Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

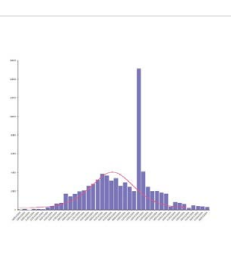
Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

15. szám 2020. március

2020. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

A Matematika Világnapja: matematika mindenütt

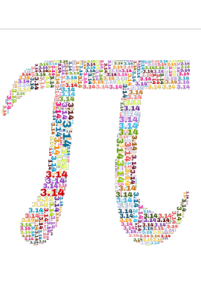
Az Érintő 2020-as első számának megjelenését március 14-ére időzítettük. Ezen a napon van ugyanis a Matematika Világnapja! 2020-ban ez az első ilyen hivatalos ünnep, amelyet a Nemzetközi Matematikai Unió javaslatára 2019. novemberében fogadott el az UNESCO. Az első, úgynevezett „pi-nap” 1988. márc. 14-én volt: a dátum, a 3.14 a π két tizedes jegyre kerekítve. Persze a magyar matematikusok már évtizedekkel korábban is remek pi-verseket írtak. Tovább...



2020. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Az új koronavírus Kínán kívüli terjedésének kockázatát modellezték szegedi matematikusok

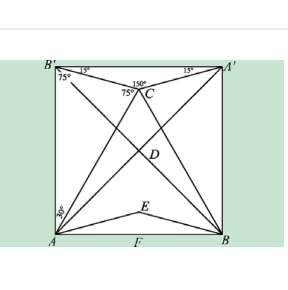
A Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének hat matematikusa – *Boldog Péter, Tekeli Tamás, Vizi Zsolt, Dénes Attila, Bartha Ferenc* és *Röst Gergely* – azt modellezte, hogy az egyes országokban mekkora a veszélye egy Kínán kívüli járványkitörésnek. A matematikai modellek alkalmazása igen hatékony módszer lehet a járványok elleni küzdelemben. Segítségükkel pontosabb becsléseket adhatunk a COVID-19 járvány fő paramétereire – mint az inkubációs időszak és a fertőző időszak hossza, vagy a járvány reprodukciós száma –, előre jelezhetjük a járvány jövőbeli terjedését, kiértékelhetjük az eddigi intézkedések hatását, esetleg új intézkedéseket javasolhatunk. Tovább…



2020. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A π az idők viharában

A π-ről már a régi görögök is tudtak: bármely két kör hasonló, ezért bármely kör kerületének és átmérőjének aránya ugyanannyi. Arkhimédész beírt és körülírt szabályos sokszögekkel próbálta megközelíteni az egységnyi átmérőjű kör kerületét. Ám a π, bár görög betű, nem az ógörögöktől, de még csak nem is az ókorban kapta a nevét. Írásos feljegyzések szerint William Jones walesi matematikus használta először a π-t a kör kerületének (periféria) és átmérőjének arányára egy 1706-ban megjelent munkájában. Ezt a jelölést vette át Leonhard Euler svájci matematikus az 1730-as években, és innen terjedt el a világon. *Fried Katalin* gyűjtött össze néhány érdekes, hasznos tudnivalót. Tovább...



2020. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

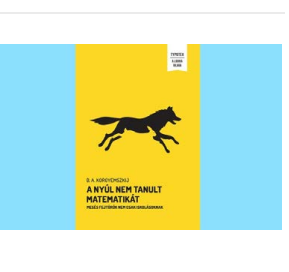
Úton-módon 2.

Az Úton-módon sorozat második részében *Szoldatics József* ismét egy geometria példát mutat meg, és mindazt, ami róla az eszébe jutott... A 2019 évi Nemzetközi Magyar Matematikaverseny egyik, 9. osztályosoknak szóló feladatát *Erdős Gábor* (Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa) javasolta. A feladatra matematika tanárok egy csoportja 20 elemi megoldást adott. Ezek közül a közölt hét megoldás mindegyike a maga nemében szép, vagy valami szép tulajdonságot használ. Tovább...

2020. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Matematikai blog egy „kívülálló” tollából

Hogyan képesek megvédeni modern társadalmunkat a számok? Hogyan lehetséges az, hogy technikai civilizációnk léte vagy nem léte múlik olyan dolgokon, amelyek csak a képzeletünkben léteznek? Ilyen kérdéseken gondolkodik *Moldvai Dávid*, aki egy azok közül, akik szerint a matematikusok világa meglehetősen elvont és furcsa. A „kívülálló”, akit az információelmélet és a kriptográfia érdekel, elindította a youproof.hu blogot. Olvassák, érdemes! Tovább…



2020. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

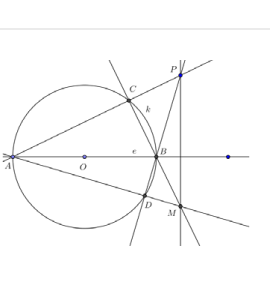
A nyúl nem tanult matematikát

A szerző, *B. A. Korgyemszkij* (1907–1999) az orosz nyelvű matematikai ismeretterjesztés legfontosabb alakja volt. Nem ez az első könyve magyarul sem, például 1962-ben jelent meg tőle a *Matematikai fejtörők*. Az ismertetendő könyv viszont az utolsó, amit írt. A feladatok kis történetek formájában jelennek meg, amelyekben az orosz népmesék és szépirodalom számos alakjával találkozunk. Rovatszerkesztőnk, *Tóth János* nosztalgiával és iróniával fűszerezett kedvcsinálója következik. Tovább…

2020. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Matematikus portrék: Harcos Gergely

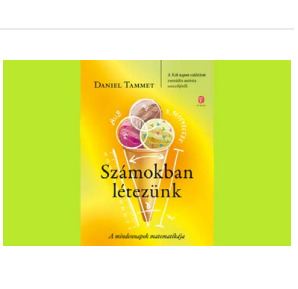
Harcos Gergelyt már óvodásként is különösen érdekelték a számok, amiket egy ösvénynek tekintett. Középiskolás korában nyáron élvezettel oldott meg egyre több és több feladatot a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokból (egyetemi évei végén pedig már a matematika szerkesztőbizottság tagjaként dolgozott). 10 évet töltött Amerikában matematikus kutatóként, majd 2006-ban települt vissza családjával Magyarországra. Tudományos tanácsadó a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben.



2020. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Egy kör és más semmi... szerkesztések csak vonalzóval

Orosz Gyula diákjai a szakkörön a 9. osztály egyik legkönnyebb szerkesztési feladatából kiindulva lépésenként eljutnak egy jóval nehezebb problémához: Adott egy egyenes, egy külső P pont és egy O középpontú kör. Tükrözzük a P pontot az egyenesre úgy, hogy további kört már nem rajzolhatunk! Azaz a szerkesztéshez csak egyetlen kört, azon túl pedig csak vonalzót használhatunk. Az eszközkorlátozott szerkesztések témaköre önállóan is érdekes. Általában nem igényel mélyebb előismereteket, ezért a tanulók kedvelni szokták, a dinamikus geometriai szoftverekkel pedig maga a szerkesztés technikai végrehajtása sem túl fáradságos. Tovább...



2020. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Daniel Tammet: Számokban létezünk

Daniel Tammet: Számokban létezünk című könyve már szerepelt az Érintő előző számában, most egy teljesen más recenziót olvashat róla az érdeklődő, az előzőt egy gyógypedagógus írta, ezt pedig egy matematikus, *Ruzsa Imre*. Ezért neki egészen más dolgok jutnak az eszébe ugyanarról a műről. Véleménye szerint: „A könyv műfaja: vegyesfelvágott; szerző olvas mindenfélét, erről mindenféle eszébe jut, és ezeket leírja. Sokfélét összeolvas és élénken jár a fantáziája, úgyhogy a könyv általaban szórakoztató.” Tovább...

2020. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

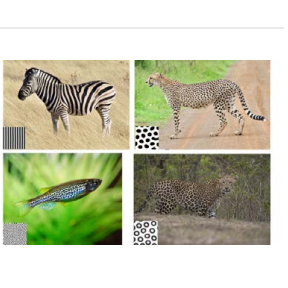
Matematikus portrék: Füredi Zoltán

Füredi Zoltán minden évben nyert az országos középiskolai versenyeken, de a tehetség mellett a sikerhez az is hozzájárult, hogy előre kiolvasta a speciális matematika tagozat négy évfolyamának tankönyveit, és legalább húszezer feladatot megoldott. Évfolyamának egyik legjobb matematikusa, aki kívülről tudta József Attila verseit. Több mint 20 évet töltött félig az Amerikai Egyesült Államok különböző egyetemein, félig a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben. Ma a kombinatorika nemzetközi hírű kutatóprofesszora.

2020. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

"Mesterséges intelligencia" – ha úgy akarod

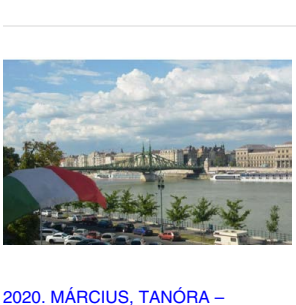
A Wolfram nyelv (archaikusan: *Mathematica*) többször is szerepelt már folyóiratunk hasábjain, de mivel nem elégszer, ezért most *Tóth János* ismertet néhány aktuális érdekességet folytatva a programozásról szóló előző írását. Amint bizonyára mindenki jól emlékszik, ott alapvető ismeretekről (a **Map** és az **Apply** függvényről) volt szó, itt viszont a másik végletről. Egészen összetett feladatok ellátására képes függvényekről. (Képünk forrása: Computational intelligence, wolframalpha.com.) Tovább...



2020. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Állati mintázatok

2019 decemberében a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének vendége volt *Philip Maini*, az Oxfordi Egyetem professzora, a matematika biológiai alkalmazásainak világszerte egyik legnevesebb kutatója. Érdekes előadásáról, amelyet *A biológiai és kémiai önszerveződés matematikája* címmel tartott a Bolyai Intézet hagyományos karácsonyi szemináriumán, *Dénes Attila* számol be. Tovább…



2020. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Műszaki és természettudományok közelről – BME TTK Science Camp

A fejlett országokban is megfigyelhető az az aggasztó jelenség, hogy csökken a diákok érdeklődése a természettudományok, a technológia, a műszaki tudományok iránt, miközben egyre nagyobb szükség van ezeken a területeken széles látókörrel, komplex problémamegoldó képességgel és nagyfokú flexibilitással rendelkező szakemberekre. A BME Természettudományi Kara *Science Camp* néven 2016. óta szervez ingyenes természettudományos tábort hazai és határon túli középiskolás diákoknak. *Lángné Lázi Márta* számol be az eddigi tapasztalatokról. Tovább…

2020. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

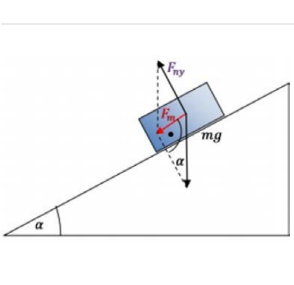
Mi is...a Monge–Kantorovics probléma?

Az előző évtizedben két olyan matematikust is Fields-éremmel díjaztak (Cédric Villani 2010, Alessio Figalli 2018), akiknek munkájában az optimális transzport probléma jelentős szerepet játszott. A probléma születését *Gaspard Monge* 1781-ben publikált művéhez, (egyik) újjászületését pedig *Leonyid Vitaljevics Kantorovics* 1942-es dolgozatához kötik. (Ő látható címképünkön, Petrov-Vodkin 1938-ban készült festményén.) Ebben a rövid írásban *Titkos Tamás* bemutatja a transzport probléma Monge- és Kantorovics-féle megfogalmazásait. Tovább...

2020. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

BJMT − a 2019-es év társulati díjai

A Bolyai János Matematikai Társulat 2019-es díjainak kiosztására, valamint a Kürschák József Matematikai Tanulóverseny és a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny eredményhirdetésére december 11-én került sor. A Szele Tibor Emlékérem, a Grünwald Géza Emlékérem, a Farkas Gyula Emlékdíj és a Rényi Kató Emlékdíj szabályzata, megemlékezve a névadókról is, a Társulat honlapján itt olvasható. Híradásunk ismerteti a díjazottakat, akiknek nevére kattintva olvashatják méltatásukat.Tovább...



2020. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

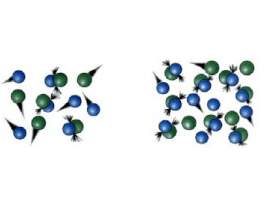
Matematika a fizikaórán

A matematika és fizika tudománya évszázadok óta kart karba öltve fejlődik. A fizika a matematika nyelvén fogalmazza meg törvényeit, igényei pedig hatással vannak a matematika fejlődésére. Az iskolában azonban találkozunk azzal a problémával, hogy fizikaórán már alkalmazás szinten kellene használni a tanulónak olyan matematikai összefüggéseket, amelyekkel a matematikaórán még alig, vagy egyáltalán nem találkozott. A fizikatanár sokszor rákényszerül arra, hogy bevezesse a hiányzó matematikai ismereteket. *Bakosné Novák Andrea* saját tapasztalait is átadja, bemutatva, milyen lehetőségeket ad hozzá a matematika tanításához a fizika. Tovább...

2020. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Amikor Einstein Gödellel sétált

Jim Holt legújabb könyve nemrég jelent meg Magyarországon Jakabffy Éva és Jakabffy Imre fordításában, a Typotex Kiadó gondozásában. Az ismertetett témák tág területen kalandoznak: találkozhatunk a Riemann-sejtéssel és a négyszíntétellel, húrelmélettel és az univerzum végére vonatkozó elméletekkel, olvashatunk Ada Byron és a számítógéptudomány kapcsolatáról, vagy éppen az idő természetéről és az eugenetikáról. *Lángi Zsolt* recenziója itt olvasható. Tovább...



2020. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

3. Formális reakciókinetikai szimpózium

2018. júniusi számunkban értesülhettek a *2. Formális reakciókinetikai* szimpóziumról. 2020. január 9.-én és 10.-én sor került a harmadikra is a BME H épületében, evvel a címmel: *3rd Workshop on Formal Reaction Kinetics and Related Areas*. A szűk értelemben vett elmélet mellett tehát idén helyet kaphattak járványtani, génszabályozási vagy rákkutatási témák is. Bővült a résztvevők és az érdeklődő intézmények, országok száma. A miniszimpóziumról *Tóth János* minibeszámolója következik. (Bevezető képünket a molekulák ritka és sűrű ütközéseiről Sadi Carnot készítette.)Tovább…

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

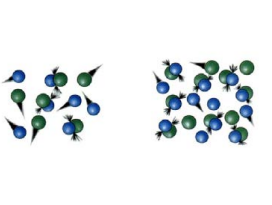
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **HÍREK – ÚJDONSÁGOK** ROVAT A MATEMATIKÁHOZ ÉS A BOLYAI TÁRSULATHOZ KAPCSOLÓDÓ ESEMÉNYEKRŐL, ÚJDONSÁGOKRÓL SZÓL. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÁKÓCZI ILDIKÓ.)*

A szerk.
2020. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

A Matematika Világnapja: matematika mindenütt

Az Érintő 2020-as első számának megjelenését március 14-ére időzítettük. Ezen a napon van ugyanis a Matematika Világnapja! 2020-ban ez az első ilyen hivatalos ünnep, amelyet a Nemzetközi Matematikai Unió javaslatára 2019. novemberében fogadott el az UNESCO. Az első, úgynevezett „pi-nap” 1988. márc. 14-én volt: a dátum, a 3.14 a π két tizedes jegyre kerekítve. Persze a magyar matematikusok már évtizedekkel korábban is remek pi-verseket írtak. Tovább...



Tóth János
2020. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

3. Formális reakciókinetikai szimpózium

2018. júniusi számunkban értesülhettek a *2. Formális reakciókinetikai* szimpóziumról. 2020. január 9.-én és 10.-én sor került a harmadikra is a BME H épületében, evvel a címmel: *3rd Workshop on Formal Reaction Kinetics and Related Areas*. A szűk értelemben vett elmélet mellett tehát idén helyet kaphattak járványtani, génszabályozási vagy rákkutatási témák is. Bővült a résztvevők és az érdeklődő intézmények, országok száma. A miniszimpóziumról *Tóth János* minibeszámolója következik. (Bevezető képünket a molekulák ritka és sűrű ütközéseiről Sadi Carnot készítette.)Tovább…

Bolyai János Matematikai Társulat díjkiosztó ünnepsége
Budapest, 2019. december 11.

Szerkesztő
2020. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

BJMT − a 2019-es év társulati díjai

A Bolyai János Matematikai Társulat 2019-es díjainak kiosztására, valamint a Kürschák József Matematikai Tanulóverseny és a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny eredményhirdetésére december 11-én került sor. A Szele Tibor Emlékérem, a Grünwald Géza Emlékérem, a Farkas Gyula Emlékdíj és a Rényi Kató Emlékdíj szabályzata, megemlékezve a névadókról is, a Társulat honlapján itt olvasható. Híradásunk ismerteti a díjazottakat, akiknek nevére kattintva olvashatják méltatásukat.Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A szerk. 2020. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

A Matematika Világnapja: matematika mindenütt

Az Érintő 2020-as első számának megjelenését március 14-ére időzítettük. Ezen a napon van ugyanis a Matematika Világnapja! 2020-ban ez az első ilyen hivatalos ünnep, amelyet a Nemzetközi Matematikai Unió javaslatára 2019. novemberében fogadott el az UNESCO. Az első, úgynevezett „pi-nap" 1988. márc. 14-én volt: a dátum, a 3.14 a π két tizedes jegyre kerekítve. 1989 óta ezen a napon hagyományosan kör alakú gyümölcsöspitét sütnek, s hogy miért? Mivel a π (angolul kiejtve) nem más, mint pie, azaz pite.

Matematika mindenütt (https://everywhere.idm314.org/)

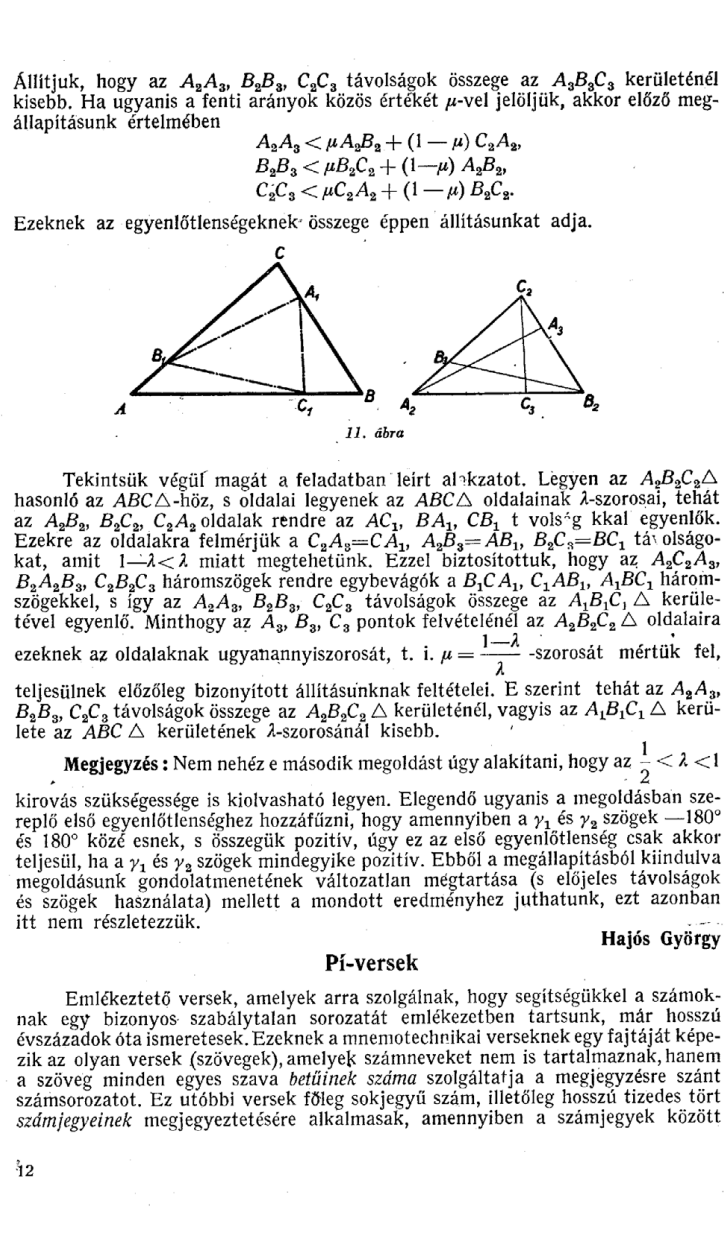
Rengeteg más érdekességet és további forrásokat is felsorol a matematika napjáról a Wikiwand Nemzetközi Pi-nap honlap. Például, mióta nemzeti pi-nap az USA-ban március 14-e, amelyet néhány éve már hazánkban is számon tartanak, és hogy az év melyik napja a *Pi Approximation Day*. Kiderül az is, hogy Daniel Tammet, akinek könyvéről ugyanebben a számunkban írt recenziót Ruzsa Imre, a 2004-es pi-napon 22 514 tizedesjegyig sorolta fel a π számot !

Akit kicsit mélyebben érdekel a π története, olvassa el mostani számunk másik, π-ről szóló cikkét, amit Fried Katalin írt.

Ma már valószínűleg az év minden napjára esik (legalább) egy „ünnep", nemrég volt például a nemzetközi palacsintanap. Nekünk, magyaroknak talán inkább a palacsinta, mint a pite, ám a mi matematikusaink már évtizedekkel a π első megünneplése előtt remek pi-verseket írtak.

Kürschák József 1920-ban így adta meg π első tizenkét jegyét: „Bír-e, érez-e ember nyugalmat, ha lelkét nehéz, bús emlék zaklatja szűntelen".

A Középiskolai Matematikai Lapokban pedig 1953-ban jelent meg Szász Pál professzor mnemotechnikai verse, amelyben az egymást követő szavak betűinek száma 30 tizedesjegy pontossággal adja ki a Ludolph-féle számot:



Állítjuk, hogy az A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 távolságok összege az $A_2B_2C_2$ kerületénél kisebb. Ha ugyanis a fenti arányok közös értékét μ-vel jelöljük, akkor előző megállapításunk értelmében

$$A_2A_3 < \mu A_2B_2 + (1-\mu)\, C_2A_2,$$
$$B_2B_3 < \mu B_2C_2 + (1-\mu)\, A_2B_2,$$
$$C_2C_3 < \mu C_2A_2 + (1-\mu)\, B_2C_2.$$

Ezeknek az egyenlőtlenségeknek összege éppen állításunkat adja.

11. ábra

Tekintsük végül magát a feladatban leírt alakzatot. Legyen az $A_2B_2C_2\triangle$ hasonló az $ABC\triangle$-höz, s oldalai legyenek az $ABC\triangle$ oldalainak λ-szorosai, tehát az A_2B_2, B_2C_2, C_2A_2 oldalak rendre az AC_1, BA_1, CB_1 távolságokkal egyenlők. Ezekre az oldalakra felmérjük a $C_2A_3=CA_1$, $A_2B_3=AB_1$, $B_2C_3=BC_1$ távolságokat, amit $1-\lambda<\lambda$ miatt megtehetünk. Ezzel biztosítottuk, hogy az $A_2C_2A_3$, $B_2A_2B_3$, $C_2B_2C_3$ háromszögek rendre egybevágók a B_1CA_1, C_1AB_1, A_1BC_1 háromszögekkel, s így az A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 távolságok összege az $A_1B_1C_1\triangle$ kerületével egyenlő. Minthogy az A_3, B_3, C_3 pontok felvételénél az $A_2B_2C_2\triangle$ oldalaira ezeknek az oldalaknak ugyanannyiszorosát, t. i. $\mu=\frac{1-\lambda}{\lambda}$ -szorosát mértük fel, teljesülnek előzőleg bizonyított állításunknak feltételei. E szerint tehát az A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 távolságok összege az $A_2B_2C_2\triangle$ kerületénél, vagyis az $A_1B_1C_1\triangle$ kerülete az $ABC\triangle$ kerületének λ-szorosánál kisebb.

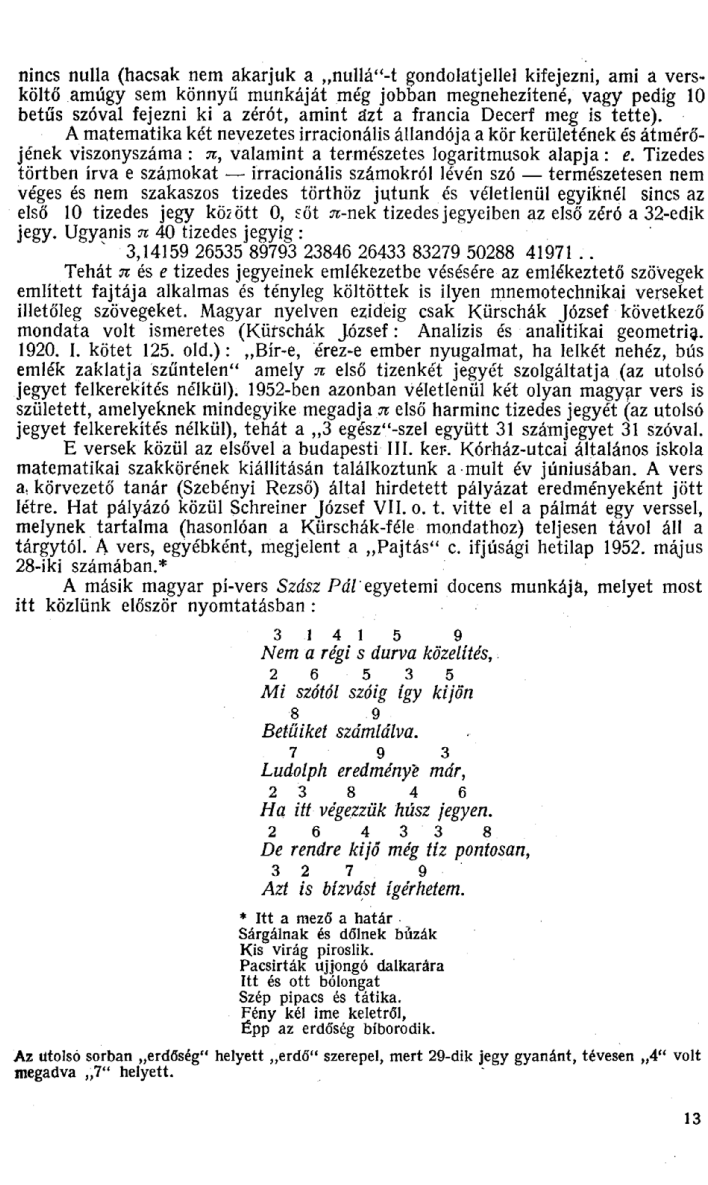
Megjegyzés: Nem nehéz e második megoldást úgy alakítani, hogy az $\frac{1}{2}<\lambda<1$ kirovás szükségessége is kiolvasható legyen. Elegendő ugyanis a megoldásban szereplő első egyenlőtlenséghez hozzáfűzni, hogy amennyiben a γ_1 és γ_2 szögek —180° és 180° közé esnek, s összegük pozitív, úgy ez az első egyenlőtlenség csak akkor teljesül, ha a γ_1 és γ_2 szögek mindegyike pozitív. Ebből a megállapításból kiindulva megoldásunk gondolatmenetének változatlan megtartása (s előjeles távolságok és szögek használata) mellett a mondott eredményhez juthatunk, ezt azonban itt nem részletezzük.

Hajós György

Pí-versek

Emlékeztető versek, amelyek arra szolgálnak, hogy segítségükkel a számoknak egy bizonyos szabálytalan sorozatát emlékezetben tartsunk, már hosszú évszázadok óta ismeretesek. Ezeknek a mnemotechnikai verseknek egy fajtáját képezik az olyan versek (szövegek), amelyek számneveket nem is tartalmaznak, hanem a szöveg minden egyes szava *betűinek száma* szolgáltatja a megjegyzésre szánt számsorozatot. Ez utóbbi versek főleg sokjegyű szám, illetőleg hosszú tizedes tört *számjegyeinek* megjegyeztetésére alkalmasak, amennyiben a számjegyek között

12



nincs nulla (hacsak nem akarjuk a „nullá"-t gondolatjellel kifejezni, ami a versköltő amúgy sem könnyű munkáját még jobban megnehezítené, vagy pedig 10 betűs szóval fejezni ki a zérót, amint azt a francia Decerf meg is tette).

A matematika két nevezetes irracionális állandója a kör kerületének és átmérőjének viszonyszáma: π, valamint a természetes logaritmusok alapja: e. Tizedes törtben írva e számokat — irracionális számokról lévén szó — természetesen nem véges és nem szakaszos tizedes törthöz jutunk és véletlenül egyiknél sincs az első 10 tizedes jegy között 0, sőt π-nek tizedes jegyeiben az első zérő a 32-edik jegy. Ugyanis π 40 tizedes jegyig:

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 . .

Tehát π és e tizedes jegyeinek emlékezetbe vésésére az emlékeztető szövegek említett fajtája alkalmas és tényleg költöttek is ilyen mnemotechnikai verseket illetőleg szövegeket. Magyar nyelven ezideig csak Kürschák József következő mondata volt ismeretes (Kürschák József: Analízis és analitikai geometria. 1920. I. kötet 125. old.): „Bír-e, érez-e ember nyugalmat, ha lelkét nehéz, bús emlék zaklatja szűntelen" amely π első tizenkét jegyét szolgáltatja (az utolsó jegyet felkerekítés nélkül). 1952-ben azonban véletlenül két olyan magyar vers is született, amelyeknek mindegyike megadja π első harminc tizedes jegyét (az utolsó jegyet felkerekítés nélkül), tehát a „3 egész"-szel együtt 31 számjegyet 31 szóval.

E versek közül az elsővel a budapesti III. ker. Kórház-utcai általános iskola matematikai szakkörének kiállításán találkoztunk a mult év júniusában. A vers a körvezető tanár (Szebényi Rezső) által hirdetett pályázat eredményeként jött létre. Hat pályázó közül Schreiner József VII. o. t. vitte el a pálmát egy verssel, melynek tartalma (hasonlóan a Kürschák-féle mondathoz) teljesen távol áll a tárgytól. A vers, egyébként, megjelent a „Pajtás" c. ifjúsági hetilap 1952. május 28-iki számában.*

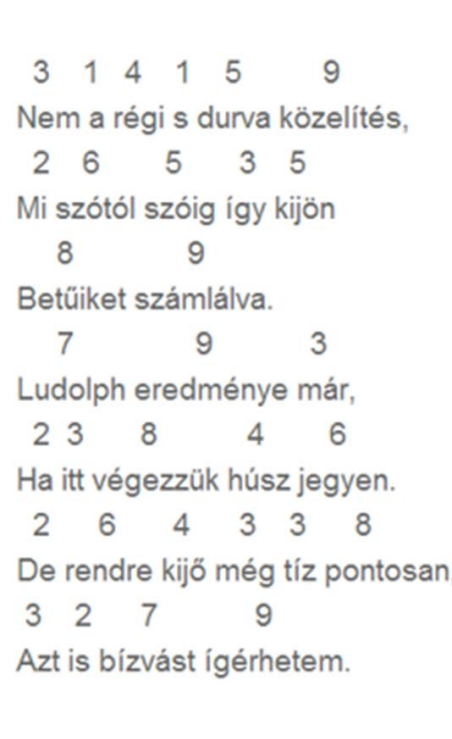
A másik magyar pi-vers *Szász Pál* egyetemi docens munkája, melyet most itt közlünk először nyomtatásban:

3 1 4 1 5 9
Nem a régi s durva közelítés,
2 6 5 3 5
Mi szótól szóig így kijön
8 9
Betűiket számlálva.
7 9 3
Ludolph eredménye már,
2 3 8 4 6
Ha itt végezzük húsz jegyen.
2 6 4 3 3 8
De rendre kijő még tíz pontosan,
3 2 7 9
Azt is bízvást ígérhetem.

* Itt a mező a határ
Sárgálnak és dőlnek búzák
Kis virág piroslik.
Pacsirták ujjongó dalkarára
Itt és ott bolongat
Szép pipacs és tátika.
Fény kél ime keletről,
Épp az erdőség bíborodik.

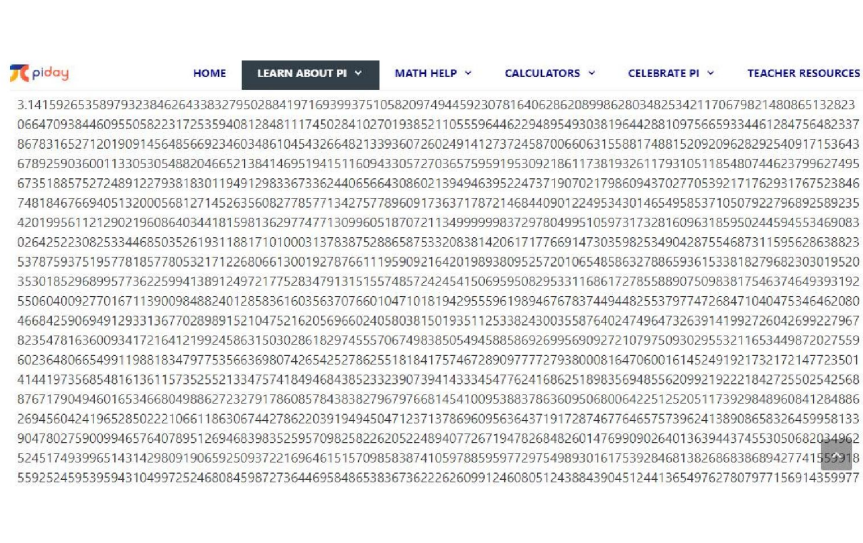
Az utolsó sorban „erdőség" helyett „erdő" szerepel, mert 29-dik jegy gyanánt, tévesen „4" volt megadva „7" helyett.

