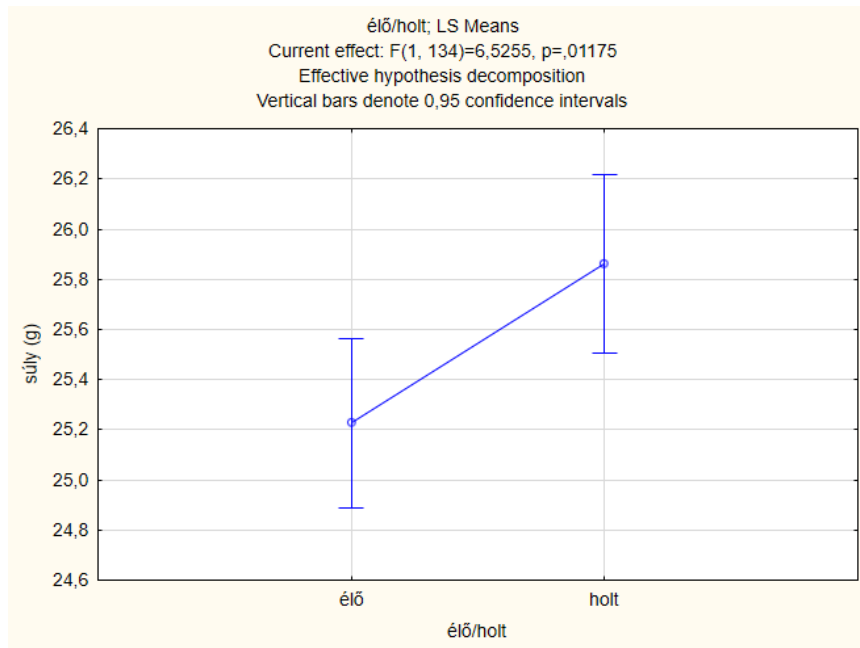
A fenti módszerekkel összegezve arra a megállapításra jutottunk, hogy nem utasítható el az a feltételezés, hogy a teljes hossz és a testsúly a túlélési esélyeket befolyásolta. Az 1. és 2. ábra alapján feltehetőleg a kisebb súlyú és kisebb testhosszú példányoknak volt nagyobb esélye a túlélésre.

Univariate Results for Each DV (Bumpus_verebej_eredeti)					
Sigma-restricted parameterization					
Effective hypothesis decomposition					
Effect	Degr. of Freedom	súly (g) SS	súly (g) MS	súly (g) F	súly (g) p
Intercept	1	88430,06	88430,06	42297,11	0,000000
élő/holt	1	13,64	13,64	6,53	0,011752
Error	134	280,15	2,09		
Total	135	293,80			

4. táblázat



1. ábra



2. ábra

### 3.2. Feladat

Folytassuk az adatsor elemzését kétszemponútú varianciaanalízissel, amely során a madarak ivarát is figyelembe vesszük!

**Megoldás:** A kétszemponútú (kétutas vagy kéttényezős) varianciaanalízis esetén az 1. tényező az élő/holt kategória, a 2. tényező a madarak ivara (5. táblázat). Ez szintén jobboldali Fisher-próba, amelynek két nullhipotézise van (pl.  $H_0^{(1)}$ : A különböző ivarú madarak teljes hossza a populációban egyenlő,  $H_0^{(2)}$ : Az élő és holt madarak teljes hossza a populációban egyenlő). Ez az eljárás az adatok szóródását négy részre osztja: az  $A$  vizsgált szempont miatt, a  $B$  vizsgált szempont miatt, az  $A \times B$  kölcsönhatás miatt és a mérés hibája miatt bekövetkező szóródás (ez utóbbi a mintákon belüli adatszóródás, amit az előző feladatnál is említettünk).

		B szempont	
		hím	tojó
A szempont	élő	élő hím	élő tojó
	holt	holt hím	holt tojó

5. táblázat

Univariate Results for Each DV (Bumpus_verebei_eredeti)					
Sigma-restricted parameterization					
Effective hypothesis decomposition					
Effect	Degr. of Freedom	teljes hossz (mm) SS	teljes hossz (mm) MS	teljes hossz (mm) F	teljes hossz (mm) p
Intercept	1	3105573	3105573	305410.3	0.000000
élő/holt	1	115	115	11.3	0.001013
hím/tojó	1	234	234	23.0	0.000004
élő/holt*hím/tojó	1	24	24	2.4	0.124834
Error	132	1342	10		
Total	135	1712			

6. táblázat

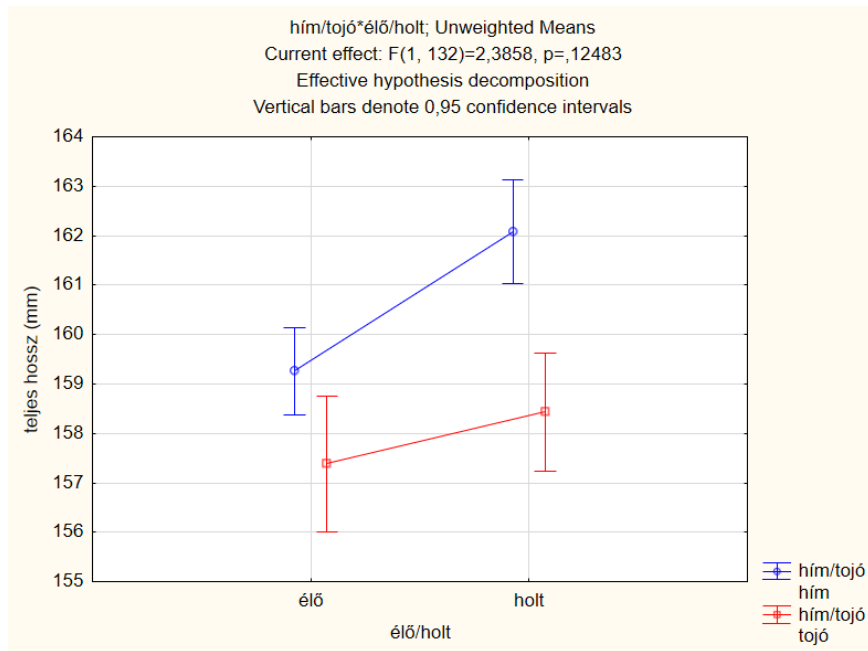
A 6. táblázat értékelése ugyanúgy történik, mint egytényezős esetben, a gondolatmenetet itt már nem részletezzük. Az élő/holt egyedek ( $A$  szempont) és a különböző ivarú madarak ( $B$  szempont) teljes hossza között szignifikáns eltérést tapasztalunk, viszont a két szempont kölcsönhatása ( $A \times B$ ) nem szignifikáns. Ha ugyanezt a vizsgálatot a súly adatokra is elvégezzük (7. táblázat), ugyanez adódik, tehát az élő/holt és hím/tojó madarak súlya között szignifikáns eltérés mutatkozik, de a két szempont kölcsönhatása nem szignifikáns. A teljes hossz és súly adatokat szemlélteti a 3. és 4. ábra. Ezekon jól látható, hogy a mintában a hím madarak teljes hossza és súlya nagyobb a tojókénál, illetve a viharban elpusztult madaraknak nagyobb volt a teljes hossza és a súlya. Azt, hogy ezek az eltérések a populációra nézve is szignifikáns különbségnek számítanak vagy sem, az alább részletezésre kerülő post hoc test segítségével tudjuk meghatározni.

Ha varianciaanalízissel több mérési csoportban hasonlítjuk össze egy adott ismérv várható értékét, akkor csak arról kapunk információt, hogy valamennyi egyenlő, vagy legalább egy eltér közülük. Ha legalább egy eltér, akkor az ún. post hoc (lat., jelentése „ezt követően”) tesztek segítségével azt is meg tudjuk állapítani, hogy mely csoportok között van eltérés. A teszt eredménye egy főátlójára szimmetrikus mátrix (a főátlóban nincsenek elemek), amelyben a programcsomag a felhasználó által megadott szignifikanciaszinten jelöli a szignifikánsan eltérő csoportátlagokat. A 8. és 9. táblázat a Duncan-féle post hoc teszt eredményét mutatja a teljes hossz és súly adatokra. Ezekről leolvasható az a vizsgálat szempontjából érdekes információ, hogy a testhossz tekintetében  $\{1,3\}$  esetében van, míg  $\{2,4\}$  esetében nincs szignifikáns eltérés (tehát csak az élő és holt hímek testhossza között kaptunk szignifikáns különbséget, az élő és holt tojóknál nem), viszont a súly esetén mind  $\{1,3\}$ , mind  $\{2,4\}$  esetében szignifikáns eltérés mutatkozik.

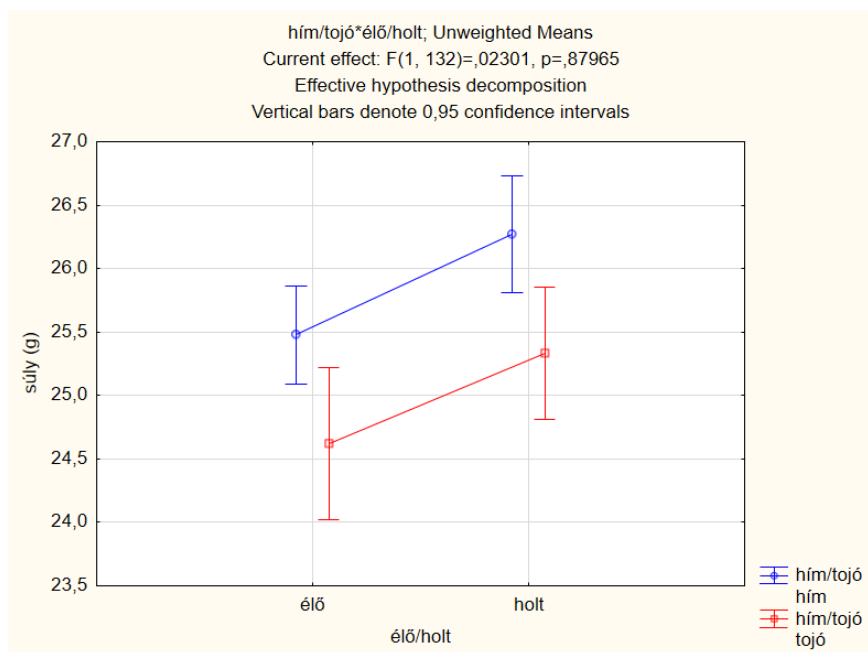
Összegezve: a 3.2. feladatban hasonló eredményt kaptunk, mint a 3.1. feladatban, azaz a teljes hosszak és a testsúly a túlélésre szignifikáns befolyása lehetett. Most az a további eredmény adódott, hogy a madarak ivarának valószínűleg nincs szignifikáns szerepe a túlélésben.

Univariate Results for Each DV (Bumpus_verebei_eredeti)					
Sigma-restricted parameterization					
Effective hypothesis decomposition					
Effect	Degr. of Freedom	súly (g) SS	súly (g) MS	súly (g) F	súly (g) p
Intercept	1	79124.16	79124.16	40880.67	0.000000
élő/holt	1	17.43	17.43	9.01	0.003216
hím/tojó	1	24.54	24.54	12.68	0.000514
élő/holt*hím/tojó	1	0.04	0.04	0.02	0.879651
Error	132	255.48	1.94		
Total	135	293.80			

7. táblázat



3. ábra



4. ábra

Duncan test; variable teljes hossz (mm) (Bumpus\_verebek\_eredeti)  
 Approximate Probabilities for Post Hoc Tests  
 Error: Between MSE = 10,169, df = 132,00

Cell No.	élő/holt	hím/tojó	{1}	{2}	{3}	{4}
1	élő	hím	159,25	0,028395	0,000527	0,310772
2	élő	tojó	0,028395	157,38	0,000003	0,198780
3	holt	hím	0,000527	0,000003	162,08	0,000021
4	holt	tojó	0,310772	0,198780	0,000021	158,43

8. táblázat

Duncan test; variable súly (g) (Bumpus_verebei_eredeti)						
Approximate Probabilities for Post Hoc Tests						
Error: Between MSE = 1,9355, df = 132,00						
Cell No.	élő/holt	hím/tojó	{1}	{2}	{3}	{4}
			25,476	24,619	26,269	25,336
1	élő	hím		0,021281	0,025787	0,692294
2	élő	tojó	0,021281		0,000009	0,043913
3	holt	hím	0,025787	0,000009		0,011843
4	holt	tojó	0,692294	0,043913	0,011843	

9. táblázat

### 3.3. Feladat

Folytassuk az elemzést hierarchikus varianciaanalízissel!

**Megoldás:** Ezzel a módszerrel a vizsgálatba bevont független változókat hierarchikus sorrendbe rendezzük, azaz a kísérleti egységeket részmintákra osztjuk. Ha a hím és tojó adatszoportokat osztjuk élő és holt részmintákra (10. táblázat), akkor a nullhipotézisek megfogalmazása az alábbi.  $H_0^{(1)}$ : a különböző ivarú madarak teljes hossza a populációban egyenlő,  $H_0^{(2)}$ : az azonos ivarú madarak között az élők és holtak teljes hossza egyenlő.

hím		tojó	
élő	holt	élő	holt

10. táblázat

A programcsomag az alábbi eredményeket adja (11-12. táblázat). Látható, hogy mindkét vizsgált ismérv esetében  $H_0^{(1)}$  és  $H_0^{(2)}$  is elutasítható, tehát ez az eljárás is megerősítette azt a feltételezést, hogy a túlélést szignifikánsan befolyásolja a teljes hossz és a súly.

A hierarchikus elrendezés során számolt konfidencia intervallumokat, a Fisher-értékeket és a hozzájuk tartozó valószínűségeket szemlélteti az 5. és 6. ábra. Azt, hogy ezek valóban szignifikáns különbségek-e, csak további post hoc teszttel lehetne megmondani, de erre itt már nem térünk ki. Azt azonban érdemes megnézni, hogy bár hasonló, de mégsem azonosak az értékek a 3. és 4. ábrán lévőkkel, hiszen most más volt a modell elrendezése, másképp számolt a program. Hierarchikus esetben nagyobb Fisher próbastatisztika (és ehhez természetesen kisebb p valószínűségi érték) adódott.

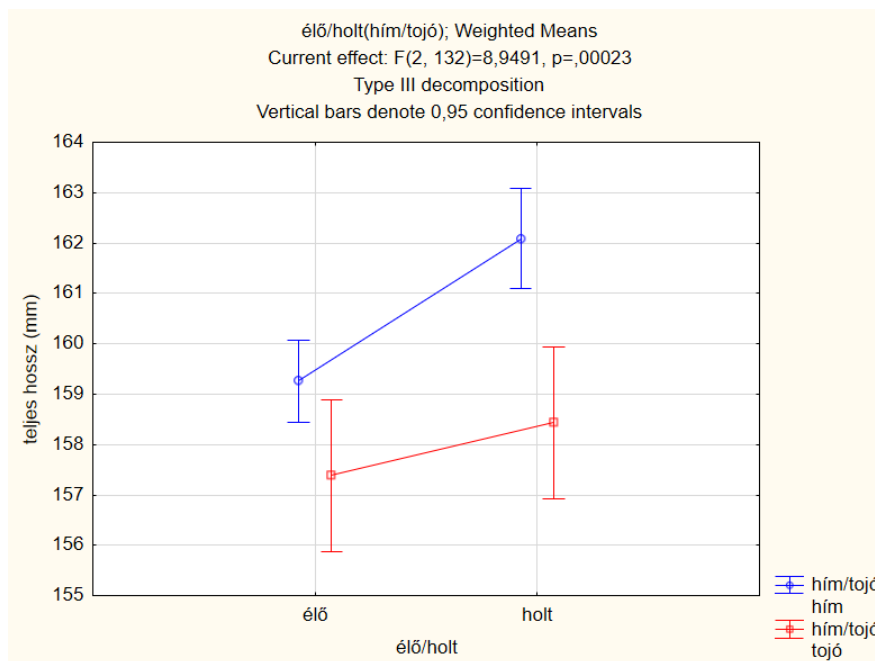
Univariate Results for Each DV (Bumpus_verebei_eredeti)					
Over-parameterized model					
Type III decomposition					
Effect	Degr. of Freedom	teljes hossz (mm) SS	teljes hossz (mm) MS	teljes hossz (mm) F	teljes hossz (mm) p
Intercept	1	3105573	3105573	305410,3	0,000000
hím/tojó	1	234	234	23,0	0,000004
élő/holt(hím/tojó)	2	182	91	8,9	0,000227
Error	132	1342	10		
Total	135	1712			

11. táblázat

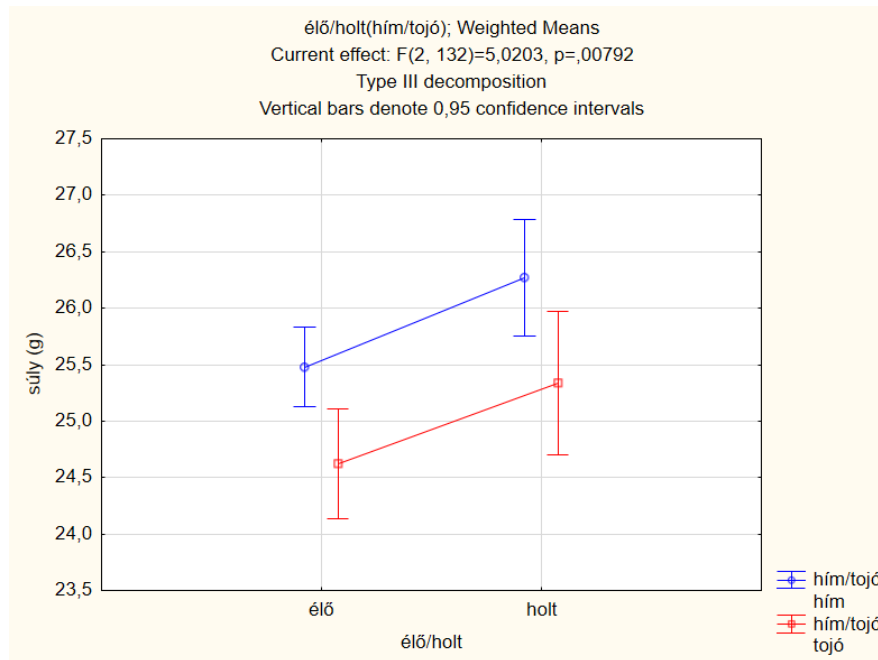


Univariate Results for Each DV (Bumpus_verebek_eredeti)					
Over-parameterized model					
Type III decomposition					
Effect	Degr. of Freedom	súly (g) SS	súly (g) MS	súly (g) F	súly (g) p
Intercept	1	79124,16	79124,16	40880,67	0,000000
hím/tojó	1	24,54	24,54	12,68	0,000514
élő/holt(hím/tojó)	2	19,43	9,72	5,02	0,007919
Error	132	255,48	1,94		
Total	135	293,79			

12. táblázat



5. ábra



6. ábra

#### 4. Összefoglalás

Egy több mint 130 éves, valódi mérésből származó adathalmaz néhány kiválasztott ismérvének értékeit elemeztük a STATISTICA13 programcsomag segítségével. A varianciaanalízis három különböző módszerét alkalmaztuk, amelyek hallgatóink számára vagy már ismertek, vagy egy kevés elméleti bevezető után könnyen elsajátíthatók. Az adatsor kiértékelését már sokan, az itt lévőnél sokkal magasabb szinten elvégezték, és a természetes szelekcióra vonatkozóan téziseket állítottak fel belőle. Az itt olvasható megközelítés kizárólag oktatási céllal, egyetemünk hallgatói számára készült, kapcsolódva a természettudományos érdeklődésükhöz.

#### Irodalomjegyzék

- [1] <http://fieldmuseum.org/explore/hermon-bumpus-and-house-sparrows>
- [2] <https://www2.unil.ch/popgen/modsel/Buttemer.pdf>
- [3] [http://etananyag.ttk.elte.hu/FiLeS/downloads/14\\_KOVACS\\_E\\_Tobbvalt\\_adatelemzes.pdf](http://etananyag.ttk.elte.hu/FiLeS/downloads/14_KOVACS_E_Tobbvalt_adatelemzes.pdf)
- [4] Szűcs István: Alkalmazott statisztika. Agroinform Kiadó, 2002.
- [5] Vargha András: Matematikai statisztika pszichológiai, nyelvészeti és biológiai alkalmazásokkal. Pólya Kiadó, 2000.

## Covid adatsor időbeli változásának vizsgálata új belépő variánsok esetén

Csanády Viktória

SOE Informatikai és Matematikai Intézet  
csanady.viktoria@uni-sopron.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** A covid fertőzések esetszámának időbeli változása nem modellezhető klasszikus matematikai függvényekkel. Ennek oka az adatsor nagymértékű ingadozása. A folyamat tendenciájának vizsgálatához a belépő, új megjelenő variánsok miatt egy összetett függvény alkalmazása indokolt. Az alkalmazott modell jól követi a folyamatot a lépcsőzetesen megjelenő új vírus variánsok esetszám növelő hatása ellenére.

**ABSTRACT.** The change in the number of covid infections cannot be modelled simply with classical mathematical functions. This is due to the high fluctuation of the data series. To examine the trend of the process we need combinations of a few known functions due to the incoming and newly appearing variants. The applied model fits to the process, despite the effect of increasing the number of cases of new virus variants appearing in stages.

### 1. Bevezetés

A 2019 novemberében megjelent COVID vírus adatsorainak vizsgálata a fellépő új variánsok miatt hagyományos matematikai modellek felhasználásával nehézkes. Ennek nyilván az az oka, hogy a belépő új vírus variánsok impulzálják a meglévő adatsort, ami esetlegesen már lecsengő állapotban van. Természetesen a hatás erőssége különböző, egyes esetekben szinte elhanyagolható, máskor gyökeres változást eredményez. Az alábbiakban a vizsgálat tárgya a folyamat lépcsőzetes időbeli változása, melyet az egyes variánsok megjelenése tesz indokolttá. Így a modellezés egyes esetei mindig egy újabb variáns belépését tartalmazzák, a végső vizsgálati időpontig. A vizsgált adathalmaz a szomszédos Ausztria adatai 2021. 1. hetétől 2022. 28. hetével bezárólag, összesítve és variánsenként.

