Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

22. szám 2021. december

2021. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

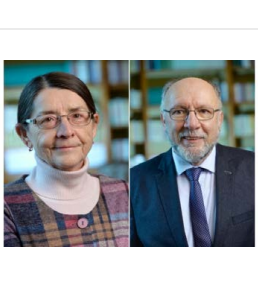
A Bolyai Társulat Prima Primissima díjas!

A Prima Primissima elismerés célja a magyar értelmiség szellemi eredményeinek megőrzése, a hazai tudomány, művészet, kultúra és sport fejlesztésének erősítése egy olyan, hatalomtól és politikától független kitüntető cím adományozásával, amelynek megkérdőjelezhetetlen értéke van a közvélemény szemében. Tovább...

2021. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Hungarikum – Simonovits Miklóssal beszélgetett Baló György

Az M1 TV 2004. november 14-én Hungarikum című műsorában közvetítette *Baló György* beszélgetését *Simonovits Miklóssal*. A kombinatorikával, extremális gráfelmélettel foglalkozó kutatóprofesszor azóta már Széchenyi-díjas akadémikus. Az interjúban diszkrét matematikáról, a Rényi Intézetről, a matematika tételeiről, és arról is beszél, hogy mi volt vonzó ebben a tudományban. 17 év elteltével mai szemmel érdekes újra megnézni a felvételt. Tovább...



2021. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Rátz tanár úr utódai 2021-ben

Immár két évtizedes hagyomány, hogy az év vége felé átadják a Rátz Tanár Úr Életműdíjakat olyan általános- vagy középiskolában oktató pedagógusoknak, akik a matematika-, fizika-, kémia-, vagy biológiaoktatás területén kimagasló teljesítményt nyújtanak a tantárgyak népszerűsítésében és a tehetséggondozásban. Gratulálunk mindannyiuknak, köztük *Csahóczi Erzsébet* és *Kovács István* matematikatanároknak! Tovább...

2021. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Az Erdős Központ

2021-ben a Rényi Intézet újraindította a Bolyai Társulat által 1998-ban alapított, de – forrás hiányában – évek óta nem működő Erdős Központot. A Központ célja tematikus szemeszterek, konferenciák és workshopok szervezése, lebonyolítása. Az első ilyen félév 2022 februárjában indul. Így a következő években a nemzetközi matematikai kutatásokban az eddigieknél is nagyobb szerep juthat hazánknak. Tovább...

2021. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Invariánsok, állapotfüggvények

2022-ben, az Európai Lány Matematikai Diákolimpia kerek 10. évfordulóján Magyarország látja vendégül a kontinensről, sőt az összes földrészről érkező lánycsapatok delegációit Egerben. Az EGMO-ra felkészülés céljait, tanulságait, és egy felépített feladatsort mutat be megoldásvázlatokkal és reflexiókkal *Nagy Zoltán Lóránt*, a jövő évi verseny szervezője. Tovább...

2021. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Találkoztunk a KöMaL Ifjúsági Ankétján!

A MATFUND Alapítvány az iskolai őszi szünetekben szokta megtartani a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (Informatika rovattal) előző évi pontversenyének eredményhirdetését. Ehhez csatlakozik a KöMaL fiatal tehetségeinek konferenciája. Az újra megjelenő járvány elején, egy év kihagyás után 2021. október 26-27-én még éppen sikerült személyes jelenléttel megrendezni a KöMaL Ifjúsági Ankétot.

2021. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Modellezés Wolfram Mathematica segítségével

Nagy sikerrel zajlott 2021. november 11–12-én a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete, a SciExperts kft. és a Wolfram Research Ltd. által szervezett bevezető online *Mathematica* tréning. Az oktató, *Karsai János* (Certified Mathematica Trainer), a Bolyai Intézet docense bemutat néhány, a kurzuson készült alkalmazást. Tovább...

2021. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

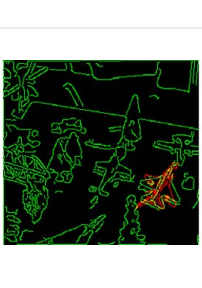
Szeretettel várjuk a Budapest Graduate Seminaron!

Fiatal diplomás matematikusoknak indult egy új, a matematika különböző érdekes ágait bemutató szeminárium. Az elmúlt hetekben Lovász László, Pach János, Philippe Michel, Stipsicz András, Németh András és Eduard Feireisl voltak a sorozat előadói. A Rényi Intézet várja a jelentkezéseket mind előadónak, mind hallgatónak minél több egyetem doktori iskoláiból. Tovább...

2021. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Alaptudományok a fenntartható fejlődésért 2022

2022-t az „alaptudományok a fenntartható fejlődésért” nemzetközi évének nyilvánította az ENSZ közgyűlése 2021 decemberében. Evvel azt üzenik az egész világnak, hogy egyre nagyobb szükségünk van az olyan alaptudományokra, mint például a kémia, a fizika, a matematika (és még sorolhatnánk) ahhoz, hogy a jövőben biztosítani tudjuk a fenntartható fejlődést. Tovább...



2021. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A Gromov–Hausdorff-távolság

Titkos Tamás rövid írásában két távolságfogalomról lesz szó, a Hausdorff-távolságról, és a Gromov–Hausdorff-távolságról. Annak idején mindkettőt tisztán elméleti okokból definiálták, manapság azonban (a továbbfejlesztett verzióikkal együtt) az alkalmazott tudományokban is komoly szerepet játszanak. Tovább...

2021. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Csaba Béla Fulkerson-díjas!

Pluhár András örömteli hírt oszt meg az Érintő olvasóival: a tekintélyes Fulkerson-díjnak 2021-ben újra van magyar kitüntetettje! Kollégájának, *Csaba Bélának*, a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének oktatójának gratulálhatunk a szép eredményhez. Tovább...

2021. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

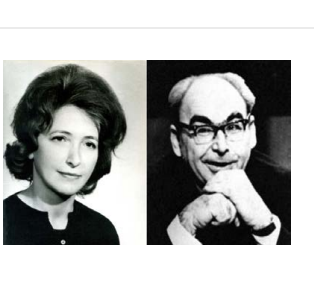
Hitel, törlesztőrészlet, járadékszámítás

A Pázmány Péter Katolikus Egyetem őszi továbbképzésén matematikatanárok hallgathatták meg *Magyar Zsoltot* arról, hogy miért is tanulunk kamatszámítást. Előadásának lényege az volt, hogyan lehet lépésről lépésre felépíteni egy nagyon is életközeli témakört: egy olyan matematikai alkalmazást, amivel mindenki találkozik az élete során. Ez a cikk is erről szól.

2021. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Simon László (1940–2021)

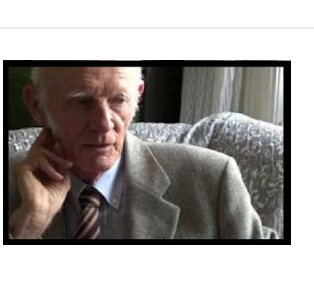
Az Eötvös József-koszorút, amellyel országos és nemzetközi szinten kiemelkedő tudósokat díjaznak, már nem tudta átvenni, fia és egyben szellemi örököse, Simon Péter ment el helyette a díjátadóra. 2021. novemberében, életének 82. évében elhunyt Simon László egyetemi tanár, az MTA doktora, az ELTE professor emeritusa. Tanítványai és kollégái az Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszékről fájó szívvel búcsúznak tőle.



2021. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Rényi Zsuzsanna: Ars Mathematica

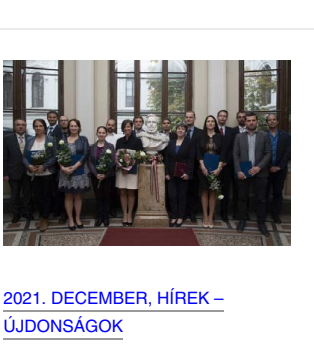
Angol nyelvű könyv jelent meg *Rényi Alfréd* születésének 100. évfordulójára, amelyet lánya, *Rényi Zsuzsanna* írt korábbi, magyar nyelvű interjúkötete (Dialógusok matematikusról, Polygon, 2013) nyomán. A Rényi házaspárról szóló életrajz címe Rényi kutatói és pedagógusi hitvallását idézi: Ars Mathematica. A könyvet *Szász Domonkos* mutatja be.



2021. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Heppes Aladár (1933–2021)

2021. október 16-án 88 éves korában elhunyt *Heppes Aladár*, az MTA doktora. Az egyetem elvégzése után, 1956 nyarán került az *Alkalmazott Matematikai Kutató Intézetbe*, ahol 12 évig dolgozott, és bár ezt követően szakmája a számítástudomány lett, valójában matematikus maradt, 80 éves korán túl is rendszeresen bejárt a Rényi Intézet könyvtárába. Tovább...



2021. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

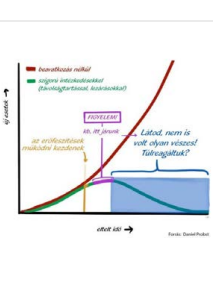
Matematikus sikerek a Lendület pályázaton

Idén ősszel két fiatal matematikus, *Bérczi Kristóf* és *Virosztek Dániel* is önálló kutatócsoportot indíthatott a Magyar Tudományos Akadémia (MTA) jóvoltából. A 2015-ben létrehozott *Lendület program* célja a hazai kutatóbázis megerősítése kimagasló teljesítményű kutatók külföldről haza hívásával, illetve itthon tartásával. A program azoknak a kutatóknak segít önálló kutatócsoport alakítani, akik korábban már sikeresen pályáztak rangos kutatási támogatásokra. Tovább...

2021. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A Bolyai János Matematikai Társulat 130 éve

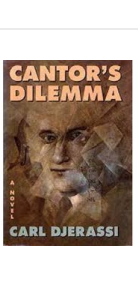
1891. november 5-én tartotta alakuló ülését a Mathematikai és Physikai Társulat, a Bolyai Társulat jogelődje. Bár egy 130. évfordulót nem szokás megünnepelni, a Prima Primissima díj elnyerése alkalmából érdemes visszatekinteni társulatunk hosszú történetére. A cikk alapja *Császár Ákosnak* a Matematikai Lapokban 2007-ben megjelent írása, ezt egészítette ki *Pálfy Péter Pál* az azóta eltelt másfél évtized fontosabb fejleményeivel. Tovább...



2021. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Járványmatek középiskolásoknak – 2. rész

„A görbe sikeres lapításának hátulütője az úgynevezett megelőzési paradoxon. Ahol viszonylag gyorsan sikerült megállítani a vírus terjedését és lassítani a járványt, egyre többen vélik úgy, hogy a hatóságok túlreagálták a járványhelyzetet, nő a gazdasági és politikai nyomás az élet normalizálására, és lesznek, akik sokkal lazábban veszik majd a vírushelyzetet, megágyazva ezzel egy következő hullámnak.” *Volf Annamária* cikksorozatát, amelynek 1. része előző számunkban jelent meg, itt folytatjuk.



2021. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

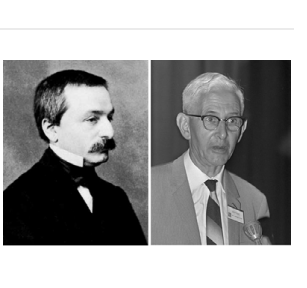
Cantor és Bourbaki

Carl Djerassi: Cantor dilemmája című regényéről, illetve a matematikát kedvelők számára hasonlóan ismerősen hangzó című másik könyvéről, a *Bourbaki-megnyitásról* osztja meg a mai fiataloknak (és idősebbeknek) szánt gondolatait *Tóth János*. Ezúttal nem a matematika a főszereplő... Tovább...

2021. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

33. Varga Tamás Módszertani Napok

A tavalyi, rendhagyó módon online megtartott rendezvény után idén új formában, személyesen és online részvétellel vegyesen tervezték a szervezők a 33. Varga Tamás Módszertani Napok megrendezését. Azonban a járványhelyzet alakulása, továbbá az előzetes regisztrációkból tükröződő, túlnyomórészt online részvételi szándék miatt végül teljes egészében online zajlott a program, amelyről *Csapodi Csaba* számol be. Tovább...



2021. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

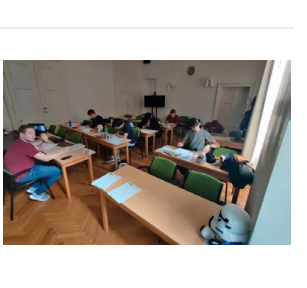
Antirealizmus a matematikában

Milyen módon léteznek a matematika objektumai, például a számok, a halmazok és a függvények? Csak az elménkben léteznek, mint például egy regény szereplői, vagy a gondolkodástól és a nyelvtől független létezők, mint például a bolygók és az elektronok? Igazak-e a matematika állításai attól függetlenül, hogy bárki elgondolná őket, vagy esetleg a matematika csak egy szimbólumokkal való formális játék? Fotókon *Leopold Kronecker* (1865), a konstruktivizmus előfutára, és az intuicionista *Arend Heyting* (1967). *Csáji Balázs Csanád* nyújt bepillantást az antirealizmus elméletébe.

2021. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Tények és emlékek egy középiskolai matematikatanítási kísérletről

Azok, akik nem élték át a fél évszázaddal ezelőtti tanítási reform általános iskolás, majd a középiskolára is kiterjesztett kísérletét, talán el sem tudják képzelni, mekkora befolyással volt a későbbi évek matematikaoktatására. Meglepő, hogy a kísérlet céljai még ma is aktuálisak, hiába teltek el közben évtizedek. *Pálfalvi Józsefné* kordokumentumokkal alátámasztva saját, hiteles emlékei alapján ismerteti meg az olvasót a korszak oktatásának és didaktikájának fejlődésével. Tovább...



2021. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Romanian Master of Mathematics 2021

Többször elhalasztották, végül októberben online formában rendezték meg a „matematika mestereinek” szokásos bukaresti versenyét, a Romanian Master of Mathematics 2021-et. Sajnos idén az indulók kimaradtak egy romániai utazásból, de remélhetőleg 2022 februárjában ismét élőben vehetünk részt a versenyen – írják a magyar csapat vezetői, *Lenger Dániel* és *Borbényi Márton*. Tovább...

2021. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A hátsó polcról – Ian Stewart: A végtelen megszelídítése

Ian Stewart brit matematikus a magyar olvasó számára is ismert népszerűsítője a matematikának. (Magyarul olvasható tőle: A természet számai. A matematikai képzelet irreális realitása és A matematika problémái.) 2008-ban megjelent, a matematika történetét ismertető művét, *A végtelen megszelídítését* most vette le a hátsó polcról *Tóth János*. Tovább...

A **HÍREK – ÚJDONSÁGOK** ROVAT A MATEMATIKÁHOZ ÉS A BOLYAI TÁRSULATHOZ KAPCSOLÓDÓ ESEMÉNYEKRŐL, ÚJDONSÁGOKRÓL SZÓL. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÁKÓCZI ILDIKÓ.)*

Szerkesztő
2021. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Az Erdős Központ

2021-ben a Rényi Intézet újraindította a Bolyai Társulat által 1998-ban alapított, de – forrás hiányában – évek óta nem működő Erdős Központot. A Központ célja tematikus szemeszterek, konferenciák és workshopok szervezése, lebonyolítása. Az első ilyen félév 2022 februárjában indul. Így a következő években a nemzetközi matematikai kutatásokban az eddigieknél is nagyobb szerep juthat hazánknak. Tovább...

Szerkesztő
2021. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

A Bolyai Társulat Prima Primissima díjas!

A Prima Primissima elismerés célja a magyar értelmiség szellemi eredményeinek megőrzése, a hazai tudomány, művészet, kultúra és sport fejlesztésének erősítése egy olyan, hatalomtól és politikától független kitüntető cím adományozásával, amelynek megkérdőjelezhetetlen értéke van a közvélemény szemében. Tovább...

Lenger Dániel, Borbényi Márton
2021. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Romanian Master of Mathematics 2021

Többször elhalasztották, végül októberben online formában rendezték meg a „matematika mestereinek” szokásos bukaresti versenyét, a Romanian Master of Mathematics 2021-et. Sajnos idén az indulók kimaradtak egy romániai utazásból, de remélhetőleg 2022 februárjában ismét élőben vehetünk részt a versenyen – írják a magyar csapat vezetői, *Lenger Dániel* és *Borbényi Márton*. Tovább...

Pluhár András
2021. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

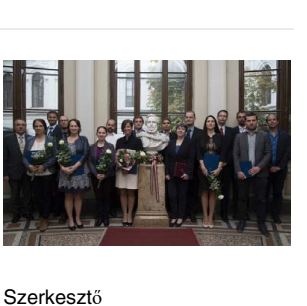
Csaba Béla Fulkerson-díjas!

Pluhár András örömteli hírt oszt meg az Érintő olvasóival: a tekintélyes Fulkerson-díjnak 2021-ben újra van magyar kitüntetettje! Kollégájának, *Csaba Bélának*, a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének oktatójának gratulálhatunk a szép eredményhez. Tovább...

Földvári Viktória
2021. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Szeretettel várjuk a Budapest Graduate Seminaron!

Fiatal diplomás matematikusoknak indult egy új, a matematika különböző érdekes ágait bemutató szeminárium. Az elmúlt hetekben Lovász László, Pach János, Philippe Michel, Stipsicz András, Némethi András és Eduard Feireisl voltak a sorozat előadói. A Rényi Intézet várja a jelentkezéseket mind előadónak, mind hallgatónak minél több egyetem doktori iskoláiból. Tovább...



Szerkesztő
2021. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Matematikus sikerek a Lendület pályázaton

Idén ősszel két fiatal matematikus, *Bérczi Kristóf* és *Virosztek Dániel* is önálló kutatócsoportot indíthatott a Magyar Tudományos Akadémia (MTA) jóvoltából. A 2015-ben létrehozott *Lendület program* célja a hazai kutatóbázis megerősítése kimagasló teljesítményű kutatók külföldről haza hívásával, illetve itthon tartásával. A program azoknak a kutatóknak segít önálló kutatócsoportot alakítani, akik korábban már sikeresen pályáztak rangos kutatási támogatásokra. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

Szerkesztő 2021. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Az Erdős Központ

2021-ben a Rényi Intézet újraindította a Bolyai Társulat által 1998-ban alapított, de – forrás hiányában – évek óta nem működő Erdős Központot. A Központ célja tematikus szemeszterek, konferenciák és workshopok szervezése, lebonyolítása. Az első ilyen félév 2022 februárjában indul *Large Networks and their Limits* címmel, tematikája átfogja a nagy hálózatok elméletét, illetve a gráflimeszekről talált legújabb eredményeket. További három szemeszter programját már rögzítettük, ezekről a Központ honlapján (https://erdoscenter.renyi.hu/) található bővebb információ. 2024-től a szemeszterek témáit pályázati alapon fogjuk kiválasztani. A vendégkutatók munkahelye a Rényi Intézettel szemben, a Reáltanoda utca 14. számú házban most kialakított irodákban lesz, míg az előadásokra, szemináriumokra vagy itt vagy a Rényi Intézet főépületében kerül sor.

A tematikus szemeszterek szervezésével, megtartásával a Rényi Intézet csatlakozott az európai és amerikai intézetek hosszú sorához, amelyek tudományos aktivitásának fontos komponense egy-egy téma vezető kutatóinak összegyűjtése egy félévre vagy egy évre, és a témakör fontos problémáinak megvizsgálása, szerencsés esetben egy részük megoldása.

A Központ programjaihoz posztdoktori ösztöndíjak rendszere is kapcsolódik. Ezek lehetőséget nyújtanak hazai és külföldi kutatók számára, hogy hosszabb-rövidebb időre bekapcsolódjanak az Erdős Központ (és ezáltal a Rényi Intézet) munkájába.

ERDŐS
CENTER

☐ Erdős Pál ☐ Rényi Intézet

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2021. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

A Bolyai Társulat Prima Primissima díjas!

A Prima Primissima küldetése, hogy példaképeket állítson a társadalom elé: azokat a kiválóságokat, akiknek teljesítménye, emberi tartása, értékrendje követendő lehet mindannyiunk számára.

A Demján Sándor által, a Vállalkozók Országos Szövetségének támogatásával 2003-ban alapított elismerés célja a magyar értelmiség szellemi eredményeinek megőrzése, a hazai tudomány, művészet, kultúra és sport fejlesztésének erősítése egy olyan, hatalomtól és politikától független kitüntető cím adományozásával, amelynek megkérdőjelezhetetlen értéke van a közvélemény szemében.

A díjat 2013-tól kezdve az OTP Bank gondozza és finanszírozza tovább. Az elismerést azóta is évenként ítélik oda a kiemelkedő teljesítményt felmutató jelöltek közül legjobbnak választottaknak. A tíz kategória: magyar irodalom, magyar színház és filmművészet, magyar képzőművészet, magyar tudomány, magyar oktatás és köznevelés, magyar építészet és építőművészet, magyar sajtó, magyar népművészet és közművelődés, magyar zeneművészet, illetve magyar sport. A kategóriánként megválasztott három-három Prima, azaz összesen harminc jelölt közül titkos szavazással kerül ki minden kategória Primissima-díjasa, valamint a publikum által odaítélt Prima Primissima Közönségdíj nyertese.

Az idei Prima-díjasokról a https://www.primaprimissima.hu/idei-dijazottak/ oldalon lehet tájékozódni. A magyar oktatás és köznevelés kategóriában a három Prima: dr. Nikolov Marianne professzor emerita, aki kiemelkedő szerepet játszott a nyelvtanítás megújításában, dr. Pásztor Zsuzsanna zongoraművész-tanár, egyetemi oktató, és legnagyobb örömünkre az Érintőt is kiadó Bolyai János Matematikai Társulat lett.

BOLYAI
TÁRSULAT

A honlap ismertetője szerint:

„A társulat matematikatanárokat, egyetemeken, kutatóintézetekben és vállalatoknál dolgozó matematikusokat tömörítő országos szervezet. Jogelődjét 1891-ben alapították nagynevű matematikusok és fizikusok. Jelenleg több mint 800 tagja van. Céljaik között szerepel a matematikai tudományos kutatások elősegítése, a matematika alkalmazásainak széles körű elterjesztése, a matematika oktatásával kapcsolatos kérdések megoldása és a matematika népszerűsítése. A társulat felkutatja a matematikai tehetségeket, tanulmányi és emlékversenyeket, konferenciákat és tanártovábbképzéseket szervez, folyóiratokat és könyveket ad ki, szakmai díjakat ítél oda."

Aki megnézi a december 3-án a MÜPÁ-ban közönség nélkül, online közvetítéssel lezajlott díjátadó gálát, az a video 20. percétől kezdődően követheti ennek a kategóriának az eredményhirdetését: **Prima Primissima díjat nyert a Bolyai János Matematikai Társulat!**

PRIMA PRIMISSIMA 2021 · PRIMA PRIMISSIMA 2021

A díjat Pálfy Péter Pál, a BJMT elnöke vette át, ám a siker a társulat 130 éve során a magyar matematikáért igen sokat tett minden tagjának és munkatársának elismerése.

Bolyai díjazottak beszámolók

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon:

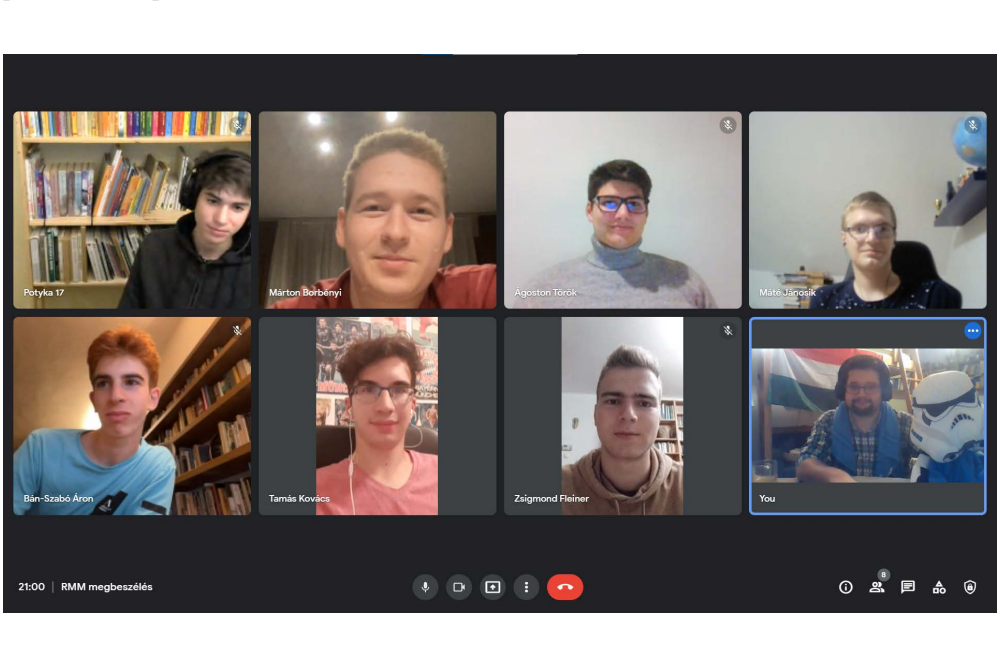
Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Lenger Dániel, Borbényi Márton 2021. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Romanian Master of Mathematics 2021

A Romanian Master of Mathematics (RMM) versenyt hagyományosan februárban szokták tartani, Bukarestben. A vírushelyzet miatt idén online tartották meg − többszöri halasztás után − végül 2021. október 11. és 16. között.

A verseny jellege hasonlít a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáéhoz, azaz a versenyzők 2 egymást követő nap 3–3 feladatot kapnak, és a megoldásukra mindkét nap 4 és fél óra áll rendelkezésükre. A feladatok is olyan nehézségi szintűek, mint az IMO-n, sőt előfordul, hogy nehezebbre is sikerülnek, hiszen erre a versenyre az olimpián legerősebben szereplő országokat szokták meghívni. A megszerezhető maximális pontszám 42 pont.



A magyar csapat tagjai (a kép szerinti sorrendben): Molnár-Szabó Vilmos *(Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium, 11.o)*, Borbényi Márton *(ELTE, csapatvezető-helyettes)*, Török Ágoston *(Kecskemét, Bányai Júlia Gimnázium, 12.o)*, Jánosik Máté *(Győr, Révai Miklós Gimnázium, 12.o)*, Bán-Szabó Áron *(Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium, 12.o)*, Kovács Tamás *(Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium, 12.o)*, Fleiner Zsigmond *(Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium, 12.o)*, Lenger Dániel *(Budapest, Rényi Intézet és Fazekas Gimnázium, csapatvezető)*, Marvin *(kabala)*.

Az online versenyt így a magyar diákok Magyarországon írták, egészen pontosan a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben. Ezt közben élőben közvetítettük a szervezőknek is.

Sajnos idén az indulók kimaradtak egy romániai utazásból, de remélhetőleg 2022 februárjában ismét élőben vehetünk részt a versenyen.

A megnyitó, illetve a záró ceremónia videói itt, illetve itt elérhetőek.

A magyar versenyzők eredménye:

Bronzérmes lett:

Kovács Tamás 19 ponttal,

Molnár-Szabó Vilmos 19 ponttal,

Török Ágoston 17 ponttal,

dicséretet kapott:

Jánosik Máté 15 ponttal,

Fleiner Zsigmond 13 ponttal.

Köszönünk minden segítséget a szervezésben a Bolyai János Matematikai Társulatnak, illetve a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetnek!

Lenger Dániel (csapatvezető) és *Borbényi Márton* (csapatvezető-helyettes)

beszámolók tanulmányi versenyek

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Pluhár András 2021. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Csaba Béla Fulkerson-díjas!

Nagyon örömteli hírt oszthatunk meg: a tekintélyes Fulkerson-díjnak 2021-ben újra van magyar kitüntetettje! Csaba Béla kollégánknak, a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének oktatójának gratulálhatunk a szép eredményhez.

A díj a Mathematical Optimization Society (MOS) és az American Mathematical Society (AMS) közös kitüntetése, amelyet háromévente ítélnek oda a legjelentősebbnek vélt publikációk szerzőinek (maximum három publikációt jelölnek ki).

A teljesség kedvéért, 2021-ben az alábbi három szerzőcsapat nyert:

Csaba Béla, Daniela Kühn, Allan Lo, Deryk Osthus és **Andrew Treglown,**

továbbá **Jin-Yi Cai** és **Xi Chen**,

valamint **Ken-Ichi Kawarabayashi** és **Mikkel Thorup**.

Csaba Béla és szerzőtársai az alábbi publikációval érdemelték ki a sikert: *Proof of the 1-factorization and Hamilton decomposition conjectures.* Vol. 244. No. 1154. American Mathematical Society, 2016.

A közel 170 oldalas írásban a 70-es 80-as években felvetett három nehéz sejtést oldanak meg a reguláris gráfok párosításokra bontásával, illetve a nagy minimális fokszámú gráfokba pakolható Hamilton-körökkel kapcsolatban. Olyan módszert dolgoztak ki, ami lehetővé tette e problémák egységes kezelését, és amely eszközzel azóta újabb jelentős problémákat is sikerült kezelni. A módszer egy tisztított gráf előállításából, majd az erre használt ún. abszorpciós technika alkalmazásából áll. Jegyezzük meg, hogy az abszorpciós technika szintén magyar eredetű, a megalapozása Szemerédi Endre nevéhez fűződik.

A Fulkerson-díjat korábban elnyert magyar matematikusok:

Beck József, Lovász László (két ízben), Szegedy Balázs és Tardos Éva.

Csaba Béla eddigi tudományos pályájának fő állomásai:

Békéscsabán született, ott járt általános, majd középiskolába. Szegeden programtervező matematikusként végzett 1992-ben. Diplomamunkáját Csendes Tibor vezetésével készítette globális optimalizálás témakörben. Későbbi szegedi doktori tanulmányai során témát váltott, Hajnal Péternél kombinatorikával, elméleti számítástudománnyal kezdett foglalkozni. Ma is főként kombinatorika, algoritmusok bonyolultsága témában kutat. Szegedről a Rutgers egyetemre ment tanulni, az ottani PhD témavezetője Szemerédi Endre volt, aki a területnek a világon egyik legelismertebb, legnagyobb hatású és tudású szakértője. Nála doktorált 2000-ben, gráfbeágyazási problémákból írt disszertációt. Ezután volt posztdoktor illetve egyetemi oktató Magyarországon (Szegedi Tudományegyetem), Németországban (Max Planck Institute), az USA-ban (Western Kentucky University), illetve Angliában (University of Birmingham). 2012 ősze óta a Szegedi Tudományegyetemen a Bolyai Intézetben dolgozik.

Pluhár András,

Szegedi Tudományegyetem, Számítópépes Optimalizálás tanszék

díjazottak matematikus-karrier

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Földvári Viktória 2021. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Szeretettel várjuk a Budapest Graduate Seminaron!

Októberben elindult a Budapest Graduate Seminar (BGS), egy elsősorban PhD-hallgatóknak szóló előadássorozat. A program célja, hogy bemutassa a matematika különböző területeit az érdeklődő fiataloknak, ezzel segítse a későbbi témaválasztásukat, és népszerűsítse a kutatói, oktatói pályát. Bár a célközönség elsősorban a doktori hallgatók köre, érdeklődő fiatalabbakat, valamint a közelmúltban fokozatot szerzett posztdoktori kutatókat is szeretettel látnak.

Egy félév során hat-hét találkozóra kerül sor a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet nagytermében, ám a csatlakozás online is lehetséges. (A személyes részvétel egyelőre védettségi igazolványhoz és maszkviseléshez kötött.) 2021 őszén az előadásokat szerda délutánonként tartják. Minden alkalommal a matematika valamely érdekes ágáról hallhatunk (előismeret az általános matematikai alapokon túl nem szükséges). Rendszerint két előadás követi egymást: 16 órától először egy fiatal kutató vagy hallgató egy bevezető kurzus szintjén ismerteti a bemutatásra kerülő téma alapfogalmait. Példákkal illusztrálja a definíciókat, megemlíti a legfontosabb alkalmazásokat, hogy a közönség már az alapokat értve várhassa a főelőadást. Ezután, 17 órától, a téma egy neves képviselője ad átfogó képet a terület egy izgalmas kérdésköréről. Az elmúlt hetekben Lovász László, Pach János, Philippe Michel, Stipsicz András, Némethi András és Eduard Feireisl előadásait hallhattuk, és ez a változatos sorozat a következő félévben folytatódik!

A szeminárium kiváló lehetőség a hallgatók számára, hogy saját kutatásuk megkezdése vagy új téma választása előtt tájékozódjanak, és betekintést nyerjenek néhány népszerű terület központi kérdéseibe. A délutáni program során kellemes, kötetlen légkörben ismerkedhetnek hasonló korú, de esetleg más intézményben tanuló hallgatótársaikkal. Mivel a tudományos rész kollokvium jellegű, kérdezésre, beszélgetésre is jut idő. A kezdés előtt és a szünetben a szervezők kávéval, teával kínálják a jelenlévőket. Sőt, az előadások előtt, 15:15-től kis fogadással (süteménnyel, szendvicsekkel) is kedveskednek a Rényi Intézetbe látogatóknak.

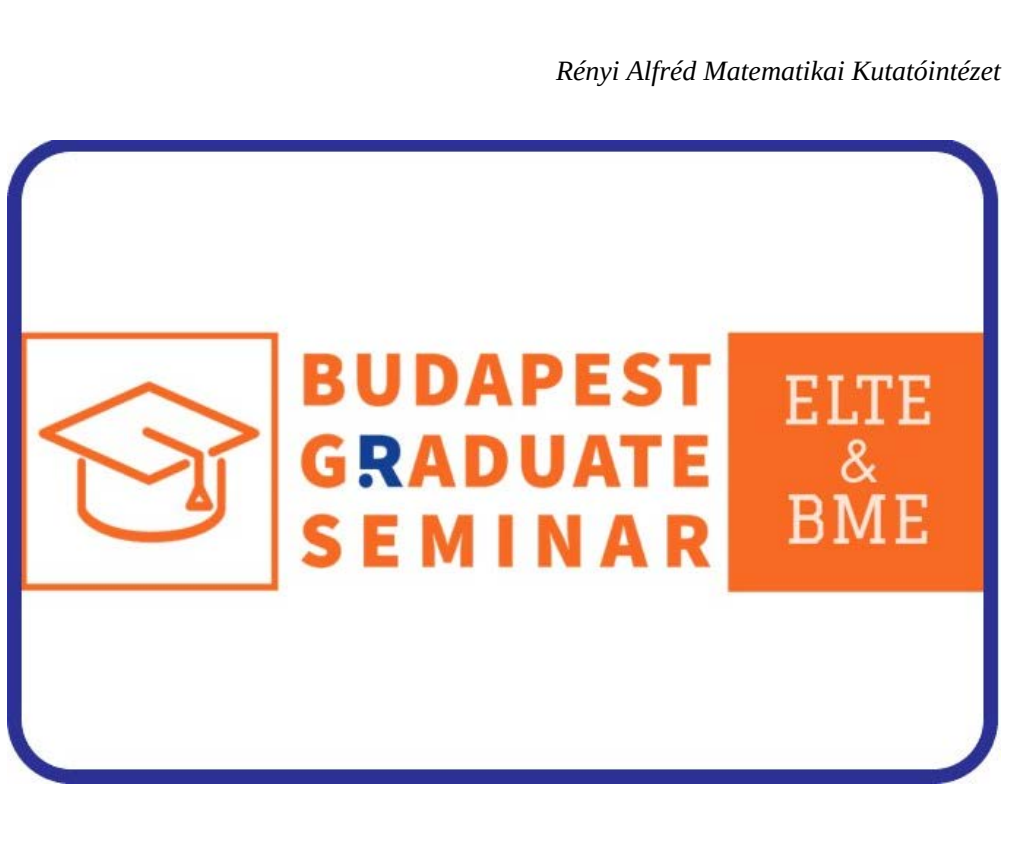
A kezdeményezés eredetileg az ELTE és a BME matematikai doktori iskolái közötti együttműködést volt hivatott szorosabbra fűzni, ám most már kiemelt célja, hogy minél több intézmény hallgatóihoz eljusson. Néhány egyetemen az előadássorozat kurzusként is felvehető, így kreditértékkel bír. Az előadások nyelve angol.

Az itt köttetett ismeretségek vagy a beszélgetések során hallott kutatási témák nagyban segíthetik a hallgatók későbbi pályáját, kutatási munkáját, ezért minden érdeklődőt bátorítunk a csatlakozásra! Kérjük a témavezetőket, hogy diákjaik körében népszerűsítsék a programsorozatot! Szívesen fogadjuk továbbá az előadói jelentkezéseket vagy javaslatokat az oktatók és a hallgatók részéről is!

A részletes programért, és további tudnivalókért látogassanak el a szeminárium honlapjára: Budapest Graduate Seminar | bgs.renyi.hu.

Földvári Viktória

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet



Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Választon: ›

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2021. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Matematikus sikerek a Lendület pályázaton

Idén ősszel két fiatal matematikus, *Bérczi Kristóf* és *Virosztek Dániel* is önálló kutatócsoportot indíthatott a Magyar Tudományos Akadémia (MTA) jóvoltából. A 2015-ben létrehozott *Lendület program* célja a hazai kutatóbázis megerősítése kimagasló teljesítményű kutatók külföldről haza hívásával, illetve itthon tartásával. A program azoknak a kutatóknak segít önálló kutatócsoportot alakítani, akik korábban már sikeresen pályáztak rangos kutatási támogatásokra.

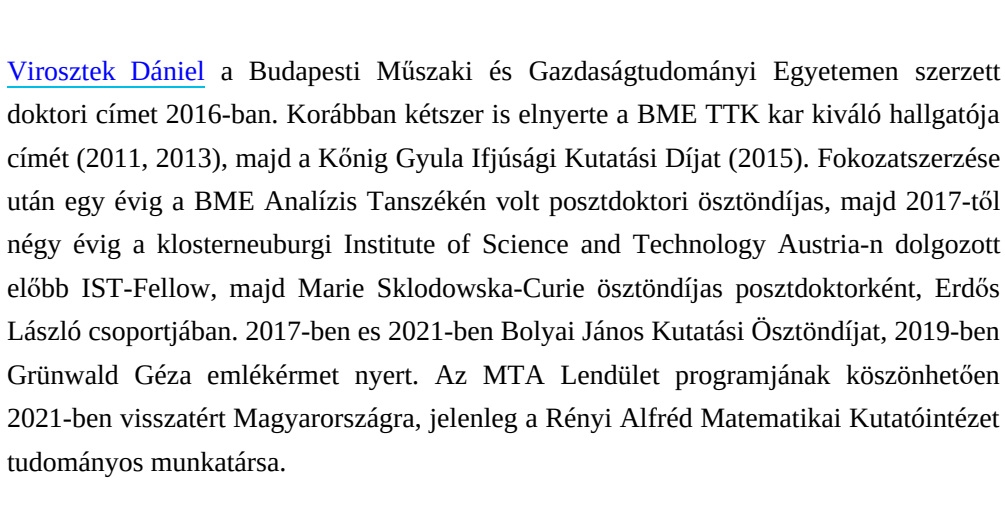
A 2021-es Lendület program nyertesei. Forrás: mta.hu

Bérczi Kristóf munkáját már egyetemi hallgatóként és doktoranduszként is elismerték: 2008-ban a ELTE Természettudományi Karának kiváló hallgatója lett, 2013-ban pedig elnyerte az MTA Ifjúsági Díját. 2014-ben az ELTE doktori iskolájában szerzett fokozatot, majd elnyerte (többek közt) az MTA Prémium Posztdoktori Ösztöndíját és a Bolyai János Kutatási Ösztöndíjat. Jelenleg az ELTE Operációkutatási Tanszékének adjuntusa és az MTA–ELTE Egerváry Kutatócsoport tudományos munkatársa.

Bérczi Kristóf a Lendület program díjátadóján. Forrás: mta.hu

A most induló *MTA–ELTE Lendület Matroid Optimalizálás és Diszkrét Konvexitás Kutatócsoport* a matroidelmélet néhány alapvető kérdésére keresi a választ. A matroidelmélet számos, gráfokhoz kapcsolódó optimalizálási és karakterizálási probléma megoldásában nyújt hatékony segítséget. A matroidok segítségével jobban megérthetjük a problémák hátterében álló absztrakt struktúrát, sokszor olyan kérdések megválaszolásában is megkerülhetetlen a használatuk, amelyekben matroidok expliciten nem is jelennek meg. A Lendület pályázat célja több, egymástól látszólag független, ám mégis ugyanabból a problémából, a matroidok független halmazainak, vagy általánosabban, diszkrét konvex és konkáv függvények szerkezetének alaposabb megértéséből eredő kérdés vizsgálata. A kapott eredmények nem csupán régóta nyitott elméleti kérdések megválaszolásában nyújthatnak hatékony segítséget, hanem közvetlenül alkalmazhatók olyan gyakorlati problémákban is, mint az inverz optimalizálás, vagy éppen piacok árazása.