13



3 1 4 1 5 9
Nem a régi s durva közelítés,
2 6 5 3 5
Mi szótól szóig így kijön
8 9
Betűiket számlálva.
7 9 3
Ludolph eredménye már,
2 3 8 4 6
Ha itt végezzük húsz jegyen.
2 6 4 3 3 8
De rendre kijő még tíz pontosan,
3 2 7 9
Azt is bízvást ígérhetem.

A http://piday.org hivatalos honlap felsorolja a π első 1 millió tizedesjegyét. Íme egy kis ízelítő:



matematikatörténet

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Tóth János 2020. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

3. Formális reakciókinetikai szimpózium

2018. júniusi számunkban értesülhettek a *2. Formális reakciókinetikai* szimpóziumról. 2020. január 9.-én és 10.-én sor került a harmadikra is a BME H épületében, evvel a címmel: *3rd Workshop on Formal Reaction Kinetics and Related Areas*. A cím második fele a nyilvánvalóan „kilógó lóláb”: ez tette lehetővé, hogy a szűk értelemben vett elmélet területe mellett helyet kaphassanak olyan előadások is, amelyek járványtani, génszabályozási vagy rákkutatási témákról számoltak be. Multistacionaritás, bifurkáció, határciklusok, permanencia, S-rendszerek, globálisattraktor-hipotézis, késleltetés, sztochasztikus kinetika, folyamatok hálózatokon, frontterjedés, rezonancia és lebegés reakciókban – néhány az ismétlődő kulcsszavak közül.

Az előzőkhöz képest bővült a résztvevők száma (kb. 31 fő) és a képviselt országok száma is (óvatosan lépünk ki a Monarchia területéről: Ausztrián és Szlovénián kívül Spanyol-, Német- és Olaszországból is érkeztek, de az Egyesült Államokból is voltak vendégeink). Külön öröm számomra, hogy Pécs, Veszprém, Óbuda és Szeged mellett Lágymányos (ELTE) és a Práter utca (PPKE) is képviseltette magát, vagyis a magyarországi kutatóhelyek többségéből jött résztvevő, köztük nem kevés doktorandusz.

Örvendetes jelenség, hogy a kollégák egyes (nem is diszjunkt) részhalmazai a konferencia előtt és után aktív közös kutatásba fogtak.

Amilyen egyszerű lenne, olyan lehetetlen megadni egy linket az összejövetel honlapjához vagy az előadások és poszterek hiteles és végleges listájához: ilyenek ugyanis – energiáink végessége folytán – nem készültek. A szervezésben egyrészt Szederkényi Gábor, másrészt Péterné Kovács Anikó is részt vett. Mintegy újabb másfél év múlva jó lenne újra látni a társaságot, további résztvevőkkel bővítve.

Tóth János

alkalmazott matematika beszámolók konferencia

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2020. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

BJMT − a 2019-es év társulati díjai

A Bolyai János Matematikai Társulat 2019-es díjainak kiosztására, valamint a Kürschák József Matematikai Tanulóverseny és a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny eredményhirdetésére december 11-én került sor.

A Szele Tibor Emlékérem, a Grünwald Géza Emlékérem, a Farkas Gyula Emlékdíj és a Rényi Kató Emlékdíj szabályzata, megemlékezve a névadókról is, a Társulat honlapján itt olvasható.

Híradásunk ismerteti a díjazottakat, akiknek nevére kattintva olvashatják méltatásukat.

Szele Tibor Emlékérem

A 2019-es Szele Tibor Emlékérmet **Pach János**, a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet tudományos tanácsadója érdemelte ki, aki a kombinatorikus geometria világszerte elismert vezető kutatójaként generációk számára teremtett iskolát. A geometriai algoritmusok elméletének egyik megalapozója, területének egyik legnagyobb tekintélyű és hatású kutatója.

Grünwald Géza Emlékérem

A Grünwald Géza Emlékérem jogelődjét, a Grünwald Géza Emlékdíjat a Bolyai János Matematikai Társulat 1951-ben alapította a matematikai alapkutatásban kiemelkedő tudományos eredményeket elérő, fiatal magyar matematikusok jutalmazására. 2018-ban a Társulat a jutalmazhatók körét kiterjesztette a Magyarországon tanulmányokat folytatott külföldi kutatókra is.

2019-ben a Grünwald Géza Emlékéremre három felterjesztés érkezett. Mindhárom jelölt messzemenően rászolgált a kitüntetésre, ennek megfelelően az idei díjazottak: **Bencs Ferenc**, **Soltész Dániel** és **Virosztek Dániel**.

Farkas Gyula Emlékdíj

A Farkas Gyula Emlékdíjat a Bolyai János Matematikai Társulat 1973-ban alapította fiatal magyar matematikusok jutalmazására, kiemelkedő alkalmazott matematikai munkásságukért.

OKLEVÉL
Györgyi Pétert

A 2019. évi díjazott: **Györgyi Péter**.

Rényi Kató Emlékdíj

A Rényi Kató emlékdíj kitüntetettje
még az egyetemi oklevél megszerzése előtt ... tevő önálló tudományos eredményeket ért el a ... ban.

2019-ben a Rényi Kató Emlékdíj első fokozatában részesült: **Pénzes Evelin**.

Kürschák József Matematikai Tanulóverseny

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2019. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 4-én rendezte meg húsz helyszínen: Békéscsaba, Budapest, Cambridge, Debrecen, Eger, Győr, Kaposvár, Kecskemét, Kolozsvár, Miskolc, Nagykanizsa, Nyíregyháza, Pécs, Sopron, Szeged, Székesfehérvár, Szombathely, Tatabánya, Veszprém és Zalaegerszeg. A verseny minden helyszínen rendben zajlott le: a 90 regisztrált versenyzőtől összesen 74 dolgozat érkezett be.

A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására az alábbi bizottságot kérte fel: Biró András, Frenkel Péter, Kós Géza, Maga Péter (titkár), Pach Péter Pál (elnök), Tóth Géza.

A kitűzött feladatok és a bizottság jelentése itt letölthető.

A Kürschák verseny feladatai és megoldásai a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 2020. februári számának (70. évf. 2.sz.) 66. illetve 68−71. oldalain olvashatók.

Eredmények:

- I. díjban részesült:

Matolcsi Dávid, aki a Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnáziumban érettségizett, jelenleg az ELTE elsőéves matematika alapszakos hallgatója.

- II. díjban részesültek:

Beke Csongor, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium 12. osztályos tanulója;

Nagy Nándor, a Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója;

Velich Nóra, a Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium, 11. osztályos tanulója és

Weisz Máté Barnabás, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, 12. osztályos tanulója.

- III. díjat kapott:

Jánosik Áron, a győri Révai Miklós Gimnázium és Kollégium, 12. osztályos tanulója.

- Dicséretben részesültek:

Hámori Janka, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, 11. osztályos tanulója és

Várkonyi Zsombor, a Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium, 11. osztályos tanulója.

A Kürschák verseny legjobbjai: Jánosik Áron, Beke Csongor, Matolcsi Dávid, Nagy Nándor, Hámori Janka, Weisz Máté Barnabás, elöl: Velich Nóra és Várkonyi Zsombor

Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny

A Bolyai János Matematikai Társulat 2019-ben október 25. és november 4. között rendezte meg a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt.

A BJMT elnöksége a verseny megrendezésére a következő bizottságot jelölte ki: Pap Gyula (elnök), Kevei Péter (titkár), Barczy Mátyás, B. Szendrei Mária, Czédli Gábor, Fodor Ferenc, Gyenizse Gergő, Hajnal Péter, Hatvani László, Kérchy László, Kincses János, Krisztin Tibor, Maróti Miklós, Makay Géza, Molnár Lajos, Nagy Gábor Péter, Röst Gergely, Totik Vilmos, Vígh Viktor, Waldhauser Tamás, Zádori László.

A versenybizottság 10 feladatot tűzött ki. Ezekre 9 versenyző összesen 49 megoldást nyújtott be. A bizottság az alábbi döntést hozta.

- I. díjat a bizottság nem ad ki.
- II. díjat kap 6 feladat helyes megoldásáért

Csernák Tamás, az ELTE 2019-ben végzett matematika mesterszakos hallgatója és

Gáspár Attila, az ELTE másodéves matematika alapszakos hallgatója.

- III. díjat kap 5 feladat helyes megoldásáért

Fehér Zsombor, a University of Oxford elsőéves matematika doktorandusza és

Matolcsi Dávid, az ELTE elsőéves matematika alapszakos hallgatója.

A feladatok és azok részletes megoldása is letölthető a Társulat honlapjáról.

díjazottak beszámolók

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

AZ **INTERJÚ-PORTRÉ** MENÜPONT JÓL VAGY KEVÉSBÉ ISMERT MATEMATIKUSOKAT, VAGY OLYAN, EGYKOR MATEMATIKUSKÉNT VÉGZETTEKET SZERETNE BEMUTATNI, AKIK MA MÁS SZAKMA ELISMERT KÉPVISELŐI, SPORTOLÓK, MŰVÉSZEK...(ROVATSZERKESZTŐ: *OLÁH VERA*.)

Szerkesztő
2020. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Matematikus portrék: Füredi Zoltán

Füredi Zoltán minden évben nyert az országos középiskolai versenyeken, de a tehetség mellett a sikerhez az is hozzájárult, hogy előre kiolvasta a speciális matematika tagozat négy évfolyamának tankönyveit, és legalább húszezer feladatot megoldott. Évfolyamának egyik legjobb matematikusa, aki kívülről tudta József Attila verseit. Több mint 20 évet töltött félig az Amerikai Egyesült Államok különböző egyetemein, félig a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben. Ma a kombinatorika nemzetközi hírű kutatóprofesszora.

Szerkesztő
2020. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Matematikus portrék: Harcos Gergely

Harcos Gergelyt már óvodásként is különösen érdekelték a számok, amiket egy ösvénynek tekintett. Középiskolás korában nyáron élvezettel oldott meg egyre több és több feladatot a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokból (egyetemi évei végén pedig már a matematika szerkesztőbizottság tagjaként dolgozott). 10 évet töltött Amerikában matematikus kutatóként, majd 2006-ban települt vissza családjával Magyarországra. Tudományos tanácsadó a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

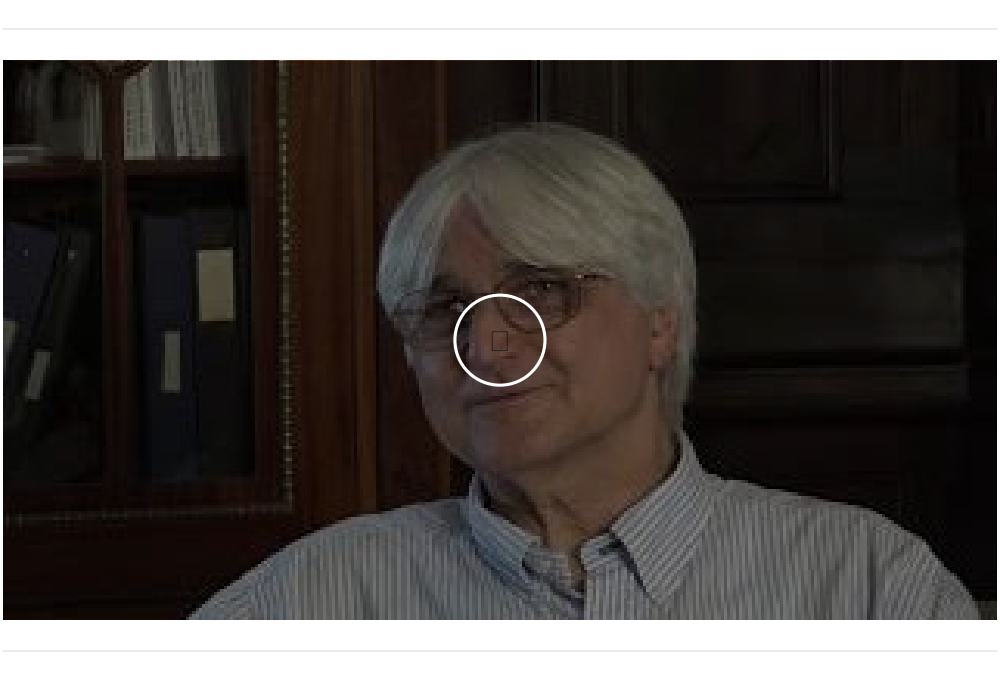
Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2020. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Matematikus portrék: Füredi Zoltán



Füredi Zoltán minden évben nyert az országos középiskolai versenyeken, de a tehetség mellett a sikerhez az is hozzájárult, hogy előre kiolvasta a speciális matematika tagozat négy évfolyamának tankönyveit, és legalább húszezer feladatot megoldott. Évfolyamának egyik legjobb matematikusa, aki kívülről tudta József Attila verseit. Több mint 20 évet töltött félig az Amerikai Egyesült Államok különböző egyetemein, félig a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben. Ma a kombinatorika nemzetközi hírű kutatóprofesszora.

matematikus-karrier

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

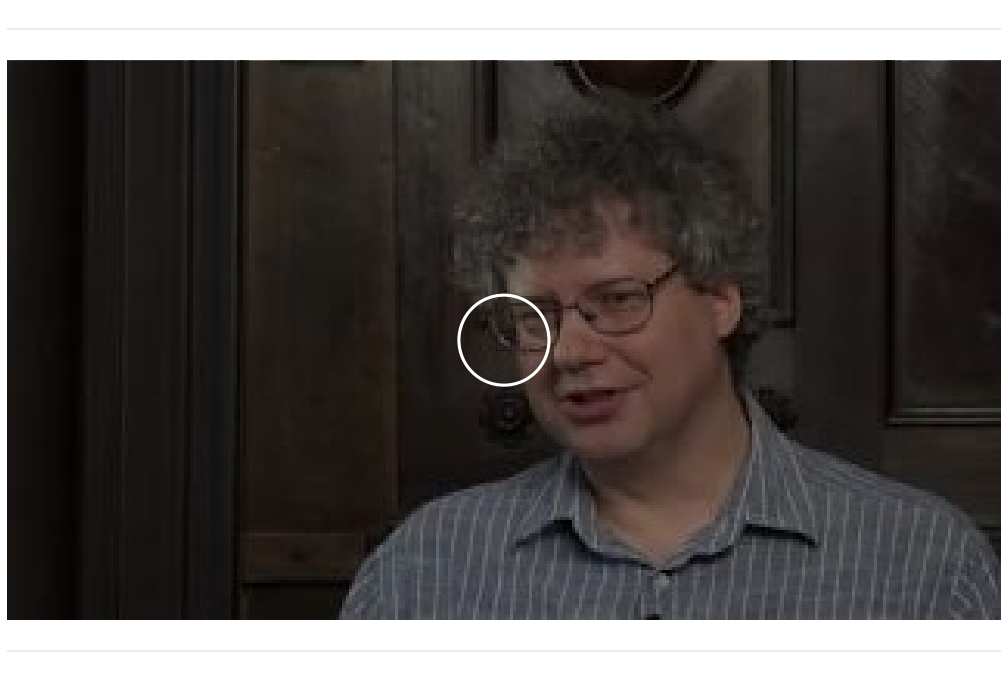
Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2020. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Matematikus portrék: Harcos Gergely



Harcos Gergelyt már óvodásként is különösen érdekelték a számok, amiket egy ösvénynek tekintett. Középiskolás korában nyáron élvezettel oldott meg egyre több és több feladatot a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokból (egyetemi évei végén pedig már a matematika szerkesztőbizottság tagjaként dolgozott). 10 évet töltött Amerikában matematikus kutatóként, majd 2006-ban települt vissza családjával Magyarországra. Tudományos tanácsadó a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben.

matematikus-karrier

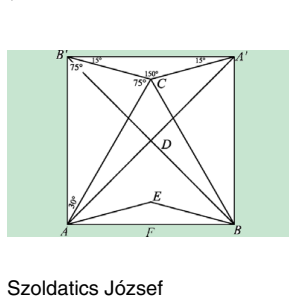
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

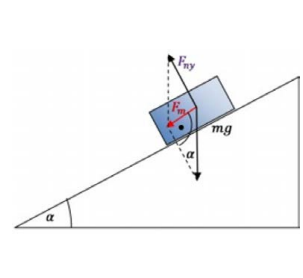
SOKSZOR TALÁLKOZUNK OLYAN FELADATTAL, ÖTLETTEL, AMIT SZÍVESEN ELTESZÜNK KÉSŐBBI HASZNÁLATRA. A **TANÓRA – SZAKKÖR** ROVAT SZERETNE HOZZÁJÁRULNI A MATEMATIKATANÁROK ESZKÖZTÁRÁNAK GAZDAGÍTÁSÁHOZ, FÓRUMOT KÍVÁN ADNI A GONDOK, NEHÉZSÉGEK MEGTÁRGYALÁSÁRA IS. (ROVATSZERKESZTŐ: *HORVÁTH ESZTER*.)



Szoldatics József
2020. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Úton-módon 2.

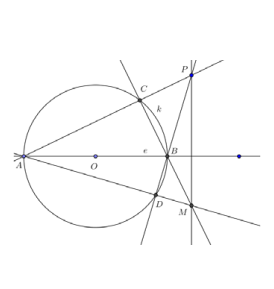
Az Úton-módon sorozat második részében *Szoldatics József* ismét egy geometria példát mutat meg, és mindazt, ami róla az eszébe jutott... A 2019 évi Nemzetközi Magyar Matematikaverseny egyik, 9. osztályosoknak szóló feladatát *Erdős Gábor* (Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa) javasolta. A feladatra matematika tanárok egy csoportja 20 elemi megoldást adott. Ezek közül a közölt hét megoldás mindegyike a maga nemében szép, vagy valami szép tulajdonságot használ. Tovább...



Bakosné Novák Andrea
2020. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Matematika a fizikaórán

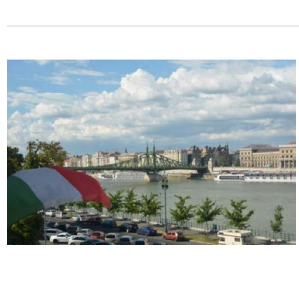
A matematika és fizika tudománya évszázadok óta kart karba öltve fejlődik. A fizika a matematika nyelvén fogalmazza meg törvényeit, igényei pedig hatással vannak a matematika fejlődésére. Az iskolában azonban találkozunk azzal a problémával, hogy fizikaórán már alkalmazás szinten kellene használni a tanulónak olyan matematikai összefüggéseket, amelyekkel a matematikaórán még alig, vagy egyáltalán nem találkozott. A fizikatanár sokszor rákényszerül arra, hogy bevezesse a hiányzó matematikai ismereteket. *Bakosné Novák Andrea* saját tapasztalait is átadja, bemutatva, milyen lehetőségeket ad hozzá a matematika tanításához a fizika. Tovább...



Orosz Gyula
2020. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Egy kör és más semmi... szerkesztések csak vonalzóval

Orosz Gyula diákjai a szakkörön a 9. osztály egyik legkönnyebb szerkesztési feladatából kiindulva lépésenként eljutnak egy jóval nehezebb problémához: Adott egy egyenes, egy külső P pont és egy O középpontú kör. Tükrözzük a P pontot az egyenesre úgy, hogy további kört már nem rajzolhatunk! Azaz a szerkesztéshez csak egyetlen kört, azon túl pedig csak vonalzót használhatunk. Az eszközkorlátozott szerkesztések témaköre önállóan is érdekes. Általában nem igényel mélyebb előismereteket, ezért a tanulók kedvelni szokták, a dinamikus geometriai szoftverekkel pedig maga a szerkesztés technikai végrehajtása sem túl fáradságos. Tovább...



Lángné Lázi Márta
2020. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Műszaki és természettudományok közelről – BME TTK Science Camp

A fejlett országokban is megfigyelhető az az aggasztó jelenség, hogy csökken a diákok érdeklődése a természettudományok, a technológia, a műszaki tudományok iránt, miközben egyre nagyobb szükség van ezeken a területeken széles látókörrel, komplex problémamegoldó képességgel és nagyfokú flexibilitással rendelkező szakemberekre. A BME Természettudományi Kara *Science Camp* néven 2016. óta szervez ingyenes természettudományos tábort hazai és határon túli középiskolás diákoknak. *Lángné Lázi Márta* számol be az eddigi tapasztalatokról. Tovább…

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szoldatics József 2020. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Úton-módon 2.

Egy feladat és ami róla az eszembe jutott...

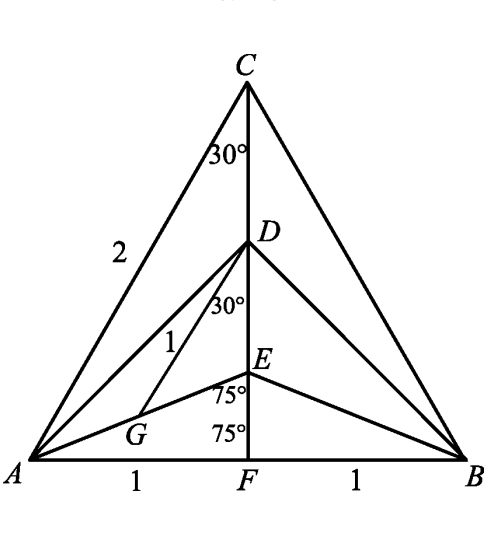
A 2019 évi Nemzetközi Magyar Matematikaverseny egyik, 9. osztályosoknak szóló feladatát Erdős Gábor (Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa) javasolta. A feladatra matematika tanárok egy csoportja 20 elemi megoldást adott. A teljes anyag megtalálható a https://matek.fazekas.hu/ portálon a cikkek között, amit Erdős Gábor kollégám jegyez. Most ezek közül 7 megoldást mutatok. Mind a hét a maga nemében szép, vagy valami szép tulajdonságot használ. A megoldások közül az első három Erdős Gáboré; az utolsó négy megoldást én adtam.

A feladat

Az ABC szabályos háromszög AB oldalának felezőpontja F. A CF szakasz azon belső pontja a D pont, amelyre az ADB szög 90 fokos. A CF szakasz azon belső pontja az E pont, amelyre a CD és a DE szakaszok hossza egyenlő. Hány fokos az AEB szög?

1. megoldás

Legyen a háromszög oldalának hossza 2 egység.



Legyen az AE szakasz felezőpontja G.

GD középvonal az AEC háromszögben, így

$$GD=\frac{AC}{2}=1.$$

Az AFD háromszög egyenlő szárú és derékszögű, így

$$AF=FD=1.$$

Az FDG háromszög egyenlő szárú, mivel

$$GD=FD=1$$

$$GDF\sphericalangle=ACF\sphericalangle=30^\circ,$$

hiszen egyállású szögek, ezért

$$GFD\sphericalangle=\frac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ.$$

A Thalész-tétel megfordítása miatt az AFE háromszög köré írt kör középpontja G, így az EGF háromszög is egyenlő szárú, azaz

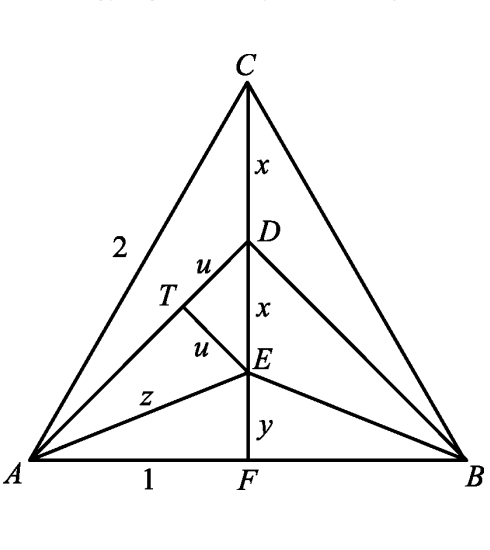
$$AEF\sphericalangle=GFD\sphericalangle=75^\circ.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle=2\cdot AEF\sphericalangle=150^\circ.$$

2. megoldás

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF=2x+y=\sqrt{3}.$$

az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF=x+y=1,$$

ezért

$$CD=DE=x=\sqrt{3}-1,$$

és

$$EF=y=\sqrt{3}-2\left(\sqrt{3}-1\right)=2-\sqrt{3}.$$

az AFE háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$AE=z=\sqrt{1+\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

legyen az E-ből az AD-re bocsátott merőleges talppontja T.

Az ETD háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$2u^2=x^2=\left(\sqrt{3}-1\right)^2=4-2\sqrt{3},$$

vagyis

$$ET=TD=u=\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

De akkor az AET derékszögű háromszögben

$$AE=2\cdot ET,$$

ez tehát egy félszabályos háromszög, amiből következik, hogy

$$DAE\sphericalangle=30^\circ.$$

Ekkor viszont

$$EAF\sphericalangle=45^\circ-30^\circ=15^\circ,$$

így

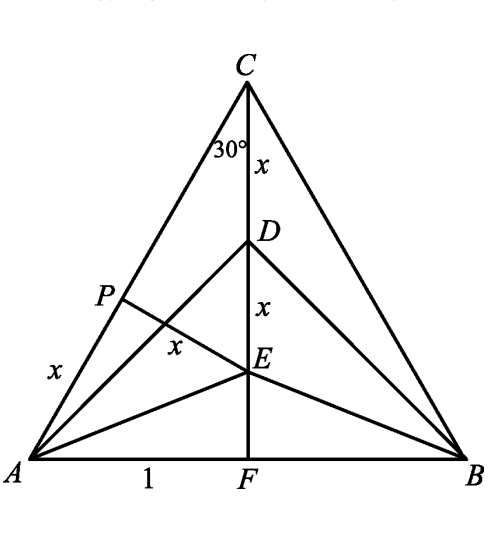
$$AEF\sphericalangle=75^\circ.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle=2\cdot AEF\sphericalangle=150^\circ.$$

3. megoldás

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF=2x+y=\sqrt{3}.$$

Az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF=x+y=1,$$

$$CD=DE=x=\sqrt{3}-1.$$

Legyen E-ből az AC-re bocsátott merőleges talppontja P. Ekkor CPE félszabályos háromszög, így

$$PE=\frac{CE}{2}=x=\sqrt{3}-1,$$

$$CP=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)=3-\sqrt{3},$$

$$AP=2-\left(3-\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-1=x.$$

Azt kaptuk, hogy az APE derékszögű háromszögben

$$AP=EP=x=\sqrt{3}-1,$$

tehát ez a háromszög egyenlő szárú is, ezért alapon fekvő szöge

$$PAE\sphericalangle=45^\circ.$$

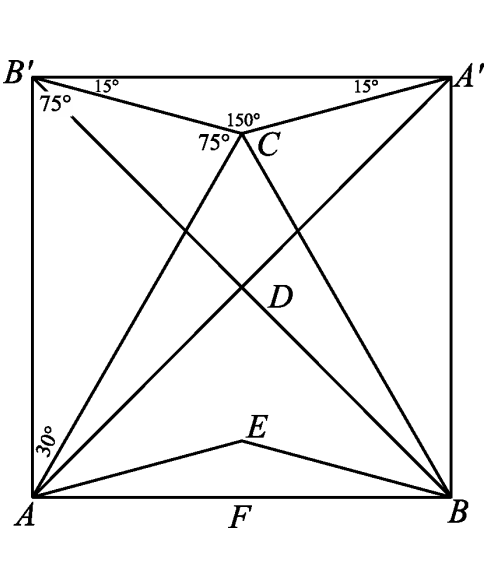
Az AEC háromszög E csúcsnál lévő külső szöge ezért

$$AEF\sphericalangle=30^\circ+45^\circ=75^\circ.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle=2\cdot AEF\sphericalangle=150^\circ.$$

4. megoldás



Tükrözzük az ABE háromszöget a D pontra. Ekkor az E tükörképe C.

Az így kapott $ABA'B'$ négyszög egy négyzet, hiszen átlói merőlegesek és egyenlő hosszúak. A négyzet belsejében pedig az ABC szabályos háromszög – ismert feladathoz jutottunk!

$$CAB'\sphericalangle=90^\circ-60^\circ=30^\circ,$$

továbbá az ACB' háromszög egyenlő szárú, így

$$AB'C\sphericalangle=\frac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ.$$

de akkor

$$CB'A'\sphericalangle=90^\circ-75^\circ=15^\circ.$$

Szimmetria-okokból a $B'CA'$ háromszög egyenlő szárú, így

$$CA'B'\sphericalangle=15^\circ,$$

ezért

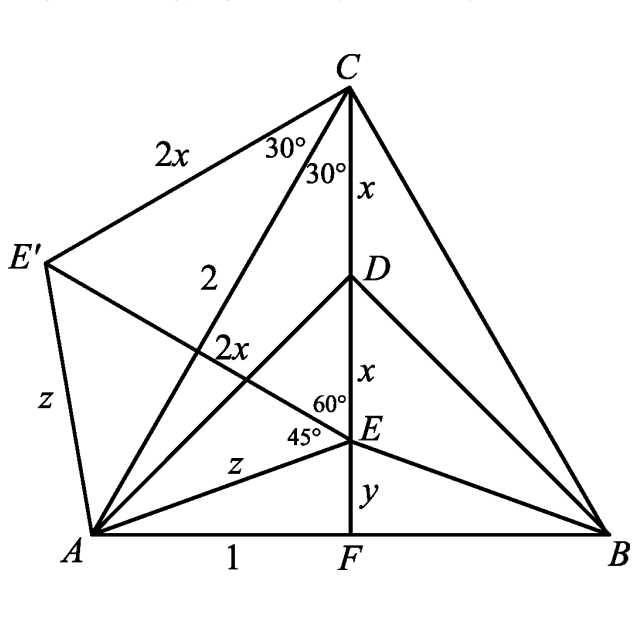
$$B'CA'\sphericalangle=180^\circ-2\cdot15^\circ=150^\circ.$$

A keresett szög ennek a szögnek a tükörképe a D pontra nézve, így

$$AEB\sphericalangle=150^\circ.$$

5. megoldás

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF=2x+y=\sqrt{3}.$$

az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF=x+y=1,$$

$$CD=DE=x=\sqrt{3}-1,$$

$$EF=y=\sqrt{3}-2\left(\sqrt{3}-1\right)=2-\sqrt{3}.$$

az AFE háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$AE=z=\sqrt{1+\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{2}\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{2}\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Legyen az E pont tükörképe az AC oldalra nézve E'.

Az ECE' háromszög szabályos,

$$EE'=2x=2\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Az AEE' háromszögben

$$AE^2+(AE')^2=2z^2=4\left(\sqrt{3}-1\right)^2=\left(2\left(\sqrt{3}-1\right)\right)^2=(EE')^2,$$

ezért ez a háromszög a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt derékszögű. Mivel egyenlő szárú is, ezért

$$AEE'\sphericalangle=45^\circ.$$

Mivel az

$$AEC\sphericalangle=60^\circ+45^\circ=105^\circ,$$

ezért az

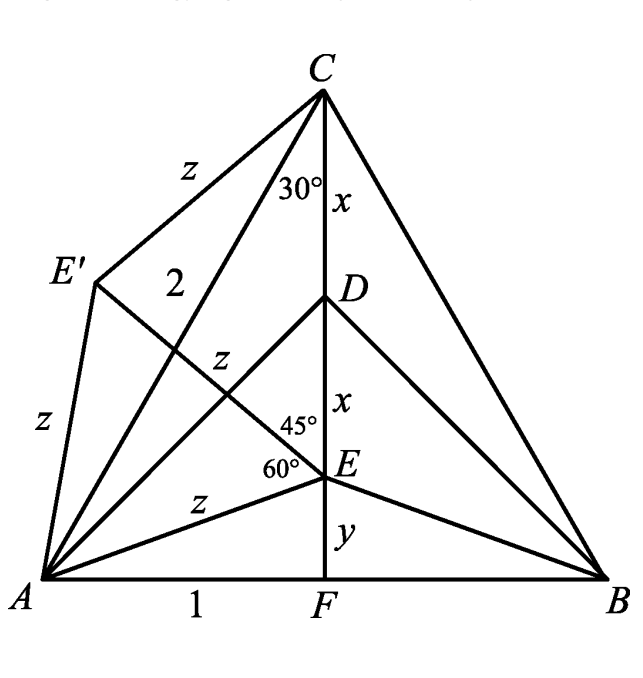
$$AEF\sphericalangle=180^\circ-105^\circ=75^\circ.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle=2\cdot AEF\sphericalangle=150^\circ.$$

6. megoldás

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF=2x+y=\sqrt{3}.$$

az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF=x+y=1,$$

ezért

$$CD=DE=x=\sqrt{3}-1,$$

$$EF=y=\sqrt{3}-2\left(\sqrt{3}-1\right)=2-\sqrt{3}.$$

Az AFE háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$AE=z=\sqrt{1+\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{2}\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{2}\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Forgassuk el az ABE háromszöget 60 fokkal az A pont körül.

