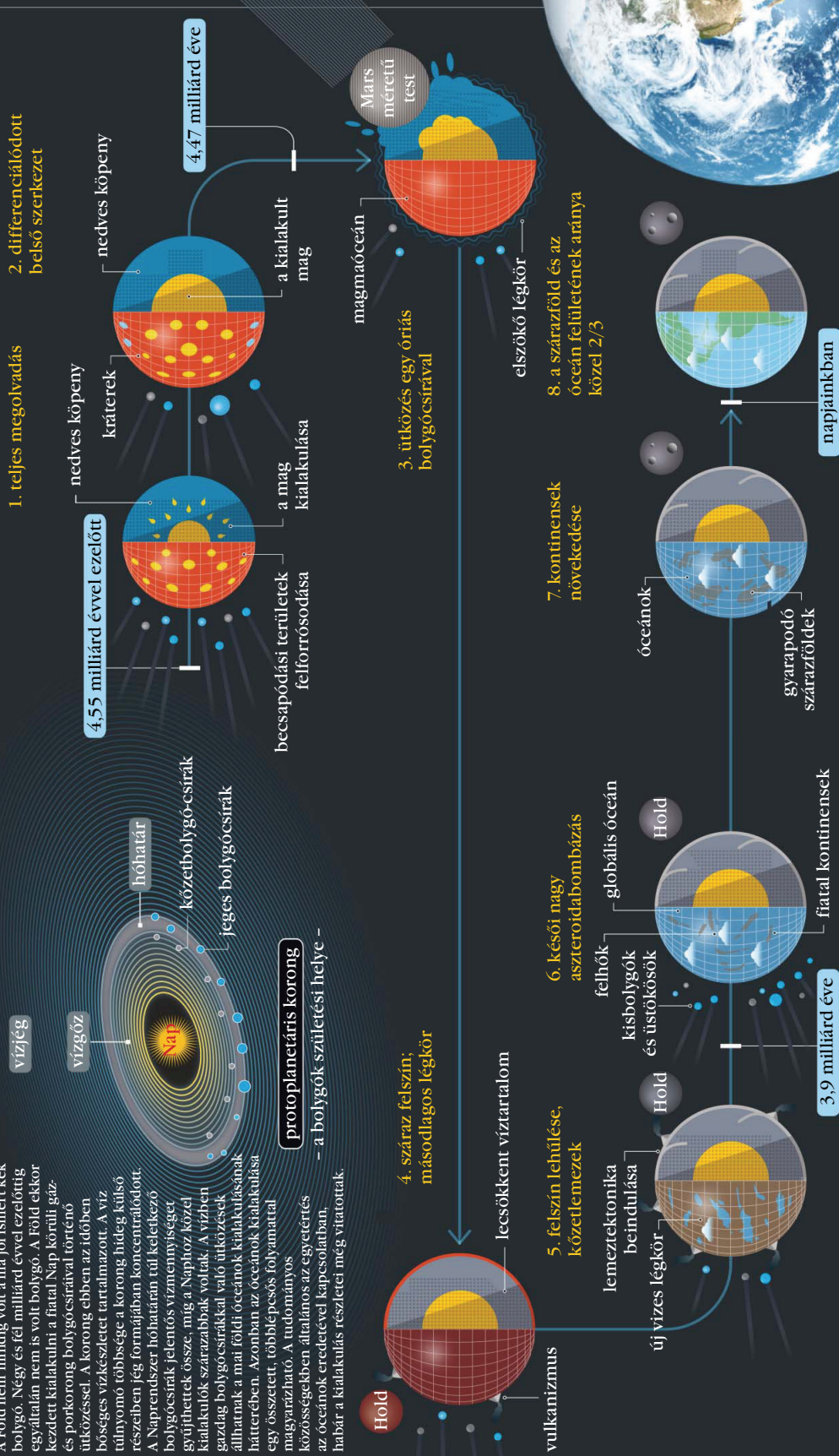


fizikai szemle

2022/1–2

A Föld keletkezése és az óceánok lehetséges eredete - Dencs Zoltán cikkéhez

A Föld nem mindig volt a ma jól ismert kék bolygó. Négy és fél milliárd évvel ezelőttig egyáltalán nem is volt bolygó. A Föld ekkor kezdett kialakulni a fiatal Nap körüli gáz- és porkorong bolygócsíráival történő ütközéssel. A korong ebben az időben bőséges vízkészletet tartalmazott. A víz túlnyomó többsége a korong hideg külső részében jég formájában koncentrálódtott. A Naprendszer hóhatárán túl keletkező bolygócsírák jelentős vízmennyiséget gyűjthettek össze, míg a Naphoz közel kialakultok szárazabbak voltak. A vízben gazdag bolygócsírákkal való ütközések állhattak a mai földi óceánok kialakulásának hátterében. Azonban az óceánok kialakulása egy összetett, többlépcsős folyamattal magyarázható. A tudományos közösségben általában az egyetértés az óceánok eredetével kapcsolatban, habár a kialakulás részletei még vitatottak.



Tájékoztató az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2022. évi tagdíjairól

Tisztelt Társulati Tagjaink!

Mindenekelőtt szeretném tolmácsolni a Társulat Elnökségének üdvözlését és újrakezdését a Társulat tagjainak és a **Fizikai Szemle** valamennyi olvasójának. A Társulat és a **Fizikai Szemle** idén is is változatlan erővel kívánja megvalósítani mindazokat a feladatokat, amelyek betöltésére Alapszabályában vállalkozott.

Kérem, hogy a **2022. évre vonatkozó tagdíjukat**, amelynek összege **2021. évhez képest változott**,¹ az alábbiak figyelembevételével szíveskedjenek befizetni.

Ha Ön **Társulatunk rendes tagja** és

- a **Fizikai Szemle** számaikat **elektronikus formában** kéri, akkor a 2022. évi tagdíja **9400 Ft**.
- a **Fizikai Szemle** számaikat **papíralapú terjesztéssel** kéri, akkor a 2022. évi tagdíja **10 000 Ft**.

Ha Ön a Társulat tagjaként **általános vagy középiskolai tanár** és

- a **Fizikai Szemle** számaikat **elektronikus formában** kéri, akkor 2022. évi tagdíja **1000 Ft** alaptagdíj + **5000 Ft** kiegészítő tagdíj, azaz összesen **6000 Ft**.
- a **Fizikai Szemle** számaikat **papíralapú terjesztéssel** kéri, akkor 2022. évi tagdíja **1000 Ft** alaptagdíj + **5600 Ft** kiegészítő tagdíj, azaz összesen **6600 Ft**.

Az alap- és kiegészítő tagdíjat együtt kérjük befizetni.

Ha Ön **nyugdíjasként** tagja a Társulatnak és

- a **Fizikai Szemle** számaikat **elektronikus formában** kéri, akkor 2022. évi tagdíja **3900 Ft**.
- a **Fizikai Szemle** számaikat **papíralapú terjesztéssel** kéri, akkor 2022. évi tagdíja **4500 Ft**.

Ezúttal is tisztelettel kérem azokat a nyugdíjas korú tagjainkat, akik nyugdíjuk mellett teljes munkaviszonnyal vagy közalkalmazotti jogviszonnyal rendelkeznek, hogy a tagdíjfizetés szempontjából ne tekintsek magukat nyugdíjasnak.

Ha Ön **tanulmányait végzi és a Társulat ifjúsági tagja** (felsőoktatási intézmény hallgatója és munkaviszonnyal nem rendelkezik vagy középiskolai tanuló), akkor **nem kell tagdíjat fizetnie**, és a **Fizikai Szemle** számaikat elektronikus formában fogja megkapni. A kedvezmény érvényesítéséhez évente hallgatói jogviszony igazolása szükséges az elft@elft.hu e-mail címre.

Ha **Ön még nem töltötte be 30. életévét és már nem tanul**, akkor tagdíja az alábbi:

- a **Fizikai Szemle** számaikat **elektronikus formában** kéri, akkor kedvezményes 2022. évi tagdíja **3900 Ft**.
- a **Fizikai Szemle** számaikat **papíralapú terjesztéssel** kéri, akkor kedvezményes 2022. évi tagdíja **4500 Ft**.

Kérem, hogy bármilyen adatváltoztatást (például e-mail-cím, postacím, munkahely megváltozása) e-mailben legyenek szívesek megírni az elft@elft.hu címre.

Kérem, hogy tagdíjukat mielőbb szíveskedjenek rendezni. A tagjainknak tagsági jogon járó **Fizikai Szemle** folyamatos küldését csak azok számára tudjuk biztosítani, akik 2022. évi tagdíjukat rendezték. Tájékoztatóm szeretném Önöket, hogy **tagdíjuk megfizetését esetleg munkahelyük is átvállalhatja**. Továbbá felhívom szíves figyelmüket az **önkéntes többletfizetés lehetőségére**. Kérem, hogy a leírtakra – különösen az utóbbira – külföldön élő ismerőseiknek is hívják fel a figyelmét. Nekik a **Fizikai Szemlét** elektronikus formában, e-mailen küldjük el; ha nyomtatott Szemlét kérnének, akkor kérjük, a lényegesen magasabb postázási költséget vegyék figyelembe.

Az újonnan belépni kívánók a Társulat honlapján – <http://elft.hu/jelentkezes-a-tarsulatba> – jelentkezhetnek társulati tagnak.

Amennyiben lehetőségük van rá, kérem, hogy a **tagdíj befizetését átutalással** szíveskedjenek rendezni a **K&H Banknál vezetett 10200830-32310274-00000000** számu folyószámlánkra. A közlemény rovatba a befizető nevét, városát és a „2022. évi tagdíj” szavakat kérjük feltüntetni. A Titkárságon (1092 Budapest, Ráday utca 18. földszint 3.) időpont-egyeztetéssel lehetőség van készpénzes befizetésre is, illetve csekk is kérhető.

Az Európai Fizikai Társulatba (EPS) a továbbiakban csak egyéni tagként lehet belépni. **Kérem a kollégákat, hogy a hazai fizika megfelelő képviselője érdekében az EPS-be minél nagyobb számban lépjenek be**. Az EPS-be annak weblapján, a www.eps.org címen lehet belépni; ugyanott fizetheti be az EPS-tagdíjat is.

Felhívás tagjainkhoz és a fizika minden barátjához

Tájékoztatom a Társulat tagjait és a **Fizikai Szemle** olvasóit, hogy a 2020. évről szóló **személyi jövedelemadó-bevalláshoz** kapcsolódó **felajánlások** révén a Társulat 2021-ben **927 718 Ft** bevételhez jutott, amit a korábbi évekhez hasonlóan a működési költségek és a **Fizikai Szemle** megjelentetési költségeinek részbeni fedezeteként használtunk fel. Ezért köszönetünket fejezzük ki a Társulat javára rendelkezőknek. Kérem a fizika minden barátját, hogy ha teheti, az **idén is rendelkezzen személyi jövedelemadója 1%-ának** a Társulat céljaira való felajánlásáról és buzdítsa erre barátait, ismerőseit is. Az **Eötvös Loránd Fizikai Társulatnak** a nyilatkozaton feltüntetendő **adószáma 19815644-2-43**.

Tisztelettel:
Groma István
az ELFT főtitkára

¹A **Fizikai Szemle** egyes példányainak ára 2022-től 1100 Ft, a duplaszámé 2200 Ft.

Fizikai Szemle

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A Matematikai és Természettudományi Értesítőt az Akadémia 1882-ben indította
A Matematikai és Fizikai Lapokat Eötvös Loránd 1891-ben alapította

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat havonta megjelenő folyóirata.

Támogatók: a Magyar Tudományos Akadémia Fizikai Tudományok Osztálya, az Emberi Erőforrások Minisztériuma, a Magyar Biofizikai Társaság, a Magyar Nukleáris Társaság és a Magyar Fizikushallgatók Egyesülete

Főszerkesztő:
Lendvai János

Szerkesztőbizottság:

Bíró László Péter, Bokor Nándor, Czitrovsky Aladár, Füstöss László, Gyürky György, Horváth Dezső, Horváth Gábor, Iglói Ferenc, Kiss Ádám, Ormos Pál, Pálfalvi László, Papp Katalin, Simon Ferenc, Simon Péter, Sükösd Csaba, Szabados László, Szabó Gábor, Takács Gábor, Trócsányi Zoltán, Ujvári Sándor

Műszaki szerkesztő:
Kármán Tamás

A folyóirat e-mailcíme:

szerkesztok@fizikaiszemle.hu

A lapba szánt írásokat erre a címre kérjük.

A beküldött tudományos, ismeretterjesztő és fizikatanítási cikkek a Szerkesztőbizottság, illetve az általa felkért, a témában elismert szakértő jóváhagyó véleménye után jelenhetnek meg.

A folyóirat honlapja:

<http://www.fizikaiszemle.hu>

A címlapon:

A Naphoz közeledő Leonard-üstököszt Majzik Lionel 2021. december 27-én örökölte meg a namíbiai (Hakos, Dél-Afrika) Skygems Remote Observatories egyik távolról (ez esetben Tápíobicskéről) is vezérelhető távcsövére szerelt CCD-kamerával, 4 különböző színszűrőt használva, összesen 10 perces expozíciós idővel. Az egy héttel korábban váratlanul kifényesedett üstökös kitérése során kidobott anyagból a kométa látványos csóvát eresztett. A képen az üstökösmagtól a Nappal ellentétes irányban húzódó ionsóva és annak finomszerkezete dominál.

TARTALOM

Pázsit Imre: Szemelvények a neutronfluktuációkból és a reaktordiagnosztikából – 1. rész 3

Dencs Zoltán: A földi víz lehetséges forrásai 8

Angeli István: $e = hv$ – Honnan tudta Planck, hogy éppen ez kell? 17

Bányász István: Tökéletlen holográfia 26

A FIZIKA TANÍTÁSA

Siposs András: A gázok politropikus állapotváltozásairól 30

Cserti József: A magnetooptikai Faraday-effektus 34

Gnädig Péter: Lehet-e impulzusa valaminek, ami nem mozog? 43

Sükösd Csaba: XXIV. Országos Szilárd Leó Fizikaverseny – 1. rész 56

HÍREK – ESEMÉNYEK

Groma István: Tájékoztató az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2022. évi tagdíjáról 1

I. Pázsit: A random talk (walk) in neutron fluctuations and reactor diagnostics – Part 1

Z. Dencs: Possible origins of water on the Earth

I. Angeli: $e = hv$ – How did Planck know what he needs?

I. Banyász: Imperfect holography

TEACHING PHYSICS

A. Siposs: Polytrropic state changes of gases

J. Cserti: The magneto-optical Faraday effect

P. Gnädig: Hidden momentum

Cs. Sükösd: 24th Szilárd Leo National Nuclear Study Competition – Part 1

EVENTS

I. Groma: Information about the Roland Eötvös Physical Society's membership fees in 2022

Szerkesztőség: 1092 Budapest, Ráday utca 18. földszint III., Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682

A Társulat Internet honlapja <http://www.elft.hu>, e-postacíme: elft@elft.hu

Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős kiadó Groma István főtítkárral, felelős szerkesztő Lendvai János főszerkesztő.

Kéziratokat nem örzünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.

Nyomdai előkészítés: Kármán Stúdió, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szathmáry Attila ügyvezető igazgató.

Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyszerűsített.

Megjelenik havonta (nyáron duplaszámmal), egyes szám ára: 1100.- Ft (duplaszámé 2200.- Ft) + postaköltség.

HU ISSN 0015–3257 (nyomtatott) és **HU ISSN 1588–0540** (online)

Fizikai Szemle

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

megjelenését támogatják:



SZEMELVÉNYEK A NEUTRONFLUKTUÁCIÓKBÓL ÉS A REAKTORDIAGNOSZTIKÁBÓL – 1. rész

Pázsit Imre

Göteborgi Chalmers Műszaki Egyetem, Svédország

Pázsit Imre kapta az Amerikai Nukleáris Társaság (ANS) 2021. évi „Eugene P. Wigner Reactor Physicist Award”-ot (E. P. Wigner Reaktorfizikusi Díj).

A díjat a nukleáris reaktorok fizikájának fejlesztésében elért kiemelkedő eredményekért ítélik oda. Pázsit Imre a díjat az atomreaktorokban lejátszódó véletlen folyamatok elméletében, valamint ezen módszerek reaktordiagnosztikában és a nem deklarált nukleáris anyagok detektálásában való alkalmazásában elért eredményeiért kapta. A díjat az ANS 2021. évi téli szimpóziumán adták át, Washington D.C.-ben 2021. december 1-jén. Az átadást követően a díjazott megtartotta a „Wigner Award Lecture” előadást. Ennek rövid kivonatát a *Fizikai Szemle* két egymást követő számában közöljük.

Pázsit Imre az Eötvös Loránd Tudományegyetemen szerzett fizikusi diplomát, majd 1975-ben egyetemi doktori fokozatot. 1985-ben az MTA fizikai tudományok kandidátusa lett. 1975-től 1983-ig a budapesti Központi Fizikai Kutatóintézetben dolgozott. 1983-ban vendégkutató lett Svédországban, a nyköpíngi Studsvik Energitechnik AB nukleáris energetikai intézetben. 1991-ben lett a göteborgi Chalmers Műszaki Egyetem tanszékvezető egyetemi tanára, ahol azóta rendes professzor. 2008 óta a Michigani Egyetem Nuclear Engineering and Radiological Sciences tanszékén is „adjunct professor”.



Először is, szeretném köszönetemet kifejezni professzor *Mike Williams* barátomnak, hogy felterjesztett a díjra; azon kollégáimnak, akik a jelölést támogatták, valamint az ANS Reaktorfizikai Szekciójának, aki elfogadta a jelölést, és megszervezte az előadást.

Nem tudom megállni, hogy ne idézzem azt az örömteli megjegyzést, amit a díj átadója, az ANS reaktorfizikai szekció „Honors and Awards Committee” elnöke, *Dimitrios Cokinos* tett az átadáskor, hogy a díj névadója és egyben első díjazottja, *Wigner Jenő* után, most kapta első ízben magyar, még ha jelenleg külföldön is tevékenykedő reaktorfizikus ezt a megtisztel-



1. ábra. A Fasori Evangélikus Gimnázium, a 20. EPS Historic Site. (Forrás: EPN 2015 46/3)

tést.¹ Egyben szeretném tiszteletemet is leróni legendás tudós honfitársunk iránt, kicsit azon keresztül is, hogy abban a megtiszteltetésben volt részem, hogy Wigner Jenővel még 1981–82-ben, Svédországba való költözésem előtt, levelet váltottam és személyesen is találkoztam vele.

A *Fizikai Szemle* olvasóinak semmi szükség Wigner Jenő és a többi „marslakót” bemutatni, de az előadás hangulatát visszaadandó, amelyben erre kitértem, mégis megemlítem hogy a „marslakók”, vagyis (születési sorrendben) *Szilárd Leó*, Wigner Jenő, *Neumann János* és *Teller Ede* egy évtizeden belül születtek Budapesten, és néhányuk közös iskolája, illetve lakóhelye is közel esett egymáshoz. Érdemes lehet még itt is megemlíteni, hogy a Fasori Evangélikus Gimnáziumot, ahol Wigner Jenő és Neumann János is tanult, 2015-ben az Európai Fizikai Társulat (EPS) úgynevezett „Történelmi Emlékhely”-nek (EPS Historic Site) nyilvánította (1. ábra). A Fasori Gimnáziumtól kőhajításnyira, a Városligeti Fásor ugyanazon oldalán van az a ház, ahol Szilárd Leó lakott és nevelkedett.

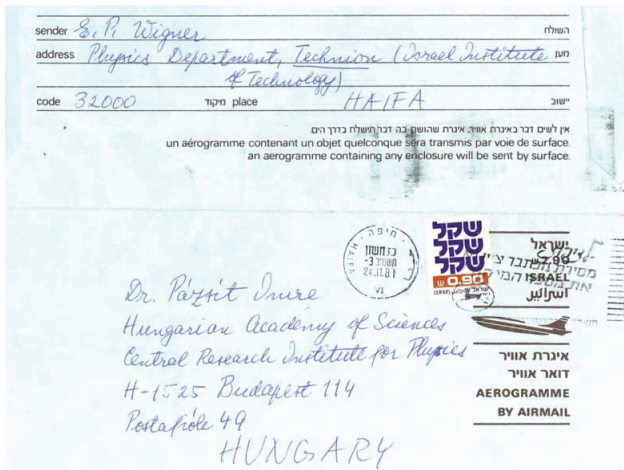
A Wigner Jenővel való már említett levélváltásom és találkozásom néhány képes dokumentuma a 2–5. ábrákon látható.

A levelet 1981 októberében egy reaktorfizikai, illetve reaktordiagnosztikai ügyben írtam neki, amelynek a háttérét lentebb röviden leírom. Ahogy a levélborító mutatja, Wigner Jenő akkor éppen Izraelben tartózkodott, de a levelet utánaküldték, és vette a fáradságot, hogy egy kézzel írt levélben válaszoljon. Ez a levél-



Pázsit Imre (1948) az ELTE-n szerzett fizikus oklevelet 1971-ben, majd A KFKI Atomenergia Kutató Intézetében lett doktori ösztöndíjas, ahol 1990-ig dolgozott („kisdoktor” – 1975, kandidátus – 1985). 1991-től professzor a göteborgi (Svédország) Chalmers Műszaki Egyetem Fizikai Tanszékén. Fő kutatási területe a stochasztikus neutrontranszport-folyamatok elmélete és alkalmazása a reaktorkutatásban és a hasadóanyagok azonosításában (safeguards), valamint az erőművi reaktordinamika és reaktorzaj-diagnosztika.

¹Dimitrinek oroszlánrésze volt a díj létrehozásában. Egyike volt azoknak, akik beszéltek Wigner Jenővel, engedélyt kérni, hogy nevében díjat létesítsenek, és mivel a díj első átadásakor Wigner Jenő már 91 éves volt, nem tudván Washingtonba utazni, így Dimitri a díjat Princetonban adta át neki. Az eseményen, amit a Fizikai Tanszék rendezett, a tanszék személyzetén kívül három Nobel-díjas fizikus is részt vett.



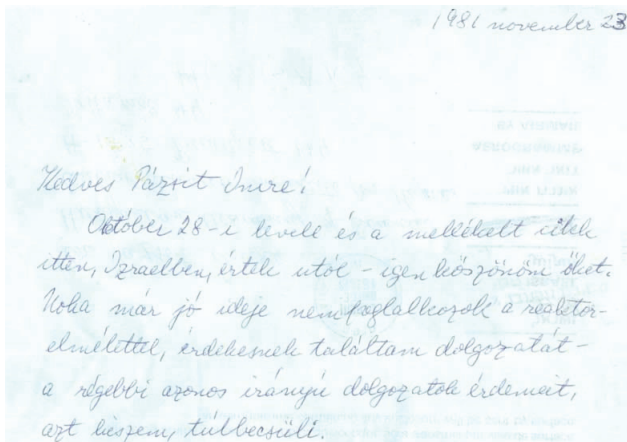
2. ábra. Levélborító

váltás az előzménye annak, hogy amikor 1982-ben Magyarországra látogatott, a KFKI-ban tett látogatása alkalmával én is ott lehettem az őt fogadó csoportban.

A levél háttéréhez némi bevezető szükséges. Az én fő kutatási területem, amelynek néhány érdekes problémájára később kitérek, neutronfluktuációk sokszorozó rendszerekben, és azok alkalmazása reaktorok diagnosztizálására és hasadóanyagok azonosítására. E területnek is két különböző ága van. Az egyik a sztatikus (időben nem változó), alacsony teljesítményű (néhány watt) kritikus rendszerekben figyelhető meg, emiatt ezt angolul „zero power noise”-nak, magyarul, kicsit pongyolán, zérózajnak, illetve Szatmáry Zoltán után [1] nukleáris zajnak hívjuk. A másik a magas teljesítményű erőművekben fellépő neutronfluktuációk (angolul: power reactor noise), amelyre Szatmáry Zoli a „technológiai zaj” kifejezést használja, én viszont inkább „erőművi zaj” vagy „teljesítményzaj” néven hivatkozom rá.

Ez a két terület gyakorlatilag különálló diszciplínaként fejlődött, mivel mind a neutroningadozások fizikai eredete, dominanciája, matematikai leírása, mind alkalmazási területük különböző. A zérózaj leírására a neutron-, illetve a beütésszám eloszlásfüggvényére felírt master-egyenleteket használjuk, míg az erőművi

4. ábra. Wigner Jenő a KFKI-ban 1982-ben, amikor kezét fog a szerzővel, mellette Szabó Ferenc főigazgató (fotó: Udovicsky Bea).



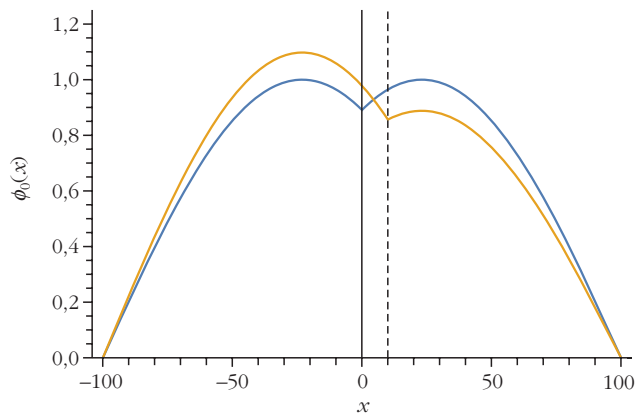
3. ábra. Levél Wigner Jenőtől.

zaj leírására a neutronfluxus-ingadozás időbeli fejlődésére felírt, a közeg ingadozásait reprezentáló véletlen együtthatókkal rendelkező sztochasztikus differenciálegyenletet (Langevin-egyenlet). Zárójelben megjegyzem, hogy a neutronzaj egyesített elméletét, amely magában foglalja mind a nukleáris, mind az erőművi zaj leírását, Pál Lénárddal közösen dolgoztuk ki, a master-egyenletes leírást kiterjesztve a időben véletlenül változó sokszorozó közegekre. Ez a kétszeresen véletlen (doubly stochastic) folyamatok bevezetését igényelte, amennyiben a neutroneloszlásra felírt master-egyenlet együtthatói maguk is véletlen folyamatokká válnak [2].

A zérózaj (nukleáris zaj) néhány érdekes problémájáról a következő számban számolunk be. Ebben, a Wigner-előadást összefoglaló első részben a teljesítményzajról lesz szó, ennek oka, hogy Wigner Jenővel való levélváltásom is erre a területre vonatkozott. Ez utóbbi nem magától értetődő, hiszen az ő aktív idejében, a nukleáris technika úttörő szakaszában, még nem léteztek nagyteljesítményű reaktorok. Annál meglepőbb, hogy az ő és kortársai munkájának eredményei messze túlmutattak a közvetlen alap kutatáson, és relevánsak a jóval későbbi gyakorlati alkalmazásokban. Levelem egyik célja pontosan az volt, hogy ezt megosszam vele.

5. ábra. Szatmáry Zoltán ismerteti a ZR-6 kritikus rendszert Wigner Jenőnek (fotó: Udovicsky Bea).





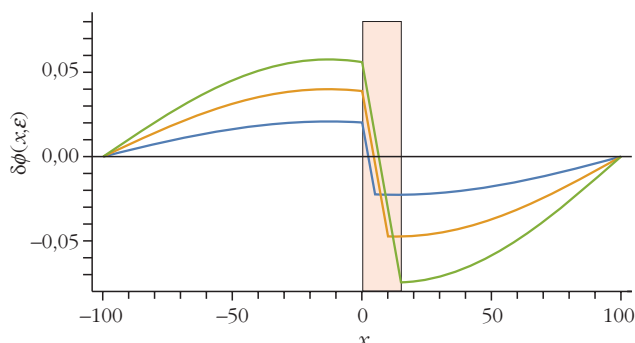
6. ábra. Két sztatikus fluxus, $\varepsilon > 0$ (piros) és $\varepsilon = 0$ (kék görbe).

A történet – amely a doktori tanulmányaim elejére nyúlik vissza – dióhéjban a következő. Témavezetőm, *Kosály Gyuri*, aki az erőművi neutronzaj otthoni úttörője volt, azt a feladatot adta, hogy számítsam ki egy rezgő abszorbercső által keltett neutronzajt. Az, hogy meghibásodás miatt rezgésbe kezdő szabályozórúd mérhető neutronzajt okoznak, már az Oak Ridge-beli HFIR és ORR kutatóreaktorokból ismert volt. Az első lépés az lett volna, hogy kiszámítsuk a rezgések által reprezentált perturbáció hatását a rendszer időfüggő $\rho(t)$ reaktivitására, ahol $\rho = (k-1)/k$, k pedig a sokszorozási tényező, a neutronok számának hányadosa az egymást követő generációkban. Mint az erőművi diagnosztikában szokásos, abból indultunk ki, hogy amennyiben a perturbáció gyenge (a rezgések amplitúdója kicsi), akkor az elsőrendűen kis amplitúdójú neutronfluktuációkat hoz létre, így a két mennyiség szorzata másodrendűen kicsi, a lineáris közelítésben elhanyagolható mennyiség.

A részletekbe való belemenés nélkül, dinamikus (időfüggő) esetben, az egyszerűség kedvéért egydimenziós modellt feltételezve, a rendszer ρ reaktivitása – abszorpciós hatáskeresztmetszet perturbációja által létrehozott – $\delta\rho$ ingadozását a következő formula adja meg:

$$\delta\rho(t) = -\frac{\int \phi_0(x) \phi(x, t) \delta\Sigma_a(x, t) dx}{\nu \Sigma_f \int \phi_0(x) \phi(x, t) dx}, \quad (1)$$

7. ábra. A neutronzaj adiabaticus közelítése három különböző $\varepsilon > 0$ értékre.



ahol $\phi_0(x)$ a sztatikus (perturbálatlan) neutronfluxus, $\phi(x, t)$ a $\delta\Sigma_a(x, t)$ perturbáció által létrehozott tér- és időfüggő neutronfluxus, Σ_f és Σ_a a makroszkopikus hasadási és abszorpciós hatáskeresztmetszetek, $\delta\Sigma_a(x, t)$ a szabályozórúd mozgása miatt a rendszerben levő abszorpciós hatáskeresztmetszetnek a nyugalmi állapottól való eltérése, és ν a hasadásonként átlagosan keletkező neutronok száma. A lineáris közelítés alkalmazásához, $\phi(x, t)$ -t felbontva egy sztatikus részre és egy fluktuáló részre,

$$\phi(x, t) = \phi_0(x) + \delta\phi(x, t), \quad (2)$$

a másodrendűen kicsiny

$$\int \phi_0(x) \delta\phi(x, t) \delta\Sigma_a(x, t) dx \quad (3)$$

mennyiséget kell elhanyagolnunk.

Azonban, meghökkenésünkre, arra a meglepő következtetésre jutottunk, hogy ezt az eljárást a rezgő abszorbers esetére alkalmazva, az eljárás nyilvánvalóan rossz eredményre vezetett (aminek bemutatását helyhiány miatt mellőzöm). A hiba okát viszont viszonylag könnyen lehet illusztrálni. Az x_p helyen nyugvó rúd által reprezentált abszorpciós hatáskeresztmetszetet egy térbeli Dirac-delta-függvénnyel modellezve (Feinberg–Galanin-modell),

$$\Sigma_a^{\text{rúd}}(x) = \gamma \delta(x - x_p), \quad (4)$$

ahol γ a rúd erősségét kifejező Galanin-állandó, a rúd által a nyugalmi x_p pozíció körül $\varepsilon(t)$ rezgésamplitúdóval végzett rezgések által létrehozott perturbáció nem más mint

$$\begin{aligned} \delta\Sigma_a(x, t) &= \gamma [\delta(x - x_p - \varepsilon(t)) - \delta(x - x_p)] \approx \\ &\approx -\gamma \varepsilon(t) \delta'(x_p), \end{aligned} \quad (5)$$

ahol az utolsó lépésben kihasználtuk a kis rezgésamplitúdót.

Ennek alkalmazásával a perturbációs kifejezés alkalmazásához szükséges elhanyagolt (ε -ban másodrendűnek feltételezett) tag alakjára (3)-ból kapunk egy tagot, amelyik az alábbi kifejezést tartalmazza:

$$-\gamma \varepsilon \delta\phi'(x_p, \varepsilon). \quad (6)$$

Ez akkor másodrendű, ha ε nullához tartásakor a zaj deriváltja, $\delta\phi'(x_p, \varepsilon)$ is zérushoz tart. Egy egyszerű megfontolás, amit a 6. és 7. ábrák is illusztrálnak, mutatja, hogy nem ez a helyzet. Középponti helyzetű rúdra, lassú változások esetén (adiabatikus közelítés), $\delta\phi(x_p, \varepsilon)$ becsülhető két normált sztatikus fluxus különbségeként. Ahogy a 7. ábra mutatja – habár mind a zaj, mind a deriváltja valóban zérushoz tart majd – nem mindenütt ha $\varepsilon \rightarrow 0$, azon a területen, amit a rezgés elfoglal, és ahol a deriváltat venni kell a perturbációs formulában, a derivált állandó, nem függ a rezgés amplitúdójától.

Ebből az következik, hogy erős abszorbensek esetén a kis rezgésamplitúdó feltételezésével elvégzett linearizálás hibás eredményre vezet. A lineáris elmélet csak gyenge abszorbensek esetében alkalmazható (megfelelően kis γ értékekre). Ezekben az esetekben a sztatikus fluxusban a rúd által okozott gödör (6. ábra) elhanyagolható.

Mi a kapcsolat fentiek és Wigner Jenő között? Némi indirekt. A reaktorban periodikusan oda-vissza mozgatott abszorbens által keltett periodikus neutron-fluktuációk leírását egy klasszikus 1948-as *Physical Review*-cikkben tárgyalja A. M. Weinberg és H. C. Schweinler [3]. Az akkori motiváció nem reaktordiagnosztika volt, hanem az Oak Ridge-i grafitreaktorban hatáskeresztmetszetek mérésére végzett reaktoroszillációs kísérletek értelmezése volt. Wigner nem szerzője a cikknek, de azon kívül, hogy ő mentora volt Weinbergnek (közösén írták a máig klasszikus úttörő könyvüket, a *The Physical Theory of Neutron Chain Reactors* címűt [4]), ahogy a cikk szerzői is közlik, a munka Wigner kezdeményezésére jött létre, és a cikk azon munka folytatása. A cikk szintén a gyengeabszorbens-közelítést használja (ezt Born-közelítésnek nevezi), de nem említi az erős abszorbens rezgéseit tárgyaló elméletek linearizációs problémáit.

A levelet Wigner Jenőnek azonban elsősorban nem emiatt írtam, hanem azért, mert a Weinberg–Schweinler-cikkben van még egy gyöngyszem. Nevezetesen, a grafitreaktoros oszcillációs mérésekben fellépett egy lokális effektus (amit az oszcillátor közelében lehetett észlelni), és amit a cikk magasfrekvenciás közelítésben reprodukálni tudott (habár az alkalmazott kom-

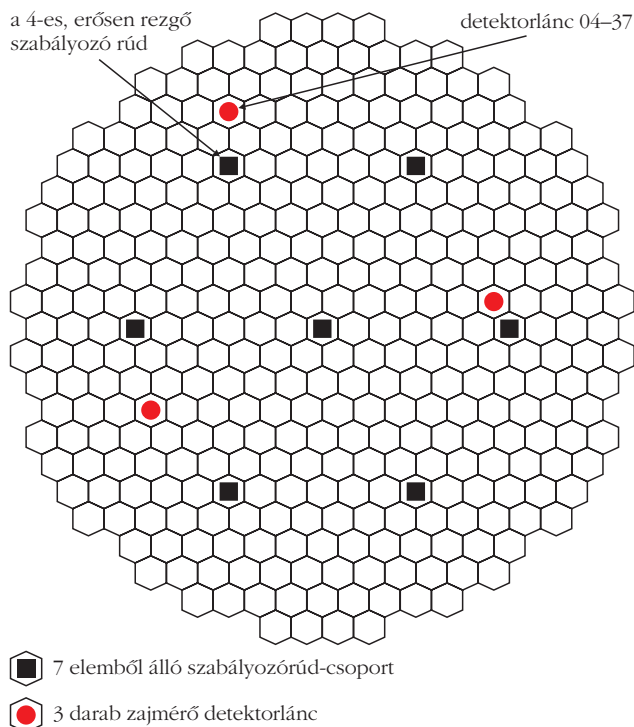
plex formalizmus miatt eléggé nehezen átlátható formában). A lokális effektus ezután feledésbe merült, míg nem a 70-es évek első felében forralóvízes reaktorokban végzett mérések újfent egy ilyen effektus létezését jelezték. A lokális effektus diagnosztikai célokra is alkalmas levezetését akkori doktori témavezetőm, Kosály Gyuri adta meg, két energiacsoportot feltételező („kétszoport”) leírásban. Kétszoportelméletben a térfüggő karakterisztikus egyenletnek két gyöke van, amelyek közül az egyik rövid relaxációs hosszal rendelkezik (a lokális tag), a másik hosszú relaxációs távolságú, ez a globális tag.

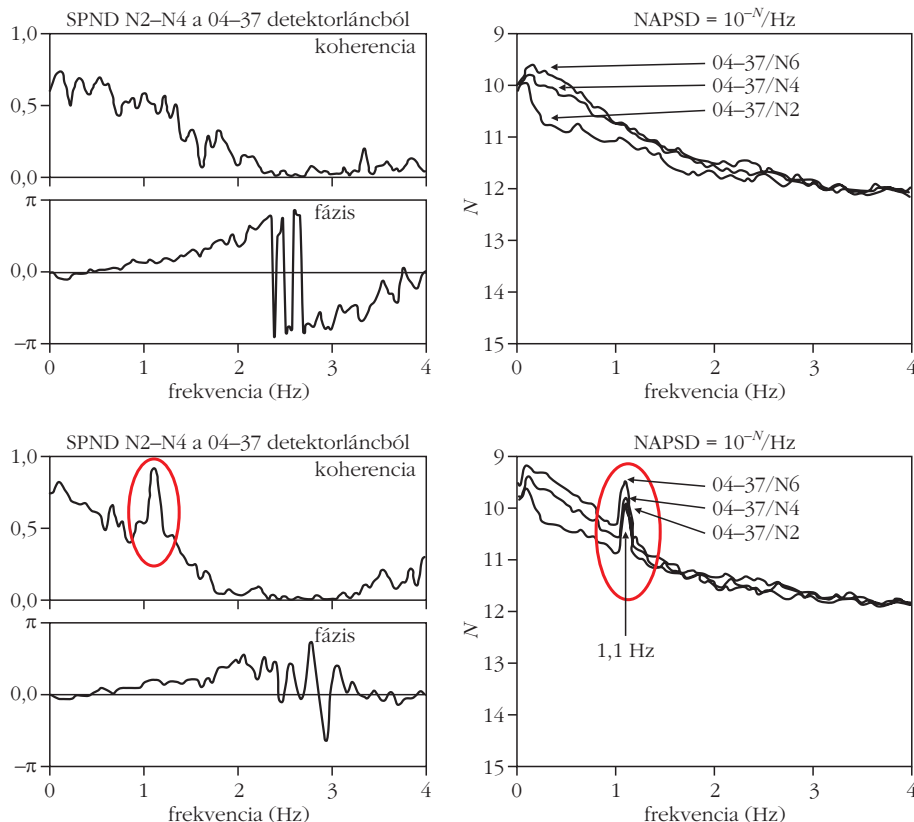
Persze felmerült a kérdés, hogy mi a helyzet 3 vagy több energiacsoportos elmélet esetén, ahol 3 vagy több karakterisztikus hossz létezik, vajon akkor is érvényes-e a lokális-globális felbontás. A Weinberg–Wigner-könyvben bevezetett és a Weinberg–Schweinler-cikkben is alkalmazott lassulási kernel segítségével sikerült megmutatnom, hogy a vonatkozó transzcendentális térbeli karakterisztikus egyenletnek megszámlálhatóan végtelen gyöke van, ami megfelel egy végtelencsoport-diffúziós elméletnek. A gyökökre sikerült egy aszimptotikusan exakt analitikus közelítést találni, amellyel kvantitatívan sikerült megmutatni, hogy az első gyök megfelel a globális tagnak, az összes többi gyök pedig mind lokális természetű, és összegük jó közelítéssel egyenlő a kétszoportelmélet lokális tagjával [5]. Ezzel a lokális-globális felbontás csoportszám-függetlensége bizonyítást nyert.

Jómagam érdekesnek találtam, hogy egy, a 70-es években felmerült kérdésre a válasz implicit benne volt egy 1948-ban írt cikkben. Úgy gondoltam, ez érdekelheti Wignert és Weinberget is. Így az [5] munka mellett még pár további cikkemet is elküldtem, amelyek a rezgő abszorbensek által keltett térfüggő neutronzaj számítását, és azok alkalmazását tárgyalta rezgő szabályozórudak lokalizálására. Mindketten nagyon kedvesen válaszoltak, Weinberg még Schweinlernek is továbbküldte a levelezést.

A történet befejezéséeként, még néhány szót az erőművi zajdiagnosztika fejlődéséről és jelenlegi állásáról. Még a 80-as években feltérképeztük a rezgő szabályozórudak által keltett neutronzaj tér- és frekvenciafüggését realiztikus modellekben. Sikerült kidolgozni egy eljárást, amivel egy anomális rezgést végző rudat lehet azonosítani (lokalizálni) 3 alkalmasan elhelyezett detektor jeléből. Ez a módszer, mint az első on-line alkalmazások egyike, felhasználásra került 1986-ban a paksi 2. blokkon végzett méréseknél (8. és 9. ábrák). Ahogy a 8. ábrán látható zónatérkép mutatja, az esetleges lokalizációra való felkészülés jegyében 3 detektorláncot telepítettek, az ábrán pirossal jelzett zónapozíciókban. A detektorjelek frekvenciafüggő, struktúra nélküli koherencia- és autospektroma a 9. ábra felső részén, míg a rúdrezgés miatt, a mechanikai rezgések sajátfrekvenciája körül fellépő csúcs az ábra alsó részén látható. Ezen csúcsok amplitúdóját használva a lokalizációs algoritmusban, még üzem közben megállapítást nyert, hogy a zónába részlegesen beengedett 6. számú szabályozórúd-cso-

8. ábra. A paksi 2-es zóna vízszintes keresztmetszete. A zónába félig beeresztett hetes szabályozórúd-csoport fekete négyzettel, a három detektorlánc piros körrel jelölve.





9. ábra. A szabályozórúd rezgése előtti (felső ábra) és utáni (alsó ábra) koherenciák és frekvenciaspektrumok. A rezgések által keltett csúcs piros ellipszissel jelölve.

port 4. számú eleme végez anomálian erős rezgéseket, amit azután független, részint a leállás után végzett vizsgálatok megerősítettek.

Az erőművi neutronzaj-diagnosztika természetesen nemcsak rezgő szabályozórúdak lokalizálására alkalmas, hanem egy sor egyéb anomália detektálására és azonosítására, beleértve egyes anomáliák lokalizálását is. Az általános eljárás a következő. Formálisan, a frekvenciatérben a neutronzajt leíró linearizált Langevin-egyenlet megoldása, a Green-függvény segítségével a következő alakba írható:

$$\delta\phi(r, \omega) = \int G(r, r', \omega) S(r', \omega) dr'. \quad (7)$$

A zajdiagnosztika feladata ezek után, hogy a mért $\delta\phi(r, \omega)$ neutronzajból, a perturbálatlan rendszer $G(r, r', \omega)$ átviteli függvényének birtokában, meghatározni a

$$\frac{S(r, \omega)}{\phi_0(r)} = \delta\Sigma(r, \omega)$$

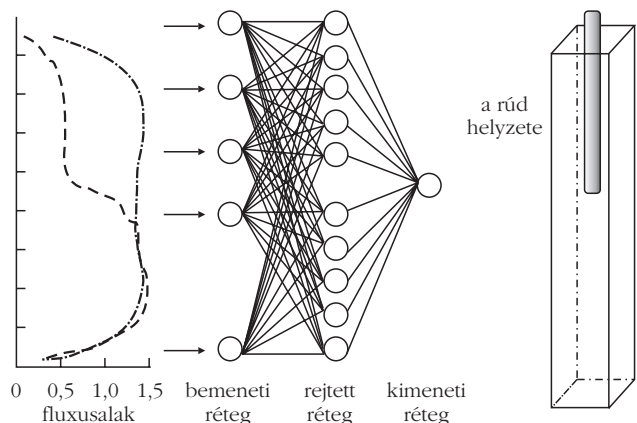
zajforrást. A (7) Fredholm-típusú integrálegyenlet általánosságban akkor lenne invertálható, ha mind a $G(r, r', \omega)$ kernel, mind a mért $\delta\phi(r, \omega)$ neutronzaj a fázistér (reaktor) minden pontjában ismert lenne. Mivel azonban a neutronzaj csak a (meglehetősen véges számú) detektorpozíciókban mérhető, ez az út nem járható. A szokásos eljárás, hogy a zajforrás egy egyszerű függvényalakját képezzük („zajforrás-model-

lezés”), ami már csak néhány, diagnosztikailag érdekes paramétert tartalmaz (mint például a rezgő szabályozórúd (5) alakja), és egy invertálási eljárást konstruálunk, amelyvel ezek a paraméterek a néhány pontban mért neutronzajból és az átviteli függvény értékeiből meghatározhatók.

