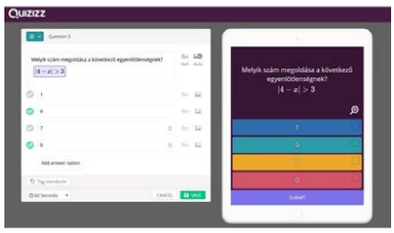
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

18. szám 2020. december



2020. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

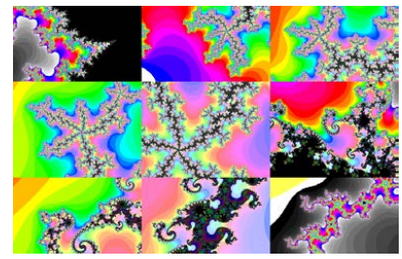
Matematikaoktatás a COVID-19 idején

Hogyan látta három, az oktatás különböző szintjein különböző tapasztalattal, de azonos lelkesedéssel és didaktikai kutatókedvvel rendelkező szegedi tanár, oktató, hallgató az elmúlt hónapokat, az online matematikatanítás kezdeti nehézségeit? *Máder Attila*, *Torma Bence* és *Torma Gábor* írása a mostani időszakban is kiváló útmutatóul szolgálhat azoknak a tanároknak, akik nem tudták meghallgatni az előadásukat a 2020 novemberi Varga Tamás Módszertani Napokon. Tovább...

2020. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Roger Penrose: az első Nobel-díjas matematikus, 1. rész

Közismert tény, hogy matematikából nem osztanak Nobel-díjat, így csekély az esélye, hogy egy matematikust kitüntessenek vele. Bizonyos értelemben idén először mégis ez történt: Roger Penrose 2020-ban elnyerte a fizikai Nobel-díjat. A képen az idős tudós és az általa fiatalon megjósolt fekete lyuk látható (*forrás: zmescience.com*). Életműve rendkívül szerteágazó, az algebrai geometriától a diszkrét geometrián és differencálgeometrián keresztül a kozmológiáig, sőt egészen az emberi tudat fizikájáig számos témát felölel. Cikkünk a matematikailag jelentős eredményei közül mutat be néhányat.



2020. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Tíz éve halt meg Benoît Mandelbrot, a fraktálgeometria atyja

Mandelbrotot a tiszta elméleti kutatások helyett az alkalmazottabb területek érdekelték. Kutatásai számos tudományterülethez kapcsolódtak, például a statisztikus fizikához, meteorológiához, közgazdaságtanhoz, orvostudományhoz, turbulens áramlások elméletéhez, mérnöki tudományokhoz, káoszelmélethez...No és az ő találmánya a fraktál és a Mandelbrot-halmaz. Mindezekről színes képet fest nekünk *Buczolich Zoltán*. Tovább...

2020. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

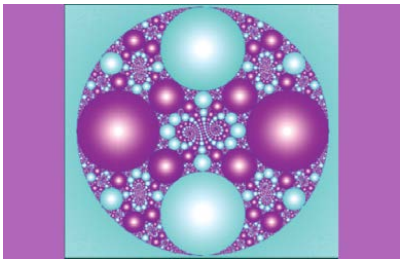
Logirintus: a karantén ihlette matematikai kalandjáték

Minden kijárat egyben bejárat is valahova – ez a mondás a Logirintus nevű új matematikai-logikai kalandjátéknak nemcsak a menetére utal, de szépen leírja keletkezéstörténetének lényegét is. Online logikai kaland diákok tízezreinek, hídépítés a matektól távol álló nagyközönség és a leglelkesebb „matek-fanok” között: *Gyimesi Bernadett* és *Balogh Tamás László* közreműködésével bemutatjuk a Logirintus sztoriját és pedagógiai vonatkozásait.

2020. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Online IMO, 2020

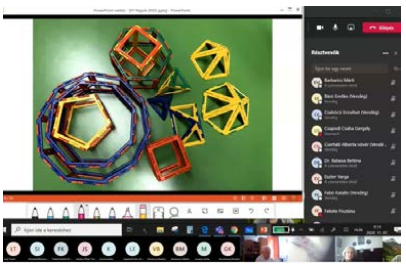
A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok szeptemberi számai évtizedek óta őrzik az összes Nemzetközi Matematikai Diákolimpia (IMO) eredményét, a legfontosabb adatok, események krónikáját. Az idei, különleges olimpia beszámolója azonban a novemberi KöMaL-ban jelent meg. *Dobos Sándor* cikke azoknak szól, akik az olimpia hivatalos honlapján megjelenő információkon túl érdeklődnek a magyar csapat, a verseny szervezése iránt. Tovább...



2020. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Klein-gyöngyök

David. J. Wright „Double Cusp Group” című, a Notices of the AMS folyóiratában 2004 decemberében megjelent cikkét fordította le és egészítette ki a Möbius-transzformációkra és az eredeti cikk színes ábráin is bemutatott „dupla csúcsú csoportra” vonatkozó ismeretekkel *Figula Ágota*.



2020. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

A 32. Varga Tamás Módszertani Napokról

A tavalyi jól sikerült nemzetközi

2020. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Varga Tamás családfája – Szász Károly (1798 – 1853)

2020. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A matematikára semmi szükség – egészen addig, amíg...

Varga100 konferenciához csatlakozó rendezvény után idén a XXXII. Varga Tamás Módszertani Napokat az ismert körülmények miatt online szervezték. Bár személyesen nem találkozhattak egymással a résztvevők, többségükben matematikát tanítók, és az előadások is mások voltak a képernyőn keresztül, új lehetőségeket is rejtett magában ez a forma. *Csapodi Csaba* és kollégái részletes beszámolója következik.

Oláh-Gál Róbert a 2020. évi Varga Tamás Módszertani Napokon előadást tartott a konferencia névadójának egyik őséről. Idősebb Szász Károly államférfi, jogtudós, író, matematikus, pedagógus (Vízakna, 1798. január 25. – Marosvásárhely, 1853. október 25.) mindkét Bolyainak közeli barátja volt, aki fiával közösen írta „Számtan” könyvét. Ebből is nagyon érdekes részleteket idéz az előadásból készült cikk. Tovább...

A 2020. évi Varga Tamás Módszertani Napok záróelőadásában *Mosóczi András* arra a sokszor feltett kérdésre próbált választ adni, vajon mi értelme matematikát tanulni. Az előadásból készült cikke és nemrég megjelent könyve, A gondolkodás forradalma arról szól, mi is történt itt a bolygónkon pár ezer évvel ezelőtt és azóta, ami az egész emberiség történetét megváltoztatta, és hogy mi köze ennek a matematikához. Hogyan kerül a képbe Indiana Jones? Mindenekelőtt: kik is azok a pirahák?

2020. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

József Attila egy matematikai kérdése

Ferenci Tamást új oldaláról ismerheti meg az olvasó: az irodalom- és a matematikatörténet határán „kerékpározik". Felkeltette érdeklődését ugyanis egy érdekes kordokumentum: József Attila 1934-ben Beke Manó matematikusnak írt (igaz, elküldetlen) levele, egy, a ciklois pályájával kapcsolatos kérdésről. A levélből az is kiderül, hogy a költő ismerte a neves matematikus „Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba” c. könyvét. Vajon mi a kérdés és mi lehet rá a válasz? Tovább...

2020. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

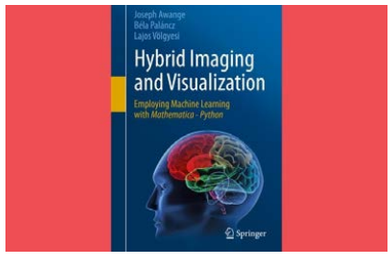
Szabadulószoba flippity-vel

Mikor jön el a pillanat? Ha már elegünk van mindenből és úgy érezzük, hogy a gyerekek is már másra vágynak kicsit és még mindig digitális oktatás van/lesz, akkor! Aki már készített, annak valószínűleg semmi újat nem tudok mutatni, inkább azoknak szeretnék segíteni, akik még soha nem készítettek szabadulószobát – írja *Tolnai Judit*. Íme a tudnivalók...

2020. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Jövőformáló matematika

A matematika korszakában élünk, ám ez nincs benne a köztudatban. Fontos tehát, hogy jobban megértsük a szerepét, nemcsak a többi tudományterületen, hanem a társadalomban, a gazdaságban és az innovációban is. Az adatok mennyisége, a rendszerek komplexitása és a számítási kapacitások robbanásszerűen növekednek, így a matematika jelentősége is tovább fog nőni a jövőben. 2020 novemberében a Magyar Tudomány Ünnepe alkalmából hangzott el *Röst Gergely* online előadása a Magyar Tudományos Akadémia YouTube-csatornáján. A 2021-es Matematika Világnapjának szlogenje is hasonló üzenetet hordoz: Matematika egy jobb világért. Tovább...



2020. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

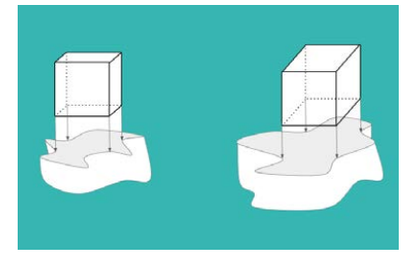
Hibrid képalkotás és vizualizáció

A Springer kiadásában nemrég jelent meg Joseph Awange, Paláncz Béla és Völgyesi Lajos úttörő munkája, melynek címe magyarul: Hibrid képalkotás és vizualizáció – Gépi tanulás alkalmazása a Mathematica – Python alkalmazással. A könyvben, melyet hiánypótló műnek szánnak, a szerzők a számítógépes látást gépi tanulási problémákként fogják fel, a gépi tanulásra pedig statisztikai technikák alkalmazásaként gondolnak. Következik *Lóczi Lajos* recenziója.

2020. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Nekrológ: Dr. Leindler László

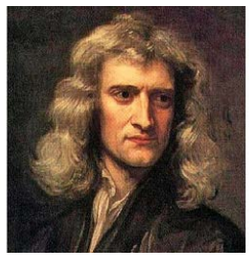
Tudományos tevékenysége a klasszikus analízis területére esik, elsősorban a Fourier- és ortogonális sorok elméletére, de jelentős eredményeket ért el függvényterekkel, sorozatok osztályaival, beágyazási tételekkel és egyenlőtlenségekkel kapcsolatban is. Rendkívül szerény egyéniség volt, saját, gyakran szemléletformálóan átütő eredményeit legtöbbször „apróságnak”, „kis javításnak” nevezte. Leindler László 2020. szeptember 18-án bekövetkezett halálával egy kimagasló életpályájú tudóst, tanárt és kollégát veszítettünk el – írja *Totik Vilmos*. Tovább...



2020. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A négyzetes és téglalapos cövekek problémájáról

Tekintsük a következő (nem igazán életszerű) problémát: adott egy gödrünk, és azt kérdezzük, hogy készíthető-e hozzá egy olyan négyzet keresztmetszetű cövek, amely épp befér a gödrünkbe, vagyis alapjának csúcsai épp a gödör szélén vannak. *Stipsicz András* írása Toeplitz 1911-es négyzetes cövek sejtéséből indul ki. Tovább...



2020. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Az érintőmódszer történetéről

Hosszú évek óta tanítok matematikatörténetet, de mindig tanulok valami újat. A napokban láttam a Netflixen egy filmet, 21 – Las Vegas ostroma, amelyben

2020. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Valószínűségszámítás négy kötetben

Vetier András új négykötetes valószínűségszámítás tankönyve részletes, szemléletes és közvetlen magyarázatokkal, rengeteg megértést segítő elhangzott egy abszurd állítás: Newton ellopta az érintőmódszert Raphsontól. Kicsit utánanéztem a történetnek. – *Simonovits András* írása. (Fent az alaptalanul megvádolt Isaac Newton portréja.) Tovább...

ábrával és táblázattal és meglehetősen sok kidolgozott nagyszerű feladattal igyekszik elérni azt, hogy tanítványainak, a leendő villamosmérnököknek az órákra való készülés ne kötelesség, hanem élmény legyen – írja kollégája, *Kói Tamás*. Tovább...

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet.

A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

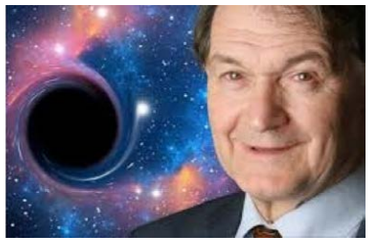
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **HÍREK – ÚJDONSÁGOK** ROVAT A MATEMATIKÁHOZ ÉS A BOLYAI TÁRSULATHOZ KAPCSOLÓDÓ ESEMÉNYEKRŐL, ÚJDONSÁGOKRÓL SZÓL. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÁKÓCZI ILDIKÓ.)*

Dobos Sándor
2020. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Online IMO, 2020

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok szeptemberi számai évtizedek óta őrzik az összes Nemzetközi Matematikai Diákolimpia (IMO) eredményét, a legfontosabb adatok, események krónikáját. Az idei, különleges olimpia beszámolója azonban a novemberi KöMaL-ban jelent meg. *Dobos Sándor* cikke azoknak szól, akik az olimpia hivatalos honlapján megjelenő információkon túl érdeklődnek a magyar csapat, a verseny szervezése iránt. Tovább...



Szabó Szilárd
2020. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Roger Penrose: az első Nobel-díjas matematikus, 1. rész

Közismert tény, hogy matematikából nem osztanak Nobel-díjat, így csekély az esélye, hogy egy matematikust kitüntessenek vele. Bizonyos értelemben idén először mégis ez történt: Roger Penrose 2020-ban elnyerte a fizikai Nobel-díjat. A képen az idős tudós és az általa fiatalon megjósolt fekete lyuk látható (*forrás: zmescience.com*). Életműve rendkívül szerteágazó, az algebrai geometriától a diszkrét geometrián és differencálgeometrián keresztül a kozmológiáig, sőt egészen az emberi tudat fizikájáig számos témát felölel. Cikkünk a matematikailag jelentős eredményei közül mutat be néhányat.

Csapodi Csaba
2020. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

A 32. Varga Tamás Módszertani Napokról

A tavalyi jól sikerült nemzetközi Varga100 konferenciához csatlakozó rendezvény után idén a XXXII. Varga Tamás Módszertani Napokat az ismert körülmények miatt online szervezték. Bár személyesen nem találkozhattak egymással a résztvevők, többségükben matematikát tanítók, és az előadások is mások voltak a képernyőn keresztül, új lehetőségeket is rejtett magában ez a forma. *Csapodi Csaba* és kollégái részletes beszámolója következik.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Dobos Sándor 2020. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Online IMO, 2020

Az *Érintőben* az idei, különleges év diákolimpiai felkészüléséről és a CMC versenyről már olvashattak az érdeklődők. Szeptemberben lezajlott az IMO, Nemzetközi Matematikai Diákolimpia is. Erről a csapatvezető, Frenkel Péter megírta a hivatalos beszámolót, ami a KöMaL novemberi számában jelent meg. Hagyományosan a lap szeptemberi számai őrzik az olimpiák eredményét, a legfontosabb adatok, események krónikáját már évtizedek óta. Ez a cikk azoknak szól, akik az olimpia hivatalos honlapján megjelenő információkon túl érdeklődnek a magyar csapat, a verseny szervezése iránt.

A magyar csapat a CMC után élvezhette a nyári szünetet, a ráhangolódás az olimpiára augusztus második hetében kezdődött. Ekkor volt a MaMuT 2. tábor (Matematikai Mulatságok Tábora). Ezúton is köszönet a főszervező Juhász Péternek, aki támogatta, hogy az IMO és MEMO csapatok egész héten Frenkel Péter vezetésével olimpiai feladatmegoldó programon vehessenek részt. Sajnos augusztus végén a koronavírus kéretlenül bekopogtatott az ajtón, a csapat egyik tagjának pozitív lett a tesztje, a többiek családjában, illetve közvetlen baráti körében is több pozitív eset volt. Így a szeptember elejére tervezett további felkészítés online zajlott.

Ezt a felkészítést oktatói oldalról is megtámadta a vírus: a hét minden napját más-más tanár vállalta, egyikük megbetegedett, de szerencsére a csapatvezető besegített. Rajta kívül egy-egy nap munkáját vezette Dobos Sándor csapatvezető-helyettes, és két korábban háromszoros olimpikon, Terpai Tamás és Harangi Viktor. A matekozás mellett a diákok aggódva figyelték a híreket, ennek két nyomós oka is volt. Az utóbbi években nagyon népszerű program a diákok körében a Math Beyond Limits nevű tábor. Ezt Lengyelországban szervezik szeptember második és harmadik hetében, a visegrádi országok diákjai számára. A csapat több tagja is meghívást kapott a táborba, hosszas hezitálás volt: menjünk − ne menjünk? Végül a járványhelyzet oldotta meg a kérdést, nem lehetett utazni, így a program online változatát követhették a résztvevők. A másik komoly tényező az volt, hogy többen októberben Angliában kezdték meg tanulmányaikat. Mikor utazzanak? Lesz-e karantén? Írhatják esetleg az IMO-t az angliai versenyközpontban? Mindezek a feszegető kérdések nem kevés email-ezést eredményeztek, szervezést, átszervezést, majd az összes eddig megszervezett dolog végső lemondását. Így alakult ki, hogy végül az egész csapat együtt, Magyarországon írhatta a versenyt.

A szervezők komoly biztonsági előírásokat fogalmaztak meg. Csakis bekamerázott, előre egyeztetett hivatalos versenyhelyszíneken lehetett megírni a Nemzetközi Diákolimpia dolgozatait. Az előírások miatt szükség volt egy független, más országbeli versenybiztosra is. Ezt a munkát nálunk Niko Laaksonen (Finnország) végezte, ez úton is hálás köszönet érte. A Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet igazgatójától és munkatársaitól is nagyon sok segítséget kaptunk, ott volt a „versenyszoba”, az épület egy nagyon nyugodt, teljesen lezárt részében.

A versenyzők közül Nagy Nándi és Tóth Balázs a matek előtt közvetlenül az informatikai olimpián (IOI) vettek részt. A halasztások miatt a két olimpia éppen egymás mellé került, de mindkettőt online, itthonról lehetett írni. A csapat szegedi tagja, Weisz Máté számára a Bolyai Társulat intézte el az olimpia napjaira a budapesti szállást. A pandémia miatt ez sem volt olyan egyszerű, mint máskor. Aki ebben az időszakban próbált kollégiumban, vagy hotelben szállást foglalni, valószínűleg tapasztalhatta a nehézségeket. Hála Rákóczi Ildikó BJMT igazgatónő szervezőmunkájának, ez is végül megoldódott és Máténak jó körülmények között lett szállása.

A versenyt bizonyos időeltolódásokkal írták a világ különböző pontjain. A feladatokat nem a zsűri, hanem a problémakiválasztó bizottság állította össze. Ennek idén is tagja volt Kós Géza, akit a szentpétervári szervezők bevontak ebbe a munkába. A feladatok szövegét a verseny napján, pár órával a dolgozatírás kezdete előtt kapta meg a csapatvezető, hogy lefordíthassa. Az IMO versenydolgozatait ugyanis minden diák az anyanyelvén írhatja. Az elkészült dolgozatokat szkennelve fel kellett tölteni. A tanári munkába idén két megfigyelő is besegített, Fekete Panna és Kovács Benedek. Panna gondoskodott a versenyszobában frissítőről, Benedekkel segített a versenyfelügyeletben. Mindketten közreműködtek a dolgozatok fordításában és koordinálásában. Ez utóbbi elég érdekesen zajlott. Aki már látott versenydolgozatot, az tudja, hogy az idő szorításában nem mindig készül nyomdakész kézirat. A szervezők ezért létrehoztak egy különleges felületet a fordítás és az eredeti dolgozat összevetésének megkönnyítésére. A dolgozat bármely részlete fölé létre lehetett hozni egy virtuális kis téglalapot, amibe bele lehetett írni. Ez lehetett az adott szöveg fordítása, vagy a megoldáshoz fűzött megjegyzés is. Ez a téglalap egy kattintással eltüntethető, vagy újra megjeleníthető. Mi, a magyar tanári csapat, a dolgozatírás után kiosztottuk a munkát és szépen elkészítettük a fordításokat, ezeket eljuttattuk a koordinátorokhoz a javasolt pontszámokkal együtt. Ezt követően némi izgalommal vártuk, jóváhagyják-e, vagy további egyeztetés szükséges. Nekem jutott az első, geometria feladat, ezt minden diák megoldotta és a maximális pontszámot elég hamar jóváhagyták. A másik általam javított példa a hatos volt, itt a pontozási útmutató elég világosan jelzett bizonyos részpontszámokat, amit többen elértek. Balázs sikeresen megoldotta a hatost! A hosszú megoldás fordítása után nagyon szurkoltam, megkapja-e a pontokat. Hozzá kell tennem, hogy az online olimpia abban is különbözik az igazitól, hogy ilyenkor közben az ember éli a maga hétköznapi életét is, nem csak az olimpiára koncentrál, mint máskor. Az olimpia alatt minden órámat megtartottam a Fazekasban, ugyanígy Péter is az ELTE-n. A matekóráim közti szünetekben megnyitottam a koordinálás felületét, van-e változás. Végre! Pénteken délelőtt ott volt Balázsnak a 7 pont a hatosra! Majdnem táncolva mentem be a 10.c matekórájára, annyira örültem.

A koordinátorok munkáját dicséri, hogy gondosan elkészített pontozási útmutatókat készítettek, így elég gördülékenyen ment a munka. A többi feladatnál is alakultak a pontszámok, a nehezebben áttekinthető dolgozatok ügyében a négy tanár közt futottak az emailek. Ahogy a korábbi olimpiákon Pelikán József, úgy az idein Frenkel Péter volt a koordinálás tábornoka. Talán a legnagyobb küzdelem Csongor 2. feladatáért zajlott. Ott nagyon világosan szerepelt egy kétpontos részeredmény, Csongor sokat dolgozott a továbblépésen, amit nem tudott befejezni. Kovács Benedek teljesen végigvitte a Csongor által elkezdett megoldást, és ezt szépen prezentálva eljuttatta a koordinátoroknak, így lett három pontos a megoldás.

A koordinálás egyik érdekes momentuma volt az orosz csapat hármas feladatának pontozása. Ez a feladat magyar javaslat volt, tavalyi aranyérmesünk, Haiman Milán küldte. A szokásos eljárás az, hogy a szervező ország dolgozatait a feladatot kitűző ország koordinálja. A hagyományt megtartva elküldték Péternek a szkennelt dolgozatokat. Terpai Tamás vállalta a szakmai áttekintést és pontosan azokat a pontszámokat javasolta, amiket az orosz csapatvezető, így röviden egyertértéssel zárult a dolog. (A dolgozatokba belenéztem. Mivel a rendszerváltás előtt jártam gimnáziumba, így el tudtam olvasni a cirill kézírásokat. Sajnos meg kellett állapítanom, használat hiányában nagyon elkopott a nyelvtudásom.)

Az utolsó izgalom a javításokat követően az éremhatárok megállapítása. A szokásos olimpiákon már lehet ilyenkor sejteni a határokat, mivel egy eredményjelző felület a javítások közben kiírja az elfogadott pontszámokat. Most ilyen nem volt, minden csapat csak a maga pontjait látta. A ponthatárok elfogadása után a hivatalos honlapon azonnal megjelennek az összesített eredmények és friss adatok, statisztikák. A magyar csapat nagyon szépen szerepelt! **Három aranyérmesünk** (zárójelben az iskolájuk): **Beke Csongor** (Bp. Veres P.), **Tóth Balázs** (Bp. Fazekas) és **Weisz Máté** (Szeged, Radnóti). Ennyi arany 1998 óta nem fordult elő egy éven belül. Tóth Balázst a 616 versenyző közül az abszolút pontsorrendben csak hárman előzték meg! (A negyedik helyen viszont sokszoros holtverseny volt.) **A csapat három bronzérmese: Gyimesi Péter** (Bp. Veres P.), **Kocsis Anett** (Bp. Fazekas), **Nagy Nándor** (Bp. Fazekas). Magyarország az összesítésben a 13. helyen végzett.

Az online olimpia egészen más, mint az igazi. Nincs utazás, nincs találkozás, barátkozás a többi ország versenyzőivel, ismerkedés a szervező várossal, országgal. Ezt Szentpétervár esetében különösen is hiányoltuk. Szerencsére a szervezők vállalták, hogy egy évvel később, reménység szerint már a szokásos módon 2021-ben is megszervezik az IMO-t. Az idei évben lehetett online videosétát tenni, egyéb riportok, videoelőadások színesítették a honlapot. Ezeknek magyar vonatkozású oldala, hogy egy exkluzív video készült Pelikán Józseffel. Ennek első része a tanár úr előadása a Frankl-sejtésről, a második része pedig egy remek riport. Pelikán tanár úr élete összefonódott az olimpiával: négyszer volt versenyző, később a magyarországi versenyen szervező –tolmács–koordinátor–zsűrielnök. Több mint három évtizeden át végezte a csapatvezetői munkát, közben tagja, majd két cikluson keresztül elnöke volt a Nemzetközi Diákolimpiát irányító Advisory Boardnak. Pelikán tanár úrnak a tavalyi, 60. olimpia volt az utolsó aktív olimpiája, de az idei szervezők is felkérték, hogy online vegyen részt a fordításokat felügyelő nyelvi bizottságban. Sok éven keresztül együtt dolgoztam vele, kívánom, hogy jó egészségben követhesse otthonról a további olimpiák eseményeit.

A 2020-as évet megőrzik majd a történelemkönyvek, ennek egy momentuma volt az online IMO. A verseny szakmai szempontból egy szokásos olimpiának megfelelő volt, a verseny eredményét is hivatalosan elfogadják. Remélem, a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia visszatér majd a korábbi években kialakult formájába, és így lesz majd a versenyzőknek életre szóló élmény. Lobogjon tovább az olimpiai láng!

Dobos Sándor, IMO csapatvezető-helyettes

[redacted]

A magyar csapat beköszönő videóján (felülről lefelé, balról jobbra): Kovács Benedek, Dobos Sándor, Frenkel Péter, Nagy Nándor, Beke Csongor, Weisz Máté, Tóth Balázs, Gyimesi Péter, Kocsis Anett és Fekete Panna.

---

díjazottak beszámolók diákolimpiák

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szabó Szilárd 2020. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Roger Penrose: az első Nobel-díjas matematikus, 1. rész

Bevezetés

Közismert tény, hogy matematikából nem osztanak Nobel-díjat, így csekély az esélye, hogy egy matematikust kitüntessenek vele. Bizonyos értelemben idén először mégis ez történt: Roger Penrose elnyerte a fizikai Nobel-díjat.

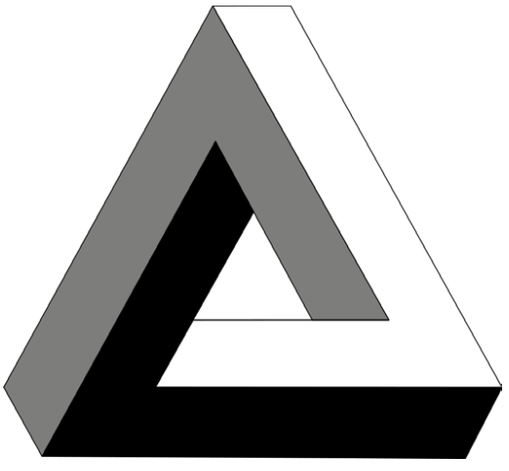
A fenti kijelentés kétfelől is megkérdőjelezhető, ezért helyes értelmezése némi magyarázatra szorul. Egyrészről megkérdőjelezhető, hogy idén először történt-e ilyen: felvethető például a lineáris programozási feladat mellett többek között az optimális szállítási feladatról [3] is ismert Leonyid Vitalijevics Kantorovics, valamint az Egy csodálatos elme című film főhőse, a metrikus differenciálgeometriában is jelentős eredményeket elért John Nash esete, akik 1975-ben illetve 1994-ben matematikus létükre megkapták a közgazdaságtani Nobel-díjat, és akik azóta is matematikusok generációinak munkáját inspirálták. Ez ugyan igaz, azonban (minden elismerésünk mellett) a közgazdaságtani Nobel-díj szigorú értelemben véve nem egyike az Alfred Nobel által végrendeletében eredetileg meghagyott díjaknak, hanem a Svéd Jegybank által, megalapításának 300-adik évfordulója alkalmából, A. Nobel tiszteletére létrehozott díj [1].

A másik lehetséges ellenvetés a fenti állítással szemben az, hogy mennyiben tekinthető Penrose matematikusnak. Kétségtelen, hogy a díjat a bizottság a fizikai munkásságára ítélte, egész pontosan „annak felfedezéséért, hogy a fekete lyuk kialakulása az általános relativitáselmélet robusztus előrejelzése” [2]. Mindazonáltal, az angolszász tudományos közéletben nincs éles határvonal a matematika és fizika között. Gondoljunk csak Sir Isaac Newton-ra, aki egyaránt alkotott rendkívül jelentőset mindkét tudományban. (Hasonló igaz egyébiránt más országokban is, pl. a francia Joseph-Louis Lagrange, vagy éppen Neumann János esetében, és a sort hosszan folytathatnánk.) Jóllehet, manapság talán ritkább az ilyen multidiszciplináris tudós, ám Sir Roger Penrose éppen a kivételek egyike, és talán túlzás nélkül az egyik legnagyobbika. Mi sem bizonyítja ezt jobban, mint az, hogy matematikus egyetemi végzettsége és algebrai geometriából szerzett PhD fokozata után egyaránt közölt matematikai és fizikai témájú eredményeket. Munkahelye az Oxfordi Egyetem Matematika Intézete volt, ahol jelenleg emeritus professzor, eddigi elismerései között pedig éppúgy találunk matematikaiakat (Clay Award for Dissemination of Mathematical Knowledge (2018), De Morgan medal (2004) és Naylor Prize (1991), London Mathematical Society), mint fizikaiakat (Dirac Medal for the Advancement of Theoretical Physics (2006) és Einstein Medal, Albert Einstein Society (1990)).

Életműve rendkívül szerteágazó, az algebrai geometriától a diszkrét geometrián és differencálgeometrián keresztül a kozmológiáig, sőt egészen az emberi tudat fizikájáig számos témát felölel. Ezen cikkben a matematikailag jelentős eredményei közül mutatunk be néhányat.

Lehetetlen ábrák

Penrose egyetemi tanulmányai alatt 1954-ben Amszterdamban járt, ahol megtekintette az akkoriban már elismert Maurits Cornelis Escher holland grafikus egy kiállítását, amelyen valószínűleg látott kiállítva a művész akkoriban már létező lehetetlen ábrái (pl. Relativiteit (1953)) közül néhányat. Egy ábrát akkor nevezünk lehetetlennek, ha minden kellően kicsiny részlete valamely térbeli test vetülete, ám nem létezik olyan térbeli test, amelynek egészében véve vetülete lenne. (Mellékesen megjegyezzük, hogy lehetetlen ábrát Escher előtt már a svéd Oscar Reutervärd is alkotott.) Ez az élmény annyira lenyűgözte, hogy édesapjával, a matematikus, genetikus, pszichiáter Lionel Penrose-zal közösen szerkesztett egy folytonosan emelkedő, önmagába visszatérő lépcső ábráját, amely matematikailag a Penrose-háromszög nevű alakzattal egyenértékű.



A Penrose-háromszög (Forrás: https://en.wikipedia.org/wiki/Roger_Penrose#/media/File:Penrose-dreieck.svg)

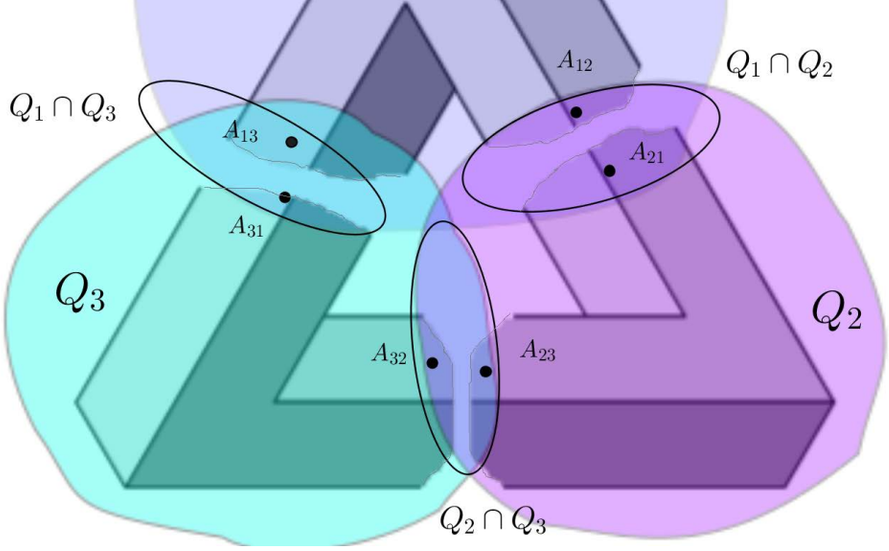
Az ebből írt cikket [5] elküldte Eschernek, aki ennek hatására további lehetetlen ábrákat tartalmazó metszeteket (Klimmen en daalen – Ascending and Descending (1960),

Waterval – Waterfall (1961)) készített.

M. C. Escher: Waterval – Waterfall – Vízesés

(Forrás: https://en.wikipedia.org/wiki/Waterfall_(M._C._Escher)#/media/File:Escher_Waterfall.jpg)

Egy későbbi írásában [7] Roger Penrose visszatér a lehetetlen ábrák témájához, ezúttal azonban azok algebrai topológiai elméletét dolgozza ki. A lokális adatok egy nagy egésszé való összeilleszthetőségére vonatkozó feltételek ugyanis az algebrai topológia eszközeivel, azon belül is leggyakrabban a homológia- illetve kohomológia-elméletekkel fogalmazhatók meg. Röviden összefoglaljuk ezt az elméletet. Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ egy összefüggő, de nem egyszeresen összefüggő nyílt halmaz (a Penrose-háromszög esetében U egy körgyűrű). Legyen továbbá G egy Abel-csoport (a Penrose-háromszög esetében $G = \mathbb{R}$). Fedjük le U-t véges sok $Q_1, \ldots, Q_n$ nyílt halmazzal úgy, hogy bármely két részhalmaz metszete pontra húzható legyen (például, esetünkben $n = 3$ mellett lásd a következő ábrát).



A körgyűrű fedése három pontra húzható nyílt halmazzal. Készítette: Marco Biemann.

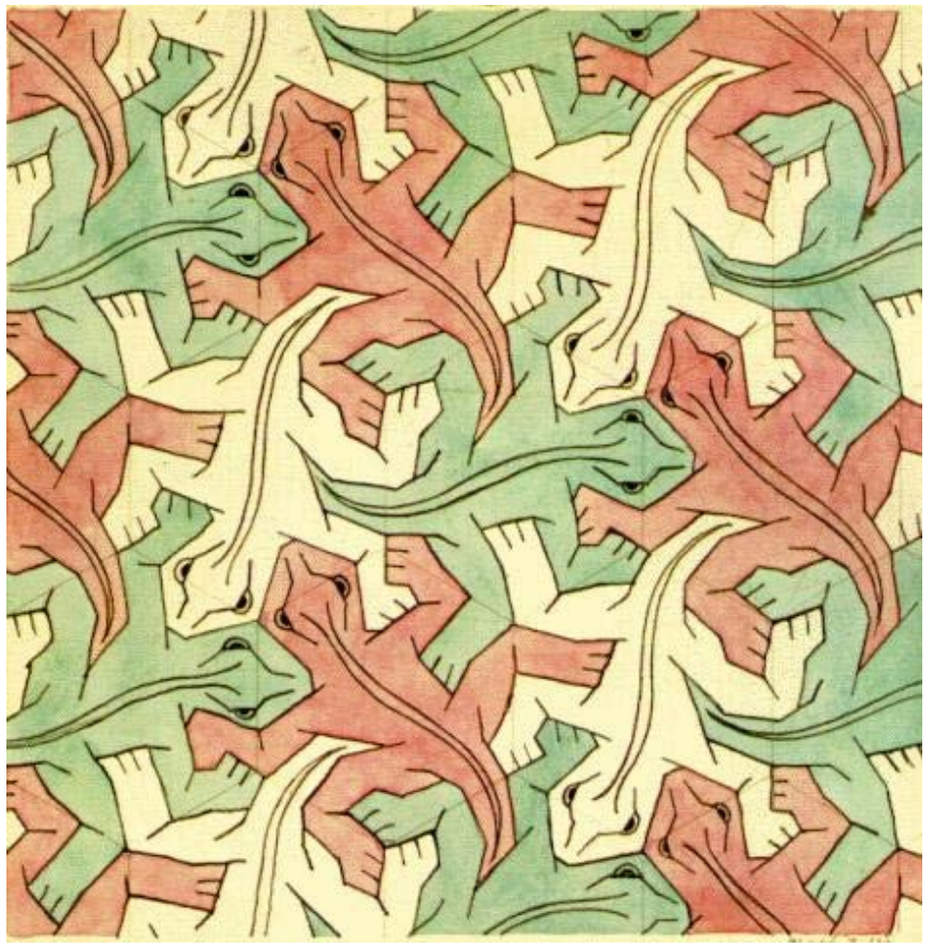
Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $Q_i \cap Q_j$ akkor és csak akkor nem üres, ha $j = i \pm 1$ (ahol $i \pm 1$-et modulo n értjük), továbbá hogy $Q_{i-1} \cap Q_i$ minden i-re pontra húzható. Legyen minden Q_i-n adott egy T_i térbeli merev test síkbeli vetületének ábrája, amelyekre teljesül, hogy minden i-re a $Q_{i-1} \cap Q_i$ metszeten a T_{i-1} és T_i vetületei egybevágók. Irányítsuk valahogyan a síkra merőleges ℓ egyenest, és jelöljük $d_{i-1,i}$-vel a T_{i-1} és T_i közötti előjeles távolságot ℓ adott irányítására nézve. Mármost, ha a különböző T_i-k egyazon $\mathbb{R}^3$-beli T merev tárgynak a rögzített síkra vett vetületének részei, akkor nyilvánvalóan minden i-re $d_{i-1,i} = 0$. Elképzelhető persze, hogy ahhoz, hogy a T_j tárgyak összeálljanak egyetlen T tárggyá, néhány T_j tárgyat ℓ mentén valamekkora d_j távolsággal el kell tolni. Ezen eltolás eredményeképpen nyilván a $d_{j-1,j}$ viszonylagos távolság d_j-vel növekszik, míg a $d_{j,j+1}$ mennyiség d_j-vel csökken, végül, a többi $d_{i,i+1}$ távolság pedig változatlan marad. Gondolatmenetünkből látszik, hogy akkor és csak akkor létezik olyan T tárgy, amelynek vetülete minden Q_j-n T_j, ha léteznek olyan $d_j \in \mathbb{R}$ értékek ($1 \leq j \leq n$), hogy minden T_j-t d_j-vel eltolva minden i-re teljesül $d_{i-1,i} = 0$. A $(d_{i-1,i})_{i=1}^n$ szám n-es, a d_j távolságokkal való eltolások erejéig, éppen U-nak az $Q_1, \ldots, Q_n$ fedésére vonatkozó ún. $\mathbb{R}$-együtthatós első Čech kohomológia-csoportjának egy elemét adja. Ismert az algebrai topológiából, hogy egy nem egyszeresen összefüggő síkbeli tartományra ez a csoport nem-triviális (a körgyűrűre például pontosan $\mathbb{R}$). Valóban, a T_j tárgy d_j-vel való eltolásának hatása a $\sum_{i=1}^n d_{i-1,i}$ mennyiséget nem változtatja meg; könnyen végiggondolható másrészt, hogy ezen összeg az egyetlen akadálya annak, hogy két $(d_{i-1,i})_{i=1}^n$ szám n-est alkalmas d_j távolságokkal való eltolásokkal egymásba vigyünk. Azt kapjuk végeredményben, hogy egy lokálisan koherens ábrának akkor és csak akkor létezik ellentmondásmentes térbeli realizációja , ha az egyes részek egymáshoz való viszonylagos távolságainak összege 0. Escher lehetetlen ábráiban ez a mennyiség (amely értelmezhető pl. a Vízesésben a víz szintjének globális emelkedéseként) nem 0, ezért nem létezhetnek olyan 3-dimenziós alakzatok, amit ábrázolnának.

Azon ábrákra, amelyek lehetetlensége abban nyilvánul meg, hogy egy bizonyos alakzat alját vagy tetejét látjuk-e, hasonló érvelés érvényes a $G = \mathbb{Z}/(2)$ kételemű csoporttal.

Aperiodikus csempézések

A sík sokszögekkel való hézagmentes, át nem fedő kitöltését csempézésnek, egy csempézésben szereplő sokszögeket pedig az adott csempézés csempéinek nevezünk. Egy csempézést végesnek mondunk, ha csempéinek halmaza egybevágóság erejéig véges. Egy csempézést periodikusnak hívunk, amennyiben létezik két, egymással nem párhuzamos irányú eltolás, amely a csempézést önmagába viszi át (a csempék halmazát permutálja); ellenkező esetben a csempézést aperiodikusnak hívjuk.

A csempézések Kepler óta foglalkoztatják a matematikusok és művészek fantáziáját, utalhatunk például ismét Escher metszeteire.



Escher szabályos háromszögcsempézést illusztráló műve

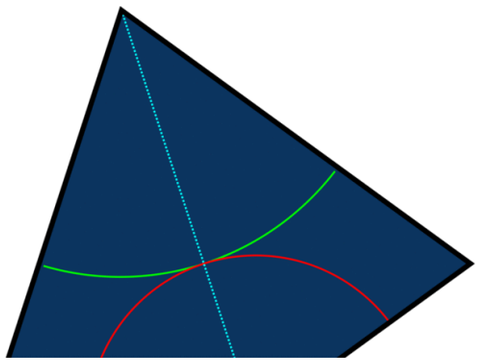
(Forrás: https://www.pleacher.com/mp/escher/reptile2.jpg (David Pleacher: Art of M C Escher)

Már Kepler is tudta, hogy amennyiben egy periodikus csempézés minden csempéje egybevágó szabályos sokszög, akkor ezek szükségszerűen szabályos háromszögek, négyzetek vagy szabályos hatszögek. (Az, hogy ilyen szabályos sokszögekkel valóban létezik periodikus csempézés, a négyzetminta esetén nyilvánvaló, a hatszög esetére ismert néhány fürdőszoba-padlóról és a méhkasok mintájáról, a háromszög esetén pedig például a szabályos hatszöggel való csempézésből és a szabályos hatszög hat szabályos háromszögre való oszthatóságából azonnal adódik.)

Érdekes következménye a fent említett ténynek, hogy szabályos ötszögekkel a sík nem csempézhető. Érvényes ugyanis a kristálytani korlátozásra vonatkozó tétel [4, 4.5. Fejezet]: Bármely kétdimenziós rács (azaz két, egymással nem párhuzamos eltolásra invariáns diszkrét ponthalmaz) bármely forgásszimmetriájának rendje 2, 3, 4 vagy 6. Azonban, Kepler 1619-ben azt is megmutatta, hogy szabályos ötszögekkel és további alakzatokkal (többek között pentagramokkal és szabályos tízszögekkel) a sík csempézhető. Érdekességként megjegyezzük, hogy a középkori iszlám díszítőművészetben is található ilyen csempézés, az ehhez használt csempéket girih-nek nevezik.

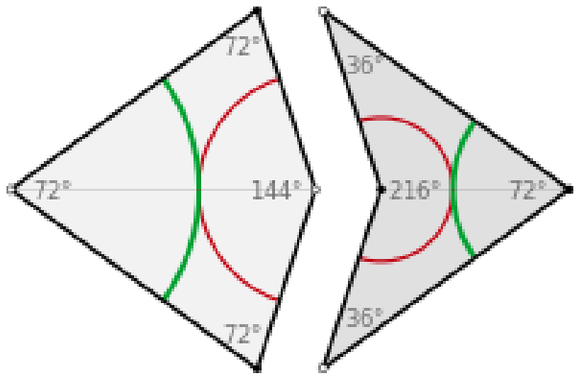
Kepler ezen gondolatai inspirálták R. Penrose-t, amikor 1974-ben elkészítette a sík egy olyan (aperiodikus) csempézését, amelyben három más alakzat mellett szabályos ötszögek is szerepelnek [8]. Ebben a csempézésben tehát egybevágóság erejéig összesen négy sokszög szerepel. Ezt a konstrukcióját továbbfejlesztve később további aperiodikus csempézéseket konstruált, lecsökkentve az ezekben szereplő sokszögek számát kettőre.

A lenti ábrán bemutatott P2 jelű csempézésben például két deltoid szerepel: egy konvex ún. sárkány (kite) és egy konkáv ún. nyílhegy (dart).



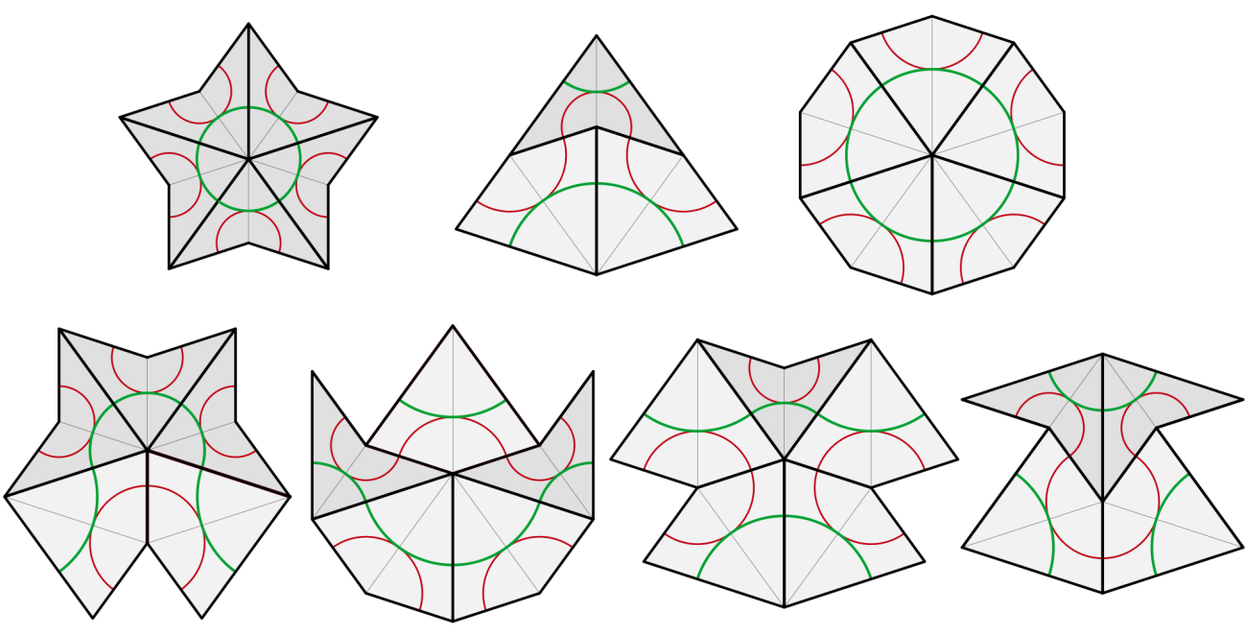
Egy P2 csempézés részletei (Forrás: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3e/RectangleFill.gif. Készítette: Przemek Majewski)

Mindkét deltoid a szimmetriatengelye mentén két egybevágó aranyháromszögre (azaz, olyan egyenlőszárú háromszögre, amelyek alapja és szára egymáshoz az aranymetszés $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ aránypárjában viszonyulnak) bomlik fel: a sárkány hegyesszögűekre, míg a nyílhegy tompaszögűekre, lásd a következő ábrát.



A sárkány és nyílhegy négyszögek (Forrás: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kite_Dart.svg. Készítette: Geometry Guy)

Az ezeket alkotó aranyháromszögek szögei a sárkány esetében 36, 72, 72 fokosak, míg a nyílhegyre ezek az értékek rendre 108, 36, 36. A felhasznált sárkány és nyílhegy rövidebb és hosszabb oldalhosszai megegyeznek. Azonnal látszik, hogy ekkor egy sárkányból és egy nyílhegyből összeállítható egy 72 és 108 fokos szögű rombusz, amelyből persze periodikus csempézés készíthető (mint bármely parallelogrammából). Annak érdekében tehát, hogy a kapott csempézés aperiodikus legyen, meg kell tiltani a csempék bizonyos összeillesztéseit. Az engedélyezett illesztéseket szokás például a négyszögekbe rajzolt, egyes éleket összekötő színes körívekkel jelölni: akkor és csak akkor szabad két négyszöget egymáshoz illeszteni egy él mentén, ha a két csempén az adott élt metsző azonos színű körívek egymással összeillenek; ilyen körívek vannak a fenti ábrán. Ez a megkötés csupán a következő ábrán bemutatott hét lehetőséget engedi meg a csúcsok körüli csempe-konfigurációknak.



A csúcsok körüli lehetséges illesztések (Forrás: Penrose vertex figures Wikimedia Commons)

Bebizonyítható, hogy ezzel a megkötéssel is létezik csempézés sárkányokkal és nyílhegyekkel, sőt, megszámlálhatatlanul végtelen sok egymással nem egybevágó ilyen csempézés létezik. Első ránézésre ezeknek a P2 csempézéseknek nincs sok közük a szabályos ötszögeket felhasználó csempézésekhez. Penrose és az előző lapszámban [10] méltatott John Conway azonban bebizonyították, hogy amennyiben a lapokra rajzolt színes körívekből álló valamely görbe zárt, akkor annak belseje az ötödrendű diéder-csoportra (azaz, a szabályos ötszög D_5 szimmetriacsoportjára) nézve invariáns; ráadásul, bármely P2 csempézésben mindkét színű görbéből legfeljebb kettő létezhet, amelyek nem záródnak. A legszimmetrikusabb esetben a teljes csempézés invariáns a D_5 csoportra, ilyen csempézés pontosan kettő létezik.

Az aperiodikus csempézések nem csupán elszigetelt matematikai kuriózumok: a teljesség igénye nélkül, olyan távolinak tűnő matematikai területekhez kapcsolódnak szervesen, mint a matematikai logikai döntési feladatok és a nemkommutatív geometria, a fizikában pedig az először 1982-ben megfigyelt kvázikristályok matematikai modelljei.

Tvisztorok

Egy 1967-es dolgozatában [6] Penrose bevezette a tvisztor-tér fogalmát, amely remekül illusztrálja, hogy munkássága egyszerre fizikai és matematikai jellegű. Amint azt később írta [9], e fogalom bevezetésével célja olyan alapvető fizikai problémák feloldása volt, mint például a kvantum-mezőelmélet végtelen mennyiségeinek megszüntetése, visszavezetni valamely alapelvre a csatolási állandók és elemi részecskék tömegének értékét, találni egy olyan kvantum-gravitáció elméletet, amely kompatibilis a téridő szingularitásaival stb. Ahogy azonban ugyanitt megjegyzi, ezen elmélet alkalmazásai ezidáig szinte kizárólag a matematikán belül találhatók.

Az eredeti konstrukció a lapos Minkowsi-téridőre vonatkozott, ám – mint az később kiderült – természetesen általánosítható bármely félig konformálisan lapos 4-dimenziós teljes M Riemann-sokaságra. A félig konformálisan lapos jelző azt jelenti, hogy a görbülettel kompatibilis, ún. Levi–Civita konnexió irreducibilis felbontásában az egyik tenzor (a W^+ pozitív Weyl-tenzor) eltűnik. (Ezekről a fogalmakról és eredményekről bővebben lásd korábbi cikkünket [11].) Tekintsük ekkor M érintőnyalábjának komplexifikáltját. Ha M spin sokaság, akkor ez a nyaláb felbomlik két 2-rangú komplex vektornyaláb összegére, amelyeket ekkor pozitív illetve negatív spinor-nyalábnak nevezünk, és $\Sigma^{\pm}$-val jelölünk. A Levi–Civita konnexió indukál egy-egy konnexiót $\Sigma^{\pm}$-on. Ekkor M tvisztor-tere a $\Sigma^+ \to M$ nyaláb fibrumonkénti $\pi\colon P(\Sigma^+) \to M$ projektivizáltjának Z-vel jelölt teljes tere (amely nem-spin M esetén is értelmezett). A tvisztor-tér tehát egy fibrálás M felett, amelynek fibrumai $\mathbb{C}P^1$ komplex projektív egyenesek. Konkrétan, egy $m \in M$ pont feletti fibrum a $T_m M$ érintőtérnek a Riemann-metrikával kompatibilis komplex struktúráit paraméterezi. Ezáltal, valamint a Levi–Civita konnexiót felhasználva, a Z tvisztor-téren természetesen lehet értelmezni egy majdnem-komplex struktúrát. Penrose egy tétele értelmében ez a majdnem-komplex struktúra pontosan akkor integrálható (azaz, látja el Z-t egy komplex analitikus sokaság-struktúrával), ha M félig konformálisan lapos. Például, ha M az S^4 gömb az $\mathbb{R}^5$-ből örökölt kerek metrikájával, akkor tvisztor-tere megegyezik a $\mathbb{C}P^3$ komplex projektív 3-dimenziós térrel; a $\pi\colon \mathbb{C}P^3 \to S^4$ leképezés megértését az olvasóra bízzuk (segítség: S^4 megegyezik a kvaternió-ferdetest feletti projektív egyenessel).

Ezen – elsőre meglehetősen bonyolultnak tűnő – konstrukciónak az az előnye, hogy bizonyos M-en értelmezett, fizikailag releváns elliptikus parciális differenciálegyenletek (mezőegyenletek) megoldásainak terét ekvivalensen le lehet írni, mint bizonyos Z-n értelmezett holomorf objektumok terét. Mivel általában holomorf objektumok meghatározására számos módszer ismert (pl. kohomológia-terek kiszámolása), azért ezáltal érdekes differenciálegyenletek megoldásait ismert módszerekre vezethetjük vissza. Legegyszerűbb példája ilyen megfeleltetésnek az ún. Penrose-transzformált, amely bijekciót teremt bármely $U \subseteq M$ nyílt halmaz esetén a konform-invariáns hullámegyenlet U feletti megoldásai és a $\pi^{-1}(U) \subseteq Z$ halmaz feletti bizonyos holomorf vonalnyaláb első kohomológia-csoportja között.

A tvisztor-tér alkalmazásokra talált egyéb területek mellett a differenciál- és integrálgeometriában, a csoport-ábrázolások elméletében, a fizikán belül pedig a kvantum-mezőelmélet szórási amplitudóinak kiszámításában.

Összegzés

Roger Penrose munkássága a felsoroltakon túlmenően kiterjed a (részben S. Hawking-gal közösen elért) szingularitási tételekre és az – azóta az általános relativitáselmélet egyik központi sejtésévé vált – kozmikus cenzor-hipotézisre. Ezekre a témákra e cikk folytatásában térünk ki.

Szabó Szilárd
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet és
BME TTK, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

Irodalomjegyzék

[1] https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/

[2] https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2020/penrose/facts/

[3] https://ematlap.hu/tudomany-tortenet-2020-10/937-a-monge-kantorovics-problema

[4] H. S. M. Coxeter, *A geometriák alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, 2. kiadás (1987).

[5] L. Penrose, R. Penrose, British Journal of Psychology, (Feb. 1958).

[6] R. Penrose, *Twistor Algebra*, Journal of Mathematical Physics **8** (1967) 345–366.

[7] R. Penrose, *On the cohomology of impossible figures*, Structural Topology **17** (1991), 11–16.

[8] R. Penrose, *The role of aesthetics in pure and applied mathematical research*, Bulletin of the Institute of Mathematics and Its Applications **10** (1974).

[9] R. Penrose, *Twistor Theory after 25 years – its Physical status and prospects*, in: London Mathematical Society Lecture Note Series **156** (1990), editors T. N. Bailey, R. J. Baston, 1–29.

[10] https://ematlap.hu/tudomany-tortenet-2020-12/998-stipsicz-titkos-conway-take2

[11] https://ematlap.hu/index.php/tudomany-tortenet-2018-06/688-hawking-matematikai-munkai

[12] https://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_tiling

Nobel-díj alkalmazott matematika alkalmazott fizika geometria

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Csapodi Csaba 2020. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

A 32. Varga Tamás Módszertani Napokról

A tavalyi jól sikerült nemzetközi Varga100 konferenciához csatlakozó rendezvény után idén a XXXII. Varga Tamás Módszertani Napokat az ismert körülmények miatt online szerveztük. Ez kettős érzéseket keltett a résztvevőkben: egyfelől sajnálatos volt, hogy személyesen nem találkozhattunk egymással, és az előadások is mások voltak a képernyőn keresztül, másfelől viszont lehetőségeket is rejtett magában ez a forma. Hiszen ilyen módon olyanok is felléphettek előadóként vagy csatlakozhattak hallgatóságként, akiknek eddig − például a távolság miatt − erre nem volt lehetősége.

A konferenciát 2020. november 6-7-én tartottuk a Microsoft Teams alkalmazás segítségével. A technikai lebonyolítás zökkenőmentes volt, pedig szombat délelőtt egyszerre három szekció közül is lehetett választani. Ami a résztvevők számát illeti: péntek délután a plenáris előadáson és a tanári fórumon körülbelül 70 fő, szombat délelőtt a három szekcióban összesen 150 fő, a szombat délutáni előadásokon újra 70 fő vett részt.

A program, az előadások anyagai és az egyes előadások rövid leírása a Varga Tamás Alapítvány honlapján olvasható. Néhány előadáshoz tartozó prezentáció itt megtekinthető.

Péntek délután: plenáris előadás és tanári fórum

A program nyitásaként Vancsó Ödön tartott előadást „Varga Tamás öröksége és jövőbeli kilátásai – az MTA-ELTE Korszerű Komplex Matematikaoktatási projekt eredményei” címmel. Az előadásból megismerhettük, hogy milyen oktatási kísérletek zajlottak és milyen anyagok születtek a kutatócsoport elmúlt 4 éves munkája során. Szó volt az ELTE matematika-didaktika doktori programjáról, amelynek munkájára a projekt nagy hatással volt. Az előadó (a kutatócsoport vezetőjeként) bemutatta a tavalyi Varga100 nemzetközi konferencia frissen megjelent közleményeit két TMCS különszámban és a WTM német kiadó kötetében. Végül szó esett a jövőbeli tervekről és az érdeklődők bekapcsolódásának lehetőségeiről.

Az előadás után került sor az idei Varga Tamás Emlékdíjak átadására és a díjazottak bemutatására. Ebben az évben Demeter Ilona, Baba néni (ELTE Gyakorló Óvoda), Pereczes Marianna (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium) és Vásárhelyi Éva (ELTE TTK) részesült az elismerésben, ezúton is gratulálunk nekik!