Az alábbiakban először bemutatásra kerül a megfigyelt időszakban előforduló variánsok gyakorisági eloszlása az idő függvényében, melyek jól láthatóan modellezhetők egy Gauss függvénnyel [1].

Ezt követően lépcsőzetes vizsgálattal, újabb variáns megjelenéséig az összesített adathalmazok modellezése következik. Ennek során kettős Gauss [3] és hármas Gauss [4] függvények illesztése indokolt. Bár az új belépő vírus variánsok az adathalmazban a várható változás tendenciáját megtörik, mégis indokolt a lépcsős vizsgálat kumulált adatsorokon. Az új belépő vírus variáns változást okoz, de a telítési jelleg feltételezhetően megmarad, nyilván a belépő intenzitásától függően változtatva paramétereit. A vizsgálatban modellként alkalmazott kettős és hármas Gauss függvények becslést adnak az új belépők által generált lokális maximum időpontjára és az esetszámok maximum értékére, jellemzik a folyamat konvexitását. Az alkalmazott Awrami telítési függvény [1] modellezi az egyes időintervallumok folyamatainak

várható lecsengését, amit bizonytalanná tesz a nyilván újabb és újabb vírus variáns megjelenése. Az illesztések pontosságának ellenőrzésére a mindenkori korrelációs együttható, (nem lineáris korrelációs együttható) került alkalmazásra, figyelembe véve, hogy jelen folyamatok esetén túl magas korrelációs érték nem várható el.

A vizsgálat célja az egyes variánsok lépcsőzetes belépése által történt folyamat változás jellemzése az alkalmazott modellek révén. Valamint a feltételezett telítési jelleg változásának bemutatása.

Az illesztések a STATISTICA programcsomag felhasználásával történtek.

A vizsgálat tárgya:

- ausztriai covid adatok 2021. 1. hét – 2022. 28. hét [2]. Heti lebontás vírus variánsokra illetve összesített adatszámra.

A vizsgált adathalmaz és az alkalmazott modellek:

Az adathalmaz esetében eltekintünk a teljes részletességtől az adatok fellelhetők a fentiekben megadott cím alatt.

Naptári hetek	B.1.1.7 (Alpha)	B.1.351 (Beta)	B.1 (Gamma)	B.1.617.2 (Delta)	BA.1 (Omikron)	BA.2/BA.3 (Omikron)	BA.4/BA.5 (Omikron)	B.1.1.529 nem differenciált (Omikron)	Össz esetek száma
2021-W01	108	7	0	0	0	0	0	0	115
2021-W02	352	59	0	0	0	0	0	0	411
2021-W03	456	137	0	0	0	0	0	0	593
2021-W04	1052	179	0	0	0	0	0	0	1231
2021-W05	1978	123	0	1	0	0	0	0	2102
2021-W06	1980	110	0	0	0	0	0	0	2090
2021-W07	3659	88	0	0	0	0	0	0	3747
2021-W08	7690	147	0	0	1	1	0	0	7839
2021-W09	9601	97	0	0	0	0	0	0	9698
2021-W10	11411	103	1	0	0	0	0	0	11515
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2022-W22	0	0	0	3	31	5053	1858	41	6986
2022-W23	1	0	0	2	42	5692	3991	69	9797
2022-W24	0	0	0	0	55	7400	7542	100	15097
2022-W25	0	0	0	1	78	6633	13920	78	20710
2022-W26	0	0	0	1	73	1676	21932	51	23733
2022-W27	0	0	0	1	121	934	21173	43	22272
2022-W28	0	0	0	2	112	669	21751	82	22616

1. táblázat. Covid adatok

Az alkalmazott regressziós modellek:

- Gauss függvény

- matematikai alakja:

$$y = \frac{b_3}{e^{(b_2(x-b_1))^2}} + b_0$$

- számítógépes alak:

$$var2 = b3/\exp(b2 * (var1 - 1 * b1))^2) + b0.$$

- Kettős Gauss függvény [3]

- matematikai alakja:

$$y = \frac{b_6}{e^{(b_5(x-b_4))^2}} + \frac{b_3}{e^{(b_2(x-b_1))^2}} + b_0$$

- számítógépes alak:

$$var2 = b6/\exp(b5 * (var1 - 1 * b4))^2) + b3/\exp(b2 * (var1 - 1 * b1))^2) + b0.$$

- Hármass Gauss függvény [4]

- matematika alakja:

$$y = \frac{b_9}{e^{(b_8(x-b_7))^2}} + \frac{b_6}{e^{(b_5(x-b_4))^2}} + \frac{b_3}{e^{(b_2(x-b_1))^2}} + b_0$$

- számítógépes alak:

$$var2 = b9/\exp(b8 * (var1 - 1 * b7))^2) + b6/\exp(b5 * (var1 - 1 * b4))^2) + b3/\exp(b2 * (var1 - 1 * b1))^2) + b0.$$

- Awrami telítési függvény [1]

- matematikai alakja:

$$y = b_3 \left( 1 - e^{-(b_2 x)^{b_1}} \right) + b_0$$

- számítógépes alak:

$$var2 = b3 * \left(1 - \exp\left(-1 * ((b2 * var1)^{b1})\right)\right) + b0.$$

A modellek rövid jellemzése:

Az alkalmazott Gauss függvény négy paraméteres általános modell, a kettős és hármas Gauss függvény pedig a fentiekben megadottak szerint két illetve három Gauss függvény kombinációja, amelyek rendelkeznek a szükséges eltolási és nyújtási paraméterekkel. A paraméterek értékeiből pontosan meghatározhatók a modell fő matematikai jellemzői, így a lokális szélsőértékek helyei és értékei, továbbá információt kapunk a folyamat konvexitására. A paraméterek kezdőértékének megadása az adathalmazból becsülhető. Az alkalmazott Awrami telítési függvény a megadott általános alaktól annyiban tér el, hogy  $b_0$  értéke nullának veendő a folyamat jellege miatt. A három paraméter kezdőértéke az illesztésnél szükség esetén módosítható az adatsor alapján.

Az illesztések során a modell változói:

- VAR1 = Naptári hetek sorszáma
- VAR2 = B.1.1.7 Alpha
- VAR3 = B.1.351 Béta (\*)
- VAR4 = B.1 Gamma (\*)
- VAR5 = B.1.617.2 Delta
- VAR6 = BA.1 Omikron
- VAR7 = BA.2/BA.3 Omikron
- VAR8 = BA.4/BA.5 Omikron
- VAR9 = B.1.1.529 nem differenciált Omikron.

(\*) A csekély esetszámra való tekintettel a variáns a vizsgálatokban nem szerepel.

Egyesített adathalmazok heti gyakoriságra kettős és hármas Gauss függvény esetén:

- VAR25 = VAR2+VAR5
- VAR256 = VAR2+VAR5+VAR6
- VAR2567 = VAR2+VAR5+VAR6+VAR7
- VAR25678 = VAR2+VAR5+VAR6+VAR7+VAR8
- VARTotal = VAR2+VAR5+VAR6+VAR7+VAR8+VAR9

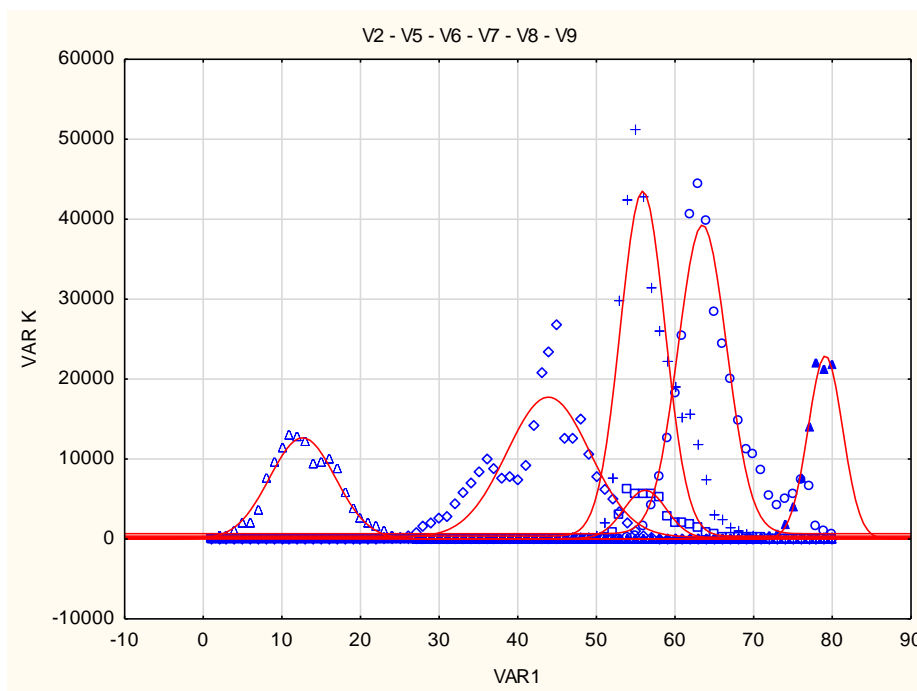
Egyesített kumulált adathalmazok Awrami függvény esetén:

- VARK25 = kumulált VAR25
- VARK256 = kumulált VAR256
- VARTK2567 = kumulált VAR2567
- VARTK25678 = kumulált VAR25678
- VARKTotal = kumulált VARTotal

## 4. Számított eredmények, kiértékelés

### 4.1. Covid adatsor lépcsőzetes elemzése regressziós eljárással.

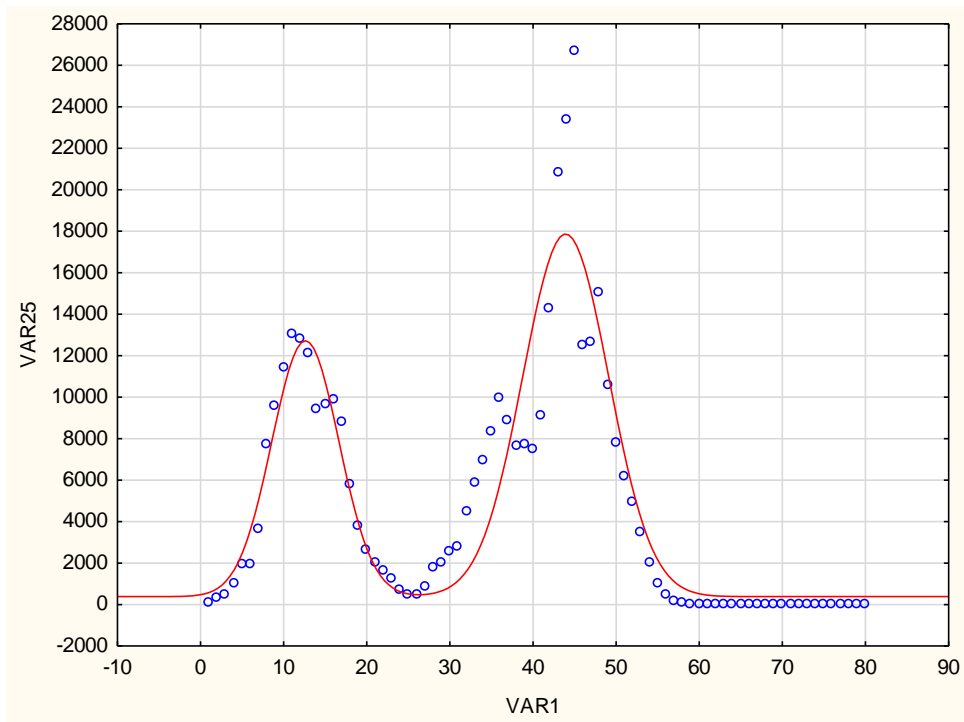
Első lépésben az alábbi ábrán bemutatásra kerülnek az egyes variánsok gyakorisági adatai az előfordulásuknak megfelelően egymástól függetlenül, a már korábban említett két variáns elhagyásával, csekély előfordulási adataik miatt.



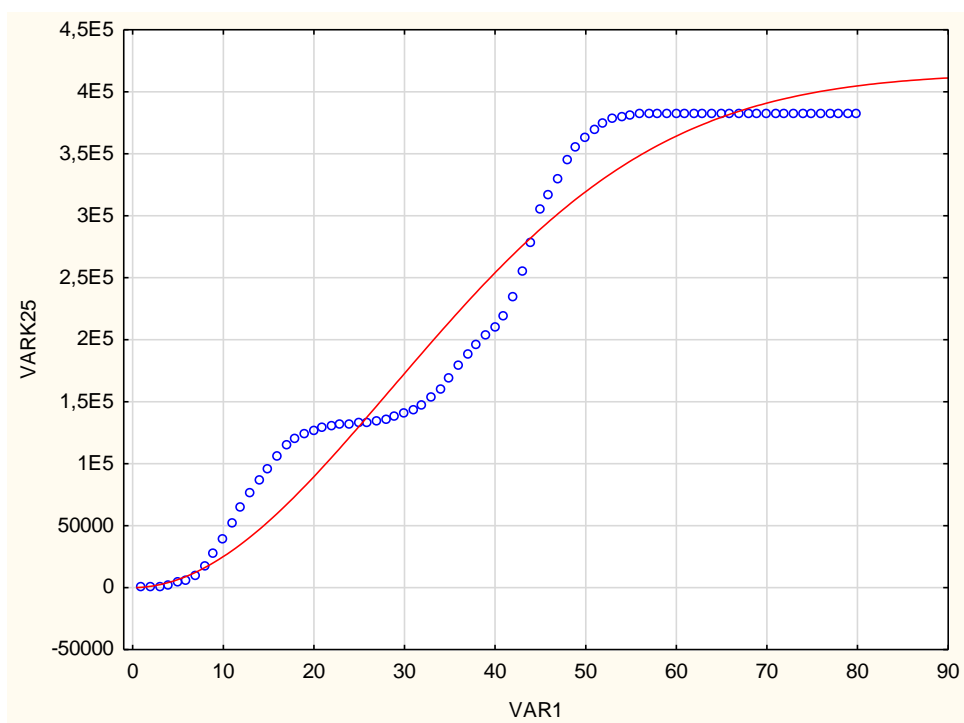
1. ábra. Vírus variánsok heti megjelenése

Az ábra jól mutatja, hogy az egyedi vírus variánsok gyakorisági eloszlása jól jellemezhető a Gauss görbével, az illesztés során kapott korrelációs érték ezt igazolta. (Csanády V.: Covid variánsok időbeli változásának vizsgálata.)

Az alábbiakban a lépcsőzetes vírus előfordulás folyamata kerül bemutatásra, melynek során kettős vagy hármas Gauss függvények illesztésére volt szükség. Valamint párhuzamosan látható a telítési folyamat változása a fokozatosan belépő új vírus variánsok esetén, a kumulált adathalmaz regressziója révén. Az egyes regressziós eljárások paraméter értékei nem kerülnek feltüntetésre, igény szerint a szerzőnél lekérhetőek.

