Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon:

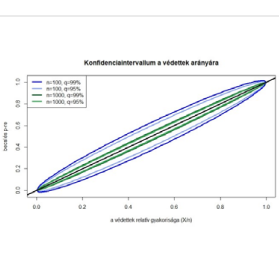
Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

# 17. szám 2020. szeptember

2020. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

### T. Sós Vera köszöntése

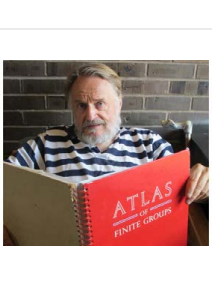
Nagy öröm Sós Verát, oly sokunk munkatársát, akadémiai mamáját vagy nagymamáját, a magyar kombinatorikus iskola nagyasszonyát 90. születésnapján köszönteni. De nehéz feladat is, hiszen olyan sok minden tódul az ember fejébe: fontos és gyönyörű matematikai eredményei; elragadó egyetemi és konferencia-előadásai; új tárgyak bevezetése az oktatásba; személyes törődése munkatársaival és tanítványaival; díjai és elismerései; a tudományos közélet odaadó szolgálata itthon és nemzetközi téren. – *Lovász László* írása.



2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

### Mennyit teszteljünk? 2. rész

*Backhausz Ágnes* és *Simon Péter* a tesztelésről szóló cikkük 2. részében folytatja a betegek arányának becslésével kapcsolatos, gyakran használt valószínűségszámítási, statisztikai ismeretek összefoglalását annak a kérdésnek a kapcsán, hogy hány tesztet érdemes végezni, ha az arányt adott pontossággal szeretnénk megbecsülni egy véletlenszerűen választott minta alapján. Itt olvasható az 1. rész. Itt pedig a folytatás.



2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

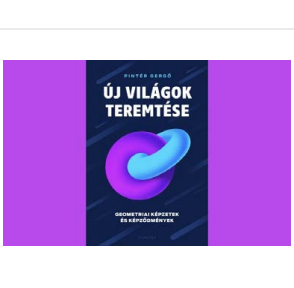
### John Horton Conway, a kíváncsi zseni

A 2020-as évet beárnyékoló COVID-19 járvány a matematikus közösséget sem kímélte. A betegség szövődményeinek következtében április 11-én elhunyt *John Horton Conway*, a 20-ik század egyik legsokoldalúbb és legkülönlegesebb matematikusa. Ahogy hivatalos önéletrajzírója, Siobhan Roberts fogalmazott, Conway a világ egyik legszerethetőbb egomániása, az egy személybe összegyúrt Arkhimédész, Mick Jagger, Salvador Dalí és Richard Feynman. A Brit Király Társaság néhai elnöke, Sir Michael Atiyah szerint pedig egyenesen a világ legmágikusabb matematikusa, akit *Stipsicz András* és *Titkos Tamás* mutat be az Érintő olvasóinak. Tovább...

2020. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

### Szemerédi Endre 80. születésnapjára

Személyes visszaemlékezéseivel köszönti 80. születésnapján az Abel-díjas Szemerédi professzort *Sárközy Gábor*: – Nagy megtiszteltetés számomra, hogy ezt a cikket megírhattam. Nem túlzás, hogy egész életemben ismertem Endrét és rengeteget köszönhetek neki. Tovább...



2020. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

### Új világok teremtése – könyvbemutató a Könyvhéten

*Pintér Gergő* „Új világok teremtése – Geometriai képzetek és képződmények” című könyvének bemutatóját a Typotex kiadó **szeptember 20-án 17:00** órakor a Ferencvárosi Művelődési Központ udvarán tartja meg. A készülő könyvről, amely több nagyon különböző jellegű választ ad a „mire jó ez” kérdésre, már korábban is írt a szerző az Érintő hasábjain. Tovább…

2020. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

### IMO felkészülés a koronavírus árnyékában, 2020

Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpia (IMO) tervezett helyszíne Szentpétervár volt. Ez a beszámoló ennek a különleges évnek a felkészülési krónikája. *Dobos Sándor* először a szakkörök és válogatók 2020-as történetét mutatja be, majd a nyáron megrendezésre került Cyberspace Mathematical Competition (CMC) versenyt. Tovább...

ÉRETTSÉGI BIZONYÍTVÁNY

2020. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

### Az érettségiről érdekesen, avagy egy elmaradt előadás

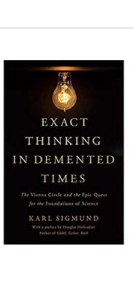
A 2019/20-as tanév második féléve és a 2020. májusi érettségi időszak hosszú ideig emlékezetes lesz minden diák, tanár és szülő számára. Pár dolgot nyilvánvalóvá tett ez a két-három hónap: ezek közül talán a legfontosabb, hogy iskolára (mint fizikai térre) és pedagógusra szükség van a 21. században is. Az alábbi cikkben a 2020. évi matematika érettségi vizsga rövid elemzését végezi el *Csapodi Csaba* és *Koncz Levente*. Tovább...

Online
14th Middle European Mathematical Olympiad 2020

2020. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

### Online MEMO

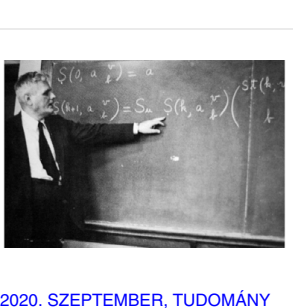
A járvány miatt az idei MEMO-t sajnos nem lehetett élőben megtartani az eredeti tervek szerint Szlovákiában. Ennek pótlására rendhagyó módon Online MEMO szerveződött. A magyar csapat tagjai: Fleiner Zsigmond, Füredi Erik, Hámori Janka, Kovács Tamás, Szabó Kornél, Várkonyi Zsombor nagyon szép eredményeket értek el. *Lenger Dániel* csapatvezető rövid beszámolója következik.



2020. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

### Világos gondolatok elmehunyt időkben

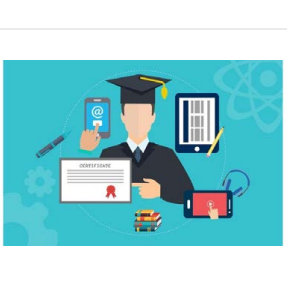
Történt 1895-ben, hogy a Bécsi Egyetemen Ernst Mach, a neves fizikus számára bölcsészeti jellegű katedrát hoztak létre ,,az induktív tudományok történetének és filozófiájának tanára'' megnevezéssel…*Karl Sigmund* könyvéből Ernst Mach mellett az őt a tudományfilozófiai katedrán váltó Ludwig Boltzmann életébe és munkásságba is bepillantást nyerünk. De olvashatunk Albert Einsteinről, David Hilbertről vagy Bertrand Russellről. *Molnár Zoltán Gábor* könyvismertetése következik.



2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

### Alonzo Church Tihanyban

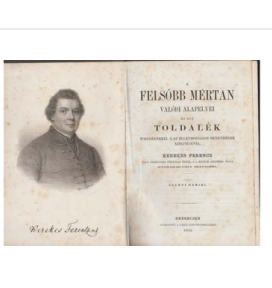
*Alonzo Church* a 20. századi matematikai logika egyik legkiemelkedőbb és legbefolyásosabb alakja, Princetonban és a kaliforniai UCLA egyetemén tanított. Hogyan került Tihanyba 1962-ben, és milyen kapcsolatban állt *Kalmár Lászlóval* és *Péter Rózsával*? *Szabó Máté* cikkéből és a korabeli fotókból sok más érdekességre is fény derül. Tovább...



2020. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

### Az online matematikaoktatás tapasztalatai oktatói és hallgatói szemmel

A BME Gazdaság- és Társadalomtudományi Karának alapszakos hallgatói körében elvégzett felmérés során *Fülöp Ottilia* és *Nagy Marcell* a második féléves matematika tárgy online oktatását vizsgálta 2020-ban. Kérdőívükben a kényesebb kérdésektől sem riadtak vissza, mint például, hogy mennyire tipikus a nem megengedett segédeszközök használata a virtuális számonkérések során… Tovább...



2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

### Hogyan képzelte el 1840-ben Kerekes Ferenc a heurisztikus módszer alkalmazását a matematika tanításában?

Kerekes Ferenc (1784−1850) a Debreceni Református Kollégium matematika professzora szerint „...úgy kell tanítani, hogy az mind a tanítónak, mind a diáknak a gyönyörűségére szolgáljon”. *Kántor Sándorné* feldolgozta Kerekes matematikai és matematika didaktikai munkásságát, többek között ma is aktuális cikkét, a matematikának a felfedeztető módszerrel (de methodo heuristica) való tanításáról. Tovább...

2020. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

### A játékkal töltött idő nem elvesztegetett idő

A játékkal töltött idő nem elvesztegetett idő – állítja *Török Judit* és *Fried Katalin*. Vannak, akik – velük együtt – lehetőséget látnak a játékokban. Az iskolai tanítás során is színesebbé, érdekesebbé tehetjük óráinkat egy-egy játék vagy játékos feladat beillesztésével. Itt a „Számlétra ” és a „Kavicskupacok” néhány változatát mutatjuk be.

2020. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

### Matematikus portrék: Zombori Zsolt

*Zombori Zsolt* már hétéves korában programokat írt, egyetemistaként a filozófia, majd a logika érdekelte. Három éve a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben a Mesterséges intelligencia kutatócsoportban a gépi tanulás és az automatikus tételbizonyítás témájával foglalkozik.

2020. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

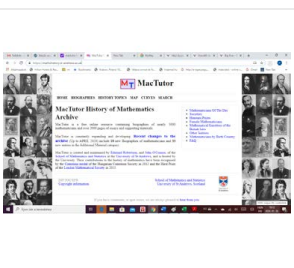
### Matematikus portrék: Backhausz Ágnes

*Backhausz Ágnes* az ELTE oktatója, kutatásait pedig 6 éve a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben folytatja. Korábban a Struktúrák limeszei, most pedig a Hálózatok dinamikája kutatócsoportban vizsgálja a véletlen gráfok sajátértékeinek viselkedését.

2020. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

### Már a matematikai képletekkel is megbirkóznak a neuronhálózatok

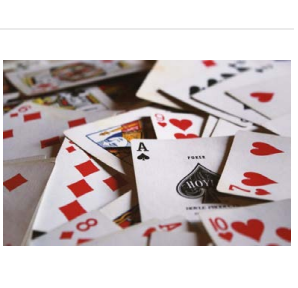
A mesterséges intelligencia neuronhálózatai képesek megoldani mintafelismerési problémákat átfogalmazható technikai kihívásokat. Természetes hangzású nyelvi fordítást nyújtanak. Képkezelő alkalmazások használják őket arra, hogy felismerjék és csoportosítsák a többször felbukkanó arcokat a galériákban. Mindazonáltal a neuronhálózatok mindig is lemaradtak egy szembetűnő területen: a bonyolult szimbolikus matematikai problémák megoldásában. Lehet, hogy most itt az áttörés? 2020 májusában a Quanta Magazine-ban jelent meg Stephen Ornes cikke, amelyet *Csuzdi Domonkos* fordított le magyarra, és *Sugár Tímea* lektorált. Írásunk erre a cikkre hívja fel a figyelmet. Tovább...



2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

### Matematikatörténet és Matematikaoktatás Konferencia 2020. május 20−24.

*Körtesi Péter*, az idei jól sikerült nemzetközi online Matematikatörténet és Matematikaoktatás Konferencia főszervezője beszámolója a megújult *MacTutor History of Mathematics Archive* honlapról is fontos információkat közöl. A konferencia céljai között szerepel az, hogy a közép-európai régió matematikusainak életéről, munkásságáról sok hiányzó adattal, pontosítással hozzájáruljon a jelzett adatbázis kiegészítéséhez, továbbfejlesztéséhez. Tovább…



2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

### *e* ötféleképpen

Ugye mindenkinek van kedvenc száma? Az enyém az $e = 2{,}7182818284\ldots$ , amellyel legtöbben a középiskolában, a természetes logaritmus alapszámaként találkoznak először. Ez az irracionális (sőt transzcendens) szám minden matematikus közeli barátja, hiszen meglepő helyeken bukkan fel. Ebben az írásban *Görbe Tamás* öt példát gyűjtött össze, a teljesség és a részletes bizonyítások igénye nélkül. Tovább...

Differenciálegyenletek

2020. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

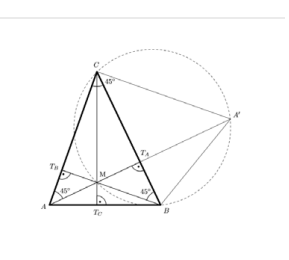
### Tóth–Simon: Differenciálegyenletek – harmadik kiadás

Tóth János és Simon L. Péter: Differenciálegyenletek (Typotex, Budapest, 2020) könyvének harmadik, javított kiadása bevezetést nyújt a differenciálegyenletek elméletébe a matematikus és a differenciálegyenleteket tanuló nem matematikus hallgatók számára. A könyvet jó szívvel ajánlom mindenkinek, aki érdeklődik a differenciálegyenletek és az alkalmazások iránt – *Pituk Mihály* ismerteti a könyvet.

2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

### Az élő legenda: C. R. Rao 100 éves

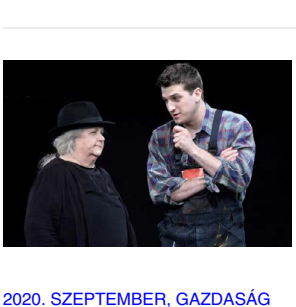
2020. szeptember 10-én ünnepelte Calyampudi Radhakrishna (C. R.) Rao századik születésnapját. Aki csak statisztikát tanult a világon az utóbbi fél évszázadban, az mind találkozhatott a nevével, amelyet híres tételek viselnek. 16 könyv és 350 tudományos cikk szerzője. Rao a véletlen művének tekintette, hogy a statisztikával kapcsolatba került, ami egyébként is a véletlenek tudománya. *Bolla Marianna* életrajzi írása következik egy élő legendáról. Tovább...



2020. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

### Úton-módon 4.

A cikksorozat negyedik részében egy geometriai feladatot járunk körbe, amelyet *Laczkó László* kollégám dolgozott fel. Az anyag megtalálható a Budapesti Fazekas Gimnázium matematikaoktatási portálján (http://matek.fazekas.hu) a cikkek között, „Ismételjük a geometriát egy feladaton keresztül!” címmel. Az ott szereplő megoldások közül válogat és mutat meg néhányat *Szoldatics József*. Tovább...



2020. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

### Esterházy Péter: Rubens és a nemeuklideszi asszonyok, Ódry Színpad

*Molnár Zoltán Gábor* és *Ritter Márta* ajánlója a kortárs magyar irodalom kedvelőinek szól, azoknak, akik szeretik Esterházy Pétert és olvasták (vagy még nem olvasták) a Rubens és a nemeuklideszi asszonyokat és a Hasnyálmirigynaplót. És persze a matematika iránt érdeklődőket is várja az Ódry Színpadon a Színház és Filmművészeti Egyetem fiataljainak produkciója, hiszen ott az a bájos esterházys fogás, ahogy a szerző becsempészi a modern logika és halmazelmélet problémáit a literátus emberek sajátos bölcsészvilágába. Tovább...

2020. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

### Gyászolunk: Pach Zsigmond Pálné (Sós Klára) (1925−2020)

Pach Zsigmond Pálnétól, a BME egyetemi docensétől, aki a Villamoskar Matematika Tanszékén tanított a tanszék létrejöttétől annak megszűnéséig, búcsúzik közvetlen kolleganője, *Csató Éva*. Tovább...

Elemi matematika mesterfokon

2020. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

### Elemi matematika mesterfokon

Egész évszázadra – de talán még messzebbre is – visszamenőleg pontosan lehet tudni, hogy az igazán komoly tehetséggondozás motorja a tanár, aki maga köré gyűjti és meg is tartja az érdeklődő diákokat. Ilyen tanár az Elemi matematika mesterfokon c. könyv szerzője, *Schultz János* is. A tematikus gyűjtemény 357 feladata a hazai és nemzetközi versenyek témaköreit veszi sorra. *Kiss Géza* méltatja a kötetet. Tovább...

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **HÍREK – ÚJDONSÁGOK** ROVAT A MATEMATIKÁHOZ ÉS A BOLYAI TÁRSULATHOZ KAPCSOLÓDÓ ESEMÉNYEKRŐL, ÚJDONSÁGOKRÓL SZÓL. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÁKÓCZI ILDIKÓ.)*

Online
14th Middle European Mathematical Olympiad 2020

Lenger Dániel
2020. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

## Online MEMO

A járvány miatt az idei MEMO-t sajnos nem lehetett élőben megtartani az eredeti tervek szerint Szlovákiában. Ennek pótlására rendhagyó módon Online MEMO szerveződött. A magyar csapat tagjai: Fleiner Zsigmond, Füredi Erik, Hámori Janka, Kovács Tamás, Szabó Kornél, Várkonyi Zsombor nagyon szép eredményeket értek el. *Lenger Dániel* csapatvezető rövid beszámolója következik.

Dobos Sándor
2020. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

## IMO felkészülés a koronavírus árnyékában, 2020

Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpia (IMO) tervezett helyszíne Szentpétervár volt. Ez a beszámoló ennek a különleges évnek a felkészülési krónikája. *Dobos Sándor* először a szakkörök és válogatók 2020-as történetét mutatja be, majd a nyáron megrendezésre került Cyberspace Mathematical Competition (CMC) versenyt. Tovább...

Stephen Ornes
2020. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

## Már a matematikai képletekkel is megbirkóznak a neuronhálózatok

A mesterséges intelligencia neuronhálózatai képesek megoldani mintafelismerési problémaként átfogalmazható technikai kihívásokat. Természetes hangzású nyelvi fordítást nyújtanak. Képkezelő alkalmazások használják őket arra, hogy felismerjék és csoportosítsák a többször felbukkanó arcokat a galériádban. Mindazonáltal a neuronhálózatok mindig is lemaradtak egy szembetűnő területen: a bonyolult szimbolikus matematikai problémák megoldásában. Lehet, hogy most itt az áttörés? 2020 májusában a Quanta Magazine-ban jelent meg Stephen Ornes cikke, amelyet *Csuzdi Domonkos* fordított le magyarra, és *Sugár Tímea* lektorált. Írásunk erre a cikkre hívja fel a figyelmet. Tovább...

Csató Éva
2020. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

## Gyászolunk: Pach Zsigmond Pálné (Sós Klára) (1925−2020)

Pach Zsigmond Pálnétól, a BME egyetemi docensétől, aki a Villamoskar Matematika Tanszékén tanított a tanszék létrejöttétől annak megszűnéséig, búcsúzik közvetlen kolleganője, *Csató Éva*. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon:

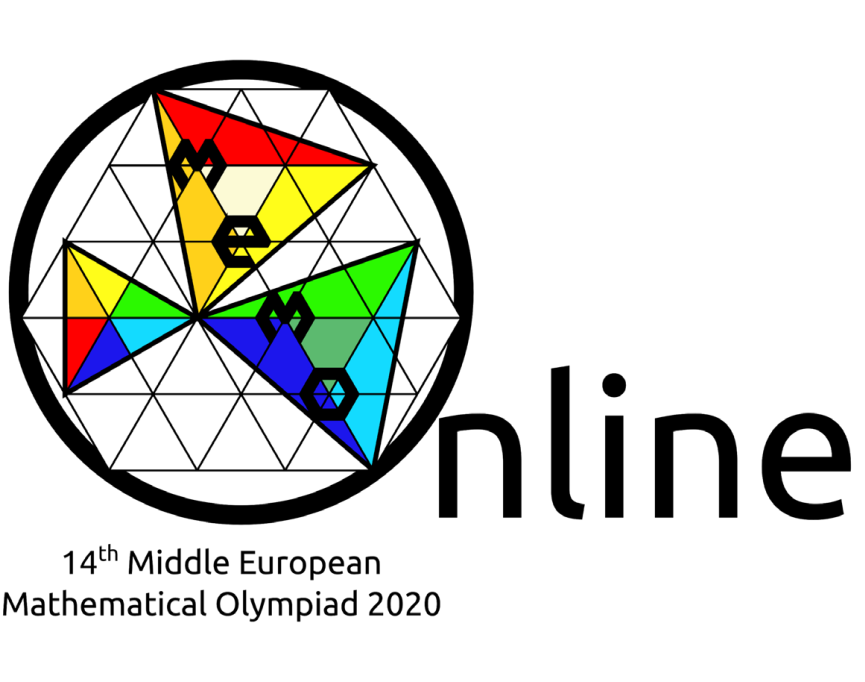
Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Lenger Dániel 2020. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

# Online MEMO

A járvány miatt az idei MEMO-t sajnos nem lehetett élőben megtartani az eredeti tervek szerint Szlovákiában. Ennek pótlására rendhagyó módon Online MEMO-t szerveztünk.



A legtöbb országban a versenyzőknek arra se volt lehetősége, hogy élőben találkozzanak. Szerencsére, a magyar csapat egy helyszínen, a budapesti Fazekasban tudta írni a versenyt.

A magyar csapat tagjai: Fleiner Zsigmond, Füredi Erik, Hámori Janka, Kovács Tamás, Szabó Kornél, Várkonyi Zsombor. Közülük Janka a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium tanulója, a többiek a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium tanulói.

A csapatot Lenger Dániel (Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet) és Imolay András (Eötvös Loránd Tudományegyetem, TTK) vezették.

A magyar csapat nagyon szép eredményeket ért el.

**Füredi Erik** 26 ponttal,

**Várkonyi Zsombor** 25 ponttal

*aranyérmet,*

**Szabó Kornél** 21 ponttal,

**Hámori Janka** 20 ponttal

*ezüstérmet,*

**Fleiner Zsigmond** 18 ponttal,

**Kovács Tamás** 18 ponttal

*bronzérmet* szerzett.

Gratulálunk mindannyiuknak!

Mivel az idei versenyt nem egy nemzet szervezte, ezért a feladatok kiválasztásán és a feladatok koordinációján is nemzetközi csapatok dolgoztak. Összesen 4 magyar koordinátor is részt vett így a munkában: Csahók Tímea a geometria, Győrffy Ágoston a számelmélet, míg Fraknói Ádám és Kovács Benedek a kombinatorika feladat koordinálásban vett részt. Nagyon köszönjük nekik a segítséget!

*Lenger Dániel*
*Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet*

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Dobos Sándor 2020. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

# IMO felkészülés a koronavírus árnyékában, 2020

Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpia (IMO) tervezett helyszíne Szentpétervár volt. Ez a beszámoló ennek a különleges évnek a felkészülési krónikája. Először a szakkörök és válogatók történetét mutatjuk be, majd a nyáron megrendezésre került CMC versenyt.

Még március első napjaiban sem lehetett tudni, mi vár ránk. A Rényi Intézet nagytermében március 10-én, kedden a szokásos módon lezajlott a Surányi János emlékverseny, amely a második olimpiai válogatóverseny. A versenyen 44 diák adott be dolgozatot. Ugyanezen a héten, március 13-án, pénteken volt az utolsó központi olimpiai szakkör Budapesten. A viharos gyorsasággal változó járványhelyzet miatt erre már kevesen jöttek el. Ezen a hétvégén indult az országos veszélyhelyzet és a digitális oktatás. A szakköröket át kellett alakítani, március 27-én az előre meghirdetett olimpiai szakkör időpontjában volt az első zoom-os online olimpiai szakkör. Erre emailben meghívást kapott minden, a Surányi versenyen részt vett diák. A válogatóverseny feladatait beszéltük meg, minden feladat megoldását a javítója mutatta be, kitérve különböző megoldásokra. Szó esett arról is, mire lehetett részpontszámokat kapni. A feladatok felelősei sorban: Dobos Sándor, Kovács Benedek és Borbényi Márton. A megoldások ismeretében lehetett a dolgozatokkal, azok javításával kapcsolatban kérdéseket feltenni, észrevételeket tenni. Amint ezek tisztázódtak, Benedek tájékoztató honlapján megjelentette az eredményeket, majd a visszalépések után kialakult az utolsó, kétnapos válogató névsora. Ezt az utóbbi években a Mategye Alapítvány segítségével – melyet ez úton is köszönünk – Kecskeméten rendeztük. A karantén miatt az április végi kecskeméti verseny elmaradt. Helyette együtt izgultunk a lányokért, akik az online EGMO-n remekül szerepeltek.

Az év végére még három online zoom-os olimpiai szakkör maradt (április 24., május 8. és május 22.). Ezeken korábbi évek válogatóversenyeit dolgoztuk fel. A megoldások ismertetésében közreműködött Lenger Dániel, Williams Kada, Baran Zsuzsa. A zoom-os szakkörökön rendszeresen részt vett Kós Géza, aki tanulságos megjegyzésekkel, útmutatásokkal, tanácsokkal segítette a diákokat. Az egyik feladat megoldása kapcsán bemutatta a számelméletben fontos LTE lemmát, és annak alkalmazásához külön gyakorló feladatsort küldött. Minden közreműködőnek nagy köszönet jár! Az online munkaforma lehetőséget teremtett arra is, hogy a csapat korábbi vezetője, *Pelikán József* és utóda, *Frenkel Péter* is otthonából „jelen lehessen” a szakkörön.

Aki még nem járt olimpiai szakkörön, annak nehéz elmagyarázni, miért van ennek a szakkörnek különleges hangulata, varázsa. Ahogy belép az ember a terembe, együtt látja az ország különböző részeiről összegyűlve mindazokat, akik az adott évjáratokon a matematikával komolyabban foglalkoznak. Például az idei évben a szakkör törzshelye volt a Szegedről, Győrből, Debrecenből, Kecskemétről és persze Budapest különböző iskoláiból jövő diákoknak. Az online szakkörökön ugyanezek a diákok hosszas utazás nélkül részt vehettek, otthonukból kapcsolódhattak a munkába. Ennek kétségtelenül vannak előnyei is, de mégis hiányzott a személyes találkozás.

A korlátozások enyhítése után június 4-5 –én rendeztük meg az utolsó versenyt, ennek javításában a csapatok vezetői mellett segített Borbényi Márton, Csahók Tímea, Imolay András, Kovács Benedek, Lenger Dániel. A versenyen szerzett pontok az említett honlapon követhetők, a kialakult csapatok:

IMO csapattagok: **Beke Csongor**, **Gyimesi Péter** (mindketten a Békásmegyeri Veres Péter Gimnáziumból), **Kocsis Anett**, **Nagy Nándor**, **Tóth Balázs** (ők hárman a budapesti Fazekasból), **Weisz Máté** a szegedi Radnótiból;

MEMO csapattagok: **Fleiner Zsigmond**, **Füredi Erik**, **Hámori Janka**, **Kovács Tamás**, **Várkonyi Zsombor**, **Szabó Kornél**. (Hámori Janka a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnáziumból, a többiek a budapesti Fazekasból).

Idén a MEMO és az IMO is online verseny lesz, a csapatoknak sok sikert kívánunk!

Az utóbbi években Dombóváron volt júniusban olimpiai edzőtábor, ezt idén le kellett mondani. Az IMO sorsa is lassan kezdett körvonalazódni, szeptemberre került át. Júniusban keresték meg a szervezők Frenkel Péter csapatvezetőt azzal, hogy az IMO szokásos idejében egy **online világversenyt** szerveznek, melynek neve **Cyberspace Mathematical Competition**, azaz CMC. Az országokat legfeljebb hatfős csapat képviselheti legalább egy lány taggal, vagy legfeljebb nyolcfős csapat legalább két lány taggal. Az IMO csapatból négyen tudták magukat szabaddá tenni a verseny idejére, hozzájuk csatlakozott a MEMO csapat azon négy tagja, akik a válogatókon a legtöbb pontot gyűjtötték. Az utóbbi évek komoly EGMO-s felkészítésének is köszönhető, hogy Anett és Janka révén nyolcfős csapatunk lehetett. A Bolyai Társulat segített a szervezésben. A dombóvári Európa Hotelben írhattuk a versenyt, a nyári melegben is kellemes alagsori konferenciatermekben (1. kép). Az első nap feladatait itt, a második napét pedig itt találjuk. A versenyt az MAA (Mathematical Association of America) szervezte az AoPS internetes oldal támogatásával.

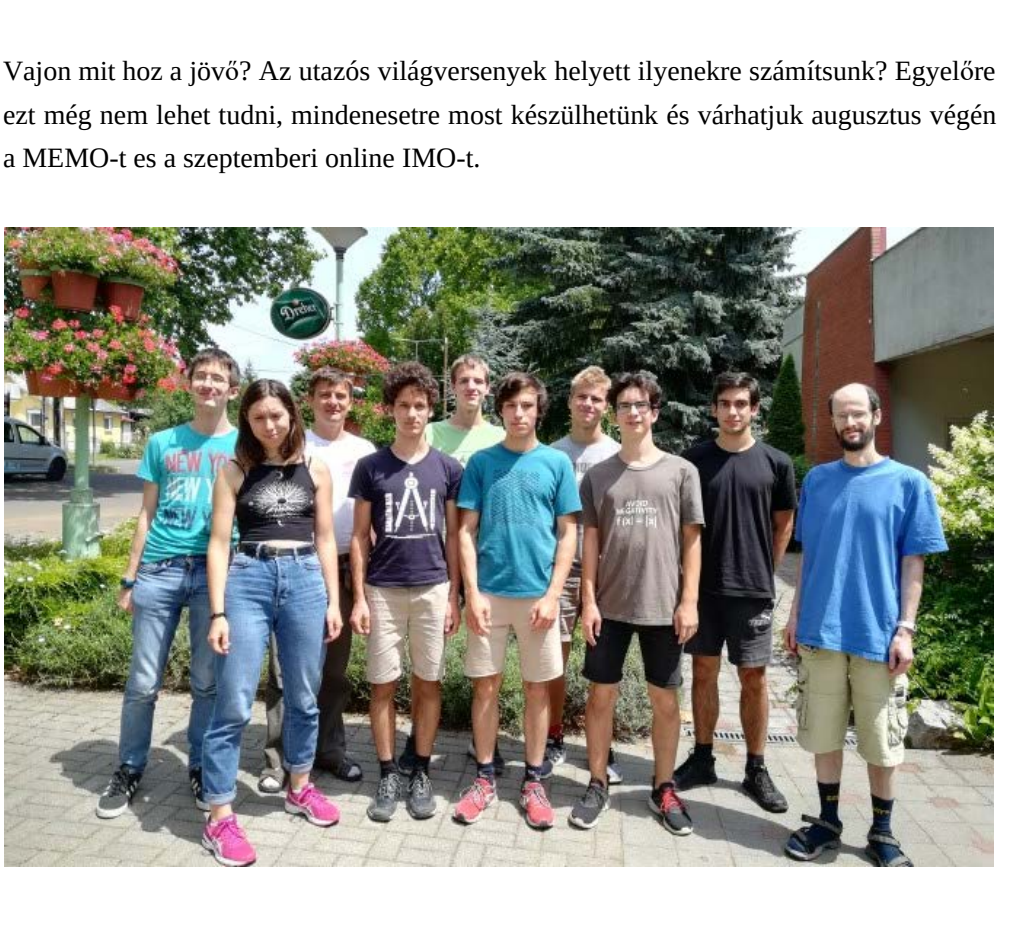
CMC verseny Dombóváron – jobboldalt elöl Hámori Janka

Felvetődik a kérdés: hogyan lehet a javítást egységesen végezni? Nos, minden dolgozatot szkennelve elküldtünk; ezeket egy honlapon keresztül minden regisztrált javító megnézhette. Éltem is ezzel a lehetőséggel, és több ország diákjainak dolgozatába belenéztem. A kiküldött pontozási útmutató alapján a csapatvezetők javasoltak egy pontszámot, majd ezt a koordinátorok vagy jóváhagyták, vagy megindult egy egyeztetés. Nálunk a legtöbb javasolt pontszámot azonnal jóváhagyták, néhány esetben kértek segítséget a fordításhoz, egy-két esetben a pontozást kellett finomítani. Minden diák dolgozatainál feladatonként nyomon lehetett követni, hogyan is zajlott az értékelő levélváltás. Ebből kiderült, a koordinátorok komoly munkát végeztek. Kós Géza is közreműködött a versenyen, dolgozott a problémakiválasztó bizottságban. A verseny második feladata az ő javaslata volt, ennek koordinátori csapatában is dolgozott. A versenyről készült tájékoztató kiadványban megtalálható az összes szervező és közreműködő.

Az IMO-tól egy kicsit eltért ez a verseny, hiszen mindkét napon 5 órán át lehetett dolgozni és mindkét napon 4 feladatot tűztek ki. A szervezők szándéka szerint ezek egyre nehezedtek, az első könnyebb, a többi IMO szintű volt. Végül 75 ország 555 versenyzője mérte össze tudását.

A magyar csapat az országok sorrendjében **14.** lett. *Kocsis Anett* és *Weisz Máté* **arany-**, *Gyimesi Péter*, *Hámori Janka* és *Tóth Balázs* **ezüst-**, *Fleiner Zsigmond* és *Várkonyi Zsombor* **bronzérmet** szereztek, *Kovács Tamás* dicséretet kapott. A háromnapos dombóvári program a feladatok javításával és a megoldások megbeszélésével zárult. Egy ilyen verseny nyilvánvalóan közel sem teremti meg a szokásos IMO atmoszféráját, másrészről viszont örülhetünk, hogy a járványhelyzet ellenére nemzetközi megmérettetésben vehettünk részt, jó, biztonságos körülmények között, minimális utazással, szervezéssel. A verseny honlapján megnézhetjük a videós „záróünnepséget” és a részletes eredménylistát is.

Vajon mit hoz a jövő? Az utazós világversenyek helyett ilyenekre számítsunk? Egyelőre ezt még nem lehet tudni, mindenesetre most készülhetünk és várhatjuk augusztus végén a MEMO-t es a szeptemberi online IMO-t.



Balról jobbra: Kovács Benedek, Kocsis Anett, Dobos Sándor, Weisz Máté, Gyimesi Péter, Várkonyi Zsombor, Fleiner Zsigmond, Kovács Tamás, Tóth Balázs és Frenkel Péter

Írta *Dobos Sándor* Mátrafüreden, a MaMuT táborban, 2020. augusztus 5-én.

beszámolók diákolimpiák

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Stephen Ornes 2020. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

# Már a matematikai képletekkel is megbirkóznak a neuronhálózatok

Több mint 70 évvel ezelőtt a mesterséges intelligencia (MI) kutatásának élvonalában járó tudósok forradalmian új módszerként bevezették a neuronhálózatokat, amelyekkel agyunk működését értelmezhetjük. Az emberi agyban neuronok milliárdjainak összefüggő hálózata értelmezi és dolgozza föl az érzékszerveinkből érkező adatokat, lehetővé téve számunkra, hogy tapasztalatainkból tanulhassunk. A mesterséges neuronhálózatok összefüggő rétegeik segítségével képesek hatalmas mennyiségű adat átszűrésére, ezáltal előre jeleznek és felismernek mintázatokat, követve azokat a szabályokat, amelyeket önmaguknak tanítottak meg.
Mostanra az emberek a neuronhálózatokat egyfajta MI-csodaszerként kezelik, amelyek képesek megoldani mintafelismerési problémaként átfogalmazható technikai kihívásokat. Természetes hangzású nyelvi fordítást nyújtanak. Képkezelő alkalmazások használják őket arra, hogy felismerjék és csoportosítsák a többször felbukkanó arcokat a galériádban. Továbbá a neuronhálózatokon alapuló programok legyőzték a világ legjobb játékosait többek között góban és sakkban.

Mindazonáltal a neuronhálózatok mindig is lemaradtak egy szembetűnő területen: a bonyolult szimbolikus matematikai problémák megoldásában. Ezek között értendőek az analízis kurzusok alapvető elemei, mint az integrálok vagy a közönséges differenciálegyenletek. A bonyodalom magából a precíz megoldásokat követelő matematika jellegéből adódik. A neuronhálózatok ehelyett inkább a valószínűségekben jeleskednek. Megtanulják, hogyan ismerjenek fel mintázatokat – melyik spanyol fordítás hangzik a legjobban, vagy például hogyan néz ki az arcod – és képesek újakat készíteni.

A helyzet az előző év végén változott meg, amikor Guillaume Lample és François Charton, a Facebook párizsi MI kutatócsoportjában dolgozó két informatikus egy új, sikeres megközelítéssel állt elő a szimbolikus matematikai problémák neuronhálózattal történő megoldására. A módszerük nem tartalmazott numerikus közelítéseket, és nem támaszkodott a puszta gépi erőre. Ehelyett kihasználták a neuronhálózatok erősségét; újraértelmezték a matek feladatokat egy tulajdonképpen már megoldott problémaként: ez pedig a nyelvi fordítás.

Kutatásuk eredményeként Lample és Charton programja pontosan ki tudott számítani bonyolult integrálokat és precíz megoldásokat adott differenciálegyenletekre – többek között azokra is, amelyek zavarba ejtettek más, explicit szabályrendszerrel ellátott népszerű matematikai szoftvercsomagokat.

Az új program kihasználja a neuronhálózatok egyik legfontosabb előnyét: saját implicit szabályok alkotására képesek. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy az alkalmazás nem habozott még a legnehezebb integrálok kiszámolása során sem. Elméletben ez a fajta megközelítés képes lehet olyan rendhagyó „szabályokat" alkotni, amelyek előrelépést hozhatnak olyan – jelenleg ember vagy gép által megoldhatatlan – problémák terén, amilyen például új matematikai bizonyítások felfedezése, vagy magának a neuronhálózat természetének a megértése.

Természetesen ez még nem történt meg. De az világos, hogy a csapatnak sikerült választ találnia arra az évtizedes kérdésre, hogy képes-e az MI szimbolikus matematikai számításokat végezni – és a válasz: igen.

A számítógépek mindig is jók voltak nagy mennyiségű számadat feldolgozásában. A matematikai programcsomagok vagy számítógépes algebrai rendszerek több tucat vagy több száz algoritmust kombinálnak, melyek mind be vannak huzalozva előre beállított utasításokkal. Ezek tipikusan szigorúan szabálykövetők, egy-egy adott művelet elvégzésére készültek, viszont nem képesek kezelni a kivételeket. Számos szimbolikus problémára numerikus megoldást adnak, amelyek a mérnöki és fizikai alkalmazásokhoz elegendően pontosak.

A neuronhálózatok másfélék. Nem tartalmaznak behuzalozott (előre beprogramozott) szabályokat. Helyettük nagy méretű tanító mintán gyakorolnak – minél nagyobb, annál jobb – és statisztika segítségével adnak nagyon jó közelítéseket. A folyamat során megtanulják, mi eredményezi a legjobb kimenetelt. A nyelvi fordító programok kifejezetten jeleskednek: ahelyett, hogy szóról-szóra fordítanának, a mondatok értelmét keresik meg a teljes szöveg kontextusát figyelembe véve. A Facebook kutatói a hátrány helyett ebben azt az előnyt látták meg, mely segíthet a szimbolikus matematikai problémák megoldásában. Ez egyfajta problémamegoldási szabadságot ad a programnak.

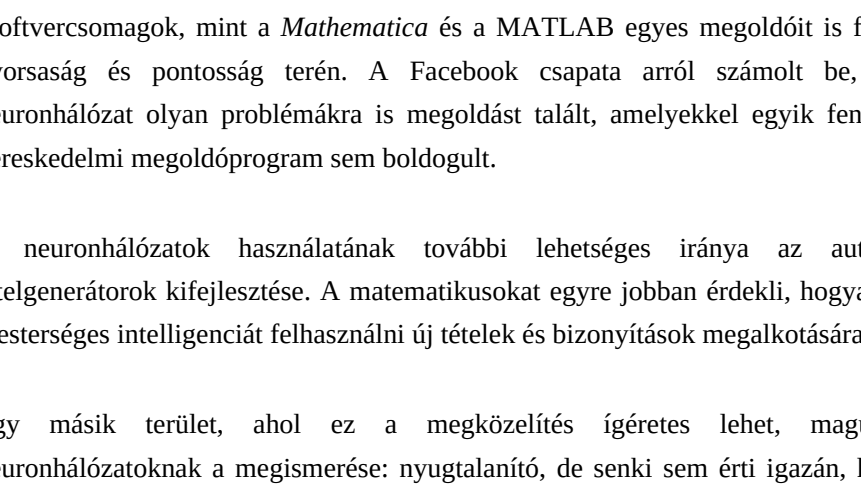
Ez a szabadság különösen hasznos bizonyos nyitott kérdések esetében, mint például az integrálás. Egy függvény deriváltjának meghatározásához csak néhány előre definiált lépést kell követni. Viszont egy integrál kiszámíításához gyakran valami egyébre is szükség van: valamire, ami közelebb áll a megérzéshez, mint a számoláshoz.

A Facebook-csapat azt gyanította, hogy ezt a megérzést lehetne közelíteni mintafelismeréssel: „az integrálás egyike a mintázat felismerésre leginkább hasonlító matematikai feladatoknak" – állítja Charton. Tehát annak ellenére, hogy a neuronhálózat még nem igazán érti, mit csinálnak a függvények és mit jelentenek a változók, mégis kifejleszt egyfajta ösztönt. A neuronhálózat szépen lassan megérzi, mi az, ami működik, anélkül hogy tudná miért.

Példának okáért ha egy matematikust megkérünk, hogy integrálja pl. az $yy'(y^2+1)^{-1/2}$ kifejezést, ösztönösen gyanítani fogja, hogy a primitív függvény – vagyis az a kifejezés, amelynek a fenti a deriváltja – tartalmazni fog valamit, ami hasonlítani fog az $y^2+1$ négyzetgyökére.

Annak érdekében, hogy a neuronhálózat egy matematikushoz hasonlóan tudja feldolgozni a szimbólumokat, Charton és Lample kezdésképp átültették a matematikai kifejezéseket hasznosabb alakokba. Végül is annál kötöttek ki, hogy fákként értelmezik őket újra – ez lényegében egy mondat ágrajzára hasonlító formátum. Az olyan matematikai műveletek lettek a fa elágazásai, mint például az összeadás, kivonás, szorzás, osztás , hasonlóképpen a hatványozás, vagy a trigonometrikus függvények. Az argumentumok (változók és számok) lettek a levelek. Ez a fastruktúra, néhány kivételtől eltekintve, megragadta azt a módot, amivel a műveleteket hosszabb kifejezésekbe lehet ágyazni.

„Amikor egy terjedelmes függvénnyel találkozunk, látjuk, hogy az kisebb függvényekből áll össze, és van némi megérzésünk azzal kapcsolatban, hogy mi is lehet a megoldás" – mondta Lample. „Úgy gondoljuk, hogy a modell próbál a megoldásra vezető nyomokat keresni a szimbólumokban." Állítása szerint ezt a folyamatot párhuzamba lehet állítani azzal, ahogyan az emberek oldják meg az integrálokat – és igazából minden más matematikai problémát – azáltal, hogy visszavezetik őket felismerhető alproblémákra, amelyeket már korábban megoldottak.


$2+3\times(5+2)$
+
2
×
3
+
5
2
$3x^2+\cos(2x)-1$
+
×
−
3
pow
cos
1
x
2
×
2
x
$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$
−
∂
×
∂
x
/
∂
ψ
x
1
pow
∂
t
v
2
ψ
t

A matematika fastruktúrában

A matematikai kifejezések, kapcsolatok szerteágazó gyűjteményeként való átírásával a kutatók végül olyan neuronhálózatot fejlesztettek ki, amely képes feldolgozni a szimbolikus matematikát. A műveletek, mint pl. az összeadás és a trigonometrikus függvények válnak elágazásokká, míg a számok és a változók levelek lesznek. Ez a megközelítés alkalmat ad a neuronhálózatoknak, hogy kialakítsanak egyfajta matematikai ösztönt arra,hogy milyen alakban kell keresni a megoldást.
(Forrás: Quanta Magazine, 5W Infographics)

Ennek a struktúrának a kialakítása után a kutatók elemi függvények tömegét használva előállítottak számos tanító mintakészletet – összességében kb. 200 millió (fastruktúrájú) egyenletet és megoldásukat. Ezt követően a mintákat betáplálták a neuronhálózatba, így az megtanulhatta, hogyan néz ki e problémák megoldása.

A betanítás után eljött az ideje, hogy meglássák, mire képes a hálózat. Az informatikusok rábízták egy 5000 egyenletből álló próbahalmazt, ezúttal megoldások nélkül. (A tesztfeladatok egyike sem volt megoldhatatlan besorolású.) A neuronhálózat diadalmaskodott: sikerült a helyes megoldásokra jutnia – jól és pontosan – a feladatok túlnyomó többségében. Kifejezetten jeleskedett az integrálásban, aminek során a feladatok közel 100%-ában jó megoldásra jutott, ám kevésbé volt eredményes a közönséges differenciálegyenletek terén.

Szinte minden feladat esetében kevesebb, mint 1 másodperc kellett a helyes megoldás előállítására. Sőt, az integrálási példák esetében még az olyan népszerű szoftvercsomagok, mint a *Mathematica* és a MATLAB egyes megoldóit is felülmúlta gyorsaság és pontosság terén. A Facebook csapata arról számolt be, hogy a neuronhálózat olyan problémákra is megoldást talált, amelyekkel egyik fent említett kereskedelmi megoldóprogram sem boldogult.

A neuronhálózatok használatának további lehetséges iránya az automatikus tételgenerátorok kifejlesztése. A matematikusokat egyre jobban érdekli, hogyan lehet a mesterséges intelligenciát felhasználni új tételek és bizonyítások megalkotására.

Egy másik terület, ahol ez a megközelítés ígéretes lehet, maguknak a neuronhálózatoknak a megismerése: nyugtalanító, de senki sem érti igazán, hogyan is működnek. Tanító bitek lépnek be az egyik oldalon, és jósló bitek bukkannak föl a túloldalon, de hogy a kettő között mi történik – a pontos folyamat, ami miatt ilyen jól jósolnak a neuronhálók –, továbbra is igen fontos nyitott kérdés.

A további érdekességeket tartalmazó cikk teljes egészében a Quanta Magazine 2020. májusi számában olvasható angolul, írója *Stephen Ornes.*

*Az általunk közzétett részleteket fordította: Csuzdi Domonkos (BME), lektorálta: Sugár Tímea (BME).*

https://www.quantamagazine.org/symbolic-mathematics-finally-yields-to-neural-networks-20200520/

recenzió mesterséges intelligencia tétel-bizonyítás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Csató Éva 2020. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

# Gyászolunk: Pach Zsigmond Pálné (Sós Klára) (1925−2020)

Fájó szívvel búcsúzunk Pach Zsigmond Pálnétól, a BME egyetemi docensétől, a kiváló matematika tanártól, aki életének 95. évében otthonában elhunyt.

A Villamoskar Matematika Tanszékén tanított a tanszék létrejöttétől annak megszűnéséig. Még elképzelni is nehéz: 1950. május 1-étől 2000. április 30-ig volt itt közalkalmazott, azután pedig sokáig óraadóként dolgozott. Villamosmérnök évfolyamok egész sora az ő kitűnő előadásain és gyakorlatain ismerkedett a tanulmányaihoz szükséges matematikai diszciplínákkal és fejlesztette logikai készségét. Sokat foglalkozott hallgatóival a tanórákon kívül is, segítette őket problémáik megoldásában. A tanrendben szereplő órák mellett gyakran ugyanannyi pótórát tartott, hogy a lemaradókat segítse a felzárkózásban. Ha reggel nyolckor volt órája, hétkor már az íróasztalánál ült és készült.

Több kiváló jegyzet, tankönyv és példatár írásával is segítette a tanszék munkáját. Talán még ma is az ő háromkötetes komplexfüggvénytani jegyzete tartalmazza a téma legátfogóbb tárgyalását. Vektor- és tenzoranalízisről szóló, Frey Tamással közös könyve 6 kiadást élt meg. Cseh és angol nyelvre is lefordították. Tarján Imrével írt ,,Fizika orvosok és biológusok számára'' című munkája oroszul is megjelent.

Két emberöltőnyi, lelkiismeretes, kitűnő munkájának nagyrészt tanúja lehettem, mint közvetlen kolléganője, szobatársa és barátja. Szakmai munkája mellett szerető gyermek, testvér, barát, feleség és családanya is volt. Férjével, Pach Zsigmond Pál gazdaságtörténész professzorral közösen nagy gonddal nevelték és taníttatták két gyermeküket, akik közül Éva magyar-angol szakos középiskolai tanár lett, János pedig neves matematikus. Kedves, szerény, együttérző, barátságos ember volt, akit kollégái és hallgatói egyaránt szerettek, és akihez fenntartás nélküli bizalommal fordulhattak.

Klárika, nem felejtünk, mindig nagy szeretettel gondolunk rád!

*Csató Éva*
*Budapesti Műszaki Egyetem*

nekrológ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

AZ **INTERJÚ-PORTRÉ** MENÜPONT JÓL VAGY KEVÉSBÉ ISMERT MATEMATIKUSOKAT, VAGY OLYAN, EGYKOR MATEMATIKUSKÉNT VÉGZETTEKET SZERETNE BEMUTATNI, AKIK MA MÁS SZAKMA ELISMERT KÉPVISELŐI, SPORTOLÓK, MŰVÉSZEK...(ROVATSZERKESZTŐ: *OLÁH VERA*.)

Szerkesztő
2020. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

## Matematikus portrék: Backhausz Ágnes

*Backhausz Ágnes* az ELTE oktatója, kutatásait pedig 6 éve a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben folytatja. Korábban a Struktúrák limeszei, most pedig a Hálózatok dinamikája kutatócsoportban vizsgálja a véletlen gráfok sajátértékeinek viselkedését.

Szerkesztő
2020. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

## Matematikus portrék: Zombori Zsolt

*Zombori Zsolt* már hétéves korában programokat írt, egyetemistaként a filozófia, majd a logika érdekelte. Három éve a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben a Mesterséges intelligencia kutatócsoportban a gépi tanulás és az automatikus tételbizonyítás témájával foglalkozik.

Lovász László
2020. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

## T. Sós Vera köszöntése

Nagy öröm Sós Verát, oly sokunk munkatársát, akadémiai mamáját vagy nagymamáját, a magyar kombinatorikus iskola nagyasszonyát 90. születésnapján köszönteni. De nehéz feladat is, hiszen olyan sok minden tódul az ember fejébe: fontos és gyönyörű matematikai eredményei; elragadó egyetemi és konferencia-előadásai; új tárgyak bevezetése az oktatásba; személyes törődése munkatársaival és tanítványaival; díjai és elismerései; a tudományos közélet odaadó szolgálata itthon és nemzetközi téren. – *Lovász László* írása.

Sárközy Gábor
2020. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

## Szemerédi Endre 80. születésnapjára

Személyes visszaemlékezéseivel köszönti 80. születésnapján az Abel-díjas Szemerédi professzort *Sárközy Gábor:* – Nagy megtiszteltetés számomra, hogy ezt a cikket megírhattam. Nem túlzás, hogy egész életemben ismertem Endrét és rengeteget köszönhetek neki. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

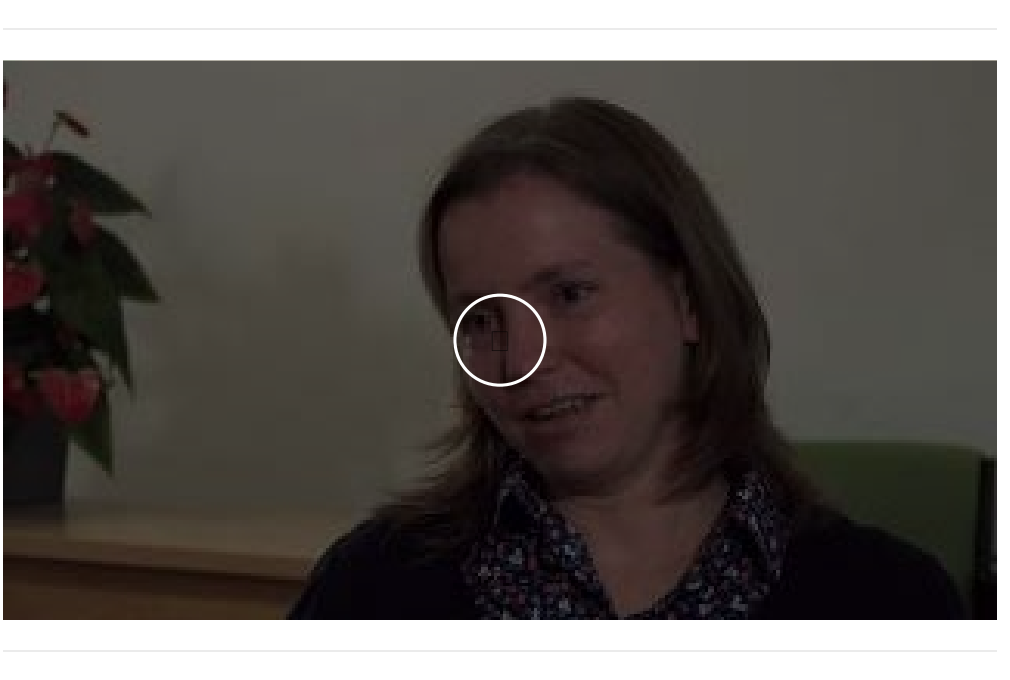
Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2020. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

# Matematikus portrék: Backhausz Ágnes



*Backhausz Ágnes* az ELTE oktatója, kutatásait pedig 6 éve a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben folytatja. Korábban a Struktúrák limeszei, most pedig a Hálózatok dinamikája kutatócsoportban vizsgálja a véletlen gráfok sajátértékeinek viselkedését.

☐ Rényi Intézet ☐ mesterséges intelligencia ☐ gráfok ☐ ELTE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

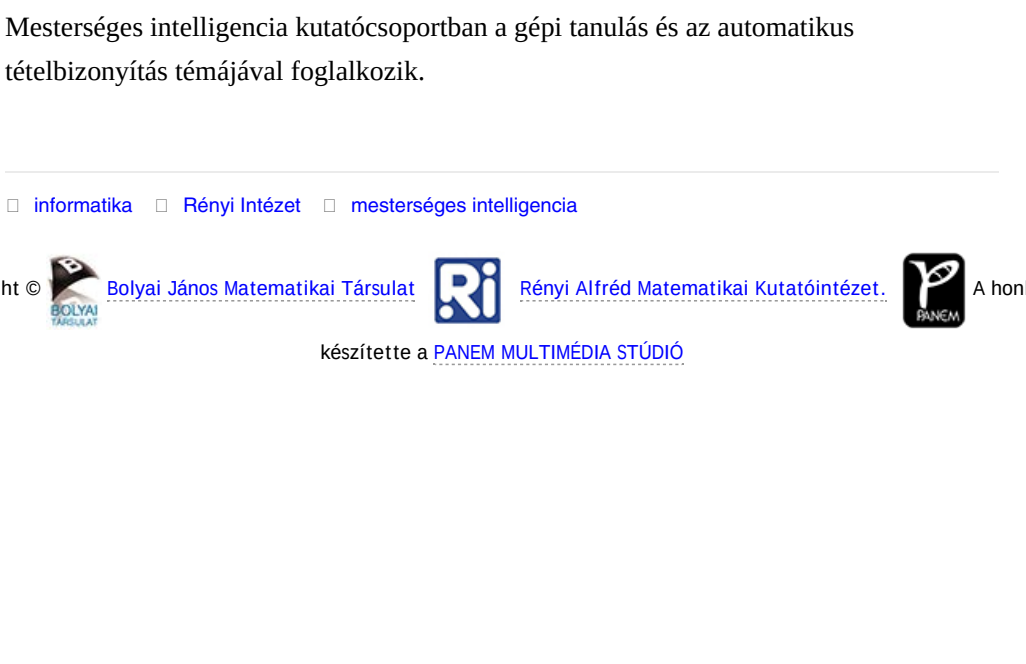
Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2020. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

# Matematikus portrék: Zombori Zsolt



*Zombori Zsolt* már hétéves korában programokat írt, egyetemistaként a filozófia, majd a logika érdekelte. Három éve a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben a Mesterséges intelligencia kutatócsoportban a gépi tanulás és az automatikus tételbizonyítás témájával foglalkozik.

informatika Rényi Intézet mesterséges intelligencia

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Lovász László 2020. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

# T. Sós Vera köszöntése

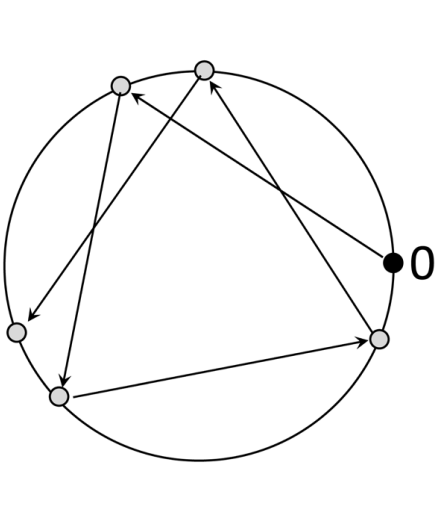
Nagy öröm Sós Verát, oly sokunk munkatársát, akadémiai mamáját vagy nagymamáját, a magyar kombinatorikus iskola nagyasszonyát 90. születésnapján köszönteni. De nehéz feladat is, hiszen olyan sok minden tódul az ember fejébe: fontos és gyönyörű matematikai eredményei; elragadó egyetemi és konferencia-előadásai; új tárgyak bevezetése az oktatásba; személyes törődése munkatársaival és tanítványaival; díjai és elismerései; a tudományos közélet odaadó szolgálata itthon és nemzetközi téren.

Lehetetlen volna mindezekről egy rövid születésnapi köszöntőben olyan részletesen írni, ahogyan kellene. Ehelyett megpróbálom kiemelni három-négy eredményét, és megvilágítani azok hátterét és hatását.

## Számelmélet, egyenletes eloszlás

Sós Vera első nagyon jelentős kutatásai a számelmélethez, konkrétan egy $\alpha$ irracionális szám többszörösei törtrészeinek eloszlásához kapcsolódnak.

A problémakör szokásos szemléltetéseként vegyünk egy egységnyi kerületű kört, és egy adott kiinduló pontból (nevezzük ezt 0-nak) mérjünk fel egy $\alpha$ hosszúságú ívet (mondjuk pozitív körüljárási irányban), majd ennek végpontjából egy másik $\alpha$ hosszúságú ívet, és ezt ismételjük $n$-szer (1. ábra). Kapunk így a körön $n+1$ pontot, melyek a kört $n+1$ ívre osztják (1. ábra). A $k$-adik pont távolsága a 0-tól, pozitív irányban, $\{k\alpha\}$ ($k\alpha$ tört része), és ezt a pontot így fogjuk nevezni.



1. ábra. Lépések egy egységnyi kerületű körön.

Ha $\alpha$ racionális szám, akkor a kapott pontsorozat periodikus lesz (periódusa az $\alpha$ nevezője, mondjuk $q$), és csupa egyforma, $1/q$ hosszúságú ívre osztják a kört. Egészen más a helyzet, ha $\alpha$ irracionális. Ekkor $n$ növekedtével egyre kisebb ívek keletkeznek. De így is bizonyítható egy fontos szabályossága ezeknek az ívhosszaknak:

**Három-távolság tétel.** *Bármely $\alpha$ irracionális számra és $n \geq 1$ egész számra, a $0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{n\alpha\}$ pontok a kört olyan ívekre osztják, melyek között legfeljebb három különböző hosszúságú van. Ha pontosan három van, akkor a legnagyobb ívhossz a másik két ívhossz összege.*

Ezt a tényt Steinhaus sejtette, és 1958-ban bizonyította be Sós Vera és (tőle függetlenül) Surányi János és Świerczkowski.

Az, hogy a távolságok egyre kisebbek lesznek, azt jelenti, hogy ha $n$ végtelenhez tart, akkor az $n\alpha$ pontok mindenütt sűrűn fognak elhelyezkedni, vagyis minden ívre előbb-utóbb jut belőlük. Ennél azonban sokkal több igaz. Weyl, Sierpiński és Bohl bizonyították be 1910 körül, hogy minden $c$ hosszúságú ívre aszimptotikusan $cn$ pont jut, vagyis a pontok eloszlása ebben az értelemben egyenletes.

De mekkora hibát („diszkrepanciát”) takar az „aszimptotikusan” kifejezés? Ez már nehéz kérdésekhez vezet, és Sós Vera igen jelentősen járult hozzá a kérdés megválaszolásához. Egyik legjelentősebb eredménye egy diszkrepancia-formula levezetése, amelyből a sorozat eloszlásának szinte minden tulajdonsága leolvasható. (A formula kimondása túlmutat ennek a köszöntőnek a keretein.)