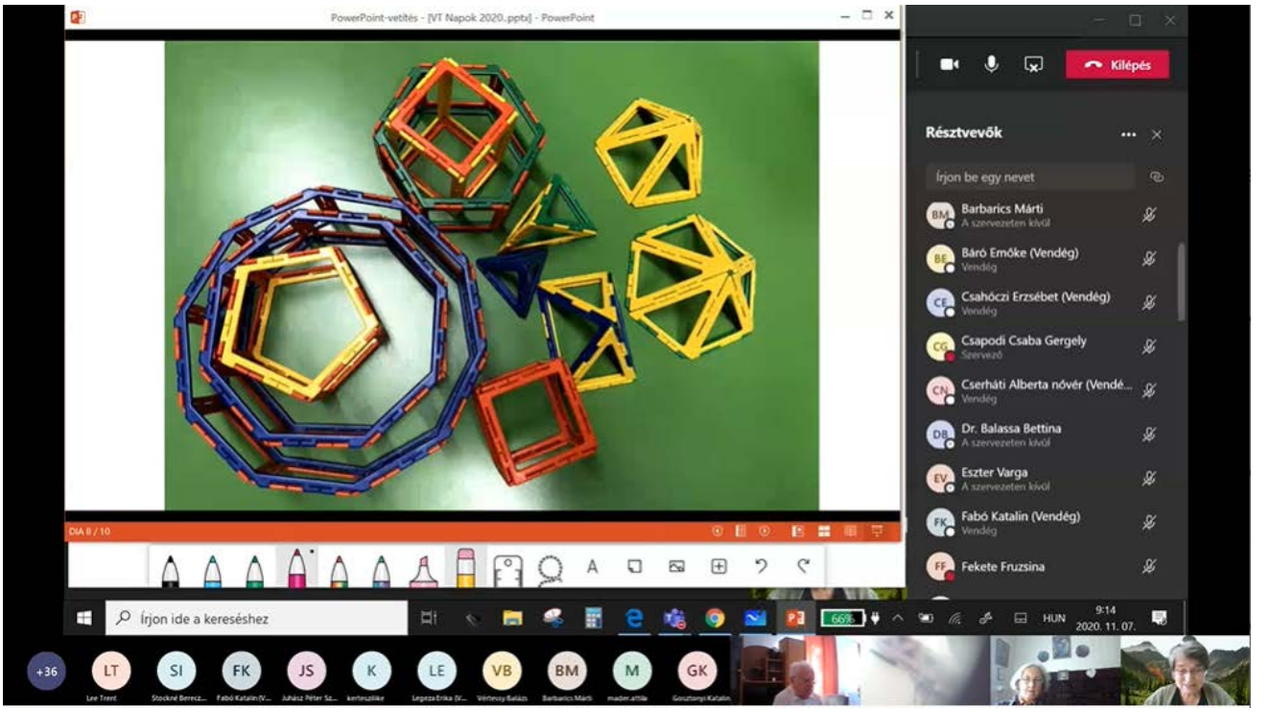
17 órakor kezdődött és a tervezettnél kicsit hosszabbra nyúlt a fórum a fokozódó matematikatanár-hiányról. A beszélgetésből kirajzolódó kép azt mutatta, hogy az iskolákban valóban nagy hiány van matematikatanárból. Az elméleti megfontolásokból az is kiderült, hogy a közeljövőben ez a hiány várhatóan gyorsuló ütemben fog nőni. A délután folyamán sikerült néhány okot is felderíteni és megnevezni, sőt, a matematika tanárszak népszerűsítésére konkrét ötletek is elhangzottak. Azt a fórum résztvevői kénytelenek voltak megállapítani, hogy a tanári pálya vonzóbbá tétele kívül esik a lehetőségeik körén.

Szombat reggel: angol szekció

A Varga Tamás Módszertani Napoknak hagyományos része az angol nyelvű szekció. Ennek keretében idén a BSME (Budapest Semesters in Mathematics Education) amerikai illetve kanadai diákjai mutatták be a matematika tanításával kapcsolatos kutatásaikat. Az előadások értékét növelte, hogy a diákoknak a magyarországi kezdés késő éjszakai időpontot jelentett, de ők ennek ellenére szívesen vállalták az előadásokat. Szó volt a felfedeztető tanítás nehézségeiről és két előadást is hallhatunk a Pósa-módszerről. Jó volt látni, hogy a felkészült fiatalok mennyire ügyesen, lazán adtak elő.

Szombat délelőtt: szekcióelőadások

Az első szekció első előadója Jakucs Erika, a Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium tanára volt, aki azt mutatta be, hogyan lehet a hasábokkal és gúlákkal felfedeztető módon megismertetni a felsős tanulókat. Több, fizikai eszközökkel megvalósítható játék után arra is mutatott példát, hogyan helyezhetők át ezek a játékok az online térbe.



A második előadást Máder Attila, Torma Bence és Torma Gábor tartotta a távoktatás szegedi középiskolai és egyetemi tapasztalatairól. Előadásukban számba vették a távoktatással kapcsolatos szervezési kérdéseket, problémákat, és bemutattak számos általános oktatásban, illetve speciálisan matematikaoktatásban használható programot és platformot.

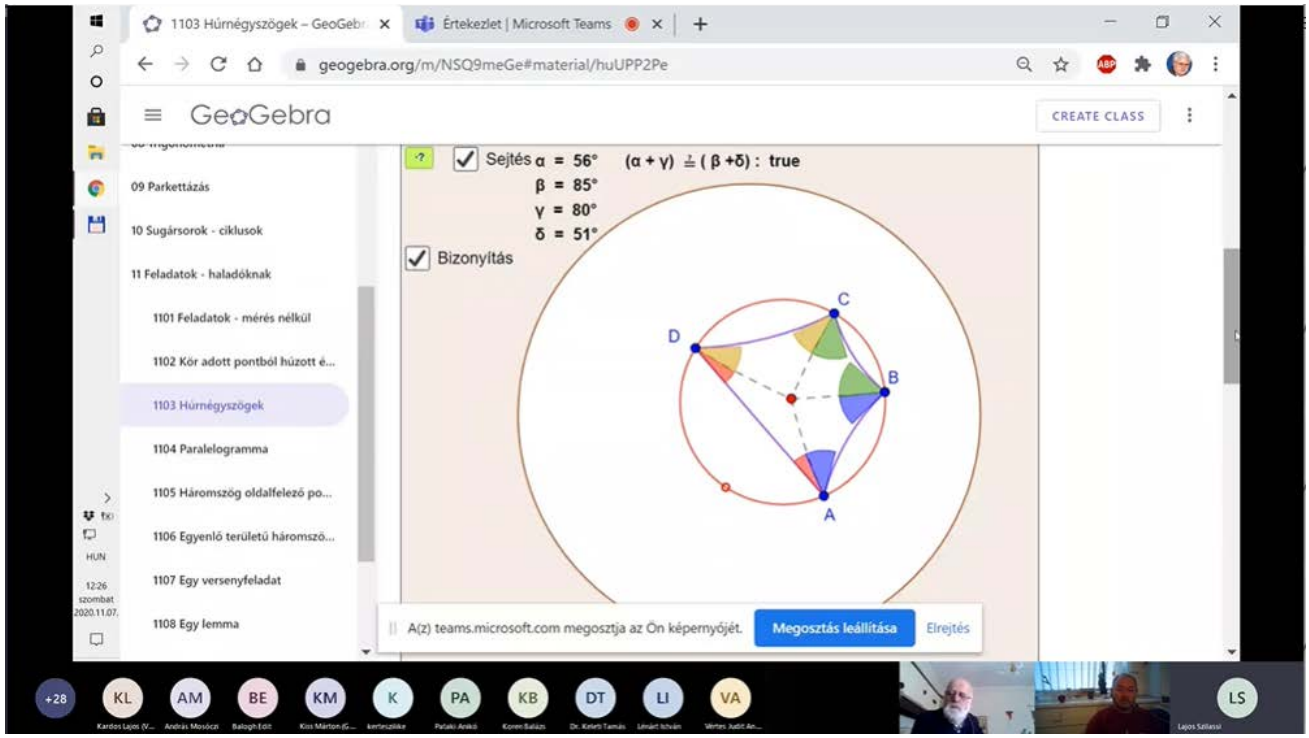
A harmadik előadásban Fried Katalin, az ELTE oktatója válogatott jó példákat tanárszakos hallgatók online tananyagaiból, amelyeket különféle eszközökkel (Latex, GeoGebra) készítettek.

A második szekcióban elsőként Ambrus Gabriellát hallgattuk meg, aki az MTA−ELTE Korszerű komplex matematikatanítási projektben is kutatott „tanulói gondolkodás vizsgálata nyitott feladat alkalmazásával” témát mutatta be. Elhangzott, hogy az érdeklődő kollégák bekapcsolódhatnak az iskolai kísérletekbe.

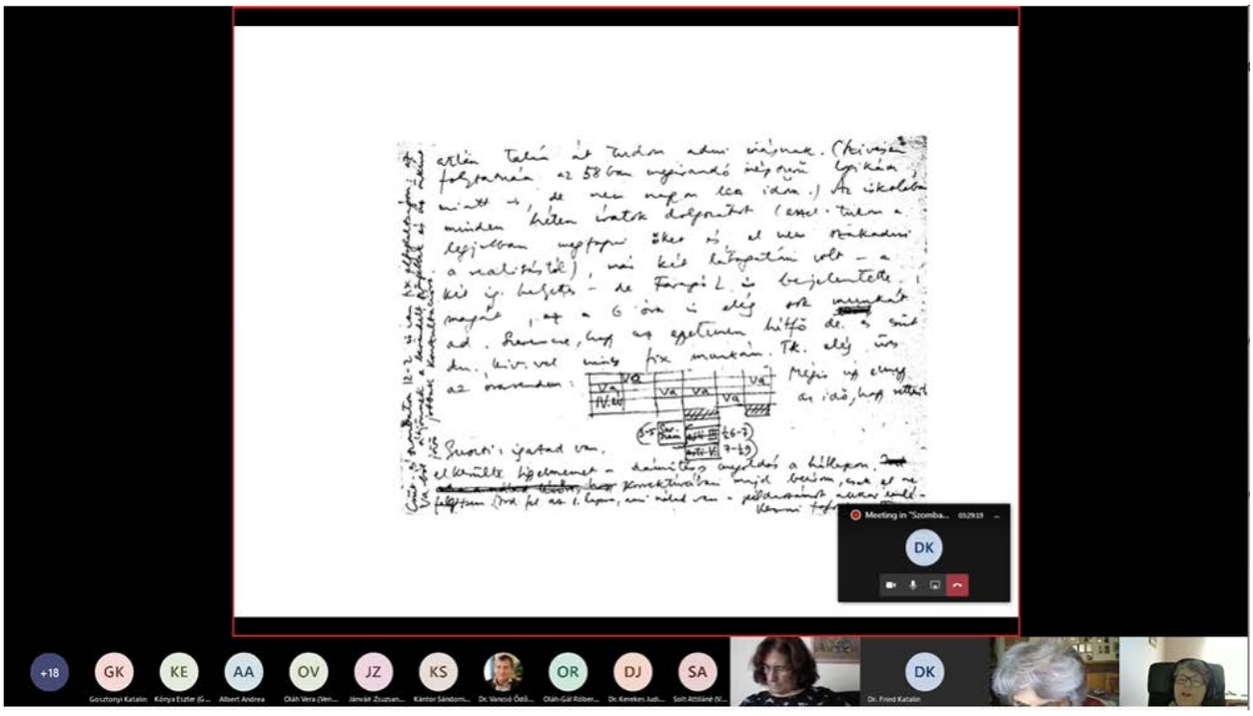
Második előadónk Marczis György gyulai matematikatanár volt, aki egy 9. évfolyamos diákoknak szóló diagnosztikus mérésről és annak 2020-as eredményeiről, azok elemzéséről beszélt. Kimutatta, hogy a függvény témakör bizonyult a legnehezebbnek a tanulók körében.

Zárásként Munkácsy Katalin beszélt az analízis tanításának korai kezdéséről és a függvényfogalom korán kezdhető, tapasztalati fejlesztéséről. Több GeoGebra applikációt mutatott be, amelyek vele együttműködő kolléganője, Stettner Eleonóra (Kaposvári Egyetem), a PUSE EU-s projekt szakmai koordinátora és szakértője segítségével készültek. Mindketten a felsőoktatásban alkalmazott analízis anyag tanítási nehézségeit próbálják orvosolni. Katalin a biológusok tanítása közben szerzett tapasztalatait, míg Nóra a kaposvári gazdasági matematikát tanulók köréből származó tapasztalatait osztotta meg.

A harmadik szekcióban két „klasszikus”, Lénárt István és Szilassi Lajos tartott előadást a hétvégén otthonukban a számítógépeik előtt ülő hallgatóságnak, Mindketten nemeuklideszi geometriákról beszéltek, de míg Lénárt István előadására a szférikus excesszus, addig Szilassi Lajoséra a szférikus defektus volt jellemzőbb. Mindkét előadás, bár különböző eszközöket használva, segítséget jelenthet az online oktatásban. Lénárt István nagy lelkesedéssel mutatta meg, milyen, otthon is könnyen hozzáférhető eszközökkel sikerült felfedeztetni a tavaszi időszakban a lakásukban rekedt tanulókkal a gömbi geometria számos érdekes eredményét. Szilassi Lajos meg ötletes, mély gondolatokat ébresztő GeoGebra alkalmazáson mutatta be a hiperbolikus sík Poincaré-féle modelljét.



A negyedik szekcióban Földesi Katalin nagyon érdekes kortörténeti iratokat, leveleket mutatott be az előadásán. Varga Tamásnak az előadó szüleivel, Reményi Gusztávval és Reményi Katalinnal folytatott levelezéséből próbálta rekonstruálni Varga Tamás kísérleteinek első, bizonytalan lépéseit. Fény derült Varga Tamás eltökéltségére, kétségeire, a kísérletek szakmai fogadtatására és nagyon gyorsan elért látványos sikereire. A személyes hangvételű előadás Varga Tamás kézírásos levelein alapult, amelyeket csak kevesen ismerhettek, így pontosítva korábbi elterjedt, és az emlékezetre hagyatkozva talán eddig tévesen publikált adatokat.



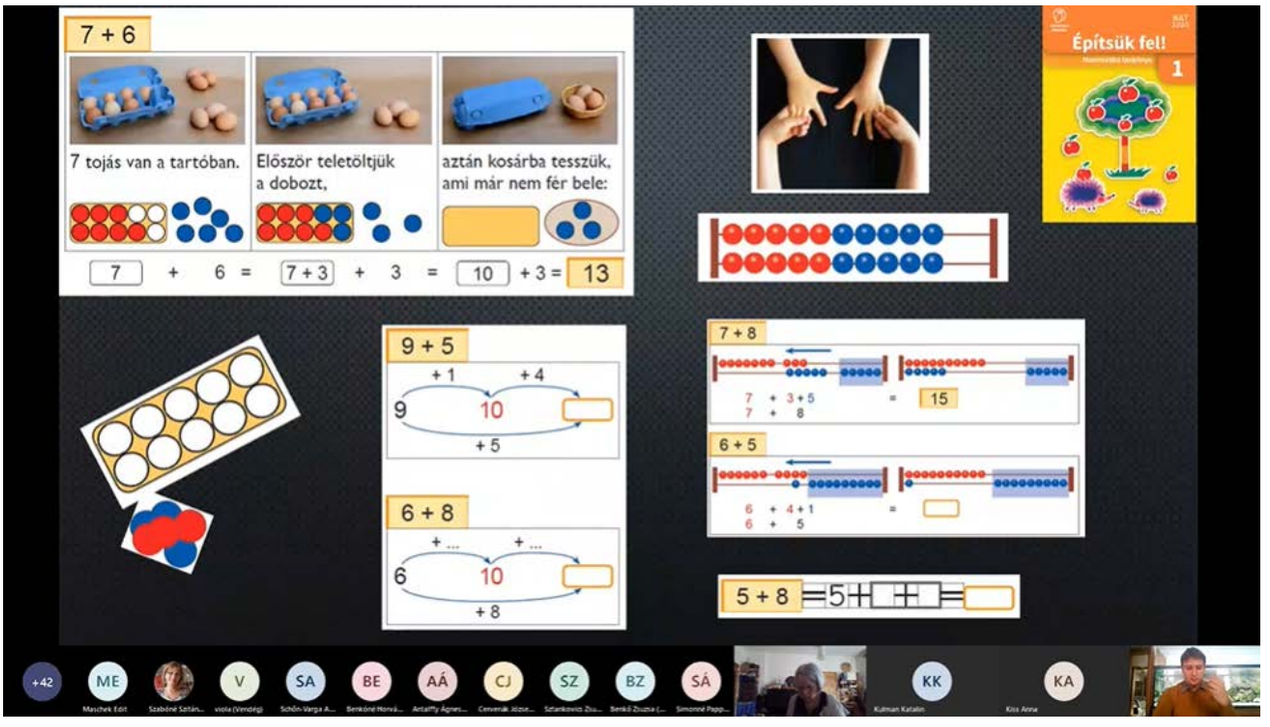
Oláh-Gál Róbert erdélyi matematikus, matematikatörténet-kutató előadásában Varga Tamás ükapját, id. Szemerjai Szász Károlyt és matematikai munkásságát méltatta. Beszélt matematikai eredményeiről, az oktatásban betöltött szerepéről. Több híressé vált neves utódjáról, a tágabb Szász és Varga családról mutatott be és mesélt nagyon érdekes részleteket. Az előadást követő kötetlen beszélgetésből tudhattuk meg, hogy a hallgatók sorában helyet foglaló Szász Domokos egyetemista koráig maga sem tudott Szász Pálhoz fűződő rokoni kapcsolatáról.

Földesi Katalin és Oláh-Gál Róbert előadásának hangulatát emelte, hogy a Varga, illetve a Szász család tagjai is a hallgatók sorában ültek.

Matematikát Tanítók Klubja

A Matematikát Tanítók Klubja az ELTE TÓK Matematika Tanszékének hagyományos rendezvénye, amely egy külön szekciót kapott a Varga Tamás Módszertani Napok szombati napján. A programon elsősorban az alsó tagozaton matematikát tanító pedagógusoknak szóló előadásokon vehetett részt a hallgatóság. A szekcióban különös tekintettel a járványügyi helyzetre és a tavaszi félév karanténidőszakára, a digitális eszközök matematika órai használatáról, a fejlesztéssel kapcsolatos lehetőségekről és a korosztályi sajátosságoknak megfelelő eszközválasztásról tartottak érdekes előadásokat

A szekciót Móricz Márk előadása nyitotta, melyben az Építsük fel! − Egy értékőrző matematikakönyv új kiadása címmel mutatta be a Varga Tamás-i hagyományokat őrző, C. Neményi Eszter és Oravecz Márta által készült és az előadó közreműködésével felújított 1. osztályos matematikakönyvet. Az előadást nagy örömmel fogadták a résztvevők és a TÓK Matematika Tanszékének oktatói is, hiszen kiderült az is, hogy nagy valószínűséggel újra visszakerülhet a tankönyvpiacra ez a tevékenységalapú matematikakönyv.



A szekció további előadói az ELTE TÓK Matematika Tanszékének oktatói voltak. Ökördi Réka előadásában bemutatta azt a hiánypótló programot, amelyet az SZTE Oktatáselméleti Kutatócsoportja fejlesztett az eDia rendszerben. A készségfejlesztő program az alsó tagozatos diákok hátrányainak kompenzálását és felzárkóztatását segíti a matematika és az olvasás területén. Részletezte a fejlesztő program matematika területének koncepcióját, felépítését, témaköreit és alkalmazási lehetőségeit.

Bagota Mónika megismertette a hallgatóságot a kisiskolás gyerekek életkori sajátosságainak megfelelő, online logikai játékokkal. A játékok nemcsak a logikus gondolkodást, hanem például a négy alapművelet valamelyikének (vagy esetlegesen mindegyikének) gyakorlását is segítik. A bemutatott rejtvények között voltak olyanok, amelyek megfejtéséhez helyes térbeli tájékozódásra van szükség, míg másoknál gráfokkal kapcsolatos tulajdonságok is előkerülnek a logikai rejtvények megoldása során.

Kulman Katalin egy olyan, a Magyar Digitális Oktatásért Egyesület által megvalósított pedagógus-továbbképzés gyakorlati tapasztalatait mutatta be, amely a digitális eszközök tanórai alkalmazását segíti és támogatja. A képzés résztvevői alsó tagozaton elsősorban matematikát tanító pedagógusok voltak. A képzés harmadik periódusa a tavaszi karantén időszakában valósult meg, így az előadó nagyon sok jó ötlettel, új ismeretközlő tananyagokkal, gyakorló feladatokkal, és a tanulók értékelése szempontjából hasznos megoldásokkal is találkozott. Ezekből a „jó gyakorlatokból” válogatott néhányat az előadásába.

Pintér Marianna előadásában az interneten elérhető digitális tananyagok, játékok sokféleségére, és a megfelelők kiválasztásának nehézségeire világított rá. Ezek az anyagok igen széles spektrumon szórnak tartalmi, megvalósítási és esztétikai szempontból egyaránt. Előadásában arra tért ki, hogy milyen tantárgy-pedagógiai, módszertani elvek és célok mentén érdemes a digitális tananyagok, feladatok, játékok közül válogatni. Az előadásban minden szempontot, állítást egy-egy az interneten szabadon elérhető „játékkal” támasztott alá.

Az érdeklődők száma mutatta a konferencia népszerűségét. Későbbi kérdéseik, megjegyzéseik pedig igazolták, hogy a programon számukra hasznos témákról hallhattak. Az előadásokról készült felvételek és a bemutatott diasorok hamarosan felkerülnek az ELTE TÓK Matematika Tanszékének honlapjára.

Diákprogram

A diákprogramon két lelkes tanár 16 diákja vett részt. Kicsit nehézkessé tette a máskor teljesen interaktív, közös játékot, hogy ezúttal online folyt a program. Az interaktív játék helyett igyekeztünk érdekes fejtörő kérdéseket válogatni, készülve arra, hogy nem tudunk odamenni a tanulókhoz, meghallgatni egy-egy jó ötletet – a megbeszélést ezúttal a diákokra kellett hagynunk. Három csoportra osztottuk a jelentkezőket. Tizenhat feleletválasztós kérdésre kellett válaszolniuk, és minden válaszhoz egy-egy kis kép kapcsolódott, ezeket kellett letölteni. A cél: a 16 képecskéből kirakni egy nagyobb képet. Mivel minden képecskét szabadon el lehetett érni, így ha egy-egy kérdésre nem is tudták a választ, a kép alapján még mindig lehetett tippelni. Ebben az online formában nem is tudtuk volna megtiltani az együttműködést, a tippelést – de nem is állt szándékunkban, hiszen csak játszottunk. Végül a megadott időkeretet kissé túllépve, de sikerült összeállítani a képet. Külön köszönet illeti a két lelkes tanárt, aki idén benevezte a tanulóit: Kistelekiné Csiki Erika hűséges kollégánkat, valamint Kónyáné Baracsi Beátát, aki idén először (de reméljük nem utoljára) jött el a programra. Reméljük, jövőre személyesen is találkozhatunk!

Szombat délután: plenáris előadások

A program zárásaként két könyvbemutatón és az azokat követő beszélgetésen vehettek részt az érdeklődők.

Először Pintér Gergő beszélt a frissen megjelent *Új világok teremtése − Geometriai képzetek és képződmények* című könyvéről, amelyben az emberi élet és a tudományos világkép közötti szakadékot próbálta áthidalni. A könyvet laikus közönséghez szóló, közérthetőnek szánt stílusban írta. Az előadásban szó esett arról is, hogyan lehet felhasználni az ott ismertetett témákat a tanításban.

Ezután Mosóczi András mutatta be *A gondolkodás forradalma* című könyvét, amelyben többek között arra a kérdésre keresi a választ, hogy miként lehet a matematika szükségességét bemutatni a diákok számára az iskolában. Olyan problémákról beszélt, amelyek érintik a mindennapjainkat, és amelyekről sokszor nem is látható, hogy milyen matematikai ismeret húzódik a megoldásuk mögött.

Csapodi Csaba, Fried Katalin, Gosztonyi Katalin, Korándi József, Vancsó Ödön

ELTE TTK, Matematikatanítási és Módszertani Központ

Kulman Katalin

ELTE TÓK, Matematika Tanszék

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

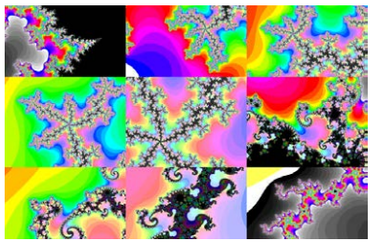
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

.AZ **INTERJÚ-PORTRÉ** MENÜPONT JÓL VAGY KEVÉSBÉ ISMERT MATEMATIKUSOKAT, VAGY OLYAN, EGYKOR MATEMATIKUSKÉNT VÉGZETTEKET SZERETNE BEMUTATNI, AKIK MA MÁS SZAKMA ELISMERT KÉPVISELŐI, SPORTOLÓK, MŰVÉSZEK...(ROVATSZERKESZTŐ: *OLÁH VERA*.)



Buczolich Zoltán
2020. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Tíz éve halt meg Benoît Mandelbrot, a fraktálgeometria atyja

Mandelbrotot a tiszta elméleti kutatások helyett az alkalmazottabb területek érdekelték. Kutatásai számos tudományterülethez kapcsolódtak, például a statisztikus fizikához, meteorológiához, közgazdaságtanhoz, orvostudományhoz, turbulens áramlások elméletéhez, mérnöki tudományokhoz, káoszelmélethez...No és az ő találmánya a fraktál és a Mandelbrot-halmaz. Mindezekről színes képet fest nekünk *Buczolich Zoltán*. Tovább...

Totik Vilmos
2020. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Nekrológ: Dr. Leindler László

Tudományos tevékenysége a klasszikus analízis területére esik, elsősorban a Fourier- és ortogonális sorok elméletére, de jelentős eredményeket ért el függvényterekkel, sorozatok osztályaival, beágyazási tételekkel és egyenlőtlenségekkel kapcsolatban is. Rendkívül szerény egyéniség volt, saját, gyakran szemléletformálóan átütő eredményeit legtöbbször „apróságnak”, „kis javításnak” nevezte. Leindler László 2020. szeptember 18-án bekövetkezett halálával egy kimagasló életpályájú tudóst, tanárt és kollégát veszítettünk el – írja *Totik Vilmos*. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Nemzeti Kulturális Alap

Buczolich Zoltán 2020. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Tíz éve halt meg Benoît Mandelbrot, a fraktálgeometria atyja

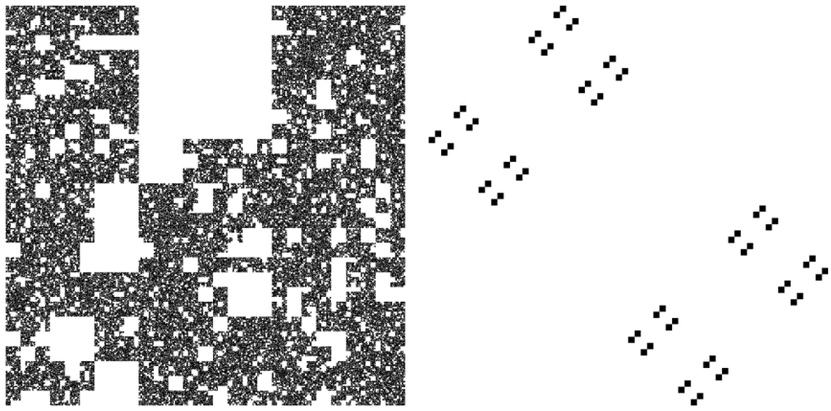
1. ábra. B. Mandelbrot

(Fénykép forrása: Rama – A feltöltő saját munkája, CC BY-SA 2.0 fr, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4831595)

Benoît Mandelbrot 1924-ben Varsóban született és 2010. október 14-én halt meg Cambridge-ben (Massachusetts, USA). A fraktálgeometria megteremtője volt. Sokat elárul róla önéletírásának [8] címe: The Fractalist: Memoir of a Scientific Maverick (A fraktalista: egy a maga útját járó tudós önéletírása). Zsidó származása miatt 1936-ban, tizenegy éves korában családjával a náci terjeszkedés elől Párizsba menekül. Apai nagybátyja a matematikaprofesszor Szolem Mandelbrojt már 1920 óta élt Franciaországban, doktorátusát Jacques Hadamard témavezetésével szerezte és tanítványai között olyan kiváló matematikusok szerepeltek, mint Paul Malliavin, Jean-Pierre Kahane és Yitzhak Katznelson. A nagybácsi igen nagy hatással volt Mandelbrot fejlődésére, matematikussá válására. Az pedig, hogy segítette Mandelbrot szüleit mint gazdasági és politikai menekülteket megtelepedni Franciaországban, megmentette az életüket. A második világháború idején a német megszállás alatt nem maradhattak Párizsban, délebbre Tulle-be menekültek. A világháború végén, 1944-ben tértek vissza Párizsba.

Előbb a lyoni Lycée du Parc hallgatója, majd a nagyhírű elitképző párizsi École Polytechnique-re jár. Mesterszakos diplomáját az Egyesült Államokban a California Institute of Technology-n szerzi meg aeronautikából. Doktori (Ph.D.) fokozatát matematikából a Párizsi Egyetemen (Sorbonne) kapta 1952-ben. 1955-ben feleségül vette Aliette Kagant, és előbb Genfbe költözött, kicsit később pedig a Lille-i Egyetemen dolgozott. 1958-ban nyári munkát vállalt az IBM-nél. A nyári munkából 35 évig tartó együttműködés lett. Az IBM-nél hozzájutott ahhoz a számítógépes kapacitáshoz, ami végülis lehetővé tette, hogy a fraktálgeometria atyjává váljon. Az IBM Thomas J. Watson Research Centerben 1980 március elsején elsőnek pillanthatta meg számítógépes képen azt a halmazt, amit később Adrien Douady a tiszteletére Mandelbrot-halmaznak nevezett el.

Mandelbrotot a tiszta elméleti kutatások helyett az alkalmazottabb területek érdekelték. A magát egy szűkebb területen beásó kutató helyett polihisztor volt. Kutatásai számos tudományterülethez kapcsolódtak, például a statisztikus fizikához, meteorológiához, közgazdaságtanhoz, orvostudományhoz, turbulens áramlások elméletéhez, mérnöki tudományokhoz, káoszelmélethez...



2. ábra. Balra fraktálperkoláció, jobbra egydimenziós fraktál

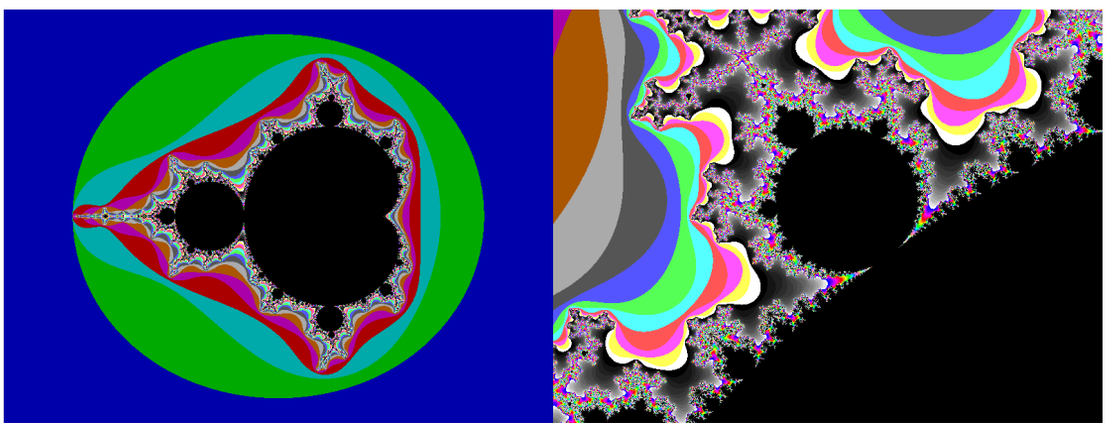
A matematikában gyakran és előszeretettel tanulmányozott sima függvények, felületek helyett a durva, egyenetlen és kaotikus dolgok érdekelték, hiszen a valóságban is inkább ezeket látjuk. Legyen szó egy magashegyi tájról, a Hold felszínéről, egy brokkoliról, egy vadul kanyargó folyóról, a tüdő vagy az agy felszínéről, a BUX, vagy a Dow Jones index alakulását leíró görbéről, vagy mondjuk Norvégia partvonaláról. A fraktál szó az ő alkotása volt a latin frāctus = törött, tört szóból. Általában a matematikában precíz definíciókhoz szokott az ember, azonban egy tudományág, melyet egy Mandelbrothoz hasonló „nyughatatlan” tudós indított útjára, kivétel. Tíz évvel ezelőtt, pár nappal Mandelbrot halála után az origo egyik újságírója felhívta az egyetemünket és néhány átkapcsolás után nekem kellett beszélni vele Mandelbrotról és a fraktálokról. Arra kért, hogy pár mondatban foglaljam neki össze Mandelbrot munkásságát, meg még azt is, hogy mi a fraktálgeometria. Ezután egy meglehetősen szórakoztató párbeszéd következett, hiszen a matematika tudománynépszerűsítésében éppen az a nehéz, hogy sok fogalmat csak több éves tanulmányok után lehet megérteni. Ráadásul a fraktálok esetében még ott van a fogalom precíz definíciója körüli bizonytalanság is. Mindenesetre az origo akkori cikke [14] még most is fenn van az interneten. Hivatalosan, az angol nyelvű wikipédia [12] szerint: „In mathematics, a fractal is a self-similar subset of Euclidean space whose fractal dimension strictly exceeds its topological dimension.” Így az origo újságírója azt kérdezte tőlem, hogy akkor ugye a fraktálok önhasonló halmazok, amire persze az volt a válaszom, hogy gyakran azok, de nem mindig. Például e cikkben később említem és ábrákkal is illusztrálom a véletlen/sztochasztikus folyamat segítségével definiált Mandelbrot-/fraktálperkoláció során előálló halmazokat, amelyek pont a véletlen folyamat eredményeképpen nem lesznek önhasonlóak (legfeljebb csak sztochasztikus értelemben). A következő, a fraktálok elnevezése által sugallt definíció az lehetne, hogy olyan halmaz, mely tört-, azaz nem egész dimenziós. Persze vannak egész dimenziós halmazok, amelyeket a matematikusok szeretnek fraktálnak tekinteni, például a 2. ábra jobb oldalán van egy ilyen alakzat, pontosabban ezen fraktál konstrukciójának negyedik lépésénél kapott ábra. Ennek készítéséről később még írok.

Szórakoztató azt olvasni [12], hogy Mandelbrot szerint hogy módosult a fraktál definíciója: először „gyönyörű, átkozottul kemény, egyre hasznosabb. Ez a fraktál”. Később jött az 1982-es hivatalosabb, korábban már idézett „olyan halmaz, amelynek Hausdorff-Besicovitch dimenziója szigorúan nagyobb, mint a topológiai dimenziója”. Később ezt a definíciót túl szorosnak tartotta, így a következő általánosabb (de a matematikai precizitástól távolabb eső) „definícióval” állt elő: „egy fraktál olyan alakzat, amely az eredetihez valamilyen módon hasonló darabokból áll”. Még később: „a fraktál fogalmát nem definiáljuk precízen, a fraktáldimenziót valamennyi változatra alkalmazható gyűjtőfogalomként használjuk”.

3. ábra: Mandelbrot 2003-ban a BME-n

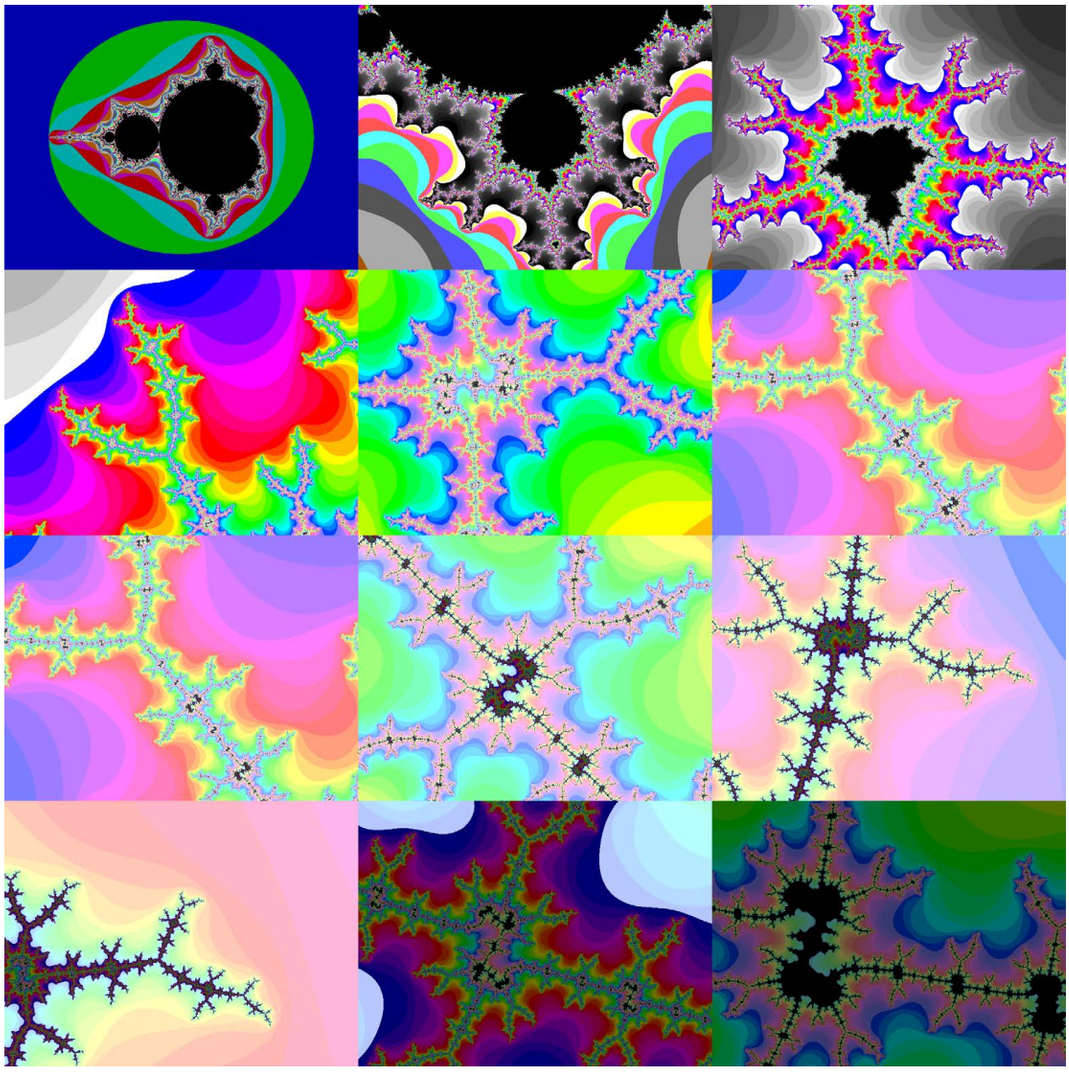
Mandelbrot Neumann János utolsó posztdok hallgatója volt 1953-54-ben Princetonban. Nem véletlen, hogy a 2003-ban, Neumann születésének 100-ik évfordulóján Budapesten tartott VIII. Országos (centenáriumi) Neumann Kongresszuson részt vett. A mellékelt két képet én készítettem a Műegyetemen tartott előadásán. Ezek közül persze Mandelbrot a Mandelbrot-halmaz előtt az a kép, amit különösen kedvelek bár az előadótermi vetítés miatt Mandelbrot nincs túl jól megvilágítva.

Mi is ez a Mandelbrot-halmaz? Tekintsük a legegyszerűbb leképezéseket a komplex számok fölött. A lineáris leképezések viselkedése túl egyszerű, így másodfokúakat véve vegyük az $f_c(z) = z^2 + c$ leképezéseket, ahol c egy tetszőleges rögzített komplex szám. Ha valaki nem szokott komplex számokkal dolgozni, akkor persze $z = x + iy$, $c = c_1 + ic_2$, $i^2 = -1$ helyettesítés után nyugodtan gondolhat az xy-síkon értelmezett $F_{c_1,c_2}(x, y) = (x^2 - y^2 + c_1, 2xy + c_2)$ leképezésre is. Diszkrét dinamikus rendszerek elméletében arra vagyunk kiváncsiak, hogy egy rögzített transzformáció, függvény ismételt alkalmazása során mi történik. Azaz, ha veszünk egy rögzített z_0 kiinduló pontot, akkor azt szeretnénk tudni, hogy a $z_1 = f_c(z_0)$, $z_2 = f_c(z_1) = f_c(f_c(z_0))$, ..., $z_n = f_c(z_{n-1}) = f_c^n(z_0)$, ... sorozat, a z_0 pont pályája/orbitja hosszú távon, hogyan viselkedik. A Mandelbrot-halmaz konstrukciója során z_0-t 0-nak választjuk, és azt vizsgáljuk, hogy egy adott $c = c_1 + ic_2 = (c_1, c_2)$ értékre az $f_c^n(0)$, $n = 1, 2, \ldots$ pálya korlátos-e. Pl. könnyen látható, hogy ha $c = 0$, akkor $f_c(0) = 0^2 + 0 = 0$, azaz a 0 a rendszer fixpontja, így $f_c^n(0) = 0$, minden n-re, tehát a 0 pont pályája korlátos. Azt sem nehéz belátni, hogy ha mondjuk $c = 10$, akkor $f_c(0) = 10$, $f_c^2(0) = 10^2 + 10 > 10 \cdot f_c(0)$, és általában $f_c^n(0) \geq 10^n$, azaz az $f_c^n(0)$ pálya nem korlátos, a ∞-hez tart.



4. ábra: A Mandelbrot-halmaz és annak egy részlete

A Mandelbrot-halmaz azon c paraméterértékek halmaza, amelyekre az $f_c^n(0)$, $n = 1, 2, \ldots$ sorozat korlátos. Ezen paraméterértékeknek megfelelő képpontok a 4. ábrán a fekete „tócsa” pontjai. A szép színes ábra többi részletéhez egy kis magyarázatra van szükség. Több programmal is tanulmányozhatjuk a Mandelbrot-halmazt, annak részleteit és más fraktálokat is. E cikk készítése közben én a Fractint, illetve a Chaospro programokat használtam. E programokat rövid Google-keresés után bárki letöltheti, és saját maga is felfedezheti a Mandelbrot-halmaz és a fraktálok csodálatos világát. A Mandelbrot-halmaz szokásos ábrázolása során, pl. a 4. ábra rajzolása közben az általam használt Fractint egy referenciakört tekint, ami az ábra készítése közben 4 sugarú volt, ezután a képpontokat aszerint színezi, hogy mi az a legkisebb n érték, melyre $f_c^n(0)$ már nem tartozik e kör belsejéhez. A referenciakör sugarát olyan nagyra szokás választani, hogy ha egy c paraméterértékre és n-re $f_c^n(0)$ már nem tartozik hozzá, akkor ebből következik, hogy $|f_c^n(0)| \to \infty$. A 4. ábrán pl. a nagy zöld krumpli pontjainak megfelelő c értékekre a második, a belsejében levő világoskék zóna pontjai esetében pedig a harmadik iterálásnál kerül ki $f_c^n(0)$ a referenciakörből. A színezési mód változtatásával persze más és más „művészi hatás” érhető el. A következő 5. ábrán egy nagyítási sorozatot látunk, azaz az egymást követő képek az előző kép egy kis részletének továbbnagyításával keletkeztek. A Mandelbrot-halmaz már átlagos számítógépek és programok mellett is lélegzetelállító módon nagyítható. Az 5. ábra jobb alsó sarkában levő kép kb. 10^{12}-szeres nagyításnak felel meg, ami azt jelenti, hogy ha a kiindulási Mandelbrot-halmazt 1 méteresnek vesszük, akkor a kinagyított részlet egy hidrogénatom átmérője körüli. Ez persze eltörpül a profi Mandelbrot-zoomolók teljesítménye mellett youtube videókban [4]-ben 10^{275}-szörös, [7]-ben pedig 10^{4004}-szeres nagyítási mélységig pillanthatunk bele a Mandelbrot-halmazba. A valós anyagi világunk méreteitől messze elszakadnak ezek a nagyítási nagyságrendek, valószínűleg a fizika sohase jut le a 10^{-4004} méteres tartományba.

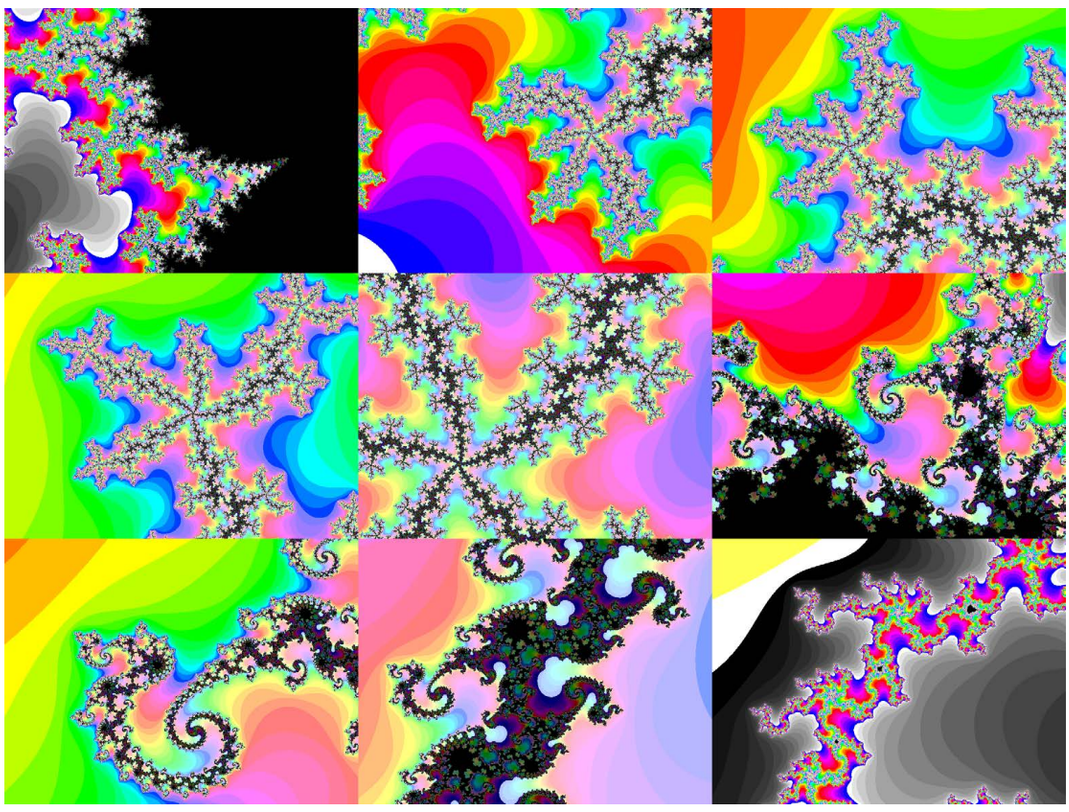


5. ábra: Nagyítási képsorozat a Mandelbrot-halmaz egy részletére

Nem kívánok versenyezni a 10^{4004}-szeres nagyítást elérő szuper videoklipekkel, de azért lejátszható a következő, a Mandelbrot-halmaz részleteire ráközelítő Chaosproval készített saját készítésű kis videoklip:

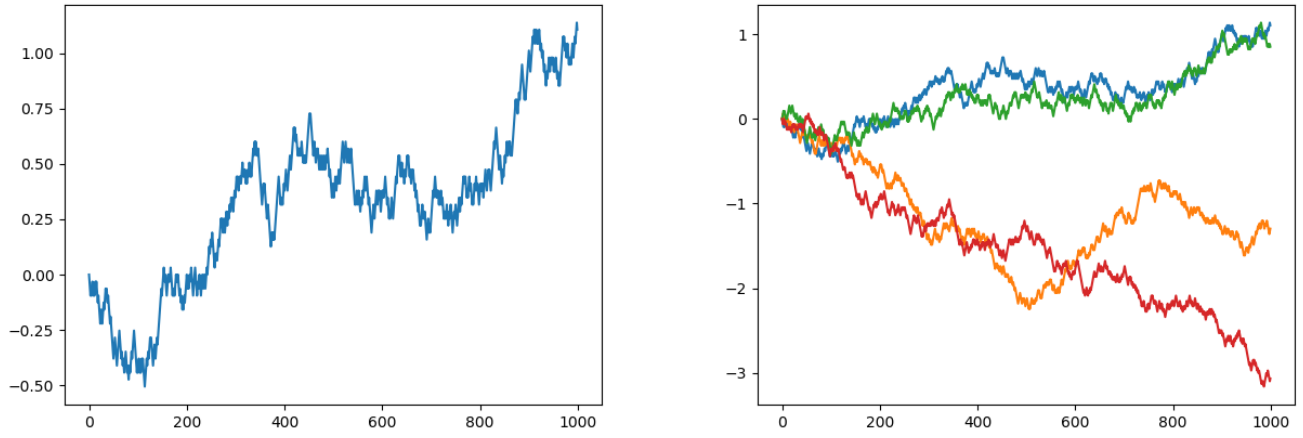
Itt pedig egy másik, kicsit hosszabb következik, ennek a végén az utolsó nagyítási képnél az adott szinten megállva a számítógép változtatja a színezést, azaz másképp színezi a c paraméternek megfelelő képernyőpontokat annak függvényében, hogy hanyadik iteráltra jut ki a referenciakörből $f_c^n(0)$:

A következő ábrán, nem egy nagyítási sorozatból, még néhány további Mandelbrot-halmaz részlet tekinthető meg.



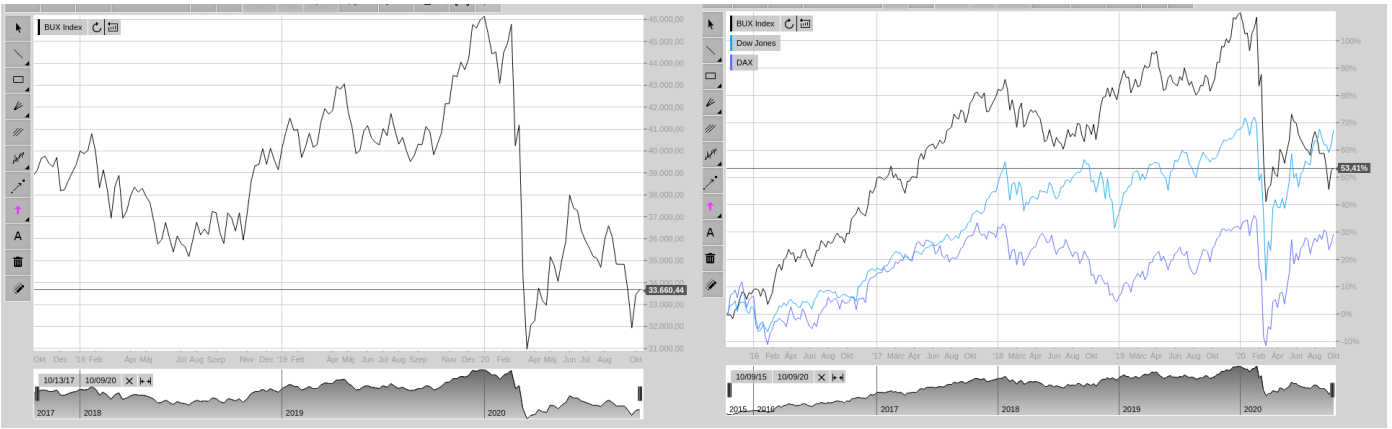
6. ábra: Mandelbrot-halmaz részletek

A Mandelbrot-halmaz komplex dinamikus rendszerekhez kapcsolódik. Azonban Mandelbrot matematikai munkássága nem erre a területre koncentrálódott. A Mathematical Reviews/Mathscinet adatbázisban 143 publikációja szerepel, amelyekre 2102 szerző 2020-szor hivatkozott. Számos területen publikált. Legtöbb publikációja és legtöbbet hivatkozott publikációi is a valószínűségszámítás és sztochasztikus folyamatok területéről kerültek ki. Legtöbbet, 593-szor hivatkozott cikke [9] is ide tartozik és fraktál/tört Brown-mozgással foglalkozik, ami a közönséges Brown-mozgás általánosítása. Egydimenziós esetben a közönséges Brown-mozgás/Wiener-folyamat véletlen bolyongásból kapható meg határátmenettel. A 7. ábrán néhány ilyen számítógéppel generált görbe látható. A bal oldalon egy, a jobb oldalon négy darab, közös koordinátarendszerben. A számítógép az illusztrációk készítése közben véletlen bolyongásokkal közelíti az ábrázolni kívánt Brown-mozgást.



7. ábra: Wiener-folyamat/Brown-mozgás

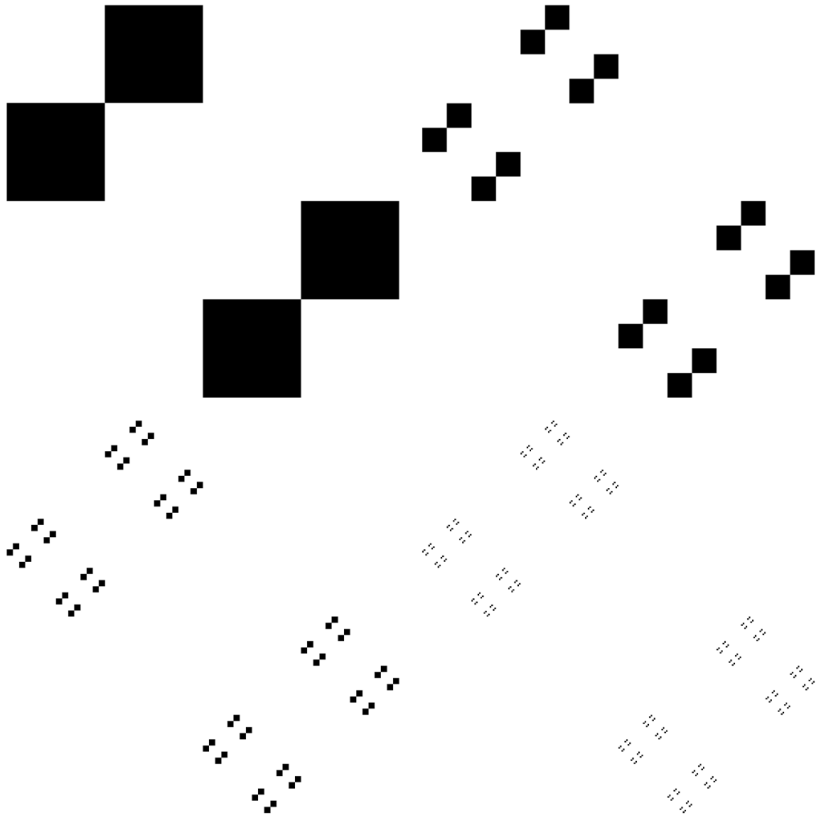
Az ábrákon is látszik, hogy Mandelbrot érdeklődési területének megfelelően egyenetlen/irreguláris fraktálgrafikonok keletkeznek a Wiener-folyamat során. Megmutatható, hogy a Wiener-folyamat Hausdorff-dimenziója egy valószínűséggel $3/2$, míg a középiskolában megszokott sima függvények, pl. $\sin x$ grafikonjának dimenziója 1. A fenti görbék, bár szabálytalanok, de nem tűnnek túlságosan szokatlannak, hiszen pl. újságokban, hírportálokon is gyakran láthatunk hasonló, szabálytalan grafikonokat, elegendő például csak a tőzsdei árfolyamgörbékre gondolni. Valóban a Python/Sage program [13], amivel ezeket az ábrákat készítettem, egyébként hajlandó részvényárfolyam-görbék sztochasztikus folyamatokon alapuló szimulációjára is. Ezzel el is érkeztünk Mandelbrot tudományos tevékenységének másik nagy területére. Harmadik legtöbbet hivatkozott műve [11] fraktálok, fraktálgeometria pénzügyi folyamatokra való alkalmazásával foglalkozik. Illusztrációként álljanak itt a 8. ábrán BUX, illetve a BUX, Dow Jones, Dax egymás mellett (forrás: [1]):



8. ábra: BUX-index 3 éves görbe, illetve BUX, Dow Jones, DAX 5 éves görbe

Valóban hasonlítanak a Brown-mozgás/Wiener-folyamat illusztrálására szolgáló folytonos görbékhez, bár a 2020 márciusában a COVID-19 hatására történő „beszakadást” nem látunk a véletlen görbéken.

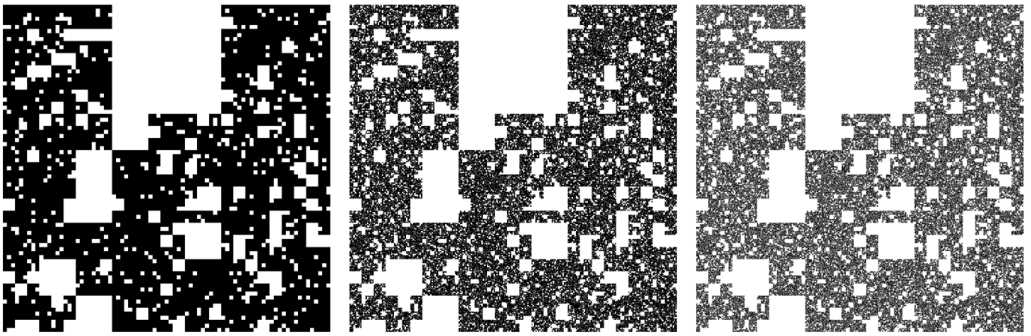
Sztochasztikus folyamatokkal nem biztos, hogy e cikk minden olvasója foglalkozott így illusztrációként most szeretnék néhány szót szólni a Mandelbrot-/fraktálperkolációról. Ezt a folyamatot Mandelbrot 1974-ben turbulencia vizsgálatával kapcsolatban [10] vezette be kanonikus megdermesztés (canonical curdling) néven, a Mandelbrot- vagy fraktálperkoláció nevet később kapta a folyamat.