Virosztek Dániel a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen szerzett doktori címet 2016-ban. Korábban kétszer is elnyerte a BME TTK kar kiváló hallgatója címét (2011, 2013), majd a Kőnig Gyula Ifjúsági Kutatási Díjat (2015). Fokozatszerzése után egy évig a BME Analízis Tanszékén volt posztdoktori ösztöndíjas, majd 2017-től négy évig a klosterneuburgi Institute of Science and Technology Austria-n dolgozott előbb IST-Fellow, majd Marie Sklodowska-Curie ösztöndíjas posztdoktorként, Erdős László csoportjában. 2017-ben es 2021-ben Bolyai János Kutatási Ösztöndíjat, 2019-ben Grünwald Géza emlékérmet nyert. Az MTA Lendület programjának köszönhetően 2021-ben visszatért Magyarországra, jelenleg a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet tudományos munkatársa.



Virosztek Dániel a Lendület program díjátadóján. Forrás: mta.hu

Az *MTA–RI Lendület Optimális Transzport és Kvantum Információ-geometria Kutatócsoport* klasszikus optimális transzporttal, kvantum-információelmélettel, valamint az előbbiek szinergikus kapcsolatából született rendkívül friss tudományterülettel, a kvantum optimális transzport elméletével foglalkozik. A klasszikus Wasserstein-terek szorosan kapcsolódnak az optimális transzport elméletéhez, és az utóbbi években rendkívül fontosnak bizonyultak mind a matematikában (valószínűségelmélet, metrikus geometria, pénzügyi matematika), mind az alkalmazott tudományokban (képfeldolgozás, gépi tanulás). A kvantum Wasserstein-terek és a kvantum optimális transzport elmélete éppen kialakulóban van, rengeteg különböző és érdekes megfogalmazást vizsgálnak, rengeteg a nyitott probléma ezen a területen. A csoport célja klasszikus Wasserstein-terek és entrópikus távolságokkal ellátott kvantum állapotterek alapvető geometriai jellemzőinek (geodetikusok, metrikus tenzormező, baricentrumok) meghatározása, illetve részvétel a nemkvadratikus kvantum optimális transzport elméletének felépítésében.

A két kutatócsoport eredményeiről a későbbiekben is be fogunk számolni az Érintőben.

Gratulálunk Bérczi Kristófnak és Virosztek Dánilenek (témavezetőik Frank András illetve Petz Dénes voltak)! – A szerkesztők

matematikus-karrier pályázat

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **GAZDA(G)SÁG** NEVET ADTUK A **GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET ROVATNAK**, AMELYBEN BEMUTATJUK, HOL, MIKÉPPEN HASZNÁLJÁK FEL A MATEMATIKÁT, MILYEN GAZDAG IS AZ A KÖR, AMELYIK ÉRINTI EZT A TUDOMÁNYÁGAT. (ROVATSZERKESZTŐK: *ILLÉS TIBOR, MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR ÉS RÖST GERGELY*.)

IYBSSD2022
International Year
of Basic Sciences
for Sustainable Development

Szerkesztő

2021. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Alaptudományok a fenntartható fejlődésért 2022

2022-t az „alaptudományok a fenntartható fejlődésért” nemzetközi évének nyilvánította az ENSZ közgyűlése 2021 decemberében. Evvel azt üzenik az egész világnak, hogy egyre nagyobb szükségünk van az olyan alaptudományokra, mint például a kémia, a fizika, a matematika (és még sorolhatnánk) ahhoz, hogy a jövőben biztosítani tudjuk a fenntartható fejlődést. Tovább...

Karsai János

2021. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Modellezés Wolfram Mathematica segítségével

Nagy sikerrel zajlott 2021. november 11–12-én a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete, a SciExperts kft. és a Wolfram Research Ltd. által szervezett bevezető online *Mathematica* tréning. Az oktató, *Karsai János* (Certified *Mathematica* Trainer), a Bolyai Intézet docense bemutat néhány, a kurzuson készült alkalmazást. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon: ›

nka Nemzeti Kulturális Alap

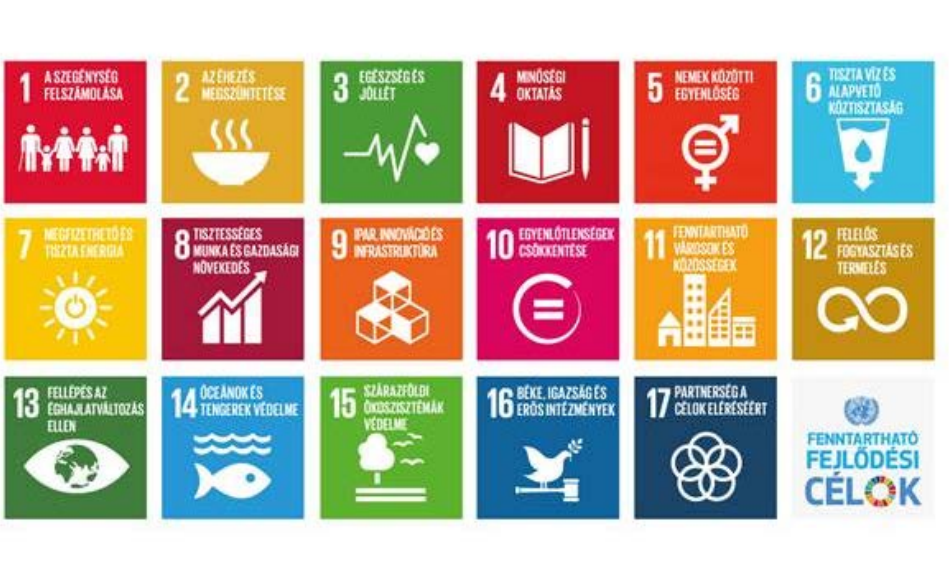
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2021. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Alaptudományok a fenntartható fejlődésért 2022

2022-t az „alaptudományok a fenntartható fejlődésért” nemzetközi évének nyilvánította az ENSZ közgyűlése. A 2015 őszén elfogadott Fenntartható Fejlődési Keretrendszer és annak gerincét képező célrendszer végrehajtása, azaz a világ fejlődési pályájának fenntartható irányba állítása az ENSZ eddigi egyik legnagyobb vállalkozása.

A keretrendszer alapjait a kiegyensúlyozott társadalmi fejlődés, a tartós gazdasági növekedés és a környezetvédelem képezik. A keretrendszer kialakításában és formálásában Magyarország a kezdetektől fogva meghatározó szerepet vállalt.

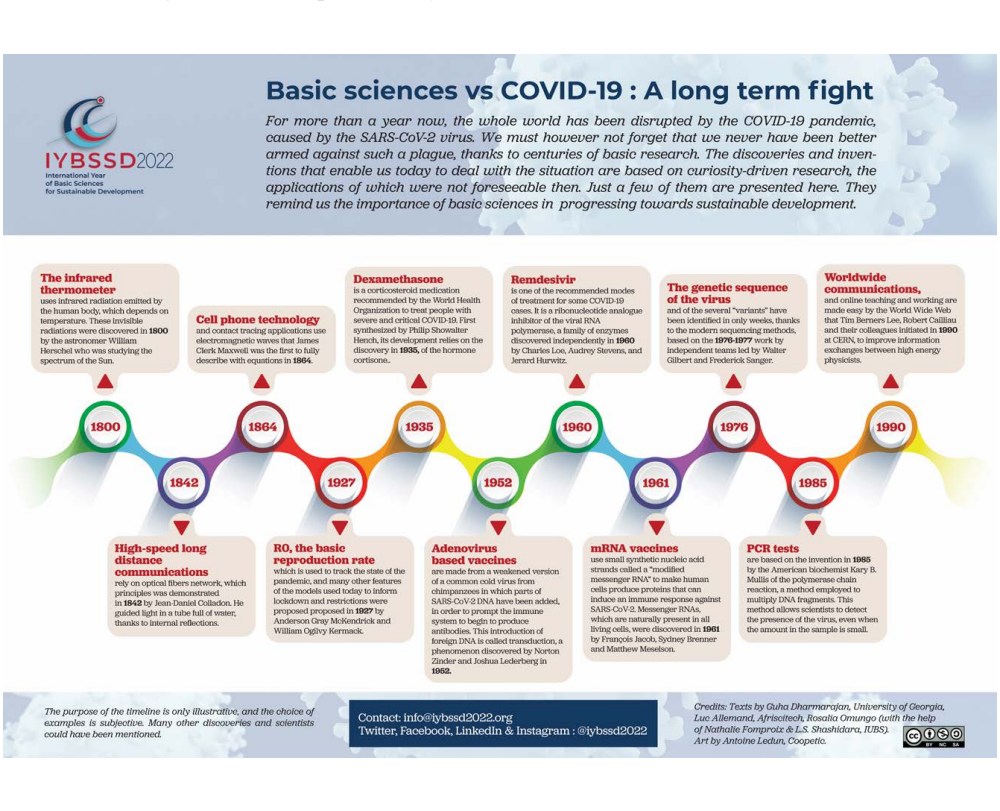

1 A SZEGÉNYSÉG FELSZÁMOLÁSA
2 AZ ÉHEZÉS MEGSZÜNTETÉSE
3 EGÉSZSÉG ÉS JÓLLÉT
4 MINŐSÉGI OKTATÁS
5 NEMEK KÖZÖTTI EGYENLŐSÉG
6 TISZTA VÍZ ÉS ALAPVETŐ KÖZTISZTASÁG
7 MEGFIZETHETŐ ÉS TISZTA ENERGIA
8 TISZTESSÉGES MUNKA ÉS GAZDASÁGI NÖVEKEDÉS
9 IPAR, INNOVÁCIÓ ÉS INFRASTRUKTÚRA
10 EGYENLŐTLENSÉGEK CSÖKKENTÉSE
11 FENNTARTHATÓ VÁROSOK ÉS KÖZÖSSÉGEK
12 FELELŐS FOGYASZTÁS ÉS TERMELÉS
13 FELLÉPÉS AZ ÉGHAJLATVÁLTOZÁS ELLEN
14 ÓCEÁNOK ÉS TENGEREK VÉDELME
15 SZÁRAZFÖLDI ÖKOSZISZTÉMÁK VÉDELME
16 BÉKE, IGAZSÁG ÉS ERŐS INTÉZMÉNYEK
17 PARTNERSÉG A CÉLOK ELÉRÉSÉÉRT
FENNTARTHATÓ FEJLŐDÉSI CÉLOK

Az Agenda 2030 keretrendszere 17 Fenntartható Fejlődési Célt (SDG-t, Sustainable Development Goals) fogalmazott meg. Ezek eléréséhez szükséges, hogy az ENSZ összes tagországa, szervezetei, a döntéshozók, nemzetközi, országos és regionális szervezetek, civil közösségek 2022-ben hívják fel a figyelmet az alaptudományok fontosságára és tudatosítsák, hogy ezek nélkül nem lehetséges fenntartható fejlődés.

Az emberiség számára az alaptudományok és a csúcstechnológia teszik lehetővé a naprakész információk elérését, az egyének, közösségek, a társadalom egészségének, jóllétének biztosítását.

Azok nélkül az eredmények nélkül, amelyeket évtizedek, sőt évszázadok óta a kíváncsiság vezérelte tudományos kutatók elértek, valószínűleg a már két éve tartó COVID19 pandémiahelyzet is sokkal rosszabb lenne. Alaptudományok nélkül honnan tudhatnánk, hogy a fertőzést vírus okozza, hogyan néz ki egy vírus, mi a génszekvenciája, milyen variánsai lehetnek? Folytathatnánk a sort: tesztelés, kezelés, vakcinák, epidemiológiai modellezés, vagy éppen a nagy sebességű, földrészeket összekötő kommunikáció – röviden, minden, ami segíti a pandémia és annak következményei elleni harcot, az alaptudományokból ered.

A koronavírus-járvány azt is megmutatta, mennyire függ bolygónk kiegyensúlyozott, fenntartható fejlődése az alaptudományok kutatásaitól.



Basic sciences vs COVID-19 : A long term fight

For more than a year now, the whole world has been disrupted by the COVID-19 pandemic, caused by the SARS-CoV-2 virus. We must however not forget that we never have been better armed against such a plague, thanks to centuries of basic research. The discoveries and inventions that enable us today to deal with the situation are based on curiosity-driven research, the applications of which were not foreseeable then. Just a few of them are presented here. They remind us the importance of basic sciences in progressing towards sustainable development.

IYBSSD2022
International Year of Basic Sciences for Sustainable Development
The infrared thermometer
1800
Cell phone technology
1864
Dexamethasone
1935
Remdesivir
1960
The genetic sequence of the virus
1976
Worldwide communications,
1990
1842
High-speed long distance communications
1927
R0, the basic reproduction rate
1952
Adenovirus based vaccines
1961
mRNA vaccines
1985
PCR tests

The purpose of the timeline is only illustrative, and the choice of examples is subjective. Many other discoveries and scientists could have been mentioned.

Contact: info@iybssd2022.org
Twitter, Facebook, LinkedIn & Instagram : @iybssd2022

Credits: Texts by Guha Dharmarajan, University of Georgia, Luc Allemand, Afriscitech, Rosalia Omungo (with the help of Nathalie Fomproix & L.S. Shashidara, IUBS). Art by Antoine Ledun, Coopetic.

Az alaptudományok a fenntartható fejlődésért nemzetközi éve 2022 rávilágít az alaptudományok és a fenntartható fejlődési célok közötti kapcsolatra annak érdekében, hogy a gazdasági és a politikai élet vezetőit, csakúgy, mint a társadalom egészét meggyőzze ennek alapvető fontosságáról.

IYBSSD2022
International Year
of Basic Sciences
for Sustainable Development

Az IYBSSD2022 szervezőbizottságának kezdeményezői az elméleti és alkalmazott fizika nemzetközi egyesülete (International Union of Pure an Applied Physics) és a CERN voltak, és a bizottság tagjai között van az International Mathematical Union, valamint a Industrial Council for Industrial and Applied Mathematics. A további tagszervezetek és egyéb információk a kiadott angol nyelvű sajtóközleményben olvashatók.

alkalmazott matematika   alapkutatások   tudománypolitika

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Karsai János 2021. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Modellezés Wolfram Mathematica segítségével

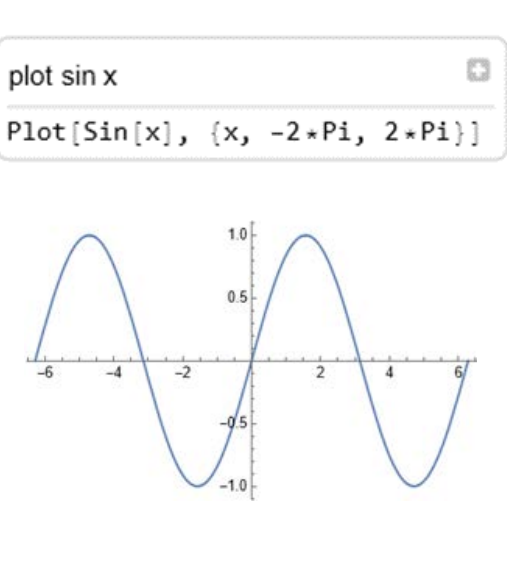
Nagy sikerrel zajlott 2021. november 11–12-én a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete, a SciExperts kft. és a Wolfram Research Ltd. által szervezett bevezető online *Mathematica* tréning. Az oktató Dr. Karsai János (Certified *Mathematica* Trainer), a Bolyai Intézet docense volt.

A tréning folytatása a korábbi hazai és külföldi sikeres intenzív iskoláknak, amelyet a tervek szerint újabb hazai kurzusok, iskolák követnek. A tréningen több mint 50-en vettek részt, egyetemi oktatók, hallgatók, doktoranduszok, ipari alkalmazók, fiatalok és tapasztalt szakemberek egyaránt. Az első 10 jelentkező-résztvevő a tréning után *Mathematica* ajándékot kapott.

A „zöldmezős” bevezető online képzés során a teljesen kezdő résztvevők is – kiindulva az üres képernyőről, a különböző tudományterületeken felmerülő elemi modellezési problémákon keresztül – megtanulták a *Mathematica* és a Wolfram Language legfontosabb eszközeit, alkalmazási lehetőségeit (ábrázolások, számítások, dinamikus műveletek, egyszerű programozási technikák). Ugyanakkor a már tapasztaltabb felhasználók is megismerhettek szép új eszközöket. A tréninget követően minden résztvevő képes önállóan egyszerű alkalmazásokat készíteni, használni. A résztvevők átfogó segédanyag-gyűjteményt is kaptak.

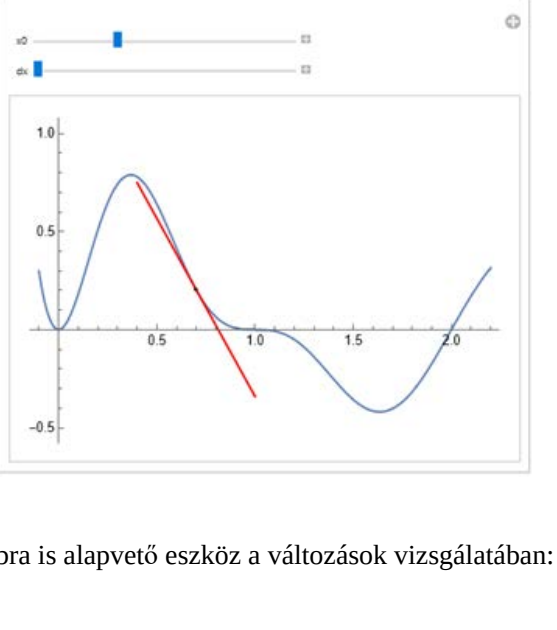
A teljesség igénye nélkül tekintsünk meg néhány, a kurzuson elkészült alkalmazást:

Természetesen az ábrázolások, és a szabad szöveges utasítások segítségével tanultuk meg az alapvető szintaktikát:

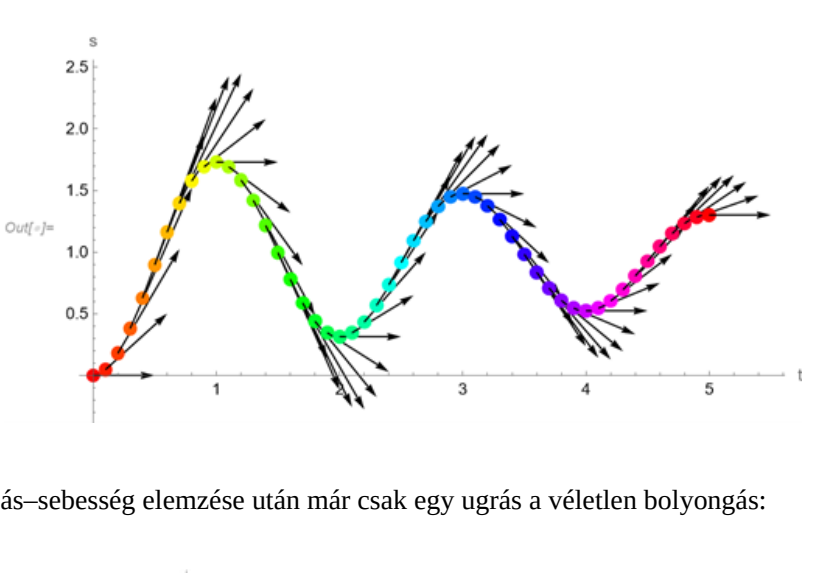


```
plot sin x
Plot[Sin[x], {x, -2*Pi, 2*Pi}]
```

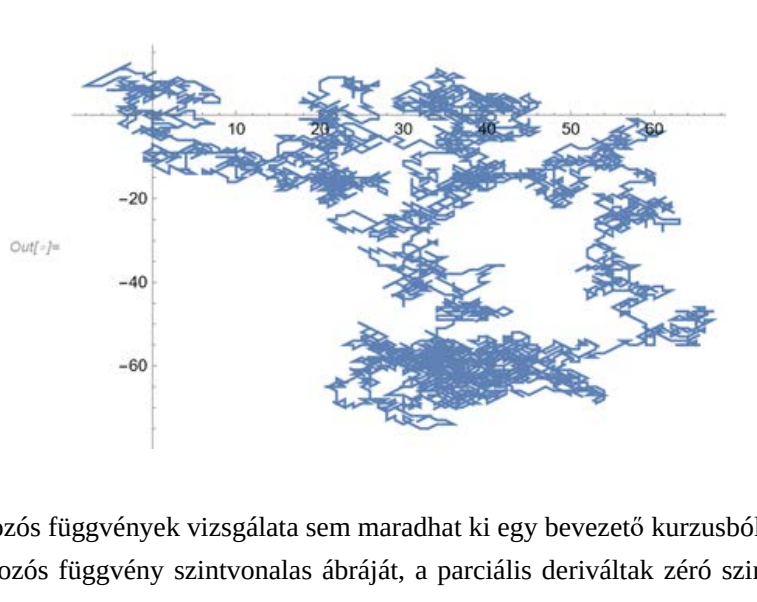
Egy változás vizsgálatában alapvető a változás sebességének a dinamikus vizsgálata:



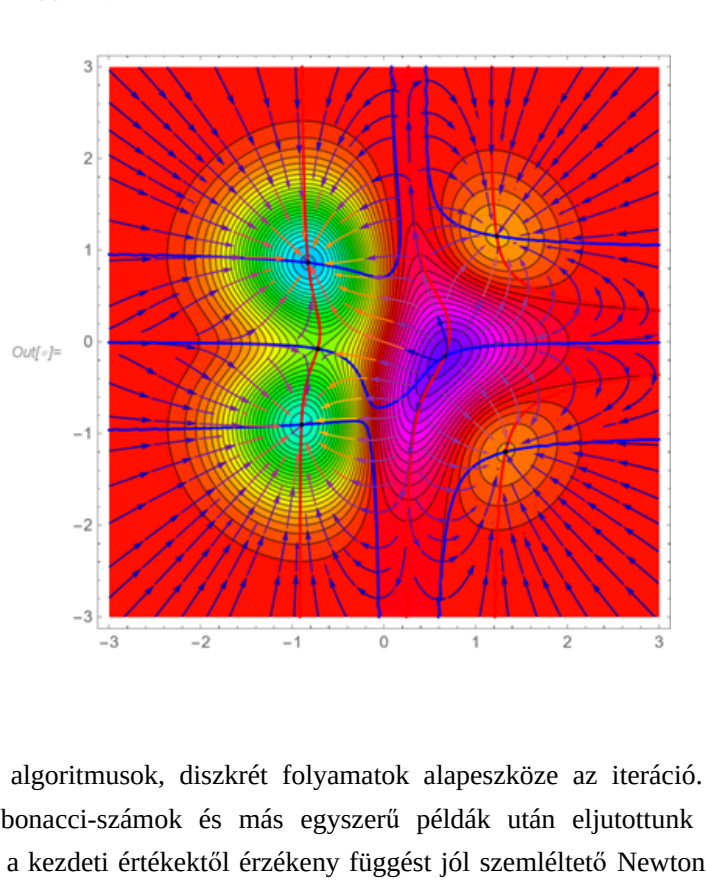
A stroboszkópikus ábra is alapvető eszköz a változások vizsgálatában:



A változás–sebesség elemzése után már csak egy ugrás a véletlen bolyongás:

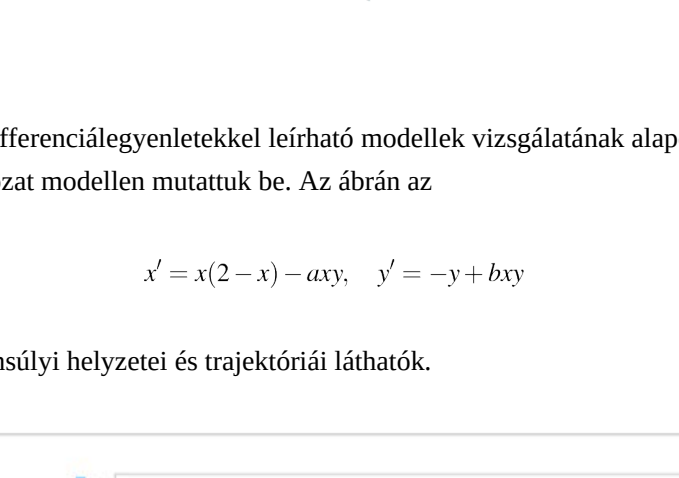


A többváltozós függvények vizsgálata sem maradhat ki egy bevezető kurzusból. Az ábra egy kétváltozós függvény szintvonalas ábráját, a parciális deriváltak zéró szintvonalait (metszéspontok a kritikus helyek), valamint a legmeredekebb (gradiens) irány szerinti folyamot tartalmazza. A szintvonalak mentén nem változik a függvény, A gradiens irányt követő vonalak mentén tudunk leggyorsabban eljutni a hegycsúcsokra, és ezek merőlegesek a függvény szintvonalaira.

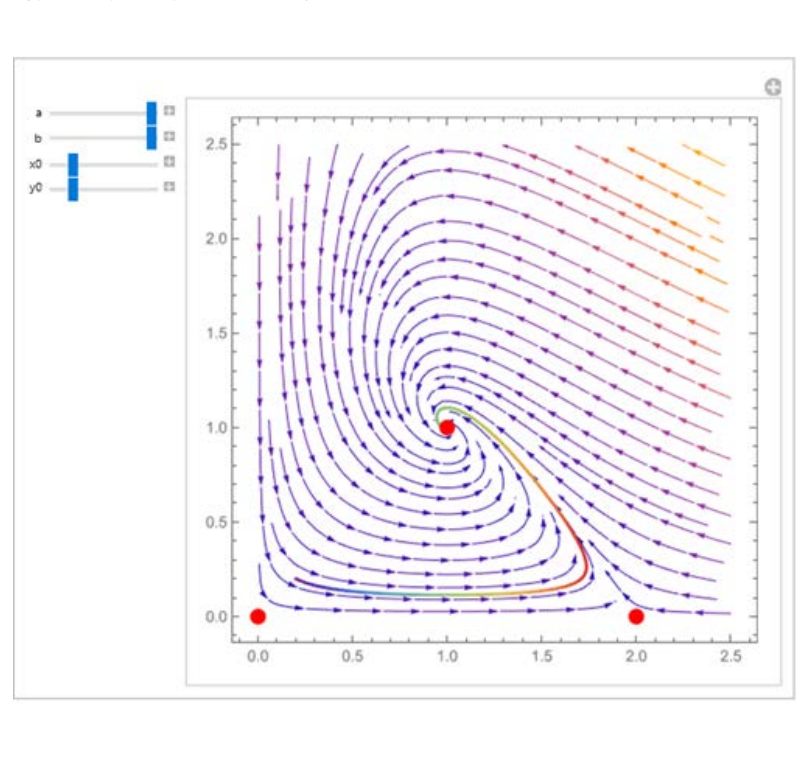


A numerikus algoritmusok, diszkrét folyamatok alapeszköze az iteráció. A mértani sorozat, a Fibonacci-számok és más egyszerű példák után eljutottunk a Newton-iterációig, sőt a kezdeti értékektől érzékeny függést jól szemléltető Newton-fraktálokig és az egyszerű fraktálalakzatok (fák, Koch-görbe, Sierpinsky-háromszög) generálásáig.

Itt a $z^3 = 1$ egyenlet gyökeit és a hozzá tartozó Newton-fraktált láthatjuk (minden pontot aszerint színezünk, hogy a Newton-iteráció melyik gyökhöz konvergál).

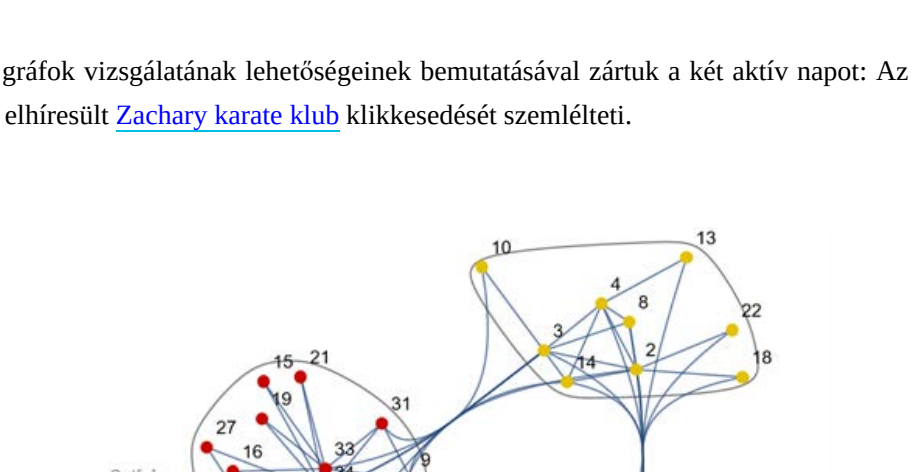


Így készül egy fenyőfa:



```
Fa[obj_List] := obj /. Line[{u_?VectorQ, v_?VectorQ}] :> {
      Line[{v, v + 0.8 (v - u)}],
      Line[{v, v + 0.5 {{Cos[π/6], Sin[π/6]}, {-Sin[π/6], Cos[π/6]}}.(v - u)}],
      Line[{v, v + 0.5 {{Cos[π/6], -Sin[π/6]}, {Sin[π/6], Cos[π/6]}}.(v - u)}]
   }
obj = {Line[{{0, 0}, {1, 0}}]};
Graphics[NestList[Fa, obj, 5]]
```

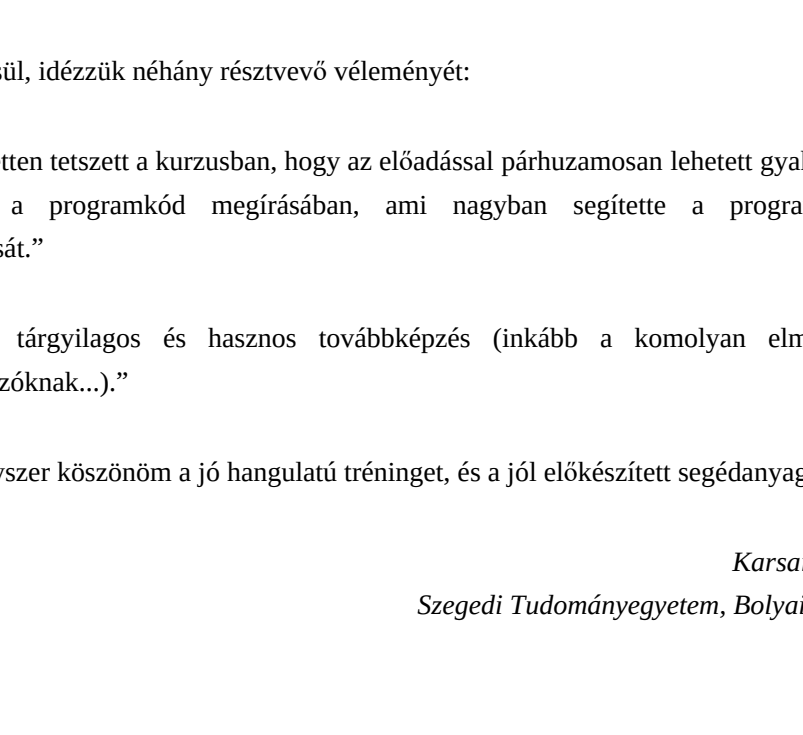
Ez pedig az eredmény:



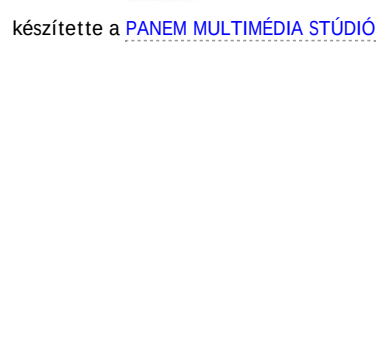
A folytonos differenciálegyenletekkel leírható modellek vizsgálatának alapeszközeit egy ragadozó–áldozat modellen mutattuk be. Az ábrán az

$$x' = x(2-x) - axy, \quad y' = -y + bxy$$

rendszer egyensúlyi helyzetei és trajektóriái láthatók.



A gráfok vizsgálatának lehetőségeinek bemutatásával zártuk a két aktív napot: Az ábra az elhíresült Zachary karate klub klikkesedését szemlélteti.



Befejezésül, idézzük néhány résztvevő véleményét:

„Kifejezetten tetszett a kurzusban, hogy az előadással párhuzamosan lehetett gyakorlatot szerezni a programkód megírásában, ami nagyban segítette a programnyelv elsajátítását.”

„Nagyon tárgyilagos és hasznos továbbképzés (inkább a komolyan elmélyülni szándékozóknak...).”

„Még egyszer köszönöm a jó hangulatú tréninget, és a jól előkészített segédanyagokat.”

Karsai János
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

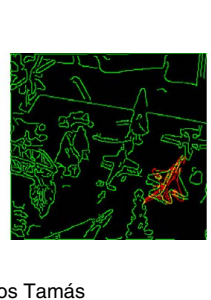
informatika online oktatás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **TUDOMÁNY** MENÜPONT TÖBBFÉLE, A MATEMATIKA TUDOMÁNYÁHOZ KAPCSOLÓDÓ FUNKCIÓT TAKAR..**A TUDOMÁNY– TÖRTÉNET ROVAT** CÉLJA ELSŐSORBAN MATEMATIKATÖRTÉNETI JELLEGŰ ÍRÁSOK KÖZLÉSE. **A MI IS ...?ROVAT** A MAI MATEMATIKA TUDOMÁNYÁRÓL KÍVÁN SZÓLNI A HOZZÁÉRTŐKNEK.
(ROVATSZERKESZTŐK: *BESENYEI ÁDÁM; STIPSICZ ANDRÁS.*)



Titkos Tamás
2021. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

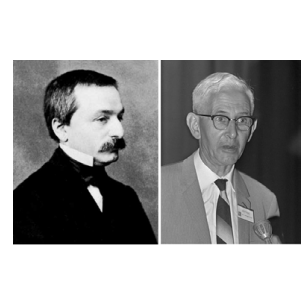
A Gromov–Hausdorff-távolság

Titkos Tamás rövid írásában két távolságfogalomról lesz szó, a Hausdorff-távolságról, és a Gromov–Hausdorff-távolságról. Annak idején mindkettőt tisztán elméleti okokból definiálták, manapság azonban (a továbbfejlesztett verzióikkal együtt) az alkalmazott tudományokban is komoly szerepet játszanak. Tovább...

Császár Ákos, Pálfy Péter Pál
2021. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A Bolyai János Matematikai Társulat 130 éve

1891. november 5-én tartotta alakuló ülését a Mathematikai és Physikai Társulat, a Bolyai Társulat jogelődje. Bár egy 130. évfordulót nem szokás megünnepelni, a Prima Primissima díj elnyerése alkalmából érdemes visszatekinteni társulatunk hosszú történetére. A cikk alapja *Császár Ákosnak* a Matematikai Lapokban 2007-ben megjelent írása, ezt egészítette ki *Pálfy Péter Pál* az azóta eltelt másfél évtized fontosabb fejleményeivel. Tovább...



Csáji Balázs Csanád
2021. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Antirealizmus a matematikában

Milyen módon léteznek a matematika objektumai, például a számok, a halmazok és a függvények? Csak az elménkben léteznek, mint például egy regény szereplői, vagy a gondolkodástól és a nyelvtől független létezők, mint például a bolygók és az elektronok? Igazak-e a matematika állításai attól függetlenül, hogy bárki elgondolná őket, vagy esetleg a matematika csak egy szimbólumokkal való formális játék? Fotónkon *Leopold Kronecker (1865)*, a konstruktivizmus előfutára, és az intuicionista *Arend Heyting (1967)*. *Csáji Balázs Csanád* nyújt bepillantást az antirealizmus elméletébe.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Titkos Tamás 2021. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

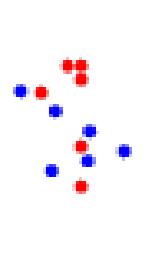
A Gromov–Hausdorff-távolság

A hétköznapi életben két dolgot sokszor *hasonlónak* nevezünk, ha valamilyen (az aktuális feladathoz jól passzoló) mérőszám szerint kicsi az eltérésük. Vagy ha úgy tetszik: valamilyen alkalmas távolságfogalom szerint a távolságuk kicsi. Nézzünk egy egyszerű példát: tömegközlekedéssel akarunk eljutni a moziba, és azt látjuk, hogy a buszmegálló 170 méterre van a mozitól, a villamosmegálló pedig 174 méterre. Ilyenkor azt mondhatjuk, hogy a feladat szempontjából a két megálló hasonló, hiszen az általuk meghatározott két útvonal eltérése kicsi. Két útvonal eltérésén itt most a $|174-170|=4$ mérőszámot értjük, ami ha gyaloglásról van szó, méterben számolva valóban elenyésző.

Ebben a rövid írásban két távolságfogalomról lesz szó, a Hausdorff-távolságról, és a Gromov–Hausdorff-távolságról. Annak idején mindkettőt tisztán elméleti okokból definiálták, manapság azonban (a továbbfejlesztett verzióikkal együtt) az alkalmazott tudományokban is komoly szerepet játszanak.

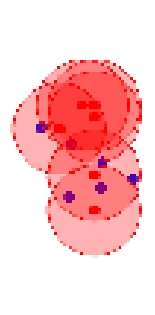
1. Halmazok Hausdorff-távolsága

Két lépésben fogunk eljutni a Gromov–Hausdorff-távolsághoz. Elsőként a Hausdorff-távolságról lesz szó, ami azt méri, hogy egy adott tér részhalmazai milyen távol vannak egymástól. Pongyolán szólva, két halmaz, A és B akkor van egymáshoz közel, ha A minden eleméhez van olyan eleme B-nek, ami hozzá közel van, és megfordítva, B minden eleméhez található olyan elem A-ban, ami hozzá közel van. Nézzünk egy nagyon egyszerű példát: vegyük a piros pontokból álló A halmazt és a kék pontokból álló B halmazt.



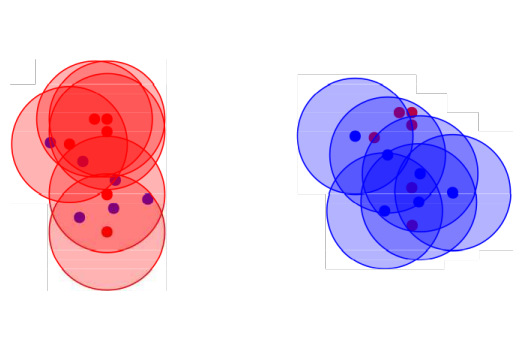
1. ábra. A halmaz: piros pontok, B halmaz: kék pontok.

Az A halmazt befedhetjük r sugarú gömbökkel úgy, hogy minden egyes pontjára ráteszünk egyet-egyet, jelöljük az így kapott halmazt A_r-rel:



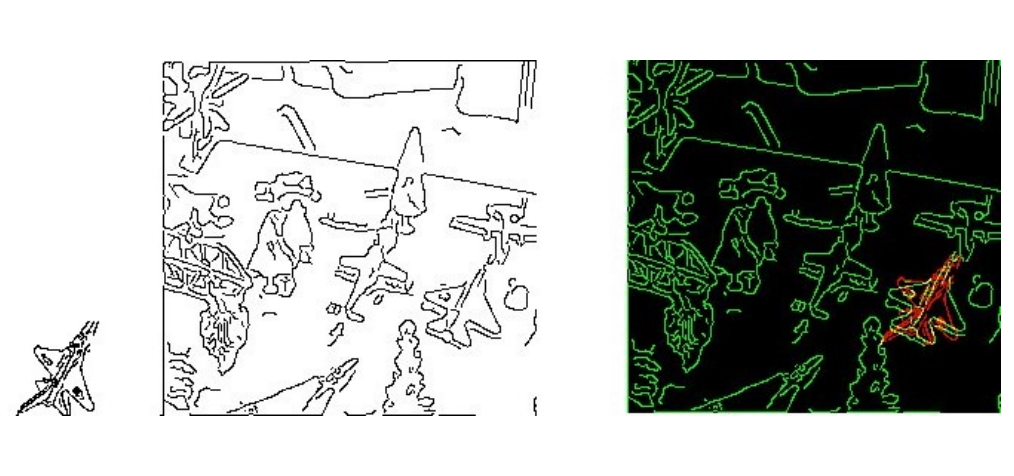
2. ábra. A_r: az A halmaz befedése r sugarú gömbökkel.

Olyan r számot keresünk, amelyre az A_r halmaz lefedi B-t is, és a hasonlóképp elkészített B_r halmaz is lefedi A-t.



3.ábra. A_r lefedi B-t, és B_r is lefedi A-t.

A legkisebb ilyen r számot nevezzük A és B Hausdorff-távolságának. Ezt a távolságot Felix Hausdorff vezette be az 1914-ben megjelent, *A halmazelmélet alapjai* című könyvében. Manapság rengeteget használják többek közt a számítógépes látásban: tipikus feladat, hogy egy képen be kell azonosítani egy objektumot (lásd például [5] 858. oldal, vagy [6]). Az alábbi ábrán a bal oldali kis repülőt kell megtalálni a középső képen. A jobb oldali képen láthatjuk, hogy a kép mely részén lép fel az alakzatok közti legkisebb Hausdorff-távolság.