Kiderült (elsősorban Sós Vera kezdeményezésére), hogy nem csak az $n\alpha$ sorozatok, hanem általános számsorozatok eloszlására vonatkozóan is hasonló eredmények bizonyíthatók. Ezek az eredmények fontosak a dinamikus rendszerek modern elméletében és a numerikus integrálásban is.

## Gráfelmélet

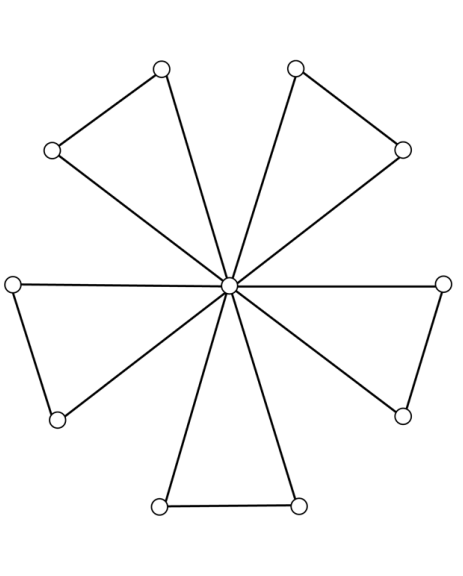
Sós Vera másik nagy kutatási területe a gráfelmélet, annak több ága és kérdésköre. Beszéljünk először az extremális gráfelméletről. Ennek keletkezését az 1940-es évektől számítjuk, Turán Pál tételének megjelenésétől. A terület számos kulcsfontosságú problémája és eredménye Erdős Páltól származik, akinek egyik legközvetlenebb, legszorosabban együtt dolgozó munkatársa Sós Vera volt.

Sós Vera egyik nagy erőssége, hogy látszólag távolálló problémák között mély analógiákat, összefüggéseket tud feltárni. Így elsők között volt annak felismerésében és propagálásában, hogy meglepő módon a számelméletben az egyenletes eloszlások elmélete és az extremaális gráfelmélet számos eredménye szorosan összefüggnek egymással.

– Az egyenletes eloszlásra vonatkozó diszkrepancia-tételek azt mondják ki, hogy akárhogyan is veszünk a $[0,1]$ intervallumból egy számsorozatot, lesz olyan $n$ és olyan $(a,b)$ részintervallum, hogy az első $n$ számból lényegesen több vagy kevesebb esik ebbe az intervallumba, mint $(b-a)n$ (amennyit várnánk).

– A fent említett Turán-tétel azt mondja ki (legegyszerűbb, bár nem legélesebb megfogalmazásban), hogy ha egy $n$ csúcsú gráfban több, mint $(1-1/k)n^2/2$ él van, akkor van benne $k+1$ csúcsú teljes gráf; vagyis van olyan $k+1$ elemű csúcshalmaz, amibe lényegesen több él esik, mint az átlag.

Láthatjuk, hogy mindkét tétel azt mondja ki, hogy bizonyos halmazok nem lehetnek teljesen egyenletesen szétterítve. Hasonló eredmény Ramsey tétele is, és nyilván ez is motiválta Sós Verát, hogy Ramsey és Turán tételeinek közös általánosítását dolgozza ki Erdős Pállal.



2. ábra. A szélmalom-gráf

Egyszerűen megfogalmazható, de igen sokat idézett gyöngyszem Erdős Pál, Rényi Alfréd és T. Sós Vera „barátság tétele” (Friendship Theorem). Nevezzük *szélmalomnak* az olyan gráfot, mely olyan háromszögek úniója, melyeknek egyetlen $u$ közös pontja van (2. ábra). Könnyű ellenőrizni, hogy egy szélmalomban bármely két csúcsnak pontosan egy közös szomszédja van. A tétel ennek megfordítása:

*Ha egy véges gráfban bármely két csúcsnak pontosan egy közös szomszédja van, akkor az szélmalom.*

Ennek a tételnek számos bizonyítását publikálták. Szinte mindegyik azzal a megfigyeléssel indul, hogy *ha két csúcs nincs összekötve, akkor a fokuk azonos.*

[Ha $a$ és $b$ nincs összekötve, akkor $a$ minden $u$ szomszédjához – a feltevés szerint – pontosan egy olyan $u'$ csúcs van a gráfban, mely $b$-nek is és $u$-nak is szomszédja. Könnyű belátni, hogy az $u'$ csúcsok mind különbözőek: ha $a$-nak $u$ és $v$ szomszédai, és $u'=v'$ volna, akkor $u$-nak és $v$-nek két közös szomszédja volna, $a$ és $u'$. Így tehát $b$-nek legalább annyi szomszédja van, mint $a$-nak. Felcsrélve $a$ és $b$ szerepét látjuk, hogy fokuk azonos.]

Egyszerű feladat innen azt belátni, hogy legfeljebb egy kivétellel minden pont foka azonos. Ha egyetlen kivétel van, akkor az minden más ponttal össze van kötve, és azonnal eljutunk a szélmalomhoz. De mi van, ha minden pont foka azonos, mondjuk $d$? Kiderül, hgy ez nem lehetséges, ha $n>3$; de ez már nem olyan egyszerű. Egy lehetséges megfogása a kérdésnek az, hogy a gráf tulajdonságait egy mátrixegyenletben foglaljuk össze:

$$A^2 = J + (d-1)I,$$

ahol $A$ a gráf adjacencia-mátrixa, $J$ a csupa-1 mátrix, és $I$ az egységmátrix (mindegyik mátrix $n \times n$-es). A különböző bizonyítások ennek a mátrixegyenletnek a megoldhatatlanságát különböző módszerekkel mutatják meg: lehet vizsgálni $A$ sajátértékeit, vagy hatványait, lehet dolgozni a valós test fölött vagy alkalmas véges test fölött, stb.

Ide csatlakozik a gráfelmélet egy fontos nagy területe, az erősen reguláris gráfok elmélete. Itt olyan gráfokat vizsgálunk, melyek regulárisak (minden csúcs foka azonos), és két csúcsnak vagy $a$ vagy $b$ közös szomszédja van aszerint, hogy össze vannak-e kötve vagy nincsenek. A barátság tételhez azt kell megmutatni, hogy ha $a=b=1$, akkor nincs ilyen gráf; de más $a$ és $b$ értékekhez már van. Nem megyünk bele ennek a részletezésébe, de egy konstrukciót érdemes bemutatni az erősen reguláris gráfok ürügyén.

Tekintsük azt a gráfot, melynek csúcsai a $0,1,2,\dots,p-1$ számok, ahol $p$ egy $4k+1$ alakú prímszám. Az $u$ és $v$ csúcsokat összekötjuük, ha van olyan $x$ egész szám, melyre $(u-v)-x^2$ osztható $p$-vel (vagyis $u-v$ kvadratikus maradék). A $p=5$ esetben az ötszöget kapjuk. Ezt a gráfot *Paley-gráfnak* nevezzük.

Elemi számelmélettel könnyű belátni, hogy a Paley-gráf minden csúcsa $(p-1)/2$ fokú. Csak kicsit nehezebb belátni, hogy két összekötött csúcsnak $(p-5)/4$ közös szomszédja van, két nem összekötött csúcsnak pedig $(p-1)/4$. Vagyis a Paley gráf erősen reguláris.

Ennél azonban fontosabb számunkra a következő észrevétel. Konstruáljunk a $p$ csúcson egy másik gráfot véletlenszerűen úgy, hogy bármely pontpárt (egymástól függetlenül) $1/2$ valószínűséggel kötünk össze. Így kapjuk az ($1/2$ sűrűségű, $p$ csúcsú) Erdős–Rényi véletlen gráfot. Ebben a gráfban bármely csúcs fokának a várható értéke $(p-1)/2$, és két csúcs közös szomszádainak várható száma $(p-1)/4$. A nagy számok törvényeinek segítségével be lehet látni, hogy ha $p$ elég nagy, akkor a fokszámok és közös-szomszéd-számok mindegyike közel lesz a vérható értékéhez. Vagyis a véletlen gráf nagyon fog hasonlítani a Paley-gráfhoz, ha $p$ elég nagy.

Ezzel el is jutottunk Sós Vera egyik központi kutatási témájához, a determinisztikus, véletlenszerű és véletlen struktúrák kapcsolatának, hasonlóságainak és különbségeinek vizsgálatához. Az egyenletes eloszlásokra vonatkozó számelméleti kutatásaiban is jelen van ez az általános kérdésfeltevés.

De a gráfoknál maradva, tekintsünk egy végtelen $G_1, G_2, \dots$ sorozatukat, ahol a $G_k$ gráf $n_k$ csúcsszámáról feltesszük, hogy $n_k \to \infty$. A sorozatot $\alpha$ ***sűrűségű kvázivéletlennek*** nevezünk ( $0 < \alpha < 1$), ha a következő teljesül: a $G_k$ gráf minden fokszáma, $o(n_k)$ kivétellel, $\alpha n_k + o(n_k)$, és $o(n_k^2)$ kivétellel, bármely két csúcs közös szomszédainak száma $\alpha^2 n_k + o(n_k)$. (Az $o(.)$ a $k \to \infty$ esetre vonatkozik.) A kvázivéletlen sorozat fogalmát Thomason [12] munkáját általánosítva Chung, Graham és Wilson [5] vezették be.

Ha minden $n$-re konstruálunk egy $n$ csúcsú, $p$ sűrűségű Erdős–Rényi véletlen gráfot, akkor ez a gráfsorozat $1$ valószínűséggel kvázivéletlen lesz. A fentiekből látható, hogy a Paley-gráfok sorozata is kvázivéletlen. Sok más algebrai és számelméleti konstrukció is adható ilyen sorozatra.

Kvázivéletlen gráfsorozatoknak igen sok jellemző tulajdonságuk van, például, hogy pontjaiknak minden $q$ elemű halmazába $\alpha q^2/2 + o(n^2)$ élük esik, vagyis az élek „szétterítettsége” elég jó. Legfontosabb a későbbiek szempontjából az, hogy minden rögzített $q$ csúcsú, $m$ élű $H$ gráfra a $H$-val izomorf részgráfok száma a $G_k$ gráfban $\alpha^m n_k^q + o(n_k^q)$. Ami a legmeglepőbb, elegendő ezt csak két kis gráfra megkövetelni, nevezetesen az élre és a négyszögre.

Nem sokkal később Simonovits Miklós és T. Sós Vera [10] is publikáltak egy fontos cikket a kvázivéletlen gráfokról, melyben a Szemerédi-féle regularitási lemmával hozták kapcsolatba. (Ez utóbbi kimondása nem fér egy ilyen köszöntő kereteibe.)

## Gráflimeszek

2003-ban szinte egyidőben három kutató a Microsoft Research matematikai csoportjában három igen érdekes kérdést tett fel. Michael Freedman (Fields-érmes) azt kérdezte, hogy vajon milyen gráf-paraméterek jellemezhetők úgy, mint alkalmas statisztikus fizikai modellek partíció-függvényei. Jennifer Chayes (a csoport vezetője), a Barabási-Albert internet modellt vizsgálva kérdezte, hogy vajon értelmezhető-e egy véletlenszerűen növekedő gráfsorozat „határeloszlása” (a centrális határeloszlás-tételhez hasonlóan). T. Sós Vera (aki látogató volt a csoportnál) azt vetette fel, hogy hogyan lehet a kvázirandom gráfsorozatok jellemzéseit többosztályú kvázirandom gráfokra általánosítani.

Hamarosan kiderült, hogy a három kérdés szorosan összefügg egymással. A következő években Sós Vera rendszeres látogatója lett a csoportnak, és sok-sok időt töltöttünk (Christian Borgs, Jennifer Chayes, Sós Vera, Vesztergombi Katalin és én) a tábla előtt ülve vagy ácsorogva, kidolgozva a gráflimesz-elmélet alapjait. Sós Vera számelméleti kérdései és a véletlen–determinisztikus határvonalon szerzett tapasztalatai izgalmas elegyet alkottak Jennifer Chayes és Christian Borgs statisztikus fizikusi szemléletével és tudásával. Ritka a matematikában az ennyire meggyőzően „interdiszciplináris” közös kutatás.

Kicsit később bekapcsolódott a munkába Szegedy Balázs is (aki posztdok volt a csoportban). Az eredményeket több évvel később könyvben foglaltam össze, de mint oly sokszor, a téma első publikációi [1,2] talán jobban tükrözik az eredményekhez vezető utat. Freedman kérdését vele és Schrijverrel közös cikkben válaszoltuk meg, amit aztán más, algebrai irányban Szegedy Balázs és Schrijver továbbvitték. Sós Vera problémáját ennek az algebrai módszernek a felhasználásával vele közös cikkben sikerült megoldani [8]. Ezek a módszerek aztán beépültek a gráflimesz-elméletbe.

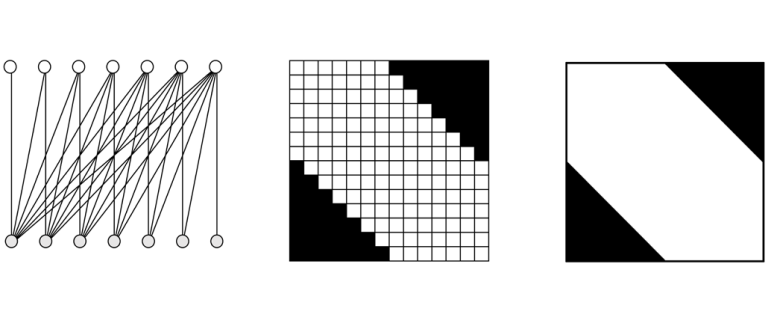
Látható ebből a rövid történeti áttekintésből, hogy akár a legalapvetőbb eredmények érthető előadására sem vállalkozhatok itt. De annyit meg kell tegyek, hogy bevezessem az alapvető definíciót, és két ábrán motiváljam.

Legyen $F$ és $G$ két véges gráf, és jelölje $t(F,G)$ annak a valószínűségét, hogy egy véletlen $V(F) \to V(G)$ leképezés élt élbe visz. Akkor mondjuk, hogy egy $(G_1, G_2, \dots)$ gráfsorozat *konvergens*, ha csúcsszámuk a végtelenhez tart, és a $(t(F,G_1), t(F,G_2), \dots)$ számsorozat minden $F$ gráfra konvergens. Speciálisan, ha $F$ az egyetlen élből álló gráf, akkor ez azt jelenti, hogy az élsűrűségek sorozata konvergens.

Minden kvázivéletlen gráfsorozat konvergens, de nagyon sok más, véletlen és determinisztikus gráfsorozat is konvergens. Minden végtelen gráfsorozatból kiválasztható egy konvergens részsorozat. A fogalom triviálissá válik, ha a $G_n$ gráfok élsűrűsége 0-hoz tart, ezért általában fel lehet tenni, hogy a $G_n$ gráfok sűrűek (legalább const$\cdot n^2$ élük van).

A fogalom erejét az adja, hogy igen sok ekvivalens módon is definiálható: két gráf „vágástávolsága” segítségével, statisztikus fizikai paraméterek konvergenciájával stb. Ezeket az ekvivalenciákat a [3,4] cikkekben dolgoztuk ki.

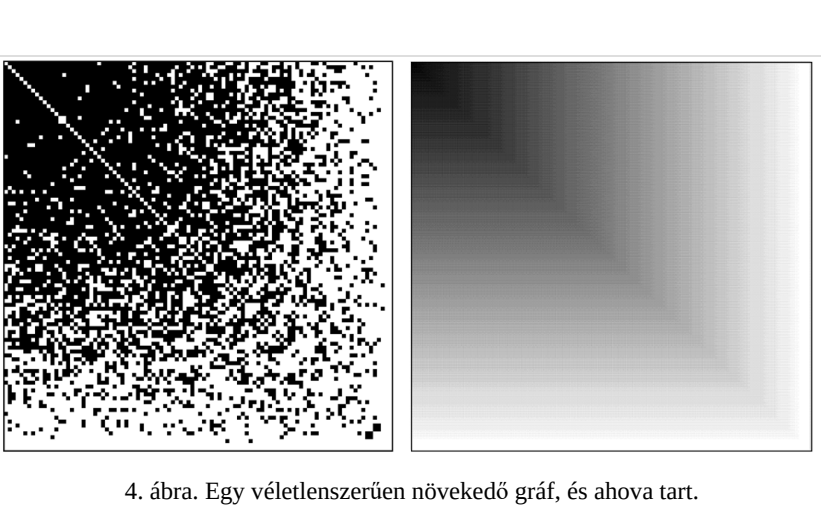
A 3. ábra bal oldalán egy elég egyszerű konvergens gráfsorozat, a *félgráfok* sorozatának egy tipikus tagja látható. A középső ábrát úgy kaptuk, hogy az adjacencia-mátrixban a 0-kat fehér, az 1-eket fekete négyzettel helyettesítettük. Ha a pontszámmal végtelenhez tartunk, a középső ábra egyre jobban hasonlít a jobb oldali ábrára.



3. ábra. A félgráfok, egy determinisztikus konvergens sorozat.

A 4. ábra bal oldalán egy egyszerű szabály szerint növekvő gráfsorozat látható (az adjacencia-mátrix szerinti ábrázolásban): az $n$-edik lépésben egy új pontot veszünk hozzá, és leszórunk véletlenszerűen $n$ új élt. Az így kapott sorozat $1$ valószínűséggel konvergens lesz, és a pontszám növekedtével a jobboldali ábrához fog egyre jobban hasonlítani (ami a $W(x,y) = 1 - \max(x,y)$ függvény szürkeárnyalatos ábrázolása).

Ez a két példa talán érthetővé teszi, hogy minden konvergens gráfsorozatnak van egy limesz-objektuma, ami egy szimmetrikus, mérhető $W\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ függvény [9].



4. ábra. Egy véletlenszerűen növekedő gráf, és ahova tart.

## Utószó

Talán több helyet és időt töltöttem a gráflimeszekkel, mint az egy ilyen születésnapi köszöntőbe illene. De egyrészt meg akartam mutatni, hogy Sós Vera korábbi eredményei hogyan vezettek azokhoz a kérdésekhez, amik a gráflimesz-elmélet indulásában fontos szerepet játszottak, másrészt – és ez a fő – el akartam mondani, hogy milyen öröm volt együtt dolgozni ezen a témán. Majd' 40 évig tanított és mentorált engem, később folyóiratot, konferencia-köteteket szerkesztettünk, konferenciát szerveztünk együtt – de közös cikkünk nem volt. Ebben a témában aztán hat is lett.

Köszönöm a tanítást, támogatást, segítséget, közös munkát, és remélem és kívánom, hogy még sokáig kaphatok bölcs tanácsot, mély lényeglátást T. Sós Verától.

## Irodalomjegyzék

[1] C. Borgs, J.T. Chayes, L. Lovász, V.T. Sós, B. Szegedy and K. Vesztergombi: Graph Limits and Parameter Testing, STOC38 (2006), 261–270.

[2] C. Borgs, J. Chayes, L. Lovász, V.T. Sós and K. Vesztergombi: Counting graph homomorphisms, in: *Topics in Discrete Mathematics* (ed. M. Klazar, J. Kratochvil, M. Loebl, J. Matoušek, R. Thomas, P. Valtr), Springer (2006), 315–371.

[3] C. Borgs, J.T. Chayes, L. Lovász, V.T. Sós and K. Vesztergombi: Convergent Graph Sequences I: Subgraph frequencies, metric properties, and testing, *Advances in Math.* **219** (2008), 1801–1851.

[4] C. Borgs, J.T. Chayes, L. Lovász, V.T. Sós and K. Vesztergombi: Convergent Graph Sequences II: Multiway Cuts and Statistical Physics, *Annals of Math.* **176** (2012), 151–219.

[5] F. R. K. Chung, R.L. Graham and R.M. Wilson: Quasi-random graphs, *Combinatorica* **9** (1989), 345–362.

[6] P. Erdős, A. Rényi, and V.T. Sós: On a problem of graph theory, *Studia Sci. Math.* **1** (1966), 215–235.

[7] M. Freedman, L. Lovász and A. Schrijver: Reflection positivity, rank connectivity, and homomorphisms of graphs, *J. Amer. Math. Soc.* **20** (2007), 37–51.

[8] L. Lovász and V.T. Sós: Generalized quasirandom graphs, *J. Combin. Theory B* **98** (2008), 146–163.

[9] L. Lovász and B. Szegedy: Limits of dense graph sequences, *J. Combin. Theory B* **96** (2006), 933–957.

[10] M. Simonovits and V.T. Sós: Szemerédi's partition and quasirandomness, *Random Struc. Alg.* **2** (1991), 1–10.

[11] V. T. Sós: On the distribution mod 1 of the sequence $n\alpha$, *Ann. Univ. Sci. Eötvös* Sect. Math. **1** (1958), 127–134.

[12] A. Thomason: Pseudorandom graphs, in: *Random graphs '85* North-Holland Math. Stud. **144**, North-Holland, Amsterdam, 1987, 307–331.

*Lovász László*

matematikus-karrier gráfok számelmélet

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Sárközy Gábor 2020. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

# Szemerédi Endre 80. születésnapjára

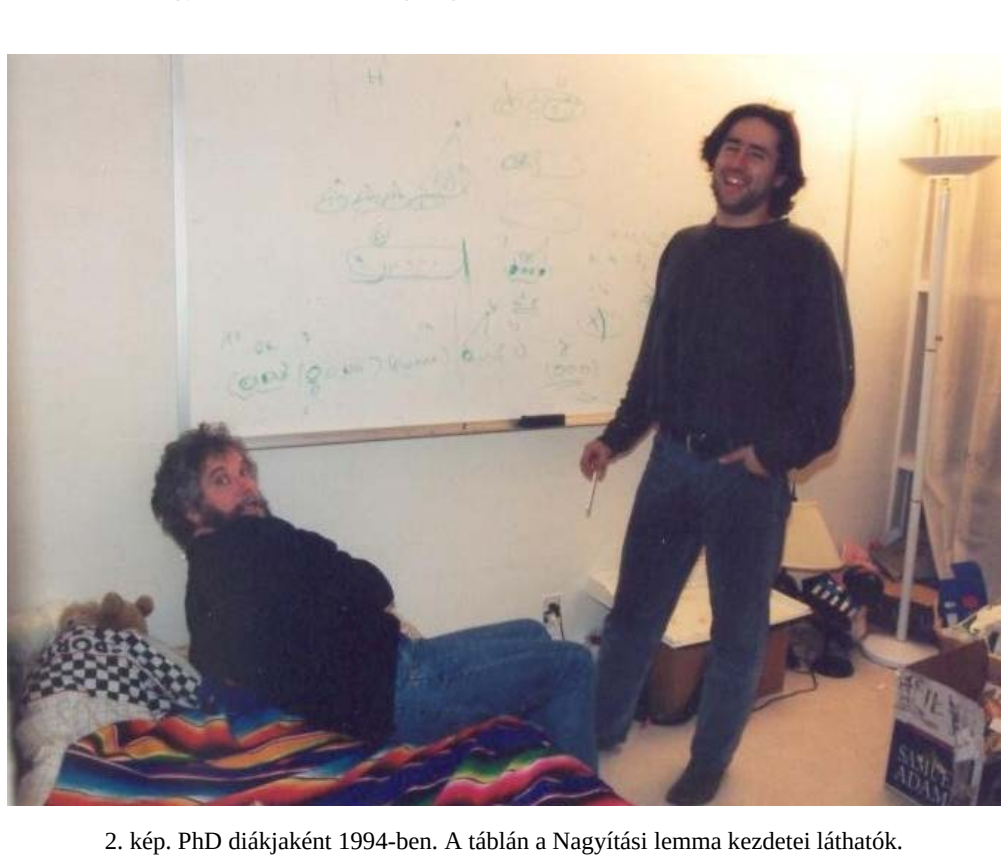
## Személyes visszaemlékezések

Nagy megtiszteltetés számomra, hogy ezt a cikket megírhattam. Nem túlzás, hogy egész életemben ismertem Endrét és rengeteget köszönhetek neki. Már édesapám tanúja is ő volt szüleim esküvőjén.

1. kép. Endre mint tanú szüleim esküvőjén.

Endre és édesapám együtt jártak egyetemre, ahol összebarátkoztak és elkezdtek kettesben, majd Erdős Pállal hármasban együtt dolgozni. Emlékszem, ahogy gyerekként együtt játszottam Endre fiával; vele később is tartottuk a kapcsolatot. Az első időkben „csak” a tenisz és a sport szeretete hozott össze bennünket. Aztán úgy hozta a sors, hogy én is matematikus szakra jártam és ekkor kezdtünk el matematikáról is beszélgetni. Ekkoriban Endre egy házban lakott Hajnal Andrással, gimnáziumi osztálytársam, Péter édesapjával, aki akkor a Rényi Intézet igazgatója volt. Sokat voltam náluk, egyedül is, meg barátommal, Stipsicz Andrással is. Mindig történt valami izgalmas, nagyon szerettünk oda járni. Egy alkalommal például Erdős Pali bácsival pingpongoztam a pincében. Többször sakkoztam is Hajnal Andrással, neki egy perce volt, nekem öt, de így is szinte mindig nagyon elvert, egyszer tudtam csak döntetlent elérni.

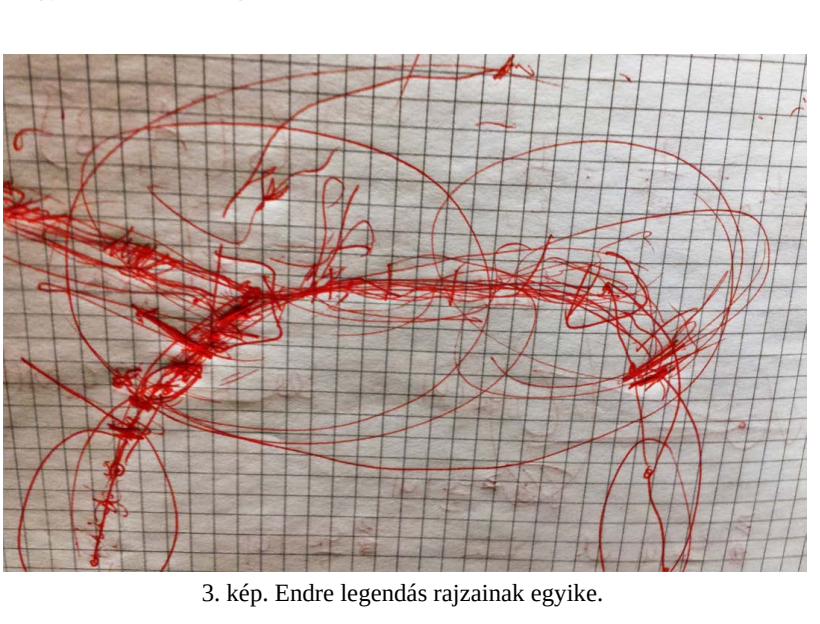
Endre figyelemmel kísérte tanulmányaimat, és amikor befejeztem az egyetemet, PhD ösztöndíjat ajánlott fel a Rutgers egyetemen az USA-ban, ahol éppen akkor fogadott el egy állást. Neki köszönhetem, hogy matematikusként kijuthattam az USA-ba, ahol azóta is részben dolgozom; ez nyilván alapvetően változtatta meg az életem. Nem csak nekem segített így, hanem sok más fiatal matematikusnak is, például Stipsicz Andrásnak, Szabó Zoltánnak, Magyar Ákosnak és rengeteg más fiatalnak.



2. kép. PhD diákjaként 1994-ben. A táblán a Nagyítási lemma kezdetei láthatók.

Közös munkánk is a Rutgers-en kezdődött, amikor PhD ösztöndíjasként ott tanultam 1990 és 94 között. Sokáig tartott, amíg megtanultam, hogyan kell vele dolgozni. Őszintén megvallva, eleinte nem sokat értettem abból, amit mondott. Endre nem úgy dolgozik, mint mások. Általában a matematikusok logikai lépésekben, levezetésekben gondolkoznak; nem így Endre. Számára a matematika szinte olyan, mint a képzőművészet (amit egyébként szintén imád; máig emlékszem, amikor elvitt New Yorkban egy fantasztikus Lucian Freud kiállításra). Nem precíz bizonyításokban gondolkozik, hanem „érzi”, „látja”, hogy ennek így kell lennie, „ott lesz egy sűrűsödés”. És általában 2 hét kemény munka után (ezen persze nevetne most, ha olvasná) az ember rájön, hogy igaza van.

Magyarázataiban soha nem használt formulákat vagy számokat, csak híres-hírhedt rajzait. Ezeken annyiszor bekarikázta ugyanazt a dolgot, hogy a végén már semmit sem lehetett látni belőle. Emlékszem, egy ilyen magyarázata után egyik imádott lánya, Zsuzsi, megkérdezte, hogy „Papa, szerinted a Gábor értette, amit magyaráztál?” Be kell valljam, hogy a válasz nemleges volt.



3. kép. Endre legendás rajzainak egyike.

Különösen Endre híres Regularitási lemmáját volt nehéz megértenem (részben ezért kapta az Abel-díjat). Ez a lemma azt mondja ki, hogy minden elég nagy gráfot fe lehet bontani „majdnem” véletlen részekre. Ezt nehéz elhinni, amikor az ember először hallja. Hiszen a kiindulási gráf lehet nagyon is nem véletlen; hogyan lehetne azt véletlen részekre felbontani? A kulcs az, hogy a gráfnak óriási nagynak kell lennie, ilyen nagy gráfokban már tudunk szép, majdnem véletlen részeket találni, ha elég mélyre ásunk. Durván úgy lehetne megfogalmazni, hogy a káoszban mindig tudunk valami rendszert találni. Egyébként ennek a lemmának az eredeti Endre-féle bizonyítása lényegében egy oldal. Egy oldal, amely túlzás nélkül megváltoztatta a matematikát. Néhány évvel későbbi, talán legfontosabb közös eredményünk, a Nagyítási lemma azt mondja ki, hogy ha felnagyítjuk ezeket a majdnem véletlen részeket, akkor ezekben bizonyos természetes feltételek mellett bármilyen részstruktúrát meg tudunk találni.

Ezek a közös munkák gyakran a princetoni erdőkben zajlottak. Imádott sétálni, ráadásul jó gyorsan, alig győztem lépést tartani vele, nemhogy intenzíven gondolkozni. Legalább nem a tetőn dolgoztunk, ahol szintén szeretett gondolkodni, mindig azt mondta, hogy a legjobb ötletek a tető széléhez közel jönnek (és a legenda szerint a szomszédok jópárszor kihívták a rendőröket is).

Hihetetlen élmény volt vele együtt dolgozni. Mindig szüksége volt valakire, aki „tolmácsolta” ötleteit a világ számára. Iszonyú szerencsém volt, hogy egy-két évig én játszhattam ezt a szerepet. Szakmailag életem messze legizgalmasabb része volt.

De nemcsak a matematika közös az érdeklődésünkben. Ide tartozik számos más dolog is, például a zene, irodalom, képzőművészet és persze a közös szerelem: a tenisz és a sportok általában.

4. kép. Focimeccset nézünk a Maracana stadionban Rio-ban.

Imád szurkolni kedvenceinek, teniszben Graf és Sampras, később Nadal, fociban pedig a Barcelona a kedvencei. Egyszer nagyon büszke volt, amikor egy TV-interjú során helyesen jósolta meg a következő Barcelona-meccs eredményét. Hihetetlen benne a versenyszellem, egyszerűen imád versenyezni. Számos sportot űztünk együtt, és be kell valljam, a korkülönbség dacára több sportban sokkal jobb, például futásban és pingpongban esélyem sincs. Versenyszelleméből adódóan imádja a kihívásokat és imád vitatkozni. Gyakran a népszerűtlen álláspontot képviseli, csak hogy az embereket vitára bírja. Matematikában pedig nem annyira az új, hanem a régi, híres megoldatlan problémákat szereti, ahol más nagy matematikusok már kudarcot vallottak. Hihetetlenül kitartó, képes ugyanazon a problémán hónapokig, sőt évekig is dolgozni.

De mindenekelőtt imádja családját (talán hányatott gyerekkora miatt is), védi és támogatja őket, és ugyanígy közeli barátait is. Mivel én szinte a család tagja voltam (hála Panninak és a lányoknak is), engem mindig szinte fiaként kezelt.

Nagyon örülök, hogy az elmúlt néhány évben Endre végre megkapta a neki régóta járó sikert és elismerést. Boldog születésnapot Endre! Hálás vagyok mindenért!

5. kép. Egy számomra nagyon kedves kép. Balról jobbra: édesapám Sárközy András, Stanley Selkow, Endre, én és Gyárfás András.

*Sárközy Gábor*
*Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet és*
*Computer Science Department, Worcester Polytechnic Institute*

Abel-díj matematikus-karrier

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

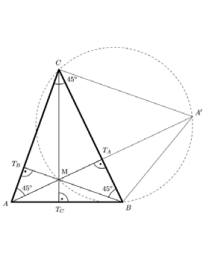
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

SOKSZOR TALÁLKOZUNK OLYAN FELADATTAL, ÖTLETTEL, AMIT SZÍVESEN ELTESZÜNK KÉSŐBBI HASZNÁLATRA. A **TANÓRA – SZAKKÖR** ROVAT SZERETNE HOZZÁJÁRULNI A MATEMATIKATANÁROK ESZKÖZTÁRÁNAK GAZDAGÍTÁSÁHOZ, FÓRUMOT KÍVÁN ADNI A GONDOK, NEHÉZSÉGEK MEGTÁRGYALÁSÁRA IS. (ROVATSZERKESZTŐ: *HORVÁTH ESZTER*.)

Fülöp Ottilia, Nagy Marcell
2020. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

## Az online matematikaoktatás tapasztalatai oktatói és hallgatói szemmel

A BME Gazdaság- és Társadalomtudományi Karának alapszakos hallgatói körében elvégzett felmérés során *Fülöp Ottilia* és *Nagy Marcell* a második féléves matematika tárgy online oktatását vizsgálta 2020-ban. Kérdőívükben a kényesebb kérdésektől sem riadtak vissza, mint például, hogy mennyire tipikus a nem megengedett segédeszközök használata a virtuális számonkérések során… Tovább...



Szoldatics József
2020. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

## Úton-módon 4.

A cikksorozat negyedik részében egy geometriai feladatot járunk körbe, amelyet *Laczkó László* kollégám dolgozott fel. Az anyag megtalálható a Budapesti Fazekas Gimnázium matematikaoktatási portálján (http://matek.fazekas.hu) a cikkek között, „Ismételjük a geometriát egy feladaton keresztül!" címmel. Az ott szereplő megoldások közül válogat és mutat meg néhányat *Szoldatics József*. Tovább...

Török Judit, Fried Katalin
2020. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

## A játékkal töltött idő nem elvesztegetett idő

A játékkal töltött idő nem elvesztegetett idő – állítja *Török Judit* és *Fried Katalin.* Vannak, akik – velük együtt – lehetőséget látnak a játékokban. Az iskolai tanítás során is színesebbé, érdekesebbé tehetjük óráinkat egy-egy játék vagy játékos feladat beillesztésével. Itt a „Számlétra " és a „Kavicskupacok" néhány változatát mutatjuk be.

ÉRETTSÉGI BIZONYÍTVÁNY

Csapodi Csaba, Koncz Levente
2020. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

## Az érettségiről érdekesen, avagy egy elmaradt előadás

A 2019/20-as tanév második féléve és a 2020. májusi érettségi időszak hosszú ideig emlékezetes lesz minden diák, tanár és szülő számára. Pár dolgot nyilvánvalóvá tett ez a két-három hónap: ezek közül talán a legfontosabb, hogy iskolára (mint fizikai térre) és pedagógusra szükség van a 21. században is. Az alábbi cikkben a 2020. évi matematika érettségi vizsga rövid elemzését végezi el *Csapodi Csaba* és *Koncz Levente*. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Fülöp Ottilia, Nagy Marcell 2020. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

# Az online matematikaoktatás tapasztalatai oktatói és hallgatói szemmel

## 1. Bevezetés

A COVID-19 járvány miatt szükséges rendkívüli intézkedések igen nehéz helyzetbe hozták mindenhol a felsőoktatásban oktatókat és a hallgatókat. Természetesen a közoktatásban is hasonló kihívással találták szembe magukat a tanárok és a diákok, de mi most az egyetemi oktatásban felmerülő nehézségekre és megoldásokra fókuszálunk.

Online matematikaoktatással kapcsolatos felmérésünkben a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gazdaság- és Társadalomtudományi Karáról 269 hallgatót szólítottunk meg, akik a Nemzetközi gazdálkodás, Pénzügy és számvitel vagy Gazdálkodási és menedzsment alapszakok valamelyikére járnak. A kérdőívet Microsoft Teamsen tettük elérhetővé a fent említett hallgatók számára, amit a 2020.06.29. és 2020.07.15. közötti időszakban 124 fő töltött ki, a tipikus kitöltési idő 8 perc volt. A kérdőív anonim volt, a felmérésben résztvevő hallgatók mindegyike hozzájárult az eredmények feldolgozásához, közléséhez.

Egy egyetemi vagy országos szinten végzett általános felmérés esetén nehéz egyetlen tárgy online oktatására fókuszálni, és minden megkérdezettet egyformán érintő kérdéssort megfogalmazni. Jelen tanulmány egyik szerzője (Fülöp Ottilia) a Matematika A2a − Vektorfüggvények 6 kredites, heti 4 óra előadással és 2 óra gyakorlattal meghirdetett tárgyat oktatta a kérdőívet kitöltő összes hallgatónak a 2019/20-as tanév tavaszi félévében, így a kérdőívben ténylegesen a megszólított populációt érintő, online matematikaoktatással kapcsolatos kérdéseket tudtunk megfogalmazni. Ennek köszönhetően minden kitöltött kérdőív értékelhetőnek bizonyult.

Fontosnak tartjuk itt az elején megjegyezni, hogy számos távoktatással/online oktatással kapcsolatos felmérés készült már az országban és természetesen külföldön is. Vannak, amelyekben a hallgatók, és olyanok is, amelyekben az oktatók véleményét mérték fel. Csak a hazai felméréseket tekintve, felhívnánk a figyelmet a Hallgatói Önkormányzatok Országos Konferenciája (HÖOK) által készített jóval általánosabb felmérésre a távoktatás menetéről és hatásairól [1], amit a közeljövőben készülnek közzétenni. Annyit már közöltek, hogy 22 egyetem több mint 17 600 hallgatója vett részt a felmérésekben, és a HÖOK kérdőívét kitöltő hallgatók 40%-a összességében elégedett a távoktatással, de 65%-uk szívesebben vesz részt a hagyományos tanórákon. Ebből a felmérésből az is kiderül hogy azon hallgatók közül, akik részmunkaidőben dolgoztak, minden harmadik elvesztette munkahelyét.

A Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kar Vezetés- és Szervezéstudományi Intézetében (KTK VSZI) alakult egy kutatócsoport, amelyik az online oktatásra/távoktatásra való átállás kapcsán a felsőoktatásban dolgozó oktatók tapasztalatait, véleményét méri fel: „az online/digitális/nem jelenléti oktatási formák, valamint a home office/otthoni munkavégzés jelenlegi helyzetét kívánja vizsgálni a vezetés, a szervezés és a belső kommunikáció főbb kérdései alapján” [2].

A Pannon Egyetem Gazdaságtudományi Karán az online oktatás megkezdése előtt, 2020 márciusában végeztek egy online kérdőíves felmérést, amelyben „a hallgatók járvány előtti tanulási szokásaira”, valamint „az induló távolléti oktatásban felmerülő megoldásokkal szembeni preferenciáikra” voltak kíváncsiak. A felmérés eredményeit összefoglaló cikket a Központi Statisztikai Hivatal *Statisztikai Szemle* című folyóiratában közölték [3].

A fent említett online kérdőívektől eltérően, mi közvetlenül a 2019/2020-as tanév tavaszi félévét követő vizsgaidőszak lejárta után, kimondottan a Matematika A2a − Vektorfüggvények tárgy online oktatásával kapcsolatos felmérésünk tanulságait gyűjtöttük itt össze, figyelembe véve a hallgatók és az oktató véleményeit, friss tapasztalatait. Jelen tanulmányban igyekszünk tehát mindkét fél szemszögéből tekintett konzekvenciákat megfogalmazni, és nem csak egyik vagy másik fél nézőpontja szerint vizsgálni és következtetéseket levonni, hanem a két oldal tapasztalatainak és véleményének együttes figyelembevételével középen maradni, és beszámolni a kérdőívben szereplő válaszokról.

## 2. A kezdeti bizonytalanságok legyűrése oktatói szemmel

Az új koronavírus miatt 2020. március 11-én országos veszélyhelyzetet hirdettek ki. Az eredményes védekezés érdekében bezárták az egyetemi épületeket, több magyar egyetemen 2020. március 12-re és 13-ra oktatási szünetet rendeltek el. Az oktatóknak hatalmas segítség volt az, hogy országosan egységesen előrehozták a tavaszi szünetet a rákövetkező hétre (2020. március 16-20.), ezzel időt hagyva a jelenléti oktatásról online oktatásra/távoktatásra való átálláshoz szükséges IKT (információs és kommunikációs technológia) eszközeinek beszerzésére, az ezzel kapcsolatos javaslatok kipróbálására, intézményen belüli megvitatására.

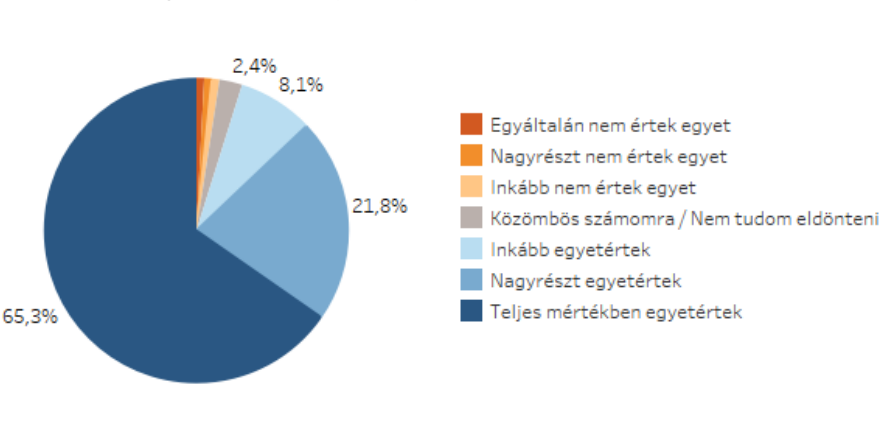
Ezt követően a 2019/2020-as tanév tavaszi félévében 9 oktatási hetet online/távoktatásban kellett lebonyolítani. A számonkérések (zárthelyik és pótlásaik, valamint az írásbeli és opcionális szóbeli vizsgák) is az IKT eszközeinek bevetésével mind online történtek.

Nagy évfolyamok esetén a kommunikációs csatornák, a rendelkezésünkre álló online platformok, a megfelelő szoftverek, digitális segédanyagok kiválasztása, a technikai kivitelezés nehézségeinek összehasonlítása, a kezdeti bizonytalanságok megszüntetése, a soron következő előadások és gyakorlatok online segédanyagainak gyors legyártása a motivált oktatókra igen komoly többletterhet rótt. Ugyancsak a tavaszi szünet alatt aktualizálni kellett a tárgykövetelményeket, rögzítve bennük a tavaszi félév számonkéréseinek várható kivitelezési módját is. A hallgatókat meg kellett nyugtatni, hogy úrrá leszünk a helyzeten, megtaláljuk azt a megoldást, amelynek segítségével, lehetőségeik figyelembevételével a szokásos tudásanyagot leadjuk és számonkérjük úgy, hogy többletmunkájuk emiatt ne keletkezzen. Legfontosabb mégiscsak a hallgatók időben történő, személyes tájékoztatása volt: részletesen tisztáztuk a speciális helyzethez igazított tárgykövetelményeket, vázoltuk az online számonkérések várható időpontját és típusát, illetve egy ilyen számonkérést szimuláló mintatesztet, hogy akár a szünet alatt is tudjanak ezekre készülni, és a tanulás folytonosságát semmi ne szakítsa meg. Oktatói szemmel több mindent figyelembe kellett vennünk: kiszolgálni a színvonalas IKT eszközökkel rendelkező hallgatókat, valamint azokat is, akik még kielégítő internetes kapcsolattal sem rendelkeznek, vagy anyagi, esetleg családi okokból kifolyólag nincs lehetőségük minden online órába bekapcsolódni. A hallgatók végtelenül hálásak és segítőkészek voltak, amikor érezték, hogy nem lesz káosz a tárgy oktatása körül. Időben érdemes volt tisztázni a játékszabályokat az online oktatás idejére, kitérve arra is, pontosan mi várható a jelenléti, tantermi oktatás visszatérte esetén (amire végül nem került sor). Emiatt célszerűnek találtuk a félévközi számonkérések időpontjait változatlanul hagyni, hogy a hallgatók a tananyag elsajátításához szükséges időbeosztásukat is elvégezhessék.

## 3. Az oktató teendőiről

Az oktató az előadásokat és az általa megtartott gyakorlatok mindegyikét valós időben, Teamsen tartotta meg. Bár az online oktatás nem ugyanaz, mint a digitális oktatás, abban mindenki egyetért, hogy egy jól megszerkesztett, megbízható, használójával interaktívan kommunikáló digitális tananyaggal megspékelt online oktatást már nehezebb elrontani, bármelyik platform mellett is tesszük le voksunkat. Emiatt számtalanszor felhívtuk hallgatóink figyelmét az egyetemünk hallgatói számára hozzáférhető interaktív Neptun e-tananyagainkra. Ezek kidolgozott feladatokat és elméleti teszteket egyaránt tartalmaznak, amiket előző félévben főleg az opcionális szóbeliken kértünk számon a hallgatóktól. Azonban ez csak egy volt a segítségek közül. Mivel az említett e-tananyagok mérnök- és fizikus hallgatóknak is készültek, és a közgazdász hallgatók második féléves tananyaga lényegesen rövidebb és egyszerűbb ezeknél, szükséges volt minden egyes előadást és gyakorlatot magyarázatokkal együtt leírni, hogy pontosan tudni lehessen, mi az, amit kérünk tőlük, és mi az, amit csak az érdeklődőbb hallgatóknak szántunk a fent említett e-tananyagokban. Így a magyarázatokkal ellátott előadás- és gyakorlatanyagokban szigorúan csak a számonkérendő anyagrészek szerepeltek. Ezek már az online előadásokat, gyakorlatokat megelőző napokban felkerültek mind a Teamsre, mind az oktató személyes honlapjára, hogy a gyakorlatvezető kollégák is időben értesüljenek, hol tart az évfolyam, és mi a következő órák anyaga. Így, hogy előre is lehetett tudni a soron következő leckéket, a hallgatók némelyike sokkal motiváltabbá és magabiztosabbá vált, és a tananyaggal kapcsolatosan többet is tudott kérdezni.

A kérdőívet kitöltő hallgatók 95,2%-a elégedett volt a feltöltött (részletes magyarázatokat is tartalmazó) tananyagokkal és segédanyagokkal. Egészen pontosan a következő mondatot kellett véleményezniük: *Az online oktatás során feltöltött előadások és gyakorlatok magyarázó anyagaival és az egyéb segédanyagokkal maradéktalanul elégedett voltam.* (1. ábra)



1. ábra

Minden jel arra utalt, hogy ebben a nehéz időszakban a hallgatókat csak azok az ismeretek érdekelték, amiket a zárthelyi dolgozatokban és a vizsgákon tudniuk kell.

Habár nagyon megoszlanak az oktatói vélemények arról, hogy kell-e rögzíteni az előadásokat vagy sem, kockáztatva azt, hogy esetleg a visszanézhetőség miatt kevesebb hallgató vesz részt az online órákon, mi a felvételek rögzítése mellett döntöttünk, azért, hogy amennyiben az internetkapcsolattal valahol gond lenne, bármit vissza lehessen nézni.

Oktatói szemmel nézve az órák minősége nem sokban különbözött a hagyományos tantermi óráktól, a vártnál sokkal gördülékenyebben ment minden, és a hallgatóság kérdezni is bátrabban mert a virtuális térben. Kikapcsolt kamerával sokkal könnyebb volt aktivitásra bírni a hallgatókat, mint a tanteremben.

A félévközi matematika számonkérések tesztes formában történtek, míg az írásbeli vizsga feladatmegoldásos volt. A vizsgajegyek tekintetében lényeges különbséget nem észleltünk, mert míg az első félévben a kérdőívet kitöltő hallgatók (a továbbiakban hallgatók) Matematika A1a − Analízis érdemjegyének átlaga 3,0, a távoktatást követően (tehát a második félév végi vizsgán) esetükben az átlag 3,19. Ez utóbbi például nem sokban különbözik a teljes évfolyam átlagától, ami 3,09. Ilyen értelemben tehát felmérésünk jól tükrözi a teljes évfolyam eredményét.

## 4. A hallgatók véleménye a kivitelezésről, avagy mit tudtunk meg a kérdőívekből?

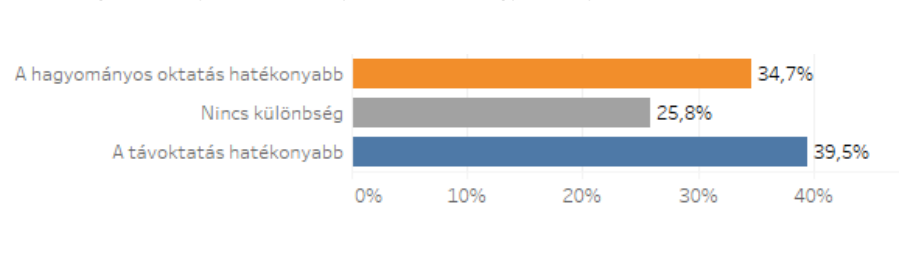
Mivel sok hallgató számára a matematika nehéz tárgy, kíváncsiak voltunk a hallgatók súlyozott tanulmányi átlagára is mindkét félévben. (A súlyozott tanulmányi átlagot úgy kapjuk meg, hogy a teljesített tantárgyak kreditértékének és érdemjegyének szorzatát összeadjuk és az így kapott eredményt elosztjuk a teljesített tárgyak kreditjeinek összegével.) Itt azért már komolyabb eltérést észleltünk a két félév között, az első félévben a hallgatók átlagos súlyozott tanulmányi átlaga 3,68 (medián: 3,66), míg a másodikban 3,94 (medián: 4,0).

A kérdőívet kitöltő hallgatók 31%-a dolgozott az egyetemi tanulmányok mellett a járvány hazai kitörése előtt, átlagosan heti 20 órát. A járvány kitörése után ez durván felére, 15%-ra redukálódott, heti 24 óra átlaggal.

A felmérés alapján a hallgatók 98%-ának rendelkezésére álltak a távoktatáshoz szükséges megfelelő és megbízható eszközök, 96%-nak legtöbbször kielégítő volt az internetkapcsolata.

A hallgatók 75%-a pozitívan értékelte az órákról készült felvételek feltöltését, mert tanuláskor felmerülő kérdések esetén bármikor visszanézhették őket. A hallgatók 19%-a sokszor nem ért rá részt venni az órákon, emiatt később, felvételről nézte vissza az órákat, csak 6% vallotta, hogy nem volt szüksége ezekre a felvételekre, mert mindent időben megértett.

A 2. ábra mutatja, hogy melyik oktatási formával sajátították el könnyebben a matematikát, azaz a jelenléti- vagy a távoktatást tartották-e ebből a szempontból hatékonyabbnak. Az eredmény azt sugallja, hogy nagyon változó, hogy ki melyik oktatási forma esetén tudja könnyebben elsajátítani a matematikát, de a többség szerint a távoktatás legalább olyan eredményes, mint a hagyományos oktatás.



2. ábra

A Teams felületén a csevegés funkció még közelebb hozta a hallgatókat az oktatóhoz és egymáshoz is. Olyan kérdéseket is megfogalmaztak, amelyeket hagyományos e-mailben nem tettek volna fel, ráadásul a legtöbb csevegést mindenki követhette. Így a hallgatók 43%-a szerint az online oktatásban is pontosan ugyanúgy tartható a kapcsolat az oktatóval, 32%-uk pedig a távoktatás alatt szorosabban tartotta a kapcsolatot az oktatóval, mint előtte. Tehát összességében elmondható, hogy a távoktatás során a hallgatók háromnegyede legalább olyan hatékonynak érezte a kommunikációt az oktatóval, mint a tantermi oktatás esetében.

A hallgatók 41%-a vallotta, hogy többet készült a vizsgára, mint egy nem online vizsgára tette volna, és 61%-uk gondolta, hogy többen csaltak a vizsgán, mint hagyományos esetben. Mindezek mellett az online matematika vizsgaeredmények átlaga csak 0,19-dal nőtt az előző félévi matematika vizsgaeredmények átlagához képest.

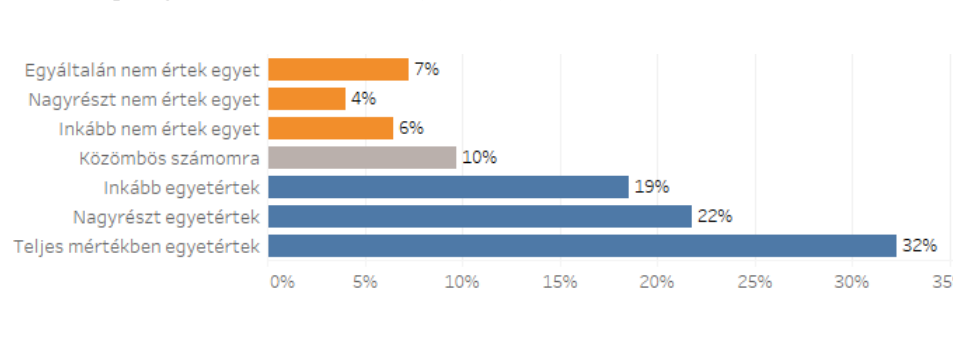
A hallgatók 77%-a egyetértett azzal, hogy ennek a tárgynak az online oktatása segítette abban, hogy a tanulást komolyabban vegye, kényelmesebben és rugalmasabban tudta kezelni az időbeosztását, mindezt úgy, hogy végig látta, hol tart az előadás és a gyakorlat.

A hallgatók 32%-a egyetértett azzal, hogy nem várja a jelenléti órákat, jobban preferálja az online oktatást, 46%-a nem értett egyet ezzel, a többiek pedig nem tudták eldönteni, melyik mellett tegyék le a voksukat. Érdekes tehát, hogy bár az online matematikaoktatást a hallgatók összességében hatékonyabbnak gondolják, a többség mégsem preferálja jobban a hagyományos oktatással szemben, ez utóbbi összhangban van a HÖOK által készített jóval általánosabb felmérés előzetesen közölt eredményével [1]. Ennek lehetséges okai lehetnek például, hogy a hallgatók igénylik a közösségi kapcsolatokat, személyes interakciókat, valamint az egységes oktatást, hiszen a gyors átállás miatt minden oktató tipikusan egyénileg döntött (a vezetők engedélyével) az óratartás formájáról és az interakciók lehetőségeiről.

Kíváncsiak voltunk, hogyan vélekednek a hallgatók a két oktatási forma (online és jelenléti) keverése mellett. A mondat, amit véleményezniük kellett, a következőképpen szólt:

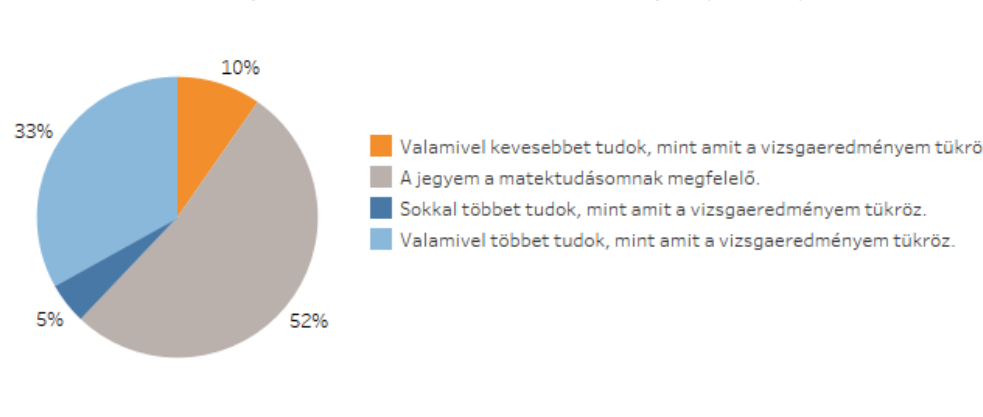
*Jó ötletnek tartanám, ha a két oktatási formát lehetne keverni a jövőben pl. úgy, hogy a félévben sorra kerülő 14 heti előadásból és gyakorlatból, 10 hetit teremben, 4-et pedig online tartanának meg.*

A válaszok pedig a következők voltak (3. ábra):



3. ábra

Arra a kérdésre, hogy hogyan viszonyul a Matematika A2a vizsgán kapott érdemjegye a matektudásához képest, meglepően sokan (52%) válaszolták azt, hogy jegyük a matektudásuknak megfelelő. A többi választ a 4. ábra diagramja mutatja:



4. ábra

A kérdőív utolsó három kérdésénél szabad szöveges kifejtős választ adhattak arra, hogy milyen egyéb javaslataik vannak az oktatással kapcsolatban. Mit tartanának meg a hallgatók, amennyiben visszatérünk a jelenléti oktatáshoz? Elsősorban a rengeteg, frissen kidolgozott, extra magyarázatokkal ellátott, előre feltöltött írásos előadás- és gyakorlatanyagokat írták a legtöbben, de sokan kérték, hogy az előadásokról és gyakorlatokról készüljön felvétel továbbra is, hogy a visszanézhetőség is biztosítva legyen. Volt, aki a konzultációk online megtartását javasolta a jelenléti oktatás esetén is.

Az elmúlt félév nagy kihívás volt oktatóknak, hallgatóknak egyaránt. Szükség volt mindkét fél odaadó és fegyelmezett munkájára, hiszen egy kölcsönös együttműködés szellemében lezajló kooperatív tanulási folyamat volt ez, amelyben a hallgatók rendkívül segítőkészek és empatikusak voltak. Ezúton is köszönet érte.

**Köszönetnyilvánítás**

Köszönjük Molontay Rolandnak hasznos ötleteit és a cikk megírása során nyújtott segítségét.

*A cikk az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-3 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.*

Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal

Új Nemzeti Kiválóság Program

## Irodalom

[1] EDULINE [2020]: Felmérést készített a HÖOK – a hallgatók 40%-a elégedett a távoktatással, https://eduline.hu/felsooktatas/20200510_tavoktatas_velemenyek_HOOK_felmeres

[2] http://kerdoiv.pte.hu/evasys/online.php?p=covidokte2020

[3] Hargitai Dávid Máté, Sasné Grósz Annamária, Veres Zoltán, Hagyományos és online tanulási preferenciák a felsőoktatásban – A COVID-járvány kihívásai, Statisztikai Szemle, 98. évfolyam, 7. szám 839–857

*Fülöp Ottilia*
*BME Matematika Intézet, Differenciálegyenletek Tanszék*
*Nagy Marcell*
*BME Matematika Intézet, Sztochasztika Tanszék*

matematikatanítás BME

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szoldatics József 2020. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

# Úton-módon 4.

## Egy feladat és ami róla az eszembe jutott...

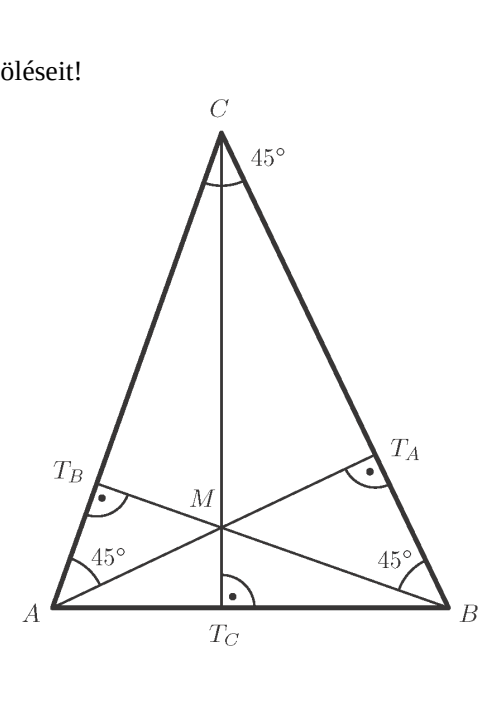
A mai számban egy geometriai feladatot járunk körbe, amelyet Laczkó László kollégám dolgozott fel. Az anyag megtalálható a Budapesti Fazekas Gimnázium matematikaoktatási portálján (http://matek.fazekas.hu) a cikkek között, „Ismételjük a geometriát egy feladaton keresztül!” címmel. A cikk címe nagyon találó, pont ez van a cikk készítésének ötlete mögött. Az ott szereplő megoldások közül válogatok és mutatok meg néhányat.