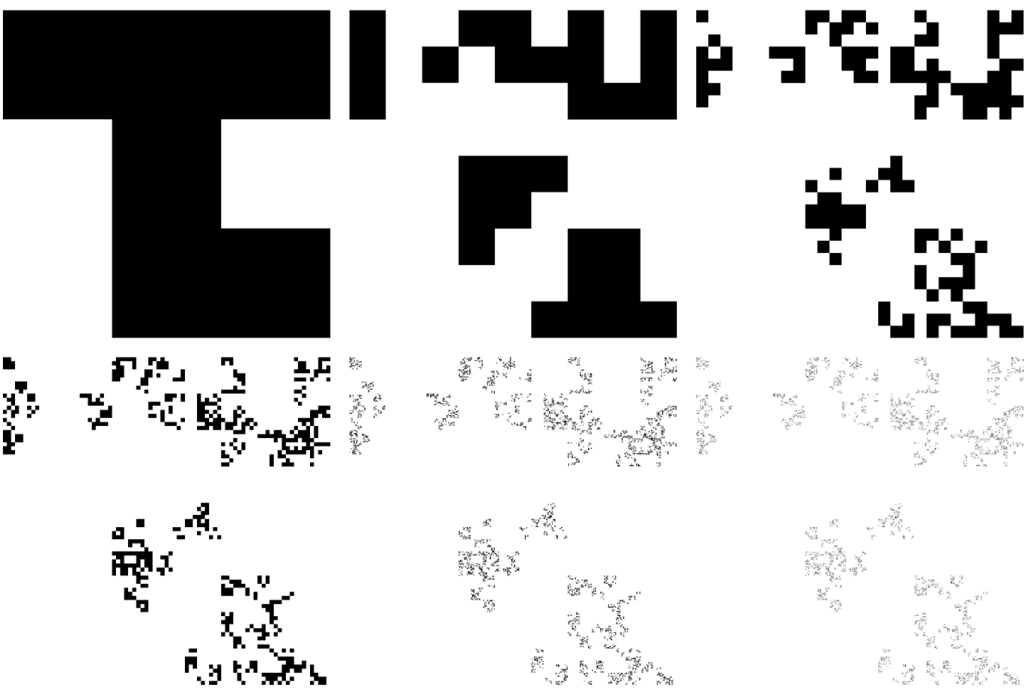
9. ábra: Egydimenziós fraktál

A következő bekezdésben fogok rátérni a véletlen eljárásra. Álljon itt tehát egy determinisztikus módon kapott egydimenziós fraktál, amit már korábban is emlegettem. Vegyük a zárt egységnégyzetet és ezután osszuk fel 4×4 egyforma résznégyzetre, és a 9. ábra bal felső sarkában levő képnek megfelelően dobjunk el 12 db (fehér) kis négyzetet és tartsunk meg 4 db (fekete) négyzetet. Az eljárást ismételgessük mindegyik fekete utódnégyzetben (jobb felső ábra), majd azok utódnégyzeteiben stb., stb. Az egymásba skatulyázott zárt fekete halmazok metszeteként kapjuk a kívánt fraktált, mely egydimenziós lesz, bár a matematikusok általában egyetértenek abban, hogy fraktálnak tekintendő.

A fraktál/Mandelbrot-perkoláció definíciójánál ismét induljunk a zárt egységnégyzetből és ezúttal mondjuk 3×3 egyforma résznégyzetre osszuk fel. Ezután viszont minden egyes kis résznégyzetről „független kockadobásokkal” döntsük el, hogy megtartjuk-e, avagy nem, azaz valamilyen rögzített $0 < p < 1$-re p valószínűséggel tartsuk meg (fekete) és $1 - p$ valószínűséggel dobjuk el (fehér). Utána az első szinten kapott fekete utódnégyzetekben folytassuk az eljárást. Illusztrációképpen a következő három ábrán láthatunk egy-egy általam készített szimulációt $p = 7/8, 4/5$ és $1/2$ értékek esetén. Persze az ilyen véletlen ábrák minden egyes futtatásnál másként néznek ki. Például előállhat az is, hogy már az első körben mondjuk az előző $p = 7/8$ esetben az összes utód $1/8^9 = 7.45058059692 \cdot 10^{-09}$ valószínűséggel fehér lesz, azaz nem nulla valószínűséggel a fekete halmaz üres lesz.

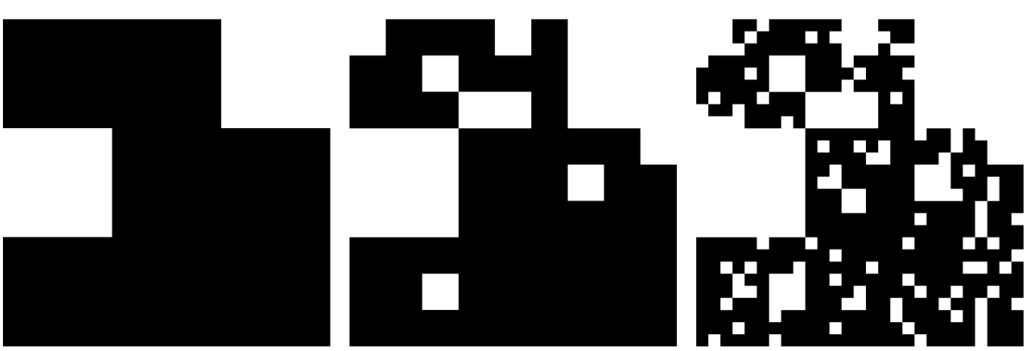


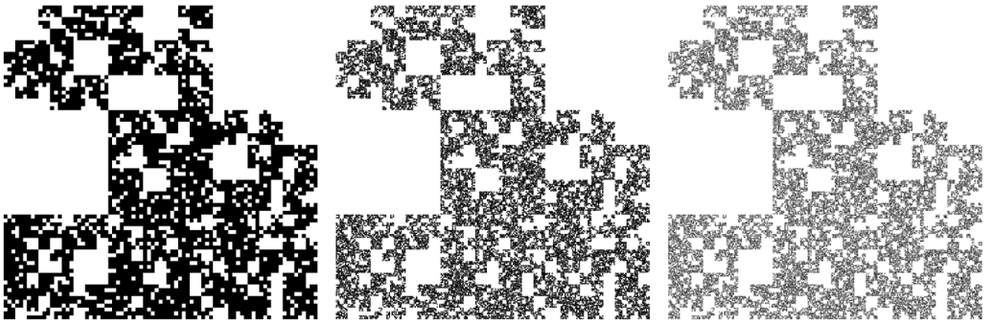
10. ábra: Fraktálperkoláció $p = 7/8$



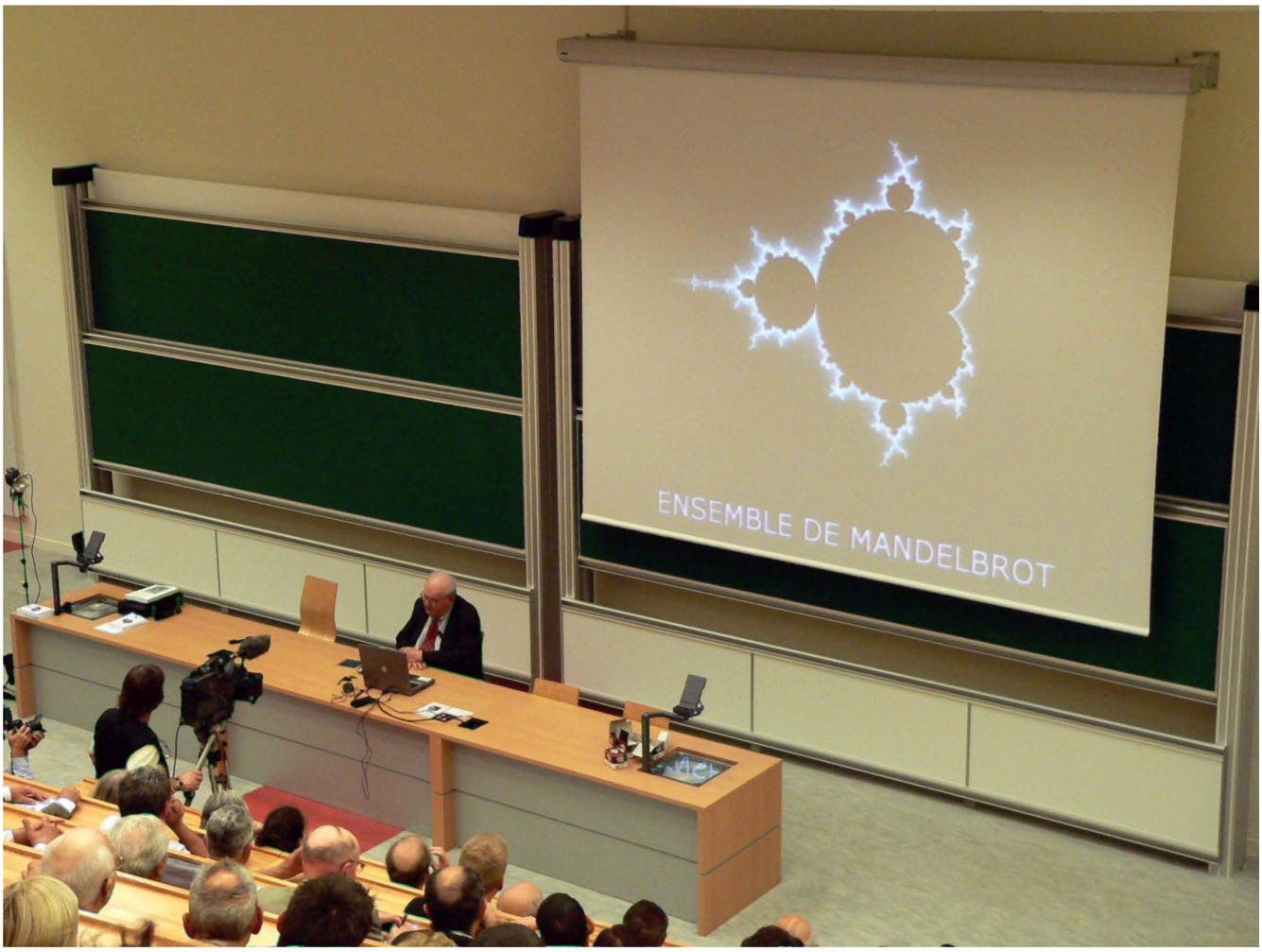
11. ábra: Fraktálperkoláció $p = 1/2$

Fraktálperkolációval kapcsolatban még számos megoldatlan probléma létezik. Talán leghíresebb a következő kérdés. Jelölje E a fekete halmazok metszetét. J. T. Chayes, L. Chayes és R. Durrett [3] megmutatta, hogy van egy kritikus valószínűség $0 < p_c < 1$, melyre ha $p < p_c$, akkor egy valószínűséggel E teljesen széteső, nincsenek benne összefüggő darabok, ilyen halmaz látható a 11. ábrán. Míg ha $p \geq p_c$, akkor pozitív valószínűséggel a kiindulási egységnégyzet két szemközti oldalát E egy összefüggő komponense összeköti, ilyen pl. a 10. ábrán látott fraktál. Ennek Hausdorff-dimenziója Kahane és Peyrière [6] egy tétele alapján $\ln(3^2 \cdot (7/8))/\ln(3) \approx 1.87845448845$. A kritikus p_c valószínűségre vannak becslések, de pontos értéke nem ismert.





12. ábra: Fraktálperkoláció $p = 4/5$



13. ábra: Mandelbrot a Mandelbrot halmaz előtt a Becsületrend átvételét követő előadása közben 2006-ban

(Fénykép forrása: David Monniaux – Ownwork,CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1165362)

Mandelbrot számos kitüntetésben és elismerésben részesült, többek között 1993-ban megkapta a Wolf-díjat (fizikából), 2003-ban a Japán díjat és 2006-ban a Francia becsületrend tiszti fokozatát. Nehéz pontosan megmondani, hogy egy litván származású család, Varsóban született és gyerekeskedő, majd Franciaországban tanuló és dolgozó, később USA-ban letelepedő, francia-amerikai kettős állampolgár gyermeke pontosan melyik nemzet büszkesége lehet. Önéletírása alapján úgy tűnik, nem bánta meg, hogy végülis az IBM-et és az Egyesült Államokat választotta. Érdeklődési területeinek, nyughatatlan, több tudományterületet érintő kutatásainak az IBM által nyújtott kutatási szabadság és rugalmasság tökéletesen megfelelt. Az IBM-nél betöltött „főállása” mellett számos egyetemen (pl. MIT, Harvard) volt vendégprofesszor. Élete végefelé pedig a Yale egyetemen lett Sterling Professor. Érdekesség, hogy a Harvardon az egyik évben a közgazdasági, a rákövetkezőben pedig a matematika tanszék vendégoktatója.

Francia kollégái közül sokat ismerek személyesen, tíz évvel ezelőtt pár nappal halála után hivatalos úton Párizsban jártam és találkoztam, beszélgettem velük, többek között, a szomorú hír okán, Mandelbrotról is. Úgy tűnik, hogy azért ők is „saját halottjuknak” tekintették. Emlékének a Francia Matematikai Tásulat SMF, Gazette des Mathématiciens folyóirata különszámot [5] szentelt.

Irodalomjegyzék

[1] BUX Index, https://www.teletrader.com/bux-index/index/chart/tts-4611743?ts=1596672000000&culture=hu-HU

[2] R. Brooks and P. Matelski, *The dynamics of 2-generator subgroups of PSL(2,C)*, in Irwin Kra (1 May 1981). Irwin Kra (ed.). Riemann Surfaces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (PDF). Bernard Maskit. Princeton University Press. ISBN 0-691-08267-7. https://web.archive.org/web/20190728201429/http://www.math.harvard.edu/archive/118r_spring_05/docs/brooksmatelski.pdf

[3] J. T. Chayes, L. Chayes and R. Durrett, *Connectivity Properties of Mandelbrot's Percolation Process*, Probab. Th. Rel. Fields **77** (1988), 307–324.

[4] *Deepest Mandelbrot Set Zoom Animation ever – a New Record!* 10^{275} *(2.1E275 or* $2^9 15$*)*, https://www.youtube.com/watch?v=0jGaio87u3A&list=PLVLa3RFibTXVQkK6cv2M74qnKVERD8jqs&index=3&t=0s

[5] S. Jaffard and S. Seuret (szerkesztők), *Benoît Mandelbrot, père de la géométrie fractale*, Gazette des Mathématiciens, No. 136 (2013).

[6] J.-P. Kahane and J. Peyrière, *Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot*, Adv. Math. **22** (1976), 131–145.

[7] *Mandelbrot Deep Zoom* 10^{4004}, https://www.youtube.com/watch?v=VDMgmZOzZTo&list=PLVLa3RFibTXVQkK6cv2M74qnKVERD8jqs&index=3

[8] B. B. Mandelbrot, *The fractalist. Memoir of a scientific maverick. With an afterword by Michael Frame*, Pantheon Books, New York, 2012.

[9] B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness, *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*, SIAM Rev. 10 (1968), 422–437.

[10] B. B. Mandelbrot, *Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier*, J. Fluid. Mech. **62** (1974), 331–358.

[11] B. B. Mandelbrot, *Fractals and scaling in finance. Discontinuity, concentration, risk*, Selecta Volume E. With a foreword by R. E. Gomory. Selected Works of Benoit B. Mandelbrot. Springer-Verlag, New York, 1997.

[12] Wikipedia: Fractal, https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal

[13] Tirthajyoti Sarkar, *Brownian motion with Python*, https://github.com/tirthajyoti/Stats-Maths-with-Python/blob/master/Brownian-motion-with-Python.ipynb

[14] Visnovitz Péter, *Büszke bajkeverő volt a káprázatos pacák felfedezője* origo.hu 2010.10.23. 23:22 https://www.origo.hu/nagyvilag/20101021-benoit-mandelbrot-matematikus-a-fraktal-atyja-a-geometria-megujitoja-portre.html

Buczolich Zoltán
ELTE TTK Analízis tanszék

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés Elfogadom.

Erintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Totik Vilmos 2020. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Nekrológ: Dr. Leindler László

A kép forrása: http://www.math.u-szeged.hu/mathweb/index.php/hu/695

Leindler László Kecskeméten született 1935. október 1-én. Általános és középiskolai tanulmányait szülővárosában, egyetemi tanulmányait 1954-től a Szegedi Tudományegyetem matematika–fizika szakán végezte. 1958-ban kapott tanári diplomáját követően egy évig a veszprémi Vegyipari Technikum matematikatanára volt, majd 1959-ben aspiráns lett Tandori Károly és Alexits György vezetésével. 1962-ben a József Attila Tudományegyetem adjunktusa, később docense lett; 1968-tól ugyanott egyetemi tanár. 1977-ben kinevezték a Halmazelméleti és Matematikai Logikai tanszék vezetőjének. 1983-ban került az Analízis Tanszékre, amelyet 1998-ig vezetett tanszékvezetőként. Az 1967–1971 periódusban a Természettudományi Kar dékánhelyettese, 1972 és 1975 között pedig dékánja volt. 1975-ben, 1984-ben és 1987-ben az egyetem rektorhelyettesévé választották 3–3 éves időtartamokra. 1999-ben Széchenyi professzori ösztöndíjat kapott. 2005-ben ment nyugdíjba emeritus professzori címmel.

1962-ben *Sub Auspiciis Rei Publicae* kitüntetéssel szerezte meg egyetemi doktori címét, és ugyanebben az évben védte meg kandidátusi disszertációját. 1966-ban lett az MTA doktora, értekezésének címe „Ortogonális függvénysorok konvergenciájára és szummálhatóságára vonatkozó vizsgálatok”. 1973-ban megválasztották a Magyar Tudományos Akadémia levelező, 1982-ben pedig rendes tagjává. 1976 és 1990 között az MTA Matematikai és Fizikai Tudományos Osztálya elnökhelyettese, 1996-tól

2002-ig pedig a Szegedi Akadémiai Bizottság alelnökeként dolgozott. 1982 és 1992 között az *Acta Scientiarum Mathematicarum* folyóirat főszerkesztője. Emellett az *Acta Mathematica*, az *Analysis Mathematica* és a *Periodica Mathematica* folyóiratok szerkesztőbizottságának is tagja volt.

Fontosabb kitüntetései: Grünwald Géza-díj (1961), Szele Tibor-emlékérem (1984), Széchenyi-díj (1992), Klebelsberg Kunó-díj (2002), Szőkefalvi-Nagy Béla-érem (2002), a Szegedi Tudományegyetem díszdoktora (2003), Magyar Köztársasági Érdemrend középkeresztje (2004).

Számos külföldi egyetemen volt vendégprofesszor: Giessen (1977, 1980), Edmonton (1974, 1983, 1989, 1990), Toronto (1993, 1966), Moszkva (1968).

Tudományos tevékenysége a klasszikus analízis területére esik, elsősorban a Fourier- és ortogonális sorok elméletére, de jelentős eredményeket ért el függvényterekkel, sorozatok osztályaival, beágyazási tételekkel és egyenlőtlenségekkel kapcsolatban is. Első dolgozatait ortogonális sorok konvergenciájáról és szummációjáról írta. Figyelme hamarosan az ún. erős szummáció és approximáció felé fordult, ahol korábbi sporadikus eredmények az ő munkássága nyomán álltak össze egy egységes elméletté. E témában írt „Strong approximation by Fourier series” című 1985-ös monográfiáját a mai napig a terület alapműveként tartják számon. Későbbi eredményei közül megemlítendők a máig legáltalánosabb Hardy-Littlewood-típusú egyenlőtlenségek, az ún. inverz Hölder-egyenlőtlenségek, pontos beágyazási tételek különböző függvényosztályok között, illetve a munkássága vége felé sokat vizsgált tartalmazási relációk különböző együtthatófeltételek mellett. 254 dolgozatára sok száz hivatkozást kapott a világ minden részéről. Emellett öt egyetemi jegyzet szerzője, illetve társszerzője, ezekből matematikus és matematika tanárszakos hallgatók generációi sajátították el a matematikai analízis alapjait.

Rendkívül szerény egyéniség volt, saját, gyakran szemléletformálóan átütő eredményeit legtöbbször „apróságnak”, „kis javításnak” nevezte. Életében a sport mindig fontos szerepet játszott: a futball iránti szeretete fiatalkorában majdnem eltérítette az akadémiai életpályától. Később rendszeresen teniszezett – szerénységének megfelelően mindig az Erzsébet-ligeti leghátsó pályán.

Leindler László 2020. szeptember 18-án bekövetkezett halálával egy kimagasló életpályájú tudóst, tanárt és kollégát veszítettünk el.

Totik Vilmos egyetemi tanár,

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet, Halmazelmélet és Matematikai Logika

Az **Akadémikusok nyakkendő nélkül** sorozatában megnézhető videók:

Leidner László: http://www.youtube.com/watch?v=ziO1tyx7EsM

Totik Vilmos: http://www.youtube.com/watch?v=Z1LQWs24WsI

---

nekrológ

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

SOKSZOR TALÁLKOZUNK OLYAN FELADATTAL, ÖTLETTEL, AMIT SZÍVESEN ELTESZÜNK KÉSŐBBI HASZNÁLATRA. A **TANÓRA – SZAKKÖR** ROVAT SZERETNE HOZZÁJÁRULNI A MATEMATIKATANÁROK ESZKÖZTÁRÁNAK GAZDAGÍTÁSÁHOZ, FÓRUMOT KÍVÁN ADNI A GONDOK, NEHÉZSÉGEK MEGTÁRGYALÁSÁRA IS. (ROVATSZERKESZTŐ: *HORVÁTH ESZTER*.)

Gyimesi Bernadett, Balogh Tamás László
2020. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

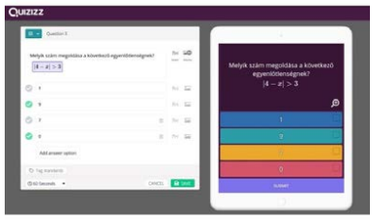
Logirintus: a karantén ihlette matematikai kalandjáték

Minden kijárat egyben bejárat is valahova – ez a mondás a Logirintus nevű új matematikai-logikai kalandjátéknak nemcsak a menetére utal, de szépen leírja keletkezéstörténetének lényegét is. Online logikai kaland diákok tízezreinek, hídépítés a matektól távol álló nagyközönség és a leglelkesebb „matek-fanok” között: *Gyimesi Bernadett* és *Balogh Tamás László* közreműködésével bemutatjuk a Logirintus sztoriját és pedagógiai vonatkozásait.

Tolnai Judit
2020. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Szabadulószoba flippity-vel

Mikor jön el a pillanat? Ha már elegünk van mindenből és úgy érezzük, hogy a gyerekek is már másra vágynak kicsit és még mindig digitális oktatás van/lesz, akkor! Aki már készített, annak valószínűleg semmi újat nem tudok mutatni, inkább azoknak szeretnék segíteni, akik még soha nem készítettek szabadulószobát – írja *Tolnai Judit*. Íme a tudnivalók...



Máder Attila,Torma Bence, Torma Gábor
2020. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Matematikaoktatás a COVID-19 idején

Hogyan látta három, az oktatás különböző szintjein különböző tapasztalattal, de azonos lelkesedéssel és didaktikai kutatókedvvel rendelkező szegedi tanár, oktató, hallgató az elmúlt hónapokat, az online matematikatanítás kezdeti nehézségeit? *Máder Attila*, *Torma Bence* és *Torma Gábor* írása a mostani időszakban is kiváló útmutatóul szolgálhat azoknak a tanároknak, akik nem tudták meghallgatni az előadásukat a 2020 novemberi Varga Tamás Módszertani Napokon. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Gyimesi Bernadett, Balogh Tamás László 2020. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Logirintus: a karantén ihlette matematikai kalandjáték

A sztori

2020-ban a teljes oktatási szféra kényszerpályára állt, és ez alól a Medve Matek programok sem jelentettek kivételt. Igencsak maga alatt volt a „medvematekos” szervezői közösség, és a tavaszi szabadtéri matekversenyeket évről évre váró diákok és tanárok sokezer fős tábora, amikor nyilvánvalóvá vált, hogy ezt a szezont a vírus maga alá gyűrte.

A Medve Matek szervezői rövid „bénultság” után felismerték, hogy a karantén időszakát optimista felfogással a kreativitás melegágyának is tekinthetjük, és ezért itt az ideje létrehozni valami új mateknépszerűsítő kezdeményezést az online térben.

Több héten át tartó, intenzív, lázas munka kezdődött, hétvégi „maratonok”, éjszakai „műszakok” egész sora jellemezte ezt az időszakot. Mi legyen a név? Milyen szabályokat alkossunk? Hogyan szólítsuk meg a nagyközönséget? Milyen szakmai tartalmat építsünk a játékba? Milyen informatikai megoldásokat használjunk? Hogyan készítsünk vonzó arculatot? – ilyen és ehhez hasonló kérdések tömegét kellett pár hét alatt megválaszolnunk, de végül szerencsére meglett az eredménye a befektetett energiának.

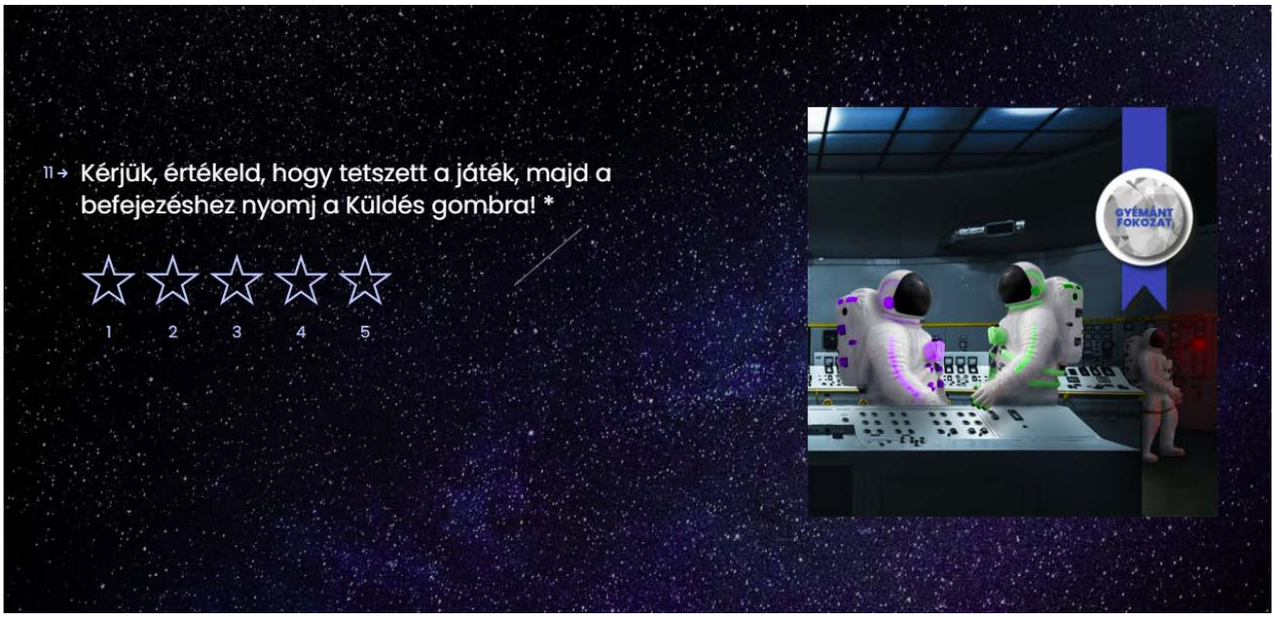
A tavaszi szezonban a Medve Szabadtéri Matekversenyek helyett végül két Logirintus-eseményt rendeztünk meg, április 25-én és május 30-án, szombati napokon, míg ősszel, november 19-21-én egy háromnapos Logirintussal folytattuk a sorozatot. Az első fordulón 11.000, a másodikon 5000, a harmadikon pedig több mint 30.000 résztvevő játszott a Logirintus virtuális pályáin – a legutóbbi fordulóban már az iskolai matekórákra is becsempésztük a pályákat, de az érdeklődés mértéke még minket is meglepett.

A Logirintus menete, szabályai

Számos névváltozat és ötlet után született meg a Logirintus szó, ami reméljük, nem csak számunkra szembetűnő módon a logika és a labirintus szavakból fonódott össze. S hogy miért is ez a két szó alkotja a játék nevét? Nos, a logikát talán nem kell magyarázni; logikai feladványok tengerével találkozhat a játékos a különböző sztorikat feldolgozó pályákon. Minden pálya blokkokból épül fel, amelyeknek elválasztó pontjain a játékos döntheti el, milyen irányba viszi el a történetet, például hogy a dzsungelben a méregtelenítés vagy a sebtisztítás képességét sajátítja el, vagy hogy a kerékpár utáni nyomozás során melyik tolvajt követi.

Így több különböző útvonal alakulhat ki, a játékos pedig bolyong, mint egy labirintusban. A különbség csak az, hogy a blokkok között – amelyek többnyire 3-3 matematikai-logikai és egy egyszerű mozgást igénylő feladatból állnak – bármikor elhagyhatja a játékos a Logirintust az addig elért szintjének diadalmával.

Minden pályán négyféle szint szerezhető meg a kitartás és logikus gondolkodás alapján; bronz, ezüst, arany és gyémánt. Aki mindhárom blokkban helyesen megoldja a megfelelő mennyiségű feladatot – ez 3 feladatos blokk esetében többnyire 2 feladatot jelent, míg 2 feladatos blokk esetén többnyire 1-et – eléri a gyémánt szintet és a Logirintust a legmagasabb megszerezhető fokozaton hagyhatja el.



A résztvevők a megszerzett szint jelvényével, valamint a játszott pálya képi világával és a saját (csapat)nevükkel ellátott oklevelet is bezsebelhetik a játék befejezése után.

A már megvalósult három Logirintus-alkalom során 4-4 különböző sztorit dolgoztunk ki, amiket további nehézségi pályákra osztottunk. A diákok számára készített matekos pályáink 4 nehézségi szinten elérhetőek, akárcsak a Medve Szabadtéri Matekversenyeken: 5-6. évfolyam, 7-8. évfolyam, 9-10. évfolyam és 11-12. évfolyam osztozik egy-egy pályán. Ezek nehézségi szintje igazodik az iskolai tananyaghoz, úgy, hogy minden résztvevőnek legyen kihívás benne, azonban az addig tanultakat könnyedén be tudják építeni a csapatmunkába.

Ezen felül három további pályával készültünk a felnőttek, játékos kedvű fiatalok részére. A szabadulószoba jellegű pályánkat 12 éves kortól ajánljuk baráti társaságoknak, nagyobb gyerekeknek. A családi pálya két nehézségi szinten is elérhető, az egyszerűbb már 8 éves kortól ajánlott, míg a másik pályát 10 éves kortól javasoljuk családoknak gyerkőcökkel együtt. A nehezebb logikai rejtvényeket, rendkívül furfangos fejtörőket tartalmazó haladó rejtvényes pálya az igazán elhivatottaknak szól, azonban az eddigi tapasztalatok alapján a résztvevők szívesen és sikeresen méretik meg magukat ezen a nehéznek tervezett pályán is.

Mint már említettük, a gondolkodást igénylő feladatok mellett minden blokkban találkozhatnak a játékosok egyszerű mozgásos kihívásokkal is, hogy a számítógép előtti ülés közben felpezsdítsék a vérkeringésüket és valamelyest elhozzuk az otthonukba a „Medve érzést”, a mozgás és gondolkodás együttes örömét. Ezek a feladatok szintén illeszkednek a történetbe, például egyes esetekben pipiskedni kell, hogy átlássunk a kerítésen, törzsfordításokat kell végeznünk, hogy alaposan körbenézzünk, vagy éppen kerékpáros mozdulatokkal kell a biciklitolvajokat utolérnünk.

A megszerezhető oklevél és dicsőség mellett azonban nyereménycsomagokkal, ajándékokkal is szeretnénk motiválni a résztvevőket a minél jobb eredmény elérésére és a Logirintusban való koordinált bolyongásra. Szakmai partnerünk, a Reflexshop, valamint kiemelt támogatónk, a Hello Bringás jóvoltából is sorsolunk társasjáték- és emblémázott ajándékcsomagokat a legjobban teljesítők között. A Hello Bringás támogatásának köszönhetően valósult meg novemberben a KerékNyomon című pályánk is.

Logirintust a matekórára!

Tavasszal a Medve versenyek lemondása miatt gyorsan reagáltunk a kialakult helyzetre, amikor életre hívtuk a Logirintust. Novemberre azonban egy átfogóbb felmérést végeztünk, valamint a tavaszi eredmények alapján is tudtunk dolgozni és egy, a pedagógusok számára még használhatóbb, kézenfekvőbb megoldást tudtunk biztosítani a kifejezetten hétköznapi matekórákra tervezett pályákkal.

Míg a tavasszal hirdetett matekos pályáink ugyanúgy 90 percesek voltak, mint a többi, családoknak és barátoknak hétvégi kikapcsolódásra szánt pályáink, novemberre 40 percesre alakítottuk át a matekos pályákat, valamint elérhetővé tettük már csütörtöki és pénteki napokon is.

Ezzel nem titkolt célunk a pedagógusok tehermentesítése a jelenlegi helyzetben, valamint a tanórára való felkészülés és levezénylés könnyítése. A Logirintust a gyerekek egészen önállóan, illetve pár fős csapatban is végig tudják játszani, csak számítógépre, okostelefonra vagy tabletre és internetre van szükség. Az előrehaladás és következő lépés mindig egyértelmű, a játék vezeti a játékost, így nem fordulhat elő, hogy a gyermek ne tudná, mit kell tennie, hogy továbblépjen, mit és hogyan kell kezelnie, hogy a játék elinduljon.

A játék kezelésének egyszerűségével szemben a pályák komplexitása túlmutat egy megszokott feladatsoron, ahol egymást követik a feladatok és legfeljebb a sorrendjükön van lehetőség változtatni. Egy szinten belül a különböző blokkok választásával újabb feladatokkal ismerkedhetünk meg, így nem feltétlen kell megoldanunk minden feladatot ahhoz, hogy a legfelső szintre felérjünk.

Úgy véljük, a Logirintus egyfajta versenyként, tudáspróbaként is funkcionálhat az osztály számára, amennyiben az időfaktort is figyelembe vesszük. De ha csak egy játékos matekórát tartanánk, ahol a gyerekek csapatmunkában, közösen gondolkodva oldanak meg izgalmas feladatokat, és közben nevelgetik az állatkájukat vagy éppen a tenger mélyét ismerik meg tüzetesebben, arra is kiváló választás a Logirintus.

További előny, hogy online és személyes oktatás keretein belül is használhatóak a pályák. Személyes oktatási forma esetén mind a kiscsoportos (okostelefonos vagy számítógépes) forma, mind az egész osztályt egy csapattá kovácsoló projektoros megoldás (a pálya kivetítése a tanteremben) tartalmas időtöltést tud biztosítani.

A pedagógusok számára az eddigi pályáinkat mind elérhetővé tesszük oktatási célokra. Amennyiben igénybe szeretnék venni ezt a lehetőséget, látogassanak el a http://medvematek.hu/mintafeladatsorok weboldalra, ahol név, emailcím és iskolai adatok megadása után nemcsak az eddigi összes Logirintus pályát küldjük el emailben, de a megoldásfüzeteket és a későbbiekben elérhetővé váló gyakorló feladatsorokat is. Emellett az oldalon összeállított Medve feladatsorokat is találni, kategóriánként két nehézségi fokozatban.

Mateknépszerűsítés a „külvilág” felé

A Logirintusban elérhető matekos pályákkal egyértelmű célunk a pedagógusok munkájának segítése, különleges matekórák biztosítása, valamint a diákok szemüvegén keresztül a matematika és szórakozás összekapcsolása.

Emellett bárki számára, aki szeret játszani, gondolkozni és hasznosan tölteni a szabadidejét, javasoljuk a nem kifejezetten matekos pályáinkat. Ezekkel szeretnénk elérni a családokat, a kvízek, társasjátékok és szabadulószobák kedvelőit, valamint mindenkit, aki némi affinitást érez magában a hasonló jellegű szórakozásra. Itt jön képbe tehát a Medve Matek fő célja, a matematika népszerűsítése, hiszen népszerűsíteni igazán olyan közegben lehet, amely nem kizárólag matekversenyeket nyerő és matematikus palántákból áll.

Amellett tehát, hogy nagyra értékeljük és tovább buzdítjuk a matematika iránt eltökélt diákokat, felnőtteket e tudományág használatára, megértésére és szeretetére, fontosnak tartjuk, hogy egy bizonyos szinten minél több ember életébe begyűrűztessük a matematika, a logikus és algoritmikus gondolkodás, valamint a problémamegoldó szemlélet fontosságát és szépségét. A Logirintus pedig tökéletes indítása volt ennek a törekvésnek. Az ötletet egy ideje már érleltük, azonban a koronavírus kapcsán hozott intézkedések adták meg a végső lökést ahhoz, hogy ez a kezdeményezés el is tudjon indulni.

A Logirintus jövője

Még szinte véget sem ért a novemberi futam, a közösségi médiában már érkeztek a kérdések, hogy mikor lesznek új pályák, új alkalom, mi pedig elsőre óvatosan annyit ígértünk, hogy a tél folyamán még jelentkezünk Logirintussal. Ám azóta örömmel jelentettük be, hogy 2021-ig sem kell várni, ugyanis különleges, karácsonyi kiadással jelentkezünk december közepén. Két – a megszokottaknál rövidebb – pályát teszünk ingyenesen elérhetővé, míg két hosszabb, komplexebb pályát alacsony támogatási díj ellenében lehet majd játszani, hogy a Logirintus hosszútávú fennmaradását is biztosítani tudjuk.

A terveink ugyanis természetesen hosszú távra szólnak, rengeteg új ötletünk, tervünk van, a teljes koncepció azonban még alakulóban van, amihez játékosoktól, pedagógusoktól egyaránt szívesen fogadunk meglátásokat, ötleteket, javaslatokat.

Aki nem szeretne lemaradni, kövessen bennünket facebookon a Logirintus oldalon, vagy iratkozzon fel az emlékeztetőre a https://www.logirintus.hu/ oldalon, ahol szintén minden információt és tudnivalót megosztunk az elkövetkező játékokról, az emlékeztetővel pedig még emailben is tájékoztatunk mindenkit az újdonságokról. Továbbá ismét ajánljuk a http://medvematek.hu/mintafeladatsorok oldalt, ahol a pedagógus kollégák a pályákat elkérhetik oktatási célokra.

Gyimesi Bernadett, Balogh Tamás László (Medve Matek)

Megjegyzés: Az Érintő máris közli egy tanár kolléga, Nyőgér István véleményét:

Logirintus tapasztalatok tanárszemmel

A Logirintussal a MedveMatek versenyen keresztül találkoztam, erre neveztem diákokat még a tavalyi tanévben általános iskolás korosztályból, s szimpatikus volt, hogy online lehetőséget is biztosítottak helyette. Két akkori csapatom egyike élőben jött össze, a másiknak magam host-oltam Zoom-os keretet. Örömmel tapasztaltam, hogy milyen kíváncsi érdeklődéssel vetették bele magukat a feladatokba, s felszabadultan ötleteltek közösen.

Idén két középiskolás osztálynak ajánlottam a lehetőséget, tanórai keretek közé is időzítettem egy ilyen blokkot, amelyben bárki részt vehetett, illetve akinek már nehéznek bizonyult egy idő után, gyakorló feladatokat végezhetett közben. Ezúttal is nagyon tetszett az érdelődő diákoknak a játékos, mesés környezet – „repüljünk! J“, viszont a tippelős „taktikai“ lehetőség nem biztos, hogy egyértelmű volt a számukra, így megosztottam velük a korábbi tapasztalatomat, hogy ha valami nem megy, még vissza lehet rá térni később is.

Talán két feladat szövege okozhatott némi félreértést a 9-10. évfolyamosok. kategóriájából – (az egyik a „fához lapulós, gyümölcsért nyújtózó“ volt), ezeket egy idő után segítettem tisztázni.

Jól hangzik az is, hogy „arany“ eredményhez nem kell a maximumot nyújtani.

Ha lesz még hasonló lehetőség, bizonyára lesznek visszatérő érdeklődők köztük is.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

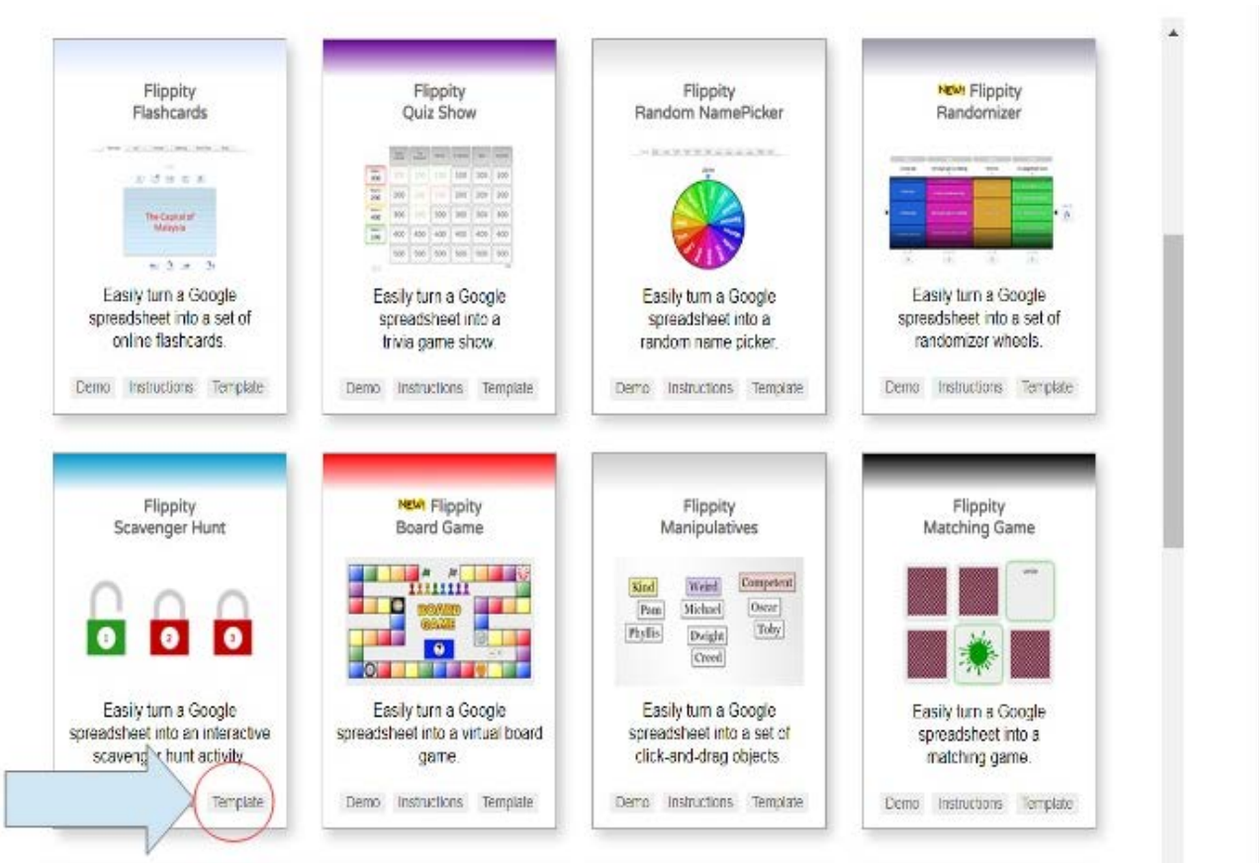
Tolnai Judit 2020. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Szabadulószoba flippity-vel

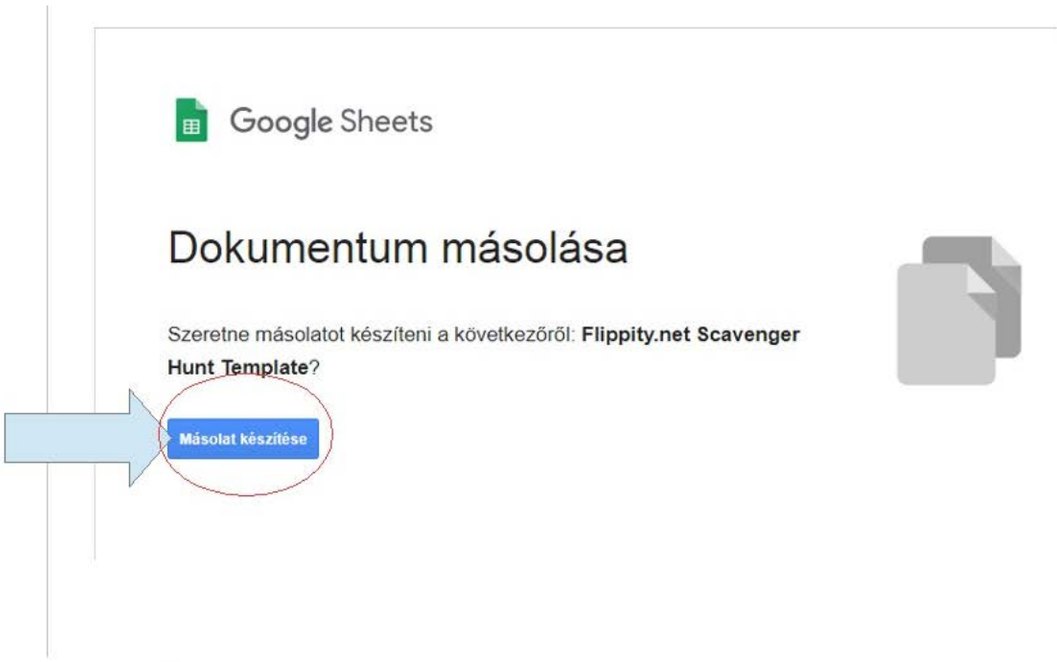
Április-május környékén véletlenül néztem meg egy videót, ami arról szólt, hogyan készítsünk szabadulószobát flippity-vel. (A videót Balogh Bence készítette − köszönet érte!) Korábban próbálkoztam google űrlappal, de be kell vallanom, az nem volt ilyen jó.

Mikor jön el a pillanat? Ha már elegünk van mindenből és úgy érezzük, hogy a gyerekek is már másra vágynak kicsit és még mindig digitális oktatás van/lesz, akkor! Aki már készített, annak valószínűleg semmi újat nem tudok mutatni, inkább azoknak szeretnék segíteni, akik még soha nem készítettek szabadulószobát.

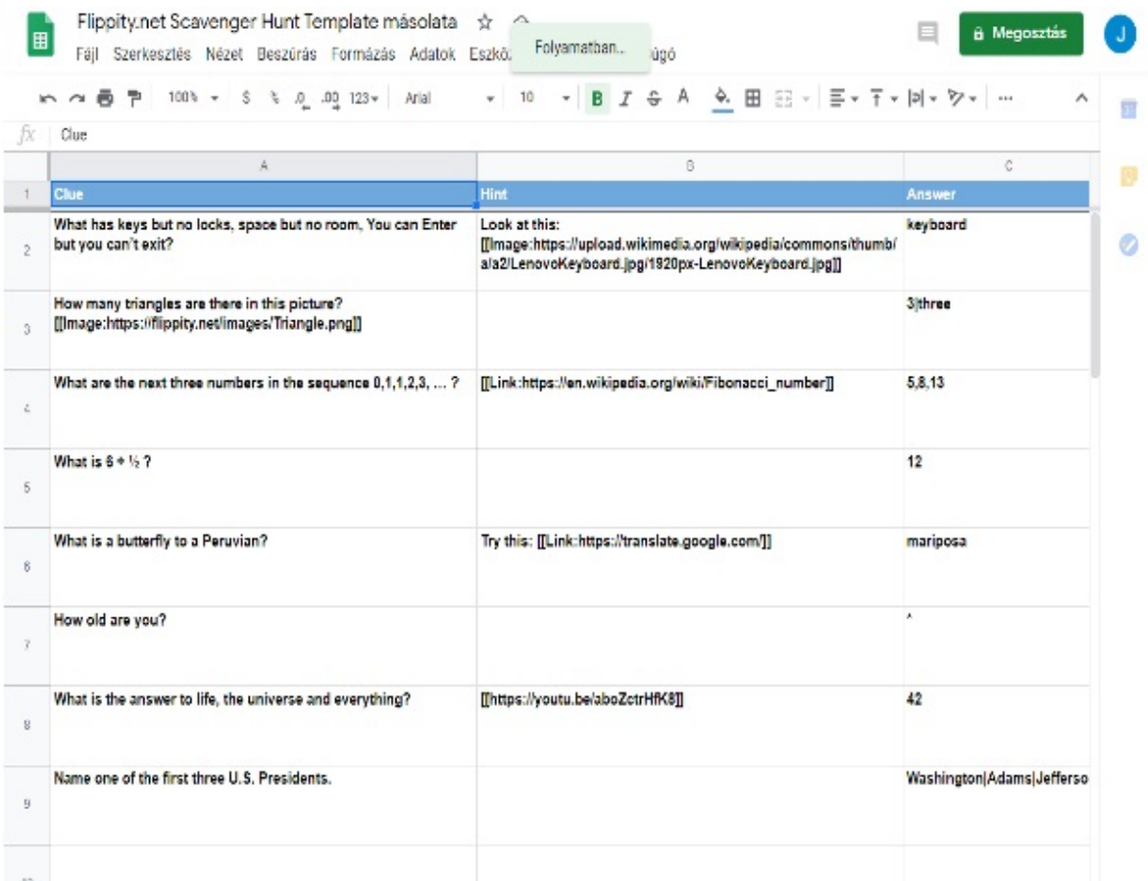
A www.flippity.net oldalon találjuk többek között a Flippity Scavenger Hunt (kincsvadászat) készítő alkalmazást:

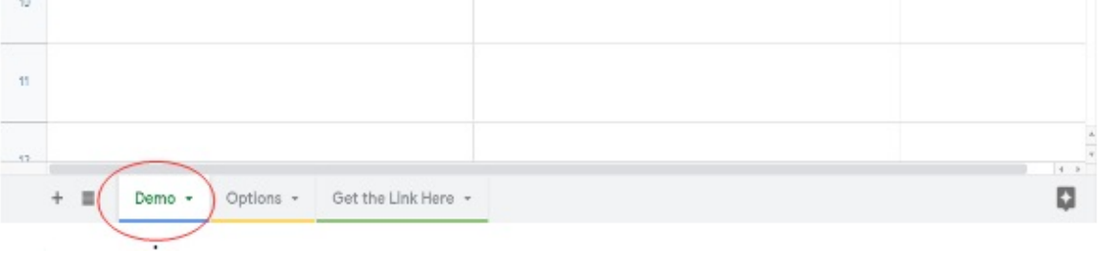


Kattintsunk a „Template”-re, utána a „Másolat készítésé”-re.:

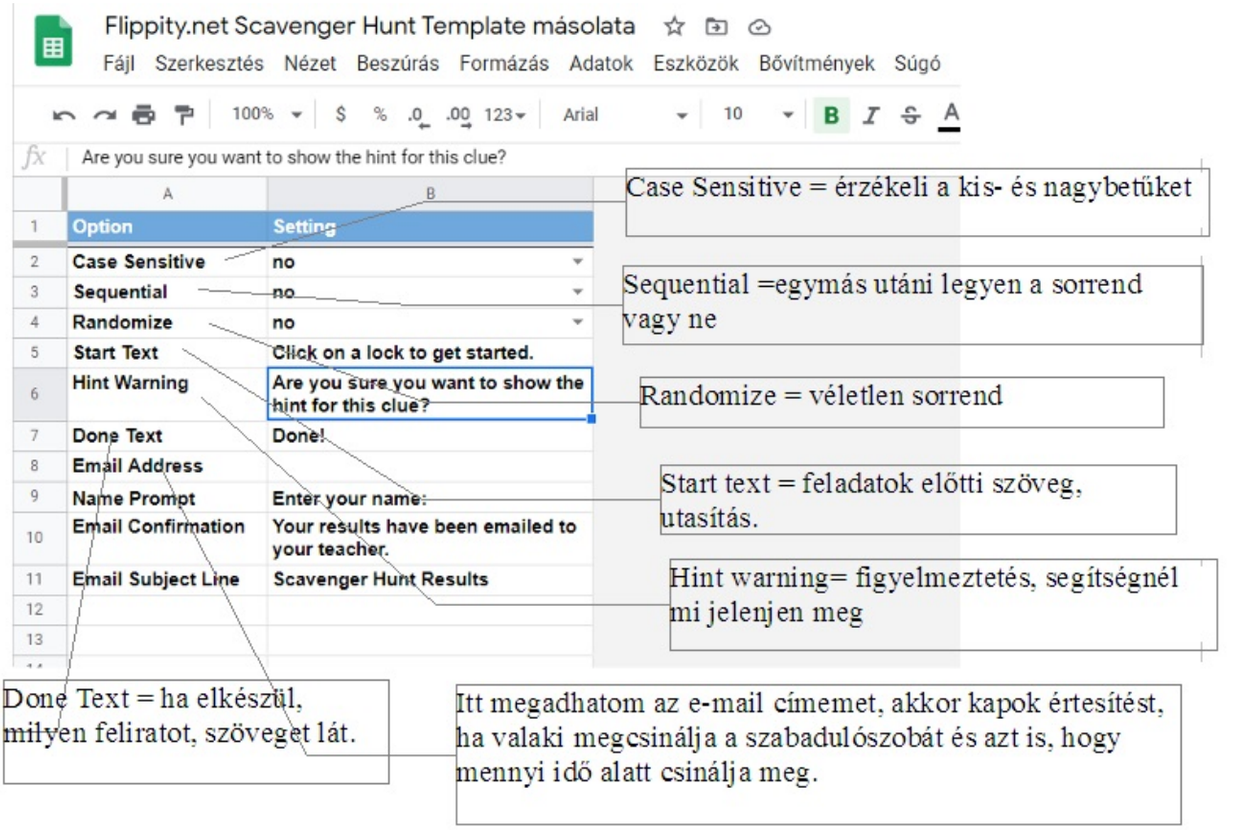


Ezt kapjuk:





Most töröljünk ki mindent a „Demo” oldalról. Utána válasszuk ki az „Options” (beállítások) fület.



Szabadulószoba készítéséhez érdemes a „Sequential”-t yes állásba tenni, mert így mindig egy feladatot lehet csak megoldani, és ha az sikerül, csak akkor lehet továbbmenni.

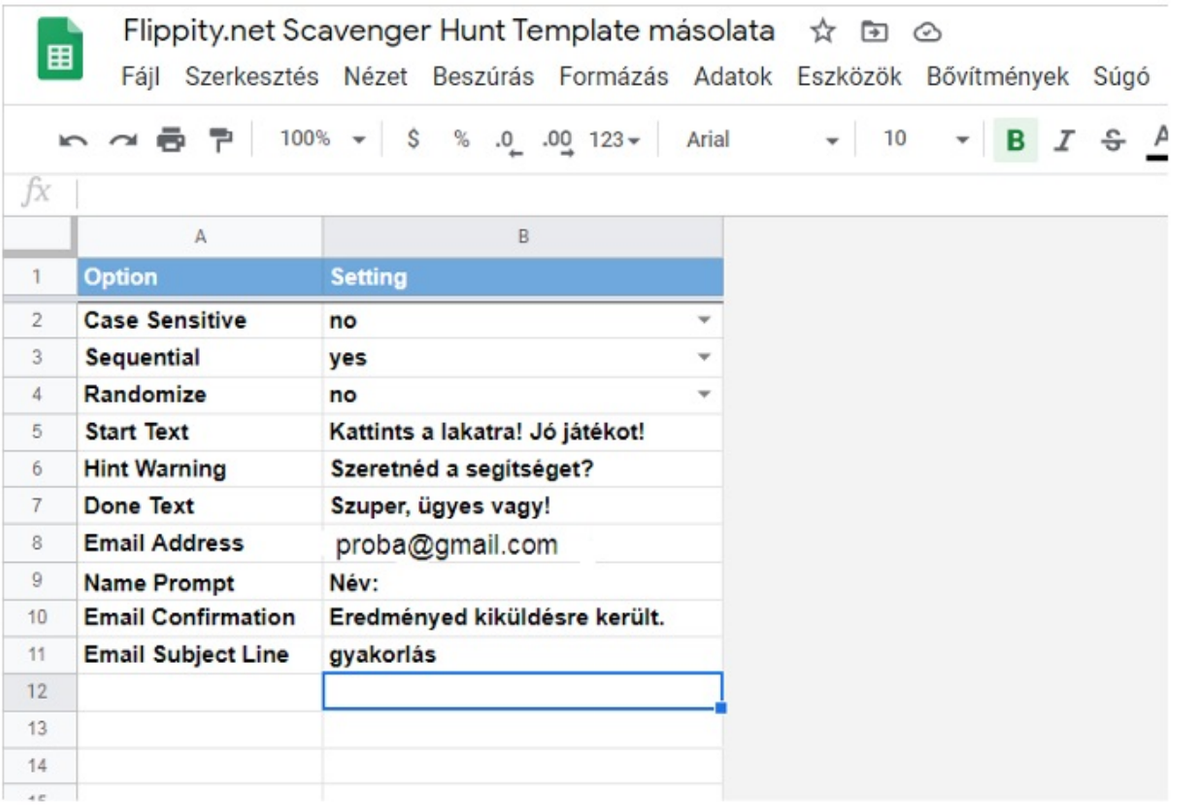
A „Start Text”-nél, ha most először csinálják a diákok, akkor mindenképpen érdemes segíteni, hogyan induljanak. Az enyémeknél az elején néhányuknak csak segítséggel ment.

„Name Prompt” = névsor. Ha kérek e-mailben értesítést, akkor a játékos elsőként az ide beírt mondatot látja. Pl.: Név: vagy Írd ide a neved!

„Email Confirmation” = emailes megerősítés. Ha végzett, akkor tudathatjuk vele, hogy pl. „Az eredményed kiküldésre került”.

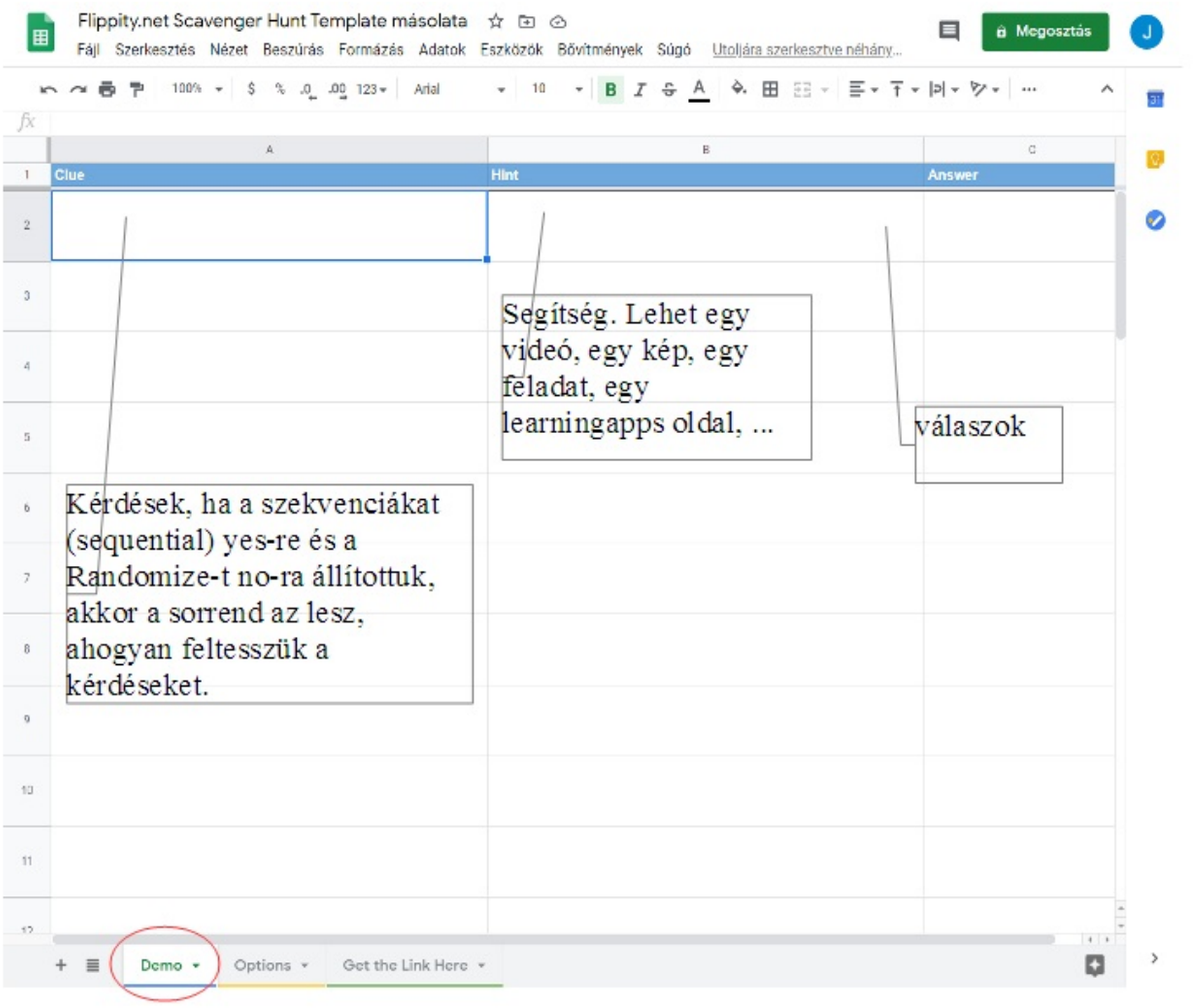
„Email Subject Line” = email tárgya, ez az, ami nekünk megjelenik.

