ÉRTESITŐ

AZ ERDÉLYI MÚZEUM-EGYLET

ORVOS-TERMÉSZET-TUD. SZAKOSZTÁLYÁBÓL.

XXIV. évfolyam. 1899. XXI. kötet.

II. TERMÉSZETTUDOMÁNYI SZAK.

Szerkeszti: APÁTHY ISTVÁN.

SITZUNGSBERICHTE

DER MEDICINISCH-NATURWISSENSCH. SECTION

DES SIEBENBÜRGISCHEN MUSEUMVEREINS.

XXIV. Jahrgang. 1899. XXI. Band.

II. NATURWISSENTSCHAFTLICHE ABTHEILUNG.

Redigirt von: STEFAN APÁTHY.

KOLOZSVÁRT,

AJTAI K. ALBERT MAGYAR POLGÁR KÖNYVNYOMDÁJA.

1899.

Kivonat az Erdélyi Múzeum-Egylet alapszabályaiból.

1. §. Az egylet czélja a Kolozsvárt létesített és a m. kir. Ferencz-József tudomány-egyetemmel kapcsolatban álló országos múzeum fentartása és tovább fejlesztése, a tudományok mívelése és a magyar tudományosság terjesztése.

6. §. A múzeummal kapcsolatban különösen a honismeret és az erre vonatkozó tudományok iránti kedv élesztésére és mivelésére munkál az egylet az által, hogy:

a) kebelében tudományos szakosztályokat állít fel, egyelőre a következőket:

I. Orvos-természettudományi,

II. Bölcsészet, nyelv- és történelmi szakosztályokat.

b) Szakosztályainak tudományos működését saját kiadványaiban közrebocsátja. *Az orvos-természettudományi szakosztály kiadja az „Értesítő"-t, a bölcsészet, nyelv és történelmi szakosztály kiadja az* „***Erdélyi Múzeum***"*-ot.*)

8. §. Egyleti tag lehet minden önálló és tudománynyal foglalkozó vagy tudománykedvelő honpolgár. Egyleti tagoknak tekintendők pedig, a kik az alább (12. 13. 15. 16 §§.) elősorolt feltételeknek eleget tesznek. A csatlakozni kivánó, valamely tag által a választmányban jelenti be magát.

9. §. Az elésorolt feltételek mellett egyleti tagokká lehetnek egyes községek, testületek, erkölcsi személyek is; ezek jogaikat megbizottjaik vagy küldötteik által gyakorolhatják.

10. §. Az egylet tagjai kétfélék: rendesek és rendkivűliek.

A rendes tagok vagy igazgatók, vagy alapítók, vagy részvényesek, vagy szakosztályi tagok.

A rendkivűli tagok tiszteletbeliek, vagy levelezők.

11. §. Igazgató tagok azok, a kik az egylet pénzalapjába legalább 500— ötszáz osztr. ért. forintot adományoznak, vagy a múzeumba felvehető ennyi értékű gyűjteményt ajándékoznak.

Az igazgató tagok az egyleti választmánynak holtokig rendes tagjai.

12. §. Alapító tagok azok, a kik akár az egylet pénzalapját, akár a múzeum gyűjteményeit 100 = egyszáz o. é. forinttal, vagy annyi értékű ajándékkal gyarapítják.

Az alapító ezen egyszerre lefizetett összeg által, minden részvényfizetés nélkűl holtig rendes tagja az egyletnek.

13. §. Az igazgató- és alapító tagok által befizetett összegek a múzeum alaptőkéjéhez csatoltatnak; következőleg a folyó költségekre ezen összegeknek csak kamatjai fordíthatók; csak a közgyűlésnek van joga előfordulható rendkivűli kiadások fedezésére az egylet tőkéjéből is utalványozni.

14. §. Részvényes tagok azok, a kik kötelezik magokat, hogy az egylet pénztárába évenként az év első negyedében öt forintot fizetnek.

15. §. Szakosztályi tagok azok, a kik csupán egyik vagy másik szakosztályba lépnek be és évi 3 forint tagdíjt fizetnek.

Az egyszer belépő tag tag marad mindaddig, mig kötelezettségét teljesíti.

16. §. A beállási év január 1-ével kezdődik; időközben beálló részvényes és szakosztályi tag akként fizet, mintha azon év január hó 1-jén lépett volna be az egyletbe.

17. §. Evenkénti fizetés helyett tiz évre eső részvénydíjt egyszerre előre is lefizethetni 40 = negyven o. é. forinttal. A ki pedig husz évre akarná részvényét előre lefizetni, 60 = hatvan o. é. forinttal megteheti. Tagok 25 forinttal válthatják meg tiz évi tagdíjaikat.

53. §. A fenn (12., 13., 14., 15., 17. §-okben) elésorolt fizetési kötelezettségen kivűl az egyletnek minden tagja felhivatik, hogy tehetsége szerint a múzeum gyűjteményeit gyarapítsa és tudományos törekvéseit előmozdítsa.

54. §. Közgyűléseken az egyletnek minden rendes tagja egyenlő szavazási joggal bir; kivéve a szakosztályi tagokat, kik csak a szakosztály gyűlésein birnak szavazási joggal; a választmányi 15 tag az alapító és részvényes tagok közül választatik.

Az egylet tagjai az egylet kiadványait ingyen kapják, szakosztályi tagok csak az illető szak kiadványait.

55. §. Az egyleti tagnak joga van a muzeum gyűjteményeibe oly meghatározott napokon is bemenni, melyeken azok a nagy közönség előtt zárvák.

56. §. Megszűnik tagja lenni az egyletnek: *a)* a ki meghal, *b)* a ki önkéntesen kilép, *c)* a mely részvényes kötelességeit a választmány ismételt felszólítására sem teljesíti, *d)* a ki az egyletből kizáratik.

ÉRTESITŐ

AZ ERDÉLYI MÚZEUM-EGYLET

ORVOS-TERMÉSZETTUDOMÁNYI SZAKOSZTÁLYÁBÓL

II. TERMÉSZETTUDOMÁNYI SZAK.

XXI. KÖTET. 1899. XXIV. ÉVFOLYAM.

SZERKESZTI:

Dr. APÁTHY ISTVÁN.

KOLOZSVÁR

AJTAI K. ALBERT MAGYAR POLGÁR KÖNYVNYOMDÁJA.

1900.

A XXI. KÖTET (XXIV. ÉVFOLYAM) TARTALMA:

I–III. FÜZET.

I. Eredeti közlemények.

II. Vegyesek.

৳ÉRTESITŐ

AZ ERDÉLYI MÚZEUM-EGYLET ORVOS-TERMÉSZETTUDOMÁNYI SZAKOSZTÁLYÁBÓL.

II. TERMÉSZETTUDOMÁNYI SZAK.

XXI. kötet. 1899. II.—III. füzet.

Vector-tan és az egyszerü inaequatiók tana.

Mathematikai bevezetés az elméleti physikába.

Dr. Farkas Gyula egyet. ny. r. tanártól.

Vector-tan.

I. A helyhatározó rendszer megválasztása.

Tengelyen mindig szabott irányú és helyű egyenest értsünk.

Közönségesen derékszögű tengely-rendszert használunk helyhatározásra; és pedig jobbra fordulót. Ha tehát egy órát úgy helyezünk el, hogy a harmadik tengely a számlapjára merőlegesen álljon és a számlapnál az óraszerkezet belseje felé mutasson, akkor az óramutatók járásával egyező értelemben kell fordítanunk az első tengelyt a harmadik körűl, hogy egy derékszög leírása után iránya a második tengely irányába essék.

Bármely tengely körűl ebben az értelemben történő fordulást nevezünk mindig positivus fordulásnak, már t. i. arra a tengelyre vonatkozólag. Az ellenes értelemben valót negativus fordulásnak nevezzük az illető tengelyre nézve. Világos, hogy amely fordulás egy tengelyre nézve positivus, az ellenes irányú, de azonos helyű tengelyre vonatkozólag negativus.

A positivus fordulással származó szögeket positivusoknak, a negativus fordulással származókat negativusoknak számítjuk.

II. A vector alap-fogalma.

Válasszunk a térben egy egyenes vonal-darabot. Egyik határpontját jelöljük A-val, a másikat B-vel. Végtelen sok hosszúságot tartalmaz. Mindazt, amely kisebb az AB hosszúságnál, és magát az AB hosszúságot. Továbbá két irányt tartalmaz. Az $A—B$ irányt és a $B—A$ irányt.

Midőn a hosszuságok közűl csupán a teljes AB hosszúságot, és a kétféle irány közűl is csupán az egyiket veszszük tekintetbe, vectornak nevezzük az egyenes vonaldarabot. Ha az $A—B$ irányt tulajdonítjuk neki, akkor határpontjainak a betűivel AB alakban jelöljük, és A pontját az elejének vagy kezdetének, B pontját a végének nevezzük.

Az AB vectort a B pont A ponti vectorának is nevezzük. Igy például egy helyhatározó rendszer origójából egy pontba húzott vector ennek a pontnak az origói vectora. Ha valamely vector eleje egy I nevű tengelyben van, s a vector merőleges erre a tengelyre, a vége pedig C nevű pontban van, akkor a vectort a C pont I tengelyű vectorának is nevezzük.

A vectorok hosszúságát és irányát illetőleg hasznos mennyiségi vonatkozásokat veszünk számba és definiálunk, amelyek rendén a vector mint mennyiségi műveletek tárgya, mint mennyiség jelentkezik. Ez által válik teljessé a vector-fogalom definitiója az elméleti physika szolgálatában.

III. A vectorok egyenlősége és határozói.

A már előre bocsájtott alap-definitionak megfelelően:

ha két vector AB, CD, egyenlő hosszú és egyező irányú, akkor, és csak akkor, egyenlőknek mondjuk azokat, s ezt röviden a szokásos egyenlőségi jellel írjuk:

$$\mathrm{AB} = \mathrm{CD};$$

ha azonban két vector hosszúsága, vagy iránya, vagy hosszúsága is, iránya is különböző, akkor, és csak akkor mondjuk különbözőknek a vectorokat.

Bármely pontba helyezzük tehát egy vector elejét, ha hosszúságát és irányát nem változtatjuk meg, a vector is változatlan marad. És valahányszor egy vector hely-változtatásáról beszélünk, különös kijelentés hiányában, mindig hosszúságának s irányának meghagyásával értjük azt. Mindebben egyező irányokon ugyanazon végtelen távoli pont felé mutató irányok értendők, mint rendesen.

Ha egy vector elejét az origóba helyezzük, akkor végének a helye teljesen meghatározza a vectort, mert hosszát is, irányát is meghatározza. Ekkor tehát végének a coordinatái teljesen meghatározzák. Ezeket a vector-határozókat a vector componenseinek nevezzük. Ha ξ, η, ζ a három componens, úgy ezekkel a (ξ, η, ζ) alakban jelöljük a vectort.

Bárhol legyen egy vector eleje, ha elejének a coordinatáit rendre kivonjuk végének a coordinatáiból, componenseit nyerjük. Mert, ha elejének a coordinatái x, y, z, úgy végének a coordinatái algebrailag ezekkel az értékekkel nagyobbak, mint mikor eleje az origóban van. Midőn eleje az x, y, z pontban van, akkor végének a coordinatáit x', y', z' jelölvén: $\xi = x' - x$, stb.

Egy vector componenseit viszont teljesen meghatározza a vector; mert eleje az origóba helyeztetvén, a vége meghatározza a maga coordinatáit.

Amely mennyiségek valami módon meghatározzák a vector componenseit, azok nyilvánképen meghatározzák a vectort.

Ilyetén vector-határozók a vector hossza és az irányát határozó u. n. iránycosinusai, vagyis azoknak a szögeknek a cosinusai, amelyek alatt a vector iránya rendre a coordinata-tengelyek irányába fordítható. Ha ugyanis r a vector hossza és α, β, γ az irány-cosinusai, akkor a vector componensei:

$$\xi = r\alpha, \quad \eta = r\beta, \quad \zeta = r\gamma.$$

Oly határozók ezek is, amelyeket viszont, a vector teljesen meghatároz, mert a componensei teljesen meghatározzák azokat: az r hosszúság oly derékszögű hasáb átmérőinek a hosszúsága, amelynek az éleit a componensek szolgáltatják, tehát

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

és ebből folyólag

$$\alpha = \xi : \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \text{ stb.},$$

ahol a gyök-kifejezés mindig positivusnak számítandó, mivel puszta hosszúságot jelent.

A három iránycosinus kifejezéséből a három componens egy módon kiküszöbölhető, minélfogva a három iránycosinus egy szabott relatiónak tesz eleget, és pedig

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Ennek következtében a vector meghatározására a hosszúság mellett elég két iránycosinus és a harmadiknak az előjele.

Többnyire a három componenst vagy a hosszúságot és a három irány-cosinust használjuk vector-határozásra. De azért legyen itt szó két más meghatározási módról is. Olyanokról, amelyekben más jelentősége van az x, más az y és más a z tengelynek. Egyik, mint forgási tengely, egy másik, mint olyan tengely szerepel, amelynek irányától a forgás-szögeket számítjuk, s a harmadik nem szerepel.

Válaszszuk a z-tengelyt forgási tengely gyanánt és számítsuk az x-tengely irányától a forgás-szögeket. A vector elejét az origóba tévén, a vector meghatorozására szolgálhatnak: a vector-vég z-tengelyű vectorának hossza ρ, e vector elfordulásának a szöge ε, és a vector harmadik componense ζ. Ugyanis ρ és ε meghatározza a ξ és η componenseket:

$$\xi = \rho\cos\varepsilon, \quad \eta = \rho\sin\varepsilon.$$

Ezt a meghatározási módot cylindricusnak nevezzük.

Ha a z-tengely és a vector közti szöget a föntebbi szög-definitio értelmében θ jelöli, akkor

$$\zeta = r\cos\theta, \quad \rho = r\sin\theta,$$

miáltal egy negyedik meghatározási mód áll elé. Ebben r, ε, θ a határozók:

$$\xi = r\sin\theta\cos\varepsilon, \qquad \eta = r\sin\theta\sin\varepsilon, \qquad \zeta = r\cos\theta.$$

Az ε és θ határozók egyszerűen fejezik ki a három iránycosinust:

$$\alpha = \sin\theta\cos\varepsilon, \qquad \beta = \sin\theta\sin\varepsilon, \qquad \gamma = \cos\theta.$$

Hogy valamiféle adatok meghatározzák a vectort, ez mindig azt jelenti, hogy meghatározzák a vector hosszát és irányát. Következőleg amely vectorok megfelelő határozói egyenlők, azok a vectorok mindig maguk is egyenlők. De az egyenlő vectorok némely határozói nem szükségképen egyenlők, mint pld. a cylindricus rendszerben használt ε szög, mert ezt még megszorítás alá kell vetni, hogy a vector teljesen meghatározza őt. Ilyen megszorítás:

$$\pi \geqq \varepsilon \gtreqless -\pi.$$

IV. Vectorok külömbsége.

Ha két vector elejét egy pontba helyezzük, akkor aszerint, amint a két vector egyenlő, vagy nem, végük összeesik, vagy nem; viszont, aszerint, amint a végük összeesik vagy nem, egyenlők vagy nem: egy pontba helyezvén két vector elejét, az egyiknek a végéből a másiknak a végébe nyúló vectort a két vector külömbségének nevezzük.

Ilyen kettő lehetséges: egyenlő hosszúak, de ellenkező irányúak. De a következő megkülömböztetéssel élünk: AB és AC vector külömbségén az utóbbinak a végéből az előbbeninek a végébe nyúló vectort értjük, vagyis a CB vectort.

A közönséges kivonási jegy segélyével képletezzük a külömbséget a következő értelemben: AB és AC külömbsége

$$\mathrm{AB} - \mathrm{AC} = \mathrm{CB},$$

AC és AB külömbsége

$$\mathrm{AC} - \mathrm{AB} = \mathrm{BC}.$$

Azt a műveletet, a melylyel két vectorhoz azok egyik vagy másik külömbségét meghatározzuk, kivonásnak nevezzük és az $A'B' - AB$ külömbségben az AB vectort kivonandónak, az $A'B'$ vectort kisebbítendőnek mondjuk. Ehez képest: miután a két vector elejét egy pontba helyeztük, a kivonandónak a végéből a kisebbítendőnek a végébe huzott vector a megfelelő külömbség, a külömbségi vector.

Úgy, mint az algebrában, egyenlők külömségéről is beszélünk. Ezt, a külömbség általános fogalmában, oly vectornak tekintjük, amelynek az eleje és vége összeesik. Zérus-vectornak nevezzük és egyszerűen a 0 jegygyel jelöljük:

$$AB-AB=0.$$

Ha a kivonandó vector componenseit a kisebbítendő vector componenseiből rendre kivonjuk, a külömbségi vector cemponenseit kapjuk. Ugyanis, a kivonandó és a kisebbítendő vector elejét x_0, y_0, z_0 coordinatás pontba helyezvén, jelöljék most már a kivonandó vector végének a coordinatáit x', y', z', a kisebbítendő vector végének a coordinatáit x'', y'', z'': a componenseik rendre

$$\xi'=x'-x_0,\quad \eta'=y'-y_0,\quad \zeta'=z'-z_0,$$
$$\xi''=x''-x_0,\quad \eta''=y''-y_0,\quad \zeta''=z''-z_0;$$

a külömbségi vector componensei pedig

$$\xi=x''-x',\quad \eta=y''-y',\quad \zeta=z''-z'.$$

A jobboldalok elárulják, hogy

$$\xi=\xi''-\xi',\quad \eta=\eta''-\eta',\quad \zeta=\zeta''-\zeta':$$
$$(\xi'', \eta'', \zeta'')-(\xi', \eta', \zeta')=(\xi''-\xi', \eta''-\eta', \zeta''-\zeta')$$

Fordítva, ha egy vector componensei $\xi''-\xi'$, $\eta''-\eta'$, $\zeta''-\zeta'$, akkor ez a vector a (ξ'', η'', ζ'') és (ξ', η', ζ') vector külömbsége.

Egyenleteinkből az is kitűnik, hogy a kisebbítendő vectornak és a külömbségi vectornak a külömbsége a kivonandó vector. Ha tehát a kisebbítendő vector és külömbségi vector elejét egy pontba helyezzük, az utóbbi vector végéből az előbbinek a végébe huzott vector a kivonandó. Geometriai szemlélettel is könnyen fölismerhető.

V. Vectorok összege.

A kisebbítendő vectort a kivonandó vector és a külömbségi vector összegének is nevezzük. A kivonás geometriai képéről közbötlenül leolvasható, hogy, ha a külömbség elejét a kivonandó végébe, vagy végét a kivonandó elejébe helyezzük, mindig a szabadon maradt kezdetből a szabadon maradt végbe nyúló vector a kisebbítendő. Nem tekintve tehát a kivonás műveletét: egy vector elejét egy másiknak a végébe helyezvén, a szabad kezdetből a szabad végbe nyúló vectort nevezzük a két vector összegének. Vector-jegyekben a közönséges összeadási jel segélyével irjuk az összeget:

$$AB+BC=AC.$$

Azt a műveletet, a melylyel két vectorhoz azok összegét képezzük, összeadásnak s a két vectort összeadandónak nevezzük.

Az összeg componensei rendre az összeadandók componenseinek az összegei. Ez az összegre mint kisebbítendőre, az összeadandókra mint kivonandóra és különbségre nézve már a különbségi componensegyenletekből kitűnik. De tényileg, ha az A és B és C pont coordinátái x_0, y_0, z_0 és x', y', z' és $x'', y'' z''$, úgy az AB és BC és AC vectorok componensei $\xi'=x'-x_0$, stb., $\xi=x''-x'$, stb., $\xi''=x''-x_0$, stb. következőleg $\xi'+\xi=\xi''$, stb.:

$$(\xi', \eta', \zeta')+(\xi, \eta, \zeta)=(\xi'+\xi, \eta'+\eta, \zeta'+\zeta).$$

Három vector összegén két vector összegének és a harmadik vectornak az összegét értjük. Hogyha tehát egy vector végébe egy másiknak az elejét és ennek a végébe egy harmadiknak az elejét helyezzük, úgy a szabad kezdetből a szabad végbe nyúló vector a három vector összege. Ugyanis a difinitio szerint AB, BC, CD vectorok összege ez:

$$(AB+BC)+CD=AC+CD=AD.$$

Rövidebb írásmóddal

$$AB+BC+CD=AD.$$

Négy vector összegén három vector összegének és a negyedik vectornak az összegét értjük. Hogyha tehát egy vector végébe egy másiknak az elejét, ennek a végébe egy harmadiknak az elejét és ennek a végébe egy negyediknek az elejét helyezzük: akkor a szabad kezdetből a szabad végbe nyúló vector a négy vector összege. Ugyanis a definitio szerint AB, BC, CD, DE vectorok összege ez:

$$(AB+BC+CD)+DE=AD+DE=AE.$$

Rövidebb írásmódban

$$AB+BC+CD+DE=AE.$$

stb. stb.

Bárhány vector összegének a componensei rendre egyenlők az egyes vectorok componenseinek az összegével és pedig függetlenűl a vectorok sorrendjétől. Bizonyítás: Tetszésre választott sorrendben legyenek

$$(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2), .., (\xi_n, \eta_n, \zeta_n)$$

az összeadandó vectorok. A másodiknak az elejét helyezzük az elsőnek a végébe, a harmadiknak az elejét a másodiknak a végébe, sít. Ekkor aztán vectoraink rendre legyenek $A_0A_1, A_1A_2, .., A_{n-1}A_n$. Ha az A_0 pont coordinátái x_0, y_0, z_0, stb., akkor

$$\xi_1=x_1-x_0,\ \xi_2=x_2-x_1,\ \xi_3=x_3-x_2, .., \xi_n=x_n-x_{n-1}$$

stb. stb. Az összeg, vagyis A_0A_n componensei pedig $\xi = x_n - x_0$, stb. A jobb oldalok elárulják, hogy

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n,$$
$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n,$$
$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n:$$

$$(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) + (\xi_2, \eta_2, \zeta_2) + \ldots + (\xi_n, \eta_n, \zeta_n) = (\xi_1 + \ldots + \xi_n, \eta_1 + \ldots + \eta_n, \zeta_1 + \ldots + \zeta_n).$$

A jobb-oldal független az összeadás sorrendjétől, tehát a bal-oldal is: vectorok definiált összeadása commutativus művelet; adott vectorokat bármely rendben sorozzunk lánczba, ha a láncz első pontja mindig ugyanaz a pont, utolsó pontja is mindig ugyanaz.

Fordítva: ha egy vector componensei $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, stb., akkor ez a vector a (ξ_1, η_1, ζ_1), $\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$, .., (ξ_n, η_n, ζ_n) vectorok összege.

VI. Vectorok többszöröse.

Legyen a k egy közönséges realis mennyiség, vagyis csak nagyság és előjel tartozzék hozzája. Szóval, u. n. scalaris legyen.

Az AB vectornak és a k scalarisnak a szorzatán, vagy más szóval az AB vector k-szorosán azt a vectort értjük, amelynek a hossza az AB vector hosszának és a k scalaris számértékének a szorozata, az iránya pedig, aszerint, amint a k positivus vagy negativus, egyező vagy ellenkező az AB vector irányával.

A szorzat meghatározását szorzásnak, az AB vectort szorzandónak, a k scalarist szorzónak nevezzük. Képletileg a szorzást is az algebrában szokásos módon követeljük; így, ha AB és k szorzata AB':

$$k \,.\, \mathrm{AB} = \mathrm{AB} \,.\, k = \mathrm{AB}'.$$

Ha a szorzandó vector hossza r, és iránycosinusai α, β, γ, úgy a definitio értelmében a szorzati vector hossza $|k|r$ és iránycosinusai, aszerint, amint a k positivus vagy negativus, α, β, γ, vagy $-\alpha, -\beta, -\gamma$.

A szorzat componensei a szorzandó vector componenseinek k-szorosai. Legyenek ugyanis a szorzandó vector componensei ξ, η, ζ. Akkor

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

tehát a szorzati vector hossza

$$r' = |k| r = \sqrt{(k\xi)^2 + (k\eta)^2 + (k\zeta)^2}.$$

Iránycosinusai pedig, ha k positivus,

$$\alpha' = \alpha = \xi : \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = k\xi : r' \text{ stb.}$$

ha k negativus,

$$\alpha' = -\alpha = -\xi : \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = k\xi : r', \text{ stb.}$$

Következőleg a szorzat componensei

$$\xi' = r'\alpha' = k\xi, \qquad \eta' = r'\beta' = k\eta, \qquad \zeta' = r'\gamma' = k\zeta$$

úgy az egyik, mint a másik esetben. Mindkét esetben

$$(\xi, \eta, \zeta).k = (k\xi, k\eta, k\zeta).$$

Fordítva, hogyha egy vector componensei $k\xi$, $k\eta$, $k\zeta$, akkor ez a vector a (ξ, η, ζ) vectornak és a k scalarisnak a szorzata.

Egy vectornak az $(1:k)$-szorosát a vector k-ad részének is mondjuk. Meghatározását a vector k-val való osztásának is nevezzük s élünk az összes megfelelő algebrai szólás- és írás-módokkal. Igy AB vectornak, mint osztandónak, és k scalarisnak, mint osztónak, a hányadosa

$$\mathrm{AB} : k = \frac{\mathrm{AB}}{k} = \mathrm{AB} . \frac{1}{k}.$$

Ezek szerint

$$(\xi, \eta, \zeta) : k = \frac{(\xi, \eta, \zeta)}{k} = \left(\frac{\xi}{k}, \frac{\eta}{k}, \frac{\zeta}{k}\right),$$

s a hányados vector hossza az osztandó vector hosszának osztata az osztó scalarisnak a számértékével, iránya pedig aszerint, amint az osztó positivus vagy negativus, egyező vagy ellenkező az osztandó vector irányával.

Egy összeg k-szorosa az egyes összeadandók k-szorosának az összege. Mert, ha a (ξ, η, ζ) vector a (ξ_1, η_1, ζ_1), (ξ_2, η_2, ζ_2), stb. vectorok összege, úgy

$$(k\,\xi, k\,\eta, k\,\zeta) = (k\,\xi_1 + k\,\xi_2 + \ldots, k\,\eta_1 + k\,\eta_2 + \ldots, k\,\zeta_1 + k\,\zeta_2 + \ldots) =$$
$$(k\,\xi_1, k\,\eta_1, k\,\zeta_1) + (k\,\xi_2 + k\,\eta_2 + k\,\zeta_2) + \ldots$$

Hasonlókép, egy összeg k-ad része az egyes összeadandók k-ad részének az összege, mert ez a szorzatos egyenlőség akkor is helyes lesz, ha abban k helyett $1:k$ iratik: vectornak scalarissal való szorzása és osztása distributivus művelet.

VII. Vectorok szöge.

Két vectornak a szögén azt a homorú szöget értjük, amely alatt egyik vector iránya a másikéba fordítható.

Minthogy a vectorok meghatározzák ezt a szöget, kifejezhető az a vector-határozókkal; sőt, mivel már a két vector iránya meghatározza ezt a szöget, kifejezhető az a vectorok irány-határozóival, milyenek az irány-cosinusok.

Jelölje θ két vectornak a szögét. Az egyik vector elejét helyezzük a másiknak a végébe, mint összeadáskor. Most AB és BC legyenek a vectorok. AC azoknak az összege. Hossszúságukat rendre jelöljék r_1, r_2, r. A három vector egy három-szöget alkot, amelynek a B csúcsnál lévő szöge $\pi-\theta$. Eszerint

$$r^2=r_1{}^2+r_2{}^2-2r_1r_2\cos(\pi-\theta)$$

De, ha a vectorok componensei rendre ξ_1, η_1, ζ_1 és ξ_2, η_2, ζ_2 és ξ, η, ζ, úgy

$$r_1{}^2=\xi_1{}^2+\eta_1{}^2+\zeta_1{}^2, \quad r_2{}^2=\xi_2{}^2+\eta_2{}^2+\zeta_2{}^2, \quad r^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$$

Beírván ezeket az egyenletbe és tekintetbe vévén, hogy $\cos\pi-\theta=-\cos\theta$, meg, hogy $\xi=\xi_1+\xi_2$, stb. találjuk:

$$r_1r_2\cos\theta=\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2$$

És, ha a két vector iránycosinusai $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ illetőleg $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, úgy amiatt, hogy $\xi_1=r_1\alpha_1$, $\xi_2=r_2\alpha_2$, stb.:

$$\cos\theta=\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2.$$

A vector-szög e cosinusos kifejezésének van a leggyakoribb alkalmazása. Nem ritkán hasznos azonban egy sinusos kifejezése is. Világos, hogy

$$\sin^2\theta=1-(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)^2.$$

Irjuk itt a jobb oldal első tagja helyett

$$(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+\gamma_1{}^2)(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2+\gamma_2{}^2),$$

azután végezzük el a követelt szorzást és hatványozást. Az eredményen azonnal fölismerhető, hogy

$$\sin^2\theta=(\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2)^2+(\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2)^2+(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)^2.$$

Mivel $0\leqq\theta\leqq\pi$, így a $\sin\theta$ mindig positivus.

Ha a két vector merőleges egymásra, akkor $\theta=\pi:2$, tehát

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0.$$

Viszont, ha áll ez az egyenlet, akkor, a két vector merőleges egymásra, mert $\theta=\pi:2$. Szorozzuk meg az egyenletet r_1-el. Azután szorozzuk még meg r_2-vel is. Nyomban látjuk, hogy a merőlegesség szükséges és elégséges föltétele külön-külön a következő két egyenlet is:

$$\xi_1\alpha_2+\eta_1\beta_2+\zeta_1\gamma_2=0.$$
$$\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2=0.—$$

Ha $\theta=\pi:2$, akkor $\sin\theta=1$ és viszont. Következőleg nem külömben szükséges és elégséges föltétele a merőlegességnek ez az egyenlet:

$$(\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2)^2+(\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2)^2+(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)^2=1. \text{ —}$$

Sokszor czélszerű bizonyos parameteres alakokban használni ezeket az egyenleteket. Induljunk ki ebből:

$$\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2=0.$$

Ha egy vector tényleg létezik, úgy legalább egy componense nem zérus. Legyen, hogy ζ_1 nem zérus. Akkor kétségtelenűl meghatározhatók úgy az l és m scalarisok, hogy

$$\xi_2=m\zeta_1-n\eta_1, \qquad \eta_2=n\xi_1-l\zeta_1$$

legyen, bármi értékű scalaris az n. De behelyettezvén ezeket az egyenletbe, azt találjuk, hogy, mivel a ζ_1 nem zérus,

$$\zeta_2=l\eta_1-m\xi_1.$$

Világos, hogy nem külömben következnek ily kifejezések abban a bizonyosságban, hogy η_1, vagy, hogy ξ_1 nem zérus, és a három paraméter közűl az egyik mindig tetszőleges. Ez a három kifejezés is szükséges és elégséges föltétele a merőlegességnek; szükséges föltétele, mert szükségképen következtek abból az egyenletből, amelyből kiindúltunk; elégséges föltétele, mert viszont belőlük az az egyenlet következik. A megfelelő alakokhoz jutunk az irány-cosinusok számára, ha ezeket az alakokat r_2-vel elosztjuk. Irván pedig

$$\frac{r_1}{r_2}l=a, \qquad \frac{r_1}{r_2}m=b, \qquad \frac{r_1}{r_2}n=c,$$

az iránycosinusok parameteres vonatkozásai a föltételezett merőlegességben ezek:

$$\alpha_2=b\gamma_1-c\beta_1, \qquad \beta_2=c\alpha_1-a\gamma_1, \qquad \gamma_2=a\beta_1-b\alpha_1.$$

Ha a két vector egyező irányú, akkor $\cos\theta=1$, tehát

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=1.$$

Viszont, ha áll ez az egyenlet, akkor a két vector egyező irányú, mert akkor $\cos\theta=1$, tehát $\theta=0$. Tényileg, ha ennek az egyenletnek a jobb-oldala helyett az

$$\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+\gamma_1{}^2+\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2+\gamma_2{}^2$$

kifejezés felét írjuk, azonnal láthatjuk, hogy

$$(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2=0 \quad \text{tehát } \alpha_1=\alpha_2,\ \beta_1=\beta_2,\ \gamma_1=\gamma_2.$$

VIII. Vectorok tengelye.

Egy vector kezdő pontján a vectorra merőleges tengelyt a vector tengelyének nevezzük. Ha a vector iránycosinusai α', β', γ' úgy valamennyi tengelyének az iránycosinusai bent foglaltatnak a következő alakokban:

$$\alpha = b\gamma' - c\beta', \qquad \beta = c\alpha' - a\gamma', \qquad \gamma = a\beta' - b\alpha',$$

mint az épen elébb nyert kifejezések tanusítják; mert a vector bármely tengelyéhez tartoznak olyan a, b, c értékek, hogy α, β, γ a tengely iránycosinusai.

Két vector tengelyéről is beszélünk. Elejüket egy pontba helyezvén, közös tengelyeiket nevezzük így. Ha sem nem egyező, sem nem ellenkező a vectorok iránya, akkor csak egy tengelyvonaluk, azaz csak két tengelyük van, amelyek egymás ellentétesei. De a következő megkülömböztetéssel élünk: AB és AC vector tengelyén azt értjük, amely körűl az AC vector iránya positivus fordulással jut az AB vector irányába a két vector szöge alatt; AC és AB vector tengelyén az ellentétes tengelyt értjük. Ugyanebben az értelemben beszélünk két iránynak a tengelyéről.

Világos, hogy a tengely-irányt meghatározza a két vector iránya, tehát meghatározzák a két vector irány-cosinusai. Az AC és AB vector tengelyének az iránycosinusai legyenek α, β, γ, az AC és AB vector iránycosinusai pedig $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, illetőleg $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Az α, β, γ cosinusok egyenletei ezek:

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0,$$
$$\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \gamma\gamma_2 = 0,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

A két elsőből

$$\alpha : \beta : \gamma = (\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) : (\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2) : (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2),$$

tehát létezik olyan scalaris, λ, hogy

$$\alpha = (\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) : \lambda,$$
$$\beta = (\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2) : \lambda,$$
$$\gamma = (\alpha_1\beta_3 - \beta_1\alpha_2) : \lambda.$$

Most már a hátra lévő egyenletből

$$\lambda^2 = (\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)^2 + (\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)^2,$$

tehát, ha a két vector szöge θ, úgy a λ divisor számértéke $\sin\theta$. Előjelének a megállapítása végett czélszerű egy másik helyhatározó rendszerhez is folyamodni. Az origója legyen az A pontban és a tengelyei eleve egyirányúak legyenek a régi tengelyekkel. Ekkor az új rendszerben ugyanazok az összes irány-cosinusok, mint a régiben, következőleg a λ is ugyanaz, nemcsak számértékre, de előjelre nézve is. Azonban forgassuk el az új tengelyrendszert az A pont körűl úgy, hogy az ő z tengelyének az iránya a vectorok tengelyének az irányába essék, y tengelyének az iránya pedig az AC vector irányába essék. Most az új rendszerben $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=1$, $\alpha_2=0$, $\beta_2=1$, $\gamma_2=0$, és az AB vector iránya szükségképen hegyes szöget képez az x tengely irányával. Továbbá, mivel a fordítás alatt az irány-cosinusok mind folytonosan változtak, a θ szög pedig változatlan maradt, így az λ divisor előjele szükségképen változatlan maradt, nem csaphatott át egyszer sem egyik féleségből a másikba. De a γ irány-cosinus egyenletéből folyólag az új rendszerben, ennek új helyzetében

$$1=(\alpha_1.1-\beta_1.0):\lambda=\frac{\alpha_1}{\lambda}$$

Minthogy az AB vector iránya az új x tengely irányával jelenleg hegyes szöget képez, így az α_1 positivus, tehát λ is positivus, $\lambda=+\sin\theta$. Szükségképen ugyanaz lévén a λ, a mi eredetileg volt, az eredeti rendszerben is positivus előjellel illeti meg a $\sin\theta$ érték: a (ξ_2, η_2, ζ_2) és (ξ_1, η_1, ζ_1) vector tengélyének az irány-cosinusait

$$\alpha=\frac{\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2}{\sin\theta}\quad \beta=\frac{\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2}{\sin\theta}\quad \gamma=\frac{\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2}{\sin\theta}$$

kifejezések határozzák meg, a melyekben θ a két vector szöge.

Ha merőleges egymásra a két vector, úgy

$$\alpha=\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2,\ \beta=\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2,\ \gamma=\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2.$$

Az AB és AC vector tengelyének az irány-cosinusai nyilvánképen

$$\frac{\beta_2\gamma_1-\gamma_2\beta_1}{\sin\theta}\quad \frac{\gamma_2\alpha_1-\alpha_2\gamma_1}{\sin\theta}\quad \frac{\alpha_2\beta_1-\beta_2\alpha_1}{\sin\theta}$$

és, ha merőlegesek egymásra, úgy

$$\beta_2\gamma_1-\gamma_2\beta_1,\ \gamma_2\alpha_1-\alpha_2\gamma_1,\ \alpha_2\beta_1-\beta_2\alpha_1.$$

IX. Vectorok értékei

Egy vector hosszának az értékét a vector nagyságának vagy absolutus értékének is nevezzük; s ebben az értelemben beszélünk kisebb és nagyobb vectorokról.

Egy vector értéke alatt, így pusztán, minden jelző nélkül mondva, a vector nagyságának és irányának együttesét értjük. Ehhez képest egyenlő vectorok egyenlő értékűek, nem egyenlő vectorok külömböző értékűek.

Az absolutus vector érték fogalmát, mint specialist, tartalmazza egy igen hasznos relativus érték-fogalom, a mely a vectornak egy tengelyhez, vagy általánosabban egy irányhoz bizonyos módon megszabott viszonyát jellemzi. — Legyen adva egy tengely I. AB vector elejének a merőleges vetülete ezen az I tengelyen legyen A', végének a merőleges vetűlete B'. Az $A'B'$ vector iránya vagy egyező, vagy ellenkező az I tengely irányával. A szerint, a mint egyező, vagy ellenkező, az $A'B'$ vector nagyságát positivus, vagy negativus előjellel az AB vector I tengelyen számított, vagy I tengelyre tartozó értékének nevezzük.

Jelölje ι. Ha az AB vector nagysága r, és ha e vector iránya, meg a tengely iránya $\tilde{\omega}$ szöget képez, úgy

$$\iota = r\cos\tilde{\omega},$$

akár egyezik, akár ellenkezik az $A'B'$ vetületi vector iránya az I tengely irányával. Abban a különös esetben, hogy az I tengely iránya magának az AB vectornak az irányával egyezik, $\tilde{\omega}=0$, tehát $\iota=$r, vagyis ebben a különös esetben a vectornak az I tengelyen számított értéke összeesik az ő absolutus értékével.

Ha a vector irány-cossinusai α, β, γ; akkor a coordinata-tengelyekre tartozó értékei rendre $r\alpha$, $r\beta$, $r\gamma$, azaz a componensei. Ezért, bármely tengelyre tartozó értékét e tengelyre tartozó componensének is nevezzük.

Legyenek az I tengely irány-cosinusai l, m, n. Akkor

$$\cos\tilde{\omega} = \alpha l + \beta m + \gamma n,$$

tehát a vector I tengelyen számított értéke, I tengelyre tartozó componense

$$\iota = r.(\alpha l + \beta m + \gamma n).$$

Nem különben, ha ξ, η, ζ a vectornak a coordinata-tengelyekre tartozó componensei:

$$\iota = \xi l + \eta m + \zeta n.$$

Világos, hogy a vectorok egyező irányú tengelyeken számított értékei egyenlők.

A természet-tanban az összes alapvető fogalmak mennyiségi tartalmát vagy egy scalaris, vagy egy számérték és egy irány tölti ki. Magától szembeötlik, hogy az utóbbi esetben a fogalom mennyiségi foglalata vectorral ábrázolható. Csakhogy a vector-képben a hosszuság számértéke helyett esetenkint más és más határozmány számértéke gondolandó, mint pld. egy pont „sebességének“, „gyorsulásának“, a

„szögsebességnek", „szöggyorsulásnak", az „erőnek", a „forgató hatásnak", az „elektromos-" és a „mágneses momentumnak", a „tömegáramlásnak", az „elektromos-áramlásnak" stb. fogalmában. Mégis a „vector" nevet általánosabban mindazokra a fogalmakra alkalmazzuk, amelyek mennyiségi alkotó részét egy számérték és egy irány képezi. Ebben az általánosabb értelemben gondolva a „vector" szót: amelyek egyenlő mennyiségi tartalom mellett is különböznek, azokat különböző dimensiójúaknak vagy jellegüeknek mondjuk és mennyiségi határozóikat rendszerint föltűnően különböző betű-jegyekkel jelöljük, milyenek pld., mint componensek jelvényei, ξ, η, ζ; f, g, h; u, v, w; X, Y, Z; F, G, H; U, V, W; stb. Különböző jellegü vectorok határozóinak a megkülömböztetésére alsó indexek használatához nem szoktunk folyamodni; alsó indexekkel közönségesen csak egy jellegü vectorok határozóit különböztetjük meg. A mennyiben különböző jellegű vectorok határozóit is indexekkel akarjuk megkülömböztetni, rendszerint felső indexeket használunk, pld. ha (ξ, η, ζ) egy pont u. n. elmozdulása, u. n. sebességének a jelölésére $(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})$ u. n. gyorsulásának a jelölésére $(\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta})$ alakot vezetünk be stb.

X. Vector-határozók átszámitása.

Egy coordinata rendszerben egy vector meghatározására szolgáló componensek legyenek ξ, η, ζ. Egy más coordinata rendszerben ugyanazt a vectort ξ', η', ζ' határozzák meg, mint compononsek. Nem egyebek ezek, mint a vectornak a coordinata-tengelyeken számított értékei. Amazok az első, emezek a második rendszer tengelyein számított vector-értékek. Ha tehát az első rendszerben a második rendszer tengelyeinek az irány-cosinusai rendre $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ és $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ és $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, úgy

$$\begin{aligned}\xi' &= \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta,\\ \eta' &= \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta,\\ \zeta' &= \alpha_3\xi + \beta_3\gamma + \gamma_3\zeta.\end{aligned}$$

A második rendszerben az első rendszer tengelyeinek az iránycosinusai rendre α_1, α_2, α_3 és β_1, β_2, β_3 és γ_1, γ_2, γ_3, tehát egyszersmind

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha_1\xi' + \alpha_2\eta' + \alpha_3\zeta',\\ \eta &= \beta_1\xi' + \beta_2\eta' + \beta_3\zeta'.\\ \zeta &= \gamma_1\xi' + \gamma_2\eta' + \gamma_3\zeta'.\end{aligned}$$

Tényileg, ha a három első egyenletet sorban α_1, α_2, α_3 cosinusokkal szorozva összeadjuk, azután ugyanazokat az egyenleteket sorban β_1, β_2, β_3 cosinusokkal szorozva adjuk össze, azután ugyanazokat az egyenleteket sorban γ_1, γ_2, γ_3 cosinusokkal szorozva adjuk össze, a második egyenletcsoportot kapjuk, mert amiatt, hogy ezek a szorzók egy-egy iránynak az iránycosinusai a második rendszerben:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1,$$
$$\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1,$$
$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1,$$

és amiatt, hogy három egymásra merőleges iránynak az iránycosinusai,

$$\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0,$$
$$\gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3=0,$$
$$\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0.$$

Nem külömben, ha a második három egyenletet sorban $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ cosinusokkal szorozva adjuk össze, azután ugyanazokat az $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ cosinusokkal szorozva adjuk össze, azután ugyanazokat $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ cosinusokkal szorozva összeadjuk, az első egyenlet-csoportot kapjuk, mert amiatt, hogy ezek a szorzók egy-egy iránynak az iránycosinusai az első rendszerben:

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1,$$
$$\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1,$$
$$\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^3=1,$$

és amiatt, hogy három egymásra merőleges iránynak az iránycosinusai,

$$\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0,$$
$$\alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1=0,$$
$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0.$$

Az első rendszerben számított (ξ, η, ζ) vector és a másodikban számított (ξ', η', ζ') vector nagysága egyenlő, mert a kettő ugyanaz a vector. Tényileg, ha a

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2$$

kifejezésben a második egyenlet-csoportból a jobb oldalakat írjuk, vagy, ha a

$$\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2$$

kifejezésben az első egyenlet-csoportból a jobb oldalokat írjuk, úgy az iránycosinusok relatiói alapján azonnal fölismerhetjük, hogy a két kifejezés egyenlő.

A vectornak a két rendszerbe tartozó iránycosinusai azonban általában mind külömbözők és csak akkor egyenlők mind, mikor a két rendszer megfelelő tengelyei egyező irányúak. Ez az iránycosinusok fogalma alapján közbötlenűl belátható. Még pedig, ha a vector iránycosinusai az első rendszeren α, β, γ, a másodikban α', β', γ', akkor

$$\alpha'=\alpha_1\alpha+\beta_1\beta+\gamma_1\gamma, \text{ stb.}$$
$$\alpha=\alpha_1\alpha'+\alpha_2\beta'+\alpha_3\gamma' \text{ stb.}$$

Készen kerűlnek elő ezek az egyenletek a componens-egyenletekből a a vector nagyságával végzett osztás által, vagy az előbbi czikkben cos $\bar{\omega}$ számára jegyzett kifejezésből az l, m, n iránycosinusok megfelelő helyettesítése által.

Fordítva, ha egy vector componensei az első rendszerben ξ, η, ζ, a másodikban ξ_0, η_0, ζ_0, és, ha

$$\xi_0=\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta, \text{ stb.},$$

akkor a két vector egyenlő, mert

$$\xi_0=\xi', \qquad \eta_0=\eta', \qquad \zeta_0=\zeta'.$$

Ha egy vector iránycosinusai az első rendszerben α, β,, γ, a másodikban α_0, β_0, γ_0 és, ha

$$\alpha_0=\alpha_1\alpha+\beta_1\beta+\gamma_1\gamma, \text{ stb.},$$

akkor a két vector iránya egyezik, mert

$$\alpha_0=\alpha' \qquad \beta_0=\beta', \qquad \gamma_0=\gamma'.$$

Miután egy vector componenseit át tudjuk számítani egy másik coordinata-rendszerbe, könnyű szerrel megformulázhatjuk egy pont coordinatáinak az átszámítását is. Egy pont coordinatái a pont origoi vectorának a componensei. Jelölje az első rendszer origóját O, a második rendszerét O', a pontot P. A pont két origoi vectora OP és $O'P$ a következő viszonyban vannak: az $O'P$ vector az OP vectornak és az OO' vectornak a külömbsége:

$$O'P=OP-OO'.$$

A P pont coordinatái az első rendszerben legyenek x, y, z. Akkor x, y, z az OP vector componensei az első rendszerben, tehát $x\alpha_1+y\beta_1+z\gamma_1$ stb. a másodikban. Az O' pont coordinátái az első rendszerben legyenek a, b, c. Akkor a, b, c az OO' vector componensei az első rendszerben, tehát $a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1$ a másodikban. A P pont coordinatái a második rendszerben legyenek x', y' z'. Ezek az $O'P$ vector componensei a második rendszerben. Igy

$$(x', y', z')=(x\alpha_1+y\beta_1+z\gamma_1\,,.\,,.)-(a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1\,,.\,,.).$$

Minthogy ez egyenletben mindhárom vector componensei ugyanabba a rendszerbe tartoznak, t. i. a másodikba, ennélfogva

$$\begin{aligned} x'&=(x-a)\alpha_1+(y-b)\beta_1+(z-c)\gamma_1,\\ y'&=(x-a)\alpha_2+(y-b)\beta_2+(z-c)\gamma_2,\\ z'&=(x-a)\alpha_3+(y-b)\beta_3+(z-c)\gamma_3. \end{aligned}$$

Legyen még fölemlítve, hogy, ismervén azt az összefüggést, amely két derékszögű vector iránycosinusai és bármelyik tengelyük iránycosinusai közt létezik, ismerjük azt az összefüggést is, amely három, egymásra merőleges tengely iránycosinusai közt létezik; úgy, hogy egyenesen fölírhatjuk azokat a relatiókat, amelyek egy coordinata-rendszer három tengelyének egy másik rendszerbe tartozó iránycosinusai közt fenállanak. Ha $O'B$ vector egyező irányú az O' rendszer második tengelyével, és $O'C$ vector egyező irányú az O' rendszer harmadik tengelyével, akkor az O' rendszer első tengelye az $O'C$ és $O'B$ vector tengelye, föltévén t. i., hogy ez is jobbra forduló rendszer, tehát

$$\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3, \quad \beta_1 = \gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3, \quad \gamma_1 = \alpha_2\gamma_3 - \gamma_2\alpha_3.$$

Hasonló módon találhatjuk, hogy

$$\alpha_2 = \beta_3\gamma_1 - \gamma_3\beta_1, \quad \beta_2 = \gamma_3\alpha_1 - \alpha_3\gamma_1, \quad \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \beta_3\alpha_1,$$
$$\alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2, \quad \beta_3 = \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2, \quad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2.$$

XI. Vectorok változása.

Mindig a ma általánosan szokott értelemben fogom azt mondani egy scalarisról, hogy más scalarisokkal folytonosan változik, avagy hogy folytonos függvényük, t. i. a CAUCHYtól, illetőleg BOLZANOtól definiált értelemben. Ha tehát f scalarisról azt mondom, hogy $u, v, ..$ scalarisokkal ezek $u_0, v_0, ..$ értékénél folytonosan változik, állıtásomat úgy értem, hogy először mihelyt $u-u_0$, $v-v_0, ..$ számértéke bizonyos positivus számnál kisebb, már $f(u, v, ..)$ teljesen meghatározott értékkel bír; másodszor pedig bármi kis positivus számot jelentsen λ, létezik akkora positivus szám, ν, hogy mihelyt $u-u_0$, $v-v_0, ..$ számértékre kisebbek, mint ν, már a

$$f(u, v, ..) - f(u_0, v_0, ..)$$

külömbség számértéke kisebb, mint λ.

De nem ritkán előfordúl, hogy egy függvénynek bizonyos föltételekhez kötött folytonosságát kell csak szem előtt tartanunk. Ennek a definitiója abban külömbözik az előbbitől, hogy bizonyos egyenlőtlenségi vagy egyenlőségi relatiók kielégítését követeli az $u, v, ..$ változóktól.

A physikában különös jelentőséggel bir az időtől és helytől való függés. Az időtartamot attól az időponttól kezdve szoktuk számitani, amelytől kezdve valamely természeti folyamatot vizsgálat tárgyává teszünk. Ha ettől az időponttól egy tetszés szerinti későbbi időpontig t mekkoraságú idő mult el, úgy az időtől való függést a t mennyiségtől való függés képezi. Egy vagy több pont coordinatáitól való függés teszi a helytől való függést.

A zérus-vector fogalma lehetővé teszi, hogy bármely physikai tárgyalásban minden időpont számára ugyanannyi vectort vegyünk tekintetbe, még pedig olyképen, hogy jelleg szerint is minden időpontban ugyanannyi vectorunk legyen.

E mellett czélszerű úgy osztályozni a vectorokat, hogy egyjellegű vectorok, amelyek mindegyike más időpontba tartozik, s amelyek közűl minden időpontra jut egy, egy osztályt alkossanak. Ebben az osztályozásban mindig oly módon járhatunk el, hogy az egy osztályt alkotó vectorok componensei három scalarisnak a folytonos változtatásával, még pedig időrend szerint legyenek előállíthatók. Mindig már előzetesen föltehetjük ennek az előállításnak a lehetőségét, mert föltevésünk soha semmiféle tapasztalással össze nem ütközik, sőt igen hasznos elméleti hypothesist foglal magában.

Legföljebb látszólag ellenkezik a tapasztalással. Ez a látszólagos ellenkezés mindig annak tulajdonítható, hogy egyes igen rövid időtartamokban aránylag igen nagy mértékben kell megváltoztatni a scalarisokat, legalább egyet, hogy a jellemzett előállítás megvalósúlhasson.

Föltevésünk jogos és czélszerű lévén, reá támaszkodva, egyszersmind individualis vectorok képzetét alkotjuk: az egy osztályba sorozott vectorok sokaságát egyetlen vector fogalmába foglaljuk, az idővel folytonosan változó vector fogalmába, amelynek a componenseit t. i. három, az idővel folytonosan változó scalaris képezi.

Ha egy ilyen vector componensei t időpontban — vagyis a t időtartam végén — ξ, η, ζ, úgy a nagysága ebben az időpontban

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

tehát ez is folytonosan változik az idővel. Ha az irány-cosinusai, α, β, γ és a nagysága r a t időpontban, úgy

$$r\alpha=\xi, \qquad r\beta=\eta, \qquad r\gamma=\zeta.$$

A mig tehát a nagysága nagyobb, mint bármi kis határozott positivus mennyiség, az iránycosinusai is folytonosan változnak az idővel, másképp mondva, az iránya is folytonosan változik az idővel. De amely időpontban a vector nagysága eltünik, és így ξ, η, ζ zérussá válnak, abban az időpontban az iránycosinusok folytonosság-szakadást szenvedhetnek, a vector iránya másba csaphat át, mint amibe a vectornak az eltünése előtt convergált.

Miután, az időbeli folytonosság alapján osztályozván a vectorokat, a vector-egyén fogalmát megalkottuk, most ezeket a vector-egyéneket osztályozzuk. Osztályozásuk egy szükséges módját jelleg szerint való külömbözésük szolgáltatja. De midőn egyjellegű vectoregyének végtelen nagy számmal fordúlnak elő, akkor szükséges ezek analyticus osztályozása is.

Ez az osztályozás mindig hely szerint valóra vezethető vissza és szintén folytonossági hypothesisre támaszkodik, t. i. a helylyel járó folytonosság hypothesisére. Mindig föltehetjük, hogy egyjellegű vectoregyének egy osztályához jutunk, ha három scalarist az időnek és egy, vagy több hely coordinatáinak bizonyos folytonos függvényévé teszünk azzal a rendeléssel, hogy ezek a helyek egyes vonalak, fölületek, tér-részek egy-egy tetszés szerinti pontja lehessenek, midőn aztán a scalarisoknak a vonalok, fölületek, térrészek külömböző pontjaihoz tartozó értékei szolgáltatják egy osztály számára a vector-egyének componenseit, s ilyképen az osztályozás teljesen kimeríthető.

Ez a föltevés ép oly fontos elméleti hypothesist képez, mint az előbbeni. A tapasztalás előtt mutatkozó kivételek ebben is látszólagosaknak tekinthetők. De ennek a követésében már csak külső forma szerint egyénitünk, amennyiben a hely szerint egy osztályba sorozott vectoregyénekről esetleg úgy beszélünk, mint egyetlen vectorról, amely az idővel és a helylyel vagy helyekkel folytonosan változik, ezek folytonos függvénye, amivel azonban nem akarjuk azt mondani, hogy egy időben létező vectorokat egynek tekintünk, s csupán analyticus szempontból beszélünk így, hogy a vectorok egyidejű sokaságának hely szerint gondolt folytonosságát egyszerűbb külső formában tárgyalhassuk. Pld. ebben az értelemben itt hasonló módon következik, mint az elébb az idővel való változáskor, hogy a helylyel vagy helyekkel folytonosan változó vector nagysága is folytonosan változik, s a míg a nagysága zéruson fölűl van, iránya is folytonosan változik a helylyel vagy helyekkel.

Physikai fogalmak, amelyek mennyiségileg scalarisok, szintén követik az idő és hely szerint való folytonosság elvét.

Physikai fogalmak mennyiségi tartalmát képező egyjellegű vectoroknak, valamint scalarisoknak ez a kétféle analyticus osztályozása együtt véve, vagyis a folytonosság elvén idő és egy vagy több hely szerint való osztályozásuk mindig teljes analyticus összefoglalást és szétválasztást képezhet, t. i. összefoglalást az egyes folytonossági osztályokba és szétválást az egyes folytonossági osztályok szerint.

Azonban alakra nézve tényileg nem mindig közbötlen az. Nem ritkán előfordúl, hogy physikai fogalmak mennyiségi tartalmát képező vectorok, vagy scalarisok, illetőleg az előbbiek componensei, közbötlenűl úgy tekintendők, mint más scalarisoknak, más vectorok componenseinek a függvényei, vagy ezeknek és az időnek és egy vagy több helynek a függvényei, s anynyiban tekinthetők mégis csupán az idő és egy, vagy több hely függvényének, amennyiben ezek az utóbbi scalárisok és vectorok az idő és egy vagy több hely függvényei. Egy vector componenseitől vagy bármely határozóitól való függést röviden a vectortól való függésnek mondjuk. Ebben az értelemben scalarisok, vectorok, amelyektől mások függenek, szintén függhetnek scalarisoktól, vectoroktól, amelyek az idő és egy vagy több hely függvényei sít. A függések lefelé követése mindig az időre és egy vagy több helyre szorítkozó függésig juttat.

Legyen fölemlítve itt, hogy ezt a szót: értéktartomány, ugyanabban az értelemben használjuk a vectorokra vonatkozólag, mint a scalarisokra vonatkozólag.

Végre: egy vectornak egy értékből egy másikba változásán nemcsak a változás tényét értjük, hanem így nevezzük a vector új értékének és előbbi értékének a külömbségét is. Hogy mikor értjük a változás tényét, mikor ezt a külömséget, állításaink formájából mindig kitűnik. Mennyiségi értelemben egy vectornak AB értékből AC értékbe változása BC vector; (ξ, η, ζ) értékből (ξ', η', ζ') értékbe változása $(\xi'-\xi, \eta'-\eta, \zeta'-\zeta)$ vector: ha AB vector megváltozása BP, akkor új értéke AP, ha (ξ, η, ζ) vector megváltozása (ξ_1, η_1, ζ_1), akkor új értéke $(\xi+\xi_1, \eta+\eta_1, \zeta+\zeta_1)$. Megfelelő mennyiségi értelmet tulajdonitunk egy scalaris megváltozásának.

XII. Végtelen kis változók.

A physikában nagyon megkönnyíti a tárgyalásokat a végtelen kicsinyek fogalma. Voltaképen két külömböző fogalom ez: a végtelen kis változók és a végtelen kis részek fogalma. Ezúttal az elsőnek oly általános meghatározását fogjuk látni, amely a physikában szoros szükségletet szolgál. A másikról a geometriai integralisok tanában leszen szó.

Legyenek ebben az identitásban:

$$F \equiv \psi + \varphi$$

F, ψ, φ scalarisok vagy vectorok az $u, v, \ldots$ scalaris változók függvényei és folytonosak az $u, v, \ldots$ változók zérus értéke mellett.

Tegyük föl, hogy mihelyt $u, v, \ldots$ számértéke kisebb, mint μ, már φ érték-tartománya igen kicsi ψ érték-tartományához képest. Akkor F érték-tartományának a nagysága aránylag igen kicsit külömbözik ψ-énck a nagyságától. Azonban a két érték-tartomány maga általában nem igen kicsit külömbözik egymástól, teljesen egymáson kivűl is fekhetnek, és ha van közös részük, ez általában épen nem megfelelően közös. De ha φ nagyságának felső számhatára igen kicsiny, akkor a két értéktartomány nem csak nagyságra, hanem tartalomra nézve is igen kicsit külömbözik.

Tegyük föl már most, hogy bármi kis számérték legyen ν, létezik akkora számérték, ρ, hogy mihelyt $u, v, \ldots$ fölső számhatára kisebb mint ρ, már φ nagyságának fölső számhatára kisebb, mint ν és a φ értéktartomány kisebb, mint a ψ értéktartománynak a ν-szöröse.