Legyen az E pont elforgatottja E'. Az AEE' háromszög szabályos,

$$EE'=z=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right).$$

A $CE'E$ háromszögben

$$(CE')^2+(EE')^2=2z^2=4\left(\sqrt{3}-1\right)^2=\left(2\left(\sqrt{3}-1\right)\right)^2=(2x)^2=CE^2,$$

ezért ez a háromszög a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt derékszögű. Mivel ez a háromszög egyenlő szárú is, ezért

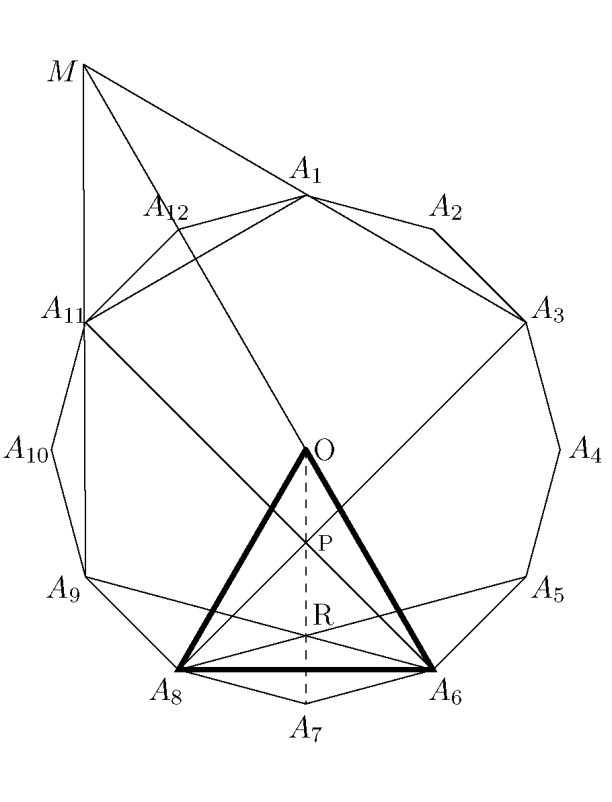
$$E'EC\sphericalangle=45^\circ.$$

Mivel az $AEC\sphericalangle=60^\circ+45^\circ=105^\circ$, ezért az $AEF\sphericalangle=180^\circ-105^\circ=75^\circ$. A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle=2\cdot AEF\sphericalangle=150^\circ.$$

7. megoldás

Tekintsük az $A_1A_2\dots A_{12}$ szabályos sokszöget, amelynek középpontja O pont.



Az $A_{11}A_6$ szakasz O körüli 90 fokos elforgatottja az A_8A_3 szakasz, így ez a két szakasz merőleges. Mivel az említett két szakasz egymás tükörképe az OA_7 egyenesre, így P metszéspontjuk illeszkedik a tükörtengelyre, tehát

$$A_8PA_6\sphericalangle=90^\circ.$$

Hasonlóan az A_9A_6 szakasz O körüli 30 fokos elforgatottja az A_8A_5 szakasz, így ennek a két szakasznak a hajlásszöge 30°. Mivel az említett két szakasz egymás tükörképe az OA_7 egyenesre, így R metszéspontjuk illeszkedik a tükörtengelyre, tehát $A_5RA_6\sphericalangle=30^\circ$, azaz

$$A_8RA_6\sphericalangle=150^\circ.$$

Mivel $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$ egy szabályos hatszög, ezért minden oldala egyenlő a köré írt kör sugarával (r), továbbá belső szögei 120 fokosak, tehát az $A_{11}A_1M$ háromszög szabályos, ezért

$$MA_{11}=r.$$

Az $OA_{11}A_9A_7$ négyszög rombusz, mivel minden oldala r hosszúságú, ezért szemközti oldalai, A_9A_{11} és A_7O párhuzamosak. Ez viszont azt jelenti, hogy egy A_6 középpontú kicsinyítéssel az MA_{11} szakasz képe lehet az OP szakasz, akkor a vele egyenlő hosszú A_9A_{11} szakasz képe ugyanezen kicsinyítés során az RP szakasz, így

$$OP=RP.$$

Mivel $A_8OA_6\sphericalangle=60^\circ$, így megjelent az ábrán a feladatban szereplő valamennyi pont és vonal: legyen $A_8=A$, $A_6=B$, $O=C$, $P=D$, $R=E$.

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle=A_8RA_6\sphericalangle=150^\circ.$$

Megjegyzés: Természetesen a megoldás során tett állítások kerületi és középponti szögek tételére való hivatkozással is indokolhatók.

Zárszó

Kedves Olvasó! Ha egy másik „szép” megoldást talál, kérem küldje el nekem a szolda@fazekas.hu e-mail címre. Ezeket az újabb megoldásokat összegyűjtve időnként (terveim szerint) szintén megmutatnám.

Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium

matematikatanítás geometria

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

2020. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Matematika a fizikaórán

A matematika és fizika tudománya évszázadok óta kart karba öltve fejlődik. A fizika a matematika nyelvén fogalmazza meg törvényeit, igényei pedig hatással vannak a matematika fejlődésére. Hogyan jelenik meg ez a szoros kapcsolat az oktatásban? Támaszkodik-e a két tantárgy a másikban született „eredményekre"? Hogyan, mely területeken kapcsolódik, kapcsolható össze a két tárgy oktatása? A kapcsolódási lehetőségek ismerete segíthet-e a hatékonyabb tanításban? Ezekre a kérdésekre keresem a választ ebben a cikkben.

A matematikaórákon tanult ismeretek alkalmazására leginkább a fizikaórákon nyílik lehetőség a középiskolában. A matematika szinte minden területéről előkerülnek az ismeretek. A fizika támaszkodik ezekre, egyben segíti is a matematikaoktatást, gyakoroltatja a tanultakat. Eközben megtanít a különböző tananyagrészekben elsajátítottak összekapcsolására.

Ideális esetben a két tantárgy oktatása szinkronizálható abban a tekintetben, hogy fizikából csak a tanult matematikai ismeretekre alapozzunk. A gyakorlatban ez nem mindig működik így. Több területen találkozunk azzal a problémával, hogy fizikaórán már alkalmazás szinten kellene használni a tanulónak olyan matematikai összefüggéseket, amelyekkel a matematikaórán még alig, vagy egyáltalán nem találkozott. Mivel a fizika sok esetben „megelőzi" a matematikát, a fizikatanár rákényszerül arra, hogy bevezesse a hiányzó matematikai ismereteket, még ha kicsit nagyvonalúbban, kevésbé pontosan teszi is meg. A matematikatanítás szempontjából ez előnyös is lehet, időt nyerhetünk az alapozásnál, ha tudjuk, hogy fizikából milyen előismeretekkel rendelkeznek diákjaink. Melyek tehát ezek az ismeretek, amelyek alapozásában építhetünk a fizikaórán tanult előismeretekre? A teljesség igénye nélkül néhány terület:

Hetedik osztály elején a sebesség fogalmához kapcsolódóan találkozunk az első problémával. Matematikából hatodik osztály végén még csak ismerkedünk a mérlegelvvel, mindkét oldal azonos mennyiséggel történő növelését és csökkentését gyakorolva. A szorzás és osztás műveletekre még nem fektetünk hangsúlyt. Fizikaórán viszont a $v=\frac{s}{t}$ képlet alkalmazása során meg kell tanítanunk a diákot a képlet átrendezésére, hogy az s és t értékeket ki tudjuk számítani. A tanévben több ehhez hasonló szerkezetű képlettel ismerkednek meg a tanulók, így a kapcsolódó feladatokban a tanult ***egyenletrendezési ismeretek*** elmélyülhetnek.

Ugyancsak hetedik osztály elején a mozgások vizsgálata során ***grafikont*** készítünk, konstans és lineáris függvény grafikonját elemezzük, sőt a változó mozgásokra térve a négyzetes úttörvény szemléltetésére a parabola grafikonját is felrajzoljuk.

A ***fordított arányosság*** a sebesség mértékegységeinek átváltása során már előkerül, de legkésőbb félévkor a forgatónyomaték fogalmát bevezetve foglalkozunk vele.

Ugyancsak kezdetektől foglalkozunk az ***átlag*** fogalmával, sőt a ***súlyozott átlaghoz*** és a ***harmonikus középhez*** vezető feladatokkal is találkoznak a tanulók.

Kilencedik osztályban a gyorsuló mozgás kapcsán a ***gyökvonással*** megoldható egyenletekkel ismerkedünk.

A *vektor* fogalma hetedik osztálytól nagyon fontos a fizika számára, és tizedik osztály végéig a fizika igényei megelőzik ebben a témában a matematikaórán tanultakat. Ezt a későbbiekben részletezni fogom.

Ugyancsak kilencedik osztályban év elejétől szükség van a ***negatív kitevőjű*** hatvány ismeretére.

Milyen matematikai fogalmakat, módszereket használunk tehát a fizika tanítása során? Szinte minden matematikaórán tanult ismeretet. Íme néhány főbb témakör, ami rendszeresen megjelenik a fizikaórákon:

– Középértékek, statisztikai fogalmak
– Műveletek törtekkel, reciprok fogalma
– Hatványok, normál alak, hatványozás azonosságai, exponenciális kifejezések
– Arányosságok
– Algebrai összefüggések: nevezetes szorzatok, zárójelfelbontás
– Lineáris, másodfokú, négyzetgyök, exponenciális, logaritmus, trigonometrikus függvények
– Első-, másodfokú, négyzetgyökös, exponenciális, egyszerű trigonometrikus egyenletek, elsőfokú egyenletrendszerek
– Geometriai ismeretek: terület-, térfogatszámítás, Pitagorasz-tétel, hasonlóság, egyenlő nagyságú szögek speciális helyzetei, hegyesszögek szögfüggvényei
– Vektorok

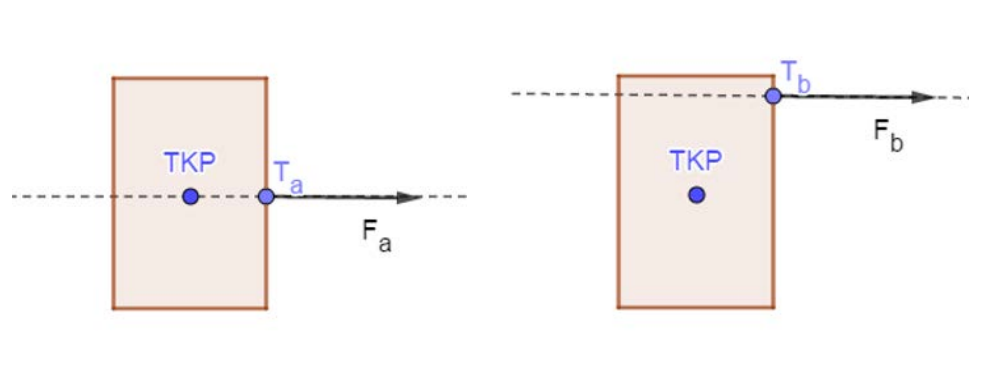
A fentieket a középszintű fizika tananyag elsajátításához szükséges ismeretekből válogattam, de minél magasabb szinten tanuljuk a fizikát, annál komolyabb matematikai ismeretekre lesz szükségünk (differenciál- és integrálszámítás, valószínűségszámítás, statisztika, stb.)

A továbbiakban konkrét példákon keresztül mutatom be, hogy milyen lehetőségeket ad hozzá a matematika tanításához a fizika.

Fogalmak alapozása, előkészítése

Több területet is említettem, ahol a fizika olyan matematikai fogalmakat használ, amelyeket a matematikaoktatás még nem alapozott meg kellőképpen. Mivel ilyenkor a fizikatanár rákényszerül ezek valamilyen szintű bevezetésére, ezekre az előismeretekre a matematikaórán már építhetünk. Ebből a szempontból külön figyelmet érdemes fordítani a vektorok témakörre. Szinte minden alapfogalma, művelete, minden ide kapcsolódó módszere előbb jelenik meg a fizikaoktatásban, mint matematikaórákon. Ha megismerjük, hogy a fizika az ide tartozó fogalmakat, szabályokat milyen folyamatokon keresztül vezeti be, akkor a matematikaórákon ennek már csak a pontosítása a feladatunk. Tapasztalatból mondhatom, hogy ezzel rengeteg időt tudunk megspórolni. Nézzük ezért lépésről lépésre, hogy fizikaórán milyen mélységig foglalkoznak a tanulók a vektorokhoz kapcsolódó ismeretekkel!

A sebesség és az erő fogalmainak ismertetésekor a diákok már hetedik osztályban találkoznak a vektor fogalmával. A vektor nekik ekkor egy olyan fizikai mennyiséget jelent, aminek nem csak nagysága, hanem iránya is van. Ezeket a mennyiségeket az ábrákon nyíllal jelöljük. Az erőfogalom megismerésekor bevezetjük az erő hatásvonala (az erővektorra illeszkedő egyenes) és támadáspontja fogalmakat. Később ebből matematikaórákon származhat bonyodalom. A vektoroknak ugyanis kezdő- és végpontjuk nincsen, ebből adódóan a párhuzamos, egyenlő hosszúságú, megegyező irányú vektorok hatása matematikában ugyanaz. Fizikában viszont nagy hangsúlyt kell fektetnünk arra, hogy az erővektornak hol van a támadáspontja, hiszen ettől függően más hatást eredményezhet.



Az ábra két egyenlő erővektor (**F**$_a$, ill. **F**$_b$) hatását mutatja ugyanazon a testen, ha a támadáspontjuk (T_a, ill. T_b) különböző. Az a) esetben az erő csak gyorsítja a testet, míg a b) esetben az erőnek forgató hatása is van. (TKP jelöli a tömegközéppontot.)

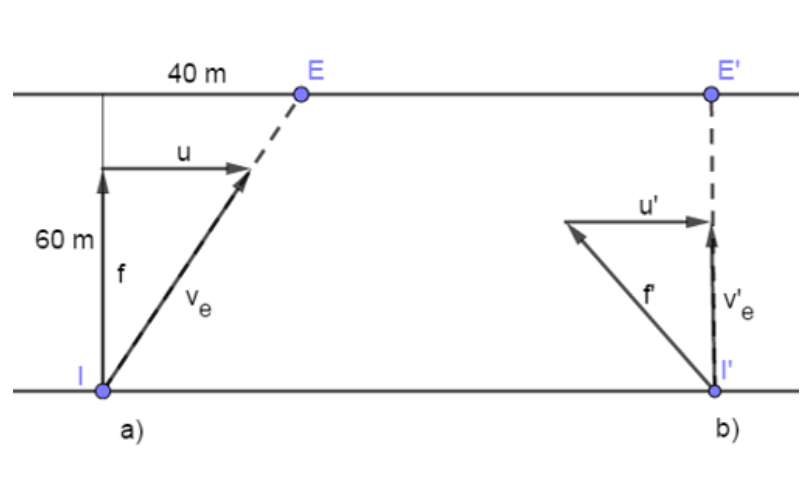
Amíg fizikaórán azt tanítjuk, hogy az erővektor hatásvonala mentén eltolható, mert ugyanazt a hatást eredményezi, addig matematikaórán a tetszőleges eltolással egymásba mozgatható vektorokat tekintjük egyenlőnek. Amikor a középiskolai oktatásban a vektorok témához érkezünk, tudnunk kell, hogy a vektorfogalom általánosítását megnehezíthetik ezek az eltérések. Fontos tehát, hogy ismerjük és tisztázzuk ezeket a különbségeket.

Ahogy a sebesség- és erővektorokkal megismerkednek a diákok, szinte azonnal szembetalálkoznak a vektorok összeadásának szabályával is. Kezdetben a párhuzamos vektorok összeadását ismerik meg, de hamarosan érzékeltetjük a (jellemzően a merőleges) szöget bezáró vektorok összeadására vonatkozó szabályt. Tipikus feladat erre a következő:

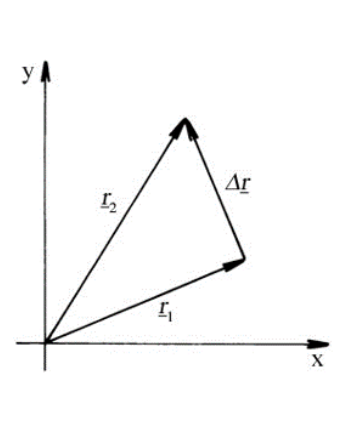
Egy folyó sebessége teljes szélességében $2\ \mathrm{m/s}$ nagyságúnak tekinthető. Egy úszó a partra merőleges irányban $3\ \mathrm{m/s}$-os sebességgel úszik át rajta.

a) Hol fog a túloldalon partot érni, ha a folyó 60 m széles?
b) Szerkesszük meg milyen irányban kell az úszónak úsznia, hogy a legrövidebb úton átjusson a túlsó partra?

A megoldást az alábbi ábra szemlélteti.

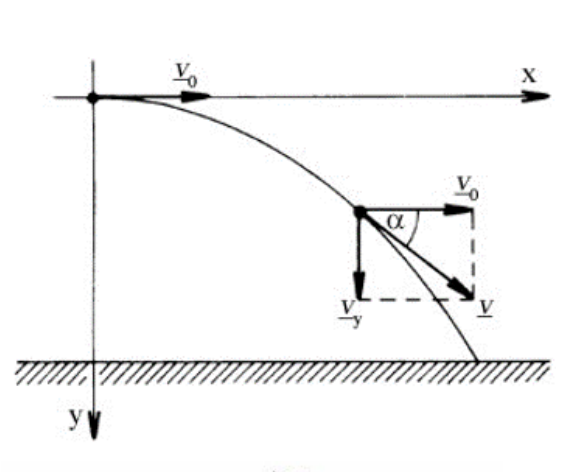


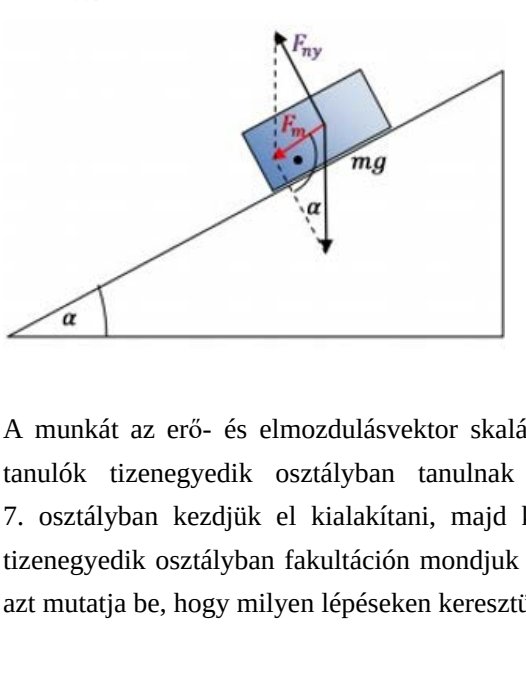
Ebben a feladatban a diákok alkalmazzák a vektorok összeadásának szabályát (olykor már általános iskolában is). Középiskolában viszont kilencedik osztály őszén meg is fogalmazzuk a paralelogramma-szabályt.



Tanév elején a vonatkoztatási rendszerekben a mozgások leírása a vonatkoztatási pontból kiinduló vektorokkal történik. Ekkor találkozik a diák először a helyvektor fogalmával. Az elmozdulásvektort a mozgás kezdő és végpontjába mutató helyvektorok különbségeként határozzuk meg, így a vektorok különbségének definiálása legkésőbb kilencedik osztály elején megtörténik.

Az összetett mozgások vizsgálata során a vektorokat egymásra merőleges komponensekre bontjuk. Ezt gyakorolják a tanulók a hajítások esetén, amikor a sebességvektort vízszintes és függőleges komponensekre kell bontaniuk. A lejtőn lecsúszó test mozgását vizsgálva viszont lejtővel párhuzamos és lejtőre merőleges komponensekre bontjuk az erővektort.





A munkát az erő- és elmozdulásvektor skaláris szorzataként határozzuk meg, amit a tanulók tizenegyedik osztályban tanulnak matematikából. Fizikából a fogalmat 7. osztályban kezdjük el kialakítani, majd kilencedik osztályban pontosítjuk, végül tizenegyedik osztályban fakultáción mondjuk ki a fenti formában. A következő feladat azt mutatja be, hogy milyen lépéseken keresztül zajlik ez a folyamat.

Mekkora munkát végez a 80 N nagyságú erő a testen, ha a munkavégzés során az elmozdulás 300 m és az elmozdulás

a) az erővel megegyező irányú,
b) merőleges az erőre,
c) 60 fokos szöget zár be az erővel?

Megoldás:

a) Hetedik osztályban még csak abban az esetben számolunk munkát, amikor az erőhatás irányában történik az elmozdulás. Ilyenkor egyszerűen az erő és elmozdulás nagyságának szorzatával számolhatunk:

$$W=F\cdot s=80\ \mathrm{N}\cdot 300\ \mathrm{m}=24000\ \mathrm{J}.$$

b) Kilencedik osztályban már komolyabban foglalkozunk az erő merőleges összetevőkre bontásával. A munka definícióját ekkor úgy pontosítjuk, hogy az erő és az erő irányú elmozdulás szorzataként számolható ki. Az elmozdulást felbontjuk erőirányú és arra merőleges összetevőkre. Ebben a feladatban az erő irányában nem történik elmozdulás, csak arra merőlegesen, így munkavégzés nem történik. A munkáról alkotott kép tehát kiegészül azzal, hogy az elmozdulásra merőleges erő nem végez munkát a testen.

c) Tizenegyedik osztályban fakultáción a szögfüggvények ismeretében ki tudjuk számolni az elmozdulásvektor erő irányú összetevőjének hosszát az $s\cdot\cos\gamma$ képlettel, ha γ az erő és az elmozdulás által bezárt szög. Így a munkát a következőképpen számoljuk:

$$W=F\cdot s\cdot\cos\gamma.$$

Matematika tanulmányainkat felhasználva ekkor már kimondhatjuk, hogy a munka az erő és az elmozdulás skaláris szorzataként számolható. A feladatban szereplő adatokkal:

$$W=\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}=F\cdot s\cdot\cos 60^\circ=80\ \mathrm{N}\cdot 300\ \mathrm{m}\cdot 0{,}5=12000\ \mathrm{J}.$$

Látható, hogy párhuzamos egyirányú vektorokra ez a képlet visszaadja a hetedikben tanultakat, merőleges elhelyezkedés esetén pedig nincs munkavégzés, hiszen $\cos 90^\circ=0$. Ez a feladat is rávilágít arra, hogy mennyire fontos az erő felbontása az elmozdulásra merőleges és azzal párhuzamos összetevőkre. (Az mindegy, hogy az erőt bontjuk fel összetevőkre, vagy az elmozdulást.)

A tizedikes fizikaórákon a vektorok vektoriális szorzásának előkészítése is megtörténik. Annak ellenére, hogy matematikából ez nem tananyag, érdemes erről tudnunk, így tudunk válaszolni azokra a kérdésekre, hogy a függvénytáblázatban a fizikai képletekben miért jelölik kétféleképpen a szorzást ($\cdot$ és $\times$ jelekkel) és miért kell a skaláris jelző a skaláris szorzathoz, miért nem beszélhetünk egyszerűen csak szorzásról.

Ezekre a kérdésekre adott válaszban támaszkodjunk a fizikai előismeretekre. Vegyük a munka képletét: $W=\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$. Ebben a vektormennyiségeket vastagon szedve jelöljük. Látszik, hogy két vektor szorzata nem vektor eredményre vezet. Nézzük meg, milyen jelenségkörben találkozhatnak a diákok olyan vektorszorzással, aminek eredménye is vektor!

Ha egy Q töltéssel rendelkező részecske a mágneses tér erősségét jellemző $\mathbf{B}$ mágneses indukcióvektorra merőlegesen $\mathbf{v}$ sebességgel mozog, akkor a töltött részecskére erő hat, aminek nagysága:

$$F=Q\cdot v\cdot B.$$

Az erő iránya merőleges a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{B}$ vektorra, irányát „jobbkézszabállyal" határozzuk meg.

Ha a részecske az indukcióvonalakkal párhuzamosan mozog, akkor nincs erőhatás. Általános esetben célszerű a sebességvektort az indukcióvonalakra merőleges és azzal párhuzamos összetevőkre bontani, amivel az erő nagyságára az

$$F=Q\cdot v\cdot B\cdot sin\alpha$$

összefüggést kapjuk, ahol α a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{B}$ vektorok által bezárt szög. Ha az erő irányát a „jobbkézszabálynak" megfelelően meghatározzuk, már a vektoriális szorzat fogalmánál tartunk. Emelt szintű fizika csoportban ezt meg is mondhatjuk és megmutathatjuk, hogy a függvénytáblázatban szereplő

$$\mathbf{F}=Q\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

képlet ezt jelenti, amiben a $\times$ jel a vektoriális szorzat jele.

Látjuk, hogy itt két vektor szorzása vektort eredményez. Emiatt tehát szükség van a kétféle jelölésre és a megkülönböztető skaláris (és itt elmondhatjuk, hogy vektoriális) jelzőre.

Ismétlés, elmélyítés, komplex gondolkodás fejlesztése

A fizikaórák jó színterei a tanult matematikai összefüggések gyakorlásának, elmélyítésének. Az órák zömében a diáknak rutinosan kell kezelnie a mértékegységek átváltását, a hatványozás azonosságait, a törtekkel való műveleteket, az egyenletrendezési lépéseket. A bevezetőben a teljesség igénye nélkül felsoroltam néhány területet, amelyek ismeretére szükségünk lehet a különböző fizikai problémák megoldásakor. Sok esetben a matematikaórán előforduló példáknál összetettebb feladatokban kell összekapcsolni az ezekről tanultakat. Egy közép- és egy emelt szintű fizika érettségi példán keresztül bemutatom, hogy milyen feladatokkal kell megbirkózniuk a diákoknak.

Egy gömb alakú, gömbszimmetrikus anyageloszlású, 9000 km sugarú bolygó körül két űrszonda kering körpályán. Az egyik szonda sebessége $4800\ \mathrm{m/s}$, a pályájának sugara 50000 km. A másik szonda pályájának sugara 30000 km. Mekkora a bolygó átlagsűrűsége? A gravitációs állandó: $\gamma=6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$.

Középszintű fizika érettségi 2014. május 19. 2. feladat a) része

Megoldás:

A körpályán keringő űrszonda mozgásához szükséges centripetális erőt a Föld és a szonda között fellépő gravitációs erő biztosítja, így az $m\cdot\frac{v^2}{r}=\gamma\cdot\frac{M\cdot m}{r^2}$ képlettel számolhatunk, ahol:

a bolygó tömege: M,
az űrszonda tömege: m,
az űrszonda sebessége: $v=4800\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}=4{,}8\cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$,
a körpálya sugara: $r=50000\ \mathrm{km}=5\cdot 10^7\ \mathrm{m}$,
a bolygó sugara: $R=9000\ \mathrm{km}=9\cdot 10^6\ \mathrm{m}$.

A sűrűség kiszámításához először számoljuk ki a bolygó tömegét!

Az egyenletet egyszerűsítve és rendezve, illetve felhasználva hogy $1\ \mathrm{N}=1\ \mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, azt kapjuk, hogy:

$$M=\frac{v^2\cdot r}{\gamma}=\frac{\left(4{,}8\cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\cdot 5\cdot 10^7\ \mathrm{m}}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}}=\frac{4{,}8^2\cdot 5}{6{,}67}\cdot\frac{10^6\cdot 10^7}{10^{-11}}\cdot\frac{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\cdot\mathrm{m}}{\frac{\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}}\approx 17{,}3\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}=1{,}73\cdot 10^{25}\ \mathrm{kg}.$$

A bolygó átlagsűrűsége:

$$\rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{\frac{4R^3\pi}{3}}=\frac{1{,}73\cdot 10^{25}\ \mathrm{kg}}{\frac{4\cdot(9\cdot 10^6\ \mathrm{m})^3\pi}{3}}=\frac{3\cdot 1{,}73}{4\cdot 9^3\pi}\cdot\frac{10^{25}}{10^{18}}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\approx 0{,}000566\cdot 10^7\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}=5660\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

A feladat megoldásánál alkalmazott matematikai ismeretek: mértékegység-átváltás (fordított arányosság), normálalak, műveletek normálalakban megadott számokkal, műveletek törtekkel, hatványozás azonosságai, gömb térfogata, egyenletrendezés lépései, kerekítés. A diákok számára a feladatmegoldást nehezíti, hogy a tanult azonosságokat számok mellett a mértékegységekre is kell alkalmazni. Olykor könnyítésként az SI egységekben megadott mértékegységeket nem írjuk be az egyenletbe, csak megállapítjuk, hogy a végeredményt milyen egységben kapjuk.

A rendszeresen használt matematikai összefüggések (hatványozás, törtek, arányosság) mellett szinte minden ismeretre mutathatunk gyakorlati alkalmazást a fizika területéről. Ezek ismerete segítheti a tanulókat az emelt szintű érettségire készülésben, és elkerülhetjük vele azokat a kérdéseket, hogy „Mire fogom én ezt használni?" Természetesen ehhez szükséges, hogy az alkalmazási lehetőségekkel a matematikatanár is tisztában legyen és ha lehet, minél többel találkozzon a diák a matematikaórákon.

A második példa az emelt szintű fizika érettségi szóbeli részének egy mérési feladatából származik.

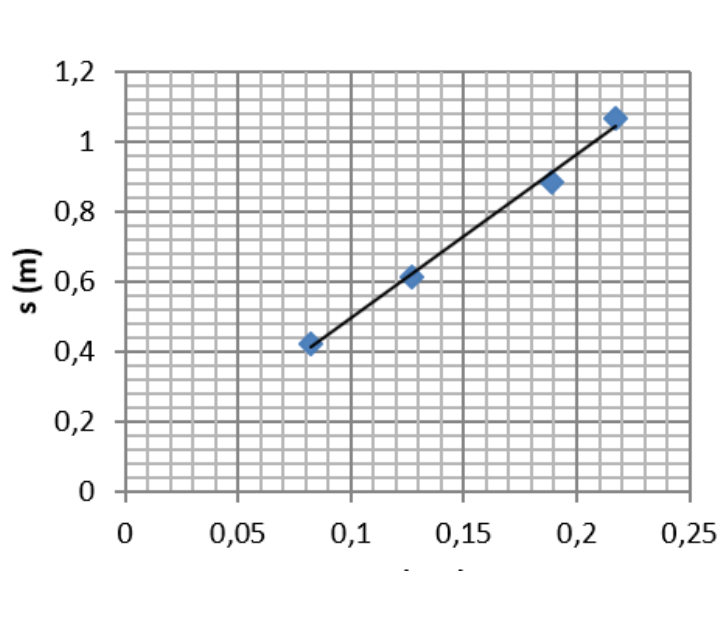
Különböző magasságokból leeső acélgolyó esési idejének mérésével határozza meg a nehézségi gyorsulás értékét!

Emelt szintű fizika érettségi szóbeli mérési feladata

Elméleti háttér: A szabadesést leíró $s=\frac{g}{2}t^2$ képlet alapján az s egyenesen arányos t^2-tel, így az $s(t^2)$ függvény meredekségének kétszerese adja g értékét.

s (m)	t_1 (s)	t_2 (s)	t_3 (s)	t (s)	t^2 (s^2)	g $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$
0,423	0,296	0,277	0,286	0,286	0,082	10,319
0,613	0,353	0,356	0,361	0,357	0,127	9,638
0,885	0,428	0,435	0,441	0,435	0,189	9,368
1,068	0,46	0,47	0,467	0,466	0,217	9,850

$$g=\frac{10{,}319+9{,}638+9{,}368+9{,}850}{4}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\approx 9{,}79\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$



A megoldást egy konkrétan elvégzett mérés adatai alapján adtam meg kétféle módon. Az első módszerben a különböző esési magasságokhoz mért időadatok átlagolása után az első és hatodik oszlop adataiból a $g=\frac{2s}{t^2}$ képletbe való behelyettesítéssel minden magasság mellett számoltunk egy g értéket, majd ezeket átlagoltuk.

A második módszerben a táblázat 1. és 6. oszlopa alapján ábrázoltuk az $s(t^2)$ függvényt. A vízszintes tengelyen a t értékeket ábrázolva a négyzetes úttörvényt mutatná a grafikonunk, így viszont egyenes arányosságot fedezhetünk fel a tengelyeken jelölt mennyiségek között. Ez jól látszik abból, hogy a mérési adatokra illesztett egyenes meghosszabbítása átmegy az origón.

A g értékét a grafikon meredekségének kétszerese adja, ami a pontokra illesztett egyenes alapján:

$$g=\frac{(0{,}96-0{,}72)\ \mathrm{m}}{(0{,}2-0{,}15)\ \mathrm{s}^2}\cdot 2=9{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

(A két érték közötti eltérés legfőbb oka, hogy a grafikon felbontása nem elég jó, a leolvasott értékek pontatlanok, de a módszer szemléltetésére alkalmasak.)

A fent ismertetett függvényábrázolási technikával matematikaórákon nem találkoznak a diákok. A technika azért hasznos, mert a pontokra parabolát szabad kézzel nem tudunk illeszteni, egyenes viszont egész könnyen illeszthető, amelynek a meredekségét is könnyen le tudjuk olvasni. Fizikaórán több állandó értékét határozhatjuk meg hasonló módon előállított lineáris függvény meredekségéből (például a rugóállandót a rugón függőlegesen rezgő test periódusidejének és a rezgő test tömegének kapcsolatát vizsgálva).

Mint láthattuk, a fizika feladatok megoldása általában összetett gondolkodást igényel. A fizikai ismeretek mellett a tanulónak a matematika több területén addig szeparáltan tanított ismereteit kell összekapcsolnia. Ezek a feladatok hozzájárulnak a komplex gondolkodás fejlesztéséhez, amire a matematika érettségi feladatok megoldásához is szükség lesz.

