Medvegyev Péter

# A hasznossági függvények és a kockázatsemleges mérték[1]

**A cikkben a pénzügyi válságban központi szerepet játszó, származtatott termékek árazásának a kérdését elemzem. A származtatott termékek árazásának legalapvetőbb koncepciója a kockázatsemleges mérték. Az elmélet legfőbb hiányossága az, hogy a pénzügyi elméletet a valószínűség-számítás és a sztochasztikus folyamatok keretében helyezi el, és azt a látszatot kelti, hogy elegendő a valódi mértéket kicserélni a kockázatsemleges mértékre, és az ott felírt modelleket a piaci adatokhoz kalibrálni. Ugyanakkor a kockázatsemleges mérték éppen a preferenciák által torzított valószínűségeket adja meg, így alapvetően a piaci szereplők preferenciáit, félelmeit, és nem a tényleges valószínűségeket tükrözi. Mivel ezek a preferenciák gyorsan változnak, a valószínűségi intuíció gyakran félrevezeti a döntéshozókat.**

A gazdasági válság egyik közvetlen és fontos következménye, hogy világszerte megélénkült a vita a közgazdaságtan és általában a társadalomtudományok helyzetéről. Az ilyen irányú konferenciák, tudományos rendezvények megnyitásakor gyakran szokás felidézni *II. Erzsébet* angol királynőnek a London School of Economics épületében tett látogatásakor feltett kérdését: hogyan lehetséges az, hogy a nevezetes falak közt dolgozó, számos kiváló közgazdász közül egy sem látta előre a pénzügyi rendszer összeomlását? A kérdésre nincs egyszerű válasz. Már csak azért sincs, mert nem egészen világos az sem, hogy a válság a jelenleg uralkodó közgazdasági elméletek és iskolák csődje, vagy éppen ezek igazolása. Miközben a gazdaságot ért megrázkódtatások drámaisága vetekszik bármely katasztrófafilmmel, a legrosszabbat mégis sikerült elkerülni. Sok jel mutat arra, hogy sikerült kivédeni az elvileg elképzelhető, apokaliptikus forgatókönyveket. A demokratikus intézmények világszerte olajozottan és problémamentesen működtek. A világ számos országában a választók véleményt mondtak a regnáló politikai elitről, és új gazdaságpolitikai irányokkal való kísérletekre adtak felhatalmazást. Nem következtek be államcsődök, a kávét ez idáig nem kellett a tengerbe szórni, nem törtek ki forradalmak, éhséglázadások, senki sem kezdett el fegyverkezni, hogy szomszédjain torolja meg sérelmeit. Miközben a pénzügyi rendszer problémáit a közgazdász szakma nem látta előre, a válság következményeit, egyelőre úgy tűnik, sikeresen kezelte.

A pénzügyi válsággal kapcsolatos viták egyik központi kérdése a származtatott termékek elmélete, illetve az elmélet matematikája. Közismert, hogy a magyar pénzügyi rendszerben a származtatott termékek csak nyomokban voltak jelen. Hangsúlyozni kell, hogy ennek oka nem a hazai pénzügyi világ tudatos előrelátása volt, hanem sokkal inkább a

1 A cikk a Nemzetközi Bankárképző Központ és a Corvinus Egyetem Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszéke által szervezett *„Pénzügyi piacok likviditása"* konferencián elhangzott előadás alapján készült.

magyar pénzügyi élet periférikus jellege. Nagy a veszélye annak, hogy a hazai pénzügyi társadalom a kvantitatív módszerek iránti szkeptikus hozzáállással reagál, és – ahelyett, hogy feltárná például az oktatásban megjelenő elmaradottságát – ignorálja a pénzügyi matematikát, illetve általában a matematikai közgazdaságtant, és evvel helyrehozhatatlan kárt okoz, például a matematikaoktatáson keresztül a közgazdászképzés egészében.

A dolgozat első részében, néhány általános megjegyzést követően, röviden vázolom a kockázatsemleges árazás elvét. A dolgozat második részében a kockázatsemleges mérték és a hasznossági függvények kapcsolatát próbálom tisztázni.

## A közgazdaságtan mint szubjektív tudomány

A közgazdaságtan – és általában a társadalomtudományok – jellegzetessége, hogy a területről kialakított kép visszahat magára a területre. Ennek egyik közismert példáját éppen a származtatott termékek ősatyja, az opciók területe szolgáltatja. Nem kétséges, hogy az opcióárazás elmélete, főleg annak példátlan eleganciája nagy szerepet játszott az opciók széles körű elterjedésében. Évezredek óta gyakran szokás hivatkozni *Platón* barlanghasonlatára.[2] A közgazdaságtanban nem csak arról van szó, hogy csupán a barlang falára eső képet látjuk, azt nem, ami a barlangon kívül van. A közgazdaságtanban ügyelnünk kell arra, ahogyan a képeket interpretáljuk, amilyen metaforákat alkalmazunk a képek leírásakor. Egy társadalom szempontjából távolról sem közömbös, hogy milyen ideológia, vagy ha jobban tetszik, elméleti közgazdasági eszmerendszer mentén próbálja magát megszervezni. Nagyon sokan – többek között például *Soros György* is – úgy gondolják, hogy a pénzügyi válságért azok az elméletek a felelősek, amelyek ideológiai megfontolásokból túlhangsúlyozták a piac öntisztító szerepét, és az állam szerepének visszaszorítása mellett érvelnek. Ez a vita nyilván soha nem fog befejeződni. Mind a két oldal számos történelmi példát idézhet. Nem kell a 20. század eseményeire hivatkozni, hogy az állami túlhatalom veszélyeit hangsúlyozzuk. A történelem lényegében az államok tehetetlenségeinek története. De az sem kétséges, hogy az állami szabályozás jelenkori csökkenése nem feltétlenül csak a hatékonyságot növelte, hanem igen gyakran a pénzügyi lángelmék útját is egyengette.

A gazdasági folyamatok objektivitása mélyen gyökerező elképzelés, amely gyakran együtt jár a reálgazdaság fogalmának hangsúlyozásával. Az emberi társadalomban lezajló folyamatok azonban nemcsak abban térnek el a természeti folyamatoktól, hogy a megfigyelő visszahat magára a folyamatra, vagyis nincs objektív külső valóság, hanem abban is, hogy a rendszer egységes egészet alkot, az egyes elemei nem izolálhatóak. Vagyis a reálgazdaság és a pénzügyi világ egységes, szétválaszthatatlan rendszert alkot. Az elválasztó határ szintén szubjektív, elmosódó, igen széles és sokszor illuzórikus. Ebből következően a reálgazdaság szembeállítása a pénzügyi világgal, mint a jó és a rossz vagy a fény és az árnyék elválasztása, igen veszélyes, és ezért óvatosan kezelendő. Ugyanis ahogyan nincs fény árnyék nélkül, vagy a rossz és a jó is gyakran csak nézőpont és ideológiai kondicionáltság kérdése, a reálgazdaság kívánatos támogatása a pénzügyi spekuláció rovására igencsak a visszájára fordulhat.

2 Platón: Az állam, VII. kötet, in: Platón összes művei II., Európa Könyvkiadó, Bp. 1984., 355–460. o.

## A diszkontált jelenérték mint az árazás alapelve

Minden pénzügyi elmélet alapkérdése, hogy meg tudjuk-e mondani, magyarázni a pénzügyi termékek árát. A pénzügyi matematika céljaként sokan a kockázatkezelést jelölik meg. Ugyanakkor a kockázatkezelést megelőzően válaszolni kell a *„mi mennyi?”* nevezetes kérdésére. Hogyan kezeljük a kockázatot, ha nem tudjuk, milyen kockázatokról van szó? A pénzügyi kockázat egyedüli forrása az árváltozás[3], így a kockázatkezelés előtt az árakra ható tényezőket kell tisztázni.

A feltett kérdésre a pénzügyi elmélet válasza igen egyszerű: az ár éppen a várható jövőbeli kifizetések jelenértéke.[4] A válasz azonban igazi tautológia. Ugyanis két dolgot nem tudunk: mivel kell diszkontálni, és hogyan kell kiszámolni az átlagot, a várható értéket? Vagyis az átlag számolásakor milyen súlyokkal kell megszorozni az egyes lehetséges kimeneteleket?

A jelenérték számításakor két tényezőt kell figyelembe venni: az időbeliséget és a kifizetés kockázatosságát. Vagyis, hogy mikor kapjuk meg az adott összeget, és az összegnek mi a kockázata, azaz ténylegesen milyen értéket kapunk. Az időtartam és a kockázatosság azonban egyazon dolog elválaszthatatlan két oldala. A pénzügyi elmélet alapvető jellegzetessége a megfigyelhető adatokra való építkezés. Éppen ezért a diszkontáláskor általában a kockázatsemleges kamatlábat, az $r$-et szokás használni. Ennek kétségtelen előnye, hogy többé-kevésbé megfigyelhető és azonosítható a Magyar Nemzeti Bank alapkamatával, vagy valamifajta bankközi kamattal. Az átlagot természetes módon nem a tényleges valószínűségek szerint kell venni. Egyrészt a tényleges valószínűségek nem is adottak, ismertek, ugyanis a kísérlet nem ismételhető meg, nincsen rá történelmi tapasztalat, ugyanakkor a valószínűség intuitív fogalma erősen kötött a korlátlan ismételhetőséghez. Másrészt a tényleges valószínűségek érdektelenek. A legjobb és legtöbbet idézett példa a lottó, ahol a tényleges várható érték negatív, az ár mégis pozitív. De ha valamely befektetés várható értéke nulla, például azért, mert ½ a valószínűsége a sikernek és ½ a valószínűsége a kudarcnak, és az eredmény mind a két esetben azonos, a jelenlegi ár nem lesz nulla.

A jelenség nyilvánvaló oka, hogy a várható érték számolásakor való súlyok a tényleges kimenetek hasznosságától függnek. A diszkontáláskor használt tényező és a várható érték számolásakor használt súlyok összefüggnek. Ha az $r$ segítségével diszkontálunk, akkor ez a módosított mérték éppen a nevezetes $\mathbf{Q}$ mérték, amelynek a természetét szeretnénk a cikkben tisztázni. Vagyis alapszabályként a következőt kell megállapítanunk: vagy a tényleges valószínűségek szerint vesszük a várható értéket, de akkor nem tudunk az $r$ szerint diszkontálni, vagy az $r$ segítségével diszkontálunk, de akkor a valószínűségeket módosítani kell.[5] Általában az $r$ szerint diszkontálunk, és a várható értéket ezért a $\mathbf{Q}$ szerint kell venni. De hogyan határozzuk meg a $\mathbf{Q}$ mértéket? Nyilván a piaci adatok alapján, vagyis a modellünk paramétereit a piaci adatokhoz kalibráljuk! A pénzügyi elmélet kulcsszava a kalibrálás. Bármilyen modellt alkalmazunk, a modell paramétereit a valósághoz kell igazítani. Ezért

3 Beleértve a csődöt, amely esetben az ár esetleg nulla lesz.

4 Érdemes hangsúlyozni, hogy a válasz közvetlenül nem hivatkozik a kereslet-kínálat szabályára.

5 Ez persze nem jelenti azt, hogy ha nem az $r$ szerint diszkontálunk, akkor a valós valószínűségeket kell venni. Pusztán arról van szó, hogy a két objektum egymásba átjátszható, és pusztán kényelem kérdése, hogy miként kombináljuk a kettőt.

mondtam azt, hogy a diszkontált jelenérték képlete tautológia. Mennyi az ár? Hát annyi, amennyi! Mindez triviális, és nagyon fontos, hogy az is legyen az olvasó számára. Az árakat nyilván nem absztrakt elvek, modellek, hanem a piac határozza meg. A modellek csak próbálják magyarázni, megértetni a miérteket. Minden modellben a kulcsprobléma a kalibrálás, vagyis a modell paramétereinek a tényleges piaci adatokhoz való igazítása.[6]

Nyilvánvalóan felmerül a kérdés, hogy akkor mi értelme van a modellezésnek. Ha a döntő lépés a kalibrálás, amely a megfigyelhető adatokra épül, akkor a modell semmitmondó és szükségtelen lenne?[7] Nem teljesen. A kalibrált modellről feltesszük, hogy a paramétereinek folytonos függvénye, következésképpen az ár akkor is megbecsülhető, ha közvetlenül nem figyelhető meg a piacon, de a szükséges paraméterekről van valamilyen elképzelésünk. Ez konkrétan azt jelenti, hogy feltesszük: a **Q** mérték kevés számú paramétertől, jól áttekinthető módon függ. Szélsőséges esetben például konstans.[8]

Mielőtt továbblépnénk, érdemes egy egyszerű példán szemléltetni a diszkonttényező és kockázatsemleges mérték kapcsolatát. Mivel csak az elveket szeretném tisztázni, a legegyszerűbb, mondhatni a legtriviálisabb példát mutatom be. Legyen $S$ egy részvény, és tegyük fel, hogy az ára – amelyet $S(T)$-vel jelölünk – a Black–Scholes-modell nevezetes $dS=\mu Sdt+\sigma Sdw$ egyenlete szerint alakul. A modell a tényleges valószínűségek mellett van felírva, és a paramétereit statisztikai úton kell megbecsülni. Ilyenkor természetesen tudnunk kell az induló árat, amelyről az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy éppen 1. Tegyük fel, hogy ezt az árat valamilyen $T$ időpontban való kifizetés diszkontált jelenértékeként akarjuk meghatározni. A sztochasztikus kalkulus elemi alkalmazásával könnyen kiszámolható, hogy a $T$ időpontban az árat megadó valószínűségi változó éppen $S(T) = \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma w(T)\right)$. Ha most ezt az $\exp(\mu T)$ diszkonttényezővel diszkontáljuk, vagyis az árat megadó $S(T)$ valószínűségi változót elosztjuk evvel a diszkonttényezővel, akkor az $\exp(\sigma w(T) - \sigma^2 T/2)$ nevezetes exponenciális martingált kapjuk, amelynek a várható értéke a lognormális eloszlás várható értékének közismert és gyakran hivatkozott képlete alapján éppen 1. Ami nagyon jó, hiszen éppen ezt is akartuk. Mivel az ár alakulását leíró egyenlet éppen a valós valószínűségek esetén érvényes, ezért ezen diszkonttényező esetén a várható értéket is a valós valószínűségek esetén kell venni. Vagyis a várható értéket a matematikai pénzügyek szokásos jelölése mellett a **P** mérték szerint vettük. A kockázatokat a piac beárazta, és a folyamat $\mu$ paraméterében rögzítette. Ezért kellett ennek a segítségével kiszámolni a diszkonttényezőt. A $\mu$ a kockázatokat a valós valószínűség szerint árazta.

Eljárhatunk azonban másképpen is. Mivel diszkonttényezőként az $\exp(rT)$ kifejezést akarjuk használni, vagyis a kockázatsemleges kamatlábbal akarunk diszkontálni, a kockázatokat a mérték módosításával kell reprezentálnunk. Vagyis át kell térni a **Q** mértékre. Az áttérés során azonban ügyelni kell, hogy a megfigyelt árakra a modell illeszkedjen. Vagyis a **Q** szerint számolt ár is 1 maradjon**.** A standard pénzügyi irodalomból ismert, hogy a **Q** mértékre való áttérés során a $T$ időpontban az ár az $S(T) = \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\overline{w}(T)\right)$

6 A modell minősége pedig attól függ, mennyire egyszerű a kalibrálás, és milyen gyakran kell a modellt újrakalibrálni.

7 Az ár ugyanis annyi, amennyi.

8 Éppen ez a helyzet a teljesség feltételezésekor.

alakúvá válik (miként közismert, a szigma nem változik), ahol a $\overline{w}$ szintén Wiener-folyamat, csak nem a **P**, hanem a **Q** mérték alatt. Ha most ezt a kifejezést az *r* szerint diszkontáljuk, újra egy exponenciális martingált kapunk, amelynek a várható értéke szintén 1. A számolások alapjául szolgáló sztochasztikus analízis igen impozáns épülete azonban nem takarhatja el azt az igen egyszerű tényt, hogy a modellt az ismert árakra kalibrálni kell, és mivel a diszkonttényező adott, ezért a mértéket kell módosítani.[9] Hogyan? Hát alkalmas módon, mégpedig úgy hogy a diszkontált jövőbeli kifizetés várható értéke éppen az ismert ár legyen.

## A modellek teljessége és a dinamikus fedezés

Mivel a diszkontált jelenérték képletében diszkonttényezőként a megfigyelhető kockázatsemleges kamatlábat akarjuk használni, értelemszerűen vetődik fel a kérdés: mi legyen a **Q**? Ezen a ponton azonban az idáig elmondott, triviális gondolatmenet igen bizonytalanná válik. Alapjában véve két eset különböztethető meg. A két eset drámai módon eltér, és fontos, hogy evvel tisztában legyünk.

Először is mind a két esetben egy modellből kell kiindulnunk. Ha nincs modellünk, nem tudunk mit tenni. Csak a naiv kutató gondolja azt, hogy ő a közgazdasági valóságot képes közvetlenül megfigyelni. Miként a bevezetőben jeleztem, mindig egy ideológiai, elméleti szemüvegen keresztül nézzük a valóságot, a természettudományok relatív objektivitása a közgazdaságtanban nem adott. A kérdés csak az, hogy ez a modell formalizált vagy sem. A formalizált modellek számos előnnyel bírnak, és ne várja tőlem az olvasó, hogy ezt bármilyen formában tagadjam.

Bizonyos modelleknek – ilyen például a nevezetes Black–Scholes-modell – van egy igen figyelemre méltó tulajdonságuk, amit a modell teljességével szokás megadni. A teljesség jelző a modell két tulajdonságára utal. Egyrészt a modellt eredendően a valódi valószínűségek, a **P** alatt írták fel[10], másrészt a modellben a követelések a modell speciális tulajdonságai miatt fedezhetők. Vagyis a modellben felmerülő, bármilyen kifizetés előállítható az úgynevezett alaptermékekből képzett, önfinanszírozó portfólióval. A modell alaptermékei azok a termékek, amelyeknek a közvetlen modellezése a modell szerint a valós valószínűségek szerint történik. Természetesen az önfinanszírozás definíciója része a modellnek, így nem feltétlenül azonos avval, amit esetleg a naiv megközelítés annak gondol, de miként említettem, a modell és a valóság viszonya a közgazdaságtanban igen problémás, és a kapcsolat oda-vissza működik, így nem elegáns és célravezető a modell fogalmait és koncepcióit ezen a ponton megkérdőjelezni. Ha azonban az önfinanszírozó fedezés valamely kifizetés esetén megvalósítható, akkor egyszerű és igen kézenfekvő közgazdasági megfontolásokkal belátható, hogy a fedezett kifizetés ára levezethető a fedező alaptermékek árából, mégpedig matematikai úton.

9 Ez úgy jelenik meg, hogy meg kell határozni a kockázat piaci árát. A Black–Scholes-modellben a kockázat piaci ára matematikailag levezethető, de a legtöbb modellben csak statisztikailag határozható meg.

10 Ezt nem szokás a teljesség feltételei közé bevenni. Ha ezt is feltesszük, akkor a kamatlábmodellek nem teljesek, ugyanis az egyenleteket eleve a **Q** alatt írjuk fel. Ugyanakkor a kamatlábmodelleket az irodalomban teljesnek szokás tekinteni. A gondolatmenet természetesen akkor is érvényben marad, ha az alaptermékek kalibrálásával kapott mérték közvetlenül alkalmazható a modellben felmerülő, összes további kifizetésre. Ilyenkor persze nem világos, hogy az alaptermékekre miként kalibráltuk a modellt.

A pontos részletek közismertek, illetve a mondanivaló szempontjából érdektelenek. A lényeg a következő: teljes modellben a kockázatsemleges mérték meghatározásakor a kalibrációt elegendő az alaptermékekre elvégezni. A származtatott termékek kockázata a fedezéskor már kiküszöbölődött, vagyis a származtatott termékek nem hordoznak információt a kockázatsemleges mértékre nézve, és így modellezésük során nincsen extra kalibrációs fázis. Mivel az alaptermékek modellezése a valós valószínűségek mellett történik, a sztochasztikus folyamatok elmélete, illetve általában a valószínűségi gondolkodás helyénvaló, ugyanis a valós valószínűség megfigyelhető. Hangsúlyozni kell, hogy a valós valószínűség alatti modellezhetőség kérdését nem vizsgáljuk. Az, hogy ez lehetséges, az a teljes modell definíciójának része.

Mivel az ár éppen a diszkontált jelenérték, a diszkontálás módjának rögzítése esetén az alaptermékekre a kockázatsemleges mérték már adódik, ugyanis a kalibráció egyedül azt jelenti, hogy a jövőben esedékes árak diszkontált értéke éppen a jelenlegi megfigyelt ár legyen. Vagyis a kockázatsemleges mérték éppen az a mérték, amelyre nézve a diszkontált folyamat várható értéke az idő függvényében nem változik, konstans módon a jelenlegi, kalibrálandó ár. Ezt a jelenséget, vagyis azt, hogy a várható érték az időben nem változik, a matematikában úgy mondják, hogy a diszkontált árfolyamnak a kockázatsemleges mérték mellett martingált kell alkotnia. Vagyis teljes modell esetén a kockázatsemleges mérték független a kifizetéstől, és azonos a teljességet biztosító alapfolyamatok martingálmértékével. Ugyanezt egy kicsit másképpen fogalmazva: a kalibráció éppen azt jelenti, hogy a valós árak alatt megfigyelt folyamatok alatt kicseréljük a mértéket, és az új mérték alatt az alaptermékek martingált[11] fognak alkotni.

Mi történik azonban, ha a modell nem teljes? A nem teljesség több formában is megjelenhet. Egyrészt nem tudjuk kijelölni azokat az alapfolyamatokat, amelyeket a **P** alatt modellezni tudunk. Másrészt, ha mégis vannak megfigyelt sztochasztikus folyamataink, ezek nem elegendően informatívak ahhoz, hogy a modellező feltehesse: a modellben vizsgálandó további változók ezen megfigyelt folyamatok függvényei. Ilyenkor a tényleges ár meghatározása minden termék esetén nyilvánvalóan csak kalibrációval történhet. Ugyanakkor gyakran nincsen elegendő adat a kalibráció elvégzéséhez. Leginkább azért, mert például nincs aktív piac, amely a kalibrációhoz szükséges adatokat szolgáltatja. Vegyük észre, hogy a probléma eléggé megoldhatatlannak tűnik. Ha van elég adatunk a kalibrációhoz, és a termék aktív piaccal rendelkezik, nem kell, vagy legalábbis nem feltétlenül szükséges a terméket modellezni. Ott a piac, elég az árat leolvasni. Ha azonban nincsen aktív piac, modellezni kell, de a kalibráció nem végezhető el más termékek adatai alapján, mivel a modell nem teljes. Mégis, mit lehet ilyenkor tenni?

## A hasznossági függvények és a kockázatsemleges mérték

Nyilván nem túl sokat. Elvi szinten a megoldás nagyon egyszerű: az árakat a kereslet-kínálat egyensúlya határozza meg. Ezek mögött a piaci szereplők hasznossági függvényei húzódnak meg. A gond az, hogy éppen ez a kulcsváltozó közvetlenül nem megfigyelhető.

11 Vagyis a misztikus martingáltulajdonság pontosan azt jelenti, hogy a kalibrált modellben a diszkontált jövőbeli kifizetések várható értéke az éppen aktuális ár, vagyis a termékre alkalmazható a várható jelenérték szabálya.

A pénzügyi modellezés alapvető kiindulópontja az, hogy megpróbál megfigyelhető adatokra építeni. A hasznossági függvény és ezért a **Q** mérték közvetlenül nem megfigyelhető. Mivel a **Q** végső soron a hasznossági függvények kompakt formában való megjelenése, a hasznossági függvények pedig gyorsan változnak, ezért a historikus adatokra támaszkodás nem lehetséges. Hiába tudjuk historikusan például a bedőlési valószínűségeket, a tényleges CDS-árakra ezek alapján semmit sem lehet mondani. Sőt, ha pontosan tudnánk is a jövőbeli bedőlési valószínűséget, a CDS-ár meghatározásában ennek igen csekély szerepe lenne.[12] Ugyanis a CDS-ár nem biztosítási kategória, hanem a kereslet-kínálat alapján meghatározott ár, amelyben elsősorban a piaci szereplők félelmei vannak a piaci mechanizmus által átláthatatlan módon összecsomagolva.[13]

Érdekes módon a matematikai pénzügy erre a megoldhatatlan problémára viszonylag egyszerű módon reagált: feltette, hogy a **Q** mérték ismert és konstans.[14] A legtöbb pénzügyi matematikai modellezéssel foglalkozó könyv előbb-utóbb a következő nevezetes mondatokat tartalmazza: mivel a piacról feltehetjük, hogy arbitrázsmentes, ezért az eszközárazás első alaptétele szerint létezik **Q** kockázatsemleges mérték. A továbbiakban a várható értékeket mindig a **Q** alatt vesszük, így az egyszerűség kedvéért a **Q** jelölését elhagyjuk.

Természetesen a modellek paramétereket tartalmaznak, és így a **Q** végső soron függ a paraméterektől, így a modellek alapján levezetett képletek a végén a paraméterekkel a piaci adatokra kalibrálhatók. Ha a kalibráció jól elvégezhető, akkor a kalibrált modell természetesen bepillantást nyújt a probléma szerkezetébe. A kalibrált modellből visszaszámolható a **Q**, amiből pedig következtethetünk a megfigyelhetetlen kockázati preferenciákra.

Mi akkor a probléma evvel a megközelítéssel? Elvileg önmagában semmi, valójában azonban rengeteg. Talán a legegyszerűbben a CDO-árazás példáján lehetne jól megvilágítani a lehetséges nehézségeket és csapdákat.[15] Miként közismert, a CDO mögött levő termékek bedőlése esetén a CDO különböző tranchei egymás után veszik fel a bedőlt termékek okozta veszteségeket. Miként közismert, a CDO árazásakor a problémát az együttes bedőlések modellezése okozza. Mivel természetes módon az árazáskor a diszkonttényező az *r*-re épül, a modellezés a kockázatsemleges mérték alatt történik. Vagyis amikor az együttes bedőlés valószínűségét felírjuk, vagy a csődesemények korrelációjáról beszélnünk, akkor ezeket mind a kockázatsemleges mérték esetén kell venni. Valószínűség-számítási nyelvet használunk nem valószínűségi problémára. Például az egymást követő csődök között eltelt időkről feltesszük, hogy ez az idő exponenciális eloszlású. Vagyis feltesszük, hogy a csődfolyamat Poisson-folyamatot alkot. Ez igen kényelmes matematikailag. De ezen kívül milyen

12 Mindig érdemes a lottóárakra gondolni. A játékban a valószínűségek vagy a várható nyeremények pontosan ismertek, de ez az információ csak igen áttételesen hat az árakra. Az árat elsősorban a nyeremények relatív hasznossága határozza meg. Hasonló a helyzet a CDS-ek esetén is.

13 A tapasztalatra hivatkozva, a magyar CDS mögötti valószínűség nulla. És ez igaz a görögre és az ukránra is, ugyanis a kedvező/összes arány nulla, lévén a számláló nulla.

14 Miként ismert, az eszközárazás második alaptétele szerint az egyértelmű **Q** éppen a teljességet jelenti. Ha a piac nem teljes, akkor termékenként más a **Q**.

15 De hasonlóan problémás például a CDS-árak interpretálása is. Ezeknek a változását gyakran szokás a csődvalószínűség megváltozásával magyarázni. Ez azonban nyilvánvalóan abszurd. Már önmagában is kérdéses, hogy egyszeri, megismételhetetlen esemény esetén érdemes-e valószínűségről beszélni. De még ha el is fogadjuk a valószínűség koncepcióját, a CDS-árak számos más tényezőt is visszatükröznek. Ha mást nem, a piac likviditását, a piaci szereplők globális kockázati preferenciáit stb.

alapon tesszük ezt? Természetesen rendkívül sok olyan matematikai tétel van, amely arra utal, hogy a lehetséges várakozási idők eloszlása exponenciális. A Poisson-folyamat számos valós rendszer modellezésére kiválóan alkalmazható.[16] Talán a legáltalánosabb feltétel, amelyből az exponenciális várakozási idő következik, a homogén Markov-folyamatokra vonatkozó tétel.

Miért alkotnának azonban homogén Markov-folyamatot a bedőlési események? Már az is kérdéses, hogy ez teljesül-e a valós valószínűség esetén, ugyanis miért függ ebben a konkrét esetben, vagyis a csődfolyamat esetén, a jövő becslése csak a jelen állapottól? Számos statisztikai elemzés mutat arra, hogy létezik a „rating drift”-nek nevezett jelenség, amely szerint a ratingállapotok közötti átmenet-valószínűség függ attól az úttól, ahogyan a jelen állapotba eljutottunk.[17] Vagyis nem mindegy, hogy egy adott ratingállapotba lentről vagy fentről érkeztünk. A markovitás a valós valószínűségek esetleg még valamifajta logikával, egyszerűsítő feltétellel talán indokolható is lenne. De miért igaz mindez a kockázatsemleges világban[18], ahol a valószínűségek csak metaforák, amelyekkel a preferenciákra utalunk? Az árnyékok, amelyek a barlang falára rávetülnek, éppen a hasznosságok, félelmek által alkotott világ árnyai. Nem mindegy azonban, hogy hogyan, milyen metaforákban írjuk le ezeket a képeket. Attól, hogy valószínűség-számítási nyelven beszélünk róla, az árnyak nem lesznek sztochasztikusak. Ha egy nem sztochasztikus világ árnyairól sztochasztikus nyelven gondolkodunk, könnyen félreérthetjük a barlangon kívül zajló eseményeket. Ha valaki valószínűség-számítási metaforákban gondolkodik, természetes módon adódnak a modellezési eszközök. Például az, hogy az együttes eloszlásokat normális eloszlással közelítjük, a kapcsolatokat korrelációval mérjük stb. Számos okból. Egyrészt tételek tömege utal arra, hogy a normális eloszlás jó választás, másrészt egy sor tapasztalat is ezt támasztja alá. Természetesen mind a matematikai tételek, mind az erre épülő tapasztalat a „valós” valószínűségek alatt érvényesek, és semmit sem mondanak a kockázatsemleges világról.

A valószínűség-számítás axiómáinak gyakran hangsúlyozott eleme, hogy a valószínűség eleve adott. Annak nagyságát nem vitatjuk, a valószínűség része a modellezési környezetnek. Külső adat. A valószínűség-számítás ezekkel a már eleve adott súlyokkal számol. Az igazi kérdés mindig az: mennyi az eredeti, a priori valószínűség? Ez azonban nem matematikai, hanem alkalmazói probléma. A modellező feladata, hogy a valószínűségeket megadja. A megadott valószínűségek következményeivel már a valószínűség-számítás eszköztára számol.[19] Az induló valószínűségeket az esetek egy részében statisztikai módszerekkel szokás meghatározni.[20] Az esetek egy széles csoportjában azonban a terület ismeretében az intuíciónkra támaszkodva adjuk meg a valószínűségeket. A tipikus eset a klasszikus valószínűségi mező, vagy a geometriai valószínűség. De a Black–Scholes-egyenleteket a pénzügyi matematikában sem a statisztikára, hanem a pénzügyi intuícióra hivatkozva adjuk meg: pénzügyi intuíciónk alapján feltesszük, hogy a befektetőket csak a hozam érdekli, és ugyancsak pénzügyi tapasztalataink, intuíciónk alapján feltesszük, hogy a hozam számos

16 Gondoljunk csak a sorban állási modellek egész családjára.

17 Miként ismert, a lejtőn nincs megállás.

18 Azon kívül, hogy ez így egyszerű. Mivel a kockázatsemleges világban nem lehet statisztikai indoklással élni, csak az elvi indoklás marad. Ha azonban ez is eltűnik, mi marad?

19 Ezért szerepel a tudományterület nevében a számolás szó.

20 Vagy ha jobban tetszik, kalibrálni.

tényező függvénye, ezért a hozam eloszlása normális.[21] A modell kerete egyértelműen a sztochasztikus-pénzügyi intuíciónkra épül.

A véletlen az egyik alapvető közvetlen tapasztalatra épülő fogalom, amellyel mindenki számtalanszor találkozik. Részben a gyermekkorban játszott játékok, részben az állandóan minket érő, véletlen hatások miatt mindenki rendelkezik egy elég pontos, intuitív képpel a véletlenről. Későbbi tanulmányaink során ez a kép pontos megalapozást nyer.[22] Ennek megfelelően a véletlenről alkotott elképzeléseinket a tér és idő kategóriájával azonos módon érzékelt, objektívnek tűnő belső kép határozza meg. Ez a kép azonban a valódi véletlenre, ha úgy tetszik, az objektív véletlenre, a **P**-re vonatkozik. De mire megyünk evvel a belső képpel, ha a helyzet, amit a véletlen nyelvén leírunk, nem véletlen, hanem csak a véletlen nyelvén elmondott, bonyolult modellhelyzet? Ilyenkor az intuíciónk nem működik helyesen.

A **Q** alatti modellezés metodológiájával a legnagyobb gond a metaforák és nem az alkalmazott módszertan, konkrét képletek szintjén van. Mindaddig, amíg tisztán látjuk a valószínűségi metafora korlátait, addig a **Q** alatti árazás a matematika egyik legszebb és legtermékenyebb alkalmazása a közgazdaságtanban. És tegyük hozzá: több évtizedes tapasztalat alapján a leginkább verifikált közgazdasági alkalmazás is. Ha azonban elfeledkezünk arról, hogy a **Q** alapjában a befektetői preferenciákat közvetíti, és a legfőbb gond nem az, hogy a **Q** ismeretében hogyan kell a számításokat elvégezni, hanem az, hogy a **Q** folyamatosan változik, hibás módon jelöljük ki a központi problémát. A **Q** ismeretében a pénzügyek szerintem tényleg pusztán matematika. Mint ahogy elvileg a hasznossági függvények és a vagyonok ismeretében a közgazdaságtan is elvileg puszta optimalizáció és játékelmélet. Ugyanakkor a **Q** változásának szabályai nem ismertek, és valószínűleg nem lehet olyan modellt felírni, amellyel ezt meg lehet tenni. Vagyis a modelleket folyamatosan kalibrálni kell, a kalibrált modelleket azonban csak nagyon rövid távú előrejelzésekre lehet használni.

A valószínűség-számításban a **P** axiomatikusan adott, fix, konstans és előre ismert. A pénzügyekben a **Q** nem adott, nem ismert, sőt folyamatosan és valószínűleg nem folytonos módon változik. A modern sztochasztikus folyamatok elmélete a matematika egyik csúcsteljesítménye. Mivel része a valószínűség-számításnak, alkalmazni csak fix és ismert valószínűség esetén lehetséges. Matematikai szempontból mindegy, hogy a valószínűséget a **P** vagy a **Q** szimbólum jelöli. Ha a pénzügyi elméletet a sztochasztikus folyamatok elméletére építjük, gazdag eszköztárat alkalmazunk. Ez a módszertan nagyban hozzájárult a modern pénzügyi elmélet és gyakorlat kiépítéséhez, a pénzügyi világ eseményeinek intellektuális megértéséhez. Ma a világon minden egyetem hirdet sztochasztikus folyamatok kurzust közgazdászoknak. A sztochasztikus folyamatok elméletének ismerete nélkül a pénzügyi irodalom nem dolgozható fel. A martingál fogalma, amely megszületésekor egy furcsa matematikai érdekesség volt, ma a pénzügyi nyelv, fogalomrendszer bevett eleme. A valószínűségi intuíció áthatotta a teljes pénzügyi nyelvet és gondolkodást. Sajnálatos módon például a CDO-k népszerűsége éppen azt mutatta, hogy az emberek összekeverték a komplex piaci folyamatokat a véletlen folyamatokkal. Ha nem így lett volna, elképzelhetetlen, hogy bárki elhiggye: egy CDO-négyzet, vagyis egy CDO-kból álló CDO működőképes,

21 Az megint másik kérdés, hogy a kiinduló hipotézist aztán az adatokon tesztelni kell. Az ebből a tesztelésből származó statisztikai irodalom cáfolja a kiinduló feltételt. Ugyanakkor ez senkit sem zavar igazán, és az, hogy az adatokkal nem egyezik, nem a modell teljes elvetését, hanem csak módosítását eredményezi.

22 Például megtanuljuk, hogy a nulla valószínűségű esemény nem különböztethető meg a lehetetlen eseménytől.

és nem szemfényvesztés. A bonyolult rendszerek véletlenszerű viselkedést mutathatnak. A komplexitás leírására gyakran igen hatékony eszköz a véletlen. De egy komplex rendszer időnként mutathat igencsak nem véletlenszerű elemeket. Például egyszer csak a korábban koordinálatlannak tűnő elemek hirtelen tartósan elkezdenek egy irányba mozogni, ami egy valódi véletlen rendszerben nem fordulhatna elő. Lehet mondani, hogy ilyenkor a korrelációk megváltoztak, de ez csak nyelvi megoldás, és nem valódi magyarázat.

A pénzügyek legfőbb törekvése az, hogy megfigyelhető, verifikálható és egyszerű modelleket dolgozzon ki. A diszkontált jelenérték modell, vagy ami ugyanaz, a kockázatsemleges mérték alatti modellezés módszertana a közgazdaságtan talán egyetlen olyan eredménye, amely az általános tudományos közösség figyelmét és elismerést kivívta. Ez a figyelem azonban nem homályosíthatja el azt az egyszerű tényt, hogy bár a természettudomány nyelvén beszélünk, a pénzügyek mégis a közgazdaságtan részei.

## Irodalomjegyzék


Baxter, M., Rennie, A. [2002]: Pénzügyi kalkulus. Typotex, Budapest

Björk, T. [1998]: Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford University Press, Oxford

Cochrane, J. H. [2001]: Asset Pricing. Princeton University Press, Princeton

Delbaen, F.–Schachermayer, W. [2006]: The Mathematics of Arbitrige. Springer, Berlin

Hansen, L. P.–Richard, S. F. [1987]: The Role of Conditioning Information in Deducing Testable Restrictions Implied by Dynamic Asset Pricing Models. *Econometrica*, Vol. 55., No. 3., 587–614. o.

Elliott, R. J. [2005]: Mathematics of Financial Markets. 2. Ed., Springer, New York

Hull, J. C. [1997]: Options Futures and Other Derivatives. Prentice Hall, London

Karatzas, I.–Shreve, S. E. [1998]: Methods of Mathematical Finance. Springer, New York

Magill, M.–Quinzii, M. [1996]: Theory of Incomplete Markets. MIT Press, Cambridge, Massachusetts

Medvegyev Péter [2009]: A származtatott termékek árazása és annak problémái az egyensúlyelmélet szempontjából. *Közgazdasági Szemle*, 56/6,769–789. o.

Musiela, M.–Rutkowski, M. [1997]: Martingale Methods in Financial Modelling. Springer, Berlin

Oksendal, B. [1998]: Stochastic Differential Equations. 5. Ed., Springer, Berlin

Ross, S. M. [1999]: An Introduction to Mathematical Finance. Cambridge University Press, Cambridge

Shiryaev, A. N. [1999]: Essentials of Stochastic Finance. World Scientific, Szingapúr

Száz János [1999]: Tőzsdei opciók vételre és eladásra. Tanszék Kft., Budapest

Gyarmati Ákos–Michaletzky Márton–Váradi Kata

# A likviditás alakulása a Budapesti Értéktőzsdén 2007–2010 között

**A Budapesti Likviditási Mértéket (BLM) 2005-ben hozta létre a Budapesti Értéktőzsde, annak érdekében, hogy a piac rendelkezésére bocsássanak egy olyan mutatószámot, amellyel ki lehet fejezni az egyes részvényeknek, valamint a piac egészének az éppen aktuális likviditási helyzetét, ezáltal segíteni a piaci szereplőket a befektetési döntéseikben. A likviditást a BLM a befektetők végrehajtott tranzakcióinak az *áreltérítő hatása*, valamint a tranzakciók során megfizetendő *likviditási prémium* összegeként számszerűsíti. Ezt a két tényezőt nevezik együttesen a kereskedés indirekt költségének vagy implicit költségének. Ezen költség mértéke az ajánlati könyv éppen aktuális állapotától függ. A kereskedésnek léteznek azonban explicit költségei is, amelyek közé a kereskedés közvetlen költségei tartoznak, mint például a brókeri jutalék, tőzsdei tranzakciós díjak, adók stb. (Kutas–Végh [2005]). Ezeket a költségeket nem tartalmazza a BLM, hiszen ezen költségek számszerűsíthetők, könnyen meghatározhatók, és a cél éppen a nem számszerűsíthető, implicit költségek meghatározása, amelyet a BLM fog reprezentálni. Ezen tanulmány célja egyrészt, hogy bemutassa a BLM-et, és rávilágítson arra, hogy a többi, eddig ismert és a piacon használt likviditási mutatóhoz képest ez a mutató mennyiben ad más eredményt, esetleg megbízhatóbb képet a piac likviditásáról, másrészt az, hogy bemutassa a BLM-mutató továbbfejlesztésének lehetőségeit.[1]**

## 1. A likviditás fogalma

**A** Budapesti Likviditási Mérték bemutatása és elemzése előtt elengedhetetlen a likviditás fogalmának a tisztázása, vagyis annak az ismertetése, hogy pontosan mit is szeretnénk mérni a BLM-mutatóval, és miért fontos a likviditás mérése.

A likviditás fogalmának nincs egységes, kialakult definíciója. Jelen tanulmány azonban a pénzügyi termékek piacának a likviditásával foglalkozik, így ennek megfelelően a pénzügyi piacokon elterjedt likviditás fogalmát fogja felhasználni, amely 1999 óta a Bank for International Settlements által is elfogadott definíció (*Csávás–Erhart* [2005]):

1 Ez a magyar tőzsdei likviditás elmúlt évekbeli alakulását vizsgáló, elméleti megközelítésű tanulmány a szerzőknek a Budapesti Értéktőzsdén végzett kutatásának az eredményeként jött létre. A következő, módszertani szemléletű cikk (*A Budapesti Likviditási Mérték és felhasználása – Likviditáskockázat VaR-mutatókban*, 521–538 o.) ugyancsak ebben az együttműködésben készült. A szerzők ezúton fejezik ki köszönetüket a Budapesti Értéktőzsdének a lehetőségért, és különösen *Végh Richárdnak, Kádár Kristófnak* és *Réz Évának* a támogatásért és a konzultációs lehetőségekért.

*„A likvid piac egy olyan piac, ahol nagy volumenű tranzakciók hajthatók végre azonnal vagy rövid időn belül úgy, hogy azok minimális hatást gyakorolnak a piaci árakra.”*

A likviditásnak azért van fontos szerepe, mert a piacok egyik fő funkciója, hogy a piaci árakban tükröződjenek a piaci várakozások, érvényesüljön a hatékony piacok elmélete. Az elmélet azt mondja ki, hogy a piaci árfolyamok tükrözik a befektetők rendelkezésre álló információkat, így nem érdemes további információk kutatásával foglalkozni, megbízhatunk az árakban, valamint az árfolyamok változását az új információk okozzák. Ebből következően a napi hozamok normális eloszlás szerint fognak alakulni, és egymástól függetlenek lesznek. Ez az elmélet számos pénzügyi modell alapja, érvényesülése szoros kapcsolatban áll a likviditással, ugyanis egy alacsony likviditású piacon a kereskedésből fakadó ármozgások könnyen elmozdíthatják az árakat, „zajt” vihetnek az árfolyam alakulásába. Ennek megfelelően, amennyiben likvid a piac, javíthatja a piac hatékonyságát azáltal, hogy nem érvényesülnek az alacsony likviditásból fakadó árváltozások.

Továbbá azért is lényeges a likviditás a piacokon, mert a likvid piacokon a kereskedés költsége kisebb, így a tranzakciók kisebb erőforrásigénnyel hajthatók végre. Emiatt lényeges kérdés lehet a piaci szereplők számára, hogy az egyes értékpapírok likviditása összehasonlítható, költsége számszerűsíthető legyen. A likviditás mérése azonban összetett probléma; egyetlen mutatószámmal nehéz kifejezni a likviditás mértékét, illetve azt, hogy ez milyen költségeket generál a kereskedés során, hiszen a likviditást különböző dimenziók mellett lehet értelmezni, amelyek mentén eltérő jellemzői kerülnek előtérbe.

## 2. A likviditás dimenziói

A piaci likviditás fogalma elég komplex ahhoz, hogy egyetlen mutatóval ne lehessen megragadni. Számos mutatószám áll a piaci szereplők rendelkezésére, amelyek a fogalom különböző aspektusait igyekeznek előtérbe helyezni. A piac likviditásának alapos elemzését megelőzően érdemes a likviditás különböző dimenziót meghatározni. A szakirodalomban az egyik felsorolás az alábbi dimenziókat különbözteti meg:

- feszesség (*tightness*),
- mélység (*depth*),
- szélesség (*breadth*),
- rugalmasság (*resiliency*),
- azonnaliság (*immediacy*).

Ezek közül az első hármat szokás statikus dimenziónak (*Kyle* [1985]), az utolsó kettőt dinamikus dimenziónak (*Harris* [1990]) tekinteni. Mindezeken túl a szakirodalom egy része a piaci sokszínűségét, a diverzitást *(diversity)* (Kutas–Végh [2005]) is a likviditás dimenziójának tekinti.

Léteznek olyan mutatók, amelyek egy-egy dimenziót számszerűsítenek, ezeket egydimenziós (*one-dimensional*) mutatóknak hívjuk, és vannak, amelyek több dimenzió mentén mérik a likviditást (*Michaletzky* [2010]). Azonban egyetlen egy olyan mutató sem létezik, amely az összes dimenziót felölelné.

A likviditás számszerűsítése során problémáként merül fel, hogy különböző mérési módszerek és mutatók nem azonos eredményeket adnak a likviditásról (Csávás–Erhart [2005]), mivel az egyes dimenziók a likviditás más-más jellemzőjét helyezik előtérbe.

## *2.1.Statikus dimenziók*

A likviditás statikus dimenziója két nagy csoportra osztható: az egyik a feszességet, a másik a piac mélységét méri. A *feszesség* dimenziója a kereskedés tranzakciós költségét jelenti, vagyis azt, hogy mi a legalacsonyabb költsége a kereslet és kínálat összepárosításának. Ezt általában a bid-ask spread nagyságával szokták számszerűsíteni a piacon.

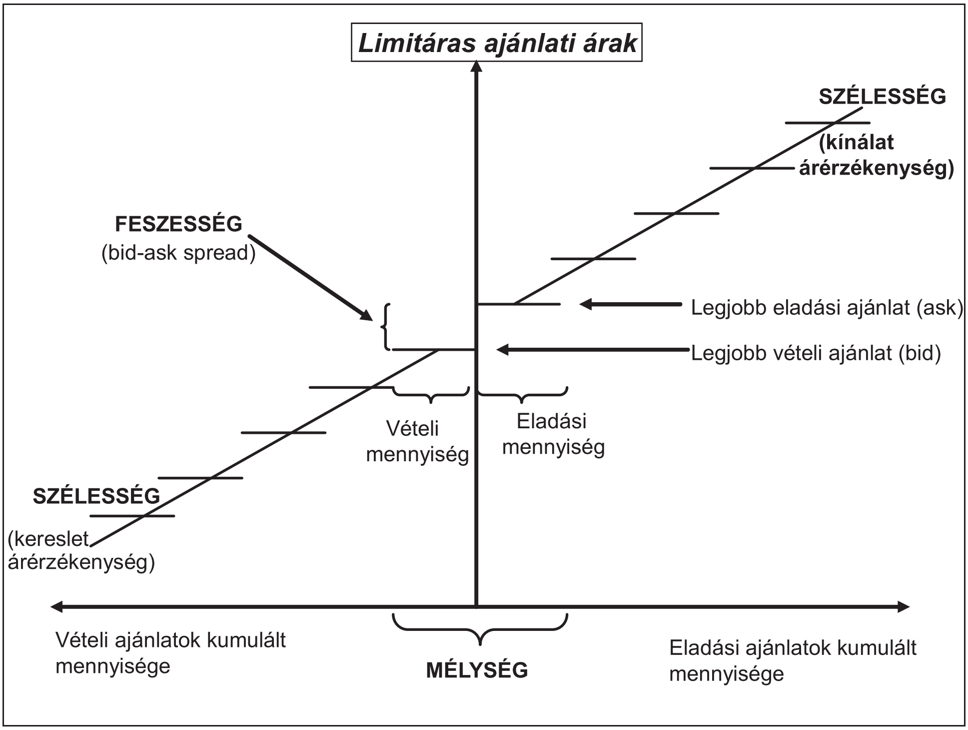
A piac *mélysége* azt jelenti, hogy mekkora mennyiségű ajánlat található mind a vételi, mind az eladási oldalon a piaci ár alatt és felett egyaránt. Szűkebb értelemben véve, a mélység azt mutatja meg, hogy mekkora mértékű az a legnagyobb volumenű ajánlat, amit még a piaci ár elmozdítása nélkül végre lehet hajtani vétel, illetve eladás formájában (Csávás–Erhart [2005]). A mélységet általában a piaci forgalommal szokták közelíteni.

A piaci mélységhez szorosan kapcsolódó fogalom a piac *szélessége*, amely ugyancsak a likviditás egyik dimenziójának tekinthető. A szélesség a mélység tágabb értelmezése, vagyis míg a mélység esetében a legjobb áron elérhető mennyiséget vettük figyelembe, addig a szélesség esetében figyelembe vesszük a többi piaci ajánlathoz tartozó mennyiségeket is. A szélesség mérőszáma általában az árérzékenység, amely a kumulált ajánlatok és az árterjedelem által meghatározott egyenes meredekségeként számolható. Minél kisebb ennek az egyenesnek a meredeksége, annál szélesebb a piac. A likviditásra kedvező hatással van, ha az ugyanakkora árakhoz tartozó mennyiség növekszik, valamint ha az egyes ajánlati árak közötti eltérések minél kisebbek. Továbbá az is fontos a szélesség dimenziójának esetében, hogy minél több befektető jelenjen meg a piacon az ajánlatával, hiszen ez is kedvezőleg hat, javítja a likviditást.

Az előbb említett három dimenziót az *ajánlati könyvben (order book)* szereplő adatok alapján lehet vizsgálni. Az ajánlati könyvben az egyes vételi és eladási ajánlati árakhoz tartozó, ajánlott mennyiségek szerepelnek, a legjobb ártól a legkedvezőtlenebbig sorba rendezve. Amennyiben tehát egy piacon rendelkezésre állnak az ajánlati könyv adatai, a feszesség, a mélység és a szélesség könnyen megállapítható, ahogyan az *1. ábra* szemlélteti.

*1. ábra*

**Statikus dimenziók számszerűsítése az ajánlati könyv alapján**




*Forrás:* Csávás–Erhart [2005]

Az eddig bemutatott három dimenziót azért nevezik *statikus dimenzióknak*, mert az ajánlati könyvet egy adott pillanatban jellemzik. A feszesség az ár oldaláról, míg a mélység és a szélesség mennyiségi oldalról közelíti meg a piac likviditását. A likviditást azonban befolyásolja az ajánlati könyv időbeli alakulása is, így szükség van a likviditásnak a dinamikus dimenziók melletti vizsgálatára is.

## *2.2. Dinamikus dimenziók*

A dinamikus dimenzióknak két fajtája létezik: a rugalmasság és az azonnaliság dimenziója. A *rugalmasság* arra a sebességre utal, amellyel a kereskedésből származó áringadozások elsimulnak, vagyis arra ad információt, hogy az ár egy sokk után milyen gyorsan tér vissza az egyensúlyi szintre. Ez az egyensúlyi ár lehet fundamentumok által meghatározott érték, de jelenthet akár egy olyan állapotot is, amikor az ajánlati könyvben a vételi és eladási ajánlatok kiegyensúlyozottak voltak. Egy jellemző mérési lehetősége a likviditásnak ebben az esetben, ha megnézzük, hogy a spread mennyi idő alatt tér vissza korábbi, egyensúlyi értékéhez. A likviditás emellett árhatásmutatókkal is mérhető, amelyek azt számszerűsítik, hogy adott mértékű tranzakció mennyivel változtatja meg az árakat. A rugalmasság fogalmához ezek a mutatók úgy kapcsolódnak, hogy számszerűsíteni képesek: adott mennyiségek kereskedése mekkora ármozgásokat okoz különböző pénzügyi termékek esetében. Amennyiben egy termék esetén ez az érték alacsony, akkor valószínűsíthető, hogy nagyobb a rugalmassága, azaz az ára hamarabb talál vissza az egyensúlyi árhoz.