Gyakran beosztható egy F függvény oly módon egy, vagy többféle képen két, ψ és φ, részre, hogy ez a föltétel teljesűl, és ha mennyiségi vonatkozásokban — egyenletekben, egyenlőtlenségekben — az F függvény helyett az egyik vagy másik ψ függvényt használjuk, úgy e föltételből folyólag $u, v, \ldots$ felső számhatára megszabható oly kicsinyre, hogy azok a vonatkozások, valamint a belőlük vonandó következtetések egészen tetszésre meghatározott kicsinél kisebb mértékben térnek el az F függvényhez tartozóktól.

Ilyenkor rendszerint czélszerű is valami okból ez a helyettesítés. Pld. analysisbeli nehézségek elkerűlésére szolgál, termékeny fölfogásokhoz segít el. Vagy az F függvényt nem is ismerjük és nem tudjuk meghatározni, ellenben megfelelő ψ-féle határalakját valami módon föl tudjuk ismerni. Ez esetekben tényileg használatba veszszük.

De egyszersmind az $u, v, \ldots$ változóknak csakis arra a rendeltetésre tulajdonítunk fölső számhatárt, hogy az összes előforduló mennyiségi vonatkozásokat bármi tetszésre megszabható kicsinynél kisebb eltéréssel elégítsék ki. Ebben a kikötésben már végtelen kicsinyeknek nevezzük az $u, v, \ldots$ változókat.

Ha a végtelen kis változók más változók megváltozásai, akkor differentialéknak, az illető változók differentialéinak nevezzük azokat. Definitiójukból folyólag a differentialis számítás szabályai alá esnek.

Ha egy vector componensei végtelen kis változók, akkor a vector nagysága is végtelen kis változó, s a vectort végtelen kis vectornak mondjuk.

Az a vector, a melynek a componensei egy más vector componenseinek a differentialéi, ennek a vectornak a megváltozása, tehát e vector végtelen kis megváltozásának, vagy differentialéjának nevezzük.

A „végtelen kis" jelző helyett egyszerűség kedveért közönségesen az „elemi" jelzőt használjuk a leírt értelemben.

Mellesleg tegyük azt az észrevételt, hogy midőn az F, φ, ψ függvények vectorok és nagyság tekintetében határföltételünknek eleget tesznek, csupán e végből nem szükségképen való, hogy mindhárom componensük eleget tegyen határföltételünknek, és pedig egy vagy két componensük az értéktartományok terjedelmi viszonyát illetőleg ellent is mondhat annak.

Legyenek ugyanis az F, ψ, φ vectorok componensei rendre

$$F_1,\ F_2,\ F_3,$$
$$\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,$$
$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3.$$

Minthogy

$$F \equiv \psi + \varphi$$

ennél fogva

$$F_1 \equiv \psi_1 + \varphi_1,$$
$$F_2 \equiv \psi_2 + \varphi_2,$$
$$F_3 \equiv \psi_3 + \varphi_3.$$

Ha meg is engedjük, hogy ez identitasokban egy vagy két φ-componens csak a fölső számhatárra nézve teljesíti határ-föltételünket, azért a vectorok nagyság tekintetében mégis egészen teljesíthetik. A vectorok identitasában, t. i.

$$(F_1,\ F_2,\ F_3) \equiv (\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3) + (\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)$$

a jobb oldal második tagja nemcsak nagyságának fölső számhatárával felel meg határföltételünknek, de azzal a számaránynyal is megfelelhet neki, amelyben absolutus értéktartományának a terjedelme van az első tagénak a terjedelméhez. Mert még akkor is, midőn két φ-componens ellenkezik határ-föltételünkkel értéktartomány tekintetében, a φ-vector nagyságának, t. i. a

$$\sqrt{\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2}$$

függvénynek és a ψ vector nagyságának, t. i. a

$$\sqrt{\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2}$$

függvénynek az értéktartománya kielégítheti azt terjedelmének a hányadosával a harmadik componens révén.

Legyen még fölemlítve, hogy az F és ψ függvény rendszerint a következő alaki viszonyban van egymáshoz:

$$F\equiv F(\mathrm{u, u, v, v}, \ldots),$$
$$\psi\equiv F(\mathrm{u, o, v, o}, \ldots).$$

XIII. Vectorok elemi megváltozása.

1. Ha egy vector componensei ξ, η, ζ, és ezek elemi megváltozása $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, úgy a vector elemi megváltozása

$$d(\xi, \eta, \zeta)=(d\xi, d\eta, d\zeta).$$

Jelölje α, β, γ a vector iránycosinusait, r a vector nagyságát. Akkor

$$\xi=r\alpha, \quad \eta=r\beta, \quad \zeta=r\gamma.$$

Ha tehát a vector elemi megváltozásában a vector nagyságának az elemi megváltozása dr és iránycosinusainak az elemi megváltozása $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, úgy

$$d\xi=\alpha dr+rd\alpha,$$
$$d\zeta=\beta dr+rd\beta,$$
$$d\zeta=\gamma dr+rd\gamma.$$

Eszerint a vector elemi megváltozása ennek a két elemi vectornak az összege:

$$(\alpha dr, \quad \beta dr, \quad \gamma dr),$$
$$(rd\alpha, \quad rd\beta, \quad rd\gamma),$$

amelyek elseje a vector nagyságának, másika a vector irányának a megváltozásából ered: az első független a vector irányváltozásától, a másik független a vector nagyságváltozásától és ha csak a vector nagysága változik meg, akkor csak az első létezik, ha csak a vector iránya változik meg, akkor csak a második létezik. Az elsőt a vector elemi növekedésének, a másodikat a vector elemi elfordulásának nevezzük: egy vector elemi megváltozása elemi növekedésének és elemi elfordulásának az összege. Czélszerű mindkettőt kifejezni a vector határozói és a vector elemi megváltozásának componensei által.

Az elemi növekedés nagysága dr vagy —dr, aszerint, amint dr positivus vagy negativus, tehát aszerint, amint a vector nagyobbodott vagy kisebbedett. Ennek a meghatározása végett szorozzuk meg három kifejezésünket rendre α, β, γ iránycosinusokkal, azután adjuk össze őket. Minthogy

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,$$

s így

$$\alpha d\alpha+\beta d\beta+\gamma d\gamma=0,$$

ennélfogva a következő eredményhez jutunk:

$$dr=\alpha d\xi+\beta d\eta+\gamma d\zeta,$$

tehát dr a vector elemi megváltozásának a vector irányán számított értéke. Ennek az absolutus értéke az elemi növekedés nagysága. Aszerint pedig, amint positivus vagy negativus, az elemi növekedés iránya egyező vagy ellenkező a vector irányával, iránycosinusai α, β, γ vagy $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$. Componensei ezek:

$$\begin{aligned}\alpha dr&=(\alpha d\xi+\beta d\eta+\gamma d\zeta)\alpha\\ \beta dr&=(\alpha d\xi+\beta d\eta+\gamma d\zeta)\beta\\ \gamma dr&=(\alpha d\xi+\beta d\eta+\gamma d\zeta)\gamma.\end{aligned}$$

Már most egyenesen fölírhatjuk az elemi elfordulás componenseinek a kivánt kifejezéseit is:

$$\begin{aligned}rd\alpha&=d\xi-(\alpha d\xi+\beta b\eta+\gamma d\zeta)\alpha,\\ rd\beta&=d\eta-(\alpha d\xi+\beta d\eta+\gamma d\zeta)\beta,\\ rd\gamma&=d\zeta-(\alpha d\xi+\beta d\eta+\zeta d\zeta)\gamma.\end{aligned}$$

Más hasznos alakokban kapjuk ezeket, ha a három jobb-oldali első tagot megszorozzuk az egység $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ alakjával. Éljünk a következő rövidítésekkel:

$$\begin{aligned}\beta d\zeta-\gamma d\eta&\equiv r du,\\ \gamma d\xi-\alpha d\zeta&\equiv r dv,\\ \alpha d\eta-\beta d\zeta&\equiv r dw.\end{aligned}$$

Akkor a jelzett alakok a következők:

$$\begin{aligned}rd\alpha&=\zeta dv-\eta dw,\\ rd\beta&=\xi dw-\zeta du,\\ rd\gamma&=\eta du-\xi dv.\end{aligned}$$

2. A vector elemi elfordúlásának szögéről és tengelyéről is beszélünk. Szögén az új és a régi vector szögét, tengelyén az új és a régi vector tengelyét értjük. Jelölje a szöget $d\theta$. Ennek a sinusát kifejezi (VII)

$$\sin^2 d\theta = [(\beta+d\beta)\gamma - (\gamma+d\gamma)\beta]^2 + . + .,$$

honnan

$$(d\theta)^2 = (\gamma d\beta - \beta d\gamma)^2 + . + .$$

Beírva ide $d\alpha$ helyett $(d\xi - \alpha dr) : r$ stb., találjuk azt is, hogy

$$(d\theta)^2 = (du)^2 + (dv)^2 + (dw)^2.$$

Az elemi elfordulás tengelyének az iránycosinusai (VII)

$$\frac{(\beta+d\beta)\gamma - (\gamma+d\gamma)\beta}{\sin d\theta}, \text{ stb.}$$

azaz

$$\frac{\gamma d\beta - \beta d\gamma}{d\theta}, \text{ stb.}$$

Ugyanúgy járván el, mint épen az imént, leljük, hogy e tengely iránycosinusai

$$\frac{du}{d\theta}, \quad \frac{dv}{d\theta}, \quad \frac{dw}{d\theta}.$$

A du, dv, dw elemi változóknak egyszerű önálló jelentményük van. A (ξ, η, ζ) vector geometriai képének az elejét tegyük az origóba. Azután végének az x tengelyű vectorát (II) fordítsuk el az x tengely körűl du szög alatt (I), y-tengelyű vectorát az y tengely körűl dv szög alatt, z-tengelyű vectorát a z tengely körűl dw szög alatt. A három elemi elfordulás összege a (ξ, η, ζ) vector elemi elfordulása.

Legyen ugyanis az x tengelyű vector (ξ', η', ζ'). Akkor elemi elfordulásának componensei, megfelelő jelölések szerint ezek:

$$\begin{aligned} r'd\alpha' &= \zeta' dv' - \eta' dw' \\ r'd\beta' &= \xi' dw' - \zeta' du', \\ r'd\gamma' &= \eta' du' - \xi' dv'. \end{aligned}$$

Ennek az elemi elfordulásnak a szöge a föltevés szerint $|du|$ nagyságú és positivus elfordulás tengelyének az iránycosinusai, aszerint, amint du positivus vagy negativus, 1,0,0, vagy -1,0,0. Igy

$$d\theta' = |du|$$

$$\frac{du'}{d\theta'} = \frac{du}{|du|}, \quad \frac{dv'}{d\theta'} = o, \quad \frac{dw'}{d\theta'} = o,$$

és következőleg

$$du' = du, \quad dv' = o, \quad dw' = o.$$

Másfelől a (ξ', η', ζ') vectorkép elejének a coordinatái ξ, o, o; végének a coordinatái ξ, η, ζ; tehát a componensei

$$\xi' = o, \quad \eta' = \eta, \quad \zeta' = \zeta.$$

Ezek szerint az x-tengelyű vector elemi elfordulása, ha du szög alatt történik, ezekkel a componensekkel bir:

$$r'd\alpha' = o, \quad r'd\beta' = -\zeta du, \quad r'd\gamma' = \eta du.$$

Hasonlólag találjuk, hogy az y tengelyű vector elemi elfordulása, ha dv szög alatt történik,

$$r''d\alpha'' = \zeta dv, \quad r''d\beta'' = o, \quad r''d\gamma'' = -\xi dv$$

componensekkel bír, és a z-tengelyű vector elemi elfordúlása, ha dw szög alatt történik,

$$r'''d\alpha''' = -\eta dw, \quad r'''d\beta''' = \xi dw, \quad r'''d\gamma = o$$

componensekkel bír. A három elemi elfordulás összegének a componensei tehát:

$$r'd\alpha' + r''d\alpha'' + r'''d\alpha''' = \zeta dv - \eta dw = rd\alpha, \text{ stb.}$$

XIV. Vectorok deriváltjai.

Legyen egy vector egy scalaris folytonos függvénye ennek t_1 és t_2 értéke között. E két érték között foglaltassék a scalarisnak a t és $t+h$ értéke és a vector megfelelő értékei legyenek (ξ, η, ζ) és (ξ', η', ζ').

Vegyük tekintetbe a következő hányadost (VI):

$$\frac{(\xi', \eta', \zeta') - (\xi, \eta, \zeta)}{h} = \frac{(\xi' - \xi, \eta' - \eta, \zeta' - \zeta)}{h}.$$

Akár positivus, akár negativus a h, és bármely szabály szerint változtassuk zérus felé, legyen, hogy a hányados szabott határértékbe convergál, amely mindig egy és ugyanaz a vector. Akkor azt mondjuk a vectorról, mint t függvényéről, hogy a t értéknél deriválható, és ezt a határértéket deriváltjának nevezzük.

A hányados így is írható:

$$\left(\frac{\xi' - \xi}{h}, \frac{\eta' - \eta}{h}, \frac{\zeta' - \zeta}{h}\right).$$

Ennélfogva, ha a vector componensei deriválhatók, a vector is deriválható, s megfordítva, és a vector deriváltja az a vector, amelynek componensei rendre az ő három componensének a deriváltja.

Symbolicus jelölésekben

$$\frac{\mathrm{d}(\xi, \eta, \zeta)}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{(\mathrm{d}\xi, \mathrm{d}\eta, \mathrm{d}\zeta)}{\mathrm{d}t} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}\right)$$

a vectornak, mint t függvényének a deriváltja a t értéknél. Amennyiben úgy jelentkezik, mint a vector elemi megváltozásának, differentialéjának, a scalarisével képezett hányadosa, a vector differentialis hányadosának is nevezzük. Ugyanazért differentiálhatónak is mondjuk a vectort egyértelemban deriválhatóságával.

Scaláris függvények magasabb rendű deriváltjainak az analogiájára definiáljuk vectorok magasabb rendű deriváltjait is, valamint ezek jelölési módját: ha a t értéknél deriválható vector deriváltja is deriválható a t értéknél, úgy ennek a deriváltját nevezzük az eredeti vector másodrendű, vagy második deriváltjának sít. és írjuk:

$$\frac{\mathrm{d}^2(\xi, \eta, \zeta)}{\mathrm{d}t^2} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}, \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}, \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}\right) : \mathrm{d}t \equiv \left(\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}t^2}\right) \text{ sít.}$$

Midőn több scalarisnak a függvénye egy vector, megfelelő módon definiáljuk és jelöljük partialis deriváltjait a scaláris függvények partialis deriváltjainak hasonlatára. Tekintettel arra, hogy mindig a componen sek deriváltjaival van meghatározva, mint componensekkel a derivált vector, könnyű belátni, hogy, ha többféle sorrendben deriválható egy vector bizonyos scalarisok szerint s egyik sorrendben ugyanannyiszor, mint a másikban, mindegyik sorrend ugyanazt a derivált vectort szolgáltatja. Legyenek a scalarisok egy sorrendben $p_1, p_2, \ldots p_n$, úgy, hogy a különböző számjelű p változók közt azonosok is lehessenek. Ugyanazok a változók más sorrendben $q_1, q_2, \ldots, q_n$. legyenek, és tegyük fel, hogy létezik a

$$\frac{\partial^n(\xi, \eta, \zeta)}{\partial p_n \ldots \partial p_2 \partial p_1} \text{ és a } \frac{\partial^n(\xi, \eta, \zeta)}{\partial q_n \ldots \partial q_2 \partial q_1}$$

derivált. Akkor létezik a componensek két megfelelő deriváltja is, és a kettő egyenlő, tehát ez a kettő is egyenlő.

Mivel a derivált componensek a derivált vector componensei, ennélfogva mindazok az algebrai tételek, amelyek megilletik a scalarisok deriváltjait, megilletik a vectorok deriváltjait is, természetesen a vectorokra nézve definiált algebrai műveletek körében. Pld. vectorok összegének a deriváltja s a derivált vectorok összege egyenlő, scalaris és vector szorzatának a deriváltja annyi, mint az az összeg, amelynek tagjai: a vector deriváltjával szorzott scalaris és a scalaris deriváltjával szorzott vector sít. Ugyanaz áll a differentialékról.

Továbbá egy vector, mint függvénynek a függvénye nemkülömben a scalarisok deriválásának alaki szabályait követi. Nevezetesen, ha a p scalaris t scalaris függvénye és mint ilyen deriválható a t értéknél, a (ξ, η, ζ) vector pedig p függvénye és mint ilyen, deriválható annál a p értéknél, amely a t értéknek felel meg, akkor

$$\frac{d(\zeta, \eta, \zeta)}{dt} = \frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dp}\frac{dp}{dt},$$

mert

$$\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt} = \left(\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}\right) = \left(\frac{d\xi}{dp}\frac{dp}{dt}, \frac{d\eta}{dp}\frac{dp}{dt}, \frac{d\zeta}{dp}\frac{dp}{dt}\right) =$$

$$= \left(\frac{d\xi}{dp}, \frac{d\eta}{dp}, \frac{d\zeta}{dp}\right) \cdot \frac{dp}{dt}.$$

Stb. stb.

XV. A hely függvényei.

Azt a scalarist és vectort, amely egy pont coordinatáinak a függvénye, elneveztük a hely függvényének (XI) s azt a scalarist és vectort, amely egy vector componenseinek a függvénye, elneveztük a vector függvényének (XI).

Vectort ponttal és pontot vectorral lehet meghatározni. Vectort czélszerűen határozunk meg ponttal oly módon, hogy a vectorkép kezdetét az origóba, vagy más megszabott ponthelybe teszszük, és bármiként változzék a vector, képének kezdetét ott tartjuk. Ekkor meghatározza a vectort az a pont, amelyben képének a vége vagyon. Pontot czélszerűen határozunk meg oly vectorral, amelynek a képe az origoban, vagy más megszabott ponthelyben kezdődik és a meghatározandó pontban végződik, bármiként változzék is ennek a pontnak a helye.

Ebből folyólag a hely függvényeinek és egy vector függvényeinek a tana közt analyticus tartalomra nézve nincs külömbség. Azonban mégsem csupán tárgyalásuk nyelvében külömböznek, hanem abban is, hogy az alkalmazások végett szerzendő analysisbeli ismeretek között vannak olyanok, amelyek, legalább ma még, csupán a hely függvényeit illetőleg szükségesek. Ezért, de azért is, mert a hely függvényeiről beszélő nyelvkészlet gazdagabb, közbötlenűl a hely függvényeivel foglalkozunk. A róluk szólóknak egy vector függvényére illő értelmezése magától adódik.

Továbbá, ha egy vector a hely függvénye, úgy componensei is a hely függvényei; következőleg elégséges a hely scalaris függvényeinek analyticus tárgyalására szorítkozni.

Bizonyos szólásformákkal élünk, amelyek a fogalmazások hasznos egyszerűsítésére szolgálnak. Ezek jellemzésére elegendők lesznek az itt következő megállapítások.

A függvény értéke, folyonossága, deriválhatósága egy pontban úgy értendő, hogy a pont helyét meghatározó coordinata-értékeknél.

A függvény értékei, értéktartománya egy vonalon, fölűleten, egy térrészben, annyi, mint a vonal, fölűlet, térrész pontjaiba tartozó függvény-értékek és ezek tartománya.

A függvény változása egy vonalon, egy fölületen, egy térrészben, a coordinaták oly változására vonatkozik, amelynek folyamán a pont a vonalon, a fölületen, a térrészben tartózkodik. Ehhez képest, ha ki van kötve, hogy csakis egy fölűleten, vagy csakis egy vonalon változhassék a függvény, akkor úgy jelentkezik, mint két, illetőleg egy változónak a függvénye, mert a coordinaták mint két, illetőleg egy változó függvényei fejezhetők ki.

A függvény folytonossága, deriválhatósága egy vonalon, fölületen, egy térrészben, korlátlan folytonossága, deriválhatósága a vonal, fölület, térrész pontjaiban.

A függvény folytonossága, deriválhatósága egy vonalban, fölületben, kizárólag azon a vonalon, fölületen változó függvény folytonosságát, deriválhatóságát jelenti a vonalnak, fölületnek a pontjaiban, mihez képest egy, illetőleg két független változó szerint gondolt korlátlan folytonosság és deriválhatóság az, legalább bizonyos értékhatárok között.

Midőn egy határolt vonal, vagy egy határolt fölület, vagy egy térrész belsejét említjük, akkor a határokat nem számítjuk: vonal határpontját, illetőleg határpontjait, ha több van, fölület határvonalát, illetőleg határvonalait, térrész határ-fölületét, illetőleg határfölületeit állításainkból kizárjuk.

Midőn azt mondjuk egy függvényről, hogy általában folytonos egy vonalon, egy vonalban, egy fölületen, egy fölületben, egy térrészben, azt úgy ért-jük, hogy egyes pontok, illetőleg egyes pontok, vonalok, illetőleg egyes pontok, vonalok, fölületek kivételével folytonos, és mindig ugyanabban az értelemben mondjuk egy függvényről, hogy általában deriválható. Emellett megjegyzendő, hogy egyes pontokon, vonalokon, fölületeken mindig olyanokat gondolunk, amelyek bármely véges térben véges számúak.

XVI. A helytől függés különösségei.

Hasznát veszi a physika a hely oly függvényeinek is, amelyek egyes pontokban nem folytonosak, nem folytonosak egyes vonalok, fölületek egyetlen pontjában sem, egyes határolt vonalak, határolt fölületek belsejének egy pontjában sem folytonosok, és hasznát veszi oly függvényeknek is, amelyek bizonyos vonalok körűl az alább meghatározandó értelemben több értékűek, mely vonalok száma végtelen nagy is lehet, és összeségük folytonos geometriai alakzatokat, fölületeket vagy tereket alkotó vonalsereg is lehet.

Az ily függvények vagy csak segédeszközök physikai fogalmak analyticus meghatározásában; vagy egyenesen ők maguk szolgálnak ugyan physikai fogalmak mennyiségi meghatározására, de nem mint a hely függvényei, hanem, mint coordinaták közbenjárásával az idő függvényei, és e minőségükben alkalmazásuk korlátai között teljesen követik a folytonosság elvét (XI); vagy a következő rendeltetéssel bírnak: Majdnem minden függvény, amely physikai jelentménynyel bír, bizonyos térrészeken körösztűl, amelyek egy, vagy két, vagy három dimensio szerint igen kicsinyek, igen rohamosan változik, jóllehet ezekben is folytonosan változik a helylyel és egyébütt oly függvénynyel azonos, amely ezekben a térrészekben foglalt fölületen, vonalon, pontban nem folytonos, máshol folytonos. Ezeknek a térrészeknek a belsejére nézve az igazi függvények változásáról közönségesen semmi ösmerethez sem tudunk eljutni, vagy csak igen hiányosokra tudunk szert tenni. Ilyenkor az igazi függvények helyett a folytonosság-szakadásos függvényeket használjuk ezekben a térrészekben is, minek megfelelően e térrészek helyett fölületeket, vonalokat, pontokat tartunk számon, mint különös geometriai alakzatokat és helyeket, t. i. a substituált függvények folytonosságát szakító fölületeket, vonalokat, pontokat. Természetesen, azok az analysisbeli eredmények, amelyekhez e függvények alkalmazása elvezet, physikai tekintetben csak az ily fölületeket, vonalokat, pontokat tartalmazó igen kis térrészeken kivűl érvényesek. Mégis hasznos lehet a helyettesítés, mert némely következtetésekben a tárgyalás egyszerűsítésére szolgálhat amiatt, hogy különös térrészek helyett különös fölületeket, vonalokat, pontokat kell csak szem előtt tartanunk.

Physikai alkalmazások szempontjából a folytonosság-szakadás némely fajai kiváló érdekkel bírnak. Ezek jellemzését adják a következő megkülömböztetések:

1. A függvény a változó helyből egy állandó helybe mutató vector iránycosinusainak és a változó hely coordinatáinak mindenütt folytonos függvénye.

2. A változó pontból egy adott vonal legközelebbi pontjába mutató vector iránycosinusainak és a változó pont coordinatáinak mindenütt folytonos függvénye. Általában csak a vonal ponjaiban szakad meg a függvény folytonossága. Ha olyan ez a vonal, hogy bizonyos ponthelyekhez egynél több legközelebbi pontja tartozik, úgy ezek a ponthelyek is folytonosság-szakadás helyei.

3. Egy vagy több fölülettel részekre osztott tér minden egyes osztási részében folytonos a függvény (XV), de aszerint, amint két vagy több térrész közös pontjába az egyik, vagy másik térrész belsejéből érkezik meg a változó ponthely, általában más a függvény értéke a közös pontban, tehát a határfölületeken általában kétféle értékei vannak a függvénynek, az egyik

vagy másik félék aszerint, amint két határos térrész egyikéhez vagy másikához számíttatik a közös határfölület. A függvény ilyetén folytonosságszakadásának határozott mennyiségi jelentményt is tulajdonítunk és, ha egy határfölület egy pontjában, mint T'tér pontjában a függvény értéke f', mint T''tér pontjában pedig f'', úgy azt mondjuk, hogy abban a pontban a T'térből a T''térbe $f''-f'$ a függvény folytonosság-szakadása, s ha csakis T' és T''tér közös pontja ez a pont, azt is mondjuk, hogy benne a fölület (′) oldaláról (″) oldalára $f''-f'$ a függvény folytonosság-szakadása.

4. Egy pontban, egy vonalnak, egy fölületnek pontjaiban, egy határolt vonalnak, fölületnek belső pontjaiban végtelen nagy a függvény. Ekkor további megkülömböztetés végett vegyük számba a változó ponthelynek attól a ponttól, illetőleg annak a vonalnak, fölületnek a legközelebbi pontjától való távolságát és szorozzuk meg a függvényt a távolság valamely hatványával. Ennek a hatványnak a kitevőjét jelölje n. A függvények egy neménél a ponthoz, illetőleg a vonal, a fölület minden pontjához, a határolt vonal, fölület belsejének minden pontjához rendelhető oly határozott n érték, hogy a szorzat nem végtelen nagy és nem is zérus bennük. Az ilynemű függvény beszédmódunkban algebrai végtelen nagy a pontban, a vonalon, a fölületen, a vonalnak, a fölületnek belsején és részletesebb elnevezéssel annyiad rendű végtelen nagy a külömböző pontokban, ahányadfokú az a hatvány, a melylyel szorozva nem végtelen nagy és nem zérus. Ha nem algebrai a végtelenné válás, úgy transcendensnek nevezzük. Algebrai végtelen esetében ezt a további megkülömböztetést tesszük: az a hatványos szorzat, a mely nem végtelen nagy és nem is zérus a különös helyeken, vagy folytonos ezeken a helyeken is, tehát határozott értékkel bír, vagy nem, és ehhez képest határozottnak vagy határozatlannak nevezzük a függvény végtelen nagy értékét is. A transcendens végtelen nagy függvényértéket határozottnak mondjuk, ha zérusnál nagyobb bármi kis n mellett zérus, vagy ha bármi nagy n mellett végtelen nagy a hatványos szorzatunk; és pedig az első esetben logarithmusinak, a másodikban expontialisnak nevezzük. Végül tegyük azt az észrevételt, hogy, ahol végleten nagy a függvény, ott nem lehet folytonos: ez egyenesen következik a folytonosság difinitiójából. (XI.)

A bevezetőben jelentett többértékűség jellemzésére szolgál, ami itt következik.

1. T tér minden pontjában, vagy egyes pontok, vonalak, fölületek kivételével minden pontjában több értéke van a függvénynek, és oly különös egyszeresen összefüggő vonal húzódik át rajta, vagy oly különös többszörösen összefüggő vonalat tartalmaz az a tér, amely ezekkel a sajátosságokkal bir: A T tér bármely egyszeresen összefüggő részét szemeljük ki, ha belsejének a különös vonallal nincs közös pontsora, akkor és csak akkor, a függvény a maga külömböző

értékei szerint T e részében külömböző függvények foglalata, amelyek egyenkint egyetlen értékkel bírnak és folytonosak a térrész minden pontjában. De a T tér egy többszörösen összefüggő részéről csak akkor áll ez, ha vagy nem övedzi körűl a különös vonalat, vagy nem lényegesen övedzi, azaz, többszörös összefüggésének megőrzése mellett úgy deformálható, hogy a deformálás után nem övedzi, jóllehet a deformálás folyamán sohasem metsződött a különös vonallal. Válaszszunk ugyanis tetszés szerint oly pontot a T térben, a különös vonalon kívül, amely pontban egynél több értéke van a függvénynek, azután ebből a pontból indulva, írassunk le a változó ponthelylyel egy kétszeresen öszszefüggő vonalat a T térben, amely a különös vonalat lényegesen körülövedze. Bármely értékből változzék folytonosan a függvény a leírt vonalon, más értékkel érkezik meg a kiindulás helyén, mint amelylyel kiindult. Továbbá vegyünk föl tetszésre egy oly fölületdarabot a T térben, amelyet e tér fölülete és az egész különös vonal, vagy, ha lehetséges, csak az utóbbi határol. Akkor a függvény a maga külömböző értékei szerint oly különböző függvények foglalatának tekinthető, amelyek a fölvett fölületen kivül mindenütt egyetlen értékkel bírnak és folytonosak a T-ben, de a fölvett fölületen nem. Az ily fölületet reducáló vagy rekesztő fölületnek, diaphragmának, s az ily függvényt a különös vonal körül a T térben folytonos többértékü függvénynek nevezzük. Nagy fontosságúak azok a specialis eféle függvények, amelyek végtelen sokértékűek és kivált amelyek olyképen azok, hogy bármely értékükből az által származtathatók a többiek minden pont számára, hogy ehhez az értékhez bizonyos mennyiség j positivus vagy negativus egész számú többszörösét adjuk, amely j mennyiség független a helytől. Az eféle függvény bizonyos harmonicus függvényei a különös vonalon kivűli pontokan egyértékű folytonos függvények. Nevezetesen, ha a hely egy ilyetén többértékü függvénye f, úgy

$$\varphi = \sin\left(2\pi \frac{f}{j}\right)$$

egyértékű folytonos a különös vonalán kivűl, mert reducáló fölület fölvételével, nemcsak a fölületen kivűl, de e fölület belső pontjaiban is mindenesetre folytonos. Igy ebben az alakban fejezhető ki az f függvény:

$$f = \frac{j}{2\pi} \text{arc.} \sin . \varphi,$$

ahol a φ függvény a különös vonalon kivüli helyeken mindenütt egyértékű és folytonos, a j mennyiség pedig nem függ a helytől. Továbbá, akármely ponthelyet válaszszunk, vagy nem deriválható abban az eféle függvény a coordinaták szerint, vagy coordinata deriváltjai egyértékűek abban a pontban, mert, a függvény értékkülömbözetei függetlenek lévén a helytől, e külömbözetek coordinataderiváltjai zérusok.

2. A physikai alkalmazások czéljaira még kiválóan figyelembe veendő többértékűség abból áll, hogy a függvény oly függvények összege, amelyek egyenkint az imént leírt módon többértékűek, mindegyik más vonal körűl. Az összeadandó függvények száma pedig végtelen nagy is lehet, midőn aztán összegük egyszeres, vagy kétszeres határozott integralist képez. Ugyanis, egy ilyetén összegtag egy vagy két parametrum folytonos függvénye és a parametrum, illetőleg a két parametrum elemi megváltozását mint szorzót tartalmazza, a parametrumok pedig egyszersmind arra valók, hogy az ő változásukkal változik összegtagról összegtagra az összeadandók, integrálandók különös vonala. Aszerint, amint egy, vagy két változó parametrum szerepel, egyszeres vagy kétszeres integrálás szolgáltatja a teljes többértékű függvényt, és a kivételes vonalok összessége fölületet vagy tért alkot, úgy, hogy a kivételes geometriai alakzat fölület vagy tér. Az előbbiekben az egyetlen vonal körül többértékű függvényről szóló leírások, fogalmazásuk némi módosításával kivételes fölületek és terek esetére is kiterjeszkednek. Ezek a módosítások könnyen kitalálhatók.

3. Amily értelemben többértékű egy függvény egy vagy több vonal körűl, midőn térben változhatik, ugyanoly értelemben lehetséges, hogy egy fölületre rendelt függvény egy vagy több fölületi pont körűl több értékű. Ha egy függvényt, amely T térben egy vonal körűl több értékű, oly fölületre rendelünk, amely a T térben van és amelyet ez a vonal egy vagy több pontban átdöf már a függvény nyilvánképen, többértékű a fölületen az átdöfési pontok körűl.

4. Végre, ha a függvény egy többszörösen összefüggő vonalon azzal a tulajdonsággal bír, mikép, folytonosan változván a vonalon, más értékkel érkezik meg a kiindulás helyén, vagy legalább lehet olyan az útja a vonalon, hogy más értékkel érkezik meg, mint amelylyel kiindúlt, akkor a vonalon többértékűnek nevezzük a függvényt.

XVII. A hely függvényének deriváltjai.

Jelölje Φ a hely egy függvényét, és ez a függvény x, y, z helyen mindhárom coordinata szerint deriválható legyen. Akkor a hely elemi megváltozásával járó elemi megváltozása így írható:

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\delta z,$$

ha t. i. a coordinaták elemi megváltozása rendre δx, δy, δz. Ezek egyszersmind az x, y, z helyből az $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ helybe nyúló elemi vector componensei.

Ennek az elemi vectornak az irányát i, a hosszát $\delta\varsigma$ jelölje. Akkor a Φ elemi megváltozását az ő i irányú elleni megváltozásának mondjuk és a

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\varsigma}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta\varsigma}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta\varsigma}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\delta z}{\delta\varsigma},$$

hányadost i irányú deriváltjának nevezzük. Amennyiben az i irány ki van szabva, teljesen határozott határérték felel meg ennek a hányadosnak, mert, ha az i irány iránycosinusai α, β, γ, úgy

$$\frac{\delta x}{\delta\varsigma}=\alpha,\quad \frac{\delta y}{\delta\varsigma}=\beta,\quad \frac{\delta z}{\delta\varsigma}=\gamma,$$

a coordinata-deriváltak pedig határozott értékkel bírnak.

Eszerint, ha az x', y', z' coordinaták csak oly pontot jelenthetnek, amelybe az x, y, z pontból egy adott i irány mutat, és ha a két pont kölcsönös távola ς, úgy, végtelenűl közelíttetvén az előbbi pont az utóbbihoz,

$$\frac{\Phi(x', y', z')-\Phi(x, y, z)}{\varsigma}$$

határértéke az i irányú derivált az x, y, z pontban, mert

$$x'-x=\varsigma\alpha,\quad y'-y=\varsigma\beta,\quad z'-z=\varsigma\gamma,$$

és, végtelenűl kisebbíttetvén a ς, nyilvánképen

$$\frac{\Phi(x+\varsigma\alpha, y+\varsigma\beta, z+\varsigma\gamma)-\Phi(x, y, z)}{\varsigma}$$

határértéke az i irányú derivált az x, y, z helyen.

Jelölésére közönségesen a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial i}$$

symbolumot használjuk:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial i}\equiv\frac{\delta\Phi}{\delta\varsigma}=\frac{\partial\Phi}{\partial\varsigma}\frac{\delta x}{\delta\varsigma}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta\varsigma}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\delta z}{\delta\varsigma}\equiv\frac{\partial\Phi}{\partial x}\alpha+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\beta+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\gamma.$$

Amennyiben az i irány nincs határozottan kiszabva, kiváltképen ezek az esetek birnak fontossággal: 1. Derivált egy vonalban. Ez derivált azzal a kikötéssel, hogy a függvény csak a vonalon változzék, tehát érintő irányú derivált, s a vonal minden egyes pontjában annyi irány szerint képezhető, ahány irányban a pontból a vonalhoz érintő húzható. 2. Derivált egy fölületben. Ez derivált azzal a kirovással, hogy a függvény csak a fölületen változzék, tehát érintő irányú derivált és a fölület minden egyes pontjában annyi irány szerint képezhető, ahány irányban a pontból a fölülethez érintő egyenes húzható. 3. Korlátlan derivált. Ez minden irányban megengedett derivált.

Föl volt tételezve, hogy a függvény mindhárom coordinata szerint deriválható. De előfordulhat, hogy csak egy vagy két coordinata szerint deriválható, vagy egyik szerint sem. Még pedig megeshetik, hogy nemcsak egyes pontokban ilyen a függvény, de vonalakon, fölületeken, sőt térrészekben, sőt az egész térben. Most tegyük föl, hogy egy térrészben egyik coordinata szerint sem deriválható a függvény sehol sem. Emellett lehetséges, hogy bizonyos α, β, γ, irányok szerint, ez a külömbségi hányados:

$$\frac{\Phi(x+\varsigma\alpha, y+\varsigma\beta, z+\varsigma\gamma)-\Phi(x, y, z)}{\varsigma}$$

határozott határértékkel bír a ς távolság végtelen kisebbítésének megfelelőn. Azért általánosabban ezt használjuk az irányos deriváltak definitiójára.

E definitio értelmében beszélve: mihelyt Φ függvény x, y, z helyen mindhárom coordinatára derivalható, már szükségképen minden irányra deriválható. Ugyanis bármely irányt jelentsenek α, β, γ cosinusok, határozott értékkel bir a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\alpha+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\beta+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\gamma$$

kifejezés, és egyuttal egyezik az α, β, γ irányú deriváltat általánosan definiáló határkifejezéssel. Ha csak két coordinatára deriválható a függvény, akkor az egyik coordinata-síkkal párhuzamos síkban deriválható, de ebben minden irányban. Ha csak egy coordinatára deriválható, akkor csak az egyik coordinata tengelylyel párhuzamos egyenesben deriválható, ennek két irányában. Ha egyik coordinatára sem deriválható az x, y, z helyen, amellett még lehetséges, hogy valamely síkban vagy valamely egyenesben deriválható. Az első esetben csak két független változóra deriválható szükségképen, t. i. két olyanra, u, v, amelyek az x, y, z coordinatákat, mint függvényeiket a síkba tartozó pontok coordinatáivá teszik, mert az ily független változók változásával jár a függvénynek fölületen változása. A második esetben csak egy független változóra deriválható szükségképen a függvény, t. i. olyanra, w, amely az x, y, z coordinatákat, mint függvényeit, az egyenesbe tartozó pontok coordinatáivá teszi, mert az ily független változó változásával jár a függvénynek vonalon változása. Első esetben a létező deriváltak kifejezése

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\varsigma}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\delta u}{\delta\varsigma}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\delta v}{\delta\varsigma},$$

másodikban

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\varsigma}=\frac{\partial\Phi}{\partial w}\frac{\delta w}{\delta\varsigma},$$

és világos, hogy viszont, ha csak két független változóra deriválható valamely helyen szükségképen a függvény, úgy egy síkban deriválható, és ha csak egyre deriválható szükségképen, úgy egy vonalban deriválható, t. i. azon a helyen.

Ezek teljes térfogati, illetőleg fölületi, illetőleg vonalas lehetőségek. Hozzájuk részleges lehetőségek sorakoznak, amelyek miben létét könnyű kitalálni.

Természetesen a mennyiség szerint való deriválhatóságot mindig a mennyiség illető értékének mindkét oldalára értettük és értjük ezentúl is és úgy a mennyiség megkisebbítéséből, mint megnagyobbításából származtathatónak gondoljuk a deriváltat, még pedig azzal a megszorítással, hogy az egyik és másik módon származott derivált egyenlő egymással; mert ez az értelmezés felel meg az általános szokásnak. Ha valamikor csak az egyik oldalra akarnók érteni, vagy ha két oldalra külömböző értékkel akarnók gondolni a deriválhatóságot, ezt különösen felemlítenők. De tegyük itt most azt az észrevélelt, hogy két ellentétes írányú deriváltnak a viszonya általában más, mint egy mennyiség szerint az egyik és másik oldalról képezett deriváltnak a viszonya. Ugyanis az α, β, γ irányra képezett derivált a

$$\frac{\Phi(x+\varsigma\alpha,\ y+\varsigma\beta,\ z+\varsigma\gamma)-\Phi(x,\ y,\ z)}{\varsigma}$$

hányados határértéke, és a $-\alpha, -\beta, -\gamma$ irányra képezett derivált a

$$\frac{\Phi(x-\varsigma\alpha,\ y-\varsigma\beta,\ z-\varsigma\gamma)-\Phi(x,\ y,\ z,)}{\varsigma}$$

hányados határértéke. Ha pedig írjuk:

$$x=a+q\alpha,\ y=b+q\beta,\ z=c+q\gamma,$$

úgy a q mennyiség szerint az egyik oldalról képezett derivált a

$$\frac{\Phi[a+(q+\varsigma)\alpha,\ b+(q+\varsigma)\beta,\ c+(q+\varsigma)\gamma,]-\Phi(a+q\alpha,\ b+q\beta,\ c+q\gamma)}{\varsigma}$$

hányados határértéke, a másik oldalról képezett a

$$\frac{\Phi[a+(q-\varsigma)\alpha,\ b+(q-\varsigma)\beta,\ c+(q-\varsigma)\gamma]-\Phi(a+q\alpha,\ b+q\beta,\ c+q\gamma)}{-\varsigma}$$

hányados határértéke. Az első és a harmadik határérték egyenlő, a második és negyedik ellentétesen egyenlő, ha nem zérus.

Végül vegyük figyelembe, hogy, ha q szerint a közönséges értelemben deriválható a függvény az x, y, z értéknél, akkor a négy határérték közűl három egyenlő egymással, t. i. az első, harmadik és negyedik, a második pedig ezekkel ellentétesen egyenlő. Azaz i-vel jelölvén az α, β, γ, irányt és i'-vel az ellentétes irányt:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial i}=\frac{\partial\Phi}{\partial q}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial i'}=-\frac{\partial\Phi}{\partial q},$$

bármelyik oldalról származzék a q szerint képzett derivált. Ebből az is kitűnik, hogy az i irányú derivált egyszersmind oly coordinatára képezett derivált, amely i irányú tengelyre tartozik. Jelöljék ugyanis épen a, b, c a tengely origójának coordinatait. Akkor az x, y, z pontnak ezen a tengelyen lévő coordinatája (X.)

$$(x-a)\alpha+(y-b)\beta+(z-c)\gamma.$$

De

$$x-a=q\alpha,\ y-b=q\beta,\ z-c=q\gamma,$$

tehát q ez a coordinata. Különösen pedig, ha az i irány egymásután az x, y, z tengely irányát jelenti, úgy az i irányú derivált egymásután az x, y, z coordinatákra képezett deriválttal egyezik, akár az egyik, akár a másik oldalról képezzük a coordinata-deriváltakat, hacsak a közönséges értelemben deriválható a coordinaták szerint a függvény.

XVIII. Egy térben deriválható függvény integrálhatósága.

Ha Φ mindhárom coordinata szerint deriválható a T térben, akkor létezik oly ψ függvény ebben a térben, mely általában (XV.) mindhárom coordinata szerint folytonos és deriválható, hogy:

$$\Phi=\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Ugyanis gondoljunk egy hasábot a T térben (h), amely párhúzamos az x tengelylyel. Végein a T tér fölülete határolhatja. Azután válaszszunk oly síkot, amely merőleges a hasábra és teljes vastagságában átszeli a hasábot. Ha ennek a síknak az egyenlete $x=x_h$, úgy írván

$$\psi_h=\int_{x_h}^{x}\Phi(\xi,y,z,)\partial\xi,$$

ez a hasáb térfogatában mindhárom coordinata folytonos, sőt deriválható függvénye mindenütt, mert akármely pont legyen a hasábban x, y, z, már ξ, y, z a hasábba tartozó egyenes pontsereget jelent az integralisban. Márpedig

$$\frac{\partial\psi_h}{\partial x}=\Phi(x,y,z).$$

Az egész T tért ily hasábszerű részekből állónak tekinthetjük, még pedig végtelen sokféle módon. Ha egy választásban az egyes részeknek megfelelően rendre a

$$\psi=\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$$

integralisokat képezzük, úgy mindegyik részben

$$\Phi=\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

A ψ függvény két szomszédos rész határ-fölületének közös pontjaiban általában folytonosság-szakadásos, és így általánosan csak annyi mondható, hogy a ψ függvény általában (XV.) folytonos és általában deriválható függvénye a három coordinatának a T térben.

Világos, hogy, ha a Φ csak általában deriválható a T térben a három coordinatára, akkor is létezik ilyen ψ függvény, mert oly részekre osztható a T tér, amelyek belsejében mindenütt deriválható a Φ a három coordinatára, és e térrészek belsejére nézve épúgy következtethető az állítás, mint az elébb a T térre nézve következett. Ebből pedig továbbá belátható, hogy bármely adott egész számok legyenek l, m, n, létezik oly függvény is a T térben Ω, hogy általában

$$\frac{\partial^{l+m+n}\Omega}{\partial x^l \partial y^m \partial z^n}=\Phi.$$

XIX. A coordinata-deriváltak némely geometriai jelentményei.

1. Egy fölület egyenlete legyen

$$F(x, y, z)=\text{constans},$$

és az F függvény egyszer korlátlanúl deriválható legyen a fölület x, y, z pontjában. A fölületen állandó lévén az F függvény értéke, a fölületben képezett deriváltjai eltünnek. Ha tehát α, β, γ érintői iránycosinusokat jelentenek az x, y, z helyen, úgy

$$\frac{\partial F}{\partial x}\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}\beta+\frac{\partial F}{\partial z}\gamma=o.$$

Ebből folyólag, föltéve, hogy a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

vector nem tűnik el, az x, y, z helyen a fölület minden vonal-elemével derékszöget alkot az. Következőleg az x, y, z pontban a fölületnek határozott és egyetlen érintő síkja van, amelyre a vector merőleges: a fölület határozott és egyetlen normalissal bír az x, y, z helyen, amelynek egyik iránya a vector irányával egyezik.

Legyenek a normalis valamelyik irányának iránycosinusai λ, μ, ν, és jelölje a vector nagyságát N. Akkor

$$\lambda = \pm\frac{\partial F}{\partial x} : N, \quad \mu = \pm\frac{\partial F}{\partial y} : N, \quad \nu = \pm\frac{\partial F}{\partial z} : N,$$

$$N^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2.$$

Ha a λ, μ, ν normális irányt n jelöli, úgy

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x}\lambda + \frac{\partial F}{\partial y}\mu + \frac{\partial F}{\partial z}\nu,$$

tehát

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \pm N$$

s következőleg

$$\lambda = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial n}, \quad \mu = \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial n}, \quad \nu = \frac{\partial F}{\partial z} : \frac{\partial F}{\partial n}.$$

Abban az esetben, hogy az n irány egyezik a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

vector irányával:

$$\lambda = \frac{\partial F}{\partial x} : N, \quad \mu = \frac{\partial F}{\partial y} : N. \quad \nu = \frac{\partial F}{\partial z} : N,$$

tehát

$$\frac{\partial F}{\partial n} = N,$$

s következőleg $\partial F : \partial n$ positivus. Továbbá, ha i irány irány-cosinusai λ', μ', ν', és ez az irány hegyes-szöget alkot az n iránynyal, akkor $\partial F : \partial i$ is positivus, mert

$$\frac{\partial F}{\partial i} = \frac{\partial F}{\partial x}\lambda' + \frac{\partial F}{\partial y}\mu' + \frac{\partial F}{\partial z}\nu' = (\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')N.$$

Igy az F függvény ama fölületi oldal felé, amely felé a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

vector mutat, növekedőleg változik az x, y, z pontból. Az ellenkező oldal felé nyilvánképen fogyólag változik.

2. Egy második fölület egyenlete legyen

$$G(x, y, z) = \text{constans},$$

és a két fölület metsződjék egy vonalban, amelynek egy pontja épen x, y, z pont legyen. Úgy az F, mint a G függvényről tegyük föl, hogy egyszer korlátlanúl deriválhatók e pontban, és hogy a deriváltjaikból képzett vectorok, u. m.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \text{ és } \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}\right)$$

nem tünnek el. Akkor a metszési vonalnak határozott és egyetlen érintő egyenese van az x, y, z helyen, t. i. a két fölűlet érintő síkjának a metszési vonala. Mivel pedig mindkét vectorral derékszöget alkot, ennélfogva a két vector tengelyvonala az (VIII), minek alapján a két fölület metszési vonalának érintői iránycosinusai a két függvény deriváltjaival közbötlenűl kifejezhetők (VIII).

3. Egy fölület-sereg egyenlete legyen

$$F(x, y, z, p) = o,$$

amely aszerint jelent más és más F_p fölületet, amint a p parametrum értéke más és más: külömböző p értékekhez általában külömböző F fölületek tartoznak. Lehetnek azonban valamennyi fölületnek közös pontjai és vonalai, mert lehet olyan az F függvény, hogy egyes pontoknak és egyes vonalok pontjainak a coordinatái mellett a p parametrum kiesik belőle, már pedig ezek a coordinaták valamennyi fölületben bent lévő pontokat határoznak meg.

Az F függvény a coordinaták és a parametrum deriválható függvénye legyen e változók oly x, y, z, p értékénél, amelynél az egyenlet teljesűl, vagyis oly x, y, z, p értéknél, amely az F_p fölülethez tartozik. Azonkivűl tegyük föl, hogy a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

vector nem tűnik el ezeknél az értékeknél. Végűl tegyük föl még, hogy $\partial F : \partial p$ sem tűnik el ez értékeknél. Ez utóbbi föltevés miatt az F_p fölület x, y, z pontja nem lehet a fölületsereg közös pontja.

Ha $(\delta x, \delta y, \delta z)$ elemi vector nem tangentialis az F_p fölülethez az x, y, z helyen, akkor létezik oly zérustól külömböző δp elemi megváltozás, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F}{\partial p}\delta p = o.$$

Ugyanis az elemi vector hosszát $\delta\varsigma$, iránycosinusait λ', μ', ν' jelölvén, a három első tag összege annyi mint

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\lambda'+\frac{\partial F}{\partial y}\mu'+\frac{\partial F}{\partial z}\nu'\right)\delta\varsigma \equiv N\delta\varsigma\cos\varepsilon$$

ahol N a föntebbi vector nagysága és ε ennek a vectornak és az elemi vectornak a szöge. Minthogy a föltevések értelmében sem N, sem $\cos\varepsilon$ nem zérus, az állítás helyes. De, ha variatiós egyenletünkhöz hozzáadjuk a fölület egyenletét, látjuk, hogy

$$F(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z,\ p+\delta p)=o.$$

Eszerint az $(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)$ pont az $F_{p+\delta p}$ fölület egy pontja. Ha tehát az F_p fölületet x, y, z helyen átdöfjük egy egyenessel, ez az egyenes az $F_{p+\delta p}$ fölületet is átdöfi, még pedig végtelen közel az x, y, z helyhez,

$$\delta\varsigma=-\left(\frac{\partial F}{\partial p}:N\cos\varepsilon\right)\delta p$$

végtelen kis távolságban. Ha az átdöfés iránya normalis a fölülethez, úgy $\delta\varsigma$ az F_p és $F_{p+\delta p}$ fölület térközének a vastagsága az x, y, z helyen, amit δn jelöljön. Eszerint

$$\delta n=\mp\left(\frac{\partial F}{\partial p}:N\right)\delta p$$

aszerint, amint ε értéke o vagy π.

Ha specialisan

$$F(x,\ y,\ z,\ p)\equiv F(x,\ y,\ z)-p,$$

úgy

$$\delta n=\pm\frac{\delta p}{N}$$

XX. Vectorok potentialisai.

Legyen (ξ, η, ζ) vector a hely függvénye.

1a) Ha a T térben létezik a helynek oly scalaris függvénye Φ, általában (XV) deriválható mindhárom coordinatára, mikép

$$\xi=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad \eta=\frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad \zeta=\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

akkor azt mondjuk a vectorról, hogy van a T térben potentialisa, és a

Φ függvényt potentialisának nevezzük. Némelyek a Φ ellentétesét, $-\Phi$, nevezik így.

1b) Ha pedig a T térben létezik a helynek oly vector függvénye (U, V, W), általában deriválható mindhárom coordinatára, mikép

$$\xi=\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \eta=\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}, \quad \zeta=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y},$$

akkor azt mondjuk a vectorról, hogy van vector-potentialisa, és az (U, V, W) vectort vector-potentialisának nevezzük.

2. Amely vectornak egy helyhatározó rendszerben van a T térben potentialisa, annak minden más helyhatározó rendszerben van a T térben potentialisa, és pedig ugyanaz.

Amely vectornak pedig egy helyhatározó rendszerben van a T térben vector-potentialisa, annak minden más helyhatározó rendszerben van a T térben vector-potentialisa, és pedig congruens rendszerekben ugyanaz a vector, nem congruensekben az ellentétes vector, mindig az illető rendszerbe tartozó componensek szerint.

Legyen ugyanis egy második helyhatározó rendszerben x', y', z' a három coordinata, és a rendszer tengelyeinek az iránycosinusai $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ és $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ és $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ legyenek. Akkor az új rendszerben a (ξ, η, ζ) vector componensei ezek:

$$\begin{aligned}\xi'&=\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta,\\ \eta'&=\alpha_2\xi+\beta_2\eta+\gamma_2\zeta,\\ \zeta'&=\alpha_3\xi+\beta_3\eta+\eta_3\zeta.\end{aligned}$$

2a) Ha tehát T térben van a (ξ, η, ζ) vectornak potentialisa Φ, úgy a T térben

$$\xi'=\alpha_1\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\beta_1\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\gamma_1\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \text{ stb.}$$

Itt a ξ' kifejezése nem más, mint a Φ függvénynek az új első tengely irányában képezett deriváltja sít.

2b) Ha pedig a T térben vector-potentialisa van a (ξ, η, ζ) vectornak, u. m. (U, V, W), úgy

$$\xi'=\alpha_1\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)+\beta_1\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)+\gamma_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right), \text{ stb.}$$

Minthogy U, V, W általában mindhárom régi coordinatára deriválhatók az előzetes föltevés szerint, így általában mindhárom új coordinatára is deriválhatók, mert általában minden irányban deriválhatók. Mivel pedig az új rendszerben a régi tengelyek irány-cosinusai α_1, α_2, α_3 és β_1, β_2, β_3 és $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, így

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial x'}\beta_1+\frac{\partial U}{\partial y'}\beta_2+\frac{\partial U}{\partial z'}\beta_3,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{\partial U}{\partial x'}\gamma_1+\frac{\partial U}{\partial y'}\gamma_2+\frac{\partial U}{\partial z'}\gamma_3, \qquad \text{stb.}$$

Helyettesítsük be ezeket ξ' kifejezésébe. Azután vegyük számba a X. czikk végén jegyzett kifejezéseket, amelyek akkor érvényesek az iránycosinusok között, midőn a két helyhatározó rendszer congruens. Találjuk:

$$\xi'=\frac{\partial}{\partial y'}(U\alpha_3+V\beta_3+W\gamma_3)-\frac{\partial}{\partial z'}(U\alpha_2+V\beta_2+W\gamma_2).$$

Ámde, ha az (U, V, W) vector componensei az új rendszerben U', V', W', úgy

$$U'=\alpha_1 U+\beta_1 V+\gamma_1 W,$$
$$V'=\alpha_2 U+\beta_2 V+\gamma_2 W,$$
$$W'=\alpha_3 U+\beta_3 V+\gamma_3 W.$$

Következőleg

$$\xi'=\frac{\partial W'}{\partial y'}-\frac{\partial V'}{\partial z'}, \text{ stb.}$$

Ha azonban a két helyhatározó rendszer nem congruens, akkor a X. czikk végén jegyzett cosinus-relatiók a cosinusok ellentétes értékeivel helyesek, miből folyólag akkor

$$\xi'=\frac{\partial}{\partial z'}(U\alpha_2+V\beta_2+W\gamma_2)-\frac{\partial}{\partial y'}(U\alpha_3+V\beta_3+W\gamma_3),$$

vagyis

$$\xi'=\frac{\partial V'}{\partial z'}-\frac{\partial W'}{\partial y'}, \text{ stb.}$$

3a.) A 2a.) alattiakból az is kitűnik, hogy, ha (ξ, η, ζ) vectornak van a T térben potentialisa Φ, akkor a T térben i irányon számított vector érték $\partial\varphi : \partial i$.

3b.) A 2b. alattiakból pedig kitűnik, hogy ha (ξ, η, ζ) vectornak van a T térben vectorpotentialisa, és ha egy q és p irányú derékszögű vectorpár tengelyén a (ξ, η, ζ) vector értéke λ, az (U, V, W) vector értéke pedig p irányon P, és q irányon Q, akkor a T térben

$$\lambda=\frac{\partial Q}{\partial p}-\frac{\partial P}{\partial q}.$$

4. Midőn egy vectornak van potentialisa, akkor oly specialis vector az, amelyet egyetlen parametrummal, t. i. a potentialissal lehet kifejezni.

Midőn azonban egy vectornak vector-potentialisa van, akkor a definitio szerint összesen három parametrum fejezi ki a vector három componensét, t. i. a vector-potentialis három componense. Ámde ez a három parametrum kettőre reducálható. Legyen ugyanis (ξ, η, ζ) vectornak a T térben vector-potentialisa (U, V, W). Minthogy az U, V, W componensek általában mindhárom coordinata szerint deriválhatók a T térben, úgy léteznek a hely oly függvényei a T térben, f, g, h, általában mindhárom coordinata szerint deriválhatók, mikép (XVIII):

$$U=\frac{\partial f}{\partial x}, \quad V=\frac{\partial g}{\partial y}, \quad W=\frac{\partial h}{\partial z},$$

és következőleg az f olykép, általában kétszer is deriválható, hogy az egyik deriváló x, a g olykép általában kétszer is, hogy az egyik deriváló y, a h olykép általában kétszer is, hogy az egyik deriváló z, és e kétszeres deriválások sorrendje fölcserélhető:

$$\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial^2(h-g)}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2(h-g)}{\partial z\,\partial y}, \text{ stb.}$$

azaz

$$\xi=\frac{\partial^2(h-g)}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2(h-g)}{\partial z\,\partial y}$$

$$\eta=\frac{\partial^2(f-h)}{\partial z\,\partial x}=\frac{\partial^2(f-h)}{\partial x\,\partial z}$$

$$\zeta=\frac{\partial^2(g-f)}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2(g-f)}{\partial y\,\partial x}.$$

Az itt szereplő három függvény-külömbségnek az összege zérus, tehát két függvénynyel fejezhetők ki. Még pedig írván

$$h-g=-\lambda, \qquad f-h=\mu$$

ered a harmadik külömbség számára

$$g-f=\lambda-\mu.$$

Csakhogy e helyettesítések után ζ kifejezésében a kétszeres deriválás és a kivonás sorrendjét általában nem szabad fölcserélni, mert λ és μ tartalmazza a h függvényt, amely kétszer általában csak úgy deriválható, ha az egyik deriváló a z coordinata.