### A feladat

Az $ABC$ hegyesszögű háromszög $C$-nél levő szöge $45°$. $M$ a háromszög magasságpontja. Bizonyítsuk be, hogy $CM=AB$!

### 1. megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



A $BT_BC$ háromszög derékszögű és egyenlő szárú, hiszen

$$T_BBC\sphericalangle=T_BCB\sphericalangle=45°.$$

Ezért

$$CT_B=T_BB.$$

Az $AT_BM$ háromszög is derékszögű és egyenlő szárú, hiszen

$$T_BAM\sphericalangle=T_BMA\sphericalangle=45°.$$

Ezért

$$AT_B=T_BM.$$

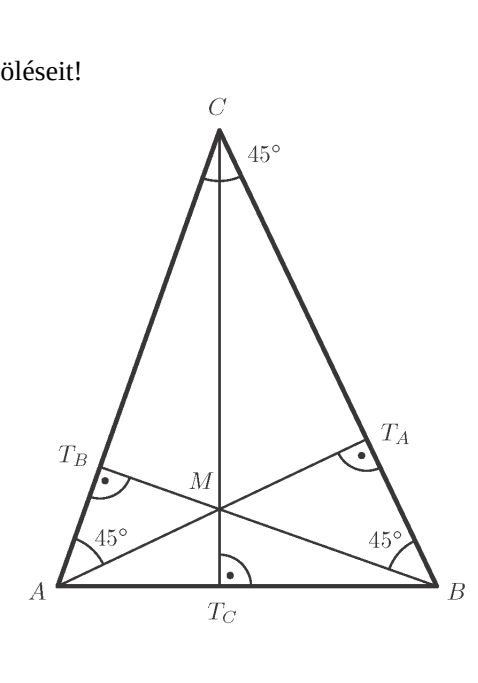
A $CMT_B$ és $AT_BB$ háromszögek egybevágók, mert két-két oldaluk ($T_BC=T_BB$ és $T_BM=T_BA$) és közbezárt szögük egyenlő ($=90°$).

Ezért a harmadik oldaluk is megegyezik, azaz

$$AB=CM.$$

### 2. megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



$T_BBA\sphericalangle$ és $ACM\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek, ezért

$$T_BBA\sphericalangle=ACM\sphericalangle.$$

Az $AT_BB$ és $CMT_B$ háromszögek derékszögűek.

A $CAB\sphericalangle$ szög (és a derékszög) közös ebben a két háromszögben, tehát hasonlóak.

A $BT_B$ és $CT_B$ egymásnak megfelelő oldalak egyenlőek, mert a $CBT_B$ háromszög egyenlő szárú derékszögű (1. megoldás) ezért a két háromszög egybevágó, azaz

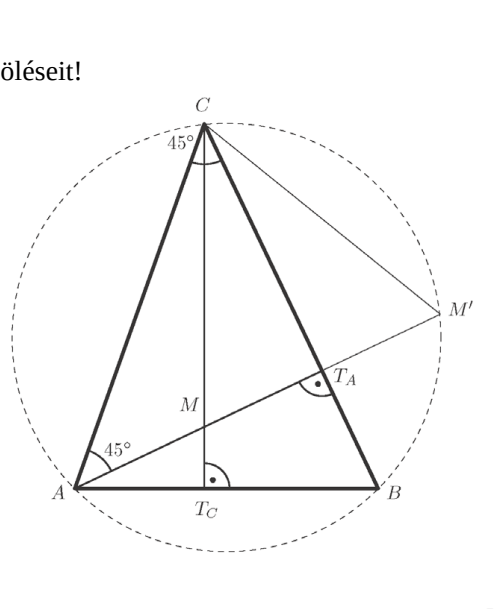
$$AT_BB\triangle\cong CMT_B\triangle.$$

Ebből következik, hogy minden megfelelő oldal egyenlő, azaz

$$CM=AB.$$

### 3. megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Tükrözzük tengelyesen az $M$ pontot a $CB$ oldalra, a tükörképet $M'$ jelöli.

Ismeretes, hogy a magasságpontot az oldalra tengelyesen tükrözve a tükörkép ($M'$) pont a háromszög köré írt körön van.

A tükrözés miatt

$$CM=CM'.$$

Ugyanakkor

$$CAM\sphericalangle=CAM'\sphericalangle=45°.$$

Az $AB$ és $CM'$ húrok ugyanabban a körben vannak és mind a kettőhöz $45°$-os kerületi szög tartozik, tehát

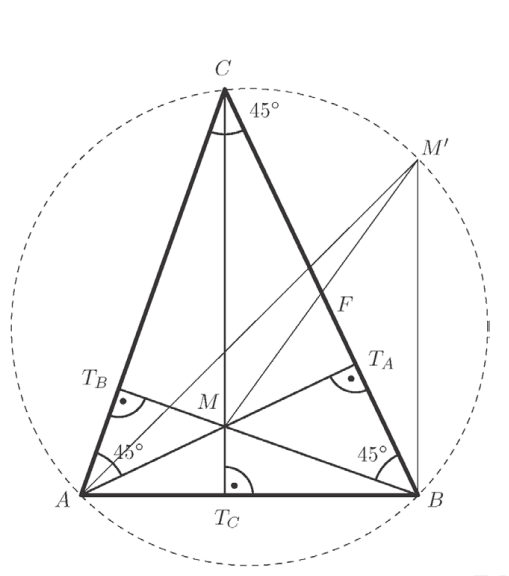
$$AB=CM'.$$

Mivel $CM'=CM$, így

$$CM=AB.$$

### 4. megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



A $CM$ szakaszt $CB$ oldal felezőpontjára ($F$) tükrözve kapjuk $BM'$-t. Ismeretes, hogy $M'$ a körülírt körön van.

A középpontosan tükrözött szakasz párhuzamos a képével. A $CT_C$ magasság merőleges az $AB$ alapra, tehát

$$M'BA\sphericalangle=90°.$$

$AM'B\sphericalangle=45°$, mert az $AB$ ívhez tartozó kerületi szög.

$AM'B$ egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért

$$BM'=AB.$$

A tükrözés miatt

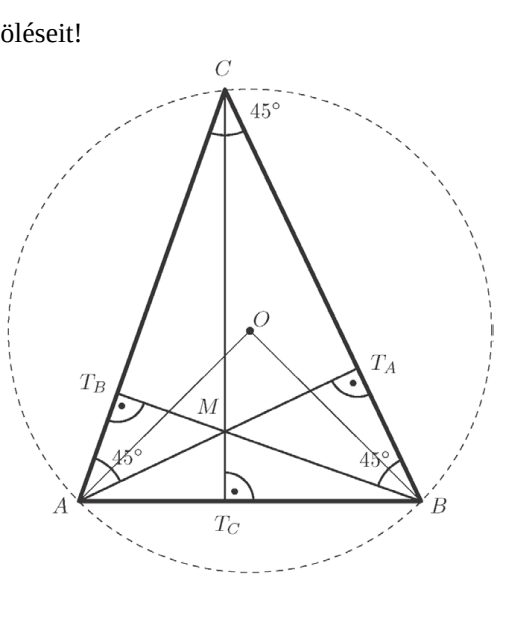
$$CM=BM',$$

ezért

$$CM=AB.$$

### 5. megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Legyen $O$ a háromszög köré írható körének középpontja.

Az $\overrightarrow{OM}$ vektort jelölje $\mathbf{m}$, az $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ és $\overrightarrow{CM}$ vektorokat rendre $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$.

Felhasználjuk, hogy a magasságpontba mutató vektorra

$$\mathbf{m}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}.$$

Ebből a $\mathbf{d}$ vektorra kapjuk, hogy

$$\mathbf{d}=\mathbf{m}-\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}.$$

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma egyik átlója $AB$, a másik $CM$.

A kerületi és középponti szögek tétele miatt

$$BOA\sphericalangle=90°.$$

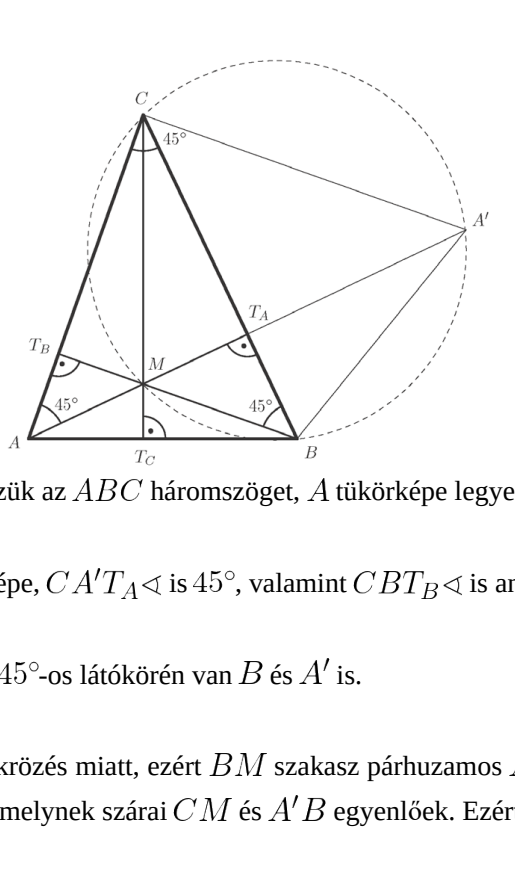
Így az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma négyzet, mert az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok hossza a köré írt kör sugarával egyenlő.

A négyzet átlói egyenlőek, így

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CM}\right|\ \Rightarrow\ AB=CM.$$

### 6. megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



A $CB$ oldalra tükrözzük az $ABC$ háromszöget, $A$ tükörképe legyen $A'$.

$CAT_A\sphericalangle$ és a tükörképe, $CA'T_A\sphericalangle$ is $45°$, valamint $CBT_B\sphericalangle$ is annyi.

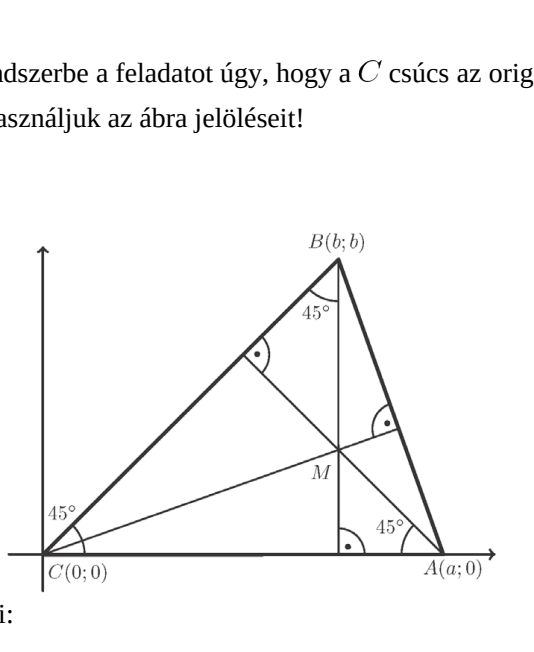
Ezért a $CM$ szakasz $45°$-os látókörén van $B$ és $A'$ is.

$A'CA\sphericalangle=90°$ a tükrözés miatt, ezért $BM$ szakasz párhuzamos $A'C$ szakasszal, így $CMBA'$ húrtrapéz, melynek szárai $CM$ és $A'B$ egyenlőek. Ezért

$$AB=CM.$$

### 7. megoldás

Tegyük koordinátarendszerbe a feladatot úgy, hogy a $C$ csúcs az origóba, az $A$ csúcs az $X$ tengelyre essen. Használjuk az ábra jelöléseit!



A csúcsok koordinátái:

$A(a;0)$, hiszen az $X$ tengelyen van. $B(b;b)$, hiszen az $y=x$ egyenes egy pontja. $C(0,0)$, hiszen az origóban van.

Az $AM$ egyenes merőleges $CB$-re, aminek a meredeksége 1, ezért egyenlete

$$y=-x+a.$$

Az $M$ pont esetén $x=b$ és innen az $y=a-b$, $M$ pont koordinátája

$$M(b,a-b).$$

Az $A$ és $B$ pontok távolsága

$$AB=\sqrt{(a-b)^2+b^2},$$

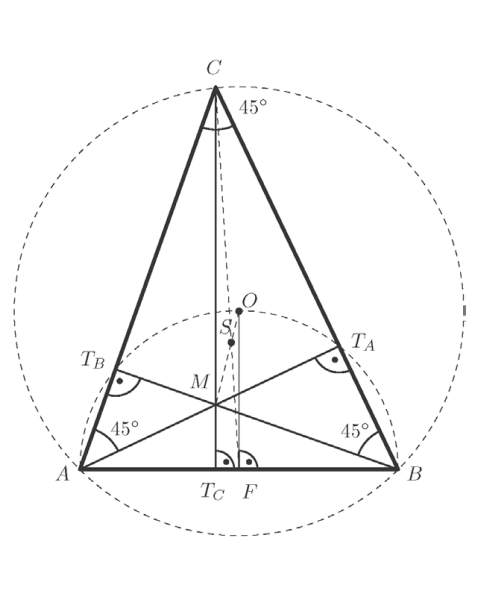
a $C$ és $M$ pontok távolsága

$$CM=\sqrt{b^2+(b-a)^2}.$$

Látható, hogy

$$AB=CM.$$

### 8. megoldás



Legyen $O$ a háromszög köré írható kör középpontja, $F$ az $AB$ oldal felezőpontja, $S$ a háromszög súlypontja. $M$ a háromszög magasságpontja.

Tudjuk, hogy $S$ harmadolja az $OM$ szakaszt, valamint $S$ harmadolja a $CF$ súlyvonalat.

A kerületi és középponti szögek tétele miatt $AOB$ háromszög derékszögű és egyenlő szárú.

Mivel $OF$ az $AB$ Thalész-körének sugara,

$$2OF=AB.$$

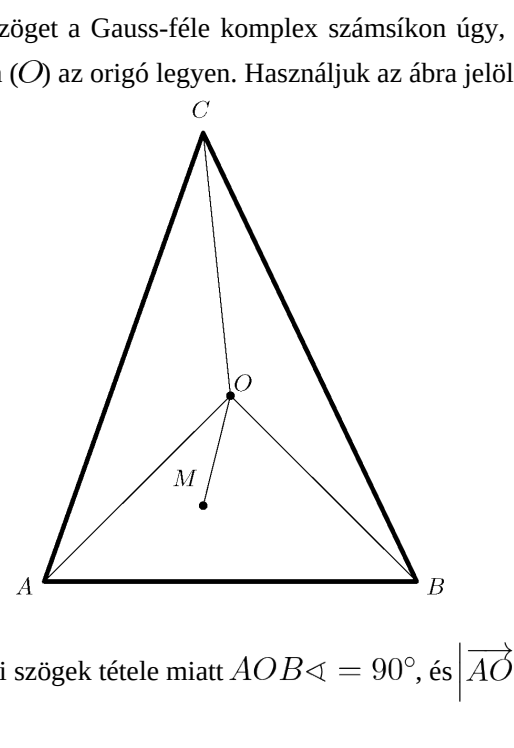
$AB$ pedig az átmérője.

Tudjuk, hogy az $S$-re vonatkozó $(-2)$ -szeres nagyítás az $FO$ szakaszt a $CM$ szakaszba viszi. Így

$$CM=2FO=AB.$$

### 9. megoldás

Helyezzük el a háromszöget a Gauss-féle komplex számsíkon úgy, hogy a háromszög köré írt kör középpontja ($O$) az origó legyen. Használjuk az ábra jelöléseit!



A kerületi és középponti szögek tétele miatt $AOB\sphericalangle=90°$, és $\left|\overrightarrow{AO}\right|=\left|\overrightarrow{BO}\right|$ ezért

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot i.$$

Ekkor

$$AB=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}(1-i)\right|=\sqrt{2}\left|\overrightarrow{OA}\right|.$$

Ismert, hogy $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, így

$$MC=\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}(1+i)\right|=\sqrt{2}\left|\overrightarrow{OA}\right|,$$

ami azt jelenti, hogy

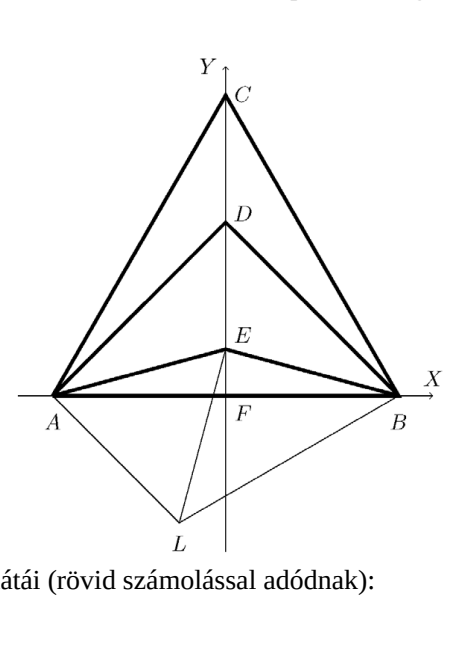
$$AB=MC.$$

### Visszacsatolás

**Az Úton-módon 1.** cikkében levő feladattal kapcsolatban ismét kaptam megoldásokat. Most Tatár Zsuzsanna Mária kolléganő írt 6 megoldást. A megoldások „nem vágnak teljesen bele” az eredeti elképzelésbe, hogy elemi megoldást adjunk a feladatra. Azért a küldött megoldások közül – szubjektíven – egyet kiválasztottam, amit most megmutatok.

*Tatár Zsuzsanna Mária, Esztergom megoldása*

Tegyük koordinátarendszerbe az ábránkat! Az alapháromszög oldala legyen $2$ egység.



Ekkor a pontok koordinátái (rövid számolással adódnak):

$$A\,(-1;0)\,,\quad B\,(1;0)\,,\quad C\left(0;\sqrt{3}\right),\quad D\,(0;1)\,,\quad E\left(0;2-\sqrt{3}\right),\quad F\,(0;0)\,.$$

Forgassuk el az $\overrightarrow{EB}$ vektort 90 fokkal az óramutató járásával megegyező irányba. Így megkapjuk az $\overrightarrow{EL}$ vektort.

$$\overrightarrow{EB}\left(1;\sqrt{3}-2\right),$$

$$\overrightarrow{EL}\left(\sqrt{3}-2;-1\right).$$

$\overrightarrow{FL}$ helyvektor végpontja megadja az $L$ pont koordinátáit.

$$\overrightarrow{FL}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EL}.$$

$$\overrightarrow{FL}\left(\sqrt{3}-2;1-\sqrt{3}\right),$$

$$L\left(\sqrt{3}-2;1-\sqrt{3}\right).$$

Tekintsük az $AEL$ háromszög oldalainak hosszát:

$$AE=\sqrt{1^2+\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$EL=\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2+1}=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$AL=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Tehát az $AEL$ háromszög szabályos, $LEB$ háromszög derékszögű.

$$AEB\sphericalangle=60°+90°=150°.$$

## Zárszó

Kedves Olvasó! Ha egy másik „szép” megoldást talál, kérem küldje el nekem a szolda@fazekas.hu e-mail címre. Ezeket az újabb megoldásokat összegyűjtve időnként (terveim szerint) szintén megmutatnám.

## Megemlékezés

65 éves korában elhunyt *Petz György* szerkesztő, író, költő, tanár, a Szépírók Társasága tagja. A nyugdíjbavonulása előtti években a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium tanára volt, kollégámat tisztelhettem benne.

Miért írom mindezt?

Amikor e cikksorozatnak címet kerestem, hozzá fordultam ötletekért. Elmondtam neki, hogy mi lenne a cikkekben, hogyan is gondolom. Persze – akik ismerték, tudják róla, mindig viccelt – néhány tréfás megjegyzést tett némi mosoly kíséretében a felvetésre. Ám rövid időn belül sok javaslatot tett elém, végül is az „Úton–módon” cím nyert. Szóval e sorozat nevének ő volt az ötletgazdája. Emlékére írtam ezt a pár sort.

*Szoldatics József*

matematikatanítás geometria

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Török Judit, Fried Katalin 2020. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

# A játékkal töltött idő nem elvesztegetett idő

## Bevezető

Tapasztalataink szerint sokan elvesztegetett időnek tartják a matematikaórák játékkal töltött perceit. Ám vannak, akik – velünk együtt – lehetőséget látnak a játékokban. 2019-ben, a Varga Tamás Módszertani Napokon mutatta be például Antal Zoltán az érdeklődőknek, kollégáknak, fiataloknak, ő hogyan alkalmazza a játékokat a matematikatanításban. Előadása és az ehhez kapcsolódó játékos foglalkozás sokunkat megfogott.

2010-ben, a Varga Tamás Tanítványainak Emlékalapítvány támogatásával, Pálfalvi Józsefné és Oláh Vera szervezésében indult el egy pályázat keretében a „Játéktól a kutatásig” program évi 3 alkalommal matematikai és természettudományi témájú ingyenes foglalkozásokkal.

A pályázat lejárta után, 2013-tól kezdve a program csökkentett – elsősorban matematikai – tartalommal az évente megrendezett Varga Tamás Napok keretében élt tovább Pálfalvi Józsefné szervezésében és szakmai irányításával. A szerzők rendszeres szervezési munkája mellett több jeles oktató is közreműködött, sőt, tanár szakos hallgatóinkat is bevontunk a foglalkozások szervezésébe, levezetésébe, az ötletek kidolgozásába.

A programok során igyekeztünk olyan játékokat, játékos feladatokat bemutatni, amelyek alkalmasak az érdeklődés felkeltésére, matematikai tanulsággal bírnak és továbbgondolásra is érdemesek. Követtük azt az elvet, amelyeket a felfedeztető matematikatanítás, valamint a Varga Tamás vezette matematika kísérlet is fontosnak tart: a matematikai játékok alkalmazása a gondolkodás „nem verbális” (háttérben történő) fejlesztése.

Az iskolai tanítás során is színesebbé, érdekesebbé tehetjük óráinkat egy-egy játék vagy játékos feladat beillesztésével. Ehhez felhasználhatjuk már ismert játékok, rejtvénytípusok vagy televíziós és interneten könnyen szerkeszthető vetélkedők alapötletét (pl. dominó, memory, puzzle, Libajáték, Ne nevess korán, kincskeresés, akadályverseny, kártyajátékok stb.) a matematikai tartalomnak megfelelően elkészített eszközökkel. Idesoroljuk az egyre inkább elérhető informatikai eszközöket is; a vetélkedőt például valamely telefonos applikáció segítségével szervezhetjük meg. Az alkalmasan megválasztott játékok az érdeklődés felkeltése, kedvcsinálás mellett alkalmasak lehetnek gondolkodási módszerek (pl. indukció, analógia, invariánsok) felismertetésére, felfedeztetésére, bemutatására, szemléltetésére, tudatosítására, alkalmazására és gyakorlására. Felfedeztethetünk, bevezethetünk, gyakorolhatunk új fogalmakat, fejleszthetjük a matematikai kompetenciákat. A játék egy áttekinthető szituációban, mindenki által ismert kifejezőeszközökkel zajlik, ahol a rámutatás, utánozás, elmozdítás stb. megengedett és így épít a nem verbális elemekre is.

A játék során a tanár, a „játékvezető” csak szervező, irányító, a kipróbálás során nem avatkozik bele a játékba. Ilyenkor lehetősége van arra, hogy megfigyelje, miként alakítják ki a gyerekek a stratégiáikat saját és egymás gondolataira alapozva. Érdemes a gyerekeket arra bíztatni, hogy maguk is alkossanak szabályokat, új játékokat.

Az itt következő játékok egy része a „Játéktól a kutatásig” vagy valamelyik Varga Tamás Módszertani Napok diákprogramjában szerepelt. A felhasznált ötletek részben Pósa Lajostól származnak, mások közismert játékokból.

Őszintén reméljük, hogy cikkünkkel ezúton is felkeltjük Olvasóink érdeklődését és figyelmét a játékos foglalkozások mellett a Varga Tamás Módszertani Napokra is, amely egyedülálló módon ingyenes, színvonalas előadásokat és workshopokat kínáló, tanároknak, hallgatóknak és diákoknak szóló konferencia. Sok szeretettel várjuk kollégáinkat, az érdeklődőket és diákjaikat a minden év november 3-adika és 9-edike közé eső pénteki és szombati napon megrendezendő konferenciára. Külön kiemeljük, hogy a diákok számára olyan élmény lehet a játékos programon való részvétel, amelyet az iskolai órákon nincs lehetőségük megélni, így rájuk különösen számítunk.

(Tájékozódni – és a korábbi konferenciák anyagát megtekinteni – a http://mathdid.elte.hu/html/vtn.html honlapon lehet. Játékaink – és sok más játék és matematikai háttérrel rendelkező, különböző életkorú és képzettségű tanulók oktatásában felhasználható ötlet – szintén megtalálhatók a mathdid.elte.hu honlapon, az „Elemi matematika tanároknak” című elektronikus jegyzetben.)

## Számlétra és variációi

### 1. Számlétra

**1.1.** Ketten játszanak egymás ellen, „Első” és „Második”. Első mond egy 1 és 10 közötti számot (beleértve a határokat). Második ehhez hozzáad egy 1 és 10 közötti számot, és közli az eredményt. Ezek után mindig az aktuális eredményhez adnak hozzá felváltva egy 1 és 10 közötti számot. Az nyer, aki végül kimondja a 100-at. Kinek van „nyerő stratégiája”? Kinek van esélye a nyerésre? Hogyan játsszon?

**Stratégia.** Könnyű rájönni, hogy aki 89-et mond, az megnyerheti a játékot (az ellenfél erre nem tud 100-at mondani, de akármit mond, utána a soron következő tud). Új cél tehát a 89. Ezt (hasonló alapon) akkor tudjuk elérni, ha előtte 78-at tudunk mondani. Így folytatva, ha nyerni akarunk, nekünk kell mondanunk a 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1 számokat, vagyis Első tud nyerni, ha 1-gyel kezd (és jól játszik). Kezdő stratégiáját úgy is megfogalmazhatjuk, hogy első lépésre 1-et mond, ezután az ellenfél lépését mindig kiegészíti 11-re.

**A játék szervezése.** Érdemes tanulói párokban kipróbálni a játékot. Aki már úgy gondolja, hogy van *nyerő stratégiája*, az játszhat a tanár ellen úgy, hogy megválaszthatja, hogy Első vagy Második akar-e lenni. Tanárként nem érdemes kezdettől „jól játszani”, mert könnyű ellesni a „jó számokat” azoknak is, akik nem találták meg a nyerő stratégiát. „Rossz játékkal” ellenőrizhetjük, hogy tényleg megfejtette-e a diák a dolog nyitját.

Ellenőrizhetjük, hogy a megbeszélt stratégiát ki értette meg, ha újra játsszuk a játékot 100 helyett más végső számmal, és/vagy más lépéshosszokkal.

A játékot úgy is játszhatjuk, hogy egy sorban megszámozott mezőkből álló pályán (esetleg a számegyenesen) kell a játékosoknak egy bábuval felváltva lépniük.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | …<br>… | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

**Megjegyzések:** A játék egyik elterjedt változatában (Fejben 21) a cél a 21 elérése, a „lépésköz” pedig 1, 2 vagy 3 lehet. Kisebb gyerekekkel, illetve egyéb módszertani meggondolások alapján kezdhetünk ezzel az egyszerűbb feladattal.

A játék során szerzett tapasztalatok segíthetnek a maradékosztályok mélyebb megértésében.

A Számlétrának nagyon sok variációját lehet megmutatni, ezek közül ismertetünk néhányat, amelyeket mi is szoktunk játszani.

**1.2.** Nem az nyer, aki kimondja a 100-at, hanem az *veszít*, aki kénytelen a 100-at kimondani (vagy átlépni).

**Stratégia:** Ha sikerül 99-et mondanunk, nyertünk. Innentől az eredeti játék, avval a változással, hogy cél a 99. Ilyenkor Második nyerhet.

**Megjegyzés:** Érdemes különböző célok vagy lépéshosszok esetén tisztázni, hogy mikor kinek van „nyerő stratégiája”, hiszen a nyerő-vesztő cél cseréje nem automatikusan jár együtt azzal, hogy a kezdő, vagy a másik nyerhet-e.

**1.3.** Az eredeti játék során egyszer lehet passzolni (a két játékosnak összesen egyszer, vagyis ha valamelyikük passzolt, akkor a másik már nem teheti ezt meg).

**Stratégia:** Mondjunk az alapjáték „jó számainál” eggyel kisebb számokat, amíg az ellenfél nem passzol. Ha az ellenfél mond egy, az eredetiben ilyen „jó” számot, akkor passzoljunk. A másodiknak van nyerő stratégiája.

**Megjegyzés:** Meggondolható, hogy mi a helyzet (összesen, tehát nem fejenként) két, három, ... megengedett passz esetén.

**1.4.** Számozott mezők esetén úgy is játszhatjuk a játékot, hogy Első az 1 előtt, Második a 100 (vagy az aktuális utolsó szám) mögött helyezi el a bábuját, visszafelé haladva indul, vagyis egymással szembe mennek. Egymást átugrani nem szabad, az veszít, aki nem tud lépni.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| → | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | |
| | 40 | 39 | 38 | 37 | 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | |
| | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | |
| | 80 | 79 | 78 | 77 | 76 | 75 | 74 | 73 | 72 | 71 | 70 | 69 | 68 | 67 | 66 | 65 | 64 | 63 | 62 | 61 | |
| | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 | ← |

(Más alakban is el lehet rendezni a számokat a táblán.)

**Stratégia:** Ha úgy képzelnénk el az eredeti játékot, hogy „visszafelé” haladnak, 100-ból kell kivonniuk a játékosoknak felváltva 1 és 10 közötti számokat, akkor a cél a 0 lenne. Ha egymással szemben mennek, akkor a távolságukat szeretnék 1-re csökkenteni.

Érdekes megfigyelni, mikor veszik észre a gyerekek a kétféle játék közti szoros kapcsolatot.

**1.5.** Egy 10-szer 10-es négyzetrácson a jobb fölső mezőből akarunk eljutni a bal alsó mezőre balra vagy lefelé lépéssel úgy, hogy a lépés hossza 1 és 10 mező közé essen (beleértve a határokat), és a lépés közben egyszer megváltoztathatjuk az irányt. Az nyer, aki a bal alsó mezőre lép.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | START |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

**Stratégia:** Jelöljük a mezőket két koordinátával. Az induló mező legyen a (0,0), az utolsó mező a $(9,9)$ (a koordináták balra, illetve lefelé növekednek). Vegyük észre, hogy mindegy, hányszor váltunk irány a lépés során, egy-egy lépésben a kiindulási mezőhöz képest az érkezési mező koordinátái összege egy 1 és 10 közé eső számmal nő (beleértve 1-et és 10-et is). Az utolsó mező koordinátáinak összege 18, így ha olyan mezőre lép a kezdő, amelynek koordinátái összege eléri a 8-at, biztosan veszít. Ezért a kezdőnek olyan mezőn kell kezdenie, amelynek koordinátái összege legfeljebb 6. Második innen csak olyan mezőre léphet, amely koordinátái összege 7 és 17 közé esik, azaz Első innen egy lépésben eljuthat a $(9,9)$ koordinátájú mezőre, és nyer.

A számlétra játékot és a változatait más eszközökkel is lehet játszani, nem csak számokkal fejben vagy „számegyenesen”, hanem például kupacokban elhelyezett kavicsokkal.

### 2. Kavicskupacok

**2.1.** Egy 100 kavicsból álló kupacból 2 játékos felváltva vehet el 1 és 10 közötti darabszámú kavicsot. Az nyer, aki az utolsót elveszi.

**Megjegyzés:** Ez nyilván ugyanaz a játék, mint a számlétra, csak éppen visszafelé haladva. Jól látszik, hogy szembe haladás esetén ugyanezt a játékot kapjuk, hiszen mindegy, hogy a kavicskupac „melyik széléből” veszünk el kavicsokat.

**2.2.** Egy nehezebben megfejthető játék: Egy (legalább két kavicsból álló) kavicskupacból felváltva vesznek el a játékosok, a következő szabály szerint: Első elvehet akármennyit (legalább egyet), csak az összeset nem. A továbbiakban mindenki elvesz legalább egyet és legfeljebb kétszer annyit, mint előtte az ellenfele. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi.

**Tapasztalatszerzés:** Mivel ennek a játéknak a stratégiáját az eddigi játékokénál nehezebb megtalálni, érdemes kevés számú kaviccsal kezdeni. *Feltételezzük, hogy mindkét játékos igyekszik nyerni, és ennek érdekében mindig a lehető legjobb lépést teszi meg.*

Azt nem nehéz meggondolni, hogy 2, 3 kavics esetén Első veszít, mert akárhány kavicsot vesz is el (az összeset nem lehet), Második elveheti a maradékot.

Ha a kavicsok száma 4, akkor Első csak úgy nyerhet, ha 1-et vesz el, ekkor ugyanis Másodiknak 3 kavics marad, és – mint láttuk – abból akárhányat vesz is el, Első elveheti a maradékot.

Ebből az is látszik, hogy ha egy játékos 3 kavicsot hagy, akkor csak abban az esetben nyeri meg a játékot, ha előzőleg legfeljebb 1 kavicsot vett el – mert ekkor Második csak 1-et vagy 2-t tud elvenni –, vagyis ha előzőleg 4 kavics volt. Ebből az is következik, hogy 4 kavicsos kupaccal a kezdő tud nyerni.

4 kavics esetén a kezdő nyerhet.

Ha 5 kavics van, akkor amennyiben Első 1-et vesz el, Másodikat hozza nyerő helyzetbe az előző meggondolás szerint, míg ha 2-t vagy annál többet, akkor Második közvetlen nyerő lépést tehet.

5 kavics esetén a kezdő veszít.

Ezért 5 kavics mellett elérhető, hogy a soron következő veszítsen, de csak abban az esetben, ha az elvett kavicsok száma 1 vagy 2 (hogy ne tudja egyből elvenni az összes maradék kavicsot). Azaz 6 vagy 7 kavics esetén Első tud nyerni.

Ha 8 kavics van a kupacban: Első nyilván nem fog 3 vagy annál több kavicsot elvenni, mert akkor Második közvetlen nyer; ha viszont csak 1-et vagy 2-t vesz el, akkor is veszít, hiszen – mint láttuk – 6 vagy 7 kavics esetén a soron következő nyer.

8 kavics esetén a kezdő veszít.

Előbb-utóbb megsejthető, hogy ha kezdetben a kavicsok darabszáma Fibonacci-szám, akkor – mindkét játékos jó játéka esetén – Második nyerhet, minden más esetben Első tud nyerni.

**Magyarázat:** Indukcióval vázlatosan megmutatjuk, hogy Fibonacci-szám darabszámú kavicskupacok esetén Második nyer, minden más esetben Első. (A Fibonacci-számokat $F_n$-nel jelöljük, $F_1=F_2=1$, $F_2=2$, ... és $n\ge 1$-re $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.)

Tegyük fel, hogy $F_{n-1}$-ig beláttuk az állítást.

**1.** Először tegyük fel, hogy a kavicsok száma $F_n$.

*a)* Ha $F_n$ kavics van és Első legalább $F_{n-1}$ kavicsot vesz el, akkor $F_{n-1}$-nél kevesebb kavics marad ($F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ és $F_{n-1}>F_{n-2}$), így Második az összes megmaradt kavicsot el tudja venni, és nyer.

*b)* Ha Első kevesebbet vesz el, mint $F_{n-1}$, akkor $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ miatt legfeljebb $F_{n-2}$-t vett el. Második gondolatban kétfelé osztja a kavicskupacot, egy $F_{n-2}$ és egy $F_{n-1}$ darabszámúra. Mivel az $F_{n-2}$ darabszámú kupacos játékban ő második, az indukciós feltevés miatt megnyerheti, és az utoljára elvett kavicsok száma legfeljebb $\frac{2}{3}F_{n-2}$. Ezért az $F_{n-1}$ darabszámú kupacból először Első vesz, legfeljebb $\frac{4}{3}F_{n-2}$ darabot, ami kisebb, mint $F_{n-1}$, hiszen $\frac{4}{3}\cdot 5<8, \frac{4}{3}\cdot 3<5, \frac{4}{3}\cdot 2<3, \frac{4}{3}\cdot 1<2$, illetve $n>5$-re:

$$3F_{n-1}-4F_{n-2}=3F_{n-3}-F_{n-2}=2F_{n-3}-(F_{n-2}-F_{n-3})=2F_{n-3}-F_{n-4}=F_{n-4}+2F_{n-5}>0.$$

Így az $F_{n-1}$ kavicsos kupacban Első nem tud minden kavicsot egyszerre elvenni, ezért (az indukció szerint) abban a játékban is nyerheti Második.

Ebből következik, hogy aki Fibonacci-szám számosságú kavicskupacból elsőként vesz el (akármennyit, de nem az összeset), az veszít.

**2.** Most tegyük fel, hogy a kavicsok száma nem Fibonacci-szám. A továbbiakhoz több ötletet is felhasználunk.

1. Két szomszédos Fibonacci-szám összege Fibonacci szám.

2. Két másodszomszédos Fibonacci-szám közül a nagyobbik több, mint kétszerese a kisebbiknek: 1 és 2 nem csak másodszomszédos, hanem szomszédos is; míg $F_n\ge 2$-re $F_{n+2}>2F_n$, hiszen $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n>F_n+F_n=2F_n$.

3. Bármely pozitív egész szám felírható különböző Fibonacci-számok (esetleg egytagú) összegeként. A bizonyítás indukciós gondolata: Az adott számból levonjuk a lehető legnagyobb Fibonacci-számot, és ha van maradék (azaz nem Fibonacci-számból indultunk ki), akkor tovább folytatható az eljárás, mert minden természetes számhoz van nála nem nagyobb Fibonacci-szám. Sőt, ami a levonás után megmarad, az biztosan kisebb, mint az éppen levont számot közvetlenül megelőző Fibonacci-szám, különben két szomszédos Fibonacci-számot vonnánk le, amelyek összege egy nagyobb Fibonacci-szám, így azt előbb megtaláltuk volna. A szám tehát a levont Fibonacci-számok összege, és a felírásban nagyság szerint szomszédosak közül a nagyobbik minden esetben több, mint kétszerese a kisebbiknek.

**A stratégia:** Tegyük fel, hogy a kavicsok száma $F_{n-1}$ és $F_n$ közé esik (de nem egyenlő egyikkel sem). Írjuk fel a kavicsok számát csökkenő Fibonacci-számok összegeként a fenti módon (nyilván $F_{n-1}$ a legnagyobb), és bontsuk szét gondolatban a kavicskupacot ilyen számosságú részekre. Első vegye el a legkisebb tagnak megfelelő darabszámú kavicsot. Mivel Második nem tudja a felírásban következő tagnak megfelelő számú kavicsot elvenni (mert az az elvett kavicsok számának több mint kétszerese), Első úgy tekinti, mintha Második a soron következő Fibonacci-szám számosságú kavicskupacot bontaná meg, és az ehhez a Fibonacci-számhoz tartozó indukciós stratégiát követi: ebben a kupacban ő veszi el az utolsó darabot, és az utoljára elvett kavicsok számának kétszerese kisebb, mint a következő kupacban lévő kavicsok száma. Második a soron következő lépésével új (Fibonacci-szám darabszámú kavicsból álló) kupacot bont, de nem veheti el az összes kavicsot benne.

Mivel Elsőnek az indukciós feltevés szerint 1-től $F_{n-1}$-ig minden Fibonacci-számra van nyerő stratégiája Második ellenében, Első nyer.

Az állítást igazoltuk minden számra $F_n$-ig, ezért az indukció elve alapján minden természetes számra igaz az állítás.

**2.3. Két kupac kavics (kétkupacos NIM játék)**

A kavicsok két kupacban vannak. Két játékos felváltva vehet el tetszőleges darabszámú kavicsot abból a kupacból, amelyikből akar. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi.

**Stratégia:** Ha egyforma darabszámú kavics van a két kupacban, akkor Második nyerhet, ha mindig úgy lép, hogy kiegyenlítse a két kupac darabszámát. Ha a kavicsok darabszáma a két kupacban különböző, akkor a kezdő minden lépésével ki tudja egyenlíteni a két kupac darabszámát.

**Megjegyzés:** A játék úgy is játszható, hogy kavicsok helyett egy rácstéglalapot veszünk. Ennek jobb felső mezőjén áll egy bábu. Ezzel a bábuval lehet balra és lefelé lépni. Az nyer, aki a bal alsó sarokban lévő mezőre lép. (A két játékot összevetve: annyit lép egy játékos a rácstéglalapon, ahány kavicsot elvett volna egy kupacból, mégpedig az egyik kupac esetén lefelé, a másiknál balra.)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⋮ | | | | | | | | |
| 7 | + | + | + | + | + | + | + | |
| 6 | + | + | + | + | + | + | − | |
| 5 | + | + | + | + | + | − | + | |
| 4 | + | + | + | + | − | + | + | |
| 3 | + | + | + | − | + | + | + | |
| 2 | + | + | − | + | + | + | + | |
| 1 | + | − | + | + | + | + | + | |
| 0 | − | + | + | + | + | + | + | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ⋯ |

Visszafelé lépkedve, rekurzívan építjük fel a táblán a nyerő $(+)$ és a vesztő (–) pozíciók jelölését az éppen lépésre következő játékos szempontjából.
Ha a soron következő 0 kavicsot talál ($(0,0)$ mező), akkor a másik nyert (–). Minden olyan mező, ahonnan a $(0,0)$-ra lehet lépni, nyerő $(+)$. A továbbiakban ahonnan csak $+$ jelű mezőre lehet lépni, az – jelet kap. Ahonnan pedig lehet –ra lépni, az nyerő, $+$ jelet kap stb.
Látható, hogy egyenlő számú kavics esetén, vagyis ha a tábla négyzetes, a kezdő veszít (ellenfele jó játéka esetén).

Ezt a játékot is játszhatjuk úgy, hogy az veszít, aki az utolsó kavicsot veszi el. A nyerő stratégiát a táblás módszerrel egyszerű megtalálni.

A kavicskupacos játékot három vagy több kupaccal is játszhatjuk. A három kupacos játék NIM néven is ismert, amelynek kiterjedt irodalma van. A játék részletes elemzése olvasható például Lánczi Ivánné munkájában (Szórakozás számrendszerekkel, Matematikai érdekességek, szerkesztő Hódi Endre, 91–109. oldal, Gondolat kiadó, 1969).

**2.4.** Két kupac kavics van, amelyekből a következő szabály szerint vehet el felváltva a két játékos: bármelyik kupacból lehet elvenni akármennyit, vagy szabad elvenni mindkét kupacból ugyanannyit.

**Stratégia:** Ennek a játéknak a stratégiáját a táblás analógia nélkül nehezebb megtalálni. A táblán, rajzban, egyszerűen megjelölhető a nyerő pozíciók helye.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⋮ | | | | | | | | |
| 7 | + | + | + | + | − | + | + | |
| 6 | + | + | + | + | + | + | + | |
| 5 | + | + | + | − | + | + | + | |
| 4 | + | + | + | + | + | + | + | |
| 3 | + | + | + | + | + | − | + | |
| 2 | + | − | + | + | + | + | + | |
| 1 | + | + | − | + | + | + | + | |
| 0 | − | + | + | + | + | + | + | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ⋯ |

A stratégia megtalálása táblázatos módszerrel.

*Török Judit, Fried Katalin*
*ELTE TTK Matematikai Intézet, Matematikatanítási és Módszertani Központ*

Varga Tamás konferencia matematikatanítás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon: ›

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap

Csapodi Csaba, Koncz Levente 2020. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

# Az érettségiről érdekesen, avagy egy elmaradt előadás

## 1. Bevezető

A 2019/20-as tanév második féléve és a 2020. májusi érettségi időszak hosszú ideig emlékezetes lesz minden diák, tanár és szülő számára. A COVID-19 vírus[1] terjedése miatt elrendelt iskolaépület-bezárások, a tanítás napok alatt történő átállítása digitális távoktatásra, majd az írásbeli érettségi vizsgák lebonyolítása mindenkitől extra erőfeszítést, nagyfokú rugalmasságot és magas fokú alkalmazkodóképességet igényelt. Utólag visszatekintve összefoglalva azt mondhatjuk, hogy mindenki igyekezett a lehető legjobban teljesíteni ebben a helyzetben, a tanévet le lehetett zárni, az érettségi vizsgák rendben lezajlottak. Ugyanakkor pár dolgot nyilvánvalóvá tett ez a két-három hónap: ezek közül talán a legfontosabb, hogy iskolára (mint fizikai térre) és pedagógusra szükség van a 21. században is.

Az alábbi cikkben a 2020. évi matematika érettségi vizsga rövid elemzését végezzük el. Tesszük ezt azért (is), mert az idei Rátz László Vándorgyűlés elmaradása miatt a megszokott elemzésünket nem tárhattuk szóban az érdeklődők elé. Szeretnénk a legfontosabb eredményességi statisztikákat és néhány érdekesebbnek bizonyuló feladatot részletesebben is bemutatni, mindezt külön közép- és emelt szinten, a magyar nyelvű feladatsorokat tekintve.

Mielőtt a részletesebb elemzésnek nekifogunk, fontosnak tartunk eloszlatni egy „városi legendát": az idei írásbeli feladatsorok összeállítását semmilyen módon nem befolyásolta a vírushelyzet. A feladatsorok még március előtt elkészültek, a minden évben megszokott tartalommal és szerkezetben. A tételek összeállítását végző bizottság azt sem tudta figyelembe venni, hogy az emelt szintű vizsgázók idén szóbeli vizsga nélkül tehetik le a vizsgát, hiszen erről csak pár héttel a vizsga előtt született döntés. (Egyébként sem világos, hogy – ha lett volna erre mód – ezt hogyan lehetett/kellett volna figyelembe venni a feladatsorok elkészítésénél.) Ezen túl is megalapozatlan minden olyan, időnként szárnyra kapó feltételezés, mely szerint az aktuális feladatsor „biztosan szándékosan ilyen vagy olyan" (pl. a szokásosnál könnyebb vagy nehezebb) volt, hiszen a vizsgázók elé kerülő feladatsort nem sokkal a vizsga előtt sorsolják ki általában három feladatsor közül.

## 2. Megoldottsági adatok, érdekesebb eredmények

Az alábbi elemzésben szereplő adatok jelentős részben az iskolák által évek óta végzett önkéntes adatszolgáltatásból származnak, amit ezúton is köszönünk! Ilyen módon idén a középszintű vizsgák 36,1, az emelt szintű vizsgák 26,4%-áról van részletesebb információnk. Az elmúlt évek hasonló mérései alapján elmondható, hogy a teljes vizsgázói populáció eredményei általában 3-4 százalékponttal elmaradnak az önkéntes adatszolgáltatásból származó eredményektől.

### 2.1. Középszint[2]

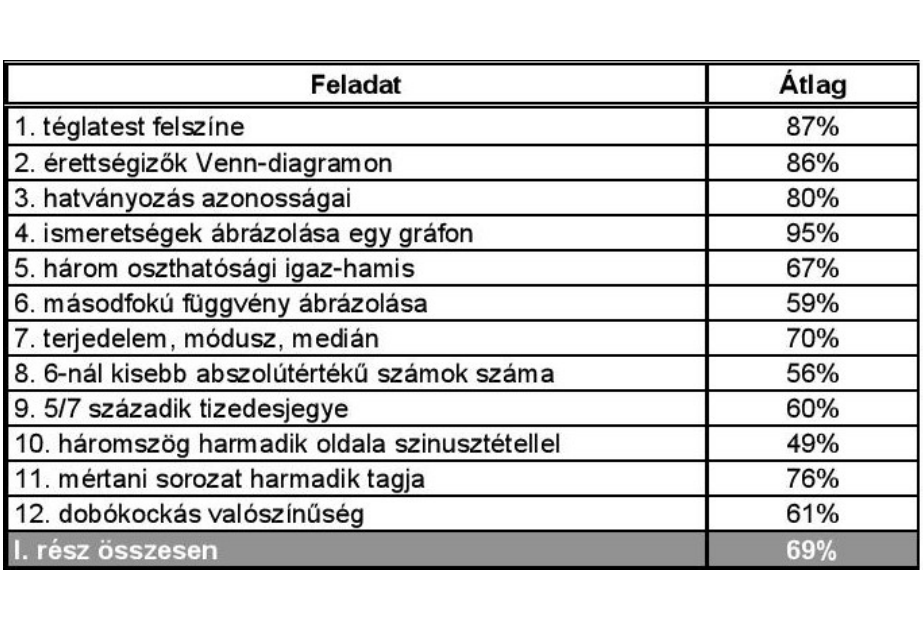
A középszintű matematika érettségi vizsgát érintette talán a legkevésbé az idei járványügyi helyzet, hiszen a „nagy" tárgyak közül ez az egyetlen, amiből normál körülmények között sincs szóbeli vizsga. (Ez alól természetesen kivételt képeznek azok a diákok, akik az írásbeli vizsgán 12 és 25% közötti eredményt értek el, nekik idén is volt lehetőségük szóbeli vizsgát tenni.)

Idén végül 64 239-en kísérelték meg a vizsgát középszinten, közülük magyar nyelven 62 356-an vizsgáztak. Ez a szám több okból is alacsonyabb a korábbi években mért adatnál. Egyfelől közismert, hogy ezúttal hátrányos következmények nélkül vissza lehetett lépni az érvényes vizsgajelentkezéstől. Másfelől a korábbinál többen tettek idén emelt szintű vizsgát matematikából. (Egy harmadik ok a végzős diákok számának folyamatos, demográfiai hátterű csökkenése.)

A 2020. évi magyar nyelvű feladatsor megoldottsága – az önkéntes visszajelzés alapján – 53,4% volt. Ez az adatgyűjtés 2012-es kezdete óta mért legmagasabb érték: a megelőző 8 évben az eredményesség mindig 44,6 és 53% közé esett. Mint említettük, ezek az értékek néhány százalékponttal mindig meghaladják a teljes populációra vonatkozó adatokat: idén az összes magyar nyelven vizsgázó írásbeli eredményének átlaga 50,2% volt, ami a 2017-es 50,4% után a második legmagasabb érték.

**Eredményesség vizsgarészenként, feladatonként, alfeladatonként**

Középszint, I. rész



| Feladat | Átlag |
|---|---|
| 1. téglatest felszíne | 87% |
| 2. érettségizők Venn-diagramon | 86% |
| 3. hatványozás azonosságai | 80% |
| 4. ismeretségek ábrázolása egy gráfon | 95% |
| 5. három oszthatósági igaz-hamis | 67% |
| 6. másodfokú függvény ábrázolása | 59% |
| 7. terjedelem, módusz, medián | 70% |
| 8. 6-nál kisebb abszolútértékű számok száma | 56% |
| 9. 5/7 századik tizedesjegye | 60% |
| 10. háromszög harmadik oldala szinusztétellel | 49% |
| 11. mértani sorozat harmadik tagja | 76% |
| 12. dobókockás valószínűség | 61% |
| I. rész összesen | 69% |

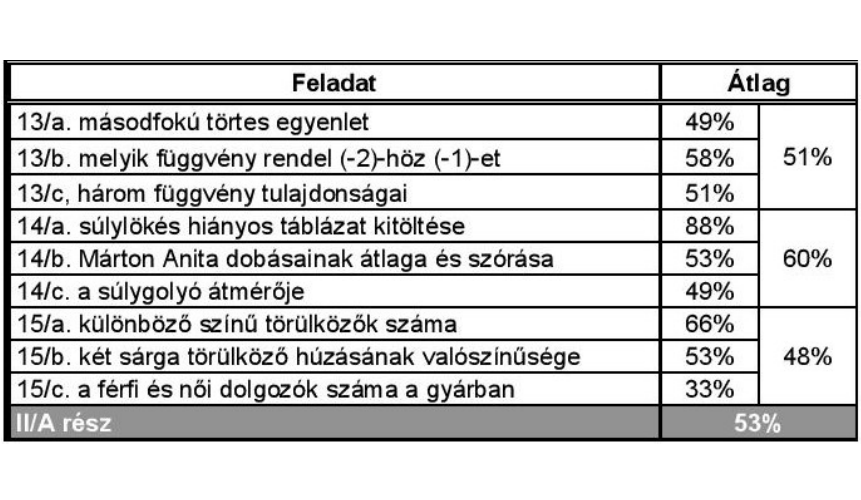
– A középszintű feladatsor I. részéről összességében az mondható el, hogy az átlagosnál jobban sikerült (2012 óta ennek a vizsgarésznek az átlaga 63% volt), sőt, az egyik legjobb eredményt hozta az elmúlt 10 évben (csak 2014-ben és 2018-ban volt ennél magasabb e vizsgarész megoldottsága).

– Az első négy feladat jó indítás volt: ezek a feladatok megnyugtathatták a diákokat, hiszen 80% feletti megoldottságot eredményeztek. Ezen belül is kiemelkedő a 4. feladat, amely minden idők második legjobb eredményét hozta (az első helyen a 2019. évi feladatsor 8. feladata áll, 97%-os megoldottsággal).

– Érdemes még kiemelni a 7. feladat megoldottságát. Egy nem szokványos, sem korábbi érettségi feladatsorokban, sem tankönyvekben nem szereplő feladatot kellett megoldani: egy kördiagram alapján egy adatsokaság különböző statisztikai jellemzőit leolvasni.

– A kevésbé jó megoldottságot mutató 8-as feladat egy korábbi hasonló példa (2017-ben 40%-os megoldottsága lett annak a feladatnak, amelyben a 3-nál kisebb abszolútértékű számokat kellett ábrázolni egy számegyenesen) alapján nem jelentett meglepetést, mint ahogy a 10. feladat alacsony eredményessége sem váratlan.

Középszint, II. A rész



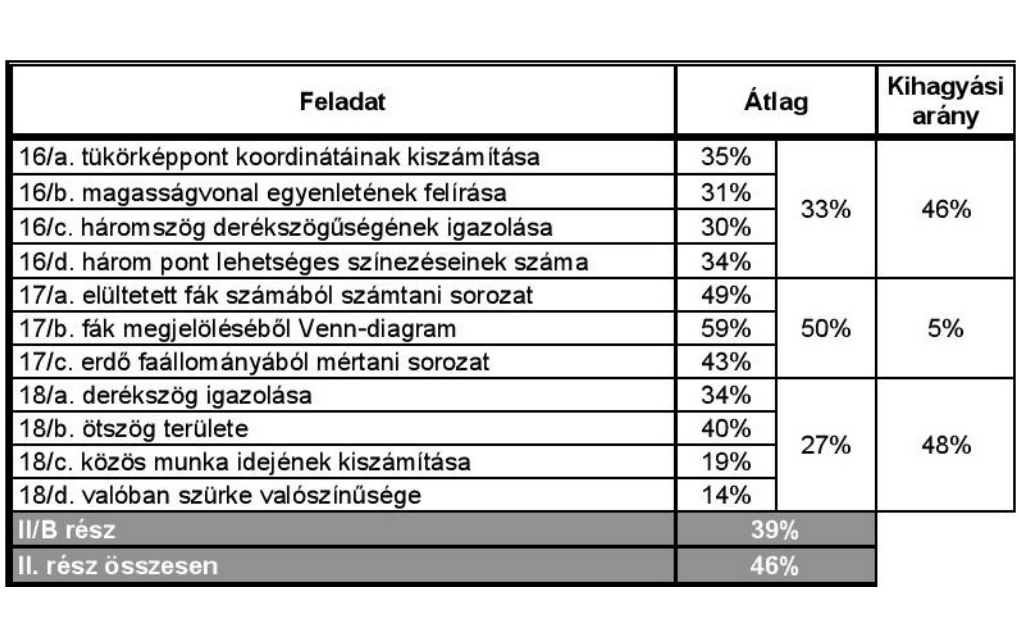
| Feladat | Átlag | |
|---|---|---|
| 13/a. másodfokú törtes egyenlet | 49% | 51% |
| 13/b. melyik függvény rendel (-2)-höz (-1)-et | 58% | |
| 13/c. három függvény tulajdonságai | 51% | |
| 14/a. súlylökés hiányos táblázat kitöltése | 88% | 60% |
| 14/b. Márton Anita dobásainak átlaga és szórása | 53% | |
| 14/c. a súlygolyó átmérője | 49% | |
| 15/a. különböző színű törülközők száma | 66% | 48% |
| 15/b. két sárga törülköző húzásának valószínűsége | 53% | |
| 15/c. a férfi és női dolgozók száma a gyárban | 33% | |
| II/A rész | 53% | |

– A feladatsor II. részének három feladatáról (és benne a kilenc alfeladatról) elmondható, hogy általában közepes nehézségűnek bizonyultak; felfelé lógott ki – nem meglepő módon – a 14. feladat a) része, lefelé – mértékét tekintve talán meglepő módon – a 15/c alfeladat.

– Talán meglepőnek mondható a 15. feladat c) részének alacsony megoldottsága. Ez alapján úgy tűnik, hogy egy egyszerű modellezési helyzet is komoly nehézséget jelent a diákok nagy része számára. Biztosak lehetünk benne, hogy nem a felírt egyenlet megoldása okozza a problémát, hiszen a 13/a alfeladatban ennél nehezebb egyenletet oldanak meg jóval eredményesebben a diákok.

– Végül megemlítjük, hogy a (valós eredményekre épülő) 14-es feladat nagy sikert aratott a közösségi médiában, a benne szereplő Márton Anita büszkén írta, hogy érettségi tananyag lett[3]. Ha nem maradt volna el idén az olimpia, talán még érdekesebb lett volna a feladat a nagyközönség számára.

Középszint, II.B rész



| Feladat | Átlag | | Kihagyási arány |
|---|---|---|---|
| 16/a. tükörképpont koordinátáinak kiszámítása | 35% | 33% | 46% |
| 16/b. magasságvonal egyenletének felírása | 31% | | |
| 16/c. háromszög derékszögűségének igazolása | 30% | | |
| 16/d. három pont lehetséges színezéseinek száma | 34% | | |
| 17/a. elültetett fák számából számtani sorozat | 49% | 50% | 5% |
| 17/b. fák megjelöléséből Venn-diagram | 59% | | |
| 17/c. erdő faállományából mértani sorozat | 43% | | |
| 18/a. derékszög igazolása | 34% | 27% | 48% |
| 18/b. ötszög területe | 40% | | |
| 18/c. közös munka idejének kiszámítása | 19% | | |
| 18/d. valóban szürke valószínűsége | 14% | | |
| II/B rész | 39% | | |
| II. rész összesen | 46% | | |

– A feladatsor II.B részének érdekessége abból a jelenségből fakad, hogy a 17. feladatot a vizsgázók 95%-a választotta. Ez 2012 óta a második legmagasabb arány (2012-ben a 16-os feladatot 97% választotta). Lehet azon vitatkozni, hogy mennyire helyénvaló egy olyan „választható" feladat, ami tulajdonképpen nem az, hiszen majdnem mindenki tetszését elnyeri. Azonban az a jelenség, amikor egy feladatot sokan választanak, de a másik két feladat között nagyjából egyenlő arányban oszlanak meg a vizsgázók, mindenképpen örömtelibb, mint amikor a feladatsorban egy nagyon elutasított feladat szerepel, és így valójában nagyon leszűkül a választás lehetősége a diákok számára (2012-ben ez volt a helyzet a 18. feladattal, melyet a vizsgázók 76%-a kihagyott).

– A 17. feladat népszerűsége mögött a benne szereplő témakörök (sorozatok, logikai szita formula) kedveltsége és az ilyen típusú feladatok viszonylag gyakori megjelenése állhat.