E metodológiának az évek folyamán – svéd erőművekkel, elsősorban a Ringhals erőművel való együttműködésben – rengeteg praktikus alkalmazását fejlesztettük ki forraló- és nyomottvizes reaktorokra egyaránt, mint például zónakosárrezgések diagnosztikája a Ringhals nyomottvizes reaktorokban; csatornainstabilitás (lokális termohidraulikai anomália) lokalizálása a Forsmark forralóvizes reaktorban; gőztartalom és gőzsebesség meghatározása zónabeli neutronzajmérésekből; reaktivásegységütthetők meghatározása neutron- és hőmérsékletzajból stb.

Végül egy másfajta diagnosztikai alkalmazás, ami nem fluktuációkon alapszik, de mutatja a mesterséges intelligencia betörését a reaktordiagnosztikába is. A 10. ábra érzékelteti, hogyan állapítottuk meg egy, a zónába részlegesen beeresztett szabályozórúd végének axiális pozícióját, az axiális sztatikus neutronfluxus és neurális hálózatok segítségével. Itt az alapelv egyszerű: a modern zónaszámítási kódok már nagyon pontosan rekonstruálni tudják a fluxuseloszlást reálisztikus, inhomogén zónák esetében is úgy, hogy a különböző esetekre (itt: különböző szabályozórúd-magasságra) végzett fluxusszámítások alkalmasak egy

10. ábra. A zónába részlegesen beillesztett szabályozórúd axiális pozíciójának megállapítása a mért axiális fluxusalak és neurális hálózatok segítségével.



neurális hálózat tréningjéhez szükséges inputadathalmaz gyártásához. A betanított hálózat ezek után a sok axiális pontban mért aktuális fluxuselozslásból, mint bemenő adathból, meg tudja állapítani a rúdpozíciót.

A neurális hálózatok alkalmazása neutronfluktuációs problémákra is elterjedően van. Az utóbbi évek munkája eredményeképpen már a komplex értékű dinamikus átviteli függvény is számítható realiztikus, inhomogén reaktorokra, ami által a (7) kifejezés is invertálható a mért neutronzaj számításokkal való szimulációja és mesterséges neurális hálózatok alkalmazásával.

Irodalom

1. Szatmáry Z.: *Bevezetés a reaktorfizikába*. Akadémiai Kiadó, Budapest (2000).
2. I. Pázsit, L. Pál: *Neutron Fluctuations: A Treatise on the Physics of Branching Processes*. Elsevier Ltd., London, New York, Tokyo (2008).
3. A. M. Weinberg, H. C. Schweinler: Theory of oscillating absorber in a chain reactor. *Physical Review* 74/8 (1948) 851–863.
4. A. M. Weinberg, E. P. Wigner: *The Physical Theory of Neutron Chain Reactors*. University of Chicago Press, Chicago, Ill., USA (1958).
5. I. Pázsit: On the local-global decomposition in slowing-down theory. *Annals of Nuclear Energy* 8/8 (1981) 393–397.

A FÖLDI VÍZ LEHETSÉGES FORRÁSAI

Dencs Zoltán

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Gothard Asztrofizikai Observatórium

Forró nyári napokon gyakran érezzük szükségét a víz hűsítő hatásának akár egy hideg záporosó, akár egy ital formájában. Azonban a víz nem csupán szomjunk oltását szolgálja. Közhely, mégis fontos hangsúlyozni, hogy víz nélkül nem lenne élet a Földön. A cseppfolyós halmazállapotú víz hiányában nem fejlődhetett volna ki az élet. A víz rendkívül praktikus oldószer és közvetítő közeg, amelynek segítségével létrejöhetnek a sejteket alkotó komplex fehérjék. A sejtek táplálékul szolgáló anyagokat a víz szállítja, valamint maguknak a sejteknek is fontos alkotóeleme a víz.

Akár közvetlen környezetünket szemléljük, akár a világűrben tekintünk otthonunkra, megállapíthatjuk, hogy a Föld a víz bolygója. A fehér felhőfoszlányok takarója alatt bolygónk kék színben pompázik, a felszín több mint kétharmadát vízfelület borítja. A geográfiai használatos tengerszint egy adott tenger közepes vízszintjét tekintti referenciaértéknek a szárazföldök földrajzi magasságának meghatározásánál. Habár az egyes földtörténeti időszakokban eltérő volt a földi óceán vízszintje, így a vízzel borított felület nagysága is (például jégkorszakok idején a globális vízszint alacsonyabb, így a szárazföldök és a vízzel

borított területek aránya magasabb), mégis a felszíni vízkészlet teljes tömege állandónak tekinthető a földtörténet jelentős részében. Addig az időszakig visszatekintve, amelyre vonatkozóan még vannak megfelelő geológiai minták, a felszíni víz mennyisége változatlan [1].

A vízkészlet tömege $1,3 \cdot 10^{21}$ kg a Föld felszínén. Nem csupán a Földön, a belső Naprendszer többi kőzetbolygóján és a Holdon is található víz, bár igen csekély mennyiségben. Az űrtávcsövek segítségével távoli csillagok körül keringő kőzetbolygók légkörében is kimutatható a vízpára jelenléte, ez alapján következtethetünk felszíni víz jelenlétére. Amennyiben víz nyomait detektáljuk, érdemes elgondolkozni az élet megjelenésének lehetőségén az exobolygó felszínén [2].

A fő kérdések, amelyekkel ebben az írásban foglalkozunk: honnan származik a víz, és hogyan kerülhetett a Föld és a többi kőzetbolygó felszínére. Jelenleg nem tudjuk pontosan, hogyan és mikor jöttek létre az óceánok, kezdettől fogva volt víz a Földön vagy csak később, a bolygó kialakulását követően került a felszínre? Kevés közvetlen geológiai bizonyíték áll rendelkezésre e kérdések megválaszolására, azonban egyes csillagászati megfigyelések és számítógépes modellek szolgálhatnak válaszokkal.

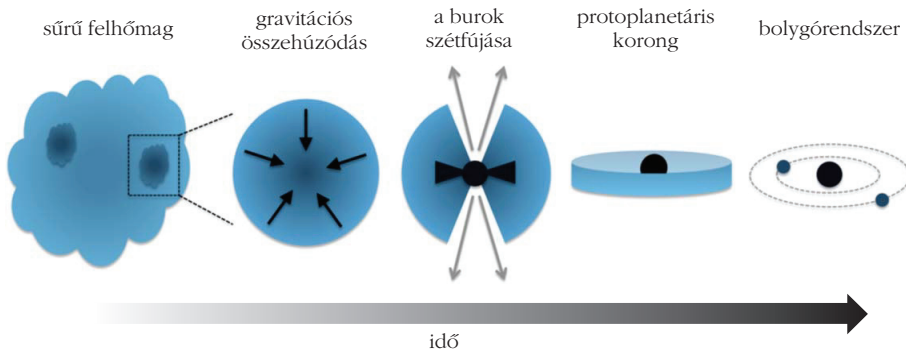
Csillagok, az elemek kohói

Ahhoz, hogy megértsük, honnan származik a földi víz, tekintsük át a Naprendszer keletkezésének körülményeit. A Naprendszer kialakulása közel 5 milliárd évvel ezelőtt vette kezdetét. Egy, a galaxisunkban található óriás molekulafelhő sűrű felhőmagjának gravitációs összehúzódásával született meg központi csillagunk, egy külső folyamat (például szupernóva-robbanás) hatására. A fiatal Napot ekkoriban egy szfé-

A szerző köszönetet mond Szabados Lászlónak a szöveg gondozásáért, valamint Regály Zsoltnak és Kereszturi Ákosnak a szakmai helyesség ellenőrzéséért, amellyel hozzájárultak a cikk színvonalának emeléséhez.



Dencs Zoltán földtudományi kutatóként végzett 2014-ben az ELTE TTK-n, csillagász oklevelet 2016-ban szerzett szintén a TTK-n. Az ELTE Fizika Doktori Iskola Részecskefizika és Csillagászat programjában doktorált 2021-ben Regály Zsolt témavezetésével. Jelenleg az MTA Lendület Tejútrendszer Kutatócsoport tudományos munkatársa az ELTE Gothard Asztrofizikai Observatóriumban. Kutatási területei a hideg vörös óriáscsillagok kémiai összetételének vizsgálata és a bolygókeletkezés modellezése.



1. ábra. Csillagok keletkezése és fejlődésük főbb fázisai [3].

A fiatal Napot körülvevő burok teljes egészében felbomlik a fúziós energiatermelés beindulását követően, csupán a csillag egyenlítői síkjában található gáz- és porokorong marad meg. Napunk ekkor kezdi meg élete leghosszabb fázisát, amelynek során energiakibocsátása jó közelítéssel állandó. A Nap körül kialakuló korongot protoplanetáris korongnak nevezzük, amely a bolygókeletkezés színhelye (1. ábra).

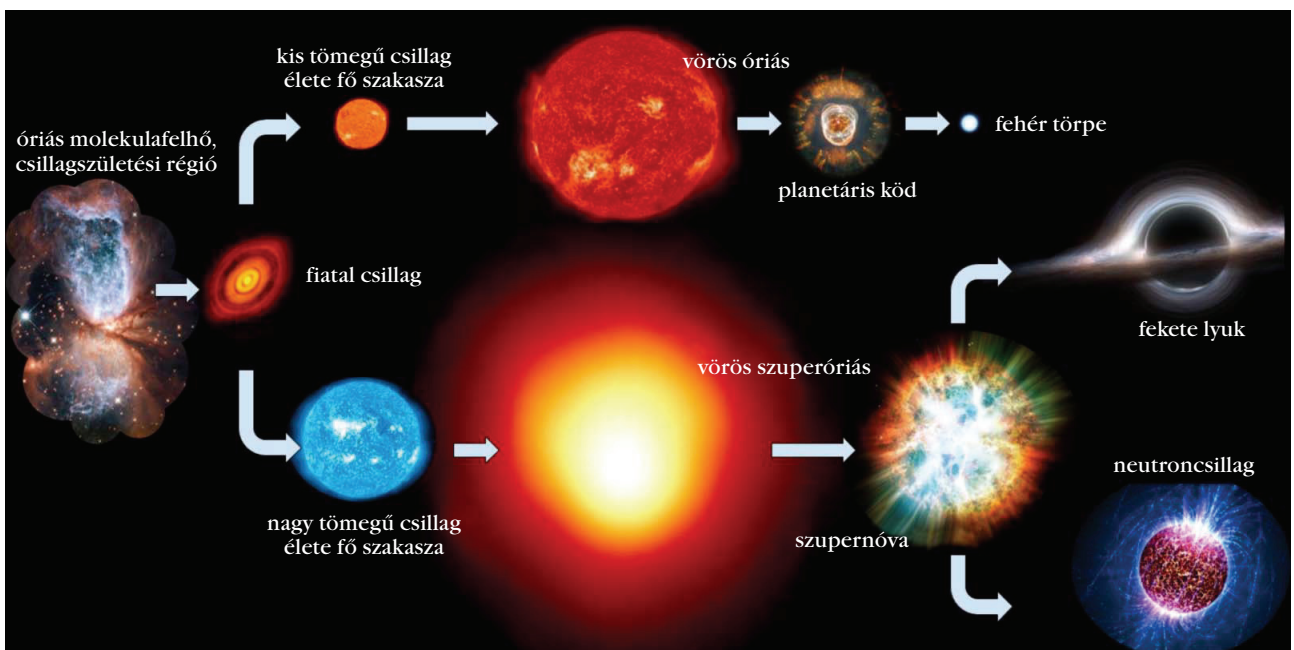
rikus szerkezetű ritkább burok vette körül, amelynek anyagából építkeztek a majdani bolygók. A gázból és elenyésző mértékben porból álló ritka burok a fiatal csillag körül forgott. A burokból folyamatosan anyag hullott a csillagra. Mivel a felhőmag perdülete állandó volt a csillag és a bolygórendszer kialakulása során, ezért a fiatal csillag forgástengelyére merőleges síkból az anyag nem tudott behullani. Így a fiatal csillag körül egy vékony korong alakul ki (1. ábra).

A felhőmag további összehúzódásával növekszik a hőmérséklet a centrumban. Megfelelően magas hőmérséklet esetén elindulhat a csillag legfontosabb energia-termelő folyamata, a proton-proton ciklus, amikor a hidrogénatommagok (protonok) fúziója során hélium keletkezik, amelynek tömege valamivel kisebb a kiindulási elemek teljes tömegénél. Az új elem keletkezésekor ugyanis az egyesülő atomok tömegének egy része energiává alakul. Ez az energia táplálja napjainkban is az életet a Földön. Azonban Napunk nem tekinthető minden időszakban ilyen jóságos életadó csillagnak. A heves aktivitást mutató fiatal Nap erős csillagszele a körülötte lévő anyag jelentős részét kifújta a rendszerből.

A Föld-szerű bolygók főként olyan magas tömegszámú elemekből épülnek fel, mint a vas, a nikkel, a szilícium vagy az oxigén. Az ilyen elemekből, illetve az általuk alkotott molekulákból álló szilárd felszíni csillagkörüli testek a kőzetbolygók. De nemcsak kőzetek, hanem a szobahőmérsékleten folyékony vagy gáznemű illékony anyagok (víz, ammónia, metán stb.) is jelentős részt képviselhetnek a kőzetbolygók összetételében. Vajon honnan származnak a hidrogénnél és héliumnál nehezebb elemek?

A magasabb rendszámú elemek a csillagokban keletkeznek alacsonyabb rendszámú elemek fúziójából nukleoszintézis során. A Nap viszonylag kis tömegű csillag, magjában nem elég magas a hőmérséklet a fenti nehezebb elemek szintetizálásához. A Napnál legalább másfélszer nagyobb kezdeti tömegű csillagok magjában játszódik le a CNO-ciklus (szén–nitrogén–oxigén). A ciklus fő ágában hélium keletkezik, míg mellékágon oxigén is létrejöhet. A csillagok életük delén túl, egy későbbi fejlődési állapotban belépnek a vörös óriás (kis tömegű csillagok esetén) vagy a vörös szuperóriás (nagy tömegűeknél) fázisba (2. ábra).

2. ábra. Kis tömegű (felső ág) és nagy tömegű csillagok (alsó ág) életének fontosabb állomásai [4].



Ekkor felborul a csillagok életének fő szakaszát végigkísérő sugárzási egyensúly. A hőmérséklet rohamos növekedésnek indul a magban, ez lehetővé teszi a nehezebb elemek szintézisét: többek között oxigén, neon, magnézium, szilícium jön létre, majd végül a vas. A Naphoz hasonló csillagok életének végső fázisában ezek az elemek megmaradnak a magban, vagy legfeljebb az idős, halvány csillagmaradvány közvetlen környezetében szóródnak szét, rövid életű planetáris ködöt alkotva (2. ábra). A Napnál nagyobb

tömegű csillagok élete azonban látványos szupernóva-robbanással zárul. A vasnál nehezebb elemek szintézise is jellemzően ilyen robbanások során történik.

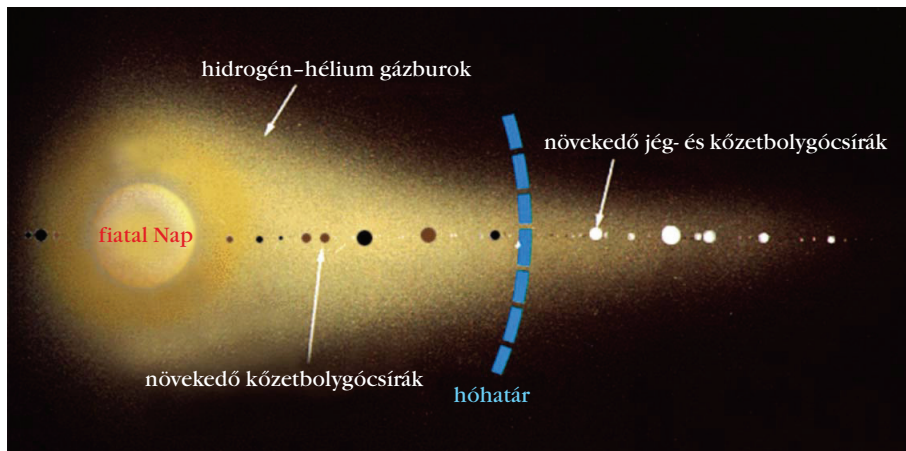
A robbanás során az egykori csillag magja sem marad érintetlen, az Ia típusú szupernóvák esetében szinte teljesen megsemmisül. Ennek során a nehéz elemek széles palettája szóródik szét, és tovább gazdagítja a csillagközi anyag molekulafelhőinek elemkészletét. Ezenkívül a szupernóva-robbanás nyomán létrejövő lökéshullámok hullámfrontjaiban összesűrűsödnek a csillagközi molekulafelhők. Így a robbanás eredményeként sűrű felhőmagok jöhetnek létre. Számos kutató úgy gondolja, hogy egy ősi szupernóva-robbanás hozta létre a Naprendszert szülő felhőmagot, valamint hozzájárulhatott a molekulafelhő feldúsításához a kőzetbolygókat is alkotó elemekkel, például [5].

Víz a fiatal Naprendszerben

A jelenlegi tudásunk alapján felvázolt elméletekből már el tudjuk képzelni, hogyan alakult ki a korai Naprendszer, és honnan származik a benne található víz. A Spitzer és a Herschel űrtávcsövek infravörös-hullámhosszakon végzett méréseiből színképelemzéssel a környező fiatal csillagok (például HD 100546, TW Hydrae) protoplanetáris korongjában is sikerült kimutatni a víz jelenlétét. A korongok forró régióiban gáz, míg a hidegebb területeken szilárd halmazállapotban van jelen a víz. A két régiót elválasztó hóhatár a csillagtól olyan távolságban található, amelyen túl a hőmérséklet megfelelően alacsony ahhoz, hogy a víz jég formájában legyen jelen a bolygóközi térben (3. ábra). A mai Naprendszerben a hóhatár a Mars pályáján túl, ~2,7 csillagászati egység (CSE) távolságban húzódik. Az egykori protoplanetáris korongban azonban a maitól eltérő hőmérsékleti viszonyok uralkodtak.

A szoláris köd anyaga kezdetben igen forró. Ez főleg két tényezőtől adódik:

- a csillag felé áramló anyag helyzeti energiája folyamatosan csökken, és az elvesző energia hővé alakul,



3. ábra. Növekedő bolygócsírák a protoplanetáris korongban. A korong a látóirány síkjában fekszik [7].

- a fiatal Nap luminozitása (a csillag teljes felületén időegység alatt kibocsátott energia) és aktivitása a jelenleginél nagyobb mértékű volt.

Ez azt jelenti, hogy a hóhatár a mainál távolabb helyezkedett el a Naptól [6]. Ebből adódóan a földpálya mai távolságában, 1 CSE-re a Naptól 1500-2000 K lehetett a hőmérséklet. Emiatt a kőzetbolygók kialakulásának kezdetén csupán a magas olvadáspontú, úgynevezett refraktorikus elemek lehettek jelen szilárd halmazállapotban a Naprendszer belső régiójában. Az alacsony olvadáspontú elemek (illékony anyagok) csupán a Naptól nagyobb távolságban kondenzálódhattak a gázfázisból. Mivel a protoplanetáris korong hőmérséklete a Naptól távolodva csökken, ezért nagyobb távolságokon magasabb a kondenzált anyagok aránya.

Az elemek és molekulák kémiai tulajdonságai alapján felírható egy kondenzációs sorozat, amely megmutatja, hogy az adott anyagok – olvadáspontjuktól

1. táblázat		
Az élet szempontjából lényeges elemek, molekulák kondenzációs hőmérséklete és a kondenzáció távolsága a csillagtól.		
elem/molekula	kondenzációs hőmérséklet (K) 100 kPa nyomáson	kondenzációs front távolsága a csillagtól (CSE*)
kvarc (SiO ₂)	1958	> 0,3
vas (Fe)	1785	> 0,3
víz (H ₂ O)	270	> 3
szén-dioxid (CO ₂)	212	> 5
kén-dioxid (SO ₂)	197	> 5
ammónia (NH ₃)	192	> 5
metán (CH ₄)	90	> 30
ózon (O ₃)	79	> 30
nitrogén (N ₂)	62	> 30
oxigén (O ₂)	54	> 30

*csillagászati egység

függően – milyen távolságokon kondenzálódnak a gázfázisból. Az 1. táblázatban a földi élet szempontjából fontosabb anyagok fázisátalakulásához szükséges hőmérsékletek láthatók 100 kPa nyomás esetén. Fontos megjegyezni, hogy a vízjég szublimációja már jóval 0 °C (~273 K) alatt megkezdődik, különösen a bolygóközi térben uralkodó viszonyok között, alacsony nyomáson, ezért a csillagászatban ~150 K-nek szokás választani a víz kondenzációs hőmérsékletét. A jégkristályok keletkezéséhez szükség van továbbá kondenzációs magokra, amelyek a protoplanetáris korongot alkotó szilikátszemcsék.

Az 1. táblázatban szerepel, hogy a bolygókeletkezés kezdeti fázisában hozzávetőlegesen milyen távolságban kondenzálódnak az egyes elemek és molekulák a gázfázisból. A kondenzációs front távolsága a központi csillagtól azonban időben változó. A bolygókeletkezés első néhány millió évét követően a kondenzációs front fokozatosan közelebb került a fiatal Naphoz. A protoplanetáris korong ugyanis a fiatal Nap lassú halványodása és a csillagba történő beáramlás lassulása miatt hűlni kezdett. Eközben a gáz is folyamatosan eltűnik a korongból, megfigyelések alapján a csillag születését követően kevesebb mint 10 millió éven belül. Emiatt a gáz eltűnése idején uralkodó állapot konzerválódhatott a Naprendszer égitestekének összetételében [8]. Ezért a Naphoz közelebbi régiókban keringő bolygók magasabb olvadáspontú anyagokból épülnek fel, mint a távolabbi, hóhatáron túl keringő bolygók, törpebolygók (3. ábra).

A fenti elmélet szerint a Naprendszer belső régiójában keringő kőzetbolygók keletkezése során a növekedő bolygósírák nem gyűjthettek össze jelentős mennyiségű illékony anyagot jég formájában a hóhatáron belül. A bolygósírák tömege pedig még túl alacsony volt ahhoz, hogy gravitációs vonzáskörzetükben gáz halmazállapotú illékony anyagokat gyűjtsenek és tartsanak meg. Ebből adódik az a kérdés, hogy a Földre, illetve a hozzá hasonló kőzetbolygókra hogyan kerülhetett víz. Amennyiben a kőzetbolygók a mai pályájuk közelében keletkeztek (a mindenkori hóhatáron belül), hogyan gyűjthették össze vízkészletüket?

„Szárason” vagy „nedvesen” keletkeznek a bolygók?

Naprendszerünk legnagyobb tömegű vízkészletet tartalmazó kőzetbolygója a Föld. Azonban a víztartalmat relatív értelemben nézve már közel sem sorolható első helyre a Föld. Noha a felszín közel 2/3 részét víz borítja, mégis csupán a Föld tömegének 0,02%-át teszi ki a víz. A relatív víztömeget tekintve ennél még kisebb a víz tömegaránya a többi kőzetbolygó esetén. Hiányos ismereteink miatt nagyon nehéz becslést adni egyes bolygók, holdak vízkészletének tömegére, de általánosan igaz, hogy a Merkúron, a Vénuszon, a Holdon vagy a Marson feltételezett víz tömege nem haladja meg a 10^{16} kg-ot. A Merkúron és a Holdon főleg kötött formában, ásványok kristályszerkezeté-

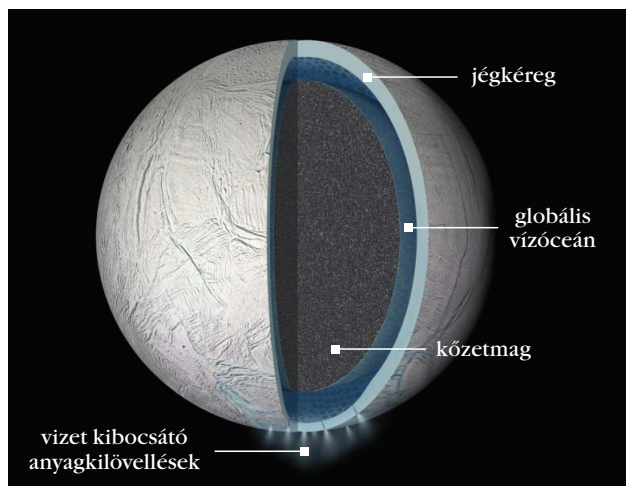
ben fordul elő víz, míg a Marson jégsapkákban és felszín alatti, porral fedett jégtömbökben. Megfelelően nagy nyomású légkör hiányában a víz rendkívül szűk hőmérsékleti tartományban lehet jelen folyékony halmazállapotban a Marson. Egyes területeken legjobban esetben is 2 °C környékén felforr a folyékony víz.

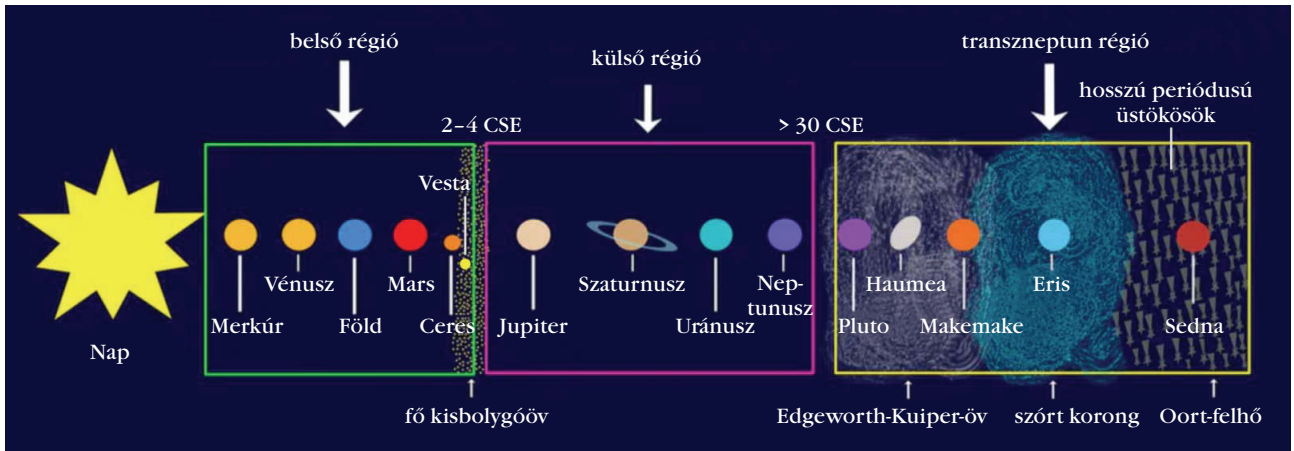
A legnagyobb relatív víztömeget tartalmazó égitesteket a Naprendszer külső régióiban kell keresnünk. A hóhatáron túl a jelentős kőzettesteket az óriásbolygók holdjai képviselik. Az óriásbolygók vízkészlete is számottevő, mégsem tárgyaljuk ezeket, hiszen a víz eredetét az élet aspektusában keressük, ez szilárd felszínű égitesteken könnyebben elképzelhető, mint gázóriások légkörében.

A Galilei-féle holdak közül a Callisto és a Ganymedes tipikus példái a jégből és kőzetből felépülő égitesteknek: összetételük 25-50%-át víz alkotja, amely jég formájában van jelen a hőmérsékleti és nyomásviszonyok miatt. A holdak felszínét több 100 km vastag jégpáncél borítja. Fontos még kiemelni a Jupiter Europa holdját, amelynek felszínét 10-100 km vastag jégpáncél borítja. Azonban a felszín alatt a jégkéregből származó nagy nyomás és a Jupiterrel való gravitációs kölcsönhatásból adódó árapálysúrlódás hatására feltételezhető egy folyékony vízóceán jelenléte. Az Europa óceánjának tömege meghaladhatja a földi óceánok tömegének háromszorosát. Ez azt jelenti, hogy az Europa folyékony vízkészletének tömegaránya közel 8%.

A Galilei-féle holdak tulajdonságait a Galileo űrszonda 1995 és 2003 közötti mérései alapján ismerhetjük meg. Nem szabad megfeledkeznünk a Cassini űrszonda küldetéséről. A Szaturnuszt és holdrendszerét tanulmányozó űrszonda Huygens nevű leszállóegysége a Szaturnusz Titan holdján landolt. A Titan is részben kőzetből, részben jégből épül fel. A hold viszonylag sűrű légköre alatt a felszínen folyékony halmazállapotú metán található. A fagyott metán- és vízjég kéreg alatt körülbelül 100 km mélységben folyékony vízóceán található. Becslések szerint a folyékony víz tömege tízszerese is lehet a földi óceánok tömegének.

4. ábra. Az Enceladus feltételezett belső szerkezete [9].





5. ábra. A Naprendszer fontosabb régiói a Naptól mért távolság alapján [10].

Ismereteink szerint a Szaturnusz igen kis méretű Enceladus holdjának felszíne alatt is lehet folyékony vízóceán (4. ábra). Az óceán víztömege csupán százada a földi óceánok tömegének, azonban az Enceladus tömege négy nagyságrenddel kisebb a Földénél. Így az Enceladuson a teljes tömeg 14%-át a folyékony víz alkotja, ezzel a dobogó első helyén áll a relatív víztömeg tekintetében.

A Naprendszer távolabbi peremvidékén a fentieknél nagyobb tömegarányt is képviselhet a víz a törpebolygók és egyéb kis méretű kőzettestek, például az úgynevezett Neptunuszon túli (transzneptun) objektumok (TNO, 5. ábra) körében. Azonban az alacsony nyomás és hőmérséklet (légkör és árapályfűtés hiánya) miatt nehezen elképzelhető, hogy a víz cseppfolyós halmazállapotban forduljon elő. A lényeg jól látható a fenti felsorolásból: a Naprendszer hóhatárán belüli égitestek összetételében jelentősen alacsonyabb akár a víz, akár a vízjég tömegaránya, mint a hóhatáron túli kőzettestekben. Így továbbra is kérdés: honnan származik a belső bolygók, köztük a Föld vízkészlete?

A földi víz eredetének magyarázatára két klasszikus elmélet áll egymással látszólagos ellentétben. Elsők között *Morbidelli* és munkatársai [11] voltak azon tábor képviselői, amely szerint a bolygókeletkezés végző aktusát követően aszteroidák és kisbolygók közvetítésével érkezett a víz a Földre. A másik tábor képviselői – köztük *Drake* és *Campins* [12] – szerint a Föld már a kialakulása kezdetétől fogva vízgőzt és fluidzárványokat tartalmazó szilikátszemcséket gyűjtött össze, azaz a Föld „nedves” körülmények között keletkezett. Alább látni fogjuk, hogy a két modell valójában kiegészíti egymást.

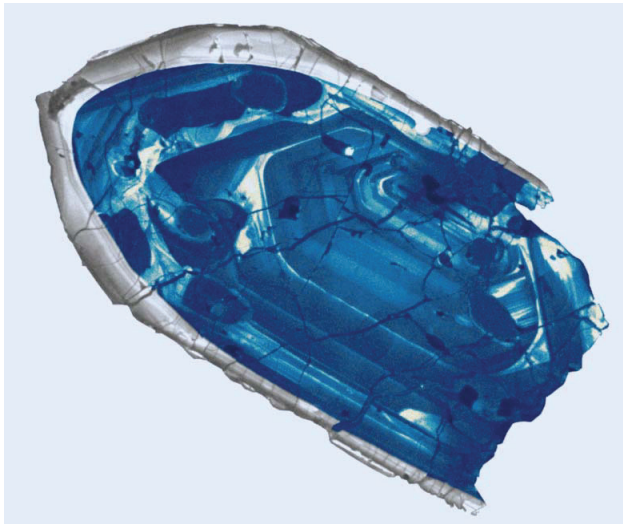
Megérkezik a víz a Földre

Az első csoport elmélete alapján a bolygókeletkezés idején a protoplanetáris korong Naphoz legközelebbi régiójában uralkodó magas hőmérséklet nem tette lehetővé, hogy a Föld akkora vízkészletet gyűjtsön, mint a mai óceánok tömege. Ebből szükségszerűen következik, hogy a Naprendszer hóhatárán túl kelet-

kezett égitestek (például üstökösök, vízben gazdag aszteroidák) szállították a vizet a már kialakult Földre a protoplanetáris korong eltűnése után. Ezt az elméletet erősíti *Gomes* és munkatársai [13] a korai Naprendszer dinamikáját szimuláló számítógépes modellje. Megmutatták, hogy a Jupiter befelé vándorlása által kiváltott aszteroidabombázás során vízben gazdag kisbolygók érkezhettek a belső Naprendszerbe. Ezt az eseményt késői nagy bombázásnak (late heavy bombardment, LHB) szokás nevezni. Az LHB esemény bekövetkezésének idején a Naprendszerben már befejeződött a bolygókeletkezés. Ez alapján valóban elképzelhető, hogy a Föld „száraz” körülmények között keletkezett.

Gomes és munkatársai modellje szerint a vizet szállító aszteroidák jelentős része a 3,8 milliárd évvel ezelőtt bekövetkezett LHB során érkezett a Földre, csaknem félmilliárd évvel a bolygókeletkezés befejeztét követően. Ebben az időben a Földet és a Holdat is szilárd kéreg borította. A Holdon csak a szilárd kéregbe történő becsapódások által maradtak fenn a bombázási esemény nyomait megőrkítő kráterek. Az egykori LHB lehetősége éppen a holdi kráterszámítás és a kráterek korának meghatározása kapcsán merült fel. A bolygókeletkezés melléktermékeiként fennmaradt törmelékek folyamatosan bombázzák a belső bolygókat és a Holdat. Emberi időskálán nézve viszonylag ritkák a jelentős becsapódások (tízezer éves nagyságrend), azonban geológiai időskálán gyakorinak tekinthetők. Tektonikai mozgások és légkör hiányában a becsapódási kráterek rendkívül hosszú ideig fennmaradhatnak a Hold felszínén. Ez alapján az újonnan megjelenő kráterek számának időben egyenletesen növekednie kellene. Ezzel szemben a holdkráterek számának időbeli eloszlásában egy kiugróan magas csúcs tapasztalható a 3,8 milliárd évvel ezelőtti időszakban. Ezt számos tanulmány, például [13, 14] az LHB eseménnyel magyarázza.

A szilárd földkéreg kialakulásának időpontja néhány különleges kőzetminta segítségével meghatározható. A Nyugat-Ausztráliában található Jack Hills területéről származó kőzetminták igen ősi cirkont tartalmaznak (6. ábra). Az eddig ismert legkorábban kiala-



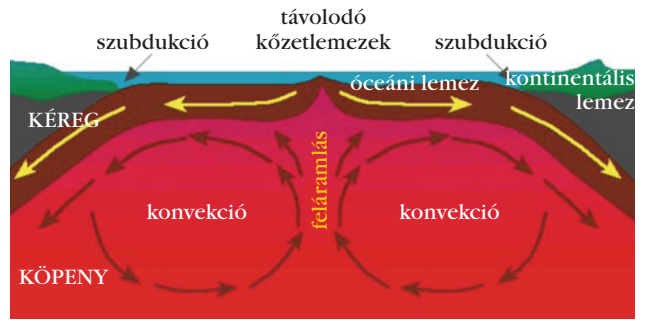
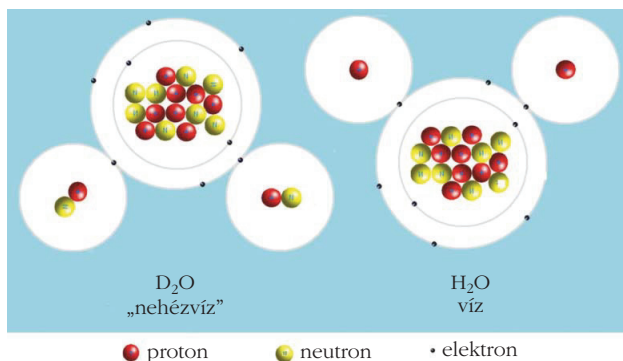
6. ábra. A legősibb ismert cirkonkristály hamisszínes mikroszkópos felvétele [15].

kult cirkon 4,37 milliárd éves. Ezek az ásványok igazolják, hogy 4,37 milliárd évvel ezelőtt a Föld felszíne már kellőképpen lehűlt a szilárd kéreg kialakulásához. A cirkon keletkezéséhez fejlett kéreganyag szükséges, amely feltételezi a kéreglemezek mozgásáért felelős konvekciós folyamat beindulását a földköpenyben (7. ábra). A konvekció során egyes kéreglemezek alábuknak a földköpeny magmájába, amit szubdukciónak nevezünk. Míg más területeken az egymástól távolodó lemezek szegélye gyarapodik a köpenyből feláramló és a felszínen megszilárduló láva által.

Watson és Harrison [17] szerint a lemeztektonika nem működhetne globális vízburok nélkül. A víz ugyanis jelentős szerepet játszik a konvekció fenntartásában: a víz csökkenti a magma viszkozitását és olvadáspontját. Mindez azt jelenti, hogy a földtörténet igen korai szakaszában, már az LHB előtt is jelentős vízkészletnek kellett lennie a Földön. A földköpenyben ma is számottevő, akár 10 óceántömeget kitevő víz is jelen lehet [18].

Mojzsis és munkatársai [19] a legősibb cirkonásványokat kémiai elemzésnek vetették alá. Az ásványok stabil oxigénizotópjainak aránya ($^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$) is megerősíti, hogy már igen korán kialakulhatott a szilárd földkéreg, amelynek felszínén cseppfolyós halmazállapotú víz lehetett jelen. A mintákban kimutatható jelentős

8. ábra. A D_2O és a H_2O molekula atomjainak szerkezete [21].



7. ábra. A kéreglemezek mozgásáért felelős konvekció sematikus vázolata [16].

^{18}O nyom arra utal, hogy a kőzetek nedves üledék-képződési folyamat során alakultak ki. A vizes környezetben keletkezett üledékes kőzetek lerakódtak a kőzetlemezek felszínén egy ősi óceán fenekén. Majd a lemez szubdukciója során a földköpeny magmája magába fogadta az üledékes kőzetet, így jöttek létre a cirkon ásványok. Elkins-Tanton [20] szerint mindez arra utal, hogy a Föld valójában nem „szárazon” keletkezett, hanem kialakulása során gyűjtötte össze vízkészletét. Ez azonban nem zárja ki annak lehetőségét, hogy az LHB során is érkezhetett víz a Földre.

Egyes elméletek szerint a Föld vízkészletében mérhető deutérium és hidrogén aránya (D/H) lehet a kulcs az óceánok eredetének kiderítésében. A deutérium a hidrogén olyan izotópja, amelynek atommagjában egy proton és egy neutron található, ezért a deutérium atomtömege nagyobb, mint a hidrogéné. Előfordulhat, hogy a H_2O molekulában a hidrogén helyét átveszi a deutérium. A HDO molekula esetén hidrogén és deutérium, míg a D_2O -nál csupán deutérium van jelen az oxigén mellett (8. ábra). Azt a folyadékot, amelyben a D_2O molekulák jelentős hányadot képviselnek, „nehézvíznek” szokás nevezni. A jelenlegi földi vízkészlet D/H arányát összehasonlítva a Naprendszer egyéb részeiben fellelhető víz D/H arányával képet kaphatunk arról, mely területekről származhatnak a földi óceánok. Geiss és Gloeckler [22] szerint a Naprendszer bölcsőjéül szolgáló sűrű felhőmagban a D/H arány $0,21 \cdot 10^{-4}$ lehetett. A földi óceánokra a jelenlegi D/H arány ennél magasabb, $1,49 \cdot 10^{-4}$. Azonban a földi D/H arány idővel változhatott, ugyanis az ősi, elsődleges földi légkör nagy része elveszett. A légkörből az alacsonyabb atomtömegű hidrogén könnyebben megszökhet, mint a deutérium, ezért idővel a földi D/H arány növekedhetett. Ebből adódóan a mai földi vízkészlet D/H aránya magasabb, mint a Föld keletkezése idején, a korai Naprendszerben lehetett.

Tegyük fel, hogy a földi vízkészlet egy része külső forrásból származik, vagyis aszteroidák szállították a Földre a bolygókeletkezés befejeződését követően. Ebben az esetben a Földön és az aszteroidákon vagy üstökösökön mért D/H arálynak egyeznie kellene. A Giotto űrszonda 1986-ban megközelítette a Halley-üstököst, amikor az legutóbb a Naprendszer belső részében tartózkodott. Az üstökös anyagából gyűjtött mintákban $3,1 \cdot 10^{-4}$ a mért D/H arány. Más üstökösökhöz (Hyakutake, Hale-Bopp) hasonlóan a mért

D/H arány nagyjából a duplája a földi értéknek. Az üstökösök esetén nehezen elképzelhető, hogy idővel változott volna a D/H arány, ugyanis ezek a legkorábban kialakult égitestek közé tartoznak, amelyek a Naprendszer keletkezése utáni állapotot konzerválják. Az üstökösök főleg a Naprendszer legkülső régiójában fordulnak elő, ebben a távolságban igen alacsony lehet az égitestek hőmérséklete. Roberts és Millar [24] modelljei alapján azokban a környezetekben, ahol 50 K-nél alacsonyabb a hőmérséklet, a D/H arány viszonylag magas, 0,001–0,01 lehet. A közeli fiatal csillagokat körülvevő anyag mérései is ezt támasztják alá. A protoplanetáris korongok belső régióiban a magas hőmérséklet miatt gyors izotópcseré-reakciók¹ zajlanak a hidrogéntartalmú vegyületek között, ennek eredményeként a belső régiókban alacsony D/H arány alakul ki. Emiatt tapasztalható az, hogy az egykori protoplanetáris korong Naptól távolabbi, alacsonyabb hőmérsékletű területein létrejött üstökösökön relatíve magas a D/H arány, vagyis a külső régiókból származó üstökösök nem szállíthatták a Földre az óceánok vizét.

A fő kisbolygóöv aszteroidái mint lehetséges források

Az üstökösöknél közelebb keringő, de a Naprendszer hóhatárán túl keletkezett aszteroidák is szóba jöhetnek a vízkészlet lehetséges külső forrásaiként. Az LHB során a Jupiter jelentős számú közettörmelék pályáját perturbálta a Naprendszerben található fő kisbolygóövben, emiatt a kisbolygók elhagyták eredeti pályájukat. Kezdetben egy kiterjedt összefüggő törmelékcorong lehetett jelen a Naprendszerben a Mars pályája és a rendszer külső határa között. Az óriásbolygók hatására ez a corong nagyrészt kiürült, és kevésbé összefüggő gyűrűkre bomlott. A fő kisbolygóöv az egyik ilyen maradványgyűrű, amelynek jelenlegi kiterjedése 2–4 CSE közé tehető (5. ábra), és tömege becslések szerint az egykori gyűrű tömegének ezredrésze ($\sim 5 \cdot 10^{-4}$ földtömeg).

A perturbált aszteroidák egy része a Naprendszer belső régiói felé szóródott. A Föld pályáját keresztező kisbolygók a Földdel ütközve vizet szállíthattak a felszínre. A fővből származó kisbolygók esetén a D/H arány jóval közelebb áll a földihez, mint az üstökösökben. Ezen kisbolygók számottevő hányadát az úgynevezett szenes kondritok adják, amelyeken $1,4 \cdot 10^{-4}$ az átlagos D/H arány. A fő kisbolygóöv második legnagyobb aszteroidájáról, a Vestáról származó meteoritok tanulmányozása rávilágított, az aszteroidák D/H aránya közelítőleg hasonló a földköpenyből származó mintákéhoz. A köpeny mélyebb részeiből származó minták azért fontosak, mert ezek szolgáltatják a Földön elérhető legősibb adatokat a D/H arányra. Rendkívül kevés olyan helyet ismerünk, ahol tanulmányozhatók a köpeny mélyebb régióinak kőzetei, ilyenek például a hawaii vulkánok kráterei és a

¹Nem játszódik le kémiai folyamat két molekula között, csupán az izotópok cserélődnek ki.