Azonban tegyük föl, hogy a (ξ, η, ζ) vector általában deriválható T-ben a három coordinatára, és most járjunk el így: írjuk csupán

$$W=\frac{\partial h}{\partial z},$$

ahol is a h általában mindhárom coordinatára deriválható, és oly módon kétszer is, hogy az egyik deriváló a z. Ekkor

$$\xi=-\frac{\partial}{\partial z}\left(V-\frac{\partial h}{\partial y}\right), \quad \eta=\frac{\partial}{\partial z}\left(U-\frac{\partial h}{\partial x}\right),$$

és ezekből világos, hogy a h függvény lehet olyan, hogy általában mindenkép deriválható kétszer T-ben a coordinaták szerint és nem csupán úgy, ha az egyik deriváló coordinata a z. Következőleg ζ kifejezése így is írható:

$$\zeta=\frac{\partial}{\partial x}\left(V-\frac{\partial h}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(U-\frac{\partial h}{\partial x}\right),$$

mert a h csak látszólagosan fordúl elő benne. Ezek rendén, ha

$$U-\frac{\partial h}{\partial x}=u, \quad V-\frac{\partial h}{\partial x}=v$$

rövidítő jelölést használjuk:

$$\xi=-\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta=\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y},$$

vagyis, ha (ξ, η, ζ) általában deriválható a coordinatákra a T-ben, és van e térben vector-potentialisa, akkor utóbbi mindig olyanra reducálható, amelynek egyik componense zérus.

XXI. A potentialis egyenletek

1a) Ha (ξ, η, ζ) vectornak van potentialisa a T térben, Φ, mihez képest

$$\xi=\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \eta=\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \zeta=\frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

és ha általában deriválható ez a vector a három coordinata szerint abban a térben, akkor a potentialisa általában mindenkép kétszer deriválható. Következőleg a vector componensei kielégítik a T térben a következő egyenleteket:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}=o,\quad \frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}=o,\quad \frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}=o.$$

2a) Fordítva, ha (ξ, η, ζ) deriválható a T térben a három coordinatára és érvényes T-ben ez a három differentialis egyenlet, akkor (ξ, η, ζ) vectornak van potentialisa a T térben.

Létezik ugyanis a T térben olyan függvény, φ, általában derivalható mindhárom coordinatára, hogy

$$\xi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

és φ olykép általában kétszer is deriválható, hogy az egyik deriváló az x, s a deriválások sorrendje közömbös. Irjuk már most

$$\eta=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+p.$$

Nyilvánvaló, hogy p általában deriválható x-re. Ennélfogva azonban a harmadik differentialis egyenletből

$$\frac{\partial p}{\partial x}=o,$$

tehát p csak y és z függvénye. Mivel továbbá

$$p=\eta-\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

úgy létezik olyan függvény a T térben, ψ, általában deriválható mindhárom coordinatára, hogy

$$p=\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

és tekintettel arra, hogy p csak y és z függvénye, megválasztható úgy a ψ, hogy maga is csak y és z függvénye legyen. Ezek alapján írhatjuk

$$\xi=\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial x},\quad \eta=\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial y},$$

ahol $\varphi+\psi$ nyilvánképen mindhárom coordinatára deriválható általában a T-ben és olymódon kétszer is, hogy az egyik deriváló x vagy y. Végűl tegyük

$$\zeta=\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial z}+q.$$

Az itt írt q függvény általában szükségkép deriválható x-re és y-ra. De ennek kapcsán az első és második differentialis egyenletből

$$\frac{\partial q}{\partial y}=o, \quad \frac{\partial q}{\partial x}=o,$$

tehát q csak x függvénye lehet. Mivel pedig

$$q=\zeta-\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial z},$$

úgy létezik a T-ben a coordinatáknak oly általában deriválható függvénye χ, hogy

$$q=\frac{\partial\chi}{\partial z},$$

és q csak z függvénye lévén, megválasztható a χ függvény úgy, hogy ő maga is csak z függvénye. Következőleg van olyan függvény a T térben, $\varphi+\psi+\chi$, általában deriválható mindhárom coordinatára, — mégpedig kétszer is — hogy

$$\xi=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi+\psi+\chi), \quad \eta=\frac{\partial}{\partial y}(\varphi+\psi+\chi), \quad \zeta=\frac{\partial}{\partial z}(\varphi+\psi+\chi),$$

vagyis van a (ξ, η, ζ) vectornak potentialisa a T térben.

1b.) Most legyen, hogy (ξ, η, ζ) vectornak a T térben vector potentialisa van: (U, V, W). Ha (ξ, η, ζ) általában deriválható a három coordinatára a T-ben, úgy

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=o.$$

Ez a vector-potentialis általános (U, V, W) alakja után, vagyis a

$$\xi=\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \eta=\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}, \quad \zeta=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}$$

kifejezések után nem tűnik ki, mert nem állítható, hogy U, V, W egyenkint másodszor is deriválhatók. Azonban egyenesen következtethető a vector-potentialisnak az előbbi czikk végén megállapított specialis alakjából (u, v, o), amely szükségkép lehetséges alak, ha (ξ, η, ζ) deriválható a három coordinatára. Induljunk ki tehát a

$$\xi=-\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta=\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

kifejezésekből. Az első kettő szerint u és v mindhárom coordinatára olykép általában kétszer is deriválhatók, hogy az egyik deriváló coordinata a z, és pedig bármelyik egymásutánban. Ebből folyólag ζ kifejezésének mindegyik tagja deriválható általában z-re és pedig akár az ott írt deriválás előtt, akár az után. Igy a bebizonyítandó egyenlet tényileg érvényes a T térben.

2b.) Fordítva, ha (ξ, η, ζ) általában deriválható T-ben a három coordinatára, és e térben

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=o,$$

akkor (ξ, η, ζ) vectornak formą szerint van vector-potentialisa a T térben az az van, eltekintve attól a követeléstől, hogy általában mindhárom coordinata szerint deriválható legyen T-ben.

Ugyanis létezik olyan φ és ψ függvény T-ben, általában deriválhatók mindhárom coordinatára, hogy

$$\xi=-\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad \eta=\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

még pedig úgy φ, mint ψ oly módon általában kétszer is deriválható, hogy az egyik deriváló a z. Helyettesítsük be ezeket a differentialis egyenletbe és látjuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\xi+\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=o.$$

következőleg $\tilde{\omega}$-val csupán x és y függvényét jelölvén,

$$\zeta+\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}=\tilde{\omega}.$$

De mivel φ és ψ általában mindhárom coordinatára deriválhatók, létezik két olyan függvény, f' g', a T térben, általában deriválhatók mindhárom coordinatára, hogy

$$\varphi=\frac{\partial f'}{\partial x},\quad \psi=\frac{\partial g'}{\partial y},$$

és f' oly módon kétszer is, hogy az egyik deriváló az x, és g' oly módon kétszer is, hogy az egyik deriváló az y, s a deriválások sorrendje tetszés szerinti. Eként

$$\zeta+\frac{\partial^2(f'-g')}{\partial x\partial y}=\tilde{\omega}.$$

Ebből folyólag (XVIII) létezik a T-ben oly függvény, μ, általában deriválható egymásután x-re és y-ra, valamint y-ra és x-re, hogy

$$\tilde{\omega}=\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}.$$

Mivel pedig $\bar{\omega}$ csak x és y függvénye, megválasztható a μ úgy, hogy az is csak x és y függvénye. Igy aztán

$$\xi=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\psi+\frac{\partial\mu}{\partial y}\right),\quad \eta=\frac{\partial\varphi}{\partial z},\quad \zeta=\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi+\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

vagy, ha a záró-jel tartalmát v, és a φ mennyiséget u jelöli:

$$\xi=-\frac{\partial v}{\partial z},\quad \eta=\frac{\partial u}{\partial z},\quad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Tényileg forma szerint van tehát a (ξ, η, ζ) vectornak a T térben vector-potentialisa. A $\partial\mu : \partial y$ derivált mindhárom coordinata szerint általában sem szükségképen deriválható és így v sem. Ha azonban η általában kétszer deriválható mindhárom coordinata szerint, akkor a definitio teljes tartalmával létezik a vector-potentialis. A vector-potentialis általánosabb alakjához is juthatunk, mivégből csak irnunk kell

$$u=U-\frac{\partial h}{\partial x},\quad v=V-\frac{\partial h}{\partial y},\quad \frac{\partial h}{\partial z}=W,$$

azzal a rendeléssel, hogy a T térben h deriválható legyen kétszer a coordinatákra.

XXII. Geometriai integralisok.

Egy véges kiterjedésű geometriai alakzatot ($\bar{\omega}$), ú. m. vonalat, fölületet, tért, vagy ilyenek rendszerét, igen kis részekre osztva gondolunk, vonalat igen kis vonalrészekre, fölületet két dimensio szerint igen kis fölület-részekre, tért három dimensio szerint igen kis tér-részekre. Megjegyzendő, hogy mindig oly vonalokat és fölületeket értünk, amelyek általában mindenütt határozott sőt folytonos irányú normalis, illetőleg érintő síkkal bírnak.

Jelöljön (D$\bar{\omega}$) valamely osztásrészt, ú. m. vonalnak, fölületnek, vagy térnek igen kis részét, és ennek a nagysága D$\bar{\omega}$ legyen, tehát igen kis vonalrész hossza, vagy igen kis fölület-rész területe vagy igen kis térrész térfogata.

Adva van az alakzatban, mint a hely függvénye Φ, amelynek általában az alakzat minden pontjában egyetlen határozott véges értéke van, vonalon legfeljebb egyes pontokban, fölületen legfeljebb egyes pontokban és vonalokon, térben legfeljebb egyes pontokban, vonalokon és fölületeken nem.

A (D$\bar{\omega}$) részben tetszésre választunk oly pontot, amelyben a Φ függvény határozott véges értékkel bír. Minden osztás-rész nagyságából és ily pontjába tartozó Φ értékből ΦD$\bar{\omega}$ szorzatot képezünk, azután valamennyi szorzatot összeadjuk. $\Sigma\Phi$D$\bar{\omega}$ jelentse az összeget. Nyilvánvaló, hogy teljesen határozott értéke van, amely azonban függ attól, hogy milyen a részekre osztás, vagyis, hogy mikép választvák meg a (D$\bar{\omega}$) részek, és, hogy ezek mely pontját választottuk függvényhely gyanánt, azaz, hogy a függvény szorzóúl használt értéke mely pontjukhoz tartozik.

Minél kisebbek az osztás-részek, annál nagyobb a sokaságuk, s ennek megfelelően beszélünk a részekre osztás, a fölosztás sürűségéről s azt a kérdést vetjük föl, hogy, ha a fölosztás sürűségét az egész alakzatban határtalanúl növeljük, miként viselkedik a szorzatok összege, $\Sigma\Phi D\tilde{\omega}$?

A legközelebbi czikkekben látni fogjuk, hogy, ha Φ függvény folytonos az alakzatban, vagy ha legalább általában folytonos (XV) és a folytonosság-szakadás helyein is véges mindenütt, akkor a $\Sigma\Phi D\tilde{\omega}$ összeg a fölosztás sürűségének végtelen növelésével határozott véges értékbe convergál, a fölosztások és függvényhelyek bármely megválasztásában ugyanabba. Ha pedig az általában folytonos függvény végtelen is lehet az alakzatban, akkor a végtelenné válás módjának bizonyos eseteiben a végtelenné válás vidékébe úgy választhatók meg a függvényhelyek az osztásrészek számára, és pedig igen általános rendelkezéssel, hogy a $\Sigma\Phi D\tilde{\omega}$ összeg ekkor is határozott véges értékbe convergál, a fölosztások és a többi függvény-helyek bármely megválasztásában ugyanabba. Erről is meggyőződést fogunk majd szerezni. Megjegyzendő azonban, hogy ezek csak elégséges föltételei annak, hogy az összeg a részekre osztás módjától és legalább általában a függvényhelyek megválasztásának a módjától is független határértékkel bírjon.

Minden ily esetben azt mondjuk a Φ függvényről, hogy van integralisa az alakzatban, és a határ-összeget az alakzatban képezett integralisának nevezzük. Jelölésére az összegezés eddigi jelét **S** jellel, vagy a közönséges integrálási jellel váltjuk fel:

$$\mathrm{Lim}\Sigma\Phi D\tilde{\omega} \equiv \mathbf{S}\Phi D\tilde{\omega} \equiv \int \Phi D\tilde{\omega}.$$

Néha czélszerű azt is föltüntetni a jelölésen, hogy mely geometriai alakzatra vonatkozik. Ezt úgy szoktuk tenni, hogy a geometriai alakzat jegyét az összegelési jel lábához írjuk index gyanánt:

$$\mathrm{Lim}\Sigma_{(\tilde{\omega})}\Phi D\tilde{\omega} \equiv \mathbf{S}_{(\tilde{\omega})}\Phi D\tilde{\omega} \equiv \int_{(\tilde{\omega})}\Phi D\tilde{\omega}$$

vagy rövidebben

$$\mathrm{Lim}\Sigma_{\tilde{\omega}}\Phi D\tilde{\omega} \equiv \mathbf{S}_{\tilde{\omega}}\Phi D\tilde{\omega} \equiv \int_{\tilde{\omega}}\Phi D\tilde{\omega}.$$

Az $(\tilde{\omega})$ alakzat egy része legyen $(\tilde{\omega}_1)$. Ennek a határa általában átszeli a $(D\tilde{\omega})$ osztás-részek egy sokaságát. Most az átszelt $(D\tilde{\omega})$ részek helyett ezek szeleteit vegyük tekintetbe, mindegyiknek a nagyságát az illető egész $D\tilde{\omega}$-nak a függvény-szorzójával szorozva. Ebben az értelemben beszélünk az $(\tilde{\omega}_1)$ alakzat-részre tartozó összeg-részről, amelyet $\tilde{\omega}_1$ indexes összegelési jellel jegyezünk. Mihez képest, ha az $(\tilde{\omega}_1), (\tilde{\omega}_2), \ldots, (\tilde{\omega}_n)$ alakzat-részek együtt épen az egész $(\tilde{\omega})$ alakzatot képezik, és ha általánosan $(D\tilde{\omega})$-val jelöljük a szeleteket is:

$$\Sigma_{\tilde{\omega}}\Phi D\tilde{\omega} = \Sigma_{\tilde{\omega}_1}\Phi D\tilde{\omega} + \Sigma_{\tilde{\omega}_2}\Phi D\tilde{\omega} + \ldots + \Sigma_{\tilde{\omega}_n}\Phi D\tilde{\omega},$$

$$\int_{\tilde{\omega}}\Phi D\tilde{\omega} = \int_{\tilde{\omega}_1}\Phi D\tilde{\omega} + \int_{\tilde{\omega}_2}\Phi D\tilde{\omega} + \ldots + \int_{\tilde{\omega}_n}\Phi D\tilde{\omega}.$$

Amennyiben az alakzat külömböző fajú részekből áll, vonalokból, fölületekből, térekből, közönségesen czélszerű a megfelelő integralisrészeket elkülönítve jegyezni. Ha tehát a geometriai alakzat vonalas részét (ς), fölületi részét (σ), térfogati részét (τ) jelöli eképen:

$$\int_{\varsigma}\Phi D\tilde{\omega} + \int_{\sigma}\Phi D\tilde{\omega} + \int_{\tau}\Phi D\tilde{\omega}.$$

ahol Φ a három külömböző részben külömböző jellegű valamint $D\tilde{\omega}$ is.

Az integralisba, vagyis a határ-összegbe tartozó ($D\tilde{\omega}$) alakzatrészeket az alakzat végtelen kis részeinek, vagy elemi részeinek nevezzük. Emellett egy vonal-elemen, fölület-elemen, tér-elemen nem csupán az alakzat egy végtelen kis részét értjük, de így nevezzük annak a nagyságát $D\tilde{\omega}$-t is, végtelen kis hosszát, két dimensio szerint végtelen kis terűletét, három dimensio szerint végtelen kis térfogatát. Hogy mikor gondoljuk magát az alakzat-részt, mikor annak a nagyságát, mindig kitűnik a fogalmazások értelméből. Vonal-elem jelölésére itt rendszerint ($D\varsigma$) illetőleg $D\varsigma$, fölület-elem jelölésére ($D\sigma$) illetőleg $D\sigma$, tér-elem jelölésére ($D\tau$) illetőleg $D\tau$ fog szolgálni és közös jegyűl ($D\tilde{\omega}$) illetőleg $D\tilde{\omega}$, szükség esetén indexes megkülömböztetésekkel. Az indexeket a D jelző betűn vagy a főbetűn, vagy mindkettőn alkalmazzuk, szükség, vagy valamely czélszerűség szerint.

Mielőtt most az előbbiekben foglalt három állítás igazolásához fognánk, vegyünk figyelembe egy általános tételt, amely föltétlenűl megilleti a definiált összeg-kifejezést.

Az ($\tilde{\omega}$) alakzatban a Φ függvény legszélsőbb értékei Φ_1 és Φ_2 legyenek még pedig Φ_1 legyen a legalsó, Φ_2 a legfelső értékhatára. Az alakzat teljes mekkoraságát pedig $\tilde{\omega}$ jelölje, vagyis ez legyen az alakzatot tevő vonalak hossz-tartalmának, fölületek terűlet-tartalmának, térek köb-tartalmának az összes számértéke. Akkor a $\Sigma\Phi D\tilde{\omega}$ összeg értéke minden esetre abban az érték-tartományban van, amelyet $\Phi_1\tilde{\omega}$ és $\Phi_2\tilde{\omega}$ határol, mert, ha minden Φ érték helyett Φ_1 értéket irunk az összegben, úgy semmi esetre sem nagyobbítjuk, és ha minden Φ érték helyett Φ_2 értéket írunk benne, semmi esetre sem kisebbítjük. Igy a szélső Φ értékektől, Φ_1 és Φ_2-től határolt teljes értéktartományban bizonyosan létezik oly érték Φ_0, hogy

$$\Sigma\Phi D\tilde{\omega} = \Phi_0\tilde{\omega}.$$

Ezt a tételt közbülső érték tételének nevezzük.

XXIII. A folytonos függvény geometriai integrálisa.

Midőn folytonos a Φ függvény a geometriai alakzatban, vagyis az alakzatot alkotó vonalakban, fölületekben, térekben, akkor véges is abban mindenütt, tehát a közbülső érték tételéből folyólag a $\Sigma\Phi D\bar{\omega}$ összeg véges értékű marad, illetőleg véges értékbe convergál a fölosztás sürűségének határtalan növelése mellett. Azonkivűl határértéke független a részekre osztások módjának és a függvényhelyeknek a megválasztásától. Ugyanis, bármi kis számérték legyen p, létezik akkora positivus szám Dq, hogy, mihelyt minden osztás-rész számértéke kisebb, mint Dq, már bármely két összeg külömbségének a számértéke kisebb, mint p. Ennek a belátása végett válaszszunk tetszésre két összeget, természetesen mindegyiket ugyanarra a geometriai alakzatra terjesztve ki:

$$\Sigma\Phi' D'\bar{\omega} = \Sigma'$$
$$\Sigma\Phi'' D''\bar{\omega} = \Sigma'',$$

Egy harmadik összegben, u. m.

$$\Sigma\Phi D\bar{\omega} = \Sigma,$$

amely ugyanarra az alakzatra terjed ki, a $(D\bar{\omega})$ osztásrészek az előbbifélék, $(D'\bar{\omega})$ és $(D''\bar{\omega})$, közös részei legyenek. Még pedig jelöljék

$$(D_1'\bar{\omega}), \quad (D_2'\bar{\omega}), \ldots$$

azokat a közös részeket, amelyek együtt a $(D'\bar{\omega})$ részt képezik, és jelöljék

$$(D_1''\bar{\omega}), \quad (D_2''\bar{\omega}), \ldots$$

azokat a közös részeket, amelyek együtt a $(D''\bar{\omega})$ részt képezik. Igy:

$$\begin{aligned}
\Sigma' &= \Sigma\Phi'(D_1'\bar{\omega}+D_2'\bar{\omega}+\ldots)\\
\Sigma'' &= \Sigma\Phi''(D_1''\bar{\omega}+D_2''\bar{\omega}+\ldots)\\
\Sigma &= \Sigma(\Phi_1'D_1'\bar{\omega}+\Phi_2'D_2'\bar{\omega}+\ldots)\\
\Sigma &= \Sigma(\Phi_1''D_1''\bar{\omega}+\Phi_2''D_2''\bar{\omega}+\ldots).
\end{aligned}$$

Eszerint

$$\begin{aligned}
\Sigma'-\Sigma &= \Sigma[(\Phi'-\Phi_1')D_1'\bar{\omega}+(\Phi'-\Phi_2')D_2'\bar{\omega}+\ldots]\\
\Sigma''-\Sigma &= \Sigma[(\Phi''-\Phi_1'')D_1''\bar{\omega}+(\Phi''=\Phi_2'')D_2''\bar{\omega}+\ldots].
\end{aligned}$$

Az alakzat teljes nagyságának a számértéke legyen $\bar{\omega}$. Mivel a Φ függvény folytonos az alakzatban, így bármi kis számérték legyen p, létezik akkora positivus szám, Dq, hogy mihelyt minden $D'\bar{\omega}$ és $D''\bar{\omega}$ számértéke kisebb, mint Dq, már az itteni függvény-külömbségek számértékre kisebbek, mint $p:2\bar{\omega}$, és így

$$|\Sigma'-\Sigma|<\frac{1}{2}p, \qquad |\Sigma''-\Sigma|<\frac{1}{2}p.$$

Eszerint, ha ε' és ε'' számértéke kisebb az egységnél,

$$\Sigma'-\Sigma=\frac{\varepsilon'}{2}p, \qquad \Sigma''-\Sigma=\frac{\varepsilon''}{2}p.$$

Következőleg

$$\Sigma''-\Sigma'=\frac{\varepsilon''-\varepsilon'}{2}p,$$

ámde

$$|\varepsilon''-\varepsilon'|<2.$$

Egyúttal tegyük itt azt az észrevételt az előbbi czikkben definiált

$$\int_{\tilde{\omega}}\Phi D\tilde{\omega}=\int_{\tilde{\omega}_1}\Phi D\tilde{\omega}+\int_{\tilde{\omega}_2}\Phi D\tilde{\omega}+\ldots+\int_{\tilde{\omega}_n}\Phi D\tilde{\omega}$$

kifejezésre nézve, hogy az $(\tilde{\omega}_1)$ stb. alakzat-részek határán átszelt osztásrészek most mind beléjük tartozó Φ szorzóval vehetők számba, t. i. azért, mert a Φ függvény mindenütt folytonos az alakzatban, tehát az átszelt osztásrészekben is folytonos.

XXIV. A véges és általában folytonos függvény geometriai integrálisa.

Ha csak általában folytonos a Φ függvény a geometriai alakzatban (XV), de a folytonosság-szakadás helyein is mindenütt véges: akkor is véges és egyetlen határ érték felel meg a $\Sigma\Phi D\tilde{\omega}$ összegnek. Kitűnik ez a következő megállapításból.

Legyen $(\tilde{\omega}_0)$ az $(\tilde{\omega})$ geometriai alakzat oly igen kis része, amely az összes különös helyeket magában foglalja, úgy, hogy az alakzat másik részében nem foglaltatnak különös helyek, u. m. folytonosság-szakadási pontok, vonalok, fölületek, e másik rész határain sem. Az alakzat e túlnyomólag nagyobb részét $(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_0)$ jelentse.

Most az $(\tilde{\omega}_0)$ alakzat-részre alkalmazzuk a közbülső érték tételét. Ebből folyólag lehet ez az alakzat-rész oly kicsi, hogy mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész tetszés szerint adott kicsinél kisebb és így az $(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_0)$ alakzat-részre tartozó összeg-rész a teljes összegtől tetszés szerint adott kicsinél kisebbet külömbözik.

Azomban bármi kicsiny legyen az $(\tilde{\omega}_0)$ alakzat-rész, hacsak a másik részszel határos pontjainak és az esetleg átszelt osztás-részek minden pontjának minden különös helytől való távolsága nagyobb, mint egy még oly kis adható távolság, akkor az $(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_0)$ alakzat-részre tartozó összeg-résznek véges és egyetlen határ-érték felel meg, mert ebben az alakzat-részben, és még az esetleg átszelt osztás-részekben is mindenütt folytonos a Φ függvény.

XXV. Az általában folytonos függvény geometriai integrálisa.

Ha a függvény végtelen is lehet a geometriai alakzatban, akkor némi tekintetben különösebb módon képezendő az összeg avégből, hogy legalább a végtelenné válás bizonyos föltételei alatt véges és egyetlen határérték feleljen meg neki.

A $(D\bar{\omega})$ osztás-részben lévő O ponthely a végtelenségnek hozzá legközelebb eső helyétől vagy helyeitől ρ távolságban legyen. Ugyancsak a $(D\bar{\omega})$ osztás-részben lévő O' ponthely a végtelenségnek ő hozzá legközelebb eső helyétől vagy helyeitől ρ' távolságban legyen. Már most oly hely legyen az O a $(D\bar{\omega})$ osztás-részben, hogy bármely más hely is az O' ebben az osztás-részben, a ρ távolság nem kisebb, mint a ρ' távolság. Az ilyen O helyet a $(D\bar{\omega})$ osztás-rész fő-pontjának nevezzük el.

Azt a távolságot, amelyben a $(D\bar{\omega})$ osztás-részbe tartozó függvényhely van a végtelenségnek ő hozzá legközelebb eső helyétől vagy helyeitől, jelölje r.

Azzal a követeléssel korlátozzuk a függvény-helyek kitűzését, hogy a fölosztás minden sürűségében adható legyen akkora határozott és véges számérték, amelynél a $\rho : r$ hányados minden osztás-részben kisebb. A függvényhelyek ily megválasztását arányos megválasztásnak nevezzük el.

Könnyű fölismerni, hogy a függvényhelyek arányos megválasztásának a követelése azokra az osztás-részekre nézve nem ró ki semmi megszorítást, amelyeknek minden pontja kivűl esik oly határozott sugarú gömbökön, amely gömbök centrumai a végtelenné válás ponthelyei, bármi kicsinyek legyenek is külömben a gömbsugarak. Mindezekben az osztás-részekben egészen tetszésre tűzhető ki a függvény-hely, mert ezek számára csakis arányos megválasztása lehetséges. Bármi kis adható terjedelme legyen az alakzat oly részének, hogy a másik rész nem tartalmaz végtelenségi pontokat, vonalokat, fölületeket a határán sem, ebben a másik, túlnyomó részben egészen szabad a függvény-helyek megválasztása is. A $(D\bar{\omega})$ osztás-részek megválasztása mindenütt egészen tetszés szerinti.

A függvény-helyek arányos megválasztásában az összeg a fölosztás sürűségének végtelen növekedésével a következő föltételek alatt minden esetre véges és egyetlen értékbe convergál.

1. Összegelési vonalon egy pontban, vagy egyes pontokban elsőnél alacsonyabb rendű végtelen a függvény.

2. Összegelési fölületen egy pontban vagy egyes pontokban másodiknál alacsonyabb rendű végtelen.

3. Összegelési térben egy pontban vagy egyes pontokban harmadiknál alacsonyabb rendű végtelen.

4. Összegelési fölületen egy vonalon vagy egyes vonalokon elsőnél alacsonyabb rendű végtelen.

5. Összegelési térben egy vonalon vagy egyes vonalokon másodiknál alacsonyabb rendű végtelen.

6. Összegelési térben egy fölületen vagy egyes fölületeken elsőnél alacsonyabb rendű végtelen.

Ezeknek az állításoknak a bebizonyítására szükséges és elégséges kimutatni, hogy egy igen kis alakzat-rész, amely a végtelenségi helyeket magában foglalja, mint az előbbi czikk tárgyalásában is a különös helyeket az $(\bar{\omega}_0)$ rész, lehet oly kicsi, hogy, mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész határ-értéke tetszésre adott kicsinél kisebb. Ugyanis e föltétel alatt épen úgy következik, mint az elébbi czikk tárgyalásában, hogy véges és egyetlen határ-érték felel meg a teljes összegnek. Hogy pedig ez a föltétel az elősorolt esetekben tényileg teljesül, annak a fölismerése egy algebrai határ-egyenletre alapítható, nevezetesen a következőre:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^\mu+\left(\frac{1}{3}\right)^\mu+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^\mu}{n^{1-\mu}}=\frac{1}{1-\mu}, \quad (0 \leqq \mu < 1).$$

Ennek az egyenletnek a belátása végett gondoljunk arra, hogy ha $k>1$, úgy

$$k^{1-\mu}-(k-1)^{1-\mu}=\frac{1-\mu}{k^\mu}\left(1+\frac{\mu}{2}\frac{1}{k}+\frac{\mu}{2}\frac{1+\mu}{3}\frac{1}{k^2}+\cdots\right),$$

továbbá

$$(k+1)^{1-\mu}-k^{1-\mu}$$

$$=\frac{1-\mu}{k^\mu}\left[1-\frac{\mu}{2}\left(k-\frac{1+\mu}{3}\right)\frac{1}{k^2}-\frac{\mu}{2}\frac{1+\mu}{3}\frac{2+\mu}{4}\left(k-\frac{3+\mu}{5}\right)\frac{1}{k^4}-\cdots\right],$$

tehát a μ mennyiség kiszabott értéktartományában

$$k^{1-\mu}-(k-1)^{1-\mu}>\frac{1-\mu}{k^\mu}>(k+1)^{1-\mu}-k^{1-\mu}.$$

Ebből folyólag, miután k helyett rendre a $2, 3, \ldots n$ sor-számokat iktattuk,

$$n^{1-\mu}-1>(1-\mu)\sum_{k=2}^{k=n}\left(\frac{1}{k}\right)^\mu>(n+1)^{1-\mu}-2^{1-\mu}.$$

Innen pedig kiviláglik már, hogy a fönt jegyzett határ-egyenlet helyes.

Egyelőre hat specialis eset tárgyalására szorítkozunk. Ezek elintézése után könnyű szerrel kideríthető lesz majd, hogy a kimondott tételek a maguk általánosságában is helyesek.

1. Végtelenség összegelési egyenes határpontjában.

A függvény-helyek valamely arányos megválasztásában legyen

$$\sum_{(s)} |\Phi| \, Ds \equiv P_s,$$

ahol (s) az egyenes oly részét jelenti, amely a végtelenség helyében kezdődik.

Ha a végtelenség rend-száma μ, vagy kisebb mint μ, írjuk

$$|\Phi| = \frac{\psi}{r^\mu}$$

ahol r a függvény-helynek és a végtelenség helyének a kölcsönös távolsága. Már most

$$P_s = \sum_{(s)} \psi \frac{Ds}{r^\mu},$$

Minden osztás-résznek a végtelenség helyétől legmesszebb eső pontja vagyis főpontja a végpontja. A (Ds) osztás-rész végpontja a végtelenség helyétől ρ távolságban legyen, és vegyük számba, hogy

$$P_s = \sum_{(s)} \psi . \left(\frac{\rho}{r}\right)^\mu \frac{Ds}{\rho^\mu}$$

A fölosztások sűrűségének határtalan növelésében is: az összeg minden tagjában véges marad ψ és $\rho : r$. Az első azért, mert μ akkora, vagy nagyobb, mint a végtelenség rendszáma, a második azért, mert a függvény-helyek arányosan vannak megválasztva. Jelentsen K nagyobb véges értéket, mint amekkorát a

$$\psi \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^\mu$$

kifejezés a vonalon egyáltalán fölvehet. Úgy

$$P_s < K \sum_{(s)} \frac{Ds}{\rho^\mu} .$$

és egyszersmind a fölosztás sürűségének végtelen növelésében

$$\mathrm{Lim}\, P_s < K\, \mathrm{Lim} \sum_{(s)} \frac{\mathrm{D}s}{\rho^\mu}.$$

Most az itt előforduló összeget összehasonlítjuk egy más összeggel,

$$\sum_{(s)} \frac{\mathrm{D}'s}{s^\mu},$$

amelyet a következőleg képezünk. Az (s) egyenes-részt $D's$ egyenlő hosszúságú részekre osztjuk. De a $D's$ hosszúságot úgy választjuk, hogy kisebb legyen, mint a végtelenség helyében kezdődő (Ds) osztás-rész hosszúsága. Az s vonalhosszat az első (Ds') osztás-részhez ennek a végső pontjáig, a többihez azok kezdő pontjáig számítjuk, úgy, hogy s értékei rendre

$$\mathrm{D}'s,\ \mathrm{D}'s,\ 2\mathrm{D}'s,\ 3\mathrm{D}'s, .., n\mathrm{D}'s$$

ha t. i. a teljes vonal-hossz

$$(n+1)\mathrm{D}'s = s_0$$

Az ekként meghatározott összeg nagyobb, mint föntebb a K mellett lévő mert a (Ds) és (D$'s$)-féle osztás-részek közös darabjaihoz s kisebb, mint a ρ. Igy

$$P_s < K \sum_{(s)} \frac{\mathrm{D}'s}{s^\mu}.$$

Az előirt módon részletesen kifejtvén az összeget, azután D$'s$ helyett $s:(n+1)$ írván, egyenlőtlenségünk ekép jelentkezik:

$$P_s < K \frac{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^\mu + \left(\frac{1}{3}\right)^\mu + \cdot\cdot + \left(\frac{1}{n}\right)^\mu}{(n+1)^{1-\mu}} \cdot s_0^{\,1-\mu}.$$

Ha tehát a μ az egységnél kisebb positivus szám, úgy határegyenletünk szerint

$$(P_s)_{n \to \infty} < \frac{K}{1-\mu} s_0^{\,1-\mu}.$$

Eként, ha a végtelenség rendszáma kisebb mint 1, úgy s_0 megválasztható oly kicsinek, hogy mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész határ-értéke tetszés szerint adott kicsinél kisebb.

2. Végtelenség összegelési sík határ-pontjában.

A függvényhelyek valamely arányos megválasztásában legyen

$$\sum_{(\sigma)} |\Phi| D\sigma \equiv P_\sigma,$$

ahol (σ) az összegelési síknak és oly körlapnak (σ') a közös része, amelynek a centruma a végtelenség helye.

Ha a végtelenség rendszáma μ, vagy kisebb mint μ, írjuk

$$|\Phi| = \frac{\psi}{r^\mu},$$

ahol r a függvény-helynek és a végtelenség helyének kölcsönös távolsága. A végtelenség helye és a ($D\sigma$) osztás-rész fő-pontja közt a távolság ρ legyen. Epúgy következik, mint az 1. alatt, hogy K-nak hasonlólag fölvett jelentményében,

$$P_\sigma < K \sum_{(\sigma)} \frac{D\sigma}{\rho^\mu},$$

$$\mathrm{Lim}\, P_\sigma < K\, \mathrm{Lim} \sum_{(\sigma)} \frac{D\sigma}{\rho^\mu}.$$

Az itt előforduló összeget más összeggel hasonlítjuk össze,

$$\sum_{(\sigma')} \frac{D'\sigma}{s^\mu},$$

amely az egész körlapra (σ') vonatkozik, és a következő módon van megalkotva. A végtelenség helye, mint centrum, körűl köröket írunk

$$Ds,\ 2Ds, \ldots, (n+1)Ds$$

hosszúságú sugarakkal. És pedig Ds hosszúságot úgy választjuk, hogy kisebb legyen, mint a legkisebb ρ, és hogy az $(n+1)Ds$ sugár a (σ') körlap sugara legyen,

$$(n+1)Ds = s_0.$$

Továbbá a körök közös centrumából, vagyis a végtelenség helyéből igen sürűen sugárokat húzunk ki, amelyek rendre egyenlő $D\theta$ szögívek alatt következnek egymásután. E súgarak száma N legyen, úgy, hogy

$$ND\theta = 2\pi.$$

A körök és sugarak igen kis részekre osztják a (σ') körlapot, s ilyen rész területét jelentse $D'\sigma$ az összegben. A centrum és az első kör közt foglalt ($D'\sigma$) osztás részekhez legyen $s = Ds$; az első és második kör közt foglaltakhoz szintén $s = Ds$ legyen; a második és harmadik kör közt lévőkhöz $s=2\mathrm{D}s$; a harmadik és negyedik közt lévőkhöz $s=3\mathrm{D}s$; sít.

Az ily módon meghatározott összeg nagyobb mint fönt a K mellett lévő, mert a $(\mathrm{D}\sigma)$ és $(\mathrm{D}'\sigma)$-féle osztásrészek közös darabjaihoz s kisebb mint a ρ, és mert σ' nem kisebb, sőt nagyobb, mint σ. Igy

$$P_\sigma < K \sum_{(\sigma')} \frac{\mathrm{D}'\sigma}{s^\mu}.$$

Azomban ha (σ')-nak két szomszédos sugár közt foglalt része σ'', úgy

$$\sum_{(\sigma)} \frac{\mathrm{D}'\sigma}{s^\mu} = N \sum_{(\sigma'')} \frac{\mathrm{D}'\sigma}{s^\mu},$$

tehát

$$P_\sigma < KN \sum_{(\sigma'')} \frac{D'\sigma}{s^\mu},$$

A (σ'') körszelvényben lévő D's területek rendre ezek:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{2n+1}{2}\right)(\mathrm{D}s)^2\,\mathrm{D}\theta,$$

az s értékei pedig az előirás szerint a megfelelő sorrendben

$$(1,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)\mathrm{D}s.$$

Következőleg

$$P_\sigma < 2\pi K \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^\mu+\frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^\mu+\cdots+\frac{2n+1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^\mu}{(n+1)^{2-\mu}} s_0^{2-\mu}$$

Már most tegyük föl, hogy a végtelenség rendszáma kisebb, mint 2. Minthogy a μ csak azt a kirovást viseli, hogy ne legyen kisebb, mint a végtelenség rendszáma, így föltehetjük, hogy $1<\mu<2$. Ebben a jogos föltevésben irjuk $\mu=1+\nu$, ahol $o<\nu<1$. Kapjuk:

$$P_\sigma < 2\pi K \frac{\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{2k}\right)\left(\frac{1}{k}\right)^\nu}{(n+1)^{1-\nu}} s_0^{2-\mu}.$$

Az n szám határtalan növesztésével az itteni Σ összeg második fele convergens sorrá válik, következőleg határ-egyenletünk értelmében

$$\mathrm{Lim}\, P_\sigma < \frac{2\pi K}{2-\mu} s_0^{2-\mu}.$$

Ha tehát a végtelenség rendszáma kettőnél kisebb, úgy s_0 és vele együtt a (σ) lap-rész megválasztható oly kicsinek, hogy, mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész tetszésre adott kicsinél kisebb.

3. Végtelenség összegelési tér határ-pontjában. A függvény-helyek valamely arányos megválasztásában legyen

$$\sum_{(\tau)} |\Phi| \mathrm{D}\tau \equiv P_\tau$$

ahol (τ) az összegelés terének és oly gömbnek (τ') a közös része amelynek a centruma a végtelenség helye.

Ha a végtelenség rendszáma μ, vagy kisebb mint μ, írjuk

$$|\Phi| = \frac{\psi}{r^\mu},$$

ahol r a függvény-helynek és a végtelenség helyének a kölcsönös távolsága. A végtelenség helye és a $\mathrm{D}\tau$ osztásrész főpontja közt a távolság ρ legyen. Épúgy következik, mint 1. alatt, hogy K-nak hasonló módon fölvett jelentményében

$$P_\tau < K \sum_{(\tau)} \frac{\mathrm{D}\tau}{\rho^\mu},$$

$$\mathrm{Lim}\, P_\tau < K\, \mathrm{Lim} \sum_{(\tau)} \frac{\mathrm{D}\tau}{\rho^\mu}.$$

Az itt előforduló összeget egy más összeggel hasonlítjuk össze,

$$\sum_{(\tau)} \frac{\mathrm{D}'\tau}{s^\mu},$$

amely az egész gömbre (τ') vonatkozik s a következő módon van megalkotva. A végtelenség helye, mint centrum, körűl gömb-fölületeket irunk

$$\mathrm{D}s,\ 2\mathrm{D}s, \ldots, (n+1)\mathrm{D}s$$

hosszuságú sugarakkal. És pedig a $\mathrm{D}s$ hosszúságot úgy választjuk, hogy kisebb legyen, mint a legkisebb ρ, és, hogy az $(n+1)\mathrm{D}s$ sugár a (τ') gömb sugara legyen,

$$(n+1)\mathrm{D}s = s_0.$$

Továbbá a gömb-fölületek közös centrumából, vagyis a végtelenség helyéből, mint csúcsból, igen vékony gúlákat képezünk a (τ') gömbben, amelyek e gömb fölűletén egyenlő $s^2\mathrm{D}\sigma$ terűleteket határolnak. E gúlák száma legyen N, úgy, hogy

$$N\mathrm{D}\sigma = 4\pi.$$

A gömb-fölületek és gúlák igen kis részekre osztják a (τ') gömbtért, s ilyen rész térfogatát jelentse $D'\tau$ az összegben. A centrum és az első gömbfölület közt foglalt $(\mathrm{D}'\tau)$ osztás-részekhez $s=\mathrm{D}s$ legyen; az első és második gömbfölület közt foglaltakhoz szintén $s=\mathrm{D}s$; a második és harmadik közt lévőkhöz $s=2\mathrm{D}s$; a harmadik és negyedik közt lévőkhöz $s=3\mathrm{D}s$; sít.

Az ily módon meghatározott összeg nagyobb mint a K mellett lévő, mert a $(\mathrm{D}\tau)$ és $(\mathrm{D}'\tau)$-féle osztás-részek közös darabjaihoz s kisebb, mint a ρ és mert τ' nem kisebb, sőt nagyobb, mint τ. Igy

$$P_\tau < K \sum_{(\tau')} \frac{\mathrm{D}'\tau}{s^\mu}.$$

Azonban, ha (τ')-nak egy gúla-része (τ''), úgy

$$\sum_{(\tau)} \frac{D'\tau}{s^\mu} = N \sum_{(\tau'')} \frac{\mathrm{D}'\tau}{s^\mu},$$

tehát

$$P_\tau < KN \sum_{(\tau'')} \frac{\mathrm{D}'\tau}{s^\mu}.$$

A (τ'') gúlában lévő $\mathrm{D}'\tau$ térfogatok rendre ezek:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{19}{3}, \ldots, \frac{3n^2+3n+1}{3}\right)(\mathrm{D}s)^3 D\sigma$$

az s értékei pedig az előírás szerint sorban:

$$(1, 1, 2, 3, \ldots, n)\mathrm{D}s.$$

Következőleg

$$P_\tau < 4\pi K \frac{\frac{1}{3}+\frac{7}{3}+\frac{19}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^\mu + \frac{37}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^\mu + \cdots + \frac{3n^2+3n+1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^\mu}{(n+1)^{3-\mu}} s_0^{\,3-\mu}.$$

Már most tegyük föl, hogy a végtelenség rendszáma kisebb, mint 3. Minthogy μ csak azt a kirovást viseli, hogy ne legyen kisebb, mint a végtelenség rendszáma, így föltehetjük, hogy $2<\mu<3$. Ebben a jogos föltevésben írjuk $\mu=2+\nu$, ahol $0<\nu<1$. Kapjuk:

$$P_\tau < 4\pi K \frac{\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{k=n} \left(1+\frac{1}{k}+\frac{1}{3k^2}\right)\left(\frac{1}{k}\right)^\nu}{(n+1)^{1-\nu}} s_0^{\,3-\mu}.$$

Az n szám határtalan növesztésével az itteni Σ összeg második és harmadik része convergens sorrá válik, következőleg határegyenletünk értelmében

$$\mathrm{Lim}P_\tau < \frac{4\pi K}{3-\mu} s_0^{\,3-\mu}.$$

Ha tehát a végtelenség rendszáma háromnál kisebb, úgy s_0 és vele együtt a (τ) gömb-rész megválasztható oly kicsinek, hogy mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész tetszés szerint adott kicsinél kisebb.

4. Végtelenség egyenes vonalon, összegelési sík határán.

A függvény-helyek valamely arányos megválasztásában legyen

$$\sum_{(\sigma)} |\Phi| \mathrm{D}\sigma \equiv P_\sigma$$

ahol (σ) az összegelési síknak s oly derékszögű négyszögnek (σ') a közös részét jelenti, amelynek egyik oldala a végtelenség vonala. Az összegelési lap többi részét nem szükséges tekintetbe venni, mert már csak végtelenségi pontokat tartalmazhat, t. i. a különös vonal végpontjait, és, mert fölteszszük, hogy a végtelenné válás rendszáma kisebb mint 2, sőt kisebb mint 1.

Ha ez a rendszám sehol sem nagyobb mint μ a végtelenség vonalán, irjuk

$$|\Phi| = \frac{\psi}{r^\mu},$$

ahol r a függvényhelynek és a végtelenség egyenes vonalának a kölcsönös távolsága. E vonal és a $(\mathrm{D}\sigma)$ osztás-rész főpontja közt a távolság ρ legyen. Épúgy következik, mint 1. alatt, hogy K-nak hasonló módon fölvett jelentményében

$$P_\sigma < K \sum_{(\sigma)} \frac{\mathrm{D}\sigma}{\rho^\mu},$$

$$\mathrm{Lim}\, P_\sigma < K\, \mathrm{Lim} \sum_{(\sigma)} \frac{\mathrm{D}\sigma}{\rho^\mu}.$$

Az itt előforduló összeget egy más összeggel hasonlítjuk össze,

$$\sum_{(\sigma')} \frac{\mathrm{D}\sigma'}{s^\mu},$$

amely az egész derékszögű négyszög területére vonatkozik, s a következő módon van megalkotva. A végtelenség egyenes vonalával párhuzamosakat vonunk a (σ') lapon, rendre

$$\mathrm{D}s,\ 2\mathrm{D}s,\ 3\mathrm{D}s,\ldots,(n+1)\mathrm{D}s$$

távolságokban. És pedig a $\mathrm{D}s$ távolságot úgy választjuk, hogy kisebb legyen mint a legkisebb ρ, és, hogy $(n+1)\mathrm{D}s$ a derékszögű (σ') lap szélessége legyen

$$(n+1)\mathrm{D}s=s_0.$$

Továbbá a párhuzamos egyeneseken körösztűl igen sűrűen merőlegeseket vonunk, amelyek rendre $\mathrm{D}\varsigma$ egyenlő távolságokban sorakoznak egymásután, N számú $\mathrm{D}\varsigma$ hosszúságú részre osztván a párhuzamos egyeneseket, mihez képest, ha a végtelenség vonalának a hossza ς, úgy

$$N\mathrm{D}\varsigma=\varsigma.$$

A párhuzamos és a merőleges egyenesek igen kis részekre osztják a (σ') négyszöget, s ilyen rész területét jelentse $D'\sigma$ az összegben. A végtelenség vonalala és az első párhuzamos közt foglalt $(D'\sigma)$ osztásrészekhez $s=\mathrm{D}s$ legyen; az első és második párhuzamos közt foglaltakhoz szintén $s=\mathrm{D}s$; a második és harmadik párhuzamos közt lévőkhöz $s=2\mathrm{D}s$; a harmadik és negyedik közt lévőkhöz $s=3\mathrm{D}s$; sít.

Az ily módon meghatározott összeg nagyobb, mint fönt a K mellett lévő, mert a $(\mathrm{D}\sigma)$ és $(\mathrm{D}'\sigma)$-féle osztás-részek közös darabjaihoz s kisebb mint a ρ, és mert σ' semmi esetre sem kisebb mint σ. Eszerint

$$P_\sigma<K\sum_{(\sigma')}\frac{\mathrm{D}'\sigma}{s^\mu}.$$

Azonban, ha (σ')-nak oly része, amely két szomszédos merőleges közt van (σ''), úgy

$$\sum_{(\sigma'')}\frac{\mathrm{D}'\sigma}{s^\mu}=N\sum_{(\sigma'')}\frac{\mathrm{D}'\sigma}{s^\mu},$$

tehát

$$P_\sigma<KN\sum_{(\sigma'')}\frac{\mathrm{D}'\sigma}{s^\mu}.$$

A (σ'') szalagban lévő $\mathrm{D}'\sigma$ területek, valamennyi $=\mathrm{D}\varsigma.\mathrm{D}s$, míg az s értékei rendre

$$(1,\ 1,\ 2\ 3,\ldots,n)Ds.$$

Következőleg

$$P_\sigma<K\varsigma\frac{2+\left(\frac{1}{2}\right)^\mu+\left(\frac{1}{3}\right)^\mu+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^\mu}{(n+1)^{1-\mu}}s_0{}^{1-\mu}.$$

Ha már most $0<\mu<1$, úgy határ egyenletünk szerint

$$\mathrm{Lim}P_\sigma<\frac{K\varsigma}{1-\mu}s_0^{1-\mu}.$$

Ha tehát a végtelenség rendszáma az egységnél mindenütt kisebb az egyenes vonalon, úgy s_0 és vele együtt a (σ) laprész megválasztható oly kicsinek, hogy mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összegrész tetszés szerint adott kicsinél kisebb.

5.) Végtelenség egyenes vonalon, összegelési tér határán.

A függvény-helyek valamely arányos megválasztásában legyen

$$\sum_{(\tau)}|\Phi|\mathrm{D}\tau\equiv P_\tau$$

ahol (τ) az összegelési térnek és oly egyenes körhengernek (τ') a közös része, amelynek tengelye a végtelenség vonala. Az összegelési tér többi részét fölösleges tekintetbe venni mert már csak végtelenségi pontokat tartalmazhat, t. i. a végtelenség vonalának a vég-pontjait, és, mert a végtelenség rendszámáról fölteszszük, hogy kisebb mint 3, sőt, kisebb mint 2.

Ha ez a rendszám sehol sem nagyobb mint μ a végtelenség vonalán írjuk

$$|\Phi|=\frac{\psi}{r^\mu},$$

ahol r a függvény-helynek és a végtelenség egyenes vonalának a kölcsönös távolsága. E vonal és a $\mathrm{D}\tau$ osztás-rész fő-pontja közt a távolság ρ legyen. Épúgy következik, mint 1.) alatt, hogy K-nak hasonló módon fölvett jelentményében

$$P_\tau<K\sum_{(\tau)}\frac{\mathrm{D}\tau}{\rho^\mu},$$

$$\mathrm{Lim}P_\tau<K\mathrm{Lim}\sum_{(\tau)}\frac{\mathrm{D}\tau}{\rho^\mu}\cdot$$

Az itt előforduló összeget egy más összeggel hasonlítjuk össze

$$\sum_{(\tau')}\frac{\mathrm{D}\tau'}{s^\mu},$$

amely az egész kör-henger tér-tartalmára vonatkozik és a következő módon van megalkotva. A végtelenség vonala, mint tengely, körül (τ')-ban körhengereket írunk

$$\mathrm{D}s,\ 2\mathrm{D}s,\ 3\mathrm{D}s,\ ..,(n+1)\mathrm{D}s$$

hosszúságú sugarakkal. És pedig a Ds hosszúságát úgy választjuk, hogy kisebb legyen, mint a legkisebb ρ, és, hogy $(n+1)\mathrm{D}s$ akkora legyen, mint a $(\mathrm{D}\tau')$ kör-henger sugara

$$(n+1)\mathrm{D}s = s_0.$$

Továbbá a tengelyen körösztűl igen sűrűen, arra merőleges sikokat fektetünk, amelyek rendre egyenlő Dς távolságban sorakoznak egymásután, N számú Dς hosszúságú részekre osztván a tengelyt, mihez képest, ha a tengely belső hossza ς, úgy

$$N\mathrm{D}\varsigma = \varsigma.$$

Végűl, még a tengelyre igen sűrűen síkokat fektetünk, amelyek rendre egyenlő Dθ szögívek alatt hajlanak egymáshoz, úgy hogy Dθ egy teljes körív H-ad részét képezi, tehát

$$H\mathrm{D}\theta = 2\pi.$$

A henger-fölületek, merőleges síkok és szögellő síkok igen kis részekre osztják a (τ') henger-tért, s ilyen rész térfogatát jelentse $\mathrm{D}'\tau$ az összegben. A tengely és az első henger-fölület közt foglalt $(\mathrm{D}'\tau)$ osztás-részekhez $s = \mathrm{D}s$ legyen; az első és második henger-felület közt foglalt osztás-részekhez szintén $s = \mathrm{D}s$; a második és harmadik közt lévőkhöz $s = 2\mathrm{D}s$; a harmadik és negyedik közt lévőkhöz $s = 3\mathrm{D}s$; sít.

Az így meghatározott összeg nagyobb, mint fönt a K mellett lévő, mert a $(\mathrm{D}\tau)$ és $(\mathrm{D}'\tau)$ osztás részek közös darabjaihoz s kisebb mint ρ, és mert τ' nem kisebb sőt nagyobb, mint τ. Következőleg

$$P_\tau < K \sum_{(\tau')} \frac{\mathrm{D}\tau'}{s^\mu}.$$

Azonban, ha (τ')-nak oly része, amely két szomszédos merőleges sík és két szomszédos szögellő sík közt foglaltatik (τ''), úgy

$$\sum_{(\tau')} \frac{\mathrm{D}\tau'}{s^\mu} \; NH \sum_{(\tau'')} \frac{\mathrm{D}\tau'}{s^\mu},$$

tehát

$$P_\tau < KNH \sum_{(\tau'')} \frac{\mathrm{D}\tau'}{s^\mu}.$$

A (τ'') henger-szelvényben létő $\mathrm{D}\tau'$ térfogatok rendre

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{2n+1}{2}\right)(\mathrm{D}s)^2.\ \mathrm{D}\varsigma.\ \mathrm{D}\theta$$

míg a megfelelő s értékek rendre

$$(1,\ 1,\ 2,\ 3, .., n)\mathrm{D}s,$$

következőleg

$$P_\tau < 2\pi K\varsigma \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^\mu+\frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^\mu+\cdots+\frac{2n+1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^\mu}{(n+1)^{2-\mu}} s_0^{\,2-\mu}.$$

Ha már most a végtelenség rendszáma mindenütt kisebb mint 2 az egyenes vonalon, írhatjuk $1<\mu<2$, és ugyanazon a módon, amelyet 2.) alatt alkalmaztunk, azt találjuk, hogy

$$\mathrm{Lim}\ P_\tau < \frac{2\pi K\varsigma}{2-\mu} s_0^{\,2-\mu}.$$

Ha tehát a végtelenség rendszáma kettőnél mindenütt kisebb az egyenes vonalon, úgy s_0 és vele együtt a (τ) henger-rész megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész tetszés szerint adott kicsinél kisebb.

6. Végtelenség sík-lapon összegelési tér határán. A fügvény-helyek valamely arányos megválasztásában legyen

$$\sum_{(\tau)} |\Phi| \mathrm{D}\tau = P_\tau,$$

ahol (τ) az összegelési térnek és oly (τ') egyenes hasábnak a közös része, amelynek egyik véglapja a végtelenség fölülete. Az összegelési tér többi részét az előbbi 5. és a következő 7. alatti megállapítások szerint fölösleges tekintetbe venni, mert az már csak végtelenségi vonalat tartalmazhat, t. i. a végtelenségi lap kerületén, és mert fölteszszük, hogy a végtelenné válás rendszáma mindenütt kisebb mint 2, sőt kisebb mint 1.

Ha ez a rendszám sehol sem nagyobb mint μ a végtelenség fölületén, írjuk

$$|\Phi| = \frac{\psi}{r^\mu},$$

ahol r a fügvény helynek a végtelenség sík-lapjától való távolsága. E lap és a $\mathrm{D}\tau$ osztás-rész fő-pontja közt a távolság ρ legyen. Épúgy következik, mint 1. alatt, hogy K-nak hasonló módon fölvett jelentményében

$$P_\tau < K \sum_{(\tau)} \frac{\mathrm{D}\tau}{\rho^\mu},$$

$$\text{Lim}\, P_\tau < K\, \text{Lim} \sum_{(\tau)} \frac{D\tau}{\rho^\mu}.$$

Az itt előforduló összeget egy más összeggel hasonlítjuk össze,

$$\sum_{(\tau')} \frac{D'\tau}{s^\mu},$$

amely az egész egyenes hasábra (τ') vonatkozik s a következő módon van megalkotva. A végtelenség sík-lapjával párhuzamos síkokat képezünk attól

$$Ds,\ 2Ds,\ 3Ds, \ldots, (n+1)Ds$$

távolságban. Éspedig a Ds távolságot úgy választjuk, hogy kisebb legyen mint a legkisebb ρ, és hogy $(n+1)Ds$ akkora legyen, mint a hasáb magassága

$$(n+1)Ds = s_0.$$

Továbbá a párhuzamos síkokon körösztül reájuk merőlegesen igen vékony egyenlő átmetszetű hasábokat fektetünk, amelyek N számú és $D\sigma$ területű részekre osztják azokat úgy, hogy a végtelenség lapjának a területe

$$N D\sigma = \sigma.$$

A síkok és a vékony hasábok igen kis részekre osztják a (τ') hasáb-tért, s ilyen rész térfogatát jelentse $D'\tau$ az összegben. A végtelenség lapja és az első párhuzamos lap közt foglalt $(D'\tau)$ osztás-részekhez $s = Ds$ legyen; az első és második párhuzamos lap közt foglalt osztásrészekhez szintén $s = Ds$; a második és harmadik közt lévőkhöz $s = 2Ds$; a harmadik és negyedik közt lévőkhöz $s = 3Ds$; sít.

Az ily módon meghatározott összeg nagyobb mint föntebb a K mellett lévő, mert a $(D\tau)$ és $(D'\tau)$-féle osztás-részek közös darabjaihoz tartozó s kisebb mint ρ, és mert τ' semmi esetre sem kisebb mint τ. Eként

$$P_\tau < K \sum_{(\tau')} \frac{D'\tau}{s^\mu}.$$

Azonban, ha (τ')-nak egy vékony hasábban foglalt része (τ''), úgy

$$\sum_{(\tau')} \frac{D'\tau}{s^\mu} = N \sum_{(\tau'')} \frac{D'\tau}{s^\mu},$$

tehát

$$P_\tau < KN \sum_{(\tau'')} \frac{D'\tau}{s^\mu}.$$

A (τ'') vékony hasábban lévő valamennyi $D'\tau$ térfogatok $= Ds.D\sigma$, az s értékek pedig rendre

$$(1, 1, 2, 3, .., n)Ds.$$

Következőleg

$$P_\tau < K\sigma \frac{1+1+\left(\frac{1}{2}\right)^\mu+\left(\frac{1}{3}\right)^\mu+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^\mu}{(n+1)^{1-\mu}} \cdot s_0{}^{1-\mu}.$$

Ha már most $0<\mu<1$, úgy határ-egyenletünk értelmében

$$\text{Lim } P_\tau < \frac{K\sigma}{1-\mu} \cdot s_0{}^{1-\mu}.$$

Ha tehát a végtelenség rendszáma az egységnél mindenütt kisebb a sík-lapon, úgy s_0 és vele együtt a (τ) hasáb-rész megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész tetszés szerint adott kicsinynél kisebb.

7.) Az általánosság.

Véges kiterjedésű geometriai alakzatban a Φ függvény egyes pontokban, vonalakon, fölületeken végtelen legyen oly rendszámok szerint, aminőket a hat általános propositio föltételez.

Válaszszunk ki a geometriai alakzatból oly részeket, amelyek mindegyike vagy egy különös pontot, vagy egy különös vonalat, vagy különös vonal egy darabját, vagy egy különös fölületet, vagy különös fölület egy darabját tartalmazza a határán, mint végtelenné válás helyeit. A geometriai alakzat többi részében sehol se legyen végtelen a függvény, a határán sem, minek következtében ezzel a többi részszel nem kell törődnünk. Megjegyzendő, hogy az alakzat-részek ilyetén kiválasztása még akkor is lehetséges, midőn különös vonalak, fölületek metszik egymást.