4. ábra. A képek Grégoire-tól és Bouillot-tól származnak [6]

5.ábra. Felix Hausdorff

Felix Hausdorff a XX. századi matematika egyik legnagyobb hatású alakja. A topológia, a halmazelmélet, a mértékelmélet és a funkcionálanalízis területén is maradandót alkotott, de nevezhetnénk akár ezen tudományterületek egyik megalapozójának is. Egyebek mellett ő vezette be a fraktálok elméletében oly fontos mérték és dimenzió fogalmakat, amelyeket ma már Hausdorff-mértéknek és Hausdorff-dimenziónak neveznek. Paul Mongré néven irodalmi munkákat is publikált [9]. 1900-ban kiadott egy verseskötetet *Ekstasen* címmel, a *Den Ungeflügelten* című verse németül és angolul elolvasható a [3] cikkben

A Hausdorff-távolság fenti bevezetésénél több ponton is pongyolák voltunk. Jöjjön most a pontos definíció. Egy ϱ függvénnyel ellátott X halmazt – röviden: az (X,ϱ) párt – metrikus térnek nevezünk, ha ϱ teljesít három nagyon természetes tulajdonságot (az ilyen függvényeket metrikának nevezzük):

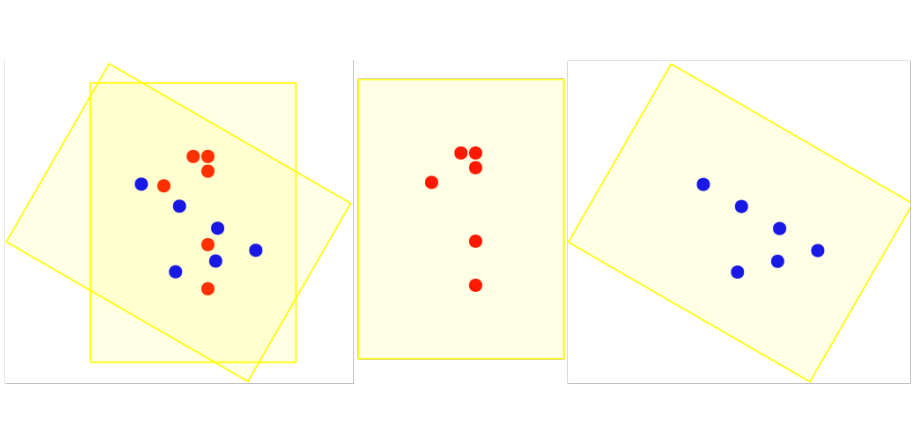
- $\varrho(x,y)=0$ akkor és csak akkor, ha $x=y$. Tehát két pont pontosan akkor van egymástól nulla ϱ-távolságra, ha x és y ugyanaz a pont.
- $\varrho(x,y)=\varrho(y,x)$. Tehát az x pont ϱ-távolsága y-tól ugyanannyi, mint az y pont ϱ-távolsága x-től.
- $\varrho(x,z)+\varrho(z,y)\geq\varrho(x,y)$. Tehát egy harmadik z pontot beiktatva, az x és z, valamint z és y ϱ-távolságát megmérve és összeadva legalább akkora értéket kell kapnunk, mintha közvetlenül az x és y ϱ-távolságát mértük volna meg. (Ez az úgynevezett háromszög-egyenlőtlenség.)

Egy metrikus térben ugyanúgy vezetjük be az x középpontú r sugarú gömb fogalmát, mint a síkon: azon y pontok halmaza, amelyekre $\varrho(x,y)<r$ teljesül. Hasonlóan a fentiekhez, A_r-rel és B_r-rel fogjuk jelölni azokat a halmazokat, amelyeket úgy kapunk, hogy A illetve B minden pontjára ráteszünk egy-egy r sugarú gömböt. Olyan r-eket keresünk, amelyekre $B\subseteq A_r$ és $A\subseteq B_r$ egyszerre teljesül. Lehet, hogy nincs legkisebb ilyen r, de a $d_{\mathcal{H}}^X(A,B)$-vel jelölt Hausdorff-távolság alábbi definíciója értelmes:

$$d_{\mathcal{H}}^X(A,B):=\inf\{r\geq 0\mid B\subseteq A_r,\ A\subseteq B_r\}.$$

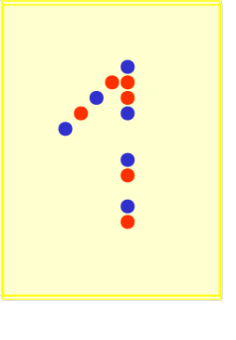
A jelölésben feltüntettük, hogy A és B az X térnek a részhalmazai, később ez fontos lesz.

Az alakfelismerés szempontjából a Hausdorff-távolságnak van egy gyenge pontja. Gondoljunk arra, hogy mi történne, ha a 4. ábrán látható kis repülőt (amit a középső képen fel kell ismerni) 45 fokkal elforgatnánk a pilótafülke körül. Az így kapott képnek és a középső képen látható másának Hausdorff-távolsága már nagy lenne, így az az eljárás, ami a kicsi Hausdorff-távolságot keresi, már nem találná őket hasonlónak. Térjünk vissza az 1. ábrán látható ponthalmazokhoz. Láttuk, hogy elég nagy r-re van szükségünk, hogy $A\subseteq B_r$ és $B\subseteq A_r$ is fennálljon. Hogy milyen értelemben nagy ez az r, az rögtön kiderül. Képzeljük úgy, hogy a kék és piros ponthalmaz egy-egy üveglapra van felfestve.



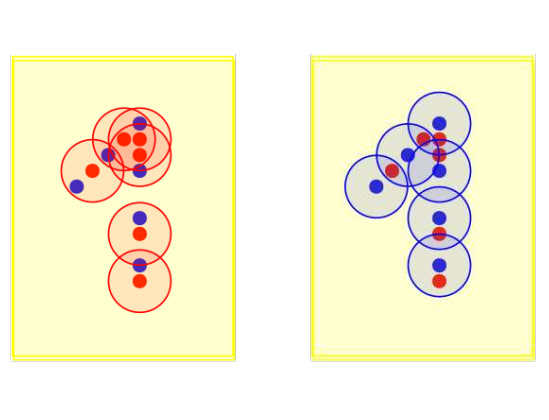
6.ábra. A és B egy-egy üveglapra felfestve, egymásra helyezve és külön-kölön.

Ha jogunkban áll ezt a két üveglapot mozgatni, sőt akár meg is lehet őket fordítani, akkor könnyen észrevehetjük, hogy a két alakzat nagyon hasonló.



7. ábra. A és B egymáshoz igazítva.

Látható, hogy a korábbinál sokkal kisebb r is elegendő, hogy A_r lefedje B-t, és B_r is lefedje A-t.



8.ábra. A korábbinál sokkal kisebb r is elegendő.

2. Metrikus terek Gromov–Hausdorff-távolsága

Azt láttuk, hogy ugyanazoknak a halmazoknak különböző realizációihoz más Hausdorff-távolság tartozik. A fenti eljárással akár két különböző térben lévő halmaz Hausdorff-távolságát is megmérhetjük. Legyen A az (X,ϱ_X), B pedig az (Y,ϱ_Y) metrikus tér egy-egy részhalmaza. Legyen továbbá (Z,ϱ_Z) egy harmadik metrikus tér, amelybe X és Y is izometrikusan beágyazható, azaz léteznek olyan $f\colon X\to Z$ és $g\colon Y\to Z$ függvények, amelyekre $\varrho_Z\big(f(x_1),f(x_2)\big)=\varrho_X(x_1,x_2)$ minden $x_1,x_2\in X$-re és $\varrho_Z\big(g(y_1),g(y_2)\big)=\varrho_Y(y_1,y_2)$ minden $y_1,y_2\in Y$-ra. Ekkor megadhatjuk A és B Hausdorff-távolságát a (Z,ϱ_Z) metrikus térben az f és g realizációk mentén:

$$d_{\mathcal{H}}^{f,g,Z}(A,B):=d_{\mathcal{H}}^{Z}\big(f(A),g(B)\big).\tag{1}$$

A Gromov által felfedezett távolság célja, hogy különböző metrikus terek hasonlóságát mérje: két metrikus tér (X,ϱ_X) és (Y,ϱ_Y) Gromov–Hausdorff-távolsága azt mondja meg, hogy a két tér milyen távol van attól, hogy egymással izomorf legyen. (Két metrikus tér izomorf, ha van köztük olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, amely megőrzi a távolságot.)

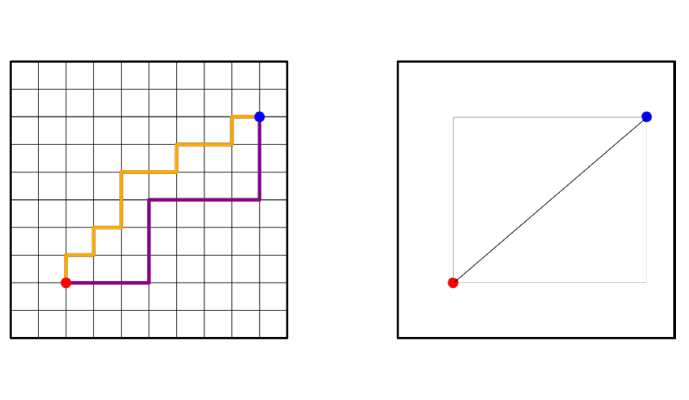
Ha a fenti (1) formulába A helyére magát X-et, B helyére pedig Y-t helyettesítjük, akkor azt kapjuk, hogy X és Y realizációi az f és g függvények mentén mennyire térnek el egymástól a (Z,ϱ_Z) térben. Két tér $d_{\mathcal{GH}}(X,Y)$-nal jelölt Gromov–Haudorff-távolságát úgy kapjuk meg, hogy vesszük X és Y összes lehetséges f,g realizációját az összes lehetséges Z térben, kiszámítjuk a $d_{\mathcal{H}}^{f,g,Z}(X,Y):=d_{\mathcal{H}}^{Z}\big(f(X),g(Y)\big)$ értékeket, és vesszük ezeknek a legnagyobb alsó korlátját:

$$d_{\mathcal{GH}}(X,Y)=\inf_{f,g,Z}d_{\mathcal{H}}^{f,g,Z}(X,Y).$$

A Gromov–Hausdorff-távolságnak (és a bizonyos értelemben vett továbbfejlesztésének, így például a Gromov–Wasserstein-távolságnak) is vannak modern alkalmazásai például az alakfelismerésben és a gépi tanulásban, lásd például [1], [4], [7], [2]. Itt most ezekre nem térünk ki. A cikket a Gromov–Hausdorff-tér és a Gromov–Hausdorff-konvergencia vázlatos bemutatásával zárjuk. Ezek a fogalmak fontos szerepet játszottak a híres Milnor-Wolf sejtés igazolásánál (lásd a Gromovról szóló színes írást a cikk végén).

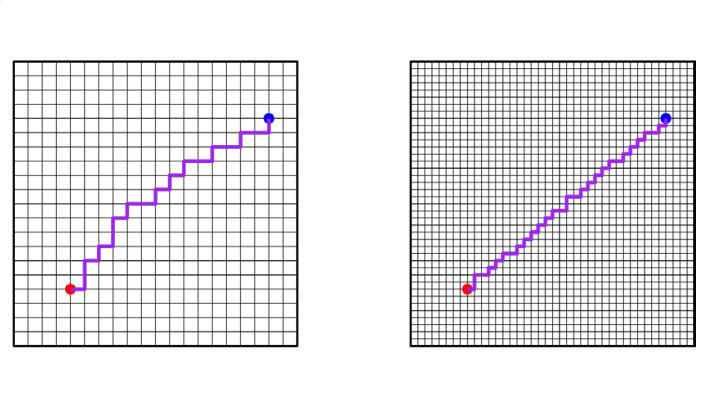
Be lehet bizonyítani, hogy a fent bevezetett $d_{\mathcal{GH}}$ távolsággal a kompakt metrikus terek izometriaosztályai maguk is egy kompakt metrikus teret alkotnak, ezt nevezik a Gromov–Hausdorff-térnek. Mint minden metrikus térben, itt is bevezethető a konvergencia fogalma: az $\big((X_n,\varrho_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ térsorozat konvergál az (X,ϱ) metrikus térhez, ha a $d_{\mathcal{GH}}(X,X_n)$ számsorozat 0-hoz tart.

Nézzünk egy egyszerű példát: tegyük fel, hogy egy négyzetlapra illesztett négyzetrácson élünk. (Legyen a rács az X_n, két pont ϱ_n távolsága pedig legyen az őket összekötő legrövidebb út hossza.) Mondhatjuk, hogy ez a négyzetlapnak egy leegyszerűsített változata. Az egyszerűsítés ára, hogy a kék (x_1,y_1) pontból a piros (x_2,y_2) pontba csak meglehetősen szögletes utak mentén tudunk eljutni.



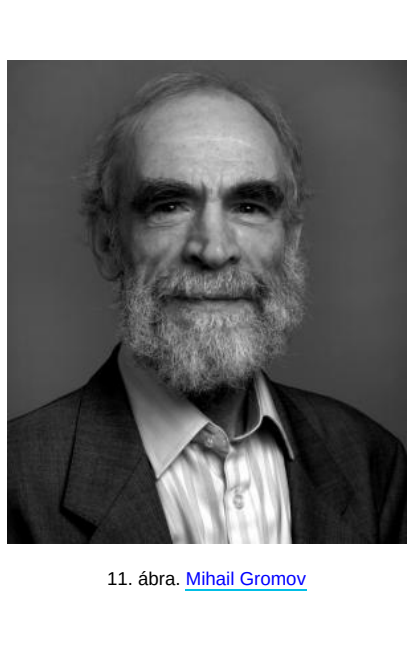
9. ábra. Legrövidebb út a rácson és a hagyományos négyzetlapon.

Persze gondolhatjuk, hogy minél finomabb rácsot veszünk, annál jobban fog hasonlítani az utunk a megszokotthoz, azaz ahhoz, amikor a négyzetlap két pontját egyenes vonallal kötjük össze.



10. ábra. Út az egyre finomodó rácsokon.

A kérdés, hogy valóban a szokásos négyzetlapot kapjuk-e meg határértékben. Azt kell észrevenni, hogy bármilyen finom négyzetrácsot is választunk, és bármennyire is hasonlít a töröttvonalunk az egyenes vonalhoz, a töröttvonal hossza mindig $|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$. Tehát az (X_n,ϱ_n) térsorozat Gromov–Hausdorff limesze a négyzetlap, de nem a hagyományos euklidészi távolsággal: $\varrho_E\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=\sqrt{|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2}$, hanem a $\varrho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ távolsággal.



11. ábra. Mihail Gromov

Mihail Gromov orosz–francia matematikus, a metrikus geometria, a szimplektikus geometria, és a geometriai csoportelmélet úttörője. Egyik leghíresebb eredménye a Milnor és Wolf nevéhez fűződő sejtés igazolása: egy végesen generált csoport pontosan akkor polinomiális növekedésű, ha van véges indexű nilpotens részcsoportja. Elnyerte többet közt az Élie Cartan-díjat, a Wolf-díjat, a Kiotó-díjat és az Abel-díjat. Mihail Gromov a 2005-ös Bolyai János nemzetközi matematikai díj kitüntetettje, 2010 óta a Magyar Tudományos Akadémia tiszteletbeli tagja.

Irodalomjegyzék

[1] Bronstein, A.M.; Bronstein, M.M.; Bruckstein, A.M.; Kimmel, R., *Analysis of Two-Dimensional Non-Rigid Shapes*, International Journal of Computer Vision, 78(1), 2007, 67–88.

[2] Chowdhury, S.; Miller, D.; Needham, T., *Quantized Gromov–Wasserstein*, ArXiv: 2104.02013.

[3] ELKINS, B., *Felix Hausdorff's Poem "Den Ungeflügelten"*, Journal of Humanistic Mathematics, 11 (2), 2021, pages 405–408.

[4] Fehri, A.; Velasco-Forero, S.; Meyer, F., *Characterizing Images by the Gromov-Hausdorff Distances Between Derived Hierarchies*, 25th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP), 2018, 1213–1217.

[5] Huttenlocher, D.P.; Klanderman, G.A.; Rucklidge, W.J., Comparing images using the Hausdorff distance, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 15 (9), 1993, 850–863.

[6] Grégoire, N.; Bouillot, M., Hausdorff distance between convex polygons

[7] Mémoli, F., *Gromov–Wasserstein Distances and the Metric Approach to Object Matching*, Found Comput Math 11, 2011, 417–487.

[8] Mongré, P., *Ekstasen*, Verlag H. Seemann Nachf., Leipzig, 1900.

[9] Purkert, W, *The double life of Felix Hausdorff/ Paul Mongré*, The Mathematical Intelligencer, 30(4), 2008, 36–50.

Titkos Tamás
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

mértékelmélet halmazok metrikus terek

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Császár Ákos, Pálfy Péter Pál 2021. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A Bolyai János Matematikai Társulat 130 éve

1891. november 5-én tartotta alakuló ülését a Mathematikai és Physikai Társulat, a Bolyai Társulat jogelődje. Bár egy 130. évfordulót nem szokás megünnepelni, a Prima Primissima díj elnyerése alkalmából érdemes visszatekinteni társulatunk hosszú történetére. A cikk alapja Császár Ákosnak a Matematikai Lapokban 2007-ben megjelent írása, ezt egészítettük ki az azóta eltelt másfél évtized fontosabb fejleményeivel.

A Mathematikai és Physikai Társulat időszaka

Magyarországon a matematikai kutatással foglalkozók köre a XIX. század első felében lényegében véve a két Bolyai (Farkas és János) személyére korlátozódott. A század végére azonban a helyzet lényegesen megváltozott, úgyhogy 1885-től kezdve Budapesten a matematikai és fizikai egyetemi oktatók többé-kevésbé rendszeresen találkoztak egy-egy étteremben egy szakmai előadás meghallgatására, amit azután közös vacsora követett. A mintegy 20–30 résztvevő közül kiemelkedik a matematikusok részéről Kőnig Gyula, Hunyady Jenő, Scholtz Ágoston, a fizikusok részéről Eötvös Loránd és Szily Kálmán. Néha a Kolozsvárról Budapestre látogató Réthy Mór és Schlesinger Lajos is csatlakozott a csoporthoz. Ezek az összejövetelek évekig minden hivatalos jelleg nélkül folytak, míg aztán 1890. december 18-án Eötvös Loránd olyan gyűlést szervezett mintegy száz fő részvételével, amelyen egy matematikai és fizikai kutatókat és oktatókat tömörítő egyesület megalakítását határozták el, és kiküldtek egy bizottságot az alapszabályok megfogalmazására. Ennek eredményeképpen a belügyminiszter 1891. augusztus 21-én az alapszabályokat jóváhagyta, és így 1891. november 5-én 298 fő részvételével megtarthatta alakuló ülését a Mathematikai és Physikai Társulat. Elnöknek Eötvös Lorándot választották, a matematikusok közül Kőnig Gyula alelnök, Rados Gusztáv titkár lett.

Az új egyesület talán legfontosabb feladata egy olyan magyar nyelvű folyóiratnak a megindítása volt, amely a matematika és fizika fejlődését volt hivatva a két tudomány egyetemi és középiskolai oktatói részére ismertetni. Ez az új folyóirat, a Mathematikai és Physikai Lapok, hasznosan egészítette ki a Magyar Tudományos Akadémia kiadásában megjelenő Mathematikai és Természettudományi Értesítő működését. Közölt cikkeket új tudományos eredményekkel (így például hasábjain jelent meg Fejér Lipót nevezetes doktori értekezése a Fourier-sor szummációjáról, valamint Riesz Frigyes, Geöcze Zoárd, Haar Alfréd több fontos cikke), ismertette a két tudomány egy-egy diszciplínájának újabb fejlődését, volt benne feladatrovat (feladatok kitűzése és a megoldások ismertetése), közölt könyvismertetéseket, tájékoztatott a Társulat rendezvényeiről és a tanulóversenyekről. A szerkesztést matematikai részről eleinte Rados Gusztáv végezte, tőle 1914-től Fejér Lipót, majd 1932-ben Kőnig Dénes vette át.

A Társulat egy másik nagyjelentőségű tevékenysége volt matematikai és fizikai tanulóversenyek szervezése. Ilyeneket 1894-től kezdve évenként rendeztek a középiskolai tanulmányaikat éppen befejezett fiatalok részére külön matematikából és fizikából. A matematikai versenyek olyan sikeresek voltak, hogy anyagukat Kürschák József 1929-ben Matematikai versenytételek címen könyvben jelentette meg. Ez a nagy sikerű könyv azután több ízben is folytatást nyert, jelenleg az 1997-ig megrendezett versenyek anyaga van így feldolgozva, aminek egy része angol fordításban is megjelent. A tanulóversenyekre való felkészítést szolgáló folyóiratnak (Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok) kezdetben nem volt kapcsolata a Társulattal.

Eötvös Loránd 1919-ben bekövetkezett halála után a Társulat 1921-ben felvette az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat (ELMFT) nevet, és a tanulóversenyeket is röviden Eötvös-verseny néven kezdték emlegetni. Az ELMFT egyik fontos feladata volt a Kőnig Gyula alapítvány működtetése. Ezt a nevében említett kiváló tudós gyermekei alapították azzal a céllal, hogy két évenként egy-egy ígéretes eredményeket elért fiatal matematikus (egyetemi tanárok nem jöhettek szóba) az alapítványt forrásként használó Kőnig Gyula jutalmat átvehesse. Érdemes áttekinteni az 1922-től két évenként megjutalmazottak névsorát: Bauer Mihály, Szegő Gábor, Szőkefalvi Nagy Gyula, Jordan Károly, Szász Ottó, Egerváry Jenő, Veress Pál, Kalmár László, Lipka István, Rédei László, Hajós György, Szőkefalvi-Nagy Béla, Varga Ottó. Az utolsó, 1944-ben átadott díj után az alapítvány a háború következtében elveszítette vagyonát, s ezzel sajnálatosan megszűnt.

Az ELMFT tevékenységeként rendszeresen szerveztek a matematika és fizika egyes eredményeiről szóló előadásokat Budapesten, matematikából évente mintegy 5–10-et; néha mód volt külföldi előadók megnyerésére is, de ezek száma összevéve is tíz alatt maradt (közéjük tartozott pl. Neumann János). A taglétszám a megalakulás után rövidesen elérte a 400-at, ez a két háború között kb. 200-ra esett vissza.

A Bolyai János Matematikai Társulat megalakítása és tevékenysége

A második világháború pusztításai után hosszabb ideig nem volt mód az egyesületi élet újraindítására. Szegeden jött létre az újjáalakulás olyan formában, hogy 1947. június 21-én megalakították az ELMFT egyik jogutódját, a Bolyai János Matematikai Társulatot (BJMT). Az ELMFT másik jogutódjaként hamarosan létrejött az Eötvös Loránd Fizikai Társulat is. Szegedről nehéz volt a társulati életet irányítani, így a BJMT már 1949-ben Budapestre tette át székhelyét. A taglétszám hamarosan elérte az 1500-at, míg ma 900 körül ingadozik. A BJMT már 1948-ban tagjává vált az (időközben már feloszlott) Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetségének, 1956-tól tagja a Nemzetközi Matematikai Uniónak (IMU), 1990-től kezdve pedig az Európai Matematikai Társaságnak (EMS).

A BJMT működése kezdetben a Tudományos Szakosztály és az Oktatási Szakosztály keretei között folyt. 1963-ban létrejött a Matematika Alkalmazásai Szakosztály is. Az ország egész területén folyó működés lényeges kellékeként rövid idő alatt megalakultak a ma már nagy számban működő helyi tagozatok is.

A BJMT tevékenységének egyik fontos részeként ismételten rendezett matematikai kongresszusokat. Először 1950-ben az I. Magyar Matematikai Kongresszust az MTA részvételével, Fejér Lipót és Riesz Frigyes születésének 70-edik évfordulóját kívánva ezzel emlékezetessé tenni. Kétszáznál több, köztük kb. 50 külföldi résztvevő vett ezen részt. 1960-ban (ismét az MTA-val együtt) került sor a II. Magyar Matematikai Kongresszusra (600-nál több, köztük 300-nál több külföldi résztvevővel). Csak magyar résztvevőkkel zajlott le a BJMT alakulásának tizedik évfordulója alkalmából Szegeden, majd 1972-ben a 25. évforduló megünneplésére Debrecenben néhány száz résztvevővel egy-egy kisebb kongresszus. 1996-ban a BJMT-nak jutott a II. Európai Matematikai Kongresszus megrendezése (700-nál több, zömmel külföldi résztvevővel). A matematikai tudomány egészét feldolgozó kongresszusok mellett rendszeresen szerveződnek egy-egy tudományág területére kiterjedő, szűkebb anyagot érintő konferenciák. Ezek közül elsőnek említendő a Bolyai János születésének 150-edik évfordulója alkalmából 1952-ben rendezett konferencia. 1953-tól kezdve évenként több témából szervez konferenciát a BJMT, gyakran más intézményekkel (egyetemekkel, kutatóintézetekkel) közösen. A konferenciák anyagát nemzetközi terjesztésű kötetekben jelenteti meg a társulat. A North-Holland kiadóval közösen indított Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai sorozatban 63 kötet jelent meg, jelentős bevételt biztosítva társulatunk számára. 1993 óta pedig a Bolyai Society Mathematical Studies sorozat 28 kötete látott napvilágot a Springer kiadóval közös gondozásban. Fiatal kutatók kezdeményezésére és szervezésében jött létre az „Emléktábla” workshopok sorozata, amit immár tizenegyedik alkalommal rendeztünk meg.

Az akkori Művelődési és Közoktatási Minisztérium, a Magyar Tudományos Akadémia, továbbá néhány amerikai cég anyagi támogatásával 1998-ban alakult meg a Társulat keretén belül az Erdős Pál Nyári Matematikai Kutatóközpont, ami aztán évente 4–5 kisebb konferenciát, workshopot rendezett a matematika aktuális témáiban, valamint külföldi kutatók számára Erdős-ösztöndíjakat biztosított. Sajnos a minisztériumi támogatás néhány év múltán megszűnt, így a kutatóközpont kénytelen volt beszüntetni működését. 2022-től a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet tematikus félévek rendezésével éleszti fel az Erdős Központ hagyományát.

A matematika oktatásának elősegítése, színvonalának emelése célját szolgálja az idén 60. alkalommal megrendezett Rátz László vándorgyűlés, és az 1990-től kezdve ugyancsak évenként rendezett Varga Tamás napok; az utóbbiak anyaga kötet formájában is napvilágot lát. Külön említést érdemel az 1963-ban az UNESCO támogatásával szervezett konferencia, amelynek célja a matematikai tananyag korszerűsítésének megvitatása volt. 1988-ban pedig Budapesten rendeztük a 6. Nemzetközi Matematikaoktatási Kongresszust (ICME-6).

Fontos része a BJMT munkájának különféle matematikai kiadványok szerkesztésében és kiadásában való részvétel. A kongresszusi és konferenciaköteteket már említettük, hozzájuk járult néhány, inkább tankönyv jellegű kiadvány is. Több folyóirat szerkesztésében is részt vesz a BJMT: idegen nyelven a Periodica Mathematica Hungarica jelenik meg 1971-től, a Combinatorica pedig 1981 óta. Magyar nyelven a Matematikai Lapok lépett 1950-től a korábbi Matematikai és Fizikai Lapok egyik utódjaként színre, s ettől kezdve már a Középiskolai Matematikai Lapok is a BJMT szerkesztésében jelenik meg, 1959-től ismét fizikai rovattal is bővítve. 1992 óta a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok a BJMT és az ELFT közös folyóirata, 2001 óta informatika rovattal. 1997-től az Alkalmazott Matematikai Lapok és az ABACUS is társulati lap lett, sőt 1953 és1990 között ilyen volt a Matematika Tanítása is. Az Érintő Elektronikus Matematikai Lapok 2016 óta szolgálja a Társulat ismeretterjesztő munkáját.

A BJMT tevékenységében jelentős a különféle tanulóversenyek megrendezése. A korábbi Eötvös-verseny 1949 óta Kürschák József Matematikai Tanulóverseny néven fut tovább, de most már a középiskolások is részt vehetnek rajta. Ugyancsak 1949-ben vette kezdetét a Schweitzer Miklós Emlékverseny megrendezése, amelyen egyetemi hallgatók több napos otthoni munkával oldhatják meg a kitűzött (többnyire 10) feladatot. Ennek az újszerű versenynek anyagát angol nyelven ismertető kötet is jelent meg 1961-ben, majd ennek folytatása 1991-ben. Fiatalabb tanulók részére rendezi a Társulat az Arany Dániel versenyt 1949-től, a Varga Tamás versenyt pedig 1985 és 1999 között szervezte. A BJMT rendezésében folyt az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny matematikai része is 1951-től 1976-ig. A nemzetközi matematikai olimpiákra készülő tanulókat ugyancsak a BJMT készíti fel. A Nemzetközi Matematikai Olimpiát (IMO) 1961-ben, 1970-ben és 1982-ben rendezték Magyarországon. Az Európai Leány Matematikai Olimpiára (EGMO) 2022-ben Egerben kerül sor. A Közép-európai Matematikai Olimpiának (MEMO) 2013-ban Veszprém volt a helyszíne. A felsorolt országos versenyek sorát sok helyi verseny is kiegészíti egy-egy tagozat szervezésében.

Társulatunk Oktatási Szakosztálya rendszeresen foglalkozik a matematika oktatásának kérdéseivel. Szakmai szervezetként véleményezi a különböző tervezeteket, így például a közelmúltban a Nemzeti Alaptanterv matematikai részével kapcsolatban alakított ki állásfoglalást, aminek egyes elemeit az alaptanterv végleges változatának kialakításakor figyelembe is vették.

Az Alkalmazott Matematikai Szakosztály is rendszeresen szervez konferenciákat. Ezen a területen kiemelkedő rendezvény volt a 2012-es és 2016-os győri Alkalmazott matematikai konferencia, valamint 2018-ban a 20. Európai ipari matematikai konferencia Budapesten. Két másik társasággal együttműködve szervezzük a Magyar operációkutatási konferenciák sorozatát.

A matematikai kutatásban, illetve a matematika oktatásában kiemelkedő teljesítményt nyújtó személyek jutalmazására számos díjat alapított a Társulat. 1950-től Beke Manó-emlékdíjat kapnak a legkiválóbb tanárok. A jelentős eredményt elért fiatal matematikusok elismerését szolgálja 1953 óta a Grünwald Géza-emlékérem. 1970-től kezdve kap Szele Tibor-emlékérmet egy kiemelkedő és iskolát nevelő kutató. A már a kutatásban is eredményt felmutató egyetemi hallgatók jutalmazására szolgál 1973 óta a Rényi Kató-díj. A matematika alkalmazásában sikeres fiatal kutatók a Farkas Gyula-díjban részesülhetnek. A Patai-díj a szakdidaktikai kutatásban eredményes fiatalnak ítélhető oda. Emellett a BJMT részt vesz más szervezetek által alapított és fenntartott díjak odaítélésében is (Ericsson-díj, Rátz tanár úr életműdíj stb.).

2023-ban lesz a kétszáz éve annak, hogy Bolyai János papírra vetette híres szavait: „semmiből egy ujj más világot teremtettem”. Az évforduló fölkerült az UNESCO listájára is. Társulatunk feladata, hogy számos rendezvénnyel méltóképpen megemlékezzünk majd erről az óriási tudománytörténeti jelentőségű eseményről és ennek révén egyúttal a magyar matematikai kutatás és oktatás dicsőséges múltjáról, ezzel példákat állítva a fiatal generációk elé, hogy a jövő is hasonlóan fényes legyen.

Császár Ákos írását aktualizálta *Pálfy Péter Pál*

Bolyai matematikatörténet

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Csáji Balázs Csanád 2021. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Antirealizmus a matematikában

Milyen módon léteznek a matematika objektumai, például a számok, a halmazok és a függvények? Csak az elménkben léteznek, mint például egy regény szereplői, vagy a gondolkodástól és a nyelvtől független létezők, mint például a bolygók és az elektronok? Igazak-e a matematika állításai (például, a Pitagorasz-tétel vagy a Farkas-lemma) attól függetlenül, hogy bárki elgondolná őket, vagy esetleg a matematika csak egy szimbólumokkal való formális játék? Ilyen típusú kérdésekkel a matematikafilozófia foglalkozik, amely a tudományfilozófia egy különösen fontos ága. A jelen tanulmány célja a matematikai állításokra vonatkozó antirealista elméletek – amelyek tagadják az elménktől független matematikai igazságok létezését – vázlatos történeti áttekintése, főleg a matematikai intuicionizmus és a konstruktivizmus irányzatokra koncentrálva.

Michael Dummett (1925–2011) nyomán matematikai realistának (vagy platonistának, idealistának) hívjuk azon szemantikai álláspontokat, amelyek szerint a matematikai állítások kapcsolatban vannak egy tudásunktól függetlenül létező valósággal, oly módon, hogy ez a valóság igazzá vagy hamissá teszi ezeket az állításokat, függetlenül attól, hogy ismerjük-e vagy egyáltalán képesek vagyunk-e megismerni ezeket az igazságértékeket [3]. Tehát a realista álláspont szerint a matematikai tételek igazságértéke nem függ a megismerő elmétől, a matematikus csupán felfedezi ezen igazságokat és nem megalkotja őket. Jól szemlélteti a matematika realista felfogását Charles Hermite (1822–1901) kijelentése: *„Véleményem szerint a számok és az analízis függvényei nem elménk önkényes termékei. Hitem szerint rajtunk kívüli létezésük pontosan annyira szükségszerű, mint az objektív valóság tárgyaié. Éppúgy kutatunk utánuk és fedezzük fel őket, mint a fizikusok, a kémikusok és a zoológusok.”* Dummett szerint [3] a realizmus elfogadása maga után vonja a kétértékűség (bivaliancia) elvének elfogadását, nevezetesen azt, hogy minden az adott osztályba tartozó állítás határozottan igaz vagy hamis (ettől az állítás még lehet eldönthetetlen egy adott formális-axiomatikus elméletben, azaz se nem bizonyítható, se nem cáfolható).

Ezzel szemben az antirealisták – például az intuicionisták, illetve a konstruktivisták – szerint nem létezik egy a tudásunktól független valóság, amely igazzá vagy hamissá tenné a matematikai állításokat és a matematikai objektumok csak az elménk konstrukciói. Ebből kifolyólag az antirealisták tagadják a kizárt harmadik elvének (*tertium non datur*; azaz minden P jólformált formulára vagy P vagy $\neg P$ teljesül) érvényességét és új alapokra kívánják helyezni a matematikát a nemklasszikus (konstruktív) logikai konstansok[1] bevezetésével.

A logikai konstansoknak egy standard konstruktív értelmezése az ún. *„bizonyítás”* vagy *„BHK”* (Brouwer, Heyting, Kolmogorov) interpretáció [13]. Andrej Nyikolajevics Kolmogorov (1903–1987) a következőképpen definiálta a konstruktív logikai konstansok jelentését: az $A \vee B$ bizonyításához vagy A vagy B bizonyítását kell megadnunk. Az $A \wedge B$ formula bizonyítást nyer, ha megadjuk A egy bizonyítását és B egy bizonyítását. Az $A \rightarrow B$ egy olyan konstrukció, amely segítségével A bármely bizonyítását B egy bizonyításává alakíthatjuk. A $\exists x \colon A(x)$ bizonyítása két részből áll: egy c objektum konstrukciójából és $A(c)$ bizonyításából. A $\forall x \colon A(x)$ bizonyítása egy olyan eljárás, amely egy tetszőleges c objektum konstrukciója alapján megkonstruálja $A(c)$ egy bizonyítását. Végül, az ellentmondásnak ($\perp$) nincs bizonyítása, és a $\neg A$ bizonyítása egy olyan konstrukció, amely A egy tetszőleges (feltételezett) bizonyításából egy ellentmondás (például $0 = 1$) bizonyítását állítja elő. A *„létezik”* ($\exists$) kvantor jelentésének azonosítása a *„tudunk konstruálni”*-val vezetett el ahhoz, hogy az intuicionista, illetve konstruktivista matematikusok csak a konstruktív egzisztenciális bizonyításokat fogadják el érvényesnek (az indirekt bizonyításokat nem).

Egy gyakran idézett példa nemkonstruktív matematikai bizonyításra a következő állításra adható: létezik két olyan a, b irracionális szám, amelyekkel a^b racionális. A Dummett által adott ügyes nemkonstruktív bizonyítás [2] így szól: legyen $c := \sqrt{2}$, ekkor a kizárt harmadik elvéből következik, hogy vagy c^c racionális vagy c^c irracionális. (1) ha c^c racionális akkor $a := c, b := c$ jó választás, (2) ha c^c irracionális, akkor $a := c^c$, $b := c$ egy megfelelő választás a keresett számokra. Vegyük észre, hogy ez a bizonyítás (mivel a kizárt harmadik elvét használtuk) nem adja meg számunkra, hogy melyik a két keresett irracionális szám, tehát nem konstruktív. Természetesen nem az intuicionista logikai konstansok elfogadása jelenti a különbséget a realista és az antirealista álláspontok között. Egy realista is értékelheti, ha egy bizonyítás konstruktív – mivel az több információval szolgál a számára – és bevezethet jelöléseket a konstruktív *„létezik”* vagy a konstruktív *„vagy”* jelölésére. A fő különbség a nemklasszikus logikai konstansok használatának kizárólagos elfogadásában áll: azon álláspont elfogadásában, hogy *csak és kizárólag* ezek az elfogadható eszközök a matematikában. Noha többféle antirealista elmélet lehetséges és az intuicionista, illetve konstruktivista álláspontok nem egyformák (például az elsősorban Brouwer és Heyting nevéhez köthető intuicionizmus nem teljesen egyezik meg Bishop konstruktivizmusával vagy Markov konstruktív rekurzív matematikájával), azonban közel állnak egymáshoz, így együtt tárgyaljuk őket ebben a tanulmányban.

A realizmusnak több kritikusa akadt már a XIX. század folyamán. Talán a legismertebb közülük Leopold Kronecker (1823–1891) akit a konstruktivizmus vagy még inkább a finitizmus előfutárának is tekinthetünk [12]. Sokat elárul intuicionizmushoz közel álló nézeteiről gyakran idézett mondása: *„a természetes számokat Isten teremtette, minden más emberi alkotás”* (Heinrich Weber gyászbeszédéből). Kronecker körvonalazott egy *„aritmetizálási”* tervet, ami az algebra és az analízis számokkal való megalapozására vonatkozott. Csak azokat a definíciókat tekintette elfogadhatónak, amelyeket véges lépésben ellenőrizni lehet. Ezen elméletei vezették el a „tiszta” egzisztenciális bizonyítások kritikájához.

Fontos állomást jelentettek az antirealista matematika kialakulásában a francia preintuicionisták, akik például a Zermelo–Fraenkel-féle halmazelméletet megalapozó axiómarendszer kiválasztási axiómájának kritikája kapcsán fejtettek ki többé-kevésbé konstruktivista nézeteket. A legfontosabb alakjai ezen irányvonalnak [12]: Baire, Borel, Lebesgue, Lusin és Poincaré. Julius Henri Poincaré (1854–1912) támadta a Cantor-féle halmazelméletet (például az aktuális végtelen fogalmát) és a *„logicizmust”*. Logikai szkepticizmusát jellemzi mondása, miszerint: *„egy szillogizmus nem tud semmilyen esszenciálisan újat tanítani nekünk”* (1902). Amellett érvelt, hogy a matematikában többre van szükségünk mint logikára: intuíciókra. Szigorúan véve nem volt intuicionista, de kritikája a logikával kapcsolatban (például a teljes indukcióra vonatkozóan) a konstruktivizmus egyik elődjévé teszi. Emile Borel (1871–1956) nézetei közel álltak Kroneckeréihez, például úgy gondolta, hogy csak az effektíven (például, véges sok szóval) definiált objektumok léteznek a tudományban és a konzisztencia nem elégséges a létezéshez.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966) holland matematikus nevéhez fűződik az intuicionizmus első precíz megfogalmazása, akinek filozófiájára Kant és Schopenhauer volt a legnagyobb hatással. Első ízben 1907-ben Amszterdamban a matematika megalapozásáról szóló doktori disszertációjában fejtette ki antirealista nézeteit. Brouwer szerint a matematika az elme belső szabad alkotása és független mindenféle nyelvtől vagy platonikus valóságtól. Szerinte a matematika nem függ a logikától és a logika a matematika része, valamint a matematikát nem lehet axiomatikus módon megalapozni. Brouwer elutasította a Hilbert-féle formalizmust és a Cantor-féle halmazelméletet. A logika számára csak egy megbízhatatlan eszköz a kommunikációra. A matematikai gondolkodás – Brouwer szerint – matematikai struktúrák megalkotásából áll, és a szillogizmusokhoz hasonló logikai struktúrák megjelenését csak a szabály alkalmazása közben végzett matematikai konstrukció igazolja. A logikát alkalmazott matematikának tekintette és empirikus tudománynak [12]. Szerinte nem létezik meghatározott matematikai igazság a gondolkodáson kívül, és egy állítás csak akkor lesz igaz, ha a szubjektum megtapasztalta az igazságát (amit a megfelelő mentális konstrukció véghezvitelével tud megtenni). Hasonlóképpen, egy állítás csak akkor lesz hamis, ha a szubjektum megtapasztalta a hamisságát (mivel felismerte, hogy egy meghatározott logikai konstrukció nem lehetséges). Tehát Brouwer szerint nincsenek nem megtapasztalt (tudásunktól független) igazságok. Ezen nézetei az intuicionista matematika megalkotásához vezettek, valamint a klasszikus (realista) matematika egy jelentős részének elutasításához [13]. Azonban Brouwer nemcsak negatív módon járult hozzá az intuicionista matematikához, nemcsak azzal, hogy bírált és elutasított néhány általa meg nem felelőnek tartott klasszikus matematikai módszert. Nevéhez fűződik a kiválasztási sorozatok fogalmának kidolgozása. Ezen sorozatok kulcsszerepet játszanak az intuicionista szám- és függvényfogalomban. Ezek a sorozatok vezették el Brouwert az egyenletes folytonosság tételének kimondásához, amely szerint – az intuicionista matematikában – minden korlátos, zárt intervallumot a valós számokba képező függvény egyenletesen folytonos.