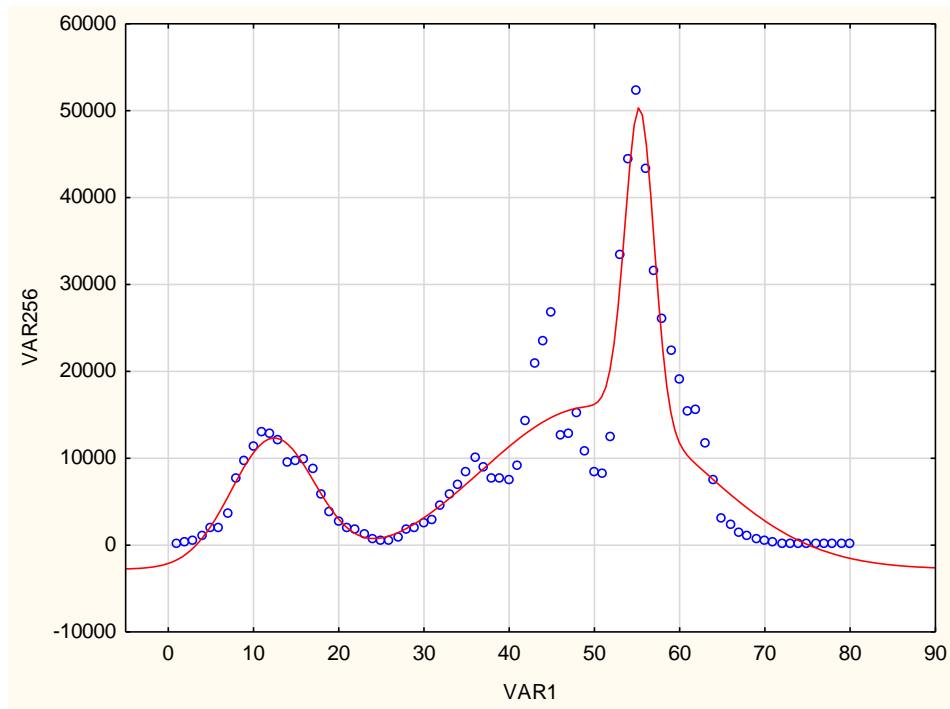


2. ábra. Kettős Gauss VAR25

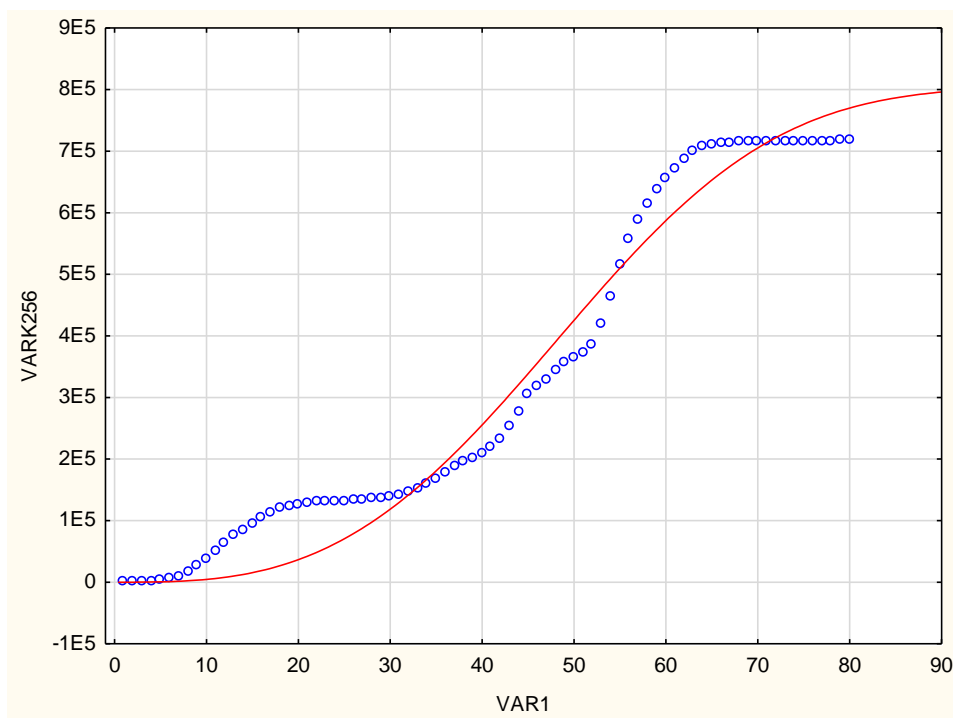


3. ábra. Awrami VARK25

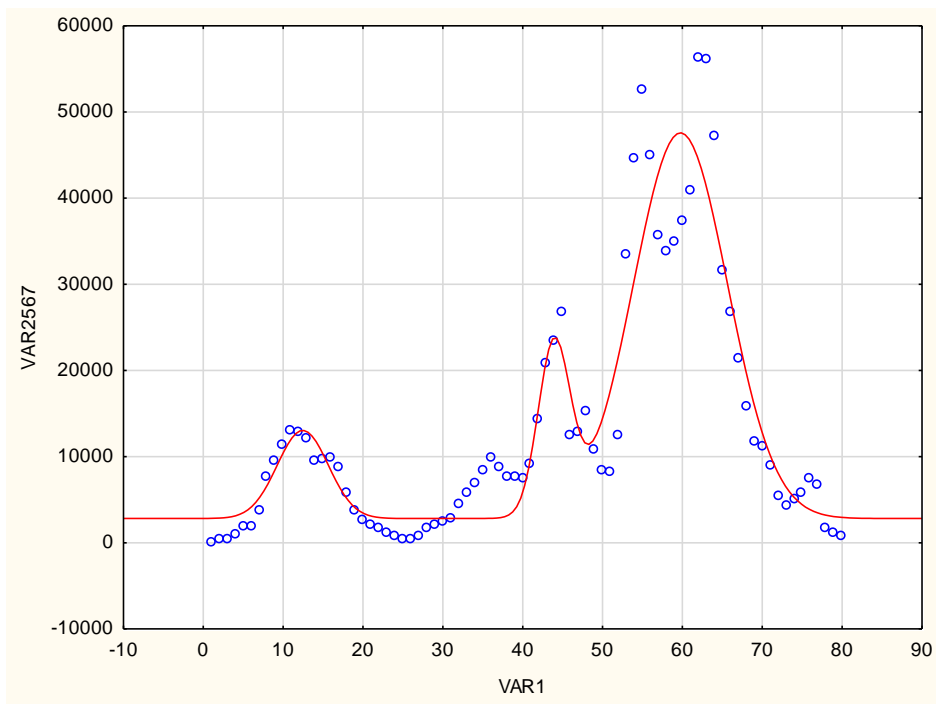




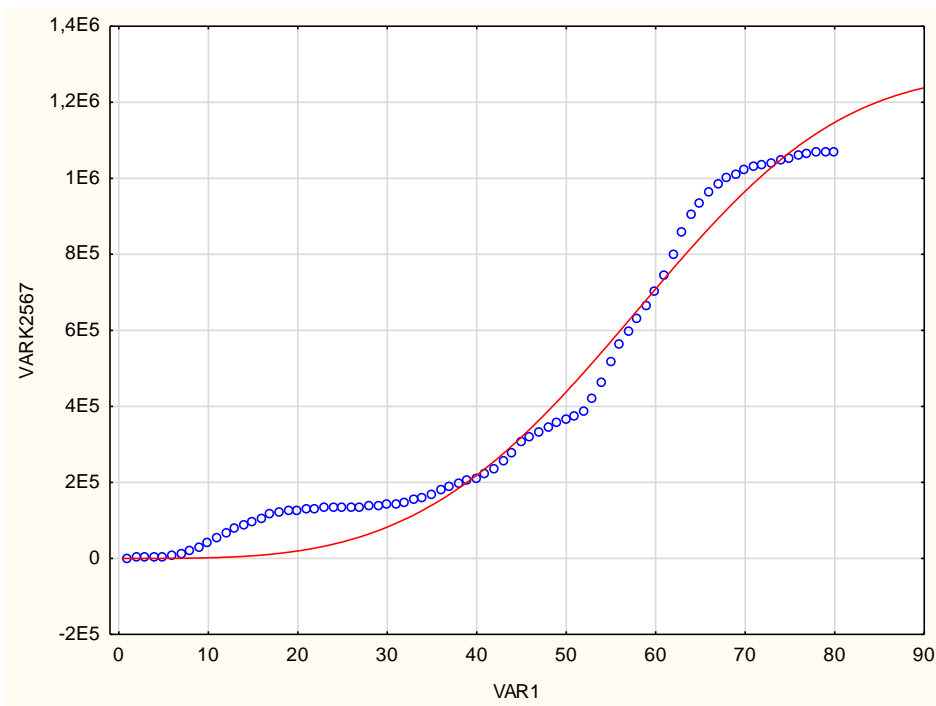
4. ábra. Hármass Gauss VAR256



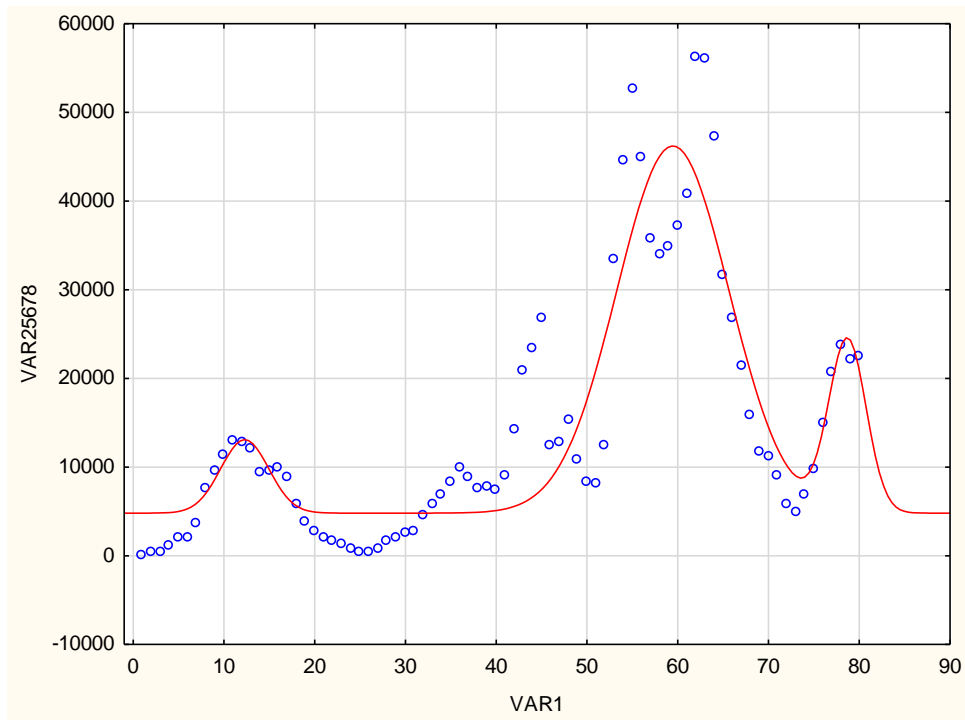
5. ábra. Awrami VARK256



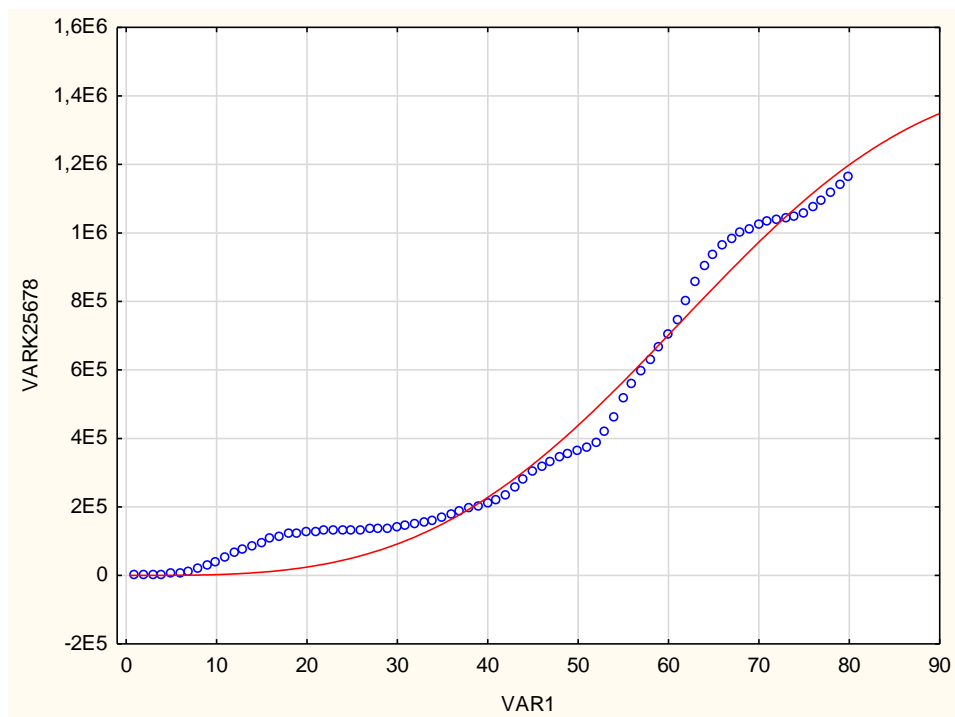
6. ábra. Hármias Gauss VAR2567



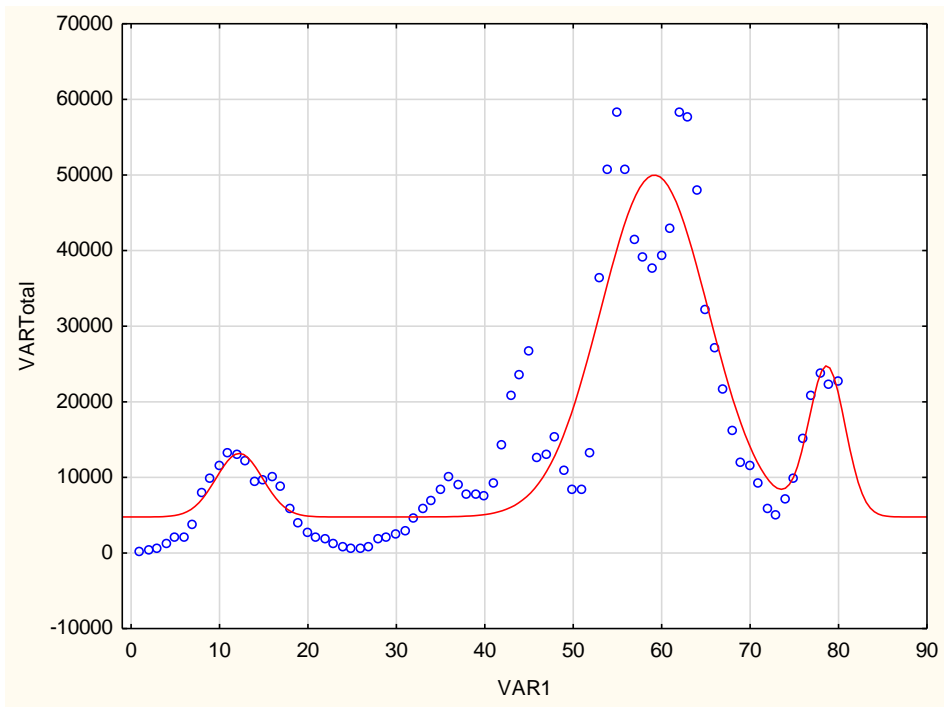
7. ábra. Awrami VARK2567



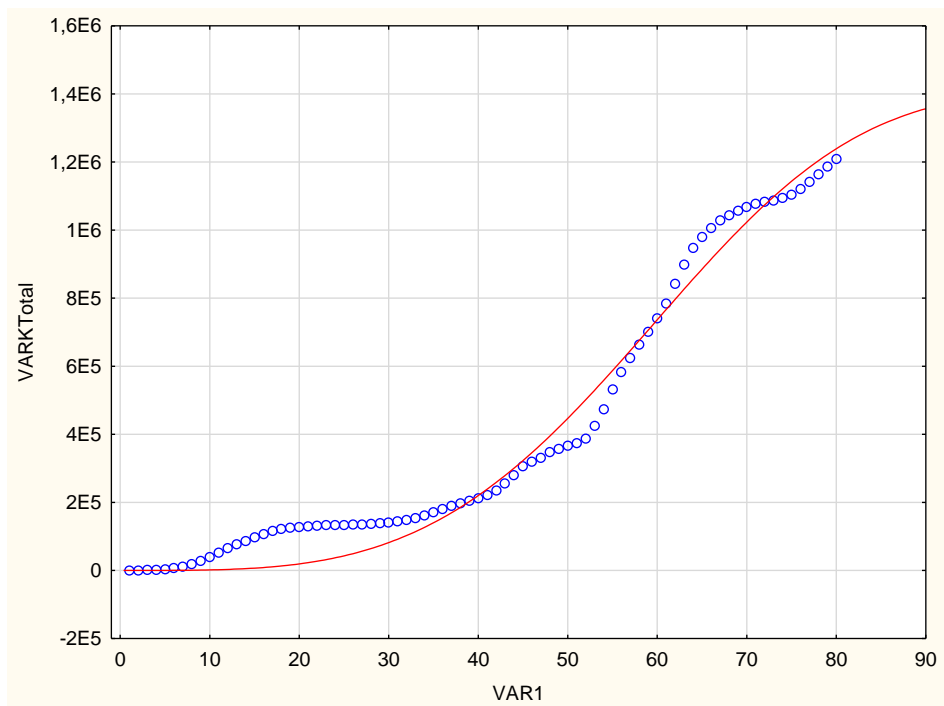
8. ábra. Hármás Gauss VAR25678



9. ábra. Awrami VARK25678



10. ábra. Hármass Gauss VARTotal.



11. ábra. Awrami VARKTotal.

## 4.2. Elemzés, értékelés

### *Lépcsőzetes covid adatsor regressziós vizsgálatának elemzése illesztett modellenként:*

- A kettős és hármas Gauss görbe illesztésének eredményei:

Az illesztéseknél lépcsőzetes sorrendben kerültek a megjelenő vírus variánsok a folyamatba. A léptetés során nem került számításba a VAR3 és VAR4 csekély előfordulási értékei miatt, valamint a VAR9 ami az idősorban a VAR6 és VAR7 értékeit erősítette korai maximumának megjelenésével, viszont számszerűleg csak önmagában nem jelentett volna a folyamatra nézve lényegi változást. Ezt igazolja a teljes adathalmazra történő illesztés eredménye is. Az alábbi táblázatban a korrelációs együttható jól mutatja, hogy a választott modellek a folyamatot megfelelően demonstrálják, a folyamat tendenciáját jól kísérik.

VAR	R	Függvénytípus
25	0,9306	kettős Gauss
256	0,9478	hármas Gauss
2567	0,9324	hármas Gauss
25678	0,8930	hármas Gauss
Total	0,9017	hármas Gauss

### 2. táblázat. Gauss modellek korrelációs együtthatói.

- Az Awrami függvény illesztésének eredményei:

A telítési függvény illesztésének korrelációs eredményei meghaladják a kettős vagy hármas Gauss esetén kapott értékeket.

VARK	R
25	0,9789
256	0,9821
2567	0,9869
25678	0,9885
Total	0,9882

### 3. táblázat. AWRAMI modell összefoglaló.

#### **Értékelés:**

A bemutatott grafikus reprezentáció, valamint az illesztések helyességét igazoló korrelációs érték azt mutatja, hogy a választott modellek alkalmasak a folyamat becslésére. A kettős Gauss függvény alkalmazása nyilván csak a kezdő két vírusú stádiumban használható a későbbiekben már nem. A hármas Gauss függvény viszont rugalmas, az ingadozó pontthalmaz

ellenére magas korrelációs együttható értékek mellett. Az illesztés eredménye azt mutatja, hogy a variánsok lépcsőzetes megjelenése ellenére nem mindegyik befolyásolja szignifikánsan a folyamatot. Az illesztett hármas Gauss függvény eredményeiből kimutatható, hogy a vizsgált időszakban a legdominánsabb variáns a maximum helyeinek alakulására nézve a VAR2 valamint a VAR7 illetve a VAR8. A maximum hely a VAR2 vonatkozásában a lépcsős illesztés ellenére is fixen maradt 12. hét. Itt megjegyzendő, hogy a 12. hét maximum értéke mindössze hatod része az abszolút maximum értéknek. A VAR7-t erősítette a VAR6 valamint a teljes adathalmaz vizsgálata során beléptetett VAR9, bár ennek a variánsnak az egyedszámai lényegesen kisebbek az előzőknél. Stabil maradt továbbá a VAR8-hoz rendelhető maximum hely is. A maximum helyekhez tartozó maximum értékek nyilván az összegzésből kifolyólag változnak.

Az Awrami függvény illesztése azt mutatja, hogy bár a folyamat lecsengése az újabb és újabb vírus variánsok megjelenése miatt megkérdőjelezhető, a függvény alkalmas az adathalmazok jellemzésére. Nem várható azonban az el, hogy adott hibahatárra jóslást adhassunk a folyamat végére.

## 5. Összefoglaló

A matematikai modellezés gyakori feladat, amelynek során többek között folyamatok időbeli lefutását kívánjuk jellemezni. Nem mindegy azonban, hogy jól mérhető egzakt mennyiségek közötti kapcsolatot elemzünk, vagy olyan jellegű adatsorokat, amelyek pontossága megkérdőjelezhető, számos véletlenszerű hatótényező miatt. A fentiekben vizsgált adatsorok ez utóbbi csoportba tartoznak, így a modellezés eredménye inkább csak durva becslésre alkalmas. Az említett adatbizonytalanság ellenére azonban a felhasznált modellek a tendenciákat jól követik, megadják továbbá a vizsgált vírus variánsok domináns tagjait. A vírus változékonyság miatt azonban, az alkalmazott modellek jövőbeli adat becslésre nem alkalmasak.

## Irodalomjegyzék

- [1] Csanády, V., Horváth-Szováti, E., Szalay, L., Alkalmazott statisztika, Sopron, Nyugat-Magyarországi Egyetem Kiadó (2013), 175p.
- [2] <https://www.ages.at>
- [3] Csanády, Viktória Kettős Gauss függvény alkalmazása Dimenziók, Matematikai közlemények 7, .(2019) 37-47. doi:10.20312/dim.2019.05
- [4] Bende, A., Csanády, V., László, R. Az erdei szalonka (*Scolopax rusticola* L.) magyarországi tavaszi vonulásának modellezése nemlineáris regressziós eljárások segítségével Dimenziók: Matematikai Közlemények 9, .(2021) 23-31. doi:10.20312/dim.2021.03

## A Coulomb-féle súrlódással csillapított rezgőmozgás – oktatói szemmel

**Barta Edit**

Soproni Egyetem Informatikai és Matematikai Intézet  
barta.edit@uni-sopron.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** A hallgató a tanulmányai során gyakran szembesül azzal, hogy egyes téma tárgyalásmódját „nem érti”, nehezen sajátítja el. Emögött gyakran az áll, hogy hiányosak a megértéshez szükséges matematikai és fizikai előismeretek. A súrlódással csillapított harmonikus rezgőmozgás egy szép példája annak, hogyan építhető fel egy új anyagrész úgy, hogy az minden ponton kapcsolódjék a hallgatók feltételezett előismereteihez.

**ABSTRACT.** During their studies, students are often confronted with the fact that they "don't understand" certain subjects, that they find it difficult to master them. This is often due to a lack of the mathematical and physical knowledge necessary for understanding. Harmonic oscillatory motion damped by friction is a good example of how to build up a new topic in such a way that it is linked at all points to the students' assumed prior knowledge.

### 1. Bevezetés

Matematika-fizika szakos hallgatóként majd mindkét tárgy oktatójaként felmerült bennem az a kérdés, hogy a csillapított harmonikus rezgőmozgás tárgyalásakor miért csak a sebességgel arányos csillapításról tanulunk, tanítunk, mikor a gyakorlatban a rezgést a súrlódási erő (is) csillapítja. Vajon milyen mozgás alakul ki, ha a szabadrezgést csak a súrlódás csillapítja, hogyan adható meg a mozgásegyenlet, abból hogyan vezethető le a kitérés-idő függvény. Bár tanulmányaim és oktatói munkám során nem volt szükség a probléma tárgyalására, érdeklődésemet újból felkeltette, amikor egy iskolai selejtezés során a kezembe akadt Bosznay Ádám: Mechanikai lengéstan I-II. című, 1961-es kiadású kézírata [1], melyben a 18-19. és a 35-41. oldalakon foglalkozik a témával. Nyelvezete és jelölésrendszere kissé régiesnek tűnik a fiatalabb korosztály számára, mértékegység használata pedig teljesen idejétmúlt. A mű a mozgásegyenletek levezetése helyett azok célirányos átalakításával kapott alakokból következtet a mozgás kitérés-idő függvényének képeire, s a grafikont felrajzolva elemzi azt.

Újabb keletkezésű a [2] tananyag, de ebben még mindig akad régebbi jelölés, és a levezetés is elnagyolt. Csernák Gábor [3] linken elérhető oktatási anyaga matematikáját tekintve részletes, de egyes jelölései és terminológiája eltér az általunk oktatottól.

Ezeket és még néhány interneten is hozzáférhető irodalmat tanulmányozva merült fel bennem annak ötlete, hogy a súrlódással csillapított rezgőmozgásnak egy olyan tárgyalási módját mutassam be, amely teljes egészében csak azokra a matematikai és fizikai ismeretekre épül, melyet egyetemünk hallgatói ezen két alapozó tárgy kurzusain már elsajátíthattak, és a jelölések is a tananyagainkhoz alkalmazkodnak. Jelen cikkemnek tehát hasonló a célkitűzése,

mint egy korábbi írásomnak [4], melyben a harmonikus rezgőmozgás matematikai tárgyalását próbáltam hozzáilleszteni a hallgatók fejében meglévő, feltételezett korábbi ismeretekhez. Azt, hogy a hallgatók fejében milyen gondolkodási sémák alakultak ki a rezgőmozgást illetően, azt nem tudhatjuk, csak azt, hogy korábban milyen formában (jelölésmóddal, szóhasználattal, levezetésekkel) találkozhattak a témával. Ez utóbbihoz célszerű illeszteni az új ismereteket, hogy azok minél könnyebben elsajátíthatóak legyenek.

## 2. A Coulomb-féle súrlódással csillapított rezgőmozgás tárgyalása

A műszaki életben megkülönböztetik a száraz és a nedves súrlódást. A középiskolában is tanult, egyszerűen csak (tapadási vagy csúszási) súrlódási erőnek nevezett erő, amely az egymással érintkező szilárd felületek elmozdulását igyekszik akadályozni, a száraz súrlódó erők csoportjába tartozik. Az, hogy az erő olyan tulajdonságokkal bír, mint ahogyan a tankönyvekben található (nagysága állandó a mozgás során és nem függ az érintkező felületek nagyságától csak azok anyagi minőségétől, ellentétes irányú a sebességgel, arányos a felületeket egymáshoz nyomó erővel), egy modell, amely akkor érvényes, ha a súrlódó felületek teljesen szárazak. Ekkor a súrlódó erő értéke a sebességtől is független. Az ilyen súrlódó erőt nevezik száraz súrlódó erőnek vagy Coulomb-féle súrlódó erőnek ([1] 18-19. old.). A felületek nedvesítése esetén a súrlódási erő sebességtől való függetlensége már nem mondható el. A száraz vagy Coulomb-féle súrlódási erőt a továbbiakban is súrlódási erőnek fogjuk nevezni, azzal a plusz tartalommal, hogy a felületek szárazak.

A továbbiakban az úgynevezett egy szabadságfokú mechanikai harmonikus rezgésekkel foglalkozunk, amikor a pontszerűnek tekintett test egy egyenes mentén mozdul el. A tömegpontra csak a kvázielasztikus és a súrlódási erő hat, nem hat más, például a szokásos, sebességgel arányos csillapító erő vagy külső kényszererő.

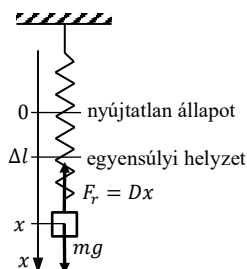
### 2.1. A szükséges fizikai és matematikai alapok

A téma tárgyalása a csillapítatlan és a sebességgel arányos csillapítású szabadrezgések után következhet. Ekkor már ismert a kvázielasztikus erő (ilyen a rugóerő is) fogalma és alakja, a hatására létrejövő harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete és annak megoldása, a kapott szinusz- vagy koszinusz függvényben szereplő fizikai mennyiségek (amplitúdó, körfrekvencia, frekvencia, periódusidő, fázis, fázisállandó vagy kezdőfázis) jelentése és egymással való kapcsolata. Ezen kívül fizikából szükségünk van még a súrlódási (mind a tapadási mind a csúszási) jelenségek és erők ismeretére, kiegészítve a fentebb leírtakkal. Matematikából a másodrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenletek homogén és inhomogén változatainak megoldási eljárásait fogjuk használni, a kapott eredmények értelmezéséhez pedig a függvénytranszformációk ismeretére lesz szükségünk. Ezek azok az ismeretek, amelyek szükségesek a téma megértéséhez, ezekhez kapcsolható az új anyag.

### 2.2. Egy bevezető feladat

A rugóra akasztott test mozgását általában függőleges helyzetben tanulmányozzuk, a mozgásegyenlet felírásakor azonban a rugó vízszintes, súrlódásmentes asztalon fekszik. Tesszük ezt mindazért, mert függőleges helyzetben a testre ható nehézségi erőt is figyelembe kell venni, ami vagy egy fokkal bonyolultabb mozgásegyenlet megoldását kívánja, vagy pedig egy koordináta-transzformációval iktatható ki. Mindkét módszer tanulságos és felhasználható a súrlódási erő figyelembe vételénél. Ezért lássuk most mindkettőt!