A kiválasztott részek vagy vonalak, vagy fölületek, vagy terek. Ezeket egyenkint leképezzük; a vonalakat egyenesekre, a fölületeket síkokra, a tereket más terekre. Úgy képezzük le, hogy a.) képök határa határuk képe legyen, s különös vonal képe egyenes, különös fölület képe sík legyen; b.) ha egy osztás-rész ($D\bar{\omega}$), és ennek a képe ($D\bar{\omega}_1$), úgy a $D\bar{\omega} : D\bar{\omega}_1$ hányados ne lehessen végtelen nagy; c.) ha ($D\bar{\omega}$) főpontjának távolsága a különös ponttól vagy vonaltól vagy fölülettől, illetőleg utóbbiak esetében legközelebbi pontjuktól ρ, és ha ($D\bar{\omega}_1$)-ben a különös pont képétől vagy különös vonal egyenes-képétől vagy különös felület sík-képétől legmesszebb fekvő pont távola ρ_1, úgy $\rho_1 : \rho$ ne lehessen végtelen. Mindenesetre megválaszthatók olyképen az egyes alakzat-részek, hogy ezek a követelések is teljesíthetők legyenek. Kitűnik ez már abból, hogy az alakzatból kiválasztott részek lehetnek oly kicsinyek, mikép pontjaikat tetszésre adott kicsinél kisebb utakon mozdíthatjuk el úgy, hogy ez által a leképezések az a.) értelemben teljesűljenek, amidőn aztán egyszersmind a $(D\tilde{\omega})$ osztás-részek az ő $(D\tilde{\omega}_1)$ képeiktől, a ρ távolságok pedig a ρ_1 távolságoktól kis mértékben külömböznek.

Már most legyen a függvényhelyek valamely arányos megválasztásában a $\Sigma|\Phi|D\tilde{\omega}$ oly része, (XXII), amely egy kiválasztott alakzatrészre terjed ki

$$\sum_{(\tilde{\omega})}|\Phi|D\tilde{\omega} \equiv P_{\tilde{\omega}}.$$

Ha a végtelenné válás rendszáma az $(\tilde{\omega})$ határán lévő különös pontban vagy vonalon vagy fölületen nem nagyobb, mint μ, úgy r-rel jelölvén az ily hely s a függvényhely közt lévő távolságot, $r^{\mu}|\Phi|$ mindenütt véges marad az $(\tilde{\omega})$-ban, a fölosztások sűrűségének határtalan növelése mellett is. De véges marad $\rho : r$ is, a függvényhelyek arányos megválasztása miatt, és a föltevés szerint $\rho_1 : \rho$ is. Igy véges marad

$$\frac{\rho}{r}\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\rho_1}{r},$$

tehát véges marad

$$\left(\frac{\rho_1}{r}\right)^{\mu} r^{\mu}|\Phi| = \rho_1^{\mu}|\Phi|.$$

Mivel pedig a föltevés szerint $D\tilde{\omega} : D\tilde{\omega}_1$ hányados sem lehet végtelen nagy, így ebben az identitasban:

$$|\Phi|D\tilde{\omega} \equiv \frac{D\tilde{\omega}}{D\tilde{\omega}_1}\rho_1^{\mu}|\Phi| . \frac{D\tilde{\omega}}{\rho_1^{\mu}}$$

a jobb oldalban foglalt utolsó tört-alak szorzója mindig véges. Következőleg, ha K_1 nagyobb véges érték, mint amekkorát ez a szorzó egyáltalán fölvehet,

$$P_{\tilde{\omega}} < K_1 \sum_{(\tilde{\omega}_1)} \frac{D\tilde{\omega}_1}{\rho_1^{\mu}}.$$

Ugyanolyan kifejezés ez, amilyen a hat előbbi tárgyalás alapját képezte . . .

Végre az alkalmazások érdekében jegyezzük meg ezt az észrevételt: soha és semmiféle czélra sem szükséges oly fölület-elemek és tér-elemek számba vétele, amelyeknek beszögelléseik vagy határtalan kicsinyitésükkel el nem símuló behajlásaik vannak.

XXVI. Tér-integralisok reductiója.

1. Ha véges kiterjedésű T térben a hely Φ függvénye folytonos és i irányban deriválható függvény, és deriváltja is folytonos, akkor ez a tér-integralis:

$$I \equiv \int_T \frac{\partial \Phi}{\partial i} \mathrm{D}\tau$$

fölületi integralisra reducálható, amely a T tér határ-fölületére S-re vonatkozik. Még pedig ha a fölület $\mathrm{D}\sigma$ elemének befelé mutató normalisa n irányú, úgy

$$I = -\int_S \Phi \cos(i, n) \mathrm{D}\sigma,$$

ahol (i, n) az i és n irány szöge.

Ennek a fölismerése végett vegyünk föl a T térben egy végtelen vékony hasábot, $(\mathrm{D}T)$, olyant, amely párhuzamos az i iránynyal és az S két elemében, $(\mathrm{D}_1\sigma)$, $(\mathrm{D}_2\sigma)$ végződik, amelyek mindegyikéhez egyetlen befelé mutató normalis irány n_1 és n_2 tartozik. A tér-integralisnak azt a végtelen kis részét, amely erre a hasábra szorítkozik, jelölje $\mathrm{D}I$:

$$\mathrm{D}I \equiv \int_{\mathrm{D}T} \frac{\partial \Phi}{\partial i} \mathrm{D}\tau.$$

Ilyen integralisok összege képezi az egész I integralist.

Most a $(\mathrm{D}\tau)$ tér-elemeket úgy válaszszuk meg, hogy a $(\mathrm{D}T)$-féle hasábok merőleges átmetszéseiből származó teljes átmetszeti hasáb-elemek legyenek. Ha egy ily hasáb-elem hoszsza $\mathrm{D}\lambda$, s a hasáb-metszet területe $\mathrm{D}\sigma_0$, úgy $\mathrm{D}\tau = \mathrm{D}\sigma_0 \mathrm{D}\lambda$, és

$$\mathrm{D}I = \mathrm{D}\sigma_0 \int_\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial i} \mathrm{D}\lambda,$$

ahol a λ index a hasáb egy oldal-vonalát jelenti. Azonban, ha a $(\mathrm{D}\lambda)$ vonal-elemnek, mint i irányú vectornak, a végéhez és elejéhez tartozó Φ-érték külömbsége $\mathrm{D}\Phi$, úgy Φ-nek az i irányú deriváltja (XVII) nem más, mint $\mathrm{D}\Phi : \mathrm{D}\lambda$, tehát

$$\mathrm{D}I = \mathrm{D}\sigma_0 \int_\lambda \mathrm{D}\Phi = (\Phi_2 - \Phi_1)\mathrm{D}\sigma_0,$$

ahol Φ_2 a (λ) vonalnak, mint i irányú vectornak, a végéhez, Φ_1 az elejéhez tartozó érték.

Minthogy

$$D\sigma_0 = \cos(i, n_1)D_1\sigma = -\cos(i, n_2)D_2\sigma,$$

így egyszersmind

$$DI = -\Phi_1\cos(i, n_1)D_1\sigma - \Phi_2\cos(i, n_2)D_2\sigma .$$

Az ilyen kifejezések összegeléséből

$$I = -\int_S \Phi\cos(i, n,)D\sigma,$$

azaz

$$\int_T \frac{\partial\Phi}{\partial i}D\tau = -\int_S \Phi\cos(i, n)D\sigma.$$

Igaz, különös módon választottuk meg a tér-elemeket és fölületelemeket. Mivel azonban tetszés szerinti más választásban is mindegyik integralis ugyanazzal az értékkel bír, így általánosan érvényes ez az egyenlet, ha Φ folytonos és az i irányban deriválható függvény, és deriváltja is folytonos T-ben.

2. Akkor is áll ez a tétel, ha egyes pontokban nem folytonos a Φ függvény és deriváltja, de vagy véges, vagy a függvény végtelenségi rendszáma 2-nél, deriváltjáé 3-nál kisebb.

Ennek a fölismerése végett írjunk egymást nem metsző gömbfölületeket igen kis ρ sugárral a különös pontok, mint centrumok, körül. Belső pontok körül teljes gömbfölületeket, a határon lévők körül a határ fölületig terjedőket. Az utóbbi gömbfölületek a T tér határfölületéből bizonyos részeket metszenek ki. A határ-fölület többi részét jelölje S' és az összes gömbfölületeket σ jelölje. Végre a T térnek azt a részét, amely az S' fölület s az összes gömbfölületek közt van, jelölje T'.

A T' tér nem tartalmazván különös helyet, erre vonatkozólag fölírhatjuk a reductiós egyenletet:

$$\int_{T'} \frac{\partial\Phi}{\partial i}D\tau = -\int_{S'} \Phi\cos(i, n)D\sigma - \int_\sigma \Phi\cos(i, n)D\sigma.$$

A három integralist jelölje röviden $I_{T'}$, $I_{S'}$, I_σ. Az előbbi czikk értelmében a ρ lehet oly kicsiny, hogy mihelyt még kisebb, már I_T' és I_S' az egész T-re és egész S-re tartozó integralistól tetszés szerint adott kicsinél kisebbet különbözik. De egyúttal oly kicsiny is lehet a ρ, hogy mihelyt még kisebb, már $|I_\sigma|$ tetszés szerint adott kicsinél kisebb. Erről kell meggyőződnünk.

A függvény-helynek s a legközelebbi különös pontnak a kölcsönös távolát jelölje r. A ψ_0 véges constans, és a μ szám akkora legyen, hogy a T térben mindenütt

$$r^\mu |\Phi| \leqq \psi_0, \quad \mu < 2.$$

Világos, hogy

$$|I_\sigma| \leqq \frac{\psi_0}{\rho^\mu} \int_\sigma D\sigma.$$

Ha továbbá a különös pontok száma N, úgy az itt álló integralis semmi esetre sem nagyobb mint $4\pi N\rho^2$, tehát

$$|I_\sigma| \leqq 4\pi N \psi_0 \rho^{2-\mu}.$$

Minthogy a föltevés szerint $\mu < 2$, így a ρ megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már $|I_\sigma|$ tetszés szerint adott kicsinél kisebb.

3. Akkor is áll a reductiós tétel, ha egyes vonalak pontjaiban nem folytonos a Φ függvény és deriváltja, de vagy véges, vagy a függvény végtelenségi rendszáma 1-nél, a deriváltjáé 2-nél kisebb.

Ennek a fölismerése végett övezzünk körűl igen kis egymást nem metsző fölülettel minden egyes összefüggő különös vonalat, mindegyiket olyannal, amelynek öszszes pontjai ugyanabban a ρ távolságban vannak tőle vagyis legköze- lebbi pontjától. Lehetséges ez törési és elágazási vonal-pontok létezésében is. Amely különös vonalak átdöfik vagy érintik az S fölüeltet, vagy rajta feküsznek, azok övedzője igen kis részt metsz ki az S fölületből. E fölület többi részét jelölje S'. Az övedző fölületek összeségét jelölje σ. A T térnek azt a részét, amelyet S' és σ határol jelölje T'.

Minthogy a T' tér nem tartalmaz különös vonalakat, s legföljebb különös pontokat tartalmaz, amelyekről föltegyük, hogy megfelelnek az előbbi tárgyalás követelményeinek, úgy

$$\int_{T'} \frac{\partial \Phi}{\partial i} D\tau = -\int_{S'} \Phi \cos(i, n) D\sigma - \int_\sigma \Phi \cos(i, n) D\sigma.$$

Ugyan olyan okból, mint az előbbi tárgyalásban, most is csak arról kell meggyőződnünk, hogy ρ lehet oly kicsiny, mikép mihelyt még kisebb, már a σ-ra szóló integralis absolutus értéke tetszés szerint adott kicsinynél kisebb.

Ugyanoly módon definálván a ψ_0 constanst és a μ számot, mint előbb, de azzal a különbséggel, hogy most $\mu < 1$ legyen, most is

$$|I_\sigma| \leqq \frac{\psi_0}{\rho^\mu} \int_\sigma D\sigma.$$

A σ fölületet ρ sugarú körös csőfölületek és ρ sugarú gömbfölületek, utóbbiak a különös vonalak végeinél, törési és elágazási pontjainál, képezik. Ha a különös vonalak hossza összesen λ, és ha a végek, törési és elágazási pontok száma összevéve k, úgy bizonyára

$$\int_\sigma D\sigma < 2\pi\lambda\rho + 4\pi k\rho^2,$$

mert a gömbfölületek soha sem teljesek, és általában a csőfölületek sem teljesek. Igy

$$|I_\sigma| < 2\pi(\lambda + 2k\rho)\psi_0\rho^{1-\mu}.$$

Minthogy a föltevés szerint $\mu < 1$, ennélfogva ρ lehet oly kicsiny, hogy mihelyt még kisebb, már $|I_\sigma|$ tetszés szerint adott kicsinynél kisebb.

4. Ha a Φ függvénynek folytonosság-szakadási fölülete van a T térben, akkor már reductiós egyenletünk nem helyes.

Azonban, ha véges a függvény az ilyen fölületen, és folytonosság-szakadása abban áll, hogy a fölület egyik oldalára más érték-rendszere tartozik, mint a másikra (XVI), ha továbbá a függvény deriváltja vagy véges, vagy elsőnél alacsonyabb rendű végtelen az eféle fölületen, akkor létezik egy más reductiós egyenlet.

Ehhez úgy jutunk el, hogy a T tért fölületekkel oly részekre osztjuk, amelyekben nincs folytonosság-szakadási fölület. Természetesen a részekre osztó fölületek a különös fölületeken feküsznek. Az egyes T_1, T_2.. tér-részekre érvényes a reductiós egyenlet:

$$\int_{T_1} \frac{\partial\Phi}{\partial i} D\tau = -\int_{S_1} \Phi\cos(i, n) D\sigma$$

$$\int_{T_2} \frac{\partial\Phi}{\partial i} D\tau = -\int_{S_2} \Phi\cos(i, n) D\sigma$$

. . . .

Ez az **1.** mintájára következik akkor is, ha a derivált a mondott módon végtelen.

Összeadásukból folyólag

$$\int_T \frac{\partial\Phi}{\partial i} Di = -\sum_k \int_{S_k} \Phi\cos(i, n) D\sigma.$$

De ezt a kifejezést hasznosabb alakra vezethetjük. Az S_k fölületek összeségének egy része a T tér S határ-fölületét képezi, többi része, σ, pedig kettősen fordúl elő, t. i. oly fölület-darabok összessége, amelyek két-két szomszédos tér-osztály határán közös fölület-darabokat képeznek.

Ha tehát σ egyik oldalát (+) másik oldalát (—) oldalnak nevezzük, úgy megfelelő jelzés-mód alkalmazásával:

$$\int_T \frac{\partial\Phi}{\partial i} D\tau = -\int_S \Phi\cos(i, n)D\sigma - \int_\sigma \left[\Phi_+\cos(i, n_+)D\sigma_+ + \Phi_-\cos(i, n_-)D\sigma_-\right].$$

Válaszszuk úgy a $D\sigma_+$ és $D\sigma_-$ fölület-elemeket, hogy kettenként azonosak legyenek. Egyszersmind vegyük tekintetbe, hogy ugyanazon a helyen

$$\cos(i, n_+) + \cos(i, n_-) = 0.$$

Ehhez képest

$$\int_T \frac{\partial\Phi}{\partial i} D\tau = -\int_S \Phi\cos(i, n)D\sigma - \int_\sigma (\Phi_+ - \Phi_-)\cos(i, n_+)D\sigma.$$

Minthogy pedig a σ fölület-rendszer esetleges oly részén, amelyen nincs folytonosság-szakadása a Φ függvénynek, $\Phi_+ - \Phi_- = 0$, úgy a σ kizárólagosan a folytonosság-szakadás fölületeit jelentheti.

Emellett előfordúlhatnak a 2.) és 3.) alatt tárgyalt folytonosság-szakadások, amidőn aztán ez az egyenlet a reductio legáltalánosabb alap-formulája.

Egyszerűség kedveért bizonyos általánosságokban czélszerű ezzel a jelölés-móddal élni:

$$\int_\sigma \Phi_+\cos(i, n_+)D\sigma = \int_{\sigma_+} \Phi\cos(i, n)D\sigma,$$

$$\int_\sigma \Phi_-\cos(i, n_-)D\sigma = \int_{\sigma_-} \Phi\cos(i, n)D\sigma.$$

Akkor aztán

$$\int_T \frac{\partial\Phi}{\partial i} D\tau = -\int_{S+\sigma_+ +\sigma_-} \Phi\cos(i, n)D\sigma.$$

Ha csak $\partial\Phi : \partial i$ szenvedne folytonosság-szakadást a σ fölületeken a fent definiált módon, azonban Φ nem, akkor nyilvánvalóan a közönséges reductio érvényes, mert a σ fölületekre vonatkozó integralis eltűnik.

XXVII. Tér-integralisok részleges reductiója.

1.) Ha a véges kiterjedésű T térben F és P a hely oly függvénye, hogy szorzatuk, FP, az i irányban deriválható folytonos függvény és deriváltja is folytonos, úgy az előbbi czikk értelmében

$$\int_T \frac{\partial(FP)}{\partial i}\mathrm{D}\tau = -\int_S FP\cos(i, n)\mathrm{D}\sigma.$$

Sőt még akkor is érvényes ez az egyenlet, ha FP és deriváltja egyes pontokban és egyes vonalok pontjaiban folytonosság-szakadásos, de vagy véges, vagy FP végtelenségi rendszáma különös pontban kisebb mint kettő, különös vonalon kisebb mint egy, deriváltjának végtelenségi rendszáma pedig különös pontban kisebb mint három, különös vonalon kisebb mint kettő.

Most tegyük föl, hogy ezen fölül a T térben F és P általában (XV) külön deriválhatók i irányban, és az

$$F\frac{\partial P}{\partial i}, \quad P\frac{\partial F}{\partial i}$$

szorzatok egyenként legföljebb oly módokon tanúsítanak folytonosság szakadást, mint az FP szorzat deriváltja. Akkor e két szorzat mindegyikének van tér-integralisa a T térre vonatkozólag, és a két integralis összege

$$\int_T F\frac{\partial P}{\partial i}\mathrm{D}\tau + \int_T P\frac{\partial F}{\partial i}\mathrm{D}\tau \equiv \int_T \left(F\frac{\partial P}{\partial i} + P\frac{\partial F}{\partial i}\right)\mathrm{D}\tau = \int_T \frac{\partial(FP)}{\partial i}\mathrm{D}\tau.$$

Következőleg

$$\int_T P\frac{\partial F}{\partial i}\mathrm{D}\tau = -\int_T F\frac{\partial P}{\partial i}\mathrm{D}\tau - \int_S FP\cos(i, n)\mathrm{D}\sigma.$$

Ha folytonosság-szakadási fölületek, σ, fordúlnának elő, amelyeken az FP szorzat legföljebb olyszerűen tanúsít folytonosság-szakadást, mint az előbbi czikk 4.) részében Φ, és a két deriváltos szorzat olyszerűen, mint ugyanott Φ deriváltja, akkor egészen oly módon következik, mint ugyanott, hogy

$$\int_T P\frac{\partial F}{\partial i}\mathrm{D}\tau = -\int_T F\frac{\partial P}{\partial i}\mathrm{D}\tau - \int_{S+\sigma_+ +\sigma_-} FP\cos(i, n)\mathrm{D}\tau.$$

Itt a baloldali tér-integralis részint fölületi integralissal, részint egy más térfogati integralissal van kifejezve. Ilyképen való előállítását részleges reductiójának nevezzük.

Ez az egyenlet formalisan magában foglalja a teljes reductio egyenletét, amennyiben az által, hogy $P=1$-et írunk, az utóbbiba megy át.

2.) Ha F és Q, F és R oly tulajdonságúak a T térben, mint F és P, és ha emellett az i bármely irány lehet, irjuk egyenletünkben F, P és i helyett rendre F, P és x; F, Q és y; F, R és z. Aztán adjuk össze a három egyenletet.

Rövidség kedveért tévén:

$$\cos(x,\, n)\equiv\alpha,\ \cos(y,\, n)\equiv\beta,\ \cos(z,\, n)\equiv\gamma,$$

úgy

$$\int_T\left(P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial F}+R\frac{\partial F}{\partial z}\right)\mathrm{D}\tau=$$

$$=-\int_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)F.\mathrm{D}\tau-\int_{S+\sigma_{+}+\sigma_{-}}(P\alpha+Q\beta+R\gamma)F.\mathrm{D}\sigma.$$

3.) Ha a $(P,\, Q,\, R)$ vectornak van potentialisa, Φ, a T térben, úgy, ezt a szokásos rövidítést használván:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\equiv\Delta\Phi,$$

a (XVII) czikk értelmében, ahol most az i irányon n irány gondolandó:

$$\int_T\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial z}\right)\mathrm{D}\tau=-\int_T F.\Delta\Phi.\mathrm{D}\tau-\int_{S+\sigma_{+}+\sigma_{-}}\frac{\partial\Phi}{\partial n}F.\mathrm{D}\sigma.$$

4.) Ha Φ és $\partial F:\partial x$, Φ és $\partial F:\partial y$, Φ és $\partial F:\partial z$ oly tulajdonságuak, mint a 2.) részben F és P, F és Q, F és R, tehát oly tulajdonságúak, mint a 3.) részben F és $\partial\Phi:\partial x$, F és $\partial\Phi:\partial y$, F és $\partial\Phi:\partial z$, akkor az iménti egyenletben F és Φ fölcserélhetők. Cselekedjük meg a fölcserélést, aztán az új egyenletet vonjuk ki az eredetiből.

Ily módon a következő egyenlethez jutunk:

$$\int_T(\Phi.\Delta F-F.\Delta\Phi)\mathrm{D}\tau=-\int_{S+\sigma_{+}+\sigma_{-}}\left(\Phi\frac{\partial F}{\partial n}-F\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)\mathrm{D}\sigma.$$

5.) Ha a $(P,\, Q,\, R)$ vectornak vector-potentialisa van a T térben, akkor (XXI.) szerint

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=o,$$

tehát a 2.) részben az egyik tér-integralis eltűnik, és a részleges reductio teljessé válik.

Legyen (U, V, W) a vector-potentialis. Ha l és m tangentialis irányok a $D\sigma$ fölület-elemnél és merőlegesek egymásra úgy, hogy l, m, n oly helyzeti viszonyban vannak, mint rendre a helyhatározó tengelyek: jelöljék L, M, N a vector-potentialisnak az l, m, n irányra tartozó componensét. Akkor (XX, 3b) értelmében

$$\int_T\left[\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial x}+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)\frac{\partial F}{\partial y}+\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial F}{\partial z}\right]\mathrm{D}\tau=$$

$$=-\int_{S+\sigma_{+}+\sigma_{-}}\left(\frac{\partial M}{\partial l}-\frac{\partial L}{\partial m}\right)F\,.\,\mathrm{D}\sigma.$$

6.) Ha (X, Y, Z) vectornak T térben van vector-potentialisa (U, V, W), és, ha U' és W, U' és V, V' és U, V' és W, W' és V, W' és U páronként oly tulajdonságúak, mint 1.)-ben F és P és emellett az i bármely irány lehet, úgy vessünk ügyet erre a tér-integralisra:

$$\int_T(U'X+V'Y+W'Z)\mathrm{D}\tau.$$

Behelyettesítvén ebbe a következőket:

$$X\equiv\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z},\qquad Y\equiv\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x},\qquad Z\equiv\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y},$$

ez által hat tagra szakad az integrálandó függvény. Végezzünk mindegyik tagra vonatkozólag részleges reductiót. Ha az (U', V', W') vectorral vector-potentialis módjára meghatározott vector (X', Y', Z'), azaz, ha

$$X'\equiv\frac{\partial W'}{\partial y}-\frac{\partial V'}{\partial z},\qquad Y'\equiv\frac{\partial U'}{\partial z}-\frac{\partial W'}{\partial z},\qquad Z'\equiv\frac{\partial V'}{\partial x}-\frac{\partial U'}{\partial y},$$

akkor a reductiók folytán

$$\int_T(U'X+V'Y+W'Z)\mathrm{D}\tau=\int_T(UX'+VY'+WZ')\mathrm{D}\tau+$$

$$+\int_{S+\sigma_{+}+\sigma_{-}}[(W'\beta-V'\gamma)U+(U'\gamma-W'\alpha)V+(V'\alpha-U'\beta)W]\mathrm{D}\sigma.$$

7.) Abban a különös esetben, hogy az (U', V', W') vectornak van a T térben potentialisa, F, az egyik tér-integralis eltűnik, mert

$$X'=o,\qquad Y'=o,\qquad Z'=o,$$

s a reductiós egyenlet, részletesen kiírva, így jelenik meg:

$$\int_T\left[\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial x}+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)\frac{\partial F}{\partial y}+\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial F}{\partial z}\right]D\tau=$$

$$=\int_{S+\sigma_++\sigma_-}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial z}\beta-\frac{\partial F}{\partial y}\gamma\right)U+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\gamma-\frac{\partial F}{\partial z}\alpha\right)V+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\alpha-\frac{\partial F}{\partial x}\beta\right)W\right]D\sigma$$

8.) Akármily functionalis kifejezés tér-integralisán végezzünk reductiot, ennek az alapját mindig a (XXVI.) czikk végén jegyzett egyenlet képezi: bármely reductiós egyenlet térfogati része mindig oly tagokra vezethető, aminő ennek az egyenletnek a baloldala; csakhogy a különböző tagokba különböző függvény és irány tartozhatik.

Azonban akár hány ilyetén tagot tartalmazzon a térfogati rész, ha az egyes függvények általában mindenkép deriválhatók a kijelölt térben, úgy mindig három ilyetén tagból állítható össze, amelyekben az irányokat a coordinata-tengelyek irányai képezik. Mert azoknak a függvényeknek bármely irányú deriváltja a coordinata deriváltakkal fejezhető ki, (XVII).

Tényileg, legyen

$$I=\int_T\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial i_1}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial i_2}+\cdots\right)D\tau.$$

Ha az i irány cosinusai $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sít., úgy

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial i_1}=\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\alpha_1+\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\beta_1+\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\gamma_1,\quad \text{sít.}$$

Ha tehát írjuk:

$$\begin{aligned}\Phi_1\alpha_1+\Phi_2\alpha_2+\ldots&\equiv f\\ \Phi_1\beta_1+\Phi_2\beta_2+\ldots&\equiv g\\ \Phi_1\gamma_1+\Phi_2\gamma_2+\ldots&\equiv h,\end{aligned}$$

akkor

$$I=\int_T\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)D\tau.$$

Mithogy pedig a reductio után

$$I = \int_{S+\sigma_+ + \sigma_-} [\Phi_1 \cos(i_1, n) + \Phi_2 \cos(i_2, n) + \ldots] D\sigma$$

és, minthogy

$$\cos(i, n) = \alpha_1\alpha + \beta_1\beta + \gamma_1\gamma, \text{ stb.},$$

ennél fogva

$$\int_T \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) D\tau = \int_{S+\sigma_+ + \sigma_-} (f\alpha + g\beta + h\gamma) D\sigma,$$

akár teljesíti egyenként f, g, h előforduló deriváltja is, u. m. $\partial f : \partial x$, $\partial g : \partial y$, $\partial h : \partial z$ a (XXVI)-ban kiszabott föltételeket, akár nem, hacsak Φ_1, $\partial \Phi_1 : \partial i_1$ stb. teljesítik azokat.

XXVIII Tér-integrálisok Gauss-Green- és Kirchhoff-féle reductiója.

Tegyük föl, hogy a hely F, G, H függvényei a következő tulajdonságokkal birnak a T térben: általában folytonosak; amely pontban nem folytonosak, abban vagy végesek, vagy végtelenségi rendjük kisebb mint 2; amely vonal pontjaiban nem folytonosak, azon a vonalon vagy végesek, vagy végtelenségi rendjük kisebb mint 1; amely fölület pontjaiban nem folytonosak, azon a fölületen mindkét oldalról határozott végesek; rendre x, y, z szerint általában deriválhatók; deriváltjuk általában folytonos; amely pontban nem az, abban vagy véges, vagy végtelenségi rendje kisebb mint 3; amely vonal pontjaiban nem folytonos, azon a vonalon vagy véges, vagy végtelenségi rendje kisebb mint 2; amely fölület pontjaiban nem folytonos, azon a fölületen vagy véges, vagy végtelenségi rendje kisebb mint 1.

E föltételek alatt (XXVI)

$$\int_T \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) D\tau = -\int_{S+\sigma_+ + \sigma_-} (F\alpha + G\beta + H\gamma) D\sigma).$$

Ezek a föltételek többet tartalmaznak, mint amennyi abhoz szükséges, hogy az integralis-egyenlet helyes legyen. Valóban, e föltételek egész összesége csak általában véve szükséges: a függvények bizonyos alakrendszere kielégíti reductiós egyenletünket, jóllehet némely előirt föltételt nem teljesít.

A függvények bizonyos alak-rendszerének pedig más reductiós egyenlet felel meg amiatt, hogy némely előirt fötételt nem teljesít. Ennek az alak-rendszernek egy specialis fajára vonatkozik egy Gauss-tól egy Greentől és egy Kirchhofftól szerzett reductio, amelyek mindegyike alap-vető jelentőséggel bir az alkalmazásokban.

1.) Tegyük föl, hogy az (F, G, H) vector a T tér belsejében lévő a, b, c pontban másodrendű végtelen, a $(\partial F:\partial x, \partial F:\partial y, \partial F:\partial z)$ vector pedig ugyanott harmadrendű végtelen, de a

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}$$

összeg vagy véges ebben az a, b, c pontban is, vagy harmadiknál alacsonyabb rendűen végtelen, és az a, b, c pont nem pontja különös vonalnak vagy különös fölületnek, azaz körül zárható oly fölülettel, amelyen belűl az F, G, H függvénynek és a $\partial F:\partial x$, $\partial G:\partial y$, $\partial H:\partial z$ függvénynek nincs más különös helye, mint az a, b, c pont. Ilyen fölületet jelöljön a következőkben S és a körülfogta tért jelölje majd T, mert a tér többi részével nem kell törődnünk.

Ha az a, b, c különös pont nem léteznék ebben a T térben, akkor

$$\int_T\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}\right)\mathrm{D}\tau=-\int_S(F\alpha+G\beta+H\gamma)\mathrm{D}\sigma$$

volna. Az a, b, c pont miatt általában nem érvényes ez az egyenlet, jóllehet a két integralis létezik. Általában nem érvényes, mert (XXVI) értelmében olyan három egyenletet föltételez, amelyek rendszere ezuttal nem létezik.

Azonban zárjuk körül az a, b, c pontot oly S' fölülettel, amely egészen a T tér belsejében van. Az S' és S fölület közt foglalt $T-T'$ térre alkalmazhatjuk a reductiót:

$$\int_{T-T'}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}\right)\mathrm{D}\tau=-\int_S(F\alpha+G\beta+H\gamma)\mathrm{D}\sigma-\int_{S'}(F\alpha+G\beta+H\gamma)\mathrm{D}\sigma.$$

Ha most az S' fölületet úgy változtatjuk, hogy a belülötte foglalt tér, T', végtelenül kisebbedjék, a $T-T'$ térre szóló integralis értéke végtelenül közeledik a T térre szóló integralis értékéhez, míg az S felületre szóló integralis változatlan marad. Következőleg az S' fölületre szóló integralis szükségképen határozott véges értékbe convergál, amely független attól, hogy milyen alakzaton vezetjük át az S' fölületet, — az a, b, c pontba, vagy ezen a ponton átfekvő vonalba, vagy fölület-darabba terelvén pontjait avégből, hogy tértartalmát, T', elenyésztessük.

Ezek után írjuk:

$$F=\frac{u}{r^2},\quad G=\frac{v}{r^2},\quad H=\frac{w}{r^2},$$

ahol r az x, y, z függvény-helynek az a, b, c ponttól mért távolsága

$$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2,$$

u, v, w pedig az x, y, z coordinatáknak, az r távolságnak, és az

$$\frac{x-a}{r}\equiv\lambda, \qquad \frac{y-b}{r}\equiv\mu, \qquad \frac{z-c}{r}\equiv\nu$$

irány-cosinusoknak, mint független argumentumoknak, deriválható folytonos függvényei legyenek a T térben, és e térben a hét argumentum mindegyikére képezett partialis deriváltjuk is folytonos legyen.

Minthogy a változó S' fölület megválasztása közömbös a végső eredményre nézve, válaszszuk meg ezt kisebbedő gömbfölületnek a, b, c ponttal, mint centrummal, és ρ sugárral:

$$\int_{S'}(F\alpha+G\beta+H\gamma)\mathrm{D}\sigma\equiv\int_{S'}\frac{u\alpha+v\beta+w\gamma}{\rho^2}\mathrm{D}\sigma.$$

Ebben az integralisban $\lambda=\alpha$ stb. Ha tehát általánosan

$$u\equiv u(x,\, y,\, z,\, r,\, \lambda,\, \mu,\, \nu), \text{ stb.},$$

úgy ebben az integralisban

$$u\equiv u(x,\, y,\, z,\, \rho,\, \alpha,\, \beta,\, \gamma), \text{ stb.}$$

és, ha írjuk:

$$u(a,\, b,\, c,\, o,\, \alpha,\, \beta,\, \gamma)\equiv u_0 \text{ stb.}$$

akkor

$$\lim_{T'\to o}\int_{S'}(F\alpha+G\beta+H\gamma)\mathrm{D}\sigma=\lim_{\rho\to o}\int_{S'}\frac{u_0\alpha+v_0\beta+w_0\gamma}{\rho^2}\mathrm{D}\sigma.$$

Gondoljuk most az a, b, c pont, mint centrum, körül a sugáregységgel képezett (σ_0) gömbfölületet. A $(\mathrm{D}\sigma)$ fölület-elem centralis vetülete ezen a fölületen legyen $(\mathrm{D}\sigma_0)$. Akkor

$$\mathrm{D}\sigma=\rho^2\mathrm{D}\sigma_0.$$

Eszerint

$$\lim_{T'\to o}\int_{S'}(F\alpha+G\beta+H\gamma)\mathrm{D}\sigma=\int_{\sigma_0}(u_0\alpha+v_0\beta+w_0\gamma)\mathrm{D}\sigma_0.$$

Következésképen

$$\int_T\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{w}{r^2}\right)\right]\mathrm{D}\tau=$$

$$=-\int_S\frac{u\alpha+v\beta+w\gamma}{r^2}\mathrm{D}\sigma-\int_{\sigma_0}(u_0\alpha+v_0\beta+w_0\gamma)\mathrm{D}\sigma_0,$$

hacsak a térfogatilag integrálandó kifejezés vagy véges az a, b, c helyen is, vagy végtelenségi rendje kisebb mint három.

2.) Ha egyenletünkben a σ_0 gömbfölületre szóló integralis$=o$, akkor végeredményben közönséges reductióval van dolgunk.

Erre való példaképen tegyük föl, hogy az egész T térben

$$u=R\mu-Q\nu,\quad v=P\nu-R\lambda,\quad w=Q\lambda-P\mu,$$

ahol P, Q, R ugyanazokkal a tulajdonságokkal bírjanak, amelyeket az u, v, w függvényekre róttunk ki, azaz x, y, z, r, λ, μ, ν deriválható folytonos függvényei legyenek, és a hét argumentum mindegyike szerint képezett partialis deriváltjuk is folytonos legyen a T térben. Most

$$u\lambda+v\mu+w\nu=o,$$

és mivel a σ_0 gömbfölületre szóló integralisban

$$u=u_0=R_0\beta-Q_0\gamma,\ \text{stb.}$$

úgy egyszersmind

$$u_0\alpha+v_0\beta+w_0\gamma=o,$$

tehát beköszönt a közönséges reductio. Csakhogy a térfogatilag integrálandó kifejezésnek vagy végesnek kell lennie az a, b, c helyen is, vagy 3-nál alacsonyabb rendűen végtelennek.

Megállapítandók e követelés föltételét, vegyük számba, hogy

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\lambda,\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\mu,\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\nu,$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{1-\lambda^2}{r},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial y}=-\frac{\lambda\mu}{r},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial z}=-\frac{\lambda\nu}{r},$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=-\frac{\mu\lambda}{r},\quad \frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{1-\mu^2}{r},\quad \frac{\partial\mu}{\partial z}=-\frac{\mu\nu}{r},$$

$$\frac{\partial\nu}{\partial x}=-\frac{\nu\lambda}{r},\quad \frac{\partial\nu}{\partial y}=-\frac{\nu\mu}{r},\quad \frac{\partial\nu}{\partial z}=\frac{1-\nu^2}{r}.$$

A P, Q, R függvényeknek, mint a hét argumentum függvényének a partialis deriválását δ jegygyel jelöljük, mihez képest

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\delta P}{\delta x}+\frac{\delta P}{\delta r}\lambda+\frac{\delta P}{\delta\lambda}\frac{1-\lambda^2}{r}-\frac{\delta P}{\delta\mu}\frac{\lambda\mu}{r}-\frac{\delta P}{\delta\nu}\frac{\lambda\nu}{r},\quad \text{stb.}$$

A tér-integralisban kijelentett deriválások és az összeadás elvégzése után oly kifejezéshez jutunk, amelynek nagy része identice kiesik az összegből, és marad:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{w}{r^2}\right)=$$

$$=-\left[\left(\frac{\delta R}{\delta y}-\frac{\delta Q}{\delta z}\right)\lambda+\left(\frac{\delta P}{\delta z}-\frac{\delta R}{\delta x}\right)\mu+\left(\frac{\delta Q}{\delta x}-\frac{\delta P}{\delta y}\right)\nu\right]\frac{1}{r^2}$$

$$-\left[\left(\frac{\delta R}{\delta\mu}-\frac{\delta Q}{\delta\nu}\right)\lambda+\left(\frac{\delta P}{\delta\nu}-\frac{\delta R}{\delta\lambda}\right)\mu+\left(\frac{\delta Q}{\delta\lambda}-\frac{\delta P}{\delta\mu}\right)\nu\right]\frac{1}{r^3}.$$

Igy, ha

$$\left(\frac{\delta R}{\delta\mu}-\frac{\delta Q}{\delta\nu}\right)\lambda+\left(\frac{\delta P}{\delta\nu}-\frac{\delta R}{\delta\lambda}\right)\mu+\left(\frac{\delta Q}{\delta\mu}-\frac{\delta P}{\delta\mu}\right)\nu$$

legalább az a, b, c helyen algebrailag eltűnik, akkor példánk beválik. Ez annak a föltétele, mert jelen kifejezésünkben $1:r^2$ factora véges az a, b, c pontban is, jóllehet nem folytonos e helyen amiatt, hogy a λ, μ, ν iránycosinusokat tartalmazza. Szoritkozzunk arra az esetre, hogy mindenütt identice eltűnik ez a kifejezés, még pedig úgy, hogy

$$P=\frac{\delta G}{\delta\mu},\qquad Q=\frac{\delta G}{\delta\mu},\qquad R=\frac{\delta G}{\delta\nu}.$$

Ezek beiktatásával a következő reductióhoz jutunk:

$$\int_T\left[\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta G}{\delta\nu}\mu-\frac{\delta G}{\delta\mu}\nu\right)+\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta G}{\delta\lambda}\nu-\frac{\delta G}{\delta\nu}\lambda\right)+\frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta G}{\delta\mu}\lambda-\frac{\delta G}{\delta\lambda}\mu\right)\right]\frac{D\tau}{r^2}$$

$$=-\int_S\left[\left(\frac{\delta G}{\delta\nu}\mu-\frac{\delta G}{\delta\mu}\nu\right)\alpha+\left(\frac{\delta G}{\delta\lambda}\nu-\frac{\delta G}{\delta\nu}\lambda\right)\beta+\left(\frac{\delta G}{\delta\mu}\lambda-\frac{\delta G}{\delta\lambda}\mu\right)\gamma\right]\frac{D\sigma}{r^2}.$$

3.) Abban a még különösebb esetben, hogy

$$G\equiv\Phi(x,\,y,\,z,\,r)\,f\,(\lambda,\,\mu,\,\nu),$$

reductiónk ezt az alakot ölti:

$$\int_T\left[\left(\frac{\delta f}{\delta\nu}\mu+\frac{\delta f}{\delta\mu}\nu\right)\frac{\delta\Phi}{\delta x}+\left(\frac{\delta f}{\delta\lambda}\nu-\frac{\delta f}{\delta\nu}\lambda\right)\frac{\delta\Phi}{\delta y}+\left(\frac{\delta f}{\delta\mu}\lambda+\frac{\delta f}{\delta\lambda}\mu\right)\frac{\delta\Phi}{\delta z}\right]\frac{D\tau}{r^2}$$

$$=-\int_S\left[\left(\frac{\delta f}{\delta\nu}\mu-\frac{\delta f}{\delta\mu}\nu\right)\alpha+\left(\frac{\delta f}{\delta\lambda}\nu-\frac{\delta f}{\delta\nu}\lambda\right)\beta+\left(\frac{\delta f}{\delta\mu}\lambda-\frac{\delta f}{\delta\lambda}\mu\right)\gamma\right]\frac{\Phi}{r^2}D\sigma.$$

4.) Ha az 1.)-ben szerzett egyenletből nem tűnik el az az integralis, amely a σ_0 gömbfölületre terjed ki, akkor a raductio új alakjával van dolgunk.

Példaképen tegyük föl, hogy az egész T térben

$$u=\psi\lambda, \quad v=\psi\mu, \quad w=\psi\nu,$$

ahol a ψ ugyanoly függvény legyen, aminőkül az u, v, w függvényeket definiáltuk: az x, y, z, r, λ, μ, ν hét argumentum deriválható folytonos függvénye, és mindegyik argumentumra képzett partialis deriváltja is folytonos a T térben mindenütt.

Mivel a σ_0 fölületre szóló integralisban

$$u=u_0=\psi_0\alpha, \text{ stb},$$

így

$$\int_{\sigma_0}(u_0\alpha+v_0\beta+w_0\gamma)D\sigma=\int_{\sigma_0}\psi_0 D\sigma,$$

ahol természetesen

$$\psi_0=\psi(a, b, c, 0, \alpha, \beta, \gamma).$$

Azomban kell, hogy a térfogatilag integrálandó kifejezés vagy véges legyen az a, b, c helyen is, vagy végtelenségi rendszáma 3-nál kisebb legyen. Ezt a föltételt egészen általánosan kielégítik u, v, w az itt választott alakjukkal. Amíg a ψ függvényt csak annyiban deriváljuk partiálisan a coordinatákra, amennyiben explicite és az r távolság révén tartalmazza azokat, ennek úgy adjunk kifejezést, hogy a felső ∂ jegyhez hiány-jelet írjunk. Mihez képest, a δ jegy előbbi jelentménye szerint

$$\frac{\partial'\psi}{\partial x}=\frac{\delta\psi}{\delta x}+\frac{\delta\psi}{\delta r}\lambda, \quad \text{stb.}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial'\psi}{\partial x}+\frac{\delta\psi}{\delta\lambda}\frac{1-\lambda^2}{r}-\frac{\delta\psi}{\delta\mu}\frac{\lambda\mu}{r}-\frac{\delta\psi}{\delta\nu}\frac{\lambda\nu}{r}, \quad \text{stb.}$$

Szem előtt tartva r, λ, μ, ν deriváltjainak a 2.) czikk-részben följegyzett kifejezéseit, könnyű szerrel találjuk, hogy jelenlegi példánkban

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{w}{r^2}\right)=\left(\frac{\partial'\psi}{\partial x}\lambda+\frac{\partial'\psi}{\partial y}\mu+\frac{\partial'\psi}{\partial z}\nu\right)\frac{1}{r^2},$$

már pedig $\partial'\psi:\partial x$ stb. végesek az a, b, c helyen is, bár, amennyiben tartalmazzák az irány-cosinusokat mint a hét argumentum függvényei, nem folytonosak ezen a helyen.

Következőleg

$$\int_T\left(\frac{\partial'\psi}{\partial x}\lambda+\frac{\partial'\psi}{\partial y}\mu+\frac{\partial'\psi}{\partial z}\nu\right)\frac{D\tau}{r^2}=-\int_S\frac{\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma}{r^2}\psi D\sigma-\int_{\sigma_0}\psi_0 D\sigma.$$

Mivel pedig

$$\frac{\lambda}{r^2} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \text{stb.}$$

így egyszersmind

$$\int_T \left(\frac{\partial'\psi}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}+\frac{\partial'\psi}{\partial y}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial'\psi}{\partial z}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)D\tau = -\int_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\psi D\sigma + \int_{\sigma_0} \psi_0 D\sigma_0.$$

Természetesen akkor is érvényes ez az egyenlet, ha a T térben az a, b, c ponton kivűl oly különös helyek, pontok, vonalak, fölületek vannak, amelyeket megenged a közönséges reductio.

5.) Legyen, hogy $\partial'\psi:\partial x$, stb. szintén deriválható folytonos függvényei a hét argumentumnak, és mindenik argumentumra képezett partialis deriváltjuk folytonos a T térben. Akkor az itteni tér-integralison az $1:r$ függvényre vonatkozólag közönséges részleges reductiót végezhetünk, mert az

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial'\psi}{\partial x}, \quad \text{stb.}$$

kifejezések harmadiknál alacsonyabb rendűen, sőt csak elsőrendűen válnak az a, b, c pontban végtelenné, és következőleg $1:r$ és $\partial'\psi:\partial x$, $1:r$ és $\partial'\psi:\partial y$, $1:r$ és $\partial'\psi:\partial z$ teljesítik azokat a föltételeket, amelyek a (XXVII) czikkben az F és P függvényekre kiszabvák. E czikk 2.) részében foglalt mintára megtévén a reductiót, találjuk, hogy

$$\int_T \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial'\psi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial'\psi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial'\psi}{\partial z}\right)\frac{D\tau}{r} = \int_S \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\psi - \frac{1}{r}\frac{\partial'\psi}{\partial n}\right)D\sigma - \int_{\sigma_0} \psi_0 D\sigma_0,$$

ahol $\partial'\psi:\partial n$ azt a normalis irányú deriváltat jelenti, amelynek a képzése a coordinatákra mint explicite és mint az r távolság révén előforduló argumentumokra szorítkozik.

Természetesen akkor is érvényes ez az egyenlet, ha a T térben az a, b, c ponton kivül oly különös helyek, pontok, vonalak, fölületek vannak, amelyeket a közönséges reductiók megengednek.

6.) Abban a különösebb esetben, hogy

$$\psi = \Phi(x, y, z, r) \,.\, f(\lambda, \mu, \nu),$$

a 4.) alatti czikkely-részből

$$\int\limits_T \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) f\mathrm{D}\tau = -\int\limits_S \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\Phi f\mathrm{D}\sigma + \Phi_0\int\limits_{\sigma_0} f\mathrm{D}\sigma_0\,;$$

az 5) alattiból pedig, az elején kirótt további föltétel alatt:

$$\int\limits_T \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}f\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}f\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}f\right)\right]\frac{\mathrm{D}\tau}{r} =$$

$$= \int\limits_S \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\Phi - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right) f\mathrm{D}\sigma - \Phi_0\int\limits_{\sigma_0} f\mathrm{D}\sigma_0.$$

Az első egyenletben Φ és f deriválható folytonosak a maguk négy, illetőleg három argumentuma szerint, és mindegyik partialis deriváltjuk is folytonos T-ben. A második egyenletben ezen fölül még egyszer deriválhatók argumentumaik szerint és második partialis deriváltjaik is folytonosak T-ben. Továbbá

$$\Phi_0 = \Phi(a,\ b,\ c,\ o).$$

Azonban akkor is érvényesek ezek az egyenletek, ha oly különös pontok, vonalak, fölületek fordulnak elő a T-ben, az a, b, c ponton kivűl, amelyeket a közönséges reductiók megengednek.

7.) Most még különösebb esetre térve át, tegyük $f=1$. A Φ függvény az x, y, z és r argumentumok deriválható folytonos függvényét jelentvén T-ben, amelynek a négy partialis deriváltja is folytonos ebben a térben:

$$\int\limits_T \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)\mathrm{D}\tau = -\int\limits_S \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\Phi\mathrm{D}\sigma + 4\pi\Phi(a,\ b,\ c,\ o).$$

Ha pedig Φ négy partialis deriváltja is deriválható mind a négy argumentum szerint, és második partialis deriváltjai is folytonosak T-ben:

$$\int\limits_S \frac{\Delta\Phi}{r}\mathrm{D}\tau = \int\limits_T \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\Phi - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)\mathrm{D}\sigma - 4\pi\Phi(a,\ b,\ c,\ o).$$

Akkor is érvényes egyenletek, ha oly különös helyek vannak a T térben az a, b, c ponton kivül, amelyeket a közönséges reductiók megengednek.

Ezeknek a reductióknak az elsejét nevezzük Gauss-féle reductióknak, másodikát Green-féle reductiónak. A σ_0 gömbfölület közbenjárásával egyenesen levezethetők az előbbi czikk 3.) és 4.) részében fölállított egyenletekből, amely egyenletek tartalmát GREEN tantételének szokás nevezni.

8.) Most a GREEN-féle reductióból egy újat szármatatunk, s ezt nevezzük KIRCHHOFF-félének. Minthogy

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\delta\Phi}{\delta x}+\frac{\partial\Phi}{\partial r}\lambda,\ \text{stb.}$$

úgy

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}+2\frac{\delta^2\Phi}{\delta x\delta r}\lambda+\frac{\delta^2\Phi}{\delta r^2}\lambda^2+\frac{\delta\Phi}{\delta r}\,\frac{1-\lambda^2}{r}=\frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}-\frac{\delta^2\Phi}{\delta r^2}\lambda^2+$$

$$+2\left(\frac{\delta^2\Phi}{\delta x\delta r}\lambda+\frac{\delta^2\Phi}{\delta r^2}\lambda^2+\frac{\delta\Phi}{\delta r}\,\frac{1-\lambda^2}{2r}\right),\quad \text{stb.}$$

Következőleg

$$\Delta\Phi=\frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\Phi}{\delta y^2}+\frac{\delta^2\Phi}{\delta z^2}-\frac{\delta^2\Phi}{\delta r^2}+2\left(\frac{\delta^2\Phi}{\delta x\delta r}\lambda+\frac{\delta^2\Phi}{\delta y\delta r}\mu+\frac{\delta^2\Phi}{\delta z\delta r}\nu+\frac{\delta^2\Phi}{\delta r^2}+\frac{\delta\Phi}{\delta r}\,\frac{1}{r}\right)=$$

$$=\frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\Phi}{\delta y^2}+\frac{\delta^2\Phi}{\delta z^2}-\frac{\delta^2\Phi}{\delta r^2}+\frac{2}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\delta\Phi}{\delta r}\right).\lambda+\frac{\partial}{\partial y}\left(r\frac{\delta\Phi}{\delta r}\right).\mu+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\delta\Phi}{\delta r}\right).\nu\right]$$

Helyettesítsük be $\Delta\Phi$ e kifejezését a 7.) czikk-részben a GREEN-féle egyenletbe, azután a tér-integralis második részén végezzünk részleges reductiót. Találjuk:

$$\int_T\left(\frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\Phi}{\delta y^2}+\frac{\delta^2\Phi}{\delta z^2}-\frac{\delta^2\Phi}{\delta r^2}\right)\frac{D\tau}{r}=$$

$$=\int_S\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\Phi-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n}-2r\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\frac{\delta\Phi}{\delta r}\right)D\sigma-4\pi\Phi(a,b,c,o).$$

Azomban, ha az n irányú deriválást, amennyiben az r argumentumra nem terjed ki, $\eth$ jegygyel tűntetjük föl, úgy

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n}=\frac{1}{r}\frac{\delta\Phi}{\delta n}+\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\delta\Phi}{\delta r}=\frac{1}{r}\frac{\delta\Phi}{\eth n}-r\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\frac{\delta\Phi}{\eth r},$$

minek következtében így is írhatjuk reductiós egyenletünket:

$$\int_T\left(\frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\Phi}{\delta y^2}+\frac{\delta^2\Phi}{\delta z^2}-\frac{\delta^2\Phi}{\delta r^2}\right)\frac{D\tau}{r}=$$

$$=\int_S\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\left(\Phi-r\frac{\delta\Phi}{\delta r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\delta\Phi}{\eth n}\right]D\sigma-4\pi\Phi(a,b,c,o).$$

XXIX. Fölületi integralisok reductiója.

1.) Tegyük föl, hogy U, V, W legalább is egyszer deriválható folytonos függvényei a coordinatáknak és partialis deriváltjaik is folytonosak a T térben. Tegyük föl továbbá, hogy F legalább is kétszer deriválható folytonos függvénye a coordinatáknak és második partialis deriváltjai is folytonosak a T térben. Akkor (XXVII, 7)-ből folyólag

$$\int_T \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial x}+.+.\right]\mathrm{D}\tau=\int_S \left[\left(\frac{\partial F}{\partial z}\beta-\frac{\partial F}{\partial y}\gamma\right)U+.+.\right]\mathrm{D}\sigma,$$

ahol S a határfölület, α, β, γ pedig a $(\mathrm{D}\sigma)$ fölület-elem befelé mutató normalisának irány-cosinusai.

Most a T téren végtelen vékony térközt értsünk, amelyet

$$F(x, y, z)=p=\text{const.}$$

$$F(x, y, z)=p+\delta p=\text{const.}$$

fölületek és egy ezekhez orthogonalis fölület határolnak. Ha azt a két fölület-darabot, amelyet az orthogonalis fölület a két másik fölületből kivág, σ és σ' jelöli, azt a végtelen vékony szalagot pedig, amelyet ezek a fölületek az orthogonalis fölületből kivágnak, σ_0 jelöli, úgy $S=\sigma+\sigma'+\sigma_0$. Azonban a σ és σ' fölületen

$$\alpha:\beta:\gamma=\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial y}:\frac{\partial F}{\partial z},$$

tehát a fölületi integralisnak a σ és σ' fölület-darabra vonatkozó része eltűnik, és így

$$\int_T \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial x}+.+.\right]\mathrm{D}\tau=\int_{\sigma_0} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial z}\beta_0-\frac{\partial F}{\partial y}\gamma_0\right)U+.+.\right]\mathrm{D}\sigma.$$

A $D\tau$ tér-elemeket válaszszuk meg akkép, hogy a végtelen vékony T térköz teljes merőleges átmetszeti elemei legyenek, úgy, hogy, ha x, y, z helyen e térköz vastagsága δn és a σ fölület egy eleme $\mathrm{D}\sigma$, akkor

$$\mathrm{D}\tau=\delta n\,.\,\mathrm{D}\sigma.$$

A $D\sigma_0$ fölület-elemeket pedig válaszszuk meg akkép, hogy a végtelen keskeny σ_0 szalag teljes merőleges átmetszeti elemei legyenek, úgy, hogy, ha a szalag x, y, z helyénél a σ fölület-darab határ-vonalának egy hossz-eleme Ds, akkor

$$\mathrm{D}\sigma_0=\delta n\,.\,\mathrm{D}s.$$

Ámde irván

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2=N^2,$$

a (XIX) értelmében

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\pm N\alpha,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\pm N\beta,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=\pm N\gamma,$$

és egyszersmind

$$\delta n=\pm\delta p:N.$$

Behelyettesítvén mindezt integralis egyenletünkbe, és tekintetbe vévén, hogy δp constans, találjuk:

$$\int_\sigma\left[\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)\alpha+.+.\right]\mathrm{D}\sigma=\int_s[(\gamma\beta_0-\beta\gamma_0)U+.+.]\mathrm{D}s$$

ahol s jelenti a σ fölület-darab határvonalát. A σ fölülethez tangentiális, a Ds vonal-elemre merőleges és a σ fölület belsejének mutató iránynak a cosinusai az $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$; α, β, γ pedig mindenütt a σ fölület normalisának irány-cosinusai. Igy az $(\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0)$ és $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ irány és a (Ds) vonal elem merőlegesek egymásra. Legyen, hogy a (Ds) vonal-elemnek azt az irányt tulajdonítjuk, a melylyel az $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ és $(\alpha_0\ \beta_0\ \gamma_0)$ iránynak a tengelye bír (VIII.), és $l,\ m,\ n$ legyenek az irány-cosinusai.

Akkor (VIII.):

$$\gamma\beta_0-\beta\gamma_0=l,\ \text{stb.},$$

tehát

$$\int_\sigma\left[\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial y}\alpha+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)\beta+\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\gamma\right]\mathrm{D}\sigma=$$

$$=\int_s(Ul+Vm+Wn)\mathrm{D}s.$$

Aki a Ds vonal-elemnél lábtól fejnek az $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ fölületi normalis irányába helyezkedik és a fölület belseje felé fordul, annak a jobbja felé mutat az $(l,\ m,\ n)$ irány.

A levezetés értelmében $U,\ V,\ W$ a σ fölület közelében deriválható folytonos függvénye a coordinatáknak, s partialis deriváltjaik is folytonosak. A σ fölület pedig oly egyenlettel fejezhető ki, amelyben a hely függvénye kétszer deriválható a coordinatákra és partialis deriváltjai is folytonosak a fölület közelében.

Levezetett egyenletünkben fölületi integralis vonalasra van reducálva: STOKES-féle reductio.

Vegyük észre, hogy, ha ξ, η tangentialis irányok és az (α, β, γ) normalissal oly helyzeti viszonyban vannak, mint a milyenben az x, y, z irány van egymással, ha továbbá (U, V, W) vector értéke a ξ irányon Ξ és az η irányon H, akkor (XX, $3b$)

$$\int_\sigma \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} - \frac{\partial \Xi}{\partial \eta}\right) \mathrm{D}\sigma = \int_s (Ul + Vm + Wn) \mathrm{D}s.$$

2.) Akkor is érvényes az egyenlet, ha az U, V, W függvények és partialis deriváltjaik a σ fölület egyes pontjaiban nem folytonosak, de vagy végesek, vagy a függvények végtelenségi rendje 1-nél, deriváltjaik végtelenségi rendje 2-nél kisebb.

Ugyanis kerítsük be az ily pontokat igen kis vonalakkal, amelyek mindegyikének minden pontja egyenlő ρ távolságban legyen az illető különös ponttól. A belső pontokat igen kis zárt vonalakkal, a határvonalon lévőket a határ-vonalig terjedő igen kis vonalakkal kerítsük be. Utóbbiak az s határ-vonalból igen kis részeket metszenek ki. Az s vonal többi részét jelölje s', és a σ fölületnek azt a részét, amely, az s' vonal-rész meg a bekerítő s'' vonalak közt terűl el, jelőlje σ. Erre a σ' fölület-részre alkalmazható a reductio:

$$\int_{\sigma'} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)\alpha + . + .\right] \mathrm{D}\sigma =$$

$$= \int_{s'} (Ul + Vm + Wn)\mathrm{D}s + \int_{s''} (Ul + Vm + Wn)\mathrm{D}s.$$

Ha az (U, V, W) vector nagysága R, és az s'' vonalakra szóló integralist I'' jelöli, úgy

$$|I''| \leqq \int_{s''} R\mathrm{D}s.$$

Legyen most, hogy R végtelenségi rendszáma sehol sem nagyobb, mint μ. Akkor létezik akkora véges constans, Q_0, hogy mindenütt

$$R < \frac{Q_0}{\rho^\mu},$$

és következőleg

$$|I''| < \frac{Q_0}{\rho^\mu} \int_{s''} \mathrm{D}s = Q_0 \frac{s''}{\rho^\mu}.$$

De bizonyosan létezik akkora véges constans szám, k_0, hogy bármely értékkel birjon az igen kis ρ távolság, $s'' \geqq k_0\rho$, tehát

$$|I''| < Q_0 k_0 \rho^{1-\mu}.$$

Következőleg, ha $\mu<1$, akkor ρ megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már $|I''|$ kisebb, mint egy tetszés szerint adott kis érték. De egyúttal oly kicsi lehet a ρ, hogy mihelyt még kisebb, már a σ' fölületre és az s' vonalra szóló integralis a σ fölületre és az s vonalra szóló integralistól tetszésre adott kicsinél kisebb értékben külömbözik.