A bemutatott példákból látható, milyen fontos a számológép rutinos használata. Míg matematikaórán sok esetben törekszünk arra, hogy a tanuló fejben próbálja kiszámítani a végeredményt, addig fizikaórán már hetedik osztálytól tanítjuk a gyerekeket a számológép használatra. Ennek természetesen az az oka, hogy a mérésekből nyert adatok nem olyan kerek eredményekre vezetnek, mint amivel a matematikaórákon dolgoznak, így fejszámolásra kevésbé alkalmasak (mint az érettségi mérési feladatnál is láthattuk). A normálalak használatánál megbeszéljük, hogyan jelenik meg a számológép kijelzőjén, hogyan kell beírni a gépbe a hatványokat. Gyakoroljuk a műveleti sorrendnek megfelelően történő műveletsor beírását, a hatványokkal való számításokat, a szögfüggvények számítását, a fok és a radián közötti átváltást, stb. Ezek a gyakorlatok a matematikaórákon is nagyon hasznosnak bizonyulnak.

Egy-egy fizikafeladatot érdemes időnként matematikaórára, vagy szakkörre bevinni. Ezt tehetjük például úgy, hogy az aktuális matematikai problémát összekapcsoljuk az aktuális, vagy a már tanult fizikai problémával. Ennek előnye, hogy a tanulók szövegértése, a szakmai szövegben való eligazodása, komplex gondolkodása fejlődik. Emellett szakköröseink, versenyzőink a várhatóan emelt szintű matematika érettségijükre készülve konkrétan találkozhatnak különböző alkalmazási területekkel, miközben problémamegoldó képességük fejlődik.

Tantárgyunk tanítása során mindannyian hasonló problémákkal küzdünk. Az óraszám kevés, a tananyag sok és gyakran változik. Problémát okoz, hogy a diákok érdeklődését egyre nehezebb felkelteni, fenntartani. A széttagolt ismeretek integrálására nem marad idő. A problémák egy részére talán megoldást adhat a tantárgyak közötti összefonódások feltérképezése, és az ebből adódó lehetőség felismerése. A matematika és fizika között különösen sok kapcsolódási pont van. A cikk kereteibe ebből csak egy kis töredék fért bele. A Pázmány Péter Katolikus Egyetemen 2019. novemberében tartott előadásomhoz készített háttéranyag ennél jóval több lehetőségre is rámutat: `https://tovabbkepzes.itk.ppke.hu/content/Matematika/2019/4_Fizika.pdf`.

A cikkhez válogatott néhány példából talán kiderül, hogy érdemes belelátni ezekbe a kapcsolatokba. Fontos ismerni, hogy például a fizika tantárgy a matematikának milyen alkalmazási területeit mutatja be, mit és milyen életkorban használ fel a matematikai ismeretekből, továbbá milyen matematikai módszerekkel, fogásokkal ismerteti meg a tanulókat, amelyekkel a matematikaórákon nem találkoznak. Ennek ismeretében tanításunk színesíthető, időbeosztásunk hatékonyabbá tehető. A tantárgyi kapcsolódások ismeretében a nem matematikai irányban továbbtanuló diákjaink számára is rávilágíthatunk a tanított ismeretek fontosságára, alkalmazási lehetőségeire az élet különböző területein.

Bakosné Novák Andrea
Kempelen Farkas Gimnázium, Budapest

alkalmazott fizika
matematikatanítás

Adatkezelés Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

2020. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Egy kör és más semmi... szerkesztések csak vonalzóval

Előzmények

A 9. osztályos matematika tanórán egy érdekes problémakört érintettünk. Geometriából éppen a síkbeli alapszerkesztéseket tekintettük át, az ezekhez kötődő kérdések két (alap)feladat tárgyalásakor vetődtek fel. A továbbiakban először ismertetjük a két (nagyon egyszerű) alapfeladat (az 1. és a 2. feladat) egy lehetséges megoldását és a kapcsolódó tanulói kérdést, majd megadjuk a felvetett problémakör néhány eredményét.

Az eszközkorlátozott szerkesztések témaköre önállóan is érdekes. Általában nem igényel mélyebb előismereteket, ezért a tanulók kedvelni szokták, a dinamikus geometriai szoftverekkel pedig maga a szerkesztés technikai végrehajtása sem túl fáradságos.

1. feladat: Adott egy e egyenes és rajta kívül egy P pont. Szerkesszünk a P pontból merőlegest az e egyenesre!

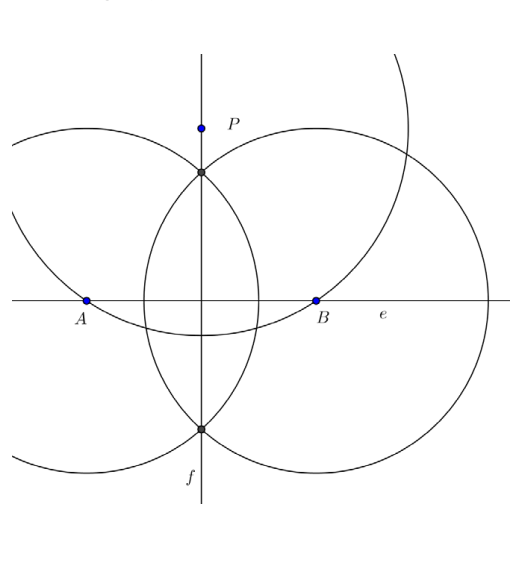
Megoldás:

1°: P középpontú k_1 kört rajzolunk úgy, hogy a kör sugara, r_1 nagyobb legyen a P és e távolságánál. k_1 és e metszéspontjait jelölje A és B.

2°: A középpontú k_2 kört rajzolunk „elég nagy” r_2 sugárral (azaz a kör sugarára $r_2 > \frac{AB}{2}$ teljesüljön).

3°: B középpontú k_3 kört szerkesztünk ugyanakkora r_2 sugárral.

4°: k_2 és k_3 egyik metszéspontját P-vel összekötve megkapjuk a kért f egyenest (f az AB szakasz felező merőlegese).



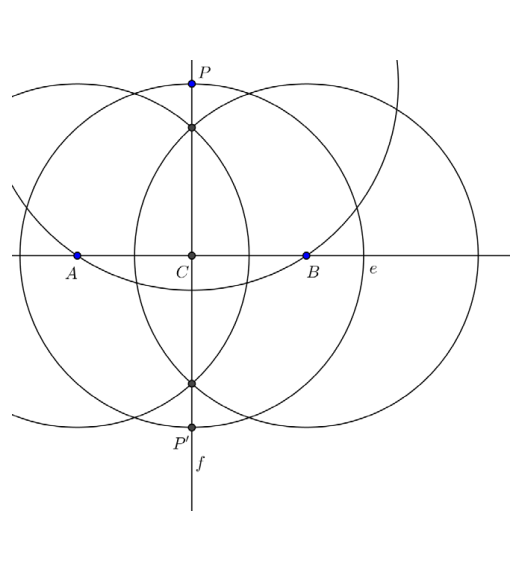
2. feladat: Adott egy e egyenes és rajta kívül egy P pont. Tükrözzük a P pontot az e egyenesre!

Megoldás:

1°. Felhasználjuk az 1. feladat megoldását, megszerkesztjük az e-re merőleges, P-n átmenő f egyenest.

2°. Jelölje C az e és f egyenesek metszéspontját. Felvesszük a C középpontú, CP sugarú k_4 kört.

3°. k_2 és f egymást P-ben és P'-ben metszik, a P pont keresett tükörképe P'.



Ebben a megoldásban a P pont tengelyes tükörképének megszerkesztéséhez 4 kört vettünk fel.

Természetes módon adódik a kérdés: el lehet-e végezni a szerkesztést ügyesebben, kevesebb kör segítségével?

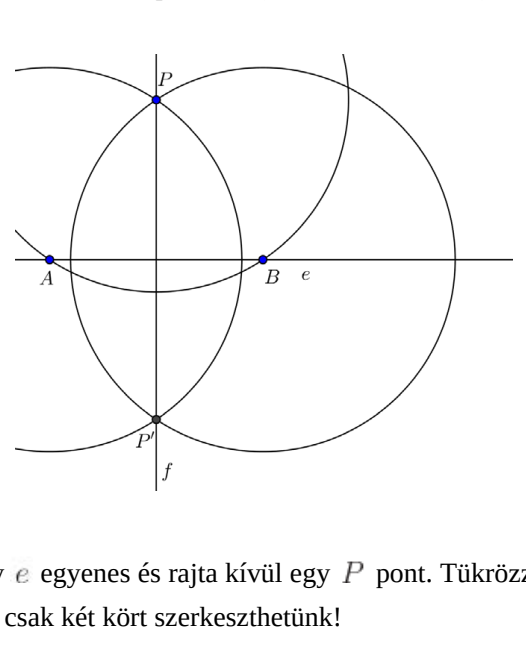
Három körrel szinte minden tanuló tudta a megoldást, két körrel már némi kreativitásra is szükség volt.

Ez a két feladat vezetett a további kérdésfeltevésekre:

3. feladat: Adott egy e egyenes és rajta kívül egy P pont. Tükrözzük a P pontot az e egyenesre úgy, hogy a szerkesztéshez csak három kört rajzolhatunk!

Megoldás:

Az 1. feladat megoldásának szerkesztését annyiban módosítjuk, hogy a k_1, k_2 és k_3 körök sugara egyenlő legyen. Ekkor k_2 és k_3 egyik metszéspontja P, míg a másik metszéspontja P', ami P tükörképe e-re. ($APBP'$ rombusz.)



4. feladat: Adott egy e egyenes és rajta kívül egy P pont. Tükrözzük a P pontot az e egyenesre úgy, hogy csak két kört szerkeszthetünk!

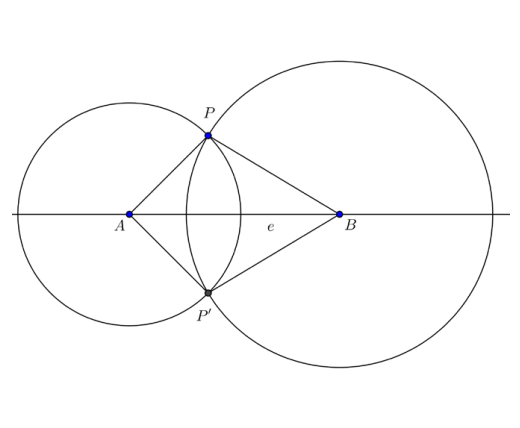
Megoldás:

1°. Legyen A az e egyenes tetszőleges pontja. Felvesszük az A középpontú, AP sugarú k_1 kört.

2°. Hasonlóan, ha B az e egyenes egy (A-tól különböző) tetszőleges pontja, akkor megrajzoljuk a B középpontú, BP sugarú k_2 kört.

3°. Ekkor k_1 és k_2 P-től különböző metszéspontja P', ami P tükörképe e-re.

Indoklásul arra hivatkozhatunk, hogy $APBP'$ deltoid, és ennek PP' átlóját az AB átló merőlegesen felezi.



Ezután következett a nehéz kérdés: vajon a szerkesztés (P tükrözése e-re) elvégezhető-e egyetlen kör felvételével?

Hasonló, korlátozott szerkesztésekkel kapcsolatos kérdések a 11. osztályos tanórán és szakkörön is felvetődtek. A továbbiakban ezekből a kérdésekből és a rájuk adott válaszokból gyűjtöttünk össze néhányat.

Pont tükrözése egyenesre egyetlen kör felhasználásával

Először segédfeladatként P-ből merőlegest szerkesztünk.

5. feladat: Adott egy e egyenes és rajta kívül egy P pont. Szerkesszünk a P pontból merőlegest az e egyenesre úgy, hogy a szerkesztéshez csak egyetlen kört rajzolhatunk!

Megoldás:

1°. Kijelölünk egy O pontot ez e egyenesen, és az ábra szerint felveszünk egy k kört. A kör A és B pontokban metszi az egyenest. (A kör mindig felvehető úgy, hogy P körön kívüli pont legyen, és e-re vonatkozó merőleges vetülete A és B közé essen.) Ezek után már csak vonalzót használunk.

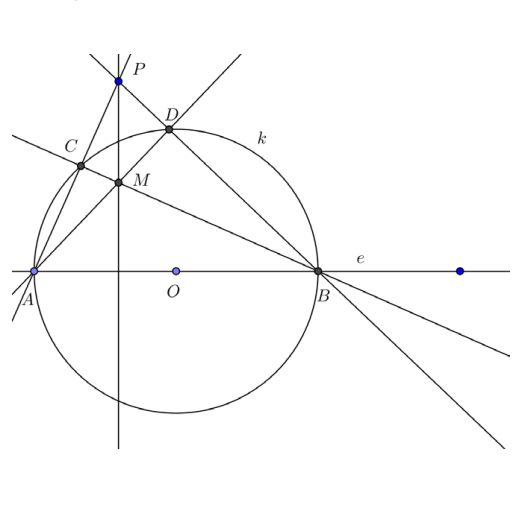
2°. Meghúzzuk a PA egyenest, ez k-t C-ben metszi.

3°. Hasonlóan a PB egyenes k-t D-ben metszi.

4°. Felvesszük a BC egyenest. Thalész tétele miatt ez merőleges AP-re.

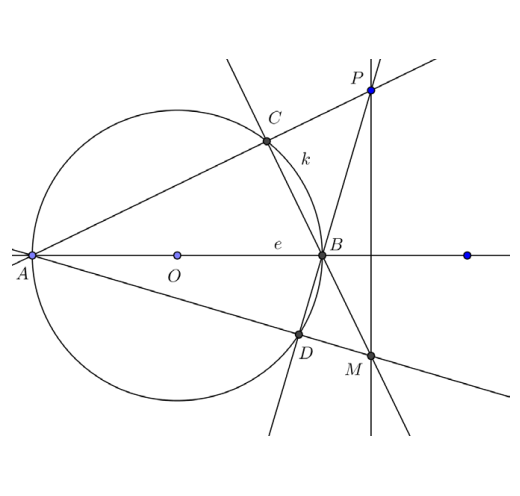
5°. Felvesszük az AD egyenest. Thalész tétele miatt ez BP-re merőleges; BC és AD metszéspontját jelölje M.

6°. A PM egyenes lesz a feladat megoldása. Ugyanis M az ABP háromszög BC és AD magasságainak metszéspontja, azaz magasságpont; akkor pedig PM is magasságvonal a háromszögben.



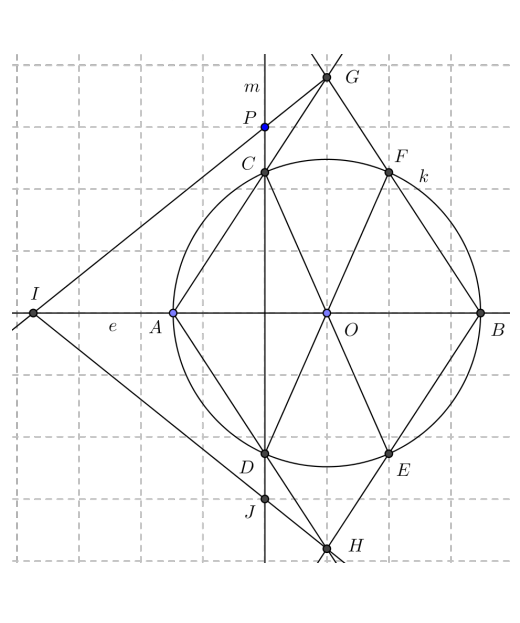
Megjegyzések: A szerkesztés akkor is végrehajtható, ha P a körön belüli pont (ekkor P és M szerepet cserél).

Sőt a szerkesztés akkor is „működik”, ha ABP tompaszögű háromszög (például P merőleges vetülete az AB szakasz B-n túli meghosszabbítására esik), a szerkesztési lépések ugyanazok maradnak.



6. feladat: Adott egy e egyenes és rajta kívül egy P pont. Tükrözzük a P pontot az e egyenesre úgy, hogy a szerkesztéshez csak egyetlen kört rajzolhatunk!

Első megoldás ***(Korinek Ádám 11.a):***



1°. Az 5. feladat alapján P-ből az e (AB) egyenesre megszerkesztjük az m merőlegest. Ez a k kört C-ben és D-ben metszi.

2°. Felvesszük a CO és DO egyeneseket, ezek k-t E-ben, illetve F-ben metszik.

3°. Felvesszük a BF és BE egyeneseket, ezek AC-t G-ben, AD-t H-ban metszik.

4°. Felvesszük a GP egyenest, ez az I pontban metszi e-t.

5°. Végül IH és m metszéspontja legyen J, ez a keresett P' pont, P tükörképe.

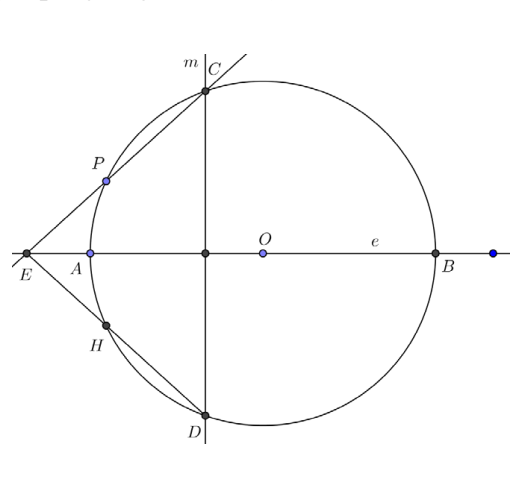
Indoklás: G és H szimmetrikus helyzetű e-re, így IPJ is szimmetrikus háromszög.

Megjegyzések: Általános módszert kaptunk: P tengelyes tükrözéséhez elegendő egy G és H tükörkép-pontpár megszerkesztése (a tengelyes szimmetria *közvetítő szerepe*).

Problémát jelenthet, ha GP párhuzamos e-vel (I nem áll elő). Azonban a módszerünk alapján már E és F tükrös helyzetűek, a szerkesztés velük is befejezhető (a 3. és 4. szerkesztési lépés felesleges). Gyorsabban célt érünk tehát, ha a PF és e metszéspontját vesszük fel (K), ekkor KE és m metszéspontja jelöli ki P'-t.

A két lehetőség közül az egyik biztosan végrehajtható, I vagy K valamelyike mindig létezik.

Második megoldás ***(Szepessy Hajnalka 11.a):***



1°. O középpontú, P-n átmenő k kört rajzolunk. A kör A és B pontokban metszi e-t ($OA = OB = OP$).

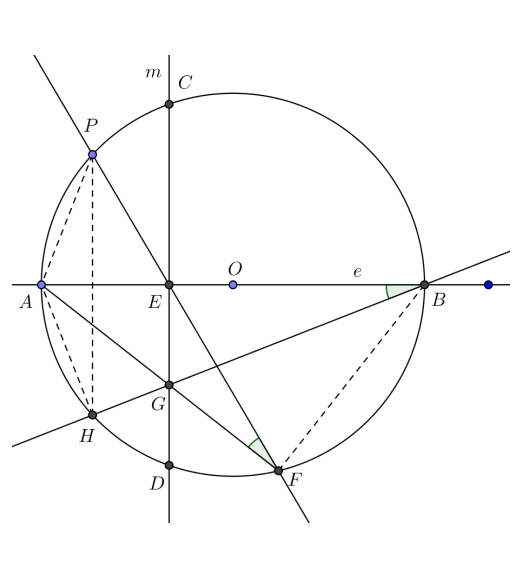
2°. Az 5. feladat alapján az e egyenesre tetszőleges pontból m merőlegest szerkesztünk evvel a k körrel. A kört m metszi C-ben és D-ben.

3°. CP metszi e-t E-ben.

4°. ED metszi k-t H-ban. Készen vagyunk: $P' \equiv H$.

Megjegyzések: Ebben a megoldásban is a pontpárok tengelyes szimmetriáját használtuk fel (és a *kör közvetítő szerepét*).

Harmadik megoldás ***(Kotán Tamás 11.a):***



1°. O középpontú, P-n átmenő k kört rajzolunk. A kör A és B pontokban metszi e-t ($OA = OB = OP$).

2°. Az 5. feladat alapján az e egyenesre tetszőleges pontból m merőlegest szerkesztünk a k körrel. A kört m metszi C-ben és D-ben, az e egyenest E-ben.

3°. PE metszi k-t F-ben.

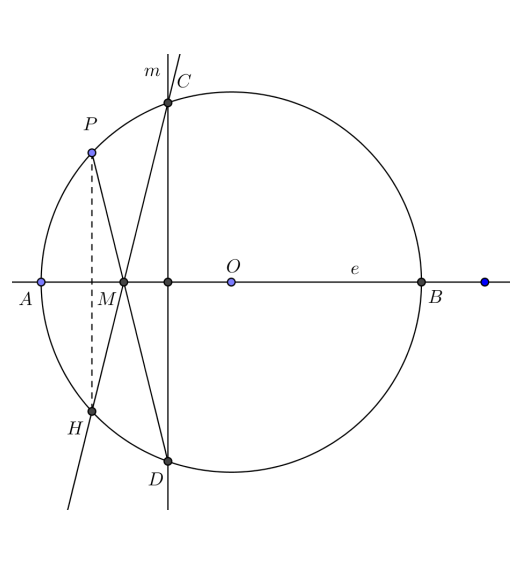
4°. AF metszi m-et G-ben.

5°. BG metszi k-t H-ban.

Állítás: $P' \equiv H$.

Bizonyítás (Dobos Sándor): $EGFB$ húrnégyszög, mert $GEB\sphericalangle = GFB\sphericalangle = 90^\circ$. ($GFB\sphericalangle = AFB\sphericalangle$.) Ezért $EFG\sphericalangle = EBG\sphericalangle$ (kerületi szögek). Ekkor a k körben a szögekhez tartozó ívek és a húrok is egyenlők: $PA = AH$. Vagyis H valóban P tükörképe e-re.

Negyedik megoldás ***(Kotán Tamás 11.a):***



1°. O középpontú, P-n átmenő k kört rajzolunk. A kör A és B pontokban metszi e-t ($OA = OB = OP$).

2°. Az 5. feladat alapján az e egyenesre tetszőleges pontból m merőlegest szerkesztünk a k körrel. A kört m metszi C-ben és D-ben.

3°. PD metszi e-t M-ben.

4°. CM metszi k-t H-ban.

Állítás: $P' \equiv H$.

Bizonyításként arra hivatkozhatunk, hogy $PCDH$ az e-re tengelyesen szimmetrikus alakzat, azaz húrtrapéz.

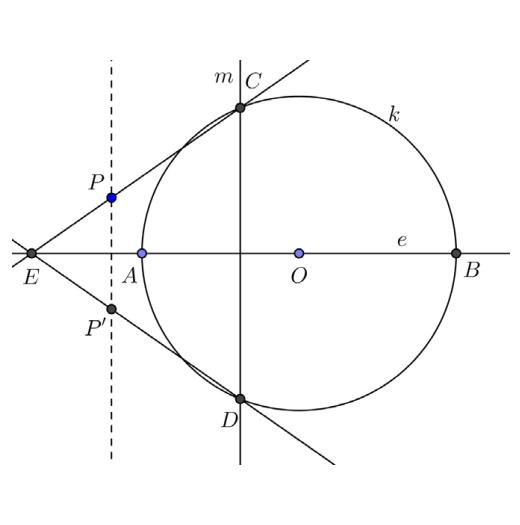
Pont tükrözése egyenesre egyetlen kör felhasználásával – de a kört más rajzolja meg

Az eddigi szerkesztésekben megszorító feltétel volt, hogy csak egyetlen kör rajzolható. Igaz, ezt úgy vehettük fel, ahogy szükségünk volt rá. Érdekes kérdés vetődött fel az órákon, további szigorításként: mi a helyzet akkor, ha (az egyetlen) kört más rajzolja meg? Azaz, ha a kör, a P pont és az egyenes helyzete már rögzített.

Ha az egyenes a kör átmérője, és a P pont a körön van, akkor például a fenti második megoldás most is alkalmazható.

7. feladat: Adott egy e egyenes és egy kör, amelynek O középpontja az egyenesen van. Továbbá legyen az adott P pont például a körön kívül. Tükrözzük a P pontot az e egyenesre úgy, hogy további kört már nem rajzolhatunk!

Megoldás:



A k kör és e két metszéspontja legyen A és B.

1°. Az 5. feladat alapján az e egyenesre tetszőleges pontból m merőlegest szerkesztünk, ez a kört metszi C-ben és D-ben.

2°. CP metszi e-t E-ben.

3°. Felvesszük az ED egyenest.

4°. P-ből merőlegest húzunk e-re, ez kimetszi ED-ből a keresett P' pontot.

Megjegyzések: Ismét az ábra tengelyes szimmetriáját használtuk ki, csak most a külső P pont miatt két merőlegest kellett szerkesztenünk. De a szerkesztés ugyanígy lépésenként végrehajtható akkor is, ha a P pont a körön belül van.

A kör középpontjának szerepe

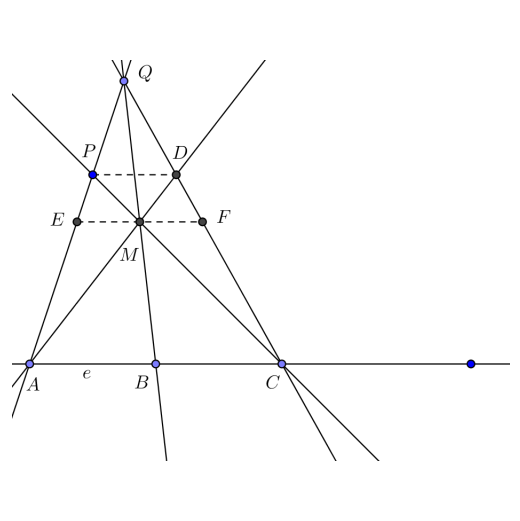
Nehezebb a szerkesztési feladat akkor, ha az e egyenes nem átmérője az adott körnek. Ekkor új ötletre van szükség (ez lesz a ***trapéztrükk***).

Először figyeljük meg, hogy az eddigi szerkesztések során egyedül a 6. feladat első megoldása használta fel az O pontot, az adott kör középpontját. A többi megoldásban O-ra nem volt szükség, a körközéppont ismerete nélkül is végrehajthatók voltak a szerkesztések.

A továbbiakban egy olyan módszert mutatunk, amely három ***ekvidisztáns*** helyzetű pont esetén alkalmazható. (A, B, C egy egyenesen lévő pontok ekvidisztáns helyzetűek, ha például $AB = BC$.) Ha a korábbi szerkesztésekben ismerjük az O pontot, akkor ennek alapján további megoldási lehetőségekhez jutunk, mert ekkor az adott A, O, B pontok ekvidisztáns helyzetűek.

8. feladat (**segédfeladat – trapéztrükk**): Adott az e egyenesen három ekvidisztáns helyzetű A, B, C pont ($AB = BC$). Szerkesztendő csak vonalzóval külső P ponton keresztül e-vel párhuzamos egyenes.

Megoldás:



1°. Az AP egyenesen felveszünk egy tetszőleges Q pontot.

2°. Felvesszük a QB egyenest.

3°. Felvesszük a PC egyenest, ez metszi QB-t M-ben.

4°. Meghúzzuk a QC egyenest.

5°. Az AM egyenes metszi QC-t D-ben.

Állítás: PD párhuzamos e-vel.

Bizonyítás: A trapézok egy ismert tulajdonságát használjuk fel. Bármely $ACDP$ trapézban, ha az átlók M metszéspontján át párhuzamost húzunk az alapokkal, akkor a szárakkal vett E, F metszéspontokra $EM = MF$. Emiatt az ACQ kiegészítő sháromszög QB súlyvonalán rajta van M; a szerkesztés során ennek a tételnek a megfordítását használtuk fel.

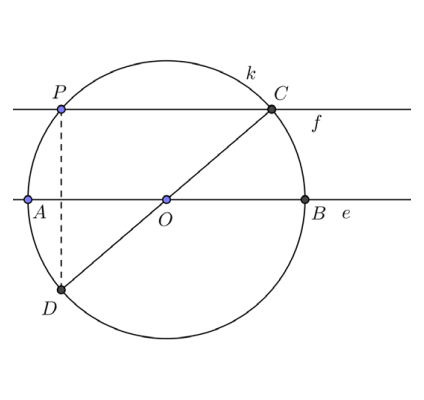
Alkalmazhatjuk Ceva tételét is az ACQ háromszögben. Az AD, BQ, CP transzverzálisok egy ponton mennek át, ezért $PA \cdot BC \cdot DQ = QP \cdot AB \cdot CD$. Innen $\frac{QP}{QD} = \frac{PA}{DC}$, és a párhuzamos szelők tételének megfordításához ennyi elég, AC és PD párhuzamosak.

Bevezetünk egy új definíciót: ha egy egyenesen adott három ekvidisztáns helyzetű pont, akkor ***irányegyenesnek*** nevezzük. (A trapéztrükkel azt mutattuk meg, hogy külső pontból adott irányegyenessel tudunk párhuzamost szerkeszteni úgy, hogy csak vonalzót használunk.)

A trapéztrükk segítségével a 7. feladat szerkesztését akkor is el tudjuk végezni, ha a P pont az adott körön van.

9. feladat: Adott egy e egyenes és egy k kör, amelynek O középpontja az egyenesen van. Továbbá legyen az adott P pont a körön. Tükrözzük a P pontot az e egyenesre úgy, hogy további kört már nem rajzolhatunk!

Megoldás:



A k kör és e két metszéspontja legyen A és B. Mivel A, O, B ekvidisztáns pontok, így e irányegyenes.

1°. P-n keresztül párhuzamost szerkesztünk e-vel. Az így kapott f egyenes másodszor C-ben metszi k-t.

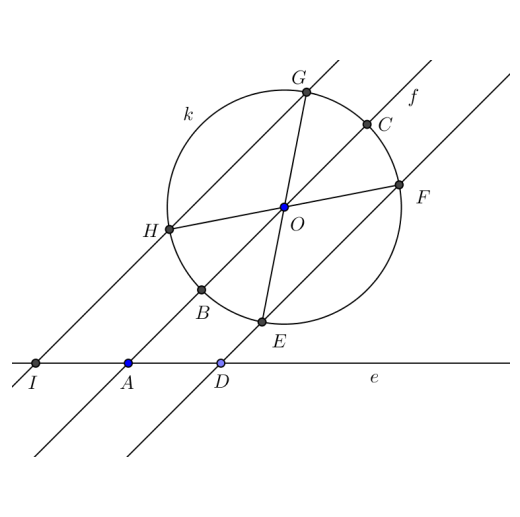
2°. Felvesszük a CO egyenest, ami D-ben metszi a kört.

Készen vagyunk: Thalész tétele miatt $CPD\sphericalangle = 90^\circ$, így P-nek e-re vonatkozó tükörképe D.

Még megoldunk két segédfeladatot.

10. feladat (segédfeladat – párhuzamos húzása): Adott az O középpontú k kör. Szerkesszünk csak vonalzó felhasználásával külső P ponton keresztül adott e egyenessel párhuzamos egyenest!

Megoldás:



A feladat tulajdonképpen három ekvidisztáns pont szerkesztése e-re, mert így akkor e irányegyenes lesz. (És vele párhuzamos egyenes már szerkeszthető a trapéztrükkel.)

1°. Az e egyenes tetszőleges A pontját összekötjük O-val. Az így kapott f egyenes metszéspontjai k-val B és C.

2°. $f(B,O,C)$ irányegyenes, így az e egyenes egy D pontjából párhuzamost húzunk f-fel úgy, hogy az egyenes két pontban metssze k-t. A metszéspontokat jelölje E és F.

3°. Az EO egyenes metszi k-t G-ben, az FO egyenes pedig metszi k-t H-ban.

4°. A GH egyenes metszi e-t I-ben.

Állítás: $IA = AD$. Ugyanis $EFGH$ téglalap, amelyben f középvonal, így a három párhuzamos egyenes ekvidisztáns pontokban metszi e-t.

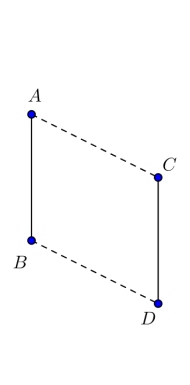
Készen vagyunk: e irányegyenes lett, a trapéztrükk alkalmazható.

5°. Az e irányegyenes segítségével megszerkesztjük a P-n átmenő párhuzamos egyenest.

Megjegyzés: A 2. lépésben fordítva is eljárhatunk: az $f(B,O,C)$ irányegyenessel párhuzamost húzhatunk a kör egy tetszőleges pontján át. Ha például az ábra szerinti E ponton keresztül húzunk párhuzamost, akkor ez kijelöli a D pontot.

11. feladat (segédfeladat – AB szakasz eltolása): Adott az O középpontú k kör, valamint az A, B, C pontok. Toljuk el az AB szakaszt úgy, hogy az A pont C-be kerüljön!

Megoldás:



A B pont képét jelölje D.

I. eset: Ha A, B, C háromszöget alkot, akkor $ABDC$ paralelogramma, amelynek szemközti oldalai párhuzamosak.

Ekkor a 10. segédfeladat alapján párhuzamost húzunk AB-vel C-n keresztül, és AC-vel B-n keresztül. A két egyenes metszéspontja D.

II. eset: Ha A, B, C egy egyenesbe esik.

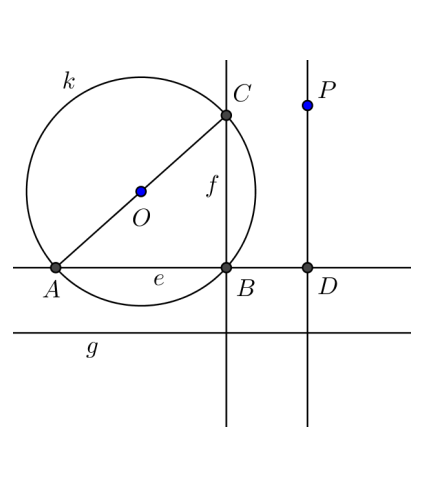
Ekkor viszont az egyenesen kívül eső tetszőleges pontba eltolhatjuk az AB szakaszt (I. eset). Az így kapott $A'B'$ szakasz és C már nem esik egy egyenesre, alkalmazhatjuk az I. eset szerkesztését: az $A'B'$ szakaszt eltoljuk úgy, hogy A' C-be kerüljön.