Az első formális intuicionista rendszereket Brouwer tanítványa Arend Heyting (1898–1980) dolgozta ki. Az eredményként előálló intuicionista logikával technikai szempontból nincs probléma: definiálható intuicionista formális propozicionális- és predikátumkalkulus (amelyekben nem szerepel a kizárt harmadik elve) és az intuicionista predikátumlogikához adható interpretáció, például a Kripke-féle lehetséges világ szemantika, amelyre nézve az helyes és teljes. Egy alapvető eredmény az intuicionista logikával kapcsolatban, hogy a klasszikus és az intuicionista (propozicionális- és predikátum-) logika ekvikonzisztens. A propozicionális logikára ezt először Glivenko bizonyította be 1929-ben. Megmutatta, hogy egy P formula akkor és csak akkor vezethető le a klasszikus propozicionális kalkulusban, ha a $\neg\neg P$ formula levezethető az intuicionista megfelelőjében. Sőt, negációval kezdődő formulákra: $\neg P$ akkor és csak akkor vezethető le a klasszikus propozicionális logikában, ha az levezethető az intuicionista propozicionális logikában [10]. A predikátumkalkulus esetére egy ennél bonyolultabb – a *„negatív fordítás”* fogalmát használó – tétel adható, amelyet egymástól függetlenül Gödel és Gentzen bizonyított be [13].

Heyting – Kroneckerrel ellentétben – a természetes számoknak sem tulajdonított semmiféle transzcendentális, gondolkodástól független létezést. Szerinte minden matematikai objektum – még ha talán független is az egyedi gondolati tevékenységtől – lényegét tekintve az emberi gondolkodás által meghatározott. Azonban Brouwer és Heyting filozófiai nézeteinek elfogadása nem szükséges az intuicionista matematikához, Dummett például egy wittgensteiniánus jelentéselméletre támaszkodva, nyelvfilozófiai alapokon érvelt a konstruktív logikai konstansok kizárólagos elfogadása mellett [4].

Brouwer (és tanítványa Heyting) matematikája még tartalmazott absztrakt fogalmakat, például: halmazokat és kiválasztási sorozatokat. Több matematikus kritizálta az absztrakt fogalmak használatát a matematikában, például: Kronecker, Skolem és Goodstein [12]. Ezen matematikusok egy nagyon korlátozott konstruktív matematika bevezetését javasolták, amelyben csak szigorúan véges matematikai objektumok használata van megengedve (mint amilyen egy természetes szám) és ezeken az objektumokon csak konkrét (effektív) kombinatorikus műveleteket szabad értelmezni (mint amilyet például egy szorzótábla definiál). Természetesen, a finitizmus teljesen konstruktív, és így része az intuicionista matematikának. A finitista matematika feltűnik David Hilbert (1862–1943) német matematikus programjában is. Hilbert kifejtette, hogy a matematikai axiómarendszerek konzisztenciáját véges (finit) – a végtelenség matematikai fogalmától mentes – eszközökkel kell bizonyítani, és ezáltal kell a matematikát véglegesen biztos alapokra helyezni. Kurt Gödel (1906–1978) osztrák logikus nemteljességi tételeit [11] általában úgy interpretálják, mint amelyek metamatematikai bizonyítását adják annak, hogy Hilbert bizonyításelméleti programja megvalósíthatatlan [10]. A finitizmusnak egy még radikálisabb változata is ismert, az ún. ultrafinitizmus. Például, Borel úgy gondolta, hogy egy nagyon nagy véges objektum (pl.: szám) legalább olyan problematikus mint egy végtelen. Direkt módon megfogalmazott olyan kérdéseket, hogy például a $10^{10^{10}}$ ténylegesen egy véges számnak tekinthető-e. A XX. század második felében történtek kísérletek az *„alkalmas”* vagy *„kezelhető”* (feasible) számok fogalmának megalkotására.

A konstruktív rekurzív matematika főleg Andrej Andrejevics Markov (1903–1979) nevéhez fűződik, és az algoritmusok vagy rekurzív függvények elméletén nyugszik. Primitív rekurzív függvényeket először Gödel használt nemteljességi tételeinek bizonyításához (1931). Alonzo Church (1903–1995) dolgozta ki (teljesen más alapokon) a λ-kalkulust (1932), amely elmélet csak λ-absztrakciót használ és benne minden rekurzív függvény λ-definiálható [12]. Tőle függetlenül 1937-ben Alan Mathison Turing (1912–1954) bevezette az absztrakt matematikai gépek egy osztályát: a Turing-gépeket. A Turing-gépekkel kiszámítható függvények osztálya megegyezik a Church-féle λ-kalkulussal kiszámítható függvények osztályával. Church tézise, amely azonosítja a *„hatékonyan kiszámíthatóság”* és a *„rekurzívan kiszámíthatóság”* fogalmát Church–Turing-tézis néven vált ismertté. Ezt a tézist Markov népszerűsítette és fektette le konstruktív matematikája alapjait: (1) a matematika objektumai különböző ábécék fölötti szavak; (2) realizálható absztrakció megengedett a matematikában, de nem megengedhetőek az aktuális végtelent használó absztrakciók. Markov a normál algoritmusok elméletén keresztül formalizálta matematikáját. Elmélete tekinthető úgy, mint egy rekurzív matematika intuicionista logikai alapokon. Bizonyos értelemben azonban Markov szigorúbb mint az intuicionisták, ugyanis csak olyan kiválasztási sorozatokat enged meg, amelyek egy véges algoritmus (például egy Turing-gép) által előre meghatározottak [13]. Markov más tekintetben azonban engedékenyebb az intuicionistáknál, amire példaként a Markov-elvet (Markov's principle) hozhatjuk. Az elv egyszerűen azt mondja ki, hogy ha lehetetlen, hogy egy bizonyos Turing-gép örökké fut, akkor létezik egy olyan algoritmus, amely a kimenetet előállítja és fel kell tennünk, hogy a gép egyszer megáll (terminál). Bináris sorozatokra ezt az elvet például úgy mondhatjuk ki, hogy ha egy sorozatra ellentmondás, hogy minden tagja egyenlő 0-val, akkor létezik egy olyan tagja a sorozatnak amely egyenlő 1-gyel. Az intuicionisták ezt az elvet (mivel a kizárt harmadik elvének átfogalmazása), mint intuitívan nem tisztát, elutasították [12].

Sokan vélték úgy, hogy a kizárt harmadik elvének elutasítása rendkívül korlátozottá teszi az intuicionista matematikát, például Hilbert a *„Grundlagen der Mathematik”* (1928) című művében így írt: *„a kizárt harmadik elvének kihagyása a matematikából ugyanolyan, mintha például a csillagászokat megfosztanánk a teleszkóptól vagy a boxolókat attól, hogy az öklüket használják”*. Ezen nézetek radikálisan megváltoztak, miután Erret Bishop (1928–1983) publikálta *„A konstruktív analízis megalapozása”* (1967) című könyvét [1], amelyben a modern analízis nagy részét intuicionista alapokon újra felépítette. Olyan absztrakt tételek konstruktivista változatát találjuk könyvében, mint amilyen a Stone–Weierstrass-tétel, Hahn–Banach-tétel, Hilbert-térbeli önadjungált operátorok spektráltétele, az absztrakt integrálok Lebesgue-féle konvergenciatétele és olyan fogalmak intuicionista megfelelőit adta meg, mint a Haar-mérték és a Fourier-transzformáció [12]. Bishop elméletének egyik alapgondolata, hogy minden matematikának numerikus jelentéssel kell rendelkeznie. Ezen nézete közelebb áll Kronecker *„aritmetizálási”* programjához, mint Brouwer és Heyting megközelítéséhez, amelyben a természetes számok is csak az emberi elme termékei.

Bruce Pourciau álláspontja szerint [8] egy kuhni értelemben vett tudományos forradalom [7] elméletileg lehetséges a matematikában. Azonban eddig még nem tudunk róla, hogy a matematikában valaha lezajlott volna olyasfajta tudományos forradalom, amely után az új paradigmában a régi paradigma állításai inkoherensnek, nem megfelelően alátámasztottnak vagy egyszerűen hamisnak bizonyultak. Pourciau véleménye szerint azonban az intuicionizmus egy ilyen paradigmaváltás lehetőségét hordozta magában, de – főképp történeti okokból (például Brouwer extravagáns nézetei miatt) – elbukott.

Pourciau egy másik cikkében [9] – amit egy színdarab formájában írt meg – azon az állásponton van, hogy ha néhány nagyon egyszerű (szinte önevidensnek látszó) alapelvet elfogadunk a tudományos vizsgálatok alapelveiként, akkor ezekből már következik az intuicionizmus. Ezen elvek a következők:

(1) Ismernünk kell egy állítás jelentését, mielőtt azt vizsgálnánk, hogy igaz-e.

(2) Ne építsünk teljesen megalapozatlan feltevésekre.

(3) Az egyszerűtől haladjuk a kevésbé egyszerű felé.

A matematika elsődlegességét a logikával szemben (Brouwer szellemében) például (1) és (2) támasztja alá: mivel a logika az állítások jelentésétől függetlenül vizsgálja igazságértéküket, ez ellentmond (1)-nek, a kétértékűség kritika nélkül való elfogadása pedig (2)-nek – állítja Pourciau [9]. A természetes számok halmazelméleti felépítése ellen a (3) feltétel alapján lehet érvelni, mivel a természetes számok fogalma sokkal világosabb, mint mondjuk a Zermelo–Fraenkel-féle axiómarendszer. Pourciau álláspontja szerint (1)–(3) elfogadásával nem egyeztethető össze a klasszikus matematika, azonban az intuicionista már igen.

Tehát a matematika antirealista megközelítései – például az intuicionizmus, illetve a konstruktivizmus – szerint nem léteznek elmefüggetlen matematikai igazságok. Az első matematikusok, akik kritizálták a realista megközelítést Kronecker, Baire, Borel, Lebesgue, Lusin és Poincaré voltak. Brouwer fogalmazta meg elsőként az intuicionizus programját, műveiben erős Kant és Schopenhauer filozófiájának hatása. Brouwer több ellenpéldán keresztül megpróbálta megcáfolni a kizárt harmadik elvét. Tanítványának, Heytingnek a munkássága nyomán nyilvánvalóvá vált, hogy az intuicionizmus precíz formába önthető és formális-axiomatikus elméletté tehető. Az intuicionista logikára hatékony konstruktív matematika építhető, amelyre egy példa Bishopnak a konstruktív analízist megalapozó munkája. Dummett nyelvfilozófiai alapokon érvelt az intuicionista logika elfogadása mellett, míg Pourciau tudománymetodikai alapokon védte az intuicionzimust, ami szerinte egy elbukott matematikai (kuhni értelemben vett) tudományos forradalom.

Az intuicionizmus filozófiai alátámasztásával kapcsolatban több ellenvetés megfogalmazható. Például, Edmund Husserl (1858–1938) kritikája a logika pszichológiai megalapozására vonatkozóan [6] – noha jóval Brouwer munkái előtt született – értelmezhető az intuicionizmus kritikájaként is. Egy másik példa lehetne Gödel, aki maga is érvelt [7] a formalizmus és az intuicionizmus ellen, és azon a véleményen volt, hogy: *„az emberi elme számára* […] *egyetlen tartható álláspont van csak: a platonizmus”*. Azonban, az intuicionista, illetve a konstruktivista (antirealista) álláspontok tagadhatatlan erénye, hogy rávilágítanak a klasszikus (realista) matematikafelfogás gyenge pontjaira és technikailag is elfogadható alternatívát kínálnak.

Irodalomjegyzék

[1] Bishop, E. (1967): Foundations of Constructive Analysis. McGraw-Hill, New York.

[2] Dummett, Michael (1977): Elements of Intuitionism. Clarendon Press, Oxford.

[3] Dummett, Michael (1982): Realism. Synthese Vol. 55, 55–112.

[4] Dummett, Michael (1973): The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic. In: Truth and Other Enigmas, Duckworth (1978) 215–247.

[5] Gödel, Kurt (1951): Néhány tétel a matematika megalapozásáról és ezek következményei (Gibbs Lecture) In: Csaba Ferenc (szerk.): A matematika filozófiája a 21. század küszöbén. Osiris Kiadó, Budapest, 2003, 61–89.

[6] Husserl, E. (1900): Logische Untersuchungen, Erster Teil: Prolegomena zur reinen Logik (English trans. by J. N. Findlay, English title: Logical Investigations, London: Routledge, 1900/01; 1913).

[7] Kuhn, Thomas (1962): A tudományos forradalmak szerkezete. Osiris Kiadó, Budapest, 2000.

[8] Pourciau, Bruce (2000): Intuitionism as a (Failed) Kuhnian Revolution in Mathematics. Studies in History and Philosophy of Science, Vol. 31, No. 2, 297–329, Elsevier Science.

[9] Pourciau, Bruce (1999): The Education of a Pure Mathematician. The American Mathematical Monthly, Oct. 1999, Vol. 106, No. 8, 720–732.

[10] Ruzsa Imre; Máté András (1997): Bevezetés a modern logikába. Osiris Kiadó, Budapest.

[11] Smullyan, Raymond (1992): Gödel nemteljességi tételei. Typotex Kiadó, Budapest, 1999.

[12] Troelstra, Anne Sjerp; Van Dalen, Dirk (1988): Constructivism in Mathematics. Vol. 1, North-Holland, Amsterdam.

[13] Zalta, Edward N. (editor): The Stanford Encyclopedia of Philosophy (2019): Intuitionism in the Philosophy of Mathematics, `https://plato.stanford.edu/entries/intuitionism/` .

Csáji Balázs Csanád
SZTAKI, ELTE Matematikai Intézet

Lábjegyzet

[1] Logikai konstansok például a logikai összekötőjelek ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$) és a kvantorok: $\exists, \forall$.

matematikatörténet matematikafilozófia

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

AZ **INTERJÚ-PORTRÉ** MENÜPONT JÓL VAGY KEVÉSBÉ ISMERT MATEMATIKUSOKAT, VAGY OLYAN, EGYKOR MATEMATIKUSKÉNT VÉGZETTEKET SZERETNE BEMUTATNI, AKIK MA MÁS SZAKMA ELISMERT KÉPVISELŐI, SPORTOLÓK, MŰVÉSZEK...(ROVATSZERKESZTŐ: *OLÁH VERA*.)

Oláh Vera
2021. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Heppes Aladár (1933–2021)

2021. október 16-án 88 éves korában elhunyt *Heppes Aladár*, az MTA doktora. Az egyetem elvégzése után, 1956 nyarán került az *Alkalmazott Matematikai Kutató Intézet*be, ahol 12 évig dolgozott, és bár ezt követően szakmája a számítástudomány lett, valójában matematikus maradt, 80 éves korán túl is rendszeresen bejárt a Rényi Intézet könyvtárába. Tovább...

Besenyei Ádám, Faragó István, Komornik Vilmos
2021. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Simon László (1940–2021)

Az Eötvös József-koszorút, amellyel országos és nemzetközi szinten kiemelkedő tudósokat díjaznak, már nem tudta átvenni, fia és egyben szellemi örököse, Simon Péter ment el helyette a díjátadóra. 2021. novemberében, életének 82. évében elhunyt Simon László egyetemi tanár, az MTA doktora, az ELTE professor emeritusa. Tanítványai és kollégái az Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszékről fájó szívvel búcsúznak tőle.

Szerkesztő
2021. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Hungarikum – Simonovits Miklóssal beszélgetett Baló György

Az M1 TV 2004. november 14-én Hungarikum című műsorában közvetítette *Baló György* beszélgetését *Simonovits Miklóssal*. A kombinatorikával, extremális gráfelmélettel foglalkozó kutatóprofesszor azóta már Széchenyi-díjas akadémikus. Az interjúban diszkrét matematikáról, a Rényi Intézetről, a matematika tételeiről, és arról is beszél, hogy mi volt vonzó ebben a tudományban. 17 év elteltével mai szemmel érdekes újra megnézni a felvételt. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Oláh Vera 2021. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Heppes Aladár (1933–2021)

1933. március 10-én született Kaposváron. 1951 és 1956 között az Eötvös Loránd Tudomány Egyetem (ELTE) alkalmazott matematika szakán tanult. Tudományos érdeklődésének homlokterében a geometriai témák álltak. 1954-ben, harmadéves korában a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyen dicséretben részesült. Egy évvel később, negyedéves egyetemi hallgatóként a verseny győztese lett. Első publikációja még egyetemi hallgató korában, 1955-ben jelent meg egy svájci folyóiratban Fejes Tóth László egy problémájával kapcsolatban. Fejes Tóth később is mentorálta Heppest, az ő ajánlásával 1959-ben 3 hónapos ösztöndíjat kapott Freiburgban.

Az egyetem elvégzése után, 1956 nyarán került az *Alkalmazott Matematikai Kutató Intézetbe*, ahol 12 évig dolgozott tudományos munkatársként. Az intézet igazgatója ekkor Rényi Alfréd volt, és az intézet, létének igazolása érdekében elsősorban vállalatok számára dolgozott, amelyeknek fontos volt, hogy elmondhatták, tudományos alapokon végzik munkájukat. Ekkor a technika a számításokat még csak tekerős számológépekkel támogatta. Ösztöndíjjal 1963-ban 3 hónapot Olaszországban, 1965-ben egy évet az Egyesült Államokban, az Ohiói Állami Egyetemen töltött.

1968-tól Havass Miklós hívására a Nehézipari Minisztérium számítóközpontjába került, ahol az operációkutatás területén dolgozott. Osztálynyi fiatal kutató szerveződött körülötte, akiknek nem csak tudományos-szakmai vezetője volt. Együtt túrázott velük, együtt találtak ki szellemes kollektív performanszokat, együtt mentek sítúrákra. Osztályával együtt került át az INFELOR-ba, amelynek utódintézetében, a SZÁMKI-ban az ő vezetésével oldották meg Magyarország első nagy közigazgatási számítástechnikai projektjét, az Állami Népesség Számítógépes Nyilvántartását. E projekt során számos kényes politikai kérdést is fel kellett oldania, amelyeket kérlelhetetlen logikájával, elismert tudásával sikeresen tett meg. A rendszerváltás idején útja az MTA SZTAKI-ba, majd a Hungária Számítástechnikába vezetett, nyugdíjasként legközelebbi munkatársaival saját kis cégükben bonyolult problémák megoldásában vett részt ötletadóként, tanácsadóként.

Heppes Aladárral a Neumann János Számítógép-tudományi Társaság (NJSZT) Informatikatörténeti Fórumának „Arcképek a magyar informatika történetéből" sorozatában 2018-ban készült egy videoportré. Itt olvasható igen részletes szakmai életútja.

Temetésére sok volt kollégája jött el, akiknek „ideális főnöke” volt a NIMIGÜSZI, az INFELOR, a SZÁMKI és a SZÁMALK intézeteiben az 1970-es, 80-as években. Visszaemlékezésük szerint az akkori fiatalok, friss diplomások idősebb főosztályvezetőjeként a rendszeres szakmai továbbképzéseken (házi speciken), konferenciákon, közös publikációk támogatásán túl benne volt minden közös programban: ebéd utáni kávézás, közös süteményevés, nyári görögdinnyézés a tárgyalóban, téli hógolyózás, karácsonyi tréfás színielőadás, ajándékozás, mozi, vitorlázás, síelés, ping-pong-versenyek. Összetartotta a társaságot, beosztottjai számára vitathatatlan szakmai tekintély volt, mégis egyenrangúnak érezték őt magukkal, ez megadta azt a lehetőséget, hogy igazi baráti, szellemi közösséggé váljanak. Ez a barátság többekkel egész életében kitartott, rendszeres összejövetelekkel, évenkénti őszi kirándulásokkal.

A tavalyelőtti SZÁMKI-kirándulásnak még lelkes résztvevője volt, a tavalyi gyülekezőre már a családja hozta el, hogy találkozhasson a régi csapattal. Idén hiába vártuk, pár nap múlva jött a hír, hogy már nincs közöttünk.

Ali, 88 évet éltél, tartalmas volt, volt értelme, megérte. Köszönjük neked az együtt töltött éveket. Meghatározó volt későbbi életvitelünkben, erőt adott. Hálásak vagyunk. Köszönjük! Isten veled!

Oláh Vera

(felhasználva a Rényi Intézet honlapján megjelenteket, az NJSZT honlapját, közöttük Havass Miklós búcsúztatóját és Sas László búcsúbeszédét)

informatika operációkutatás nekrológ geometria

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Besenyei Ádám, Faragó István, Komornik Vilmos 2021. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Simon László (1940–2021)

Fájdalmas veszteség érte a hazai matematikát. Simon László professzor életének 82. évében eltávozott közülünk. Ez a veszteség szinte pótolhatatlan, hiszen személyében a magyar parciális differenciálegyenletek iskolateremtője, oktatásának és kutatásának kulcsszereplője távozott, nagy űrt hagyva maga után.

Simon László matematikus oklevelét 1963-ban szerezte az Eötvös Loránd Tudományegyetemen. 1966-ban védte meg egyetemi doktori disszertációját, amelyben általánosított függvényekre vonatkozó peremérték-problémákkal foglalkozott. 1968 szeptemberétől a Moszkvai Állami Egyetem Differenciálegyenletek Tanszékén levelező aspiráns volt B. R. Vajnberg vezetésével. Kandidátusi értekezését 1973-ban védte meg. Az MTA doktori fokozatát 1990 márciusában szerezte meg.

Élete végéig aktívan részt vett az oktatásban, a kutatásban és a tudományos közéletben egyaránt.

Szinte egy személyben alapozta meg a hazai parciális differenciálegyenletek modern oktatását. E. A. Baderkoval közösen írt „Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek” könyve a témával foglalkozó szinte valamennyi egyetemi kurzus alaptankönyvének számít. A hazai matematikusok nagy része több évtizeden keresztül tőle tanulta meg ezt a témát. Emellett a fizikus generációk egész sorát tanította matematikára, az analízis alapjaitól kezdve a parciális differenciálegyenletekig bezárólag. Előadásait a hallgatók nagy szeretettel és érdeklődéssel hallgatták, hiszen lendületes stílusával mindig le tudta kötni a hallgatóságot. Számos – hazai és külföldi – doktorandusznak volt témavezetője. Közülük többen vezető oktatóként oktatják a tőle tanultakat. Tanítványaival közösen 2010-ben ,,Parciális differenciálegyenletek'' címmel írt egyetemi jegyzetet, amelynek bővített és javított kiadásán haláláig nagy lelkesedéssel dolgozott.

Kutatási tevékenysége a parciális differenciálegyenletek elméletének több területét is érintette. Pályája első évtizedeiben érdeklődésének középpontjában a nem korlátos tartományokon értelmezett elliptikus egyenletek álltak, számos cikkében foglalkozott a megoldások létezésének és approximációjának kérdéseivel. Ezt követően figyelme egyre inkább a funkcionál-differenciálegyenletek és egyenletrendszerek felé fordult. A 2000-es évektől kezdve előszeretettel tanulmányozott olyan egyenleteket, amelyek nem lokális függést tartalmaztak. Vizsgálataiban eredményesen alkalmazta a monoton típusú operátorok elméletét. A témakörben végzett több évtizedes kutatómunkájának gyümölcseként jelent meg 2013-ban ,,Applications of monotone type operators to nonlinear PDE's” címmel írott tankönyve, amely a mesterszakos és doktori hallgatók számára ad áttekintést a témáról.

Közéleti tevékenysége is aktív volt. A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok fizika rovata szerkesztőbizottságának 1971-től kezdődően fél évszázadon keresztül tagja volt. Éveken át részt vett az OTKA Matematika Zsűri munkájában, tagja volt a Magyar Tudományos Akadémia Matematika Doktori Bizottságának, majd a Matematikai Bizottság munkájában vett részt. Hosszú ideig dolgozott a Bolyai János Matematikai Társulat Farkas Gyula Emlékdíj Bizottságában.

Életpályáját számos díj és kitüntetés övezte. Ezek közül talán a legfontosabb a Magyar Köztársasági Arany Érdemkereszt (2010), a Szent-Györgyi Albert-díj (2017) és az Eötvös József-koszorú (2021) voltak.

Simon László személyében egy nagyon nagy tudású, rendkívül szerény, mindenki által tisztelt és szeretett kollégát veszítettünk el, akinek hiánya sokáig megmarad közöttünk.

Munkásságát folytatjuk és emlékét megőrizzük a szívünkben!

Besenyei Ádám, Faragó István, Komornik Vilmos

nekrológ analízis

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2021. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Hungarikum – Simonovits Miklóssal beszélgetett Baló György

Az M1 TV 2004. november 14-én Hungarikum című műsorában közvetítette Baló György beszélgetését Simonovits Miklóssal. A kombinatorikával, extremális gráfelmélettel foglalkozó kutatóprofesszor azóta már Széchenyi-díjas akadémikus. Az interjúban diszkrét matematikáról, a Rényi Intézetről, a matematika tételeiről, és arról is beszél, hogy mi volt vonzó ebben a tudományban. 17 év elteltével mai szemmel érdekes újra megnézni a felvételt.

Mi maradt ki a riportból? Talán eshetett volna több szó a tehetséggondozásról. Simonovits Miklós ma úgy látja, az egyik nagy probléma, hogy már az egyetemet sem itthon végzik el a legtehetségesebbek. Véleménye szerint egy ilyen kis országban meg kell elégednünk aránylag kevés matematikai terület magasszintű művelésével. Magyarországot jól ismerik nemzetközi hírű matematikusairól. Egyszer megkérdezték Erdős Pált, hogy biztosítható-e, hogy a jövőben is az élvonalban maradjunk. Ezt semmi nem garantálja – válaszolta.

A most következő videó közlési jogát 3 évre vásárolhattuk meg. Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy az MTVA által az Érintő elektronikus folyóirat weboldalán 3 éves felhasználásra átadott 2004-ben műsorra tűzött felvételt harmadik fél semmilyen formában nem használhatja!

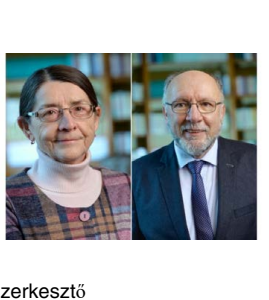
videofelvétel

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

SOKSZOR TALÁLKOZUNK OLYAN FELADATTAL, ÖTLETTEL, AMIT SZÍVESEN ELTESZÜNK KÉSŐBBI HASZNÁLATRA. A **TANÓRA – SZAKKÖR** ROVAT SZERETNE HOZZÁJÁRULNI A MATEMATIKATANÁROK ESZKÖZTÁRÁNAK GAZDAGÍTÁSÁHOZ, FÓRUMOT KÍVÁN ADNI A GONDOK, NEHÉZSÉGEK MEGTÁRGYALÁSÁRA IS. (ROVATSZERKESZTŐ: *HORVÁTH ESZTER*.)



Szerkesztő
2021. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Rátz tanár úr utódai 2021-ben

Immár két évtizedes hagyomány, hogy az év vége felé átadják a Rátz Tanár Úr Életműdíjakat olyan általános- vagy középiskolában oktató pedagógusoknak, akik a matematika-, fizika-, kémia-, vagy biológiaoktatás területén kimagasló teljesítményt nyújtanak a tantárgyak népszerűsítésében és a tehetséggondozásban. Gratulálunk mindannyiuknak, köztük *Csahóczi Erzsébet* és *Kovács István* matematikatanároknak! Tovább...

Magyar Zsolt
2021. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

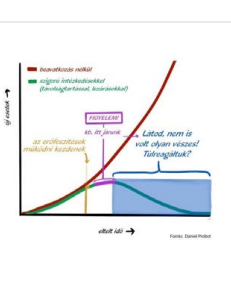
Hitel, törlesztőrészlet, járadékszámítás

A Pázmány Péter Katolikus Egyetem őszi továbbképzésén matematikatanárok hallgathatták meg *Magyar Zsoltot* arról, hogy miért is tanulunk kamatszámítást. Előadásának lényege az volt, hogyan lehet lépésről lépésre felépíteni egy nagyon is életközeli témakört: egy olyan matematikai alkalmazást, amivel mindenki találkozik az élete során. Ez a cikk is erről szól.

Oláh Vera
2021. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Találkoztunk a KöMaL Ifjúsági Ankétján!

A MATFUND Alapítvány az iskolai őszi szünetekben szokta megtartani a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (Informatika rovattal) előző évi pontversenyének eredményhirdetését. Ehhez csatlakozik a KöMaL fiatal tehetségeinek konferenciája. Az újra megjelenő járvány elején, egy év kihagyás után 2021. október 26-27-én még éppen sikerült személyes jelenléttel megrendezni a KöMaL Ifjúsági Ankétot.



Volf Annamária
2021. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Járványmatek középiskolásoknak – 2. rész

„A görbe sikeres lapításának hátulütője az úgynevezett megelőzési paradoxon. Ahol viszonylag gyorsan sikerült megállítani a vírus terjedését és lassítani a járványt, egyre többen vélik úgy, hogy a hatóságok túlreagálták a járványhelyzetet, nő a gazdasági és politikai nyomás az élet normalizálására, és lesznek, akik sokkal lazábban veszik majd a vírushelyzetet, megágyazva ezzel egy következő hullámnak.” *Volf Annamária* cikksorozatát, amelynek 1. része előző számunkban jelent meg, itt folytatjuk.

Csapodi Csaba
2021. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

33. Varga Tamás Módszertani Napok

A tavalyi, rendhagyó módon online megtartott rendezvény után idén új formában, személyesen és online részvétellel vegyesen tervezték a szervezők a 33. Varga Tamás Módszertani Napok megrendezését. Azonban a járványhelyzet alakulása, továbbá az előzetes regisztrációkból tükröződő, túlnyomórészt online részvételi szándék miatt végül teljes egészében online zajlott a program, amelyről *Csapodi Csaba* számol be. Tovább...

EGMO
Hungary
2022
Eger
European Girls' Mathematical Olympiad

Nagy Zoltán Lóránt
2021. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Invariánsok, állapotfüggvények

2022-ben, az Európai Lány Matematikai Diákolimpia kerek 10. évfordulóján Magyarország látja vendégül a kontinensről, sőt az összes földrészről érkező lánycsapatok delegációit Egerben. Az EGMO-ra felkészülés céljait, tanulságait, és egy felépített feladatsort mutat be megoldásvázlatokkal és reflexiókkal *Nagy Zoltán Lóránt*, a jövő évi verseny szervezője. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2021. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Rátz tanár úr utódai 2021-ben

Immár két évtizedes hagyomány, hogy az év vége felé átadják a Rátz Tanár Úr Életműdíjakat olyan általános- vagy középiskolában oktató pedagógusoknak, akik a matematika-, fizika-, kémia-, vagy biológiaoktatás területén kimagasló teljesítményt nyújtanak a tantárgyak népszerűsítésében és a tehetséggondozásban.

Rátz Tanár Úr Életműdíj 2021

Idén a tavalyi díjazottakat is ünnepeltük, hiszen velük csak virtuálisan találkozhattak a kitüntetés átadói, Várkonyi Viktor, a Graphisoft igazgatója, Éry Gábor, az Ericsson Magyarország igazgatója és Bogsch Erik, a Richter Gedeon NYRt igazgatója. Most a 2020-as életműdíjasokat is megtapsolhatta a Magyar Tudományos Akadémia dísztermének közönsége és azok is, akik online kapcsolódtak be a rangos esemény közvetítésébe.

Az ünnepség háziasszonya idén is *Veiszer Alinda* volt. A megjelenteket *Hudecz Ferenc*, az MTA természettudományos alelnöke és *Kroó Norbert*, az alapítvány kuratóriumának elnöke köszöntötte.

2021-ben ismét nyolc tanár vehette át az Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért Rátz Lászlóról, a Fasori Gimnázium egykori tanáráról elnevezett díját. A másfél millió forinttal járó kitüntetéseket az Ericsson Magyarország, a Graphisoft és a Richter Gedeon által létrehozott alapítvány kuratóriuma ítélte oda.

Az életművükért díjazott pedagógusok elmondták, hogy az elmúlt évek során szembetűnővé vált, milyen kiemelkedő jelentőséggel bír, hogy a gyerekek megtanulják az olyan alapvető természettudományos tényeket, mint hogy hogyan működik az emberi élettan, hogy hogyan tudunk a statisztika által adatokat értelmezni és rendszerezni, vagy hogy mi is történik pontosan az éghajlatváltozás során a környezetünkkel.

A díjazottak matematikából:

- **Csahóczi Erzsébet**, ELTE Gyertyánffy István Gyakorló Általános Iskola,
- **Kovács István**, Szegedi Tudományegyetem Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola,

fizikából:

- **Vankó Péter**, BME Fizikai Tanszék, Árpád gimnázium,
- **Pápai Gyuláné és Pápai Gyula**, Babos József Általános Iskola, Fertőd /Soproni Szakképzési Centrum, Vas- és Villamosipari Technikum, Sopron,

kémiából:

- **Fodor Erika**, ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium,
- **Sarka Lajos**, Nyíregyházi Egyetem Eötvös József Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium,

biológiából:

- **Molnár Katalin**, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gyakorló Gimnázium,
- **Horváth Zsolt**, Gödöllői Református Líceum Gimnázium.

Mindegyiküknek szívből gratulálunk!

2021. évi díjazottak
Rátz Tanár Úr Életműdíj Díjazottak
Csahóczi Erzsébet
Matematika
Kovács István
Matematika
Dr. Vankó Péter
Fizika
Pápai Gyuláné és Pápai Gyula
Fizika
Fodor Erika
Sarka Lajos
Dr. Molnár Katalin
Horváth Zsolt

A méltatásokat és az alkalomból elkészített videókat a https://www.ratztanarurdij.hu/dijazottak/2021 honlapon tekinthetik meg.

A két kiváló matematikatanárról a következőket írták az ajánlók:

Csahóczi Erzsébet 1975-ben végzett matematika- fizika szakon. Aktív pályafutásának utolsó 20 évét az ELTE Gyertyánffy István Gyakorló Általános Iskolában töltötte.

Ügyszeretete, lelkesedése, kreativitása, gyermekközpontúsága, precizitása, kedves személyisége jelentős megbecsülést váltott ki tanítványaiban, kollégáiban, a szülőkben, az egyetemi oktatókban és hallgatókban egyaránt.

Szakmai munkájában mindig igyekezett a különböző képességű gyerekekkel differenciáltan foglalkozni. Jól és lassabban haladó gyerekek mindannyian valami nagyon szépet, és a gondolkodás egy életre emlékezetes örömét kapták tőle. Ő tényleg el tudja érni, hogy a gyerekek alkotó módon gondolkozzanak. A felfedeztető matematikatanítás nagyon nagy képviselője. Egy életet eltöltött a gyerekek szeretetével, emberségük fejlesztésével, tudásuk növelésével.

Életművét végig kíséri a tananyagfejlesztő, tankönyvíró tevékenység. Fáradhatatlan újító törekvései mind a módszertan, mind a tananyagfejlesztés, tankönyvírás területén országos jelentőségűek. Mint gyakorlatvezető tanár, pedagógusjelöltek százait segítette első lépéseikben, életre szóló példát adva a hivatásgyakorlásból.

Munkáját számtalan nemzetközi szakmai csoport is nagyra értékelte. Munkássága nélkül mind a matematikatanítás ügye, mind pedig a tanító és tanárképzés, és általa a működő pedagógusok szakmai színvonala szegényebb lenne.

Számos alkalommal tartott előadást országos szintű szakmai fórumokon: Matematikatanárok Rátz László Vándorgyűlése, Varga Tamás Módszertani Napok, Matematikatanárok nyári egyeteme, Gyakorló iskolák konferenciája, ELTE TÓK Tanítók klubja. Megyei pedagógiai-módszertani intézetek és iskolai munkaközösségek meghívására szerte az országban igen sikeres módszertani előadásokat tartott, szerzőként bemutatta az új tankönyveket.

Rendszeresen tanított nyári országos tehetséggondozó táborokban, ahova kollégák, később tanárszakos hallgatók is jártak tapasztalatokat szerezni a tehetséggondozó munkában (TIT matematika tábor, MaMuT tábor).

Eredményes és szerteágazó munkásságát – számos kitüntetés mellett – 1991-ben Beke Manó -díjjal, 2008-ban Varga Tamás-díjjal, 2011-ben Ericsson-díjjal ismerték el.

A tanárnő soha nem lanyhuló lelkesedéssel és energiával végzett tanári munkájának méltó elismerése a Rátz Tanár Úr Életműdíj.

CSAHÓCZI ERZSÉBET
KOVÁCS ISTVÁN
2021
RÁTZ TANÁR ÚR
ÉLETMŰDÍJ

Várkonyi Viktor (Graphisoft) és a díjazott Csahóczi Erzsébet

A portréfilm itt látható.

Kovács István 1981-ben végzett a József Attila Tudományegyetem matematika-fizika tanári szakán. Első munkahelye a kiskunfélegyházi Móra Ferenc Gimnázium volt. 1989-ben az akkori Ságvári Endre Gyakorló Gimnáziumába került Szegedre matematika szakvezető tanárnak, azóta is itt dolgozik (ma SZTE Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola). 2001 óta igazgatóhelyettes, 2004-ben közoktatás-vezetői képesítést szerzett.

A matematikatanítás iránt mélységesen elkötelezett, folyamatosan képezi magát szervezett formában és autodidakta módon egyaránt. Hosszú pályafutása során sokféle tanulócsoportot tanított. Minden képességű diákjához megtalálta a megfelelő módszert, szívesen és sikerrel alkalmazza a felfedeztetés módszertani eszközeit.

Diákjai szeretik kedves, humoros, barátságos, megértő ugyanakkor kellően szigorú tanáregyéniségét. Végzés után is gyakran visszajárnak hozzá tanácsért vagy „csak úgy".

Órái szellemi élményt jelentenek tanítványainak. Egyénekre koncentrálva oktat. A felzárkóztatás eszköztárát alkalmazva a gyenge tanulókból is kihozza a lehető legtöbbet. Kiemelkedően tehetséges diákjainak biztosítja az egyéni tovább fejlődés lehetőségeit is. Ösztönzi a jó matematikai képességű tanulóit szaktárgyi versenyeken, pályázatokon, tanítványai közül sokan küldik be a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok feladatainak megoldásait. Az Arany Dániel verseny és Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny döntősei között rendszeresen ott vannak a diákjai.

Mentorként, szakvezető tanárként egyetemi hallgatókkal is foglalkozik. Nem erőszakolja rájuk a módszereit, feltárja a lehetőségeket, rájuk bízza a választást, majd kellő kollegialitással értékelik a tapasztaltakat. Sok kiváló matematikatanár kezdte a pályáját Kovács tanár úr keze alatt. Pályakezdő kollégái is bizalommal fordulhatnak hozzá tanácsokért, segítő ötletekért.

„Lépcsők az egyetemre" címmel feladatgyűjteményt készített, A „Sokszínű matematika" tankönyvsorozat és feladatgyűjtemények egyik társszerzője. Élete a pedagógus hivatás szeretetéről, a kiegyensúlyozott, ambiciózus generációk neveléséről szól. Munkája elismeréseként 2005-ben Ericsson-díjat kapott. A matematikatanári közélet ismert és elismert szereplője.

Kovács István emberi tulajdonságai, a matematikatanítás iránti töretlen elköteleződése, hosszú, eredményes pályafutása, sokrétű tanári munkája alapján érdemes a Rátz Tanár Úr Életműdíjra.

ERZSÉBET
KOVÁCS ISTVÁN
2021
RÁTZ TANÁR ÚR
ÉLETMŰDÍJ

Várkonyi Viktor (Graphisoft) és a díjazott Kovács István

A portréfilm itt látható.

díjazottak beszámolók Rátz László

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Magyar Zsolt 2021. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Hitel, törlesztőrészlet, járadékszámítás

Miért tanulunk kamatszámítást?

A bankbetétek, hitelek kamatozása az úgynevezett kamatos kamatozás szerint történik, amelynek matematikai alapját a mértani sorozatok jelentik. Ahhoz, hogy az alkalmazott matematikai modelleket és számításokat mindenki megértse, fel kell idézni a középiskolában a mértani sorozatról tanult ismereteket. Aki tisztában van a mértani sorozat tulajdonságaival és összegképletével, az átugorhatja a bevezetést.

Bevezetés

Mértani sorozat

Definíció. Mértani sorozatnak nevezzük azt a számsorozatot, amelyben [a másodiktól kezdve] bármelyik tagnak és az azt megelőző tagnak a hányadosa állandó. Ezt az állandó hányadost q-val jelöljük, és a mértani sorozat hányadosának (kvóciensének) nevezzük.