Az *azonnali végrehajthatóság* dimenziója pedig azt az időt jelenti, ami alatt adott nagyságú portfóliót el lehet adni vagy meg lehet venni egy meghatározott ársávban, vagyis a megbízások késedelmes végrehajtásával kapcsolatos költségeket tartalmazza. Mérése történhet az időszakon belül lebonyolított ügyletek számával, az ügyletkötés gyakoriságával, vagy akár az új kereskedési ajánlatok számával.

## *2.3. Diverzitás*

A statikus és dinamikus dimenziókon felül még létezik egy dimenzió: a diverzitás, amely a piaci befektetők homogenitását mutatja motiváció, méret, információ, valamint hazai, illetve külföldi illetőség szerint. Minél heterogénebb a befektetői összetétel, annál stabilabb a piac kiélezett piaci szituációkban.

A Budapesti Likviditási Mérték a likviditás számos dimenziójának mérésére felhasználható. Ehhez célszerű áttekinteni, pontosan hogyan épül fel a BLM; ezt a következő fejezetben tárgyaljuk.

# 3. A BLM értékének a meghatározása

## *3.1. Adatbázis*

A BLM-értékeket a mindenkori ajánlati könyv alapján lehet meghatározni. Ennek megfelelően a tanulmány a 2007. január 1-jétől 2010. július 16-ig terjedő időszakban vizsgálja az ajánlati könyvet, valamint számítja ki a BLM-mutatót. Minden egyes napra 9:02-től 16:30-ig másodpercenkénti frekvenciával határoztuk meg a BLM-értékeket.

Az ajánlati könyv csak a limitáras megbízásokat tartalmazza; ezek olyan megbízások, amelyek kizárólag a megadott vagy annál kedvezőbb áron teljesülnek (vételi megbízás esetén alacsonyabb, eladási megbízás esetén magasabb áron). Ezzel szemben vannak még piaci áras megbízások is, amelyeket olyankor adnak a befektetők, ha azt szeretnék, hogy azonnal teljesüljön a tranzakció az éppen elérhető, legjobb árszinten. A kereskedési rendszer ezeket a piaci áras megbízásokat párosítja a limitáras ajánlatokkal. Ennek megfelelően a limitáras ajánlatok addig maradnak a könyvben, amíg egy piaci áras megbízással vagy egy másik limitáras megbízással nem párosítják, vagy amíg vissza nem vonják azokat.

A limitáras megbízást adó piaci szereplők türelmesek, hajlandók várni, hogy azon az áron teljesítsék a megbízásukat, amin szeretnék; a piaci áras megbízást adók viszont türelmetlenek, nekik az fontos, hogy azonnal teljesüljön az ajánlatuk. Vagyis a limitáras ajánlatot tevő piaci szereplők biztosítják a piaci likviditás kínálatát (*liquidity providers*), míg a piaci áras megbízásokat adó szereplők keresletet támasztanak a likviditásra (*liquidity takers*). A limitáras megbízást adók számára az az érdekes, hogy megbízásaik mennyi idő alatt, illetve hány kötésben teljesülnek, míg a piaci megbízást adók számára az a fontos, hogy tranzakciójuk mennyivel mozdítja el a piaci árat (Michaletzky [2010], 24. o.).

Így az ajánlati könyv adatai alapján kiszámított BLM-értékek megfelelő képet adnak a teljes magyar piac likviditásáról, hiszen a limitáras megbízásokkal a piaci szereplők likviditást nyújtanak a likviditást igénybe vevőknek, azaz a piaci áras megbízást adóknak.

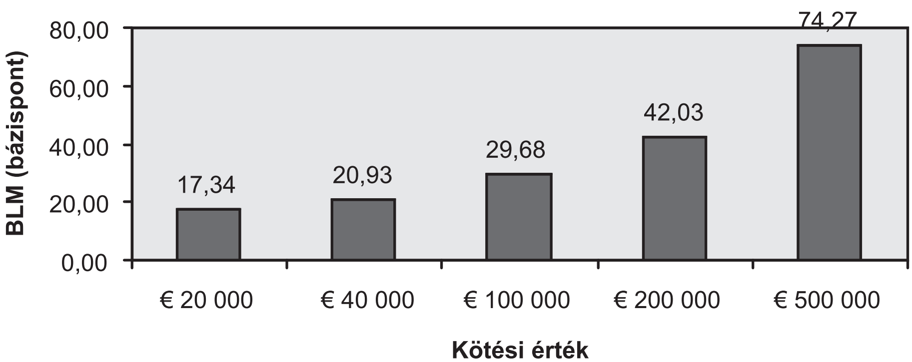
## *3.2. A számítás menete*

A BLM-adatbázis 5 különböző kötésnagyságra határozza meg a BLM értékét – így 5 különböző BLM értéket kapunk minden egyes részvényre –, 20 E (BLM1), 40 E (BLM2), 100 E (BLM3), 200 E (BLM4) és 500 E (BLM5) euró összértékű tranzakciókra. A BLM-adatbázis olyan esetekben is tartalmazza a BLM-értékeket, amikor az ajánlati könyv hiányos, és nem lenne lehetőség például egy esetleges 500 E euró értékű tranzakció megkötésére. Ilyenkor a BLM értékét úgy határozzák meg, mintha az utolsó elérhető ajánlati szinten végtelen nagy mennyiség állna rendelkezésre.

Az OTP esetében például a vizsgált időszak során az átlagos BLM-értékek az egyes kötési szinteken a következőképpen alakultak:

*2. ábra*

**Átlagos BLM-értékek az egyes kötési szinteken az OTP esetében (2007.01.01–2010.07.16)**




Az ábrán jól látszik, hogy minél nagyobb értékű tranzakciót szeretnének a befektetők végrehajtani a tőzsdén, annál nagyobb lesz a BLM értéke, amelyet két tényező befolyásol: a *likviditási prémium*, valamint az *áreltérítő hatás* értéke. Vagyis a BLM kiszámításának menete két nagy tényezőre bontható szét, a bid-ask spread meghatározására – amelyből a *likviditási prémiumot* (liquidity premium – LP) lehet kiszámolni –, valamint az adott tranzakció *áreltérítő hatásának* (adverse price movement – APM) meghatározására.

A bid-ask spreadet, és a likviditási prémiumot a következő két képlet segítségével lehet meghatározni:

$$bidask\_spread = \frac{P_{ask1} - P_{bid1}}{\left(\frac{(P_{bid1} + P_{ask1})}{2}\right)}, \tag{1}$$

ahol $P_{bid1}$ = az első legjobb vételi ajánlat árszintje, $P_{ask1}$ = az első legjobb eladási ajánlat árszintje.

$$LP = \frac{bidask\_spread}{2} \tag{2}$$

Az áreltérítő hatást (APM) mind a vételi, mint az eladási oldalra külön meg kell határozni, mivel a két oldal között likviditás szempontjából jelentős eltérés lehet. Az APM kiszámítási menete a következő:

$$APM\_ask = \frac{(P_{w\_avg\_ask} - P_{ask1})}{P_{mid}} \tag{3}$$

$$APM\_bid = \frac{(P_{bid1} - P_{w\_avg\_ask})}{P_{mid}} \tag{4}$$

A (3)-as képletben szereplő $P_{w\_avg\_ask}$, *eladásoldali súlyozott átlagár* meghatározására a következő számítási menetet alkalmazza a BLM-et kiszámító program (a bid hasonlóképpen működik, csak mindenhol a képletben a bid oldali adatokkal kell számolni). Tegyük fel, hogy a megbízás az első három ajánlati szinten teljesül.

$$P_{w\_avg\_ask} = \frac{P_{ask1} \cdot size1 + P_{ask2} \cdot size2 + P_{ask3} \cdot (tranzakció\,mérete - size1 - size2)}{tranzakció\,mérete} \tag{5}$$

ahol $P_{ask1}$ az első legjobb eladási ajánlat árszintje, $P_{ask2}$ a második legjobb eladási ajánlat árszintje, $P_{ask3}$ a harmadik legjobb eladási ajánlat árszintje, size1, size2 az adott ajánlati szinteken lekötődő mennyiségek.

A BLM értékét a likviditási prémium és az áreltérítő hatás vételi és eladási oldali értékének az összege fogja megadni:

$$\boxed{BLM = 2 \cdot LP + APM\_bid + APM\_ask} \tag{6}$$

*A (6)-os képlet alapján megállapítható, hogy a BLM egy pozíció vállalásának és lezárásának teljes implicit költségét adja meg bázispontban kifejezve* (Kutas–Végh [2005]).

Például, ha egy 500 E euró kötési szinten a BLM5 = 60 bps, akkor az azt jelenti: amiatt, hogy nem a középárfolyamon kötődik le a teljes megbízás, 3 E euró (500 000 × 0,006 = 3000) implicit költség keletkezik.

### *3.3. A BLM-mutató és a likviditási dimenziók*

A BLM értékének kiszámítása során a cél, hogy az ajánlati könyv éppen aktuális állapota alapján adjon információt a piac likviditásáról. Ennek megfelelően, valamint a BLM kiszámítási algoritmusa alapján a BLM alkalmazható arra, hogy a statikus dimenziók mentén mérje a likviditást. A mutatóban megjelenik a szélesség dimenziója is, hiszen nemcsak a legjobb ajánlati árszinteket használja fel. Az eredmények értelmezésekor azonban mindenképpen figyelembe kell venni a BLM módszertanát, hiszen a mutatót úgy számoljuk, mintha az utolsó árszinten végtelen sok ajánlat lenne a könyvben.

A BLM a dinamikus dimenziókat, tehát a rugalmasságot és az azonnaliságot nem képes számszerűsíteni, hiszen az ajánlati könyvről készített, egyetlen pillanatfelvételt használ fel. Szintén nem alkalmas a diverzitás megjelenítésére.

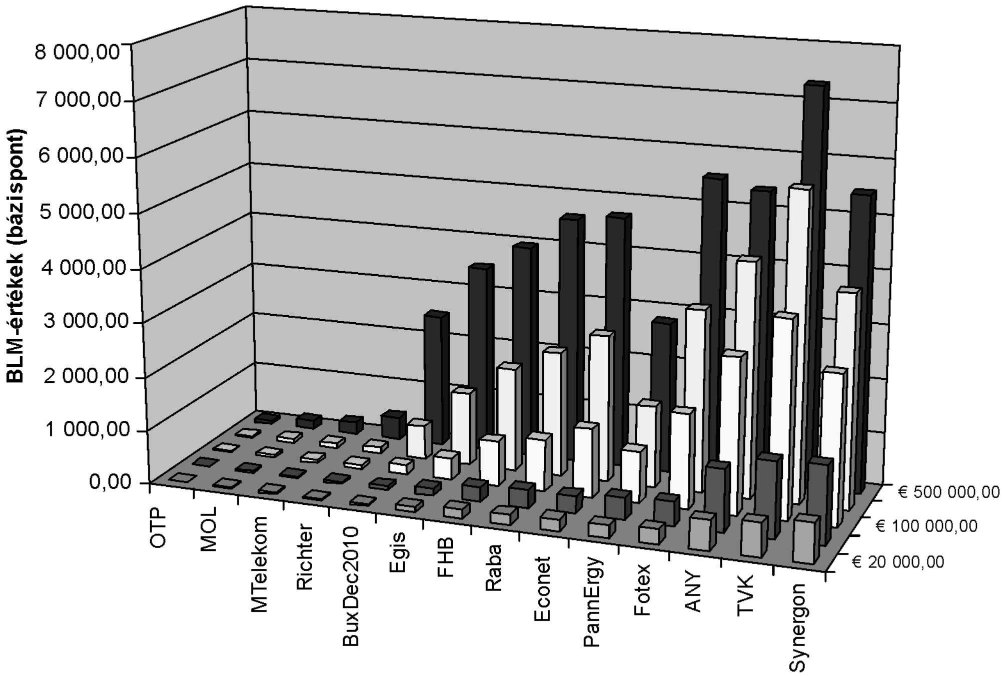
A következő fejezetekben a tanulmány bemutatja, hogy miként alakul a Budapesti Értéktőzsde néhány részvényének BLM-értéke, valamint hogy a statikus dimenziók mentén alkalmazott likviditási mutatókkal, a bid-ask spreaddel és a forgalmi adatokkal összehasonlítva, a BLM mennyiben ad eltérő eredményt a likviditásra vonatkozóan. A tanulmány a BUX indexet 2010. április 1-jén alkotó 13 részvény, illetve a BUX határidős termékek elemzésére helyezi a hangsúlyt. Az *5. fejezetben* a bid-ask spread és a BLM, míg a *6. fejezet* a forgalom és BLM kapcsolatát mutatja be a tanulmány. A *7. fejezetben* pedig a Budapesti Értéktőzsdén zajló tranzakciók kötésméretét elemzi.

## 4. A BUX részvények és a határidős BUX átlagos BLM értékei

A befektetők szempontjából lényeges kérdés, hogy melyik részvény rendelkezik a legkisebb likviditási mértékkel, hiszen minél kisebb ez az érték, annál kisebb implicit költséget vállalnak az adott részvény megvásárlásával. A következő ábra mutatja a BUX-ban szereplő részvények, valamint a BUX határidős termék likviditási mértékeinek átlagos értékeit 2010 során:

*3. ábra*

**Átlagos BLM-értékek bázispontban kifejezve – 2010**




Az ábrán jól látszik, hogy a BLM-értékek monoton növekvőek minden részvény esetében, vagyis a BLM1 a legkisebb, míg a BLM5 mutatja a legnagyobb értéket. Továbbá az is szembetűnő, hogy a részvények között kialakult sorrend a BLM1 szinten nem egyezik meg a különböző kötési szintek alapján számolt BLM-értékek által adott sorrenddel. Ez a jelenség annak tudható be, hogy abban az esetben is számol a rendszer BLM-et, amikor az ajánlati könyvben nincs elegendő megbízás.

Az ábrából még az is kiolvasható, hogy az előző kutatással (Kutas–Végh [2005]) szemben nem a BUX határidős termék a leglikvidebb, hanem az OTP, amelyik egyébként a legnagyobb forgalmú részvény a BÉT-en. Egy lehetséges magyarázat az eltérésre, hogy a 2006-os év során[2] a Budapesti Értéktőzsde a határidős BUX termékek esetében a kontraktus méretét a korábbinak a tizedére – százról tízre – csökkentette, ezután a forgalom értéke jelentősen visszaesett. Ugyanis a befektetők jelentős része állandó mennyiségű kontraktust vásárolt a csökkentés előtt; azonban a csökkentést követően is maradtak a megszokott kontraktusszámnál ahelyett, hogy azt növelik, és továbbra is azonos értékű határidős termékekkel rendelkeznek.

2 http://www.tozsdeforum.hu/index2.phtml?menu=1&submenu=onearticle&news_id=365490 (letöltés dátuma: 2010. november 11.)

Amennyiben összevetjük az egyes részvények napi átlagos forgalmát a 2010-es év során a BLM1-értékekkel, közel minden esetben azt tapasztaljuk, hogy minél nagyobb egy részvény forgalma, annál kisebb BLM1-értékkel rendelkezik a 2010-es év során. A következő táblázat mutatja az egyes részvények forgalmi adatait 2010 első hét hónapjában:

*1. táblázat*

**Átlagos napi forgalom és BLM1-értékek**

| | **BLM1 (bps)** | **Átlagos forgalom – 2010. 01.–07. hó (M HUF)** |
|---|---|---|
| OTP | 17 | 17 506,07 |
| MOL | 31 | 3 693,34 |
| Richter | 36 | 1 703,90 |
| MTelekom | 35 | 1 678,74 |
| Egis | 109 | 221,59 |
| Rába | 372 | 97,29 |
| FHB | 257 | 87,83 |
| Econet | 315 | 61,03 |
| Fotex | 244 | 38,84 |
| PannErgy | 607 | 36,15 |
| ÁNY | 630 | 16,28 |
| Synergon | 510 | 11,99 |
| TVK | 497 | 10,30 |

A befektetők számára a befektetési döntést segítően a BLM-értékeket érdemes elhelyezni egy hőtérképen, amely egy táblázatba foglalva tartalmazza a különböző kötésszintekhez tartozó BLM-értékeket. Minél nagyobb értéket vesz fel a BLM, annál sötétebb színezést kap az adott cella, ezzel elősegítve a könnyebb átláthatóságot, valamint a befektetők számára a gyors döntést a BLM vonatkozásában.

*4. ábra*

**Hőtérkép (adatok bázispontban)**

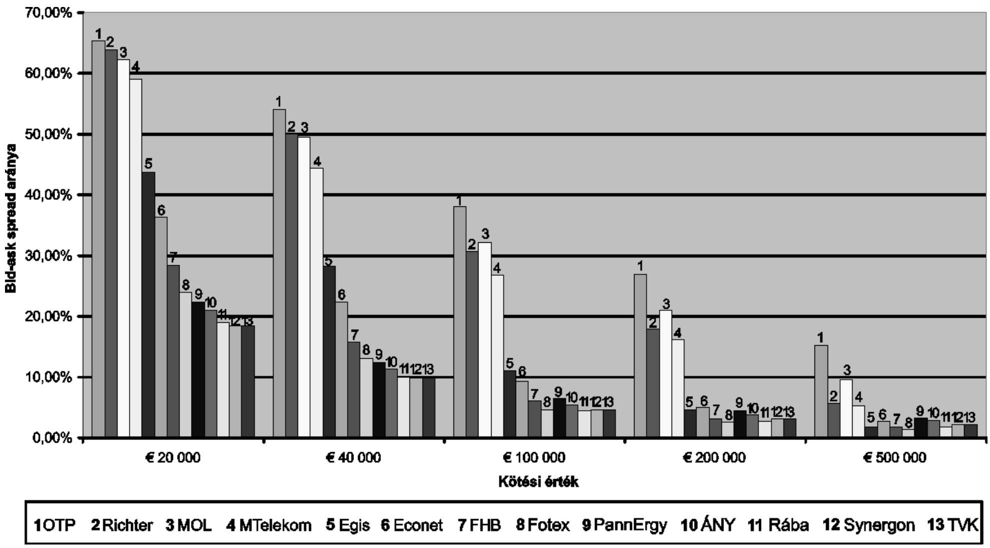
| Hőtérkép | BLM1 | BLM2 | BLM3 | BLM4 | BLM5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **OTP** | 17 | 21 | 30 | 42 | 74 |
| ***BUX0712*** | 23 | 35 | 76 | 208 | 862 |
| **MOL** | 31 | 39 | 59 | 91 | 201 |
| **MTelekom** | 35 | 46 | 77 | 127 | 383 |
| **Richter** | 36 | 46 | 76 | 130 | 406 |
| ***BUX1012*** | 41 | 66 | 167 | 636 | 2491 |
| ***BUX0812*** | 64 | 112 | 460 | 1432 | 3170 |
| ***BUX0912*** | 96 | 194 | 827 | 2126 | 4130 |
| **Egis** | 109 | 169 | 431 | 1046 | 2601 |
| **Fotex** | 244 | 444 | 1250 | 2302 | 4058 |
| **FHB** | 257 | 464 | 1214 | 2327 | 4116 |
| **Econet** | 315 | 512 | 1237 | 2279 | 4157 |
| **Rába** | 372 | 705 | 1563 | 2535 | 4109 |
| **TVK** | 497 | 937 | 2151 | 3521 | 5107 |
| **Synergon** | 510 | 954 | 2015 | 2975 | 4382 |
| **PannErgy** | 607 | 1088 | 2096 | 3030 | 4169 |
| **ÁNY** | 630 | 1172 | 2421 | 3547 | 4590 |

## 5. A bid-ask spread aránya

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy a BLM, valamint a bid-ask spread értékek esetében milyen sorrend állítható fel ezek között az értékpapírok között. Első lépésben azonban érdemes azt megnézni, hogy a BUX-ban szereplő részvények és a határidős BUX kontraktus esetében mekkora részarányt képvisel a bid-ask spread az egyes BLM-értékeken belül a különböző kötési szinteken, amely így megmutatja, hogy mely termékek esetében jelentős az áreltérítő hatás.

*5. ábra*

**A bid-ask spread aránya a BLM-ben különböző kötési szinteken (2007. 01. 01–2010. 07. 16.)**



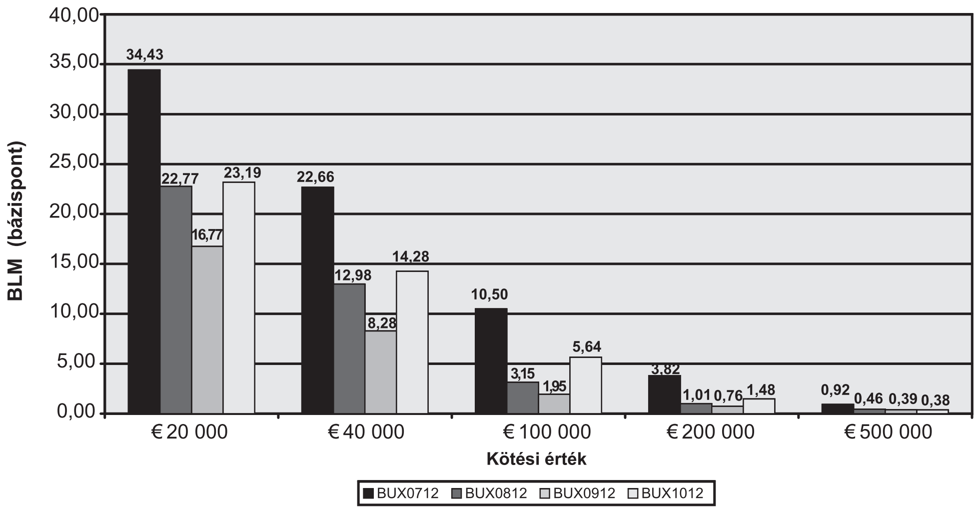

Az ábrán az látszik, hogy minél nagyobb kötési szinteket nézünk, a BLM értékén belül annál kisebb részarányt képvisel a spread, és annál nagyobbat az áreltérítő hatás. Továbbá az is látható, hogy a nagyobb forgalmú tőzsdei részvények esetében (lásd *2. táblázat*) a bid-ask spread nagyobb részarányt képvisel a BLM értékén belül, vagyis kisebb az áreltérítő hatás nagysága.

A következő ábra a BUX határidős termékekre mutatja a bid-ask spread BLM-en belüli arányát.

Továbbá, összehasonlítva a BUX index részvényeivel, azt láthatjuk, hogy az áreltérítő hatás értéke a BLM-en belül jóval meghaladja a négy nagy részvény – OTP, MOL, Richter, MTelekom – esetében tapasztalt értéket. Ez annak a következménye, hogy a bid-ask spread jóval alacsonyabb a határidős termékek esetében.

*6. ábra*

**Bid-ask spread aránya a BLM értékén belül a határidős BUX termékek esetében (termékenként a lejárat előtti 1 év adatai alapján)**




Az előző két ábra alapján arra a megállapításra jutottunk, hogy a BLM értékén belül a bid-ask spread kis részarányt képvisel a BUX határidős termékek esetében a blue chip – OTP, MOL, MTelekom, Richter – részvényekhez képest. Ha azonban megnézzük, hogy a bid-ask spread értéke alapján milyen sorrend alakul ki a részvények és a határidős termékek között, akkor az 1. táblázat adatai alapján azt kapjuk, hogy szinte minden évben a határidős termékek bid-ask spreadje volt a legkisebb az OTP-é után, leszámítva 2007-et, amikor a BUX határidős terméket nem előzte meg egy részvény sem.

Vagyis amennyiben a bid-ask spread alapján elemeznénk a likviditást, a BUX határidős termékek – a likviditás szempontjából – mindig jó befektetésnek tűnnének a többi értékpapírhoz képest. A 3. és 4. ábra alapján látható, hogy a BUX határidős termékek BLM értékein belül az *áreltérítő hatás* nagyobb arányban van jelen, mint a *likviditási prémium*, míg a blue chip részvények esetén a likviditási prémium BLM-en belüli hatása jelentősebb.

*2. táblázat*

**A bid-ask spread[3]**

| Bid-ask spread (bázispont) | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2007** | | **2008** | | **2009** | | **2010** | |
| BUX0712 | 7,94 | OTP | 13,96 | OTP | 10,41 | OTP | 8,78 |
| OTP | 10,97 | BUX0812 | 14,51 | BUX0912 | 16,09 | BUX1012 | 9,42 |
| MOL | 15,10 | MTelekom | 23,90 | MOL | 20,02 | MOL | 15,69 |
| MTelekom | 18,57 | MOL | 23,98 | MTelekom | 20,59 | MTelekom | 17,22 |
| Richter | 20,01 | Richter | 29,83 | Richter | 21,44 | Richter | 20,31 |
| Fotex | 30,46 | Egis | 65,99 | Egis | 41,46 | Egis | 39,16 |
| Rába | 37,02 | Fotex | 72,06 | FHB | 60,01 | FHB | 46,07 |
| Egis | 40,72 | Rába | 89,05 | Fotex | 69,68 | Rába | 48,28 |
| Synergon | 48,20 | FHB | 98,64 | Rába | 96,94 | PannErgy | 52,10 |
| TVK | 69,95 | Econet | 115,07 | TVK | 99,42 | Fotex | 62,62 |
| Econet | 73,98 | Synergon | 129,16 | Synergon | 102,64 | TVK | 89,49 |
| FHB | 75,28 | TVK | 158,41 | PannErgy | 108,84 | Econet | 93,69 |
| ÁNY | 106,51 | ÁNY | 199,47 | ÁNY | 111,02 | Synergon | 93,80 |
| PannErgy | 114,59 | PannErgy | 227,02 | Econet | 164,42 | ÁNY | 95,73 |

## 6. A likviditás és a forgalom kapcsolata

### *6.1. Átlagos BLM-értékek és forgalmi adatok alakulása*

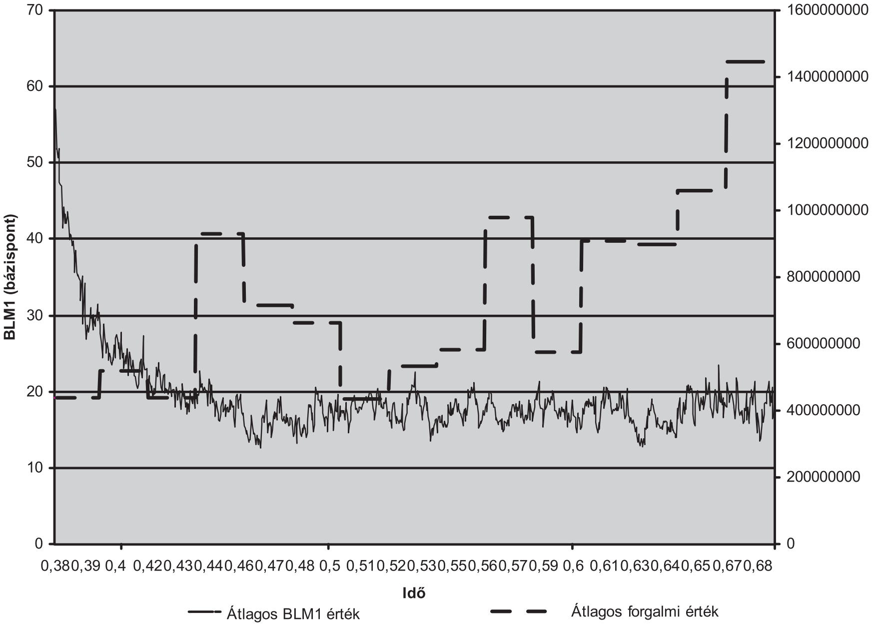
Az előzőekben azt tapasztaltuk, hogy minél nagyobb forgalmú egy részvény, annál kisebb BLM-értékkel rendelkezik, vagyis annál jobb befektetésnek tűnik a likviditás szempontjából. Azonban érdemes azt is megvizsgálni, hogy napon belül is érvényesül-e ez a jelenség, vagyis ha egy részvény BLM-értéke alacsony a nap során, akkor ezzel együtt magas-e a forgalma.

Ezt a vizsgálatot a MOL és az OTP részvényein mutatja be a tanulmány, 2007. szeptemberi napon belüli forgalmi és BLM-adatok átlagai alapján, amit a következő ábrák mutatnak:

3 BUX határidős termékek: csak azok a termékek szerepelnek az egyes években, amelyeknek a lejárata az adott évben van.

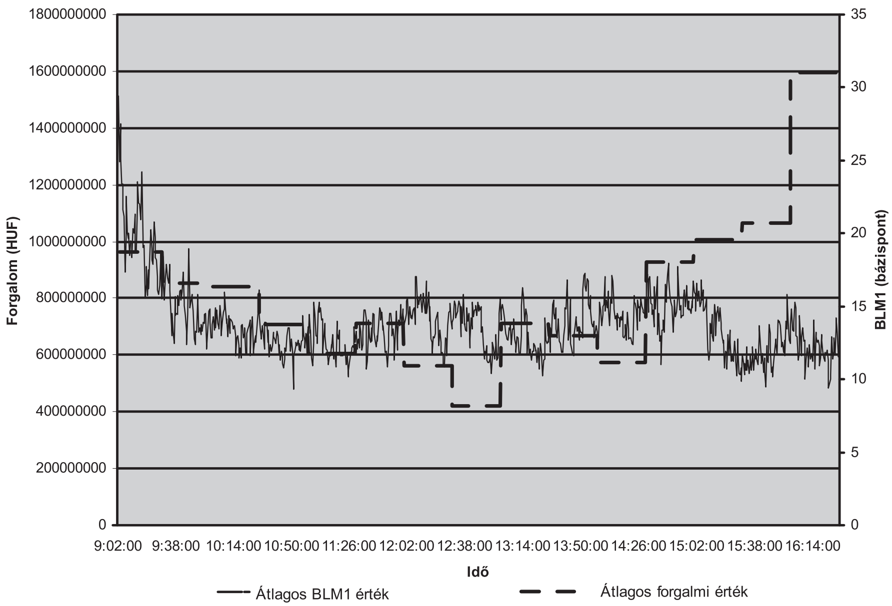
*7. ábra*

**MOL BLM1 és a forgalom napon belüli értékének átlagos alakulása (2007. 09.)**




*8. ábra*

**OTP BLM1 és a forgalom napon belüli értékének átlagos alakulása (2007. 09.)**



A 2007. szeptemberi adatokból számolt, napon belüli átlagos értékek korántsem támasztják alá azt a hipotézist, hogy a BLM által mért likviditás együtt mozog a forgalommal. Nem teljesül az a tendencia, hogy a magas forgalom együtt jár az alacsony BLM-értékkel.

Az eddigi kutatások megmutatták, hogy a napon belüli forgalom „U" alakzat szerint alakul, vagyis a nap elején és a végén magasabb, mint a nap során. Egyedül az OTP esetében figyelhető meg az „U" alakzat, a MOL esetében csak a nap végi növekvő forgalom látszik, ami az amerikai tőzsde nyitásához köthető. Magyar idő szerint 15:30-kor nyitnak az amerikai tőzsdék, és ez jelentős forgalmat generál a BÉT-en a kereskedés utolsó órájában. Míg a forgalmi adatokon érződik ez a hatás, a BLM értékét nem befolyásolja, és míg a forgalom növekedésével a likviditásnak növekednie kellene, ez nem tükröződik a mutatóban.

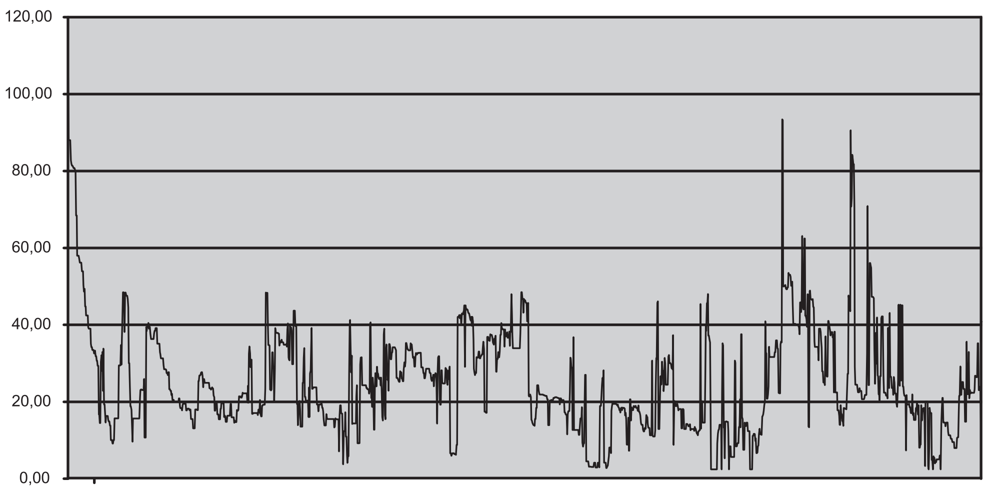
Az ábrákon az is látszik, hogy a nyitás után egy órával a kereskedés aktivitása alacsony, 10 óra körül indul a kereskedés. A nyitás utáni egy óra nem tekinthető a napi átlagos kereskedésre jellemzőnek, így az ottani BLM1-adatok nem nyújtanak megbízható információt a likviditásról. Továbbá azért is lehetséges, hogy a BLM1-értékek magasabbak a napi kereskedés első egy órájában, mert a befektetők ekkor építik fel az ajánlataikkal az ajánlati könyvet.

## *6.2. A BLM értékének alakulása az idő függvényében*

Az előzőekben a BLM1 értékének napon belüli alakulását egy hónap átlagos BLM1-értékei alapján mutatta be a tanulmány, azonban érdemes megnézni, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott kereskedési napon hogyan is alakul a BLM1 értéke. A következő ábra mutatja a MOL BLM1 értékének alakulását az idő függvényében, 2010. július 16-án:

*9. ábra*

**A MOL napon belüli BLM1-értékei (2010. 07. 16.)**

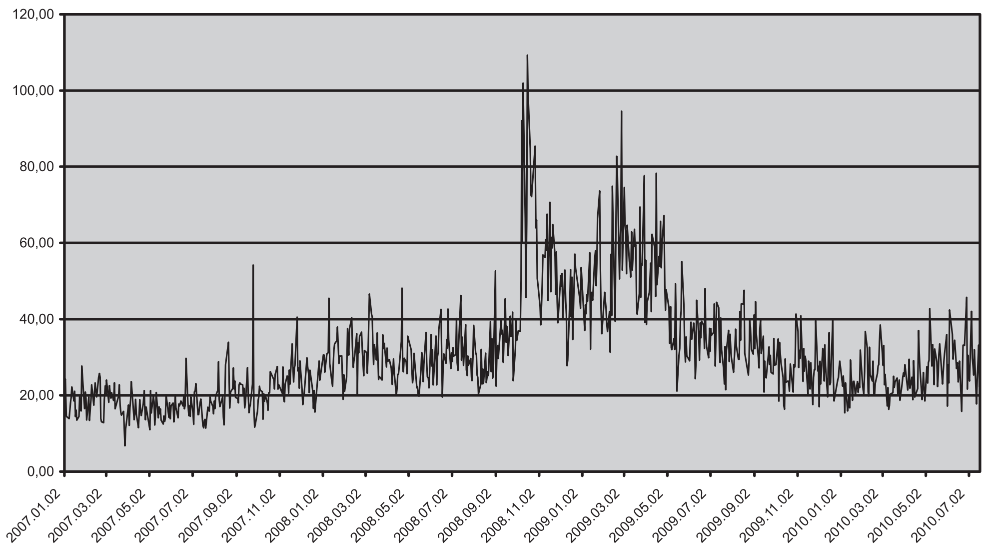


Az ábra alapján érdemes lenne további kutatások során megvizsgálni, hogy nem jellemző-e a BLM-folyamat alakulására az átlaghoz való visszahúzás. Amennyiben igen, akkor esetleg a kamatláb-modellezéshez használtakhoz hasonló modellel lehetne leírni a folyamat alakulását, mint például a Vasicek-modell.

Érdemes megnézni a napi átlagos BLM-értékek alakulását az idő függvényében, nem csak napon belüli adatokon, hanem a teljes vizsgált időszakra vonatkozóan. A következő ábra mutatja a MOL napi BLM1-adatait a 2007. január 1. és 2010. július 16. közötti időszakban:

*10. ábra*

**A MOL napi BLM1-értékei**
**(2007. 01. 01.–2010. 07. 16.)**




Ezen az ábrán megfigyelhető az átlaghoz való visszahúzás a BLM1 alakulásában, továbbá az is látszik, hogy lehet összefüggés az előző napi és az aznapi BLM1-érték között, hiszen megfigyelhető, hogy jellemzően kis BLM1-értékű napokat kis BLM1-értékű napok követnek, valamint a fordítottja mondható el akkor is, amikor nagy értékeket vesz fel a BLM1.

Továbbá az is látható, hogy a gazdaság éppen aktuális helyzete tükröződik a BLM1-értékekben; például a 2008-as pénzügyi válság során számottevően megnövekedett a mutató értéke, ami jól tükrözi a piacon uralkodó, akkori likviditáshiányt.

### *6.3. Kapcsolat az APM_bid és APM_ask aszimmetriája és a hozam között*

Mivel a BLM1-értékek tükrözik a gazdaság aktuális helyzetét, ezért a tanulmány megvizsgálta, hogy van-e összefüggés a hozamok, valamint az APM_bid és az APM_ask oldali értékének eltérése között, vagyis a BLM értékén belül inkább a vételi, vagy inkább az eladási oldali árelmozdító hatása a jelentősebb.

A tanulmány azt találta, hogy nincs korreláció az APM_bid és APM_ask eltérése, valamint a hozam alakulása között, amennyiben a másodperces adatokat elemezzük; pedig a két oldal áreltérítő hatásának az eltéréséből annak kellene következnie, hogy amennyiben vételi nyomás van a piacon, emelkedjenek az árak, növekedjen a hozam, ha pedig eladási nyomás van a piacon, akkor csökkenjen a hozam. Ez azonban nem tükröződik az adatokból.

## 7. Kötésméretek a Budapesti Értéktőzsdén

Az eddigi eredményeket összefoglalva tartalmazza a *3. táblázat*, amelynek a sorrendje a BLM1-érték szerint alakult ki. Mindegyik mérőszám esetében a teljes vizsgált időszak (2007. 01. 01.–2010. 07. 16.) átlagos napi értéke szerepel.

*3. táblázat*

**A likviditási mutatók összehasonlítása**

| | Sorrend a BLM1 (bp) alapján | | Sorrend a bid-ask spread (bp) alapján | | Sorrend a forgalom (HUF) alapján | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| OTP | 17,34 | 1. | 5,66 | 1. | 14 049 766 185 | 1. |
| MOL | 30,71 | 2. | 19,11 | 2. | 6 435 770 430 | 2. |
| MTelekom | 34,62 | 3. | 20,45 | 3. | 1 604 118 269 | 4. |
| Richter | 36,39 | 4. | 23,25 | 4. | 2 140 292 314 | 3. |
| Egis | 109,46 | 5. | 47,87 | 5. | 287 976 841 | 5. |
| Fotex | 243,87 | 6. | 58,39 | 6. | 156 837 943 | 6. |
| FHB | 257,41 | 7. | 73,08 | 8. | 83 667 693 | 9. |
| Econet | 314,61 | 8. | 114,40 | 11. | 85 468 131 | 8. |
| Rába | 372,07 | 9. | 70,57 | 7. | 135 962 457 | 7. |
| TVK | 497,14 | 10. | 106,48 | 10. | 39 064 987 | 12. |
| Synergon | 509,62 | 11. | 93,71 | 9. | 83 638 330 | 10. |
| PannErgy | 607,39 | 12. | 135,29 | 13. | 62 750 476 | 11. |
| ÁNY | 629,60 | 13. | 132,55 | 12. | 29 148 136 | 13. |

A táblázatból látszik, hogy az eltérő likviditási mutatók eltérő likviditási sorrendet adnak, ami a 2. fejezetben tárgyalt likviditás különböző dimenzióinak, valamint annak a következménye, hogy ezen mutatók eltérő dimenziókban mérik a likviditást.

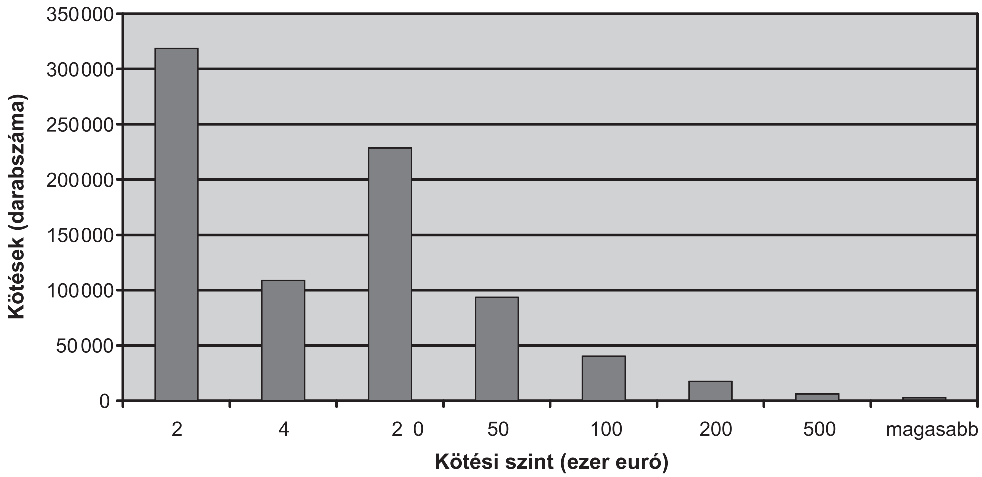
Az előző fejezetekből az is kitűnik, hogy a BLM-értékek nem megfelelő kötésméretekre vannak kiszámolva, mivel általában már a 100 E euró értékű piaci ajánlat sem képes azonnal teljesülni. Emiatt – és a BLM-et kiszámító program számítási algoritmusa miatt – a mutatót csak korlátozottan lehet alkalmazni a likviditás szélesség-dimenziójának a mérésére. Így felmerül annak a gondolata, hogy más kötésméretekre is érdemes lenne kiszámítani BLM-értékeket.

Ahhoz azonban, hogy meg lehessen állapítani, mekkora kötésnagyságokra érdemes BLM-értékeket számolni a magyar piacon, elengedhetetlen megvizsgálni, valójában mekkora kötések vannak a BÉT-en. A vizsgált adatok a 2007. január–júniusi időszakot ölelik fel, és tartalmazzák a teljes kötéslistát, ami a BÉT-en teljesült ez időszak alatt.

A következő ábra mutatja, hogy különböző kötési szinteken mennyi kötés teljesült a BÉT-en 2007 első félévében. Jól látszik, hogy a befektetők jelentős része 20 E euró érték alatti tranzakciót hajt végre a piacon, ami indokolttá teheti, hogy a legkisebb kötésnagysághoz tartozó BLM-érték ne 20 E euróra legyen kiszámolva, hiszen ezen befektetők számára is hasznos információ lehet a BLM pontos értéke. (Bár kis értékű kötésnagyság esetén az áreltérítő hatás mértéke valószínűleg nem számottevő.)

*11. ábra*

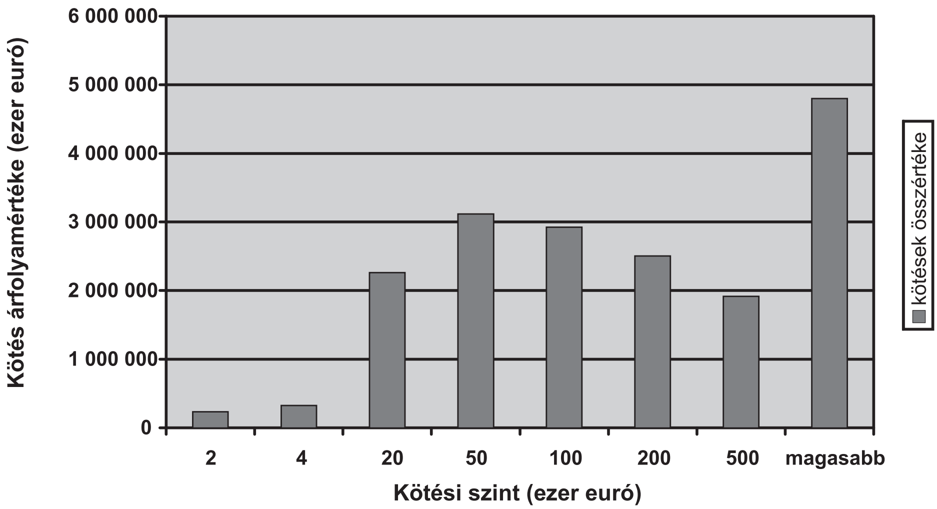
**A kötések darabszáma az egyes kötési szintek alatt (2007. 01.–06.)**




Fontos figyelembe venni azonban azt is, hogy az egyes kötési szinteken történő kötések milyen értékű tranzakciókat jelentenek a tőzsdén. Ezt a *12. ábra* szemlélteti:

*12. ábra*

**A kötések összértéke az egyes kötési szintek között (2007. I. félév)**




Ezt követően a tanulmány megvizsgálta a tőzsdei tranzakciók pontosabb eloszlását a kötési értékek szempontjából annak érdekében, hogy meghatározhassuk, melyek legyenek azok a megfelelő kötési szintek, ahol a BLM-értékeket érdemes lenne kiszámolni.

Az eredmény a következő két táblázatban látható, az első ezer forintra kerekítve mutatja az értékeket, míg a második euróban[4]:

4 Az átszámolás euróra forintról mindig az adott hónap adott napján érvényes MNB-középárfolyamon történt.

*4. táblázat*

| A kötésnagyságok százalékos megoszlása 2007 I. félévében (E HUF) | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **percen-tilis** | **január** | **február** | **március** | **április** | **május** | **június** | **teljes időszak** |
| 5% | 38,50 | 36,30 | 41,25 | 41,75 | 38,14 | 43,98 | **39,42** |
| 10% | 67,90 | 63,00 | 74,23 | 74,00 | 68,10 | 79,22 | **71,10** |
| 15% | 99,90 | 88,20 | 106,10 | 105,69 | 97,01 | 107,47 | **100,80** |
| 20% | 136,00 | 117,00 | 154,77 | 152,50 | 129,33 | 154,70 | **141,60** |
| 25% | 203,00 | 163,20 | 211,55 | 215,60 | 188,27 | 218,50 | **200,00** |
| 30% | 294,00 | 217,91 | 306,66 | 304,00 | 248,00 | 297,00 | **279,20** |
| 35% | 403,90 | 307,13 | 404,80 | 411,91 | 352,50 | 410,40 | **385,70** |
| 40% | 525,00 | 405,28 | 537,50 | 517,88 | 467,50 | 517,05 | **494,00** |
| 45% | 720,50 | 516,66 | 730,09 | 728,62 | 616,50 | 717,60 | **673,79** |
| 50% | 952,80 | 710,49 | 914,12 | 917,88 | 852,50 | 940,50 | **875,35** |
| 55% | 1 200,00 | 871,89 | 1 130,78 | 1 110,75 | 1 027,61 | 1 146,14 | **1 065,00** |
| 60% | 1 697,20 | 1 078,55 | 1 586,00 | 1 560,00 | 1 369,80 | 1 548,40 | **1 477,50** |
| 65% | 2 065,00 | 1 543,03 | 2 014,67 | 1 992,34 | 1 895,25 | 2 024,00 | **1 950,00** |
| 70% | 2 973,48 | 2 005,00 | 2 699,99 | 2 580,40 | 2 319,50 | 2 801,56 | **2 518,52** |
| 75% | 4 090,50 | 2 712,60 | 3 737,81 | 3 774,38 | 3 491,81 | 3 892,93 | **3 697,00** |
| 80% | 5 319,64 | 4 009,20 | 4 750,00 | 4 830,72 | 4 644,00 | 5 278,00 | **4 812,50** |
| 85% | 8 265,00 | 5 760,75 | 7 420,00 | 7 732,87 | 6 780,55 | 8 580,00 | **7 520,00** |
| 90% | 10 414,92 | 8 770,00 | 10 142,50 | 10 800,00 | 9 854,68 | 12 200,00 | **10 320,00** |
| 95% | 19 398,21 | 16 828,90 | 18 408,27 | 20 081,46 | 18 920,00 | 24 155,00 | **19 404,01** |
| 100% | 10 276 500,00 | 39 413 370,00 | 3 850 959,04 | 2 215 000,00 | 25 740 000,00 | 60 000 000,00 | **60 000 000,00** |

Az adatok értelmezése: például a „január" oszlop első sorában lévő adat azt mutatja, hogy 2007 januárjában a kötések 5%-a 38,5 E forint érték alatti volt.

*5. táblázat*

| A kötésnagyságok százalékos megoszlása 2007 I. félévében (EUR) | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **percen-tilis** | **január** | **február** | **március** | **április** | **május** | **június** | **teljes időszak** |
| 5% | 151,16 | 143,05 | 165,32 | 169,51 | 153,29 | 175,35 | **156,58** |
| 10% | 267,09 | 248,46 | 296,37 | 300,88 | 274,87 | 317,28 | **284,26** |
| 15% | 393,11 | 348,43 | 425,33 | 429,52 | 390,28 | 428,38 | **401,29** |
| 20% | 535,84 | 461,79 | 621,36 | 619,28 | 520,21 | 618,98 | **565,72** |
| 25% | 798,65 | 643,83 | 845,34 | 875,63 | 757,86 | 871,64 | **796,96** |
| 30% | 1 159,02 | 859,84 | 1 230,19 | 1 235,91 | 997,85 | 1 190,67 | **1 116,03** |
| 35% | 1 589,36 | 1 212,14 | 1 620,25 | 1 675,36 | 1 417,66 | 1 643,82 | **1 540,71** |
| 40% | 2 070,49 | 1 601,32 | 2 150,81 | 2 105,78 | 1 878,54 | 2 069,31 | **1 970,31** |
| 45% | 2 835,85 | 2 038,26 | 2 917,86 | 2 961,52 | 2 483,61 | 2 864,20 | **2 691,18** |
| 50% | 3 758,69 | 2 804,33 | 3 655,52 | 3 731,93 | 3 435,18 | 3 752,74 | **3 497,84** |
| 55% | 4 724,81 | 3 440,95 | 4 519,67 | 4 518,15 | 4 137,36 | 4 586,68 | **4 263,73** |
| 60% | 6 665,99 | 4 255,19 | 6 325,62 | 6 337,17 | 5 509,60 | 6 202,92 | **5 906,03** |
| 65% | 8 119,12 | 6 092,40 | 8 031,05 | 8 108,75 | 7 606,45 | 8 144,00 | **7 784,66** |
| 70% | 11 708,46 | 7 913,47 | 10 779,14 | 10 499,09 | 9 318,00 | 11 264,74 | **10 026,73** |
| 75% | 16 094,13 | 10 685,92 | 14 900,59 | 15 354,64 | 14 046,59 | 15 571,31 | **14 772,16** |
| 80% | 21 024,36 | 15 835,31 | 19 033,74 | 19 654,93 | 18 656,75 | 21 190,89 | **19 269,03** |
| 85% | 32 571,35 | 22 696,78 | 29 489,20 | 31 453,78 | 27 355,29 | 34 343,62 | **30 052,84** |
| 90% | 41 182,31 | 34 609,33 | 40 655,52 | 43 874,51 | 39 862,40 | 48 643,22 | **41 229,99** |
| 95% | 76 307,41 | 66 488,48 | 73 380,63 | 81 666,10 | 76 122,61 | 96 119,19 | **77 641,11** |
| 100% | 40 320 555,58 | 156 607 342,95 | 15 223 588,85 | 9 017 261,03 | 103 290 529,70 | 242 169 841,78 | **242 169 841,78** |

A táblázatokból az olvasható ki, hogy időben nem állandó a kötésnagyságok mérete, van eltérés a hónapok között, ezért érdemes lenne a válság kitörését követő, 2008-as adatokkal, valamint 2010. I. féléves adataival is összehasonlítani az itt bemutatott eredményeket. Több év adata alapján lesz majd érdemes meghatározni, hogy milyen értékösszegekre számítsa ki és tegye közzé a BÉT a BLM-adatokat.

Az is látható továbbá, hogy a kötések 95%-a átlagban 80 E euró alatti, 90%-a pedig nagyjából 40 E euró alatti értékű. Ennek megfelelően biztosra mondható, hogy módosítani kéne a BLM kategóriák értékhatárait a 20 E, 40 E, 100 E, 200 E és 500 E euróról. Ennek következtében mondható biztosra az is, hogy torzultak a BLM-értékek, és nem adnak megbízható képet a likviditásról a BLM3, BLM4 és BLM5 szinteken, hiszen ekkora értékű kötések száma elenyésző a piacon. Ráadásul az ilyen értékű kötések általában nem rendes piaci körülmények között születnek, hanem jellemzően fix kötések, így ezeknek nem is lehet áreltérítő hatása.