3.) Ha folytonosság szakadási vonala van a U, V, W függvénynek a σ fölületen, akkor már nem érvényes az egyenletünk.

Azonban, ha végesek a függvények az ilyen vonalon, és folytonosság-szakadásuk csak abban áll, hogy más érték-rendszerük tartozik a vonal egyik oldalára, mint a másikra a fölületen, ha továbbá deriváltjaik vagy végesek, vagy elsőnél alacsonyabb rendűen végtelenek a különös vonalokon, akkor létezik egy más reductiós egyenlet.

Ehhez úgy jutunk el, hogy a σ fölületet vonalokkal oly részekre osztjuk, amelyekben nincs folytonosság-szakadási vonal. Természetesen a részekre osztó vonalak a különös vonalakra feküsznek.

Hasonló módon járva el, mint (XXVI, 4)-ben, találjuk, hogy

$$\int\limits_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)\alpha+\left(\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)\beta+\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\gamma\right]\mathrm{D}\sigma=$$

$$=\int\limits_{s+s_{+}+s_{-}} (Ul+Vm+Wn)\mathrm{D}s,$$

ha t. i.

$$\int\limits_{s_{+}} (Ul+Vm+Wn)\mathrm{D}s=\int\limits_{\varsigma} (Ul+Vm+Wn)_{+}\mathrm{D}s$$

$$\int\limits_{s_{-}} (Ul+Vm+Wn)\mathrm{D}s=\int\limits_{\varsigma} (Ul+Vm+Wn)_{-}\mathrm{D}s,$$

ahol ς jelöli a folytonosság-szakadás vonalait és a (+) és (—) index az egyik és másik oldalra tartozó U, V, W, l, m, n értékeket külömbözteti meg.

Ha csak a deriváltak szenvednek folytonosság-szakadást a ς vonalokon, a fent definiált módon, akkor nyilvánvalóan a közönséges reductió érvényes, mert a ς vonalokra szóló integralis eltűnik,

XXX. Vonalas integralisok reductiója.

1.) Tegyük föl, hogy Φ a hely deriválható folytonos függvénye a két végű s vonalon. Másfelől gondoljuk, hogy egy mozgó pont írta le ezt a vonalat, és minden helyen a mozgás irányát tekintsük a vonal irányának, amelyet általánosan s jelöljön, úgy, hogy a vonal x, y, z helyén $\partial\Phi : \partial s$ a vonal irányában képezett derivált.

Akkor, ha a függvény értéke a vonal kezdő pontjában Φ_1 s a vonal végső pontjában Φ_2:

$$\int\limits_s \frac{\partial\Phi}{\partial s}\mathrm{D}s = \Phi_2 - \Phi_1.$$

Mert

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}\mathrm{D}s$$

nem más, mint a függvény megváltozása a $\mathrm{D}s$ vonal-elemen, s az ily megváltozások összesége a függvénynek az egész vonalon való megváltozása.

2.) Ha folytonosság-szakadási pontja van a Φ függvénynek a vonalon, akkor egyenletünk nem helyes.

Azonban, ha véges a függvény az ily pontban is, és folytonosság-szakadása csak abban áll, hogy más értéke tartozik a pont egyik oldalára, mint a másikra, ha továbbá deriváltja vagy véges, vagy elsőnél alacsonyabb rendű végtelen a különös pontokban, akkor egy más reductiós egyenlet létezik.

Ehhez úgy jutunk el, hogy annyi részben fogjuk föl a vonalat, ahányra a különös pontok osztják: egyenként mindenik osztásrészre fölirjuk az egyenletet, aztán összeadjuk az egyenleteket. Alkalmas rendezést végezvén,

$$\int\limits_s \frac{\partial\Phi}{\partial s}\mathrm{D}s = \Phi_2 - \Phi_1 - \Sigma(\Phi_+ - \Phi_-)$$

reductióhoz jutunk, amelyben Φ_- egy különös pont innenső oldalára, Φ_+ tulsó oldalára tartozik a vonal-irány értelmében.

Tegyük itt ezt az észrevételt: ha Φ deriválható a három coordinatára a vonalon, s a $(\mathrm{D}s)$ elemi vector componenseit $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$ jelölik, akkor

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}s} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\mathrm{D}y}{\mathrm{D}s} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\mathrm{D}z}{\mathrm{D}s},$$

tehát

$$\int\limits_s \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathrm{D}x+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathrm{D}y+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathrm{D}z\right)=\Phi_2-\Phi_1-\Sigma(\Phi_+-\Phi_-).$$

Ha csak a derivált szenvedne folytonosság-szakadást, akkor nyilvánvalóan a közönséges reductio érvényes.

XXXI. Több-értékű függvény geometriai integralisa.

Ha az integrálandó függvény a (XVI) czikk értelmében több-értékű abban a térben, fölületben, többszörösen összefüggő vonalban, amelyre az integrálást ki akarjuk terjeszteni, akkor rekesztő fölületek alkalmazásával egyértékű függvényekre bontsuk. A rekesztő fölületek minden esetre folytonosság-szakadási fölületek az egyes függvények érték-tartományában. Ha emellett teljesítik a függvények az integrálhatóság valamely elégséges föltételeit, tér-integralisaik annyiban külömböznek a közönséges egyértékű függvények tér-integralisaitól, hogy változtatható folytonosság-szakadási fölület tartozik beléjük; fölületi, illetőleg vonalos integralisuk annyiban külömbözik a közönséges egyértékű függvények fölületi és vonalos integralisától, hogy változtatható folytonosság-szakadási vonal illetőleg pont-hely tartozik beléjük, melyek az integralis fölületének, illetőleg vonalának és a rekesztő fölületeknek a metsződéséből származnak. Az ilyen folytonosság-szakadási helyek változtatásával természetesen általában változik az integralis értéke.

XXXII. Geometriai integralisok, mint függvények.

Tegyük föl, hogy az

$$I=\int\limits_{\tilde\omega} \Phi\mathrm{D}\tilde\omega$$

geometriai integralisban a Φ függvény a $(D\tilde\omega)$ alakzat-elem coordinatáin kivűl más mennyiségek $u, v, \ldots$ függvénye is:

$$\Phi=\Phi(x, y, z, u, v, \ldots)$$

úgy, hogy az $u, v, \ldots$ változók bizonyos (T) érték-tartományában teljesít oly elégséges föltételeket, amilyenek alatt az integralis létezik, vagyis határozott véges határ-értéket jelent.

Akkor az integralis nyilvánképen az $u, v, \ldots$ változók függvénye a (T) érték-tartományban.

1.) Ha a Φ függvény a (T) értéktartományban az $(\tilde\omega)$ alakzat minden pontjában folytonos függvénye az $u, v, \ldots$ változóknak, akkor a (T) érték-tartományban az I integralis folytonos függvénye az $u, v, \ldots$ változóknak.

Ugyanis ha úgy $u', v', \ldots$, mint $u, v, \ldots$ a (T) érték-tartományban vannak, akkor

$$I(u', v', ..) - I(u, v, ..) \equiv \int_{\tilde{\omega}} \Phi(x, y, z, u', ..) D\tilde{\omega} - \int_{\tilde{\omega}} \Phi(x, y, z, u, ..) D\tilde{\omega} \equiv$$

$$\equiv \int_{\tilde{\omega}} [\Phi(x, y, z, u', ..) - \Phi(x, y, z, u, ..)] D\tilde{\omega}.$$

A Φ függvény folytonosságánál fogva $u'-u$, $v'-v$, .. számértéke megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már a

$$\Phi(x, y, z, u', v', ..) - \Phi(x, y, z, u, v, ..)$$

függvény-külömbség számértéke $(\tilde{\omega})$-ban mindenütt kisebb, mint egy tetszésre adott kicsiny szám. Jelölje ezt a számot ε és jelentse az $(\tilde{\omega})$ alakzat teljes mekkoraságát $\tilde{\omega}$ (XXII). Az

$$I(u', v', ..) - I(u, v, ..)$$

külömbség számértéke nyilvánvalóan kisebb, mint $\tilde{\omega}\varepsilon$. Igy $u'-u$, $v'-v$, .. számértékei oly kicsinynek választhatók meg, hogy egyúttal ennek az integralis-külömbségnek a számértéke is kisebb legyen, mint egy tetszésre adott kicsiny szám.

2.) Ha a Φ függvénynek, mint x, y, z függvényének oly folytonosság-szakadásai volnának az $(\tilde{\omega})$ alakzatban a (T) érték-tartományba tartozó $u, v, ..$ értékek mellett, amelyek daczára (XXIV, XXV) értelmében létezik az integralis, ez akkor is folytonos függvénye az $u, v, ..$ változóknak.

Jelentse ugyanis $(\tilde{\omega}_0)$ és $(\tilde{\omega}'_0)$ az $(\tilde{\omega})$ alakzat oly igen kis részét, amely az $u, v, ..$ illetőleg $u', v', ..$ értékek mellett az összes különös helyeket magában foglalja. Az alakzat többi részét jelölje $(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}'_0)$. Mivel ebben az alakzat-részben folytonos a függvény, így $u'-u$, $v'-v$, .. számértéke megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb már az

$$\int_{\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_0-\tilde{\omega}_0'} \Phi(x, y, z, u', ..) D\tilde{\omega} - \int_{\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_0-\tilde{\omega}_0'} \Phi(x, y, z, u, ..) D\tilde{\omega}$$

külömbség számértéke kisebb, mint egy tetszésre adott kicsiny szám. De egyúttal oly kicsinynek választható $(\tilde{\omega}_0)$ és $(\tilde{\omega}'_0)$, hogy mihelyt még kisebbek, már a reájuk tartozó integralisok számértéke is kisebb legyen, mint egy tetszésre adott kicsiny szám (XXIV, XXV). Minthogy

$$I(u', v', ..) - I(u, v, ..)$$

$$\equiv \int_{\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_0-\tilde{\omega}_0'} \Phi(x, y, z, u', ..) D\tilde{\omega} - \int_{\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_0-\tilde{\omega}_0'} \Phi(x, y, z, u, ..) D\tilde{\omega} +$$

$$+ \int_{\tilde{\omega}_0+\tilde{\omega}_0'} \Phi(x, y, z, u', ..) D\tilde{\omega} - \int_{\tilde{\omega}_0+\tilde{\omega}_0'} \Phi(x, y, z, u, ..) D\tilde{\omega},$$

így $u'-u$, $v'-v$,.. számértéke megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már az

$$I(u', v', ..)-I(u, v, ..)$$

külömbség számértéke kisebb legyen, mint egy tetszésre adott kicsiny szám, mert $\tilde{\omega}_0$ és $\tilde{\omega}'_0$ zérustól tetszés szerint kicsit külömbözőknek választhatók meg.

3.) Ha a Φ függvény az $(\tilde{\omega})$ alakzatba tartozó coordinata-értékek mellett a (T) érték-tartományban $u, v, ..$ deriválható függvénye, és ha

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial v}, \ldots,$$

mint az x, y, z coordinaták függvényei, folytonosak az $(\tilde{\omega})$ alakzatban, akkor az I integralis deriválható függvénye az $u, v, ..$ változóknak a (T) érték-tartományban és deriváltjai a Φ függvény deriváltjainak az integralisai. Elég lesz egy partialis deriváltról mutatni ki ezt. Hasonlókép mutatható ki bármely másról. — Ha rövidség kedveért

$$\Phi(x, y, z, u', v, ..)=\Phi',$$

úgy

$$I(u', v, ..)-I(u, v, ..)$$

$$\equiv\int_{\tilde{\omega}}\Phi' D\tilde{\omega}-\int_{\tilde{\omega}}\Phi D\tilde{\omega}\equiv\int_{\tilde{\omega}}(\Phi'-\Phi)D\tilde{\omega}\equiv\int_{\tilde{\omega}}\frac{\Phi'-\Phi}{u'-u}(u'-u)D\tilde{\omega}.$$

Ha most itt írjuk:

$$\frac{\Phi'-\Phi}{u'-u}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\eta,$$

akkor $u'-u$ számértéke megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már $|\eta|$ az alakzat minden pontjában kisebb, mint egy tetszés szerint adott kicsiny érték η_0, tehát

$$\text{Abs.}\int_{\tilde{\omega}}\eta\,.\,(u'-u)D\tilde{\omega}<\eta_0\,.\,|u'-u|\,\tilde{\omega},$$

$$\text{Abs.}\left[\frac{I(u', v, ..)-I(u, v, ..)}{u'-u}-\frac{\int_{\tilde{\omega}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u'-u)D\tilde{\omega}}{u'-u}\right]<\eta_0\tilde{\omega}.$$

Következőleg $u'-u$ számértéke megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már

$$\frac{I(u',v,..)-I(u,v,..)}{u'-u'}$$

tetszés szerint adott kicsinynél kisebb száméıtékben külömbözik az

$$\frac{\int\limits_{\tilde{\omega}} \frac{\partial\Phi}{\partial u}(u'-u)\mathrm{D}\tilde{\omega}}{u'-u}$$

kifejezéstől. Ez pedig amiatt, hogy $\partial\Phi:\partial u$ az x, y, z coordinaták folytonos függvénye az alakzatban $\equiv$

$$\int\limits_{\tilde{\omega}} \frac{\partial\Phi}{\partial u}\mathrm{D}\tilde{\omega}.$$

4.) Ha a Φ függvény az $(\tilde{\omega})$ alakzat egyes pontjai, vonalai, fölületei kivételével deriválható csak az x, y, z alakzati coordinaták mellett az $u, v, ..$ változókra a (T) tartományban úgy, hogy

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial v},\ldots$$

mint az x, y, z coordinaták függvényei egyes pontokban, egyes vonalok, fölületek pontjaiban folytonosság-szakadást szenvednek az $(\tilde{\omega})$ alakzatban, de azért teljesítik az integrálhatóság (XXIV, XXV)-ben megjelölt föltételeit, az I integralis akkor is deriválható az $u, v, ..$ változókra a (T) érték-tartományban. Most is elégséges lesz egy partialis deriválással foglalkozni. — Jelentsék $(\tilde{\omega}_0)$ és $(\tilde{\omega}'_0)$ az alakzat oly igen kis részét, amely az $(u', v, ..)$ illetőleg $u, v, ..$ értékek mellett az összes különös helyeket magában foglalja. Az alakzat többi részét $(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_0-\tilde{\omega}_0')$ jelölje.

$$I(u',v,..)-I(u,v,..)\equiv\int\limits_{\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_0'-\tilde{\omega}_0}\frac{\Phi'-\Phi}{u'-u}(u'-u)\mathrm{D}\tilde{\omega}+\int\limits_{\tilde{\omega}_0+\tilde{\omega}_0'}\frac{\Phi'-\Phi}{u'-u}(u'-u)\mathrm{D}\tilde{\omega}\equiv$$

$$\equiv\int\limits_{\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_0'-\tilde{\omega}_0}\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u'-u)\mathrm{D}\tilde{\omega}+\int\limits_{\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_0-\tilde{\omega}_0'}\eta\,.\,(u'-u)\mathrm{D}\tilde{\omega}+\int\limits_{\tilde{\omega}_0+\tilde{\omega}_0'}\frac{\Phi'-\Phi}{u'-u}(u'-u)\mathrm{D}\tilde{\omega}.$$

Az $u'-u$ számértéke megválasztható oly kicsinynek, és $(\tilde{\omega}_0+\tilde{\omega}_0')$ kiszabható oly kicsinyre, hogy mihelyt még kisebb, már a második és harmadik integralis számértéke tetszés szerint adott kis számnak és $|u'-u|$-nak a szorzatánál kisebb legyen . . .

Jegyeztük légyen azonban meg, hogy egy függvény deriváltjának itt megkivánt integrálhatósága nem szükséges, csak elégséges föltétele annak, hogy a függvény integralisa deriválható legyen. Majd a következőkben példáját látjuk.

XXXIII. A Newton-féle potentialis alap-tulajdonságai.

Tegyük föl, hogy ebben a geometriai integralisban:

$$\int_{\bar{\omega}} \Phi \mathrm{D}\bar{\omega} \equiv I,$$

az integrálandó függvény, vagyis Φ, ilyen alakú:

$$\Phi \equiv \frac{\varphi(x, y, z)}{\rho},$$

ahol φ a hely folytonos függvénye az $(\bar{\omega})$ alakzatban és ρ az alakzat x, y, z pontjának és egy változó ξ, η, ζ pont-helynek a kölcsönös távolsága.

Ekkor az integralis a ξ, η, ζ hely függvénye: $I \equiv I(\xi, \eta, \zeta)$. Newton-féle potentialisnak nevezzük. Nagy jelentőségüek az ilyen integralisok az alkalmazásban, amelyek különösen mint bizonyos vectorok potentialisa és mint bizonyos vectorok vector-potentialisának componensei jelentkeznek a physikában.

1.) Az $(\bar{\omega})$ alakzaton kivűl fekvő pontokban mindenütt mindhárom coordinatára, (ξ, η, ζ), bárhányszor deriválható függvény a Newton-féle potentialis, mert az integrálandó függvény az, és deriváltjai, mint x, y, z függvényei folytonosak az $(\bar{\omega})$ alakzatban (XXXII. 3).

Ha pedig a ξ, η, ζ pont az $(\bar{\omega})$ alakzatban van, akkor a Φ függvénynek, mint x, y, z függvényének, egyetlen különös helye a ξ, η, ζ pont. Ebben első rendű végtelen, ennél fogva a potentialis az alakzat térfogati és fölületi részében folytonos függvénye a helynek, és térfogati részében egyszer bizonyosan deriválható függvénye is, és három partialis deriváltja folytonos (XXXII, 2, 4).

Ha ξ, η, ζ külső pont, és ennek a távolsága az alakzat egy bizonyos kiszemelt x_0, y_0, z_0 pontjától R, úgy

$$R \,.\, I = \int_{\bar{\omega}} \varphi(x, y, z) \frac{R}{\rho} \mathrm{D}\bar{\omega}.$$

Ha a ξ, η, ζ pontot végtelenűl távolítjuk az x_0, y_0, z_0 ponttól, úgy az $R:\rho$ hányados értéke végtelenűl közeledik az egységhez, tehát

$$\lim_{R\to\infty} R\,I = \int_{\omega} \varphi(x, y, z)\mathrm{D}\omega.$$

Továbbá

$$R^2\frac{\partial I}{\partial i} = R^2\int_{\omega} \varphi(x, y, z)\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial i}\mathrm{D}\omega.$$

Azonban

$$\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial i} = \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \xi}\alpha + \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \eta}\beta + \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \zeta}\gamma = -\frac{\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma}{\rho^2},$$

ha t. i. α, β, γ az i irány cosinusai, és λ, μ, ν az x, y, z pontból a ξ, η, ζ pontba mutató irány cosinusai, mihez képest, θ-val jelölvén a két irány szögét,

$$\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial i} = -\frac{\cos\theta}{\rho^2}.$$

Eszerint

$$R^2\frac{\partial I}{\partial i} = -\int_{\omega} \varphi(x, y, z)\cos\theta.\frac{R^2}{\rho^2}\mathrm{D}\omega.$$

Ha az x_0, y_0, z_0 pontból a ξ, η, ζ pontba mutató irány és az i irány szöge θ_0, úgy R végtelen növelése mellett a θ szög a θ_0 szögbe convergál, mihez képest

$$\lim_{R\to\infty} R^2\frac{\partial I}{\partial i} = -\cos\theta_0\int_{\omega} \varphi(x, y, z)\mathrm{D}\omega,$$

sít. — Ezek szerint a határegyenletek szerint a NEWTON-féle potentialis és deriváltjai a végtelenben eltűnnek, és pedig algebrailag tűnnek el: maga a potentialis első rendűen, első deriváltjai másodrendűen, sít.

Némely egyébb tulajdonságoknak a megismerése végett válaszszuk szét a NEWTON-féle potentialist térfogati, fölületi és vonalas potentialisra aszerint, amint az integralis térre, fölületre, vonalra vonatkozik.

2.) A NEWTON-féle térfogati potentialist (τ) térre terjedő integratióban jelölje I_τ. Coordinata-deriváltjai,

$$\frac{\partial I_\tau}{\partial \xi}=\int_\tau \varphi \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \xi} D\tau=\int_\tau \frac{\varphi}{\rho^2}\frac{x-\xi}{\rho} D\tau, \qquad \text{stb.}$$

abban az esetben bizonyosan deriválható folytonos függvényei a coordinatáknak a (τ) tér belsejében is, ha a φ függvény az x, y, z coordinaták deriválható folytonos függvénye az egész (τ) térben, jóllehet az integrálandó függvények, u. m.:

$$\left(\varphi \cdot \frac{x-\xi}{\rho}\right)\frac{1}{\rho^2}, \qquad \text{stb.}$$

oly deriváltakat szolgáltatnak, amelyek a ξ, η, ζ pontban harmadrendűen végtelenek, midőn belső pont ez, és így nem integrálhatók a (τ) térre.

Ugyanis

$$\frac{\partial I_\tau}{\partial \xi}=\int_\tau \varphi \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \xi} D\tau=-\int_\tau \varphi \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial x} D\tau.$$

Részleges reductióval élvén:

$$\frac{\partial I_\tau}{\partial \xi}=\int_\tau \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial x} D\tau+\int_\sigma \frac{\varphi \cos(n, x)}{\rho} D\sigma, \quad \text{stb.}$$

ahol *most* σ a (τ) tér határ-fölületét jelenti. Ezek pedig a ξ, η, ζ coordinaták mindegyikére deriválhatók a (τ) tér belsejében, és deriváltjaik folytonosak abban.

3.) Minthogy

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\frac{1}{\rho}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\frac{1}{\rho}+\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\frac{1}{\rho}\equiv o,$$

és minthogy a (τ) téren kivűl az integrálás jele alatt végezhetők az I_τ potentialison a deriválások, ennélfogva a (τ) téren kivűl mindenütt

$$\Delta I_\tau = o.$$

A fölületi és vonalas potentialisok,

$$\int_\sigma \frac{\varphi}{\rho} D\sigma \equiv I_\sigma, \quad \int_s \frac{\varphi}{\rho} Ds \equiv I_s,$$

a fölületen, illetőleg a vonalon kivűl mindenütt s akárhányszor az integrálás jele alatt deriválhatók, tehát mindenütt

$$\Delta I_\sigma = o, \qquad \Delta I_s = o.$$

Ezeket az egyenleteket LAPLACE-féléknek nevezzük.

4.) Mihelyt a φ olyan folytonos függvény a (τ) térben, hogy I_τ a (τ) tér belsejében is deriválható másodszor a coordinatákra, és második deriváltjai a (τ) térben folytonosak, akkor a (τ) térben

$$\Delta I_\tau(\xi, \eta, \zeta) \equiv -4\pi\varphi(\xi, \eta\, \zeta).$$

Ugyanis a GREEN-féle reductióban (XXVIII, 7) a Φ függvény gyanánt használható az I_τ függvény, bármely tért jelentsen T, mert más különösség nem fordulhat elő a végetlen térben, mint hogy I_τ második deriváltjai más véges értékekkel bírjanak a (τ) tért határoló σ fölületnél ennek az egyik oldalán, mint a másikon. Ha pedig a (τ) tér tetszés szerinti része (τ'), nem különben használható $I_{\tau'}$ is Φ gyanánt abban a reductioban, bármely tért jelentsen T, mert más különösség nem fordúlhat elő a végetlen térben, mint hogy $I_{\tau'}$ második deriváltjai más véges értékkel birjanak a σ' fölületnél ennek az egyik oldalán, mint a másikon.

A T most akkora tért jelentsen, amelynek a belsejében van a τ' tér. Minthogy a τ' téren kivűl $\Delta I_{\tau'} = o$, így

$$\int_T \frac{\Delta I_{\tau'}}{\rho} D\tau = \int_{\tau'} \frac{\Delta I_{\tau'}}{\rho} D\tau.$$

Még pedig T tér gyanánt válasszunk oly gömb-tért, amelynek a centruma a τ' térben van. Sugara megválasztható oly nagynak, hogy mihelyt még nagyobb, már a GREEN-féle reductióban a fölületi integrálás számértéke tetszés szerint adott kicsinynél kisebb, mert az integralis fölülete a sugár négyzetével arányosan nől, az integrálandó függvény pedig olyszerűen kisebbedik, mint a sugár harmadik hatványának a fordított értéke 1.). Eszerint,

$$\int_{\tau'} \frac{\Delta I_{\tau'}}{\rho} D\tau = -4\pi I_{\tau'}(a, b, c) = -4\pi \int_{\tau'} \frac{\varphi}{\rho} D\tau,$$

vagyis

$$\int_{\tau'} \frac{\Delta I_{\tau'} + 4\pi\varphi}{\rho} D\tau = o,$$

De, ha (τ)-nak azt a részét, amelyet a (τ') részen kivül tartalmaz, $(\tau-\tau')$ jelöli, úgy

$$I_{\tau'}=I_{\tau}-I_{\tau-\tau'},$$

és (τ') belsejében

$$\Delta I_{\tau-\tau'}=o.$$

Következőleg

$$\int\limits_{\tau'}\frac{\Delta I_{\tau}+4\pi\varphi}{\rho}D\tau=o.$$

Minthogy ΔI_{τ} és φ a föltevés szerint mindenütt folytonos (τ)-ban, így (τ') megválasztható úgy, hogy egyfelől benne foglaltassék a (τ) térnek tetszés szerint választott ξ, η, ζ pontja, és másfelől a $\Delta I_{\tau}+4\pi\varphi$ összeg mindenütt positivus, vagy mindenütt negativus legyen benne. Ebből folyólag (τ) bármely pontja legyen ξ, η, ζ, abban tényileg

$$\Delta I_{\tau}+4\pi\varphi=o.$$

Az ú. n. POISSON-féle egyenlet.

Ha a φ deriválható a (τ)-ban mindhárom coordinatára, és deriváltjai folytonosak, akkor létezik ΔI_{τ} a (τ)-ban és folytonos 2.), tehát akkor bizonyosan áll ez az egyenlet. De származásánál fogva áll, mihelyt olyan folytonos függvény a φ, hogy I_{τ} kétszer deriválható (τ)-ban, és második deriváltjai is folytonosak (τ)-ban.

5.) Ahol τ határán a φ függvény nem zérus, ott ΔI_{τ} folytonosság-szakadást szenved a határ-fölületen körösztül, mert a fölület egyik oldalán 0, a másikon $-4\pi\varphi$. Most látni fogjuk, hogy I_{τ} egyes második deriváltjai miként viselkednek a τ tér határán.

A határ-fölület belső oldalát positivus, külső oldalát negativus oldalának nevezzük. Minthogy az első deriváltak mindenütt folytonosak, így

$$\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_{-}=\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_{+}\quad\text{stb.}$$

a határ-fölület minden pontjában, ha t. i. I_{τ} helyett rövidség kedveért I-t irunk. Minthogy a határ-fölület minden pontjában helyes ez az egyenlet, így oly pontjaiban, amelyekben határozott érintő síkja van, a bal és jobb egyenleti oldalak tangentialis deriváltjai bizonyosan egyenlők, s bármely tangentialis irányt jelentsen is az ily x, y, z helyen s,

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial s}\right)_- - \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial s}\right)_+ = 0, \text{ stb.}$$

Használjuk ezt a jelölés-módot:

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial p \partial q}\right)_- - \left(\frac{\partial^2 I}{\partial p \partial q}\right)_+ \equiv (p, q).$$

Ha az s tangentialis irányt meghatározó cosinusokat α, β, γ jelentik, úgy egyenleteink eképen is írhatók:

$$(x, x)\alpha + (x, y)\beta + (x, z)\gamma = o, \text{ stb.}$$

Eszerint az a vector, melynek a componensei (x, x), (x, y), (x, z) vagy (y, x), (y, y), (y, z), vagy pedig (z, x), (z, y), (z, z), normalis irányú a fölület x, y, z helyén. Ha tehát a fölületi normalis egyik irányának az irány-cosinusai az x, y, z helyen λ, μ, ν, akkor léteznek olyan scalarisok R_1, R_2, R_3, absolutus érték szerint rendre a három vector nagysága, hogy

$$\begin{aligned} (x, x) &= R_1\lambda, & (x, y) &= R_1\mu, & (x, z) &= R_1\nu, \\ (y, x) &= R_2\lambda, & (y, y) &= R_2\mu, & (y, z) &= R_2\nu, \\ (z, x) &= R_3\lambda, & (z, y) &= R_3\mu, & (z, z) &= R_3\nu. \end{aligned}$$

De a (p, q) symbolum definitiójának értelmében (p, q) és (q, p) azonos. Következőleg második, harmadik, negyedik, hatodik, hetedik és nyolczadik egyenletünk szerint

$$R_1 : R_2 : R_3 = \lambda : \mu : \nu,$$

vagyis létezik olyan scalaris, R, hogy

$$R_1 = R\lambda, \ R_2 = R\mu, \ R_3 = R\nu.$$

Minthogy pedig

$$(x, x) + (y, y) + (z, z) \equiv (\Delta I)_- - (\Delta I)_+ = 4\pi\varphi,$$

így első, ötödik és kilenczedik egyenletünk szerint

$$R_1\lambda + R_2\mu + R_3\nu = 4\pi\varphi,$$

azaz $R = 4\pi\varphi$, tehát

$$(x, x) = 4\pi\varphi\lambda\lambda, \quad (x, y) = 4\pi\varphi\lambda\mu, \quad (x, z) = 4\pi\varphi\lambda\nu, \text{ stb.}$$

Ezt Weingarten-féle egyenlet-rendszernek nevezzük.

6.) Tetszés szerinti T térre és fölületére, S-re, vonatkozólag, reductio rendén

$$\int_T \Delta I_\tau \mathrm{D}\tau = -\int_S \frac{\partial I_\tau}{\partial n} \mathrm{D}\sigma,$$

mert más különösség nem fordúlhat elő, mint hogy I_τ második deriváltjai τ határának egyik oldalán más véges értékekkel birnak, mint a másikon.

Eszerint

$$\int_S \frac{\partial I_\tau}{\partial n} \mathrm{D}\sigma = 4\pi \int_T \varphi \mathrm{D}\tau.$$

7.) Minden két-oldalú fölület egyik oldalát (+), másik oldalát (—) oldalának nevezzük, és a fölületi normalisnak azt az irányát, mely a (—) oldalról a (+) oldalra mutat (+) irányának, ellentétes irányát (—) irányának nevezzük.

A σ fölület pontjainál, azokhoz bármi közel, I_σ fölületi potentialis normalis irányú deriváltja általában számot tevően más az egyik oldalon, mint a másikon, jóllehet mindegyik oldalon a (+), vagy mindegyiken a (—) irányban képezzük. Mégpedig a különbség határ-értéke, a (+) irányú deriváltra számítva, ξ, η, ζ helyen

$$\left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_+}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_+}\right)_- = -4\pi\varphi(\xi, \eta, \zeta).$$

Szabatos levezetéséhez juthatunk a Green-féle reductio (XXVIII, 7) és (XXVII, 4) segélyével.

Jelentsen S_1 és S_2 két teljesen zárt fölületet, amelyeket igen vékony térköz válaszszon el egymástól, és amelyek elseje egészen a másodikon belűl legyen. Igen vékony térközük belsejében foglaljon helyet a σ fölületnek σ' darabja, és egyuttal úgy legyenek választva, hogy egy a, b, c pont-hely, amelyet a σ' fölületen kivűl tetszésre választhatunk, az S_1 fölületen belűl vagyon. Ettől a ponttól számítjuk az összes előfordulandó távolságokat amelyeket most mindig r jelöljön.

Az S_1 fölületen belül alkalmazható (XXVIII, 7) a $\Phi \equiv I_{\sigma'}$ függvénynyel, és az S_2 fölületen kivül alkalmazható (XXVII, 4) a $\Phi \equiv I_{\sigma'}$ és $F = 1 : r$ függvénynyel.

Jelentse már most (XXVIII, 7)-ben a második egyenletben a T tér az S_1 fölülettől befogott tért. Minthogy $\Delta I_{\sigma'} = o$, e tér minden pontjában, úgy

$$\int_{S_1}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}I_{\sigma'}-\frac{1}{r}\frac{\partial I_{\sigma'}}{\partial n}\right)D\sigma=4\pi I_{\sigma'}(a,b\,c).$$

Jelentse továbbá (XXVII, 4)-ben a T tér az S_2 fölület és egy körülötte írt gömbfölület közt lévő tért. A gömbfölület sugara megválasztható oly nagynak, hogy mihelyt még nagyobb, már a gömbfölületre szóló integralis számértéke tetszés szerint adott kicsinynél kisebb. Mivel pedig a mostani T-ben is mindenütt $\Delta I_{\sigma'}=o$, ezt is figyelembe véve, találjuk, hogy

$$\int_{S_2}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}I_{\sigma'}-\frac{1}{r}\frac{\partial I_{\sigma'}}{\partial n}\right)D\sigma=o.$$

Az S_1 és S_2 fölület térköze megválasztható oly vékonynak, hogy mihelyt még vékonyabb, már tetszés szerint meghatározott kicsinynél kisebb eltéréssel teljesülhessenek a következő postulatumok: n_1 és n_2 ellenkező irányok; r_1 és r_2 egyenlők; $\partial r_1:\partial n_1$, és $\partial r_2:\partial n_2$ ellentétesen egyenlők; $(I_{\sigma'})_1$ és $(I_{\sigma'})_2$ egyenlők; $(\partial I_{\sigma'}:\partial n_1)_1$ és $(\partial I_{\sigma'}:\partial n_2)_1$ ellentétesen egyenlők; $(\partial I_{\sigma'}:\partial n_1)_2$ és $(\partial I_{\sigma'}:\partial n_2)_2$ ellentétesen egyenlők; $D\sigma_1$ és $D\sigma_2$ egyenlők; mindannyi az S_1 és S_2 megfelelő pontjára számítva.

Adjuk össze a két integralis-egyenletet. Az elősoroltak rendén összegük ekkép írható

$$\int_{S_1}\left[\left(\frac{\partial I_{\sigma'}}{\partial n_1}\right)_2-\left(\frac{\partial I_{\sigma'}}{\partial n_1}\right)_1\right]\frac{D\sigma}{r}=4\pi I_{\sigma}\,(a,b,c).$$

Azonban csak a σ' fölület-darab közelében különbözhetik számottevően a két derivált, mert a σ' fölületen kivűl minden derivált folytonos. Így az integralis a σ' fölület-darabra vonatkoztatható az S_1 fölület helyett, t. i. a $D\sigma_1$ fölület-elemektől mért r távolságok helyett a megfelelő $D\sigma'$ fölület-elemektől mért távolságok tehetők, s a szögletes zárjel tartalma részben állandóan az S_1, részben állandóan az S_2 fölületre van vonatkoztatva a belső zárjelek indexe szerint. Továbbá, ha (σ)-nak az a része, amelyet a (σ') részen kivűl tartalmaz, $(\sigma-\sigma')$, úgy

$$I_{\sigma'}=I_{\sigma}-I_{\sigma-\sigma'}.$$

Ámde $I_{\sigma-\sigma'}$ deriváltjai folytonosak a σ' fölület-rész belsejében, tehát a σ' fölület-darab belsejében mindenütt

$$\left(\frac{\partial I_{\sigma-\sigma'}}{\partial n_1}\right)_2 - \left(\frac{\partial I_{\sigma-\sigma'}}{\partial n_1}\right)_1 = o$$

tehető. Ezek szerint

$$\int_{\sigma'} \left[\left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_1}\right)_2 - \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_1}\right)_1\right] \frac{D\sigma}{r} = 4\pi I_{\sigma'}(a, b, c).$$

Másfelől

$$I_{\sigma'}(a, b, c) = \int_{\sigma'} \frac{\varphi}{r} D\sigma,$$

tehát

$$\int_{\sigma'} \frac{\left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_1}\right)_1 - \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_1}\right)_2 + 4\pi\varphi}{r} D\sigma = o.$$

Ebből oly okfüzéssel, aminőt hasonló egyenleten 4.)-ben követtünk, adódik

$$\left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_1}\right)_1 - \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_1}\right)_2 + 4\pi\varphi = o,$$

az ú. n. Poisson-féle fölületi egyenlet.

8.) Ez egyenlet szerint a Newton-féle fölületi integralis normalis irányú deriváltja a fölületen körösztül általában folytonosság-szakadást szenved, amelynek a nagysága $4\pi |\varphi|$.

Vegyük tekintetbe a fölület oly igen kis (σ_0) részét, amely tetszés szerint adott kicsinél kisebb eltéréssel tekinthető síknak, vagyis amelyen a görbülés mértéke mindenütt kisebb, mint egy tetszésre adott kicsiny szám. A fölület többi részét $(\sigma - \sigma_0)$ jelölje. $I_{\sigma-\sigma_0}$ deriváltjai a (σ_0) fölület-darab belséjében folytonosak, és az I_σ fölületi integralis másik, I_{σ_0} részének a deriváltjai szenvedhetnek csak folytonosság-szakadást a σ_0 fölület-darabon körösztül.

Ennek a folytonosság-szakadásnak a természetébe bepillantás nyílik a következő szemlélődésből. Ha (σ_0) sík-darab, úgy az

$$I_{\sigma_0} \equiv \int_{\sigma_0} \frac{\varphi}{\rho} D\sigma$$

potentialis két oly pontban, ξ_1, η_1, ζ_1-ben, és ξ_2, η_2, ζ_2-ben, amelyek egymás tükörképei a (σ_0) síkjára nézve, teljesen egyenlő. Könnyen kiolvasható ez az integralis alakjából. Ebből pedig következik, hogy a ξ_1, η_1, ζ_1 pontban, a sík normalisának egyik irányában, az I_{σ_0} függvényből képezett derivált, meg a ξ_2, η_2, ζ_2 pontban az ellenkező irányban képezett derivált egyenlő. Következésképen a két pontban egyező normalis irányban képezett derivált ellentétesen egyenlő, és így a különbségük egyikük kétszerese.

De azt is nyomban beláthatjuk, hogy az I_{σ_0} függvényből a ξ_1, η_1, ζ_1 és ξ_2, η_2, ζ_2 pontban egyező tangentialis irányokban képezett deriváltak egyenlők. Amiből pedig az következik, hogy I_σ tangentialis deriváltjai nem szenvednek folytonosság-szakadást a fölületen körösztül.

Ezt tudva, a POISSON-féle fölületi egyenlet segitségével I_σ bármely irányú deriváltjának a folytonosság-szakadását kiszámíthatjuk.

Ha l és m irányok tangentialisak és merőlegesek egymásra, akkor

$$\frac{\partial I_\sigma}{\partial i} = \frac{\partial I_\sigma}{\partial l}\cos(i, l) + \frac{\partial I_\sigma}{\partial m}\cos(i, m) + \frac{\partial I_\sigma}{\partial n_+}\cos(i, n_+).$$

Az érintői deriváltak a két oldalon ugyanazok lévén a σ fölület pontjainál is, így e fölületnél

$$\left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial i}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial i}\right)_- = \left[\left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_+}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_+}\right)_-\right]\cos(i, n_+).$$

Következőleg

$$\left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial i}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial i}\right)_- = -4\pi\varphi \,.\, \cos(i, n_+).$$

9.) Ebből az a fontos következtetés is vonható, hogy ez a szintén gyakran előforduló integralis

$$I'_\sigma = \int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial n_+} D\sigma$$

$4\pi\,|\,\varphi\,|$ nagyságú folytonosság-szakadást szenved a σ fölületen körösztül. Egyebütt nyilvánképen folytonos, sőt bárhányszor deriválható.

Ugyanis

$$\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial n_+} = \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial x}\cos(x, n_+) + \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial y}\cos(y, n_+) + \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial z}\cos(z, n_+)$$

$$= -\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \xi}\cos(x, n_+) - \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \eta}\cos(y, n_+) - \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \zeta}\cos(z, n_+).$$

Ha tehát azt írjuk, hogy

$$\int_\sigma \frac{\varphi\cos(x, n_+)}{\rho} D\sigma = I_{1\sigma}$$

$$\int_\sigma \frac{\varphi\cos(y, n_+)}{\rho} D\sigma = I_{2\sigma}$$

$$\int_\sigma \frac{\varphi\cos(z, n_+)}{\rho} D\sigma = I_{3\sigma},$$

úgy

$$I'_\sigma = -\left(\frac{\partial I_{1\sigma}}{\partial\xi} + \frac{\partial I_{2\sigma}}{\partial\eta} + \frac{\partial I_{3\sigma}}{\partial\zeta}\right)$$

Azonban az elébb talált folytonosság-szakadási egyenlet értelmében, a σ fölületnél

$$\left(\frac{\partial I_{1\sigma}}{\partial\xi}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_{1\sigma}}{\partial\xi}\right)_- = -4\pi\varphi\cos(x, n_+) \,.\, \cos(x, n_+),$$

$$\left(\frac{\partial I_{2\sigma}}{\partial\eta}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_{2\sigma}}{\partial\eta}\right)_- = -4\pi\varphi\cos(y, n_+) \,.\, \cos(y, n_+),$$

$$\left(\frac{\partial I_{3\sigma}}{\partial\zeta}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_{3\sigma}}{\partial\zeta}\right)_- = -4\pi\varphi\cos(z, n_+) \,.\, \cos(z, n_+),$$

következőleg

$$(I'_\sigma)_+ - (I'_\sigma)_- = 4\pi\varphi.$$

XXXIV. Vectorok functionalis fölbontása.

1.) Tegyük föl, hogy (X, Y, Z) vector, mint a hely függvénye, mindhárom coordinatára deriválható folytonos a T térben, és hogy a

$$\frac{\partial X}{\partial\xi} + \frac{\partial Y}{\partial\eta} + \frac{\partial Z}{\partial\zeta}$$

összeg is mindenütt deriválható T-ben. Akkor bizonyosan létezik a T-ben a coordinátáknak olyan kétszer deriválható függvénye, Φ, hogy

$$\frac{\partial X}{\partial\xi} + \frac{\partial Y}{\partial\eta} + \frac{\partial Z}{\partial\zeta} = \Delta\Phi.$$

Ilyen függvény ugyanis

$$-\frac{1}{4\pi}\int_T \frac{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}}{\rho} D\tau.$$

Az egyenletből folyólag

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(X-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(Y-\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(Z-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)=o.$$

Eszerint az

$$\left(X-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi},\ Y-\frac{\partial \Phi}{\partial \eta},\ Z-\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\right)$$

vectornak forma szerint van vector-potentialisa a T térben. Jelölje ezt (U, V, W):

$$X=\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}+\frac{\partial W}{\partial \eta}-\frac{\partial V}{\partial \zeta},$$

$$Y=\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}+\frac{\partial U}{\partial \zeta}-\frac{\partial W}{\partial \xi},$$

$$Z=\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}+\frac{\partial V}{\partial \xi}-\frac{\partial U}{\partial \eta}.$$

Tehát a kitüzött föltételek alatt az (X, Y, Z) vector két oly vector összegére bontható, amelyek egyikének van potentialisa, Φ, másikának forma szerint van vector-potentialisa, (U, V, W), a T térben

Azonban a kitüzött föltételek csak elégségesek. Nevezetesen, a helyett, hogy

$$\frac{\partial X}{\partial \xi}+\frac{\partial Y}{\partial \eta}+\frac{\partial Z}{\partial \zeta}$$

deriválható legyen a T térben, elég csak azt követelni, hogy létezzék olyan kétszer deriválható Φ függvény a T térben, amely a

$$\frac{\partial X}{\partial \xi}+\frac{\partial Y}{\partial \eta}+\frac{\partial Z}{\partial \zeta}=\Delta\Phi$$

egyenletnek eleget tesz.

2.) Egy más használatos fölbontás azon a lehetőségen alapszik, hogy az

$$X\delta x+Y\delta y+Z\delta z$$

három tagú differentialis kifejezés az

$$F.\delta G + \delta H$$

kéttagúra vezethető, amelyben G és H a három független variabilisnek, vagyis x, y, z-nek deriválható függvényét jelenti. Ez a lehetőség ugyanis analyticus kifejezésben:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z \equiv \left(F\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x}\right)\delta x + \left(F\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y}\right)\delta y + \left(F\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial z}\right)\delta z.$$

Minthogy a δx, δy, δz differentialék teljesen függetlenek egymástól, úgy

$$X = F\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$Y = F\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$Z = F\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial z}.$$

Természetesen az alapúl használt lehetőség föltételei ennek a kifejezés-rendszernek is föltételei. Hogy melyek itt a szükséges és elégséges föltételek, vagyis X, Y, Z mely functionalis tulajdonságai szükségesek és elégségesek a fölhasznált lehetőséghez, ennél a kérdésnél is fontosabb egy másik, és pedig az, hogy mely föltételek alatt jelenthetnek F, G és H, legalább általában, mindhárom coordinata szerint kétszer deriválható függvényeket valamely térben? A vectorok ilyetén fölbontása az alkalmazásokban ezeknek a deriválhatóságoknak az esetében szokott haszonnal járni, s épen azért, valahányszor hozzá folyamodunk, már egyúttal rendszerint a priori föltesszük, hogy olyan a vector, mikép F, G, H általában kétszer deriválhatók mindhárom coordinata szerint. Ekkor általában szükségkép deriválható a vector mindhárom coordinata szerint abban a térben. Kérdés marad azonban, hogy ez a szükséges tulajdonsága elégséges tulajdonsága-e egyszersmind?

XXXV. Potentialisos vectorok és vector-potentialisos vectorok geometriai jellemzése.

1.) Ha a T térben (ξ, η, ζ) vectornak van potentialisa, és ez Φ, akkor vegyük figyelembe a T térben a

$$\Phi - p = o$$

fölület-sereget. Ez a fölület-sereg a p parametrum bizonyos értéktartományának felel meg, úgy, hogy bármely érték legyen p ebben a tartományban, $\Phi = p = \text{const.}$ oly fölület, amely egészen vagy részben a T térben foglaltatik. Minthogy az ily fölület minden pontjában ugyanazzal az értékkel bír a potentialis, azért az ilyen fölületet aequipotentialis fölületnek nevezzük.

A T tér x, y, z pontjában

$$\xi=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad \eta=\frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad \xi=\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

tehát az x, y, z helyre vonatkoztatott (ξ, η, ζ) vector iránya az e helyen átterjeszkedő aequipotentialis fölületre ($\Phi=p=$const.) merőleges (XIX), és pedig épen ezen a helyen merőleges reá.

Azonban más vector is bír ezzel a tulajdonsággal. Mind az a vector, amely oly függvénye a helynek, hogy componensei ekkép fejezhetők ki:

$$\xi=\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad \eta=\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad \zeta=\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

De már másféle vector nem, mert annak, hogy a helytől függő (ξ, η, ζ) vector egy fölület-seregben, ú. m.

$$\Phi-p=o,$$

mindenütt orthogonalis legyen egy összefüggő térben, szükséges és elégséges föltétele, hogy

$$\xi:\eta:\zeta=\frac{\partial\Phi}{\partial x}:\frac{\partial\Phi}{\partial y}:\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

aránylat létezzék abban a térben.

Ámde, midőn egy vectornak valamely térben potentialisa van, még egy olyan tulajdonsággal bír a vector, amely geometriailag egyszerűen értelmezhető, és mind a két tulajdonsággal más vector nem bír.

Vegyünk tekintetbe két aequipotentialis fölületet, amelyek parametruma végtelen kicsit külömbözik, amelyeket tehát végtelen vékony térköz választ el (XIX):

$$\Phi-p=o,\qquad \Phi-(p+\delta p)=o.$$

A két fölület térközének végtelen kis vastagsága az x, y, z helynél (XIX):

$$\delta s=|\,\delta p\,|:N,$$

ahol N jelöli a

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\ \frac{\partial\Phi}{\partial y},\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

vector nagyságát.

A $|\delta p|:\delta s$ hányadost az aequipotentialis fölület sereg x, y, z helyi sürűségének nevezzük és egy pillanatra $\varkappa$ bötűvel jelöljük.

Egyenletünk szerint $N=\varkappa$.

Ha tehát egy vectornak valamely térben van potentialisa, úgy ennek a vectornak a nagysága mindenütt az aequipotentialis fölületsereg sürűségével egyenlő.

2.) Tegyük föl, hogy (ξ, η, ζ) vectornak a T térben vectorpotentialisa van, (U, V, W), :

$$\xi=\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \eta=\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}, \quad \zeta=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y},$$

és, hogy ez a (ξ, η, ζ) vector általában mindhárom coordinata szerint deriválható a T térben.

Tudjuk már, hogy ez esetben a vector componensei mindig két függvény segítségével fejezhetők ki (XX), úgy, hogy a vector két functionalis tetszésszerintiséget tartalmaz, amely csak annyiban nem teljes kettős tetszésszerintiség, hogy mindegyik tetszésszerintiséget három másodrendű deriválhatóság szorítja meg (XXI).

Most más módon fejezzük ki két függvény segítségével, mint amily módokon (XX)-ban tettük. Ez a mód az előbbi cikk második részében fölállított kifejezés-formára támaszkodik, amelyet jelenleg (U, V, W) vector-potentialisra alkalmazunk, tévén

$$U=F\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial z},$$
$$V=F\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial y},$$
$$W=F\frac{\partial G}{\partial z}+\frac{\partial H}{\partial z},$$

azzal a kirovással, hogy F, G, H általában kétszer deriválhatók a coordináták szerint T térben legalább oly módon, hogy a kétszeres deriválások külömböző coordináták szerint valók, t. i. y és z, z és x, x és y szerint valók.

Eezknek az alakoknak a behelyettesítéséből folyólag

$$\xi=\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial y},$$
$$\eta=\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial z},$$
$$\zeta=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}.$$

Ezekben is két functionalis tetszésszerintiség fordúl elő, és ezt a két tetszésszerintiséget is három másodrendű deriválhatóság szoritja meg. Belőlük folyólag

$$\frac{\partial F}{\partial x}\xi+\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial z}\zeta=o,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}\xi+\frac{\partial G}{\partial y}\eta+\frac{\partial G}{\partial z}\zeta=o.$$

Következőleg a (ξ, η, ζ) vector iránya mindenütt tangentialis a T térben az

$$F-p=o$$

fölület-sereghez és a

$$G-q=o$$

fölület-sereghez, vagyis mindenütt tangentialis ahhoz a vonal-sereghez, amelyet a két fölület-sereg metszése határoz meg.

Ezzel a tulajdonsággal azonban mind az a vector bir, amely oly függvénye a helynek, hogy componenseit a hely egy tetszés szerinti függvényének és a ξ, η, ζ kifejezéseknek a szorzatai képezik.

Csakhogy vectorunknak még egy egyszerű geometriai tulajdonsága van, amely azt az előbbivel egyetemben már teljesen jellemzi.

Gondoljunk a T térben x, y, z helyen a vonal-seregre nézve orthogonalis elemi négyszöget, $(\delta\sigma)$, amelynek csúcsain a következő vonalok haladnak át:

$$\underset{\smile}{1}\ F=p \qquad G=q,$$
$$\underset{\smile}{2}\ F'=p+\delta p, \quad G=q,$$
$$\underset{\smile}{3}\ F=p, \quad G'=q+\delta q,$$
$$\underset{\smile}{4}\ F'=p+\delta p, G'=q+\delta q.$$

A $|\delta p\,\delta q| : \delta\sigma$ hányadost a vonal-sereg x, y, z helyi sürűségének nevezzük. Ezt fogjuk most F és G segedelmével meghatározni.

A $\delta\sigma$ négyszög két szomszédos oldalát ez a két elemi vector képezze: $(\delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z)$ és $(\delta_2 x, \delta_2 y, \delta_2 z)$, amelyek hosszát $\delta_1 s$ és $\delta_2 s$ jelölje. A másik két oldal ezekkel párhuzamosnak számíthat. Az első vector eleje legyen az $\underset{\smile}{1}$ vonalban, vége a $\underset{\smile}{2}$ vonalban. A második vector eleje legyen szintén az $\underset{\smile}{1}$ vonalban, tehát ugyanabban a ponthelyben, mint az elsőé, vége legyen a $\underset{\smile}{3}$ vonalban. Akkor

$$F'-F=\frac{\partial F}{\partial x}\delta_1 x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta_1 y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta_1 z=\delta p,$$

$$G'-G=\frac{\partial G}{\partial x}\delta_2 x+\frac{\partial G}{\partial y}\delta_2 y+\frac{\partial G}{\partial z}\delta_2 z=\delta q.$$

A $(\delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z)$ elemi vector nyilvánvalóan a $G=q$ fölületen fekszik, a $(\delta_2 x, \delta_2 y, \delta_2 z)$ elemi vector az $F=p$ fötületen, s mindkettő merőlegesen az $\perp$-vonalra; azért merőlegesen reá, mert a föltevés szerint a $(\delta\sigma)$ négyszög orthogonalis a vonal-seregre nézve. Ha tehát x, y, z helyen az $\perp$ vonal egyik irányának irány-cosinusai α, β, γ, úgy

$$\delta_1 x : \delta_1 y : \delta_1 z =$$
$$= \left(\frac{\partial G}{\partial y}\gamma - \frac{\partial G}{\partial z}\beta\right) : \left(\frac{\partial G}{\partial z}\alpha - \frac{\partial G}{\partial x}\gamma\right) : \left(\frac{\partial G}{\partial x}\beta - \frac{\partial G}{\partial y}\alpha\right),$$
$$\delta_2 x : \delta_2 y : \delta_2 z =$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial y}\gamma - \frac{\partial F}{\partial z}\beta\right) : \left(\frac{\partial F}{\partial z}\alpha - \frac{\partial F}{\partial x}\gamma\right) : \left(\frac{\partial F}{\partial x}\beta - \frac{\partial F}{\partial y}\alpha\right).$$

Az első jobb-oldalon szereplő binomiumoknak, mint componenseknek, megfelelő vector nagyságát jelölje R_1, a második jobb-oldalon szereplő binomiumoknak, mint componenseknek, megfelelő vector nagyságát jelölje R_2. Akkor

$$\delta_1 x = (\pm)\frac{\frac{\partial G}{\partial y}\gamma - \frac{\partial G}{\partial z}\beta}{R_1}\delta_1 s, \quad \text{stb.}$$

$$\delta_2 x = (\pm)\frac{\frac{\partial F}{\partial y}\gamma - \frac{\partial F}{\partial z}\beta}{R_2}\delta_2 s, \quad \text{stb.}$$

Behelyettesítvén ezeket δp és δq föntebbi kifejezésébe, és tekintetbe vévén a ξ, η, ζ componensek kifejezéseit, azt találjuk, hogy, ha a (ξ, η, ζ) vector nagyságát ρ jelöli, úgy

$$\delta_1 s = (\pm)\frac{R_1}{\rho}\delta p, \quad \delta_2 s = (\pm)\frac{R_2}{\rho}\delta q,$$

mert t. i.

$$\alpha : \beta : \gamma = \xi : \eta : \zeta.$$

Mivel a $(\delta\sigma)$ négyszögnek a területét a következő kifejezés szolgáltatja:

$$\delta\sigma = \sin(\delta_1 s, \delta_2 s) \,.\, \delta_1 s \,.\, \delta_2 s,$$

így $\delta_1 s$ és $\delta_2 s$ épen most talált kifejezéséből folyólag

$$\delta\sigma = (\pm)\frac{R_1 R_2}{\rho^2}\sin(\delta_1 s, \delta_2 s) \,.\, \delta p\, \delta q.$$

Azonban,

$$\sin^2(\delta_1 s, \delta_2 s) =$$
$$= \left(\frac{\delta_1 z}{\delta_1 s}\frac{\delta_2 y}{\delta_2 s} - \frac{\delta_1 y}{\delta_1 s}\frac{\delta_2 z}{\delta_2 s}\right)^2 + \left(\frac{\delta_1 x}{\delta_1 s}\frac{\delta_2 z}{\delta_2 s} - \frac{\delta_1 z}{\delta_1 s}\frac{\delta_2 x}{\delta_2 s}\right)^2 + \left(\frac{\delta_1 y}{\delta_1 s}\frac{\delta_2 x}{\delta_2 s} - \frac{\delta_1 x}{\delta_1 s}\frac{\delta_2 y}{\delta_2 s}\right)^2.$$

Helyettesítsük be ide is $\delta_1 x$ stb. előbb följegyzett kifejezéseit. Tekintetbe véve a ξ, η, ζ componenseknek az F és G függvénynyel képezett formuláit, és tekintetbe véve, hogy α, β, γ számértékre a $\xi:\rho, \eta:\rho, \zeta:\rho$ iránycosinusokkal egyezik, csekély fáradás árán azt találjuk, hogy

$$\sin^2(\delta_1 s, \delta_2 s) = \left(\frac{\rho}{R_1 R_2}\right)^2.$$

Eszerint

$$\frac{|\delta p\, \delta q|}{\delta\sigma} = \rho,$$

vagyis a vonalsereg sürűsége jelenti mindenütt a vector nagyságát. Ezzel ki van egészítve a vector geometriai jellemzése.

XXXVI Folytonossági tételek.

A függvények folytonosságát illetőleg az alkalmazások szempontjából különösebb érdekkel bír a következő három tantétel.

1.) Tegyük föl, hogy az $u, v, w, \ldots$ változók száma N, és hogy egy folytonos N dimensiós érték-tartomány belsejében az $f(u, v, w, \ldots)$ függvény az egyes változók szerint folytonos. Akkor az érték-tartomány belsejében valamennyi változó szerint folytonos az f függvény. Azaz: ha $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ változók fölső szám-határa megválasztható oly kicsinynek, hogy bármi kis adott számérték legyen λ, egy N dimensiós értéktartomány belsejében:

$$|f(u+\xi, v, w, \ldots) - f(u, v, w, \ldots)| < \lambda,$$
$$|f(u, v+\eta, w, \ldots) - f(u, v, w, \ldots)| < \lambda,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

akkor $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ fölső szám-határa megválasztható oly kicsinynek, hogy bármi kis adott számérték legyen μ, annak az érték tartománynak a belsejében:

$$|f(u+\xi, v+\eta, w+\zeta \ldots) - f(u, v, w, \ldots)| < \mu.$$

Ugyanis, az érték-tartomány belsejében

$$|f(u+\xi, v+\eta, w+\zeta, \ldots) - f(u, v+\eta, w+\zeta, \ldots)| < \lambda,$$
$$|f(u, v+\eta, w+\zeta, \ldots) - f(u, v, w+\zeta, \ldots)| < \lambda,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ebből pedig összeadás rendjén az állitás igazára

$$|f(u+\xi, v+\eta, w+\zeta, ..)-f(u, v, w, ..)|<N\lambda$$

következik.

2.) Ha az s változónak valamely folytonos érték-intervallumában $f(s)$ mindenütt deriválható és deriváltja nem csak határozott értékkel, de határozott véges értékkel bír mindenütt az intervallumban, akkor deriváltja folytonos az intervallumban.

Mert legyen, hogy, mihelyt $|\varsigma|<\varepsilon$, már $s+\varsigma$, vagy $s-\varsigma$, vagy mindkettő az intervallumba tartozik. A föltevés értelmében, bármi kis számérték legyen λ, megválasztható az ε oly kicsinyek, hogy a fölső, vagy alsó előjellel vagy mindegyikkel

$$\left|\frac{f(s\pm\varsigma)-f(s)}{\pm\varsigma}-\varphi_s\right|<\lambda,$$

ahol φ_s határozott érték, az f függvény deriváltja az s érték-helyen.