– Meglepően alacsonynak mondható a 16/a alfeladat megoldottsága, ehhez ugyanis nagyon minimális matematikai ismeret szükséges. A 18/c alfeladat esetében is talán jobb eredményt vártunk: annak ellenére, hogy a feladat nem csak egyenlettel, hanem következtetéssel is megoldható, kevés jó megoldás született.

– Nem nevezhető meglepően alacsonynak a 18/d alfeladat eredményessége, a binomiális eloszlás alkalmazása továbbra sem megy a diákoknak, pedig az utóbbi időben minden évben volt ilyen feladat a középszintű feladatsorban. Igaz, rendre a mostanihoz hasonló megoldottsággal (pl. 2018. május 18/c feladat: 10%).

### 2.2. Emelt szint[4]

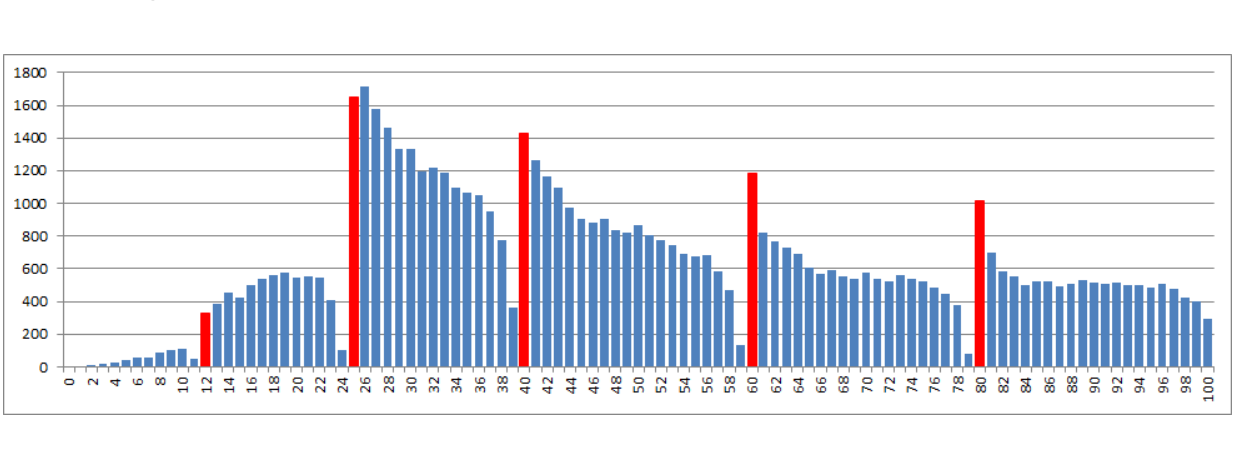
A megelőző évekhez képest 2020-ban két olyan meghatározó új momentum volt az emelt szintű matematika vizsgán, amely befolyásolta a vizsga átlageredményét.

A felsőoktatási felvételihez előírt legalább egy kötelező emelt szintű vizsga számottevően megnövelte az emelt szinten jelentkezők számát: 2020-ban (a jelentkezésüket a járvány miatt visszavonók nélkül) összesen 4801-en jelentkeztek emelt szintű vizsgára, ami 36%-kal több az elmúlt öt év átlagánál, és a kétszintű vizsgarendszer bevezetése óta messze a legmagasabb érték. Jogos a feltételezés, hogy a pluszban megjelent jelentkezők jelentős része olyan vizsgázó, akiket csak a kényszer terelt ebbe az irányba, és így az emelt szinten vizsgázók „átlagos felkészültsége" valamivel csökkent az előző évekhez képest. (Ők ugyanekkor eltűntek a középszinten vizsgázók közül, de a középszinten vizsgázók jóval nagyobb száma miatt az eltűnésük hatása nem vagy csak alig érzékelhető.)

A másik tényező a szóbeli vizsga elmaradása. Bizonyára sokan nem bánták, hogy elhagyhatták az ehhez szükséges hosszadalmas, alapos elméleti felkészülést. Másrészt viszont a szóbeli nélküli érettséginek az volt az ára, hogy a vizsgaeredmények átlaga bizonyosan alacsonyabb lett, mint szóbeli vizsgával együtt lett volna.

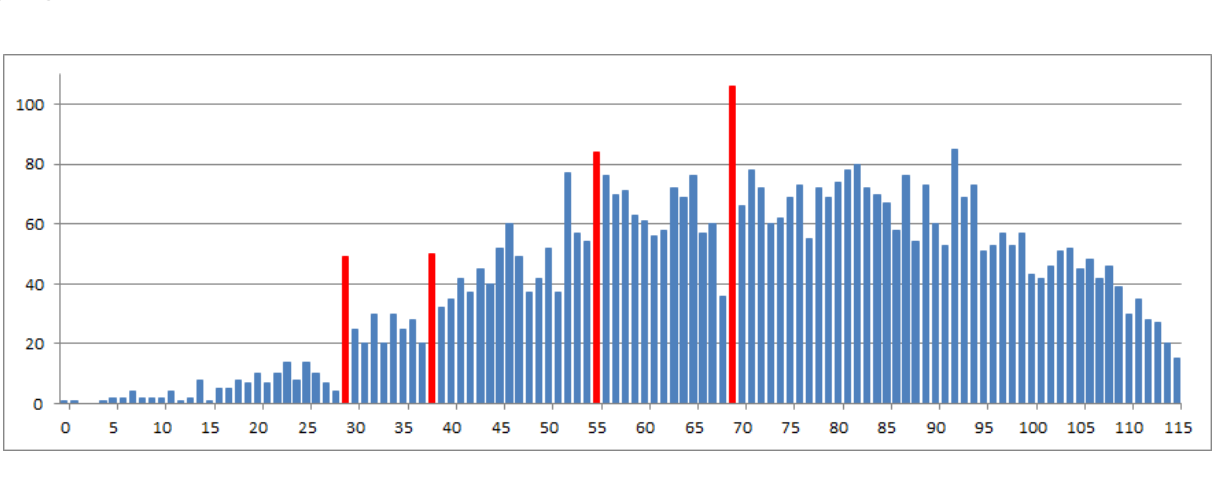
A szóbeli vizsgák átlageredménye igen erős stabilitást mutat: az elmúlt 10 évben 75,2 és 77,6% között ingadozott. Ugyanebben a periódusban a legjobban sikerült írásbeli átlag 69,4% volt, a 10 év írásbeli átlaga pedig 65,7%. Az elmúlt évtizedben a matematika szóbeli vizsgák átlaga kb. 10 százalékponttal haladta meg az írásbeli vizsgákét. A szóbeli vizsga kisebb súlya miatt ez annyit jelent, hogy a vizsgák átlageredménye kb. 2,5 százalékponttal jobb, mint az írásbeli átlageredmény. Ez a hatás tehát idén a vírus miatt elmaradt.

A szóbeli elmaradásának még egy érdekes hatása lett. Elég közismertek a középszintű tárgyak pontszámeloszlásának „tüskés" diagramjai, ahol az egyes osztályzatok alsó határán kiemelkedően sok, az alatt 1-2 ponttal pedig nagyon kevés dolgozat található. Ez talán nem meglepő azoknál a tárgyaknál, ahol van szóbeli vizsga, hiszen minden vizsgáztató tudja feleltetéskor, hogy *n* pont kell a négyeshez, és ilyenkor csak nagyon kevesen adnak *n* – 1 vagy *n* – 2 pontot, annál többen *n*-et vagy *n* + 1-et. (Igaz ez annak ellenére, hogy az érettségin az osztályzatnak csak szimbolikus jelentősége van.) Kicsit már meglepőbb, hogy ugyanezt a képet látjuk évről évre a matematika középszintű vizsga pontszámeloszlásánál is, pedig ez (a viszonylag kevés szóbeliző kivételével) egy (objektívebbnek tartott) írásbeli vizsgából származik. De őszintén: tegye fel a kezét közülünk az, aki nem talál bármelyik dolgozatban még 1-2 pontot, ha nagyon kell… Idén az egyes osztályzatok (illetve a szóbelihez szükséges érték) alsó határán 5613, 1 ponttal alatta 728 dolgozat volt.



1. ábra. A 2020. évi magyar nyelvű középszintű matematika érettségi vizsga írásbeli részén elért pontszámok eloszlása a vizsgázók körében

A szóbeli elmaradása miatt felmerülhetett, hogy ez a jelenség idén emelt szinten is láthatóvá válik. De az emelt szintű dolgozatok javítása intézménytől függetlenül történik: mondjuk Kovács Piroskának (saját tanítványunknak) nyilván motiváltabban keresünk még egy pontot (ha ennyi hiányzik az ötöshöz), mint a 01/K04M//6918/15 jelű vizsgázónak, másrészt a 115 pontos maximum, és 33, illetve 47%-os határok miatt a ponthatárok sem magától értetődőek. Kiderült azonban, hogy a javítók még így is odafigyeltek az osztályzatok ponthatáraira: az egyes osztályzatok alsó határán 289, egy ponttal alatta 114 dolgozat volt. Nem meglepő, hogy leginkább a jeles és az elégséges határán figyelhető meg a jelenség: 69 pontos dolgozat 106, 68 pontos 36; 29 pontos dolgozat 49, 28 pontos pedig 4 darab volt.

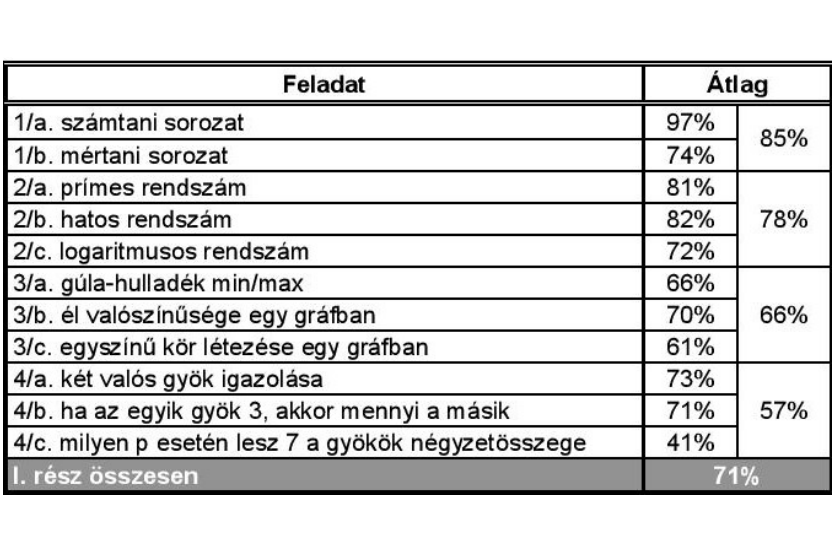


2. ábra: A 2020. évi magyar nyelvű emelt szintű matematika érettségi vizsga írásbeli részén elért pontszámok eloszlása a vizsgázók körében

Idén magyar nyelven 4722-en vizsgáztak. A 2020. évi magyar nyelvű feladatsor megoldottsága – az önkéntes visszajelzés alapján – 66,8% volt. Ez az adatgyűjtés 2012-es kezdete óta (a 2013-as 61,9% után) a második legalacsonyabb érték, és kb. 3-4 százalékponttal marad el a 8 év átlagától. Ezt a különbséget talán éppen betudhatjuk az idén megjelent 36%-nyi plusz vizsgázónak[5]. Adataink emelt szinten is néhány százalékponttal meghaladják a teljes populációra vonatkozó adatokat: idén az összes magyar nyelven vizsgázó írásbeli eredményének átlaga 62,1% volt.

**Vizsgarészenként, feladatonként, itemenként**

Emelt szint, I. rész

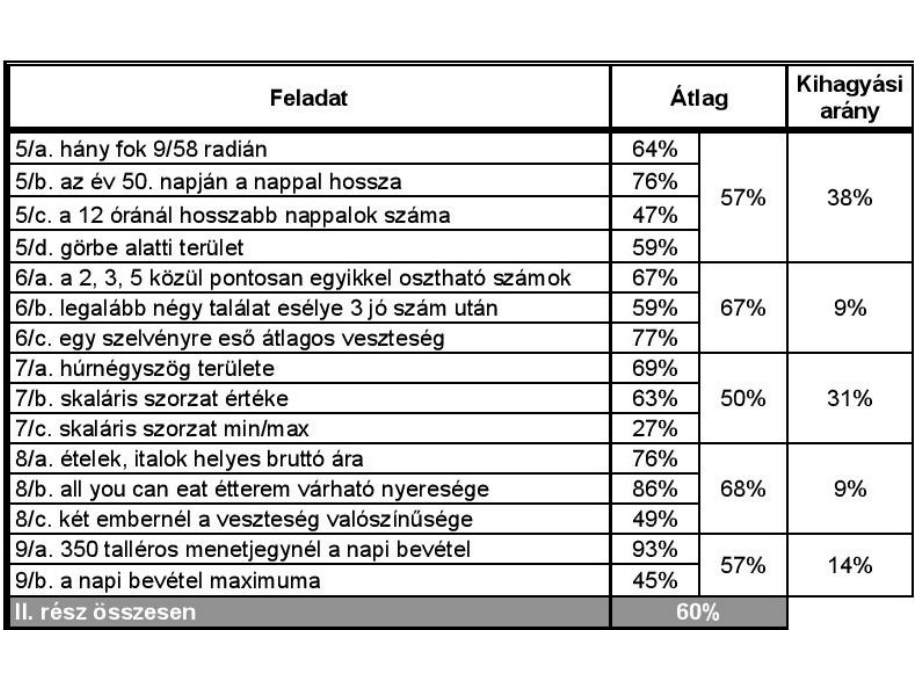


| Feladat | Átlag | |
|---|---|---|
| 1/a. számtani sorozat | 97% | 85% |
| 1/b. mértani sorozat | 74% | |
| 2/a. prímes rendszám | 81% | 78% |
| 2/b. hatos rendszám | 82% | |
| 2/c. logaritmusos rendszám | 72% | |
| 3/a. gúla-hulladék min/max | 66% | 66% |
| 3/b. él valószínűsége egy gráfban | 70% | |
| 3/c. egyszínű kör létezése egy gráfban | 61% | |
| 4/a. két valós gyök igazolása | 73% | 57% |
| 4/b. ha az egyik gyök 3, akkor mennyi a másik | 71% | |
| 4/c. milyen p esetén lesz 7 a gyökök négyzetösszege | 41% | |
| I. rész összesen | 71% | |

Az I. rész átlagos megoldottsága 71% lett, ami csak kevéssel marad el a 2012 óta mért 75%-os átlagtól. Az első négy feladat a számok alapján egyenletesen nehezedett. Az 1. feladat jó „bemelegítő" volt, 86%-os megoldottságánál csak két jobbat mértünk az elmúlt 8 évben (2012/1. 92%, 2014/1. 88%). Még ezen belül is kiemelkedik az a) feladat 97%-os eredményessége: erre a vizsgázók 92%-a megkapta a maximális 5 pontot.

Ennek ellenpontja a 4. feladat: a másodfokú témakörből feltett viszonylag száraz, elméleti kérdések az elmúlt években némileg visszaszorultak a tanítási gyakorlatban, és talán ez tükröződik a feladat relatíve alacsony megoldottságában (csak a 7. feladat sikerült ennél rosszabbul). A 4/c feladat az egész feladatsornak (a 7/c után) a második leggyengébben sikerült iteme lett, pedig nemcsak „ötletesen", de „mechanikusan" is meg lehetett (volna) oldani. Ennek ellenére a vizsgázók 45%-a 0 pontot kapott rá.

Emelt szint II. rész



| Feladat | Átlag | | Kihagyási arány |
|---|---|---|---|
| 5/a. hány fok 9/58 radián | 64% | 57% | 38% |
| 5/b. az év 50. napján a nappal hossza | 76% | | |
| 5/c. a 12 óránál hosszabb nappalok száma | 47% | | |
| 5/d. görbe alatti terület | 59% | | |
| 6/a. a 2, 3, 5 közül pontosan egyikkel osztható számok | 67% | 67% | 9% |
| 6/b. legalább négy találat esélye 3 jó szám után | 59% | | |
| 6/c. egy szelvényre eső átlagos veszteség | 77% | | |
| 7/a. húrnégyszög területe | 69% | 50% | 31% |
| 7/b. skaláris szorzat értéke | 63% | | |
| 7/c. skaláris szorzat min/max | 27% | | |
| 8/a. ételek, italok helyes bruttó ára | 76% | 68% | 9% |
| 8/b. all you can eat étterem várható nyeresége | 86% | | |
| 8/c. két embernél a veszteség valószínűsége | 49% | | |
| 9/a. 350 talléros menetjegynél a napi bevétel | 93% | 57% | 14% |
| 9/b. a napi bevétel maximuma | 45% | | |
| II. rész összesen | 60% | | |

Nem volt könnyű a II. rész nyitánya, és megszokott sem volt, bár ez a két jellemző valószínűleg összefügg: a nehézség jelentős részben éppen a szokatlanságból következik. Noha az a) és a b) kérdés próbálta felvezetni a c)-t, már a felvezetőnek szánt 5/a feladat megoldottsága is csak 64%-os lett. Radiánban ilyen módon érettségin, de még tanórán is csak ritkán kell számolni – viszont itt derül ki igazán, hogy ki az, aki valóban *érti* is az ívmértéket. A vizsgázók 38%-ának az volt erre a helyzetre a válasza, hogy ezt a feladatot hagyta ki. Talán jobb helyen lett volna ez a feladat kicsit hátrébb a feladatsorban.

A másik népszerűtlen feladat a 7. volt (31%-os kihagyási arány), ennek is a c) részével gyűlt meg a baja a legtöbb vizsgázónak. Ha nem csak kiszámítani kell, akkor a skaláris szorzattal sem könnyű dolgozni, pláne ha a szélsőértékét kell meghatározni. Az item megoldottsága 27%-os lett, a vizsgázók 13%-a kapott maximális (7), 54%-a 0 pontot a feladatra.

A 6. és a 8. feladat ehhez képest nem okozott problémát, és utolsó feladatként a 9.-ben elért 60% is elfogadhatónak számít, bár itt elég markáns különbség volt a két alfeladat megoldottsága között (93, illetve 45%).

**Mi várható ősszel?**

Ahogy említettük, a járvány miatt idén hátrányos következmények nélkül vissza lehetett vonni az érvényes vizsgajelentkezéseket. Ezzel a lehetőséggel matematikából középszinten 2676-an (az összes jelentkező 4%-a), emelt szinten 281-en (az összes jelentkező 5,5%-a) éltek. Feltételezhető, hogy közülük sokan úgy tervezték, hogy a soron következő őszi vizsgaidőszakban teszik le az elmaradt vizsgát. Amióta ősszel nem lehet matematikából előrehozott vizsgát tenni (tehát 2014 óta), az őszi vizsgák jelentős részét (80%-át) a tavasszal valamilyen tárgyból év végén vagy az érettségin megbukók vizsgái teszik ki. Amennyiben a jelentkezéstől most visszalépők valóban nagy számban jelentkeznek ősszel, akkor egyrészt a vizsgázók száma a megszokott létszám 2-3-szorosára emelkedhet, másrészt a vizsgázók képességeloszlása is a szokásostól jelentősen eltérő képet fog mutatni: az előző évekhez képest magasabb átlageredményekre számíthatunk – feltéve természetesen, hogy a járványhelyzet az őszi vizsgaidőszak rendes megtartását nem befolyásolja.

## 3. Összefoglalás

Összefoglalásképpen elmondhatjuk, hogy a 2020. évi matematika érettségi vizsga a nehezített és különleges körülmények ellenére nem mutatott jelentősen eltérő képet, mint az előző években. Emelt szinten az írásbeli kicsit alacsonyabb eredménye valószínűleg a vizsgázók számának bővülése miatt következett be, ezt a hipotézist az elkövetkező – remélhetőleg vírus- és karanténmentes – évek eredményei támaszthatják alá. Abban is bízunk, hogy 2021-ben újra élőszóban tarthatjuk meg az Érettségiről érdekesen előadásunkat a matematikatanárok országos Rátz László Vándorgyűlésén.

## 4. További irodalom

A 2012. május-júniusi érettségi feladatsor és az egyes feladatok mérésmetodikai vizsgálata

http://www.oktatas.hu/kozneveles/projektek/tamop318_minosegfejl/projekthirek/erettsegi_vizsgafeladatok_elemzese

http://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/unios_projektek/tamop318/meresmetodika/Matematika.pdf

Érettségi vizsgatárgyak elemzése 2009-2012. tavaszi vizsgaidőszakok

http://www.oktatas.hu/kozneveles/projektek/tamop318_minosegfejl/projekthirek/erettsegi_vizsgatargyak_elemzese

www.oktatas.hu/pub_bin/dload/unios_projektek/tamop318/erettsegi_vizsgatargyak_elemzese/matematika.pdf

A kétszintű érettségi rendszerrel kapcsolatos változtatási igények felmérése a gyakorlati tapasztalatok alapján

www.oktatas.hu/kozneveles/projektek/tamop318_minosegfejl/projekthirek/ketszintu_erettsegi_vizsgarendszer_tanari_tapasztalatok

www.oktatas.hu/pub_bin/dload/unios_projektek/tamop318/erettsegi_konferencia2014/vitaindito_matematika.pptx

A közép- és emelt szintű értékelési skálák összehasonlítása

http://www.oktatas.hu/kozneveles/projektek/tamop318_minosegfejl/projekthirek/erettsegi_ertekelesi_skalak_elemzese

http://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/unios_projektek/tamop318/ertekelesi_skalak_osszehasonlitasa/ertekelesi_skalak_matematika.pdf

Az ellenőrzés problémaköre az érettségin http://matek.fazekas.hu/index.php?option=com_content&view=article&id=296:ellenorzes-es-valasz&catid=34&Itemid=223 (rövid kivonat:) KöMaL, 2015. október

A matematika érettségi vizsga 2017-től (RLV 2015) http://rlv.berzsenyi.hu/2015/Koncz_Csapodi.ppsx?attredirects=0&d=1

Eredményesség és számológép-használat az érettségi vizsgán (RLV 2016)

http://rlv.berzsenyi.hu/2016/Eredmenyesseg%20es%20sz%D0%B0mologep-haszn%D0%B0lat%20az%20Erettsegi%20vizsg%D0%B0n.ppsx?attredirects=0&d=1

Amit tudtunk, amit sejtettünk, és amit nem gondoltunk volna a matematikaérettségiről (RLV 2017) http://rlv.berzsenyi.hu/2017/Csapodi-Koncz_Matematikaerettsegi_RLV17_KL.ppsx

Az érettségiről érdekesen (RLV 2018) http://www.bolyai.hu/RLV2018/Csapodi_Koncz.ppsx

Csaba Csapodi and Levente Koncz: The efficiency of written final exam questions in mathematics based on voluntary data reports, 2012–2015. Teaching Mathematics and Computer Science, 2016/14 p63-81) http://tmcs.math.unideb.hu/load_doc.php?p=306&t=abs

A matematika érettségi vizsga elemzése 2005-2015 (Csapodi Csaba doktori értekezése) https://dea.lib.unideb.hu/dea/handle/2437/236563

**Hivatkozások**

[1] Egy olyan cikkünkre hívjuk fel az olvasók figyelmét, amely egy pár évvel ezelőtti emelt szintű érettségi feladatsorban szereplő feladatról, és azon belül a pandémia során a gyakorlatban is felmerülő problémákról szól: https://index.hu/techtud/2020/05/08/a_2017-es_matekerettsegi_megjosolta_a_jarvanyt/

[2] A 2020. májusi magyar nyelvű középszintű feladatsor: http://dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2020tavasz_kozep/k_mat_20maj_fl.pdf

A javítási-értékelési útmutató: http://dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2020tavasz_kozep/k_mat_20maj_ut.pdf

[3] http://www.nemzetisport.hu/atletika/erettsegi-megoldottuk-marton-anitat-rioi-dontoje-szerepelt-a-tetelsorban-2760979

[4] A 2020. májusi magyar nyelvű emelt szintű feladatsor: https://www.oktatas.hu/bin/content/dload/erettsegi/feladatok_2020tavasz_emelt/e_mat_20maj_fl.pdf

A javítási-értékelési útmutató: https://www.oktatas.hu/bin/content/dload/erettsegi/feladatok_2020tavasz_emelt/e_mat_20maj_ut.pdf

[5] Megerősíti ezt a feltételezést, hogy ugyanez volt a helyzet valamennyi „nagy" vizsgatárgynál: az idei eredmények 2-13%-kal elmaradnak a megelőző évek átlagától.

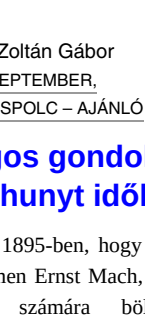
*Csapodi Csaba, ELTE TTK, Matematikai Intézet*

*Koncz Levente, Óbudai Árpád Gimnázium*

érettségi matematikatanítás

Adatkezelés Elfogadom.

A **KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ** ROVATBAN ELSŐSORBAN OLYAN KÖNYVEKRŐL SZERETNÉNK TUDÓSÍTANI ÉS OLYAN ELEKTRONIKUSAN ELÉRHETŐ ÍRÁSOKAT AJÁNLUNK, AMELYEK A MATEMATIKA BÁRMELY RÉSZE VAGY KAPCSOLATAI IRÁNT ÉRDEKLŐDŐK SZÁMÁRA KÍVÁNATOSAK LEHETNEK. (ROVATSZERKESZTŐ: *TÓTH JÁNOS.)*



Molnár Zoltán Gábor
2020. SZEPTEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

## Világos gondolatok elmehunyt időkben

Történt 1895-ben, hogy a Bécsi Egyetemen Ernst Mach, a neves fizikus számára bölcsészeti jellegű katedrát hoztak létre „az induktív tudományok történetének és filozófiájának tanára'' megnevezéssel…*Karl Sigmund* könyvéből Ernst Mach mellett az őt a tudományfilozófiai katedrán váltó Ludwig Boltzmann életébe és munkásságba is bepillantást nyerünk. De olvashatunk Albert Einsteinről, David Hilbertről vagy Bertrand Russellről. *Molnár Zoltán Gábor* könyvismertetése következik.

Pituk Mihály
2020. SZEPTEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

## Tóth–Simon: Differenciálegyenletek – harmadik kiadás

Tóth János és Simon L. Péter: Differenciálegyenletek (Typotex, Budapest, 2020) könyvének harmadik, javított kiadása bevezetést nyújt a differenciálegyenletek elméletébe a matematikus és a differenciálegyenleteket tanuló nem matematikus hallgatók számára. A könyvet jó szívvel ajánlom mindenkinek, aki érdeklődik a differenciálegyenletek és az alkalmazások iránt – *Pituk Mihály* ismerteti a könyvet.

Kiss Géza
2020. SZEPTEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

## Elemi matematika mesterfokon

Egész évszázadra – de talán még messzebbre is – visszamenőleg pontosan lehet tudni, hogy az igazán komoly tehetséggondozás motorja a tanár, aki maga köré gyűjti és meg is tartja az érdeklődő diákokat. Ilyen tanár az Elemi matematika mesterfokon c. könyv szerzője, *Schultz János* is. A tematikus gyűjtemény 357 feladata a hazai és nemzetközi versenyek témaköreit veszi sorra. *Kiss Géza* méltatja a kötetet. Tovább…

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Molnár Zoltán Gábor 2020. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

# Világos gondolatok elmehunyt időkben

## A Bécsi Kör avagy heroikus küzdelem a tudomány alapjainak megismeréséért

**Karl Sigmund: Exact thinking in demented times: the Vienna Circle and the epic quest for the foundations of science.** Basic Books, Inc., NY, United States, 2017. 480 oldal. ISBN: 978-0-465-09695-4

Nem a matematikatörténet ege volt az első, ahol Karl Sigmund fényes csillagként tűnt fel. Az 1945-ben született szerző ergodelmélettel és dinamikai rendszerekkel kezdte, majd hamar átnyergelt a matematika evolúcióbiológiai alkalmazásaira. Bevezető játékelméleti könyve, a *The Calculus of Selfishness* (Princeton University Press, 2010), ami szűkebb, biológus-alkalmazott matematikus közönségnek szánt munka, külön recenziót is megérne. Nem öregkorára kezdett el tudománytörténettel foglalkozni. A 2000-es évek eleje óta gondozza Hans Hahn és Karl Menger matematikai munkáit. Ekkor fordul érdeklődése a Bécsi Kör felé; e filozófiai iskolának számos matematikus, köztük az előbb említettek is tagjai voltak. 2017-es tudománytörténeti kötete a Bécsi Kör történetét dolgozza fel, szinte percről percre, kitérve az iskola előzményeire és tagjainak későbbi sorsára.

Történt 1895-ben, hogy a Bécsi Egyetemen Ernst Mach, a neves fizikus számára bölcsészeti jellegű katedrát hoztak létre ,,az induktív tudományok történetének és filozófiájának tanára'' megnevezéssel. Ebben a tényben lényegében benne van minden, ami jellemezte a tudomány akkori forrongó világát. Egyszerre hallgatók sokasága számára vált világossá, hogy Machnak, a természettudósnak olyan eredeti és továbbgondolásra méltó gondolatai vannak a filozófia területén, amelyeket nem szabad veszni hagyni. Gyakorlatilag a modern tudományfilozófia születését köszönhetjük – ahogy Sigmund fogalmaz – egy egyébként megjegyzésre sem érdemes egyetemi adminisztráció merész lépésének. Egyáltalán nem arról van szó, hogy a tudományról a fizikusok addig ne gondolkodtak volna, vagy hogy Mach gondolatainak előképei ne lennének megtalálhatók Arisztotelész vagy Hume munkáiban. Inkább arról, hogy az az elgondolás, amely Mach fizikáról alkotott képének középpontjában állt, vagyis hogy a tudományos fogalmainkat a közvetlen megtapasztalásból kell eredeztetnünk, olyan fogalmi világot hozott létre az élő és élettelen természet leírására szánt tudomány számára, amely benépesítésre várt. Mindez pedig szemben állt az addig már zsúfolásig benépesült tradicionális, a peripatetikusoktól a skolasztikáig ill. a Kantig és Hegelig terjedő filozófiai univerzummal, amely magyarázó erejében azonban az akkori természettudomány számára mégis vajmi kevés hatékonyságot nyújtott. Ilyen értelemben tehát nem a tradicionális filozófia kérdéseit gondolták tovább a logikai pozitivisták vagy a Bécsi Kör, hanem a világról és kifejezetten a természettudományok által meghatározott világképről való gondolkodásunk szabályait és fogalmait próbálták tisztázni.

Ugyan a logikai pozitivizmus történetének egyes főszereplőivel, mint az analízistanulmányainkból jól ismert Hans Hahn matematikussal, Moritz Schlick filozófussal, Philipp Frankkal (nem tévesztendő össze a Franck–Hertz-kísérletes James Franckkal) vagy Otto Neurath szociológussal már korán megismerkedünk, Sigmund kimerítően sorra veszi azokat a tudósokat, akik hatni fognak rájuk. Így például Ernst Mach mellett az őt a tudományfilozófiai katedrán váltó Ludwig Boltzmann életébe és munkásságba is bepillantást nyerünk. De olvashatunk Albert Einsteinről, David Hilbertről vagy Bertrand Russellről. És nem ám csak úgy szőrmentén! Sigmund rendkívül érdekes kapcsolódási pontokra mutat rá, amelyek között vannak valóban történeti adatokkal alátámaszthatók, és vannak nagyon szép. már-már dramatikus kontrasztok és asszociációk. Például megtudjuk, hogy Moritz Schlick és Kurt Gödel közösen olvasgatta Russell *Principiáját*, és ezért választotta Gödel (Hans Hahn témavezetése mellett) a teljességi tétel kidolgozását doktori dolgozata tárgyául, szemben a korábban megkezdett számelméleti vizsgálódásokkal. Drámai leírásként említhetjük a Pavel Uriszon tragikus korai halála és Menger halálfélelme közötti párhuzam megható kifejtését.

Szervezett együttlétekre a Bécsi Kör részéről 1922-ben került sor, amikor Moritz Schlick ugyanannak a tanszéknek a vezetője lett, amelynek nevezetes vezető tanára Mach és Boltzmann volt. A kör a tudományfilozófiai érdeklődés irányából erős fordulatot vett nyelvi irányba, amikor 1926-ban a társaságban megjelent Ludwig Wittgenstein és Rudolf Carnap, nem változtatva azon a célkitűzésen persze, hogy a tudományról kell továbbra is gondolkodniuk. A nyelvi fordulat után világos volt számukra, hogy mely kijeletésekkel kell foglalkoznia a filozófiának, és melyek azok, amelyek a filozófia, mint nyelvi tevékenység számára megközelíthetlenek. Ezen állítások egyik kategóriájába a logikai vagy matematikai kijelentéseket sorolták, amelyek igazsága formális eszközökkel tehető vizsgálat tárgyává, a másik csoportjukba pedig az empirikus vizsgálattal igazolható állítások tartoztak volna. A modellből azonban az is következett, hogy azon állítások, amelyeknek az igazsága sem kísérlettel, sem logikai érveléssel nem közelíthető meg, azok a logikai pozitivisták szerint értelmetlenek voltak. Ebbe a körbe tartozott a tradicionális filozófia nagyon sok állítása, amelyet ebben a modellezésben ki kellett zárniuk az értelmes filozófiai állítások köréből. A logikai pozitivistákkal szemben bizonyos körökben ma is elutasítás és ellenszenv él. Egy ilyen csoport az ultrakonzervatívoké, akik mindenféle társadalmi változást elutasítanak, ilyen módon számukra bűn, ha valaki filozófusként partvonalra szorítja a teljes filozófiatörténetet. Ne gondoljuk azonban, hogy ultrakonzervatívból csak mutatóban lenne. Nagyon frekventált blogokban és rádiókban érvelnek amellett, hogy a felvilágosodás egy hiba volt, és minden mai társadalmi probléma forrása maga a nagy francia forradalom. Nos, abban a korban a tradicionalista osztrák állam ezért nem nézte jó szemmel a Bécsi Kör tevékenységét, az Anschluss után pedig tagjai nagyon súlyos üldöztetést szenvedtek.

A főalakok mellett Sigmund érdekes információkkal teli oldalakat szentel a mellékszereplőknek is. Ilyen például a kör tagjának, Karl Mengernek és Pavel Uriszonnak, a körön kívüli, de a kutatás frontvonalában ugyanazon dolgozó két matematikusnak egymás mellé helyezése. Itt érdemes megjegyezni, hogy Sigmund némi szentimentalizmussal viszonyul könyve alakjaihoz, és bár morbidnak hangzik, de nemcsak kitér a kör tagjainak halálára, hanem ezeket az eseményeket jellemzően sajátos drámai keretbe is helyezi. Az Uriszon–Mengeréhez hasonló, megható párhuzam Boltzmann öngyilkosságának és Einsteinnek a természet atomos jellege igazolására tett sikeres elméleteinek egymás mellé helyezése. Tény, hogy Boltzmann az anyag atomos jellege elméleti vizsgálatának úttörője volt, miközben a Brown-mozgás Einstein-féle magyarázata, és így az anyag atomos természetének igazolása éppen Boltzmann halálának évében került a tudományos nyilvánosság elé.

Izgalmas ellentétpárokban sincs hiány. Mi köti össze a Mach-féle empiriokriticista filozófiát, vagyis, hogy a fizika fogalmait a közvetlen emberi érzékelésre kell alapozni, Boltzmann atomizmusával? Hiszen, míg az előbbi a közvetlenül meg nem tapasztalható jelenségekre vonatkozó állítások értelmetlen voltának hirdette, addig az utóbbi gyakorlatilag abba betegedett bele, hogy a statisztikus fizikát kortársai pusztán matematikai alkalmazásnak tekintették, nem ismervén el az atomok létezését. Nos, a válasz a természettudományos látásmódban keresendő, és nem az álláspontok védelmében. A logikai pozitivisták nem abban voltak érdekeltek, hogy egyetlen álláspontot védelmezzenek, hanem hogy megteremtsék azt a módszertani eszköztárat, ami bármely álláspont melletti elégséges érvelést tesz lehetővé. A természettudománynak megvolt ez az eszköze, mert a matematika (különösen Gottlob Frege és Bertrand Russell úttörő munkái után) alkalmas volt a jelenségek legegzaktabb leírására. Mindebből a logikai pozitivistákat természetesen leginkább a logika nyűgözte le.

Egy másik hasonló ellentét, rávilágít arra, hogy a logikai pozitivisták számára a filozófia inkább tevékenység, sem mint doktrinák védelmezése, a Carnap–Gödel-vita. Mind Rudolf Carnap, mind Kurt Gödel a Bécsi Kör tagja volt, mégis egy időben ellentétes álláspontot foglaltak el a matematika természetét illetően. Carnap szerint a matematika pusztán nyelvi tevékenység, szimbólummanipuláció, tárgy és tartalom nélküli szintaktikai rendszer. Nyilván ez illett bele abba a képbe, hogy a logikai pozitivisták szerint az állításoknak kétféle kategóriája van, a tautológiák és az empirikusan igazolható állítások. Ezzel szemben Gödel sosem gondolta azt, hogy a matematikai tevékenység pusztán szimbólummanipuláció lenne. 1930 körül Hahn, Schlick és Carnap, Wittgenstein hatására a matematikát konvenciókon és formális szabályokon alapuló tudományként jellemezte. Gödel a két nemteljességi tétele alapján azonban olyan matematikai egzaktságú érveket tudott felvonultatni realista álláspontja mellett, amelyek Carnapét alapjaiban cáfolják. Érdekesség, hogy Carnap másokkal szemben éppen a matematika tartalmas jellege mellett érvelt, ami jól mutatja a logikai pozitivisták filozófiaképét, azaz, hogy számukra a filozófia fogalmak és módszerek tisztázása és állítások melletti érvelés, függetlenül attól, hogy mi mellett kell érvelni. Szellemesen jellemezte a kör tevékenységét A. J. Ayer angol filozófus, aki szerint, ha az a kérdés, hogy miben tévedtek a logikai pozitivisták, akkor a válasz az, hogy lényegében mindenben. Ugyanis az állításaik naiv nulladik közelítései voltak egy új tudománynak, mindazonáltal a dekonstrukciós tevékenységük megtisztította az utat az analitikus filozófia számára, és a probléma-megközelítéseik helyesek voltak és tovább éltek.

Sigmund könyve további két szempontból is érdekes. A szerző valamikor a 2000-es évek elején kezdett el foglalkozni a nyugatra menekült osztrák matematikusokkal. Láthatóan nagyon megszerette a Bécsi Kör tagjait. Mindenkiről jól érzékelhető szeretettel beszél, pedig egyáltalán nem kíséri osztatlan rajongás az irányzat képviselőit. Hogy magyar példát hozzak, Tóth Imre Bolyai-kutató így vélekedik a logikai pozitivisták egyik példaképéről, Russellről: [...] amit a klasszikus filozófia – főként Platón, Kant és Hegel – gondolt el, leplezetlen szarkazmussal és ironikus csattanókkal intézi el''. A pozitivizmus máig sokakban ellenérzést kelt, főleg azért, mert a munkásságuk nagyon erősen dekonstrukciós jellegű, azaz darabjaira szedték a korábbi filozófiát, megvizsgálták, hogy a kritériumrendszerük alapján abból mi tartható, és a nagyját kidobták mint értelmetlent. De vajon nem ugyanezt csinálta-e először Newton, majd később Einstein és Heisenberg? Vajon mennyire tartható az arisztotelészi horror vacui vagy a newtoni abszolút tér? Vajon mennyire van értelme a mikrorészecskék világában egymástól függetlenül egzakt pontossággal kimérhető helyről és sebességről beszélni? Amennyiben a logikai pozitivisták destruktívan álltak hozzá a filozófiához az nem volt más, mint egy kézenfekvő gondolatkísérlet a modern elméleti fizika módszertanát követve. Ezt a fajta gondolati szabadságot azonban a totalitárius és a tradicionalista rendszerek nem kedvelik. Gödel körül elfogyott a levegő és végül Amerikába kényszerült költözni, hasonlóképpen Carnap és Menger is. Neurath portréja pedig még ócska náci propagandaplakátokra is felkerült, mint a nemzet ellenségének képmása. Sigmund leplezetlen szimpátiával tekint a hazájukból elkergetett osztrák honfitársaira és leplezetlen ellenérzéssel viszonyul pl. Heideggerhez, aki az elkergetők oldalára állt. A szerző ezen érzelmes attitűdjéből számos megható leírás kerekedik a könyv lapjain.

Másfelől Sigmundnak a Bécsi Körrel kapcsolatos enciklopedikus tudása arra ösztökél minket, hogy ne csak a könyv önfeledt olvasásának adjuk meg magunkat, hanem hogy lapozzuk fel azokat a könyveket és cikkeket, amelyeket a kör tagjai írtak. Ma, a szabad terjesztés világában, így az érdeklődő olvasó a rákereshet és belelapozhat Mach *The Science of Mechanics*-jába, és rácsodálkozhat arra, hogy ez a mű leginkább Simonyi Károly *A fizika kultúrtörténete* c. könyvének és Landau–Lifshitz *Mechanikájának* uniójára hasonlít. Vagy olvasva Menger haditengerészeti főiskolásokat oktató időszakáról, olyan érdekes tantárgypedagógiai cikkekre bukkanhatunk, mint a ,,*Why Johnny Hates Math?*'' vagy ,,*What are x and y?*''. Végül pedig akár Ludwig Wittgenstein *Traktátusára* is kedvet kaphatunk, és a matematikus olvasó ezek után bizonnyal meg is fogja érteni, hogy mit jelent, hogy a világot nem pusztán a dolgok, hanem a dolgok közötti relációk határozzák meg.

## Hivatkozások

*A Bécsi Kör filozófiája* (1972) szerk.: Altrichter Ferenc. Budapest: Gondolat.

Gödel, Kurt, (1995) *Collected Works*, volume 3: Unpublished Essays and Lectures, edited by Solomon Feferman et al. Oxford University Press.

Mach, Ernst, (1883) *The Science of Mechanics - A Critical and Historical Exposition of its Principles*, translated by Thomas J. McCormack, Cambridge University Press, 2014

Menger K. (1979) *Why Johnny Hates Math.* In: Selected Papers in Logic and Foundations, Didactics, Economics. Vienna Circle Collection, vol 10. Springer, Dordrecht.

Menger K. (2003) *What are x and y?.* In: Schweizer B. et al. (eds) Selecta Mathematica. Springer, Vienna.

*A szubjektum és szabadsága. A matematika alapjairól, Interjú Tóth Imrével*, részlet, Ponticulus Hungaricus, XIV. évfolyam 5. szám, 2010. május.

Sigmund, Karl, (2010) *The Calculus of Selfishness*, Series: Princeton Series in Theoretical and Computational Biology, Princeton University Press.

*Molnár Zoltán Gábor*
*BME Algebra Tanszék*

☐ matematikatörténet ☐ recenzió

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon: ›

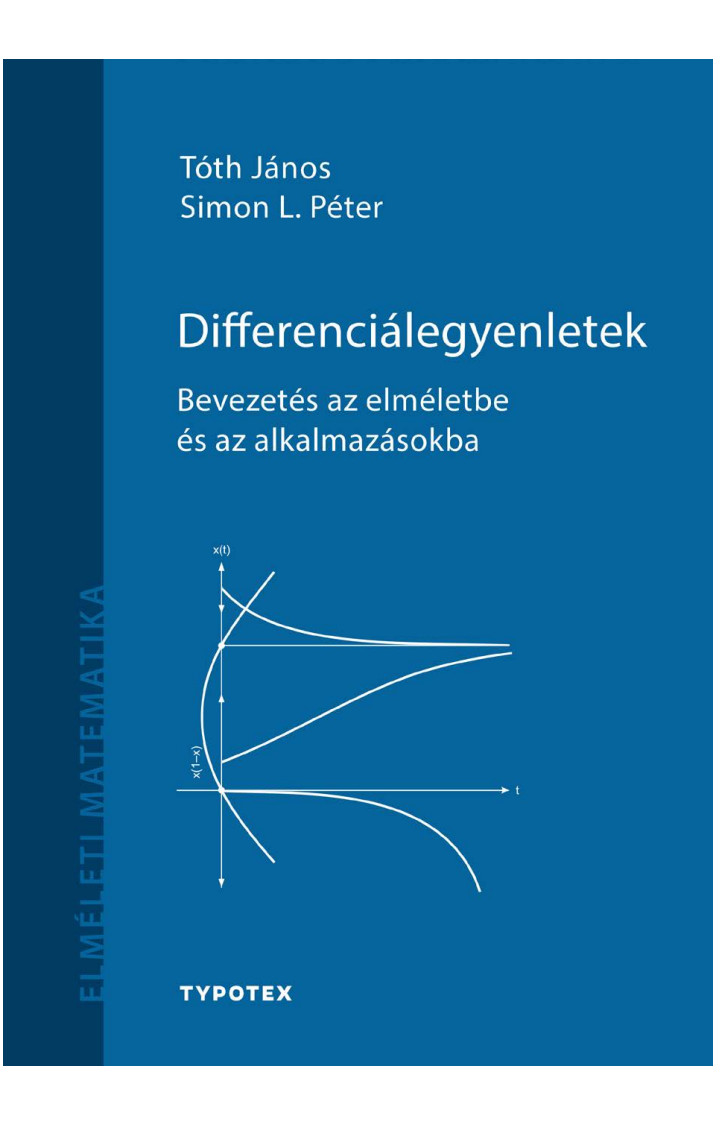
Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Pituk Mihály 2020. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

# Tóth–Simon: Differenciálegyenletek – harmadik kiadás

Tóth János és Simon L. Péter: Differenciálegyenletek (Typotex, Budapest, 2020) könyvének harmadik, javított kiadása bevezetést nyújt a differenciálegyenletek elméletébe a matematikus és a differenciálegyenleteket tanuló nem matematikus hallgatók számára.



A könyv kellő részletességgel és alapossággal tárgyalja a közönséges differenciálegyenletek elméletének klasszikus fejezeteit: az egzisztencia- és unicitási tételeket, a paraméterektől való folytonos függést és a differenciálhatóságot, a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek és a magasabbrendű lineáris egyenletek elméletét, a Laplace-transzformációt és alkalmazásait differenciálegyenletek megoldására, a stabilitáselméletet, az autonóm egyenletek és dinamikai rendszerek fontosabb tulajdonságait. A parciális differenciálegyenletekről szóló fejezet tömören tárgyalja az elsőrendű kvázilineáris parciális differenciálegyenleteket, a másodrendű, főrészükben lineáris parciális differenciálegyenletek osztályozását és részletesen is tárgyalja az alkalmazások szempontjából legfontosabb egyenleteket. Egy további fejezet a variációszámítás elemeiről szól. Alkalmazásokon keresztül mutatja be a variációszámítás alapfeladatát, tárgyalja az Euler-Lagrange-differenciálegyenletet és a funkcionálok szélsőértékének létezésére vonatkozó elégséges feltételeket.

A Szerzők nagy fontosságot tulajdonítanak az alkalmazásoknak. A szokásosnál sokkal több alkalmazási példát és feladatot tárgyalnak. A feladatok megoldásait az utolsó fejezet tartalmazza. A legtöbb feladathoz részletes megoldást is adtak, sok esetben szemléletes ábrákkal kiegészítve. A könyv értékes különlegessége, hogy minden fejezet végén van egy szakasz, amely bemutatja, hogyan lehet használni a Mathematica programcsomagot a számolások könnyítésére és illusztrálásra.

A könyvet rendkívül igényes fogalmazás jellemzi. Az anyag megértését sok szép ábra és illusztráció segíti. Az elméleti eredményeket nagyszerűen kiegészítik a sokféle alkalmazásokból származó példák és a Mathematica (újabb nevén: Wolfram-nyelv) programcsomag lehetséges alkalmazásait bemutató részek.

Mindezek alapján Tóth János és Simon L. Péter: Differenciálegyenletek című könyvét jó szívvel ajánlom mindenkinek, aki érdeklődik a differenciálegyenletek és az alkalmazások iránt.

*Pituk Mihály*
*Pannon Egyetem, Matematika Tanszék*

recenzió analízis

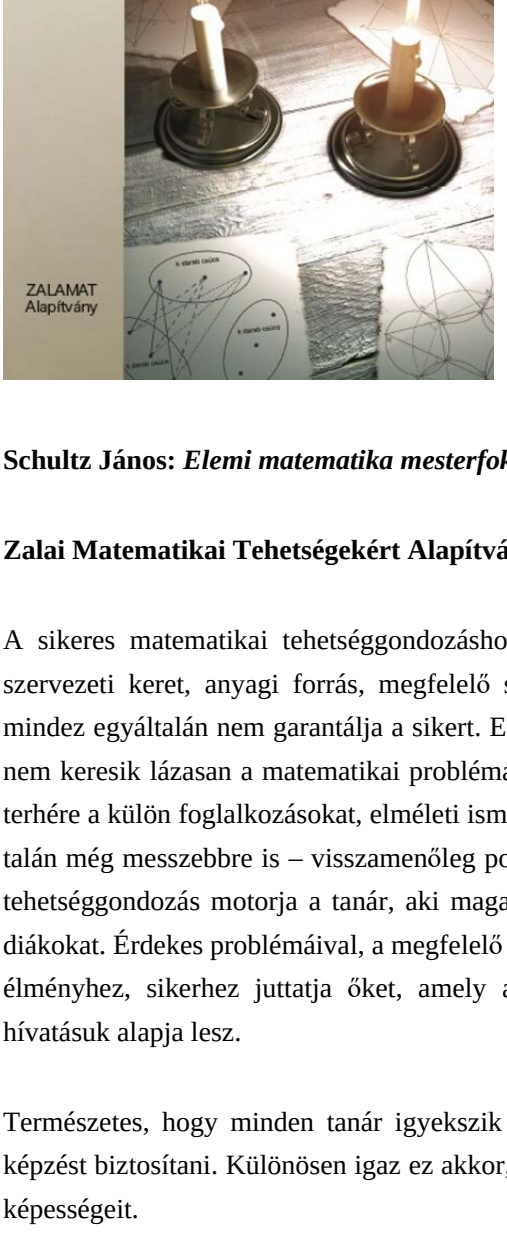
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Kiss Géza 2020. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

# Elemi matematika mesterfokon



**Schultz János:** ***Elemi matematika mesterfokon***

**Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány, Nagykanizsa 2015.**

A sikeres matematikai tehetséggondozáshoz biztosan szükséges állandó intézményi, szervezeti keret, anyagi forrás, megfelelő segédeszközök, társadalmi elismertség, de mindez egyáltalán nem garantálja a sikert. Ettől még nem lesznek motiváltak a tanulók, nem keresik lázasan a matematikai problémák megoldásait, nem vállalják szabadidejük terhére a külön foglalkozásokat, elméleti ismeretek megtanulását. Egész évszázadra – de talán még messzebbre is – visszamenőleg pontosan lehet tudni, hogy az igazán komoly tehetséggondozás motorja a tanár, aki maga köré gyűjti és meg is tartja az érdeklődő diákokat. Érdekes problémáival, a megfelelő nehézségű kihívásokkal olyan intellektuális élményhez, sikerhez juttatja őket, amely aztán évek múlva mindennapi munkájuk, hívatásuk alapja lesz.

Természetes, hogy minden tanár igyekszik tanítványainak a legmagasabb színvonalú képzést biztosítani. Különösen igaz ez akkor, ha érzékeli a diák kimagasló érdeklődését, képességeit.

A legjobb, műhelyteremtő tanárok azonban tudnak valamilyen további titkot. Úgy tudják felfűzni az elméleti ismereteket, a megoldandó matematikai feladatok sorozatát, hozzátéve saját egyéni látásmódjukat, előadásmódjukat, hogy ebből egy új minőség születhet meg. Az évek során megszoktuk, hogy a versenyeredmények listáján a felkészítő tanárok neve gyakran ismétlődik, néhányan különlegesen jól végzik ezt a munkát.

Ilyen tanár e kötet szerzője Schultz János is. A szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium meghatározó matematikatanára több mint 25 éve tanít az iskola speciális matematika tagozatán. A magyarországi középiskolai tehetséggondozásban az egyik legsikeresebb tanár. Szívós, folyamatos munkával fejleszti módszereit és feladattárát. Kollégáival egy nemzetközileg is mértékadó tehetséggondozó műhelyt alakítottak ki Szegeden. Sorra nevelték a kiváló versenyzőket, olimpikonokat, akik ma már fiatal kutató matematikusok, informatikusok szerte a nagyvilágban.

A kiváló tehetséggondozó tanárok ritkán teszik közkinccsé módszereiket. Megosztanak bizonyos szeleteket, érdekes problémákat, feladatsorokat, de az olyan átfogó feladatgyűjtemény, mint amelyre a Szerző vállalkozott, nagyon kevés található a könyvpiacon. Ez teszi nagyon különlegessé ezt a gyűjteményt.

A kötet előzménye a 2011-ben megjelent Elemi matematikai versenyfeladatok, amely szélesebb közönséget célzott meg. A hazai versenyfelkészítéshez kívánt segítséget nyújtani tanárnak és diáknak egyaránt.

Ez a jelenlegi, 2015-ös kötet már sokkal mélyebbre tekint. Olyan gondolkodási módszereket, bizonyítási eljárásokat, ötleteket tartalmaz, amelyeket nem ajánlhatunk a matematikai problémamegoldásban a kezdőknek. A két gyűjtemény rendszeres feldolgozásával egy egyedi utat ismerhetünk meg, amelyen Schultz tanár úr végigvezeti tanítványait. Ennél teljesebb az lehetne, ha a foglalkozásain is részt vennénk, és magunk is igyekeznénk megoldani ezeket a feladatokat.

A tematikus gyűjtemény hat fejezete alkalmazkodik a hazai és nemzetközi versenyek témaköreihez. Kombinatorika, kombinatorikus geometria, rácsgeometria; algebra, függvények; számelmélet; egyenlőtlenségek; síkgeometria; térgeometria. Összesen 357 feladat.

A kötetnek sok erénye közül ki szeretném emelni a következőket:

- A feladatok szinte mindegyike önmagában is érdekes, kerüli a sablonos, ismétlődő lépéseket. Mindegyik feladatnak legalábbis a megoldása, valamilyen módszerbeli sajátosságot, hozzáadott értéket tartalmaz.
- A feladatok nem igénylik a fakultációs középiskolai tananyagon kívüli elméleti ismereteket. Csakúgy, mint az olimpiákon és az OKTV-ken, elsősorban a problémák valódi, mély megértése, változatos egyedi ötletek, módszerek vezethetnek a sikeres megoldáshoz.
- Mindegyik feladatnak szerepel a könyvben a megoldása is. Igaz, sok esetben nagyon tömören, kizárólag a lényeges megoldási elemek közlésével, így ezeknek a megoldásoknak a feldolgozása is része a tanulási folyamatnak.
- A kötet ábrái, tördelése áttekinthető. A képletek jól olvashatóak. Az egész kötet harmonikus, esztétikus, bárhol kinyitva egy-két perc alatt magával ragadja az Olvasót.

Semmiképpen sem javasolható a gyűjteménynek, mint egy regénynek, vagy novellás kötetnek az „olvasgatása”. Igazán hasznos tudást akkor adhat, ha a feladatokat alaposan igyekszünk megérteni, egyedül megoldani, megfogalmazni azokat a nehézségeket, amelyeken nem tudunk átlépni. Ha többszöri próbálkozás után sem sikerül a megoldás, de már részleteiben is ismerjük a feladat feltételeit, az állítást, akkor érdemes elolvasni a (részben) kidolgozott megoldásokat.

Végül álljon itt egy feladat a gyűjteményből, amely nehézségével és emellett egyszerű megfogalmazásával jól példázza a szerző tudatosságát, matematikai stílusát:

Egy 17 tagú társaságban mindenkinek 4 ismerőse van a társaság tagjai közül. Igazoljuk, hogy akkor vannak ketten, akik nem ismerik egymást és nincs közös ismerősük sem a társaságban. (Az ismeretség kölcsönös.) – A megoldás a könyv 115. oldalán olvasható.

*Kiss Géza*

*Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium*

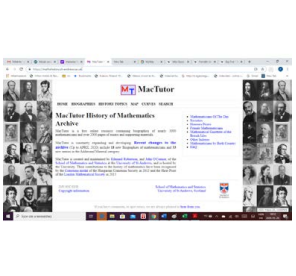
recenzió matematikatanítás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

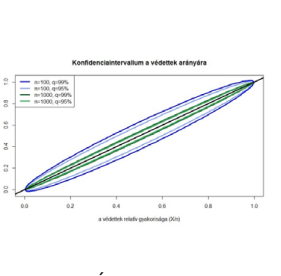
A **TUDOMÁNY** MENÜPONT TÖBBFÉLE, A MATEMATIKA TUDOMÁNYÁHOZ KAPCSOLÓDÓ FUNKCIÓT TAKAR..**A TUDOMÁNY- TÖRTÉNET ROVAT** CÉLJA ELSŐSORBAN MATEMATIKATÖRTÉNETI JELLEGŰ ÍRÁSOK KÖZLÉSE. **A MI IS ...?ROVAT** A MAI MATEMATIKA TUDOMÁNYÁRÓL KÍVÁN SZÓLNI A HOZZÁÉRTŐKNEK.
(ROVATSZERKESZTŐK: *BESENYEI ÁDÁM; STIPSICZ ANDRÁS.*)



Körtesi Péter
2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

## Matematikatörténet és Matematikaoktatás Konferencia 2020. május 20−24.

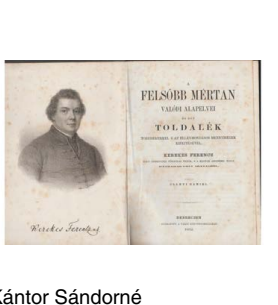
*Körtesi Péter*, az idei jól sikerült nemzetközi online Matematikatörténet és Matematikaoktatás Konferencia főszervezője beszámolója a megújult *MacTutor History of Mathematics Archive* honlapról is fontos információkat közöl. A konferencia céljai között szerepel az, hogy a közép-európai régió matematikusainak életéről, munkásságáról sok hiányzó adattal, pontosítással hozzájáruljon a jelzett adatbázis kiegészítéséhez, továbbfejlesztéséhez. Tovább…



Backhausz Ágnes, Simon L. Péter
2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

## Mennyit teszteljünk? 2. rész

*Backhausz Ágnes* és *Simon Péter* a tesztelésről szóló cikkük 2. részében folytatja a betegek arányának becslésével kapcsolatos, gyakran használt valószínűségszámítási, statisztikai ismeretek összefoglalását annak a kérdésnek a kapcsán, hogy hány tesztet érdemes végezni, ha az arányt adott pontossággal szeretnénk megbecsülni egy véletlenszerűen választott minta alapján. Itt olvasható az 1. rész. Itt pedig a folytatás.



Kántor Sándorné
2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

## Hogyan képzelte el 1840-ben Kerekes Ferenc a heurisztikus módszer alkalmazását a matematika tanításában?

Kerekes Ferenc (1784−1850) a Debreceni Református Kollégium matematika professzora szerint „...úgy kell tanítani, hogy az mind a tanítónak, mind a diáknak a gyönyörűségére szolgáljon". *Kántor Sándorné* feldolgozta Kerekes matematikai és matematika didaktikai munkásságát, többek között ma is aktuális cikkét, a matematikának a felfedeztető módszerrel (de methodo heuristica) való tanításáról. Tovább...

Bolla Marianna
2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

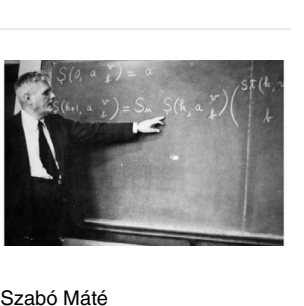
## Az élő legenda: C. R. Rao 100 éves

2020. szeptember 10-én ünnepelte Calyampudi Radhakrishna (C. R.) Rao századik születésnapját. Aki csak staisztikát tanult a világon az utóbbi fél évszázadban, az mind találkozhatott a nevével, amelyet híres tételek viselnek. 16 könyv és 350 tudományos cikk szerzője. Rao a véletlen művének tekintette, hogy a statisztikával kapcsolatba került, ami egyébként is a véletlenek tudománya. *Bolla Marianna* életrajzi írása következik egy élő legendáról. Tovább...