Nemzetközi viszonylatban léteznek hasonló likviditási mértékek, mint például a Xetra Liquidity Measure (XLM) (*Gomber–Schweikert* [2002]), aminek a mintájára készült a BLM. A Deutsche Börse Group fejlesztette ki 2002-ben ezt a mértéket. Az XLM esetében a standard kötésnagysághoz tartozó XLM-mértékek eltérőek részvények esetében, attól függően, hogy mekkora forgalommal rendelkezik egy adott részvény (Gomber–Schweikert [2002]). Az XLM-et az alábbi kötésnagyságokra számítják ki: 10 E, 25 E, 50 E euró. Nagyobb forgalmú részvények esetében ezeken az értékeken felül még 75 E, 100 E, 150 E, 250 E euró, néhány esetben 500 E, 750 E, 1000 E, 2000 E, 4000 E, 5000 E euró. Ezért érdemes megnézni, hogy a BÉT-en is a különböző értékpapírok esetében különböző kötésnagyságokkal kereskednek-e, mert elképzelhető, hogy érdemes lenne a nagyobb kötésnagyságú értékpapír esetében magasabb kötés értékhez tartozó BLM-et is számolni.

A következő táblázat mutatja, hogy a blue chip, illetve a nem blue chip részvények között nagy különbség mutatkozik a kötésnagyságban:

*6. táblázat*

**A kötésnagyságok átlagos megoszlása (2007. 01.–06.)**

| EUR | Nem blue chip | blue chip |
|---|---|---|
| 5% | 72,35 | 156,74 |
| 10% | 154,23 | 284,48 |
| 15% | 223,69 | 401,46 |
| 20% | 287,61 | 566,20 |
| 25% | 368,00 | 797,33 |
| 50% | 1 076,68 | 3 500,61 |
| 75% | 3 206,60 | 14 815,83 |
| 80% | 4 003,09 | 19 305,34 |
| 85% | 5 349,43 | 30 184,15 |
| 90% | 7 550,97 | 41 309,31 |
| 95% | 12 788,76 | 77 750,01 |
| 100% | 31 298 414,38 | 242 169 841,78 |

Ennek az alapján elmondható, hogy a nem blue chip részvényekre más kötésnagyságokra lenne célszerű kiszámolni a BLM-értéket, mint a blue chip részvények esetében, hiszen a kötések 95%-a 13 E euró alatti, így ott már szinte a 20 E eurós kötésnagysághoz tartozó BLM sem értelmezhető. A blue chip papírok esetében viszont még a 80 E eurós kötésnagysághoz tartozó BLM-érték is hasznos információval szolgálhat. Összességében elmondható, hogy érdemes ugyanolyan differenciálást csinálni, mint az XLM esetében.

Nemzetközi példák között még említésre méltó a ljubljanai tőzsdén (LJSE) közzétett likviditási mutató, a CGT (amelyet ugyanúgy számítanak ki, mint az XLM-et és a BLM-et). Ezen a tőzsdén egyetlen kötésnagyságra, 7500 euróra teszik közzé a likviditási mértéket egy nap során kétszer, 11:00-kor és 12:55-kor. Az ezekben az időpontokban közzétett CGT-érték a nap során addig számított CGT-értékek számtani átlaga.[5]

## 8. Konklúzió és potenciális felhasználási lehetőségek

A BLM-mutatószám segítségével a brókerek optimalizálni tudnák a nagyobb részvénycsomagok kezelését (*order splitting*), valamint a kereskedőket is segíthetné a stop limitek meghatározásában. Másrészt a BLM referenciapontként is szolgálhatna az árjegyzői paraméterek beállításánál. Ezen kívül létre lehetne hozni egy BLM-en alapuló, származtatott terméket, amely a likviditási kockázat fedezését segíthetné.

Továbbá, a technikai elemzést is támogathatná két vonatkozásban. Egyrészt modellt lehetne keresni arra vonatkozóan, hogy milyen folyamat szerint alakulnak az idő függvényében a BLM-értékek, másrészt megvizsgálható, és algoritmus építhető arra, hogy merre mozdulnak a hozamok abban az esetben, ha eltér egymástól az APM a bid és az ask oldalon.

Összességében elmondható, hogy a BLM olyan likviditási mutató, amely több dimenzió mentén képes mérni a tőzsdén kereskedett termékek likviditását, így megbízható képet ad a piaci aktuális likviditási helyzetéről. Továbbá könnyen alkalmazható mutató, amely nagymértékben képes elősegíteni a likviditásra vonatkozó, tőzsdei kereskedési döntéseket.

## Irodalomjegyzék

BIS [1999]: Market Liquidity: Research Findings and Selected Policy Implications. Committee on the Global Financial System, Publications No. 11., május

Csávás Cs.–Erhart Sz. [2005]: Likvidek-e a magyar pénzügyi piacok? – A deviza- és állampapír-piaci likviditás elméletben és gyakorlatban. MNB-tanulmányok 44.

Gomber, P.–Shcweikert, U.: The Market Impact – Liquidity Measure in Electronic Securities Trading., *Die Bank*, 7/2002

Harris, L. [1990]: Statistical properties of the Roll serial covariance bid/ask soread estimator. *The Journal of Finance* 45., 568–579. o.

Kutas G.–Végh R. [2005]: A Budapesti Likviditási Mérték bevezetéséről. *Közgazdasági Szemle*, LII. évfolyam, július–augusztus

Kyle, A. [1985]: Continuous auctions and insider trading. *Econometrica*, Vol. 53. No. 6., 1315–1335. o.

Michaletzky M. [2010]: *A pénzügyi piacok likviditása*. PhD-értekezés, Budapesti Corvinus Egyetem

5 http://www.ljse.si/cgi-bin/jve.cgi?doc=2498&sid= (letöltés: 2010. július 27.)

Gyarmati Ákos–Michaletzky Márton–Váradi Kata

# A Budapesti Likviditási Mérték és felhasználása – Likviditáskockázat VaR-mutatókban

**Cikkünkben bemutatjuk a Budapesti Likviditási Mértéket (BLM) és egy lehetséges gyakorlati alkalmazását a kockázatkezelés területén. A BLM méri a kereskedés implicit költségeit, amelyek abból fakadnak, hogy a tényleges kötések nem a középárfolyamon teljesülnek. A hagyományos VaR-mutatók csak a középárfolyam változásának kockázatát foglalják magukban, a pozíció eladása, illetve megvétele esetén felmerülő likviditási kockázatot figyelmen kívül hagyják. A BLM segítségével bemutatjuk, hogyan lehet egyszerűen megjeleníteni a likviditáskockázatot is a VaR-keretben. A rendelkezésre álló adatok alapján még a leglikvidebb részvények esetén is akár 4%-os növekedést jelenthet a likviditás figyelembe vétele a napi VaR-mutatóban.**

## 1. A BLM bemutatása

Ebben a részben rövid ismertetést adunk a BLM-mutatóról: bemutatjuk a BLM koncepcióját, számítását és értelmezését. Részletesebben ír a mutatóról *Kutas* és *Végh* [2005].

A BLM-et a Budapesti Értéktőzsde (BÉT) alkotta meg a német XLM mintájára 2005-ben. Célja a likviditás egyik legfontosabb aspektusának, a tranzakciók költségének számszerűsítése a piaci szereplők számára.

A tranzakciós költségek két csoportját szokás megkülönböztetni:

- explicit költségek: a kereskedés közvetlen költségeit jelentik (pl. brókeri jutalék, számlavezetési díj);
- implicit költségek: a kereskedés közvetett költségei (pl. spreadek).

A BLM a fentiek közül az implicit költségeket számszerűsíti. A tranzakciók teljes implicit költségének egyik része a sávos kereskedésből, a bid-ask spreadekből, a másik az ún. áreltérítő hatásból fakad. Ez utóbbi akkor lép fel, ha a teljes megbízás nem a legjobb árszinten teljesül, hanem további, rosszabb árszintekre is átcsúszik. Ekkor az átlagár, amin a tranzakció teljesül, eltér a legjobb elérhetőtől.[1]

A BLM azt méri, hogy egy kötés értékének hány százalékát teszik ki az implicit tranzakciós költségek. Ebből következően a mutató mindig csak adott kötésnagyságra értelmezhető. A BÉT-en a BLM számításához használt standard kötésnagyságok a következők: 20 E, 40 E, 100 E, 200 E, 500 E euró.

1 A BLM kiszámításának részletes módszertanát lásd előző, *„A likviditás alakulása a Budapesti Értéktőzsdén 2007–2010 között”* című cikkünkben (497–520. o.)

A BLM az ajánlati könyv aktuális állapotától függ, így számítása mindig csak az adott pillanatra vonatkozóan lehetséges. A Budapesti Értéktőzsde rendszere a mutatót a kereskedési napokon minden másodpercben kiszámítja a 09:02–16:30 időszakban. A napi átlagos BLM-értékeket a másodpercenkénti adatok sima átlagaként számítja a rendszer.

A BLM, ahogyan már szerepelt, a tranzakciók implicit költségét méri a tranzakció százalékában, bázispontban kifejezve. Egyszerre jeleníti meg egy pozíció vállalásának és lezárásának költségét is.

Tehát pl. a BLM (500 E) = 60 bps azt jelenti, hogy egy 500 E euró nagyságú pozíció megvételének és eladásának együttes implicit költsége 500 E × 60 bps = 3000 euró.

A BLM kiszámítását és értelmezését szemlélteti a *Függelékben* található *6.* és *7. ábra*.

A BLM tehát a likviditás hagyományos dimenziói közül egyszerre kettőt is lefed, a feszességet (bid-ask spread) és a mélységet (áreltérítő hatás). Ennek köszönhetően jobban használható a csupán egydimenziós likviditásmértékeknél, azoknál pontosabb képet ad a valóságról. Az automatizált rendszernek köszönhetően a BLM-adatok gyorsan és könnyen beszerezhetők, megkönnyítve a felhasználást.

A hátrányuk az, hogy nem ragadnak meg egy további fontos dimenziót, az időbeliséget (azonnaliság). A BLM csupán egy „pillanatfelvételt” készít az ajánlati könyvről, mindig csak az azonnali tranzakciókra értelmezhető, így nem képes megragadni azt az esetet, amikor a teljes tranzakció nem egyben teljesül. Elméletileg azt sem tudja kezelni, ha a teljes tranzakció az adott pillanatban nem képes teljesülni, mert pl. nincs elég ajánlat a könyvben. Ez utóbbi probléma a rendszer számítási eljárásában is megjelenik, a későbbiekben részletesen is foglalkozunk ezzel. A BLM említett előnyeit és hiányosságait szem előtt tartva, a következő pontban rátérünk a gyakorlati felhasználásra.

## 2. A BLM egyik lehetséges gyakorlati felhasználása

A következőkben a BLM egyik legígéretesebb alkalmazási lehetőségét mutatjuk be a kockázatkezelés területén.

A kockázat egyik legelterjedtebb mérőszáma egy eszköz kockáztatott értéke (Value at Risk – VaR). Ez az adat azt mutatja meg, hogy adott valószínűség és időtartam mellett mekkora az a maximális veszteség, ami az eszközt érheti. Pl. 10 napos 99%-os VaR = 10 M Ft azt jelenti, hogy 99 százalék a valószínűsége annak, hogy 10 nap alatt a pozíción nem keletkezik 10 millió Ft-nál nagyobb veszteség.

A BLM gyakorlati alkalmazásának alapgondolata az, hogy a jelenlegi részvényekre számolt VaR jellegű mutatókban csak a középárfolyam változásából fakadó kockázatot veszik figyelembe. A BLM segítségével azonban lehetőség nyílik a likviditáskockázat megjelenítésére is. Ez az utóbbi évek válsága során felmerült likviditás problémákat tekintve, különösen fontos; az illikviditásból eredő kockázatot nem szabad figyelmen kívül hagyni.

A likviditáskockázat figyelembe vételével már több szerző is foglalkozott, ezek közül vannak, akik csak a bid-ask spreadet veszik figyelembe, vagy másfajta likviditási mutatót. *Giot és Grammig* [2005], valamint *Stange és Kaserer* [2009] a miénkhez hasonló likviditási mértékkel dolgozva valósítják meg a likviditáskockázat integrációját. Cikkünk alapját e tanulmányok szolgáltatják.

Az alábbiakban áttekintjük a szokásos VaR-keret általunk használt jelöléseit és a BLM integrálásának egy lehetséges módját. Először a hagyományos VaR-jelölések:

- A hozamokat folytonos időhorizonton tekintjük: $r_t^{\Delta t} = \ln\left(\frac{P_{mid}^{t+\Delta t}}{P_{mid}^{t}}\right)$.
- A hozamokra a következő általános képlettel számolunk VaR-t:
  $VaR_{return}^{\alpha,\Delta t} = r_t^{\alpha,\Delta t} = \mu_{t+\Delta t} + \sigma_{t+\Delta t} \cdot q_{1-\alpha}$,

  ahol $\mu_{t+\Delta t}$ a t-ből $\Delta t$ időre előrejelzett hozam várható értéke, $\sigma_{t+\Delta t}$ az előrejelzés szórása, $q_\alpha$ pedig valamilyen választott eloszlásból származó 1–$\alpha$-adik kvantilis.
- Hogy összehasonlíthassuk az említett tanulmányok eredményeivel, az elemzések során az árfolyamra számolt hagyományos VaR-t is használjuk:
  $$VaR^{\alpha,\Delta t} = \frac{P_{mid}^{t} - P_{mid}^{t} \cdot \exp\left(r_t^{\alpha,\Delta t}\right)}{P_{mid}^{t}} = 1 - \exp\left(r_t^{\alpha,\Delta t}\right),$$
- ami – figyelembe véve, hogy az árfolyamok között a $P_{mid}^{t+\Delta t} = P_{mid}^{t} \cdot \exp\left(r_t^{\Delta t}\right)$ kapcsolat áll fenn – pontosan azt mutatja, hogy mekkora a maximális százalékos veszteség $\Delta t$ idő alatt, $\alpha$ százalékos konfidenciaszint mellett. Tehát pl. $VAR^{95\%,1nap}$=5% azt jelenti, hogy 95% valószínűséggel 1 nap alatt nem lesz 5%-nál nagyobb a veszteség a pozíción a *középárfolyam megváltozása* miatt.

Most bemutatjuk, hogyan lehet a likviditáskockázatot is figyelembe venni. Az ötlet az, hogy a BLM-et építsük bele a hozamokba.

Először tisztázni kell a következőt: a BLM effektív mutató, a hozamokat viszont folytonosan számoljuk, így, hogy a kettő összeegyeztethető legyen, a BLM-et is folytonos időhorizontúvá kell alakítani. Ezt a következőképp tehetjük meg: jelölje egy pozíció bruttó értékét $V$, ekkor pusztán a pozíció megvétele és eladása az implicit tranzakciós költségek miatt értékét a következőképp csökkenti:

$V_{net} = V \cdot \left(1 - BLM(V)\right)$ (effektív alak),

folytonos időhorizonton ezt a következő alakban szokás írni:

$V_{net} = V \cdot \exp\left(BLM_{cont}(V)\right)$ (folytonos alak),

ahol $BLM_{cont}$ jelöli a folytonos idejű BLM-et. Mivel mindkét alak ugyanazokat az implicit költségeket méri, a fenti két egyenlet bal oldala megegyezik, így azt kapjuk, hogy

$BLM_{cont}(V) = \ln\left(1 - BLM(V)\right)$ .

Rátérünk a likviditáskockázat beépítésére:

- Tekintsük a következő transzformált hozamokat, a továbbiakban *nettó hozamok*:
  $$r_{net,t}^{\Delta t}(q) = r_t^{\Delta t} + \ln\left(1 - \frac{BLM_t(q)}{2}\right).$$
- Vegyük észre, hogy a BLM definíciójából következően a fenti képletből látható, hogy a nettó hozamokra mindig $r_{net,t}^{\Delta t}(q) < r_t^{\Delta t}$.

A nettó hozamok nem mások, mint a likviditási mutató *folytonos időhorizontra* konvertált változatával csökkentett, hagyományos hozamok. A felírásban azért a BLM felével számolunk, mert – mint korábban szerepelt – a BLM egyszerre tartalmazza az eladás és vétel implicit költségét is, nekünk azonban most egyszerre csak az egyiket kell figyelembe vennünk. A felezéssel természetesen implicit módon azt is feltettük, hogy a vételi és eladási oldal szimmetrikus. Ennek a feltételezésnek a feloldására dolgozatunk későbbi részében teszünk javaslatot.

- Az általános képlettel a nettó hozamokra számolunk VaR-t, és az így kapott értékekből a fentiek szerint számítjuk az immár *középárfolyam- és likviditáskockázatot is* figyelembe vevő teljes árfolyam VaR-t, ezt likviditással kiegészített VaR-nak nevezzük, és a következőképp jelöljük:

$$L-VaR^{\alpha,\Delta t}(q)=1-\exp\left(r_{net,t}^{\alpha,\Delta t}(q)\right) .$$

A mutató értelmezése teljesen analóg a hagyományos VaR-éval, azzal a különbséggel, hogy így már nemcsak a középárfolyam, hanem a likviditás megváltozásából eredő kockázatot is tartalmazza.

A most definiált mutató a likviditáskockázatot integráltan jeleníti meg, azaz nem mutatja, hogy az külön mekkora, csak a középárfolyam-kockázattal vett, együttes kockázat nagyságát. Azonban a hagyományos VaR-mutató segítségével a likviditáskockázat VaR-on belüli aránya könnyen kinyerhető. Tekintsük a következő mutatót:

$$\lambda(q)=\frac{L-VaR^{\alpha,\Delta t}(q)-VaR^{\alpha,\Delta t}}{VaR^{\alpha,\Delta t}} .$$

A *λ(q)*-t *relatív likviditási hatásnak* vagy *relatív likviditási mutatónak* nevezzük, és azt mutatja meg, hogy mekkora az illikviditás miatti maximális veszteség adott konfidenciaszinten és időhorizonton. Másképpen, *λ(q)* az a hiba, amit a likviditáskockázat figyelmen kívül hagyásával ejtünk.

A likviditáskockázatot VaR-keretben szokás úgy is figyelembe venni (l. *Bangia* et al. [1999]), hogy egyszerűen a likviditásmutatóra (mint hozamra) számolt VaR-t hozzáadják a hagyományos árfolyam VaR-értékhez. Ezzel a megközelítéssel az a probléma: nem veszi figyelembe, hogy az árfolyam és likviditás közötti korreláció nem feltétlenül tökéletes, így a belőlük számolt VaR-értékek sem adhatók feltétlenül össze (nem biztos, hogy az árfolyam és a likviditás tökéletesen együtt mozog, így a belőlük fakadó kockázatok sem tökéletesen erősítik egymást). Az általunk bemutatott megközelítés azonban figyelembe veszi ezt a jelenséget is.

## 3. Gyakorlati modellezés

### *3. 1. Az adatokról*

A Budapesti Értéktőzsde által számunkra biztosított adatok 2007. január 1-jétől állnak rendelkezésre. Az adatok a BLM-idősorokat tartalmazzák a BÉT-en kereskedett összes értékpapírra, az első kettő esetében az összes standard kötésnagyságra kiszámolva. Az elemzés során *napi* átlagos BLM-értékekkel számolunk, a mintánk a 2007. január 1. és 2010. július 16. közötti időszakra vonatkozik.

Már korábban említettük, hogy a BLM elméletileg nem képes kezelni azt a helyzetet, ha a teljes megbízás egyszerre nem teljesülhet. A konkrét esetekben azért, hogy ne legyen minden pillanatban BLM-érték, a rendszer úgy számolja a mutatót, mintha a megbízás az utolsó olyan árszinten mindenképpen teljesülne, ahol van a könyvben érvényes ajánlat, tehát ezen a szinten végtelen mennyiségű ajánlatot feltételez. Így a likviditási mutató valójában alulbecsüli a tényleges helyzetet, és félrevezető értékeket adhat, különösen a nagy kötésméretek (200 E és 500 E euró), valamint az ezekre épülő számítások esetén. Mint látni fogjuk, emiatt néhol irreális eredményeket kapunk.

## *3. 2. Modellezés*

Ebben a pontban a fent bemutatott módszer általunk alkalmazott technikai megvalósítását mutatjuk be. Ez az eredmények megértéséhez nem szükséges, a teljesség és követhetőség kedvéért szerepel itt.

Annak érdekében, hogy a hozamok és a nettó hozamok klasztereződő volatilitását is figyelembe vehessük, az idősorokra az alábbi AR(1)-GARCH(1,1) modellt illesztjük:

$$r_t = c + \phi r_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \eta_t$$
$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2$$

ahol $\eta_t \sim FAE\ (0,1)$.

A konkrét esetekben Giot és Grammig [2005], valamint Stange és Kaserer [2009] nyomán, a t- és az empirikus eloszlást használjuk. A következő részben bemutatott eredményeknél egységesen a t-eloszlásos modellt használtuk. A modellt az első két és félből kiindulva becsüljük, az utolsó egy évet használjuk kontrollidőszaknak. Az egynapos, 95% és 99%-os dinamikus VaR-értékeket a 2. részben megadott módon, a GARCH-modellből vett előrejelzésekkel számoljuk ki. A GARCH-modellt a két és fél éves ablak csúsztatásával folyamatosan újrabecsüljük, azaz az első két és fél évnyi mintából becsült modellel jelzünk előre egy napot, majd az egy megfigyeléssel elcsúsztatott mintából becsült új modellel a következő napot, és így tovább.

A kockázatok helyes előrejelzésének tesztelését a következőképp végezzük: a fenti GARCH-modellekből előre jelzett VaR-értékeket mind a hagyományos, mind a nettó hozamok esetében a rendelkezésre álló egy év kontrollidőszaknyi hagyományos, illetve nettó hozam (százalékos veszteség) mintával összevetjük, és megállapítjuk, hogy empirikusan mekkora a hibázási arány. Majd az empirikus arány elméleti értéktől való eltérésének szignifikanciáját statisztikailag teszteljük.

A felhasznált teszt a likelihood ratio teszt (*Kupiec* [1995]), amely a következőképpen néz ki: jelölje $N_u$ azoknak a napoknak a számát, amikor a hagyományos hozam meghaladta az előre jelzett VaR-értéket, $N$ pedig a mintabeli napok számát. Ekkor az empirikus hibázási arány $N_u/N$, az elméleti értéket pedig jelölje $\alpha$. A tesztstatisztika ezekkel a jelölésekkel a következő:

$$LR = -2\ln\left((1-\alpha)^{N-N_u} \cdot \alpha^{N_u}\right) + 2\ln\left(\left(1-\frac{N}{N_u}\right)^{N-N_u} \cdot \left(\frac{N}{N_u}\right)^{N_u}\right).$$

A nullhipotézis, amely szerint $\alpha = N_u/N$, fennállása esetén a tesztstatisztika khí-négyzet eloszlású 1 szabadságfokkal. A tesztet egységesen 95%-os konfidenciaszinten végezzük, ekkor a $H_0$-t akkor fogadjuk el, ha $LR \leq 3{,}84$. A fenti teszt egyszerre tudja kimutatni, ha az adott modell alulbecsüli (több hibázás), vagy ha felülbecsüli (kevesebb hibázás) a kockázatot.

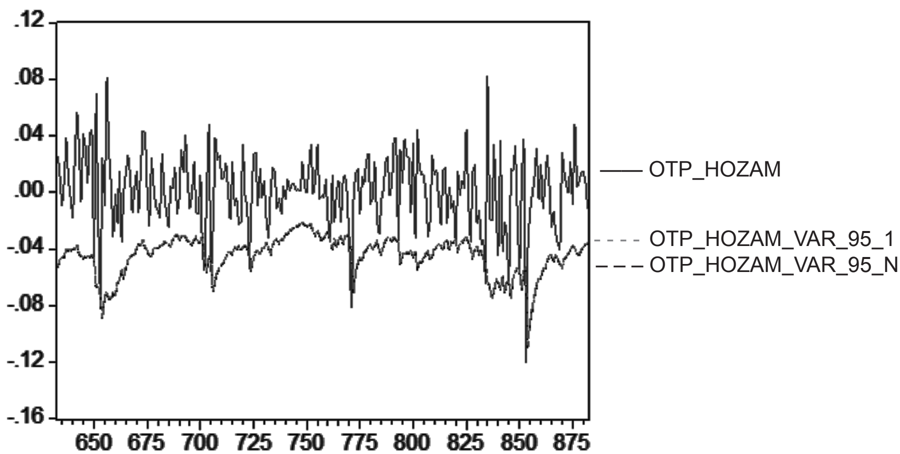
### *3. 3. Eredmények*

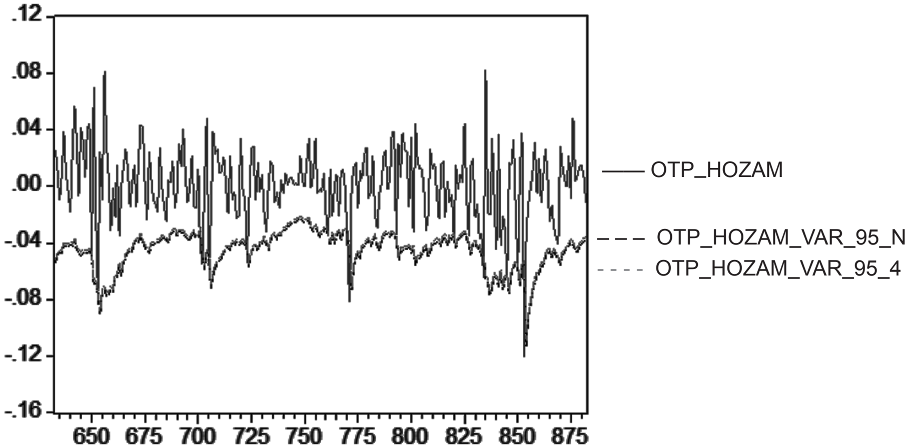
Itt a fent bemutatott módszert a négy legnagyobb magyar részvény napi adatai segítségével illusztráljuk. A célunk, hogy megvizsgáljuk, mennyit jelent a likviditás figyelembe vétele.

A következő ábrákon a különböző részvények esetén kapott, egyévnyi hozam-előrejelzést a tényleges értékeket összevetve láthatjuk. Az összehasonlítás és a különbség érzékeltetése végett az előrejelzéseket a hagyományos VaR esetében is ábrázoljuk. Az ábrákon egységesen a 20 E-s és 200 E-s kötésméret (1-es jelöli a 20 E-st, 4-es a 200 E-st), 95%-os és 1 napos VaR esetén kapott előrejelzéseket mutatjuk be. A vízszintes tengelyen lévő számok az előrejelzés idejét mutatják, pl. 650 a minta kezdetétől, 2007. 01. 02-től számított 650. kereskedési napra számított előrejelzés, a függőleges tengelyen pedig a %-os értékek láthatók, tizedes formában.

*1. ábra*

**A likviditással kibővített (VaR_1, VaR_4)
és a hagyományos VaR (VaR_n) előrejelzések, összevetve a tényleges
százalékos veszteségekkel (hozam) az OTP esetén**

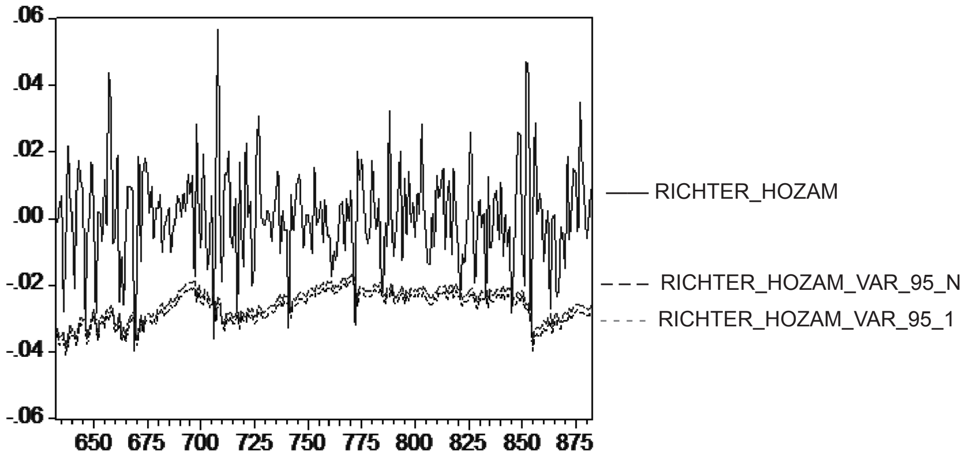


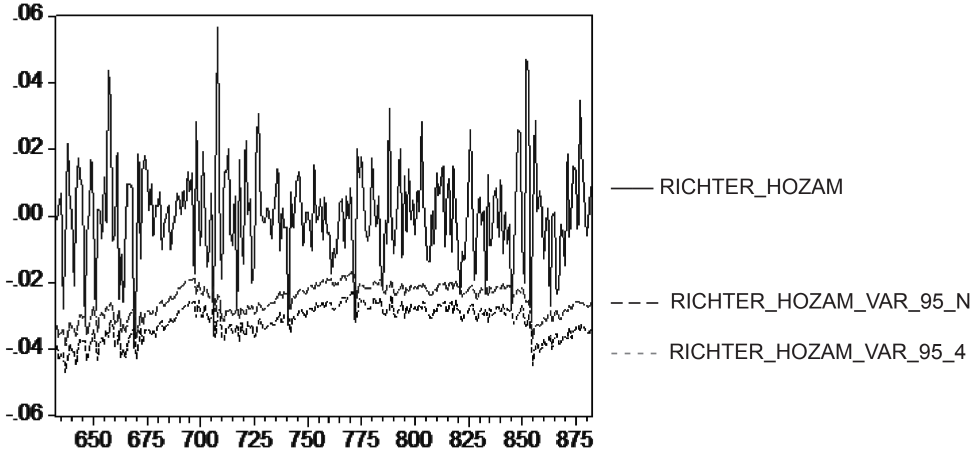



A fenti ábrákról az látszik, hogy az OTP esetében nincs jelentős eltérés a kibővített és a hagyományos VaR között, ami pontosan azt jelzi, hogy az OTP nagyon likvid részvény, kicsi a likviditási kockázata. Nem ez a helyzet, ha másik részvényt tekintünk, pl. a Richtert.

*2. ábra*

**A likviditással kibővített (VaR_1, VaR_4) és a hagyományos VaR (VaR_n) előrejelzések, összevetve a tényleges százalékos veszteségekkel (hozam) a Richter esetén**






Ebben az esetben már a legkisebb, 20 E-s kötésméret (VaR_1) esetén is jól látható eltérés van a kétfajta előrejelzés között, a 200 E-s szint esetén pedig a különbség drasztikusan megnő. Mindezek azt mutatják, hogy a Richter sokkal kevésbé likvid, mint az OTP, a likviditási kockázat kifejezetten jelentős.

A másik két részvény (MOL és MTelekom) esetében hasonlókat tapasztalhatunk, ezek ábrái megtalálhatók a Függelékben (*8.* és *9. ábra*).

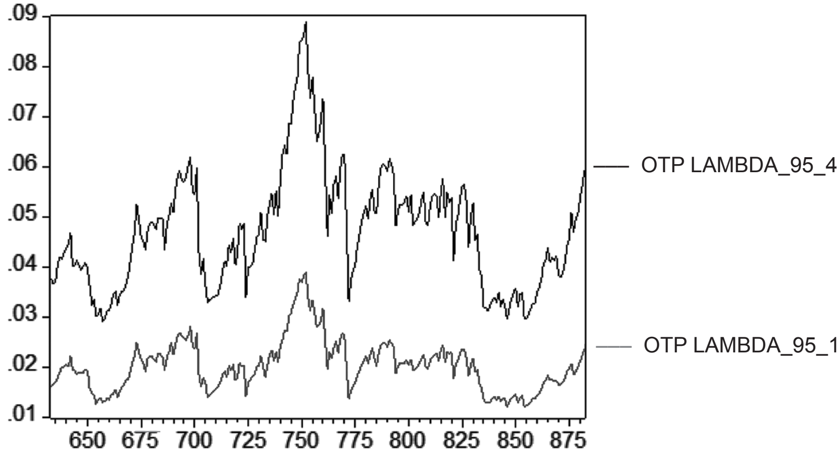
A hibázások tesztelése során az OTP és MTelekom esetében mindkét előrejelzés megfelelően működik, egyik modell által számolt érték sem tér el statisztikailag szignifikánsan az elméleti 5%-os értéktől, így az OTP és MTelekom részvényei esetében a likviditási kockázat figyelembe vétele nem rontja el az előrejelzések pontosságát. A Richter esetében hasonló a helyzet, itt csak a 99%-os, 100 E-s és 200 E-s kötésméretek esetén pontatlan az előrejelzés, ez feltehetően a már említett számítási probléma következménye. A MOL esetében a 99%-os előrejelzések egységesen mindkét modell esetén pontatlanok, mindegyik esetben túl szigorú előrejelzést kapunk, a 99%-os VaR esetén várható 1%-nyi hibázás helyett egyetlen egyszer sem haladja meg a tényleges érték az előre jelzett VaR-t. Ez feltehetően a felhasznált mintának köszönhető, ugyanis az a teljes 2008-as válságos időszakot tartalmazza.

Összességében azt mondhatjuk, hogy *likviditáskockázat figyelembe vétele nem ront az előrejelzések pontosságán*.

A kétféleképpen számolt VaR különbözőségének jobb szemléltetésére tekintsük a fent bemutatott *$\lambda(q)$ relatív likviditási mutató* időbeli alakulását a különböző részvények esetén. Az ábrákon egyszerre mutatjuk a 20 E-s és 200 E-s kötésmérethez tartozó $\lambda(q)$ mutatót. Ezek az ábrák tehát az előző ábrákon látható előrejelzések közötti %-os különbséget mutatják a vizsgált két kötésméret esetén (a vízszintes tengely továbbra is az előrejelzés ideje, a függőleges pedig a mutató értéke tizedes formában).

*3. ábra*

**A $\lambda(q)$ mutató alakulása az OTP esetén**



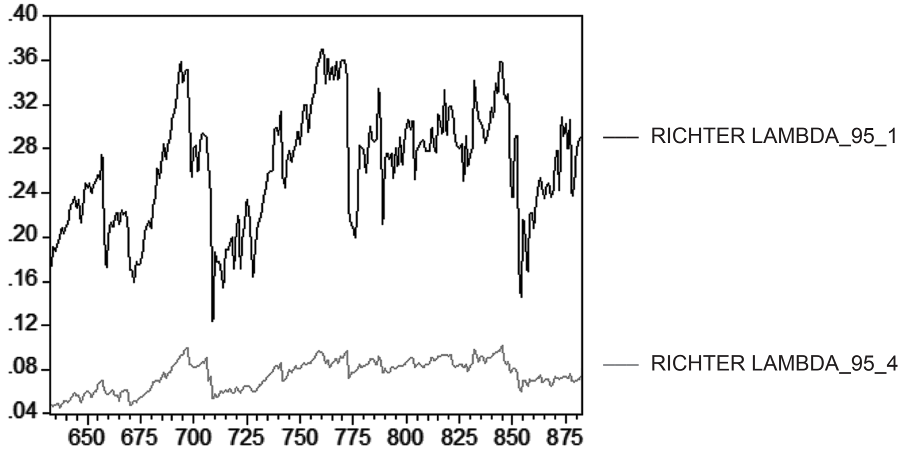

*Megjegyzés:* A mutató a likviditáskockázat figyelmen kívül hagyásával elkövetett százalékos hibát számszerűsíti.

Az OTP relatív likviditási mutatói alapján megállapíthatjuk egyrészt, hogy a kötésméret növelésével jelentősen nő a likviditási kockázat; ezt intuitívan el is várjuk, hiszen nagyobb pozíció likvidálásának nyilvánvalóan nagyobb a költsége. Másrészt a konkrét értékeket vizsgálva, a legkisebb, 20 E-s kötésméret esetén a likviditási kockázat a kontrollidőszak minden napján meghaladja az 1%-ot, de helyenként akár 4% is lehet, míg a 200 E-s kötésméret esetén a likviditási kockázat 3%-nál mindig nagyobb, de közel 9%-ra is megnőhet. Ekkora tehát ez az addicionális kockázat, amit nem veszünk figyelembe, ha csak az árfolyam változására koncentrálunk. Bár ezek az értékek nem feltétlenül nagyok, de figyelembe kell venni, hogy az OTP a leglikvidebb részvények egyike a Budapesti Értéktőzsdén.

A *Richter* esetén az előző ábra a következőképpen néz ki:

*4. ábra*

**A $\lambda(q)$ mutató alakulása a *Richter* esetén**




*Megjegyzés:* A mutató a likviditáskockázat figyelmen kívül hagyásával elkövetett százalékos hibát számszerűsíti.

Látható, hogy a Richter esetében a likviditáskockázat jóval nagyobb, már a legkisebb szinten is mindig 4% fölötti, de gyakran 8% körüli, míg 200 E-s kötésméret esetén már stabilan 20% fölé is emelkedik. Ez számszerűen is alátámasztja az előző (1. és 2.) ábrák alapján tett megállapításunkat, amely szerint a Richter sokkal kevésbé likvid, mint az OTP, és jelentős a likviditáskockázata.

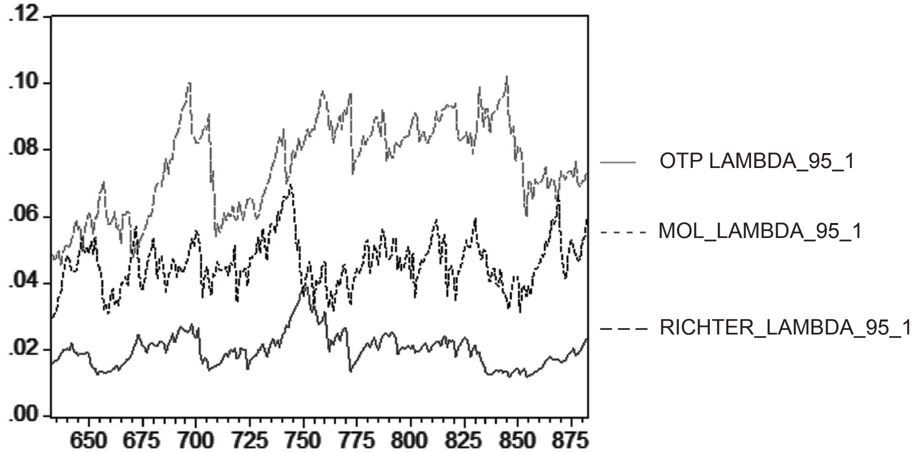
A többi részvény relatív likviditási mutatói megtalálható a Függelék *10.* és *11. ábráján.*

A következő, *5. ábrán* a vezető magyar részvények egymáshoz viszonyított relatív likviditási mutatói láthatók a legkisebb kötésméret esetén. Jól látható, a likviditáskockázat esetén felálló OTP–MOL–Richter sorrend,[2] ahogy azt előzetesen is gondolhattuk. A köztük lévő jelentős különbség viszont arra utal, hogy az OTP az egyetlen kiemelkedően likvid értékpapír a magyar tőzsdén.

2 Az MTelekomot a jobb szemléltetés érdekében hagytuk ki; likviditásának nagyságrendje nagyon hasonló a Richteréhez (l. egyedi relatív likviditási mutatók ábrái).

*5. ábra*

**A likviditástól az illikviditás felé:**
**a $\lambda(q)$ alakulása az OTP, a MOL és a RICHTER esetén**




Érdemes egy pillantást vetni a fenti relatív likviditási mutatók átlagos értékeire a különböző részvények és kötésméretek esetén az előrejelzett egy év során. Ezeket az értékeket a következő táblázat foglalja össze.

*1. táblázat*

**Az átlagos $\lambda(q)$ értékek a különböző részvények, kötésméretek, valamint 95% és 99%-os előrejelzések esetén**

| 95% | OTP | MOL | Richter | MTelekom | 99% | OTP | MOL | Richter | MTelekom |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 2,03% | 4,61% | 7,54% | 8,46% | 20 | 1,25% | 3,07% | 4,65% | 4,78% |
| 40 | 2,41% | 5,76% | 9,57% | 11,29% | 40 | 1,47% | 3,90% | 6,40% | 6,38% |
| 100 | 3,36% | 8,91% | 15,71% | 18,78% | 100 | 2,03% | 6,25% | 11,33% | 10,71% |
| 200 | 4,72% | 13,86% | 26,29% | 31,98% | 200 | 2,83% | 10,03% | 18,00% | 18,49% |
| 500 | 8,40% | 29,75% | 91,74% | 133,52% | 500 | 5,04% | 22,24% | 60,73% | 97,43% |

Az átlagos értékek alapján ismét jól látszik az egyes részvények közötti likviditási sorrend, illetve az is, hogy az OTP kiemelkedően likvid (itt messze a legkisebb a likviditáskockázat) a többi részvényhez képest.

A fenti táblázat azonban a BLM már többször említett számítási hibájára is rámutat: a Richter és az MTelekom esetén az 500 E-s kötésméretet tekintve irreálisan magas, akár 100% fölötti értékeket kapunk. Ez feltehetően azért van, mert ezen részvények esetén átlagosan nincs 500 E eurónyi ajánlat a könyvben, így ekkora méretű tranzakciókat nem lehetne azonnal végrehajtani (azaz a táblázatokban „végteleneknek" kellene szerepelnie).

Összességében megállapíthatjuk, hogy a fenti eredmények alapján a likviditáskockázat nem elenyésző, mindenképpen érdemes figyelembe venni a VaR jellegű mutatók számításánál.

## 4. Összefoglalás és további kilátások

A tanulmányban bemutatott vizsgálatok alapján a *likviditás figyelembevétele szignifikáns kockázatnövekedést jelent* még a legnagyobb és leglikvidebb részvények esetében is. Nem szabad tehát figyelmen kívül hagyni.

A BLM és az annak segítségével bemutatott módszer egy *egyszerű és gyors mód* arra, hogy a likviditást megjelenítsük a tőkekövetelményben. A mutató hiányosságait és számítási problémáit szem előtt tartva, az eredményeket megfelelő óvatossággal kell kezelni, azonban a lényegi empirikus megfigyeléseket – például azt, hogy az OTP a leglikvidebb részvény – a bemutatott modell képes jól visszaadni, így mindenképpen *javasoljuk a kockázatkezelési rendszerekbe való beépítését*.

Mielőtt azonban bevezetnék a tényleges gyakorlati alkalmazását, mindenképpen meg kell oldani a BLM számításával kapcsolatos problémát, az utolsó nem üres árszinten végtelen ajánlat feltételezését. Ennek egy lehetséges módja más (kisebb) kötésméretek alkalmazása eltérő részvények esetén.

Továbbá: ebben a tanulmányban csak egyedülálló részvényekre végeztünk vizsgálatokat, a gyakorlatban viszont többnyire *portfóliókkal* dolgoznak. A BLM fix kötésméretekre történő számítása, valamint az egyes részvények likviditása közötti korreláció miatt nem nyilvánvaló, hogyan lehet kiterjeszteni a bemutatott eljárást. A fix kötésméret (és egyben az előző bekezdésbeli számítási probléma) egy lehetséges megoldása a meglévő BLM-értékekre valamilyen függvény illesztése, így becsülve a köztes kötésméretekre a likviditási mutató értékét.

Ki kell még emelnünk, hogy bár a BLM a likviditás egyszerre két fontos aspektusát (feszesség, mélység) is lefedi, nem ragadja meg az *időbeliséget*, az azonnaliságot, vagyis azt, hogy képes-e azonnal teljesülni a tranzakció, és ha nem, akkor mekkora a késedelem miatti likviditásromlás. Az irodalomban még nem jelent meg olyan likviditási mérték, amely ezt az aspektust is hatékonyan ragadná meg.

Mindezek mellett további érdekes vizsgálódási területeknek tekinthetők a következők:

- A nettó hozamok számítása során a *vételi és az eladási oldal szimmetriáját* feltételeztük. A rendelkezésünkre álló adatok alapján ezt a feltételezést *fel tudjuk oldani* külön vételi és eladási oldali nettó hozamok számításával, a felezés helyett például vételi oldali BLM használatával az alábbi képlet segítségével:

$$BLM_{bid}(q) = LP + APM_{bid}(q)\ .^{3}$$

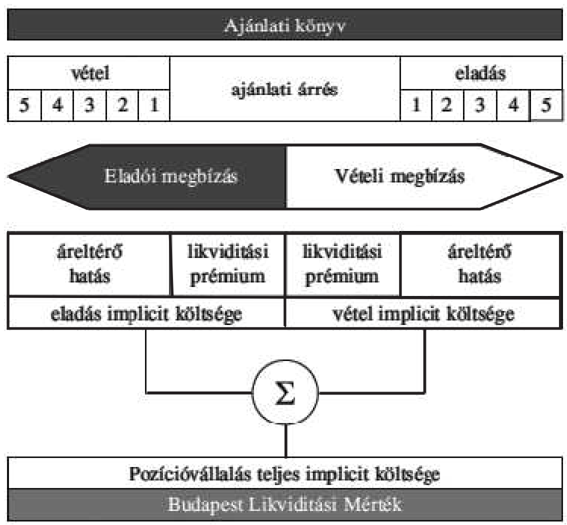
3 Az LP (likviditási prémium) a bid-ask spread fele. Az $APM_{bid}$ a vételi oldali áreltérítő hatás. Lásd részletesebben *„A likviditás alakulása a Budapesti Értéktőzsdén 2007–2010 között”* című cikkben.

- A számolt *VaR-becsléseket* érdemes lehet *pontosítani* a kvantilisek megfelelőbb módon történő becslésével, például az extrémérték-elmélet (extreme value theory – EVT) eredményeinek a felhasználásával.
- A rendelkezésre álló *napon belüli adatok* felhasználása.

## FÜGGELÉK

*6. ábra*

**A BLM kiszámításának elve**

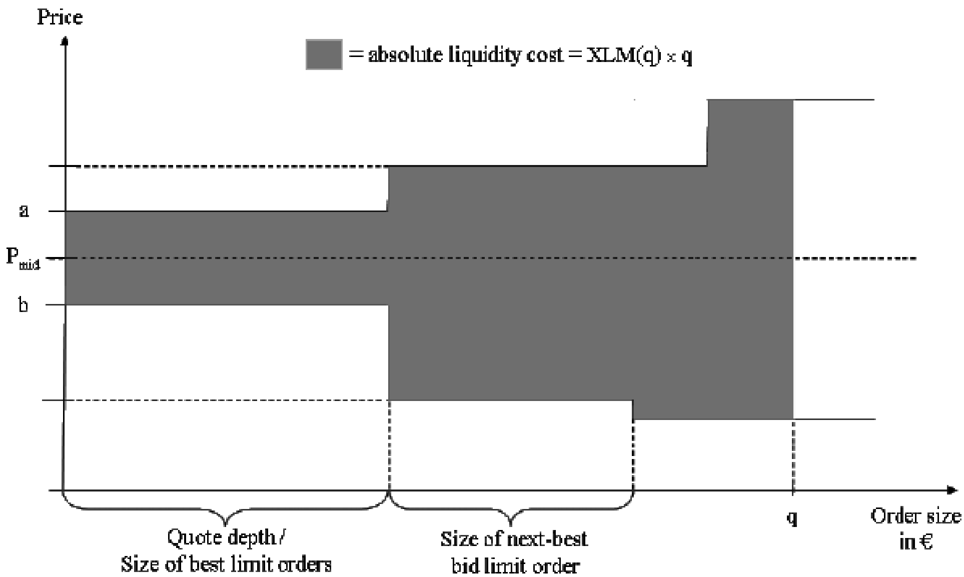



*Forrás:* BÉT, Deutsche Börse AG.

*Idézi:* Kutas és Végh [2005], 690. o.

*7. ábra*

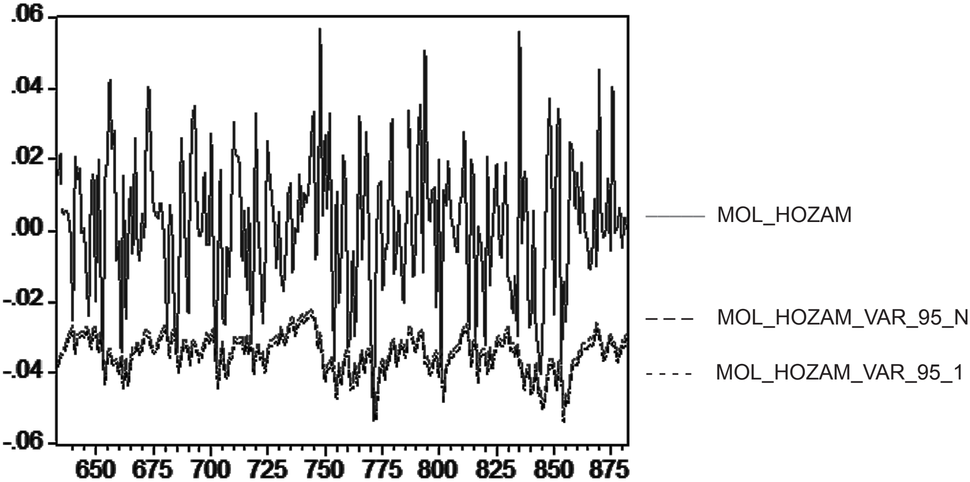
**A BLM kiszámításának szemléltetése**

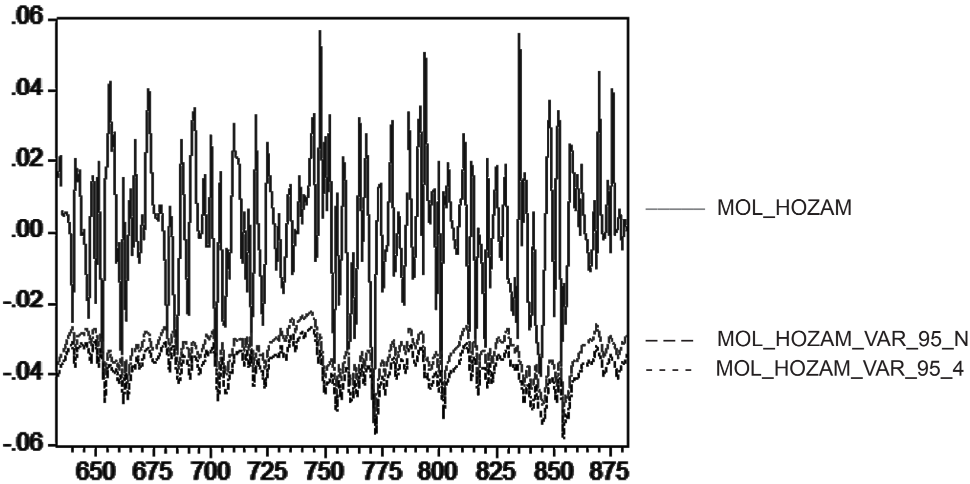



*Megjegyzés:* A szürke terület a teljes implicit költséget méri, ezt osztva a tranzakció méretével kapjuk a relatív költséget, azaz a BLM-et.
*Forrás:* Stange és Kaserer [2009], 30. o.