A definícióból következik a mértani sorozat rekurzív képzési szabálya: $a_n = a_{n-1} \cdot q$. [$q > 0$ esetén a tagok előjele azonos, $q < 0$ esetén a tagok előjele váltakozó.]

Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy a mértani sorozat n-edik tagját az $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ képlettel adhatjuk meg.

Megjegyzés. Ez a definíció kizárja az $a_1 = 0$, illetve $q = 0$ eseteket. Ekkor ugyanis vagy a 0, 0, 0, ..., vagy az a, 0, 0, 0, ... típusú sorozatokat kapnánk, azonban kényelmi szempontok miatt ezeket nem tekintjük mértani sorozatoknak.

Egyszerűen megmutatható, hogy $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$. Nem mondhatjuk azonban [a számtani sorozattal analóg módon], hogy a mértani sorozat egy tagja az őt közrefogó elemek mértani közepe, hisz a mértani sorozatnak negatív tagjai is lehetnek, így a fenti kijelentésünk nem lenne összhangban a mértani közép definíciójával. Helyesebb tehát csak a pozitív tagú mértani sorozatokra szorítkozni ebben az esetben. Ekkor megállapíthatjuk, hogy a pozitív számokból álló mértani sorozat bármely három egymást követő elemére igaz, hogy a két szélső mértani közepe egyenlő a középső taggal.

Megjegyzés. Természetesen mértani sorozatról beszélünk abban az esetben is, ha $q = 1$.

A mértani sorozat első n tagjának összege

Idézzük fel a gimnáziumi első osztályos tananyagból az $a^n - b^n$ kifejezés szorzattá alakítását!

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot \left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

A mértani sorozat első n tagjának összegzésekor az alábbi összeget kell kiszámítanunk:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1 \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right).$$

Ha a zárójeles kifejezést összevetjük a fenti szorzattal, akkor látható, hogy ott $a = q$, $b = 1$ helyettesítéssel hasonlót kapunk:

$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1).$$

Ha $q = 1$, akkor természetesen $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, azaz $S_n = na_1$, ha $q \neq 1$, akkor pedig $q - 1$-gyel leoszthatunk:

$$a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1) = S_n.$$

Ezeket az összefüggéseket fogjuk a továbbiakban felhasználni.

Kamatszámítás

Mi a kamat?

A kamat egyszerűen fogalmazva a pénz (helyesebben tőke) szolgáltatásainak az ára. A kamat (helyesebben szólva inkább a hozam) a befektető jutalma azért, hogy tőkéjét lekötve elhalasztja a fogyasztását. A kamat fogalma szorosan összefügg a pénz időértékével. A pénz időértéke legegyszerűbben kifejezve annyit jelent, hogy egy forint „ma” többet ér, mint ugyanez az egy forint „holnap” (a „ma” alatt itt a jelent, míg a „holnap” alatt a jövőt kell érteni), mert a mai forint befektethető és kamatozik. Másként kifejezve a befektető a kamatot mint jutalmat azért kapja, mert a mai biztos forintot felváltja egy jövőbeni kockázatos forintra. (*Forrás:* `https://sevenday.ewk.hu/kamatos-kamat-csodaja/`)

Kamatos kamat

Egy adott év elején befizetünk a bankba $10\,000$ Ft-ot. A bank évi 5% kamatos kamatot ad a betét után, a kamatot mindig az év végén írják hozzá a betétünkhöz. Hány forintunk lesz a bankban 20 év elteltével?

Megoldás. A bank által adott kamattal minden év végén a pénzünk $1{,}05$-szörösére változik. 20 év elteltével a kamattal növelt összeg $10\,000 \cdot 1{,}05^{20} \approx 26\,533$ Ft lesz.

Definíció. ***Évi kamatos kamat:*** a kamat jóváírása évente egyszer történik, év végén. A kamatláb az egész évre érvényes kamatlábbal egyezik meg.

Definíció. ***Havi kamatos kamat:*** a kamat jóváírása havonta egyszer történik, a hónap végén. A kamatláb az egész évre érvényes kamatláb 1/12 részével egyezik meg.

Történelmi kapcsolódás: Manhattan „megvásárlása”

New York-i hagyományok szerint Manhattan-t 1626-ban a hollandok 60 guldenért (24 dollárnyi holland pénzért) vették meg az indiánoktól. (Valójában ez inkább területhasználati díjnak számított akkoriban. Az esetről Pieter Schaghen holland kereskedő számolt be a West India Company vezetőinek küldött, 1626. november 7-én kelt levelében.) Az indiánok egyik késői leszármazottja be akarta perelni az Egyesült Államokat, hogy milyen előnytelen üzletet kötöttek az őseivel, és kártérítést szeretett volna kapni. Azonban mielőtt a perre sor került volna, egy ügyvéd kiszámította, hogy nem az ár volt alacsony, hanem rosszul fektették be a vételárat: ha az 1626-ban kapott 24 dollárt akkoriban nagyon alacsonynak számító, mindössze 6%-os kamatra fektették volna be, akkor a közben eltelt 380 év alatt körülbelül $24 \cdot 1{,}06^{380} \approx 99\,183\,639\,921$ dollárra növekedett volna az összeg, ami nem nevezhető alacsonynak.

Hitelkamatok összetétele

Mi határozza meg a banki hitelkamat mértékét?

- **infláció:** a kamatok jelenléte azt az általános várakozást eredményezi, hogy a jövőben mindenkinek több pénze lesz, így a növekvő pénzösszeggel együtt az árak emelkedése is közös társadalmi elvárás. Ez a növekedés az infláció, ami a pénz vásárlóértékének csökkenésével jár együtt. A pénzkölcsönzők semmiképpen sem akarnak kisebb vásárlóértékű pénzt visszakapni, mint amennyit kölcsön adtak, ezért általában a kamat az infláció feletti értéket vesz fel.

- **nyereség:** a pénzkölcsönző szervezet működési költsége

- **kockázati felár:** mennyire biztos a kölcsönző abban, hogy visszakapja a pénzét. A kockázati felár fedezi a vissza nem fizetett hitelekből származó veszteségeket is.

Nem egyidejű kifizetések: jelenérték

- Az inflációs hatás miatt a nem egyidőben történő kifizetések nominális értékének puszta összehasonlításával nem tudunk korrekt elszámolást végrehajtani. Nem mindegy, hogy egy adott pénzösszeg mikor kerül kifizetésre.

- Az összehasonlíthatóság alapja, hogy az összegeket „normáljuk”, egy adott, közös időpontbeli értékét vegyük figyelembe. Ezt az értéket hívjuk jelenértéknek. A **jelenérték** lehet természetesen jövőbeni időpontra számított is.

Példa egy elszámolásra a jelenértékszámítás alkalmazásával

A parlament eldönti 2018-ban, hogy 2021-re új kulturális központot építenek fel. Erre a célra 26 milliárd forintot szavaznak meg. A munkálatok elkezdődnek 2018-ban, és 2021-ben érnek véget.

A pénzek kifizetése a kivitelezőnek az alábbi ütemezésben történt:

2018-ban: 1 milliárd forint

2019-ben: 10 milliárd forint

2020-ban: 5 milliárd forint

2021-ben: 12 milliárd forint, ez így összesen $1 + 10 + 5 + 12 = 28$ milliárd forint

Az elszámolás alapja azonban nem lehet a konkrét kifizetett számlák összege, hiszen közben az infláció miatt emelkedtek az árak, és az esetleges túllépés nem jelenti azt, hogy a tervektől eltértek, de azt sem, hogy nem tértek el.

Megoldás. 2018-as árszínvonalon számítsuk ki az elköltött összeget

Az éves inflációt tekintsük az egyszerűség kedvéért 4%-nak.

a 2018-ra számított jelenértékek összege:

$$1 + \frac{10}{1{,}04} + \frac{5}{1{,}04^2} + \frac{12}{1{,}04^3} = 1 + 9{,}615 + 4{,}623 + 10{,}668 = 25{,}906.$$

Ennek alapján a 2018-ban meghatározott költségvetési keretet az építkezés nem lépte túl.

Gyűjtőjáradék – Takarékoskodás folyamatos befizetésekkel

20 éven át minden év elején befizetünk a bankba 12 000 Ft-ot. A bank évi 6%-os kamatos kamatot ad a betétünkre. Hány forintunk lesz a 20 év elteltével a számlánkon?

Nézzük végig a folyamatot úgy, ahogy az időben zajlik. Ekkor az alábbi számítássort kapjuk a 20. év végén rendelkezésre álló összegre:

$$(\ldots(((12\,000 \cdot 1{,}06 + 12\,000) \cdot 1{,}06 + 12\,000) \cdot 1{,}06 + 12\,000)\ldots) \cdot 1{,}06,$$

ahol az $1{,}06$-os szorzók száma 20 db (minden év végén hozzájön egy újabb szorzótényező).

A zárójeleket kifejtve a

$$12\,000 \cdot 1{,}06^{20} + 12\,000 \cdot 1{,}06^{19} + 12\,000 \cdot 1{,}06^{18} + \ldots + 12\,000 \cdot 1{,}06$$

összeget kapjuk, amely egy mértani sorozat első 20 tagjának összege: a sorozat első tagja $12\,000 \cdot 1{,}06$, hányadosa $1{,}06$. A keresett összeg:

$$12\,000 \cdot 1{,}06 \cdot \frac{1{,}06^{20} - 1}{1{,}06 - 1} \approx 467\,913\text{Ft}.$$

Megjegyzés: A

$$12\,000 \cdot 1{,}06^{20} + 12\,000 \cdot 1{,}06^{19} + 12\,000 \cdot 1{,}06^{18} + \ldots + 12\,000 \cdot 1{,}06$$

összeget megvizsgálva egy újabb értelmezést is felfedezhetünk: a betett pénzösszegeket egymástól elkülönülően kamatozó betétekként felfogva az egyes betétek kamatos kamatokkal növelt értékének összegét láthatjuk.

Gyűjtőjáradék típusú pénzgyűjtés folyik pl. a magán- és önkéntes nyugdíjpénztárakban, a befektetési életbiztosításokban, illetve a néhány éve bevezetett, állam által támogatott nyugdíjbiztosításokban.

A nyugdíjbiztosítás gyűjtőjáradék számítása hasonlóan történik, azonban annyi módosítással, hogy mivel a fizetésünket utólag kapjuk meg, ezért a befizetések nem az adott periódus elején, hanem a következő periódus elején (vagyis lényegében az aktuális periódus végén) zajlanak, így a kitevők 1-gyel elcsúsznak a fenti számításhoz képest (mert nem kamatozással, hanem befizetéssel ér véget a gyűjtő időszak).

Havi befizetések esetén a bank általában nem ad havi kamatos kamatot. Az általános eljárás az, hogy a befizetett összegekre 3 havonta írják jóvá a kamatot a gyűjtőszámlán, a biztosítók pedig éves szinten átlagosan megjelenő hozamot szoktak számítani, a hozam megállapításakor az egyes befizetések időpontját figyelembe véve.

Gyűjtőjáradékkal kapcsolatos feladattípusok

A gyűjtőjáradékkal kapcsolatban a következő feladatokat fogalmazhatjuk meg:

1. Évente adott összeget betéve a gyűjtőszámlánkra, adott idő elteltével mekkora lesz a gyűjtőszámlán levő összegünk?

2. Ha adott összeget szeretnénk elérni meghatározott idő elteltével, mekkora éves összegeket kell befizetnünk a számlánkra?

3. Hány év szükséges ahhoz, hogy adott összeget elérjünk, ha az évi befizetésünket meghatározott összegben tudjuk biztosítani (mert ez pl. a jövedelmünk függvénye)?

Az első két feladat egymással kompatibilis, az egyikkel elvégzett számításunk eredményét a másikra egy egyszerű arányossággal át tudjuk vinni.

Gyűjtőjáradék – annuitás, végösszeg kiszámítása

Kiszámítottuk korábban, hogy ha 20 éven át minden év elején befizetünk a bankba $12\,000$ Ft-ot, és a bank évi 6%-os kamatos kamatot ad a betétünkre, akkor a 20 év elteltével a számlánkon

$$12\,000 \cdot 1{,}06 \cdot \frac{1{,}06^{20} - 1}{1{,}06 - 1} \approx 467\,913\text{Ft}$$

lesz.

Ha azt a kérdést tennénk fel, hogy évi hány Ft-ot kell befizetni, ha a célunk a 20 év elteltével 4 000 000 Ft elérése lenne, akkor könnyen látható, hogy a választ a $12\,000$ Ft $\frac{4\,000\,000}{467\,913} = 8{,}549$-szeresére növelésével tudjuk megadni, vagyis kerekítve évi $102\,600$ Ft lenne ehhez szükséges.

Járadékgyűjtés időtartamának kiszámítása

Ha a járadékgyűjtés időtartamát szeretnénk megtudni, akkor egy exponenciális egyenletet kell megoldanunk.

Hány éven át kell minden év elején $15\,000$ Ft-ot betennünk a bankba évi 6%-os kamatos kamatra, ha azt szeretnénk, hogy a folyamat végén (teljes éveket tekintve) 2 000 000 Ft álljon a rendelkezésünkre?

Megoldás:

$$15\,000 \cdot 1{,}06 \cdot \frac{1{,}06^n - 1}{1{,}06 - 1} = 2\,000\,000.$$

Az egyenletet rendezve

$$1{,}06^n = \frac{2\,000\,000 \cdot (1{,}06 - 1)}{15\,000 \cdot 1{,}06} + 1,$$

ahonnan

$$n = \log_{1{,}06}\left(\frac{2\,000\,000 \cdot (1{,}06 - 1)}{15\,000 \cdot 1{,}06} + 1\right) \approx 36{,}82.$$

Nyilván a feladat szempontjából a tört éveket nem tudjuk figyelembe venni, felfelé kell kerekítenünk, hiszen kamatfizetés csak év végén van. A kapott érték jelen esetben azt jelenti, hogy 36 év még kevés a célunk eléréséhez, 37 év elteltével pedig egy kicsit túl fogjuk lépni.

Járadékgyűjtés és infláció

Felmerülhet az a probléma, hogy a jelen számításokban nem vesszük figyelembe az inflációt. Az infláció hatására a befizetendő összegek megemelkednek, akár a nyugdíj-előtakarékosságot tekintve, hiszen a fizetésünk is emelkedik. Nézzük meg, mi történik, ha ezt is beépítjük a számításokba!

Tételezzük fel, hogy minden évben 3%-os az infláció. A bankba tett pénzünket tehát minden évben a korábbihoz képest 3%-kal növeljük. Ekkor az egyes befizetéseket a fentiekben megállapított módon önálló betétként kezelve az alábbi összeget kapjuk (a korábbi példában megadott kezdőösszeggel és kamattal számolva):

$$12\,000 \cdot 1{,}06^{20} + 12\,000 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}06^{19} + 12\,000 \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}06^{18} + \ldots + 12\,000 \cdot 1{,}03^{19} \cdot 1{,}06 =$$

$$= 12\,000 \cdot 1{,}06 \cdot (1{,}06^{19} + 1{,}03 \cdot 1{,}06^{18} + 1{,}03^2 \cdot 1{,}06^{17} + \ldots + 1{,}03^{19}) =$$

$$= 12\,000 \cdot 1{,}06 \cdot \frac{1{,}06^{20} - 1{,}03^{20}}{1{,}06 - 1{,}03} \approx 594\,034.$$

Az így kapott összeg az inflációval korrigált összeg, amelyre a jövőben számíthatunk. Ennek mai értékét azonban nehezen tudjuk felmérni, ezért jobb, ha inflációmentes számításokat végzünk. Ez lényegében a következőket jelenti: mai szinten ismerjük az árakat, a pénz értékét. A mai körülményekhez viszonyítva kapunk egy összeget, amely tekinthető alsó becslésnek a majdani kézhez kapott összeget tekintve (hiszen a befizetések nem fognak stagnálni).

Életjáradék – Az összegyűjtött pénz kifizetésének egy lehetséges módja

Beteszünk a bankba 4 000 000 Ft-ot, és szeretnénk minden év elején ebből ugyanakkora összegeket kapni 20 éven át. A bank a mindenkor bent lévő összegre évi 5%-os kamatos kamatot ad. Mekkora összeget tudunk kivenni minden év elején?

Legyen a keresett összeg x. Ekkor a bankban levő pénzünk az alábbiak szerint alakul:

$$(\ldots((((4\,000\,000 - x) \cdot 1{,}05 - x) \cdot 1{,}05 - x) \cdot 1{,}05 - x) \cdot 1{,}05 - x)\ldots) - x = 0.$$

A bal oldali képletben a kamatozást jelentő $1{,}05$-dal való szorzás 19-szer jelenik meg, hiszen az utolsó éves összeget a 20. év elején vesszük ki. Ekkor átalakítva az alábbi összefüggést kapjuk:

$$(\ldots((((4\,000\,000 - x) \cdot 1{,}05 - x) \cdot 1{,}05 - x) \cdot 1{,}05 - x) \cdot 1{,}05 - x)\ldots) - x =$$

$$= 4\,000\,000 \cdot 1{,}05^{19} - x \cdot (1{,}05^{19} + 1{,}05^{18} + 1{,}05^{17} + \ldots + 1{,}05 + 1) = 0.$$

Átrendezve:

$$4\,000\,000 \cdot 1{,}05^{19} = x \cdot (1{,}05^{19} + 1{,}05^{18} + 1{,}05^{17} + \ldots + 1{,}05 + 1),$$

$$4\,000\,000 \cdot 1{,}05^{19} = x \cdot \frac{1{,}05^{20} - 1}{1{,}05 - 1},$$

$$x = \frac{4\,000\,000 \cdot 1{,}05^{19} \cdot 0{,}05}{1{,}05^{20} - 1} = 305\,686.$$

Tipikus folyamat, hogy először befizetünk egy adott pénzintézethez, biztosítóhoz aktív munkaképes időnk alatt, majd a befizetett és felhalmozott összeget járadék formájában kérjük kifizetni számunkra (pl. nyugdíjjáradék formájában).

2015 óta törvény rendelkezik arról, hogy életjáradékot csak biztosító vagy állami szervezet fizethet. Korábban volt olyan kezdeményezés, amelynek során lakásuk haszonélvezeti jogát megtartva, de tulajdonjogát átadva a nyugdíjasok cserébe életjáradékot kaphattak az erre szakosodott cégektől. Ma már ez nem lehetséges.

Nézzünk egy tipikus számítást nyugdíjalap-gyűjtésre, majd nyugdíjkifizetésre!

Gyűjtőjáradék és életjáradék kombinációja

Legyen egy fiatalember kellően tudatos, és 25 éves korában kezdje el fizetésének 10%-át gyűjteni. Alsó becslésként számoljunk a minimálbérrel mint fizetéssel, ez jelenleg kb. $200\,000$ Ft, tehát 40 éven át havi $20\,000$, azaz évi $240\,000$ Ft-ot fizet be emberünk a biztosítóhoz, hogy majd nyugdíjat kapjon belőle. A hosszú távú befektetések kamatait vehetjük évi 5%-nak. Az egyszerűség kedvéért számoljunk éves betéttel és éves kamatjóváírással, mindig az év végén befizetve a pénzösszegeket.

A korábban már elemzett példa alapján a 40 év elteltével

$$240\,000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^{40} - 1}{1{,}05 - 1} \approx 30\,441\,543\text{Ft}$$

van a bankban.

Ezt a pénzt szeretnénk nyugdíj formájában megkapni, év elején felvéve az adott évre vonatkozó teljes összeget. A biztosító, tekintve, hogy a járadékfizetés alapját képző összeget már nem tudja hosszútávra befektetni, egy jelképes, 2%-os technikai kamattal számol a bentmaradó pénzünk gyarapodására. Itt azonban van egy kérdés, amit el kell döntenünk: fix időre szeretnénk járadékot kapni, vagy halálunkig, amely esetben a biztosító az átlagos várható élettartamunkra fog fizetni. Kérjük most 20 évre, optimista szemlélettel.

Ebben az esetben az előző példában elvégzett számítások alapján

$$x = \frac{30\,441\,543 \cdot 1{,}02^{19} \cdot 0{,}02}{1{,}02^{20} - 1} = 1\,825\,200$$

lesz az év elején felvehető összeg, tehát a havi összeg $152\,100$ Ft, ami körülbelül annak felel meg, amennyit a bruttó $200\,000$ Ft-os fizetésünkből a kezünkhöz kapunk. Egy ilyen rendszerben tehát lényegében megállapítható, hogy 40 év alatt a mindenkori fizetésünk 10%-át befizetve a takarékoskodásra, a gyűjtőperiódus felének megfelelő időtartamra a korábbi jövedelmünket biztosítani tudjuk.

Felmerül itt az a kérdés, hogy ha halálunkig kérjük a járadék fizetését, akkor ezt a biztosító tudja-e fedezni. Ha a biztosítónak sok ügyfele van, akkor mindenki esetében az átlagos élettartamra számítva a járadékot, nagyjából az történik, hogy amennyivel előbb hal meg valaki az átlaghoz képest, egy másik valaki kb. annyival él tovább, tehát amit az egyiknek nem tudtak kifizetni a korai halála miatt, azt a másik ügyfél megkapja, és így kiegyensúlyozódik a dolog.

Van azonban itt egy momentum, amire kezdetben nem gondoltak: A kifizetések nem egyidejűleg történnek, hanem elcsúsztatva. Ha pl. átlagosan 10 éves élettartamra számolják a nyugdíjat, akkor ha valaki 5 év után meghal, a másik pedig 15 év után, akkor a korábban meghalt ember nyugdíját a túlélő csak 5 év eltolódással kapja meg. Ezalatt az 5 év alatt a bentmaradt összeg mindenképpen növekszik, azonban ezt a növekedést a járadékfizetés nem veszi figyelembe, hiszen a kiszámított fix összeget már 5 évvel korábban kifizették volna. Ez az extra haszon sok ügyfél esetén nem kis mértékű, de ma már törvény szabályozza, hogy ezt a biztosító nem nyelheti el, ki kell osztania az életben levő nyugdíjas biztosítottjai között.

Hiteltörlesztés – Hitelezés és a hitelek visszafizetése

A hitelfelvétel nyomán a keletkezett tartozásunk visszafizetése részletekben történik. Az a pénz, amivel tartozunk, az általunk befizetett összeggel csökken, így évről évre kevesebb lesz a tartozásunk. A kezdeti hitelösszeget természetesen minden esetben kamatokkal növelve tartják nyilván, tehát amikor részelszámolás történik, akkor mindig a korábbi tartozásunk kamatokkal növelt összegéhez képest csökken az aktuális tartozásunk.

Nézzünk egy példát!

Felvettünk $20\,000\,000$ Ft hitelt 20 évre, évi 7%-os kamatra. A törlesztés mindig az év végén történik, a kamatszámítás után, minden évben azonos összegekkel (ezt nevezzük annuitásnak). Mennyi legyen ez az összeg, hogy a hitelünk a 20 év alatt visszafizetésre kerüljön?

A tartozásunk az alábbi folyamatképlet szerint alakul:

$$(\ldots((((20\,000\,000 \cdot 1{,}07 - x) \cdot 1{,}07 - x) \cdot 1{,}07 - x) \cdot 1{,}07 - x)\ldots) \cdot 1{,}07 - x = 0.$$

Az utolsó részlet befizetése a 20. év végén történik, előtte 20 kamatozás van. Az egyenletet rendezve és a mértani sorozat tagjaira vonatkozó összegképletet alkalmazva:

$$20\,000\,000 \cdot 1{,}07^{20} = x \cdot (1{,}07^{19} + 1{,}07^{18} + 1{,}07^{17} + \ldots + 1{,}07 + 1),$$

$$20\,000\,000 \cdot 1{,}07^{20} = x \cdot \frac{1{,}07^{20} - 1}{1{,}07 - 1},$$

$$x = \frac{20\,000\,000 \cdot 1{,}07^{20} \cdot 0{,}07}{1{,}07^{20} - 1} \approx 1\,887\,859.$$

Láthatjuk, hogy ez a számítás nagyon hasonló az életjáradék-számításhoz, azonban annyi eltérés van, hogy itt előbb kamatozik az összeg, és csak utána csökkentjük, míg ott előbb csökkentettük, és csak utána kamatozott.

Miért annuitás, azaz miért fix összeg?

A bankok számára a legfontosabb dolog: szeretnék visszakapni a pénzüket. Az annuitás a hitel visszafizetésének egyik garanciája: ha kezdetben az adós ki tudja fizetni az adott törlesztőrészleteket, akkor ez később még inkább így lesz, hiszen a jövedelme emelkedik (infláció). Tehát az annuitás a bank számára biztonságot, az ügyfél számára pedig lényegében fokozatosan csökkenő terheket jelent.

A gyakorlat – Havi törlesztés

A gyakorlatban persze nagyon ritka az éves törlesztőrészletek fizetése, a gyakorlatban havonta fizetünk a banknak, és havonta el is számol velünk. Ez a fenti képletekre vonatkoztatva azt jelenti, hogy nem 20, hanem 240 kamatozás van, viszont egy alkalommal csak az éves kamatláb 1/12 részét fizetjük, jelen esetben 0,583% kamatot.

Végezzük el a havi törlesztőrészletre vonatkozó megfelelő számítást is:

$$20\,000\,000 \cdot 1{,}005\,83^{240} = x \cdot (1{,}005\,83^{239} + 1{,}005\,83^{238} + 1{,}005\,83^{237} + \ldots + 1{,}005\,83 + 1),$$

$$20\,000\,000 \cdot 1{,}005\,83^{240} = x \cdot \frac{1{,}005\,83^{240} - 1}{1{,}005\,83 - 1},$$

$$x = \frac{20\,000\,000 \cdot 1{,}005\,83^{240} \cdot 0{,}005\,83}{1{,}005\,83^{240} - 1} \approx 155\,012.$$

Az éves törlesztőrészletek esetén az egy hónapra jutó összeg: $1\,887\,859 : 12 = 157\,321$ Ft. Miért magasabb ez az összeg, mint a havi fizetés esetén? Nyilvánvalóan azért, mert a havi törlesztéskor a kamatozó összeg (a tőke) azonnal csökken, így a törlesztés után már kisebb összeg után kell kamatot fizetnünk.

Ugyanakkor a havi kamatozás másik kérdést vet fel: havi tőkésítés esetén tulajdonképpen havi kamatos kamatszámítás történik, de mindez az éves kamatláb 1/12-ed részével, ami miatt az éves kamat tényleges értéke megváltozik.

Havi kamatos kamat éves viszonylatban

Számítsuk ki, hogy évi hány %-os kamatozásnak felel meg, ha havi $\frac{7}{12}$% kamatot számolunk fel, havi tőkésítéssel!

Nyilvánvaló, hogy ha beteszünk egy tetszőleges összeget, akkor ez az éves kamatozás esetén az $1{,}07$-szorosára változik. Havi kamatos kamat esetén egy év elteltével

$$\left(1 + \frac{\frac{7}{12}}{100}\right)^{12} = \left(1 + \frac{7}{1200}\right)^{12} = 1{,}0723.$$

Azt kaptuk tehát, hogy ez a számítási mód 7,23%-os kamatot jelent éves szinten.

Érdekes lenne tehát azt meghatározni, hogy az évi 7% kamatozásnak hány százalékos havi kamatos kamatozás felel meg.

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{12} = 1{,}07,$$

$$x = 100 \cdot \left(\sqrt[12]{1{,}07} - 1\right) \approx 0{,}5654.$$

Tehát havi $0{,}5654$% kamatot kéne felszámítani, ami éves szintre lineárisan extrapolálva 6,78%-os kamatot jelent.

A bankok a hitelekre ezt a számítást az annuitás meghatározására használják, de a tényleges elszámolás ennél prózaibb módon történik. A hónap elején fennálló tőketartozás éves kamatát kiszámítják, ezt 360-nal osztják, majd megszorozzák az adott hónapban levő napok számával, így megkapják azt az összeget, amelyet az adós kamatként fog megfizetni az adott hónapra. A havi törlesztőrészlet fennmaradó összege a tőketartozást csökkenti.

Látszik, hogy ezzel a módszerrel februárban törlesztjük a legtöbbet a tőketartozásunkból, és a 31 napos hónapokban pedig a legkevesebbet.

Hány napból áll egy év? Rejtélyes módon a banki üzletszabályzatokban mindenhol 360 napnak tekintik az évet a napi kamat meghatározásakor, azonban a kamat tényleges kiszámításakor 365 napra számítják a kamatot. A korábbi havi kamatos kamat bevezetéssel a tényleges kamatláb így már gyakorlatilag a 7% helyetti 7,23%-ról $7{,}23 \cdot \frac{365}{360} = 7{,}33$%-ra változik.

A bank nyeresége tehát kettős:

– Havi kamatos kamattal a kamatláb növelése.

– A napok számának egyoldalú csökkentésével a kamat növelése.

Kezelési költség

A korábbi hitelekben a bankok úgynevezett kezelési költséget is felszámoltak. A kezelési költség százalékos mértéke a hitel fennálló futamideje alatt változatlan volt, számítása az alábbiak szerint történt:

A naptári év elején fennálló tőketartozásra kiszámították a kezelési költséget egy éves időtartamra. Ezt az összeget elosztották 12-vel, és minden hónapban ezt a költséget fizette az adós, függetlenül attól, hogy a tőketartozása hónapról hónapra csökkent.

Tehát a törlesztőrészletből először a kamatot, aztán a kezelési költséget vonták le (utóbbit egy adott évben havi fix összegben), és a fennmaradó összeg ment a tőketartozás csökkentésére.

Jelenleg a kezelési költség és a fenti számítás létezik a banki üzletszabályzatokban, de a mértéke 0%.

A korábban kiszámított 20 éves futamidejű, $155\,012$ Ft havi törlesztőrészletű hitelünk nyomon követésével (például egy Excel-táblázatban) azt a meglepő eredményt kapjuk, hogy a 240 hónap elteltével még mindig $628\,859$ Ft tartozásunk van.

A havi törlesztőrészletet $156\,000$-re módosítva már csak $107\,986$ Ft a maradvány összeg.

Ezt a havi napi számítás, és a kerekítések együttesen okozzák. A korábban említett kamatemelő hatás miatt számoljuk újra a korábbi 7%-os kamatra felvett hitelünk havi törlesztőrészletét, most már $7{,}33$%-os éves kamattal számolva!

$$x = \frac{20\,000\,000 \cdot 1{,}0061^{240} \cdot 0{,}0061}{1{,}0061^{240} - 1} \approx 158\,924.$$

Ezzel viszont már lényegében a 231. hónap végére elfogy a hitelünk, de mindenesetre ez jobb becslést ad a tényleges havi törlesztőrészlet értékére.

Végiggondolva a gyakorlati és az elméleti számítások közti eltérést (az Excel-táblázatban jelentkező szignifikáns maradványösszeg), arra a következtetésre juthatunk, hogy a havi kamatos kamat számítása nem okozhat problémát, hiszen a törlesztőrészeteket is havi kamatos kamat figyelembevételével számítottuk ki. Egyedül a bank által egyoldalúan alkalmazott, 360 napos évben 365 napra fizetett kamat kamatemelő hatása nincs beépítve a számításokba.

Számoljuk újra a korábbi 7%-os kamatra felvett hitelünk havi törlesztőrészletét, a 365 napra számolt $7{,}097$%-os éves kamattal számolva!

Ennek havi kamatlába $0{,}5914$%. A módosított kamattal kiszámított havi törlesztőrészlet:

$$x = \frac{20\,000\,000 \cdot 1{,}005\,914^{240} \cdot 0{,}005\,914}{1{,}005\,914^{240} - 1} \approx 156\,224.$$

Ezzel már lényegében rendben van, az Excel-táblázatban a 240. hónap végére kb. $10\,000$ Ft túlfizetést kapunk, amit nyilván az utolsó törlesztőrészletben lehetne korrigálni.

A banki ajánlatokban láthatunk két olyan opciót, amely a kezdeti törlesztést könnyíti meg:

Csak kamat

A futamidő elején meghatározott ideig csak kamatot kell fizetni. Ez jelentősen alacsonyabb törlesztőrészletet eredményez, azonban ez egyben azt is jelenti, hogy a hitel tőketörlesztése ténylegesen nem kezdődik meg. A banknak ez a legjobb üzlet, hiszen így a tőketörlesztés hiánya miatt mindig megkapja a teljes kamatot. Ha ez így menne örökké, a bank vezetői fütyörészve hátradőlhetnének.

Csúsztatott hiteltörlesztés

A futamidő elején meghatározott ideig egyáltalán nem kell fizetni, a hitelösszegünk viszont rendes elszámolásban kamatozik. Ez a banknak szintén nagyon kedvező, mert így a kint levő hitelállományát anélkül növeli, hogy komolyabb erőfeszítéseket kéne tennie. A mi hiteltörlesztőrészletünk nagyobb lesz, vagy a futamidő hosszabbodik – mi mindenképpen rosszabbul járunk.

Magyar Zsolt
Szent István Gimnázium, Budapest

☐ matematikatanítás ☐ algebra ☐ pénzügyi matematika

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

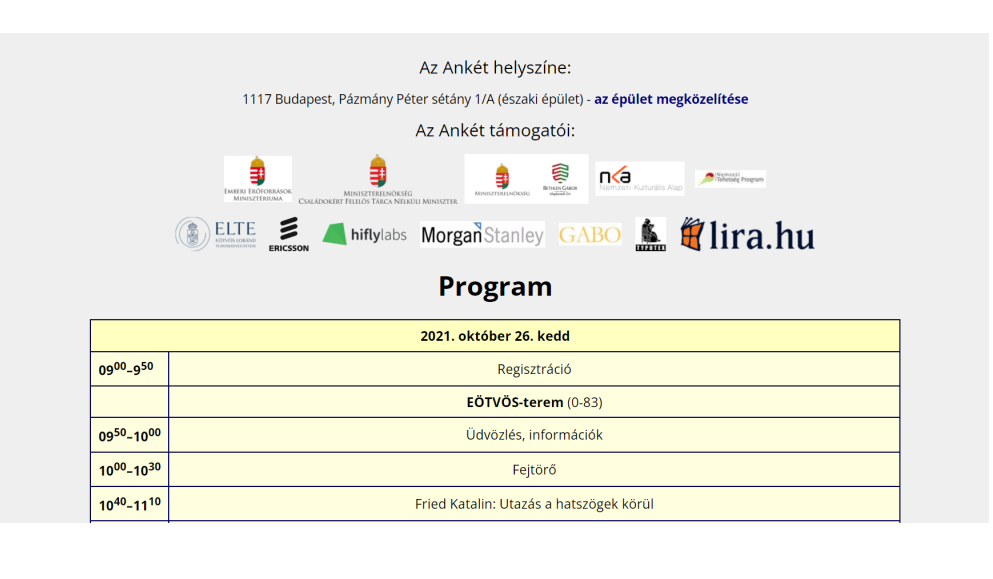
Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Oláh Vera 2021. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Találkoztunk a KöMaL Ifjúsági Ankétján!

Az újra megjelenő járvány elején, egy év kihagyás után 2021. október 26-27-én még éppen sikerült személyes jelenléttel (a kötelező járványügyi előírások betartásával) megrendezni a KöMaL 2020-21-es tanévi nyerteseinek díjkiosztó ünnepségével egybekötött Ifjúsági Ankétot. Az előzetes programot és a támogatókat a honlapon tette közzé a szerkesztőség.



Az Ankét helyszíne:
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A (északi épület) - az épület megközelítése
Az Ankét támogatói:

Program

2021. október 26. kedd	
09⁰⁰–9⁵⁰	Regisztráció
	EÖTVÖS-terem (0-83)
09⁵⁰–10⁰⁰	Üdvözlés, információk
10⁰⁰–10³⁰	Fejtörő
10⁴⁰–11¹⁰	Fried Katalin: Utazás a hatszögek körül

A regisztráció során minden résztvevő átvehetett egy ajándék KöMaL-pólót, jegyzetfüzetet, tollat, post-it tömböt. Még az előadások előtt a szokásos totó helyett fejtörők tették próbára a diákokat és a tanárokat.

A délelőtti előadók közül *Fried Katalin* „utazásait a hatszögek körül” egy hét múlva a Varga Tamás Módszertani Napokon is megismételhette. Idén rendhagyó módon több kerekasztal-beszélgetés is zajlott: ezeken a versenyzőknek lehetőségük nyílt kérdezni a javítóktól és a szerkesztőbizottságoktól, szóba kerültek a típushibák és az értékelés.

Az ebédre a pár lépésre lévő Ericsson-székház éttermében került sor. Az első nap délutánjának díjkiosztója hagyományosan a nagy konferenciateremben zajlott, amelyet állófogadás követett. Az eseményt *Pálfy Péter Pál*, a Bolyai János Matematikai Társulat elnöke nyitotta meg.

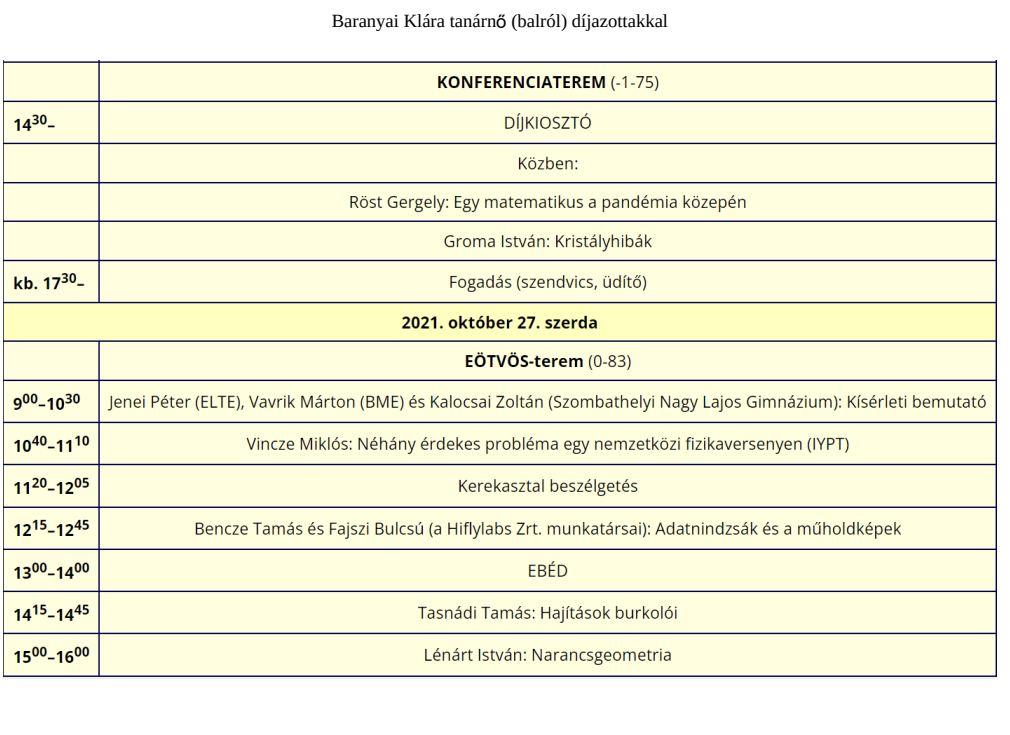
KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
KöMaL
Megjelenik 1894 óta
Kiadja a MATFUND Alapítvány

Pálfy Péter Pál, a BJMT elnöke

A különböző kategóriák díjait, könyvutalványait és jutalomkönyveit a lap szerkesztői és a meghívottak adták át, köztük *Jakab Roland*, az Ericsson Magyarország regionális igazgatója, *Rácz Zsófia*, az EMMI Családokért Felelős Tárca Nélküli Minisztérium Ifjúságért felelős helyettes államtitkára, *Jobbágy Zsuzsanna*, az EMMI Családokért Felelős Tárca Nélküli Minisztérium Tehetségekért Felelős Főosztályának képviselője, *Sipos Imre*, az Oktatási Hivatal Tartalomfejlesztési és Tankönyvkiadási elnökhelyettese, *Pálfi Erika*, az EMMI Köznevelésért Felelős Helyettes Államtitkári Titkárság Köznevelési Tartalomfejlesztési Főosztályának vezetője.

Rácz Zsófia államtitkár (balról) díjazottakkal

Baranyai Klára tanárnő (balról) díjazottakkal



	KONFERENCIATEREM (-1-75)
14³⁰–	DÍJKIOSZTÓ
	Közben:
	Röst Gergely: Egy matematikus a pandémia közepén
	Groma István: Kristályhibák
kb. 17³⁰–	Fogadás (szendvics, üdítő)
2021. október 27. szerda	
	EÖTVÖS-terem (0-83)
9⁰⁰–10³⁰	Jenei Péter (ELTE), Vavrik Márton (BME) és Kalocsai Zoltán (Szombathelyi Nagy Lajos Gimnázium): Kísérleti bemutató
10⁴⁰–11¹⁰	Vincze Miklós: Néhány érdekes probléma egy nemzetközi fizikaversenyen (IYPT)
11²⁰–12⁰⁵	Kerekasztal beszélgetés
12¹⁵–12⁴⁵	Bencze Tamás és Fajszi Bulcsú (a Hiflylabs Zrt. munkatársai): Adatnindzsák és a műholdképek
13⁰⁰–14⁰⁰	EBÉD
14¹⁵–14⁴⁵	Tasnádi Tamás: Hajtások burkolói
15⁰⁰–16⁰⁰	Lénárt István: Narancsgeometria

A díjak átadásán túl két érdekes előadást is meghallgathattak a résztvevők: *Röst Gergely* a Szegedi Tudományegyetem Alkalmazott és Numerikus Matematika Tanszékének vezetője, a Járványmatematikai modellező és epidemiológiai elemző munkacsoport tagja beszélt a pandémia és a matematika kapcsolatáról, *Groma István* egyetemi tanár, az MTA doktora, az ELTE TTK Fizikai Intézet Atomfizikai Tanszékének oktatója pedig a kristályszerkezetekről és még sok egyébről adott elő a fizika iránt érdeklődők örömére.