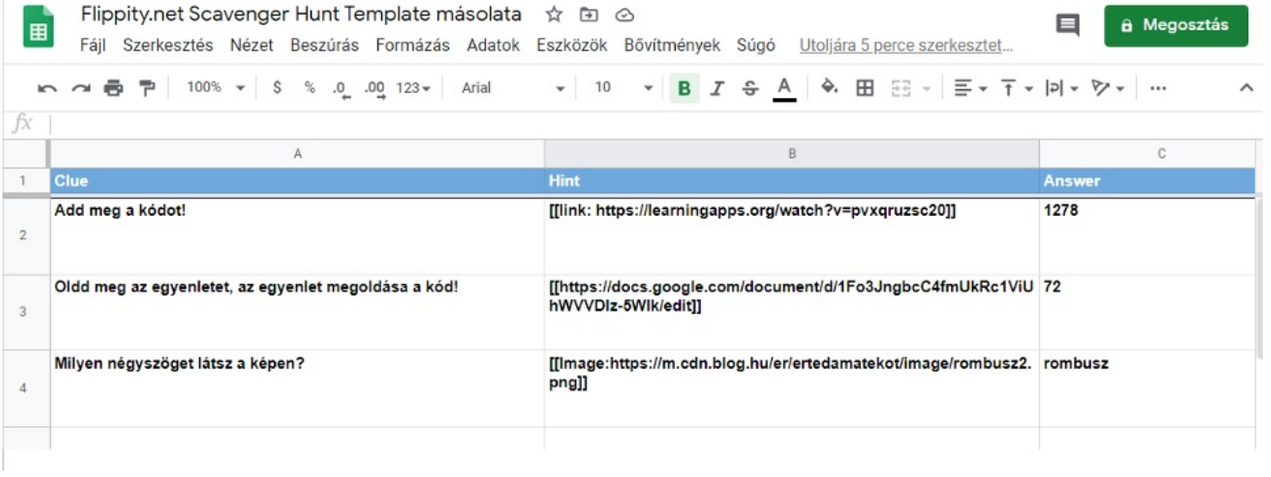
Én ezt így töltöttem ki:



	A	B
1	Option	Setting
2	Case Sensitive	no
3	Sequential	yes
4	Randomize	no
5	Start Text	Kattints a lakatra! Jó játékot!
6	Hint Warning	Szeretnéd a segítséget?
7	Done Text	Szuper, ügyes vagy!
8	Email Address	proba@gmail.com
9	Name Prompt	Név:
10	Email Confirmation	Eredményed kiküldésre került.
11	Email Subject Line	gyakorlás
12		
13		
14		

Ezzel készen is vagyunk a beállításokkal. Most menjünk vissza a „Demo” fülre.

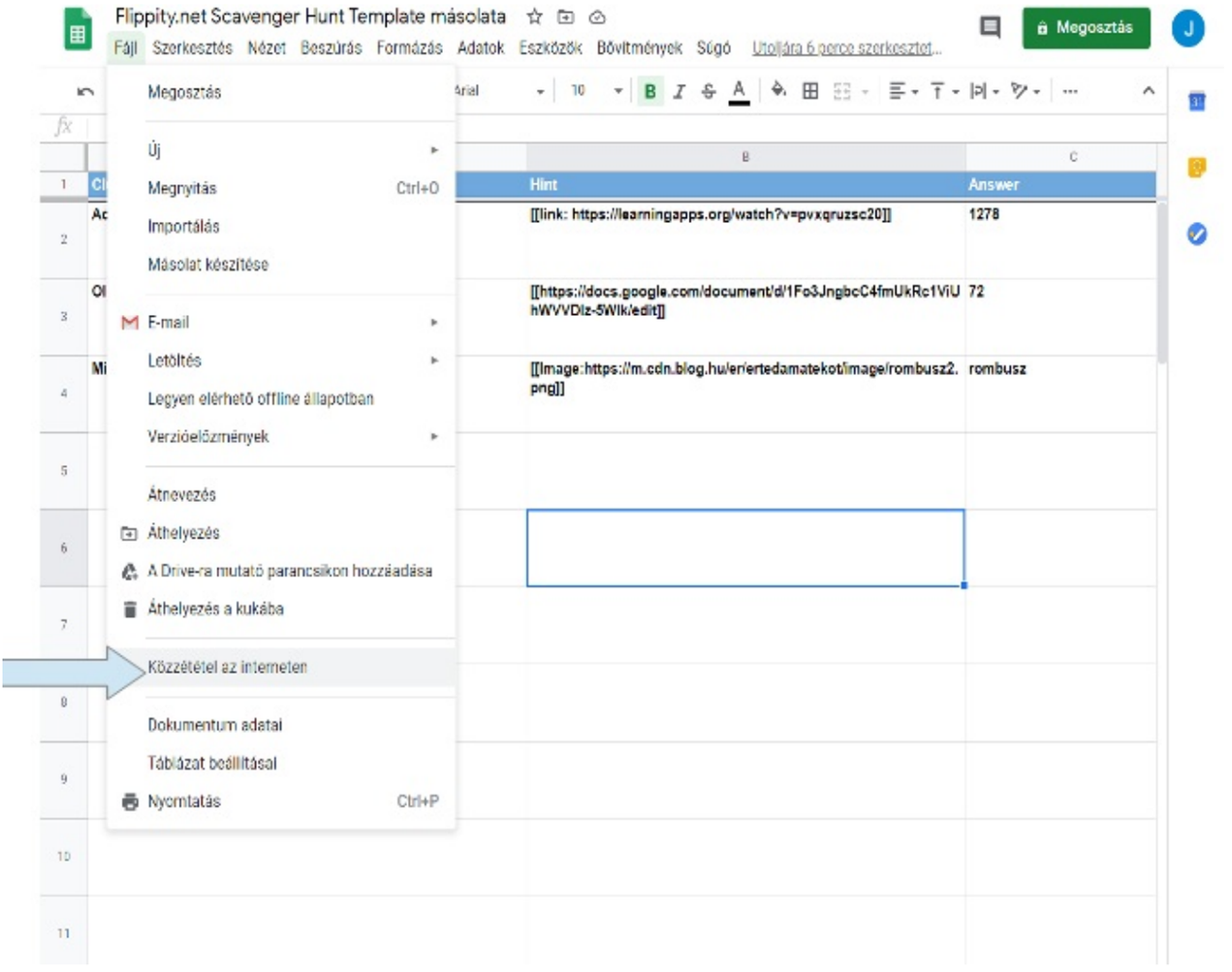




Az 1. feladatnál egy learningapps oldalt adtam meg. Arra kell figyelni, hogy az url címet két szögletes zárójelbe kell tenni [[(Alt Gr f), utána beírjuk a linket; a végére megint két szögletes zárójel]] (Alt Gr g) következik.

A 2. feladatnál egy google dokumentumba írtam az egyenletet.

Ha ezzel készen vagyunk, nyomjuk meg a Megosztás gombot:



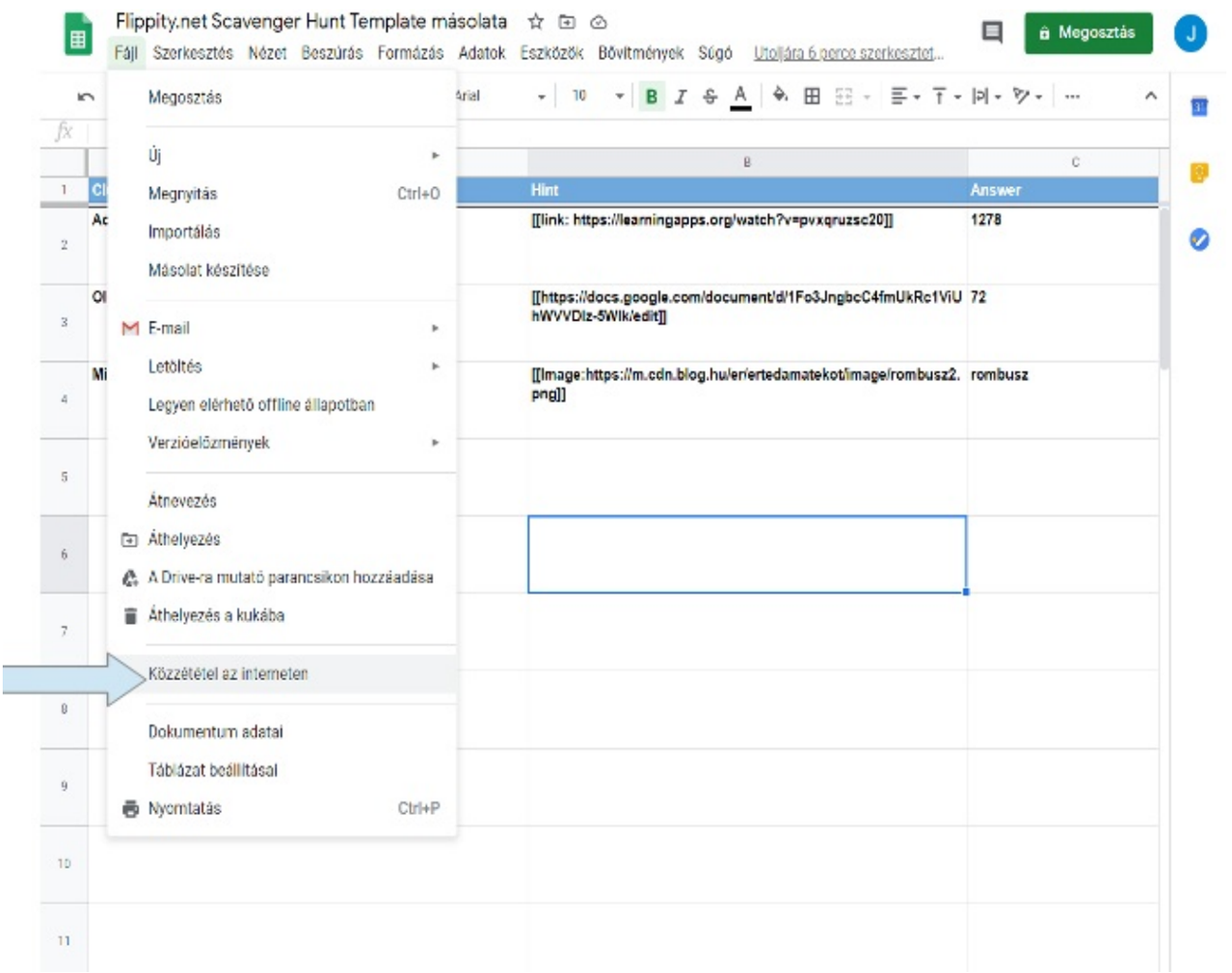
Döntsük el, hogy kivel osztjuk meg, és következhet a Link másolása. Ha a link nem docs.google.com-mal kezdődik, akkor az url címet másolom. Itt is a két szögletes zárójel kell az elejére és a végére.

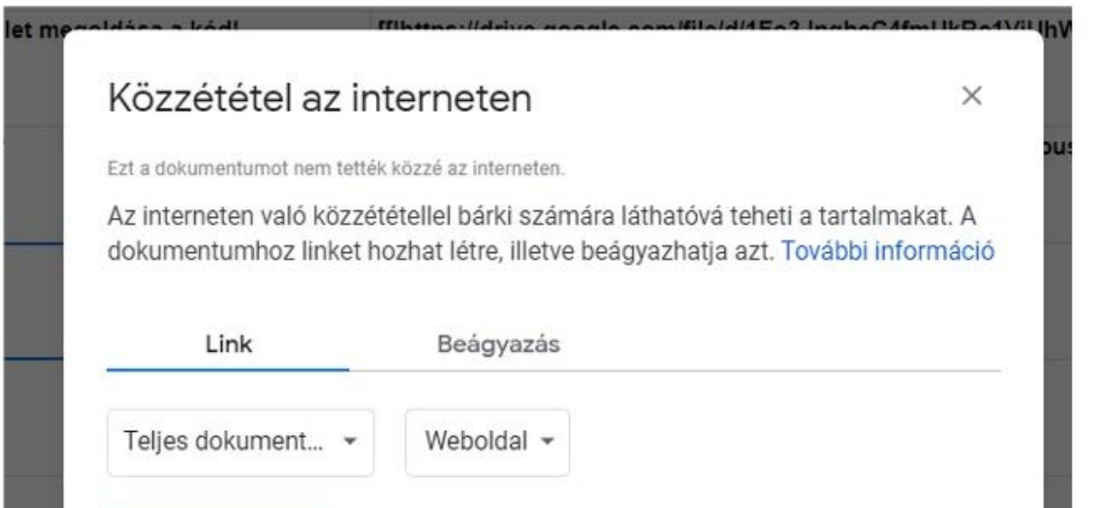
A 3. feladatnál egy képet illesztettem be; [[Image: ..... kép url címe jpg vagy png kiterjesztéssel]]

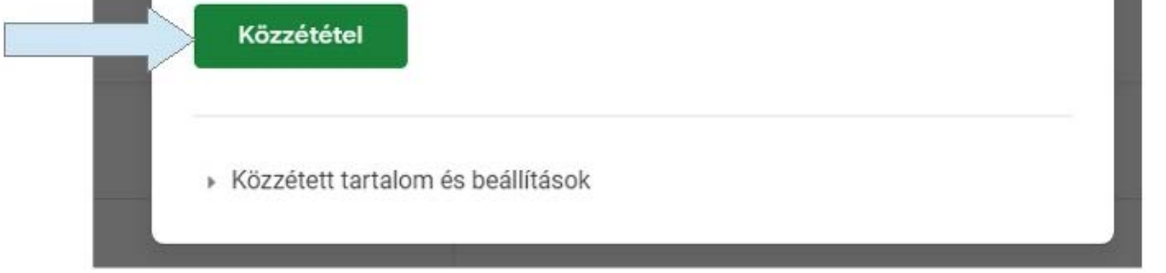
Lehet videót is megosztani: „Videó” alatt „Megosztás”, „Link másolása”, megint két szögletes zárójel közé.

A „Válaszok”-nál több jó választ is megadhatunk – pl. rombusz | paralelogramma (Alt Gr w) –, a jó válaszok közé illesszünk egy függőlegest.

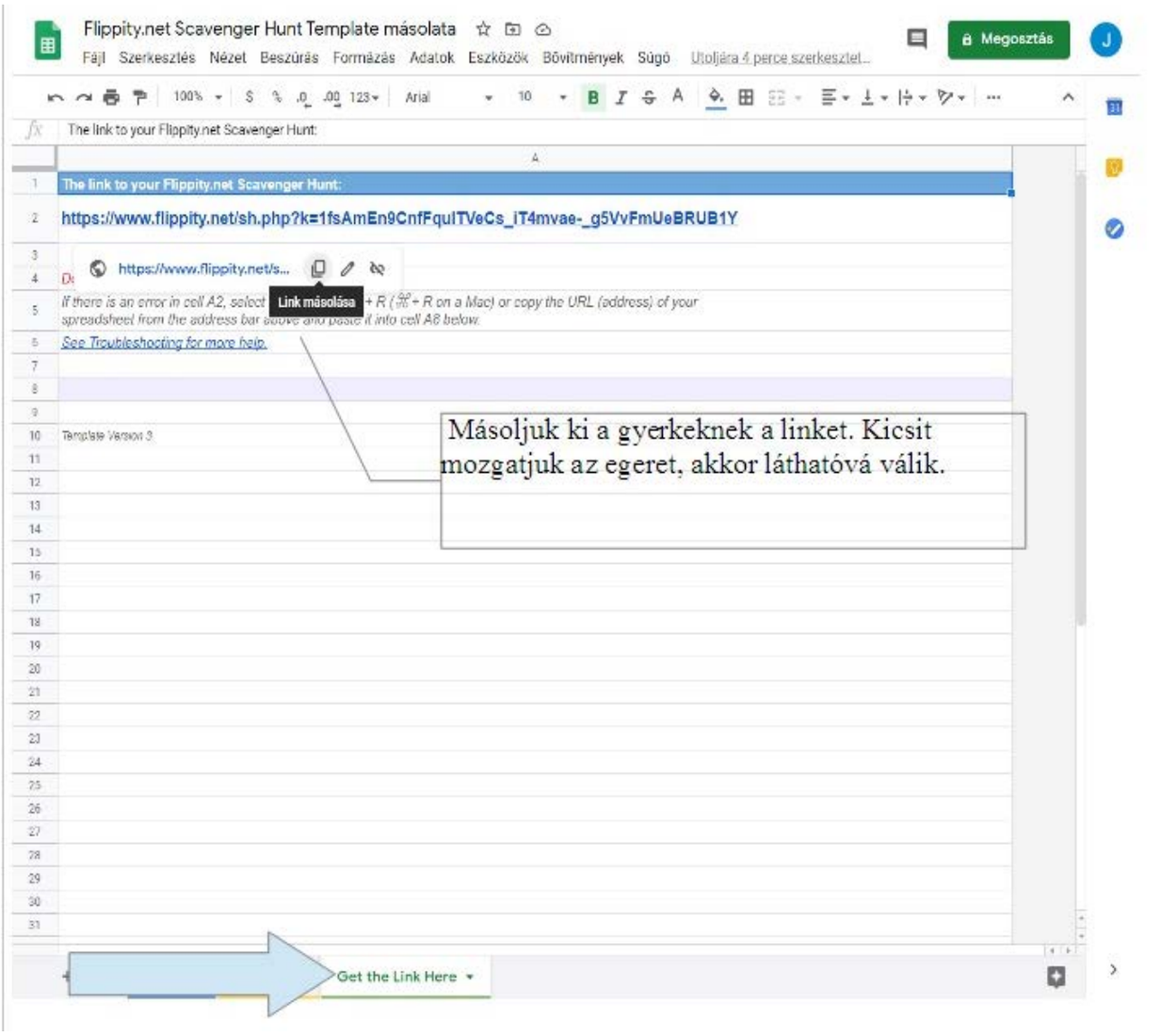
Ha az összes kérdésünket beírtuk, akkor a „Fájl” menüpontban kattintsunk erre: „Közzététel az interneten”:



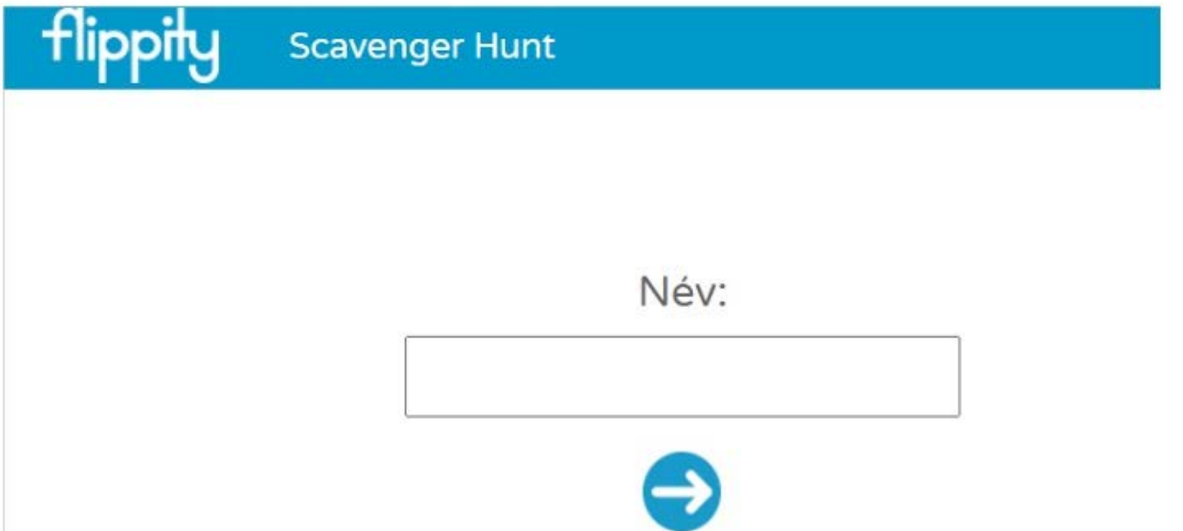




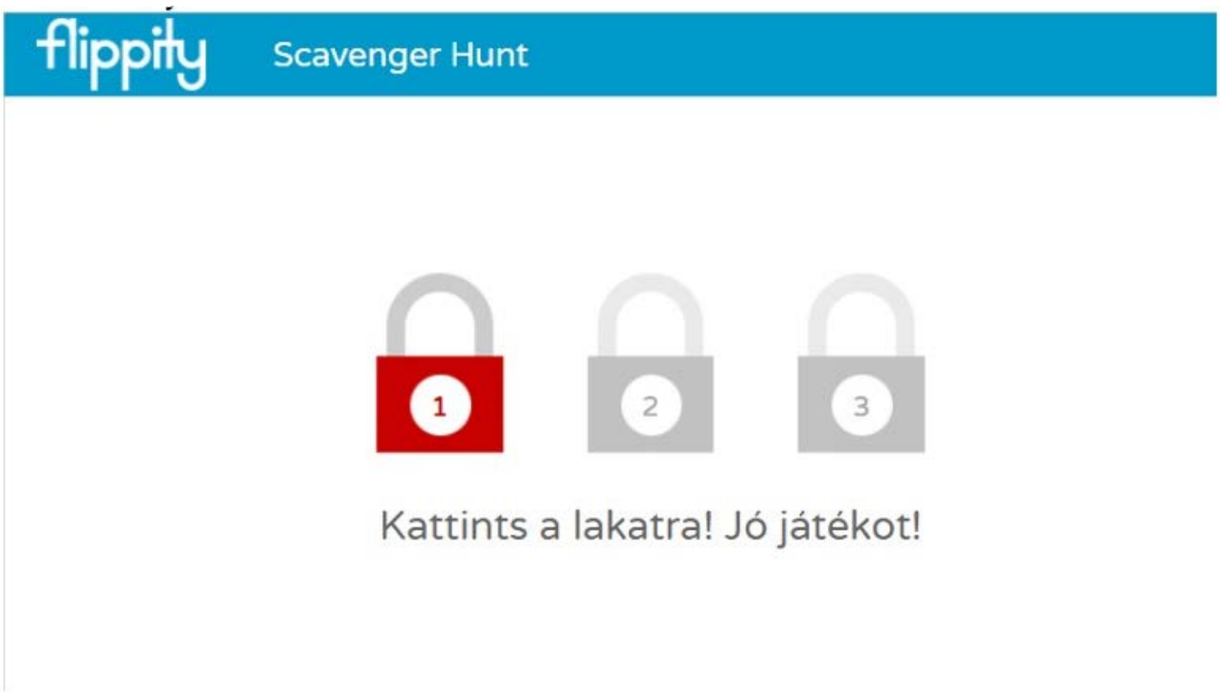
A harmadik fülre kattintva – „Get the Link Here”:



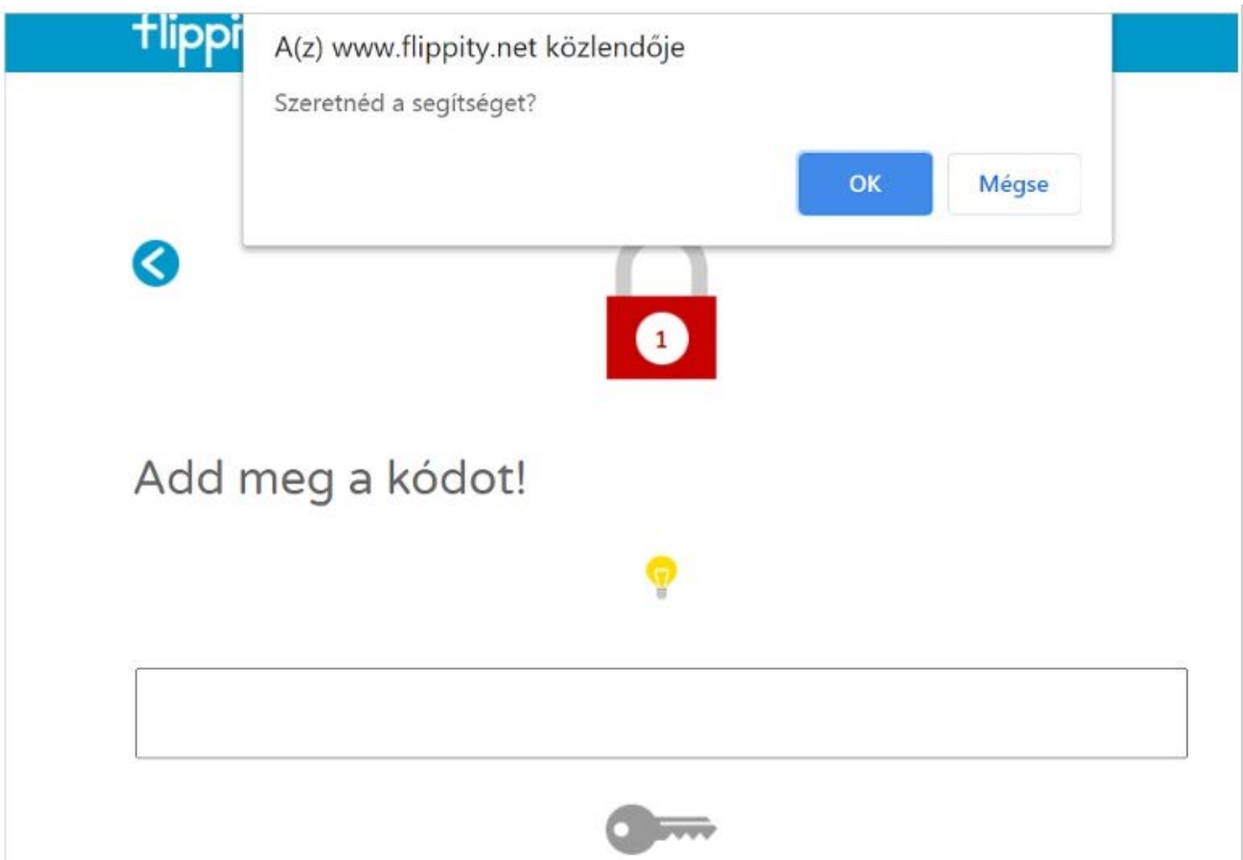
A gyerekek ezt látják majd:



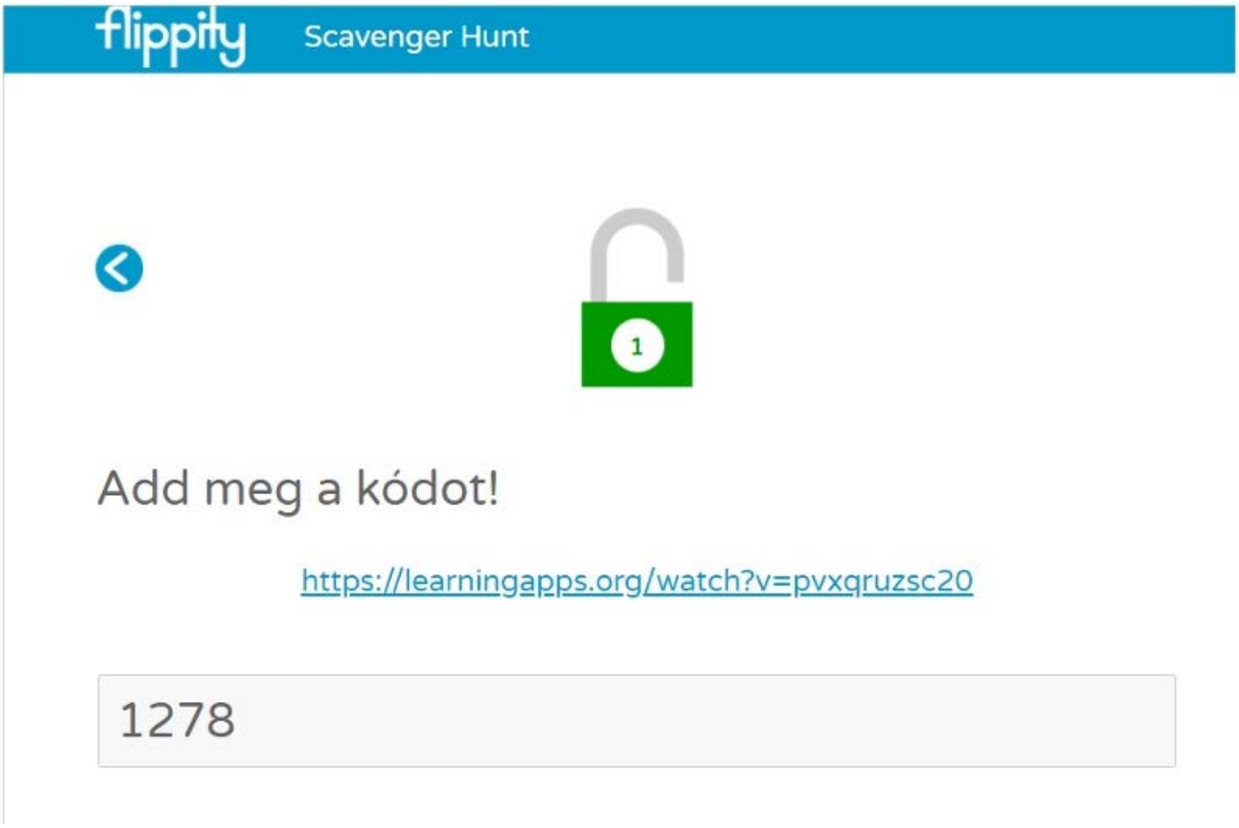
A nevüket beírva és a nyílra kattintva:

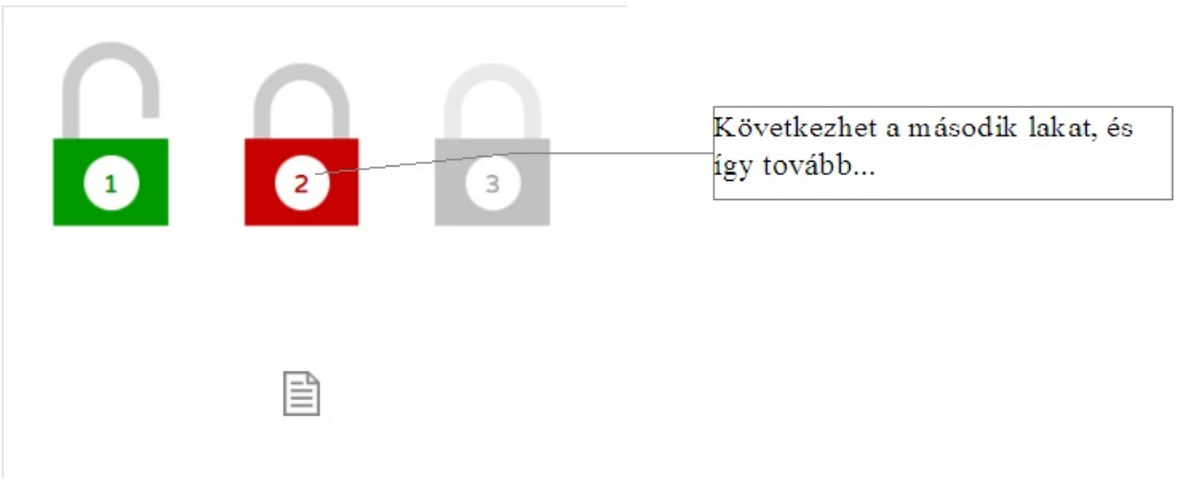


Ha a lakatra kattintanak, utána a villanykörtére, megkapják a küldött linket.

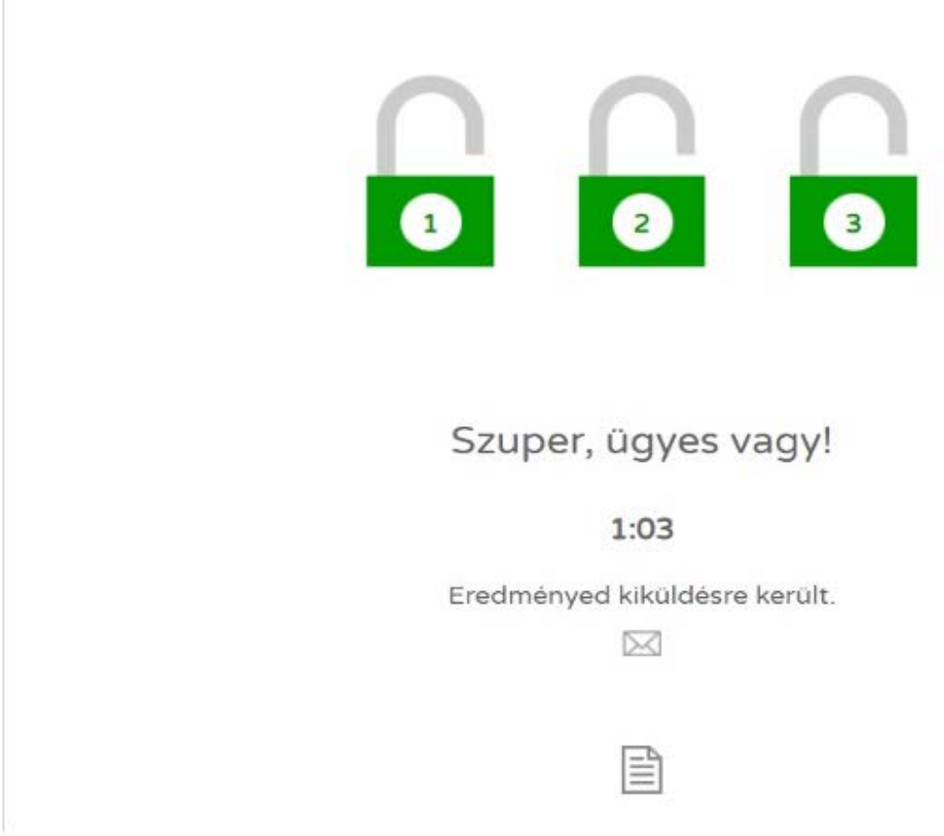


Ha a diákok jól megoldják a feladatot, megkapják a kódot, azt beírva, a kulcsra kell kattintaniuk, és zölddé válik a lakat. Visszalépve jöhet a következő lakat kinyitása.





Végül, ha sikerült kiszabadulniuk, ezt láthatják:



Az online „szabadulós” játékot csak ajánlani tudom mindenkinek, érdemes kipróbálni. Az első szabadulószobám több óra alatt készült el, viszont nagyon tanulságos és érdekes volt. A következő természetesen már sokkal gyorsabban ment.

A diákjaim is nagyon szeretik, amikor megkérdeztem őket, hogy tetszett nekik, akkor ezeket mondták a szabadulószobás feladatról (a megjegyzéseket nem javítottam ki, meghagytam úgy, ahogy ők írták):

„Kicsit hosszú volt, de izgalmas volt, megmozgatta az agyam. Jó volt. :)”

„Nem értettem meg a feladatot, amíg Ákos el nem magyarázta.”

„Ilyen többször is lehetne még!”

„Nagyon! Nekem kicsit néha nehéz volt, de csak egyszer puskáztam a netről, a szövegkiegészítésnél, hogy merőlegesen fékezi.”

„Szerintem ez így sokkal jobb volt, mint kijegyzetelni a tankönyvet vagy ilyesmi, és gyakoroltam is közben.”

„Feldobta a reggelem, szerintem nagyon ötletes, és tetszett :)”

„Tetszett hogy ilyen interaktív feladatok voltak benne.”

Remélem sikerült mindenkinek kedvet csinálnom szabadulószoba készítéséhez! Sok sikert és kitartást!

Tolnai Judit

Kempelen Farkas Gimnázium

informatika matematikatanítás logika

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Máder Attila,Torma Bence, Torma Gábor 2020. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Matematikaoktatás a COVID-19 idején

Bevezető

2020. március 13-án (péntek) este került bejelentésre, hogy a koronavírus járvány terjedése miatt a Kormány az iskolákban a tantermen kívüli, digitális munkarend bevezetéséről döntött, így március 16-tól új, online oktatási munkarend lép életbe (EMMI határozat, 2020). Bár az egyetemeken pár nappal korábban megszületetett a döntés és a szemeszter rugalmas átstrukturálásával az oktatók és a hallgatók egy hetet kaptak az átállásra, a köznevelésnek egy hétvége alatt kellett felkészülni a drasztikus változásokra.

Jelen írás célja, hogy bemutassa, hogyan látta három, az oktatás különböző szintjein különböző tapasztalattal, de azonos lelkesedéssel és didaktikai kutatókedvvel rendelkező tanár, oktató, hallgató az elmúlt hónapokat, a kezdeti nehézségeket. Az itt leírtak szolgálhatnak útmutatóul is, de az írás célja elsősorban a sorsközösség vállalása, a tapasztalatok megosztása. Bízunk benne, hogy az írás segíti a pedagógusokat a jelenlegi, illetve az esetlegesen következő online, vagy hibrid oktatási időszakban.

Az átállás

Bár hivatalosan már hétfőtől folyt az oktatás, annak megszervezése, előkészítése minden iskolában igényelt néhány nap türelmi időt.

Az iskoláknak először fel kellett mérnie, hogy a diákok otthonaikban rendelkeznek-e egyáltalán a megfelelő feltételekkel, amelyeket az új helyzet megkíván tőlük. Sok tanteremben található laptop, s mivel ezeket értelemszerűen nem használták a pedagógusok, azokat az iskola az online oktatás idejére kölcsön tudta adni az arra rászoruló diákoknak. Ezen eszközök száma így is jelentősen korlátozott volt, így volt olyan diák, aki csak okostelefonnal tudott bekapcsolódni az oktatásba. Ezt az új munkarend kialakítása, az új eszközök kiválasztása során figyelembe kellett venni.

Az átállás nehézségének megítélése céljából fontos megemlíteni, hogy a PISA mérések egyik legmegdöbbentőbb eredménye a diákok digitális írástudásának rendkívül alacsony színvonala (PISA 2018.). S bár folyamatosan vannak továbbképzések, eszközfejlesztésre irányuló pályázatok, a pedagógusok digitális írástudása is jelentős fejlesztésre szorulna. Sok iskola és pedagógus eddig nem is használta mindennaposan a digitális világ adta lehetőségeket, így a váratlan helyzet követelte gyors átállás sokkal több munkával és rengeteg kihívással járt a pedagógusok számára.

A szituációt (csak a saját szemszögünkből) nézve azt mondhatjuk, hogy a helyzet különösen nehézzé vált a matematikatanárok számára, hiszen így teljes újragondolást igényelt a közös órai gondolkodás, az irányított problémamegoldó helyzetek kialakítása, a gyakorló feladatok bemutatásának, elsajátításának mikéntje is. A helyzetet tovább nehezíti, hogy az attitűd vizsgálatok alapján a diákok matematikához való viszonya az évek előre haladtával folyamatosan romlik (Csapó, 2000). A középiskola elvégzése után tehát egyre nagyobb számban válnak olyan szülőkké, akik nem kedvelték a tárgyat, illetve nem is feltétlen rendelkeznek az elvárt kompetenciákkal és ismeretekkel olyan szinten, hogy segíteni tudjanak gyermekeiknek a tanulás során.

Kissé tágabb kontextusból szemlélve a helyzetet, nehezebb helyzetben voltak az általános iskola alsó tagozatán tanulók, és tanítóik is, legyen szó a gyermekkel csak a szülőn keresztül kommunikálni tudó tanítókról, vagy magukról az otthoni munkavégzés mellett a gyermekeiket tanítani próbáló szülőkről. A személyes jelenlétet, laboratóriumot, műhelymunkát igénylő szakképzésben dolgozók, vagy a nem megfelelő infrastrukturális körülmények között élőket tanítók is teljesen új helyzetben találták magukat.

Az oktatási platformok keresése

A kommunikáció kezdeti felülete az elektronikus napló volt, s az adminisztrációra, hivatalos kommunikációra ez végig meg is maradt, de egyéb funkciókat csak részlegesen használtak benne a legtöbben. A naplón keresztül órák megtartására (még) nincs lehetőség, de például házi feladatokat tűzhetünk ki. Nem szabad azonban elfelejteni, hogy ezek elsősorban naplók, ilyen jellegű funkcióik még fejletlenek. Így az első és legfőbb eldöntendő kérdés az volt, hogy milyen platformon fognak zajlani a tanítási órák. A fentiekben már részben részletezett szempontok figyelembevételével sok helyen célként tűzték ki az egységes felület használatát, hogy lehetőség szerint a diákoknak minél kevesebb virtuális helyet kelljen megkeresniük a tanulás során, így könnyítve az átállást, és azt, hogy feladataikat, teendőiket később is át tudják látni, rendszerezni, követni tudják azokat. Ugyanakkor az egységesség ellen szól, hogy ha tanár és diák is csak egyetlen felületet ismer, annak meghibásodása (pl. túlterhelése) esetén nem fognak felmutatható alternatívával rendelkezni. Meggondolandó az is, hogy biztosan minden tantárgy, korosztály számára egyformán alkalmas-e ugyanaz a központi, egységes felület. Elsőként olyan keretrendszer megtalálása tűnt a legmegfelelőbbnek, amely nem csak az óra megtartását teszi lehetővé, de egyéb kommunikációs színteret biztosít a diákok és tanárok számára, valamint a feladatok kiírása és beadása is lebonyolítható a felületen. A tapasztalatok szerint azonban gyakran különvált az óra megtartásának felülete a ki- és beadandó feladatok kezelésének felületétől.

Az egyes felületek kiválasztása során elsődleges szempont volt – az ingyenesség mellett – az, hogy a felület használata egyszerűen megtanulható legyen, például a programba épített részletes tutorial, vagy akár Youtube videók segítségével. A fentieken túl szempont volt, hogy az adott platform okostelefonról is elérhető legyen, sok diák ugyanis nem rendelkezett (legalábbis az óra időpontjában állandó rendszerességgel) számítógép hozzáféréssel, hiszen az vagy nem volt a családban, vagy a szülők, testvérek használták a még esetlegesen meglévő több gépet is.

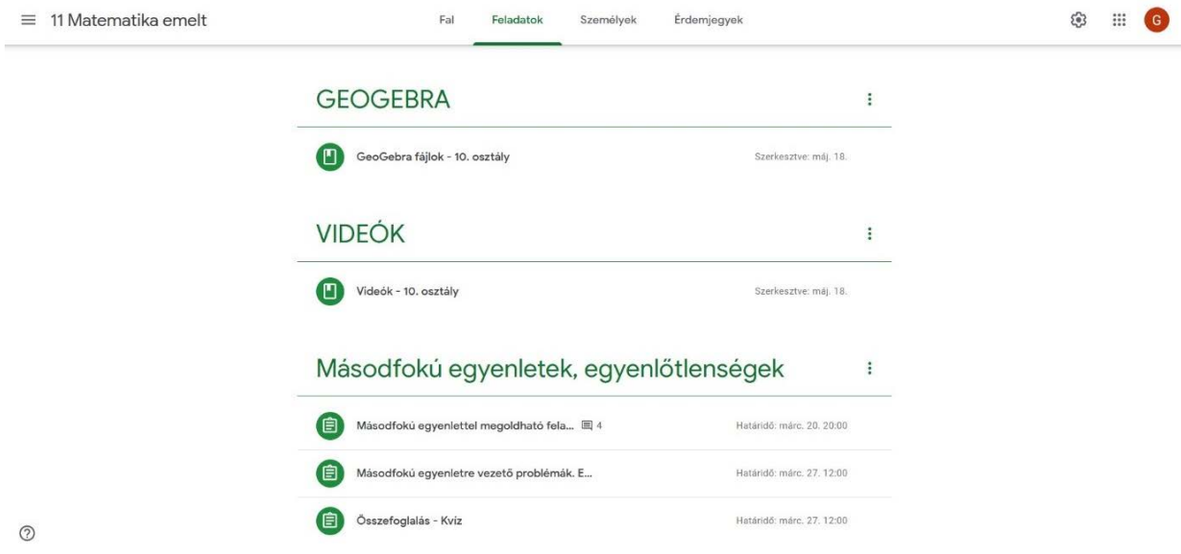
Az óratartás lehetőségei

Az óra megtartására alkalmas, képernyőmegosztást, fájlok feltöltését, hozzászólási lehetőségeket támogató felület például a Discord, a Zoom, a Google Meet, vagy a Microsoft Teams. Minden felületnek megvannak a maga előnyei, hátrányai, s főleg az első hetekben bizonyára többen többet kipróbáltak, keresve a számukra technikailag kezelhető felületek közül azt, amely tantárgyukhoz, a tanított diákok életkori sajátosságaihoz, otthoni eszközparkjukhoz leginkább illeszkedett. A Zoom például csak 40 perces beszélgetéseket enged ingyenesen (két főnél nagyobb csoportok esetén), de a felület gyors, keveset késik a hang, a „szobába” belépni kívánó diákok akár egyszerre is beengedhetők. A Meet esetében nincs időkorlát, de a hang zavaróan sokat késik, és az órára belépni kívánó diákok csak egyenként engedhetők be, ami rendkívül időigényes. Ezen felületek esetében, ha az óra már elkezdődött, s képernyőmegosztással prezentálás folyik, csak azt megszakítva, abból kilépve engedhető be diák az órára. (Ebben gyakorlatilag mit sem különbözik egy valós tanteremtől.) A Discord nagy előnye, hogy előre létrehozhatók különböző szobák (tantermek), amelyekbe az arra való jogosultsággal rendelkezve bármelyik diák bármikor beléphet. A tantermekhez chat fal tartozik, ahová posztolhatók az óra diái, a házi feladatok megoldásai, az önálló tanulást segítendő különböző segédanyagok linkjei stb.; egyszerűen szervezhetünk szavazásokat is, és nem utolsó sorban kérdezni is lehet. Nem kell folyton linkeket generálni, jelszavak átadására figyelni, a későket az órát megszakítva beengedni. A felület a járványhelyzet kezdetén csak hang továbbítására volt alkalmas, a tanév folyamán azonban videó továbbítási lehetőséggel is bővült. Személyes tapasztalat, hogy a program valamely későbbi frissítése olyan változtatást hozott, amellyel kb. 20 fő felett nem volt működőképes a felület, a diákokat kidobta, nem látták az élő adást stb.

A frissítések, a megszokott felületek egyik napról másikra történő megváltozásai más platformokra is jellemzőek, ami naprakészségre, a változások elfogadására, nyomon követésére, fokozott rugalmasságra nevelték elsősorban a pedagógusokat.

Feladatok ki- és beadása

Az órai feladatok (akár dolgozatok) kiadására, beszedésére, javítására egyik legalkalmasabb lehetőségnek kínálkozott a Google Classroom. Ez a felület szintén megfelel a korábban támasztott szempontok és feltételek mindegyikének. Itt a tanár létrehoz egy ún. kurzust, és oda (e-mailen keresztül vagy egy kurzuskódot megadva) meghívja a tanórán résztvevő diákokat. A felületen feladatok tűzhetők ki, akár személyre szabottan is, akár tesztek is összeállíthatók (1.ábra). A feladatok megjelenése ütemezhető, megadható továbbá a beadási határidő és a feladat pontszáma is. A feladatokat a diákok – különösen matematikából – az ábrák, képletek miatt a füzetükben készítik el, majd lefotózva a képeket (pl. a CamScanner alkalmazással optimalizálva) feltöltik. A javítás a beadott dokumentumon megtehető hozzászólás beszúrásával, így a feladat írásban, privát megjegyzés formájában értékelhető. A Classroom alkalmas a tanárok és diákok akár csoportos, akár privát kommunikációjára is, a tanár feladatok mellett tananyagokat is tud itt készíteni, közzétenni, amelyeket fájlok feltöltésével, linkek hozzáadásával színesíthet.

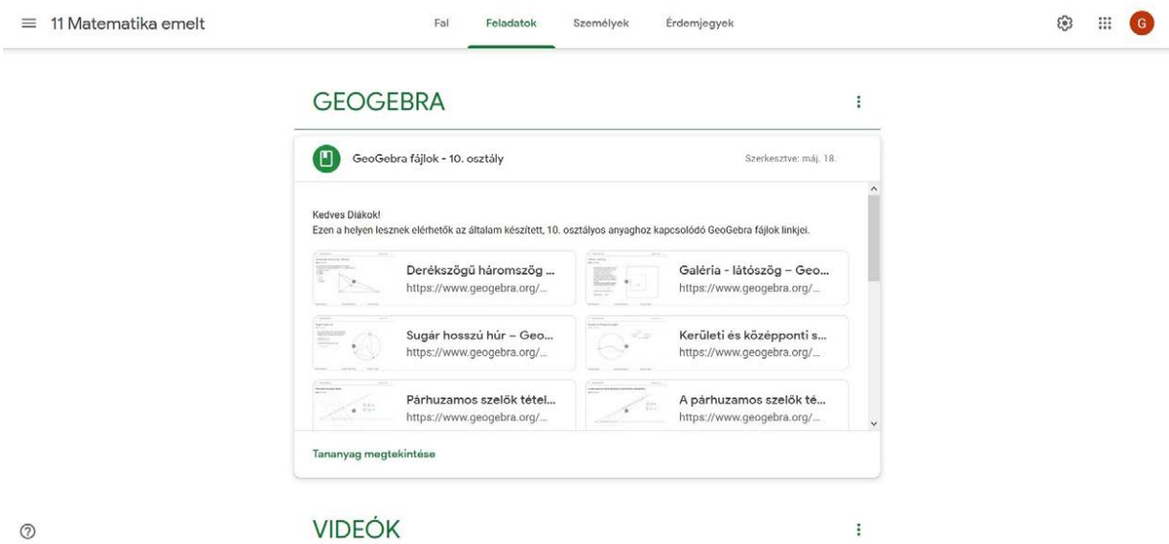


1. ábra. Classroom használata feladatok kiadására

Tananyagok a gyakorlatban

Minden intézmény és tanár igyekezett szellemiségét, a korábbiakban megszokott elvárásait átmenteni a digitális térbe, ezek figyelembevételével szervezve újra a tanulási folyamatokat. Sok helyen intézményi vagy fenntartói stratégiák, alapelvek születtek a folyamatok koordinálására, a kérdéses szituációk egységes megoldásának megkönnyítésére.

A matematika tantárgy tanulásánál különösen fontos a tanári magyarázat, a tanári kérdések szerepe a gondolkodásfejlesztés és problémamegoldás során. A tanórákon megjelenő magyarázat, a közösen megoldott mintafeladatok nagy részét az interneten elérhető vagy a tanár által készített interaktív tananyagok, jegyzetek, prezentációk, GeoGebra fájlok vagy az ezekből készített videók igyekeztek pótolni (2. ábra).



2. ábra. GeoGebra anyagok a Google Classroomban

Példaértékű társadalmi összefogás, egyéni vállalások, és a piac szereplőinek önzetlen felajánlásai segítették a digitális távoktatás formájában (is) használható tananyagok, platformok, fórumok létrejöttét. Számos önsegítő Facebook-csoport mellett örvendetes volt, hogy a digitális világban bátortalanul mozgó pedagógusok segítséget kaphattak lelkes, önszerveződő egyetemistáktól (OKTONDI), segítve ezzel legalább az eszközszintű felhasználást. A magasabb szintű digitális kompetenciákkal rendelkező pedagógusok pedig alkotó jellegű tudásukat felhasználva saját digitális tananyagaik nyilvános publikálásával segítették kollégáikat (pl. Erdős Gábor: Vektorműveletek 9-10. osztály). Több országos kiadó, online platform tette ingyenesen elérhetővé, vagy részben ingyenessé tartalmait. A Mozaik Kiadó a MozaBook rendszerét, a Maxim Kiadó a teljes középiskolás tankönyvsorozatát, a Mateking felület az egyébként fizetős, középiskolai digitális tartalmát tette ingyenessé.

A teljesség igénye nélkül ezekből mutatunk néhányat, kiegészítve a használatuk közben szerzett meglátásokkal.

- A *MozaBook* vagy az ingyenesen hozzáférhetővé tett statikus tankönyvek elsősorban a tanárok munkáját segítették, a tanagyagok, feladatsorok összeállítása során. A feladatok szövege, a kapcsolódó nyomdai igényességű ábrák, animációk hozzájárultak ahhoz, hogy a munka érdemi részére tudjunk koncentrálni, a feladatok szövegének fáradtságos begépelése, formázása, az ábrák sokszor komoly szakértelmet igénylő megrajzolása helyett. Az okostankönyvek a fentieken túl tartalmaznak a tudás mérésére alkalmas interaktív, dinamikus feladatokat is, így alkalmasak a diákok számára az önálló feladatmegoldásra, ellenőrzött, azonnali visszajelzéssel élő gyakorlásra.

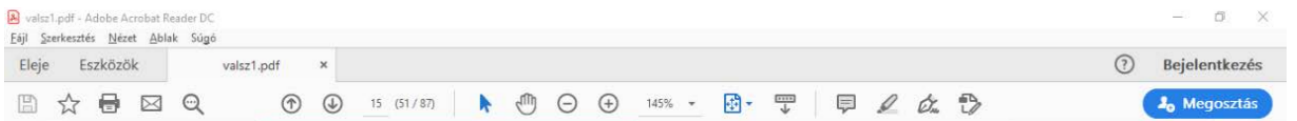
- A már meglévő Youtube csatornák (*Zanza tv, Zseni leszek)* mellett érdemes volt figyelni a különböző megosztásokat, mert lelkes kollégák saját csatornáival, ingyenesen elérhetővé tett korábbi előadásokkal, tananyagokkal is lehetett találkozni. Bár itt kérdezni nem lehet, visszajelzésre nincs lehetőség, de a videók megállíthatók, visszajátszhatók, így mindenki a saját tempójában dolgozhatja fel a látottakat. Nehézséget jelent viszont a szelektálás, a tudásszintünknek, szükségleteinknek legmegfelelőbb anyag kiválasztása, a megértés ellenőrzése.
- A *Mateking* anyagai is ingyenesen hozzáférhetőek voltak. A tanagyag itt témakörökre, azokon belül epizódokra bontva jelenik meg, így itt a keresés, a szükséges ismeretek megtalálása jól segített. A vetítések részletes hangjegyzetekkel vannak ellátva, megállíthatók, kijegyzetelhetők, ismételhetők. Az egyes epizódok egymásra épülnek, a fokozatosság elvét szem előtt tartva, jó didaktikai felépítésben mutatják be a témakört.
- A *GeoMatech* projekt oldalán számos GeoGebra munkalap, applet található évfolyamokra és témakörökre bontva, kereshető formában. Az appletekkel való játék elsősorban az érdeklődő, felfedeztető tanulásra fogékony diákok számára nyújt jó tanulási lehetőséget, de az itt található anyagok szemléltetésre, egy-egy tétel, összefüggés kapcsán bizonyítás híján meggyőzésre tökéletesen használhatók. A program által dinamikusan generált, és automatikusan ellenőrzött feladatlapok pedig az önálló gyakorlást szolgálják. A diákok digitális és matematikai kompetenciája, valamint a heurisztikus gondolkodása is fejleszthető geometria tartalmú feladatok GeoGebra programmal történő tárgyalásával. A diákok feladata lehet ekkor egy példa modellezése a program segítségével, a dinamikusan változtatható ábrák alapján következtetések levonása, esetleg állítások cáfolása. Ez a diákok motiválására is egy lehetséges eszköz, hiszen nem a megszokott és monoton feladatmegoldás lesz az elvárt, a teljesítendő feladat.
- A *Khan Academy* komplett, teljes online távoktatást lehetővé tevő rendszert kínál. Bár a magyarázó videók angol nyelvűek, de magyarul feliratoztathatók. A tananyag egyre nagyobb hányada érhető el magyar nyelven is. Az egyes témakörökhöz kapcsolódó feladatlapok jól felépítettek, elakadás, hiba esetén segítséget adnak a hiányos ismeretre mutató linkek formájában, helyes megoldás esetén motivációs jelleggel pontgyűjtésre van lehetőség. Hátránya, hogy jellegéből adódóan, jellemzően csak feleletválasztós, vagy rövid válaszos (numerikus végeredmény) feladatokkal dolgozik.
- A *Photomath* mobilalkalmazás régóta ismert a diákok körében is. Jelenleg egyenletekkel, algebrai kifejezésekkel dolgozik, azok lefotózása után megoldja az egyenletet, egyszerűbb alakra hozza a kifejezést, függvényt ábrázol, jellemez. A megoldást lépésről lépésre kifejti, az egyes lépéseket a legelemibb összefüggések szintjéig visszavezetve többszinten elmagyarázza. Legfőképp önellenőrzésre, illetve a hiányosságok pótlására használható „hivatalosan”. Nem hivatalosan az órai, otthoni, dolgozatban kifejtendő munka helyettesítésére is használhatjuk. A program folyamatosan fejlődik, ma már egy-egy feladattípusra többféle, az órai, emberi gondolkodást követő megoldást is ad. Vannak azonban olyan problémák, például az értelmezési tartomány, értékkészlet vizsgálatával megoldható egyenletek, egyenlőtlenségek, ahol még (!) olyan eszközöket, algoritmusokat használ, amelyek egyértelműen mutatják, hogy a feladatot az applikáció oldotta meg, nem pedig a diák.

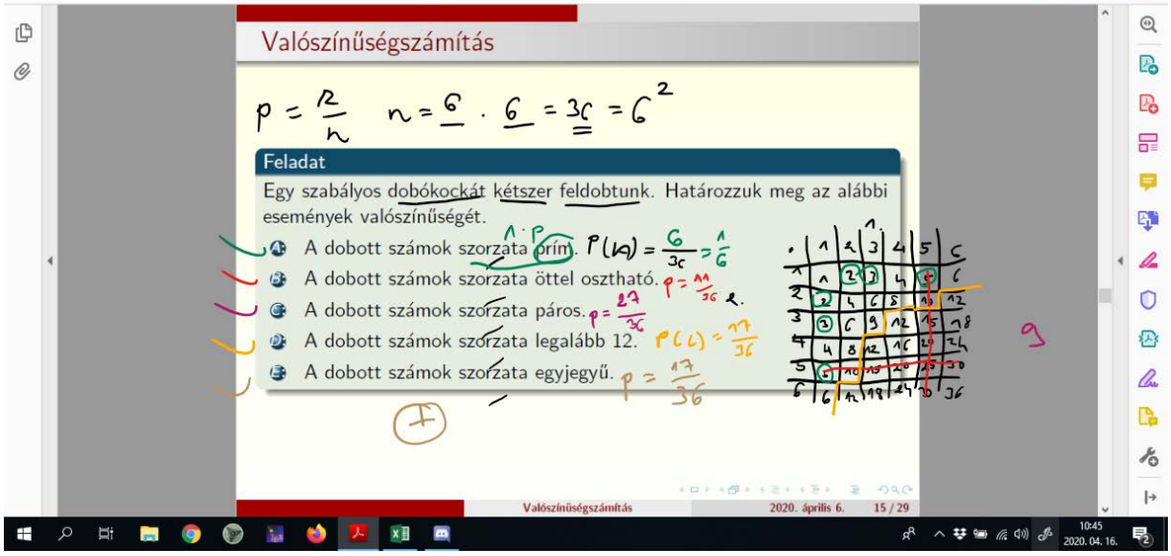
Azonban a legfontosabb szerep továbbra is a tanár-diák interakcióé maradt.