Ha tehát a kör már adott a szerkesztés kezdetekor

A 8., 10. és 11. segédfeladatokkal most már elvégezhetjük a kitűzött szerkesztésünket.

12. feladat: Adott egy egyenes, egy külső P pont és egy O középpontú kör. Tükrözzük a P pontot az egyenesre úgy, hogy további kört már nem rajzolhatunk!

Megoldás:



I. eset: Ha az adott e egyenes metszi a k kört, akkor a metszéspontokat jelölje A, B. (Feltehetjük, hogy AB nem átmérő; ezt az esetet a fentiekben már részletesen tárgyaltuk.)

1°. Az AO egyenes metszi k-t C-ben.

2°. Felvesszük az $f(CB)$ egyenest. Ez merőleges e-re Thalész tétele miatt.

3°. P-ből párhuzamost szerkesztünk f-fel (10. segédfeladat), ez az egyenes D-ben metszi e-t.

4°. Végül PD szakaszt két lépésben eltoljuk úgy, hogy a P pont D-be kerüljön (11. segédfeladat).

Az így kapott DP' szakasz P' pontja lesz P tükörképe.

II. eset: Ha az adott g egyenes nem metszi a k kört.

Ekkor a kör tetszőleges A pontjából párhuzamost húzunk g-vel. Így megkapjuk az előző I. eset e egyenesét, a feladatot visszavezettük I. megoldására. (És persze akkor is végrehajthatjuk a szerkesztést, ha g éppen érinti a kört.)

Zárás

Ha már eddig eljutottunk a szakkörön, akkor talán érdemes Steiner nevezetes szerkesztési tételét is megbeszélni. A „csakvonalzós” tétel szerint az euklideszi szerkesztések (két egyenes metszéspontjának, egyenes és kör metszéspontjainak, két kör metszéspontjainak szerkesztése) elvégezhetők csak vonalzó használatával is, ha adott a síkon egy kör, amelynek a középpontját ismerjük.

Orosz Gyula
Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium

matematikatanítás geometria

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Lángné Lázi Márta 2020. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Műszaki és természettudományok közelről – BME TTK Science Camp

Műszaki és természettudományok közelről

BME TTK Science Camp

„A ma tudománya a jövő technológiája”

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Természettudományi Kara *Science Camp* néven 2016. óta szervez ingyenes természettudományos tábort középiskolás diákoknak. Felismertük ugyanis azt, hogy a természettudományos képzésben részt vett hallgatóink (fizikusok, matematikusok) igen sikeresek a műszaki és pénzügyi cégek (bankok, biztosító társaságok) munkatársaiként amellett, hogy igen sokan tudományos pályán is aktívak. Hisszük, hogy a műszaki és pénzügyi területen aktív cégek joggal tartanak igényt olyan szakember-utánpótlásra, akik nem specializálódtak egy-egy műszaki területre, hanem a természettudományos képzésükből adódóan széles látókörrel, *komplex problémamegoldó képességgel* és nagyfokú *flexibilitással* rendelkeznek.

A fejlett országokban is megfigyelhető az az aggasztó jelenség, hogy csökken a diákok érdeklődése a természettudományok, a technológia, a műszaki tudományok (a Science, Technology, Engineering, and Mathematics angol kifejezés kezdőbetűiből alkotott rövidítéssel: a STEM tárgyak) iránt, miközben a tudásalapú gazdaságban egyre nagyobb szükség van a STEM készségekkel rendelkező szakemberekre. A felsőoktatás számára jelenleg nem az jelenti az igazi kihívást, hogy a sok jó diákból hogyan válassza ki a legjobbakat, hanem az, hogy találjon elegendő diákot, akit érdemes beiskolázni. A STEM tanulmányok iránti alacsony érdeklődés okai többek között, hogy a diákoknak sokszor nincs reális képe a STEM szakmákról és karrierlehetőségekről, és mivel e terület gyorsan változik, gyakran a tanáraiknak vagy a pályaorientációs tanácsadóknak sincsenek friss információi, amivel segíthetnék a diákok döntését.

A modern kor ellentmondásához tartozik az is, hogy egy sikeres karrierhez elvben egyre nagyobb ismeretmennyiség birtoklása szükséges. A fiatalok figyelmét mégis igen nehéz az ismeretek átadása során fenntartani. Általános az a vélekedés: minek annyit tanulni, minden tudás az interneten hozzáférhető, ami pár gombnyomással állandóan elérhető a telefonunkon! Konkrét példát véve, ha valakit a nukleáris energetika vagy a pénzügyi matematika érdekel, akkor néhány Wikipedia szócikket 10 perc alatt elolvasva az átlagismeretek szintjénél magasabb tudást szedhet fel. Azonban ez a ,,tudás" gyorsan el is múlik, és nem fog összekapcsolódni más ismeretekkel, nem válik tehát gyakorlatban is alkalmazható mély ismeretté.

A fent említettek következtében felértékelődik az *első kézből való ismeretszerzés*, és az *élményalapú tanulás* fontossága. Közvetlenül látni azt, hogy Magyarország energiatermelésének felét hogyan lehet néhány üzemcsarnokban előállítani (Paksi Atomerőmű), vagy látni egy nemzetközi szinten is sikeres félvezetőipari cég (Semilab Zrt) űrtechnológiát idéző gyártósorát: mindez alázatra, szorgalomra és érdeklődésre serkentheti a fiatalokat. Az Országos Onkológiai Intézet, vagy a BME Ipar 4.0 kiállításának megtekintése során a diákok meggyőződhetnek arról is, hogy a kutatások eredményei milyen rövid idő után, milyen széles körben hasznosulnak és válnak a társadalmat közvetlenül befolyásoló tényezővé.

A rendezvényről

A tábort *hazai és határon túli középiskolások* számára *egyhetes, ingyenes, bentlakásos, teljes ellátást* biztosító form*ában* hirdettük meg. A jelentkezéshez az egyéni motivációs levélen túl tanári ajánlólevél is szükséges volt. A programok megvalósításában, a szabadidő hasznos eltöltésében a Kar szenior hallgatói segítettek. Így a segítő egyetemi hallgatókon keresztül közelebb kerülhetnek a diákok az egyetemi élethez.

A tábor céljáról

A tábor célja a fizika és a matematika sokszínűségének, más tudományterületekhez való kapcsolódásának (például műszaki, informatika, közgazdaságtudomány, orvostudomány, kémia) bemutatása. A célok között szerepel az *egyetemi működés*, a *hallgatói élet* megismertetése, közelebb hozása a programok megvalósításában résztvevő egyetemi hallgatókon keresztül. Felhívjuk a figyelmet a *csapatmunka* fontosságára is, ugyanis a legtöbb mérnöki, gazdasági, tudományos területen a sikeres eredmények csapatmunkában születnek.

Általános jelenség, hogy a természettudományok, a technológia, a műszaki tudományok és a matematika iránti érdeklődés csökken a fiatalok körében. Magyarországon egyre növekvő problémát jelent a tehetséges középiskolások elvándorlása, a természettudományos és a műszaki érdeklődésű középiskolások tehetséggondozása, pályán tartása.

A tábort és az azt követő programokat, akkor tekintjük sikeresnek, ha diákjaink közül minél többen folytatják felsőfokú tanulmányaikat *hazai képzőhelyeken* és ezen belül is a BME nyolc karának valamelyikén.

Sok esetben az ország távolabbi pontjain, vagy a határon túl élő fiatalok tartanak a nagyvárosi környezettől, és nem merik a fővárosi intézményeket választani. A Kar ezeknek a hátrányoknak a leküzdése érdekében kezdett a Science Camp nyári természettudományos tábor szervezésébe.

Adatok a három, korábban megvalósított táborról

Eddig minden évben többszörös volt a túljelentkezés. A négy tábor során összesen 226 diákot tudtunk fogadni. Közülük 111 volt a fiú és 115 a lány. A diákok Magyarországról és a határon túlról (Románia, Szerbia, Ukrajna, Szlovákia) érkeztek. Minden évben volt néhány olyan magyar diák, aki külföldön (USA, Németország, Belgium, Spanyolország) tanul (vagy él), és részt vett a táborban.

Azok közül, akik közben elvégezték a középiskolát, és jelentkezhettek a felsőoktatásba (az első 3 táborból, összesen 130 fő) 65 diák nyert felvételt a BME valamelyik szakára, az alábbi táblázat szerinti eloszlásban. (A 2020-as felvételi adatok még nem ismertek.)

Szakok	*Felvettek száma*
Fizika	13
Matematika	8
Informatika	11
Mechatronika	7
Vegyészmérnöki	8
Gépészmérnöki	6
Villamosmérnöki	6
Építészmérnöki	4
Építőmérnöki	2

A célközönség

A tábor célközönsége a *pályaválasztás előtt álló*, elsősorban a 10. és a 11. osztályt elvégzett középiskolás diákok. A tábori jelentkezők kiválasztásánál külön figyelünk arra, hogy esélyt kapjanak a hátrányosabb helyzetű térségekben élő és a határon túli magyar fiatalok is nagy számban. Számukra sokkal nehezebb egy Budapesten szervezett rendezvényre eljutni, vagy akárcsak egy ilyen lehetőségről értesülni, mint annak, aki a főváros vonzáskörzetében él. Mivel a tábort céges és társadalmi szponzorok adományai fedezik, így ezek az adományok közvetlenül ezeknek a fiataloknak a boldogulását is segítik.

A diákokat a széleskörű középiskolai reklámozást követően *tanári ajánlás* és egyéni *motivációs levél* után egy *szakmai zsűri* (tagjai a BME TTK vezető tanárai) bevonásával *választottuk ki.*

A sokféle, több helyszínen zajló, sűrű program megvalósításában az első perctől kezdve fontos szerepet szántunk az egyetemi hallgatóknak. (Főleg matematikus, fizikus, kognitívtudományi, vegyészmérnök stb. szakos hallgatók) Aktívan közreműködnek a helyszínek közötti eligazodásban, a kollégiumi életbe való beilleszkedésben, a közösségi programok megvalósításában, a verseny lebonyolításában. Egy-egy táborban a 60 középiskolást 20-21 hallgató segít. Ez a hallgatói létszám a középiskolások számát tekintve elsőre túlzottnak tűnhet. Azonban már az előkészületek során kiderült, hogy a hallgatókat sem egyszerű segítőknek, hanem aktív táborozónak kell tekinteni. Vagyis a szakmai programok fontos szerepet játszanak az ő természettudományos nevelésükben is, világszemléletük formálásában, a választott szakuk iránti elkötelezettségben. Amellett, hogy jelentős szerepet vállaltak a tudás közvetítésében például a személyes beszélgetések kapcsán, a tábor alkalmat adott a társadalmi felelősségvállalásra.

A programokról

A tábor céljának megfelelően olyan *témáka*t, kutatási területeket kívántunk felvillantani, amelyekkel a *középiskolai tanulmányaik* során *nem találkozhatnak* a diákok, és amelyek várhatóan a pályafutásuk során meghatározóak lesznek.

A tábor tematikájában olyan programok szerepeltek, amelyek megerősítik a *természettudományos* alapokat, ismereteket, akár a *műszaki tudomány*, akár a *természettudományos képzések vagy* a *közgazdaságtudomány* terén képzeli el valaki a továbbtanulást.

A hét során az érdeklődők tudományos *előadás*okat hallgattak, *versenyfeladatokat* oldottak meg a fizika, a nukleáris technika, a matematika, az orvosi fizika és a pénzügyi matematika stb. területéről. Önálló *műhelymunkát* végeztek. *Külső helyszíneket* látogattak meg, felhasználva a Műegyetem biztosította szellemi hátteret, és a végzett hallgatóink *munkaerőpiacon* szerzett sokrétű tapasztalatait. Egy másik szempont a csapatmunka fontossága volt, ugyanis a legtöbb mérnöki, gazdasági, tudományos területen a sikeres eredmények csapatmunkában születnek.

Mivel a diákok az ország nagyon távoli pontjairól, sőt a határon túlról is érkeztek, terveink között szerepelt a *XI. kerület* és a *Műegyetem* bemutatása mellett kulturális és sportprogramok szervezése.

Megtekinthető a hét részletes, megvalósított programja.

A nagyon gazdag program ellenére nem tudunk minden érdekes és fontos dolgot bemutatni. Annak érdekében, hogy folyamatosan fenntartsuk a Műegyetem közössége által művelt területek iránti érdeklődésüket, és egy kicsit kárpótoljuk azokat a diákokat, akik nem kerültek be a táborba, Science Campus címmel előadássorozatot szervezünk diákok, tanárok számára:http://felvi.physics.bme.hu/sciencecampus.

Visszajelzések

A tábor utolsó napján a diákok és a hallgatók is elégedettségi kérdőívet töltöttek ki. Ennek eredménye – a korábbiakhoz hasonlóan – nagyon jó. Sok hasznos észrevétel is érkezett, amelyeket a következő évi táboraink szervezése során figyelembe fogunk venni. Az osztályzatokból az olvasható ki, hogy nagyjából azonos a tábor megítélése, egyértelműen jó, nagyon jó. (Ez kívülről is érzékelhető volt, valahányszor találkoztunk a programokon, a kollégiumban kellemes, jó hangulatú, nyugodt – időnként nagyon is céltudatos csapattal – találkoztam.)

A megjegyzésekből, szöveges részekből viszont kitűnik, hogy nagyon különböző, változatos szociális helyzetű, hátterű, tág érdeklődési körrel rendelkező diákok jöttek össze. Szervezőként úgy gondolom, hogy ez a tapasztalat is hozzájárulhat a fiatalok társadalmi kérdések iránti érdeklődésének felkeltésében.

A különböző kérdésekre az alábbi válaszok érkeztek:

Honnan értesültél a táborról?	Tanáromtól	Táborkereső honlapról	Ismerőstől
	35	6	14

Megfelelt-e a tábor a várakozásaidnak?	Jobb volt, mint vártam	Igen, megfelelt	Részben megfelelt	Csalódás volt
	45	10		

Hányasra osztályoznád a tábor egészét? Átlag: 4,84	5	4	3	2	1
	47	9			

Hogyan osztályoznád a kísérő hallgatók munkáját? Átlag: 4,95	5	4	3	2	1
	52	3			

Mennyire voltál elégedett az ellátással, körülményekkel? Átlag:4,7	5	4	3	2	1
	40	13	2		

A táborban látottak, hallottak befolyásolják-e a pályaválasztásodat? Ha igen, akkor hogyan?

Többeket az egyetemválasztásban segítette, befolyásolta, vagy megerősítette a tábor, azaz egyértelműen, vagy bátrabban választanák a BME-t, annak valamelyik karát. Pl: 1. „Pozitív visszajelzést adott a BME-ről, amibe eddig nem láttam bele, így most sokkal árnyaltabb képet kaptam.” 2. „Elgondolkodtattak, mutattak más eddig számomra ismeretlen opciót.” 3. „Nem, de az egyetemválasztásom, BME mindenkit beelőz az országban.”

Többek esetében felkeltette a tábor az érdeklődést a TTK szakjai iránt, különösen a fizika iránt: 1. „Láttam, hogy a fizika jobb és kevésbé unalmas, mint gondoltam.” 2. „Beláttam, hogy a fizikus szak nem korlátozódik csak fizikára és nem igaz, hogy nem tudok majd elhelyezkedni, éppen ellenkezőleg. Kollégiumba is szívesen megyek.” 3. „Megtudtam, hogy fizikusoknak kutatáson kívül is van munkalehetőség, és ez segít, hogy a fizikusképzést válasszam.” 4. „Őszintén elgondolkodtam a fizika és egyáltalán a TTK karon, szakon, ugyanis eddig teljesen más irányokon gondolkodtam.” 5. „Igen, azt hiszem a tábor tulajdonképpen még jobban összezavart, még nem tudom, mi szeretnék lenni, kibővült a paletta, amiről választhatok.”

Az igennel válaszolók egy részénél nem lehetett beazonosítani, hogy pontosan mire is gondol. Pl. 1. „Igen, megerősített abban, hogy amit tervezek az milyen szép és érdekes szakma.” 2. „Igen, még jobban vonzanak a bemutatott szakok.” 3. „Igen, a fizika és a mérnöki tudományok során végzendő munkát rendkívül hatékonyan bemutatták számunkra, sőt mi magunk is részt vehettünk efféle programokban, kísérleteken. Jobban átlátom a hasonlóságokat, különbségeket, ami a hamarosan meghozandó pályaválasztási döntésemben segít.” 4. „Igen, őszinte véleményt hallhattunk az egyetemről, a karokról, az itteni életről.”

A szó szerint idézett válaszok azt is mutatják, hogy a diákokra mélyen hatott a tábor vagy szakmai, vagy emberi szempontból. Az a célkitűzés, hogy alternatívákat villantsunk fel a pályaválasztáshoz, megítélésünk szerint teljesült.

Támogatók:

Bepillantás a jövődbe! – Komplex műegyetemi pályaorientációs és továbbtanulást segítő programok (EFOP-3.4.4-16-2017-00025)

BME Egyetemi Hallgatói Képviselet
Budapest Főváros XI. Ker. Újbuda Önkormányzata
Fővárosi Önkormányzat
JÖVŐNK NUKLEÁRIS ENERGETIKUSAIÉRT ALAPÍTVÁNY

Együttműködő partnerek:

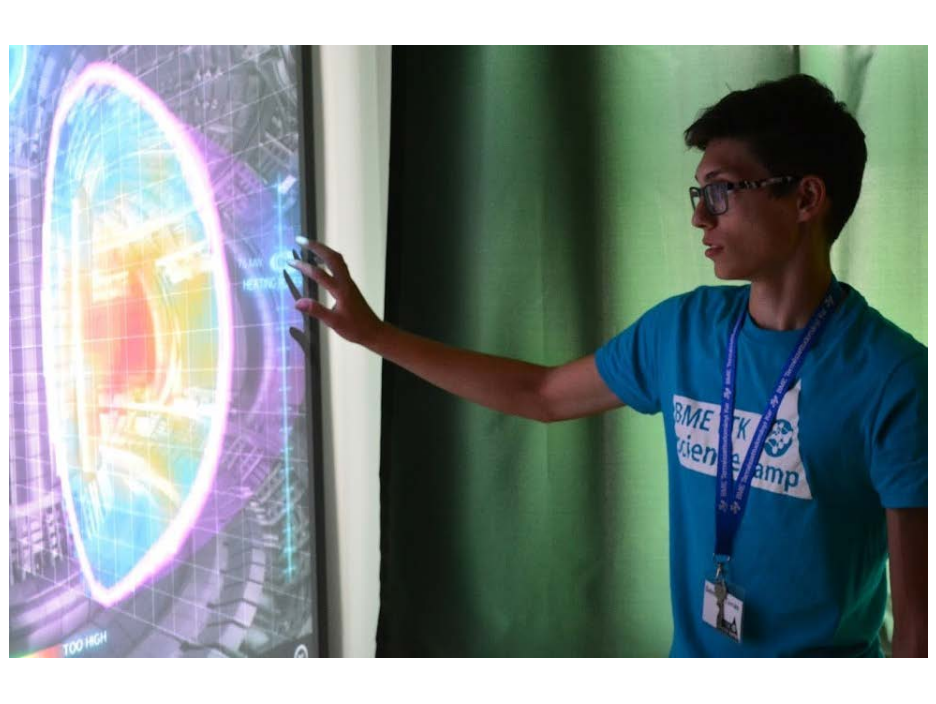
A tábor honlapja: http://sciencecamp.ttk.bme.hu/

További információk:

Szellemi éhség, érdeklődés és csapatmunka jellemezte az idei BME TTK Science Camp-et (Simon Ferenc, SEFI konferencia előadás, BME)

Videók: https://www.youtube.com/channel/UCURyeAht1XiQUNDrc9JtZ5w

„Gondolkozzunk előre. Ma holnapra, sőt sokkal továbbra.”



Lángné Lázi Márta

egyetemi docens

BME TTK Analízis Tanszék

beszámolók alkalmazott fizika matematikatanítás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ** ROVATBAN ELSŐSORBAN OLYAN KÖNYVEKRŐL SZERETNÉNK TUDÓSÍTANI ÉS OLYAN ELEKTRONIKUSAN ELÉRHETŐ ÍRÁSOKAT AJÁNLUNK, AMELYEK A MATEMATIKA BÁRMELY RÉSZE VAGY KAPCSOLATAI IRÁNT ÉRDEKLŐDŐK SZÁMÁRA KÍVÁNATOSAK LEHETNEK. (ROVATSZERKESZTŐ: *TÓTH JÁNOS.)*

Tóth János

2020. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A nyúl nem tanult matematikát

A szerző, *B. A. Korgyemszkij* (1907–1999) az orosz nyelvű matematikai ismeretterjesztés legfontosabb alakja volt. Nem ez az első könyve magyarul sem, például 1962-ben jelent meg tőle a *Matematikai fejtörők*. Az ismertetendő könyv viszont az utolsó, amit írt. A feladatok kis történetek formájában jelennek meg, amelyekben az orosz népmesék és szépirodalom számos alakjával találkozunk. Rovatszerkesztőnk, *Tóth János* nosztalgiával és iróniával fűszerezett kedvcsinálója következik. Tovább…

Moldvai Dávid

2020. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Matematikai blog egy „kívülálló" tollából

Hogyan képesek megvédeni modern társadalmunkat a számok? Hogyan lehetséges az, hogy technikai civilizációnk léte vagy nem léte múlik olyan dolgokon, amelyek csak a képzeletünkben léteznek? Ilyen kérdéseken gondolkodik *Moldvai Dávid*, aki egy azok közül, akik szerint a matematikusok világa meglehetősen elvont és furcsa. A „kívülálló", akit az információelmélet és a kriptográfia érdekel, elindította a youproof.hu blogot. Olvassák, érdemes! Tovább…

Ruzsa Imre

2020. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Daniel Tammet: Számokban létezünk

Daniel Tammet: Számokban létezünk című könyve már szerepelt az Érintő előző számában, most egy teljesen más recenziót olvashat róla az érdeklődő, az előzőt egy gyógypedagógus írta, ezt pedig egy matematikus, *Ruzsa Imre*. Ezért neki egészen más dolgok jutnak az eszébe ugyanarról a műről. Véleménye szerint: „A könyv műfaja: vegyesfelvágott; szerző olvas mindenfélét, erről mindenféle eszébe jut, és ezeket leírja. Sokfélét összeolvas és élénken jár a fantaziája, úgyhogy a könyv általaban szórakoztató." Tovább...

Lángi Zsolt

2020. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Amikor Einstein Gödellel sétált

Jim Holt legújabb könyve nemrég jelent meg Magyarországon Jakabffy Éva és Jakabffy Imre fordításában, a Typotex Kiadó gondozásában. Az ismertetett témák tág területen kalandoznak: találkozhatunk a Riemann-sejtéssel és a négyszíntétellel, húrelmélettel és az univerzum végére vonatkozó elméletekkel, olvashatunk Ada Byron és a számítógéptudomány kapcsolatáról, vagy éppen az idő természetéről és az eugenetikáról. *Lángi Zsolt* recenziója itt olvasható. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Tóth János 2020. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

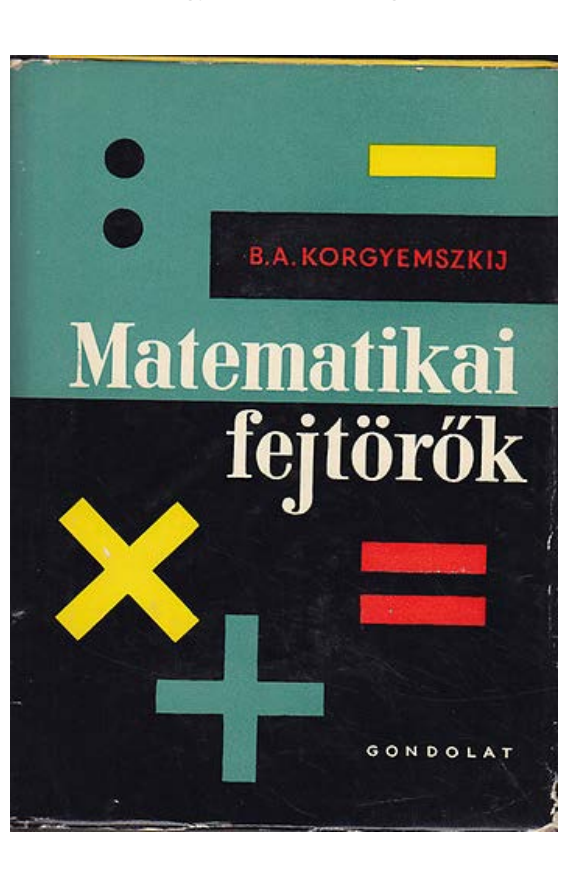
A nyúl nem tanult matematikát

TYPOTEX
A LOGIKA VILÁGA
B. A. KORGYEMSZKIJ
A NYÚL NEM TANULT MATEMATIKÁT
MESÉS FEJTÖRŐK NEM CSAK ISKOLÁSOKNAK

B. A. Korgyemszkij: A nyúl nem tanult matematikát. Mesés fejtörők nem csak iskolásoknak. Typotex, Budapest, 2018. Fordította: Schultz György, szerkesztette Fried Katalin.

Egy recenzió legyen tárgyilagos, szakszerű, célratörő. Lássunk tehát hozzá, hogy megszegjük ezen szabályok mindegyikét.

A szerző, B. A. Korgyemszkij (1907–1999) az orosz nyelvű matematikai ismeretterjesztés legfontosabb alakja volt. Nem ez az első könyve magyarul sem, például a *Matematikai fejtörők* (Gondolat, Budapest, 1962) is megjelent tőle. Ezt a könyvet az Eötvös József (gimnáziumi) matematikaverseny második helyezettjeként kaptam jutalomból (akár Makai Endre, akár Bergou János volt akkor az első – rájuk gyanakszom – nagyon nem kell szégyenkeznem utólag sem.



Az ismertetendő könyv viszont az utolsó, amit írt.

A feladatok kis történetek formájában jelennek meg, az orosz népmesék és szépirodalom számos alakjával találkozunk: Bobcsinszkij és Dobcsinszkij, meg Iván herceg mellett azért a Polip című film is előkerül. Viszont a termeléshez kötődő feladat kevesebb akad, és a legutolsó kötetből már fájóan hiányoznak az úttörők, a tüzelőanyag-hasznosítás, a vízi erőművek s a beszolgáltatás...

Mi a matematikai tartalma az öt fejezetnek? Az ismertetésen túl egy-egy feladatot is mutatok – önkényesen lerövidítve.

Mintha az aritmetika és a számelmélet dominálna az első részben, de azután rögtön geometriai feladatok jönnek, majd logikai és kombinatorikai kérdések után újra visszatérünk az aritmetikához és a számelmélethez.

Petyka négy kölyökkutyát ajándékozott egy leánynak és két fiúnak úgy, hogy senki nem kapott több kölyökkutyát, mint az összes többi. Hogyan sikerült ez?

A második fejezet meséi logikainak mondható feladatokra vezetnek, néha egy kis geometriával és számolással fűszerezve. Az alábbi feladat pedig inkább kombinatorikai.

Egy ősi város tíz szigeten terül el. Öt szigetről vezet egy-egy híd a szárazföldre. Négy szigeten négy-négy hídfő, három szigeten három-három hídfő van, és egy szigetre csak egy hídon lehet eljutni. Bizonyítsuk be, hogy hibás a leírás.

A harmadik rész is sokkal inkább gondolkodásra serkent, mint számolásra vagy rajzolásra.

Itt szerepel tréfaként az alábbi párbeszéd:

Egy fiú lép be a tejboltba.

- Anyám küldött, hogy vegyek egy liter tehéntejet.
- Ehhez kicsi a nálad lévő edény.
- Akkor kecsketejet kérek.

A negyedik fejezetben ismét az aritmetika és a számelmélet az uralkodó.

A sakktábla legfeljebb hány mezőjét keresztezheti egy tetszőleges szelő egyenes?

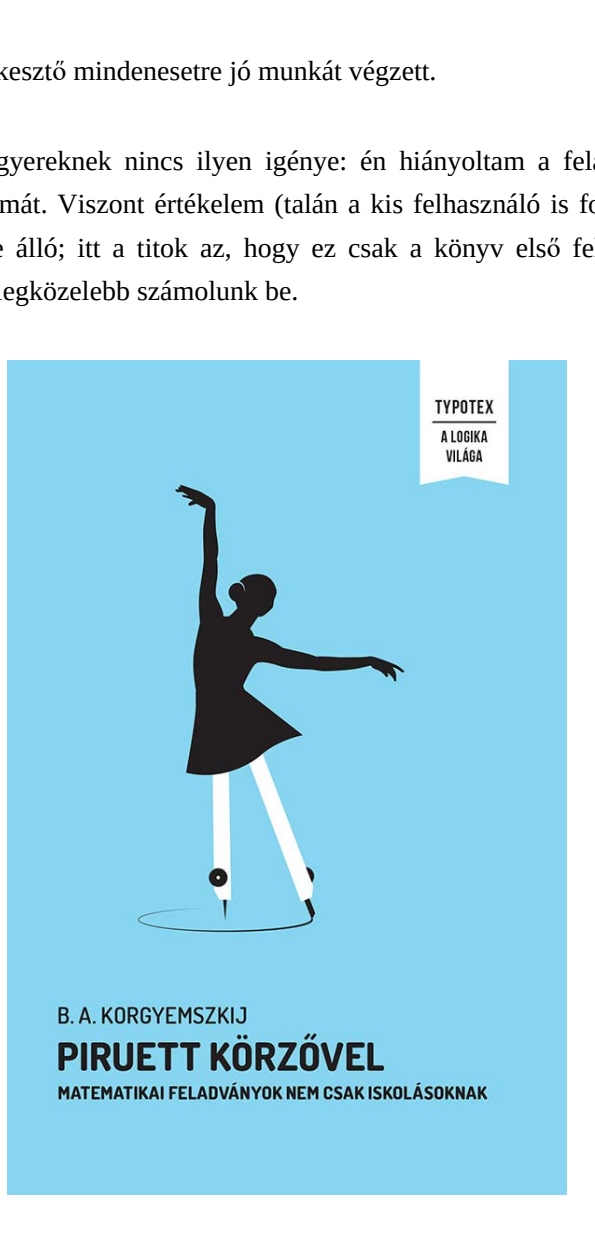
A legutolsó csoport feladataiban mindössze az a közös, hogy egy-egy (képzelt) személy a történet főhőse: szakácsnő, ichtiológus, szakács, stb.

Itt hosszú a feladatok szövege, verses is van, az idézet elmarad, de a könyv a feladatok között ismereteket is terjeszt. Itt például – számos életrajzi részlettel alátámasztva – megmutatja, hogy Richard Wagner életében a 13-as számnak rendkívüli szerepe volt.

Tehát a fenti kérdésre nem tudok válaszolni; nem a matematikai tartalom a közös az egyes csoportokban kitűzött problémákban, hanem a kerettörténetek jellege.

A fordító és a szerkesztő mindenesetre jó munkát végzett.

Lehet, hogy egy gyereknek nincs ilyen igénye: én hiányoltam a feladatok mellett a megoldás oldalszámát. Viszont értékelem (talán a kis felhasználó is fogja) azt, hogy a könyv kicsi, kézre álló; itt a titok az, hogy ez csak a könyv első fele, a másodikról (*Piruett körzővel*) legközelebb számolunk be.



Remélve, hogy az értő olvasás legalább a gyerekek egy részénél nem okoz gondot, szakértelmem és tárgyilagosságom teljes hiányával ajánlom a könyvet nekik, szüleiknek és tanáraiknak.

Végül pedig, mivel a közelemben nincsenek jelen kisiskolások tömegei, nem is tanítottam őket soha, ezért egy meglepőnek tűnő szempont szerint értékelem – és értékelem sokra – a könyvet. Nem más ez, mint bevezetés a matematika alkalmazásaiba (vagy alkalmazott matematikába, ki hogyan szereti). (Zene füleimnek az ilyen mondat: Találjunk ki geometriai modellt.) Kiderül belőle, hogy az életben nem olyan feladatok adódnak, hogy szerkesszünk háromszöget vagy adjunk össze két számot, hanem a tisztán matematikai feladatokat sokszor bizonytalan, homályos, esetleg ellentmondásos szövegekből kell kihámozni. Azon a szerző sem tud túllendülni, hogy pontosan a felhasználandó adatokat adja meg, hiszen egy példatár feladatainál addig küzd az ember (a kis feladatmegoldó), amíg minden adatot fel nem használt.

Tóth János

recenzió

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Moldvai Dávid 2020. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Matematikai blog egy „kívülálló” tollából

Matematikai blog egy „kívülálló” tollából – Elindult a youproof.hu

Hogyan képesek megvédeni modern társadalmunkat a számok? Hogyan lehetséges az, hogy technikai civilizációnk léte vagy nem léte múlik olyan dolgokon, amelyek csak a képzeletünkben léteznek? Vajon a modern számelmélet mai, jelenleg még csak elméleti jelentőségű eredményei mit fognak jelenteni 200 év múlva, az akkori társadalom számára?