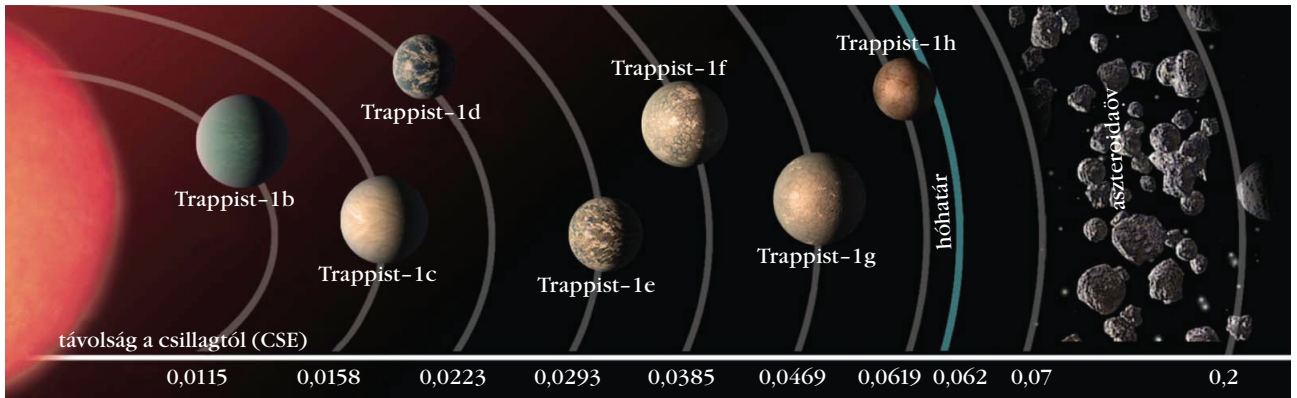
9. ábra. Zöld olivinkristályok megkövesedett lágában [23].

Kanada északkeleti partvidékén található Baffin-sziget. A szigetről begyűjtött kőzetmintákban található hidrogéntartalmú olivinkristályok a Föld keletkezése során szilárdultak meg, és megőrizték a korabeli D/H arányt (9. ábra). Itt fontos megjegyezni, hogy a D/H arány mérése nem feltétlenül szabad víz- vagy jégmintából történik. A fiatal csillagok körüli protoplanetáris korong esetén a H₂ molekulákat vizsgálják színkép-elemzéssel. A Földön és az üstökösök esetén közvetlen mintagyűjtéssel jellemzően a H₂O molekula arányát vizsgálják, míg aszteroidáknál a hidroxilcsoport (-OH) zárványait elemzik ásványokban. A Vesta esetén az apatitásványok szerkezetében kötött víz D/H arányát mérték meg.

Az eredményeket összevetve nincs teljes egyezés az aszteroidákon és a Földön mért D/H arány között, az átlagos eltérés körülbelül 25%. Ez azt jelenti, hogy a földi óceánok vízkészlete nem származhat teljes egészében aszteroidáktól. Ugyanezt erősíti meg számos elmélet és az LHB modellezése, amelyek alapján az óceánok vízkészletének legfeljebb 1-10%-át szállíthatták aszteroidák a Földre. Eszerint kijelenthető, hogy a Föld nem teljesen száraz körülmények között keletkezett, kialakulása során már jelentős mennyiségű vizet összegyűjtött. Az ásványokban megkötött víz a kéreg megfelelő mértékű lehűlése után a földköpenyből vulkanizmus révén kerülhetett a felszínre, illetve a légkörbe.

Alternatív elméletek a kőzetbolygók vízkészletének eredetére

Napjaink exobolygó-felfedezései alapján egyre változatosabb bolygórendszerek létezésére derül fény. Ezzel egyidejűleg a bolygókeletkezési elméleteket is fejleszteni kell ahhoz, hogy meg tudjuk magyarázni a különféle bolygórendszerek kialakulását. A csillagok fénygörbe-analízisének alapuló tranzitmódszerrel számos Föld-szerű bolygót fedeztek fel kis tömegű, hideg, vörös törpecsillagok körül. Az egyik legismertebb példa



10. ábra. Az ismert TRAPPIST-1 rendszer és egy feltételezett aszteroidaöv a hóhatáron túl [25].

erre a TRAPPIST-1 rendszer (10. ábra), amelyben 7, közel földtömegű kőzetbolygó kering a központi csillag körül [26]. A legkülső bolygót leszámítva az összes bolygó a rendszer hóhatáránál jelentősen közelebb kering a csillaghoz. A bolygóléggörök színképelemzése alapján legalább négy bolygó esetén feltételezhető légköri víz jelenléte [27]. Ebben az esetben is felvetődik a kérdés: hogyan kerülhetett víz a bolygókra.

A TRAPPIST-1 rendszer igen kompakt, a bolygópályák egymáshoz szorosan közel helyezkednek el. Egyes szomszédos bolygópályák a Föld–Hold-távolságnál is közelebb helyezkednek el egymáshoz. Ahhoz, hogy egy ilyen rendszer hosszú időn át stabil maradjon, a bolygóknak egymással középmozgás-rezonanciában kell keringeniük. Ez azt jelenti, hogy a bolygók keringési periódusainak aránya kis egész számok hányadosa. A rezonancia lehetővé teszi a szoros megközelítések elkerülését, ami a rendszer széteséséhez vezetne. Luger és munkatársai [28] szerint a TRAPPIST-1 és a hozzá hasonló kompakt rendszerek bolygói a jelenlegi pályájuktól távolabb keletkeztek. A TRAPPIST-1 rendszerben a bolygókeletkezés a hóhatáron túl kezdődhetett. A bolygók innen vándoroltak a csillag felé millió éves időskálán, majd egy rezonancia-láncot alkotva elfoglalták jelenlegi pályájukat. A gyarapodó fiatal bolygók vándorlásuk során gyűjthették össze vízkészletük jelentős hányadát, vízben gazdag bolygócsírákkal és aszteroidákkal való gyakori ütközések révén. Ez azonban nem zárja ki annak lehetőségét, hogy egy késői heves aszteroidabombázás szállította a bolygók felszínére a víz egy részét [29].

Habár a Föld nagy valószínűséggel a jelenlegi pályája közelében keletkezett, mégis elképzelhető, hogy gazdag víztartalmú bolygócsírákkal ütközhetett a kialakulása során. Peslier és munkatársai [30] szerint a Naprendszer hóhatára közeléből érkező jeges bolygócsírák elnyelésével kerülhetett víz a fiatal Földre. Csúpan néhány ilyen gazdag víztartalmú bolygócsírával történő ütközés elegendő lehetett a földi óceánok vízkészletének biztosításához (lásd a hóhatáron túli holdak „Szárason” vagy „nedvesen” keletkeznek a bolygók? fejezetben bemutatott vízkészletét). Az ütközésekre a Föld kialakulásának végső fázisa idején kerülhetett sor, amikor bolygónk a mai tömegének 60-90%-át elérte.

A Hold kialakulása is egy hasonló ütközési eseményhez köthető: jelenlegi modelljeink szerint egy Mars-méretű bolygócsírára ütközhetett a fiatal Földdel. Az ütközés következtében a Földből kiszakadt törmelék összeállásával jöhetett létre a Hold. Ha a földfelszínen ekkor már volt folyékony víz, az ütközés hője miatt annak el kellett párolognia. Ebből adódóan a mai vízkészletet valamilyen forrásból pótolni kellett. Erre az egyik lehetséges magyarázat az előbb említett fejezetben felvázolt elmélet, amely szerint a víz vulkanizmus útján került a földképenyből ismét a felszínre és a légkörbe. Maga a becsapódó bolygócsírára is jelentős vízmennyiséget szállíthatott a Földre, ha a hóhatáron túlról érkezett.

Összegzés: a földi óceánok legvalószínűbb forrása

A csillagközi anyag vizsgálata alapján a víz az óriás molekulafelhőkben vízgőz, de akár jégkristályok formájában is előfordulhat. A sűrű felhőmagokból keletkező fiatal csillagok körül kialakuló protoplanetáris korongok is tartalmaznak vizet. A csillaghoz közeli régiókban a magas hőmérséklet miatt a víz főleg gáz halmazállapotú, míg távolabb jég formájában van jelen. Ez az elkülönülés jól tükröződik a protoplanetáris korongban kialakuló kőzetbolygók kőzet-jég összetételében: a csillaghoz közeli kőzetbolygókon a víz (jég) aránya alacsonyabb, mint a távolabbi bolygók, holdak esetén.

A Naphoz relatíve közel keringő Föld esetében máig sem tudjuk pontosan, hogyan és mikor keletkeztek az óceánok, hogyan került a víz a Földre a csillag körüli korongból. Ennek magyarázatára számos elméletet láthatunk. A legvalószínűbb elmélet szerint a következőképpen foglalható össze a földi óceánok keletkezése (lásd az első belső borítót [31]).

1. A fiatal Föld nagyobb kőzettömbök és bolygócsírák elnyelésével növekszik. A növekedés hője miatt a bolygó teljes anyaga olvadt magma. A földképeny ekkor már tartalmaz némi vizet.

2. A fiatal Föld anyaga sűrűség szerint rétegződött, a legsűrűbb elemek a középpontban koncentráálódnak. Kialakul a Föld magja. Eközben továbbra is vál-

tozatos méretű bolygócsírákat nyel el a Föld. A legtöbb víz a köpenyben található kötött formában, ásványi zárványokban.

3. Egy Mars-méretű bolygócsíra ütközik a Földdel. Ennek hatására a földi légkör és a vízkészlet nagy része elvész. A kirepülő közettörmelékéből később összeáll a Hold.

4. Száraz kéreg képződik a köpeny külső rétegéből. Vulkáni kigőzölges és a szórványosan becsapódó aszteroidák révén újraképződik a légkör.

5. A földkéreg megfelelően hideg és szilárd, elindul a lemeztektonika. Megjelenik a felszínen a folyékony víz. A másodlagos légkörből kicsapódó víz tengerekbe gyűlik.

6. Az óriásbolygók vándorlásának hatására a bolygókeletkezés melléktermékeiként megmaradt jeges aszteroidák és üstökösök nagy számban szóródnak a belső Naprendszer felé. Közülük sokan ütköznek a Földdel, ezáltal vizet és más, az élet számára fontos elemeket, molekulákat szállítva a felszínre.

7. A heves bombázási eseményt követően a Föld felszíne lehűl, a légkörből jelentős mennyiségű víz csapódik ki, létrehozva a globális vízóceánt. Az óceánfenéki vulkanizmus során a felszínre törő láva kihűl és megszilárdul. A láva folyamatos utánpótlása lehetővé teszi a kontinensek gyarapodását.

8. Kialakul a szárazföldek és a vízzel borított felszín mai aránya.

A folyamatos mintagyűjtésnek és kémiai elemzésnek, az űrtávcsöves megfigyeléseknek, valamint a számítógépes numerikus modellezésnek köszönhetően egyre közelebb juthatunk a fenti kérdések megválaszolásához. Lehet, hogy az újabb kutatások olyan elméleteket és modelleket eredményeznek, amelyek jobban egyeznek a mérésekkel, mint a jelen cikk keretében felvázolt teóriák. A földi víz eredetének megismerése választ adhat arra is, jelen lehet-e más bolygókon, exobolygókon is az általunk ismert élet kialakulása és fejlődése számára nélkülözhetetlen folyékony víz.

Irodalom

1. Lovelock J.: *Gaia: A New Look at Life on Earth*. Oxford University Press (1979).
2. Kereszturi Á.: *Asztrobiológia*. Magyar Csillagászati Egyesület (2011).
3. Van 't Hoff M., <https://www.merelvanthoff.com>
4. Toogood O., <http://www.alevelphysicsnotes.com/astrophysics/deadstars.php>
5. de Souza Torres K., Cabo Winter O., arXiv:1803.01452 (2018).
6. Pontoppidan K. M. és mtsai., *Protostars and Planets VI*. eds. H. Beuther et al., Univ. of Arizona, Tucson (2014) 363.
7. <https://futurism.com/is-earth-actually-water-deficient-2>
8. Petrovay K., in *Meteor Csillagászati Évkönyv*, MCSE, Budapest (2008) 207.
9. <https://www.bbc.com/news/science-environment-39592059>
10. <https://www.shutterstock.com/hu/image-illustration/solar-system-planets-dwarf-ones-their-575550817>
11. Morbidelli A. és mtsai., *Meteoritics & Planetary Science* 35 (2000) 1309.
12. Drake M. J., Campins H., in *Asteroids, Comets, Meteors, Proc. IAU Symp.* (2006) 229, eds. D. Lazzaro et al., 381.
13. Gomes R. és mtsai., *Nature* 435 (2005) 466.
14. Ryder G., *Journal of Geophysical Research (Planets)* 107(2002) E4, id. 5022.
15. Valley J., <http://www.sci-news.com/geology/science-jack-hills-zircon-oldest-known-fragment-earth-01779.html>
16. <https://slideplayer.com/slide/8897263/>
17. Watson E. B., Harrison T. M., *Science* 308 (2005) 841.
18. Karato S.-ichiro és mtsai., *Progress in Earth & Planetary Sciences* 7 (2020) 76.
19. Mojzsis S. J. és mtsai., *Nature* 409 (2001) 178.
20. Elkins-Tanton L. T., *Astrophysics & Space Science* 332 (2011) 359.
21. <http://vleptronz.blogspot.com/2011/05/now-for-sale-on-ebay-heavy-water.html>
22. Geiss J., Gloeckler G., *Space Science Rev.* 84 (1998) 239.
23. Rae S., <https://astronomy.com/magazine/2019/04/where-did-earths-water-come-from>
24. Roberts H., Millar T. J., *Astronomy & Astrophysics*, 361 (2000) 388.
25. Došović V. és mtsai., *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 499 (2020) 4626.
26. Gillon M. és mtsai., *Nature* 542 (2017) 456.
27. de Wit J. és mtsai., *Nature Astronomy* 2 (2018) 214.
28. Luger R. és mtsai., *Nature Astronomy* 1 (2017) 0129.
29. Dencs Z., Regály Z., *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 487 (2019) 2191.
30. Peslier A. H. és mtsai., *Space Science Rev.* 212 (2017) 743.
31. Jewitt D., Young E. D., *Scientific American* (2015. március) 36.

SZÁMÍTUNK RÁD, LÉGY A FIZIKA BARÁTJA!



**Támogasd jövedelemadód
EGY százalékaival
az Eötvös Loránd Fizikai Társulatot!**
Adószámunk: 19815644-2-43

$e = hv$ – HONNAN TUDTA PLANCK, HOGY ÉPPEN EZ KELL?

Angeli István
Debreceni Egyetem, Kísérleti Fizikai Tanszék

Dipóloszcillátorokkal kölcsönhatásban álló elektromágneses sugárzási tér: ez az a rendszer, amelynek időbeli fejlődését és végső, stacionárius állapotát *Max Planck* vizsgálja. Központi szerepet kap az S entrópia, annak függése az U oszcillátorenergiától; az $S(U)$ függvényből a stacionárius állapot energiaspektruma már következik. Két út is vezet az $S(U)$ meghatározásához: az egyik a *klaszikus*, a Wien-törvény alapján, a másik a *kvantum kombinatorikai*, amelyet *Ludwig Boltzmann*tól örökölt. A két út találkozásánál áll az újjelző tábla: az ε energiakvantum arányos a ν oszcillátorfrekvenciával! És hogyan látta Planck tíz év múlva ...?



1. ábra. The Entropic Boltzmann (P. L. Dutton, FRS) [2] – balra és Boltzmann síremléke Bécsben, a rávésett egyenletet nem találjuk sem az 1877-es, sem az 1896-os cikkében – jobbra.

Boltzmann: ε

A történetet *Ludwig Boltzmann*-nal (1844. II. 20. – 1906. IX. 5.) kell kezdenünk. Még hallgatóként 1866-ban tanulmányt ír a *A hőtan második főtételének mechanikai jelentőségéről* [1]. A téma később is foglalkoztatja, de közben professzora, *Joseph Stefan* (1835. III. 24. – 1893. I. 7.) szlovén eredetű bécsi fizikaprofesszor – széles látókörű tudós (és költő!), egyike azoknak, akik korán felismerték *Maxwell* munkájának jelentőségét – átadja neki Maxwell cikkét, egy angol nyelvű kísérletében. A Maxwell-egyenletek ellenőrzésére Boltzmann kísérletsorozatba kezd dielektrikumokkal, a grazi egyetem egy fűtetlen emeleti helyiségében. A precíz munka eredményeképpen 1874-ben kijelenti, hogy a Maxwell-egyenletek helyessége most már kísérletileg bizonyított [1, 4. oldal]:

Megköszönöm *Zolnai Dóra* könyvtárosnak az évszázados források beszerzésében nyújtott segítségét.



Angeli István a Debreceni Egyetem ny. egyetemi tanára. Az ELTE TTK fizikus szakán végzett 1955-ben. Részt vett azon kísérletekben, amelyek a magyarországi szénak urántartalmának elődúsítására irányultak. Munkatársaival totális neutron-hatáskeresztmetszeteket mért; az értelmezéshez kifejlesztették az optikai modell félklasszikus változatát. A töltéssugárban héj- és deformációs effektusokat tártak fel. 2004-ben és 2013-ban magsugártáblázatokat közölt az *Atomic Data and Nuclear Data* folyóiratban.

– „Die Richtigkeit der Maxwell’schen Theorie nunmehr experimentell erwiesen.“

Tizenkét évvel az elektromágneses hullámokat kimutató Hertz-kísérlet (1886) előtt!

1877-es cikkében [2] – annak érdekében, hogy a termodinamika második főtételének statisztikai meg-alapozására kombinatorikai számításokat alkalmazhasson – feltételezi, hogy a molekulák kinetikus energiája egy kis véges érték, ε egész számú többszöröse:

$$0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots$$

1891-ben, egy vita során azt is lehetségesnek tartja, hogy az energia atomos szerkezetű [1, 1. oldal]:

„Ich sehe keinen Grund, nicht auch die Energie als atomistisch eingeteilt anzusehen.“

Bécsi egyetemi termodinamikai előadásaihoz készült jegyzetében [3] lapozgatva, a mai olvasó számára már furcsának tűnik, hogy több helyen is szükségesnek érzi az anyag atomos/molekuláris szerkezetének hangsúlyozását. Még filozófiai érvelést is alkalmaz [3, 5. oldal]:

– „Für diese Ansicht sprechen philosophische Gründe.“

Csak ezután sorolja fel az akkori természettudományos ismeretek, a kémia és a kristályszerkezetten kényszerítő erejét.

1905-ben tovább megy: az idő is atomos szerkezetű: $1 \text{ s} \approx 10^{10} \cdot 10^{10} \cdot 10^{10}$ idő-atom [1, 8. oldal]:

– „die Zahl der Zeitatome = der diskreten Zeitmomente, aus denen eine Sekunde besteht. Sie scheint von der Ordnung 10 hoch 10 hoch 10 hoch 10 zu sein.“

Boltzmann meggyőződéses, szenvedélyes „atomista” volt egy olyan korban, amikor ez – legalábbis a fizikusok körében – még különségnek számított.

Max Planck színre lép

Max Planck (1858. IV. 23. – 1947. X. 4) – aki számára eddig csak a termodinamika számított tudománynak – témájához, a második főtétel tanulmányozásához a Maxwell-egyenletekben kiváló eszközre talált.

Először – mintegy ujjgyakorlatként – a Maxwell-egyenletek alkalmazásával elemzi az elektromágneses sugárzást és egy lineáris oszcillátor kölcsönös egymásra hatása során kialakuló állapotot. Távlabbi célja: a hőmérsékleti egyensúlyban lévő rendszerben kialakuló stacionárius sugárzást vizsgálata [4].

Az oszcillátor energiavesztesége, csillapodása nagyrészt sugárzás révén történik, ami konzervatív hatásnak tekinthető. Ennek vizsgálata lehetőséget ad konzervatív hatások által létrejövő irreverzibilis folyamatok általános értelmezésére [5].

Az igazi feladat megfogalmazását nagyívű elvi megfontolással kezdi: az energiamegmaradás elve megköveteli, hogy minden természeti folyamat végeredményben értelmezhető legyen *konzervatív* hatásokkal. Másrészt viszont az entrópia növekedése azt tanítja, hogy minden természeti változás egyirányú. Ezek alapján Planck megfogalmazza az elméleti fizika alapvető – eddig meg nem oldott – feladatát: *az egyirányú folyamatok visszavezetését konzervatív hatásokra* [6, 57. oldal]:

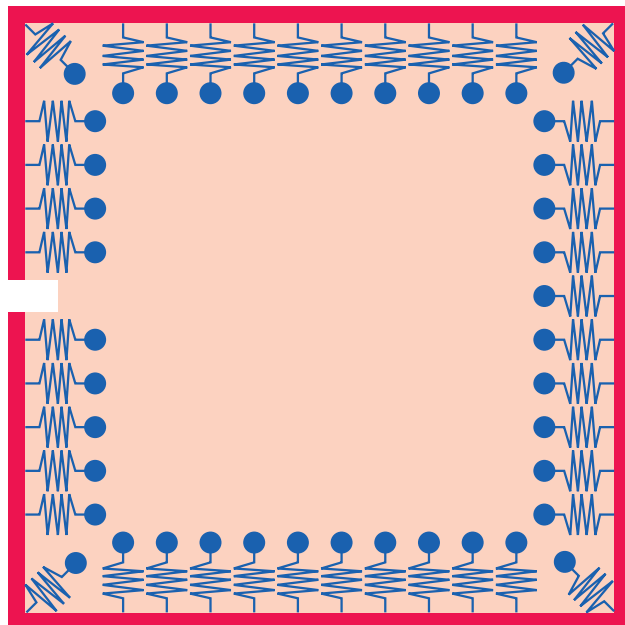
– „Es erwächst daraus der theoretischen Physik die fundamentale Aufgabe, einseitig verlaufende Veränderungen auf conservative Wirkungen zurückzuführen. Diese Aufgabe ist meines Wissens bisher noch in keinem einzigen Falle vollständig gelöst worden.“

Első lépésként egy – az elektromágneses sugárzást tényleg kölcsönhatásban álló – *lineáris oszcillátort* vizsgál. Fontos következménynek tartja a végállapotban kialakuló sugárzást spektrumot [6, 60. oldal]:

– „Der Resonator beeinflusst aber auch die ‚Färbung‘ der erregenden Welle.“ – „woraus sich dann wichtige Schlüsse auf die Energievertheilung im stationären Strahlungszustand innerhalb des betrachteten Raumes ergeben.“

Az előző közlemény egy matematikai jellegű hiányosságára Ludwig Boltzmann mutatott rá. Planck elismeri, hogy ez a hiányosság elvben valóban fennáll, azonban az általa tárgyalt fizikai rendszerben – és a természetben – nem fordulhat elő az ennek megfelelő „szinguláris” folyamat [7]. Hogy a továbbiakban ilyen formális kifogás ne merülhessen fel, bevezeti a *természetes sugárzást* (*natürliche Strahlung*) fogalmát: ez az a sugárzást tér, amelynek leírása már nem tartalmazza a Boltzmann által kifogásolt szinguláris matematikai komponenseket [8].

A következő feladatban a matematikai tárgyalás megkönnyítésére feltételezi, hogy gömb alakú, tükröz-



2. ábra. Dipoloszcillátorokkal kölcsönhatásban álló elektromágneses sugárzást tér szemléltetése [10].

ő falú üregben kialakuló elektromágneses *gömbhullámok* lépnek kölcsönhatásba a gömb közepén elhelyezkedő elhanyagolható méretű, kis csillapítású *dipoloszcillátorral*. A számítás végén a várt eredményt kapja: a folyamat irreverzibilis, és végül stacionárius jelleget ölt [9]. Végül megjegyzi, hogy semmi sem változik, ha nem egy, hanem sok oszcillátor helyezkedik el az üregben, 2. ábra.

Az irreverzibilis sugárzást folyamatok általános jellemzésére bevezeti a vizsgált rendszer *entrópiáját*, amelyből majd a hőmérséklet is következik. A rendszer teljes entrópiája a részek entrópiáinak összege [8]:

$$S = S_0 + S,$$

ahol S_0 az oszcillátor entrópiája:

$$S_0 = \log U,$$

U az oszcillátor energiája, S pedig a sugárzást tér entrópiája. Megmutatja, hogy *a rendszer teljes entrópiájának időbeli deriváltja pozitív*; ezzel az irreverzibilitás bizonyítást nyert.

Oscillátorokkal egyensúlyban lévő elektromágneses tér spektruma

Ezután áttér a teljesen általános eset tárgyalására: *tetszőleges elektromágneses hullám, tetszőleges alakú üregben* [11]. Ez a bonyolult feladat már nem oldható meg a Maxwell-egyenletek segítségével, de a sugárzást folyamatok irreverzibilitására vonatkozó tételek, mindenekelőtt a rendszer entrópiájának kifejezése célhoz vezet, mégpedig egyszerűbben és könnyeb-

ben áttekinthető módon. Az így nyert *elektromágneses entrópiát az ismert Clausius-féle termodinamikai entrópiával azonosítva*, végül is a hőmérsékleti sugárzás keresett törvényei adódnak, ideértve a hőmérséklet elektromágneses definícióját és a stacionárius sugárzási állapot *Wien-féle energiaeloszlását is*.

A részletek

A rendszer teljes elektromágneses entrópiája:

$$S_t = \sum S + \int s d\tau,$$

ahol az első összeg az összes oszcillátorra, az integrál pedig a sugárzási tér entrópiasűrűségére terjed ki. A ν frekvenciájú és U energiájú oszcillátor S entrópiáját a következőképpen definiálja:

$$S = -\frac{U}{a\nu} \log \frac{U}{eb\nu},$$

ahol a és b univerzális pozitív állandók, e pedig a természetes logaritmus alapszáma; ez utóbbit formai okokból célszerű beírni. Planck bebizonyítja, hogy az S_t teljes entrópia változása csak pozitív lehet, vagyis az entrópia csak növekedhet. A rendszernek az az állapota, amikor az entrópia eléri maximális értékét, a *stacionárius állapot*. Rámutat, hogy stacionárius állapotban a

$$-\frac{1}{a\nu} \log \frac{U}{b\nu} = \frac{1}{T}$$

által definiált T mennyiség értéke a rendszer összes oszcillátorára azonos kell legyen. *A stacionárius állapot minden összetevője csak ezen egy paraméter függvénye*, amelyet viszont a teljes energia határoz meg. A továbbiakban a stacionárius állapotra jellemző egyéb mennyiségeket ezen T paraméter függvényeként fejezi ki. Először is, a fenti definíciós egyenletből: egy ν frekvenciájú oszcillátor energiája:

$$U = b\nu e^{-\frac{a\nu}{T}}.$$

Az energiasűrűség frekvencia szerinti eloszlása:

$$u_\nu = \frac{8\pi b\nu^3}{c^3} e^{-\frac{a\nu}{T}}.$$

Az

$$u = \int u_\nu d\nu$$

energiasűrűség és az s entrópiasűrűség infinitezimális változásainak arányára a

$$\frac{du}{ds} = T$$

eredményt kapja. Ez azt jelenti, hogy a fent – tisztán elektromágneses úton – bevezetett T paraméter éppen az abszolút hőmérséklet. *Stacionárius állapotban a rendszer minden oszcillátora és minden mo-*

nokromatikus sugárzása ugyanazzal a hőmérséklettel rendelkezik. A hullámhosszal kifejezett energiaeloszlás:

$$E_\lambda = \frac{2c^2b}{\lambda^5} e^{-\frac{ac}{\lambda T}}.$$

Ez éppen a *Wien-féle energiaeloszlási törvény*, amely – legalábbis nagyon jó közelítéssel – leírta az akkori kísérleti spektrumot [11, 475. oldal]:

– „Das ist genau das von Hrn. W. Wien aufgestellte Energievertheilungsgesetz, dessen wenigstens sehr angenäherte Gültigkeit gerade in neuerer Zeit ... dargethan worden ist.“

Planck kiemeli még, hogy *az energiaeloszlási törvény szükségszerű következménye az entrópiánövekedési elv elektromágnesessugárzás-elméletre történő alkalmazásának*.

Az első gondok; a megoldás keresése

A spektrum hosszúhullámú részén a spektroszkópikus eltérést tapasztaltak a Wien-féle energiaeloszlástól. Planck – pusztán a biztonság kedvéért – újra áttekinti az elméletet [12]. Előző munkájában az entrópiát megadó kifejezést közvetlenül, definícióval vezette be, és azután megmutatta, hogy ezek a kifejezések valóban teljesítik az entrópiánövekedés követelményét. *Most egy általánosabb utat fog követni*. Először az energiamegmaradásra és az entrópiánövekedésre vonatkozó kifejezéseket állítja fel anélkül, hogy az entrópia mértékére speciális feltételt tenne. Eredményül egy teljesen határozott mennyiség adódik az entrópiára: éppen az, amelyet már korábban használt.

Jelölje U_0 az oszcillátor energiájának *stacionárius* értékét, amelyhez az U aszimptotikusan tart az idő növekedésével. Ha már közel van ehhez, akkor:

$$U = U_0 + \Delta U,$$

ahol ΔU egy kis (pozitív vagy negatív) *véges* eltérés. Tekintsük most az oszcillátor entrópiájának egy infinitezimális dU energiaváltozáshoz tartozó változását:

$$dS = \frac{dS}{dU} dU.$$

A deriváltat U_0 körül ΔU szerint sorbafejtve:

$$\frac{dS}{dU} = \left(\frac{dS}{dU} \right)_0 + \left(\frac{d^2S}{dU^2} \right)_0 \Delta U + \dots$$

Részletes számítás azt mutatja, hogy a második deriválnak fontos szerepe van a teljes rendszer entrópiája változásában:

$$dS_t = dU \Delta U \frac{3}{5} \frac{d^2S}{dU^2},$$

ahol a 0 indexet elhagytuk. Az entrópia változása mindig pozitív, dU és ΔU ellentétes előjelűek, ezért az utolsó tényező negatív:

$$\frac{3}{5} \frac{d^2 S}{dU^2} = -f(U),$$

ahol a pozitív $f(U)$ függhet még az oszcillátor ν rezgésszámától is, így:

$$dS_i = -dU \Delta U f(U).$$

Az $f(U)$ függvény meghatározásához tekintsünk egy olyan rendszert, amelyben n számú egyforma, de egymástól független oszcillátor működik. Akkor a teljes oszcillátorenergia nU , a stacionárius érték feletti energiátöbblet $n\Delta U$, a dt infinitezimális időszak alatti energiaváltozás ndU , az entrópiaváltozás pedig ndS . Ezt felírva:

$$-ndU \Delta U f(U) = -(ndU)(n\Delta U) f(nU).$$

Az $f(U)$ -ra tehát az

$$f(nU) = \frac{1}{n} f(U)$$

függvényegyenletet kaptuk, amelynek megoldása:

$$f(U) = \frac{\text{const.}}{U}.$$

A pozitív állandót – amely még függhet a frekvenciától – α -val jelölve, az oszcillátorentrópia energia szerinti második deriváltja:

$$\frac{d^2 S}{dU^2} = -\frac{\alpha}{U}.$$

Ebből kétszeres integrálással:

$$S = -\alpha U \log(\beta U),$$

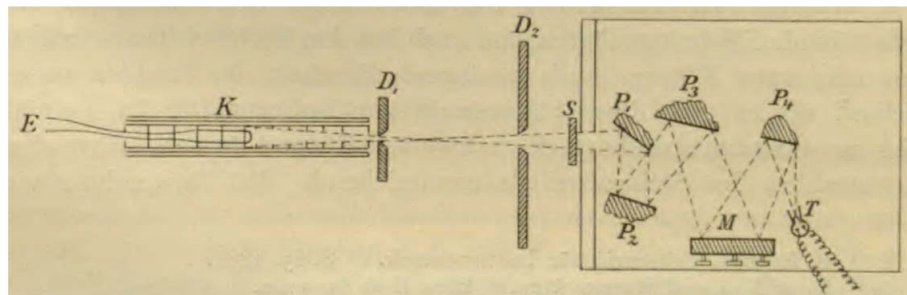
ahol a β pozitív állandó szintén függhet a frekvenciától. Az oszcillátor-hőmérséklet definíciója:

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dU}.$$

Így

$$\frac{1}{T} = -\alpha \log(\beta e U).$$

3. ábra. Infravörös sugárzás hőmérsékletfüggésének mérésére szolgáló elrendezés [14].



Korábbi számítások alapján:

$$\frac{1}{\alpha} = a \nu \quad \text{és} \quad \frac{1}{\beta} = e b \nu,$$

ahol a és b univerzális pozitív állandók. Tehát megkapta azt az entrópiakifejezést, amelyet korábban definíciószerűen vezetett be, és amely a Wien-féle energiaeioszláshoz vezetett!

Egy intelligens interpoláció

– „Örömóda” a Planck-házban!

1900. október 7.: ezen a vasárnap délutánon a Planck-családhoz látogat *Heinrich Rubens* és felesége, *Marie* [13]. Rubens 1900 óta a Charlottenburgi Műszaki Egyetem tanára. Az 50 μm -en túli infravörös hullámhossztartományban végzett hősugárzás-kísérleteihez *Ferdinand Kurlbaum* laboratóriumát használja, a Charlottenburgi Physikalisch-Technische Reichsanstaltban.

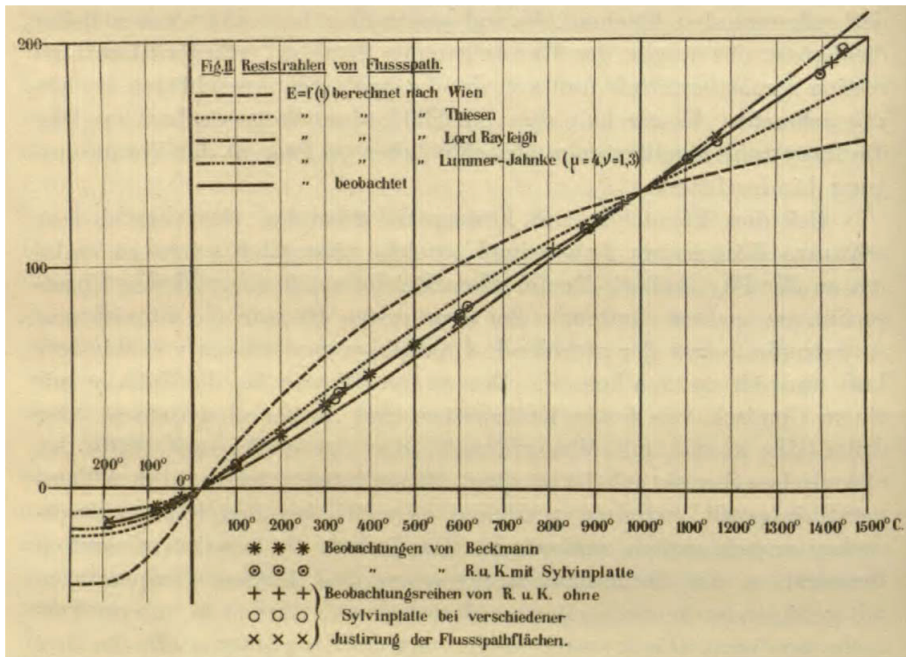
Planck eddig a *Wilhelm Wien* által 1896-ban – termodinamikai megfontolások alapján – felállított sugárzási törvényt általános érvényességűnek tartotta. Most Rubens megmagyarázza neki, hogy a *kísérletileg megfigyelt eltérések a Wien-törvénytől valósak*. Ez nyugtalanítja Planckot. Miután Rubensék a látogatás után elbúcsúznak, Planck még azon este munkához lát, és egy új sugárzási törvényhez jut. Ezt még az éjszaka folyamán közli Rubens-szel egy postai levelezőlapon.

Éjfél körül zongorához ül és Beethoven *Örömódáját* játssza! Ezt feleségétől, *Marie Plancktól* tudjuk, és azt is, hogy ez egészen szokatlan volt: utalás arra, hogy valószínűleg valami különös dolog történt. Ugyanerre utal Max Planck fia *Erwin Planck* is. Szerinte – amikor 1900 őszén a grunewaldi erdőben apjával sétáltak – apja ilyen megjegyzést tett: „Ma olyan felfedezést tettem, amely éppen olyan fontos, mint a Newtoné” [13, 142. oldal].

– „Heute habe ich eine Entdeckung gemacht, die ebenso wichtig ist wie die Newtons.”

Mérések az infravörös tartományban

1900. október 19-én a Német Fizikai Társulat (Deutsche Physikalische Gesellschaft) találkozáján *Ferdinand Kurlbaum* beszámol a Rubens-szel közösen végzett új sugárzásmérésekről [14]. E kísérletek során nem a teljes („tankönyvi”) $I(\nu)$ frekvenciaeloszlást mérték, hanem a kritikus, hosszúhullámú (infravörös) szakaszon, a kristályspektrométer számára alkalmasan kiválasztott egyik $I(T)$ hőmérsékletfüggését – nagyon széles tartományban. A kísérleti elrendezést a 3. ábra mutatja.



4. ábra. Infravörös sugárzás hőmérsékletfüggése [14]. A folytonos vonalak a különböző szerzők elméleti formuláiból számított értékeket mutatják.

A szabályozható hőmérsékletű K fekete üregből kilépő sugárzást kőszkristályok rendszere többszörös tükrözéssel analizálja és a kiválasztott hosszuhullámot ($51,2 \mu\text{m}$) a T termoelemre fókuszálja. Ezzel az elrendezéssel az eddig elért λT érték háromszorosaig tud mérést végezni.

Az eredmény: a 4. ábrán a mérési pontok a termoelem kijelzését mutatják az üreg hőmérsékletének függvényében. A folytonos vonalak a különböző szerzők elméleti formuláiból számított értékeket ábrázolják. Látható, hogy ilyen nagy hullámhosszúságnál a Wien-törvény (hosszú szaggatott vonal) teljesen alkalmatlan!

A kísérletek értelmezése: „intelligens interpoláció”

A fenti kísérleti beszámolóhoz csatlakozva, Planck nyilvánosságra hozza új sugárzásoképletét [15]. Elfogadja, hogy új kísérletek megerősítették azt a korábbi tapasztalatot, miszerint a Wien-formula nem teljesen pontosan írja le az energiaeloszlást. Felidézi, hogy elméletében az energiaeloszlást az S oszcillátorentropia U energiától való függéséből lehet megkapni. Az eddig általa érvényesnek tartott Wien-formula a

$$\frac{d^2S}{dU^2} = \frac{\text{const.}}{U}$$

alakból volt levezethető. Az új kísérleti eredmények kényszerítő hatására mégis lehetségesnek tartja, hogy a fenti egyenlet nem általános érvényű: kiegészítésre szorul. Elkezd – önkényes próbálkozással – az entropia oszcillátorentropiától való függésére kifejezéseket szerkeszteni, amelyekről úgy látszik, hogy teljesítenek bizonyos

alapvető termodinamikai követelményeket. Ezek közül kiválaszt egyet, amely különösen jónak tűnik a Wien-formulával való egyszerű kapcsolata miatt:

$$\frac{d^2S}{dU^2} = \frac{\alpha}{U(\beta + U)}.$$

Ez a kifejezés kis U értékekre átmeny a korábbi képletbe. Felhasználva a

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}$$

definíciós összefüggést és a Wien-féle eltolódási törvényt, új sugárzási formulát kap:

$$E = \frac{C \lambda^{-5}}{e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1},$$

amely a kísérleti adatokat megnyugtatóan leírja, itt C és c integrációs állandók.

Október 20-án Rubens felkeresi Planckot, és elmondja neki, hogy még az éjszaka összehasonlította az új elméleti formulát a kísérleti adatokkal, és megnyugtató egyezést talált [16].

November 13-án Planck levelet ír Wilhelm Wiennek, amelyben közli, hogy formulája bevált, és elmélete is van hozzá, amelyet négy hét múlva a Fizikai Társulat ülésén ismertetni fog [16, F-63. oldal]:

– „Meine neue Formel ... bestätigt sich gut. Ich habe jetzt auch eine Theorie dazu, die ich in vier Wochen hier in der Physikalischen Gesellschaft vortragen werde.“

A kvantummechanika születésnapja – Planck már tudja: $\epsilon \sim \nu$

1900. december 14.: a Német Fizikai Társulat ülésén Max Planck – Boltzmann gázelmélete nyomán – bevezeti a valószínűségszámítást az elektromágneses sugárzás elméleti leírásába, nevezetesen az entropia kifejezésének deduktív úton történő megalkotásába [17]. A részletes levezetéseket – feltehetően az előadásra megszabott időkorlát miatt – most mellőzi. Ez egyrészt teljesen érthető, másrészt azonban azzal a sajnálatos következménnyel jár, hogy az energia-kvantum frekvenciával való arányosságának bejelentése itt – megfelelő előkészítés nélkül – úgy tűnik, mint amikor a bűvész a nyuszt előrántja a cilinderről. Pedig szó sincs ilyenről; a fizikatörténeti jelentőségű bejelentést szigorú logikai következtetés és korrekt számítás előzte meg, amelyeket majd egy később megjelenő, átfogó közlemény tartalmaz [18].

Előrebocsátja, hogy az ismertetésre kerülő eljárás önkényesnek és körülményesnek fog látszani [17, 239. oldal]:

– „Es wird Ihnen bei dem anzugebenden Verfahren manches willkürlich und umständlich erscheinen, ...“

Tekintsük tükröző fallal körülzárt nagy számú oszcillátor és a velük kölcsönhatásban álló elektromágneses sugárzási tér rendszerét:

N számú ν frekvenciájú oszcillátor összesen E energiával,

N' számú ν' frekvenciájú oszcillátor összesen E' energiával,

N'' számú ν'' frekvenciájú oszcillátor összesen E'' energiával, ...

Az oszcillátorok által hordozott összes energia:

$$E + E' + E'' + \dots = E_0.$$

A rendszer teljes energiája E_p , tehát $E_i - E_0$ a sugárzás energiája.

Kérdés: hogyan oszlik el stacionárius állapotban az E_i teljes energia az oszcillátorrezgésekre és a sugárzás különböző színeire?

Először az N számú, ν frekvenciájú oszcillátorhoz tartozó E energia eloszlásával foglalkozik. Ha E -t korlátlanul osztható mennyiségnek tekintenénk, akkor az eloszlás végtelen módon történhetne. Planck azonban – és ez az egész számítás leglényegesebb pontja –, az E -t meghatározott számú, *véges méretű, egyenlő részekből állónak* tekinti, és ehhez a $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$ erg \cdot s természeti állandót használja fel. Ez az állandó, a ν oszcillátor-rezgésszámmal szorozva, adja az ε energiaelemet erg-ben [17, 239–240. oldal]:

– „Wir betrachten aber – und dies ist der wesentlichste Punkt der ganzen Berechnung – E als zusammengesetzt aus einer ganz bestimmten Anzahl endlicher Teile, und bedienen uns dazu der Naturconstanten $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$ [erg \times sec]. Diese Constante mit der gemeinsamen Schwingungszahl ν der Resonatoren multiplicirt ergibt das Energieelement ε in erg.“

Hogy az ε energiaelemnek arányosnak kell lennie a ν rezgésszámmal, azt majd a következő, közleményben fogja részletesen bemutatni [18]. Általánosságban az egész levezetés azon a tételeen alapul, hogy adott energiájú oszcillátorrendszer entrópiája arányos az ennél az energiánál lehetséges komplexiók számának logaritmusával. A további számításokat elvégezve, kapja:

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

A Planck által már korábban megadott spektrum!

Ezt a beszámolót – a kvantummechanika megszületését – azonban nem követte örömmel, inkább évekig tartó kételkedés és bizonytalanság.

... de csak most írja le

Az egyre gyarapodó kísérleti eredmények hatására most már tudomásul veszi, hogy az általa eddig legjobbnak tartott Wien-féle energieloszlás és az ahhoz

vezető elmélet javításra szorul. Ez számára azt jelenti, hogy az S entrópiát az U energia megfelelő függvényeként kell megadni [18, 554. oldal]:

– „Somit reducirt sich das ganze Problem auf die eine Aufgabe, S als Function von U zu bestimmen.“

Legyen az N számú oszcillátor és a vele kölcsönhatásban álló sugárzási tér stacionárius állapotban. Ha az egyes oszcillátorok átlagos energiája U , átlagos entrópiája S , akkor a teljes energia:

$$U_N = NU$$

és a teljes entrópia

$$S_N = NS.$$

Ez a teljes entrópia arra a rendezetlenségre jellemző, amellyel az U_N teljes energia az egyes oszcillátorokra eloszlik. Az S_N teljes entrópiát a következő alakban veszi fel:

$$S_N = k \log W + \text{const.},$$

ahol W annak valószínűsége, hogy az N oszcillátor összes energiája U_N . Ez a feltevés egyszerű, célszerű („Für die Zweckmässigkeit...“), és közeli rokonságban van Boltzmann kinetikus gázelméletének egy tételével [2]. A W valószínűség kiszámításához szükséges, hogy U_N -t ne folytonosnak, hanem diszkrét, véges nagyságú részek egész számú többszöröséből álló mennyiségnek fogja fel [18, 556. oldal]:

– „Hierzu ist es notwendig, U_N nicht als eine stetige, unbeschränkt teilbare, sondern als eine diskrete, aus einer ganzen Zahl von endlichen gleichen Teilen zusammengesetzte Grösse aufzufassen.“

Ez volt az első fizikátörténeti jelentőségű lépés!

(De Planck ezt a lépést akkor még csak – Boltzmann követve – a kombinatorikai módszer alkalmazhatósága érdekében tette meg.)