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
KöMaL
Megjelenik 1894 óta
Kiadja a MATFUND Alapítvány
www.komal.hu

Groma István

A második napon az Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenyének kísérleteivel (*Jenei Péter* és korábbi versenyzők), majd két érdekes problémájával (*Vincze Miklós*) ismerkedhettek meg az ankét látogatói. Az adatnindzsák világába a Hiflylabs munkatársai engedtek bepillantást. Délután *Tasnádi Tamás* a hajtásokat, *Lénárt István* pedig a narancsok geometriáját mutatta be.

Kovács Bence és Róka Bálint egykori versenyzők, ma már egyetemistaként a feladatjavítók közé tartoznak. Beszámolójukat idézve:

„Mi úgy gondoljuk, hogy a teljes ankét tanulságos és hasznos volt és reméljük, hogy jövőre ismét sok versenyzővel találkozhatunk!”

beszámolók KöMaL konferencia

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Volf Annamária

2021. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Járványmatek középiskolásoknak – 2. rész

A cikksorozat első részében foglalkoztunk többek között az exponenciális függvénnyel és a logaritmikus skálával. Ebben a részben ezeket az ismereteket is felhasználva a Covid-járvány kapcsán sokszor látott görbékről lesz szó. A hivatkozásokat követve az eredeti oldalakon sok grafikon paraméterezhető változata is megtalálható, érdemes ezekkel kísérletezni.

Járványgörbék[1]

A kumulált adatokból készített járványgörbe[2]

Az alábbi levezetés a 3Blue1Brown videója alapján készül.

Azt fogjuk megadni, hogy adott idő elteltével hányan lesznek *összesen* a populációban, akik már megfertőződtek a vírussal. (Az összes megfertőzöttet mutató görbe monoton növő, hiszen az újonnan felfedezett esetek hozzáadódnak a már meglévőkhöz.)

Legyen p ezúttal a megfertőződés valószínűsége, azaz a fertőzés átadásának esélye. Induljunk N_0 fertőző személlyel. Tegyük fel, hogy mindegyikük minden nap átlagosan E fogékony emberrel találkozik. (A modell itt már elrugaszkodik a valóságtól, a pontosabb becslésre nem is ezt, hanem egy ennél jóval bonyolultabb modellt használnak.) Az N_0 ember mindegyike tehát átlagosan $E\cdot p$ személyt fertőz meg.

Egy nap múlva azoknak a száma, akik már megfertőződtek: $N_1=N_0+N_0\cdot E\cdot p=N_0(1+Ep)$.

Nézzük meg, mi lesz a helyzet 2 nap múlva: $N_2=N_1+N_1\cdot E\cdot p=N_1(1+Ep)=N_0(1+Ep)^2$.

Hasonlóan folytatva a gondolatmenetet, megkapjuk, hogy a k-adik napon az összes megfertőződött számát az $N_k=N_0(1+Ep)^k$ összefüggés adja meg.

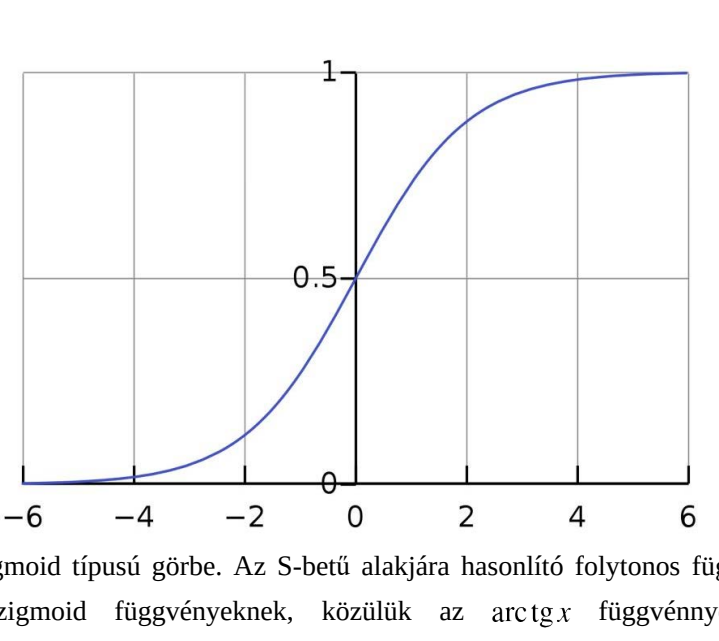
Ebben a képletben az E és a p a két változó érték, és a végeredmény nagyon érzékeny az Ep szorzatra. Számoljunk utána. Kezdjünk $21\,000$ fertőzöttel (N_0), és vizsgáljunk körülbelül 2 hónapot (61 nap). Az egyik esetben Ep értéke $0{,}15$, a másik esetben $0{,}05$ legyen. Az Ep szorzat $0{,}1$-del való csökkentése milyen arányú változást eredményez a 61 nap alatt megbetegedettek számában?

Megoldás:

1. eset: $N_{61}=21\,000\cdot(1+0{,}15)^{61}=105\,873\,570$.

2. eset: $N_{61}=21\,000\cdot(1+0{,}05)^{61}=411876\rightarrow$ 257-szer ennyi fertőzött lett az 1. esetben.

Ahhoz tehát, hogy a járvány lassuljon, az Ep szorzat csökkenésére van szükség. Ez előbb-utóbb beavatkozás nélkül is lecsökken, hiszen minél többen esnek át a fertőzésen, annál kevesebb olyan emberrel tud találkozni a fertőzött, aki még nem volt beteg[3]. Emiatt a görbe alakja ehhez hasonlóan fog kinézni[4]:



Egy egy szigmoid típusú görbe. Az S-betű alakjára hasonlító folytonos függvényeket nevezzük szigmoid függvényeknek, közülük az $\operatorname{arctg} x$ függvénnyel esetleg találkozhattak a diákok matematika órán. A járványgörbék néha hasonlítanak a szigmoid görbékre, de lényeges különbség közöttük az, hogy a járványgörbék nem szimmetrikusak. (Később a valósághűbb SIR-modellnél ezt látni is fogjuk.)

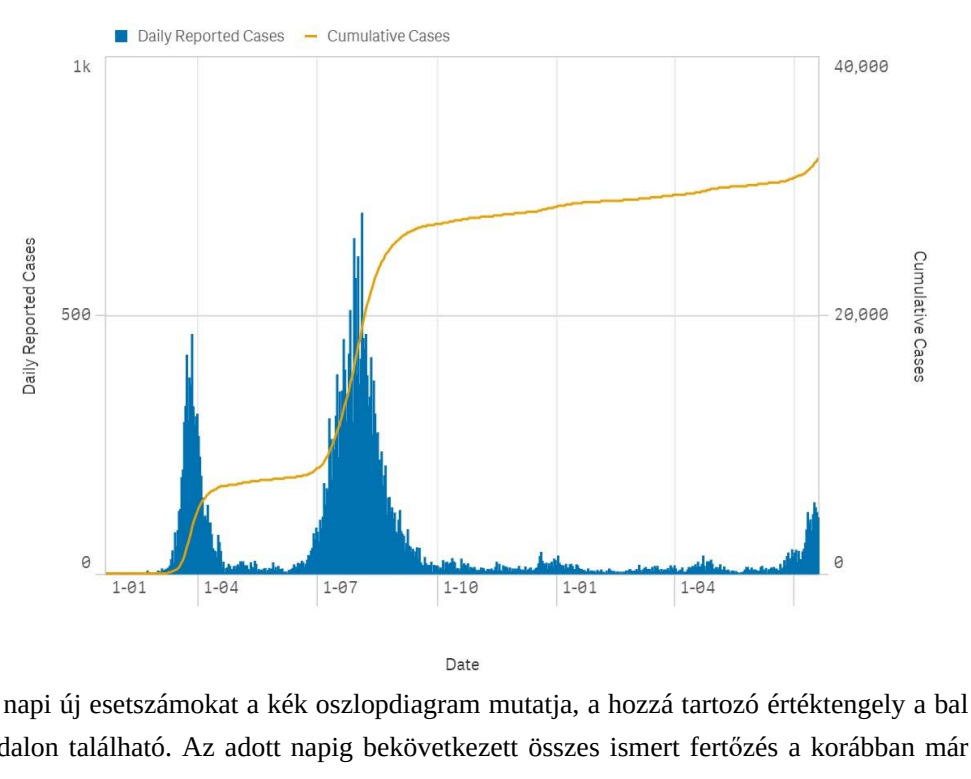
Ha meg szeretnénk akadályozni, hogy a járvány kontrollálatlanul söpörjön végig a populáción, akkor az E és a p értékét kell csökkenteni. Gondoljuk végig, hogy a két változót milyen beavatkozásokkal lehetne csökkenteni.

E	p
• a kontaktszámok csökkentését célzó intézkedések • a fertőzöttek elkülönítését célzó intézkedések • védőoltás	• A megfertőződés valószínűségének csökkentését célzó intézkedések, tevékenységek a vírus terjedési tulajdonságaitól függnek. Koronavírus esetén ezek például a maszkviselés, a gyakori kézmosás vagy fertőtlenítés, szellőztetés stb.

Egy járvány elindulásakor az összes fertőzöttet és a napi új fertőzéseket mutató görbe alakja is exponenciális. Ahogy az előbb láttuk, elérkezik a járvány lefolyása során az a pont, amikor a fertőzés sebessége csökkenni kezd.

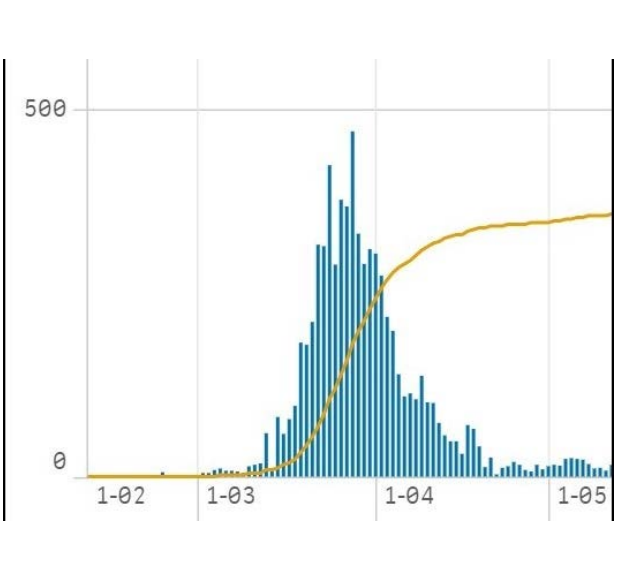
Az új fertőzöttek számát mutató járványgörbe alakja

Az alábbi diagram az ausztráliai esetszámokat mutatja[5]. Érdekessége, hogy ezen egyszerre láthatók a napi esetszámok és az adott nappal bezárólag regisztrált fertőzések száma:

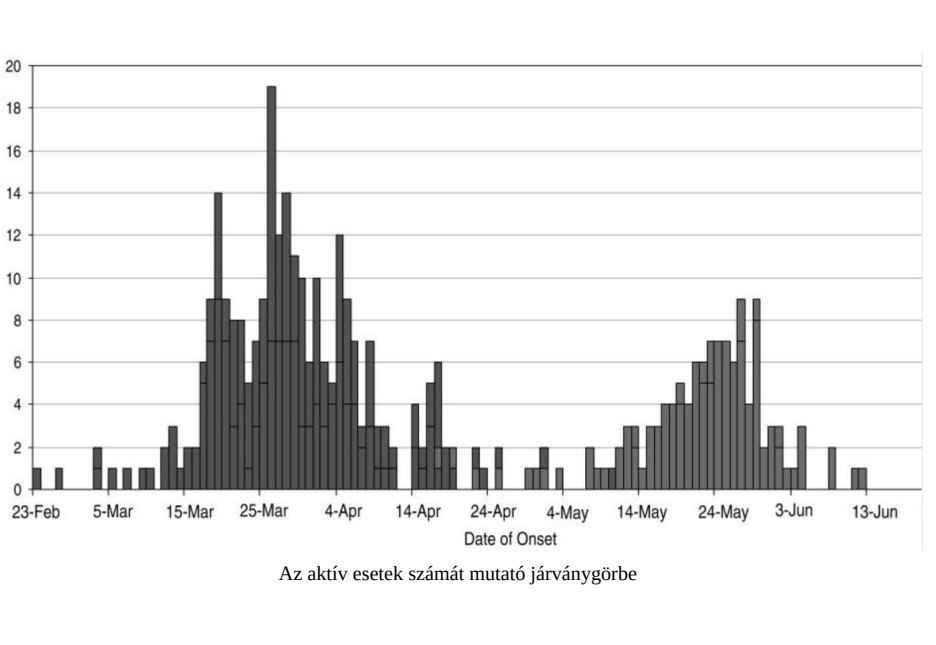


A napi új esetszámokat a kék oszlopdiagram mutatja, a hozzá tartozó értéktengely a bal oldalon található. Az adott napig bekövetkezett összes ismert fertőzés a korábban már vizsgált sárga színű vonaldiagramon látszik, ennek értéktengelye a jobb oldalon látható. Észrevehető a kapcsolat a két görbe között: amikor az effektív reprodukciós szám csökkenni kezd (adott napon kevesebb fertőzés van, mint előtte), akkor kezd el a csökkenni a sárga grafikon növekedési üteme is.

Emeljük ki a fenti grafikonból azt a részt, ami az első lecsengésig tart, vagyis amíg a sárga grafikon befutja a már látott S-alakot. Láthatjuk, hogy a másik grafikon ezalatt egy harangszerű alakot ír le.



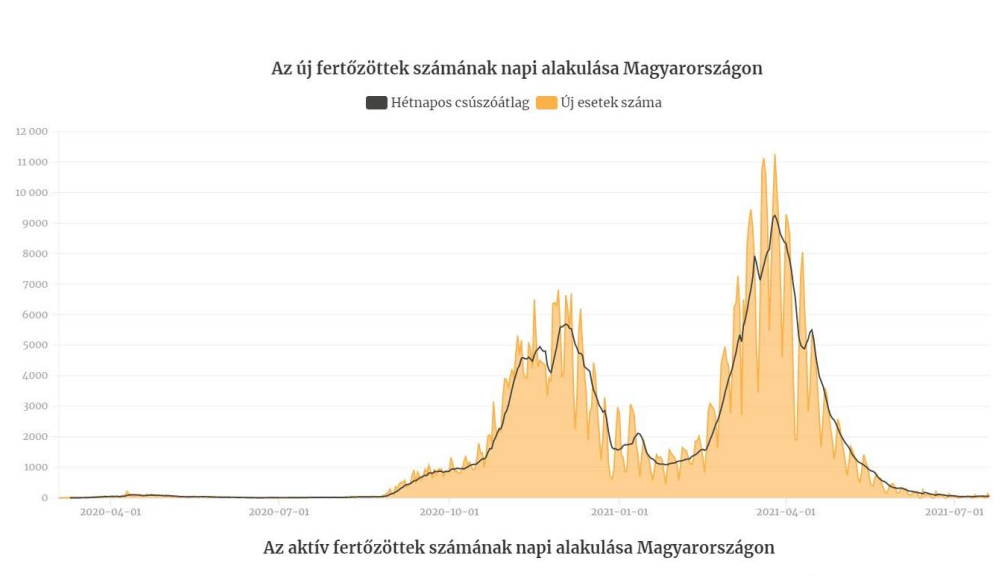
Az ausztrál görbéhez hasonló, két hullámos járványgörbéje volt a torontói SARS-járványnak 2003-ban[6]:

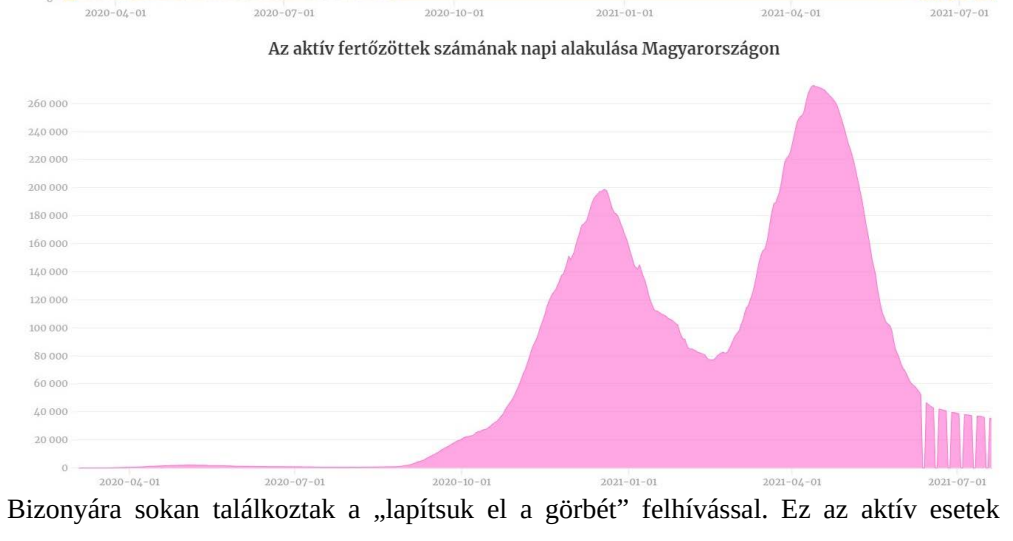


Az aktív esetek számát mutató járványgörbe

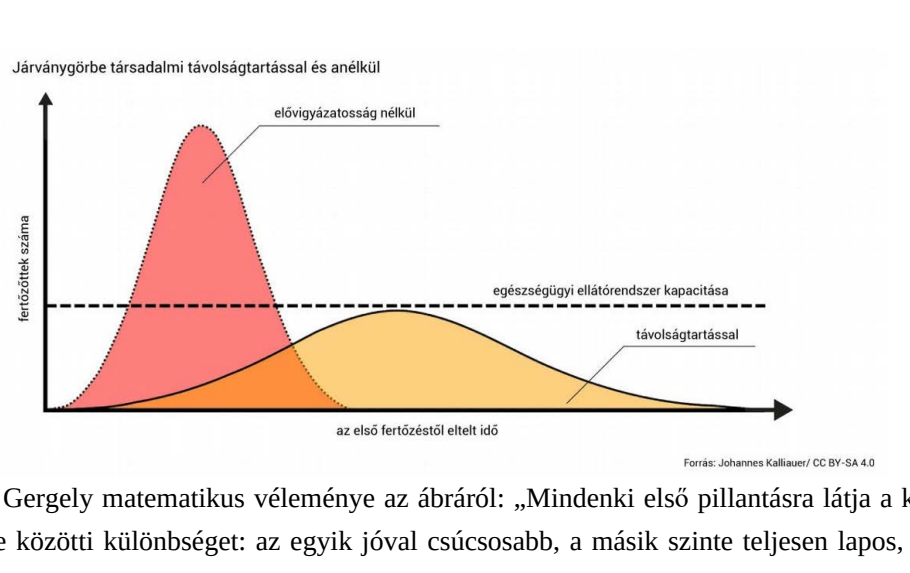
A koronavírussal kapcsolatban az aktív eseteket mutató görbe futott be nagyobb karriert a médiában. Aktív esetnek számít mindenki, akinél tesztekkel igazolhatóan tart a betegség.

Tegyük egymás mellé az új esetek és az aktív esetek magyarországi görbéjét![7] Láthatjuk a hasonlóságot a két görbe alakja között:



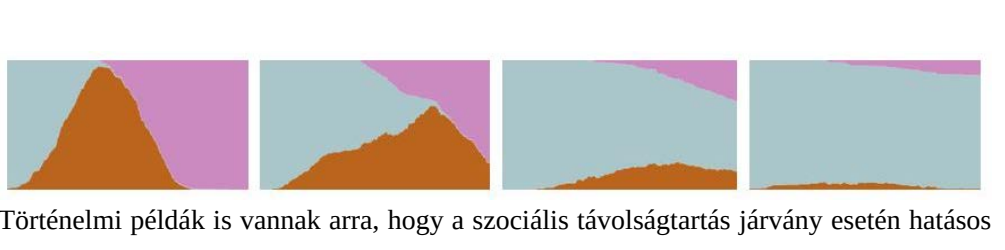


Bizonyára sokan találkoztak a „lapítsuk el a görbét" felhívással. Ez az aktív esetek görbéjén a „harang" magasságának a csökkentésére vonatkozott. A „flattening the curve" avagy „laposítsuk el a görbét" híressé vált grafikonja:

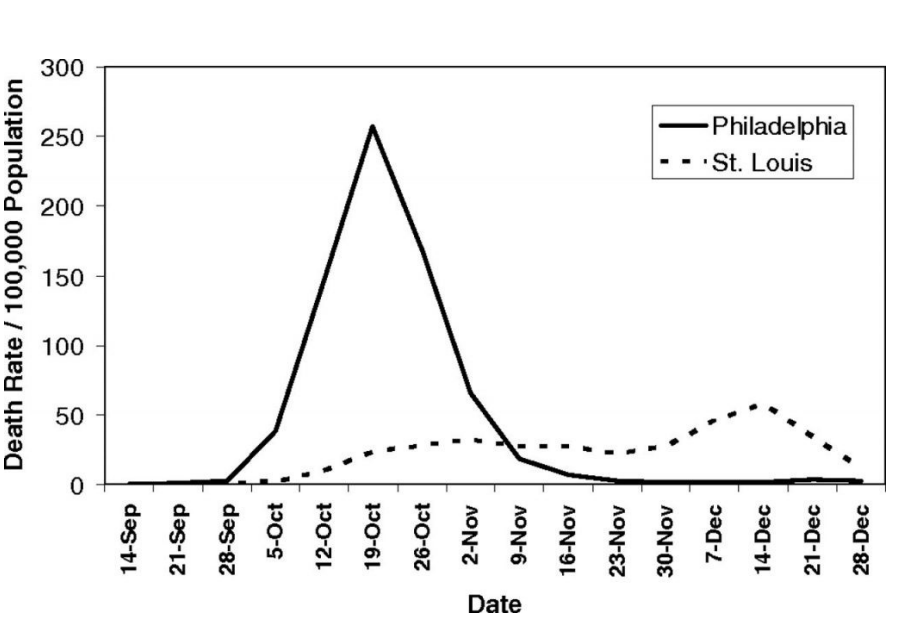


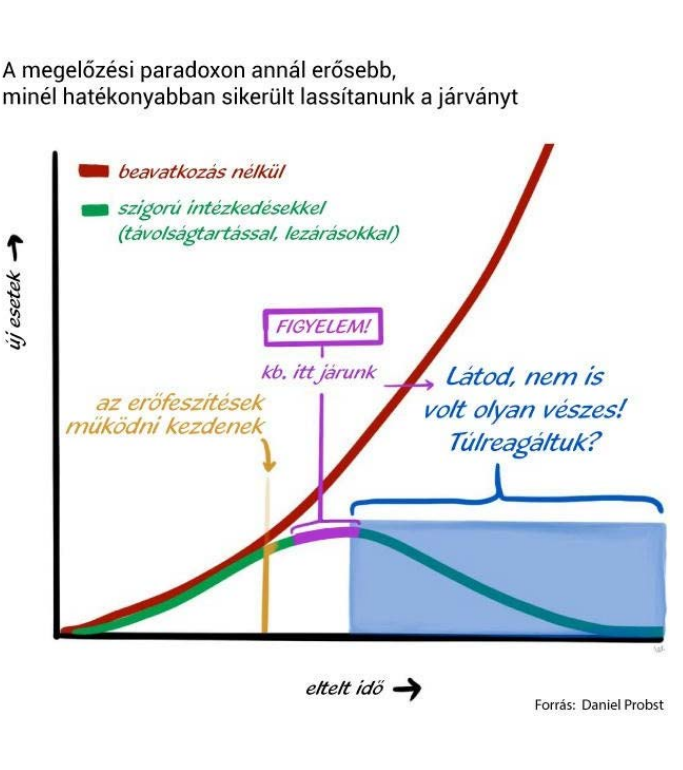
Röst Gergely matematikus véleménye az ábráról: „Mindenki első pillantásra látja a két görbe közötti különbséget: az egyik jóval csúcsosabb, a másik szinte teljesen lapos, és van egy vízszintes vonal az ábrán, amely az egészségügyi kapacitást mutatja. Több szempontból kritizálták ezt az ábrázolást: az egészségügyi kapacitást nem vízszintes vonallal kéne jelölni, hiszen a legtöbb országban bővítettek a kapacitáson; kritizálták az arányokat is, hiszen az ábrán a csúcsosabb görbe nagyjából kétszer olyan magasra megy, mint a másik, míg a legrosszabb forgatókönyvek alapján legalább tízszer magasabb lenne. A pontatlanságok ellenére ez a jó kompromisszum kategóriába tartozik, mert a lényeget mindenki számára befogadható módon közvetíti."[8]

A korlátozó intézkedések és a görbe „lapulása" közötti összefüggést jól szemlélteti a Washington Post által közölt szimuláció, melyet bárki lefuttathat. (Magyar nyelven az alapblog.hu-n olvasható összefoglaló a Washington Post cikkéről.) A korlátozások 4 fokozatához tartozó grafikonokon a narancssárga „harang" magassága a korlátozások mértékének megfelelően változik:



Történelmi példák is vannak arra, hogy a szociális távolságtartás járvány esetén hatásos védekezési módszer. A g7.hu cikkét idézzük.

> Az USA-ban megvalósulhattak olyan kutatások, amelyek egy száz évvel ezelőtti járványra (a spanyolnátha-járványra) adott intézményi reakciók hatásait vizsgálták a járvány lefolyására és halálozási rátájára.
>
> Az amerikai Nemzeti Tudományos Akadémia folyóiratában 2007-ben megjelent tanulmány fő üzenete szerint a járványra adott nem gyógyszerészeti beavatkozások és ezen belül is az időben bevezetett, a társadalmi távolságtartást eredményező megoldások (tömegrendezvények betiltása, iskolák, templomok bezárása stb.) nélkülözhetetlen szerepet játszottak abban, hogy mérsékelni lehetett a spanyolnátha-járvány hatását, csökkenteni lehetett a járvány halálozási rátáját.
>
> A tanulmányban a szerzők két város, Philadelphia és St. Louis vezetésének az 1918-as spanyolnátha-járványra adott válaszait hasonlították össze. Míg Philadelphiában a politikusok késlekedve, csak két héttel az első esetek megjelenése után mertek döntést hozni a tömegrendezvények, összejövetelek betiltásáról, az iskolák, a templomok és a színházak bezárásáról, addig St. Louisban mindjárt az első esetek megjelenése után pár nappal meghozták ezeket a döntéseket. Ez a különbség megdöbbentő hatást gyakorolt a két városban a járvány halálozási rátájára. Philadelphiában lakosságarányosan sokkal többen haltak meg, mint St. Louisban. Míg Philadelphiában a járvány csúcspontján, amikor a legtöbben haltak meg (1918. október 19-én) 100 ezer lakosra vetítve 257 haláleset történt, addig St. Louisban a csúcs december 14-én volt 31 halottal 100 ezer lakosra vetítve.
>
> 
>
>
> De nemcsak a halálozási ráták csúcsaiban, hanem a halottak számában is hatalmas különbségek mutatkoztak. Míg Philadelphiában 100 ezer lakosra vetítve 719-en haltak meg a vizsgált időszak alatt, addig St. Louisban feleannyian, 347-en. Más vizsgálatok, amelyek már nemcsak két várost, hanem az USA 43 nagyobb városát vizsgálták, egyértelmű és szignifikáns összefüggést találtak a társadalmi életet korlátozó beavatkozások három fajtája (iskolák bezárása; közösségi rendezvények betiltása; karantén elrendelése) és a spanyolnátha-járványban a halálozási ráták alakulása között.
>
> A fenti tanulmányok eredményei alapján tehát azt lehet látni, hogy azokban a városokban, amelyekben korábban vezették be a társadalmi életet korlátozó intézkedéseket, ott később ért a csúcsra a járvány, kisebb volt ez a csúcs, és végül alacsonyabb mortalitási rátával tudtak túl lenni a járványon.



A görbe sikeres lapításának hátulütője az úgynevezett megelőzési paradoxon. Ahol viszonylag gyorsan sikerült megállítani a vírus terjedését és lassítani a járványt, egyre többen vélik úgy, hogy a hatóságok túlreagálták a járványhelyzetet, nő a gazdasági és politikai nyomás az élet normalizálására, és lesznek, akik sokkal lazábban veszik majd a vírushelyzetet, megágyazva ezzel egy következő hullámnak.[9] (A szigorítások és az enyhítések értékelésénél azt is figyelembe kell venni, hogy a járványgörbén csak késve mutatkoznak a bekövetkező hatások.)

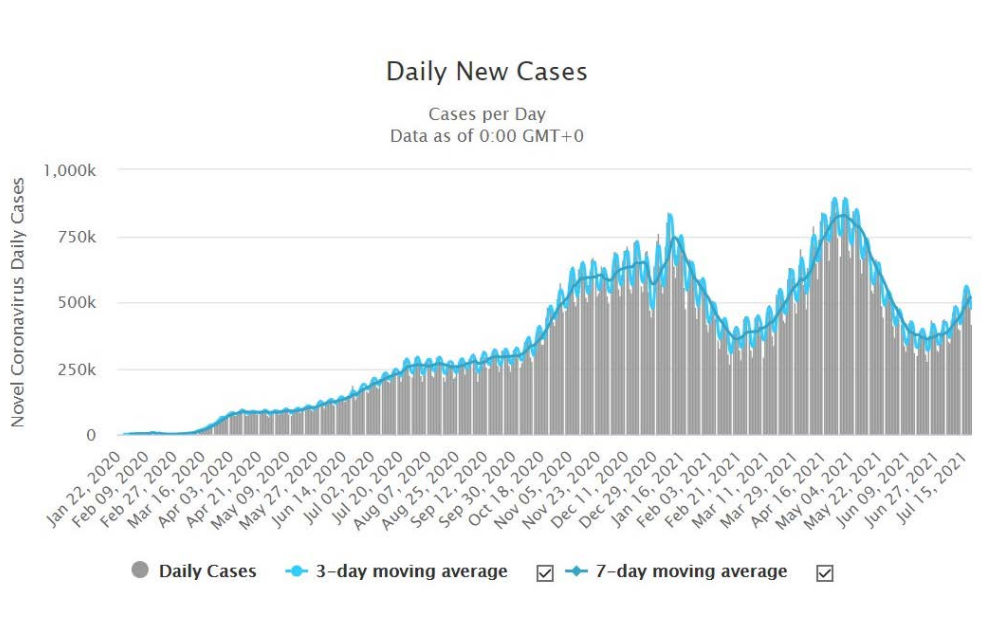
A koronavírussal kapcsolatos további görbék elemzése

Sok helyen találunk a koronavírussal kapcsolatban jól elemezhető grafikonokat. Hármat külön is kiemeltem lejjebb, de számtalan egyéb grafikont találhatunk az interneten. Kifejezetten a koronavírussal kapcsolatos magyar adatokat dolgozza fel látványos, informatív formában az Átló Team. Az angol nyelvű oldalak közül a Worldometer és az OurWorldinData a legváltozatosabb területek, témák statisztikai adatait vizualizálja, a grafikonok többsége ráadásul a felhasználók által paraméterezhető. Megemlíteném még a Financial Times „koronavírus-idővonalát", amely 2020 októberéig foglalja össze nagy vonalakban a világjárvánnyal kapcsolatos statisztikákat látványos infógrafikákkal illusztrálva.

Mozgóátlagot mutató grafikonok

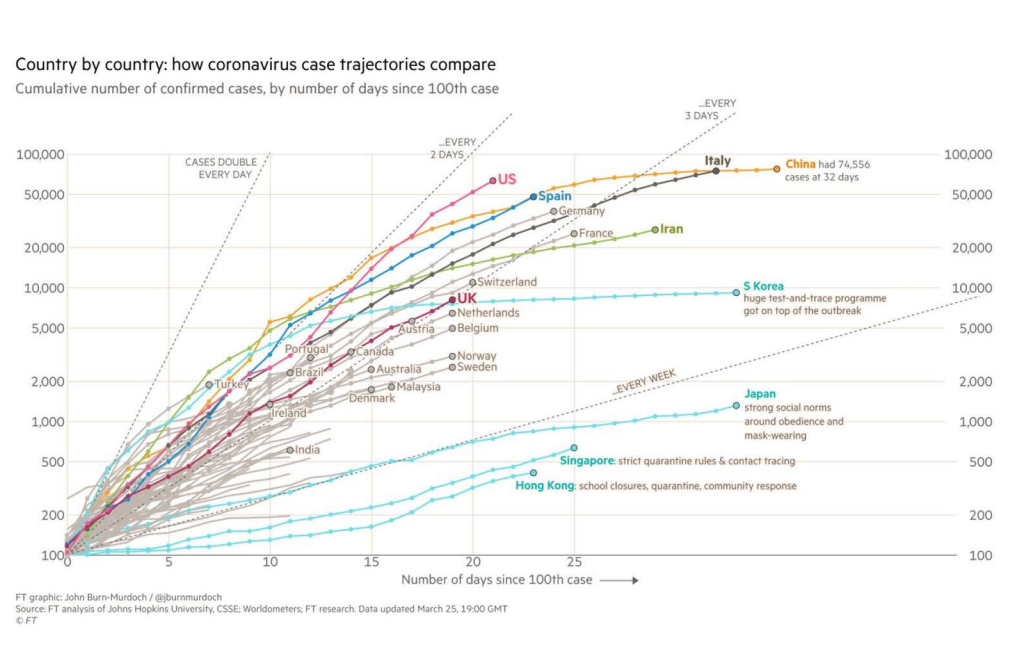
Több grafikonon megjelenik a *mozgóátlag* vagy *csúszóátlag*. Feljebb láthattunk egy ábrát a magyar adatokról a fertőzöttek napi alakulásával és a hétnapos csúszóátlaggal (Az új fertőzöttek számának napi alakulása Magyarországon címmel). A mozgóátlag a kiugrások „elsimításával" világosabban mutatja a trendeket. A grafikonon látható hétnapos csúszóátlag értékét az adott napi és az előző 6 napi értékek számtani közepeként határozzuk meg.

A Worldometer oldalán a világszerte regisztrált koronavírusos esetszámok grafikonján a háromnapos (világoskék) és a hétnapos (kék) mozgóátlag is megjeleníthető:



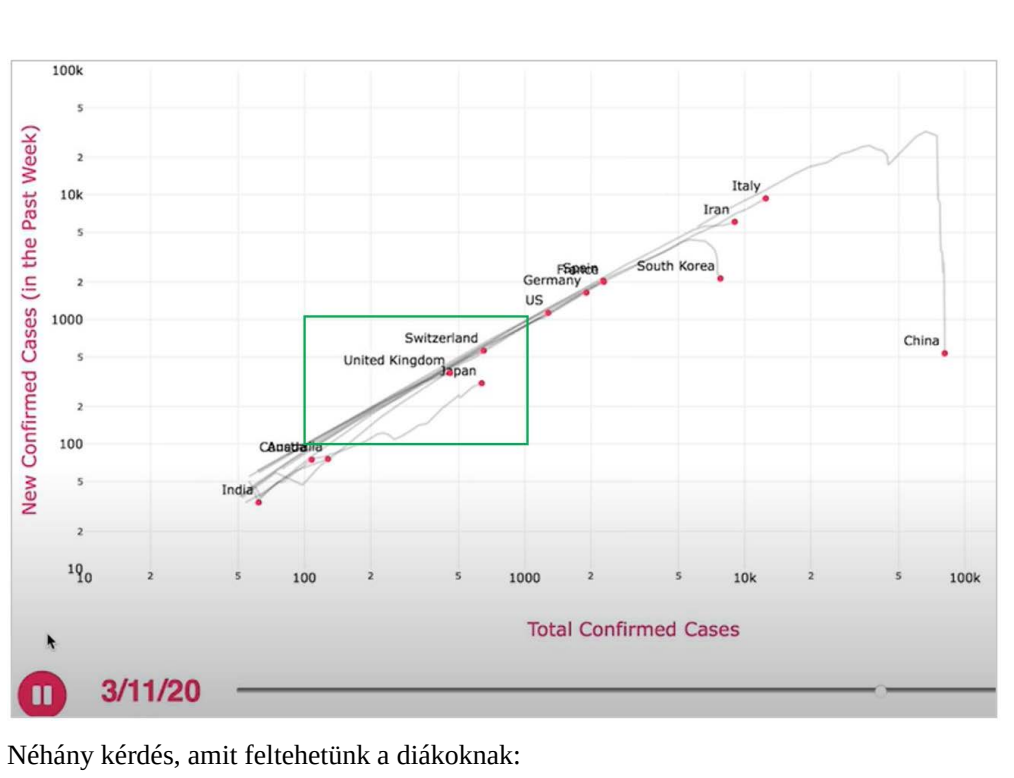
A 100. regisztrált esettől indított görbe

A koronavírus világszintű elterjedésével felmerült az igény, hogy az egyes országokat össze lehessen hasonlítani a járvány terjedésének gyorsasága és a védekezés sikeressége szempontjából. Nagy népszerűségre tett szert az a grafikon, amely az összes regisztrált esetszámot mutatja logaritmikus skálán, közös kezdőpontba helyezve az országokat. A közös kezdőpont a 100. regisztrált eset napja. A grafikon az ausztrál Grattan Institute oldalán jelent meg először, felkapottá akkor vált, amikor a Financial Times is elkészítette belőle a saját verzióját[10]. A grafikon elemzéséhez hasznos forrás angol nyelven a Financial Times feliratozott, magyarázatokkal ellátott verziója (lásd lejjebb), valamint a vox.com angol nyelvű magyarázó videója.



Egy olyan grafikon, amely nem az eltelt idő függvényében ábrázolja az adatokat

Tanulságos lehet az a grafikon, ami az összes eset függvényében ábrázolja az elmúlt hét (vagy nap) új eseteit. Az idő múlását az animáció érzékelteti. A Brilliant.org oktatási portál által készített angol nyelvű videó nyújt segítséget az értelmezéshez. Az Our World in Data oldalon is szerepel ez a diagramtípus a legfrissebb adatokkal. Itt mi magunk állíthatjuk össze, hogy mely országok grafikonjait szeretnénk megnézni, és megadhatjuk a tengelyek típusát is (lineáris/logaritmikus). A videóban látható animációból kiválasztottam egy képet, amelyet a videó megtekintése után kielemezhetünk.



Néhány kérdés, amit feltehetünk a diákoknak:

1. A képen melyik nap adatai látszanak? (2020. március 11.)

2. Aznap körülbelül mennyi volt az összes regisztrált eset Kínában? (kb. 80 000. Egészen pontosan 80 778.[11])

3. Nagyjából hány új esetet regisztráltak az ezt megelőző héten Kínában? (kb. 500-at.)

4. Amikor 50 000 volt Kínában az összes regisztrált eset száma, akkor körülbelül hány új beteget regisztráltak az előtte lévő héten? (kb. 20 000-et)

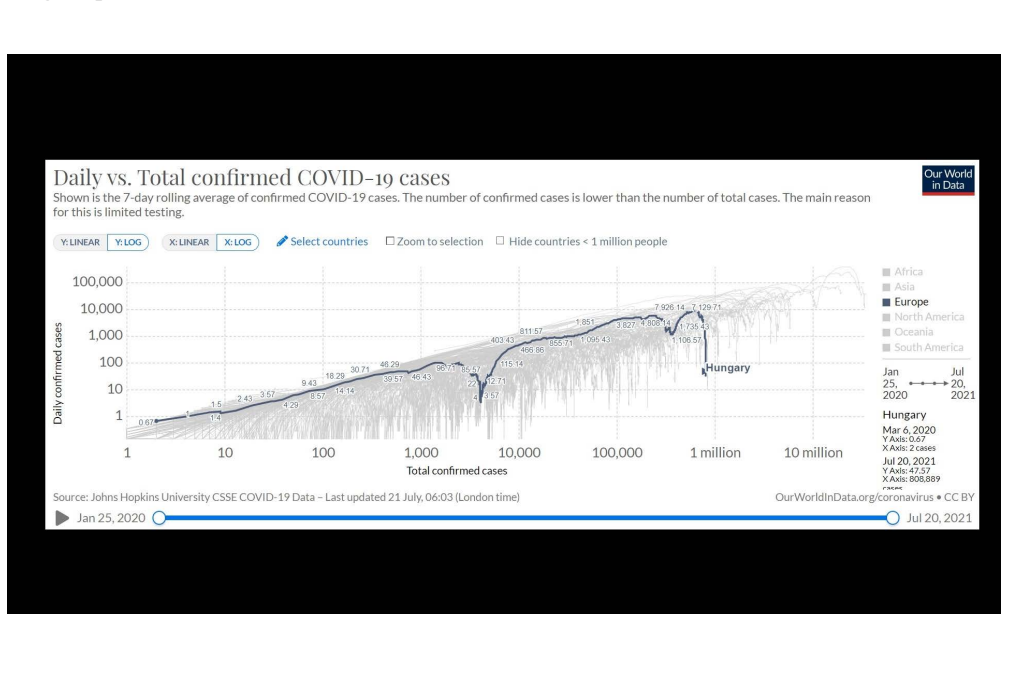
5. Nézzük a grafikonnak csak azt a részét, ami a zöld téglalapon belül található.