A nevem Moldvai Dávid. Egy vagyok azok közül, akik szerint a matematikusok világa meglehetősen elvont és furcsa. Azonban informatikusként nap mint nap – akár tudtomon kívül is – kapcsolatba kerülök mindazokkal a számelméleti vívmányokkal, amelyek akár csak 100 évvel ezelőttig sem számítottak egyébnek, mint érdekes, de viszonylag haszontalan logikai játékoknak. A helyzet azóta jelentősen megváltozott, és ezek az egykor haszontalan játékok egy csapásra a mindennapjaink részévé váltak az információelmélet és a kriptográfia tudományán keresztül. Már korai tanulmányaim alatt, de főként az egyetemen kezdett el érdekelni az ezek mögött lévő számelmélet és a hozzá szorosan kapcsolódó absztrakt algebra. Minthogy az informatika szakon ezeket a témaköröket csak alapszinten oktatják, ezért egy időre kénytelen voltam megelégedni ezekkel az alapszintű válaszokkal.

Időközben azonban kezembe került Simon Singh nagy sikerű könyve a nagy Fermat-sejtés megoldásának történetéről. Korábban is hallottam már erről a sejtésről, de ebben a könyvben olvastam először arról, hogy milyen drámai fordulatokat hozott az elmúlt 350 év matematikatörténetében. Igazán az nyűgözött le benne, hogy egy olyan állításról van szó, amelyet egy általános iskolás gyerek is megért. Nevezetesen: az $x^n + y^n = z^n$ egyenletnek nincs megoldása a pozitív egész számok körében, ha $n > 2$. Pierre de Fermat ezt az állítást Diophantosz Aritmetika című könyvének margójára írta fel a 17. században azzal a megjegyzéssel, hogy bizonyítani is tudja, ám az „sajnos nem fér el a margón”. A meglehetősen marginális kérdés – az előbbiek alapján szó szerinti értelemben is – megoldására tett kísérletek mégis óriási fejlődést hoztak a számelmélet központi jelentőségű kérdéseiben is.

A történet végül 1995-ben ért véget, amikor az Andrew Wiles (aki egyébként gyermekkorától megszállottja volt a problémának) által publikált elképesztően absztrakt bizonyításból kiderült, hogy a fenti egyszerű állítás egy sokkal nagyobb jelentőségű ténynek, nevezetesen a matematika két, addig egymástól teljesen függetlennek hitt területe közötti nagyon mély kapcsolatnak egy (egyébként teljesen mellékes) következménye. Ezt a rejtélyes kapcsolatot akkoriban a számelmélet egyik központi nyitott kérdése, a Taniyama–Shimura-sejtés fogalmazta meg. Manapság ez az állítás – köszönhetően nagyrészt Wiles úttörő munkájának – modularitási tétel néven ismeretes. Sajnos az említett könyvből ennél többet nem lehetett megtudni a részletekről, ezért végzett egyetemistaként naívan megkerestem a publikált bizonyítást az Interneten. Ám viszonylag hamar világossá vált számomra, hogy miért volt olyan szűkszavú az említett könyv a matematikai részletek tekintetében, ugyanis szinte minden egyes mondatban a megértéshez szükséges előismeretek végtelen tárháza bontakozik ki a matematika legkülönfélébb területeiről.

ALICE ÉS BOB – 1. RÉSZ: ALICE ÉS BOB SZÍNRELÉP
2019.04.29.
Mi az a rejtjelezés és miért van rá szükség? Mivel foglalkozik a kriptográfia tudománya? Hogyan működik az Enigma, és a feltörése hogyan befolyásolta a 2. világháború kimenetelét? Melyek azok a problémák, amelyek megoldása nélkül ma nem létezne mobiltelefon, bankkártyás fizetés és Internet?

Jónéhány évvel később olvastam Simon Singh egy másik könyvét, ami a Kódkönyv címet viseli, és a kriptográfia történetéről szól. Itt is sokkal inkább az olvasmányosságon, és így a tudományos és történelmi érdekességeken van a hangsúly, mintsem a modern rejtjelezési eljárások mögötti számelméleti részleteken. Általánosságban is megfigyelhető, hogy a tudományos – de legalábbis a matematikai – irodalomban alapvetően két véglet létezik. Az egyik végletet a valódi publikációk jelentik, amelyekből valódi válaszokat kaphatunk. Ezekkel az a probléma, hogy csak a „bennfentesek” számára érthetők. Azok számára, akik az adott tudományterületet napi szinten művelik. Az előképzettség nélküli, de érdeklődő „kívülálló” joggal érezheti magát kirekesztettnek, amikor egy ilyet megkísérel befogadni. A másik végletet pedig azok a művek jelentik, amelyek az említett „kívülállók” számára olvasmányosan mesélnek az adott témakörről, ám a valódi válaszokat elfedik, mondván: azt úgysem lehet megérteni előképzettség nélkül.

ALICE ÉS BOB – 9. RÉSZ: ALICE ÉS BOB NYILVÁNOS KULCSOT HASZNÁL
2019.08.05.
Hogyan tud Alice és Bob megegyezni egy titkos kulcsban egy nembiztonságos csatornán keresztül? Mik azok az egyirányú függvények és a moduláris aritmetika? Hogyan működik és hogyan támadható a Diffie-Hellman kulcscsere protokoll? Mi az az aszimmetrikus kulcsú rejtjelezés?

Mivel az egyetemen a kriptográfia volt az egyik kedvenc témám, ezért feltettem magamnak a kérdést: Miért ne lehetne akár valódi válaszokról is olvasmányosan írni ebben a témakörben? Ekkor merült fel egy könyv írásának ötlete, amelyben az Olvasó és szerző egymással karöltve, mindketten „kívülállóként”, azaz mindenféle előképzettség feltételezése nélkül kezdi meg a téma megismerését a nulláról indulva, hogy aztán a könyv végére megkapja a valódi válaszokat. Egy ilyen írás akkor érheti el a célját, ha ügyesen lavírozik az olvasmányosság és a matematikai részletek között. Végül azonban úgy döntöttem, hogy első körben könyv helyett egy blogot indítok.

A blog főoldala itt található: https://youproof.hu

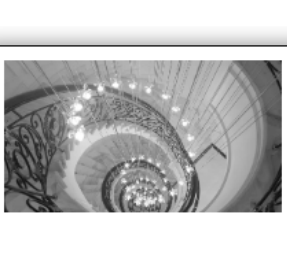
ALICE ÉS BOB – 14. RÉSZ: ALICE ÉS BOB GYŰRŰJE
2019.11.14.
Hogyan tudjuk a szorzás műveletét is ésszerű módon kiterjeszteni a számegyenes 0-tól balra eső részére? Mit jelent az absztrakt algebrában a „neutrális elem”, az „inverz”, a „gyűrű” és a „test” fogalma? Hogyan definiálható a kivonás művelete az egész számok között? Mi a helyzet az osztással?

E döntésnek alapvetően két oka volt. Egyrészt szerettem volna egyfajta visszajelzést kapni arról, hogy egy ilyen jellegű – véleményem szerint hiánypótló – írással mekkora célközönségre számíthatok. Másrészt, ahogy magam is fokozatosan elmélyültem a témában, egyre több kapcsolódási pontot véltem felfedezni a Fermat-sejtéssel kapcsolatos témakörökhöz. Úgy gondoltam, hogy az ezek megismerése során kialakuló gondolataim talán kellő nyersanyagot szolgáltathatnak újabb érdekes cikksorozatok megírásához, amelyek így már nem férnének bele egyetlen könyv keretei közé. Elképzelésem szerint az Olvasó és a szerző kéz a kézben haladna előre ebben az útvesztőben, miközben semmi másra nem támaszkodhatnak, kizárólag a logika végtelenül egyszerű, de roppant szigorú szabályaira, hiszen ugye mindketten „kívülállók”.

A kriptográfiáról szóló első cikksorozat is elsősorban ebben a szellemben készül, amelynek eddig megjelent részei itt érhetők el: https://youproof.hu/kriptografia

ALICE ÉS BOB – 17. RÉSZ: ALICE ÉS BOB ÓKORI HAVERJA
2020.01.20.
Mi az oka annak, hogy minden egész szám egyértelműen felbontható prímszámok szorzatára? Mit jelent a „legnagyobb közös osztó”, és hogyan lehet az iskolában tanult módszernél sokkal gyorsabban kiszámolni az euklidészi algoritmus segítségével? Mik azok az euklidészi gyűrűk és mi közük a számelmélet alaptételéhez?

Ez a sorozat alapvetően 3 nagyobb részre osztható. Az első 10 rész a kriptográfia gyakorlati – és minimálisan a történelmi – vonatkozásait járja körbe némi információ- és algoritmuselméleti, nem túl mély kitérőkkel és érdekességekkel. Ezután a 11. résztől kezdve szisztematikusan bevezeti az Olvasót a matematika alapvető működési mechanizmusába azáltal, hogy a legalapvetőbb számelméleti fogalmakat egészen a Peano-axiómarendszerből kiindulva építi fel, melynek során megismerjük a gyűrűkkel kapcsolatos alapfogalmakat is. Végül a 16. résztől kezdve a nyilvános kulcsú titkosítási eljárásokhoz szükséges számelméleti összefüggések részletes ismertetése következik az RSA-algoritmusig és különböző prímtesztelési eljárásokig bezárólag. Ennek során a kapcsolódó absztrakt algebrai vonatkozások is részletesen előtérbe kerülnek. A teljesség igénye nélkül: oszthatóság gyűrűkben, egység, asszociált, felbonthatatlan és prímtulajdonságú elemek, a számelmélet alaptétele gyűrűkben, kitüntetett közös osztó, maradékos osztás, euklidészi gyűrűk, gyűrűhomomorfizmusok, maradékosztálygyűrűk, ideálok és ideál szerinti kongruenciák, főideálgyűrűk, stb. Ezekkel ugyanis már a következő cikksorozatokat szeretném megalapozni.



ALICE ÉS BOB – 18. RÉSZ: ALICE ÉS BOB FELCSAVARJA A SZÁMEGYENEST
2020.02.11.
Hogyan lehet „felcsavarni” a számegyenest úgy, hogy az alkalmas legyen kriptográfiai kódoló és dekódoló függvények képzéséhez? Mit jelent a „kongruencia” fogalma, és hogyan lehet ezt általánosítani az úgynevezett „ideálok” és „gyűrűhomomorfizmusok” segítségével? Mik azok a „maradékosztálygyűrűk” és hogyan kell bennük számolni?

A tervezett folytatás

Körvonalazódik egy második sorozat, amely már a Fermat-sejtés elleni szélmalomharc egyik fordulópontjáról szól. Történt ugyanis, hogy a Francia Akadémia 1847. március 1-jén tartott ülésén Gabriel Lamé tartott egy előadást, melynek során bejelentette, hogy bizonyítani tudja a sejtést. Ígéretet tett, hogy a bizonyítást heteken belül publikálja. Alighogy Lamé elhagyta a pódiumot, a kor másik kiemelkedő matematikusa, Augustin Cauchy jelentkezett szólásra. Bejelentette, hogy ő is rendelkezik egy teljes bizonyítással, így világossá vált, hogy a két matematikus között kiélezett a verseny a legrangosabb elismerésért – és persze a vele járó tekintélyes összegért – folytatott harcban.

Miközben folyt a találgatás, hogy kié lesz végül a dicsőség, május 24-én drámai fordulat következett be, amikor Joseph Liouville ismertette az akadémián egy német matematikus, egy bizonyos Ernst Kummer levelét. Ebben a levélben az állt, hogy a Cauchy és Lamé által nyilvánosságra hozott információk alapján úgy tűnik, mindketten beleestek ugyanabba a logikai hibába, és így egyikük bizonyítása sem lehet helyes. Ugye már az általános iskolában is megtanultuk a számelmélet alaptételét, miszerint minden egész szám (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelműen írható fel prímszámok szorzataként. Például a 12 prímtényezős felbontása 2·2·3, és más felbontás nem is létezik. Az egész számok és a hozzá kapcsolódó fogalmak – így például a prímszámok és maga a számelmélet alaptétele is – általánosíthatók a fentebb már említett gyűrűkre.

Kummer rámutatott, hogy Cauchy és Lamé egyaránt épített arra a feltételezésre, miszerint a számelmélet alaptételével analóg állítás igaz bizonyos gyűrűkben, ám ezt a feltételezést elfelejtették bizonyítani. A kriptográfiáról szóló cikksorozat részletesen foglalkozik ennek feltételeivel, mivel ez a kérdés alapvető fontosságú a rejtjelezési eljárások szempontjából is. Kummer megmutatta, hogy Cauchy és Lamé feltételezése hibás volt, ám sikerült befoltoznia ezeket a logikai hézagokat az úgynevezett ideális számok bevezetésével. Ezek segítségével a számelmélet alaptétele azokban a gyűrűkben is érvényessé válik, amelyekre az említett bizonyítások építenek. A dolog hátulütője viszont, hogy muszáj hozzá bevezetni az úgynevezett reguláris prímek fogalmát, mivel a bizonyítás csak ezekre működik. Kummer továbbá arra is rámutatott, hogy a többi (azaz az irreguláris) prímet az akkori matematikai eszközökkel nem lehet egységesen kezelni, azok mindegyikével külön-külön, valamilyen egyedi módszerrel kell elbánni. Ami még inkább elkeserítő, hogy egyrészt azóta már tudjuk, hogy sajnos végtelen sok irreguláris prím létezik, az viszont még a mai napig sem tisztázott, hogy vajon ez igaz-e a reguláris prímekre.

Kummer eredménye a sejtés szempontjából ugyan csúfos kudarcnak tekinthető, ám részben ebből fejlődtek ki azok a 20. századi eredmények (többek között például az Iwasawa-elmélet), amelyekkel végül sikerült megoldani ezt a bosszantó rejtvényt. Így a második cikksorozatból reményeim szerint Kummer korszakalkotó munkájának részleteit ismerheti majd meg az Olvasó, és természetesen vele együtt én magam is, hiszen – mint már említettem – magam is „kívülállónak” számítok.

Jövőbeli tervek

A további cikksorozatok témája is szorosan kapcsolódni fog a Fermat-sejtéshez és a Kummer utáni idők eredményeihez. Yves Hellegouarch „Invitation to the Mathematics of Fermat–Wiles” című könyve minden bizonnyal fontos iránytűként fog szolgálni ehhez, amely lényegében az ehhez szükséges matematikai elméletek egyfajta vázlatos összefoglalója. Nem mellesleg Hellegouarch-nak fontos szerepe volt a Fermat-sejtés megoldásában, mivel ő és Gerhard Frey vetették fel, hogy az talán a már említett Taniyama–Shimura-sejtésből következik. Ezt végül Ken Ribet amerikai matematikus igazolta 1986 nyarán, innen pedig már egyértelműen megnyílt az út Andrew Wiles számára: „mindössze” igazolnia kell a Taniyama–Shimura-sejtést.

Az persze számomra is kérdéses, hogy nem matematikusi végzettséggel milyen mélységekig lehet így eljutni. De bármi is lesz a történet vége, a cél mindenképpen adott: kirángatni ezt a rendkívül absztrakt tudományt az akadémiai falak közül, és közelebb hozni azokhoz, akik hozzám hasonlóan „kívülállóknak” érzik magukat, de komolyabban érdeklődnek a téma iránt. Remélem, hogy a tudományos világ képviselői, illetve nálam sokkal hozzáértőbb személyek is partnerek lesznek ebben, ez ugyanis egyetlen embernek lehetetlen vállalkozás.

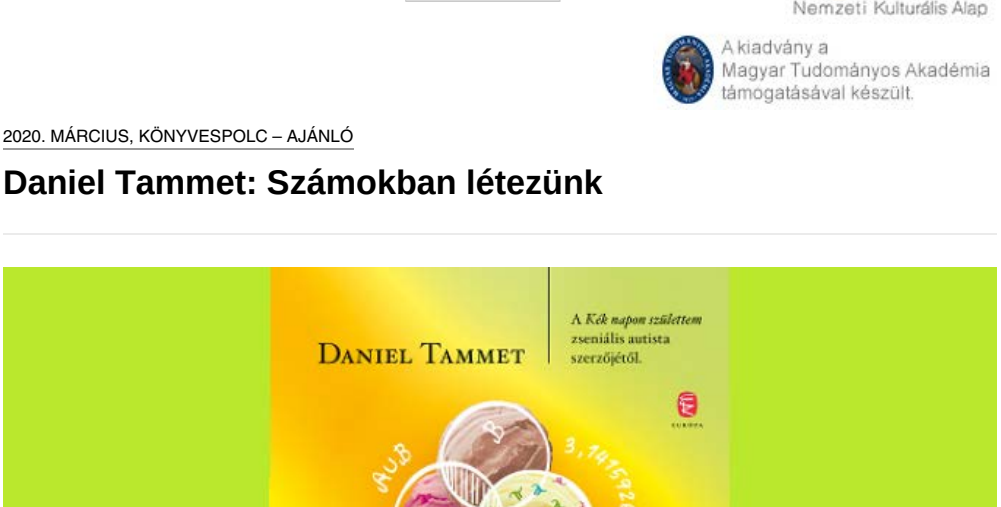
A blog a közösségi médiában is jelen van, ahol érdeklődők és szakemberek egyaránt értesülhetnek a megjelenő tartalmakról, és ahol talán elkezdődhet egyfajta közösségépítés: https://www.facebook.com/youproof.hu

Moldvai Dávid

beszámolók kriptográfia

2020. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Daniel Tammet: Számokban létezünk


Daniel Tammet
A Kék napon születtem zseniális autista szerzőjétől.
Európa
Számokban létezünk
A mindennapok matematikája

Daniel Tammet: Számokban létezünk, Európa Könyvkiadó, Budapest, 2019. (Fordította: Pataki János)

Nos numerus sumus[1]

A könyv

„A mindennapok matematikája", állítja a címlap alja. Nos, aki matematikát keres a könyvben, csalódni fog. Számok persze, amit a cím ígér, akadnak bőven. A számok és matematika közti különbséget legjobban a nagy számokról szóló 8. fejezeten illusztrálhatjuk. Szerző elárulja, hogy a googolplexet követő szam, vagyis $10^{10^{100}}+1$ nem prím, és leírja legkisebb prímosztóját, ami 36 jegyű szám. Egy matematikus nem bírná ki, hogy el ne mesélje (vagy megpróbálja rávezetni az Olvasót), miszerint:

– már csak azért se prím, mert osztható $10^{2^{100}}+1$-gyel;

– legalabb 101 prímosztója van, mert ennyi irreducibilis tényezőre bomlik az $x^{10^{100}}+1$ polinom;

– azért van esély ezek közül néhányat megtalálni, mert előre tudni lehet, hogy mindegyik 1-et ad maradékul 2^{101}-nel osztva.

A könyvbeli szám például $2^{104}5^6+1$. Bevallom, nem ellenőriztem, hogy ez tényleg prím-e, és osztója-e googolplex $+1$-nek.

Ha persze akad egy ifjú olvasó, akinek szöget üt a fejébe a rejtélyes 36 jegyű prím, magától rájön a fentiekre, és ettől kap kedvet a matematikához, akkor azt mondom, igaza volt.

Tanulságos az 5. fejezetben leírt iskolai kalandja a másodfokú egyenlettel. Volt neki egy saját megoldási módszere, ami abban állt (noha ezt igencsak kicifrázva mondja el), hogy: „ha egyszer feladják nekünk, a megoldás biztos egész szám. Milyen egész szám jöhet szóba?" Teljesen jó megközelítés, a tudományos gondolkodás is valahogy így működik: ott keressük a megoldást, ahol intuíciónk szerint lennie kell, és ha megtaláltuk, örülünk. A tanár ezt nem értékelte. (Amúgy azt se tudom, miért jó gyerekekkel másodfokú egyenleteket megoldatni.)

A könyv műfaja: vegyesfelvágott; szerző olvas mindenfélét, erről mindenféle eszébe jut, és ezeket leírja. Sokfélét összeolvas és élénken jár a fantaziája, úgyhogy a könyv általaban szórakoztató. Az én ízlésemnek ugyan terjengős. 12 oldalon ecseteli, hogy rekord sok számjegyet megtanult a π-ből, és ezt egy show-műsorban produkálta. Szó esik különböző nyelvek számhasználatáról, a sestina csodálatos strófaszerkezetéről, Tolsztoj történelemfilozófiájáról, arról, ahogy középkori teológusok küszködtek a végtelen fogalmával, vagy hogyan tükröződik Shakespeare műveiben a számok közé akkoriban beférkőző nulla.

Készpénznek venni nem kell, amit ír. Ugye milyen idegesítő egy tudományos igényű könyv, aminek fele lábjegyzet, hivatkozás és irodalomjegyzék? Itt ilyesmit nem találunk. Aki kíváncsi, hamar $\ldots$ utánanéz a wikipédiaban. El nem tudom képzelni, honnan szedhette, hogy a kitharódoszok „ezek a hosszú fürtű, színes leplekbe öltözött női zenészek lehettek, a kor dívái."

Aki túljutott a címlapon, nyomban találkozik az első rejtvénnyel egy nemlétező Phaedrus idézet formájában. Se a fordítónak, se nekem nem sikerült megfejteni az eredetét. Ezúton kitűzök díjként egy tábla csokit (a határozottság kedvéért: 250 grammos Merci, a megfejtő által választható ízben) annak, aki megtalálja. Íme:

„To see everything, the Master's eye is best of all,

As for me, I would add, so is the Lover's eye."

Mély gondolatokra nemigen lelünk benne, pedig vannak témák, melyek szinte kiprovokálják, hogy az ember kommentálja őket. Egy fejezetet szentel a földönkívüliek létének, megemlítve a Drake-„formulát", de nem teszi fel a kérdést, van-e értelme egy valószínűséget feltételes valószínűségek szorzataként felírni, ezeket hasraütéssel megsaccolni, majd úgy tenni, mintha ez tudomány lenne; és egyáltalán, van-e értelme a világűrben értelmes élet után kutatni anélkül, hogy tudnánk, mi az élet és mi az értelem.

A fordítás

Pataki János gördülékeny szövege több, mint egyszerű fordítás. Amikor Tammet idéz valamiből, szinte mindig megtalálja a forrást és beiktatja a megfelelő rész műfordítását. Zseniális ötlet, hogy amikor Shakespeare kapcsán Tammet egy korabeli számtankönyvből idéz, oda Maróthy Arithmeticájának megfelelő részletét iktatja. És Tammet elnagyolt észrevételeit lábjegyzetekben üdvösen kiegészíti, néha visszafogottan helyreigazítja. Valószínűleg jobb könyvet írt volna.

Hogy ne legyen öröm üröm nélkül, némely anglicizmustól azért nem tudott elszakadni, pl: „az angol matematikus, John Littlewood".

A szerző

A szerző általaban elbújik a mű mögött; ezúttal nem teszi. Már a bőbeszédű címlap közli róla, hogy „zseniális autista". Hogy van-e az autistának értelme, nem tudom; valamikor volt, és lehet, hogy a pszichiáterek számára most is van, de újabban divatba jött, ami az értelmet erodálja. Fűre-fára rámondják, hogy autista, a régmúlt kicsit bogaras nagy emberei se ússzák meg. Amúgy a könyv sem az autizmust, sem a zsenialitást nem tükrözi.

Utóhang

A magyar cím még élezi az angolt (Thinking in numbers). Tény, hogy mostanában szeretünk mindent számszerűsíteni. Jó ez, rossz ez, vagy csak úgy van? Átadom a szót Szilágyi Ákosnak:[2] „A számokból újabb számok következnek, számokra szám a felelet, számokat számokkal lehet legkönnyebben megsemmisíteni. A számok kezdenek elszakadni attól, aminek eredetileg csak számszerű kifejezései voltak. Önálló életre kelnek: helyettesítik az értékelést, az érzést, az igazságot. Minden csak szám mar, felcserélhető, összeadható–kivonható mennyiség. S a nagyobb számnak mindig igaza van."

Ruzsa Imre
Rényi Alfréd Matematikai Intézet

Lábjegyzetek

[1] Horatius, Epist. 1/2

[2] A vágy titoktalan tárgya. Liget, 1992, 119. o.

recenzió

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Lángi Zsolt 2020. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Amikor Einstein Gödellel sétált

Jim Holt
AMIKOR EINSTEIN GÖDELLEL SÉTÁLT
kirándulás az értelem peremén
TYPOTEX

Jim Holt: Amikor Einstein Gödellel sétált: kirándulás az értelem peremén, Typotex, Budapest, 2019.

Jim Holt legújabb könyve nemrég jelent meg Magyarországon Jakabffy Éva és Jakabffy Imre fordításában, a Typotex Kiadó gondozásában.

A könyv szerzője filozófus és esszéíró, akinek sokoldalú munkássága felöleli újságcikkek rendszeres írását, rádióműsor vezetését, politikai újság főszerkesztői posztjának betöltését. Holt „Miért létezik a világ” című könyve a New York Times bestseller listáján szerepelt 2012-ben és 2013-ban; a szerző a 2017-es World Science Festival „Tűnődni a kitalálhatatlanon: a kozmológia legnagyobb kérdései” paneljának vezetője volt.

A könyv válogatás a szerző elmúlt húsz év alatt született írásaiból. A benne szereplő esszék matematikai, filozófiai, fizikai és tudománytörténeti érdekességeket mutatnak be laikus számára is érthető, de mégis szakmailag elfogadható módon. Az ismertetett témák tág területen kalandoznak: találkozhatunk a Riemann-sejtéssel és a négyszíntétellel, húrelmélettel és az univerzum végére vonatkozó elméletekkel, olvashatunk Ada Byron és a számítógéptudomány kapcsolatáról, vagy éppen az idő természetéről és az eugenetikáról. A bemutatott témákat az író élvezetes módon, sok életrajzi érdekesség hozzáadásával tárgyalja. Saját bevallása szerint:

„Eszményem a koktélparti beszélgetés: amikor a mély gondolatot szórakoztató módon, a lényegére lecsupaszítva közvetítjük egy érdeklődő barátnak (esetleg egy gyors rajzzal is kísérve a szalvétán). A cél az, hogy az újonc fejében világosságot gyújtsunk, de vigyünk a témába egy olyan csavart, amellyel a szakértő tetszését is elnyerjük.”

Összességében úgy vélem, hogy a könyvet nyugodt szívvel ajánlhatom minden gondolkodni szerető és a világot megismerni kívánó embernek.

A szerk.: Mások véleménye is hasonló lehet, ugyanis a kiadó honlapján ez olvasható: Utánnyomás alatt.

Lángi Zsolt

Lángi Zsolt 1998-ban végzett az Eötvös Loránd Tudományegyetemen matematika-fizika szakon. Jelenleg az MTA Morfodinamika kutatócsoportjának tagja és a BME Geometria Tanszékének oktatója: http://math.bme.hu/~zlangi/

recenzió

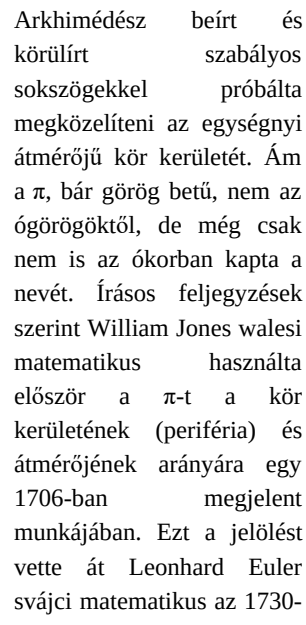
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

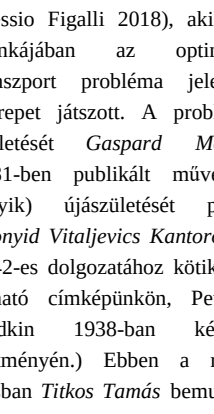
A **TUDOMÁNY** MENÜPONT TÖBBFÉLE, A MATEMATIKA TUDOMÁNYÁHOZ KAPCSOLÓDÓ FUNKCIÓT TAKAR..**A TUDOMÁNY– TÖRTÉNET ROVAT** CÉLJA ELSŐSORBAN MATEMATIKATÖRTÉNETI JELLEGŰ ÍRÁSOK KÖZLÉSE. **A MI IS ...?ROVAT** A MAI MATEMATIKA TUDOMÁNYÁRÓL KÍVÁN SZÓLNI A HOZZÁÉRTŐKNEK.
(ROVATSZERKESZTŐK: *BESENYEI ÁDÁM; STIPSICZ ANDRÁS.*)



Fried Katalin
2020. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A π az idők viharában

A π-ről már a régi görögök is tudtak: bármely két kör hasonló, ezért bármely kör kerületének és átmérőjének aránya ugyanannyi. Arkhimédész beírt és körülírt szabályos sokszögekkel próbálta megközelíteni az egységnyi átmérőjű kör kerületét. Ám a π, bár görög betű, nem az ógörögöktől, de még csak nem is az ókorban kapta a nevét. Írásos feljegyzések szerint William Jones walesi matematikus használta először a π-t a kör kerületének (periféria) és átmérőjének arányára egy 1706-ban megjelent munkájában. Ezt a jelölést vette át Leonhard Euler svájci matematikus az 1730-as években, és innen terjedt el a világon. *Fried Katalin* gyűjtött össze néhány érdekes, hasznos tudnivalót. Tovább...



Titkos Tamás
2020. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is...a Monge–Kantorovics probléma?

Az előző évtizedben két olyan matematikust is Fields-éremmel díjaztak (Cédric Villani 2010, Alessio Figalli 2018), akiknek munkájában az optimális transzport probléma jelentős szerepet játszott. A probléma születését *Gaspard Monge* 1781-ben publikált művéhez, (egyik) újjászületését pedig *Leonyid Vitaljevics Kantorovics* 1942-es dolgozatához kötik. (Ő látható címképünkön, Petrov-Vodkin 1938-ban készült festményén.) Ebben a rövid írásban *Titkos Tamás* bemutatja a transzport probléma Monge- és Kantorovics-féle megfogalmazásait. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

2020. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A π az idők viharában

A π az idők viharában

Már a régi görögök is...

A π-ről már a régi görögök is tudtak: bármely két kör hasonló, ezért bármely kör kerületének és átmérőjének aránya ugyanannyi.

Arkhimédész beírt és körülírt szabályos sokszögekkel próbálta megközelíteni az egységnyi átmérőjű kör kerületét. Szabályos hatszögekből kiindulva és lépésenként kétszerezve a sokszögek csúcsai számát eljuthatunk a körülírt és a beírt szabályos 96-szög kerületéhez, amelyből $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

A babilóniaiak $\frac{25}{8} = 3{,}125$-nek, a Rhind-papirusz tanúsága szerint pedig az egyiptomiak $\frac{256}{81} \approx 3{,}1605$-nek vették a π-t.

Ám a π, bár görög betű, nem az ógörögöktől, de még csak nem is az ókorban kapta a nevét.

Írásos feljegyzések szerint William Jones walesi matematikus használta először a π-t a kör kerületének (periféria) és átmérőjének arányára egy 1706-ban megjelent munkájában. Ezt a jelölést vette át Leonhard Euler svájci matematikus az 1730-as években, és innen terjedt el a világon.

A π irracionális, sőt!

Sokáig kérdés volt, hogy egyáltalán racionális szám-e a π.

Akkoriban két egész szám hányadosaként felírva kaptak alkalmas közelítéseket, például $\frac{22}{7} = 3{,}142857\ldots$, $\frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$, de – bárhogy kerestek – nem találtak megfelelő racionális alakot rá.

Keresték a π lánctört alakját is. Amennyiben egy tört nagyobb 1-nél, akkor vegyes tört alakban felírva kisebb számokkal tudjuk felírni. Például $\frac{47}{13} = 3\frac{8}{13} = 3 + \frac{8}{13}$.

Ugyanakkor a $\frac{8}{13}$ úgy írható, hogy $\frac{1}{\frac{13}{8}}$, így a nevezőben szereplő törtről ismét leválasztható az egész része: $\frac{13}{8} = 1 + \frac{5}{8}$, azaz $\frac{47}{13} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{5}{8}}$ és így tovább, végül ezt a lánctörtet kapjuk:

$$\frac{47}{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}.$$

A lánctörtet szokás úgy jelölni, hogy szögletes zárójelek között felsoroljuk az egész részeket, az első után pontosvesszőt teszünk, a többi után vesszőt. Esetünkben: $\frac{47}{13} = [3; 1, 1, 1, 1, 2]$. A számelméletben jártasabbak felismerhetik az eljárásban az euklideszi algoritmust. Minden racionális szám lánctört alakja véges, és minden véges lánctört racionális szám.

Az irracionális számok lánctört alakja ugyan végtelen, de olykor „olvashatóbb”, megjegyezhetőbb, mint a tizedes tört alakja, például: $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, \ldots]$.

A π lánctört alakja azonban nem ilyen szabályos: $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, \ldots]$. A korábban említett $\frac{22}{7}$ és $\frac{355}{113}$ felírások a π lánctörtfelírásából kaphatók:

$$[3; 7] = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}, \qquad [3; 7, 15, 1] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}}$$

A π azonban nem racionális. Irracionalitását 1761-ben – alig 260 éve(!) – Johann Heinrich Lambert bizonyította be először. (Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin* (megjelent 1768-ban), **17**, 265–322.)

De nem csak irracionális a π, hanem még transzcendens is. Ez azt jelenti, hogy nincs olyan legalább elsőfokú egész együtthatós polinom, amelynek gyöke lenne. (Szemben például a $\sqrt{2}$-vel, amely ugyan irracionális, de nem transzcendens, mert gyöke az $x^2 - 2$ egész együtthatós polinomnak.) A π transzcendenciájának bizonyításával többen is próbálkoztak (Hermite, Weierstrass, Euler), akiknek az eredményeit felhasználva a végső lépést Ferdinand von Lindemann tette meg 1882-ben, azaz nem egészen 140 éve. A tétel Lindemann–Weierstrass néven vált ismertté.