1. ábra. Függőleges helyzetű rugóra akasztott test és a rá ható erők

A függőleges rugóra akasztott testre két erő, a rugóerő és a nehézségi erő hat. E kettő eredője határozza meg a gyorsulását Newton II. törvénye alapján. Ha az  $x$ -tengely az 1. ábra szerint függőlegesen lefelé mutat, és kezdőpontját először a rugó nyújtatlan állapotában vesszük fel, akkor a dinamika alapegyenlete

$$m\ddot{x} = -Dx + mg \quad (1)$$

alakban írható. Ezt átrendezve és a tömeggel osztva, bevezetve az  $\omega^2 = \frac{D}{m}$  jelölést, kapjuk az

$$\ddot{x} + \omega^2 x = g \quad (2)$$

inhomogén lineáris, állandó együtthatós másodrendű differenciálegyenletet. A homogén rész általános megoldása [5] 72.old. alapján:

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t). \quad (3)$$

Az inhomogén rész egy partikuláris megoldását a próbafüggvények módszerével keressük, mely konstans esetén szintén konstansként veendő fel:

$$x_p = A.$$

Ennek deriváltjai nullák, behelyettesítve a (2) differenciálegyenletbe az

$$\omega^2 A = g$$

egyenletet kapjuk, melyből

$$A = \frac{g}{\omega^2},$$

ami egyben az inhomogén egyenlet keresett partikuláris megoldása. Ezzel a (2) egyenlet általános megoldása:

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2}. \quad (4)$$

Az egyszerűség kedvéért az indítás legyen az egyik szélső helyzetben, amelynek a rugó nyújtatlan állapotától számított koordinátája  $x_0$ . Itt engedjük el kezdősebesség nélkül a testet, vagyis a kezdeti feltételek:

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ v(0) &= \dot{x} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

A  $t = 0$ -t behelyettesítve a (4) általános megoldásba  $c_1 = x_0 - \frac{g}{\omega^2}$  adódik. Ezt behelyettesítve (4) egyenletbe, majd deriválva a kifejezést, kapjuk a sebességet:

$$\dot{x}(t) = -\left(x_0 - \frac{g}{\omega^2}\right) \omega \sin(\omega t) + \omega c_2 \sin(\omega t).$$

Ebbe helyettesítve a sebességre vonatkozó kezdeti feltételt,  $c_2 = 0$  adódik. Ezzel a (2) differenciálegyenlet megadott (5) kezdeti feltételeket is kielégítő partikuláris megoldása:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{g}{\omega^2}\right) \cos(\omega t) + \frac{g}{\omega^2}. \quad (6/a)$$

Első kérdés: milyen fizikai tartalommal bír a  $\frac{g}{\omega^2}$  kifejezés? Második: milyen mozgás alakul ki, és az hogyan ábrázolható? Az elsőre a válaszul úgy adhatjuk meg, ha felírjuk a rugóra akasztott test egyensúlyi állapotára az egyensúlyi egyenletet. Ebben a helyzetben a rugóerő és a nehézségi erő eredője zérus, vagyis a két erő egyenlő nagyságú és ellentétes irányú. Ha a rugó megnyúlását  $\Delta l$  jelöli, akkor az egyensúlyi egyenlet:

$$D\Delta l = mg, \quad (7)$$

melyből

$$\Delta l = \frac{mg}{D} = \frac{g}{\omega^2},$$

vagyis a  $\frac{g}{\omega^2}$  kifejezés éppen a rugónak a test egyensúlyi helyzetéhez viszonyított megnyúlása. A kinematikai mozgásegyenlet az egyensúlyi megnyúlással is felírható:

$$x(t) = (x_0 - \Delta l) \cos(\omega t) + \Delta l. \quad (6/b)$$

Ezek alapján a második kérdésre azt válaszolhatjuk, hogy a mozgás olyan csillapítatlan rezgőmozgás, amely a test egyensúlyi állapota körül megy végbe, amplitúdója  $A = |x_0 - \Delta l|$ , körfrekvenciája pedig ugyanakkora, mint amekkora lenne a rugó vízszintes helyzetében, nehézségi erő hatása nélkül. Vagyis a nehézségi erő a mozgás frekvenciáját nem változtatja meg, csak a rezgés középpontját tolja el a nyújtatlan állapotból az egyensúlyi állapotba. Ha a (6/b) egyenlet mindkét oldalából kivonjuk a  $\Delta l$ -et, akkor a bal oldalon az egyensúlyi helyzettől számított koordinátát kapjuk, mint az idő függvényét.

Ez a levezetés és gondolatmenet segít a súrlódással csillapított rezgés tárgyalásánál a differenciálegyenlet megoldásában és az általános megoldásaként kapott függvények elemzésének megértésében.

A függőleges rugóra akasztott test mozgásegyenlete felírásának másik lehetősége, hogy az  $x$ -tengely kezdőpontját eleve a test egyensúlyi helyzetében vesszük fel. Ekkor egy  $x$  koordinátával jellemzett helyen a testre ható rugóerő

$$F_r = -D(x + \Delta l)$$

alakban adható meg, amivel a mozgásegyenlet

$$m\ddot{x} = -D(x + \Delta l) + mg.$$

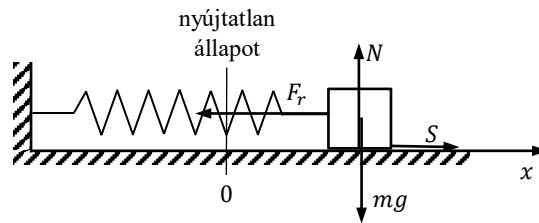
A zárójelet felbontva kapjuk:

$$m\ddot{x} = -Dx - D\Delta l + mg,$$

ahol a (7) egyensúlyi feltétel miatt  $-D\Delta l + mg = 0$ , így a mozgás differenciálegyenlete azonos a vízszintes helyzetű rugóra akasztott test mozgásegyenletével. Ez utóbbi meg gondolás egyszerűbb differenciálegyenletre és megoldásra vezet, de a száraz súrlódással csillapítás tárgyalásánál ez kevésbé hasznosítható, mint az előző, eltolt egyensúlyi helyzet körüli rezgés leírása.

### 2.3. A súrlódással csillapított rezgés differenciálegyenletei és azok általános megoldásai.

Legyen most a rugó vízszintes, és a rá akasztott tömegpont a rugó nyújtatlan állapotában legyen nyugalomban. Ebben a helyzetben vegyük fel az  $x$ -tengely kezdőpontját és a pozitív irány a 2. ábra szerint jobbra mutasson.



2. ábra. Vízszintes rugóra akasztott test és a rá ható erők

Térítsük ki a testet jobbra valamennyivel, és hagyjuk magára. Ebben a helyzetben a testre vízszintes irányban a balra mutató  $F_r$  rugóerő és a jobbra mutató  $S$  súrlódási erő hatnak, míg függőlegesen lefelé az  $mg$  nehézségi erő, felfelé pedig az asztal által kifejtett  $N$  nyomóerő hatnak. Mivel függőleges irányú elmozduláskomponens nincs, így ez utóbbi két erő eredője zérus, vagyis nagyságukat tekintve egyenlők. Ezek alapján a súrlódási erő

$$S = \mu N = \mu mg$$

nagyságú lesz. Az egyszerűség kedvéért tekintsünk most el a tapadási ( $\mu_0$ ) és a csúszási ( $\mu$ ) súrlódási együttható különbözőségétől, vegyük őket egyenlőknek.

Ahhoz, hogy a test mozgásba jöjjön, a rugóerőnek meg kell haladnia a tapadási erő maximumát, azaz fenn kell állnia a

$$D|x| \geq \mu mg$$

egyenlőtlenségnek. Ez akkor teljesül, ha

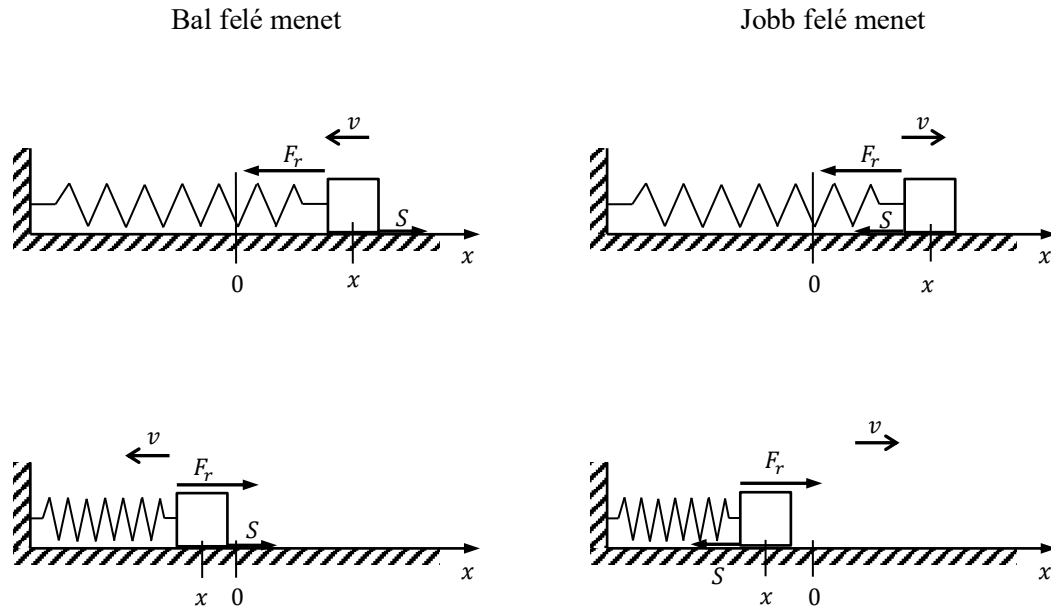
$$|x| \geq \frac{\mu mg}{D} = \frac{\mu g}{\omega^2} = x_0. \quad (8)$$

A jobb oldal átalakításánál ismét használtuk a szokásos  $\omega^2 = \frac{D}{m}$  jelölést.

Tegyük fel, hogy indításnál a tömegpont kitérése jobb oldalra nagyobb  $x_0$ -nál! Ekkor a test egy tetszőleges  $x$  koordinátájú helyén a dinamika alapegyenlete az

$$m\ddot{x} = -Dx \pm \mu mg \quad (9)$$

alakban adható meg, attól függően, hogy a tömegpont éppen balra ( $+\mu mg$ ) vagy jobbra ( $-\mu mg$ ) halad. Az előjelek helyes felvétele nagyon fontos a helyes végeredményhez, ezért a 3. ábra alapján érdemes átgondolni az  $x$  koordináta, a rugóerő és a súrlódási erő pozitív vagy negatív irányát a koordinátatengelyhez képest, mert ez dönti el pozitív vagy negatív előjelét a mozgásegyenletben.



3. ábra. Irányviszonyok a test egyes mozgásállapotaiban

Ha a jobb oldali szélső helyzetből kezdősebesség nélkül indítjuk a testet, akkor az első félperiódusban, amíg a bal oldali szélső helyzetbe ér, a sebesség balra mutat, a súrlódási erő ezzel ellentétesen jobbra, tehát ez utóbbi pozitív előjelű lesz a mozgásegyenletben. A második félperiódusban a mozgás jobbra történik, ekkor a súrlódási erő balra mutat, tehát negatív előjelű lesz. Minden páratlan félperiódusban pozitív, páros félperiódusban negatív előjelű lesz a súrlódási erő. Célszerű a két iránynak megfelelően két mozgásegyenletet felírni:

$$\text{bal felé menet: } m\ddot{x}_b = -Dx + \mu mg, \quad (10/b)$$

$$\text{jobb felé menet: } m\ddot{x}_j = -Dx - \mu mg. \quad (10/j)$$

Ezeket átrendezve és a szokásos alakra hozva kapjuk az

$$\ddot{x}_b + \omega^2 x = \mu g \quad (11/b)$$

$$\ddot{x}_j + \omega^2 x = -\mu g \quad (11/j)$$

inhomogén differenciálegyenleteket, melyek alakilag teljesen hasonlóak a bevezető feladatban felírt (2) differenciálegyenlethez.

A megoldás menete is hasonló. A homogén rész általános megoldása mindkettőnél a (3)-mal azonos, a konstans próbafüggvényre pedig a bal és a jobb iránynak megfelelően az

$$A_b = \frac{\mu g}{\omega^2} = x_0,$$

$$A_j = -\frac{\mu g}{\omega^2} = -x_0$$

adódnak. Ezzel a két inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x_b(t) = b_1 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t) + x_0, \quad (12/b)$$

$$x_j(t) = j_1 \cos(\omega t) + j_2 \sin(\omega t) - x_0. \quad (12/j)$$

Teljesen hasonló alakúak, mint a bevezető feladat (4) egyenlete. Ennek megfelelően a mozgás is hasonló. Mindkét egyenlet  $\omega$  körfrekvenciájú harmonikus rezgőmozgást ír le, tehát a Coulomb-féle súrlódás ugyanúgy nem változtatja meg a csillapítatlan szabadrezgés frekvenciáját, mint függőleges mozgás esetén a nehézségi erő. Mindkét harmonikus rezgőmozgás középpontja a rugó nyújtatlan állapotához ( $x$ -tengely nullpontja) képest el van tolva: bal felé menetben  $x_0$ -lal jobbra, jobb felé menetben  $x_0$ -lal balra. A rezgés középpontja így félciklusonként, a szélső helyzetekben, amikor a mozgás irányt vált, megváltozik. Az  $x_0$  fizikai jelentése (8) alapján az a távolság a nyújtatlan állapothoz képest, amelynél kisebb kitérés esetén a súrlódási erő egyensúlyt tart a rugóerővel. Ez azt jelenti, hogy ha a test sebessége az origótól felmért  $+x_0$  és  $-x_0$  szakaszon belül csökken nullára, akkor nulla is marad, azaz a test végleg megáll. Ezt a  $2x_0$  hosszúságú szakaszt érzéketlenségi sávnak ([1] 36. old.) vagy bizonytalansági zónának ([3]) nevezik. A test letapadása akkor történhet meg, ha a mozgás fordulópontja a zónán belülre vagy a határára esik. Hogy ez pontosan mikor és mely helyzetben történik meg, az a kezdeti feltételek ismeretében számítható ki.

#### 2.4. A differenciálegyenletek partikuláris megoldásai egy speciális indítás esetén

Indítsuk a mozgást kellően nagy kitéréssel a jobb oldali szélső helyzetben zérus kezdősebességgel. A kezdeti feltételek (5)-höz hasonlóan:

$$\left. \begin{aligned} x_b(0) &= A_0 > x_0 \\ v_b(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Innen a test balra indul el, tehát a (12/b) általános megoldásba helyettesítjük a  $t = 0$ -t. A  $b_1$  paraméterre

$$b_1 = A_0 - x_0$$

adódik, amit behelyettesítve a (12/b) egyenletbe, majd deriválva a kifejezést, kapjuk a sebességet:

$$\dot{x}_b(t) = -(A_0 - x_0)\omega \sin(\omega t) + \omega b_2 \sin(\omega t).$$

Ebbe helyettesítve a sebességre vonatkozó kezdeti feltételt  $b_2 = 0$  adódik. Ezzel a (12/b) differenciálegyenlet megadott (13) kezdeti feltételeket is kielégítő partikuláris megoldása:

$$x_{b1}(t) = (A_0 - x_0) \cos(\omega t) + x_0,$$

ahol  $t \in \left[0; \frac{T}{2}\right]$ . Ez az  $x_0$  helyzet körüli  $A_0 - x_0$  amplitúdójú koszinuszos rezgés első félperiódusát írja le. Ekkor a bal oldali szélső helyzetbe kerül a test, mozgása irányt vált, és a (12/j) függvény szerint folytatja. Ennek kezdeti kitérése azonos  $x_{b1}$  végső kitéréssel, kezdeti sebessége pedig zérus:

$$\left. \begin{aligned} x_j\left(\frac{T}{2}\right) &= x_{b1}\left(\frac{T}{2}\right) = (A_0 - x_0) \cos\left(\frac{2\pi T}{T} \frac{T}{2}\right) + x_0 = -(A_0 - 2x_0) \\ v_j\left(\frac{T}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Felhasználtuk a körfrekvencia és a periódusidő közötti  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  összefüggést és azt, hogy  $\cos \pi = -1$ . A  $t = \frac{T}{2}$  időt (12/j)-be helyettesítve

$$j_1 = A_0 - 3x_0,$$

a sebességre vonatkozó zérus kezdeti feltétel pedig itt is  $j_2 = 0$ -t eredményez. Így a második félperiódusban a mozgást az

$$x_{j2}(t) = (A_0 - 3x_0) \cos(\omega t) - x_0$$

függvény írja le, ahol  $t \in \left[\frac{T}{2}; T\right]$ . Ez egy  $A_0 - 3x_0$  amplitúdójú rezgés a  $-x_0$  helyzet körül. Ennek végén az újabb jobb oldali szélső helyzetben a kitérés

$$x_{j2}(T) = A_0 - 4x_0,$$

mely a következő, harmadik félperiódus kezdeti kitérése. Ezt újra (12/b)-be helyettesítjük, ezzel

$$b_1 = A_0 - 5x_0,$$

a kinematikai mozgásegyenlet pedig

$$x_{b3}(t) = (A_0 - 5x_0) \cos(\omega t) + x_0,$$

ahol  $t \in \left[T; \frac{3T}{2}\right]$ . Ez egy  $x_0$  körüli  $A_0 - 5x_0$  amplitúdójú rezgés. Következik a  $\frac{3T}{2}$  időpontban a második baloldali szélső helyzet meghatározása, majd ennek mint a negyedik félperiódus kezdeti feltételének behelyettesítése (12/j)-be és  $x_{j3}(t)$  felírása. A szélső helyzetekben a sebesség zérus volta miatt a  $b_2$  és  $j_2$  konstansok mindig nullák lesznek, mint ahogy láttuk a bevezető feladatnál és az első bal felé történő mozgás konstansainak meghatározásánál.

A kinematikai mozgásegyenletek további szakaszonkénti felírása ennek a módszernek a folytatásával történhet. Gondolkodtató kis matematikai feladvány a szakaszonkénti általánosított alak felírása, melyhez a következő lépéseken érdemes végigmenni. A balra tartó mozgások félperiódusainak sorszámát a páratlan számokkal, a jobbra történő mozgás félperiódusainak sorszámát a páros számokkal jellemezzük. Írjuk egymás alá a bal és a jobb irányú mozgások sorszámait, a hozzájuk tartozó amplitúdókat és a félperiódusok határait  $T/2$  egész számú többszöröseiként! Annyit írjunk, amennyiből már látszik a szabály! A felírást az olvasóra bízunk. Az általános egyenletek alakja:

$$x_{n+1}(t) = [A_0 - (2n + 1)x_0] \cos(\omega t) + (-1)^n x_0, \quad t \in \left[n \frac{T}{2}; (n + 1) \frac{T}{2}\right], \quad (14)$$

ahol  $n$  természetes szám (0-tól indítva).

Tehát a test olyan harmonikus rezgőmozgást végez, amelynek középpontja minden szélső helyzetben megváltozik, és ehhez a szakaszonkénti középponthez képesti amplitúdó minden félperiódusban  $2x_0$ -al csökken. A rugó nyújtatlan állapotához ( $x = 0$ ) képesti egymást követő maximális kitérések szintén  $2x_0$ -al csökkennek, de az alábbiak szerint:

$$A_n = A_0 - 2nx_0.$$

Ez egy számtani sorozat, melynek a differenciája  $2x_0$ .

A mozgás addig tart, amíg a maximális kitérés  $x_0$ -nál kisebb nem lesz. Ebben a szélső helyzetben zérusra csökken a test sebessége, és mivel a bizonytalansági zónában állt meg, már nem indul el. A kérdés, hogy mely időpillanatban és hol következik be a végleges megállás? A megállás feltétele tehát:

$$A_0 - 2nx_0 \leq x_0,$$

ebből

$$\frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{x_0} - 1 \right) \leq n. \quad (15)$$

Az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezést felfelé kerekítve egész számra, kapjuk  $n$  értékét. Az ehhez tartozó  $t = n \frac{T}{2}$  időpillanatban áll meg a test. A megállás helyét pedig úgy kapjuk, hogy az  $n$ -nek megfelelő  $x_{n+1}(t)$  függvénybe helyettesítjük a  $t = n \frac{T}{2}$  időpillanatot:

$$x_{\text{megállás}} = x_{n+1} \left( n \frac{T}{2} \right) = (A_0 - 2nx_0) \cos(n\pi) = (-1)^n (A_0 - 2nx_0). \quad (16)$$

**Megjegyzés:** A Coulomb-csillapítással kialakuló rezgés nem periodikus mozgás, és csak véges ideig tart. Így szigorúan véve  $T$ -t sem nevezhetnénk „periódusidő”-nek, viszont a mozgásegyenletekben betöltött szerepe bizonyos tekintetben azonos a periodikus mozgásokéban betöltöttel. Például az, hogy két egymást követő maximális kitérés között mindig  $T/2$  idő telik el. A pillanatnyi rezgési középponton és a szélső helyzeteken való áthaladások között is mindig azonos,  $T/4$  idő telik el. Viszont a rugó nyújtatlan állapotához tartozó  $x = 0$  helyzeteken való két egymást követő áthaladás között a mozgás más és más szakaszában más és más időtartam telik el. Az idő növekedtével ez az időtartam is nő.

## 2.5. A kitérés-idő függvény ábrázolása

A kapott (14) kitérés-idő függvény ábrázolása általánosan nem egyértelmű, mert csak  $A_0$  és  $x_0$  arányának ismeretében dönthető el, hogy hányadik félperiódusban és hol áll meg a test. A függvény eddig megtárgyalt tulajdonságai alapján az ábrázolás a következő elvek alapján történhet. Az időtengellyel párhuzamosan, attól  $x_0$  távolságban fölfelé és lefelé húzunk egy vízszintes egyenest. E kettő közötti sáv a bizonytalansági zóna, és egyúttal e két tengely jelenti a koszinusz függvények félperiódusonkénti középvonalát. A függvény rajzolását a pozitív kitérésnek megfelelő  $A_0$  magasságból indítjuk, onnan rajzolunk egy fél koszinusz függvényt, mely  $T/4$  időpontban metszi az  $x_0$  magasságban behúzott tengelyt, és újabb  $T/4$  idő elteltével az  $x_0$  alatt, attól  $A_0 - x_0$  távolságban éri el minimumát. Innen fölfelé rajzoljuk a következő fél koszinusz hullámot, de most a  $-x_0$  magasságban futó tengely legyen a középvonala, tehát ezt metszi  $T/4$  idő múlva, majd újabb  $T/4$  idő elteltével ehhez képest szimmetrikusan, a pozitív tartományban éri el a maximumát. Innen megint lefelé indulunk  $x_0$

középvonallal, és így tovább, amíg az egyik maximális kitérés nem esik a bizonytalansági zónába. Ott van vége a mozgásnak és a grafikonnak is.