Tanórák a gyakorlatban

A matematika tanórák, illetve konzultációk színterénél különösen fontos elvárás volt, hogy a tanár, illetve a diákok láthassák egymás munkáját, megjeleníthető legyen egy adott pillanatban készülő „füzetkép”, amely tartalmazza a levezetéseket, ábrákat. Ezt a különböző chatre vagy videóbeszélgetésre készített, részben korábban már bemutatott programok képernyőmegosztása tette lehetővé. A résztvevők a képernyőmegosztás során látják a másik munkáját, azonos időben tehetnek fel kérdéseket a felek a tananyaggal kapcsolatban. Az iskolai tábla szerepét a megosztott képernyő vette át, míg az interakció az online videóhívás által valósult meg. Nehézséget jelent azonban a matematikai ábrák és formulák megjelenítése.

Egy *digitalizáló tábla* segítségével a tanár ténylegesen képes lesz úgy használni számítógépének kijelzőjét, mint az osztályteremi táblát. Egy ilyen eszköz használata praktikus lehet ábrák készítésénél, matematikai formulák könnyebb, és a diák számára is olvashatóbb felírásánál, előre elkészített prezentációkra újabb rétegben történő írásnál (3. ábra).





3. ábra. Előre begépelt feladat kiegészítése magyarazát közben

A javítás során is egyszerűen tudunk a kiadott feladat megoldásáról beküldött képhez megjegyzéseket írni, a beadott munkát a papír alapúhoz hasonló módon javítani. Az elkészült táblaképek elmenthetők, publikálhatók, így a diák ténylegesen a keletkező új tartalomra tud koncentrálni az óra során, nem kell (nem is feltétlenül tudna) *közben* jegyzetelnie. Szerencsés azonban, ha elvárjuk, hogy óra *után*, a keletkezett táblaképeket másolja be a füzetébe, segítve ezzel egyrészt újabb átgondolás formájában a megértést, másrészt a digitális tananyag szinkronba kerül a korábbi, hagyományos jegyzetekkel, bármikor könnyen visszakereshetővé válik. A táblák, akárcsak az órák megtartására szolgáló felületek sokfélék, vannak, amelyek saját szoftverrel működnek, másokhoz külön program kell, itt már mindenesetre nem igaz, hogy elég egy linkre kattintva belépni egy kész, testre szabott tanterembe.

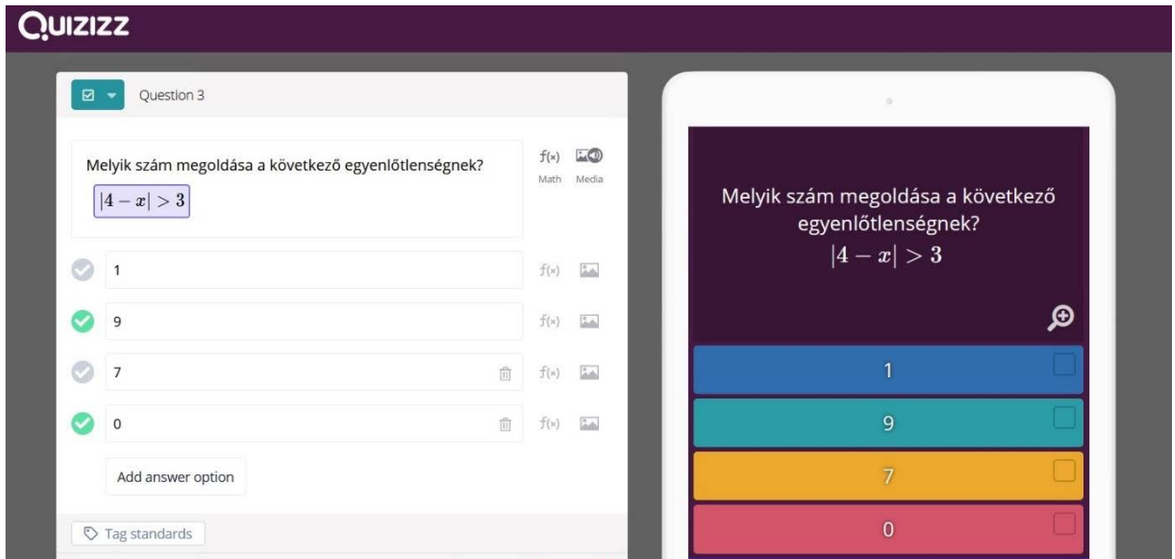
A digitalizáló tábla kiváltható *táblagép és okostoll* használatával. Ekkor a számítógépről indított videóhívás során például egy Google Jamboard lapot oszthatunk meg a résztvevőkkel. A táblagéppel a Google fiókba történő bejelentkezés után, a Jamboardot megnyitva a szerkesztéseink rögtön láthatóvá válnak a videóhívás résztvevői számára. A képletek és ábrák felírása a tablettel és tollal komfortosabb és precízebb, mint az egérrel vagy akár kézzel történő írás, azonban figyelnünk kell arra, hogy a kezünk ne érjen hozzá a kijelzőhöz.

Aki nem szeretne, vagy nem tud beszerezni sem digitalizáló táblát, sem táblagépet, annak elég lehet egy *okostelefon vagy egy webkamera* is. A kamerát például egy egyszerű állvány segítségével az asztal fölé tartva lehetőségünk adódik arra, hogy hagyományos módon tudjunk egy papírlapra írni. Állvány készítésére több lehetőségünk van, gyorsan kivitelezhetjük fából, kartonból, de akár még legóból is. Ilyen elkészített állványokat láthatunk Kurusa Árpád blogján (Kurusa Árpád blogja, 2020).

Az értékelés kérdése és hitelessége

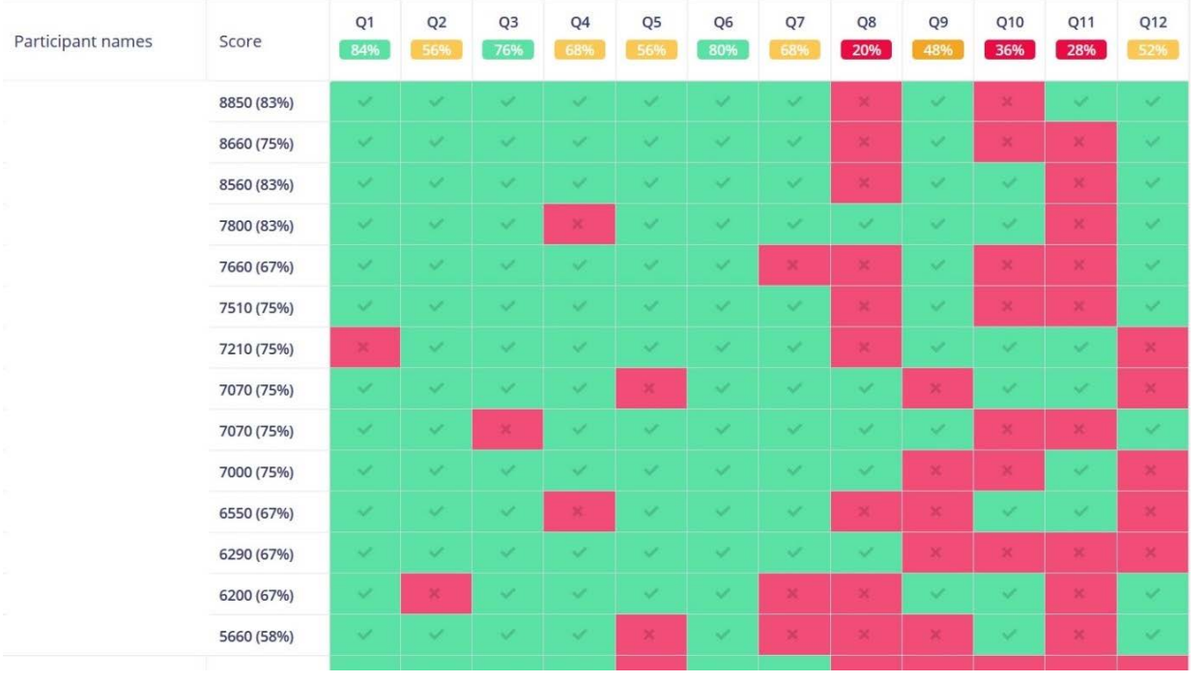
Az előzőekben felsorolt megváltozott körülmények teszik fontossá a pedagógusok számára az értékelés átgondolását is. A diákok számára kiadott feladatoknál ugyanis nem garantálható, hogy a megoldó milyen segédeszközt, segítséget vesz igénybe, sőt nem garantálható a megoldó személye sem, így nehezen megítélhető, hogyan lehet igazságosan értékelni. A fentiekben ismertetett, a tanulást nagy mértékben segítő, motiváló, kompetenciafejlesztő hatású programok, alkalmazások, felületek bármelyike rendelkezésre áll ugyanis nem csak a tanulás, de a számonkérések során is. Nem is beszélve az esetleges külső, személyes segítségekről. A számonkérések hitelességének biztosítása megoldatlan probléma maradt.

A megszokott matematika számonkérések átültethetők a virtuális térbe, sőt a számonkérések módja változatosabbá is tehető. A hagyományos, papíron kidolgozandó (és például Google Classroomban beadott) feladatok kijavítása, még a korábban ismertetett módokon is aránytalanul sok időt vehet igénybe. Ezzel szemben a digitális térben létrehozott tesztek javítása könnyebb. A feleletválasztós, vagy rövid választ (egyetlen szám) igénylő feladatok javítása automatizálható, és a nyílt végű feladatok javítása is egyszerűbb, hiszen a megoldás eleve olyan digitális formában (begépelve egy űrlapmezőben) érkezik, amelyhez hasonló egyszerűséggel megjegyzés, javítás, értékelés fűzhető. A teszteknél előnyt jelent, ha a program véletlenszerű sorrendben adja a feladatokat, illetve zárt végű feladatok esetén a válaszlehetőségek sorrendje is változtatható. Az értékelés során segítség, hogy a program összeadja az elért pontokat, azok alapján az előre beállított határok alapján jegyeket is ad. A diák azonnal teljes értékű, személyre szabott értékelést kap munkájáról. Ezekkel a tulajdonságokkal rendelkezik például a Quizizz (4. ábra), melynek további előnye, hogy a feladatok és válaszok szövegébe matematikai szimbólumok és kifejezések is illeszthetők, továbbá a kérdéseknél egyesével beállítható időkorláttal szabályozható a feladatok megoldására maximálisan rendelkezésre álló idő.



4. ábra. Feladat Quizzizben

Hasonló funkciókkal rendelkezik a Redmenta, de tesztek, kérőívek összeállíthatók akár a Google megfelelő alkalmazásával, vagy az állami fenntartású intézmények Kréta (Neptun) naplójával is. Az ilyen jellegű számonkérések nagy hátránya, hogy idegenek a jelenlegi matematika érettségi rendjétől. Elgondolkodtató lehet egy teszt összeállításának fáradságos feladata előtt az is, hogy bizonyos tesztek esetében a böngészőből az oldal html kódjából az értő szem megtalálhatja a helyes választ.



Participant names	Score	Q1 84%	Q2 56%	Q3 76%	Q4 68%	Q5 56%	Q6 80%	Q7 68%	Q8 20%	Q9 48%	Q10 36%	Q11 28%	Q12 52%
	8850 (83%)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✗	✓	✓
	8660 (75%)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✗	✗	✓
	8560 (83%)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✗	✓
	7800 (83%)	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓
	7660 (67%)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✓
	7510 (75%)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✗	✗	✓
	7210 (75%)	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗
	7070 (75%)	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✗
	7070 (75%)	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✓
	7000 (75%)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✓	✗
	6550 (67%)	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✗	✓	✓	✗
	6290 (67%)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✗
	6200 (67%)	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✓	✓	✗	✓
	5660 (58%)	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✓	✗	✓

5. ábra. Feladatokat megoldók százalékos arányának mutatása Quizizzben

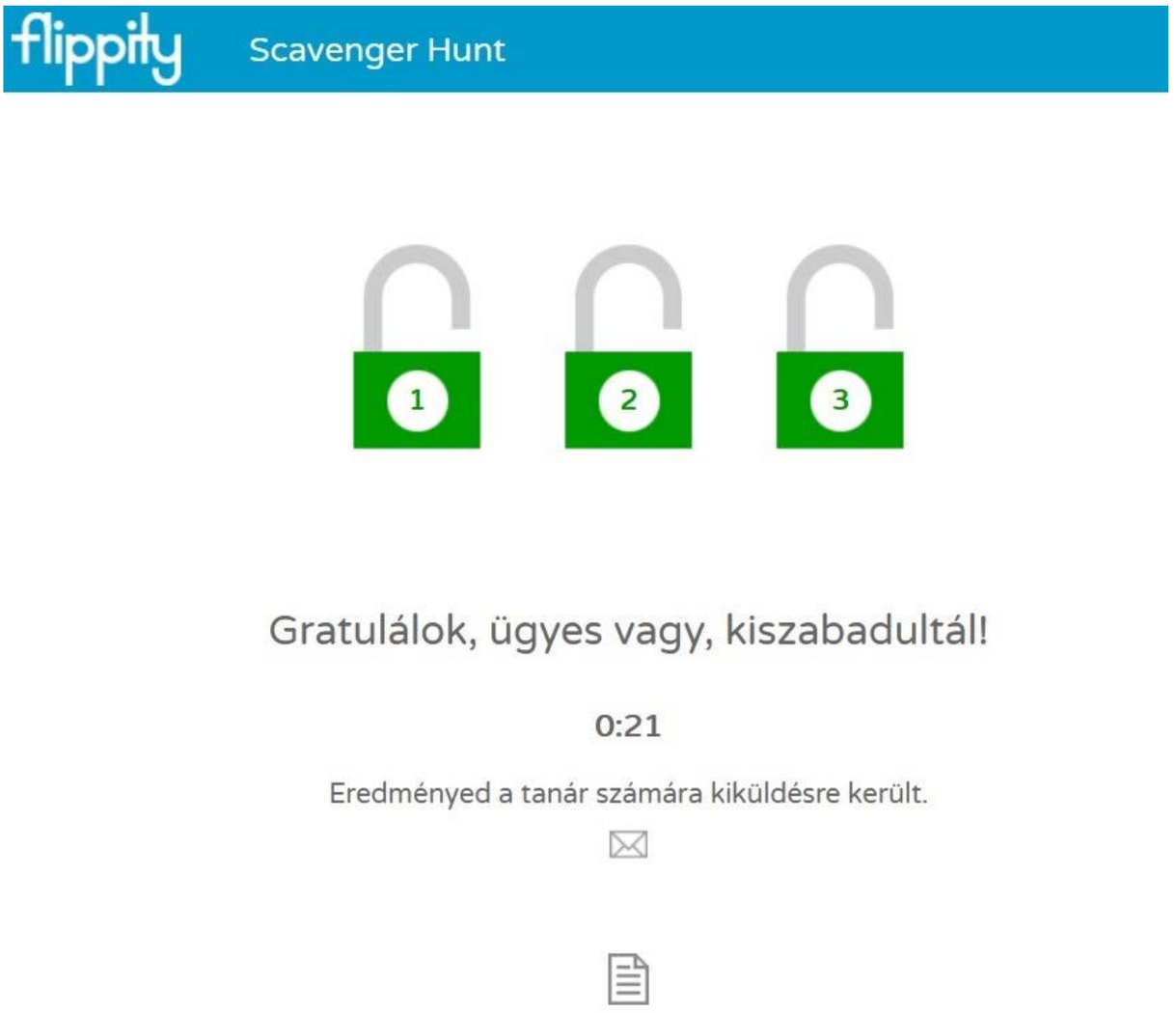
Módszerek a digitális oktatásban

A digitális tanórák mellett általában a kiadott feladatok és azok (többé-kevésbé) önálló megoldása dominált. A kialakult helyzetben a diákok most is adott határidőre kaptak feladatokat, hosszabb-rövidebb ciklusokban dolgoztak. Saját idejüket beosztva igyekeztek az anyag megértése és elsajátítása után a feladatokat határidőre beadni. A feladatoknak és az általuk elérni kívánt célnak összhangban kellett lennie elsősorban a megváltozott körülményekkel, de a kimenti követelményekkel, a tanterv és tanmenet elvárásaival, valamint a diákok lehetőségeivel, igényeivel, képességeivel is.

Fontos szempont volt a motiváció fenntartása. A tapasztalatok alapján a diákok az online oktatás kezdetén lelkesek voltak, élvezték az új szituációt, a változatos felületeteket, azt, hogy sokszor még ők segíthettek tanáraiknak a kezdeti lépéseikben. A lelkesedés azonban a bezártság, összezártság monotóniájában gyorsan alábbhagyott, ráadásul ezt tovább gyorsította a diákok leterheltsége is, hiszen sokan a távoktatásban (csak kiadom az anyagot minimális magyarázattal) látták lemaradásuk csökkentésének, behozatalának lehetőségét.

A monoton, de az ismeretek eszközszintű birtoklása céljából szükséges gyakoroltatás színesebbé téltelének, a motiváció növelésének egy lehetséges módja a gamifikáció (Fromann & Damsa, 2016). A ciklusokra bontott munka során, az adott időintervallumra kiadott feladatok elvégzését nem értékeltük azonnal érdemjeggyel. Minden ciklus elején egy feladatcsokor jelent meg a Classroom felületén, melynek egyes részei kötelezően teljesítendőnek voltak jelölve, a többi feladat szabadon választható volt. A feladatok pontszáma a feladatok nehézségéhez és összetettségéhez igazodott. A feladatok között megtalálhatóak voltak hagyományos számolós példák, GeoGebrában megoldható feladatok, kvízek, szabadulószobák is. A számolási feladatok beküldésekor a diákok a kézzel írt megoldás lefényképezése után a fényképekből pdf fájlt készítettek és ezt kellett csatolniuk a Classroomban kiírt feladathoz. Ezekből a feladatokból viszonylag kis energiabefektetéssel és egy-két ötlettel könnyű több variáns elkészítése úgy, hogy mindenkinek személyre szóló feladatot adhassunk. (Például: „Számítsd ki a szabályos háromszög magasságának a hosszát, ha az oldalhossz mérőszáma megegyezik az osztály névsorrendjében elfoglalt sorszámoddal!”) A szabadulószobák készítéséhez Google űrlap szerkesztése helyett használhatjuk a https://flippity.net/ oldalon található Scavenger Hunt feladattípust is (6. ábra), ahol egy Google táblázat kitöltésével készíthetünk matematikai feladatokat tartalmazó játékot. A honlapon található sablon átalakításával olyan szabadulószoba készíthető, amelyben a feladatok megoldási sorrendje előre meghatározott, és a diákok csak úgy tudnak tovább haladni a következő feladatra, ha az aktuális kérdésre már helyesen válaszoltak (7. ábra). A kérdéseket színesíthetjük képek, videók, Google Drive-on található dokumentumok és (más applikációk vagy honlapok feladatait tartalmazó) linkek elhelyezésével, valamint hozzáfűzhetünk a diák munkáját könnyítő segítségeket is, melyek egy villanykörte alakú gombra kattintva érhetők el. Ügyesen megadott segítségekkel akár új anyag feldolgozása is lehetséges a játék során. A szabadulószoba további pozitívuma, hogy a kitöltés időtartamáról és segítségek igénybevételéről e-mailt küld a tanárnak, így dokumentálva a diák által elvégzett munkát. Hasonlóan alkalmas szabadulószoba létrehozására a https://www.genial.ly/ oldalon található Breakout feladattípus, mely az előbb említett Scavenger Hunt puritán képi világával szemben látványvilágban gazdagabb élményt nyújt a diákoknak (8. ábra).

6. ábra. Szabadulószoba - az első kérdés



7. ábra. Flippy.net eredményét el lehet küldeni a tanárnak

8. ábra. Genially-ban készített szabadulószoba végső kódját kérő számológép

A differenciálás például a következő értékelési rendszeren keresztül valósítható meg. Egy cikluson belül a feladatok pontszámának összege a maximálisan elvárt teljesítmény 150%-ának felelt meg. Így minden diák saját maga választhatta ki az általa megoldani kívánt feladatokat mind mennyiségileg, mind nehézségileg, ezzel állítva be saját maga számára az optimális terhelést. A szorgalmasabb diákok a kötelezőn túli munkával fejleszthették magukat, azok pedig, akinek nehezebben mentek a feladatok több, egyszerűbb gyakorló feladatot választhattak. A pontgyűjtés (a diákokkal előre egyeztetve) két-három cikluson keresztül zajlott, ez után történt csak meg a pontok érdemjegyekre váltása.

A diákok visszajelzései alapján a fent leírt rendszer kialakítása jó ötlet volt, a többség az alkalmazott módszerrel elégedett volt és igazságosnak gondolta. Fejlesztési lehetőségként többen kiemelték a (hagyományos tanórákon gyakori) csoportos munka lehetőségét, így a digitális tanrend második felében a munkaszervezés és így a pontgyűjtési struktúra is változtatáson esett át. A diákok a változtatás után három (maximum négy) fős csoportokban dolgoztak. Az új rendszerben a csoportok a kapott feladatcsokor feladatainak feldolgozását is önállóan végezték el, az egyes részfeladatok felosztása is a csoport felelőssége, feladata volt. A ciklusok végén a csoport tagjainak be kellett számolniuk, hogy melyik csoporttag mekkora részét végezte el a beadott munkának, és így a csoporttagok a csoportpontszámból a részvétel intenzitásának arányában részesültek.

Digitális tanrend a Szegedi Tudományegyetemen hallgatói és oktatói szemmel

A közoktatással ellentétben az egyetem rugalmasan tudta kezelni a hirtelen bejelentett átállást. A felkészülésre az egyetem vezetése körülbelül másfél hetet tudott biztosítani a dékáni és a tavaszi szünet átcsoportosításával. Ez idő alatt az egyetem vezetése több megoldási lehetőséget kínált fel az oktatók számára. Magában a CooSpace rendszerben is lehetőség volt online óra tartására képernyőmegosztással, fájlfeltöltéssel a BigBlueButton segítségével. Az információk átadása továbbra is elsősorban ezen a felületen keresztül zajlott, de a túlterhelés elkerülésének érdekében voltak, akik más platformot használtak (pl. Jitsi, Discord, GoToMeeting). Tapasztalatunk szerint az oktatók többsége az újrakezdésre már összeállította az új követelményrendszert. Voltak, akik az órákat a megszokotthoz teljesen hasonlóan tartották meg az online térben, de voltak, akik az új követelményként szakirodalom és kiadott jegyzetek feldolgozását, reflexió írását és házi feladatok elkészítését írták elő, ezzel többszörösére növelve a beadandók mennyiségét.

Egy több száz fős kurzus, a Gazdaságtudományi Kar hallgatói számára tartott Lineáris algebra tárgy kapcsán egy olyan megoldást találtunk, amivel a gyakorlatvezetők plusz feladatai sem növekedtek, a hallgatók pedig saját maguknak oszthatták be idejüket. A szemeszter elején kiadott feladatokat (ezek közül kerültek ki az órán megoldott példák, de segítségükkel az eredetileg eltervezett zárthelyi dolgozatra is fel lehetett otthon készülni) dolgozták ki az oktatók, gyakorlatvezetők különböző formában. A segédanyagok között volt egyszerűen kézzel írt, vagy Beamer-ben megírt részletes levezetés, készült tábla előtt rögzített videó, a feladat lapra írt és közben videóra rögzített levezetése, de volt, aki az elkészített Beamer fájlhoz rögzítette a hangját, sőt, egy interaktív prezentáció is készült ActivePresenter segítségével. A segédanyagoknak köszönhetően a diákok önállóan is fel tudtak készülni a szorgalmi időszak alatt kiadott e-tesztekre (maximum naponta egyszer kitölthető elektronikus feladatsor az adott témakör feladataiból), de természetesen minden gyakorlatvezető tartott online konzultációt is a gyakorlata időpontjában.

A zárthelyi dolgozatot CooSpace-n írták meg a hallgatók. Ehhez az oktatók készítettek egy feladatbankot, mely minden típusból több, lényegében azonos (de pl. eltérő számokat tartalmazó) feladatot tartalmazott. A dolgozat írásakor a rendszer véletlenszerűen választott ki feladattípusonként egyet-egyet, így kerülve el a kiadott feladatsorok nagyfokú egyezését. A feladatok között volt feleletválasztós, rövid szöveges választ (numerikus végeredményt) igénylő, de volt olyan összetettebb feladat is, ahol a megoldás részletes levezetése és annak feltöltése volt szükséges. A feleletválasztós, numerikus végeredményt igénylő feladatok javítását a rendszer automatikusan végezte (természetesen a gyakorlatvezetők átnézték ezek helyességét is, ezzel elkerülve, hogy a jó, de nem a kért formában megadott válaszok elutasításra kerüljenek), a többi feladattípus feladatainak javítása az oktatók feladata maradt.

A hallgatók visszajelzései alapján hasznos volt az évközben teljesítendő e-teszt, a különböző típusú feladatmagyarázás, továbbá az önálló feldolgozás lehetősége is.

Összegzés

Az új munkarend új kihívásokkal szembesítette és ezzel együtt új lehetőségekhez juttatta a pedagógustársadalmat és a diákokat egyaránt. Bízunk benne, hogy egyben felhívta a döntéshozók figyelmét a rendszer hiányosságaira, fejlesztendő területeire, az eszközállomány állapotára. A hagyományos körülmények között megszokott munkaformák digitális térre történő adaptálása, valamint a digitális térre szabott új munkaformák kidolgozása elkezdődött ugyan, de minden eddiginél nagyobb igény mutatkozik egy legalább intézményi szintű „know-how" kidolgozására. Az alkalmazott módszerek szempontjából nagyon fontos tényező a diákok hozzáállása és együttműködése, hiszen a kölcsönös visszajelzések a digitális munkarend alatt még fontosabbá váltak, mint a személyes kapcsolattal megvalósított tanórák alatt. Fontos megjegyezni, hogy a módszertani sokszínűség és a monotonitás megtörése ezen időszakban is lehetséges a pedagógusok számára, ez viszont többletmunkát és bátorságot követel az eddig még ismeretlen módszerek és eszközök kipróbálása során. Megoldandó probléma a számonkérések hitelességének biztosítása.

Irodalomjegyzék

1. Csapó, B. (2000). A tantárgyakkal kapcsolatos attitűdök összefüggései. *Magyar Pedagógia, 100.*(3. sz.), 343-366.

2. EMMI határozat. (2020.) Az emberi erőforrások minisztere 3/2020. (III. 14.) EMMI határozata

3. Fromann, R., & Damsa, A. (2016). A gamifikáció (játékosítás) motivációs eszköztára az oktatásban. *Új Pedagógiai Szemle, 66.*(3-4. sz.), 76-81.

4. PISA 2018. Összefoglaló jelentés https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/nemzetkozi_meresek/pisa/PISA2018_v6.pdf

5. Néhány webes hivatkozás:

https://www.mozaweb.hu/mozabook

https://zanza.tv/

https://www.zsenileszek.hu/

https://www.youtube.com/watch?v=ngsSDdntmeU&t=554s https://www.mateking.hu/

http://www.geomatech.hu/

https://hu.khanacademy.org/

https://www.flippity.net/

https://www.genial.ly/

https://play.google.com/store/apps/details?id=com.microblink.photomath

https://play.google.com/store/apps/details?id=com.intsig.camscanner

http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa/_site/index.php/hu/blogs/others-blog/165-to-dl-virus

Máder Attila[1,2], Torma Bence[1], Torma Gábor[1,3]

[1] *Szegedi Tudományegyetem, Szeged*

[2] *Szegedi Tömörkény István Gimnázium, Művészeti Szakgimnázium és Technikum, Szeged*

[3] *Dugonics András Piarista Gimnázium, Szeged*

informatika matematikatanítás

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

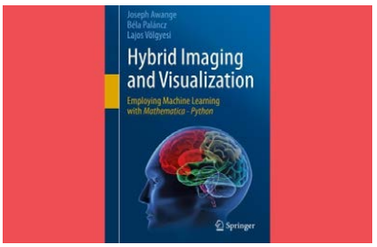
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ** ROVATBAN ELSŐSORBAN OLYAN KÖNYVEKRŐL SZERETNÉNK TUDÓSÍTANI ÉS OLYAN ELEKTRONIKUSAN ELÉRHETŐ ÍRÁSOKAT AJÁNLUNK, AMELYEK A MATEMATIKA BÁRMELY RÉSZE VAGY KAPCSOLATAI IRÁNT ÉRDEKLŐDŐK SZÁMÁRA KÍVÁNATOSAK LEHETNEK. (ROVATSZERKESZTŐ: *TÓTH JÁNOS.)*



Lóczi Lajos
2020. DECEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Hibrid képalkotás és vizualizáció

A Springer kiadásában nemrég jelent meg Joseph Awange, Paláncz Béla és Völgyesi Lajos úttörő munkája, melynek címe magyarul: Hibrid képalkotás és vizualizáció – Gépi tanulás alkalmazása a Mathematica – Python alkalmazással. A könyvben, melyet hiánypótló műnek szánnak, a szerzők a számítógépes látást gépi tanulási problémákként fogják fel, a gépi tanulásra pedig statisztikai technikák alkalmazásaként gondolnak. Következik *Lóczi Lajos* recenziója.

Kói Tamás
2020. DECEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Valószínűségszámítás négy kötetben

Vetier András új négykötetes valószínűségszámítás tankönyve részletes, szemléletes és közvetlen magyarázatokkal, rengeteg megértést segítő ábrával és táblázattal és meglehetősen sok kidolgozott nagyszerű feladattal igyekszik elérni azt, hogy tanítványainak, a leendő villamosmérnököknek az órákra való készülés ne kötelesség, hanem élmény legyen – írja kollégája, *Kói Tamás.* Tovább...

Mosóczi András
2020. DECEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A matematikára semmi szükség – egészen addig, amíg...

A 2020. évi Varga Tamás Módszertani Napok záróelőadásában *Mosóczi András* arra a sokszor feltett kérdésre próbált választ adni, vajon mi értelme matematikát tanulni. Az előadásból készült cikke és nemrég megjelent könyve, A gondolkodás forradalma arról szól, mi is történt itt a bolygónkon pár ezer évvel ezelőtt és azóta, ami az egész emberiség történetét megváltoztatta, és hogy mi köze ennek a matematikához. Hogyan kerül a képbe Indiana Jones? Mindenekelőtt: kik is azok a pirahák?

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

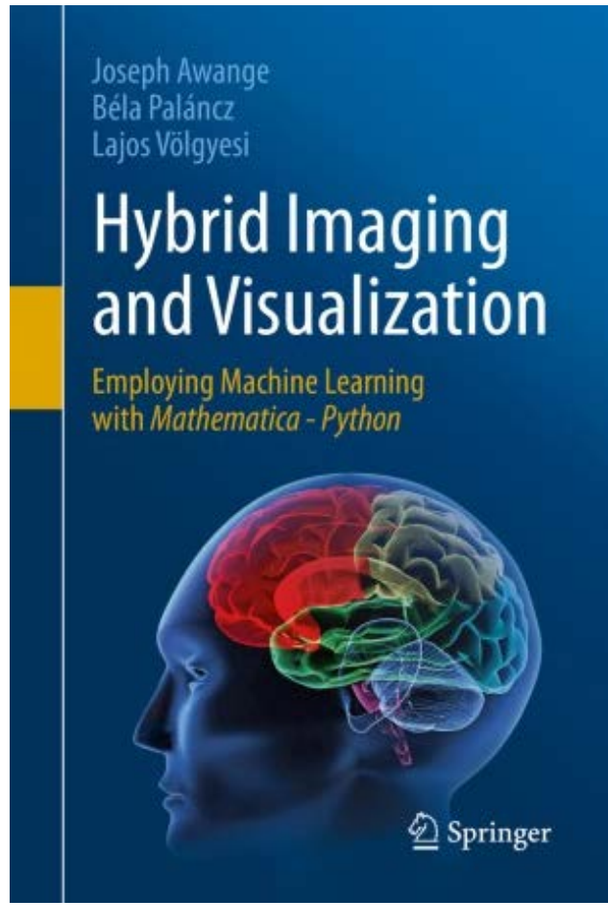
Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Lóczi Lajos 2020. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Hibrid képalkotás és vizualizáció

Gépi tanulás alkalmazása Mathematica-val és Pythonnal



Joseph Awange, Béla Paláncz, Lajos Völgyesi: Hybrid Imaging and Visualization Employing Machine Learning with *Mathematica – Python*, Springer Nature Switzerland AG 2020

A számítógépes látás alapfeladata, hogy képekből valamilyen szempontok szerint releváns információt nyerjünk ki, például: található-e adott típusú objektum a képen, és ha igen, hol; mely pixelek tartoznak egy adott objektumhoz; a képen szereplő objektumok milyen nagyobb osztályokba, kategóriákba sorolhatók; vagy melyek egy kép fő jellegzetességei. A könyvben a szerzők a számítógépes látást gépi tanulási problémákként fogják fel; mivel pedig a gépi tanulásra statisztikai technikák alkalmazásaként gondolnak, ezért feltételezik a valószínűségszámítás alapvető elemeinek, jelöléseinek ismeretét. A szerzők szerint a tématerület könyvei általában két csoportra oszthatók: vagy főként elméleteket és tételeket tárgyalnak, vagy konkrét programozási gyakorlatokat. Jelen könyvüket ezért hiánypótló műnek szánják, amely mindkét megközelítést ötvözi.

A könyv öt fejezetből áll: dimenziócsökkentés, osztályozási módszerek, clustering technikák, regressziós technikák, illetve neurális hálózatok alkalmazása a számítógépes látásban. Minden fejezet számos módszert mutat be ugyanannak a problématípusnak a kezelésére. Az 1. fejezet például különféle (adatvesztéses) tömörítésekkel foglalkozik, többek között főkomponens-analízissel, szingulárisérték-felbontással, függetlenkomponens-analízissel, diszkrét Fourier-transzformációval, diszkrét wavelet-transzformációval, vagy fixponttételeken alapuló módszerekkel. Az egyes alfejezetek egy-egy nagyon rövid (általában 1-2 bekezdésnyi) elméleti összefoglalóval indulnak (nincs tehát részletes kifejtés vagy magyarázat), amit konkrét példák és programkódok ismertetése és részenkénti magyarázata követ. A szerzők hibrid programozási környezetet használnak: a programkódokat alapvetően Wolfram-nyelven (*Mathematica*-ban) írták, amikbe természetes módon ágyazhatók Python-kódrészletek (a *Mathematica*-ból a Python közvetlenül futtatható). A szerzők feltételezik, hogy az olvasó eleve ismeri ezt a két szoftvert. A bemenetet és kimenetet a $\Rightarrow$ és $\Leftarrow$ szimbólumok jelzik (ezeket a jelöléseket a könyv elején esetleg lehetett volna definiálni). A programkódok, bemenő adatok, képek és a programok kimenetei általában teljes terjedelmükben szerepelnek – a 419 oldalból az angol nyelvű szöveg így viszonylag csak kis részt foglal el. Emiatt a hagyományos papíralapú, vagy PDF-alapú könyvformátumot kevésbé érzem hasznosnak: a könyvbeli információ interaktív dokumentumként (például interaktív *Mathematica* notebook formájában) lenne legkönnyebben használható. A fejezetek végén az aktuálisan tárgyalt módszereket összehasonlítják egymással, és gyakorlati szempontokból is elemzik őket. Az egyes fejezetek tehát összképet, tételes felsorolást adnak a lehetséges módszerekről és egymáshoz való viszonyukról – kedvcsinálóul azok számára, akik a további részletekről a (fejezeteket külön-külön lezáró) irodalomjegyzék alapján tájékozódnának.

Lóczi Lajos

ELTE IK Numerikus Analízis Tanszék és BME TTK Differenciálegyenletek Tanszék

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

Adatkezelés

Elfogadom.

Erintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Kói Tamás 2020. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Valószínűségszámítás négy kötetben

Vetier András négykötetes (kötetenként átlag 133,5 oldalas) Valószínűségszámítás című tankönyve – amelyet a *Matematika A4 - Valószínűségszámítás villamosmérnököknek* című tárgyhoz írt – nemrég jelent meg elektronikus formában a Typotex kiadó gondozásában:

https://www.typotex.hu/book/11526/vetier_andras_valoszinusegszamitas_1

https://www.typotex.hu/book/11533/vetier_andras_valoszinusegszamitas_2

https://www.typotex.hu/book/11535/vetier_andras_valoszinusegszamitas_3

https://www.typotex.hu/book/11536/vetier_andras_valoszinusegszamitas_4

A szerzőt harmadéves matematikus hallgatóként ismertem meg. Az általa vezetett Sztochasztikus folyamatok gyakorlatok elmélyítették a valószínűségszámítás iránti érdeklődésemet. Most már több mint 10 éve vagyunk munkatársak a BME Sztochasztika Tanszékén. Az évek során végtelenül sokat tanultam tőle. A tanítás iránti elkötelezettségét jól mutatja, hogy ha az órabeosztásban az szerepelt, hogy a Matematika A4 tantárgyához én gyakorlatokat fogok tartani a szeptemberi félévben, akkor sokszor már júliusban írt nekem és a többi gyakorlatvezetőnek, és megosztotta velünk az elképzeléseit. A következő történet is sokat elárul róla. Egy időszakban hangszálproblémák miatt ideiglenesen elment a hangja. Néhány órát úgy oldott meg, hogy a táblára írt, és a hallgatókat kérte meg, hogy szóban interpretálják a leírtakat. A hallgatók nagyon segítőkészen és meglehetősen aktív figyelemmel fogadták a szokatlan helyzetet.

Vetier András első, mérnökhallgatóknak szánt valószínűségszámítás témájú [1] tankönyve 1981-ben jelent meg. A mű 1986-ban elnyerte az Oktatási Miniszteri Nívódíjat. Ezt az 1991-ben megjelent nagyobb terjedelmű [2] könyv követte. A 21. század hajnalán András érdeklődése a valószínűségszámítás oktatásának számítógépes szimulációkkal való kiegészítése felé fordult. 2011-ben megjelent angol nyelvű [3] könyvében Excelben készített szimulációkkal tette befogadhatóbbá a tananyagot.

A fenti felsorolást látva felmerül a kérdés: akkor miért volt szükség egy új jegyzetre? Hasonlóan ahhoz, mint amit Andai Attila recenziójában a 2019. júniusi Érintőben leírt, itt is a szerző újító, kísérletező attitűdje szolgáltatja a választ. 2016 őszi félévében azt találta ki, hogy a megtanulandó anyagot jegyzet formájában hétről hétre a hallgatók rendelkezésére bocsájtja. A hallgatókat megkérte arra, hogy az órák előtt olvassák el a kiadott anyagot. A módszer megteremtette az elvi lehetőségét annak, hogy ideális hallgatói kooperáció mellett több időt lehessen az anyag nehezebb részeinek átbeszélésével tölteni, illetve cél volt az is, hogy az átbeszélendő részek felosztásával csökkenjen az előadásnak és a gyakorlatnak a magyar felsőoktatási rendszerben nagyon markáns elkülönülése és az ezzel együttjáró „előadáskerülés”. Ez a hozzáállás a mostani járvány miatti nehéz időszakban különösen aktuális. A hallgatóknak szánt jegyzetet szemeszterről szemeszterre tökéletesítve megszületett az új, négykötetes valószínűségszámítás tankönyv.

A tankönyv részletes, szemléletes és közvetlen magyarázatokkal, rengeteg megértést segítő ábrával és táblázattal és meglehetősen sok kidolgozott nagyszerű feladattal igyekszik elérni azt, hogy az órákra való készülés ne kötelesség, hanem élmény legyen.

Az egyes kötetek alcímei:

1. Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

2. Nevezetes diszkrét eloszlások

3. Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

4. Folytonos eloszlások két dimenzióban

Az anyag többé-kevésbe a bevezető valószínűségszámítás kurzusokon megszokott sorrendet követi, azt leszámítva, hogy már az első kötetben előkerül a kétdimenziós diszkrét valószínűségi változó, a feltételes eloszlás, a konvolúció fogalma. Az említett fogalmak korai felbukkanása elmélyíti a valószínűségszámítás megértését, úgy, hogy definiálásukhoz a korábban bevezetett valószínűségszámítási fogalmak mellett mindössze az aritmetikai alapműveletekre van szükség. Megjegyzem, hogy az első kötet elején a szerző ajánl egy alternatív sorrendet is, amelyben a folytonos valószínűségi változók tárgyalása sokkal előbbre kerül.

Ahogy már utaltam is rá, a könnyű önálló tanulás egyik kulcsa a rengeteg kidolgozott nagyszerű feladat. A könyv hangulatát jól érzékelteti az alábbi két példa (a második egy hallgató kérdése nyomán jött létre). A megoldásokat a könyvben találja az olvasó.

„Egy erdőben ismeretlen számú szarvas él. A számuk becslése céljából 60 szarvast piros festékkel megjelölünk, majd néhány hét eltelte után megszámoljuk, hogy 40 véletlenszerűen választott szarvas között hány megjelöltre bukkanunk. Tegyük fel, hogy

15-re. Mit mondhatunk ezek alapján a szarvasok ismeretlen N számáról?”

„Mi lenne, ha az 5 forintos érmét is kivonnák a forgalomból? Nyilvánvaló, hogy a zöldséges számára kedvező lenne, ha fizetéskor az 5-re végződő számokat felkerekítenék, a vevő számára pedig az lenne kedvező, ha lekerekítenék. De vajon az ebből a kerekítésből adódó extra nyereségek is az elhanyagolható kategóriába esnek, vagy már nem?”

A könyv anyagának nem elhanyagolható része „Extra tananyag” megjelöléssel van ellátva. Ezek többnyire nem részei az A4 kurzus szokásos tananyagának, de érdeklődő hallgatóknak igazi ínyencségek. Például az extra anyagok között szerepel a nagy számok erős törvényének bizonyítása indikátor valószínűségi változókra, de a Borel–Cantelli-lemmák is feltűnnek az örök boldogság elérésének köntösében.

Az első kötet előszó helyett a hallgatóknak írt üzenettel kezdődik. Ebből kiderül, hogy András értékelési rendszerének része, hogy a vizsgát követően a hármasra vagy négyesre állók jobb jegyért megválaszolhatnak egy, az extra anyag általuk választott, ám megfelelően nagy részéhez kötődő kérdést. A hallgatók többnyire örömmel kihasználják ezt a lehetőséget.

A tankönyv, ahogy fent említettem, nem előzmény nélküli. [3] szimulációs világa beszűrődik a könyvbe. A nevezetes egy-, illetve kétdimenziós eloszlások mellett szerepelnek a számolást lehetővé tevő Excel-formulák, illetve a könyv több helyen megfelelő mennyiségű magyarázat mellett önálló Excel-szimuláció készítésére biztatja az olvasókat. A 2. kötet 37. oldalán van egy link az A4 tárgy egy korábbi honlapjára, ahol elég sok elkészült Excel-szimulációt talál az olvasó. Véleményem szerint a vegyes tartalomra mutató egyetlen link nem ideális. Az elektronikus tankönyvi forma lehetővé teszi az utólagos javításokat, illetve kiegészítéseket. Érdemes lenne több helyre tenni Excel-szimulációkra mutató linket.

A recenzió teljessége érdekében megjegyzem, hogy a könyvben maradt néhány sajtóhiba, illetve néhány további (belső) hivatkozással tovább lehetne növelni a tartalom kohézióját.

A könyv elolvasát minden valószínűségszámítást oktatónak és minden kellő háttértudással rendelkező, a valószínűségszámítást, illetve a ráépülő diszciplinákat (például az információelméletet és a statisztikát) mélyen érteni vágyó tanulónak nagyon ajánlom. Az első két kötethez jól jön, ha ismerjük a sorozatok és sorok alapfogalmait, de ennek hiányában is élvezetes olvasmány. A harmadik kötethez szükséges az egyváltozós függvények analízisének ismerete, a negyedik kötethez pedig a kétváltozós függvények analízise.

A BME és egyéb előfizető intézmények dolgozói illetve hallgatói ingyenesen olvashatják a könyv mind a négy kötetét a `https://edu.interkonyv.hu` oldalon.

A tankönyv recenziójának zárásaként jöjjön két videó. Az első videót tanszékünk külső óraadója, Kirsch Norbert készítette 2016-ban. Ebben András a hallgatók körében méltán népszerű kullancsos feladattal foglalkozik. A második videó egy friss online óra felvétele amelyben András, a Matematika A4 új előadójának, Keszthelyi Gabriellának a felkérésére Excel-szimulációkkal szemlélteti a folytonos eloszlásokat.

https://www.youtube.com/watch?v=hlGnwQmi6ic

https://bmeedu-my.sharepoint.com/:v:/g/personal/koitamas_edu_bme_hu/EWoKCsUInLxOotQyzieHGUgBKc4X3xXFi3xhY3xFsV5tJg?e=GIdrZ4

A videókban látott oktatói stílus és szemléltetési módszerek visszaköszönnek a tankönyv hasábjain is.

Irodalomjegyzék

[1] Vetier András: Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, 1981, https://math.bme.hu/~vetier/051360_Vetier_Valoszinusegszamitas.pdf

[2] Vetier András: Szemléletes mérték- és valószínűségelmélet, Tankönyvkiadó, 1991

[3] Vetier András: Probability theory with simulations, Typotex, 2011., https://edu.interkonyv.hu/book/2822-vetier_probability_theory_with_simulations

Kói Tamás adjunktus

BME Matematika Intézet, Sztochasztika Tanszék

matematikatanítás valószínűségszámítás

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés
Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Mosóczi András 2020. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A matematikára semmi szükség – egészen addig, amíg...

...nem kell valamilyen problémát megoldani

Van egy különös nép Dél-Amerika esőerdeiben, és az ő világukban egyáltalán nem létezik a matematika. De mielőtt szinte minden iskolás gyerek ebbe a matekmentes paradicsomba vágyna, nézzük meg, hogy miért léteznek Földünkön olyan civilizációk, ahol nincsen matematika, és miért alakult ki mégis a legtöbb kultúrában…

A vadászó-gyűjtögető életmódot folytató dél-amerikai piraháknak a számolásra vonatkozóan mindössze négy szavuk van, az egy, a kettő, a néhány és a sok. Nemcsak arról van szó, hogy nem alakultak ki a nyelvükben olyan szavak, amelyek nagyobb mennyiségeket tudnának kifejezni, hanem egyáltalán nincsenek is tisztában a nagyobb mennyiségek jelentésével. Amikor arra kérték őket, hogy tegyenek le a földre annyi kavicsot, ahányan éppen jelen vannak a törzs tagjai közül, akkor 4-5 résztvevő estén még sikerült végrehajtaniuk a feladatot, de 8-10 résztvevőnél a teljesítményük már jelentősen romlott. A kutatások kimutatták, hogy a törzs tagjai szellemileg nem visszamaradottak, életmódjuk és nyelvük nagyfokú kreativitásra utal. A pirahák a jelenben élnek, és gondolkodásuk is mindig a jelenben lévő dolgok konkrét szintjén zajlik. Végsősoron azért nem rendelkeznek a számok absztrakt fogalmával, mert sosem volt rá szükségük. Vidáman élik az életüket, esznek, isznak, alszanak, mindig is jól megvoltak a szervezett mezőgazdaság és állattartás nélkül, szokásaikra egyáltalán nem gyakorolt hatást az évszakok váltakozása, az évek múlása.

Fölmerül a kérdés, hogy ha van egy nép, akik még háromig sem tudnak elszámolni és mégis boldogan élik világukat, akkor nálunk miért kell a másodfokú egyenletet meg a Pitagorasz-tételt és más rémségeket tanítani az iskolában?

Ahhoz, hogy csak úgy gondtalanul éljük az életünket, valóban nincsen szükség matematikára. Ha viszont megjelennek problémák, amiket valahogyan meg kell oldani, ott hirtelen megszületik a matematika. És itt most ne a matekdolgozatra gondoljunk (ami persze probléma), hanem bármilyen problémára. A matematikai gondolkodás ugyanis a problémák megoldására lett kitalálva. Nézzük is meg, hogyan.

Az emberiség történetének hajnalán a számfogalom kialakulása, és ezzel együtt a matematika megjelenése elsősorban két dologhoz volt köthető. Az egyik az idő múlásának és ciklikusságának kimutatására alkalmas órák és naptárak készítése, a másik pedig a különböző javak nyilvántartása és a szervezett mezőgazdaság megjelenése. Ezek vezettek el a mennyiségeket leíró számjegyek feltalálásához, és az absztrakt számfogalom megszületéséhez.

Izgalmas régészeti feltárások kutatták, hogy vajon mi történt időszámításunk előtt pár ezer évvel a Tigris és az Eufrátesz folyók vidékén. A kutatások egyik vezetője egy bizonyos Edgar James Banks volt, a keleti nyelvek professzora, egyben régész, író és diplomata. Banks gyakran keveredett különböző kalandokba, és előszeretettel kereskedett az ásatásokon előkerülő kincsekkel. Olyan volt, mint a filmekből ismert Indiana Jones, ami nem is csoda, ugyanis Banksről mintázta Indiana Jones karakterét George Lucas. A legenda szerint az ásatások során előkerült számtalan agyagtábla közül

Banks 10 dollárért adta el az egyiket George Arthur Plimptonnak, aki aztán később a Columbia Egyetemre bízta a tábla őrzését. A Columbia Egyetem gyűjteményében őrzött Plimpton 322 nevű babiloni agyagtáblát közelítőleg 1800 évvel időszámításunk előtt készítették, és a rajta látható táblázatok pitagoraszi számhármasokat tartalmaznak. Vagyis a Pitagorasz-tételt ismerték már több mint 1000 évvel Püthagorasz születése előtt. De a tábla a pitagoraszi számhármasokon kívül trigonometrikus értékeket, a szinuszhoz és koszinuszhoz hasonló mennyiségeket is tartalmazott. Ez a Krisztus előtt 1800 évvel készített agyagtábla bizonyítja, hogy a matematika egyidős az emberiséggel, és a matematika története szétválaszthatatlanul összefonódott az emberiség sorsának fonalával. A Plimpton 322 agyagtábla idősebb Mózes kőtábláinál, a rajta szereplő trigonometrikus kifejezések pedig hamarabb hirdették a matematika törvényeit, mint Isten törvényeit a Tízparancsolat.

Krisztus előtt négy-ötezer évvel már elkezdtek különböző matematikák kialakulni a Föld felszínén egymástól elszigetelve élő civilizációkban. A számokat kezdetben a napok és hónapok nyilvántartására használták, innen tudták, hogy hány napig tart még a nyár, vagy éppen meddig kell kihúzni a téli hidegeket. De ugyanilyen fontos volt az idő számítása azokon a területeken is, ahol az egyenlítő közelsége miatt viszonylag egyenletes a klíma. Itt a folyók termékenységet hozó áradásának időpontja foglalkoztatta az embereket. És persze számokat használtak állataik és egyéb javaik nyilvántartására is. A számolás mellett hamar előkerültek geometriai jellegű problémák is. Az emberek elkezdtek házakat, templomokat, városokat építeni, hidakra és csatornákra volt szükség. Ezekhez az építkezésekhez bizony már komoly matematikai számításokat kellett végezniük és minden ilyen egymástól elszigetelten a Föld különböző pontjain élő civilizáció kitalálta a maga Pitagorasz-tételét és felfedezte a szögfüggvényeknek, vagyis a szinusznak és a koszinusznak különböző változatait. A pirahák közben ették a gyümölcsöket és halásztak.

Az emberiség történetében hosszú-hosszú évszázadok teltek el nagyobb izgalmak nélkül, hogy aztán egyszer történjen valami, ami mindent megváltoztat. A mindent felforgató változások új felfedezésekhez, új problémákhoz és új sikerekhez vezettek el. Ezeknek köszönhetően lassan fölfedeztük a bolygót, amin élünk, térképeket és naptárakat készítettünk, erdőségeket és hegyeket alakítottunk át. Hatalmas templomokat, piramisokat, óriási városokat emeltünk – és romboltunk le. A pirahák közben ették a gyümölcsöket és halásztak.

Pár száz évvel ezelőtt az ipari forradalom, és az azt követő technikai forradalom az egész világot felforgatta. Olyan elképesztően nagy dolgok történtek, melyekhez képest a korábban elért eredmények csak szelíd domboknak látszódnak az égbe törő havas hegycsúcsok árnyékában.

Ahhoz, hogy Kolumbusz útnak induljon és felfedezze Amerikát, hatalmas bátorság és rettenetes kitartás kellett. Sok pénzre, megfelelő hajókra, térképészeti és csillagászati ismeretekre volt szükség. Nem kevés szerencse is segítette útját, a siker pedig, amely vállalkozását koronázta, az egész világot felforgatta. De lépjünk egyet hátrébb, hogy lássuk az egész képet. Ez a felfedezés gazdasági és geopolitikai értelemben is az emberiség történetének talán eddigi legnagyobb felfedezése volt, technikai értelemben viszont nem több egy jól kivitelezett hajóútnál, ami ráadásul kisebb félreértéssel végződött, hiszen Kolumbusz Indiába keresett egy rövidebb utat és Amerikát fedezte föl helyette. Vagyis ez a hajóút hosszabb, merészebb, kockázatosabb, mint az ezt megelőző számtalan másik, de mégis csak egy hajóút. Ha összehasonlítjuk ezt a felfedezést azzal, hogy egy robbanóanyaggal megrakott fémdobozban néhány ember elhagyja azt a bolygót, amelyen élünk, és a légüres téren keresztül átkelve leszállnak egy idegen égitestre, egy fénylő foltra az égbolton, mely az emberiség hajnala óta mítoszok és legendák főszereplője, akkor megértjük, hogy itt valami elképesztően nagy változás történt a technika fejlődésében néhány száz év leforgása alatt. Egy olyan ugrás, melyhez képest minden addigi csak bátortalan lépésnek tűnik. A pirahák közben ették a gyümölcsöket és halásztak.

Vajon mi lehet az oka, hogy az emberiség hosszú évezredeken keresztül hajókkal és lovas kocsival közlekedett, most pedig itt az autó, a vonat vagy a repülő? Korábban ennyire ráértek?

Vajon mi lehet az oka, hogy az emberek több ezer éven át csak füstjelekkel vagy kürtjelekkel tudtak egymással nagyobb távolságra kommunikálni, most pedig telefonon fel tudunk hívni valakit, aki egy olyan kontinensen él, amelynek még a létezéséről sem tudtunk 600 évvel ezelőtt?

Vajon mi lehet az oka, hogy évezredek óta hatalmas könyvtárakban emberfeletti küzdelmek árán tűzvészekkel és háborúkkal dacolva gyűjtötték és tárolták az emberiség minden tudását őrző könyveket, ahelyett, hogy egy 256 GB-os pendrive-on zsebre vágták volna?

Mi történhetett az elmúlt pár száz évben, ami ezt a hihetetlenül nagy fejlődést okozta?

A válasz az, hogy az 1600-as évek végétől az emberiség okosabban kezdett problémákat megoldani. Ahhoz, hogy egy problémát meg tudjunk oldani először is le kell tudnunk írni magát a problémát, aztán pedig ki kell fejlesztenünk egy eszközt, ami ezt a problémát megoldja. A matematika sosem a hétköznapi problémákkal foglalkozik, hanem absztrakt problémákkal. Végül is kijelenthetjük, hogy a matematika a valóságban nem létező dolgokkal foglalkozik, és ezért jogosan föl is tehetjük a kérdést, hogy akkor mégis mi értelme. A mindennapi élet problémái azonban sokszor annyira összetettek és bonyolultak, a különböző részletek miatt annyira átláthatatlanok, hogy ez a kuszaság sokszor lehetetlenné teszi a megoldásukat. Ahhoz, hogy mégis megoldjuk őket, kénytelenek vagyunk leegyszerűsíteni és absztrakttá tenni őket. Vagyis átvisszük a problémát a matematika világába, ahol egy steril környezetben képesek vagyunk csak a lényegre koncentrálni. És amikor a matematika absztrakt világában megoldottuk a problémát, akkor a kapott megoldást visszahozzuk a mindennapi élet világába. Vagyis a matematika nem más, mint a problémák leírásának és megoldásának a tudománya. Ez persze nem azt jelenti, hogy mindenkinek matematikusnak kéne lenni. Mindössze azt, hogy aki fejleszti a matematikai képességeit, az egyúttal fejleszti a problémák helyes megragadásának és könnyebb megoldásának képességét. És ahogyan olvasni is megtanulhatunk a Harry Potteren, Shakespeare drámáin vagy éppen a bulvársajtó cikkein keresztül is, a problémamegoldó képességünket is fejleszthetjük sakkozással, a másodfokú egyenlet megoldásával, vagy éppen a vektormezők felületi integráljának kiszámolásával. Az olvasás megtanulásánál is a legfontosabb az, hogy sokat olvassunk, és csak ezután jön az, hogy mit. Ez éppen így igaz a matematikára is. A matematika amellett, hogy megtanít gondolkodni, egyben a tudományok univerzális nyelve is. Hogyha például valaki pilóta akar lenni, akkor tudnia kell angolul, mert a légiirányítás nyelve az angol. Ha valaki orvosnak tanul, akkor tudnia kell kezdő szinten latinul, mert az orvosi szaknyelv a latin. Hogyha pedig valaki mérnök vagy kutató szeretne lenni, akkor tudnia kell a matematikát, mert a tudományok nyelve a matematika. Kis túlzással tehát kijelenthetjük, hogy a matematika az iskolában tanult első idegen nyelv. És mielőtt még valaki rávágná, ez nem a kínai… „Kínai” csak akkor lesz belőle, ha nem logikusan és nem játékosan tanítják a matematikát.