Görbe Tamás
2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

## e ötféleképpen

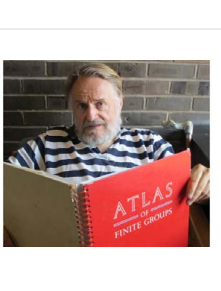
Ugye mindenkinek van kedvenc száma? Az enyém az *e* = 2,7182818284..., , amellyel legtöbben a középiskolában, a természetes logaritmus alapszámaként találkoznak először. Ez az irracionális (sőt transzcendens) szám minden matematikus közeli barátja, hiszen megannyi helyen bukkan fel. Ebben az írásban *Görbe Tamás* öt példát gyűjtött össze, a teljesség és a részletes bizonyítások igénye nélkül. Tovább...



Szabó Máté
2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

## Alonzo Church Tihanyban

*Alonzo Church* a 20. századi matematikai logika egyik legkiemelkedőbb és legfontosabb alakja, Princetonban és a kaliforniai UCLA egyetemén tanított. Hogyan került Tihanyba 1962-ben, és milyen kapcsolatban állt *Kalmár Lászlóval* és *Péter Rózsával*? *Szabó Máté* cikkéből és a korabeli fotókból sok más érdekességre is fény derül. Tovább…



Stipsicz András, Titkos Tamás
2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

## John Horton Conway, a kíváncsi zseni

A 2020-as évet beárnyékoló COVID-19 járvány a matematikus közösséget sem kímélte. A betegség szövődményeinek következtében április 11-én elhunyt *John Horton Conway*, a 20-ik század egyik legsokoldalúbb és legkülönlegesebb matematikusa. Ahogy hivatalos önéletrajzírója, Siobhan Roberts fogalmazott, Conway a világ egyik legszerethetőbb egomániása, az egy személybe összegyúrt Arkhimédész, Mick Jagger, Salvador Dalí és Richard Feynman. A Brit Király Társaság néhai elnöke, Sir Michael Atiyah szerint pedig egyenesen a világ legmágikusabb matematikusa, akit *Stipsicz András* és *Titkos Tamás* mutat be az Érintő olvasóinak. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon: ›

nka Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Körtesi Péter 2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

# Matematikatörténet és Matematikaoktatás Konferencia 2020. május 20−24.

Matematikatörténet és Matematikaoktatás konferenciánkat (History of Mathematics and Teaching of Mathematics) a BJMT Matematikatörténeti Munkabizottsága kezdeményezte, 2000-ben és 2002-ben Budapesten volt. Felkérésükre 2004 óta a Miskolci Egyetemen szervezzük az együttműködő partnereinkkel közösen. A konferencia helyszínét úgy igyekeztünk megválasztani, hogy körüljárjuk a magyar matematikatörténet néhány fontos városát is. Sorrendben a konferenciák helyszíne tehát 2000 és 2002 Budapest után, 2004 és 2006 Miskolc, 2008 Marosvásárhely, 2010 Szeged, 2012 Sárospatak, 2014 Kolozsvár, 2016 Eger, 2018 és 2020 ismét Miskolc volt. Sajnos ebben az évben csak on-line konferenciát szervezhettünk, de az sikeresen lezajlott a tervezett időben, 2020. május 20−23 közt. Az érdeklődők a www.uni-miskolc.hu/hmtm oldalon a konferenciaprogramot, a kivonatokat, és bizonyos, előzetesen beküldött anyagokat is megtekinthetnek.

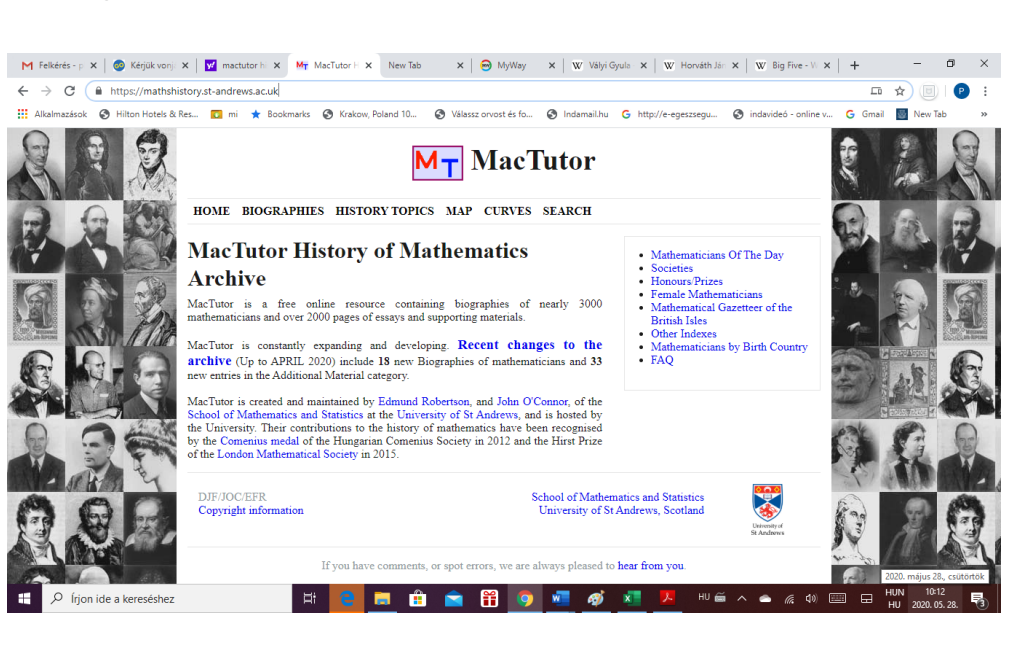
A konferencia a matematikatörténeti és matematikaoktatási kutatásokban érdekelt kollégák számára kétévente lehetőséget nyújt egymás kutatásainak a megismerésére, a kapcsolatok és együttműködés kialakítására, a publikációs lehetőségek bővítésére.

2008 óta a konferencia elnöke Edmund Robertson professzor, a skóciai St Andrews Egyetem professzor emeritusza, aki létrehozta és mindmáig fejleszti a világ talán leghíresebb matematikatörténeti adatbázisát, a MacTutor History of Mathematics Archive-ot, amely több mint 3000 matematikus életrajzát, több mint 2000 matematikatörténeti szakcikket és rengeteg adatot tartalmaz.

Az adatbázis elérhetősége: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/

A Miskolci Egyetem oktatójaként 1994−96 között részt vettem egy közös TEMPUS projektben, ahol a St Andrews Egyetemen bekapcsolódtam a MacTutor projektbe, ami eredetileg egy oktatási szoftver volt, és 1994-ben elnyerte az Európai Unió Akadémia Szoftver Nagydíját. Az alkalmazás jelentős része az interaktívan elérhető MacTutor Biographies volt, amely a matematikatanításban fontos szerepet játszó, sokszor hivatkozott matematikusok életrajzát és munkásságát ismertette. Ezt később különválasztották, és internetes adatbázissá fejlesztették. Közös munkánk eredményeként azoknak a magyar matematikusoknak a száma, akiknek élete és munkássága megjelent az adatbázisban, megháromszorozódott. Talán ennek is köszönhető, hogy Robertson professzor elfogadta a konferenciánk elnöklését, és munkatársaival, doktoranduszaival együtt rendszeresen részt vesz a konferencián.

A konferencia céljai között szerepel az, hogy a közép-európai régió, itt elsősorban Magyarország, de ugyanúgy Erdély, Románia, Ausztria, Bulgária, Szlovákia, Csehország, Lengyelország, Szerbia matematikusainak életéről, munkásságáról sok hiányzó adattal, pontosítással hozzájáruljunk a jelzett adatbázis kiegészítéséhez, továbbfejlesztéséhez. Ez a munka közös érdek, hiszen fontos az, hogy a hazai és a környező országok matematikusainak életéről, munkásságáról minél hitelesebb adatok legyenek elérhetők a nemzetközi szakmai közélet legfontosabb fórumainak egyikében. Másrészt a matematikatörténet legismertebb adatforrásának szerzői is érdekeltek az adatbázis bővítésében, az adatok pontosításában, hitelességének, színességének és ismertségének növelésében.


https://mathshistory.st-andrews.ac.uk
MacTutor
HOME BIOGRAPHIES HISTORY TOPICS MAP CURVES SEARCH
Mathematicians Of The Day
Societies
Honours Prizes
Female Mathematicians
Mathematical Gazetteer of the British Isles
Other Indexes
Mathematicians by Birth Country
FAQ
DJF/JOC/EFR
Copyright information
School of Mathematics and Statistics
University of St Andrews, Scotland
If you have comments, or spot errors, we are always pleased to hear from you.

MacTutor History of Mathematics Archive

MacTutor is a free online resource containing biographies of nearly 3000 mathematicians and over 2000 pages of essays and supporting materials.

MacTutor is constantly expanding and developing. Recent changes to the archive (Up to APRIL 2020) include 18 new Biographies of mathematicians and 33 new entries in the Additional Material category.

MacTutor is created and maintained by Edmund Robertson, and John O'Connor, of the School of Mathematics and Statistics at the University of St Andrews, and is hosted by the University. Their contributions to the history of mathematics have been recognised by the Comenius medal of the Hungarian Comenius Society in 2012 and the Hirst Prize of the London Mathematical Society in 2015.

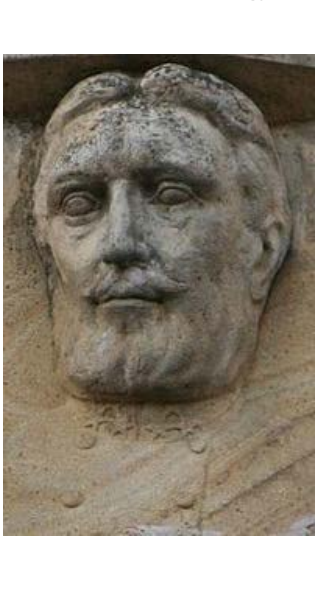
A megújult MacTutor honlap

Ennek néhány példáját említehetem: 2008-ban Marosvásárhelyen a szegedi kollégák Kerékjártó Béla magyar matematikus hiányos életrajzát kérték számon Robertson professzoron, aki rámutatott arra, hogy nagyon kevés adat érhető el angolul, németül vagy franciául a magyar matematikának erről a kiváló személyiségéről. Válaszul a szegedi kollégák publikáltak, angolra fordítottak, és dokumentáltak kb. 600 oldalon mindent, amit Kerékjártóról tudni lehet, így azóta a MacTutor méltó életrajzot tartalmaz híres matematikusunkról. Hasonlóan, a marosvásárhelyi, kolozsvári, sárospataki, egri konferenciánkon a kollégák lendületet kaptak a város, az egyetemük híres matematikusainak méltó bemutatására. A mostani konferenciánkon egy belgrádi matematikus, Jovan Karamata életéről szóló adatokat hozunk „reflektorfénybe”, tesszük hozzáférhetővé a nemzetközi tudományos közélet számára.

Dacára annak, hogy a magyar matematikatörténet viszonylag jól reprezentált az adatbázisban, mégis sok a tennivaló, hiszen szerencsénkre bőven még van olyan tehetséges matematikus, aki Magyarországon született, vagy úgy tartjuk számon, mint magyar matematikust, és még nem szerepel az adott adatbázisban. Az is lehet, hogy az adatbázisban már szereplő magyar vonatkozású adatok között sok a hiányos, és szükséges azok további kiegészítése, eredeti dokumentumok, hivatkozások közzététele. Például a magyar „big five” tagjai: Aczél János, Császár Ákos, Fuchs László, Gál István és Horváth János közül egyik sem szerepel még a MacTutor History adatbázisban. Úgy gondolom, hogy minden egyetemnek érdeke, hogy a legnevesebb professzorairól minél több hiteles információ jelenjen meg, és ezáltal a nemzetközi láthatóságát, elismertségét növelje. Nekünk külön lehetőséget jelenthet az, hogy az adatbázis megalkotói nyitottak, szívesen veszik a közvetett, vagy akár közvetlen segítséget is. A konferenciánk céljai közt az is szerepel, hogy ebbe a munkába minél több hazai egyetem kutatóját, a matematikatörténet művelőit bevonjuk, és ezt a Közép-Európai Egyetemi Csereprogram, a CEEPUS hálózati partnereink körében is kiterjesszük. Ebben a CIII-HU-0028 jelű hálózatban, amelyet a Miskolci Egyetem koordinál, 15 ország mintegy 70 felsőoktatási intézménye működik együtt, lásd a oldalon.

Külön öröm számomra, hogy miskolci vonatkozásban egykori professzorom, Maurer Gyula, vagy kollégánk, Rontó Miklós neve, és a Miskolc Mathematical Notes is említésre kerül a MacTutor adatbázisban. Szintén a konferenciasorozathoz köthető friss információ az is, hogy a MacTutor adatbázis napokban megújult honlapján, annak címoldalán, a MacTutor két „atyja”, Edmund Robertson és John O'Connor megemlítik az adatbázis elismertségét, jellemezve azt a Comenius emlékérmet, amit a 2012-es sárospataki konferenciánkon vettek át. A másik megemlítésre került díj a London Mathematical Society Hirst díja. Számunkra az is nagy jelentőségű, hogy Robertson professzor a 2008-as marosvásárhelyi konferenciánkon vette át a Pro Scientia Absoluta Vera díjat a két Bolyai munkásságának népszerűsítése terén végzett tevékenysége elismeréseként, ezt a díjat rajta kívül még csak ketten, Prékopa András akadémikus és Nagy Dénes, a Melbourne-i Egyetem tanára, a Nemzetközi Szimmetria Társulat elnöke vehette át.

Az új honlapon emellett megjelenik például Bolyai János egyetlen hitelesnek tartott ábrázolása, a marosvásárhelyi Kultúrpalota homlokzatának egyik domborműve. Erről érdemes elolvasni Kántor Sándorné KöMaL-ban megjelent cikkét is.



Bolyai János egyetlen hitelesnek tartott ábrázolása

Bolyai János nemeuklideszi geometriáját elsőként Vályi Gyula oktatta a kolozsvári egyetemen, akinek szobra szintén megjelenik a MacTutorban:

(Fotó:: Wikizoli - saját kép, CC BY-SA 4.0 https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=23222865)

*Körtesi Péter*
*Miskolci Egyetem*

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Backhausz Ágnes, Simon L. Péter 2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

# Mennyit teszteljünk? 2. rész

Cikkünk második részében folytatjuk a betegek arányának becslésével kapcsolatos, gyakran használt valószínűségszámítási, statisztikai ismeretek összefoglalását annak a kérdésnek a kapcsán, hogy hány tesztet érdemes végezni, ha az arányt adott pontossággal szeretnénk megbecsülni egy véletlenszerűen választott minta alapján. A kiindulás a következő:

- Tegyük fel, hogy egy országban egy bizonyos betegségben szenvedők aránya $p$, ennek értékét azonban nem ismerjük.
- Kiválasztunk $n$ embert véletlenszerűen. Őket megvizsgálva, $X$ beteget találunk az $n$ közül. Itt $X$ véletlen érték, tehát egy valószínűségi változó, míg $n$ vagy adott, vagy általunk megválasztható.
- $X$ és $n$ segítségével, pontosabban az $X/n$ arány segítségével becsüljük $p$-t – kérdés, hogy mennyire megbízható a becslésünk, hiszen egyáltalán nem mindegy, hogy $n=10$ vagy $n=100000$ embert vizsgáltunk meg.

Az alábbi feltételezésekkel éltünk (bár, ahogyan az első rész [3] végén láttuk, ezek némelyike nagyon nehezen vagy egyáltalán nem érhető el a valóságban):

- a mintavételnél az embereket egymástól függetlenül választjuk (egy-egy ember többször is szerepelhet);
- minden alkalommal mindenkit azonos valószínűséggel választunk;
- a tesztek tökéletesen megbízhatók.

Ezen feltételek mellett az első részben arra a kérdésre kerestük a választ, hogy adott pontosság eléréséhez hány vizsgálat elvégzésére van szükség. Ugyanakkor a tesztek számát gyakran nem mi választjuk meg, így az is jogos kérdés, hogy a tesztek adott számának és az eredményeknek az ismeretében hogyan fejezhetjük ki, hogy a betegek ismeretlen arányára kiszámított becslésben mennyire vagyunk biztosak, például hány tizedesjegy pontosságig vállalkoznánk $p$ becslésére. Ha például $n=6000$ ember közül $X=492$ beteget találtunk, akkor $p$-nek az ötödik (vagyis a százezredekre vonatkozó) vagy annál későbbi tizedesjegyeiről teljesen megalapozatlan lenne bármit is állítani, viszont az első tizedesjegyről elég magabiztosan mondhatjuk, hogy 0, hiszen $p \geq 0{,}1$ esetén a betegek számának várható értéke legalább 600, és annak valószínűsége, hogy ettől legalább 108 az eltérés, nem lehet túl nagy. A binomiális eloszlás képlete alapján ezt pontosan ki is számíthatjuk: annak valószínűsége, hogy $p=0{,}1$ esetén pontosan 492 beteget találunk, $2\cdot 10^{-7}$, nagyobb $p$ esetén még ennél is kisebb. Ezzel szemben például $p=0{,}08$ mellett a betegek számának várható értéke 480, és annak valószínűsége, hogy pontosan 492 beteget találunk, 1,6%. Vagyis a bekövetkezett esemény $p \geq 0{,}1$ esetén nagyságrendekkel kevésbé valószínű, mint a $492/6000=0{,}082$-höz jóval közelebbi $p$ esetén. Ez erős érv amellett, hogy az első tizedesjegy 0. Ugyanakkor biztosat sosem állíthatunk egyik tizedesjegyről sem, hiszen tetszőleges 0 és $n$ közötti érték (a határokat is beleértve) előfordulhat bármely $0<p<1$ esetén. Célunk olyan állítások megfogalmazása, hogy például ha $n=6000$ ember közül $X=492$ volt beteg, akkor a betegek valódi $p$ aránya 7% és 9% közé esik, és ebben 95%-ban biztosak vagyunk. Ez a megfogalmazás így még nem pontos, nem mondtuk meg, hogy mit jelent nagy valószínűséggel biztosnak lenni valamiben. Ennek egy lehetséges értelmezéseként mutatjuk be a konfidenciaintervallum fogalmát, amely a példaként említett 492-es betegszámhoz tartozó olyan intervallum, amelyben a keresett $p$ érték adott, általunk választott valószínűséggel benne van. A cikkben ezt mutatjuk be először, alkalmazva a magyar COVID-19 járványhoz kapcsolódó 2020. májusi reprezentatív felmérésre, ahol $n=10474$ vizsgált ember közül $X=69$ olyat találtak, aki már átesett a betegségen [8]. Ezután rátérünk a maximum-likelihood módszer ismertetésére, amely magát a becslési módszert, vagyis a $p$ valószínűségnek az $X/n$ relatív gyakorisággal (a betegek arányával) való becslését támasztja alá. Ez az eljárás arra a kérdésre ad választ, hogy mely $p$ érték esetében a legvalószínűbb, hogy pont 492 beteget találunk a 6000 ember között. A binomiális eloszlás esetében kiderül, hogy éppen $p=492/6000$ esetén. Persze ezen kívül is számtalan természetes érvet lehet felhozni a relatív gyakorisággal való becslés mellett (például hogy torzítatlan [4], vagyis $X/n$ várható értéke megegyezik a becsülni kívánt $p$-vel), de van ellenérv is: ha egyetlen beteget sem találunk, akkor a becslésünk mindig 0 lesz, holott egészen mást jelent $p$-re nézve, ha $n=3$, 10, 100, 1000, 10000 vagy $n=100000$ embert tesztelve nem találunk egyetlen beteget sem. A relatív gyakoriság ezt a különbséget nem veszi észre. Többek között ezt küszöböli ki a Bayes-becslés módszere, amelyre most nem térünk ki, de amiből például $(X+5)/(n+10)$ alakú becslés kapható (megfelelő előzetes feltételezés mellett), amire már $X=0$ esetén is igaz, hogy minél nagyobb $n$, annál kisebb a becslés. (A Bayes-becslésnek többek között Bolla és Krámli könyvében [4] lehet utánaolvasni.) Vagyis a relatív gyakoriság nem az egyetlen és nem minden szempontból a legjobb lehetőség, szólnak érvek mellette és ellene is. A cikkben egy mellette szóló módszert, a maximumlikelihood-becslést mutatjuk be, aminek az alkalmazási lehetőségei természetesen jóval szélesebbek, mint konkrétan a $p$ becslése a mi esetünkben [4,7].

Cikkünkben a valószínűségszámítás és az analízis alapvető eszközeinek (binomiális eloszlás, deriválás), illetve az első részben szerepelt néhány állításnak a felhasználásával ismertetjük az említett fogalmakat azok számára, akik ezekkel az egyetemi statisztika órákon is gyakran szereplő módszerekkel nem találkoztak, vagy szeretnék az ezzel kapcsolatos ismereteiket felidézni.

## 1. Konfidenciaintervallum a betegek arányára

Célunk tehát elsőként az, hogy az $X$ (a talált betegek száma) és az $n$ (a vizsgált emberek száma) ismeretében a $p$-re olyan becslést adjunk, amelyből a kapott érték pontossága vagy bizonytalansága is kiderül. Ezt a következő módon szeretnénk megvalósítani:

- az elvégzett vizsgálatok és a talált betegek száma (vagyis $X$ és $n$) alapján mondunk határokat $p$-re, például hogy 7% és 9% közé esik;
- megadjuk azt is, hogy mennyire vagyunk biztosak abban, hogy $p$ a megadott határok között lehet, és minél megbízhatóbb becslést szeretnénk;
- az intervallumot megpróbáljuk a lehető legrövidebbre választani, hogy minél informatívabb legyen az állításunk: az, hogy $p$ értéke 7% és 9% közé esik, sokkal többet mond, mint például az, hogy $p$ értéke 5% és 25% közé esik.

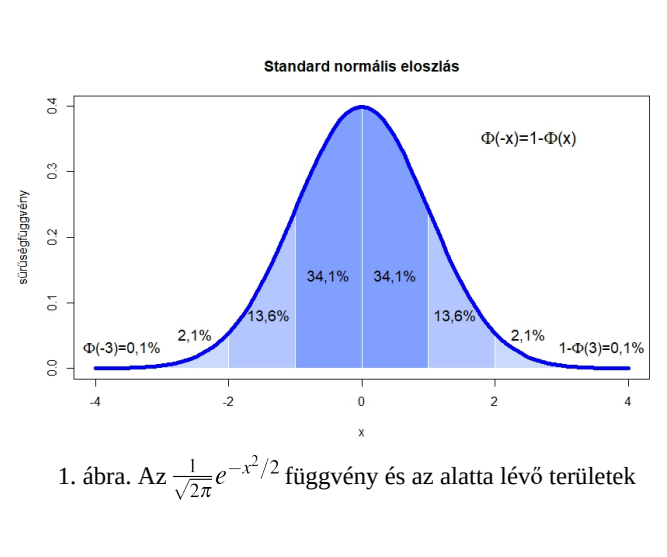
Vegyük észre, hogy a második és a harmadik szempont egymással szembe megy. Csak a második feltételt nagyon könnyű lenne teljesíteni: a $[0,1]$ intervallum egészen biztosan tartalmazza a betegek valódi arányát, és ha ezzel megelégednénk, még a tesztelés költségét is megtakaríthatnánk. Azonban épp ez az, amit a harmadik szemponttal kizárunk: minél rövidebb intervallumot szeretnénk, ami azonban még elég tág ahhoz, hogy nagy megbízhatósággal tartalmazza $p$-t.

Kicsit másképpen fogalmazva próbálhatjuk pontosítani a célt: olyan intervallumot szeretnénk, ami nagy valószínűséggel, például 95% valószínűséggel tartalmazza $p$-t. Azt azonban fontos tisztázni, hogy mit jelent itt a valószínűség: hiszen úgy gondolkoztunk, hogy a $p$, vagyis a betegek valódi aránya ugyan számunkra ismeretlen, de nem véletlen paraméter. Az tehát nem tűnik jó értelmezésnek, hogy az intervallum határai rögzítettek, amibe egy véletlenül kisorsolt $p$ vagy beleesik, vagy sem. Azonban, ha például $n=6000$ vizsgált lakos közül $X=492$ beteg, akkor nyilvánvalóan egészen más intervallum lesz jó, mint ha például 4328 beteget találtunk volna. Így az általunk meghatározott intervallum határai függnek $X$-től, a talált betegek számától, ez pedig a véletlen mintavételünktől függ. Ezért **az intervallum maga lesz az, amit véletlenszerűen adunk meg – a feltétel pedig az, hogy minden $p$-re teljesüljön, hogy $p$ ebbe a véletlen intervallumba essen, kellőképpen nagy valószínűséggel. Ezt nevezzük konfidenciaintervallumnak**. Megjegyezzük, hogy a „minden $p$-re teljesüljön” feltétel értelmezéséhez körültekintőnek kell lennünk. Ugyanis $p$ különböző értékeire maga a binomiális eloszlás is megváltozik, tehát az adott intervallumba kerülés valószínűsége is más lesz, amint alább hamarosan látni fogjuk. A konfidenciaintervallumot meghatározó nagy valószínűségnek egy szokásos választása $q=95\%$, ami egy előre rögzített érték, és bármi is a betegek valódi aránya vagy az általunk megtalált betegek száma, az ismeretlen $p$ legalább ennyi valószínűséggel az általunk megadott határok közé esik. A $q$ értékét nevezik a konfidenciaintervallum megbízhatósági szintjének, ezt mindig előzetesen adjuk meg.

Most már tehát tudjuk, hogy milyen intervallumot szeretnénk, kérdés, hogy hogyan készítsük el. Bár nem minden esetben ez a legjobb választás (ahogy azt az $X=0$ példán láttuk), abból indulunk ki, hogy $p$-t az $X/n$ relatív gyakorisággal becsüljük, és ez lesz a konfidenciaintervallum közepe. A nehezebb feladat az, hogy mi legyen a konfidenciaintervallum hossza. Ehhez olyan $a>0$ számot kell keresnünk, amelyre a $(X/n-a, X/n+a)$ intervallum legalább $q=95\%$ valószínűséggel tartalmazza $p$-t (a megbízhatósági szintet a szokásos értéknek választva). Vagyis az kellene, hogy minden $0<p<1$-re

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{n}-a \leq p \leq \frac{X}{n}+a\right) \geq 95\% \tag{1}$$

teljesüljön. A betegek valódi arányáról tehát nincs semmilyen előzetes feltételezésünk, olyan módszert keresünk, ami minden lehetséges $p$-re ebből a szempontból megfelelően működik. Fontos hangsúlyoznunk, hogy $a$ értéke az $X$-től, a talált betegek számától függni fog, $p$ értékét viszont nem használhatjuk fel a kiszámításához, hiszen éppen ezt akarjuk megbecsülni. A megbízhatósági szint, amit most szokásos módon $q=95\%$-nak választottunk, előre adott érték, de ennek is van hatása $a$-ra: minél nagyobb a $q$, annál nagyobb lesz $a$ is – miközben persze arra is figyelünk, hogy $a$ a megadott feltételek mellett a lehető legkisebb legyen, hogy minél informatívabb legyen az állításunk.



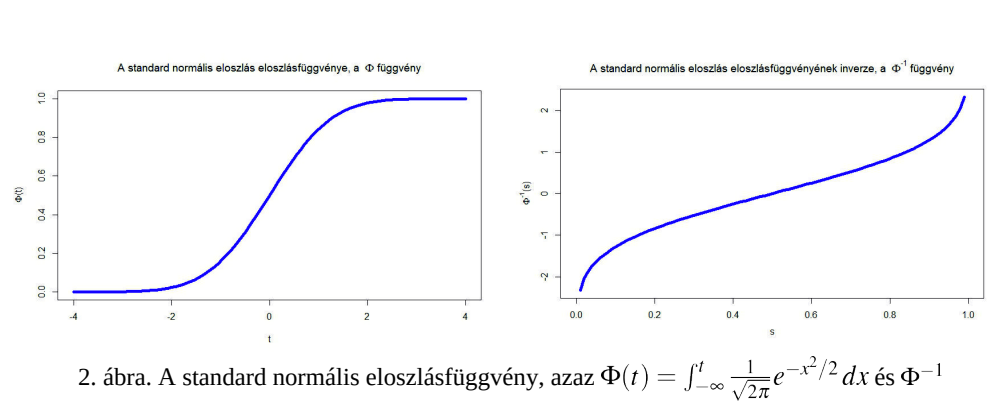
1. ábra. Az $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ függvény és az alatta lévő területek

Ahhoz, hogy ezt az $a$-t megtaláljuk, az (1) egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezést kellene kiszámítanunk. Cikkünk első részében ezt lényegében meg is tettük [3]. Ha ugyanis olyan átrendezést végzünk, hogy a feltétel az $X/n$-nek a $p$-től vett távolságára vonatkozzon, ehhez jutunk:

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{n}-a \leq p \leq \frac{X}{n}+a\right)=\mathbb{P}\left(-a \leq p-\frac{X}{n} \leq a\right)=\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right| \leq a\right).$$

A cikk első részében pedig a de Moivre–Laplace-tételt az $X$ binomiális eloszlású valószínűségi változóra alkalmazva azt láttuk, hogy a fenti valószínűség közelíthető a standard normális eloszlásfüggvény, a $\Phi$ függvény segítségével. Pontosabban, az első rész (6) egyenletében az ott megadott 0,01 helyébe a most keresett $a$-t írva:

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{n}-a \leq p \leq \frac{X}{n}+a\right)=\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right| \leq a\right) \approx 2\Phi\left(\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)-1.$$



2. ábra. A standard normális eloszlásfüggvény, azaz $\Phi(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx$ és $\Phi^{-1}$

Itt a $\Phi(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx$ függvény egy $t$ valós számhoz az 1. ábrán a $t$-től balra eső, függvény alatti területet rendelte hozzá (a teljes görbe alatti terület 1). Magát a $\Phi$ függvényt a 2. ábra bal oldalán láthatjuk. A közelítés azonban természetesen csak elég nagy mintaelemszám, pontosabban az $n$ és a $p$ megfelelő viszonya esetén érvényes, ezt az $np(1-p)\geq 10$ feltétellel szokták például kifejezni [10]. Ha viszont az teljesül, akkor az (1) egyenlőtlenség feltétele alapján olyan $a$ számot keresünk, amelyre

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{n}-a \leq p \leq \frac{X}{n}+a\right) \approx 2\Phi\left(\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)-1 \geq 0{,}95 \;\Leftrightarrow\; \Phi\left(\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \geq 0{,}975.$$

Ennek megoldásához a 0,975-nek a $\Phi^{-1}$ inverz függvénynél vett értékét kell meghatároznunk. Azt a legkisebb $t$ számot keressük tehát, amire $\Phi(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx \geq 0{,}975$, vagyis amitől balra legalább 0,975 terület esik az 1. ábrán. Mivel $1-0{,}021-0{,}001=0{,}978$, ez a szám kettőnél kicsit kisebb kell, hogy legyen. Számítógéppel számolva $\Phi^{-1}(0{,}975)=1{,}96$ adódik, ezt a 2. ábra jobb oldali részéről is leolvashatjuk, ahol a $\Phi^{-1}$ inverz függvényt ábrázoltuk. Vagyis a keresett $a$ számra az alábbi feltételt kapjuk:

$$\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \geq \Phi^{-1}(0{,}975)=1{,}96 \;\Leftrightarrow\; a \geq 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}.$$

Ezzel azonban nem vagyunk kész. Az, hogy egy egyenlőtlenséget kaptunk, holott csak egy szám kellene, nem jelent gondot, hiszen $a$-t minél kisebbnek szeretnénk választani. A gond az, hogy a jobb oldalon álló kifejezésben nem csak $n$, a vizsgált emberek száma szerepel, hanem $p$ is, ami a betegek valódi aránya. Ez viszont éppen a keresett, ismeretlen érték, amire a konfidenciaintervallumot adjuk. Ezért a becslésben ez nem szerepelhet, azt az általunk rendelkezésre álló mennyiségek alapján kell felépítenünk. Egy lehetséges megoldás a $p(1-p)\leq 1/4$ egyenlőtlenség alkalmazása, ami sajnos indokolatlanul hosszú intervallumot (túl nagy $a$ értéket) eredményezhet. Alternatívaként alkalmazhatjuk a már egyszer bevált stratégiát, nevezetesen azt, amikor a konfidenciaintervallum közepének a $p$-re vonatkozó becslésünket, vagyis a betegek $\hat{p}=X/n$ relatív gyakoriságát választottuk.

Ezt alkalmazva tehát közelítőleg érvényes gondolatmenetünk van (amely precízzé tehető a statisztika megfelelő tételeinek segítségével) arra, hogy ha $n$ megkérdezett közül $X$ beteget találunk, akkor **az alábbi intervallum 95%-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum $p$-re, vagyis az alább megadott véletlen határok legalább 95% valószínűséggel közrefogják $p$-t, bármi is legyen annak értéke**:

$$\left(\frac{X}{n}-1{,}96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}},\quad \frac{X}{n}+1{,}96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}\right). \tag{2}$$

A korábban említett példában, ha $n=6000$ ember közül $X=492$ beteg, akkor tehát $\hat{p}=X/n=0{,}082$, és a konfidenciaintervallum:

$$\left(0{,}082-1{,}96\frac{\sqrt{0{,}082(1-0{,}082)}}{\sqrt{6000}},0{,}082+1{,}96\frac{\sqrt{0{,}082(1-0{,}082)}}{\sqrt{6000}}\right)=(0{,}075;0{,}089).$$

Tehát ebben az esetben azt mondhatjuk, hogy a betegek valódi aránya 7,5% és 8,9% közé esik, és ezt egy 95%-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum alapján állíthatjuk. Ugyanerre az intervallumra az alábbi jelölést is használni fogjuk: $8{,}2\% \pm 0{,}7\%$. Ez tehát nem azt jelenti, hogy a $p$ biztosan ebbe az intervallumba esik, ha például a valódi $p=0{,}5$, akkor is előfordulhat, hogy úgy alakul a véletlen mintavételezés, hogy $X=492$ beteget találunk csak a várt 3000 helyett, és $p$ a legkevésbé sem esik bele az általunk megadott $8{,}2\% \pm 0{,}7\%$ intervallumba – de az ilyen típusú tévedések valószínűsége összesen sem több 5%-nál.

A fenti képlettel a H-UNCOVER 2020. május 1-16-ig végzett vizsgálata alapján azt mondhatjuk, hogy a SARS-CoV-2 vírussal korábban megfertőződött (aktívan beteg vagy már meggyógyult) emberek aránya Magyarországon $0{,}66\% \pm 0{,}15\%$ lehetett ebben az időszakban (a 14 éven felüli, nem intézményben lakó emberek között). Itt ugyanis $n=10474$ teszt alapján $X=69$ embernél mutatták ki, hogy átestek ezen a betegségen [8]. Ugyanakkor ne felejtsük el, hogy végig a legideálisabb esettel számoltunk, és azt sem vizsgáltuk, hogy a feltehetően kicsi $p$ miatt nem romlik-e el a közelítés (bár azt megállapíthatjuk, hogy ha $p=X/n$-t helyettesítünk, akkor az $np(1-p)\geq 10$ feltétel teljesül), ezért az intervallum hosszát inkább csak alsó becslésnek tekinthetjük. Ugyanebben a vizsgálatban $X=3$ aktív beteget találtak az $n=10474$ vizsgált ember között. Ekkor azonban az $np(1-p)$ érték a becsült $p$-vel számolva 3-nál is kevesebb, a feltételünk egyáltalán nem teljesül, a módszerünk közelítésből adódó hibája annyira nagy, hogy jobb, ha nem alkalmazzuk a képletünket konfidenciaintervallum készítésére. Ebben a konkrét esetben közvetlenül a binomiális eloszlást használva (a korábbi számoláshoz hasonlóan) azonban észrevehetjük, hogy ha például $p\geq 0{,}1\%$, akkor annak valószínűsége, hogy *legfeljebb* 3 beteget találunk ennyi vizsgált ember között, 0,0067. Vagyis azt mondhatjuk, hogy 1 ezreléknél nem lehetett lényegesen több az aktív betegek aránya (a relatív gyakoriság 0,28 ezrelék), de a nagyságrendről sokkal pontosabbat nem állíthatunk, a konfidenciaintervallumhoz pedig ennél alaposabb vizsgálatra lenne szükség.

## 2. Mitől függhet a konfidenciaintervallum hossza?

Most már tehát van egy képletünk a konfidenciaintervallumra, ezt vizsgáljuk meg részletesebben. Elsőként szögezzük le, hogy a becslések és közelítések miatt ennek a módszernek számos hátulütője lehet, hiszen nem adtunk meg pontosan, hogy mekkora a hiba a normális eloszlással való közelítésnél (erről szól a Berry–Esséen-tétel, [6]), és azt sem, hogy mekkorát hibázunk, amikor a valódi $p$-t a becsült értékkel helyettesítettük az utolsó lépésben. Sőt, semmi nem zárja ki, hogy csak nagyon kevés, esetleg 0 beteget találunk, és ilyenkor a bal végpont negatív lesz, márpedig nem túl szerencsés egy költséges vizsgálat végén megállapítani, hogy a valószínűség –2% és 2% közé esik – az állítás egy részéhez ugyanis egyetlen mérésre sem lett volna szükség. Erre nem térünk ki, de a fentinél természetesen sokkal kifinomultabb módszerek is használhatók a konfidenciaintervallum építésére [1,9], amelyek ezeket a hátrányokat legalább részben kiküszöbölik. Ugyanakkor már a fenti képlet alapján is megfogalmazhatjuk a konfidenciaintervallumnak néhány olyan tulajdonságát, amelyek lényegében módszertől függetlenül érvényesek. Ehhez először tekintsük a táblázatot, amely néhány különböző $n$ és $X$ esetén ad 95%-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumot (az intervallum helyett áttérünk a $\pm$-os jelölésre, vagyis $X/n$-t és az intervallum hosszának felét adjuk meg, amelyet korábban $a$-val jelöltünk).

| tesztek száma ($n$) | betegek száma ($X$) | konfidenciaintervallum |
|---|---|---|
| | | |
| 100 | 10 | $10\% \pm 5{,}8\%$ |
| 100 | 30 | $30\% \pm 9\%$ |
| 100 | 50 | $50\% \pm 9{,}8\%$ |
| | | |
| 1000 | 100 | $10\% \pm 1{,}9\%$ |
| 1000 | 300 | $30\% \pm 2{,}8\%$ |
| 1000 | 500 | $50\% \pm 3{,}1\%$ |
| | | |
| 10000 | 1000 | $10\% \pm 0{,}6\%$ |
| 10000 | 3000 | $30\% \pm 0{,}9\%$ |
| 10000 | 5000 | $50\% \pm 1\%$ |
| | | |
| 100000 | 10000 | $10\% \pm 0{,}2\%$ |
| 100000 | 30000 | $30\% \pm 0{,}3\%$ |
| 100000 | 50000 | $50\% \pm 0{,}3\%$ |
| | | |
| 10474 | 69 | $0{,}66\% \pm 0{,}15\%$ |

Táblázat. 95%-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum az elvégzett tesztek és a megtalált betegek számának függvényében. Az utolsó sor a H-UNCOVER 2020. május 1–16-i reprezentatív SARS-CoV-2 átfertőzöttségi felmérésének adata [8]

Ebből és a (2) képletből az alábbi következtetéseket vonhatjuk le.

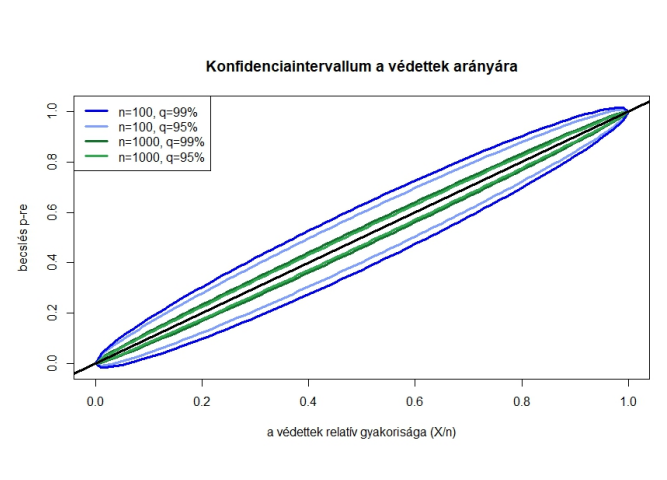
**Mintaelemszám.** A betegek arányát rögzítve (a táblázatban például a vonalak alatti sorokat tekintve, az utolsó kivételével) a konfidenciaintervallum hossza közelítőleg fordítottan arányos a mintaelemszám gyökével. Tehát **feleolyan hosszú intervallumhoz négyszerannyi, tizedolyan hosszú intervallumhoz százszorannyi teszt szükséges**. Ez összhangban van a cikkünk első részében tett megállapításokkal, ott ezt úgy mondtuk, hogy a pontosságot növelve négyzetesen növekszik a szükséges tesztek száma.

**Ritkaság.** Minél közelebb van a betegek aránya a 0-hoz vagy az 1-hez (legalábbis a mintában), vagyis minél ritkább a betegség vagy épp a nem-betegség, annál rövidebb a konfidenciaintervallum. Azonban, ahogy szintén az első részben is láttuk, ha ezt a hosszt a $p$-hez viszonyítjuk, vagyis azt kérdezzük, hogy $p$-nek hányszorosa a hiba, akkor már egész más válasz adódik. A táblázatban a „legritkább eset” az utolsó sor, amely a H-UNCOVER felmérés adatait tartalmazza [8], ahol SARS-CoV-2 koronavírussal való, korábbi vagy aktív fertőzöttséget mutattak ki (tehát a már gyógyultak is számítanak, amíg a szervezetükben megtalálható a vírussal szembeni ellenanyag). Itt a konfidenciaintervallum $(0{,}51\%;0{,}81\%)$, vagyis az alsó és felső végpont között több mint másfélszeres szorzó van, ez meglehetősen nagy bizonytalanság például az $n=10000$, $X=1000$ esethez hasonlítva, ahol a tesztek száma majdnem ugyanaz, de a betegségen átesettek aránya jóval nagyobb (ez persze csak elképzelt eset). Valójában pedig még hosszabb konfidenciaintervallumot kellene megadnunk, hiszen nem modelleztük a tesztek hibáját és más valós, torzításhoz vezető jelenségeket, és a közelítésünk hibáját is elhanyagoltuk (ezekről részletesebben az első rész [3] végén írtunk). A táblázathoz visszatérve, például $n=1000$ esetén $X=100$-ra az intervallum hosszának és az $X/n$-nek az aránya 38%, míg $X=300$-ra csak 18,7%, vagyis a középső értékhez viszonyítva a második esetben rövidebbnek számít az intervallum. A képletből erre a hányadosra $\sqrt{(1-p)/p}$ jellegű válasz adódik, ami annál nagyobb, minél kisebb a $p$. Azaz **relatív értelemben a fertőzöttek kis száma esetén csak jóval hosszabb konfidenciaintervallumot tudunk adni**. Persze ilyenkor a fenti módszer sem feltétlenül használható, elromlik a közelítés (valójában a táblázatunk vonalak alatti soraiban sem volt teljesen jogos a feltételezés, hogy használhatjuk a közelítést), de ez a megállapítás ilyenkor is érvényes marad. Hasonlóképpen az is látható a képletből, hogy rögzített (páros) $n$ esetén a leghosszabb konfidenciaintervallumot akkor kapjuk, ha $X/n=1/2$, azaz ugyanannyi fertőzött és egészséges embert találunk.

**Megbízhatósági szint.** Azt is kérdezhetjük, hogy hogyan függ a konfidenciaintervallum hossza a megbízhatósági szinttől, amit eddig $q=95\%$-nak választottunk. Általánosan felírva ugyanezt a számolást, ha $q$ megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumot szeretnénk:

$$\left(\frac{X}{n}-\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}},\frac{X}{n}+\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}\right). \tag{3}$$

Az világos, hogy minél nagyobb $q$, vagyis minél nagyobb eséllyel kell tartalmaznia az intervallumnak a valódi értéket, annál nagyobb lesz a hossz. A képletből ez onnan látszik, hogy $\Phi$ monoton növő függvény, ezért az inverze is az (2. ábra). Kérdés azonban, hogy mennyivel kell hosszabb intervallumot mondanunk, ha mondjuk 5% helyett csak 1% valószínűségű tévedést engedünk meg. Itt néhány szokásos választással, ahogy a 2. ábráról is leolvashatjuk: $q=90\%$ esetén $\Phi^{-1}((1+q)/2)=1{,}65$, ahogy már láttuk, $q=95\%$ esetén 1,96 adódik, $q=98\%$ esetén 2,32, és $q=99\%$ esetén 2,58. Ezeket megfigyelve megállapíthatjuk, hogy a **konfidenciaintervallum hossza a szokásos értékek tartományában a megbízhatósági szinttől nem túl érzékenyen függ**: az előbbi példában a tévedés valószínűségének ötödére csökkentése is csak nagyjából harmadával növeli az intervallum hosszát. Ugyanakkor egyrészt $q\to 1$ esetén a $\Phi^{-1}((1+q)/2)$ és így a konfidenciaintervallum hossza is végtelenhez tart, másrészt minél nagyobb megbízhatósági szintet írunk elő, annál nagyobb szerepe lehet a módszerből adódó hibáknak is, vagyis a konfidenciaintervallum hossza a képletből adódónál még nagyobb is lehet.



3. ábra. Konfidenciaintervallum két különböző mintaelemszám és megbízhatósági szint esetén

A 3. ábrán $n=100$ és $n=1000$ teszt esetén, $q=95\%$ és $q=99\%$-os megbízhatósági szint mellett ábrázoltuk a konfidenciaintervallumot. A vízszintes tengelyen az $X/n$ szerepel, ez tehát a betegek aránya a vizsgált emberek között, amit megfigyelünk. Ha ezt, illetve $n$-t és $q$-t tudjuk, a két azonos színű pont adja meg a konfidenciaintervallum alsó, illetve felső határát. A konfidenciaintervallumok tehát a két-két azonos színű görbe között helyezkednek el. Itt is láthatjuk, hogy a 95% helyett 99%-os megbízhatósági szint nem jelent nagyságrendi különbséget a konfidenciaintervallum hosszában, azonban tízszer annyi tesztet elvégezve is csak nagyjából elharmadolni tudjuk a konfidenciaintervallumot. Azt is láthatjuk, hogy adott $n$ esetén a leghosszabb konfidenciaintervallum $X/n=1/2$ környékén adódik, a ritka, illetve nagyon gyakori betegség esetében pedig egyre rövidebb intervallumokat kapunk.

## 3. Becslés a valószínűségek alapján

A konfidenciaintervallum esetében is természetesnek vettük, hogy az $X/n$, vagyis a betegek relatív gyakorisága kerül középre – cikkünk második felében egy olyan gyakran használt statisztikai becslési módszert mutatunk be, ami ennek alátámasztására is alkalmazható.

Példaképpen tegyük fel, hogy $n=6000$ ember közül $X=312$ beteget találtunk, vagyis nagyjából minden huszadik ember volt beteg. A kérdés az, hogy mennyi lehet a betegek valódi aránya, vagyis mennyi annak $p\in(0,1)$ valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott ember beteg. A lehetőségek száma végtelen, úgyhogy először megpróbálhatunk megelégedni azzal, hogy két lehetőségből megpróbáljuk eltalálni, hogy melyik lehetett a jó. Például tegyük fel, hogy a laboratóriumba ez a minta egy másikkal együtt érkezett, és azt is tudjuk, hogy ezek közül az egyik egy ritkábban lakott vidéki terület településeiből származik, ahol a fertőzöttek aránya egyéb vizsgálatok alapján $p_r=0{,}002$, míg a másikat egy sűrűn lakott nagyváros lakosaitól gyűjtötték, ahol a fertőzöttek valódi aránya $p_s=0{,}06$. Azonban elmulasztották a dobozokon feltüntetni, hogy melyik minta melyik, így el kellene dönteni, hogy a fenti $n=6000$ nagyságú minta a ritkán vagy a sűrűn lakott területről származik-e. Kizárni egyik lehetőséget sem tudjuk, hiszen mindkét esetben előfordulhat, hogy pontosan 312 beteget találunk. A betegek várható száma a ritkán lakott vidéken $n\cdot p_r=6000\cdot 0{,}002=12$, és ebből azt is sejthetjük, hogy óriási balszerencse kellene ahhoz, hogy ennek majdnem harmincszorosa legyen a talált betegek száma. A sűrűn lakott városban $n\cdot p_s=6000\cdot 0{,}06=360$ a betegek számának várható értéke, ez alapján a 312 egyáltalán nem tűnik elképzelhetetlennek. Vagyis, bár a 312 beteg mindkét esetben előfordulhat, a sűrűn lakott városban ez jóval valószínűbb lehetőség, mint a ritkán lakott vidéken. Ezeket a valószínűségeket szerencsére ki is tudjuk számolni, az alapján, hogy az $X$ valószínűségi változó binomiális eloszlású [2,5,10].

Annak valószínűsége, hogy a ritkán lakott vidéken pontosan 312 beteget találunk 6000 ember között:

$$\mathbb{P}_r(X=312)=\binom{6000}{312}0{,}002^{312}\cdot 0{,}998^{5688}=7{,}28\cdot 10^{-317},$$

vagyis valóban, lehetséges, hogy a ritkán lakott vidéken ennyi beteget találunk, de ennek valószínűsége kisebb, mint hogy 40 egymást követő héten telitalálatunk lesz a lottón (egy-egy héten $1/\binom{90}{5}=2{,}28\cdot 10^{-8}$ valószínűséggel lesz ötből öt találatunk).

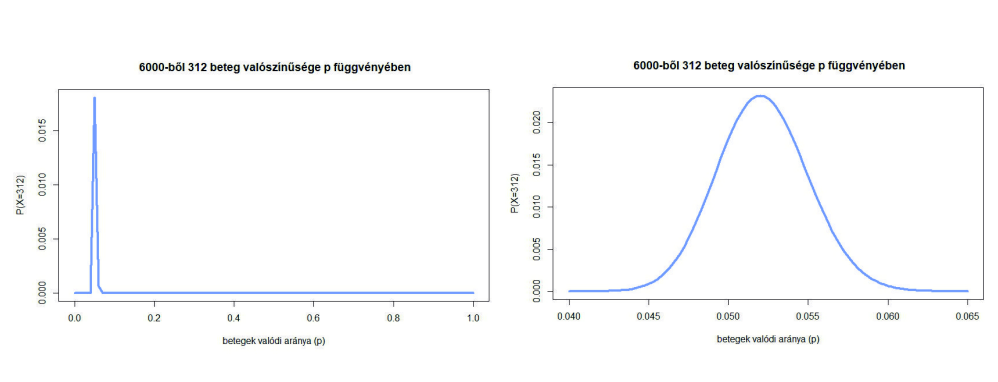
Annak valószínűsége, hogy a sűrűn lakott városban pontosan 312 beteget találunk 6000 ember között:

$$\mathbb{P}_s(X=312)=\binom{6000}{312}0{,}06^{312}\cdot 0{,}94^{5688}=0{,}0007,$$

ami szintén nem túlságosan nagy, de az előző lehetőségnél sok nagyságrenddel nagyobb (például több, mint a lottón a négy találat valószínűsége). Vagyis, az alapján, hogy az általunk megfigyelt történés mennyire valószínű a $p_r=0{,}002$, illetve $p_s=0{,}06$ esetekben, arra következtethetünk, hogy ez az a minta a kettő közül, ami a sűrűn lakott nagyvárosból származik. A tévedésünk nincs kizárva, de a valószínűségek közötti nagyságrendi különbség nyomós érv az állításunk mellett.

Ez tehát akkor működött, amikor feltételeztük, hogy a betegség valószínűsége két lehetséges érték valamelyike. Ha nincs semmilyen előzetes információnk, akkor a $p$ értéke bármilyen 0 és 1 közötti szám lehet (a határokat nem beleértve), kizárni egyik lehetőséget sem tudjuk. Azonban a fent látott módszer akkor is működik, ha több lehetőségünk van. Annyit kell csak tennünk, hogy felírjuk, hogy ha adott $p$ mellett mennyi annak valószínűsége, hogy a 6000 vizsgálatból pontosan 312 jelez betegséget, majd megkeressük azt a $p$-t, amire ez a legnagyobb – hiszen éppen ezt tettük az előbb is, a két lehetőségből a nagyobb valószínűséget adó $p$-t választva. A kérdés tehát az, hogy milyen $0<p<1$ esetén lesz a legnagyobb az alábbi valószínűség:

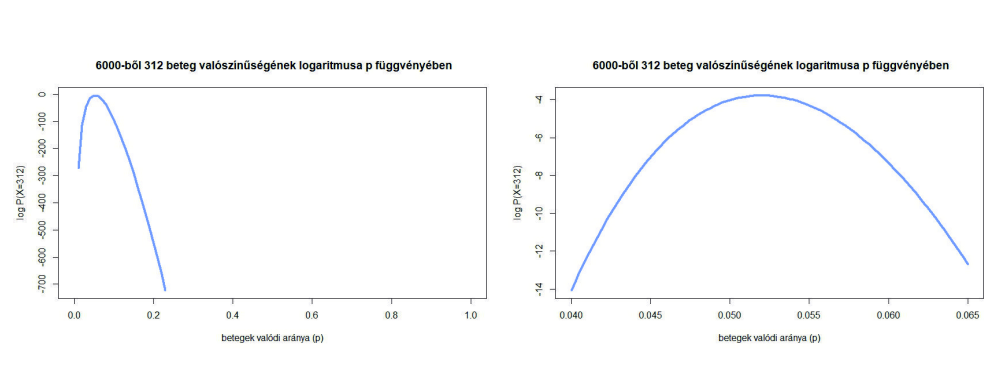
$$\mathbb{P}(X=312)=\binom{6000}{312}p^{312}(1-p)^{5688}. \tag{4}$$



4. ábra. A $\mathbb{P}(X=312)$ valószínűség a betegek valódi arányának, $p$-nek függvényében

Ezt a függvényt a 4. ábrán láthatjuk (bal oldalon a teljes $(0,1)$ intervallumon, a jobb oldalon belenagyítva a maximum környékére). Azt látjuk, hogy a korábbi $p_s=0{,}06$ nem a lehető legnagyobb valószínűséget adja, ennél kicsit kisebb $p$-vel még nagyobb lesz a valószínűsége a 312 betegnek. A maximumhely (az a szám, ahol a függvény a legnagyobb értékét veszi fel) meghatározására az analízisből ismert deriválás módszerét használjuk – de csak egy előkészítő lépés után. Ugyanis az előző egyenlet jobb oldalán egy szorzat szerepel, és szorzatot deriválni ugyan nem lehetetlen, de bonyolultabb, mint összeget deriválni, ahol tagonként végezhető el ez a művelet. Ezért kéne egy függvény, ami szorzatból összeget csinál, és ami ráadásul lehetőleg monoton növő, hogy a maximumhelyet ne mozgassa el. Éppen ilyen függvény a logaritmus. Ezért azt a kérdést, hogy milyen $p$-re lesz a $\mathbb{P}(X=312)$ valószínűség a lehető legnagyobb, a következőképpen fogalmazzuk át. Milyen $0<p<1$ számra lesz az alábbi kifejezés maximális:

$$\log\mathbb{P}(X=312)=\log\binom{6000}{312}+312\log p+5688\log(1-p). \tag{5}$$



5. ábra. A $\mathbb{P}(X=312)$ valószínűség logaritmusa a betegek valódi arányának, $p$-nek függvényében

Itt tehát a (4) egyenlet jobb oldalának logaritmusát vettük. Ez a függvény az 5. ábrán látható, amit az előzővel összehasonlítva le is olvashatjuk, hogy bár a két függvény eltérő alakú és más értékeket vesz fel, a maximumhelyük ugyanaz – ami a logaritmus monoton növő tulajdonságából következik is. Tehát nincs más hátra, mint hogy deriválással megkeressük azt a $p$ számot, amelyre az (5) értéke maximális. A jobb oldalt deriválva (az első tag nem függ $p$-től, ennek deriváltja 0, ezen kívül a $(\log x)'=1/x$ összefüggést és az összetett függvény deriválására vonatkozó szabályt használjuk):

$$\left(\log\binom{6000}{312}+312\log p+5688\log(1-p)\right)'=\frac{312}{p}-\frac{5688}{1-p}.$$

A maximumhelyet ott kell keresnünk, ahol a derivált, vagyis az érintő meredeksége nulla, ahogy ezt az 5. ábra is sugallja. Az egyenletet megoldva:

$$\frac{312}{p}-\frac{5688}{1-p}=0 \;\Leftrightarrow\; 5688p=312(1-p) \;\Leftrightarrow\; 6000p=312 \;\Leftrightarrow\; p=\frac{312}{6000}.$$

Sajnos, ahogy analízisórán minden bizonnyal felhívták rá a figyelmünket, az, hogy a derivált 0, nem elég ahhoz, hogy szélsőértékhelyet találjunk. Azonban ebben az esetben azt mondhatjuk, hogy a második derivált, $-312/p^2-5688/(1-p)^2<0$, és ebből következik, hogy itt lokális maximumhely van, az intervallum szélein pedig $-\infty$ a határérték, ott nem lehet maximumhely, vagyis ez globális maximumhely is. Egy másik érvelés ugyanerre: az egyenlet helyett egyenlőtlenségeket írva az is látható, hogy a derivált pontosan akkor pozitív, ha $p<312/6000$. Vagyis $p<312/6000$ esetén a függvény szigorúan monoton növő, $p>312/6000$ esetén pedig szigorúan monoton csökkenő, ebből már következik, hogy ebben a pontban veszi fel a legnagyobb értékét.

A gondolatmenetet a következőképpen fejezhetjük be: deriválás segítségével megállapítottuk, hogy $\log\mathbb{P}(X=312)$ a $p=312/6000=5{,}2\%$ érték esetén a legnagyobb. Mivel a logaritmusfüggvény szigorúan monoton növő, azaz minél nagyobb $\log\mathbb{P}(X=312)$, annál nagyobb $\mathbb{P}(X=312)$ is, ebből következik, hogy $p=312/6000$ lesz az érték, amelyre $\mathbb{P}(X=312)$ a legnagyobb (ez összhangban van az ábrával is). És, bár természetesen $p$ becslésekor más szempontokat is lehetne választani, most azt tűztük ki célnak, hogy azt a $p$-t válasszuk, amelyre a legnagyobb a valószínűsége annak az esetnek, amit megfigyeltünk. Tehát $p$ becslése $312/6000=5{,}2\%$ lesz a fent vázolt módszer alapján, amelyet maximumlikelihood-módszernek neveznek. A fenti érvelésben a számokat tetszőlegesen választhatjuk, vagyis azt láttuk be, hogy **ha $n$ vizsgált ember közül $X$ beteget találtunk, akkor a betegség valódi gyakoriságának $p$ értékére a maximumlikelihood-módszerrel adott becslés**

$$\hat{p}=\frac{X}{n},$$

**azaz a betegek aránya a vizsgált mintában.** Ezzel a (3) képlet olyan értelemben megerősítést nyert, hogy ez alapján a módszer alapján jogos az ismeretlen $p$ helyébe $X/n$-t helyettesíteni a konfidenciaintervallum építésekor. Illetve, mivel a H-UNCOVER vizsgálatban $n=10474$ vizsgált ember közül $X=69$ teszt lett pozitív, a 2020 májusáig COVID-19 fertőzésen átesett magyar állampolgárok arányát az $X/n=0{,}66\%$ értékkel becsülhetjük az előzőek alapján [8].

A maximumlikelihood-módszer más esetekben is használható [4,7]. Általában van egy ismeretlen mennyiség (paraméter), ez volt esetünkben $p$, a betegek valódi aránya. Elvégzünk valamilyen kísérletet, ez alapján becsüljük az ismeretlen értéket. Ha ezt úgy tesszük, hogy azt az értéket választjuk, amely esetén annak valószínűsége, hogy az általunk a kísérlet során megfigyelt esemény következik be, a lehető legnagyobb legyen, akkor a maximumlikelihood-módszert alkalmaztuk. Nem minden esetben, de az is gyakori, hogy ilyenkor a valószínűség logaritmusának maximumhelyét keressük meg deriválás segítségével. Azonban, ahogy a legtöbb statisztikai módszer, a maximumlikelihood-becslés sem minden esetben működik, például nincs mindig egyértelmű maximumhely, és egyéb hátrányai is lehetnek, például a várható értéke eltérhet a becsülni kívánt értéktől (vagyis torzíthat), vagy a példában $X=0$-ra kevésbé jól működik. Ugyanakkor megfelelő feltételek mellett (és ezek a fenti példában is teljesülnek) a mintaelemszámmal végtelenhez tartva már jó tulajdonságokkal rendelkezik, a várható értéke tart a valódi paraméterhez, és a szórása is a lehető legkisebb értékhez, vagyis a bizonytalanságot minimalizálja. Ezzel együtt, bár ezekre nem térünk ki, statisztikai feladatokban érdemes több módszert is megvizsgálni (például momentummódszer, Bayes-becslés [4,7]) és azt választani, amelyikkel az adott problémát a legjobban meg tudjuk oldani.