- Hányszorosára változott az összes esetszám? (10-szeresére)
- Hányszorosára változott az egy héten belül regisztrált esetek száma? (10-szeresére)
- Hány napot ölel fel a grafikonnak ez a része? (Ez nem megválaszolható. Egyrészt kell hozzá, hogy melyik országot nézzük, másrészt kell hozzá az animáció.)

6. Miből látszik, hogy a grafikonon látható időpontban Kína már jó úton haladt a vírus legyőzésében? (Az összes esetszám pici növekedésével a heti esetszám nagy csökkenése járt együtt.)

7. A grafikonon látható időpontban Kínán kívül melyik ország kezdett viszonylag jobban állni a vírus elleni harcban? (Dél-Korea.)

Az Our World in Data oldalon a magyarországi görbét kiválasztva ezt látjuk. (A videóban látotthoz képest itt a függőleges tengelyen a napi esetszám, nem pedig 7 nap összesített esetszáma szerepel.) Több ország kiválasztásával összehasonlító megállapításokat is tehetünk.


Daily vs. Total confirmed COVID-19 cases
Shown is the 7-day rolling average of confirmed COVID-19 cases. The number of confirmed cases is lower than the number of total cases. The main reason for this is limited testing.
LINEAR
LOG
LINEAR
LOG
Select countries
Zoom to selection
Hide countries < 1 million people
Our World in Data
Daily confirmed cases
Total confirmed cases
Hungary
Europe
Source: Johns Hopkins University CSSE COVID-19 Data – Last updated 21 July, 06:03 (London time)
OurWorldInData.org/coronavirus • CC BY
Jan 25, 2020
Jul 20, 2021

A SIR-modell

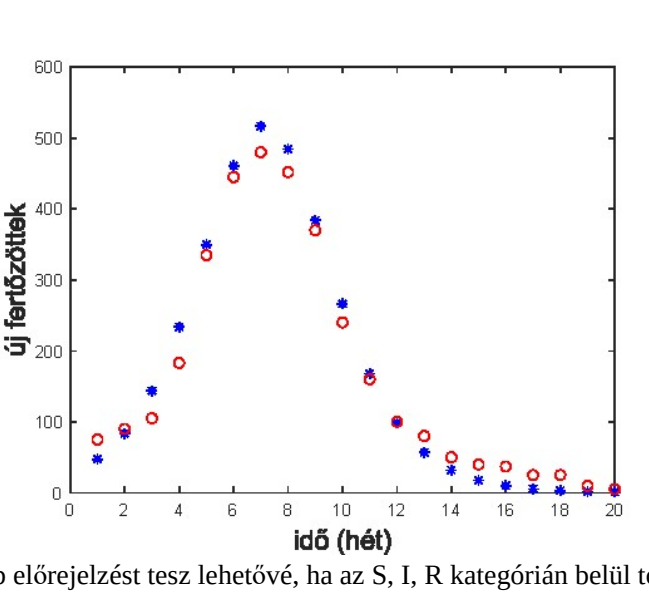
Az exponenciális növekedésről szóló részben láthattuk, hogy a járványterjedés első közelítésben exponenciális folyamatként írható le. Az új fertőzéseket mutató járványgörbén viszont azt láttuk, hogy az exponenciális növekedés a járvány lecsengésével lelassul. Ahhoz, hogy megjósolhassuk egy járvány lefutásának menetét, valósághűbb modellek megalkotására van szükség. Ezek szinte mindegyike a rekeszes- vagy kompartment-modelleken alapul. Megértésük felsőbb matematikai ismereteket feltételez, középiskolásoknak nagy vonalakban lehet róluk szót ejteni. A modell matematika hátterének bemutatásához érdemes elolvasni Simon L. Péter Matematika a járványterjedés modellezésében című írását.

A legegyszerűbb kompartment-modell a vizsgált populáció tagjait három csoportba sorolja (megnevezése az angol kezdőbetűk alapján: SIR-modell):

- fogékonyak (*S*usceptible): azok az egyedek, akik fogékonyak a betegségre.
- fertőzők (*I*nfective): a megfertőződött egyedek, akik képesek a fertőzés továbbadására.
- gyógyultak (*R*ecovered vagy *R*emoved): azok az egyedek, akik már nem kaphatják el a fertőzést vagy azért, mert már kigyógyultak és immunitást szereztek, vagy azért, mert elhunytak a betegség következtében.

A SIR-modellt, az ebből generált grafikont és a görbe „lapításának" lehetőségeit mutatja be angolul a Numberphile videója. A modell deriváltakkal és differenciálegyenletekkel dolgozik, de az alapgondolat talán ezek ismerete nélkül is követhető valamelyest. A vállalkozó kedvűek reprodukálhatják GeoGebrában a videóban látható szimulációt.

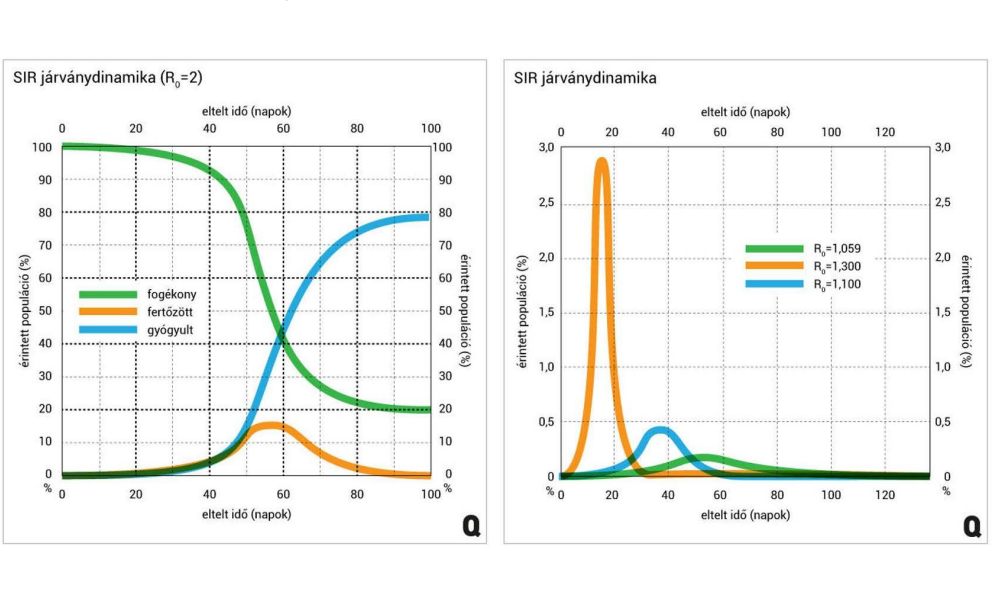
Simon L. Péter cikkében láthatunk egy grafikont arról, hogy a 2016-os influenzajárványt vizsgálva milyen eltérést mutat a modell jóslata (kék csillagok) a valóságos adatokhoz képest (piros körök).



Még pontosabb előrejelzést tesz lehetővé, ha az S, I, R kategórián belül tovább bontjuk a populációt valamilyen szempont szerint. Garay Barna és Molnár Zsófia Nemlineáris dinamikai modellek a biológiában: a kontaktusmátrixos SIR-modell című cikkében életkor alapján határozott meg 3 kategóriát, és vizsgálta egy fiktív járvány lefutását korosztályonként korlátozások bevezetésével, illetve anélkül.

Valójában a járvány előrejelzésére szolgáló modell még ennél is jóval összetettebb. Röst Gergely 2020 áprilisi előadásában (1:17:49-től) a továbbfejlesztett változat komplexitását próbálja érzékeltetni.

Kun Ádámnak a Qubiten megjelent cikkében is szerepel néhány, a SIR-modell alapján készített szimuláció. A modell mögötti matematika megértése nélkül is hasznos lehet, ha elemezzük a diákokkal a grafikonokat.



Lábjegyzetek

[1] A tananyagban szereplő hivatkozások, görbék a 2021. júliusi állapotokat mutatják.

[2] forrás: `https://www.portfolio.hu/prof/20200310/hogyan-lehet-12-fertozottbol-12-ezer-a-koronavirus-matematikaja-418675`

[3] A nyájimmunitásról később lesz szó.

[4] A kép forrása: `https://hu.wikipedia.org/wiki/Szigmoid_függvények#/media/Fájl:Logistic-curve.svg`

[5] forrás: `https://www.health.gov.au/news/health-alerts/novel-coronavirus-2019-ncov-health-alert/coronavirus-covid-19-case-numbers-and-statistics#daily-reported-cases`

[6] forrás: `https://www.ncbi.nlm.nih.gov/books/NBK92467/`

[7] forrás: `https://atlo.team/koronamonitor-reszletesadatok/#fertozottekbovebb`

[8] forrás: `https://kurtakademia.hu/blog/kurt-akademia-live-7-7-kulcsgondolat-a-jarvanymodellezesrol/`

[9] forrás: `https://24.hu/kulfold/2020/04/26/christian-drosten-koronavirus-interju-nemetorszag/`

[10] forrás: `https://robjhyndman.com/hyndsight/logratios-covid19/`

[11] forrás: `http://subsites.chinadaily.com.cn/nmpa/2020-03/12/c461928.htm`

alkalmazott matematika matematikatanítás járványtan

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Csapodi Csaba 2021. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

33. Varga Tamás Módszertani Napok

A tavalyi, rendhagyó módon online megtartott rendezvény után idén új formában, személyesen és online részvétellel vegyesen tervezték a szervezők a 33. Varga Tamás Módszertani Napok megrendezését. Azonban a járványhelyzet alakulása, továbbá az előzetes regisztrációkból tükröződő, túlnyomórészt online részvételi szándék miatt végül teljes egészében online zajlott a program, amelyről *Csapodi Csaba* számol be. Tovább...

VTMN – 2021. november 5-6.

A tavalyi, rendhagyó módon online megtartott rendezvény után idén új formában, személyesen és online részvétellel vegyesen terveztük a 33. Varga Tamás Módszertani Napok megrendezését. Ezzel egyfelől szerettünk volna lehetőséget adni a személyes előadásra, részvételre, együttlétre, beszélgetésekre, amit mindannyian hiányoltunk az elmúlt időszakban. Másfelől azokra is gondoltunk, akik valamilyen oknál fogva nem tudnak személyesen részt venni, mégis szívesen adnak elő vagy vesznek részt hallgatóként a rendezvényen.

Azonban a járványhelyzet alakulása, továbbá az előzetes regisztrációkból tükröződő, túlnyomórészt online részvételi szándék miatt a rendezvény szervezőbizottsága (Csapodi Csaba, Fried Katalin és Vancsó Ödön) úgy döntött, hogy idén is teljes egészében online zajlik a program.

Péntek

Péntek délután mintegy 60 fő részvételével először Kovács Zoltán (tanszékvezető egyetemi docens, Eszterházy Károly Katolikus Egyetem, Eger) tartott előadást *Problémaalkotás a magyar matematikatanítási hagyományban* címmel. Az érdekes előadásban komplex módon matematikai, matematikatörténeti és didaktikai áttekintést kaptunk a témáról, kiemelve, hogy nem a feladatmegoldás, hanem a problémaalkotás van a középpontban.

… kellenek amellett nyitott szituációk is, amelyekben a tanulók ismerik fel és fogalmazzák meg a matematikai feladatot. Az élet nem tankönyv-nyelven megfogalmazott matematikai feladatok elé állít minket, hanem szituációk elé.

Az előadás után az idei Varga Tamás Díjak átadására került sor. Az idei három díjazott: *Báró Emőke* (Orbán Balázs Általános Iskola, Székelyudvarhely), *Ruzsa Ágnes* (Kincskereső Iskola, Budapest) és *Kulman Katalin* (ELTE TÓK). A díjazottakról a 33. Varga Tamás Módszertani Napok 2021 honlapon olvashatók a méltatások.

A pénteki nap zárásaként egy Varga Tamásról szóló portréfilmet nézhettek meg közösen az érdeklődők. A film korábbi verziója már a 2019-es Varga100 nemzetközi konferencián bemutatásra került, mostanra azonban újabb részekkel egészült ki. Az új részeket elsősorban olyan filmrészletek jelentik, amelyeken maga Varga Tamás szólal meg archív felvételeken, bemutatva a komplex matematikatanítási kísérlet legfontosabb elemeit.

Szombat

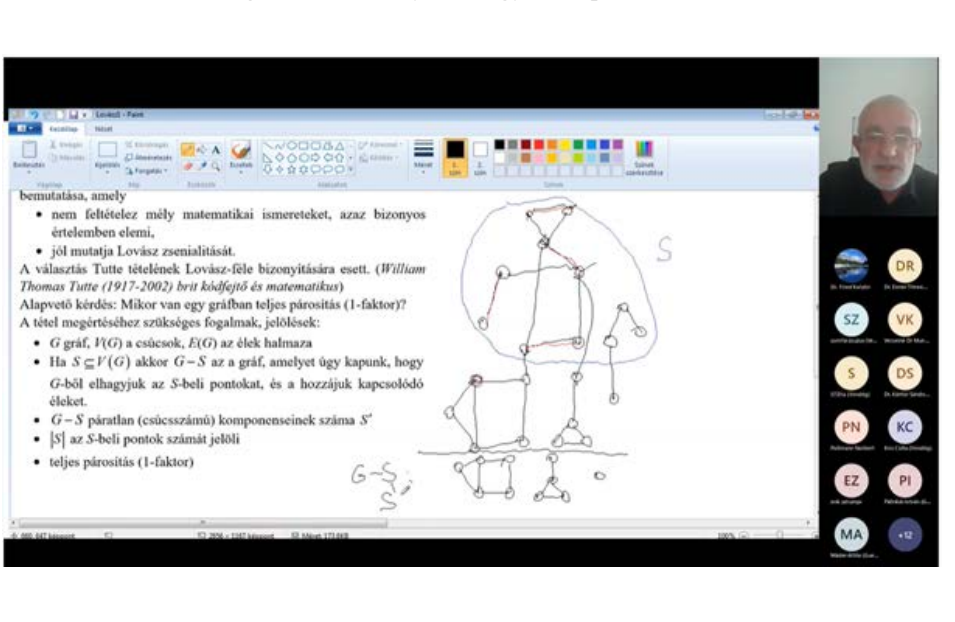
A szombati program négy párhuzamos szekcióban zajlott. Az előadásokon 20-40 fő vett részt, összesen mintegy 120-an hallgatták meg a módszertani előadásokat, workshopokat.

1. szekció (vezette: Fried Katalin)

Munkácsy Katalin előadása a matematikai gondolkodásmód kialakításának játékos bemutatásával foglalkozott, felhívva a figyelmet a tanulás közben végzett mozgás tanulásra gyakorolt pozitív hatására Ha a labirintust nem egyszerűen papíron látjuk, hanem kicsit nagyobb méretben be is járhatjuk, ha a napórát nem csak elvben ismerjük meg, hanem el is készítjük, magunk kalibráljuk, ha a függvényt magunk lépjük le, ez mind-mind segítheti a megértést, a feldolgozást.

Marczis György az előadása címének megfelelően mértani helyes problémák megsejtetését mutatta be a GeoGebra alkalmazásával, miközben hangsúlyozta, hogy a sejtés mindaddig nem elegendő egy feladat megoldásához, amíg egzakt bizonyítás nem követheti – persze, mint mondta, nem lehet tudni, mi az, hogy egzakt bizonyítás. De azért nagyjából tudjuk, mire gondolt. Előadását látványos és beszédes ábrákkal illusztrálta.

Kosztolányi József rendkívül igényes témával jelentkezett. Előadása apropóját Lovász László Abel-díja adta. Megmutatta, milyen izgalmas eszközöket vetett be annak idején Tutte tételének egy egyszerűbb bizonyításában. Az elemi eszközökkel, de összetett gondolkodásmóddal megalkotott bizonyítás nagyon impresszív volt.

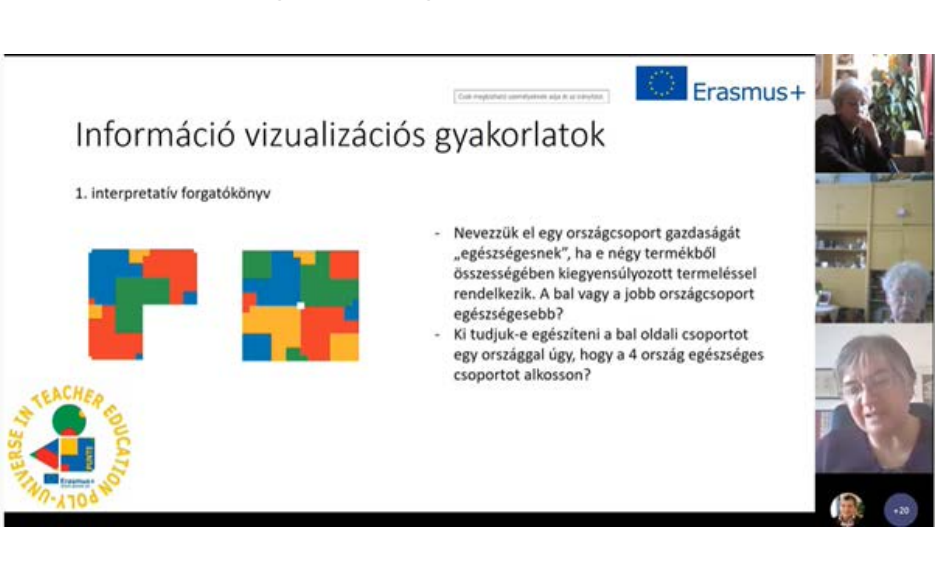

bemutatása, amely
- nem feltételez mély matematikai ismereteket, azaz bizonyos értelemben elemi,
- jól mutatja Lovász zsenialitását.

A választás Tutte tételének Lovász-féle bizonyítására esett. (*William Thomas Tutte (1917-2002) brit kódfejtő és matematikus*)
Alapvető kérdés: Mikor van egy gráfban teljes párosítás (1-faktor)?
A tétel megértéséhez szükséges fogalmak, jelölések:
- G gráf, $V(G)$ a csúcsok, $E(G)$ az élek halmaza
- Ha $S \subseteq V(G)$ akkor $G-S$ az a gráf, amelyet úgy kapunk, hogy G-ből elhagyjuk az S-beli pontokat, és a hozzájuk kapcsolódó éleket.
- $G-S$ páratlan (csúcsszámú) komponenseinek száma S'
- $|S|$ az S-beli pontok számát jelöli
- teljes párosítás (1-faktor)

Végül egy betegség miatt kiesett előadó helyett Fried Katalin „ugrott be”. Középiskolásoknak szánt könnyed előadásában a KöMaL hatszögekről szóló feladataiból szemezgetett és keresett köztük kapcsolatot.

2. szekció (vezette Vancsó Ödön)

Az első előadás Oláhné Téglási Ilonától a Poliuniverzum (Saxon Szász János matematikus és képzőművész alkotása) játékról szólt, s ennek kapcsán mesélt a PUSE projektről és a most futó PUNTE projekt is említésre került. Igen érdekesen mutatta be az eszközt és módszertani lehetőségeit, minden résztvevő tanárnak ajánlva a kipróbálását. Az alkotó maga is jelen volt az előadáson. Bemutatta, hogy szinte az óvodától kezdve egészen a felsőoktatásig mennyi helyen és formában használható eszköz, amit vélhetően Varga Tamás maga is szívesen használt volna, ha ismerte volna.


Információ vizualizációs gyakorlatok

1. interpretatív forgatókönyv

- Nevezzük el egy országcsoport gazdaságát „egészségesnek”, ha e négy termékből összességében kiegyensúlyozott termeléssel rendelkezik. A bal vagy a jobb országcsoport egészségesebb?
- Ki tudjuk-e egészíteni a bal oldali csoportot egy országgal úgy, hogy a 4 ország egészséges csoportot alkosson?

A második előadó Stettner Eleonóra volt, aki a GeoGebra segítségével a Poliuniverzumból kiindulva 3D térbeli fraktálokat mutatott be minden jelenlevő tanár nagy örömére. Ez is használható művészi célokra, mint tantárgyi integráció.

A második körben valóságközeli feladatokkal ismerkedtünk Ficzere Kornélia doktorandusz hallgató kísérletei alapján.

A szekció utolsó előadója Szende Zsuzsa a Casio legújabb számológépét mutatta be saját iskolai tapasztalatait megosztva.

3. szekció (vezette Csapodi Csaba)

Ez a szekció eredetileg workshopok keretében, személyes jelenlét mellett tervezte a foglalkozásokat. Az előadók szerencsére az online verzióban is vállalták a foglalkozások megtartását, természetesen némileg átalakítva az eredeti terveiket. A szekció további érdekessége volt, hogy három doktorandusz hallgató és két matematikatanár-szakos hallgató mutatta be előadását a résztvevőknek.

Jánvári Zsuzsanna a középiskolai leíró statisztika oktatásához kapcsolódóan három főbb témát érintett. Röviden áttekintette a kerettantervben szereplő új leíró statisztikai elemeket, valamint a részletes érettségi vizsgakövetelmények változásait; körüljárta a statisztikai műveltség fogalmát, végül foglalkozott a témához kapcsolódó szöveges válaszok, indoklások számonkérésének és értékelésének kérdéskörével.

Kiss Anna különböző – felső tagozaton tanított témakörökben elővehető – kerekítést és becslést kívánó/tanító játékot játszott a résztvevőkkel, mindegyiknél megbeszélve, hogy hova illeszkedik a tananyagba, és milyen módon fejleszti a diákokat.

Szúnyog
- Milyen hosszú lenne egy szúnyog a milliószorosára növelve?
- Tegyük meg a tippjeinket. Be lehet mondani.

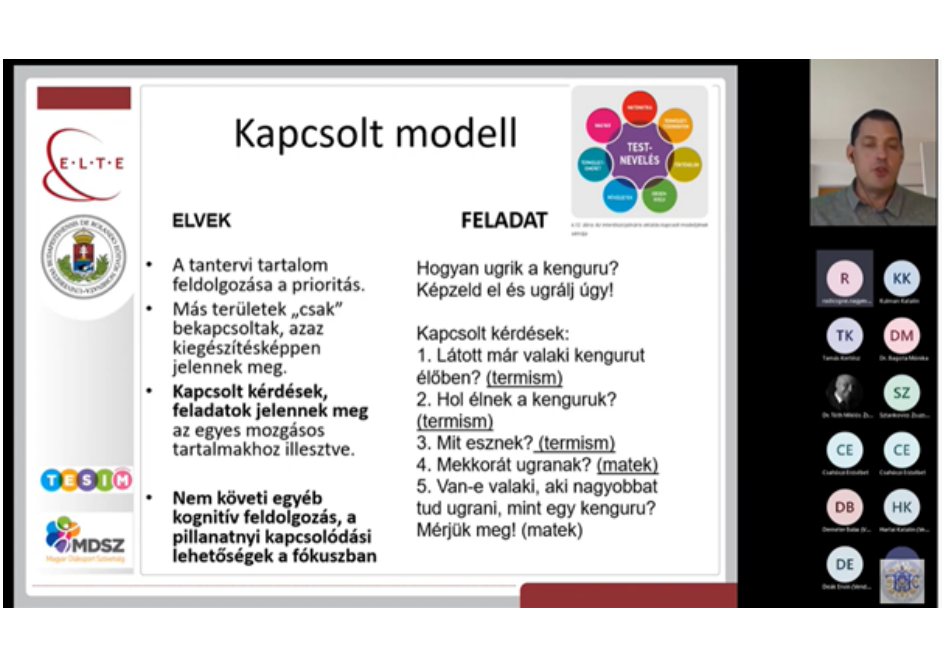
Bereczki Ildikó mindenki mumusáról, a mértékegységváltásról adott elő, bemutatta a nemzetközi eredményeket az arányossági gondolkodás fejlődésének kutatásában. Beszélt az arányossági gondolkodás és a mértékegységek kapcsolatáról, valamint a mértékegységek tanításának nehézségeiről, lehetőségeiről, lépéseiről.

Orbán Bence a Quarto társasjáték alkalmazásáról beszélt matematikaoktatásban. A Quarto egy kétszemélyes logikai társasjáték, ami papírral és tollal vagy logikai készlettel is helyettesíthető. Az előadásban szerepeltek a Quarto játék különböző nehezítései és könnyített játékok is.

Pollmann Norbert saját fejlesztésű kártyajátékokkal támogatott függvényoktatásról és ennek hatékonyságáról adott elő. Szerepelt klasszikus kártyajátékok megoldása függvények képével, és új díjnyertes társasjátékok „függvényesített” változata is.

Matematikát Tanítók Klubja – alsó tagozaton matematikát tanítók szekciója (vezette Kulman Katalin)

A szekció első előadását Csányi Tamás, az ELTE TÓK Testnevelés Tanszékének tanszékvezetője *Interdiszciplináris didaktikai modellek alkalmazása az oktatásban – a matematika és a mozgás kapcsolódási lehetőségei* címmel tartotta meg. Az interdiszciplináris oktatás modelljeinek bemutatása után a mozgás (testnevelés) és a matematika tantárgyi elemeinek lehetséges összekapcsolódásaira mutatott gyakorlati példákat az előadó.


Kapcsolt modell

ELVEK
- A tantervi tartalom feldolgozása a prioritás.
- Más területek „csak” bekapcsoltak, azaz kiegészítésképpen jelennek meg.
- **Kapcsolt kérdések, feladatok jelennek meg** az egyes mozgásos tartalmakhoz illesztve.
- **Nem követi egyéb kognitív feldolgozás, a pillanatnyi kapcsolódási lehetőségek a fókuszban**

FELADAT
Hogyan ugrik a kenguru?
Képzeld el és ugrálj úgy!

Kapcsolt kérdések:
1. Látott már valaki kengurut élőben? (termism)
2. Hol élnek a kenguruk? (termism)
3. Mit esznek? (termism)
4. Mekkorát ugranak? (matek)
5. Van-e valaki, aki nagyobbat tud ugrani, mint egy kenguru? Mérjük meg! (matek)

Ezt követően Bagota Mónika és Ökördi Réka, az ELTE TÓK Matematika Tanszékének oktatói *Játék és művészet a matematikai készségek fejlesztésének szolgálatában* című előadását hallgathatták meg a résztvevők. Az előadásban ismertetett játékok segítségével az előadók arra mutattak rá, hogy a szépérzék, a művészetek és a matematika között olyan kapcsolat áll fenn, amire érdemes nagyobb figyelmet fordítani az alsótagozatos pedagógiai munka során.

A harmadik előadást Tóth M. Zsombor, az ELTE TÓK Magyar nyelvi és irodalmi Tanszék oktatója tartotta *„Bejárat a negyedik végtelenbe.” – A matematika és a régi új retorika* címmel. Az előadó a retorikai elemek jelenlétét, lehetséges alkalmazását vizsgálta a hazai matematikatanításban. Kitért a magyar nyelv és irodalom, emellett a kommunikáció tantárgyak, a klasszikus, illetve az újabb (alkalmazott) retorikai irányzatok és a matematika kapcsolatára – különös tekintettel a szövegértési és szövegalkotási kompetenciák fejlesztésének lehetőségeire.

Doktorandusz szekció (vezette: Csapodi Csaba)

Újdonság volt az idei Varga Tamás Napokon, hogy a fenti szekcióprogramokat követően a doktori iskolák különböző évfolyamú hallgatói röviden bemutatták kutatásaik fő célját, a fokozatszerzési folyamatuk állapotát, illetve megoszthatták a többiekkel nehézségeiket, problémáikat. Összesen 17 doktorandusz (az ELTE és a Debreceni Egyetem doktori iskoláinak hallgatói) vett részt a megbeszélésen, és ennek során többen is hasznos tanácsokat, javaslatokat kaptak társaiktól, illetve a jelenlévő tapasztaltabb kutatóktól.

A teljes program, a prezentációk, a film, az előadások felvételei felkerültek a konferencia honlapjára: https://tinyurl.hu/2baR/.

A Matematikát Tanítók Klubja esetében a többi kapcsolódó anyag (játékok linkje, irodalmak listája) a TÓK Matematika Tanszékének honlapján lesz elérhető.

Csapodi Csaba

ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ

Varga Tamás Alapítvány

beszámolók Varga Tamás konferencia

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Nagy Zoltán Lóránt 2021. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Invariánsok, állapotfüggvények

EGMO felkészülés: egy felépített feladatsor bemutatása

2022-ben, az Európai Lány Matematikai Diákolimpia kerek 10. évfordulóján Magyarország látja vendégül a kontinensről, sőt az összes földrészről érkező lánycsapatok delegációit Egerben.

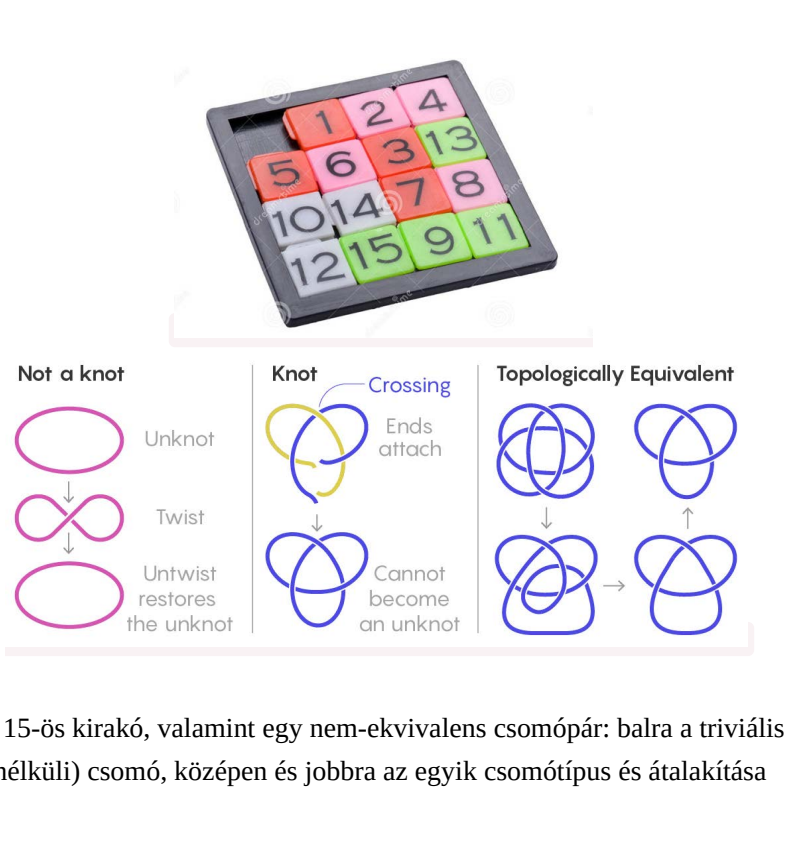
Miért is jött létre ez a rendezvény? Azzal a szándékkal indult az EGMO, hogy bátorítást adjon a lányoknak matematikai tehetségük kibontakoztatásában − ami sokszor a környezeti hatások és a hagyományos társadalmi szokások, elvárások miatt nehézségekbe ütközik. Szeretnénk, ha ma, a 21. században egy matematikát sikerrel és örömmel művelő lány nem meglepő és furcsa, hanem természetes vagy akár trendi lenne. A magyarországi minta azt mutatja, hogy 10 év arra mindenképpen elég, hogy a felkészítő program hatására az váljon tipikussá, hogy az IMO+MEMO csapatban mindkét nem képviselve van − ez korábban nem így volt. Ez persze csak a jéghegy csúcsa, de visszahathat a tanárok és a jobb képességű diákok értékelésére is, szélesebb körű hatást kiváltva.

Mire helyezzük a hangsúlyt a felkészítésnél? Jelenleg két szálon zajlik a felkészülés. Egy, az elmúlt évtizedben kidolgozott forma az egyénre szabott képzést helyezi előtérbe, hangsúlyosan a versenyre készít fel. Ehhez kapcsolódóan az Érintő olvasóival már megosztotta gondolatait Fekete Panna és Kiss Melinda, korábbi EGMO olimpikonok, a közelmúlt csapatvezetői. Az EGMO-szervezéssel párhuzamosan indult egy közösségi, minitáborozós formájú képzés is − erről egy másik számban lehetett olvasni, Baran Zsuzsa és Molnár-Sáska Gábor tollából. Mindenki egyéni úton, a saját ritmusában tud egy-egy témakört elsajátítani. Ezért jellemzően tematikus feladatsorokat készítettünk, ahol a könnyebb, egyszerűbb gondolatokat igénylő feladatoktól a nehezebbekig úgy lehet eljutni, hogy a korábban megismert eljárásokat és ötleteket magasabb szinten újra hasznosítjuk. (A nemzetközi felkészítésben egyébként ez a mód nem új, sok helyen jelen van, és a felfedeztető matematikaoktatás is hasonló elven alapszik.) Elvárjuk, hogy a megoldásokat gondosan leírva kapjuk meg: az olimpiáig ki kell alakulnia annak a rutinnak, hogy hogyan kell egy megoldást bemutatni, milyen lépések egzakt leírása elengedhetetlen a teljes gondolatmenethez és a pontok begyűjtéséhez. Bár az alább bemutatandó feladatsort tábori környezetbe vittem, csapatmunkára; általában a felkészülés még jobban sikerül, ha több az idő, és az elakadásoknál személyre szabottan tudunk minden diáknak segíteni. Ez rendszerint azt jelenti, hogy elektronikus levélben kapják meg a diákok a feladatokat, és ugyancsak emailben válaszolnak, kérnek és kapnak segítséget, majd feltöltik a megosztani kívánt eredményeiket.

Jelen cikkünk célja egy ilyen tematikus feladatsor bemutatása. Javasoljuk először a feladatokkal való ismerkedést és a megoldások keresését, és csak ezt követően érdemes áttekinteni a kattintásra el(ő)tűnő megoldásvázlatokat és az ahhoz fűzött megjegyzéseket, reflexiókat. Minthogy a táborban a feladatsornak nem jutottunk a végére, az itt leírtakat a versenyre készülők külön levélben is megkapták.

Bevezető – Invariáns módszer és állapotfüggvények

Kicsi koruntktól fogva észleljük, hogy a minket körülvevő világ tele van változásokkal, ugyanakkor a változásokat valamiféle rend, szabályosság jellemzi. A hétköznapi mintákon túlmutatva néhány kimondottan matematikai alapú példát jeleznék itt: a hold megvilágított, látható fele kiterjedésének növekedése és csökkenése, vagy egy feldobott labda mozgásának változása. Egy ettől eltérő jellegű jelenség, hogy bizonyos összebogozódó fonalak szépen kioldhatóak, másoknál meg a csomó feloldhatatlannak bizonyul, vagyis nem vihetjük át egyik állapotból a másikba. Ilyesmivel egyszerű kirakójátékoknál is találkozhatunk, mint a 15-ös (Sam Loyd-féle) kirakó: a lapocskák tologatásával nem juthatunk el a kezdőállapotból (amikor sorban következnek egymás után a számok) minden helyzetbe. (1. ábra)



1. ábra. A 15-ös kirakó, valamint egy nem-ekvivalens csomópár: balra a triviális (csomó nélküli) csomó, középen és jobbra az egyik csomótípus és átalakítása

Az első példapárban (hold, labda) közös, hogy a mozgást *megfigyeljük*, és a megfelelő modellek ismeretében matematikailag könnyen *egészben leírhatjuk* és értelmezhetjük.

Ezzel szemben a második példapárban (kirakó, csomók) az a közös, hogy a mozgást *mi magunk alakíthatjuk*, de van egyfajta rejtett szabály, aminek alapján nem juthatunk valamely állapothalmazból egy másik állapothalmazba. Ám ez utóbbi is megfogható matematikai eszközök segítségével: található olyan mennyiség (állapotokhoz rendelhető függvényérték), amely nem változik (*invariáns*), vagy esetleg jól leírható módon, például monoton módon változik.

Az alábbi kis gyűjtés abban szeretne segíteni, hogy különféle környezetekben felismerjük azt kulcsmennyiséget, aminek a változását vagy változatlanságát érdemes észrevenni és kimutatni. A feladatok mellé rövid megoldásvázlatokat valamint reflexiókat teszek közzé. Ezek célja terjedelmi okokból inkább csak a lényeg megragadása, ugyanakkor remélhetőleg elegendő ahhoz is, hogy az Olvasó (esetleg kis gondolkozással) azt kiegészítse teljes megoldássá. Az egyszerűnek tűnő, tömör megoldások azonban ne tévesszenek meg senkit: minél előbbre haladunk, többé-kevésbé annál nehezebbek a feladatok, és megoldásukhoz komoly lényeglátás és jó ötletek szükségesek. Némi gyakorlással azonban rá lehet vezetni a diákokat, hogy milyen nyomon érdemes elindulni, és hogyan válasszunk úgy egy, a változást leíró mennyiséget, hogy az állandó maradjon, vagy éppenséggel monoton módon változzon.

Bemelegítés

1. A francia kártya 52 lapját képpel felfelé az asztalra helyezzük, egy sorba. Panka kiválaszt két szomszédos kártyát, és ha közülük a bal oldali képpel felfelé van, akkor mindkettőt megfordítja. Ezt a lépést ezután többször is megismétli. Igazoljuk, hogy az eljárás egy idő után véget ér, vagyis valamennyi (véges sok) lépés után nem talál majd a szabály szerint megfordítható párt![1]

Megoldásvázlat

Reflexió

2. Zsuzsa felírja 1-től 10-ig a pozitív egészeket a táblára. Gábor kiválaszt a számok közül kettőt, letörli, majd a különbségüket (a különbségük abszolút értékét) írja fel helyette. Ezt ismétli, amíg a táblán már csak egyetlen szám marad. Mi lehet ez a szám?

Megoldásvázlat

Reflexió

3. Anna és Bori a következő játékot játsszák. Először Borival együtt összes közös ismerősüket meghívják egy partira, így rajtuk kívül 2019 ember jelenik meg. Bori egy körbe rendezi a teljes társaságot, majd Annával felváltva lépnek. Minden lépésben a soron következő lány átküldi egyik szomszédját az ebédlőcsarnokba sütit enni. Anna kezd. Az nyer Anna és Bori közül, aki a másikukat el tudja küldeni. Kinek van nyerő stratégiája?

Megoldásvázlat

Reflexió

4. Panna és Melinda egy 10×10-es nagy csokitáblát kaptak a Bolyai Társulattól az EGMO csapat sikeres felkészítéséért. A következőt játsszák: felváltva kezükbe veszik a csokit, és a soron következő vagy egy törésvonal mentén az egyik darabot két részre töri, vagy a csokidarabok egyikét megeszi. Az a győztes, aki már nem tud sem törni, sem enni társa lépése után. Panna kezd. Kinek van nyerő stratégiája?

Megoldásvázlat

5. Madagaszkár egyik erdejében kaméleonok élnek: ezek hangulatuktól függően meg tudják változtatni a színüket. David Attenborough megfigyelte, hogy 2020. július 9-én éppen 13 sárga, 15 szürke és 17 élénkzöld színű volt a kaméleonok között, valamint hogy amikor közülük két különböző színű találkozik, akkor mindkettő meglepetésében a harmadik színre vált át. Lehetséges-e, hogy a hónap folyamán

(a) mind azonos színre vált át?

(b) ugyanannyi lesz mindhárom színűből?[2]

Megoldásvázlat

6. Egy $n \times n$-es tábla mezőit kékre és pirosra színezzük, ahol $n > 1$. Tudjuk, hogy a sarokmezők közül 3 kék és 1 piros. Igazoljuk, hogy vagy olyan 2×2-es rész a táblán, amelyben a kék mezők száma páratlan.

Megoldásvázlat

Reflexió

Gyorsítás

7. (a) Egy táborban N lány vesz részt. Sajnos a táborvezetőben az első nap tudatosul, hogy néhányan nemigen kedvelik egymást, de az szerencsére kiderül, hogy mindenki legfeljebb 3 másik résztvevővel van örök haragban. Biztosan két részre lehet-e a osztani a társaságot a számháborúhoz úgy, hogy mindkét csapaton belül mindenkinek legfeljebb egy örök haragosa legyen?

(b) Egy táborban N fiú vesz részt. Sajnos a táborvezetőben az első nap tudatosul, hogy néhányan eléggé tartanak a többiektől, de az szerencsére kiderül, hogy mindenki legfeljebb 3 másik résztvevőtől fél. Biztosan két részre lehet-e a osztani a társaságot a számháborúhoz úgy, hogy mindkét csapaton belül mindenki legfeljebb egyvalakitől tartson?