Ahhoz, hogy megérthessük mennyire fontos az emberiség történetében és a mi életünkben is a matematika, először vegyünk egy nagy levegőt és tegyünk félre minden rossz tapasztalatot, és felejtsük el minden rémálmunkat, ami a matematikával kapcsolatos. Gondoljuk csak el, hogy mi is történt itt a bolygónkon pár ezer évvel ezelőtt és azóta, ami az egész emberiség történetét megváltoztatta. Nézzük meg, hogy mi köze ennek a matematikához. Nagyon is sok! A pirahák közben eszik a gyümölcsöket és halásznak…

Mosóczi András

Mosóczi András az egyik

legnépszerűbb magyar matematikaoktató weboldal, a 140 ezernél is több regisztrált felhasználóval rendelkező mateking.hu alapító-vezetője. A fenti téma iránt érdeklődőknek ajánljuk nemrég megjelent könyvét, A gondolkodás forradalmát. *A szerk.*

informatika matematikatörténet matematikatanítás

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

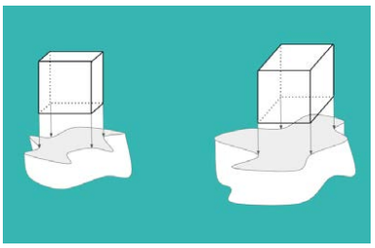
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **TUDOMÁNY** MENÜPONT TÖBBFÉLE, A MATEMATIKA TUDOMÁNYÁHOZ KAPCSOLÓDÓ FUNKCIÓT TAKAR..**A TUDOMÁNY– TÖRTÉNET ROVAT** CÉLJA ELSŐSORBAN MATEMATIKATÖRTÉNETI JELLEGŰ ÍRÁSOK KÖZLÉSE. **A MI IS ...?ROVAT** A MAI MATEMATIKA TUDOMÁNYÁRÓL KÍVÁN SZÓLNI A HOZZÁÉRTŐKNEK.
(ROVATSZERKESZTŐK: *BESENYEI ÁDÁM; STIPSICZ ANDRÁS.*)



Stpsicz András
2020. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

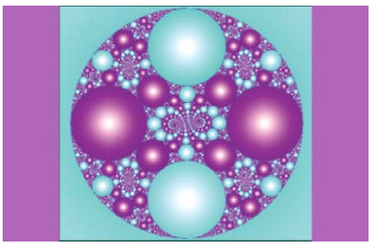
A négyzetes és téglalapos cövekek problémájáról

Tekintsük a következő (nem igazán életszerű) problémát: adott egy gödrünk, és azt kérdezzük, hogy készíthető-e hozzá egy olyan négyzet keresztmetszetű cövek, amely épp befér a gödrünkbe, vagyis alapjának csúcsai épp a gödör szélén vannak. *Stipsicz András* írása Toeplitz 1911-es négyzetes cövek sejtéséből indul ki. Tovább...

Simonovits András
2020. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Az érintőmódszer történetéről

Hosszú évek óta tanítok matematikatörténetet, de mindig tanulok valami újat. A napokban láttam a Netflixen egy filmet, 21 – Las Vegas ostroma, amelyben elhangzott egy abszurd állítás: Newton ellopta az érintőmódszert Raphsontól. Kicsit utánanéztem a történetnek. – *Simonovits András* írása. (Fent az alaptalanul megvádolt Isaac Newton portréja.) Tovább...



Figula Ágota
2020. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Klein-gyöngyök

$\mathrm{Tr}\,(M) = \alpha + \delta$David. J. Wright „Double Cusp Group” című, a Notices of the AMS folyóiratában 2004 decemberében megjelent cikkét fordította le és egészítette ki a Möbius-transzformációkra és az eredeti cikk színes ábráin is bemutatott „dupla csúcsú csoportra” vonatkozó ismeretekkel *Figula Ágota*.

Oláh-Gál Róbert
2020. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Varga Tamás családfája – Szász Károly (1798 – 1853)

Oláh-Gál Róbert a 2020. évi Varga Tamás Módszertani Napokon előadást tartott a konferencia névadójának egyik őséről. Idősebb Szász Károly államférfi, jogtudós, író, matematikus, pedagógus (Vízakna, 1798. január 25. – Marosvásárhely, 1853. október 25.) mindkét Bolyainak közeli barátja volt, aki fiával közösen írta „Számtan” könyvét. Ebből is nagyon érdekes részleteket idéz az előadásból készült cikk. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

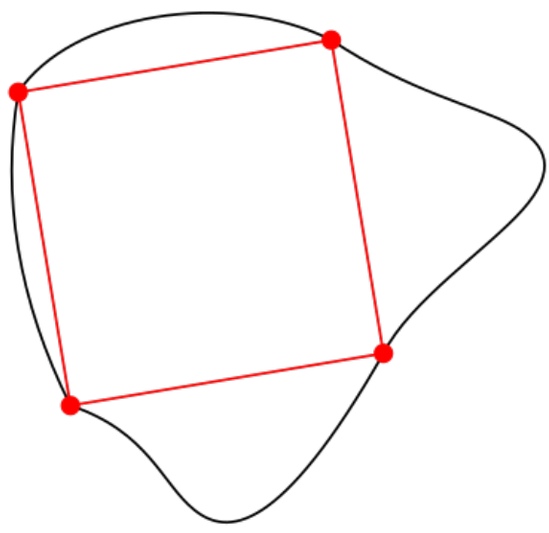
Stpsicz András 2020. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A négyzetes és téglalapos cövekek problémájáról

Tekintsük a következő (nem igazán életszerű) problémát: adott egy gödrünk, és azt kérdezzük, hogy készíthető-e hozzá egy olyan négyzet keresztmetszetű cövek, amely épp befér a gödrünkbe, vagyis alapjának csúcsai épp a gödör szélén vannak. Mi a helyzet, ha téglalap keresztmetszetű cövekekkel szeretnénk dolgozni?

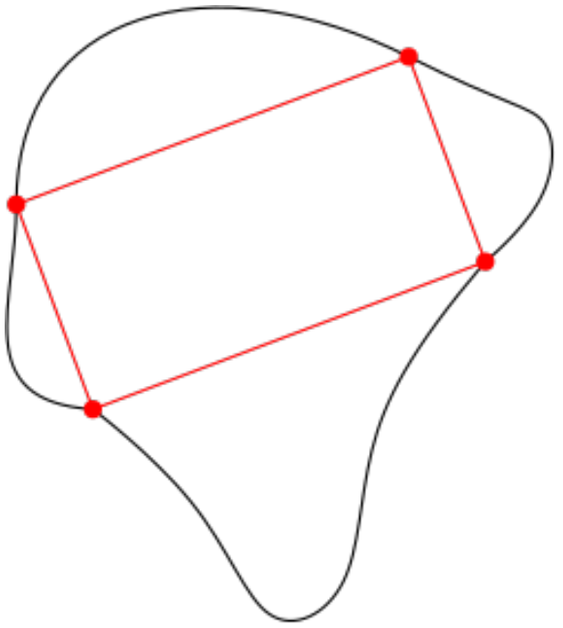
A fenti (a gyakorlati életben azért, valljuk be, ritkán előforduló) probléma vezethette Otto Toeplitz neves német matematikust a következő, nagyon egyszerűen megfogalmazható, de meglepően mély eszközöket kívánó probléma felvetéséhez. Legyen f egy, az S^1 körvonalról az $\mathbb{R}^2$ síkba mutató folytonos, injektív függvény, vagyis az $f(S^1)$ kép egy egyszerű (önátmetszések nélküli) folytonos zárt görbe $\mathbb{R}^2$-ben. Az ilyen f függvényt (injektivitása okán) néha *beágyazásnak* is hívjuk, a képként előálló $f(S^1)$ görbét pedig *Jordan-görbének* is szokás nevezni. (Ez a görbe jelképezné a kiásott gödrünk peremét kertünkben, amelyet síknak képzelünk.)

Négyzetes cövek sejtés (Topelitz [10], 1911): Minden fenti f esetén létezik négy különböző olyan $t_1, t_2, t_3, t_4 \in S^1$ pont, hogy $f(t_1), f(t_2), f(t_3), f(t_4)$ képük egy négyzet négy csúcsát határozzák meg, lásd az alábbi ábrát.

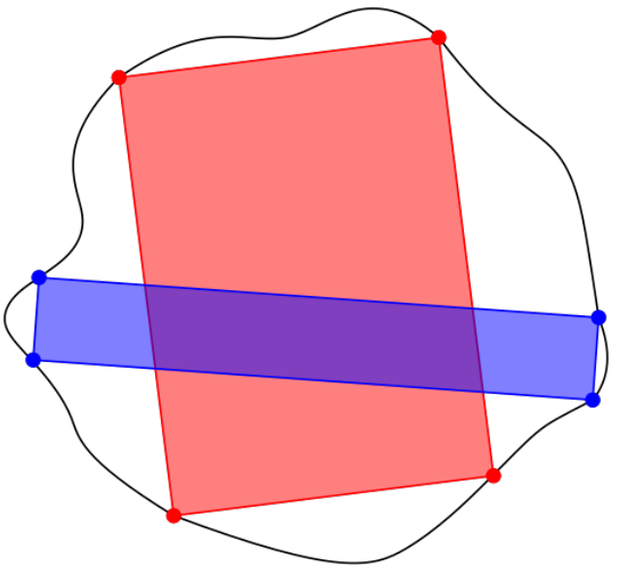


Az $f(t_1)f(t_2)f(t_3)f(t_4)$ négyzetet (a fogalmat kicsit tágítva) a továbbiakban *beírt* négyzetnek is fogjuk hívni, bár nemkonvex $f(S^1)$ Jordan-görbe esetén ez a négyzet nem lesz feltétlen része a görbe által határolt körlapnak – de legalább csúcsai a görbén vannak. (A gödrökkel megfogalmazott analógiában általában konvex görbékre gondolunk; a cövek nem feltétlenül fér be a gödörbe a nemkonvex esetben.) A fenti matematikai problémában az $f(S^1)$-ről konvexitást nem tételezünk fel.

A matematikai feladat gyengíthető úgy, hogy a négy képponttól azt követeljük meg, hogy egy (nemelfajuló, tehát nem szakasznak kinéző) téglalap négy csúcsát alkossák.



A feladat nehezíthető is: megkérdezhetjük, hogy rögzített görbére és tetszőlegesen rögzített téglalapra van-e négy olyan pont, amely a rögzített téglalapunkhoz hasonló téglalap négy csúcsát alkotja. Emlékezzünk, hogy két téglalap pontosan akkor hasonló, ha az oldalhosszaik aránya (amiről az oldalak felcserelése árán feltehető, hogy legalább 1) egyenlőek. A négyzet esetét kapjuk akkor, amikor ez az arányszám 1-gyel egyenlő. A sejtés utóbbi két változatát *téglalapos cövek problémának* szokás hívni.



Az alábbiakban ezen problémák rövid története és a megoldásukban a közelmúltban történt áttörések kerülnek bemutatásra. (A probléma jóval részletesebb tárgyalását

Benjamin Matschke kitűnő cikkében [5] lehet megtalálni.)

1. A négyzetes cövek probléma

A probléma megoldását már 1913-ban megtalálta Arnold Emch [2] abban az esetben, ha az f függvény szakaszonként analitikus. A simasági feltételt gyengítette Schnirelman [8] egy 1929-ben írt dolgozatában (melynek javított változata 1944-ben jelent meg). Mindkét bizonyítás alapötlete megtalálható Matschke fent említett [5] cikkében. Első pillantásra az ember azt gondolhatná, hogy a sima (differenciálható) eset kezelésével a probléma megoldódik: egy tetszőleges f beágyazást közelítsünk g_n sima beágyazások egy sorozatával, melyekre már tudjuk, hogy léteznek a megkívánt beírt négyzetek. Vegyük ilyen négyzetek egy sorozatát, és érveljünk úgy, hogy ennek a négyzetsorozatnak van konvergens részsorozata. Valójában ez az érvelés percízzé tehető; az egyetlen probléma az, hogy a kapott négyzetsorozat könnyen elképezelhetően egy degenerált (0 oldalhosszúságú) négyzethez fog konvergálni (amikor is a sejtésben megkívánt $t_1, \ldots, t_4$ pontok egybeesnek). Mivel ezt a sejtés kizárja, így a fenti gondolatmenet nem visz közelebb a megoldáshoz.

Mint kiderült, a probléma nehézsége valóban az f beágyazás analitikus tulajdonságaiban rejlik. Napjaink egyik kiemelkedő matematikusa, Terence Tao is egy hosszú cikket szentelt a problémának [9] abban az esetben, ha az f képeként előálló görbe két (további tulajdonságoknak is eleget tevő) Lipschitz-függvény grafikonjából rakható össze. Az általános, folytonos f-re vonatkozó négyzetes cövek sejtés még ma is nyitott.

2. A téglalapos cövek probléma

Látványosabb volt a fejődés a téglalapos cövek probléma terén. Az egyszerűbb kérdésre, hogy vajon mindig létezik-e egy beírt téglalap, Vaughan már a 70-es években megtalálta a megoldást (ez Meyerson [6] cikkében jelent meg). Érdekes módon, a bizonyítás topológiai alapgondolatokon nyugszik. (A megoldás egy animált változata megtekinthető a `youtube-on` .)

Téglapos cövek tétel: Legyen $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ egy folytonos beágyazás. Ekkor létezik négy különböző olyan t_1, t_2, t_3, t_4 pont, hogy képük egy téglalap négy csúcsát adja.

Bizonyítás: Vegyük azt a körvonal pontpárjain értelmezett

$$F\colon S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$$

függvényt, mely a $(t, s) \in S^1 \times S^1$ pontpárhoz az

$$F(t,s) = \left(\frac{f(t)+f(s)}{2}, |f(t)-f(s)|\right),$$

a háromdimenziós tér felső félterébe eső vektort rendeli. Könnyen látható, hogy F szimmetrikus a két változóban, így valójában az $S^1 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ faktoron is értelmezhető (ahol a faktorizálással egybeejtjük a (t,s) és (s,t) alakú párokat). Vegyük észre, hogy a (t,t) alakú elemeknek nincs párja. Nem teljesen triviális, de nem is nehéz látni, hogy az $S^1 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ faktor épp a nevezetes M Möbius-szalaggal lesz azonos, melynek körvonal pereme épp a (t,t) alakú elemekből áll. (Például, ha az (x,y) pontpárból azon az $(u_1(t), u_2(t))$ úton indulunk, amelynél $u_1(t)$ az x-ből y-ba mutató egyik köríven megy végig, míg $u_2(t)$ az y-ből x-be mutató másikon, így érve (y,x)-be, akkor az $S^1 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ faktorban egy irányításfordító hurkon haladunk végig.)

Ilymódon F helyett nézhetjük az $\overline{F}\colon M \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ indukált leképezést. Vegyük észre, hogy pontosan akkor létezik az f által adott görbe esetén beírt téglalap, ha $\overline{F}$ nem beágyazás: valóban, ha (t_1, s_1) és (t_2, s_2) is ugyanoda képződik $\overline{F}$ mentén, akkor az $\overline{f(t_1)f(s_1)}$ és $\overline{f(t_2)f(s_2)}$ szakaszok egyforma hosszúak és közös a felezőpontjuk, tehát egy téglalap két átlóját adják.

Tegyük fel indirekten tehát, hogy egy adott f esetén nincs beírt téglalapunk. Ekkor $\overline{F}$ beágyazás, mely a Möbius-szalag peremét (a (t,t) alakú párokat) viszi csak az $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ síkba, és ezeket a párokat épp az $f(t)$ pontokba képezi. A topológia egy ismert tétele szerint az $f(S^1)$ Jordan-görbe a síkot két részre bontja: egy körlapra, és egy nemkompakt részre. (Ezt a tételt Jordan görbetételeként ismerhetjük.) Ilymódon a beágyazott $\overline{F}(M)$ Möbius-szalaghoz hozzáragaszthatjuk a körlapot, amivel egy beágyazott projektív síkot kapunk a szokásos $\mathbb{R}^3$ háromdimenziós terünkben. (Azt nem részletezzük, hogy miért igaz az, hogy a körlap és a Möbius-szalag összeragasztása az $\mathbb{RP}^2$ projektív síkot adja, de megjegyezzük, hogy ezt nem nehéz belátni.) Az algebrai topológia standard eszközeivel (például egész együtthatós homológiacsoportokkal, és az azokra vonatkozó Mayer-Vietoris hosszú egzakt sorozattal) azonban belátható, hogy $\mathbb{R}^3$-ba nem lehet a projektív síkot beágyazni, vagyis hogy egy folytonos $g\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^3$ függvény soha nem lehet injektív. (Többszörös pontokkal rendelkező függvényt persze lehet találni, egy nevezetes ilyen leképezést ad a Boy-felület, melynek szobrászati megvalósítása az oberwolfachi konferenciaközpont előtt is megcsodálható.)

Forrás: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Boysche_Fl%C3%A4che_in_Oberwolfach.jpg

A talált ellentmondás szerint $\overline{F}$ nem lehet injektív, így megvan a téglalapunk. Mivel a projektív sík folytonosan sem ágyazható be háromdimenziós terünkbe, a fenti gondolatmenetben f-ről csak folytonosságát kellett feltegyük.

3. Újabb fejlemények

Vegyük észre, hogy a fenti bizonyítás semmifajta információt nem adott arra nézve, hogy a görbe milyen téglalapot tartalmaz (hasonlóság erejéig). A *téglalapos cövek probléma* erős változata szerint (hasonlóság erejéig) minden téglalapnak elő kellene fordulnia egy $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ injektív függvény beírt téglalapjai között. Ebbe az irányba indult el Cole Hugelmeyer (első éves doktoranduszként) a következő eredményével:

Tétel (Hugelmeyer, [4]) Ha $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ egy differenciálható beágyazás, akkor van olyan beírt téglalapunk, mely oldalainak aránya $\sqrt{3}$.

(Hugelmeyer eredménye ennél valamivel általánosabb, de ez a leglátványosabb, legegyszerűbben megfogalmazható eset, egyben bizonyítása tartalmazza az összes alapötletet.)

Hugelmeyer bizonyításának fő ötlete egyrészt az, hogy (az $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ azonosítást használva) a korábbi F függvény egy $G\colon M \to \mathbb{C}^2$ függvényre cserélhető, melyet a

$$G(t,s) = \left(\frac{f(t)+f(s)}{2}, (f(t)-f(s))^6\right)$$

formula ad meg. Ismét, G injektivitása azt eredményezné, hogy nincs megfelelő téglalap – vegyük észre, hogy most a második koordináta egy komplex szám (alkalmas hatványa), így G két pontban való egyezősége nemcsak a szakaszok hosszát teszi egyenlővé, de információt ad a lehetséges bezárt szögükről is. Persze a projektív sík $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$-be már beágyazható, így a korábbi ellentmondás itt nem várható. Itt következik Hugelmeyer másik ötlete: a beágyazást egy a $\mathbb{C} \times \{0\}$ egy kis környezetének N peremével (ami az $\mathbb{R}^2 \times S^1$ háromdimenziós térrel azonosítható) elmetszve egy csomót kapunk, amely egy Möbius-szalagot határol. Ezt a csomót (a Möbius-szalagjával együtt) aztán úgy tudja az (S^3, D^4) (a háromdimenziós gömb és az általa határolt négydimenziós golyó) párba beágyazni, hogy a $G(M) \cap N$ metszet olyan csomóba képződik, amely nem határol Möbius-szalagot a négydimenziós térben. Az utóbbi állítást (nevezetesen, hogy egy, a háromdimenziós térben lévő csomó nem határol beágyazott Möbius-szalagot a négydimenziós térben) nem is olyan egyszerű belátni. Erre igazán effektív módszert J. Batson talált 2013-ban [1], majd (hasonló, csomó Floer homológiai módszereket alkalmazva) Ozsváth, Szabó, és a jelen írás szerzője fejlesztették módszerét tovább [7].

A G definíciójában a második koordinátában levő kitevőt azért választottuk 6-nak, hogy épp a $\sqrt{3}$ oldalarányú téglalapokra vonatkozó eredmény jöjjön ki; magasabb páros kitevők választásával hasonló (de gyengébb) eredmények következnek.

4. A téglalapos cövek sejtés megoldása

A fenti okoskodást további (nagyon komoly felkészülést igénylő) technikákkal ötvözve Joshua Greene és Andrew Lobb [3] látta be a következő tételt, pontot téve a téglalapos cövek probléma erős változatának sima esete végére.

Tétel (Greene–Lobb, [3]): Legyen $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ egy sima Jordan-görbe, és legyen $r \in \mathbb{R}$ pozitív szám. Ekkor van S^1-ben négy olyan t_1, t_2, t_3, t_4 pont, hogy képük egy olyan téglalapot határoz meg, melyre az oldalak aránya épp r.

Bizonyításuk mélyén egy új technika lapul, ami azon alapszik, hogy Hugelmeyer Möbius-szalagból $\mathbb{C}^2$-be mutató leképezésének képterét *szimplektikus* sokaságnak tekintik. (Egy M^{2n} $2n$-dimenziós sokaságon egy szimplektikus struktúra nem más, mint egy zárt, nemelfajuló 2-forma, vagyis egy olyan $\omega \in \Omega^2(M)$, amelyre $d\omega = 0$ és $\wedge^n \omega \neq 0$ teljesül.) A szimplektikus topológia és geometria a matematika egy fiatal ága, és komplex analitikus eszközök továbbfejlesztésével speciális, a szimplektikus struktúrát is figyelembe vevő leképezéseket vizsgál. Ezen eszközök segítségével lehet megmutatni például azt, hogy a Klein-kancsó (mely $\mathbb{R}^4$-be beágyazható) nem ágyazható be a szimplektikus $\mathbb{C}^2$-be mint *Lagrange*-féle részsokaság. (Egy $L \subset (M, \omega)$ szimplektikus sokaság-beli L részsokaság Lagrange-féle, ha $\omega|_{TL} \equiv 0$.) A fenti fogalmak bőven a jelen dolgozat keretein túl mutatnak, bemutatásukra itt nincs lehetőség, de talán felemlegetésük és az itt tárgyalt egyszerű(nek látszó) probléma megoldásában játszott szerepük alapján felkeltik a kedves olvasó érdeklődését.

Irodalomjegyzék

[1] J. Batson: *Nonorientable slice genus can be arbitrarily large*, Math. Res. Lett. **21** (2014), no. 3, 423–436.

[2] A. Emch: *Some properties of closed convex curves in a plane*, Amer. J. Math. **35** (1913), 407–412.

[3] J. Greene, A. Lobb: *The Rectangular Peg Problem*, arXiv:2005.09193

[4] C. Hugelmeyer: *Every smooth Jordan curve has an inscribed rectangle with aspect ratio equal to* $\sqrt{3}$, arXiv:1803.07417

[5] B. Matschke: *A survey on the square peg problem*, Notices Amer. Math. Soc. **61** (2014), no. 4, 346–352.

[6] M. Meyerson: *Balancing acts*, Topology Proc. **6** (1981), no. 1, 59–75.

[7] P. Ozsváth, Z. Szabó, A. Stipsicz: *Unoriented knot Floer homology and the unoriented four-ball genus*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2017, **17**, 5137–5181.

[8] L. Schnirelman: *On some geometric properties of closed curves*, (in Russian) Usp. Mat. Nauk **10** (1944), 34–44.

[9] T. Tao: *An integration approach to the Toeplitz square peg problem*, Forum Math. Sigma **5** (2017), Paper No. e30, 63 pp.

[10] O. Toeplitz: *Über einige Aufgaben der Analysis situs*, Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Solothurn **4** (1911), 197.

5. Appendix: a Greene–Lobb bizonyítás alapelemei

Nem nehéz megadni a Greene–Lobb tételben szereplő függvényeket sem. Lássuk el a $\mathbb{C}$ komplex egyenest a szokásos $z = x + iy$ valamint a $w = re^{i\theta}$ polárkoordinátákkal. Ekkor $\mathbb{C}^2$-en az $\omega = dx \wedge dy + r \cdot dr \wedge d\theta$ forma adja majd a megkívánt szimplektikus formát. Adjuk meg az $l, g\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ függvényeket az

$$l(z,w) = \left(\frac{z+w}{2}, \frac{z-w}{2}\right) \qquad g(z,r,\theta) = (z, \frac{r}{\sqrt{2}}, 2\theta)$$

formulákkal. Legyen $L = l(f(S^1), f(S^1))$ tórusz, és legyen M ennek g-menti képe. Nem nehéz látni, hogy $g(l(z,w)) = g(l(z',w'))$ pontosan akkor, ha $\{z,w\} = \{z',w'\}$, vagyis M továbbra is egy Möbius-szalag.

Vegyük az $R_\phi(z,r,\theta) = (z,r,\theta+\phi)$ leképezést, mely tehát $\mathbb{C}^2$-ből $\mathbb{C}^2$-be mutat. Megmutatható, hogy M és $M_\phi = R_\phi(M)$ a peremüktől különböző metszéspontjai épp olyan, az $f(S^1)$ görbébe írt tégalapoknak felelnek meg, amelyekre az átlók által bezárt szög épp ϕ. (Téglalapok hasonlósága az átlók bezárt szögével is megragadható.)

Ha azonban M és M_ϕ valamilyen ϕ-re nem metszik egymást a peremükön kívül, akkor az $M \cup M_\phi$ unió egy beágyazott Klein-kancsót ad. (A simasághoz a perem mentén simítani kell, ami egy messze nem triviális, lokális modellen való számítást igényel.)

Annak belátása, hogy az $M \cup M_\phi$ Klein-kancsó (illetve simítása) Lagrange-féle, még nem nehéz. Annak belátása azonban, hogy a szimplektikus $(\mathbb{C}^2, \omega)$ térben nincs beágyazott Lagrange-féle Klein-kancsó, nagyon komoly technikai előkészületeket igényel.

Stipsicz András, Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

geometria analízis

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

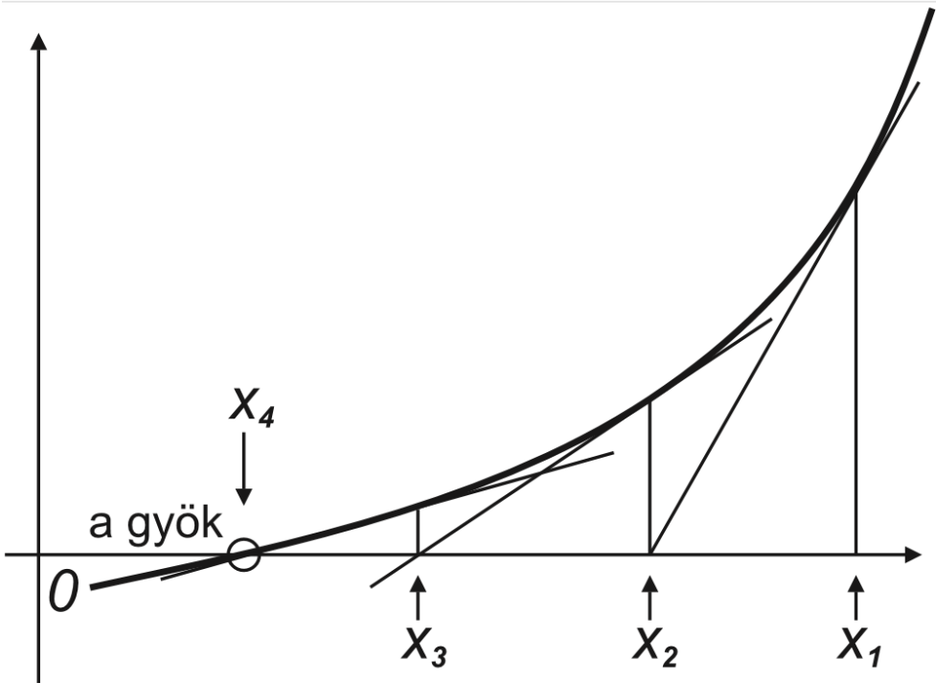
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Simonovits András 2020. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Az érintőmódszer történetéről

Hosszú évek óta tanítok matematikatörténetet, de mindig tanulok valami újat. A napokban láttam a Netflixen egy filmet, 21 – Las Vegas ostroma, amelyben elhangzott egy abszurd állítás: Newton ellopta az érintőmódszert Raphsontól. Kicsit utánanéztem a történetnek. A magyar nyelvű wikipédia Newton-módszer szócikke a lényeget vázolja, de számomra nem eléggé érthetően. Az ott ajánlott [2] forrás segítségével sikerült a lényeget megértenem, és ez alapján tájékoztatom az *Érintő* olvasóit.

A közfelfogás szerint (amit eddig én is elfogadtam) a nemlineáris egyenletek numerikus megoldásának új korszakát nyitotta meg a Newton-féle érintőmódszer (1671).



1. ábra. Az érintőmódszer működése

Ha f skalár–skalár függvény, amelynek ξ gyöke, azaz $f(\xi) = 0$, akkor egy közelítő x_n gyök ismeretében megpróbálkozhatunk az érintőegyenes x_{n+1} metszéspontját adó $f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0$ egyenletből adódó

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

iterációval. Ez a módszer nem mindig konvergál, de jó esetben nemcsak konvergál, hanem nagyon gyorsan konvergál. Ha nem ismerjük a függvény deriváltját, akkor a következő közelítéssel élhetünk:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

A legegyszerűbb alkalmazás a $\beta > 0$ szám négyzetgyökének megkeresése, ekkor $f(x) = x^2 - \beta$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\beta}{x_n}\right).$$

Külön érdekesség, hogy ezt a módszert már az ókori babilóniaiak is ismerték [1]. Vélhetőleg ennek segítségével határozta meg Arkhimédész $\sqrt{3}$ jó közelítő értékét i.e. 240 körül, amikor az egységátmerőjű kör kerületét szoros alsó–felső korlátok közé szorította.

A valóság azonban bonyolultabb, és visszavezet az 1960-as években még a középiskolában oktatott speciális négyzetgyökvonási algoritmushoz, amelyet a matematikatörténet Vieta nevéhez fűz (1600 előtt). Az egyszerűség kedvéért itt is a babiloni $\sqrt{2}$-es példát vesszük, és a 100-szoros $\beta = 200$-zal folytatjuk. Kezdő lépésként egy olyan természetes számot választunk, amely alulról jól közelíti a $\sqrt{200}$-at: $x_0 = 14$, amelynek négyzete 196.

Ahhoz, hogy pontosítsuk ezt a becslést, jelölje az első tizedesjegyet y, azaz $\sqrt{200} \approx 14 + 0{,}1y_1$-gyel próbálkozunk. Elvégezve a négyzetre emelést, a $200 \approx 196 + 2{,}8y_1 + 0{,}01y_1^2$ közelítést kapjuk, amelyből eldobjuk a négyzetes tagot, és csak az első értékes jegyet tartjuk meg:

$$4 = 2{,}8y_1,$$

azaz

$$y_1 = 1.$$

Még egy lépéssel tovább lépünk: $\sqrt{200} \approx 14{,}1 + 0{,}01y_2$, azaz újbóli négyzetreemeléssel

$$200 \approx (14{,}1 + 0{,}01y_2)^2 \approx 198{,}81 + 0{,}282y_2,$$

azaz $y_2 = 1{,}19/0{,}282 = 4, \ldots$. A közelítő eredmény $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$.

Sem Newton 1671-ben, sem Raphson 1690-ben nem tudott elszakadni a Vieta-módszer algebrai hatókörétől, bár ők nem ragaszkodtak a tizedesjegyek egymás utáni meghatározásához. Valóban, a fenti módszerben már az első közelítésben megkaphattuk volna a 0,14-ot.

A korra jellemző, hogy nem általános, hanem speciális polinomokat vizsgáltak, mi azonban kedvelt harmadfokú egyenletüket paraméteresen írjuk föl:

$$f(x) = x^3 - px - q = 0.$$

Itt a fokozatos megközelítésnél nincs szükség explicit deriválásra, elegendő az $x_{n+1} = x_n + e_n$ lineáris közelítése:

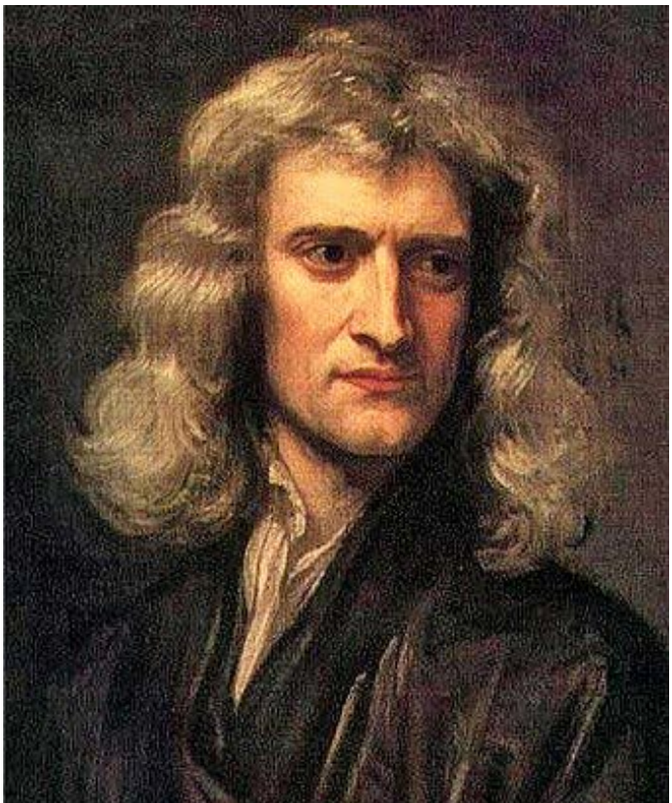
$$0 \approx f(x_{n+1}) = (x_n + e_n)^3 - p(x_n + e_n) - q \approx x_n^3 - px_n - q + (3x_n^2 - p)e_n,$$

azaz

$$e_n = \frac{x_n^3 - px_n - q}{3x_n^2 - p}.$$

Csak az $f'(x_n) = 3x_n^2 - p$ (és az $f(x_n) = x_n^3 - px_n - q$) jelölés bevezetésével kapjuk meg az érintőmódszert.

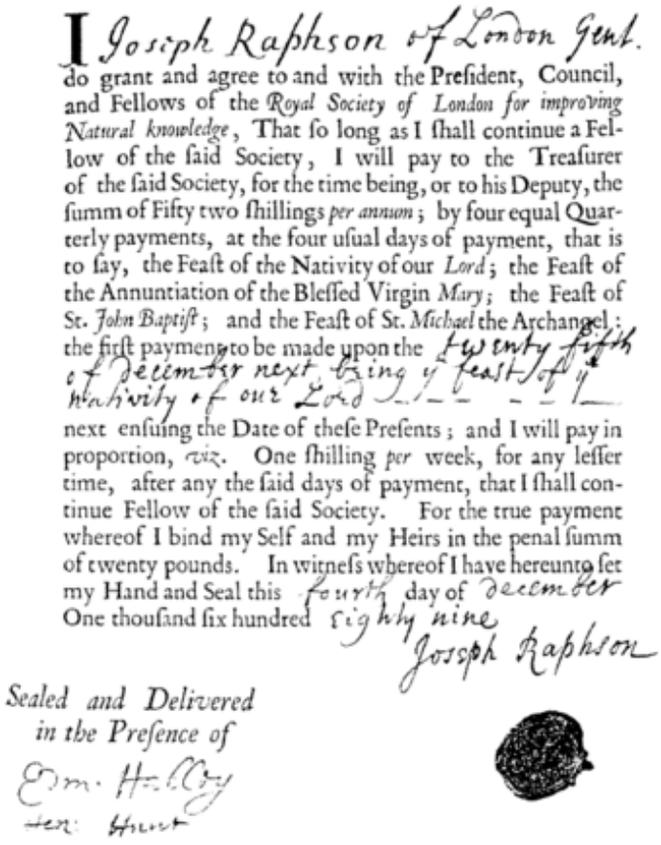
A Principia III. kiadásában (1726-ban) a Kepler-feladat megoldásával kapcsolatban Newton nem algebrai egyenletet is megoldott módszerével, ez azonban 1882-ig észrevétlenül maradt. Ezt leszámítva, mindkét szerző kizárólag polinomiális egyenletekre szorítkozott.



2. ábra. Godfrey Kneller festménye: IsaacNewton –1689

(Forrás:https://hu.wikipedia.org/w/index.php?title=Isaac_Newton&oldid=23210874)

Simpson volt az első (neve az integrálási szabályáról maradt fenn), aki 1740-ben nem algebrai (négyzetgyökös) függvényeket vizsgált, és a levezetésnél explicite differenciálta a függvényeket. De az igazi érintőmódszert, az általunk is alkalmazott jelöléssel csak Lagrange publikálta 1798-ban, ő Newton mellett még Raphson nevét is megemlítette. Fourier 1831-ben már csak Newtonra hivatkozott, és ez okozhatta azt, hogy Raphsont és Simpsont sokáig elfeledték.



I Joseph Raphson of London Gent.
do grant and agree to and with the President, Council, and Fellows of the *Royal Society of London for improving Natural knowledge*, That so long as I shall continue a Fellow of the said Society, I will pay to the Treasurer of the said Society, for the time being, or to his Deputy, the summ of Fifty two shillings *per annum*; by four equal Quarterly payments, at the four usual days of payment, that is to say, the Feast of the Nativity of our *Lord*; the Feast of the Annuntiation of the Blessed Virgin *Mary*; the Feast of St. *John Baptist*; and the Feast of St. *Michael* the Archangel; the first payment to be made upon the twenty fifth of December next being ye feast of ye Nativity of our Lord next ensuing the Date of these Presents; and I will pay in proportion, *viz.* One shilling *per* week, for any lesser time, after any the said days of payment, that I shall continue Fellow of the said Society. For the true payment whereof I bind my Self and my Heirs in the penal summ of twenty pounds. In witness whereof I have hereunto set my Hand and Seal this fourth day of December One thousand six hundred eighty nine
Joseph Raphson

Sealed and Delivered in the Presence of
Edm. Halley
Hen: Hunt

3. ábra. Raphson aláírása felvételekor a Királyi Társaságba

(Forrás: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Raphson.gif)

Zárásként megemlítjük, hogy bár Newton valóban évtizedekkel Raphson után publikálta kezdetlegesebb módszerét, nem lopott el semmit sem Raphsontól, és nem is volt köztük prioritási vita. De a matematika vonzerejét mutatja, hogy hollywoodi filmekben is megjelennek komoly matematikai problémák, még ha időnként eltorzítva is.

Irodalomjegyzék

[1] Boyer, C. B. (1968): *A History of Mathematics*, Princeton, Princeton University Press. Kiegészített kiadás: Revised by Uta C. Merzbach (1991), Wiley.

[2] Ypma, T. (1995): Historical development of the Newton–Raphson-method, *SIAM Review*, 37:4, 531–551.

Simonovits András

matematikatörténet analízis

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Figula Ágota 2020. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

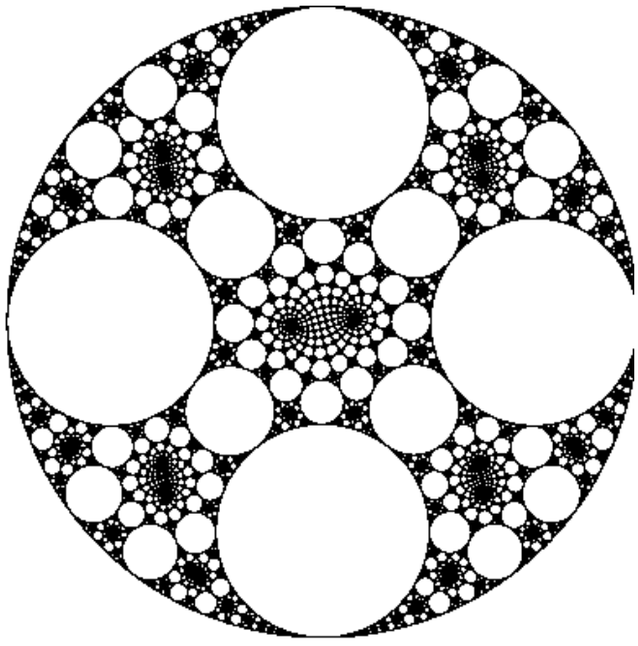
Klein-gyöngyök

Az emberiséget hosszú idő óta elbűvölik a különféle szimmetriákat megjelenítő, ismétlődő motívumok. Bolyai János (1802–1860) magyar matematikus és hadmérnök 1823. évi felfedezése, a hiperbolikus geometria megszületése fordulópontot hozott a 19. század matematikájában. Ez a felfedezés sokkal gazdagabb mintázatokat tett lehetővé. Közülük néhányat a holland grafikus, Maurits Cornelis Escher (1898–1972) népszerűsített a híres *Circle Limit* (Körhatár) fametszet-sorozatában, amelyen a Poincaré-féle körmodellt csempézte ki periodikus mintákkal. A hiperbolikus sík körmodellje nevét Jules Henri Poincaréről (1854–1912) kapta. Számítógép segítségével nem nehéz escher-szerű képeket létrehozni. Szimmetriáról hagyományosan az euklideszi transzformációk – eltolás, forgatás, tükrözés – alkalmazásakor beszélünk. Szimmetria azonban olyan leképezések alkalmazása során is előáll, mint a Möbius-transzformációk, amelyekkel torzítás, nyújtás, csavarás valósítható meg. $\mathbb{C}$-vel jelölve a komplex számok halmazát, az

$$a(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

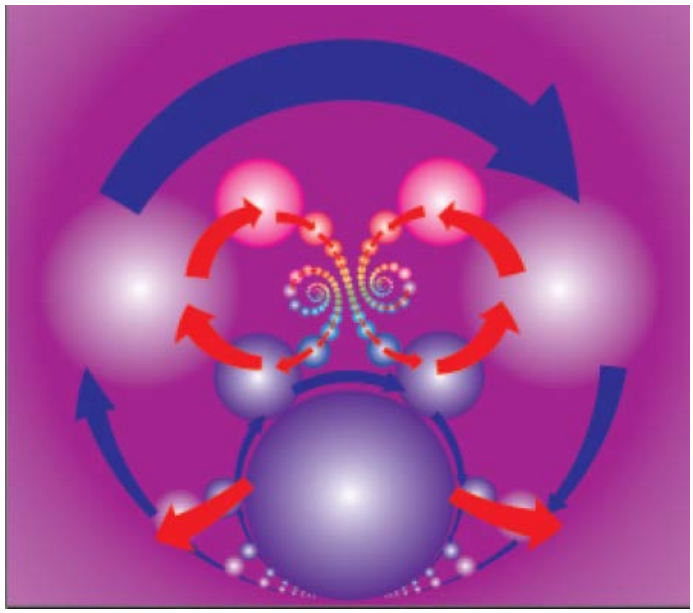
alakú leképezést, ahol z a $\mathbb{C} \cup \infty$ Riemann-gömb eleme, Möbius-transzformációnak nevezzük, August Ferdinand Möbius (1790–1868) emlékére. A Riemann-gömb Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) nevét őrzi. Az ilyen transzformációk az $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ alakú mátrixokkal reprezentálhatók. Nem távolságtartók, de megőrzik a szögeket és a Riemann-gömb bármely körét a Riemann-gömb egy körére képezik le (lásd [1] Állítás 8.2, 34. o.). Továbbá előállnak a $T_1(z) = z + b$, $b \in \mathbb{C}$, eltolás, a $T_2(z) = az$, $a \in \mathbb{C}$, origó körüli forgatva nyújtás és $T_3(z) = \frac{1}{z}$ leképezések kompozíciójaként. A $T_3(z)$ leképezés a $z \mapsto \bar{z}$ komplex konjugáció, azaz a valós tengelyre való tükrözés és a $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ leképezés, azaz az origó középpontú egység sugarú körre vonatkozó inverzió kompozíciója. Az M mátrix nyoma $\mathrm{Tr}\,(M) = \alpha + \delta$. A Möbius-leképezéseket az őket leíró mátrix nyoma szerint a loxodromikus, az elliptikus és a parabolikus leképezések osztályába sorolhatjuk. A loxodromikus leképezéseknek két fixpontjuk van, amelyeket forrás és nyelő fixpontnak nevezzünk. Ilyen leképezések hatására a pontok spirális pályán futnak a leképezés forrás fixpontjából kiindulva a nyelő fixpont felé. Minden loxodromikus leképezés egy $T(z) = kz$, $|k| > 1$ leképezés konjugáltja. A loxodromikus leképezéseket leíró mátrix nyoma egy $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$-beli szám. Azokat a Möbius-transzformációkat, amelyeknek egyetlen fixpontjuk van, azaz a forrás és a nyelő fixpontjuk egybeesik, parabolikusnak nevezzük. Minden parabolikus leképezés egy $T(z) = z + b$, $b \in \mathbb{C}$, eltolás konjugáltja. A parabolikus leképezésekhez tartozó mátrix nyoma ± 2 (lásd [3] 3. fejezetében).

Ebben az írásban egy rövid ismertetést szeretnék adni egy olyan mintázatról, amely invariáns marad egy $a(z)$-vel jelölt loxodromikus és egy $b(z)$-vel jelölt parabolikus transzformáció által generált $G = \langle a(z), b(z) \rangle$ csoport hatására nézve. A G csoportban az összes lehetséges transzformációt meg lehet adni egy „szóval”, ábécéként az $a(z)$, $b(z)$, $a^{-1}(z)$, $b^{-1}(z)$ betűket használva. Ezt nevezzük az $a(z)$ és $b(z)$ által generált Schottky-csoportnak, Friedrich Hermann Schottky (1851–1935) emlékére. Ha egy szóban az $a(z)$ elem közvetlenül az inverze, $a^{-1}(z)$, mellett szerepel, akkor a szó leegyszerűsíthető az $a(z)$, $a^{-1}(z)$ pár elhagyásával, és hasonlóan a $b(z)$ és a $b^{-1}(z)$ pár esetén. Így a G csoport szabad csoport (lásd [1] 23.3 Tétel, 92. o., és [3] 4. fejezetében).



1.ábra

Az 1. ábrán látható fekete csipkemotívum a G csoport „határpontjainak” a halmaza. Határpont alatt azokat a pontokat értjük, amelyeket megközelíthetünk, ha valamely más pontra alkalmazzuk G-beli leképezések egy végtelen sorozatát. Az euklideszi tapétázásoknak csak egy határpontja van. Escher *Körhatár* munkáinak határpontjai egy kört alkotnak (lásd [1] 50.o.). Az általunk vizsgált fenti mintázat határpontjainak halmaza végtelen sok körből és ezek torlódási pontjaiból áll (lásd 1. ábra).

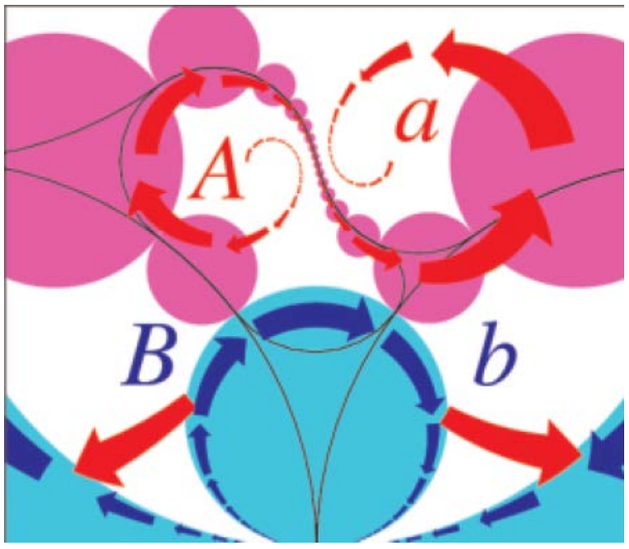


2. ábra

Az $a(z)$ és $b(z)$ leképezések hatását a 2. ábra mutatja be, amelyen az 1. ábra egy véges részlete, egymást érintő körlapok láthatók. Az $a(z)$ transzformáció az ibolya színű körlemezeket mozgatja balról jobbra, egyikről a következőre a piros nyilak irányába. Az $a(z)$ transzformáció loxodromikus, a pontokat egy végtelen dupla spirálon mozgatja a forrás fixpontból a nyelő fixpont irányába.

A $b(z)$ transzformáció, melynek hatására a mozgást a kék nyilak jelölik, a két világoskék körlemezt invariánsan hagyja. A $b(z)$ leképezés egyetlen fixpontja a két kék kör érintési pontja. Így $b(z)$ egy parabolikus leképezés, a pontokat a fixpontjából induló kör alakú pályákon mozgatja, azokon az óramutató járásával megegyező irányba haladva. A hozzá tartozó mátrix nyoma ± 2. Mátrixok nyomára vonatkozó azonosságok felhasználásával (lásd [3] 6. fejezetében) ez egy polinomiális összefüggést ad az $a(z)$ és a $b(z)$ generátorokra.

A 2. ábrán látható körháló komplementere négy fehér tartomány, ezeket a képen a, A, b, B jelöli. Az $a(z)$ leképezés az A tartományt határoló köröket mozgatja az a tartományt határoló körökbe, és hasonlóan mozgatja a $b(z)$ transzformáció a B és a b tartományokat határoló köröket. Az $a(z)$ leképezés a A tartomány külsejét az a tartomány belsejére képezi le és hasonlóan a $b(z)$ leképezés a B tartomány külsejét a b tartomány belsejére képezi le. Az $a(z)$ és a $b(z)$ leképezéseket ismételve, egymásba ágyazott tartományok sorozatát kapjuk. Az egymásba ágyazott tartományok torlódási pontjai alkotják a Schottky-csoport határhalmazát.



3.ábra

A 3. ábrán a körlemezek közötti transzformációkat jelképező nyilak zárt hurkait látjuk. Követve a nyilakat, melyek az $a(z) \circ b^{-1}(z) \circ a^{-1}(z) \circ b(z)$ leképezések kompozícióját mutatják – először egy kék nyíl hat előre a nyíl irányába [$b(z)$], utána egy piros nyíl hat a nyíllal ellenkező irányba [$a^{-1}(z)$], aztán egy kék nyíl hat visszafelé [$b^{-1}(z)$], végül egy piros nyíl előre [$a(z)$] –, azt látjuk, hogy ez a transzformáció invariánsan hagyja a nagy külső „körlemezt”, azaz az $|z| \geq 1$ pontok halmazát, mely tartalmazza ∞-t. Ezt D_1-gyel fogjuk jelölni. Ugyancsak invariánsan hagyja a bal oldali legnagyobb fehéreslila körlemezt. Ezt jelöljük D_2-vel. Ebből adódik, hogy az $a(z) \circ b^{-1}(z) \circ a^{-1}(z) \circ b(z)$ leképezés is parabolikus transzformáció. Így az $a(z) \circ b^{-1}(z) \circ a^{-1}(z) \circ b(z)$ leképezéshez tartozó mátrix nyoma ismét ± 2. Ha feltesszük, hogy $\mathrm{Tr}(ab^{-1}a^{-1}b) = -2$, akkor a mátrixok nyomára vonatkozó

$$\mathrm{Tr}(ab^{-1}a^{-1}b) = (\mathrm{Tr}(a))^2 + (\mathrm{Tr}(b^{-1}))^2 + (\mathrm{Tr}(ab^{-1}))^2 - \mathrm{Tr}(a)\,\mathrm{Tr}(b^{-1})\,\mathrm{Tr}(ab^{-1}) - 2$$

azonosság a

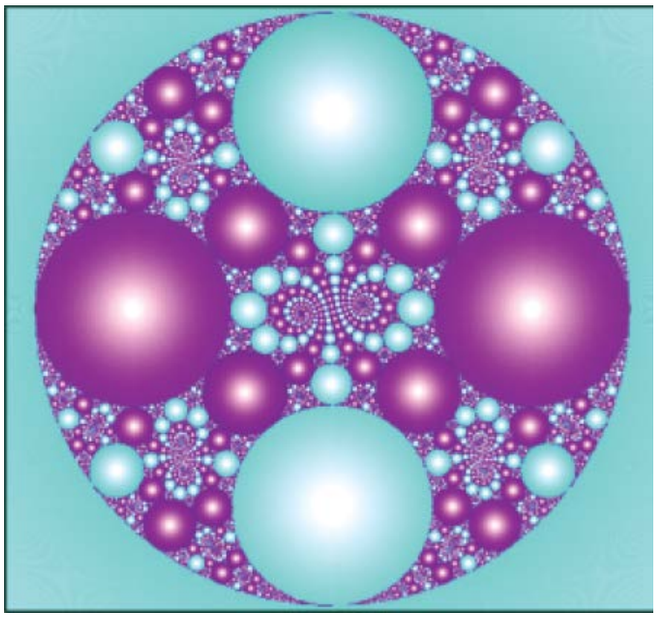
$$(\mathrm{Tr}(a))^2 + (\mathrm{Tr}(b^{-1}))^2 + (\mathrm{Tr}(ab^{-1}))^2 = \mathrm{Tr}(a)\,\mathrm{Tr}(b^{-1})\,\mathrm{Tr}(ab^{-1})$$

Markov-azonossággá egyszerűsödik, amely Andrej Andrejevics Markov (1856–1922) nevét őrzi. Így a $\mathrm{Tr}(ab^{-1}a^{-1}b) = \pm 2$ feltétel újabb polinomiális összefüggést ad az $a(z)$ és a $b(z)$ traszformációk között. A mátrixok nyomára vonatkozó azonosságok alkalmazása lehetővé teszi, hogy a G csoport minden „szavának” nyomát kifejezhessük a $\mathrm{Tr}(a)$, $\mathrm{Tr}(b)$ és a $\mathrm{Tr}(ab)$ nyomok segítségével (lásd [3] 6. fejezet, 189–192. o.).

Továbbá ha D_2-nél kezdünk, és pontosan 15-ször alkalmazzuk egymás után az $a(z)$-t (a piros nyilakkal jelölt transzformációkat a nyilak irányában), akkor a jobb oldali szimmetrikusan elhelyezkedő legnagyobb fehéreslila körlemezhez érkezünk. És innen visszaugorhatunk D_2-re a $b^{-1}(z)$ leképezés hatására (a kék nyíl által jelölt leképezést egyszer visszafelé, a nyíllal ellenkező irányban alkalmazva). Ugyanez a kompozíció invariánsan hagyja az $a^{-1}(D_2)$ körlemezt, melyet éppen egy piros nyíl hatása képez D_2-re. (Az $a^{-1}(D_2)$ a D_2-t kívülről érintő kékesfehér körlemez.) Ezért $b^{-1}(z) \circ a(z)^{15}$ is parabolikus leképezés. Fixpontja a D_2 és az $a^{-1}(D_2)$ körlemezek érintési pontja. A $b(z)$, $a(z) \circ b^{-1}(z) \circ a^{-1}(z) \circ b(z)$, $b^{-1}(z) \circ a(z)^{15}$ parabolikus leképezések által adott polinomiális feltételek (konjugálás erejéig) egyértelműen meghatározzák a mintázatot.

A körlemezek színezése a következőképpen történik: A $b(z)$ leképezés alkalmazása nem változtatja meg a színt. Az $a(z)$ leképezést alkalmazva a körlemez színe a következő színre vált 15 szín ciklusában.

A 4. ábra a körlemezeknek a G hatására vonatkozó két ekvivalenciaosztályát mutatja.



4.ábra

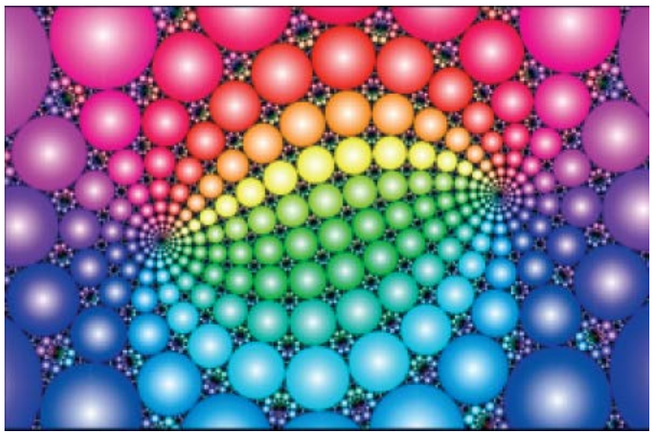
Ez kiterjeszti a körlemezek színezését az eredeti körhálóban. Minden körlemez invariáns a transzformációk egy részcsoportjának hatásával szemben. Például láttuk, hogy a D_1 külső körlemez invariáns marad a $b(z)$ és az $a(z) \circ b^{-1}(z) \circ a^{-1}(z) \circ b(z)$ leképezések hatására. Ez a két *szó* generálja a D_1 körlemez stabilizátor részcsoportját. Ebben a részcsoportban az összes szó olyan, hogy a bennük előforduló $a(z)$ kifejezések kitevőinek az összege 0. Így a D_1 körlemez képének a színét a G csoport szavainak hatására éppen a szavakban levő $a(z)$ kifejezések kitevőinek az összege határozza meg.

Hasonlóan a D_2 körlemez stabilizátora az $a(z) \circ b^{-1}(z) \circ a^{-1}(z) \circ b(z)$ és a $b^{-1}(z) \circ a(z)^{15}$ leképezések által van generálva. Ezen részcsoport minden szavában az $a(z)$ kitevőinek az összege 15 többszöröse. Ennélfogva a színezésünk konzisztens, ha 15

színt használunk.

A teljes mintázaton keresztül a következő szabályt látjuk: Ha a D_1 és a D_2 körlemez színét ugyanannak választjuk, akkor két érintő körlemez pontosan akkor tartozik különböző ekvivalenciaosztályhoz, ha ugyanaz a színük. Az ekvivalenciaosztályok a G csoport egy 2 indexű részcsoportjához tartoznak.

Ha kinagyítjuk a kép közepét, az $a(z)$ transzformáció fixpontjai mintha szemek lennének (lásd az 5. ábrát).



5.ábra

Az olyan csoportot, amelynek a határhalmaza kör, Fuchs-féle csoportnak nevezzük. A csoport elnevezése Immanuel Lazarus Fuchs (1833–1902) emlékét őrzi. Möbius-transzformációk egy csoportját, amelyek határhalmaza egy összefüggő hurok, kvázifuchs-féle csoportnak nevezzük. A G csoportot azért hívja David J.Wright „dupla csúcsú csoportnak” [4] cikkében, mert ez utal arra, hogy G kétgenerátorú kvázifuchs-féle csoportok extrém „deformációja” (lásd [3] 6. és 9. fejezeteit).

Hasonló tulajdonságú csoportokról és határhalmazukról Felix Cristian Klein (1849-1925) kutatásai úttörő jelentőséggel bírnak. Ez motiválta ennek az írásnak a címét. Munkássága során Klein fizikailag is vizualizált szimmetrikus mintázatokat. Azonban a határhalmaz ábrázolása olyan nehézségekkel szembesítette, amelyekről 1894-ben így írt (lásd [2]):

„A kérdés az, hogy milyen konfigurációt alkot a körök összessége és hogy mi lesz a határpontjaiknak a halmaza. Ezekre a kérdésekre nem nehéz választ adni tisztán logikai úton; de az érzékeltetésükben úgy látszik, meghiúsul a teljesség, ha megpróbáljuk az eredményt képként ábrázolni.”

További mintázatok elemzése és a számítógépes vizualizációjukhoz szükséges programok találhatók [3]-ban.

Ebben a cikkben az összes ábra szerzői joga David J. Wrightot illeti, aki David Mumforddal közösen írt „kleini” programukkal állította elő azokat, és újraközlésüket az Érintő számára engedélyezte.

Irodalomjegyzék

[1] T. K. Carne, Geometry and Groups, Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics, University of Cambridge, https://www.dpmms.cam.ac.uk/~tkc/GeometryandGroups/GeometryandGroups.pdf

[2] F. Klein, Lectures on Mathematics, Amer. Math. Soc., 2000.

[3] D. Mumford, C. Series, and D. Wright, Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein, Cambridge Univ. Press, 2002.