*8. ábra*

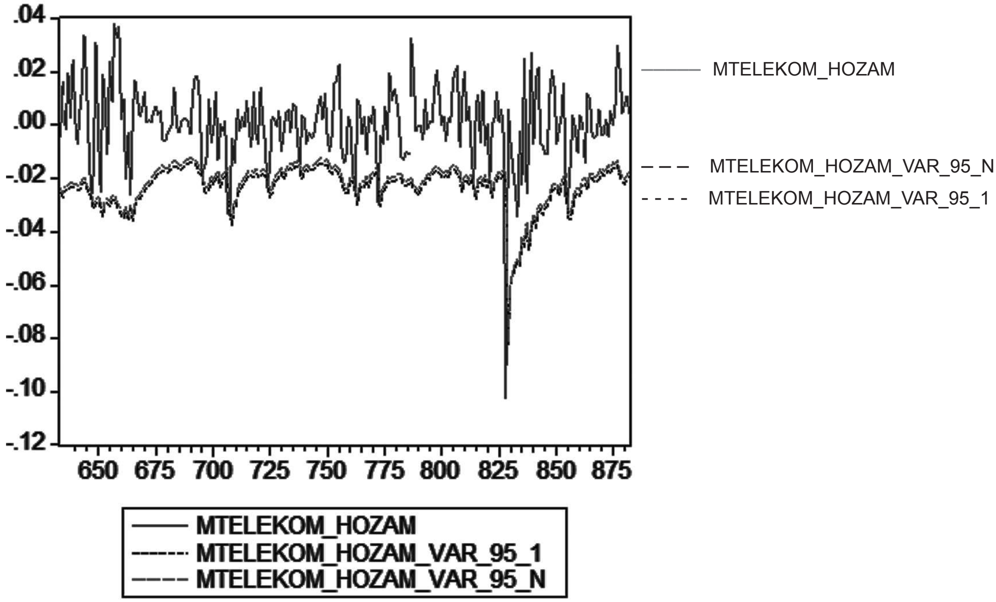
**A likviditással kibővített (VaR_1, VaR_4)**
**és a hagyományos VaR (VaR_n) előrejelzések, összevetve**
**a tényleges százalékos veszteségekkel (hozam) a Mol esetén**

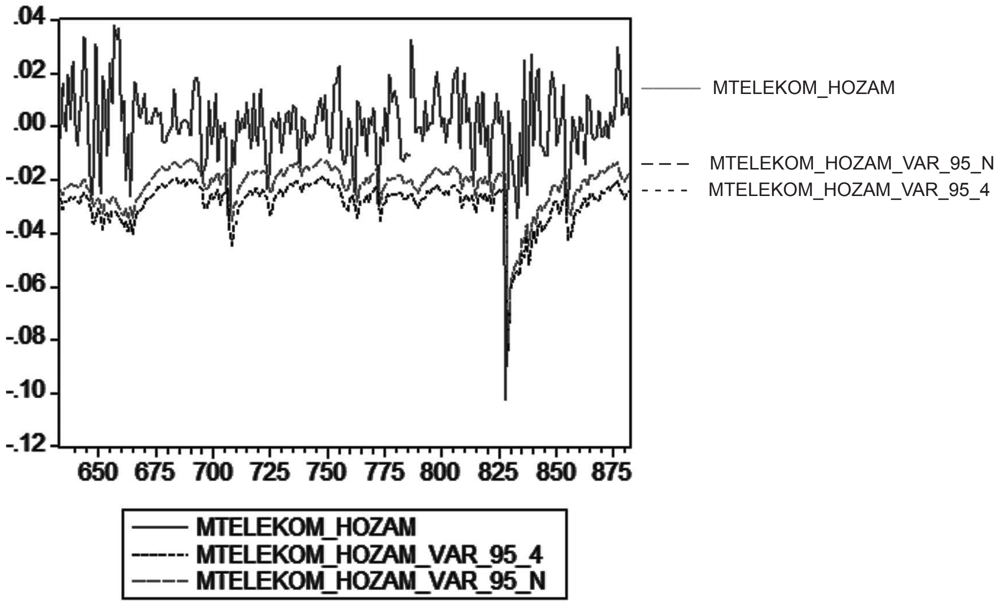


*9. ábra*

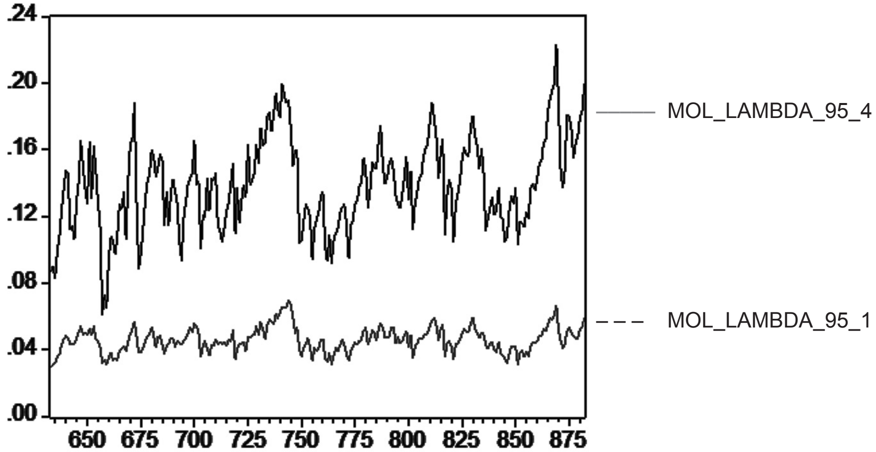
**A likviditással kibővített (VaR_1, VaR_4)**
**és a hagyományos VaR (VaR_n) előrejelzések, összevetve**
**a tényleges százalékos veszteségekkel (hozam) az MTelekom esetén**



*10. ábra*

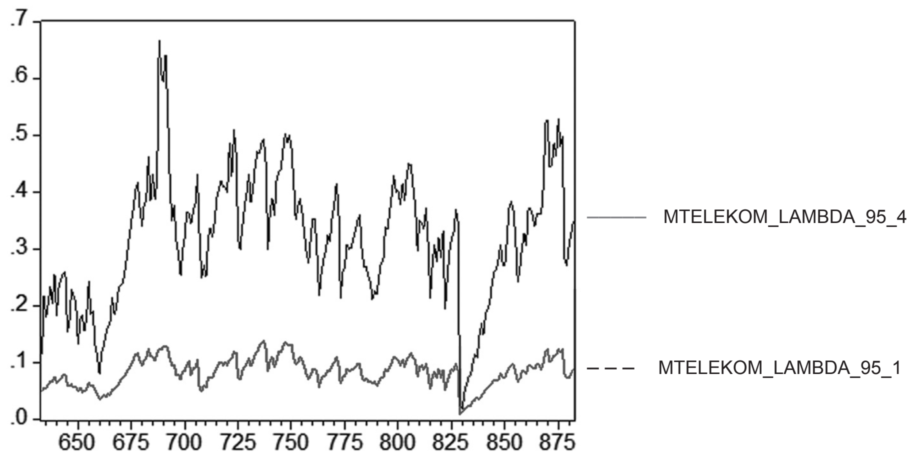
**A $\lambda(q)$ mutató alakulása a MOLesetén**




*Megjegyzés:* A mutató a likviditáskockázat figyelmen kívül hagyásával elkövetett százalékos hibát számszerűsíti.

*11. ábra*

**A $\lambda(q)$mutató alakulása az MTelekom esetén**




*Megjegyzés:* A mutató a likviditáskockázat figyelmen kívül hagyásával elkövetett százalékos hibát számszerűsíti.

## Irodalomjegyzék

Bangia, A.–Diebold, F. X.– Schuermann, T.–J. D. Stroughair [1999]: Liquidity on the Ouside. *Risk,* 12., 68–73. o.

Giot, P.–Grammig, J. [2005]: How large is liquidity risk in an automated auction market? *Empirical Economics,* 30(4), 867–887. o.

Kupiec, P. [1995]: Techniques for verifying the accuracy of risk management models. *The Journal of Derivatives,* 3., 73–84. o.

Kutas Gábor–Végh Richárd [2005]: A Budapesti Likviditási Mérték bevezetéséről. *Közgazdasági Szemle*, LII. évf., július–augusztus, 686–711. o.

Kaserer, C.–Stange, S. [2008]: Why and How to Integrate Liquidity Risk into a VaR-Framework. CEFS working paper 2008. No. 10., http://ssrn.com/abstract=1292289 (letöltve: 2010. 11. 08.)

MICHALETZKY MÁRTON

# Piaci mikrostruktúra és likviditás

**A tanulmány hármas céllal íródott. Egyrészt röviden ismerteti a piaci mikrostruktúra szakterületét, legfontosabb kutatási kérdéseit és alapfogalmait, mint az order flow és a bid-ask spread. Másrészt röviden bemutatja a terület két alapmodelljét, a Kyle- és a Glosten–Milgrom-modelleket, illetve az ezeket egységes szerkezetben tárgyaló Back–Baruch-modellt. Harmadrészt bevezetést ad a bid-ask spread modellek világába. Mindhárom részben végig szem előtt tartjuk azt, hogy a piaci mikrostruktúra modelljeiben miként jelenik meg a piaci likviditás, és mit tudhatunk meg a likviditás természetéről a modelleken keresztül.[1]**

## 1. BEVEZETÉS

Ez a tanulmány a piaci mikrostruktúra elméletének az alapjaival és néhány klasszikus cikk piaci likviditással kapcsolatos főbb eredményeivel foglalkozik. A piaci mikrostruktúra elmélete az elmúlt harminc évben rendkívül sokat fejlődött. A kiterjedt elméleti, empirikus és kísérleti szakirodalmat számos áttekentő tanulmány foglalja össze. Ezek közül mindenképpen meg kell említeni az első magyar nyelvűt, a 2005-ös *Gereben* és tsai [2005] MNB-tanulmányt, amelyben a szerzők a jegybank nézőpontjából végzik el a devizaárfolyamok piaci mikrostruktúra alapú megközelítésének rendszerezését.

Az angol nyelvű összefoglalások közül kiemelkedik *Madhavan* [2000], amely a szakterületet a következő négy szempont szerint tekinti át: i) *áralakulás* (price formation), beleértve az információ árakba épülésének dinamikus folyamatát; ii) *piaci struktúrák és tervezésük* (market structure and design) az áralakulás és a kereskedési protokoll kapcsolatával; iii) *transzparencia* (transparency); illetve iv) *alkalmazás a pénzügyek más területein* (application to other areas of finance), például az eszközárazásban, a nemzetközi pénzügyekben és a vállalati pénzügyekben.

Az elmúlt években megjelent, a piaci mikrostruktúra elméletével foglalkozó könyvek közül kettőt emelek ki. *Maureen O'Hara: Market Microstructure Theory* című könyve (O'Hara [1995]) kiváló és részletes összefoglalását adja az elméleti modelleknek, míg *Richard K. Lyons: The Microstructure Approach to Exchange Rates* című könyve (Lyons [2001]) a mikrostruktúra-elméletnek a devizaárfolyamokra vonatkozó alkalmazásán kívül bemutatja a szakterülethez kapcsolódó alapfogalmakat, a piaci mikrostruktúra elméleti modelljeit és a szakterület legfontosabb empirikus eredményeit.

1 A tanulmány a szerzőnek a Budapesti Corvinus Egyetem Közgazdaságtani Doktori Iskolájára benyújtott PhD-értekezésének az egyik fejezete alapján készült. A szerző köszönettel tartozik *Makara Tamásnak*, amiért felhívta figyelmét a szakterületre, *Berlinger Edinának* az ösztönzésért és *Michaletzky Györgynek* a szakirodalom feldolgozásában nyújtott segítségéért.

Lyons e szakterület iránti érdeklődését személyes élmény keltette fel a kilencvenes évek elején. Egy devizakereskedő barátját meglátogatva, azzal szembesült, hogy a gyakorlati szakemberek a devizakereskedésben nagyon ritkán veszik számításba azokat a – jellemzően – makroökonómiai tényezőket, amelyekkel a fundamentális devizaárfolyam-modellek a devizaárfolyamok alakulását magyarázzák. Nem alkalmazták a strukturális modellekben domináns inflációs rátákat, sem a kamatláb-különbözetet, sem a folyó fizetési mérleg egyenlegeket, sem pedig a modernebb, tőkepiaci megközelítés (monetáris és portfólió alapú) meghatározó változóit. Saját tapasztalata mellett akadémiai oldalról is erős impulzus érte, amikor *Meese* és *Rogoff* 1983-ban publikált cikkében (Meese és Rogoff [1983]) bemutatta, hogy a devizaárfolyamok eszközalapú modelljeinek (asset approach) magyarázó ereje még a nagyobb devizák esetében is gyakorlailag nulla[2], amit később számos tanulmány is alátámasztott.

Ez a hatás olyannyira meghatározó volt, hogy 2005-ben *Martin D. D. Evansszel* közös cikkükben megismételték az addigra „benchmarkká" váló Meese–Rogoff vizsgálatot, és a hagyományos makromodell mellett egy mikrostruktúra-alapú modellel is összevetették a véletlen bolyongást (Evans és Lyons [2005]). A vizsgálat eredménye szerint a mikromodell a havi devizaárfolyamok változásának varianciájából 16 százalékot megmagyaráz, amivel túlteljesíti a makromodellt, sőt empirikusan olyan jól teljesít, ahogyan egyetlen más modell sem.

## *1.1. A mikrostruktúra-elmélet definíciója*

Nézzük, hogyan definiálja O'Hara a piaci mikrostruktúra-elméletet és Lyons a mikrostruktúra-megközelítést!

*„Market microstructure is the study of the process and outcomes of ex-changing assets under explicit trading rules. While much of economics abstracts from the mechanics of trading, the microstructure literature analyzes how specific trading mechanisms affect the price formation process."*[3]

*„For me, the microstructure approach is not just a rich set of tools for addressing the issues, but also a way of framing those issues."*[4]

Lyons könyvében az alábbi három feltevést emeli ki mint a szakterületre leginkább jellemzőt:

1. *Információ*: van olyan információ, amelyik nem nyilvános.
2. *Piaci szereplők*: a piaci szereplők különböznek, és ez hat az árakra.
3. *Intézmények*: a kereskedési rendszerek különbözőek, ami szintén hat az árakra.

2 Lásd a Meese és Rogoff [1983] kivonatot: *„This study compares the out-of sample forecasting accuracy of various structural and time series exchange rate models. We find that a random walk model performs as well as any estimated model at one to twelve month horizons for the dollar/pound, dollar/mark, dollar/yen and trade-weighted dollar exchange rates. The candidate structural models include the flexible-price (Frenkel–Bilson) and sticky-price (Dornbusch–Frankel) monetary models, and a sticky-price model which incorporates the current account (Hooper–Morton). The structural models perform poorly despite that we base their forecasts on actual realized values of future explanatory variables."*

3 Lásd O'Hara [1995], 1. o.

4 Lásd Lyons [2001], xi. o.

Ha a makromodellekkel hasonlítjuk össze a mikromodelleket, akkor Lyons szerint az a két változó, amelyik a leginkább meghatározó, az *order flow* és a *bid-ask spread*.

### *1.2. Order flow és bid-ask spread*

Az *order flow* a közgazdaságtan egyik legfontosabb fogalmával, a mennyiséggel (quantity) rokon, de nem azonos azzal. Az order flow előjeles kereskedett mennyiség (transaction volume that is signed). Ha egy piaci szereplő el szeretne adni részvényt, és ezt egy árjegyző megveszi, akkor az order flow előjele negatív lesz. Az előjel meghatározásánál az számít, hogy a kezdeményező fél mit szeretne tenni az eszközzel. Ennek megfelelően, ha venni szeretne, akkor pozitív lesz az order flow. Ha a kezdeményezett tranzakciókat összegezzük, akkor megkapjuk a nettó order flow-t, ami lehet nettó eladási nyomás (negatív order flow) vagy nettó vételi nyomás (pozitív order flow).

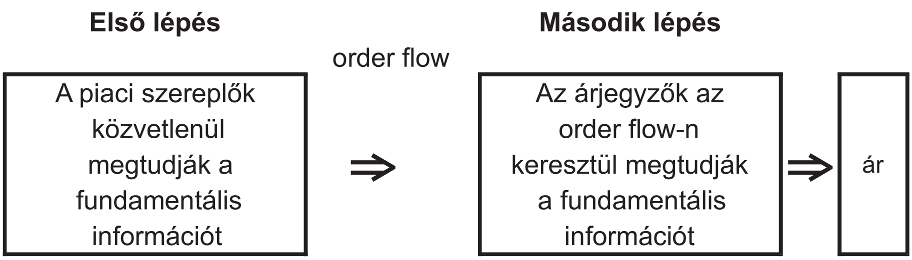
Hogyan tudjuk azonosítani az order flow-t egy olyan piacon, ahol nincs árjegyző? Mekkora az order flow egy *ajánlatvezérelt piacon* (order-driven market)? Az ajánlatvezérelt piacon adható limitmegbízás (limit order), ami rögzített árú megbízást jelent, és akkor teljesül, ha valaki később ugyanezen az áron ellentétes irányú ügyletet szeretne kötni. A limitáras megbízások összességéből épül fel az ajánlati könyv. Az ilyen piacon adható piaci áras megbízás (market order) is, ami az ajánlati könyvben szereplő, legjobb ellentétes irányú megbízásának árfolyamán fog teljesülni.

Az order flow nagysága könnyen kiolvasható a tranzakcióból, hiszen a kereskedett mennyiség megadja; az előjele pedig úgy határozható meg, ha megnézzük, hogy a tranzakciót ki kezdeményezte. Látható, hogy egy limitáras megbízás és egy piaci áras megbízás párosításakor a limitmegbízás a passzív fél, a piaci áras pedig az aktív fél, ezért az order flow előjelének megállapításakor a piaci áras megbízás iránya fog dönteni: ha vétel volt, akkor pozitív, ha eladás, akkor negatív.

Az order flow azért kiemelt fontosságú a mikrostruktúra-elméletben, mert *minden* modellben szerepet játszik. Az order flow része egyfajta transzmissziós mechanizmusnak, mégpedig annak a folyamatnak, ahogy az információ beépül az árba. Azok a piaci szereplők kezdeményezik a kereskedést és így generálják az order flow-t, akik feldolgozzák a információt. Az *1. ábra* Lyons [2001] alapján az információfeldolgozás lépéseit tartalmazza.

*1. ábra*

**Az információ feldolgozásának két lépése (Richard K. Lyons szerint)**




*Forrás*: LyonsBook

Az első lépésben a piaci szereplők egy része feldolgozza az információt, és ennek az alapján kereskedést kezdeményez. A második lépésben az árjegyző szembesül az order flow-val, és ezt feldolgozva, új árat jegyez. A folyamatot két tényező bonyolítja: egyrészt az informált piaci szereplőkön kívül információval nem rendelkező kereskedők is adnak megbízást, és az order flow ezt a kettőt együtt tartalmazza, valamint az árjegyzőhöz közvetlenül is juthat információ. A standard mikrostruktúra-modellekben az árjegyző csak az order flow-n keresztül jut információhoz, ami túl erős feltételnek tűnhet, kivéve, ha feltesszük, hogy nyilvánosan nem elérhető információról van szó.

A másik változó a *bid-ask spread*, ami Lyons szerint meghatározó szerepet játszik a mikrostruktúra-elméletben, mert – ellentétben más hasonlóan fontos változókkal – mérhető, és különösen fontos a piaci szereplők számára, akik a tranzakciós költségeiket szeretnék kordában tartani. A harmadik oka, amiért a bid-ask spread kiemelt figyelmet kapott, leginkább történeti. A szakterület kialakulásakor az egyik fő kérdés az volt, hogy a kereslet-kínálat egyensúlyának kialakulásakor a walrasi aukciós algoritmus helyett milyen mechanizmus működik a gyakorlatban, és az vajon befolyásolja-e a kialakuló árat.

## *1.3. A walrasi aukció*

A walrasi aukció olyan absztrakció, amely annak a megértését segíti, hogy az árak hogyan állnak be a piactisztító szintre, azaz oda, ahol egyensúlyba kerülnek, és a kereslet megegyezik a kínálattal. A walrasi kikiáltó összegyűjti az előzetes megbízásokat, majd ezek alapján meghatározza a piactisztító árat, amin aztán minden tranzakció teljesül. A valóságban azonban ez sosem így történik. Valójában – nem csak a pénzügyi piacokon – mindig van valaki, aki kezdeményezi a tranzakciót, a másik fél pedig árjegyzőként kielégíti ezt az igényt, egészen addig, amíg be nem áll az új ár, azaz amíg a piaci szereplők kereskedni akarnak. A walrasi mechanizmussal szemben itt nemcsak az (új) egyensúlyi áron van tranzakció. Ezek a tranzakciók azért nem egyensúlytalanságban kötött ügyletek, mert az árjegyző számára éppen rendelkezésre álló információ alapján ezek a tranzakciók mind az egyensúlyi áron történtek meg. Így ezek az ügyletek az árjegyző szempontjából racionálisak.

A piaci mikrostruktúra-elmélet standard modelljei ezt a viselkedést akarták modellezni, és ezekkel a modellekkel sikerült az egyetlen egyensúlyi ár szigorúbb feltevésétől eljutni olyan modellekhez, amelyek jóval inkább megközelítik a valóságot; az áralakulás folyamatára vonatkozóan nem éltek olyan szigorú feltevésekkel, és a vételi és eladási árak létére is – a tranzakciós költségeken túlmenő – magyarázatot tudtak találni. A spreadet magyarázó elméletek azóta is a mikrostruktúra-elmélet egyik – de csak egyik – fontos ága.

## *1.4. A „forró krumpli”*

A fentiekben láthattuk, hogy a mikrostruktúra-elmélet egyik fókuszpontja az áralakulás folyamata. A kezdeti modellek kifejezetten erre koncentráltak, de a későbbiekben is lényeges szerepet játszott ez a szempont. A következő terület a *devizapiacok forgalmának* magyarázata, ahol a szakterület empirikus irodalma jelentős eredményeket ért el a kilencvenes években.[5] A devizapiacok a forgalmat tekintve messze kiemelkednek a többi pénzügyi piac közül.[6] Mi magyarázza ezt a hatalmas forgalmat?

A mikrostruktúra-elmélet szerint a *„forró krumpli" (hot potato)* jelenség lehet a forgalom mögött. Tegyük föl, hogy egy ügyfél megbízást ad adott mennyiségű deviza eladására, amit az egyik árjegyző meg is vesz. Ezzel az árjegyző saját számláján a szándékoltnál magasabb szintre nőtt az adott deviza pozíciója. Ettől az árjegyző már szeretne megszabadulni, ezért eladási tranzakciót kezdeményez. Szerencsés esetben talál egy másik ügyfelet, aki venni szeretne a devizából, máskülönben megkezdődik a „forró krumpli" játék. Másik árjegyzőktől kér árjegyzést (vételi és eladási árfolyamot), majd elad annyit a felesleges készletéből, amennyit tud. Ekkor a többi árjegyző készlete emelkedik a kívánatos szint fölé, ezért folytatják a játékot addig, amíg vételi szándékú ügyfelek fel nem szívják az adott mennyiséget (vagy megfelelő részét), és minden árjegyző készlete a kívánatos szintre áll be.

A fenti folyamatból látszik, hogy egy ügyfélmegbízás az értékének a sokszorosát kitevő forgalmat képes generálni a devizapiacokon. A hatalmas forgalom okát korábban a spekulációban látták, a „forró krumpli" hatás viszont az árjegyzők kockázatkezelési tevékenységére vezeti vissza, hiszen készletük szintjének optimalizálása erre utal. A nagy forgalom abból a szempontból is lényeges, hogy milyen információtartalmat tulajdonítunk az order flow-nak, hiszen az order flow információtartalma attól is függ, hogy mi idézi elő az order flow-t.

## 2. A piaci mikrostruktúra elméletének irodalma

O'Hara [1995] a piacok és a piacvezető tevékenységének bemutatása után az alábbi részterületekre osztva mutatja be a piaci mikrostruktúra elméletének a szakirodalmát:

- készletezési modellek (inventory models),
- információalapú modellek (information-based models),
- optimalizáló kereskedők (strategic trader models: informed traders, uninformed traders),
- információ és áralakulás (information and the price process),
- piaci stabilitás (market viability and stability),
- likviditás és a piacok közti kapcsolatok (liquidity and the relationship between markets),
- piacok teljesítménye (issues in market peformance).

A piaci mikrostruktúra elméletének devizapiaci alkalmazhatóságát jegybanki szemmel vizsgáló tanulmány, Gereben és tsai [2005] két nagy csoportot különböztet meg:

1. *Információs modellek*

   Ezek a modellek azt tételezik fel, hogy a piaci szereplők információjukat tekintve heterogének, azaz vannak a piacon olyan szereplők, amelyek jobban informáltak (például bennfentesek), mint a többiek. Ők azért szeretnének egy adott áron kereskedni, mert tudják, hogy az eszköz ennél többet (vagy épp kevesebbet) ér. Az általuk

5 Lásd Lyons [2001].

6 Napi 1,5 billió USD. Forrás: Lyons [2001], 13. o.

generált order flow információt hordoz. Az árjegyző tudja, hogy vannak informált kereskedők, de nem képes azonosítani őket, ezért úgy jegyez – egyes modellekben bid-ask – árat, hogy az informált kereskedők tranzakcióin elszenvedett veszteséget kompenzálja a nem informált (likviditási) kereskedők tranzakcióin. Ezekben a modellekben az információ az order flow-n keresztül mozgatja az árfolyamot, és azon keresztül épül be az árba.

2. *Készletezési modellek*
A készletezési modellek kiindulási alapját a „forró krumpli” játékon keresztül könnyű megérteni. Az árjegyzők adott nagyságú készletet szándékoznak tartani, ezért a vételi és eladási árakat úgy igyekeznek alakítani, hogy az ügyfélmegbízásokból eredő többlet eltűnjön, azaz a likviditási sokk után a pozíciójuk visszatérjen az eredeti szintre. Látható, hogy ebben a keretben az árjegyzők kereskedése nem spekulációs célú, hanem a kockázatkezelés része, és a spread kialakulását és nagyságát nem az információs aszimmetria, hanem a készlet határozza meg.

Bármelyik csoportosítást vesszük is alapul, a modellek nagy része nem sorolható tisztán egyik vagy másik kategóriába, mert rendszerint több jelenséget is képesek megragadni. A következő részekben Kyle [1985], Glosten és Milgrom [1985] alapmodelljeit, az ezeket egységes modellben bemutató Back és Baruch [2004], valamint a Glosten–Milgrom modell egyik továbbfejlesztését (*Das* [2005]) mutatjuk be. Végezetül röviden megismerkedünk a bid-ask modellekkel.

## 3. A Kyle-modell

A piaci mikrostruktúra-elmélet mára klasszikussá vált cikkében Kyle [1985] olyan modellt épít fel, amelyben a szakterület alapvető kérdéseire keresi a választ. Milyen gyorsan épül be a piaci árakba az alaptermékre vonatkozó magáninformáció? Mennyit ér a magáninformáció? Hogyan hat a *likviditási kereskedés* (noise trading) az árak volatilitására? Mi határozza meg a spekulatív piac likviditását?

### 3.1. A likviditás fogalma

A bevezetésben definiálja a likviditás általa vizsgálni kívánt dimenzióit:

*1. Szorosság (tightness)*: Mekkora annak a költsége, ha pozíciónkat rövid idő alatt szeretnénk megforgatni? Másképpen megfogalmazva: mekkora annak a költsége, ha egyszerre veszünk, és el is adunk?
2 *Mélység (depth):* Mekkora nagyságú order flow képes az árat adott egységgel megváltoztatni?
*3. Rugalmasság (resiliency)*: Mekkora sebességgel tér vissza az ár egy véletlen sokk után?

Kyle idézi *Fisher Black* likviditásdefinícióját: *„A likvid piac folytonos piac, azaz majdnem minden mennyiséggel lehet azonnal kereskedni, és hatékony piac, tehát kis mennyi-*

*séggel a jelenlegi piaci áron rövid idő alatt, nagy mennyiséggel átlagosan a jelenlegi piaci áron hosszabb idő alatt lehet kereskedni.*”[7] Kyle a dimenziókat összefoglalva megállapítja, a Black-féle likvid piac majdnem végtelenül szoros (tight), nem végtelenül mély (deep) és elég rugalmas (resilient) ahhoz, hogy az ár a fundamentális értékhez tartson.

## *3.2. A modell leírása*

Kyle a piaci kereskedést aukciók sorozataként fogja fel. Egyetlen aukció során egy kockázatos eszközt cserélnek egy kockázatmentesre, azaz egyszerűsítve, részvényt adnak el és vesznek meg. A piacon három szereplő van: a *piacvezető (market maker)*, aki (Bertrand-féle) versenyzői piacon tevékenykedik, az *informált kereskedő (insider)* és a *likviditási kereskedő (noise trader)*. A piacvezető és a likviditási kereskedő ismeri a részvény jövőbeli (*ex post likvidációs*) értékére vonatkozó valószínűségeloszlást. Kyle felteszi, hogy ez normális eloszlást követ. Az informált kereskedő többletinformációval rendelkezik a részvény értékéről, ami a modell legegyszerűbb változatában úgy jelenik meg, hogy pontosan ismeri a jövőbeli értékét.

Az informált kereskedő célja az, hogy a többletinformáció birtokában kereskedésével minél nagyobb profitot érjen el. A likviditási kereskedő kereskedése véletlenszerű, a modellben ez nulla várható értékű normális eloszlás szerint alakul.

Egyetlen aukció során i) az első lépésben az informált kereskedő és a likviditáskereskedő egyszerre meghatározza, hogy mekkora mennyiséggel szeretne kereskedni; ii) második lépésben a piacvezető megállapítja a piactisztító árat.

Az első lépés során az informált kereskedő döntését az általa eladni vagy venni kívánt mennyiségről a múltbeli árakat, kereskedett mennyiségeket és a többletinformációját figyelembe véve hozza meg. A likviditási kereskedő ajánlata véletlenszerű, és független mind az informált kereskedő jelenbeli tevékenységétől, mind a saját múltbeli tevékenységétől.

A piacvezető nem tudja megkülönböztetni a két másik piaci szereplő ajánlatát, hanem csak az együttes (nettó) ajánlattal, az order flow-val szembesül. Annyit tud, hogy a piacon van informált kereskedő, és hogy a likviditási kereskedő ajánlatának várható értéke nulla, ezért az order flow előjeléből és méretéből következtet arra, hogy a részvény jövőbeli várható értékére vonatkozó várakozása mennyire helyes. Ha a nettó ajánlat vétel (eladás), akkor a részvény értékesebb (kevésbé értékes), mint korábban gondolta, ezért magasabb (alacsonyabb) árat fog jegyezni, mint korábban. Így végül az order flow mozgatja az árfolyamot.

Továbbá felteszi, hogy az informált kereskedő és a piacvezető is kockázatsemleges, és mindkettő a várható profitját maximalizálja. A piacvezető ugyanakkor versenyzői piacon tevékenykedik, tehát várható profitja nulla lesz. Ebből adódik: úgy határozza meg a piactisztító árakat, hogy azok egyenlők legyenek a kockázatos eszköz feltételes várható értékével, ahol a feltétel a piacvezető információs halmaza. Nézzünk meg egyetlen aukciót formálisan is!

7 Kyle [1985] idézi *Fisher Blacknak* a likviditásra adott, intuitív definícióját (in: *Towards a Fully Automated Exchange*, Part I., *Financial Analysts Journal*, 27 (1971), 29–34. o.).

### 3.3. Egyetlen aukció

A leírás Kyle [1985] jelöléseit követi. Jelölje $\tilde{v}$ a részvény jövőbeli értékét, és legyen $\tilde{v} \sim N(p_0, \Sigma_0)$; $\tilde{u}$ a likviditási kereskedő ajánlatát, $\tilde{u} \sim N(0, \sigma_u^2)$ $\tilde{x}$ az informált kereskedő ajánlatát és $\tilde{p}$ a kockázatos eszköz árát jelöli.

Az aukció első lépésében az exogén módon adott $\tilde{v}$ alapján az informált kereskedő meghatározza ajánlatának nagyságát: $\tilde{x} = X(\tilde{v})$, miközben a likviditási kereskedő szintén megadja ajánlatát, $\tilde{u}$-t. Látható, hogy az informált kereskedő ajánlata nem függ $\tilde{p}$-től, tehát piaci megbízásnak (market order) tekinthető.

Az aukció második lépésében a piacvezető az order flow ismeretében meghatározza az árat, ami megtisztítja a piacot: $\tilde{p} = P(\tilde{x} + \tilde{u})$. Mivel a kialakuló ár függ $X$-től és $P$-től, $\tilde{p} = \tilde{p}(X,P)$, ezért az informált kereskedő profitja, p=$(\tilde{v} - \tilde{p})\tilde{x}$ is függ ezektől, így végül $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}(X,P)$.

Kyle a piaci egyensúlyt olyan $X$ és $P$ párként definiálja, melyek eleget tesznek az alábbi két feltételnek:

$$E\{\tilde{\pi}(X,P) \mid \tilde{v} = v\} \geq E\{\tilde{\pi}(X',P) \mid \tilde{v} = v\}, \forall X', \forall v \tag{1}$$

$$\tilde{p}(X,P) = E\{\tilde{v} \mid \tilde{x} + \tilde{u}\} \tag{2}$$

Az első feltétel az informált kereskedő profitmaximalizálását mutatja, a második azt mutatja, hogy a versenyzői piacon tevékenykedő piacvezető profitja nulla lesz. Kyle bebizonyítja, hogy a modellben létezik olyan egyértelmű egyensúly, amiben $X$ és $P$ lineáris függvények. Ekkor

$$X(\tilde{v}) = \beta(\tilde{v} - p_0), \tag{3}$$

$$P(\tilde{x} + \tilde{u}) = p_0 + \lambda(\tilde{x} + \tilde{u}), \tag{4}$$

ahol $\beta = \left(\frac{\sigma_u^2}{\Sigma_0}\right)^{1/2}$ és $\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\Sigma_0}{\sigma_u^2}\right)^{1/2}$. Látható, hogy $\beta = \frac{1}{2\lambda}$.

#### 3.3.1. A bizonyítás

Feltettük, hogy $\tilde{v} \sim N(p_0, \Sigma_0)$, $\tilde{u} \sim N(0, \sigma_u^2)$valamint $\tilde{x} = X(\tilde{v})$, $\tilde{p} = P(\tilde{x} + \tilde{u})$. Tegyük fel továbbá, hogy léteznek $\alpha, \beta, \mu$ és $\lambda$ együtthatók, melyekre $\tilde{x} = \alpha + \beta\tilde{v}$ és $\tilde{p} = \mu + \lambda(\tilde{x} + \tilde{u})$.

Mivel a piacvezető az árat úgy határozza meg, hogy várható profitja nulla legyen, ezért

$$\begin{gathered} E\left(\left[\tilde{v} - P(\tilde{x} + \tilde{u})\right] \mid \tilde{v} = v\right) = (v - \mu - \lambda x)x \\ \Rightarrow x = \frac{v - \mu}{2\lambda}, \text{ azaz } \beta = \frac{1}{2\lambda}, \alpha = -\frac{\mu}{2\lambda}. \end{gathered} \tag{5}$$

Mit tudunk $\widetilde{p}$-ről?

$$\begin{aligned}\widetilde{p} &= E(\widetilde{v} \mid \widetilde{x}+\widetilde{u}) = \\ &= Cov(\widetilde{v},\widetilde{x}+\widetilde{u})\left[Var(\widetilde{x}+\widetilde{u})\right]^{-1}(\widetilde{x}+\widetilde{u}-E(\widetilde{x}+\widetilde{u})+E(\widetilde{p})).\end{aligned} \tag{6}$$

Mivel

$$\begin{aligned}&Cov(\widetilde{v},\widetilde{x}+\widetilde{u}) = Cov(\widetilde{v},\widetilde{x}) = \beta Var(\widetilde{v}) = \beta\Sigma_0 = \frac{1}{2\lambda}\Sigma_0 = \\ &Var(\widetilde{x}+\widetilde{u}) = Var(\widetilde{x}) + Var(\widetilde{u}) = \beta^2\Sigma_0 + \sigma_u^2 = \frac{1}{4\lambda^2}\Sigma_0 + \sigma_u^2 \\ &E(\widetilde{x}+\widetilde{u}) = E(\widetilde{x}) = \alpha + \beta E(\widetilde{v}) = -\mu\beta + \beta p_0 = -\frac{\mu}{2\lambda} + \frac{p_0}{2\lambda}\end{aligned} \tag{7}$$

$$E(\widetilde{p}) = \mu + \lambda E(\widetilde{x}+\widetilde{u}) = \mu + \lambda(-\mu\beta + \beta p_0),$$

ezért

$$\widetilde{p} = \mu + \lambda(\widetilde{x}+\widetilde{u}) = \frac{\frac{1}{2\lambda}\Sigma_0}{\frac{1}{4\lambda^2}\Sigma_0 + \sigma_u^2}\left[\widetilde{x}+\widetilde{u}-(-\frac{\mu}{2\lambda}+\frac{p_0}{2\lambda})\right] + \mu + \lambda\left[-\mu\frac{1}{2\lambda}+\frac{p_0}{2\lambda}\right] \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \lambda = \frac{\frac{1}{2\lambda}\Sigma_0}{\frac{1}{4\lambda^2}\Sigma_0 + \sigma_u^2} \Rightarrow \frac{1}{4\lambda}\Sigma_0^2 + \sigma_u^2 = \frac{1}{2\lambda^2}\Sigma_0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4}\frac{\Sigma_0}{\sigma_u^2} \\ &\mu = p_0.\end{aligned} \tag{9}$$

### *3.3.2. Az egyensúly*

Mit tudunk $\widetilde{p}$-ről, az árról mint valószínűségi változóról?

$$\begin{aligned}\widetilde{p} &= p_0 + \lambda(X+U) = p_0 + \lambda\left[\beta(V-p_0)+U\right] = \\ &= \frac{1}{2}(V+p_0) + \lambda U = \frac{1}{2}(V+p_0) + \frac{1}{2}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{U}{\sigma_u}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left[(V-p_0)+2p_0\right] + \frac{1}{2}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{U}{\sigma_u}\right) = p_0 + \frac{1}{2}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}\frac{V-p_0}{\Sigma_0^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}\frac{U}{\sigma_u} = \\ &= p_0 + \frac{1}{2}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{V-p_0}{\Sigma_0^{\frac{1}{2}}} + \frac{U}{\sigma_u}\right] \sim N\left(p_0, \frac{1}{2}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}\right).\end{aligned} \tag{10}$$

Mit tudunk az informált kereskedő profitjáról? Mivel (5)-ből kijött, hogy $\tilde{x}=(\tilde{v}-\mu)/2\lambda$, ezért az informált kereskedő feltételes és feltétel nélküli profitja:

$$
\begin{aligned}
E(\Pi\,|\,\tilde{v}) &= (\tilde{v}-\mu-\lambda x)x = \frac{\tilde{v}-\mu}{2}\frac{\tilde{v}-\mu}{2\lambda} = \frac{(\tilde{v}-\mu)^2}{4\lambda} = \\
&= (\tilde{v}-p_0)^2\frac{1}{4}2\left(\frac{\sigma_u^2}{\Sigma_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= (\tilde{v}-p_0)^2\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_u^2}{\Sigma_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(\tilde{v}-p_0)}{4\lambda}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
E(\Pi) = E\left(\frac{(\tilde{v}-p_0)^2}{4\lambda}\right) = \frac{Var(\tilde{v})}{4\lambda} = \frac{1}{4}2\left(\frac{\sigma_u^2}{\Sigma_0}\right)^{\frac{1}{2}}\Sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_u^2\Sigma_0)^{\frac{1}{2}}\ . \tag{12}
$$

Milyen tulajdonságokkal bír az egyensúly? Látható, hogy *X*-et és *P*-t – ezeket játékelméleti szempontból reakcófüggvényeknek is tekinthetjük – $\Sigma_0$ és $\sigma_u^2$ határozza meg. Legyen $\Sigma_1 = Var(\tilde{v}\,|\,\tilde{p})$, ami a részvény jövőbeli értékének feltételes varianciája, ahol a feltétel az aukcióban meghatározódó ár. Kiszámítható, hogy

$$
\begin{aligned}
Var(\tilde{v}\,|\,\tilde{p}) &= Var(\tilde{v}) - [Cov(\tilde{v},\tilde{p})]^2[Var(\tilde{p})]^{-1} = \\
&= \Sigma_0 - (\frac{1}{2}\Sigma_0)^2(\frac{1}{2}\Sigma_0)^{-1} = \frac{1}{2}\Sigma_0,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

hiszen

$$
\begin{aligned}
Cov(\tilde{v},\tilde{p}) &= Cov(\tilde{v}, p_0 + \lambda(\tilde{x}+\tilde{u})) = Cov(\tilde{v},\tilde{x})\lambda = \beta\lambda Var(\tilde{v}) = \\
&= \frac{1}{2}\Sigma_0 \qquad \text{és}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(\tilde{p}) &= \lambda^2[Var(\tilde{x}) + Var(\tilde{u})] = \lambda^2[\beta^2 Var(\tilde{v}) + Var(\tilde{u})] = \\
&= \frac{1}{4}\Sigma_0 + \frac{1}{4}\frac{\Sigma_0}{\sigma_u^2}\sigma_u^2 = \frac{1}{2}\Sigma_0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

A (13)-as egyenletből látszik, hogy $\Sigma_1 = \Sigma_0/2$, tehát az első aukció végére a részvény jövőbeli értékének bizonytalansága a felére csökkent. Ugyancsak kijelenthetjük, hogy egyetlen aukció során az informált kereskedő többletinformációjának a fele épül be az árba. Az árak volatilitása nem függ a likviditási kereskedő tevékenységének szintjétől, $\sigma_u^2$-től. Ebben a modellben a piac *mélységét*, azaz azt a mennyiséget, amely a piaci ár egy egységgel való elmozdításához szükséges, $1/\lambda$ adja meg. Látható, hogy itt a piac *mélysége* arányos a likviditási kereskedés mennyiségének és az informált kereskedő várható információjának arányával. Az informált kereskedő maximalizált profitja arányos a piac mélységével.[8] Az informált kereskedő feltétel nélküli várható profitja arányos $\widetilde{v}$ és $\widetilde{u}$ és varianciájával.

### *3.4. Sorozatos aukciók*

Kyle cikkében egyetlen aukció egyensúlyának meghatározása után hasonló számításokat végez el sorozatos aukciókra az alábbi kiegészítő feltevésekkel:

- $N$ db aukció, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$,
- $\widetilde{u}(t)$ Brown-mozgást követ, varianciája $\sigma_u^2$, $\widetilde{u}_n = \widetilde{u}(t_n)$,
- $\Delta\widetilde{u}_n = \widetilde{u}_n - \widetilde{u}_{n-1} \sim N(0, \sigma_u^2 \Delta t_n)$ a likviditási kereskedő által kereskedett mennyiség, ahol $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$
- $\widetilde{v} \sim N(p_o, \Sigma_0)$ független a $\widetilde{u}\,(t)$ folyamattól,
- $\widetilde{x}\,(n)$ az informált kereskedő aggregált pozíciója $t_n$-ben,
- $\Delta\widetilde{x}_n = \widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n-1}$ az informált kereskedő által $t_n$-ben kereskedett mennyiség,
- $\widetilde{p}$ a piactisztító ár $t_n$-ben.
- Az információhalmaz megváltozik, az informált kereskedő ismeri a korábbi árakat is, a piacvezető ismeri a korábbi kereskedett mennyiségeket, ezért i) $\widetilde{x}_n = X_n(\widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_{n-1}, \widetilde{v})$; ii) $\widetilde{p}_n = P_n(\widetilde{x}_1 + \widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{x}_n + \widetilde{u}_n)$.
- Ebből az informált kereskedő kikövetkeztetheti a múltbeli $\Delta\widetilde{x}_{\mathrm{n}}$-eket és a piacvezető kikövetkeztetheti a múltbeli $\widetilde{p}_{\mathrm{n}}$-eket. $X$=($X_1$,…$X_N$) és $P$=($P_1$…$P_N$) a kereskedési stratégia és az árazási szabály függvények vektorai.
- $\widetilde{\pi}_n = \sum_{k=n}^{N} (\widetilde{v} - \widetilde{p}_k)\widetilde{x}_k$ a profitfüggvény, $\widetilde{p}_n = \widetilde{p}_n(X, P)$, $\widetilde{x}_n, = \widetilde{x}_n(X, P)$ és $\widetilde{\pi}_n = \widetilde{\pi}_n(X, P)$.

Az egyensúly tulajdonságait vizsgálva, Kyle kijelenti, hogy ebben a modellben *az árak martingálfolyamatot alkotnak*, amelyeknek a volatilitása tükrözi azt a sebességet, amivel az információ beépül az árba; lineáris egyensúlyban az *árváltozások függetlenek* és nulla várható értékű normális eloszlást követnek. Mindez azért különösen izgalmas, mert egy olyan piac, amelyen többletinformációval rendelkező szereplő is van, nem felel meg azoknak a szokásos versenyzői feltételezéseknek, amelyekből az árváltozásokra vonatkozó függetlenséget, normalitást és az árváltozások folyamatára vonatkozó martingáltulajdonságot szokás megkapni.

A sorozatos aukció egyensúlyának meghatározása után a legérdekesebbek az informált kereskedő kereskedésének intenzitását időben mutató $\beta_n$, a piac mélységének lefutását megjelenítő $\lambda_n$ és az információ árakba való beépülését tükröző $\Sigma_n$ sorozatok. Ezeket megvizsgálva, az alábbiakat jelenthetjük ki:

8 KYLE [1985]-ben $\frac{v^2}{4\lambda}$ jön ki, míg az én eredményem (11) alapján $\frac{(\widetilde{v} - p_0)^2}{4\lambda}$. Ennek a következtetések szempontjából nincs különösebb jelentősége.

$\Sigma_n$ mutatja azt az információt, ami az informált kereskedő többletinformációjából még nem épült be az árba. Ez a sorozat időben monoton csökkenő. Bár az $N$ . aukció után még $\Sigma_N > 0$, de elég kicsi. A növekvő zaj ($\sigma_v^2$) arányosan növeli a piac mélységét és az informált kereskedő profitját, ugyanakkor változatlanul hagyja az árak információtartalmát. Ha az informált kereskedő kezdeti információtartalma, $\Sigma_N^{1/2}$ nő, akkor a piac mélysége arányosan csökken, a bennfentes profitja pedig arányosan nő, mert ez a profit arányos $(\Sigma_n \sigma_v^2)^{1/2}$ -vel.

## 3.5. Folytonos aukciók

A sorozatos aukciókat követő részben Kyle folytonos modellben vizsgálja meg az egyensúly tulajdonságait. A folytonos modellben az alábbi alapegyenleteket vezeti be:

$$\begin{aligned} d\pi(t) &= [v - p(t) - dp(t)]dx(t) = [v - p(t)]dx(t), \\ dx(t) &= \beta(t)[v - p(t)]dt, \\ dp(t) &= \lambda(t)[dx(t) + du(t)] \end{aligned} \tag{16}$$

A legrelevánsabb kérdés itt is az, hogy $\Sigma_n$ és $\lambda_n$ időben hogyan alakul. A diszkrét modellekben már megismert paraméterekre folytonos esetben a következőket kapja:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= (\frac{\Sigma_0}{\sigma_u^2})^{1/2}, \\ \Sigma(t) &= (1-t)\Sigma_0, \\ \beta(t) &= \frac{\sigma_u^2 \lambda(t)}{\Sigma(t)} = \frac{\sigma_u \Sigma_0^{-1/2}}{1-t}, \end{aligned} \tag{17}$$

Az analitikus eredményeket megvizsgálva, az alábbiakat lehet elmondani: látható, hogy $\lambda(t)$ konstans, azaz a piac mélysége állandó, ezért az árak volatilitása konstans, és az információ állandó sebességgel, fokozatosan épül be az árakba. Mivel $\Sigma(1) = 0$[9], ezért a kereskedés végére az informált kereskedő minden magáninformációja beépül az árakba. A véletlen változók normalitása és a piaci hatékonyság feltevéséből adódó martingál tulajdonság miatt az ár Brown-mozgást végez $\Sigma_0$ varianciával. Az informált kereskedő tudja, hogy az ár végül a $\tilde{v}$ likvidációs értékhez tart, de a piacvezető, aki nem ismeri $\tilde{v}$-t, úgy észleli, hogy az árváltozásoknak nincs driftjük. Az árak volatilitását a likviditási kereskedő határozza meg, így az informált kereskedő kereskedése kicsinek tekinthető. Az ár konvergenciáját mégis az informált kereskedő határozza meg, ugyanis az ő kereskedett mennyiségei között pozitív korreláció van. Az informált kereskedő várható profitja ($\Sigma_0^{1/2}\sigma_u^2$) megegyezik a likviditási kereskedő várható veszteségével, és épp duplája, mint az egyszeri aukció esetében.

## 3.6. A diszkrét és a folytonos modell egyensúlyának összevetése

Noha konstans $\Sigma_0$ és $\sigma_u^2$ mellett a sorozatos aukciós egyensúly tart a folytonos aukciós egyensúlyhoz, a két modell likviditási tulajdonságai nem azonosak. Az alábbiakban a likviditás Kyle által kiemelt dimenziói mentén vetjük össze a modelleket.

9 A folytonos modellben a kereskedési idő a 0 kezdő időponttól 1-ig tart, $t \in [0,1]$.

- *Szorosság*
  Míg a folytonos aukciós egyensúlyban a piac végtelenül szoros, azaz a pozíciót akár ingyen is meg lehet forgatni gyorsan, addig a sorozatos aukció esetén a piac nem végtelenül szoros, és a pozíció megforgatásának költsége annál nagyobb, minél rövidebb idő alatt akarja a befektető megtenni.
- *Mélység*
  A folytonos aukciós egyensúlyban a piac mélysége állandó, míg a sorozatos aukció esetén a piac mélysége nem konstans. A piaci mélység arányos a likviditási kereskedés nagyságával, és fordítottan arányos az árba még nem beépült magáninformáció mennyiségével.
- *Rugalmasság*
  A piac rugalmasságát mindkét modellben az informált kereskedő határozza meg. A folytonos aukciós egyensúlyban a rugalmasság ($\beta(t)$) és a kereskedés végén a piac végtelenül rugalmas lesz ($\beta(t) \to \infty, \tau \to 1$).
- Továbbá a mélység és a rugalmasság a modellben az informált kereskedő és a likviditási kereskedő létéből fakad.

Ebből világos, hogy a folytonos aukciós egyensúlyban a piac likviditása megfelel a Black által megadott kritériumoknak. A Kyle-modell érdeme, hogy mindezeket a tulajdonságokat maximalizáló viselkedést feltételező modellből vezette le, valamint hogy az informált kereskedő racionális feltételezésekkel él a piac szorosságára, mélységére és rugalmasságára nézve.

### *3.7. Végső következtetések, a modell jelentősége*

A modell megmutatja:
- Az árváltozásokat a kereskedett mennyiségek függvényében modellezni nem inkonzisztens az árváltozások új információ függvényében való modellezésével.
- Az informált kereskedő monopolhelyzete nem gátolja meg, hogy a piac közepes értelemben véve hatékony legyen.
- Az árak állandó volatilitásához nem kell, hogy az információ folyamatosan keletkezzék, az egyszeri információs többlet is fokozatosan épül bele az árba.
- A hatékony és súrlódásmentes piac likviditási tulajdonságai levezethetők információs aszimmetriáció esetén.
- A sorozatos aukció diszkrét modellje konvergál a folytonos modellhez.

A modell némileg más szempontú, játékelméleti megközelítésben írt magyar nyelvű ismertetése megtalálható a Gereben és tsai [2005]-ben is.

## 4. A Glosten–Milgrom-modell

Glosten és Milgrom [1985] olyan formális modellt állít fel, amely a kontraszelekció (adverse selection) létével magyarázza a spread létrejöttét. Vizsgálják a spread nagyságát meghatározó tényezőket, az árak információtartalmának időbeli alakulását és a spread dinamikus viselkedését. Megmutatják, hogy a piacon megfigyelhető, realizált hozam meghaladja azt a hozamot, amit a többletinformációval nem rendelkező kereskedők realizálnak.

## *4.1. A modell leírása*

A bid-ask spreadet magyarázó, korábbi megközelítések arra koncentrálnak, hogy a specialistának készletet kell fenntartania, és ez hogyan befolyásolja a spread nagyságát. Ez a cikk azt mutatja meg, hogy a spread tisztán *információs aszimmetriából* is származhat, és akkor is fellép, ha nincsenek tranzakciós költségek, és a specialista profitját a verseny nullára szorítja. Az alapötlet az, hogy a specialista *kontraszelekciós* (adverse selection) problémával szembesül, hiszen az a piaci szereplő, aki a specialista által jegyzett vételi vagy eladási árfolyamon kereskedni szeretne vele, tudhat valamit, amit a specialista nem tud. Ő ezeket a piaci szereplőket nem tudja szétválasztani, ezért úgy kereskedik, hogy az informált kereskedők (informed traders) – az egyszerűség kedvéért: bennfentesek – kereskedésén elszenvedett veszteségét a nem informált (uninformed), avagy likviditási kereskedőkön egyenlíti ki. A specialista ebből a célból hozza létre a bid-ask spreadet. A cikk az árak és a spread dinamikus viselkedésére összpontosít.

A modellben szerepel egy kockázatsemleges specialista, akinek nincsenek tranzakciós költségei, és várható profitja nulla. A modell az informált kereskedő információs előnyének rövid távú hatásait vizsgálja. Éppen a rövid táv miatt nincs benne diszkontálás, a fő kérdés, hogy az információt hogyan dolgozza fel a piac, hogyan épül be az árakba és hogyan hat a spreadre. Az árak alakulása közepes hatékonyságot mutat, sőt egy kevéssel több információt is tartalmazhat, mint ami nyilvánosan elérhető volt (amivel a specialista rendelkezett, amikor meghatározta az árakat).

## *4.2. A modell formális vázlata*

A specialista meghatározza a vételi és eladási árfolyamokat, amiken részvényt hajlandó venni és eladni. A kereskedők két csoportra oszthatók: informált és likviditási kereskedők halmazára, és a specialista nem képes őket egymástól megkülönböztetni. A kereskedés menete során a specialista egyszerre csak egyetlen kereskedővel találkozik, aki az aktuális bid és ask árfolyamok megismerése után eldönti, hogy szeretne-e kereskedni, és venni vagy eladni szeretne. A kereskedett mennyiség mindig egyetlen részvény.[10] Az adásvétel megtörténte után a specialista megváltoztathatja az árjegyzését.