A π nem szerkeszthető, a kör nem négyszögesíthető.

Az, hogy a kör nem négyszögesíthető, azt jelenti, hogy ha adott egy 1 átmérőjű kör (és más nem), akkor euklideszi módon nem szerkeszthetünk olyan négyzetet, amelynek ugyanakkora a területe, mint ennek a körnek. Ez ugyanazt jelenti, mint hogy ha adott egy egység hosszú szakasz (és más nem), akkor nem tudunk π hosszúságú szakaszt szerkeszteni.

A koordinátasíkon a $(0,0)$ és az $(1,0)$ pontokból kiindulva (más pontot nem ismerve) nem minden pontot tudunk megszerkeszteni (körző és vonalzó segítségével, a szokásos lépéseket véges sokszor végezve). Az egység hosszúságú szakasz egész számszorosait szakaszmásolással meg tudjuk szerkeszteni, sőt, párhuzamos szelők tétele alapján racionális hosszúságokat is meg tudunk szerkeszteni. Egyenes és egyenes metszéspontja a meghatározó pontok koordinátáiból összeadás, kivonás, szorzás és osztás segítségével egyszerűen megkapható, de kör és egyenes, illetve két kör metszéspontja olyan pontokat eredményezhet, amelyek koordinátáinak felírásához (az alakzatokat meghatározó pontok koordinátáiból kiindulva) négyzetgyökvonás szükséges.

Ahhoz tehát, hogy egy pontot meg tudjunk szerkeszteni a két kiinduló pontból, az kell, hogy a koordintátáit egész számokból kiindulva véges sok összeadás, kivonás, szorzás, osztás és négyzetgyökvonás segítségével fel lehessen írni. Így már az $x^3 - 2$ polinom valós gyöke, a $\sqrt[3]{2}$ sem szerkeszthető – pedig nem transzcendens –, mert a 2 köbgyöke nem írható fel négyzetgyök segítségével. Ám mivel a π transzcendens, nemcsak hogy négyzetgyökök, de semmilyen gyökök segítségével sem írható fel, ezért az sem szerkeszthető a kiinduló két pontból, így nem szerkeszthető olyan négyzet sem, amelynek a területe π.

Mindezek ellenére 1894-ben bizonyos Edward J. Goodwin orvos és amatőr matematikakutató cikket írt a kör négyszögesítéséről – és így a π szerkeszthetőségről. A cikket a neves American Mathematical Monthly folyóirat közölte, igaz, azzal a nem túl hízelgő kitétellel, hogy a megjelentetés „a szerző kérésére” történt.

Ennek nyomán Goodwin kezdeményezte, hogy Indiana Állam egyik képviselője, Taylor I. Record terjesszen be egy törvényjavaslatot „Törvényjavaslat egy új matematikai igazság bevezetésére, felajánlva az oktatáshoz való hozzájárulásként, Indiana Állam kizárólagos használatára mindenféle ellenszolgáltatás vagy bármilyen fizetség nélkül, amennyiben azt az 1897-es törvénykezés elfogadja és befogadja” címmel. (Forrás: az eredeti újság, amely beszámol a hírről: 11. oldal, harmadik hasáb alsó harmadában: THE MATHEMATICAL BILL második bekezdés, amely szerint Record képviselő beterjesztett egy javaslatot egy, a kör négyszögesítésére vonatkozó matematikai képlet legalizálására.) A törvényjavaslat tárgyalását némi derültséggel fogadták a képviselők, akiket addigra Clarence A. Waldo professzor felkészített, elmagyarázva nekik a törvényben foglaltak banalitását. ☺

De mégse ítélkezzünk Goodwin felett, nem ő az egyetlen a matematiktörténelemben, aki nagyot tévedett.

A π mindentudó(?)

Patrick Ingram, a torontói York University matematikusa állítja: „úgy hisszük – bár nincs rá bizonyítékunk –, hogy a π végeláthatatlan 0-tól 9-ig terjedő számjegyekből álló számsorozatában minden lehetséges számkombináció előfordul, és nem is csak egyszer, de újra és újra, végtelen sokszor.” (Ez a tulajdonság az úgynevezett normalitásnak a következménye. A π normalitását ez idáig nem sikerült sem bebizonyítani, sem cáfolni.)

David Andersen honlapján kipróbálhatjuk, hogy egy általunk megadott többjegyű szám megtalálható-e a π első kétmilliárd számjegyének sorozatában.

Fried Katalin

ELTE TTK Matematikai Intézet Matematikatanítási és Módszertani Központ

A π-ről készült kép szerzője Gordon Johson, https://pixabay.com/hu/vectors/pi-matematika-math-sz%C3%A1mok-3-14-3166192/.

matematikatörténet

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

2020. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is...a Monge–Kantorovics probléma?

A Monge–Kantorovics probléma

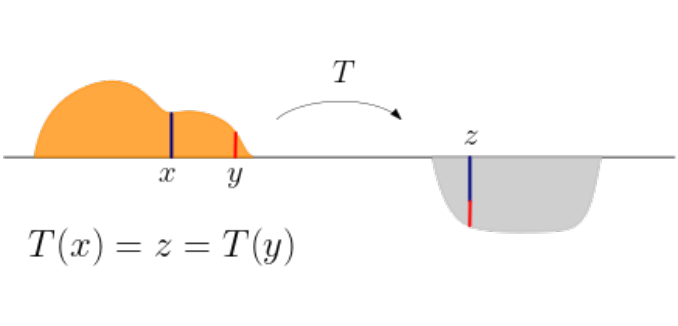
Az előző évtizedben két olyan matematikust is Fields-éremmel díjaztak (Cédric Villani 2010, Alessio Figalli 2018), akiknek munkájában az optimális transzport probléma jelentős szerepet játszott. A probléma születését Gaspard Monge 1781-ben publikált [4] művéhez, (egyik) újjászületését pedig Leonyid Vitaljevics Kantorovics 1942-es [3] dolgozatához kötik.

Ebben a rövid írásban megpróbálom bemutatni a transzport probléma Monge- és Kantorovics-féle megfogalmazásait. A probléma történetéről, magáról a problémáról, és annak alkalmazásairól az érdeklődő olvasó többet is megtudhat Cédric Villani [7,8] és Filippo Santambrogio könyveiből [6].

1. A transzport probléma Monge-féle megfogalmazása

Gaspard Monge (1746–1818) hatalmas életművének csak egy apró szeletét képezik az optimális transzporttal kapcsolatos eredmények. Őt tekintik többek közt az ábrázoló geometria megteremtőjének, a differenciálgeometria egyik atyjának, de részt vett a méterrendszer kidolgozásában, sőt végzett fizikai és kémiai kutatásokat is. Tudományos eredményeit a hadviselésben is kamatoztatta, őt bízták meg annak megtervezésével, hogy hogyan érdemes ágyúkat elhelyezni egy erődítményben, később könyvet is írt az ágyúkészítés tudományáról [5]. Ide kívánkozik egy megjegyzés a Monge–Kantorovics probléma másik érintettjéről. Leningrád ostromakor a befagyott Ladoga-tó kiemelt stratégiai fontosságú volt a Vörös Hadsereg számára, ugyanis azon keresztül vezetett az étel és muníció szállítására alkalmas út. Kantorovics feladata volt, hogy kiszámolja a kocsik optimális távolságát és terhelhetőségét a jég vastagsága és a hőmérséklet függvényében [2].

Visszatérve Monge tudományos munkásságára: az optimális transzport probléma motivációját is egy meglehetősen egyszerű (illetve egyszerűnek hangzó) kérdés szolgáltatta. Nagyon elnagyoltan megfogalmazva: ha adott egy halom föld, és egy azzal megegyező térfogatú gödör, akkor hogyan tervezük meg a gödör feltöltését, ha azt a lehető legkevesebb munkával szeretnénk kivitelezni?



A problémát Monge geometriai módszerekkel próbálta megfogni: azt vizsgálta, hogy a tömeget milyen pályák (görbék) mentén kell mozgatni. Mielőtt kísérletet tennénk a feladat formalizálására, nézzünk meg egy hasonló, de ránézésre legalábbis jóval egyszerűbb, kérdést. Tegyük fel, hogy van egy teljes páros gráfunk k elemű csúcsosztályokkal (jelölje ezeket $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ és $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$). Tegyük fel továbbá, hogy adott egy $c\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ költségfüggvény. Gondoljunk erre úgy, hogy $c(x_i, y_j)$ nem más, mint az x_i pont y_j-vel való párosításának költsége. Kérdés: az összes teljes párosítás közül melyik a minimális összköltségű? Világos, hogy minden teljes párosítás megadható egy $T\colon X \to Y$ bijekcióval, a T párosítás összköltsége pedig nem más, mint $\sum_{i=1}^{k} c(x_i, T(x_i))$. Tehát keressük azt a T leképezést, ami ezt az összeget minimalizálja. Létezik ilyen párosítás, hiszen egy véges számhalmaz legkisebb elemét keressük.

A párosítási feladat semmivel sem lesz bonyolultabb, ha átfogalmazzuk szállítási feladattá: minden x_i raktárnak van $\frac{1}{k}$ súlyú kiszállítandó rakománya, mindegyik y_j bolt éppen $\frac{1}{k}$ súlyú rakományra adott le rendelést, a $c(x_i, y_j)$ mennyiség pedig az egyszerűség kedvért legyen most az x_i raktár és y_j bolt távolsága. Ekkor a szállítás során elvégzett munka nem más, mint $\sum_{i=1}^{k} c(x_i, T(x_i)) \cdot \frac{1}{k}$. Az azonban komoly nehezítés lenne, ha az egységnyi súlyt nem egyforma darabokra vágnánk szét mindkét oldalon, hanem különböző $m(x_1), \dots, m(x_k)$ és $n(y_1), \dots, n(y_k)$ darabokra. Egy $T\colon X \to Y$ bijekció ebben az esetben csak akkor adna meg jó szállítást, ha a $T(x_i) = y_j$ egyenlőség maga után vonná, hogy $m(x_i) = n(y_j)$, vagy másképpen felírva

$$m(T^{-1}(y_j)) = n(y_j) \quad \text{minden } y_j \in \{y_1, \dots, y_k\} \text{ esetén}. \tag{1}$$

Egy ilyen T szállítás költsége az előzőek mintájára

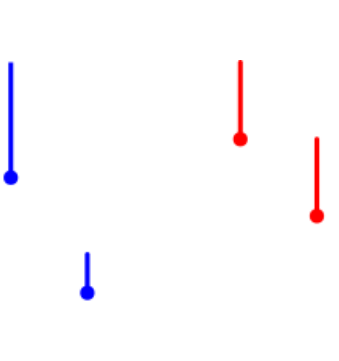
$$C(T) := \sum_{i=1}^{k} c(x_i, T(x_i)) \cdot m(x_i). \tag{2}$$

Mivel véges sok ponttal dolgoztunk, és így csak véges sok jó T leképezés lehet, ezért az

$$\inf_{m \circ T^{-1} = n} \sum_{i=1}^{k} c(x_i, T(x_i)) \cdot m(x_i) \tag{3}$$

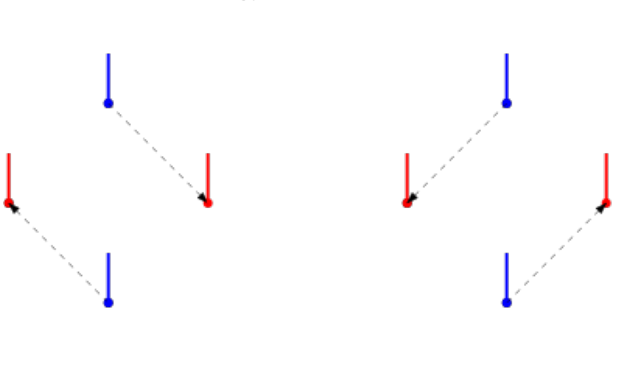
infimum valójában egy minimum. Tehát ha van legalább egy jó szállítás, akkor van optimális is. Vegyük észre, hogy amit itt látunk, az Monge problémájának egy diszkretizált változata: a földkupac és a betemetendő gödör helyett két diszkrét tömegeloszlás van, és keressük azt a T leképezést, ami az egyiket minimális költséggel transzportálja át a másikba. Már ezen a diszkrét eseten jól látszik két probléma

a) Nem feltétlenül van megoldása a Monge által kitűzött problémának, hiszen az alábbi ábrán



az (1) feltétel egyetlen olyan leképezésre sem teljesülhet, ami a kék pontokat a piros pontokra képezi.

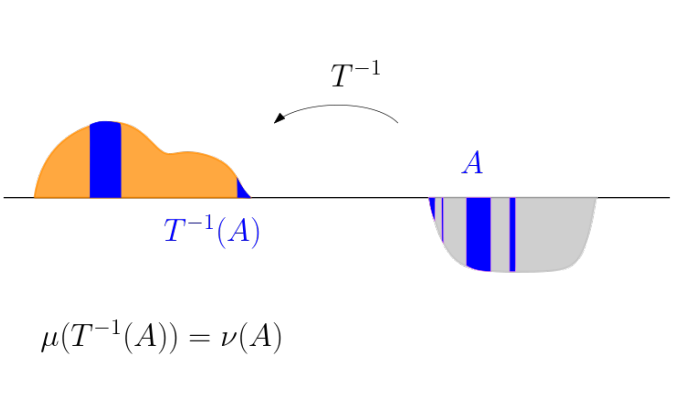
b) Ha van megoldás, nem feltétlenül egyértelmű.



Mivel a piros és kék pontok közötti távolságok egyenlőek, és a mozgatni kívánt súlyok egyenletesen vannak szétosztva, ezért a szaggatott nyilak mentén két különböző optimális transzportot látunk.

Nézzük meg, hogy hogyan lehet felírni az általános problémát. A metrikus tér, amiben dolgozunk, az n-dimenziós euklidészi tér a szokásos távolsággal, a költségfüggvény pedig egy nemnegatív értékű folytonos $c\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény. A kupacnak és a gödörnek pedig egy-egy Borel valószínűségi mérték felel meg. (Legyen a kupac eloszlásának megfelelő mérték μ, a gödöré ν.) A transzport leképezésre vonatkozó (1) feltétel megfelelője az általános esetben az, hogy $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy olyan mérhető függvény kell legyen, amelyre $\mu(T^{-1}(A)) = \nu(A)$ teljesül minden $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel-halmaz esetén.

Ilyenkor azt mondjuk, hogy a ν mérték a μ-nek T-szerinti előretoltja, jelölésben: $T_{\#}\mu = \nu$.



Ezek után már könnyű látni, hogy a (2) formula általános megfelelője nem más, mint

$$C(T) := \int_{\mathbb{R}^n} c(x, T(x)) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Szemben a fenti (3) diszkrét esettel itt semmilyen egyszerű gondolatmenet nem garantálja, hogy ha egyáltalán van transzport leképezés (azaz a C funkcionál értelmezési tartománya nem üres), akkor az

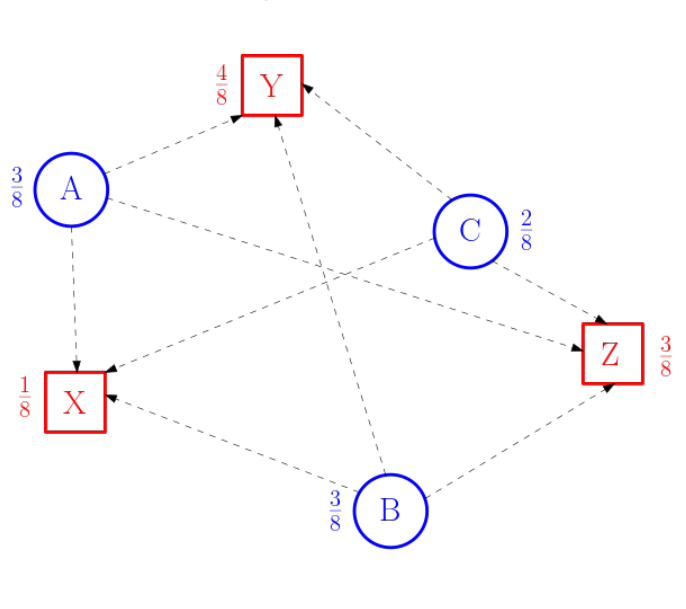
$$\inf_{T_{\#}\mu = \nu} C(T)$$

infimum valójában egy minimum, tehát hogy a C funkcionál felveszi a minimumát. Olyannyira nem garantálja ezt semmilyen egyszerű gondolatmenet, hogy több mint 200 évet kellett várni a következő szép eredményre: ha a μ mérték abszolút folytonos az n-dimenziós Lebesgue-mértékre vonatkozóan, akkor létezik optimális transzport leképezés [1].

2. A transzport probléma Kantorovics-féle megfogalmazása

A Monge-probléma egyik nehézsége a „kompaktság hiányában" rejlik, azaz hogy ha adott is a μ-t ν-be mozgató transzport leképezéseknek egy $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata, nem ismert olyan topológia, amely szerint $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$-ből kiválasztható konvergens részsorozat. Több mint 150 évvel később Leonyid Kantorovicsnak, a lineáris programozás egyik szülőatyjának sikerült áthidalnia ezt a problémát. A felfedezés fontosságát és hasznosságát jól mutatja, hogy 1975-ben Tjalling Koopmansszal megosztva közgazdasági Nobel-díjjal tüntették ki az erőforrások optimális elosztásának elméletéhez való hozzájárulásáért.

A transzport probléma új, relaxált megfogalmazásánál kibővítette a C funkcionál értelmezési tartományát, és nem csak transzport leképezéseket, hanem úgynevezett *transzport terv*eket is megengedett. Nézzünk egy olyan példát, amit a Monge-féle megfogalmazás szerint nem lehet megoldani.



Világos, hogy nincs olyan $T\colon \{A, B, C\} \to \{X, Y, Z\}$ leképezés, amelyik teljesíti az (1) feltételt. Ha meg volna engedve, hogy a kék körökön lévő súlyokat feldaraboljuk, és azokat különböző piros négyzetekbe szállítsuk, az jelentősen megkönnyíteni a dolgunkat. Az alábbi táblázat egy ilyen felosztást mutat.

	X	*Y*	*Z*
A	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
B	0	$\frac{3}{8}$	0
C	0	0	$\frac{2}{8}$

Ha csak egy sort nézünk, azt látjuk, hogy az adott kék körön lévő súlyt hogyan daraboljuk fel, és melyik darabot melyik piros négyzetbe küldjük. Ha csak egy oszlopot nézünk, azt látjuk, hogy az adott piros négyzetbe melyik kék körből mennyi súly érkezik. Adott c költségfüggvény mellett ennek a transzport tervnek a költsége

$$c(A, X) \cdot \frac{1}{8} + c(A, Y) \cdot \frac{1}{8} + c(A, Z) \cdot \frac{1}{8} + c(B, Y) \cdot \frac{3}{8} + c(C, Z) \cdot \frac{2}{8}.$$

A táblázatra kicsit másképp ránézve egy valószínűségi eloszlást látunk az $\{A, B, C\} \times \{X, Y, Z\}$ halmazon, amelynek egyik peremeloszlása épp a kék eloszlás, a másik pedig a piros eloszlás. Általában persze ilyen eloszlásból nem csak egy van, a fenti szállítási feladatot is sokféleképp meg lehet oldani. A feladat a legkisebb költségű ilyan transzport terv megtalálása.

Nézzük hogyan írható át a Kantorovics-féle megfogalmazás az általános esetre. Legyen μ és ν két Borel valószínűségi mérték $\mathbb{R}^n$-en, az ezen mértékekhez tartozó transzport tervek halmazát jelölje $C(\mu, \nu)$. Ezek tehát azok a π mértékek a szorzat téren, amelyeknek marginálisai μ és ν

$$\pi(A \times X) = \mu(A) \qquad \pi(X \times A) = \nu(A).$$

Fontos megjegyezni, hogy a $C(\mu, \nu)$ halmaz sosem üres, hiszen μ és ν szorzatmértéke benne van. Egy $\pi \in C(\mu, \nu)$ transzport terv költsége

$$C(\pi) = \int_{X \times X} c(x, y) \, \pi(dx, dy),$$

a feladatunk pedig a $C\colon C(\mu, \nu) \to \mathbb{R}$ funkcionál minimalizálása. Azaz keressük azt a $\widehat{\pi}$ transzport leképezést, amelyre

$$C(\widehat{\pi}) = \min_{\pi \in C(\mu, \nu)} C(\pi).$$

Szemben a Monge-féle megfogalmazással, ez a minimalizálási feladat mindig megoldható. (Legalábbis abban a speciális esetben, amit itt tárgyalunk, tehát amikor az alaptér $\mathbb{R}^n$, a költségfüggvény pedig egy folytonos nemnegatív függvény.) Ennek az az oka, hogy a transzport tervek tere sokkal jobb tulajdonságokkal rendelkezik, mint a transzport leképezéseké.

Nagyon vázlatosan a következőről van szó: az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy van legalább egy π, amelyre $C(\pi)$ nem végtelen. Ekkor az

$$m := \inf_{\pi \in C(\mu, \nu)} C(\pi)$$

infimum egy nemnegatív valós szám, így van olyan $C(\mu, \nu)$-ben haladó $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat, amelyre $C(\pi_n) \to m$. Azt kell megmutatunk, hogy maga a $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat valamilyen értelemben konvergál egy $C(\mu, \nu)$-beli elemhez.

Ehhez szükségünk van a következő fogalomra: valószínűségi mértékek egy $\mathcal{M}$ mértékcsaládját *feszesnek* nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan K_ε kompakt halmaz, hogy minden $\eta \in \mathcal{M}$ esetén $\eta(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$.

Megmutatjuk, hogy a $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat (mint mértékcsalád) feszes. Tudjuk, hogy a π_n mértékek marginálisai μ és ν. Azt könnyű belátni, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz léteznek olyan $K_{\mu,\varepsilon}$ és $K_{\nu,\varepsilon}$ kompakt halmazok, amelyekre $\mu(K_{\mu,\varepsilon}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ és $\nu(K_{\nu,\varepsilon}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Az ezekből képzett $K_\varepsilon := K_{\mu,\varepsilon} \times K_{\nu,\varepsilon}$ kompakt halmazok pedig garantálják $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ feszességét. Ezen a ponton használhatjuk Prokhorov híres tételét, nevezetesen hogy a feszesség miatt a sorozatból kiválasztható gyengén konvergens részsorozat. (Emlékeztetünk, hogy η_n gyengén konvergál η-hoz, ha minden folytonos korlátos függvény η_n szerinti integráljaiból kapott sorozat konvergál a függvény η szerinti integráljához.) Jelölje a konvergens részsorozat limeszét $\widehat{\pi}$. Könnyen igazolható, hogy $\widehat{\pi} \in C(\mu, \nu)$. A bizonyítás befejezéséhez elég megmutatni, hogy

$$\liminf_{n \to \infty} C(\pi_n) \geq C(\widehat{\pi}).$$

Ha a c költségfüggvény korlátos és folytonos, akkor ez a gyenge konvergencia definíciójából és a $\widehat{\pi}$ választásából azonnal következik, ha nem, akkor egy standard határátmenetet használó okoskodással vissza lehet vezetni a problémát a folytonos korlátos esetre.

Ezzel vázlatosan megmutattuk, hogy az általunk vizsgált esetben a Kantorovich-féle probléma megoldható. A fenti okoskodás lépései akkor is működtek volna, ha $\mathbb{R}^n$ helyett egy szeparábilis teljes metrikus teret tekintettünk volna, a c költségfüggvényről pedig alulról félig folytonosságot tettünk volna fel.

A cikket egy egyszerű észrevétellel zárjuk, amely kapcsolatot teremt a probléma két megfogalmazása között. Tegyük fel először, hogy T egy transzport leképezés, azaz $T_{\#}\mu = \nu$, és tekintsük az $(\mathrm{Id}, T)(x, y) := (x, T(y))$ hozzárendeléssel megadott $(\mathrm{Id}, T)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt.

Ekkor $\pi := (\mathrm{Id}, T)_{\#}\mu \in C(\mu, \nu)$ és $C(\pi) = C(T)$, és az $(\mathrm{Id}, T)_{\#}\mu$ mérték a T grafikonjára van koncentrálva. Megfordítva, ha $\pi \in C(\mu, \nu)$ egy olyan mérték, amely egy függvény grafikonjára van koncentrálva, akkor van olyan T transzport leképezés, amelyre $(\mathrm{Id}, T)_{\#}\mu = \pi$.

A cikk az ITM és az NKFIH ÚNKP-19-4-BGE-1 és PD128374 kódszámú projektjeinek, valamint az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíjának támogatásával készült.

Irodalomjegyzék

[1] L. C. Evans, W. Gangbo, Differential Equations Methods for the Monge–Kantorovich Mass Transfer Problem, Memoirs of the American Mathematical Society No. 137, 1999.
[2] B. Gustafsson, Scientific Computing: A Historical Perspective, Texts in Computational Science and Engineering, Springer, 2018.
[3] L. Kantorovich, On translation of mass, C.R. Doklady. Acad Sci USSR. 1942;37 199–201.
[4] G. Monge, Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. De l'Imprimerie Royale; 1781.
[5] G. Monge, Description de l'art de fabriquer des canons, Éditeur: Imprimerie du comité de salut publique, Paris, Publication: an 2 de la république francaise (1793–1794).
[6] F. Santambrogio, Optimal transport for applied mathematicians. Birkäuser Springer, Basel, 2015.
[7] C. Villani, Topics in Optimal Transportation. American Mathematical Society, 2003.
[8] C. Villani, Optimal Transport: Old and New, Volume 338. Springer Verlag.

Titkos Tamás

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
és Budapesti Gazdasági Egyetem

Mi is...?

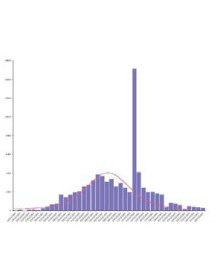
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon: ›

nka Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

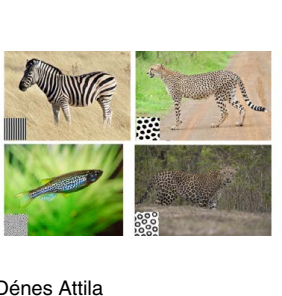
A **GAZDA(G)SÁG** NEVET ADTUK A **GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET ROVATNAK**, AMELYBEN BEMUTATJUK, HOL, MIKÉPPEN HASZNÁLJÁK FEL A MATEMATIKÁT, MILYEN GAZDAG IS AZ A KÖR, AMELYIK ÉRINTI EZT A TUDOMÁNYÁGAT. (ROVATSZERKESZTŐK: *ILLÉS TIBOR, MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR ÉS RÖST GERGELY*.)



Dénes Attila
2020. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Az új koronavírus Kínán kívüli terjedésének kockázatát modellezték szegedi matematikusok

A Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének hat matematikusa – *Boldog Péter, Tekeli Tamás, Vizi Zsolt, Dénes Attila, Bartha Ferenc* és *Röst Gergely* – azt modellezte, hogy az egyes országokban mekkora a veszélye egy Kínán kívüli járványkitörésnek. A matematikai modellek alkalmazása igen hatékony módszer lehet a járványok elleni küzdelemben. Segítségükkel pontosabb becsléseket adhatunk a COVID-19 járvány fő paramétereire – mint az inkubációs időszak és a fertőző időszak hossza, vagy a járvány reprodukciós száma –, előre jelezhetjük a járvány jövőbeli terjedését, kiértékelhetjük az eddigi intézkedések hatását, esetleg új intézkedéseket javasolhatunk. Tovább…



Dénes Attila
2020. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Állati mintázatok

2019 decemberében a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének vendége volt *Philip Maini*, az Oxfordi Egyetem professzora, a matematika biológiai alkalmazásainak világszerte egyik legnevesebb kutatója. Érdekes előadásáról, amelyet *A biológiai és kémiai önszerveződés matematikája* címmel tartott a Bolyai Intézet hagyományos karácsonyi szemináriumán, *Dénes Attila* számol be. Tovább…

Tóth János
2020. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

"Mesterséges intelligencia" – ha úgy akarod

A Wolfram nyelv (archaikusan: *Mathematica*) többször is szerepelt már folyóiratunk hasábjain, de mivel nem elégszer, ezért most *Tóth János* ismertet néhány aktuális érdekességet folytatva a programozásról szóló előző írását. Amint bizonyára mindenki jól emlékszik, ott alapvető ismeretekről (a **Map** és az **Apply** függvényről) volt szó, itt viszont a másik végletről. Egészen összetett feladatok ellátására képes függvényekről. (Képünk forrása: Computational intelligence, wolframalpha.com.) Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

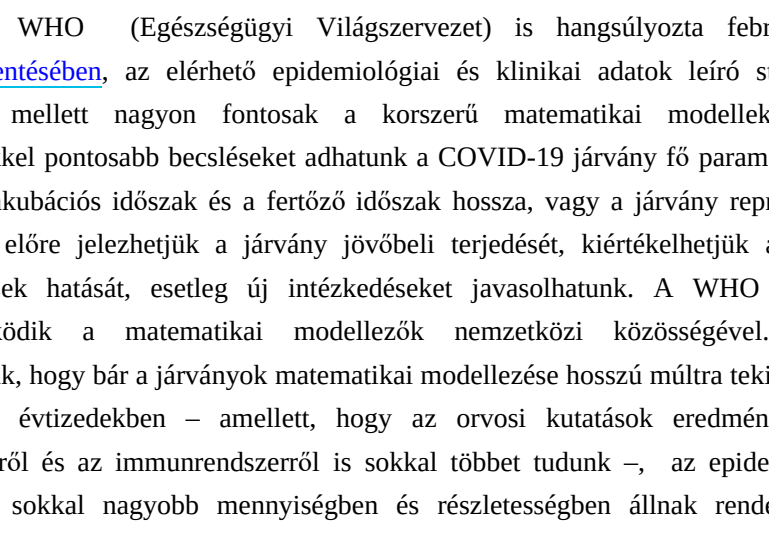
Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Dénes Attila 2020. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Az új koronavírus Kínán kívüli terjedésének kockázatát modellezték szegedi matematikusok

2020 első hónapjaiban világszerte nagy riadalmat okoz a kínai Vuhanból kiindult új koronavírus-járvány, amely (március 3-i adatok szerint) már több mint 91 ezer embert fertőzött meg és 3118 halálos áldozatot követelt. A járvány 2019 decemberében indult az első tüdőgyulladásos esetek megjelenésével, a betegség legfőbb tünetei a láz és légzési nehézségek. A betegség gyors terjedésére a kínai hatóságok számos intézkedéssel reagáltak: január 23-án Vuhant és a környező városokat karantén alá helyezték, új kórházak építését kezdték meg, Kína-szerte lezárták a legfontosabb idegenforgalmi látványosságokat, számos légitársaság törölte kínai járatait. Az intézkedések ellenére a betegség hamar átterjedt más országokra: március elejéig már 77 országban jelent meg, és sok helyen – pl. Olaszországban, Dél-Koreában, Iránban – terjedni is kezdett. Az orvosok, epidemiológusok mellett a matematikusok is hamar vizsgálni kezdték a betegség terjedését. De hogyan segíthet a matematika a járványterjedés megértésében? Sokak számára meglepő lehet, de a matematikai modellek alkalmazása igen hatékony módszer lehet a járványok elleni küzdelemben. Ahogy a WHO (Egészségügyi Világszervezet) is hangsúlyozta február 19-i helyzetjelentésében, az elérhető epidemiológiai és klinikai adatok leíró statisztikai elemzése mellett nagyon fontosak a korszerű matematikai modellek, hiszen segítségükkel pontosabb becsléseket adhatunk a COVID-19 járvány fő paramétereire – mint az inkubációs időszak és a fertőző időszak hossza, vagy a járvány reprodukciós száma –, előre jelezhetjük a járvány jövőbeli terjedését, kiértékelhetjük az eddigi intézkedések hatását, esetleg új intézkedéseket javasolhatunk. A WHO szorosan együttműködik a matematikai modellezők nemzetközi közösségével. Fontos kiemelnünk, hogy bár a járványok matematikai modellezése hosszú múltra tekint vissza, az elmúlt évtizedekben – amellett, hogy az orvosi kutatások eredményeként a patogénekről és az immunrendszerről is sokkal többet tudunk –, az epidemiológiai adatok is sokkal nagyobb mennyiségben és részletességben állnak rendelkezésre, továbbá a számítógépek is sokkal hatékonyabban, gyorsabban végzik a szimulációkat, ami lehetővé teszi, hogy egyre összetettebb és a valóságot egyre pontosabban leíró matematikai modelleket adjunk a járványok terjedésére.



A kínai koronavírusos esetek száma és egy egyszerű matematikai járványtani modell egy megoldása. A kiugró esetszámokat jelző oszlopok annak eredményeként jöttek létre, hogy új módszert vezettek be a koronavírusos esetek regisztrálására.

A Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének hat matematikusa – Boldog Péter, Tekeli Tamás, Vizi Zsolt, Dénes Attila, Bartha Ferenc és Röst Gergely – azt modellezte, hogy az egyes országokban mekkora a veszélye egy Kínán kívüli járványkitörésnek.