[4] D. Wright, Double Cusp Group, Notices of the AMS, **51**, no. 11 (2004), 1332–1333.

https://www.ams.org/notices/200411/comm-wright.pdf

Figula Ágota

Debreceni Egyetem, Természettudományi és Technológiai Kar,

Matematikai Intézet, Debrecen

A munkát a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal (NKFI) K132951 és az EFOP-3.6.1-16-2016-00022 projekt támogatta. A második projektet az Európai Unió és az Európai Szociális Alap finanszírozza.

geometria csoportelmélet

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Oláh-Gál Róbert 2020. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Varga Tamás családfája – Szász Károly (1798 – 1853)

Varga Tamás igazi vérbeli pedagógus családjában, ősei és rokonai között sok kiváló matematikus és pedagógus volt. Így már a „génjeiben” benne lehetett, hogy a matematikát nem csak művelni kell, de legalább olyan fontos jól megtanítani. Igazából nem is annyira a népes és jól ismert családfáról szeretnék írni, (a családfát tanulmányozóknak szíves figyelmébe ajánljuk a kitűnő honlapot: http://csalad.szemerja-szasz.hu) sokkal inkább a családfa 18. századi megteremtőjéről, a matematikus, jogász, államférfi, nyelvész, irodalmár id. szemerjai Szász Károlyról.

Szabó János festménye: Szász Károly (Vízakna, 1798. január 25. - Marosvásárhely, 1853. október 25.) államférfi, jogtudós, író, matematikus. Forrás: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sz%C3%A1sz_K%C3%A1roly_(Szab%C3%B3_J%C3%A1nos_festm%C3%A9nye).jpg

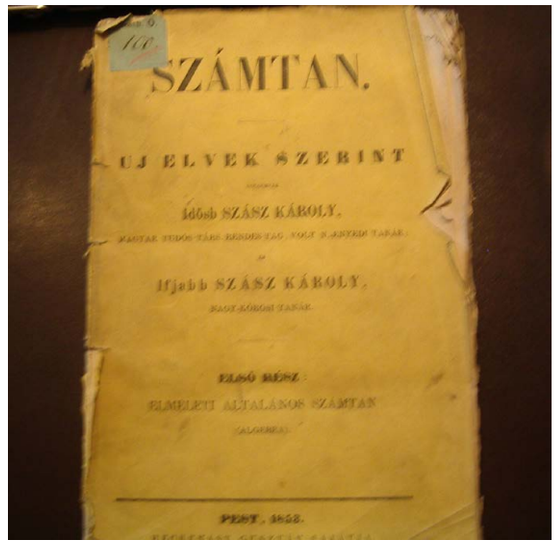
A szemerjai Szász-család jól ismert a magyar művelődéstörténetben, elég, ha csak Arany János barátjára, a nagy irodalmár Szász Károly (Nagyenyed, 1829. június 15. – Budapest, 1905. október 15.) püspökre gondolunk, (négy „nagy” Szász Károlyt ismer a magyar művelődéstörténet), de ebből a családból származik, a néhai Szász Domokos (Nagyenyed, 1838. május 25. – Kolozsvár, 1899. január 8.) irodalmár, egyetemi tanár, erdélyi református püspök, Szilágyi Domokos (Nagysomkút, 1938. július 2. – Kolozsvár, 1976. november 2.) kiváló erdélyi költő, Varga Domokos (Kunszentmiklós, 1922. október 8. – Budapest, 2002. május 12.) irodalomtörténész, Dr. Szász Pál (Budapest, 1901. július 11. – Budapest, 1978. február 12.) matematika professzor, Dr.

Szász Domokos matematikus, az MTA volt alelnöke és természetesen Varga Tamás, hogy csak a legismertebb személyiségeket említsük.

A matematikus, pedagógus id. Szász Károly mindkét Bolyainak közeli barátja volt. Kevesen tudják, hogy a szakoktatás bevezetése 1848-as vívmány, mert addig az oktatásban is feudális állapotok uralkodtak. A 48-as első független, felelős magyar kormányban a kultuszminiszter báró Eötvös József volt és id. Szász Károly volt az államtitkára. Már báró Eötvös József kiadta a szakoktatás bevezetésének rendeletét (vagyis, hogy szaktantárgyat csak szakember taníthat), de akkora ellenállásba ütközött, hogy lemondott és utána id. Szász Károly vezette a kultuszminisztériumot 1848. szeptember 28-tól 1849. május 1-ig.

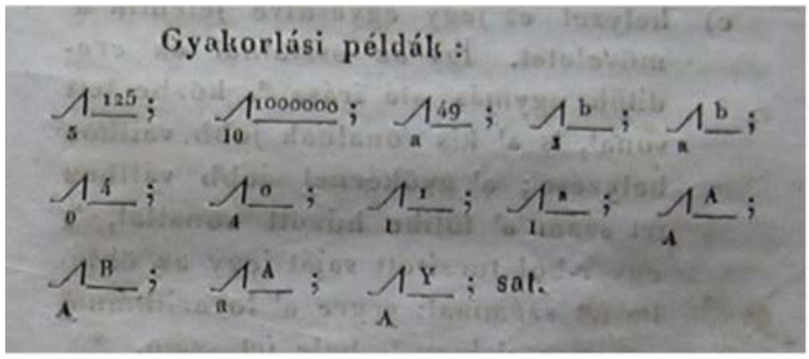
Szász Károly képe a Wikipédián.

Ő kiváló matematikatár volt Nagyenyeden, majd az 1848-as forradalom bukása után Marosvásárhelyen. Szinte minden diákja rajongott érte, és kiváló hallgatói (báró Kemény Zsigmond író, Koós Ferenc református lelkipásztor, Mentovich Ferenc filozófus, természettan tanár) emlékirataikban megírták, hogy id. Szász Károly óráin értették meg a matematikát. Például Koós Ferenc írta, hogy Bolyai Farkas matematikai óráin semmit sem értettek, de szerencsére Bolyai Farkas nyugdíjaztatása után, id. Szász Károly óráin minden érthető lett, és megvilágosodott előttük a matematikai fogalmak értelme.



Id. Szász Károly és fia, a későbbi református püspök Szász Károly írtak egy „Számtan” könyvet, mely Pesten jelent meg 1853-ban[1]. Könyvükben összefoglalják a közoktatásban használatos matematikai ismereteket. Kezdeményezik a logaritmus fogalmának bevezetését a közoktatásba, és erre egy nagyon szemléletes jelölést is javasolnak:

$\sqrt[3]{81}$ *olvasd: „nyolczvanegynek három alapu logarithma” vagy is: „az a’ szám hányadik emelete nyolczvanegy háromnak.*


Gyakorlási példák:

$\sqrt[5]{125}$; $\sqrt[10]{1000000}$; $\sqrt[a]{49}$; $\sqrt[3]{b}$; $\sqrt[a]{b}$;

$\sqrt[0]{4}$; $\sqrt[4]{0}$; $\sqrt[U]{1}$; $\sqrt[1]{a}$; $\sqrt[A]{A}$;

$\sqrt[A]{B}$; $\sqrt[a]{A}$; $\sqrt[A]{Y}$; sat.

§. 24. Gyökér.

A’ gyökér’ jelentésének (ezen két fél ’s egy egész szó’ kifejezésének: -nak, -dik gyökere) ismét nem csak egy hanem két alakja divatoz az Algebrában.

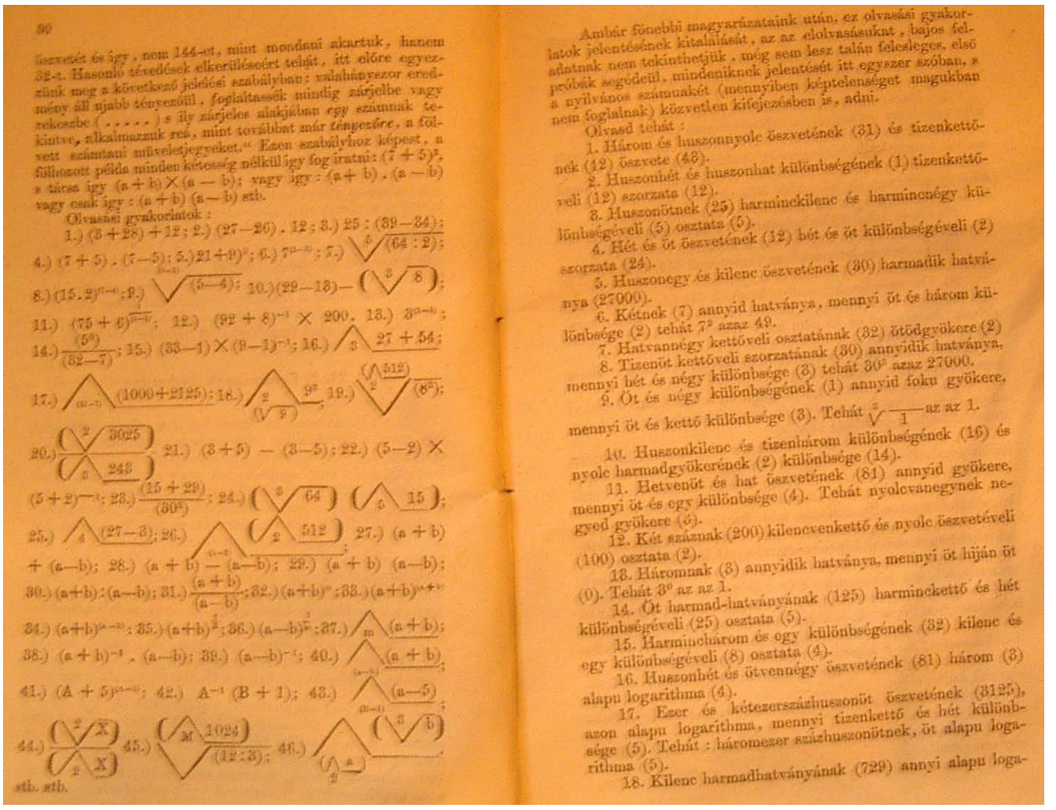
Leírjuk az emeletet, (a’ számot melynek gyökeréről szólunk), egy ily alaku jegyet $\sqrt{\ }$ *(maradványát a’ gyökér’ latin neve’ – radix – kezdő betűjének) rajzolunk elébe az emelet fölött elnyúló szárral, ’s ennek öblébe helyezzük a’ logarithmot (azt a’ számot, hányadik gyökerét akarjuk jelelni a’ fönforgó emeletnek). Pl. ;* $\sqrt[3]{125}$ *olvasd: „százhuszonötnek harmadik gyökere”; más szókkal: „az a’ szám melynek harmadik emelete százhuszonöt;” latinosan: „radix három (v. tertia) ex százhuszonöt.” Itt is két pótjegyzetünk van.*

a, Valamint minden szám maga magának első emelete, úgy, és éppen azért, első gyökere is. Akármely szám első gyökere helyett tehát mindig bártan oda írhatjuk, ’s szoktuk is írni, egyenesen magát azt a’ számot; pl. $\sqrt[1]{5}$ *helyett csak ezt: 5;, , sat.* $\sqrt[1]{A}$, $\sqrt[1]{b}$ *helyett ezeket: A, b sat. Ha pedig, akármi okból, csakugyan ily esetben is használni akarnók a’ gyökérjegyet, az 1 belőle soha el nem maradhat; mert:*

b, Olyan gyökérjegy’ ölébe, melyhez semmi szám írva nincs, egyezményileg mindig 2 értetik. Oka pedig ezen egyezménynek nem egyéb mint az, hogy minden gyökerek köztt a’ második gyökér fordul leggyakrabban elé, ’s azért leg több írást úgy kimélünk ha ennek kihagyására szabaditjuk föl magunkat, az üres öbölbe 2-t értvén mindenkor. E’ szerint tehát annyi mint $\sqrt{A}$ *’s* $\sqrt{b}$, , , , *sat. nem egyebek mint* $\sqrt[2]{A}$, $\sqrt[2]{b}$, , , *sat**[2]**.*

§. 25. Logarithm.

A’ logarithmnak mint eredménynek, az emelet és gyökér mint ereditők általi, közvetőleges kifejezésére saját alakot, köz egyezéssel, még nem fogadtak-el a’ számtanárok; azonban erre is múlhatlan szükség levén, mí teszünk egy javaslatot, ’s azt ezen könyvünk’ folytában tettleg alkalmazzuk is; miszerint, logarithm’ jelelésül használhassék a’ gyökérjegy, hegyével fől ’s nyilával lefelé forditva, ily formán: $\wedge\!\!\!_$ *Ennek ölébe írassék a’ gyökér, után az emelet, ’s a’ két szám a’ jegygyel egyesülten jelentse a’ logarithmot, t.i. azt a’ számot, hányadik emelete az utolsó az elsőnek.*



A „Számtan” könyv 30-31.oldala

Id. és ifj. Szász Károly bevezetett egy pár műszót a matematikai szakirodalomba. Jó nyelvészek és nagy irodalmárok is lévén, ez érezhető műszavaikban, de könyvükben is. Érthetően és olvasmányosan írták meg matematikai tankönyvüket. E sorok írójának az a véleménye, hogy az 1853-ban Pesten kiadott „Számtan”-könyvük lényegében id. Szász Károly Nagyenyeden tartott leckéit tartalmazza, a fia tolmácsolásában. Nagyenyeden Szász Károly, miután kitúrták a jogi katedráról, matematikát tanított és így tanította fiát, és az ugyancsak kiváló matematikust és irodalomtudóst, Mentovich Ferencet.

Szász Károly alkotta szavak például:

hatványozni (17. old.)
semmítőleges szám = negatív szám (157, 180 old.)
tényleges szám = pozitív szám
aequalitas = egyenlőség (44 old.)
algebra = elméleti számtan (10. old.)
denominator = alsó (179 old.)
irrationalis = határozatlan jegyű (197 old.)
logarithma = logarithmozás (197. old)

Most lássunk még egy részletet Szász Károly Számtankönyvéből: *§. 33 Vagy – vagy. Mind – mind. Kérdés. Átviteli jelelés.*

Hátra vagynak még némely ritkábban használt, de mégis hallgatással nem mellőzhető, jelelések, melyeknek magyarázatával tehát nyelvtanunkat ez úttal bérekesztjük.

Mint köz beszédeben, úgy Algebrában is, mondatunk néha több águ, és pedig több águ lehet vagy választólag vagy egybefoglalólag.

Valasztólag több águ, ha valamely számról emlitett két, három, 's több mondotak közöl vagy egyiket, vagy másikot, 's tehát valamelyiket, de korán sem mindeniket akarjuk érteni. Pl. Ha ezen sorozatból 1-1+1-1+… akárhány egymást követő tagot vesszük, öszves értékök vagy 1 lesz vagy 0;

1, ha a' vett tagok' száma páratlan;

0, ha páros;

Egy ily választó mondat' leírási módszere, azoknak, mikről válaszlólag szólunk, egymás' fölibe helyezéséből áll. Tehát a' fölhozott első példát így írjuk:

$$1-1+1-1+\cdots=\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$$

Eddig az idézet. Maga a példa nagyon fontos! Tudniillik az 1 -1 +1 -1 +1 -1 +1 -1+… végtelen sor összegzéséről van szó, amelynek külön matematikatörténeti múltja van. Ennek a sornak az összege sok fejtörést okozott Bolyai Farkasnak, a kiváló matematikus és csillagász Nagy Károlynak, az Egyetemes számtudomány szerzőjének, Vállas Antalnak és Szász Károlynak, és az tette híresé, hogy Euler is megvizsgálta a fenti alternáló sort és konvergensnek találta, vagyis kimondta róla, hogy van összege és az egyenlő ½-del. Nos, ma minden elsőéves műszakis (matematikus stb.) hallgató kell, hogy tudja, hogy a fenti sor divergens. Tehát, bármennyire is meglepő, de a nagy Euler itt tévedett. Mondhatnánk, hogy ha Euler hibázott, akkor a 200 arannyal jutalmazott Nagy Károlynak is meg lehet ezért bocsátani. Viszont Euler száz évvel Nagy Károly előtt élt, és száz év alatt sokat fejlődött matematika, főleg annak fogalmi rendszere. A legnagyobb gondot Euler idejében az okozta, hogy nem volt még a sor és sorozat pontos fogalmi rendszere tisztázva. Ezért pontatlan meghatározással indulva, könnyen lehetett tévútra menni.

2017. szeptember 13–15. között Balatonfüreden egy igen eredeti Pólya-emlékkonferenciát tartottak *„Te hogyan oldottad meg?" – A matematikai felfedezés iskolája és története* címmel.

Pósa Lajos nagyon érdekes oktatóvideót mutatott be a +1, +1-1, +1-1+1, +1-1+1-1, +1-1+1-1+1… alternáló sorozatról. Abban az oktatóvideóban adtak egy nagyon „jópofa" transzcendens értelmezést is. Kár, hogy a videóban nem szerepel ennek az alternáló végtelen sornak a magyar matematikatörténeti háttere.

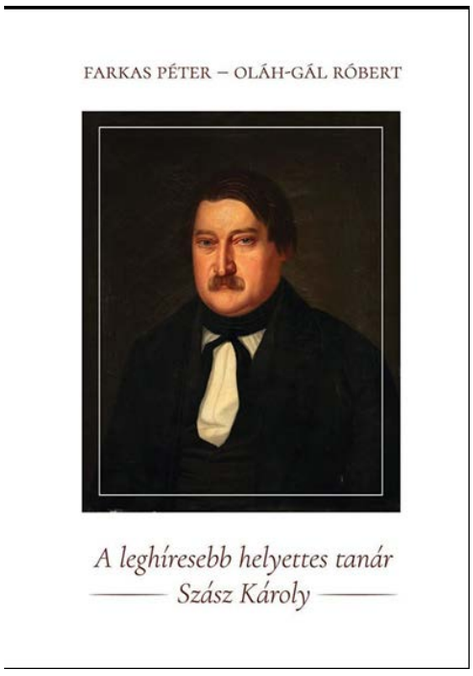
Szász Károly a felsőbb matematikában is járatos volt. Ő is felfedezte a végtelen sor egy konvergencia kritériumát:

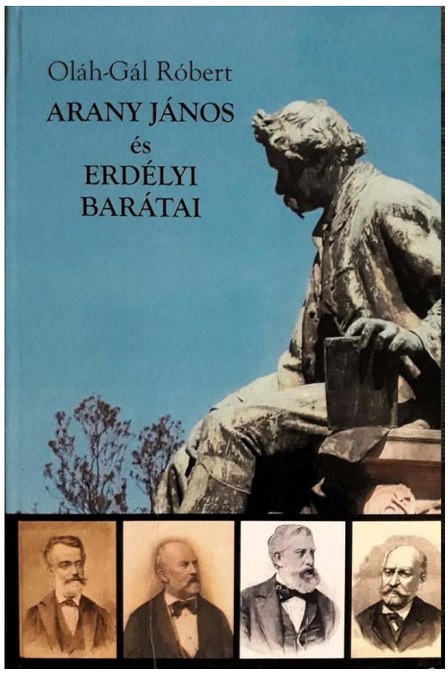
Tétel (id. Szász Károly)[3].

Ha $a_n > 0$ *szigorúan növekvő, akkor* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{a_n}$ *akkor és csakis akkor konvergens, ha*

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=+\infty.$$

Végezetül az érdeklődő olvasók figyelmébe ajánljuk id. Szász Károlyról írt könyvünket, melyet Farkas Péter balatonboglári irodalomtörténésszel, id. Szász Károly dédunokájával és Varga Tamás másod-unokatestvérével közösen írtunk: Farkas Péter, Oláh-Gál Róbert: *A leghíresebb helyettes tanár Szász Károly*, Pro-Print Könyvkiadó, Csíkszereda, 2019.





Ennek a könyvnek az előzménye, amelyben id. Szász Károly fiáról, Szász Károly püspökről és Arany János jó barátjáról tudhatnak meg érdekes, eddig ismeretlen részleteket az olvasók: Oláh-Gál Róbert: *Arany János és erdélyi barátai*, Pro-Print Könyvkiadó, Csíkszereda, 2019.

Oláh-Gál Róbert,

a Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem Csíkszeredai Karának adjunktusa

Irodalomjegyzék

[1] Számtan. Új elvek szerint. Elméleti számtan (Algebra). Dolgozták idősb Szász Károly, Magyar Tudós Társaság rendes tag, volt enyedi tanár és ifj. Szász Károly nagy-kőrösi tanár, Pest, Heckenast Gusztáv sajátja. 1853. VIII. 215 p.

[2] *114, 115 old. Számtan*

[3] Lásd részletesebben: Sándor József, Oláh-Gál Róbert: Bolyai Farkas sorelméleti vizsgálatairól és a hozzá kapcsolódó fejleményekről, 2010., 2., Matematikai Lapok., HU ISSN 0025-519X., pp. 18-37.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés
Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **GAZDA(G)SÁG** NEVET ADTUK A **GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET ROVATNAK**, AMELYBEN BEMUTATJUK, HOL, MIKÉPPEN HASZNÁLJÁK FEL A MATEMATIKÁT, MILYEN GAZDAG IS AZ A KÖR, AMELYIK ÉRINTI EZT A TUDOMÁNYÁGAT. (ROVATSZERKESZTŐK: *ILLÉS TIBOR, MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR ÉS RÖST GERGELY.*)

Szerkesztő

2020. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Jövőformáló matematika

A matematika korszakában élünk, ám ez nincs benne a köztudatban. Fontos tehát, hogy jobban megértsük a szerepét, nemcsak a többi tudományterületen, hanem a társadalomban, a gazdaságban és az innovációban is. Az adatok mennyisége, a rendszerek komplexitása és a számítási kapacitások robbanásszerűen növekednek, így a matematika jelentősége is tovább fog nőni a jövőben. 2020 novemberében a Magyar Tudomány Ünnepe alkalmából hangzott el *Röst Gergely* online előadása a Magyar Tudományos Akadémia YouTube-csatornáján. A 2021-es Matematika Világnapjának szlogenje is hasonló üzenetet hordoz: Matematika egy jobb világért. Tovább...

Ferenci Tamás

2020. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

József Attila egy matematikai kérdése

Ferenci Tamást új oldaláról ismerheti meg az olvasó: az irodalom- és a matematikatörténet határán „kerékpározik". Felkeltette érdeklődését ugyanis egy érdekes kordokumentum: József Attila 1934-ben Beke Manó matematikusnak írt (igaz, elküldetlen) levele, egy, a ciklois pályájával kapcsolatos kérdésről. A levélből az is kiderül, hogy a költő ismerte a neves matematikus „Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba” c. könyvét. Vajon mi a kérdés és mi lehet rá a válasz? Tovább...

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

facebook

Szerkesztő 2020. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Jövőformáló matematika

Hitték volna? Egy szobában ülve, csupán papírral és ceruzával (és persze matematikával) fel lehet fedezni egy bolygót. Erre példa a Neptunusz, amelyet így fedezett fel 1846-ban Le Verrier francia matematikus. A matematikát azóta is számtalan módon alkalmazta a valós élet, a technika, tegnap még a laptop, a mobiltelefon és a GPS, maholnap a mesterséges intelligencia a képfelismerésben, az orvoslásban, a pénzügyi világban. Röst Gergely az MTA Magyar Tudomány Ünnepe sorozatában megtartott előadásában mindenki számára érthető példákkal mutatta be, miért hiszi azt, hogy a matematika a 21.század tudománya:

„Egy francia kormányzati elemzés szerint a technológiai újítások 44%-a jelentős részben a matematikára épül. A holland gazdaságban mintegy egymillió magasan képzett ember használja a matematikát a mindennapi munkájához. Ők állítják elő a nemzeti jövedelem egyharmadát, a számuk pedig egyre emelkedik. Egy brit elemzés szerint a matematikába befektetett összegek megtérülése közel hatszázszoros. A matematika korszakában élünk, ám ez nincs benne a köztudatban. Fontos tehát, hogy jobban megértsük a szerepét, nemcsak a többi tudományterületen, hanem a társadalomban, a gazdaságban és az innovációban is. Az adatok mennyisége, a rendszerek komplexitása és a számítási kapacitások robbanásszerűen növekednek, így a matematika jelentősége is tovább fog nőni a jövőben. Ahhoz, hogy a 21. század legnagyobb kihívásaival megbirkózhassunk, erre fel kell készülnünk.” Aki lemaradt az előadásról, itt nézheti meg:

2021. március 14-ére a világ minden táján számos online eseménnyel készülnek. A Pi-nap immár a Matematika Világnapja, amire február 15-éig küldhetik el diákok és matematikát kedvelők Matematika egy jobb világért témájú posztereiket. Az érdeklődők látogassanak el a poszter felhívás oldalára.

matematikus-karrier pályázat

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Ferenci Tamás 2020. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

József Attila egy matematikai kérdése

„Földtől eloldja az eget
a hajnal s tiszta, lágy szavára
a bogarak, a gyerekek
kipörögnek a napvilágra;
a levegőben semmi pára,
a csilló könnyűség lebeg!
Az éjjel rászálltak a fákra,
mint kis lepkék, a levelek.”

(József Attila: Eszmélet I.)

1. Személyes motiváció (bevezetés helyett)

I. Majdnem tizenöt évvel ezelőtt hallgattam néhai Rózsa Pál professzor mátrixelmélet kurzusát. Könyvének (*Bevezetés a mátrixelméletbe* [27]) legelső hivatkozására máig emlékszem, Beke Manó: *Determinánsok*, 1915 [2]. Fennakadtam rajta, hogy egyrészt komolyan, valaki egy egész könyvet írt csak a determinánsokról, másrészt hogy egy 2000 utáni szakkönyv egy 1915-ösre hivatkozik, azért ez sem mindennapi, harmadrészt, hogy milyen vicces neve van a szerzőnek.

II. Nemrégiben olvastam Tverdota György irodalomtörténész *Tizenkét vers* című könyvét [36], mely József Attila *Eszmélet* költeményét vizsgálja. Az *Eszmélet* láthatóan az egyik legizgalmasabb verse József Attila életművének – és mellesleg az egész 20. századi magyar lírának – abban az értelemben feltétlenül, hogy egy komplett könyvet, két könyvhosszúságú tanulmányt, és számtalan cikket írtak erről az egyetlen versről; a róla szervezett 2012-es konferencia anyagát több mint 500 oldalban adták ki. Volt, aki a marxista világképet látta benne, volt aki a marxista világkép elvetését. Elemezték pszichoanalitikusan, posztmodernként, volt aki nemes egyszerűséggel azt mondta, hogy *„vonzóereje, megfejtésének reményétől függetlenül, maga a rejtélyesség”* [4]. Talán épp értelmezési lehetőségeinek sokfélesége teszi egyik legtalányosabb versünkké. Tverdota könyvének alapállítása, melyre a címe is utal, hogy az *Eszméletet* valójában nem egységes költeményként, hanem versciklusként lehet (és célszerű) elemezni. A *Tizenkét vers* kapcsán a legérdekesebb, hogy bár én minden vagyok, csak irodalmár nem, mégis – miközben egyes részei kimondottan mély irodalmi részletkérdésekbe merülnek – számomra is kifejezetten olvasmányos, végig érdekes, és egyáltalán: tanulságos könyv volt.

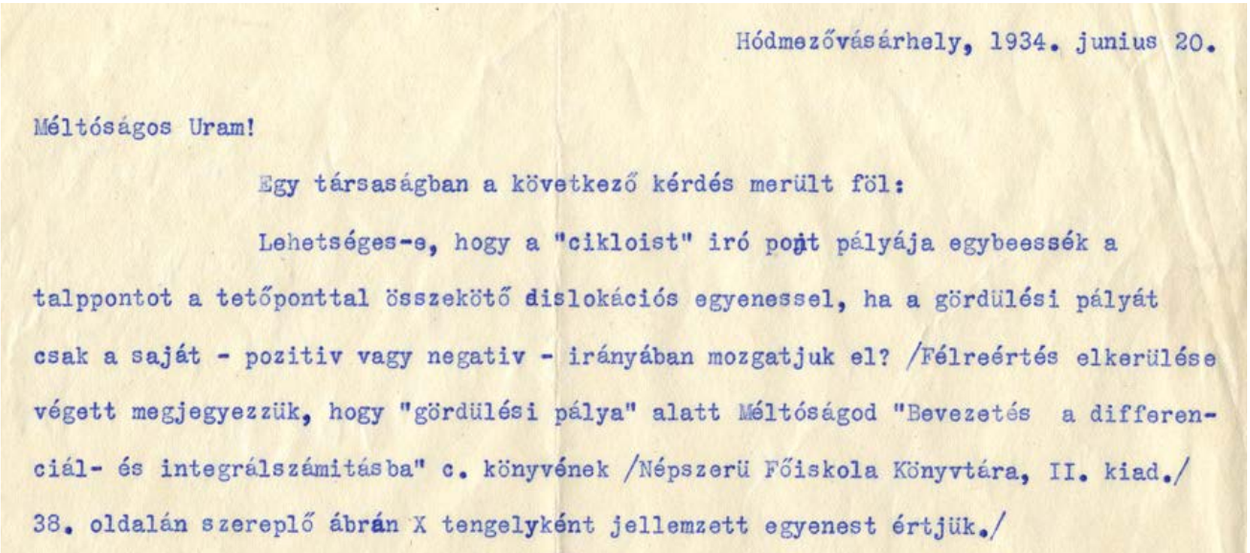
III. Közel nincs olyan olvasottságom a szépirodalomban, hogy egyáltalán merjek olyat mondani, hogy ki a „kedvenc" költőm, de tény ami tény, a *Tiszta szívvel* az egyetlen vers, amit fejből tudok (akárhányat is próbált nekem memoriterként a közoktatás megtanítani). Megmondom őszintén, még a *Himnuszt* sem biztos, hogy elejétől végéig el tudnám mondani bármikor, de a „Nincsen apám versemet" igen.

2. Kérdésfelvetés

Tverdota a könyvének elején, az *Eszmélet* keletkezésének releváns életrajzi hátterét bemutatva, tesz egy apró megjegyzést: „*Olyanfajta barátság fűzhette össze József Attilát és Pákozdyt, amelyben az utóbbi elismeri társa költő és szellemi felsőbbségét. 1934. évi tavaszi együttlétüknek érdekes dokumentuma az 1934. június 20-án kelt, Beke Manó matematikusnak címzett, el nem küldött levél, amelyben a két barát egy vitatott matematikai kérdésben szeretné döntőbírónak felkérni az ismert szakembert.*" [36, 26–27.o.].

Az olvasó most értheti meg, hogy mi szükség volt a hosszú, személyes bevezetőre: így válik azt hiszem azonnal világossá, hogy miért döbbentem meg a fenti sorokat olvasva (valószínűleg sokkal jobban, mint Tverdota könyvének bármely olvasója tette ennél a bekezdésnél).

De vajon mi lehet ez a kérdés? Az előbbiek alapján az is érthető, hogy miért kezdett azonnal nagyon furdalni a kíváncsiság, sajnos azonban Tverdota könyve magát a kérdést nem közli. Szerencsére sikerült utánajárnom: az 1. ábrán József Attila és Pákozdy Ferenc ominózus levelének facsimile oldala látható.

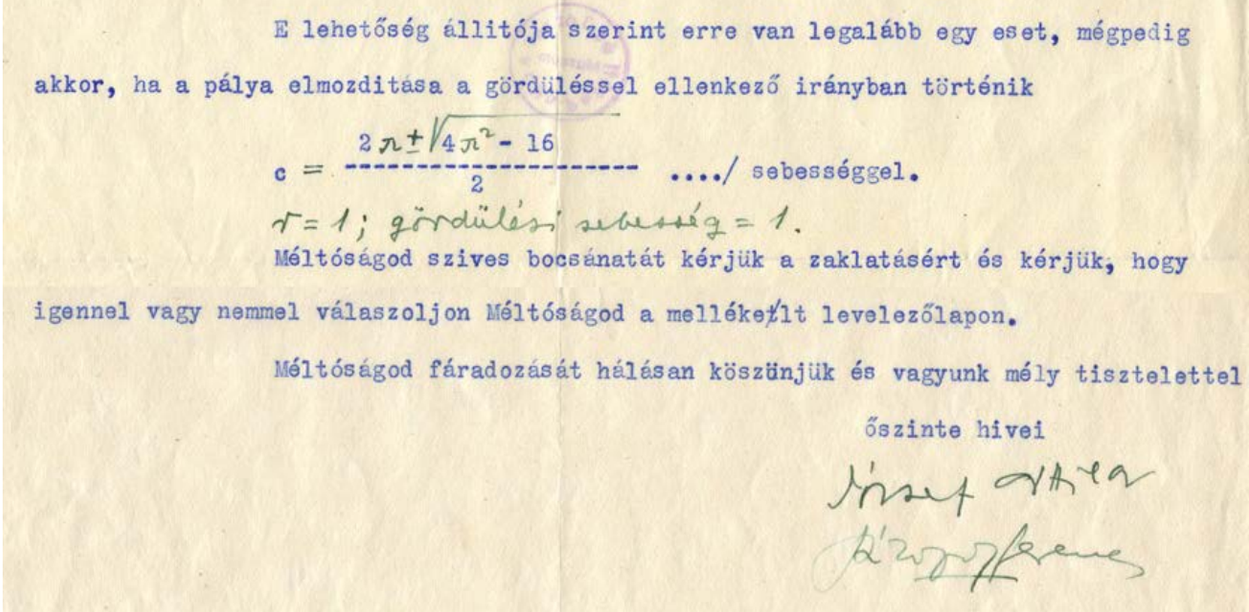


Hódmezővásárhely, 1934. junius 20.

Méltóságos Uram!

Egy társaságban a következő kérdés merült föl:

Lehetséges-e, hogy a "cikloist" iró pont pályája egybeessék a talppontot a tetőponttal összekötő dislokációs egyenessel, ha a gördülési pályát csak a saját - pozitiv vagy negativ - irányában mozgatjuk el? /Félreértés elkerülése végett megjegyezzük, hogy "gördülési pálya" alatt Méltóságod "Bevezetés a differenciál- és integrálszámitásba" c. könyvének /Népszerü Főiskola Könyvtára, II. kiad./ 38. oldalán szereplő ábrán X tengelyként jellemzett egyenest értjük./



E lehetőség állitója szerint erre van legalább egy eset, mégpedig akkor, ha a pálya elmozditása a gördüléssel ellenkező irányban történik

$$c = \frac{2\pi \pm \sqrt{4\pi^2 - 16}}{2} \quad \ldots./ \text{ sebességgel.}$$

r = 1; gördülési sebesség = 1.

Méltóságod szives bocsánatát kérjük a zaklatásért és kérjük, hogy igennel vagy nemmel válaszoljon Méltóságod a mellékelt levelezőlapon.

Méltóságod fáradozását hálásan köszönjük és vagyunk mély tisztelettel

őszinte hivei

József Attila

Pákozdy Ferenc

1. ábra. József Attila és Pákozdy Ferenc levele Beke Manónak. Forrás: Petőfi Irodalmi Múzeum Kézirattár, JA. 708.

Noha a levél jól olvasható, a biztonság kedvéért közlöm a szöveghű átiratát is:

Hódmezővásárhely, 1934. június 20.
Méltóságos Uram!

Egy társaságban a következő kérdés merült föl:

Lehetséges-e, hogy a „cikloist” író pont pályája egybeessék a talppontot a tetőponttal összekötő dislokációs egyenessel, ha a gördülési pályát csak a saját – pozitiv vagy negativ – irányába mozgatjuk el? (Félreértés elkerülése végett megjegyezzük, hogy „gördülési pálya” alatt Méltóságod „Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba” c. könyvének (Népszerű Főiskola Könyvtára, II. kiad.) 38. oldalán szereplő ábrán x tengelyként jellemzett egyenest értjük.)

E lehetőség állitója szerint erre van legalább egy eset, mégpedig akkor, ha a pálya elmozditása a gördüléssel ellenkező irányba történik

$$c = \frac{2\pi \pm \sqrt{4\pi^2 - 16}}{2} \quad \ldots / \text{ sebességgel;}$$

$r = 1$; *gördülési sebesség* = 1.

Méltóságod szives bocsánatát kérjük a zaklatásért és kérjük, hogy igennel vagy nemmel válaszoljon Méltóságod a mellékelt levelezőlapon.

Méltóságod fáradozását hálásan köszönjük és vagyunk mély tisztelettel

őszinte hivei

József Attila

Pákozdy Ferenc

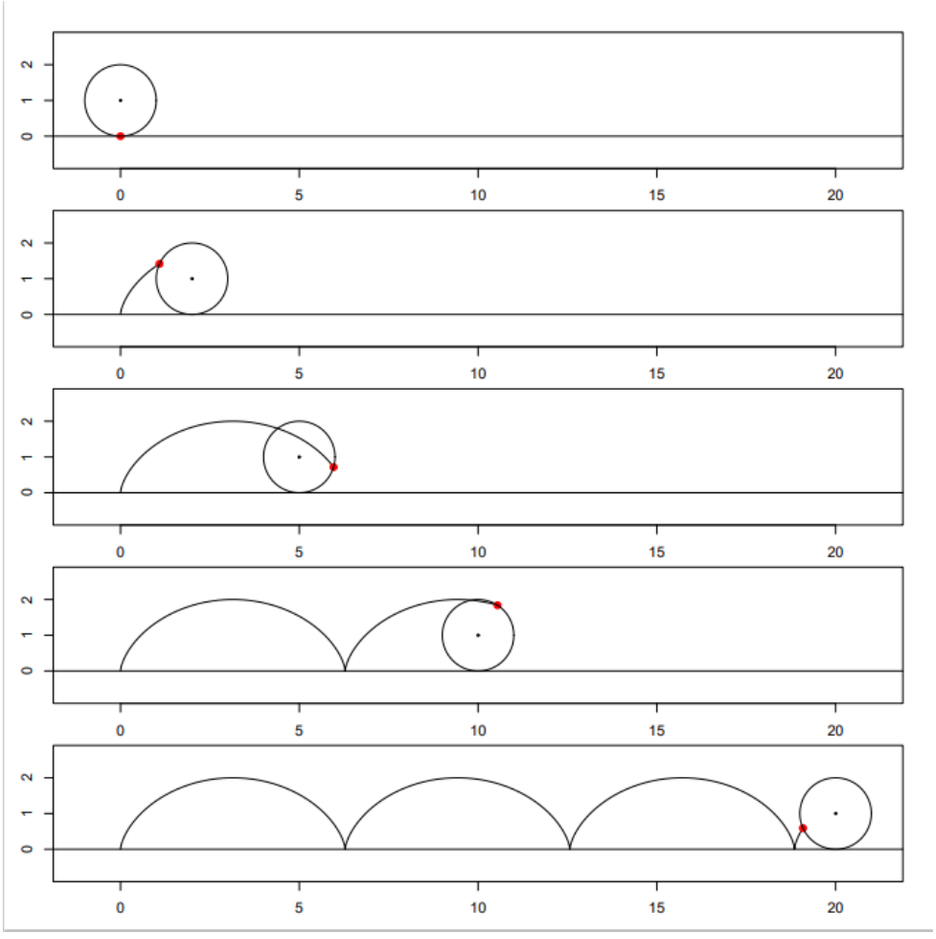
Megtudta József és Pákozdy a választ erre a kérdésre? Valószínűsíthetően nem, ugyanis az 1976-ban az Akadémiai Kiadónál megjelent *József Attila válogatott levelezése* című gyűjtemény [6] végjegyzetei között ezt írja a levélről: „*A közlés alapjául szolgáló levél nem látszik misszilisnek* [tényleges (értsd: nem költői) levélnek – FT]. *Nem is fogalmazványjellegű. Írói, valószínűleg, eredeti tervüktől elállottak és nem küldték el a címzettnek.*” [6, 466.o.]. A 2006-os, teljesség igényével készült *József Attila levelezése* hasonlóan nyilatkozik („*géppel írott, el nem küldött levél*” [12, 407.o.]); érdekesebb az ezt követő megjegyzése a végjegyzetnek: „*a* […] *levelet valószínűleg azért nem küldték el, mert belátták dilettáns voltát*” [12, 686.o.]. Sajnos a kötet szerkesztői nem közölték, hogy ez utóbbi megállapításukat mire alapozzák. (Hozzá kell tenni, hogy bár a kérdésre adott válasz tényleg nem különösebben érdekes, de azért dilettánsnak – én legalábbis – nem nevezném.) Péter László *József Attila közöttünk* című 1980-as könyve szintén megerősíti, hogy a levelet nem küldték el [25, 86.o.].

Mi sem áll távolabb jelen sorok szerzőjétől, mint hogy Beke Manónak képzelje magát, de – noha végeredményben a kérdésfelvetés nem túl izgalmas válaszra vezet, és Józsefék jó eséllyel félreértettek valamit – nem minden tanulság nélküli megválaszolni a feltett kérdést.

3. Eredmény és megbeszélés

3.1. A ciklois fogalma és alkalmazásai

Elöljáróban egy kis magyarázat azok számára, akik nem ismerik a ciklois fogalmát. Képzeljünk el egy vízszintes, egyenes úton gördülő kocsikereket! Képzeletben jelöljük meg az épp földdel érintkező pontját, és nézzük meg, hogy milyen pályát ír le, miközben a kerék tovagördül az úton. Azt látjuk, hogy szép szabályos ívet követ: a földhöz közeledve látszólag lelassul, szinte függőlegesen megy le-föl, a másik oldalon pedig gyorsan suhan vízszintesen. Ezt a görbét hívjuk cikloisnak. A 2. ábra mutatja a cikloist, szemléltetve annak kialakulását is (a `https://www.github.com/tamas-ferenci/JozsefAttilaEgyMatematikaiKerdese` oldalon mindez animáció formájában is megtekinthető).



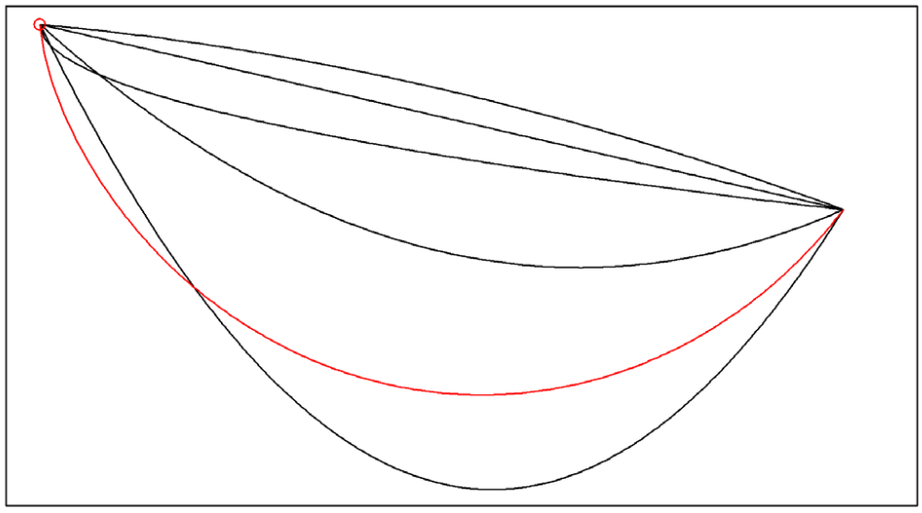
2. ábra. A ciklois görbe és létrejötte.

A ciklois több matematikai probléma kapcsán előjön, ezek közül a két leghíresebbet említem meg itt. Noha a megoldásuk mélyebb eszközöket igényel, maguk a problémák – és az eredmények – teljesen hétköznapi nyelven elmondhatóak (és elég érdekesek is!). A megértés szempontjából nem lényeges, és helyenként matematikailag mélyebb részeket lábjegyzetben közlöm.

3.1.1. A brachisztochron probléma

Az egyik ilyen nevezetes kérdés a brachisztochron probléma: egy függőleges falon kijelölünk két, nem egymás felett lévő pontot. Kiterjedt barkácstudásunk lehetővé teszi, hogy tetszőleges alakú rámpát ácsoljunk a két pont között, amelyen aztán a magasabban fekvő pontból legurítunk egy golyót az alacsonyabban fekvő pontba. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a gravitáció mindenhol azonos nagyságú, valamint, hogy a golyó súrlódás nélkül csúszik a rámpán. A kérdés: milyen alakú rámpán fog a legrövidebb idő alatt legurulni a feljebb fekvő pontból a lejjebb fekvő pontba a golyó? Érezhető, hogy az nem lesz jó, ha eleinte szinte vízszintes a rámpa és aztán esik gyorsan, hiszen így nagyon sok idő lesz, míg a gyors esésig „elcsorog” a golyó. Akkor talán pont a fordítottja lesz a jó, eleinte essen meredeken, aztán legyen hosszan vízszintes? Így először nagyon begyorsul, viszont cserében még sokat meg kell tenni egy szinte vízszintes szakaszon. Vagy inkább kössük őket egyszerűen össze egyenesen? Akár az az eretnek gondolat is az eszünkbe juthat, hogy engedjük a golyót a lejjebb fekvő pontnál is mélyebbre, hogy jó nagy lendületet vegyen, és a végén kicsit fordítsuk vissza.

A 3. ábra szemlélteti[1], hogy mi lesz a megoldás: a ciklois! Egy ciklois alakú rámpát kell ácsolnunk, és azzal összekötnünk a két pontot, ezen fog a legrövidebb idő alatt eljutni a golyó az egyik pontból a másikba. (Az alábbi és a később következő animációk is megtekinthetők a https://www.github.com/tamas-ferenci/JozsefAttilaEgyMatematikaiKerdese oldalon.)



3. ábra. A brachisztochron probléma: a fenti pontból azonos időpontban elindított golyók legurulása különböző alakú pályákon. Az ábra a ciklois mentén (piros görbe) leguruló golyó beérkezése előtti pillanatot ábrázolja; jól látható, hogy a többi golyó többé vagy kevésbé, de mind le van maradva.

A bizonyítás messze meghaladja ezen írás kereteit[2], de a történetére egy gondolat erejéig érdemes kitérni. A problémát Johann Bernoulli (a Bernoulli család legelső tudósgenerációjának Johannja) tűzte ki 1696-ban egy folyóiratcikkben, célirányosan a „világ briliáns matematikusait” megszólítva. Valóban elég erős mezőny gyűlt össze: egy évvel később Newton, Leibniz és l'Hospital megoldásait közölte, együtt a sajátjával és a bátyjáéval, Jakob Bernoulliével (aki testvéréhez hasonlóan foglalkozott analízissel, de mellette ő a valószínűségszámítás egyik első nagy alakja). Ők ketten aztán úgy össze is vitatkoztak a megoldásaikon, hogy az éveken át tartó konfliktushoz vezetett [29]. (A Bernoulli famíliában nem teljesen ismeretlen jelenség a családtagok közti irigykedés egymás tudományos eredményeire: az itt is említett Johann kidobta a családi házból a saját fiát, Daniel Bernoullit – az áramlástan későbbi megalapítóját – annyira felhúzta magát azon, hogy megosztva kapták meg a Francia Tudományos Akadémia díját, amit érzése szerint egyedül érdemelt volna meg…)

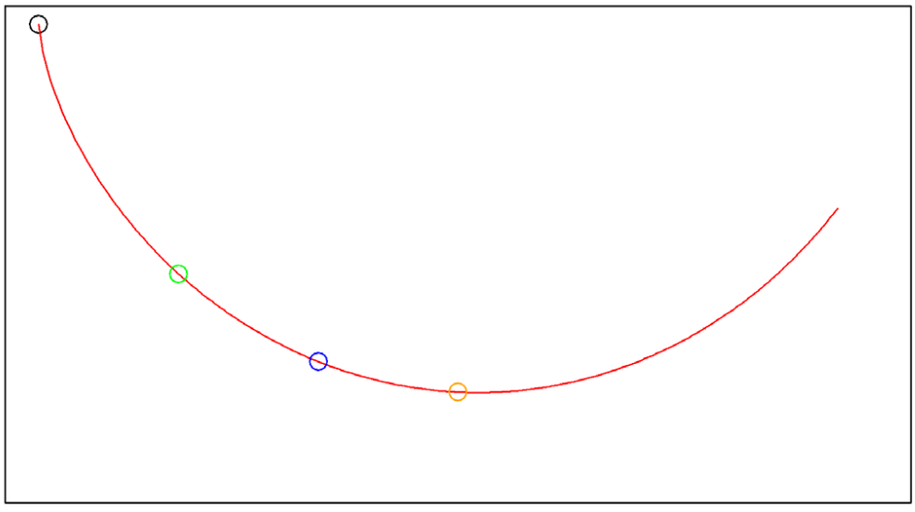
3.1.2. A tautochron probléma

A másik problémánál is egy függőleges falunk van, rajta két, nem egymás fölött elhelyezkedő ponttal, közöttük ácsolandó rámpával és azon leguruló golyóval, csak itt a kérdés a következő: ácsolható-e olyan rámpa, hogy a golyó mindig ugyanannyi idő alatt ér le rajta az alsó ponthoz, *függetlenül attól*, hogy honnan indítjuk a rámpa mentén? Tehát akár a tetejéről indítjuk a golyót, akár a közepéről, akár az aljához nagyon közel, mindig ugyanannyi időt vesz igénybe, hogy az alsó ponthoz érjen. (Úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha elindítunk tetszőleges számú golyót a rámpa tetszőleges pontjairól, akkor azok pontosan egy pillanatban érjék utol egymást, mégpedig akkor, amikor mind épp az alsó ponthoz ér.) Megvalósítható ez?

Első ránézésre meglepő, hogy ilyen alakú rámpa egyáltalán létezhet. Sokan ugyanis arra gondolnak, hogy amit feljebbről indítunk, annak nagyobb utat kell megtennie, hogyan érhetné akkor utol egyáltalán a lejjebbről indulót?! Igen ám, de választhatunk olyan alakot, hogy feljebb egyúttal meredekebb is legyen a rámpa, így az onnan induló golyók nagyobb sebességet érjenek el! Tehát a kérdés lényegében az, hogy vajon létezik-e olyan alak, ahol a feljebb lévő nagyobb meredekség *pontosan* akkora előnyt ad a golyónak, mint amekkora hátrányt a nagyobb út.

A válasz a kérdésre pozitív, és a megfejtés: a ciklois.

Ciklois alakú rámpán ez megvalósul: ha ácsolunk egy kilométer hosszú cikloist és elindítunk egy golyót a végéből, akkor bármilyen nehéz is elhinni, de az pontosan akkor fog az aljára érni, mint az a golyó, amelyet egy arasznyira indítottunk el az aljától. (Természetesen a súrlódástól ennél a feladatnál is eltekintünk.) A 4. ábra ezt szemlélteti, illetve a már említett oldalon is megtalálható az animáció.



4. ábra. A tautochron probléma: a ciklois alakú pálya különböző pontjairól elindított golyók

legurulásának néhány „pillanatfelvétele”. Jól látszik, hogy mindegy honnan indult a golyó, ugyanannyi idő kell, hogy leérjen, ezért pontosan az alsó pontban találkoznak, indítási helytől függetlenül.

Említsük meg egy érdekes alkalmazását ennek az eredménynek. Aki középiskolában végigszámolta fizikaórán az inga lengését, talán emlékszik rá, hogy a levezetés úgy indul, hogy „tegyük fel, hogy az ingát csak kicsit térítjük ki”. Néhányan talán arra is emlékeznek, hogy ez azért fontos, hogy a számolásban megjelenő szögfüggvényekre a kis szögeknél működő közelítést[3] használni tudjuk. De mi történik, ha a kitérítés nem kicsi? A dolog persze ekkor is végigszámolható, az eredmény sokkal bonyolultabb alakú lesz, de most nekünk nem is ez fontos, hanem az, hogy amit kapunk, az nem csak számértékében fog eltérni a közelítőtől, hanem abban is, hogy a lengés periódusideje – szemben a közelítő számítással – függeni fog a kitérítés mértékétől! A dolog azért érdekes, mert van egy eszköz, ami több mint 200 éven keresztül alapvető fontosságú volt a társadalom és gazdaság működésében, és aminek a pontossága kritikusan függ egy inga periódusidejétől: az ingaóra. Az előzőekből látszik az ingaóra egyik problémája: a periódusidő a valóságban függeni fog attól, hogy mennyire tér ki az ingája, csakhogy ez óhatatlanul változik időben, ami így elkerülhetetlenül hibához vezet.

Christiaan Huygens, aki magát az ingaórát is megvalósította 1656-ban, pár évtizeddel később rájött a megoldásra: olyan ingát kell szerkeszteni, amelynek a súlya egy ciklois alakú pálya mentén leng! Hiszen a tautochron probléma megoldása épp azt mondja, hogy ez esetben a lengés periódusideje nem fog függeni a kitérítéstől. Kérdés persze, hogy hogyan lehet a gyakorlatban elérni, hogy a súly ne egy kör alakú pályán, hanem cikloison lengjen, de Huygens ezt is megoldotta: az inga felfüggesztése köré mindkét oldalra egy – fejjel lefelé fordított – ciklois alakú határolót kell rakni [11]. Miközben az inga leng, a tartó fonala felütközik ezekre a pofákra, és ez az inga súlyát egy ciklois alakú pályára kényszeríti[4]. Ez az ún. cikloidális inga. A dolog ugyan elméletben valóban megjavította az ingaórát, de a gyakorlatban nem vált be: egyrészt az ingaóra pontatlanságának összes egyéb forrása, pláne a 17. században, lényegesen nagyobb volt, mint a kitéréstől függő periódusidő jelentette hiba (különösen, ha biztosítjuk, hogy a kitérés ne lehessen túl nagy), másrészt a fonál pofára való felütközése mechanikai veszteségekkel jár, úgyhogy a megoldás igazából maga is teremt egy új hibaforrást.

3.2. A ciklois egyenlete

A tárgyalás pontosításához először is vezessünk be egy koordinátarendszert, ami a 2. ábrára ránézve teljesen kézenfekvő lesz: a nyomon követett pont kezdeti pozíciója legyen az origó, a függőleges tengely mutasson függőlegesen, pozitív iránnyal felfelé, a vízszintes pedig vízszintesen, pozitív iránnyal jobbra.

Azért, hogy a kérdést ne bonyolítsuk feleslegesen, a lényegen nem változtató paramétereket válasszuk egységnyire[5]. Azaz: a kerék sugara legyen 1, a gördülési sebessége pedig olyan, hogy egységnyi idő alatt $\frac{1}{2\pi}$ fordulatot tegyen meg a kerék. Ez utóbbi így kimondva egyáltalán nem tűnik egységnyinek, de valójában az, hiszen azt jelenti, hogy t idő alatt $\frac{t}{2\pi}$ fordulatot tesz meg a kerék, azaz a szögelfordulása épp t (mivel 1 fordulat az 2π szögelfordulás), ami egyúttal azt is megadja, hogy a középpont épp t utat haladt jobbra, hiszen az egységnyi kerület miatt t szögelforduláshoz t ívhosszúság tartozik, ami „hozzáért” az úthoz, tehát amennyivel odébb ment a kerék[6]. A szögelfordulást úgy értjük, hogy a kerék középpontját a nyomon követett ponttal összekötő egyenes mennyit fordult el a függőlegeshez képest, a pozitív szög az óramutató járása szerinti elfordulást – jobbra gördülést – jelenti. (A szöget radiánban mérjük.)

A ciklois egyenletének az előállítása paraméteres formában egyszerű. Nézzük először a függőleges mozgást! Itt nem számít, hogy a kerék jobbra is gördül, csak annyi a fontos, hogy t szöget fordult el, ezért a pont $\cos t$-vel van a középpont alatt (ez persze lehet negatív is – ekkor fölötte van). Mivel a középpont 1-gyel van a talaj fölött, így a pont függőleges koordinátája $y = 1 - \cos t$. Vízszintes irányban a középpont t-t haladt jobbra, de a pont $\sin t$-val van tőle balra (természetesen ez is lehet negatív), így a vízszintes koordinátája $t - \sin t$.

A ciklois paraméteres egyenletrendszere tehát:

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

(A matematikai leírás szempontjából nyugodtan el is felejthetjük, hogy a t-nek mi idő interpretációt adtunk, a lényeg, hogy a t egy nemnegatív valós szám.)

Elő lehet állítani ebből explicit alakot is? Érdekes módon az a válasz, hogy csak az egyik irányban lesz zárt alakú megoldásunk.

Ha ugyanis kifejezzük a t-t y-ból, akkor azt kapjuk, hogy $t = \arccos(1-y)$, így

$$x = \arccos(1-y) + \sin\arccos(1-y)\,,$$

ami egyszerűsítés után

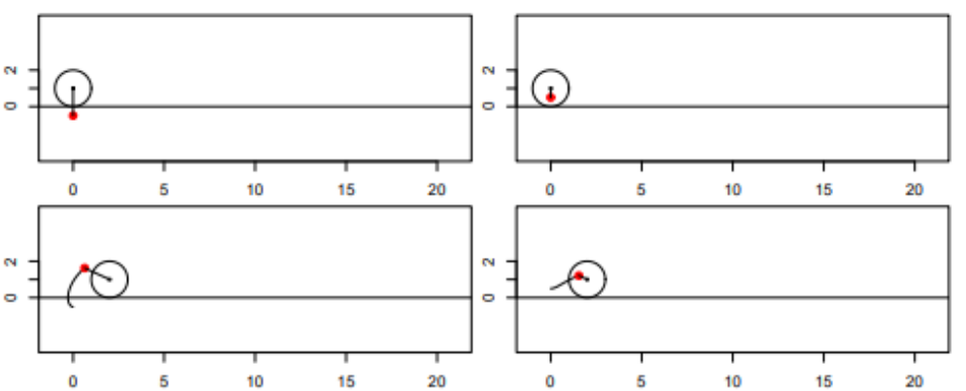
$$x = \arccos(1-y) + \sqrt{1-(1-y)^2} = \arccos(1-y) + \sqrt{y(2-y)},$$

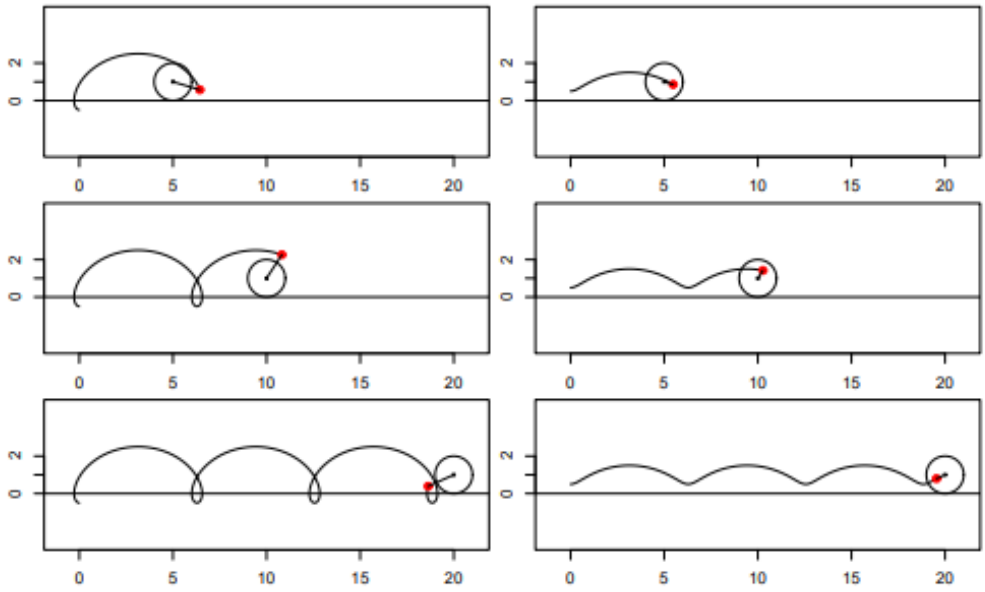
mivel[7] $\sin \arccos \beta = \sqrt{1-\beta^2}$. Természetesen így – szemben a paraméteres alakkal – csak a ciklois egy „ciklusát”, és annak is csak az első felét tudjuk megkapni (logikusan, hiszen utána egy adott y-hoz már több x is tartozhat).