Tegyük föl, hogy a részvény értéke $V$, véges szórású valószínűségi változó ($V \geq 0$, $Var(V) < \infty$), ami a jövőbeli $T_0$ időpontban fog realizálódni. A modell minden szereplője kockázatsemleges, és az $x$ darabból álló portfólióját a $\rho x V + c$ hasznossági függvény segítségével értékeli, ahol $V$ a részvény értéke és $c$ a szereplő fogyasztása. Az alacsony $\rho$-val rendelkező piaci szereplő a jelenbeli fogyasztást jobban preferálja a részvénybirtokláshoz

10 Az egyetlen részvényre vonatkozó megkötés elsőre erősnek tűnik, hiszen ezzel kizárják, hogy a venni vagy eladni szándékozott mennyiség függvényében differenciáljon a specialista. A kereskedők érkezésének folyamatára (arrival process) tett feltételezés hiánya viszont némileg elfogadhatóbbá teszi ezt a megkötést a szerzők szerint.

képest, mint a magas $\rho$-val rendelkező szereplő. A szerzők ezt a „likviditási” paramétert azzal magyarázzák, hogy i) a piaci szereplőknek nem egységes és nem tökéletes a pénzügyi piacokhoz való hozzáférése, ii) a szereplőknek a részvényre vonatkozó, szubjektív értékelése különböző. Normalizáljuk $\rho$-t úgy, hogy a specialista $\rho$-ja legyen 1. Ahhoz, hogy kereskedés legyen, szükségünk van arra, hogy $\rho$ ne legyen egységes a piacon, azaz a piaci szereplők „likviditási” paramétere heterogén legyen.

Definiáljuk a következő információs halmazokat:

$H_t$ a $t$ időpontban nyilvánosan elérhető információ halmaza,
$J_t$ az informált kereskedő információs halmaza a $t$ időpontban,
$S_t$ a specialista információs halmaza a $t$ időpontban,
$A_t$ az eladási (ask) ár a $t$ időpontban,
$B_t$ a vételi (bid) ár a $t$ időpontban.

Jelölje $Z_t$ a piaci szereplő részvényre vonatkozó értékelését a $t$ időpontban:

likviditási kereskedő $Z_t = E(\rho_t V \mid H_t, A_t, B_t)$

informált kereskedő $Z_t = E(\rho_t V \mid H_t, J_t, A_t, B_t)$.

Feltehetjük továbbá, hogy $\rho_t$ értékét a likviditási kereskedő esetén $H_t$, a bennfentesnél közösen $H_t$ és $J_t$ határozza meg. Így a piaci szereplők vesznek a $t$ időpontban, ha $Z_t > A_t$ és eladnak, ha $Z_t > B_t$. Ezek alapján felírhatjuk a specialista $t$ időpontbeli kereskedésére vonatkozó várható profitját:

$$\begin{aligned}Profit &= E\left[(A_t - V)\chi_{\{Z_t > A_t\}} + (V - B_t)\chi_{\{Z_t < B_t\}} \mid S_t\right] = \\ &= A_t P(Z_t > A_t \mid S_t) - E(V\chi_{\{Z_t > A_t\}} \mid S_t) - B_t P(Z_t < B_t \mid S_t) + E(V\chi_{\{Z_t < B_t\}} \mid S_t),\end{aligned} \tag{18}$$

ahol $\chi_{\{Z_t > A_t\}}$ és $\chi_{\{Z_t < B_t\}}$ indikátorfüggvények, amelyeknek az értéke 1, ha $Z_t > A_t$ vagy $Z_t < B_t$ és 0 egyébként.

A szerzők felteszik, hogy a specialista várható profitja minden kereskedésen 0, ezért

$$A_t = \frac{1}{P(Z_t > A_t) \mid S_t} E(V\chi_{\{Z_t > A_t\}}), \tag{19}$$

$$B_t = \frac{1}{P(Z_t < B_t) \mid S_t} E(V\chi_{\{Z_t < B_t\}}). \tag{20}$$

### *4.3. Eredmények*

A szerzők a felállított modellben öt állítást fogalmaznak meg:

- *A bid és az ask közrefogja azt az árat, ami aszimmetrikus információ jelenléte nélkül lépne fel.*
- *A kereskedési árak martingálfolyamatot alkotnak.*
  Ezzel sikerült megcáfolni azt az addig elterjedt véleményt, hogy a rövid távú hozamokban rejlő, negatív autokorreláció a spread jelenlétének szükséges következménye. Sikerült olyan modellt építeni, amiben van spread, de nincs autokorreláció, sőt az

áralakulás az informált kereskedő jelenléte ellenére is martingálfolyamat. Az ilyen negatív autokorreláció abból a spreadből ered, ami a specialistának – a Glosten–Milgrom-modellben nem szereplő – tranzakciós költségeit és profitját fedezi. Ily módon az autokoreláció mértéke felhasználható annak a számszerűsítésére, hogy a spread mekkora része tudható be a többletinformációnak, és mekkora a specialista tranzakciós költségének és profitjának.

- *A többletinformációból (kontraszelekcióból) eredő spread korlátos.* Pontosabban: az átlagos spread négyzete szorozva a kereskedett mennyiséggel várható értéke korlátos. Ez sajnos csak korlátot ad, de nem határozza meg az átlagos spread nagyságrendjét.
- *A specialista és az informált kereskedő árvárakozásai konvergálnak.* Ez azt jelenti, hogy a többlet-információ a kereskedés menete során idővel teljesen beépül az árakba.
- *A spread tágul, azaz az eladási árak növekednek és a vételi árak csökkenek, ha a többletiformáció, a bennfentes információja jobbá válik; a bennfentesek aránya nő a piacon; vagy a likviditási keresedők kínálati és keresleti rugalmassága nő.*

## *4.4. Piacbezárás*

A Glosten–Milgrom-modell egyik érdekessége, hogy előfordulhat olyan helyzet, amikor a piac „bezár” (market shutdown), azaz a specialista olyan vételi és eladási árfolyamot jegyez, amelyeken a piaci szereplők nem kereskednek. Mindez akkor fordulhat elő, ha az informált kereskedők aránya túl nagy a piacon, vagy az információik túl jók a likviditási kereskedők keresleti és kínálati rugalmasságához képest. Ráadásul az ilyen helyzet önmagát erősíti, hiszen a kereskedés épp az információ beépülését szolgálná. Ezért ha a piac egyszer „bezár”, akkor zárva is marad addig, amíg a bennfentesek el nem hagyják a piacot, vagy az információ (vagy legalább egy része) ismertté nem válik.

Ha valaki nem tud kereskedni, akkor ez a tény externáliaként hathat későbbi kereskedőkre, akiknek hiányzik az így be nem épült információ. A szerzők felvetik a kérdést: ez a jelenség esetleg azt is jelentheti, hogy létezhet olyan kereskedési rendszer, amelyik Pareto-értelemben hatékonyabb, mint a versenyzői specialista (competetive specialist system). A jóléti veszteség adott hányadáért biztosan az felelős, hogy a specialistának minden kereskedésen nulla profitot kell realizálnia. A cikk javaslata szerint mindenkinek a helyzetét javítani lehetne avval, ha valamekkora veszteséget és/vagy nyereséget megengednénk neki. Ennek egyik gyakorlati módja az lehet, ha megengedjük a specialistának, hogy bizonyos monopolista hatalommal rendelkezzék, de arra kötelezzük, hogy a spreadet adott sávon belül tartsa.

A cikk harmadik részében található példa egyrészt azt mutatja be, hogy az információ hogyan épül be az árakba, másrészt azt, hogy a túlzott bennfentes kereskedés hogyan vezet a piac „bezárásához”.

Glosten és Milgrom a cikk negyedik részében a modellt diszkontálással egészíti ki, és bemutatja, hogy a spread léte miatt a tranzakciókból megfigyelhető hozam meghaladja a likviditási kereskedők által ténylegesen realizálható hozamot.

A modell további érdekes következménye, hogy meg lehet vele magyarázni a főleg januárban fellépő kisvállalat-hatást.

## 5. „Kyle találkozik Glosten-Milgrommal”

Back és Baruch [2004] a piaci mikrostruktúra-elmélet két klasszikus modelljét, a Kyle és a Glosten–Milgrom-modellt hangolja össze. Mindkét modellben van informált kereskedő és likviditási kereskedő, akiknek a megbízásait a piacvezető saját készletéből elégíti ki, de míg a Glosten–Milgrom-modellben egyszerre csak egyetlen ajánlat érkezik, és az informált kereskedések intenzitása exogén módon adott (az informált kereskedők és a likviditási kereskedők arányától függ), addig a Kyle-modellben egyszerre nagyobb részvénymennyiségekkel kereskednek. Az első modellben nincs bid-ask spread, és az informált kereskedő úgy éri el a maximális profitot, ha fokozatosan kereskedik, a második modellben van spread, amit az a valószínűség határoz meg, hogy egy megbízás informált kereskedőtől származik, és az informált kereskedők úgy kereskednek, hogy minden egyes megbízáson a maximális profitot szeretnék realizálni, mintha több lehetőségük nem lenne a kereskedésre.

A szerzők olyan változatát mutatják be a Glosten–Milgrom-modellnek, ahol egyetlen informált kereskedő van, aki a kereskedési időpontokat optimálisan választja meg. A cikk egyik eredménye, hogy ebben a folytonos modellben endogén módon határozza meg a bid-ask spreadet, ami a likviditási és az informált kereskedések relatív érkezési intenzitásától (relative arrival rates) függ.

A cikk bebizonyítja, hogy a Glosten–Milgrom-modell fenti változata nagyjából azonos a Kyle-modell folytonos változatával, ha a megbízások mérete kicsi (trade size) és a likviditási ajánlatok gyakran érkeznek. Ekkor a megbízások mérete közti különbségtétel (egyetlen részvény vagy több részvény [„batched order”]) felesleges. Ugyancsak megmutatják, hogy ekkor a két modellben az informált kereskedő kereskedési stratégiája és profitja hozzávetőleg azonos, valamint azt is, hogy a Glosten–Milgrom-modell spreadje nagyjából a megbízás méretének kétszerese szorozva a Kyle-féle lambdával.

A szerzőpáros megmutatja, hogy ebben a Glosten–Milgrom-féle modellben bizonyos feltételek fennállása esetén az informált kereskedő véletlenszerűen választ a cselekvési alternatívái közt, beleértve azt is, hogy a „rossz” irányban kereskedik. Ezt a jelenséget „blöffölésnek” (bluffing) nevezik. Hangsúlyozzák ugyanakkor, hogy a blöffölésből nem profitál az informált kereskedő, és ezért nem érdemes azt gondolni, hogy a piacot manipulálja, hanem csak arról van szó, hogy egyensúlyban közömbös neki, hogy vesz, elad vagy vár. Már korábbi szerzők is bemutattak olyan modelleket, ahol előfordult blöffölés, de azokban a modellekben a korábbi kereskedéseket nyilvánosságra kellett hozni, és emiatt volt érdemes így cselekedni. Az alábbiakban formális eszközökkel is bemutatjuk a Kyle- és a Glosten–Milgrom-féle modelleket, majd ezek konvergenciáját.

### *5.1. A Kyle-modell*

A Kyle-féle modellnek a cikk azt a változatát elemzi, amelyben Bernoulli-eloszlást követ a termék ára. A megfelelő változót $\widetilde{v}$ jelöli. Ezt ismeri az informált kereskedő, azonban csak az exponenciális eloszlást követő időben lesz nyilvános ez az információ, és ekkor zárul le a kereskedés. Ezen eloszlás paramétere legyen $r$, a valószínűségi változó pedig $\tau$. Az informált kereskedő által a $t$ időpontban tartott részvények számát jelölje $X_t$, a piacon jelenlévő többi (nem informált) kereskedő összesen $Z_t$ részvényt tart. Legyen $Y_t=X_t+Z_t$. Tegyük fel, hogy a piacon jelenlévő kiegyenlítési mechanizmusok eredményeképpen a pillanatnyi ár $p_t = E(\tilde{v} \mid Y_s, s \le t)$ .

Az informált kereskedő vásárlási intenzitását $\theta\,(t)$ adja meg: tehát $X_t = \int_0^t \theta_s ds$ feltevésünk szerint $Z_t$ Wiener-folyamat, melynek volatilitása $\sigma^2$. Ekkor tehát

$$dY_t = \theta_t\, dt + dZ_t . \tag{21}$$

Az informált kereskedő célja természetesen profitjának maximálizálása, ugyanakkor figyelembe kell venni azt is, hogy kereskedési stratégiája befolyásolja az árat is. A cikk első fő állításának tartalma, hogy feltételezve a termék árát megadó sztochasztikus folyamat valamilyen folyamatosztályba tartozását, létezik olyan egyensúlyi stratégia, amely a feltételezett kereskedési stratégia mellett éppen az adott árfolyamatot eredményezi, illetve a feltételezett árfolyamat mellett az egyensúlyi ponthoz tartozó, olyan kereskedési stratégia, amelyet a termék pllanatnyi ára határoz meg, optimális.

A megengedett stratégiák osztályát két feltételezés segítségével definiáljuk. Egyfelől csak olyan kereskedési stratégiát veszünk figyelembe, amelynek az értéke a termék pillanatnyi árától (és a végső árától) függ. Tehát

$$\theta_t = \tilde{v}\theta_H(p_t) + (1-\tilde{v})\theta_L(p_t), \tag{22}$$

ahol $\theta_H(p_t)$ jelöli az informált kereskedő vásárlási intenzitását, feltételezve, hogy a termék valódi ára 1, $\theta_L\,(p_t)$ pedig a termék eladásának intenzitását azon feltétel mellett, hogy a termék ára 0. (Itt kihasználtuk, hogy $\tilde{v}$ értéke 1 vagy 0).

Másfelől kizárjuk azokat a stratégiákat, amelyek lehetővé tennék, hogy végtelen nagy profit (majd esetleg utána végtelen nagy veszteség) keletkezzék (és megfordítva), azaz feltesszük, hogy

$$E\int_0^\tau p_t\theta_t^+ dt < \infty, \quad E\int_0^\tau (1-p_t)\theta_t^- dt < \infty.$$

A nyilvános információhoz $(Y_s)_{s\le t}$ tartozó innovációs folyamat

$$dY_t - \phi(p_t)dt ,$$

ahol

$$\phi(p) = p\theta_H(p) + (1-p)\theta_L(p) .$$

Feltételezve ezt a kereskedési stratégiát, a termék árának alakulását az alábbi egyenlet írja le:

$$dp_t = \lambda\,(p_t)\big(dY_t - \phi(p_t)dt\big),$$

ahol (23)

$$\lambda\,(p) = \frac{p(1-p)(\theta_H(p)+\theta_L(p))}{\sigma^2} .$$

Abban az esetben, ha $\tilde{v}$ értéke 1, akkor az informált kereskedő várható nyeresége

$$E\left(\int_0^\tau (1-p_t)\theta_H(p_t)dt\right),$$

míg $\tilde{v}$=0 esetén

$$E\left(\int_0^\tau p_t\theta_L(p_t)dt\right) .$$

A ($\lambda$, $\phi$, $\theta_H$, $\theta_L$) stratégiát egyensúlyi stratégiának nevezzük, ha egyfelől feltételezve, hogy az informált keresekedő a (22) egyenletben meghatározott stratégiát követi, a (23) által leírt folyamatra teljesül, hogy értéke éppen $E\left(\tilde{v} \mid (Y_s)_{s\leq t}\right)$. Másfelől pedig az adott (23) mellett az informált kereskedő éppen a $\theta_H$ és $\theta_L$ által meghatározott stratégiával maximalizálja nyereségét.

**Tétel 5.1.** *Jelölje N(.) a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét.*
*Tetszőleges* $0 < p < 1$ *esetén legyen* $\lambda^*(p)$ *az az érték, amelyre*

$$N\left(-\sqrt{\log\left(\frac{r}{\pi\sigma^2}\right) - 2\log\left(\lambda^*(p)\right)}\right) = \min\left(p, 1-p\right). \tag{24}$$

Ekkor a

$$\lambda^*, \phi^* = 0, \theta_H^*(p) = \frac{\sigma^2\lambda^*(p)}{p}, \theta_L^*(p) = \frac{\sigma^2\lambda^*(p)}{1-p}$$

függvények egyensúlyi pontot határoznak meg.

Továbbá, azon feltétel mellett, hogy a pillanatnyi ár $p_t$ értéke éppen $p$ valamely $t < \tau$ pillanatban, az informált kereskedő által a hátralévő kereskedési időben elérhető profit

$$\int_p^1 \frac{1-a}{\lambda^*(a)}da, \quad \text{ha } \tilde{v} = 1,$$

$$\int_0^p \frac{a}{\lambda^*(a)}da, \quad \text{ha } \tilde{v} = 0.$$

Végezetül, $\lambda^*$ folytonos, konkáv, a $p=\frac{1}{2}$-re szimmetrikus függvény, amelynek maximuma van ott.

Látható, hogy a profit nem függ a hátralévő időtől! Ez az exponenciális eloszlás örökifjú jellegéből következik.

Heurisztikus érveléssel nem nehéz belátni, hogy a tételben leírt stratégia valóban egyensúlyi pontot szolgáltat. Ehhez a Bellmann-elvet használjuk. (A bizonyításnak más eszközökkel kell történnie, mert a folytonos idejű esetben a Bellmann-függvény differenciálhatósága segíti az egyenlet megoldhatóságát, ezt viszont előre nem könnyű igazolni.) Tekintsük azt az esetet, amikor a termék ára 1. Jelölje a Bellmann-függvényt $V(p)$. Ha az informált kereskedő $\theta$ intenzitással kereskedik, akkor $dt$ idő alatt – feltételezve a (23) dinamikát – az ár várható megváltozása $\lambda\theta t$–$\lambda\phi dt$. Tehát az árváltozásból adódóan $V$ megváltozása $\lambda(\theta-\phi)V'dt$. A $p$ volatilitása $\sigma^2\lambda^2$, tehát ebből fakadóan $V$ értéke $\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2V''dt$-val változik. A $V$ függvény értéke akkor is változik, ha a kereskedő halogatja kereskedését, hiszen az ár nyilvános bejelentése után nem lehet már profitra szert tenni. A $\tau$ feltételezett exponenciális eloszlása miatt, $dt$ idő alatt mintegy $rdt$ annak a valószínűsége, hogy $V$ értéke nulla lesz. Tehát a Bellmann-függvény várható megváltozása

$$-rVdt + \lambda(\theta - \phi)V'dt + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2V''dt.$$

Az optimális kereskedési stratégia esetén ezt a változást kell kompenzálnia a pillanatnyi kereskedésből származó profitnak. Ez utóbbi értéke

$(1-p)\,\theta\, dt.$

Azaz

$$(1-p)\theta - rV + \lambda(\theta - \phi)V' + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 V'' = 0\text{-nak}$$

kell teljesülnie. Mivel a Bellmann-függvény a lehetséges – hátralévő időtartamon megvalósuló – kereskedési stratégiák szerinti maximum, ezért a pillanatnyi kereskedési stratégia szerinti deriváltnak nullának kell lennie. Az előző egyenlet $\theta$ szerint lineáris, tehát

$$V'\lambda = p - 1,$$

így továbbá

$$rV = -\lambda\,\phi V' + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 V''$$

teljesül. A kapott differenciálegyenlet-rendszerből megkapható a tételben megfogalmazott, optimális kereskedési stratégia.

## *5.2. A Glosten–Milgrom-modell*

A cikk következő részében a Glosten–Milgrom-modell egy változatát elemzik a szerzők. Az informált kereskedő továbbra is tudja $\tilde{v}$ konkrét értékét, amely Bernoulli-eloszlást követ. Exponenciális idejű $\tau$ adja meg a bennfentes információ nyilvánossá tételének idejét. Azonban most a feltételezés szerint a nem informált kereskedők vásárlásai és eladásai összességében külön-külön Poisson-folyamat szerint alakulnak. Ezen folyamatok intenzitása $\beta$, a megbízások mindig $\delta$ mennyiségre (order size) szólnak. A $t$ pillanatig beérkezett összes nem informált megbízás száma $z_t^+$, az eladást $z_t^-$ jelöli. $zt=z^+-z_t^-$ a nettó megbízás (number of orders). Ugyanígy az informált kereskedő esetében $x_t = x_t^+ - x_t^-$. $y_t=x_t+z_t$ a piacon jelenlévő teljes vásárlást írja le. Az informált kereskedő minden pillanatban ugyanakkorra nagyságú kereskedést végez, mint a többiek, hiszen egyébként felfedné informáltságát.

Ismét feltételezzük, hogy a pillanatnyi ár $p_t$ értéke

$$p_t = E\left(\tilde{v} \mid (y_s)_{s\le t}\right). \tag{25}$$

A $t$ pillanatban érvényes eladási (vételi) ár

$$\text{ask}_t = E\left(\tilde{v} \mid (y_s)_{s<t}, \Delta y_t = 1\right)$$
$$\text{bid}_t = E\left(\tilde{v} \mid (y_s)_{s<t}, \Delta y_t = -1\right)$$

Az informált kereskedő célja, hogy a

$$E\left(\delta\int_0^\tau(\tilde{v} - \text{ask}_t)dx_t^+ + \delta\int_0^\tau(\text{bid}_t - \tilde{v})dx_t^- \mid \tilde{v}\right)$$

várható nyereséget maximalizálja.

A szerzők ismét egyensúlyi stratégiát keresnek. Az árfolyamat struktúrájára vonatkozó feltevés mellett olyan optimális stratégia létezését, amely egyben biztosítja, hogy a (25) teljesüljön. A figyelembe vett folyamatosztály

$$dp_t = f(p_{t-})dt + \left(a(p_{t-}) - p_{t-}\right)dy_t^+ + \left(b(p_{t-}) - p_{t-}\right)dy_t^-\,, \tag{26}$$

ahol $a$, illetve $b$ adja meg, hogy rögzített $p_{t-}$ mellett mennyi az eladási, illetve vételi ár, illetve $f$ adja meg, hogy mennyi az ár, ha nem történt tranzakció. Tehát a (26) egyenlet első tagja azt adja meg, hogy mennyivel változik az árfolyam, ha nincs tranzakció, második tagja azt, hogy mennyivel változik, ha valaki vásárolni akar, a harmadik pedig azt, hogy mennyivel változik, ha valaki eladni akar. Mivel $\tau$ eloszlása exponenciális, azaz örökifjú, ezért feltételezhető, hogy ezek a függvények nem függenek stacionárius helyzetben az eltelt időtől. Rögzített $f,a,b,$ függvények mellett kell a várható profitot maximalizálni.

Jelölje $\theta_{HB}(p_{t-})$ az informált kereskedő vásárlási intenzitását, azon feltétel mellett, hogy a végső ár értéke 1. Ugyanígy $\theta_{HS}(p_{t-})$ az eladási intenzitást, illetve ugyanezek a $\tilde{v}=0$ esetén $\theta_{LB}$, $\theta_{LS}$. Ismét a $\tau$ exponencialitása miatt jogos annak feltevése, hogy ez nem függ expliciten az eltelt időtől, csak a pillanatnyi (vásárlás, illetve eladás előtti) ártól.

Az $f,a,b,\theta_{HB},\theta_{HS},\theta_{LB},\theta_{LS}$ függvények ún. egyensúlyi helyzetet eredményeznek, ha

$$a(p)=\frac{p\theta_{HB}(p)+p\beta}{p\theta_{HB}(p)+(1-p)\theta_{LB}(p)+\beta},$$

$$b(p)=\frac{p\theta_{HS}(p)+p\beta}{p\theta_{HS}(p)+(1-p)\theta_{LS}(p)+\beta},$$

azaz az eladási és vételi árra teljesülnek az

$$a(p_{t-})=E\big(p_t\,|\,(y_s)_{s<t},\Delta y_t=1\big),\quad b(p_{t-})=E\big(p_t\,|\,(y_s)_{s<t},\Delta y_t=-1\big)$$

egyenletek, továbbá

$$f(p)=\big(a(p)-p\big)p\theta_{HB}(p)+(1-p)\theta_{LB}(p)+p\beta$$
$$+\big(b(p)-p\big)p\theta_{HS}(p)+(1-p)\theta_{LS}(p)+p\beta\ ,$$

azaz az ár várható megváltozása abból adódik, hogy a $t$ pillanat előtti ár az eladási árra, illetve a vételi árra változik az aktuális tranzakciónak megfelelően, végezetül pedig az adott $f,a,b,$ függvények által meghatározott árdinamika mellett a $\theta$ függvények családja adja a maximális nyereséget.

**Tétel 5.2.** *Tegyük fel, hogy adott f,a,b, függvények esetén az optimális kereskedésre vonatkozó Bellmann-függvény V, ha a tényleges ár* 1*, illetve* J*, ha a tényleges ár* 0*, eleget tesz a*

$$\lim_{p\to 0}V(p)=\lim_{p\to 1}J(p)=\infty\,,\quad \lim_{p\to 1}V(p)=\lim_{p\to 0}J(p)=0$$

feltevéseknek, továbbá $V$ nem csökkenő, $J$ nem növekvő függvény. Ekkor azon folytonosan deriválható $\theta_{HB}>\theta_{LB}$, $\theta_{HS}<\theta_{LS}$ függvények, amelyekre eleget tesznek az egyensúlyi helyzetben előírt fenti egyenleteknek, olyan optimális kereskedési stratégiát határoznak meg, amelyben (25) teljesül.

A cikk jelentősége a következőkben áll: i) a bid-ask spreadet endogén módon határozza meg; ii) bebizonyítja, hogy kis méretű megbízások (small trade size) és gyakori likviditási ajánlatok esetén a Glosten–Milgrom-modell fenti változata nagyjából azonos a Kyle-modell folytonos változatával; iii) illetve, hogy a Glosten–Milgrom-modell spreadje nagyjából a megbízás méretének kétszerese, szorozva a Kyle-féle lambdával. A szerzőpáros megmutatta továbbá, hogy előfordulhat: az informált kereskedő blöfföl.

## 6. A bid-ask spread modellek

A bid-ask spread modellek célja, hogy a spread nagyságáért felelős tényezőket azonosítsa, és azok hatását számszerűsítse. Természetesen ez olyan piacokon érdekes, ahol van bid-ask spread, tehát jellemzően árjegyzői piacokon (quote-driven market). Jó összefoglalását adják az ezzel kapcsolatos empirikus munkáknak *Bollen* és tsai [2001; 2004] cikkei. Az alábbiakban rövid bevezetés olvasható a bid-ask spread modellek elméleti alapjairól, elsősorban ezen két cikk, valamint *Csávás* és *Erhart* [2005] alapján.

### *6.1. A bid-ask spread modellek elméleti alapjai*

A Bollen és tsai [2001; 2004] cikkek nyolc empirikus munkát összehasonlító részének bid-ask spreadet specifikáló regressziós egyenlete az alábbi:

$$SPRD = a_0 + a_1 OPC + a_2 IHC + a_3 ASC + a_4 COMP + \varepsilon , \tag{27}$$

ahol *SPRD* a jegyzett bid-ask spread (quoted bid-ask spread), *OPC* a megbízás végrehajtásának tranzakciós költsége (order processing costs), *IHC* a készlettartás költsége (inventory holding costs), *ASC* a kontraszelekciós költségek (adverse selection costs) és *COMP* a verseny, a koncentráció mérőszáma (competition).

Csávás és Erhart [2005] a magyar deviza- és állampapírpiac likviditásának vizsgálatakor némileg eltérő regressziós egyenletet használt:

$$SPRD = \alpha + \beta_1 VOL + \beta_2 FORG + \beta_3 KONC + \varepsilon , \tag{28}$$

ahol $\alpha$ a konstans, *VOL* a volatilitás, *FORG* a forgalom és *KONC* a koncentráció. A konstans a kereskedés fix költségét jeleníti meg.

A *volatilitás* a nyitott pozíció vállalásából eredő költségeket reprezentálja. Az árjegyző a piaci likviditás biztosítása érdekében készletet tart fenn, amiből kielégíti az ügyféligényeket. Nyitott pozíciót vállal akkor, amikor teljesíti az ügyfél megbízását, de ellentétes irányú tranzakcióval nem állítja vissza a készlet eredeti szintjét. Ezen kockázati faktort a készlettartás (inventory holding) kockázatának is nevezik, arra utalva, hogy az árjegyzőnek készletet kell fenntartania, hogy mindkét irányú (relatív) nyitott pozíciót fel tudjon venni. Mivel a kockázat – és így a bid-ask spreadben megjelenő költsége – a volatilitás növekedésével nőni fog, ezért a spreadnek a volatilitásra vonatkozó parciális deriváltja nagyobb lesz, mint 0.

A *forgalom* a tranzakciók végrehajtási költségének a spreadre gyakorolt hatását tükrözi. Az árjegyző tevékenységének nyilvánvaló költségei (munkaerő, elszámolás, engedélyek, szaktudás, technológia) a vételi és eladási ár különbségében fognak megjelenni. A forgalom azért lehet jó magyarázó változó, mert ezek a költségek nem nőnek a forgalommal arányosan, tehát fajlagosan csökkeni fognak, ha a forgalom nő. Így azt várjuk, hogy bid-ask spread forgalomra vonatkozó parciális deriváltjának az előjele negatív lesz.

A *koncentráció* ebben a specifikációban egyrészt a versenyt jeleníti meg, másrészt a kontraszelekciós költségeket. A szerzők úgy gondolkodnak, hogy minél nagyobb a verseny az árjegyzők között, annál kisebb a koncentráció, és annál kisebb spreadet várunk. A piaci szereplők információs heterogenitása miatt a piaci szereplők egy része jobban informált, mint az árjegyző, ami számára költséget jelent, ez pedig a spreadben csapódik le. Ha a forgalom nagy része néhány árjegyzőhöz köthető, akkor az a többi számára kontraszelekcós kockázatot jelent. A szerzők érvelése alapján mindkét tényező egy irányba hat, ezért a koncentráció növekedésével a spread is nőni fog.

A fenti két regressziós egyenletet, (28)-at és (29)-et összehasonlítva, annyi különbség látszik, hogy a második két kockázati faktort összevontan kezeli.

Bollen és tsai [2004] a korábbi empirikus munkák részletezése és a (27)-es egyenlet tárgyalása után rátérnek a konkrét formális modelljükre. Ebben a (29)-es egyenletet használják fel a becslésre.

$$SPRD_i = \alpha_0 + \alpha_1 InvTV_i + \alpha_2 HC_i + \alpha_3 InvND_i + \varepsilon_i, \tag{29}$$

ahol $SPRD_i$ a jegyzett bid-ask spread (quoted bid-ask spread), $InvTV_i$ a forgalom reciproka (inverse of trading volume), $InvND_i$ az árjegyzők számának reciproka (inverse of the number of traders making a market in the security)[11] és $HC_i$ a fedezés költsége (hedging cost).

A *forgalom reciproka* a forgalomról korábban elmondottak miatt lesz jó közelítése a megbízások végrehajtási költségének (order processing costs), annyi többlettel, hogy a reciprok miatt a parciális derivált előjele épp ellentétes, azaz pozitív lesz.

Bollen és tsai [2004] úgy tekintették, hogy az *árjegyzők számának reciproka* a versenyt ragadja meg. Ekkor a derivált előjele pozitív lesz, hiszen a növekvő versenyt az árjegyzők számának növekedése kíséri, ez a reciprok csökkenéséhez vezet, miközben a spread csökkenését várjuk.

A *fedezés költsége* egyszerre jeleníti meg a készlettartási költséget (inventory holding cost) és a kontraszelekciós költséget (adverse selection costs). A szerzők nem próbálták elkülöníteni a két tényező hatását, mert abból indultak ki, hogy mindkettő abból a kockázatból ered, hogy az ár elmozdulhat, amíg az árjegyző saját készletében tartja az értékpapírt. Versenyzői piacon az ezért a kockázatért kapott kompenzáció épp az árfolyamkockázat fedezésének határköltsége lesz. Mekkora ez a költség?

Ha az árjegyző nem rendelkezik készlettel, de egy piaci szereplő vesz tőle értékpapírt, és ő elad neki, akkor azt a kockázatot futja, hogy az ár felfelé mozdul, mielőtt vissza tudja vásárolni a piacról. Ha a készlettel nem rendelkező árjegyzőnek eladnak egy részvényt, akkor azzal a kockázattal szembesül, hogy a részvény ára csökkenhet, mielőtt sikerül eladnia a részvényt. Az első esetben vételi opcióval (call), a második esetben eladási opcióval (put) tudja fedezni magát az árfolyamkockázat ellen. A szerzők európai típusú at-the-money (ATM) opciókat használtak a fedezésre, és ezek értékével közelítették a készlettartási költség és a kontraszelekciós költség összegét.

Az opciók értékét a (30)-as Black–Scholes-féle opcióárazási formulával (BS1973) lehet meghatározni.

$$\begin{aligned} c(S,T-t) &= SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \\ d_1 &= \frac{ln(S/K) + (r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \end{aligned} \tag{30}$$

11 Az információs aszimmetria költségeinek reprezentálására részvénypiacok esetén szokás még a piaci kapitalizációt vagy a részvény specialistáinak számát is választani.

ahol $c$ az európai típusú vételi opció (call) értéke, $S$ az értékpapír (osztalékot nem fizető részvény) azonnali árfolyama, $r$ a kockázatmentes loghozam, $\sigma$ az értékpapír loghozamának volatilitása, $T–t$ az opció lejáratáig hátralévő idő és $K$ az opció lehívási (kötési) árfolyama.

Mivel az opciók ATM-opciók, ezért $S$=$K$, valamint a rövid időtáv miatt a szerzők feltették, hogy a kockázatmentes loghozam nulla, ezért a (31)-es put-call paritást felhasználva azt kapjuk, hogy a put és a call opció értéke azonos.

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S, \tag{31}$$

ahol $p$ az eladási (put) opció értéke.

Alkalmazva (30)-at és a fenti egyszerűsítéseket, adódik, hogy

$$\begin{aligned} c + p &= 2\left[SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)\right] = 2\left[SN(d_1) - SN(d_2)\right] = \\ &= 2S\left[N(d_1) - N(d_2)\right] = 2S\left[N(0{,}5\sigma\sqrt{T-t}) - 1\right]. \end{aligned} \tag{32}$$

A (32)-es képletbe behelyettesítve Bollen és tsai [2004] jelöléseit, megkapjuk a fedezés költségét, (33)-at:

$$HC_i = P_i\left[2N(0{,}5 \cdot \sigma_i\sqrt{T_i}) - 1\right], \tag{33}$$

ahol $P_i$ az értékpapír ára, amelyen az árjegyző pozíciót nyit, *N()* a standard normális valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, $\sigma_i$ a hozam szórása és $T_i$ az árjegyző tartási periódusának (holding period) várható hossza. Észrevehető, hogy a $T_i$ tartási periódussal szubjektív elem jelenik meg az elemzésben, valamint a bid-ask spread regressziójában magyarázó változóként szereplő $HC_i$ fedezési költség nagyságát – a tartási perióduson kívül – végső soron az alaptermék volatilitása határozza meg.

A (29)-es abszolút spread becslése ekvivalens a (34)-es relatív spread súlyozott legkisebb négyzetek módszerével (weighted least square – WLS) történő becslésével. A kettő közti választásban az dönt, hogy a reziduumok hogy viselkednek.

$$\frac{SPRD_i}{P_i} = \alpha_0 \frac{1}{P_i} + \alpha_1 \frac{InvTV_i}{P_i} + \alpha_2 \frac{HC_i}{P_i} + \alpha_3 \frac{InvND_i}{P_i} + \nu_i. \tag{34}$$

## *6.2. A spread részei és a tranzakciós árak statisztikai tulajdonságai*

Glosten [1987] egyrészt a bid-ask spread-et meghatározó tényezőket azonosítja, másrészt a bid-ask spread-nek a tranzakciós árak statisztikai tulajdonságaira gyakorolt hatását mutatja be. A korábbi tanulmányok rámutattak, hogy i) a bid-ask spread negatív autokorrelációt okoz a tranzakciós árakban; ii) a spread létezése miatt a mért átlagos hozam túlbecsüli a valódi átlagos hozamot; iii) a spread léte hamis varianciát eredményez, azaz a tranzakciós árakból becsült variancia magasabb, mint a hozamok igazi szórásnégyzete.

A szerző cikkében azt mutatja be, hogy a spread létrejöttének két fő oka van; egyrészt az árjegyző monopolhatalma, készlettartási költségei, tranzakciós költségei stb., másrészt a piacon jelen lévő információs aszimmetria, ami kontraszelekciót eredményez. Az árjegyző, Glosten és Milgrom [1985]-höz hasonlóan, azért (is) jegyez spread-et, hogy az informált kereskedőkkel való tranzakciókon elszenvedett veszteségét a likviditási kereskedőkkel való ügyleteken visszanyerje. A spread létrejöttének másik oka valóban a készlettartási költség, a tranzakciós költségek és a profit, ezért a szerző konklúziója az, hogy bármelyik spreadet becslő modellben legalább két faktort azonosítani kell.

Az alapvetően elméleti irányultságú cikk tételeinek a bebizonyítása után Glosten és Milgrom [1985]-höz hasonlóan arra a következtetésre jut, hogy a bid-ask spread-nek a tranzakciós árakra gyakorolt hatása nem pusztán a spread nagyságától, hanem annak összetételétől függ. A tisztán aszimmetrikus információból származó spread nem okoz negatív autokorrelációt a hozamokban, és a tranzakciós árakból becsült, átlagos hozam torzítása is attól függ, hogy a spread mekkora részéért felelős a kontraszelekció, és mekkora részéért a többi tényező.

## *6.3. A bid-ask spread modellek és a likviditás*

A bid-ask spread modelleket használó, empirikus tanulmányok közül érdemes megemlíteni Glosten és Harris [1988], valamint *Stoll* [1989] cikkeit. Ezeken kívül Csávás és Erhart [2005] összefoglalja három bid-ask spreadet vizsgáló, empirikus cikk főbb eredményeit (*Galati* [2000], *Wei* [1994] és Huang–Masulis [1999]), de mivel jelen dolgozat fő témája a likviditás, és azon belül is főleg annak a magyar vonatkozása, ezért az alábbiakban az ő cikkük főbb eredményeit ismertetjük.

Csávás és Erhart [2005] kifejezetten azért becsült bid-ask modellt, hogy konkrét piacok, mégpedig a magyar állampapírpiac és az EUR/HUF devizapiac likviditását elemezni tudja. Amint az látható a korábbiakból, a bid-ask modellekben a likviditás több dimenziója is megjelenik a regressziós egyenletben, hiszen a függő változó is likviditási mutató, valamint a független változók közül a forgalom és a koncentráció is annak tekinthető. A szerzők által választott modell céljaiknak abból a szempontból is megfelel, hogy a gyakorlati tapasztalatok szerint inkább a forgalom és a koncentráció hat a spreadre, mint fordítva.

A másik szempontjuk az volt, hogy a modell képes legyen a volatilitás hatását is kezelni. Mivel a piac természetes működéséhez tartozónak vélik azt, hogy a volatilitás növekedésével a spread is nő, és ezt nem tekintik a likviditás csökkenésének, ezért a vizsgálatba nem a volatilitás szintjét vonták be, hanem a változásából generált idősort.

Az eredmények összefoglalásakor megállapítják, hogy a likviditásról csak több dimenzió (feszesség, mélység, szélesség, rugalmasság, azonnaliság) együttes vizsgálatával lehet következtetéseket levonni, sőt ezek elkülönült vizsgálata sem kielégítő, ezért összefüggéseikben tanulmányozták őket.

Az *azonnali devizapiaci bid-ask spread* és a volatilitás kapcsolatát vizsgálva, azt tapasztalták, hogy a volatilitás növekedésekor a spread gyorsan tágul, míg a volatilitás csökkenésekor a spread lassabban szűkül, amiből arra következtettek, hogy a devizapiaci árjegyzők óvatosan alakítják a spreadet. A forgalom és a koncentráció kapcsolatában megfigyelték, hogy a külföldiek jelenlétét tükröző együtthatók szignifikánsabbak lettek, amit azzal magyaráznak, hogy a külföldiek szerepe meghatározóbb lehet ezen a piacon, mint ahogy azt a forgalomból való részesedésük alapján gondolnánk. A vizsgálatok megerősítették azt a hipotézist, hogy a piac aktivitása hétfőnként magasabb, mint más napokon, amit a Monetáris Tanács hétfői kamatdöntő üléseivel, valamint a magyar és amerikai kereskedés közti időeltolódással magyaráztak. Nem találtak viszont bizonyítékot arra, hogy a devizapiac nyári aktivitása alacsonyabb lenne, mint az év többi részében. Végezetül megállapítják, hogy az elmúlt években a likviditás kis mértékben, de folyamatosan javult.

Az *államkötvénypiac* elemzése során azt tapasztalták, hogy az instrumentumok másodpiaci forgalmát – és így likviditását – a piacon lévő állomány nagysága egyértelműen befolyásolja, valamint, hogy az államkötvények likviditása a hátralévő futamidő függvényében csökkenő. Ennek ellenére a különböző futamidejű államkötvények bid-ask spreadje és forgalma erős együttmozgást mutat, ami az értékpapírok likviditása közti kapcsolatra utal. Nemzetközi összehasonlításban a magyar állampapírpiac alacsony likviditásúnak mondható.

Az azonnali devizapiac és az állampapírpiac lividitásának kapcsolatát illetően találtak arra utaló jeleket, hogy a két piac likviditása együtt mozog, különösen turbulens időszakokban.

## 7. Összefoglalás

A cikk bevezetést nyújtott a piaci mikrostruktúra elméletébe, bemutatta a szakterület legfontosabb kutatási kérdéseit, megismertetett két központi fogalommal, a bid-ask spreaddel és az order flow-val. Ezután ismertette a két alapmodell, a Kyle- és a Glosten–Milgrom-modell legfontosabb eredményeit, illetve egy tanulmányt (Back–Baruch [2004]), amely egységes keretbe foglalja a két modellt. A tanulmány végezetül a bid-ask spread modellek alapjait tárgyalta. Mindezt végig abban a szemléletben, hogy a piaci mikrostruktúra szakterülete mit tud mondani nekünk a pénzügyi piacok likviditásáról.

Nem kétséges, hogy sok információt szerezhetünk a likviditás és az áralakulás természetéről a szakterület módszereinek felhasználásával. A modellek inspirálta empirikus kutatások abban is segíthetnek bennünket, hogy a piaci likviditás mozgatórugóit feltérképézhessük, és a döntéshozók az elmúlt évek likviditási válságához hasonló helyzetekben megfelelőbb döntéseket hozhassanak.

## Irodalomjegyzék

Back, K.–Baruch, S. [2004]: Information in securities markets: Kyle meets Glosten and Milgrom. *Econometrica* 72., 433–465. o.

Black, F.–Scholes, M. [1973]: The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy* 81. (3), 637–654. o.

Bollen, N. P. B.–Smith, T.–Whaley, R. E. [2001]: Modeling the bid/ask spread: on the effects of hedging costs and competition. Otago School of Business, Új-Zéland

Bollen, N. P. B.–Smith, T.–Whaley, R. E. [2004]: Modeling the bid/ask spread: measuring the inventory-holding premium. *Journal of Financial Economics* 72., 97–141. o.

Csávás Csaba–Erhart Szilárd [2005]: Likvidek–e a magyar pénzügyi piacok? A deviza- és állampapír-piaci likviditás elméletben és gyakorlatban. *MNB-tanulmányok* 44.

Das, S. [2005]: A learning market-maker in the Glosten–Milgrom model. *Quantitative Finance* 5. (2), 169–180. o.

Evans, M. D. D.–Lyons, R. K. [2005]: Meese–Rogoff redux: Micro-based exchange rate forecasting. NBER Working Paper Series (11042)

Gereben Áron–Gyomai György–Kiss M. Norbert [2005]: A devizaárfolyamok mikrostruktúra-megközelítése: a szakirodalom áttekintése jegybanki szemmel. MNB-tanulmányok 42.

Glosten, L. R. [1987]: Components of the bid-ask spread and the statistical properties of transaction prices. *The Journal of Finance* 42. (5), 1293–1307. o.

Glosten, L. R.–Harris, L. E. [1988]: Estimating the components of the bid/ask spread. *Journal of Financial Economics* 21., 123–142. o.

Glosten, L. R.–Milgrom, P. R. [1985]: Bid, ask and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed traders. *Journal of Financial Economics* 14. (1), 71–100. o.

Kyle, A. S. [1985]: Continuous auctions and insider trading. *Econometrica* 53. (6), 1315–1336. o.

Lyons, R. K. [2001]: The Microstructure of Exchange Rates. The MIT Press, London

Madhavan, A. [2000]: Market microstructure: A survey. *Journal of Financial Markets* 3., 205–258. o.

Meese, R. A.–Rogoff, K. [1983]: Empirical exchange rate models of the seventies, do they fit out of sample? *Journal of International Economics* 14., 3–24. o.

O'Hara, M. [1995]: Market Microstructure Theory. Basil Blackwell, Cambridge, MA

Stoll, H. R. [1989]: Inferring the components of the bid-ask spread: Theory and empirical tests. *The Journal of Finance* 44. (1), 115–134. o.

Csávás Csaba–Szabó Rezső

# A forint/deviza FX-swap szpredek mozgatórugói a Lehman-csőd utáni időszakban[1]

**Cikkünkben a forint/deviza FX-swap szpredek (fedezett kamatparitástól való eltérés) mögött meghúzódó tényezőket elemezzük. Fő célunk az MNB által bevezetett FX-swap eszközök hatásának vizsgálata. Továbbá arra a kérdésre is választ keresünk, hogy a szpredeket kockázati vagy devizalikviditási tényezők befolyásolják. Az FX-swap szpredek számszerűsítéséhez egy olyan adatbázist használunk, amely tranzakciós szinten tartalmazza az FX-swapokat. A 2008. október és 2010. június közti időszakra vonatkozóan empirikusan igazoljuk, hogy mind a rövid (egynapos), mind a hosszabb futamidejű FX-swap szpredeket befolyásolták olyan változók, amelyek a globális kockázatkerülést, a partnerkockázatot, illetve a devizalikviditás korlátozottságát tükrözik. A jegybanki eszközök hatása is szignifikánsnak bizonyult; mind az egynapos, mind a hosszú jegybanki FX-swapok hozzájárultak a piaci FX-swap szpredek csökkenéséhez.**

## 1. Bevezetés

A subprime válság 2007 közepi kirobbanása után a határidős devizaárfolyamok több fejlett és feltörekvő devizában is eltértek a fedezett kamatparitás (CIP) által indokolt szinttől. Az FX-swap szpredek (más néven eltérés a CIP-tól, vagy FX-swap bázis) nullától eltérő értékei azt mutatják, hogy a swapok határidős lábának az árfolyama nem egyezik meg a belföldi és külföldi bankközi hozamokból számolt, határidős árfolyammal.

A forint/deviza FX-swap piacokon is hasonló jelenség volt megfigyelhető. A Lehman-csődöt követően a swapszpredek megemelkedtek, vagyis a swapokból számolt (implikált) forintkamatok alacsonyabbá váltak, mint a bankközi forintkamatok. Ennek következtében a bankok felárat voltak kénytelenek fizetni az FX-swapokon keresztül bevont devizalikviditásért az euró vagy a dollár bankközi piac kamataihoz viszonyítva.

Az FX-swap szpredek alakulása a piaci szereplők mellett a jegybankok számára is fontos, különösen egy nyitott, feltörekvő gazdaságban. Amikor a swapok implikált hozama csökken a rövid pénzpiaci hozamokhoz képest, az a kamattranszmissziós csatorna hatásmechanizmusát is rontja, a jegybanki kamat kevésbé képes hatni a piaci hozamokra. Az FX-swap piac megfelelő működése pénzügyi stabilitási szempontból is kulcsfontosságú.

1 A szerzők a Magyar Nemzeti Bank munkatársai. A cikk a szerzőpáros azonos című tanulmánya alapján készült, amelynek itt egy rövidített változatát közöljük (*Csávás–Szabó* [2011]). Ezúton köszönjük meg *Balogh Csabának* és *Kocsis Zalánnak* a tanulmány korábbi verzióihoz nyújtott, hasznos észrevételeit. Az esetlegesen fennmaradó hibák, tévedések a sajátjaink.
Ez a tanulmány a szerzők nézeteit tartalmazza, és nem feltétlenül tükrözi a Magyar Nemzeti Bank hivatalos álláspontját.

Tanulmányunk egyik célja az FX-swap szpredet befolyásoló, főbb tényezők azonosítása. Az FX-swap szpredek megugrása ugyan kezdetben egyértelműen a Lehman-csőd keltette nemzetközi piaci turbulenciához köthető, fontos megérteni, hogy az ezt követő időszakban milyen tényezők mozgatták a szpredeket. Ennél is fontosabb célunk annak a vizsgálata, hogy az MNB által bevezetett FX-swap eszközök hatása kimutatható-e a szpredek alakulásában.

Az FX-swap szpredek empirikus irodalmára alapozva, három változótípust különböztetünk meg, amelyek magyarázhatják a CIP megsértését: kockázati és likviditási faktorokat, valamint a jegybanki FX-swap eszközökhöz kötődő változókat. Egyrészt arra számítunk, hogy megemelkedett a CIP-tól való eltérést kihasználó arbitrázsstratégia (vagyis egy FX-swapból, egyik devizában történő hitelfelvételből és a másik devizában történő hitelnyújtásból álló pozíció) tényleges végrehajtásának a piaci szereplők által érzékelt kockázata. Másrészt a devizalikviditás korlátozott elérhetősége is fontos szerepet játszhatott a szpredek megemelkedésében, mivel a hazai bankok devizalikviditás szempontjából jelentős mértékben támaszkodnak a külföldi bankokkal kötött swapokra. Ami a harmadik változócsoportot illeti, a kérdés az, hogy a jegybanki intézkedések szignifikánsan hozzájárultak-e a szpredek csökkenéséhez.

Főbb eredményeink a következők. A 2008 októbere és 2010 júniusa közötti időszakban az egynapos és hosszú futamidejű FX-swap szpredeket is szignifikánsan magyarázza a globális kockázatkerülés, Magyarország kockázati megítélése, valamint a devizalikviditásra ható keresleti/kínálati tényezők. Az MNB egynapos és hosszú FX-swap eszközeinek igénybevételét tükröző változók is szignifikánsak. Amikor az MNB csökkentette az overnight FX-swap eszközének implikált felárát az eurózóna bankközi piaci kamathoz képest, a piaci ügyletekből számolt swapszpred is csökkent. A 3 és 6 hónapos FX-swap aukciók napján szintén szignifikánsan csökkentek a szpredek.

## 2. Adatok, FX-swap szpred számítása

Az FX-swap ügylet két egymással ellentétes irányú, egy azonnali és egy határidős devizapiaci ügyletből áll. A magyarországi bankok naponta jelentik összes FX-swap tranzakciójukat az MNB-nek (D01, *Operatív napi jelentés a hitelintézetek devizahelyzetének változásáról*). Az adatbázis tartalmazza a tranzakciók legfontosabb jellemzőit (köztük az azonnali, a határidős árfolyamot, névértéket, devizanemet).

Minden egyes tranzakcióhoz kiszámolható az FX-swap szpred az alábbi képletek alapján.

$$szpred_{i,t,T}^{EUR/HUF} = r_{i,t,T}^{HUF} - \left( \frac{F_{i,t,T}^{EUR/HUF}}{S_{i,t,T}^{EUR/HUF}} \left(1 + r_{i,t,T}^{EUR}\right) - 1 \right) \quad (1)$$

$$szpred_{j,t,T}^{USD/HUF} = r_{j,t,T}^{HUF} - \left( \frac{F_{j,t,T}^{USD/HUF}}{S_{j,t,T}^{USD/HUF}} \left(1 + r_{j,t,T}^{USD}\right) - 1 \right) \quad (2)$$

*F* az adott devizapár határidős árfolyama, *S* pedig az azonnali devizaárfolyam; $r^X$ az *X* devizabeli bankközi hozamot jelöli. Az *F/S*–1 jelölés FX-swap implikált kamatkülönbözetként is ismert. Ez utóbbi és a külföldi bankközi kamat ismeretében kiszámolható az implikált forinthozam. Így az FX-swap szpred a bankközi- és az implikált forinthozamok különbségeként adódik. Minden kamatlábat (beleértve az implikált kamatkülönbözetet is) **évesítve** szerepeltetünk.