A 4. ábrán egy konkrét adatokkal felvett kitérés-idő függvény grafikonja látható. A fizikai kiinduló adatok helyett a függvény paramétereit adtuk meg. A megállás helye és ideje a grafikon felvázolásával és számolással is meghatározható. Ez utóbbi esetén először a (15) összefüggés alapján meghatározzuk  $n$ -et, azt a félperiódust, amelynek a végén megáll a test:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{x_0} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{16}{1,5} - 1 \right) = 4,83,$$

melyet felfelé kerekítve

$$n = 5.$$

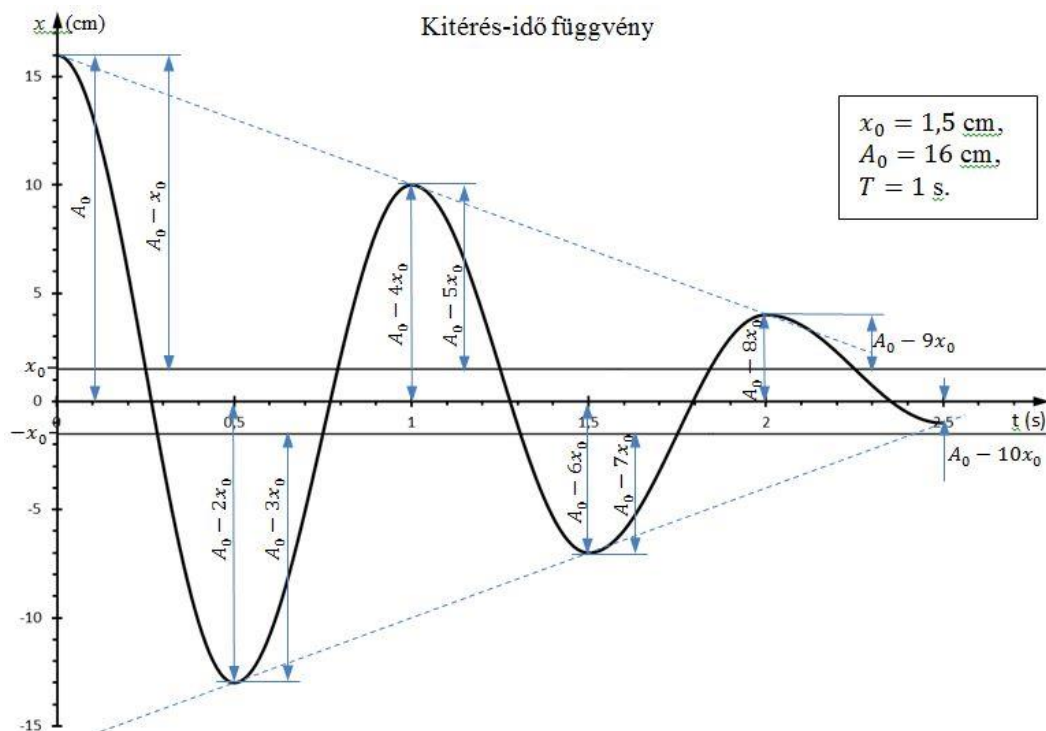
Ezt (16)-ba helyettesítve a megállás helye

$$x_{\text{megállás}} = (-1)^5 (16 - 10 \cdot 1,5) = -1 \text{ cm},$$

ideje pedig

$$t = n \frac{T}{2} = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2,5 \text{ s},$$

ami a grafikonról is jól látható.



4. ábra. A Coulomb-féle súrlódással csillapított harmonikus rezgőmozgás kitérés-idő függvényének képe egy konkrét esetben



### 3. Összefoglaló

Egy már látott vagy könnyen elképzelhető, egyszerűbb, esetleg már levezetett példával bevezetve, annak analógiájára mutattam be a Coulomb-féle súrlódással csillapított harmonikus rezgőmozgás egy lehetséges tárgyalásmódját. A tárgyalás során törekedtem arra, hogy csak olyan matematikai és fizikai ismeretekre támaszkodjak, amelyeknek egyetemi hallgatóink már feltételezhetően birtokában vannak. Bízom benne, hogy lesz olyan hallgató, aki elolvasva az anyagot úgy érzi majd, hogy ezt akár ő maga is levezethette volna.

### Irodalomjegyzék

- [1] **Bosznay, Á.**: Mechanikai lengéstan I-II., Kézirat, Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Kar, Tankönyvkiadó, Bp. (1961).
- [2] **Dr. Czifra, Á., Dr. Goda, T.**: Mechanika III. Kinematika és Kinetika, (2014) 18. fejezet, [https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0054\\_mechanika\\_iii\\_kinematika\\_kinetika/ch18.html](https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0054_mechanika_iii_kinematika_kinetika/ch18.html)
- [3] <https://www.mm.bme.hu/~csernak/kontakt/coulomb.pdf>
- [4] **Barta, E.**: Matematikai kiegészítések a harmonikus rezgőmozgás tárgyalásához, Dimenziók, Mat. Közl. **9** (2021), 51-61. doi:10.20312/dim.2021.06
- [5] **Barta, E., Nagy, Zs., Salay, L.**: Matematika 1.: EMK/SKK – BSc, Sopron, Magyarország: Soproni Egyetem Kiadó (2018) 72-73.



## Gerjesztett rezgések differenciálegyenletes modelljei

**Horváth-Szováti Erika**

Soproni Egyetem, Informatikai és Matematikai Intézet  
horvath-szovati.erika@uni-sopron.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** A gerjesztett rezgések mozgásegyenletei másodrendű differenciálegyenletek, melyekkel hallgatóink erdészeti, faipari és környezetvédelmi kutatások területén is találkozhatnak. A differenciálegyenletek gyakorlati jelentőségére az alábbi egyszerű fizikai példákkal szeretnénk rávilágítani.

**ABSTRACT.** The equations of motion of excited vibrations are second-order differential equations, which students can encounter in the fields of forestry, wood industry and environmental protection research, among others. Here is an illustration of this type of differential equation with simple physical examples.

### 1. Bevezetés

A felsőbb matematika oktatása során egy adott téma gyakorlati alkalmazására legtöbbször nehéz szemléletes, viszonylag könnyen érthető példát adni. Ilyen a differenciálegyenletek témaköre is. A rezgések mozgásegyenletei állandó együtthatós, másodrendű, lineáris, homogén vagy inhomogén differenciálegyenletek. Az előző évi kiadványban a homogén esetet szemléltettük csillapított rezgések mozgásegyenleteinek felírásával, és elemeztük a megoldásul kapott kitérés-idő függvényeket [2]. Most ugyanennek a differenciálegyenlet-típusnak az inhomogén esetére mutatunk kidolgozott példákat a kényszerrezgések témaköréből. Megvizsgáljuk az eredményül kapott kitérés-idő függvényeket, és rámutatunk arra, hogy a matematikai megoldás során tapasztalt rezonancia, és a fizikai értelemben vett rezonancia fogalma szorosan kapcsolódik egymáshoz.

### 2. Gerjesztett harmonikus rezgés

Gerjesztett harmonikus rezgés során a rezgő testre egy külső, harmonikus gerjesztő erő hat. Legegyszerűbb példa az, amikor egy rugóra akasztott testtel végzünk kísérletet oly módon, hogy a rugó felső végét fel-le mozgatjuk, és a test ennek következtében kényszerrezgést végez. Ilyen típusú mozgás az is, amikor a hintát lökésekkel állandó mozgásban tartjuk. A rugóra akasztott  $m$  tömegű,  $a$  gyorsulással mozgó test mozgásegyenlete [1]:

$$ma = -F_{\text{rugó}} - F_{\text{közeg}} + F_{\text{gerjesztő}}. \quad (1)$$

Legegyszerűbb esetben a gerjesztő erő szinuszosan vagy koszinuszosan változik. Legyen  $F_{\text{gerjesztő}} = F_0 \sin \omega t$ , ahol  $F_0$  a maximális gerjesztő erő,  $\omega$  a gerjesztő erőt jellemző körfrekvencia. A továbbiakban a test kitérés-idő függvényét  $x(t)$ -vel, a sebesség-idő függvényét  $\dot{x}(t)$ -vel, gyorsulás-idő függvényét  $\ddot{x}(t)$ -vel jelöljük. A rugóerő a kitéréssel

egyenesen arányos, az arányossági tényező a  $D$  rugóállandó. A közegből származó csillapítás a test sebességével egyenesen arányos, és az arányossági tényező jele  $k$  (csillapítási tényező). Ezeket felhasználva az (1) egyenlet a következő alakban írható fel:

$$m \ddot{x}(t) = -D \cdot x(t) - k\dot{x}(t) + F_0 \sin\omega t. \quad (2)$$

Ha a (2) egyenletet elosztjuk a test tömegével, és felhasználjuk a fizikából ismert  $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$  összefüggést (ahol  $\omega_0$  a rezgés saját körfrekvenciája), valamint a  $\frac{k}{2m} = \beta$ , és  $a_0 = \frac{F_0}{m}$  jelöléseket, akkor az alábbi alakot kapjuk:

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 \cdot x(t) - 2\beta\dot{x}(t) + a_0 \sin\omega t. \quad (3)$$

Ezt a differenciálegyenletet most elsősorban matematikai szempontból vizsgáljuk, ezért a fizikai tartalmának magyarázatát nagyon leegyszerűsítjük. Elegendő azt szem előtt tartani, hogy milyen információt hordoznak a konstansok. Az egyenletben szereplő  $\omega_0$  a rezgő rendszerrel (rugó és test együtt) kapcsolatos ( $[\omega_0] = \frac{1}{s}$ ), a  $\beta$  a csillapító közeg jellemzője ( $[\beta] = \frac{1}{s}$ ), az  $a_0$  és az  $\omega$  pedig a gerjesztő erő jellemzői ( $[a_0] = \frac{m}{s^2}$ ,  $[\omega] = \frac{1}{s}$ ). A (3) egyenletet átrendezve látható, hogy egy állandó együtthatós, másodrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet, ahol a jobb oldalon álló  $a_0 \sin\omega t$  a zavaró függvény [3]:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = a_0 \sin\omega t. \quad (4)$$

Az egyszerűbb esetek megoldásához hallgatóink matematikai ismeretei is elegendőek, a következőkben erre nézünk néhány kidolgozott feladatot. A kapott kitérés-idő függvények ábrázolásával szemléletes kapcsolatot tudunk teremteni a kísérlet és annak matematikai modellje között.

### 3. Mintafeladatok

A (4) differenciálegyenletből származtatott homogén egyenletre felírt karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa  $D = 4(\beta^2 - \omega_0^2)$ . Ha  $\beta < \omega_0$  (azaz  $D < 0$ ), akkor a két gyök egy komplex konjugált számpár. Ilyenkor az  $x(t)$  megoldás matematikai alakja attól függően változik, hogy  $\beta = 0$  vagy  $\beta \neq 0$ , illetve  $\omega = \omega_0$  vagy  $\omega \neq \omega_0$ . A próbafüggvény felírásakor csak akkor fordul elő rezonancia, ha  $\beta = 0$  és  $\omega = \omega_0$ . Ha  $\beta > \omega_0$  (azaz  $D > 0$ ), akkor a karakterisztikus egyenletből két valós gyök, ha  $\beta = \omega_0$  (tehát  $D = 0$ ), akkor egyetlen valós gyök adódik, és a próbafüggvényben egyik esetben sem tapasztalunk rezonanciát [4]. Az alábbiakban ezeket az eseteket tekintjük át egy-egy egyszerű kidolgozott példa segítségével.

Valamennyi mintafeladatban kényszerrezgésről van szó. Egy harmonikus rezgőmozgást végző testre szinuszosan változó gerjesztő erő, és egyes esetekben (ha a feladatban  $\beta \neq 0$ ) a közegből származó csillapítás is hat. A mozgást befolyásoló, a fentiekben megmagyarázott jellemzők:  $\omega_0$ ,  $\beta$ ,  $a_0$ ,  $\omega$ , ezek értékei az egyes példákban adottak. A kezdeti feltételek minden esetben azonosak: a test kitérése  $t = 0$  s időpillanatban 0 méter, a sebessége ugyanekkor  $0 \frac{m}{s}$ . A feladatokat alább külön nem szövegezzük meg, csak az adatokat közöljük.

### 3.1. $\beta < \omega_0$

**3.1.1. feladat.**  $\beta \neq 0$ ,  $\omega \neq \omega_0$  eset.

$\beta = 0,5 \frac{1}{s}$ ,  $\omega_0 = \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{1}{s}$ ,  $a_0 = 1 \frac{m}{s^2}$ ,  $\omega = 1 \frac{1}{s}$ . Határozzuk meg a test kitérését a  $t = 3s$  időpillanatban!

**Megoldás.**

Behelyettesítve (4)-be az adatokat az

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + \frac{5}{4}x(t) = \text{sint} \quad (5)$$

differenciálegyenletet kapjuk. A megoldás első lépése a homogén egyenletből származtatott karakterisztikus egyenlet gyökeinek meghatározása (ahol  $x(t) = e^{\lambda t}$ ):

$$\lambda^2 + \lambda + \frac{5}{4} = 0, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i.$$

Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$x_H(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(C_1 \text{sint} + C_2 \text{cost}), \quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását próbafüggvény módszerével keressük meg:

$$x_P(t) = A \text{sint} + B \text{cost}, \quad \text{ahol } A, B \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

A próbafüggvény első és második deriváltját (5)-be helyettesítve:

$$-A \text{sint} - B \text{cost} + A \text{cost} - B \text{sint} + \frac{5}{4}(A \text{sint} + B \text{cost}) = \text{sint}.$$

Ebből együttható egyeztetéssel  $A = \frac{4}{17}$ ,  $B = -\frac{16}{17}$ . Ezeket (7)-be beírva:

$$x_P(t) = \frac{4}{17} \text{sint} - \frac{16}{17} \text{cost}. \quad (8)$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása (6) és (8) összege:

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(C_1 \text{sint} + C_2 \text{cost}) + \frac{4}{17} \text{sint} - \frac{16}{17} \text{cost}, \quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Az  $x(0) = 0$  kezdeti feltételt (9)-be helyettesítve  $C_2 = \frac{16}{17}$  adódik. A másik kezdeti feltételhez (9)-et deriválni kell:

$$\dot{x}(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[ \left( -\left( \frac{1}{2}C_1 + C_2 \right) \right) \text{sint} + \left( C_1 - \frac{1}{2}C_2 \right) \text{cost} \right] + \frac{4}{17} \text{cost} + \frac{16}{17} \text{sint},$$

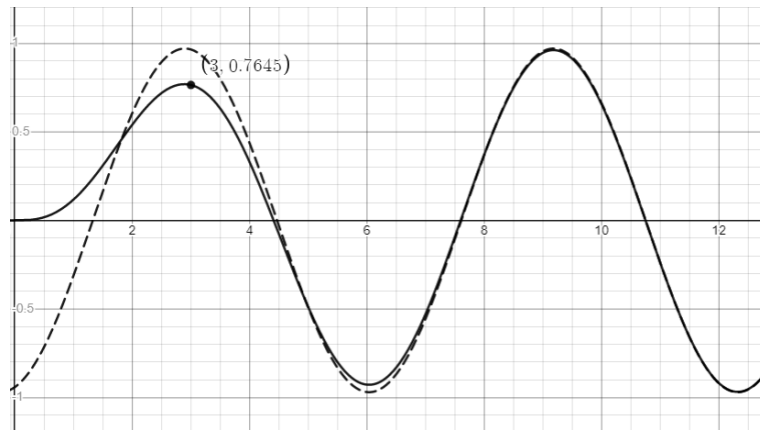
ebből  $\dot{x}(0) = 0$  miatt  $C_1 = \frac{4}{17}$ . Az adott kezdeti feltételeknek megfelelő kitérés-idő függvény tehát:

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left( \frac{4}{17} \text{sint} + \frac{16}{17} \text{cost} \right) + \frac{4}{17} \text{sint} - \frac{16}{17} \text{cost}. \quad (10)$$

A kitérés idő függvénybe behelyettesítve a  $t = 3\text{s}$  értéket megkapjuk a test kitérését az adott időpillanatban:  $x(3) \approx 0,7645 \text{ (m)}$ .

Az 1. ábrán a (10) kitérés-idő függvény ábrázolása folytonos vonallal történt (vízszintes tengely: idő (s), függőleges tengely: kitérés (s), valamennyi további ábrán a koordinátarendszerek tengelyeit ugyanígy értelmezzük). Látható, hogy az idő múlásával a rezgés állandósul. Ennek oka az, hogy a függvényben  $t \rightarrow \infty$  esetén az első tag határértéke nulla (mivel  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2}t} = 0$ ), és az állandósult állapot kitérés-idő függvénye a második és harmadik tagból áll csak (ez az 1. ábrán szaggatott vonallal látható):

$$x_{\text{áll}}(t) = \frac{4}{17} \sin t - \frac{16}{17} \cos t.$$



1. ábra. A 3.1.1. feladat kitérés-idő függvénye

Megjegyzés: Ha pl.  $\beta = 1 \frac{1}{s}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{2} \frac{1}{s}$ ,  $a_0 = 1 \frac{m}{s^2}$ ,  $\omega = 1 \frac{1}{s}$ , akkor  $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ , ami matematikai szempontból kicsit egyszerűbben megoldható eset. Hátránya azonban az, hogy ekkor a végeredményben  $e^{-t}$  együttható lesz a 3.1.1. feladatban szereplő  $e^{-\frac{1}{2}t}$  helyett, és a kényszererő hatása kevésbé látványos (hamarabb „együtt mozog”  $x(t)$  és  $x_{\text{áll}}(t)$ ).

**3.1.2. feladat.**  $\beta \neq 0$ ,  $\omega = \omega_0$  eset.

$\beta = 0,5 \frac{1}{s}$ ,  $\omega = \omega_0 = 1 \frac{1}{s}$ ,  $a_0 = 1 \frac{m}{s^2}$ . Határozzuk meg a test kitérését a  $t = 3\text{s}$  időpillanatban!

**Megoldás.**

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \sin t.$$

Részletesen nem vezetjük le, mert hasonló az előbbi feladathoz. A karakterisztikus egyenlet gyökei a  $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$  komplex konjugált számpár, az  $x_p(t)$  felírásakor rezonancia nincs:

$$x_p(t) = A \sin t + B \cos t, \text{ ahol } A = 0, B = -1.$$

A megoldásul kapott, kezdeti feltételeknek megfelelő kitérés-idő függvény:

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) - \cos t.$$

Ebbe behelyettesítve a  $t = 3s$  értéket megkapjuk a test kitérését az adott időpillanatban:  $x(3) \approx 0,8656(m)$ . A függvény grafikonja nagyon hasonló a 3.1.1. feladatnál látható 1. ábrához, emiatt nem közöljük. A rezgés kb.  $t = 6s$ -től állandósul,  $x_{\text{átl}}(t) = -cost$ .

**3.1.3. feladat.**  $\beta = 0$ ,  $\omega \neq \omega_0$  eset.

$\beta = 0 \frac{1}{s}$ ,  $\omega_0 = 0,2 \frac{1}{s}$ ,  $a_0 = 1 \frac{m}{s^2}$ ,  $\omega = 0,3 \frac{1}{s}$ . Határozzuk meg a test kitérését a  $t = 30s$  időpillanatban!

**Megoldás.**

Az adatokat behelyettesítve (4)-be az

$$\ddot{x}(t) + 0,04x(t) = \sin 0,3t \quad (11)$$

differenciálegyenletet kapjuk. A megoldás első lépése a homogén egyenletből származtatott karakterisztikus egyenlet gyökeinek meghatározása (ahol  $x(t) = e^{\lambda t}$ ):

$$\ddot{x}(t) + 0,04x(t) = 0,$$

$$\lambda^2 + 0,04 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm 0,2i.$$

Ebből a homogén egyenlet általános megoldása

$$x_H(t) = C_1 \sin 0,2t + C_2 \cos 0,2t, \quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását próbafüggvény módszerével keressük meg. A próbafüggvény:

$$x_p(t) = A \sin 0,3t + B \cos 0,3t, \quad \text{ahol } A, B \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

A próbafüggvény első és második deriváltját (11)-be helyettesítve:

$$-0,09A \sin 0,3t - 0,09B \cos 0,3t + 0,04(A \sin 0,3t + B \cos 0,3t) = \sin 0,3t.$$

Ebből együttható egyeztetéssel  $A = -20$ , illetve  $B = 0$ . Ezeket visszairva (13)-ba:

$$x_p(t) = -20 \sin 0,3t. \quad (14)$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása (12) és (14) összege:

$$x(t) = C_1 \sin 0,2t + C_2 \cos 0,2t - 20 \sin 0,3t, \quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Az  $x(0) = 0$  kezdeti feltételt behelyettesítve (15)-be  $C_2 = 0$  adódik. A másik kezdeti feltételhez (15)-öt deriválni kell:

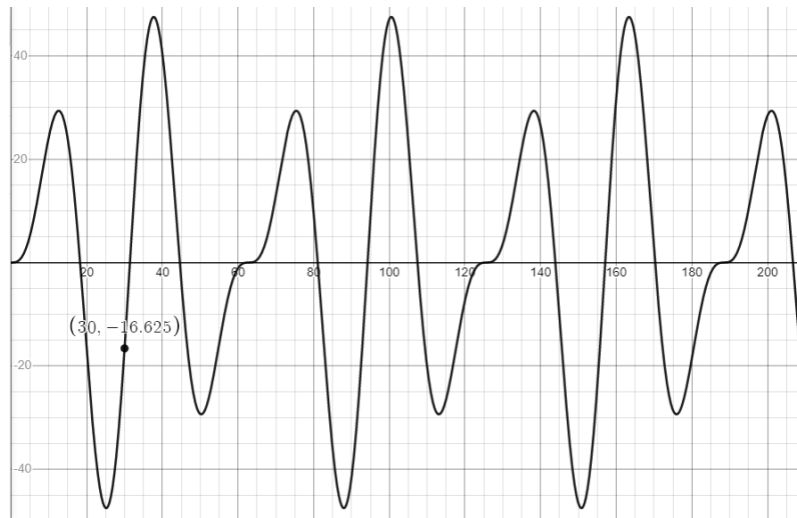
$$\dot{x}(t) = 0,2C_1 \cos 0,2t - 0,2C_2 \sin 0,2t - 6 \cos 0,3t.$$

Ebbe beírva az  $\dot{x}(0) = 0$  feltételt  $C_1 = 30$  adódik. A  $C_1$  és  $C_2$  konstansokra kapott értékeket visszairva (15)-be a kezdeti feltételeknek megfelelő kitérés-idő függvény:

$$x(t) = 30 \sin 0,2t - 20 \sin 0,3t. \quad (16)$$

Behelyettesítve megkapjuk, hogy a test kitérése  $t = 30s$  időpillanatban közelítőleg  $-16,625$  méter (a negatív előjel a kitérés irányára utal). Látható, hogy (16) két korlátos, periodikus

függvény különbsége. A különbségfüggvény is korlátos és periodikus lesz, periódusa a kisebbítendő és kivonandó függvények periódusainak ( $10\pi$  és  $\frac{20}{3}\pi$ ) a legkisebb közös többszöröse:  $20\pi$ .