Ha n az egységnél kisebb positivus szám, nem külömben

$$\left|\varphi_s-\frac{f(s\pm n\varsigma)-f(s)}{\pm n\varsigma}\right|<\lambda.$$

A két egyenlőtlenség összeadásából folyólag

$$\left|\frac{f(s\pm\varsigma)-f(s)}{\pm\varsigma}-\frac{f(s\pm n\varsigma)-f(s)}{\pm n\varsigma}\right|<2\lambda.$$

Azonban az itteni baloldal azonos ezzel:

$$\frac{1-n}{n}\left|\frac{f(s\pm n\varsigma\pm(1-n)\varsigma)-f(s\pm n\varsigma)}{\pm(1-n)\varsigma}-\frac{f(s\pm\varsigma)-f(s)}{\pm\varsigma}\right|,$$

amelytől csak algebrai alak szerint külömbözik. Következőleg

$$\left|\frac{f(s\pm n\varsigma\pm(1-n)\varsigma)-f(s\pm n\varsigma)}{\pm(1-n)\varsigma}-\frac{f(s\pm\varsigma)-f(s)}{\pm\varsigma}\right|<\frac{2n}{1-n}\lambda.$$

Emellett vegyük most még számba, hogy

$$\left|\frac{f(s\pm\varsigma)-f(s)}{\pm\varsigma}-\varphi_s\right|<\lambda,$$

$$\left|\varphi_{s\pm n\varsigma}-\frac{f(s\pm n\varsigma\pm(1-n)\varsigma)-f(s\pm n\varsigma)}{\pm(1-n)\varsigma}\right|<\lambda.$$

A három egyenlőtlenség összeadásából

$$\left|\varphi_{s\pm n\varsigma}-\varphi_s\right|<\frac{2}{1-n}\lambda$$

következik. Az n positivus szám azzal a kikötéssel, hogy az egységnél kisebb legyen, egészen szabadon válaszható meg.

Ezzel az állítás be van bizonyítva.

3.) Ha az itteni első czikk-részben szereplő f függvény a változók összesége szerint és mindenütt véges határozott értékbe deriválható az N dimensiós érték-tartomány belsejében, akkor az egyes változók szerint képezett partialis deriváltjai valamenyi változó szerint folytonosak az érték-tartomány belsejében.

Bizonyítás:

A föltételezett deriválhatóság értelmében a függvény mindenütt deriválható partialisan az egyes változók szerint az érték-tartomány belsejében, s azon fölül áll, hogy bármi kis szám-érték legyen λ, a $\xi, \eta, \zeta, ..$ változók fölső szám-határa megválasztható oly kicsinynek, hogy ha $\xi:\rho$, $\eta:\rho$, $\zeta:\rho$ stb. határozott véges értékek úgy az érték-tartomány belsejében mindenütt:

$$\left|\frac{f(u+\xi, v+\eta, w+\zeta, ..)-f(u, v, w, ..)}{\rho}-\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\xi}{\rho}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\eta}{\rho}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\zeta}{\rho}+\cdot\cdot\right)\right|<\lambda.$$

Tudvalévő dolog, hogy evégből szükséges föltételt képez egy ilyetén folytonossági rendszer: $\partial f:\partial u$ folytonos a v, w, stb. változók összesége szerint, $\partial f:\partial v$ folytonos a w, stb. változók összesége szerint sít. az érték-tartomány belsejében.

Legyen, hogy épen ez a példaként említett folytonossági rendszer teljesűl. Az előbbeni czikk-rész értelmében $\partial f:\partial u$ folytonos az u változó szerint, $\partial f:\partial v$ folytonos a v változó szerint sít., tehát $\partial f:\partial u$ folytonos az u, v, w stb. változók összesége szerint, $\partial f:\partial v$ folytonos a v, w, stb. változók összesége szerint sít., az érték-tartomány belsejében.

De ugyancsak ösmeretes, hogy ez a folytonossági rendszer elégséges föltétele is az előttünk lévő határ-egyenlőtlenségnek.

Már most vegyük tekintetbe, hogy, ha a, b, c stb. véges constansok, és

$$u=u_0+a\,s,\quad v=v_0+b\,s,\quad w=w_0+c\,s, \ldots,$$

úgy az előbbeni czikk-rész értelmében $\mathrm{d}f:\mathrm{d}s$ folytonos függvénye s-nek az érték-tartomány belsejében. De

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial f}{\partial u}a+\frac{\partial f}{\partial v}b+\frac{\partial f}{\partial w}c+\cdot\cdot$$

Jelöljék emitt a $\partial f:\partial u$ stb. partialis deriváltakat rendre $\varphi, \psi, \chi, ..$: bármi kis számérték legyen λ, megválasztható ς változó fölső számhatára oly kicsinynek, hogy a

$$\begin{aligned}&[\varphi(u+a\varsigma,\quad v+b\varsigma,\quad w+c\varsigma,\ldots)-\varphi(u,v,w,\ldots)]a\\+&[\psi(u+a\varsigma,\quad v+b\varsigma,\quad w+c\varsigma,\ldots)-\psi(u,v,w,\ldots)]b\\+&[\chi(u+a\varsigma,\quad v+b\varsigma,\quad w+c\varsigma,\ldots)-\chi(u,v,w,\ldots)]c+\ldots\end{aligned}$$

külömbség számértéke kisebb, mint λ. Irjuk egy izben ς factorait a és b kivételével zérusnak:

$$\Big|\{\varphi(u+a\varsigma,\ v+b\varsigma,\ w,\ldots)-\varphi(u,v,w,\ldots)\}a+ \\ +\{\psi(u+a\varsigma,\ v+b\varsigma,\ w,\ldots)-\psi(u,v,w,\ldots)\}b\Big| \\ <\lambda.$$

Mivel φ az összes változók szerint folytonos, ψ pedig a $v, w, \ldots$ változók összesége szerint folytonos, úgy ς fölső számhatára lehet oly kicsiny, hogy

$$|\varphi(u,v,w,\ldots)-\varphi(u+a\varsigma,\ v+b\varsigma,\ w,\ldots)|<\lambda$$
$$|\psi(u+a\varsigma,\ v,\ w,\ldots)-\psi(u+a\varsigma,\ v+b\varsigma,\ w,\ldots)|<\lambda.$$

A három egyenlőtlenség rendén

$$|\psi(u+a\varsigma,\ v,\ w,\ldots)-\psi(u,v,w,\ldots)|<(1+|a|+|b|)\lambda,$$

tehát ψ folytonos függvénye u-nak az értéktartomány belsejében. Igy e czikk első részéből folyólag ψ, azaz $\partial f:\partial v$ valamennyi változó szerint folytonos az értéktartomány belsejében. Hasonló módon következik, hogy $\partial f:\partial w$ az u folytonos függvénye, és, hogy a v folytonos függvénye, tehát, hogy valamennyi változó szerint folytonos az érték-tartomány belsejében, sít.

Értelmezések.

Néhány kétesebb jelentményű szólás-mód esetleges félremagyarázásának elhárítását czélozzák a következő értelmezések.

1.) Egy iránynak a cosinusain ennek az iránynak az irány-cosinusai értendők.

2.) Egy mennyiség vagy érték nagysága mindig az absolutus értéket jelenti.

Továbbá, valahányszor egy mennyiség fölső számhatáról van a szó, ez mindig úgy értendő, hogy a mennyiség mind azt az értéket fölveheti, de csakis mindazt, amelynek a nagysága bizonyos számértéken túl nem hág, amely számérték a fölső számhatár.

3. Végtelen nagy mennyiségen mindig absolutus érték szerint végtelen nagy értendő.

4.) A véges jelző mindig csak a végtelen nagyot zárja ki.

5.) Különös kijelentés hiányában *egy függvény folytonosságába* mindig a végesség és egyértékűség követelése is bele értendő a folytonosságnak a XI. czikkben is foglalt definitiójával egyezőleg.

6.) *Több változó függvényének a folytonosságán* nem csupán külön-külön az egyes változók szerint való folytonossága gondolandó, hanem egészen általános folytonossága a XI. czikk definitiójának megfelelően.

7.) Hasonlókép *több változó függvényének a deriválhatóságán* nem csupán az egyes változók szerint való partialis deriválhatósága értendő, de egészen általánosan, bármely módon való egyszeres deriválhatósága, még pedig olykép, hogy, ha u, v,.. azok a változók, és Φ a függvény, úgy bármely deriválható függvényei legyenek az u, v,.. változók az s parametrumnak:

$$\frac{d\Phi}{ds}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{du}{ds}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{dv}{ds}+\cdot\cdot$$

Ugyanezt jelentik az ilyetén szólásmódok is: *korlátlanúl deriválható egyszer*, *deriválható valamennyi változó szerint*, *deriválható valamennyi változóra*.

8.) Tegyük föl, hogy a $\partial\Phi:\partial u$ stb. partialis deriváltak is deriválható függvényeik az u, v,.. változóknak, és u, v,.., $du:ds$, $dv:ds$,.. deriválható függvényei legyenek a ς parametrumnak. Akkor $d\Phi:ds$ deriválható függvénye ς-nak, és

$$\frac{d^2\Phi}{dsd\varsigma}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{d^2u}{dsd\varsigma}+\cdot\cdot\cdot+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\frac{du}{d\varsigma}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\cdot\partial u}\frac{dv}{d\varsigma}+\cdot\cdot\right)\frac{du}{ds}+\cdot\cdot\cdot$$

Igy értendő mindig egy *több-változós függvény kétszeres deriválhatósága*, sít.

9.) Szó van a *független változók oly különös értékeihez tartozó deriváltakról is, amely értékek mellett ezek a deriváltak definitiószerűleg nem léteznek.* Ez mindig így értendő: Képezve gondoljuk a deriváltakat a független változók oly értékeihez, amelyek mellett definitio-szerűleg léteznek, tehát határozott véges értékkel bírnak. Azután a független változókat folytonos változtatással valamely különös értékeikbe változtatjuk. Azt a határozott végtelen nagy értéket, vagy azt a többé-kevésbbé határozatlan értéket, értéktartományt, tulajdonítjuk most a deriváltaknak, amely felé a független változók folytonos változtatásának összes módjai révén terelődnek.

10.) Különös kijelentés hiányában:

Vonalon mindig oly véges hosszúságú vonal értendő, amely bír legalább is azzal az analyticus tulajdonsággal, hogy egyes pontok kivételével minden helyen határozott normalis síkja van, amelynek az iránya folytonosan változik a vonal mentén.

Fölületen mindig oly véges kiterjedésű fölület értendő, amely bír legalább is azzal az analyticus tulajdonsággal, hogy egyes pontok és vonalak kivételével minden helyen határozott érintő síkja van, amelynek az iránya folytonosan változik a fölület mentén.

Téren a végetlen tér afféle része értendő mindig, amelyet egy, vagy véges számú több összefüggő fölület határol, olyan, aminőt az előbbi meghatározás jellemez.

11.) Egyes pontok egy vonalban, fölületben, térben, egyes vonalak egy fölületben, térben, egyes fölületek egy térben, mindig véges számú pontot, vonalat, fölületet jelentenek a föntebb jellemzett értemény szerint.

12.) Egy fölület határa a fölületet teljesen határoló egy, vagy több összefüggő vonal a föntebb jellemzett értemény szerint.

Egy tér határa, a tért teljesen határoló egy, vagy több összefüggő fölület a föntebb jellemzett értemény szerint.

A kolozsvári egyetem ásvány-földtani intézetének és az Erdélyi Múzeum ásványtárának kiállítása Párisban az 1900. évben.

Dr. Szádeczky Gyula, kolozsvári egyetemi ny. r. tanártól.

(A II. táblával.)

A kiállítási tárgyak megválasztásában kettős czél lebegett szemem előtt. Bemutatni óhajtottam egyrészt Erdélynek ásvány- és földtani szempontból legnevezetesebb, legszebb kincseit, különös tekintettel azokra, a melyek egyetemünk ásvány- és földtani intézetével tudományos földolgoztatásnak révén szoros összefüggésben állanak vagy állottak. De másrészt — mint az Erdélyi Múzeum egyetemünk használatában álló ásvány- és földtani gyűjteményének, ennek a nagy közönség érdekeit is szolgáló, becses helyi gyűjteménynek az igazgatója — nem zárkózhattam el az elől sem, hogy a tisztán tudományos jelleg mellett a gyakorlati szempontból is nevezetes és fontos termékekre tekintettel legyek.

Sokszor elhangzott és minden elfogulatlan szakembertől elismert tény az, hogy kevés része van a földnek, a melyet a természet olyan gazdagon megáldott kincsekkel, mint hazánkat és, a mi a szervetlen testeket illeti, hazánkban is első helyen áll Erdély. Könnyen elképzelhető tehát, hogy kettős czélom megvalósításakor valóságos „embarras de richesse“-szel állottam szemközt. Annál inkább sajnálom, hogy a rendelkezésemre bocsátott hely elégtelensége és czélszerűtlensége[1] miatt nagyon el kellett térnem eredetileg megállapított és bejelentett tervemtől, hogy végeredményben nem a kiállítási szekrény alkalmazkodott a kiállításra szánt tárgyak ter-

[1] 3,60 m magas, 120 m széles 0,80 m mély üveges szekrény áll rendelkezésemre, melyből a földtől számitva 0,8 m decorative burkolva lévén, nem használható, a 2,5 m fölött eső rész teljesen használhatatlan, a mélységből is csak egy példának megfelelőt lehet értékesiteni.

mészetéhez és mennyiségéhez, hanem a tárgyak az előre megállapitott szekrény formájához és nagyságához.

Ilyen körülmények között le kellett mondanom arról, hogy apró, csak közelről látható tárgyakat, a minők p. o. azok a *Korundo*kat (Szafirokat) és egyéb ritkább ásványokat tartalmazó kőzetzárványok, a melyeket az utóbbi időben hazánk több helyéről leirtam[1] — kiállítsak. A hely szűke miatt arra sem gondolhattam, hogy Erdély palaeontologiai nevezetességeit bemutassam. Ásvány- és kőzettani tárgyaim közül is nagyon sok itthon maradt, a mit óhajtottam kiállítani. Itthon maradtak a többek között a régi Dáciának nagy változatosságban kiképződött *Dacitis*ei, ezeknek sajátságos telérformái, melyek közül nehányat a t. szakülésnek más alkalommal volt szerencsém bemutatni.[2] Szerettem volna hazánk egy másik nevezetességét, a Tokaj-eperjesi hegység gyönyörű Rhyolithosait, a birtokomban lévő gazdag gyűjteményből néhány jellemző példában kiállítani, mind ezekről — hely nem lévén — le kellett mondanom.

E tetemes reductio mellett is nagyon szegény a képviselete a kiállításba fölvett tárgyaknak és geologiai vidékeknek.

Ásványtárunk egyik nevezetességét — mondhatnám — az égiektől származó kincsét képezik a gyulatelki mócsi meteoronkő-hullásnak darabjai, melyek közül igen sok aprón kivűl a 35 k 700 g súlyú legnagyobb darab is hozzánk került és múzeumunkban őriztetik.

Sok tekintetben nevezetes a mocsi esés a *Meteoritis*ek történelmében, azért nagyon éreztem annak szükségét, hogy a legnagyobb példát[3] bemutassam az érdeklődőknek, a kik között akadt olyan amerikai társunk is[4], a ki nem sajnálta az időt, fáradtságot és a

[1] A szobi Sághhegy andesitjáról és kőzetzárványairól. Földt. Közl. 1895. 164. l. A magyarországi korund-előfordulásokról. Földt. Közl. 1899. 240. l.

[2] Sztolna környékén lévő telér-andesitekről. Erd. Múz. Értesitő. Term. szak, XX. köt. 1898. 1. l.

[3] A nagyságra nézve közbötlenűl ezután következő két példa már 8 kg-nál csak kevéssel nehezebb. Ezek egyike a British Museum-ben, másika a budapesti Nemzeti Múzeumban őriztetik.

[4] Ez a társunk Prof. Ward, aki éppen most küldte meg Meteoritis gyűjteményének nyomatott catalogusát. „The Ward Coonley collection of Meteorites Chicago, 1900", melyből kitűnik, hogy 424 esésből vannak képviselői, melyeknek összes súlyuk 1,399.094 gramm.

költséget, Szt.-Pétervárról Kolozsváron át utazni haza, csak azért, hogy a mócsi esésnek legszebb példáit gyűjteményünkben szinről-szinre láthassa, esetleg cserélhessen belőlük. De másrészt visszariasztott e becses példának a jelenleg Páris felé áramló óriás forgalomba bocsátásától a felelősség érzete, a mely a tárgyak megőrzését illetőleg reám háramlik. Végül úgy oldottam meg a kérdést, hogy gyps-lenyomatot készíttettem róla s ezt az elég jól sikerűlt 29 cm magas 40·5 cm széles mintát küldtem a kiállításra. Ez fogja megnyitni a földtől számitva 2 m magasságban eső legfölső polczon kiállítási tárgyaink sorozatát. E fölött csak a kiállítási tárgyakra vonatkozó rajzok és fényképek lesznek elhelyezve.

1882. febr. 3-án kevéssel 4 óra előtt érkezett az u. n. mocsi Meteoritis-tömeg ÉNy.-ról Erdély földére.[1] Terbej fölött, Hont megyében vették először észre. Nissl G. tanár számítása szerint[2] Dobsinán, Rozsnyón, N.-Károlyon át kellett jönnie és Gyulatelke fölött 14·4 km magasságban akadt meg, a hol a legapróbb darabok mihamar lehultak, a nagyobbak tovább haladtak, a legnagyobb kiállított példa egészen Mócsig.

*Meteoritis*ünk a meteoronoknak (aërolithosoknak) abba a csoportjába tartozik, a melyik a bennük lévő legömbölyödött ásványcsoportok (chondrák) után *Chondritiseknek* neveztetik. Egyik nevezetessége, hogy pontosan meg lehet állapítani, milyen helyzetben végezte útját, sőt a szóban lévő esésből származó több darabon azt is, hogy milyen irányú forgást végezett. Másik nevezetessége, hogy a földi ásványok legközönségesebbje, a *Földpát* is előfordul benne, habár nagyon alárendelt mennyiségben. Körülbelől 0,5 mm olvadási kérge is olyan vastag, a minőt kevés más meteoronkövön találunk.

Tschermák és Koch microscopiumos vizsgálatai alapján tudjuk, hogy *Pyritis, Pyrrhotina* (66%) és nagyobb nickelvas (9·9%) szemek vannak a mócsi meteoritisekben golyó alakban, továbbá halvány sárgás zöld *Olivina* gömbök, vékony szálas (lemezesen elvált)

[1] Dr. Koch A, Jelentés az 1882. febr. 3-iki mocsi meteorkőhullásról. Erd. Múz. Értesitő. Term. szak. II. 1882. 89. l.

[2] Über die astronomischen Verhältnisse bei dem Meteoritenfalle von Mócs in Siebenbürgen am 3. Febr. 1882. Sitz. Ber. Akad. Wien, Jahrg. 1884. p. 283.

[3] A rhombusos Pyroxenonok között én csak negativus charakterüeket találtam, tehát positivus charakterű Enstatitist nem constatálhatok benne.

*Enstatitis*ek[3] és *Bronzitis*hoz hasonló apró szürke vagy barnás színű ásványok. Ezeken kívűl TSCHERMÁK említ még nehezen kimutatható *Diopsis*t, *Plagioklasis*t, kevés *Chromitis*t és egy fekete, közelebbről meg nem határozható ásványt.

Én is vizsgáltam microscopiummal ez érdekes esésnek köveit. Egy közelebbről meg nem jelölt helyről származó töredék vékony csiszolata teljesen olyan tuft-szerű kőzet benyomását tette reám, a minőnek a mócsi esés kőzeteit TSCHERMÁK leírta, de üveges rész ebben nincs, egészen ásványtöredékből áll a kőzet. Gyűjteményünkben lévő nehány régi, de most megvékonyított, mócsinak jegyzett csiszolatok tanulmányozása azonban arról győzött meg, hogy ezek erős mechanikai behatások folytán részben összemorzsolódott, egészen kristályos kőzetek.

Az eredeti, többé-kevésbbé szabályos kristályalakok azonban e meteoronkövekben a zúzódások miatt többnyire megsemmisűltek. De kivételesen akadnak egyes ásványok elég jól megmaradt kristályos körvonallal, nevezetesen találtam egy 100 $\infty\bar{P}\infty$ szerint metszett, idiomorphus *Olivina*-kristályt, apró, fekete ércz-zárványnyal, melyet egy oldalról allotriomorphus, rá eső fényben fekete szegélyű, de sárga belsejű ércz vesz körül. Az *Olivina* nagyon sűrű, hasadási lapjai közzé a fölületről vékony földpátléczek húzódtak be, melyek elsötétedése hosszirányuktól számítva 36° alatt történik, és ez az irány a kisebb törésmutatónak az iránya.

Előfordulnak e meteoronkövekben ikerképződések is. A TSCHERMÁK-tól említett, mindenesetre nagyon gyéren előforduló földpátikreken kivül találtam (101) $\bar{P}\infty$ szerint körösztalakúlag átnőtt *Bronzitis* iker-kristályt.

Ez észleletek után nem tarthatom mócsi meteoronkövünket vulcanicus működéskor folyékony állapotban kidobott, megkeményedett csöppöknek[1], sem pedig tuff-szerű képződménynek.

A ditró—gy.-szt. miklósi Syenitis-terület.

A ditró-gyergyószentmiklósi *Nephelina-Syenitis* egyik elsőrendű kőzettani nevezetessége nemcsak Erdélynek, hazánknak, hanem

[1] TCSHERMÁK, Sitz. Ber. Akad. Wien, 85. B. 1882. p. 19, továbbá Lehrbuch der Mineralogie. Wien, 1894. p. 582—583.

mondhatnám az egész európai continensnek, mert effajta kőzetek kevés helyütt fordulnak elő.[1]

Ezt nem is tekintve, súlyt helyezek a ditró-környéki *Syenitis*ek bemutatására azért is, mert ezek közt alkalmam van eddigelé onnét ismeretlen kőzetfajtákat bemutatni, melyek alapján megváltoznak e *Nephelina-Syenitis*-terület képződésére vonatkozó eddigi nézeteink is. A mondottakból könnyen érthető, hogy ennek a területnek kőzeteivel ásvány- és földtani intézetünk sokat foglalkozott a multban[2] és foglalkozik a legutóbbi időben is.

A kiállításra alkalmas példák gyűjtése és a kőzet előfordulásának a helyszinen való megismerése czéljából mentem 1899 nyarán segédem, Szolga Ferencz társaságában Ditróra, a hol mindjárt legelső kirándulásunkon, a tölgyesi szorosba vezető új út gyönyörű föltárásain meggyőződtem arról, hogy itt nem egy egységes, csak csikos-sávos (schliere-s) kiválású eruptióval van dolgunk, mint eddig gondoltuk,[3] hanem többféle kiképzedésű és különböző telérektől átszeldelt, injiciált irruptió tömeggel, a melyik e tekintetből hasonlít a Brögger classicus leírásából jól ismert déli norvégiai *Syenitis*-területhez.[4]

Laboratoriumi vizsgálataim alapján constatálom, hogy az eddig

[1] Portugallia déli részén, Foyán, a Pyreneusokban Pouzac vidékén az Uralban Miask-on (Ilmen hegység), továbbá a Lappföldön Kóla félszigeten, a Bottni-öbölben Alnő szigetén, Svédországban Elfdalen-en, déli Norvégiában Christiania vidékén.

[2] Dr. Koch Antal, Erdély keleti részének némely geologiai viszonyai.

Bajkó Mór, A Gyergyó-piricskei hegytömzs földt. szerkezete. Egyetemi pályadijat nyert dolgozat. Kéziratban 1876.

Koch A, Erdélynek a műiparban értékesíthető ásványairól és kőzeteiről, s u. a., A ditrói Elaeolith új vegyelemzése, ugyanannak és a kék Sodalithnak górcsővi szerkezete. M. T. Akad. Term. Értek. VIII. köt. X. sz. 1878. 26. l.

Herbich Ferencz, A Székelyföld földtani és őslénytani leirása. A M. Kir. Földt. Int. Évkönyve. V. köt. 2. füz.

Koch Antal, A ditrói syenittömzs kőzettani és hegyszerkezeti viszonyairól. M. T. Akad. Term. Értek. IX. köt. II. sz. 1879.

[3] Koch Antal, A ditrói syenittömzs kőzettani és hegyszerkezeti viszonyairól. M. T. Akad. Term. Értek. IX. k. II. sz. 1879; u. a., Petrographische u. tekt. Verhältnisse des Syenitstockes von Ditró in Siebenbürgen, N. Jahrb. Miner. etc. Jahrg. 1880. II. p. 132—178.

[4] Brögger. W. C., Die Mineralien der Syenitpegmatitgänge der südnorvegischen Augit und Nephelinsyenite. Zeitschr. Kryst. Min. Leipzig, 1890.

ismeretes, közönséges Nephelina-Syenitiseken és *Sodalithos-Syenitiseken* (*Ditroitis*eken) kívűl előfordulnak itt ezeknek teléreiként *Aegirina-Tinguaitis*ek, *Amphibolon-Camptonitis*ok, utóbbi többnyire *Barkevikitis*-féle *Amphibolon*nal vannak *Nephelinát* nem tartalmazó alkáli *Syenitis*ek (*Nordmarkitis*ek), *Quarz* nélkül és *Quarz*-czal, továbbá érdekes contactustermékek.

A köz. *Nephelina-Syenitisek*ben az *Orthoklasis*okon kivűl megtaláltam a többi alkáli földpátokat, nevezetesen *Mikroklinát* és *Mikroperthitist*, mit már ROSENBUSCH is emlit[1], továbbá *Anorthoklasist*, *Albitist*, *Oligoklasis-Albitis*eket és ezek rendkivűl finom, sokszor nagyon érdekes mikroperthitises összeszövéseit, ritkán *Oligoklasist* is.

A hely szűke miatt 17 példában mutattam be e RATH G. becslése szerint 20—21 km hosszú és 7—8 km széles Syenitis-eruptio területet.[2] Közülök a hét első a *Nephelina-Syenitis*ek granitós, porphyrás kiképződését, továbbá az egyes ásványok uralkodó kifejlődését van hivatva illustrálni, úgy hogy mind a hét példa úgy a szabad szemmel is föltünő színes ásványokat, valamint a szövetet tekintve lényegesen különbözik egymástól.

Az első példa (2 sorszám [II-ik tábla: 1, 2 ábra] csiszolatokkal, mikrophotographiával) egy 40 cm széles és 19 cm magas *Nephelina-Syenitis*-tuskó, a melyet a tölgyesi új útnak Ditrótól körülbelől 3·5 km-re eső bevágásából hoztam. Méltó párja a mócsi nagy *Meteoritis*nek, melylyel együtt a 110 cm széles szekrénynek legfölső sorát megtölti.

Az *Amphibolon*ok nagysága köti le figyelmünket e példán a legelső tekintetre. Az 1 cm-nél vastagabb oszlopok ebből a tekintélyes magasságból is jól látszanak, a fehér ásványok porphyrásan kiképződött egyénei ellenben nem; ezek összeolvadnak az apró kristályos alapanyagszerű részszel.

Az egész öregporphyrás kiképződésű kőzet aprószemű palás szerkezetű *Syenitis* kőzet közzé nyomult be, a melyből a példa

[1] Mikroskopische Physiographie III. Auflage. Stuttgart, 1896. p. 176.

[2] RATH G. vom. Das Syenitgebirge von Ditró etc. Verhandlungen der niederrheinischen Gesellschaft für Natur ü. Heilkunde. Bonn, 1876. 3. 1.

egyik fölületén vékony burok látható. A föltöréskor a nagy ásványok külső részükön gyakran zúzódásokat szenvedtek.

Összesen 8 vékony csiszolatot vizsgáltam meg ebből a nagy példából, és pedig leginkább annak a palás burok közelébe eső, sűrűbb részéből, és meggyőződtem arról, a mit mikrophotographiáim is jól mutatnak, hogy a nagy ásványok között lévő alapanyagszerű részt apró szemek és nem pálczikák alkotják, (II. tábla 1 ábra) a melyek közepes méreteit 0·5 mm-re becsülhetjük.

Sok sajátos tulajdonságot veszünk észre az *Amphibolono*kon, a melyek az álló oszlop és a hoszanti véglap ∞P (110) és $\infty P \infty$ (010) egyenlő erős fejlettsége következtében, harántul törve, szabályosnak látszó hatszögű alakokat adnak. Microscopiummal azonban úgy találjuk, hogy az *Amphibolon*ok többnyire kettős ikrek a $\infty \bar{P} \infty$ (100) szerint.

A szabad szemmel nézve, sötét zöld szinű, ugyanilyen karczú *Amphibolon*oknak 0,03 mm vastag, vagy ezt megközelítő vastagságú lemezei microscopium alatt legnagyobb részt barnás-zöldnek látszanak, de gyakran rostos szerkezetet vesznek föl és helyenként vörös szint öltenek.

Pleochroismusuk erős, amennyiben a sötét zöldes-barna (n_g és n_m) és világos sárgás-zöld szin (n_p) között mozog. Elsötétedése a $\infty P \infty$ (010) metszetben $c - n_g$ 18°, kettős törési szine pedig 35 μ vastagságnál I r. kékig emelkedik. (Harántúl metszve, nagyon szűk nyilású két tengely kilépését láthatjuk, olyan félén, mint a legtöbb Biotitisen, csakhogy nem tisztán.) E tulajdonságok leginkább hasonlítanak a közönséges *Amphibolon*ok tulajdonságaihoz, habár nem felelnek meg teljesen azoknak. *Biotitis* lemezek gyakran látszanak bezárva, úgy, hogy az *Amphibolon* c tengelyével a *Biotitis* jó hasadási iránya esik össze. Vajjon zárványokkal, vagy pedig az *Amphibolon*ból átalakult *Biotitis*ekkel van-e itt dolgunk, azt az eddigiek alapján nem tudom megmondani.[1] Az *Amphibolon*ok hasadásaiban *Sphen* pálczikák vannak gyakran. Az *Amphibolon* sokszor csomókban gyűlik meg, a melyek közé *Biotitis* is keveredik.

[1] Dr Koch A. a Neph. Syenitisek Biotitiséről általában véve azt tartja, hogy Amphibolonból származnak. L. A ditrói syenitistömzs. M. T. Akad. Term. Értek. IX. köt. II. sz. 26. l.

Sem a nagy, gyakran erősen összenyomott, hullámosan sötétedő, sem pedig a kis, többnyire isometriás földpátokon nem lehet kristályalakokat fölismerni, legföljebb annyit vehetünk észre egyes nagy kristályokon, hogy táblásan vannak kifejlődve a hosszantilap (010) szerint, vagy némelykor oszlopokat alkotnak az álló (c) tengely irányában.

Oligoklasis-Albitisek $Ab_6\ An_1$ és ritkábban $Ab_4\ An_1$, uralkodnak úgy a nagy, valamint a kis földpátok között is, habár utóbbiak között gyéren *Oligoklasis* is előfordúl. Csak ritkán alkotnak nagyon vékony lemezekből álló sokszoros ikreket.

Orthoklasist főleg a nagy földpátok között találunk, a melyek sokszor nem alkotnak ikreket. Nem iker földpátkákat bőven találni az apró, isometriás nemek között is, a melyek legalább részben talán szintén *Orthoklasis*okhoz tartoznak. Apróságuknál fogva ezek pontosabb optikai meghatározásokra nem alkalmasak.

Mikroklina, apró, rácsos szerkezetű egyéneket alkotva, nagyon alárendelten fordúl elő. Ritkán mikroperthitisesen összenőve találjuk *Orthoklasis*sal vagy *Albitis*sel, sőt *Oligoklasis-Albitis*sel is.

Albitis leginkább a nagy földpátok között található, rendesen $\infty \breve{P} \infty$ (010) szerint táblásan kiképződve. Az aprók között is akad elvétve, de itt, úgy látszik, gyakoriabbak az *Oligoklasis-Albitis*ek.

Cancrinitisek apró szemei kis mennyiségben fordulnak elő e kőzetben, csak egyes helyeken gyűlnek meg tömegesebben. A föntemlített, *Muscovitis*sel való társulásán kivűl földpátokban is találjuk. Erős kettőstöréséről, egy optikai negativus charakterü tengelyképéről könnyü fölismerni tiszta fehér szemecskéit.

Sodalithos nagyon alárendelten akad benne a *Cancrinitis*hez szegődve.

A fölsorolt ásványokat mennyiségük szerint így sorakoztathatjuk: uralkodnak a földpátok, azután következnek *Amphibolon*, *Nephelina*, *Sphen*, a névtelen ásvány, *Biotitis*, *Muscovitis*, *Calcitis*, *Apatitis*, *Cancrinitis*, *Sodalithos*, *Zirkon*. Ha pedig a kristályosodás sorrendjét tartjuk szem előtt, akkor sorozatunk így alakúl: *Apatitis*, *Zirkon*, ércz, *Sphen*, névtelen ásvány, *Calcitis*, *Muscovitis*, *Biotitis*, *Amphibolon*, *Nephelina*, *földpát*.

A kiállított *Nephelina-Syenitis*ek 2-ik példája (3. sorszám) a Ditrópatakból származik, nem messzire a tölgyesi uton lévő, föntemlített bevágástól. Ez a fekete csillámnak, a *Biotitis*nak (*Lepidomelan*) erős fejlettségét van hivatva illustrálni.

Szabad szemmel nézve, *Biotitise* fényes, fekete, microscopium alatt vékony lemeze világos, barnás-zöld színű, convergens fényben látszólag egytengelyü. A nagy *Biotitis* fölületén azonban vannak egyes megvörösödött részletek, amelyek tengelyképe már határozottan szétnyilik két tengelyre, és e lap pleochroismusa is jól megkülömböztethető, nevezetesen a tengelysík irányában rezgő sugarak (n_g) zöldes vörsö, arra merőleges irányban pedig (n_m) vöröses zöld színűek.

A *Biotitis*eket környező fehér, uralkodólag földpátokból álló kőzetrészt szintén nagyobb ásványok alkotják; olyan apró, alapanyagszerű rész, minőt az előbbi példában leírtam, ebben nincsen. Ezek majdnem kizárólag földpátokból állanak, melyek között *Orthoklasist*, *Albitist*, *Oligoklasis-Albitist* ismerni föl. *Nephelina* nem sok van, *Cancrinitis* aránylag bőven fordul elő, kevés *Amphibolon*, *Calcitis*, érc és *Apatitis* is akad benne.

A harmadik példa (4. s. sz.) szintén a Ditrópatakból származik és a *Nephelinák* túltengését mutatja, a melyek, szabad szemmel nézve, sötét, zöldes vöröses színűknél fogva porphyrásan kiválnak a földpátok közül.

Microscopiummal is porphyrásnak találjuk e kőzetet, a mennyiben rendkivűl apró, közepes számítás szerint 0,03 mm átmerőjű szemek és táblákból álló alapanyagszerű részből nagy, sőt igen nagy több cm-nyi ásványok vannak kiválva.

A kristályosodás sorrendjében legelől kell a *Zirkont* említenem, a melynek többnyire apró, $^1/_4$ mm-nél csak némelykor nagyobb kristálykái a *c* tengely irányában rövidebbek, és az uralkodó törzspyramison kivül a basis is ki van rajtuk fejlődve. A *Zirkon*nak ugyan nagyon alárendelt szerepe van kőzetünkben, de azért eléggé állandó elegyrész.

Rendkivűl apró, sárgás-zöld színű, isotropus, csak némelykor gyengén kettősen törő *Perovskitis*-oktaëdronocskákat tompított csucsokkal (100) találni benne helyenként, a melyek közül a 0,03 mm átmérőjűek már a nagyobbakhoz tartoznak.

Érczek, leginkább *Magnetitis* vagy *Ilmenitis* nagyon alárendelt szerepet játszanak benne.

Aegirina is kis mennyiségben fordul elő, habár a nagyobb ásványok közé tartozik.

Nephelina majdnem oly sok van benne, mint földpát. Nagyon szét van szakgatva és meg van rongálva. Kimart szélein és a hasadások mentén az alapanyag apró kristályai benyomulnak, rövid oszlopkái a hasadási vonalak mentén anyagukban megváltoznak és szögleteik legömbölyödnek.

A nagy *Nephelinák*ban sok érdekes zárvány van, a melyek okozzák az ásványnak sajátságos színét. Bőven találunk ugyanis benne a basis szerint táblásan kiképződött, apró rhomboëdron-lapocskákkal combinált *Haematitis* lemezeket (vascsillám). Ezek közül a nagyobbak 0,4 mm hosszú és csak 0,01 mm vékony pálczikákat adnak átmetszve, a melyek némelykor nem merevek, hanem hullámos fölülettel birnak és többnyire, de nem mindig, úgy vannak a Nephelinába települve, hogy a két ásvány basisa összeesik.

A vérvörös *Haematitis* lemezkék helyenként fekete, vagy barna *Ilmenitis* lemezkékbe mennek át. Apró *Magnetitis* szemek is előfordulnak kisebb mennyiségben a *Nephelinák*ban, továbbá apró rácsos ikerképződésü *Mikroklina* és *Albitis* kristálykák is.

A nagy földpátok között *Anorthoklasis* fordul elő, 3—4 mm vastag, (010) $\infty \breve{P} \infty$ szerint táblásan kiképződött legömbölyödött kristályokat alkotva. Benne különböző helyzetben apró *Albitis* kristálykákat találunk, többszörös albitistörvényü ikerképződéssel, szabálytalan foltocskákat alkotva, valamint mikroperthitises összenövésben is.

Az alapanyagot nagyon apró, lemezes kiképződésű, helyenkint szemekből álló *Albitis* kristálykák alkotják legnagyobb részben, a melyekben albitises és karlsbadi ikerképződést gyakran ismerünk föl. Az apró földpátok szabálytalan külsejű sűrű szövedéke között kevés, hasonló alakú *Nephelina* kristálykát is találni, a melyek muscovitisesedni kezdenek és szűrke színnel megzavarodnak.

A 4-ik (5. s. sz.) közetben, a melyik szintén a Ditrópatak előbb említett helyéről származik, a kék *Sodalithost* látjuk erősen kifejlődve.

Microscopiummal vizsgálva, azt a lényeges különbséget találjuk közte és az előbbi *Nephelina-Syenitis*ek között, hogy a nagyobb ásványok belőle teljesen hiányoznak; az igen apró szemek olyan sűrű összeszövődésben vannak benne, mint az előbb ismertetettnek alapanyagában.

Világos szürke, majdnem színtelen, apró, igen erősen corrodált *Zirkon* szemek ebben is elég nagy számmal vannak.

Az érczek, *Pyritis, Magnetitis* aránylag nem nagy mennyiségben, és gyakran egyes sávok mentén huzódva találtatnak. Fölületükön gyakran vörös *Haematitissé* alakultak, némelykor kék *Sodalithos* burok is körülveszi őket, a melyen bizonyára az érczek átalakulásával kapcsolatos feszülési tüneményeket veszünk észre körösztözött nicolok között. Igen apró *Haematitis*-l e m e z k é k, nagyon gyéren, tisztán is előfordulnak.

Apró, zöld *Biotitis*-l e m e z k é k (n_p = világos sárga; $n_{m, g}$ = sötét zöld) sincsenek nagy mennyiségben. Némelykor az érczekhez tapadnak.

Igen apró, 20—40 μ átmerőjű földpát-szemek és szálkák sűrű szövedéke alkotja a kőzet túlnyomó részét, a melyek sokszoros Albitisikreket alkotnak. Ezeknek egymástól gyakran 20—30°-ra bekövetkező elsötétedési szögéből legnagyobb részüket *Albitis*nek tartom.

Nephelina nem sok látszik benne és ezek is inkább nagyobbak töredékeként mutatkoznak.

Sodalithosok következnek mennyiség tekintetében mindjárt a földpátok után, a melyeknek apró, megszakgatott szabálytalan sokszögletű, nyúlványos, kék szemei általában véve valamivel nagyobbak és szélesebbek a földpátoknál. Behálózzák ezek az egész kőzetet és az apró *Albitis*ek között olyan helyzetben vanank, hogy primarius képződményeknek kell őket tartanunk, a melyek, úgy látszik, többnyire a földpátok után váltak ki.

A *Sodalithos*ok képződése — úgy látszik — összefüggésben áll a *Pyritis* képződésével, mert a sodalithosos kőzetekben rendesen nagyobb mennyiségben találunk Pyritist is.

Cancrinitis kisebb mennyiségben fordul elő, mint a *Sodalithos* és egyes csoportokban van inkább meggyűlve.

Az 5-ik *Nephelina-Syenitis* (6. s. sz.) egy uralkodólag vékony táblás kiképződésű, vörös földpátokból és alárendelten közbeszorult (intersertalis) helyzetű, zöld színű, elváltozott *Nepheliná*kból álló kőzet, melyben még fekete csillámot is észreveszünk szabad szemmel. Ez a példa a Putna völgyéből, a Magosbükkel szemben, a tölgyesi út mellől származik.

A benne microscopiummal is észlelt ásványok a kiválás sorrendjében a következők.

Apatitis nagyon kevés akad, helyenkint orsóidomú kis oszlopkákat képez a *Biotitis* mellett vagy az *Amphibolon* szélén.

Az érczek közül szintén nagyon kevés és kis *Ilmenitis* szemet találunk, sokszor messzire haladt *Leukoxenon*ná alakulással a fölületén. Apró *Haematitis* lemezkék még ritkábban fordulnak elő.

Nincs nagy mennyiségben benne a *Sphen* sem, orsóidomú, többnyire kis kristályokat alkotva.

A Biotitis sötét zöldes barna, némelykor ránczosodott és *Haematitis* vagy *Magnetitis* kiválása mellett elváltozásnak indult, apró halmazokat alkot.

Zöldes barna, sokszor chloritisesedő *Amphibolon* is kevés akad e kőzetben, rendesen a már említett, korábban kristályosodó ásványokkal egy csoportot alkotva.

A hoszanti lappár szerint (010) vékony táblákat alkotó földpátok képezik a kőzet uralkodó ásványát. Mikroperthitises összenövésben többféle földpátfajt találunk együtt, a melyek között n_p körül nagyon kis tengelynyilásáról és az igen kis szöglet alatt sötétedő Albitis-ikerlemezkékre majdnem merőleges helyzetű tengelysikról, továbbá a basist megközelítő metszetben is alig 1—2^0 alatt sötétedő Albitis-iker lemezkékről *Anorthoklasis*ra ismerhetni. Ez képezi a földpátok nagyobb részét, alárendelten vele rácsos szerkezetű *Mikroklina* van összenőve, melynek elsötétedése a basist megközelítő metszetben már 15^0 alatt következik be az Albitis-iker sikjától; továbbá némelykor vékony szálakat alkotva Albitis-lemezkék szövődnek vele össze. Az Albitis- és Mikroklina-ikeren kivül karlsbadi és Periklina-ikerképződést is találunk e földpátokon.

A földpátok vörös szinét igen apró *Haematitis* lemezkék, továbbá *Limonitis*sal föstött sávos megzavarodások idézik elő. Egyes *Muscovitis* halmazokat találunk helyenként a földpátok között, továbbá a hasadások mentén *Calcitis* behuzódást is, a nélkűl azonban, hogy ez utólagos képződményeket a földpátok bomlására vezethetnők vissza.

Ép *Nephelina* nincsen a közetben, de utoljára kivált *Nephelinából* származónak kell tartanunk azokat, a szabad szemmel nézve, zöld színű csomókat, a melyek a hosszú földpátlemezek között maradt szögleteket intersertalisan kitöltik és a melyek microscopium alatt rendkivül apró *Muscovitis*-lemezkék szövedékének bizonyulnak.

Calcitis, mint a színes ásványok bomlásából származó utólagos termék, fordul elő benne, nem nagy mennyiségben.

Lényegesen külömbözik az előbbi *Nephelina-Syenitis*ektől a 6-ik, (7. s. sz.) sűrű, szürkés-zöld színű szemcsés példa, a melyben szabad szemmel csak nehezen lehet az apró ásványok közül valamit fölismerni. A ditrói Elekeseknek ama részéről származik ez a kőzet, a melyet a tölgyesi új út metsz.

A kristályosodás kezdetén képződött járulékos ásványok közül kevés, de egészen 1 mm hosszuságot is elérő, harántul hasadozott, karcsú *Apatitis* oszlopkákat találunk benne. *Titanvas* sincs nagyobb mennyiségben, de némelykor arányoslag elég nagyra nőtt szemeket alkot.

A *Sphen* az előbbieknél állandóbb és egyenletesebb ásványa e kőzetnek, szabad szemmel is láthatjuk némelykor 2—3 mm hosszú karcsú oszlopos kiképződésű kristálykáit. Sokkal alárendeltebb szerepe van a kőzet legjelentéktelenebb ásványának, a *Perovskitis*nek, melynek apró pontszerű hexaëdronait és oktaëdronkáit, egyes szétszórt csoportocskákat alkotva a földpátokban, födözhetjük föl.

A színes ásványok közül legtöbb a kékes-zöldes *Hastingsitis*-féle *Amphibolon*, melynek gyönge kettőstörése van, elsötétedési szöglete pedig $n_g - c = 26^0$

n_p = barnás zöld
n_m = sötét zöld
n_g = zöldes kék, n_m-nél világosabb.

Az *Amphibolon*nál kevesebb a szintén zöldes színű *Biotitis*, melynek pleochroismusa: $n_{g,m}$ = sötét zöld, n_p = világos sárga.

A kőzetnek túlnyomóan uralkodó ásványa, a földpát, többnyire 1—2 mm-nyi szemeket alkot, de vannak közöttük 1 mm-nél kisebb szemek is. Többféle fajhoz tartoznak, melyek között nagyon tiszta, apró *Albitist* |n_g az I bissectrix, erre merőleges metszetben az opt. tengelysik 18° szögletre esik a (001) hasadástól], nagy *Oligoklasis-Albitis*okat, *Oligoklasist*, *Oligoklasis-Andesinát* (Ab_3 An_1) és kevés *Orthoklasist* határoztam meg. Az *Olig. Andesinák* a *Mikroklináé*hoz hasonló, nagyon sűrű, rácsos, ikerszerkezettel birnak, melynek alkotásában az Albitis- és Periklina-törvényen kivűl a karlsbadi is részt vesz.

A kőzet vékony csiszolatában zúzódási irányokat venni észre, melyek mentén a földpátok össze vannak törve, és apró *Muscovitis*-lemezkék halmaza jelenik meg.

Nephelinával elég bőven találkozunk e kőzetben, nagyobb fajta, egész 3 mm-nyi, nem szabályos körvonalu, rövid oszlopokat alkotva, a melyeken az oszlopos hasadás jól látható.

Apró *Cancrinitis* szemeket főleg a *Nephelinák* körül találunk, nagyon ritkán *Sodalithost* is.

A 7-ik *Nephelina-Syenitis* (8. s. sz.) szűrkés-zöld színével és tömörségével emlékeztet az előbbenire, de lényegesen külömbözik valamennyi többitől idiomorphus nagy ásványai és igen tisztán kiképződött porphyrás szövete által, a melyet nagyon jól láthatni, különösen a mállott fölületen.

E szép példa a ditrói Putna patak bal oldaláról, a Davidpatak és Kopaszpatak közti részből származik.

A kristályosodás kezdetén kivált járulékos ásványok, ezek között különösen az *Apatitis*nek harántul hasadozott, nagyon vékony tűi, valamint apró, hatszögletü *Ilmenitis*-pontok ritkaságként vannak a kőzetben. *Sphen*nek apró kristálykáival, a melyek gyakran az *Amphibolon*ok oldalába furakodnak, már jóval gyakrabban találkozunk, de arányoslag ezek is alárendelt szerepet játszanak.

A színes ásványok közül többféle *Amphibolon* fordúl elő bővebben, mint *Biotitis*. *Aegirina-Augitis* mennyiségre nézve a kettő között áll. Tulnyomólag apró zöld *Amphibolon*okból álló basisos csomók brecciás alakjukkal némelykor, már szabad szemmel nézve is, lekötik figyelmünket.

Biotitis kis mennyiségben fordul elő; pleochroismusa a jó hasadás irányában sötét kékes-barna, n_p irányában világos sárga. Némelykor szabályosan összenőve találjuk az *Amphibolon*nal, úgy, hogy lemezei az oszloppal esnek össze.

Alárendelten *Aegirina-Augitis* közepes nagyságú kristályaival is találkozunk, melyek kettőstörése erős, egész a III. r. zöldig emelkedik, ext. $c - n_p = 21^0$

n_g = sárgás olajzöld

n_m = barnás-zöld

n_p = sötét fűzöld.

Az *Amphibolon*ok általában véve nem alkotnak nagy ásványokat, ezek is széttörve, corrodálva, egymással, sőt a *Biotitis*ekkel is összenőve, sok akadályt gördítenek a részletes vizsgálatok útjába. A kisebb mennyiségben lévő közönséges zöldes-barna *Amphibolon*okon kivül vannak közöttük kékes zöldes színű, gyöngébb kettőstörésü ($n_g - n_p$ I. r. sárga), úgy látszik, erősen dispergáló (nem sötétednek el egészen), nagy tengelyszögletü *Amphibolon*ok, a melyek tulajdonsága talán a *Hastingsitis*ével egyezik meg.[1]

$c - n_g = 28^0$

n_g = sötét kékes-zöld

n_m = sötét barnás-zöld

n_p = sárgás-zöld

Némelykor kettős ikert alkot (100) $\infty P \infty$ szerint. Apró *Sphen* zárvány gyakran van benne.

Biotitis kis mennyiségben fordúl elő; pleochroismusa a jó hasadási irányban sötét kékes-barna, n_p irányában világos sárga. Némelykor szabályosan összenőve találjuk az Amphibolonnal, úgy, hogy lemezei az oszloppal esnek össze.

Alárendelten *Aegirina-Augitis* közepes nagyságú kristályaival is találkozunk, melyek kettőstörése egészen a III r. zöldig emelkedik. Ext. $c - n_p = 21^0$

n_g = sárpás olajzöld,

n_m = barnás zöld

n_p = sötét fűzöld.

Kőzetünk uralkodó, egyúttal porphyrásan is képződött ásványa a *Földpát* és a *Nephelina*.

A nagy földpátok $\infty \breve{P} \infty$ (010) szerint vékonytáblás kristályain 1 mm-nyi közepes vastagság mellett a kézi példán 12 mm hosszú táblákat is mérhetünk, bonyolult szabályos, mikroper-

[1] Ez ásványt csak ROSENBUSCH, Elemente der Gesteinslehre 1898. 121. l. található rövid leírásból ismerem.

thitises összenövései pedig a legszebbek valamennyi e területről megvizsgált földpátokéi között.

Rendesen nem iker *Orthoklosist*, sokszoros ikerképződésű *Anorthoklasis* (n_p körül nagyon kis tengelynyilás, erre merőleges metszetben (010) hasadással 89°-ot képező opt. tengelysik, vékony Albitis-iker lemezekből finom szövedék) *Mikroklinát*, *Albitist*, *Oligoklasis-Albitist* (Ab_5 An_1) találunk benne, többnyire igen bonyolult mikroperthitises össznövésben. Gyakran *Mikroklina* a mikroperthitises összenövésű földpát nagyobb része, melynek közelítőleg basisos (001) metszetében 120°-ot képező rhombusos hálózat alakjában találjuk vékony lemezekként az *Albitis*-földpátot átszövődve. A vékony *Albitis*-lemezkék helyenként kiszélesednek.

Az Albitis- és Mikroklina-ikreken kivül rendesen karlsbadi ikrek is vannak, sőt ritkábban bavenoi törvényt is észlelhetni.

Nephelina bőven van benne, habár mennyiségre nézve jóval a földpátok mögött marad. Gyakran találjuk szabályos hatszögalakú harántmetszetét, melynek átmérője kb. 1 mm, de némelykor corrodálva van. Rövid oszlopkából és basisból álló kristályalakja sokkal épebb, mint a többi *Nephelina-Syenitis*ekben, és rajta jól látszik az oszlopos hasadás is.

A Nephelinák egészben véve eléggé épek, de egyesek muscovitisesedni kezdenek belsejükben, mások pedig külsejükön *Cancrinitis*sé alakultak. Némelykor a *Cancrinitis*-burok teljesen bezárja a *Nephelinát*, vagy pedig a *Nephelina* kristálynak csak egy része változott *Cancrinitis*sé, de a határ közöttük mindig éles.

A *Cancrinitisek* ebben a kőzetben elég nagy szemeket alkotnak, és legalább egy részük másodlagos képződménynek látszik. Rendesen a *Nephelinák*at veszik körül, de némelykor földpátok repedésébe is behuzódnak.

Az alapanyagban egészben véve ugyanazok az ásványok ismétlődnek, a melyeket a porphyrásan kiképződöttek között megismertünk. A földpátok pálczikás kiképződésűek, de nagyon egyenetlen körvonalokkal birnak. Apró *Neph linák* gyéren vannak közöttük.

A *Nephelina-Syenitis*ek változatos sorozata után az ezekkel összefüggő telérkőzetek közül két példában mutatom be először is a *Tinguaitis*eket.

Az egyik példa (9. s. sz.) Gyergyó-Szt.-Miklósról, a Csanótpatak völgyéből származik, melyet a Rétipatak beömlése fölött sziklákként kiemelkedő telér alakjában ferdén átszel. Szabad szemmel nézve, ez a kőzet sűrű, egynemű, tömör, sötétzöldszínűnek látszik. Microscopiummal meggyőződünk arról, hogy zöld színét apró, összekuszált helyzetü *Aegirina*-pálczikák okozzák, melyekkel mikrogranitós összeszövődésben találjuk kőzetünk uralkodó ásványát, a némelykor legyezőszerű halmazokat alkotó földpátot. (II. tábla 3 kép.) Járulékos ásványok, *Apatitis*, érczek (*Ilmenitis*, gyéren *Haematitis*) csak nagyon alárendelten fordúlnak elő benne. *Sphen*nek nemcsak igen apró, rendesen az *Aegirinák* fölületére tapadó szemecskéit, hanem többnyire corrodált, nagyobb kristálykáit is, habár nem nagy mennyiségben, de elég állandóan találjuk benne.

Biotitis-lemezkékkel is gyéren találkozunk; jó hasadásuk irányában sötét zöldes barnának látszanak, erre merőleges irányban pedig zöldes sárgának.

Az Aegirinák képezik a közetnek uralkodó, egyenletesen eloszlott színes ásványát. Közülük csak a legnagyobbak érik el a 0,5 mm hosszúságot és 0,13 mm szélességet. Épen maradt kristályokat csak ritkábban találunk közöttük, az ilyenek harántmetszetén meggyőződünk arról, hogy a kristálykák a harántlappár (100) $\infty P \infty$ erősebb fejlettsége következtében vastag táblásan vannak kiképződve. Az alárendelt oszloplapokkal (110) ∞ P. egyközösen menő jó hasadási vonalak majdnem merőlegesen állanak egymásra. Egy ilyen megmért harántmetszeten a *b* tengely irányában eső 0,07 mm szélességre merőlegesen 0,03 mm vastagság esett. E harántmetszetnek kettőstörési színe 0,03 mm-nél nem vastagabb lemezben I. r. fehéres-sárga.

A hosszmetszetek némelykor nagyon tompa szögletet (133°) képező két lappal vannak betetőzve, és kettős törésük (010) $\infty_{\mathrm{p}} \infty$ szerint menő metszetben II. r. zöldig emelkedik. Elsötétedésük n_p : $c = 3—4°$.

Pleochroismusuk: n_p = sötét fűzöld, foltonként sárgás
n_m = sárgás-zöld, külsején némelykor kékes-zöld
n_g = barnás zöldes-sárga.

Az Aegirinák pálczikái némelykor kisebb csoportokban vannak meggyűlve.

*Tinguaitis*ünk uralkodó ásványának, a földpátoknak több fajtáját ismerni föl rendesen nem idiomorphus, de (010) $\infty \breve{P} \infty$ szerint táblásságra hajló kiképződéssel. *Albitis*ekkel találkozunk leggyakrabban, a melyek többnyire 2—3 Albitisikerlemezből állanak. Apró *Mikroklinák* csak nagyon alárendelten fordúlnak köztük elő, több és nagyobb az utoljára kivált, nem iker *Orthoklasis*.

Nephelinák rendesen isometriás szemeket alkotnak a földpát léczek között és vékony (3 μ vastag) *Aegirina*-tüket, ritkábban földpáttűket zárnak magukba. Elég bőven fordulnak elő.

*Cancrinitis*ek szabálytalan szemcséi is bőven fordulnak elő benne, főleg a mállottabb részeken és földpáttűket, némelykor *Aegirina*-tüket is közre fognak poikilitisesen, jeléűl annak, hogy nagyobbára utólagos képződmények.

A másik *Tinguaitis* (10 s. sz.) Ditró határából az Orotvága tetejéről származik. Egészben véve hasonlít az előbbenihez, csakhogy szine kissé sötétebb zöld és microscopiummal meggyőződünk arról, hogy szálas ásványai nem annyira összekuszált helyzetüek, mint az előbbeniben, hanem inkább egy irányban rendezkednek, és a külömböző nagyságú, uralkodólag pálczikás ásványok elkülönült rétegekben gyorsan váltakoznak egymással, szóval holokristályos fluidalis szövetet mutatnak.

Az érczek közűl némelykor szivacsos, likacsos tömeget alkotó *Titanvas*at és igen apró *Haematitis* pontocskákat találunk kis mennyiségben ebben is. A legelső kristályosodási termékek között egyetlen corrodált *Zirkon* szemecskére is akadtam.

Az *Aegirinák* úgy vannak kiképződve, mint az előbbeniben pleochroismusuk is, egészben véve, olyan;

n_g = világos zöldes olajsárga

n_m = kékes-zöld

n_p = sötét-zöld. Absorptio $n_p > n_m > n_g$, de n_m majdnem egyenlő n_g vel. Ext. $n_p : c = 4^0$.

A zavartabb kristályosodás a később kivált ásványokon vehető észre. A földpátok egészben véve ebben is olyan tulajdonságokat mutatnak, mint az előbbeniben, csakhogy az *Albitis*eken, *Mikroklinák*on, *Orthoklasis*okon kivül *Oligoklasis-Albitis*ek is vannak benne. A *Mikroklinák* némelykor az *Oligoklasis-Albitis*ekbe vannak bezárva *Aegirina*-tűkkel együtt.

A *Nephelinák* is legömbölyödött, 1 mm-nél kisebb, rövid oszlopkákat alkotnak, a melyekbe apró *Mikroklinák* és *Aegirina*tük vannak bezárva, és fölületükre is tapadnak igen apró *Aegirina*tük. A nem iker *Orthoklasis*ok és *Oligoklasis-Albitis*ektől nem mindig könnyü őket megkülömböztetni; a megkülömböztetésben segítségünkre van az is, hogy a *Nephelinák* főleg szélükön kezdődő muscovitisesedésből származó megzavarodást mutatnak.

A telérkőzetek egy másik fajtáját is találtam *Syenitis*-tömegünkben, még pedig sokkal sürübben, mint a *Tinguaitist*. Ez egy erősen basisos telérközet, melyet a *Camptonitis*ekhez kell sorolnunk.