Ha azonban fordítva akarjuk kifejezni a cikloist, tehát – természetesebb módon – y-t az x-ből, akkor hamar elakadunk: az $x = t - \sin t$ egyenletet kellene megoldanunk t-re, csakhogy ez egy transzcendens egyenlet, aminek nincs zárt alakú megoldása! A cikloist tehát általában nem lehet explicit formában felírni, még egy ciklusra, sőt, még egy fél ciklusra sem.

3.3. József Attila és Pákozdy Ferenc kérdésének megválaszolása

Térjünk most rá Józsefék kérdésére! Először is állapítsuk meg, hogy a kérdés nem úgy értendő, hogy akkor mi történik, ha a keréknek *az úthoz viszonyított* sebességét változtatjuk. Tudniillik ha a kereket magát úgy mozgatjuk, hogy egy körbefordulásnyi idő alatt nem egy kerületnyi (2π) utat halad a középpontja, akkor a kerék természetesen kénytelen lesz csúszni. (Pontosabb is lett volna, ha a definícióba belemondjuk, hogy „csúszás nélkül” gördül.) Természetesen az is érdekes matematikai probléma, hogy a csúszásos esetben mi történik, de a kérdés vélhetően nem erre irányult, hiszen úgy fogalmaz, hogy „*a gördülési pályát* […] *mozgatjuk*”, tehát a kerék kényszerített mozgatásáról szó sincs. Ettől függetlenül egy gondolat erejéig térjünk ki erre is: ha a kerék csúszik, akkor a leírt pálya vagy hurkolt, vagy nyújtott ciklois lesz [14]. Hogy mik ezek? Rokonai a „szokásos” cikloisnak, olyannyira, hogy megkaphatjuk őket úgy is, hogy csúszásmentesen gördül a kerék, csak épp ekkor nem a kerék kerületén fekvő pontot kell néznünk, hanem egy „küllőjén” találhatót, tehát belső pontot (nyújtott ciklois), vagy a küllő képzeletbeli meghosszabbításában egy külső pontot (hurkolt ciklois). Az 5. ábra mutatja az ilyen görbéket. Ha tehát a kerék csúszását is megengedjük, akkor ilyet fogunk kapni (ha még azt is megengedjük, hogy az ellenkező irányba forogjon mint amerre csúszik, akkor esetleg ezeket tükrözve a vízszintes tengelyre); összefoglaló nevén ezeket a görbéket hívjuk trochoidnak. A dolog még tovább is általánosítható, ha nem egyenes mentén gördítjük a kört, vagy nem kört gördítünk, az így kapott görbéket rulettáknak szokás nevezni [26], de ez már végképp nem tartozik a mostani tárgyunkhoz.

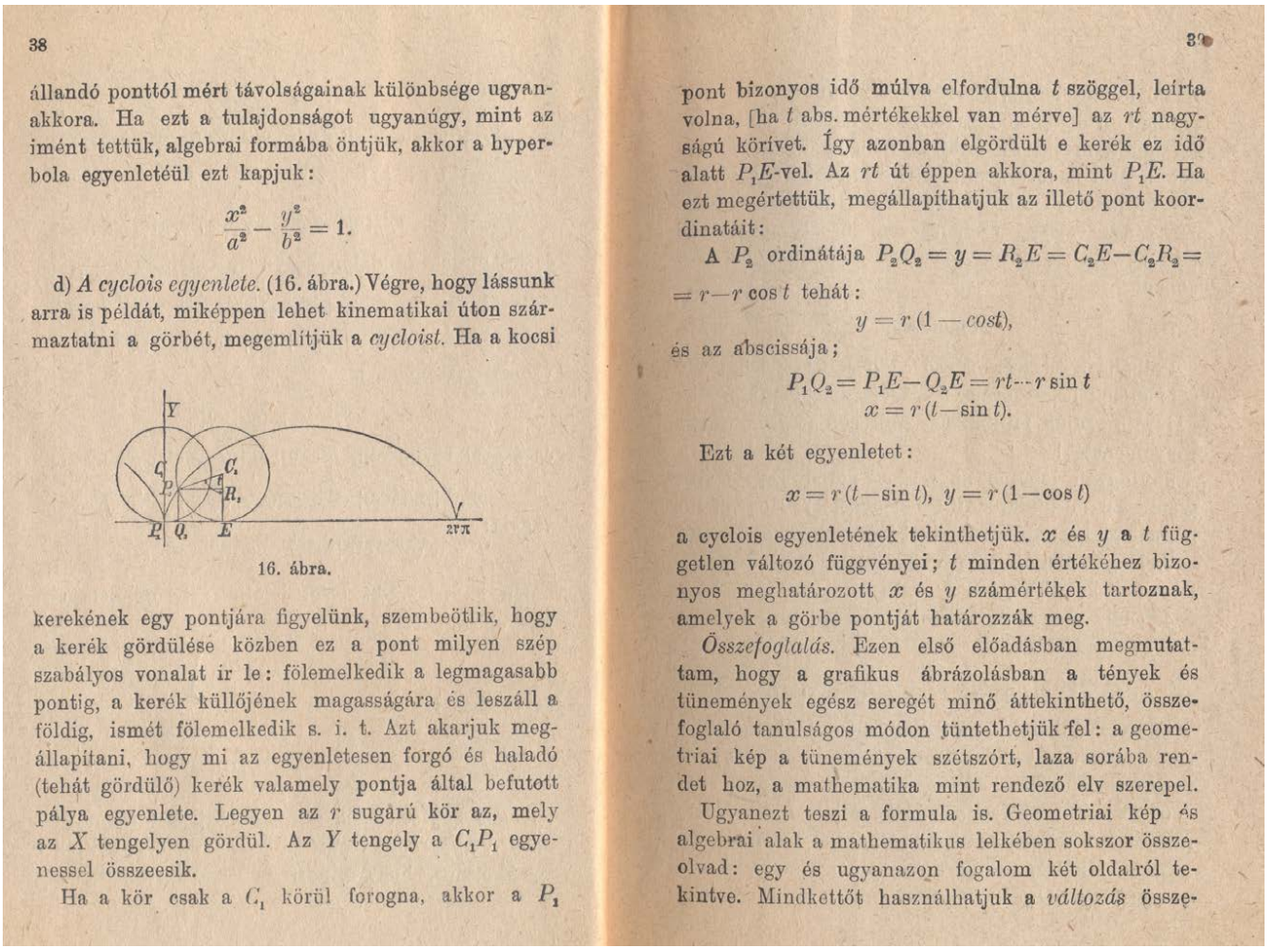




5. ábra. A hurkolt (balra) és a nyújtott (jobbra) ciklois görbék és létrejöttük. Ezeket, együtt a „szokásos” (szép nevén: csúcsos) cikloissal, szokás trochoid görbéknek nevezni. Mozgásban itt lehet látni a hurkolt és a nyújtott cikloist.

De mi a helyzet József Attiláék kérdésével? A megfogalmazás egyértelmű, a pályát magát mozgatjuk, a kerék szép nyugodtan gördül (csúszás nélkül), azt nem befolyásoljuk. Világos, hogy itt nincs a fentihez hasonló csúszási probléma: ha a pályát mozgatjuk (*magunkhoz képest*), akkor minden sebességnél csúszás nélkül tud haladni a kerék, hiszen annak gördülését a *pályához képest* értjük. Így már teljesen értelmes a kérdésfelvetés, a pályát húzzuk, azon pedig „szokásosan” gördül a kerék. Vegyük észre, hogy az így megfogalmazott feladat azonos azzal, mintha nem a pályát mozgatnánk, hanem saját magunkat, a megfigyelőt, tehát egy teljesen hagyományos cikloisról beszélnénk, csak épp úgy, hogy közben a megfigyelő is odébb megy.

Nagyobb problémát jelent a kérdés megértésénél, hogy mégis pontosan mi kell, hogy egyenes legyen. A zavart elsősorban a „talppont”, „tetőpont” és – különösen – a „dislokációs egyenes” szavak használata okozza, melyeket a levél sehol nem definiál. Első ránézésre az ember azt gondolhatná, hogy ezeket minden bizonnyal Beke Manó használta a levél által is hivatkozott könyvében [3]. Bár ez nagyon kézenfekvő magyarázat lenne, sajnos nem igaz: a 6. ábra mutatja Beke könyvének cikloisról szóló részét, pontosan abból az 1920-as második kiadásából, amit a levél alapján József Attiláék is olvastak. Jól látható, hogy a nem definiált kifejezések egyike sem szerepel benne.



38

állandó ponttól mért távolságainak különbsége ugyanakkora. Ha ezt a tulajdonságot ugyanúgy, mint az imént tettük, algebrai formába öntjük, akkor a hyperbola egyenletéül ezt kapjuk:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

d) *A cyclois egyenlete.* (16. ábra.) Végre, hogy lássunk arra is példát, miképpen lehet kinematikai úton származtatni a görbét, megemlítjük a *cycloist.* Ha a kocsi

16. ábra.

kerekének egy pontjára figyelünk, szembeötlik, hogy a kerék gördülése közben ez a pont milyen szép szabályos vonalat ir le: fölemelkedik a legmagasabb pontig, a kerék küllőjének magasságára és leszáll a földig, ismét fölemelkedik s. i. t. Azt akarjuk megállapitani, hogy mi az egyenletesen forgó és haladó (tehát gördülő) kerék valamely pontja által befutott pálya egyenlete. Legyen az r sugárú kör az, mely az X tengelyen gördül. Az Y tengely a C_1P_1 egyenessel összeesik.

Ha a kör csak a C_1 körül forogna, akkor a P_1

39

pont bizonyos idő múlva elfordulna t szöggel, leirta volna, [ha t abs. mértékekkel van mérve] az rt nagyságú körívet. Így azonban elgördült e kerék ez idő alatt P_1E-vel. Az rt út éppen akkora, mint P_1E. Ha ezt megértettük, megállapithatjuk az illető pont koordinatáit:

A P_2 ordinátája $P_2Q_2 = y = R_2E = C_2E - C_2R_2 = r - r\cos t$ tehát:

$$y = r(1 - \cos t),$$

és az abscissája;

$$P_1Q_2 = P_1E - Q_2E = rt - r\sin t$$
$$x = r(t - \sin t).$$

Ezt a két egyenletet:

$$x = r(t - \sin t),\ y = r(1 - \cos t)$$

a cyclois egyenletének tekinthetjük. x és y a t független változó függvényei; t minden értékéhez bizonyos meghatározott x és y számértékek tartoznak, amelyek a görbe pontját határozzák meg.

Összefoglalás. Ezen első előadásban megmutattam, hogy a grafikus ábrázolásban a tények és tünemények egész seregét minő áttekinthető, összefoglaló tanulságos módon tüntethetjük fel: a geometriai kép a tünemények szétszórt, laza sorába rendet hoz, a mathematika mint rendező elv szerepel.

Ugyanezt teszi a formula is. Geometriai kép és algebrai alak a mathematikus lelkében sokszor összeolvad: egy és ugyanazon fogalom két oldalról tekintve. Mindkettőt használhatjuk a *változás* össze-

6. ábra. Facsimile oldalak Beke Manó *Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba* könyvének azon kiadásából, amelyre József Attila és Pákozdy Ferenc levele hivatkozik.

Magunkra vagyunk tehát utalva, hogy kiválasszuk a megfelelő értelmezést. A legvalószínűbb talán a következő: a talppont a kerék talajjal érintkező pontja a gördülés megkezdésekor (tehát a ciklois kiindulópontja), a tetőpont a ciklois legmagasabb pontja, tehát a nyomon követett pont helye egy fél kerékfordulat után, a „dislokációs egyenes” pedig egyszerűen a kettőt összekötő egyenes.

Ha így definiáljuk, akkor a probléma nagyon egyszerűen megoldható, csak egy dologra kell odafigyelnünk.

Ha pálya a húzás révén t időben $s\left(t\right)$ távolsággal van eltolódva (a pozitív szám jelentse a koordinátarendszer előjelével egyezően a jobbra mozgatást), akkor a görbe paraméteres egyenletrendszere nyilván:

$$\begin{cases} x = t - \sin t + s\left(t\right) \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

Ahhoz, hogy ez épp egy egyenes legyen, az $y = x$ egyenlőségnek kell megvalósulnia. (Természetesen nyugodtan mondhattunk volna $y = Ax + B$ egyenlőséget is, de részint érezhető, hogy ez – pusztán lineáris átskálázás révén – érdemi újdonságot nem fog hozni, csak a jelöléseket bonyolítja, részint a kérdés pozitív megválaszolásához nekünk elég egy egyenest mutatnunk.) A megoldandó egyenlet tehát:

$$1 - \cos t = t - \sin t + s\left(t\right),$$

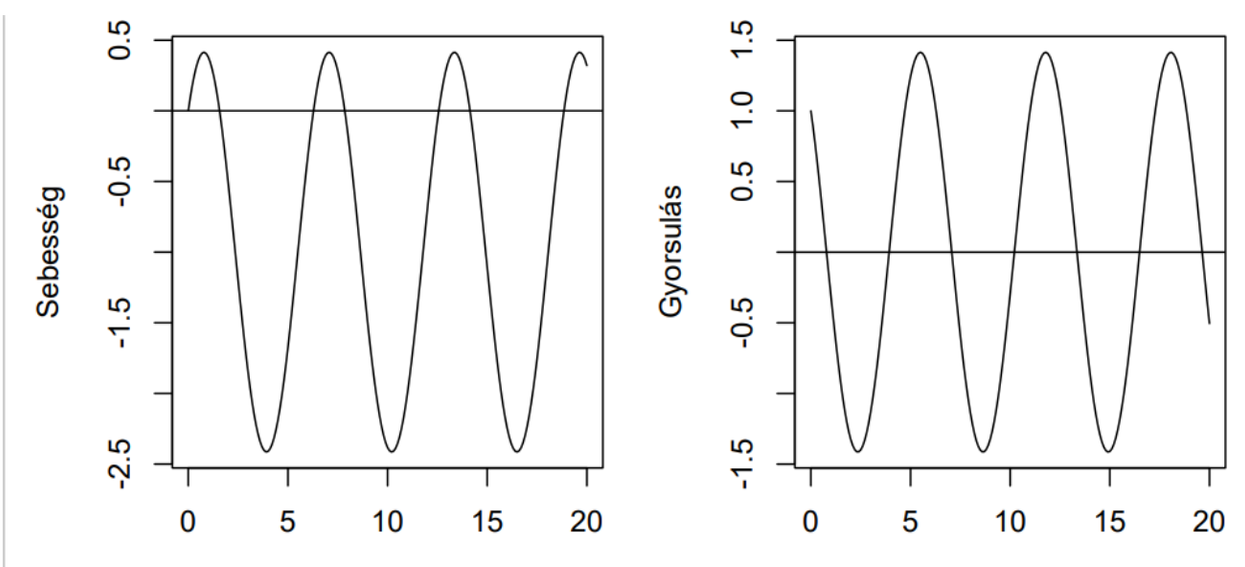
amiből

$$s\left(t\right) = 1 - \cos t - t + \sin t.$$

Ez egyáltalán nem volt nehéz, sőt, rögtön látszik, hogy minden létező paraméteres görbére egyszerűen megoldható ugyanilyen módon, a kérdés inkább csak az lehet, hogy ez a mozgás fizikailag realizálható-e. Ha például az $s\left(t\right)$ függvénynek szakadása van, akkor az nyilván nem lehet egy talaj tényleges mozgása, hiszen az nem tud pillanatszerűen „odébb ugrani”. Itt belefutunk abba, hogy mi a pontos definíciója annak, hogy „fizikailag realizálható”, mert amellett is lehet érvelni, hogy mondjuk a sebesség maga sem tud pillanatszerűen megváltozni.

Szerencsénkre mind a szinusz-, mind a koszinuszfüggvény nem csak, hogy folytonos, de mivel a deriváltjaik is szinuszok és koszinuszok lesznek, így elmondható, hogy *minden* deriváltjuk is folytonos[8]. Mivel $s\left(t\right)$ időbeli deriváltja lesz a talaj mozgatásának szükséges sebessége, annak deriváltja a szükséges gyorsulás, és így tovább, ha ez mind folytonos, akkor nyugodtak lehetünk afelől, hogy ez a mozgatása a talajnak – avagy, fordítva nézve, a megfigyelőnek – fizikailag realizálható.

A 7. ábra mutatja az ahhoz szükséges talajsebességet és -gyorsulást, hogy a pont pályája egyenes legyen. A sebesség jórészt negatív, de gondoljuk végig, hogy ez teljesen logikus: mivel a kerék jobbra (pozitív irányba) gördül, így a talajt nyilván balra (negatív irányba) kell húznunk, hogy egyáltalán esélye legyen az $y = x$ egyenesen maradnia a pontnak és ne „gördüljön ki” jobbra.



Idő Idő

7. ábra. A József és Pákozdy levelében felvetett kérdésre választ adó talaj-mozgatás szükséges sebessége és gyorsulása.

Ha ezt kicsit nehéz is elképzelni, a https://www.github.com/tamas-ferenci/JozsefAttilaEgyMatematikaiKerdese oldal utolsó animációja segít, mert megmutatja a dolgot működés közben (azzal, hogy megfigyelőt mozgatja, nem a talajt, de mint már volt róla szó, ez természetesen egyenértékű).

4. Konklúzió

„Vasútnál lakom. Erre sok
vonat jön-megy és el-elnézem,
hogy' szállnak fényes ablakok
a lengedező szösz-sötétben.
Igy iramlanak örök éjben
kivilágított nappalok
s én állok minden fülke-fényben,
én könyöklök és hallgatok."

(József Attila: Eszmélet XII.)

József és Pákozdy kérdésére tehát egyfelől igenlő válasz adható, másrészt viszont a megvalósítás nem az, amit a levélben leírtak. Minden valószínűség szerint félreérthettek valamit, bár arra nem sikerült rájönnöm, hogy mit (az világos, hogy az $x^2 - 2\pi x + 4 = 0$ egyenletet megoldva keresték a választ).

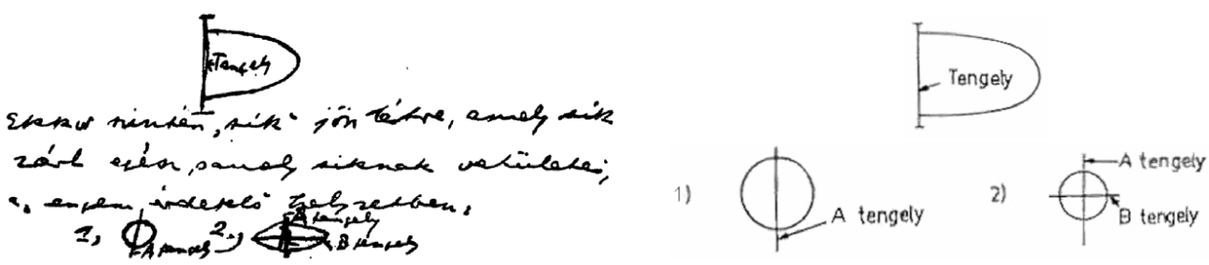
Első ránézésre meglepőnek tűnhet, hogy József Attila levelezésében egyáltalán ilyet találni. Valójában annyira nem meglepő, de ennek megértéséhez tegyünk egy lépést hátra, és nézzük átfogóbban a kérdést – hogyan viszonyult József Attila a matematikához? Ott kezdeném, hogy József a makói gimnáziumban, ahová 1920-tól '23-ig járt, kiváló volt matematikából, az, hogy érettségi jegye „jó" lett, inkább annak köszönhető, hogy milyen körülmények között érettségizett. Testvére, József Jolán, az Attiláról írt életrajzi regényében, *A város peremén* című könyvében még külön ki is tér erre: *„Mennyiségtanban különösen kiváló képességeket árult el, tanára később váltig biztatta, hagyja az irodalmat, foglalkozzon matematikával"* [17, 123.o.]. József Jolán írása szerint, amikor később „felforgató tevékenysége" miatt – azaz, hogy Ady Endrét szavalt az önképzőkörben – felvenni sem akarták a következő évfolyamra, mennyiségtantanára ezt mondta: *„Ilyen koponya évtizedek alatt sem bukkan föl gimnáziumunkban! Micsoda matematikus lehetne belőle! Barátaim, egy nagy*

tudós…” [17, 132–133.o.]. (Hozzá kell azért tenni, hogy József Jolán műve eléggé ki van színezve, ennél az esetnél ráadásul Jolán jelen sem lehetett.)

József Attila rövid szegedi egyetemi tanulmányai szintén alátámasztják természettudományos érdeklődését: indexének tanúsága szerint [32], noha magyar–francia–filozófia szakra járt, felvette Ortvay Rudolf Az anyag korpuszkuláris elmélete és Kiss Árpád Az atomok és molekulák szerkezete című kurzusait. A tematikák alapján az előbbi kurzuson bizonyosan hallott az akkor legkorszerűbb kvantumfizikai ismeretekről, az utóbbi pedig a radioaktivitást járta körül [9]. (1924-ben a kvantumfizika „régi kvantumelmélet” érája nagyjából lezárt volt, és erről Ortvay minden bizonnyal átfogóan tudott beszélni, hiszen maga is a legnagyobbaktól tanult, például Arnold Sommerfeldtől[9] Münchenben. A radioaktivitás bemutatása azonban mindenképp nagyon hiányos kellett legyen, hiszen a neutront majd csak 1932-ben fogja felfedezni Chadwick, a nélkül pedig bajos a radioaktivitást bármilyen közelítéssel is elmondani.) József Attila ezeken túlmenően a relativitáselméletről is hallott; Gazda István alaposan feltárta, hogy mi lehetett ezen tudásának a forrása: minden bizonnyal Fényes Samu, ismeretterjesztőnek is kitűnő író, ügyvéd cikkei [8, 9]. Tverdota György József kozmológiai ismeretei lehetséges forrásainak járt utána egy írásában [35], több közlemény, köztük Marx Györgyé pedig általában a modern fizikával való érintkezését mutatta be [23, 30, 34].

A fentiek fényében talán nem annyira meglepő, hogy a most tárgyalt kérdésen kívül valójában van még egy, jól dokumentált esete József Attila matematikai érdeklődésének! Bécsi tartózkodása alatt, 1926. januárjában levelet írt Galamb Ödönnek, aki a makói gimnáziumban tanára – és egyben pártfogója – volt. Ez a fizikusok számára is érdekes lehet, hiszen egy helyen ezt írja benne: „*Ezek az anyagi okok nálam azt idézik elő, hogy más etikai síkon nyilvánuljon meg az általuk jelen körülmények között elfojtott erő (betörés, gyilkosság, szélhám), hanem életemet befelé irányítják s előáll, de pszihikai kvalitásban az az Einstein állította eset, hogy t. i. egy bizonyos sebességi erő hat egy bizonyos testre s ha az erő akkora, hogy a sebességi határnál (300.000 km. sec.*$^{-1}$*) nagyobb gyorsasággal kéne haladnia a testnek, akkor az erő maga is átalakul anyaggá. Ez az anyag vagyok én és ez az erő vagyok én.*” [6, 90.o.]. (Ebből is érzékelhető, hogy József egyrészt nem értette meg pontosan az einsteini állítást, másrészt, hogy a hozzáállása inkább misztikus, és szabadon használja a felszínes, sőt, pusztán verbális hasonlóságokon alapuló analógiákat.) Fizikusok számára valószínűleg megdöbbentőbb a következő rész, ugyanebből a levélből: „*t. i. a mi univerzumunk a pozitiv és negativ elektrónok rendszere, és a másik jelenlevő univerzum pedig azoké, melyekhez képest a jelen ismert negativok – pozitivok; illetve a jelen ismert elektrónok pozitiv és negativ egyedei által alkotott rendszer – pozitiv rendszer és ennek megfelelően van negativ rendszer is*”. Az előbbi megjegyzés fényében valószínűleg nem érdemes túlértelmezni ennek a jelentőségét, de azért enyhén szólva is meghökkentő a dolog: Dirac csak *1928-ban*, azaz két évvel e levél *után* vetette fel először az antielektronok létét! Amit aztán csak 1932-ben, hat évvel József Attila levele után igazolt egyértelműen Carl David Anderson kísérletesen is. Toró Tibor egész cikket szentelt e kérdés vizsgálatának, melyben alaposan körüljárja a kapcsolódó fizikai ismereteket is [32]. (Bár hozzá kell tenni, hogy jelen sorok szerzője szerint néhol már kissé a József Attila-i viselkedés inverzébe esve, nem a természettudományhoz kötve felszínes analógiákkal művészetet, hanem a művészethez kötve felszínes analógiákkal természettudományt: *„Visszatérve a CP-sértés problematikájához, van tehát egy megmaradási törvény, a CP-paritás megmaradása, amely 99,8 százalékban érvényes, de ugyanakkor a* K_2^3 *mezon két pi-mezonos bomlásánál a megmaradási törvény szerkezete fellazul és szisztematikusan 0,2 százalékos, nagyon kicsiny CP-sértés lép fel. Következésképpen a „törvény szövedéke itt, egy kicsit fölfeslik”, de csak 0,2 százalékosan, 99,8 százalékban továbbra is érvényben marad.”* [32, 92.o.].)

De nézzük most a matematika szempontjából érdekes részt! Ugyanezen levélben ezt írja: *„Az* a *egyenes hossza:* $\infty = 1\infty$. *A* b *görbe hossza:* $\infty + \infty + (x\infty) = 2\infty, 3\infty, \ldots, x\infty$. *Tehát a* b *görbe hossza legalább 2 végtelennél több. T.i. vedd magadat tengelynek, akkor ha jobbról indul a görbe balra, éppen mert görbe, vissza is tér, akkor is, ha szabálytalan és a visszatérés is legalább* 1∞, *amennyi az odahaladás. Ez azután geometriailag igazolja, hogy van 1. 2. 3. … x. rendű végtelen és így zérus. Három pont, két egymást metsző egyenes (tehát összetartó, párhuzamos) vagy 1 görbe meghatároz egy síkot. (Azt hiszem nem mondták még ki ezt a kézenfekvő dolgot a görbével.) No most, ha az egyenes mozog, nem a saját irányában, síkot alkot. A mozgás egy speciális esete a forgás, ha idegen tengely körül történik, szintén síkot alkot. No most képzelj el egy parabólát forgó mozgásban, még pedig úgy, hogy a mozgási tengely a szárainál, a végtelenben van. Tehát: [8. ábra] Ekkor szintén »sík«jön létre, amely sík zárt egész, s amely síknak vetületei, az engem érdeklö helyzetben: [8. ábra] Ez a »zárt sík«, ha az A tengely körül forog, korongalaku testet kapunk, míg ha a B tengely körül forog, egyáltalában nem kapunk testet. Ami azt hiszem, azt bizonyítja geometriailag, hogy van abszolút zérus, tehát a 0 értékek sorozatának limese. T.i. a pontnak nincs kiterjedése, 2 pontnak szintén 3nak szintén nincs kiterjedése, tehát* $0_0, 0_1, 0_2, 0_3$, *…, ahol a* 0_0 *geometriai értékét a fentebb, a B tengely körüli forgás eredménye jelzi. (A pontnak nincs kiterjedése, ezért nem foroghat a »saját tengelye« körül, mely esetben az eredmény ugyanaz volna.)”* [12, 94.o.].



8. ábra. József Attila levelének facsimile részlete (balra) és a válogatott levelezésben található

stilizált ábrák (jobbra).

Ezen gondolatok elemzését meg a parabola forgatását meghagyom egy másik írás tárgyának, de azt hiszem ennyiből is érzékelhető, hogy a matematikában is érvényesülnek a fizikában korábban mondottak, hogy ti. József egy sor fogalmat nem pontosan használ, és a kiinduló koncepciókat szabadon alakítja úgy, mintha a szavak egymás után fűzése egyúttal matematikai levezetés, illetve bizonyítás is lenne. (Valójában a sík görbületére vonatkozó gondolatait is valószínű, hogy a relativitáselmélet nagyon naiv értelmezései adták.) A magabiztossága ugyanakkor e tekintetben is olyan, mint a korszak több más leveléből is érződik; 1926 februárjában ezt írja Jolán nővérének: „*a szabálytalan görbékre vonatkozó fejtegetéseimmel erős lökést adtam a geometriának*” [12, 98.o.].

Amiért mégis ide idéztem a dolgot, azon túl, hogy a diszkusszió teljességéhez hozzá tartozik, egy későbbi fejlemény ezen idézet kapcsán. A már említett Galamb Ödön, József Attila makói tanára és pártfogója 1941-ben könyvet adott ki Józseffel kapcsolatos emlékeiről, *Makói évek* címmel. A könyvben Galamb felidézi ezt a levélváltásukat is, viszont érzékeli, hogy a tartalmát nemigen tudja megítélni (Galamb latin-történelem-gyorsírás tanár volt, József Attilának görögpótló$_{10}$ irodalmat tanított [25]), úgyhogy erre tekintettel a lehető legfelelősebb döntést hozta, és inkább kikérte egy hozzáértő, Kun-Kuti Márton matematikatanár-társa véleményét. (Bár ma is így járnának el a könyvek és újságok szerzői hasonló helyzetben…) Kun-Kuti pontokba foglalva fogalmazta meg észrevételeit; véleményem szerint 80 év távlatából is helytálló, tanulságos módon:

„ *– A valóságtudományok szakemberei – az eredményért való felelősségük tudatában – nagy gonddal vigyáznak arra, hogy állításaik a bizonyíthatóság kereteit ne lépjék túl. Ez pedig a szabadon csapongani szerető fantáziát oly nagy mértékben korlátozza, hogy az eredmény rendszerint nagyon szerény.*

– Egészen más a helyzet az ú. n. művészlelkű embereknél. Az ő fantáziájuk szabadon csaponghat. Nem korlátozza semmi. Ezért van az, hogy az írók, költők, művészek fantáziája a dolgok lényegének oly mélységeire is rátapint néha, ahova a bizonyíthatóság keretein belül maradó ész talán soha sem juthat el. Egyes írók – pl. Verne, Jókai – oly gépekről írtak részletesen, melyeket később találtak fel. Vagy a

valóság titkairól néha oly elgondolásokat nyilvánítottak, melyeket a tudomány később igazolt.

– Ilyen szabadon csapongó fantáziájú, erős intuíciójú művészlélek volt József Attila is. […]

– Egy másik helyen igen érdekes – de nem új – matematikai problémát fejteget… A sík végtelen sugarú gömb felületeként fogható fel. A gömbfelület görbe. A sík nem görbe. Mégis a kettő azonosítható. Ezért kérdezi: – Van-e görbe sík? – Itt nyilván; a van alatt fogalmi és nem tárgyi létezésre gondol.

– Fejtegeti a végtelen problémáját. Mint a legtöbb nem szakember, ő is a végtelent valami misztikus színezetű, észfölötti távolságok homályába vesző, konkréten létező objektumnak tekinti. Nem gondolva arra, hogy a matematikus a végtelen alatt nem valami ténylegesen létező objektumot, hanem pusztán csak végnélküliséget ért, azaz pl. egy végtelen sorozatnál annyit és csak annyit ért alatta, hogy akármily távoli tagot szemelünk is ki, azon túl a sorozatnak még van tagja. Tehát a végtelen csak egy – az emberi értelmet túl nem lépő – tulajdonság a matematikában, melynek létmódja az érvényesség és nem a tárgyi létezés. Valószínűleg ez az oka annak, hogy a végtelen, nagy és végtelen kicsi számmal éppen úgy szoroz, mint a közönséges számokkal, pedig végtelen nagy és végtelen kicsi szám voltaképpen nincs is.

– A tárgyi precizitás részleteitől eltekintve elmélkedései mélyre tapintó érdekes gondolatokat tartalmaznak, melyek a valóság megismeréséért évezredek óta világszerte folyó óriási szellemi küzdelemnek több legizgatóbb problémáját érintik” [7, pp. 71–73].

Ha már úgyis emlegettem korábban József Jolán regényét, nem tudom megállni, hogy egy roppant érdekes momentumra fel ne hívjam a figyelmet ezen a ponton. Kun-Kuti előbbi véleménye Jolán művében is megjelenik – *csak épp abban Rákosi Mátyás mondja*! József Jolán ideologikusan nagyon terhelt regényében[11] ugyanis a fiatal Rákosi találkozik József Attilával, sőt – minő véletlen – a találkozás „*éles fordulatot jelentett Attila szellemi fejlődésében*”, és „*Marx gazdasági tanainak, a marxi történelemfilozófiának ismeretét ekkor kapta útravalóul*” [17, p. 166]. (Az egyébként elképzelhető, hogy József Attila és Rákosi tényleg találkozott, de az összes többi már az 1948 utáni kommunista rendszer primitív, propagandisztikus kitalációja. Helyenként abszurdba hajló mozzanatokkal tarkítva: József Jolán, mint újságíró 1949-ben interjút készített Rákosi Mátyással, ami az országgyűlési választások napjára időzítve jelent meg, ebből megtudjuk, hogy a jóságos Rákosi még a börtönből is egyengette József Attila útját… [15]. Szőke György izgalmas cikkben járt utána annak, hogy mindebből mi lehet igaz [31].) József Jolán regénye szerint Makai Ödönt, Attila sógorát – egyben gyámját, és a történet időpontjában szállásadóját – látogatja meg Rákosi, akinek Makai ezt mondja: *„Éppen a végtelen problémáját fejtegette az ifjú. Úgy sejtem – nézett Attilára –, azt akartad bizonyítani, hogy a végtelen valami észfölötti távolságok homályába vesző, valóságban létező objektum.*”, mire Rákosi azt válaszolja: *„A végtelen csak egy tulajdonság a matematikában. Létmódja az érvényesség, nem pedig a tárgyi létezés.*”. Azaz: József Jolán fogta a makói matematikatanár véleményét, és a bölcs Rákosi Mátyás[12] szájába adta! (Azzal a már-már mókás módosítással, hogy valójában még Makai Ödön szabatosan megfogalmazott felvetésének a megszövegezését is Kun-Kutitól kölcsönözte…) Természetesen az időpontok sem stimmelnek, hiszen ekkor a regényben József még el sem utazott Bécsbe, márpedig, mint láttuk, a valóságban egy onnan írt levelében vetette fel először ezt a problémát.

Még egy érdekes „kapcsolódási pontot” hadd említsek meg József Attila és a matematika között. Egy pillanatra visszaadom a szót Tverdota Györgynek, amint az *Eszmélet* keletkezését datálja: *„ha nem feltételezzük, hogy a XII. szakaszt 1934 júliusában vagy augusztusában, Budapestre, a Korong utcába való 1934. július 1-je táján történt visszatérése után írta, akkor a »Vasútnál lakom«– kijelentést korrekt módon csak Hódmezővásárhelyen történt ideiglenes letelepedése, 1934. március 1-je előtt és Szántó Judittal a Korong utcába költözésük (valószínűleg 1933. október) után tehette*” [36, 15.o.]. Mint az ebből is kiderül, József Attila, ha megszakításokkal is, de többször élt a Korong utcában; egész pontosan a Korong utca 6. szám alatt. Ha valaki elzarándokol erre a címre, akkor csakugyan megtalálja József Attila emléktábláját a házon. De megtalál egy másik emléktáblát is… (9. ábra).

9. ábra. A Korong utca 6. szám alatti emléktáblák együtt (felül) és a két emléktábla közelebbről (alul).

Bizony ám, pontosan ugyanabban a házban lakott Arany Dániel, mint József Attila! Bóra Eszter alapos tanulmányban mutatta be[13] Arany Dániel életútját [5], kitérve a Józseffel való kapcsolatára is: „*Arany Dániel 1896-ban Budapesten épített egy villát, ez a mai napig áll a körvasúton túl Zuglóban a mai Korong utca 6. szám alatt. Ebben a csodálatos villa-lakásban élt és dolgozott a nagy műveltségű, széles érdeklődésű matematikus. A ház érdekessége, hogy 1933–1936 között József Attila bérelt benne egy szerény padlásszobát, »a város peremén«. Nem ismert, hogy a költő kitől bérelte a kis szobát, de annyi biztos, hogy ismerték egymást a matematikussal.* [5, CLIV.o.], bár sajnos ez utóbbi állítást nem részletezi a cikk. (Feltűnő lehet az emléktábláról, hogy Arany Dániel halálának a dátuma nem ismert pontosan. 1944-ben gettósították Arany Dánielt zsidó származása miatt – jellemző adalék, hogy még ekkor is hazájára és a matematikára gondolt: gyorsan elajándékozta hatalmas könyvtárát az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulatnak, hogy a háború utáni újrakezdésnél legyen szakirodalma az országnak; ezek a könyvek egyébként máig fellelhetőek a BME Matematikai Intézetének könyvtárában – és a gettót nem élte túl. A magyar matematikatanítás egyik legnagyobb alakját, a Középiskolai Matematikai Lapok megalapítóját úgy pusztították el feleségével együtt, hogy még a halálának pontos dátuma sem ismert, hamvai jeltelen sírban nyugszanak.)

Nagyon sokat beszéltünk József Attiláról, de mi a helyzet Pákozdy Ferenccel? Az ő életéről, és természettudományos érdeklődésről jóval kevesebb forrással rendelkezem (valószínűleg jóval kevesebb is áll rendelkezésre), de ennek ellenére egyáltalán nem meglepő, hogy a kérdést felvető levélnek ő is szerzője. Pákozdy ugyanis, amellett, hogy maga is költő és műfordító volt, és – mint a Tverdota idézetből is kiderült – József Attila barátja és hódmezővásárhelyi körének tagja, meglehetősen polihisztor alkat volt: eredetileg orvosnak tanult, aztán jogot végzett, dolgozott jegyzőként, levéltárosként majd évtizedekig könyvtárosként, mindemellett kitűnő sakkozóként is ismerték [1, 18].

Kitérő megjegyzés Pákozdy kapcsán: talán többen tudják, hogy történetesen – és teljesen véletlen egybeesésként – Pákozdy Ferencnek hívták azt a költőt is, akinek az 1933-ban a *Társadalmi Szemlében* megjelent kritikája, melyben azt írta, hogy a „*magyar proletárirodalom sok problémája uj problémával szaporodott: József Attilával*” szerepet játszott József Attila és az illegális kommunista párt kapcsolatának megromlásában. (Pákozdy, mármint a bántó kritikát író Pákozdy[14] számára érhető módon elég kellemetlenné vált[15] később ez az írás, 1954-ben azzal magyarázkodott Révai Józsefnek, hogy valójában nem gondolta így a leírtakat, csak az újság szerkesztőinek, Madzsar Józsefnek és Sándor Pálnak a nyomására jelentette meg a kritikát, akik arra hivatkoztak, hogy József Attila elítélése „a párt kívánsága” [21]. Érdekes adalék, hogy Sándor Pál egy 1964-es írásában ezt kategorikusan tagadta: „1. Én a Pákozdy által említett megbeszélésen nem vettem részt. 2. Sem Pákozdy, sem a Társadalmi Szemle egyetlen munkatársa előtt sem hivatkoztam soha arra, hogy »ez a párt álláspontja«. […] 3. Pákozdy levele szerint azon a beszélgetésen Madzsar vitte a szót és elsősorban saját kifogásait hozta fel a József Attila magatartásával kapcsolatban és fejtette ki véleményét a megírandó cikkre vonatkozólag.” [28]. Madzsar nem volt abban a helyzetben, hogy tiltakozzon, ugyanis az anya- és csecsemővédelem hazai megszervezőjét, a honi népegészségtan egyik legnagyobb alakját addig zaklatta a Horthy-rendőrség (Madzsar illegális kommunista volt), amíg a Szovjetunióba emigrált – ahol meg aztán két év után utolérte a sztálini tisztogatás: a kommunista pribékek minden nyom nélkül eltüntették, a mai napig még csak azt sem tudni, hogy egyáltalán hol vagy mikor halt meg. Madzsar helyett azonban a lánya, Lili beszállt a ringbe: *„Apám 1945 után már nem élt, s Sándor Pál – kihasználva a lehetőséget – úgy védekezett, ahogy tudott. Azt állította, hogy a cikk megírásához neki nem volt köze, arra édesapám adta a megbízatást. Ezt a tényekkel határozottan meg lehetett cáfolni, hiszen apám a cikk megjelenését megelőző hónapokban börtönben volt, s minthogy eléggé rossz egészségi állapotban volt, idejött hozzánk Kassára, s egy ideig itt tartózkodott.*” [22]. Ezt meg Sándor vitatja [28, 38], szóval mondhatjuk, hogy a kör bezárult…

5. Zárszó

Ha az írásom elején nagyon szubjektív voltam, hadd legyek a végén is az. Az *Eszmélet* nem olyan, mint a többi – szerintem – nagyon szép József Attila vers, a *Tiszta szívvel*, a *Thomas Mann üdvözlése* vagy az *(Ime, hát megleltem hazámat)*. Sokszor kell elolvasni. Nem „érti” az ember elsőre, de ahogy újra és újra elolvassa, egyre közelebb kerül hozzá, míg egyszer csak azt nem veszi észre, hogy libabőrös lesz, ahogy az utolsó sorok végére ér.

Ferenci Tamás

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt hálás köszönetemet szeretném kifejezni Tverdota Györgynek (ELTE BTK Modern Magyar Irodalomtörténeti Tanszék): számomra már az is rendkívül megtisztelő, hogy az egyik legnagyobb József Attila-kutató vette a fáradságot, és egy hozzám hasonló teljes kívülálló írását egyáltalán elolvasta. Tverdota György azonban ennél sokkal többet tett, részletes magyarázattal szolgált számomra József Attila matematikai érdeklődése és ismeretei kapcsán; a Konklúzió fejezet idevágó részét teljes egészében az ő útmutatása alapján kutattam fel és írtam meg. Köszönöm Maczák Ibolyának (PPKE BTK Magyar Irodalomtudományi Tanszék) a segítőkészségét, és hogy több forrásra is felhívta a figyelmemet Pákozdy Ferenc (József Attila barátja...) kapcsán. Köszönöm Tóth Jánosnak (BME TTK Analízis Tanszék) a nagyon kedves szerkesztői munkát, és különösen, hogy felhívta a figyelmemet a Korong utca 6. szám alatti emléktáblapárra.

Dr. Ferenci Tamás klinikai biostatisztikus, az Óbudai Egyetem Élettani Szabályozások Kutatóközpontjában habilitált egyetemi docens. Emellett a Budapesti Corvinus Egyetem Statisztika Tanszékének félállású docense, és a Semmelweis Egyetem Népegészségtani Intézetének óraadó oktatója.

Irodalomjegyzék

[1] Bata Imre. A vásárhelyi poéta. Pákozdy Ferenc emlékezete.*Tiszatáj*, 31(4):72–76, 1977.

[2] Beke Manó. *Determinánsok*. Athenaeum Irodalmi és Nyomdai R.-T., 1915.

[3] Beke Manó. *Bevezetés a differenciál-és integrálszámításba: a Népszerű Főiskolai Tanfolyam 1906-ik évi II. sorozatában tartott előadások*. Franklin-Társulat, 2 edition, 1920.

[4] Beney Zsuzsa. Az eszmélet lírája. *Tiszatáj*, 43(1):60–69, 1989.

[5] Bóra Eszter. Ismeretlen ismerősünk: Arany Dániel. *Természet Világa*, 140(10):CLI–CLV, 2009.

[6] Fehér Erzsébet. *József Attila válogatott levelezése*. Akadémiai Kiadó, 1976.

[7] Galamb Ödön. *Makói évek*. Cserépfalvi, 1941.

[8] Gazda István. Einstein relativitáselméletének első hazai interpretátorai. *Magyar Tudomány*, 24(6):476–483, 1979.: http://real.mtak.hu/19206/1/gazda_MATUD_1979.pdf.

[9] Gazda István. József Attila és a relativitáselmélet. *Kritika*, 80(3):4–6, 1980.

[10] Izrail Moiseevitch Gelfand and Sergei Vasilyevich Fomin. *Calculus of variations*. Courier Corporation, 2000.

[11] Szemjon Grigorjevics Gingyikin. *Történetek fizikusokról és matematikusokról*. Typotex, 2004.

[12] H. Bagó Ilona, Hegyi Katalin, Stoll Béla. *József Attila levelezése*. Osiris Kiadó, 2006.

[13] Járai Antal. *Modern alkalmazott analízis*. Typotex, 2007.

[14] David C. Johnston. Cycloidal paths in physics as superpositions of translational and rotational motions. *American Journal of Physics*, 87(10):802–814, 2019. http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.5115340.

[15] József Jolán. Rákosi Mátyás József Attiláról. *Szabad Nép*, 7(112):11, 1949.

[16] József Jolán. *József Attila élete*. Szépirodalmi Könyvkiadó, 1955.

[17] József Jolán. *A város peremén*. Móra Ferenc Könyvkiadó, 1975.

[18] Kenyeres Ágnes. *Magyar életrajzi lexikon*. Akadémiai Kiadó, 1994.

[19] Kósa András. *Variációszámítás*. Tankönyvkiadó, 1973.

[20] Kőszegfalvi Ferenc. Pákozdy Ferenc (1904–1970) bibliográfia, 2003.

[21] Legát Tibor. József Attila esete a két Pákozdy Ferenccel, akik szintén költők voltak. *Magyar Narancs*, 2020. https://magyarnarancs.hu/sorkoz/jozsef-attila-esete-a-ket-pakozdy-ferenccel-akik-szinten-koltok-voltak-128728 (elérés dátuma 2020. 10. 06.).

[22] Madzsar Lili. Madzsar Lili visszaemlékezése. *Palócföld*, 22(6):51–59, 1988.

[23] Marx György. A modern fizika forradalma és József Attila. *Új írás*, 21(2):66–70, 1981.

[24] Nobel Prize organisation. Nomination archive – Arnold Sommerfeld, 2020. https://www.nobelprize.org/nomination/archive/show_people.php?id=8661 (elérés dátuma 2020. 10. 16.)

[25] Péter László. József Attila közöttünk. Somogyi-könyvtár, 1980.

[26] Reiman István. *A geometria és határterületei*. Gondolat, 1986.

[27] Rózsa Pál. *Bevezetés a mátrixelméletbe*. Typotex, 2009.

[28] Sándor Pál. József Attila és az illegális kommunista párt. *Kritika*, 80(3):7–9, 1980.

[29] George F Simmons. *Differential equations with applications and historical notes*. CRC Press, 2016.

[30] Simon Péter. “József Attila és a fizika”. Természet Világa 136.11 (2005), 495–498. old.

[31] Szőke György. „Akire csak a párt vigyáz...”. *Forrás*, 37(4):58–62, 2005. http://www.forrasfolyoirat.hu/0504/szoke.html

[32] Toró Tibor. József Attila transznegatívum-elmélete és az anyag-antianyag-szimmetria(sértés). *Természet Világa*, 137(I. különszám):88–92, 2006. : http://www.termeszetvilaga.hu/szamok/kulonszamok/k0601/toro.pdf.

[33] Tóth János, Simon L Péter. *Differenciálegyenletek. Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba.*Typotex, 2020.

[34] Tuska Ágnes. “...a működésben van a nyugalom”. Fizikai Szemle 30.11 (1980), 430–434. old.

[35] Tverdota György. József Attila költészetének kozmológiai vonatkozásai. *Irodalomtörténeti Közlemények*, 83(2):121–133, 1979.

[36] Tverdota György. *Tizenkét vers. József Attila Eszmélet-ciklusának elemzése.* Gondolat, 2004.

[37] Valachi Anna. Három testvér – háromféle kísérlet az elveszett gyermekkor visszahódítására. *Thalassa*, 12(2-3):145–154, 2001. http://imago.mtapi.hu/a_folyoirat/e_szovegek/pdf/(12)2001_2-3/145-154_Valachi-A.pdf.

[38] Vértes György. József Attila és az illegális kommunista párt. *Irodalomtörténeti Közlemények*, 21(2):192–218, 1963.

[39] Robert Weinstock. *Calculus of variations: with applications to physics and engineering*. Courier Corporation, 1974.

Lábjegyzetek

1

Azok számára, akik szeretnék saját kezűleg megvizsgálni ezt, a következő a fizikai levezetés. Vegyük fel a koordinátarendszerünk origóját a kezdőpontban, az x tengely mutasson vízszintesen jobbra, az y pedig függőlegesen lefelé. Mivel a golyó energiája kezdetben nulla, és a gravitáción kívül más nem hat rá, így y „magasságban” (mélységben) mgy helyzeti energiát nyer; a súrlódás hiánya miatt ez teljesen egészében az $\frac{1}{2}mv^2$ mozgási energiájává alakul. Azaz a sebessége, midőn a függőleges koordinátája y, épp $v = \sqrt{2gy}$. Másrészről, egy piciny $\mathrm{d}\,s$ szakasz megtételéhez szükséges idő, ha épp $v\left(s\right)$ a golyó sebessége (ahol s az indulási ponttól a pályán mérve megtett út) természetesen $\frac{\mathrm{d}\,s}{v(s)}$, így az egész út megtételéhez szükséges idő $\int_A^B \frac{\mathrm{d}\,s}{v(s)}\,\mathrm{d}\,s$. Hogy áttérjünk s-ről x-re, kellene tudni, hogy x koordinátánál mennyi a pályán mért elmozdulás, ha egy kicsiny $\mathrm{d}\,x$ távolsággal odébb megyünk. Szerencsére ez analízisből ismert, hiszen lényegében egy ívhosszról van szó: $\mathrm{d}\,s = \sqrt{1 + \left[y'\left(x\right)\right]^2}\,\mathrm{d}\,x$, ahol $y\left(x\right)$ a rámpa alakja, mint függvény. Ezt behelyettesítve kapjuk, hogy a szükséges idő $\int_0^b \frac{1}{\sqrt{2gy(x)}}\sqrt{1 + \left[y'\left(x\right)\right]^2}\,\mathrm{d}\,x$, ha b a B pont vízszintes távolsága A-tól.

Kihasználtuk, hogy a golyó vízszintesen csak szigorúan A-ból B fele tud haladni (egy csak alátámasztást nyújtó rámpával nem tudjuk visszafordítani vízszintesen), így a teljes út integrálása megfelel az x szerint 0-tól b-ig történő integrálásnak. (Ha a görbénk paraméteresen adott, akkor a $\int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{\sqrt{2gy(t)}}\sqrt{\left[x'\left(t\right)\right]^2 + \left[y'\left(t\right)\right]^2}\,\mathrm{d}\,t$ alak használható, ahol t_a és t_b azok az értékek, amik között a paraméternek futnia kell, hogy megkapjuk a görbét A-ból B-be.) A feladat az, hogy megtaláljuk azt az $y\left(x\right)$ függvényt, ami ezt a kifejezést minimalizálja. Itt arról van tehát szó, hogy minden függvényhez hozzárendelünk egy számot, ezt szép néven funkcionálnak szokták hívni, és ezek körében minimalizálunk – keressük azt a függvényt, amihez rendelt szám a minimális. A matematika azon területét, ami ilyen szélsőérték-keresési feladatokkal foglalkozik, szokás variációszámításnak nevezni; a brachisztochron probléma a legelső történeti példák egyike variációszámításos feladatra [10, 13, 19, 33, 39].

2

Mindazonáltal néhány egyszerű alakú függvényre, például egyenesre, különböző kitevőjű hatványokra, különböző gyökökre, vagy akár paraméteresen adott görbékre, például körre, ellipszisre stb. érdekes lehet kiszámolni – ha lehet, analitikusan, ha nem, numerikusan – az integrált, és megnézni mit kapunk!

3

Az ingánál konkrétan azt, hogy $\sin\alpha \approx \alpha$.

4

Fontos, hogy ez nem valamiféle triviálisan látható dolog, be kell bizonyítani, és az csak véletlen, hogy a ciklois alakú pályára kényszerítéshez épp ciklois alakú pofákra volt szükség. Azt, hogy adott alakú pofánál a rá felütköző fonál végpontja milyen görbét ír le, a pofa evolvensének nevezzük, megfordítva pedig azt mondjuk, hogy a pofa alakja az evolútája annak a görbének, amit a rá felütköző fonal végpontja leír. (Természetesen a matematikai definíciónál a gravitációra meg a felütközésre nincs szükség: azt mondjuk, hogy a fonalat mindig megfeszítve tartjuk.) Evolvensből végtelen sok van, attól függően, hogy milyen hosszú a fonál, evolútából viszont csak egy. A kérdés tehát az, hogy melyik görbének lesz az evolvense a ciklois, avagy fordítva megfogalmazva, mi a ciklois evolútája – és a válasz az, hogy a ciklois! De ismét hangsúlyozni kell, hogy ez csak véletlen, például a kör evolútája egy pont (gondoljuk végig!), az $y = x^2$ parabola evolútája az $y = 3\left(x/4\right)^{2/3} + 1/2$ ún. Neil-parabola. Még csak az sem igaz, hogy a ciklois az egyetlen görbe ami saját maga evolútája, például a (logaritmikus) spirálnak szintén önmaga az evolútája.

5

Igen, tudom, hogy a fizikus olvasók most a szívükhöz kapnak, hiszen így dimenzionálisan elromlanak az egyenletek. Itt most legyünk picit matematikusak.

6

Ami egységnyi itt, azt a fizikusok úgy hívnák, hogy a forgás körfrekvenciája: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, ahol T a periódusidő, $f = 1/T$ a frekvencia.

7

Tudjuk, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Legyen $\beta = \cos\alpha$, és így $\alpha = \arccos\beta$, ezt az előző egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $\left(\sin\arccos\beta\right)^2 + \beta^2 = 1$, ahonnan már adódik a felhasznált összefüggés.

8

Analízises emberek úgy mondanák: végtelenszer folytonosan differenciálhatóak, avagy C^∞-beliek.

9

Sommerfeld a világ legpechesebb fizikusa, akit 1917 és '51 között összesen 84-szer jelöltek Nobel-díjra és egyszer sem kapta meg [24]. Amellett, hogy a saját jogán is kitűnő fizikus volt, hihetetlen volt a tehetségnevelése: hét tanítványából lett Nobel-díjas!

10

Az 1924-es reformig így nevezték azokat a tárgyakat, amit a tanulók az 1890-ben eltörölt kötelező görög helyett tanultak a gimnáziumokban.

11

József Jolán műve szívbemarkoló képet fest a '10-es, '20-as, '30-as évek rongyokban járó, éhező, poloskák között ablaktalan lyukakban tengődő munkásainak, cselédjeinek, nincstelenjeinek tömegeiről, és nem lehet kétségünk, hogy e kép megfelel a valóságnak, különösen, mert ezek Jolánnak is személyes élményein nyugszanak, ettől függetlenül a munkásmozgalom bemutatása még ezekben a részekben is zavaróan didaktikus a regényben. Jolán ráadásul, amellett, hogy egyéb esetekben is kever dátumokat, eseményeket, a József Attila-képet is érezhetően igyekszik sematikusan heroizálni (nem mintha erre József rászorulna). Csak egyetlen példa: a regényben Attila azért nem tér vissza a makói internátusba utolsó évében, 1922 őszén, mert „*még a nélkülözést is inkább vállalja, mint hogy visszamenjen a megyei birtokosok és nagygazdák csemetéi közé*” [17, pp. 132–133]. A valóságban József azért nem tudott visszamenni, mert 1922. június 26-án gyógyszerrel öngyilkosságot kísérelt meg, ami automatikus kicsapással járt, ezt egy korábbi diák példájából ő is tudhatta [7, pp. 21–25]. József Jolán könyvében azonban már csak azért sem derülhet ki ez az összefüggés, mert ő még az öngyilkossági kísérlet tényét is elhallgatja! Az ilyen torzítások jóval kevésbé – bár még így sem elhanyagolhatóan – voltak jelen Jolán tíz évvel korábban, 1940-ben írt, *József Attila élete* címet viselő könyvében [16]. Valachi Anna szerint, aki Jolánról *József Jolán, az édes mostoha – Egy önérvényesítő nő a XX. század első felében* címmel egész könyvet írt, az 1950-es regény megírására a Rajk-per alatt kapott pártmegbízást, és nem mert rá nemet mondani [37].

12

1975-ben újra kiadták József Jolán 1950-es regényét, de akkorra meg már Rákosi személye vált kellemetlenné. Jellemző a korabeli szocialista viszonyokra, hogy a problémát úgy hidalták át, hogy egész egyszerűen kihúzták a könyvből Rákosi nevét, de a személyét és a történetszálát nem, így az ezen kiadást olvasók csak arról értesülhettek, hogy József Attila egy név nélküli idegennel találkozik, aki alapvetően hat az életére…

13

Bóra középiskolás diák volt a cikkének publikálásakor!

14

Érdekességként megjegyzem, hogy a Wikipedia e sorok írásának pillanatában is azt írja a kritika kapcsán, hogy József Attila tudta, hogy az írás nem Pákozdy gondolatait tükrözi, mert korábban Pákozdy a *Hétfői Újságban* József Attila mellé állt. Igen ám, de a *Hétfői Újság* egy hódmezővásárhelyi lap volt, így – bár ez vegytiszta spekuláció a részemről – de elég gyanúsnak tűnik, hogy ez a Pákozdy valójában a másik Pákozdy volt, és így persze az egész okfejtés bukik. A keveredés nem lenne teljesen példátlan, vicces módon még a 2004-es kiadású Új Magyar Életrajzi lexikon hódmezővásárhelyi Pákozdyról szóló szócikkébe is bekerült hivatkozásként egy olyan cikk, ami valójában a másik Pákozdyról szól [20].

15

Hogy „kellemetlenné vált”, az enyhe kifejezés, például az 1951-ben kiadott gimnáziumi tankönyvben ezt olvashatta Pákozdy saját magáról: *„a kötettel kapcsolatban támadás érte [József Attilát] a munkásmozgalom egy szektáriánus, tehetségtelen költője részéről is”*...

---

matematikatörténet geometria

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 18. szám 2020. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

100

Cím	Szerző
A 32. Varga Tamás Módszertani Napokról	Írta: Csapodi Csaba
Roger Penrose: az első Nobel-díjas matematikus, 1. rész	Írta: Szabó Szilárd
Online IMO, 2020	Írta: Dobos Sándor
Tíz éve halt meg Benoît Mandelbrot, a fraktálgeometria atyja	Írta: Buczolich Zoltán
Nekrológ: Dr. Leindler László	Írta: Totik Vilmos
Matematikaoktatás a COVID-19 idején	Írta: Máder Attila,Torma Bence, Torma Gábor
Szabadulószoba flippity-vel	Írta: Tolnai Judit
Logirintus: a karantén ihlette matematikai kalandjáték	Írta: Gyimesi Bernadett, Balogh Tamás László
Hibrid képalkotás és vizualizáció	Írta: Lóczi Lajos
Valószínűségszámítás négy kötetben	Írta: Kói Tamás
A matematikára semmi szükség – egészen addig, amíg...	Írta: Mosóczi András
A négyzetes és téglalapos cövekek problémájáról	Írta: Stpsicz András
Varga Tamás családfája – Szász Károly (1798 – 1853)	Írta: Oláh-Gál Róbert
Az érintőmódszer történetéről	Írta: Simonovits András
Klein-gyöngyök	Írta: Figula Ágota
József Attila egy matematikai kérdése	Írta: Ferenci Tamás
Jövőformáló matematika	Írta: Szerkesztő

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.