A számításhoz a következő bankközi kamatokat használjuk. Az egynapos FX-swap[2] ügyletek esetében a HUFONIA-t, mely az MNB által számolt overnight hozam (a hazai bankok depóügyleteinek súlyozott átlaghozama). Az euró esetében az EONIA-t, amelyet az eurózóna bankközi overnight betéti kamatok alapján számít az Európai Központi Bank. Az amerikai dollár esetében a szintén piaci tranzakcióból számított, ún. „federal funds rate"-et alkalmazzuk.

A hosszabb lejáratú swapok esetében rendre a BUBOR, EURIBOR és USD LIBOR kamatokat használjuk. Tekintettel arra, hogy ezen kamatok csak kitüntetett lejáratokra érhetőek el, az egyes FX-swap tranzakciók esetében mindig a legközelebbi lejárathoz tartozó kamattal számoltunk.

Ezután az FX-swap szpredek súlyozott átlagát az alábbi módon kapjuk meg:

$$rövid\_szpred\__t = \sum_{i,T=1} w_{i,t,T} \cdot szpred_{i,t,T}^{EUR/HUF} + \sum_{j,T=1} w_{j,t,T} \cdot szpred_{j,t,T}^{USD/HUF} \tag{3}$$

$$hosszú\_szpred\__t = \sum_{i,T>1} v_{i,t,T} \cdot szpred_{i,t,T}^{EUR/HUF} + \sum_{j,T>1} v_{j,t,T} \cdot szpred_{j,t,T}^{USD/HUF} \tag{4}$$

*W* és *v* jelöli a tranzakciók névértéke alapján számolt súlyokat, a súlyok összege pedig naponként 1. A forint/dollár és forint/euró ügyletek átlagolásával figyelembe tudjuk venni az FX-swap piac szerkezetének változását. Egyes időszakokban a dollár-, máskor az euróügyletek súlya volt a meghatározó, így az átlagolással kapott szpredek a piac egészét jobban reprezentálják. Azért használjuk csupán ezt a két devizapárt, mert ezzel a teljes forgalom 95 százalékát lefedjük.

Vegyük észre, hogy az FX-swapok és a bankközi kamatok napon belül más időpontra vonatkoznak (aszinkronitás). Ugyanis az FX-swapok és az 1 napos bankközi hozamok a napi tranzakciók átlagaként állnak elő, míg a hosszabb bankközi hozamok jegyzése egy adott időponthoz köthető. Mivel az adatbázisunkban nincs információ arról, hogy az FX-swap ügyleteket az adott napon belül pontosan mikor kötötték, számításunk csupán a swapszpred becslésének tekinthető. Ez a megfigyelési hiba mindazonáltal nem okoz szisztematikus torzítást a becslésünkben.

Mivel az FX-swap egy hitelkockázat szempontjából részben fedezett eszköznek tekinthető, célszerű lenne repóhozamok használata, amelyek a fedezett hitelügyletek hozamát tükrözik. A forint repópiac viszont fejletlen, az 1 napon túli lejáratokon nem kereskednek, a hosszabb futamidőkre hozamadatok nem elérhetők. Az overnight szegmensben pedig elhanyagolható volt a repó- és a depókamatok közötti különbség, 10 és 40 bázispont között ingadozott az időszak során.

Az 1 napos FX-swap ügyleteket elkülönítve kezeltük, ennek az az oka, hogy ez a szegmens adja a napi forgalom mintegy 80 százalékát. Az összes hosszabb futamidejű szpredet

2 Az egynapos lejárat alatt kétféle ügyletet értünk: az overnight (O/N) és a tom next (T/N) swapokat. O/N FX-swapok esetében az azonnali láb T napon kerül elszámolásra, és T+1-en cserélik vissza a két devizát. A T/N swapok esetében az azonnali lábhoz tartozó devizacsere T+1-en történik, a visszacserélés pedig T+2-n.

azért aggregáltuk, mert a hosszabb lejáratú tranzakcióknál a kereskedés meghatározott lejáratok körül koncentrálódik, de egyetlen kiválasztott lejárat esetében a napi tranzakciószám alacsony. Az ilyen hosszabb swapok többsége 1 hónapnál rövidebb lejáratú, vagyis a hosszabb swapok esetében ezek az ügyletek nagyobb súlyt kapnak. Az adott napi ügyletek átlagolásának köszönhetően csökken az olyan hosszabb futamidejű kamatok használatából fakadó probléma jelentősége, amelyeken nem kereskednek. Az 1 napnál hosszabb futamidejű swapok átlagos lejárata 38 nap.

## 3. Stilizált tények a hazai FX-swap piacról

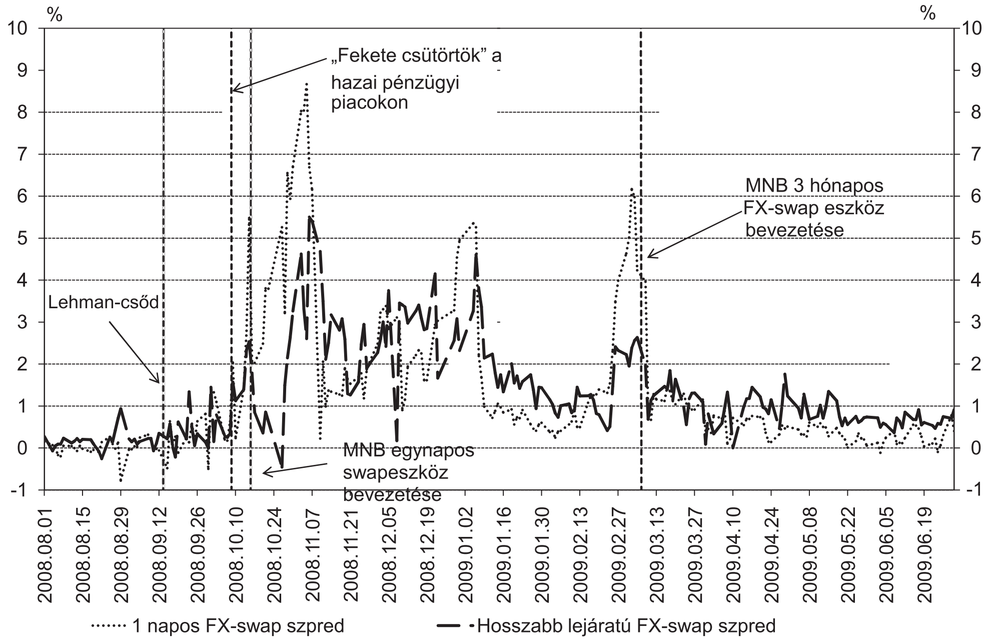
A Lehman-csőd előtt (2008. szeptember 15.) a forint/deviza FX-swap piac meglehetősen jól működő szegmense volt a hazai pénzügyi piacoknak. A hazai swappiac 2007-ben ráadásul a 10 legnagyobb feltörekvő piac közé tartozott (BIS [2007]). A hazai piac struktúrája is hasonló a fejlett piacokéhoz. A tranzakciók többsége külföldi és belföldi bankok közötti zajlik, a legfontosabb árjegyzők a hazai bankok közül kerülnek ki.

A hazai bankok az FX-swap ügyleteket devizalikviditási igényük kielégítésére használják. A bankok által nyújtott belföldi devizahitelek egy részét forintforrásból finanszírozták, a mérleg szerinti nyitott pozíciójukat pedig FX-swapokkal zárták. A hazai bankszektor így jelentős FX-swap pozíciót görget, ahol az azonnali lábon devizához jut. Ez a swapállomány meglehetősen magas, a Lehman-csődöt megelőző egy évben 7 és 13 milliárd euró között ingadozott (névértéken kifejezve). A külföldi bankok motivációját tekintve elmondható, hogy forintlikviditásra többek között a forinteszközeik finanszírozásához van szükségük.

A Lehman-krízis előtti időszakban az FX-swap szpredek 0 közeli szinten voltak. Közvetlenül a Lehman-csőd után a forint/dollár FX-swapokból számolt szpred emelkedni kezdett. Ezzel egy időben átmenetileg a forint/deviza FX-swap piac struktúrája is megváltozott: a dollárügyletek túlsúlyát az euróügyletek vették át. Mivel a forint/euró swapügyletek alapján számolt szpred a korábbi sávban maradt, az aggregált FX-swap szpred továbbra is nulla közelében mozgott (a forint/deviza FX-swap piac forgalmának szerkezetéről lásd bővebben *Páles* et al. [2010]).

*1. ábra*

**Forint/deviza FX-swap szpredek alakulása a válság során**




*Megjegyzés:* FX-swap szpredek napi átlaga. A számítás módja a (3)-as és (4)-es képletekben megadottnak felel meg.
*Forrás:* MNB, EKB, FED, European Banking Federation, British Bankers' Association

2008. október 9-én jelentős sokk érte a hazai pénzügyi piacokat (az 1. ábrán erre a napra „fekete csütörtökként” utalunk). A forint árfolyama számottevően leértékelődött, az állampapírpiac befagyott, a BUX index zuhant. Amellett, hogy a nemzetközi kockázati étvágy is csökkent, a magyar bankcsődökről szóló piaci pletykák is hozzájárultak az eszközárak drasztikus eséséhez. Ekkortól kezdve merültek fel anekdotikus információk a bankközi partnerlimitek szűküléséről, ami az FX-swap piacot is kedvezőtlenül érintette.

Az ezt követő hetekben az FX-swap szpredek korábban nem látott szintre ugrottak a forint/euró és forint/dollár ügyletek esetében egyaránt. Az egynapos swapszpredek 8-9 százalék közötti szinten tetőztek novemberben. Az egynapos és a hosszabb lejáratú swapok esetében a későbbiekben több alkalommal is megugrottak a szpredek (2008. december, 2009. március). Ugyanakkor a piaci forgalom csak mérsékelten esett vissza ezen időszak során, így igazán csak a szpredek alakulásában volt tetten érhető, hogy megváltozott a piac működése.

A szpredek csupán 2009 tavaszán kezdtek stabilizálódni, a nemzetközi pénzügyi piacok konszolidációjával párhuzamosan. 2009 nyarától fogva a swapszpredek ismét 0 közeli szinten ingadoznak, azonban a volatilitásuk továbbra is magasabb a Lehman-csőd előtti időszakhoz képest. Ez arra utal, hogy a piac eredeti működése nem állt helyre.

Az MNB több FX-swap eszközt is bevezetett annak érdekében, hogy enyhítse a swappiacra nehezedő feszültségeket. Ezen eszközök egyike az overnight EUR/HUF swap rendelkezésre állás, amelyet 2008 októbere óta vehetnek igénybe a bankok *(1. táblázat)*. 2009 márciusában az MNB 3 és 6 hónapos FX-swap eszközt is bevezetett.[3] Az előbbi tender aukcióján bármely hazai bank részt vehet, míg a 6 hónapos eszközt csak a bankok egy szűkebb köre vehette igénybe, bizonyos kritériumok teljesítése esetén. A hosszú swapeszközök alkalmazásának a célja az volt, hogy a devizalikviditás szűküléséből eredő, a hitelkínálatra és a gazdaság teljesítményére gyakorolt, esetleges negatív hatásokat a jegybank tompítsa.

*1. táblázat*

**Az MNB által bevezetett FX-swap eszközök főbb jellemzői**

<table>
<tr><th></th><th>O/N EUR/HUF FX-swap rendelkezésre állás</th><th>3 hónapos EUR/HUF FX-swap tender</th><th>6 hónapos EUR/HUF FX-swap rendelkezésre állás</th></tr>
<tr><td>Az eszköz bevezetésének/ kivezetésének időpontja</td><td>2008. október 16.</td><td>2009. március 9.</td><td>2009. március 2./ 2010. június 28.</td></tr>
<tr><td>Ajánlatok beadásának napja</td><td>Minden kereskedési napon</td><td>A hét első kereskedési napján</td><td>A hét első kereskedési napján</td></tr>
<tr><td>Ajánlatok beadásának időpontja</td><td>13:45–14:00</td><td>10:30–11:00</td><td>10:00–10:30</td></tr>
<tr><td>Ügyfélkör</td><td>Magyarországi hitelintézetek</td><td>Magyarországi hitelintézetek</td><td>Magyarországi hitelintézetek, amelyek vállalták a részvétel mérlegtételekhez kötött feltételeit</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Maximálisan igénybe vehető összeg</td><td rowspan="2">Korlátlan rendelkezésre állás</td><td>Tenderenként meghatározott felső korlát</td><td>A partnerek egyedi swapkeretei</td></tr>
<tr><td colspan="2">Együttesen legfeljebb 5 milliárd euró teljes kint levő állomány</td></tr>
</table>

## 4. Az empirikus irodalom áttekintése

Az alábbiakban összefoglaljuk annak a néhány tanulmánynak az eredményeit, amelyek empirikusan vizsgálják az FX-swap szpredek subprime válság utáni megugrásának a mozgatórugóit. A leggyakrabban alkalmazott változók, valamint különböző interpretálásuk áttekintése támpontul szolgál az általunk készített elemzés során alkalmazott, magyarázó változók kiválasztásához.

3 Az MNB 2008 októberében kétoldali EUR/HUF overnight FX-swap gyorstendert vezetett be a partnerlimit-problémák enyhítésére, 2009 februárjában pedig egyhetes EUR/CHF FX-swap tendert. Ezen eszközök hatásait nem vizsgáljuk ebben a tanulmányban (az eszközökről részletesebben lásd MNB [2009]).

A **credit default swap (CDS**) jegyzéseket általánosan arra használják, hogy a megnövekedett partnerkockázatnak az FX-swap ügyletekre gyakorolt hatását mérhetővé tegyék. Több tanulmány is arra az eredményre jut, hogy az európai és amerikai bankokra vonatkozó CDS-jegyzések az FX-swap szpredek fő mozgatórugói közé tartoznak (l. *Baba–Packer* [2009a; 2009b], *Coffey* et al. [2009]); a CDS-jegyzések emelkedése jellemzően szignifikáns pozitív kapcsolatban van az FX-swap szpreddel.

Szintén általános a **LIBOR-OIS** szpred alkalmazása. A LIBOR fedezetlen bankközi kamatokat mutat, az OIS (Overnight Indexed Swap) pedig napi indexálású kamatswap. A szpred egyrészt tükrözi a piac által a bankszektor inszolvenssé válásának tulajdonított kockázatot: ha megnő a szpred, akkor fedezetlen bankközi hitelt csak jóval drágábban hajlandók nyújtani a piaci szereplők, mint az ehhez képest csekély partnerkockázatot hordozó OIS-ügylet kamata. Másrészt a finanszírozási likviditás problémáit is tükrözi, ugyanis a kamatswap megkötése nem igényel likviditást, eltérően a bankközi hitelnyújtástól.

Az eredmények alapján a hazai devizában mért LIBOR-OIS szpred növekedése szignifikánsan emeli az FX-swap szpredet, mivel a bankközi piac feszültségei miatt a bankok a kisebb partnerkockázatot hordozó FX-swap piacon próbálnak devizalikviditáshoz jutni (dollárkereslet növekedése a swappiacon). A dollár LIBOR-OIS szpred esetében éppen fordított a helyzet, növekedése csökkentette az FX-swap szpredet. Az amerikai bankközi piacon növekvő feszültség eredményezte kockázatkerülés szintén az FX-swap piac felé terelte a piaci szereplőket, ami viszont a dollárkínálat növekedéséhez vezetett (lásd Baba–Packer [2009a, 2009b], *Genberg* et al. [2009], *Mancini–Ranaldo* [2010]). Ezen érvelés alapján – amennyiben a LIBOR-OIS szpredet és a CDS-t egyszerre használjuk magyarázó változóként – a LIBOR-OIS a piaci és finanszírozási likviditási kockázat proxi változójaként használható, így az eredmények értékelésekor valamelyest elválaszthatók a hitel- és a likviditási kockázatot tükröző faktorok.

A **TED-szpredet** szintén több empirikus elemzés során alkalmazzák a partner- és likviditási kockázat hatásának leírására (ld. Coffey et al. [2009], Genberg et al. [2009], Mancini–Ranaldo [2010]). Az FX-swap szpredre való hatásának vizsgálatakor azonban elsősorban a finanszírozási likviditási kockázatok proxiváltozójaként interpretálják szerepét, és többnyire pozitív kapcsolatban van a swap szpreddel. Ugyancsak jól megragadja a flight-to-quality jelenséget, amikor a likvid tőke az amerikai állampapírokba menekült.

A piaci likviditási kockázat mérésére Mancini–Ranaldo [2010] **bid-ask szpredeket** használ (azonnali, határidős devizapiac és OIS-ek esetében). A tranzakciós költségek jelenléte az egyik ok, amely miatt a CIP-től való eltérés kihasználása (arbitrázs) nem lehetséges, vagyis szintén pozitív hatással van az FX-swap szpredre.

Az FX-swap szpredeket különböző devizapárokban vizsgálva, az is egyértelmű, hogy nemcsak a szpredek szintje, hanem – a nemzetközi pénz és tőkepiacokon tapasztaltnak megfelelően – volatilitása is messze a korábban látott szintek fölé emelkedett. Úgy tűnik, hogy a helyi deviza gyengülése az FX-swap szpred emelkedésével járt együtt (lásd Genberg et al. [2009]). Egy már megkötött FX-swap ügyletet az azonnali devizaárfolyam alakulása és volatilitása is érinti a megújítási és partnerkockázati faktorokon keresztül. Mancini–Ranaldo [2010] devizaopciók **implikált volatilitását** szerepelteti ezen hatások követésére. A tőkepiac volatilitásának és a befektetők kockázatkerülésének hatásait pedig számos tanulmányban a **VIX** alkalmazásával figyelik meg. Az empirikus tesztek alapján mind a két típusú volatilitás növekedése az FX-swap szpredek emelkedésével jár.

### *4.1. A jegybanki eszközök hatása*

Az egyik fontos témája az idézett empirikus kutatásoknak, hogy meghatározzák, a pénzpiaci likviditás helyreállítását célzó jegybanki beavatkozások mennyiben tudták az FX-swap piaci feszültségeket is enyhíteni, vagyis sikerrel szűkítették-e a rendkívül magas swapszpredeket. A jegybanki beavatkozásokat jellemzően dummyváltozókkal modellezik az irodalomban. Az egyik típusú változócsoport 1-es értéket vesz fel valamely – várhatóan jelentős hatással bíró – intézkedés bejelentésének napjától kezdve (commitment, magyarul elkötelezettség). Ilyen például a Fed és több európai jegybank közötti swap line megállapodás bejelentése, melynek várt hatása, hogy enyhíti a dollárlikviditás szűkösségét, és így a swapszpredeket is csökkenti. Egy másik kategóriát képez a direkt beavatkozások napján 1-et felvevő dummyváltozók csoportja, például a helyi jegybankok dollárlikviditás-aukcióinak napja.

Az empirikus elemzések alapján elmondható, hogy általánosságban a jegybanki beavatkozások hozzájárultak az FX-swap szpredek csökkenéséhez, ugyanakkor a változók szignifikanciaszintje érzékeny a vizsgált periódus megválasztására (Baba–Packer [2009a, 2009b], Coffey et al. [2009], *Stone* et al. [2009]). Ennek a jelenségnek az egyik kézenfekvő magyarázata, hogy a jegybanki beavatkozások ritkán történtek, válaszul valamilyen piaci anomáliára, így szimultaneitási problémák is felléphetnek a magyarázó és magyarázott változók között. Egyes esetekben a beavatkozások és bejelentések napon belül reagáltak a hirtelen megugró szpredekre. Vagyis ez esetben úgy is tűnhet, hogy a jegybanki beavatkozás dummyváltozója növelte a szpredet (szignifikáns változó, de rossz előjellel), vagy nem volt rá semmilyen hatása (nem szignifikáns változó). Ezt támasztja alá az a megfigyelés, hogy a jegybanki változók erősebb hatást mutatnak a Lehman-csőd előtti időszakot vizsgálva.

Ami a Lehman-csőd utáni időszakot illeti, a rendkívüli volatilitás és az addig nem tapasztalt szintű FX-swap szpredek miatt nehezebb a jegybanki beavatkozás hatásait számszerűsíteni. Azon elemzések esetében, melyek EGARCH-modellt használtak, a szpred volatilitására ható tényezők vizsgálata is lehetséges. Ezen tanulmányokban megmutatták, hogy a jegybanki intézkedések szignifikánsan csökkentették a swapszpred volatilitását mind a Lehman előtti, mind a Lehman utáni időszakban. Vagyis az empirikus irodalom eredményeinek összefoglalásaként elmondható, hogy a jegybankok is szerepet játszottak az FX-swap piac stabilizálásában (lásd Baba–Packer [2009a, 2009b], Coffey et al. [2009], Stone et al. [2009]).

## 5. A forint/deviza FX-swap szpredek magyarázó tényezői

Ebben a fejezetben először felvázoljuk a hipotéziseket, amelyeket a későbbiek során tesztelni kívánunk. Ezt követően bemutatjuk a magyarázó változókat, és megindokoljuk azok választását. Az empirikus eredmények leírása után a fejezet robusztusságvizsgálattal zárul.

### *5.1. Hipotézisek*

Az előző fejezetben ismertetett eredményekre támaszkodva, háromféle magyarázó változót különböztetünk meg. Egyrészről az arbitrázsstratégia gyakorlati megvalósításához kapcsolódó partnerkockázatok okozhatják az FX-swap szpredeknek a fedezett kamatparitástól mutatott eltéréseit. E kockázatok jelenléte kevésbé ösztönzi a piaci szereplőket a nullától eltérő FX-swap szpredekben rejlő profitlehetőség kihasználására. Másrészt a devizalikviditás korlátozott elérhetősége is meggátolhatja arbitrázsstratégiák kialakítását. (*Shleifer–Vishny* [1997] klasszikus írása is e két tényező szerepét hangsúlyozza.) Harmadsorban az MNB által bevezetett FX-swap eszközöktől azt várjuk, hogy azok hozzájárultak az FX-swap szpredek csökkenéséhez.

A kockázati tényezőkön belül szóba jöhet az FX-swapok partnerkockázata. A swapok árazásával foglalkozó elméleti irodalom ugyanakkor arra a következtetésre jutott, hogy a swapok partnerkockázata általában lényegesen alacsonyabb, mint egy azonos névértékű, fedezetlen hitelé (lásd például *Duffie–Huang* [1996] modelljét). Továbbá, a piaci szereplők jellemzően egyéb eszközöket használnak a partnerkockázat kezelésére – azok beárazása helyett –, például hitelkockázati partnerlimitek felállítását vagy az ügyletek „marginolását" (fedezetbekérés).

A fentiekre építve, azt feltételezzük, hogy a partnerkockázatok közül az arbitrázsstratégiában jelen levő forinteszköz nemfizetési kockázata az, ami esetünkben inkább releváns lehet. Egy fedezetlen bankközi kihelyezés vagy egy rövid állampapír vásárlása is nemfizetési kockázatot hordoz, különösen egy külföldi szereplő szemszögéből.[4]

A kockázati faktorokon túlmenően egy másik magyarázatot jelentenek a likviditási korlátok (lásd például a *Gârleanu–Pedersen* [2007] arbitrázsmodelljét). A pozitív FX-swap szpredekhez kapcsolódó arbitrázsstratégia kiépítéséhez devizalikviditásra van szükség. Ha a devizalikviditás elérhetősége nehezebbé válik, a szereplők kevésbé hajlandók olyan FX-swapot kötni, ahol a partnereiknek devizát adnak a spotlábon. Elemzésünkhöz olyan változókat keresünk, amelyek azt tükrözik, hogy a bankok kevésbé hajlandók egymásnak devizalikviditást nyújtani, illetve valamilyen oknál fogva több devizalikviditást igényelnek (devizalikviditás kereslete/kínálata).

## *5.2. Magyarázó változók*

A kockázati tényezőket tükröző, egyik változónk az **euró TED-szpred**, azaz a 3 hónapos EURIBOR és az AAA minősítésű eurózóna-állampapírok közti különbözet. Mivel az arbitrázsstratégia gyakorlati megvalósítása kockázatot hordoz, a globális kockázatvállalási hajlandóság romlása minden kockázatos eszköz árát megemelheti, így az FX-swap szpredeket is. A választást az is motiválta, hogy több szerző (pl. Coffey et al. [2009]) is alkalmaz TED-szpredet.

A partnerkockázat proxijaként az irodalomban jellemzően banki CDS-t használnak (pl. Baba–Packer [2009a, 2009b]). A hazai bankszektorra azonban CDS-jegyzések nem elérhetőek, így a **magyar állam CDS**-ét használjuk. Mivel az állam és a bankszektor kockázata valószínűsíthetően együtt mozog, a CDS közelítheti egy hazai forint bankbetét nemfizetési kockázatát.

A globális devizalikviditás szűkösségét tükröző, egyik változónk az **EKB-nál elhelyezett O/N betétállomány**. 2008 őszétől kezdve az eurózóna bankjai, ahelyett, hogy egymással kereskedtek volna bankközi piacon, inkább az EKB-nál tartottak pufferként a korábban jóval nagyobb összegeket. Azon időszakokban, amikor az eurózónabeli bankok kevésbé haj-

4 A partnerkockázat mellett természetesen más típusú kockázatok is relevánsak lehetnek. A finanszírozási likviditási kockázat hasonló fogalmat takar, mint a későbbiekben vizsgálandó likviditási tényezők. Az FX-swapok piaci likviditási kockázatát pedig amiatt nem vesszük figyelembe, mert adatbázisunkból bid-ask különbözet nem származtatható.

landók egymásnak hitelezni, azt várjuk, hogy FX-swapok formájában is vonakodnak devizalikviditást nyújtani a hazai bankoknak. A változó értékeit csak 2009. júniusig használjuk, mivel azt követően már más tényezők alakították az EKB O/N betétet (az főként az 1 éves korlátlan refinanszírozási eszköz hatását tükrözte). Emellett Mancini–Ranaldo [2010] is egy hasonló változót illeszt a szpredet magyarázó regresszióba: az amerikai jegybanknál (Fed) elhelyezett, kötelező tartalékon felüli betétek állományát.

Az FX-swapok kockázatkezelési gyakorlatából eredő devizalikviditási hatások proxijaként a **napi forint/euró árfolyamváltozás**t használjuk. A marginolás gyakorlatából eredően, amikor a forint leértékelődik, a hazai bankoknak devizát kell elhelyezniük külföldi partnereik marginszámláján. Pótlólagos devizalikviditáshoz a bankok sokszor csak újabb FX-swapok kötésével juthatnak hozzá, így a devizalikviditás iránti növekvő kereslet miatt emelkedhetnek az FX-swap szpredek.[5]

A devizalikviditási tényezők közelítéséhez egy további változónk a **külföldiek forint államkötvény-állományának** napi változása. Mivel a külföldi befektetők a kötvények egy részét FX-swapokkal finanszírozzák, a papírok eladása és a swapok lezárása esetén a hazai bankszektornak devizalikviditási igénye támad.

Egy másik mennyiségi típusú változónk a **külföldiekkel szembeni nettó FX-swap állomány kifutása** (lejárata). E változó akkor pozitív, ha egy adott napon a hazai bankoknak a lejáró FX-swapok miatt több devizát kell törleszteniük a külföldiek felé, mint amennyit tőlük visszakapnak (és negatív, ha kevesebbet). Ha a lejáró pozíciókat a hazai bankok legalább részben meg akarják újítani, de a külföldiek erre csak magasabb áron hajlandók, az növelheti az FX-swap szpredeket.

Az irodalomban általában dummyváltozókat használnak, amikor a jegybanki FX-swap eszközöket a magyarázó változók között szerepeltetik. Mivel az MNB az egynapos FX-swapot rendelkezésre állás keretében nyújtja minden nap, dummy helyett a következő változót használjuk: az MNB O/N FX-swap eszköz implikált eurókamatának felára az EONIA felett.[6] Az így definiált változó (**MNB-szpred**) a piaci FX-swap szpredek egyfajta plafonjaként is értelmezhető. Az MNB fokozatosan szűkítette ezt a szpredet az eszköz bevezetése óta, ami várakozásaink szerint hozzájárult a piaci szpredek szűküléséhez is.

A hosszú, 3 és 6 hónapos jegybanki FX-swap eszközök alkalmazását más módon számszerűsítettük. Mivel az eszközöket hetente csak egyszer hirdetik meg, a szpred típusú változók használata jelentősen csökkentené a mintaméretet. Ezért a hosszú swapeszközök hatását egy olyan dummyváltozóval próbáljuk megragadni, ami 1 értéket vesz fel minden nap, amikor ezeket az eszközöket a hazai bankok igénybe vehették (**swap dummy**).

## *5.3. Empirikus vizsgálatok eredményei*

A továbbiakban a fent bemutatott változóknak az egynapos és a hosszú FX-swap szpredekre gyakorolt hatását vizsgáljuk. A két regresszióba ugyanazokat a magyarázó változókat illesztjük be, egy kivétellel. Az egynapos MNB-eszköz hatását csak az egynapos FX-swap

5 L Páles et al. [2010], Genberg et al. [2009].

6 Az MNB-szpredet ugyanúgy számítottuk, mint a piaci szpredeket, az MNB eszközének spot és forward árfolyamait, valamint a megfelelő futamidejű bankközi kamatokat használva.

szpredekre vonatkozóan vizsgáljuk, a hosszú eszközökhöz kapcsolt változót pedig csak a második regresszióban szerepeltetjük, mivel azt várjuk, hogy a jegybanki eszközök a legközelebbi futamidőkre gyakorolják a legközvetlenebb hatást.

*2. táblázat*

**FX-swap szpred regressziók eredményei**

| **Függő változók** | **LOG (RÖVID_SZPRED)** | **LOG (HOSSZÚ_SZPRED)** |
|---|---|---|
| LOG (EURÓ_TED_SZPRED) | 0.1410** | 0.1567*** |
| LOG (MAGYAR_CDS) | 0.3172*** | –0.0505 |
| EKB_BETÉT | 0.0013*** | 0.0015*** |
| ÁRF_VÁLTOZÁS | 0.0668*** | – |
| ÁRF_VÁLTOZÁS (–1) | – | 0.0220** |
| KÜLF_KÖTVÉNY_VÁLT | –0.0032*** | – |
| KÜLF_KÖTVÉNY_VÁLT (–1) | – | –0.0007* |
| SWAP_LEJÁRAT | –0.0007*** | –0.0003** |
| SWAP_LEJÁRAT (–1) | –0.0006** | –0.0002* |
| LOG (MNB_SZPRED) | 0.4226*** | – |
| DUM_SWAP | – | –0.0445** |
| DUM_SWAP (–1) | – | –0.0448** |
| C | –3.1432*** | –0.4945** |
| R-négyzet | 0.6955 | 0.6408 |
| Korrigált R-négyzet | 0.6881 | 0.6325 |
| Mintaelemszám | 340 | 408 |

*Megjegyzés:* A paramétereket OLS-sel becsültük, a sztenderd hibák számításához a Newey-West HAC módszert használtuk. Mintaidőszak: 2008. október 16.–2010. június 11.
*Szignifikanciaszintek jelölése:* *** (1%), ** (5%), * (10%).
*Rövidítések:*
RÖVID_SZPRED: egynapos EUR/HUF és USD/HUF FX-swapszpredek súlyozott átlaga, bázispont;
HOSSZÚ_SZPRED: egynaposnál hosszabb EUR/HUF és USD/HUF FX-swapszpredek súlyozott átlaga, bázispont;
KÜLF_KÖTVÉNY_VÁLT: külföldiek forint államkötvény vásárlása, milliárd forint;
MAGYAR_CDS: 5 éves, magyar államra kiírt CDS jegyzés, bázispont;
ÁRF_VÁLTOZÁS: forint/euró árfolyam napi változása, százalék;
SWAP_LEJÁRAT: hazai bankok külföldiekkel szembeni nettó devizalikviditást szerző swapállományának kifutása, milliárd forint;
EKB_BETÉT: az EKB O/N betéti rendelkezésre állásának összege 2009. 06. 22-ig, milliárd euró;
EURÓ_TED_SZPRED: 3 hónapos euró TED-szpred, bázispont;
MNB_SZPRED: az MNB O/N FX-swap eszközének implikált eurókamata mínusz az EONIA, bázispont;
DUM_SWAP: dummyváltozó, ahol 1-es értékek jelöli a 3 és 6 hónapos MNB-swapaukciók napjait.

A vizsgált minta a 2008. október 16. és 2010. június 11. közti időszakot fedi le. A mintaidőszak első napja megegyezik az MNB egynapos eszközének elindításával.

A két regressziót egymástól függetlenül becsüljük meg a legkisebb négyzetek (OLS) módszerével. A leggyakrabban használt egységgyöktesztek alapján a függő és a magyarázó változók is stacionáriusnak tekinthetők, így a változókat nem szükséges differenciálni.

A függő változók esetében azok logaritmusát illesztjük a regressziókba, mivel más típusú szpredek esetében a logaritmikus forma az elterjedt (például a szuverén szpredek esetében lásd *Edwards* [1984]). A logaritmizálás miatt a negatív szpredek kikerülnek a mintából. A becsült paraméterek könnyebb értelmezhetősége érdekében a bázispontban mért magyarázó változókat is logaritmizáljuk.

A becslések eredményeit a 2. táblázatban foglaltuk össze. Majdnem mindegyik változó szignifikánsnak bizonyult, többségük 5 százalékos szinten is. A magyarázóerő igen magas, ami összhangban áll az irodalomban találtakkal (lásd például Coffey et al. [2009]).

Azoknál a magyarázó változóknál, amelyeket logaritmizáltunk, a paraméterek értékeit úgy lehet értelmezni, hogy a jobboldali változó 1 százalékos elmozdulása hány százalékkal növeli meg az FX-swap szpredeket (log-log kapcsolat). A többi esetben az együtthatók értéke azt mutatja meg, hogy egy egységnyi változás hány százalékkal mozdítja el az FX-swap szpredeket (log-lin kapcsolat). Mivel a szpredeket bázispontban mérjük, a relatív változások értelmezését megkönnyíti a szpredek mintabeli átlagának ismerete (RÖVID_SZPRED: 103 bázispont; HOSSZÚ_SZPRED: 72 bázispont).

A kockázati tényezőket tükröző két változó (**TED-szpred, CDS**) paraméterének előjele pozitív és szignifikáns, kivéve a második regresszióban a CDS-ét, ahol inszignifikáns. Tehát az erősödő kockázatkerülés, illetve a magasabb partnerkockázat hozzájárult a szpredek tágulásához.

Az **EKB O/N betétállomány** változójának szintén pozitív lett az előjele. Az **árfolyamváltozás** is hatással van a szpredekre: azokon a napokon, amikor a forint gyengült az euróval szemben, a szpredek magasabbak voltak. Továbbá a **külföldiek államkötvény-vásárlása** is szignifikáns, a külföldiek eladásai felfelé nyomják a szpredeket.

A külföldiekkel szembeni **FX-swap állomány kifutása** is szignifikáns lett, előjele viszont a várakozásainkkal éppen ellentétes, negatív. Amikor a hazai bankok nagyobb összegben adnak vissza devizát a külföldieknek, a szpredek alacsonyabbak; amikor pedig a hazai bankok kapnak vissza több devizát, a szpredek jellemzően magasabbak. E némileg meglepő eredményt azzal magyarázzuk, hogy mivel egy FX-swapban forint és deviza cserél gazdát, nemcsak a devizalikviditás kereslete/kínálata számít, hanem a forintlikviditás is. A külföldi bankok nem férnek hozzá az MNB forintpiaci eszköztárához (pl. fedezett hitel), így a hazai bankok monopolközeli helyzetben vannak a külföldiekkel szemben forintlikviditás szempontjából. Például, amikor a külföldiek forintot kapnak vissza a lejáró FX-swapokból, és pozíciójukat legalább részben meg kívánják újítani, a hazai bankok csak alacsonyabb implikált forintkamat (azaz magasabb FX-swap szpred) mellett hajlandók a fölös likviditást befogadni. Ugyanis – a válság legsúlyosabb, rövid periódusától eltekintve – a hazai bankoknak egyedi szinten is megfelelő forintlikviditás állt rendelkezésüre.

Az egynapos jegybanki FX-swap eszköz hatását tükröző változónk, az **MNB-szpred** előjele pozitívnak bizonyult. Amikor a jegybank mérsékelte eszközének a felárát, az csökkentette a piaci szereplők egymással kötött FX-swap szpredjeit is. A változó 0,4 körüli együtthatójának mértéke viszonylag nagynak tekinthető. A **hosszú jegybanki FX-swap** eszközökről eredményeink azt árulják el, hogy az aukciós napokon a hosszú FX-swap szpredek szignifikánsan alacsonyabbak voltak, mint máskor. Bár a kimutatott hatás nem tekinthető túl jelentősnek, a változó késleltetettje is szignifikáns lett.

Az eredményeket alaposan szemügyre véve, megfigyelhetjük, hogy a legtöbb változó együtthatója nominálisan igen alacsony. Ez azonban részben a választott mértékegységek, illetve a választott függvényforma következménye. Amennyiben azt vizsgáljuk, hogy az egyes magyarázó változók egy szórásnyi változása mekkora elmozdulást okoz a szpredekben, már nagyobb mértékű hatások adódnak. Önmagukban az egyes hatások kicsik, de azok összeadódva tekintélyes magyarázóerőt képviselnek.

Az eredmények értelmezésével kapcsolatban különösen fontos kiemelni, hogy bár két csoportba soroltuk a magyarázó változókat (kockázat és likviditás), a kétféle tényező hatását nehéz egymástól elkülöníteni, hiszen ez a két faktor egymáshoz szorosan kapcsolódik. Könnyen elképzelhető, hogy azok a változók, amelyeket a devizalikviditási hatásokhoz használtunk proxiként, csak a kockázatokon keresztül fejtik ki hatásukat. Például az árfolyamváltozás vagy a külföldiek államkötvény-vásárlása tükrözheti a globális kockázatvállalási hajlandóság változásait is. Önmagában a magyarázó változók szignifikanciája alapján tehát még nem állíthatnánk biztosan, hogy a devizalikviditás kereslete/kínálata is hatással van a szpredekre.

Van azonban két olyan megfigyelésünk, melyek alátámasztják, hogy a kockázati tényezőkön túlmenően likviditási faktorok is hatottak a szpredekre. Egyrészt az FX-swapok lejáratait megjelenítő változónk definíciószerűen olyan, hogy annak értékeit csak korábban kötött ügyletek befolyásolják, így azt nem érintheti a kockázatvállalási hajlandóság aktuális ingadozása. Mivel a lejáró ügyletek átlagos futamideje 3 hét, a változó késleltetett, kockázatokon keresztüli közvetett hatása sem valószínűsíthető.

Másrészt több olyan változó késleltetettje is szignifikáns lett, amelyeket likviditási faktorokhoz kötöttünk (árfolyamgyengülés, külföldi államkötvény-vásárlás). Ha ezek a változók kizárólag a kockázatok módosulásán keresztül hatnának a szpredekre, azt várhatnánk, hogy csak az egyidejű változók szignifikánsak. A késleltetett idejű változó hatása a külföldiek államkötvény-eladásánál például abból eredhet, hogy az állampapírok eladásának pénzügyi elszámolása csak 2 nap elteltével történik meg. Ha az eladott papírokat korábban swapból finanszírozták, a hazai bankszektornak emiatt devizalikviditási igénye támad. A devizalikviditás beszerzésére viszont marad elegendő idejük, 1-2 nappal később is megköthetik az FX-swapokat, amelyek segítségével likviditást szereznek, így a devizalikviditás iránti kereslet elnyújtva is jelentkezik.

## *5.4. Robusztusságvizsgálatok*

A teljes időszakot felbontottuk két közel azonos hosszúságú periódusra, a mintát 2009. július végénél kettévágva. Az első részmintában nem változtak érdemben az eredmények; csak a külföldiek államkötvény-vásárlása vesztett szignifikanciájából, és az is csak a hosszú FX-swap szpredek esetében. A második részperiódusban csak a CDS esetében figyelhettük meg, hogy egyik regresszióban sem maradt szignifikáns az együtthatója.

Az FX-swap szpredek idősora a teljes időszakban csökkenő trendet követett, és néhány magyarázó változóban, köztük a jegybanki eszközökhöz rendelt változókban is kimutatható lineáris trend jelenléte. Eredményeink ugyanakkor nem a trendelő idősorok egymáson való regresszálásából erednek, mivel egy trendváltozó beillesztése az egyenletekbe nem változtatta meg érdemben a becsült együtthatókat. Egy autoregresszív tagnak a modellbe illesztése sem érinti a modellek alapján levont következtetéseinket.

A függvényformára vonatkozó robusztusságot is teszteltük. Logaritmikus forma helyett lineárist választva, csak néhány változó veszti el a szignifikanciáját. Bár köztük van a két kockázati tényezőt tükröző változónk, ez a fő következtetésinket jelentősen nem befolyásolja, mivel a benn maradó, többi magyarázó változó is hordozhat kockázati faktorokon keresztüli hatást.

A két devizapár összesúlyozásából nyert szpredek használata miatt előfordulhat, hogy a magyarázó változók együtt mozognak az időben változó súlyokkal, így a kapott paraméterek is csak ezt tükröznék vissza. Vizsgálataink alapján ugyanakkor időben változatlan, a teljes mintát reprezentáló súlyok használata gyakorlatilag nem befolyásolja a becslési eredményeket.

A becslések robusztusságával kapcsolatban azt is vizsgáltuk, hogy újabb magyarázó változók beillesztése elrontja-e az eredményeket. Egy hasonló elemzésekben gyakran használt változó, a VIX index szerepeltetésével annak előjele ugyan a vártnak megfelelően pozitív, a TED-szpred elveszti szignifikanciáját. Ez abból eredhet, hogy a VIX index is a globális kockázatkerülés változásait tükrözheti, és két hasonló tartalmú változót a modellek már nem bírnak el. Az FX-swap szpredek empirikus irodalmában használt, másik gyakori változó a devizák implikált volatilitása. Az 1 hónapos forint/euró implikált volatilitás becsült együtthatója nem lett szignifikáns, valószínűleg azért, mert az a CDS-sel szorosan együtt mozog.

Megvizsgáltuk azt is, hogy változtat-e az eredményeken a hosszú swapeszköz szerepeltetése az egynapos szpred regressziójában. A többi magyarázó változó paramétere érdemben nem változott. A swap dummy szignifikáns lett, de néhány változó kihagyásával elveszti magyarázóerejét; ezzel szemben a hosszú szpredek regressziójában annak hatása robusztusnak tekinthető, akár az összes változó elhagyására is.

## 6. Összegzés

Tanulmányunkban a forint/deviza FX-swap szpredek magyarázó tényezőit vizsgáltuk, azaz, hogy miért tértek el az FX-swapokban foglalt forward árfolyamok a fedezett kamatparitás által indokolttól. Fő kérdésünk az volt, hogy az MNB által bevezetett FX-swap eszközöknek volt-e kimutatható piaci hatása.

A jegybanki eszközök mellett kétféle magyarázó változót különböztettünk meg: kockázati és devizalikviditási tényezőkhöz kapcsolódót. A 2008. október – 2010. június közti időszakra vonatkozóan azt találtuk, hogy mindhárom változótípus szignifikánsan befolyásolta az egynapos és a hosszú FX-swap szpredeket. A globális kockázatkerülést és a hazai bankok partnerkockázatát közelítő változók előjele a vártnak megfelelő, pozitív lett. Azok a változók is szignifikáns mértékben magyarázták a szpredeket, amelyek a devizalikviditás keresletét/kínálatát, illetve annak korlátozottságát tükrözik. Az eredmények értelmezésével kapcsolatban fontos kiemelni, hogy a használt magyarázó változók egyszerre tükrözhetnek kockázati és likviditási tényezőket, így a kétféle tényező hatását nehéz egymástól elkülöníteni. Ugyanakkor eredményeink alátámasztják, hogy a kockázati faktorokon túlmenően a likviditásnak is volt szerepe, mivel olyan változók is szignifikánsak (FX-swapok kifutása), amelyeknél nagy bizonyossággal kizárható, hogy azokat befolyásolná a kockázatvállalási hajlandóság ingadozása.

Eredményeink a jegybanki beavatkozás implicit céljának elérését is megerősítik. Az egynapos jegybanki FX-swap eszköz hatását tükröző változónk előjele pozitívnak bizonyult. Amikor az MNB mérsékelte eszközének felárát a bankközi eurókamatokhoz képest, az csökkentőleg hatott a piacon kialakuló FX-swap szpredekre is. A hosszú jegybanki FX-swap eszközökről pedig elmondható, hogy az aukciók napjain a hosszú FX-swap szpredek szignifikáns mértékben kisebbek voltak, mint máskor.

## Irodalomjegyzék


Baba, N.–Packer, F. [2009a]: Interpreting deviations from covered interest parity during the financial market turmoil of 2007-08. *Journal of Banking & Finance*, vol. 33(11), november, 1953–1962. o.

Baba, N.–Packer, F. [2009b]: From turmoil to crisis: dislocations in the FX swap market before and after the failure of Lehman Brothers. BIS Working Papers, 285.

BIS [2007]: Central bank survey of foreign exchange and derivatives market activity 2007 – Final Results. Bank for International Settlements, Monetary and Economic Department, december

Coffey, N.–Hrung, W. B.–Sarkar, A. [2009]: Capital constraints, counterparty risk, and deviations from covered interest rate parity. Staff Reports 393, Federal Reserve Bank of New York

Csávás Csaba–Szabó Rezső [2011]: A forint/deviza FX-swap szpredek mozgatórugói a Lehman-csőd utáni időszakban. MNB-tanulmányok (előkészületben)

Duffie, D.–Huang, M. [1996]: Swap rates and credit quality. *Journal of Finance*, American Finance Association, vol. 51(3), július, 921–949. o.

Edwards, Sebastian [1984]: LDC foreign borrowing and default risk: an empirical investigation, 1976-80. *American Economic Review*, American Economic Association, vol. 74(4), szeptember, 726–734. o.

Gârleanu, N.–Pedersen, L. H. [2009]: Margin based asset pricing and deviations from the law of one price. *Mimeo*, NYU.

Genberg, H.–Hui, C.–Wong, A.–Chung, T. [2009]: The link between FX swaps and currency strength during the credit crisis of 2007-2008. Hongkong Monetary Authority Research Note 01/2009.

Mancini, G. T.–Ranaldo, A. [2010]: Limits to arbitrage during the crisis: funding liquidity constraints and covered interest parity. SNB Working Papers 2010-14, Swiss National Bank

MNB [2009]: Jelentés az infláció alakulásáról. Magyar Nemzeti Bank, 2009. február

Páles Judit–Kuti Zsolt–Csávás Csaba [2010]: A devizaswapok szerepe a hazai bankrendszerben és a swappiac válság alatti működésének vizsgálata. MNB-tanulmányok, 90.

Shleifer, A.–Vishny, R. W [1997]: The Limits of Arbitrage. *Journal of Finance*, American Finance Association, vol. 52(1), március, 35–55. o.

Stone, M. R.–Walker, W. C.–Yasui, Y. [2009]: From Lombard street to Avenida Paulista: foreign exchange liquidity easing in Brazil in response to the global shock of 2008-09. IMF Working Papers 09/259.

Dömötör Barbara–Marossy Zita

# A likviditási mutatószámok struktúrája

**A likviditás mérésére többféle mutató terjedt el, amelyek a likviditás jelenségét különböző szempontok alapján számszerűsítik. A cikk a szakirodalom által javasolt, különféle likviditási mutatókat elemzi sokdimenziós statisztikai módszerekkel: főkomponens-elemzés segítségével keresünk olyan faktorokat, amelyek legjobban tömörítik a likviditási jellemzőket, majd megnézzük, hogy az egyes mutatók milyen mértékben mozognak együtt a faktorokkal, illetve a korrelációk alapján klaszterezési eljárással keresünk hasonló tulajdonságokkal bíró csoportokat. Arra keressük a választ, hogy a rendelkezésünkre álló minta elemzésével kialakított változócsoportok egybeesnek-e a likviditás egyes aspektusaihoz kapcsolt mutatókkal, valamint meghatározhatók-e olyan összetett likviditási mérőszámok, amelyeknek a segítségével a likviditás jelensége több dimenzióban mérhető.**

## 1. A piaci likviditás aspektusai

A 20. században a pénzügyi elméletek fontos kiindulópontja a korlátlan piaci likviditás feltételezése volt. A portfólióelméletben a portfólió értéke megfelel az alkotóelemek piaci értékkel súlyozott átlagának, ahol a piaci érték az aktuális ár mennyiséggel vett szorzata, tehát az elmélet feltételezi, hogy a piaci áron bármikor korlátlan mennyiségben lehet kereskedni, vagyis a piac likvid. A likviditás a század vége felé jelent meg az elméleti kutatásokban, a válságok kapcsán bekövetkező illikviditás okozta piaci anomáliák hívták fel a figyelmet a jelenség fontosságára.

A likviditás önmagában nem, csak különböző aspektusokban definiált változókkal mérhető. Az egyes dimenziók alapján mért likviditás nem feltétlenül azonos, előfordulhat, hogy a piac egyik szempont szerint likvid, a másik szerint nem. A szakirodalom (*von Wyss* [2004]) alapvetően 4 dimenzióját különbözteti meg a likviditásnak *(1. ábra)*, amelyek alapján különböző likviditási mérőszámok definiálhatók. Az egyes dimenziók között kapcsolat van, így a mutatók besorolása nem minden esetben egyértelmű.

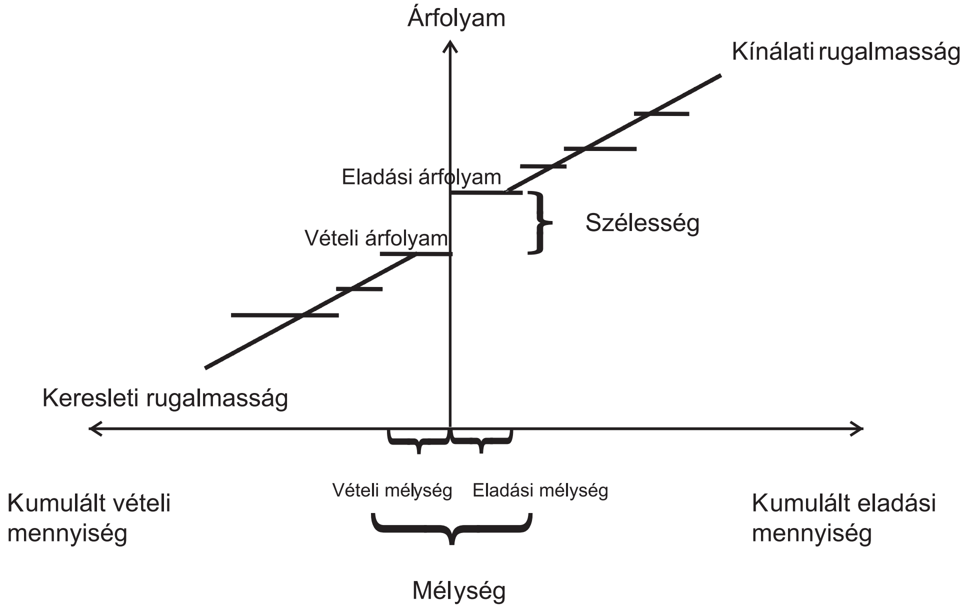
1. *Időhöz kapcsolódó mutatók:* a kereskedés gyorsaságát, azonnaliságát kívánják megragadni a kereskedett mennyiség, illetve a tranzakciókhoz kapcsolódó várakozási idő figyelembe vételével.
2. *Szélesség*[1] *(tightness):* az azonnali kereskedés költségét számszerűsítő vételi és eladási árfolyam különbségét (spread) mérő mutatók.
3. *Mélység (depth):* A legjobb vételi és eladási áron kereskedhető mennyiségből kiindulva meghatározott mennyiségi mutatók.
4. *Rugalmasság (resiliency):* a keresleti és kínálati görbe egészét figyelembe vevő mutatók.

1 Az angol kifejezések fordítása: l. Kutas és Végh [2005].

A likviditás összetett jelenségének megragadására számos, a fenti dimenziókban meghatározott mutató kombinációjaként definiált, többdimenziós mérőszámot is javasolnak egyes szerzők (*Kluger* és *Stephan* [1997]).

*1. ábra*

**Az ajánlati könyv egy pillanatfelvétele: a likviditás különböző aspektusai**




*Forrás:* von Wyss [2004]

Vizsgálatunk arra irányul, hogy a sokféleképpen definiált likviditási mutatószámok koherensek-e, azaz a likviditást egyféle szempontból mérő mutatók valóban együtt mozognak-e, illetve a likviditás más dimenzióit számszerűsítő mutatószámok elkülönülnek-e egymástól. Az elemzés exploratív adatelemzés, nem hipotézisek alátámasztásáról szól, hanem a rendelkezésre álló tőzsdei adatok alapján a likviditási mutatók viselkedését keresztmetszetileg vizsgáljuk. Megnézzük a likviditási mutatók együttmozgását az elemzés mintájául szolgáló vállalatok adatai alapján, arra keressük a választ, hogyan néz ki a likviditási mutatószámok struktúrája.