Ha ezt a kis energiaelemet ε -nal jelöljük, akkor

$$U_N = P\varepsilon,$$

ahol P nagy egész szám; az ε értéke még meghatározandó. A P számú kis energiaelemet az N oszcillátorra csak véges számú módon lehet szétosztani. Boltzmann nyomán egy-egy ilyen leosztást *komplexiónak* (*Complexion*) nevez. A kombinatorikából azt kapja, hogy az összes lehetséges ilyen komplexiók száma:

$$\begin{aligned} R &= \frac{N \cdot (N+1) \cdot (N+2) \cdot \dots \cdot (N+P-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot P} = \\ &= \frac{(N+P-1)!}{(N-1)! \cdot P!}. \end{aligned}$$

Nagy N és nagy P értékekről van szó, tehát alkalmazható a Stirling-formula; ezzel igen jó közelítésben:

$$R \approx \frac{(N+P)^{N+P}}{N^N \cdot P^P}.$$

Most azt a hipotézist teszi, hogy a W valószínűség arányos az R -rel, másképpen kifejezve: minden komplexiót azonos valószínűségűnek tekint. Ezzel a

feltétellel, és az additív állandó megfelelő megválasztásával, a teljes S_N entrópia:

$$\begin{aligned} S_N &= k \log R = \\ &= k \left[(N+P) \log(N+P) - N \log N - P \log P \right] = \\ &= k N \left[\left(1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) \log \left(1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) - \frac{U}{\varepsilon} \log \left(\frac{U}{\varepsilon} \right) \right]. \end{aligned}$$

Egy oszcillátor átlagos entrópiája ennek N -ed része:

$$S = k \left[\left(1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) \log \left(1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) - \frac{U}{\varepsilon} \log \left(\frac{U}{\varepsilon} \right) \right].$$

Tehát kombinatorikai eljárással megkapta az S entrópiát, mint az U/ε függvényét.

◇

Egy másik úton, a Wien-féle eltolódási törvényből kiindulva, ugyancsak kifejezést kap az S entrópia U oszcillátorenergiától való függésére. A hosszadalmas gondolatmenet részleteit mellőzve, csak a legfontosabb lépéscsoportokat idézzük.

Az U oszcillátorenergia hőmérséklet- és frekvenciafüggése ilyen alakú:

$$U = \nu f \left(\frac{T}{\nu} \right).$$

Ehelyett ezt is írhatjuk:

$$T = \nu f \left(\frac{U}{\nu} \right).$$

Bevezeti az oszcillátor S entrópiáját a következő egyenlettel:

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dU},$$

így

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{\nu} f \left(\frac{U}{\nu} \right),$$

amit integrálva, a termodinamikai úton kapott entrópia U -függése:

$$S = f \left(\frac{U}{\nu} \right).$$

Ezt összehasonlítva kombinatorikai úton kapott kifejezéssel, feltűnik a két út találkozásánál az „útjelző tábla”, a második történelmi jelentőségű következtetés.

Az ε energiaelem arányos a ν frekvenciával:

$$\varepsilon = h\nu.$$

Tehát a frekvenciával való arányosság szigorúan következik a kétféle entrópiameghatározó módszer eredményének összehasonlításából; szó sincs ügyes találgatásról (nyuszi a cilinderből). [Egyes szerzők

szerint a h jelölés a *Hilfsgrösse* (segédmennyiség) elnevezésre utal.]

Az ε energiaelemre most nyert kifejezést a kombinatorikai úton kapott entrópiába írva:

$$S = k \left[\left(1 + \frac{U}{h\nu} \right) \log \left(1 + \frac{U}{h\nu} \right) - \frac{U}{h\nu} \log \left(\frac{U}{h\nu} \right) \right],$$

ahol h és k univerzális állandók. Ezt az entrópiakifejezést felhasználva:

$$\begin{aligned} \frac{1}{kT} &= \frac{1}{k} \frac{dS}{dU} = \\ &= \frac{1}{h\nu} \log \left(1 + \frac{U}{h\nu} \right) + \frac{1}{h\nu} - \frac{1}{h\nu} \log \left(\frac{U}{h\nu} \right) - \frac{1}{h\nu}, \end{aligned}$$

vagyis

$$\frac{1}{kT} = \frac{1}{h\nu} \log \left(1 + \frac{h\nu}{U} \right),$$

ebből tovább:

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} = 1 + \frac{h\nu}{U}$$

és így egy oszcillátor átlagos energiája:

$$U = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Egy korábbi cikkből felidézi az energiasűrűség és az U_ν átlagos oszcillátorenergia kapcsolatát,

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U_\nu d\nu$$

és kapja:

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Felhasználva a frekvencia és hullámhossz közötti $c = \nu\lambda$ kapcsolatot:

$$c = \nu\lambda, \quad \nu = \frac{c}{\lambda}, \quad \frac{\nu^3}{c^3} = \frac{1}{\lambda^3},$$

$$|d\nu| = \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda = c \frac{d\lambda}{\lambda^2},$$

$$\frac{\nu^3}{c^3} d\nu = c \frac{d\lambda}{\lambda^5},$$

a hőmérsékleti sugárzás spektruma hullámhosszban kifejezve:

$$E_\lambda = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{ch}{\lambda T}} - 1}.$$

Látható, hogy az $u_\nu d\nu$ és az $E_\lambda d\lambda$ is energiasűrűség jellegű mennyiség. Ezeket a formulákat találjuk a tan-

könyvek többségében. Néhány helyen azonban ezek c -szereze szerepel, ami az 1 cm^2 felületen merőlegesen 1 s alatt kiáramló sugárzási energiát jelenti; többnyire *intenzitás* vagy *emisszióképesség* névvel illetik.

The Theory of Heat Radiation

Planck 1906–7-ben egyetemi előadási anyagához írt egy jegyzetet [19]. 1912-ben átdolgozta, és ebből készült egy amerikai fordítás, ami 1914-ben jelent meg [20]. Az utóbbiból emelünk ki néhány részletet:

Az előszóban szövé teszi, hogy a kísérleti igazolás ellenére az érdeklődés ugyan széleskörű, azonban ez *nem jelenti a kvantumhipotézis általános elfogadását*: egyes konzervatív fizikusok elutasítják, mások kívánnak, ismét mások pedig támadják [VII. oldal]:

– “In spite of the satisfactory agreement of the results mentioned with one another as well as with experiment, the ideas from which they originated have met with wide interests but, so far as I am able to judge, with little general acceptance, the reason probably being that the hypothesis of quanta has not yet been satisfactorily completed. While many physicists, through conservatism, reject the ideas developed by me, or, at any rate, maintain an expectant attitude, a few authors have attacked them for the opposite reason, ...”

Planck elismeri, hogy az entrópia és a valószínűség közötti logaritmikus kapcsolatot első ízben Boltzmann állította fel kinetikus gázelméletében [141. oldal]:

– “The logarithmic connection between entropy and probability was first stated by L. Boltzmann in his kinetic theory of gases.”

Boltzmann-nal ellentétben azonban *Planck az S entrópiához határozott értéket rendel*. Ez alapvető jelentőségű lépés, mert szükségszerűen a kvantumhipotézishez, valamint a feketetest-sugárzás energiaeloszlásához vezet [142. oldal]:

– “... we assign a definite absolute value to the entropy S . This is a step of fundamental importance, which can be justified only by its consequences. As we shall see later, this step leads necessarily to the ‘hypothesis of quanta’ and moreover it also leads as regards radiant heat, to a definite law of distribution of energy of black radiation.”

A hőmérsékleti sugárzás elméletének fő problémája az entrópia energiafüggésének meghatározása. Ehhez szükség van az emisszió és abszorpció folyamatának részletesebb vizsgálatára. Kiválasztjuk a legegyszerűbb rendszert: nagyszámú (N) hasonló dipóloszcillátort. Egy ilyen oszcillátort $f(t)$ dipólmomentuma és az f idő szerinti deriváltja teljesen jellemzi. Legyen az energia [160–167. oldal]:

$$U = \frac{1}{2} K f^2 + \frac{1}{2} L \left(\frac{df}{dt} \right)^2,$$

ahol K és L pozitív állandók, amelyek függhetnek az oszcillátor fajtájától. Ha rezgése közben nem abszorbeál és nem emittál energiát, akkor

$$dU = K f df + L \frac{df}{dt} d \left(\frac{df}{dt} \right) = 0,$$

amelynek megoldása

$$f = C \cos(2\pi \nu t - \theta),$$

ahol C és θ integrációs állandók, ν pedig a rezgési frekvencia:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{L}}.$$

Tekintsük az oszcillátorok termodinamikai állapotát és számítsuk ki annak entrópiáját, nem törődve a körülvevő sugárzási térrel. Ehhez meg kell adnunk az 1., 2., 3., ... állapotartományban lévő oszcillátorok N_1, N_2, N_3, \dots számát. Lineáris oszcillátor esetén az állapotter koordinátái az f elektromos dipólmomentum és a

$$\psi = L \frac{df}{dt}$$

impulzus dimenziójú mennyiség.

A kvantumhipotézis szerint ezen állapotter eleme:

$$\int \int df d\psi = h.$$

Ez elvben akár függhetne is a rendszer tulajdonságaitól, például az oszcillátor frekvenciájától, azonban a Wien-féle eltolódási törvény általánosított alakjából következik, hogy h *univerzális állandó*, amelynek dimenziója *hatás* ($\text{erg} \cdot \text{s}$); tehát h a „hatáselem”. Mivel egy perturbálatlan oszcillátor fázisa állandóan változik, de C amplitúdója változatlan, ezért a térelemeket az (f, ψ) síkban a $C = \text{const.}$ görbék határolják. Az energiaegyenletből ezek olyan ellipszisek, amelyekre:

$$\left(\frac{f}{C} \right)^2 + \left(\frac{\psi}{2\pi \nu L C} \right)^2 = 1.$$

A féltengelyek:

$$a = C \text{ és } b = 2\pi \nu L C.$$

Ezek szerint az 1., 2., 3., ... térelemek koncentrikus, hasonló és hasonlóan elhelyezkedő elliptikus gyűrűk, amelyeket a C növekvő értékei határoznak meg:

$$0, C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n-1}, C_n, \dots$$

Az n -edik térelem az, amelyet a $C = C_{n-1}$ és $C = C_n$ ellipszisek határolnak. Az első térelem a C_1 teljes ellipszis. Minden gyűrű területe h :

$$h = (a_n b_n - a_{n-1} b_{n-1}) \pi,$$

vagyis:

$$h = (C_n^2 - C_{n-1}^2) 2\pi^2 \nu L.$$

Mivel $C_0 = 0$, ezért

$$C_n^2 = \frac{n h}{2\pi^2 \nu L}.$$

Az oszcillátorok rendszerének termodinamikai állapota rögzített azáltal, hogy a w_1, w_2, w_3, \dots eloszlási sűrűségek értéke adott. A rendszer teljes energiája:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n + \dots$$

Az E_n energia kiszámítható azon törvény segítségével, amely szerint a térelemeken belül az oszcillátorok eloszlása egyenletes. Ha az n -edik térelem N_n oszcillátort tartalmaz, akkor a sűrűség

$$\frac{N_n}{h},$$

illetve

$$\frac{N_n}{h} df d\psi$$

felületelemenként. Így az energia:

$$E_n = \frac{N_n}{h} \int U df d\psi.$$

Integrációs változónak f és ψ helyett C -t és ϕ -t bevezetve, a (211) ellipszisegyenletből leolvasható, hogy

$$f = C \cos \phi,$$

$$\psi = 2 \pi \nu L C \sin \phi$$

és így:

$$E_n = 2 \pi \nu L \frac{N_n}{h} \int U C dC d\phi.$$

Az energiaegyenletet felhasználva

$$U = \frac{1}{2} K C^2$$

és így az integrálást elvégezve:

$$E_n = \frac{\pi^2}{2} \nu L K \frac{N_n}{h} (C_n^4 - C_{n-1}^4),$$

azaz

$$E_n = N_n \left(n - \frac{1}{2} \right) h \nu = N w_n \left(n - \frac{1}{2} \right) h \nu,$$

tehát az n -edik térelemben egy oszcillátor átlagos energiája $(n - 1/2) h \nu$. A teljes energia pedig:

$$E = N h \nu \sum n w_n \left(n - \frac{1}{2} \right).$$

Ragaszkodik a klasszikus fizikához, amennyire csak lehet. Ezért úgy véli, hogy a sugárzás és az anyag közötti kölcsönhatás törvényét úgy ésszerű megfogalmazni, hogy a klasszikus elektrodinamikától minél kevésbé térjünk el [180. oldal].

– "... it will be rational to proceed in such a way as to make the deviation from the laws of classical electrodynamics, ... as slight as possible."

We may represent the whole process by the following figure in which the abscissæ represent the time t and the ordinates the energy

$$U = n\epsilon + \rho, \quad (\rho < \epsilon) \quad (251)$$

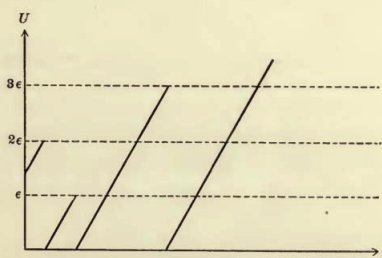


FIG. 7.

of a definite oscillator under consideration. The oblique parallel lines indicate the continuous increase of energy at a constant rate.

5. ábra. Elektromágneses sugárzási térrel kölcsönhatásban álló dipoloszcillátor időbeli változása Planck szerint 1914-ben.

Ezért feltételezi, hogy az abszorpció folyamatosan történik, az emisszió pedig hirtelen impulzusokban. Egy oszcillátor csak abban a pillanatban képes energiát kibocsátani, amikor U rezgési energiája az $\epsilon = h \nu$ energiakvantum n egész számú többszöröse, 5. ábra. Hogy akkor valóban emittál-e, vagy a rezgési energiája tovább növekszik az abszorpció révén, ezt véletlennek tekinti. Ez nem sérti az emisszió kauzalitását; az emissziót létrehozó folyamatokat olyan bonyolultnak tételezi fel, hogy jelenleg a törvényeik csak statisztikai módszerekkel kezelhetők. Azonban, ha létrejön az emisszió, akkor a teljes U rezgési energia kibocsátása megtörténik, tehát akkor az oszcillátor újra a nulláról kezdi a sugárzási energia abszorpcióját.

Irodalom

1. W. Höflechner: Ludwig Boltzmann – Persönlichkeit – Karriere – Bedeutung. In: *Mitteilungen der Österreichischen Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte*. Wien, Erasmus Verlag, (2007) 131.
2. L. Boltzmann: Über die Beziehung dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung respektive den Sätzen über das Wärmegleichgewicht. *Sitzungsberichte d. Kaiserl. Ak. Wiss. Mathematisch-Naturwissen Classe. Abt. II. LXXVI* 1877, 353–435. Wiener Berichte, 76 (1877) 373–435.
Angol fordítása: K. Sharp, F. Matschinsky: On the Relationship between the Second Fundamental Theorem of the Mechanical Theory of heat and Probability Calculations Regarding the Conditions for Thermal Equilibrium. *Entropy* 17(2015) 1971.
3. L. Boltzmann: *Vorlesungen über Gastheorie*. Leipzig, Verlag Ambrosius Barth, 1896.
4. M. Planck: Absorption und Emission elektrischer Wellen durch Resonanz. *Sitzungsberichte K. preuss. Ak. Wiss.*, 21 März (1895) 289.
5. M. Planck: Über elektrische Schwingungen, welche durch Resonance erregt und durch Strahlung gedämpft werden. *Sitzungsberichte K. preuss. Ak. Wiss.*, 20 Feb. (1896) 151.
6. M. Planck: Über irreversible Strahlungsvorgänge. Erste Mittheilung. *Sitzungsberichte K. preuss. Ak. Wiss.*, 4 Feb. (1897) 57.
7. M. Planck: Über irreversible Strahlungsvorgänge. Zweite Mittheilung. *Sitzungsberichte K. preuss. Ak. Wiss.*, 8 Juli. (1897) 715.
8. M. Planck: Über irreversible Strahlungsvorgänge. Vierte Mittheilung. *Sitzungsberichte K. preuss. Ak. Wiss.*, 7 Juli. (1898) 449.
9. M. Planck: Über irreversible Strahlungsvorgänge. Dritte Mittheilung. *Sitzungsberichte K. preuss. Ak. Wiss.*, 16 Dez. (1897) 1122.
10. History of Science 1815/3815.

11. M. Planck: Über irreversible Strahlungsvorgänge. Fünfte Mittheilung. *Sitzungsberichte K. preuss. Ak. Wiss.*, 18 Mai (1899) 440.
12. M. Planck: Entropie und Temperatur strahlender Wärme. *Ann. d. Physik* 306 (1900) 719.
13. E. Müller: Interdisziplinärer Zugang zu den Grundlagen der Quantentheorie: Beginn der Quantentheorie. *Vorlesung*, 6 Juni 2017. Technische Universität Berlin, Institut für Theoretische Physik.
14. H. Rubens, F. Kurlbaum: Über die Emission langwelliger Wärmestraahlen durch den schwarzen Körper bei verschiedenen Temperaturen. *Sitzungsberichte Ber. Ak. Wiss.*, 25. Oct. (1900) 929.
15. M. Planck: Ueber eine Verbesserung der Wien'schen Spectralgleichung. *Verh. d. D. Phys. Ges.* 2 (1900) 202.
16. A. Hermann: Die Deutsche Physikalische Gesellschaft 1899–1945. *Phys. Blätter* 51/1 (1995) F-61.
17. M. Planck: Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum. *Verh. d. D. Phys. Ges.* 2 (1900) 237.
18. M. Planck: Ueber das Gesetz der Energieverteilung in Normalspectrum. *Ann. Phys. (Leipzig)* 309/3 (1901) 553.
19. M. Planck: Vorlesungen Über die Theorie der Wärmestrahlung. (1906). *Classic Reprint Series*. www.ForgottenBooks.com (Made in the USA, Monee, IL. 31. August 2021.)
20. M. Planck: *The Theory of Heat Radiation*. (Transl. M. Masius) P. Blakiston's Son & Co. (1914).
21. Simonyi Károly: *A fizika kultúrtörténete*. Gondolat Kiadó, Budapest (1978) 316. és 360.

TÖKÉLETLEN HOLOGRÁFIA

A hologramok pontatlan rekonstrukciójából eredő fizikai optikai aberrációk

Bányász István

Wigner FK, Nukleáris Anyagtudományi Osztály

Összefoglaljuk a pontforrások nagy numerikus apertúrájú hologramokról rekonstruált valódi képének elméleti és kísérleti vizsgálatával elért eredményeinket. A hologramok 632,8 nm hullámhosszú He-Ne lézerrel lettek felvéve, egy kollimált referencianyalábbal és egy 0,85 numerikus apertúrájú mikroszkópjektivvel előállított kvázi szférikus tárgynyalábbal. A hologramlemez mérete 60 mm × 90 mm volt. A referencianyaláb beesési szöge 22,5° volt, és a pontforrást a hologram középpontjával összekötő egyenes 22,5°-ot zárt be a hologram normálisával, a két pont távolsága pedig 90 mm volt. A korábbi munkától eltérően a rekonstruált holografikus kép komplex amplitúdóját a kettős skaláris Fresnel–Kirchhoff-integrál közelítés nélküli alakjának numerikus integrálásával határoztuk meg. Az integrálba beépítettük a rekonstruálási szöghiba okozta hullámfront-aberrációkat. A pontforrások nagyított rekonstruált valódi képét egy túlyuk és egy fotoelektron-sokszorozó detektor segítségével pásztáztuk. A rekonstruált holografikus kép számított és mért intenzitáseloszlásai jól egyeztek. Ezzel a módszerrel kiterjesztettük a hologramok aberrációinak vizsgálatát a módosított Hartmann-tesztek

alsó határától, $5 \cdot 10^{-4}$ radián rekonstruálási szöghibától $1 \cdot 10^{-5}$ radián szöghibáig.



Ez a cikk a szerző *Fizikai Szemlében* megjelent két korábbi írásának folytatása. Az elsőben a rögzítőanyag nemlinearitásának és véges feloldóképességének a rekonstruált holografikus képre gyakorolt hatásáról volt szó precíziós, nagy feloldóképességű holográfia esetében [2]. Ahhoz a cikkhez hasonlóan a publikációban is a rekonstruált holografikus kép komplex amplitúdójának kiszámítására a kettős Fresnel–Kirchhoff-integrál közelítés nélküli alakját használjuk. A második írás jelen cikk közvetlen előzménye [3], és a pontforrás-hologramok geometriai optikai aberrációinak kiszámításáról és egy módosított Hartmann-teszttel történő méréséről szolt. A kutatások motivációjáról és a kísérleti összeállításról az előző két publikációban részletesen írtam.

Az ideális és az aberrációkkal torzított holografikus leképezés leírása a Fresnel–Kirchhoff-integrállal

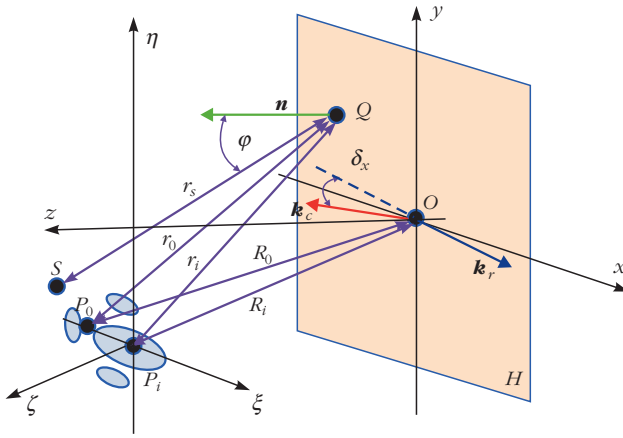
Az 1. ábrán – ami az előző írásokban is szerepelt, fontossága miatt mégis megismétlendő – egy pontforrás hologramjának felvétele és rekonstruálása látható.

A P_0 pontforrás hologramját a téglalap alakú H holografikus lemezen rögzítjük, x , y a hologramhoz rögzített koordináta-rendszer tengelyei, \mathbf{k}_r a sík (kollimált) referencianyaláb hullámszámvektora. A hologramot egy olyan síkhullámmal rekonstruáljuk, amelynek \mathbf{k}_c hullámszámvektora egy kis δ_x szöget zár be a referencianyaláb konjugáltjával. A véges hullámhossz és numerikus apertúra, valamint a kis rekonstrukciós szög-

A cikk eredetije 1988-ban jelent meg az *Applied Optics*-ban [1].



Bányász István 1983-ban végezte el az ELTE fizikus szakát. Ugyanott 1987-ben szerezte meg egyetemi doktori címét. 1994-ben a fizikai tudomány kandidátusa lett. 35 éve dolgozik az optika különböző területein. Jelenlegi kutatási területei: ionnyalábos technológiákkal készített integrált optikai elemek tervezése, készítése, minősítése és ionolumineszcencia. Az ELFT régi tagja, az SPIE nemzetközi optikai mérnöki társaság első magyar szenior tagja. Több mint húsz éve számos rangos nemzetközi folyóirat bírálója.



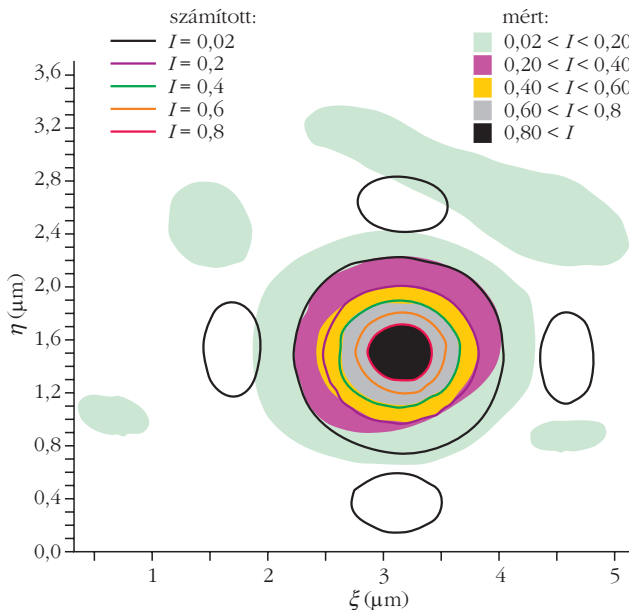
1. ábra. Pontforrás hologramjának felvétele és rekonstruálása.

hiba miatt a pontforrás rekonstruált valódi képe egy aszimmetrikus komplex eloszlás lesz a P_i ideális kép-pont körül, amely egy torzított sinc \times sinc eloszlásra emlékeztet (halványkék foltok az 1. ábrán). Ha a holografikus felvétel és rekonstruálás ideális, akkor a rekonstruált kép méretét és alakját csak a diffrakció határozza meg (diffrakciólimitált leképezés).

A rekonstruált holografikus kép komplex amplitúdóeloszlása a kettős Fresnel–Kirchhoff-integrállal számítható ki.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}(u, v, z) &= \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \mathbf{W}(x, y) \mathbf{R}(x, y) \mathbf{O}(\xi, \eta) \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{\cos\theta(\xi, \eta, x, y) \cos\rho(x, y, u, v, z)}{r_o(\xi, \eta, x, y) r_i(x, y, u, v, z)} \cdot \\
 &\quad \cdot \exp(i k(r_i - r_o)) d\eta d\xi dy dx,
 \end{aligned} \quad (1)$$

2. ábra. Pontforrás számított és mért ideális rekonstruált képe.



ahol $\mathbf{I}(u, v, z)$, $\mathbf{W}(x, y)$, $\mathbf{R}(x, y)$ és $\mathbf{O}(\xi, \eta)$ a rekonstruált kép, a rekonstruáló és referencianyaláb, valamint a tárgnyyaláb komplex amplitúdói, x , y és ξ , η a hologram- és tárgykoordináták, r_o és r_i valamint θ és ρ pedig meghatározzák felvételtkor, illetve rekonstrukciókor a tárgy- és képsík Q , illetve S fútpontjait összekötő vonalak hosszát és szögét.

Jelöljük $\Delta(x)$ -szel a hologram rekonstruálásakor fellépő szöghiba okozta hullámfront-aberrációt. Ha csak az y tengely körül történt egy δ_x elfordulás, akkor kis szöghiba esetén

$$\Delta(x) = \exp(i k x \delta_x \sin\kappa_r), \quad (2)$$

ahol x a hologramkoordináta, κ_r a referencianyaláb hullámszámvektora és δ_x a szöghiba.

Ha figyelembe vesszük, hogy a sík referencianyaláb (konjugált) rekonstruáló nyaláb komplex amplitúdójának szorzata egy valós állandó, akkor az aberrált rekonstruált kép komplex amplitúdója a következő lesz:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}(u, v, z) &= \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\cos\theta(\xi, \eta, x, y) \cos\rho(x, y, u, v, z)}{r_o(\xi, \eta, x, y) r_i(x, y, u, v, z)} \cdot \\
 &\quad \cdot \exp(i k(r_i - r_o + x \delta_x \sin\kappa_r)) d\eta d\xi dy dx.
 \end{aligned} \quad (3)$$

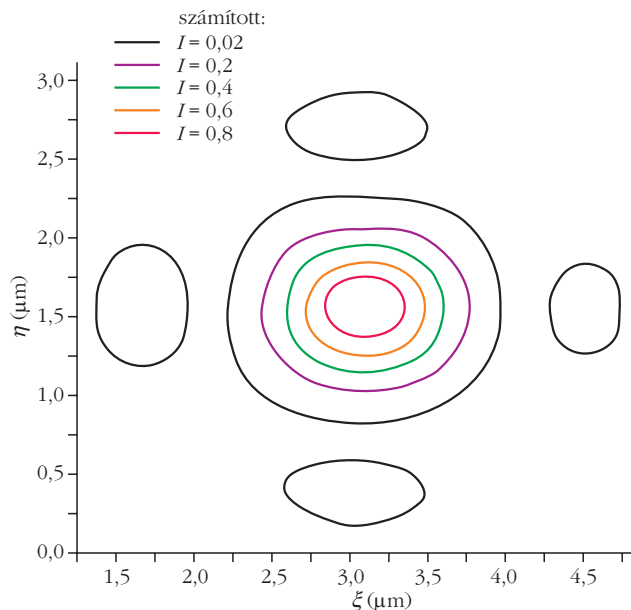
A (3) egyenlet kettős integrálját saját fejlesztésű FORTRAN programmal számítottam ki különböző rekonstruálási szöghibákra. Ez az 1980-as években újdonságnak számított, hiszen a holográfiában általában közelítő analitikus formulákat használtak. Egzakt numerikus módszerek alkalmazására viszonylag kevés példa akadt [4, 5]. A diffrakcióval kombinált aberrációk leírására általában a Zernike-polinomokat használták [6].

A kísérleti összeállítás és a mért és számított eredmények összehasonlítása

A kísérleti összeállítás részletes leírása az előző cikkben található [3]. A rekonstruált valódi képet egy mikrofotométerrel vizsgáltuk. Egy 0,85 numerikus apertúrájú mikroszkópobjektívából és egy 15 \times vetítő okulárból álló mikroszkóppal a nagyított rekonstruált képét egy 12,5 μm átmérőjű tűlyukkal pásztáztuk, ami egy fotoelektron-sokszorozó előtt helyezkedett el. A teljes nagyítás 30 és 40-szeres között volt.

A későbbi kísérletekben – amikor pontforrások helyett egy speciális maszkon lévő 1–20 μm széles és 300 μm hosszú csíkok rekonstruált holografikus képét vizsgáltuk – a valódi képet vetítő okulárral ellátott mikroszkóppal kivetítettük, és a fotoelektron-sokszorozó elé helyezett réssel egy dimenzióban pásztáztuk.

Az ideális rekonstruált kép ($\delta_\kappa = 0$ rad) számított és mért intenzitáseloszlása a 2. ábrán látható. A mért rekonstruált kép mellékmaximumai magasabbak,

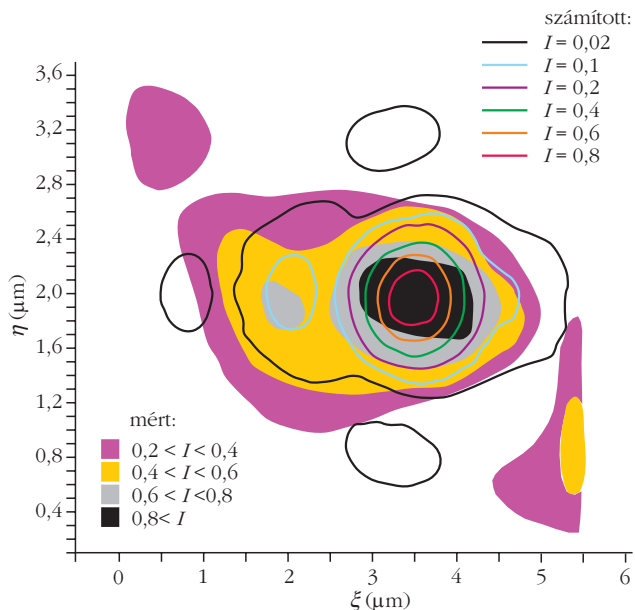
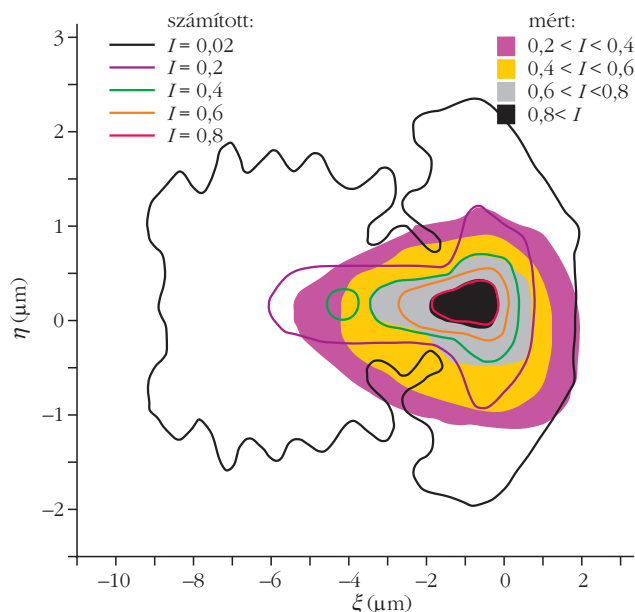


3. ábra. Pontforrás számított rekonstruált képe $\delta_k = 1 \cdot 10^{-5}$ rad rekonstruálási szöghiba esetében.

mint a számítottak, és szabálytalanul helyezkednek el. A mért főmaximum szélesebb és szabálytalanabb a számítottnál. A 3. ábrán csak a számított rekonstruált kép látható $\delta_k = 1 \cdot 10^{-5}$ rad rekonstruálási szöghiba mellett. Az eltérés a diffrakciólimitált képtől olyan kicsi, hogy nem volt értelme mérni a rekonstruált képet. A 2. ábrán látható jelentős eltérések a hologramlemez (és kisebb mértékben a fotoemulzió) egyenletlenségeinek hatására jöttek létre.

Ha a rekonstruálási szöghibát $\delta_k = 5 \cdot 10^{-5}$ rad-ra növeljük, akkor már a számított rekonstruált kép alacsony intenzitású részein jelentős eltérések tapasztalhatók a diffrakciólimitált rekonstruált képhez képest, ahogy a 4. ábrán látható.

5. ábra. Pontforrás számított és mért rekonstruált képe a meridionális fókusz síkban, $\delta_k = 2 \cdot 10^{-4}$ rad rekonstruálási szöghiba esetében.

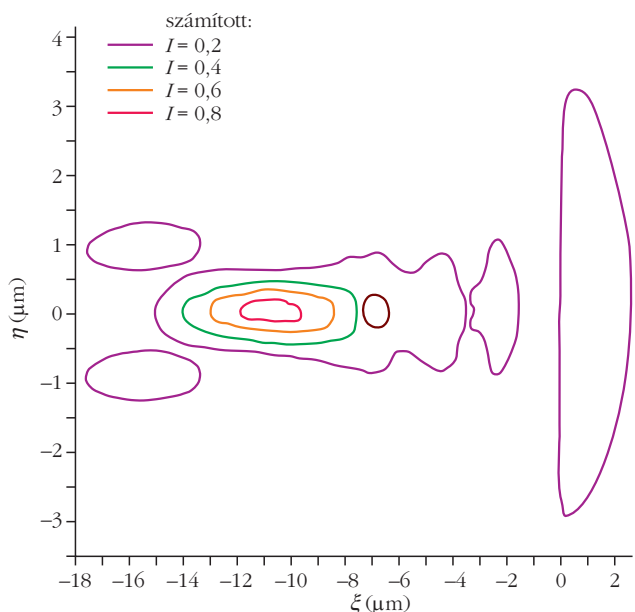


4. ábra. Pontforrás számított és mért rekonstruált képe a meridionális fókusz síkban, $\delta_k = 5 \cdot 10^{-5}$ rad rekonstruálási szöghiba esetében.

A 40% feletti relatív intenzitású részek nem változtak jelentősen, de az alacsony intenzitású szárnyak szélesebbek lettek a diffrakciólimitált képhez képest. Így a Champagne és Massey által a kóma és asztigmatizmus kiküszöbölésére kapott korlátok (11, illetve 7 ívmásodperc, azaz $5,3 \cdot 10^{-5}$, illetve $3,4 \cdot 10^{-5}$ rad) alulbecsültek tűnnek [7]. Az 5. ábrán láthatjuk, hogy a $\delta_k = 2 \cdot 10^{-4}$ rad szöghiba még radikálisabb változásokat eredményez a rekonstruált képben. A rekonstruált kép 0,2 relatív intenzitáson mért ξ irányú átmérője már közel 7 μm . A mért intenzitáseloszlás itt már szabályosabb.

A szöghibát tovább növelve az előző érték ötszörösére, a $\delta_k = 1 \cdot 10^{-3}$ radiánra, a főmaximum mellett már négy 20% feletti mellékmaximum látható (6. ábra), a

6. ábra. Pontforrás számított rekonstruált képe a meridionális fókusz síkban, $\delta_k = 1 \cdot 10^{-3}$ rad rekonstruálási szöghiba esetében.



rekonstruált kép átmérője 0,2 relatív intenzitáson ξ irányban 20 μm , η irányban pedig 6 μm .

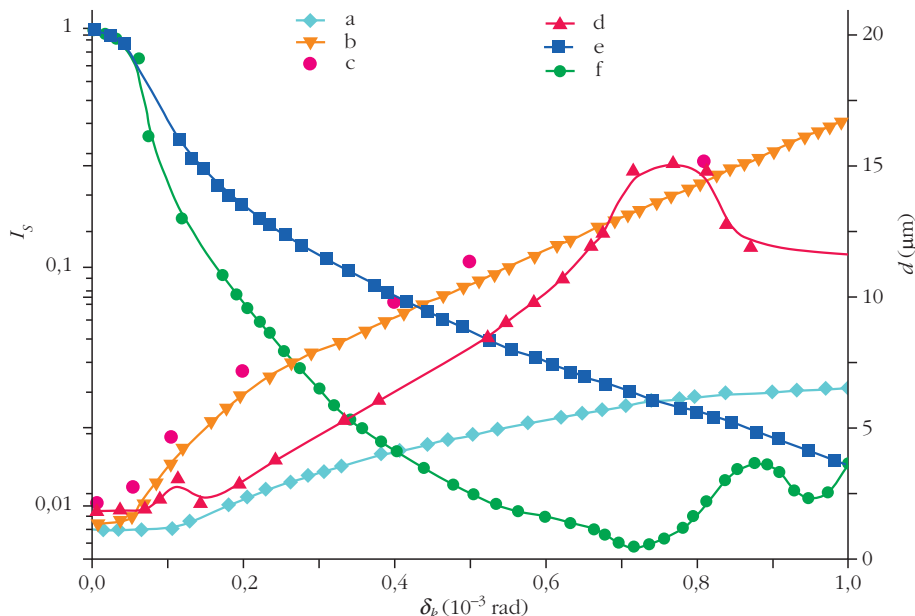
A számított és mért eredményeket a 7. ábrán foglaltuk össze. Az a) görbén a számított rekonstruált kép a meridionális fókusz síkban 0,2 intenzitáson η irányban mért átmérője látható a δ_κ szöghiba függvényében. A b) görbe ugyanaz ξ irányban. A c) lila pontok a b) görbének megfelelő mért értékek. A d) görbe a ξ irányú átmérő a szagittális fókusz síkban. Az e) görbe a Strehl-arány [8, 9] a meridionális fókusz síkban és végül az f) görbe a Strehl-arány a szagittális fókusz síkban.

Megfigyelhető, hogy a meridionális fókusz síkban a rekonstruált holografikus kép átmérője mindkét irányban monoton nő a rekonstruálási szöghiba függvényében. A szagittális fókusz síkban viszont oszcillációk vannak, két helyi maximummal $\delta_\kappa = 1,1 \cdot 10^{-4}$ és $7,5 \cdot 10^{-4}$ radiánál. A mért átmérők kissé nagyobbak a számítottaknál, de ugyanúgy változnak a szöghiba függvényében. A leképezés minőségének számszerű jellemzője a Strehl-arány, a pontforrás aberrált képe maximális intenzitásához képest. A 7. ábrán jól megfigyelhető, hogy mind a meridionális mind a szagittális fókusz síkban a Strehl-arány gyorsan csökken a növekvő szöghibával (az I_s skála logaritmikus). Látható, hogy a $\delta_\kappa < 1 \cdot 10^{-5}$ feltétel szükséges a jó minőségű leképezéshez ($I_s > 0,8$). A két fókusz síkban a Strehl-arány $5 \cdot 10^{-5}$ radián szöghibáig közel azonos. Felette a szagittális fókusz síkban lényegesen gyorsabban csökken a Strehl-arány, mint a meridionálisban, de $7 \cdot 10^{-4}$ rad felett oszcillálni kezd.

Mivel bármely tárgy holografikus leképezése visszavezethető pontjai leképezésére, a fenti eredmények nagyon fontos információkat adnak kiterjedt tárgyak holografikus leképezésének korlátaira is.

Összefoglalás

Miután a holografikus fotolitográfia megvalósításának első lépéseként pontforrások nagy numerikus apertúrájú hologramjainak felvételére és rekonstruálására szolgáló precíziós holografikus összeállítást építettünk, majd számításokkal és mérésekkel (módosított Hartmann-tesztel) meghatároztuk a hologramok geometriai optikai aberrációit, rátértünk a fizikai optikai aberrációk kiszámítására és mérésére. Ahhoz, hogy egzakt módon tudjuk kiszámítani a pontatlan rekonstrukcióból származó fizikai optikai aberrációkat, szükség volt a kettős Fresnel–Kirchhoff-integrál numerikus



7. ábra. Pontforrás számított rekonstruált képének számított és mért jellemzői a δ_κ függvényében; a) meridionális fókusz sík, 0,2 intenzitáson η irányban mért átmérő a rekonstruálási szöghiba függvényében; b) ugyanaz ξ irányban; c): (lila pontok) a b) görbének megfelelő mért értékek. d): ξ irányú átmérő a szagittális fókusz síkban; e): Strehl-arány a meridionális fókusz síkban; f): Strehl-arány a szagittális fókusz síkban.

meghatározására. Másrészt a nagyított rekonstruált holografikus képet közvetlenül pásztáztuk egy nagy feloldóképességű mérőeszközzel.

A cikkben bemutatott eredmények alapján a nagy feloldóképességű holográfiában – mint például a holografikus vetítéses fotolitográfiában, ahol sík segédnyalábokat használnak – a rekonstruáló nyalábnak nagyon nagy pontossággal meg kell egyeznie a referenci nyaláb konjugáltjával. A cikksorozat előző tagjában megmutattuk, hogy $\delta_\kappa > 1,0 \cdot 10^{-3}$ rekonstruálási szöghibák esetén jelentős geometriai aberrációk lépnek fel a rekonstruált képben. A diffrakcióelméleti tárgyalás és az azt alátámasztó kísérletek alapján megállapítható, hogy általában $\delta_\kappa > 1,0 \cdot 10^{-5}$ rekonstruálási szöghibák már fizikai optikai aberrációk megjelenéséhez és a rekonstruált holografikus kép feloldóképességének mérhető romlásához vezetnek.

Irodalom

1. I. Banyasz, G. Kiss, P. Varga: Holographic image of a point source in the presence of misalignment. *Appl. Opt.* 27(1988) 1293.
2. Banyász I.: Tökéletlen holográfia. A rögzítőanyag nemlinearitásának és véges feloldóképességének hatása a rekonstruált holografikus képre. *Fizikai Szemle* 67(2017) 255.
3. Banyász I.: Tökéletlen holográfia. A hologramok pontatlan rekonstrukciójából eredő geometriai optikai aberrációk. *Fizikai Szemle* 71(2021) 409.
4. W. H. Carter, A. A. Dougal: Field Range and Resolution in Holography. *J. Opt. Soc. Am.* 56(1966) 1754.
5. J. Nowak, M. Zajac: Numerical Investigations of Holographic Imaging Quality. *Opt. Appl.* 15(1985) 239.
6. M. Born, E. Wolf: *Principles of Optics*. Pergamon, London, (1959).
7. E. B. Champagne, N. G. Massey: Resolution in Holography. *Appl. Opt.* 8(1969) 1879.
8. K. Strehl: Aplanatische und fehlerhafte Abbildung im Fernrohr. *Zeitschrift für Instrumentenkunde* (1895) 362–370.
9. K. Strehl: Über Luftschlieren und Zonenfehler. *Zeitschrift für Instrumentenkunde* (1902) 213–217. <https://www.slideshare.net/mikhailkonnik/strehl-1902>

A GÁZOK POLITROPIKUS ÁLLAPOTVÁLTOZÁS AIRÓL

Siposs András
ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium

Az ideális gázok azon állapotváltozását nevezzük politropikusnak, amelynek során a pV^z szorzat állandó (ahol p a gáz nyomása, V a térfogata, z pedig egy – lényegében tetszőleges – valós szám, a politropikus kitevő.¹ Az állandó szorzat (az általános gáztörvény miatt): $nRTV^{z-1}$.

Rögtön a cikk elején említjük meg, hogy a gázok négy fő nevezetes állapotváltozása, alkalmas kitevő választásával, mind leírható politropikus változásként. Az izotermikus változás $z = 1$, az izobár $z = 0$, az adiabatikus

$$z = \kappa = \frac{f+2}{f}$$

esetben valósul meg (f a termodinamikai szabadsági fokok száma). A hatványozást mintegy határértékként kiterjesztve, a $z = \infty$ választással az izochor változás is leírható.