## 4. Összefoglalás

Kétrészes cikkünkben azt vizsgáltuk, hogy milyen valószínűségszámítási és statisztikai módszerek alkalmazhatók, ha egy betegség gyakoriságát véletlenszerű teszteléssel akarjuk megbecsülni. Láttuk, hogy az, hogy a betegek valódi arányához képest hány százalékot tévedhetünk felfelé vagy lefelé, nagyobb hatással lehet az elvégzett tesztek számára, mint az, ha a helyes döntés valószínűségére adunk meg egy szigorúbb korlátot: kétszer nagyobb pontossághoz vagy feleolyan hosszú konfidenciaintervallumhoz négyszer annyi teszt kellett, viszont 95% helyett 99%-os megbízhatóságot előírva nem nőtt ennyire a szükséges vizsgálatok száma. Azt is láttuk, hogy ha az abszolút hiba helyett a relatív hibát akarjuk alacsonyan tartani, akkor ritka, 1% vagy 0,1% körüli gyakoriság esetén is jelentősen nagyobb mintaelemszámmal kell számolnunk. Az alkalmazott módszer a binomiális eloszlásnak a normális eloszlással való közelítése volt a de Moivre–Laplace-tétel, vagyis a centrális határeloszlástétel egy speciális esete alapján, itt szintén arra kellett figyelni, hogy ha a betegség túlságosan ritka, akkor vagy más módszert kell keresnünk, vagy ismét csak nagy mintaelemszámot választani – ez azonban valamennyire természetes is, 0,1% nagyságrendű valószínűség esetén 10 vagy 100 teszt semmilyen módszerrel nem lenne megfelelő egy pontos becsléshez. Emellett arra is kitértünk, hogy a valós alkalmazásokban milyen nehezítő körülmények lépnek fel (a tesztek hibája, az egyenletes mintavételezés nehézségei), amelynek következtében a számolások egy ideális eset vizsgálatának, a kapott eredmények pedig a szükséges tesztek számának alsó becslésének tekinthetők.

## Irodalomjegyzék

[1] Douglas Altman, David Machin, Trevor Bryant, Martin Gardner, *Statistics with Confidence: Confidence Intervals and Statistical Guidelines*. Second Edition, John Wiley & Sons, New York, 2000.

[2] Arató Miklós, Prokaj Vilmos, Zempléni András, Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba: példákkal, szimulációkkal, 2013. `https://ttk.elte.hu/dstore/document/901/zempleni.pdf`

[3] Backhausz Ágnes, Simon L. Péter, Mennyit teszteljünk? 1. rész, Érintő, 2020. június. `https://ematlap.hu/index.php?option=com_content&view=article&id=956:mennyit-teszteljunk-take-1&catid=234&Itemid=827`

[4] Bolla Marianna, Krámli András, *Statisztikai következtetések elmélete*. Második kiadás, Typotex, 2012.

[5] Csiszár Villő, Valószínűségszámítás 1. `http://csvillo.web.elte.hu/mtval/jegyzet.pdf`

[6] William Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I.* Third edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1968.

[7] David Freedman, Robert Pisani, Roger Purves, *Statistics*. Fourth edition, W. W. Norton & Company, New York, 2007.

[8] Béla Merkely, Attila J. Szabó, Annamária Kosztin et al., Novel coronavirus epidemic in the Hungarian population, a cross-sectional nationwide survey to support the exit policy in Hungary. *GeroScience* **42**, 1063–1074 (2020). `https://link.springer.com/article/10.1007/s11357-020-00226-9`

[9] R. G. Newcombe, *Confidence intervals for proportions and related measures of effect size*. Chapman & Hall/CRC Biostatistics Series, CRC Press, Boca Raton, FL, 2013.

[10] Sheldon Ross, *A first course in probability*. Second edition, Macmillan Co., New York, 1984.

*Backhausz Ágnes*
*Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematikai Intézet*

*Simon L. Péter*
*Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematikai Intézet*
*ELKH-ELTE Numerikus Analízis és Nagy Hálózatok Kutatócsoport*

statisztika járványtan valószínűségszámítás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Kántor Sándorné 2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

# Hogyan képzelte el 1840-ben Kerekes Ferenc a heurisztikus módszer alkalmazását a matematika tanításában?

## A kitaláltató tanításmódról a mathesisben (de methodo heuristica)

### Bevezetés

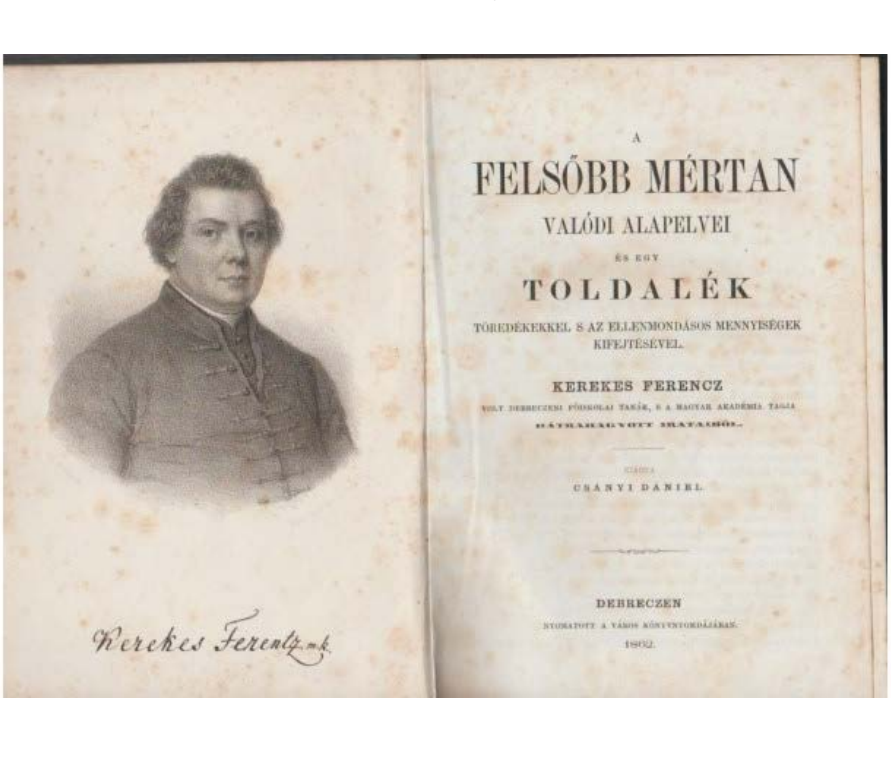
Kerekes Ferenc (Erdőhegy − ma Padureni, Románia, Arad megye, 1784. június 22 − Balatonfüred, 1850. július 29.) a Debreceni Református Kollégium matézis professzora volt (1823-tól 1850-ig). Maróthi György és Hatvani István után az ősi Kollégium professzorai közül Kerekes Ferenc munkássága emelkedik ki. Tudása sokoldalú volt. Eredeti ötletei voltak, de a matematika területén nem alkotott világraszólót, inkább a tanítás módszertanában vannak elismerésre méltó érdemei. Matematikai tevékenységét a Bolyaiakkal egy időben fejtette ki, sőt csak ők hárman − Bolyai Farkas, Bolyai János, és Kerekes Ferenc − nyújtottak be a lipcsei Jablonowski Társulat 1834-ben meghirdetett pályázatára a komplex számokkal kapcsolatos pályamunkát. A Bizottság *Kerekes Ferenc Auf dem Gebiete der Mathematik című pályamunkáját ítélte a legjobbnak, de nem teljesnek,* ezért a pályadíj felét ítélték oda neki. Bolyai Farkas munkájában hiba volt, *Bolyai János Responsio* című pályamunkája hibátlan volt, de azt a Bizottság nem értette meg, ami nem is csoda, mert Bolyai János benne az Appendixben leírt tanaira hivatkozott.

Nagyon sok a közös vonás Kerekes Ferenc és Maróthi György professzorok módszertani nézetei között. Míg Maróthi munkássága céltudatos és egységes, addig Kerekes tevékenységében kevesebb a szisztematikus kidolgozás, több a friss kezdeményezés, az előre mutató hipotézis. Ennek egyik oka az is lehet, hogy Kerekes az ősi Kollégiumban szolgadiák volt, Maróthi pedig Debrecen város főbírájának a fia, ami nagy társadalmi különbség volt abban az időben. Meghatározó lehet az is, hogy Kerekes Németországban folytatta egyetemi tanulmányait.

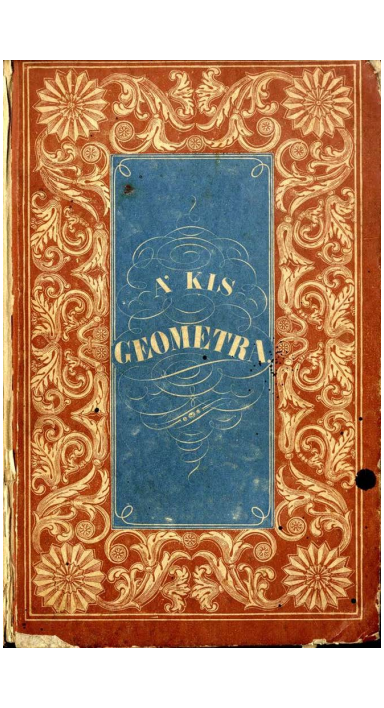
Széles körű érdeklődéssel rendelkezett, foglalkozott nyelvészettel, irodalommal, fordítással, matematikával, kémiával és alkalmazásaival, ásványtannal, botanikával és pedagógiával. Az ő nevéhez fűződik a Debreceni Református Kollégium Füvészkertjének a felállítása1840-ben. A Magyar Tudós Társaság őt is, hasonlóan Bolyai Farkashoz, irodalmi tevékenységért választotta 1837-ben a Magyar Tudós Társaság levelező tagjává.

„*Maróthi óta nem volt debreceni tanár, aki akár a tudományokkal, akár az ifjúság nevelésével oly magas szempontból foglalkozott, mint Kerekes*" − állapította meg róla Géresi Kálmán.[1]

Kerekes Ferenc 27 évig tanított a Debreceni Református Kollégiumban. Sárvári Pál akadémikus tanítványa volt, majd utódja lett a professzori székben. Népszerű volt a diákok körében. Matematikatanítása egyetemi szintű volt. *Elmélkedés a Fellengzős Mathesis igaz sarkalatairól* című jegyzetében (1837) a differenciál- és integrálszámítással foglalkozott, így ő írta meg az első magyar nyelvű egyetemi szintű analízis jegyzetet. Tanítványai közül Csányi Dániel[2] és Tóth József folytatták munkáját a Kollégiumban. Csányi Dániel oktatói munkássága teljes egészében Kerekes Ferenc munkáira támaszkodott. 1862-ben kiadta *A felsőbb mértan valódi alapelvei és egy toldalék töredékkel* c. kéziratos Kerekes-könyvet, amit hosszú bevezetéssel látott el.



*A mathesis tanítási módjairól* szóló cikkének (Tudományos Gyűjtemény, 1840) II. szakaszában *A Kis Geometra tanítási módjáról és egy másikról, hasonlóképpen beszélgetésekben* Nagy Károly[3] párbeszédes tanítási módszerét elemzi. Ez a módszer a 20. században elevenedett fel újra. Egyrészt Lakatos Imre *Bizonyítások és cáfolatok* munkájában, amelyben Euler poliéder-tételét tanár és diák dialógusok formájában dolgozza fel, másrészt Rényi Alfréd *Dialógusok a matematikáról* könyvében. Érdemes felidézni a Rényi-könyvről írt könyvismertetést:



*„A Dialógusok az a ritkaság, amely nem a matematikai mesterség fogásait adja tovább, hanem egy igazi nagymester matematikus tollából a kétezer éves tudomány filozófiáját."*

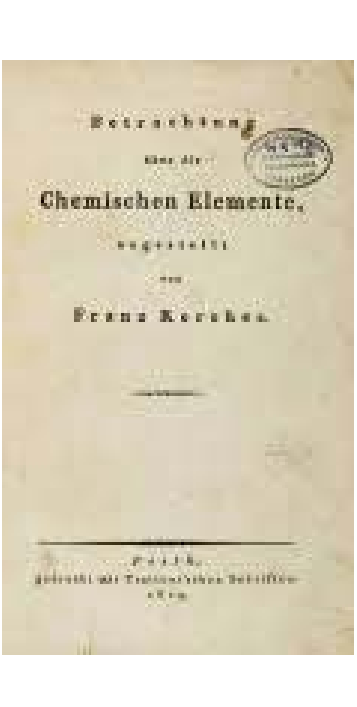
*„E kötet három dialógust tartalmaz. Mindháromnak egy-egy tudománytörténetileg kiemelkedő személyiség a főszereplője. Az első Szókratész, a másodiké Arkhimédész, a harmadiké Galilei. Az első dialógus arról szól, mi is a matematika, mi a tárgya, feladata, jelentősége. A választ a szókratészi dialektika módszerével adja meg. A második dialógus központi kérdése a matematika gyakorlati alkalmazhatósága; a harmadiké, hogyan segíti a matematika a természeti törvények megismerését. E dialógusok a matematika történetének egy-egy sorsdöntő fordulópontján át az olvasót a mai matematika legégetőbb kérdéseihez irodalmi formában, közérthető módon vezetik el."*

A cikk III. szakaszában ***A kitaláltató tanításmódról a mathesisben (de methodo heuristica)*** a matematika heurisztikus tanításának elveit fejti ki, vagyis a 20. században, a *Pólya György és Lakatos Imre által újra felfedezett heurisztikus módszert* taglalja.

### Kerekes Ferenc élete és munkássága

Kerekes Ferenc szegény szülők gyermeke volt, így a Debreceni Református Kollégiumban szolgadiákként végezte tanulmányait. 1803-tól a felsőbb osztályok tanulója volt. 1811-től volt köztanító, majd Kisújszálláson segédrektor. Érdeklődése a mezőgazdaság felé fordult, tanulmányait a keszthelyi Georgikonban folytatta. 1815-től külföldi tanulmányúton volt. Először Bécsbe látogatott, ahol irodalommal foglalkozott, és fordításokat készített. Továbbra is foglalkozott a mezőgazdaság és a természettudományok kérdéseivel. Lefordította magyarra Rohlwes Baromorvos könyvét (Bécs, 1814), majd elkezdte *Vergilius Georgicon*jának a fordítását. Bécsben Fazekas Mihály tudta és engedélye nélkül kiadta a *Lúdas Matyit (1815).* Irodalmi tehetségéről tanúskodik a hexameterekben hozzáírt 28 soros előszava. Bécsben Pethe Ferenc Nemzeti Gazda lapjának volt a segédszerkesztője, illetve mértan, azaz matematika tanításával foglalkozott.

Beutazta Hollandiát, Belgiumot. Útjainak egy részéről Naplót vezetett. Egyetemi diplomáját Wiesbadenban szerezte meg. Több évig volt Németországban tanársegéd. Külföldi tanulmányútján elsősorban kémiával foglalkozott. Igen jó kritikát kapott a *Betrachtung über die Chemischen Elemente* (Bp. 1819) című kémiakönyve, amelyben modern, újszerű elképzeléseit is közölte. Észrevette, hogy a matematika az anyagszerkezet vizsgálatában is jól alkalmazható. „ *Mathesis ad Chemiam applicata … olyan könyv, mely ezt a nevet érdemelné még tudtommal még nincs, pedig nagyon főséges volna. És íme most feltesztem magamban, és ezen feltételem mellett állhatatosan megmaradok, hogy ilyen pedig vagy Deák vagy Német nyelven, mivel ez, ha magyarul írnám, nehezen ha találkozna 100 vevője."* írta az *Elegyes Jegyzések* (1817) kéziratában.



Ebből világosan látszik, hogy tudta, hogy a tudomány nyelve a latin, hisz Hatvani István is ezért írta könyveit latinul. Bolyai Farkas is mentegetőzött a Tentamen latin nyelve miatt, pedig azt tankönyvnek szánta. Kerekes szerint a tudományban a német nyelvre való áttérés is megoldás lehetett volna. Viszont kiállt amellett, hogy a tanuló ifjúság számára a magyar nyelven történő oktatást kell bevezetni, életkor szerint elkülönítve a magyar és a deák iskolát. Elkészítette mind a két tagozat részére a tanítandó matematika anyag tervezetét.[4]

Kémiai munkássága alapján a szentpétervári egyetem katedrát ajánlott fel neki, de ő inkább a Debreceni Kollégium által felkínált professzori állást fogadta el. Ő belőle is lehetett volna külföldi egyetemen professzor, de úgy, mint Hatvani István, ő is hazajött Debrecenbe tanítani. Maróthihoz hasonlóan a magyar oktatás, a magyar iskolák tanítási módszerének a fejlesztését tűzte ki célul. Ezt mutatja a Szoboszlai Pap Istvánnak írt négy levele[5] is, amelyek mondanivalója kiterjedt az oktatás egészére, az alsó tagozatra, a latin iskolára, a főiskolára és a tanárképzésre is. Elve az volt, hogy *sohasem szabad elfelejteni, hogy a gyermek az gyermek, és úgy kell tanítani, hogy az mind a tanítónak, mind a diáknak a gyönyörűségére szolgáljon.* Javasolta, hogy a tanítók jobb felkészítése érdekében a Kollégiumban állítsanak fel egy pedagógiai tanszéket. Ez 1825-ben, az országban elsőként meg is történt. Javasolta azt is, hogy a Kollégiumban hozzanak létre egy olyan könyvtárat, ahol a falakat térképekkel fedik be és így az egész terem kedvet támaszt az olvasásra, a tanulásra, a gondolatokban való elmélyedésre, ahol a *tanár és a tanítvány közösen dolgozhat, olvashat, beszélgethet és a közös munka összekapcsolná őket.*

Külföldi útjáról Kerekes 1823-ban tért haza és a Debreceni Kollégium által felkínált professzori állást foglalta el az ásványtani-kémiai tanszéken. Székfoglaló előadását *Mathesis ad Chemiam applicata* címmel tartotta meg. Nyelvészi munkája, az *Értekezés és kitérések (1836)* címmel jelent. Ezért a munkájáért kapta meg az akadémiai levelező tagságot 1837-ben.

A „mathézis", azaz a matematika is vonzotta. Németországban szerzett tudása alapján ő is benyújtotta a lipcsei pályázatra a komplex számok szerkesztésével foglalkozó munkáját, amit a Bizottság a jutalomdíj felére tartott méltónak 1839-ben. Sárvári Pál akadémikus nyugalomba vonulása után ő kapta meg a Debreceni Református Kollégiumban a Mathézis és Geometria Tanszéket.

1844-ben a Magyar Tudós Társaság is kitűzött egy pályadíjat a komplex számokkal kapcsolatban. Ide is elküldte tanulmányát, de nem ért el sikert, viszont éles vitába keveredett a kor magyar matematikusaival. Ennek eredményeként született meg a *Négyes Kistükör* (Debrecen, 1848) könyve, amelyben ismertette a *Képzetes mennyiségekről* írt pályamunkáját, a *Szorszámtan* (Debrecen, 1845) könyvének bírálatát, ellenbírálatát, és Arenstein Józsefnek[6] a díjnyertes munkáját. Tanított differenciál- és integrálszámítást. Itt tapasztalta meg, hogy milyen nagy szükség van arra, hogy megteremtsék a felsőbb matematika magyar nyelvét.

Számunkra különösen érdekesek a matematika tanításával kapcsolatos elképzelései. Egyike volt azoknak a tanároknak, akik látták a matematikatanítás nehézségeit, és módszertani művekkel akarták segíteni a tanárok munkáját. Beszámolt saját elképzeléseiről és tanítási gyakorlatáról. Azt javasolta, hogy a tanító először ne a római számokat tanítsa, hanem a tízes számrendszert, illetve *a tanuló legyen öntevékeny és alkalmazzanak szemléltetést az önálló tanulásnál.* Feleslegesnek ítélte, hogy *„csaknem egy éven át a római számokkal tömik a tanuló fejét mikor azoknak már semmi szerepük sincsen, és miért kell ilyenek miatt más, hasznos részek tárgyalásáról lemondanunk?"* A gyakorlati alkalmazást tartotta fontosnak Ez a szempont érvényesült nála, amikor is a logaritmus pénzügyi alkalmazását részletesen tárgyalta a Szorszámtan könyvében.

*„Én ebben egy hatesztendős gyerekkel esztendő alatt annyira vittem, hogy ha tettem az asztalra egy marék paszulyt és azt mondtam neki: No, fijam Miska, ebből számolj ki nekem 134-et, míg én visszajövök. Míg kerültem-fordultam ki volt számlálva, és néha maga a gyerek jött utánam rövid idő múlva, hogy ki van már. Mégpedig, hogy volt ki? Minden rakásban 10 és 10 ilyen rakás, ismét 10 egy sorban háromszor, a harmadik sorban külön a négy. A számjegyekkel sokáig nem kell törődni. Nem is a számjegyekkel, hanem az elmében való kalkulálás az, amely az elmét élesíti."*

Az aritmetika tanításával kapcsolatban is megállapította, hogy azt a gyakorlati élettel kell összekapcsolni. *„A tanításból és a tanulásból, ki kell irtani a mechanikusságot, helyébe a racionálisat csinálni, hogy a célhoz a legrövidebb úton jussunk el."*

A 19. század elején a protestáns iskolák változásokat sürgettek. Felismerték, hogy a gimnáziumi tanításnak kettős célja van, egyrészt felkészít a felsőbb tanulmányokra, másrészt a reáltudományok nélkülözhetetlenek a gyakorlati életre való felkészítésben. Kerekes Ferenc sürgette a rajzolás bevezetését a geometriában, mint a szemléltetés eszközét.

*„De ha az ifjú a pura mathesisnek**[7]** fellengzősebb tudományait és a rajzolás mesterségét érti, nem lesz olyan könyv a világon, az applicata mathesis**[8]** akármely részében, sem a fizikában, amelyet meg ne értsen."*

Kerekes Maróthihoz hasonlóan részt vett a matematikai műszavak alkotásában. *Maróthi* műszavaiból sokat használunk ma is, pl. összeadás, kivonás, (sok)szorozás, törtszám, sok, semmi, osztó, hiba, kerület. Ezeket elsősorban az elemi aritmetika területén alkotta és az *Arithmetika* könyvében (1743, 1763, 1782) használta, így széles körben terjedtek el. Az Elöljáró beszédében is kiemelte *„a Deákság nélkül való Tanulóknak igen nagy bajt szerzettek a Deák nevek, mint pl. Additio, Substractio, Quotiens, stb. Én hasznosnak ítéltem, mindazok helyett magyar szókat tenni, melyeket még az* ***asszonynép is megérthessen****."*

Kerekes is a latin nyelvű idegen szavakat akarta helyettesíteni új magyar szavakkal. Műszavai szorosan összefüggtek a matematikának azokkal a területeivel, amelyekkel ő foglalkozott, pl. a pozitív, negatív számokkal, a logaritmussal, a komplex számokkal, a differenciálással és az integrálással. Ezeket az akkori matematikatanításba be is vezették, de a későbbiekben nem honosodtak meg. Ma helyettük a nemzetközileg elfogadott műszavakat, vagy azok magyarított változatát használjuk: célirányos = pozitív, célellenes = negatív, helycsere = permutáció, szorszám = logaritmus, pótlék = mantissza, határ = határérték, egyenközű = párhuzamos. A célnak jobban megfelelnek a magyar végződéssel, képzővel ellátott idegen szavak, pl. az egészlés helyett az integrálás.

A Kerekes által használt műszavak közül kevés maradt meg. Ma is használjuk pl. pl. átmérő, általános kifejezés, egyértékű függvény, évi járandóság, állandó, legkisebb érték, négyszögesítés, összeg, transzcendens szavakat. *Tanítványa, Tóth József (1823−1908), a Református Kollégium híres mathézis tanára* pl. az 1866/67-es pályatételeiben még használta a célirányos (pozitív), célellenes (negatív), szeres (racionális), szertelen (irracionális), valós (reális), képtelen (imaginárius) szavakat.

Megemlítjük, hogy Bolyai Farkas műszavai közül csak négyet használunk ma is (átfogó, befogó, átló, feladat). Az *Arithmetika eleje* (1843) című könyvének szavai ma már lényegében érthetetlenek, külön szótárt kell készíteni hozzá.

### A mathesis tanítási módjairól

Kerekes Ferenc jó tanár volt, és erősen foglalkoztatták a tanítás és a nevelés korszerűsítésének a kérdései. Nézeteit az *Egy új Tudományos Systemának fundamentuma, a Pedagógiai Levelek, A Mathesis tanítási módjairól* írt neveléstörténeti és szakmódszertani szempontból is jelentősnek tartott munkáiból ismerhetjük meg. Tulajdonképpen a *heurisztikus módszert* tartja jónak.

*A mathesis tanítási módjairól* szóló cikkének ***A kitaláltató tanításmódról a mathesisben (de methodo heuristica)*** szakaszában ezeket írja:

*„…matematikusok szinte közönségesen (általában) azt hitték, és hiszik sokan, úgy látszik máig is, hogy a Mathesisi igazságokat, amilyen pl. a Pitagórasz tétele is, megmutatni csak némely szerencsés elméknek adatott, másoknak pedig elég ezeket csak bámulni, és amely igazságokat ezek feltaláltak: azokat, mint valamely tradíciókat tőlük elfogadni, és megtanulni; holott pedig* ***a mathesis igazságai főképp azok melyeket, mint az emberi elme tiszta eredményeit, okos vezérlés mellett magukkal a tanuló gyermekekkel és ifjakkal mind fel lehet találtatni.***

*Előttem van pl. most is a Pitagórász tételének 17 egymástól különböző geometriai megmutatása, melyet egy németországi jeles nevelőintézetben 1823-ban tanult gyermekek és ifjak készítettek.* ***A gyermekeket a geometria ábécéjének kezdetétől fogva mindenütt úgy vezetik, hogy minden igazságot maga találjon ki.*** *Így aztán mikor a Pitagórász tételére kerül sor, azt könnyen kitalálja. A mód pedig, miszerint a gyermekek és az ifjak úgy vezéreltetnek a Mathesisben, nevezetesen a geometriában, hogy annak minden igazságát maguk találják ki, abban áll, hogy kikeresvén a tudomány kezdő végét, oly móddal rakjuk fel az ifjaknak, vagy a gyermekeknek a kérdéseket, hogy arra mindenki meg tudjon felelni, az elsőbbekre ugyan a csupa józan okosságból, a későbbiekre pedig mindenkor azokból, amiket már azelőtt kitalált. Itt azonban ne aprózzuk annyira el, hogy azokra megfelelni a felelőnek semmi gondolkodásába ne kerüljön.*

*Valóban szép nézni az ilyen kis geometrákat, hogy törik a fejüket, egyik sétálva, másik magát egy szegletbe vonva, ki-ki a neki feladott kérdés megfejtésén, és hogy örülnek, mikor azt megfejtették. Semmi kétséget nem szenved, hogy a* ***Mathesis tanításának ez a legjobb módja,*** *s így a Mathesis igazán elmét élesítő, s gondolkodásra szoktató tudomány."*

Szerinte, amelyik ifjú maga kereste és találta fel a mathesis igazságait, annak lelkével ezek mintegy összenőttek úgy, hogy annak úgyszólván egészítő részét teszik, s ennélfogva ezeket onnan soha semmi feledékenység ki nem törölheti. Megállapítja, hogy *„ennél még sokkal becsesebb az, hogy megtanulta azt is, hogy kell keresni és mintegy nyerekedni a Mathesisi igazságokkal, vagyis hogyan kell a megtalált igazságok segítségével új igazságokat keresni."*

Viszont látja a problémákat, vagyis is azt, hogy az ilyen kitaláltató tanításban a tanítónak mindegyik tanítványával fogékonyságának megfelelően *„egyénenként kell magát alkalmaztatnia*." Ez pedig azokban az iskolákban, ahol egy tanítóra 50, 60, őt 100 tanuló is jut, nem alkalmazható, itt nem jut idő arra, hogy a tanító mindegyik tanítványával külön bíbelődjék. Itt legfeljebb annyit tehet a tanító, hogy kérdések által serkenti és szüntelenül ébren tartani igyekszik tanítványai figyelmét, és ha nem mindent, s nem mindenkivel is, legalább *a legjobbakkal sokat magukkal találtat ki.*

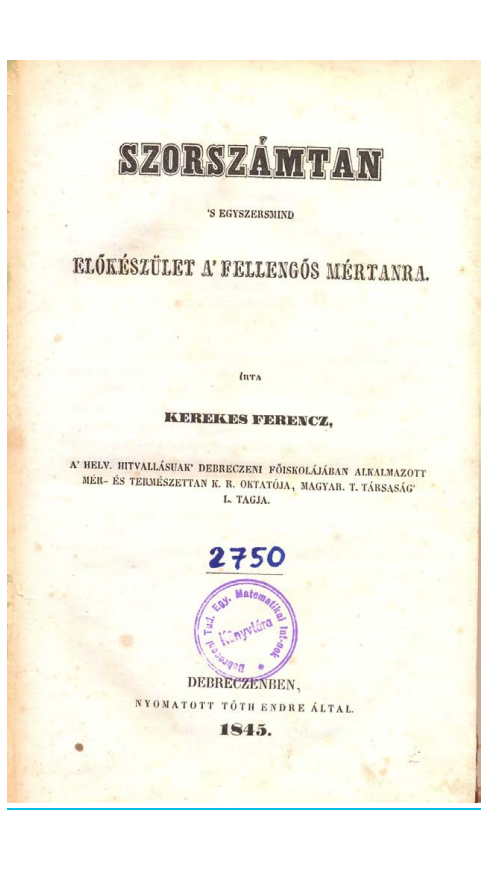
Nagyon ajánlja a módszert a házitanítóknak és azoknak a tanintézeteknek, ahol kicsi a tanulók létszáma. Foglalkozik a szülők véleményével is, mert eleinte csak lassan lehet haladni ezzel a módszerrel, de ez később kipótlódik. *„Ha az ilyen módszert követő tanító eleinte lassan halad a mathesisben, és nem tesz mindjárt csodát a gyermekkel, és ha abban sem ütköznek meg, hogy néha talán olyan igazságot kitalálásával is halljákbíbelődni a gyermekeket, melyeknek az életben semmi haszna sincsen, s nem aggódnak azon, hogy az efféléktől majd azt ún. reáliák tanulására nem jut elég idő."*

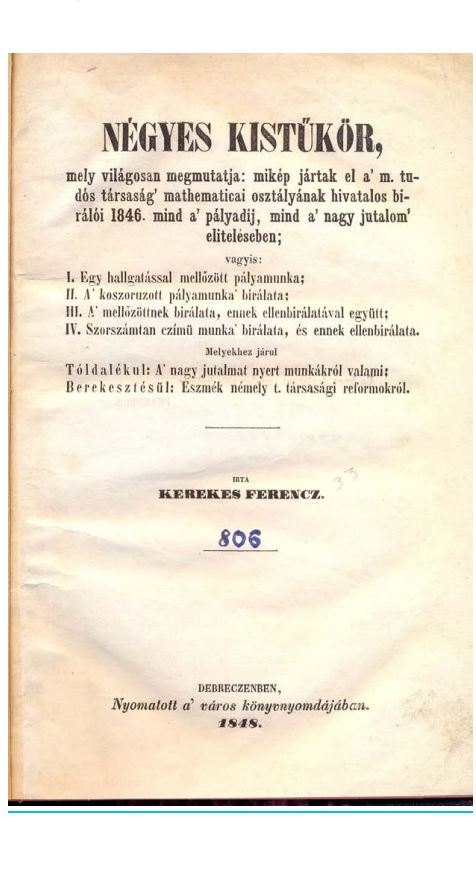
Saját németországi tapasztalatait eleveníti fel. Idézi egy kölni gyáros véleményét, aki azt tapasztalta, hogy a felfedeztető módszerrel tanuló diákok kicsit nehezebben indultak, de három-négy hónap alatt elhagyták a reáliskolából jövőket, *jobban tudtak önállóan dolgozni és gondolkodni.*

Felhívja a figyelmet arra, hogy az iskolában a mathesisi elmegyakorlásokkal párhuzamosan legyen meg a test és lélek minden más tehetségeinek a gyakorlása. A mathesisi komoly órákat muzsikával, testgyakorlással váltsák fel. *„A tapasztalás azt bizonyítja, hogy a gyermekek az ily móddal a legelvontabb mathesisi spekulációk mellett is megtartják természeti vidámságukat, gyermekségüket és magukba vonuló komor elmélkedőkké nem lesznek."*

A tanítók vonatkozásában érdekes megjegyzéssel zárja tanulmányát: *A mathesist a kitaláltató mód szerint tanítani nem minden ember dolga. Akik maguk is így tanulták a mathesist, azok közül leghamarabb válnának, kik arra másokat is tudnának oly módon okosan vezérelni.* ***De ki kezd el hazánkban ilyen matematikusokat formálni?***

**Kerekes Ferenc munkáiról,** közöttük a **Szorszámtan** és a **Négyes Kistükör** című könyveiről írtakat a címoldalukra kattintva olvashatja el az érdeklődő.





**A mathesis tanítása módjáról, s a mathesisbeli ellentmondások okáról. a Kis Geometrára különös tekintettel (**Tudományos Gyűjtemény, 1840, I. értekezések, 3-67. oldal) cikk érdekességeinek és négy szakaszának elemzése itt olvasható.

### Kerekes Ferenc emlékének őrzése

Kerekes Ferenc emlékét a hozzá kapcsolódó helyszíneken őrzik. Debrecenben az ősi Református Kollégiumban az udvaron, az árkádok alatti folyosó falán megtaláljuk a Debreczeny Tivadar által készített bronzreliefet (1938)[9], a Debreceni Egyetem Főépületében a Díszudvar Pantheonjában az Egyetemi Könyvtár felett ott van a neve. Debrecen a városában utca van róla elnevezve. Balatonfüreden halt meg és ott temették el. Az Új Református Temetőben 1990. október 14-én avatták fel a sírkövét.[10] Szülőhelyén Arad megyében, Kisjenő-Erdőhegyen, az RMDSZ székházában termet neveztek el róla (2018. december 21).

### Hivatkozások

[1] Géresi Kálmán (1841−1921) a Debreceni Református Kollégium magyar nyelv és irodalom tanára, majd a jogakadémia tanára, történész, gróf Tisza István nevelője, lelkész, a Tiszántúli Református Tanáregyesület elnöke.

[2] Csányi Dániel (1820−1867) matematikus, mérnök, főiskolai tanár a Debreceni Református Kollégiumban. Az 1848-as forradalombeli tevékenységért 12 évi fogságra ítélték. Ez alatt energiáját a Kerekes Ferenc által lerakott matematikai rendszer kidolgozására fordította. „A matematika az egyetlen tudomány, mely így Kerekes által újrateremtve magyar ész műve." Kerekes elvei alapján kidolgozott *A felsőbb mértan valódi alapelvei és egy toldalék töredékkel* c. könyvet 1862-ben adta ki, és ezért 1865-ben a Magyar Tudományos Akadémia tagjává választotta.

[3] Nagy Károly (1797−1868) matematikus, csillagász, a Magyar Tudós társaság levelező (1832), majd rendes tagja (1836). Matematikai tankönyvek írója. Szorgalmazta a mértékrendszer egységesítését. Bicskén obszervatóriumot akart létesíteni, de az 1848-49-es forradalomban és szabadságharcban való részvételéért elítélték, majd külföldre távozott. Párisban halt meg.

[4] Pedagógiai Levelek.

[5] Pedagógiai Levelek.

[6] Arenstein József (1816-1892) matematikatanár, majd a Budapesti Műegyetem első nyolc tanára között találjuk meg. Foglalkozott matematikával, mechanikával, meteorológiával, mezőgazdaságtannal. Mocnik tankönyvei alapján több népszerű könyvet is írt, és jelentek meg dolgozatai is. A Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja volt (1847).

[7] Tiszta, elméleti matematika.

[8] Alkalmazott matematika.

[9] Szövege: „Kerekes Ferenc 1784 -1850 Deákunk, tanárunk, kiváló pedagógus, mathematikus"

[10] A sírkövön a következő szöveg van: „Kerekes Ferenc 1784-1850 A debreceni Református Kollégium professzora, a magyar tudomány kimagasló, sokoldalú művelője, természettudós, nyelvész, pedagógus."

### Irodalom

- Bajkó Mátyás: Kerekes Ferenc: Felsőoktatási systemája-1817, Pedagógiai Szemle (1957) 69, p. 48-62.
- Dávid Lajos: Debreceni régi matematikusok (1927) Debrecen, p. 49-54.
- Gaál Botond: A Debreceni Egyetem díszudvarának panteonja. Gerundium MMXIII. Vol. NR. 1-2, 59-82.
- Kántor Sándorné: Híres matematikatanárok és tanítványok a debreceni iskolákban, OPKM 2007, Mesterek és Tanítványok sorozat. pp 180, ISBN978 963 9315 83 9.
- Kántor Sándorné: Fejezetek a debreceni természettudományos képzés történetéből, in: 60 éves a Debreceni Egyetem Természettudományi és Technológiai Kara, l (2009) ISBN 978-963-473-310-2, p. 7-27.
- Kántor Sándorné: Lakatos Imre heurisztikájának gyökereiről. Matematikatanárképzés-matematikatanár- továbbképzés, Az 1999-2000. évi Varga Tamás Napok előadásai, Calibra-Műszaki Kiadó, Bp. 49-52.
- Kántor Sándorné: Bolyai Farkas és a Nagy Károly munkáiról a Magyar Tudós Társaság 1835.évi nagydíjának a tükrében, in: A magyar Természettudományi Társulat Tudománytörténeti kötetei II. Hagyomány, értékmentés és innováció a tudományok történetében (Sorozatszerkesztő: Dr. Forrai Judit) (2018) Budapest, 264-277.
- Kántor Sándorné: Nagy Károly, a reformkor tankönyvírója, a tehetséggondozás úttörője (Révkomárom, 1797- Párizs, 1868) Polygon (2013), XXI./1-2 szám, 1-17.
- Kántor Sándorné: 300 éve született Leonhard Euler: A mathematicus acutissimus, Természet Világa 138. évf. 9. szám Euler - emlékév (2007), CXXIX-CXXXVI.
- Kántor Sándorné: A modern heurisztika megalkotója: Pólya György (1887-1985) Természet Világa 143. évf. 8. szám 344-347.
- Kántor Sándorné: A matematikatanítás nagy mágusa, 100 éve született Dienes Zoltán Pál Természet Világa 2016. szeptember, 147. évf. 9. szám – CXXIX-CXXXIV.
- Kántor Sándorné: Tudós matematikatanárok Hajdú, Szabolcs és Szolnok megye középiskoláiban (1850-1948) 2. javított és bővített kiadás (2009) MEK, hu 07200/07238, 229 pp. ISBN 978-963-06-7231-3.
- Kerekes Ferenc: A felsőbb mértan valódi alapelvei és egy toldalék (Ed.: Csányi Dániel(1862) Debrecen.
- Kerekes Ferenc: Szorszámtan, s egyszersmind előkészület a fellengős mértanra (1845) Debrecen, Tóth Endre.
- Kerekes Ferenc: A mathesis tanítási módjairól (1840) Tudományos Gyűjtemény, p.3-67.
- Kerekes Ferenc: Négyes Kistükör (1848), Debrecen, Városi nyomda.
- Szénássy Barna: A magyarországi matematika története (1974) Budapest, Akadémiai Kiadó, p.143.
- Törös László: Kerekes pedagógiai levelei (1817), Debreceni Protestáns Lap 1924/ 43,. 45,. 46., 1925./ 1-3, 6-7., 9. -18., 20., 22., 24., 28-31.,38., 40-42.,44., 52., 1926/4.szám.

*Kántor Sándorné*
*Debreceni Egyetem Matematikai Intézet*

☐ matematikatörténet ☐ matematikatanítás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

Bolla Marianna 2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

# Az élő legenda: C. R. Rao 100 éves

## 1. Életrajza

Calyampudi Radhakrishna (C. R.) Rao 1920 szeptember 10-én született Huvanna Hadagaliben, India déli részén (az egykori Madras körzetében). Egy tízgyermekes család nyolcadik gyermeke volt, és akkori szokás szerint a nyolcadik gyerek Krisna istenség után kapta egyik nevét. Apja éles eszű rendőrfelügyelő és nyomozó volt, a család gyakran költözött. Édesanyja korán felismerte fia tehetségét, aki már ötévesen 16 x 16 -ig fejben szorzott össze villámgyorsan számokat (16 volt a váltószám a rúpia és kisebb egységei közt). Így ötévesen rögtön a második osztályba íratták be, és édesanyja reggelente négy órakor felkeltette, hogy friss fejjel, olajmécsesnél nyugodt körülmények közt tanulhasson, Rao pedig örömmel vállalta a leendő tudós szerepét a családban; tíz éve mesélte, hogy még mindig dolgozik reggelente és ehhez olajmécsest gyújt. (Egyéb tehetségek is voltak a családban: egyik bátyjából jó memóriájáról híres anatómiaprofesszor, egyik lánytestvéréből pedig ismert indiai költőnő vált.) Tizenhét évesen Rao már az Andhra Egyetem (Andhra Pradesh) diákja volt, ahol előbb BA, majd húszévesen MA fokozatot szerzett matematikából. Sokat köszönhetett Cambridge-ben végzett tanárának (V. Ramaswami) és a *Mathematics Student* című újságnak, mely feladatokat tűzött ki, és Rao büszkén látta, hogy több feladatmegoldása is megjelent ott. Ezek után természetesnek találta, hogy kutatói ösztöndíjra pályázzon és doktorátust szerezzen, de ez nem ment olyan könnyen, mint gondolta. Elsőre nem vették fel. (Azt mondták, elkeveredtek a papírjai, de lehet, hogy származását nem tartották megfelelőnek. A kasztrendszerben családja nem foglalt el előkelő helyet; egy visszaemlékezésében írt is arról, hogy a brahminok gyerekei, akiket iskolás korában korrepetált, nem engedték inni a vizükből; Indiában ui. nem minden víz iható, az ivóvíznek kiemelt jelentősége van.)

1940-1941 fordulóját írták Indiában, ami ekkor még brit koronagyarmat volt (alkirállyal), és dúlt a II. világháború. Rao olvasta az újságban, hogy Kalkuttában jelentkezőket keresnek egy gyors katonai kiképzésre, ami valamiféle hadmérnöki képesítést ad, és akik azt elvégzik, az afrikai hadszíntéren fognak elsősorban műszaki feladatokat teljesíteni. Mivel a fizika és műszaki alkalmazások is közel álltak hozzá, és megélhetéséhez munkára volt szüksége, gondolta, hogy jelentkezik erre. Életében először utazott Kalkuttába (Kalkutta 2001-től visszavette régi nevét, most Kolkatának hívják); napokig tartott a vonatút, mezítláb utazott, egyetlen jó cipőjét csomagjában vitte a felvételire. Azonban ott sem járt sikerrel: katonai pályára alkalmatlannak minősítették, elsősorban gyenge fizikuma miatt. Nem akart csak úgy visszamenni falujába, hanem ellátogatott az Indian Statistical Institute-ba (Indiai Statisztikai Intézet, továbbiakban ISI). Ott rögtön elismerték matematikai képességeit, hamarosan találkozott Prof. P. C. Mahalanobisszal is, és 1941 januárjától már az első MA fokozatot adó statisztika-évfolyamon tanult (öten kezdtek ott); 1943-ban megszerezte második master fokozatát, és kisebb megszakításokkal 40 évig Kalkuttában maradt. Rao a véletlen művének tekintette, hogy a statisztikával kapcsolatba került, ami egyébként is a véletlenek tudománya.

Néhány szót kell ejtenünk az ISI-ről és az indiai statisztikáról. A britek már 1892-től bevezették Indiában a rendszeres népességnyilvántartást, ami nem csak születési és halálozási adatokat tartalmazott közigazgatási egységenként, hanem egészségügyi és oltási adatokat is (már ekkor voltak kötelező oltások a gyerekeknek). A függetlenedési folyamat részeként indiai politikusok (pl. Minoo Masani) 1938-ban kezdeményezték egy National Planning Committee megalakítását, ami elsősorban gazdasági kérdésekkel foglalkozott. A függetlenedés (1947) után egyéb kormányszintű bizottságok is alakultak, pl. 1951-ben a National Income Committee, aminek Mahalanobis, az ISI igazgatója volt kezdetben a vezetője. A későbbiekben is kikérte a minisztérium a statisztikusok véleményét a fontosabb pénzügyi kérdésekben, így pl. Rao is többször megfordult a minisztériumban, amikor az ISI igazgatója volt. Miután a statisztika (eleinte csak az adatgyűjtést és feldolgozást értették alatta) fontos szerepet kapott Indiában, Mahalanobis, a Cambridge-ben végzett fizikus 1931-ben Kalkuttában megalapította az ISI-t, ahol alapvetően klasszikus természettudományokat oktattak, de Mahalanobis igyekezett az új európai és amerikai eredményeket is felvenni a tananyagba (R. A. Fisher, K. Pearson, J. Neyman, Á. Wald, N. A. Kolmogorov és a svéd H. Cramér ma is tanított tételei ekkor, a klasszikus statisztika fénykorában születtek). Így alakult meg 1941-ben az új statisztika szakirány, amit Rao is elvégzett 1943-ra. Ezután tanársegéd lett az ISI-ben, ahol valójában ő állította össze a statisztika szakirány képzéséhez a tananyagot, amiben sok hiányosságot tapasztalt. Úgy gondolta, jó tanárként neki kell pótolnia ezeket. Így pl. egyik diákja kérdésére, hogy mennyire vihető le a torzítatlan becslések szórása, másnap válaszolni akart. Ezért 1944 őszén egy éjszaka alatt hibaszámítási módszerekkel kihozta azt az eredményt, amit ma Cramér-Rao egyenlőtlenségként tanítunk. Cramér 1945 tavaszán kapta hasonló eredményeit, és a már létező Fisher-információval kapcsolatba hozva közös eredményként tartják számon a tételt. Ezt a tételét másik áttörő (D. Blackwellel közös) eredményével együtt egy mindössze 10 oldalas cikkben publikálta a *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*-ben, 1945-ben. Megjegyezzük, hogy az ISI-nek később több tagozata is alakult, Delhiben, Bombayben (ma Mumbai) és Bangalore-ban.

1946 és 1948 között Rao a cambridge-i egyetemen dolgozott, ugyanis az ottani Antropológiai és Archeológiai Múzeum számára brit régészek a Jebel Maya törzs csontmaradványait hozták el Észak-Afrikából, és az egyetem Mahalanobis segítségét kérte a maradványok többváltozós statisztikai analíziséhez. Ehhez a Mahalanobis-féle $D^2$ távolságot akarták használni, és egyéb szakmai segítséget is kértek. Mahalanobis Raot küldte ki erre a feladatra Cambridge-be, ahol Rao megismerkedett és együtt dolgozott az angolszász statisztikai iskola megalapítójával és akkori vezetőjével, Sir R. A. Fisherrel. Meglévő és ott elért eredményei alapján az eltöltött két év alatt PhD fokozatot szerzett. Doktori értekezésének fő témája a varianciaanalízis többdimenziós általánosítása (MANOVA) volt, amit biológiai és az említett régészeti adatokon is alkalmazott. Tíz éve Rao tréfásan megjegyezte, hogy ő volt Fisher egyetlen fokozatot szerzett PhD hallgatója, ugyanis a bogaras professzornak az volt az elve, hogy a diáknak magának kell megtalálnia a témát és azt önállóan is kell feldolgoznia, ő maga csak a légkört és a helyszínt (ún. laboratóriumát) biztosítja hozzá. Rao azt is megjegyezte, hogy ő maga is próbálkozott ezzel a módszerrel, de nem sok sikerrel. Végülis rengeteg időt töltött a nála végzett 50 PhD diákkal, akik közül az első D. Basu volt (akinek elégséges és teljes statisztikákról vannak fontos tételei), és köztük volt a későbbi Abel-díjas S. R. S. Varadhan is. Mikor 90. születésnapja körül megkérdezték, mely eredményeire a legbüszkébb életében, ezt válaszolta: „it is the outstanding contributions my students are making to statistical theory and practice” (diákjaim kiemelkedő eredményeire, amelyek a statisztika területén születnek, úgy az elméletében, mint az alkalmazásokban). Később Rao DSc fokozatot is kapott Cambridge-ben (addigi cikkei alapján), és ezzel az ún. Life Fellow of King's College Cambridge címet is elnyerte (aminek fontos következménye volt, hogy fűre léphetett az egyetem területén, mint ezt viccesen meg is jegyezte egy visszaemlékezésében).

1948 több szempontból is fordulópontot jelentett Rao életében. Hazatért Cambridge-ből, és az ISI-ben hamarosan professzornak nevezték ki (29 évesen). Később az ottani Research and Training School igazgatója lett (1964–1972), majd Mahalanobis halála után az ISI igazgatója (1972–1976). 1980-ban, 60 évesen nyugdíjba kellett vonulnia, de ekkor új karriert kezdett az USA-ban. Egy-két évet (nem összefüggő módon) már töltött előzőleg az USA egyetemein (University of Illinois, John Hopkins University, Indiana University, Ohio State University, Stanford University), de 1980-tól a University of Pittsburgh, majd a Pennsylvania State University állandó professzora lett, sőt utóbbinak ma is emeritus professzora. (80 éves kora után már nem taníthatott, de a Többváltozós Statisztika Központ vezetőjeként még sokáig foglalkozott a Pennsylvania State Universityn diákokkal.) Fontos (talán hosszú élete szempontjából is), hogy Rao megosztotta az évet India és az USA közt: az áprilistól októberig tartó időszakot töltötte az USA-ban, a másik félévet pedig Indiában. Az ezredforduló után megkezdte egy intézet létrehozását Hyderabadban, nem túl messze szülőhelyétől. Hyderabad egyébként is fontos természettudományos központtá vált, Microsoft székhely, stb. Hosszú évek erőfeszítésével megalapította a CR Rao Advanced Institute of Mathematics, Statistics and Computer Science (AIMSCS) intézetet a University of Hyderabad Campus területén. Az intézet fokozatosan bővült épületekkel, amihez az indiai kormánytól is kapott támogatást. Közben a pénz elfogyott, pedig Rao még egy statisztikamúzeumot is létesíteni akart. Ehhez végül is felesége, Bhargavi nyújtott támogatást saját vagyonából (rögtön írok bővebben erről a nagyszerű asszonyról); így 2013-ban avatták fel a Galleryt, a világ első statisztika múzeumát.

Az 1948-as év Rao magánéletében is fordulatot hozott: ekkor vette feleségül Bhargavit a Bengáli-öböl partján Hyderabadtól délkeletre fekvő Chennai-ban (egykor Madras). Ide később is gyakran járt „nyaralni” januárban a család. (Madras a Brit Kelet-Indiai Társaság székhelye volt a XVIII. századtól, de az 1858-as szipojfelkelés következtében azt felszámolták.) Bhargavi híresen okos lány volt, aki Rao szülőfaluja környékéről származott, történelemből és közgazdaságtanból szerzett MA fokozatot. Szülei azt gondolták, hogy félénk és állandóan tanuló lányuk soha nem fog férjhez menni, de Rao édesanyja nem így gondolkodott: összeismertette Cambridge-ből hazatérő fiával, amiből hamarosan házasság lett. Bhargavi attól kezdve mindenhová követte férjét, matematikai konferenciákra utazott és maga is elsajátította és használta a többváltozós statisztikai módszereket szociológiai, gazdasági és pszichológiai alkalmazásokban. Pszichológiát Kalkuttában kezdett tanulni, az USA-ban pedig mester fokozatot szerzett belőle, és tanított, dolgozott is pszichológusként. Valószínűleg ezzel szerezhette magánvagyonát, amiről férje meglepetéssel értesült, amikor azt felajánlotta az AIMSCS építkezések céljaira (nem csekély összeg volt, összemérhető a kapott állami támogatással). Bhargavival tíz éve én is találkoztam Hyderabadban. Látszott, hogy nagyon nyitott az emberek iránt, minden érdekelte a világról, éppen szerbiai útra készülődött férjével. Alig voltak az arcán ráncok. Sajnos már nincs közöttünk, 92 évet élt; 2017-ben bekövetkezett halála után ösztöndíj viseli a nevét (amit megmaradt vagyonából alapított). Az 1950-es években két gyerekük is született. Elsőnek egy lány, Tejaswini, aki PhD fokozatot szerzett táplálkozástudományból a Pennsylvania State Universityn, jelenleg a buffalói Dietetics and Nutrition Department of the SUNY College professzora. (Most Rao nála él, és neki is van kapcsolata az ottani egyetemmel.) Tejaswini a klasszikus indiai táncoknak is hódol, nemcsak táncol, hanem a Natya nevű tánciskola igazgatója Buffalóban. (Megjegyzem, hogy Rao is szereti az indiai táncokat. Amikor egy időre az ISI Delhi-beli tagozatában dolgozott, rosszallotta, hogy ott nem ismerik a Kalkuttában elterjedt indiai táncokat. Ezért ő is alapított egy tánciskolát Delhiben, amit támogatott saját jövedelméből, legalábbis, amíg ott tartózkodott.) Második gyermekük fiú (Veerendra), villamosmérnök és számítástudós. Egy számítástechnikai tanácsadó vállalkozást vezet Pittsburgben. Neki két fia van.

## 2. Publikációk és áttörő eredmények

C. R. Rao 16 könyv és 350 tudományos cikk szerzője. Két legolvasottabb könyvét számtalan nyelvre lefordították. Ezek:

- *Linear Statistical Inference and its Applications*, John Wiley, first edition: 1965, second edition: 1973. Az Amazon.com a „Must-have statistics books” között listázza (nélkülözhetetlen statisztika könyv), ami egy recenzorának szavaival „information packed book, bible of matrix and linear theory in stat” (információval teli könyv, a statisztika mátrixos és lineáris elméletének bibliája.).
- *Statistics and Truth*, World Scientific, first edition: 1989, second edition: 1997. A neves statisztikus, Sir David Cox írta róla: „The book is a powerful illustration of the nature of statistical arguments and I can think of no better book to introduce the subject, in particular to a general reader.” (A könyv kiválóan illusztrálja a statisztikai következtetések
természetét, és nem tudok jobb könyvet elképzelni a tárgy bevezetésére, különösen a laikus olvasónak.)

Első cikke: Information and Accuracy Attainable in the Estimation of Statistical Parameters, Bulletin of Calcutta Mathematical Society 37, pages 81–91 (1945). A cikk másodkiadásban megjelent a *Breakthroughs in Statistics 1890–1990*, Springer-Verlag kötetben, egyéb ifjúkori cikkeivel együtt (közöttük jelent meg pl. a Rao Score Test).

Statisztika, biometria, ökonometria könyvekben megjelenő szakkifejezések, amelyeket cikkei nyomán vezettek be: Cramér–Rao egyenlőtlenség, Rao–Blackwellizáció, Fisher–Rao tétel, Rao ortogonális tömbök, többváltozós varianciaanalízis (MANOVA), kanonikus korrelációanalízis, mátrixok általánosított inverze.

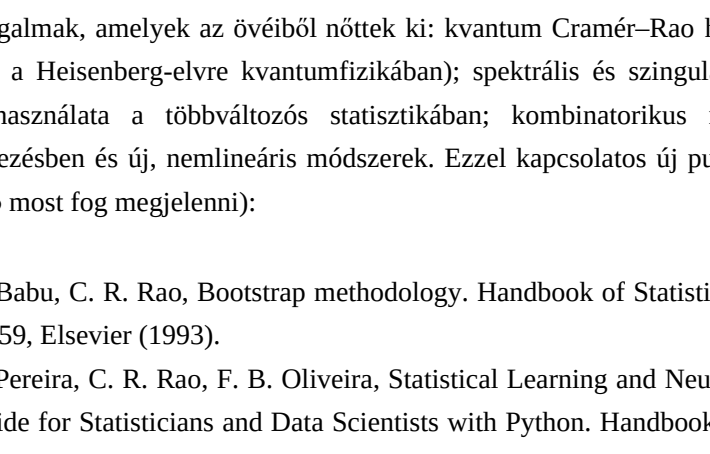
További fogalmak, amelyek az övéiből nőttek ki: kvantum Cramér–Rao határ (élesebb becslést ad a Heisenberg-elvre kvantumfizikában); spektrális és szinguláris felbontás egységes használata a többváltozós statisztikában; kombinatorikus módszerek a kísérlettervezésben és új, nemlineáris módszerek. Ezzel kapcsolatos új publikációk (az utolsó kettő most fog megjelenni):

- G. J. Babu, C. R. Rao, Bootstrap methodology. Handbook of Statistics, Vol 9, pp. 627-659, Elsevier (1993).
- B. B Pereira, C. R. Rao, F. B. Oliveira, Statistical Learning and Neural Networks. A Guide for Statisticians and Data Scientists with Python. Handbook of Statistics, CRC Press, Taylor and Francis Group (2020).
- A. S. Rao, C. R. Rao eds.: Principles and Methods for Data Science. Handbook of Statistics 43, North Holland, Elsevier (2020).

## 3. Közéleti tevékenység, kitüntetések

A II. világháború után C. R. Rao egy ENSZ-bizottság elnöke volt, amelynek célja egy ázsiai országokra kiterjedő statisztikai intézet megalakítása volt; Tokióban meg is alakult a Statistical Institute for Asia and Pacific. Megalapította az Indian Econometric Societyt és az Indian Society for Medical Statisticset. Elnöke volt olyan nemzetközi statisztikai egyesületeknek, mint az International Statistical Institute, Institute of Mathematical Statistics, USA és az International Biometric Society. Azon túl, hogy 18 országban kapott tiszteletbeli doktori címet, a következő indiai és nemzetközi kitüntetések birtokosa:

- *Shanti Swarup Bhatnagar Award of the Indian Council of Scientific and Industrial Research* – Nehru miniszterelnöktől vette át 1963-ban. Rao a teljes pénzösszeget a National Defense Fund számára adta át támogatásként, mondván, hogy: „The country's need is greater than mine” (az országnak nagyobb szüksége van rá, mint nekem).



C. R. Rao átveszi Nehrutól a kitüntetést, de az indiai államnak adja a pénzjutalmat.

- *National Medal of Science, USA* – 2002-ben G. W. Bush amerikai elnöktől kapta, aki egy új kor prófétájának nevezte Raot („a prophet of new age”).
- *India Science Award* – az Indiai Tudományért Kitüntetés, amelyet India miniszterelnöke adott át neki 2009-ben a statisztikai tudományokban hat évtizedes példaértékű munkássága során tett jelentős hozzájárulásaiért („for his significant contributions to the field of statistical science during an illustrious career spanning six decades”).
- *Guy Medal in Gold of the Royal Statistical Society*, Az Egyesült Királyság Királyi Statisztikai Társaságának Guy-aranyérme 2011-ben; a statisztika elméletéhez és módszertanához tett olyan jelentős hozzájárulásaiért, mint a minimális szórású torzítatlan becslések, elégséges statisztikák, információs geometria, továbbá a mátrixelmélet alkalmazása a lineáris statisztikai következtetések terén. („For his fundamental contributions to statistical theory and methodology, including unbiased estimation, variance reduction by sufficiency, efficiency of estimation, information geometry, as well as the application of matrix theory in linear statistical inference”). Ezt a William Guy által alapított díjat háromévente adományozzák. Van ezüst és bronz fokozat is. Az ezüst fokozatot C. R. Rao már megkapta 1965-ben. 1892 óta ő volt a harmincnegyedik, aki átvehette az arany fokozatot, amit előzőleg olyanok kaptak, mint R. A. Fisher (1946), E. S. Pearson (1955), J. Neyman (1966), M. S. Bartlett (1969), H. Cramér (1972) és D. Cox (1973). Közülük csak H. Cramér és J. Neyman nem volt brit. C. R. Rao az első nem európai és nem amerikai, aki ezt az elismerést kapta.