2. ábra. A 3.1.3. feladat kitérés-idő függvénye

Erről az esetről általánosan is elmondható, hogy a karakterisztikus egyenlet megoldása egy komplex konjugált számpár, de csak képzetes részből állnak, a valós részük nulla (mivel  $\beta = 0$ ). Emiatt  $x_H$ -ban csak trigonometrikus tagok szerepelnek, az exponenciális szorzó hiányzik. Mivel  $\omega \neq \omega_0$ , a próbafüggvény az  $x_H$ -val soha nem lesz rezonanciában. A kitérés-idő függvény ezekben az esetekben már a kezdőpillanattól kezdve állandósul és periodikus lesz.

**3.1.4. feladat.**  $\beta = 0$ ,  $\omega = \omega_0$  eset.

$\beta = 0 \frac{1}{s}$ ,  $\omega = \omega_0 = 1 \frac{1}{s}$ ,  $a_0 = 2 \frac{m}{s^2}$ . Határozzuk meg a test kitérését a  $t = 10s$  időpillanatban!

**Megoldás.**

Behelyettesítve (4)-be az adatokat az

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 2\sin t \quad (17)$$

differenciálegyenletet kapjuk. A megoldás első lépése a homogén egyenletből származtatott karakterisztikus egyenlet gyökeinek meghatározása (ahol  $x(t) = e^{\lambda t}$ ):

$$\lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$x_H(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t, \quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását próbafüggvény módszerével keressük meg. A differenciálegyenlet jobb oldalán álló zavaró függvény alakja és a (18)-cal fennálló rezonancia miatt a próbafüggvény (ahol a  $t$  szorzóval a rezonanciát szüntettük meg):

$$x_p(t) = (A \sin t + B \cos t)t, \quad \text{ahol } A, B \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

A próbafüggvényt és második deriváltját (17)-be behelyettesítve:



$$2A\cos t - 2B\sin t = 2\sin t.$$

Ebből együttható egyeztetéssel  $A = 0$ ,  $B = -1$ . Ezeket visszairva (19)-be:

$$x_p(t) = -t\cos t. \quad (20)$$

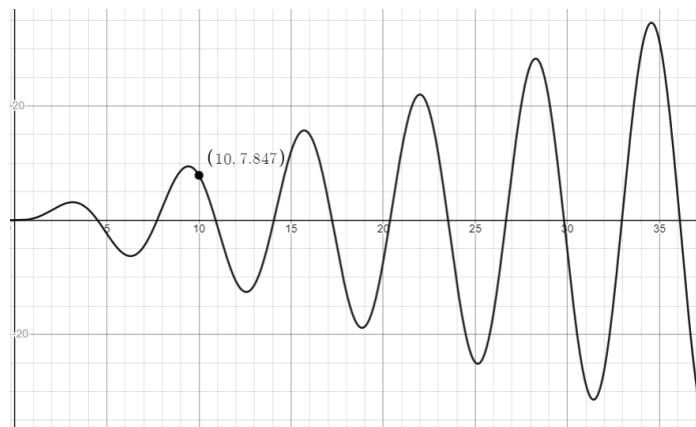
Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása (18) és (20) összege:

$$x(t) = C_1\sin t + C_2\cos t - t\cos t, \quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

Az  $x(0) = 0$  kezdeti feltételt (21)-be behelyettesítve  $C_2 = 0$  adódik. A másik kezdeti feltételhez (21)-et deriválni kell, ebből a  $\dot{x}(0) = 0$  feltétel miatt  $C_1 = 1$ . A kezdeti feltételeknek megfelelő kitérés-idő függvény tehát:

$$x(t) = \sin t - t\cos t. \quad (22)$$

A  $t = 10$ s-hoz tartozó függvényérték közelítőleg 7,847 méter. A 3. ábrán a (22) kitérés-idő függvényt ábrázoltuk. A függvény alakja azzal magyarázható, hogy a kisebbítendő  $\sin t$  egy korlátos, periodikus függvény, a kivonandó  $t\cos t$  pedig egy szintén korlátos és periodikus trigonometrikus függvény, illetve a  $t \rightarrow \infty$  tényező szorzata. A különbség az ábrán látható módon egyre nagyobb amplitúdójú rezgést eredményez. Ezt a jelenséget a fizikában rezonanciának hívják.



3. ábra. A 3.1.2. feladat kitérés-idő függvénye

Általánosan is elmondható, hogy ha  $\beta = 0$ , akkor a karakterisztikus egyenlet megoldása egy olyan komplex konjugált számpár, amelynek a valós része nulla. Emiatt  $x_H$ -ban csak trigonometrikus tagok szerepelnek, az exponenciális tényezők hiányoznak. Mivel  $\omega = \omega_0$ , így akár szinuszosan, akár koszinuszosan változik a gerjesztő erő, a próbafüggvény az  $x_H$ -ban szereplő tagok valamelyikével rezonanciában lesz. Ezt a rezonanciát a próbafüggvényben egy  $t$  szorzóval tudjuk feloldani. A megoldásul kapott kitérés-idő függvényben ez a  $t$  szorzó okozza azt, hogy az amplitúdó a „végtelenségig nő”. Tehát a matematikai értelemben vett rezonancia (illetve az ennek feloldására használt  $t$  szorzó bevezetésével kialakuló függvény) és a fizikai értelemben vett rezonancia (a „végtelenségig” növekedő amplitúdó) fogalma szorosan összefonódik. A rezonancia kapcsán érdemes megemlíteni a Tacoma-híd katasztrófáját, amely 1940 novemberében a szél által gerjesztett rezgések következtében egyre nagyobb amplitúdóval rezgett, végül összeomlott.

### 3.2. $\beta > \omega_0$

#### 3.2.1. feladat.

$\beta = 2,5 \frac{1}{s}$ ,  $\omega_0 = 2 \frac{1}{s}$ ,  $a_0 = 1 \frac{m}{s^2}$ ,  $\omega = 1 \frac{1}{s}$ . Határozzuk meg a test kitérését a  $t = 2s$  időpillanatban!

#### Megoldás.

Behelyettesítve (4)-be az adatokat az

$$\ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) + 4x(t) = \sin t \quad (23)$$

differenciálegyenletet kapjuk. A megoldás első lépése a homogén egyenletből származtatott karakterisztikus egyenlet gyökeinek meghatározása (ahol  $x(t) = e^{\lambda t}$ ):

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4.$$

Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$x_H(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}, \quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (24)$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását próbafüggvény módszerével keressük meg, rezonancia nincs:

$$x_p(t) = A \sin t + B \cos t, \quad \text{ahol } A, B \in \mathbb{R}. \quad (25)$$

A próbafüggvényt egyszer, majd még egyszer deriváljuk, és a kapott függvényeket behelyettesítjük (23)-ba, majd az együtthatókat egyeztetjük. Ebből  $A = \frac{3}{34}$ ,  $B = -\frac{5}{34}$  adódik. Ha  $A$  és  $B$  értékét visszaírjuk (25)-be, és az így előállt partikuláris megoldást hozzáadjuk (24)-hez, akkor megkapjuk az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását:

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t} + \frac{3}{34} \sin t - \frac{5}{34} \cos t, \quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (26)$$

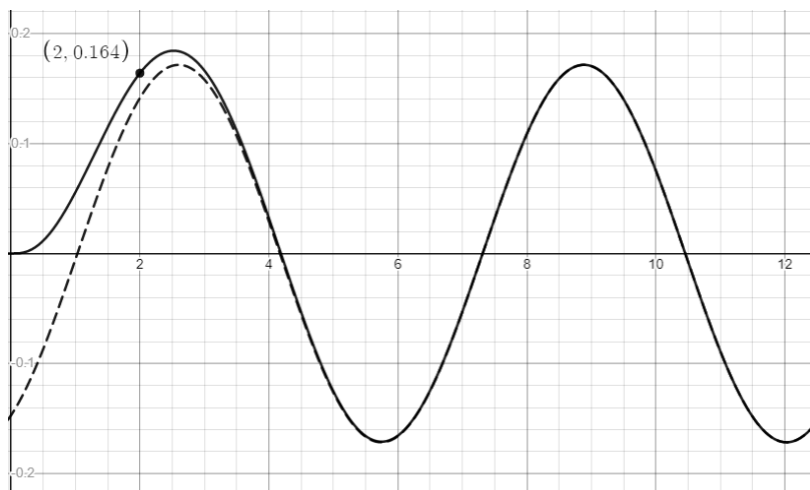
Az  $x(0) = 0$  kezdeti feltételt (26)-ba, az  $\dot{x}(0) = 0$  kezdeti feltételt pedig (26) deriváltjába behelyettesítve  $C_1 = \frac{1}{6}$  és  $C_2 = -\frac{1}{51}$  lesz. Az inhomogén egyenlet kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldása tehát:

$$x(t) = \frac{1}{6} e^{-t} - \frac{1}{51} e^{-4t} + \frac{3}{34} \sin t - \frac{5}{34} \cos t. \quad (27)$$

Ebből kiszámítható, hogy a test kitérése  $t = 2s$  időpillanatban közelítőleg 0,164 méter. A (27) kitérés-idő függvény grafikonja a 4. ábrán látható.

A (27) kitérés-idő függvényt elemezve hasonló dolgokat mondhatunk el, mint a 3.1.1. és 3.1.2. feladatoknál. Ha  $t \rightarrow \infty$ , akkor az exponenciális tagok határértéke nulla, és a rezgés állandósul. Itt is szaggatott vonallal jelöltük az állandósuló kitérés-idő függvényt.

Felmerülhet a kérdés, hogy változtat-e a kitérés-idő függvény alakjának jellegén az, ha a  $\beta > \omega_0$  feltételen kívül még az  $\omega = \omega_0$  egyenlőség is fennáll. Könnyen látható, hogy nem. Mivel a homogén egyenlet általános alakja nem tartalmaz trigonometrikus tagot, semmiképpen nem fog rezonancia kialakulni a kényszererőt leíró zavaró függvénnyel.



4. ábra. A 3.2.1. feladat kitérés-idő függvénye

### 3.3. $\beta = \omega_0$

#### 3.3.1. feladat.

$\beta = \omega_0 = 3 \frac{1}{s}$ ,  $a_0 = 1 \frac{m}{s^2}$ ,  $\omega = 1 \frac{1}{s}$ . Határozzuk meg a test kitérését a  $t = 2s$  időpillanatban!

#### Megoldás.

Behelyettesítve (4)-be az adatokat az

$$\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 9x(t) = \sin t \quad (28)$$

differenciálegyenletet kapjuk. A megoldás első lépése a homogén egyenletből származtatott karakterisztikus egyenlet gyökeinek meghatározása (ahol  $x(t) = e^{\lambda t}$ ):

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -3.$$

Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$x_H(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t}, \quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (29)$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását próbafüggvény módszerével keressük meg, a próbafüggvény alakja ugyanaz, mint az előző feladatnál volt (ld. (25)). A próbafüggvény megfelelő deriváltjait behelyettesítve (28)-ba, majd az együtthatókat egyeztetve  $A = \frac{4}{50}$  és

$B = -\frac{3}{50}$ . A konstansokra kapott értékeket visszaírva a próbafüggvénybe megkapjuk az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását. Ezt hozzáadva (29)-hez az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

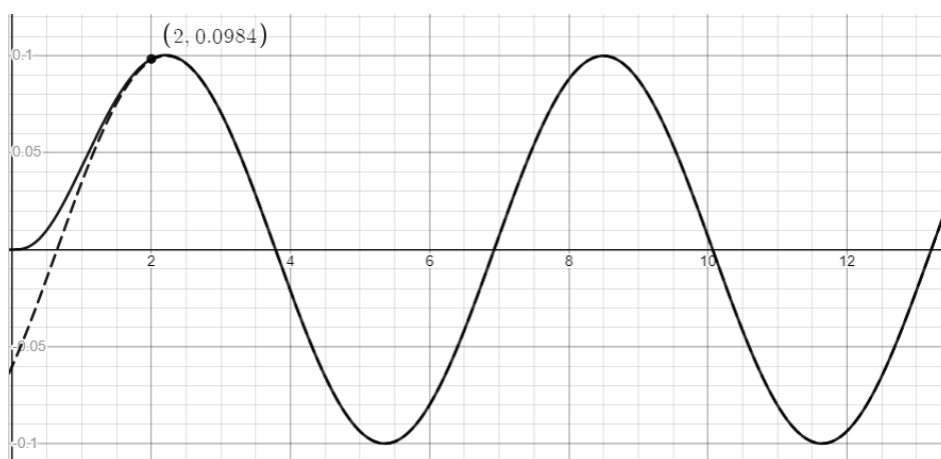
$$x(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t} + \frac{4}{50} \sin t - \frac{3}{50} \cos t, \quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (30)$$

Az  $x(0) = 0$  kezdeti feltételt behelyettesítve (30)-ba, az  $\dot{x}(0) = 0$  kezdeti feltételt pedig (30) deriváltjába,  $C_1 = \frac{3}{50}$  és  $C_2 = \frac{1}{10}$  adódik. Az inhomogén differenciálegyenlet kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldása tehát:

$$x(t) = \frac{3}{50} e^{-3t} + \frac{1}{10} t e^{-3t} + \frac{4}{50} \sin t - \frac{3}{50} \cos t. \quad (31)$$

Ebből kiszámítható, hogy a test kitérése  $t = 2s$  időpillanatban közelítőleg  $0,0984$  méter. A (31) kitérés-idő függvényt az 5. ábrán ábrázoltuk. Ha  $t \rightarrow \infty$ , akkor az exponenciális tényezőt tartalmazó tagok határértéke nulla és a rezgés állandósul. Az állandósult kitérés-idő függvényt szaggatott vonallal jelöltük.

Megjegyzés: Az exponenciális függvények kitevőjében lévő  $-3$  együttható miatt a 3.3.1. feladatban gyorsan állandósult a kitérés-idő függvény. Ha az adatokat úgy változtatjuk, hogy a kitevőben lévő együttható (azaz a karakterisztikus egyenlet egyetlen, valós gyöke) 1-nél kisebb lesz, akkor ez lassabban következik be. Itt a számolás menetének egyszerűségét tekintettük elsődleges szempontnak, emiatt használtuk a fenti adatokat.



5. ábra. A 3.3.1. feladat kitérés-idő függvénye

## 4. Összefoglalás

A csillapított és gerjesztett harmonikus rezgések mozgásegyenleteiből felírt differenciálegyenletek megoldásával jól szemléltethetők az állandó együtthatós, másodrendű, lineáris differenciálegyenletek. Gerjesztett rezgések esetén a differenciálegyenlet matematikai alakja, és ezzel együtt az alkalmazott megoldási módszer a rezgő rendszert, a csillapító közeget és a gerjesztő erőt jellemző  $\omega_0$ ,  $\beta$ ,  $a_0$  és  $\omega$  mennyiségek számértékétől, illetve ezek egymáshoz viszonyított nagyságától függ. Az itt lévő feladatok megoldása a jobb képességű hallgatók számára nem okozhat nehézséget. A példák áttekintésével a matematikából és fizikából tanult ismereteik között kapcsolatot tudnak teremteni, és így átfogóbb természettudományos látásmódra tehetnek szert.

## Irodalomjegyzék

- [1] **Budó Ágoston**: Kísérleti fizika I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
- [2] **Horváth-Szováti Erika**: Csillapított rezgések differenciálegyenletes modelljei. Dimenziók Matematikai Közlemények 9. kötet (2021), 33-41. doi:10.20312/dim.2021.04
- [3] **Scharnitzky Viktor**: Differenciálegyenletek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2002.
- [4] [https://www.walter-fendt.de/html5/phhu/resonance\\_hu.htm](https://www.walter-fendt.de/html5/phhu/resonance_hu.htm)

[doi:10.20312/dim.2022.08](https://doi.org/10.20312/dim.2022.08)

## Konvex sokszöglemezek elsőfajú rögzítése

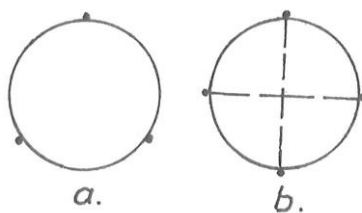
Hajdu Endre  
Soproni Egyetem

**ÖSSZEFOGLALÓ.** Az alakzatok rögzítésének három típusát különböztetjük meg aszerint, hogy az eltolást, az elforgatást vagy a csavar mozgást gátolja a rögzítés. A dolgozat fix pontokból álló rögzítő rendszerekkel foglalkozik és sokszög alakú lemezek minimális és maximális számú rögzítő-pontszámát állapítja meg az első típusba tartozó elmozgatások figyelembe vételével.

**ABSTRACT.** There are three different types of fastening of shapes, depending on whether the fixing prevents displacement, rotation or screw movement. This paper deals with fixed point fastening systems and establishes the minimum and maximum number of fastening points for polygonal plates, taking into account the displacements.

### 1. Bevezetés

A geometria első sorban magukkal az alakzatokkal foglalkozik, kevésbé azok mozgásával, még kevésbé azok rögzítésének módjával. Ezért található oly kevés irodalom a címben jelölt témakörrel. A hatvanas években megjelent dolgozatában Tomor Benedek [1] azt a kérdést tárgyalta, hogy egy rajztáblára helyezett pénzdarabot, a pereme mentén leszúrt gombostűkkel miképpen lehet eltolás ellen rögzíteni; geometriailag fogalmazva: egy konvex lemez eltolását egy fix pontrendszerrel meggátolni. Ismertette a rögzítés témakörében alapvető fogalmat, a primitív rögzítő rendszert. Ez olyan pontrendszer, mely rögzít, de egyetlen fölösleges eleme sincs, vagyis bármely elemét elhagyva, már elmozdítható az alakzat. Egy körlemeznek például két primitív rögzítő rendszerét mutatja az 1. ábra.



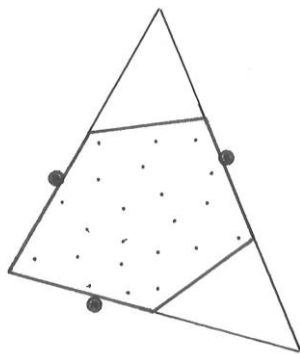
1. ábra

Tomor dolgozatának legfontosabb megállapítása az, hogy „sima” peremű konvex lemez primitív rögzítő rendszere legfeljebb 4 pontból áll, ha csak eltolás ellen kívánjuk rögzíteni a lemezt. Megemlítette, hogy lényegesen nehezebb problémákhoz jutunk, ha más mozgástípus is figyelembe vesszünk. A továbbiakban nem találok a rögzítés-geometriával kapcsolatos anyagokkal sem a hazai, sem a külföldi irodalomban, a Tomor-dolgozatban szereplő két munkán kívül. Magam próbálkoztam tájékozódni, tovább gondolni a témakört, egyetlen feltevését elhagyva a két említett, ismert dolgozat gyakorlati szempontból bizarrnak tűnő feltevését, hogy csúcspontba is kerülhet rögzítő pont.

## 2. Sokszöglemezek rögzítése

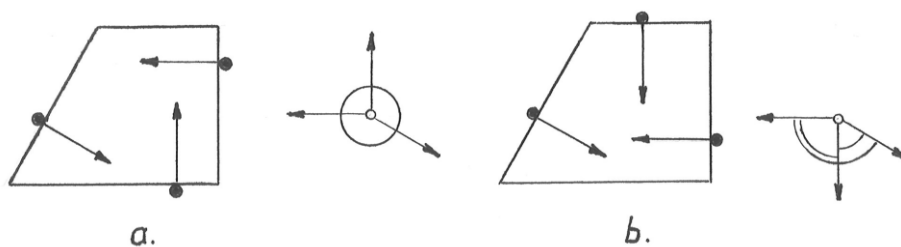
A továbbiakban elsőfajú rögzítésről beszélek, ha csak az eltolást gátolja a rögzítő pontrendszer, másodfajúnak, ha az elforgatásokat, végül harmadfajúnak, ha a csavarmozgásokat zárja ki. Az első két rögzítésfajta vizsgálható a síkban és a térben, de itt csak a síkbeli rögzítésekről lesz szó. A rögzítésekkel kapcsolatos érdekesebb kérdések közé a maximális elemszámú primitív rögzítő rendszerek keresése tartozik; vagyis az, hogy miképpen lehet a legnagyobb elemszámú, de még fölösleges rögzítő pontot nem tartalmazó rögzítő rendszereket szerkeszteni.

Az elsőfajú rögzítés témájában, az alábbiak azért jelenthetnek újdonságot, mert néhány számszerű összefüggést sikerült megállapítani. A konvex sokszögek általában (a paralelogrammák kivételével) befoglalhatók egy vagy több olyan háromszögbe, melynek oldalai tartalmazzák a sokszöglemez három oldalát (2. ábra), s mivel egy háromszög elsőfajú rögzítése három rögzítő ponttal megoldható, ez azt is jelenti, hogy a befoglaló háromszögek száma alapján meghatározható, a lemez legkisebb és legnagyobb számú primitív rögzítő rendszereinek elemszáma.