Vizsgáljuk meg az egyes állapotjelzők változását egy ilyen folyamatban! Induljunk ki abból, hogy a kezdeti térfogat az i -szeresére változik:

$$V_2 = i V_1. \quad (1)$$

Ekkor az új nyomás:

$$p_2 = \frac{p_1 V_1^z}{V_2^z} = \frac{p_1 V_1^z}{i^z V_1^z} = \frac{1}{i^z} p_1 = i^{-z} p_1 (= j p_1), \quad (2)$$

az új hőmérséklet pedig

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = \frac{p_1 i V_1}{i^z nR} = \frac{1}{i^{z-1}} T_1 = i^{1-z} T_1$$

¹Bár a szakirodalomban a kitevőre általában az n jelölés a használatos, ez nem szerencsés, mert összekeverhető az általános gáztörvény ($pV = nRT$) miatt a témában szintén felbukkanó anyagmennyiség jelével, különösen az olyan származékképletekben, ahol már nem a kitevő pozíciójában szerepel.



Siposs András matematika–fizika tanár, sokszoros tankönyv- és példatárszerző, kutatótanár, szaktanácsadó, vezetőtanár, Ericsson-díjas. Emellett dalszerző, aktív zenész, az indián kultúra kutatója, háromgyermekes apuka.

lesz. Az energiaviszonyok szempontjából fontos hőmérséklet-változás pedig:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = (i^{1-z} - 1) T_1. \quad (3)$$

A gáz belső energiájának változása:

$$\Delta E = \frac{fR}{2M} m \cdot \Delta T = \frac{fR}{2} n \cdot \Delta T. \quad (4)$$

A térfogati munka:

$$\Delta W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{\text{áll.}}{V^z} dV = - \text{áll.} \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^z} dV.$$

Itt z -től függően kétféle primitív függvénnyel lehet dolgunk: $z = 1$ esetén $\ln V$ és $z \neq 1$ esetén

$$\frac{V^{-z+1}}{-z+1} \left(= \frac{V^{1-z}}{1-z} \right);$$

az állandó pedig $nRT_1 V_1^{z-1}$. Az első esetben tehát (amely a fentiek szerint az izoterm változás)

$$\Delta W = - nRT_1 V_1^{1-1} [\ln V]_{V_1}^{V_2} = - \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) nRT \quad (5)$$

(amint jól ismert, és a hőmérséklet állandósága miatt nem is írtunk neki indexet). A második esetben pedig

$$\begin{aligned} \Delta W &= - nRT_1 V_1^{z-1} \left[\frac{V^{1-z}}{1-z} \right]_{V_1}^{V_2} = \\ &= - \frac{nRT_1 V_1^{z-1}}{1-z} (V_2^{1-z} - V_1^{1-z}) = \\ &= \frac{nRT_1 V_1^{z-1}}{z-1} (i^{1-z} V_1^{1-z} - V_1^{1-z}) = \\ &= \frac{nRT_1}{z-1} (i^{1-z} - 1), \end{aligned}$$

ami (felhasználva (3)-at):

$$\frac{nR \cdot \Delta T}{z-1}. \quad (6)$$

Ha mi végzünk munkát a gázon, szokás értelmezni a (0 és 1 közé eső)

$$\frac{\Delta E}{\Delta W} = \alpha \quad (7)$$

hányadost, azt érzékeltetendő, hogy a munkavégzésünk hányadrésze fordítódott a gáz belső energiájának növelésére (a többit hőként leadta). A $z \neq 1$ esetben véve a (4) és (6) alatti mennyiségek hányadosát,

$$\alpha = \frac{\frac{fR}{2} n \cdot \Delta T}{\frac{nR \cdot \Delta T}{z-1}} = \frac{f(z-1)}{2}. \quad (8)$$

(A $z = 1$, izoterm esetben a hányados

$$\alpha = \frac{\frac{fR}{2} n \cdot \Delta T}{-\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) n R T},$$

ami $\Delta T = 0$ miatt maga is 0, és ez érdekes módon „kijön” a (8) alatti, általános esetbeli képletből is, éppen $z = 1$ miatt.) Átrendezve, a politropikus kitevő

$$z = \frac{2\alpha}{f} + 1. \quad (9)$$

Átalakítva:

$$1 - \alpha \frac{-2}{f} = 1 - \alpha \frac{f - (f+2)}{f} = 1 - \alpha \left(1 - \frac{f+2}{f}\right),$$

vagyis végül a

$$z = 1 - \alpha(1 - \kappa) \quad (10)$$

alakot kapjuk.² (Kiváló összhangban van ez a speciális folyamatok azon, könnyen meggondolható eseteivel, hogy az adiabatikus változás során $\alpha = 1$ és $z = \kappa$, valamint az izoterm változás során $\alpha = 0$ és $z = 1$.)

A hőtan első főtétele:

$$\Delta E = \Delta Q + \Delta W. \quad (11)$$

Terjesszük ki az α hányados fenti értelmezését más folyamatokra is – ekkor előfordulhat negatív értéke (például a gáz végzett munkát, miközben belső energiája nőtt, mert hőt vett fel – vagy mindez fordítva történt), vagy 1-nél nagyobb értéke is (a főtétel mindhárom szereplőjének változása azonos előjelű). Ekkor írhatjuk:

$$\alpha \cdot \Delta W = \Delta Q + \Delta W,$$

vagyis

$$(\alpha - 1) \Delta W = \Delta Q. \quad (12)$$

²Ez a képlet – nyilván csak sajnálatos sajtóhiba folytán – tévesen szerepel Holics L., Flórik Gy.: *Fizika* (Akadémiai Kiadó, 2009) című művének 374. oldalán. (Basa István [ELTE Apáczai Gimnázium] észrevétele).

A hatásfokot hagyományosan olyan folyamatokban értelmezzük, amelyben a gáz hőt vesz fel, cserében munkát végez nekünk:

$$\eta = \frac{-\Delta W}{\Delta Q}, \quad (13)$$

alapesetben ez is 0 és 1 közé eső érték. Ezt is értelmezhetjük kiterjesztően, ekkor itt is előfordulhat negatív érték (például a gáz munkát végzett nekünk, miközben még hőt is adott le – vagy fordítva), vagy 1-nél nagyobb érték (a gáz a felvett hőt kívül még a belső energiája, „tartaléka” egy részét is munkavégzésre fordította – persze mindezen említett folyamatok elvi lehetőségek, hogy miként kell ezt technikailag megvalósítani, az más kérdés). A (12) és (13) képletek összevetésével:

$$\eta = \frac{-\Delta W}{(\alpha - 1) \Delta W} = \frac{1}{1 - \alpha}. \quad (14)$$

De összefüggést teremthetünk a hatásfok és politropikus kitevő között is, (8) és (14) révén:

$$\eta = \frac{2}{2 - f(z-1)}. \quad (15)$$

Vizsgáljuk meg a folyamatbeli hőcserét is! A (11) első főtételt (7) révén így is írhatjuk:

$$\Delta E = \Delta Q + \frac{\Delta E}{\alpha},$$

átrendezve

$$\Delta Q = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \Delta E = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{fR}{2M} m \cdot \Delta T. \quad (16)$$

Másfelől, mint szokásos, $\Delta Q = cm \cdot \Delta T$, amiből a fajhőre:

$$c = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{fR}{2M}, \quad (17)$$

illetve (8) révén

$$c = \frac{f(z-1) - 2}{z-1} \frac{R}{2M} = \left(\frac{f - \frac{2}{z-1}}{2M}\right) R. \quad (18)$$

Ellenőrzésül: szépen adódik az izobár ($z = 0$) esetben, hogy

$$c_p = \frac{(f+2)R}{2M}$$

és az izochor ($z \rightarrow \infty$) esetben

$$c_v = \frac{fR}{2M}.$$

Az Olvasóra bízunk az adiabatikus

$$z = \kappa = \frac{f+2}{f}$$

esetbeli $c_a = 0$, és az izoterm ($z = 1$) esetbeli „ c_T nem értelmezhető” (illetve $c_T \rightarrow -\infty$) igazolását.

A vizsgált mennyiségek egymás közti összefüggései.

	z	α	η	c	x
z		$1 - \alpha(1 - \kappa)$	$\frac{2(\eta - 1)}{\eta f} + 1$	$1 - \frac{2R}{2cM - fR}$	$\frac{x - 2}{x}$
α	$\frac{f(z - 1)}{2}$		$\frac{\eta - 1}{\eta}$	$\frac{fR}{fR - 2cM}$	$-\frac{f}{x}$
η	$\frac{2}{2 - f(z - 1)} = \frac{\kappa - 1}{\kappa - z}$	$\frac{1}{1 - \alpha}$		$1 - \frac{fR}{2cM}$	$\frac{x}{x + f}$
c	$\left(\frac{f - \frac{2}{z - 1}}{2M}\right)R = \frac{fR}{2M} \frac{z - \kappa}{z - 1}$	$\frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{fR}{2M}$	$\frac{fR}{2M(1 - \eta)}$		$\frac{(f + x)R}{2M}$
x	$\frac{2}{1 - z}$	$\frac{2}{\alpha(1 - \kappa)} = -\frac{f}{\alpha}$	$\frac{\eta f}{1 - \eta}$	$\frac{2cM}{R} - f$	

A későbbiek kedvéért érdemes tetszőleges folyamat fajhőjét

$$c = \frac{(f + x)R}{2M} \quad (19)$$

alakban is felírni. Ekkor (18) miatt

$$x = \frac{2}{1 - z}, \quad (20)$$

illetve tovább (10) révén

$$x = \frac{2}{\alpha(1 - \kappa)}, \quad (21)$$

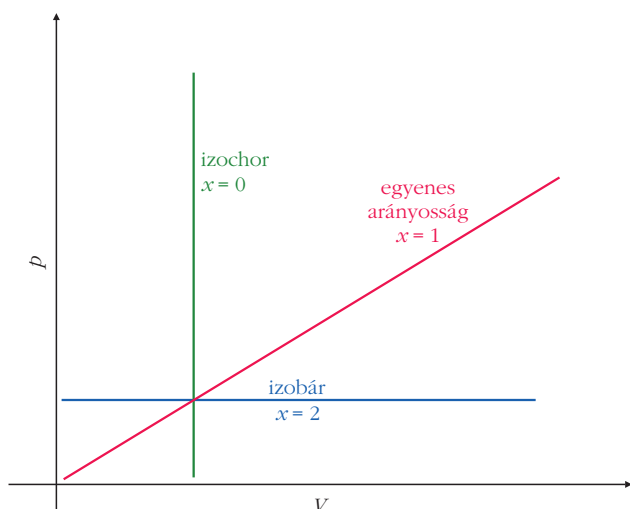
illetve még tovább, κ definíciója miatt

$$x = -\frac{f}{\alpha}. \quad (22)$$

Bármelyikből alkalmas helyettesítéssel adódik az izobár esetre $x = 2$, izochorra $x = 0$, adiabatikusra $x = -f$, izotermre pedig „ x nem értelmezhető” (illetve $x \rightarrow -\infty$).

2. táblázat					
A nyolc (többé-kevésbé) nevezetes folyamat tárgyalt jellemzői.					
	z	α	η	c	x
izoterm	1	0	1	$-\infty$	$-\infty$
izobár	0	$-\frac{f}{2}$	$\frac{2}{2 + f}$	$\frac{(f + 2)R}{2M}$	2
izochor	∞	∞	0	$\frac{fR}{2M}$	0
adiabatikus	$\kappa = \frac{f + 2}{f}$	1	∞	0	$-f$
egyenes arányosság	-1	$-f$	$\frac{1}{1 + f}$	$\frac{(f + 1)R}{2M}$	1
pV^2 állandó	2	$\frac{f}{2}$	$\frac{2}{2 - f}$	$\frac{(f - 2)R}{2M}$	-2
$\frac{p}{V^2}$ állandó	-2	$-\frac{3f}{2}$	$\frac{2}{2 + 3f}$	$\frac{\left(f + \frac{2}{3}\right)R}{2M}$	$\frac{2}{3}$
$pV^{1.2}$ állandó	1,2	$\frac{f}{10}$	$\frac{10}{10 - f}$	$\frac{(f - 10)R}{2M}$	-10

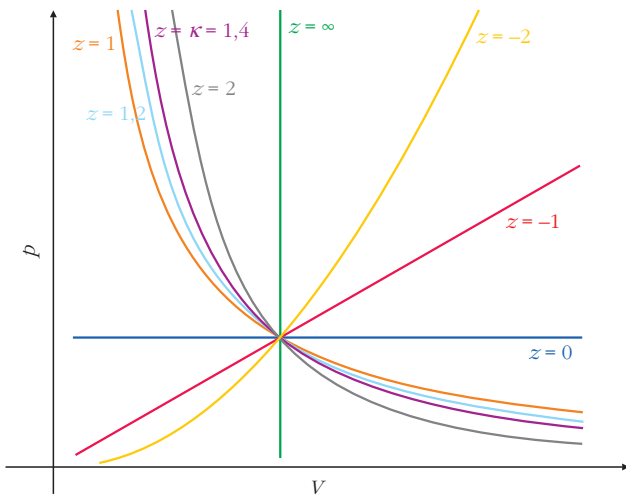
1. ábra



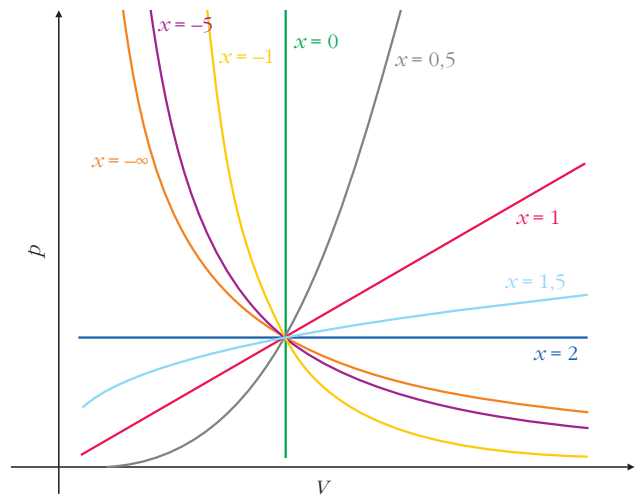
Tanulságos az 1. táblázatba foglalni a megvizsgált mennyiségek egymás közti összefüggéseit.

A négy, már ismert fő nevezetes folyamaton kívül további, bizonyos szempontból speciális állapotváltozások is találhatóak a politropikusok között. Elsősorban ilyen az, amelynek során a nyomás és a térfogat egymással egyenesen arányos³, (p/V , avagy – hogy jól láthatóan politropikus legyen – pV^{-1} állandó), e folyamat képe a p - V diagramon egy az origón áthaladó egyenes egy szakasza. Ekkor persze $z = -1$, és az 1. táblázat szerint kiszámíthatjuk a többi, már tárgyalt jellemzőt, amelyek közül a legérdekesebb, hogy $x = 1$, azaz a fajhő

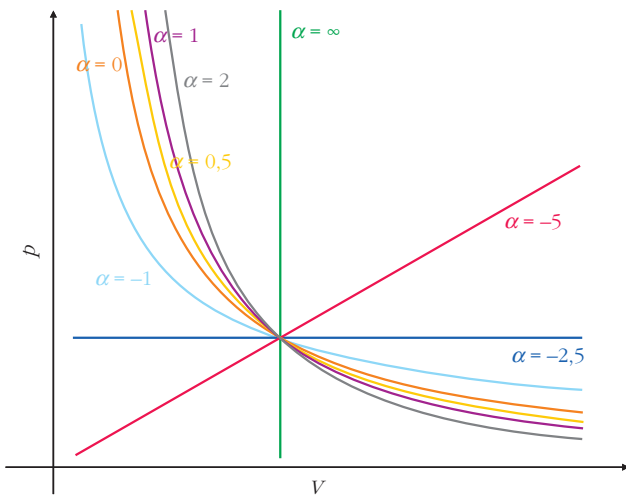
³Lásd például Siposs A.: *Túlélőkönnyv – Fizika feladatgyűjtemény középiskolásoknak*. (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2018) 587. feladat.



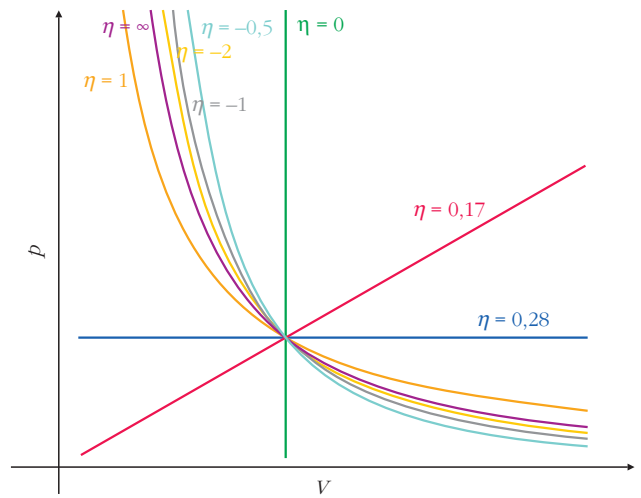
2. ábra



3. ábra



4. ábra



5. ábra

$$c = \frac{(f+1)R}{2M}$$

A p - V diagramon ábrázolva ezt az egyenes arányosságot az izochor és az izobár folyamattal együtt, tanulságos, hogy grafikusán miként helyezkednek el rendre az $x = 0; 1; 2$ esetek (1. ábra).

Ugyancsak érdekes lehet a pV^2 állandó folyamat (vagy más megközelítésben: $V\sqrt{p}$ állandó⁴), vagy a p/V^2 (azaz pV^{-2}) állandó, vagy például a $pV^{1,2}$ állandó⁵. A 2. táblázatba foglaltuk ezen nyolc (többé-kevésbé) nevezetes folyamat tárgyalt jellemzőit.

E nyolc folyamat a p - V diagramon (2. ábra) a következő öt nevezetes (izoterm, adiabatikus [kétatomos gázzal], izochor, egyenes arányosság, izobár) és a 2. táblázatban vizsgált három másik kitevő esete. Érde-

⁴Lásd például Siposs A. idézett könyve 588. feladatát.

⁵A már említett Holics-Flórik: könyv csak az 1 és κ közötti kitevőjű folyamatokat tárgyalja politropikusként, mint az adiabatikushoz képest nem tökéletes hőszigetelés esetén megvalósulókat, és ezért a gyakorlatban fontosakat. Olyan szempontból is érdekesek az ilyen folyamatok, hogy – mint az 1. táblázat alapján könnyen látható – ekkor (és csak ekkor) a fajhő negatív, vagyis a gáz hőt ad le, miközben melegszik (vagy fordítva).

mes „tartományként” áttekinteni, hol miként változik a politropikus kitevő: 0-tól 1-ig, 1-től ∞ -ig, és (mintha „átfordulna” a számegyenes „túlsó végére”) $-\infty$ -tól 0-ig. A 2. táblázat segítségével ugyancsak megvizsgálható, eközben hogyan változik a többi jellemző: α, η, c, x .

Ezek közül az 1. ábrában már láttuk az $x = 0; 1; 2$ esetet. Érdekes most további nevezetes értékeket feltüntetve megvizsgálni, szemléletessé tenni, ez a jellemző melyik tartományban hogyan változik (3. ábra). Az öt nevezetes (az előző ábrával azonos színkódú) folyamat mellett az $x = -1; 0,5; 1,5$ eseteket tüntettük fel. (Ezzel lényegében a fajhőket is megvizsgáltuk.)

Szintén érdekes konkrétan feliratozva megvizsgálni α szerint a nevezetes folyamatokat, és még három másik esetet ($-1; 0,5; 2$) (4. ábra).

Befejezőként nézzük meg ugyanígy az η hatásfok értékét, és annak változását az öt nevezetes folyamatban, és másik három további esetben ($-2; -1; -0,5$) (5. ábra).

A p - V diagramon egyenes vonallal (lineáris függvénnyel) jellemezhető állapotváltozások vizsgálatával egy későbbi cikkben foglalkozunk.

A MAGNETOOPTIKAI FARADAY-EFFEKTUS

Tichy Géza emlékére, aki évekig tanította egyik kedvenc tárgyát, az anizotrop fizikát

Cserti József

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

Michael Faraday először 1845-ben figyelte meg kísérleteiben, hogy a fény polarizációs síkja a mágneses térbe helyezett anyagon áthaladva elfordul. A következő évben kétrészes cikkben publikálta az eredményeit [1]. Ezeket a kísérleti tapasztalatokat tekintjük az optika és az elektromágnesség közti kapcsolat első közvetlen kísérleti bizonyítékának, és a jelenséget *Faraday-effektusnak* nevezik, gyakran magnetooptikai jelzővel kiegészítve. A polarizációs sík elfordulásának ϑ szöge arányos a külső B mágneses indukció nagyságával és azzal a d távolsággal, amit a fény az anyagban megtesz (1. ábra):

$$\vartheta = VBd, \quad (1)$$

ahol a V arányossági tényezőt *Verdet-állandónak* nevezik. Ötven évvel később *Becquerel*¹ a kvantummechanika kidolgozása előtt, az akkoriban felfedezett elektron klasszikus mozgásának leírásával mikroszkopikus szinten értelmezte a Faraday-effektust [2].

A jelenség fenomenologikus leírása arra épül, hogy bizonyos, úgynevezett *girotrop* anyagok törésmutatója függ a mágneses tértől. Ha állandó mágneses térbe helyezzük a girotrop anyagot, akkor a jobbra, illetve balra cirkulárisan polarizált elektromágneses hullámra különböző lesz az anyag törésmutatója. Az eltérés arányos a mágneses tér nagyságával. Ugyanakkor az arányossági tényezőt csak mikroszkopikus szinten lehet meghatározni. Ezért a jelenséget végső soron csak kvantummechanikai leírással lehet megérteni. Az olvasónak több magyar és angol nyelvű könyvet ajánlhatunk a témával kapcsolatban: [3–8].

A polarizációs sík elfordulását máshol is megfigyelhetjük. Nevezetesen optikailag aktív, királis anyagok-

ban, mégpedig mágneses tér alkalmazása nélkül, de annak mikroszkopikus háttere egészen más. Ott valóban az anyag valamilyen térbeli szimmetriájának hiánya van a háttérben. Az alkotó molekulák jobbkezesek vagy balkezesek, és ezért más irányban forgatják el a polarizáció síkját. Ezt jelenséget *természetes optikai aktivitásnak* nevezik [3–8]. A Faraday-forgatást viszont nem a szerkezet, hanem a mágneses tér jelenléte okozza.

Ezt a munkát egyetemi oktatási anyagnak szánjuk, ezért nem kívánunk részletes áttekintést adni a témáról. Elsődleges célunk, hogy vázoljuk a fenomenologikus leírás alapját, illetve a mikroszkopikus elméletet a klasszikus és a kvantummechanika keretén belül.

Először az anyag dielektromos együtthatójának tulajdonságait vizsgáljuk, majd kiszámoljuk a mágneses térbe helyezett anyag törésmutatóját. Ennek ismeretében fenomenologikus szinten értelmezzük a Faraday-effektust. A következő részben a *Lorentz-modell* alapján klasszikusan, illetve a *Zeeman-effektusból* kiindulva egy egyszerű kvantummechanikai magyarázatot adunk a Faraday-effektusra.

A Maxwell-elmélet anyagi egyenletei

Közegben az elektromágneses hullámok egyenletét a jól ismert Maxwell-egyenletekből [3, 9, 10]:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2b)$$

a szabad töltések és áramok hiányában (azaz a $\rho = 0$ és $\mathbf{j} = 0$ esetben) érvényes alakjából vezethetjük le, az anyagi egyenletek felhasználásával. Az anyagi egyenletek a \mathbf{D} elektromos eltolásvektor és az \mathbf{E} elektromos térerősség között, illetve a \mathbf{B} indukcióvektor és a \mathbf{H} mágneses térerősség között teremtenek kapcsolatot. Később girotrop anyagra fel is írjuk a hullámegyenletből adódó sajátérték-egyenletet az \mathbf{E} elektromos térerősségre (lásd a (13) egyenletet).

A továbbiakban mindig hullámterjedési jelenségekre gondolunk, a síkhullámmegoldást komplex alakba írjuk, a komplex amplitúdó tartalmazza a hullám fázisát. Előfordul, hogy a bejövő hullám és a közegben általa létrehozott polarizációs hullám nincs fázisban, amit úgy tudunk leírni, hogy a dielektromos együtthatót komplexnek tekintjük, és ezért a valós és a képzetes részét is meg kell vizsgálni.

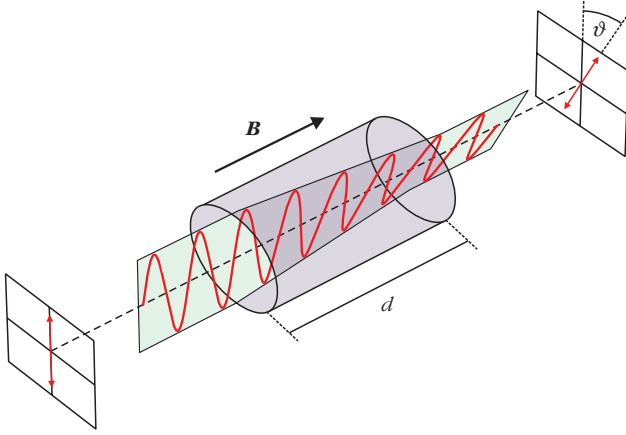
Kiegészítő tananyag az ELTE II. éves BSc fizikus hallgatók számára.

Köszönetemet szeretném kifejezni *Bordács Sándornak*, *Dávid Gyulának*, *Simon Ferencnek* és *Sólyom Jenőnek* a kézirat olvasása során javasolt hasznos tanácsaikért. Külön köszönet illeti *Csösz Gábort* az ábrák gondos elkészítéséért.

¹Henri Becquerel 1903-ban *Pierre Curie*-vel és *Marie Curie*-vel megosztva kapta a fizikai Nobel-díjat a radioaktivitás felfedezéséért.



Cserti József 1982-ben végzett az ELTE fizikus szakán, majd az ELTE korábbi Szilárdtestfizika Tanszékén kezdte oktatói munkáját. 2004-ben habilitált, 2010 óta az MTA doktora, 2013-tól az ELTE Komplex Rendszerek Fizikája tanszéken professzor. Kutatási területe a nanofizikai rendszerek, normál-szupravezető rendszerek, spintronika, grafén és a topologikus szigetelők. 2005 óta szervezi az ELTE-n az Atomoktól a csillagokig előadás-sorozatot középiskolásoknak.



1. ábra. A Faraday-effektus: a fény (elektromágneses hullám) polarizációsíkja ϑ szöggel elfordul.

Dielektrikumokra feltehetjük, hogy a $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ anyagi egyenletben a μ mágneses permeabilitás továbbra is skalár mennyiség, és a vákuumbeli értékkel (μ_0) egyezik meg. Az optikai jelenségek magyarázatának kiindulópontja, hogy az anyagok \mathbf{P} polarizációs vektorát az elektromos és mágneses terekkel, és ezek hely szerinti deriváltjaival hatványsor alakban lehet felírni (lásd például a [4] könyv 331. oldalát):

$$\frac{P_i}{\varepsilon_0} = \chi_{ij}^{(1,a)} E_j + \chi_{ijk}^{(1,b)} \partial_j E_k + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \eta_{ijk} E_j H_k + \dots, \quad (3)$$

ahol az egy tagban kétszer előforduló indexekre automatikusan összegzünk. A képletben előforduló különböző szuszceptibilitási tenzorok komponenseit kísérletileg és/vagy elméletileg lehet meghatározni, de a komponensek között a kristály szimmetriái extra összefüggéseket írhatnak elő (a szimmetriák és az együtthatótenzorok kapcsolatát először Pierre Curie tanulmányozta). A (3) egyenletben az egyes tagok az optika különböző jelenségeit írják le. A legismertebb jelenség a kristályok kettőtörése, amit az első tag ír le. Legtöbb esetben a \mathbf{P} polarizációs vektor lineárisan függ az elektromos tértől. Az optikai közegek egy igen fontos osztályát alkotják azok a kristályos anyagok, amelyek leírásában az \mathbf{E} -ben magasabb rendű tagok is szerepet játszanak (a (3) egyenletben a harmadik és negyedik tag). Ezekkel a jelenségekkel itt most nem foglalkozunk, ezeket a nemlineáris optika keretében tárgyalja az irodalom: [3–8].

A dielektromos függvény szimmetriái

A Faraday-effektus fenomenologikus elméletének megértéséhez fontos áttekinteni a dielektromos tenzor szimmetriáit. A (3) egyenlettel összhangban az eltolásvektor és az elektromos térerősség közti kapcsolat:

$$D_i = \varepsilon_0 E_i + P_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) E_j, \quad (4)$$

ahol az $\varepsilon_{ij}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ mennyiséget dimenziótlan relatív permittivitásnak, vagy a frekvenciától való függése miatt dielektromos függvénynek nevezik (továbbiakban mi ez utóbbit fogjuk használni). Ez a mennyiség anizotrop közegben, például kristályban egy komplex komponensekből álló 3×3 -as tenzor. Ha az anyagban nincs disszipáció, akkor a dielektromos függvény *hermitikus mátrix*:

$$\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj}^*, \quad (5)$$

ahol $*$ a komplex konjugálást jelenti. E szimmetria igazolását a Landau VIII. kötet [3] 80. és 96. fejezete alapján a *Függelékben* ismertetjük. Termodinamikai megfontolások alapján *Onsager* 1931-ben tanulmányozta a kinetikus együtthatók szimmetriáit [11], eredményeit azóta *Onsager-relációknak* nevezik az irodalomban (magyarul lásd még a Landau V. kötet [12] 125. fejezetét). Az Onsager-relációkat felhasználva a dielektromos függvény szimmetriatulajdonságairól a Landau VIII. kötetben olvashat az érdeklődő olvasó [3]. Mágneses tér nélkül vagy mágneses szerkezet hiányában a dielektromos függvény szimmetrikus tenzor:

$$\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj}. \quad (6)$$

E fontos szimmetriatulajdonság bizonyítása a termodinamikai egyensúlyban lévő állapotban, azaz sztatikus elektromos térben például a Landau VIII. kötet [3] 13. fejezetében, míg nemegyensúlyi rendszerekben érvényes Onsager-relációkat az elektromágneses tér esetére alkalmazva ugyanezen könyv 96. fejezetében található. Ha nincs disszipáció az anyagban, akkor az (5) és a (6) összefüggésekből következik, hogy

$$\varepsilon_{kj}^* = \varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj},$$

azaz az ε dielektromos függvény mátrixelemei valós számok.

Mágneses tér jelenlétében az Onsager-relációkban a rendszer időtükrözési szimmetriája sérül, ugyanis időtükrözés esetén a mágneses tér előjelet vált. Az Onsager-relációkat felhasználva megmutatható, hogy a (6) egyenletben a mátrix transzponálásakor a mágneses tér irányát az ellenkezőjére kell változtatni:

$$\varepsilon_{jk}(\mathbf{H}) = \varepsilon_{kj}(-\mathbf{H}). \quad (7)$$

Az állandó \mathbf{H} külső mágneses térhez képest az anyagban terjedő elektromágneses hullám mágneses térerőssége jóval kisebb, nem játszik szerepet az Onsager-relációban.

Végül itt említjük meg, hogy a σ elektromos vezetőképes-tenzorra is alkalmazhatók az Onsager-relációk, és például a *Hall-effektussal* kapcsolatban hasonló szimmetriarelációk vezethetők le (lásd a Landau VIII. kötet [3] 21–22. fejezeteit):

$$\sigma_{jk}(\mathbf{H}) = \sigma_{kj}(-\mathbf{H}). \quad (8)$$

A továbbiakban a *magnetooptikai Faraday-effektust* (amelyet a (3) egyenlet utolsó tagja ír le) ismertetjük részletesebben. Az érdeklődő olvasó a [3–8, 13] helyeken olvashat bővebben a témáról.

A Faraday-effektus fenomenologikus leírása

A magnetooptikai jelenségek tanulmányozásához a (7) összefüggésből indulunk ki (lásd még a Landau VIII. kötetben [3] a 101. fejezetet). Disszipáció nélkül az (5) egyenletből az következik, hogy a dielektromosfüggvény-tenzorának valós része szimmetrikus, míg képzetes része antiszimmetrikus, azaz $\text{Re}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{jk}\} = \text{Re}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{kj}\}$ és $\text{Im}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{jk}\} = -\text{Im}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{kj}\}$. Figyelembe véve a (7) egyenletet, kapjuk:

$$\text{Re}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{jk}(\mathbf{H})\} = \text{Re}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{kj}(\mathbf{H})\} = \text{Re}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{jk}(-\mathbf{H})\}, \quad (9a)$$

$$\text{Im}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{jk}(\mathbf{H})\} = -\text{Im}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{kj}(\mathbf{H})\} = -\text{Im}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{jk}(-\mathbf{H})\}. \quad (9b)$$

A (9a), illetve a (9b) egyenletben az első egyenlőség az (5), míg a második egyenlőség a (7) egyenletből következik. A fenti egyenlőségekből világos, hogy a dielektromos függvény valós része a \mathbf{H} mágneses tér páros függvénye, míg képzetes része a \mathbf{H} -nak páratlan függvénye.

Ismeretes, hogy három dimenzióban egy antiszimmetrikus tenzor mindig felírható egy megfelelő axiálvektor segítségével (Hodge-duális):

$$A_{ij} = \varepsilon_{ikj} a_k,$$

ahol ε_{ikj} a Levi–Civita-szimbólum. Ennek megfelelően az \mathbf{A} mátrix hatása egy tetszőleges \mathbf{x} vektorra:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{a} \times \mathbf{x}.$$

A fentiek szerint az $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ dielektromos függvény és ennek megfelelően a \mathbf{D} elektromos eltolásvektor a legáltalánosabb alakban így írható:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r = \boldsymbol{\varepsilon}_r^{(0)} + i\mathbf{G}, \quad (10a)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}_r \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\boldsymbol{\varepsilon}_r^{(0)} \mathbf{E} + i\mathbf{g} \times \mathbf{E}), \quad (10b)$$

ahol „i” a komplex egységgyök, \mathbf{G} anyagtól függő antiszimmetrikus tenzor és \mathbf{g} a hozzá tartozó axiálvektor, míg $\boldsymbol{\varepsilon}_r^{(0)}$ szimmetrikus tenzor a közeg dielektromos függvénye mágneses tér nélkül (a dielektromos függvény szimmetrikus részének \mathbf{H} -ban másodrendű függését kis mágneses tér esetén elhanyagoljuk). A \mathbf{g} vektort *girációs vektornak*, és az ilyen dielektromos függvényekkel rendelkező anyagokat *girotrop* közegeknek nevezik. A (9b) egyenlet szerint a \mathbf{g} vektor \mathbf{H} -ban legalacsonyabb rendben arányos a külső mágneses térrel:

$$\mathbf{g} = \gamma \mathbf{H}, \quad (11)$$

ahol γ a mágneses tértől független, de anyagtól függő valós szám (izotrop anyagra skalár mennyiség, általá-

nosan azonban lehet tenzor is). E mennyiség meghatározását a mikroszkopikus elmélet alapján a következő fejezetben ismertetjük. Itt jegyezzük meg, hogy a polarizációs vektor (3) képletében az utolsó tagban szereplő η_{ijk} tenzor is kifejezhető a γ mennyiséggel az

$$\eta_{ijk} = i\gamma \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix} \varepsilon_{ijk}$$

összefüggésen keresztül.

Megmutatható, hogy anizotrop girotrop anyagban az optikai tengelytől eltérő irányban az elektromágneses hullám elliptikusan polarizált, de erősen elfajult, azaz közel lineárisan polarizáltnak tekinthető (az elliptikusan polarizált hullám terjedésének részletes leírása megtalálható a [3] könyvben). Ez azzal magyarázható, hogy a polarizációs ellipszis tengelyeinek aránya $1/|\mathbf{g}|$ -vel arányos, és a girotrop anyagokban a \mathbf{g} girációs vektor nagysága kicsi (sokkal kisebb, mint a mágneses tér nélküli dielektromos függvény).

Más lesz a helyzet, ha a dielektromos függvény sajátértékei közül kettőnek vagy mind a háromnak az értéke azonos (egytengelyű kristály, illetve izotrop dielektrikum). Ilyenkor a közeg szimmetriájának megváltozása miatt alapvetően más magnetooptikai viselkedés tapasztalható. A Faraday-effektus akkor figyelhető meg, ha a fény terjedésének iránya párhuzamos a \mathbf{g} girációs vektorral, azaz a külső mágneses térrel, egytengelyű kristály esetén ezen felül ez az irány egybeesik az optikai tengellyel (ebben az irányban az ordinárius és extraordinárius hullámnak megfelelő törésmutató megegyezik). A továbbiakban az egytengelyű kristály általánosabb esetével foglalkozunk (az izotrop eset innen már könnyen adódik).

Ha az egytengelyű kristályban a z tengelyt az optikai tengely irányában választjuk, akkor a dielektromos tenzor alakja:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r^{(0)} = \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

ahol n_o a törésmutató értéke az optikai tengely irányában, n_e pedig az arra merőleges irányban. Izotrop anyagra $n_e = n_o$. Vizsgáljuk meg az egytengelyű girotrop kristályban a fény terjedését, figyelembe véve a közeg \mathbf{g} girációs vektorát! A \mathbf{k} irányban terjedő $\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ síkhullámra a (2) Maxwell-egyenleteket felhasználva a következő sajátérték-egyenletet kapjuk az ω sajátfrekvenciára és az \mathbf{E}_0 sajátvektorra:

$$(\mathbf{k} \circ \mathbf{k} - \mathbf{I}k^2) \mathbf{E}_0 = -\frac{\omega^2}{c_0^2} \boldsymbol{\varepsilon}_r \mathbf{E}_0, \quad (13)$$

ahol $c_0 = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2}$ a fénysebesség vákuumban, \mathbf{I} a 3×3 -as egységmátrix, és $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ a közeg dielektromosfüggvény-tenzora. Itt $\mathbf{k} \circ \mathbf{k}$ a diadikus szorzatot jelöli (általában az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok diadikus szorzata egy mät-

rix, amelynek mátrixelemei: $(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$). Ez az egyenlet egy homogén egyenletrendszer ad az \mathbf{E}_0 vektor három komponensére. Egy homogén egyenlet nem triviális megoldásának az a feltétele, hogy az egyenletrendszer együtthatóiból képzett mátrix determinánsa zérus legyen. Ez a feltétel adja az $\omega(\mathbf{k})$ disperziós relációt. Végül a közeg

$$n = \frac{c_0}{c}$$

törésmutatóját az

$$\omega = c |\mathbf{k}| = \frac{c_0}{n} |\mathbf{k}|$$

összefüggésből kapjuk, ahol c a fény terjedési sebessége a közegben. Felhasználva a (10a) és (11) egyenleteket, a (13) sajátérték-egyenlet így írható:

$$(\hat{\mathbf{k}} \circ \hat{\mathbf{k}} - \mathbf{I} \hat{\mathbf{k}}^2) \mathbf{E}_0 = -\frac{1}{n^2} (\boldsymbol{\varepsilon}_r^{(0)} \mathbf{E}_0 + i \gamma \mathbf{H} \times \mathbf{E}_0), \quad (14)$$

ahol $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k} / |\mathbf{k}|$ a \mathbf{k} irányú egységvektor. A Faraday-effektus fellépése esetén (amikor a fentiek szerint a magnetooptikai jelenség számottevő) a \mathbf{k} vektor iránya megegyezik a \mathbf{H} külső mágneses térrel ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}$), azaz a \mathbf{g} girációs vektor irányával ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{g}$). Válasszuk a koordináta-rendszer z tengelyét a \mathbf{k} vektor irányába! Ebben az esetben használhatjuk az $\boldsymbol{\varepsilon}_r^{(0)}$ dielektroszfingvénny-tenzor (12) alakját. Írjuk fel a (13) sajátérték-egyenletet komponensenként:

$$\begin{pmatrix} n_o^2 & -i \gamma H \\ i \gamma H & n_o^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = n^2 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \quad (15)$$

ahol (E_x, E_y) az \mathbf{E}_0 vektor \mathbf{k} -ra merőleges, x és y irányú komponensei. Könnyen belátható, hogy ezen egyenlet sajátértékei (itt n^2) és a megfelelő sajátvektorok:

$$n_{\pm} = \sqrt{n_o^2 \pm \gamma H} \quad \text{és} \quad \mathbf{E}_0 \sim (1, \pm i, 0)^T, \quad (16)$$

ahol T a transzponálást jelenti. A (15) sajátérték-egyenletnek ez a két megoldása a cirkulárisan jobbra, illetve balra polarizált hullámnak felel meg. A levezetésből világos, hogy a törésmutató mágneses térrel való függésében a \mathbf{H} térnek csak a \mathbf{k} irányú vetülete számít, ezért a fény terjedésének irányára merőleges mágneses térben nem lép fel Faraday-effektus.

Fontos megjegyezni, hogy a kapott polarizáció anyagtól függetlenül mindig cirkulárisan polarizált, nem elliptikusan polarizált. Látszik, hogy a jobbra és balra cirkulárisan polarizált hullámra a törésmutató különböző, és így más a két hullám terjedési sebessége is. Ennek az a következménye, hogy egy lineárisan polarizált fénysugár polarizációs síkja a terjedés során elfordul. Ahhoz, hogy ezt belássuk, tekintsünk egy lineárisan polarizált hullámot, amit mindig fel-

bonthatunk egy jobbra és balra cirkulárisan polarizált hullám szuperpozíciójára:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right]. \quad (17)$$

A kétféle polarizációjú síkhullám hullámszáma különböző lesz: $k_+ = n_+ k_0$ és $k_- = n_- k_0$, ahol $k_0 = \omega / c_0 \equiv 2\pi / \lambda_0$, a vákuumban terjedő ω frekvenciájú és λ_0 hullámhosszú elektromágneses hullám hullámszáma, c_0 pedig a fény terjedési sebessége vákuumban. Ha a hullám egy d vastagságú rétegen halad át, akkor a kétféle polarizációjú hullám fázisa a d távolság megtétele után különböző lesz: $\varphi_+ = k_+ d = n_+ k_0 d$ és $\varphi_- = k_- d = n_- k_0 d$, és a lineárisan polarizált hullám így módosul:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\varphi_-} + \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\varphi_+} \right] = e^{i \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad (18a)$$

ahol

$$\vartheta = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2} = \frac{n_+ - n_-}{2} k_0 d = (n_+ - n_-) \frac{\pi d}{\lambda_0}. \quad (18b)$$

Egy lényegtelen közös fázistól eltekintve a kezdetben lineárisan polarizált hullám ismét lineárisan polarizált lesz, csak a polarizáció iránya ϑ szöggel elfordul. Ezt nevezik Faraday-effektusnak. A (16) egyenletben kapott két polarizációnak megfelelő törésmutatókat felhasználva a polarizáció irányának elfordulása:

$$\vartheta = \left(\sqrt{n_o^2 + \gamma H} - \sqrt{n_o^2 - \gamma H} \right) \frac{\pi d}{\lambda_0} \approx \frac{\gamma H \pi d}{n_o \lambda_0}, \quad (19)$$

ahol közelítésnél kihasználtuk, hogy a tipikus anyagokban $\gamma H \ll n_o^2$. Innen leolvashatjuk az (1) egyenlet alapján definiált V Verdet-állandót:

$$V = \frac{\pi \gamma}{\mu_0 \lambda_0 n_o}. \quad (20)$$

A fenomenologikus elmélet alapján sikerült értelmezni a Faraday-effektust. Azonban a Verdet-állandóban szereplő, anyagtól függő γ mennyiséget csak a jelenség fizikai magyarázatát is adó mikroszkopikus modellel tudjuk meghatározni, amit a következő fejezetben fogunk ismertetni.

Néhány anyagra a Verdet-állandó (sárga fényre, azaz 589 nm hullámhosszra): víz: 3,8 rad/(Tm), kornaüveg: 4,7 rad/(Tm), NaCl: 10,4 rad/(Tm), kvarc: 4,8 rad/(Tm). Hogy képet kapjunk arról, tipikusan mekkora szöggel fordulhat el a polarizációs sík, becsüljük meg e szöget például vízre! Ha az anyagban megtett távolság $d = 1$ cm és a mágneses indukció $B = 1$ T = 10^4 gauss (megjegyezzük, hogy a Föld mágneses indukciója nagyságrendileg 0,5 Gauss), akkor a szögelfordulásra $\vartheta = 2,18^\circ$ -ot kapunk.

A levezetésből világos, hogy a ϑ polarizációs szög, és így V előjele is függ a \mathbf{H} mágneses tér irányától. A tér irá-

nyát ellenkezőre változtatva a két helicitásállapot szerepe felcserélődik. Itt jegyezzük meg, hogy külső (nem a fény terjedéséhez rögzített) koordináta-rendszerből nézve, a jobbra (vagy balra) forgó terekhez, Faraday-effektus esetén – a terjedési iránytól függetlenül – azonos törésmutató tartozik. Ezzel szemben a helicitás (jobb és balkezes polarizáció) megfordul a $\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$ cseréjére. Itt most nem térünk ki arra kérdésre, de érdekes lehet megnézni, hogy miként transzformálódnak az adott irányba terjedő, adott cirkuláris polarizációval rendelkező sugárzás terei időtükrözés és inverzió hatására. Erről *Bordács Sándor* doktori dolgozatában olvashat bővebben az olvasó [14].