Gyakran találkozunk vele a Ditró közelében lévő föltárásokban, főleg a tölgyesi út kezdetén említett jó föltárásban, a hol az arasznyi vastagságtól kezdve tekintélyes vastagságot elérő telérek körösztül-kasúl szelik a *Nephelina-Syenitis* tömegét. Találkozunk vele továbbá a Tászok-patak környékén is.

Az első két példa Ditró közeléből van és pedig az egyiknek (11 s. sz.) vagy 3 m vastag telére a Barlang-pataktól nyugatra szeli át a *Nephelina-Syenitist*, szélein tömörebb, közepén nagyobb szemü kőzetet alkotva. A kiállitott példa a tömörebb részből származik.

Ez a *Camptonitis*, szövetét tekintve, nagyon hasonlít a Csanót *Tinguaitis*ához, amennyiben itt is nagyobbára idiomorphus, szálas kiképződésü kristálykák szövődnek összekuszált helyzetben együvé. (II. tábla, 4 kép). De a *Tinguaitis*okban a szintelen ásványok uralkodnak, ezekben ellenben a földpátok háttérbe szorúlnak az uralkodó színes ásványok mellett.

A kezdetben kivált ásványok közűl az *Apatitis*, habár nem nagy, de sokkal nagyobb mennyiségben fordúl elő, mint a *Tinguaitis*okban. Meg inkább áll ez az *Ilmenitis*ről, a melynek sokszor *Leukoxenon*-keretes szálai és szövedékei már elég bőven és egyenletesen eloszolva fordulnak elő.

Sphenek apró kristálykákat alkotva szintén bőven vannak benne.

Kőzetünk uralkodó ásványa az *Amphibolon* és pedig vöröses színű *Barkevikitis*, melyen $c : n_g$ szöglete 13—14°; de vannak elvétve, úgylátszik, *Katophoritis*hoz közeledő, ugyancsak vörös-barna *Amphibolon*ok, a melyeken $c : n_p$ szöglete fölemelkedik 22°-ig.

A karcsú, oszloposan kiképződött *Barkevikitis*ek haránt metszetein rendesen az oszlopot ∞P (110), melynek irányában jó hasadás van, találjuk erősebben kifejlődve, mint a $\infty P \infty$ (010) hosszanti lapot, de némelykor egyenlő erős mind a kétféle lap, mely esetben a harántmetszetek szabályos hatszögeknek látszanak.

Az oszlopokat betetőző lapok ritkán épek, utóbbi esetben, úgy látszik, hegyes pyramisból és épdomából állanak. Kettős törésük szine $n_g - n_p$, a közönséges *Barkevikitis*ekben I r. kékig megy föl a rendes vastagságú csiszolatokban, de a Katophoritishoz hajlókban II r. zöldig, sőt sárgáig is fölemelkedik.

Pleochroismusa n_g = sötét vörös barna, (némelykor sötét dohány-barna)
n_m = világosabb vörös-barna
n_p = világos zöldes sárga, némelykor barnás

Absorptio $n_g > n_m > n_p$.

$\infty P \infty$ (100) szerint képződött kettős ikrekkel gyakran találkozunk, némelykor pedig vékony zöld isomorphus *Amphibolon* burokkal. Bőven vannak benne apró *Sphen*, vagy *Leukoxenon* zárványok.

Diopsis is van e kőzetben, habár kevesebb, mint az *Amphibolon*, a melynél rendesen korábban vált ki. Színe világos zöld, $c - n_g$ = 38^0. Némelykor csoportokat alkot.

Nagyon kevés a *Biotitis* és a színes ásványok bomlásából származó *Chloritis*.

*Plagioklasis*okkal is bőven találkozunk ebben a *Camptonitis*ban, úgy, hogy főleg a telér közepén majdnem olyan részt vesz a kőzet alkotásában, mint az *Amphibolon*. Ezek is léczalakúlag vannak rendesen megnyúlva és némelykor sugarasan csoportosúlnak. Főleg belsejükben igen gyakran *Saussuritis*es átalakulást szenvedtek, mi mellett leginkább *Muscovitis*, *Epidoton* vált ki. Optikai meghatározások szerint *Oligoklasis-Albitis* és *Oligoklasis* sorhoz tartoznak ezek.

Az utólagos bomlási termékek: *Leukoxenon*, *Epidoton*, *Muscovitis*, *Chloritis*.

E kőzet tehát normalis kiképződésű amphibolonos *Camptonitis*.

Sok tekintetben külömbözik az előbbi *Camptonitis*tól ugyan e vidékről, de a *Nephelina-Syenitis*tömeg széléről, Ditró közeléből ugyancsak a tölgyesi út bevágásából származó *Camptonitis* (12 s. sz.), melynek 1 m vastag telére átszeli úgy a réteges amphibolonos *Syenitist*, valamint az ebben lévő pegmatitises kiválást.

Ennek a szövete ugyanis poikilitises, t. i. az utoljára kivált nagy földpátok bezárják a külömböző irányú, rendesen szálas képződésű színes ásványokat. (II. tábla 4 kép) Meg kell azonban jegyeznem, hogy ugyanazon telérből hoztam csupa szálas kiképződésű, az előbbitől lényegesen külömböző, habár külsőleg hozzá hasonló kőzetet is.

Apatitis nagyon kevés van benne, *Magnetitis*, (gyakran Haematitisosodva) sem sokkal több, igen apró szemcsék alakjában. *Sphen*nek apró kristálykái már bőven fordúlnak elő.

Diopsis nem sok van benne, zöldes-barna *Biotitis* jóval több. Uralkodó ásványa egy sajátságos kékes-zöld színü *Amphibolon*-féle ásvány, nagyon gyönge kettős töréssel, a *Hastingsitis*ekre emlékeztető tulajdonságokkal (l. 8 s. sz. közet leírását). Nevezetes dolog, hogy ez igen apró hosszú, szálas kiképződésü ásványkákon, a melyeknek hatszöges harántmetszetük van [(110) (010)], nem találunk hasadásokat, hanem inkább harántúl menő magnetitises kiválásokat, vagy némelykor hosszantmenő rostos elváltozást, a mi zavarossá teszi az ásványt.

Nagy, rendesen megnyúlt, úgy látszik (010) szerint táblás, de nem merev körvonalú f ö l d p á t o k zárják be az említett ásványokat, Albitis- és karlsbadi iker képződéssel, a melyek között optikailag *Oligoklasis-Albitis*t határoztam meg.

Calcitis és helyenkét *Epidoton* is elég bőven látszik mint utólagos termék.

A másik két kiállitott *Camptonitis* a Ditrótól északra eső Tászokpatak környékéről van, és pedig az egyik (13 s. sz.) a T á s z o k b e ö m l é s é v e l s z e m b e n, az Orotva balpartjáról.

Rendkivül szivós és az előbbiekhez hasonlitva nagy szemü *Amphibolon-Camptonitis* ez, a melyet pár méternyire föltárt egy az Orotvába délről szakadó vizmosás. Maga a *Camptonitis* egy fehér, sűrű, aplitises kőzettel van hálózatosan injiciálva. Ettől a helytől ÉNy.-ra, az Orotva jobb partján, az Aranygyász nevű helyen, Fülöp Ferencz és társainak 15033 sz. szabadkutatási táblájával megjelölve, egy tárna van hajtva, a melynek nyilásánál hasonló kőzetet találtam. Tehát itt egy vastagabb telérrel, vagy esetleg egy kisebb tömzs-szerü kiképződéssel van dolgunk.

A nagy földpátok ebben is összeragasztják az előbb kivált ásványokat és így poikilitises szövetet hoznak létre.

Minthogy általában valamennyi ásvány nagyobb ebben a *Camptonitis*ban, mint az előbbeniekben, az *Apatitis*ek is megnőttek egészen 1 mm hosszú, $^1/_6$ mm széles oszlopkákká és elég bőven fordúlnak arányoslag elő, mint a többi ásványnak a zárványai is. Az érczek úgyszólván hiányoznak, csak nagyon ritkán találni *Magnetitis*-szemeket és piczi *Ilmenitis*kéket. *Sphen* ellenben igen nagy kristályokat is alkot és bőven fordul elő.

A színes ásványok között legkevesebb a *Diopsis*. Színe világos zöld, nagyon gyönge pleochroismussal, kristályos körvonal nélkül. $c—n_g = 40^0$ körűl. Némolykor *Amphibolon* szálacska van benne, mintha uralitisosodnék.

Jóval több a *Biotitis*, melynek pleochroismusa a jó hasadás irányában zöldes-barna, arra merőlegesen világos sárgás-zöld. *Apatitis*en kivül *Ilmenitis* pálczikák is vannak benne, egymásra merőleges helyzetben, úgy hogy irányuk szöget képez a jó hasadással. A *Biotitis* az *Amphibolon* előtt vált ki.

Uralkodó ásványa, a *Barkevikitis-Amphibolon* karcsú oszlopokat alkot; egészben véve olyan alakú és általában olyan tulajdonságú, mint a 11 s. sz. közet *Barkevikitis*e, csakhogy annál sokkal nagyobb. A hosszanti lappár (010) némelykor erősebben van kifejlődve, mint az oszlop (110). A *Sphen*en kivűl *Haematitis*t és *Magnetitis*t is találunk benne. Ikerképződés, ploechroismus, ext. mint a 11 s. sz.-ban.

Helyenként rostos zavarodás vesz erőt rajta, sőt *Aegirina*vá is változik.

Allotriomorphus kiképződésü nagy földpátok veszik körűl a színes ásványokat, a melyek a kőzetnek majdnem felét teszik ki, és *Oligoklasis-Andesiná*nak, részben *Oligoklasis-Albitis*oknak bizonyulnak. Albitises, karlsbadi- és periklinás ikerképződést találunk náluk.

A Tászok patak mentén sürün találkozunk *Camptonitis*ekkel, a melyek közül még egyet (14 s. sz.) bemutatok, mint olyat, a melyik majdnem tisztán *Amphibolon*ból áll, földpát alig van benne.

A kristályosodás elején kivált járulékos ásványok szerepe ebben is körülbelől olyan, mint az előbbeniben. *Apatitis*nak egészen 1 mm hosszú oszlopkái elég bőven láthatók benne, úgy szintén érczek: *Ilmenitis*, kevés apró *Haematitis* és Titan tartalmú *Magnes-*

vas szemek leukoxenonos külsővel. A *Sphen* igen nagy szemeket is alkot.

Diopsis nem sok fordúl elő, *Biotitis* sincs annyi, mint az előbbeniben. Ezekhez a korábban kristályosodott ásvány nemekhez némelykor még kisebb, idiomorphus *Barkevikitis-Amphibolon*kák is csatlakoznak, továbbá, a később kivált nagy *Amphibolon*okba bezárva, találunk nagyon kevés *Oligoklasis-Andesina*-féle viselkedésü földpátkákat is.

A fölsorolt ásványok igen nagy, vöröses barna *Barkevikitis*ekbe vannak ágyazva, a melyek az előbbi *Camptonitis*nak földpátját is helyettesítik. A nagy *Barkevikitis*ek pleochroismusa, kettőstörése olyan, mint az előbbeniekben, de elsötétedésük szöglete ($c—n_g$) 20° jóval fölé is emelkedik, tehát a *Katophoritis*okba mennek át.

E nagy *Amphibolon*ok fölületükön, némelykor a repedések mentén belsejükben is, világos zöld *Chloritis*es ásvánnyá változnak, melyeknek az elváltozás kezdetén meg marad ferde elsötétedésük, csak később válnak a jó hasadással egyközösen sötétedő, ebben az irányban világos fűzöld, n_p irányban pedig fehéres-sárga pleochroismussal biró, 0,03 mm vastagságú csiszolatban I. r. fehéres-sárga kettőstörésü, elég nagy opt. tengelynyilású *Klinochloron*ná.

Az említetteken kivül *Calcitis*t is találunk benne, mint utólagosan képződött ásványt.

A *Nephelina-Syenitis*ek és azok savanyú és basisos telérei után három példában bemutatom azokat a savanyúbb, többé nem a *Nephelina-Syenitis*ekhez tartozó kőzeteket, a melyeket említett tájékoztató kirándulásaimon az igazi *Nephelina-Syenitis*ek boritékául találtam.

Ezek közül az első (15 s. sz.) *Biotitis-Syenitis* (*Nordmarkitis*-féle alkali-*Syenitis*) a Ditróról Borszékre vezető út mellől, az Orotva jobb partjáról származik.

Szabad szemmel nézve, fehér szinü, aprószemű kőzet ez, a melyet csak itt-ott tarkit kisebb *Biotitis* csomó.

Microscopiummal is arról győződünk meg, hogy a hypidiomorphus szemcsés szövetű földpátok mellett csak nagyon jelentéktelen szerep jutott benne a többi ásványoknak (II tabla 5 kép).

Apatitisra, csak mint nagy ritkaságra, akadunk benne. *Haematitis*es külsejü *Magnetitis*-szemek már valamivel bővebben fordulnak elő.

Biotitis uralkodik a színes ásványok között, de szerepe ennek is nagyon alárendelt. Elszórtan, némelykor csomókba meggyűlve, találjuk szabálytalan, helyenként erősen összegyürött lemezeit, melyeknek pleochroismusuk

n_{gm} = sötét, kissé vörösbe hajló zöldes-barna, majdnem teljes absorptióval.

n_p = világos sürkés-zöld.

A *Biotitis*ek odúiban némelykor tiszta *Mikroklina*-szemek ülnek, a minők gyakran körül is veszik a *Biotitis*eket, mint korai képződmények. Nagyon ritkán nagyobbacska *Muscovitis* is látható a *Biotitis*en, a melyik szintén ránczos.

A földpátok nagyobbára közelitőleg 1 mm-nyi szemeket alkotnak, de vannak jóval apróbbak és 2—3 mm hosszú léczek is közöttük. Több fajtát ismerhetünk föl, melyek között, úgy látszik, legelőször a rácsos Albitis- és Mikroklina-ikreket képező *Mikroklinák* kisebb, nagyobbára isometriás szemecskéi váltak ki. Ezek általában véve épebbek és tisztábbak, mint a többi földpátok, csak kivételesen kezdenek muscovitisesedni.

Az *Orthoklasisok* szabálytalan körvonalú, egészben véve (010) szerint táblás, a *Mikroklinák*nál nagyobb kristályokat alkotnak és némelykor apró *Mikroklinák*at zárnak magukba.

Albitis és *Oligoklasis-Albitis* fajták uralkodnak a földpátok között, a melyeknek az álló tengely *c* szerint kissé megnyúlt, a hosszanti lap (010) szerint táblás kristályuk egyuttal legnagyobbra is nőtt. Némelykor rendkivül vékony *Albitis* léczekből álló *Oligoklasisok*at is találunk közöttük.

A földpátok részben m u s c o v i t i s e s e d é s n e k indultak, mit elősegítettek mechanikai hatások is, melyek egyes ásványrészeket kimozditottak eredeti helyzetükből, továbbá a némely földpátban bőven előforduló vonalas, szabálytalan alakú levegő zárványok is.

Lényeges a külömbség tehát e *Biotitis-Syenitis* és az előbbi, a *Nephelina-Syenitis*ekhez tartozó kőzetek között, nevezetesen: a *Biotitis-Syenitis*ből hiányzik nemcsak a *Nephelina*, a mi már a *Camptonitis*okban sem volt meg, hanem hiányzik a *Sphen*, az az ásvány, a melyik az előbbi kőzetek legtöbbjében meg volt, ezzel kapcsolatban az Ilmenitis, hiányzik az *Amphibolon* és az *Aegirina*.

A második kiállitott kőzet ezek sorában (16 s. sz.) egy a borszéki útnak Ditrótól távolabb eső részéről, az egész eruptiotömeg széléről, a Puskás pataknak a Halaságpatakba szakadása mellől származó *Quarz-Syenitis* (*Quarz Nordmarkitis*), még inkább különbözik a *Nephelina-Syenitis*ek csoportjától.

Szabad szemmel nézve, megkülönböztetjük az előbbeniektől a sok apró *Quarz* jelenléte által, a mi tulajdonkép microscopium alatt is a fő külömbség, mert szövetére és egyéb tulajdonságaira nézve hasonlit a *Biotitis-Syenitis*hez.

A legelső termékek között rendkivül gyéren található *Haematitis* pontocskán kivül *Zirkon* akad benne gyakrabban.

A kis mennyiségben előforduló, némelykor chloritisosodott *Biotitis*ek ritkán *Muscovitis*re rakódtak le.

Az uralkodó ásvány a földpát, melynek itt is majdnem ugyanazon fajtáit találjuk, mint az előbbeniben, nevezetesen *Mikroklinát* valamivel bővebben, mint az előbbeni közetben, aztán *Orthoklasis*t legömbölyödött kis szemeken kivül nagyobb szemekben is, és *Oligoklasis-Albitis*t elég bőven, albitises- és periklinás iker képződéssel. Ezeken kivül *Quarz-Syenitis*ünkben *Anorthoklasis* is van rendkivül finom albitises és karlsbadi ikerképződéssel, némelykor mikroperthitisesen összenőve *Oligoklasis-Albitis*sal.

A földpátok elváltozása, muscovitisesedése általában nagyobb fokú, mint az előbbeni kőzetben.

Legutoljára a *Quarz* vált ki és pedig elég bőségesen, benne egyes sávok mentén folyadék zárványok vannak, némelykor nagyon élénken mozgó libellával. Hullámos elsötétedése utólagos mechanikai hatásra vall.

E savanyú *Quarz-Alkali-Syenitis* a ditrói *Syenitis*-tömeg legkülső boritékát látszik alkotni. Mint ilyen, benyomúl a csillámos palás homokos kőzetbe, a mely az egész tömeget körülveszi.

Egy ilyen igazi injicialt nagyobb contactus kőzetet mutatok be végül (17 s. sz.) a Puskáspatak völgyének alsó részéből, a melyen szabad szemmel láthatjuk, hogy a fehér *Quarz-Syenitis* összeszövődik egy apró szemü biotitises palás fekete kőzettel.

Microscopiummal meggyőződünk, hogy a *Quarz-Syenitis* ugyanaz a typus, a melyet utoljára vázoltam, nevezetesen az első képződmények közül apró 10—50 μ hosszú *Zirkon* kristálykák rövid oszlopkái (110), pyramissal tetőzve, fordulnak benne elő. A *Biotitis* gyakran erősen meg van görbülve, és érez válik ki belőle. A földpátok is igen erős mechanikai behatásokról tanuskodnak: igen apró szemcsék között egyes nagyobb, hullámosan sötétedő szemek fordulnak elő, a repedésekbe a széleken apró szemek nyomulnak be, belsejükben pedig egy irányban huzódó légzárványok, továbbá m u s c o v i t i s e s e d é s e k fordulnak elő.

A földpátok között *Mikroklinát*, *Orthoklasist*, *Oligoklasis-Albitist* (Ab_5 $An)_1$, *Mikroklina-Mikroperthitist* ismerhetünk föl.

A *Quarz* szemek nincsenek egyenletesen eloszolva a kőzetben, rendkivül elevenen mozgó libellás folyadék (szénsav) zárványokat, továbbá kiszáradt, hátrahagyott üregeket tartalmaznak és, a mennyiben erős mechanikai hatásokat nem mutatnak, legalább részben utólagos képződményeknek látszanak.

Az apró biotitises palás kőzet vékony csiszolatában igen apró *Biotitis*, kevesebb *Muscovitis*-léczek, h o m o k o s *Quarz*-s z e m e k, továbbá átkristályosodó agyagos részletek vannak bőven, kevesebb *Magnetitis*, még kevesebb földpát-szemecske és *Pyroxenon* ismerhető föl.

Több tekintetben hasonlít ehhez az apró szemü palás részlethez a 18 s. sz. példa, a melyik G y e r g y ó - S z t. - M i k l ó s határából, a C s a n ó t v ö l g y é n e k a B o d u t j a v ö l g y beszakadása alatti részéről származik, a mely a csillámos, homokos palának e x o g e n e u s c o n t a c t u s k é p z ő d m é n y é t van hivatva bemutatni.

A microscopiumos vizsgálat azt mutatja, hogy ez egy túlnyomólag agyagos kőzet átkristályosodásából származó pala, a melyben uralkodó uj képződmény a *Muscovitis*; *Biotitis* jóval kevesebb. Ezek a csillámok részint karcsú léczalakuak és nem követik szigoruan megnyúlásukkal a palásság irányát, részint pedig szabálytalan alakú széles egyének, a melyek bezárják az előbbieket és a *Magnetitis*-szemecskéket.

A Quarz-szemek halmaza rendesen vékony, tiszta eret képez egy maga a palásság irányában és nem sötétedik hullámosan. Ezeken kivűl egy alakuló nagyobb ásványnak (*Andalusitis*?) gömbös, más metszetben megnyult alakja is kivehető, a melyben az előbbiek, főleg csillámok, vannak bezárva.

A következő táblázatban összehasonlítva mutatom be a ditró-gy.-szt.-miklósi *Syenitis*-terűlet főbb kőzetfajtáinak vegyi összetételét a helybeli vegykisérleti állomáson készűlt elemzések eredménye szerint:

I. *Nephelina-Syenitis* a tölgyesi út bevágásából Ditró közeléből.
II. a 9. sz. *Tinguaitis* a gy.-szt.-miklósi Csanótpatak völgyéből.
III. a 12. sz. *Camptonitis* a tölgyesi út bevágásából, Ditró közeléből.
IV. a 15. sz. *Biotitis-Syenitis* (Nordmarkitis) Ditró E. a borszéki út mellől.
V. a 16. sz. *Quarz-Syenitis* (*Quarz-Nordmarkitis*), a Ditrói Halaságról.

	I.	II.	III.	IV.	V.
SiO_2	53·58	55·46	49·46	62·52	67·99
TiO_2	0·27	0·20	1·88	—	—
Al_2O_3	25·26	24·49	19·82	23·54	17·54
Fe_2O_3	0·64	2·63	5·69	2·15	1·17
Mn	—	nyom	—	—	—
FeO	1·20	1·06	5·82	1·38	0·82
MgO	0·08	0·05	1·93	0·26	0·13
CaO	1·20	0·92	10·62	1·65	1·44
Na_2O	10·49	9·78	3·38	4·16	4·92
K_2O	5·28	5·16	0·71	4·02	5·78
H_2O	0·04	0·07	0·06	0·03	0·05
SO_3	—	—	—	nyom	—
P_2O_5	nyom	gyenge nyom	—	—	—
CO_2	0·79	—	0·31	—	—
Cl	0·50	—	—	—	—
	99·33.	99·82.	99.68.	99·71.	99·84.

A *Syenitis*-tömzszsel összefüggő egy másik kőzet az az asbestonos kristályos mészkő, a melyet (19. s. sz.) Gyergyó-

Szt.-Miklósról és az a fehér márvány, melyet (20. s. sz.) csiszolt állapotban Gy.-Szárhegyről kiállítok, abból a czélból, hogy hazánk keleti részének ipari szempontból is fontos e közete, a melyet igazán még mindig csak az utak kövezésére használnak,[1] szélesebb körben ismeretessé váljék. Annál kivánatosabbnak látszik ennek ismertetése, mert a csíki vasutak kiépítésével hazánknak szóban lévő elrejtett kincse is jobban megközelíthető lesz.

Még egy szép, opalusodott nyirfa (Betula alba) szárat mutatok be (21. s. sz.) erről a vidékről, Gyergyó-Remetéről, a mely neogeneus képződmény átvezet egyuttal a következő csoportba.

II. Hargita és a Déli Kárpátok.

A Hargitának, ennek az Európa leghosszabb harmadkori hasadékán fölépült sajátságos, nagy részében fönsíkszerű kiképződésü Andesitis-hegyláncznak igazi képviseletére a hely hiányában nem gondolhattam, azért csak néhány érdekes képződményt mutatok be innét 9 példában.

Ezek között első helyet foglal el a dísztárgyak készítésére nagyon alkalmasnak mutatkozó, de tudásom szerint még mindig parlagon heverő korondi *Aragonitis,* melynek a legtarkább színekben váltakozó, szebbnél szebb fajtáit 1 nyers és 5 csiszolt példában sem tudom teljesen bemutatni (22—27. s. sz.). Mennyivel inkább megérdemelné ez a meleg forrásokból lerakodó, valóban szép és jó anyag a földolgozást, mint a zsoboki *Gypsum* (a kereskedésben hibásan u. n. Márvány!)

A Hargitának egy másik ásványtani nevezetessége a Bibarczfalván, a kakukhegyi *Amphibolon-Andesitis*ek hasadékában és elmállott fölületén az eruptiót követő gázokból lecsapodott szép táblás *Haematitis,* a melyik kiváló helyet foglal el nemcsak nagysága, hanem kristálylapjainak kitünő tükrözése és fejlettsége révén is Erdély ásványai között. DR. SCHMIDT SÁNDOR mérései folytán[2] a következő alakokat ismerjük rajta: oR (0001), $\infty P2$ (11$\bar{2}$0), $\frac{4}{3}P2$ (22$\bar{4}$3)

[1] *Vasláb* községen átutaztomban egy olasz kőfaragót találtam, a ki a mult év elejétől készit ebből a szép márványból, — a melyet azonban még nem fejtenek rendes kőbányában, — sírköveket, emlékeket.

[2] Erd. Múz. Értesítő. Term. Szak. IV. köt. (1882). 259. l.

R (10$\bar{1}$1), — 2 R (02$\bar{2}$1), — $\frac{1}{2}$ R (01$\bar{1}$2), — $\frac{1}{2}$ R 3 (12$\bar{3}$2). Vegyi összetétele JAHN KÁROLY és HASSÁK MÓR elemzése szerint[1] Fe = 70·27%, O = 29·43%.

Három példában mutatom be ezeket (28—30. s. sz.), a melyek közül egyik a még eléggé ép *Amphibolon-Andesitis* fölületére lerakodott *Haematitis*, a másik nyirokká mállott kőzeten látható gyönyörü kristály-csoport, végül a harmadik a legnagyobb táblákból választott *Haematitis*-kristály.

A Déli-Kárpátokból mindössze a felső sebesi szép, kék, erősen összegyürt csillámpala *Quarz*ában kiképződött *Disthenes*t állítom ki. (31. s. sz.).

Erdélyi Érczhegység és környéke.

Kiállításunk tekintélyes részét az Erdélyi Érczhegységből származó példák teszik. Termés arany és tellusérczeinél fogva páratlan hely ez egész Európában, sőt első rendü az egész földön. Már a rómaiaktól rendszeres bányákban termelt és ma is kifogyhatatlanak látszó nemes ércei iránt élénken érdeklődik a külföld is. Több tekintélyes külföldi tőke megsokszorozódott itt már és gazdagon kamatozik jelenleg is. Egyesek ezek közül az érczelőállítás költséges, de czél- és korszerű berendezéseinek alkalmazásával követésre méltó példát szolgáltatnak.[2]

Legelőször is aranyaink előfordulási módját mutatom be nehány szép példában. Muzeumunknak, mint első sorban helyi gyűjteménynek, egyik erős oldalát képezik különben is az erdélyi aranyak.

A kiállított 8 termés arany példa közül egy (32. s. sz.) offenbányai, hat verespataki (33—37. s. sz.), egy (38. s. sz.) vulkoji. Ezek aranyaink jól kifejlődött kristályalakjait, szálas, hálózatos, lemezes kiképződési formáit kárpáti *Homokkö*vön, *Quarz-Trachytis*en, *Trachytis*-breccián, *Calcitis*-telértöltelékben, *Quarz*on, továbbá az aranynyal együtt előforduló ásványokat (*Adularia*, *Dolomitis*, *Calcitis*, *Quarz*) illustrálják.

[1] Vegyt. Lap. Fabinyi 1882. 2. sz.

[2] Ilyet volt alkalmunk látni a magyarhoni Földtani Társulat 1899. julius havában rendezett kirándulása alkalmából Brádon, a mely mögött messze el marad a magyar állam verespataki berendezése.

Az aranyak után Érczhegységünk nehány egyéb, szép és jellemző ásványai következnek, nevezetesen:

egy példa (39. s. sz.) a porcurai páratlan szépségű *Pyritis* kristályokból,[1]

két példa (41, 42 s. sz.) *Markasitis* Verespatakról,

egy *Hessitis* szép ágas kristálycsoport a botesi bányából,

egy *Sylvanitis* példa (43 s. sz.) Offenbányáról és

egy másik (44 s. sz.) Nagyágról,

két *Nagyágitis* (45, 46 s. sz.) Nagyágról,

három példa *Quarz* (47—49 s. sz.) Verespatakról,

és pedig *Quarz-Trachytis*ben nőtt u. n. „bipyramisos *Quarz*", egy szép ránőtt viztiszta *Quarc* csoport és egy, részben *Dolomitis*sal bekérgezett, a *Quarz-Trachytis* üregében nőtt *Amethystos* csoport.

Ezek után 7 drb, csiszolt lapú, színes *Quarz* fajta következik, (50—56 s. sz.), a tekerői (4), toroczkói (2) és brádi (1) *Porphyrá*ból, illetőleg *Porphyritis*ekből, annak bemutatására, hogy milyen tetszetős, szinekben gazdag *Achates*-félék fordulnak elő Érczhegységünkben.

A boiczai *Dolomitis* pseudomorphosát (57 s. sz.), a nagyalmási *Calcitis* és *Dolomitis* kristálycsoportot (58 s. sz.) egy-egy példában mutatom be, a nagyági *Rhodochrositis*eket pedig két példában (59—60).

Végül a herczegányi *Amphibolon-Andesitis*en képződött, szép *Desmina* kristály csoport (61 s. sz.) és a boiczai, a (010) és (101) lapok egyenlő erős kifejlődése következtében érdekes *Barytis* kristályok (62 s. sz.) fejezik be Érczhegységünk ásványait.

Nem csak tudományos, hanem részben bányászati szempontból is becses ásványok e sorozata után Piskivel szemben, a Maros jobb partján eső Aranyi hegynek kőzetét és ásványait mutatom be (63—72 s. sz.), a mely hegy Érczhegységünkkel topogra-

[1] Ezeknek krsitályalakjait: $\infty O \infty$ (001), O(111), $^3/_2 O$ (332), 2O (221) 2O2 (211), 3O3 (311), ∞O (210), $\left[\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\right]$ π (321), $\left[\frac{4O2}{2}\right]$ π (421), $\left[\frac{\frac{5}{2}O\frac{5}{3}}{2}\right]$ π (532), — $\frac{\infty O 2}{2}$ π (012): Dr. Schmidt Sándor ismertette meg Term. Füz. XIII. k. (1890.) 88. l.

phiailag összefüggésben áll, habár geologiailag már inkább a Pojana Ruszkához tartozik.

Ennek a kis hegynek ásványtani érdekességei intézetünk akkori igazgatójának, Dr. Koch Antal egyetemi tanárnak, 1877—1879-ban végezett tudományos működése révén váltak ismeretessé,[1] a mi többek között egy új ásványt, a *Pseudobrookitist* is szolgáltatott a tudománynak.

Az Aranyi hegyről való sorozatot legépebb kőzetével, egy kékes szürke *Andesitis*sel kezdem, melyet vékony csiszolatban is kiállítok. Ennek a vizsgálása folyamán arról győződtem meg, hogy ez mikrokristályos, fluidalis szerkezetü *Augitis-Andesitis,* amelyből nagyobb ásványok majdnem egészen hiányoznak, a melynek lávája kevéssé kristályosodott állapotban került a fölületre.

A kőzet nagyobb részét 0,15 mm.-nyi földpát szálacskák egy irányban rendezkedett sürü szövedéke alkotja, a melyek hosszukkal egyközösen, vagy attól kis szög alatt sötétednek. Vannak közöttük azonban valamivel nagyobb, többszörös Albitisikreket alkotó földpátléczek is, melyeknek elsötétedésük egymástól 40°-ra is fölemelkedik.

A földpátok zavart szövedéke kristályosodott ki legutoljára és, mint ilyen, közönséges fényben nézve, egynemü, alapanyagszerü részt látszik alkotni.

Elég bőven találunk jóval nagyobb, de 1 mm-nél még mindig csak ritkán hosszabb *Biotitis* szálakat is, csakhogy ezek kivétel nélkül resorptiót szenvedtek, *Magnetitis* vált ki belőlük, és e mellett olyan *Csillámmá* lettek, a melynek plerchroismusa n_{gm} irányában vörös barna, nem tulságos nagy absorptióval, n_p irányában pedig vöröses zöld.

Apró *Magnetitis*-szemcsék bőven vannak elhintve egyébként az egész kőzetben, de *Apatitis*sal csak nagyon gyéren találkozunk.

Augitis-mikrolithosok képezik a kőzet uralkodó szines ásványát, a melyek közül csak a nagyobbak érnek el 1 mm hosszúságot 0·2 mm vastagság mellett. Az oszlop lapokon (110) kivül a haránt-

[1] Dr. Koch A. Az Aranyi-hegy kőzete és ásványai stb. M. T. Akad. Math. Term. Közl. XV. 1877/8. 23 l. Továbbá Erd. Múz. Értesítő. Term. Szak, 1879. 154 l., valamint Math. Term. Értesítő. III. kötet, 5 füzet.

lappárt (100) és némelykor alárendelten a hosszanti lappárt (010) találjuk rajtuk kifejlődve. Egy másik kőzet csiszolatában zonás szerkezetü Augitiseket találtam, a melyeknek világos zöldes sárga szinü, gáz-zárványos belső magvuk $c-n_g$ 48°, alatt külső élénkebb zöld burkuk pedig 5—10°-al kisebb szöglet alatt sötétedik. Ezek a haránt doma szerint körösztalakúlag átnőtt ikreket is alkotnak.

Elvétve idegen származású nagy ásványt is találunk benne *Augitis* mikrolithosos burokban. Valószinüleg ilyen származású a Koch-tól emlitett víztiszta *Quarz* is.

Ennek az *Andesitis*nek zárványai közül a contactus következtében, részben pedig a fölületén sublimatio útján képződött érdekes ásványokat mutatom aztán be, nevezetesen:

2 példában *Pseudobrookitis* táblás kristálykáit, vörös *Hypersthene*sel (*Szabóitis*) és *Tridymitis*sel (64, 65 sz.)

2 példa *Hypersithenest* *Biotitis*sal, *Tridymitis*sel

2 „ *Amphibolont*

2 példa *Grossulariát*, a második *Tridymitis*sel, *Augitis*sel,

1 „ *Melanitis*t az *Andesitis*be zárt *Phyllitis*ben.

Legvégül a dévai, igen nagy *Labrador*-kristályaitól porphyrásan kiképződött *Andesitis* zárja be a kiállitott tárgyak sorozatát. Ennél nagyobb földpátokat tartalmazó *Andesitis*eket nem ismerek másunnan Erdélyből, sőt *Andesitis*ekben olyan gazdag egész hazánkból sem.

Biologiai közlemény.

Dr. Borbás Vincze, budapesti tanártól.

A hosszú geologiai periodusok során a Föld felszíne, a természeti viszonyok és működő erők annyira változtak, hogy ma talán egy virágzó növény sincs, a mely ősi formáját és bélyegeit megőrizte volna, egy sincs ott, a hol eredetileg megszülemlett. A növény milliók óta bolyong, ha lassacskán is, a föld kerekségén, s a különböző helyről való a másvidékivel összevissza keveredik. A keveredésből a virágos réten, az erdőtlen verőfényes hegylejtőn s más helyen oly tarkaság támadt, hogy a virágkedvelő a végtelen változatosság láttára méltó bámulatba esik, s még a botanika emberének sem könnyű a tarkabarka keveredést áttekinteni, a keveredés okait s törvényszerű kapcsolatait földeríteni, a fokozatos alakulások sorát s az életmód phasisait kitanulni és magyarázni, vagy köztök valamely fejlődéssorozatot megállapitani.

Ilyen biologiai sorozatot válogattam össze vidékünk Floraájából igazolásúl, hogy a legnagyobb keveredésben is van kapcsolatos összefüggés, fokozatos sorozat és fejlődés, csak a sokféle színű és ruházatú növénynek úgy látszó furcsa összevisszasága rejtegeti el vagy bonyolítja előttünk. Ez a legkülönbözőbb családban, az egy- és kétszíkűek közt ismétlődő sorozat megvilágosítja, hogy 1) a beporzás, illetőleg a termékenyülés külső körülményei szerint a fű szervezete miként alakúl, — 2) az összeállítottam alaklánczolat empiricus módon azt is kitünteti, hogy fejlődhetett valaha, biologiai alakulással vízi fűből parti és szárazhelyi, s ezt végre röviden még a tengerviziből, valamint a hegyiből való alakulással próbálom meg kiegészíteni. Nem csak a beporzás, valamint a termőhely szerint való alakulás magyarázata fűződnék a sorozathoz, hanem sok más, de vele a sorozat magyarázatát bonyolítani, illetőleg a figyelmet róla másfelé is terelni nem akarjuk.

A növény életműködésének két fő mozzanata van: 1) saját maga

*

testéről való gondoskodás vagyis az önfentartás, mint a vegetálás lassú működése, 2) a fajfenntartás, vagyis a szaporodás.

Az önfenntartás érdekéből a növénynek kivált a szára meg a levele, az életét megszabó föltétel szerint, nagyon sokféleképen változhatik, de ennek a megértése kedvéért alig kell valamit előre bocsátanom. Ellenben a szaporodás szervei alakulásának kedveért, a melyet itt épen magyarázni bátorkodom, némit a biologia fejezeteiből, lehetően részletek nélkül előadni szükséges.

Annak az alapja, hogy a rokon házasságot az egyház törvényei tiltják, a növényeknek, hogy úgy mondjam szerelmi életében, a termékenyülésben is nyilatkozik. Mintha ugyanannak a növénynek az anyaga és életereje megujulásra megvénhedett volna, a növények közt is szükséges az anyag fölfrissítése, ugyanazon faj más individuumának termékenyítése folytán. Van eset, hogy ugyanannak a virágnak himpora ugyanannak a petéjét sikeresen termékenyítheti. Ez az önöntermékenyítés, ö n ö n p o r z á s (autogamia). De ugyanannak a virágnak hímpora ugyanannak a termőjét meg is gyilkolhatja (O n c y d i u m). A DARWIN összefűzte oklánczolatban[1] — a piros lóherétől a poszméhen, egéren, macskán és szarvasmarhán át az angol testi és szellemi erőig — sokkal sikeresebbnek bizonyodott a c s e r e t e r m é k e n y í t é s vagy a c s e r e- vagy k ö l c s ö n-p o r z á s (allogamia), midőn a virág termőjét másik, de ugyanazon faj virágának hímpora termékenyíti, s pedig vagy ugyanazon tő más-más virágáé (rokon vagy szomszéd-porzás, geitonogamia), vagy más-más tő virágaié kölcsönösen (vendégporzás, xenogamia). A virágnak bizonyos biologiai változásával (az előbbporzó és utóbbporzó virág [2]) a csereporzás neve k ü l ö n p o r z á s (dichogamia). DARWIN példájával tehát a lóherés mezőn az üvegharanggal leborított virágfej — önöntermékenyítésre utalva

[1] V. ö. MARGÓ TIVADAR, Darwin és az állatvilág. Term. Közl. 1869. 244–45 oldal.

[2] Az, úgy tudom, JURÁNYI-tól használt h í m e l ő z ő (protandricus) és n ő e l ő z ő (protogynicus) szók helyett szerző úrnak az e l ő b b h í m és e l ő b b n ő kifejezéseket ajánlottam. Szerző úr mellőzte is az előbbi kifejezéseket, amelyeket kétértelmű és nem eléggé jellemző voltuk egyaránt alkalmatlanokká tesz; de jobbnak látta helyettük e l ő b b p o r z ó-t és u t ó b b p o r z ó-t írni. Lényegileg ugyanaz a szétkülönzése (differentiatio) a szaporítósejteknek teszi hímmé vagy nővé a többsejtű állatot (Metazoon), mint a többsejtű növényt (Metaphyton): hímmé az egyik irányban módosúlt szaporítósejteknek (spermatozoonoknak, mikrogemetáknak vagy pollen-unokasejteknek) érettségre jutta-

— magtalan maradt, holott a leborítatlan tő bőven magvazott, mert a *Bombus terrestris* a virág porát egyikből a másikba áthurczolta.

A *Bombuson* kivűl a virág hímporát egyikből a másikba sok minden elhurczolhatja, magyarázatom kedvéért itt csak a vizet, szellőt, meg a bogarat említem. E szerint a biologiában hullámváró (flos hydrophilus), szélváró (fl. anemophilus) és bogárcsaló virágot (fl. entomophilus), vízporozást, szellőporozást és bogárporozást különböztetünk meg.

A hullámváró virág kevés és, mint a szélváró virág is, rendesen apró és lehető egyszerű; a hímet meg a termőt nagyobb levelek nem takarják, mert a hozott hímport föltartóztatnák vagy kelletlen helyre szóratnák. Ezek alkalmatlankodása nélkül a hímport a szél vagy a vízmozgás könnyen a másik virágra csaphatja.

A szélváró meg a bogárcsaló virág a legtöbb. A szélváró virág nagy térségben, hosszú ágakon oszolhatik szét, nagy és nyilt fölszint borít, azaz hosszú, ágas, laza virágzattá (*Mentha*, *Tölgy* barkája, *Daphne Mezereum*) alakúl.

A bogárcsaló virág lehet magános (tulipánt), vagy kisebb-nagyobb virágzattá egyesűl. Többnyire nagy, hamar szembe tűnik, elevenszinű vagy különféle színekkel czifrázott, olykor a bogár testéhez egészen alkalmazkodott (*Zsálya*), gyakran jó illatával vagy a nectariumában készített mézzel csalogatja, édesgeti magához a bogarat. A méz összegyűjtésére keztyűújj-formájú sarkantyúja is lehet (*Árvácska*).

tása, nővé a másik irányban módosúlt szaporítósejteknek (állati petéknek, makrogametáknak vagy növényi petéknek) érettségre juttatása. A szó legáltalánosabb tudományos értelmében hímmé akkor lesz valamely élő lény, mikor hím szaporító-sejteket, nővé akkor, mikor nő szaporító-sejteket érlel. Amelyik előbb érlel hím szaporító-sejteket, mint nőket, az előbbhím, akár állat, akár növény; amelyik előbb érlel nő szaporító-sejteket, mint hímeket, az előbbnő, akár állat, akár növény. Az újabb búvárlatoktól kiderített fundamentalis megegyezését az állati és növényi termékenyűlési folyamatnak juttatjuk kifejezésre az által, ha előbbhím és előbbnő növényekről szólunk. Már pedig a biologia magasabb tudományos művelésének fontos érdeke az olyan nevezetlan (terminologia), amely a növény- és állatvilágra egyaránt illik. Ezért ajánlom én a protandricus magyar jelölésére, mint a lehető legáltalánosabbat, az előbbhím és a protogynicus jelölésére az előbbnő kifejezést. Hasonló analogiára ajánlottam az inkábbhím (andrODynamus) és inkábbnő (gynodynamus) szókat, melyeket Szerző úr (l. alább) szíves is volt elfogadni a tőle eredetileg használt hímfőbb stb. helyett. Szerk

Az önöntermékenyülés ellen maga a növény szervezete is küzd oly módon, hogy kétnemű ivarszervét, a hímet meg a termőt egymástól különválasztja, más-más, különben meglehetősen egyező virágba osztja szét, ugyanazon a tövön (egylaki növény, *Tök*, *Uborka*, *Dinnye*) vagy két külön tövön, hogy az egyiken csak hímes, a másikon csak termős virág marad (kétlaki növény; a virágos *Kender* a hím; a magvas *Kender* a termő példa; a Fűzfa).

De az ivarszervek szétválása a növények között még sem annyira túlnyomó, mint az állatok között. A növények közt a csiraság (hermaphroditismus) az uralkodó, az egylaki meg a kétlaki növényaránylag kevesebb. Az állatok közt a kétnemüség a kiváló, a hermaphroditismus aránylag kevesebb és inkább az alsóbbrendűek ilyenek.

Ezek után áttérhetek az alaksorozatra, melynek fejlődése az összeválogattam példák nyomán a következő lehetett.

Kiindulás a *Ceratophyllum*, a vízben gyökértelenül lebegő, törékeny, végtől végig leveles, gyakran nem virágzó és gyümölcsöző, hanem rügyről szaporodó fű. A *Vallisnerián* kivűl legismeretesebb példája a hullámváró virágnak. Elég tökéletlen virágának a hímporát a vízmozgás viszi a termős virágba. Egész élete a vízben folyik, tehát csakis egytérbeli fű.

A vízi fűvek nagy pusztulásával a *Ceratophyllum* systematikai rokonsága nagyon megszakadt. Vannak, a kik a systemába az incertae sedis czím alá helyezik, de más systematicus a rendszerben a *Myriophyllum* vízi fűhöz (*Halorrhageaceae*) közel helyezi, a melylyel, kivált biologiai tekintetben, valóban közel rokon.

A *Myriophyllum* vagyis *Süllőhínár* termetére nézve a *Ceratophyllumhoz* hasonló, de sokkal finomabb. Levele vékonyka szálakra hasadozik, egészen a hal kopoltyújának analogonja, átvette a gyökér szerepét, vizet szi magába vele, de a gázcserét meg a kilehellést is végzi. Az ilyen sallangos levél a vízmozgáshoz is czélszerűen alkalmazkodik.

A *Süllőhinár* a *Ceratophyllum* biologiai viselkedésétől azért eltérő, mert háromtérbeli életet folytat; a sárban gyökeredzik, a víz mélységén átnő, s kisebb-nagyobb része a levegőbe is ki emelkedik, tehát nem vízszintes-irányú, mint a *Ceratophyllum* a vízszínhez közel, hanem lehetőleg függélyes-helyzetű. Néhol meddő, csak sarjadzik. A part csekély vizében a virága a szárnak legaljára vonul, úgy, hogy különivarú várágának hímporát a másik virág bibejére a víz még oda csaphatja. Ez a lent virágzó eltérés, melyet Gussone M. *Siculum*-nak nevezett, a teljesen vízi *Ceratophyllum*-tól, első lépés a légbeli életmódhoz. A *Süllőhinár* virága azonban a száron fölfelé is halad s valamivel mélyebb vízben a virágok a levegőbe kiemelkednek, s a szaporodás czéljából a levegői életmód veszi kezdetét. Kisebb és lent virágzó példája végtől végig meglehetős egyenletesen leveles, mint a *Ceratophyllum*.

A fűnemű növény életében gyakori jelenség, hogy a levél a száron fölfelé többé-kevésbbé kisebbedik. Igy a nap a fű tetejét jobban süti és a magérlelést biztosítja. A *Myriophyllum verticillatum*-nak kisebb-nagyobb vízből egész lánczolatát állíthatjuk össze, úgy, hogy a vízből kiemelkedő virágok alatt a levél fokonként aprósodik (var. *pinnatum* WALLR., *M. pectinatum* DC), míg végre a *M. spicatum* virágai alatt az apró hegyelevelet (bractea) alig látni, tehát egészen levéltelenedett füzér virágzata van, sok és apró virágára tehát a szél a hímport akadály nélkül oda szórhatja. A hullámváró virágból tehát kialakúlt a szélváró virág.

A *Myriophyllum* sorozata azt is igazolja, hogy az említett faj és fajta ugyanannak a törzsnek csak sekélyebb vagy mélyebb vízből a levegőbe jobban kiemelkedő, alkalmazkodásbeli más-más nyilatkozata, tehát az alkalmazkodásnak egy-egy phasisát nevezték és jelentették fajnak. Az alacsony *M. verticillatum* L. meg a $2^1/_2$ méter hosszú *M. spicatum* L., mint a két végsőség, a legeltérőbb; de fokozatos alaklánczolat kapcsolja össze, az utóbbik a virág alól eltünő levelén kivül a *M. verticillatumtól* semmikép sem különbözik, tehát tőle fajilag különválasztani nem lehet. Az egyenletesen leveles *M. verticillatum*, a minő a vízi *Ceratophyllum*, az európai *Myriophyllumok* természes typusa, a többi pedig, mint a hegység magasabb vagy alacsonyabb csúcsa, ugyanannak a törzsnek szétágazása. A *Myriophyllum* a faji széttagozódásnak kiválóan tanúlságos példája.

Láttuk, hogy a vízi fű, mennél jobban kimerül a mélyebb vízből a levegőbe, annál inkább szélváró virágokat fejleszt. Ha még a vízi *Hottoniá*ra gondolunk, melynek levele a különszirmú *Myriophyllumé*hoz hasonlít, de a virága tökéletesebb és forrtszirmú, azért a rendszerben is magasabb fokra jutott, mint a *Myriophyllum*: a fejlődésének egyik sorozatát, különösen a magyar Florában, bevégeztük, de hasonló fejlődés és kapcsolat más növényeken megőrződött.

Ilyen a *Torma*, mely, ha vízben nő, a lemerült levele (mind a két hazai fajé)[1] olyanforma, de durvább sallangokra hasadozik, mint a *Süllőhínáré*. A vízből kiérő levele hasadozatlan, csak csipkés. Ha a *Torma* kezdettől fogva a vízen kívül fejlődik, valamennyi levele ilyen, azaz csak légbeli. Az előbbi felemás alak tehát a vízi sallangoslevelü füvet az éplevelű szárazival kapcsolja össze. A *Tormá*val megszűnvén a levél sallangossága, más alaksorozatot az éplevelűek közül folytatok.

A vízszéli és vízparti *Mentha* szintén hasonló sorozattal fejlődik, s LINNÉ, a két szélső tagját mint a *Myriophyllum*-ét, történetesen szintén *Mentha verticillata*-nak és *M. spicatá*-nak nevezte. Amaz is végtől végig leveles, lent is virágzik, de virágai a szárnak inkább a középtájára vagy feljebbre vonúlnak, a szára teteje pedig, mint a *Myriophyllum verticillatumé*, virágtalan marad, s a felsőbb levele az alsóbbaknál alig kisebb. A *M. verticillata* eltérésein a virágok egész a szár csúcsára is vonulnak, de egyszersmind ott a levelek fokonként kisebbednek (*M. tortuosa* HOST, *M. abruptiflora* BORB.), vagy egészen aprók (*M. nudiceps* BORB.), a virágövek még távolesnek egymástól, majd, inkább a száraz parton, a virágok is apróbbak, ágtetőző füzérre folynak össze, köztök a hegyelevelek elrejtőznek (*M. spicata L.*), tehát nyilt és nagyobb teret elfoglaló, szélváró virágzata támad, s az alakulás a süllőhínár fejlődésének megfelelő.

A *Mentha* sorozatában nevezetes továbbá a szőrösödésnek a vizparttól való eltávolodás szerint való fokozatos gyarapodása is.

A vizhez közel növő rendesen zöld és kevéssé szőrös, fénylő, (*M. verticillata, M. origanifolia, M. Austriaca*), a távolabb növő jobban szőrösödik (*M. Schleicheri, M. balsamiflora*, M. *leioneura*), míg a parttól messzébbre szakadt faj a száraz mezőn, ritkábban bentebb a völgyben, sürű fehér moholylyal ruházkodik, a *Gnaphalium*-alakzat képét ölti föl (M. *spicata L.*, M. *mollis*, M. *retinervis*) s a nagyobbfokú és gyorsabb kipárolgás ellen sűrű molyhával küzd.

Ez a kétféle typusa a növényeknek: a tetőig meglehetős egyenletesen leveles, önönporzó vagy bogárcsaló, továbbá a felső részén levéltelen szélváró virágzat különböző növénycsaládban ismétlődik.

[1] NEILREICH (Diagn. 15. old.) szerint a magyar vagy édes *Torma* nem felemáslevelü, de ez a természetbeli valóságnak meg nem felel.

Igy levéltelen	és leveles (szélellenző) faj
	Az *Ajakosak* közűl:
Stachys silvatica,	St. alpina,
Galeopsis ladani,	G. pubescens,
Teucrium chamaedrys,	var. foliicomum,[1]
Calaminthae genuinae,	Subgenus Acinos,
Marrubium peregrinum,	M. vulgare,
Scutellaria altissima,	Sc. albida, Sc. galericulata,
Ajuga Laxmanni, (anemophila)[2]	A. Laxmanni var. isophylla,
Sideritis montana,	var. comosa,[3]
	A *Tátogatók* közt:
Scrofularia nodosa,	S. vernalis,
A Linaria fajai,	a Kickxia és Cymballaria fajai,
Veronica anagallis.	V. scutellata.
	A *Kakascimerfélék* közt:
Odontites odontites (Euphrasia serotina LAM.).	O. verna.
	A *Primulafélék* közt:
Lysimachia vulgaris.	L. nummularia.
	Az *Érdeslevelüek* közt:
Myosotis palustris.	M. sparsiflora.
	A *Ragadványfélék* közt:
Galium verum.	G. cruciatum.
	A *Csöngetyükefélék* közt:
Campanula rapunculoides.	C. latifolia, C. Grossekii.
	A *Vitorlásvirágúak* közt:
Cytisus nigricans,	var. comosus G. BECK,
Ononis natrix,	O. subocculta,
Lathyrus Hallersteinii.	L. aphacus.

[1] Inflorescentia elongata, ad apicem usque foliis oblongis vestita.

[2] „Folia floralia latiora, brevioraque, semper integerrima", ovata. *W.* et. KIT. Pl. rar. t. 69 PILL. et MITT It. t. 1. REICHENB. Icon. XVIII. 35. Ellenben „foliis floralibus conformibus", „floralia omnia flores superantia" BENTH. Labiat. 697. a szélellenző eltérés (var. isophylla, foliis etiam superioribus oblongis, quam inferiora vix brevioribus, hinc et inde dentatis; Szvinicza, Nadap, Kolozsvár).

[3] ROCHEL, Flora, 1835. Intelligenzbl. 66. old.

Az Egresfélék közt:

Ribes rubrum. — R. grossularium.

A Keresztesvirágúak közt:

E család virágzata eredetileg levéltelen, tehát a leveles szélellenző virágzattól a legnagyobb eltávolodás. — Barbarea bracteosa, Sisymbrium polyceratium[1]

A *Sóskafélék* közűl

P. aviculare. — Polygonum amphibium.

E kettő közt a különbség a vizes és száraz termőhely szerint tetemes, de ha képzeljük, hogy a *P. aviculare* virágai alatt a levelek kisebbednek s a virágcsoportok összefolynak: az egy typus szerint való fejlődés világosabb. A vízi, sima, kopasz és fénylő *P. amphibium* szőrös légbeli hajtásokat bocsát.

Az *Egyszíkűek* közül

Orchis morio — O. latifolia,
a Gyöngyvirág — meg a Salamonpecsétje valamint a Streptopus

említhető ilyen példáúl

Az Útifüvön elzöldülés alkalmával látni a leveles alakot.

Természetes az is, hogy a szélváró és szélellenző két formának olykor-olykor csak az egyike maradt fönn vagy fejlődött ki, pld.

Levéltelen vagy apró-leveles virágzattal:	Leveles virágzattal:
S. memorosa, S. pratensis stb. Salvia-fajok, pld. S. Podolica,[2]	Cerinthe maculata L., C. indigotisans,[3] Melittis melissophylla, Lycopus, Glechoma fajok, Scopoliella Carniolica, Atropa belladonna,
Solanum dulcamarum,	Hyosciamus niger, Vicia grandiflora, „ sativa.

[1] V. ö. M. T. Akad. Math. és Term Közl., XV. köt., 6. sz. 164. old.

[2] *Salvia Podolica* Blocki, Deutsche Botan. Monatschr. 1892. p. 110. (*S. nutans* × *pratensis*) és *S. silvestris* (*S. nemorosa* × *pratensis*) a kolozsvári Szénafüvön!

[3] A kolozsvári Szénafűre fölmenő út mellékén gyakori ez a csinos fű. Szára megszáradva az indigójától kékellik; sárgás szirmának metszete szélesebb mint a *C. minoré,* a csúcsa kék, ki nem görbűl; a hím eredő helyen is kékfoltos, tehát a virága a 10 kék foltjától csinosan tarkázott.

Az Egyszikűek közt a levélüstök koronázta ananászfej, valamint a *Császárkorona* vagy *Koronaliliom* is a leveles alapformára vezethető vissza. Végre a magyar *Ördögcsiptefű* (a *Veronicá*-nak *Chamaedrys* csoportja) eredetében is ez az alapterv nyilatkozik. Ennek a szárát virág soha sem tetőzi, hanem, mintha a csúcsát letépték volna, a szára teteje meddő leveles hajtással végződik, a virágzás és gyümölcsözés egészen az oldalszervekre nehezedett. A *Myriophyllum*tól meg a *Mentha* typusától az eset csak azért eltérő, mert az *Ördögcsiptefű* levelei mellől nem örvvirágzat, hanem megnyúlt leveles hajtás (fürt) keletkezik. Ezért az ilyen *Veronica* ágasabb, virágosabb, a tetőző leveles hajtás a virágok közt csaknem elrejtődzik, hogy a szellőporzásnak ne alkalmatlankodjék.

Az egyenletesen leveles alak a megnyúlt száron, úgy látszik, eredetileg a vízbe merült fű sajátja, mert a víz szinéhez közel, egész hosszaságában egyenletesen fejlődhetik, mint az *Aldrovanda*, *Najas*, vagy a *Potamogeton*, *Hottonia*, *Utricularia* vegetáló részei. Nedves helyen, parti fű közt a *Lysimachia nummularia* is egyenletesen leveles. A vízen kivül a levél egyenletessége megszűnik s a fűneműeké a levegőben fölfelé aprósodik. A nagyleveles és apróbblevelű vagy fent levéltelen alakot különböző helyen, hol az egyiket, hol a másikat, hol meg egymással vegyest is láthatjuk, a hogy a változó természeti viszonyok szerint a régi alakulásból és alkalmazkodásból megörződött és majd itt, majd amott fönnmaradt, s a mint az egyiknek itt, vagy amott a megélhetés viszonyai szerint a természeti állapot megfelelőbb avagy kedvezőtlenebb volt. Most a növény aligha van azon a helyen és állapot közt, a hol a leveles és levéltelen forma szétválása megtörtént, sőt most a két alak csaknem egyenlő viszonyok közt egymáshoz közel élhet (*Stachys alpina*, *St. silvatica* Fenyőháza körül), azért a szétválás okát se könnyű akárhol megfejteni. Az egyik növény a levéltelen virágzattal boldogúl jobban, a másiknak a leveles állapot a kedvezőbb, mert a nagyobb levél a naptüzést mérsékelheti vagy a virágnak és fejlődő gyümölcsnek védelmet biztosít, pld. a havasi *Streptopus* a virágját, nyele csavarodásával, a hozzátartozó levél alá rejti s az esőtől óvja. A végtől végig leveles szár, a vízi fű, alapformája szerint, — úgy látszik — ősibb, s az ilyen virága vagy önönporzással, vagy bogárcsalogatással termékenyűl, ellenben a levéltelen virágzat kiválóan a a szellőporzásra alakúlt. Egy alapformából s pedig az egyszerűbb s a régibb, ivartalan szaporodásnak megfelelőbb levelesből fejlődött a sokképen változó leveletlen alak is, később mind a két forma más-más sajátságokat is szerzett, tehát a szétválás és a fajok különbsége is nagyobb lett.

A szellőporzás után fölmerül a kérdés, vajjon vízi fűből bogárcsaló virág alakul-e?

A *Ranunculus* vagy *Batrachium paucistamineum*nak ugyanolyan vékonyszálú sallangos levele van, mint a *Süllőhínárnak*, s a fenéken meggyökeresedve, kiválóan vízi és levegőbeli életmódot folytat, amaz saját maga föntartása, emennek czélja a szaporodás. Virága az előbbi vízi növényekénél jóval nagyobb, szép fehér szirma tövén egyszerű nektariuma van, tehát csalogató nedvet, mézet választ ki. Mi czélja lenne különben az édesség kiválasztásának, ha nem a bogár csalogatása?