## 4. Egy kis matematika

A Cramér–Rao egyenlőtlenség (bizonyos regularitási feltételek mellett) egységes alsó korlátot ad egy paraméterfüggvényre nézve torzítatlan becslések szórásnégyzetére (ill. kovariancia-mátrixára, többdimenziós paramétertér esetén). A korlátban szerepel az ún. Fisher-információs mátrix, amely csupán a paraméter függvénye, és az adott (reguláris) eloszlásból kiszámolható (kapcsolata van Shannon-entrópiával is). Néhány fogalom és jelölés szükséges a tétel megfogalmazásához anélkül, hogy túl technikai lennék.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ dominált, identifikálható, paraméteres statisztikai mező, $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\}$ eloszláscsalád; továbbá $X_1, \dots, X_n$ (egy- vagy többdimenziós) független, azonos eloszlású (fae) minta a $\mathbb{P}_\theta$ eloszlásból, ahol $\theta$ ismeretlen paraméter, ami a $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ nyílt (konvex) paramétertérben van. Célunk az ismeretlen paraméter valamely $\psi(\theta) = (\psi_1(\theta), \dots, \psi_k(\theta))$ függvényének torzítatlan becslése, ahol $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ bijektív, differenciálható függvény (gyakran az identitás, amikor is magát $\theta$-t becsüljük). A becsléselmélet alapfeladata, hogy a mintaelemek alkalmas függvényét (statisztikáját) szeretnénk „közel hozni” az ismeretlen paraméterhez, vagy annak adott függvényéhez.

- A fenti fae minta $k$-dimenziós $\mathbf{T}(X_1, \dots, X_n)$, röviden $\mathbf{T} = (T_1, \dots T_k)'$ statisztikája torzítatlanul becsli $\psi(\theta)$-t, ha

$$\mathbb{E}_\theta \mathbf{T} = (\mathbb{E}_\theta T_1, \dots, \mathbb{E}_\theta T_k)' = \psi(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta,$$

ahol $'$ a transzponálást jelöli (a vektorok oszlopvektorok).

- A $\mathbb{P}_\theta$ eloszlás szerint az 1-elemű minta $k \times k$-as Fisher-információs mátrixa:

$$\boldsymbol{I}_1(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left(\nabla_\theta \ln f_\theta(X_1)\right) \left(\nabla_\theta \ln f_\theta(X_1)\right)' = \mathrm{Var}_\theta \left(\nabla_\theta \ln f_\theta(X_1)\right),$$

ahol $f_\theta$ a $\mathbb{P}_\theta$ eloszláshoz tartozó sűrűségfüggvény (amennyiben az abszolút folytonos; diszkrét esetben pedig a $p_\theta$ súlyfüggvényt kell használni mindenütt $f_\theta$ helyett); továbbá $\mathrm{Var}$ alatt egy véletlen vektor kovariancia-mátrixát értjük. Az utolsó egyenlőség teljesüléséhez fel kell tenni bizonyos regularitási feltételeket (a paraméter szerinti deriválás és a várható érték képzést jelentő $\int$ vagy $\sum$ felcserélhetők, ami biztosan teljesül, ha a sűrűség- vagy súlyfüggvény tartója nem függ a paramétertől, pl. exponenciális eloszláscsaládban). Ekkor ui. $\mathbb{E}_\theta \left(\nabla_\theta \ln f_\theta(X_1)\right) = \mathbf{0}$. Ezért a mintaelemek fae volta miatt az $n$-elemű minta információs mátrixára

$$\boldsymbol{I}_n(\theta) = \mathrm{Var}_\theta \left(\nabla_\theta \ln L_\theta(X_1, \dots, X_n)\right) = n \boldsymbol{I}_1(\theta)$$

teljesül, ahol $L_\theta(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(X_i)$ az ún. likelihood-függvény. Érdemes megjegyezni, hogy a Neyman–Fisher-féle faktorizációs tétel miatt $\boldsymbol{I}_n(\theta) = \mathrm{Var}_\theta \left(\nabla_\theta \ln g_\theta(\mathbf{T}(X_1, \dots, X_n))\right)$, ahol $\mathbf{T}$ elégséges statisztika (ismeretében a minta eloszlása már nem függ a paramétertől). Additivitása mellett ez is mutatja a fenti mennyiség információ jellegét és azt, hogy egy elégséges statisztika minden információt magába sűrít a mintából. (Az csak szóhasználat, hogy mintát veszünk, az információs mátrix a konkrét mintavétel nélkül, pusztán egyetlen mintaelem eloszlásából meghatározható, mielőtt megvennénk a mintát.)

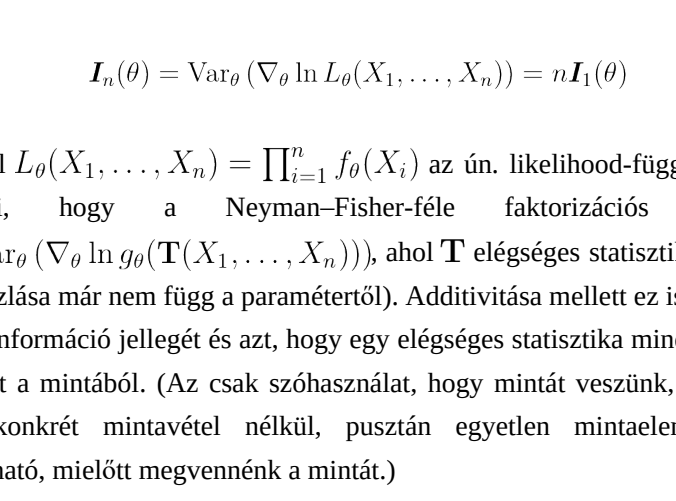
- Ezek után a **Cramér–Rao egyenlőtlenség** a következő.

**1. Tétel.** *Jelölje $\boldsymbol{S} = (s_{ij})$ azt a $k \times k$-as mátrixot, amelynek általános eleme $s_{ij} = \frac{\partial}{\partial \theta_j} \psi_i(\theta)$, ahol $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ és $\psi(\theta)$ adott differenciálható paraméterfüggvény. Akkor a regularitási feltételek mellett $\psi(\theta)$ tetszőleges $\mathbf{T}$ torzítatlan becslésének kovarianciamátrixára (feltéve, hogy az létezik) igaz a*

$$\mathrm{Var}_\theta \, \mathbf{T} \ge \frac{1}{n} \boldsymbol{S} \boldsymbol{I}_1^{-1}(\theta) \boldsymbol{S}' = \boldsymbol{S} \boldsymbol{I}_n^{-1}(\theta) \boldsymbol{S}'$$

*egyenlőtlenség, ami azt jelenti, hogy a bal- és jobboldali mátrix különbsége pozitív szemidefinit.*

Megjegyezzük, hogy az információs mátrix 1 valószínűségű pozitív definitását tágabb regularitási feltételek garantálják; ha magát $\theta$-t becsüljük, akkor $\boldsymbol{S}$ az identitás és az információs (alsó) határ $\boldsymbol{I}_n^{-1}(\theta) = \frac{1}{n} \boldsymbol{I}_1^{-1}(\theta)$, azaz az ún. hatásos becslés varianciája $\frac{1}{n}$ nagyságrendű. (Ha a regularitási feltételek nem teljesülnek, akkor ennek alá tudunk menni nagyságrendileg, pl. $[0, \theta]$-n egyenletes eloszláscsalád esetén.) A tételnek számtalan általánosítása létezik, pl. torzított becslésekre.



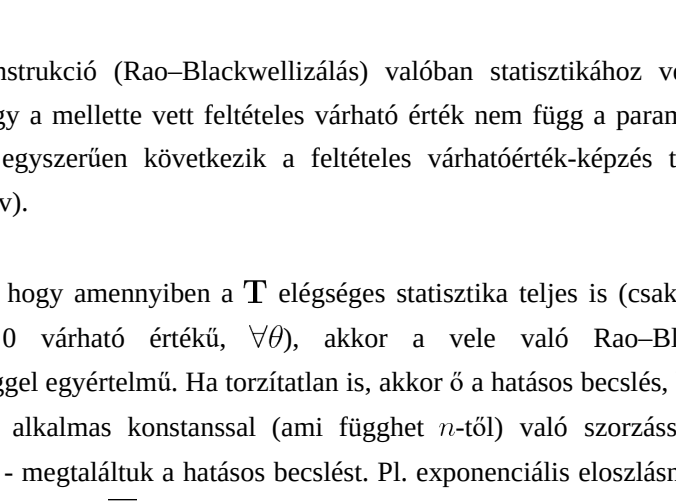
Cramér és Rao kihirdetik a tételt

A fenti tétel fontos következménye, hogy amennyiben egy torzítatlan becslés kovariancia-mátrixa eléri az információs határt ($\forall \theta$), akkor biztosan ő a hatásos (torzítatlan becslések közt minimális szórású) becslés a $\psi(\theta)$ paraméterfüggvényre (ez 1 valószínűséggel egyértelmű). Azonban egyenlőség (a két oldal különbsége a zéró mátrix, $\forall \theta$) nem mindig érhető el. Hatásos becslés azonban ilyenkor is létezhet, amit a következő **(Raotól és Blackwelltől származó) tétel** garantál (itt nem is kellenek regularitási feltételek).

**2. Tétel.** *Legyen $\mathbf{V}$ torzítatlan becslés a $\psi(\theta)$ paraméterfüggvényre, $\mathbf{T}$ pedig elégséges statisztika (mindketten ugyanattól a fae mintától függenek). Akkor létezik $\mathbf{T}$-nek olyan mérhető $\mathbf{U}$ függvénye, mely szintén torzítatlan $\psi(\theta)$-ra és legalább olyan hatásos, mint $\mathbf{V}$ ( $\mathrm{Var}_\theta \, \mathbf{V} - \mathrm{Var}_\theta \, \mathbf{U} \ge 0, \forall \theta \in \Theta$). A konstrukció: $\mathbf{U} = \mathbb{E}_\theta(\mathbf{V} | \mathbf{T})$.*

A fenti konstrukció (Rao–Blackwellizálás) valóban statisztikához vezet, hiszen $\mathbf{T}$ elégséges, így a mellette vett feltételes várható érték nem függ a paramétertől. A tétel bizonyítása egyszerűen következik a feltételes várhatóérték-képzés tulajdonságaiból (Kolmogorov).

Az is kijön, hogy amennyiben a $\mathbf{T}$ elégséges statisztika teljes is (csak az azonosan 0 függvénye 0 várható értékű, $\forall \theta$), akkor a vele való Rao–Blackwellizált 1 valószínűséggel egyértelmű. Ha torzítatlan is, akkor ő a hatásos becslés, ha nem, akkor - amennyiben alkalmas konstanssal (ami függhet $n$-től) való szorzással torzítatlanná tudjuk tenni - megtaláltuk a hatásos becslést. Pl. exponenciális eloszlásnál a $\psi(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ paraméterfüggvényre $\overline{X}$ torzítatlan becslés, és mivel elégséges és teljes statisztika is, egyben hatásos becslés is, és varianciája természetesen eléri az információs határt. Viszont magára $\lambda$-ra nem érhető el (elvileg sem) a határ. Hatásos becslés azonban létezik: $\frac{n-1}{n\overline{X}}$ (ha $n > 1$), ui. ez torzítatlan $\lambda$-ra és egyben elégséges, teljes statisztikával valósul meg a becslés.



Rao és Blackwell kihirdetik a tételt

## Utószó

Személyesen először 1991 nyarán találkoztam C. R. Raoval, mikor a Pennsylvania State University statisztika szemináriumára hívtak meg előadást tartani (abban az évben, amelyet a Rutgers Universityn töltöttem). Néhány napig voltam ott, és az első nap reggelén (délben volt az előadásom), amikor bementem az egyetemre, a meghívó kolléga megkérdezte, hogy szeretnék-e C. R. Raóval beszélni, bent van és szívesen fogad az irodájában. Természetesen örültem a lehetőségnek, bár nem számítottam és nem is készültem rá (nem tudtam, hogy akkor ott lesz). Végül is egész délelőtt beszélgettünk. Kérdezte, vannak-e nálam cikkek többváltozós statisztikáról (én gráfklaszterezésből készültem a szemináriumra), és csak két Matematika Intézet preprint volt nálam magyarul (kanonikus korreláció- és korrespondencia-analízis SVD-vel). Ő meglepetésemre gyorsan átnézte és megértette azokat. Örült, hogy SVD módszerekről szóló cikkére hivatkoztam és Rényi maximálkorrelációját is ismerte. Emlékezett Rényire. Mondta, hogy 1973-ban járt Budapesten. Rényi akkor már nem élt (fél évvel Rao után született és fele annyi idő sem adatott meg neki, mint Raonak eddig). Legközelebb az ezredforduló után hívott meg akkor épülő hyderabadi intézetébe, de a cunami és egyéb okok miatt nem tudtam akkor odautazni. Végül 2010-2011 fordulóján jártam az AIMSCS-ben, ahol két előadást tartottam ott és további kettőt Kalkuttában és Bangalore-ban, az ISI ottani központjaiban. Az utolsó napon meghívott vacsorára, ahol feleségével is megismerkedtem. Bhargavi egy ezüst tálkával ajándékozott meg (ma is a polcomon tartom a statisztika könyvek közt) és sajnáltam, hogy nem tudva a találkozásról, én nem vittem neki semmit (gondoltam, majd legközelebb, de sajnos ilyen már nem lesz). Közben Rao írt a Gallery megnyitásáról és a neuronhálózatokról szóló készülő könyvéről (végül is most szeptemberben jelenik meg). Idén májusban felkértek a 100. születésnapjára készülő kötet egy részének lektorálására (híressé vált tanítványai írtak bele és életrajzi cikkek is voltak, részben azokból merítettem). Júniusban ő maga is írt, hogy szívesen találkozna velem születésnapja alkalmából, de a megemlékezés létrejötte még bizonytalan a pandémia miatt. Remélem, hogy stabilnak tűnő egészségét nem ingatja meg a járvány.

*Bolla Marianna,*
*a BME Matematika Intézet professzora*

matematikatörténet statisztika

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon: ›

nka Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Görbe Tamás 2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

# e ötféleképpen

---

Ugye mindenkinek van kedvenc száma? Az enyém az $e = 2{,}7182818284\ldots$, amellyel legtöbben a középiskolában, a *természetes*[1] *logaritmus alapszáma*ként találkoznak először. Ez az irracionális (sőt transzcendens) szám minden matematikus közeli barátja, hiszen megannyi helyen bukkan fel. Ebben az írásban öt példát gyűjtöttem össze, a teljesség és a részletes bizonyítások igénye nélkül. Fő célom az Olvasó kíváncsiságának felkeltése.

## 1. Kártyapakliban

Vegyünk kézbe egy pakli francia kártyát és alaposan keverjük meg. Az 52 lap így kapott sorrendje csupán egyike az összes létező sorrendnek. Vajon azokból mennyi lehet? Ezer? Egy millió? Vagy még annál is több? A válasz, ahogy azt bizonyára az Olvasó is tudja, 52 *faktoriális*, vagyis

$$52! = 52 \cdot 51 \cdots 2 \cdot 1.$$

Ez az ártatlannak tűnő szorzat egy felfoghatatlanul nagy számot eredményez. Egészen pontosan

$$80\,658\,175\,170\,943\,878\,571\,660\,636\,856\,403\,766\,975\,289\,505\,440\,883\,277\,824\,000\,000\,000\,000.$$

Gondoljunk bele, ennyi lehetséges kártyakeverés mellett az általunk nyert sorrenddel egyezőt jó eséllyel soha senki nem látott, amióta csak kártyát kevernek[2]...

Fotó:Jack Hamilton (Unsplash)

Most tekintsük azon sorrendeket, amelyekben egyik kártya sincs az eredeti helyén. Ezekből vajon mennyi lehet? A válasz 52 *szubfaktoriális* (jelölése $!52$), amelynek értéke

$$29\,672\,484\,407\,795\,138\,298\,279\,444\,403\,649\,511\,427\,278\,111\,361\,911\,893\,663\,894\,333\,196\,201.$$

Az összes sorrendek számát elosztva a „fixpont nélküli” sorrendek számával a következőt kapjuk

$$\frac{52!}{!52} = 2{,}7182818284\ldots$$

A hányados $69$ tizedesjegy pontossággal közelíti az $e$ számot! Ez aligha a véletlen eredménye. És valóban, a lapok számának növelésével tetszőlegesen közel juthatunk az $e$ számhoz, amit a matematikusok így fejeznek ki

$$e = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{!n}.$$

Persze a legfontosabb részletet, a „fixpont nélküli” sorrendek kiszámolását nagyvonalúan kihagytam. A valódi munka itt kezdődik [2].

## 2. Geometriában

Ha már szóba hoztam a faktoriálist, érdemes megjegyezni, hogy az $e$ számot sokan a következő összeggel (végtelen sorral) definiálják

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

Az talán kevésbé köztudott, hogy az összeg minden egyes tagjának geometriai jelentés tulajdonítható.

Tekintsünk ugyanis egy egységnyi hosszúságú szakaszt. A szakaszt egyik végpontja körül forgassuk el $1$ radián szöggel. Ekkor a másik végpont egy 1 hosszúságú körívet rajzol ki. Ezt a körívet kiegyenesítve, a végpont egy $1/2!$ hosszú *evolens* ívet súrol. Azt kiegyenesítve egy $1/3!$ hosszú ív adódik és így tovább. A kiegyenesített ívekből álló törött vonal spirál teljes hossza a fenti végtelen összeg, vagyis $e$.

A következő videó ennek szemléltetése:

Arra, hogy az ívek hosszai rendre $1, 1/2!, 1/3!$, ... elemi bizonyítás adható [3].

## 3. Prímszámokban

A prímszámokat növekvő sorrendbe állítva a $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ sorozatot kapjuk. Jelölje $p_n$ az $n$-edik prímet (eszerint pl. $p_1 = 2$, $p_5 = 11$). Most szorozzuk össze az első $n$ prímet és vonjunk $p_n$-edik gyököt az így kapott szorzatból, vagyis tekintsük az alábbi kifejezést minden $n$ pozitív egészre

$$e_n = \sqrt[p_n]{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_n}.$$

Hogyan viselkedik az így képzett $e_1, e_2, e_3, \ldots$ sorozat? Az alábbi táblázatban a sorozat néhány tagját gyűjtöttük össze.

| | | |
|---|---|---|
| $e_1$ | $\approx$ | $1{,}4142$ |
| $e_{10}$ | $\approx$ | $2{,}1792$ |
| $e_{100}$ | $\approx$ | $2{,}5471$ |
| $e_{1000}$ | $\approx$ | $2{,}6819$ |
| $e_{10000}$ | $\approx$ | $2{,}7096$ |
| $e_{100000}$ | $\approx$ | $2{,}7157$ |
| $e_{1000000}$ | $\approx$ | $2{,}7172$ |

Elképesztő! Habár nagyon lassan, de mintha az $e = 2{,}7182818284\ldots$ értékhez közeledne a sorozat. Mi köze van a prímszámoknak a természetes logaritmushoz? Erre a választ a számelmélet (azon belül az analitikus számelmélet) egyik legszebb eredménye, a *prímszámtétel* [4] adja, amely kimondja, hogy az $n$-nél nem nagyobb prímek száma nagy $n$ esetén megközelítőleg $n/\ln(n)$ és minél nagyobb $n$ annál pontosabb az egyezés.

## 4. Hőátadásban

Képzeljünk el kettő ugyanakkora víztartályt, az egyiket a másik fölé helyezve. A felső tartályból $0$ °C-os hideg víz csepeg az alsóban tárolt $100$ °C-os forróvízbe, amely ugyancsak cseppenként fogy. A folyamat: 1. hideg víz cseppen, 2. hideg csepp elkeveredik, 3. meleg víz cseppen. Tegyük fel, hogy mindkét tartály jól szigetelt (hőt a környezettel nem közöl) és $n$ vízcseppet tartalmaz. Hány fokosra hűl le végül az alsó tartály vize? Mennyi a kezdeti ($100$ °C) és végső hőmérséklet aránya?

Az alábbi videóban az $n = 100$ esetet láthatjuk.

Lássuk, miként alakul az alsó tartály hőmérséklete cseppenként.

Az 1. vízcsepp után:

$$\frac{(n \text{ csepp}) \cdot 100\ ^\circ\text{C} + (1 \text{ csepp}) \cdot 0\ ^\circ\text{C}}{(n+1) \text{ csepp}} = \frac{n}{n+1} \cdot 100\ ^\circ\text{C}.$$

A 2. vízcsepp után:

$$\frac{(n \text{ csepp}) \cdot (\frac{n}{n+1} \cdot 100\ ^\circ\text{C}) + (1 \text{ csepp}) \cdot 0\ ^\circ\text{C}}{(n+1) \text{ csepp}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot 100\ ^\circ\text{C}.$$

És így tovább egészen az utolsó ($n$-edik) vízcseppig

$$\frac{(n \text{ csepp}) \cdot ((\frac{n}{n+1})^{n-1} \cdot 100\ ^\circ\text{C}) + (1 \text{ csepp}) \cdot 0\ ^\circ\text{C}}{(n+1) \text{ csepp}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot 100\ ^\circ\text{C}.$$

Tehát a kezdeti és végső hőmérséklet hányadosa az alsó (meleg vizes) tartályban

$$\frac{100\ ^\circ\text{C}}{(\frac{n}{n+1})^n \cdot 100\ ^\circ\text{C}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

lesz mire a felső (hideg vizes) tartály kiürül. Ez a hányados egyre nagyobb és nagyobb $n$ esetén az $e$ számot tetszőleges pontossággal közelíti, vagyis

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Mellesleg a végső hőmérséklet $\frac{100}{e}$ °C$\approx 36{,}8$ °C, ami az egészséges testhőmérséklet. Ez persze csak egy véletlen egybeesés.

## 5. Egy csomag ropiban?

Bontsunk ki egy nagy csomag ropit (sós pálcikát) és kezdjük el a ropikat egyesével véletlenszerűen kettétörni. Ne törekedjünk arra, hogy elfelezzük őket! A lényeg éppen az, hogy egy-egy ropit bármely pontján eltörhetünk és a kettétörések helyei egyenletesen oszlanak el a ropik mentén. A kettétört ropi bal kezünkben maradó darabját helyezzük az asztalra, a másikra nem lesz szükség, megehetjük! Az asztalra helyezett darabokat tegyük egymás után, egy hosszú ropit formálva és amint ez túllépi az 1 ropi hosszt kezdjünk egy új sort. Folytassuk ezt mindaddig, amíg kifogyunk a ropiból! Vajon átlagosan hány darab ropiból fog állni egy-egy sor? Ha másból nem, akkor a cikk címéből és eddigi tartalmából sejthető, hogy a válasz megközelítőleg $e$.

Az alábbi videó is ezt mutatja be azzal a különbséggel, hogy kettétört ropik helyett kiégett villanyégőket használunk.

„Na de miért $e$?”, kérdezhetjük joggal. A magyarázathoz egy kis valószínűségszámításban szerzett tudásra van szükség [5].

## Irodalomjegyzék

[1] Kós Rita és Kós Géza, *Miért természetes e?*, KöMaL

[2] Hajnal Péter, *Kombinatorika előadás*, SZTE.

[3] Leo S. Gurin, *A Problem*, American Mathematical Monthly **103** (1996) 683–686

[4] *Prímszámtétel*, Wikipédia;
https://hu.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%ADmsz%C3%A1mt%C3%A9tel

[5] Megoldás (angol nyelven) a math.stackexchange.com oldalon.

## Hivatkozások

---

[1] Az érdeklődők joggal kérdezhetik, hogy „Miért természetes $e$?” [1].
[2] A világegyetem kora, nagyjából $4{,}3 \cdot 10^{17}$ másodperc, eltörpül $8 \cdot 10^{67}$ mellett.

*Görbe Tamás*
*School of Mathematics*
*University of Leeds*

transzcendens számok

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon:

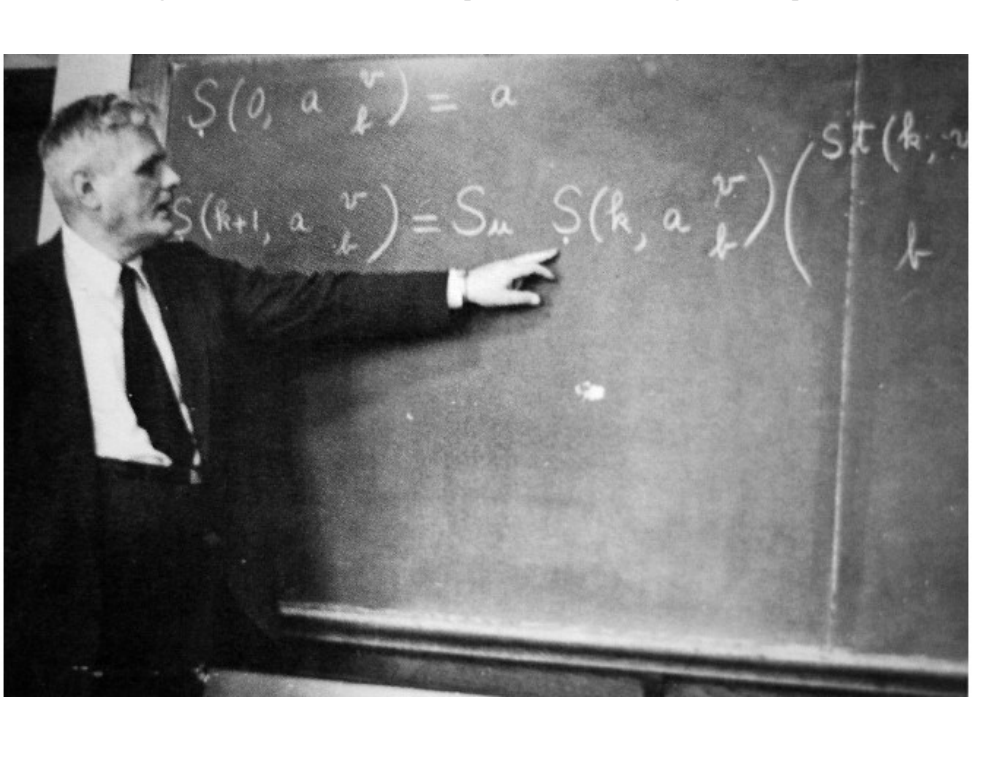
Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szabó Máté 2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

# Alonzo Church Tihanyban

Alonzo Church a 20. századi matematikai logika egyik legkiemelkedőbb és legfontosabb alakja. 1903-ban született, egyetemi tanulmányait matematikából 1920-ban kezdte a Princeton Egyetemen, ugyanitt szerzett doktori fokozatot 1927-ben, majd 1929-től az egyetem oktatója volt egészen 1967-ig. Church ekkor kizárólag azért hagyta el Princetont és tette át székhelyét a University of California, Los Angeles (UCLA) egyetemre, hogy elkerülje a Princeton Egyetemen kötelező nyugdíjazást. A UCLA-n filozófiát és matematikai logikát is tanított, egészen 1990-ig, 87 éves koráig. 1995-ben, 92 évesen hunyt el.

A matematikai logika területén számos eredmény fűződik Church nevéhez. Ő definiálta a lambda-kalkulust, ami a matematikai logikán kívül a programozási nyelvekre is jelentős hatást gyakorolt. Számos rekurzióelméleti eredmény mellett Alan Turinggal egy időben, 1936-ban, Church bebizonyította, hogy az úgynevezett eldöntési probléma (decision problem) nem oldható meg. Ehhez kapcsolódóan kettejük nevét viseli a számítógéptudomány és annak filozófiájának szempontjából központi fontosságú, úgynevezett Church−Turing tézis is. Munkásságának későbbi évtizedeiben Church a matematikai logika számos más területén, például modális logikában is publikált.


Ṣ(0, a v k) = a
Ṣ(k+1, a v k) = Sᵤ Ṣ(k, a v k)

Alonzo Church 1955-ben Princetonban

Tudományos eredményei és publikációi mellett Church oktatói és tudományszervezői tevékenysége is kiemelkedő volt. Doktori tanítványai között a matematikai logika olyan nagyságait találjuk, mint például Stephen Kleene, Barkley Rosser, Alan Turing, Leon Henkin, Martin Davis, Michael Rabin, Dana Scott, Kemény János vagy Raymond Smullyan, hogy csak a híresebbeket említsük. Legfontosabb tudományszervezői tevékenysége pedig egyértelműen a Journal of Symbolic Logic (JSL) folyóirat, illetve annak Review (recenzió) szekciójának szerkesztése. A JSL a 20. század első évtizedeiben önálló területté váló matematikai logika első folyóirata volt. A folyóiratot az 1935-ban létrejött Association of Symbolic Logic alapította a rákövetkező évben. Alonzo Church a folyóirat szerkesztői között volt az 1936-os első számtól egészen 1979-ig. A kezdeti évtizedekben Church tekinthető a JSL elsődleges szakmai szerkesztőjének, a későbbiekben mások is jelentősen hozzájárultak a folyóirat formálásához, de mindvégig Church irányította a recenzió szekciót. Ennek a szekciónak a fontosságát aligha lehet túlbecsülni a matematikai logika fejlődésének szempontjából, hiszen céljai között szerepelt, hogy *minden*, a logika területén megjelenő írást recenzáljon, és ezáltal mintegy minőségi ellenőrzésként is szolgáljon ezen az új szakterületen.[1]

Magyarországon a modern matematikai logikát Péter Rózsa (1905−1977) és Kalmár László (1905−1976) honosították meg. Már az 1930-as évek legelejétől publikálták eredményeiket (Péter a rekurzióelmélet területén, míg Kalmár az eldöntés problémával és annak redukcióelméletével kapcsolatban), illetve részt vettek és elő is adtak nemzetközi konferenciákon. Emellett mindketten jártak Göttingenben,[2] a matematika és matematikai logika fellegvárában, találkoztak David Hilberttel (1862−1943), és rendszeres levelezésben maradtak Paul Bernays-szal (1888−1977). Nemzetközi ismertségüket és elismertségüket mutatja, hogy Church mindkettőjüket meghívta a JSL recenzió szekciójáért felelős consulting editori stábjába. Először Péter Rózsát kérte fel 1937-ben, amiről ő izgatottan, megilletődve és némi önbizalomhiányról tanúbizonyságot téve így számolt be Kalmár Lászlónak április 13-i keltezésű levelében:

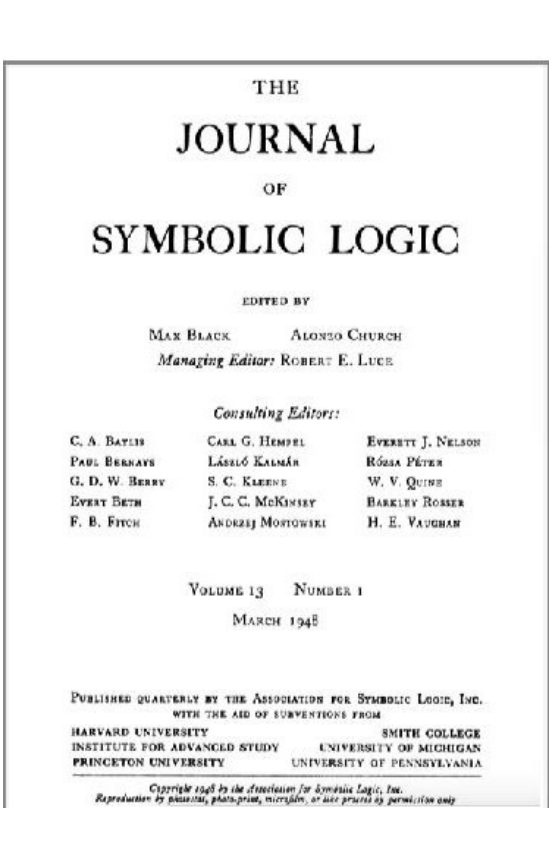
*Kedves Lacika,*

*Church felszólított, hogy lépjek be a Journal of Symbolic Logic ,,consulting editor”-jai közé.*

*Ez fizetéssel nem jár, csak azzal a megtiszteltetéssel, hogy a címlapon szerepel az ember neve, tizedmagával, olyan nevek közt, mint Bernays, Tarski, Kleene, Rosser. Referátumokat kívánnak érte. Lehetőleg olyan cikkekét, melyek közel állnak az emberhez, és akkor is szabad visszautasítani, ha tárgyi, nyelvi, vagy személyi okokból nem felel meg az embernek. Ha az ember elfoglaltsága miatt később vissza akar lépni, annak sincs semmi akadálya. Lehet angolul, franciául, vagy németül referálni, mindig lehető röviden. Ez a megtiszteltetés persze túlnő az én kereteimen. […]*

Szerencsére Kalmárnak sikerült meggyőznie őt, hogy vállalja el a valójában nagyon is megérdemelt felkérést. Péter Rózsa egészen élete végéig, 1977-ig szerepelt a címlapon az impozáns névsorban, és a JSL egyik legtermékenyebb recenzense volt.

Kalmárt pár évvel később, 1941-ben kérte fel Alonzo Church, hogy csatlakozzon a JSL consulting editoraihoz. Kalmár neve 1944-ben jelent meg a borítón először, de pár évvel később, 1951-ben, egyre sűrűsödő egyetemi elfoglaltságai miatt lemondott ezen tisztségéről.


THE
JOURNAL
OF
SYMBOLIC LOGIC

EDITED BY
MAX BLACK ALONZO CHURCH
*Managing Editor:* ROBERT E. LUCE

*Consulting Editors:*
C. A. BAYLIS CARL G. HEMPEL EVERETT J. NELSON
PAUL BERNAYS LÁSZLÓ KALMÁR RÓZSA PÉTER
G. D. W. BERRY S. C. KLEENE W. V. QUINE
EVERT BETH J. C. C. MCKINSEY BARKLEY ROSSER
F. B. FITCH ANDRZEJ MOSTOWSKI H. E. VAUGHAN

VOLUME 13 NUMBER 1
MARCH 1948

PUBLISHED QUARTERLY BY THE ASSOCIATION FOR SYMBOLIC LOGIC, INC.
WITH THE AID OF SUBVENTIONS FROM
HARVARD UNIVERSITY SMITH COLLEGE
INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY UNIVERSITY OF MICHIGAN
PRINCETON UNIVERSITY UNIVERSITY OF PENNSYLVANIA

Copyright 1948 by the Association for Symbolic Logic, Inc.
Reproduction by photostat, photo-print, microfilm, or like process by permission only

A JSL 1948. évi első számának borítója, Kalmár Lászlóval és Péter Rózsával a consulting editorok között.

Az 1940-es és 1950-es években Péter és Kalmár kiemelkedő szakmai munkásságuk mellett sokat tettek a matematikai logika széles körű magyarországi megismertetéséért és intézményes elfogadottságáért is. Előadásokat tartottak magyar matematikusoknak a modern logika eredményeiről ([5], [3]), Péter rekurzióelméleti monográfiája (az első ezen a területen) pedig az Akadémiai Kiadó gondozásában jelent meg 1951-ben. Emellett elérték, hogy a matematika szakos hallgatók külön tárgy keretei között tanuljanak logikáról és a matematika alapjaival kapcsolatos kutatásokról. Péter Rózsa nagysikerű, számos nyelvre lefordított könyve, a ,,Játék a végtelennel” [6], pedig a legszélesebb közönség számára is hozzáférhetővé tette a matematika e modern ágát is.

Péter Rózsa (https://www.flickr.com/photos/131844291@N06/, Andrásfai Béla hozzájárulásával.)

Kalmár és Péter az 1950-es évek második felében sikeresen kapcsolódtak be a logika számítógépekkel kapcsolatos alkalmazásainak kutatásába is, a matematikai automaták, valamint a programozási nyelvek elméletébe. Kalmár, aki ekkor már professzor és az Akadémia levelező tagja volt, Szegeden létrehozta az MTA ,,Matematikai logika és matematikai gépek elmélete” elnevezésű kihelyezett kutatócsoportját és elindította az ország első programozással és matematikai gépek elméletével foglalkozó alkalmazott matematikusi szakirányát.[3]

Mindezeknek köszönhetően az 1960-as évek elejére kialakult magyar matematikai logikai közösség már elég nagy lett ahhoz, hogy felmerüljön egy komoly nemzetközi konferencia megszervezésének lehetősége is. Annak érdekében, hogy minél több külföldi, a keleti blokk mellett nyugat-európai és amerikai matematikus részvételére lehessen számítani, a kollokvium témáját kifejezetten tágan határozták meg: ,,A matematika alapjai, matematikai gépek, és alkalmazásaik” (Colloquium on the Foundations of Mathematics, Mathematical Machines and Their Applications). Az elképzelést felkarolta a Bolyai János Matematikai Társulat és a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztálya is, utóbbi jelentős összeggel is hozzájárult a konferencia költségeinek fedezéséhez. A kollokvium 1962 szeptemberében került megrendezésre Tihanyban, Kalmár László, Péter Rózsa, Surányi János, Ádám András, Dömölki Bálint, Frey Tamás, Szépe György és Danóci Angéla (adminisztrátor) szervezésében.[4]

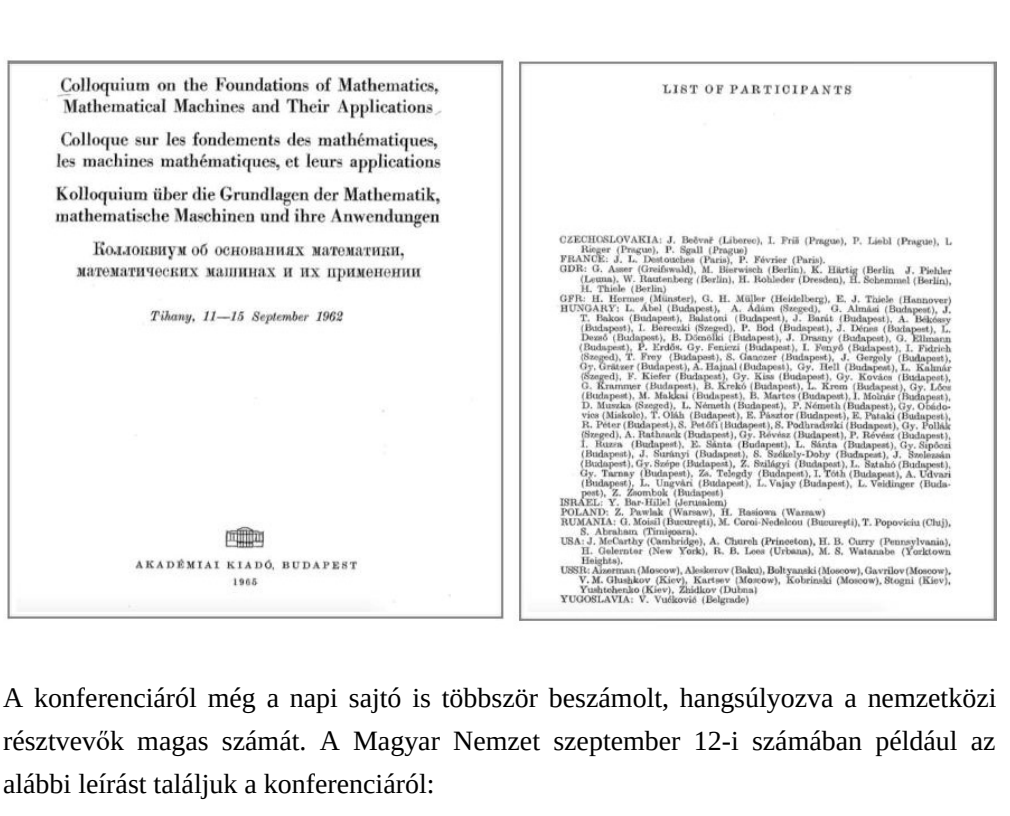
Ugyanezen év nyarán számos matematikai, illetve matematikai logikai összejövetel volt Európában. Ezek közül kiemelkedik a nyár végén Stockholmban tartott 14. Nemzetközi Matematikai Kongresszus, amely a legnagyobb, négyévenként megrendezett matematikai esemény. A tihanyi kollokvium szervezésével kapcsolatos fennmaradt dokumentumokból kiderül, hogy ezek a konferenciák egyszerre jelentették kihívást és előnyt is. A kihívás természetesen az volt, hogy olyan dátumot találjanak, amelyik nincs átfedésben más összejövetelekkel. Ugyanakkor a Nemzetközi Matematikai Kongresszus miatt a világ matematikusainak jelentős része Európában tartózkodott. Ez nemcsak egyszerűbbé és kényelmesebbé tette a tihanyi kollokviumon való részvételüket, de jelentősen csökkentette az utazási költségeket is.

A kollokvium szervezői a kor összes híres logikusát megkeresték, köztük Kurt Gödelt, Thoralf Skolemet, Alfred Tarskit, Alonzo Churchöt és Paul Bernayst is. Hasonlóan jártak el a matematikai logika alkalmazásainak olyan főbb területein is, mint a mesterséges intelligencia, az elméleti számítástudomány és a formális/gépi nyelvészet. Az ezeken a területeken megkeresett matematikusok között is olyan nemzetközileg elismert nagyságokat találunk, mint John McCarthy, Allen Newell, Edsger Dijkstra, Andrej Jersov és Yehoshua Bar-Hillel.

Noha természetesen nem minden meghívott tudott eljönni a konferenciára, a nemzetközi érdeklődés kifejezetten nagy volt. Mivel jóval többen jelezték részvételüket, mint amire a szervezők számítottak, az eredetileg tervezett anyagi keret túl szűkösnek bizonyult. Szerencsére azonban sikerült új források bevonásával megoldani a problémát.

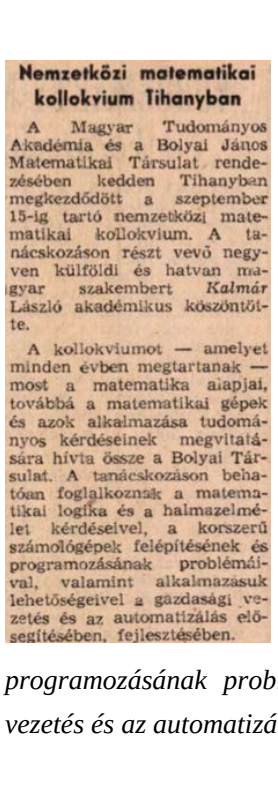
A kollokvium szeptember 11. és 15. között került megrendezésre. Az előadások 11-én délután kezdődtek, 15-én pedig már csak kötetlen beszélgetésekre került sor. Az előadások két párhuzamos szekcióban zajlottak, ,,Matematika alapjai, matematikai logika,” ,,Automaták és számológépek absztrakt elmélete,” ,,Áramkörök elmélete,” ,,Matematikai nyelvészet, gépi fordítás,” ,,Digitális számológépek[5] és programozás,” ,,Számológépek gazdasági alkalmazásai”, valamint ,,Mesterséges intelligencia, gépi tanulás” témakörök szerinti bontásban.[6]

A kollokviumhoz készült az előadásokat tartalmazó gyűjteményes kötet is, első oldalainak egyikén találjuk a résztvevők kifejezetten impozáns listáját, országok szerinti bontásban:


Colloquium on the Foundations of Mathematics, Mathematical Machines and Their Applications
Colloque sur les fondements des mathématiques, les machines mathématiques, et leurs applications
Kolloquium über die Grundlagen der Mathematik, mathematische Maschinen und ihre Anwendungen
Коллоквиум об основаниях математики, математических машинах и их применении
*Tihany, 11—15 September 1962*
AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1965

LIST OF PARTICIPANTS

A konferenciáról még a napi sajtó is többször beszámolt, hangsúlyozva a nemzetközi résztvevők magas számát. A Magyar Nemzet szeptember 12-i számában például az alábbi leírást találjuk a konferenciáról:


**Nemzetközi matematikai kollokvium Tihanyban**

A Magyar Tudományos Akadémia és a Bolyai János Matematikai Társulat rendezésében kedden Tihanyban megkezdődött a szeptember 15-ig tartó nemzetközi matematikai kollokvium. A tanácskozáson részt vevő negyven külföldi és hatvan magyar szakembert *Kalmár László* akadémikus köszöntötte.

A kollokviumot — amelyet minden évben megtartanak — most a matematika alapjai, továbbá a matematikai gépek és azok alkalmazása tudományos kérdéseinek megvitatására hívta össze a Bolyai Társulat. A tanácskozáson behatóan foglalkoznak a matematikai logika és a halmazelmélet kérdéseivel, a korszerű számológépek felépítésének és programozásának problémáival, valamint alkalmazásuk lehetőségeivel a gazdasági vezetés és az automatizálás elősegítésében, fejlesztésében.

*Nemzetközi matematikai kollokvium Tihanyban*

*A Magyar Tudományos Akadémia és a Bolyai János Matematikai Társulat rendezésében kedden Tihanyban megkezdődött a szeptember 15-ig tartó nemzetközi kollokvium. A tanácskozáson részt vevő negyven külföldi és hatvan magyar szakembert Kalmár László akadémikus köszöntötte.*

*A kollokviumot − amelyet minden évben megtartanak − most a matematika alapjai, továbbá a matematikai gépek és azok alkalmazása tudományos kérdéseinek megvitatására hívta össze a Bolyai Társulat. A tanácskozáson behatóan foglalkoznak a matematikai logika és a halmazelmélet kérdéseivel, a korszerű számológépek felépítésének és programozásának problémáival, valamint alkalmazásuk lehetőségeivel a gazdasági vezetés és az automatizálás elősegítésében, fejlesztésében.*

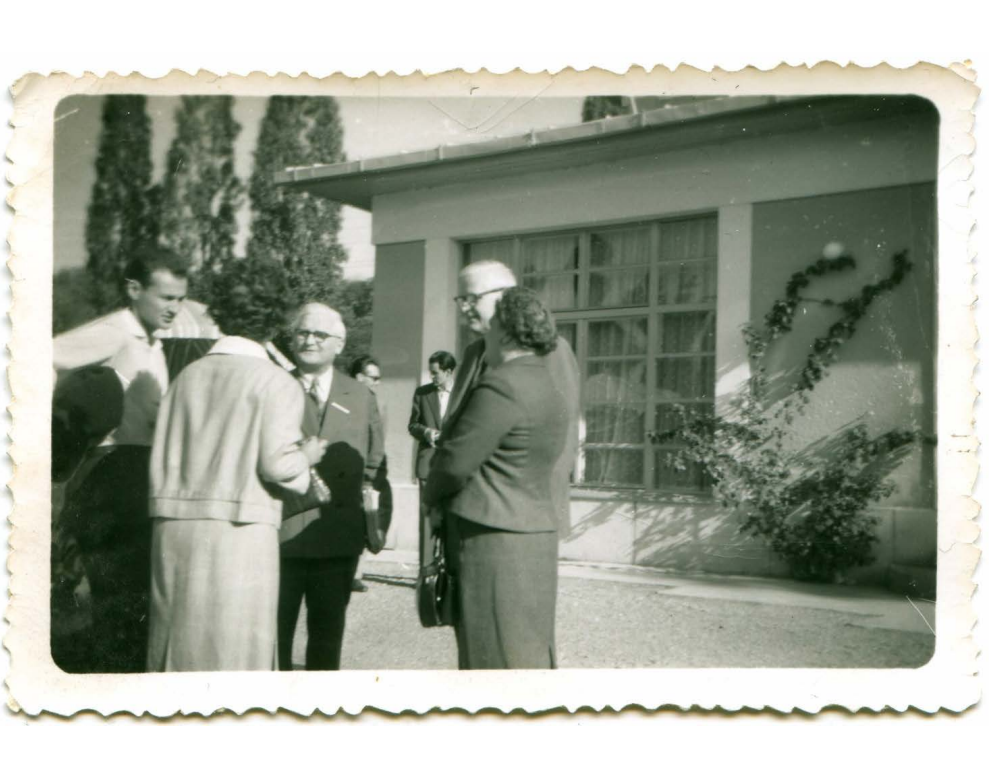
Noha a jelen írás keretei között nem tudunk minden előadóra és előadásra külön kitérni, érdemes megemlíteni néhányukat. A magyar résztvevők közül Erdős Pál halmazelméleti előadására, valamint az akkor még diákként előadó Makkai Mihályra érdemes felhívni a figyelmet.

A matematikai logikusok közül Church mellett talán a legnevesebb előadó Haskell B. Curry (1900-1982), Hilbert korábbi doktorandusza, aki a kombinatorikus logika, algoritmuselmélet és a funkcionális programozás elmélete terén elért eredményeiről vált ismertté. Említést érdemel a sűrűn Magyarországra látogató, a lengyel Varsó-Lwów iskolához tartozó, algebrai logikával foglalkozó Helena Rasiowa (1917−1994) részvétele is.

A számítógépek elméleti kérdéseivel és mesterséges intelligenciával foglalkozó szekciók előadói között is számos nemzetközileg ismert kutató volt. John McCarthy (1927−2011), a LISP programozási nyelv megalkotója és a mesterséges intelligencia kutatásának egyik legkorábbi úttörője mellett jelen volt Herbert Gelernter (1929−2015) is, akinek az 1950-es évek végén készült geometriai tételbizonyító programját (Geometric Theorem Prover/Machine) a legelső mesterséges intelligencia programok között tartják számon. Ezen a területen a keleti országokat Mikhail Alekszandorovics Gavrilov (1903−1979) iskolateremtő szovjet kibernetikus és logikus képviselte, aki a véges automaták konstrukcióiról adott elő.

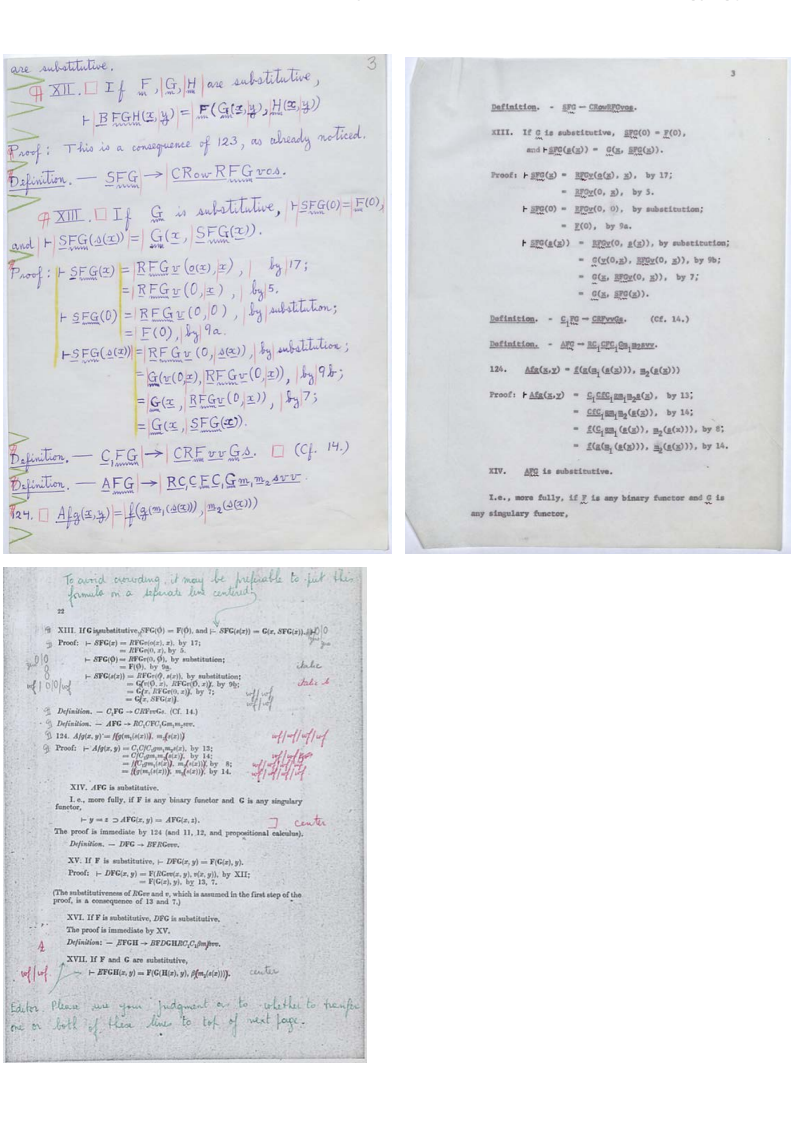
Érdemes még megemlíteni a formális és gépi nyelvi szekciót. Az itt elhangzott előadások komolyabb visszhangot váltottak ki hazai nyelvészeti körökben [9]. A kollokviumon részt vett a gépi fordítás legnagyobb szakértője, Yehoshua Bar-Hillel (1915−1975), is. A híres izraeli filozófus, logikus és nyelvész a kollokvium végeztével Magyarországon maradt és további előadásokat tartott Budapesten és Debrecenben is.

Ez a rövid felsorolás is mutatja, hogy a konferencia kifejezetten sikeres volt, és a szakma legnagyobbjait vonultatta fel Tihanyban. Meglepő és sajnálatos módon csupán egyetlen fényképről tudunk, amely a konferencián készült. Készítője Ádám András matematikus, a szervezők egyike. A kép középpontjában Kalmár László, a konferencia főszervezője, valamint jobbra tőle Alonzo Church és felesége látható.



A képen balról jobbra a következő személyek láthatóak: ismeretlen, Danóci Angéla (a Bolyai Társulat adminisztratív vezetője), Kalmár László, (a háttérben) ismeretlen, (a háttérben) Petőfi S. János nyelvész, valamint Alonzo Church és felesége [a képet Ádám András engedélyével közöljük]

A fentebb említett, kollokviumhoz készült gyűjteményes kötet kapcsán Kalmár és a szervezők a konferencia után is kapcsolatban maradtak az előadókkal. Churchnek a kötetben megjelent, *An Independence Question in Recursive Arithmetic* című cikkével kapcsolatos anyagok a Princetoni Egyetem könyvtárában találhatóak.[7] Ezek között szerepelnek egyebek mellett az alábbi képen látható dokumentumok. A cikk eredeti, kézzel írott változata színes ceruzával jelölt szerkesztési utasításokkal (ne feledjük, akkoriban még Amerikában is kevés számítógép volt, és LaTeX is “csak” 1984 óta létezik), a kézirat alapján készült gépelt változat, valamint a már szedett szöveg korai változatához Church és titkárnője által fűzött szerkesztési megjegyzések.



Az Alonzo Church által készített kézirat szerkesztési utasításokkal, az ez alapján készített gépelt változat (valószínűleg ezt kapta meg Kalmár és a kötet szerkesztői), illetve a Church és titkárnője által korrektúrázott változat.

Ma már megmosolyogtató, hogy a cikk szedésével kapcsolatos legsarkalatosabb probléma a görög *pí* betű alakja volt. Church kötetben szereplő írása ugyanis egy korábbi cikkének [1] a folytatása, ahol a legelterjedtebb $\pi$ helyett a $\varpi$ variánst használták. Azonban kérdéses volt, hogy az Akadémiai Kiadó által felkért nyomdának a betűkészletében szerepel-e ez a variáns. Esetleges megoldásként felmerült, hogy *pí* helyett a görög *omega*, azaz $\omega$ szerepeljen felülvonással. Church azt kérte, hogy ebben az esetben inkább $\pi$ változatot használják. Belelapozva a konferenciakötetbe láthatjuk, hogy végül sikerült teljesíteni az eredeti kérést, így a cikkben a megfelelő $\varpi$ változat szerepel.

Mai szemmel szintén érdekes, ahogy a konferenciához kötődő levelezésben megjelent a hidegháború lenyomata. Cikke kéziratának 1962. november 6-i kísérőlevelében Church a következőt írja Kalmárnak:

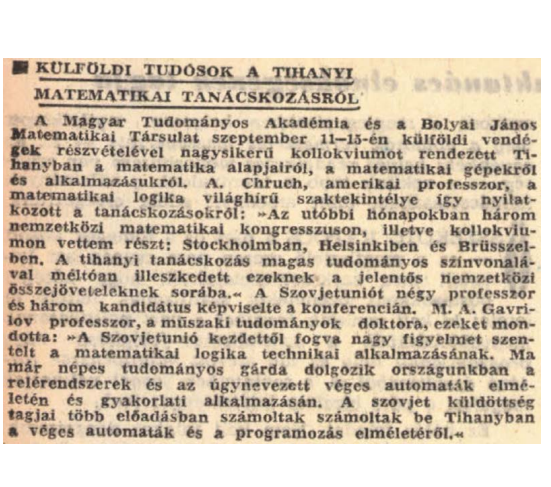
*Minden bizonnyal tud arról,*[8] *hogy az egyik budapesti újság riporterei tihanyi tartózkodásom alatt megkerestek, hogy interjút készítsenek velem. Tartottam magam azon elhatározásomhoz, hogy semmi olyat ne nyilatkozzam, aminek politikai áthallásai lehetnek (nem is kérdeztek tőlem ilyesmit), ugyanakkor megpróbáltam népszerűsíteni a matematikai logikát.*

Ez a megjegyzés jól mutatja Church JSL-beli főszerkesztői hozzáállását is, amennyiben bármelyik ország, bármilyen politikai nézeteket valló logikusa teret kapott a folyóiratban addig, amíg írásuk szakmailag magas színvonalú és politikamentes volt.

November 22-i válasza alapján Kalmár természetesen tisztában volt az újságírói megkereséssel, sőt, kifejezetten ő ajánlotta Churchöt:

*Ami a riportereket illeti, ők egy budapesti újság tudományos (és nem politikai) rovatánál dolgoznak. A kibernetika, számológépek, matematikai logika stb. fontosságáról terveztek cikket írni. Ezért rögtön Önt ajánlottam nekik interjúra, mint a matematikai logika egyik legismertebb alakját.*[9]

Sajnos Kalmár leírása túl általános ahhoz, hogy biztosan lehessen tudni, melyik újságról van szó pontosan, és hogy létrejött-e a tervezett cikk. A korabeli újságcikkek között kutakodva egyetlen rövid beszámolót sikerült találnom, amiben idézik Churchöt, a Népszava szeptember 19-i beszámolóját:


**KÜLFÖLDI TUDÓSOK A TIHANYI MATEMATIKAI TANÁCSKOZÁSRÓL**

A Magyar Tudományos Akadémia és a Bolyai János Matematikai Társulat szeptember 11–15-én külföldi vendégek részvételével nagysikerű kollokviumot rendezett Tihanyban a matematika alapjairól, a matematikai gépekről és alkalmazásukról. A. Chruch, amerikai professzor, a matematikai logika világhírű szaktekintélye így nyilatkozott a tanácskozásokról: »Az utóbbi hónapokban három nemzetközi matematikai kongresszuson, illetve kollokviumon vettem részt: Stockholmban, Helsinkiben és Brüsszelben. A tihanyi tanácskozás magas tudományos színvonalával méltóan illeszkedett ezeknek a jelentős nemzetközi összejöveteleknek sorába.« A Szovjetuniót négy professzor és három kandidátus képviselte a konferencián. M. A. Gavrilov professzor, a műszaki tudományok doktora, ezeket mondotta: »A Szovjetunió kezdettől fogva nagy figyelmet szentelt a matematikai logika technikai alkalmazásának. Ma már népes tudományos gárda dolgozik országunkban a relérendszerek és az úgynevezett véges automaták elméletén és gyakorlati alkalmazásán. A szovjet küldöttség tagjai több előadásban számoltak be Tihanyban a véges automaták és a programozás elméletéről.«

*A. Church, amerikai professzor, a matematikai logika világhírű szaktekintélye így nyilatkozott a tanácskozásokról: "Az utóbbi hónapokban három nemzetközi matematikai kongresszuson, illetve kollokviumon vettem részt: Stockholmban, Helsinkiben és Brüsszelben. A tihanyi tanácskozás magas tudományos színvonalával méltóan illeszkedett ezeknek a jelentős nemzetközi összejöveteleknek sorába.”*

A Church által említett összejövetelek éppen azok a nagyobb konferenciák,[10] amelyeket a tihanyi kollokvium szervezői figyelembe kellett, hogy vegyenek az időpont kijelölésénél.