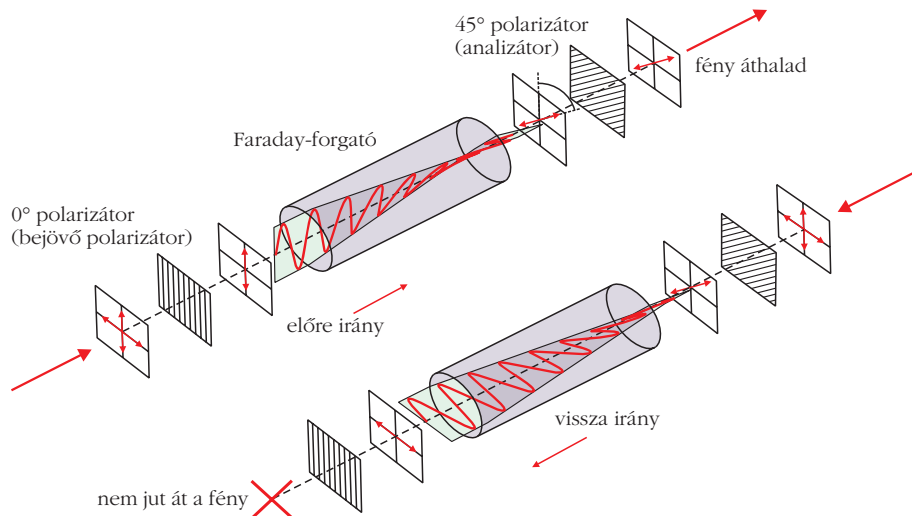
A tér irányát ellenkezőjére változtatva a jobbra cirkuláris fény balra cirkuláris lesz. Ezért, ha egy anyagban áthaladó fénysugár polarizációs síkja ϑ szöggel elfordul, és ezután egy tükörrel visszafordítjuk a fénysugarat, akkor visszafelé ugyanazt az utat megtéve a fény polarizációs síkja 2ϑ szöggel fordul el. Itt jegyezzük meg, hogy a természetes optikai aktivitásnál a forgás iránya ellentétes lesz, ha a fény terjedésének iránya megfordul, a polarizációs síkja a tükrözés után visszatér az eredeti helyzetbe [3–8, 13].

A Faraday-effektus legfontosabb alkalmazása a *Faraday-izolátor*, ami a fenti polarizációforgató tulajdonságon alapul és célja, hogy a fényútból ne verődjön vissza fény a forrásba, amely annak instabilitásához vezethetne. A lézernyaláb egy polarizátoron áthaladva belép a Faraday-izolátorba, amelyben a mágneses tér úgy van beállítva, hogy a fény polarizációs síkja 45° -kal elfordul (2. ábra, felső rész). Ezután a lézerezonátor végén lévő tükörről visszaverődik a nyaláb, és visszafelé ismét áthaladva a Faraday-izolátoron, a polarizációs síkja újabb 45° -kal fordul el és ekkor már a polarizátor nem engedi át a nyalábot (2. ábra, alsó rész).

A továbbiakban bemutatjuk a Faraday-effektus mikroszkopikus értelmezését. Természetesen ebben a munkában nem tudjuk áttekinteni az összes kísérleti és elméleti eredményt. Itt csak az a célunk, hogy képet adjunk a jelenségről mikroszkopikus szinten is, ami egyben kiindulásként is szolgálhat az olvasó számára egy elmélyültebb vizsgálathoz.

A Faraday-effektus mikroszkopikus leírása

A Faraday-effektust mikroszkopikus szinten az anyagban lévő elektron dinamikája alapján lehet megérteni. Az anyagban terjedő fény leírásához a maghoz kötött elektronok elektromágneses térben való mozgását kell vizsgálni. Ezt lehet klasszikusan és kvantummechanika keretében is tanulmányozni.



2. ábra. A Faraday-izolátor.

A legegyszerűbb klasszikus leírás kiinduló pontja az úgynevezett *Lorentz-modell*. E modelltől és a jelenség kvantummechanikus tárgyalásáról az érdeklődő olvasó például *Sólyom Jenő* könyve [15] 25. fejezetében olvashat. Azonban e könyvben már nem szerepel a Faraday-effektus, ezért az alábbiakban vázoljuk a Lorentz-modell kiterjesztését erre az esetre. Ezt követően egy egyszerű kvantummechanikai modellt mutatunk be. A *Zeeman-effektus* miatt az atomok elfajult energiaszintjei mágneses térben felhasadnak, és az elektromágneses tér hatására az atomok különböző frekvenciával gerjesztődnek. Ennek következtében az anyag törésmutatója is más lesz az egyes gerjesztésekre, ami végső soron a Faraday-effektushoz vezet, ahogyan ezt korábban láttuk.

Klasszikus elmélet

Ha az anyagot külső sztatikus mágneses térbe helyezzük, akkor az elektronra a Lorentz-erő is hat. A továbbiakban ezt az erőt figyelembe véve kiterjesztjük a Lorentz-modellt, és így a Faraday-effektust klasszikusan egy mikroszkopikus modell keretében értelmezzük.

A Lorentz-modellben feltételezzük, hogy a kötött elektron a mag körül D rugóállandóval jellemzett harmonikus rezgést végez. A \mathbf{B} sztatikus külső mágneses térben az elektronra ható Lorentz-erőt is számításba véve az elektron \mathbf{r} elmozdulását leíró mozgásegyenlet:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -D\mathbf{r} - e\mathbf{E} - e \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}, \quad (21)$$

ahol \mathbf{E} az anyagban terjedő fény elektromos tere, m az elektron tömege és e a töltésének abszolút értéke ($e > 0$). Megjegyezzük, hogy az anyagban terjedő fényhullám mágneses terét elhanyagoljuk a nála sokkal erősebb külső \mathbf{B} mágneses tér mellett, ezért a következőkben \mathbf{B} mindig a konstans külső mágneses teret jelenti. Az egyszerűség kedvéért elhanyagoljuk az elektronok szóródási folyamatait is (ezeket a

Drude-modellben a relaxációs idővel szokás figyelembe venni [15]). Az anyag törésmutatóját az elektronok elmozdulása miatt kialakuló dipólmomentumok átlagából a $\mathbf{P} = -\mathbf{q}_e e \mathbf{r}$ polarizációs vektor ismeretében számíthatjuk ki, ahol \mathbf{q}_e a kötött elektronok sűrűsége az anyagban. A polarizációs vektort a χ elektromos szuszceptibilitástenzorral kifejezve $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$, az eltolásvektor $\mathbf{D} = \mathbf{P} + \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}_r \mathbf{E}$, és így a dielektromos függvény tenzora $\boldsymbol{\varepsilon}_r = I + \chi$. Végül a törésmutatókat a (13) egyenlet sajátértékeiből kaphatjuk meg.

Az ω körfrekvenciájú elektromágneses tér időfüggése $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t}$, ezért a fenti egyenletben az elektron \mathbf{r} elmozdulását az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\omega) e^{-i\omega t}$ alakban kereshetjük. Innen következik, hogy a $\mathbf{P} = -\mathbf{q}_e e \mathbf{r}$ polarizációs vektor időfüggése: $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\omega) e^{-i\omega t}$, és $\mathbf{P}(\omega) = -\mathbf{q}_e e \mathbf{r}(\omega)$. Ennek megfelelően a (21) egyenletben az $\mathbf{r}(\omega)$ vektort kifejezhetjük a $\mathbf{P}(\omega)$ vektorral:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) \mathbf{P}(\omega) - i \omega \omega_c \hat{\mathbf{B}} \times \mathbf{P}(\omega) &= \\ &= \omega_p^2 \varepsilon_0 \mathbf{E}(\omega), \end{aligned} \quad (22)$$

ahol

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

az elektron harmonikus rezgésének körfrekvenciája,

$$\omega_c = \frac{eB}{m}$$

a ciklotronfrekvencia,

$$\omega_p = \sqrt{\frac{\mathbf{q}_e e^2}{\varepsilon_0 m}}$$

a plazmafrekvencia [15] és

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B}}{B}$$

a mágneses tér irányában mutató egységvektor.

A fenti egyenlet bal oldala ismét kifejezhető egy diagonális mátrix és egy antiszimmetrikus mátrix összegével, és mátrix inverzéből adott \mathbf{E} elektromos tér mellett kiszámíthatjuk a \mathbf{P} polarizációs vektort. Ugyan a számolás viszonylag egyszerűen elvégezhető, most mégis egy másik módszert alkalmazunk. Válasszuk a z tengelyt a mágneses tér irányában, ami egyben a fény terjedési iránya is az anyagban! Ekkor az elektromos térnek csak x és y komponense lesz. Írjuk fel a (22) egyenletet komponensenként:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) P_x + i \omega \omega_c P_y = \omega_p^2 \varepsilon_0 E_x, \quad (23a)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) P_y - i \omega \omega_c P_x = \omega_p^2 \varepsilon_0 E_y. \quad (23b)$$

Mivel minden lineárisan polarizált hullám felbontható egy jobbra és egy balra polarizált hullám összegére, tekintünk egy jobbra, illetve balra polarizált

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)^T = E_0 (1, \pm i, 0)^T$$

elektromos teret! Ennek megfelelően keressük a polarizációs vektort is hasonlóan

$$\mathbf{P} = (P_x, P_y, 0)^T = P_0 (1, \pm i, 0)^T$$

alakban! Könnyen beláthatjuk, hogy ebben az esetben a két egyenlet azonos lesz, és P_0 -ra kapjuk:

$$P_0 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 \mp \omega \omega_c} \varepsilon_0 E_0 \equiv \chi_{\pm} \varepsilon_0 E_0, \quad (24)$$

ahol bevezettük a χ_{\pm} szuszceptibilitást. Láthatjuk, hogy a kétféle cirkuláris polarizációra, mint bázisállapotokra áttérve az elektromos szuszceptibilitás-tenzor diagonális mátrix lesz és a két diagonális komponense χ_{\pm} . Innen következik, hogy a dielektromos függvény is diagonális mátrix lesz és a diagonális elemei:

$$(\varepsilon_r)_{\pm} = 1 + \chi_{\pm}.$$

Végül a (13) egyenlet sajátértékeiből a kétféle törésmutatóra kapjuk:

$$\begin{aligned} n_{\pm} &= \sqrt{(\varepsilon_r)_{\pm}} = \sqrt{1 + \chi_{\pm}} = \\ &= \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 \mp \omega \omega_c}} \approx \\ &\approx \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \pm \frac{\omega \omega_c \omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}, \end{aligned} \quad (25)$$

ahol az utolsó lépésnél feltettük, hogy

$$\frac{\omega \omega_c}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \ll 1,$$

azaz elhanyagoltuk az ω_0 rezonanciafrekvenciától távoli ω -ra a B^2 -tel arányos tagokat. A fenti eredményt összevetve a (14) egyenlet jobb oldalával, ahol $\boldsymbol{\varepsilon}_r^{(0)}$ a (12) egyenletben adott, leolvashatjuk a mágneses tér nélküli törésmutatót és γ értékét:

$$\begin{aligned} n_o(\omega) &= \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}, \\ \gamma H &= \pm \frac{\omega \omega_c \omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} = \pm \omega_c n_o \frac{dn_o}{d\omega}. \end{aligned} \quad (26)$$

Az utolsó átalakításnál kihasználtuk, hogy a fenti egyenletben a γH -ra kapott képlet épp a mágneses tér nélküli törésmutató négyzetének deriváltjaként írható fel. Végül a (20) egyenletbe beírva γ fenti érté-

ket, behelyettesítve a plazmafrekvencia és a ciklotronfrekvencia korábban megadott képletét és a

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c_0}{\omega}$$

hullámhosszt a Verdet-állandóra a következő egyszerű összefüggést kapjuk

$$\begin{aligned} V &= \pm \frac{e}{2m c_0} \omega \frac{dn_o}{d\omega} = \\ &= \pm 293,34 \frac{\text{rad}}{\text{T m}} \omega \frac{dn_o}{d\omega}, \end{aligned} \quad (27)$$

ahol a \pm előjelek a jobbra és balra cirkulárisan polarizált fényre vonatkoznak.

Ezzel megkaptuk a Verdet-állandó alakját a klasszikus mikroszkopikus modell alapján. Ezt az összefüggést először Becquerel vezette le, és az irodalomban *Becquerel-egyenletnek* nevezik [2]. Becquerel a képletet az éppen akkor felfedezett elektron klasszikus mozgásegyenlete alapján vezette le. Egy ilyen egyszerű modell ellenére a számított értékek legtöbb anyagra meglepő módon jól egyeznek a mérési eredményekkel. Látható, hogy V az *univerzális* fizikai állandóktól eltekintve a fény frekvenciájával és az anyag törésmutatójának diszperziójával, azaz a $dn_o/d\omega$ mennyiséggel arányos. Világos, hogy V függ a fény hullámhosszától. Annak ellenére, hogy az $n_o(\omega)$ törésmutató frekvenciafüggése egyes anyagokra jelentősen eltérhet a (26) képletben felírt alaktól, a Verdet-állandó (27) képlete jól használható a mérésekben. Ennek okára még visszatérünk a jelenség kvantummechanikai leírása során a következő alfejezetben.

A kísérletekben a mágneses tér nem mindig homogén a mintában. Szerencsére a fenti számolás könnyen kiterjeszhető inhomogén mágneses térre is. Ebben az esetben a polarizációs sík elfordulásának szöge:

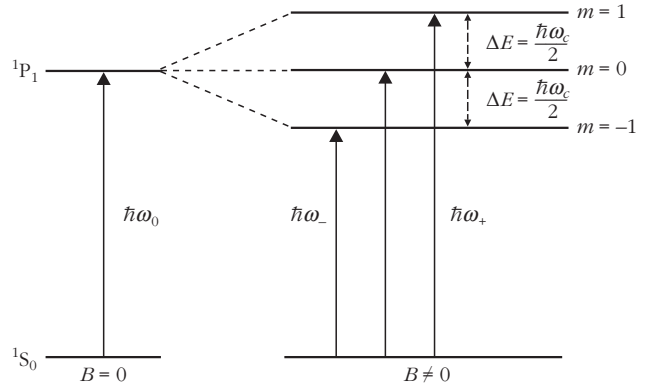
$$\vartheta = V \int \mathbf{B} \, ds, \quad (28)$$

ahol a vonalintegrált a fény terjedése mentén kell számolni.

Az itt tárgyalt modell fő előnye, hogy egy egyszerű képpel meg lehet érteni a jelenség mechanizmusát. Ugyanakkor nagy hiányossága, hogy az elmélet klasszikus. Ezért mindenképpen szükség van egy mélyebb, kvantummechanikai leírásra. A következő alfejezetben egy egyszerű modellel szeretnénk bemutatni a Faraday-effektus kvantummechanikai hátterét.

Kvantummechanikai tárgyalás

A jelenség kvantummechanika leírása meglehetősen összetett kérdés. Az elektromágneses tér és az atomok elektronjai közti kölcsönhatást, az elektronok atomok energiaszintjei közti átmeneteit kell vizsgálni. Az alapvető mikroszkopikus folyamat megértéséhez tekintünk a legegyszerűbb átmenetet, amelyben az



3. ábra. A Zeeman-effektus: az energiaszintek felhasadása mágneses tér hatására.

atom az 1S_0 alapállapotból az 1P_1 gerjesztett állapotba kerül! Elhanyagoljuk a spin és az atommag hatását. Az alapállapotban egy energiaszint van, míg a gerjesztett állapotban az $L = 1$ mellékvantumszám miatt három energiaszint elfajult, melyeket az $m = -1, 0, 1$ mágneses kvantumszámok jellemeznek. Mágneses térben ezek az energiaszintek a mágneses kvantumszámoknak megfelelően felhasadnak (lásd a 3. ábrát). Ezt a jelenséget, ahogy korábban említettük, Zeeman-effektusnak nevezik, amelyről bővebben például a [16, 17] könyvekben lehet olvasni. A három azonos energiájú szint eltolódása a Zeeman-effektus miatt:

$$\Delta E = m \mu_B B = 0, \pm \mu_B B,$$

ahol B a mágneses tér nagysága és

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2m}$$

a Bohr-magneton. Mivel a jobbra, illetve balra cirkulárisan polarizált foton impulzuszmomentuma $\pm \hbar$, a kiválasztási szabály [16, 17] miatt az elektromágneses tér által történő gerjesztéseknél csak két lehetséges átmenet léphet fel, az $m = \pm 1$ állapotoknak megfelelő átmenetek. Ezért a kétféle polarizációnak megfelelően a fény két különböző frekvencián gerjeszti az atomot:

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \omega_0 + \frac{\Delta E}{\hbar} = \omega_0 \pm \frac{\mu_B B}{\hbar} = \\ &= \omega_0 \pm \frac{e}{2m} B = \omega_0 \pm \frac{\omega_c}{2}, \end{aligned} \quad (29)$$

ahol $\hbar\omega_0$ az 1S_0 és az 1P_1 állapotok közti energiakülönbség mágneses tér nélkül, ω_c pedig a korábban bevezetett ciklotronfrekvencia. Így a kétféle polarizációra az anyag törésmutatója is más lesz: $n_{\pm} = n_o(\omega_{\pm})$. A (18b) egyenlet szerint a polarizációs sík elfordulásának szöge:

$$\begin{aligned} \vartheta &= (n_+ - n_-) \frac{\pi d}{\lambda_0} = \pm \frac{dn_o}{d\omega} \omega_c \frac{\pi d}{\lambda_0} = \\ &= \pm \frac{e}{2m c_0} \omega \frac{dn_o}{d\omega} B d, \end{aligned} \quad (30)$$

ahol az $n_+ - n_-$ különbséget elsőrendű sorfejtéssel közelítettük, feltételezve, hogy gyenge mágneses tér esetén $\omega_c \ll \omega_0$. Innen az (1) egyenlet alapján ebből az egyszerű kvantummechanikai megfontolásból a Verdet-állandóra ugyanazt az eredményt kapjuk, mint amit a (27) egyenletben a klasszikus számolásból vettünk le. Vegyük észre, hogy a levezetésben nem használtuk ki az $n_o(\omega)$ törésmutató frekvenciafüggésének pontos alakját, ellentétben az előző fejezetben bemutatott klasszikus tárgyalással. Ezzel az egyszerű képpel csak azt szerettük volna megmutatni, hogy a Faraday-effektus mikroszkopikus eredete mögött a Zeeman-effektus áll. Ugyanakkor, igazán meglepő, hogy ez a rendkívül egyszerű modell is visszaadja a klasszikusan számolt eredményt.

Konkrét anyagokra gyakran tapasztalható eltérés a fenti elméleti jóslattól, amelynek számos oka lehet. Itt csak röviden utalnánk arra, hogy egy pontosabb elmélet kidolgozásánál milyen effektusokkal kell számolni. Legtöbb anyagban nem egy energiaszint hasad fel, és így több átmenet is lehetséges. Gyakran figyelembe kell venni a spin-pálya kölcsönhatást, a kristályos anyagokban a szomszédos atomok kristályterét is.

A pontos kvantummechanikai tárgyalásban az úgynevezett *lineárisválasz-elméletből* [16] szokás kiindulni. Az állandó mágneses térbe helyezett anyagban az elektromágneses teret perturbációnak tekintve az általános elmélet alapján ki lehet számolni az anyag optikai vezetőképességét, ami azután kapcsolatba hozható a közeg törésmutatójával. Ilyenkor az állandó mágneses térben kialakuló Landau-szinteket is figyelembe kell venni. Ez a módszer jól használható fémekre és félvezető anyagokra. Napjaink kutatásában ezt az eljárást alkalmazzák többféle, egy vagy néhány atomi réteget tartalmazó kétdimenziós anyagra, mint például a grafénre, vagy az élénken kutatott topologikus szigetelőkre (lásd például [18]). A Faraday-effektus mérési eredményeit összehasonlítva az elméleti számolásokkal az anyag sávszerkezetét lehet tanulmányozni.

Összegzés

A cikk végén talán érdemes néhány szóban, képletek nélkül összefoglalni a vizsgált jelenség fizikáját. A Faraday-effektust, azaz a fény polarizációs síkjának mágneses térbe helyezett közegen való áthaladásakor fellépő elfordulását az okozza, hogy aszimmetria lép fel a jobbra és balra cirkulárisan polarizált síkhullámok között: a két cirkulárisan polarizált hullám különböző sebességgel terjed az anyagban. Ezt az aszimmetriát nem a közeg belső szerkezete okozza (mint például a kettőtörés jelenségét), hanem alkalmazott külső mágneses tér. Ezért a Faraday-effektus bármilyen átlátszó közegben – gázban, folyadékban, és szilárd, kristálytanilag izotrop vagy anizotrop anyagban is – felléphet. A Becquerel-törvény (30) képlete szerint az effektus felléptének feltétele az, hogy az anyagban kellően erős legyen az optikai disz-

perzió, azaz mágneses tér nélkül az anyag törésmutatójának frekvencia szerinti deriváltja kellően nagy, véges érték legyen. Az anyag girotrop volta csak ennek, a mágneses tér okozta aszimmetriának fenomenológiai megfogalmazását jelenti. Formálisan úgy jelenik meg, hogy a (10a) dielektromos tenzor mágneses tér jelenlétében a külső térrel arányos nemdiagonális elemeket is tartalmaz. Ebből a szempontból a Faraday-effektus rokon a Hall-jelenséggel: külső mágneses tér jelenlétében mindkét esetben megjelenik a válaszjelenségeket leíró tenzorban (a Hall-effektus esetén az elektromos vezetőképesség tenzorában) egy aszimmetrikus nemdiagonális tag, amely arányos az alkalmazott mágneses térrel (a Hall-effektusról lásd a Landau VIII. kötet [3] 21–22. fejezeteit). A Faraday-effektus élesen megkülönböztetendő az anyag molekuláinak, illetve kristályrácsának nem tükörszimmetrikus felépítéséből következő természetes optikai aktivitástól. A két jelenség a tükörrel visszafordított és a közegen ismételtlen áthaladó fény polarizációjának eltérő viselkedése alapján különíthető el (lásd a részletes leírást *A Faraday-effektus fenomenológikus leírása* fejezet végén).

A Faraday-effektus végső oka az atomok és molekulák elektromosan töltött összetevőinek (lényegében az elektronok) kölcsönhatása az elektromágneses hullámok elektromos terével, amely kölcsönhatást a külső mágneses tér befolyásolni tudja. E befolyásolás klasszikus, illetve kvantumos modelljét vizsgáltuk meg a *Klasszikus elmélet*, illetve a *Kvantummechanikai tárgyalás* alfejezetekben.

E munkában csak a Faraday-effektust tárgyaltuk részletesebben. Ez az effektus ma már a szilárdtestfizika alapvető eszközévé vált. A szerző eredeti elképzelése szerint a természetes optikai aktivitás is részletesen ismertetésre került volna, de időközben már a Faraday-effektus tárgyalása is kissé hosszúra nyúlt. Remélhetőleg egy másik cikkben sor kerül rá. Addig is az érdeklődő olvasónak ajánljuk a Landau VIII. kötet 12. fejezetét [3].

Ahogy korábban említettük, a polarizációs vektor (3) alakja számtalan izgalmas, a mai kutatás élvonalába tartozó optikai jelenség értelmezésének a kiindulópontja.

Végül hadd tegyek egy személyes megjegyzést. Nagyon sajnálom, hogy Tichy Géza már nem olvashatja ezt a tanulmányt, hiányozni fog nekem építő kritikája. Biztos vagyok abban, hogy sok hasznos megjegyzést tett volna e munkámhoz.

Függelék

A dielektromos függvény hermitikus mátrix

E részben megmutatjuk, hogy a dielektromos függvény általános esetben egy hermitikus mátrixszal adható meg. A bizonyítás izotrop közegre a [3] könyv 80. §-ában, míg anizotrop anyagra ugyanebben a könyvben, a 96. §-ban található. Itt röviden vázoljuk a bizonyítást anizotrop esetre.

A test egységnyi térfogatára eső energia megváltozása időegység alatt: $\text{div} \mathbf{S}$, ahol $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ a Poynting-vektor [9]. Forrásmentes térben ($\rho = 0$ és $\mathbf{j} = 0$) esetén a Maxwell-egyenletek segítségével írhatjuk:

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{S} &= \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H} = \\ &= -\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \\ &= -E_j \varepsilon_{jk} \frac{\partial E_k}{\partial t} - \mu \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (31)$$

Komplex mennyiségek (amelyek arányosak $e^{-i\omega t}$ -vel) szorzatának időbeli átlaga:

$$\langle AB \rangle = \frac{1}{4} (AB^* + A^*B) = \frac{1}{2} \text{Re}\{AB^*\}, \quad (32)$$

ahol $\langle \dots \rangle$ az időbeli átlagot jelöli² (lásd még például [3] könyvben a 6. lábjegyzetet a 308. oldalon). Ezt felhasználva kapjuk:

$$\begin{aligned} \langle \text{div} \mathbf{S} \rangle &= -\frac{1}{4} \left(E_j \varepsilon_{jk}^* \frac{\partial E_k}{\partial t} + E_j^* \varepsilon_{jk} \frac{\partial E_k}{\partial t} \right) - \\ &= -\frac{\mu}{4} \left(H_k \frac{\partial H_k}{\partial t} + H_k^* \frac{\partial H_k}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Itt kihasználtuk, hogy dielektrikumra a μ mágneses permeabilitás valós és skalár mennyiség (a levezetés könnyen kiterjeszthető anizotrop mágneses permeabilitás esetére). Felhasználva, hogy monokromatikus terekre az időfüggés: $\mathbf{E}, \mathbf{H} \sim e^{-i\omega t}$, illetve a második tagban felcserélve a j és k összegzőindexeket, a következőt kapjuk:

$$\langle \text{div} \mathbf{S} \rangle = -\frac{i\omega}{4} E_j E_k^* (\varepsilon_{jk}^* - \varepsilon_{kj}). \quad (34)$$

A \mathbf{H} mágneses teret tartalmazó tagok kiesnek a (33) egyenletben. Így, ha testben nincs hőfejlődés, más szóval disszipáció, akkor a Poynting-vektor divergenciája zérus, és a dielektromos függvényre az alábbi megszorítás érvényes:

²Valóban, a komplex A és B mennyiségek szorzatának időbeli átlagát azok valós mennyiségeivel kell számolni, ugyanis az $e^{\pm i2\omega t}$ tényezőt tartalmazó tagok időbeli átlaga zérus. Így adódik, hogy $\langle AB \rangle = (1/4) \langle (A+A^*)(B+B^*) \rangle = (1/4) \langle AB^* + A^*B \rangle$.

$$\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{jk}^* \quad (35)$$

azaz a dielektromos függvény *hermitikus mátrix*. Hasonló összefüggés érvényes az anizotrop μ mágneses permeabilitás tenzorára is.

Irodalom

1. Michael Faraday: I. Experimental Researches in Electricity: On the magnetization of light and the illumination of magnetic lines of force. II. On new magnetic actions, and on the magnetic condition of all matter. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 136 (1846) 1–20. és 21–40; online <https://doi.org/10.1098/rstl.1846.0001> és <https://doi.org/10.1098/rstl.1846.0003> (Published: 01 January 1846).
2. Henri Becquerel: Sur une interprétation applicable au phénomène de Faraday et au phénomène de Zeeman (Faraday és Zeeman jelenségeire alkalmazható magyarázatról). *Compt. Rend. Acad. Sci.* 125 (1897) 679; letölthető <https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00240138/document>
3. L. D. Landau és E. M. Lifsic: *Elméleti Fizika VIII. (Folytonos közegek elektrodinamikája)*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
4. A. Nussbaum, R. A. Phillips: *Modern optika mérnököknek és kutatóknak*. Műszaki Könyvkiadó, 1982.
5. E. Hecht: *Optics*. 4th ed., Addison–Wesley, Reading, 2002. (Az ELTE fizikus könyvtárában a nem kölcsönözhető könyvek közt található.)
6. Amnon Yariv, Pochi Yeh: *Optical Waves in Crystals: Propagation and Control of Laser Radiation*. John Wiley & Sons, Inc., 1984, Chapter 4.
7. Grant R. Fowles: *Introduction to modern optics*. 2nd ed., Dover Publications, Inc., 1975, Section 6.7.
8. Bahaa E. A. Saleh, Malvin Carl Teich: *Fundamentals of photonics*. John Wiley & Sons, Inc., 1991, Chapter 6.
9. J. D. Jackson: *Klasszikus elektrodinamika*. TypoTeX, Budapest, 2004.
10. Horváth Zalán, Tél Tamás: *Elméleti fizikai példatár 2*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.
11. L. Onsager: Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I. *Physical Review*, 37 (1931) 405–426.
12. L. D. Landau, E. M. Lifsic: *Elméleti Fizika V. (Statistikus Fizika I. rész)*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.
13. Hartmann Römer: *Theoretical Optics, an Introduction*. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2005, Chapter 5.
14. Sándor Bordács: *Exotic magneto-optical effects in solids*. PhD dolgozat, 2. fejezet; letölthető <https://repozitorium.omikk.bme.hu/handle/10890/1068>
15. Sólyom Jenő: *A modern szilárdtestfizika alapjai II., Elektronok a szilárd testekben*. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2003.
16. L. D. Landau, E. M. Lifsic: *Elméleti Fizika III. (Kvantummechanika, Nemrelativisztikus elmélet)*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
17. Sólyom Jenő: *A modern szilárdtestfizika alapjai I., A szilárd testek szerkezete és dinamikája*. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2002.
18. Gábor Széchenyi, Máté Vigh, Andor Kormányos, József Cserti: Transfer matrix approach for the Kerr and Faraday rotation in layered nanostructures. *Journal of Physics: Condensed Matter*, Volume 28 (2016) 375802; letölthető <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0953-8984/28/37/375802>

Az Eötvös Társulat fönt van a **facebook** -on!



<https://www.facebook.com/pages/Eötvös-Loránd-Fizikai-Társulat/434140519998696?fref=ts>

LEHET-E IMPULZUSA VALAMINEK, AMI NEM MOZOG?

Megfontolások a „rejtett impulzusról”

Tichy Géza (1945–2021) emlékének

Gnädig Péter

Eötvös Egyetem, Fizikus Tanszékcsoport

Az elektromágneses mező egyik sajátja, hogy energiát, lendületet és perdületet hordozhat. Ez a tény elektromágneses sugárzásoknál összhangban áll a szemléletünkkel. Tudjuk, hogy a fény melegíteni tud, nyomást fejt ki arra a testre, amiben elnyelődik (vagy amiről visszaverődik), és megfelelő körülmények között forgatónyomatékokat is képes kifejteni.

Sokkal meglepőbb viszont, hogy ezek a mennyiségek már sztatikus terekben is megjelennek. Azt még csak elfogadjuk, hogy egy feltöltött síkkondenzátor a lemezei között energiát tartalmaz, de „fizikai érzékünk” tiltakozik az ellen, hogy a mozdulatlan elektromos + mágneses mező együttese lendületet, impulzust („mozgásmennyiséget”) hordoz. Ha egy könnyen guruló kiskocsira függőleges tengelyű tekercset (szolenoidot) állítunk, amelyben egy áramforrás hatására áram kering, és a belsejébe egy (függőleges lemezekkel rendelkező) feltöltött kondenzátort helyezünk, akkor a Maxwell-egyenletekből kiszámíthatjuk, hogy a rendszer bizonyos nagyságú, vízszintes irányú lendülettel rendelkezik. No de akkor miért nem mozog a kiskocsi?

Mi történik akkor, ha a kondenzátort lassan kistűjük, vagy a szolenoid mágneses terét „kikapcsoljuk”? Akármelyiket is választjuk, az elektromágneses mező impulzusa eltűnik (nullává válik). Hová lesz a korábban meglévő impulzus? Van aki azt állítja, hogy a mező impulzusa ilyenkor mechanikai impulzussá alakul át (mert vagy a kondenzátort, vagy pedig a tekercset erőlkés éri), tehát a kiskocsi mozgásba jön.

Vajon ténylegesen bekövetkezik ez? Kicsit úgy érezhetjük, mintha a 300 éve élt *Hieronimus Karl*

Köszönettel tartozom *Vigh Máténak*, aki elsőként hívta fel figyelmet a rejtett impulzus érdekes témakörére, *Tasnádi Péternek*, aki az önmagát gyorsító kiskocsi bizarr lehetőségét – Münchhausen báró történetéhez hasonlóan – elfogadhatatlannak tartotta, *Honyek Gyulának* és *Vankó Péternek* a kézirat gondos átnézéséért, és végül *Tichy Gézának*, akivel a fizika bármelyik területéről élvezetes beszélgetéseket lehetett folytatni és aki a cikk írásának kezdeti szakaszában nagyon értékes gondolatokat vetett fel. Sajnos a cikk végső változatát már nem tudjuk megmutatni neki...



Gnädig Péter 1971-ben végzet az ELTE-n fizikusként és annak Atomfizikai Tanszékén dolgozott nyugdíjazásáig. Az elméleti fizika színté valamennyi témaköréből, továbbá vektorszámításból tartott előadásokat több évtizeden keresztül. Mintegy 20 éven át a Nemzetközi Fizikai Diákolimpia magyar csapatának felkészítője és vezetője volt. Három évtizede a *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok* fizikus szerkesztője. Több tankönyv és feladatgyűjtemény szerzője.

1. táblázat

Az előforduló legfontosabb mennyiségek és a jelölésük

v	részecske sebessége
p	részecske impulzusa
I	részecskerendszer összimpulzusa
E, B	elektromos térerősség és mágneses indukcióvektor
u	az elektromágneses mező energiasűrűsége
S	a mező energiaáram-sűrűsége
\mathcal{E}	relativisztikus összenergia
g	a mező impulzussűrűsége
$P_{\text{mező}}$	az elektromágneses mező impulzusa
$F(t)$	a részrendszerekre (kondenzátor, szolenoid) ható erő
$\int F(t) dt$	erőlökés (impulzusváltozás)
P_{rejtett}	az áramvezető mozgó töltéseinek impulzusa
ρ, j	elektromos töltés- és áramsűrűség
I	elektromos áramerősség
ϕ, A	elektromágneses skalár- és vektorpotenciál
$p_{\text{el.}}$	elektromos dipólnyomaték
p_f	folyadék nyomása
ρ_f	folyadék tömegsűrűsége

Friedrich von Münchhausen, a híres „hazudós báró” lódításait hallgatnánk. Többek között azt állította, hogy amikor egyszer mocsárba esett, a parókája copfjánál fogva húzta ki magát az ingoványból. Lehetőség, hogy a rendszer az elektromágneses lendület mellett valamilyen formában tartalmaz még egy „rejtett impulzust”, ami garantálja, hogy a zárt és mozdulatlan rendszer összimpulzusa minden körülmények között nulla legyen?

Ezekről az érdekes kérdésekről egy sor cikk jelent meg az elmúlt 50-60 évben (többségük az *American Journal of Physics* folyóiratban) [1–6]. Ezek tisztázták ugyan a paradoxont, de mivel a megállapításaik nem kerültek be a fizikus köztudatba, talán nem lesz hasznos, ha a *Fizikai Szemle* olvasóit is megismertetjük azok lényegével.

Az írásban sokféle fizikai mennyiség szerepel, amelyeket igyekeztünk a szokásos módon jelölni, de néhol el kellett térnünk e gyakorlattól, hogy az átfedéseket elkerüljük. A cikkben előforduló legfontosabb mennyiségeket és a jelölésüket az 1. táblázat tartalmazza.

Megmaradó mennyiségek a klasszikus és a relativisztikus mechanikában

A klasszikus (newtoni) mechanikában ismert és nagyon hasznos fogalom a lendület (impulzus). Már középiskolában megtanultuk, hogy egy zárt (külső erőhatásoktól mentes) rendszer teljes impulzusa időben állandó:

$$\mathbf{I} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \text{állandó}, \quad (1)$$

ahol m_i a rendszer i -edik (tömegpontnak tekinthető) részének tömege, \mathbf{v}_i pedig e rész sebessége.

Ugyancsak hasznos tétel a tömegközéppont mozgására vonatkozó megállapítás. A pontrendszer

$$\mathbf{R}_{\text{tkp}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (2)$$

tömegközéppontja egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, ha külső erő nem hat:

$$\mathbf{R}_{\text{tkp}}(t) = \frac{\mathbf{I}}{M} t + \mathbf{R}_0, \quad (3)$$

ahol $M = \sum m_i$ a rendszer össztömege.

Jól látható az a – szemléletünknek megfelelő – tétel, miszerint, ha egy zárt rendszer tömegközéppontja nem mozog, akkor a rendszer összimpulzusa nulla kell, hogy legyen. (Ha például a Naprendszer ide-oda mozgó égitestjeinek mozgását olyan koordináta-rendszerből írjuk le, amelyben a rendszer tömegközéppontja mozdulatlan, onnan nézve a rendszer teljes mechanikai impulzusa nyilván *nulla*.)

A fenti megállapítások – némi módosítással – a relativisztikus mozgásokra is érvényesek. Egy m_0 (nyugalmi) tömegű, \mathbf{v} sebességgel mozgó tömegpont relativisztikus impulzusa:

$$\mathbf{p} = m_0 \gamma(v) \mathbf{v}, \quad \text{ahol} \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4)$$

és c a vákuumbeli fénysebesség.

✧

Megjegyzés. Az

$$m_0 \gamma(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv m(v) \quad (5)$$

mennyiséget szokás relativisztikusan megnövekedett (a sebesség nagyságától függő) tömegnek nevezni. Ez nem túl szerencsés (bár széles körben elterjedt) szóhasználat, amelynek egyetlen előnye, hogy segítségével a relativisztikus impulzus a newtoni fizikában megszokott $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ alakban írható fel, tehát az impulzust formálisan a sebességgel egyenes arányban álló mennyiségnek álcázzuk. De ez az arányosság nem igaz, a lendület és a sebesség iránya megegyezik ugyan, de a nagyságuk *nem* arányos egymással. Ter-

mészetesen a fenti összefüggések érvényessége sem a szóhasználatától, sem a mögötte képzelt interpretációtól nem függ, tehát azokat bármilyen megfontolással szabad használni.

✧

A relativisztikus (össz)energia a nyugalmi tömeggel és a sebességgel ilyen kapcsolatban áll:

$$E = m_0 \gamma(v) c^2 \equiv m(v) c^2. \quad (6)$$

Látható, hogy a „megnövekedett” tömeg nem más, mint egy (önkéntesen választott nagyságú, bizonyos mértékegységrendszerben akár 1-nek is tekinthető) szorzófaktorral eltekintve éppen a mozgó részecske *energiája*.

Egy tömegpont relativisztikus impulzusa az energiával és a sebességgel is kifejezhető:

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v}. \quad (7)$$

Definiáljuk egy pontrendszer „energia-középpontját”:

$$\mathbf{R}_{\text{ekp}}(t) = \frac{\sum_i E_i \mathbf{r}_i(t)}{\sum_i E_i}, \quad (8)$$

vagyis a tömegpontok helyének az energiájukkal súlyozott középértékét. E mennyiség mozgása zárt, kölcsönhatásmentes rendszerben egyenes vonalú és egyenletes:

$$\mathbf{R}_{\text{ekp}}(t) = \frac{c^2 \mathbf{p}_{\text{összes}}}{E_{\text{összes}}} t + \mathbf{R}_{\text{ekp}}(0). \quad (9)$$

(Elektromágneses mezővel kölcsönható pontrendszer esetében az energia-középpont csak bonyolultabb módon számítható, valamilyen formában az elektromágneses mező energiája is megjelenik a képletben, de ennek konkrét alakjára nem lesz szükségünk.) Az energiaközéppont-tétel, ami a newtoni fizika (3) tömegközéppont-tételének relativisztikus megfelelője, azt állítja, hogy ha egy zárt rendszer energia-középpontja nem mozog, akkor a rendszer összimpulzusa nulla. Ha például egy rendszer minden eleme egy bizonyos idő elteltével ugyanolyan állapotban van, mint korábban volt, akkor a rendszer összimpulzusa nulla. (Mindez egy adott koordináta-rendszerben, például a laboratóriumi rendszerben értendő. Ha áttérünk egy másik inerciarendszerre, az energia-középpont nagyon furcsa módon transzformálódik, ami arra utal, hogy ez a pont nem valaminek a tényleges helye, hanem csak egy fiktív fogalom.)

Eszerint cikkünk címében feltett provokatív kérdésre a természetes (a szemléletünk szerint megfelelőnek gondolt) válasz:

Nem, mozdulatlan rendszernek nem lehet impulzusa!

A továbbiakban látni fogjuk, hogy a helyzet mégsem ilyen egyszerű.

Megmaradó mennyiségek az elektrodinamikában

Az elektromágneses jelenségek alaptörvényeinek, a Maxwell-egyenletek közvetlen folyománya, hogy a töltött részecskék energiája és impulzusa önmagában nem marad időben állandó, csak az elektromágneses mező jellemzőiből „felépített” térenergiával és térimpulzussal kiegészítve, azzal együtt képez megmaradó mennyiséget. (Ha a megmaradási törvényt egy véges térrészre akarjuk alkalmazni, akkor figyelembe kell még venni a tartomány határfelületén be- vagy kiáramló energiát és impulzust. Ha lokalizált töltés- és árameloszlásokkal foglalkozunk, és az egész térre írunk fel megmaradási tételt, akkor a felületi tagokkal nem kell törődnünk.)

Ismert, hogy az elektromágneses mező energiasűrűsége (egységnyi térfogatban lévő energia) az elektromos mező $u_{\text{elekt.}}$ energiasűrűségéből és a mágneses mező $u_{\text{mágn.}}$ energiasűrűségéből tevődik össze:

$$u = u_{\text{elekt.}} + u_{\text{mágn.}} = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2,$$

amit

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

miatt

$$u = u_{\text{elekt.}} + u_{\text{mágn.}} = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{\epsilon_0}{2} (c\mathbf{B})^2 \quad (10)$$

alakban is felírható. Az impulzus sűrűsége (egységnyi térfogatban levő impulzus) pedig:

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (11)$$

◇

Megjegyzés. Az impulzussűrűség kifejezhető az energiaáram-sűrűséggel, vagyis az

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

Poynting-vektorral is:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}.$$

Ezt a kapcsolatot azonban nem fogjuk használni a továbbiakban.

◇

Véges térrészben található töltések és (egyen)áramok elektromágneses terének teljes impulzusa négyféleképpen is felírható.

I. A legismertebb (*J. J. Thomson* [7] és *J. H. Poynting* [8] nevéhez köthető) kifejezés az impulzussűrű-

ség teljes térre vett integrálja:

$$\mathbf{P}_{\text{mező}} = \epsilon_0 \iiint \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) dV. \quad (12a)$$

Ez a kifejezés azt sugallja, hogy a mező impulzusa „ott van”, ahol a térerősségek lényegesen különböznek nullától, vagyis (mintegy „szétkenve”) a töltések és áramok közötti vagy akár azoktól távolabbi térrészekben is.

II. A térerősségek és a forrás-, illetve örvényerősségek közötti (sztatikus terekre érvényes)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \varphi(\mathbf{r}) \quad \text{és} \quad \text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

összefüggések, valamint a Gauss–Ostrogradszkij-tétel felhasználásával ezt kaphatjuk:¹

$$\mathbf{P}_{\text{mező}} = \frac{1}{c^2} \iiint \mathbf{j}(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dV, \quad (12b)$$

ahol $\varphi(\mathbf{r})$ az elektrosztatikus (skalár)potenciált, $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ pedig az áramsűrűség vektorát jelenti. Mivel vizsgálódásainkat az úgynevezett kvázistacionárius közelítésre (lassan változó terek esetére) korlátozzuk, a \mathbf{j} „valódi áramok” mellett az $\epsilon_0(d\mathbf{E}/dt)$ eltolási áramot mindenhol elhanyagoljuk. Feltételezzük továbbá, hogy a $\varphi(\mathbf{r})$ potenciál $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ határesetben elegendően gyorsan nullához tart. Ez a feltétel véges térrészben elhelyezkedő, összességében semleges töltéseloszlásra nyilván teljesül.

A fenti kifejezés (amelyet *W. H. Furry* [9] vezetett be) azt sugallja, hogy az elektromágneses mező impulzusa ott „lakik”, ahol áramok folynak, vagyis *ahol mozgó töltések vannak*.

III. A térimpulzus harmadik, kevésbé ismert, de a továbbiakban fontos szerepet játszó alakja (amely már *J. C. Maxwell* munkájában is felbukkant [10]):

$$\mathbf{P}_{\text{mező}} = \iiint \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dV, \quad (12c)$$

ahol $\rho(\mathbf{r})$ az elektromos töltéssűrűséget, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ pedig a vektorpotenciált jelöli. A vektorpotenciált (Coulomb-mértéket használva) választhatjuk forrásmentesnek, vagyis kiköthetjük, hogy teljesüljön

$$\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv 0,$$

örvényerőssége pedig a mágneses indukcióvektort adja meg:

$$\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}).$$

(Feltételezzük még, hogy az $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ vektorpotenciál $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ határesetben ugyancsak elegendően gyorsan nullához tart. Ez a feltétel véges térrészben folyó áramok esetén nyilván teljesül.)