## 2. Módszertan

A likviditási mutatószámok együttmozgását befolyásoló, fontosabb faktorok meghatározását főkomponens-elemzéssel végezzük el, míg a mutatószámok empirikus adatokon történő csoportosítása *k* középpontú klaszterezési eljárás segítségével történik. Ebben a fejezetben bemutatjuk az alkalmazott módszereket.

## *2.1. Az együttmozgás leírása: főkomponens-elemzés*

A főkomponens-elemzés[2] (principal component analysis – PCA) többváltozós adatok esetén a vizsgált változók együttmozgásának szerkezetét segít feltérképezni. Precízebben: a PCA használatával meghatározhatók az egymással lineárisan korreláló változók mögötti, egymással nem korreláló faktorok (főkomponensek). A főkomponensek az eredeti változók lineáris kombinációi, így:

$$y_1 = Xa_1,\ y_2 = Xa_2,\ \ldots,\ y_p = Xa_p \qquad , \tag{1}$$

ahol $p$ a rendelkezésre álló adataink dimenziója, azaz a változók száma, $a_i$-k a főkomponenseket definiáló súlyok, míg $X$ a rendelkezésünkre álló adatokat megadó $n$*$p$-s mátrix, $n$ pedig a megfigyelések száma. A főkomponenseket megadó súlyokról feltételezzük, hogy hosszuk egységnyi.

Célunk, hogy olyan főkomponenseket kapjunk, amelyek az eredeti változók varianciájának minél nagyobb hányadát magyarázzák meg. Megmutatható (*Kovács* [2009] vagy *Baran* és munkatársai [2000]), hogy ennek a feltételnek eleget tevő, egymással korrelálatlan főkomponenseket a változók kovariancia mátrixának sajátérték-sajátvektor felbontása segítségével tudjuk meghatározni. A kovarianciamátrix sajátvektorai adják az $a_i$ súlyokat, míg a hozzájuk tartozó $\lambda_i$ sajátértékek adják meg a sajátvektorok által definiált főkomponensek varianciáját. Az eredeti változóinkról legtöbb információt hordozó főkomponens tehát a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektorral állítható elő. Az *i*. főkomponens által hordozott információ:

$$\lambda_i \Big/ \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \tag{2}$$

Az *i*. főkomponens ekkora hányadát írja le az eredeti változóink varianciájának.

A gyakorlatban sokszor nem a kovarianciamátrix, hanem a korrelációs mátrix sajátérték-sajátvektor felbontása adja a főkomponenseket. A korrelációs mátrix használatával lényegében ugyanazokat az eredményeket kapjuk, mintha az eredeti változóinkat sztenderdizáltuk volna. A korrelációs mátrix használata tehát biztosítja, hogy egyik változó sem dominálja a nagyságrendjéből következően a PCA végeredményét.

A főkomponens-elemzéssel elhelyezhetjük a változóinkat a főkomponensek terében. A sajátérték-sajátvektor felbontással ugyanis megkaptuk a változók korrelációs mátrixának egy ortogonális bázisát, azaz az eredeti változók kifejezhetők ezen egymásra merőleges (egymással nem korreláló) főkomponens terében. Az eredeti változóink megadhatók egy $p$ dimenziós koordinátarendszerben, ahol az egyes koordináták az adott főkomponensekhez tartozó együtthatókat jelölik. Belátható, hogy a $c_{ij}$ koordináta (*component loading*) a *j*. főkomponens és az *i*. változó közötti korrelációval egyezik meg. A $C$ mátrixba rendezett koordinátákat komponensmátrixnak (*component matrix*) nevezzük.

A főkomponens-elemzést felhasználhatjuk dimenziócsökkentésre is. Levezethető (Baran és munkatársai [2000]), hogy ha $p$ helyett $k$ ($<p$) dimenzióban akarjuk kifejezni

2 A módszer bemutatása Kovács [2009] alapján történik.

az eredeti változóinkat, akkor a legjobb eredményt (a változók varianciáját tekintve, a legkisebb elvesztegetett információt) akkor kapjuk, ha a legnagyobb *k* darab sajátértékkel megadott főkomponenshez tartozó koordinátát megtartjuk, a többi főkomponenst pedig elhagyjuk. Ezzel a módszerrel egyszerűsíteni tudjuk az eredeti változóink együttmozgásának struktúráját, így könnyebben tudjuk értelmezni a változók közötti kapcsolatot. Gyakran alkalmazott eljárás, hogy a korrelációs mátrix felbontása esetén az egynél kisebb sajátértékhez tartozó főkomponenseket hagyjuk el. Ennek az áll a hátterében, hogy ebben az esetben a sajátértékek összege *p* (= a sajátértékek száma), így az átlagos sajátérték (= 1) alatti sajátértékeket hagyjuk el.

A főkomponensek terében a változókon kívül az *n* darab megfigyelésünket is el szeretnénk helyezni. Az *i*. megfigyeléshez ekkor hozzárendeljük az adott *j*. főkomponensre vett „kitettséget” (score) a következőképpen:

$$y_{ij} = a_j^T x_i \tag{3}$$

Ezek után a főkomponensekkel mint egyszerű változókkal dolgozhatunk tovább. Ha a dimenziók számát csökkentettük, akkor a megfigyeléseinket kevesebb változóval sikerült leírnunk.

A kapott főkomponenseket gyakran értelmezni is szeretnénk. Ez akkor lehetséges, ha elkülöníthető, hogy egyes főkomponensek mely változókkal korrelálnak egyértelműen, és melyekkel nem. Ezt akkor érhetjük el, ha a főkomponenseket elforgatjuk úgy, hogy a főkomponensek továbbra is korrelálatlanok maradjanak, míg a főkomponensek és a változók közötti korrelációk közel legyenek nullához vagy abszolút értékben 1-hez. Ezzel a módszerrel könnyebben tudjuk tartalommal feltölteni az egyes főkomponenseket. A cikkben az ún. varimax eljárást használjuk, ahol az elemzésben benne hagyott faktorok által magyarázott teljes variancia nem változik.

A főkomponens-elemzés algoritmusa bármely korrelációs mátrixon lefuttatható, hiszen a módszer a sajátértékek létezésére és pozitivitására (nemnegativitására) épül. Ahhoz azonban, hogy az eredeti változóink dimenzióját csökkenteni tudjuk, arra van szükség, hogy ezek a változók egymással korreláljanak, és legyenek mögöttük közös faktorok. Bár léteznek formális tesztek annak eldöntésére, hogy a rendelkezésre álló minta megfelelő-e a főkomponens-elemzéshez (Kovács [2009]), ezeket a teszteket az adatainkon nem fogjuk lefuttatni. Az elemzésből látni fogjuk, hogy a dimenzió sikeresen csökkenthető.

Az algoritmus alkalmazásának egy alapfeltételét is meg kellett sértenünk az elemzés során. A szakkönyvek azt javasolják, hogy $n \geq 5p$ legyen, azaz a megfigyeléseink legyenek jóval többen, mint a változóink. A feltétel megsértése komoly gondokat okozhat (pl. a korrelációs mátrix együtthatóinak becslése bizonytalan, vagy akár a korrelációs mátrix nem lesz pozitív definit). A mintaelemszámra vonatkozó feltételt a rendelkezésre álló adatok hiánya miatt nem tudtuk biztosítani (az adatokról bővebben l. a 3. fejezetet). Az eredmények értékelésénél ezt a tényt figyelembe kell venni, de úgy gondoltuk, hogy az elemzést ezzel a megkötéssel is érdemes elvégezni.

## 2.2. Csoportosítás: k középpontú klaszterezés

A *k* középpontú klaszterezési eljárás (k-means clustering) során a megfigyeléseinket előre megadott *k* darab csoportba[3] szeretnénk sorolni. A célunk, hogy a csoporton belül egymáshoz hasonló megfigyelések legyenek, míg a különböző csoportok egyedei különbözzenek egymástól. A *k* középpontú klaszterezési eljárás során előre megadjuk, hogy végeredményként *k* darab csoportot szeretnénk kapni. Az algoritmus működése a következő[4]:

1. Soroljuk be a megfigyeléseket véletlenszerűen a csoportokba.
2. Számítsuk ki a csoportok közepét.
3. Az egyes egyedeket soroljuk át abba a csoportba, amelynek a csoportközéppontjához a legközelebb vannak.
4. Ismételjük a 2-3. pontokat addig, amíg a csoportközepek változnak.

Az adatainkat jellemzően egy $X$ mátrixszal adjuk meg, ahol $x_{ij}$ az *i*. megfigyelés *j*. változó szerinti értékét jelöli. Ekkor a 2. lépésben megadott csoportközepet úgy számolhatjuk, mint a csoportban szereplő megfigyelések átlagát koordinátánként, míg a 3. lépés megvalósításához szükséges távolságot egyszerű euklidészi távolságként definiálhatjuk.

Az eljárás akkor ad jó eredményeket, ha a mintánkban jól elkülöníthető, különbözőképpen viselkedő egyedek vannak.

Mint említettük, a csoportszámot az algoritmus lefuttatása előtt kell megadnunk. Előfordulhat, hogy egy csoportba túl sok, vagy esetleg túl kevés megfigyelés kerül. A csoportosítás eredményeinek fényében más csoportszámmal újrafuttathatjuk a számításokat egészen addig, amíg számunkra kielégítő eredményeket nem kapunk.

## 2.3. Csoportosítás a főkomponensek terében

Az általunk alkalmazott megközelítés lényege a következő:

1. Adott $N$ vállalat esetén $P$ darab likviditási mutatószám. Főkomponens-elemzéssel megkeressük a mutatószámok mögötti közös faktorokat (főkomponenseket[5]), majd elhelyezzük a mutatószámokat a faktorok terében. Ezek a főkomponensek adják meg az alapvető likviditási aspektusokat, amelyeket az egyes mutatószámok mérnek. A változók és a főkomponensek együttmozgásából tartalmat keresünk az egyes faktoroknak.
2. Arra keressük a választ, hogy vannak-e hasonlóan viselkedő likviditási mutatószámok. Ha a főkomponensek írják le a likviditási aspektusokat, akkor az egymáshoz hasonlóan viselkedő mutatók közel vannak egymáshoz a faktorok terében. A csoportok megtalálásához *k* középpontú klaszterezést hajtunk végre a faktorok terében a mutatószámokra.[6] Jelentést adunk az egyes csoportoknak is.

3 A *k* csoportszámot ne tévesszük össze a PCA csökkentett dimenziójával, amit szintén *k*-val jelöltünk a 2.1. fejezetben! Mindkét helyen a hivatkozott szakirodalmak megszokott jelöléseit követtük, ezért jelent meg kétszer ugyanaz a szimbólum.

4 A módszer bemutatása Kovács [2009] alapján történik.

5 A „faktor" és „főkomponens" elnevezéseket szinonimaként használjuk a 2.1. alfejezetben bemutatott értelemben.

6 Vegyük észre, hogy itt az eredeti „változóink" a „megfigyelések" szerepét töltik be, míg itt a „változók" a faktorok.

A módszerrel szemben két ellenvetés tehető. Az egyik az, hogy mivel a hasonló tulajdonságokkal rendelkező, vagyis egymáshoz közeli csoportok kialakítása egy redukált térben történik, így előfordulhat, hogy olyan elemek is azonos csoportba kerülnek, amelyek a figyelembe nem vett dimenziókban egymástól távol esnek. Ezzel a problémával nem foglalkozunk, hiszen a PCA során a dimenziócsökkentés úgy történt, hogy azokat a dimenziókat hagytuk el, amelyek nem lényegesek a mutatószámok közötti különbségekben. Így az a dimenzió, amelyet nem veszünk figyelembe a klaszterezésnél, a PCA szerint nem is lényeges.

A másik lehetséges ellenvetés az lehet, hogy az alkalmazott két módszer egymással ellentétes feltételezésekre épül: a PCA esetén azt szeretnénk, hogy a változóink korreláljanak, a klaszterezésnél az a jó, ha a likviditási mutatószámok a csoportok között különböznek. Tekintsünk egy kicsit előre, és az eredmények fényében értékeljük ezeket a követelményeket! Látni fogjuk, hogy ezt az ellentmondást részben a PCA kárára lehet majd feloldani. Találni fogunk néhány független faktort, és a vizsgált változóink vagy az egyik, vagy a másik faktorhoz közel fognak elhelyezkedni, így a sok, egymással páronként korreláló változó feltétele sérül. Másrészt vannak olyan mutatószámok is, amelyek több faktorral is együtt mozognak. Ezeket a különbözőképpen mozgó tipikus csoportokat a PCA és a klaszterezés segítségével sikeresen el tudjuk különíteni.

A PCA-t és a klaszterezést SPSS programcsomaggal végezzük el.

## 3. Az adatok bemutatása

A piaci likviditási mutatók forrása általában valamilyen ajánlati könyv, ahol a kereskedési adatok hozzáférhetőek. A legtöbb empirikus vizsgálat a tárgyban a tőzsdei részvénykereskedelemhez kapcsolódik, de fontos új kutatási irány a kötvénypiaci likviditás is.

A jelen vizsgálatban mintaelemként a Svájci Értéktőzsde 18 vállalati részvénye szerepel *(1. táblázat)*, amelyekre vonatkozóan 31 likviditási mutató mint változó *(2. táblázat)* vizsgálatát végezzünk el. A likviditási mutatószámok az ajánlati könyvön, valamint a beérkezett kötésenkénti ajánlatok dinamikáján alapulnak. A likviditási adatok forrása Rico von Wyss disszertációja (von Wyss [2004]), amelyben a szerző a 2002. május 2. és július 31. közötti 65 kereskedési nap 5 perces adatai alapján minden időpontra kiszámolja a 31 likviditási mutató értékét, és ezek átlaga, illetve mediánja szerepel az elemzésünkben minden vállalatra vonatkozóan.

*1. táblázat*

**Vizsgált részvények**

| | | |
|---|---|---|
| Adecco | Holcim | Surveillance |
| Baer | Kudelski | Sulzer |
| Richemont | Lonza | Syngenta |
| Ciba | SwissRe | SwatchBearer |
| Clariant | Swisscom | SwatchRegist |
| Givaudan | Serono | Unaxis |

*Forrás:* von Wyss [2004])

## *3.1. Az elemzésbe bevont likviditási mutatószámok*

A 31 mutató vizsgálatunkban redundáns rendszert alkot, mivel több olyan mutatócsoport is van, amelyeknek az eredménye teljesen azonos a vizsgált időszakban (a relatív különbség 3 mérőszáma, valamint a relatív effektív különbség 2 mérőszáma). Ezen mutatók különbözése piaci turbulenciák esetén mutatkozik meg, amikor előfordulnak ugrásszerű árfolyamváltozások. Az adatok egyezése azt mutatja, hogy a fenti időszak nyugodtnak mondható.

A redundancia következménye, hogy a változók közötti korrelációs mátrix nem lesz pozitív definit. A nulla megjelenik, mint a korrelációs mátrix többszörös sajátértéke. A korrelációs mátrix nullán kívüli sajátértékei mind pozitívak, így a korrelációs mátrix pozitív szemidefinit. A PCA így (SPSS figyelmeztetés mellett) lefuttatható, és az eredmények értelmezhetők.

A likviditási mutatók egy része a likviditás jelenségét azonos irányban méri, vagyis a nagyobb mutatószám likvidebb piacot jelez (pl. volumen, mennyiség jellegű mutatók), másik része pedig éppen ellentétesen (pl. vételi-eladási árfolyamok különbsége, áreltérítő hatás mérése), tehát a jobb likviditást kis értékek jelentik.

Célunk a mögöttes rendszer megértése, ezért az összes likviditási mutatót felhasználjuk az elemzés során. Az eredményeink mind a redundáns mutatószámokat, mind a különböző mérési irányokat figyelembe veszik és leírják.

Az elemzésünk előtt az eredeti adatainkat módosítanunk kellett. A likviditási ráta (LR1) tartalmát megváltoztattuk, mivel az eredeti adatbázis nullának vette az értékét, ha a nevezőben nulla szerepelt *(Melléklet I.)*, ami ellentmond annak, hogy ebben az esetben rendkívül nagynak kellene lennie a mutatónak. Ilyen esetekben átállítottuk a mutató értékét – a mutatószám mintabeli maximumát figyelembe véve – 300 millióra. A mutatók számításánál bizonytalansági tényező, hogy amennyiben az ajánlati könyv nem tartalmazott elegendő mennyiséget, akkor a market impact mutatónál úgy veszi a forrásadatbázis, mintha a legkedvezőtlenebb (vételi esetében legmagasabb, eladási esetében legalacsonyabb) áron korlátlan mennyiségben lehetne kereskedni.

*2. táblázat*

**Az elemzésbe bevont likviditási mutatók**[7]

| Rövidítés | Magyarázat | Mérés iránya |
|---|---|---|
| Q | Időegység alatt kereskedett mennyiség | + |
| V | Időegység alatt kereskedett forgalom | + |
| D | Legjobb vételi és eladási menyiség összege | + |
| Dlog | Mélység logaritmusa | + |
| D$ | Mélység dollárban | + |
| N | Időegység alatti tranzakciók száma | + |

7 A mutatók számítási módját a *Melléklet* tartalmazza.

| Rövidítés | Magyarázat | Mérés iránya |
|---|---|---|
| NO | Időegység alatti megbízások száma | + |
| Sabs | Abszolút különbség: legjobb vételi és eladási árfolyam különbsége | – |
| LogSabs | Abszolút különbség logaritmusa | – |
| SrelM | Relatív különbség: az abszolút különbség, osztva a középárfolyammal | – |
| Srelp | Relatív különbség: az abszolút különbség, osztva az utolsó kötés árfolyamával | – |
| Srellog | Log relatív különbség: legjobb eladási és vételi árfolyam hányadosának logaritmusa | – |
| Logsrellog | Log relatív különbség logaritmusa | – |
| Seff | Effektív különbség: a legutóbbi kötés árfolyamának és a középárfolyam különbségének abszolút értéke | – |
| Seffrelp | Relatív effektív különbség: effektív különbség és az utolsó kötés árfolyamának hányadosa | – |
| SeffrelM | Relatív effektív különbség: effektív különbség és a középárfolyam hányadosa | – |
| QS | Jegyzési meredekség: abszolút különbség és a mélység logaritmusának hányadosa | – |
| LogQS | Log jegyzési meredekség: log relatív különbség és a mélység logaritmusának hányadosa | – |
| LogQSadj | Módosított log jegyzési meredekség: vételi/eladási oldal különbségével korrigált mutate | – |
| CL | Composite liquidity: a relatív különbség és a dollárban kifejezett mélység hányadosa | – |
| LR1 | Likviditási ráta 1: Forgalom és az időegység alatti hozam abszolút értékének hányadosa | + |
| LR3 | Likviditási ráta 3: a hozam abszolút értékének és a kereskedett mennyiségnek a hányadosa | – |
| FR | Flow ráta: a forgalom és a várakozási idő hányadosa | + |
| OR1 | Order ráta: a legjobb vételi és eladási mennyiség különbségének abszolút értéke, osztva a forgalommal | – |

| Rövidítés | Magyarázat | Mérés iránya |
|---|---|---|
| MIV | Meghatározott mennyiséghez kötött legjobb eladási és vételi árfolyam különbsége | – |
| MIAV | Meghatározott mennyiséghez kötött legjobb eladási árfolyam és a középárfolyam különbsége | – |
| MIBV | Középárfolyam és meghatározott mennyiséghez kötött legjobb vételi árfolyam különbsége | – |
| DIAk | Vételi árfolyam meghatározott változásához szükséges mennyiség | + |
| DIBk | Eladási árfolyam meghatározott változásához szükséges mennyiség | + |
| PIAq | Meghatározott mennyiség megvételéhez szükséges összegnek és a középárfolyamon kalkulált összeg hányadosának a logaritmusa | – |
| PIBq | Meghatározott mennyiség eladásával realizált összegnek és a középárfolyamon kalkulált összeg hányadosának a logaritmusa | – |

*Forrás:*von Wyss [2004])

## 4. Elemzés

### *4.1. Első eredmények és a módszertan újragondolása*

A főkomponens-elemzés segítségével öt olyan főkomponens azonosítható, amelynek 1-nél nagyobb a sajátértéke. A mutatók által hordozott információ jól sűríthető, mivel ez az öt főkomponens a teljes variancia több mint 94%-át magyarázza, az első három főkomponens magyarázó ereje pedig 81% feletti *(3. táblázat)*.

*3. táblázat*

**Az első 5 főkomponens által magyarázott variancia**

| Főkomponens | Kezdeti sajátérték | | | Rotált megoldás | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Teljes | Variancia %-ában | Kumulált variancia | Teljes | Variancia %-ában | Kumulált variancia |
| 1 | 15,393 | 49,655 | 49,655 | 9,290 | 29,969 | 29,969 |
| 2 | 6,080 | 19,613 | 69,268 | 9,221 | 29,745 | 59,714 |
| 3 | 3,704 | 11,947 | 81,215 | 6,373 | 20,557 | 80,271 |
| 4 | 2,846 | 9,180 | 90,395 | 3,095 | 9,983 | 90,253 |
| 5 | 1,228 | 3,961 | 94,356 | 1,272 | 4,103 | 94,356 |

A likviditási mutatók és a főkomponensek közötti korrelációt tartalmazó komponensmátrix *(Melléket II.)* alapján látható, hogy a likviditási mutatóknak mintegy a fele (az alacsony, 0,3 alatti korrelációkat elhanyagolva) egyértelműen egy (az 1.) főkomponenshez kapcsolódik, a mutatók másik felére azonban nem kapunk tiszta struktúrát, mert azok több komponenssel is korrelálnak. Ez a jelenség megfelel annak az elképzelésünknek, hogy a likviditás egyes aspektusai nem függetlenek egymástól, és bizonyos mutatók több dimenzióhoz is kapcsolódnak.

A hasonlóan viselkedő mutatószámok megkeresése előtt felmerült a kérdés, hogy a negatív korrelációkat hogyan kezeljük. Nyilvánvaló ugyanis, hogy ha egy faktor és egy változó között nagy abszolút értékű negatív korrelációs együttható van, akkor ez ellentétes irányú, de erős kapcsolatot jelez, vagyis célszerű azokat a mutatókat együtt kezelni, amelyek akármelyik irányban, de erőteljesen kapcsolódnak az egyes főkomponensekhez. A hasonló mutatószámok megkeresését célzó klaszterezést ezért elvégeztük az eredeti és az abszolút értékeket tartalmazó korrelációk (komponensmátrix) alapján is, hogy megnézhessük, mely likviditási mutatószámok változtatnak a jellegükön az abszolút érték hatására. Egyetlen változó került másik csoportba az abszolút korrelációk alapján, a log depth (mélység, vagyis a legjobb vételi és eladási árfolyamokon ajánlott mennyiség összegének a logaritmusa). Bár a komponensmátrix abszolút értékén alapuló csoportosítás segít azonosítani az ellenkező irányban együtt mozgó változókat, a különböző típusú likviditási mutatószámok együttmozgásának megértéséhez nem az abszolút értékkel, hanem az eredeti komponensmátrixszal célszerű dolgozni. Az erős negatív korrelációk hatását az elemzésünkben ezért úgy kezeltük, hogy az egyetlen „problémás” változó ellentettjét (–log depth) kiszámoltuk, majd az eredeti változót ezzel helyettesítve, újraszámoltuk a főkomponenseket, és az új eredmények felhasználásával végezzük el a csoportosítást a főkomponensek terében. Ez a módosítás nem változtat a 3. táblázat eredményein.

## *4.2. A likviditási mutatószámok csoportjai*

A klaszterezés során a 2.2. alfejezetben említett eljárással négy csoportot alakítottunk ki. A *4. táblázat* mutatja be, hogy az egyes csoportokba mely mutatószámok kerültek. A mutatók tartalma alapján a csoportok megfeleltethetők a likviditás egyes dimenzióinak. Az első csoportba a vételi és eladási árfolyam különbözetét (spreadet) relatív módon mérő mutatók tartoznak, ezek a piaci szélesség mérőszámai. A második csoport az idő, illetve mennyiség alapú likviditási mutatókat tartalmazza, míg a harmadikban jelennek meg a mélység, a legjobb árhoz tartozó mennyiség mérőszámai. A negyedik csoportba kerültek az abszolút spreadet, valamint adott mennyiséghez tartozó spreadet (market impact) mérő mutatók, amelyek a piaci szélességet és rugalmasságot jellemzik.

Az első és a negyedik csoport a feszességet, tehát a piac azon tulajdonságát jellemzi, hogy milyen költséggel lehet tranzakciót végrehajtani. A második és harmadik csoportba a mennyiség alapú mérőszámok tartoznak, amelyek a likviditást a kereskedhető mennyiségeken keresztül próbálják megragadni.

A csoportba sorolás a legtöbb mutatóra megfelel előzetes várakozásainknak, két esetet érdemes kiemelni: a likviditási ráta kétféle mérőszáma külön csoportba került, ami – eltekintve attól, hogy kicsit másként mérik a mennyiséget és a hozamot – abból adódik, hogy ezek egymás reciprokai. A másik érdekesség, hogy a negatív mélység logaritmusa (–log depth), amely egy mennyiség típusú változó, a vételi és eladási különbséget abszolút módon mérő mutatók csoportjához tartozik.

*4. táblázat*

**Klaszterelemzéssel előállított mutatócsoportok**

| 1<br>Relatív spread | 2<br>Idő/volumen | 3<br>Mélység | 4<br>Abszolút spread |
|---|---|---|---|
| SrelM | Q | OR1 | –Dlog |
| Srelp | V | D | PIAq |
| Srellog | N | D$ | PIBq |
| Logsrellog | NO | | MIV |
| Seffrelp | LR1 | | MIAV |
| SeffrelM | FR | | MIBV |
| LogQS | DIAk | | QS |
| LogQSadj | DIBk | | Seff |
| CL | | | Sabs |
| LR3 | | | LogSabs |

## *4.3. A faktorok értelmezése*

A főkomponensek értelmezéséhez megnéztük, hogy a csoportközepek, amelyek a csoport tipikus viselkedését leírják, hogyan helyezkednek el a faktortérben. A csoportközepek faktorokra vetített koordinátái *(5. táblázat)* alapján összekapcsolhatók a főkomponensek és a csoportok. Az egyes csoportba tartozó mutatók változását elsősorban az a faktor határozza meg, amelyre a faktorkoordináta értéke magas. Ezeket a magas értékeket az 5. táblázatban kiemeléssel jelezzük. A relatív spread mutatók egyértelműen az első faktorhoz kapcsolódnak, ezért az első faktor azonosítható úgy, mint az a likviditási mérték, amely a piac relatív szélességét határozza meg. Ez a változó magyarázza a likviditási mérőszámok szóródásának legnagyobb hányadát (mintegy 30%-ot); minél alacsonyabb az értéke, annál likvidebb a piac. A második faktorhoz kapcsolódnak az abszolút spread típusú mutatók, és kisebb mértékben a mennyiségi mutatók. Ez a faktor az abszolút (mérettől függő) szélességet tartalmazó változó, a teljes variancia újabb közel 30%-át magyarázza, kis értékkel jelezve a nagyobb likviditást. A harmadik faktor a második csoporttal mozog együtt, volumenváltozóként azonosítható, a teljes variancia 20%-át magyarázza. A negyedik faktor értelmezése szintén egyszerű, mivel mozgása egyértelműen megfeleltethető a harmadik csoportbeli mutatóknak, vagyis ez a faktor azonosítható a mélységgel. Az ötödik faktor nem mutat szignifikáns kapcsolatot egyik csoporttal sem, és magyarázó ereje alapján sem olyan jelentős, ezért ezt nem értelmezzük.

*5. táblázat*

**A csoportközepek koordinátái a faktortérben**

| | Csoport 1 | Csoport 2 | Csoport 3 | Csoport 4 |
|---|---|---|---|---|
| Faktor 1 | 0,8787 (0,0309) | –0,1581 (0,0618) | 0,0000 (0,0000) | 0,2012 (0,0677) |
| Faktor 2 | 0,1105 (0,00737) | –0,1948 (0,0956) | –0,0916 (0,0916) | 0,8627 (0,0282) |
| Faktor 3 | –0,0284 (0,0284) | 0,8281 (0,0335) | 0,0894 (0,0894) | –0,0288 (0,0288) |
| Faktor 4 | 0,0322 (0,0322) | 0,0336 (0,0336) | 0,9108 (0,0182) | –0,0402 (0,0402) |
| Faktor 5 | –0,0817 (0,0548) | –0,0157 (0,0941) | 0,0000 (0,0000) | 0,0042 (0,0475) |

*Megjegyzés:* zárójelben tüntetjük fel a csoporton belüli szórást

Ahogy a likviditás dimenziói is összefüggnek, az egyes mutatócsoportok sem tekinthetők függetlennek. A faktortérben ábrázolva a csoportközepeket mint vektorokat, a csoportok közötti korreláció *(6. táblázat)* megkapható a vektorok által bezárt szög cosinusaként. Látható, hogy a relatív és az abszolút spread mutatói korrelálnak leginkább, illetve a spread és a mennyiség típusú változók közötti korreláció negatív.

*6. táblázat*

**A csoportok korrelációja a faktortérben**

| Csoport | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | –0,235 | 0,020 | 0,343 |
| **2** | –0,235 | 1 | 0,154 | –0,293 |
| **3** | 0,020 | 0,154 | 1 | –0,145 |
| **4** | 0,343 | –0,293 | –0,145 | 1 |

## *4.4. Az elemzés kiterjesztése a mediánadatokra*

A vizsgált időszak 6500 adatának nemcsak az átlaga, hanem a mediánja is rendelkezésre áll. Az eddig bemutatott eredményeket a 6500 adat átlaga alapján elvégzett számítással kaptuk. A bemutatott elemzéseket elvégeztük a mediánadatokra is, és megnéztük, hogy ezekre is ugyanazt a struktúrát kapjuk-e vissza. A mediánadatoknál is a mélység logaritmusának ellentettjével számoltunk. Az első főkomponensek magyarázó ereje kicsit kisebb lett – az első három főkomponens a teljes variancia 75%-át, az első öt pedig 93%-át magyarázza.

A mutatók klaszterezésével ugyanazt a négy csoportot kaptuk *(7. táblázat)*, mint az átlagadatok esetén, csak a csoportok számozása tér el a két adatbázisra.[8] A főkomponensek ér-

8 A 7. táblázatban a mediánadatokra adódó csoportok és faktorok esetén feltüntettük azok megfelelőit az átlaggal elvégzett elemzés esetére. Látható, hogy az 1-es és 2-es faktor sorrendje megcserélődik. Mivel a csoportok számozása a klaszterezés esetén tetszőleges, ezért a kétféle számítás esetén a csoportszámok esetlegesen változnak. A mediánadatokra végzett elemzés esetén kapott 2-es csoport például a 4-es csoportnak felel meg az átlaggal végzett elemzés esetén.

telmezése is megegyezik, de az első két főkomponens sorrendje megváltozik: a legnagyobb magyarázó erővel (31%) bíró főkomponens az abszolút szélesség, a második főkomponens, amely a teljes variancia 25,5%-át magyarázza, a relatív szélesség változójának értelmezhető. Ez az eredmény feltehetően abból adódik, hogy a mediánadatok robosztusabbak, kevésbé érzékenyek a kiugró értékekre, mint az átlag, így a méretfüggő mutatók jelentősége relatíve megnőtt. A harmadik és negyedik főkomponens, ugyanúgy, mint az átlagadatoknál, a volumen és a mélység változójaként azonosítható.

Az átlag és a medián alapján számolt likviditási mutatók elhelyezkedése az első három főkomponens terében nagyon hasonló *(Melléklet III.)*.

*7. táblázat*

**Mediánadatokra a csoportközepek koordinátái a faktortérben**

| | Csoport 1 | Csoport 2 | Csoport 3 | Csoport 4 | Átlag faktor |
|---|---|---|---|---|---|
| **Faktor 1** | 0,1096 (0,0730) | 0,8971 (0,0198) | – 0,1792 (0,0891) | 0,0000 (0,0000) | **2** |
| **Faktor 2** | 0,8137 (0,0658) | 0,1604 (0,0539) | – 0,0393 (0,0393) | 0,0000 (0,0000) | **1** |
| **Faktor 3** | – 0,0353 (0,0353) | – 0,0310 (0,0310) | 0,7858 (0,0594) | 0,0000 (0,0000) | **3** |
| **Faktor 4** | – 0,0297 (0,0555) | – 0,0406 (0,0406) | 0,0380 (0,0380) | 0,9484 (0,0191) | **4** |
| **Faktor 5** | – 0,1265 (0,0922) | 0,0501 (0,0334) | 0,1214 (0,1036) | 0,0000 (0,0000) | **5** |
| **Átlag csoport** | **1** | **4** | **2** | **3** | |

*Megjegyzés:* Zárójelben tüntetjük fel a csoporton belüli szórást.

Elmondhatjuk, hogy vannak kisebb különbségek a mutatószámok idősorának átlagát, illetve mediánját véve, ugyanakkor a végeredmény közel azonos; tehát, bár az egyes mutatók átlaga és a mediánja eltér egymástól, de a mutatók együttmozgása keresztmetszeti (vállalatok közötti) értelemben stabil.

## 5. Alapvető és összetett likviditási mutatók

A 4. fejezetben láthattuk, hogy a főkomponensek terében a likviditási mutatók leírhatók egy 5 dimenziós koordinátarendszerben, ahol a koordináták az egyes likviditási aspektusok szerinti kitettséget jelentik. Megfordítva is igaz: a főkomponensek terében bármely pont értelmezhető likviditási mutatószámként. Speciálisan, ha az egyes tengelyeket megadó, egységnyi hosszúságú vektorokat tekintjük, akkor a meghatározott likviditási aspektust, és csakis azt mérő likviditási mutatószámot kapunk, amely az adott szempont szerinti alapvető likviditási mértékként értelmezhető. A főkomponensek terében kiválaszthatjuk az egyes likviditási mutatócsoportok csoportközepeit is. Ebben az esetben az adott csoport jellemző tulajdonságainak megfelelő komplex (összetett) likviditási mutatószámot kapunk.

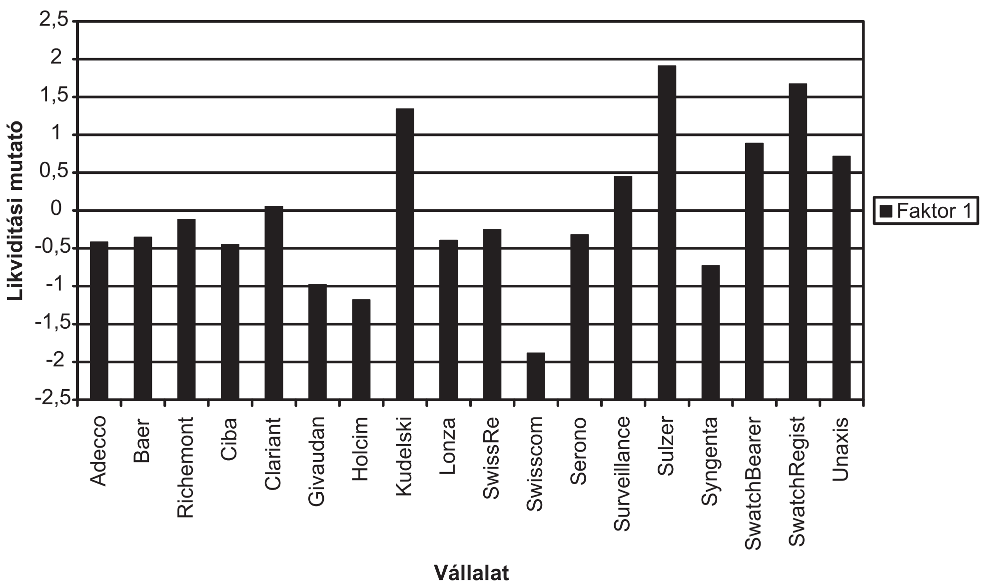
A következő alfejezetekben ezekre az alapvető és összetett mutatószámokra hozunk példát, és bemutatjuk az így kapott likviditási mutatószámok használatát.

## *5.1. Az 1. főkomponens mint likviditási mutató*

Amennyiben a főkomponensek terében az [1; 0; 0; 0; 0] pontot választjuk ki, akkor az 1. főkomponensnek megfelelő, alapvető likviditási mutatószámot kapjuk meg, azaz a likviditást kizárólag a relatív szélesség dimenzióban mérjük. Ennek úgy tudunk tartalmat adni, hogy megnézzük a vállalatok elhelyezkedését a faktortérben. Minden vizsgált vállalat megadható szintén 5 koordinátával a főkomponensek terében, a 2.1. alfejezet (3)-ban bemutatott kitettség (*score*) segítségével. Ha azonban csak az első faktor szerinti értékre vagyunk kíváncsiak, akkor csak az első koordináta értékét kell figyelembe vennünk, és megkapjuk a vállalatok likviditási mutatóját abban az esetben, ha a likviditási mérték az 1. főkomponens által megadott alapvető likviditási mutató. A *2. ábra* mutatja a vizsgált 18 vállalat esetén a likviditás értékét. Látható, hogy ha a likviditást kizárólag a relatív szélesség szempontból értékeljük, akkor a legkevésbé likvid vállalat a Sulzer, a leglikvidebb a Swisscom (a faktor alacsony értékei mérik a magas likviditást).

*2. ábra*

**Faktor 1 mint likviditási mutató értéke az egyes vállalatokra**

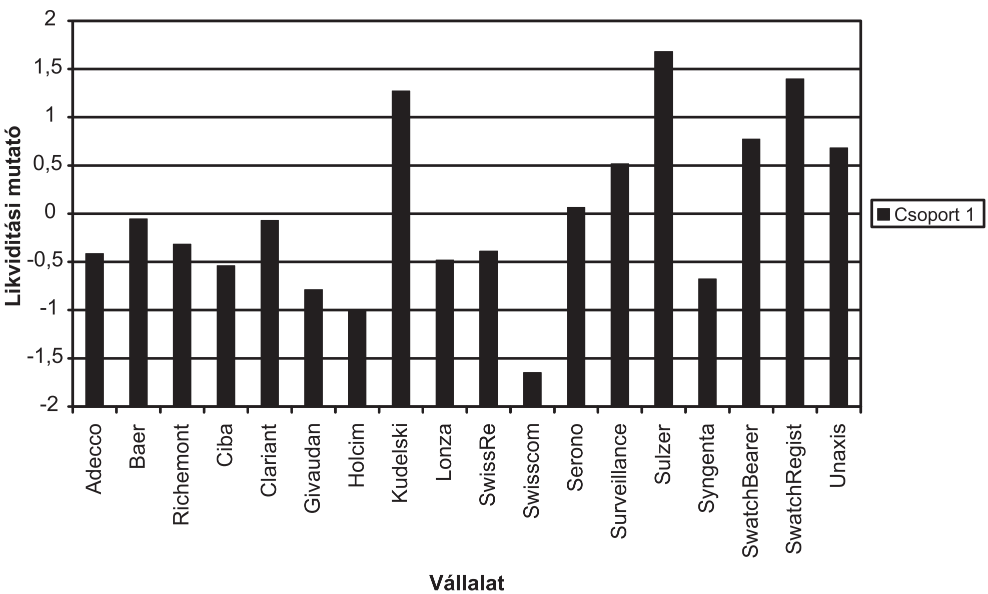


## *5.2. Az 1. csoport mint likviditási mutató*

Ha az 1. csoport középpontját tekintjük likviditási mutatószámnak, akkor a vállalatok kitettségeit a csoportközéppel súlyozva kapjuk meg a likviditási mutató értékét. Ebben az esetben a *3. ábrán* láthatók a vállalatok likviditási mutatói. A 3. ábra eredményei nagyon hasonlítanak az első főkomponens által megadott likviditási mutatókhoz a 2. ábrán. Ez nem meglepő, hiszen az első csoport leginkább az első faktorral korrelál. A különbség (például a Baer és a Richemont sorrendjének felcserélődése) annak tulajdonítható, hogy az első csoport kis mértékben ugyan, de más likviditási aspektusokat is figyelembe vesz a relatív szélességen kívül.

*3. ábra*

**Az első csoport középpontjának mint likviditási mutatónak az értéke az egyes vállalatokra**




## *5.3. Kevert likviditási mutató*

Az előző két példa (a főkomponensek és a csoportközepek használata) természetesen adódik az elemzésből. Ezek mellett tetszőlegesen megadhatók összetett mutatószámok, bármilyen súlyozás használatával. Példaként vehetjük a főkomponensek teréből a [0,5;0,5;0;0;0] pontot, azaz az első két faktor egyenlően súlyozott átlagát. Ez a relatív és abszolút szélességet egyforma súllyal veszi figyelembe. Bár ez a likviditási mutató a kereskedési adatokból közvetlenül nem számolható ki, de megkapható a vállalat score értékeinek és a [0,5;0,5;0;0;0] vektornak a skaláris szorzataként. A *8. táblázatban* láthatjuk a likviditási mutatók értékeit az első két főkomponens alapján, illetve az itt megadott, összetett likviditási mutató szerint. A vállalatokat sorba rendeztük a likviditási mutatók nagysága alapján. Láthatjuk, hogy az összetett mutató mindkét (relatív spread, abszolút spread) szempontot figyelembe veszi a likviditás megállapításánál. Mivel mindkét faktor alacsony értékkel jelzi a magas likviditást, ezért az összetett mutatószám esetén is az alacsony mutató jelenti a likvidebb részvényt.

*8. táblázat*

**Az első és második főkomponens és azok átlaga, mint likviditási mutató**

| Faktor 1 | | Faktor 2 | | Átlag | |
|---|---|---|---|---|---|
| Swisscom | –1,881 | Serono | 2,514 | Swisscom | –0,893 |
| Holcim | –1,180 | Sulzer | 1,481 | Syngenta | –0,671 |
| Givaudan | –0,975 | Surveillance | 1,306 | Richemont | –0,580 |
| Syngenta | –0,728 | Baer | 0,626 | Ciba | –0,575 |
| Ciba | –0,446 | Givaudan | 0,546 | Holcim | –0,557 |
| Adecco | –0,415 | Unaxis | 0,480 | Lonza | –0,535 |
| Lonza | –0,389 | Swisscom | 0,094 | Clariant | –0,479 |
| Baer | –0,349 | Holcim | 0,066 | Adecco | –0,469 |
| Serono | –0,316 | SwissRe | –0,195 | SwissRe | –0,222 |
| SwissRe | –0,249 | SwatchBearer | –0,403 | Givaudan | –0,215 |
| Richemont | –0,115 | Adecco | –0,524 | Baer | 0,139 |
| Clariant | 0,055 | Syngenta | –0,615 | SwatchBearer | 0,243 |
| Surveillance | 0,452 | Lonza | –0,680 | Kudelski | 0,269 |
| Unaxis | 0,719 | Ciba | –0,705 | SwatchRegist | 0,272 |
| SwatchBearer | 0,889 | Kudelski | –0,803 | Unaxis | 0,599 |
| Kudelski | 1,341 | Clariant | –1,013 | Surveillance | 0,879 |
| SwatchRegist | 1,673 | Richemont | –1,045 | Serono | 1,099 |
| Sulzer | 1,913 | SwatchRegist | –1,129 | Sulzer | 1,697 |

Az összetett likviditási mutatószámok definiálásánál szem előtt kell tartanunk, hogy milyen célból vizsgáljuk a likviditást, és annak megfelelően választhatunk mutatót a főkomponensek teréből. Figyelnünk kell továbbá arra is, hogy az egyes főkomponensek magas vagy alacsony értékei jelzik-e a magas likviditást.

## 6. Összegzés

Jelen cikkben a likviditási mutatók struktúrájának megértése céljából a likviditás különböző aspektusait számszerűsítő mutatókat elemeztük a Svájci Értéktőzsde részvényeiből álló adatbázis alapján. Főkomponens-elemzéssel sikerült olyan alapvető faktorokat azonosítanunk, amelyek a likviditás jelenségét leírják. Ezek a faktorok a következők: relatív piaci szélesség, abszolút piaci szélesség, piaci volumen és a mélység. A likviditási mutatószámok fontosabb csoportjai egyértelműen azonosíthatók ezen faktorok mentén. Adatelemzésünk eredményei megnyugtató információkat adnak a likviditási mutatószámok működéséről. Egyrészt ezek az eredmények összhangban vannak a likviditási mutatószámokról alkotott, korábbi elképzelésekkel, azaz a faktorok és csoportok a szakirodalom terminológiája és az intuíciók alapján jól értelmezhetők. Másrészt: a faktorok és csoportok viselkedése keresztmetszetileg stabilnak mutatkozott, mivel az átlag és a mediánadatok is ugyanarra az eredményre vezettek.

Az itt bemutatott elemzés lehetőséget ad arra, hogy az eddigi mutatószámok alapján, a főkomponensek segítségével a különböző likviditási mutatókat tetszőleges súlyban tartalmazó likviditási mutatókat definiáljunk.

Vizsgálatunk korlátja, hogy az elemzés csak a likviditási mutatók közötti lineáris kapcsolatokra irányult, illetve az elemzés jellegéből adódóan, az eredmények csak a rendelkezésre álló adatbázisra és meghatározott időszakra érvényesek. A likviditási struktúra más adatokon történő tesztelése, valamint időbeli stabilitásának vizsgálata további kutatás témája lehet.

## Irodalomjegyzék

Baran Sándor–Fazekas István–Glevitzky Béla–Iglói Endre–Ispány Márton–Kalmár István–Nagy Márta–Tar László–Verdes Emese [2000]: Bevezetés a matematikai statisztikába. Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen

Kovács Erzsébet [2009]: Pénzügyi adatok statisztikai elemzése, Tanszék Kft., Budapest

Kluger, B. D.–Stephan, J. [1997]: Alternative Liquidity Measures and Stock Returns. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, Vol. 8., január, 19–36. o.

Kutas Gábor–Végh Richárd [2005]: A Budapest Likviditási Mérték bevezetéséről – A magyar részvények likviditásának összehasonlító elemzése a budapesti, a varsói és a londoni értéktőzsdéken. *Közgazdasági Szemle* LII., július–augusztus, 686–711. o.

Pascual, R.–Escribano, A.–Tapia, M. [2004]: On the Bi-Dimensionality of Liquidity. *The European Journal of Finance*, Vol. 10. No. 6., 542–566. o.