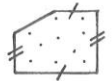
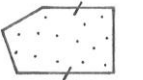

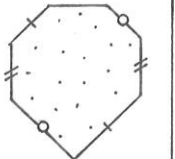
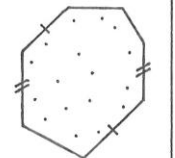
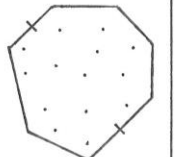
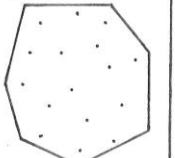
2. ábra

A továbbiakban szükség van a legegyszerűbb konvex lemezfajta elsőfajú rögzíthetőségének feltételére: egy tetszőleges alakú, de befoglaló háromszöggel bíró lemez három ponttal való (primitív) rögzíthetőségéhez szükséges és elegendő feltétel, hogy a lemez megfelelő három pontjához tartozó, s a lemez peremére merőleges, valamint a lemez belsejébe irányuló vektorok páronkénti hajlásszög összege  $360^\circ$  legyen (3/a. ábra). A 3/b. ábra esetében a lemez nem rögzül. Háromszöglemezek esetén a feltétel mindig teljesül, ha mindegyik oldalra egy pont kerül. Az elsőfokú rögzítés esetén mindegy, hogy az oldalon belül hol helyezkedik el a rögzítő pont.






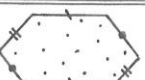
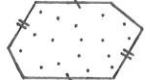
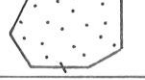
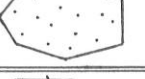





3. ábra

A páratlan  $n$  oldalú lemezek

$n$	Lemez	$L$	$L_{min}$	$L_{max}$
3		1	1	1
5		1	1	5
		3		
		5		
7		5	5	14
		8		
		11		
		14		

4. ábra

A páros  $n$  oldalú lemezek

$n$	Lemez	$L$	$L_{min}$	$L_{max}$
4		0	0	2
		1		
		2		
6		2	2	8
		4		
		6		
		8		
8		8	8	20
		11		
		14		
		17		
		20		

5. ábra

Egy  $n$  oldalú sokszöglemez három ponttal történő elsőfajú rögzítése általában több módon lehetséges a 4. és 5. ábra (táblázat), mely különböző alakú sokszöglemezeket ábrázol, arról ad előzetes képet, hogy egy-egy azonos oldal-számú lemez hányféle módon rögzíthető (a rögzítő pontok föltüntetése nélkül). Egy  $n$  oldalú lemez három ponttal történő elsőfajú rögzítésének lehetséges legnagyobb, ill. legkisebb rögzítési számát így jelölöm:  $l_1^{max}(n;3)$ ,  $l_1^{min}(n;3)$ . Nyomdatechnikai okból a két táblázaton ezeket a szimbólumokat csak  $L_{max}$  ill.  $L_{min}$  helyettesíti. Az már az ábrákból kitűnik, hogy minél több párhuzamos oldala van egy sokszöglemeznek, annál kisebb a rögzíthetőségi szám. Ugyancsak föltűnő, hogy az  $n$  oldalú lemez legnagyobb rögzíthetőségi száma egyenlő az  $n+2$  oldalú lemezének legkisebb  $L_{min}$ - számával.

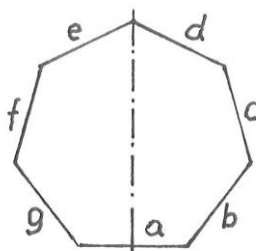
Ha a legnagyobb rögzíthetőségi értékeket keressük, akkor a párhuzamos oldalú sokszögeket nem tartalmazó szabályos, páratlan  $n$ -szögek a megfelelők. Egy szabályos hétszög alkalmas a számítás bemutatására (6. ábra). Kijelöljük a sokszög egyik oldalát:  $a$  és a síkidom

körüljárasi irányát: +. Ezután körüljárva a lemezt, sorba vesszük azokat az oldalakat, melyek a kijelölt és a lemez jobb oldalán lévő oldalak valamelyikével együtt, valamint a lemez másik oldalán választott oldal valamelyikével alkalmasak rögzítésre. Azon oldalakról van szó, melyek egyenesi befoglaló háromszögei a lemeznek. Részletesebben: az  $a$  oldalhoz és további 3 oldalhoz ( $b, c, d$ ) tartozó rögzítések számai:  $a: \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 3$ . (Az álfák magyarázata: először azokat a befoglaló háromszögeket keresem, melyekhez az  $a$  oldal tartozik, a háromszög következő oldala legyen  $b$ , az eddig 2 rögzítő pont, a sokszög másik oldalán, az  $e$  oldalán találjuk a 3. rögzítő pontot, ill. a befoglaló háromszög harmadik oldalát. Így kaptuk  $\alpha_1$ -et. Ezután az  $a, c$  - hez tartozó  $\alpha_2$  már kettőnek adódik, stb.) Ezután keressük a  $b$  oldallal párosítható  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  oldalakat, stb.

Ebben a példában a kapott számhármassok egymás alá írva az alábbi mátrixot adják:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A mátrixban szereplő számok legnagyobbika – példánkban 3 – általános esetben  $m = \frac{n-1}{2}$ , ha  $n$  páratlan,  $m = \frac{n-4}{2}$ , ha  $n$  páros.



6. ábra

A mátrix páratlan oldalszámú szabályos sokszög esetén, általános esetben így néz ki:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & \frac{n-3}{2} & \frac{n-1}{2} \\ 1 & 2 & & \dots & & \frac{n-3}{2} \\ \vdots & \vdots & & \dots & & \vdots \\ 1 & 1 & & \dots & & 1 \end{pmatrix}.$$

A rögzítési szám meghatározása az ilyen típusú szimmetrikus mátrix elemeinek összegezését igényli. Az összeg most két részből áll:  $S_1$  az átlóban lévő elemek összege és  $2S_2$  az átló fölötti és alatti elemek összege. Részletesen:

$$S_1 = \left(1 + \frac{n-1}{2}\right) \left(\frac{n-1}{4}\right) = \frac{n^2 - 1}{8}.$$

Az  $S_2$  ilyen mátrix elemeinek összege:



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k-2 & k-1 & k \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & k-1 & \\ \vdots & & & & & & \\ 1 & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Ezen mátrix elemeinek összege  $S = \frac{k}{6}(k^2 + 3k + 2)$ . Figyelembe véve, hogy esetünkben  $k$  helyett  $\frac{n-3}{2}$  áll, a keresett összeg:

$$S_1 + 2S_2 = \frac{n^2 - 1}{8} + 2 \frac{n-3}{2.6} \left[ \left( \frac{n-3}{2} \right)^2 + 3 \frac{n-3}{2} + 2 \right].$$

Egyszerűsítve, az  $n$  oldalú szabályos sokszöglemez elsőfajú, három pontos rögzítési lehetőségeinek maximális száma, ha  $n$  páratlan szám:

$$l_1^{\max}(n; 3) = \frac{(n^2 - 1)n}{24} \quad n \geq 3.$$

Rátérve a páros oldalszámú sokszöglemezek esetére, vegyük figyelembe, hogy most nem a legnagyobb, hanem a legkisebb értéket fogjuk megkapni, mert csupa párhuzamos oldalpárból áll a sokszög. Az alkalmas befoglaló háromszögek összeszámlálása hasonló módon történik, mint a páratlan oldalszámú sokszögek esetében, a különbség annyi, hogy a kezdő oldalhoz tartozó  $\alpha_1 = 0$  és az  $m$  érték most  $(n-4)/2$ . Egy szabályos 10-szög esetén a rögzítés mátrixa így néz ki:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A mátrix most két, egyenlő, de különböző színnel jelölt háromszög-mátrix összegezésével kapható. Fölhasználva a korábban is használt képletet, amelyben  $k$  helyett az  $m = \frac{n-4}{2}$  áll, páros oldalú sokszöglemezre

$$S = \frac{n-4}{2.6} \left[ \left( \frac{n-4}{2} \right)^2 + 3 \frac{n-4}{2} + 2 \right],$$

$$l_1^{\min}(n; 3) = 2S = \frac{(n-2)n(n-4)}{24} \quad n \geq 4.$$

A még hiányzó két szélsőérték:

- a páratlan oldalszámú sokszöglemez legkisebb rögzítési száma,
- a páros oldalszámú sokszöglemez legnagyobb rögzítési száma.

Az  $l_1^{\min}(n; 3)$  értékét kéttagú összegként állíthatjuk elő: a lehető legkisebb, páratlan oldalszámú sokszög, egy oldal kivételével csupa párhuzamos oldalpárból áll (7/a. ábra).  $S_1$ : a

lemez azon rögzítéseinek száma, melyekben csak a párhuzamos oldalpárok szerepelnek (7/b. ábra), a már megismert képlettel számítható, a képletbe  $n-1$ -et helyettesítve. Az összeg:

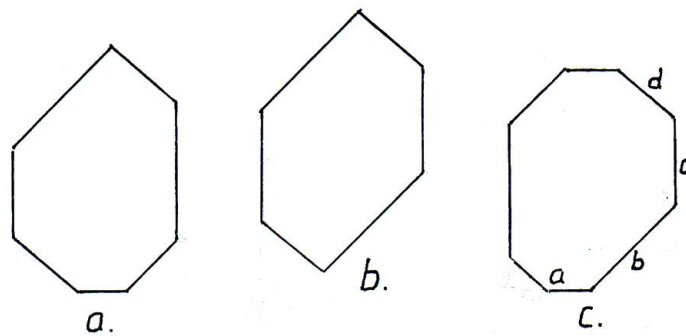
$$S_1 = \frac{(n-1-2)(n-1)(n-1-4)}{24} = \frac{(n-3)(n-1)(n-5)}{24}.$$

A másik összeget azon rögzítések száma adja, melyek mindegyikében szerepel a kivételes oldal (7/c. ábra). Ezen rögzítések érintett oldalai:  $ab$ ,  $ac$ ,  $ad$ . A páros oldalszámú mátrix első sorának legnagyobb eleme  $(n-4)/2$ , ami most az oldal-többség értelmében  $\frac{n+1-4}{2}$ , ezért a második összeg:

$$S_2 = \left(1 + \frac{n-3}{2}\right) \frac{n-3}{4} = \frac{(n-1)(n-3)}{8}.$$

A keresett összeg a fentiek értelmében:

$$l_i^{\min}(n;3) = S_1 + S_2 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \quad n \geq 3.$$



7. ábra

A még hiányzó negyedik eset eredménye hasonló módon számítható, melynek eredménye, ha  $n$  páros szám:

$$l_i^{\max}(n;3) = \frac{n(n^2-4)}{24} \quad n \geq 4.$$

Ha az oldalszám páratlan, akkor a lehetőségek száma  $l^{\max} = \frac{(n^2-1)n}{24}$ . Ha az oldalszám páros, akkor a lehetőségek maximális száma  $l^{\max} = \frac{(n^2-4)n}{24}$ .

## Irodalomjegyzék

- [1] **Tomor B.**: Konvex alakzatok egy rögzítési problémája, Matematikai lapok, (1963).
- [2] **Fejes Tóth, L.**: On primitive polyhedra, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 13 (1962).
- [3] **Hajdu E.**: Ellipszislemez másodrendű rögzítése (2015).  
[https://galgoczi.net/HE\\_anyagok/ELLIPSZISLEMEZ%20MASODRENDU%20ROGZITESE.pdf](https://galgoczi.net/HE_anyagok/ELLIPSZISLEMEZ%20MASODRENDU%20ROGZITESE.pdf)

## Lichtenstein’s integral equation for the Stokes problem via conformal mapping<sup>1</sup>

Sándor Zsuppán

Berzsenyi Dániel Evangélikus (Líceum) Gimnázium  
zsuppans@gmail.com

ÖSSZEFOGLALÓ. Síkbeli egyszerűen összefüggő tartományon kitűzött Stokes feladattal kapcsolatos Lichtenstein peremintegrál egyenletet vizsgáljuk a tartomány egységkörre való konform leképezésének segítségével. Az elméleti eredmények mellett néhány numerikus kísérlet tapasztalatait is ismertetjük.

ABSTRACT. We investigate Lichtenstein’s boundary integral equation method for the Stokes problem on a planar simply connected domain by transforming it onto the unit disc via conformal mapping. We also present some simple numerical experiments utilizing the conformal mapping as a prerequisite.

### 1 Introduction

Lichtenstein’s integral equation [2] transforms the equations of the stationary Stokes problem and also the equation of linear elasticity into a boundary integral equation for the divergence of the displacement field or for the pressure in case of Stokes flows. The kernel in this boundary integral equation is connected to Green’s function for Dirichlet boundary value problems for the Laplacian on the domain. In this article we use conformal mapping in order to transform the problem onto the unit disc and we obtain an equivalent of Lichtenstein’s integral equation with a kernel connected to the conformal mapping instead of Green’s function. Following the theoretical derivation of the boundary integral equation on the unit circle we also examine a simple numerical method for solving it, which we illustrate with some concrete examples.

### 2 Lichtenstein’s integral equation on the unit disc

Let  $\Omega$  be a simply connected planar domain with boundary denoted by  $\partial\Omega$ . Consider the following stationary Stokes problem

$$\Delta_w U(w) = \nabla_w P(w), \text{ for } w \in \Omega, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}_w U(w) = \sigma P(w), \text{ for } w \in \Omega, \quad (2)$$

$$U(w) = U_0(w), \text{ for } w \in \partial\Omega, \quad (3)$$

<sup>1</sup>KULCSSZAVAK. Stokes feladat, peremintegrál módszer.

KEYWORDS. Stokes problem, boundary integral equation.

for the unknown functions  $U$  and  $P$ , where  $\sigma \in \mathbb{R}$  is a real parameter. This problem is connected to linear elasticity (parameter  $\sigma$  connected to the Lamé constants) or to the Cosserat eigenvalue problem (if setting  $U_0 = 0$  and  $\sigma$  denoting an eigenvalue) or also to Stokes flows if  $\sigma = 0$  and  $U, P$  describe flow velocity and pressure, respectively. Therefore we refer to these variables in this note from here on as velocity and pressure. By the divergence theorem the boundary values  $U_0$  of the velocity have to fulfil the compatibility condition

$$\int_{\partial\Omega} U_0 n = \sigma \int_{\Omega} P, \quad (4)$$

where  $n$  denotes the unit outward pointing normal vector to the boundary of  $\Omega$ . This means especially in case of Stokes flows ( $\sigma = 0$ ) that the pressure function  $P$  is determined by (1)-(3) only up to an additive constant. Comparing the divergence of (1) with the Laplacian of (2) yields that in case  $\sigma \neq 1$  the pressure function  $P$  is harmonic in  $\Omega$ , which observation is important for the considerations of the present note.

If we think  $\Omega$  as a subset of the complex plane, then the velocity function  $U = (U_1; U_2)$  can be identified by the complex valued function  $U = U_1 + iU_2$ . The divergence of  $U$  and the gradient of  $P$  become  $\operatorname{div}_w U(w) = 2 \operatorname{Re} \{ \partial_w U(w) \}$  and  $\nabla_w P(w) = 2 \partial_{\bar{w}} P(w)$ , respectively, where  $\partial_w$  and  $\partial_{\bar{w}}$  denote the Wirtinger derivatives.

According to the Riemann mapping theorem there is a unique conformal map  $g : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  with  $g(0) = w_0$  and  $g'(0) > 0$  for each interior point  $w_0 \in \Omega$ , where  $\mathbb{D}$  denotes the unit disc, see e.g. [3]. If  $\partial\Omega$  is smooth enough then  $g$  extends continuously to  $\partial\mathbb{D}$ . Moreover, the smoothness properties of the boundary  $\partial\Omega$  are related to the boundary behaviour of the conformal mapping on  $\partial\mathbb{D}$ , c.f. [4].

Using this mapping we can transform the problem (1)-(3) to the unit disc.

$$\Delta_z u(z) = g'(z) \nabla_z p(z), \text{ for } z \in \mathbb{D} \quad (5)$$

$$2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{g'(z)} \partial_z u(z) \right\} = \sigma p(z), \text{ for } z \in \mathbb{D} \quad (6)$$

$$u(z) = u_0(z), \text{ for } z \in \partial\mathbb{D}, \quad (7)$$

where the new unknown functions are  $u(z) = U(g(z))$  and  $p(z) = P(g(z))$  with  $w = g(z)$ . The transformed pressure function  $p$  is also harmonic on the unit disc for  $\sigma \neq 1$  because transformations by conformal mappings preserve harmonicity. Using that the unit outer normal to  $\partial\Omega$  at  $w = g(z)$  is  $n(g(z)) = \frac{zg'(z)}{|g'(z)|}$  and that  $|dw| = |g'(z)|dz$  there follows  $\int_{\partial\Omega} U_0(w)n(w)|dw| = \operatorname{Re} \int_{\partial\mathbb{D}} u_0(z) \overline{zg'(z)} |dz|$ , which means that the compatibility condition (4) transforms as

$$\operatorname{Re} \int_{\partial\mathbb{D}} u_0(z) \overline{zg'(z)} |dz| = \sigma \int_{\mathbb{D}} p |g'|^2. \quad (8)$$

In [2] a method is proposed for transforming the problem (1)-(3) into a boundary integral equation on  $\partial\Omega$ . In the present paper we adapt this method for the transformed problem (5)-(7). Because for  $\sigma \neq 1$  the transformed pressure function  $p$  is harmonic on the unit disc, we can use in this case the Poisson integral formula

$$p(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2} \phi(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi} \text{ for } z \in \mathbb{D}, \quad (9)$$

where  $\phi$  denotes the unknown boundary value of the pressure function on the unit circle. By the harmonicity of  $p$  from (5) there follows

$$\Delta_z \left( u(z) - \frac{1}{2} g(z) p(z) \right) = 0$$

using  $\partial_{\bar{z}}g(z) = 0$ , i.e. the function  $u - \frac{1}{2}gp$  is also harmonic on the unit disc. Again by the Poisson integral formula there follows

$$u(z) - \frac{1}{2}g(z)p(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2} \left( u_0(\zeta) - \frac{1}{2}g(\zeta)\phi(\zeta) \right) \frac{|d\zeta|}{2\pi} \text{ for } z \in \mathbb{D}.$$

Multiplying (9) with  $g(z)$  and combining it with the previous equation we obtain for  $z \in \mathbb{D}$

$$u(z) = \frac{1}{2} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2} (g(z) - g(\zeta))\phi(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi} + \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2} u_0(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi}. \quad (10)$$

This equation expresses the values of the function  $u$  in the interior of the unit disc using its known boundary values and also the unknown boundary values  $\phi$  of the pressure function. Substituting (10) into (6) yields for  $z \in \mathbb{D}$ :

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{g(\zeta) - g(z)}{g'(z)(\zeta - z)} \cdot \frac{\zeta}{\zeta - z} \phi(\zeta) - \frac{2\zeta}{g'(z)(\zeta - z)^2} u_0(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi} \right\} = (1 - \sigma)p(z). \quad (11)$$

Here we used the derivatives of the involved kernels:

$$\begin{aligned} \partial_z \left( \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2} (g(z) - g(\zeta)) \right) &= \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2} g'(z) + \frac{g(z) - g(\zeta)}{z - \zeta} \cdot \frac{\zeta}{z - \zeta} \text{ and} \\ \partial_z \left( \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2} \right) &= \frac{\zeta}{(z - \zeta)^2} \text{ for } z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

In order to obtain a boundary integral equation for the unknown boundary values  $\phi$  we calculate the limit  $z \rightarrow \partial\mathbb{D}$  in (11). For the first term in the integral in (11) we have the decomposition

$$\operatorname{Re} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{g(\zeta) - g(z)}{g'(z)(\zeta - z)} \cdot \frac{\zeta}{\zeta - z} \phi(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi} = \int_{\partial\mathbb{D}} L(z, \zeta) \phi(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi} + \operatorname{Re} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta}{\zeta - z} \phi(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi}, \quad (12)$$

where  $L(z, \zeta)$  denotes the kernel

$$L(z, \zeta) = \operatorname{Re} \left( \left( \frac{g(\zeta) - g(z)}{g'(z)(\zeta - z)} - 1 \right) \cdot \frac{\zeta}{\zeta - z} \right). \quad (13)$$

If the conformal mapping  $g$  is smooth enough in the sense that its second derivative is continuous in the closed unit disc then the kernel (13) is also continuous in  $\bar{\mathbb{D}}$  and we obtain

$$L(z, \zeta) = \begin{cases} \operatorname{Re} \left( \left( \frac{g(\zeta) - g(z)}{g'(z)(\zeta - z)} - 1 \right) \cdot \frac{\zeta}{\zeta - z} \right) & \text{for } z \neq \zeta, \\ \operatorname{Re} \left( \frac{zg''(z)}{2g'(z)} \right) & \text{for } z = \zeta, \end{cases} \quad (14)$$

for  $z, \zeta \in \partial\mathbb{D}$ .

**Remark 1.** The kernel (14) can be also expressed for  $z, \zeta \in \partial\mathbb{D}$  as

$$L(z, \zeta) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{g'(z)} \sum_{m=2}^{\infty} a_m \zeta^{m-1} \sum_{k=0}^{m-2} (k+1)(z\bar{\zeta})^k \right)$$

using the series expansion  $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$  of the conformal mapping.

On the other hand by the properties of the kernel  $\frac{\zeta}{\zeta-z} = \frac{1}{1-\bar{z}\zeta}$  for  $z \in \mathbb{D}$ ,  $\zeta \in \partial\mathbb{D}$  and by (9) we have

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta}{\zeta-z} \phi(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi} \right\} = \frac{1}{2}p(0) + \frac{1}{2}p(z)$$

for the second term in (12). Utilizing these equations we obtain from (11) the boundary integral equation

$$\left(\frac{1}{2} - \sigma\right) \phi(z) = p(0) + \int_{\partial\mathbb{D}} L(z, \zeta) \phi(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi} - \lim_{x \rightarrow z} \operatorname{Re} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{2\zeta}{g'(x)(\zeta-x)^2} u_0(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi} \quad (15)$$

for  $z \in \partial\mathbb{D}$ . By the mean value property  $\int_{\partial\mathbb{D}} \phi(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi} = p(0)$  for the real valued harmonic function  $p$  there follows

$$\left(\frac{1}{2} - \sigma\right) \phi(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} (1 + L(z, \zeta)) \phi(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi} - \lim_{x \rightarrow z} \operatorname{Re} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{2\zeta}{g'(x)(\zeta-x)^2} u_0(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi}. \quad (16)$$

This boundary integral equation can be used to obtain the unknown boundary values  $\phi$  for the pressure function  $p$  using the prescribed boundary data  $u_0$  for the velocity  $u$ . Then substituting the  $\phi$  data into (11) and (9) we can calculate the velocity and pressure values at any interior point of the unit disc. These are also the velocity and pressure values at the corresponding conformal image of this interior point of the unit disc.