Alonzo Church természetesen személyesen Kalmár Lászlónak is kifejezte elismerését és köszönetét. A korábban idézett levelét a következőképpen zárta:

*Végezetül szeretném megragadni az alkalmat, hogy mind saját, mind feleségem nevében megköszönjem mindazt, amit értünk tett magyarországi tartózkodásunk alatt, és hogy kifejezzem nagyrabecsülésünket igen kellemes tartózkodásunkért. Emellett mindenképp szeretnék gratulálni a kiválóan megszervezett és igen sikeres kollokviumhoz is.*[11]

Válaszában Kalmár megköszönte Church kedves szavait, és ahogy hasonló esetekben szokta, Szegedre invitálta kollégáját:

*Nagyon örülök, hogy Ön és felesége is jól érezték magukat Magyarországon. Remélem, hogy legközelebb tovább tud maradni hazánkban, és különösen remélem, hogy majd Szegeden is meg tudja látogatni egyetemünket.*[12]

A tihanyi ,,A matematika alapjai, matematikai gépek, és alkalmazásaik” kollokvium a magyar matematikai logika történetének mindmáig egyik legfontosabb nemzetközi eseménye, amelyet mind a résztvevők, mind pedig a hazai nyilvánosság pozitívan ítélt meg. A konferenciát megörökítő kötet [4] végül 1965-ben jelent meg az Akadémiai Kiadó és a francia Gauthier−Villars Kiadó gondozásában, kifejezetten impozáns névsorral.

**Irodalomjegyzék**

[1] Church, Alonzo. 1957. “Binary Recursive Arithmetic.” *Journal de Mathématiques et Appliquées*, vol. 36: 39–55.

[2] Enderton, Herbert Bruce. 1998. “Alonzo Church and the Reviews.” *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 4, no. 2: 172–180.

[3] Kalmár László. 1941. “A Hilbert-féle bizonyításelmélet célkitűzései, módszerei, eredményei.” *Matematikai és Fizikai Lapok* 48: 65–119.

[4] Kalmár László (szerk). 1965. *Proceedings of the Colloquium on the Foundations of Mathematics, Mathematical Machines and Their Applications*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

[5] Péter Rózsa. 1941. “Az axiomatikus módszer korlátai.” *Matematikai és Fizikai Lapok* 48: 120–143.

[6] Péter Rózsa. 1943. *Játék a végtelennel*. Dante Könyvkiadó, Budapest.

[7] Péter Rózsa. 1951. *Rekursive Funktionen*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

[8] Sántáné-Tóth Edit. 2012. *A számítástechnika felsőfokú oktatásának kezdetei Magyarországon*. Typotex Kiadó, Budapest.

[9] Szépe György. 1963. “A tihanyi matematikai tanácskozás nyelvészeti vonatkozású eseményei.” *Magyar Nyelvőr*, vol. 87, no. 1: 157-158.

[10] Tuboly Ádám Tamás. 2019. *Advocatus diaboli. Quine és a modális logika*. L’Harmattan Kiadó, Budapest.

**Hivatkozások**

[1] A JSL Review szekciójának története és fontossága után érdeklődőknek ajánljuk magyar nyelven Tuboly Ádám [10] könyvének 7.1 alfejezetét, illetve angolul Enderton [2] cikkét.

[2] Kalmár László 1929 nyári szemeszterét töltötte Göttingenben, ahol többek között a Hilbert és Bernays által tartott halmazelméleti és logikai előadást hallgatta (Gerhard Gentzen társaságában). Péter Rózsa pedig 1933-ban töltött hosszabb időt Göttingenben. Mivel Hilbert ekkorra már nyugdíjba vonult, így Péter elsősorban Bernaysszal dolgozott.

[3] A Kalmár által indított szakról illetve a magyarországi informatikaoktatás történetéről lásd Sántáné-Tóth Edit kiváló könyvét [8].

[4] A kollokviummal kapcsolatos dokumentumok Kalmár László hagyatékában találhatóak, amit a Szegedi Tudományegyetem Klebelsberg könyvtára őriz. Minthogy a hagyatékban lévő dokumentumok nem teljesek, így lehetséges, hogy mások is hivatalosan részt vettek a szervezésben, akik itt nincsenek megemlítve.

[5] Ekkor a ,,számítógép” szó még nem volt általánosan elterjedt, sokáig a digitális vagy elektronikus számológép kifejezést használták helyette.

[6] A konferencia programja a Matematikai Lapok 1963-as, XIV. évfolyamának 1-2. számában a ,,Társulati élet” rovat 175-177. oldalain található.

[7] Alonzo Churchnek a Princeton Egyetem könyvtárában található hagyatékának online katalógusa a https://findingaids.princeton.edu/collections/C0948/#summary honlapon érhető el.

[8] A levelek alapvetően formális hangvétele és Alonzo Church stílusa miatt fordítottam magázódva az itt szereplő részleteket. Az szöveg eredeti angol alakja a következő: ,,You no doubt know that reporters for one of the Budapest papers approached me for an interview while I was in Tihany. I stuck to my determination not to say anything with political implications (they didn’t ask me to), but I did try to give mathematical logic a boost.”

[9] Az angol eredeti: ,,As to the reporters who asked an interview from you while you were in Tihany, I knew them as working for the scientific (not political) column of a Budapest newspaper. They wanted to write an article about the importance of Cybernetics, Computers, Mathematical Logic and the like. Hence, I was quiet [sic!] to suggest them to speak with you as one of the best known representatives of mathematical logic. Thank you very much for your help.”

[10] Stockholm, augusztus 15-22. *International Congress of Mathematicians*; Helsinki, augusztus 23-26. *Colloquium on Modal and Many-valued Logics*; valamint Brüsszel, szeptember 3-8. *AIPS* (Académie Internationale de Philosophie des Sciences, International Academy for Philosophy of Science).

[11] Az angol eredeti: ,,Finally I want to take the opportunity, on behalf of both Mrs. Church and myself, to thank you greatly for everything that you did for us while we were in Hungary, and to express our appreciation of a very pleasant stay indeed. At the same time I must also congratulate you on a very well arranged and very successful meeting generally.”

[12] Az angol eredeti: ,,I am very glad that both Mrs. Church and you felt well in Hungary. I hope, next time you will be able to be present in this country for a longer time, especially you will visit our university in Szeged.”

Szeretném megköszönni Gosztonyi Katalinnak, Szabó Kristófnak, Titkos Tamásnak, valamint Tuboly Ádám Tamásnak a cikk megírásában nyújtott segítségüket.

*Szabó Máté*
*Mathematical Institute*
*University of Oxford*
https://oxford.academia.edu/MateSzabo

matematikatörténet konferencia logika

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Stipsicz András, Titkos Tamás 2020. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

# John Horton Conway, a kíváncsi zseni

A 2020-as évet beárnyékoló COVID-19 járvány a matematikus közösséget sem kímélte. A betegség szövődményeinek következtében április 11-én elhunyt John Horton Conway, a 20-ik század egyik legsokoldalúbb és legkülönlegesebb matematikusa. Ahogy hivatalos önéletrajzírója, Siobhan Roberts [9,10] fogalmazott, Conway a világ egyik legszerethetőbb egomániása, az egy személybe összegyúrt Arkhimédész, Mick Jagger, Salvador Dalí és Richard Feynman. A Brit Király Társaság néhai elnöke, Sir Michael Atiyah szerint pedig egyenesen a világ legmágikusabb matematikusa.

1. ábra. Simon J. Fraser karikatúrája Conwayről

Conway az angliai Liverpoolban született 1937-ben, egyetemi tanulmányait a Gonville and Caius College-ben folytatta Cambridge-ben. A doktori cím megszerzése után (1964) Ian Cassels segítségével a Sidney Sussex College-ban kapott állást. Cambridge-i évei alatt elnyerte a Berwick-díjat (1971) és tagjává választotta a Királyi Társaság (1981). Ez utóbbi kitüntetés kezdőbetűit (FRS, Fellow of the Royal Society) kiforgatva, gyakran viccelt azzal, hogy most már hivatalosan is egy „Mocskos Rohadt Disznó" (Filthy Rotten Swine). Öt évvel később, 1986-ban elfogadta a Princeton-i egyetem John von Neumann katedráját, ebben a pozícióban dolgozott egészen a 2013-as visszavonulásáig. Princetoni évei alatt elnyerte a Pólya-Díjat (1987), a Nemmers-Díjat (1998) és a Leroy P. Steele-Díjat (2000).

Conway matematikai munkássága annyira szerteágazó és mély, hogy ebben a cikkben kísérletet sem tehetünk annak teljes bemutatására. Szemléltetésképp kiválasztottunk három olyan egymástól meglehetősen távol eső területet, amelyen maradandót alkotott: csoportelmélet, sejtautomaták elmélete, csomóelmélet.

## 1. Conway-csoportok

A véges egyszerű csoportok klasszifikációja a huszadik század egyik legnagyobb matematikai programja volt. Az egyszerű csoportokat érintő problémák már a tizenkilencedik század végén is foglalkoztatták a csoportelmélettel foglalkozó matematikusokat, Otto Hölder 1892-ben ezt írta: *„Es wäre von dem grössten Interesse, wenn eine Uebersicht der sämmtlichen einfachen Gruppen von einer endlichen Zahl von Operationen gegeben werden könnte."* (Nagyon érdekes lenne, ha véges számú művelet segítségével meg tudnánk adni az egyszerű csoportok teljes áttekintését.) Emlékeztetőül, egy csoport véges, ha véges sok eleme van, és egyszerű, ha a két triviálison kívül nincs másik normálosztója. Számtalan nagy eredmény született a huszadik század első felében, de a háborúk természetesen a matematikára is rányomták bélyegüket.

A második világháború végeztével a kutatások is új lendületet kaptak. Hans Zassenhaust idézve [1]: *„Das interessanteste Problem scheint mir die Aufsuchung aller endlichen einfachen Gruppen zu sein."* (Számomra a legérdekesebb problémának a véges egyszerű csoportok klasszifikációja tűnik.) Az elkövetkező évtizedek bővelkedtek a mély eredményekben, többszáz cikk született a témában, összesen többtízezer oldalnyi bizonyítással, ezeknek a bemutatására itt természetesen nincs mód. Példaként említjük a huszadik század egyik matematikai csúcsteljesítményét, a klasszifikációhoz komoly technikai eszközöket adó Feit–Thompson tételt, amelynek bizonyítása a Pacific Journal of Mathematic egy teljes, több mint kétszázötven oldalas kötetét elfoglalta. Walter Feit és John G. Thompson tétele azt mondja, hogy minden páratlan rendű véges csoport feloldható, azaz van olyan normállánca, amelynek minden faktora kommutatív. Az érdeklődő olvasó rengeteget megtudhat a klasszifikáció történetéről Ronald Solomon *„A Brief History of the Classification of the Finite Simple Groups"* című cikkéből [8]. Mi most egészen 80-as évekig ugrunk előre, amikor úgy nézett ki, hogy a klasszifikáció teljes.

**Véges egyszerű csoportok klasszifikációja.**

Legyen $G$ egy véges egyszerű csoport. Ekkor

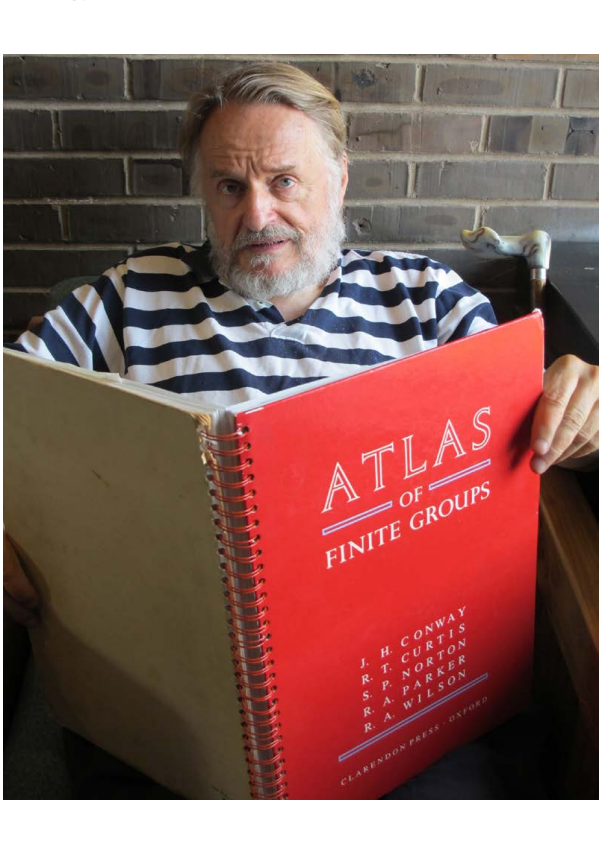
(a) $G$ egy prímrendű ciklikus csoport, vagy

(b) $G$ egy $n$-ed fokú alternáló csoport, ahol $n \geq 5$, vagy

(c) $G$ egy véges egyszerű Lie csoport, vagy

(d) $G$ a 26 sporadikus csoport egyike: $M_{11}$, $M_{12}$, $M_{22}$, $M_{23}$, $M_{24}$ (Mathieu-csoportok), $HS$ (Higman–Sims-csoport), $J_1$ $J_2$ $J_3$ $J_4$ (Janko csoportok), $Co_1$, $Co_2$, $Co_3$ (Conway-csoportok), $Fi_{22}$, $Fi_{23}$, $Fi_{24}{}'$ (Fischer-csoportok), Mc (McLaughlin-csoport), Suz (Suzuki-csoport), Ru (Rudvalis-csoport), He (Held-csoport), Ly (Lyons-csoport), ON (O'Nan-csoport), HN (Harada-Norton-csoport), Th (Thompson-csoport), BM (Baby Monster-csoport), M (Monster-csoport).

Ezt a tételt a klasszifikáció „első generációjának" nevezik, és mint arra utaltunk, ez sem adta könnyen magát. Megjegyzendő, hogy számtalan tisztázandó kérdés maradt, ami még évekig lekötötte a témával foglalkozó matematikusokat. Azért ennél a bizonyos első generációs tételnél álltunk meg, mert ebben kiemelkedő szerepe volt Conwaynek és szerzőtársainak. Az „ATLAS of Finite Groups" című művükben megadták többek közt a sporadikus csoportok alapvető tulajdonságait (a csoportok rendjét, a külső automorfizmus-csoportjukat, különböző reprezentációikat, maximális részcsoportok konjugáltosztályait, és így tovább).

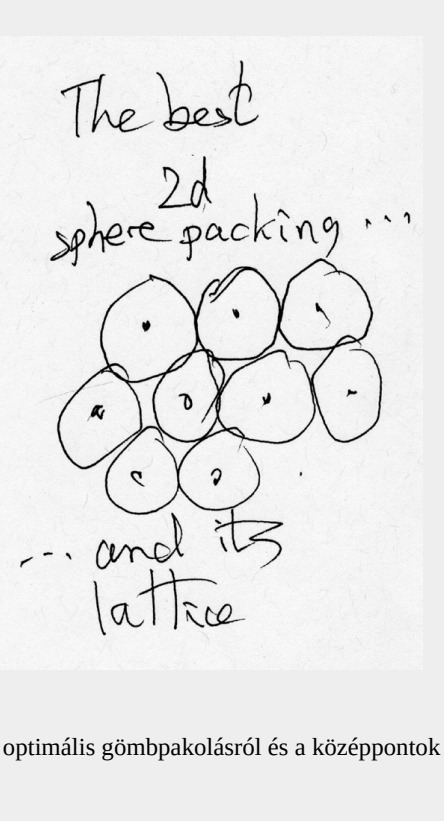


2. ábra. Conway és az ATLAS (Siobhan Roberts fotója)

Lépjünk vissza az időben: mint látható, a sporadikus csoportok közül három is Conway nevét viseli, de egyáltalán hogy került a doktoranduszként főleg számelmélettel és halmazelmélettel foglalkozó Conway a klasszifikáció közelébe? Conway híres volt a logikai játékokhoz fűződő, mindent háttérbe szorító szenvedélyéről. Ő maga úgy emlékszik vissza a hatvanas évekre, mint „a fekete ürességre", vagy más szóval az állandó búntudat éveire. Nyilvánvaló volt, hogy nagy dolgokra hivatott és sokat is várnak tőle, de a játékok okozta öröm és az eredménytelenség miatti szorongás váltakozása nem igazán segítette az áttörésben. Az 1966-os moszkvai nemzetközi matematikai kongresszuson aztán minden megváltozott. Egy John McKay nevű PhD hallgató a figyelmébe ajánlotta a Leech-hálót [6] mint objektumot, amelynek szimmetriáival érdemes lehet foglalkozni.

**Gömbpakolások és a Leech-háló.**

Hogy mi is a Leech-háló, azt a legkönnyebben gömbpakolások segítségével lehet elmagyarázni. Egy gömbpakolásokhoz kapcsolódó kérdés az, hogy az $n$-dimenziós euklideszi térben hány egységgömböt lehet ráragasztani az egységgömb felületére úgy, hogy a ragasztott gömbök egymásba ne messenek bele. (Ez az úgynevezett „kissing number".)



3. ábra. Conway rajza az optimális gömbpakolásról és a középpontok által megadott hálóról.

Rejtélyes módon ez a bizonyos kissing number csak néhány speciális dimenzióban ismert, ezek: $1, 2, 3, 4, 8, 24$. Számunkra különösen érdekes a 24-dimenziós eset, amikor is egy olyan (sűrű) pakolás konstruálható, hogy a középen lévő gömbhöz 196560 darab másik gömb érintkezik. A fenti rajzhoz hasonlóan a pakolásban szereplő gömbök középpontjai adják meg a Leech-hálót.

Látva a Leech-háló misztikus tulajdonságait, elhatározta, hogy megvizsgálja a szimmetriát: szerdánként hattól éjfélig, szombatonként pedig déltől éjfélig még a családnak is tilos zavarni (hónapokon keresztül, ha kell), akkor ugyanis csak erre a problémára fókuszál! Legnagyobb meglepetésére gyakorlatilag az első ilyen alkalommal megtörte a problémát. A Leech-hálónak $8,315,553,613,086,720,000$ szimmetriája van, jelölje a szimmetriák csoportját $Co_0$. A centrumával kifaktorizálva egy olyan véges egyszerű csoportot kapott, amely akkoriban még ismeretlen volt, ez a $Co_1$-gyel jelölt Conway-csoport, amelynek rendje $4,157,776,806,543,360,000$. Talált két másik, addig ismeretlen véges egyszerű csoportot is, ezek izomorfak a $Co_1$ egy-egy részcsoportjával. A $Co_2$ elemszáma $42,305,421,312,000$, a $Co_3$-é $495,766,656,000$.

Ez az áttörés nemcsak a világhírt hozta meg számára, de a búntudatát is szertefoszlatta. Úgy gondolta, hogy ezek után nem kell a sikertelenség terhét cipelnie, és rosszul éreznie magát amiatt, hogy olyan (néha érdektelennek tűnő) játékokon vagy problémákon gondolkozik, amelyekben örömét leli.

## 2. Életjáték

Conway egyik leghíresebb agyszüleménye, amely a matematikus társadalmon kívül is ismertté tette, az 1970-ben felfedezett Életjáték nevű „sejtautomata". Hasonló (bár némileg bonyolultabb) automaták létrehozásán dolgozott Los Alamosban Neumann János és Stanislaw Mazur is, tehát a játékot jelentéktelennek nevezni semmiképp nem lehet. Sőt, az Életjáték megreformálta az automaták egész elméletét. Ugyanakkor talán túlságosan is rányomta a bélyegét Conway munkásságára, legalábbis abban az értelemben, hogy a világ azzal, nem pedig a valóban mély matematikai eredményeivel társította a nevét. Ő maga a kétezres években már nem is szívesen beszélt a játékról.

4. ábra. Conway az Életjátékkal játszik. Fotó: Kelvin Brodie/the Sun

**Az Életjáték szabályai.**

Egy végtelen négyzetrácson játszunk, a négyzeteket celláknak nevezzük. A játék kezdetén eldönthetjük (és ez az egyetlen alkalom, hogy bármilyen hatásunk van a játékra), hogy mely cellákba teszünk élő sejtet. Egy sejtnek két állapota van: élő vagy élettelen. Egy cella környezete alatt az őt közvetlenül körülvevő $8$ cellát értjük. A játék egymás utáni lépésekből áll (akár végtelen sokból), minden lépésben a sejtekkel az alábbi történhet:

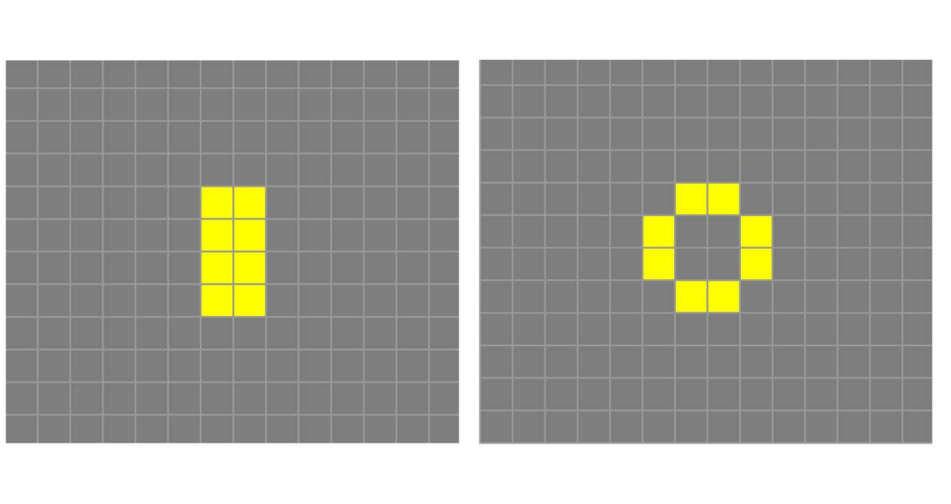
(1) Minden olyan élő sejt, amelynek $2$ vagy $3$ élő sejt van a környezetében, életben marad.

(2) Egy élő sejt elpusztul, ha kettőnél kevesebb (elszigetelődés), vagy háromnál több (túlnépesedés) élő sejt van a környezetében.

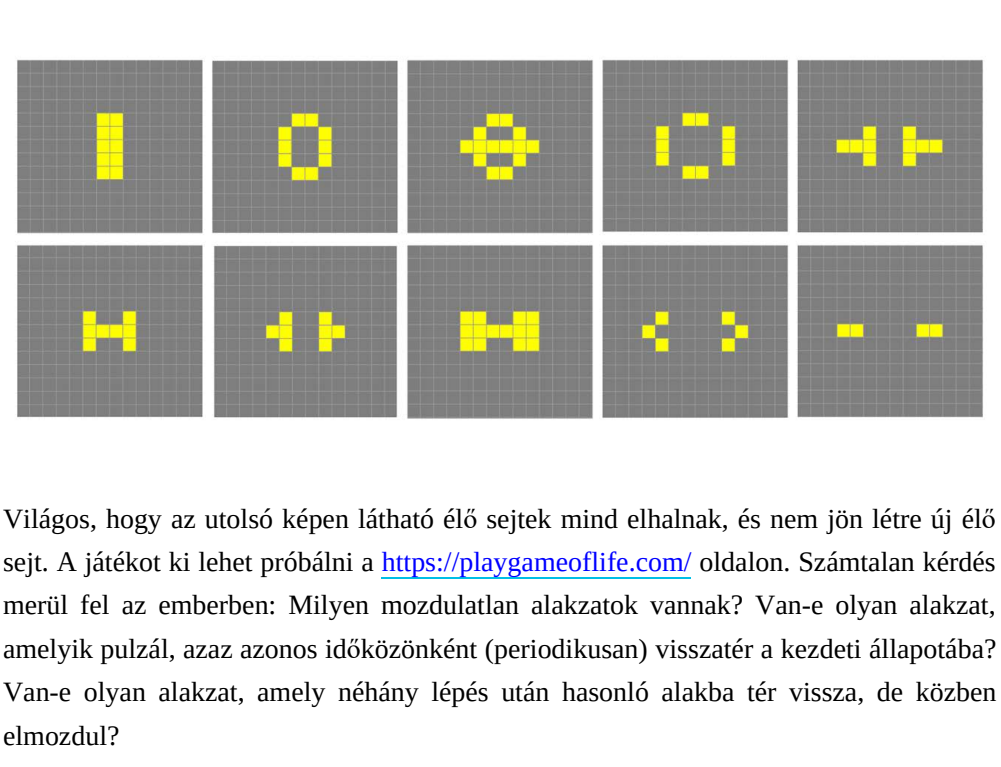
(3) Új élő sejt születik minden olyan cellában, amelynek környezetében pontosan három élő sejt található.

Fontos, hogy az elhaló sejtek az adott lépésben nem akadályozzák a születést és a túlélést, és a születések nem mentik meg az a szabály szerint elhalásra ítélteket.

Nézzünk egy egyszerű példát: a játékot 8 (2 x 4-es téglalapba elrendezett) élő sejttel elindítva egy lépésben egyensúlyi állapotba jutunk. Tehát rögtön találunk egy olyan játékot, amely véges sok lépésben véget ér, és aminek a vége nem a teljes kipusztulás. A végén minden élő sejtnek pontosan két élő szomszédja van, tehát életben marad, és nem jönnek létre új élő sejtek.



Ezzel szemben ha a fenti kezdeti állapotot megbolygatjuk, és két további élő sejtet hozzáadunk, akkor egy olyan 2 x 5-ös populációt kapunk, amelyik a tizedik lépésben kihal.



Világos, hogy az utolsó képen látható élő sejtek mind elhalnak, és nem jön létre új élő sejt. A játékot ki lehet próbálni a https://playgameoflife.com/ oldalon. Számtalan kérdés merül fel az emberben: Milyen mozdulatlan alakzatok vannak? Van-e olyan alakzat, amelyik pulzál, azaz azonos időközönként (periodikusan) visszatér a kezdeti állapotába? Van-e olyan alakzat, amely néhány lépés után hasonló alakba tér vissza, de közben elmozdul?

Némi gondolkodás és próbálkozás után mindenki maga megválaszolhatja a ezeket a kérdéseket. A játék angol nyelvű https://en.wikipedia.org/wiki/Conway%27s_Game_of_Life Wikipédia-oldalán egyébként egy elég széleskörű gyűjtés található ezekből a konstrukciókból.

## 3. Csomóelmélet

Bár John Conway kevés számú csomóelméleti cikket írt (és azok többsége is jó pár évtizede jelent meg), hatása a csomóelméleti kutatásokra megkerülhetetlen. A legenda szerint egész fiatalon újra felfedezte a bogozási relációnak (skein relation) nevezett összefüggést bizonyos, egymásból megkonstruálható csomók Alexander-polinomjára.

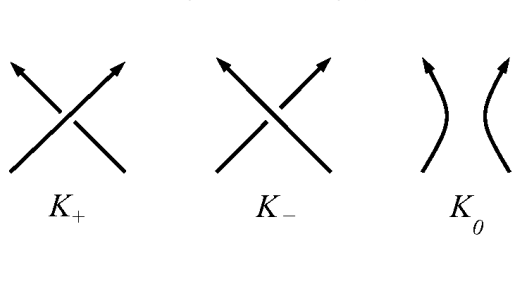
Alexander 1928-ban jelentette meg munkáját, amelyben egy $\Delta_K(t)$ polinomot (pontosabban Laurent-polinomot, tehát negatív egész kitevőket is megengedő „polinomot") rendel minden $K$ csomóhoz, annak síkba vett vetülete alapján, könnyebbé téve csomók megkülönböztetését. A $\Delta_K(t)$ polinom kiszámítása azonban általában nem egyszerű. Vegyük a $K$ csomó (ami definíció szerint a körvonal egy beágyazása a háromdimenziós térbe) egy síkra vett általános, tehát csak kettős pontokat tartalmazó vetületét. Egy tetszőlegesen kiválasztott kettőspontnál három műveletet végezhetünk:

– nem változtatunk meg semmit

– felcseréljük a felül és alul menő íveket

– eltöröljük a kettőspontot.

(Ez utóbbira két lehetőségünk is van; ha azonban választunk a csomón egy irányítást, akkor a kereszteződést vagy az alábbi ábra bal, vagy középső rajza fogja leírni, és az általunk választott eltörlést mutassa a jobb oldali rajz.)



5. ábra. A bogozási relációban résztvevő három lánc mindenhol megegyezik, kivéve egy kis körlapot, azon belül pedig a fenti három ábra mutatja viselkedésüket.

A bogozási reláció szerint a kapott, rendre $K_+$-szal, $K_-$-szal és $K_0$-lal jelölt csomók közül az eredeti csomó vagy $K_+$ vagy $K_-$, attól függően, hogy milyen típusú kereszteződést választottunk a bogozási reláció alkalmazásának kezdetekor, és $K_0$ valójában már nem is csomó lesz, hanem lánc, vagyis két komponensű csomó. Ezen csomók (és láncok) Alexander-polinomjai a bogozási reláció szerint a következő azonosságot teljesítik:

$$\Delta_{K_+}(t) - \Delta_{K_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta_{K_0}(t).$$

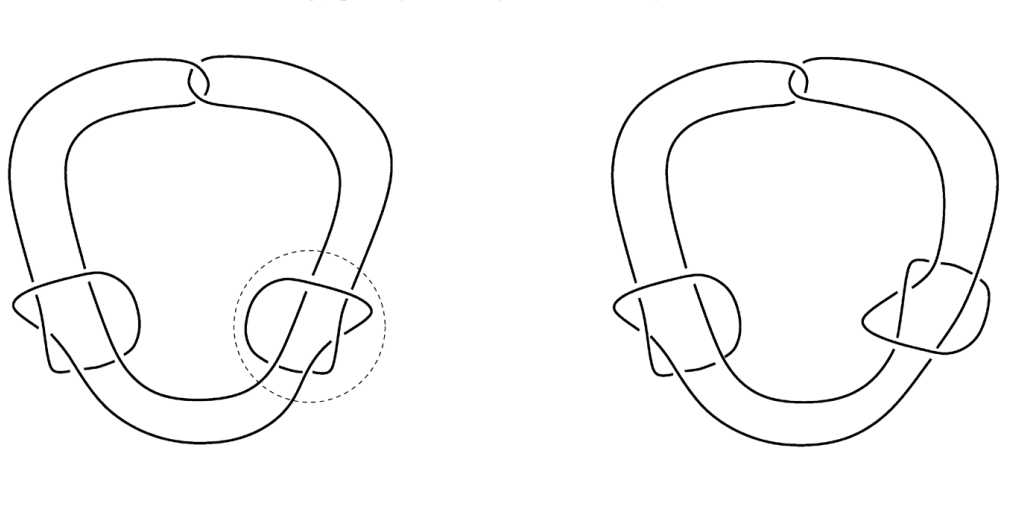
Valójában ez az összefüggés a $\Delta_K$ Alexander-polinom definíciójaként is szolgálhat (azzal a további, normalizáló feltevéssel, hogy az $U$ triviális csomóra $\Delta_U(t) \equiv 1$). Ehhez pusztán azt kell meggondolni, hogy a kereszteződés alkalmas választásával a két újonnan keletkezett csomó/lánc valamilyen értelemben „egyszerűbb" mint a kezdő csomó. (Mégsem szokták evvel a tulajdonsággal definiálni $\Delta_K$-t, mert a számításnak a választott kereszteződéstől való függetlensége egyáltalán nem egyszerű.)

Conway valójában meg is változtatta az Alexander-polinom megjelenítését, és egy alkalmas helyettesítéssel a $\nabla_K$ *Alexander–Conway*-polinomot definiálta, amelyre a sokkal egyszerűbb

$$\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z\nabla_{K_0}(z)$$

csomóinvariánst adta. ($\nabla$-t a $z = t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$ helyettesítés adja $\Delta$-ból.)

Conway egy másik észrevétele volt, hogy *mutáció* során a polinominvariánsok nem változnak. Mutáció során a diagramban egy körlapot keresünk, amelynek pereme a csomó diagramját 4 pontban metszi, a körlapot kivágjuk, majd $180^\circ$-os forgatás után visszatesszük. E művelet egy példáját mutatja az alábbi rajz.



6. ábra. A $KT$ Kinoshita–Terasaka-csomó (balra) és a $C$ Conway-csomó (jobbra). A két csomó egymás mutánsa.

A bal oldali csomót Kinoshita és Terasaka fedezte fel, és avval a tulajdonsággal bír, hogy bár nem a triviális csomó, de Alexander-polinomja megegyezik a triviális csomó Alexander-polinomjával. A jobb oldali csomót pedig Conway-csomónak nevezzük.

Ugyan a Kinoshita–Terasaka-csomó nem triviális, valamilyen távoli rokonságban van a triviális csomóval. Könnyű látni, hogy csak a triviális csomó rendelkezik avval a tulajdonsággal, hogy egy háromdimenziós térbe beágyazott körlap pereme. Mi a helyzet azonban, ha a háromdimenziós terünket a négydimenziós (alsó) féltér pereméként tekintjük, és a körlapoknak megengedjük, hogy belsejük a negyedik dimenzióba menjen? Ekkor sokkal több csomó fog (ilyen általánosabb) körlapot határolni – például a Kinoshita–Terasaka-csomó is. Ez az állítás nem kézenfekvő, de nem is olyan nehéz belátni; azon múlik, hogy ezt a csomót elő tudjuk-e úgy állítani, hogy két triviális csomóhoz egy szalagot ragasztunk.

A kérdés, ami számos topológust foglalkoztatott évtizedeken át, hogy a mutáció során ez a tulajdonság megmarad vagy elveszik. Még konkrétabban: a Conway-csomó határol-e a négydimenziós térbe (simán) beágyazott körlapot? (Egy terminus technicusszal élve: metszet csomó-e a Conway-csomó?)

A kérdésre a választ 2018-ban nagy meglepetésére egy (kiemelkedően tehetséges) végzős doktorandusz, Lisa Piccirillo a texasi UT Austin egyetemről találta meg: a Conway-csomó nem metszet, nem határol a negyedik dimenzióba simán beágyazott körlapot [7]. Következésképp a Conway-mutáció meg tudja változtatni ezt a tulajdonságot.

A cikket néhány érdekes videóval zárjuk:

– Conway frappáns bizonyítása csomók kicsomózhatatlanságáról (további részletek itt).

– Conway (többek közt) a Monster csoportról beszél.

– Conway az Életjáték feltalálásáról mesél.

– Siobhan Roberts és John Conway beszélget.

### Irodalomjegyzék

[1] H. Bender, Entwicklungslinien in der Theorie endlicher Gruppen, Jber. d. Dt. Math.-Verein. (1992), 77–123.

[2] A. Connes és J. Kouneiher, Sir Michael Atiyah, a Knight Mathematician A Tribute to Michael Atiyah, an Inspiration and a Friend, Notices Of The American Mathematical Society Volume 66, Number 10 p.1660, 2019.

[3] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, Atlas of Finite Groups: Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups, Oxford University Press, ISBN 978-0-19-853199-9 (1985).

[4] J. H. Conway, N. J. A. Sloane, Sphere Packings, Lattices and Groups, Series: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 290 Publisher: Springer New York, 1988.

[5] O. Hölder, Die einfachen Gruppen in ersten und zweiten Hundert der Ordnungszahlen, Math. Annalen 40 (1892), 55–88.

[6] J. Leech, Some sphere packings in higher space, Can. J. Math., 16 (1964), 657–682.

[7] L. Piccirillo, The Conway knot is not slice, Annals of Mathematics, 191(2), 581–591.

[8] R. Solomon, A Brief History of the Classification of the Finite Simple Groups, Bull. Amer. Math. Soc., 38(3):315–352, 2001.

[9] S. Roberts, Genius at Play: The Curious Mind of John Horton Conway, Bloomsbury USA, 2015, 480 pages, ISBN-13: 978-1620405932.

[10] S. Roberts, John Horton Conway: the world's most charismatic mathematician, The Guardian

A cikk az ITM és az NKFIH ÚNKP-20-5-BGE-1 és PD128374 kódszámú projektjeinek, valamint az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíjának támogatásával készült.

*Stipsicz András*
*Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet*

*Titkos Tamás*
*Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet*
*és Budapesti Gazdasági Egyetem*

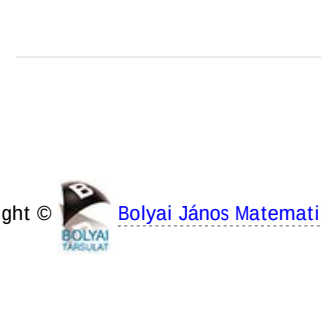
nekrológ csomóelmélet csoportelmélet életjáték

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

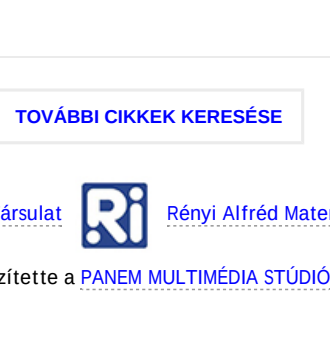
A **GAZDA(G)SÁG** NEVET ADTUK A **GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET ROVATNAK**, AMELYBEN BEMUTATJUK, HOL, MIKÉPPEN HASZNÁLJÁK FEL A MATEMATIKÁT, MILYEN GAZDAG IS AZ A KÖR, AMELYIK ÉRINTI EZT A TUDOMÁNYÁGAT. ( ROVATSZERKESZTŐK: *ILLÉS TIBOR, MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR ÉS RÖST GERGELY*.)



Molnár Zoltán Gábor, Ritter Márta
2020. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

## Esterházy Péter: Rubens és a nemeuklideszi asszonyok, Ódry Színpad

*Molnár Zoltán Gábor* és *Ritter Márta* ajánlója a kortárs magyar irodalom kedvelőinek szól, azoknak, akik szerették Esterházy Pétert és olvasták (vagy még nem olvasták) a Rubens és a nemeuklideszi asszonyokat és a Hasnyálmirigynaplót. És persze a matematika iránt érdeklődőket is várja az Ódry Színpadon a Színház és Filmművészeti Egyetem fiataljainak produkciója, hiszen ott az a bájos esterházys fogás, ahogy a szerző becsempészi a modern logika és halmazelmélet problémáit a literátus emberek sajátos bölcsészvilágába. Tovább...



Pintér Gergő
2020. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

## Új világok teremtése – könyvbemutató a Könyvhéten

*Pintér Gergő* „Új világok teremtése – Geometriai képzetek és képződmények” című könyvének bemutatóját a Typotex kiadó **szeptember 20-án 17:00** órakor a Ferencvárosi Művelődési Központ udvarán tartja meg. A készülő könyvről, amely több nagyon különböző jellegű választ ad a „mire jó ez” kérdésre, már korábban is írt a szerző az Érintő hasábjain. Tovább…

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

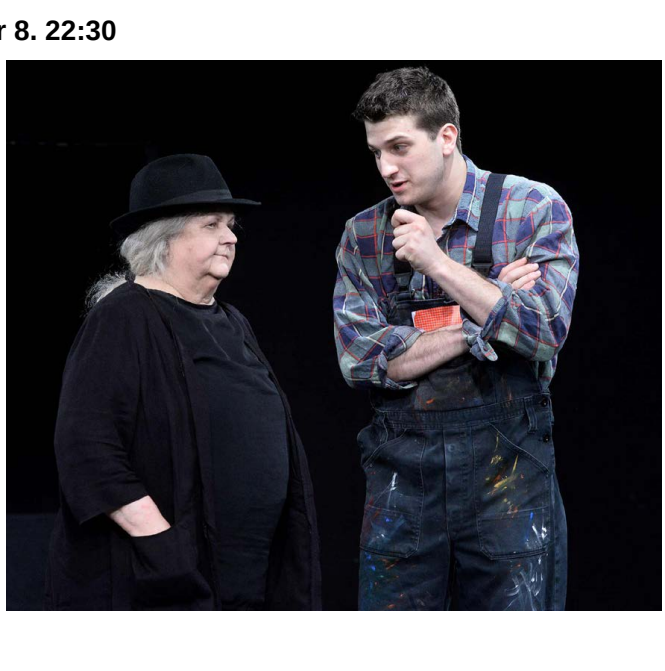
Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Molnár Zoltán Gábor, Ritter Márta 2020. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

# Esterházy Péter: Rubens és a nemeuklideszi asszonyok, Ódry Színpad

**2020. január 8. 22:30**



Játsszák: Pogány Judit, Lengyel Benjámin, Mentes Júlia, Kenéz Ágoston, Hajduk Károly. Zenész: Ferge Elizabet, díszlet és jelmez: Bognár Eszter, zene: Cseri Hanna, dramaturg: Komán Attila, rendezőasszisztens: Zrinyifalvi Eszter, rendező: Dohy Balázs.

Mindannyian szerettük Esterházy Pétert, éppen ezért a *Rubens és a nemeuklideszi asszonyok* Dohy Balázs-féle feldolgozása – amelyben megjelennek részletek a *Hasnyálmirigynaplóból* is – érzelmileg igen megterhelő előadás. Érthető is és helyes is, ha ez a produkció zarándokhelyévé válik a kortárs magyar irodalom kedvelőinek. És persze a matematika iránt érdeklődőket is az Ódry Színpadra vonzza, hiszen ott az a bájos esterházys fogás, ahogy a szerző becsempészi a modern logika és halmazelmélet problémáit a literátus emberek sajátos bölcsészvilágába. Mégis, saját jogon zseniális ez a színpadraállítás amely egyetlen, sasszemmel megtalált közös pontra illesztve Dohy Balázs egymásra tudta kopírozni az utolsó nagy opuszt és a *Rubens*-et.

Az előadás adatlapja az Ódry Színpad oldalán.

Nem vállalhatjuk fel, hogy a két művet egyetlen ajánlóban elemezzük ki. Elég az hozzá, hogy a színmű *Rubens* is, és ez a feldolgozás is az SzFE padlásán klasszikus vitadráma. Az a típusú dráma, amiben nem történik semmi, mégis végtelenül izgalmas, és olyan szempontokat ismerünk meg, amelyek addig egészen biztosan eszünkbe sem jutottak. Három nagy művelődéstörténeti korszak csap össze a színpadon, és ezek csatáját mi nagy élvezettel bámuljuk, holott az ütközetek semmi másból, csak szavakból állnak. Jobban mondva élvezzük, hogy megismerjük ezeket a gondolatokat művészetről, tudományról, életről és halálról. Nem szabad elhallgatnunk azonban, hogy az álláspontok, akármennyire is figyeljük őket, valójában nem kerülnek interakcióba. Pusztán felvetődnek, egymásnak feszülnek, majd ennyi. Ahogy Esterházynál a mondatszintű és tágabb szövegszintű struktúrában keresendő az élmény és a kulcs a megértéshez, úgy a nagy posztmodern íróhoz hűen, ebben a színi adaptációban is a szövegelemek egymásra rakódása és a színészi megformálások könnyed, de tiszteletteljes és megható rendszere adja a legnagyobb értéket.

**Pogány Judit** (Rubens), **Kenéz Ágoston** (Rubens fia, Albert) (Fotó: Éder Vera.)

Rubens tökéletes világábrázolással él. Tökéletesen festi le a valóságot abban az értelemben is, hogy szépnek, és abban az értelemben is, hogy hűen. Ahogy fogalmaznak sokszor: „Rubens már mindent megfestett". Fiával, Alberttel, folytatott összekoccanásában a szép lesz a problémás kifejezés, Gödellel való beszélgetésében pedig a hű szó.

Rubens (**Pogány Judit**) szavaiban két irányzat ismerhető fel, a hűség a valósághoz a barokk részletgazdagságát tükrözi. A szépség, mint arányosság, megtervezettség a klasszicizmus jellemzője. Ezzel szemben foglal állást Albert (**Kenéz Ágoston**), aki a romantika fő problémáinak felvetője. Rubens lefesti a világot, magát a tökéletes teremtett világot. Nem a valóságot, hanem amilyennek lennie kellene. Albert kilép ebből a képből. És már maga a kilépés, kiszakadás a képből is elviselhetetlen elárulása az isteni rendnek. Meg kell azonban tennie Albertnek, mert nem Rubens szemével, hanem a nagy zseni fiának szemével lát, és számára az, ami körülveszi, nem művészeti akadémiák vizsgálódásának tárgya, hanem idős apja és korán elhalt anyja emlékvilága. Ezért asszociálható Albert a romantikával, szemben a korábbi irányzatokkal, a barokkal és a klasszicizmussal.

RUBENS: [...]

Namármost

kedves német barátom

apropos német

Goethe

Goethét nem ismerhettem

Sajnálom hogy Goethét nem

Goethe nekem való

Goethét értem

és ő is engem

A csodálatos és egyben élethű női testek isteni harmóniája Albert számára nem több, mint botrány: „Anyámnak // kell szólítanom // anyám anyám anyám // Noha éveinek száma // megegyezik az enyéimével" mutat rá a disszonanciára. Goethe romantikus kortársai és egyben ellenfelei, Kleist, Büchner vagy E. T. A. Hoffmann nem a szépre, teljesre, hanem a töröttre, borzalmasra, vagy zseniálisra és egyedire, esetleg a szélsőségesen negédesre mutatnak rá. De mit kezdjünk azzal a leképezési hibával, hogy a valóságot a kép tökéletesebbnek ábrázolja, mint amilyen:

RUBENS: Én meg a mindenből

teremtettem új világot

Ezt az egyet

ami van

Újrateremtettem a világot

hogy látni is lehessen

Csak a képet lehet látni

és a világ

önmagától önmaga által

nem képe.

**Mentes Júlia** (Angyal), **Hajduk Károly** (Gödel), **Pogány Judit** (Rubens) (Fotó: Éder Vera.)

Ezt már nem Albertnek, hanem Gödelnek (**Hajduk Károly**) mondja Rubens. Esterházy zsenialitása, hogy képes egymásra másolni ennek a két megközelítési módnak, a tökéletesen szómentes festészetnek valamint a tökéletesen érvelés alapú aritmetikának egy-egy megrázóan szép jelenségét. **Hajduk Károly** Gödelje minden létező lelkesedését érvének kifejtésébe koncentrálja. Ám nem csak lelkes, hanem láthatóan kristálytisztán *érti* is, amit mond, nem csak üres manír a matematikai logikai bizonyítás, hanem az, ami Rubensnek az ecset:

GÖDEL: Értem

Ezt a szót használom a legtöbbször

értem

Nem lehet eléggé hangsúlyozni, hogy **Hajduk Károly** milyen jól eltalálta Esterházy Gödel-karakterét: itt ugyanis ő nem egy olyan tudálékos filozófus, aki mintegy példaként odaveti a Gödel-tételt, hanem az általa megformált személy éppen az, aki a Gödel-tétel bizonyításának megalkotója. Senki sem érti olyan jól ezt a tételt, mint ő – na, jó, ez nem teljesen igaz, de az élmény ez, és ez fontosabb. Rubens és Gödel szócsatájához persze némi kommentár is társul. Bacchus (**Lengyel Benjámin**, aki korábban a Festőségédet is játszotta) bevezet minket a bizonyításelmélet témájába a párhuzamossági axiómán keresztül:

BACCHUS: [...]

Látom

kézbe kell vennem a dolgokat

Proszit

Nekem szakterületem

nekem minden szakterületem

sör bor pálinka nők eukaliptusz

Eukleidész

nekem mindegy.

**Lengyel Benjámin** (Festőségéd). (Fotó: Éder Vera.)

**Lengyel Benjámin** munkásruhában, dobozos sörrel a kezében kezd el magyarázni a geometria gyökereiről, Eukleidészről, a párhuzamossági axiómáról és Bolyairól. De milyen ez a magyarázat? Ami megelevenedik a szemünk előtt, az maga egy klasszikus spec. mat. tagozatos vagy matek szakkörös kiselőadás. Magabiztos, de pontos, iskolás, mégis benne van az „osztályból a matekos srác" szeretetreméltó archetípusa. Dohy Balázs rendezői és Benjámin színészi teremtő erejét igazolja, hogy képesek vagyunk Bacchus szerepébe beleláti a kajla, okos, szellemes, pólós, hosszú hajú diák-Esterházy-t magát. Itt jegyeznénk meg, hogy gyászmunka ez az előadás nekünk. Esterházy Péter mellett Térey Jánost is gyászoljuk benne.

Gödel magyarázata eléri célját. Jó, hát Rubens nem matematikus, neki a rekurzív függvények emlegetése igazi fenyegetés, de el kell ismernie, hogy terve kudarcra van ítélve. Ha festészete a teremtés magasztalása azáltal, hogy a teremtést magát a képein újrateremti, akkor épp az ellenkezőjét éri el ezzel a tervével: ha a teremtést a teremtmény meg tudja ismételni, akkor a teremtő nem mindenható. És a *hiba* a teremtésben maga Rubens. Rubens voltaképpen egy Hilbert-alteregó. David Hilbert „mindent leíró" elméletének vízióját Kurt Gödel oszlatta szét, és hasonlóan a színpadi Gödel a Rubens-programot, a világ képbeli újrateremtését.

Dohy Balázs kiváló ötleteiből még mindig nem fogytunk ki. Önmagában az Esterházy-darab nem egy színpadra való mű. Szívesen hallgatjuk jellegzetes szava járását, de dráma, na, az nincs benne. Kivéve az a két pont, ahol Esterházy összeköti Rubenst Gödellel, és ahol Dohy összeköti a *Rubenst* a *Hasnyámirigynaplóval.* Merthogy jó és hiteles – az előbb még – Rubens szájából hallani, hogy élni jó. Pláne, ha Esterházy írja neki ezt a monológot. Az utolsó naplóműből a dramaturg (**Komán Attila**) jó érzékkel azt a vonalat választotta ki, ami Rubensre rezonál, vagyis a szép világképet és hogy élni, embernek lenni jó. Továbbá, hogy ez egy pillanat alatt törhet össze. A *hiba*, amire Rubenst rávezette Gödel, a *Hasnyálmirigynaplóban* is megjelenik:

Ma hajnalban felébredtem, képzelje, kisasszony, arra, hogy valami szorítja össze a mellkasom, a torkom, hogy alig kapok levegőt, levegőt a zokogáshoz. Lényegében egyetlen mondat volt. Egymondatos érzés. Azt éreztem, hogy az életem egy hiba. Egy hiba.

**Pogány Judit** (Esterházy), **Mentes Júlia** (Hasnyálka). (Fotó: Éder Vera.)

Apropó kisasszony! Hasnyálka alakját, ahogy az Angyal alakját is, **Mentes Júlia** formálja meg, éppen abban a szeretetteljes formában, ahogy Esterházy Péter festi le, becézi, dédelgeti a naplóban. Az előadás egyszerre játékos és végtelenül tiszteletteljes. A komoly hárfazenét Ferge Elizabet szolgáltatja félóben, de könnyed hülyéskedésre is sor kerül. Valahogy le kell zárni ezt az előadást és a végén a keserédes dal éppen erre jó. A szerző gyakran beszél Wittgensteinről, ahogy mondja, nem azért mert értené, hanem mert a *Tractatus* számára voltaképpen egy vers, ahogy mondja: „Wittgensteinhez kikövezett út vezet, főleg, ha csak félig értjük őt." A Pogány Judit által megjelenített két alak voltaképpen ugyanazt az utat járja be, mint Wittgenstein. Ott kezdődik, hogy a világot képekben reprezentáljuk (ez akár a szó is lehet), és ott záródik, hogy csak az érzetek vannak, majd végül a csönd.

**Lengyel Benjámin**, **Mentes Júlia**, **Ferge Elizabet** (hárfa). (Fotó: Éder Vera.)

A Színház és Filmművészeti Egyetem színpada az utóbbi években végtelen sok páratlanul érdekes és maradandó élményt adó előadással várta nézőit. Gondolhatunk itt akár a mai magyar színjátszás teljesen új irányzatára, a fizikai színházra, amelyet Horváth Csaba egyetemi tanár visz, de arra a remek ötletre is, hogy az olyan, a régi Kaposváron edzett öreg rókák, mint Pogány Judit vesz részt a már szinte kész színinövendékek produkcióiban. Lehetetlen felsorolni azt a sok merész és mély előadást, amit ott lehet látni. Nem is kell felsorolni. Inkább el kell menni, és meg kell őket nézni.

## Irodalom

Esterházy Péter, *Rubens és a nemeuklideszi asszonyok* (dráma), 2010, https://opac.dia.hu/record/-/record/PIMDIA692

Esterházy Péter, Hasnyálmirigynapló, 2017, https://opac.dia.hu/record/-/record/PIMDIA16491

„Wittgenstein, Wittgenstein, miért hagytál el engem?" Ponticulus Hungaricus, V. évfolyam 4. szám, 2000 ápr., interjú Esterházy Péterrel, készítette Marianna D. Birnbaum, 1991,

http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/rovatok/mesterkurzus/esterhazy.html

*Molnár Zoltán Gábor*
*BME Algebra Tanszék,*
*Ritter Márta magyartanár*

recenzió

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

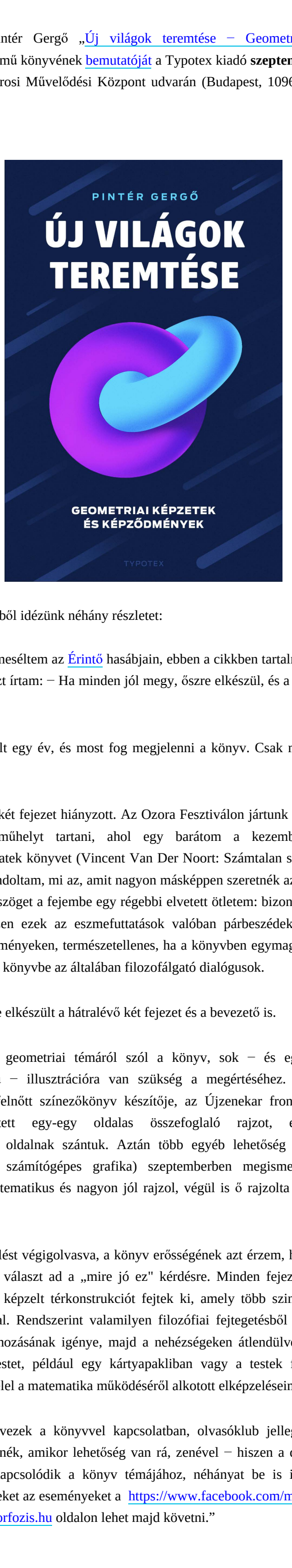
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Pintér Gergő 2020. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

# Új világok teremtése − könyvbemutató a Könyvhéten

Idén nem a Vörösmarty téren tartják meg a 91.Ünnepi Könyvhetet. A Facebookon lehet követni a kortárs magyar irodalom új kiadványait, illetve a kiadók tervezett könyvbemutatói és programjai közül néhánnyal **szeptember 17−20. között** szintén **a** világhálón találkozhat az érdeklődő közönség. Lesznek élő szabadtéri programok, amelyeket az interneten is közvetítenek.

Ezek egyikét, Pintér Gergő „Új világok teremtése − Geometriai képzetek és képződmények” című könyvének bemutatóját a Typotex kiadó **szeptember 20-án 17:00** órakor a Ferencvárosi Művelődési Központ udvarán (Budapest, 1096 Haller utca 27.) tartja meg.



A szerző előzeteséből idézünk néhány részletet:

„A könyvről már meséltem az Érintő hasábjain, ebben a cikkben tartalmi összefoglaló is található. Akkor ezt írtam: − Ha minden jól megy, őszre elkészül, és a Typotex kiadónál jelenik meg.

Azóta viszont eltelt egy év, és most fog megjelenni a könyv. Csak most, azaz inkább most már végre!

2019 nyarán még két fejezet hiányzott. Az Ozora Fesztiválon jártunk Dömötör Lucával Matek&Mozgás műhelyt tartani, ahol egy barátom a kezembe nyomott egy ismeretterjesztő matek könyvet (Vincent Van Der Noort: Számtalan szám − Egy kocka vallomásai). Átgondoltam, mi az, amit nagyon másképpen szeretnék az én könyvemben. Ekkor ütött ismét szöget a fejembe egy régebbi elvetett ötletem: bizonyos részek átírása párbeszéddé. Hiszen ezek az eszmefuttatások valóban párbeszédek szoktak lenni a MateMorfózis eseményeken, természetellenes, ha a könyvben egymagam vitatom meg. Így kerültek bele a könyvbe az általában filozofálgató dialógusok.

Szeptember elejére elkészült a hátralévő két fejezet és a bevezető is.

Mivel alapvetően geometriai témáról szól a könyv, sok − és egymástól nagyon különböző jellegű − illusztrációra van szükség a megértéséhez. Cseh András (a Netfüggők című felnőtt színezőkönyv készítője, az Újzenekar frontembere) minden fejezethez készített egy-egy oldalas összefoglaló rajzot, ezeket fejezetek közötti elválasztó oldalnak szántuk. Aztán több egyéb lehetőség felmerülése után (művészi rajzok, számítógépes grafika) szeptemberben megismerkedtem Szabari Mátyással, aki matematikus és nagyon jól rajzol, végül is ő rajzolta az illusztrációkat kézzel.

Az elkészült tördelést végigolvasva, a könyv erősségének azt érzem, hogy több nagyon különböző jellegű választ ad a „mire jó ez" kérdésre. Minden fejezetben valamilyen nagyon elvontnak képzelt térkonstrukciót fejtek ki, amely több szinten találkozik az emberi világunkkal. Rendszerint valamilyen filozófiai fejtegetésből bontakozik ki az elképzelt tér létrehozásának igénye, majd a nehézségeken átlendülve nagyon is földi jelenségben ölt testet, például egy kártyapakliban vagy a testek forgásában. Ez a gondolati ív megfelel a matematika működéséről alkotott elképzeléseimnek.

Sok eseményt tervezek a könyvvel kapcsolatban, olvasóklub jellegű MateMorfózis szeánszokat szeretnék, amikor lehetőség van rá, zenével − hiszen a dalszövegeim egy része szervesen kapcsolódik a könyv témájához, néhányat be is idéztem fejezetek elejére-végére. Ezeket az eseményeket a https://www.facebook.com/matemorfozis vagy a megújult matemorfozis.hu oldalon lehet majd követni.”

*Pintér Gergő*

Bolyai recenzió geometria

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 17. szám 2020. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

100

| Cím | Szerző |
|---|---|
| Gyászolunk: Pach Zsigmond Pálné (Sós Klára) (1925–2020) | Írta: Csató Éva |
| IMO felkészülés a koronavírus árnyékában, 2020 | Írta: Dobos Sándor |
| Már a matematikai képletekkel is megbirkóznak a neuronhálózatok | Írta: Stephen Ornes |
| Online MEMO | Írta: Lenger Dániel |
| Matematikus portrék: Zombori Zsolt | Írta: Szerkesztő |
| Matematikus portrék: Backhausz Ágnes | Írta: Szerkesztő |
| T. Sós Vera köszöntése | Írta: Lovász László |
| Szemerédi Endre 80. születésnapjára | Írta: Sárközy Gábor |
| Az online matematikaoktatás tapasztalatai oktatói és hallgatói szemmel | Írta: Fülöp Ottilia, Nagy Marcell |
| Az érettségiről érdekesen, avagy egy elmaradt előadás | Írta: Csapodi Csaba, Koncz Levente |
| Úton-módon 4. | Írta: Szoldatics József |
| A játékkal töltött idő nem elvesztegetett idő | Írta: Török Judit, Fried Katalin |
| Elemi matematika mesterfokon | Írta: Kiss Géza |
| Világos gondolatok elmehunyt időkben | Írta: Molnár Zoltán Gábor |
| Tóth–Simon: Differenciálegyenletek – harmadik kiadás | Írta: Pituk Mihály |
| John Horton Conway, a kíváncsi zseni | Írta: Stipsicz András, Titkos Tamás |
| Alonzo Church Tihanyban | Írta: Szabó Máté |
| Mennyit teszteljünk? 2. rész | Írta: Backhausz Ágnes, Simon L. Péter |
| Hogyan képzelte el 1840-ben Kerekes Ferenc a heurisztikus módszer alkalmazását a matematika tanításában? | Írta: Kántor Sándorné |
| Az élő legenda: C. R. Rao 100 éves | Írta: Bolla Marianna |
| e ötféleképpen | Írta: Görbe Tamás |
| Matematikatörténet és Matematikaoktatás Konferencia 2020. május 20–24. | Írta: Körtesi Péter |
| Esterházy Péter: Rubens és a nemeuklideszi asszonyok, Ódry Színpad | Írta: Molnár Zoltán Gábor, Ritter Márta |
| Új világok teremtése – könyvbemutató a Könyvhéten | Írta: Pintér Gergő |