A *Ranunculus aquatilis* vízi levele, a téranyaghoz alkalmazkodva, olyan, mint az előbbié, de a fölsőbbek másformák, s a légbeli életmódjuknak megfelelően, a víz szinén elterűlve, sütkéreznek, karéjozottak, a szinűk olyan, mint ha be lenne lakkozva, a megázástól védelmezett. Ezek a levelek a víz szinén a súlyegyenlőséget biztosítják s köztök a levegőbe kimerülő virág a nászát nyugodtan ünnepelheti. A *R. aquatilis* mézrejtő virága szintén bogarat édesget magához a beporzás miatt. A *R. aqualitis* a felemás levélnek (heterophyllia) szép példája

A *Mentha aquatica* úgy lesz bogárcsaló, hogy virágait a szár vagy az ág tetején egy csoportba egyesíti s a sok virág együtt a bogárra úgy hat, mint egy nagyobb magános virág, pld. *Campanula*. Az inkábbhím (androdynamus) M. *aquatica* virága valamivel nagyobb mint az inkábbnő, kiválóan nőszerepű (gynodynamus) M. *aquaticaé*, a hím példa tehát föltűnőbb, díszesebb és csalogatóbb.

A növényországban számtalan példát látunk, a mely virágait hasonlóan a szár vagy az ág tetején gomolyítja össze, pld. a *Prunella*, *Kakukfű*, a *Teucrium montanum*, *Melampyrum barbatum*, *M. cristatum* *Scutellaria hastifolia*, *Dracocephalum Austriacum*, *Campanula lingulata*, a szegfűvek *Carthusiani* csoportja a *Silene Sendtneri* etc.

Látni való, hogy a végtelen számú növény tarkaságában, az egy- és kétszíkűek közt is, bizonyos közös alapforma még fölismerhető, az, a melyből a végtelen változatosság kifejlődött. Ez az alapforma a növény életét és faját fönntartó természeti állapot szerint alakúl és változik, s pedig a szár meg a levél a termőhely minősége szerint s a vízi életmódból szárazföldivé alakuláskor a helynek egyéb viszonyai szerint is; ellenben a szaporítást czélzó virág csoportosulása és más formálódása a külső természeti viszonyokon kivül a látogató s a beporzásnak, termékenyülésnek sokféle útjamódja szerint történt. Az elváltozás az alapformától messzire eltávolodhatik, mint a hogy föltűnő az eltérés pld. az ananász meg a *Veronica Persica* avagy a *V. prostrata* között. Az életmóddal és a biologiai alkalmazkodással a változás és eltérés annyira mehet, hogy külön fajok támadtak, de a régi alak is fönnmaradhatott.

Láttuk, a víziből partivá, sőt szárazhelyivé alakuláskor minő változások és alkalmazkodások történhettek, de vele együtt a víztől távolodás szerint, a szőrözet gyarapodását is, egész a sűrű fehér molyhosságig. E lánczolatot tovább is fűzhetjük.

Vízi növényeink törzse valószinűleg a tengeriből alakult. A virágzó növény életére ma a föld meg a belvíz a tengernél kedvezőbb. Most csak 27 tengeri virágzó fűvet ismerünk,[1] nagyobbrészt az egyszikűek sorából. Közüle három faj és három fajta a földség sós vízében is megterem, sőt a *Najas marina* a tóban és folyó vízben is (planta bihydrophyta). Ez a szám (27 : 6) egymáshoz viszonyítva elég tetemes. A földség vizeinek meg a tengernek növényei között tehát nincs éles megszakadás, sőt systematikai rokonság is összefűzi őket (Najadaceae, Hydrocharitaceae, Potamogetonaceae, Ranunculaceae), az egymásból való alakulásnak tehát meg van a lehetősége.

A tengervízi és belvízi növények között tehát máig is meg van a kellő kapcsolat. A *Ranunculus* vagy *Batrachium marinum* Arrh. et Fr. a Baltitenger fűve, de az előbbi oldalon említett édesvízi *Batrachium*ainkkal bensőleg rokon, azaz tőlök nem nagyon tér el, tehát lehetséges, hogy a vízi *Batrachium* fajai a *B. marinum* ősformájából ágaztak szét.

Nehéz tovább a tengeri és belvízi, másrészt a havasi fű alakulása között a fejlődésbeli kapcsot kideríteni, mert az alakulás óta, végtelen időn körösztűl mind a tenger terjedelme, mind a hegy-

[1] Ascherson, Leunis Synopsis der Pflanzenkunde I. 1883. 729.

ség, sőt a növény alakja is sokat változott, s a különböző helyen épen a geneticus összefűző szálak lassanként eltűnedeztek. De ha a lehető kapcsot az élők közt mégis kitűntetni óhajtjuk, ha nem is a szakadatlan lánczolatot, de nehány szem híjján, a fokozatos összefüggést mégis fölismerhetjük. A *Ranunculus*ok havasi fehérvirágúi (*Hecatonia*), pld. a *R. alpestris* virága szinét és szerkezetét, valamint a levél szabását tekintve az édesvízi *R. aquatilis*-nak légbeli részéhez hasonlít s ez a vízi faj a part sarában csak a karéjos leveleivel ruházkodik.[1] Lehetett tehát idő, hely és természeti állapot, a midőn a vízi *Ranunculus* a vékonysallangú és kopoltyú módjára működő vízi leveleit, mint a földön szükségtelent, visszafejlesztette és csak a vízen sütkérező leveleit tartotta meg, de ezt is egészen a légbeli életmódhoz formálta.

A havasi rét *Hecatoniá*-inak nincs felemás levelük, de a karéjozott szárlevélnek gyakran ugyanolyan szabása van, mint a felemás vízi *Batrachium* légi levele. Lehetséges tehát, hogy, mikor az őshavasok csúcsáról a tenger vize leapadófélben volt, a zátonyos helyen a tengeri *Batrachium marinum* őséből brakkvizi (félig sósvízi) és édesvízi alakok váltak ki. Ezekből ismét, a mint valamely őshavasról a tengervíz leapadt, a nedves helyen fehérvirágú, belőlök ismét sárgavirágú *H catoniák* támadhattak. A különböző helyhez máskép kellett alkalmazkodniok, bélyegeik máskép formálódtak, de a virág meg a levél szabása meglehetősen ugyanaz maradt. A többi sárgavirágú *Ranunculus* egy része még ma is a nedves helyet, sőt a nádast is kedveli, s tovább megvan az alakulásbeli kapcsolatjok a csak száraztéri *Ranunculus*okkal. Ezek a hegyről, a hol még ma is jellemző fajaik vannak, az alvidékre leereszkedtek, de a hegyi (*Ranunculus Breyninus*) és alvidéki faj (*R. polyanthemos*) egymástól ma se tetemesen különbözik, s az egymásból való alakulást könnyen elárulják. A hegyi vegetatiónak tehát a legrégibbnek kell lenni. Látható az is, hogy a növényzet bizonyos esetekben geographiailag is kalauzol.

A gyermek énekli s a költő sóvárogja, hogy:

„Vajjon ki gondolta ki a virágokat,
Ki volt, ki úgy szépítette alakjokat?"

[1] GRENIER et GODRON: Flore de France I. p. 23. A *R. aquatilis* var. *succulentus* KOCH, mely a vízen kivül vastagabbsallangú vízi leveleivel él, lehet, más fajhoz tartozik.

Ha ők ezt sóvárogják, a komoly természetvizsgálónak nem csak vágya, hanem nehéz föladata tanakodni a fölött, vajjon ki gondolta ki a virágokat? A növénygeographiának legnemesebb czélja, hogy, a multban világosságot gyűjtva, a növény, állat meg az ember multját elfödő sötétség lepléből tépjen le egy-egy darabot. Ez vezérelt engem is, azért iparkodtam szemlélhető módon előtűntetni, minő alakulások folynak a természetben, s ha a virág kigondolójától messzire maradtam is. De annak a lehetőségét, hogy a tengeriből belvízi, hegyi és parti fű hogy keletkezhetett s más-más természeti viszonyok között tovább hogy alakulhatott, jó akarattal iparkodtam mai példákkal megvilágosítani. Ha a mai sokféle növénynek ilyen összefüggését kutatni meg nem próbáljuk, a keletkezés igazságához annál nehezebben juthatunk.

A föld kerekségén most 100 ezer, köztük 80 ezer virágzó növényfajt számítunk. Az ismeretlenek száma, kivált a nem virágzóké még kétszer-háromszor is több lehet. Még több volt a nyom nélkül kipusztult, valamint a kőmásolataikkal fönnmaradt növényfajok száma. Ennek a tömérdek növény szétfajulásának végtelen idők lánczolata, s koronként és helyenként más-más természeti állapot felel meg. Ennyinek a keletkezése bizonyára sokféle lehetett. A mai vegetatio a régi változások, a különböző kor, éghajlat és hely növényeinek s a generatiók végtelen sorozatának a vándorlásából és életküzdelméből megmenekült vagy győztes töredéke, részint megújhodása, újabb fejlődménye s bizonyos helyeken való összesereglése.

Nem állítjuk tehát, hogy a bemutatott sorozat valósággal így, vagy ugyanazon vízben és közel szárazon vált volna ki egymásból. Minden esetre figyelemre méltó, s a jelölt ideára vezet. Nem tudjuk, nem tudhatjuk, melyik tag az ősibb, melyik az arányoslag fiatalabb, s hogy hol kezdődött meg a faji szétágazás. Meg kell tehát engednünk, hogy kor szerint egyik-másik tagot fiatalabbal vagy öregebbel kellett volna helyettesítenünk, csakhogy a növények chronologiai rendje nem nagyon ismeretes, a morphologiai hasonlóság és bélyegek szerint pedig a korrendet nagyon bajos megállapítani. Sorozatainkba még más közbeli alakokat is kereshettünk, tetemesen bővíthettük volna, de kezdetnek ennyi meglehetős elegendő. A leírt sorozat, az alak szerint, bizonyos geneticus fejlődésnek valóságos szemléltető képmása, ha a fejlődést korrendileg nem is tudjuk igazolni. A lánczolat morphologiailag helyes és fokozatos, csak az alakulás ideje, természeti állapota, okozója stb. ismeretlen. *Myriophyllites* UNGER Radoboj vidékéről a harmadkorból ismeretes, hasonló alakulás tehát már ez előtt az ősidő előtt történhetett. Közbe eső alakok kihalásával a sorozat helyként megszaggatódott, de a hézag új formákkal pótoltatott.

VEGYESEK.

Jelentés az Erdélyi Múzeum állattára felől az 1899. évben.

Az Frdélyi Múzeumegyletnek 1900. márcz. 22-én, tartott közgyűlése elé terjesztette Dr. Apáthy István, az állattár igazgatója.

Tisztelt Közgyűlés! Akik ritkaságok látványos kiállítását tartják a múzeumok fő czéljának; akikre nézve a múzeum ideálėja egy nagy külön épület, a melyre aranyos bötűkkel reá legyen írva „Múzeum“, még ha az nem is egyéb, mint díszes mausoleuma egy üvegszekrényekb• temetett, halott tudománynak: az ilyenek bizonyára nem lesznek megelégedve az állattár múlt évi eredményeivel. Az ilyenek amerikai Barnumokat szerződtessenek a tárak élére, mert ők meg fognak elégedni a tudomány művelésének látszatával is, apró inasi szolgálatokkal, ha csak eléggé nagy hangon kürtöli világgá a napi sajtó.

Az én szavaim azok fülét keresik e teremben, akik az Erdélyi Múzeumegylet hivatását abban látják, hogy a budapesti klikkektől független, nem személyes érdekeket szolgáló magyar tudományos központ legyen e hazában, hogy, e hazát tanúlmányozva és ismertetve itthon és a külföldön, ne csak itthon arasson olcsó babérokat, hanem járúljon ahhoz is hozzá, hogy tudósaink a legmagasabb tudomány internationalis itélőszéke előtt is dicsőséggel hirdethessék magyarságunkat. Akik föl tudják fogni és magyar szivvel tudják érezni annak a jelentőségét, hogy az Erdélyi Múzeum állattára kapcsán immár a távoli külföld, sőt a közeli Austria is nem egy tudományos kérdésben Kolozsvárra (nem Klausenburgba) fordúl az ez idő szerint nyerhető legilletékesebb fölvilágosításért, azok be fogják látni, hogy az állattár a múlt évben is jól használta föl a néki juttatott csekély összeget, hogy minden anyagi és főleg szellemi akadály daczára is nagyot nőtt a tavaly is.

Avagy kicsinylendő dolog-e, hogy a Mikó-féle nyaralónak laboratiummá alakított lépcsőházában dolgozott tavaly vezetésem alatt négy hétnél tovább a müncheni egyetemnek egyik magántanára és prosectora, meglehet, nemsokára az anatomia rendes tanára, Mollier Siegfried? Hogy hasonló czélból Amerikából is jött hozzánk egy jeles szakember, Dr. Paton Stewart; hogy a berlini múzeum a Platetől gyűjtött exoticus *Pióczá*kat hozzánk küldötte meghatározás és földolgozás végett; hogy Tiszer Zsigmond galicziai halászati fölügyelő a Visztula *Lazaczait* pusztító állatok meghatározása és a védekezésre tanács végett nem Bécsbe, hanem Kolozsvárra fordúl; hogy Blanchard Raphael, a párisi egyetem orvosi karán a zoologia professora, tőlünk kér vizsgálati anyagot (a *Pseudobranchellion margói*-t) és küld nekünk, nálunk meg nem lévő ritka állatokat; hogy egyáltalában hosszas dolog volna fölsorolni mindazokat, akik ilyen módon a külföldről az Erdélyi Múzeumot keresik föl!

De nem szeretném, ha félre értenének. Nincs, aki nálam jobban méltatná az alkalmas helyiségek jelentőségét egy múzeum életében. Csakhogy viszont nincs is, aki jobban sajnálná, ha megvalósúlna nehány múzeumegyleti tagtársunknak az az óhaja, hogy az Erdélyi Múzeum kapjon egy nagy épületet, a melyben egyesíteni lehessen az összes tárakat. Nemcsak az anyag tudományos földolgozásának, hanem szemléltető fölállításának érdekében is merőben különbözők az egyes tárak követelményei a ma korszerű helyiségeket illetőleg. Mindenikéit egy épűlet nem elégítheti ki. Vagy talán egy, idővel a kellő összegre fölszaporodó, reservált tőkéből építsen a Múzeumegylet múzeumot egy tár részére és hagyja sorsára a többit? Nem egyoldalú, a többi tár érdekeit megcsorbitó eljárás volna-e ez? Hála az állammal kötött szerződésünknek, van fegyver az Erdélyi Múzeumegylet kezében, amelylyel az államot kényszerítheti, hogy minden tárának a specialisan alkalmas helyiségeket megadja. Sajnálatos, kárhoztatható is, hogy az állam oly kevéssé siet szerződésszerű kötelességének e részben megfelelni. De vajjon a Múzeumegylet vezetősége maga is tanúsitott-e eddig valami sok energiát és kitartást tárai kellő elhelyezésének sürgetésében? Interpelláltak-e valaha minisztert az országgyűlés előtt ebben a fontos és, mondhatni, országos ügyben? Ha megkapjuk a kellő helyiségeket, azt nem a Múzeumegyletnek, mint ilyennek, a buzgósága, hanem egyes professoroknak az igyekezete fogja kiküzdeni. Elpanaszoltam én ezt már a T. Közgyűlés előtt máskor is. De most újra actualissá vált a dolog annak a kapcsán, hogy a választmány, igen helyesen, az építési alap kamatainak a tárak dotatiói gyarapítására fordíthatását kéri a közgyűléstől.

És még egy pont van, a melyre nézve a félreértést el szeretném kerülni. A múzeumoknak az ismereteket a nagy közönség körében szemléltetés útján terjesztő hivatását sem kicsinylem én. De nem azt tartom én a legtanulságosabb zoologiai múzeumnak, a mely — akár nagy költséggel szerezve be, akár nagy hálára kötelező ajándékul kapván — minél több ritkaságot, csodabogarat halmoz föl és állit ki; hanem azt, a mely a bennünket mindennap és mindenütt környező természet titkaiba, belső lényegébe nyújt a laicusnak is érthető, annak érdeklődését is lekötő bepillantását. Ilyenné pedig gyűjteményünket első sorban saját gyűjtéseink és saját praeparatumaink által tehetjük. A nagyközönségre nézve többet ér, ha például egy béka organismusának szabad szemmel is látható részleteit, egy celloidinos metszetsorozatban, tetszetősen fölállitva tárom elé, mint hogy ha huszonöt fajta ritkábbnál ritkább békát mutatok néki, a melyeken legföljebb annyit lát, hogy az egyik kisebb, a másik nagyobb, az egyiken hiányzik az a pötty, a mely a másikon megvan. Utalok itt arra a tiz, a tudományba tőlem bevezetett módszer szerint előállitott nagy praeparatumra, a melyeket a párizsi kiállitásra küldöttem, s a melyek, visszaérkezvén, az állattár tulajdona lesznek.

Úgy a szemléltetésre legalkalmasabb, mint a tudományos búvárlatokra való anyag beszerzésében tehát első sorban magunkra vagyunk utalva. Ne csodálkozzék senki azon, hogy az állattár a múlt évben ajándék útján csak 7 faj állattal 15 példában gyarapodott. Ezeket is szakszerű zoologusoktól kaptam, akikkel tudományos összeköttetésben állunk. Nekünk első sorban munkatársakra van szükségünk a laikus közönség körében is, nem maecenásokra. Talál valaki egy pókot, a minőt még sohasem látott; nagy ritkaságként beküldi a múzeumba. Elromolva érkezett az meg, de szerencsére kiderült róla, hogy nagyon közönséges valami, amiből már bőven van gyűjteményünkben. Elmondottam egy izben már a T. Közgyűlésnek, miképen igyekszem én magunknak kirándulásaim alkalmával az ország minden részében önkénytes munkatársakat szerezni, akik hajlandók figyelmüket egy-egy bizonyos állatcsoportra irányitani, nemcsak fölvenni, a mi útjukba akad, hanem a velük közölt módszer szerint keresni és a találtat a rendelkezésükre bocsátott eszközökkel és reagensekkel czéljainknak megfelelően conserválni is. Már nagyon sokan, nagyon sokat igértek, de jó magyaros szokás szerint, sajnos, nagyon kevesen, nagyon keveset küldtek. Bizonyára jó munkatársunk lett volna Péterfi Márton, dévai realiskolai tanár úr, a ki vállalkozott reá, hogy a rendelkezésére bocsátott eszközökkel pókokat gyűjt számunkra; de szomorú körülmények lehetetlenné tették, hogy igéretét teljesítse. Nem veszítem el azonban a reményt, hogy a jó szándékot előbb-utóbb sok helyen hasznos tett is fogja követni.

Magam tavaly gyűjtéseket főleg Brassó vidékén, Kolozsvár közelebbi és távolabbi környékén, Csucsa körül és a Lipari szigeteken végeztem. Az eddigi számbavétel szerint 82 fajt gyűjtöttem 349 példában, csupa oly dolgot, amire épen szükségünk van. Az egésznek földolgozása még folyik. A gyűjteménybe végleg beállitható a már hosszú évek óta fölszaporodott több ezer darabbal együtt csak akkor lesz, ha az állattár anyagi ereje a szükséges üvegneműek beszerzését meg fogja engedni. Ezt az anyagi erőt pedig, a mint már tavaly emlitettem, még egy darabig le fogja a múzeum pelagicus tengeri állatainak, a melyek nagy részét több mint 15 éve szereztük be, újakkal való pótlása.

De gyűjtéseim legfőbb czéljukat, mint tudományos vizsgálati anyag, így is szolgálják; szolgálják nemcsak a saját búvárlataimat és a vezetésem alatt folyókat, hanem külföldi tudósokét is. Hiszen ezek is rendelkezésemre bocsátják gyűjtéseiknek azt a részét, a melylyel a tudományos világban jelenleg én foglalkozom legbehatóbban. Ilyen réven is gyarapitom gyűjteményünket; a berlini múzeum Hirudinea gyűjteményéből például a tőlem végzett meghatározás díjában 18 fajt 25 példával (természetesen a reám bízott gyűjteménynek többszörös duplumai közül) megtartottam az állattár számára.

Ugyancsak nálam van jelenleg áttanulmányozás végett a Magyar Nemzeti Múzeum Pióczagyűjteménye is. Viszont még Méhely Lajos úrnál van a Magyar Nemzeti Múzeumban a mi állatárunk Denevér-gyűjteményének egy része. Ellenben az Uhrik Nándor úrnál volt Aprólepkék és a Mocsári Sándor úrnál volt Hymenopteronok ép állapotban visszaérkeztek.

Az előbbiekben kivántam, nem terjeszkedve ki a részletekre, röviden vázolni az állattár tavalyi működését, a melyet a párizsi kiállitásra való előkészületeink, sajnos, lassitották, de egyáltalában nem akasztottak meg. Kérem jelentésem tudomásúl vételét!

Jelentés

az Erdélyi Múzeum ásványtáráról az 1899. évben.

Az Erdélyi Múzeum-Egyletnek 1900. márczius 22-én tartott közgyűlésén bemutatta Dr. Szádeczky Gyula egyet. ny. r. tanár, az ásványtár igazgatója.

Tisztelt Közgyűlés! Az elmult esztendőnek általános képét röviden azzal vázolhatom, hogy haladtunk a hervadhatlan érdemű alapítóink nemes intentióinak megfelelő, sok esztendő tapasztalatai után jónak talált és immár inaugurált ösvényen. Elkövettünk mindent a rendelkezésünkre álló erők és eszközök czélszerű fölhasználásával, hogy ne csak megőrizzük és conserváljuk gyüjteményűnk tárgyait, hanem első sorban szép hazánk megismerésére és megszeretésére vezető példákkal gazdagítsuk, hogy velük és általuk fejlesszük a tudományt, szolgáljuk közönségünk culturalis és anyagi érdekeit.

A részletekre térve, lássuk először is gyűjteményünk szaporodását.

E tekintetben örömmel constatálhatom, hogy a szaporodás nagyobb része tervszerűen végezett gyűjtésekből származik, minek eszközlésére ásványtárunkon kivűl álló, önként ajánlkozott szakerők segítségét igénybe vehettük.

Ezek között van Dr. Lörenthey Imre, budapesti egyetemi magántanár és adjunctus, a kit Egyletünk már évekkel ezelőtt, midőn a helybeli ásvány-földtani intézetnél volt tanársegéd, több izben megbizott gyűjtéssel. A múlt esztendei ajánlkozását Baróthon és vidékén végezendő gyűjtések és kutatásokra annál szivesebben fogadta választmányunk, mert egyúttal igéretet tett, hogy régibb gyűjteményeiből származó, kikölcsönzött anyaggal együtt az ujonnan gyűjtendőket is tudományosan feldolgozva, jelen év tavaszán beszolgáltatja ásványtárunkba.

Szolga Ferencz, egyetemi tanársegédem, a ki az ásványtár rendben tartásában más tekintetben is elismerésre méltó buzgalmat fejt ki, a Persányi hegységben, főleg Vargyas vidékén eszközlendő kutatások és gyűjtések folytatására kapott választmányunktól megbízást. Az innét gyűjtött és az ásványtárba beszolgáltatott, összesen 76 kőzet darab földolgozás alatt van.

A tudományos kutatásokkal kapcsolatos gyűjtések legnagyobb részét azonban személyesen végeztem, sok esetben segédem és a tár szolgája kiséretében. Ezek egyrészt Kolozs és Apahida között eső terület részletesebb tektonikájának földerítésére voltak irányozva, melylyel kapcsolatban azonban másuvá is tétettek kirándulások. De másrészt tanulmányunk és gyűjtésünk tárgyává tettük Erdély távolabb eső részeit, a Vlegyászát, az Erdélyi Érczhegységnek egyespontjait a Persányi hegységnek az Olt folyótól átvágott érdekes táját és a Hargitának egyes helyeit.

E gyűjtésekből származó ásvány-, kőzet- és kövület-példák száma meghaladja a 600-at.

Van azonban ezeknek a kirándulásoknak egy másik, nem jelentéktelen hasznuk is gyűjteményeinkre nézve, nevezetesen ezekkel összeköttetéseket létesítünk és a meglévőket fönntartjuk egyrészt gyűjteményünk, másrészt az egyes ipartelepek, bányák között. Nagy súly helyezendő az ilyen összeköttetésekre főleg olyan esetben, a minő a miénk, a hol t. i egy jó hírnévnek örvendő, első sorban helyi gyűjtemény fejlesztéséről van szó, a melyik a nagy közönség érdekeit is szolgálja.

Valamennyi kirándulásom után tapasztalom az ezekből származó összeköttetéseknek üdvös hatását, de talán legnagyobb mértékben nyilvánúlt ez a Gömöri Érczhegységbe, Tiszolcz, Nagy-Rőcze, Dobsina és környékeire tett kirándulásommal kapcsolatban. A sok becses és részben iparilag is fontos tárgyon kivűl, melyet magammal hoztam, három értékes küldemény érkezett ajándékul gyűjteményünk számára. Kettőért, melyeknek súlya 366 kg volt, a Rima-murány-Salgó-Tarjáni vasmű-részvénytársaság műszaki vezérigazgatóságának mondottunk hálás köszönetet 117 nagy, iparilag fölhasználható, ásvány- és kőzetpéldával (nagyobbára *Limonitis*sel, *Sideritis*sel, *Barnaszén*nel) gazdagodott ezek révén ásványtárunk. A harmadik, kisebb szállítmányban különböző vaskői ásványok küldésével a nagy-rőczei polgári fiú-iskola igazgatósága kötelezte le gyűjteményünket.

Föntartottuk és fejlesztettük összeköttetéseinket a közeli bányabirtokosokkal, sőt a gyűjtésre hajlandó és érzékkel biró kőbányamunkásokkal is. Ennek a révén egyebek között egy nagyon szép *Trionyx* (teknősbéka) hátpánczél került gyűjteményünkbe a kolozsmonostori kőbányából, mint Nagy testvérek becses ajándéka.

Az ajándékozók között kell hálasan megemlítenem Dr. Apáthy István igazgató collegám nevét, a ki egy értékes nagy és egy kisebb *Rhyolithos* bombát küldött gyűjteményünknek a Lipari szigetcsoport legdélibb tájáról, a Vulcanóról, továbbá *Horzsakövet*, *Obsidianust* és *Ként* hozott magával ugyan innen, szép mésztuffa példákat pedig a ternii vízeséstől, a Velino üledékéből.

Dr. Szlujka Gusztáv, bányamérnök úr, *vascsillámpala* darabokat küldött ajándékba Dobra vidékéről, Dr. Lindner Gusztáv, egyetemi tanár úr, *Kristályos palát* hozott gyűjteményünknek a Déli-kárpátokból a Szebenhegységből, Dr. Richter Aladár collegám pedig régi vas salakot N.-Rőczéről. Mairovitz Emil tarka márvány koczkát, különbözően kidolgozott lapokkal ajándékozott a menyházi kőbányából, én pedig nehány thüringiai negyedkori csigát. Fogadják az ajándékozók nyilvánosan is hálás köszönetünket szivességükért, melynek révén 148 tárgy került gyűjteményünkbe.

Vétel útján is több becses példával gazdagodott gyűjteményünk, nevezetesen:

igen szép, lemezes, reczés kiképződésű *termés arany* példát szereztem a verespataki-orlai m. kir. Szent-Kereszt bányamű ásvány árulásától;

2 nagy *Anthracitist* Driftonból (Pensylvania) Szlujka Gusztáv bányamérnök közbenjárásával;

8 kisebb darab, meteoronkövet a mócsi esésből (összesen 180·555 gr. súlyban) Roska Márton kereskedőtől;

több eocaenus korú kövületet és nehány erdélyi ásványt és kőzetet Orosz Endre, néptanítótól.

A vett példányok összege 93 darab.

Még három cseréről kell megemlékeznem, a melyekkel gyűjteményünkben örvendetes változás állott be. Az egyiket Prof. WARD-dal a magán emberek között a *legnagyobb Meteoritis gyűjtemény tulajdonosával* kötöttem, a ki a múlt év elején Kolozsvárra jött, hogy lássa Meteoritisjeinket, esetleg cseréljen belőlük a magával hozott duplicatumokkal. Ezt a kedvező alkalmat felhasználtam arra, hogy Meteoritis gyűjteményünk leggyengébb részét, a meteorvasakat WARD duplicatumai között lévő nagyon szép csiszolt és etetett példákból kissé megerősítsem. Ezek közül megszereztem 2 nagyobb és 5 kisebb meteoronvasat (ötöt csiszolva és etetve, egyet nyers állapotban), összesen 2412·572 gr. sulylyal, két mócsi és egy knyahinyai nagyobb meteorronkőért és két kisebb darab meteoronvasért duplicatumaink közül, összesen 1618·81 gr. súlylyal.

A másik csere útján, a melyet FODOR ANTAL nyugalmazott udvari titkárral Gráczban kötöttem, két nagyon szép *Rutilum*-kristályhoz (Modriach) egy ritka szépségű *Pyrrhotina* kristálycsoporthoz (Schneeberg) és egy *Andesina* földpát példához jutott gyűjteményünk egy 98.62 gr. súlyú mócsi meteoronkőért. A budapesti egyetem geo-palaeontologiai intézetétől pedig 20 nagyobb és 16 kisebb, HANTKENtől származó csiszolat és 1 *Lősz* példát kaptunk 1 czet (*Berardius*) csigolyáért. Cseréink révén 48 drb.-bal szaporodott, 7 darabbal fogyott gyűjteményünk.

Múzeumi tárgyaink tudományos földolgozása terén is megtettük, a mit időnk és erőnk megtenni engedett. Ennek eredményéűl azokról az érdekes, *Koorund* (részben Szafir) tartalmú zárványokról tartottam a magyarhoni földtani társúlat májusi szakülésén előadást, a melyeket kirándulásaim közben nagyobbára magam gyűjtöttem össze. Előadásom a Földtani Közlönyben már meg is jelent. Márcziusi természettudományi szakülésünkön pedig a párisi kiállításra küldött erdélyi tárgyainkon, legnagyobbrészt Ditró-Szt.-Miklós vidéki kőzeteken végezett vizsgálataim eredményét adtam elő.

DR. LÖRENTHEY IMRE az ásványtárunk tulajdonát képező, Baróth környékén gyűjtött tárgyak földolgozásával a K. M. Természettudományi Társulat ez idei közgyűlésén jutalomdíjat nyert.

DR. SIMIONESCU J. a bécsi egyetem palaentologiai intézetében földolgozta a HERBICHtől Ürmös környékén gyűjtött, ásványtárunktól kikölcsönzött, de már vissza is érkezett fölső kréta (turon, senon) kövületeket. Dolgozata a Verhandlungen der k. k. geolog. Reichsanstalt 1899. No. 8. füzetében és az Academia Română 1899. No. IV. füzetében meg is jelent.

A külföldi szakemberek közül mások is folyamodtak több ízben gyűjteményünkhöz, kérésüket minden alkalomkor a legnagyobb előzékenységgel teljesítettük.

Hazai közönségünk is elég gyakran fordúl hozzánk tanácsért, szakvéleményért, a melyekkel mindig készséggel szolgáltunk. Gyüjteményünk ennek a kapcsán is több hasznavehető tárgygyal gyarapodott.

Gyüjteményeink vasár- és ünnepnapokon a szokott időben a látogatásra nyitva állottak és máskor is szivesen megmutattuk az alkalmas időben jelentkezőknek. A látogatók száma 456 volt.

Ezekben volt szerencsém a múlt esztendő nevezetesebb eseményeit előadni, melyeknek szíves tudomásúl vételét kérem.

Jelentés

az Erdélyi Múzeum növénytárának állapotáról az 1899. évben.

Az Erdélyi Múzeum-Egylet 1900. év márczius hó 22-én tartott közgyűlésén bemutatta Dr. Richter Aladár, mint a növénytár igazgatója.

Tisztelt Közgyűlés! A midőn 1899. év január hó 19-én az Erdélyi Múzeum növénytárá a vezetését átvettem, az átvételt jól eső öröm kisérte, mert én — mint aki a kolozsvári tanszék mellett egykor (1892 - 3) assistensként is működtem — régebben szerzet tapasztalatból jól ismertem a Múzeum gazdag s angol minta szerint rendezett herbariumának nagy értékét; most pedig, hogy a Magyar Nemzeti Múzeum növénytani osztályának, tehát az ország első e fajta intézményének a vezetésétől megváltam, örömöm nem csappant meg, mert a lefolyt év folyamán újra csak arról győződtem meg, hogy az Erdélyi Múzeum-Egylet növény gyűjteményében fölhalmozott az a tőke, mely bold. Kanitz professor buzgalma s kedvező összeköttetései révén a Múzeum javainak öregbbítésére jutott, tudományos értékben nagy tőke, melynek megfelelő módon való gyarapításáról utódja, Dr. Istvánffy Gyula is teljes odaadással gondoskodott.

És ez természetes is; mert mind a ketten, kik a Nemzeti Múzeumnál viselt állásainkban egymás nyomdokába léptünk, jól tudjuk, hogy a „Hajnald-alapítás"-nak ma már méltó testvértársa a kolozsvári növénygyűjtemény, jóllehet Maecenását még csak a jövendő tartogatja számára.

A régebbi jelentések során élénken kitetszik egy állandó munkaerő hiánya fölött érzett panasz; a minek egyik következménye volt az, hogy a gyűjtemény érdekében kifejtett s több deceniumra terjedő munkásság javarésze végre is csak a herbarium megtartásában központosúlhatott.

Az egészséges fejlődés sorrendjén a föl nem dolgozott anyag jelentékenyen felhalmozódott; legelső föladatomúl tehát azt kellett tekintenem, hogy ezt a fölötte értékes anyagot a törzsgyűjteménybe való besorolásával e tudomány művelőire nézve hozzáférhetővé tegyem. És ez sikerült, egy az egyetemen hirdetett systematikai collegium keretében, minek meg volt a maga kettős haszna; a Múzeumén kivűl t. i. a tanárjelölteké is, kik ilyen formán élhettek a jó alkalommal, hogy museologiai jártasságra is szert tegyenek, a mit különben a természethistoriai disciplinán egy középiskolai tanárnak se volna szabad nélkülöznie.

Fölragasztatott kerekszámban 6000 lap, melyeknek Nymann Compectusa szerint való adnumerisálását állandó fölügyeletem mellett Kisfalusi István, Reithoffer Rezső, Götz István, Szabó Imre, Sylvester Ákos, Nagy Ödön s Györffy István tanárjelölt urak megfelelő ügyszeretettel végezték, a besorolás munkáját pedig Győrffy István úr egymaga, akinek a Múzeum érdekében kifejtett nagy szorgalmát külön is ki kell emelnem.

Átlagosan csak 4 speciment számítván egy lapra, a nyers anyag 24 ezer speciment jelent; mindannyiját egy rövid év leforgása alatt FARKAS KÁLMÁN intézeti praeparator készítette elő a további munkára, annyit, amennyit eddig még soha. Jóravaló igyekezetéről ismételhetném azt, amit az előző jelentések mindannyiszor az elismerés hangján kifejezésre juttattak.

Ezek után KERNER, Flora exsiccata Austro-Hungarica I—XX. centutiája, FUSS, Herbarium Normale Florae Transsylvaniae nevezetes centuriái (I—V, VII.), VOLOSZCZAK, Flora Polonica Exsiccata IV. V. VI. centuriája, a Múzeum könyvtárába tévedt SADLER, Agrostheca hungarica 2. füzetének 25 egészen ép példája, BOOS (823), JANKA S KANITZ (675), BÉLTEKY, (575), HERBICH boszniai (500), GRECESKU S ALEXI romániai (226), KABLICH JOSEPHINE (216), PORCIUS (70), SODIRO P. S. (66), KOVÁCS GYULA (30), s mások növényei immár mind hozzáférhetők *monographikus tanulmányok czéljaira.*

Jóllehet díjazott munkaerő nem állott rendelkezésre, a gyűjtemény phanerogamius részében u. n. restantia most már nincs, amit jól eső örömmel foglalhatok e jelentés keretébe.

Vétel utján szereztettek a következők:

1. NORDSTEDT, Algae Aquae dulcis Cent. 26*, 27*, 28*, 29*....	43 frt	90 kr.
2. ZAY VILMOS quarneroi algáinak 4 fasciculusa..............	15 „	10 „
3. ZAY-féle quarnerói Codiumok szemléltetésre alkalmas módon praeparálva..	3 „	45 „
4. MIGULA-féle Characeák 1 - 5* fasciculusa..........összesen	42 „	25 „
5. SYDOW, Mycotheca Marchica, Cent. 46*, 47* 48, 49, Uredineae, fasc. 21*—23*, 24—28. Ustilagineae, „ III.* IV. Phycomycetes „ II.	78 „	73 „
6. BRUNNTHALER, Pteridophytanjaiból 1 Cent..................	17 „	50 „
7. KNENCKER, Carices exsiccatae, Lief. I—VII..................	33 „	89 „
8. WOLOSZCZAK, Flora Polonica exsiccata Cent. V*—VII.*....	30 „	20 „
9. PAX, Herbarium Cecidiologicum, I. fasc....................	17 „	67 „
10. EKE kiadványaiból a Remetei sziklaszoros s a Gyilkos tó képei*...	2 „	— „
	285 „	69 „

Ezekből a *-gal jelzettek 1898. év folyamán eszközölt beszerzések s pedig összesen 151 frt 48 kr. értékben.

Saját gyűjtéseink, valamint ajándék útján azonban jóval nagyobb az osztály gyűjteményeinek a gyarapodása, a mint hogy soha szem elől nem téveszthető első múzeumi föladat a haza, sőt — ha lehet e kifejezéssel élnem — a szűkebb haza természeti viszonyainak lehető legrészletesebb tanúlmányozása és e tanúlmányok egyik realis eredményeképen megfelelő collectiók szervezése.

Ebben a tekintetben kifejtett tevékenységünk széles körűnek mondható. Az ISTVÁNFFY tanártól kezdeményezett gazdag formolum-gyűjtemény szemléltetésre alkalmas módon lehetőleg természetes habitusukban állítja elénkbe úgy az erdélyi Flora, valamint a botanicus kerti culturák kiváló példáit; egy része a párisi kiállitás során is szerepel. valóban mint oly gyűjtemény, mely általános érdeklődésre méltán számot tarthat. Ebben az irányban tovább kisérletezünk, mert az idő az, mely az e fajta praeparatumok állandóságának criteriumát képezi.

Megszoktuk azt hinni, hogy a természethistoriai disciplinák között egyedűl a botanika az, melynek közművelődési tekintetben extensivus múzeumi hatása nincs; igy pld. egy botanikus Múzeum nálunk még mindig egy herbarium fogalmába zsugorodik össze Szemléltetésre alkalmas objectumokkal éppen annak az alapját kivánjuk megvetni, és én soha sem fogom szem elől téveszteni azt a czélt, hogy a botanika ezentúl közművelődési érdekeket is szolgáljon.

E végből saját, 1896. évi északi- és keleti-tengeri gyűjtéseimnek a fölhasználásával a *barna algák* (Melanophyceae) főtypusainak a bemutatására 8 nagy méretű alga-képet készitettem ajándékul a Múzeumnak, hogy Norderneyn, Ostendén vagy Helgolandon megforduló honfitársaim tudják ezentúl, mik azok a föltűnő organismusok, a melyeket partra vet a hullám szeszélye.

Ezek a következők:

1. *Laminaria* digitata [186×101] Helgoland.
2–4. *Desmarestia* aculeata [144×108, 71×85.8, 59.8×76] Helgoland.
5–7. *Fucus* serratus [91×105·8, 59·5×76·5, 75·9×91] Warnemünde, Kiel, Helgoland.
8. *Halidrys* siliquosa [108×155·8] Helgoland.

Nevezetesebb ajándékozások sorába tartozik továbbá az a 83 drb.-ból álló minta fagyűjtemény, a mely a hazai fanemek föltűntetésére a selmeczbányai erdészeti akadémia millennaris kiállításon szerepelt e fajta jeles collectiójának a pár darabja s melyet kérésemre Dr. Tuzson János úr, a m. kir. közp. erdészeti kisérleti állomás adjunctusa Selmeczbányán, volt szíves Múzeumunknak megküldeni.

Kolozsvár környékén eszközölt sorozatos gyűjtéseinken kivűl e helyt különösebben ama nagyobb kirándulásról kell megemlékeznem, a melyet i. t. barátom, Dr. Szádeczky Gyula ny. r. professor, társaságában végeztem hazánk ama területén, mely „Magyarország kicsinyben". 1899. év junius hó 10—19. napjain ugyanis a bérczes Gömör kiválóbb pontjait (Ajnácskő, Tiszolcz, Murány, N.-Rőcze, Straczenai völgy, Dobsina) kerestük föl, aminek eredménye részemről 570 növényfaj, közöttük a tőlem fölfedezett növénygeographiai unicum, a murányi *Daphne arbuscula* Csel. számos s cserére fölötte becses példája.

Minthogy az osztálynak u. n. duplum gyűjteménye nincs, megvetettem a csere-herbarium alapját, a mely saját (főleg banátusi) gyűjtéseimből immár 1500, Walz Lajos egyetemi főkertész erdélyi kirándulásainak eredményeként 210 erdélyi specialitast, összesen tehát 1710 példát foglal magában, ami 6840 specimennek felel meg. Gyűjteményeink gyarapitására nézve ez a legolcsóbb mód, s ez idő szerint abban a helyzetben van az osztály, hogy Európa hasonló intézményeivel nyomban csereviszonyban léphet. Kedvező összeköttetéseimet érvényesíteni fogom s a kezdő lépéseket e tekintetben megtettem.

Boissier botanophilus veje, Barbey William (Chambéry, près Genève) máris arról értesített, hogy cserénket nagy örömmel fogadja, sőt Mémoires de l'Herbier BOISSIER cz. kiadványát is megküldi.

Súlyt helyezek arra, hogy ezentúl a botanicus kertben cultivált növények is rendszeresen begyűjtessenek, minthogy ez által sok oly faj nyer a gyűjteményben képviseletet, amelylyel eddig nem rendelkeztünk. Elég az évről-évre változó culturákra hivatkoznom, hogy kitessék a többi között az is, hogy fölötte kérdéses, valjon egyik-másik növény újból előfordúl-e a culturák során? E fajta tavalyi gyűjtéseink eredménye 172 herb. példa, amelyek aszerint, a mint europaiak, vagy más continensen otthonosak, az eddigi gyakorlat szemmel tartásával a múzeum, illetőleg az egyetem ú. n. herbarium exoticum-ába osztatnak be.

Meg kell említenem továbbá azt az örvendetes tényt is, hogy KOVÁCS BÉLA praeparandiai tanár úr húzamosabb idő óta a múzeum növénytani osztályában főleg az erdélyi Carex-vegatatio szakszerű tanúlmányozására szenteli minden szabad idejét. Vajha minél számosabb követői volnának!

Jelentésem kimagasló pontjául tevékenységünk ama részét kell még megjelölnöm, mely a BAUMGARTEN-herbarium megszerzésére irányúlt. Az igazgató-választmányhoz annak idején benyújtott jelentésem részletesebben foglalkozik evvel, s e helyt csak annyit jelzek, hogy az elnökség útján a nm. vallás- és *közoktatási minister úrhoz fölterjesztett emlékiratszerű kérvényben* a helyszínen, Nagy-Szebenben szerzett tapasztalataim alapján kifejtettem e classicus értékű gyűjtemény jelenben adott fonák helyzetét. Alig szenved kétséget, hogy lépéseinknek meg lesz a teljes sikere, a midőn is 20,000 fajjal gyarapodván meg a herbarium, az osztály növénygyűjteménye, hogy úgy mondjam, egy csapással az első rangú gyűjtemények sorába emelkedik.

JOANNES CHRISTIANUS GOTTLIEB BAUMGARTEN Erdély széles e földön irigyelt szépségű Florájának első egybefoglalója volt századunk elején; gyüjteményének helye csak Kolozsvár lehet.

A „Herbarium Baumgartenianum"-mal kapcsolatosan áll elő az az elodázhatatlan követelmény, hogy a Múzeum növénytani osztálya eredetileg is első föladatának: a „Flora Transsilvanica gyűjteményenek" külön való fölállításával s kiegészítésével végre megfeleljen. Elismeréssel adózom tehát az Igazgató Választmány ama határozatáért, melylyel ezen munkálat végrehajtását a HAYNALD-alapítvány kamatjainak a kiutalványozásával lehetővé kívánja tenni. Erdély egykori lánglelkű püspökének, aki még carthagói érseksége szűkös viszonyai közepette sem feledkezett meg a botanicusok e classicus földjének fokozott szépségű Florájáról, intentióinak megfelelőleg evvel a legszebb emléket állítunk.

T. Uraim! Munkásságom idejéből mily hányadot juttat a jövő ez osztály javára, nem tudhatom. De tudom azt az egyet, hogy működésem tere bármennyire is változzék az idők folyamán, törekvéseimben igaz lelkesedéssel párosúltan mindig az vezet, hogy disciplinám még azok előtt is elvitázhatatlanúl kedves legyen, kik pld. a calculusok ridegen számító világában laknak és hogy a közgyűlés i. t. tagjaiban itt lévő különböző társadalmi osztályokban is mindjobban meggyökeresedjék a tudat, hogy egy a scientia amabilis, és ez a növényvilágról szóló tudomány! — Mindezeknek alapján kérem, méltóztassanak jelentésemet kegyesen tudomásúl venni.

Jegyzőkönyvi kivonat

az Erdélyi Múzeum-Egylet orvos-'ermészettudományi szakosztályának 1900. febr. 16-án tartott természettudományi szaküléséről.

Dr. Borbás Vincze, egyet. cz. rk. tanár Budapesten, két előadást tart a.) a fa vastagodásáról, általános, inkább népszerü összefoglalásával a fák vastagodásáról való ismereteinknek, b.) „Biologiai Közlemény" czimen. Az utóbbiban saját megfigyelésen alapúló adatokat szolgáltat. Ezek rövid foglalata a következő:

*A vízi füvekből kiindúlva, kimutatja, hogy a termékenyűlésre nézve a Ceratophyllum*nak hullámváró virágából hogy alakul szélváró. A part sekély vizében vagy sarában tengődő *Myriophyllum*-nak lelni példáit, melyek virágai egészen a szár alsó részén erednek, tehát a himport a bibére még a hullám viszi át, de a mélyebb vizben a *Myriophyllum* virága mindig földjebbre halad a szárazon, mig a félméter vagy mélyebb vizben egész a szár tetejére huzódik s kétféle térbeli (vizi és légbeli) viszonyhoz alkalmazkodik. A mag megérlelhetése czéljából is, de hogy a szél a himport annál könnyebben a nyilt és nagyobb teret elfoglaló sok, de apró virágra csaphassa, az eleinte végtől-végig egyenletesen leveles szár (*Ceratophyllum, Myriophyllum verticillatum*) levelei a virágok alatt fokonként aprósodnak, mig végre teljesen meztelen virágzat (*M. spicatum*) támad. Egész hasonló fokozatos alakulás tapasztalható a *Menták* közt, sőt kifelé a parttól, a hol a *Menta* kopaszabb és fényesebb, mindinkább szőrösödik és szürkül, mig a szárazhelyi *Menta* gyakran egészen fehérmoholyu. Egész sereg növény van ezeken kivűl mind az Egyszikűek, mind a Kétszikűek közt, a hol a végtől-végig leveles fajnak levéltelenedett szellőváró testvérfaja támadt.

A bogárcsaló virág alakulását a *Boglárka Batrachium* algenusa fajaival világositja meg, melyek már nagyobb fehér és mézrejtő virágokat fejlesztenek, továbbá a fejes virágzatú *Mentha apuatica* val, melynek apró virágai egy csomóba egyesülnek s azt a hatást keltik, mint egy nagy virág. Szirmában szintén képződik méz. Az androdynamus (him) *Ménta* föltünőbb csalogatóbb, mint az apróbb virágú, gynodynamus, vagyis kiválóan magvazó *Ménta*. A bemutatott sok más növénysorozat nemcsak azt igazolja, hogy a növénynek fölső, a vizinek légbeli része miképp alakúl a beporzás (viz, szél, bogár) szerint, hanem empirikus módon azt a fokozatot is elénk tárja, a mint a vizi fűből parti, partiból száraz helyi (torma, menta) hosszú idők során alakulhatott. Végre a belviz és tengerviz növényzete közt is meg van a kapcsolat. Az összesen 27 virágzó fű közűl hat a száraz föld félig sós vizeiben, közűle a *Naias Marina* az édes vizekben is él, s a tengeri *Batrachium marinum*-nak a mi édesvizi boglárkainkkal szoros systematicai rokonsága van. Nehéz tovább a tengeri és belvizi, másrészt a havasi növények közt a kapcsolatot meglelni, de mégis fölemlithető, hogy a fehérvirágu havasi boglárkák (*Ranunculus alpestris*) csaknem olyanok, mint a vizi, felemáslevelü boglárkának légben élő karéjos levelü része. A nagyon eltérő helyen másképen kellett fejlődniök, de a levél szabálya s a virág szine és más tulajdonsága csaknem ugyanaz maradt.

Jegyzőkönyvi kivonat

az Erdélyi Múzeum-Egylet orvos-természettudományi szakosztályának 1900 márczius 16-án tartott természettudományi szakülésről.

1. Dr Szádeczky Gyula „A kolozsvári egyetem ásvány-földtani intézetének és az Erdélyi Múzeum ásványtárának kiállítása Párisban az 1900 évben" czímen értekezik a kiállított tárgyakról, nevezetesen a mócsi 35·7 kg súlyú meteoronkőről, melynek szövetét igen erősen összezúzott granitósnak találta; továbbá a Ditró vidéki *Syenitis* tömegről, melyben a *Nephelina-Syenitis*eken kivül ezeknek telérei: *Tinguaitis*ok és *Camptonitis*ok is előfordulnak, továbbá *Alkáli-Syenitis*ek (*Nordmarkitis*ek) *Quarz* nélkül és *Quarz*czal.

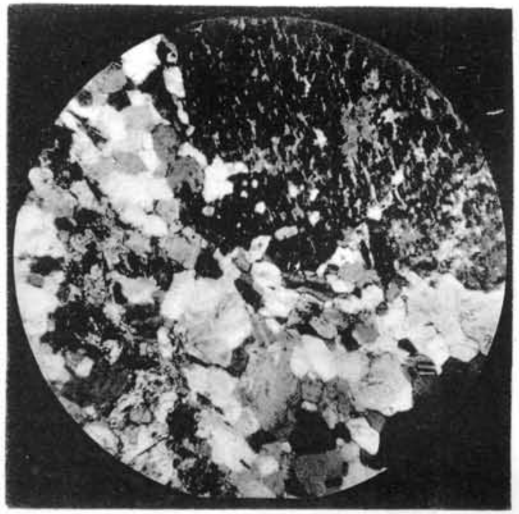
A Hargitából a korondi *Aragonitis* és a kakukhegyi *Haematitis* vesz részt a kiállitásban, a déli Kárpátokból pedig a felsősebesi *Cyanitis*. Ezeken kivül az erdélyi Érczhegység nevezetesebb ásványai és az Aranyihegy kőzete és ásványai képezik a kiállításnak tárgyát. Az érdekesebb kőzetek vékony csíszolatai, továbbá mikrophotographiái és rajzai is mellékelve vannak.

2. Dr. Klug Lipót: „Különös másodrendű kúpokról" tartott előadást. Ismerteti az orthogonalis, az egyenoldalú, a Pappus-féle, a merőleges focalissugarakkal biró kúpokat és azoknak reciprocus kupjait. Ezeknek hazánkban készült sikerült famintáit is bemutatja.

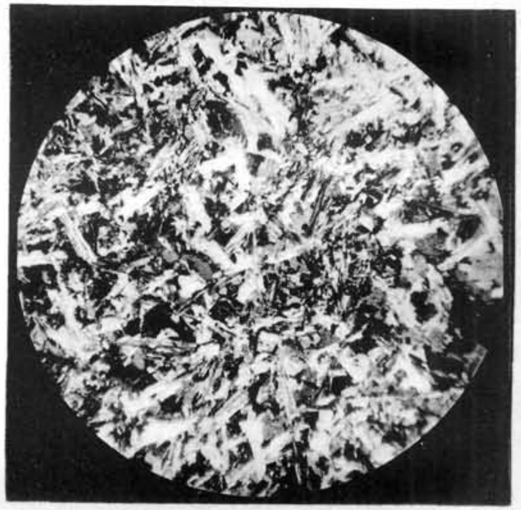
3. Ezután Daróczy Ernő, növénytani tanársegéd, terjeszti elő a dr. Richter Aladár professor vezetése alatt álló egyetemi növénytani intézetben készült dolgozatát, a mely a magyar Flora egyik nevezetes tagjának, a nálunk vadon előforduló *Csemege Sulyom*, „*Trapa natans* fejlődési, physiologiai-anatomiai és biologia viszonyai-"ra vonatkozik, microscopiumos vizsgálatok alapján készült eredeti rajzok kiséretében. Megfigyeléseit a kolozsvári botanicus kertben kultivált *Trapán* eszközölte, melynek anyagát jó részt Nagy Lajos szabolcs-nagyfalusi lelkész úr önzetlen fáradozásának köszönheti a botanicus kert. E növény megérdemli az érdeklődő közönség figyelmét, mert, úgy látszik, hogy Erdélyben is pusztulásnak indúl. Ezért kivánatos volna, hogy annak előfordulási körülményeit, termőhelyeit, elterjedését az érdeklődők följegyeznék és a botanicus kert igazgatójának beküldenék. Legalább a Simonkai erdélyi Florájában említett három termőhelyen (Szászváros, Nagy-Szeben, Kőhalom) nem sikerült újra rátalálni; jóllehet alig kételkedhetni abban, hogy Erdély több helyén is föllelhető lesz a *Trapa*. A Múzeum-Egylet Nagy-Szebenből való *Trapa* példája Wolff Gábor floristától, a szászvárosi Haynald boldogúlt bíborosunk saját gyűjtéséből származik. Az Erdélyi Múzeum-Egylet gazdag növény-gyűjteménye De Bary strassburgi botanicus professortól származó *Trapa* példát is őriz a többi között.

4. Végűl Sárkány Loránd tartott „*A levegőben végbemenő hangtünemények elméletéhez*" czímen előadást. Előadó a levegőt nem mint egy gázt, hanem mint két gáz elegyét véve figyelembe, ama hypothesisből indúl ki, hogy 1. a két gáz külön-külön, 2. a gázelegy adiabaticusan változik, s megszerkeszti a hangmozgás általános egyenleteit; majd, az általános egyenleteket síkmozgásra alkalmazva, meghatározza a sebességi potentialékat az egyik és a másik gázban s a hullámmozgás terjedési sebességét.

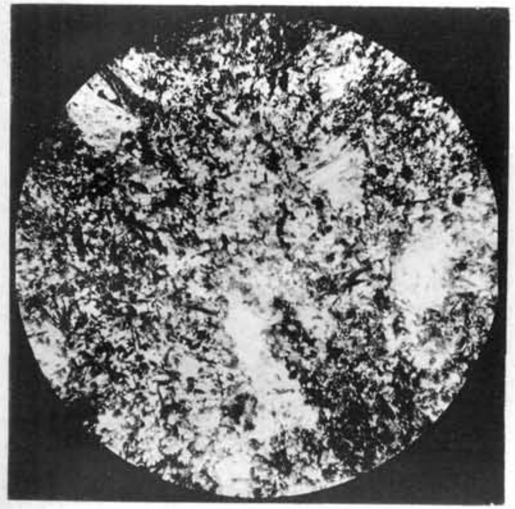
1.



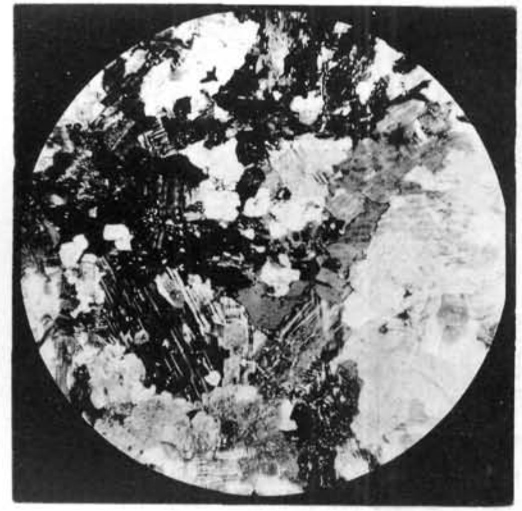
3 nic. +

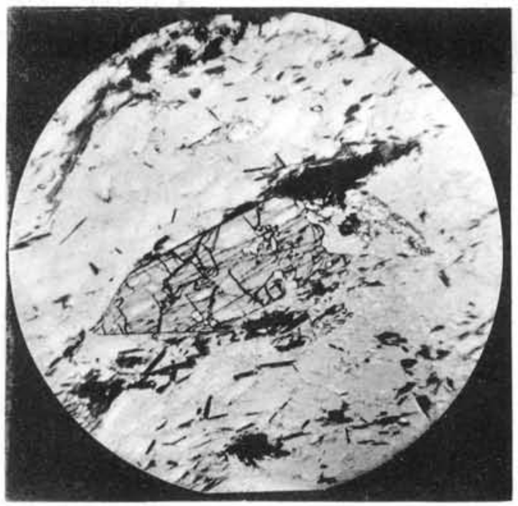


4. nic. +

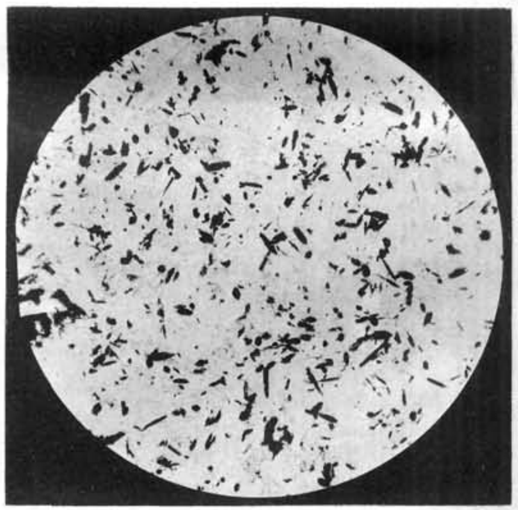


5. nic. +

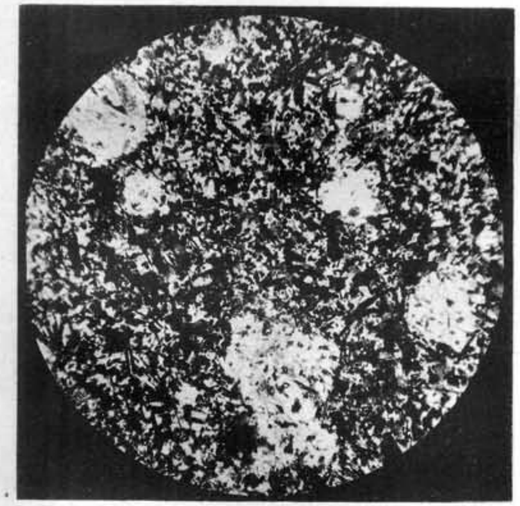




2.



3.



4.

5.

Szádeczky phot