IV. A mező impulzusának létezik még egy negyedik előállítás is (*Y. Aharonov* és munkatársai [11]):

¹A levezetést az *F1*. függelék tartalmazza.

$$\mathbf{P}_{\text{mező}} = \iiint \mathbf{r} [\mathbf{j}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})] dV, \quad (12d)$$

ezt azonban a továbbiakban nem fogjuk felhasználni.

A Gauss–Osztrogradskij-tétel alkalmazásával azt is beláthatjuk, hogy (12b) és (12c) jobb oldala (kvázistacionárius közelítésben) megegyezik.²

✧

Megjegyzés. Az elektrodinamika mértékelméletét ismerők számára furcsának tűnhet, hogy az elektromágneses mező impulzusát (ami mérhető fizikai mennyiség) a (12b) és (12c) egyenletek a potenciálok (tehát közvetlenül nem mérhető) segédmennyiségekkel adja meg. Hogyan érvényesül itt a Maxwell-egyenletek *mértékinvarianciája*, vagyis az, hogy több különböző skalár- és vektorpotenciál ugyanazt az elektromos és mágneses mezőt adja meg? Az egyik potenciálpárból (úgynevezett mértékből) egy másik mértékbe (a jelen esetben érvényes kvázistacionárius közelítésben) a

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

és

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \text{grad } \psi(\mathbf{r}, t)$$

transzformációval térhetünk át. ($\psi(\mathbf{r}, t)$ egy tetszőleges választható, differenciálható függvény.) Belátható, hogy a megváltoztatott potenciálok ugyanazokra az elektromos és mágneses mezőkre vezetnek, mint az eredeti potenciálok. Mivel azonban kikötöttük a $\text{div} \mathbf{A} = 0$ feltételt, ψ -nek ki kell elégítenie a $\text{div grad } \psi \equiv 0$ Laplace-egyenletet, aminek egyetlen (a végtelenben nullához tartó) megoldása a triviális $\psi \equiv 0$. Ilyen kikötések mellett megszűnik a mértéktranszformáció lehetőség, hiszen csak egyféle potenciálpárt használhatunk.

Azt is mondhatjuk, hogy a forrásmentes és a végtelenben eltűnő $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ vektorpotenciál mértékinvariáns mennyiség, amely egyszerű fizikai tartalommal bír: ha egy egységnyi töltésű részecskét a végtelenből lassan az \mathbf{r} pontba hozunk, akkor az ehhez szükséges erőlkés éppen $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (lásd a (12c) egyenletet). Ez a megfogalmazás rokona annak, hogy a végtelenben eltűnő $\varphi(\mathbf{r})$ skalárpotenciál azzal a munkával egyenlő, amit egy egységnyi töltésű részecskénél nagyon messziről, de lassan az \mathbf{r} pontba hozása során végzünk.

✧

A (12b) kifejezés (amely mindössze egy fél évszázada ismert [8]) azt sugallja, hogy az elektromágneses mező impulzusa ott „található”, ahol a töltések vannak. (A töltéseknek még mozogniuk sem kell, a töltéseloszlás akár sztatikus is lehet. A harmadik alak nem korlátlanul, hanem csak lassan változó terekre érvényes, nem tartalmazza sem a „retardálást”, sem az elektromágneses sugárzások által szállított impulzust.)

A négyféle formában felírt $\mathbf{P}_{\text{mező}}$ négy különböző szemléletes képet sejtet a mező impulzusának elhe-

lyezkedéséről. Melyik a helyes? Mindegyik, hiszen egymással egyenértékűek. A látszólagos különbözőség csak arra hívja fel a figyelmet, hogy a mező impulzusát nem szabad lokálisan (itt ennyi, amott annyi módon) elképzelni. Határozott fizikai tartalommal csak az egész, összeintegrált impulzus rendelkezik.

✧

Megjegyzés. Az elektromágneses mezőnek *perdület* is tulajdonítható, ennek pontos alakjára azonban a további megfontolások során nem lesz szükségünk. Az elektromágneses mező perdületét általában a homogén mágneses mezőbe helyezett hengerkondenzátor tanulságos példáján keresztül szokták bemutatni [5–7]. Kiszámítható, hogy a torziós szárra felfüggesztett kondenzátor kisütése során (vagy a mágneses tér kikapcsolásának eredményeképp) éppen akkora mechanikai impulzusmomentumra tesz szert, amennyi perdülete korábban az elektromágneses mezőnek volt.

✧

A (10) és (11) összefüggések azt a szemléletes képet sugallják, hogy egy kicsiny ΔV nagyságú térrészben ($u_{\text{elekt.}} + u_{\text{mágn.}}$) ΔV nagyságú elektromágneses energia, valamint $\mathbf{g} \Delta V$ nagyságú elektromágneses impulzus található, és ezeket a fizikai mennyiségeket a többi térrészben uralkodó viszonyoktól függetlenül lehet vizsgálni. Ez nem teljesen igaz, hiszen az elektrodinamikában a Maxwell-egyenleteken keresztül „minden mindennel” összefügg.

Ha mégis komolyan vesszük a fentebb vázolt képet, akkor (7) felhasználásával (amennyiben azt nemcsak tömegpontokra, hanem a mező egy kicsiny darabkájára is érvényesnek tekintjük) kiszámíthatjuk a kérdéses térrészben az „elektromágneses anyag” áramlási sebességet. Fejezzük ki a térerősségek nagyságát az energiasűrűségekkel:

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{\frac{2 u_{\text{elekt.}}}{\epsilon_0}} \quad \text{és} \quad c |\mathbf{B}| = \sqrt{\frac{2 u_{\text{mágn.}}}{\epsilon_0}}, \quad (13)$$

ahonnan (7) és (11) együttes alkalmazásával kapjuk, hogy

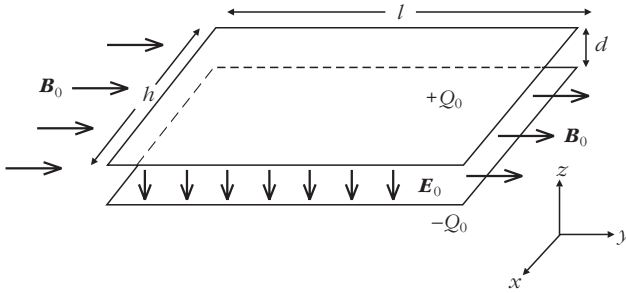
$$\begin{aligned} |\mathbf{p}| &= |\mathbf{g}| \Delta V = \epsilon_0 |\mathbf{E}| |\mathbf{B}| \sin \alpha \Delta V = \\ &= \epsilon_0 \sqrt{\frac{2 u_{\text{elekt.}}}{\epsilon_0}} \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2 u_{\text{mágn.}}}{\epsilon_0}} \sin \alpha \Delta V = \\ &= \frac{u_{\text{elekt.}} + u_{\text{mágn.}}}{c^2} \Delta V |\mathbf{v}|, \end{aligned} \quad (14)$$

ahol α az \mathbf{E} és \mathbf{B} vektorok által bezárt szög. Innen látszik, hogy

$$|\mathbf{v}| = c \frac{\sqrt{u_{\text{elekt.}} u_{\text{mágn.}}}}{\frac{1}{2}(u_{\text{elekt.}} + u_{\text{mágn.}})} \sin \alpha. \quad (15)$$

Mivel (15) jobb oldalán a tört számlálójában szereplő mértani közép kisebb vagy egyenlő a számtani kö-

²A levezetés az F2. függelékben található.



1. ábra

zépnel, továbbá $\sin\alpha \leq 1$, a kiszámított sebesség nagysága $|\mathbf{v}| \leq c$. Az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a kétféle mező energiasűrűsége ugyanakkora, továbbá a térerősségek merőlegesek egymásra. Ez éppen az elektromágneses síkhullám esete, ami fénysebességgel terjed. Minden más esetben $v < c$.

Ha például egy szolenoid belsejében $B = 1 \text{ T}$ az indukcióvektor nagysága, továbbá a benne elhelyezkedő síkkondenzátorban $E = 30 \text{ kV/m}$ a mágneses indukcióvektorra merőleges elektromos térerősség, akkor $u_{\text{elekt.}} = 10^{-8} u_{\text{mágn.}}$, és így $v = 2 \cdot 10^{-4} c = 60 \text{ m/s}$. Ez meglehetősen nagy, de a fényhez képest mégis nagyon kicsi sebesség. A baj csak az, hogy ilyen sebességű mozgásnak semmi nyomát nem látjuk az álló tekercs és mozdulatlan kondenzátor elektromos és mágneses terében. Sőt, egyáltalán semmilyen mozgást nem észlelünk a sztatikus mezőkben.

Feltöltött síkkondenzátor homogén mágneses mezőben

Naiv megfontolások

Vizsgáljuk meg számszerűen is a korábban említett összeállítást – egy hosszú szolenoidból és a belsejében levő síkkondenzátorból álló rendszer – impulzusviszonyait! Ez egy szemléletes, ténylegesen megvalósítható elrendezés, ahol csak egy téglalast alakú tartományban van egyszerre elektromos és mágneses mező. Ezek a mezők – a szokásos közelítésben – homogénnek tekinthetők, egymásra merőlegesre állíthatók, így a számolás – várhatóan – nem lesz túl bonyolult.

Legyen a kondenzátor lemezeinek mérete h és l , a lemezek távolsága d , a kondenzátorlemezek töltése $\pm Q_0$, és a szolenoid B_0 nagyságú mágneses indukcióvektora mutasson a lemezek egyik oldalával párhuzamos irányban (1. ábra). (A nulla index azért szerepel a töltéseknél, hogy a kezdeti töltés nagyságát megkülönböztessük a későbbiekben a kondenzátor kisütése során változó $\pm Q(t)$ -től.)

Széles, lapos síkkondenzátor ($d \ll h, d$) esetén naiv módon feltételezhetjük, hogy csak a kondenzátor belsejében kialakuló, jó közelítéssel homogén elektromos mezővel kell számolnunk, amelynek nagysága

$$E_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q_0}{hl}. \quad (16)$$

Az ábrán látható koordináta-rendszerben a térerősségekvektorok:

$$\mathbf{E}_0 = (0, 0, -E_0) \quad \text{és} \quad \mathbf{B}_0 = (0, B_0, 0). \quad (17)$$

(i) Számítsuk ki a rendszer teljes elektromágneses impulzusát (lendületét)! Mivel

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 = (\epsilon_0 E_0 B_0, 0, 0), \quad (18)$$

az elektromágneses mező teljes lendülete:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{mező}} &= \mathbf{g} l h d = \\ &= (\epsilon_0 E_0 l h B_0 d, 0, 0) = \\ &= (Q_0 d B_0, 0, 0). \end{aligned} \quad (19)$$

Érdeemes kifejezni e mennyiséget a feltöltött kondenzátor *elektromos dipólmomentum-vektorával*, $\mathbf{p}_{\text{el.}}$ -l. Esetünkben a dipólerősség – a szokásos definíciónak megfelelően – egy $Q_0 d$ nagyságú, a lemezek síkjára merőleges (és a negatív töltésű lemeztől a pozitív felé mutató) vektor:

$$\mathbf{p}_{\text{el.}} = (0, 0, Q_0 d).$$

Ezen vektor segítségével tömör formában is megadhatjuk az elektromágneses mező impulzusát:

$$\mathbf{P}_{\text{mező}} = \mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{\text{el.}}$$

(ii) Mi történik ezzel az impulzussal, ha egy nagy ellenállású vezetéken keresztül lassan kisütjük a kondenzátort, vagyis hagyjuk, hogy a lemezek töltése fokozatosan, valamilyen $Q(t)$ függvény szerint Q_0 -ról nullára csökkenjen? A d hosszúságú vezetékben $I(t) = -\dot{Q}(t)$ erősségű áram folyik. (Itt és a továbbiakban a fizikai mennyiségek jele fölötti pont az idő szerinti deriváltat jelöli.) Az áramjárta vezetékre a mágneses mező Lorentz-erőt fejt ki:

$$F_x(t) = -B_0 d \dot{Q}(t), \quad (20)$$

ami

$$\begin{aligned} \int F_x(t) dt &= -B_0 d \int \dot{Q}(t) dt = \\ &= -B_0 d \int_{Q_0}^0 dQ = Q_0 d B_0 \end{aligned} \quad (21)$$

nagyságú, x tengely irányú erőllökést jelent, vektorosan:

$$\int \mathbf{F}(t) dt = \mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{\text{el.}}$$

Ez az erőllökés (ha semmilyen külső erő nem hat éppen akkora (mechanikai) impulzusú mozgást idéz elő, mint amennyi a mező impulzusa volt a korábbi sztatikus állapotban. Megnyugodhatunk, ez megfelel az előzetes várakozásunknak.

(iii) Mi történik, ha a szolenoid mágneses terét fokozatosan nullára csökkentjük? A változó mágneses fluxus olyan örvényes elektromos teret hoz létre, amelyre

$$\oint \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = -\dot{\Phi} = -h d\dot{B}(t), \quad (22)$$

ha az integrálás egy olyan – az (x, z) síkkal párhuzamos – téglalpra terjed ki, amelyik „éppen” körülfogja a kondenzátor lemezeit.

Mekkora erőt fejt ki ez az elektromos mező a két kondenzátorlemezen lévő töltésekre összesen? Gondolatban mindkét lemezt osszuk fel kicsiny Δx szélességű szalagokra, és tételezzük fel, hogy az elektromos töltés egyenletesen oszlik el mindkét lemezen (2. ábra).

Ekkor a felső lemezen egy-egy szalagon $+Q_0 \Delta x/h$, az alsó lemez szalagjain pedig $-Q_0 \Delta x/h$ töltés van, tehát a két lemezre összesen

$$F_x \approx \sum_{\text{felső}} \frac{Q_0}{h} E_x^{\text{fent}} \Delta x - \sum_{\text{alsó}} \frac{Q_0}{h} E_x^{\text{lent}} \Delta x, \quad (23)$$

vagyis a felosztás finomításának határértékénél

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{Q_0}{h} \int_0^h E_x^{\text{fent}} dx + \frac{Q_0}{h} \int_h^0 E_x^{\text{lent}} dx = \\ &= \frac{Q_0}{h} \oint \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = -\frac{Q_0}{h} h d\dot{B}(t) \end{aligned} \quad (24)$$

nagyságú erő hat. Ez az erő a mágneses tér teljes kikapcsolása során összesen

$$\begin{aligned} \int F_x(t) dt &= -Q_0 d \int \dot{B}(t) dt = \\ &= -Q_0 d \int_{B_0}^0 dB = +Q_0 dB_0 \end{aligned} \quad (25)$$

nagyságú erőlkést fejt ki a lemezekre, azaz

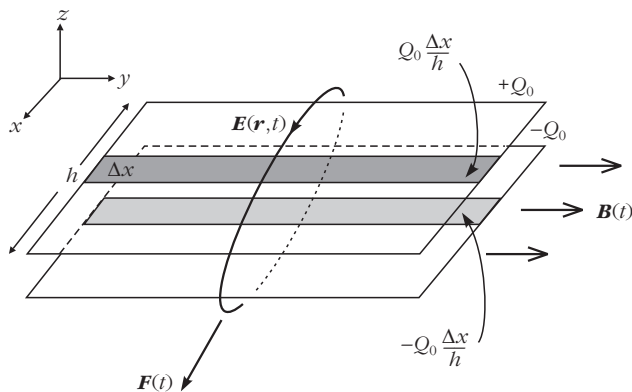
$$\int \mathbf{F}(t) dt = \mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{\text{el.}}$$

Ez is összhangban áll az előzetes várakozásunkkal és a (ii) pontban kapott (20) eredménnyel.

Látszólag minden rendben van, csupán egyetlen „felhőcske” elosztatására lenne szükség: miért nem teljesül az elektromágneses impulzussal rendelkező szolenoid + kondenzátor rendszerre az energia-középpont (9)-ben megfogalmazott tétele? A rendszer áll, tehát az energia-középpont (akárhogyan is kell kiszámítani azt a „szétkent” mezőkre) nyilvánvalóan nyugalomban van, holott az összimпульzus nem nulla!

Eddigi eredményeinket a 2. táblázatban foglalhatjuk össze.

A következőkben ki fog derülni, hogy a fenti számolás majdnem tel-



2. ábra

jes egészében hibás, majd megfontolásaink finomításával kísérletet teszünk az ellentmondás feloldására.

Gondosabb számolás

Ha megpróbáljuk finomítani az előző (naiv) számolást, gondosabban meg kell vizsgálnunk a síkkondenzátor egyenletes töltéeloszlásának és a belső elektromos mező homogenitásának kérdését. Tudjuk, hogy ezek az egyszerűsítő feltevések nem teljesen helytállóak, hiszen a lemezek pereménél az elektromos mező inhomogén, és a kondenzátoron kívül is van „szórt” tér. Ezeket a finomságokat (például a kapacitás vagy a mező energiájának kiszámításakor) a lemezek közötti kis távolságra hivatkozva el szoktuk hanyagolni, de vajon megtehető ez a közelítés a mozgás nélküli impulzus paradoxonának elemzésénél is?

(i) Tekintsük át először a szolenoidban elhelyezett síkkondenzátornál az erőterek által képviselt impulzust! Ha a széleffektusokat és a szórt elektrosztatikus teret közvetlenül akarnánk figyelembe venni, (12a) alkalmazásánál súlyos technikai nehézségekbe ütköznenénk. Könnyebben célhoz érünk, ha a térimpulzus (12c) formuláját használjuk. A homogén mágneses mezőhöz tartozó (pontosabban az egyik megfelelő) vektorpotenciál:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}, \quad (26)$$

ez a szolenoid belsejében kielégíti a $\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ és a $\text{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0$ feltételeket. Ha a szolenoid hosszához képest a kondenzátor nagyon kicsi, akkor a szolenoid mágneses tere a kondenzátor környezetében valóban homogénnek tekinthető. A szolenoidon kívül a vektorpotenciál természetesen (26)-tól különböző, de a konkrét alakjára nem lesz szükségünk.

2. táblázat

Naiv megfontolások összefoglalása.

a mező impulzusa	erőlkés a kondenzátor kisütésekor	erőlkés a mágneses mező kikapcsolásakor	energiaközéppont-tétel
$B_0 \times \mathbf{p}_{\text{el.}}$	$B_0 \times \mathbf{p}_{\text{el.}}$	$B_0 \times \mathbf{p}_{\text{el.}}$	NEM TELJESÜL

Helyezzük az 1. ábrán látható koordináta-rendszer középpontját a kondenzátor közepébe, ekkor

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{B_0}{2}(z, 0, -x). \quad (27)$$

Jelöljük továbbá a felső lemez felületi töltéssűrűséget $\sigma_{\text{felső}}(x, y)$ -nal, az alsó lemezét pedig $\sigma_{\text{alsó}}(x, y)$ -nal. Nem tételezzük fel, hogy a töltéeloszlás homogén, csak azt, hogy

$$\int_{-h/2}^{h/2} dx \int_{-l/2}^{l/2} dy \sigma_{\text{felső}}(x, y) = +Q_0 \quad (28)$$

és

$$\int_{-h/2}^{h/2} dx \int_{-l/2}^{l/2} dy \sigma_{\text{alsó}}(x, y) = -Q_0 \quad (29)$$

teljesüljön. A kondenzátor két lemezének szimmetriája miatt azt is állíthatjuk, hogy $\sigma_{\text{alsó}}(x, y) \equiv -\sigma_{\text{felső}}(x, y)$.

Az elektromágneses mező összimpulzusát (12c) és (27), valamint (28) és (29) segítségével „egzaktlul” (a kondenzátor széleffektusait is figyelembe vevő módon) ki tudjuk számítani. A $\mathbf{P}_{\text{mező}}$ impulzusnak csak x irányú komponense lesz, és az

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{B_0}{2} \left(\frac{d}{2} \int_{-h/2}^{h/2} dx \int_{-l/2}^{l/2} dy \sigma_{\text{felső}}(x, y) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{-d}{2} \int_{-h/2}^{h/2} dx \int_{-l/2}^{l/2} dy \sigma_{\text{alsó}}(x, y) \right) = \\ &= \frac{B_0}{2} \left(\frac{d}{2} Q_0 + \frac{-d}{2} (-Q_0) \right) = \frac{1}{2} Q_0 B_0 d \end{aligned}$$

nagyságú, vagyis

$$\mathbf{P}_{\text{mező}} = \frac{1}{2} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{\text{el.}}$$

Ez a naiv számolás eredményének éppen a fele. Meglepő, de igaz: a kondenzátor szélei közötti és az azokon kívül eső térrészekből származó elektromágneses impulzus még nagyon kicsi lemeztávolság esetén is ugyanolyan nagyságrendű, mint a középső részek járuléka.

A kezdőállapotban – jóllehet a számfaktor eltér a naiv számolás eredményétől – továbbra sem oldódott meg az a paradoxon, hogy egy rendszer, amelynek energia-középpontja nyugalomban van, miként rendelkezhet nullától különböző impulzussal.

(ii) Mi történik ezzel a (nullától különböző nagyságú) impulzussal, ha egy nagy ellenállású vezetéken keresztül lassan kisütjük a kondenzátort, vagyis ha a lemezek töltése fokozatosan, valamilyen $Q(t)$ függvény szerint Q_0 -ról nullára csökkentjük? Ezt a kérdést már megvizsgáltuk egyszer, és semmiféle közelítést nem alkalmazva azt kaptuk, hogy a kisülés során a lemezeket összekötő vezeték $Q_0 B_0 d$ nagyságú erőlkést kap, azaz a rendszer

$$\int \mathbf{F}_{\text{lemezekre}}(t) dt = \mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{\text{el.}}$$

mechanikai impulzusra tesz szert. Ez – sajnos – nem egyezik meg a kezdeti (elektromágneses eredetű) impulzussal, tehát most már a zárt rendszerekre vonatkozó lendületmegmaradás törvényével is valami baj van!

(iii) Mi történik, ha a szolenoid mágneses terét fokozatosan nullára csökkentjük? Ezt a kérdést is megvizsgáltuk már korábban, de elég nagyvonalúan jártunk el, hiszen az indukált körfeszültség kiszámításánál a 2. ábrán látható hurok (amit akár téglalapnak is tekinthetünk) két rövid oldalával nem foglalkoztunk. Azok nagyon rövidek, tehát bizonyára nagyon kicsi járulékot adnak a körfeszültséghez – érvelhetünk. Ez azonban hibás érvelés!

Amikor a téglalapon áthaladó $\Phi(t) = hdB(t)$ mágneses fluxus $\dot{\Phi}(t) = h d \dot{B}(t)$ sebességgel változik, Faraday törvénye szerint

$$\begin{aligned} U &= \oint \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \\ &= \int_{\text{felül}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_{\text{alul}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \\ &\quad + \int_{\text{elől}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_{\text{hátral}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \\ &= h d \dot{B}(t) \end{aligned}$$

körfeszültség indukálódik. A naiv számolásban csak a felül és az alul levő élek menti járulékot vettük figyelembe, a két rövid szakasz járulékat elhanyagoltuk. Most ne tegyük ezt!

Egy tengelyszimmetrikus mágneses mező (a szolenoid tere is ilyen) változásakor a tengelytől r távolságban

$$E(r) = -\frac{r}{2} \dot{B}(t)$$

nagyságú, tangenciális elektromos mező indukálódik. (Ezt legegyszerűbben egy r sugarú körre alkalmazott Faraday-törvényből olvashatjuk le.) Esetünkben – a kondenzátor közepét a szolenoid tengelyére helyezve – a kondenzátor széleinél a rövid szakaszon

$$E\left(r = \frac{h}{2}\right) = \frac{h}{4} \dot{B}(t)$$

az elektromos térerősség nagysága. A két rövid oldal járuléka a körfeszültséghez tehát összesen

$$2 \frac{h}{4} \dot{B}(t) d = \frac{1}{2} h d \dot{B}(t),$$

vagyis

$$\begin{aligned} \int_{\text{felül}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_{\text{alul}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= h d \dot{B}(t) - \frac{1}{2} h d \dot{B}(t) = \\ &= \frac{1}{2} h d \dot{B}(t). \end{aligned}$$

Alaposabb megfontolások összefoglalása.

a mező impulzusa	erőlkés a kondenzátor kisütésekor	erőlkés a mágneses mező kikapcsolásakor	energiaközéppont-tétel
$\frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.})$	$B_0 \times \mathbf{p}_{el.}$	$\frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.})$	NEM TELJESÜL

Ez éppen fele a naiv megfontolás eredményének. A helyesen kiszámított elektromos erőter hatására – mint azt a naiv megoldásnál láttuk – $\pm Q_0$ töltésű lemezekre összesen

$$\frac{1}{2} Q_0 d\dot{B}(t)$$

erő hat, amit az idő szerint integrálva megkapjuk az erőlkést (a rendszer mechanikai impulzusváltozását):

$$P_x = \frac{1}{2} Q_0 dB_0,$$

vagyis

$$\int \mathbf{F}(t) dt = \frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.}).$$

Ez pontosan megegyezik a mágneses mező kikapcsolása során „eltűnő” elektromágneses impulzussal, ami megnyugtató.

Eddigi eredményeinket a 3. táblázatban foglalhatjuk össze.

Az energiaközéppont-tétel sérülése mellett megjelent egy újabb paradoxon: a kondenzátor kisütésekor a lemezeket összekötő vezetékre ható Lorentz-erő kétszer nagyobb, mint amekkora a kezdeti elektromágneses lendületnek megfelelő erőlkést tudna adni a rendszernek. Valamit még mindig hibásan számolunk?

Még gondosabb számolás

A baj (feltehetően hibás eredmény) a kondenzátor kisütésénél jelentkezik. A kondenzátorlemezekre ható erőlkést nagyon gondosan (a széleffektusokat is figyelembe véve) számoltuk, azt tehát nem tudjuk finomítani. No de akkor miről feledkezhettünk meg? Arról, hogy csak a kondenzátorra ható erőt számítottuk ki, és nem vizsgáltuk azt a kérdést, hogy mekkora erőt fejt ki a kisülő kondenzátor a szolenoidot alkotó áramvezetőre.

A kondenzátor változó elektromos tere – az eltolási áramon keresztül – mágneses teret indukál. Igaz ugyan, hogy ez a mágneses tér csak a szórt elektromos tér változásából származik és ezért a tekercs meneténél nagyon gyenge, de a többi effektus is igen kicsi, tehát azokhoz képest az indukált mágneses tér és az áramokkal való kölcsönhatása is számottevő lehet.

Ha a kondenzátor mérete kicsi a szolenoid méretéhez (átmérőjéhez) képest, akkor a kondenzátortól távoli menetek környékén az elektromos mező jól közelíthető egy pontszerű elektromos dipólus terével. Az időben lassan változó erősségű elektromos dipól által keltett mágneses mező legkönnyebben (a szimmetriát kihasználva) az egyik integrális Maxwell-egyenletből kapható meg (de a kézikönyvek elektromos dipólsugárzásával foglalkozó, a sztatikus zónára vonatkozó részeiből is ismert lehet):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t) \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

(A kondenzátor lassú kisülését, vagyis a dipólmomentum lassú csökkenését azért kötöttük ki, hogy ne kelljen figyelembe vevünk a retardálást és a keltett elektromágneses sugárzást.) A keltett mágneses mező és a szolenoid felületén folyó áram kölcsönhatását a (nagyon hosszúnak gondolt) szolenoid felületére integrálva a tekercsre ható eredő erőre ez adódik:³

$$\mathbf{F}(t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}_0 \times \frac{d\mathbf{p}_{el.}}{dt} \right).$$

A szolenoidra ható erőlkés tehát

$$\begin{aligned} \int \mathbf{F}_{\text{tekercsre}}(t) dt &= \frac{1}{2} \mathbf{B}_0 \times \int \frac{d\mathbf{p}_{el.}}{dt} dt = \\ &= -\frac{1}{2} (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.}). \end{aligned}$$

A kondenzátor kisütésekor tehát a rendszerre ható teljes erőlkés:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{F}_{\text{összes}}(t) dt &= \int \mathbf{F}_{\text{kondenzátorra}}(t) dt + \int \mathbf{F}_{\text{tekercsre}}(t) dt = \\ &= (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.}) - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.}) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.}). \end{aligned}$$

Ez megegyezik a szolenoid áramának kikapcsolásakor fellépő erőlkéssel is, valamint a kezdeti elektromágneses lendülettel is.

A 4. táblázat a vizsgált problémára vonatkozó, kelendő gondossággal kiszámított elektromágneses mennyiségeket foglalja össze.

Rejtett impulzus

... és végül minden a helyére kerül

Az eddigiekben az elektromágneses mező – kétségkívül létező, fizikai realitással rendelkező – impulzusát számítottuk ki először nagyvonalúan, utána árnyaltabban, végül minden szempontból gondosnak tekinthető gondolatmenettel. Láttuk, hogy az elektromos vagy

³A részletes számítást az F3. függelék tartalmazza.

Az elektromágneses jelenségek helyes tárgyalása.

a mező impulzusa	erőlkés a kondenzátor kisütésekor	erőlkés a mágneses mező kikapcsolásakor	energiaközéppont-tétel
$\frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.})$	kondenzátorra + tekercsre = összesen $(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.}) - \frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.}) = \frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.})$	$\frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.})$	NEM TELJESÜL

a mágneses mező kikapcsolása során a rendszert éppen akkora erőlkés éri, mint amekkora az elektromágneses impulzus volt a kikapcsolás előtt. Mi akkor a gond? Az, hogy a bevezetésben említett kiskocsi – látszólag – mozgásba hozható külső erőlkés nélkül, mintha Münchhausen báró a saját parókájánál fogva ki tudná húzni magát a mocsárból.

Nem feledkeztünk meg valamiről a rendszer impulzusának kiszámításakor? Azt mondtuk, hogy sztatikus elektromos és mágneses mező esetén a rendszerben semmi nem mozog, pedig ez *nem igaz!* A mágneses mezőt (még sztatikus esetben is) áramok, tehát mozgó töltések hozzák létre. (Állandó mágnesekben a mágnesezettséget sok-sok elektron „spinmágnessége” együttesen hozza létre, aminek leírása bonyolult kvantumfizikai tárgyalást igényelne.)

Nem lehetséges, hogy ezen mozgó részecskéknél eredő impulzusa? Ha az derülne ki, hogy van ilyen impulzus, azt – mivel első ránézésre elrejtőzött a szemünk elől – *rejtett impulzusnak* nevezhetjük.⁴

Tekintsünk egy zárt vezetőket, amelyben I erősségű egyenáram folyik. Az egyszerűség kedvéért legyen ez a vezető az (x, y) síkban fekvő, és téglalap alakú, amelynek egyik (L hosszúságú) oldalára merőlegesen homogén elektromos erőteret hoztunk létre. Modellezzük az áramvezetést q töltésű, m (nyugalmi) tömegű, kölcsönhatásmentes részecskék áramlásával. (A kölcsönhatás-mentesség azt jelenti, hogy egymás hatását nem érzik a részecskék, de a külső elektromos teret és a fémvezeték „terelő hatását” viszont érzékelik.) Úgy is elképzelhetjük ezt az elrendezést, mint egy nagy részecskegyorsító vákuumsövét, ahol töltött részecskék majdnem téglalap alakú pályán mozognak, és a sarkoknál a kanyarodást megfelelő mágneses térrel oldják meg (3. ábra).

A részecskék potenciális energiája az y irányú elektromos térre merőleges, L hosszúságú oldalélek mentén φ_1 és φ_2 ($\varphi_2 > \varphi_1$). A 2-es indexszel jelölt, magasabb potenciálú oldal menti sebesség legyen v_2 , a töltött részecskék távolsága d_2 és számuk az oldal mentén n_2 . Ugyanezek a mennyiségek a szemközti (1-es indexszel jelölt) oldalon v_1 , d_1 és n_1 .

Az áramerősség mindenhol ugyanakkora, vagyis

$$I = q \frac{v_1}{d_1} = q \frac{v_2}{d_2}, \quad (30)$$

⁴A rejtett impulzus (hidden momentum) kifejezést *W. Shockley* és *R. P. James* használta először [1].

ellenkező esetben a töltések valahol feltorlódnának. Másrészt igaz, hogy

$$n_1 = \frac{L}{d_1} \quad \text{és} \quad n_2 = \frac{L}{d_2}.$$

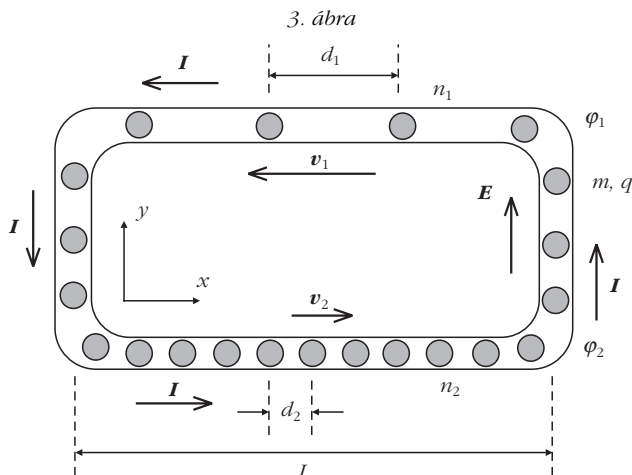
Az energiamegmaradás törvénye szerint a nagyobb potenciális energiájú helyen a részecskék sebessége kisebb, a közöttük levő távolság is kisebb, mint a szemközti oldalon.

Mekkora impulzussal rendelkezik ez a mozgó töltérendszer? Szimmetria miatt az y irányú oldalakon mozgó részecskék összimpulzusa nulla, az eredő impulzus tehát csak a másik két oldal járulékból ered és x tengely irányú. Ha az impulzust a klasszikus fizika törvényei szerint számoljuk, (30) felhasználásával ezt kapjuk:

$$p_x = n_1 m v_1 - n_2 m v_2 = L m \left(\frac{v_1}{d_1} - \frac{v_2}{d_2} \right) = 0.$$

Mi a helyzet akkor, ha az impulzusokat és az energiákat pontosabban, a relativisztikus képletek segítségével számoljuk?

$$\begin{aligned} p_x &= n_1 \frac{m v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} - n_2 \frac{m v_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \\ &= L m \left(\frac{v_1}{d_1 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} - \frac{v_2}{d_2 \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \right) \neq 0, \end{aligned} \quad (31)$$



amit (30) alapján így is írhatunk:

$$p_x = L \frac{I}{q c^2} \left(\frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} - \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \right).$$

A relativisztikus energiamegmaradás képlete szerint

$$\frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + q \varphi_1 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} + q \varphi_2 = \text{állandó},$$

azaz

$$\frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} - \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = q(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Eszerint a rendszer „rejtett” impulzusa:

$$p_x = \frac{LI}{c^2} (\varphi_2 - \varphi_1) = -\frac{1}{c^2} (j_1 \varphi_1 + j_2 \varphi_2) \Delta V, \quad (32)$$

ahol $j_{1,2}$ a megfelelő irányokat is figyelembe vevő áramsűrűség és $\Delta V = LA$ az L hosszúságú, A keresztmetszetű vezetékdarab térfogata. Érdekes, hogy a fenti kifejezés nem tartalmazza sem az áramot vezető részecskék töltését, sem pedig azok tömegét. Megjelenése tisztán *mechanikai eredetű és relativisztikus jelenség*.

✧

Megjegyzések.

1. A rejtett impulzus a szokásos áramok és feszültségek esetén meglehetősen kicsi. Ha például $I = 10$ A, a $\varphi_2 - \varphi_1$ potenciálkülönbség 1 kV és $L = 1$ m, akkor a rejtett impulzus nagysága körülbelül 10^{-13} kg m s⁻¹. De az, hogy kicsiny, nem csökkenti azon meglepő felismerés jelentőségét, hogy *nem nulla*. Amennyiben valaki találna egy olyan „perpetuum mobilét”, ami – mondjuk – a hőtan második főtételével dacolva egyetlen hőtartály felhasználásával energiát termelne, ez a felfedezés még akkor is megzavarná a fizikai világgépünket, ha a gép teljesítménye hihetetlenül kicsi, például 1 nanowatt lenne, tehát nem lenne semmilyen gyakorlati haszna, nem fedezhetné még csak egyetlen lakás villamosenergia-igényét sem.

2. Láttuk, hogy a nullától különböző rejtett impulzus onnan származik, hogy a mozgó részecskék impulzusa (a relativisztikus formulák szerint) nem arányos a sebességükkel, ezért az áramvezető különböző részein különböző sebességgel mozgó részecskék impulzusa nem ejti ki egymást. Talán nagyon idealizált képet választottunk az áramvezetés leírására: a kölcsönhatás-mentesen mozgó részecskék modelljét.

Mi a helyzet akkor, ha az áramot egy összenyomhatatlan (töltéssel rendelkező) folyadék áramlásával modellezzük. Ekkor a folyadék sebessége mindenhol

ugyanakkora, tehát a (31) képletben szereplő zárójeles kifejezés nullává válik. Van-e az ilyenképpen modellezett rendszernek eredő impulzusa? A válasz meglepő: igen, van, még hozzá éppen ugyanakkora, mint a (32)-ben szereplő érték. Ennek eredete az, hogy a folyadék nyomása az 1-es és a 2-es jelű csődarabban nem egyforma, hanem a külső elektromos tér hatására kialakul egy Δp nyomáskülönbség. A relativisztikus hidrodinamika törvényei szerint az impulzussűrűség:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{v}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(\rho_t + \frac{p_f}{c^2} \right),$$

ahol ρ_t a nyugalmi rendszerbeli tömegsűrűség, p_f pedig a folyadék (skalár) nyomása. Az első tag a szokásos, a mozgó tömegekhez rendelt impulzus, esetünkben ez nem ad eredő járulékot. A második tag a nyomásnak megfelelő járulékok, ami a két vezetékben kialakult nyomáskülönbség miatt nem nulla, és a potenciállal kifejezett értéke éppen a rejtett impulzus (32)-ben megadott kifejezésével egyezik meg. Ez azt mutatja, hogy a furcsa „rejtett impulzus” nem a mesterkéltnek tűnő modell, vagy esetleg számolási hiba eredménye, hanem valódi fizikai mennyiség.

3. Említettük, hogy az elektromágneses mezőnek impulzusnyomatéka (perdülete) is lehet. Ilyen állapotot például egy hosszú szolenoid belsejében (koaxiálisan) torziós szátra felfüggesztett, feltöltött hengerkondenzátorral állíthatunk elő [12–14]. Ebben az esetben nem jelenik meg rejtett impulzus, hiszen a szolenoid menetei mentén a forgásszimmetria miatt $\varphi(\mathbf{r})$ konstans. A kondenzátor kisütésekor, vagy a mágneses mező megszüntetésekor a rendszer kezdetben nullától különböző elektromágneses perdületét a hengerkondenzátor mechanikai perdülete veszi át, vagyis a henger forogni kezd.

✧

A (32) összefüggés könnyen általánosítható tetszőleges árameloszlásra is. A folytonos árameloszlást vékony „áramcsövekre” bontva kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}_{\text{rejtett}} = -\frac{1}{c^2} \iiint \mathbf{j}(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d^3r. \quad (33)$$

Vegyük észre, hogy a (12b) összefüggés szerint a rejtett impulzus értéke éppen (–1)-szerese a sztatikus elektromágneses mező impulzusának, vagyis a szolenoidban elhelyezkedő síkkondenzátorból álló rendszer összes impulzusa:

$$\mathbf{P}_{\text{összes}} = \mathbf{P}_{\text{mező}} + \mathbf{P}_{\text{rejtett}} = 0.$$

Ez megnyugtató, hiszen most már teljesül az energia-középpont-tétel: mozdulatlan rendszernek nem lehet eredő impulzusa.

Hogyan teljesül a lendületmegmaradás törvénye, ha a kezdeti nulla összimpulzusú rendszert nullától különböző (elektromágneses eredetű) erőlkés éri, és

5. táblázat		
Az eredmények összesítése.		
kezdetben		energia-középpont tétel
a mező impulzusa	$\frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.})$	
rejtett impulzusa	$-\frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.})$	
összimpulzus	0	TELJESÜL
erőlkések		
		lendületmegmaradás törvénye
a kondenzátor kisütésekor	$\frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.})$	
a tekercs áramának kikapcsolásakor	$\frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.})$	
a rejtett impulzus eltűnéséből	$-\frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.})$	
eredő erőlkés	0	
a rendszer impulzusa mindkét esetben	0	TELJESÜL
a folyamat végén		
		energia-középpont tétel
a mező impulzusa	0	
rejtett impulzus	0	
összimpulzus	0	TELJESÜL

a végállapotban mégis nulla marad az összimpulzus? Ne feledkezzünk meg arról, hogy az elektromágneses impulzus „kikapcsolásával” a rejtett (mechanikai) impulzus is eltűnik a rendszerből. Ez önmagában is okoz egy erőlkést, ami az elektromágneses hatásokkal együtt nulla eredőt ad.

A rendszer kezdeti és az elektromágneses impulzus eltűnése utáni impulzusviszonyait, valamint a rendszerre ható különböző erőlkéseket az 5. táblázat foglalja össze.

Tanulságos még annak vizsgálata, hogy a mező impulzusának és a rejtett impulzusnak megszűnése során a rendszer egyes részeit mekkora erőlkés éri. A rejtett impulzus – mivel az a tekercs áramához kötődik, minden esetben a tekercset rántja meg (6. táblázat). Látjuk, hogy eredőjében nulla erőlkés érdekes módon oszlik meg a tekercs és a kondenzátor között. Ha ezek a részek szabadon elmozdulhatnak, akkor a kikapcsolás során ellentétes irányban indulnak el, ha pedig egymáshoz rögzítettek, akkor a rögzítés „veszi fel” a két egymással ellentétes irányú és azonos nagy-

6. táblázat		
Melyik részre mekkora erőlkés hat?		
erőlkések	kondenzátorra hat	tekercsre hat
a kondenzátor kisütésekor	$(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.})$	$-\frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.}) - \frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.})$
a tekercs árama kikapcsolásakor	$\frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.})$	$-\frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{p}_{el.})$

ságú erőlkést. A rándítás nagysága függ a mezőimpulzus megszüntetésének módjától: a kondenzátor kisütésekor kétszer akkora, mint a tekercs áramának kikapcsolásakor.

Összefoglalás és kitekintés

A sztatikus – látszólag mozdulatlan – elektromágneses mezőben fellépő impulzust a mágneses teret létrehozó áramok mozgó töltéseinek mechanikai impulzusa, az úgynevezett rejtett impulzus kompenzálja. Ez az érdekes fizikai mennyiség a következő sajátságokkal rendelkezik.

(i) *Tisztán mechanikai eredetű.* Leggyakrabban elektromágneses jelenségeknél bukkan fel, de semmi köze nincs az elektrodinamikához, például gravitációs erőterben is megjelenik. Ha tömeggel rendelkező részecskék \mathbf{v} lokális sebességgel mozognak olyan külső erőterben, amelynek potenciális energiasűrűsége u (bárhonnan is származik ez az energia), akkor a rejtett impulzus:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{c^2} \iiint u \mathbf{v} d^3\mathbf{r}.$$

Egy többszintes épület melegvízes fűtőrendszerében keringő víz a földszinten több impulzussal rendelkezik, mint az emeleten az ellenkező irányban mozgó víz, tehát az eredő lendületük (jóllehet nagyon kicsi) nullától különbözik. No de milyen mező impulzusát egyenlíti ki ez a gravitációs eredetű rejtett impulzus, ha elektromágneses mező nincs is jelen? Ennek vizsgálata azonban már kívül esik a jelen cikk keretein.

(ii) *Relativisztikus jelenség,* klasszikus (newtoni) fizikai megfelelője nincsen.

(iii) A rejtett impulzus kifejezhető a divergencia-mentes (Coulomb-mértéknek megfelelő) vektorpotenciállal, ami ezáltal mértékinvariáns jelentést kap: $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ azzal az erőlkéssel egyezik meg, amely ahhoz szükséges, hogy egy egységnyi töltésű kis testet nagyon messziről, lassan az \mathbf{r} helyre hozzunk.

A cikkben tárgyalt eseten (síkkondenzátor szolenoid belsejében) kívül számos más elrendezésben megjelenik a rejtett impulzus. Ilyen például

– egy szolenoid közelében, de nem a szimmetria-tengelye mentén elhelyezkedő ponttöltés,

– egyenletes felületi töltésű, egyenletesen forgó gömbhéj középpontjában elhelyezkedő pontszerű elektromos dipól,

– egy kicsiny, homogén mágnesezettségű golyótól valamekkora távolságra egy elektromos töltéssel rendelkező, homogén töltéseloszlású kicsiny gömb (határesetben pontszerű mágneses dipól és ponttöltés),
– és még sok más eset is fellelhető.