Wyss, v. R. [2004]: Measuring and Predicting Liquidity in the Stock Market, Dissertation, Universität St. Gallen

## Melléklet

### *I. Likviditási mutatók számítása*[9]

- Kereskedési volumen (*trading volume*) $Q_t = \sum_{i=1}^{N_t} q_i$

  $N_t$: ügyletek száma $t$–1 és $t$ közötti időszakban
  $q_i$: $i$. tranzakcióban a részvények darabszáma
- Forgalom (*turnover*) $V_t = \sum_{i=1}^{N_t} p_i q_i$

  $N_t$: ügyletek száma $t$–1 és $t$ közötti időszakban
  $q_i$: $i$. tranzakcióban a részvények darabszáma
  $p_i$: $i$. tranzakció árfolyama

- Mélység (*depth*) $D_t = q_t^A + q_t^B$
  $q_t^A$: $t$ időpontban érvényes legjobb eladási árhoz tartozó mennyiség
  $q_t^B$: $t$ időpontban érvényes legjobb vételi árhoz tartozó mennyiség

- Mélység logaritmusa (*log depth*) $Dlog_t = ln(q_t^A)+ln(q_t^B)$
  $q_t^A$: $t$ időpontban érvényes legjobb eladási árhoz tartozó mennyiség
  $q_t^B$: $t$ időpontban érvényes legjobb vételi árhoz tartozó mennyiség
- Mélység dollárban (*dollar depth*) $D\$_t = \dfrac{q_t^A \cdot p_t^A + q_t^B \cdot p_t^B}{2}$

  $q_t^A$: $t$ időpontban érvényes legjobb eladási árhoz tartozó mennyiség
  $p_t^A$: $t$ időpontban érvényes legjobb eladási árfolyam
  $q_t^B$: $t$ időpontban érvényes legjobb vételi árhoz tartozó mennyiség
  $p_t^B$: $t$ időpontban érvényes legjobb vételi árfolyam

- Tranzakció szám (*number of transaction*)
  $N_t$: ügyletek száma $t$–1 és $t$ közötti időszakban

- Megbízások száma (*number of orders*)
  $NO_t$: megbízások száma $t$–1 és $t$ közötti időszakban

- Abszolút spread (*absolute spread*) $Sabs_t = p_t^A - p_t^B$
  $p_t^A$: $t$ időpontban érvényes legalacsonyabb eladási árfolyam
  $p_t^B$: $t$ időpontban érvényes legmagasabb vételi árfolyam

- Abszolút spread logaritmusa (*Log absolute spread*)
  $LogSabs_t = ln(Sabs_t) = ln(p_t^A - p_t^B)$
  $p_t^A$: $t$ időpontban érvényes legalacsonyabb eladási árfolyam
  $p_t^B$: $t$ időpontban érvényes legmagasabb vételi árfolyam

9 L. Rico von Wyss [2004]

- Relatív spread középárfolyammal
  (*relative spread calculated with mid price*)
  $$SrelM_t = \frac{p_t^A - p_t^B}{p_t^M}$$
  $p_t^A$: *t* időpontban érvényes legalacsonyabb eladási árfolyam
  $p_t^B$: *t* időpontban érvényes legmagasabb vételi árfolyam
  $p_t^M$: *t* időpontban érvényes középárfolyam

- Relatív spread utolsó kötési árfolyammal
  (*relative spread calculated with last trade*) $Srelp_t = \frac{p_t^A - p_t^B}{p_t}$
  $p_t^A$: *t* időpontban érvényes legalacsonyabb eladási árfolyam
  $p_t^B$: *t* időpontban érvényes legmagasabb vételi árfolyam
  $p_t$: *t* időpont előtti utolsó tranzakció árfolyama

- Relatív spread logárfolyamok alapján (*relative spread of log prices*)
  $Srellog_t = ln(p_t^A) - ln(p_t^B)$
  $p_t^A$: *t* időpontban érvényes legalacsonyabb eladási árfolyam
  $p_t^B$: *t* időpontban érvényes legmagasabb vételi árfolyam

- Relatív spread logárfolyamok alapján logaritmusa
  (*log relative spread of log prices*) $LogSrellog_t = ln(Srellog_t)$

- Effektív spread (*effective spread*) $Seff_t = \left| p_t - p_t^M \right|$
  $p_t$: *t* időpont előtti utolsó tranzakció árfolyama
  $p_t^M$: *t* időpontban érvényes középárfolyam

- Relatív effektív spread középárfolyammal
  (*relative effective spread calculated with mid price*)
  $$SeffrelM_t = \frac{\left| p_t - p_t^M \right|}{p_t^M}$$
  $p_t$: *t* időpont előtti utolsó tranzakció árfolyama
  $p_t^M$: *t* időpontban érvényes középárfolyam

- Relatív effektív spread utolsó árfolyammal
  (*relative effective spread calculated with last trade*)
  $$Seffrelp_t = \frac{\left| p_t - p_t^M \right|}{p_t}$$
  $p_t$: *t* időpont előtti utolsó tranzakció árfolyama
  $p_t^M$: *t* időpontban érvényes középárfolyam

- Jegyzési meredekség (*quote slope*)

$$QS_t = \frac{Sabs_t}{D\log_t} = \frac{(p_t^{\mathrm{A}} - p_t^B)}{\ln(q_t^A) + \ln(q_t^B)}$$

$p_t^A$: $t$ időpontban a legjobb eladási árfolyam
$p_t^B$: $t$ időpontban a legjobb vételi árfolyam
$q_t^A$: $t$ időpontban érvényes legjobb eladási árhoz tartozó mennyiség
$q_t^B$: $t$ időpontban érvényes legjobb vételi árhoz tartozó mennyiség

- Log jegyzési meredekség (*log quote slope*)

$$LogQS_t = \frac{Srel\log_t}{D\log_t} = \frac{\ln(p_t^{\mathrm{A}} / p_t^B)}{\ln(q_t^A \cdot q_t^B)}$$

- Módosított log jegyzési meredekség (*adjusted log quote slope*)

$$LogQSadj_t = LogQS_t \cdot \left(1 + \left|\ln(q\mathrm{B} / q / A)\right|\right)$$

- Összetett likviditási mutató (*composite liquidity*) $CL_t = \dfrac{SrelM_t}{D\$_t}$
- Likviditási ráta 1 (*liquidity ratio 1*)

$$LR1_t = \frac{V_t}{|\ r_t\ |} = \frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} p_i q_i}{|\ r_t\ |}$$

$N_t$: ügyletek száma $t$–1 és $t$ közötti időszakban
$q_i$: $i$. tranzakcióban a részvények darabszáma
$p_i$: $i$. tranzakció árfolyama
$r_t$: $t$–1 és $t$ közötti időszak hozama

- Likviditási ráta 3 (*liquidity ratio 3*) $LR3_t = \dfrac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} |\ r_i\ |}{N_t}$

$N_t$: ügyletek száma $t$–1 és $t$ közötti időszakban
$r_t$: $t$–1 és $t$ közötti időszak hozama

- Flow ráta (*flow ratio*) $FR_t = N_t \cdot V_t$

$N_t$: ügyletek száma $t$–1 és $t$ közötti időszakban
$V_t$: forgalom

- Megbízási ráta (*order ratio*) $OR_t = \dfrac{|\ \mathrm{q}_\mathrm{t}^\mathrm{B} - q_t^A\ |}{V_t}$

$q_t^A$: $t$ időpontban érvényes legjobb eladási árhoz tartozó mennyiség
$q_t^B$: $t$ időpontban érvényes legjobb vételi árhoz tartozó mennyiség
$V_t$: $t$–1 és $t$ időpont közötti időszak forgalma

- Piaci befolyás (*market impact*) $MI_t^{V*} = p_t^{A,V*} - p_t^{B,V*}$

$p_t^{A,V*}$: meghatározott kereskedési mennyiséghez ($V$*) tartozó eladási árfolyam
$p_t^{B,V*}$: meghatározott kereskedési mennyiséghez ($V$*) tartozó vételi árfolyam
$V$*: az adatok számításához használt volumen: 500 000 CHF

- Eladási oldali piaci befolyás (*market impact for the ask-side*)
  $MI_t^{A,V*} = p_t^{A,V*} - p^M$
  $p_t^{A,V*}$: meghatározott kereskedési mennyiséghez ($V$*) tartozó eladási árfolyam
  $p^M$: középárfolyam

- Vételi oldali piaci befolyás (*market impact for the bid-side*)
  $MI_t^{B,V*} = p^M - p_t^{B,V*}$
  $p^M$: középárfolyam
  $p_t^{B,V*}$: meghatározott kereskedési mennyiséghez ($V$*) tartozó vételi árfolyam

- Piaci befolyás mélysége eladási oldalon (*depth for price impact ask side*)
  $DI_t^A(k) = Q_k^A$
  $Q_k^A$: az eladási árfolyam k nagyságú elmozdulásához szükséges mennyiség
  $k$: az adatok számításához használt elmozdulás 2%

- Piaci befolyás mélysége vételi oldalon (*depth for price impact bid side*)
  $DI_t^B(k) = Q_k^B$
  $Q_k^B$: a vételi árfolyam $k$ nagyságú elmozdulásához szükséges mennyiség
  $k$: az adatok számításához használt elmozdulás 2%

- Árfolyamhatás eladási oldalon *(price impact for the ask-side)*

$$PI^A(q) = \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{K} p_k \cdot q_k}{q \cdot p^M}\right); \qquad q = \sum_{k=1}^{K} q_k$$

  $q$: 10 000 db részvény vétele $k$ különböző árfolyam mellett teljesíthető adott időpontban
  $q_k$: $k$-dik mennyiség
  $p_k$: $k$-dik árfolyam
  $p^M$: középárfolyam

- Árfolyamhatás vételi oldalon *(price impact for the bid-side)*

$$PI^B(q) = -\ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{K} p_k \cdot q_k}{q \cdot p^M}\right); \quad q = \sum_{k=1}^{K} q_k$$

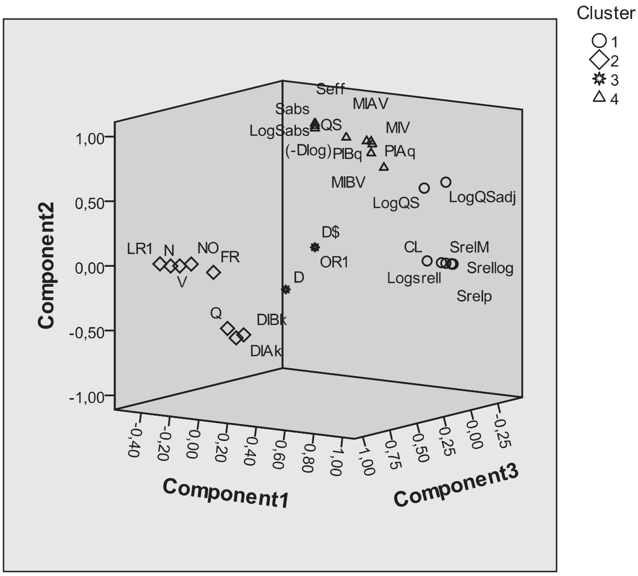
  $q$: 10 000 db részvény eladása $k$ különböző árfolyam mellett teljesíthető adott időpontban
  $q_k$: $k$-dik mennyiség
  $p_k$: $k$-dik árfolyam
  $p^M$: középárfolyam

*II. Komponensmátrix 0,3 abszolút érték alatti korrelációk kihagyásával*

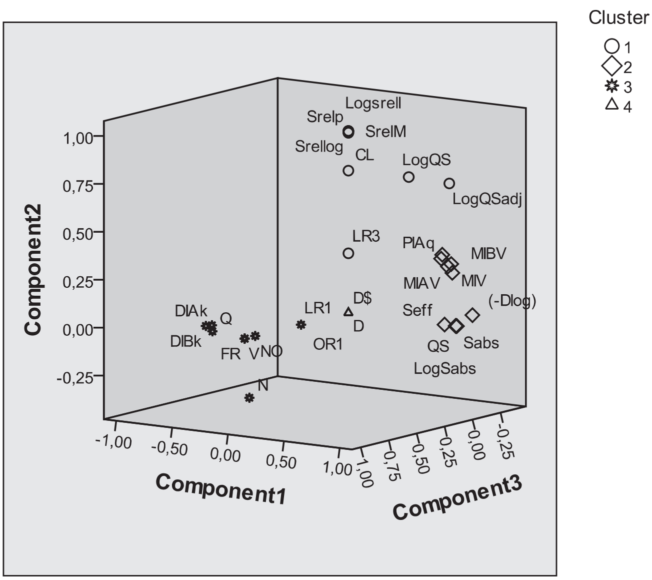
| Elforgatott komponensmátrix | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Főkomponens | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Q | | -,461 | ,815 | | |
| V | -,316 | | ,912 | | |
| D | | | | ,887 | |
| Dlog | | -,794 | | ,402 | |
| D$ | | | | ,947 | |
| N | | | ,878 | | -,334 |
| NO | | | ,795 | | -,429 |
| Sabs | | ,958 | | | |
| LogSabs | | ,916 | | | |
| SrelM | ,951 | | | | |
| Srelp | ,951 | | | | |
| Srellog | ,951 | | | | |
| Logsrellog | ,906 | | | | |
| Seff | | ,960 | | | |
| Seffrelp | ,956 | | | | |
| SeffrelM | ,956 | | | | |
| QS | | ,936 | | | |
| LogQS | ,760 | ,560 | | | |
| LogQSadj | ,698 | ,545 | | ,322 | |
| CL | ,775 | | | | -,452 |
| LR1 | -,410 | | ,886 | | |
| LR3 | ,883 | | | | -,365 |
| FR | | | ,942 | | |
| OR1 | | | | ,899 | |
| MIV | ,401 | ,851 | | | |
| MIAV | ,388 | ,874 | | | |
| MIBV | ,385 | ,780 | | | |
| DIAk | | -,544 | ,665 | | ,321 |
| DIBk | | -,554 | ,733 | | ,316 |
| PIAq | ,476 | ,683 | | | ,339 |
| PIBq | ,361 | ,875 | | | |

**III. Mutatók az első három főkomponens terében**

## Átlagadatok




## Mediánadatok



Balog Dóra–Csóka Péter–Pintér Miklós

# Tőkeallokáció nem likvid portfóliók esetén[1]

**A kockázat jó mérése és elosztása elengedhetetlen a bankok, biztosítók, befektetési alapok és egyéb pénzügyi vállalkozások belső tőkeallokációjához vagy teljesítményértékeléséhez. A cikkben bemutatjuk, hogy a koherens kockázati mértékek axiómáit nem likvid portfóliók esetén is el lehet várni. Így mérve a kockázatot, ismertetünk a kockázatelosztásra vonatkozó két kooperatív játékelméleti cikket. Az első optimista, eszerint mindig létezik stabil, az alegységek minden koalíciója által elfogadható, általános módszer a kockázat (tőke) elosztására. A második cikk pesszimista, mert azt mondja ki, hogy ha a stabilitás mellett igazságosak is szeretnénk lenni, akkor egy lehetetlenségi tételbe ütközünk.**

## 1. Bevezetés

A *tőkeallokáció* a kockázatok fedezésére szükséges tőke felosztása az egyes üzletágakra, portfólióelemekre vagy más módon meghatározott alegységekre. A Bázel II. tőkeegyezmény bevezetésével, a felkészüléssel a Bázel III.-ra és a pénzügyi piacok szabályozásának szigorodásával párhuzamosan, a tőkeallokáció egyre nagyobb szerephez jut napjainkban.

A fenti értelemben háromféle tőkefogalmat különböztethetünk meg: *gazdasági tőke* (economic capital, l. *Tasche* [2004]) alatt olyan tartalékot értünk, amely a portfólión elszenvedett veszteségek fedezésére szolgál, és valamilyen kockázati mérték határozza meg. A gazdasági tőke tehát az a minimális tőke, amely az adott pénzintézet, biztosító, vagy egyéb pénzügyi vállalkozás saját belső kockázatmérése alapján kalkulált, várható veszteségeire nyújt fedezet. Ezzel szemben a *szabályozói tőke* egy külső szabályozó által elvárt, minimális tőkeszükségletet jelent. Végül a harmadik tőkefogalom a *rendelkezésre álló tőke* (saját tőke és szavatoló tőke), amely a jelenleg birtokolt tőke mennyiségét jelenti, és remélhetőleg mind a gazdasági, mind a szabályozói tőke elvárásainak megfelel.

A pénzintézeteknek két okból szükséges tőkét tartalékolniuk: egyrészt azért, hogy elkerüljék a fizetésképtelenség, illetve a csőd állapotát, másrészt pedig azért, hogy megfeleljenek a szabályozó előírásainak. Mivel a tartandó tőkét mindig valamilyen kockázati mérték határozza meg (a szabályozói tőke esetén ezt a kockázati mértéket szabályozói kockázati mértéknek hívhatjuk), ezért ebben a keretben a tőkeallokáció és a kockázatelosztás szinonimaként kezelhető.

A kockázatot sokféleképpen lehet mérni. A lehetséges módszerekről és azoknak a hasznosságelmélethez, sztochasztikus dominanciához és sztochasztikus programozáshoz való kapcsolatáról jó áttekintést ad *Krokhmala* et al. [2011]. Kiemelt módszernek tekinthető a *koherens kockázati mértékek* családja (*Artzner* et al. [1999]), ahol a szerzők a következő

1 Csóka Péter köszöni a TÁMOP-4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0005 projekt támogatását. Pintér Miklós kutatásait az OTKA kutatási pályázat és az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíjának a támogatásával végezte.

négy természetes követelményt (axiómát) támasztják egy megfelelő (koherens) kockázati mértékkel szemben: monotonitás, transzláció invariancia, pozitív homogenitás és szubadditivitás. *Csóka* et al. [2007] az általános egyensúlyelméleti megközelítés szempontjából mindegyik axiómát elfogadhatónak találta, *Acerbi* és *Scandolo* [2008] pedig újraértelmezte azokat úgy, hogy *nem likvid portfóliókra* is igazak legyenek. A szubadditivitás a diverzifikációs hatás a matematika nyelvén megfogalmazva.

Ebben a tanulmányban bemutatjuk a koherens kockázati mértékek melletti tőkeallokáció lehetőségeire vonatkozó, főbb kooperatív játékelméleti eredményeket. Csóka et al. [2009] megmutatta, hogy a koherens kockázati mértékekkel minden kockázatelosztási szituáció megfeleltethető ún. teljesen kiegyensúlyozott vagy egzakt átruházható hasznosságú kooperatív játéknak, attól függően, hogy az eredeti modellben van vagy nincs aggregált kockázat. Ugyanakkor Csóka és *Pintér* [2010] kooperatív játékelméleti módszereket használva)[2] megmutatja, hogy nincs a kockázatoknak olyan elosztása, ami eleget tesz három erősen elvárható, „igazságos" feltételnek (lásd a *4.4. tételt*).

A cikk felépítése a következő: először áttekintjük a tőkeallokáció gyakorlati alkalmazásait, majd egyet visszalépve bemutatjuk, hogyan lehet az allokálandó tőkét meghatározni egy koherens kockázati mértékkel. A következő részben formálisabban is ismertetjük a kooperatív játékelméleti eredményeket a tőkeallokáció lehetőségeire vonatkozóan. Ezután a lehetséges tőkeallokációs módszereken megyünk végig, azt vizsgálva, hogy (szükségszerűen) milyen tulajdonságot nem teljesítenek. Zárásként összefoglaljuk az eredményeket.

## 2. A TŐKEALLOKÁCIÓ GYAKORLATI ALKALMAZÁSAI

A tőkeallokáció a gyakorlatban az alábbi esetekben fordul elő:

A bankok üzletágakra osztják fel a tartandó tőkét. Mivel a tőke tartása a bank számára költség (hiszen vagy készpénz, vagy kockázatmentes, alacsony hozamú eszköz tartását jelenti), fontos tudni, hogy a bank egyes üzletágai közül melyik mennyiben járul hozzá a teljes tőkeigényhez. A tőkeallokációba bevont üzletágak tipikusan az alábbiak a kereskedelmi bankok esetén: retail üzletág, ezen belül lakossági, kis- és középvállalati, valamint privát banki szolgáltatások; kereskedelmi banki tevékenységek; vállalati üzletág; treasury; de jellemző a lízing és a biztosítási üzletágak jelenléte is.

A tőkeallokáció a *stratégiai* döntéshozatalban is megjelenhet. Amikor egy pénzintézet új üzletággal kívánja bővíteni a tevékenységét, esetleg egy működő üzletágat tervez újabb tevékenységekkel, termékekkel bővíteni, akkor természetesen annak az alapján dönt, hogy e lépés hatására hogyan változik a teljes banki jövedelmezőség. Ilyenkor nem elég az új üzletág várható hozamát figyelembe venni; jelentősen befolyásolja a döntést az is, hogy az új divízió hatására mennyivel növekszik a bank és a már működő üzletágak tőkeszükséglete – ez szintén az allokációs módszerek segítségével határozható meg.

Amennyiben nem üzletágakat, hanem termékeket tekintünk, akkor a tőkeallokációs módszerek *termékárazásra* is használhatók. Ilyenkor az előzőekben ismertetetthez hason-

2 A kooperatív játékelméleti módszerek használatára magyar nyelven lásd Csóka [2003]; Pintér [2007; 2009].

lóan azt vizsgálják, hogy az új termék milyen többletterhet ró majd a bankra, mennyivel növeli meg a vállalkozás tőkeszükségletét, majd az árat ennek megfelelően határozzák meg.

Népszerű alkalmazási terület a *teljesítményértékelés* is, vagyis annak a meghatározása, hogy egy-egy üzletág mennyire jövedelmező. A tőkeallokáció ebben azért játszik fontos szerepet, mert nem elég pusztán azt vizsgálni, hogy mennyi a divízió abszolút értékben elért jövedelme, hanem ezt a tőkeszükséglethez kell viszonyítani. Ennek a mérését szolgálja például a kockázattal korrigált hozam, a RORAC (Return On Risk-Adjusted Capital; *Tasche* [2008]).

Az *egyéni teljesítményértékelésben* a portfóliókezelőknél is jelentős szerepe van a tőkeallokációnak. Ez az egyes üzletágaknak az előző bekezdésben tárgyalt teljesítményértékeléséhez hasonlóan zajlik, csak éppen egyénekre lebontva. Néhány fejlett pénzintézetben a tőkeallokációs módszerek segítségével történő teljesítményértékelés szolgál a vezetők, menedzserek javadalmazásának (bónuszainak) alapjául, de egyes pénzügyi vállalkozásokban még az alsóbb (beosztotti) szinteken is megfigyelhető ez a gyakorlat.

Végül a banki tőkeallokáció alkalmazási területeinek áttekintésekor a *kockázati limitek* kialakításáról sem szabad megfeledkeznünk. Ez esetben nem a bank egyes üzletágai között kell a kockázatot megosztani, hanem egy konkrét divízión, a treasuryn belül. Az üzletág elsősorban piaci, de hitelkockázat szempontjából is kiemelt figyelmet igényel, hiszen itt bonyolódik a bank minden tőzsdei ügylete (pl. deviza- és értékpapír-kereskedés). Kockázati limiteket mind portfóliókra, mind az egyes kereskedőkre fel lehet állítani a treasuryn belül. Ilyenkor tehát azt a tőkemennyiséget osztják tovább a kereskedőkre vagy portfóliókra, amelyet a bank üzletágai közötti tőkeallokáció során a treasuryre osztottak. Amennyiben a kereskedőkről beszélünk, ugyanez a „rá osztott" kockázat – amely ekkor limitként funkcionál – szolgálhat az egyéni teljesítményértékelés alapjául is.

A hazai bankok tőkeallokációs gyakorlatával kapcsolatban eddig mindössze egy felmérés készült (*Balogh* [2006]). A vizsgálat megállapította, hogy a hazai bankok leginkább csak szabályozói alapon meghatározott tőkét számítottak az egyes divíziókra, a kockázatalapon számított belső tőkeallokáció nem volt jellemző Magyarországon. *Homburg* és *Scherpereel* [2005] a német bankok tőkeallokációs gyakorlatával foglalkozik. A szerzők azt találták, hogy Németországban a bankok 56%-a valójában nem használt tőkeallokációs módszereket, mindössze az egyes üzletágak külön-külön meghatározott kockázatát használta fel erre a célra (ami a diverzifikációs hatás hiánya miatt azt jelenti, hogy összességében a szükségesnél több tőkét tart a bank).

Manapság sokat foglalkoznak a tőkeallokációval a biztosítótársaságok (*Buch* és *Dorfleitner* [2008]; *Kim* és *Hardy* [2009]): itt elsősorban annak a meghatározására használják, hogy az egyes biztosított kockázatokra mennyi tőke tartalékolása szükséges, hogyan ossza meg a társaság a teljes tőkéjét az egyes kockázatok, illetve az egyes üzletágak között.

A tőkeallokáció alkalmazási területeinek áttekintése után nézzük meg, hogyan lehet az allokálandó tőkét egy megfelelő, a piacok „kiszáradásának" lehetőségét is figyelembe vevő kockázati mértékkel meghatározni.

## 3. Koherens kockázati mértékek nem likvid portfóliók esetén

A koherens kockázati mértékeket Csóka et al. [2007] jelölései alapján definiáljuk.

Jelölje *V* a véges számú világállapotok számát, és tekintsük a realizációs vektorok $\Re^V$ halmazát. A *v* világállapot bekövetkezési valószínűsége legyen $p_v$ , ahol $\sum_{v=1}^{V} p_v = 1$ .

Az $X \in \Re^V$ vektor megadja egy portfólió lehetséges nyereségeit/veszteségeit egy adott jövőbeli időpontra vonatkozóan. A portfólió kifizetése *v* világállapot esetén $X^v$, ahol a negatív értékek veszteséget jelentenek.

A $\rho : \Re^v \to \Re$ függvényt *kockázati mérték*nek nevezzük, ez adja meg a portfólió kockázatát mai szemmel nézve.

### *3.1. definíció*

Legyen $X, Y \in \Re^V$ két realizációs vektor, és legyen *h*>0 valós szám. A $\rho : \Re^v \to \Re$ függvényt *koherens kockázati mérték*nek nevezzük (Artzner et al. [1999]), ha kielégíti a következő axiómákat:

- *Monotonitás:* ha $X \geq Y$, akkor $\rho(X) \leq \rho(Y)$,
- *Szubadditivitás:* $\rho(X+Y) \leq \rho(X)+\rho(Y)$,
- *Pozitív homogenitás*: $\rho(hX)=h\rho(X)$,
- *Transzláció invariancia*: $\rho(X+a1^v)=\rho(X)-a$.

A monotonitás értelmezése a következő: ha az *X* portfólió kifizetése tetszőleges világállapot estén legalább akkora, mint az *Y*-é, akkor az *X* kockázata (tőkekövetelménye) nem lehet nagyobb. A pozitív homogenitást (és *X* = *Y* esetén a szubadditivitást) szokták azért kritizálni – a likviditást is figyelembe véve –, mert kétszer akkora portfólió kockázata lehet akár több mint kétszer akkora is.

Acerbi és Scandolo [2008] ehhez hozzáteszi, hogy ilyen alapon a transzláció invariancia (amit ők inkább transzláció kovarianciának hívnának) ugyancsak kritizálható. Tegyük fel, hogy 1 millió forintot kell fizetünk 10 nap múlva, és birtoklunk egy nem likvid kockázatos eszközt, valamint félmillió forintot. Ekkor 1 millió forintot hozzáadva a portfóliónkhoz, a tőkekövetelmény több mint 1 millió forinttal is csökkenhet, hiszen nem kell olcsón likvidálnunk a kockázatos eszközünket. Ugyanakkor a szerzők azt is hozzáteszik, hogy az összes eddigi kritika csalóka volt, az axiómák nem a portfóliók nagyságáról szólnak (kétszer annyi részvény), hanem a portfóliók kifizetéséről, értékéről (kétszer akkora értékű részvény).

A portfólió nagysága és értéke közötti lineáris kapcsolat nem likvid piacok esetén felborul. Ilyenkor a portfóliónk jövőbeli értéke attól függ, hogy milyen jövőbeli korlátaink vannak (liquidity policy): például 1 forintot kell fizetnünk 10 nap múlva, kockázati limiteket kell betartanunk, az általunk kezelt alap befektetési politikája korlátoz stb. Portfólióértékként értelmezve az *X*, *Y* változókat, likviditási alapon egyik axióma sem támadható. Például a példához visszatérve, a transzláció invariancia azt jelentheti, hogy ha ma 0,5 millió forintot hozzáadok a portfóliómhoz, annak a kockázata 1 millió forinttal csökken, mert a portfólióm jövőbeli értéke nő 1 millió forinttal (hiszen így már ki tudjuk fizetni az 1 millió forintot).

A továbbiakban feltesszük, hogy minden világállapotnak azonos a bekövetkezési valószínűsége. Ez nem jelentős megkötés, hiszen egyrészt, ha múltbeli adatokból dolgozunk historikus alapon, akkor mindegyik múltbeli realizáció azonos esélyűnek tekinthető; másrészt, ha valamelyik világállapotnak nagyobb az esélye, akkor (racionális számok esetén) könnyen szerkeszthetünk egy új világállapotteret, amelyikben minden állapotnak azonos az esélye, és ha az eredeti állapotokat kellő számban ismételjük, akkor az eredeti állapotoknak megfelelő valószínűségekhez jutunk.

A koherens kockázati mértékek családja bő, azonos valószínűségű világállapotok esetén lényegében leírható úgy, mint egy súlyozott átlagos maximális veszteség; ha a legnagyobb súly a legnagyobb veszteségen van, a következő legnagyobb súly a második legnagyobb veszteségen, és így tovább. Ezeket a kockázati mértékeket spektrális kockázati mértékeknek hívják, Acerbi és Simonetti [2002] portfólió-optimalizálásnál vizsgálja őket.

Speciális esetként kapjuk az *expected shortfall* kockázati mértéket (Acerbi és Tasche [2002]), ami a legrosszabb *k* százaléknyi veszteség átlaga. Ennél is speciálisabb eset a maximális veszteség, ami tehát szintén koherens.

## 4. A tőkeallokáció kooperatív játékelméleti modellje

Tegyük fel, hogy egy pénzügyi vállalkozásnak $n$ divíziója van, jelölje $N = \{1, 2,...,n\}$ a divíziók halmazát, $X_i$ pedig legyen az $i$ divízió lehetséges jövőbeli nyereségeit/veszteségeit leíró, realizációs vektor. $S \subseteq N$ koalíció alatt a divíziók egy $S$ részhalmazát értjük. Adott $\rho$ koherens kockázati mérték esetén egy $c{:}2^N \to N$ *kockázatelosztási (tőkeallokációs) játék* megadja a divíziók tetszőleges koalíciójának kockázatát. Formálisan: minden $S \subseteq N$ koalícióra:

$$c(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad S = \emptyset \\ \rho\left(\sum_{i \in S} X_i\right) & \text{különben} \end{cases}.$$

### *4.1. példa*

Három divíziónk van, tehát $N = \{1, 2,3\}$, és hat világállapottal (V) írjuk le a valószínűségi változókat. Az alkalmazott kockázati mérték ($\rho$) a *maximális veszteség* koherens kockázati mérték.

*1. táblázat*

**A maximális veszteség által generált kockázatelosztási játék**

| V\S | {1} | {2} | {3} | {1,2} | {1,3} | {2,3} | {1,2,3} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | –10 | –2 | 13 | –12 | 3 | 11 | 1 |
| 2 | 13 | 6 | 11 | 19 | 24 | 17 | 30 |
| 3 | –2 | 6 | 5 | 4 | 3 | 11 | 9 |
| 4 | –6 | –11 | –3 | –17 | –9 | –14 | –20 |
| 5 | 10 | –14 | –1 | –4 | 9 | –15 | –5 |
| 6 | 10 | 6 | 0 | 16 | 10 | 6 | 16 |
| c(S) | 10 | 14 | 3 | 17 | 9 | 15 | 20 |

A legalsó sorban látható a maximális veszteség koherens kockázati mérték által meghatározott c kockázatelosztási játék.

Vegyük észre, hogy a három divízió összefogásával jelentős diverzifikációs hatás érhető el ahhoz képest, mint ha a divíziók külön-külön kezelnék kockázatukat:

$$c(N) = 20 < 27 = \sum_{i \in N} c(\{i\})$$

Felmerül a kérdés, hogy miként osszuk el a diverzifikációs hatás eredményeként jelentkező megtakarítást az egyes divíziók között. Erre a kérdésre az átruházható hasznosságú kooperatív játékok elméletében alkalmazott *megoldáskoncepció* segítségével kísérelünk meg választ adni.

Legyen $\Gamma_k^N$ az N játékoshalmazzal rendelkező kockázatelosztási játékok osztálya. Ekkor $\Psi : \Gamma_k^N \to 2^{\Re^N}$ függvényt a kockázatelosztási játékok osztályán értelmezett *megoldás*nak nevezzük. A Ψ megoldás értelmezése a következő: minden kockázatelosztási játék egy kockázatelosztási szituációt reprezentál. Egy Ψ megoldás azt határozza meg, hogy az egyes kockázatelosztási szituációkban az egyes divíziók (játékosok) mennyivel részesednek az összkockázatból: $c(N) = \rho\left(\sum_{i \in N} X_i\right)$. Másképpen fogalmazva, adott *c* kockázatelosztási játék esetén megoldáson az N-komponensű vektorok egy olyan Ψ(c) halmazát értjük, amely vektorok i komponense megadja az i divízióra allokált tőkét. Tehát Ψ(c) az adott kockázatelosztási szituáció esetén a Ψ megoldás által javasolt lehetséges tőkeallokációk halmaza.

A kooperatív játékelméleti irodalom két népszerű megoldása: a *mag* (*Gilles* [1959]) és a *Shapley-érték* (Shapley [1953]).

Egy $c \in \Gamma_k^N$ kockázatelosztási játék *magja* a következő halmaz[3]:

$$\text{Mag}(c) = \left\{ x \in \Re^N : \sum_{i \in N} x_i = c(N) \quad \text{és} \quad \text{minden} \quad S \subseteq N - \text{re} \quad \sum_{i \in S} x_i \le c(S) \right\} .$$

A mag értelmezése a következő: az összkockázat olyan elosztásait tartalmazza, amelyek a divíziók egyik csoportjához sem rendelnek akkora allokált tőkét, amelyik meghaladja az adott divíziók együttes kockázatát. Tehát a csoportracionális (az egyfős csoportot is beleérve) elosztások halmaza.

Ha egy kockázatelosztási játékot csak a játékosok egy részhalmazán tekintünk, akkor *részjátékról* beszélünk. Azokat a játékokat, amelyeknek a magja tetszőleges részjáték esetén sem üres, *teljesen kiegyensúlyozott* játékoknak nevezzük.

## *4.2. tétel*

A kockázatelosztási játékok osztálya egybeesik a teljesen kiegyensúlyozott játékok osztályával (Csóka et al. [2009]).

Az állításnak két iránya van, az első szerint tetszőleges kockázatelosztási játék teljesen kiegyensúlyozott, vagyis mindig található magbeli, csoportracionális kockázatelosztás. A

3 Az üres Σ értéke 0.

másik irány szerint tetszőleges teljesen kiegyensúlyozott játék előállhat kockázatelosztási játékként, bármilyen teljesen kiegyensúlyozott játékból eredő szituáció előfordulhat a tőkeallokáció során.

A Shapley-megoldás egy tetszőleges $c \in \Gamma_k^N$ kockázatelosztási játék esetén az i játékoshoz a

$$\Phi(c)_i = \sum_{S \subseteq N,\ i \in S} \frac{(|S|-1)!|N-S|!}{|N|!}(c(S) - c(S-\{i\}))$$

számot rendeli. $\Phi(c)_i$-t az i játékos c játékbeli *Shapley-érték*ének nevezzük.

A Shapley-érték egy lehetséges értelmezése a következő: vesszük a divíziók egy tetszőleges sorrendjét, és meghatározzuk, hogy ha a divíziók az adott sorrendben „érkeznek”, akkor mi a határhozzájárulásuk (c(S)–c(S–{i})) a már előzőleg „megérkezett” divíziók csoportjához. A határhozzájárulásokat hozzárendeljük a divíziókhoz, majd ezt elvégezzük a divíziók minden sorrendjére, és vesszük a határhozzájárulások átlagát. Ez az átlag a Shapley-érték.

### *4.3. példa (a 4.1. példa folytatása)*

Tekintsük a 4.1. példában bemutatott c kockázatelosztási játékot. Ekkor

| a Shapley-érték | |
|---|---|
| $\Phi(c)_i =$ | 6,5 |
| $\Phi(c)_i =$ | 11,5 |
| $\Phi(c)_i =$ | 2 |

és $\Phi(c) \notin$ Mag(c), hiszen $\Phi(c)_1 + \Phi(c)_2 = 18 > 17 = c(\{1,2\})$.

Vegyük észre, hogy míg a Shapley-megoldás minden játékhoz pontosan egy vektort, elosztást rendel, addig a Mag egy játékhoz rendelhet akár üres halmazt, akár „népes” halmazt is.

A következőkben áttekintjük, hogy milyen tulajdonságokat várhatunk el az alkalmazott tőkeallokációs módszerektől.

## *4.4. definíció*

$\Psi$, a kockázatelosztási játékok $\Gamma_k^N$ osztályán értelmezett megoldás

- *hatékony*, ha minden $c \in \Gamma_k^N$ kockázatelosztási játék esetén $\sum_{i \in N} \Psi(c)_i = c(N)$,
- *szimmetrikus*, ha minden $c \in \Gamma_k^N$ kockázatelosztási játék és tetszőleges olyan $i, j \in N$ játékos esetén, hogy minden $S \subseteq N$, $i, j \in S$ koalícióra $c(S-\{i\}) = c(S-\{j\}) : \Psi(c)_i = \Psi(c)_j$,
- *erősen monoton*, ha minden $c, v \in \Gamma_k^N$ kockázatelosztási játék és tetszőleges olyan $i \in N$ játékos esetén, hogy minden $S \subseteq N$ koalícióra $c(S) - c(S-\{i\}) \le v(S) - v(S-\{i\}) : \Psi(c)_i \le \Psi(v)_i$,
- *magkompatibilis*, ha minden $c \in \Gamma_k^N$ kockázatelosztási játékra $\Psi(c) \in \mathrm{Mag}(c)$.

A fent ismertetett axiómák értelmezése a következő. A *hatékonyság* követelménye természetes: az egyes portfóliókra allokált tőkék összegének meg kell egyeznie a teljes portfólió tőkekövetelményével. A *szimmetria* elvárásával azt követeljük meg, hogy ha két divízió kockázat szempontjából megkülönböztethetetlen, tehát felcserélve őket, a generált kockázatelosztási játék nem változik, akkor az értékelésük legyen egyenlő. Az *erős monotonitás* hasonló követelményt mond ki, mint a szimmetria, csak itt nem két játékost, hanem két kockázatelosztási szituációt hasonlítunk össze. Ha egy divízió egy kockázatelosztási szituációban „kockázatosabb” (nagyobb a határhozzájárulása a divíziók tetszőleges halmazához, beleértve az üres halmazt is), mint egy másikban, akkor az elsőben hozzá allokált tőke nem lehet kisebb a másodikban hozzá allokáltnál. Tehát az allokált tőke a kockázatosság monoton növő függvénye.

A *magkompatibilitás* követelménye azt fejezi ki, hogy minden egyes divíziónak és az ezekből álló „koalícióknak” legfeljebb ugyanannyi kockázatot kell viselniük a „nagykoalíció”, vagyis a teljes portfólió részeként, mint amennyivel önállóan rendelkeznek. Egyéb esetben ugyanis lenne olyan koalíció, melynek érdekében állna az N nagykoalícióból kilépve különálló szereplőként folytatnia a tevékenységét.

## *4.5. megjegyzés*

Vegyük észre, hogy a 4.4. definícióban felsorolt axiómák nem függetlenek. A magkompatibilitásból következik a hatékonyság.

A fent ismertetett fogalmak bevezetése után már ki tudunk mondani egy, az „igazságos” kockázatelosztás lehetetlenségéről szóló tételt:

*4.6. tétel*

Nincs olyan minden kockázatelosztási szituáción ($\Gamma^N_k$) értelmezett tőkeallokációs módszer ($\Psi$), ami szimmetrikus, erősen monoton és magkompatibilis (Csóka és Pintér [2010]).

Koherens kockázati mértékek esetén a magbeliség tehát általános esetben nem fér össze a szimmetria és az erős monotonitás követelményeivel, ezt a három természetes elvárást nem követelhetjük meg egyszerre egy kockázatelosztási szabálytól.

*A bizonyítás vázlata:*

- A 4.2. tételből következik, hogy *Young* [1985] Shapley-érték axiomatizálását (az egyetlen hatékony, szimmetrikus és erősen monoton megoldás) kell meggondolnunk a teljesen kiegyensúlyozott (és az egzakt) játékok osztályán.
- Ehhez Pintér [2009] eredményére van szükségünk (lásd Csóka és Pintér [2010]).
- Végül a 4.1. és 4.3. példákból következik a lehetetlenségi állítás.

## 5. Tőkeallokációs módszerek

A következőkben áttekintünk néhány, a legismertebbek közé tartozó tőkeallokációs módszert a már említett Shapley-érték mellett. Ezeket teljesen általánosan, a kockázati mérték specifikálása nélkül definiáljuk, így azok a maximális veszteség mellett könnyen alkalmazhatók más kockázati mérték (pl. VaR) mellett is. A módszerek közül az első négyet Homburg és Scherpereel [2008] cikke alapján mutatjuk be, ezeket pedig egy ötödikkel, a Tasche [2008] által is vizsgált Euler-módszerrel egészítjük ki. A felsorolás után, a 4.1. példa adatait használva, mindegyik módszert kiszámítjuk a maximális veszteségre. Azt is megadjuk, hogy a szimmetria, erős monotonitás és magkompatibilitás közül általában melyik tulajdonságot nem teljesítik.

Tegyük fel tehát továbbra is, hogy egy pénzügyi vállalkozásnak n divíziója van, jelölje $N = \{1,2,...n\}$ a divíziók halmazát, $X_i$ pedig legyen az i divízió lehetséges jövőbeli nyereségeit/veszteségeit leíró, realizációs vektor. A pénzügyi vállalkozás aggregált portfóliójára vezessük be az $X = \sum_{i \in N} X_i$ jelölést. A kockázatot a $\rho$ kockázati mértékkel mérjük.

### *5.1. Egyéni kockázattal arányos módszer (activity based method)*

Lényege, hogy a közös kockázatot az egyes divíziók egyedi, a többi divíziótól független kockázatának arányában osztja szét:

$$\Psi_i(c) = \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j=1}^{n} \rho(X_j)} \cdot \rho(X) .$$

A módszer komoly hátránya, hogy nem veszi figyelembe az egyes divíziók közötti függőségi struktúrát, így nem „jutalmazza” kisebb kockázati hozzájárulásokkal azokat az divíziókat, amelyek negatívan korrelálnak a többiekkel.

## 5.2. Béta-módszer

Jelölje $Cov(X_i, X)$ az $i$ divízió és a vállalkozás aggregált portfóliójának kovarianciamátrixát. Mint ismert, az $i$ divíziónak a nagykoalíció portfóliójára vonatkozó bétája a következőképpen számítható: $\beta_i = \frac{Cov(X_i, X)}{\sigma(X)^2}$. Ha a béták összege 1, akkor az $i$ divízió kockázata:

$$\Psi_i(\mathbf{c}) = \beta_i \cdot \rho(X).$$

Amennyiben a béták össze nem 1, a módszert módosítani szükséges annak érdekében, hogy az egyes divíziókra allokált kockázatok összege kiadja a teljes portfólió kockázatát, ekkor:

$$\Psi_i(\mathbf{c}) = \beta_i \cdot \frac{\rho(X)}{\sum_{j=1}^{n} \beta_j}.$$

## 5.3. Növekményi módszer[4]

Az $i$ divízió által okozott kockázatnövekményt adott $S$ koalíció mellett a következőképpen definiáljuk: $\Delta(X_i|S) = \rho(S) - \rho(S\setminus i)$, minden $S \in N$ koalícióra és $X_i \in S$ -re, ahol $\rho(\emptyset) \coloneqq 0$ . Vegyük észre, hogy csak a jelölés más, a kockázatnövekmény azonos a Shapley-értéknél számolt határhozzájárulással.

A növekményi módszer az egyéni kockázatnövekmények arányában adja meg az egyes divíziókra allokált tőkét:

$$\Psi_i(\mathbf{c}) = \frac{\Delta\rho(X_i|N)}{\sum_{j=1}^{n} \Delta\rho(X_j|N)} \cdot \rho(X) = \Delta\rho(X_i|N) + \frac{\Delta\rho(X_i|N)}{\sum_{j=1}^{n} \Delta\rho(X_j|N)} \cdot \left(\rho(X) - \sum_{j=1}^{n} \Delta\rho(X_j|N)\right),$$

ahol a második felírásra azért volt szükség, hogy könnyebben hasonlíthassuk össze a következő költségrés módszerrel.

## 5.4. Költségrés (cost gap) módszer

A növekményi módszer kis módosításával kapjuk a költségrés módszert, amellyel a következőképpen kaphatjuk meg az egyes egységekre allokált tőkét:

$$\Psi_i(\mathbf{c}) = \begin{cases} \Delta\rho(X_i|N), & ha\ \rho(X) - \sum_{i=1}^{n} \Delta\rho(X_i|N) = 0, \\ \Delta\rho(X_i|N) + \frac{\gamma_i}{\sum_{k=1}^{n} \gamma_k} \cdot \left(\rho(X) - \sum_{i=1}^{n} \Delta\rho(X_i|N)\right), & \text{egyébként,} \end{cases}$$

4 A növekményi módszerről bővebben lásd többek között Jorion [1999].

ahol $\gamma_j = \min_{\emptyset \neq K \subset N, i \in K} \left\{ \rho(K) - \sum_{j \in N} \Delta\rho(X_j | N) \right\} \geq 0.$

Amennyiben tehát a kockázatnövekmények összege kiadja a teljes kockázatot, akkor ez lesz az elosztás – ez esetben a költségrés és a növekményi módszer ugyanazt az eredményt adja. Egyébként pedig mindkét esetben egy korrekciós tényező garantálja, hogy az egyes egységekre allokált tőkék összességében kiadják a teljes kockázatot, eltérés csak a korrekció módszertanában van.

### *5.5. Gradiens (vagy Euler-) módszer*

A gradiens módszer tárgyalásához vezessük be a következő jelöléseket!

Először fejezzük ki a portfóliót az azt alkotó divíziók súlya és az egyes divíziók értékének szorzatösszegeként: $X = Y(u) = Y(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i Y_i$.

Legyen $f_{\rho,Y} = \rho(Y(u))$ első fokon homogén. Az *i* divízióba való marginális befektetésre jutó kockázatnövekményt jelöljük $\hat{\Psi}_i(\mathbf{c})$-vel, amelyet a következő módon számíthatunk:

$$\hat{\Psi}_i(\mathbf{c}) = \frac{d\rho(Y + hY_i)}{dh}\Big|_{h=0} = \frac{df_{\rho,Y}(\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1})}{du_i},$$

feltéve, hogy $f_{\rho,Y}$ folytonosan parciálisan differenciálható.

Amennyiben tehát $f_{\rho,Y}$ folytonosan parciálisan differenciálható, valamint első fokon homogén, alkalmazható rá az Euler-tétel:

$$f_{\rho,Y} = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{df_{\rho,Y}(u)}{du_i},$$

így – visszatérve a korábban használt jelölésünkhöz – erre a módszerre is teljesül, hogy

$$\rho(X) = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \hat{\Psi}_i(\mathbf{c}).$$

Tasche [2000] belátja, hogy maximális veszteség esetén – amennyiben az differenciálható – az i divízióra allokált tőke megegyezik azzal a veszteséggel, amelyet akkor szenved el, amikor az aggregált portfólió vesztesége maximális.

Buch és Dorfleitner [2008] megmutatta, hogy koherens kockázati mérték alkalmazása esetén a gradiens módszer mindig magbeli tőkeallokációt eredményez, ugyanakkor általános esetben a gradiens módszer nem szimmetrikus (ha szimmetrikus lenne, akkor a kockázati mérték lineáris lenne).

### *5.6. A módszerek összehasonlítása*

Az alábbiakban megadjuk a 4.1. példa kockázatának elosztását a fenti hat módszer szerint.

*2. táblázat*

**A 4.1. példa kockázatának elosztása a különböző módszerek szerint**

| | **Tőkeallokáció** | | |
|---|---|---|---|
| **Módszer** | **divízió 1** | **divízió 2** | **divízió 3** |
| Shapley | 6,5 | 11,5 | 2 |
| Egyéni kockázattal arányos | 7,41 | 10,37 | 2,22 |
| Béta | 6,85 | 8,84 | 4,31 |
| Növekményi | 5,26 | 11,58 | 3,16 |
| Költségrés | 5,5 | 11,5 | 3 |
| Gradiens | 6 | 11 | 3 |

Ahogy láthatjuk, a 4.1. példában egyik módszer sem adott azonos eredményt. Általános esetben elmondhatjuk, hogy csak a gradiens módszer magkompatibilis, a többi nem. Ugyanakkor, ahogy már említettük, a gradiens módszer nem szimmetrikus.

## 6. Összefoglalás

A dolgozatban a pénzintézetekben alkalmazott belső tőkeallokáció általános kérdéseinek áttekintése után arra kerestük a választ, hogy tudunk-e olyan tőkeallokációs módszert ajánlani, amely három természetes szempontot minden esetben kielégít: magkompatibilis, szimmetrikus és erősen monoton. Míg magkompatibilis kockázatelosztás mindig létezik, a másik két követelményt is kielégítő nincs; valamilyen szempontról szükségszerűen le kell mondanunk.

## Irodalomjegyzék


Acerbi, C.–Scandolo, G. [2008]: Liquidity risk theory and coherent measures of risk. *Quantitative Finance* 8. (7.) 681–692. o.

Acerbi, C.–Simonetti, P. [2002]: Portfolio optimization with spectral measures of risk. http://arxiv.org/PS_cache/cond–mat/pdf/0203/0203607v1.pdf

Acerbi, C.–Tasche, D. [2001]: On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking and Finance* 26. (7.) 1487–1503. o.

Artzner, P.–Delbaen, F.–Eber, J.-M.–Heath, D.[1999]: Coherent measures of risk. *Mathematical Finance* 9. (3.) 203–228. o.

BALOGH CSABA [2006]: Felmérés a banki belső tőkeallokáció hazai alkalmazásáról. *Hitelintézeti Szemle* V. (4.) 32–34. o.

BUCH, A.–DORFLEITNER, G. [2008]: Coherent risk measures, coherent capital allocation and the gradient allocation principle. *Insurance: Mathematics and Economics* 42. (1.) 235–242. o.

CSÓKA PÉTER [2003]: Koherens kockázatmérés és tőkeallokáció. *Közgazdasági Szemle*, L. évf. 10. szám, 855–880. o.

CSÓKA P.–HERINGS, P. J. J.–KÓCZY L. Á. [2007]: Coherent measures of risk from a general equilibrium perspective. *Journal of Banking and Finance* 31. (8.) 2517–2534. o.

CSÓKA P.–HERINGS, P. J. J.–KÓCZY L. Á. [2009]: Stable allocations of risk. *Games and Economic Behaviour* 67. (1.) 266–276. o.

CSÓKA P.–PINTÉR M. [2010]: On the impossibility of fair risk allocation. Munich RePEc Personal Archive, ID: 26515

DENAULT, M. [2001]: Coherent allocation of risk capital. *Journal of Risk* 4. (1.) 1–34. o.

GILLIES D. B. [1959]: Solutions to general non–zero–sum games. In: TUCKER, A. W.–LUCE, R. D. (eds.): Contributions to the Theory of Games IV. Princeton University Press, Princeton

HOMBURG, C.–SCHERPEREEL, P. [2008]: How should the joint capital be allocated for performance measurement? *European Journal of Operational Research* 187. (1.) 208–217. o.

JORION, P. [1999]: A kockázatott érték. Panem Kiadó, Budapest

KALKBRENER, M. [2005]: An axiomatic approach to capital allocation. *Mathematical Finance* 15. (3.) 425–437. o.

KIM J. H. T.–HARDY M. R. [2009]: A capital allocation based on a solvency exchange option. *Insurance: Mathematics and Economics* 44. (3.) 357–366. o.

KROKHMALA, P.–ZABARANKIN, M.–URYASEV, S. (2011]: Modeling and optimization of risk. *Surveys in Operations Research and Management Science* 16. (2.) 49–66. o.

PINTÉR M. [2007]: Regressziós játékok. *Szigma* 38. (3–4.) 131–147. o.

PINTÉR M. [2009a]: A Shapley-érték axiomatizálásai. *Alkalmazott Matematikai Lapok* 26., 289–315. o.

PINTÉR M. [2009b]: Young's axiomatization of the Shapley value – a new proof. arXiv:0805.2797v2.

SHAPLEY L.S. [1953]: A value for n–person games. In: KUHN, H. W.–TUCKER, A.W. (eds.): Contributions to the Theory of Games II. Princeton University Press, Princeton. 307–317. o.

TASCHE, D. [2000]: Risk contributions and performance measurement. http://www–m4.ma.tum.de/pers/tasche/riskcon.pdf

TASCHE, D. [2008]: Capital allocation to business units and sub-portfolios: the Euler principle. http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0708/0708.2542v3.pdf

YOUNG H. P. [1985]: Monotonic solutions of cooperative games. *International Journal of Game Theory* 14. (2.) 65–72. o.

# Abstract of the articles

**UTILITY FUNCTIONS AND RISK NEUTRAL MEASURES**

Péter Medvegyev

In the article I discuss some aspects of the derivative pricing theory. This theory played major role in the recent financial crises. The main concept of the theory of derivative pricing and the whole finance is the so called risk neutral measure. The main message of the theory is that it is sufficient to change the probability measure to the risk neutral measure and then calibrate the model parameters to the market. But using this methodology one introduces probabilistic metaphors to the finance which is some sense dangerous as the risk neutral measure is basically reflecting the preferences which can change quickly.

**INTRODUCTION AND ANALYSIS OF THE BUDAPEST LIQUIDITY MEASURE**

Ákos Gyarmati– Márton Michaletczky–Kata Váradi

In our study we introduce the Budapest Liquidity Measure (BLM), which is a liquidity measure that quantifies liquidity as the implicit cost – sum of the liquidity premium and the adverse price movement – of trading. Our main goal was to introduce and compare this measure with other well known liquidity measures, and show the possible applications of this indicator.

**The application of the Budapest Liquidity Measure (BLM)**
**– Liquidity risk in VaR measures**

Ákos Gyarmati– Márton Michaletczky–Kata Váradi

We introduce the Budapest Liquidity Measure (BLM) and one of its possible applications in the field of risk management. BLM is a weighted spread measure, it represents the implied costs of trading, which arise from the fact that actual trading is not executed on mid-price.
Traditional VaR measures cover only the risk of the changing mid-price, they ignore the liquidity risk arising from the buying and selling of a position. With the use of BLM we show, how to integrate liquidity risk into the VaR-framework. While our method has already been introduced, it has never been tested on the Hungarian market. Also we make several suggestions how could the original model be improved.
In our analysis we use the data of the stocks of the Hungarian Stock exchange, and find that even in the case of the most liquid stocks and smallest positions, the daily VaR measures can rise by up to 4%, while if we consider less liquid stocks the growth can be up to 10% if liquidity risk is taken into account.

**MARKET MICROSTRUCTURE THEORY AND LIQUIDITY**

Márton Michaletczky

The purpose of this paper is threefold. First, it briefly gives a short summary of the basic results in the literature of market microstructure theory. The central notion of market microstructure theory is the process by which the price for an asset is determined, so that equilibrium is reached. This aspect was somewhat neglected by neoclassical economics. Market microstructure theory analyzes how information asymmetry, heterogeneous market participants and market structure have on price formation, trading bahavior and trading costs. Second, the paper presents the most important results of the seminal papers by Kyle and Glosten and Milgrom. We also discuss the Back-Baruch paper, which provides a unified framwork for the two models discussed above. Third, we give a short summary of the bid-ask spread models. Throughout the paper the results of market micsrostructure theory are discussed with attention to what they reveal regarding the liquidity of financial markets.

**DETERMINANTS OF HUNGARIAN FORINT FX SWAP SPREADS AFTER THE LEHMAN CRISIS**

Csaba Csávás–Rezső Szabó

In this paper we analyze the drivers of HUF FX swap spreads (CIP deviation). The main aim is to analyze the impact of the FX swap instruments introduced by the central bank of Hungary. A further objective is to answer whether the spreads are moved by risk or foreign currency liquidity related factors. For the calculation of FX swap spreads we use a data set which contains FX swaps by transactions. For the period October 2008 – June 2010, we find evidence that both short (1-day) and long FX swap spreads are affected by variables related to global risk aversion, to counterparty risk and to the availability of foreign currency liquidity. The effect of the central bank instruments is also significant, the application of both 1-day and long-term FX swaps contributed to the decline of market-traded FX swap spreads.

**STRUCTURE OF LIQUIDITY MEASURES**

Barbara Dömötör–Zita Marossy

Liquidity is measured from different aspects (e.g. tightness, depth, and resiliency) by different ratios. We studied the co-movements and the clustering of different liquidity measures on a sample of the Swiss stock market. We performed a PCA to obtain the main factors that explain the cross-sectional variability of liquidity measures, and we used the k-means clustering methodology to define groups of liquidity measures. Based on our explorative data analysis, we formed clusters of liquidity measures, and we compared the resulting groups with the expectations and intuition. Our modelling methodology provides a framework to analyze the correlation between the different aspects of liquidity as well as a means to define complex liquidity measures.

**RISK CAPITAL ALLOCATION IN CASE OF ILLIQUID PORTFOLIOS**

Dóra Balog–Péter Csóka–Miklós Pintér

Measuring and allocating risk properly are crucial for performance evaluation and internal capital allocation of portfolios held by banks, insurance companies, investment funds and other entities subject to financial risk. We argue that the axioms of coherent measures of risk are valid for illiquid portfolios as well. Then, we present the results of two papers on allocating risk measured by a coherent measure of risk. Assume a bank has some divisions. According to the first paper there is always a stable allocation of risk capital, which is not blocked by any coalition of the divisions, that is there is a core compatible allocation rule (we present some examples for risk allocation rules). The second paper considers two more natural requirements, Equal Treatment Property and Strong Monotonicity. Equal Treatment Property makes sure that similar divisions are treated symmetrically, that is if two divisions make the same marginal risk contribution to all the coalition of divisions not containing them, then the rule should allocate them the very same risk capital. Strong Monotonicity requires that if the risk environment changes in such a way that the marginal contribution of a division is not decreasing, then its allocated risk capital should not decrease either. However, if risk is evaluated by any coherent measure of risk, then there is no risk allocation rule satisfying Core Compatibility, Equal Treatment Property and Strong Monotonicity, we encounter an impossibility result.