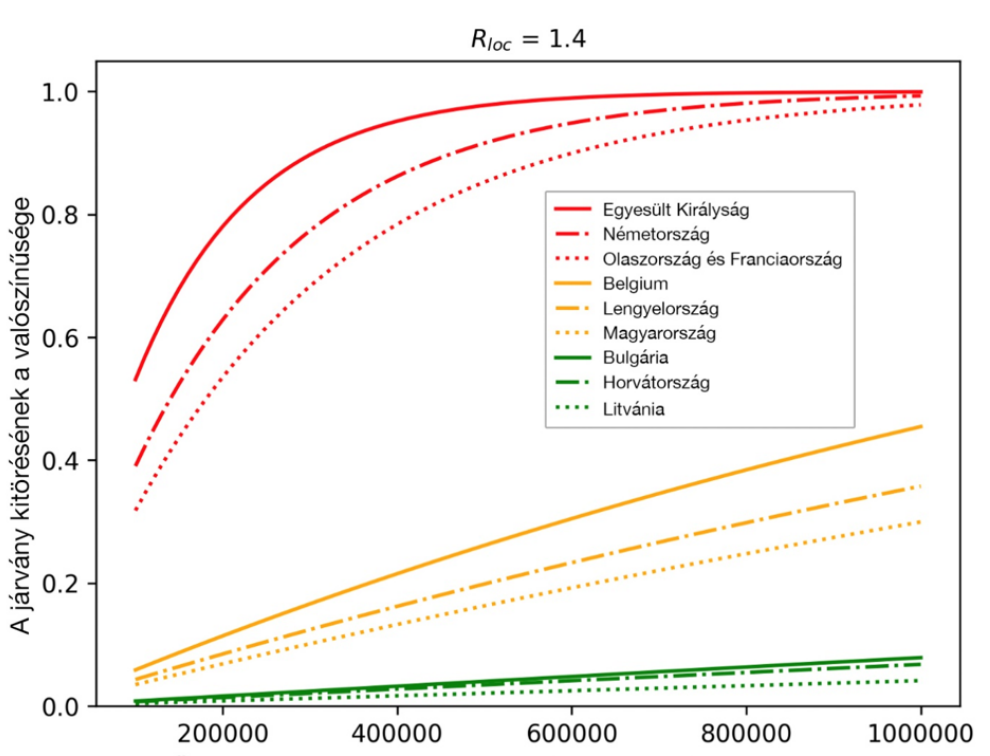
A szegedi kutatók egy háromfázisú modellt alkottak meg. Elsőként egy differenciálegyenlet-rendszer segítségével adtak becslést az összes (a karanténnal lezárt Hubei tartományon kívüli) kínai eset várható számára. Fontos kiemelni, hogy a modell nemautonóm, vagyis időfüggő paramétert is tartalmaz, a kutatók ugyanis figyelembe vették a kínai hatóságok intézkedéseit, azt feltételezve, hogy a növekvő mértékű beavatkozások az idő múlásával egyre hatékonyabban fékezik a járvány terjedését. A betegek számának becslésére felhasználták a betegség reprodukciós számára (vagyis az egy beteg által generált új fertőzések várható értékére) és a betegség egyéb paramétereire (inkubációs és fertőző periódus átlagos hossza) elérhető adatokat: a lappangási időre 5,1 napos, a reprodukciós számra 2,6-es, a fertőző időszakra 3,3 napos becslést használtak. A kutatók figyelembe vették azt is, hogy a betegek valódi száma aluljelentés miatt jelentősen eltérhet a valódi esetszámtól.

A modell második részében a differenciálegyenletes modell segítségével kapott betegszámot alkalmazták egy individuális alapú, globális mobilitási modellben, hogy – a nemzetközi légiforgalmi adatok alapján, az utazási megszorítások figyelembevételével – becslést adjanak arra, hogy hány fertőzött utazó érkezhet Kínán kívüli célállomásokra.

Nem minden beteg okoz azonban járványt a célországban, hiszen többek között az adott beteg fertőzőképességétől, kontaktszámától is függ, hogy ez a beteg hány újabb fertőzést generál. A modell harmadik fázisa egy ún. elágazó sztochasztikus folyamat, amelynek segítségével leírható a betegség terjedése a célországban a kezdeti időszakban, és kiszámítható egy járvány kitörésének valószínűsége. A kutatók kiszámolták annak a valószínűségét, hogy egy beteg által indított elágazó folyamat kihal. Ha feltesszük, hogy *i* beteg érkezett Kínából, egy járvány kitörésének valószínűségét annak a valószínűsége adja, hogy az *i* beteg által indított elágazó folyamatok közül nem mindegyik hal ki. A modell segítségével a kutatók megállapították, hogy a járványkitörés veszélye hogyan függ a három kulcsparamétertől: a kínai esetek számától, a célország és Kína közti közlekedési kapcsolatoktól, azaz az járatok és utasok számától, a járatok számának csökkentésétől és a célállomáson végzett szűréstől, valamint a célországbeli intézkedések eredményességétől. Az eredmények azt mutatják, hogy a Kínával kevésbé szoros összeköttetésben álló, de viszonylag magas helyi reprodukciós számmal rendelkező országokban elsősorban a beérkező utazók szűrésével, valamint a közlekedési kapcsolatok csökkentésével mérsékelhető a járványkitörés kockázata. A Kínával szoros összeköttetésben álló, de alacsonyabb helyi reprodukciós számmal rendelkező országokban a helyi reprodukciós szám további csökkentése a leginkább hatékony intézkedés. A két tényező szempontjából közepes érintettségű országokban mindezen intézkedések kombinálásával érhető el a legjobb eredmény.

A modellel különböző ázsiai, amerikai és európai országcsoportok kockázatait is összehasonlították, ez alapján Magyarország a viszonylag alacsony kockázatú országok közé tartozik. A modell alapján született eredményeket bemutató cikk megjelenése óta a korábban a legmagasabb kockázatú európai országok egyikeként megjelölt Olaszországban is súlyos járvány tört ki, illetve más, nagy kockázatú országok – Németország és Franciaország – is a legnagyobb esetszámú országok között vannak. A modell alapján az is látható volt, hogy amikor Iránban hivatalosan még csak 28 esetről lehetett tudni, a valóságban több ezer eset lehetett már akkor. Erről a népszerű tudományos magazin, a New Scientist is beszámolt. Az új járványgócok megjelenésével, a kínai terjedés csökkenésével a modellben leírt szituáció jelentősen megváltozott, így a kutatók új modellek megalkotásával, vizsgálatával folytatják a munkát.

A szegedi matematikusok tanulmánya a *Journal of Clinical Medicine* folyóiratban jelent meg, munkájukról további részletek olvashatók az alábbi oldalon: http://www.math.u-szeged.hu/~rost/Coronavirus/COVID19.html



Boldog, Péter; Tekeli, Tamás; Vizi, Zsolt; Dénes, Attila; Bartha, Ferenc; Röst, Gergely
Risk Assessment of Novel Coronavirus COVID-19 Outbreaks Outside China
Journal of Clinical Medicine, **2020**, *9*, 571
https://www.mdpi.com/2077-0383/9/2/571

Köszönetnyilvánítás

A cikk az Emberi Erőforrások Minisztériuma ÚNKP-19-4 Kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásával készült.

Dénes Attila

tudományos munkatárs, SZTE Bolyai Intézet

alkalmazott matematika

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

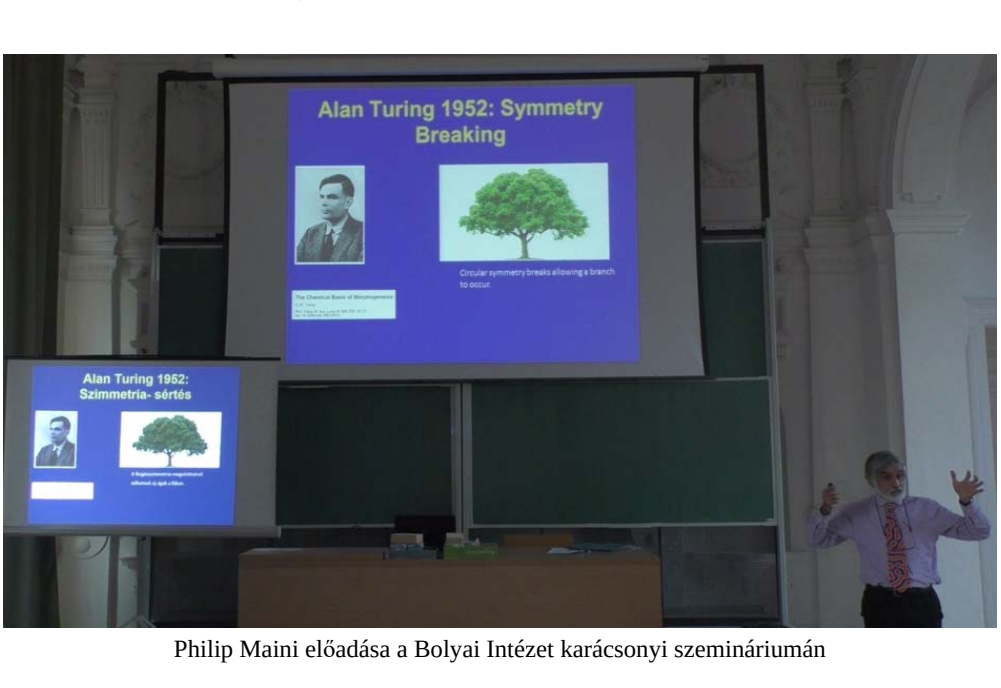
nka Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Dénes Attila 2020. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Állati mintázatok

2019 decemberében a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének vendége volt Philip Maini, az Oxfordi Egyetem professzora, a matematika biológiai alkalmazásainak világszerte egyik legnevesebb kutatója. Maini professzor Oxfordban végzett egyetemi tanulmányait követően Oxfordban és a Utahi Egyetemen is dolgozott, 1998 óta az Oxfordi Egyetem Wolfson Matematikai Biológiai Központjának igazgatója, Maini professzor kutatási területei közé tartozik a daganatok, a sebgyógyulás és az embrionális mintaképződés matematikai modellezése. Philip Maini amellett, hogy a Bolyai Intézet biomatematikai szemináriumának keretein belül a fiatal kutatók részére beszámolt a matematikai biológia területén végzett kutatással kapcsolatos tapasztalatairól, a Bolyai Intézet hagyományos karácsonyi szemináriumán is előadást tartott *A biológiai és kémiai önszerveződés matematikája* címmel.


Alan Turing 1952: Symmetry Breaking
Alan Turing 1952: Szimmetria- sértés

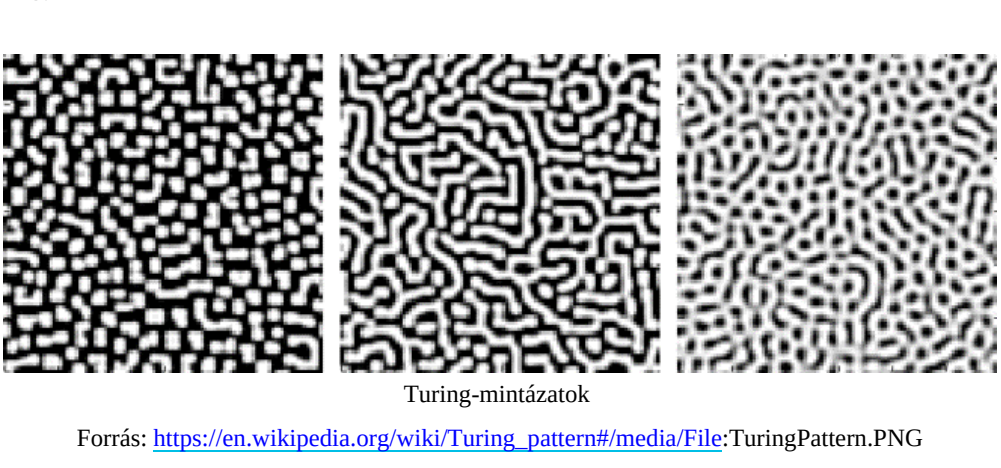
Philip Maini előadása a Bolyai Intézet karácsonyi szemináriumán

Előadásában elsőként az állatok mintaképződéséről beszélt. Az ezzel kapcsolatos első matematikai modellek az elsősorban a számítástudomány területén elért eredményeiről és az Enigma feltöréséről ismert Alan Turing nevéhez fűződnek. Turing 1952-ben jelentette meg *A morfogenezis kémiai alapjai* című, a természetes minták képződésére vonatkozó elméletét leíró cikkét, melyben azt a gondolatot vetette fel, hogy a biológiai mintázatok egymással reagáló és diffundáló kémiai anyagok (morfogének) hatására alakulhatnak ki. Elmélete szerint kémiai anyagok rendszere, amely diffúzió nélkül stabil állapotba áll be, instabillá válik a diffúzió következtében. Ez első hallásra hihetetlenül hangzik, hiszen a diffúzió (részecskék véletlenszerű áramlása) általában megszünteti a mintázatokat, gondoljunk csak egy vízbe ejtett tintacseppre.Turing elméletének matematikai alátámasztására egy olyan egyenletet alkalmazott, amelyet a matematikusok reakció-diffúzió egyenletnek hívnak. A rendszer reakciót leíró részének van egy stabil egyensúlyi állapota, amely a teljes reakció-diffúzió rendszerben instabillá válik.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u,v) - d_u v + D_u(\Delta u)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = G(u,v) - d_v v + D_v(\Delta v)$$

Reakció-diffúzió-egyenlet

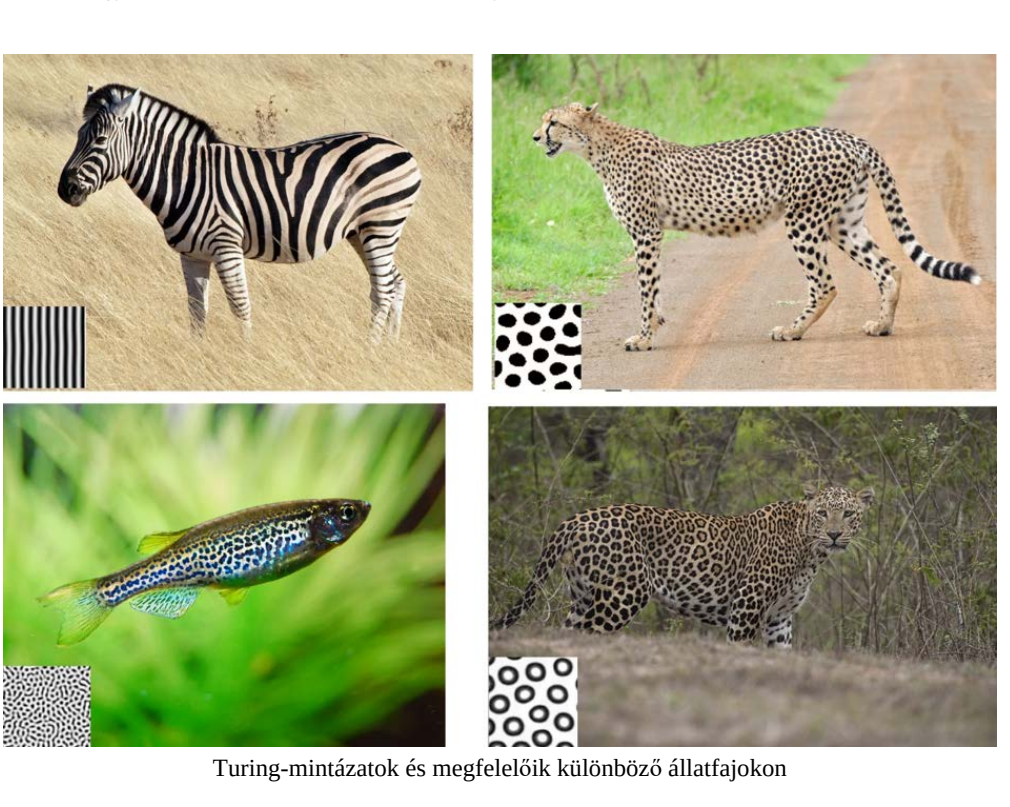
A rendszer működését Maini professzor egy égő mezővel vont párhuzammal tette érthetővé: képzeljünk el egy mezőt, ahol tűz ég. Az égő tűz felforrósítja a füvet, meggyullad, vagyis a tűz önmagát aktiválja. A tűz azonban a mezőn élő szöcskéket is aktiválja, amelyek erősen izzadni kezdenek. Az izzadságuk akadályozza a tüzet (vagyis inhibitorként működik). Ha a tűz gyorsabban terjed, mint ahogy a szöcskék mozognak, az egész mező kiégett feketeséggé változik. Ha azonban a szöcskék gyorsabban ugranak, mint ahogy a tűz terjed, izzadságukkal megnedvesítenek bizonyos területeket, amelyekre nem tud átterjedni a tűz. Így végül a fekete mezőt zöld szigetek tarkítják, vagyis mintázat alakul ki.



Turing-mintázatok

Forrás: https://en.wikipedia.org/wiki/Turing_pattern#/media/File:TuringPattern.PNG

A mintázat kialakulására rendelkezése álló felület nagysága fontos a mintázat bonyolultsága szempontjából: minél nagyobb a terület, annál bonyolultabb minta kialakulása várható. Példa erre a gepárd vagy a leopárd, amelyek bundájának összetett foltjai farkuk végén sávokká egyszerűsödnek. Érdekes módon ugyanezt a jelenséget figyelhetjük meg a futballmezek tervezésénél is: néhány kivételtől eltekintve a mezek ujjának mintázata egyszerűbb magának a meznek a mintájánál. Kivételek a természetben is akadnak, például a gyűrűsfarkú maki. Maini professzor előadásában példákat mutatott arra, hogy a kémiai reakciók során keletkező minták a természetben is mind megjelennek különböző állatok bundáján.



Turing-mintázatok és megfelelőik különböző állatfajokon

Előadása második felében Maini professzor gerjeszthető rendszerekről beszélt, azaz olyan rendszerekről, amelyekben bizonyos hullámok terjedhetnek, és amelyekben nem terjedhet újabb hullám bizonyos idő elteltе előtt. Ennek kapcsán a professzor olyan mintázatokról beszélt, amelyek időben változnak. Példaként a Beluszov–Zsabotyinszkij-reakciót említette (olyan reakció, melynek során valamilyen szerves szubsztrátumot oxidálnak savas bromáttal átmenetifém-ionok jelenlétében). A reakciót leíró egyenletben néhány változó nagyon gyorsan változik, mások nagyon lassan, emiatt a rendszer hirtelen átugorhat egyik állapotból egy másikba. Az élővilágban hasonló jelenséget figyelhetünk meg a sejtes nyálkapenész nevű amőbánál (*Dictyostelium discoideum*). Ezek az amőbák tápanyaghiány esetén egy vegyületet bocsátanak ki, amelynek hatására összeállnak és egyebek mellett spórává differenciálódnak, ami segít a túlélésükben. Ebben a rendszerben olyan folyamatok játszódnak le (jelátvitel és sejtkommunikáció, kémiai mozgási ingerek, sejtdifferenciálódás), amelyek magasabb rendű élőlényekre jellemzőek, ezért egy kiváló fejlődésbiológiai modellrendszert szolgáltatnak. Ez is egy gerjeszthető rendszer, és megfigyelték, hogy az amőbák csoportosulása során spirális hullámmintázatok alakulnak ki. Egy másik nyálkagombafaj, a *Physarum polycephalum* képes arra, hogy az egysejtűekből álló telep a lehető legrövidebb úton érje el a táplálékot. Az organizmusok számára kellemetlen ízű koffeint a gombák kikerülték, más típusú alakzatot kialakítva. Később a telepek rájöttek, hogy érdemes átküzdeni magukat az akadályokon található irritáló anyagokon. Mindezeket a mintázatokat parciális differenciálegyenletes modellekkel is vissza lehet adni. Alan Hodgkin és Andrew Huxley 1952-ben a tintahal axonjában generált akciós potenciál leírására alkottak modellt, feltételezve, hogy az idegmembrán inger hatására bekövetkező feszültségváltozása az akciós potenciál ionáramokkal írható le, és hogy az ioncsatornák nyitását és csukását a kémiai reakciók kinetikájának mintájára lehet leírni. A két tudós a tintahal axonjából kiváltott akciós potenciál alakját egyenleteik segítségével számítógépes szimulációkkal reprodukálta, munkájukért 1963-ban kaptak Nobel-díjat. Denis Noble és Peter Hunter a szív működését modellezték. A szív elektromos impulzus hatására húzódik össze, ami hullámként terjed tovább az egész szíven. Ha a szív egy része elhal pl. oxigénhiány miatt, az megzavarja a hullámokat, és spirálok keletkeznek, ami fibrillációhoz, szívrohamhoz vezet.

A példák sokaságával Maini professzor megmutatta, hogy a matematikai modellezés segítségével számos biológiai és kémiai folyamatot érthetünk meg sokszor meglehetősen kontraintuitív módon, és ezzel új kutatási irányokat is inspirálhatunk. A matematikai megközelítésben rejlő absztrakció teszi lehetővé, hogy az egyik alkalmazásban használt ötleteket átvigyük egy másik területre.

Köszönetnyilvánítás

A cikk az Emberi Erőforrások Minisztériuma ÚNKP-19-4 Kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásával készült.

Dénes Attila

tudományos munkatárs, SZTE Bolyai Intézet

alkalmazott matematika beszámolók

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Tóth János 2020. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

"Mesterséges intelligencia" – ha úgy akarod

„Mesterséges intelligencia” – ha úgy akarod

A Wolfram nyelv (archaikusan: *Mathematica*) többször is szerepelt már folyóiratunk hasábjain, de mivel nem elégszer, ezért most ismertetünk néhány aktuális érdekességet folytatva a programozásról szóló előző írásunkat. Amint bizonyára mindenki jól emlékszik, ott alapvető ismeretekről (a **Map** és az **Apply** függvényről) volt szó, itt viszont a másik végletről. Egészen összetett feladatok ellátására képes függvényekről.

Előkészületek

Azt a korábbi cikkben megtanultuk, hogy a **Map** operátort kell használnunk, ha ki akarjuk számolni az f függvény értékét az {a,b,c} lista elemein: **Map**[f, {a,b,c}] => {f[a],f[b],f[c]}. A függvényeket kifejezhetjük az identitásfüggvény segítségével is, aminek itt a jele #&. Ahelyett tehát, hogy f[x_]:=x^2+1, írhatjuk ezt is: f:=(#^2+1)&. Ezzel a jelöléssel a korábbi utasítás így írható: **Map**[(#^2+1)&, {a,b,c}]=> {a^2+1, b^2+1, c^2+1}.

Még egy előzetes megjegyzés: a cikk megírásához a sok rossz megoldás közül azt választottuk, hogy itt szövegesen, kevés Wolfram nyelvi szimbólumot használva ismertetünk néhány érdekesnek tűnő újdonságot, PDF-mellékletként pedig megmutatjuk a teljes *Mathematica* jegyzetfüzetet, aminek alapján a számolásokat reprodukálni tudja, aki rendelkezik licenccel.

Fordítás

Map[TextTranslation[”Where is the library?”,#]&,

{”Russian”,”German”,”Spanish”}

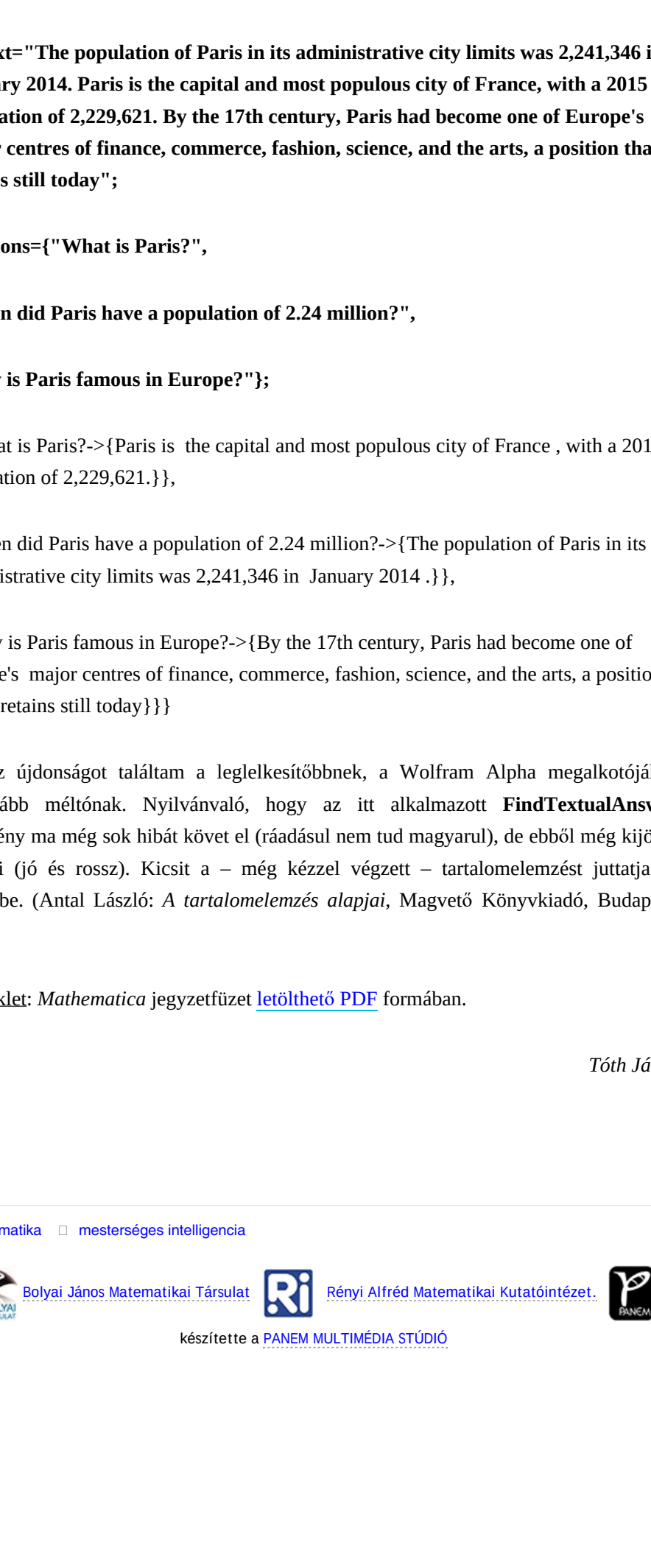
{”Где находится библиотека?”,”Wo ist die Bibliothek?“,“¿Dónde está la bibliotheque?“}

Nem gondolom, hogy az itt szereplő **TextTranslation** függvény a nagy áttörés, ráadásul jelenleg a Google vagy a Microsoft fordítói közül választhatunk módszert. Viszont ez alkalommal is megmutatkozik a program azon kellemetessége, hogy nem kell elhagyni egy fordítás kedvéért, hasonlóan ahhoz, ahogyan a számolásokon túl az ábrákat, a prezentációkat és a zenét is a programon belül lehet előállítani.

Ja, még egy hoppá: a **Map** operátor első argumentumában olyan kétváltozós függvény szerepel, amelynek első változóját rögzítettük a **”Where is the library?”** értéken.

Bizonyítás

A kalkulus néhány elemi tételéből (szorzat és összeg deriválási szabálya) levezethető a parciális integrálás tétele. A kiindulásként feltett állításokat ezeket úgynevezett *axiómaként* adjuk meg. Azután megadjuk, hogy a bizonyítandó állítás a parciális deriválás tétele. Ebből a két argumentumból a **FindEquationalProof** függvény előállít egy bizonyítást, aminek a részleteit az alábbi táblázat formájában is megkaphatjuk.



```
Axiom 1
We are given that:
x1==derivative[integral[x1]]
Axiom 2
We are given that:
x1==integral[derivative[x1]]
Axiom 3
We are given that:
derivative[sum[x1,x2]]==sum[derivative[x1],derivative[x2]]
Axiom 4
We are given that:
derivative[product[x1,x2]]==sum[product[x1,derivative[x2]],product[x2,derivative[x1]]]
Hypothesis 1
We would like to show that:
sum[integral[product[f,derivative[g]]],integral[product[g,derivative[f]]]]==product[f,g]
Critical Pair Lemma 1
The following expressions are equivalent:
derivative[sum[integral[x1],x2]]==sum[x1,derivative[x2]]
Proof
Note that the input for the rule:
sum[derivative[x1_],derivative[x2_]]→derivative[sum[x1,x2]]
contains a subpattern of the form:
derivative[x1_]
which can be unified with the input for the rule:
derivative[integral[x1_]]→x1
where these rules follow from Axiom 3 and Axiom 1 respectively.
Critical Pair Lemma 2
The following expressions are equivalent:
sum[integral[x1],x2]==integral[sum[x1,derivative[x2]]]
Proof
Note that the input for the rule:
integral[derivative[x1_]]→x1
contains a subpattern of the form:
derivative[x1_]
which can be unified with the input for the rule:
derivative[sum[integral[x1_],x2_]]→sum[x1,derivative[x2]]
where these rules follow from Axiom 2 and Critical Pair Lemma 1
respectively.
Critical Pair Lemma 3
The following expressions are equivalent:
sum[integral[x1],integral[x2]]==integral[sum[x1,x2]]
Proof
Note that the input for the rule:
integral[sum[x1_,derivative[x2_]]]→sum[integral[x1],x2]
contains a subpattern of the form:
derivative[x2_]
which can be unified with the input for the rule:
derivative[integral[x1_]]→x1
where these rules follow from Critical Pair Lemma 2 and Axiom 1
respectively.
Substitution Lemma 1
It can be shown that:
integral[sum[product[f,derivative[g]],product[g,derivative[f]]]]==product[f,g]
Proof
We start by taking Hypothesis 1, and apply the substitution:
sum[integral[x1_],integral[x2_]]→integral[sum[x1,x2]]
which follows from Critical Pair Lemma 3.
Substitution Lemma 2
It can be shown that:
integral[derivative[product[f,g]]]==product[f,g]
Proof
We start by taking Substitution Lemma 1, and apply the substitution:
sum[product[x1_,derivative[x2_]],product[x2_,derivative[x1_]]]→derivative[product[x1,x2]]
which follows from Axiom 4.
Conclusion 1
We obtain the conclusion:
True
Proof
Take Substitution Lemma 2, and apply the substitution:
integral[derivative[x1_]]→x1
which follows from Axiom 2.
```

Itt annak lehet örülni, hogy – bár a tételbizonyításnak nem a Wolfram cég az élharcosa (erre speciális programokat szokás írni, univerzális programoknak tudomásom szerint nem részei) –, de most már ez is benne van a rendszerben. Az automatikus tételbizonyítás ma leginkább oktatási célra használatos, de vannak, akik új eredményeket képesek velük előállítani. A programoknak a jövőben ott lehet majd szerepük, ahol nem két-három kvantor áll egy tétel elején, hanem több tucatnyi.

Értő olvasás

A programnak, pontosabban a **FindTextualAnswer** függvénynek megadunk egy szöveget, és néhány olyan kérdést, amilyet a tanító néni szokott megfogalmazni. Az eredmény: a kérdésre adott helyes válaszok. (Legalább is a súgóban szereplő példa esetén).

context="The population of Paris in its administrative city limits was 2,241,346 in January 2014. Paris is the capital and most populous city of France, with a 2015 population of 2,229,621. By the 17th century, Paris had become one of Europe's major centres of finance, commerce, fashion, science, and the arts, a position that it retains still today";

questions={"What is Paris?",

"When did Paris have a population of 2.24 million?",

"Why is Paris famous in Europe?"};

{{What is Paris?->{Paris is the capital and most populous city of France , with a 2015 population of 2,229,621.}},

{When did Paris have a population of 2.24 million?->{The population of Paris in its administrative city limits was 2,241,346 in January 2014 .}},

{Why is Paris famous in Europe?->{By the 17th century, Paris had become one of Europe's major centres of finance, commerce, fashion, science, and the arts, a position that it retains still today}}}

Ezt az újdonságot találtam a leglelkesítőbbnek, a Wolfram Alpha megalkotójához leginkább méltónak. Nyilvánvaló, hogy az itt alkalmazott **FindTextualAnswer** függvény ma még sok hibát követ el (ráadásul nem tud magyarul), de ebből még kijöhet valami (jó és rossz). Kicsit a – még kézzel végzett – tartalomelemzést juttatja az eszembe. (Antal László: *A tartalomelemzés alapjai*, Magvető Könyvkiadó, Budapest, 1976.)

Melléklet: *Mathematica* jegyzetfüzet letölthető PDF formában.

Tóth János

informatika mesterséges intelligencia

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 15. szám 2020. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

100

Cím	Szerző
BJMT – a 2019-es év társulati díjai	Írta: Szerkesztő
3. Formális reakciókinetikai szimpózium	Írta: Tóth János
A Matematika Világnapja: matematika mindenütt	Írta: A szerk.
Matematikus portrék: Harcos Gergely	Írta: Szerkesztő
Matematikus portrék: Füredi Zoltán	Írta: Szerkesztő
Műszaki és természettudományok közelről – BME TTK Science Camp	Írta: Lángné Lázi Márta
Úton-módon 2.	Írta: Szoldatics József
Matematika a fizikaórán	Írta: Bakosné Novák Andrea
Egy kör és más semmi... szerkesztések csak vonalzóval	Írta: Orosz Gyula
A nyúl nem tanult matematikát	Írta: Tóth János
Daniel Tammet: Számokban létezünk	Írta: Ruzsa Imre
Amikor Einstein Gödellel sétált	Írta: Lángi Zsolt
Matematikai blog egy „kívülálló” tollából	Írta: Moldvai Dávid
Mi is...a Monge–Kantorovics probléma?	Írta: Titkos Tamás
A π az idők viharában	Írta: Fried Katalin
"Mesterséges intelligencia" – ha úgy akarod	Írta: Tóth János
Az új koronavírus Kínán kívüli terjedésének kockázatát modellezték szegedi matematikusok	Írta: Dénes Attila
Állati mintázatok	Írta: Dénes Attila