Ezek mindegyikében a rejtett impulzus kioltja az elektromágneses mező impulzusát, és a mező impulzusának „kikapcsolásakor” fellépő erőlkések is összességében nulla eredő erőt adnak.

Feltehetjük még azt a kérdést is, hogy a mező impulzusa és a rejtett impulzus létrehozásakor hogyan teljesül a lendületmegmaradás törvénye. A kondenzátor feltöltésekor és a tekercs áramának bekapcsolásakor (akármilyen sorrendben is történnek ezek) a kondenzátorra és a tekercsre valamekkora erők hatnak, és a rejtett impulzus kialakulásához is „meg kell lökni” a töltéshordozókat. A folyamat a kikapcsolási jelenség időbeli megfordítottja, tehát az ott elmondotknak megfelelően a rendszerre a bekapcsoláskor sem kell hasson eredő külső erőlkedés.

Függelék

F1 függelék

A vektoranalízis integráltételeinek felhasználásával megmutatjuk, hogy a mező impulzusának (12a) és (12b) alakja egyenértékű.

Segéd-tétel. Tetszőleges $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ vektormezőre érvényes, hogy

$$\iiint_V \operatorname{rot} \mathbf{u} \, dV = \iint_F \mathbf{dF} \times \mathbf{u}.$$

(Feltesszük, hogy a szokásos feltételek teljesülnek: F a V térrész határfelülete, \mathbf{dF} a térrészből kifelé irányuló, a felületre merőleges „felületelem-vektor”, $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ pedig kellően „sima” (folytonosan deriválható) vektormező.)

Legyen \mathbf{e} egy tetszőleges konstans vektor, és alkalmazzuk a jól ismert Gauss–Osztrogradszkij-tételt az $\mathbf{u} \times \mathbf{e}$ vektormezőre:

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{e}) \, dV &= \iiint_V \mathbf{e} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} \, dV = \\ &= \iint_F (\mathbf{u} \times \mathbf{e}) \cdot \mathbf{dF} = \iint_F \mathbf{e} \cdot (\mathbf{dF} \times \mathbf{u}). \end{aligned}$$

A konstans \mathbf{e} kiemelhető az integrálokból, így kapjuk:

$$\mathbf{e} \cdot \left(\iiint_V \operatorname{rot} \mathbf{u} \, dV - \iint_F \mathbf{dF} \times \mathbf{u} \right) = 0.$$

Mivel az \mathbf{e} vektor tetszőleges irányú lehet, a zárójelben álló, \mathbf{e} -re merőleges vektor nullvektor kell legyen. Ezzel a segéd-tételt bebizonyítottuk.

Térjünk most rá (12a) és (12b) egyenértékűségének belátására. A kvázistacionárius (az eltolási áramot nem tartalmazó) Maxwell-egyenletek szerint

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \iiint \mathbf{j}(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \, dV &= \varepsilon_0 \iiint \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \, dV = \\ &= \varepsilon_0 \iiint \varphi(\mathbf{r}) \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \, dV = \\ &= \varepsilon_0 \iiint \operatorname{rot}(\varphi(\mathbf{r}) \mathbf{B}(\mathbf{r})) \, dV - \varepsilon_0 \iiint \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \, dV. \end{aligned}$$

A segéd-tétel szerint

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \iiint \mathbf{j}(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \, dV &= \\ &= \varepsilon_0 \iint_F \mathbf{dF} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) + \iiint_V \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \, dV. \end{aligned}$$

Ha V a teljes teret jelenti és annak „végtelenbeli” határához közeledve $\varphi(\mathbf{r})$ és $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ elegendően gyorsan nullához tartanak, a felületi integrál eltűnik, és ezzel éppen a mező impulzusa kétféle alakjának egyenlőségét kapjuk. Hasonló módon láthatjuk be, hogy (12c) is helyesen adja meg (kvázistacionárius közelítésben) az elektromágneses mező lendületét.

F2 függelék

Válasszuk ki a divergenciamentes $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ vektorpotenciál valamelyik (mondjuk az i -edik) komponensét, és alkalmazzuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt a

$$\varphi(\mathbf{r}) \operatorname{grad} A_i(\mathbf{r}) - A_i(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r})$$

vektormezőre.

$$\begin{aligned} \iiint_{\text{a teljes térre}} \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} A_i - A_i \operatorname{grad} \varphi) \, dV &= \\ &= \iint_{\text{nagyon távoli gömbfelületre}} (\varphi \operatorname{grad} A_i - A_i \operatorname{grad} \varphi) \cdot \mathbf{dF}. \end{aligned}$$

A felületi integrál – elegendően gyorsan nullához tartó A_i és φ esetén – nullát ad, és így

$$\iiint \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} A_i) \, dV = \iiint \operatorname{div}(A_i \operatorname{grad} \varphi) \, dV,$$

tehát (a szimmetrikus tagok kiesése miatt)

$$\iiint \varphi \operatorname{div} \operatorname{grad} A_i \, dV = \iiint A_i \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \, dV.$$

Tekintettel arra, hogy a Maxwell-egyenletek szerint

$$\begin{aligned} A_i \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi &= -A_i \operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} A_i \rho = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\rho})_i, \end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} A_i &= (\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A})_i = \\ &= -(\operatorname{rot} \mathbf{B})_i = -(\mu_0 \mathbf{j})_i, \end{aligned}$$

leolvashatjuk, hogy

$$-\frac{1}{\epsilon_0} \iiint \mathbf{A} \rho \, dV = -\mu_0 \iiint \mathbf{j} \varphi \, dV,$$

azaz

$$\iiint \mathbf{A} \rho \, dV = \frac{1}{c^2} \iiint \mathbf{j} \varphi \, dV,$$

ami a (12b) és (12c) jobb oldalának egyenlőségét igazolja.

F2 függelék

Kiszámítjuk, hogy egy kicsiny (pontoszerűnek tekinthető), időben lassan változó erősségű elektromos dipól milyen mágneses mezőt hoz létre, és ez a mező mekkora erőt fejt ki a dipólt körülvevő szolenoid hengerpalástjában folyó áramokra.

A sugárzások elméletéből ismert, hogy egy pontoszerűnek tekinthető, az origóban lévő, $\mathbf{p}_{\text{el.}}(t)$ dipólmomentumú töltéseloszlás mágneses tere:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}_{\text{el.}} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Ez az összefüggés lassan változó terekre érvényes, esetünkben ez fennáll.

Válasszuk a 4. ábrán látható koordináta-rendszert, és jelöljük a tengelyirányú egységvektorokat a szokásos módon \mathbf{i} , \mathbf{j} és \mathbf{k} -val. Ekkor

$$\dot{\mathbf{p}}_{\text{el.}} = \mathbf{k} \dot{p}_{\text{el.}},$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} R \cos \alpha + \mathbf{j} y + \mathbf{k} R \sin \alpha,$$

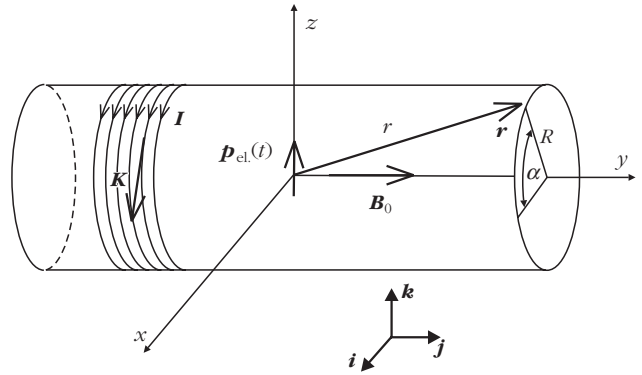
továbbá

$$r = \sqrt{y^2 + R^2}$$

és

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}_{\text{el.}} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} (\mathbf{j} R \cos \alpha - \mathbf{i} y).$$

A szolenoid homogénnek tekinthető mágneses tere: $\mathbf{B}_0 = \mathbf{j} B_0$. (Vigyázat: ne tévesszük össze a dipól által keltett, helyről helyre és időben változó mágneses teret a szolenoid állandó indukciójú terével!) A felületi áramsűrűség vektora \mathbf{K} , amelynek nagysága $K = B_0/\mu_0$. Ezt legkönnyebben a gerjesztési törvényből lehet leolvasni: a palást Δy hosszúságú darabján $K \Delta y$ áram folyik, ami az áramokat körülvevő téglalap alakú kis hurokra vett integrálásból $B_0 \Delta y / \mu_0$ -val egyenlő. A felületi áramsűrűség (érintő irányú) vektora:



4. ábra

$$\mathbf{K} = K(\mathbf{i} \sin \alpha - \mathbf{k} \cos \alpha).$$

A szolenoidra ható teljes erő:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \iint_{\text{hengerpalást}} (\mathbf{K} \times \mathbf{B}) \, dS = \\ &= \frac{B_0 \dot{p}_{\text{el.}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{2\pi} R \, d\alpha (\mathbf{i} \sin \alpha - \mathbf{k} \cos \alpha) \times \\ &\quad \times (\mathbf{j} R \cos \alpha - \mathbf{i} y) \frac{1}{(R^2 + y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Az integrálást csak az erő x irányú komponense „éli túl”. Bevezetve a $\xi = y/R$ új integrációs változót kapjuk, hogy

$$\mathbf{F} = \mathbf{i} \frac{B_0 \dot{p}_{\text{el.}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha \, d\alpha.$$

Az első integrál értéke 2, a másodiké π , így

$$\mathbf{F} = \mathbf{i} \frac{1}{2} B_0 \dot{p}_{\text{el.}} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}_0 \times \dot{\mathbf{p}}_{\text{el.}}).$$

Irodalom

1. W. Shockley, R. P. James: “Try simplest cases” discovery of “hidden momentum” forces on “magnetic currents”. *Phys. Rev. Lett.* 18 (1967) 876–879.
2. D. Babson, S. P. Reynolds, R. R. Bjorkquist, D. J. D. J. Griffiths: Hidden momentum, field momentum, and electromagnetic impulse. *Am. J. Phys. FUNC 77/9* (2009) 826–833; <http://www.physics.smu.edu/~scalise/P7311fa13/HiddenMomentum.pdf>
3. M. G. Calkin: Linear Momentum of Quasistatic electromagnetic fields. *Am. J. Phys. FUNC 34* (1966) 921–925; <https://doi.org/10.1119/1.1972282>
4. H. Essén: An exact formula for the electromagnetic momentum in terms of the charge density and the Coulomb gauge vector potential. *Eur. J. Phys.* 39 (2018) 2; <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa9051>
5. K. T. McDonald: *Electromagnetic momentum of a capacitor in a uniform magnetic field.* (2006) <https://www.researchgate.net>
6. D. J. Griffiths: Electromagnetic momentum (áttekintő cikk). *Am. J. Phys.* 80 (2012) 7–18.
7. J. J. Thomson: *Recent researches in electricity and magnetism.* Clarendon Press (1893); http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/thomson_recent_researches_sec_1-16.pdf
8. J. H. Poynting: On the Transfer of energy in the electromagnetic field. *Phil. Trans. Roy. Soc. London* 175 (1884) 343; http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/poynting_ptrsl_175_343_84.pdf

9. W. H. Furry: Examples of momentum distributions in the electromagnetic field and in matter. *Am. J. Phys.* 37 (1969) 621; http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/furry_ajp_37_621_69.pdf
10. J. C. Maxwell: A Dynamical theory of the electromagnetic field. *Phil. Trans. Roy. Soc. London* 155 (1865) 459; http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/maxwell_ptrsl_155_459_65.pdf
11. Y. Aharonov, P. Pearle, L. Vaidman: Comment on "Proposed Aharonov–Casher effect: Another example of an Aharonov–Bohm effect arising from a classical lag". *Phys. Rev. A* 37(1988) 4052; http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/QM/aharonov_pra_37_4052_88.pdf
12. R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: *A Feynman-előadások fizikából*. Typotex Kiadó, Budapest (2019), III. kötet, 344. oldal és IV. kötet 64. oldal.
13. Holics L. (főszerkesztő): *Fizika*. Akadémiai Kiadó, Budapest (2009) 10.4 alfejezet.
14. Gnädig P., Honyek Gy., Vigh Máté: *333+ Furfangos Feladat Fizikából*. Typotex Kiadó, Budapest (2016) 341. feladat.

XXIV. ORSZÁGOS SZILÁRD LEÓ FIZIKAVERSENY – 1. rész

Sükösd Csaba
BME Nukleáris Technikai Intézet

A 24. Országos Szilárd Leó Fizikaversenyt 2021 első negyedévében rendezte meg a Magyar Nukleáris Társaság, a Szilárd Leó Tehetséggondozó Alapítvány, valamint az Eötvös Loránd Fizikai Társulat. A pandémia miatt a verseny döntőjét sajnos nem tudtuk a szokásoknak megfelelően Pakson, az Energetikai Technikum és Kollégiumban megrendezni. A verseny anyagi feltételeit a szervezőkön túl a Nemzeti Tehetségprogram, valamint az EMMI és a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Nukleáris Technikai Intézetének támogatása biztosította.

Az elődöntőt 2021. február 22-én rendeztük, amikor a regisztrált tanulóknak a saját iskolájukban 3 óra alatt 10 elméleti versenyfeladatot kellett megoldaniuk.

A versenyre az ország 42 iskolájából regisztráltak diákokat. Összehasonlításképpen: 2019-ben 29 iskolából, 2020-ban pedig 40 iskolából érkeztek jelentkezők. Az iskolák számának emelkedésében sokat segített, hogy az Oktatási Hivatal még 2020 őszén kiküldte a versenyfelhívást az általa nyilvántartott iskoláknak. Hasonlóképpen járt el a Nemzeti Szakképzési és Felnőttképzési Hivatal a középfokú szakképzési intézmények felé. A jelentkezett 42 iskolából 10 iskola volt budapesti, a többi vidékről érkezett. A jelentkezett intézmények körülbelül tizede (4) tartozott szakképző centrumokhoz, a többiek köznevelési jellegű középfokú iskolák voltak. Bár a verseny szabályzata lehetővé tenné határainkon túl élő, magyar nyelven fizikát tanuló diákok nevezését is, ebben az évben ilyen nevezés nem érkezett.



Sükösd Csaba (1947) a BME címzetes egyetemi tanára, az ELFT elnökségi tagja. Kísérleti magfizikus, aki kísérleti munkáját nagyrészt külföldi kutatóintézetekben végezte. Kutatási területe a magreakciók, óriásrezonanciák és némely asztrofizikailag releváns magreakció vizsgálata radioaktív ionnyalábokkal. Marx György tanítványaként részt vett a 70-es évek MTA oktatási kísérletében. Azóta is szoros kapcsolata van a fizikatanárok közösségével, több tanár- és oktatókkal kapcsolatos program vezetője.

A 42 iskolából regisztrált diákok száma (190 fő) viszont negatív csúcsot jelentett a verseny eddigi történetében. Ehhez minden bizonnyal jelentősen hozzájárult, hogy 2020 őszén a koronavírus-járvány miatt digitális munkarendben folyt a tanítás az ország összes iskolájában. Emiatt a tanár kollégák személyesen nem találkozhattak a diákokkal, így nem tudták őket olyan erővel motiválni a versenyen való részvételre, mint a korábbi években. A szokásos felkészítő szakkörök sem működtek olyan intenzitással és eredményességgel, mint korábban.

Az említett 190 tanulóból 93-at Budapestről regisztráltak. Ennek alapján a regisztrált tanulók körülbelül fele Budapestről, másik fele vidékről jött. A négy technikumból összesen 10 tanulót regisztráltak. Az ő részarányuk tehát sokkal kisebb volt, alig haladta meg az 5%-ot.

A versenyre – a hagyományoknak megfelelően – két kategóriában jelentkezhetnek középfokú oktatásban tanulók:

I. kategória: azok a tanulók, akik a verseny évében, vagy az azt követő évben érettségiznek (tipikusan 11–12. osztályos tanulók). Megoszlásuk: 110 fiú és 19 leány.

II. kategória: a fiatalabbak (tipikusan 9–10. osztályos tanulók). Megoszlásuk: 56 fiú és 5 leány.

Feltűnő, hogy az idén a lányok sokkal kisebb arányban jelentkeztek, mint a korábbi években, amikor a lányok aránya 20% körül volt, az idén ez az arány mintegy 14%, ami szignifikánsan alacsonyabb. A regisztrált tanulók körülbelül harmada esett a II. (Junior) kategóriába, míg kétharmaduk az I. kategóriába.

Az alábbiakban ismertetjük az elődöntő feladatait, és azok megoldását. Valamennyi feladat helyes megoldására 5 pontot lehetett kapni, így az elérhető maximális pontszám 50 volt. A feladatkitűző bizottság gondot fordított arra, hogy legyenek „könnyebb” feladatok is, amelyek a kevésbé felkészült tanulóknak is sikerélményt jelenthetnek. Ugyanakkor legyenek nehezebbek is, amelyek alapján a jobban felkészült tanulók közötti rangsort meg lehet állapítani.

1. feladat

kitűzte: Radnóti Katalin

Mekkora a sebessége annak az

- a) elektronnak,
b) protonnak,
amelyik mozgási energiája éppen megegyezik a nyugalmi energiájával?

Megoldás

Egy relativisztikusan mozgó részecske mozgási energiája a következőképpen írható:

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2.$$

A feladat szerint: $E_k = m_0 c^2$, ezért

$$2 m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Ebből azonnal látszik, hogy a sebesség független lesz a részecske nyugalmi tömegétől, mivel $m_0 c^2$ kiesik. Egyszerű átalakítások után kapjuk:

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}$$

és végül

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} c.$$

2. feladat

kitűzte: Radnóti Katalin

A káliumhiányos, illetve a sóelvonókúrán lévő betegeknek Kálium-R tablettát kell szedniük, amely 524,44 mg káliumot tartalmaz tablettánként. Mekkora többletaktivitást jelent napi 2 tablettá bevétele egy egészséges embernek, akinek a ^{40}K aktivitása körülbelül 5 kBq? A káliumatomok 0,0117%-a ^{40}K , és ennek felezési ideje $1,27 \cdot 10^9$ év.

Megoldás

Az aktivitást a következő képlettel számíthatjuk ki:

$$A = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N.$$

A felezési idő meg van adva, így csak a magok számát kell meghatározni:

$$\begin{aligned} N &= 2 \cdot 0,0117\% \cdot \frac{m}{M} N_A = \\ &= 2 \cdot 1,17 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{0,52444 \text{ g}}{40 \text{ g/mol}} \cdot 6 \cdot 10^{23} \text{ db/mol} \approx \\ &\approx 1,84 \cdot 10^{18} \text{ db.} \end{aligned}$$

Ebből az aktivitás kiszámítható:

$$\begin{aligned} A &= \frac{0,693}{1,27 \cdot 10^9 \text{ év} \cdot 3,1536 \cdot 10^7 \text{ s/év}} \cdot 1,85 \cdot 10^{18} \approx \\ &\approx 31,85 \text{ Bq.} \end{aligned}$$

Így a tabletták naponta

$$\frac{31,85 \text{ Bq}}{5000 \text{ Bq}} \approx 0,64\%$$

növekedést jelentenek.

Megjegyzés

A radioaktív ^{40}K a szervezetből kétféleképpen „tűnhet” el: egyrészt fizikailag elbomlik, másrészt biológiaiilag kiválasztódik. E két folyamat együttesen szabja meg a ^{40}K szervezetben lévő „effektív” felezési idejét. Ha a feladat ezt is megadta volna, akkor meg lehetett volna határozni, hogy a kúra előtt naponta átlagosan mennyi ^{40}K felvétele történik. Annyi, amennyi az effektív felezési idővel naponta eltűnik a szervezetből. A kúra ezt a „felvételt” növeli meg a napi 31,85 Bq-rel, és ennek alapján meg lehetett volna határozni az új „egyensúlyi” ^{40}K aktivitást. A feladat ezt nem kérdezte, és az effektív (vagy legalább a biológiai) felezési idő hiányában ez a számolás nem is hajtható végre. A ^{40}K fizikai felezési ideje olyan hosszú, hogy ha csak emiatt tűnne el a szervezetből, akkor a szervezetben lévő ^{40}K mennyisége egy ember élete során folyamatosan növekedne, sohasem alakulna ki egyensúlyi koncentráció.

3. feladat

kitűzte: Halász Máté

Tegyük fel, hogy egy ^{235}U atommag egy neutron befogása után két azonos részre hasad.

a) Becsüljük meg, hogy mekkora elektrosztatikus energia szabadul fel a hasadás során (számoljunk egyenletes töltéssűrűséggel)!

b) Hogyan viszonyul ez a hasadás során felszabaduló teljes energiához?

c) Mi az eltérés oka?

Az R sugarú, $+Ze$ töltésű egyenletesen töltött gömb elektrosztatikus energiája:

$$E_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R}.$$

*Megoldás*a) A neutron befogásával létrejövő ^{236}U atommag sugara a következőképpen számítható:

$$R = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m} \cdot \sqrt[3]{A} \approx 7,4 \cdot 10^{-15} \text{ m}.$$

A továbbiakban vezessük be a

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{J} \cdot \text{m}}{\text{Cb}^2}$$

jelölést.

Ezért az elektrosztatikus energiában bekövetkező változás:

$$\begin{aligned}\Delta E_C &= \frac{3}{5} k \left[\frac{(Ze)^2}{R} - 2 \frac{\left(\frac{Z}{2}e\right)^2}{R \sqrt{\frac{1}{2}}} \right] = \\ &= \frac{3}{5} k \frac{(Ze)^2}{R} \left(1 - 2 \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = \\ &= \frac{3}{5} \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{J} \cdot \text{m}}{\text{Cb}^2} \cdot \frac{(92 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{Cb})^2}{7,4 \cdot 10^{-15} \text{m}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx \\ &\approx 5,85 \cdot 10^{-11} \text{J} \approx 365,6 \text{MeV}.\end{aligned}$$

b) Egy hasadás során körülbelül 200 MeV energia szabadul fel, ami jelentősen kevesebb, mint a felszabaduló elektrosztatikus energia.

c) Az eltérés oka elsősorban a felületi energiátag hasadás következtében történő növekedése, illetve másodsorban az, hogy a hasadás általában nem szimmetrikusan történik.

4. feladat

kitűzte: Radnóti Katalin

Mekkora energiával lehet egy vízmolekulát elemeire bontani? Becsüljük meg az alábbi mérés alapján. Vízet elektrolizálunk, az elektrolízis során keletkezett hidrogéngáz térfogata 10 cm^3 , nyomása 10^5 Pa és hőmérséklete 293 K . Az elektrolízist $1,74 \text{ V}$ feszültségen végzzük, $\eta = 90\%$ -os hatásfokkal.

Megoldás

A vízbontáshoz töltésvételre van szükség. A hidrogén leválasztásához szükséges töltés $Q = 2eN$, ahol e az elemi töltés, N pedig az elektrolizált vízmolekulák száma. Az ehhez szükséges energia U feszültségen: $E = \eta QU$. A molekulánkénti energia tehát:

$$\begin{aligned}\frac{E}{N} &= \frac{\eta QU}{N} = \frac{\eta U 2eN}{N} = 2\eta eU = \\ &= 2 \cdot 0,9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{Cb} \cdot 1,74 \text{V} \approx \\ &\approx 0,5 \cdot 10^{-18} \text{J} = 0,5 \text{aJ}.\end{aligned}$$

Alternatív megoldás

A felbontott molekulák száma a gáztörvényből számítható:

$$N = \frac{pV}{kT} = \frac{10^5 \text{Pa} \cdot 10^{-5} \text{m}^3}{1,38 \cdot 10^{-23} \text{J/K} \cdot 293 \text{K}} = 2,47 \cdot 10^{20}.$$

A gáztörvényből kiszámolt mennyiségű hidrogén leválasztásához szükséges töltés:

$$Q = 2eN = 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{Cb} \cdot 2,47 \cdot 10^{20} \approx 79 \text{Cb}.$$

A leválasztáshoz szükséges energia:

$$E = \eta QU = 0,9 \cdot 1,74 \text{V} \cdot 79 \text{Cb} \approx 123,7 \text{J}.$$

Innen

$$\frac{E}{N} = \frac{123,7 \text{J}}{2,47 \cdot 10^{20}} \approx 0,5 \cdot 10^{-18} \text{J} = 0,5 \text{aJ}.$$

5. feladat

kitűzte: Papp Gergely

Mekkora legyen a bejövő proton energiája a $p + {}^7_3\text{Li} \rightarrow {}^7_4\text{Be} + n$ reakció során, hogy a keletkező neutron a laborrendszerből nézve nyugalomban legyen? A ${}^7_3\text{Li}$ magot is tekintsük állónak.

Adatok: a reakció endoterm, reakcióenergiája: $Q = -1,6433 \text{MeV}$, $M_{\text{Be}} = 7,01693 \text{u}$, $m_p = 1,00728 \text{u}$.

Megoldás

A bejövő proton lendületét teljes egészében a Be magnak kell elvinni, hiszen a keletkező neutron „állva” keletkezik. Ugyanezért a neutron mozgási energiát sem vihet el. A folyamatra felírhatjuk a laborrendszerben a lendület- és energia-megmaradást:

$$p_p = p_{\text{Be}} \equiv p \quad \text{és} \quad E_{\text{Be}} - E_p = Q.$$

A mozgási energiákat a proton p lendületével kifejezve:

$$Q = E_{\text{Be}} - E_p = \frac{p^2}{2M_{\text{Be}}} - \frac{p^2}{2m_p} = \frac{p^2}{2m_p} \left(\frac{m_p}{M_{\text{Be}}} - 1 \right).$$

Innen a kérdéses protonenergia:

$$\begin{aligned}E_p &= \frac{p^2}{2m_p} = \frac{Q}{\frac{m_p}{M_{\text{Be}}} - 1} = \\ &= \frac{-1,6433 \text{MeV}}{\frac{1,00728 \text{u}}{7,01693 \text{u}} - 1} = \frac{-1,6433 \text{MeV}}{-0,8564} \approx 1,92 \text{MeV}.\end{aligned}$$

6. feladat

kitűzte: Mester András

Egy kísérlet során egy 4 kg nyúl testébe 5 pikomól mennyiségű radioaktív izotópot juttattak. A sugárzás összaktivitása a $10.$ napon 3 kBq , a $60.$ napon pedig $1,5 \text{ kBq}$ volt a kísérleti állat testében. Mekkora az elnyelt dózis (J/kg) a nyúl testében a kísérlet első 15 napja alatt, ha a testszövet bomlásonként 1 MeV energiát nyelt el?

Megoldás

A bevitt radioaktív atommagok száma:

$$N = 5 \cdot 10^{-12} \text{mól} \cdot 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mól}} = 3 \cdot 10^{12}.$$

Az aktivitás 50 nap alatt a felére csökkent, így $T_{1/2} = 50$ nap. A $15.$ napon meglévő radioaktív atommagok száma:

$$N(t) = N(0) \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}},$$

azaz

$$N(15) = 3 \cdot 10^{12} \cdot 2^{-\frac{15}{50}} \approx 2,44 \cdot 10^{12}.$$

Elbomlott $N(0) - N(15) = 5,6 \cdot 10^{11}$ atom, ebből a nyúl testében $5,6 \cdot 10^{11} \text{ MeV} \approx 0,09 \text{ J}$ energia nyelődött el 15 nap alatt. Az elnyelt dózis pedig:

$$D = \frac{E}{m} = \frac{0,09 \text{ J}}{4 \text{ kg}} = 22,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 22,5 \text{ mGy}.$$

Megjegyzés

A kitűzés előtt a feladatokat a versenybizottság több tagja is ellenőrzi, egymástól függetlenül. Egyeseket többször is. Sajnos ennél a feladatnál a bizottság figyelmét elkerülte, hogy a feladat túlhatározott és ellentmondásos adatokat tartalmaz. A megadott aktivitásból (tizedik napon 3 kBq) a felezési idő (50 nap) ismeretében vissza lehet következtetni a nulladik nap aktivitására: $A(0) = A(3) \cdot 2^{3/50} = 3,127 \text{ kBq}$. A kezdeti aktivitás és a felezési idő ismeretében pedig ki lehet számítani a radioaktív atomok kezdeti számát:

$$N(0) = \frac{A(0) T}{\ln 2} \approx 1,92 \cdot 10^{10}.$$

Ez viszont ellentmondásban van a feladatban megadott 5 pikomól = $300 \cdot 10^{10}$ értékkel. Dicséretes, hogy erre az ellentmondásra néhány versenyző rájött. Egy tanuló pedig azzal oldotta fel, hogy a megfigyelt 50 napos felezési időt a fizikai és a biológiai felezési idő eredőjének – effektív felezési időnek – tekintette, és ennek feltételezésével meghatározta a beadott radioizotóp fizikai és biológiai felezési idejét is! Sajnáljuk, hogy ez az ellentmondás benne maradt a kitűzött feladatban, és külön gratulálunk azon versenyzőknek, akik erre rájöttek!

7. feladat

kitűzte: Papp Gergely

A ^{14}C szénizotópos (radiokarbon) mérés elterjedt technika a szerves anyagok kormeghatározására, amennyiben a minta nem túl öreg (maximum 30-50 ezer éves).

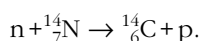
a) Hogyan keletkezik a Földön a ^{14}C izotóp?

b) Mi a radiokarbon kormeghatározási módszer alapelve?

c) Tengeri élőlények radiokarbon kormeghatározása esetenként hibás. Például, frissen kifogott kagylók vagy tengeri emlősök esetén is több ezer éves (vagy még öregebb) eredményt adhat. Mi lehet ennek az oka?

Megoldás

a) A Földön a kozmikus sugárzás hatására keletkező neutronok hatnak kölcsön a légköri nitrogénnel:



A keletkezés és a bomlás között beállt egy egyensúly, ezért a légköri ^{14}C koncentráció állandósult.

b) A módszer alapelve, hogy az élőlények életciklusuk során folyamatosan felvesznek és ürítenek szén (légkörből, táplálékláncból), ezáltal amíg életben vannak, a szöveteikben lévő ^{14}C magok aránya a stabil ^{12}C magokhoz képest egyensúlyba kerül a légkörével vagy a táplálékláncéval. Mivel a ^{14}C radioaktív (5730 éves felezési idővel), ezért az élőlény pusztulása után a szén-anyagcsere megszűnik, és a ^{14}C elbomlik. Minél öregebb egy minta, annál kevesebb ^{14}C található benne. Amennyiben élete során a légköri értékkel került egyensúlyba (amely ismert és közel állandó viszonyítási szám), úgy az arány változásából kiszámítható a minta elhullásának ideje.

c) Az óceánokban lévő ^{14}C koncentrációja nem azonos a légkörével. Egyrészt a vízben is található szén (oldott CO_2 , karbonát-ionok stb.), másrészt pedig a vízbe oldódik a kőzetekből több millió éves szén is. Ezért a tengeri táplálékláncban sem a légköri $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ arány található. A pontos arány bonyolult módon függ az élőhelytől, táplálkozási szokásoktól stb. Így tengeri élőlényekből származó szerves anyagokra a radiokarbonos kormeghatározás tipikusan nem (vagy legfeljebb bonyolult kiegészítő számításokkal) alkalmazható.

8. feladat

kitűzte: Tarján Péter

A gerjesztett állapotú ${}^6\text{Li}$ atommag gamma-bomló, a bomlás során felszabaduló energia: $Q = 3562,88 \text{ keV}$. A stabil Li-atommag tömege: $m = 6,013477 \text{ u}$.

a) Mekkora sebességgel lökődik vissza a kezdetben álló mag a gamma-bomlás során?

b) Hogyan aránylik ez a hőmozgás átlagos energiájából származó sebességhez 1500 °C hőmérsékleten (ahol a Li már gáz halmazállapotú)?

Megoldás

a) A bomlás során ${}^6\text{Li}$ alapállapotú atommag keletkezik. A bomlási energia a lendületmegmaradás miatt megoszlik a foton és a leánymag között, amelyek egymással ellentétes irányban távoznak. A foton energiáját ε -nal, a leánymagét

$$\frac{1}{2} m v^2\text{-tel}$$

jelölve az energia- és lendület-megmaradás egyenletei:

$$Q = \varepsilon + \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{és} \quad \frac{\varepsilon}{c} = m v.$$

A második egyenletből $\varepsilon = m v c$. Ezt az első egyenletbe helyettesítve:

$$0 = v^2 + 2 c v - \frac{2 Q}{m}.$$

A másodfokú egyenlet gyökei a számadatokkal:

$$v_1 \approx 1,9 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_2 \approx -6,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A negatív gyök fizikailag nyilván nem értelmes.

b) Ugyan az atommag a bomlási energiának csak igen kis részét (mindössze 0,032%-át) viszi el, a visszalökődés sebessége így is jelentős. $1500\text{ °C} = 1773\text{ K}$ hőmérsékleten a Li-atomok átlagos energiája

$$E_m = \frac{3}{2} k T \approx 3,67 \cdot 10^{-20} \text{ J}.$$

Ebből a hőmozgási sebesség $v_{th} \approx 2,71 \cdot 10^3 \text{ m/s}$, azaz a visszalökődési sebesség a hőmozgás sebességének körülbelül 70-szerese.

9. feladat

kitűzte: *Sükösd Csaba*

Egy sőlámpa belsejében 15 W elektromos teljesítményű, 2000 K hőmérsékleten világító izzólámpa van. A sőlámpa kristálya a lámpából ráeső teljesítmény 60%-át elnyeli. A sőlámpa teljesen körülveszi az izzólámpát, külső felszíne 1000 cm^2 . A sőlámpa teljes felszínét, valamint az állandó 20 °C hőmérsékletű környezetet tekintjük feketetest-sugárzóknak. A konvektív és konduktív hőátadást hanyagoljuk el.

- Mekkora teljesítménnyel fűti az izzó a sőlámpát?
- Mekkora teljesítménnyel fűti a környezetet a sőlámpát?
- Mitől függ, hogy a sőlámpa mekkora teljesítménnyel fűti a környezetet?
- Milyen hőmérsékletű lesz a sőlámpa felszíne, amikor már beállt a hőmérsékleti egyensúly?

Megoldás

a) A feladat szerint az izzó 15 W teljesítményének 60%-át a sőlámpa elnyeli, azaz a sőlámpát

$$P_f = 15 \text{ W} \cdot 0,6 = 9 \text{ W}$$

teljesítmény fűti.

b) A sőlámpára a környezet hőmérsékleti sugárzásából is kerül teljesítmény:

$$\begin{aligned} P_K &= F \sigma T_K^4 = \\ &= 1000 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 5,670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot (293,15 \text{ K})^4 \approx \\ &\approx 41,87 \text{ W}. \end{aligned}$$

c) A kisugárzott teljesítmény a sőlámpa felszínének hőmérsékletétől függ a Stefan–Boltzmann-törvény szerint:

$$P_s = F \sigma T_s^4.$$

d) A sőlámpa két forrásból kap sugárzási teljesítményt. Egyrészt belülről fűti a lámpa izzószála, másrészt a külső környezetből származó hőszugárzás. Az egyensúly beállta után a sőlámpa külső felszíne az öt ért összteljesítményt fogja kisugározni. A sőlámpát ért összteljesítmény:

$$P_s = P_f + P_K = 9 \text{ W} + 41,87 \text{ W} = 50,87 \text{ W}.$$

A kisugárzásra vonatkozó Stefan–Boltzmann-törvény szerint: $P_s = F \sigma T_s^4$, amiből:

$$\begin{aligned} T_s &= \sqrt[4]{\frac{P_s}{F \sigma}} = \\ &= \sqrt[4]{\frac{50,87 \text{ W}}{1000 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}}} \approx \\ &\approx 307,77 \text{ K}. \end{aligned}$$

A sőlámpa külső felszínének hőmérséklete tehát $307,77 \text{ K} \approx 34,6\text{ °C}$ lesz.

10. feladat

kitűzte: *Szűcs József*

Erőmentes, L hosszúságú szakaszra 6 elektront zárunk be (a rendszerre érvényes a Pauli-elv). A bezárt elektronok összes mozgási energiája 10 eV. A kvantált elektronrendszer alapállapotban van.

- Mekkora az L szakasz hossza?
- Milyen maximális hullámhosszúságú fényvel gerjeszthető az elektronrendszer?
- Ha egy L -nek megfelelő hosszúságú láncmolekulából álló polimerből (ahol a molekulákban 6-6 delokalizált elektron található) vékony fóliát készítenénk, akkor napfényvel átvilágítva milyen színűnek látnánk a fóliát?

Megoldás

a) Használjuk a szakaszra bezárt elektronra vonatkozó energiaképletet:

$$E_n = \frac{h^2}{8 m L^2} n^2.$$

A Pauli-elv szerint 2-2 elektron van az első három energiaszinten. Így az elektronok mozgási energiájának összegét kifejezhetjük az alapállapot energiájával:

$$\sum E = 2 \frac{h^2}{8 m L^2} (1^2 + 2^2 + 3^2) = 10 \text{ eV},$$

amiből

$$E_1 = \frac{h^2}{8 m L^2} = \frac{10}{28} \text{ eV}.$$

Ebből

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\frac{h^2}{8 m E_1}} = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{1}{2 m E_1}} = \\ &= \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{2} \cdot \\ &\cdot \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 10/28 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}} \approx \\ &\approx 1,026 \cdot 10^{-9} \text{ m} \approx 1,03 \text{ nm}. \end{aligned}$$

b) Gerjesztéskor valamelyik elektron egy üresen álló, magasabb energiaszintre kerülhet. A gerjesztő foton maximális hullámhossza ekvivalens a gerjesztő foton minimális energiájával. Ez a harmadik szintről a negyedik szintre történő gerjesztésnél valósulhat csak meg. Ebből a gerjesztő fotonra a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{hc}{\lambda_{\max}} = E_1(4^2 - 3^2) = \frac{35}{14} \text{ eV},$$

amiből

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{35/14 \text{ eV}} \approx 496 \text{ nm (kékeszöld szín)}.$$

c) Mivel áteső fényben a napsugárzás spektrumából hiányzik a kékeszöld szín, ezért az áteső fény a kiegészítő vörös színűnek látszik.

Megjegyzés

Hasonló színek (narancs, narancsvörös stb.) is elfogadhatók voltak jó megoldásként.

Az elődöntő eredményei

A korábbi szokásoknak – és a versenykiírásnak – megfelelően a dolgozatokat először a versenyzők fizikatanárai javították a küldött pontozási útmutató alapján. Az I. kategóriás versenyzők 60%-nál, a II. kategóriás versenyzők 40%-nál nem alacsonyabb eredményt elért dolgozatait postán eljuttatták a BME Nukleáris Technika Tanszékére, ahol egy egyetemi oktatókból álló csoport ismét átnézte és – szükség esetén – felüljavította a dolgozatokat. A BME-re 31 első kategóriás (senior) és 15 második kategóriás (junior) dolgozat érkezett. Ez abszolút értékben a korábbi évekhez képest kevesebb, de arányaiban nem, hiszen a benevezett versenyzők

száma is alacsonyabb volt. A legkönnyebb a 2. feladat volt, az erre kapott pontszámok átlaga 4,45 a szenioroknál és 4,44 a junioroknál (maximum 5,0). A legnehezebbnek a 4. feladat bizonyult, itt a pontszámok átlaga mindössze 0,95 volt az I. kategóriánál, és 0,67 a II. kategóriánál. Azonban meg kell jegyezni, hogy még erre a feladatra is érkezett 5 pontos megoldás! Igaz, hogy csak egyetlen, ráadásul a junior kategóriában! Ez azt jelzi, hogy középiskolai ismeretekkel még ez a feladat is megoldható volt.

A pontszámok szerinti rangsor – és a versenykiírás – alapján az első kategóriában az első 20 tanulót, a második kategóriában pedig az első 10 tanulót hívta be a Versenybizottság a 2021. április 23-án rendezett döntőbe. Röviddel az elődöntő eredményeinek közzése után az egyik I. kategóriás tanuló jelezte, hogy egy másik – nemzetközi – versennyel való ütközés miatt nem tud a döntőben részt venni, ezért a versenybizottság helyette behívta a következő, legnagyobb pontszámot elért I. kategóriás tanulót. Szinte órákkal a döntő megrendezése előtt derült ki, hogy az egyik II. kategóriás tanulót tévesen soroltuk be, neki az I. kategóriában lenne a helye. Ez a tévedés a versenybizottság hibája; a kézzel kitöltött értékelő lapon a kissé elmosódott „I.” jelet „II”-nek olvastuk. Szerencsére a tanuló annyi pontot ért el az elődöntőben, hogy I. kategóriásként is bőven bejutott volna a döntőbe. Ezért a versenybizottság úgy döntött, hogy ebben az évben kivételesen 21 fő I. kategóriás és 9 fő II. kategóriás tanuló indul a döntőben. Annak érdekében, hogy a későbbiekben elkerüljük a hasonló hibákat, a kategóriákat átnevezzük. A következő évtől „Senior” és „Junior” kategóriának fogjuk hívni őket.

Érdekes megjegyezni, hogy míg a senior (I.) kategória végül behívott 21 diákjából csak 8 tanuló volt budapesti, addig a junioroknál 7 budapesti tanuló került be a döntőbe, és csupán 2 tanuló jött vidékről.

Folytatjuk.

Jobb egy mentőötlet mint öt mentő egylet

– írta Karinthy Frigyes az egyletistápolás margójára.

**Most Társulatunknak lenne szüksége
egyletmentő ötletekre!**



Ezek az ötletek nem vesznek el,

ha a <http://forum.elft.hu>

linken, az ELFT stratégiai vitafórumán adjuk elő.



THE EPS FORUM

02-04 JUNE 2022

CONFERENCE CENTER
SORBONNE UNIVERSITY
PARIS, FRANCE



- CONFERENCES ·
- ROUND TABLES ·
- WORKSHOPS ·

IN 2022 THE EUROPEAN PHYSICAL SOCIETY (EPS) JOINS FORCES WITH ITS 42 MEMBER SOCIETIES, 18 DIVISIONS AND GROUPS 40 ASSOCIATE MEMBERS TO ORGANISE THE FIRST EPS FORUM AT SORBONNE UNIVERSITY, PARIS.

The EPS Forum is a three-day international meeting of interest for all European researchers, PhD students and Post Docs who wish to be introduced to exciting research opportunities in large companies and start-ups, and encourage a dialogue with representatives of the industry sector.

The EPS Forum will also host a general conference in physics on various topics, addressed from a more fundamental point of view and sponsored by high-profile scientists. Round tables will be dedicated to societal issues.

THE FORMAT OF THE EPS FORUM WILL INCLUDE A SERIES OF CONFERENCES, ROUND TABLES AND WORKSHOPS ON:

- Condensed matter physics: from quantum materials to additive manufacturing
- Energy and sustainability, transportation and technology
- Accelerators, high-energy particle physics, nuclear physics
- Quantum technologies and photonics
- Machine learning and artificial intelligence
- Biophysics, technological sequencing of proteins, pandemic, cancer treatments

REGISTRATION FEES

LOW PARTICIPATION FEES

Non EPS Members → €20
EPS Members → €15

FOR OUR INDUSTRIAL PARTNERS

Non EPS Associate Members → €100
EPS Associate Members → €50

Stands will be made available at attractive rate.
For more information, please contact us:
contact-forum-eps@eps.org

THURSDAY, 2nd

Physics Meets Industry

Day 1 of the EPS Forum will be dedicated to the employment of young physicists in Europe and favour direct exchanges with CEO, directors and engineers of major industrial companies in these fields.

Involving EPS Young Minds Members and EPS Associate Members, Day 1 will bring together early career researchers, interns, PhD students, and Postdocs with physics-based enterprises in order to discuss exciting research and career opportunities in industry.

FRIDAY, 3rd

Scientific Colloquium & Societal Challenges

Day 2 will look at scientific and societal challenges facing the physics community. The latest achievements in physics will be highlighted by the most outstanding physicists in Europe and beyond, including a strong participation from the EPS Member Societies and Divisions and Groups.

SATURDAY, 4th

EPS council

Day 3 will be devoted to the regular business of the EPS Council, open to EPS Council Delegates.

REPRESENTING 42 NATIONAL PHYSICAL SOCIETIES AND 130'000 RESEARCHERS, THE EUROPEAN PHYSICAL SOCIETY (EPS) ADVOCATES PHYSICS AND ITS CONTRIBUTION TO THE ECONOMIC, TECHNOLOGICAL, SOCIAL AND CULTURAL DEVELOPMENT IN EUROPE. IT PROMOTES EXCELLENCE IN PHYSICS RESEARCH AND COOPERATION WITH PHYSICS-BASED INDUSTRIES, EDUCATION AND STUDENT MOBILITY, PUBLICATION AND OUTREACH.

The EPS Young Minds Programme gives young researchers the opportunity to lead teams, organise events for networking, public outreach and career development. It is open to all enthusiastic young researchers in Europe and gathers the next generation of leaders in science.

Associate Members are represented in the EPS committees and Council. EPS Associate Membership is an exclusive opportunity to valorise physics research, industrial applications and societal projects.



FOR MORE INFORMATION VISIT:
WWW.EPS.ORG/FORUM

$$H(t)|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle$$