**Remark 2.** If we set the parameter  $\sigma = 0$  then the pressure  $p$  is determined by the system (5)-(7) only up to an additive constant. In order to assure uniqueness we have to prescribe the value of the pressure in a point or we have to prescribe its integral over the domain to be some constant (e.g. zero). That is, in case  $\sigma = 0$  we can set for example  $p(0) = 0$  in (15). In case  $\sigma \neq 0$  then we have to use (16). If we set  $u_0 = 0$  and we consider (5)-(7) as an eigenvalue problem then we also have the same uniqueness issue regarding the pressure  $p$ . In this case  $\sigma = 0$  is an eigenvalue with the constant pressure as eigenfunction (and  $u$  being any divergence free velocity function.)

**Remark 3.** If the conformal mapping  $g$  is not smooth enough, i.e. it does not have continuous second derivative in the closed unit disc, but if  $\partial\Omega$  has a Dini-smooth corner of opening  $\pi\alpha$  with  $0 < \alpha \leq 2$  at the point  $g(\zeta)$  for some  $\zeta \in \partial\mathbb{D}$  then according to Theorem 3.9. in [4] the functions

$$\frac{g(z) - g(\zeta)}{(z - \zeta)^\alpha} \text{ and } \frac{g'(z)}{(z - \zeta)^{\alpha-1}}$$

are  $\neq 0, \infty$  in a neighbourhood of  $\zeta$  within the closed unit disc. Hence their quotient has a finite angular limit for  $z \rightarrow \zeta$ . Considering the fact that this quotient is the reciprocal of the Visser-Ostrowski quotient for the conformal mapping  $g$  (see equation (3) in Chapter 11 of [4]), we obtain the limit

$$\frac{g(z) - g(\zeta)}{g'(z)(z - \zeta)} \rightarrow \frac{1}{\alpha} \text{ for } z \rightarrow \zeta.$$

We can use this for calculating the limit in (11) when  $z \rightarrow \mathbb{D}$ , i.e. for obtaining the boundary integral equation from (11). It turns out that instead of (13) we have to use the kernel

$$L(z, \zeta) = \operatorname{Re} \left( \frac{g(\zeta) - g(z)}{g'(z)(\zeta - z)} - \frac{1}{\alpha} \right) \cdot \frac{\zeta}{\zeta - z}. \quad (17)$$

In the smooth case we have  $\alpha = 1$  and therefore (17) reduce to (13).

**Remark 4.** In [1] another integral equation for the transformed pressure on  $\mathbb{D}$  was derived also using the conformal mapping of the unit disc onto the problem domain, see Theorem 3 in [1].

**Remark 5.** In case of the polynomial mapping  $g(z) = a_1z + \dots + a_nz^n$  setting  $u_0 = 0$  we have the Cosserat eigenvalue problem for the image domain  $g(\mathbb{D})$  as discussed in the introduction. Equation (16) simplifies to

$$\left(\frac{1}{2} - \sigma\right) \phi(z) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{g'(z)} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \sum_{\ell=1}^{n-k} a_{k+\ell} \bar{\phi}_\ell \right) kz^{k-1} \right\},$$

where  $\phi(z) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k z^k \right\}$ . This can be written in a block matrix form if we have the Taylor series expansion  $\frac{1}{g'(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$  for the reciprocal of the derivative of the conformal map.

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ B' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix}} = (1 - 2\sigma) \begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix}, \quad (18)$$

where  $(\phi, \phi')$  is the block vector composed from  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_{n-1})$  and  $\phi' = (\phi_n, \phi_{n+1}, \dots)$ , the two finite matrix blocks  $A, B \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$  are defined by

$$A_{k,\ell} = \begin{cases} ka_{k+\ell} & \text{if } k + \ell \leq n, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad B_{k,\ell} = \begin{cases} b_{k-\ell}, & \text{if } k \geq \ell, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and the infinite matrix block  $B'$  has the  $k$ -th row  $(b_{n+k-2}, \dots, b_k, 0, 0, \dots)$  for  $k = 1, 2, \dots$ . The block  $A$  is a Hankel matrix multiplied by a diagonal matrix and the block  $B$  is a Toeplitz matrix, they are very similar to those investigated in [6, 7]. Because of this block structure (18) can be decomposed into two parts:

- if  $\phi = 0$  and  $\phi'$  is a vector having only one non zero entry, then  $\sigma = \frac{1}{2}$  is the eigenvalue,
- if  $\phi' = 0$ , then the finite matrix eigenvalue problem  $BA\bar{\phi} = (1 - 2\sigma)\phi$  gives other eigenvalues.

Another possibility for reducing the infinite matrix eigenvalue problem to a finite one is that the reciprocal of the derivative of the conformal map is itself a polynomial, see [7]. In these cases the domain  $\Omega = g(\mathbb{D})$  is a quadrature domain meaning that integrals of holomorphic functions over the domain reduce to a finite quadrature rule similar to the mean value property of holomorphic functions on the unit disc.

**Example 6.** Exact solution of (16) is not possible for each conformal mapping only for the simplest ones. For the univalent quadratic polynomial  $g(z) = z + az^2$ , where  $|a| \leq \frac{1}{2}$ , which maps the unit disc onto a cardioid, one easily computes the kernel (13) as

$$L(z, \zeta) = \operatorname{Re} \left( \frac{a\zeta}{1 + 2az} \right),$$

which yields

$$\int_{\partial\mathbb{D}} L(z, \zeta) \phi(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi} = \operatorname{Re} \left( \frac{a\bar{\phi}_1}{1 + 2az} \right),$$

where we have set the series expansion  $\phi(z) = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j z^j$ . Prescribing the boundary values  $u_0(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} u_{0,j} \zeta^j + \sum_{j=0}^{\infty} u_{0,-j} \bar{\zeta}^j$  for the velocity and substituting these along with  $\sigma = 0$  into (15) yields

$$\frac{1}{2} \phi(z) - \operatorname{Re} \frac{a\bar{\phi}_1}{1 + 2az} = - \operatorname{Re} \frac{2}{1 + 2az} \sum_{j=0}^{\infty} u_{0,j+1} (j+1) z^j.$$

Using the fact, that the functions  $z^j$  for  $j \in \mathbb{Z}$  constitute a complete orthonormal system on  $\partial\mathbb{D}$  w.r.t.  $\frac{1}{2\pi}dt$ , there follows

$$\phi_1 + 2a^2\overline{\phi_1} - 4(au_{0,1} - u_{0,2}) = 0,$$

which has the solution

$$\phi_1 = \frac{(au_{0,1} - u_{0,2}) - 2a^2\overline{(au_{0,1} - u_{0,2})}}{\frac{1}{4} - |a|^4}.$$

Now, that we have computed  $\phi_1$  from the coefficients of the velocity boundary data and of the conformal map, we also obtain the whole boundary function  $\phi(z)$  of the pressure  $p$  as

$$\phi(z) = \operatorname{Re} \frac{2a\overline{\phi_1} - 4 \sum_{j=0}^{\infty} u_{0,j+1}(j+1)z^j}{1+2az} \text{ for } z \in \partial\mathbb{D}.$$

For example the velocity boundary values corresponding to  $u_0(\zeta) = -izg'(z) = -i\zeta - 2ia\zeta^2$  are tangential to the boundary of the cardioid in each point and therefore obviously fulfil the compatibility condition (8). In this case we obtain the exact pressure boundary values as

$$\phi(z) = -4 \frac{1 - 4|a|^2}{1 - 2|a|^2} \operatorname{Im} \frac{1}{1+2az}.$$

This can be utilized as a benchmark for numerical solutions of (16) for example.

**Example 7.** For the case of a cardioid from the previous example the eigenvalue problem (18) reduces to

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{a}{1+2az} \overline{\phi_1} \right\} = \left( \frac{1}{2} - \sigma \right) \phi(z),$$

from which one has the eigenvalue  $\frac{1}{2}$  with infinite multiplicity and the two additional eigenvalues  $\frac{1}{2} \pm |a|^2$ . Hence the Cosserat constant, that is the least positive Cosserat eigenvalue of the cardioid is  $\sigma(g(\mathbb{D})) = \frac{1}{2} - |a|^2$ , see also the corresponding example in Remark 12 of [7].

### 3 Numerical experiments

In this section we examine a simple numerical treatment of the boundary integral equation (16). We set  $N \geq 2$  points  $z_k = e^{it_k}$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) on the unit circle so that their angles satisfy  $0 \leq t_1 < \dots < t_{N-1} < 2\pi$ . These points partition the unit circle in  $N$  disjoint arcs. We denote the arc between the points  $z_k$  and  $z_{k+1}$  by  $A_k$ , i.e.  $A_k = \{z = e^{it} \mid t_k \leq t \leq t_{k+1}\}$ , where we set  $t_N = t_0 + 2\pi$  meaning  $z_N = z_0$ . We approximate the unknown function  $\phi(z)$  on  $\partial\mathbb{D}$  by a piecewise constant function on the arcs of the given partition of the unit circle, that is,  $\phi(z) = \phi_\ell \in \mathbb{R}$  for  $z \in A_\ell$ . We intend to calculate these approximate values by discretizing (16), especially the integral with the kernel (13). It means that for each point  $z_k \in \mathbb{D}$  we approximate by

$$\int_{\partial\mathbb{D}} L(z_k, \zeta) \phi(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi} \approx \sum_{\ell=0}^{N-1} \phi_\ell \int_{A_\ell} L(z_k, \zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi} = [\mathcal{L}\phi]_k,$$

where by a slight abuse of notation  $\phi \in \mathbb{R}^N$  denotes the vector composed of the approximate values of  $\phi(z)$  on the arcs  $A_\ell$  ( $\ell = 0, 1, \dots, N-1$ ) and  $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  is the matrix composed of the entries

$$\mathcal{L}_{k,\ell} = \int_{A_\ell} L(z_k, \zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi}. \quad (19)$$



These entries are calculated from the auxiliary information about the conformal mapping  $g$  by numerically evaluating its defining integral (19) over the arc  $A_\ell$ . This auxiliary information about the mapping  $g$  can be its Taylor expansion coefficients or its values at some points of the arcs  $A_\ell$ . If the domain which  $g$  maps the unit disc on is a simple domain, then we know the exact mapping function and its Taylor series coefficients, as for example in the cases of a cardioid or a square. For more complicated domains we have to calculate the mapping numerically, see e.g. [5] for the theoretically and also numerically important case of the Schwarz-Christoffel mapping of the unit disc onto polygonal domains. Given the images  $g(z_k)$  of each point  $z_k$  in the partition then we can use the trapezoid rule for example to approximate the integral over the arc  $A_\ell$  in (19) as

$$\mathcal{L}_{k,\ell} \approx \frac{L(z_k, z_{\ell+1}) + L(z_k, z_\ell)}{2} \cdot \frac{\Delta t_\ell}{2\pi}.$$

Here the values  $L(z_k, z_\ell)$  are calculated utilizing (14), wherein for the approximate calculation of the derivatives  $g'(z_k)$  and  $g''(z_k)$  we can use some Taylor coefficients of  $g$  or if we are not given any of them then we first compute them using for example discrete Fourier transform.

For the other integral in (16) involving the boundary data  $u_0$  there follows for  $z \in \mathbb{D}$  that

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta}{(\zeta - z)^2} u_0(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi} = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\bar{\zeta}}{(1 - z\bar{\zeta})^2} u_0(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi} = \sum_{m=1}^{\infty} u_{0,m} m z^{m-1},$$

where  $u_0(\zeta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{0,m} \zeta^m$  again as in Example 6. Here the coefficients  $u_{0,m}$  can be again calculated from the boundary data  $u_0(\zeta)$  given in some discrete points on the unit circle approximately by discrete Fourier transform for example. Having these coefficients for  $m = 1, 2, \dots, n$  we conclude

$$\mathcal{M}u_0(z_k) = \operatorname{Re} \lim_{x \rightarrow z_k} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{2\zeta}{g'(x)(\zeta - x)^2} u_0(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi} \approx \operatorname{Re} \frac{2}{g'(z_k)} \sum_{m=1}^n u_{0,m} m z_k^{m-1}.$$

Combining the previous approximating terms we obtain the matrix equation

$$\frac{1}{2}\phi - \mathcal{L}\phi = -\mathcal{M}u_0 \quad (20)$$

with the matrices  $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  defined by the equations above for  $\phi \in \mathbb{R}^N$  instead of the integral equation (16) for the function  $\phi(z)$ . The solution of (20) yields approximate boundary values of the pressure, which can be substituted into (9) and (10) in order to compute the pressure and velocity at any interior point of interest.

In the rest of this section we present some numerical experiments which are calculated by the NumPy package for Python, see <https://numpy.org/>. For the calculations we used the quadratic conformal mapping of the unit disc onto a cardioid as in the previous examples.

**Example 8.** The matrices  $\mathcal{L}$  and  $\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{L}$  are near singular practically for any number of partition points on the unit circle. The condition number of the matrix  $\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{L}$  in (20) is well behaved only if the magnitude of the derivative of the conformal mapping is bounded from below on the boundary, i.e.  $|g'(z)| > \epsilon > 0$ . If  $|g'(z_0)|$  is near zero on the boundary and this point is near to a point in the partition then this condition number becomes very large and the solution of the system (20) will be very sensitive for small changes in the input values. This is illustrated on the Figure 1. Without suitable preconditioning in this ill-conditioned case the numerical solution deviates from the exact solution in Example 6 as shown in Figure 2.

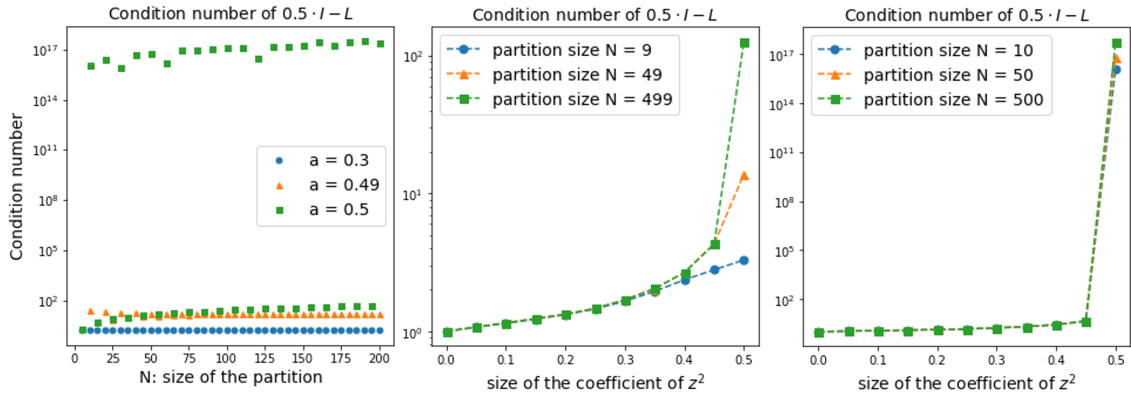


Figure 1: Condition number of  $\frac{1}{2}I - L$

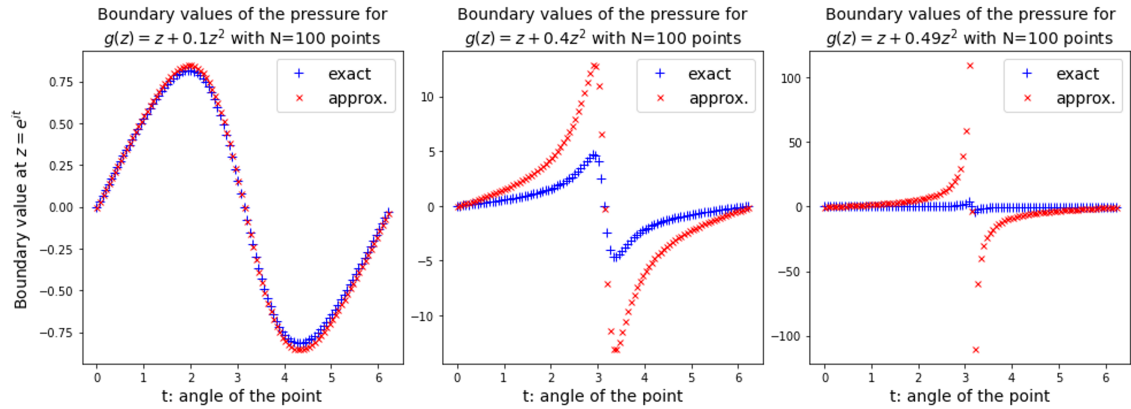


Figure 2: Comparison of the exact and approximate pressure boundary values

**Example 9.** The Cosserat constant, i.e. the least positive Cosserat eigenvalue, of the image domain  $g(\mathbb{D})$  can be deduced from the maximum eigenvalue of the problem (15) (i.e. setting  $u_0 = 0$ ), see also Remark 5 and Example 7. The eigenvalue structure of the matrix  $\mathcal{L}$  is practically independent of the partition size as the comparison of the middle and right diagrams on Figure 3 shows. The vast majority of the eigenvalues is practically zero except for few which are also several magnitude smaller than the maximal eigenvalue. If any of the partition points

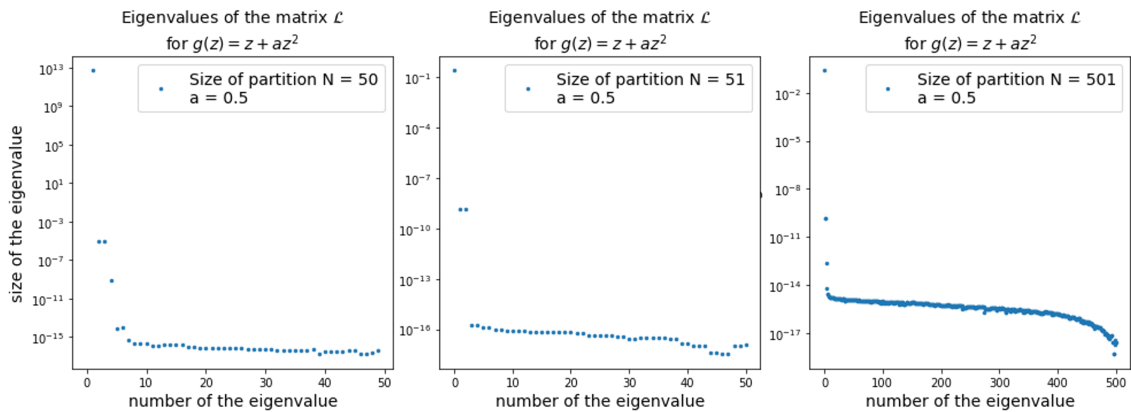


Figure 3: Eigenvalues of  $\mathcal{L}$

is nearly a zero of the derivative of the conformal map then the numerical determination of the

spectrum of  $\mathcal{L}$  is also inaccurate: compare the left and middle diagrams on Figure 3. Therefore this affects the numerical approximation of the Cosserat constant of the domain via the maximal eigenvalue of the matrix  $\mathcal{L}$  as shown on Figure 4.

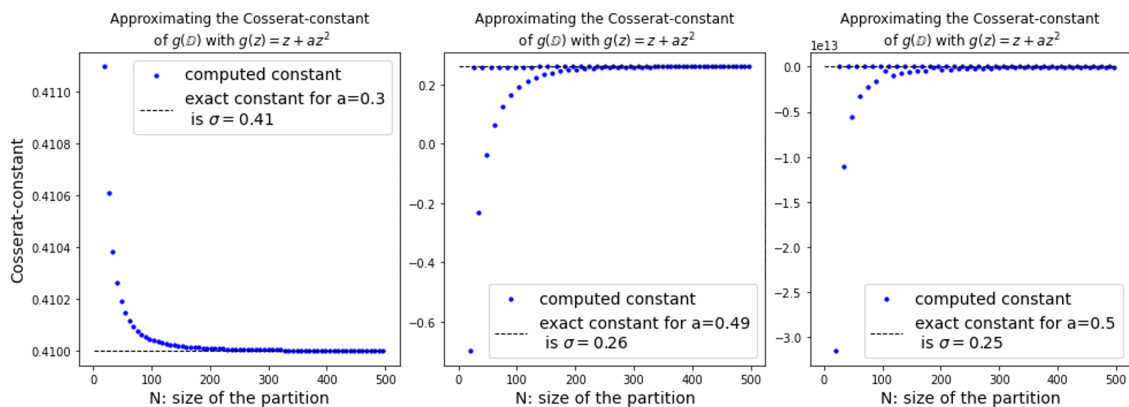


Figure 4: Approximating the Cosserat constant of the cardioid

## References

- [1] **Kratz, W. and Peyerimhoff, A.:** *A numerical algorithm for the Stokes problem based on an integral equation for the pressure via conformal mappings*, *Numerische Mathematik*, **58** (1990), 255–272. doi: [10.1007/BF01385624](https://doi.org/10.1007/BF01385624).
- [2] **Lichtenstein, L.:** *Über die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie*, *Math Z.*, **20** (1924), 21–28. doi: [10.1007/BF01188070](https://doi.org/10.1007/BF01188070).
- [3] **Nehari, Z.:** *Conformal Mapping*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952.
- [4] **Pommerenke, C.:** *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992. doi: [10.1007/978-3-662-02770-7](https://doi.org/10.1007/978-3-662-02770-7).
- [5] **Trefethen, L.:** *Numerical computation of the Schwarz-Christoffel transformation*, *SIAMJ. Sci. Stat. Comput. I.*, (1980), 82–102.
- [6] **Zimmer, S.:** *Rand-Gruckkorrektur für die Stokes-Gleichung*, Thesis, Techn. Univ. München, (1996).
- [7] **Zsuppán, S.:** *On the spectrum of the Schur complement of the Stokes operator via conformal mapping*, *Methods and Applications of Analysis*, **11** (2004), No. 1, 133–154. doi: [10.4310/MAA.2004.v11.n1.a8](https://doi.org/10.4310/MAA.2004.v11.n1.a8).