Megoldásvázlat

Reflexió

8. 12 lány kártyázik egy kerek asztal körül ülve. Kezdetben Lilinél van mind a 12 lap. Minden percben azok a lányok, akiknek legalább 2 lap van a kezükben, egyet-egyet a szomszédaiknak adnak. Hány perc múlva ér véget a játék?

Megoldásvázlat

9. Legyen n egy tetszőleges pozitív egész, és tekintsünk az $1, 2, \ldots, n$ számok közül néhányat növekvő sorba rendezve. Minden lépésben kiválasztunk két számot ebből a listából, és kicseréljük őket. Lehetséges-e, hogy 2019 lépés után visszakapjuk az eredeti listát?

Megoldásvázlat

Reflexió

10. 19 barát kötélhúzásban akarja az erejét összemérni. Az igazságosság kedvéért elhatározzák, hogy egyikük a bíró, és a többi 18 két kilencfős csoportot alkotva mérkőzik meg úgy, hogy minden csoportban ugyanannyi legyen a résztvevők súlya. (Tudjuk, hogy mindegyikük súlya kg-ban egész szám.) Tegyük fel, hogy akárki is legyen a bíró, ezt az igazságos kettéosztást végre tudják hajtani. Igazoljuk, hogy ekkor mindegyikük egyforma nehéz.

Megoldásvázlat

Reflexió

11. Van M darab számhalmazunk az $1, 2, 3, \ldots, 2021$ alaphalmazon. Ha találunk két metsző, de egymást nem tartalmazó halmazt, A-t és B-t, akkor kicseréljük őket az uniójukra és metszetükre: az $A \cup B$ és az $A \cap B$ halmazokra. Igazoljuk, hogy az eljárás véges, vagyis egy idő után nem lesz metsző halmazpár.

Megoldásvázlat

Reflexió

12. A valós számnégyeseken értelmezzük a következő műveletet:

$$(x, y, z, w) \rightarrow (x - y, y - z, z - w, w - x).$$

Lássuk be, hogy a műveletet elég sokszor végrehajtva, vagy 0-t kapunk az egyik koordinátában, vagy pedig egy 2020-nál nagyobb számot.

Megoldásvázlat

Reflexió

Csúcshódítás

13. Adott 2017 egyenes a síkon, amelyek közül semelyik háromnak nincsen közös metszéspontja. Turbó, a csiga az egyenesek közül az egyiknek valamely pontjából elindul, és ezen egyenesek mentén halad a következőképpen: addig csúszik egy egyenesen, amíg el nem érkezik az egyenes és egy másik egyenes metszéspontjába. A metszéspontban a másik egyenesen folytatja útját, mégpedig úgy, hogy felváltva kanyarodik jobbra és balra az általa elért metszéspontokban. Irányt csak metszéspontokban válthat. Lehetséges-e, hogy egy útszakaszon mind a két irányban végighalad mozgása során? (EGMO 2017/3)

Megoldásvázlat

14. A Margitsziget nagyrétjét 44 fa szegélyezi, és mindegyiken él egy izgő-mozgó mókus. Ezek közül kettő minden percben átugrik valamelyik szomszédos fára; egyik óramutató járása szerinti, másik azzal ellentétes irányba. Lehetséges-e, hogy a lakóhelyeikről indulva, egy idő után mindannyian ugyanazon a fán kötnek ki?

Megoldásvázlat

Reflexió

15. (a) Igazold, hogy egy tetszőleges háromszög feldarabolható véges sok darabra egyenes vágásokkal úgy, hogy a részekből átforgatás után egy téglalapot kapunk.

(b) Igazold, hogy mindez nem tehető meg semelyik háromszöggel sem, ha a feldarabolás után csak eltolási transzformációt használhatunk.

Megoldásvázlat

16. Van 2020 piros és ugyanannyi kék pont a síkon, amelyek közül nincsen 3 egy egyenesen. Igazoljuk, hogy egyenes szakaszokkal összeköthetünk minden kék pontot egy pirossal úgy, hogy a szakaszok nem metszik egymást.

Megoldásvázlat

17. Adott egy 1001×1001-es sakktábla. Erre szeretnénk minél több bábut felrakni a következő szabály szerint:

- bábuk csak mezők közepére kerülhetnek, minden mezőre legfeljebb egy,
- nem lehet élszomszédos mezőkön bábu,
- bármely sorban vagy oszlopban szereplő hat szomszédos mező közül van két szomszédos, amelyen nem áll bábu.

Mennyi a bábuk maximális száma? (Latin-Amerikai Olimpia, 2004 nyomán)

Megoldásvázlat

18. A szabályos ötszög csúcsaira egész számokat írunk, amelyek összege pozitív. Tegyük fel, hogy az ötszög mentén három szomszédos szám, x, y, z közül a középső negatív, azaz $y < 0$. Ekkor megengedett lépés, hogy az (x, y, z) hármas helyére rendre az $(x + y, -y, z + y)$ számokat írjuk be. Mutassuk meg, hogy ezt a lépést csak véges sokáig ismételgethetjük. (IMO 1986/3)

Megoldásvázlat

Reflexió

Felhasznált irodalom a feladatok egy részéhez

[1] Arthur Engel: Problem-solving strategies, (Problem books in mathematics), 1997, Springer
[2] Reiman István: Nemzetközi matematikai diákolimpiák 1959–1994, 1997, Typotex
[3] Róka Sándor: 1500 Feladat az elemi matematika köréből, 1996, Typotex
[4] Pablo Soberón: Problem-Solving Methods in Combinatorics – An Approach to Olympiad Problems, 2013, Birkhäuser Basel

Nagy Zoltán Lóránt,

EGMO csapatvezető 2014–18 és felkészítő, a 2022-es EGMO szervezői csapat tagja

Lábjegyzetek

---

[1] Forrás: X+Y, angol dráma, 2014.
[2] Tournament of towns, 1984-es feladata nyomán

diákolimpiák tanulmányi versenyek

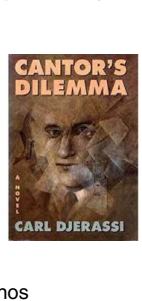
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ** ROVATBAN ELSŐSORBAN OLYAN KÖNYVEKRŐL SZERETNÉNK TUDÓSÍTANI ÉS OLYAN ELEKTRONIKUSAN ELÉRHETŐ ÍRÁSOKAT AJÁNLUNK, AMELYEK A MATEMATIKA BÁRMELY RÉSZE VAGY KAPCSOLATAI IRÁNT ÉRDEKLŐDŐK SZÁMÁRA KÍVÁNATOSAK LEHETNEK. (ROVATSZERKESZTŐ: *TÓTH JÁNOS.)*



Tóth János
2021. DECEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Cantor és Bourbaki

Carl Djerassi: Cantor dilemmája című regényéről, illetve a matematikát kedvelők számára hasonlóan ismerősen hangzó című másik könyvéről, a *Bourbaki-megnyitás*ról osztja meg a mai fiataloknak (és idősebbeknek) szánt gondolatait *Tóth János*. Ezúttal nem a matematika a főszereplő... Tovább...

Szász Domokos
2021. DECEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Rényi Zsuzsanna: Ars Mathematica

Angol nyelvű könyv jelent meg *Rényi Alfréd* születésének 100. évfordulójára, amelyet lánya, *Rényi Zsuzsanna* írt korábbi, magyar nyelvű interjúkötete (Dialógusok egy matematikusról, Polygon, 2013) nyomán. A Rényi házaspárról szóló életrajz címe Rényi kutatói és pedagógusi hitvallását idézi: Ars Mathematica. A könyvet *Szász Domokos* mutatja be.

Oláh Vera
2021. DECEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Tények és emlékek egy középiskolai matematikatanítási kísérletről

Azok, akik nem élték át a fél évszázaddal ezelőtti tanítási reform általános iskolás, majd a középiskolára is kiterjesztett kísérletét, talán el sem tudják képzelni, mekkora befolyással volt a későbbi évek matematikaoktatására. Meglepő, hogy a kísérlet céljai még ma is aktuálisak, hiába teltek el közben évtizedek. *Pálfalvi Józsefné* kordokumentumokkal alátámasztva saját, hiteles emlékei alapján ismerteti meg az olvasót a korszak oktatásának és didaktikájának fejlődésével. Tovább...

Tóth János
2021. DECEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A hátsó polcról – Ian Stewart: A végtelen megszelidítése

Ian Stewart brit matematikus a magyar olvasó számára is ismert népszerűsítője a matematikának. (Magyarul olvasható tőle: *A természet számai. A matematikai képzelet irreális realitása* és *A matematika problémái.*) 2008-ban megjelent, a matematika történetét ismertető művét, *A végtelen megszelidítését* most vette le a hátsó polcról *Tóth János*. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

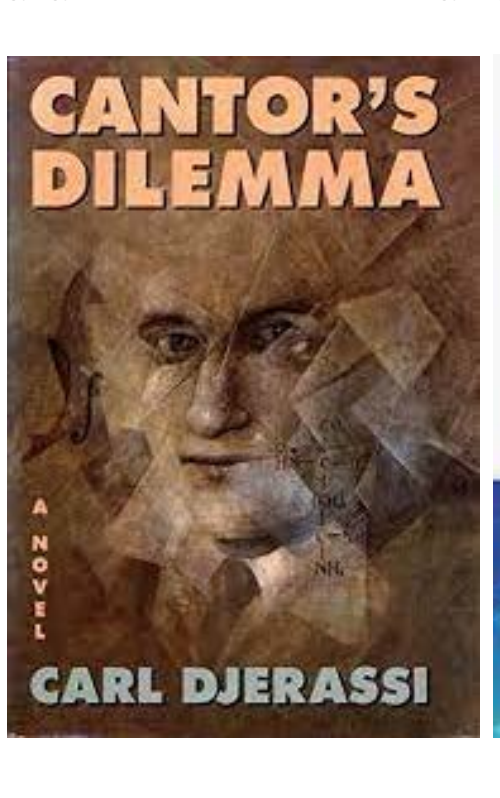
Tóth János 2021. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

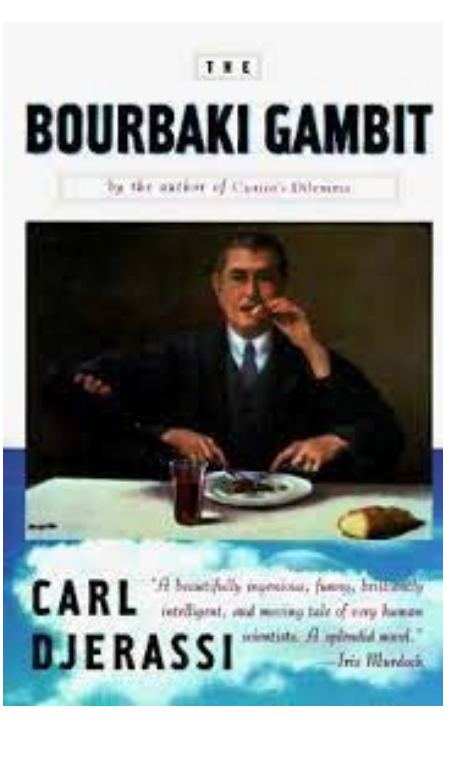
Cantor és Bourbaki

Csapdába estem.

A Palo Alto-i könyvtár − még a COVID előtti időkben, szóval két-három éve − könyvvásárt hirdetett a hét végére. Ilyenkor befizetsz 5 USD-t, és kapsz egy hatalmas papírzacskót, amit azután könyvekkel megpakolva hazavihetsz (repülőn, idáig :).) Kell-e több egy boomernek?

A kínálat elég gazdag, elsősorban nem kizárólag a baráti országok kényszerből kiadott, senki által nem olvasott művei szerepelnek a polcokon, mint nálunk a helyi könyvtárban, 100 forintért. Itt sikerült nagy lelkesen megcsípnem *Cantor dilemmáján* túl a *Bourbaki-megnyitást* is Carl Djerassitól. Eleinte némi csalódást okozott, hogy a könyvekben a két híres néven túl egy árva szó sincs matekról. Akinek ez szintén gyógyíthatlan sebet okozna, az abbahagyhatja itt az olvasást.




THE
BOURBAKI GAMBIT
by the author of Cantor's Dilemma
CARL DJERASSI
"A beautifully ingenious, funny, brilliantly intelligent, and moving tale of very human scientists. A splendid novel."
—Iris Murdoch

Most áttérek az első könyv ismertetésére: tömény biokémia az egész. (Szerencsére ehhez a témához azért nem teljesen ellenségesen viszonyulok.) Nem csoda, hisz az Ausztriában született, bolgár-amerikai író ezen a területen dolgozott, mint eredményes tudós. (Az első szájon át szedhető fogamzásgátlóhoz járult hozzá. Hivatkozásainak száma matematikus számára nehezen megközelíthető.) A sok finom részlet miatt ez a könyv talán még informatívabb, mint az Ezésez Géza. (Menet közben ezt az el nem avuló könyvecskét is nagyon ajánlom minden ifjú kutatójelöltnek.) Stílusa kevésbé ironikus, viszont mint krimi, meglehetősen izgalmas. Van benne – az öregebbek kedvéért – *Current Contents* és különlenyomat-kérő lap. A CC egy-egy sorozata egy nagy terület összes megjelenőben lévő cikkének címét közölte a szerzők levélcímével együtt, így még a folyóirat megérkezése előtt egy különlenyomat-kérő lap kitöltésével és postázásával el lehetett kérni a cikk egy példányát.
Az is kiderül a könyvből, hogy a fiatalok akkoriban (1989 körül) nem letöltöttek, hanem fénymásoltak – olvasás helyett. (Tudom igazolni: még igazi fotómásolatom is van − magyarul fénykép − például Rényi Alfréd egyes cikkeiről.) Nyugi, van a regényben romantikus szál is. Szóval remek olvasmány, 2 nap alatt felfaltam, ajánlom mindenkinek, aki nem utálja a biokémiát és hozzáfér a könyvhöz.

Tóth János

☐ recenzió

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon: ›

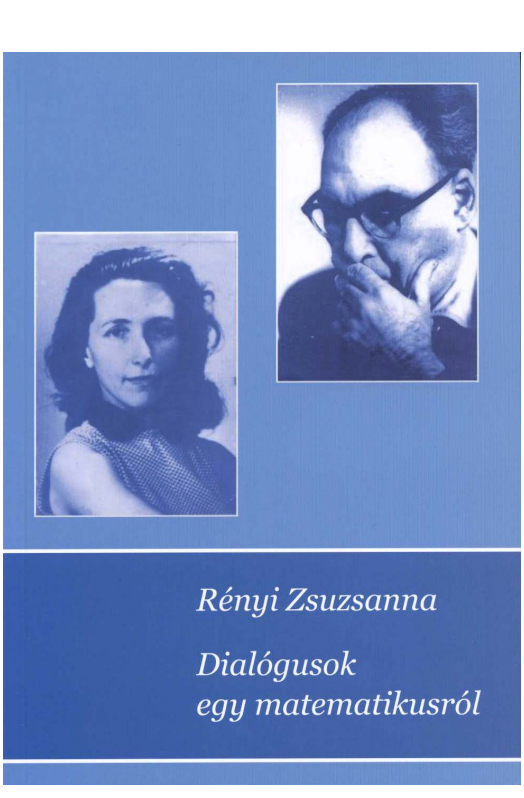
Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

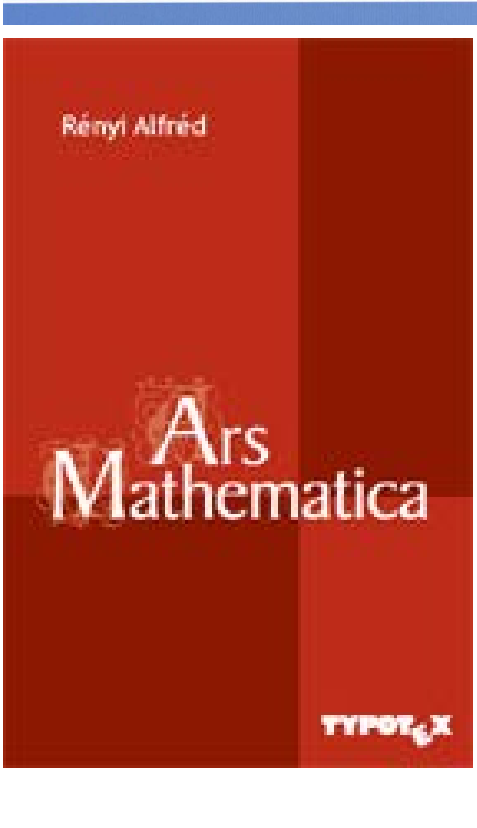
Szász Domokos 2021. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Rényi Zsuzsanna: Ars Mathematica

Egyetemista az ELTE-n voltam 1959 és 1964 között. Akkor még az első két évben matematika-fizika tanárszakra jártunk és a második év után lehetett szakosodni ún. alkalmazott matematikusi szakra. Matematikus szakos éveink több kiváló tanára között is speciális helyet foglaltak el számunkra Rényi Kató és Rényi Alfréd, akikkel baráti kapcsolatba került 15 fős évfolyamunk, így személyesen jómagam is. (Kató évfolyamfelelősünk is volt.)

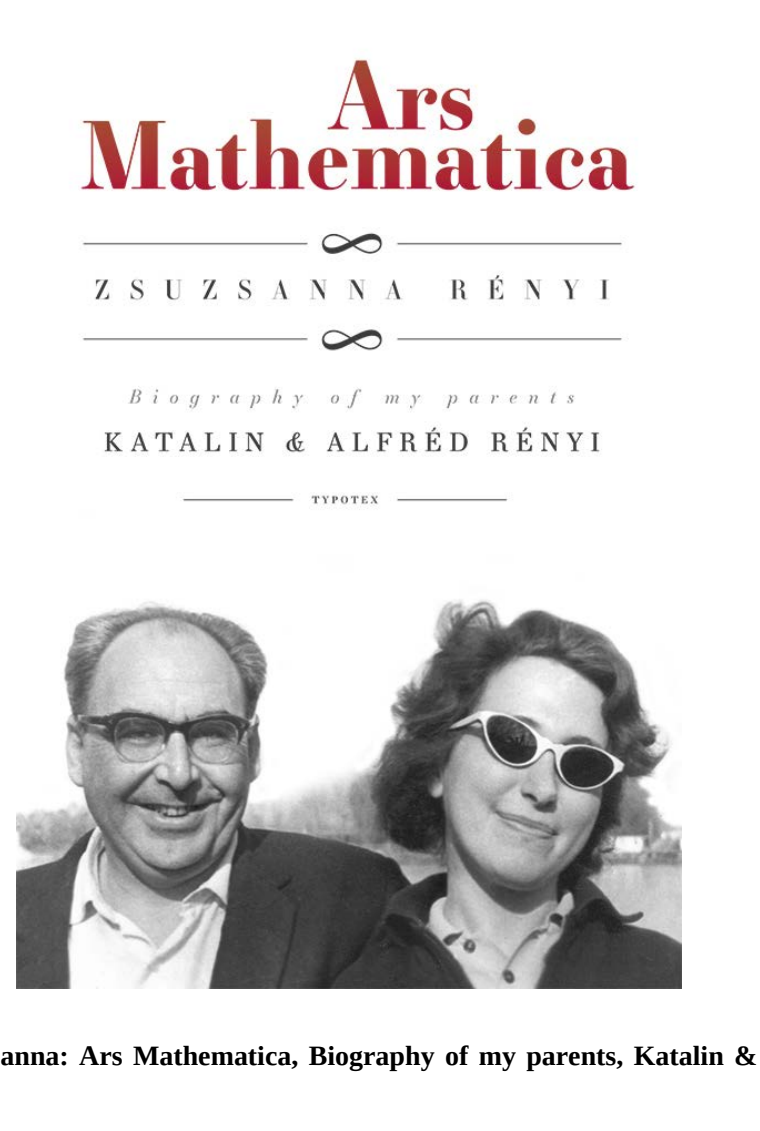
Rényi Kató és Rényi Alfréd egyenként és házaspárként is egészen kivételes személyiségek voltak. Mindketten különleges családokból származtak. Pl. Alfréd nagyapja, Alexander Bernát neves filozófus, esztéta, színikritikus, a Magyar Tudományos Akadémia tagja volt. Kató apja, Schulhof Ödön kiváló reumatológus, balneológus, többek között az Országos Reuma- és Fürdőügyi Intézet tudományos igazgatója volt. Barátaik között neves irodalmárokat, művészeket tudhattak, emlékszem pl. Devecseri Gáborra, Karinthy Ferencre, Somlyó Györgyre.





Mindketten majd egy évet tanultak a háború utáni Leningrádban, Kató diákként, Alfréd aspiránsként. Alfréd témavezetője a kiemelkedő matematikus, Yuri Linnik, a számelmélet ill. az akkor ifjúkorát élő modern valószínűségszámítás nemzetközileg is magasan jegyzett kutatója volt. Hazatérésük után a matematikai élet meghatározó személyiségeivé váltak kutatóként, tanárként, barátként, példaképként matematikusok generációi számára – nemcsak itthon, hanem sokszor külföldön is. Alfréd – meghonosítva idehaza a Leningrádban megismert modern valószínűségszámítást – rendkívül érdekes, eredeti és innovatív, nagyhatású kutató volt. Ezen kívül megalapította a Magyar Tudományos Akadémia – ma is rendkívül sikeres – Matematikai Kutatóintézetét (ez ma már az ő nevét viseli) továbbá az ELTE Valószínűségszámítási Tanszékének vezetőjeként is páratlanul erős iskolát hozott létre. Mindemellett klasszikus műveltségére alapozva nagysikerű platóni dialógusokat írt a matematika természetéről. Lányuk, Rényi Zsuzsanna művében ennek az elbűvölő párnak az élete kel életre – hazai és külföldi – barátokkal, tanítványokkal, kollegákkal folytatott interjúk során. Az olvasó nemcsak betekintést nyer e rendkívüli pár életébe, kapcsolataiba, személyiségébe, hanem a gyűjtemény – a szerző idevágó összefoglalója mellett – plasztikusan illusztrálja a hazai kulturális elit életét és történetét a második világháború előtt, illetve utána.

Szász Domokos



Rényi Zsuzsanna: Ars Mathematica, Biography of my parents, Katalin & Alfréd Rényi.

https://www.typotex.hu/book/11998/renyi_zsuzsanna_ars_mathetamica_biography_of_my_parent_katalin__alfred_renyi

A Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet és a Magyar Tudományos Akadémia a Rényi 100 nemzetközi konferenciát Rényi Alfréd születésének 100. évfordulója tiszteletére (a pandémia miatt 2021 nyaráról elhalasztva) 2022. jún. 20-23 között rendezi meg.

Megjegyezzük, hogy Rényi Zsuzsanna könyve remek nyersanyag volna egy Rényi Alfrédról készítendő monográfiához, hiszen még vannak, akik barátként, közeli munkatársként együtt dolgoztak vele, és matematikai munkásságát hitelesen tudnák ismertetni az utókor számára. (A szerk.)

recenzió Rényi Intézet valószínűségszámítás

Adatkezelés Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Oláh Vera 2021. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Tények és emlékek egy középiskolai matematikatanítási kísérletről

Pálfalvi Józsefné nemrég megjelent új műve (online és könyv formában is megrendelhető a Typotex kiadónál) folytatása a korábbi, Varga Tamás életéről és az 1960-as években elindult komplex matematikatanítási kísérletről szóló tanulmányának.

1973 szeptemberében a Művelődésügyi Minisztérium felkérésére a Bolyai János Matematikai Társulat szervezésében az MTA Elnökségi Közoktatási Bizottság Matematikai Albizottsága elvi irányításával egy matematikatanítási kísérlet indult először öt, majd a következő években fokozatosan bővülő számú középiskolai első osztályban felmenő rendszerben Budapesten és vidéken.

A kísérlet indítását, megvalósítását a kor neves matematikusai közül többen is támogatták, például Rényi Alfréd, Péter Rózsa, vezetője pedig Surányi János és Gádor Endréné volt. A kísérlet célja olyan új középiskolai tananyag kidolgozása volt, amely a Varga Tamás által vezetett Komplex matematikatanítási kísérleten alapuló új általános iskolai tantervre épül, követi és a középiskolára alkalmazza az azokban megfogalmazott alapelveket. Az alapelvekről, módszerekről, illetve a kísérlet tananyagáról szól a 2.1 és 2.2 fejezet.

*A kísérlet tervezői és résztvevői szakítottak a hagyományos felfogással és új, korszerű matematikatanítás megvalósításán dolgoztak. A kísérlet célkitűzéseinek lényegét Surányi János a következőképpen foglalta össze tömören: „A kiindulópont az a felismerés volt, hogy a matematikatanítás alapfeladata bizonyos alapismeretek nyújtásán túl, a matematikai képességek fejlesztése. Ehhez a nyújtandó ismereteket a tanulókkal saját tapasztalataik alapján **felfedeztetni** igyekszünk. Ahhoz, hogy ezt elérhessük, biztosítani akarjuk, hogy a tanulók a tanítási órának tevékeny résztvevői legyenek, hogy mindenki a **saját természetének, munkatempójának** megfelelően haladhasson."*

A kísérlettel egyidejűleg az MTA Didaktikai csoport elindította az „ÚTKÖZBEN középiskolai matematikatanítási kísérlet" című időszakos kiadványt (4. fejezet). A kísérlet tervezői és kivitelezői, illetve a folyóirat szerzői közé tartozott sok lelkes fiatal és idősebb tanár, kutató és neves matematikus, csak néhány név közülük: Surányi János, Gádor Endréné, Péter Rózsa, Pálmay Lóránt, Császár Ákos, Laczkovich Miklós, Halmos Mária, vagy éppen Pálfalvi Józsefné. Olyan matematikatanítást akartak megvalósítani, amely képessé teszi a diákokat arra, hogy megértsék és elismerjék a matematika hasznosságát, szépségét; jelentőségét a gondolkodásban és a mindennapok gyakorlatában. Ennek alapján képesek legyenek felnőtt korukban a matematikát a saját életük különböző területeinek megfelelően alkalmazni.

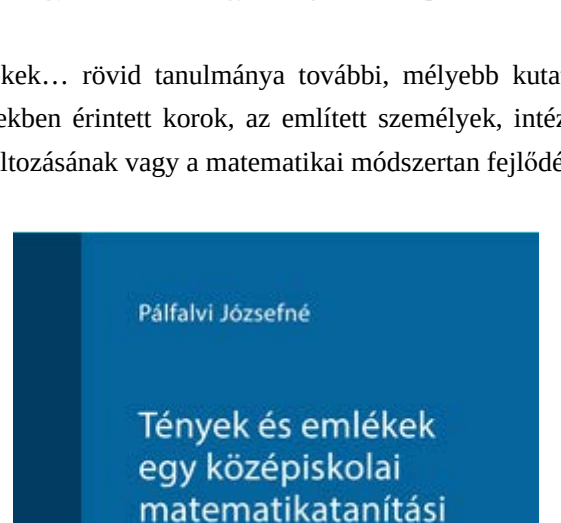
A komplex matematikatanításra épülő középiskolai tanítási kísérlet anyagára támaszkodó Munkatankönyvnek (2.3, 2.4, 2.5 fejezet), amelyet választható tankönyvként használhattak 1980 és 90 között, az volt a célja, hogy elősegítse a diákok önálló munkáját, ösztönözzön és eszközül szolgáljon a tanulói felfedezésekhez és segítse a tanárt az órára való felkészülésben. (A Munkatankönyvben a felfedeztető feladatsorokban a feltett kérdések, megoldandó feladatok után üres helyek voltak, ahova a tanulók beírhatták a válaszukat, megoldásaikat.)

A kísérlet második szakaszában már a kísérleti tanterv különböző változatait dolgozták ki, érdemes összehasonlítani ezeket az akkori hivatalos tantervekkel (3.1, 3.2).

Az 1970-es évek második felében kapcsolódott be a középiskolai kísérlet munkájába Pósa Lajos. Több osztályban is vállalt kísérleti tanítást, és tapasztalatai alapján lényegében minden témához készített új anyagokat, nagyszerű feladatsorokkal és az ezekhez kapcsolódó tanári segédletekkel.

Számomra a legérdekesebbek a 3.3 fejezet példái a középiskolai kísérlet feladataiból (többek között Pósa Lajos néhány feladata), kár, hogy nincs több belőlük. Tanároknak pedig nagyon ajánlom a Függeléket, ahol régi érettségi feladatsorokat találhatnak a korabeli tantervek illusztrálására. (Meglepő, hogy az 1973-as érettségi legnehezebb feladata hogyan rímel egy 1893-ban megjelent geometria példára!)

A Tények és emlékek… rövid tanulmánya további, mélyebb kutatásokra inspirálhat mind az Előzményekben érintett korok, az említett személyek, intézmények területén, mind a tantervek változásának vagy a matematikai módszertan fejlődésének témájában.


Pálfalvi Józsefné
Tények és emlékek egy középiskolai matematikatanítási kísérletről
Q
M
N
P
R
S
TYPOTEX

Pálfalvi Józsefné: Tények és emlékek egy középiskolai matematikatanítási kísérletről, Typotext kiadó, 2021.

https://www.interkonyv.hu/konyvek/palfalvi-jozsefne-tenyek-es-emlekek-egy-kozepiskolai-matematikatanitasi-kiserletrol/

matematikatörténet recenzió matematikatanítás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

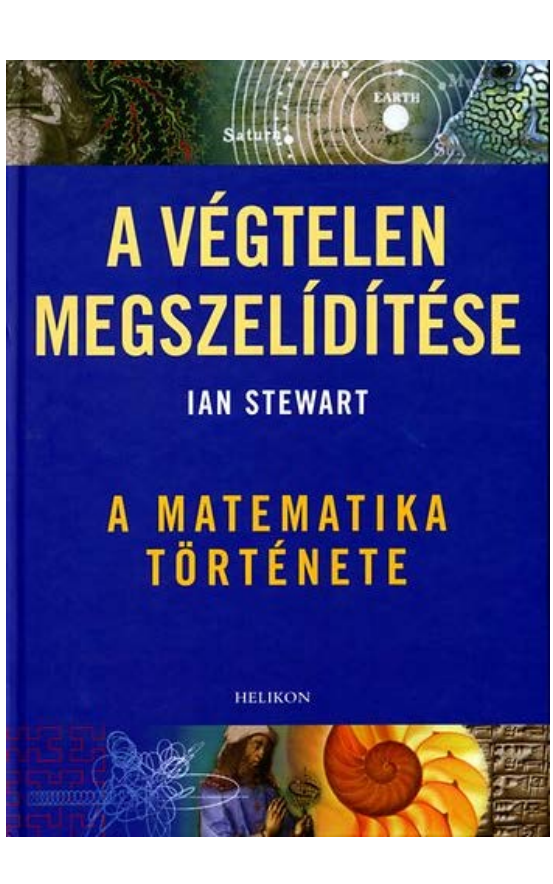
Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Tóth János 2021. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A hátsó polcról – Ian Stewart: A végtelen megszelidítése

Ian Stewart: A végtelen megszelidítése. A matematika története, Helikon Kft., 2008, 280 oldal, 4990 Ft.



Ilyen könyvet nem vesz az ember, az ilyet kapja: ajándékba, jutalomként. Súlyos, fényes, illusztrációkkal ékes, a Helikon Kiadó legszebb hagyományait tükrözi, és a számos matematikai könyvet gondozó szerkesztő, Gerner József munkáját dicséri. Ja, és a Gyomai Kner Nyomdában nyomtatták. Ehhez képest nem is drága. (A Libri 3790 Ft-ért kínálja, úgy persze könnyű, hogy nincs belőle példánya.)

Komolyabbra fordítva a szót: Ian Stewart brit matematikus a magyar olvasó számára is ismert népszerűsítője a matematikának. (Magyarul olvasható tőle: *A természet számai. A matematikai képzelet irreális realitása* és *A matematika problémái*.)

Az ismertetendő könyv azt a reménytelen feladatot tűzte ki, hogy megismertesse a matematika történetét – kivel is? Mondjuk érdeklődő középiskolásokkal, az egyetem elején járókkal és mindenevő örökifjakkal. Magyar nyelven elérhető néhány matematikatörténeti munka, lásd például `https://ematlap.hu/konyvespolc-2021-9/1121-toth-janos-roka-sandor-zenon-figyelmeztetese` irodalomjegyzékét. De mik ennek a könyvnek a specialitásai?

A könyv 20 fejezetre oszlik. Remek ötlet, hogy a 20 fejezetből álló könyv minden fejezetének szerkezete lényegében azonos. Nézzük meg ezt egy példán. A 10. fejezet címe: **Lehetetlen értékek. Lehet-e negatív számnak is négyzetgyöke?** Miután szerzőnk belemelegedik a témába, közbeiktat egy keretes írást, amit akár nevezhetünk inzertnek vagy buboréknak is: *Ők mire használták a komplex számokat?* Egy másik beszúrásban a témakör egy jelentős kutatójának (itt épp Augustin-Louis Cauchynak) az *életrajza* szerepel. A fejezet vége felé pedig szó esik arról is, hogy *Mi mire használjuk a komplex számokat?*

Az életrajzok örvendetesen nagy része szól matematikus nőkről. Megismerkedhetünk a következők életrajzával és munkásságával: Alexandriai Hüpatia, Marie-Sophie Germain, Szofja Vasziljevna Kovalovszkaja, Amalie Emmy Noether, Augusta Ada King (Lady Lovelace) és Mary Lucy Cartwright.

Maguk a témakörök pedig úgy vannak megválasztva, hogy egyrészt a szöveg legnagyobb részét egy érdeklődő középiskolás képes legyen megérteni, másrészt a mai modern matematikáról is essék szó. Mindkét állításomat igyekszem alátámasztani.

Az egyenletek megoldásának tárgyalásához a szimmetriákról kell beszélni. *A másodfokú egyenlet szimmetriái* című buborék megmutatja, hogy hogyan lehet a dolog lényegé(nek elejé)ről egyszerű példán érthetően beszélni.

Topológia, nagy Fermat-tétel – ezekről mind szó esik, és nem mértéktelen felületességgel. Nem maradnak ki a divatos témák sem: kódolás (mégis derék dolog a számelmélet), káosz, katasztrófaelmélet, fraktálok.

Természetesen számos esetben szükségszerű a pontatlan, elnagyolt fogalmazás, ez az ismeretterjesztés alapvető problémája. Ámde vigyázat, jönnek a valódi kifogások! Olyan hibákat sorolok, amelyek elkerülhetőek lettek volna.

Nem lehet Körmendy Ágnes fordításának minőségét egyetlen szóban jellemezni. Folyamatosan olvasva a szöveget korrekt magyar nyelven fogalmazott, szakmailag értelmes mondatokat látunk. Viszont gyakorlatilag minden oldalon lehet találni egy-egy elképesztő matematikai hibát.

Néhány fontosabb példa következik. Elgépelés a könyvben kevés van, csak azokat említem, amelyek matematikailag fontosak.

Oldalszám	Hibás	Javasolt
42	a számlálót	a nevezőt
55	az x jelöli	x jelöli
67	$6x, 4x^2, 5x^3$	x, x^2, x^3, x^4
71	hagyományos θ	hagyományos α
75	10^{15} sugarú kör szinuszait számolta ki	??
76	az 1000 logaritmusa tízes számrendszerben	1000 tízes alapú logaritmusa
77	57,681 x 29,443	57 681 x 29 443
84, 226	multidimenzionális	többdimenziós
89	pozitív	nemnegatív
104	$y \equiv xa$	$y \equiv x^a$
104	lesz a h határértéke	lesz h határértéke
108	-szel jelölünk	jelöl
109	felszínének	területének
120	$g = m\frac{d^2y}{dt^2}$	$mg = m\frac{d^2y}{dt^2}$
120	$y = \frac{gt^2}{2m}y + at + b$	$y = \frac{gt^2}{2} + at + b$
125	egyenletekkel	függvényekkel
131	merőlegesek	ortogonálisak
142	$\frac{1/2}{x+i} + \frac{1/2}{x-i}$	$\left(\frac{1/2}{x+i} + \frac{1/2}{x-i}\right)\frac{1}{x}$
142	deriválni	integrálni
149	pozitív	nemnegatív
185	pigmentté alakul	??
186	megoldható	feloldható
187	a nemeuklidészi geometria egy megkülönböztetett kúpszelettel rendelkező projektív felület	??
192	dinamikus	dinamikai
192	Lie csoport	Lie-csoport
195	egy testtel	egy test elemeivel
196	1888	1988
197	felírva így néz ki	Elemeinek száma
206	felszín	felület
215	genetikai biokémia	molekuláris genetika
215	az élet fonala is ezen múlik	??
226	projekt	vetület
258	kvadrillió	10^{15} („billiárd”)
259	„számító”	„computer” vagy „computor”

A *További olvasnivalók* listája is fordítandó, azaz érdemes megadni [1] és [2] magyarul megjelent változatát.

Matematikához kevéssé szokott kiadók számára ez a könyv is figyelmeztetésül szolgálhat: Szakmai lektorálás nélkül matematikai művet kiadni **életveszélyes**. Jelen esetben a szakmai ellenőr – jóindulatú feltételezéssel élve – nem kapott elegendő időt... Láttunk már arra példát, hogy bölcsészként is lehet matematikai tárgyú könyvet hibátlanul (nemcsak élvezetesen és olvashatóan) fordítani: Denis Guedj A papagájtétel (Typotex, Budapest, 2016) című művét fordította Király Katalin, volt magyar szakos középiskolai tanár, főiskolai oktató, az Université Lyon III magyar nyelvi lektora.

A (gazdasági) körülmények figyelmen kívül hagyásával mindenképpen azt javaslom, hogy legyen a könyvnek második, javított (matematikus által lektorált) kiadása. Ehhez a saját – további – megjegyzéseimet szívesen bocsájtanám a lektor rendelkezésére. Ugyan ismeretterjesztő műről van szó (vagy éppen azért!) nem ártana egy tárgymutató a könyv végére. Sok matematikai verseny résztvevője örülne, ha a megérdemelt díj mellé ráadásként ezt kapná.

A lektorálásról – egy kis kitérő morgás

Aki rendszeresen publikál, tudja, hogy egy jobb folyóiratnál a lektorok többnyire meglehetősen alapos munkát végeznek. Figyelmeztetnek a szakmai hibákra és hiányosságokra, megadnak hiányzó hivatkozásokat, kijavítják a formai következetlenségeket stb.

Ezzel szemben a szakkönyvek lektorálása már alig létezik. Saját tapasztalataim a következők: minden egyes könyvemnél szinte rimánkodnom kellett a (magyar vagy külföldi, például Springer, ELTE stb.) kiadónak, hogy legyen a könyvnek lektora, sőt a lektorokat nekem kellett szállítanom, továbbá elérnem, hogy munkájukért némi (többnyire sajnos jelentéktelen) díjazásban (könyvkupon, ilyesmik...) részesüljenek. Hálátlan feladat...

Irodalomjegyzék

[1] Cardano, G.: *Életem*, Gondolat Kiadói Kör, Budapest, 2013. Ford. Magyar László András.

[2] Euklidész: *Elemek*, Gondolat, Budapest, 1983. Ford. Mayer Gyula.

Tóth János

matematikatörténet recenzió

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 22. szám 2021. december Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

100

Cím	Szerző
Matematikus sikerek a Lendület pályázaton	Írta: Szerkesztő
Szeretettel várjuk a Budapest Graduate Seminaron!	Írta: Földvári Viktória
Romanian Master of Mathematics 2021	Írta: Lenger Dániel, Borbényi Márton
Az Erdős Központ	Írta: Szerkesztő
Csaba Béla Fulkerson-díjas!	Írta: Pluhár András
A Bolyai Társulat Prima Primissima díjas!	Írta: Szerkesztő
Heppes Aladár (1933–2021)	Írta: Oláh Vera
Simon László (1940–2021)	Írta: Besenyei Ádám, Faragó István, Komornik Vilmos
Hungarikum – Simonovits Miklóssal beszélgetett Baló György	Írta: Szerkesztő
Járványmatek középiskolásoknak – 2. rész	Írta: Volf Annamária
Találkoztunk a KöMaL Ifjúsági Ankétján!	Írta: Oláh Vera
Invariánsok, állapotfüggvények	Írta: Nagy Zoltán Lóránt
33. Varga Tamás Módszertani Napok	Írta: Csapodi Csaba
Hitel, törlesztőrészlet, járadékszámítás	Írta: Magyar Zsolt
Rátz tanár úr utódai 2021-ben	Írta: Szerkesztő
A hátsó polcról – Ian Stewart: A végtelen megszelidítése	Írta: Tóth János
Tények és emlékek egy középiskolai matematikatanítási kísérletről	Írta: Oláh Vera
Rényi Zsuzsanna: Ars Mathematica	Írta: Szász Domokos
Cantor és Bourbaki	Írta: Tóth János
A Gromov–Hausdorff-távolság	Írta: Titkos Tamás
Antirealizmus a matematikában	Írta: Csáji Balázs Csanád
A Bolyai János Matematikai Társulat 130 éve	Írta: Császár Ákos, Pálfy Péter Pál
Modellezés Wolfram Mathematica segítségével	Írta: Karsai János
Alaptudományok a fenntartható fejlődésért 2022	Írta: Szerkesztő